



HAL
open science

Géodésie au XIX^{ème} siècle. De l'hégémonie française à l'hégémonie allemande. Regards belges. Compensation et méthode des moindres carrés.

Marie-Françoise Jozeau

► **To cite this version:**

Marie-Françoise Jozeau. Géodésie au XIX^{ème} siècle. De l'hégémonie française à l'hégémonie allemande. Regards belges. Compensation et méthode des moindres carrés.. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Univeristé Paris Diderot Paris 7, 1997. Français. NNT: . tel-01252747

HAL Id: tel-01252747

<https://theses.hal.science/tel-01252747>

Submitted on 8 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Denis Diderot Paris VII

GEODESIE
AU XIX^{ème} SIECLE :
De l'hégémonie française
à l'hégémonie allemande.

Regards belges

Compensation
et
Méthode des moindres carrés

TOME I

Marie-Françoise JOZEAU

Thèse de Doctorat Nouvelle formule
Spécialité: Epistémologie et Histoire des Sciences

sous la direction de Pierre CREPEL

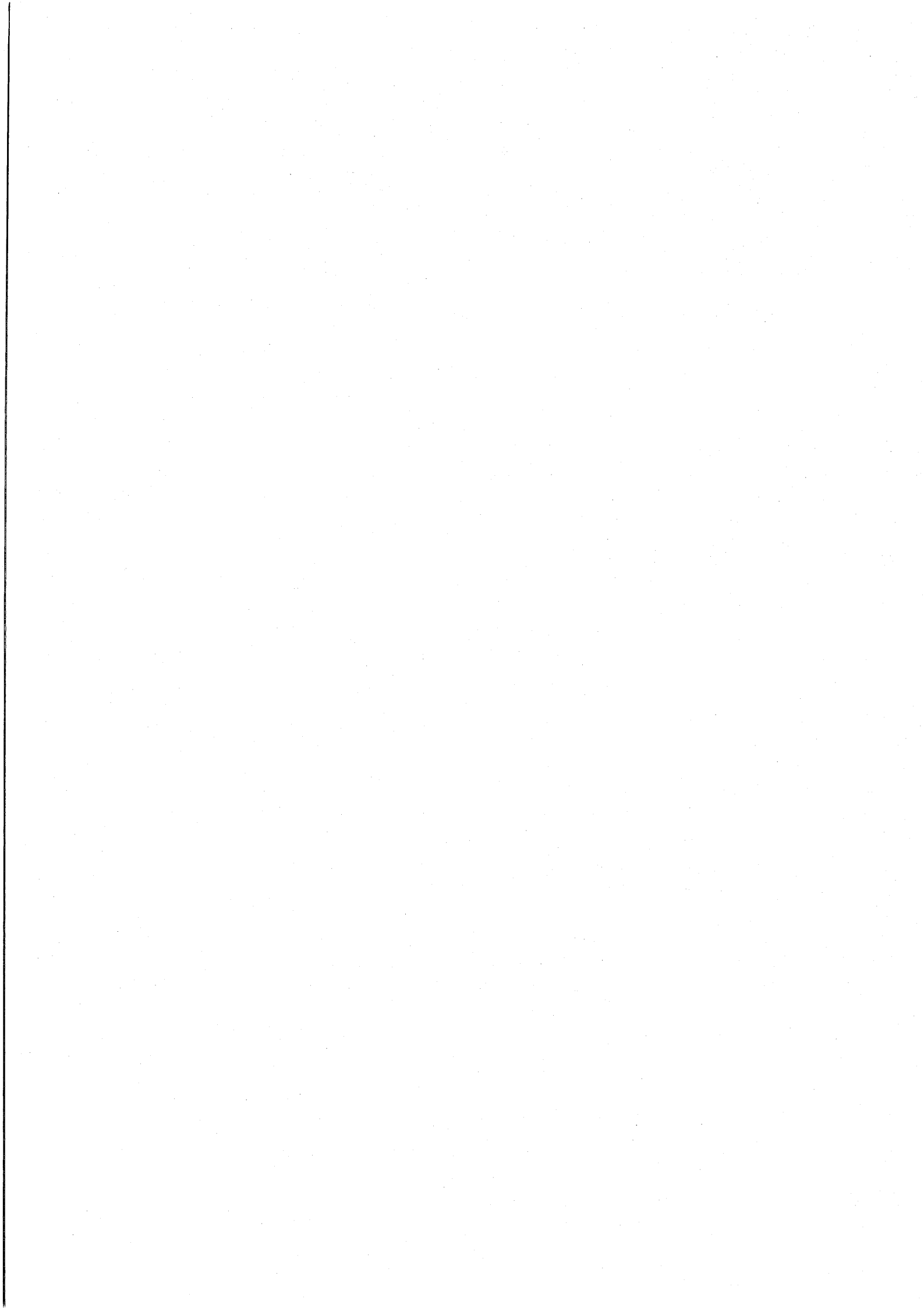
soutenue le 18 Juin 1997

Rapporteurs:

Bernard BRU, Professeur, Université Paris V
Jean DUCHON, Chargé de Recherche, CNRS
Stephen STIGLER, Professeur, Université de Chicago

Membres du Jury:

Mireille BOUGEARD, Professeur, Université Lyon I
Bernard BRU, Professeur, Université Paris V
Pierre CREPEL, Chargé de Recherche, CNRS
Jean-Jacques DROESBEKE, Professeur, Université Libre de Bruxelles
Christian HOUZEL, Professeur, IUFM, Université Paris VII
Jean-Luc VERLEY, Maître de Conférence, Université Paris VII
Pascal WILLIS, Astronome, Institut Géographique National



Université Denis Diderot Paris VII

GEODESIE
AU XIX^{ème} SIECLE :
De l'hégémonie française
à l'hégémonie allemande.

Regards belges

Compensation
et
Méthode des moindres carrés

TOME I

Marie-Françoise JOZEAU

Thèse de Doctorat Nouvelle formule
Spécialité: Epistémologie et Histoire des Sciences

sous la direction de Pierre CREPEL

soutenue le 18 Juin 1997

Rapporteurs:

Bernard BRU, Professeur, Université Paris V
Jean DUCHON, Chargé de Recherche, CNRS
Stephen STIGLER, Professeur, Université de Chicago

Membres du Jury:

Mireille BOUGEARD, Professeur, Université Lyon I
Bernard BRU, Professeur, Université Paris V
Pierre CREPEL, Chargé de Recherche, CNRS
Jean-Jacques DROESBEKE, Professeur, Université Libre de Bruxelles
Christian HOUZEL, Professeur, IUFM, Université Paris VII
Jean-Luc VERLEY, Maître de Conférence, Université Paris VII
Pascal WILLIS, Astronome, Institut Géographique National

"La grandeur de la science exige que l'on saisisse clairement la nature de l'inégalité"

Gauss à Olbers 1-3-1827. Werke IX p.378
Traduction de S. Hertz

"La science n'est localisée dans aucun pays et dans aucune personne"

Ferrero, 17 Avril 1877, Compte rendu de la 5^{ème} Conférence Géodésique Internationale, Stuttgart, 1778, p. 221

"J'ai ressenti douloureusement la grande perte de Bessel, mon ami et professeur. Sa devise était:

"Nur ernstlich angegriffen, dann finden sich die Wege die zum Ziele führen von selbst"

Baeyer, *Die Küstenvermessung*, introduction, 1849

"La Belgique est le premier pays dans lequel les progrès que la géodésie doit aux grands travaux de Gauss et de Bessel ont été reconnus et mis en pratique."

Baeyer, Compte rendu de la Commission permanente de l'Association Géodésique Internationale, Bruxelles, 1876

Je tiens tout d'abord à remercier Pierre Crépel, mon directeur de recherche, pour la confiance qu'il m'a accordée. Sans sa rigueur et son exigence scientifiques, ses compétences, son attention vigilante et sa disponibilité, ce travail n'aurait pas été ce qu'il est.

J'exprime ma reconnaissance tout particulièrement à Jean-Luc Verley, avec qui je partage depuis de longues années la passion pour la recherche en Histoire des Mathématiques.

Je remercie le groupe M : A. T. H. de l'IREM Paris VII, ainsi que tous les membres de la commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques pour les échanges fructueux et pour leur enthousiasme.

Cette thèse doit beaucoup à l'équipe du REHSEIS, pour les savoirs et compétences qu'ils m'ont transmis, ainsi qu'à Irène Passeron pour ses conseils pertinents et constructifs qui m'ont été d'une aide précieuse.

Je remercie vivement Bernard Bru pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse, dont il a accepté d'être rapporteur ainsi que Jean Duchon et Stephen Stigler.

Je remercie Mireille Bougeard, Bernard Bru, Pierre Crépel, Jean-Jacques Drosbeke, Christian Houzel, Jean-Luc Verley, Pascal Willis qui m'ont fait l'honneur de participer à ce Jury.

Les semaines passées en Belgique m'ont donné l'occasion de rencontrer Mr. De Paepe, secrétaire de l'Académie des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts et Mme Claire Lemoine-Isabeau, chargée de mission au Musée de l'Armée de Bruxelles, qui ont agréablement facilité mes recherches.

Mes rencontres et mes correspondances avec M. d'Hollander, M. Dufour, M. Levallois, Mme Debarbat, M. Jongmans ont été riches de conseils éclairés et m'ont ouvert de nouvelles pistes de recherche.

Merci également à Jérôme Segal, Jörchen Sacher, Gert Schubring, Stéphane Descombes pour l'envoi de textes allemands.

Ma reconnaissance va également à tous mes collègues du Lycée Gérard de Nerval qui ont bien voulu consacrer quelques heures à relire mon travail et tout particulièrement Isabelle Lacomblez pour les traductions des textes allemands.

La réalisation de cette thèse doit aussi beaucoup aux structures de l'IREM Paris 7 et aux conditions de travail rendues possibles par R. Douady. Je remercie Martine Lamy, Odette Dieraert et Nadine Locufier pour leur efficacité et leur gentillesse.

Je remercie également toutes les personnes qui ont contribué, d'une façon ou d'une autre, à l'élaboration de ce travail.

Je remercie tous mes amis pour leur soutien chaleureux.

Enfin, toutes mes pensées vont à mes filles, à mes petits-enfants, à ma mère et à mon beau-père qui ont su s'adapter à mon manque de disponibilité. Une pensée particulière va à François pour sa patience.

Abréviations

A.G.I	Association Géodésique Internationale
A.R.B	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.
Ast.Nach	Astronomische Nachrichten, publié par Schumacher
A.S	Académie des Sciences de Paris
B.R	Bibliothèque Royale Albert 1 ^{er} , Bruxelles
C.R.A.S	Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris
D.G-B	Dépôt de la Guerre, Bruxelles
D.G-F	Dépôt de la Guerre, Paris
E.M	Ecole Militaire, Bruxelles
E.P	Ecole polytechnique, Paris
I.G.N-B	Institut Géographique National, Bruxelles
I.G.N-F	Institut Géographique National, Paris
M.M.C	Méthode des moindres carrés
M.R.A	Musée Royal de l'Armée, Bruxelles
S.H.A.T	Service historique de l'Armée de Terre, Vincennes

TABLE DES MATIERES

TABLE DES ANNEXES.....	9
INTRODUCTION.....	12
Plan de la thèse.....	15
Géodésie, topographie, cartographie.....	18
Délimitation du sujet.....	21
Vers un réseau européen. Un problème central: La compensation....	23
<u>PARTIE A Un tournant dans la géodésie en Europe au XIX^{ème} siècle</u>	
A.I La tradition française.....	27
1 Rappel des travaux exécutés avant le milieu du XIX^{ème} siècle.	27
- L'Abbé Picard.....	28
- Les Cassini.....	29
- Les grandes expéditions.....	30
- Delambre et Méchain.....	32
- Les ingénieurs géographes.....	34
- Les travaux en France de 1815 à 1865.....	36
2 Les méthodes utilisées dans la première moitié du XIX^{ème} siècle	40
- Les instruments et les méthodes d'observations.....	40
- Le traitement des données.....	41
3 L'enseignement jusqu'en 1850.....	44
- A l'Université.....	44
- A l'Ecole polytechnique.....	45
- A l'Ecole de Metz.....	48
A.II La tradition "allemande".....	51
1 Présentation générale.....	54
2 C.F. Gauss (1777-1855).....	57
- Le contexte.....	57
- Gauss et la géodésie: des liens très précoces.....	58
- Théorie et pratique.....	58
- Gauss et sa "méthode".....	59
- La diffusion de la méthode de Gauss.....	59
- Le jugement de Galle.....	60

3	F.G.W. Struve (1793-1864)	61
	- Eléments biographiques.....	61
	- Ses travaux et leur enjeu.....	62
	- Les méthodes utilisées.....	62
	* Principes généraux.....	65
	* Poids d'un triangle.....	65
	* Les instruments.....	67
	* Au sujet des méthodes d'observations: la réitération engendre la méthode des directions.....	68
	* Traitement des données.....	75
	* Comment mener un calcul de compensation?.....	78
	* Quelles valeurs "primitives" de direction choisir?.....	78
	* Au sujet de l'exactitude des angles.....	79
4	F.G. Bessel (1784-1846)	80
	- Eléments biographiques.....	81
	- Quel est son projet?.....	81
	- Bref résumé de ses apports.....	82
	* Dans les instruments.....	82
	* Dans les méthodes.....	83
	* Ses résultats.....	83
5	J.J. Baeyer (1794-1885)	84
A.III	La Belgique	86
1	Les premiers travaux	87
	- Avant 1815.....	87
	- J. Erzey	90
	- P. Vandermaelen (1795-1869).....	91
2	Des personnages clés	91
	- A. Quetelet (1796-1874).....	92
	- G.A. Nerenburger (1804-1869).....	94
	* Eléments biographiques.....	94
	* Ses fonctions.....	96
	* Ses travaux.....	97
	- A. Meyer (1801-1857).....	98
	* Eléments biographiques.....	98
	* Meyer et la géodésie.....	100
	* Les oeuvres probabilistes de Meyer.....	106
	- J. Liagre (1815-1891).....	110
	* Eléments biographiques.....	110
	* Ses travaux sur la géodésie et les probabilités.....	112
3	La Belgique: lieu et période privilégiés	115
	- Le décor et les acteurs.....	115
	- Le choix belge.....	118
	- Le dénouement	127
4	Le devenir des travaux belges	129

PARTIE B Les méthodes probabilistes s'introduisent en géodésie: Exposé de la méthode allemande selon le traité de Liagre

B.I	Vocabulaire.....	135
1	Mise en place de la "Théorie des erreurs".....	135
	- Erreur.....	135
	- Loi et courbe de possibilité.....	136
2	Signification de quelques termes.....	137
	- Moyenne.....	137
	- Le paramètre h.....	139
	- La valeur de x tel que $P=1/2$	139
	- La valeur qui deviendra l'écart-type.....	140
3	Notion de poids d'une valeur moyenne.....	142
	- En France.....	142
	- En Allemagne.....	143
	- Comparaison.....	143
B.II	La méthode des moindres carrés (MMC).....	148
1	Quelques rappels.....	148
	- Remarques historiques.....	148
	- Sur les liens entre la MMC et la géodésie.....	152
2	Sur la diffusion de la MMC.....	153
	- Une diffusion plus progressive qu'on ne croit.....	153
	- Un mot sur les traductions de Gauss en français.....	157
	- Quelques recommandations de Liagre.....	159
	* De l'ordre et de la division dans le travail.....	159
	* Le choix de la table de logarithmes.....	161
	* La technique au secours du calculateur.....	163
3	Sur quelques techniques d'application de la MMC.....	164
	- Observations directes, indirectes, conditionnelles.....	164
	- Comment simplifier les calculs?.....	167
	* Calcul de l'erreur probable.....	167
	* Résolution des systèmes linéaires.....	168
4	Le choix des instruments.....	171
	- Le cercle répétiteur.....	173
	* Description.....	173
	* Quel est l'avantage d'un tel procédé?.....	174
	- Le cercle réitérateur.....	176
	* Description.....	176
	* Comparaison entre la répétition et la réitération.....	177

B.III Les enjeux des compensations.....	182
1 Généralités sur les compensations.....	182
2 Fermeture d'un triangle. Théorème de Legendre.....	186
3 Tour d'horizon	191
- En France.....	191
- En Allemagne.....	192
- Fermeture d'un tour d'horizon.....	193
* Chez Puissant.....	193
* Chez Liagre.....	196
4 Compensation d'un réseau.....	197
5 Comment raccorder des chaînes ou des réseaux?.....	207
Conclusion de la partie B.....	216

EPILOGUE : PARTIE C La France face à ces nouveaux enjeux. Diffusion des méthodes allemandes en France

C.I Réception des nouvelles méthodes en France.....	219
1 Les ingénieurs géographes.....	220
2 A l'Ecole polytechnique.....	223
C.II Quelques réticences françaises face à la méthode des moindres carrés.....	225
C.III L'entrée dans l'Association Géodésique Internationale (AGI).....	228
CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	234
BIBLIOGRAPHIE	240
NOTICES BIOGRAPHIQUES.....	259
GLOSSAIRE	272

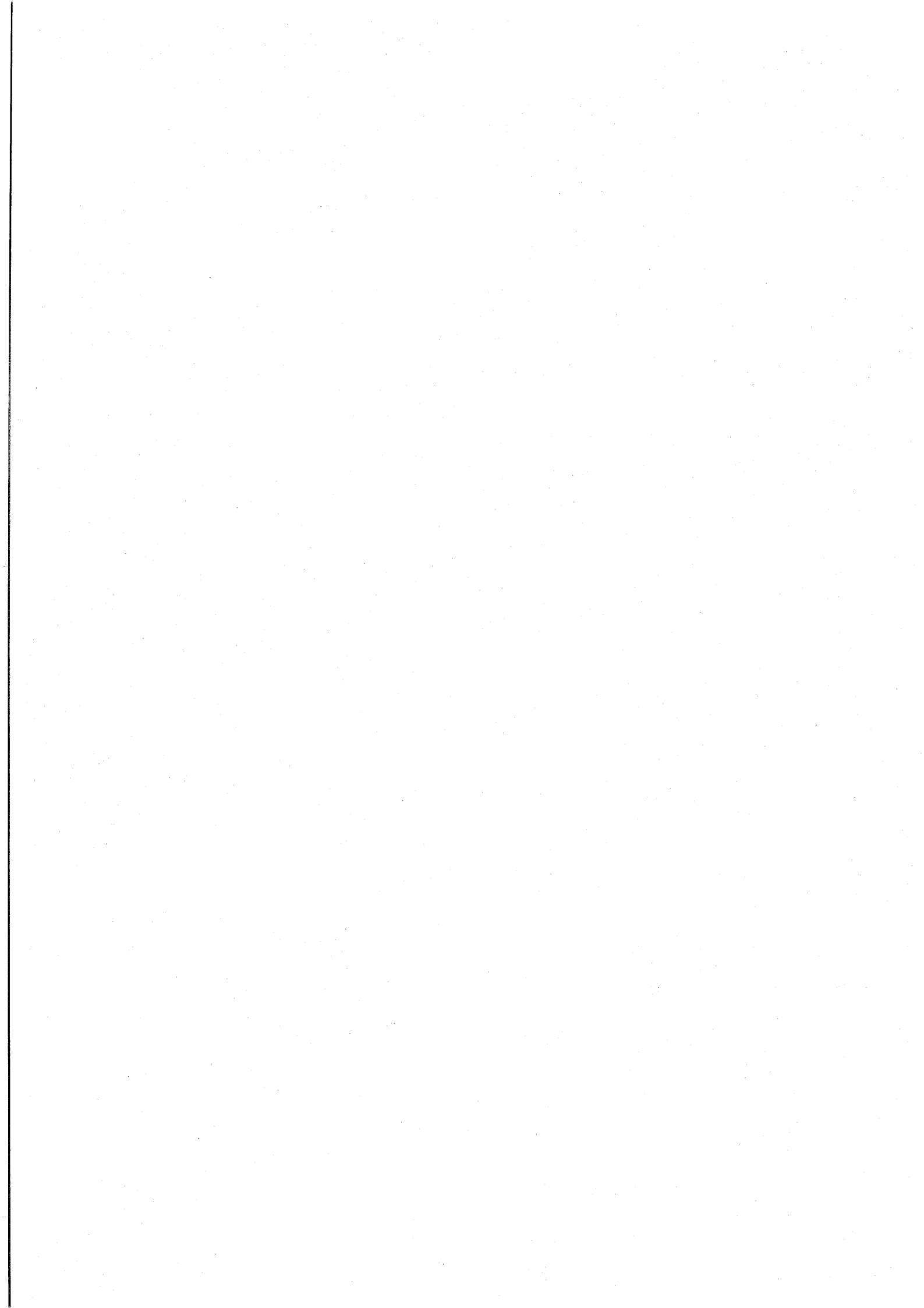
TABLE DES ANNEXES

(Tome II)

Annexe 1	Triangulation.....	3
Annexe 2	Instruments de géodésie.....	8
	Cercle répéteur, gravure	
	Cercle réitérateur, gravure	
Annexe 3	Mesure des angles; méthodes d'observation	14
Annexe 4	Tableau servant à consigner les observations et à exécuter les calculs, suivant l'école française.....	19
Annexe 5	Au sujet d'une lettre de Gauss à Bertrand.....	24
Annexe 6	Le point sur les triangulations au XIX ^{ème} siècle en Europe, avec carte.....	27
Annexe 7	Théorème de Legendre	32
Annexe 8	Tableau des qualités moyennes dans les triangles des 7 régions Struve.....	39
Annexe 9	Réduction au centre.....	41
Annexe 10	Calcul de compensation de Struve en partant de deux hypothèses différentes.....	47
Annexe 11	Traduction de l'introduction du chapitre 3 de <i>Gradmessung in Ostpreussen</i> de Bessel, Berlin, 1838.....	51
Annexe 12	Traduction de l'introduction de <i>Gradmessung in Ostpreussen</i> de Bessel, Berlin, 1838.....	54
Annexe 13	Traduction de l'introduction de <i>Die Küstenvermessung</i> de Baeyer, Berlin, 1849.....	62
Annexe 14	Liste des publications de Nerenburger.....	71

Annexe 15	Correspondance de Nerenburger	
	Dossier 1890 de l'ARB	74
Annexe 16	Liste des oeuvres de Meyer.....	87
Annexe 17	Fonds Jolly: lettres de Renoz;	
	calcul géodésique; manuscrits de Meyer	92
Annexe 18	Le Moniteur belge du 14 juin 1847.....	99
Annexe 19	Thèse de L. Bouvier: Table des matières, introduction, § 35.....	108
Annexe 20	Mémoire "non conservé" de Meyer, Dossier 7181 de l'ARB.....	115
Annexe 21	Table des matières d'un cours de géodésie dispensé au Dépôt de la Guerre belge après 1846.....	118
Annexe 22	Lettre de Baeyer à Liagre; Fonds Liagre de l'ARB, liasse 8834.....	122
Annexe 23	Liste des sociétés dont Liagre est membre.....	126
Annexe 24	Oeuvres de Liagre.....	128
Annexe 25	Listes d'observatoires européens et de leurs directeurs de 1800 à 1860.....	131
Annexe 26	Séance du 1er Août 1846 de l'Académie Royale de Bruxelles:	
	Rapport de Meyer.....	133
Annexe 27	Rapport de Meyer; Dossier 4990 de l'ARB.....	138
Annexe 28	Tableau de la marche des opérations géodésiques en Belgique:	
	chronologie et cartes.....	165
Annexe 29	Table des matières de :	
	<i>Calcul des probabilités et théorie des erreurs</i> de Liagre.....	171
Annexe 30	Mémoire de Liagre: <i>Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations</i>	178
Annexe 31	Notations introduites par Gauss.....	191
Annexe 32	Exemples de tableaux intervenant dans les compensations.....	195
Annexe 33	<i>Die Küstenvermessung</i> de Baeyer, Berlin, 1849, § 97.....	206

Annexe 34	Exemples donnés par Liagre: MMC et géodésie.....	212
Annexe 35	<i>Die Küstenvermessung</i> de Baeyer, Berlin, 1849, § 97.....	217
Annexe 36	Lettre de Gauss à Gerling, 26 Décembre 1823.....	220
Annexe 37	Extrait de Gauss: Supplément à la théorie de la combinaison des observations § 8, 9, 10; 1826.....	224
Annexe 38	Exemples de Gauss relatifs à la géodésie.....	228
Annexe 39	Cours de Faye à l'Ecole polytechnique (1855-56): Théorie des erreurs.....	236
Annexe 40	"Rapport sur la triangulation européenne en longitude sous la latitude de 52°" et Lettre de Baeyer à Quetelet; Dossier 275 de l'ARB.....	251
Annexe 41	Rapports annuels sur les travaux de la Commission centrale de l'Europäische Gradmessung.....	262
Annexe 42	"Géodésie" dans les CRAS Année 1863.....	265
Annexe 43	Lettre de Le Verrier à Michel Chevalier.....	269
Annexe 44	Dossier 76 in <i>Correspondance de A. Quetelet</i>	271
Annexe 45	Correspondance avec Nerenburger (1852-1869) ARB Fonds Liagre. 8835	274
Annexe 46	<i>Mémorial du Dépôt de la Guerre</i>	281



INTRODUCTION

Si l'on regarde les histoires de la géodésie jusqu'à la fin du XIX^{ème} siècle, il en ressort les grandes lignes suivantes:

La géodésie est d'abord une affaire française, avec les mesures de l'abbé Picard au XVII^{ème} siècle, celles des Cassini ensuite, les expéditions en Laponie et au Pérou décidées par l'Académie des Sciences de Paris dans les années 1730-1740 pour trancher la querelle de la forme de la Terre, la mesure de l'arc de méridien par Delambre et Méchain sous la Révolution afin d'établir le mètre; vient ensuite le long règne de Puissant avec la triangulation de l'ensemble du territoire et les débuts de l'aventure de la carte d'état-major. Ensuite, la France marque le pas et on s'aperçoit, après la guerre de 1870, qu'il convient de tout réorganiser, ce qui sera l'oeuvre de Faye et de F. Perrier.

En "Allemagne"¹, la situation paraît inverse: on ne parle guère de ce qu'il y a eu avant le XIX^{ème} siècle, mais à partir des années 1820, avec Gauss et Bessel d'abord, Baeyer ensuite, les méthodes sont bouleversées et la géodésie allemande domine rapidement l'Europe et le monde entier: la création dans les années 1860 des organismes internationaux apparaît comme le témoignage de cette nouvelle domination.

On parle peu des autres pays. Il existe certes des travaux historiques sur la géodésie, la cartographie, la topographie des différentes nations, mais (sauf peut-être pour le géodésien anglais Everest) on n'attribue guère en général à ces recherches qu'un intérêt local.

Est-ce donc bien vrai qu'il y a passage assez brusque d'une hégémonie française incontestée et à une hégémonie allemande tout aussi incontestée ? Comment se fait ce passage ? A quoi est-il dû ? S'agit-il là d'une illustration de plus de la célèbre petite phrase de Pasteur sur le déclin progressif de la science française et le réveil brutal après la défaite de 1870-1871 ?

Pour donner une première piste de réponses à ces questions, citons longuement un passage, ayant le mérite de la clarté, de G. Perrier, géodésien français (1872-1946), qui a longtemps dominé cette science et en a écrit d'ailleurs une histoire en 1939. Le texte qui suit est extrait d'une conférence de mai 1912:

"L'année 1831 qui voyait l'achèvement du réseau primordial commencé en 1792 par Delambre, voyait aussi la suppression des Ingénieurs Géographes. Ce corps, après avoir brillé d'un si vif éclat et produit tant d'hommes éminents, était versé dans le corps d'Etat-major. Cette mesure eut des résultats déplorables: les officiers d'Etat-major, partagés entre leurs fonctions militaires et les

¹Nous mettons ici des guillemets, parce que définir l'Allemagne tout au long du XIX^e siècle n'a rien de simple. Nous reviendrons sur ce point en divers endroits de la thèse.

études géographiques, peu attirés par le travail pénible et souvent mal récompensé de la carte, ne maintinrent point, au Dépôt de la Guerre, à part quelques rares exceptions, les traditions de haute culture scientifique qui avaient été en honneur. En Géodésie particulièrement, tandis qu'en Allemagne entre les mains des Gauss, des Bessel, des Baeyer, la science prenait un nouvel essor, que les instruments et les méthodes se transformaient, que des travaux considérables étaient entrepris, on s'habituaient chez nous à considérer la triangulation des Ingénieurs Géographes comme définitive; les opérations se bornaient de plus en plus au remplissage banal de registres d'observations et de calculs établis sur des modèles officiels consacrés, on se désintéressait de toutes les questions théoriques de Géodésie supérieure.

Le résultat ne se fit pas attendre. Non seulement devancés sur le terrain de la théorie, nous restions à l'écart du mouvement suscité par le général prussien Baeyer, qui devait aboutir à la création d'une Association géodésique européenne (1864), devenue plus tard, en 1885, l'Association géodésique internationale, mais l'infériorité de la Géodésie militaire française se révélait tristement à plusieurs reprises. En 1860, nous étions obligés d'accepter en toute confiance la triangulation de premier ordre italienne de la Savoie, tandis que dès 1876 les Allemands ont couvert l'Alsace-Lorraine de nouveaux triangles. En 1861-62, dans l'opération de jonction des triangulations anglaise et française par-dessus le Pas-de-Calais, la comparaison entre nos instruments, nos méthodes et ceux des officiers anglais était écrasante. En 1863, fait véritablement incroyable, nous étions incapables de déterminer les éléments astronomiques de départ pour la triangulation de la Corse. Nous apprenions ainsi à nos dépens que quiconque s'immobilise dans le passé et se désintéresse des recherches nouvelles, même théoriques, laisse inéluctablement à de mieux avisés la gloire et le profit des applications pratiques."²

Ainsi donc, G. Perrier insiste sur un aspect institutionnel (la suppression du corps des ingénieurs géographes), sur l'inertie d'une tradition qui, ayant pris de l'avance s'endort sur ses lauriers avec suffisance, enfin sur le mépris de la théorie.

Cette première analyse semble séduisante. Comment aller plus loin pour comprendre les voies du basculement de domination, les relations (ou les absences de relations) entre les écoles françaises et allemandes, puis les voies du retour, de la conversion ou de la soumission des Français aux nouvelles méthodes allemandes ? Pour cela l'historien devrait naturellement écumer de nombreuses sources, en particulier:

- les traités et mémoires dans les deux pays au cours du XIX^e siècle,
- les enseignements dans les universités et écoles spécialisées,
- les archives techniques et administratives des services concernés: pour la France, les Archives nationales, le Service historique de l'Armée de Terre, les archives de

²Capitaine Perrier, "La géodésie française. La géodésie moderne à l'étranger", Conférence, mai 1912, s.l., 27 p. (cote B.U. Sciences, Lyon: 51002).

l'Observatoire de Paris et du Bureau des longitudes, etc.; pour l'"Allemagne", avant et après son unification, la tâche serait bien plus ardue, vu la diversité des états, principautés, systèmes politiques et leurs évolutions au cours de ce XIX^e siècle !

Bien sûr, le terrain n'est pas complètement en friche, il existe de nombreux travaux historiques (chacun avec son fil conducteur), tant sur la géodésie française que sur la géodésie allemande, ou sur les ingénieurs géographes. En France, J.J. Levallois nous propose un vaste panorama de la géodésie française dans son ouvrage *Mesurer la Terre 300 ans de géodésie française. De la toise du Châtelet au satellite* (1988); l'Académie des Sciences de Paris organise un colloque en 1986³, pour commémorer le 250^{ème} anniversaire des missions envoyées par l'Académie "en Laponie et au Pérou", et publie en 1988 un remarquable ouvrage sous la direction de H. Lacombe et P. Costabel *La figure de la Terre du XVIII^{ème} siècle à l'ère spatiale*. Cependant, à notre connaissance, aucune étude détaillée ne s'attache directement aux questions que nous avons évoquées ci-dessus et n'examine dans cet esprit les décennies cruciales 1830-1850.

Le travail de dépouillement et d'analyse que nous venons de suggérer apparaît énorme, rien qu'à son énoncé. Et ceci d'autant plus que (comme nous le montrerons), pour comprendre ces évolutions, il ne suffit pas de parcourir les introductions, rapports et notices, il faut aussi examiner de près les problèmes techniques, refaire certains calculs, etc.

Comment donc apporter quelque chose de nouveau, être utile en vue d'y voir plus clair sur ces questions, en se limitant à un dépouillement en rapport avec le temps que dure une thèse ?⁴ Voici le pari adopté ici: "et si l'enquête avait déjà été faite (en partie) par des observateurs neutres et objectifs ?" Car c'est presque le cas ! Nous sommes allés pour cela interroger la Belgique. Ce pays de dimensions réduites, ballotté au début du XIX^{ème} siècle entre la domination française et une domination hollandaise, anglo-saxonne, obtient son indépendance tardivement (1830). Ses cadres ont, pour beaucoup d'entre eux, été formés en France, mais les langues et cultures germaniques ne sont pas très mystérieuses en Belgique. Ce pays est en retard dans ses triangulations, mais il a devant lui deux grandes nations géodésiques, la France et l'"Allemagne", et cela précisément aux moments cruciaux où l'hégémonie est en train de basculer. Les savants et militaires belges ne se trouvent-ils pas en situation d'enquêter sérieusement, et assez objectivement, des deux côtés, afin de décider en connaissance de cause des stratégies et des campagnes à mener ? Nous allons voir que tout se noue et se dénoue très vite, disons dans la décennie 1843-1853, et singulièrement lors des années 1846-1847.

³Ce colloque s'est tenu au Palais de l'Institut du 29 au 31 janvier 1986. L'ouvrage cité, formant un recueil des conférences et des communications de ce colloque, est une source fiable de nombreuses références de sources primaires.

⁴Surtout pour quelqu'un qui exerce une activité professionnelle toute différente à plein temps.

C'est donc ce point de vue de "déplacement des sources" que nous allons adopter. Il est partiel, il ne faut pas se le cacher, mais, croyons-nous, pertinent. Et nous utiliserons quelques recoupements par sondages, dans les sources françaises et allemandes pour confirmer les résultats de nos enquêtes belges.

Plan de la thèse

La thèse se compose de deux parties et d'un épilogue.

Dans la partie A, nous essaierons de cerner les habitudes des géodésiens tant français qu'allemands. En quoi ces habitudes sont-elles différentes? Le sont-elles dans le choix des instruments, des méthodes d'observations, du traitement des erreurs, du vocabulaire utilisé, des techniques de calcul? Sur quelles traditions reposent-elles? Quels sont les hommes et institutions qui en sont les instigateurs et les vecteurs? A quels problèmes répondent-elles et dans quels contextes se sont-elles constituées?

Les traditions françaises et allemandes seront présentées respectivement dans les chapitres A I et A II de cette première partie. Nous y ferons un rapide bilan de la situation sociale et mathématique au cours de cette période afin de comprendre pourquoi la géodésie française connaît un déclin, comment la tradition allemande prend cet essor en ce milieu du XIX^{ème} siècle.

Nous serons alors conduits à notre "détour par la Belgique": c'est l'objet du chapitre A III de la partie A, coeur de la thèse. Après un rappel sur l'état de la géodésie belge en 1830, au moment de l'indépendance, nous ferons connaissance avec trois personnages peu connus, mais cruciaux: Meyer, Nerenburger, Liagre. L'accent sera mis sur leurs liens étroits avec un savant central pour l'histoire des sciences astronomiques, morales et statistiques au XIX^e siècle: Quetelet. Tous ces hommes occupent des postes clés dans diverses institutions belges; en même temps, leur formation les rend aptes à présider au choix que l'Etat doit faire en matière de géodésie, c'est-à-dire tout spécialement à porter un jugement sur les traditions françaises et allemandes, à répondre à diverses questions que nous avons posées plus haut.

Nous utiliserons deux types de sources: d'abord les sources imprimées, et tout spécialement l'ouvrage capital pour notre propos *Calcul des probabilités et Théorie des erreurs* de J. Liagre, édité à Bruxelles en 1852⁵; d'autre part les archives de l'Académie des Sciences, des Lettres et des Beaux-arts de Bruxelles, celles du Musée de l'Armée de

⁵Cette date est indiquée dans "Liagre" in *Biographie Nationale* publiée par l'ARB, tome XXXII, supplément tome 4, Bruxelles, 1964. Elle correspond à la signature de la Préface: Gand, le 1^{er} juin 1852. Sur les livres consultés ne figurent pas de date d'édition. Signalons que, parfois, nous trouvons cet ouvrage cité avec 1853 comme date.

Bruxelles, de l'Ecole militaire et de l'Observatoire de Bruxelles. Ceci nous permettra de reconstituer les différents faits et personnages qui ont permis aux responsables, et en particulier à celui qui avait la charge principale dans la géodésie belge, à savoir Nerenburger, d'arrêter leur choix sur les méthodes allemandes.

Dans la préface de son livre, J. Liagre écrit:

"Il me reste à expliquer, en terminant, pourquoi j'ai choisi dans la géodésie le plus grand nombre de mes applications. Les observateurs et les savants français sont certainement les premiers qui aient placé cette science au rang élevé qu'elle occupe aujourd'hui; et tout le monde rend justice aux beaux travaux pratiques et théoriques de Delambre, Biot, Arago, Puissant, Brousseau, Coraboeuf, etc... Mais depuis une vingtaine d'années, la géodésie, entre les mains de Schumacher, Gauss, Struve, Bessel, Baeyer, a pris en Allemagne une forme nouvelle, basée entièrement sur l'application de la méthode des moindres carrés. Les procédés d'observation et de calcul, employés aujourd'hui chez nos voisins de l'Est, sont encore peu connus en France et en Belgique; et cependant ils sont susceptibles d'un si haut degré de précision, que notre Dépôt de la guerre leur a accordé la préférence sur les méthodes françaises: ils sont exclusivement suivis dans la triangulation qui s'exécute actuellement dans notre pays, sous la direction d'un de nos officiers supérieurs les plus distingués [Nerenburger]. C'était donc une oeuvre d'actualité, que de chercher à vulgariser les procédés géodésiques usités en Allemagne."

Ce passage nous laisse deviner qu'en 1852, le débat est déjà tranché. Il l'est dès 1846-1847, notamment après diverses enquêtes de Nerenburger et de Meyer que nous décrirons en détail, reproduisant les pièces essentielles en annexes.

Dans la seconde partie (B), nous étudierons de façon plus précise les divers procédés d'observations et de calculs. Nous approfondirons le contenu scientifique, précisant la place centrale de la méthode des moindres carrés (MMC) dans les compensations en géodésie. Plutôt que de considérer l'ensemble des publications françaises et allemandes sur le sujet au cours de cette période 1830-1860, nous suivrons essentiellement l'ouvrage de Liagre. Notre choix s'appuie sur les raisons suivantes: ce livre expose les méthodes allemandes en français, pour un public habitué à la tradition française: il est donc prêt à mettre en évidence les différences entre les deux écoles. Nous préciserons à l'occasion ces différences par quelques comparaisons avec les traités français les plus célèbres de l'époque, ceux de Puissant (3e éd. 1842) et de Salneuve (1841).

Le chapitre B I a pour objectif de faire le point sur les différences de vocabulaire, voire de concepts entre les écoles française et allemande. Le chapitre B II est consacré à la méthode des moindres carrés, véritable pivot entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées: bref rappel de sa découverte, discussion sur ses fondements, son intervention en géodésie, sa réception en France. Nous comparerons les différents instruments, le vocabulaire probabiliste, les différentes méthodes d'observations, le traitement des erreurs, utilisé en France et en Allemagne. Le contenu des méthodes préconisées et leur lien avec diverses branches des mathématiques seront analysés. Le chapitre B III reviendra sur les enjeux, notamment à propos des "compensations" entre réseaux. Ceci sera mis en relation avec la naissance de la théorie des erreurs.

L'épilogue (partie C) nous fera revenir en France. On aura compris, par le chapitre A III et l'ensemble de la partie B, comment la Belgique joue un rôle non négligeable dans la diffusion en Europe de ces nouvelles méthodes géodésiques faisant appel au calcul des probabilités et tout spécialement à la méthode des moindres carrés. Mais la diffusion peut être longue et non linéaire.

Au chapitre C I, nous verrons l'accueil dans les années 1850 des méthodes nouvelles par les milieux géodésiques français. Nous examinerons au chapitre C II les objections et polémiques qui expliquent peut-être une réticence de ces milieux français à adopter ces nouvelles techniques. Enfin le chapitre C III évoquera divers problèmes institutionnels d'internationalisation de la géodésie.

La traduction d'un registre à l'autre ne se fait pas sans mal. Un simple petit témoignage: dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* éditée en Allemagne à l'initiative de F. Klein à la fin du XIX^e siècle, puis traduite en français au début du XX^e siècle sous la direction de J. Molk⁶, on peut lire en bas de la première page du chapitre consacré à la géodésie l'avertissement suivant:

"Quoique H. Noirel ait largement utilisé l'article allemand de P. Pizzetti, son exposé est cependant conçu dans un esprit tout à fait différent, plus conforme aux habitudes des géodésiens français."

Mais avant de passer à cet ensemble, il nous faut d'abord rappeler les nombreux enjeux fondamentaux de la géodésie au XIX^e siècle, et mieux cerner les points plus limités sur lesquels nous allons nous concentrer.

⁶En 1991-92 un cycle de 3 conférences eut lieu à l'IHP afin de faire connaître cette oeuvre; Une réédition de la traduction française est disponible chez Gabay, Paris, 1991. Un tome de compléments historiques, sous la direction de H. Gispert et J.L. Verley, est en cours de publication.

Géodésie, topographie, cartographie

Quelques rappels s'imposent. Pour cela nous nous contenterons de suivre deux écrits de G. Perrier qui, au début du XX^{ème} siècle, a su synthétiser avec une grande clarté les enjeux et l'état d'esprit du siècle précédent⁷.

Classée dans les sciences d'application, la géodésie, ou science de la figure de la Terre comme on disait au XVIII^{ème} siècle, s'est développée dans deux directions fondamentales:

*une direction théorique, dite scientifique relative à la connaissance de la forme et de la dimension de la terre (aussi bien dans son ensemble que dans ses parties) et des propriétés de son champ de pesanteur; c'est la géodésie supérieure ("höhere Geodäsie"), qui comprend notamment la mesure précise de la méridienne et entretient des relations étroites avec l'astronomie;

*une direction pratique, utilitaire, relative à la détermination des positions de points remarquables situés sur la surface terrestre, en vue de dresser des cartes exactes et de fournir des données pour les diverses entreprises de l'arpenteur, de l'ingénieur, pour établir un cadastre; c'est la géodésie inférieure ("niedere Geodäsie").

En fait, dès que l'on veut entrer vraiment dans le sujet, on s'aperçoit que les questions apparemment les plus simples sont d'une extrême complexité. Comment définir rigoureusement ce qu'on entend par surface de la Terre, comment faire abstraction de toutes les irrégularités (vents, courants, marées, montagnes ...) ? De multiples points de vue sont inévitables. En particulier, deux aspects très différents se dégagent:

- un point de vue purement mathématique ou géométrique, qui consiste à déterminer les éléments nécessaires et suffisants pour représenter la planète, à une échelle donnée, ce qui débouche sur la topographie, la cartographie, l'hydrographie, la navigation maritime et aérienne;

- un point de vue physique ou dynamique, l'étude des variations de la pesanteur, de ses surfaces de niveau, mais aussi des sciences géophysiques (séismologie, magnétisme, électricité terrestre ...).

Bien sûr cette dichotomie est trop grossière, les différents points de vue s'interpénètrent. En outre, des paramètres qui semblaient bien fixés à une certaine époque,

⁷G. Perrier, *Petite histoire de la géodésie*, Paris, PUF, 1939, p. 1-9; ainsi que la conférence de 1912, citée ci-dessus. On pourra consulter aussi dans le même esprit H. Noirel "Triangulation géodésique" in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Tome VI.1 (de 1906 à 1911).

et sur lesquels s'est fondée le reste de la science géodésique, peuvent apparaître variables quelques décennies plus tard, en raison des progrès en précision des instruments, des méthodes de calcul. Nous nous limiterons ici aux aspects géométriques de la géodésie.

Chacun sait que la surface théorique de la Terre est approximativement un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles et renflé à l'équateur. Aux XVIII^{ème} et XIX^{ème} siècles, un des objectifs essentiels de la géodésie consiste à calculer le rayon équatorial a ou demi grand axe et le rayon polaire b ou demi petit axe. Le rapport $(a-b)/a$ ou aplatissement, qui vaut environ $1/300$, joue un rôle considérable tant en astronomie que dans toutes les parties de la géodésie et des sciences voisines. Si la Terre était une sphère ($a=b$), on obtiendrait immédiatement son rayon en mesurant la longueur d'un arc de méridien et son angle au centre ou amplitude. Si l'on admet qu'il s'agit d'un ellipsoïde de révolution, on conçoit bien que, grâce aux propriétés de l'ellipse, on peut calculer a et b dans le même esprit. L'amplitude d'un arc s'obtient par des observations astronomiques, mais exécutées au moyen d'instruments plus légers, plus portatifs que ceux des grands observatoires ("l'astronomie géodésique"). Quant à la longueur de l'arc, toute mesure directe manque de la précision la plus élémentaire, et on a recours au procédé de triangulation bien connu depuis le XVII^e siècle. Entre deux points situés vers les extrémités de l'arc à mesurer, on fait le choix d'une série d'autres points, tous aisément repérables, qui forment une chaîne de triangles. On mesure alors, avec le plus de précision possible, l'un des côtés de cette chaîne, appelé base, qu'on choisit sur un terrain le plus facile et le plus plan possible; ensuite on mesure les angles de la chaîne des triangles, les calculs des côtés s'obtiennent par les méthodes ordinaires de la trigonométrie (les résolutions de triangles). En d'autres termes, on doit donc procéder à des mesures d'astronomie géodésique pour les points extrêmes de la triangulation, et à des mesures géodésiques proprement dites pour le reste (base, angles de la chaîne).

La clarté de ces principes cache les difficultés concrètes considérables de réalisation. Si l'on s'en remettait à des mesures de proche en proche, les petites erreurs inévitables s'ajouteraient les unes aux autres et, même en étant indulgent, toute exactitude raisonnable serait exclue, l'assemblage serait impossible, la somme des angles observés d'un triangle plan ou sphérique défierait vite toutes les lois de la géométrie. Il faut donc un canevas exact et rigide établi à l'avance.

On pourrait certes penser établir ce canevas en en fixant chaque point isolément, indépendamment des autres, c'est-à-dire en déterminant sa latitude et sa longitude par des observations astronomiques. Mais ce n'est qu'illusoire. Au XIX^{ème} siècle, on peut certes déterminer avec précision les coordonnées de certains points, mais cela exige des instruments non transportables, des observations longues, pénibles et coûteuses. Pour des raisons de coût et de temps, un canevas précis de densité suffisante est irréalisable de

cette façon. Si maintenant on veut utiliser des observations expéditives et faciles au moyen d'instruments portatifs, on ne peut atteindre que des résultats trop grossiers.

On doit donc dans la pratique hiérarchiser les précisions exigées pour la détermination des sommets des réseaux de triangles. L'ossature de la triangulation est en général constituée par des chaînes dites "primordiales" de grands triangles (disons 50 km de côté), dirigées suivant des méridiens et des parallèles. Ces triangles et leurs sommets sont dits de premier ordre⁸. Les mesures de ces éléments se doivent d'être très précises car elles servent non seulement de canevas aux triangulations de plus petits triangles dits de second et de troisième ordres déterminés en vue de l'établissement de cartes, mais surtout elles sont essentielles dans la mission scientifique de la géodésie. Pour les second et troisième ordres, il existe un impératif de rendement: un certain niveau de précision nécessaire doit être atteint mais non dépassé sous peine de compromettre la rapidité d'exécution et l'économie de réalisation de l'oeuvre.

En fait, pour toute triangulation un peu étendue, les choses sont encore plus compliquées que ce que nous venons de décrire, et cela pour plusieurs raisons. D'abord, il est vite nécessaire de prendre en compte les altitudes, donc de mesurer à la fois des angles horizontaux et des angles verticaux. Ensuite, les rayons lumineux ne sont pas rectilignes, les surfaces de niveau ne sont pas planes ... Enfin, pour atteindre une précision suffisante, il convient d'effectuer des observations surabondantes afin de "compenser" les erreurs d'observations: nous reviendrons sur cet aspect à diverses reprises au cours de la thèse.

Ces soucis de précision modifient peu à peu les pratiques des géodésiens et les méthodes mathématiques qu'ils utilisent. On ne sera donc pas étonné que la géodésie se trouve à la croisée de plusieurs branches des mathématiques et, par là même, participe à leur développement :

- * nouvelles techniques algébriques
- * nouvelles techniques de résolutions des systèmes linéaires
- * émergence de la notion de dépendance en probabilité
- * précision de conditions d'utilisation de la méthode des moindres carrés
- * géométrie sphérique et techniques liées à l'étude de la forme de la terre (cercle osculateur ...)
- * techniques liées à la représentation de la surface de la terre sur une surface plane (voir la cartographie)

Nous serons donc amenés dans ce travail à évoquer quelques uns de ces points. Ces rappels très simplifiés n'apprendront rien à personne, mais ils nous ont semblé

⁸Le glossaire reprend tous ces termes.

nécessaires pour éviter les malentendus à propos des questions que nous allons étudier plus loin.

Délimitation du sujet

On a deviné l'énormité du champ des relations entre la géodésie et les mathématiques tout au long du XIX^{ème} siècle, il convient donc de le restreindre, en choisissant un aspect qui nous paraît le plus crucial, ou du moins parmi les plus cruciaux. Nous choisissons l'établissement des triangulations du 1^{er} ordre. Ce thème possède en effet plusieurs pouvoirs discriminants par rapport aux questions que nous avons posées au début de cette introduction.

Il constitue un carrefour entre la "höhere Geodäsie" et la "niedere Geodäsie", unissant la théorie et la pratique. Il exige des précisions dans les mesures et les calculs, qui le mettent nécessairement en relation avec des problèmes qui dépassent le niveau des mathématiques élémentaires, notamment avec la théorie des erreurs en pleine effervescence au XIX^{ème} siècle. C'est bien à propos de cet établissement des triangulations du premier ordre que s'opère le tournant dans les méthodes géodésiques, entre l'école française du début du siècle et l'école allemande qui la supplante au cours du siècle.

Nous aurons donc l'occasion d'insister sur deux points très importants:

- 1) les progrès techniques permettent des améliorations dans les instruments utilisés, tant dans la mesure des bases que dans celle des angles;
- 2) avec l'introduction de la méthode des moindres carrés pour effectuer la compensation des réseaux, le calcul des probabilités s'introduit en géodésie.

Exposons cela d'une autre façon. Considérons les points que l'Association géodésique internationale va mettre, plus tard, à l'ordre du jour de ses différentes commissions (à partir de 1864), ce qui constitue un incontestable témoignage des questions jugées les plus importantes par les géodésiens un peu après le milieu du siècle:

A) Travaux géodésiques

- 1) Bases
- 2) Mesures d'angles
- 3) Chaînes de triangles

B) Travaux astronomiques

- 1) Latitudes et azimuts
- 2) Longitudes
- 3) Intensité de pesanteur

C) Nivellement

D) Comparaison d'étalons

E) Travaux théoriques⁹

1) Exposé scientifique des méthodes de calculs:

a) Méthode des moindres carrés

b) L'application de cette méthode à la compensation des erreurs pour les angles mesurés dans une station

c) Son emploi à la compensation des erreurs dans un réseau de triangles et dans un réseau de lignes de nivellement

2) Résolution générale des triangles sphéroïdaux

3) Détermination géodésiques de la latitude, longitude et azimut

4) Réduction des triangles sphéroïdaux aux triangles sphériques et plans, dont les côtés ont même longueur

L'étude que nous présentons, traitera plus particulièrement des points A2, A3, E1a, E1b, E1c et d'une partie du point E4 de ce programme.

En outre, il serait erroné de croire que les enjeux se limitent à des questions scientifiques et techniques, certes bien réelles et touchant tant l'astronomie que la géodésie. Après les guerres de la Révolution et de l'Empire, la paix revenue en 1815, les nations reprennent souffle et retrouvent les moyens de procéder à des travaux cartographiques et géodésiques dont les opérations militaires viennent d'ailleurs de démontrer l'utilité. L'essor de la géodésie, de la topographie et de la cartographie dans la première moitié du XIX^e siècle tient à des préoccupations économiques, politiques et militaires évidentes: mise en place de réseaux de communications (routes, canaux, puis chemins de fer) pour le commerce, cadastre pour les remembrements agraires et la levée des impôts, dans des pays où la propriété et les revenus fonciers jouent un rôle considérable, étude des ressources minéralogiques, cartes d'état-major et autres besoins militaires (champ de bataille, tirs d'artillerie, inventaire des territoires conquis ...), mais aussi cartographie marine pour la navigation, les guerres maritimes, les expéditions coloniales naissantes. Certains de ces aspects, notamment ceux qui mettent en jeu de longues distances, des contrées éloignées, sont directement liés à des problèmes épineux de géodésie supérieure; on voit donc que la théorie peut avoir des retombées assez rapides sur les questions les plus utilitaires. Ceci pèsera aussi d'un certain poids dans l'internationalisation de la géodésie dès le milieu du siècle. En effet, quand les différents pays ont bien avancé leurs réseaux nationaux, le problème des raccordements, avec tout

⁹Il est précisé que le bureau central a choisi parmi les méthodes connues celles qui réunissent à la rigueur scientifique, la facilité du calcul numérique.

ce qu'il implique pour les frontières¹⁰, l'essor des échanges, etc., se pose naturellement, nous verrons cela un peu plus loin. La bonne santé de la géodésie d'un pays est un élément moteur de la santé globale de ce pays.

Limitons-nous à l'Europe continentale, notre étude portant essentiellement, comme on l'a dit, sur trois pays: la France, la Belgique et ce qu'on peut appeler l'Allemagne, les zones territoriales de ces pays étant très différentes et en évolution au cours de la période étudiée¹¹.

Vers un réseau européen

Un problème central: La compensation

La Belgique se trouve donc au coeur du nouveau mouvement géodésique qui démarre vers les années 1850. Elle désire, non seulement réaliser une carte mais aussi faire la jonction avec les triangulations du Hanovre, de la Prusse, et la triangulation française. L'idée de rattacher les différents réseaux européens, sans lien entre eux, prend forme. Une citation parmi tant d'autres:

"La Science en est venue à ce point qu'après avoir couvert chaque contrée d'Europe de ses triangulations, elle doit s'attacher désormais à les relier entre elles."¹²

Mais de ce fait des problèmes nouveaux se posent: comment relier ces réseaux entre eux? comment réaliser les jonctions entre les différentes chaînes? comment réaliser l'accord à la jonction? quel principe adopter pour la répartition des erreurs de raccordement¹³?

Le problème de la répartition des erreurs se fait donc plus pressant et est assujéti à davantage de contraintes. Nous verrons que les méthodes allemandes vont seules permettre de réaliser ces diverses corrections avec une précision suffisante¹⁴.

¹⁰Par exemple, après son indépendance, la Belgique se voit imposer par l'Europe en 1839 l'abandon du Limbourg hollandais et du Luxembourg allemand: il lui est alors nécessaire de préciser les limites territoriales, de rattacher sa triangulation à celles déjà existantes

¹¹Les travaux exécutés en Angleterre, aux Indes par Everest, en Suisse, en Espagne ne font pas l'objet de notre étude. Les États-Unis sont aussi hors de notre recherche. Cependant plusieurs de ces pays seront cités pour avoir eu des relations avec les trois pays précédents.

¹²H. Faye, "Rapport sur l'Europäische Gradmessung", CRAS, tome 56, 1863, p.28.

¹³Nous limiterons notre étude essentiellement à la répartition des erreurs relatives aux mesures géodésiques (n'abordant pas les mesures astronomiques), en particulier celles des angles horizontaux.

¹⁴Peytier, dans "Notes sur les opérations géodésiques" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, Tome 9, p. 319, Paris, 1853, regrettera par exemple "qu'avant de commencer la publication de la *Description géométrique de la France*, à une époque où les chaînes primordiales étaient seules terminées et la triangulation intermédiaire peu avancée, M. Puissant n'ait pas entrepris de mettre les chaînes d'accord entre elles, ainsi que l'avait fait Delambre pour faire accorder les bases de Melun et de Perpignan. Les chaînes mises d'accord, on aurait pu calculer les espaces intermédiaires par une suite d'enchaînements de triangles

En effet, il est vrai que la méthode des moindres carrés est connue et enseignée (la synthèse Gauss-Laplace est achevée en 1823), mais son développement et son application pratique n'est qu'à l'état embryonnaire.¹⁵ Deux axes de recherches doivent alors être mis en évidence; d'une part des algorithmes pour simplifier les calculs et d'autre part des méthodes pour déterminer la précision des observations sont à inventer. Ces deux axes correspondent à deux questions: comment déduire des données surabondantes

1) les valeurs, satisfaisant à un critère donné, des inconnues que l'on cherche? (algorithmes de calcul ou calcul des compensations)

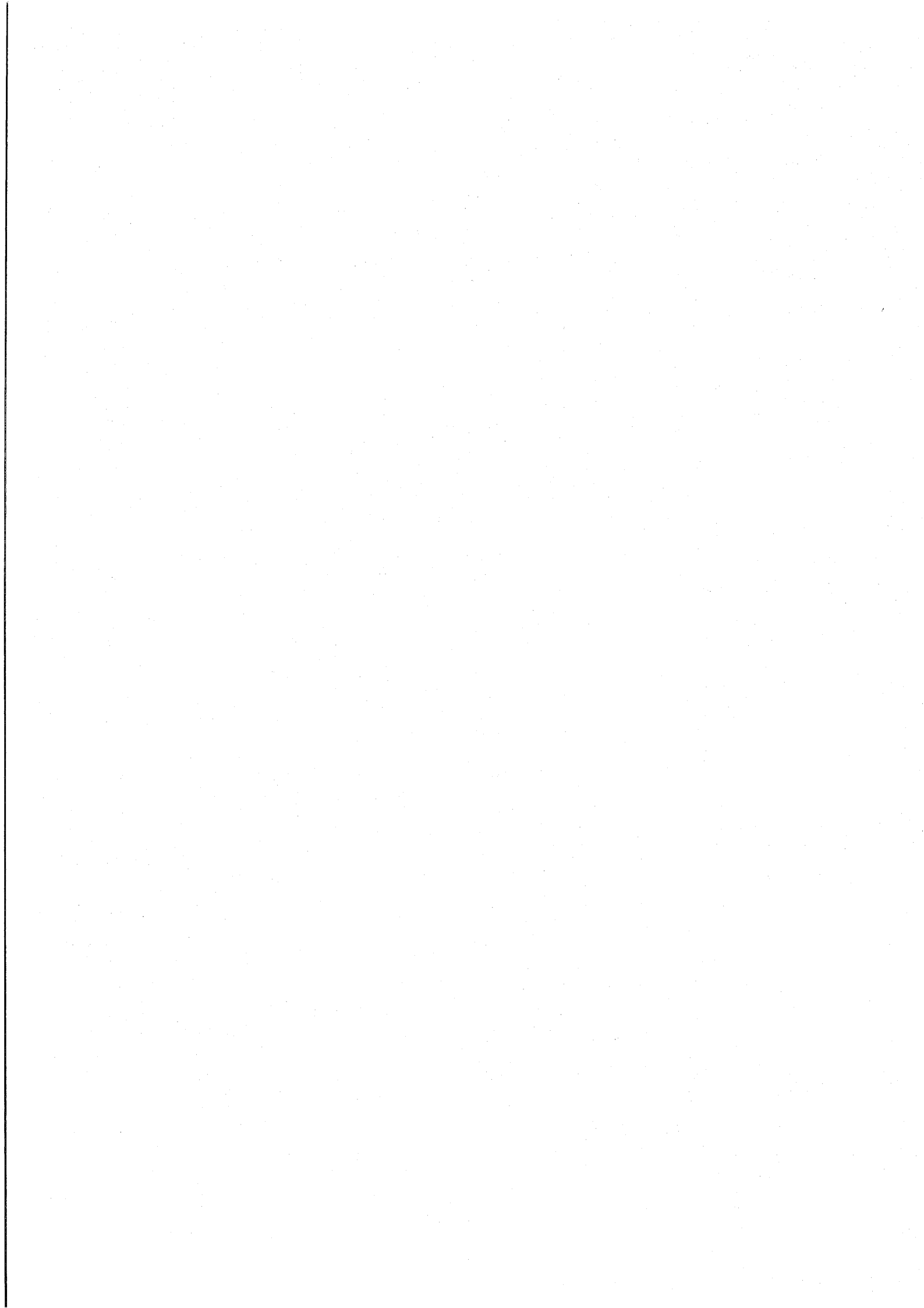
2) une évaluation de la précision des résultats obtenus? (c'est la théorie probabiliste des erreurs au sens où on l'entendra en 1900).

Or ces calculs de compensation sont très lourds. Ils visent à satisfaire globalement l'ensemble des mesures, compte tenu de leurs erreurs respectives. Le résultat est un système géodésique qui est un ensemble de coordonnées de points terrestres rapportées à un ellipsoïde de référence orienté de façon que son axe soit parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Le géoïde étant aussi localement rapporté à cet ellipsoïde, le système géodésique donne en fin de compte la position relative de trois surfaces: l'ellipsoïde de référence, le géoïde et la surface de la Terre. Cela exigera non seulement des progrès mathématiques, mais aussi une rigueur, une uniformisation dans les méthodes et dans l'organisation concrète des calculs (avec des moyens de calcul encore tout à fait rudimentaires). Toutes ces questions seront justement l'objet des apports de Gauss, Bessel, Baeyer.

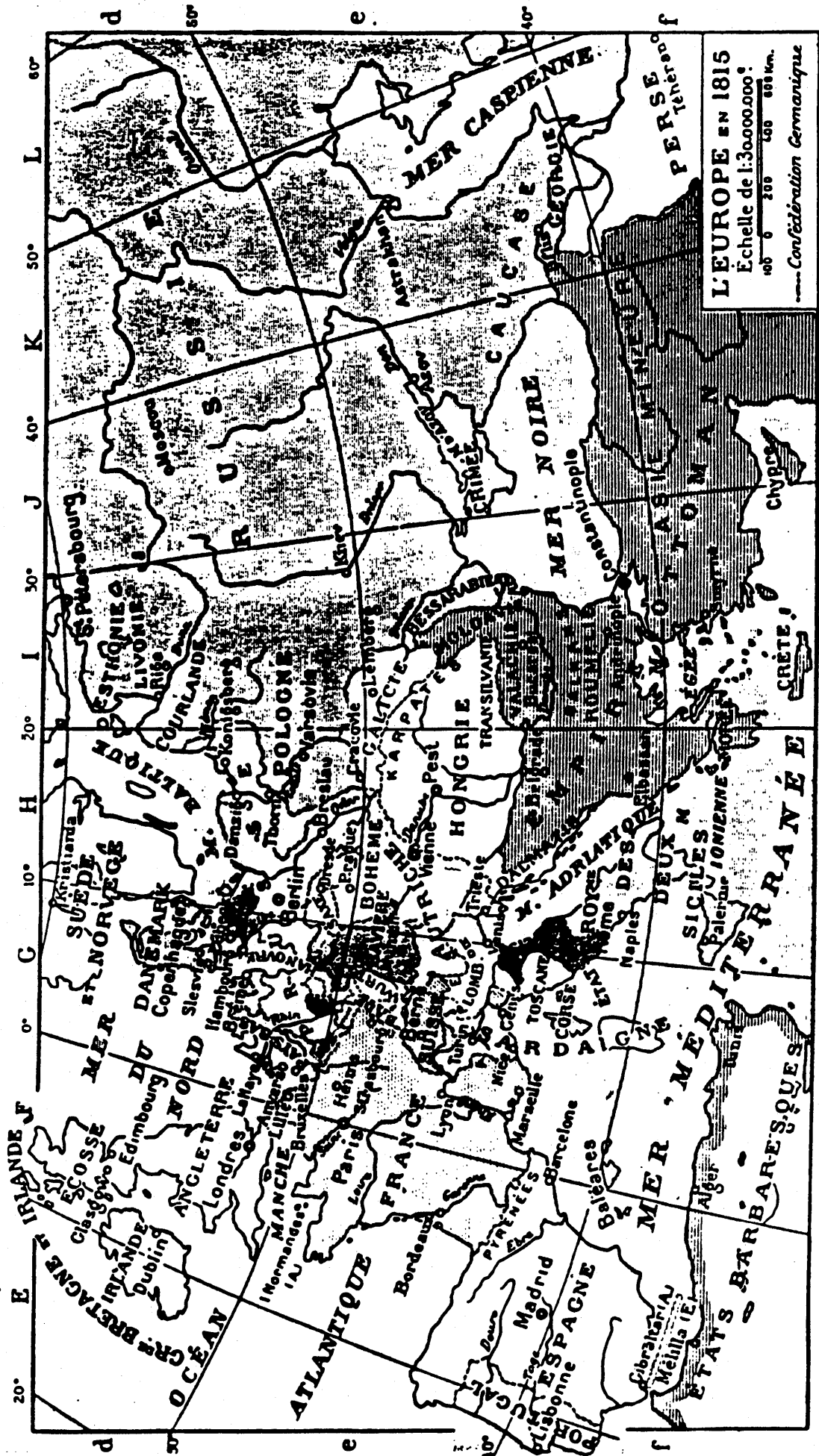
Nouveaux instruments de géodésie et d'astronomie, progrès du calcul des probabilités, décisions de nature militaire, constitution des cartes géographiques, concertation entre les institutions civiles et militaires, échanges entre les domaines scientifiques théoriques et les opérations pratiques sur le terrain ... Les registres qu'on doit interroger pour comprendre le tournant de la géodésie au milieu du XIX^{ème} siècle sont multiples, nous n'en interrogerons que quelques-uns; les prolongements possibles de notre travail ne manquent donc pas.

allant d'une chaîne primordiale à l'autre, et que l'on aurait également corrigés de manière à opérer l'accord à la jonction. (...) Tandis que, dans l'état actuel des choses, deux travaux voisins, partant de données différentes, offrent quelquefois des discordances assez fortes. On conçoit que ce n'eût pas été une opération facile que de faire accorder en même temps les côtés des triangles et les positions géographiques; que de nouvelles corrections eussent été nécessaires indépendamment de celles opérées sur les angles."

¹⁵Voir S.M. Stigler, *The history of statistics*, 1986, p.139-158



PREMIÈRE PARTIE



Partie A: Un tournant dans la géodésie en Europe au XIX^{ème} siècle.

A.I La tradition française

De nombreux ouvrages ont traité en détail ces différentes étapes qui ont jalonné l'histoire de la géodésie française. Aussi, nous allons seulement rappeler brièvement les éléments utiles à la compréhension de notre propos, en indiquant surtout les instruments et les méthodes utilisés lors de ces différentes opérations¹.

1 Rappel des travaux exécutés avant le milieu du XIX^e siècle.

Les méthodes géodésiques françaises sont ancrées dans une tradition remontant à la deuxième moitié du XVII^e siècle. Colbert demande en 1668 à l'Académie des Sciences nouvellement créée de dresser une carte du royaume. L'abbé Jean Picard, astronome, est chargé de cette mission. De 1669 à 1671, il mesure une distance entre Paris et Amiens, correspondant à un degré du méridien de Paris. Cette opération, exécutée avec soin, va servir de modèle par la suite; elle marque la naissance de la géodésie en France. Au cours du XVIII^{ème} siècle, plusieurs membres de la famille des Cassini, astronomes à l'Observatoire de Paris, prolongent les travaux de Picard. Les grandes expéditions françaises entreprises au Pérou et en Laponie entre 1736 et 1741 mettent fin à la querelle entre "Newtoniens" et "Cassiniens" relative à la Figure de la Terre². Puis de 1792 à 1799, la mesure de la Méridienne de Dunkerque à Barcelone est exécutée par Delambre et Méchain pour déterminer la longueur du mètre, unité de mesure universelle proposée en France sous la Révolution,³ comme dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

La France est alors à la tête des nations au point de vue de la géodésie. Au cours des campagnes napoléoniennes, le corps des ingénieurs géographes se voit confier la tâche de trianguler et de lever les régions parcourues afin d'en établir des cartes; puis une

¹Pour un panorama d'ensemble sur l'histoire de la géodésie française, nous renvoyons aux ouvrages suivants: *La figure de la Terre du XVIII^e siècle à l'ère spatiale* sous la direction de Henri Lacombe et Pierre Costabel, Académie des Sciences, Paris, 1988 et J.J. Levallois *300 ans de géodésie française ; De la toise du Châtelet au satellite*, Paris, 1988; Voir aussi G. Perrier *Petite histoire de la géodésie*, Paris, 1939. D'autres auteurs ont étudié des périodes plus précises. Nous indiquerons leurs références dans les notes relatives à chaque période.

²Pour l'histoire de cette querelle, voir J.J. Levallois "L'Académie Royale des Sciences et la Figure de la Terre" p. 41 à 77, puis diverses communications de P. Costabel, R. Taton, A. Lafuente, J. Levy, A.M. Chouillet, L. Marquet; D. Fauque in Henri Lacombe et Pierre Costabel, op cit.

³Voir la thèse de Denis Guedj: *La mesure des Lumières; Le système métrique décimal*, Paris, Mai 1995

triangulation complète du territoire français est entreprise en vue de l'établissement de la carte de France. Le réseau du 1^{er} ordre est achevé en 1831.

Ajoutons quelques précisions sur l'évolution des instruments et des méthodes.

- L'Abbé Picard

L'arc que mesure Picard en 1669-1670 s'étend sur une distance de 150 km environ entre le point Malvoisine, à 30 km au Sud de Paris, et le clocher de Sourdon, à un vingtaine de kilomètres au Sud d'Amiens⁴.

L'académicien applique la méthode de triangulation inventée par le mathématicien flamand Frisius et utilisée vers 1617 par Snellius en vue de l'établissement d'une carte des Pays-Bas⁵.

Alors que ses prédécesseurs n'avaient encore à leur disposition que des alidades à pinnules, Picard utilise la lunette optique. De plus, sa mesure s'effectue à un moment où les acquisitions de la mécanique et de l'optique permettent d'envisager la construction de nouveaux instruments. Picard en invente deux pour mesurer les angles:

* un quart de cercle (38 pouces = 1m04) auquel il applique, avec Auzout, en 1667 des lunettes pour les mesures angulaires et les azimuts⁶,

* un secteur astronomique (10 pieds de rayon = 3m25) pour les hauteurs méridiennes.

La précision des mesures était d'environ un tiers de minute⁷ Picard estime le degré de méridien à 57060 toises⁸, ce qui correspond environ à 111,210 km.

Ces instruments ne seront supplantés qu'à la fin du XVIII^{ème} siècle par le cercle de Borda.

⁴Picard publie ses résultats dans *La mesure de la Terre*, Paris, 1671. Voir aussi G. Picolet (dir.), *Jean Picard et les débuts de l'astronomie de précision au XVII^e siècle* (actes du colloque du tricentenaire réuni à Paris les 12 et 13 octobre 1982), Paris, Editions du CNRS, 1987; Catalogue de l'exposition Picard, Observatoire de Paris, 1982.

⁵Au sujet de cette méthode, voir annexe 1.

⁶Voir l'article "Quart de cercle" de l'*Encyclopédie méthodique, Mathématiques* de D'Alembert, Tome 2, p. 707, Paris, 1785, réédité ACL éditions 1987.

⁷Il s'agit dans toute la thèse de minute ou seconde d'arc. Cf. le rapport de Picard à l'Académie des Sciences en date du 31 juillet 1669 in *registres de l'Académie avant 1700*. D'autre part, à l'article 5 de *La mesure de la Terre* op. cit., il indique que le quart de cercle permettait d'avoir une précision de cinq secondes. Les indications sur les précisions que nous citons tout au long de la thèse sont données par les observateurs eux-mêmes dans leurs rapports ou leurs ouvrages. Nous devons cependant avertir que ces précisions recouvrent des réalités différentes; les comparaisons ne sont donc pas évidentes. Certains auteurs donnent une précision correspondant à la lecture permise par l'instrument avec ou sans loupe, microscopes etc., selon les écrits, d'autres auteurs donnent une précision d'estime. Enfin, certains chiffres cités indiquent les précisions obtenues après calculs lors des fermetures des triangles, des chaînes sur différentes bases etc.

⁸La toise utilisée par Picard est la "Toise du Chatelet"; elle est d'environ 1,949 m. (voir par exemple les documents édités par l'Observatoire de Paris en 1988 *Une mesure révolutionnaire: le mètre* planche C 2.

Picard est sans doute le premier à avoir conçu l'idée d'un canevas géodésique, comme nous le confirment ces quelques lignes extraites d'un rapport daté du 6 février 1681 et destiné à l'Académie des Sciences:

"Outre que le dessein de faire la carte du Royaume par provinces, de la manière que l'on a commencé, serait si long à exécuter qu'il n'y aurait pas lieu d'en voir la fin, il est certain que pour faire un bon assemblage de toutes les pièces après qu'elles seraient achevées il en faudrait toujours venir à un châssis général, au lieu que, ce châssis étant premièrement fait, il serait facile ensuite de le remplir. Pour la construction d'un tel châssis qui distribuerait tout le Royaume en triangles liés ensemble, on pourrait commencer en faisant une route ou traverse depuis Dunkerque jusqu'à Perpignan qui sont à peu près dans le méridien de Paris..."⁹

Picard meurt en 1682, avant de réaliser ce projet. J.D. Cassini est chargé de réaliser l'opération.

- Les Cassini

Les Cassini mesurent une chaîne méridienne de Dunkerque à Perpignan, prolongeant la chaîne de Picard. Les travaux débutent dès 1683 sous Jean-Dominique Cassini (1625-1712) qui se dirige vers le Sud tandis que La Hire avance vers le Nord. Ils se continuent jusqu'en 1720, entrecoupés par la mort de Colbert et la guerre de succession d'Espagne; Jacques Cassini, fils du précédent (1677-1756) et La Hire fils assurent la relève.¹⁰

J. Cassini résume son travail dans son ouvrage *De la grandeur et de la Figure de la Terre* paru en 1720. La méthode utilisée est celle indiquée par Picard. Les instruments sont les mêmes; la lecture faite au moyen d'une loupe permet une précision pouvant atteindre 20".¹¹

Il trouve pour le degré de méridien 57097 toises, valeur déduite du segment Paris-Collioure et 56960 toises à partir du segment Paris-Dunkerque. Les conclusions de ces travaux ouvrent une polémique sur la Figure de la Terre:

⁹ cité par J.J. Levallois op. cit. p. 45

¹⁰ Les travaux des Cassini s'inscrivent dans un projet précis: l'élaboration d'une nouvelle carte de France. On pourra consulter à ce sujet Gallois "L'Académie des Sciences et les origines de la carte de Cassini" in les *Annales de géographie* n° 99-100, 1909 et M. Pelletier *La carte de Cassini*, Presse des Ponts et Chaussée, 1990.

¹¹ cité par D. Fauque in H. Lacombe et P. Costabel op. cit. p. 211, à partir du livre de J. Cassini (Cassini II).

"A Paris, vous vous figurez la terre faite comme un melon, à Londres elle est aplatie des 2 côtés"¹².

- Les grandes expéditions

La France est alors le seul pays à étudier le problème de la mesure des degrés, en vue de déterminer la Figure de la Terre et de mettre fin à la polémique qui fait rage. Comme chacun sait, l'Académie des Sciences de Paris décide d'arbitrer ce litige. Elle propose d'envoyer deux expéditions géodésiques, l'une sous les latitudes équatoriales au Pérou, l'autre sous les latitudes polaires en Laponie.

La mission en Laponie suédoise (1736-1737) est conduite par Maupertuis, membre de l'Académie¹³. Clairaut y participe; la détermination mathématique de l'aplatissement terrestre est l'objet d'un important travail de recherche théorique qu'il accomplit en vue de faire le lien entre pesanteur et forme de la terre¹⁴. L'instrument utilisé pour les mesures astronomiques est un quart de cercle de 2 pieds de rayon (65 cm) construit en 1735 par Langlois, horloger du Roi. La vérification consiste à mesurer, chaque fois que la disposition des lieux le permet, des angles tout autour de l'horizon, entre des repères qui sont au même niveau et à examiner si leur somme est de 360 degrés. La méthode d'observation est décrite ainsi par Outhier montrant combien elle résulte d'une longue pratique:

" Nous allions deux à deux faire l'observation (une visée était faite sur un premier repère et on pouvait ensuite en déplaçant la lunette sur l'arc de cercle gradué ou limbe, lire la valeur de l'angle compris entre deux repères); l'un se plaçait à la lunette de l'alidade, qu'il mettait sur un des points marqués de 10 minutes en 10 minutes sur le limbe de l'instrument, pendant que l'autre observateur était à la lunette fixe, et tournait l'aiguille du micromètre: ils répétaient leur observation, en se rechangeant de la lunette fixe à la lunette de l'alidade, et ils écrivaient en particulier ce qu'ils avaient trouvé."¹⁵

¹²Voir 14^{ème} lettre philosophique "Sur Descartes et Newton", in *Lettres philosophiques* de Voltaire, 1734.

¹³Le récit de cette expédition se trouve dans *Journal d'une expédition au Nord en 1736 et 1737* par l'Abbé Réginald Outhier (1694-1774), Paris, 1744.

¹⁴On consultera à ce sujet la thèse d'Irène Passeron *Clairaut et la figure de la Terre au XVIII^{ème} siècle*, Paris, 1994. Voir aussi John L. Greenberg *The problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut*, Cambridge University Press, 1995.

¹⁵Outhier op. cit. p. 203-204 cité par D. Fauque in H. Lacombe et P. Costabel, op. cit. p. 215-216.

Les mêmes opérations sont ensuite répétées par deux autres observateurs et quand elles sont terminées, ils évaluent une moyenne des résultats.

"On se réunissait, et on prenait un milieu entre toutes les observations, qui ne se trouvaient différentes entr'elles que de quelques secondes."¹⁶

Tous les angles sont observés; aucun d'eux n'est déduit par le calcul.

La mission du Pérou (1735-1746) est conduite par l'académicien astronome L. Godin; parmi les participants citons P. Bouguer, Ch. de La Condamine, J. de Jussieu. Les instruments et les méthodes sont semblables à ceux utilisés en Laponie; cependant afin d'améliorer la précision des mesures d'angles, des micromètres sont ajoutés aux lunettes fixées sur l'alidade des quarts de cercle et des secteurs. D. Fauque¹⁶ précise:

"Dans les tables des triangles qu'il (La Condamine) nous propose, les erreurs reportées sur chaque angle n'excèdent pas 4"; or le cheveu de l'alidade du quart de cercle de 3 pieds qu'il utilisait couvrait 8" à 10"; on ne pouvait donc espérer une plus grande précision.

Le rapport de Maupertuis sur l'usage du quart de cercle de 2 pieds précise des conditions d'emploi similaire. Le quart de cercle muni d'un micromètre, que l'on peut supposer être de même nature que celui de La Condamine, donne, dans la réduction de ses parties, le dixième de seconde d'arc."

Ces missions permettent de confirmer l'hypothèse de Newton, selon laquelle la terre est un ellipsoïde aplati aux pôles¹⁷. Elles assurent une avancée décisive dans la conception des instruments, dans la mesure des angles et des longueurs, et aussi dans les méthodes d'observation et de calcul. Les mécaniciens et les opticiens perfectionnent leurs techniques; des tables, abaqués et barèmes rendent les calculs plus aisés.

Mais, à côté de ces progrès, on se heurte encore à une multiplicité de mesures et d'étalons qui ne peut que compliquer toutes les relations et rendre plus difficile l'interprétation des résultats de recherches dans tous les secteurs. En France, on ne compte pas moins de 700 à 800 noms d'unités de mesure, variant de région en région, de corporation en corporation. Talleyrand écrit en 1790:

"L'innombrable variété de nos poids et mesures et leurs dénominations bizarres jettent nécessairement la confusion dans les idées, de l'embarras dans le commerce".¹⁸

¹⁶ibid. p. 215. Les méthodes d'observation sont présentées au paragraphe B II 4 et à l'annexe 2.

¹⁷Nous renvoyons en particulier à l'ouvrage édité sous la direction de H. Lacombe et P. Costabel, *La Figure de la Terre du XVIII^e siècle à l'ère spatiale*, op. cit. p. 97-114

¹⁸Rapport de Talleyrand, mai 1790, Gerbault, 1906, *Procès-verbaux des Comités d'agriculture et de*

A la veille de la Révolution Française, on connaît encore partout l'incohérente diversité des poids et des mesures¹⁹. On sait que l'Assemblée constituante par le décret du 8 mai 1790 charge l'Académie des Sciences d'établir un système de mesures susceptible d'être adopté dans le monde entier. Une commission composée de Borda, Lagrange, Laplace, Monge et Condorcet se met à l'étude et la Commission Générale des Poids et Mesures est créée en date du 6 mars 1791 avec mission de déterminer l'unité de base à partir de la longueur d'un arc de méridien. C'est le départ de la folle aventure de Delambre et Méchain.²⁰

- Delambre et Méchain

De nombreux ouvrages et articles sont consacrés aux travaux de ces deux savants²¹.

Ces mesures, calculs et résultats, d'ailleurs scrupuleusement décrits par Delambre lui-même dans *Base du système métrique décimal 1806-1810*, marquent le début d'une tradition géodésique française qui se transmettra tout au long du XIX^e siècle. De nouveaux instruments y sont recommandés: les règles bimétalliques pour la mesure des bases et le cercle répéteur de Borda pour la mesure des angles, cercle dont nous reparlerons souvent plus loin²². Les méthodes de calculs sont présentées en détail dans

commerce de la Constituante, de la Législative et de la Convention, t.1, p.558, 2 septembre 1790, Cité par D. Guedj op. cit. p. 101.

¹⁹A propos de l'unification de ces mesures, nous renvoyons à la thèse de Ruth Champagne, *The role of five eighteenth century French mathematicians in the development of the metric system: Condorcet, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge*, thèse dactyl., Columbia, 1979, ainsi que les travaux de Louis Marquet, par exemple: "Condorcet et la création du système métrique décimal", in P. Crépel, C. Gilain (dir.), *Condorcet mathématicien, économiste, philosophe, homme politique*, Paris, Minerve, 1989, p. 52-62. On pourra aussi consulter la thèse de D. Guedj citée à la note 2.

²⁰ Les élèves de seconde et première scientifique du Lycée Gérard de Nerval à Luzarches ont réalisé sous notre conduite, en collaboration avec un professeur de physique et un professeur d'histoire une exposition présentée dans des villes du Val d'Oise. Cette exposition a ensuite circulé dans plusieurs établissements scolaires français et dans des colloques d'histoire des sciences ouverts aux enseignants du second degré. Parmi les articles écrits autour de ces travaux citons: Jozeau and Grégoire "Measuring an Arc of Meridian", in *Vita Mathematica Historical research and integration with teaching*, editor Ronald Calinger, 1996, p. 269-277.

²¹On pourra par exemple consulter: Levallois J.J., op. cit. et "La méridienne de Dunkerque à Barcelone et la détermination du mètre (1792-1799)" in *Actes du 114^e congrès national des sociétés savantes*, Paris 3-9 avril 1989; Dhombres N. et J., *Naissance d'un pouvoir: sciences et savants en France (1793-1824)*, Paris, 1989; Motais de Narbonne A.M., *Une mesure révolutionnaire: le mètre*, Observatoire de Paris, 1988; Bigourdin G., *Le système des poids et mesures*, 1901; Caille J., "Delambre, sa participation à la détermination du mètre" in *Recueil des publications de la Société havraise*, 1936, p. 140; Champagne R.I., *The role of five eighteenth-century French Mathematicians in the development of the metric system*, Columbia University, 1979; Chauvin L., *Histoire du mètre d'après les travaux et rapports de Delambre, Méchain*, Limoges, 1901; Costabel P., "Du pendule simple au mètre étalon" in *La vie des sciences*, t.1, n°1 1984 p. 51-56; Nous renvoyons aussi à la bibliographie pour les différents écrits de Delambre.

²²Une description et une photo de ce cercle se trouvent en Annexe 2; Voir aussi le paragraphe 4 du B.II.

l'ouvrage précité et serviront longtemps de modèle à l'école géodésique française. Nous en ferons la présentation au paragraphe 2 de ce chapitre A.I. Delambre et Méchain mettent aussi en place une nouvelle méthode pour mesurer la latitude à partir des distances zénithales avec le cercle répétiteur. Nous n'insisterons pas sur ce point car les mesures astronomiques sont hors de notre champ d'étude.

De ce travail remarquable sortiront le mètre et tous ses dérivés. Mais l'oeuvre de Delambre et Méchain est surtout féconde par les avancées techniques et théoriques qu'elle engendre: Borda a conçu de nouveaux appareils de mesure notamment son fameux cercle répétiteur et ses instruments à réflexion; Delambre et Méchain mettent au point de nouvelles méthodes d'observations et de calculs pour la résolution des triangles.

C'est la première fois qu'ayant mesuré les trois angles des triangles, on se pose la question de la répartition de l'erreur de fermeture; de même, mesurant plusieurs bases, on se préoccupe d'ajuster les observations afin d'obtenir un réseau géométrique. Jusque là, on mesurait les trois angles des triangles et on "fermait" sur des bases mais on se limitait à vérifier si les erreurs ne dépassaient pas certaines normes. Avant les opérations de Delambre et Méchain, on obtenait des erreurs de fermeture des triangles de l'ordre, de 10" à 13" avec un maximum de 40". Leurs opérations abaissent la moyenne à 1"3 avec un maximum de 4,7". Lorsque l'écart obtenu ne respectait pas ces chiffres, les observateurs ou calculateurs répartissaient les erreurs sur les trois angles. Mais il est frappant de constater que les pratiques sont diverses; aucune règle n'est mise en place. B. Bru²³ se demande si "l'anarchie n'allait pas s'installer au sein de tant d'exactitude?". En effet, il cite La Condamine qui est assez de l'avis de répartir également la petite différence qui reste "surtout quand les angles sont à peu près égaux et que la différence ne va qu'à quelques secondes", Bouguer qui quelquefois partage cette différence également et d'autres fois inégalement "en regardant comme plus exacts les angles qui s'étaient trouvés précisément de la même grandeur par les différents quarts de cercles et mesurés par les divers observateurs" et Delambre qui propose, en 1806 alors qu'il reprend l'ensemble des calculs de la méridienne de Paris, par exemple "de diminuer de 0"1 l'angle de chaque triangle opposé à la base et augmenter les deux autres de 0"05".

- Les ingénieurs géographes²⁴

²³B. Bru "Laplace et la critique probabiliste des mesures géodésiques" in H. Lacombe et P. Costabel op. cit. p. 228-229; les passages qu'il cite sont dans: La Condamine *Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral*, Paris, 1751, p. 20; Bouguer *La Figure de la Terre*, 1749, p. 103-104 et Delambre, *Base du système métrique décimal*, Paris, 1810, t.II, p. 704.

²⁴Pour écrire ce paragraphe, nous nous sommes essentiellement inspirées des ouvrages suivants: H. Berthaut, *Les ingénieurs géographes militaires*, Paris, 1902, qui reste l'ouvrage de référence; H. Berthaut *La carte de France 1750-1898*, 2 Tomes, SGA, 1899; Hollander (d'), "L'oeuvre cartographique du Dépôt de la Guerre" in *Revue historique des armées*, n°171, juin 1988; J.J. Levallois, op. cit. p. 87 et ss; P. Bret, "Le Dépôt général de la Guerre et la formation scientifique des ingénieurs géographes militaires en France

En 1726, le nom d'"ingénieurs géographes des camps et armées" est donné au "corps des ingénieurs des camps et armées" affecté dès 1696 au Dépôt de la Guerre créé en 1688; ce dépôt est d'abord chargé de la recherche et de la conservation des archives militaires, puis la tâche des ingénieurs géographes s'élargit. Par exemple, en campagne, ils doivent lever les plans des camps successifs et des champs de bataille.

Au gré des événements politiques et des différents gouvernements, le Dépôt de la Guerre subit des changements²⁵. En voici quelques-uns qu'il nous semble utile de faire figurer ici:

* En 1793, sous la direction du général Calon, il est chargé du service de la carte de Cassini.

* Après 1795, les astronomes Laplace, Delambre, Méchain quittent le Dépôt de la Guerre et constituent avec d'autres savants le Bureau des Longitudes.

* En 1796, une "école de géographes" recrutant à la sortie de l'École polytechnique est créée.²⁶ Le Dépôt de la Guerre recrute ses ingénieurs géographes parmi ces géographes. (En 1804, le nombre des ingénieurs géographes dépasse la centaine).

* Entre 1800 et 1815, sous le Consulat et l'Empire, ils font de nombreuses triangulations²⁷. Nous les résumons dans le tableau ci-dessous:

(1789-1830)" in *Annals of Science*, 48, 1991, p. 113-157.

²⁵Le corps des ingénieurs géographes qui se recrute ensuite, à partir de 1798, à l'École polytechnique est supprimé en 1831; il fusionne alors avec le Corps d'Etat Major.(Ordonnance du 22 février 1831; voir "Notice historique sur le Corps d'Etat-major" in *Bulletin du Corps d'Etat-major*, 1875). Il est reconstitué en 1882 sous la forme du service géographique de l'armée (transformation du Dépôt de la Guerre, puis IGN) par un officier polytechnicien le général François Perrier. Pour plus de détails sur ce sujet, nous renvoyons au livre de Berthaut. H, *Les ingénieurs géographes militaires*, Paris, 1902 et à d'Hollander op. cit. p. 44. (Berthaut signale que la dénomination "ingénieur géographe militaire" est attribuée dans une ordonnance du 26 février 1777. D'autre part, il renvoie à une notice sur le Dépôt de la Guerre du Général Vallongue).

²⁶cf. d'Hollander, op. cit. p. 45

²⁷D'après J.J. Levallois in *Mesurer la terre; 300 ans de géodésie française*, 1988, p. 87-88. Il ne cite aucun nom pour la région de Genève. L'article "L'astronome Nicolas-Antoine Nouet (1740-1811), membre de l'Institut d'Egypte, Directeur de la carte de Savoie" de Patrice Bret, paru dans *Les scientifiques et la montagne*, Paris, CTHS, 1993, nous apprend que l'ingénieur géographe Nouet dirigea les opérations géodésiques en Savoie, qu'il remplaça Delambre dans l'expédition d'Egypte (1796-1801) et qu'il dirigea la section topographique chargée de la carte du Mont-Blanc jusqu'à sa mort en 1811.

Lieu	Observateurs	Dates ²⁸
Hanovre	Epailly	1800-1802
départements réunis (Rhur, Rhin et Moselle, Sarre)	Tranchot Général Calon	1800-1805 achevé en 1814
Suisse	Colonel Henry	*
région de Genève et Savoie	*	1801-1802
carte de la Bavière	Colonel Bonne	1801-1807
Italie	Puissant, Moynet, Coraboef, Béraud	1801-1813

Ces travaux sont avant tout destinés à servir de canevas à une topographie militaire.²⁹

Nous en venons maintenant à la période qui va nous occuper plus précisément.

- Les travaux en France de 1815 à 1865³⁰

Une ordonnance du Roi Louis XVIII, en date du 11 juin 1817, confie aux ingénieurs géographes, l'exécution d'une carte topographique de la France au 1/80000 dite carte de l'État-major, appropriée à tous les services publics et combinée avec les opérations du cadastre; cette carte remplacera la carte des Cassini.³¹ Une commission de 14 membres présidée par Laplace est mise en place pour examiner ce projet. Voici les différents membres :

- Département de l'Intérieur: Laplace, Delambre, Bérigny, Vallot, de Bonnard;

²⁸Les dates mentionnées sont indiquées par Berthaut H., *La Carte de France*, op. cit. p. 115 et ss ainsi que par Bassot dans son article op. cit. Ils citent aussi les triangulations suivantes: cours du Rhin entre Strasbourg et Coblenz pendant les campagnes de l'an III, levées de la Souabe et du Wurtemberg en 1800; ils signalent aussi des travaux topographiques en Egypte et en Syrie en vue de l'établissement de cartes.

²⁹Les méthodes d'observations et de calculs employées sont résumées dans Berthaut H., op. cit. tome I, p. 114 qui renvoie pour plus de détails au *Mémorial du Dépôt de la Guerre*. (A l'annexe 46, nous donnons le contenu de cette revue correspondant à cette période).

³⁰Pour écrire le paragraphe suivant, nous résumons une partie du chapitre VIII de J.J. Levallois op. cit. Ce dernier nous dit p. 91 qu'il a utilisé comme source le livre du colonel Berthaut *La carte de France 1750-1898*, SGA, Paris, 1898 (Les Travaux des commissions en vue de l'exécution d'une nouvelle carte de France au 1/80000° sont rapportés dans ce dernier ouvrage Tome I, chap. III, p. 171 à 255).

³¹L'insuffisance de la carte de Cassini est reconnue dès les premières années du XIX^e siècle. Le chevalier Bonne, colonel au Corps des ingénieurs géographes, expose dans un mémoire, rédigé sur un ordre de l'Empereur datant du 6 février 1808, le programme des travaux à entreprendre pour l'exécution d'un projet en vue d'établir une nouvelle carte de France. Mais les campagnes qui suivent ne permettent pas à ce projet d'être commencé (voir Berthaut H., op. cit. Tome 1, p. 171).

- Département de la Guerre: M. le Général Haxo et en son absence M. de Beaufort d'Houtpoul; Brossier, Bonne, Puissant

-Département de la Marine: M. le Chevalier de Rossel

-Département des Finances: MM. Hennet, Lesueur, Hautier, Chauvet.

La Commission Royale était assistée par une Commission du Dépôt de la Guerre constituée d'ingénieurs géographes et chargée de mettre au point les instructions de travail puis de les soumettre à la Commission Royale.

Les opérations géodésiques du 1^{er} ordre, observations géodésiques et astronomiques, ont lieu de 1817 à 1844; de 1817 à 1830 pour les chaînes puis jusqu'en 1844 pour les espaces de 1^{er} ordre complémentaires.³² Puissant les explicite dans "La Nouvelle Description géométrique de la France" publiée dans *Le Mémorial du Dépôt de la Guerre*.³³ Les instruments utilisés sont des cercles répéteurs de Gambey.

"Les cercles répéteurs exécutés par Lenoir avaient, l'un 0m42, l'autre 0m36 de diamètre, et donnaient à la lecture les minutes centésimales, tandis que ceux de Gambey, employés pour les chaînes primordiales de la carte de France, donnaient 20", et par l'estime 10", que quelques uns donnaient même directement. Delambre dit, à la vérité, qu'il pouvait estimer les dixièmes de minute à 2 ou 3 près, et qu'il avait ainsi les quarts de minute."³⁴

³²Signalons que le Dépôt de la Guerre est dissout par une ordonnance du 22 février 1831. Après cette date, les travaux sont exécutés par les officiers du "corps d'état-major" qui succèdent aux ingénieurs géographes.

³³Cette revue paraît pour la première fois en 1802. Nous donnons en bibliographie la liste des numéros jusqu'en 1864. Puissant dans le tome VI expose les formules et les méthodes dont il fait usage ainsi que les résultats des triangulations jusqu'en 1831, puis dans le tome VII il donne les résultats jusqu'en 1839 et compare ensuite les résultats des observations géodésiques et astronomiques. Peytier dans le tome IX (1853) donne les opérations de 1839 jusqu'en 1844-45, époques auxquelles ont été finies les observations géodésiques et astronomiques.

³⁴Peytier op. cit. p. 386. Contrairement aux cercles de Borda, les cercles de Gambey ne comportent pas d'erreur de centrage. Dans le tome 3 seconde partie de *Exposition universelle de Paris de 1851. Travaux de la Commission française sur l'industrie des nations*, Paris, 1855, nous trouvons aux pages 93-94 du rapport du X^{ème} jury "Instruments de mathématiques, de physique, d'astronomie etc.. par M. Mathieu (membre de l'Institut et du Bureau des longitudes)" un éloge du constructeur d'instruments français, Gambey: "Arago avait deviné, en 1815, un grand artiste dans les premiers essais de Gambey; il le conserva à la France au moment où le découragement l'entraînait en Amérique. [...] Il chargea Gambey de la construction de la grande lunette méridienne qui a remplacé celle de Ramsden, d'un cercle mural de deux mètres de diamètre et d'un équatorial. [...] Nos instruments se distinguent par la bonne disposition des différentes parties, la simplicité, la légèreté, l'élégance des formes. Dans l'école française, à la tête de laquelle on doit placer Gambey, comme dans l'école de Reichenbach qui l'a précédée, on coupe, on rabote, on lime, on tourne les métaux avec une grande netteté. On commence à trouver les traces de ces bonnes manières de travailler dans les instruments anglais et allemands construits par les artistes qui se sont formés à Munich ou à Paris. [...] On ne craint pas de placer Gambey parmi les hommes qui ont puissamment contribué aux progrès des sciences en fournissant aux physiciens, aux astronomes et à tous les expérimentateurs de grands moyens d'investigations."

On observera sur la figure ci-jointe les chaînes du 1^{er} ordre constituant le canevas trigonométrique de la France: 4 chaînes méridiennes (Paris, Bayeux, Sedan, Strasbourg), 6 chaînes parallèles (Paris, Amiens, Bourges, Rodez, le parallèle moyen et celui des Pyrénées), et 7 bases (Melun, Perpignan, Dax, Bordeaux, Ensisheim, Aix et Plouescat).³⁵

³⁵Pour les chaînes du 1^{er} ordre, les chefs sont les suivants: le colonel Bonne sur la partie ouest de la perpendiculaire de Brest à Strasbourg et le colonel Henry pour la partie est; le capitaine Coraboeuf pour le parallèle de Bourges, les capitaines Delahaye et Delcros pour la méridienne de Bayeux; Les capitaines Bérout et Sion sur la quadrilatère Paris-Bourges-Cholet- Mortain et les environs de Paris sont complétés en 1820 par Laignelot et Lecesne. (D'après Berthaut. H. op. cit. Tome II, p. 2.).

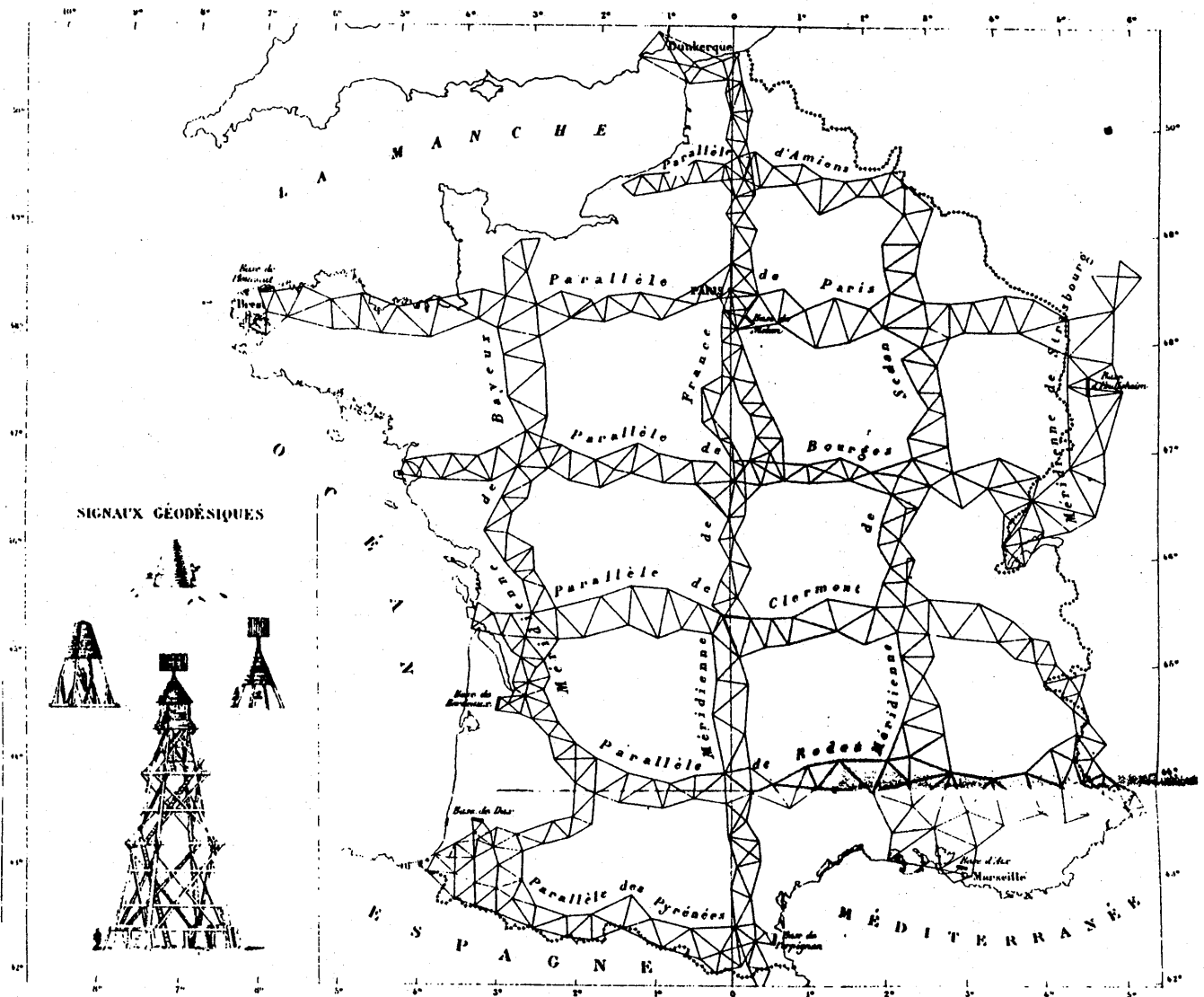
TRIANGULATION GÉNÉRALE DE LA FRANCE

Chaines méridiennes et parallèles

Bulletin de la Société de Géographie.

27 Février 1891.

Pl. I



"La géodésie française" par le lieutenant colonel Bassot

in *Bulletin de la Société de géographie*, série 7, Tome 12, 1891, planche I, p. 165-182.

(La même carte se trouve dans Berthaut. H. *La Carte de France 1750-1898*,
Tome I, p. 24, 1899)

L'élaboration de la carte d'État-major de la France au 1/80000, longue et fastidieuse tâche, ne sera achevée qu'en 1878.³⁶

Le Dépôt de la Guerre, parallèlement à ce travail, est occupé, de 1830 à 1863, à l'exécution de la triangulation expédiée* de l'Algérie. C'est alors qu'il décide de procéder à des opérations régulières en Algérie.³⁷ Auparavant en 1861, il a dû participer au rattachement des triangulations françaises et anglaises.³⁸

Ce survol, bien que rapide et essentiellement chronologique, de quelques aspects des travaux de géodésie accomplis en France jusque vers 1860 est riche d'enseignements.

Plusieurs éléments sont à mettre en valeur pour expliquer ce que certains appellent le déclin de la géodésie française au XIX^e siècle.

Sur le plan institutionnel, la coupure accomplie en 1795 entre le Dépôt de la Guerre et les astronomes est néfaste. En effet, n'accomplissant que les mesures astronomiques que le Dépôt de la Guerre veut bien leur confier, ces derniers se désintéressent peu à peu de la géodésie. Les triangulations du 1^{er} ordre sont de plus en plus exécutées par les ingénieurs géographes qui se préoccupent peu des aspects théoriques. Ces ingénieurs se contentent de respecter les consignes indiquées, qu'elles soient relatives aux observations ou aux calculs. Et ce phénomène s'accroît pendant la longue période nécessaire à l'exécution de la carte d'État-major: les ingénieurs géographes se consacrent alors entièrement à ce travail, plus topographique que géodésique*. Le temps disponible à une quelconque réflexion est bref tant les opérations sont astreignantes. Pour des raisons de budget, il faut se hâter d'observer, de calculer ... Ces réalités ne devront pas être oubliées dans nos analyses.

De même que Laplace domine pour une grande part la recherche mathématique pendant toute cette période, il y a un personnage qui domine alors la géodésie française: c'est Louis Puissant (1769-1843). L'influence et l'autorité de ces deux hommes sont

³⁶La carte d'Etat-Major comprend 273 feuilles. Elles ne sont pas toutes publiées simultanément; à l'article "carte géographique" du *Dictionnaire* de Sonnet, édition de 1874, il est précisé que la carte comprend 259 feuilles dont celle des environs de Paris parue en 1833; Les feuilles des Alpes et de la Corse, ne sont publiées qu'entre 1878-1882 (Le Dépôt de la Guerre n'entreprend qu'en 1862 le levé de la carte de la Corse). Pour plus de détails, voir Berthaut H., *La Carte de France...* op. cit. Tome II.

³⁷Ces travaux sont relatés dans le tome X (1871) du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*. Le capitaine Perrier participe à ces opérations et essaie d'introduire des réformes.

³⁸Pour plus de détails, voir Berthaut. H. op. cit. Tome II, p. 34 et ss. Berthaut signale un premier rattachement datant de 1825 mais dont les résultats auraient été perdus! Aussi à la demande du gouvernement anglais une autre liaison est entreprise: "Le Dépôt de la Guerre fut pris à l'improviste, car il ne restait que très peu d'officiers habitués à la pratique des observations géodésiques et de plus les cercles disponibles étaient petits, fatigués par un long service et le temps manquait pour en commander d'autres". Les délégués français sont le colonel Levret et deux jeunes sortis de l'école d'Etat-Major, n'ayant encore jamais participé à ce type d'expédition, les capitaines Beaux et Perrier. Voir aussi le tome IX du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*.

comparables avec toutes les inerties qui vont en découler vers la fin de leur règne. Puissant entre au Dépôt de la Guerre en 1790 et participe à diverses campagnes militaires; après la paix de Bâle, conclue en 1795 par la France avec la Prusse et l'Espagne, il rentre à Paris où il suit les cours de Laplace³⁹ ainsi que ceux de Lagrange. Il triangule l'île d'Elbe puis la Lombardie en 1803-1804. Nommé professeur au Dépôt de la Guerre, il y enseigne la géodésie et la topographie. En 1828, il est nommé à l'Académie des Sciences, au fauteuil de Laplace. Il est le premier à présenter, dans un *Traité de Géodésie*, une synthèse des travaux de Delambre, constituant la géodésie en un corps de doctrine, que l'on peut enseigner. La première édition de cet ouvrage paraît en 1805, la seconde en 1819 avec un supplément en 1827 et la troisième en 1842⁴⁰. Ce traité servira longtemps de référence aux géodésiens français, avec tous les inconvénients qui en résultent pour les progrès de la géodésie française, comme nous le verrons dans la suite de cette étude.

2 Les méthodes utilisées dans la première moitié du XIXe siècle

Qu'entend-on exactement au milieu du XIX^e siècle par "méthodes françaises" en matière de géodésie? Il est possible de s'en faire une idée en parcourant les traités de géodésie en vigueur à cette époque. Les traités de Puissant sont bien sûr une source de renseignements incontournable; citons aussi particulièrement *Topographie et Géodésie* de Salneuve 1841, *Cours de Géodésie* de Le Français 1834, *La Géodésie* de Bégat 1839⁴¹. Nous indiquerons dans les paragraphes qui suivent des différences notables entre les méthodes françaises et les méthodes allemandes.

- Les instruments et les méthodes d'observation

L'instrument utilisé en France depuis 1787 pour mesurer les angles horizontaux est le cercle répétiteur. Fondé sur le principe de répétition inventé en 1752 par l'astronome allemand Tobie Mayer, cet instrument augmente la précision dans la mesure

³⁹Nous pouvons supposer qu'il s'agit des cours de l'Ecole Normale de l'an III; Parmi les leçons de Laplace, nous remarquons une leçon de probabilités.

⁴⁰Une comparaison de ces éditions sera présentée au § B I, note 3, p. 133 et dans l'épilogue p. 220. .

⁴¹Dans l'article "Géodésie" de l'*Encyclopédie moderne ou Bibliothèque universelle de toutes les connaissances humaines*, Paris, Duménil, t. XIII, 1842, p. , p. 298-305, L.B. Francoeur (1773-1849), par ailleurs auteur d'un traité de géodésie, donne les références suivantes:

"*Base du système métrique*, par Delambre, 3 vol. in 4°, outre un 4e, par MM. Biot et Arago. *La mesure de l'arc de méridien*, par Delambre; la *Géodésie* de M. Puissant, 2 vol. in 4°, et quelques mémoires séparés. On consultera aussi les *Mémoires* de M. Legendre, parmi ceux de l'Académie des sciences; la *Mécanique céleste* de Laplace; divers volumes de la *Connaissance des temps*; le deuxième volume du *Mouvement apparent des corps célestes*, par Dionis du Séjour, etc."

On notera l'imperméabilité à toute référence autre que française, ce que nous confirmerons plus loin.

des angles en réduisant les erreurs de lecture. La précision obtenue avec le cercle répétiteur⁴² utilisé par Delambre et Méchain est de une à deux secondes. Rappelons que le quart de cercle utilisé par l'Abbé Picard permettait seulement une précision de 1/4 de minute d'arc; l'ajout de micromètres par les Cassini donna une précision de 15 secondes.

Dans la préface de son *Traité de géodésie*, 1ère édition en 1805, Puissant écrit:

"Le troisième Livre est entièrement consacré à l'exposition des opérations géodésiques; (...) j'ai exposé diverses méthodes (...) mais j'ai seulement donné la description et fait connaître l'emploi du cercle répétiteur; parce que cet instrument offrant beaucoup de précision dans la mesure des angles, doit pour cette raison interdire l'usage du graphomètre et même du quart de cercle astronomique."⁴³

Les chapitres 3 à 7 de ce traité sont consacrés à la description et l'usage du cercle répétiteur ainsi qu'aux corrections à apporter aux angles mesurés avec cet appareil. De plus, Puissant ajoute en appendice une description détaillée de ce cercle devant être utile aux artistes désireux de construire un tel cercle ou de remettre en état quelques unes de ses parties.

Chaque traité de géodésie consulté comporte lui aussi une description détaillée de ce nouvel instrument, indiquant la manière de s'en servir et louant les avantages que l'on en tire quant à la précision. Il est recommandé, suivant en cela les conseils de Laplace, d'observer chaque angle en effectuant 3 séries de 20 répétitions.

Comme nous le verrons ultérieurement, cet instrument ne sera abandonné en France que dans les années 1860.

- Le traitement des données

Voyons maintenant la marche suivie dans la tradition française pour le calcul de la mesure des angles des triangles intervenant dans la méthode de triangulation⁴⁴. Cette méthode nécessite la mesure d'une base et la mesure des angles des triangles, angles dits horizontaux⁴⁵. Le schéma ci-dessous indique les diverses corrections à apporter à la

⁴²Pour plus de détails sur cet instrument voir les annexes 2 et 3, et le § 4 du B.II.

⁴³Puissant, 1805, p.viiij

⁴⁴Snellius utilise cette méthode en 1615 en Hollande. Auparavant, Gemma Frisius l'avait déjà employée en 1533. J.P. Verdet, à la page 265 de son livre *Une histoire de l'astronomie*, 1990, écrit: "que Tycho aurait utilisé". Installé dans une île du Sund, Hveen où il construit en 1576 l'observatoire moderne d'Uraniborg, il n'est pas impossible qu'il ait triangulé cette île. Rappelons que la triangulation est utilisée par tous les géodésiens à partir de Picard.

⁴⁵Le géodésien est aussi amené à faire des mesures astronomiques: mesure de la distance zénithale et de l'azimut de certains points de la triangulation afin d'orienter cette dernière; les angles mesurés sont alors

mesure d'un angle: correction d'excentricité, réduction à l'horizon, réduction au centre de la station ou/et du signal observé.⁴⁶ Ensuite, la dernière correction faite est l'application d'un théorème de Legendre⁴⁷:

"Étant donné un triangle sphérique dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droites, les angles ainsi diminués deviendront les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé"

Dans son traité de 1841, Salneuve⁴⁸ précise:

"De cette manière, l'erreur d'observation est comprise implicitement dans la quantité que l'on retranche de chaque angle".

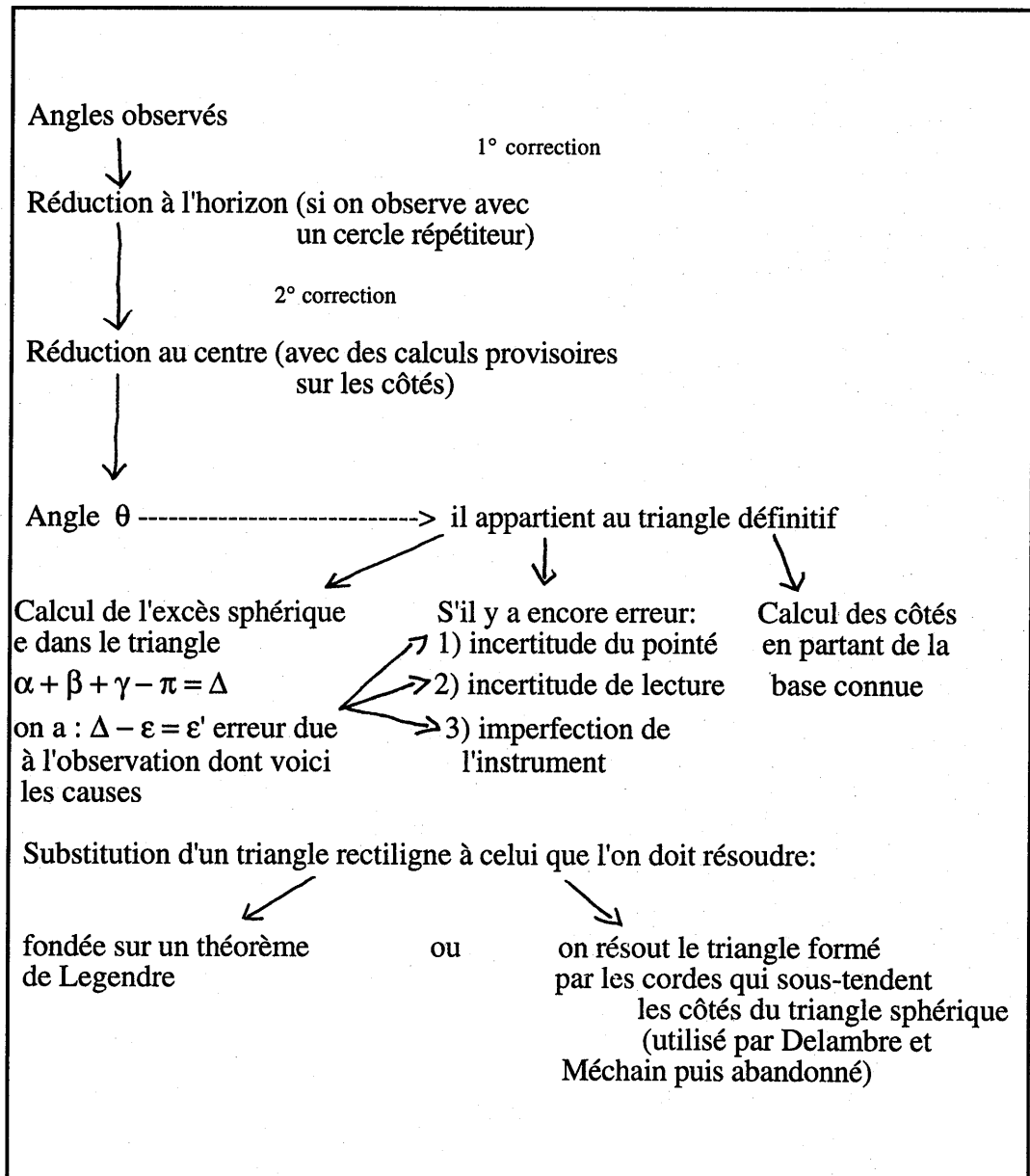
verticaux.

⁴⁶Puissant (1805) op. cit. donne les formules correspondantes à ces diverses corrections: Livre III, chapitre IV, "De la correction à faire aux angles mesurés avec le cercle répétiteur, à raison de l'excentricité de la lunette inférieure"; chapitre V, "De la réduction des angles d'un plan à un autre plan"; chapitre VI, "De la réduction des angles au centre de la station"; chapitre VII, "De la réduction au centre du signal observé, ou de la phase des signaux". Nous avons nous-mêmes étudié quelques unes de ces corrections avec nos élèves de première S; voir annexe 9.

⁴⁷Ce théorème se trouve dans la partie trigonométrique des *Éléments de Géométrie* de Legendre, 3^e édition, Paris, 1800, p. 465.

⁴⁸Salneuve donne, à l'école d'application du Corps royal d'État-major, un cours qu'il assure en remplacement du capitaine Lecamus, victime de la maladie qui a frappé Paris en 1832. Ce cours très classique suit le traité de Puissant, dont Salneuve a été l'élève; Le colonel Puissant dit-il " a traité ses cours avec supériorité". Salneuve cite le théorème de Legendre aux pages 297 à 303 de son traité.

Marche des calculs dans la tradition
 française⁴⁹
 d'après Salneuve 1841



⁴⁹Nous donnons à l'annexe 4 des tableaux, indiqués par Salneuve p. 392 à 399 de son traité, servant à consigner les observations et leurs différentes corrections.

Puissant et, de ce fait, l'école française pensent qu'en procédant ainsi, on a d'une part ramené l'étude à un problème plan et d'autre part on a en même temps réparti les erreurs d'observation dues aux incertitudes de pointé, de lecture et aux imperfections des instruments (si on veut connaître ces erreurs, il suffit de calculer directement l'excès sphérique). Cette procédure peut nous paraître négligente, d'autant plus qu'à partir des années 1820-1830, on opère plus rigoureusement dans divers pays étrangers, comme nous le montrerons en détail dans la suite de cette thèse. Peytier est un des premiers à le constater clairement en 1853⁵⁰, notant l'usage qui se répand hors de France d'utiliser systématiquement le calcul des probabilités pour traiter les erreurs.

Ces pratiques se transmettent lors des campagnes d'observateurs à observateurs, de savants à savants. Elles sont enseignées au cours du XIX^e siècle dans différentes écoles ou institutions. De ce fait, à travers les manuels, le savoir peut se figer; il est aussi soumis aux aléas des réformes comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant. Les progrès en géodésie sont liés d'une part aux avancées techniques concernant les instruments, d'autre part au développement réalisé dans le traitement des données en particulier en faisant appel aux probabilités et à l'analyse. Nous évoquerons donc aussi partiellement l'enseignement des probabilités à cette époque.

3 L'enseignement jusqu'en 1850

- A l'université

Aucun cours de géodésie n'est dispensé à l'université, même si telle ou telle remarque peut être faite à l'occasion dans un cours de géométrie. De toute façon, les Facultés des sciences, créées en 1808, ou plus tard pour certaines villes, n'ont longtemps qu'un rôle secondaire et n'ont pas du tout pour but de former des géodésiens (même théoriciens).

A cette époque, le calcul des probabilités et la théorie des erreurs n'ont guère plus de succès. A la Faculté des Sciences de Paris, le titulaire de la chaire de "Calcul des probabilités et physique mathématique", de 1834 à 1848, est G. Libri. En fait, il n'enseigne guère et se fait suppléer par Despeyroux, Poisson, Bienaymé⁵¹. On expose essentiellement la théorie de Laplace. Précisons que le nombre des étudiants est très faible

⁵⁰Voir Peytier "Notes sur les opérations géodésiques", in *Mémorial du dépôt de la Guerre*, Tome IX, Paris, 1853, p. 381 à 509.

⁵¹Voir P. Crépel, "De Condorcet à Arago, l'enseignement des probabilités en France de 1786 à 1830" in *Bulletin de la SABIX* n°4, p. 29-81. Pour Bienaymé, voir C. Heyde, E. Seneta, *I.J. Bienaymé. Statistical theory anticipated*, New York, Springer, 1977.

(entre cinq et dix!). A cette époque, les élèves compétents en calcul des probabilités sont les polytechniciens, dont nous parlerons ci-dessous.

En 1850, Cauchy demande la suppression de cette chaire. Mais Dumas intervient pour qu'elle reste sous l'appellation "Calcul des probabilités et physique mathématique" qui cache une réalité trompeuse, les probabilités n'étant pas toujours enseignées.

En 1851, Lamé, qui succède à Libri, n'enseignera que peu les probabilités à la Sorbonne. Il fut l'élève de Bienaymé qui était alors, comme le souligne B. Bru, le seul représentant de la théorie laplacienne qu'il défend.⁵²

- A l'École polytechnique

A la création de l'école, en 1794, la géodésie ne constitue pas une matière d'enseignement autonome. Nous retrouvons les différentes notions qui la composent dispersées, suivant les années, soit dans le cours d'astronomie (pour la description des instruments, les mesures astronomiques...), soit dans le cours d'arithmétique sociale (pour les erreurs d'observations, la MMC...). Un cours de "système du monde" est créé en 1810-1811, sous l'influence évidente de Laplace, il est remplacé l'année suivante par un cours de géodésie. Les registres montrent que ces enseignements exposent les méthodes traditionnelles françaises et ne laissent aucune place au calcul des probabilités et à la théorie des erreurs.

Au contraire, au cours du XIX^e siècle, la géodésie sera peu à peu considérée comme une application du calcul des probabilités et une nouvelle matière, la théorie des erreurs, verra le jour.

L'étude de l'histoire de l'enseignement du calcul des probabilités et de la théorie des erreurs peut donc enrichir et éclairer notre réflexion⁵³. A l'École polytechnique, ces deux matières ne font l'objet que d'environ six leçons par promotion (le plus souvent en 2^e année). Ces enseignements doivent être aussi considérés dans leurs relations avec les autres branches des mathématiques en particulier l'analyse. Leur contenu est en lien avec les débats institutionnels et la "science en marche".

Indiquons quelques caractéristiques de l'enseignement du calcul des probabilités:

⁵²Voir les exposés de B. Bru, M. Armatte et T. Martin lors de la journée consacrée à Irénée Jules Bienaymé le 21 juin 1996. T. Martin voit en lui un "Laplacien orthodoxe".

⁵³voir P. Crépel "Le calcul des probabilités: de l'arithmétique sociale à l'art militaire", in B. Belhoste, A. Dahan Dalmedico, A. Picon (dir.), *La formation polytechnicienne (1794-1994)*, Paris, Dunod, p. 197-215.

"Ce cours a le mérite d'exister (seulement deux décennies d'absence sur un siècle et demi) et touche un grand nombre d'élèves (une centaine jusqu'en 1870), alors que la matière n'est enseignée nulle part ailleurs jusqu'au tiers du XIX^e siècle, puis ne l'est que de façon sporadique et , en pratique, seulement à quelques étudiants, jusqu'au début du XX^e siècle.

Mais il ne bénéficie pas d'une place à lui, il est "ballotté" et "saupoudré" entre l'arithmétique sociale, l'analyse, l'astronomie-géodésie; il est enfin réduit à "la portion congrue".⁵⁴

Soulignons aussi que cet enseignement se détache peu à peu du projet de "mathématique sociale" de Condorcet pour s'orienter dans deux directions différentes: l'une traitant quelques problèmes de mathématiques classiques, l'autre appliquant des méthodes purement utilitaires liées à des préoccupations pratiques, le plus souvent militaires, comme la dispersion et le réglage du tir ou la théorie des erreurs en géodésie.

Donnons quelques repères chronologiques sur l'enseignement des probabilités:

*Fourier, en 1795-1797, reste conforme au projet des encyclopédistes. Il propose un cours très complet comportant notamment un chapitre sur le calcul des observations.

*Ensuite, pendant 20 ans, le calcul des probabilités semble ne pas être enseigné; il n'apparaît pas dans les sommaires des leçons de 1806 à 1816.

*La réforme de 1816 prévoit un cours "d'arithmétique sociale". Le projet est soutenu par Laplace, tout puissant à cette époque. Mais Cauchy et Binet s'y opposent; il faudra trois ans pour que ce cours soit mis en place et enseigné par Arago. C'est l'époque où les calculs géodésiques, en plein essor, demanderaient une maîtrise des erreurs d'observation. La question est abordée dans la 5^e leçon⁵⁵ sous le titre "Des moyennes à prendre entre les résultats fournis par les expériences particulières", où Arago évoque la MMC, mais sans considérations probabilistes.

*Puis les aspects sociaux disparaissent peu à peu du calcul des probabilités. Jusqu'en 35-36, c'est le même professeur (Arago, puis Savary) qui enseigne l'analyse appliquée, la géodésie et l'arithmétique sociale.

*A partir de 1836, le cours de probabilités est scindé en deux: la partie la plus générale est intégrée au cours d'analyse, la théorie des erreurs au cours de géodésie et d'astronomie. Deux dérives apparaîtront alors: chez les analystes les préoccupations de rigueur et de démonstration seront privilégiées (théorème de Bernoulli ou "loi des grands nombres"); par contre chez les artilleurs et les géodésiens, la simple utilisation d'un outil de traitement mathématique des dispersions sera prise en compte. Par exemple, en 1846,

⁵⁴ibid. p.197-8.

⁵⁵Voir P. Crépel, "De Condorcet à Arago, l'enseignement des probabilités en France de 1786 à 1830" in *Bulletin de la SABIX* n°4. Dans ce numéro sont également transcrites les notes d'un élève lors du cours d'arithmétique sociale d'Arago en 1825.

Chasles enseigne la géodésie. La MMC est présentée dans la 8e leçon, p. 139-144, selon la méthode exposée par Legendre, pour des équations linéaires à trois inconnues. Ensuite, il propose une application à la formule de réfraction, puis à des équations de forme quelconque.

*La réforme Le Verrier de 1850 marque un retour de l'esprit pratique, anti-théorique. Le calcul des probabilités et la théorie des erreurs n'échappent pas à la règle, comme en témoignent ces quelques lignes tirées des instructions imposées par Le Verrier:

"I Analyse

(...) Le cours de probabilité et d'arithmétique sociale contient des notions qui sont d'une utilité incontestable. Nous en maintenons le programme à l'exception toutefois de ce qui concerne le théorème de Bernoulli, dont la démonstration présente des difficultés véritables, et peut être supprimée sans inconvénient" (p. 119)

"VI Géodésie

(...) A l'occasion de la détermination des coefficients de la formule de réfraction par le moyen des observations, on présentait habituellement la méthode dite des moindres carrés. Nous croyons indispensable de la supprimer; elle conduit en effet à des calculs excessivement longs sans avantages bien réels, et que des combinaisons d'équations faites avec un peu d'adresse, permettent toujours d'éviter. On a fait ces dernières années, un étrange abus de cette méthode : on l'applique en toute occasion, souvent hors de propos; prétendant appeler ainsi sur les résultats un degré de confiance dont très souvent ils ne sont pas dignes. Que si le professeur veut dire quelque chose aux élèves, du cas où l'on a à traiter un nombre d'équations plus grand que celui des inconnues, nous préférons qu'il leur enseigne à grouper convenablement les équations de condition, suivant les circonstances..." (p. 151-2)

Nous remarquons surtout que Le Verrier demande la suppression de la méthode des moindres carrés. Cette consigne sera suivie de 1849 à 1871 par les professeurs d'astronomie et de géodésie: Chasles, Faye, Hossard et Laussédats. Nous verrons cependant, au paragraphe C.I.2, que Faye fera une entorse à cette recommandation. Le Verrier est incontestablement un calculateur efficace en astronomie, comme l'attestent ses travaux. Mais ici, son autoritarisme va accentuer le retard des géodésiens français. Les travaux de Gauss sur la triangulation du Hanovre, que nous présentons dans le chapitre suivant, viennent de modifier profondément les méthodes de calcul en géodésie et vont mettre justement à l'honneur la MMC.

Cet historique succinct de l'enseignement de la géodésie et du calcul des probabilités à l'École polytechnique soulève un débat: faut-il former des savants et des

gens de culture ou former des cadres administratifs directement opérationnels? Comment apprécier l'écart entre la Science qui se crée et celle qui s'enseigne?

- A l'École de Metz

A partir de 1802, l'École de Metz⁵⁶ est la principale école d'application de l'École polytechnique. Il s'agit donc, au XIX^e siècle, d'un centre majeur d'enseignement et de culture militaire.

Le contenu des enseignements est d'abord celui de Mézières⁵⁷: "Sciences appliquées et Constructions" (dont levés et cartographies puis topographie et géodésie).

Aux débats traditionnels sur la place des sciences appliquées, sur la répartition entre cours théoriques et cours pratiques, il faut ajouter les désaccords entre l'École polytechnique (l'amont) et l'École de Metz (l'aval) et les rivalités entre les deux armes qui chapeautent cette dernière: l'Artillerie et le Génie. Ces questions ne cessent d'être présentes à chaque période de l'histoire de l'enseignement dans cette école⁵⁸.

Sous la seconde Restauration, le jury d'examen est chargé d'une réforme pour mettre les cours à niveau de l'École polytechnique. Le rôle d'Arago est important; il demande une réforme des sciences appliquées. En 1831, s'opère un rééquilibrage entre l'Artillerie et le Génie, et l'aspect scientifique des cours est renforcé.⁵⁹

En 1850, comme nous venons de le voir, Le Verrier fait une réforme à l'École polytechnique: il prône un enseignement moins théorique et plus pratique pour répondre aux demandes de l'École de Metz.

Cette dernière est alors réorganisée entre 1851 et 1854. Les deux armes, l'artillerie et le génie, sont complémentaires et une fusion est réalisée avec la caution scientifique de l'École polytechnique. On assiste alors à une remise à jour des cours. Il faut minimiser ce qui n'est pas directement utilitaire et tenir compte des nouveaux enseignements de l'École

⁵⁶Pour une étude approfondie sur cette école, voir B. Belhoste et A. Picon (dir.), *L'École d'application de l'artillerie et du génie de Metz (1802-1870)*, Actes de la journée d'étude du 2 novembre 1995, Paris, Ministère de la Culture, Musée des plans-reliefs, 1996.

⁵⁷L'École de Mézières, école militaire formant des officiers du génie, est fondée en 1748. Les mathématiques y sont enseignées successivement par Camus, l'Abbé Bossut, Monge (fondateur, comme on sait, de l'École polytechnique).

⁵⁸B. Belhoste et A. Picon (dir.), "Les caractères généraux de l'enseignement à l'École d'application de l'artillerie et du génie de Metz", dans l'ouvrage précédent, p. 18-28. Les quelques lignes ci-dessous s'en inspirent.

⁵⁹A l'École de Metz, la chaire de "Fortification passagère, art militaire et géodésie" créée en 1810 est pourvue successivement par les professeurs J.F. Français (1811-1833), F.T. Gosselin (1833-1841), J. Sigot (1841-1845), C.L. Jourjon (1846-1850), J.B. Fournier (1851-1854), B.T.H. Meurdra (1854-1861) et la chaire de "Levers et dessin, reconnaissance militaire, puis topographie" par P. Baillet (1802-1805), Boudier (1806-1810), N.D. Marin (1810-1818), P.A. Clerc (1826-1838). B. Belhoste précise dans l'article op. cit. p. 21 qu'en 1838, le professeur de topographie Clerc, mis à la retraite, est remplacé par un polytechnicien, S.F. Livet, connaissant la géodésie. La liste des professeurs se trouve p. 72 de l'ouvrage cité. En 1834, le professeur Le Français publie un *Cours de géodésie*.

polytechnique. L'enseignement de la géodésie et de la topographie est attribuée au Génie. En 1854, on voit apparaître quelques modifications: il y a, entre autres, dix leçons de géodésie et dix de topographie.

Doit-on considérer que cet enseignement est encore adapté? Cette question sera bien sûr posée après la défaite de 1870. Il est vrai qu'au fil des années, les cours suivants tiennent compte des progrès réalisés sur le plan technologique : cours de chimie; recherche sur le tir avec l' apparition de l'artillerie rayée et du problème de la dispersion du tir; rendement des moteurs... alors que d'autres cours sont remarquables par leur immobilisme: fortifications (ce n'est que vers 1860 que les tracés polygonaux allemands sont adoptés); géodésie (comme nous le verrons dans la suite de ce travail, l'évolution ne se réalisera vraiment en France qu'après 1860) et topographie (apparition des hachures seulement en 1861).

Nous remarquons donc davantage d'innovations dans l'Artillerie que dans le Génie. Ce dernier (pourtant plus prestigieux au départ) semble se figer sur des conceptions anciennes. Par contre, dès 1831, le cours traditionnel de balistique est remplacé par un cours sur les "principes de l'artillerie" confié à Guillaume Piobert (1793-1871), qui fait preuve de grandes innovations.⁶⁰ Le calcul des probabilités est intégré à ce cours. En 1829, le Comité d'artillerie avait mis au concours les sujets suivants: "Indiquer, en se fondant sur les principes connus de la théorie des probabilités, le meilleur mode à adopter pour la recherche des portées moyennes, discuter le mérite des divers procédés en usage" et "L'étendue superficielle de l'objet à frapper, et sa position relativement à la batterie étant données, assigner pour chacune des bouches à feu, la fraction exprimant le rapport entre le nombre total de coups et les coups à effets" problème dit de l'efficacité du tir : quelle est la probabilité qu'une bouche à feu donnée atteigne son but?

Poisson, examinateur, remarque que les mémoires rendus, au nombre de trois, ne font pas appel au calcul des probabilités ignoré des artilleurs-savants. Aussi, décide-t-il de leur présenter les formules de la grande théorie laplacienne des moyennes; il publie dans le tome 3 du *Mémorial de l'artillerie* un article "Formules de probabilité relatives au résultat moyen des observations". Cet article présente très clairement la théorie des erreurs de Laplace et notamment la loi de probabilités d'une moyenne prise sur un grand nombre d'observations, la fameuse "loi des erreurs" que l'on appellera au XX^e siècle "la loi normale". Cette loi des erreurs ne dépend que d'un paramètre que l'on peut déduire facilement des observations et qui n'est autre que l'écart-type empirique. Ainsi, à Metz,

⁶⁰Pour approfondir ce sujet, on pourra se reporter à l'article de B. Bru "Le problème de l'efficacité du tir à l'Ecole de Metz. Aspects théoriques et expérimentaux" in *L'école d'application de l'artillerie et du génie de Metz (1802-1870)*, p. 61-69. Les lignes suivantes s'en inspirent.

on devra appliquer ces formules de la "théorie analytique des probabilités" dès que l'on fera des moyennes de mesures de même nature (portées moyennes ou écarts-moyens au centre de la cible) et l'on jugera de la précision d'une arme lorsque la loi de probabilités de ces écarts-moyens sera la plus resserrée possible autour du but (en réalité les artilleurs utiliseront le cercle "probable" centré sur le but)⁶¹. Poisson ne traite pas de la deuxième question car cette probabilité, pense-t-il, n'est pas assignable théoriquement mais juste expérimentalement; elle est évaluable empiriquement. Isodore Didion (1798-1878) s'y intéressera le premier.⁶² Il écrit en 1858 un ouvrage sur le calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles. Il utilise les résultats des expériences faites en 1846 pour vérifier la loi des moyennes de Laplace, alors enseignée à Metz: Didion affirme que les moyennes sont distribuées suivant la loi des erreurs et qu'il en est de même pour les tirs.⁶³

Nous voyons ainsi comment les artilleurs utilisent le calcul des probabilités dès 1831. La dispersion du tir d'un projectile d'artillerie est la résultante d'un très grand nombre de causes perturbatrices, elle est donc régie, suivant le théorème de Laplace, par la "loi des erreurs".

Aux mêmes dates, le cours de géodésie est encore enseigné suivant ce que nous appelons la tradition française, c'est-à-dire sans recours aux probabilités, comme nous le confirme la lecture du *Cours de géodésie* de Le Français publié en 1834. On notera toutefois que, tant à l'Ecole polytechnique qu'à l'Ecole de Metz, une certaine culture de probabilités et de théorie des erreurs se diffuse dans le second quart du XIXe siècle.

N'oublions pas de rappeler, qu'au Dépôt de la Guerre l'enseignement de la géodésie est dispensé par Puissant. Il s'adresse à des militaires qui doivent très vite être opérationnels. Les cours de Puissant, à en croire la teneur de ces traités, sont complets et exposent les méthodes remontant à Delambre. Nous analyserons dans la partie B les ajouts que Puissant effectue dans sa dernière édition⁶⁴

Après cet aperçu de la tradition française, nous allons maintenant passer à la tradition allemande en matière de géodésie.

⁶¹Nous rappelons qu'il est facile de passer de l'écart-moyen e_2 à l'écart probable r par la formule $r = 0,674489 e_2$.

⁶²Voir Didion, *Traité de Balistique*, 1847, réédité en 1860. Didion est contemporain de Bienaymé; tous deux ont joué un rôle dans la vérification et la justification de la loi de Gauss en 1858.

⁶³A la page 61 de son ouvrage *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles*, 1858, il compare la fonction de répartition théorique de la loi des erreurs de Laplace (tables théoriques) avec la fonction de répartition empirique de 100 coups de canon de siège de 16, mesurés horizontalement et verticalement. Nous assistons ici à l'un des premiers exemples d'ajustement de la "loi des erreurs" à des données autres que des "erreurs". Le premier connu est celui des tours de poitrine des soldats écossais analysés par Quetelet en 1846.

⁶⁴Voir partie B I, p. 134, note 3 et p. 220 de l'épilogue.



Schrader et Gallauédec, Atlas classique, Paris, 1960

Quelques repères historiques

Nulle partie de l'Europe n'est plus profondément modifiée que l'Allemagne au cours du XIX^e siècle.

Napoléon la simplifie en faisant disparaître, de 1803 à 1810, la plupart des principautés ecclésiastiques, des villes libres, et des princes immédiats de l'Empire.

Composée de 360 états en 1789, l'Allemagne n'en compte plus que 37 en 1813.

Le Saint Empire Romain a disparu en 1806 et la Confédération du Rhin est une première ébauche d'un nouvel empire allemand.

L'unité allemande est faite par la Prusse. Presque détruite par Napoléon à Tilsitt en 1808, réduite à trois provinces, Brandebourg, Prusse, Silésie, elle reprend en 1815 sa part de Pologne, les territoires de l'Elbe, acquiert une partie de la Saxe, la Westphalie et, sur le Rhin, la plupart des territoires enlevés à la France. Dans la Confédération Germanique, créée en 1815, la Prusse est aussi puissante que l'Autriche.

En 1866, après Sadowa, la Prusse exclut l'Autriche de l'Allemagne, prend le Hanovre et forme la Confédération de l'Allemagne du Nord.

Le Hanovre

1692 Formation de l'électorat de Hanovre, sous l'autorité du Duc de Brunswick-Lünebourg, par acte de l'Empereur Léopold 1^{er}. Cet électorat comprend les principautés de Lünebourg, Kalenbourg, Göttingen et Grubenhagen.

1698 Mort de l'électeur Ernest Auguste de Brunswick. Il avait épousé Sophie, fille de l'électeur Palatin, petite fille de Jacques 1^{er} Stuart Roi d'Angleterre.

1714 Son fils devient Roi d'Angleterre sous le nom de Georges 1^{er}.

1714-1837 Le Hanovre est gouverné par les rois d'Angleterre sans faire partie du Royaume.

1735 L'université de Göttingen est fondée; elle devient un des foyers intellectuels de l'Europe

1803 Le Hanovre est occupé par les armées françaises.

1806 Le Hanovre est cédé à la Prusse

1807 Le Hanovre est réoccupé par les français

1815 Le Congrès de Vienne restaure l'indépendance du Hanovre et l'érige en Royaume.

1837 A la mort de Guillaume V, roi d'Angleterre, sa nièce Victoria devient reine d'Angleterre. Mais le Hanovre est un fief masculin; il revient donc au frère cadet de Guillaume IV.

Son fils, Georges V, s'oppose à la politique prussienne d'unification allemande et s'allie à l'Autriche

1866 Vaincu, le Hanovre devient une province prussienne.

A.II La Tradition "allemande"

1 Présentation générale

Il existe une abondante littérature sur l'histoire de la géodésie et de la cartographie allemandes¹, notamment au XIXe siècle. Fidèle à notre point de vue, nous allons nous centrer sur ce qui est à l'intersection d'une géodésie de précision (essentiellement les triangulations de 1er ordre) et des méthodes mathématiques pour traiter les observations (en particulier les moindres carrés et l'usage du calcul des probabilités). Quelques rappels généraux sont cependant nécessaires.

D'abord, saisir l'"Allemagne" dans sa globalité, du Rhin à la Russie, au cours du XIXe siècle, est d'une extrême complication. Le Saint Empire romain germanique est détruit au début du siècle, voire achevé par les guerres et l'occupation napoléoniennes. Au retour de la paix, le Congrès de Vienne (1815) définit une "Confédération germanique" de 39 états, parmi lesquels l'Autriche et la Prusse, dont la rivalité va marquer une bonne partie de l'histoire ultérieure. Entre le début du siècle avec sa multitude de royaumes, principautés, comtés, duchés, villes libres, etc.... et l'Allemagne unifiée de Bismarck sous la férule prussienne, toutes les formes de gouvernement existent localement et globalement. L'époque que nous étudions correspond (à partir de 1815) à une hégémonie prussienne croissante en Allemagne².

Tout cela ne manque pas, évidemment, d'entraîner des conséquences sur l'organisation de la cartographie, du cadastre, de la science géodésique, des structures et de l'art militaires, des universités ..., toutes questions que nous devons prendre en compte dans ce travail. Notons une certaine unité de langue (bien que certains géodésiens que nous allons évoquer, comme F.W. Struve, aient écrit en français).

L'Université de Göttingen, fondée en 1737, attire, au début du XIXe siècle, des étudiants de toute l'Europe. L'école scientifique allemande connaît avec Gauss, un incontestable développement. A partir de 1810, les créations d'universités se multiplient: Berlin et Iéna en Prusse, Erlangen, Munich, Königsberg... favorisant une décentralisation scientifique. De multiples recherches tant théoriques que techniques voient le jour. On assiste dans les

¹Par exemple, les éditions Konrad Wittwer consacrent une série entière à ces questions. Citons parmi bien d'autres les vol. 9 et 10: Volker Bialas, *Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung. Die Geschichte der Geodäsie als Teil der Kulturgeschichte*, 1985 (en particulier p. 197-238), Klaus Grewe, *Bibliographie zur Geschichte der Vermessungswesen*, id. Nous indiquerons d'autres ouvrages et articles plus loin, en fonction des thèmes et personnages traités.

²Nous parlerons de tradition prussienne ou méthodes prussiennes, lorsque celles-ci renvoient à l'état prussien ou à l'armée prussienne. Dans les autres cas, nous préférons utiliser l'expression "méthodes allemandes" conformément à l'usage de l'époque, en référence à une culture allemande ou à des écrits en langue allemande. Dans les citations, nous respectons le choix des différents auteurs.

universités à une véritable unification allemande avant la lettre qui accentue encore cet essor.

Nous avons déjà évoqué au chapitre A I les triangulations effectuées par les forces d'occupations françaises. Il apparaît qu'au début du siècle la cartographie, la topographie et la géodésie allemandes ne sont pas très en avance. Par exemple, Morozowicz, dans un mémoire fort ancien³, dégage quatre périodes pour l'histoire de la cartographie en Prusse: avant 1816, 1816-1830, 1830-1865 et après 1865. Il règle ainsi le compte de la première période:

"Avant 1816, il existe des travaux d'individus ou d'autorités territoriales, par exemple les cartes de Schmettau, de Le Coq, de Schrötter, qui procuraient une image de portions de territoires isolées. Aujourd'hui encore, on se demande comment il a été possible d'exécuter des choses d'une telle utilité sur une base trigonométrique extrêmement déficiente, souvent même complètement erronée. En 1816, le lever topographique passa du Bureau de statistiques à l'Etat-major général, il fut alors reconnu que les cartes topographiques et celles relatives à l'arpentage devaient suivre deux sortes d'objectifs différents."

La période 1816-1830 voit exécuter enfin des cartes assez correctes malgré des moyens limités, grâce à la "volle Genialität" de Müffling. Vient ensuite une nouvelle période (1830-1865), grâce à la "pensée géniale de l'ingénieur genevois du Carla" qui a exprimé les hauteurs par des courbes de niveaux équidistants. Ces citations un peu en dehors de notre champ d'étude illustrent le retard que les Prussiens vont vite combler.

Parallèlement à la richesse scientifique et technique des universités, ainsi qu'à la montée de la puissance étatique, de nouvelles méthodes géodésiques se développent autour d'une tradition qui débute avec Gauss. L'oeuvre de ce savant de Göttingen, prolongée par les travaux prussiens, va bouleverser la géodésie, au moins à trois niveaux: nouveaux instruments, nouvelles méthodes de calcul et d'organisation, liens plus profonds entre la théorie et le terrain.

Plus précisément, nous nous proposons de présenter plus longuement les travaux de Gauss (1777-1855), F.W. Struve (1793-1864), F.G. Bessel (1784-1846) et J.J. Baeyer (1794-1885).⁴ Des liens divers et nombreux unissent ces savants. Baeyer est l'élève de Bessel; Gauss rencontre Bessel à Brême en 1807; Struve, Gauss et Schumacher se retrouvent en 1820 près de Braack pour mesurer une base⁵, Baeyer et Bessel triangulent ensemble... De nombreuses lettres existent entre Gauss et Bessel⁶, ainsi qu'entre Gauss et

³"Die königlich preussische Landesaufnahme", *Beiheft zu Mil. Wochenbl.*, 1879, p. 1-36. L'auteur donne p. 36 une bibliographie.

⁴L'étude détaillée des méthodes sera reprise dans la partie B de ce travail.

⁵Voir l'introduction de Struve *Arc du méridien de 25°20' entre le Danube et la mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855*, Tome I 1860, Tome II 1857.

⁶Voir *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und Bessel*. Herausgegeben auf Veranlassung des Königlich

Struve⁷, témoignages des échanges épistolaires fructueux entre ces hommes, échanges relatifs aux pratiques et méthodes utilisées en astronomie et géodésie. Nous insisterons un peu plus sur Struve, parce que les histoires de la géodésie négligent souvent à tort ce personnage.

Les premières grandes campagnes de triangulation du Hanovre par Gauss commencent dans les années 1820. C'est à cette époque que va se mettre en place l'essentiel de son corpus de méthodes en géodésie. Quelques années plus tard, la Section Trigonométrique de l'État-major prussien entreprend des triangulations du premier ordre. Ces travaux sont confiés à Bessel et Baeyer. Le rapport de ce travail paraît en 1838 sous le titre de *Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und russischen Dreiecksketten*. Puis en 1849, paraît un livre de Baeyer se rapportant à une autre campagne *Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie*. A l'occasion de ces travaux, les nouvelles méthodes géodésiques se perfectionnent. Deux points importants les caractérisent:

*les progrès techniques permettent des améliorations dans les instruments utilisés, soit pour la mesure des bases, soit pour la mesure des angles; la précision est augmentée, la fiabilité des instruments est plus grande et les mesures deviennent plus objectives c'est-à-dire indépendantes du jugement personnel de l'observateur.

*les réseaux sont compensés par l'utilisation systématique de la méthode des moindres carrés; une théorie des erreurs s'élabore et se développe peu à peu.

"L'Allemagne est le berceau des méthodes géodésiques avancées"⁸,

méthodes faisant appel au calcul des probabilités.

Enumérons dès maintenant divers points caractérisant les nouvelles méthodes, points qui seront abordés dans la partie B de ce travail. Gauss demande avant tout que les erreurs systématiques soient éliminées; puis il propose pour traiter les erreurs aléatoires d'utiliser la méthode des moindres carrés. Les géodésiens allemands privilégient les instruments et les méthodes qui assurent l'indépendance des mesures: utilisation du cercle réitérateur⁹, mise en place de la méthode des directions....; Ils n'hésitent pas à adopter des méthodes d'observation leur assurant des mesures surabondantes (tour d'horizon, quadrilatère...); de ce fait, le recours à la méthode des moindres carrés permet d'obtenir une solution

Preussischen Akademie der Wissenschaften, Leipzig 1880. Voir aussi C.F. Gauss *Briefwechsel mit F.W. Bessel* (1 tome), *mit H.C. Schumacher* (3 tomes), *mit Chr. L. Gerling* (1 tome), Georg alms Verlag, 1975, Hildesheim, New york.

⁷Quelques lettres se trouvent dans C.F. Gauss, *Werke*; Par exemple in "Varia", tome XII, p. 167

⁸Citation de Liagre dans "Notice sur Nerenburger" in *Annuaire de l'ARB*, Tome 27, 1871.

⁹Voir annexe 2 et 3.

unique que l'on peut considérer la meilleure possible. La mise en place des équations de condition s'obtient en écrivant les différentes contraintes mathématiques auxquelles sont soumises les inconnues. Relativement à la mesure des angles d'une triangulation, les équations de condition sont de deux types: les équations aux angles et les équations aux côtés. Très vite se pose alors le problème de la résolution de grands systèmes linéaires.¹⁰ Des recherches sont alors accomplies en vue de résoudre de tels systèmes. Gauss introduit des notations d'une utilisation très pratique; des essais de méthodes itératives sont réalisés. Nous allons reprendre toutes ces questions une à une.

2 Carl-Friedrich Gauss (1777-1855)

- Le contexte

Gauss est un personnage suffisamment célèbre pour qu'on se dispense ici de tout rappel biographique.¹¹ Nous ne parlerons que de ses rapports à la géodésie et à la méthode des moindres carrés: ces sujets sont d'ailleurs largement traités par divers auteurs et nous nous contenterons d'évoquer quelques points utiles à notre propos: la précocité des interventions de Gauss en géodésie, ses relations avec l'école française, ses conceptions des liens entre théorie et pratique, les questions de méthodes ...

Parmi les études sur Gauss et la géodésie, nous distinguerons le mémoire très détaillé de A. Galle¹² (162 pages) qui figure dans l'édition des Oeuvres. Ce texte, qui s'appuie sur les publications, la correspondance et le "nachlass" de Gauss, décrit les contacts du savant avec les géodésiens et cartographes dès la fin du XVIII^{ème} siècle, ses propres campagnes de triangulation, ses travaux préparatoires, ses méthodes, ses relations avec les géodésiens allemands à l'époque de sa maturité (Schumacher, Gerling, Bessel....).

Les remarques qui suivent se limitent essentiellement à quelques commentaires sur ce mémoire de Galle auquel nous renvoyons.

-Gauss et la géodésie: des liens très précoces

Qui dit Gauss et géodésie évoque surtout ses grandes campagnes de triangulation du Hanovre (1821-1823 et 1828-1844), son invention de l'héliotrope, son utilisation

¹⁰Par exemple, Bessel, (1838), doit résoudre un système de 31 équations à 70 inconnues.

¹¹Voir notamment Bühler W.K., *Gauss, A Biographical Study*, Springer, Verlag, 1981; May. K.O. "Gauss" in DSB, tome V, p. 298-315; Wussing Hans, *K.F. Gauss*, Leipzig, Teubner, 1989, p. 61-66; Dunnington G.W. *C.F. Gauss. Titan of Science*, New-York, 1955

¹² A. Galle "Über die geodätischen Arbeiten von Gauss" in *Werke* de Gauss, tome XI, 2, p. 1-165, Göttingen, 1863-1927, Nachdruck Hildesheim: Olms, 1973. Voir aussi *C.F. Gauss und die Landesvermessung in Niedersachsen*, Herausgegeben von der Niedersächsischen Vermessungs- und Katasterwaltung, Hannover: Niedersächsisches Landesvermessungsamt, 1955.

systématique de la MMC. Tout cela est vrai mais masque le fait que Gauss est intervenu sur le sujet plus de vingt ans auparavant. Les 66 premières pages de Galle en témoignent abondamment. Notons par exemple la correspondance du savant de Brunswick avec le cartographe prussien Lecoq dès 1799¹³, les propres triangulations de Gauss dans sa région natale en 1803-1805.¹⁴ En 1805, alors que le colonel Epailly effectue depuis deux ans la triangulation du Hanovre occupé par les Français, celui-ci vient même à Brunswick.¹⁵ Galle note:

"Gauss a évidemment profité de l'occasion pour apprendre à connaître ces travaux et les instruments à propos desquels il s'étonnait des divisions grossières du cercle"¹⁶

On remarquera au passage que Gauss est parfaitement au courant des travaux de l'école française. Celle-ci est à son zénith: de toute façon ses résultats et ses méthodes sont connus de tous et largement diffusés et personne ne peut les ignorer. Mais Gauss est certainement mieux informé que d'autres: il lit les revues françaises, il est en contact avec la géodésie de l'occupant, son ami Schumacher (qui contribue grandement à l'attirer vers une carrière de géodésien) envisage de compléter sa formation auprès de Lalande.¹⁷ D'autre part, chacun connaît, à propos de la MMC, la querelle de priorité entre Gauss et Legendre, ainsi que les échanges du savant allemand avec Laplace. On verra que les géodésiens français s'informent moins des travaux de leurs homologues allemands.¹⁸

-Théorie et pratique

Pour banale et connue qu'elle soit, la remarque suivante n'en est pas moins capitale. Gauss développe une activité inlassable de géodésien de terrain -il ne se contente absolument pas de superviser les travaux des autres- mais en même temps ses travaux théoriques le hantent de façon permanente¹⁹: non seulement ses recherches de "géodésie supérieure" sur la forme de la Terre, mais aussi ses travaux de géométrie différentielle, de calcul des probabilités etc... ne peuvent être dissociés de sa pratique géodésique. Gauss ne choisit pas de s'occuper de géodésie pour des raisons uniquement contingentes ou "alimentaires". Par exemple, la triangulation du Hanovre s'insère dans un plan d'ensemble de prolongation de la triangulation du Danemark afin d'obtenir un grand arc

¹³Galle op. cit. p. 16-18

¹⁴Galle op. cit. p. 22

¹⁵Galle op. cit. p. 27-28.

¹⁶Galle op. cit. p. 28

¹⁷Galle op. cit. p. 31. Nous signalons la correspondance de Gauss et Schumacher *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und Schumacher*, herausgegeben von C.A.F Peters 6 Bände, Altona 1800-1865.

¹⁸Gauss n'a pas une très haute opinion de Puissant: "Beweis dass Puissant nichts taudt" (preuve que Puissant ne vaut rien), in Galle op. cit. p. 46.

¹⁹Galle op. cit. p.18 et ss.

de méridien utile à la connaissance de la forme de la Terre.²⁰ Pour les relations entre les idées de Gauss en géodésie et sur la géométrie différentielle, nous renvoyons à E. Scholz.²¹

-Gauss et sa "méthode"

Par rapport au traitement des observations, il convient d'insister sur un double aspect permanent chez Gauss: d'une part, certes, son utilisation systématique de la MMC et son interprétation probabiliste (ce que nous évoquerons plus loin), mais aussi d'autre part sa recherche inlassable des causes d'erreurs, qui apparaît à chaque instant notamment dans sa correspondance. Galle décrit à diverses reprises le caractère plus que minutieux et méthodique du style de Gauss:

"C'était aussi sa méthode de travail, de ne pas faire un pas de plus en avant, tant que le précédent n'était pas complètement assuré".²²

Il est clair que cette façon de travailler de Gauss transpire sur tous ceux avec lesquels il collabore, c'est-à-dire avec ce qui devient, au cours de cette première moitié du XIX^{ème} siècle, l'ensemble de l'école allemande de géodésie.

Cette remarque vaut aussi pour la puissance de calcul de Gauss et sa façon d'organiser ces calculs, il suffit pour s'en convaincre de feuilleter sa correspondance.

-La diffusion des méthodes de Gauss

Il nous faut dire ici un mot rapide sur la MMC et sa diffusion -nous y reviendrons plus longuement dans la partie B- mais quelques remarques préliminaires sont indispensables.

Tout le monde connaît à la fois les circonstances dans lesquelles est élaboré et publié la MMC par Gauss (1795 sans publication, 1809) et Legendre (1805), et comment cette méthode est progressivement justifiée quant à ses fondements probabilistes par Laplace et Gauss, processus qui culmine dans ce qu'on appelle aujourd'hui la "synthèse de Gauss-Laplace de 1823". D'ailleurs, comme l'ont noté divers historiens, cette méthode est aussi à certains égards la cristallisation, la mise en forme d'idées naturelles, ou partiellement appliquées, ou agitées en d'autres lieux. Il n'empêche que Gauss et Laplace ne publient

²⁰Galle op. cit. p. 39.

²¹Erhard Scholz, "Gauss und die Begründung der "höheren" geodäsie" p. 632-647 in *Amphora*, Berlin. Aux pages 637-638 on lit: "Sa participation aux travaux géodésiques fut pour lui une occasion en or de perfectionner ses idées sur ce complexe qu'est la théorie des surfaces et en particulier de rédiger son travail sur les représentations conformes et les "disquisitiones generales circa superficies curvas".

²²Cf. Galle op. cit. p. 68. Voir aussi p. 142, la remarque sur la persévérance qui est un signe, qui ne trompe pas, du génie...

que ce qu'on pourrait appeler des mémoires de recherche, et non des traités à l'usage des ingénieurs géographes ou d'un public assez large. C'est visiblement tout autant par sa correspondance et dans ses conversations particulières que Gauss diffuse la MMC et rend possible son utilisation pratique et multiforme. Nous y reviendrons dans la partie B.

-Le jugement de Galle

Une dernière remarque s'impose enfin . Si l'histoire considère souvent Gauss comme l'homme-clé de la rénovation de la géodésie au XIX^{ème} siècle, comme celui qui à imposé de nouvelles méthodes, de nouveaux instruments, une nouvelle organisation des calculs, une nouvelle façon de traiter la "géodésie supérieure", il n'en reste pas moins vrai que le jugement d'un géodésien comme Galle nous suggère une vision plus en nuances;

Dans son article, qui semble tout à la gloire du savant allemand et qui est publié dans l'édition de ses oeuvres, A. Galle termine sa recension par un résumé plus refroidissant.²³ Finalement, dans les travaux géodésiques de Gauss, rien n'est vraiment terminé, la conformation de ses triangles est "mal disposée et compliquée". Pour des raisons diverses, on ne fera pratiquement guère usage de ces travaux pour la carte et le cadastre, le "million de chiffres" dont Gauss est venu à bout ne sera pas exploité comme il aurait mérité de l'être. Galle ajoute que Gauss ne fait pas vraiment usage de poids²⁴ dans ses équations; il laisse entendre que, du point de vue des résultats et de la pratique, Gauss vaut surtout par les prolongements qu'effectuera la tradition prussienne (c'est-à-dire Bessel, Baeyer, etc...). Ainsi, le savant de Brunswick ne réussit pas vraiment, malgré le temps qu'il y passe, à donner une présentation complète des fondements théoriques de la géodésie. De là à dire que Gauss a perdu vingt ans de sa vie, il n'y a qu'un pas que Galle ne franchit pas, mais ce dernier crédite surtout Gauss d'avoir montré le vrai but de la géodésie, d'avoir clarifié la définition de la forme de la Terre, d'avoir compris les causes de ses irrégularités; il loue davantage sa théorie des surfaces que sa pratique de géodésien.

3 F.G.W. Struve (1793-1864)

Nous nous étendrons un peu plus sur F.G.W. Struve pour deux raisons:

²³Galle op. cit. p. 146-150.

²⁴Voir partie B § 1

- Certes ce savant n'est en rien un inconnu, mais les histoires générales de la géodésie ne lui consacrent habituellement qu'une faible place, par rapport à celle qu'elles attribuent à Puissant, Gauss, Bessel ou Baeyer.

- D'autre part, son ouvrage essentiel, qui rend compte de l'ensemble de ses travaux, est publié en français, il est clair et particulièrement explicite sur les méthodes, sur leur pourquoi, sur les raisons des évolutions voire des hésitations.

Il nous a donc semblé utile d'attirer l'attention sur cette oeuvre.

-Eléments biographiques²⁵

Struve (Friedrich-Georg-Willelm) est né à Altona le 15/4/1793 et il est mort à St Pétersbourg le 23/11/1864. Il est élève de l'astronome H. C. Schumacher (1780-1850). En 1808, il arrive à Dorpat pour échapper à la conscription de l'armée napoléonienne alors en Allemagne; il y enseigne l'astronomie et les mathématiques à partir de 1813; il devient directeur de l'Observatoire de Dorpat²⁶ en 1817.

De 1816 à 1819, il effectue la triangulation de la Livonie. De 1822 à 1827, il mesure une partie du méridien dans les provinces de la Baltique, puis en 1828, il poursuit ses travaux en Lithuanie et en Finlande. Avec les Suédois Hansteen et Selander, il va jusqu'au Cap Nord.

En 1833, il est élu correspondant à l'Académie des sciences de Paris pour la section astronomie.

En 1839, il observe 3112 étoiles doubles et en dresse un catalogue.

En 1835, le tsar Nicolas I^{er} décide de construire un nouvel observatoire près de St Petersburg, à Poulkova. Struve en devient le directeur en 1839.

En 1857, il effectue un voyage en Europe (France, Allemagne, Belgique et Angleterre) pour négocier la mesure d'un méridien de 69 degrés et "le calcul d'un arc de parallèle qui n'embrassera pas moins de 55 degrés de longitude".²⁷ Il est nommé correspondant à l'Académie de Bruxelles le 16-12-1859.²⁸

²⁵Voir essentiellement la notice de Z.K. Sokolovskaya.in DSB, Tome 13, p. 108-113.

²⁶Actuellement, cette ville d'Estonie se nomme Tartou.

²⁷Nous avons trace de ce voyage à Paris dans les CRAS, tome XLV n°15, 1857 2^{ème} semestre. A la page 514 on lit dans une intervention de M. le Maréchal Vaillant: "Le grand arc de méridien, mesuré dans l'Empire russe, sous la direction de M. de Struve, constitue une magnifique et gigantesque opération qui contribuera de la manière la plus puissante et la plus décisive à la connaissance de la figure de notre planète, surtout en se combinant avec l'exécution d'un travail dont M. de Struve n'a point parlé dans son intéressante Notice, bien que la proposition de ce travail soit le principal objet de son voyage en France." Plus loin, à la page 515, "M. de Struve remercie M. le Maréchal Vaillant d'avoir bien voulu donner à l'Académie des détails précis sur l'opération internationale projetée par lui. Si dans sa note il n'y a fait aucune allusion, c'est que cette opération était en ce moment l'objet d'une négociation avec l'Administration française."

²⁸Après sa mort, son fils Struve Otto (1819-1905), astronome et géodésien, lui succède comme directeur de l'observatoire de Poulkova. Il n'est pas à confondre avec Otto Struve, petit-fils du précédent (1897-1963) qui est aussi astronome. Ce dernier a travaillé à Berkeley en Californie.

Parmi ses ouvrages²⁹, il cite lui-même, dans *Arc du méridien*...indiqué ci-dessous en 5, les titres suivants:

- 1) *Breitengradmessung in der Ostseeprovinzen*, 1831 ³⁰
- 2) un article dans *Journal des savants*, Biot, 1838 p. 297
- 3) Des mémoires dans le recueil de l'Académie de St Pétersbourg
- 4) *Exposé des travaux pour la mesure de l'arc de méridien entre Fuglenas et Ismaël*, 1852
- 5) *Arc du méridien de 25°20' entre le Danube et la mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855*, sous la direction de C. de Tenner, Chr. Hansteen, N.H.Selander et F.G.W Struve, ouvrage rédigé par Struve en deux tomes:

Tome I: *Opérations géodésiques entre le Danube et le Golfe de Finlande* St-Petersbourg 1860

Tome II: *Opérations géodésiques entre le Golfe de Finlande et la mer glaciale* St-Petersbourg 1857

- Ses travaux et leur enjeu

L'ouvrage cité en 5), écrit en langue française, paraît tardivement, puisque les travaux qui y sont relatés débutent en 1816.³¹ Il est souvent assez difficile, à sa lecture, de savoir si les innovations introduites ou décrites par F.W. Struve sont effectivement de lui et à quelles dates elles remontent, ainsi que de préciser quand elles ont été diffusées à d'autres géodésiens. Cependant, cela est précisé parfois à certains endroits du texte. Une étude plus approfondie de l'ensemble des publications et manuscrits de Struve et de ses proches serait nécessaire pour éclaircir ces questions. Elle dépasse le cadre de cette thèse. Notons,

²⁹Cette liste est loin d'être exhaustive. Pour la préciser et la compléter, nous renvoyons à Z.K. Novokshanova, *Vasily Yakovlevich Struve* (Moscou, 1964); il recense 272 titres d'oeuvres originales p. 249-273. Citons aussi l'ouvrage suivant (IGN cote 522AO3C): *Recueil de mémoires présentés à l'Académie des Sciences par les astronomes de Poulkova ou offerts à l'observatoire central par d'autres astronomes du pays* Tome 1 St Petersburg 1853 W. Struve; tome 2 St Petersburg 1859 O. Struve; au tome 1, nous retenons la préface de W. Struve daté de 1853 dont le sujet est la MMC avec des poids différents et D.G. Lindhagen, 1849, article écrit en italien; les autres articles traitent essentiellement d'astronomie.

³⁰Le titre exact de l'ouvrage est *Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands*, 2 volumes, Dorpat, 1831.

³¹Il y décrit des travaux embrassant plus de 40 ans, travaux allant de la mer Noire jusqu'à la mer Glaciale. Le tome I concerne l'arc méridional de 14°45' et le tome II l'arc septentrional de 10°35'.

avec malice, que si Struve avait publié un peu plus tôt cet ouvrage, les géodésiens français auraient peut-être connu les méthodes allemandes bien avant 1853!

Le compte rendu que Struve établit d'après des archives de l'Observatoire de Poulkova³², est très détaillé et nous permet de connaître les choix effectués par les géodésiens tant sur le plan des instruments que sur celui des méthodes. Nous pensons donc utile de rapporter et de commenter plusieurs passages fort instructifs de cet ouvrage. Chiffres à l'appui, l'auteur nous explique ses hésitations puis les raisons de ses choix, ce qui, pour nous, peut être essentiel dans la compréhension des méthodes utilisées en Allemagne par Gauss, Bessel et Baeyer. Une filiation puis une tradition semblent ici se mettre en place.

Nous allons essayer de montrer que le choix du cercle réitérateur pour mesurer les angles horizontaux, le conduit à la méthode des directions puis à la détermination de la direction la plus probable.

Remarquons que ces notions se retrouvent dans les différents écrits que nous avons pu consulter en Belgique lors de nos recherches.

Précisons dès maintenant les dates des opérations:

³²Au début de l'introduction, Struve précise ses sources: "Tous les matériaux d'observation qui se rapportent à la mesure de notre méridien se conservent aux archives de l'Observatoire central: a) journaux originaux b) copies vérifiées de ces journaux c) extraits vérifiés"

Arc de	Latitudes	Observateur	Dates
Bessarabie	45°20 à 48°45	M. de Tenner	1844 à 1852
Podalie, Volynie	48°45 à 52°3	""""	1835 à 1840
Lithuanie	52°3 à 56°30	""""	1816 à 1828
Provinces baltiques	56°30 à 60°5	Struve	1816 à 1831
Finlande	60°5 à 65°50	""	1830 à 1851
Laponie	65°50 à 68°54	Selander	1845 à 1852
Finmarken	68°54 à 70°40	Hansteen	1845 à 1850

Le tableau ci-dessus laisse penser que certains de ces travaux sont antérieurs à ceux de Gauss, que d'autres leur sont contemporains mais précèdent ceux de Bessel et qu'enfin d'autres sont exécutés à la même période que les travaux entrepris par Baeyer.

Toute l'Europe triangule ! ³³

Quel est donc l'enjeu? La connaissance précise des dimensions de la Terre est nécessaire afin de déterminer le plus exactement possible l'aplatissement de l'ellipsoïde terrestre, ellipsoïde de référence pouvant servir en tout point de la terre. Struve l'indique explicitement:

" Cette prolongation parut d'autant plus importante, que les arcs septentrionaux étaient le plus faiblement représentés dans le tableau que Bessel avait formé pour ses calculs sur les dimensions les plus probables de la Terre, et que ce sont précisément les arcs éloignés de l'équateur qui comparés aux arcs voisins de ce cercle, contribuent le plus à la détermination du coefficient de l'aplatissement."³⁴

Nous assistons donc ici à des travaux de géodésie à but scientifique et non seulement à des travaux destinés à une levée topographique en vue de réaliser une carte. Le général De Tenner, selon Struve, précise bien que les premiers travaux qu'il commande au nom du gouvernement de Wilna³⁵ répondent à la deuxième préoccupation, mais qu'ensuite il a l'idée de les employer à la mesure d'un arc de méridien.

³³Voir à l'annexe 6 le point sur les triangulations existant à cette époque.

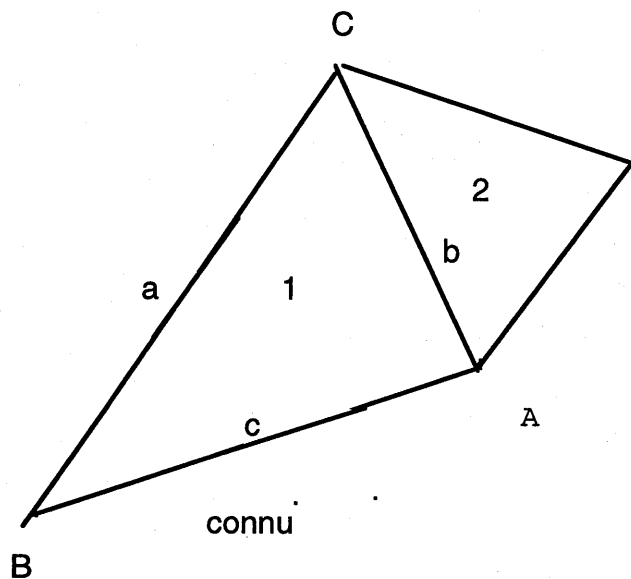
³⁴in Struve op. cit. tome 1, introduction.

³⁵Actuellement, Vilnius capitale de la Lithuanie.

- Les méthodes utilisées

* Principes généraux

Struve commence par mettre en place tout un vocabulaire pour distinguer les différents éléments constituant une chaîne de triangulation. Schématisons par deux triangles le début d'une triangulation de base le côté AB.



Il appelle c le côté connu, b le côté qui servira de côté connu dans le triangle suivant (numéroté 2 sur le schéma). Il nomme: C et B angles de continuation car ils permettent le calcul de b par la formule des sinus et A angle intermédiaire car il n'est pas utile dans la résolution des triangles; b et c côtés transversaux (ils permettent l'enchaînement des calculs), a côté latéral (il n'intervient pas).

Il choisit les trois angles proches de 60° car la détermination du nouveau point est plus précise³⁶ et ce choix permet "l'avancement rapide de l'opération, dans une direction intentionnée".

D'autre part, plus les côtés sont grands, plus le progrès, c'est-à-dire l'avancement de la chaîne le long du méridien ou parallèle à mesurer, est rapide mais l'observation des signaux très lointains, même avec l'héliotrope, instrument inventé par Gauss en 1820³⁷, est difficile; il choisit donc comme longueur de côté 10000 ou 20000 toises.

³⁶L'école française fait la même recommandation pour la constitution de sa triangulation (voir par exemple le traité de Salneuve § 82).

³⁷Voir Annexe 27, note 53, p.147.

Struve décide alors de regarder comme *triangle normal* en forme et en dimension, le triangle défini ainsi: *Triangle équilatéral de 15000 toises de côtés, dans lequel la mesure des angles est sujette à une erreur moyenne de 1",0.*

Pour le calcul des côtés, Struve utilise la formule classique:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

En réalité, il suffirait de mesurer seulement deux angles dans chaque triangle. Le troisième angle se déduisant de la formule $a + b + c = 180^\circ + \varepsilon$, ε correspondant à l'excès sphérique. Cependant la mesure du 3ème angle est effectuée comme moyen de vérification ou pour augmenter l'exactitude des résultats.

Précisons que l'on calcule a et b par le triangle plan ABC tel que:

$$A = a - 1/3 \varepsilon$$

$$B = b - 1/3 \varepsilon$$

$$C = c - 1/3 \varepsilon, \text{ résultat démontré par Legendre}^{38}$$

***Poids d'un triangle**

Afin d'apprécier ce que Struve nomme "le mérite d'un triangle", lors d'une opération destinée à la mesure d'un arc de méridien, il divise l'arc total en 4 parties:

*l'arc Baltique

*l'arc de Lithuanie

*l'arc de Volynie

*l'arc de Bessarabie

Puis il détermine p, poids général d'un triangle, afin de pouvoir comparer des observations de nature différente. L'unité de poids étant attribuée au triangle normal défini ci-dessus³⁹, différents paramètres sont pris en compte pour évaluer p.

³⁸Pour plus de détails sur l'utilisation de ce théorème, voir p. 186 et l'annexe 7.

³⁹Ce choix est certes arbitraire mais lui permet par la suite d'attribuer des poids aux mesures d'angles suivant les triangles auxquels ils appartiennent. Cette notion de poids, présente aussi chez Gauss, nous paraît essentielle. Elle n'intervient pas dans la tradition française où l'on préfère reconditionner les chaînes. (voir p. 190 de ce travail).

$p = \sigma \tau$ où σ est le poids géométrique et
 τ le poids trigonométrique.

σ tient compte de la forme des triangles et du progrès réalisé
 τ de l'exactitude de la mesure des angles

Voici les poids généraux qu'il trouve pour les 4 arcs⁴⁰:

Baltique	Lithuanie	Volynie	Bessarabie
$p' = 1,186$	$p'' = 0,374$	$p''' = 0,350$	$p'''' = 0,378$

Struve est frappé par la supériorité des triangles baltiques : le poids général est plus du triple de celui des autres, soit une précision 1,8 fois plus élevée. Il essaye alors d'expliquer ce constat en invoquant la raison suivante:

"Cette supériorité est une suite nécessaire de la préférence de l'instrument et de la méthode d'observation que j'ai pu employer, et de l'avantage inappréciable que présentait le terrain des provinces Baltiques, d'admettre partout l'établissement le plus solide de l'instrument; et il faut même s'étonner de ce que M. de Tenner, surtout par la forme supérieure de ses triangles, a su approcher de si près de l'exactitude de l'autre mesure, malgré ses instruments plus anciens et de répétition, et malgré les difficultés presque insurmontables du terrain"⁴¹.

*Les instruments

Cette remarque de Struve nous a paru importante et nous avons cherché à savoir quel instrument il utilisait et quelle méthode d'observation il suivait.

Dans les opérations de l'arc Baltique, Struve utilise un instrument universel, l'un des derniers exécutés à Munich sous la direction de Reichenbach et qu'il a acquis en 1820⁴². Il l'utilise en le modifiant afin de l'adapter à une nouvelle méthode d'observation: il prescrit une méthode d'observation sans répétition enchaînée et l'utilise ainsi jusqu'en 1852⁴³. Précisons ici qu'à l'aide de l'estime, on peut lire la seconde sur chaque vernier; ce qui correspond à un changement dans la 7^{ème} décimale du log sin. Nous reviendrons plus loin, au § 4 du B.II, sur ce type d' instrument et sur cette méthode afin de les comparer

⁴⁰Nous donnons en Annexe 8 le détail des poids ayant servi au calcul du poids général.

⁴¹Struve, op.cit., section I p.12.

⁴²La description en est donnée dans *Ast.Nach*, vol.II n°47-48,1823

⁴³Pour connaître les modifications apportées Struve nous renvoie à *Gradmessung I* p.32 à 41, planches IV et V. (Nous supposons qu'il s'agit de *Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen, 1831*)

d'une part avec les traditions françaises et d'autre part avec les traditions allemandes. De Tenner, quant à lui, utilise pour les autres arcs, des cercles répéteurs construits selon les principes de Borda ou des théodolites à répétition ne nécessitant plus de réduction à l'horizon.⁴⁴ Voici le sentiment de Struve sur ce principe:

"Certes, pour l'époque d'alors, les instruments transportables étant pourvus de divisions très médiocres, l'application de la répétition a dû être regardée comme un progrès éminent dans la mesure des angles géodésiques. Mais il est évident que ce principe, quelque admirable qu'il soit en théorie, ne peut jamais conduire à des mesures de la plus haute exactitude, parce qu'il suppose des conditions qui, à la rigueur, n'existent pas, savoir une rigidité absolue des métaux, un repos relatif parfait des différentes parties de l'instrument, pendant qu'on le tourne sur son axe, enfin l'absence du jeu de l'axe dans son moyeu. L'avantage que porte la répétition, est celui de réduire, à un minimum proposé, l'effet des imperfections dans les divisions et dans la lecture de ces divisions. Mais la répétition a dû être abandonnée dès que l'imperfection des divisions avait diminué au point que l'erreur qu'elle produisait, était devenue plus petite que le défaut inhérent à l'opération de la répétition"⁴⁵.

Nous trouvons ici des critiques que les Français mettront longtemps à reconnaître: les instruments répéteurs sont biaisés. En effet, surtout lorsque les instruments sont usés par plusieurs années d'observations, des erreurs systématiques sont introduites par le jeu des axes.

***Au sujet des méthodes d'observations: la réitération engendre la méthode des directions**

En 1816, De Tenner commence ses mesures alors que la répétition est généralement adoptée. Il utilise des cercles répéteurs confectionnés par Baumann et Troughton, imitant ceux de Borda. De même, tous les instruments de Reichenbach⁴⁶ sont à répétition sauf un: le cercle méridien. Ainsi l'instrument universel arrivé à Dorpat au printemps 1821 et que Struve utilise est répéteur. Au début, il s'en sert en employant la répétition; mais il constate alors que les angles mesurés dans le sens positif sont supérieurs à ceux mesurés

⁴⁴Struve op. cit. tome 1 p. 18; il y cite les instruments utilisés par De Tenner: un cercle répéteur construit par Baumann en 1816, un cercle de répétition de Troughton de 1818 à 1837, un théodolite à répétition de Reichenbach de 1828 à 1832, un théodolite à répétition depuis 1833, un théodolite astronomique à répétition et un instrument universel d'Ertel depuis 1836, et enfin depuis 1844 un théodolite terrestre d'Ertel.

⁴⁵Struve, op.cit. tome 1, p. 21

⁴⁶Ces instruments sont pourvus de lunettes d'une perfection nouvelle pour l'époque et, d'après Struve de divisions presque mathématiquement justes! Il est vrai, que dans les ateliers de Reichenbach, des machines à diviser les cercles mécaniquement sont utilisées.

dans le sens négatif, mettant ainsi en évidence un autre biais dans l'utilisation du cercle répétiteur⁴⁷.

Voici les 5 angles observés, en juin 1822, à Lenard, et qui remplissent le tour d'horizon:

P	N	(P+N)/2	P-N
30°48'35",5	34",7	35",1	+0",8
64 27 25,2	23,0	24,1	+2,2
31 51 26,7	24,5	25,6	+2,2
73 22 38,1	34,2	36,15	+3,9
159 29 58,8	57,7	58,25	+1,1
Somme 360° 0' 4",3	359°59'54"1	359°59'59"2	moy +2,04

Aussi en 1822, Struve décide-t-il de changer de méthodes:

"J'éprouvai naturellement un sentiment pénible, de n'avoir acquis, dans les (P+N)/2, qu'une mesure empiriquement exacte, ne sachant point, si chaque angle obtenu ainsi était réellement à l'abri de toute erreur constante. Voilà pourquoi je me décidai à abandonner la répétition, et à lui substituer la *méthode de l'observation réitérée des angles simples*"⁴⁸.

Il passe en revue les avantages de cette méthode. L'exactitude de la mesure simple d'un angle dépend de trois conditions: la précision du pointé, l'exactitude de la division de l'instrument employé et la sûreté dans la lecture des divisions.

* Pour le pointé, il n'y a aucune différence entre répétition et angle simple. Mais, cependant, Struve remarque que dans le pointé d'un angle simple, l'observateur est moins négligent:

"Dans la répétition, le grand nombre d'observations réunies à un seul résultat engage involontairement à être moins scrupuleux pour chaque pointé isolé"⁴⁹

⁴⁷Une note de Struve, op. cit. tome 1 p. 23, nous apprend que Gauss "si je ne me trompe point, a indiqué également des corrections empiriques pour les angles trouvés par répétition, dans sa mesure de l'arc de Hanovre".

⁴⁸Struve, op.cit., tome 1, p.22 et 23. Struve écrit la dernière partie de la phrase en italique; nous avons souligné l'expression *observation réitérée*.

⁴⁹Ibid., p. 23

Ici, la méthode appelle la vigilance inconsciente et rend involontairement la précision meilleure; la procédure induit un meilleur comportement, donc une meilleure performance de l'observateur. De plus, l'astronome Struve connaît l'exactitude du pointé; en effet, après avoir observé plusieurs fois le passage de l'étoile polaire, un calcul d'interpolation prouvait, dit-il, que "l'erreur probable du pointé se réduit à une fraction de seconde, bien en dedans de 0"5." En conséquence, après diverses manipulations, il évalue l'erreur optique probable pour un seul pointé à 0"87, pour une visée de géodésie.⁵⁰

* Les divisions

Les divisions des instruments de Munich sont toutes des copies de la division-mère primitivement tracée par Reichenbach. Ce dernier utilise dans ses ateliers des machines à diviser ce qui améliore considérablement la division des limbes, le procédé devenant mécanique⁵¹. L'erreur probable est estimée inférieure à 0"15 pour la moyenne des 4 verniers.

* Donc l'exactitude des mesures d'angles simples dépend, presque uniquement, de la sûreté dans la lecture des divisions. Cette lecture dépend des individus. Struve consigne dans un tableau les résultats déduits des comparaisons entre les secondes lues par Struve et Preuss ou Struve et Argelander, à l'aide des 4 instruments de Munich que possèdent en 1823 l'Observatoire de Dorpat:

⁵⁰Struve renvoie à *Astron. Nachr.* vol II p.460.

⁵¹Ce problème posé par l'exactitude des divisions du limbe dans un instrument préoccupe depuis longtemps les artistes mais aussi les mathématiciens. Par exemple, L. Mascheroni, en 1798, publie un ouvrage intitulé *La Géométrie du compas*. Dans la préface, il nous confie qu'une de ses motivations est justement la difficulté que rencontrent les artistes pour diviser un limbe. Il écrit: "L'importance des instruments astronomiques m'engagea à considérer mon projet de la Géométrie du compas, sous un point de vue plus favorable. Je commençais à croire que j'aurais beaucoup fait, si je réussissais à diviser la circonférence en plus de six parties par le secours du compas seul; j'aurais rendu aux artistes qui travaillent aux instruments astronomiques, un service d'autant plus important, que mes subdivisions de la circonférence auraient été plus étendues et plus conformes à la division du quart de cercle de 90°. (...) Avec ces mêmes points, je divise la circonférence en minutes, avec une erreur de moins d'une seconde. Je me suis flatté que les astronomes pouvaient être contents de cette précision." Il s'adresse aux artistes en ces termes: "Nous ajouterons ici en faveur des artistes pour lesquels, en grande partie, cet ouvrage est écrit, que bien convaincus de l'importance des erreurs qui résultent de l'écart et du rapprochement des branches du compas pour obtenir avec précision des ouvertures différentes, nous aurons soin de résoudre les problèmes avec le moindre nombre possible d'ouvertures de compas" (réédition Manom, 1980, p. XII-XIII).

Instrument	Diamètre de la division pouces fr.	Chaque vernier donnait immédiatement	Position du limbe	Erreur probable de la lecture d'un individu		
				Pour un seul vernier	Pour la moyenne de 4 verniers	
					De chaque instrument	réduite au diamètre de 12 pouces
1 Cercle méridien	36	2"	verticale	0"60	0"30	0"90
2 Cercle vertical	18	4	"	0,84	0,42	0,63
3 Théodolite astronomique	8	10	"	2,00	1,00	0,67
4 Instrument universel	13	4	horizontale	0,70	0,35	0,38

Nous voyons comment, avant de partir en campagne en 1823, Struve a pris soin de déterminer des caractéristiques de l'instrument qu'il utilise. Il a

"la conviction qu'une mesure simple d'un angle, faite sur un arc quelconque du limbe, devait donner une valeur exacte en dedans de 0",7, abstraction faite de l'incertitude du pointé; et que par 6 mesures faites sur différents arcs, avec 12 différents pointés à chaque signal, l'erreur probable d'un angle devait être réduite à

$$\sqrt{\frac{0,87^2 + 0,70^2}{6}} = 0",46 \text{ }^{52}$$

Nous assistons ici à la naissance d'une partie de "la théorie des erreurs", partie dont le but est de déterminer les normes de l'instrument utilisé; l'instrument se détache de son propriétaire, des conditions strictes d'utilisation et, de ce fait, devient universel, non seulement dans ses fonctions, mais aussi dans son utilisation.

Struve essaye alors la méthode de réitération mais les premiers essais sont, pour lui, sources de déception; quelquefois il note des différences de 16"; l'exactitude espérée n'est qu'illusion!

"Toutes les différences étaient ou près de 0 ou près de +/- 16", les différences intermédiaires n'existant pas."⁵³

Struve détermine une cause technique; son origine est dans:

"une flexion à laquelle les rayons des cercles horizontaux étaient sujets".⁵⁴

⁵²Struve, op.cit., tome 1, p. 25. Cette formule se retrouvera dans la partie B.II.4; 0,87 est l'erreur de pointé et 0;7 l'erreur de lecture.

⁵³Ibid.p. 25

⁵⁴Ibid.p. 25

Après ce constat, et afin d'éliminer le biais dû à la flexion, Struve demande à Ertel de construire un instrument exempt de ce défaut.⁵⁵ Ce nouvel instrument, de par sa conception, ne permet plus de faire la répétition enchaînée: l'instrument s'est adapté aux exigences de la méthode.

Struve rejette les angles mesurés en 1822 par répétition et toutes les mesures des angles terrestres de l'arc Baltique sont devenues *des mesures simples exécutées sur plusieurs arcs du limbe*:

"Il paraît propre de désigner ce procédé par le nom de la mesure des angles simples par *réitération*, vis-à-vis de l'ancienne méthode de la mesure par *répétition*".⁵⁶

Struve décrit alors avec soin la méthode d'observation et à cette fin il introduit le mot "mise":

"Dans l'application de la méthode indiquée on agit de sorte, qu'en partant d'un point initial quelconque de la division, pour la direction d'un des objets, on observe successivement tous les objets, en conservant à l'aide de la lunette inférieure le parallélisme parfait du limbe; ce qui donne comme résultat non seulement les angles entre des couples d'objets, mais en général les directions relatives de tous les objets, comparées à la direction d'un des objets pris pour zéro. Toutes les observations faites par une position invariable du limbe forment ensemble une *mise* (en allemand Satz, en russe ППНЕМ ou priyom⁵⁷)."⁵⁸

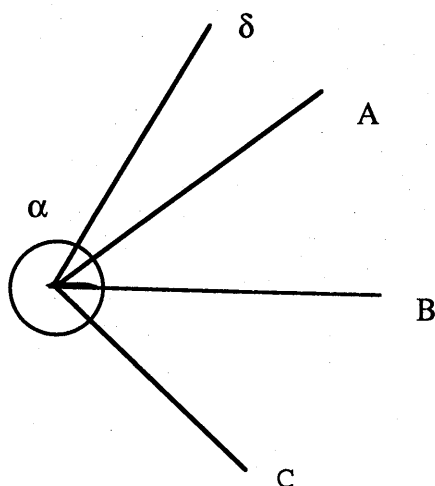
Nous voyons donc comment de façon naturelle la méthode de réitération engendre la méthode des directions.

⁵⁵Ertel dirige un institut à Munich.

⁵⁶Ibid.p. 27

⁵⁷Ce mot allemand peut ici se comprendre dans le sens "une unité, un ensemble de ..". Le mot russe, quand à lui, peut exprimer ici l'idée "action, mouvement séparé; ex.: boire un verre en deux temps" (cf. dictionnaire russe *Ogégov* 13^{ème} éd. 1981)

⁵⁸Ibid.p. 28



α point initial quelconque de la division

δ direction d'un des objets pris comme direction initiale

Répetons ici la méthode décrite par Struve:

On observe successivement tous les objets; on obtient non seulement les angles entre deux couples d'objets mais les directions relatives de tous les objets comparés à la direction d'un des objets prise pour 0.

Toutes les observations faites pour une position invariable du limbe forment donc ce que Struve appelle une mise.

Par exemple, on peut observer les directions pour 6 mises. Alors la position du limbe change pour chaque mise de 15° ($6 \times 15^\circ = 90^\circ$); on effectue 3 mises avec cercle vertical à droite de la lunette, puis 3 mises avec cercle vertical à gauche, pour annuler l'erreur de collimation⁵⁹.

Nous voyons ici un protocole se mettre en place: il apparaît une direction arbitraire choisie pour zéro, dont il faudra déterminer avec exactitude les caractéristiques astronomiques. Chaque observateur procède par des mises différentes dont il doit indiquer les caractéristiques dans les journaux d'observations.

"Dans les opérations de Livonie les directions ont été observées, depuis 1824, par 6 mises, dans lesquelles la position du limbe, ou du point de départ pour l'objet initial, avait changé pour chaque mise de 15° . Avec

⁵⁹L'erreur de collimation provient de ce que l'axe optique de la lunette, n'est pas perpendiculaire à l'axe des tourillons.

le changement du point de départ, j'ai combiné toujours un changement de vernier de 50" à peu près, ce qui servait à détruire l'influence des petites irrégularités dans les divisions des verniers."⁶⁰

Struve insiste sur la nécessité d'une lunette de vérification avec deux observateurs pour la mesure des angles horizontaux, permettant de repérer tout changement de position dans le cercle, ceci quelle que soit la méthode utilisée; cette lunette joue le rôle du niveau dans la mesure des angles verticaux.

"Par conséquent, tout instrument destiné à la mesure des angles horizontaux qui manque de lunette de vérification, est imparfait."⁶¹

Le facteur temps n'est pas oublié par Struve qui insiste sur le gain de temps d'un tel procédé malgré l'apparence. En effet l'emploi de la lunette de vérification demande plus de temps pour la mesure d'un angle isolé mais augmente la certitude de la précision et appelle donc un plus petit nombre de mesures.⁶² Et Struve de conclure:

"Le principe doit régner que la plus grande certitude des résultats ne s'atteint point si bien par un grand nombre d'observations moins exactes, que par un petit nombre d'observations précises dans tous les éléments. Les progrès ultérieurs des sciences d'observations dépendent en grande partie de l'application de ce principe qui, sans considérer l'avantage de précision, produit soit une épargne considérable du travail, soit une diminution des calculs, c-à-d une épargne de l'objet le plus précieux pour l'homme, du temps."⁶³

La comparaison des deux méthodes⁶⁴ conduit à la conclusion suivante: si l'instrument est bien divisé, la mesure de l'angle simple est la plus avantageuse. Mais on peut encore améliorer la précision en réitérant la mesure de façon à effectuer cette mesure sur plusieurs arcs pour diminuer l'effet des erreurs de division. On base donc la mesure des angles sur un nombre d'arcs symétriquement distribués sur 90° du limbe, soit sur 360° avec les quatre verniers. On peut choisir par exemple de décaler les points initiaux de 15° d'où six réitérations. A partir de 1822, Struve n'emploie plus que la méthode de réitération, avec la procédure que l'on vient de décrire.

⁶⁰Ibid.p. 28

⁶¹Ibid.p. 30

⁶²Pour preuve, Struve compare, aux pages 31-32, les opérations de son arc Baltique faites avec un instrument muni d'une lunette de vérification et celles de Prusse exécutées par Bessel avec un instrument d'Ertel ne possédant pas une telle lunette; la méthode de réitération étant utilisée dans les deux cas.

⁶³Ibid.p. 33

⁶⁴Cette comparaison sera reprise en détail dans la partie B de ce travail, p. 170.

Pouvons-nous maintenant apporter une réponse à la question suivante: Qui a utilisé pour la première fois la méthode de réitération ?

Nous savons qu'elle est introduite par Struve dans les opérations géodésiques de Russie à partir de 1822.

De Tenner s'en sert un peu en Volynie et sans exception en Bessarabie.

Bessel la pratique en 1832-1833 dans ses opérations de la mesure de l'arc du méridien en Prusse avec un théodolite d'Ertel de 15 pouces de diamètre, pourvu de verniers, mais sans lunette de vérification, d'après Struve. Puis Baeyer, dans la mesure du littoral de Prusse, de 1837 à 1846 triangule avec le même instrument pourvu de microscopes.⁶⁵

Mais les Anglais utilisent, en Europe et aux Indes des théodolites colossaux, avec microscopes, de 3 pieds de diamètre, donc ils se dispensent de répétitions. Déjà Mudge en 1799 indique la réitération des angles sans toutefois l'utiliser systématiquement⁶⁶; par contre, le colonel Sir George Everest (1790-1866) en fait usage fort régulièrement en Indes Orientales depuis 1823⁶⁷.

La priorité d'utilisation de cette méthode va-t-elle à Struve ou à Everest? Ces deux savants ont-ils eu des liens ou des sources communes? Une enquête plus approfondie s'impose⁶⁸ avant de pouvoir conclure. Ceci pourrait être l'objet d'un autre travail, car, comme nous l'avons dit, le chapitre A II ne prétend pas apporter d'informations originales, il a seulement pour but de situer le problème en vue du chapitre A III.

***Traitements des données**

Les résultats des mesures sont consignés dans des journaux d'observations, conservés à l'époque où Struve rédige son livre à l'Observatoire central de Poulkova. Il est utile ici de préciser, avec Struve, ce qu'il entend par les expressions "angles observés" et "angles primitifs".

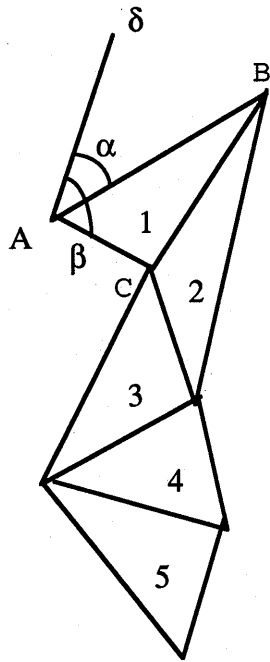
Rappelons qu'un canevas trigonométrique est formé de triangles ou de quadrilatères. Or, il n'est pas toujours possible, à cause des distances ou d'obstacles, d'observer les diagonales. Aussi, dans le souci de respecter l'uniformité des diverses opérations, Struve les omettra même lorsqu'il peut en mesurer.

⁶⁵Une description de ces instruments et de leur utilisation se trouve d'une part dans Bessel, *Gradmessung*, 1838, p. 67 et d'autre part dans Baeyer, *Die Küstenvermessung*, 1849 p. 68 et suiv.

⁶⁶Voir *Account of the operations for the trigonometrical survey of England* vol I 1799 p. 137.

⁶⁷Voir son *Account*, 1830, p. 47 ainsi que son *Account*, 1847, introduction p. CXVI.

⁶⁸Des travaux sur Everest, effectués par J.R. Smith, England, sont en cours de publication; il serait indispensable pour complément de les consulter.



Les méthodes d'observation conduisent naturellement à des procédés différents d'obtention des mesures des angles:

* Lorsque l'on observe avec le cercle répétiteur, on a directement les angles que requiert la formation des triangles.

* Lorsque l'on observe, sans répétition, on a les directions des différents objets visibles, et de ce fait,

"chaque angle requis pour la formation des triangles a été déduit des 2 directions observées qui le renferment."

$$A = \beta - \alpha$$

D'après Struve, les avantages sont les suivants⁶⁹:

* "Ce procédé produit l'uniformité dans les opérations faites avec et sans répétition".

* "Les mises, dans lesquelles l'un ou l'autre des objets n'a pas été observé par suite de circonstances atmosphériques, sont aisément complétées à l'aide d'observations supplémentaires pour ces objets"

* "L'angle entre 2 objets voisins, pointés dans l'espace de peu de minutes, jouit nécessairement d'une plus grande exactitude que l'angle formé par deux directions dont l'observation est séparée par un plus long intervalle de temps" .

⁶⁹Struve, op. cit., p. 88 et suiv.

Quelles valeurs primitives donner aux angles pour les calculs?

Ces valeurs sont déduites des journaux d'observation après avoir appliqué les différentes réductions au centre⁷⁰. La valeur moyenne des angles réduits dans les différentes mises est consignée dans des tableaux en vue d'exécuter les calculs, dans une colonne appelée angles observés.

Les valeurs choisies par Struve, comme données de départ pour la résolution numérique des triangles avec le théorème de Legendre, sont :

- * les angles observés
- * les bases
- * l'excès sphérique donné

Les calculs sont faits avec des tables de logarithmes à 7 décimales⁷¹.

Struve expose aussi les calculs de compensation⁷² qu'il est amené à exécuter dans certains cas. En particulier, lorsqu'un quadrilatère avec diagonales se présente, il convient de faire un calcul de compensation, en utilisant la MMC car toutes les directions étant prises comme données primitives, les valeurs sont surabondantes.

"Nous avons plus de données que le nombre des angles indispensable pour la résolution de la figure. Or il est clair que toutes les directions observées doivent être regardées comme données primitives pour le calcul de compensation à faire sur le quadrilatère plus que déterminé. Les méthodes de calcul de compensation, d'après le principe des moindres carrés, étant connues par les préceptes qu'ont donnés Gauss et Bessel, je donnerai d'abord les directions primitives observées que j'ai prises dans les journaux des opérations de Bessarabie, et puis les résultats du calcul de compensation."⁷³

***Comment mener un calcul de compensation ?**

⁷⁰Il existe deux types de réduction au centre: l'une relative au lieu de l'instrument, l'autre relative à la position de l'objet pointé. Pour un exemple de calcul voir annexe 9. Voici une indication de l'ordre de grandeur de cette réduction: elle est de 43" pour une excentricité de 3 toises entre l'instrument et le centre de la station, dans une direction perpendiculaire à celle de l'objet et pour une longueur moyenne de côté de 14400 toises.

⁷¹Struve utilise les tables de Bagay et de Taylor, chacune étant contrôlée par l'autre.

⁷²Nous donnons au § B.III le sens de cette expression.

⁷³Struve op. cit., p. 99

Struve, en critiquant un mémoire de Lindhagen D.G. (écrit en russe)⁷⁴, est amené à envisager 2 hypothèses⁷⁵:

La compensation dépend du choix des données primitives:

1) partir des directions

$$a^2 + b^2 + c^2 + \dots = \text{minimum}$$

2) partir des angles de la plus courte durée

(ou angles minimes)

$$(b - a)^2 + (c - b)^2 + (d - c)^2 + \dots = \text{minimum}$$

Struve effectue les compensations dans les deux hypothèses⁷⁶. Peters s'est chargé des calculs de compensation qui partent des directions et Woldstedt des calculs relatifs aux angles de la plus courte durée.

Struve remarque:

"Or ni l'une ni l'autre des deux hypothèses ne correspond entièrement aux observations effectives; mais en tout cas, les compensations faites dans les deux hypothèses s'écartent dans des sens opposés, du résultat que fournirait une solution rigoureuse du problème. Par cette considération, on se sent engagé, à résoudre le problème dans les deux hypothèses, et à regarder la moyenne des deux valeurs de l'inconnue qu'elles fournissent comme le résultat définitif (...) En outre les deux calculs donnent des résultats tellement rapprochés l'un de l'autre, que la différence en est inférieure à l'erreur probable, à laquelle chaque résultat est sujet"⁷⁷.

Le calcul de compensation est achevé par Lindhagen en 1854.

***Quelles valeurs "primitives" de direction choisir?**

Une méthode simple consiste à prendre la moyenne entre les directions observées, mais cette moyenne n'est la direction la plus probable que si on a pu observer d'une station tous les signaux environnants l'un après l'autre. Sinon, on adopte pour la trouver la MMC; la compensation devient alors plus complexe comme l'expliquent Bessel et Baeyer.⁷⁸ Puis de l'utilisation de cette valeur primitive pour les compensations découlent des conditions qui doivent être remplies pour que le réseau soit mathématiquement formé. Dans ce cas, traité par Gauss, Gerling, Hansen, les directions ou angles sont considérés comme des

⁷⁴Cf. *Über den geodätischen Theil der norwegischen Gradmessung Operation D.G. Lindhagen*, 1854.

⁷⁵Struve, op. cit., p. 23-24 tome II.

⁷⁶Voir *ibid.*, p. 24-25 puis pour la conclusion p. 28 et l'annexe 10.

⁷⁷*ibid.*, p. 24

⁷⁸cf. par exemple, "Berechnung des Dreiecksnetzes", chapitre 3 de *Gradmessung in Ostpreussen*, Bessel, 1838.

grandeurs observées immédiatement et indépendantes les unes des autres⁷⁹; ces derniers regardant les directions observées à chaque station comme liées entre elles par des équations intervenant dans la recherche des directions les plus probables. Gauss dans *Theoria Combinationus...* suppose que les directions sont déterminées indépendamment les unes des autres, et d'importance égale. Par contre, Bessel indique dans "Berechnung des Dreiecksnetzes"⁸⁰ des règles de calcul permettant d'admettre les observations telles qu'elles ont été faites selon la condition occasionnelle.

En guise de conclusion de ce paragraphe, soulignons que l'on retrouve chez Struve un souci constant :

" L'uniformité dans l'exécution des mesures est toujours d'une certaine importance, surtout dès qu'il s'agit de soumettre l'exactitude des résultats d'une vaste opération à une recherche basée sur les principes du calcul des probabilités"⁸¹

Précisons que l'uniformité dont parle Struve est réalisée si, dans les opérations entreprises, le protocole défini pour les méthodes d'observations et les calculs est suivi par chaque observateur ou calculateur. Mais, à l'intérieur du protocole, il peut y avoir des différences dans la précision des appareils, le nombre de triangles, leurs dimensions, etc... C'est alors qu'intervient la notion de poids déjà évoquée.

***Au sujet de l'exactitude des angles**

"L'appréciation de l'exactitude d'un résultat numérique quelconque, déduit d'une opération géodésique, réclame la connaissance du degré de précision avec lequel la mesure des bases et celle des angles ont été effectuées"

"L'exactitude des angles observés se prononce le plus directement par les écarts qui ont eu lieu, dans les différents triangles, entre les sommes des 3 angles et $180^\circ + \text{excès}$ "⁸²

A l'aide de la totalité des écarts, Struve parvient aux chiffres suivants, présentés sous forme de tableau:

⁷⁹cf. par exemple, Liagre (1852) § 155, p. 347.

⁸⁰Voir à l'annexe 11, une traduction de l'introduction du chapitre 3 "Berechnung des Dreiecksnetzes" de *Gradmessung in Ostpreussen*, Bessel, 1838. Dans ce paragraphe, il renvoie à *Ast. Nach.* n°121.

⁸¹ Struve op. cit. Tome 1, p. 35.

⁸²Ibid. p. 144

Triangle	Carré de l'erreur moyenne d'un angle	Erreur moyenne d'un angle	Erreur probable d'un angle
arc Baltique	0,329	0"574	0"387
arc de Lithuanie	0,470	0"685	0"461
arc de Volynie	0,539	0"734	0"495
arc de Bessarabie	0,373	0"611	0"412

Il utilise la formule: $r = 0,674489 \varepsilon_2$, où r représente l'erreur probable et ε_2 l'erreur moyenne et donne la recommandation suivante:

" Les écarts ne donnent une juste mesure des erreurs probables que sous condition, que l'observation ait été faite sans la moindre préoccupation, sans rejet"

Nous voyons donc ici le refus de Struve de rejeter une quelconque observation. Tous les résultats doivent être conservés, sinon on risque, par une intervention non objective de fausser le hasard et le traitement par le calcul des probabilités perdrait alors de sa fiabilité. Quant à De Tenner, il remesure les angles si la somme des erreurs des observations dépasse 3".

4 F.G. Bessel (1784-1846)

Dans tous les ouvrages ou articles que nous avons consultés, Bessel est le personnage clé, que l'on cite après Gauss. Son nom est attaché aux innovations introduites en Allemagne dans le domaine de la géodésie. Aussi, nous allons rappeler dans une courte biographie⁸³ les campagnes géodésiques auxquelles il a participé, indiquant dans quel projet elles s'inscrivent. Nous citerons ensuite les nouvelles méthodes qu'il inaugure, sans toutefois les développer car elles le seront dans la partie B.

- Eléments bibliographiques

⁸³Pour de plus amples renseignements, nous renvoyons par exemple à DSB tome 2, p. 97-102 et à *Friedrich Wilhelm Bessel*, Dr. Jürgen Hamel, Berlin, 1984. Nous signalons d'autre part un ouvrage récent: Kasimir Lawrynowicz (traduit du russe par Katja Hansen Matissek et Heinz Matissek) "Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)" in *Vita Mathematica.*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1995, dont le chapitre 10 "Geodätische und gravimetrische Arbeiten" comporte une importante bibliographie de sources primaires et secondaires en langue allemande et russe.

Bessel, Frédéric-Guillaume (1784-1846) est surtout connu comme astronome. Mis en relation avec Olbers en 1806, il est nommé par ce dernier inspecteur des instruments astronomiques à l'Université de Göttingen. En 1812, il préside à la construction de l'observatoire de Königsberg, ville où il enseigne l'astronomie. Il effectue jusqu'en 1833 plus de 75 000 observations d'étoiles. Il paraît de ce fait évident que la manipulation des instruments d'observations n'a plus de secrets pour lui.

La géodésie, après l'astronomie prend la deuxième place dans les travaux scientifiques de Bessel. En 1824, dans la région de Königsberg il effectue, pour passer des journées en plein air dit-il en plaisantant, la mesure d'une base. Ses travaux de géodésie débutent en 1831 avec la collaboration du major Baeyer, détaché de l'état-major prussien, et s'intensifient jusqu'en 1837. Son objectif premier est de relier le royaume de Russie à celui de la Prusse, et aux autres états allemands ainsi que de relier la France, l'Angleterre, l'Autriche et le Danemark, en vue de faire une carte d'Europe et un réseau du 1^o ordre sur le continent. Mais le plan originel d'une triangulation reliant les réseaux déjà existants est abandonné au profit d'une triangulation autonome. La partie délicate du travail se révèle alors être la nécessaire mesure d'une base. C'est à cette occasion que Bessel invente un appareil connu sous le nom de règles de Bessel, règles qui comme nous le verrons seront prêtées à la Belgique après 1846. L'ensemble des opérations dure six ans sur le terrain et demandera deux ans d'exploitation. Cette réalisation constitue le travail géodésique le plus significatif de Bessel. Les résultats sont publiés en 1838 dans un ouvrage considéré comme le modèle des méthodes allemandes et qui servira d'exemples à tous les travaux ultérieurs: Bessel, *Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten, ausgeführt von Bessel und Baeyer*, Berlin, 1838.

- Quel est son projet?

Il est indispensable de replacer les travaux de géodésie entrepris par Bessel dans un cadre plus large, pour comprendre toute leur importance. L'introduction de son livre peut nous y aider.⁸⁴

Après le traité de Vienne, la Prusse, état fortifié et agrandi, a besoin d'un système de mesure clair pour asseoir une action économique efficace. De 1818 à 1833, une union douanière de 20 états se constituera autour de la Prusse. Dès 1816, le gouvernement prussien décide d'instituer un nouvel étalon pour garantir les comparaisons de mesures et leur exactitude. Bessel est chargé de cette mission. Le système qu'il établit devient légal en 1839 et restera en vigueur pendant 30 ans jusqu'à l'adoption en 1869 du mètre comme

⁸⁴Une traduction intégrale de cette introduction se trouve à l'annexe 12

mesure légale. Le mètre est une "Naturmass" et Bessel sceptique sur sa valeur décidée en 1795, plaide pour le maintien du pied prussien qu'il a établi indépendamment du pied français.

Les travaux de géodésie de Bessel se situent aussi à un moment où les savants prennent conscience que la forme de la terre n'est pas un ellipsoïde parfait; cette figure géométrique n'est qu'un modèle et la forme de la terre, le géoïde, demande d'être précisé notamment en évaluant les écarts existant entre un ellipsoïde de référence qu'il faudra choisir arbitrairement et le géoïde. La méthode gravimétrique mise en place par Clairaut se perfectionne mais Bessel préfère mettre en place une nouvelle géodésie avec Gauss. Il s'y lance avec toute son énergie et consacre tout son temps aux recherches théoriques et aux opérations pratiques. Nous ne pouvons en aucun cas séparer les opérations que Bessel exécute sur le terrain des préoccupations théoriques qui l'habitent. Le souci de rigueur et de précision est constamment présent à son esprit et l'amène à introduire des méthodes nouvelles.

- Bref résumé de ses apports

*** Dans les instruments**

La mesure des bases étant hors du champ de notre étude, nous ne présentons pas les règles de Bessel.⁸⁵

Pour la mesure des angles, l'instrument utilisé par Bessel, avec Baeyer, est un théodolite construit par Ertel à Munich, sur un dessin de Schumacher (diamètre de 38 cm, précision de lecture 2"). Bessel se sert d'un héliotrope.

Bessel attache beaucoup d'importance à l'utilisation des instruments ainsi qu'à la description de leurs caractéristiques. Avec lui, on assiste à la mise en place systématique d'une constante instrumentale caractérisant la précision relative de chaque instrument. Les instruments sont étalonnés. Il établit des relations mathématiques simples avec les grandeurs mesurées nécessitant la détermination de constantes mais surtout, Bessel a comme principe de ne jamais considérer les différentes parties des instruments comme parfaites et s'attache donc à rechercher les écarts possibles avec les relations établies.⁸⁶

⁸⁵Nous renvoyons pour une description de cet appareil au chapitre 1 de *Gradmessung in Ostpreussen*, Bessel, 1838 ; avec ces règles, Bessel mesure une base à Trenk en Août 1834.

⁸⁶Bessel a, par exemple, étudié les erreurs de vis dans les instruments; voir Bessel, *Astronomische Untersuchungen 1*, Königsberg, 1841. Il a aussi étudié les erreurs de division des cercles; voir Bessel, *Astronomische Untersuchungen 1*, 1815 et 3, 1817, Königsberg; il y décrit une méthode connue sous le nom de méthode de Bessel qui représente les erreurs systématiques de division par une formule d'interpolation, sous la forme d'une série de Fourier.

* Dans les méthodes

Bessel mène de front, de 1833 à la mi 1834, les mesures des angles de la triangulation primordiale et les observations astronomiques de différents points.

Il imagine avec Struve la méthode des directions et met en place une méthode de compensation (Ces méthodes sont reprises dans la partie B de ce travail), dont il s'entretient avec Gauss.

* Ses résultats

L'apport des travaux géodésiques de Bessel reste dans l'histoire sous le nom de l'ellipsoïde de Bessel. A l'époque, cet ellipsoïde sera utilisé dans de nombreux pays tant pour les travaux de géodésie que de cartographie.

Cette recherche l'amène à se poser les questions suivantes: jusqu'à quelle grandeur de la surface mesurée les formules de trigonométrie plane ont elles une exactitude suffisante? A quel moment le calcul avec des triangles sphéroïdaux est-il nécessaire? Bessel fixe des limites admissibles pour le théorème de Legendre, environ 150 km, et avec Gauss met en place la géodésie sphéroïde.

En 1840, à partir de 10 mesures d'arcs, Bessel calcule le quart du méridien terrestre. Il trouve 10000565,28m soit plus de 1/2 km par rapport au mètre conventionnel. Pour l'aplatissement*, il donne $a \approx 6377,39716$ km , $b \approx 6356,07896$ km et $\alpha \approx 1/299,15^{87}$

Il est aussi l'un des premiers à avoir vérifié que "les erreurs inévitables" étaient statistiquement distribuées suivant une loi de Gauss. En 1818, il publie dans *Fundamenta Astronomiae* , un catalogue des positions de 3222 étoiles, composé à partir d'environ 60000 observations effectuées par l'astronome anglais James Bradley entre 1750 et 1762. A partir de ce catalogue, il vérifie que la distribution des erreurs obtenues d'après les valeurs observées est proche de celle obtenue en partant de la loi de Gauss.⁸⁸

5 J.J. Baeyer (1794-1885)

Comme nous venons de le voir, Baeyer Johann-Jakob participe avec Bessel aux opérations géodésiques en Prusse orientale.

⁸⁷Voir Bessel, Ast. nach. 14, 1837 et Ast. nach 19, 1842

⁸⁸Voir Stigler op. cit. p. 202-204.

J.J. Baeyer est évidemment un personnage central dans l'histoire de la géodésie; il est connu comme le militant et le promoteur de l'internationalisation de la géodésie. La création en 1864 de la "Mitteleuropäische Gradmessung", ancêtre de l'Association géodésique internationale, couronne de succès ces longs efforts pour organiser rationnellement la géodésie sur la plus grande échelle possible.

Nous nous bornerons à quelques indications sur sa carrière, renvoyant à diverses études sur le personnage⁸⁹.

A partir de 1813, il fait carrière dans l'armée. Etudiant à l'école militaire de Koblenz, il commande le bureau de topographie de 1816 à 1821, date à laquelle il est admis au "Trigonometrisches Büro des grossen Generalstabes in Berlin". Il en prend le commandement en 1843 jusqu'à sa retraite en 1857; Il est nommé Generalmajor en 1852.

De 1821 à 1830, il effectue une triangulation du 1^{er} ordre à Berlin, dans les provinces de Silésie, Poznan et Prusse occidentale. En 1829, il est professeur de mathématiques puis de haute géodésie à l'école militaire de Berlin. De 1830 à 1834, il participe avec Bessel à la mesure du méridien en Prusse orientale. Stimulé par Bessel, son maître, il développe ses théories sur la géodésie et deviendra un des principaux géodésiens sur le plan international. Après avoir pris part à des opérations de nivellement près de Berlin, il triangule de 1837 à 1846 le long de la Baltique jusqu'à Berlin raccordant sa chaîne de triangles avec le réseau danois. A cette occasion, il mesure une base près de Bonn; lors de ces opérations, il se fait aider par des officiers belges.⁹⁰ Il rapporte ses travaux dans un ouvrage⁹¹ publié en 1849 à Berlin sous le titre *Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie*.

Nous venons de montrer que le début du XIX^e siècle est marqué en "Allemagne" par l'apparition d'une nouvelle géodésie. D'illustres savants, théoriciens et praticiens, sont les maîtres d'oeuvre de ces nouvelles méthodes.

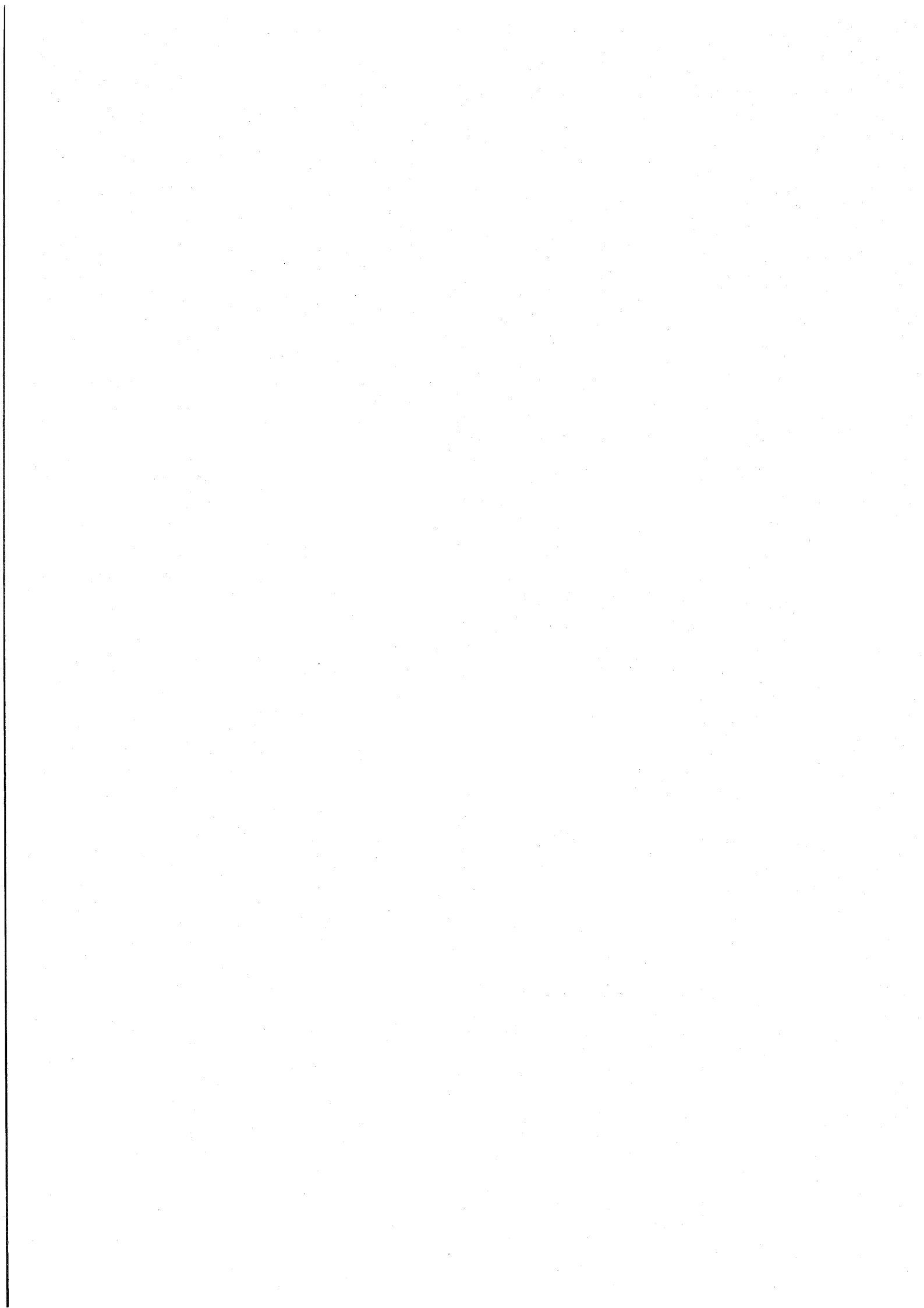
⁸⁹ Voir Günther, in *Allgemeine Deutsche Biographie*, tome 46, p. 281-287. Günther nous donne comme sources: Helmert, *J.J.Baeyer, Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 21 Jahrgang*, p. 2 et ss, *General Baeyer, Zeitschrift für Vermessungswesen*, 14 tome, p. 369 et ss.

⁹⁰Günther op. cit. p. 285 écrit: "En 1846, on a mesuré une base à Berlin, puis l'année suivante à Bonn et ce avec le soutien d'un "officiere" belge. A cette occasion, il s'est avéré que, si on prenait le coefficient de surface des métaux, il était d'une grandeur absolument constante et ne concordait pas avec la réalité. Les savants belges qui se sont réunis pour l'examen de cette constatation importante -Stas, Plateau, Liagre- trouvèrent l'affirmation de Baeyer tout à fait fondée" (ce passage est une traduction).

⁹¹Une traduction intégrale de l'introduction se trouve à l'annexe 13.

Comment vont-elles se diffuser sur le continent? Quelle est leur supériorité sur les méthodes utilisées jusqu'alors?

Un détour par la Belgique va nous permettre de prendre du recul et de mieux comprendre les différences notables qui existent entre la tradition française et la tradition allemande.



La Belgique

Quelques repères historiques

Régime français de 1795 à 1815

La Belgique est liée au destin de la France jusqu'en 1815. Traité de Campoformio en Août

Royaume des Pays-Bas de 1815 à 1830

Au profit du prince d'Orange devenu le roi Guillaume 1^{er} (16 mars 1815)

Indépendance

25 août 1830. Bruxelles s'insurge

29 septembre 1830. Séparation du Nord et du Sud

4 octobre 1830. Indépendance de la Belgique

(reconnue à Londres le 20 janvier 1831 puis par l'Europe avec le Traité des 24 articles le 14 octobre 1831; les Néerlandais ne la reconnaissent qu'en 1839).

21 juillet 1831. Roi Léopold 1^{er}, prince Léopold de Saxe-Cobourg-Gotha.

11 février 1831. Constitution

Après son indépendance en 1830, la Belgique est déclarée neutre pour constituer la "clef de voûte de l'ordre européen". Elle sert d' "Etat-tampon" entre la France, la Hollande et la Prusse.

* Léopold I^{er} (1831-1865). Il tente de maintenir l'union nationale mais les libéraux et les catholiques accentuent leur division. Ils constituent des partis séparés et rivaux.

* Léopold II (1865-1909). Jusqu'en 1846 un esprit unioniste domine mais les libéraux, bourgeois anticléricaux, exercent le pouvoir de 1847 à 1870 puis de 1878 à 1884, les catholiques de 1870 à 1878 puis de 1884 à 1914.

Quelques repères:

--> Léopold I^{er} décide de créer une armée permanente après la conférence de Londres (1831) et un système défensif concentré sur les 3 places fortes d'Anvers, de Liège et Namur. Pendant 10 ans, il fait appel à des cadres français assurant le commandement et l'instruction des nouvelles forces belges (citons le général français Evain). L'armée peu à peu se constitue (En octobre 1830: 2 régiments d'artillerie de campagne et de place, un autre en 36, puis 42, puis en 68 il y en a 6. Octobre 1830, un régiment du Génie).

---> L'Ecole militaire, créée en 1834, est organisée par 2 officiers supérieurs de l'armée française: le général de division Desprez puis le lieutenant-Colonel Chapelié (ensuite, Nerenburger puis Liagre).

---> L'Ecole de Guerre est créée en 1869 par le colonel Brialmont pour la formation des officiers d'Etat-Major.

---> Les universités belges:

Celles de Gand et de Liège sont créées en 1816 par le roi des Pays-Bas; celle de Louvain en 1426 et celle de Bruxelles en 1830.

--> La 1^{ère} voie ferrée Bruxelles-Malines est inaugurée en 1834. Le réseau ferroviaire belge est alors le plus dense du monde. Il est 8 fois plus long en 1908 qu'en 1845.

A.III. La Belgique

Rappelons que nous arrivons ici à la partie principale de la thèse. La Belgique du milieu du XIX^e siècle constitue à la fois un poste d'observation pour comprendre les différences entre la "tradition française" et la "tradition allemande" en géodésie, pour saisir les raisons du changement d'hégémonie, mais aussi un lieu de passage, à partir de 1850, pour la connaissance en France des travaux allemands.

Ce chapitre A III, plutôt biographique et descriptif, va s'efforcer de planter les enjeux, les acteurs, le décor, et de mettre en relief les moments cruciaux de l'histoire de la géodésie belge, en particulier autour de l'année 1846.

Nous reviendrons plus précisément dans la partie B sur les méthodes et tout spécialement sur le traitement des erreurs par la voie du calcul des probabilités, qui constitue le noeud du problème, ainsi que les savants et militaires belges l'ont montré de façon claire et précoce.

Mais, avant cela, il convient de donner un survol des travaux géodésiques effectués en Belgique avant la décennie 1840.

1 Les premiers travaux

- Avant 1815

Nous nous contenterons d'un survol rapide indispensable à la compréhension de la période charnière postérieure à 1830¹.

Au sein des universités hollandaises très vivaces au 16^e siècle, une cartographie, utile et vitale dans ce pays de polders, se met en place à partir d'une tradition ancienne.

"La cartographie scientifique des anciens Pays-Bas se rattache, au XIII^e siècle, à la tradition astronomique, astrologique, et géodésique de l'Université de Paris et celle-ci dérive des connaissances de l'antiquité gréco-romaine enrichies d'apports étrangers."²

¹Pour écrire ce paragraphe, nous nous sommes en partie inspirée de *Les géomètres-arpenteurs du XVI^e au XVIII^e siècle dans nos provinces*, catalogue d'exposition, Bruxelles, 1976, ainsi que de l'ouvrage cité à la note suivante. Voir aussi: Nerenburger, *Notice sur les triangulations qui ont été faites en Belgique depuis 1617 jusqu'à nos jours*, Bruxelles, 1856; I. Loodts, *Histoire de la triangulation en Belgique*, Bruxelles, 1969; C. Lemoine-Isabeau, *Les militaires et la cartographie des Pays-Bas et de la Principauté de Liège à la fin du XVII^e et au XVIII^e siècle*, Bruxelles, 1984.

²cf. *La cartographie hollandaise*, A. de Smet, Bruxelles, 1971

Rappelons rapidement les grands noms qui ont marqué cette époque caractérisée par l'invention d'une méthode pour lever les cartes: la méthode dite de triangulation.

* Jacques de Deventer s'inscrit à l'Université de Louvain³ le 24 avril 1520 et y étudie en particulier les arts et la médecine. Gemma Reyneri ou fils de Renier, dit Gemma Frisius ou le Frison, ne s'y inscrit que le 26 février 1526. De Deventer a ainsi une priorité de plus de cinq ans sur Frisius en ce qui concerne les études universitaires⁴. Comme il achève en 1536 la carte d'une région assez étendue, le duché de Brabant, à l'échelle d'environ 1/190000 en appliquant une méthode de triangulation⁵, et que Frisius n'a jamais réalisé de carte régionale, il est fort probable que l'élaboration de la triangulation exposée par Frisius dans le *Libellus de locorum describendorum ratione* paru en 1533 ou 1534 doive beaucoup à de Deventer notamment aux levés qu'il faisait à ce moment là dans le duché de Brabant. De 1540 à 1575, date de sa mort à Cologne, il dressa les plans de quelques 250 villes des Pays-Bas.

* Frisius, dans son *Libellus*, explique en 17 pages illustrées de figures comment on peut lever la carte d'une région pas trop étendue - ne dépassant pas 100 milles - par la mesure des angles. Le premier chapitre donne la méthode avec, comme première figure, un triangle mesuré sur la ligne méridienne Anvers-Bruxelles avec Louvain comme troisième sommet. Puis le Frison explique comment il faut lever la carte d'une partie du Brabant. A Louvain il enseigne l'astronomie, l'astrologie et la médecine⁶. Il est indéniable que son influence est bien plus grande que celle de de Deventer qui n'enseigna pas et ne publia pas, ceci explique qu'on ait longtemps attribué à Frisius une partie du mérite qui aurait dû revenir à Deventer.

*Willebrord Snel van Royen alias Snellius (1580-1626) étudie à l'Université de Leyde où il suit les cours de mathématiques de Ludolphe van Ceulen. Il se rend à Prague, où il travaille chez Tycho-Brahé et a des échanges d'idées avec Kepler. Il séjourne ensuite à Tübingen où il rencontre l'astronome Maestlin, puis à Paris et en Suisse. Rentré à Leyde en 1604, il y enseigne les mathématiques et l'astronomie. Snellius est sans doute le

³Cette université est fondée en 1426 par Jean IV de Brabant; on y enseignait, en plus des humanités, des cours d'arithmétique, de géodésie et d'astronomie.

⁴A. de Smet souligne que ce renseignement n'est connu que depuis 1958, d'où la priorité certaine maintenant de Deventer sur Frisius quant aux activités géographiques.

⁵De Smet, dans son livre op. cit., signale que des professeurs de l'Université de Louvain étaient en rapport avec le cosmographe allemand Sébastien Münster (1488-1552). Ce dernier connaissait peut-être, d'après de Smet, une méthode pour lever des cartes locales dès 1524.

⁶Parmi ses élèves, on compte Mercator Gérard et John Dee.

premier à établir un réseau de triangulation entre Alkmaar et Bergen op Zoom, pour calculer la distance entre ces deux villes et évaluer la longueur du méridien ainsi que la circonférence de la terre, en utilisant comme base la distance entre Leyde et Zoerterwoude. Il consigne ces opérations dans son *Eratosthenes Batavus* publié en 1617⁷. Il obtient pour le degré de méridien terrestre 55021 toises (L'Abbé Picard obtiendra en 1669-1670 une longueur de 57600 toises). Ses travaux géodésiques sont appréciés par des membres de l'Académie des Sciences de Paris tels que l'Abbé Picard et les Cassini.

*Au XVII^e et au XVIII^e siècles, les Pays-Bas connaissent une série de guerres et, au rythme des défaites, changent continuellement de frontières. L'instabilité des Pays-Bas espagnols, puis à partir de 1713 des Pays-Bas autrichiens ne favorise pas la possibilité d'un projet de triangulation d'envergure sur leur territoire.⁸

* Le 10 décembre 1777, le général comte Ferraris présente à l'Empereur Joseph II une belle carte chorographique* des Pays-Bas autrichiens à l'échelle 1 ligne pour 100 toises c'est-à-dire 1/86400. Dans la conception générale de cette carte, l'influence de la France est grande: même échelle que Cassini et mêmes méthodes géodésiques. Les opérations ont débuté en 1771 et la carte est remise fin 1777. La grande rapidité des travaux surprend et Nerenburger pense que Ferraris n'a pas exécuté de triangulation de base, qu'il s'est servi de renseignements recueillis au Dépôt des cartes à Versailles dirigé par le général de Vault et qu'il s'est appuyé sur les travaux de Cassini de Thury⁹.

⁷Le titre complet de cet ouvrage est *Eratosthenes Batavus, seu de terrae ambitus vera quantitate suscitatus*. Snellius intercale dans les pages de cet ouvrage des additions et des notes, qu'il ne publiera pas, concernant des erreurs qu'il a faites dans les observations. Petrus van Musschenbroek (1692-1761) reprendra vers 1729 l'oeuvre géodésique de Snellius et utilisera ses notes. Il trouve alors pour la valeur d'un degré de méridien la valeur de 57033 toises, soit 27 toises seulement de différence avec le résultat obtenu par l'Abbé Picard. Les erreurs de Snellius étaient de 1 ou 2 minutes. (Voir *Les géomètres-arpenteurs du XVI^e s au XVIII^e s dans nos provinces*, Bruxelles, 1976)

⁸Mme C. Lemoine-Isabeau n'a pas manqué de remarquer cette longue période. "A la lecture des études publiées sur Ferraris, la cartographie dans notre pays paraît n'avoir rien produit entre le 16^{ème} (Deventer, Mercator, Surhon) et 1770. L'oeuvre de Ferraris semble, selon ces auteurs, ne s'appuyer sur aucune tradition locale et être une entreprise solitaire et peu explicable. Malgré quelques études, la plupart limitées à un sujet restreint, bien des questions restent pendantes " dit-elle dans la présentation de son travail paru en 1984 sous le titre *Les militaires et la cartographie des Pays-Bas méridionaux et de la principauté de Liège à la fin du XVII^{ème} et au XVIII^{ème} siècle*, Bruxelles, Centre d'histoire militaire, 1984.

⁹Voir Nerenburger, *Notice sur les triangulations qui ont été faites en Belgique depuis 1617 jusqu'à nos jours*, Bruxelles, 1856. Nous rappelons que Cassini de Thury entreprend des observations en 1748 pour les armées de Louis XV, dont il publie les résultats en 1775.

* De 1802 à 1811, le lieutenant-général baron Cornelius R.T. Kraijenhoff¹⁰ (1758-1840) participe aux opérations de la triangulation de la Hollande dans le cadre des travaux géodésiques entrepris sous le Consulat et l'Empire. Ces travaux servent de base à la première carte topographique moderne de la Hollande. Il les relate dans *Précis historique des opérations géodésiques et astronomiques faites en Hollande pour servir de base à la topographie de cet état*, édité à La Haye en 1815.¹¹ La triangulation exécutée de 1802 à 1811 se rattache à celle de la France par le triangle Dunkerque, Watten et Mont-Cassel pour se diriger, par les Flandres, sur la Hollande. Elle ne comporte aucune mesure de bases.

A la même époque, en 1804, Tranchot, colonel français du corps des ingénieurs géographes, relie la France aux bords du Rhin, en passant par la partie septentrionale des provinces belges.

- Erzey. J¹²

Les travaux précédents manquent d'éléments géodésiques importants tels que des mesures astronomiques ou la mesure d'une base. Aussi, le gouvernement des Pays-Bas, après 1815, sent-il leur insuffisance et décide-t-il d'y porter remède.

La première opération à entreprendre est celle d'une triangulation du 1^{er} ordre*. En 1815, le gouvernement charge Erzey¹³, capitaine du génie néerlandais, de commencer une telle triangulation mais celle-ci est interrompue par la révolution de 1830. Erzey quitte alors son pays et meurt quelques temps après. Comme il effectuait les observations lui-même, et qu'il a perdu la raison, il est impossible, par la suite, d'obtenir les renseignements indispensables à la commission nommée en 1846 pour la vérification de ses calculs.¹⁴

¹⁰Plusieurs orthographes se rencontrent pour ce nom. Signalons: Crayenhoff ou Krayenhoff.

¹¹Une deuxième édition de cet ouvrage paraîtra en 1827.

¹²Parfois ce nom est aussi orthographié Herzey.

¹³Nous signalons qu'actuellement Janssens Freddy, de l'Institut voor Aardwetenschappen Dienst Kartografie de Leuven, prépare un mémoire de doctorat sur "L'époque hollandaise de 1815 à 1830". De ce fait, il s'intéresse aux travaux exécutés par Erzey, travaux réalisés selon la tradition française.

¹⁴La triangulation d'Erzey comprend 54 triangles du 1^{er} ordre couvrant la plus grande partie de la Belgique. Mme Lemoine-Isabeau précise que Erzey avait heureusement communiqué ses résultats aux ingénieurs géographes français avec lesquels il avait collaboré; D. Peellaert ramène de son séjour à Paris en 1835 les données de la triangulation ci-dessus que possédait le Dépôt de la Guerre français (sources citées: carton 8/85 fonds Jolly du MRA et Nerenburger, *Triangulations antérieures...* op.cit. p. 456-464).

- Philippe Vandermaelen (1795-1869)

Cartographe, Vandermaelen substitue au travail de la gravure sur cuivre, lent et coûteux, un procédé nouveau, plus rapide et plus économique: la lithographie. Il fonde en 1830 l'Établissement Géographique de Bruxelles, dont le but est commercial et scientifique. Une des premières oeuvres de cet établissement est la réédition et une mise à jour partielle de la carte marchande de Ferraris, établie en 1777, sur laquelle figurent encore des informations datant de la fin du régime autrichien; il réédite aussi la carte de Hollande de Krayenhoff. Il se propose de réaliser une carte de la Belgique au 1/20 000 en se servant des nombreux réseaux de triangulation et des cartes topographiques établis lors de l'occupation d'une partie de l'Europe par les armées françaises de la Révolution puis de l'Empire, travaux poursuivis sous le gouvernement du Royaume des Pays-Bas (1815-1830) par Tranchot, Krayenhoff, Erzey...

La notoriété de l'Établissement Géographique est importante d'autant plus que l'État belge, récemment indépendant, est dépourvu de moyen d'édition cartographique et s'adresse à Vandermaelen pour les cartes nécessaires à ses administrations. Cet établissement jouit alors d'un véritable monopole puisque la majorité des cartes publiées en Belgique sortent des ateliers de Vandermaelen.¹⁵ Comme nous le verrons dans la suite de cette étude, une concurrence va s'instaurer entre cet établissement et le Dépôt de la Guerre créé en 1831.

2 Des personnages clés

Tout va se nouer en peu de temps, pendant la décennie 1840, autour de trois personnages: deux militaires G.A. Nerenburger (l'homme de terrain) et son élève J. Liagre (plus théoricien), et un mathématicien original d'origine luxembourgeoise A. Meyer. Mais, bien entendu, en Belgique, au XIXe siècle, rien de scientifique ne se passe sans qu'A. Quetelet, un peu plus âgé que les précédents, ne marque le paysage de son empreinte. C'est pourquoi, bien que ce savant ait un rôle moins explicite dans l'histoire de la géodésie belge, nous commencerons par lui.

¹⁵A cette époque, la production civile est pleine de vitalité à Bruxelles; Parmi les autres éditeurs bruxellois de cartes belges citons: les frères Fietta, les frères Boens, J. Collon, J.B. Jobard (cf. Mme Lemoine-Isabeau op.cit. p.37).

- A. Quetelet (1796-1874)

Nous serons succincts, car la littérature autour de la vie, l'oeuvre, l'influence de Quetelet est abondante.¹⁶ Dans ce paragraphe, nous n'indiquons que quelques points méritant d'être mis en avant afin d'expliquer le rôle de Quetelet vis-à-vis des décisions que la Belgique prend en matière de géodésie.

Connu mondialement pour l'utilisation des statistiques en démographie et du calcul des probabilités dans les Sciences Humaines, il participe activement à la rénovation des Sciences, Lettres et Arts en Belgique et d'une certaine manière, suite à Laplace et Poisson, déplace de la France à la Belgique le flambeau des probabilités et statistiques. Son rôle en Europe est important, il voyage beaucoup. En 1823, il se rend en France où il rencontre Bouvard, Arago, Laplace, Poisson... Il fonde en 1825 un recueil périodique sous le titre *Correspondance mathématique et physique*, recueil qu'il ouvre à des savants étrangers. Parmi ses autres voyages, signalons en 1827 un séjour en Angleterre; puis en 1829, en Allemagne, où il rencontre Schumacher, Repsold, Olbers, Encke, Crelle, Gauss, Goethe...; encore à Paris en août 1839 où il rencontre Arago, Bouvard, Gambey, lors d'une exposition; de nouveau à Londres en 1851, pour participer à la première exposition universelle, il jette les bases du premier congrès international de statistique qui se tiendra à Bruxelles en 1853; 150 savants de 26 pays différents y participeront et Quetelet y développera ses idées sur l'importance de la collaboration internationale des savants et des observateurs. Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale de Bruxelles, il renouvelle entièrement cette institution, en proposant notamment de publier des *Bulletins*; il enseigne l'astronomie et la géodésie à l'École militaire à partir de 1835, où il a pour élève Liagre¹⁷.

¹⁶Signalons que 1996 fête le bicentenaire de la naissance de Quetelet. Diverses manifestations se tiennent à cette occasion ; en particulier, un colloque "Quetelet: un Homme d'idées. Actualité et universalité de la pensée scientifique de Quetelet" s'est tenu à l'Université Libre de Bruxelles les 24-25 octobre 1996. Lors de ces journées, divers exposés confirment le rôle joué par Quetelet en tant que Directeur de l'observatoire et ses liens avec les savants des pays européens en particulier "Quetelet académicien" par R. André, "L'astronomie, la météorologie et l'aéronomie de l'époque de Quetelet à nos jours" par P. Paquet, "Quetelet and the beginnings of International Statistics" par E. Kenessey, "Quetelet et les probabilités: le sens de la formule" par M. Armatte et J.J. Droesbeke. Plusieurs articles relatifs à Quetelet, fondateur de l'Observatoire de Bruxelles abondent dans le même sens et soulignent combien Quetelet a favorisé les échanges scientifiques en Europe au cours du XIX^{ème} siècle: voir le volume XI, n°1, 1996 des *Bulletins astronomiques, Observatoire Royal de Belgique*. A. Collard, *La vie et l'oeuvre de A. Quetelet* in Ciel et Terre, vol.44, 1928. Comme sources relatives à la vie et l'oeuvre de Quetelet, citons: Lottin J., *Quetelet, Statisticien et Sociologue*, Louvain, 1912; Hankins F.H., *Adolphe Quetelet as Statistician*, New York, 1908. Mme Liliane Wellens-De-Donder a rassemblé dans le catalogue de l'exposition A. *Quetelet* Bibliothèque royale Albert I^{er} de Bruxelles, 1974, p. XV-XXI une importante bibliographie relative à A. Quetelet.

¹⁷"Ses leçons n'avaient rien de cette sécheresse didactique qui effraye et rebute tant de jeunes intelligences; c'étaient plutôt d'instructives causeries, dans lesquelles il se contentait d'esquisser son sujet à grands traits, laissant à ses auditeurs le soin de compléter ensuite en travaillant par eux-mêmes.", in *Annuaire de l'ARB*, Tome 37, 1871, Bruxelles: "Notice sur Nerenburger", écrite par Liagre, p.369-389.

Revenons en Belgique. En 1823, Quetelet propose de fonder un observatoire qui ne sera créé par arrêté royal qu'en 1826 et qui ne commencera à fonctionner qu'en 1834¹⁸. L'Observatoire dépend d'abord de l'Académie, ensuite c'est Quetelet qui est chargé de le diriger. Ce dernier fait acquérir plusieurs instruments parmi lesquels on compte: deux pendules de précision, une lunette méridienne de Gambey, un cercle mural et un cercle équatorial de Troughton et Simms.

Il va sans dire que Quetelet connaît le calcul des probabilités et la MMC, ainsi que sa pratique en astronomie. D'ailleurs, il l'évoque dans *Instructions populaires sur le calcul des probabilités* (1827) au chapitre XIV en ces termes:

"Nous énoncerons d'abord la règle qui doit être suivie pour trouver cette mesure numérique de la précision.

On commencera par chercher la valeur moyenne de toutes les valeurs particulières que l'on considère. On prendra ensuite le carré de chacune de ces valeurs particulières et l'on cherchera une seconde valeur moyenne, savoir; celle des carrés; on obtiendra de cette manière, pour les deux moyennes, deux nombres que nous désignerons, le premier par A et le second par B. On retranchera de B le carré du nombre A, et l'on divisera le double du reste par le nombre des valeurs particulières que l'on considère. Extrayant la racine carrée du quotient, on trouvera une quantité que nous désignerons par g, et qui sert à mesurer le degré d'approximation ." [p.152-153]

Cette règle est formulée directement hors du champ des probabilités. Mais pourtant Quetelet indique que l'on s'en sert pour calculer l'erreur et que "ces erreurs ont des limites vraisemblables c'est-à-dire qu'il est extrêmement probable que l'erreur commise en plus ou en moins n'excédera pas une certaine quantité". Puis il signale qu'il "existe des limites plus voisines, pour lesquelles la probabilité de l'erreur est seulement 1/2; en sorte qu'il peut arriver indifféremment ou que l'erreur excède ces limites ou qu'elle y soit comprise." [p.155-156]

Citons un exemple parmi d'autres, où Quetelet est confronté à l'utilisation pratique de la MMC en astronomie: en 1835, dans la *Correspondance mathématique et physique*, il signale une lettre de Santini, directeur de l'Observatoire de Padoue sur des calculs relatifs à la détermination de l'orbite de la comète de Halley¹⁹, et utilisant la MMC.

En 1836, Quetelet est nommé professeur d'astronomie et de géodésie à l'École militaire de Bruxelles²⁰. Chapelié, alors commandant de cette école, lui adresse pour

¹⁸Cette date coïncide avec celle de la parution du 1^{er} annuaire et du tome I des Annales.

¹⁹Nous donnons à l'annexe 25 un tableau des observatoires européens et de leur directeur durant la période étudiée. Un contact permanent, par lettre ou visite, existe entre ces directeurs, par exemple en vue de déterminer avec exactitude les longitudes.

²⁰cf. une lettre du baron Louis Evain (ministre de la Guerre) à Quetelet en date du 6 janvier 1836 in

information le sommaire des cours enseignés à l'École polytechnique en 29 leçons par Arago, ainsi que ceux de l'École de Metz. Quetelet enseigne à l'École militaire pendant trente et un ans jusqu'à sa mise à la retraite imposée par l'arrêté royal du 18 mai 1867. Là encore, les fonctions de Quetelet font qu'une collaboration féconde s'installe entre l'Observatoire et l'École militaire. Les élèves vont manipuler les instruments à l'Observatoire et un lien s'établit entre théorie et pratique. Les cours d'astronomie et de géodésie ont le même nombre d'heures: une heure et demie, deux jours par semaine.

Personnage central et bien informé pour tout ce qui touche aux probabilités en Europe²¹, Quetelet n'en reste pas moins un proche de la tradition française, et ce n'est pas d'abord de lui que viendra la conversion des savants belges aux méthodes allemandes en géodésie.

- G.A. Nerenburger (1804-1869)

* **Éléments biographiques**²²

Guillaume-Adolphe Nerenburger est né le 23 Avril 1804 à Amsterdam, de parents français. Naturalisé belge en 1846, il meurt le 19 mars 1869 à Bruxelles²³.

Il fait ses études à l'Athénée royal de Bruxelles où Quetelet, son professeur de mathématiques, écrit dans un rapport:

"Le jeune Nerenburger par ses progrès rapides dans les sciences exactes, méritait d'être regardé comme un des meilleurs élèves qu'eut formés l'établissement".²⁴

Il est admis en France à l'École de Saint-Cyr en 1822²⁵. Remarquons que la langue enseignée à St-Cyr ces années-là est la langue allemande²⁶. Il sort le 21 janvier

Correspondance de Quetelet, n°15, archives de l'ARB.

²¹Voir note 13

²²Une notice biographique relative à Nerenburger écrite par G.Hennequin se trouve dans la *Biographie nationale* publiée par l'ARB, tome 15, p. 594-602, Bruxelles, 1899. Voir aussi Liagre, "Notice sur Nerenburger" in *Annuaire de l'ARB*, tome 37, p. 369-389, 1871. Nous avons complété, précisé ou vérifié ses notices par la consultation de son dossier personnel XO12 aux archives du SHAT, du dossier 525 au musée de l'Armée à Bruxelles et par ses correspondances consultées à l'ARB. Les références précises sont indiquées lorsque nous le jugeons nécessaire.

²³Nous avons trouvé dans le dossier 8835 de l'ARB, le récit émouvant de la mort de Nerenburger relaté par Liagre qui était alors présent (lettres n°8 retranscrite à l'annexe 45).

²⁴Voir Liagre, "Notice sur Nerenburger" in *Annuaire de l'ARB*, tome 37, p. 369-389, 1871

²⁵Voir Dossier personnel de Nerenburger XO12 des archives du SHAT.

²⁶Voir Dossier sous-série XO 168 des archives du SHAT. L'allemand était très enseigné dans les écoles militaires françaises au XIXe siècle.

1827 de l'École d'application du corps royal d'état-major avec le grade de sous-lieutenant²⁷. Après avoir sollicité sa démission qu'il obtient dès le 28 avril, il rentre à Bruxelles²⁸.

Il se lie d'amitié avec Quetelet; en 1827 et 1828, il publie ses premiers essais dans la *Correspondance mathématique et physique*. Au printemps 1827, Quetelet obtient pour son ancien élève, l'autorisation de donner des cours publics de mathématiques au Musée.

Nerenburger mène parallèlement une carrière militaire et scientifique. Après la révolution de 1830, il offre ses services au gouvernement provisoire et est admis dans l'armée. Il prend part aux diverses campagnes et, pour belle conduite au siège d'Anvers, il reçoit la croix de chevalier de l'ordre de Léopold. A partir de 1835, il est chargé d'enseigner la géométrie descriptive à l'École militaire de Bruxelles. Lieutenant-colonel en 1843, il est attaché au Dépôt de la Guerre dont il deviendra le directeur le 22 décembre 1845. Devenu général-major en 1854, il se voit confier en 1863, le commandement de l'École militaire et est promu lieutenant général le 25 décembre de cette même année.

Il est aussi fort apprécié comme professeur à l'École militaire et comme cartographe au Dépôt de la Guerre. Il prend part au mouvement intellectuel qui suit l'indépendance de la Belgique avec d'autres savants tels que: Quetelet, Dandelin, Plateau, Verhulst...En 1847, il est admis comme correspondant à la classe des Sciences de l'Académie de Bruxelles dont il devient membre en 1849. Un de ses élèves, le futur capitaine Liagre vante ainsi les qualités de ce professeur:

"Extérieur grave et simple, plein de modestie et d'aisance, son organe était pur, son accent agréable, sa diction élégante et directe. Il exposait ses idées avec clarté et ordre. Le talent dont il était doué pour le dessin graphique contribuait à donner à ses leçons de géométrie descriptive le cachet de perfection que ses élèves admiraient. Les épreuves sorties de son tire-ligne, les lavis dus à son pinceau, que l'on exposait comme modèles dans nos salles, étaient des chefs-d'oeuvre de correction et d'élégance."²⁹

***Ses fonctions**

²⁷Sorti de St-Cyr au rang 25 sur 132, il est admis dans cette école d'application. (cf. sous-série XO 147 SHAT). Signalons toutefois qu'il a fallu l'intervention de la comtesse Guilleminot, tante de Nerenburger, pour que son admission fut effective, car le nombre d'élèves était arrêté à 20. (cf. Lettre in sous-série XO 12 du SHAT)

²⁸Une lettre de Nerenburger du 19 Avril 1827, Cambrai (sous-série XO 12 du SHAT) nous apprend qu'il refuse de rejoindre le 9^e régiment de ligne en garnison à Pampelune. En effet, alors qu'il était à Bayonne, il reçoit une lettre le prévenant du grave état de santé de son père, ce qui l'amène à démissionner "pour rester dans sa famille". Liagre, op. cit. p. 370 indique "que le genre de vie de ses camarades n'était conforme ni à ses goûts studieux, ni à son caractère réfléchi".

²⁹Liagre op. cit. p. 371

De par ses fonctions, Nerenburger occupe deux postes clés pour notre propos: d'abord celui de directeur du Dépôt de la Guerre de 1845 à 1863, puis celui de commandant de l'École militaire jusqu'à sa mort.

La Belgique est alors en retard sur la plupart des pays d'Europe en matière de cartographie. Les travaux exécutés laissent à désirer sous le rapport de la précision et ne peuvent pas concourir à la détermination scientifique des formes du globe terrestre, en accord avec les autres opérations géodésiques modernes réalisées en Europe. C'est à Nerenburger que revient le mérite d'impulser et de concevoir la réalisation de la carte de Belgique au 1/40 000. Il se bat afin que ce travail incombe au Dépôt de la Guerre qui concurrence le seul organisme gravant alors des cartes, à savoir l'institut géographique de Vandermaelen. Comme nous allons le voir au paragraphe 3 de ce chapitre, il fait en sorte que ce travail soit d'une grande précision. L'observation des angles du réseau géodésique du premier ordre débute en 1851 mais par manque de crédits, les opérations s'étalent sur plusieurs années.

Sa fonction à l'École militaire lui permet de recruter les officiers compétents dont il a besoin au Dépôt pour les opérations topographiques et géodésiques. Ses liens avec Quetelet favorisent les relations du Dépôt avec l'Observatoire, assurant ainsi la prise en compte des mesures astronomiques lors des campagnes trigonométriques. Il obtient pour cette partie astronomique le concours de Houzeau, astronome, qui possède les capacités:

"de féconder nos travaux géodésiques, en les faisant coopérer à la détermination de la constitution mathématique et physique du globe"³⁰

Nous avons souligné au chapitre A I combien ce manque de bonnes relations entre les institutions similaires en France était préjudiciable à la géodésie française.

De par sa fonction au Dépôt, Nerenburger entre, fin 1846, en rapport avec Baeyer, directeur du bureau trigonométrique de Berlin. Il a alors connaissance des procédés d'observations et des méthodes de calcul de la géodésie allemande.

***Ses travaux³¹**

Pendant 7 ans, à partir de 1848, Nerenburger poursuit au Dépôt de la Guerre avec persévérance un travail important, la réduction des plans parcellaires du cadastre.

³⁰Liagre op. cit. p. 386. L'absence de Houzeau, exilé aux États-Unis à partir de 1857 se fera ressentir sur l'avancement des travaux.

³¹La liste de ses divers écrits se trouve en Annexe 14 et sa correspondance en annexe 15.

Nous aborderons plus loin de façon détaillée: l'étude historique et la critique qu'il fait des triangulations exécutées en Belgique jusqu'en 1830; le rapport qu'il remet en 1847 au ministre de la Guerre; les différentes triangulations dont il est l'organisateur. Nous n'aborderons pas dans le détail les mesures de bases qu'il effectue de 1844 à 1853, ni le remarquable travail sur l'étalonnage des règles de l'appareil de Bessel qui fait l'objet d'un rapport paru en 1855³².

Nous constatons donc que deux influences ont forgé sa personnalité: une influence de naissance et d'éducation françaises et une influence scientifique acquise auprès de Baeyer qui l'amène à étudier les méthodes des géodésiens allemands.

Liagre résume ainsi les travaux de Nerenburger:

"On voit que notre pays est redevable à Nerenburger de l'organisation première d'un travail géodésique complet, ayant non seulement pour objet de doter la Belgique d'une excellente carte topographique, mais pouvant encore fournir de précieuses lumières sur la question de la figure de la terre."³³

- A. Meyer (1801-1857)

*** Eléments biographiques³⁴**

³²Nous renvoyons pour ses contributions en matière de topographie et de cartographie à Lemoine-Isabeau op. cit. p. 87.

³³Liagre op. cit. p. 384

³⁴Nous donnons à l'Annexe 16 les diverses sources biographiques consultées relatives à A. Meyer. En voici quelques unes dès maintenant: Arendt. K, *Luxemburger Porträtgalerie*, Tome I, 1904; Bergmans. C, "Notice sur A.Meyer" in *Biographie Nationale de Belgique*, Tome XIV, col 765-773; Gloden. A, "La vie et l'oeuvre scientifique de neuf mathématiciens belges d'origine luxembourgeoise", in *Themecht Zeischrift*

Anton Meyer est né le 31 Mai 1801 à Luxembourg³⁵ et décède le 29 Avril 1857 à Liège³⁶. Dans les notices biographiques, l'accent est souvent mis sur la contribution de Meyer, en tant que poète, au développement du luxembourgeois (grammaire, mots et expressions propres, tours de phrases particuliers). Mais comme nous allons le voir, ce personnage occupe aussi une place importante dans le monde scientifique.

D'un milieu modeste - son père est cordonnier- il finit ses humanités à Luxembourg en 1818 puis fait de brillantes études scientifiques à l'Université de Liège, tout en enseignant pour gagner sa vie et en rédigeant le catalogue des livres de sciences de la bibliothèque académique. Il prépare le diplôme de docteur en Sciences, mathématiques et physiques mais la soutenance de sa thèse n'aura lieu que le 16 juin 1832 contrairement à ce qui est indiqué dans certaines biographies; écrite le 29 novembre 1823, elle porte "sur les maxima et les minima".³⁷ En 1824-25, il va à Paris écouter les maîtres de la Science. Aux mêmes dates, nous avons déjà remarqué que Quetelet et Nerenburger se trouvent aussi à Paris. Nous pensons que Meyer rencontre peut-être Laplace, Poisson et qu'il assiste au cours de Cauchy ou Hachette.

De retour en Belgique, il enseigne au collège d'Echternach puis à l'École militaire de Bréda. En 1827, il écrit, dans *La correspondance mathématique et physique* de Quetelet, un article portant sur un instrument pour dessiner la perspective, instrument qu'il invente pour son enseignement.

En 1831, il enseigne au collège de Louvain puis de 1832 à 1837 à l'Institut Gaggia à Bruxelles, où il prépare des élèves à l'École militaire. A partir de 1834, il enseigne également comme professeur d'analyse et de mécanique à l'École militaire de Bruxelles

für Luxemburger Geschichte, tome 1, p. 13-16, 1949; Leroy. A, "Meyer" in *Liber memorialis de l'Université de Liège*, 1869, col. 438-446, Neyen. A, *Biographie Luxembourgeoise*, tome 1, p. 454-458, 1860. Nous signalons, à chaque fois qu'il est utile, les références des archives consultées qui nous ont permis de mieux cerner et comprendre le rôle joué par Meyer dans cette phase de l'histoire de la géodésie belge.

³⁵A. Gloden op. cit. p. 16 signale que la date de naissance de Meyer n'est pas correcte dans toutes les biographies qu'il a consultées et que l'état civil de la ville de Luxembourg indique bien le 11 prairial de l'an IX, c'est-à-dire le 31 mai 1801.

³⁶De santé fragile, il souffrira de goutte une bonne partie de sa vie.

³⁷Voici les explications que donne A. Gloden op. cit. p. 14: «Bergmans dans la biographie nationale écrit: "Au cours de son séjour à Liège, il rédigea en latin une thèse sur les maxima et les minima, mais il ne se présenta pas à l'examen". Par contre Neyen écrit dans sa biographie luxembourgeoise: "En 1824 Meyer obtint le diplôme de docteur en sciences physiques et mathématiques". Sur un exemplaire de la thèse susmentionnée de Meyer conservé à La Bibliothèque Nationale de Luxembourg se trouve la date manuscrite: 29 novembre 1823. A. Le Roy donne dans le Liber Memorialis de l'Université de Liège p. LXXIJ la date exacte de la soutenance: 16 juin 1832.» Nous n'avons pas eu la possibilité de vérifier ce dernier renseignement.

qui vient d'ouvrir, mais il démissionne en 1836³⁸. Dans les diverses biographies consultées, cette anecdote est signalée de façon évasive: il aurait critiqué la démonstration d'un théorème faite dans le manuel en vigueur alors à l'École et dont l'auteur célèbre est encore en vie; ayant jeté le livre en question, on lui fait comprendre qu'il doit présenter des excuses au savant auteur de l'ouvrage, ce qu'il refuse !³⁹

En 1838⁴⁰, il est nommé sur la chaire d'Analyse mathématique à l'Université libre de Bruxelles, puis de 1849 à sa mort à l'Université de Liège, remplaçant Lemaire sur la chaire de calcul différentiel et intégral, analyse supérieure et calcul des probabilités. Schaar lui succédera. Le 16 décembre 1846, il est élu correspondant de l'Académie Royale de Belgique.

Meyer a donc une vocation d'enseignant; les leçons qu'il donne sont fort attrayantes aux dires de ses élèves. A partir de 1838, date à laquelle il dispose d'une place stable, il devient auteur et écrit des ouvrages didactiques⁴¹. Ses livres sont originaux et écrits dans une langue simple et précise; en outre, c'est un calculateur sûr et rapide conduisant ses calculs avec une habileté extrême.

Ses principaux travaux portent sur les développements des fonctions en série, l'intégration des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles ainsi que sur le calcul des probabilités⁴².

Avant de passer à une présentation du cours de probabilités de Meyer, nous aimerions évoquer un autre aspect moins connu de la vie du personnage: l'intérêt qu'il porte aux applications des mathématiques et plus particulièrement à la géodésie.

*Meyer et la géodésie

En 1835, professeur d'analyse à l'École militaire de Bruxelles, Meyer a comme collègue Quetelet, professeur de géodésie et d'astronomie, et Nerenburger, professeur de géométrie descriptive.

³⁸Nos recherches ne nous ont pas permis de confirmer cette date. En effet, au Musée de l'Armée de Bruxelles, il manque l'annuaire de 1837. Meyer est indiqué comme professeur dans l'annuaire de 1836. Dans celui de 1838, le professeur de mathématiques cité est Verhulst. Alors peut-être Meyer démissionne-t-il fin 1836 ou courant 1837? Nous savons d'autre part qu'en 1837, il est embauché comme calculateur au Dépôt de la Guerre.

³⁹Nous ne pouvons pour l'instant qu'émettre des hypothèses sur le manuel, objet du litige. S'agit-il d'un ouvrage de Cauchy, Chasles, Poisson, Poncelet ...?

⁴⁰Le 2 avril 1839, Meyer est naturalisé belge.

⁴¹La liste complète de ces ouvrages se trouve à l'annexe 16.

⁴²Une liste des divers ouvrages et articles de Meyer se trouve en annexe 16. Parmi ceux-ci, notons *Exposé élémentaire de la théorie des intégrales définies*, ouvrage de 510 pages publié en 1851 (un *Manuel d'un cours de calcul différentiel* publié en 1855 complétant l'ouvrage précédent), un exposé sur le calcul des variations...

En 1837, après sa démission de l'École militaire, Meyer est reçu comme calculateur payé à la journée par Jolly, alors directeur du Dépôt de la Guerre⁴³, puis comme cadre civil. Une note⁴⁴ confirme ce renseignement:

"Bruxelles, Avril 1837

Jolly à Mr le ministre de la guerre

Il serait possible d'employer au moins temporairement, au Dépôt de la Guerre, le sieur Meyer, en le chargeant de la révision des calculs géodésiques. Les documents que l'on a pu obtenir du Dépôt de la Guerre de France, présentent des éléments de calcul suffisants pour occuper le pétitionnaire⁴⁵ pendant quelques temps. Pour s'assurer de son assiduité au travail, on pourrait le payer par jour, en l'obligeant à faire son travail au local du dépôt. J'ai donc l'honneur de proposer à Mr le ministre, de lui allouer à cet effet, une solde journalière qui pourrait être de 6 francs et dont il faudrait imputer le montant sur la somme réservée pour les frais imprévus du ministère de la guerre."⁴⁶

A. Meyer collabore alors avec les officiers cartographes⁴⁷. Une des grandes réalisations de Jolly à partir de septembre 1839 est la carte des limites belgo-hollandaises. En effet, après l'indépendance de la Belgique, les différents traités de paix servent d'ossature au tracé des frontières:

*traité des 24 articles du 15 novembre 1831

*traité de paix du 19 avril 1839

*traité de La Haye du 5 novembre 1842

*traité de Maestricht du 8 août 1843

*traité de Maestricht du 1 février 1845

Meyer participe en 1839 à l'une de ces triangulations avec Renoz entre le Limbourg et le Luxembourg. Des lettres retrouvées dans le fonds Jolly au Dépôt de la Guerre en témoignent:

⁴³Jolly occupera ce poste jusqu'en 1842.

⁴⁴Voir Fonds Jolly au Musée Royal de l'Armée à Bruxelles, carton 7/92.

⁴⁵On remarquera ici le substantif utilisé par Jolly. Meyer a-t-il, à la suite de son renvoi "déguisé" de l'École militaire, protesté par une pétition? On peut le supposer. La phrase suivante de la lettre souligne qu'il doit être surveillé! Signalons dès à présent que "pour bon service et bonne conduite", il sera porté comme employé en 1839.

⁴⁶Les calculs étant d'une très grande difficulté, Jolly demande début 1838 un avancement au grade de Major pour Renoz qui seconde Meyer (Fonds Jolly, op. cit. carton 7/113-114).

⁴⁷Mme Claire Lemoine-Isabeau, collaborateur scientifique au Musée Royal de l'Armée de Bruxelles le cite pour "son rôle dans le domaine intellectuel" au Dépôt de la Guerre.

"Vous pouvez être sûr de nos calculs, nous les avons faits de 3 manières différentes. Nous avons travaillé nuits et jours"⁴⁸

Ainsi, Meyer pratique lui-même des triangulations dès la décennie 1830 et effectue les calculs qui en découlent.⁴⁹

Le 24 novembre 1843 (alors que, comme nous le verrons plus loin, Léopold 1^{er} vient de faire figurer, le 30 septembre, parmi les attributions du Dépôt de la Guerre la confection de la Carte de la Belgique), Nerenburger est attaché au Dépôt de la Guerre, dirigé alors depuis quelques mois par Trumper. Meyer est toujours là, comme précieux calculateur⁵⁰ et collabore avec l'astronome Houzeau⁵¹, assistant de Quetelet.

En 1844-45, il donne des cours au Dépôt de la Guerre. Nous en trouvons une trace écrite d'une part dans les *Leçons de trigonométrie rectiligne* et les *Leçons de trigonométrie sphérique* qu'il publie en 1844 et d'autre part dans un *Cours de géodésie* autographié de 1845 dont nous allons dire quelques mots⁵².

C'est un cours de géodésie fidèle à la "tradition française": les instruments présentés (le cercle répétiteur pour la mesure des angles), les corrections indiquées pour la mesure des angles horizontaux, coïncident avec les méthodes françaises exposées dans la partie A.I.

Nous avons pu comparer son contenu avec les cours plus tardifs de la même école: le changement est radical. Voici les nouveautés qui apparaissent dans les cours enseignés

⁴⁸Nous avons sélectionné quelques lettres et quelques pages de calculs à ce sujet, trouvées dans le Fonds Jolly op. cit. carton 9. Elles sont retranscrites en annexe 17. Ces lignes mettent en évidence les difficultés rencontrées lors de ces calculs.

⁴⁹Mme Lemoine-Isabeau a retrouvé au Ministère des affaires étrangères l'exemplaire belge des cartes de 1843 et dans le fonds Jolly le détail de l'exécution. Pour réaliser ces cartes, on décide de faire une triangulation en utilisant les données d'Erzey et de Tranchot: 43 localités avec latitude, longitude et altitude.

⁵⁰Ces renseignements sont indiqués par Nerenburger lui-même dans *Notice sur les triangulations postérieures à 1830*, 2^{ème} partie, p. 67, Bruxelles, 1856

⁵¹Révoqué pour ses idées républicaines, Houzeau partira aux Amériques. Signalons la publication de sa correspondance lors de ces années d'exil: Houzeau J.C., "Lettres adressées des Etats-Unis à sa famille (1857-1868)" éditées par Hassam Elkhadem, Annette Félix, Liliane Wellens De-Donder, Bruxelles, Centre National d'Histoire des Sciences, 1994.

⁵²Nous avons effectué des recherches en Belgique pour consulter cet ouvrage signalé dans ses diverses biographies. Nous ne l'avons trouvé ni à l'École militaire, ni à l'Observatoire, ni à l'Institut Cartographique Nationale. Par contre au Musée de l'Armée à Bruxelles (cote CI VII 3430) figure effectivement un *Cours de géodésie* autographié anonyme en trois parties, portant l'année 1844 biffé en 1845; certes, ce cours est sans nom d'auteur, mais sa paternité ne fait guère de doute. A la fin du cours, il est indiqué "Fin 1844". A la suite du "Cours de géodésie" se trouve un "Précis des leçons sur la construction des cartes" portant à la fin la mention "Fin 1843" et un "Cours de topographie" terminé par la mention "Fin 1845. 14/2". Il figure également (à la cote CI. VII 3528) un "Précis du cours de Topographie" de 1842, signé "Chapelié, Commandant de l'École, Directeur des études". Ces divers cours sont des dons effectués pour la plupart au XX^{ème} siècle. Bergmans, dans sa notice biographique op. cit. p. 769-768 souligne une innovation intéressante: "Meyer substitue, à la démonstration de Lagrange sur l'excès sphérique de Legendre, une autre méthode de déduction directe et plus élégante qui lui est personnelle".

après 1845⁵³; nous les avons soulignées dans l'intitulé des leçons (celles soulignées et écrites en italique ne sont enseignées qu'aux officiers d'État-major)⁵⁴.

1ère leçon: ... Des erreurs,

2ème leçon: ... Héliotrope de Bertram,

3ème leçon: ... Appareil de Bessel, Étalonnage de Belgique

4ème leçon: ... Méthode de réitération

....

7ème leçon: ... Calcul des directions probables

8ème leçon: ... Manière de rendre un réseau géométrique

....

11ème leçon: ... Méthode de Bessel, Azimut

12ème leçon: ... Méthodes télégraphiques

13ème leçon: ... Détermination de l'équation personnelle

14ème leçon: ... Calcul de la normale...Recherche du colonel James sur la forme de la terre.

Nous constatons immédiatement que les parties ajoutées au cours de 1845 correspondent aux "traditions allemandes".

D'où vient ce bouleversement? La cause en est fort simple: Meyer s'est rendu en Allemagne au cours du 1^{er} semestre de l'année 1846. Le but principal de ce voyage est l'étude de nouvelles méthodes concernant l'application du calcul des probabilités à la géodésie. Le mathématicien en rédige un rapport qui restera inédit (et que nous reproduisons dans l'annexe 27). Nous indiquerons un peu plus loin (§ 3, p.) le contenu et les circonstances de ce rapport, décisif pour la géodésie belge, et indirectement important à certains égards pour la géodésie française à partir des années 1850.

Si maintenant, nous considérons les cours postérieurs à 1846, nous y voyons une confirmation de la conséquence directe du voyage de Meyer en Allemagne. En effet, dès la page 2⁵⁵, se trouve un paragraphe relatif à la théorie des erreurs:

⁵³Dans les archives op. cit. CI VII se trouvent d'autres cours autographiés portant soit la mention "Ecole militaire", soit la mention "Armes Spéciales" (don datant du XX^{ème} siècle) certains non datés. Nous citons quelques passages d'un cours certes tardif mais portant une date: 1867. Il est à regretter que les archives de l'Ecole Militaire soient dispersées ou parties pour une grande part à l'étranger lors des guerres (à Postdam en 1914 puis sans doute en Russie dans les années 1940 selon le conservateur du Musée de l'Armée).

⁵⁴La liste complète des leçons se trouve à l'annexe 21.

⁵⁵Extrait du cours présenté ci-dessus en note. Les pages citées dans ce paragraphe se reportent au même cours.

"Toutes les opérations faites par des hommes sont entachées d'erreurs plus ou moins grandes que l'on s'efforce de diminuer ou de détruire par l'habitude ou la perfection des moyens employés. Ces erreurs sont accidentelles, fortuites, inévitables ou constantes.

Les premières sont dues aux accidents atmosphériques, à l'imperfection des sens, à certaines influences locales ou à toute autre cause qu'on ne peut ni prévoir ni empêcher. On diminue leurs effets autant que possible en répétant les mêmes mesures ou les mêmes observations, et en prenant la moyenne dont la précision croît comme la racine carrée du nombre d'observations.

La théorie des moindres carrés est d'un secours continuel pour trouver les valeurs les plus probables des inconnues que doivent fournir les observations faites dans des circonstances différentes. Les erreurs constantes sont habituellement dues aux imperfections des instruments ou des observateurs. Elles s'ajoutent lorsque l'on répète les mesures et le tact de celui qui opère consiste à les éviter. Parmi les erreurs constantes, il y en a une qui se nomme équation personnelle."

Plus loin, à la page 99, on lit quelques lignes relatives à l'équation personnelle, notion que l'on commence alors à préciser:

"Quand deux observateurs concourent au travail, ils doivent déterminer leur équation personnelle pour réduire les chiffres qu'ils auront notés à ceux qu'aurait marqués un observateur moyen entre eux deux"

L'appel à la théorie des moindres carrés pour trouver les valeurs les plus probables est explicite. Or, comme l'a indiqué Meyer lui-même, l'étude de cette théorie était un des buts avoués de son voyage. A la page 23, la méthode de réitération pour observer les angles est expliquée; cette méthode, comme nous l'avons expliqué en A II, est utilisée en Allemagne. Lors de son séjour dans ce pays, Meyer a pu examiner chez les constructeurs des instruments réitérateurs. Aux pages 44-48 puis 53, l'utilisation de la MMC intervient dans le calcul des directions les plus probables et dans la théorie de la compensation d'un réseau de triangles.

Signalons que les notations utilisées pour la résolution par la méthode des coefficients indéterminés sont celles introduites par Gauss, que les équations de poids correspondent à celles de Baeyer ainsi que l'étude sur l'influence de la direction initiale. A la page 60, on recherche l'erreur moyenne par des formules du cours de probabilités.

Nous allons maintenant dire quelques mots des activités géodésiques de Meyer après 1846.

A partir de cette date, les contacts avec l'Allemagne sont nombreux. Deux officiers, Polking et Hellebaut se rendent à Bonn en 1847 pour assister aux mesures des bases en juin-août⁵⁶; les règles de Bessel sont prêtées à la Belgique fin 1847. Nous savons par une lettre du 14 octobre de la même année que Quetelet prête à Meyer un exemplaire de *Gradmessung in Ostpreussen* de Bessel (1838)⁵⁷.

Le 6 février 1847, Meyer expose à la classe des sciences de l'Académie Royale de Bruxelles un *Mémoire sur l'application du calcul des probabilités aux opérations du nivellement topographique*, qui traite d'un exemple d'utilisation de la MMC; la classe des sciences de l'Académie ordonne l'impression⁵⁸.

La même année, Quetelet et Meyer insèrent une note relative à un "Projet sur les moyens d'exécution de la triangulation de la Belgique" dans le tome 14 p. 320 des bulletins de l'ARB.

La thèse de Bouvier

En 1848 paraît une thèse de L. Bouvier, élève de Meyer à l'Université de Bruxelles, intitulée *Dissertation sur la théorie des moindres carrés*. La bibliographie indiquée par Bouvier⁵⁹ est la même que celle donnée par Meyer dans son rapport rejeté par l'Académie et jamais publié. L'origine de cette thèse n'est pas bien mystérieuse: Meyer essaye de faire connaître les renseignements qu'il est allé chercher en Allemagne sur la MMC et son application à la géodésie par d'autres moyens que la reconnaissance académique; cette thèse en est une trace.

Dans l'introduction, Bouvier parle de Meyer en ces termes:

"Nous avons mis en outre à contribution, et pour une très-large part, les belles leçons de M.Meyer, professeur à l'Université de Bruxelles; et nous nous faisons un devoir de le déclarer, si

⁵⁶ Voir Nerenburger *Triangulations postérieures à 1830* op. cit. p. 82; C. Lemoine- Isabeau op. cit. p. 97 et voir aussi "Sur la base géodésique que l'on mesure actuellement dans les environs de Bonn" in *Bulletin de l'Académie Royale de Bruxelles*, tome 14, 2, 1847, p. 14 ss .

⁵⁷ Voir lettre n°6 de Nerenburger à Quetelet dans le dossier 5017 des archives de l'ARB.

⁵⁸ Ce mémoire, de 23 pages, est publié dans le tome XXI des Mémoires de l'ARB en 1848. Bouvier, puis Liagre (*Calcul des probabilités*, p. 310 et suiv.) citeront cet exemple comme application des diverses formules relatives à la théorie des erreurs. Breny écrit au sujet de ce mémoire: «Seule trace écrite de l'intérêt que pouvait porter Meyer aux applications» Il nous semble que cette affirmation est un peu rapide puisqu'une étude des manuscrits de Meyer et de sa correspondance nous en apporte d'autres.

⁵⁹ L'autorisation d'impression de cette thèse est donnée le 20 mai 1848 par le président de l'Université de Bruxelles. Nous donnons à l'annexe 19, cette bibliographie ainsi que la table des matières et l'introduction de cette thèse.

ce faible essai se recommande par quelques qualités, c'est en grande partie aux travaux consciencieux et aux conseils éclairés de ce savant mathématicien qu'il en est redevable.

M.Meyer a guidé nos pas dans la carrière, où ses encouragements nous ont constamment soutenus. Qu'il nous soit permis d'espérer qu'il voudra bien agréer ce témoignage public de notre gratitude"⁶⁰

Il remarque qu'il n'existe aucun traité spécial exposant la MMC et envisage de combler cette lacune en exposant la théorie des moindres carrés sous un point de vue pratique. Son propos est clair: à aucun moment il ne discutera des fondements de cette méthode. Il s'attardera essentiellement sur la "méthode des équations de conditions". Bouvier expose les deux méthodes de Gauss; il donne en exemple la note de Meyer que l'Académie a rejetée; il établit une comparaison entre les formules qu'utilise Gauss et Laplace pour estimer la précision des moyennes arithmétiques; il donne en application l'exemple de la chaîne d'arpenteur, mémoire présenté à l'Académie lors de la séance du 4 mars 1848 et refusé en ces termes:

"La note de Mr Meyer, sur la précision de mesure obtenu à l'aide de la chaîne d'arpenteur, du mètre et du cordeau métrique, n'est je pense, que le commencement d'un travail sur la précision des principaux instruments employés dans les opérations topographiques et géodésiques. Sous ce rapport, les recherches de Mr Meyer peuvent offrir de l'intérêt; Mais si elles doivent se borner aux seules instructions que la note concerne, j'avoue que, leur utilité me paraît contestable, attendu que les mesures prises avec la chaîne, le mètre ou le cordon n'exigent aucune précision et qu'il est conséquemment d'un mince intérêt de connaître celui de ces instruments qui fournit le meilleur résultat. Bruxelles, le 15 mars 1848

Nerenburger"⁶¹

Il nous semble que l'intérêt d'une telle recherche est ailleurs. Bouvier précise qu'il s'agit ici de mettre en place des moyens pour déterminer les paramètres dont dépend la précision de ces instruments et de comparer leur précision en vue de leur assigner des poids, précaution nécessaire lors de certains calculs. Bouvier s'exprime ainsi:

"Ces sortes de relevés ne sont pas sans importance; ils présentent des résultats assez utiles pour fixer l'attention.

Sous le point de vue théorique, ils font connaître 1° de quelle manière l'erreur moyenne se distribue, suivant les divers instruments de distance; 2° si elle dépend uniquement de l'instrument

⁶⁰Voir la thèse de Bouvier op. cit. p. iv.

⁶¹Voir dossier ARB 5043.

ou aussi de la longueur mesurée; 3° quelle est, sous le rapport de la précision, la classification à établir entre les instruments pour les mesures des distances.

Sous le point de vue pratique, ces relevés nous fournissent le moyen 1° de rendre comparable entre elles des distances mesurées avec des instruments divers; 2° de rendre possible l'application des moindres carrés à la mesure d'une ligne obtenue par des mesures répétées de ses parties. En géodésie, par exemple, il y a des cas de réduction au centre de la station, où la distance au centre est de 100 et plus de 100 mètres. Comme on doit se procurer cette donnée avec une grande précision, on partage de semblables bases en 2, 3 ou plusieurs parties, puis on mesure à l'aide d'une chaîne, ou du simple mètre, ces parties, 1 à 1, 2 à 2, etc., plusieurs fois de suite; puis on conclut, par le calcul, la distance totale la plus exacte possible;"⁶²

On voit donc à la fois l'importance de la contribution d'A. Meyer à la géodésie, les conflits qu'il rencontre et les voies militantes qu'il tente pour faire entendre son point de vue.⁶³

***Les oeuvres probabilistes de Meyer**

Comme nous l'avons dit, Meyer est nommé, en 1849, à l'Université de Liège, succédant à J.F. Lemaire. Ce dernier enseignait certes un cours de Théorie analytique des probabilités, mais les probabilités y apparaissaient comme un simple chapitre du cours de doctorat "Analyse supérieure, calcul des variations, calcul des probabilités, fonctions elliptiques". L'aspect appliqué du calcul des probabilités est entièrement méconnu. C'est alors qu'un changement se produit, coïncidant avec la nomination de Meyer. Une loi de 1849 stipule, sans doute sous l'influence de Quetelet, deux matières distinctes: l'analyse d'une part et la théorie des probabilités et l'arithmétique sociale d'autre part. Pour bien marquer cette distinction, Meyer donne des leçons séparées; il enseigne la deuxième partie au cours du premier semestre. Remarquons que les successeurs de Meyer (Schaar de 1857 à 1865; Catalan de 1865 à 1885; Le Paige de 1885 à 1912) ne feront qu'une unique leçon!⁶⁴

⁶²Bouvier, p. 46, indique que de semblables mesures ont été faites par Stampfer, professeur à l'École polytechnique de Vienne, par Gerling, professeur de mathématiques à l'Université de Marbourg (ville où Meyer a rencontré Gerling lors de son voyage de 1846), et par Grunnert.

⁶³Signalons enfin la parution en 1851 d'une étude de P.E. Biver, Sous-Lieutenant de l'État-major, ancien élève de l'École Militaire de Belgique sous le titre de *Théorie des moindres carrés établie par l'analyse pure*. Il n'est pas question ici de faire une critique de cet essai de fonder la MMC sur l'analyse pure. Mais nous remarquons que le seul exemple indiqué par Biver est extrait de l'ouvrage du colonel Baeyer, *Die Küstenvermessung*, Berlin, 1849, page 261. La référence à ce livre, dont la parution est postérieure certes au voyage de Meyer, montre combien, sensibilisés aux méthodes allemandes qu'ils souhaitent approfondir, les acteurs de la géodésie belge continuent à se tenir au courant des dernières publications en langue allemande.

⁶⁴Voir Breny H., "Histoire du cours de "Calcul des probabilités" à l'Université de Liège (1835-1963)" in

Meyer décède en 1857 et son cours ne sera publié que 17 ans plus tard. En 1874, paraît à Bruxelles, chez F. Hayez, imprimeur de l'Académie Royale de Belgique, un ouvrage posthume, sous le titre *Cours de Calcul des Probabilités fait à l'Université de Liège de 1849 à 1857*, publié d'après les manuscrits de l'auteur par F. Folie⁶⁵.

Qu'est-ce qui fait l'originalité de cet ouvrage⁶⁶? Quelle est sa place dans la carrière de l'auteur? Quel est son impact dans la diffusion des probabilités en Europe? Quels sont ses liens avec la géodésie?

Si l'on compare, par exemple, le sommaire du cours de Meyer avec les cours donnés à l'École polytechnique, durant les mêmes années, on s'aperçoit que le premier est bien plus complet ⁶⁷ comme l'indique le tableau ci-dessous:

Regards sur 175 ans de science à l'Université de Liège 1817-1992, Liège, 1992.

⁶⁵F. Folie est un ancien élève de A. Meyer. Après la mort de Quetelet, il devient directeur de l'Observatoire de Bruxelles. Dès 1879, cet ouvrage sera traduit en allemand par E. Czuber sous le titre *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung*.

⁶⁶Pour une étude plus approfondie voir Breny op. cit. p. 4. Signalons aussi le point de vue de F. Folie dans son introduction: pour lui, l'apport de Meyer se situe d'une part dans l'utilisation du calcul aux différences finies (en particulier dans la démonstration du théorème de Bernoulli et sa généralisation ainsi que dans le développement et la marche des calculs de Laplace rendant ainsi leur lecture moins difficile) et d'autre part dans les applications très nombreuses du calcul des probabilités à la population et aux assurances. Meyer émet des doutes au sujet de l'exactitude des approximations de Poisson dans son théorème et son problème; Folie les maintient cependant, pensant que son avertissement suffirait pour mettre le lecteur sur ses gardes.

⁶⁷Ce document est inspiré de celui réalisé par P. Crépel, à l'occasion de journées organisées par le REHSEIS en 1991 et consacrées à l'histoire de l'enseignement des probabilités et statistiques.

	Liouville (≅1845)	Duhamel (≅1855)	Bertrand (≅1860)	Liagre (1853)	Meyer (1849-1857)
Définitions, principes généraux (Composées, totales, indépendance)	X	X	X	X	X
Discussion sur l'équiprobabilité			X	X	X
Problème de l'aiguille	X		/	X	X
Exercices divers (poule, rencontre, fortune)	X		X	X	X
Autour de l'espérance	X	X	X	X	X
Problème des partis	X	X	X	X	X
Problème de St Petersburg		X		X	X
Espérance morale		/		X	X
Loteries	X	X	X	X	
Epreuves répétées n fois	X	X	X	X	X
Enoncé du théorème de Bernoulli	X	X	X	X	X
Démonstration de ce théorème	X			X	X
Probabilités des causes (cas fini)	X			X	X
$(m+1) / (m+n+2)$	X			X	
Table de mortalité, rentes viagères, assurances	X	X	X	X	X
Multiplicateur universel		/			X
Problème des naissances				X	X
Opérations de banque					X
Probabilité de jugements					X
Probabilité du tir			X	X	

Ce cours de Meyer contient un exposé beaucoup plus fouillé de la théorie des erreurs⁶⁸. F. Folie nous le précise d'ailleurs dans l'avant-propos:

"Cet ouvrage de Meyer est un résumé très complet des plus importants travaux de Bernoulli, Moivre, Laplace, Poisson, Gauss, Encke, Bienaymé.... sur le calcul des probabilités. On peut penser qu'il n'existe aucun traité aussi vaste sur la matière, si l'on excepte la Théorie Analytique des Probabilités..."

Si on le compare maintenant avec le livre de Liagre de 1852, dont nous parlerons à maintes reprises dans cette thèse, on note d'abord que Meyer n'écarte pas la question des probabilités de jugements, contrairement à l'autre auteur. En revanche, Liagre donne de très nombreuses applications de la théorie des erreurs surtout en géodésie, alors que

⁶⁸Le chapitre VII, p. 213 à 262, présente la "Théorie des erreurs des observations". A la lecture, nous constatons que ce chapitre présente la théorie des erreurs selon Gauss. D'ailleurs, Meyer donne des additions intitulées: Addition I: "Théorie des erreurs d'après Laplace" p. 355-376; Addition II: "Théorie des erreurs d'après Bienaymé" p. 377-408. Précisons que ces exposés sont théoriques et sans un seul exemple; ce qui peut laisser croire que Meyer n'est qu'un théoricien. Or nous savons que lors des années qu'il passe au Dépôt de la Guerre, il a peiné de longues heures sur les calculs résultant de l'application de ces théories à la géodésie en particulier.

Meyer reste très théorique, même dans les chapitres relatifs à la théorie des erreurs, s'intéressant essentiellement aux démonstrations.

Il existe d'autres publications de Meyer relatives au calcul des probabilités: elles se situent à la fin de sa vie et certaines sont même posthumes. Notons en particulier:

a) *Essai sur une exposition nouvelle de la théorie des probabilités a posteriori*, 1857.

Cet ouvrage est au stade de l'imprimerie lorsque Meyer meurt. Il est également publié par son élève F. Folie qui souligne l'attachement que portait Meyer à sa publication. L'auteur reprend les énoncés et les démonstrations du théorème de Bayes dans le cas continu, du théorème de Laplace, du théorème inverse de Bernoulli, mais on ne peut pas vraiment dire qu'il apporte du neuf pour la pensée probabiliste.

"Son originalité réside dans la rigueur que met l'auteur dans l'étude de la convergence des séries et des intégrales qu'il y utilise et dans son habileté à simplifier de longues démonstrations analytiques."⁶⁹

b) En 1857 également, Meyer publie "Examen critique de la notice de Mr. Liagre" relatif à un mémoire intitulé "Sur la probabilité de l'existence d'une cause d'erreur régulière" que Liagre a présenté à l'ARB en 1855. Il s'agit d'utiliser le calcul des probabilités pour la détection d'erreurs systématiques, c'est donc un ancêtre du test statistique du caractère aléatoire d'observations⁷⁰. L'article de Liagre, présentant en somme les aspects combinatoires de la question, est critiquable certes mais la réponse de Meyer aussi.⁷¹ Cette note, ainsi qu'une autre de 1856, est publiée à compte d'auteur, témoignage des démêlés de Meyer avec la classe des sciences de l'ARB.⁷²

⁶⁹Voir Breny H., "Histoire du cours de "Calcul des probabilités" à l'Université de Liège (1835-1963)" in *Regards sur 175 ans de science à l'Université de Liège 1817-1992*, Liège, 1992.

⁷⁰On pourra à ce sujet consulter par exemple: Jongmans F. et Seneta E. "The Bienaymé family history from archival materials and background to the turning-point test" in *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, Vol.62, 3, 1993, p.121-145.

⁷¹Breny et Jongmans en donnent une étude en annexe à l'article de Breny op. cit. p.13. sous le titre "A. Meyer et l'Académie".

⁷²ibid. p. 13 et suiv. Dans ces pages sont présentés les nombreux démêlés de Meyer avec l'ARB; d'ailleurs, en est-ce une conséquence? Il faudra attendre 1956 pour que L. Godeaux publie une notice biographique de Meyer dans l'Annuaire de l'ARB ! En particulier, une polémique interviendra autour du mémoire de Liagre déposé le 31 mars 1855 : "Sur la probabilité de l'existence d'une cause d'erreur régulière dans une série d'observations". Meyer en viendra à demander l'avis de Bienaymé de l'Institut de France. (cf. Breny et Jongmans op. cit. p. 20-21. Ils disent au sujet de leurs sources: "De la correspondance échangée entre les deux probabilistes ne subsistent, malgré nos investigations, que quelques extraits de lettres de Bienaymé insérés dans les travaux de Meyer. Aux pages III et 5 de *Démonstrations de deux propositions nouvelles* ... figurent deux jugements envoyés le 29 juillet 1856".

Le livre de Meyer et ses autres contributions au calcul des probabilités sont à la fois l'aboutissement d'un mouvement, d'une recherche effectuée dans le courant de la décennie précédente et dont Meyer est un des personnages clés (avec bien sûr, pour la Belgique, Nerenburger et Quetelet), mais aussi l'expression d'une personnalité souvent conflictuelle.

- J. Liagre (1815-1891)

* **Éléments biographiques**⁷³

Jean Liagre est né à Tournai le 18 février 1815.

Brillant élève à l'Athénée de cette ville⁷⁴ puis à l'École Militaire de Belgique⁷⁵, sous-lieutenant du Génie, il est détaché à cet établissement en qualité de répétiteur des cours d'astronomie et de géodésie par Quetelet, son ancien professeur.

En 1841, Liagre accède au grade de lieutenant. Débordant d'activité, il consacre trois nuits par semaine à des travaux de météorologie et d'astronomie à l'Observatoire de Bruxelles, dirigé par Quetelet.⁷⁶

Inspecteur des études à l'Ecole militaire en 1846, Capitaine en 1847, professeur de topographie à l'Ecole militaire en 1850, il est remarqué par son érudition.⁷⁷

Déchargé de ses fonctions de professeur à l'Ecole militaire en 1854, il participe à de nombreuses missions scientifiques en Europe, non seulement pour des questions liées à la géodésie, et dont nous parlerons plus loin, mais aussi sur bien d'autres sujets. Le gouvernement l'utilise dans toutes les Commissions internationales qui ont pour objet l'étude des poids et des mesures, les monnaies, les associations de prévoyance.⁷⁸

⁷³Les sources de ces éléments biographiques sont les suivantes: notice de J.R. Leconte in *Biographie nationale* publiée par l'ARB, tome 32, supplément tome 4, p. 441 à 454, Bruxelles, 1964; Général Brialmont, *Notice sur le lieutenant général Liagre*, Bruxelles, 1892; De Guise, *Histoire de l'Ecole militaire de Belgique*, p. 47 à 51 Bruxelles, 1895; Archives du Musée royal de l'Armée, dossier 3467; Archives de l'ARB.

⁷⁴A l'Athénée, son professeur de mathématiques est A. Leschevin.

⁷⁵Liagre entre à l'Ecole Militaire le 25 février 1834 (cf. "Liagre" in *Biographie nationale* op. cit. p. 441). Soulignons, qu'à cette date, Nerenburger, Meyer, Quetelet enseignent dans cette école.

⁷⁶Voir Dossier 3467/1 des archives du MRA: lettre du 4 Mai 1844 du ministre de l'Intérieur à celui de la Guerre au sujet d'une demande de contribution faite par Quetelet directeur de l'Observatoire pour son collaborateur.

⁷⁷Plusieurs lettres du dossier ci-dessus montrent les difficultés rencontrées pour rémunérer Liagre dans ses fonctions d'inspecteur des études.

⁷⁸Le tableau ci-dessous a été fait à partir des renseignements obtenus dans son dossier personnel 3467 op. cit. : échanges de lettres entre le ministre de l'Intérieur et le ministre de la Guerre afin d'obtenir des autorisations pour envoyer Liagre en mission à l'étranger.

1853	Paris	Voyage scientifique
1856	Rouen Utrecht	Commission créée pour la fabrication des monnaies de cuivre
1857	Italie	Les meuniers protestent contre la prohibition des balances romaines. Liagre est chargé d'enquête
1858	Paris	Étude relative aux compteurs à gaz
1859	Londres	Congrès sur les mesures
1865	Allemagne	Visite des écoles de Stuttgart, Darmstadt, Carlsruhe... pour comparer les différents systèmes en vigueur
1875	Paris	Congrès de géographie

Il est l'un des premiers actuaire de la Belgique, directeur en 1878 de la caisse des veuves et orphelins des officiers de l'Armée.⁷⁹

En 1861, il est nommé président de la Classe de sciences à l'Académie Royale, puis promu en 1870, suivant le désir de Nerenburger auquel il succède, à la tête de l'École Militaire⁸⁰ jusqu'en 1879, date à laquelle il doit accepter le portefeuille de ministre de la Guerre⁸¹. Liagre défend le niveau universitaire des études de l'École Militaire. Il n'hésite pas à diminuer le cours de topographie pour augmenter la géologie, la partie mathématique du cours de construction et le cours de la section artillerie-génie ainsi que le cours de mathématique de la section infanterie-cavalerie, sans oublier le cours de chimie et celui de fortification. Voici ce qu'écrivit Liagre en 1879:

"L'École Militaire n'est pas un atelier d'apprentissage ayant pour objet de fournir à l'armée des officiers immédiatement utilisables. (...) Sa véritable mission est plus élevée; c'est d'habituer les élèves à analyser et juger, à penser avec logique et à observer avec exactitude, à classer leurs connaissances et à généraliser leurs observations. Son but, en un mot, est le développement intégral de l'intelligence, et l'instruction qu'elle emploie pour parvenir à ce but, c'est l'enseignement théorique."⁸²

Il est membre, comme nous l'avons dit ci-dessus, d'une vingtaine de sociétés, dont la liste est donnée à l'annexe 23. Leur variété nous confirme l'ouverture d'esprit de

⁷⁹Voir Biographie nationale op. cit. p.448.

⁸⁰Voir dossier 3467/94: arrêté royal du 8-1-1870 nommant Liagre commandant de l'École Militaire.

⁸¹Voir Dossier 3467/106: lettre du 9-9-1879 où Liagre annonce sa nomination comme ministre de la Guerre.

⁸²Phrase de Liagre écrite en 1879, citée par le Général Brialmont lors de l'inauguration du monument élevé dans la cour de l'École Militaire en 1893 et rapporté dans De Guise op.cit. p.51.

cet homme et les relations qu'il a su entretenir avec de nombreux pays. Il reste actif pendant sa retraite, jusqu'au 13 janvier 1891, date de sa mort⁸³.

Les travaux écrits de Liagre portent spécialement sur la géométrie, l'astronomie, les applications du calcul des probabilités à l'actuariat, la topographie et la géodésie. Nous en donnons la liste complète à l'annexe 24.

Outre ces divers travaux, il fait de nombreux rapports académiques, rédige des comptes-rendus de plusieurs ouvrages scientifiques, prononce deux discours académiques ("Le discours sur la pluralité des mondes" et "Le discours sur la structure de la matière"), rédige des notes bibliographiques (celle de Brasseur en 1869, celle de Nerenburger en 1871, celle du colonel Adan en 1883 et celle de Houzeau en 1890); il a une correspondance suivie⁸⁴ avec de nombreux savants (Baeyer, Nerenburger, Houzeau, Faye, Quetelet...). Nous allons nous contenter ci-dessous d'évoquer les travaux qui intéressent notre thème.

***Ses travaux sur la géodésie et les probabilités**

Dès les années 1840, à l'Observatoire, Liagre acquiert un grand talent d'observateur, il se familiarise avec les instruments de mesure et devient très habile dans leur maniement. Il s'occupe du calcul des probabilités afin de compenser scientifiquement les multiples erreurs d'observation portant sur une même grandeur. Il rassemble les recherches sur ce type de questions dans un cours qu'il crée pour ses élèves de l'École militaire et publie en 1852 un livre: *Calcul des probabilités et théorie des erreurs*. Voici, à titre d'exemple, quelques témoignages sur l'origine de cet ouvrage:

"la nécessité de compenser scientifiquement les erreurs de plusieurs observations portant sur la même grandeur l'amena à créer le cours de probabilité de l'École militaire et à publier en 1852 son livre..."⁸⁵

"Cette science,⁸⁶ pour être pratiquée avec précision, exige comme l'astronomie et la géodésie, une étude minutieuse des corrections à faire subir aux instruments et aux résultats.

La nécessité de choisir entre des résultats discordants de mesures également bien effectuées l'amènent à faire une étude approfondie du calcul des probabilités et de la théorie des erreurs qui

⁸³"Dès le début, sa carrière se montre divisée entre la Science et l'Armée, auxquelles il consacre toute sa vie un égal talent et une égale passion", dira De Guise dans *Histoire de l'École Militaire*, p.47 Bruxelles, 1895.

⁸⁴voir Bibliographie à la partie Archives.

⁸⁵Extrait de *Histoire de l'École militaire de Bruxelles*. op. cit. p.48

⁸⁶Il s'agit ici de la topographie.

restèrent depuis ses branches de prédilection. Il n'existait sur ces matières que des traités très compliqués, et d'autres trop élémentaires."⁸⁷

Cet ouvrage clair et élégant a un grand succès, même à l'étranger. Voici par exemple ce qu'en dit Baeyer à la réception de son exemplaire:

"Votre précieux cadeau nous a procuré une grande joie (...) Votre façon d'exposer le sujet est si claire et si intelligible, les applications et explications au moyen d'exemples sont si nombreuses et si instructives que quiconque, ayant à étudier à fond la méthode des moindres carrés aura recours, avec profit, à votre livre.

Vous avez rendu un grand service à la science et aurez de ce fait la joie d'avoir contribué à la diffusion de cette méthode, en la réintroduisant notamment en France, d'où elle est arrivée en Allemagne; car les Français, depuis Legendre, l'inventeur de la Méthode, n'ont su tirer de celle-ci qu'un bien mince profit."⁸⁸

En fait, le traité de Liagre est beaucoup plus complet que les citations précédentes ne le laisseraient supposer. Il vise à présenter sous une forme assez exhaustive, mais aussi utilisable pour l'enseignement l'ensemble du calcul des probabilités et de la théorie des erreurs. Son rôle peut être comparé à celui de Lacroix, mais trente plus tard, et avec une plus grande insistance sur la méthode des moindres carrés et ses applications.

Il se compose de trois sections:

- 1. Partie théorique - Probabilités a priori.
- 2. Partie physique - Probabilités a posteriori
- 3. Partie pratique - Probabilités appliquées.

Dans les termes d'aujourd'hui, nous dirions que la première partie (chapitres 1-4) comprend l'exposé habituel du calcul des probabilités direct, tel qu'on le faisait au XIXe siècle: notions de base, épreuves répétées et théorème de Bernoulli, "courbe de possibilité" (nous dirions histogramme et densité de probabilité gaussienne), mais aussi "espérance morale" de Daniel Bernoulli. La deuxième partie (chapitres 5-7) contient la probabilité des causes, les probabilités des événements futurs (c'est-à-dire la règle d'estimation dite de Bayes-Laplace) et leurs applications aux problèmes de population, d'assurances. Dans la troisième et dernière section (qui est la plus longue), l'auteur traite de la théorie des erreurs, il applique en particulier la théorie des moindres carrés à de nombreux exemples surtout tirés de la géodésie. Il montre comment, dans une série d'observations, on doit traiter les inconnues et répartir les erreurs, si l'on veut obtenir le

⁸⁷Extrait du discours de Mr le colonel d'artillerie De Tilly aux funérailles de Liagre.

⁸⁸Extrait d'une lettre de Baeyer à Liagre du 15 février 1853 (voir la traduction intégrale en annexe 22).

résultat le plus plausible et pouvoir en même temps apprécier l'importance de l'erreur à craindre. Une deuxième édition paraît en 1879, revue et complétée par le capitaine d'état-major Pény, ancien élève de Liagre⁸⁹.

L'étude de cette section sur les moindres carrés sera l'objet principal de notre partie B.

Mais Liagre a aussi l'occasion de pratiquer sur le terrain: il participe, avec le colonel d'état-major Nerenburger, à des opérations géodésiques au camp de Beverloo en 1851.⁹⁰ Il enquête également en divers endroits. En 1853, il se rend en mission à Paris avec l'autorisation du ministre de la Guerre. Chapelié, directeur de l'École militaire, envoie une lettre au Ministre précisant le but scientifique de ce voyage:

*Visite de la collection d'instruments de topographie, de géodésie et d'astronomie qui se trouve à l'École polytechnique, à l'Observatoire et chez divers artistes mécaniciens (Liagre les décrira dans ses leçons et en conseillera l'achat au laboratoire de l'Ecole militaire).

*Consultation d'ouvrages et de manuscrits relatifs à l'histoire de la géodésie française à la bibliothèque Ste-Geneviève, à l'Institut et au Dépôt de la Guerre.

*Rencontre avec Faye afin d'obtenir des détails sur le système qu'il a proposé à l'Institut pour la détermination des longitudes par le télégraphe électrique, moyen non utilisé encore en Belgique.⁹¹

En 1861, il s'occupe des travaux de raccordement des triangulations anglaises, belges et prussiennes sur la frontière orientale de la Belgique, dans les provinces de Liège et de Limbourg, puis à l'ouest de la Flandre occidentale, au mont Kemmel.⁹² Une lettre de Baeyer en date du 26 Août 1861, confirme leurs liens professionnels et d'amitié:

"Combien de joi ma fait cet campagne trigonométrique qui ma donner à faire votre connaissance personnelle et de voyager avec vous plus de trois semaines."⁹³

Liagre se trouve donc de par sa formation et ses fonctions à la charnière entre deux cultures, française et allemande.

⁸⁹On trouvera la table des matières précise en annexe 23 et une comparaison avec les contenus des autres traités et cours dans le tableau du § précédent sur Meyer.

⁹⁰Voir Dossier 3467/8/9/10.

⁹¹Voir Dossier 3467 op. cit.: Lettre 26 du 15 mars 1853 au sujet d'une demande de congé de 10 jours pour Liagre afin qu'il se rende à Paris; lettre 27 du 20 Mars 1853 accordant le congé et joignant un ordre de mission; lettre 28 du 22 Mars 1853 précisant le but scientifique du voyage. Liagre à son retour devait écrire un rapport. Nous n'en avons pas trouvé trace dans les différentes archives consultées.

⁹²cf. dossier 3467/81/82 op. cit.

⁹³Baeyer s'excuse plus loin pour son mauvais français.

3 La Belgique: lieu et période privilégiés

Nous pensons nécessaire de présenter d'un seul trait l'enchaînement des faits et des décisions qui marquent la politique de la Belgique indépendante au point de vue de la géodésie, même si certains points ont déjà été présentés précédemment.

- Le décor et les acteurs

L'indépendance de la Belgique est proclamée le 4 octobre 1830. Léopold 1^{er}, prince de Saxe-Cobourg-Gotha, prête serment à la Constitution le 21 juillet 1831 faisant de la Belgique une monarchie constitutionnelle.

"La Belgique indépendante peut élaborer en toute souveraineté le programme de ses travaux géodésiques"⁹⁴

Pour maintenir les clauses de la conférence de Londres (1831) déclarant le territoire belge neutre et inviolable, Léopold 1^{er} décide alors de créer une armée permanente; il fait appel à des cadres français qui assurent le commandement et l'instruction des nouvelles forces belges: F. Desprez (1788-1833) est mis à la tête de l'état-major; L. Evain (1775-1852) est chargé d'organiser l'artillerie; P.M. Nempde est chargé du service du Génie; F.J. Prisse (1788-1856) ancien élève de l'Ecole militaire de Fontainebleau entre en 1830 à l'État-major belge puis est nommé directeur du Dépôt de la Guerre au moment de sa fondation en 1831; parmi les officiers qui les secondent citons Chapelié et Nerenburger. J. Chapelié (1792-1864), élève de l'École polytechnique, est le fondateur et le premier commandant de l'École militaire de Bruxelles; il attache beaucoup d'importance à la cartographie qu'il juge indispensable dans le métier des armes. Quant à Nerenburger, nous venons de le présenter longuement au paragraphe 2 du A.III.

Ainsi le décor côté institution est planté: Armée, École militaire, Dépôt de la Guerre. Des hommes de formation française sont à des postes de responsabilité et décideront des grandes orientations.

On assiste également à un renouveau et à un essor du monde culturel tant littéraire et artistique que scientifique, renouveau qui avait déjà débuté avec la réunion de la Belgique à la France, pendant le premier quart de siècle⁹⁵ et qui avait ramené dans ce pays

⁹⁴J. Loodts, *Histoire de la triangulation en Belgique*, § IIa, Bruxelles, 1969.

⁹⁵A cette occasion signalons que le système métrique est immédiatement introduit en Belgique occupée depuis 1795 par les troupes françaises et définitivement confirmé en 1816.

"le culte des choses de l'esprit"⁹⁶. Il est vrai que nous assistons à un important renouveau intellectuel comme le montre cette éclosion d'institutions et de revues diverses, pour ne citer que celles du domaine scientifique:

* En 1816, l'Académie Royale reprend ses séances suspendues en 1799.

* En 1817, le gouvernement hollandais crée trois universités: Gand, Liège et Louvain. Cette dernière restera catholique alors qu'après 1830, les deux autres deviennent d'État.

* En 1825, Quetelet et Garnier créent la *Correspondance mathématique*. Onze volumes sont parus jusqu'en 1839.

* En 1827 est créé le Musée des Sciences et des Lettres, institution populaire où Quetelet donnera un cours d'astronomie jusqu'en 1834.

* A partir de 1833, l'Académie publie un bulletin de ses séances.

* En 1834, l'École Militaire est fondée puis en 1837, l'École des mines ainsi que la Société royale des Sciences de Liège qui publie un recueil de mémoires à partir de 1842.

Et ainsi, une autre partie du décor se construit.

La personnalité d'A. Quetelet est significative de ce mouvement. D'autres savants trouvent leur place dans ce décor: Nerenburger, Meyer et Liagre, que nous avons présentés plus haut, mais aussi les mathématiciens Dandelin, Pagani, l'astronome Houzeau, les géodésiens Diedenhoven et Adan.

Chaque acteur, suivant ses fonctions et ses compétences, est prêt à participer à l'élaboration du programme géodésique de la Belgique. Une nouvelle volonté se fait jour: établir la nouvelle carte sur une bonne triangulation.

La Belgique, depuis son indépendance, possède de nouvelles frontières mais aucune carte nouvelle n'a été réalisée. Rappelons, comme nous l'avons dit au paragraphe 1 de ce chapitre A III, que la carte en usage est encore celle de Ferraris, établie en 1777 et sur laquelle on trouve de ce fait des informations datant de la fin du régime autrichien, qu'aucune carte nouvelle n'est envisagée, malgré la suggestion faite par J.B. de Bouge (1757-1833) cartographe civil issu de l'équipe de J. Ferraris, d'établir une carte administrative de la Belgique: la proposition est jugée prématurée et pendant 10 ans, faute de volonté et de moyens, l'activité cartographique du Dépôt de la Guerre reste très

⁹⁶Ce renouveau intellectuel est mis en évidence dans L. Godeaux *Esquisse d'une Histoire des Sciences en Belgique*, Bruxelles, 1943. Nous retrouvons la même idée dans A. Quetelet *Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIX^{ème} siècle*, Bruxelles, 1866.

modeste, contrairement à la production civile qui est en pleine vitalité avec P. Vandermaelen (1795-1869).

Enfin, l'action débute. Le 30 septembre 1843, Léopold 1^{er} stipule par arrêté royal que la confection de la carte de Belgique figure parmi les attributions du Dépôt de la Guerre⁹⁷; il place par cet acte la Belgique au coeur du mouvement géodésique qui démarre en Europe au milieu du XIX^{ème} siècle. L'exécution de cette carte semble indispensable à Nerenburger qui insiste en ces termes auprès du Ministre de la Guerre:

" Lorsque le Gouvernement, comprenant qu'il est de sa dignité, vis-à-vis de l'Europe savante, de ne pas rester au-dessous de certains États de moindre importance sous beaucoup de rapports, voudra que la carte topographique du pays soit construite, elle le sera."⁹⁸

Le ministre adresse alors au Roi un rapport au sujet des travaux géodésiques en ces termes:

"Sire,

(...) Mais si en vue de continuer l'oeuvre commencée, on voulait, à l'exemple de plusieurs états voisins, construire une carte du royaume, qui fut non seulement en harmonie avec les connaissances actuelles, mais qui fournit en outre, des renseignements exacts aux diverses branches d'administration auxquelles la science géodésique et l'art de la topographie peuvent prêter leur secours, le travail à terminer serait considérable."⁹⁹

Le ministre de la Guerre donne des motivations qui devraient permettre au Roi de comprendre l'intérêt d'entreprendre un tel travail. Parmi les administrations qui gagneraient à posséder une carte exacte du Royaume, en dehors par exemple du cadastre et de la levée des impôts, nous citerons les chemins de fer¹⁰⁰. En effet, l'élaboration de voies ferrées, symbole de progrès économiques à cette époque, est un enjeu important pour la Belgique. Voici, à titre d'exemples, quelques entrefilets qui confirment cette remarque naturelle:

⁹⁷Voir *Journal militaire officiel*, tome 9, 1843, p. 407-408.

⁹⁸Cité par C. Lemoine-Isabeau, -op. cit. p. 94, note 17: "Note pour Monsieur le Ministre de la Guerre, Propositions relatives à la construction de la carte topographique de la Belgique, Bruxelles, 10 décembre 1845" (IGN-B; photocopie en possession de l'auteur).

⁹⁹Ce rapport, en date du 5 février 1846, est publié dans *Le Journal de Bruxelles* n°54 du 25 février 1846.

¹⁰⁰Nous rappelons que la première liaison ferroviaire sur le continent est établie en 1835, entre Malines et Bruxelles. Les chemins de fer se développent alors rapidement et il devient donc urgent d'uniformiser l'heure dans le royaume de Belgique; un arrêté du 29 février 1836 cite 41 villes où Quetelet devra établir une grande méridienne afin de remédier à cette situation.

"Le Roi de Prusse a accordé, par un ordre de cabinet du 30 janvier, son approbation aux statuts ainsi qu'à l'acte de concession de la Société de chemin de fer d'Aix-la-Chapelle à Maestricht pour la partie prussienne"¹⁰¹.

"Non seulement il est déplorable que la Belgique seule laisse encore une lacune dans le réseau géodésique qui couvre aujourd'hui l'Europe, mais dans les travaux qui s'exécutent dans le royaume et plus particulièrement pour l'établissement des chemins de fer, on doit regretter à tout instant l'absence de documents de quelque exactitude."¹⁰²

Quetelet abonde dans son sens et communique une note à l'Académie:

"Non seulement la Belgique laisse une lacune dans le vaste réseau géodésique qui couvre aujourd'hui toute l'Europe, mais encore (...) elle se trouve moins avancée sous ce rapport que la Sibérie, où le gouvernement russe continue à faire exécuter les travaux les plus importants."¹⁰³

Nerenburger, entouré d'astronomes, de mathématiciens et de géodésiens, engage alors une réflexion sur les pratiques géodésiques, voulant établir la nouvelle carte de Belgique sur une bonne triangulation, réflexion se situant comme nous l'avons expliqué en A I et A II à une époque où en Europe cohabitent deux grandes traditions géodésiques: une tradition française et une tradition allemande.

- Le choix belge

Acte I : Rapport de Nerenburger sur le spécimen de la carte de Belgique au 1/20000 projetée par Vandermaelen (9 juillet 1844).

Le directeur du Dépôt de la Guerre, le général-major N.J. Trumper demande à Nerenburger d'examiner le projet de carte de Vandermaelen. Une copie de ce rapport est conservée dans la Correspondance de Quetelet, ce qui laisse supposer que Nerenburger a demandé l'avis de son ancien maître. Trois aspects y sont envisagés: la géodésie, la topographie et la chorographie (c'est-à-dire la représentation graphique d'un pays). De l'avis de Nerenburger, le spécimen examiné ne fournit aucun renseignement géodésique

¹⁰¹Voir *Le Journal de Bruxelles* n°39 daté du 8 février 1846.

¹⁰²Voir liasse 5017 ARB; cet extrait est issu d'une lettre du 10 août 1847 adressée à Mr le ministre de la guerre et à Mr le ministre de l'intérieur; Nous n'avons pas pu malheureusement identifier la signature mais cette lettre émane de la classe des sciences de l'Académie.

¹⁰³Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, t. 14, 1847. Les travaux exécutés en Sibérie le sont sous la direction de F.G.W. Struve.

car il ne comporte aucune indication chiffrée. L'officier précise que le travail de Vandermaelen n'aura du succès qu'à la condition expresse qu'y figure:

"la publication des éléments géodésiques qui lui servent de base (...) et que cette publication comprenne les observations géodésiques et astronomiques ainsi que les résultats des calculs successifs par lesquels on arrive à répartir dans chaque feuille les points trigonométriques qui doivent y trouver leurs places."¹⁰⁴

Nerenburger fait une critique du même type pour l'aspect chorographique. Faute d'indication, on peut supposer que c'est la projection de Cassini dont il est fait usage dans ce spécimen. Dans ce cas, il s'agirait d'un recul, car à cette époque existe la projection de Flamsteed modifiée qui présente des avantages sur la précédente¹⁰⁵. Il détaille surtout l'aspect topographique suivant quatre parties: la planimétrie, la figure du terrain, le dessin et la gravure. La conclusion du rapport tombe brutalement :

"Ce spécimen, d'un ouvrage sans utilité, est une oeuvre rétrograde."

Faut-il y voir, comme le suggère Mme Claire Lemoine-Isabeau¹⁰⁶, le résultat d'une concurrence entre un établissement privé et le Dépôt de la Guerre? Nerenburger attend en effet en vain des subsides afin de publier une nouvelle carte du pays, établie sur une bonne triangulation. A cette fin, il décide de vérifier les opérations géodésiques exécutées par Erzey entre 1815 et 1830.

¹⁰⁴Voir Dossier 2767 in *Correspondance de Quetelet*, archives de l'ARB.

¹⁰⁵La projection de Flamsteed modifiée est une projection conique. Dans son supplément de 1810 à son *Traité de Cartographie*, Puissant en indique les avantages dans l'avant-propos: "J'ai pensé que je ferais une chose utile en traitant [...] notamment la théorie relative à la projection que le Dépôt de la Guerre a adoptée pour la réunion des levés topographiques. Cette projection connue sous le nom de *projection modifiée de Flamsteed* ou *projection conique altérée* a obtenu dans cet établissement la préférence sur toutes les autres, sans doute, parce que les longueurs dans le sens des parallèles et les aires quelconques y étant respectivement les mêmes que sur le globe terrestre, [...], on peut, avec beaucoup de facilité et d'exactitude, estimer les distances itinéraires, et évaluer les surfaces sur toute Carte construite d'après cette projection; avantage très précieux pour le Militaire et l'Administrateur". Nous savons que, plus tard, le Service Géographique de l'Armée adoptera, suite aux recommandations des groupes de Canevas de Tir, (décision du 18 juin 1915, citée par J.J. Levallois *300 ans de Géodésie* op. cit. p. 169-171), le système de projection de Lambert Nord de Guerre.

¹⁰⁶C. Lemoine-Isabeau, *La carte de Belgique et l'Institut Cartographique Militaire (1830-1914)*, centre d'histoire militaire, Bruxelles, 1988.

Acte II : Commission chargée d'examiner les travaux d'Erzey (9 février 1846 - 14 juin 1847)¹⁰⁷

Pour vérifier les opérations géodésiques d'Erzey, constituant une triangulation du 1^{er} ordre de 54 triangles, Nerenburger procède à de nouvelles observations. Voulant plusieurs éléments de comparaison pour juger le travail d'Erzey, il obtient de Quetelet les résultats géodésiques de Cassini de 1746. Le gouvernement belge nomme une commission chargée d'examiner les documents géodésiques de la triangulation du royaume exécutée antérieurement à 1830 et d'établir le mode d'exécution du travail restant à faire. Cette commission, instituée par arrêté du 9 février 1846, a pour mission d'indiquer si la triangulation d'Erzey est utilisable ou non. Quetelet en est le président, Nerenburger, Meyer, Chapelié, Dandelin en sont membres, mais Chapelié refusera d'y participer¹⁰⁸ et Dandelin décédera avant la remise du rapport. Ces hommes sont parfaitement habilités à entreprendre un tel travail. Ancien élève de St-Cyr, Nerenburger connaît les méthodes françaises; Meyer s'est rendu à Paris entre 1825 et 1826 pour écouter les cours des grands maîtres puis il enseigne la géodésie au Dépôt de la Guerre où il assure la fonction de calculateur depuis 1837; Quetelet enseigne la géodésie à l'École Militaire de Bruxelles depuis 1826 et entretient des relations avec les différents observatoires de l'Europe dont ceux de l'Allemagne. Les travaux d'Erzey sont exécutés suivant la tradition française. Mais des contacts sont nécessaires avec Baeyer, chef du Bureau Trigonométrique de Berlin pour comparer la valeur des côtés se trouvant faire la jonction du réseau Nord-Est avec les triangles prussiens. Les membres de cette commission connaissent parfaitement les méthodes géodésiques françaises et Meyer, employé comme calculateur au Dépôt de la Guerre, effectue avec Nerenburger la vérification des différents calculs.

Ces calculs longs et fastidieux ne seront achevés qu'en décembre 1846¹⁰⁹. Le rapport rédigé, adressé au Ministre de la Guerre paraît dans le *Moniteur Belge* du 14 juin 1847.¹¹⁰ Il est constitué de trois parties: objet de la triangulation, examen des observations, vérification des calculs. L'instrument employé par Erzey est le cercle

¹⁰⁷Ce paragraphe a été écrit à partir du rapport de cette commission paru dans *Le Moniteur belge* du 14 juin 1847, et des correspondances consultées aux archives de l'ARB.

¹⁰⁸Dans *Le Journal de Bruxelles* n°91 du 1^{er} Avril 1846 on peut lire: "Mr le général major Chapelié qui avait été désigné pour faire partie de la commission géodésique instituée par arrêté du 9 février dernier n'a pas accepté cette mission".

¹⁰⁹Une lettre du 23 février 1846 nous apprend que Nerenburger commence par faire l'inventaire des documents et une lettre du 12 novembre 1846 que les vérifications et calculs sont finis (Ces lettres sont retranscrites à l'annexe 15: dossier 1890 de l'ARB: correspondance Nerenburger de 1836 à 1867). Meyer et Nerenburger ont refait séparément tous les calculs: ils admettent les résultats exacts s' ils ne diffèrent au plus que de 0"005! (voir à l'annexe 18 la p. 1457 du rapport de la commission).

¹¹⁰Nous donnons à l'annexe 18 une photocopie de l'intégralité de ce rapport.

répétiteur de Lenoir, de 16 pouces, muni de 4 verniers. La commission émet des doutes sur la précision des mesures (Erzey semblant n'avoir employé qu'un vernier) et des critiques sur le choix des séries qu'il a adoptées. Tout l'accord obtenu n'est qu'apparent. Les calculs, refaits séparément par Nerenburger et Meyer montrent que sur 208 triangles, 21 sont fautifs; les erreurs varient entre 1" et 12". De plus, 28 calculs de réduction manquent, soit environ le sixième. Il semble donc que:

"Le réseau géodésique constitué par le calcul des triangles consignés aux archives, ne dérive pas rigoureusement des observations."¹¹¹

Une jonction est prévue avec la triangulation prussienne; aussi, Nerenburger demande les valeurs numériques des côtés attribuées en Prusse. Elles sont envoyées par le chef du bureau trigonométrique de Berlin, Baeyer.

Des réserves sont faites sur la valeur de la base et sur la valeur des côtés se trouvant faire la jonction avec les triangles prussiens. La commission en est arrivée à cette conclusion après le contact établi entre Nerenburger et Baeyer. La conclusion du rapport est sévère:

1°) La triangulation n'a été faite que pour une partie du royaume;

2°) Dans la partie triangulée il y a des lacunes nombreuses qui ne permettent pas de refaire les calculs pour la vérification complète du réseau;

3°) Les observations qu'on possède et qui forment à peine la moitié de celles qu'exige la superficie du territoire, ne présentent pas les garanties d'exactitude que réclame un travail de cette nature. Des précautions essentielles ont été négligées dans la mesure des angles, et les calculs, fautifs en plusieurs points, ne reposent pas toujours sur les nombres fournis par l'observation, tels du moins que les cahiers mis à la disposition de la commission les donnent;

4°) Lors même que les observations seraient bonnes, on n'aurait pas les moyens d'y rattacher d'une manière sûre les observations qui resteraient à faire, puisqu'un grand nombre de signaux sont détruits et qu'il n'en n'existe même plus de traces.

" Dans cet état de choses, la commission pense qu'il y aurait imprudence à baser, sur le travail dont l'examen lui a été confié, les opérations géodésiques ultérieures, et se trouve dans la nécessité de conclure à ce que ce travail soit considéré comme non avenu."¹¹²

Il est clair, à la suite de cette conclusion, que la nouvelle carte de la Belgique, ne peut pas s'appuyer sur les triangulations antérieures à 1830. Le ministre de la guerre

¹¹¹Voir p.1460 du rapport op. cit.

¹¹²ibid. p. 1461.

adopte ces conclusions et institue une triangulation nouvelle. De ce fait, la Belgique doit refaire son réseau du 1^{er} ordre, mesurer de nouvelles bases et effectuer de nouvelles mesures astronomiques.

Elle se trouve donc devant un choix: quels instruments, quelles méthodes d'observations et de calculs choisir?

Faut-il continuer à suivre la tradition française ou faut-il opter pour les nouvelles méthodes utilisées en Prusse? La commission, dans son rapport, n'évoque absolument pas ces nouvelles méthodes prussiennes. Mais nous savons que les Belges en connaissent l'existence. Le contact établi avec Baeyer favorise les échanges scientifiques entre les deux Dépôts de la Guerre.

D'autre part, Meyer s'est rendu en Allemagne comme l'atteste le rapport non publié, que nous présentons ci-dessous, conservé dans les archives de l'Académie Royale de Belgique. Ce voyage se situe durant les travaux de la commission et Meyer nous précise que l'objet en est surtout d'obtenir des précisions sur l'utilisation de la méthode des moindres carrés en géodésie.

Acte III: Le rapport de Meyer (1er semestre 1846)

La commission veut-elle en savoir plus sur les nouvelles méthodes probabilistes utilisées en Allemagne? Meyer, le calculateur, veut-il des conseils sur le traitement des équations de conditions et la résolution des grands systèmes?

Au cours de son voyage¹¹³, Meyer se rend à Marbourg et à Bonn; il rencontre C.L. Gerling (1788-1864) astronome, un des derniers élèves de Gauss et Argelander (1799-1875) astronome, professeur à l'université de Bonn.

A son retour, il dépose son rapport à l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts qui l'examine lors de sa séance du 1^{er} Août 1846. Ce rapport, manuscrit de 22 pages, est envoyé par le secrétaire Quetelet à Verhulst le 3 Août 1846. Nous assistons alors à un échange entre divers savants, aucun ne voulant être rapporteur du dit mémoire.¹¹⁴

¹¹³Nous pensons que ce voyage se situe entre le 17 mars, date de la mort de Bessel (Meyer dans son rapport parle de "feu Mr Bessel"; voir l'annexe 27, p. 143), et le 1^{er} août, date de remise du rapport manuscrit à l'Académie.

¹¹⁴La correspondance relative à ces échanges se trouve à l'annexe 26.

* 3 Août 1846	Envoi à Verhulst
* 6 Août 1846	Renvoi à l'Académie
* 6 Août 1846	Envoi à Dandelin
* 2 Sept. 1846	Renvoi à Verhulst
* 11 Sept. 1846	Réception du mémoire
* 12 Sept. 1846	Renvoi à Dandelin
* 1847	Publication dans les bulletins de l'ARB, tome 14, partie I, p. 279-281, d'un rapport de Quetelet sur ce mémoire, approuvé par Verhulst et Devaux.

Les deux rapporteurs désignés, Dandelin et Verhulst se désistent donc tour à tour:

"Je tiens à ce que Mr Verhulst reste rapporteur, et je suis sûr que ses lumières savantes sont ici d'une grande utilité (...) Je ne suis pas capable d'autre chose que d'opiner du bonnet quand notre Verhulst aura fait son réquisitoire."

écrit Dandelin, accablé de travail et en mauvaise santé.¹¹⁵ Verhulst fait savoir par courrier que "les méthodes géodésiques ne sont point de sa compétence". Il pense que Thiry ou Quetelet sont plus aptes que lui à juger de ce travail. Finalement, Quetelet fait paraître, en 1847, dans les bulletins de l'ARB, tome 14, partie I, p. 279-281 un rapport sur ce mémoire. Avec beaucoup de politesse, il conclut:

"Je propose que la classe remercie Mr Meyer pour son intéressante communication..."¹¹⁶.

Ce rapport¹¹⁷ s'intéresse tour à tour :

- * aux divers instruments utilisés
- * aux appareils utilisés pour la mesure des bases
- * aux signaux et stations
- * aux méthodes d'observation
- * aux méthodes de calcul

Meyer en écrivant ce rapport fait forcément une comparaison avec les méthodes françaises, méthodes qu'il a critiquées lors de l'examen des triangulations

¹¹⁵Dossier 4990 des archives de l'ARB.

¹¹⁶Nous donnons à l'annexe 26 l'intégralité de ce rapport de Quetelet.

¹¹⁷On trouvera la retranscription intégrale de ce rapport en annexe 27. Nous avons respecté l'orthographe de Meyer. Nous avons ajouté de nombreuses notes, permettant une lecture approfondie de ce rapport.

effectuées avant 1830. Il présente quatre types d'instruments: l'instrument universel, le théodolite astronomique, le théodolite géodésique et l'héliotrope. A cette occasion, il consacre un paragraphe à la méthode de répétition. Or lorsque les Allemands mesurent des angles horizontaux et verticaux avec un théodolite, ils ne font pas usage de cette méthode. Meyer rapporte que:

" Mr Gauss dans ses opérations géodésiques du Hanovre, a constaté des erreurs constantes dans ses angles horizontaux, chaque fois qu'il a observé par répétition. Mr Struve dans ses opérations en Russie, avait d'abord employé la méthode par répétition; il a constaté alors que, sur sept stations, les angles observés de gauche à droite étaient constamment supérieurs aux mêmes, observés en sens contraire. Il a abandonné depuis cette méthode."¹¹⁸

Gauss, nous le savons, a toujours précisé que le calcul des probabilités ne peut s'appliquer qu'aux erreurs fortuites; d'où les réticences des Allemands à utiliser un instrument qui produit des erreurs systématiques.

Dans une triangulation, la mesure de la base est un point essentiel. Meyer donne quelques exemples: base bavaroise, base danoise, base finlandaise; il s'attache aux points principaux de la mesure d'une base: règles, température, inclinaison des règles, mesure des intervalles et point où s'arrête la mesure de chaque jour; chacun de ces points est source d'erreurs. Mais il s'abstient de toute description relative à la mesure de la base prussienne n'ayant eu, au cours de son voyage, aucun renseignement sur l'appareil utilisé par Bessel: les fameuses règles de Bessel qui seront prêtées par Baeyer à la Belgique en 1847; il signale qu'elles sont décrites dans l'ouvrage de Bessel¹¹⁹.

Pour le choix des stations, Meyer indique que les Allemands :

"s'astreignent surtout à deux conditions: il faut qu'ils puissent établir l'instrument sur le sol, jamais ils ne choisissent des tours, des édifices, ou des constructions élevées en charpente. Il faut ensuite que du point de station, ils puissent découvrir le plus grand nombre possible d'autres points pouvant servir de points de station."¹²⁰

Mais Meyer a entrepris ce voyage essentiellement pour approfondir le nouveau calcul introduit par Gauss en géodésie, comme il l'expose lui-même:

¹¹⁸Voir rapport de Meyer, Annexe 27, 147.

¹¹⁹Voir Bessel, *Gradmessung in Ostpreussen*, Berlin, 1838.

¹²⁰Voir rapport de Meyer, Annexe 27, p. 154.

"Le principal objet de mon voyage était précisément le désir d'être éclairé sur plusieurs points de cette doctrine; je confesse que Mr Gerling m'a rendu sous ce rapport des services qui m'enchaîneront à lui par une éternelle reconnaissance."¹²¹

Cette doctrine nouvelle consiste dans l'application du calcul des probabilités aux observations angulaires, en particulier dans l'utilisation de la MMC. Il en découle un travail pénible consistant à rechercher les équations de conditions et surtout à les traiter par la méthode des moindres carrés, méthode qui engendre des calculs longs et fastidieux. Meyer est satisfait de son voyage parce que Gerling lui a fourni des explications claires et utiles pour ces calculs. De plus, il revient avec des titres d'ouvrages et d'articles relatifs à la méthode des moindres carrés et va pouvoir de ce fait approfondir cette doctrine nouvelle.

Enfin, Meyer s'est aussi renseigné sur les valeurs numériques des dimensions de la Terre usitées alors en Allemagne: ce sont les nombres de Wälbeck publiés en 1819, à savoir la valeur de 1/302,78 pour l'aplatissement.

Intermède

Ce rapport présenté à l'Académie n'a jamais été publié. Et pourtant, il nous semble que son contenu ne reste pas ignoré. Il est peu à peu, comme nous l'avons expliqué au paragraphe sur Meyer, diffusé dans l'entourage de son auteur par diverses voies. Il va ainsi alimenter et orienter de façon décisive la réflexion des géodésiens belges et les choix qu'ils feront quant aux méthodes à adopter lors de la triangulation effectuée en vue de l'établissement d'une nouvelle carte de la Belgique au 1/40000. Suite à la conclusion énoncée par la commission examinant les travaux d'Erzey, une nouvelle triangulation du territoire belge est décidée.¹²² Elle sera basée sur une triangulation neuve, faite en employant

"les procédés d'observation et les méthodes de calcul les plus perfectionnés".

Le contenu des cours de géodésie enseignés à l'École militaire change¹²³. Dans un de ces cours postérieurs à 1846 on lit:

¹²¹Voir rapport de Meyer, Annexe 27, p. 160.

¹²²Voir rapport paru dans le Moniteur belge du 14 juin 1847, à l'annexe 18.

¹²³Pour plus de détails, nous renvoyons au paragraphe sur A. Meyer.

"La théorie des moindres carrés est d'un secours continuel pour trouver les valeurs les plus probables des inconnues que doivent fournir les observations faites dans des circonstances différentes."

Il est donc clair qu'au cours des années 1845-1847, Meyer, Nerenburger et Quetelet ont, en maintes occasions, comparé les traditions françaises et les traditions allemandes. De par leurs fonctions et leurs compétences, ces trois hommes ont pu se faire une opinion sur les méthodes géodésiques en vigueur en France et en Allemagne. Ayant le désir d'établir la carte de Belgique sur une bonne triangulation, Nerenburger doit faire un choix quant aux méthodes à suivre. Mais comme directeur du Dépôt de la Guerre, il doit aussi tenir compte des contraintes financières auxquelles il est soumis. La durée des missions, les dépenses engagées doivent concorder avec le travail à accomplir.

Ce rapport est donc, selon nous, un des premiers maillons de la diffusion des méthodes allemandes en Belgique puis en Europe. Un autre maillon important de cette diffusion sera la parution en 1852 du livre de Liagre dont nous avons parlé et parlerons à maintes reprises.

Baeyer pourra ainsi dire¹²⁴:

"La Belgique est le premier pays dans lequel les progrès que la géodésie doit aux grands travaux de Gauss et de Bessel ont été reconnus et mis en pratique."

Quant au général Simons (1811-1880), directeur du Dépôt de la Guerre de 1864 à 1871, chef du corps d'État-major, il écrira en 1867, dans l'introduction du tome II de *Triangulation du Royaume de Belgique*¹²⁵, alors qu'il relate les décisions prises alors par Nerenburger:

¹²⁴De façon plus générale, évoquant surtout Quetelet et les congrès de statistiques, E. Brian dira lors de la séance du 15 mars 1996 au séminaire d'histoire du calcul des probabilités et de la statistique de l'EHESS: «La Belgique est un laboratoire, prototype de l'Europe nouvelle»

¹²⁵Cette série que nous avons consultée à la Bibliothèque Royale Albert I^{er} à Bruxelles comprend: Tome I "Compte-rendu des opérations de la commission instituée par M. le ministre de la guerre pour étalonner les règles qui ont été employées à la mesure des bases géodésiques belges", sous la direction du général Nerenburger, 1855; Tome II, 1^{ère} partie, Livre II "Mesures des bases", Livre III "Opérations astronomiques faites en 1855-56 à Lommel, à Nieupoort et à Bruxelles" sous la direction du général Simons, 1867; Tome II supplément en 1878 "Observations astronomiques partie théorique", Tome III "Calculs des coordonnées géographiques et construction de la carte", 1881, Tome IV "Observations et calcul de la triangulation du 1^{er} ordre (avec compensation) 1^{ère} partie, 1880, sous la direction du colonel Adan; Tome V ibid, 2^{ème} partie, 1885, Tome VI, 1^{ère} partie, "Observations astronomiques faites à Hamipré en 1884", 2^{ème} partie ibid en 1892, 3^{ème} partie ibid, en 1890, sous la direction de M. le Major Hennequin.

"Cette publication doit être considérée comme le livre 1^{er} d'un ouvrage qui donnera une relation détaillée de toutes les opérations exécutées par le Dépôt de la Guerre depuis 1851.

De ces opérations, les unes ont été entreprises pour concourir à la détermination de la figure de la terre, et conséquemment avec tout le soin possible et d'après les méthodes allemandes; les autres ont été faites dans le but de servir, avec les premières, à la coordination des éléments de la carte du pays, d'après les méthodes françaises."

- Le dénouement

Acte IV: Le plan de Nerenburger; son exécution (1847-1885)¹²⁶

Le Dépôt de la Guerre belge opte donc pour les méthodes allemandes reconnues plus perfectionnées et plus précises pour la haute géodésie mais, pour des raisons de budget, continuera à utiliser les méthodes françaises pour une partie de l'établissement des cartes.

*** Le projet de Nerenburger**

Comme directeur du Dépôt de la Guerre, Nerenburger écrit en 1856:

"Cette triangulation¹²⁷ est en quelque sorte un spécimen. C'est la première que le Dépôt de la Guerre ait faite d'après les méthodes que l'on applique en Allemagne, et qu'on doit au génie des Gauss, des Bessel, des Schumacher, des Struve... Jusque-là, le Dépôt de la Guerre, dont le directeur actuel tient à l'honneur d'avoir puisé à des écoles militaires françaises ses premières inspirations scientifiques en matière de géodésie, avait suivi la voie si glorieuse tracée par les Delambre, les Méchain, les Arago, les Biot, les Puissant... Mais à partir de 1850, on a substitué aux procédés d'observations et de calculs de l'école française, ceux de l'école allemande du moins pour la géodésie primordiale."¹²⁸

¹²⁶Pour écrire ce paragraphe nous nous sommes surtout référée à la notice écrite par le général Nerenburger lui-même: *Notice sur les triangulations qui ont été faites en Belgique depuis 1617 jusqu'à nos jours; 1^{ère} partie: triangulations antérieures à 1830; 2^{ème} partie: triangulations postérieures à 1830*" Bruxelles, 1856. (remarque: notice parue dans *Bulletin de l'ARB*, tome 23/2, p. 430-479, Bruxelles, 1856). Nous avons aussi consulté J. Loodts *Historique de la triangulation en Belgique*, Bruxelles, 1969; C. Lemoine-Isabeau, 1988, op.cit.. La correspondance de Nerenburger consultée aux archives de l'ARB confirme les dates citées dans les ouvrages ci-dessus.

¹²⁷Il s'agit du rattachement de la base de Linthout à l'Observatoire de Bruxelles.

¹²⁸Nerenburger op. cit. p. 94/95.

Nerenburger précise cependant qu'il faut différencier dans les observations celles qui sont faites du point de vue de la figure de la terre et celles qui sont faites en vue de l'établissement de la carte du pays. Dans le premier cas, on fera usage des méthodes les plus perfectionnées, c'est-à-dire des méthodes allemandes; dans le deuxième cas, ces méthodes longues conduiraient à des résultats d'une précision plus grande que ne l'exigerait une triangulation en vue d'une carte; aussi pour activer le travail, on utilisera les méthodes françaises ou les méthodes allemandes, sans assujettir les angles observés à toutes les corrections voulues.

Ces travaux sont exécutés par le major Diedenhoven et le lieutenant Dekeuwer. A partir de 1855, le lieutenant Adan puis Houzeau se joignent à eux, pour les observations astronomiques.

Nerenburger observe que son pays présente une forme triangulaire; il propose donc de mesurer trois bases, une à chaque sommet et de les relier entre elles par trois chaînes de triangles. Quelques observations astronomiques (latitude, longitude et azimut) seront nécessaires pour orienter correctement le réseau et des vérifications seront obtenues par liaison aux triangulations voisines déjà existantes. Les positions géodésiques, calculées dans l'hypothèse de l'ellipsoïde français, seraient vérifiées par les positions astronomiques afin de mieux connaître la surface du globe dans la partie où se situe la Belgique. Nerenburger envisage également une triangulation du 2^{ème} et du 3^{ème} ordre pour l'établissement de la carte.

* Qu'en est-il exactement de la réalisation de ce projet?

La base de Lommel est mesurée seulement en 1851-52, à cause de la situation internationale de 1848, et celle d'Ostende en 1853. Les instruments utilisés pour la mesure des bases sont les règles de Bessel, prêtées par Baeyer. Précisons que les bases sont mesurées en toises du Pérou et sont petites comparées aux bases françaises. La mesure des angles s'effectue à l'aide du théodolite de Gambey, muni de 4 verniers permettant la lecture à la seconde centésimale; la méthode utilisée est la méthode de répétition. Houzeau et Adan effectuent les mesures astronomiques à l'aide d'un instrument universel, un alt-azimut construit à Munich par Ertel et fils.

La mesure des angles rendue possible dès 1857 avec un crédit annuel de 100000F ne commencera en réalité qu'en 1861. Les opérations relatives aux 84 stations du 1^{er} ordre sont réalisées de 1861 à 1873 et les calculs ne seront terminés qu'en 1885.

4. Le devenir des travaux belges¹²⁹

Bien que notre champ d'étude se limite essentiellement aux décennies 1840 et 1850, il n'est pas inutile de dire brièvement quelques mots de la suite de l'histoire.

Lorsque Adan prend la direction de la section géodésique du Dépôt de la Guerre en 1875, il constate que:

"les calculs ardues de la compensation étaient entièrement à faire"¹³⁰.

Il n'est pas question pour lui de remettre en cause la nécessité d'une compensation. En effet,

"quels que soient les soins apportés aux observations, des erreurs fortuites, inévitables la plupart du temps, affectent les résultats et si on ne peut les en affranchir complètement, il est possible d'en atténuer les effets par une compensation habilement et judicieusement effectuée."¹³¹

Dans un rapport datant de 1880¹³², il écrit:

" Il eut été préférable d'avoir suivi la marche tracée par Nerenburger, mais des raisons de service y ont mis obstacle. Ainsi, loin de faire les chaînes séparément, en confiant l'observation de tous les angles à un ou deux observateurs dévoués et exercés, on a dû mélanger les opérations en chaque point, et on a pris indifféremment les directions des côtés des chaînes et des côtés de remplissage, pour y rapporter les unes et les autres, de telle sorte que les directions probables ont été recherchées en faisant concourir toutes les observations à la formation des équations qui les donnent. (...) En un mot, on a donné à toutes les stations la même importance et le seul moyen véritablement exact d'opérer serait de rendre tout le réseau géométrique en une fois, c'est-à-dire de résoudre 260 équations de condition dont les inconnues sont liées entre elles par plus de 400 équations de poids."

Adan par cette critique montre toute l'importance d'un protocole précis auquel on doit se tenir tant sur le plan scientifique que pratique. Certes, la durée importante des opérations est un obstacle; au cours de ces longues périodes, les hommes changent soit pour raison de service soit par promotion dans l'armée, or Adan reconnaît qu'en pratique

¹²⁹Une chronologie de ces travaux est présentée à l'annexe 28.

¹³⁰Adan, *Triangulation du royaume de Belgique*, livre IV, 1^o volume, Bruxelles, 1880

¹³¹ibid.

¹³²ibid. p. LXXVII

"un observateur doit se créer une routine qu'il applique instinctivement et sans une hésitation. C'est l'observation de ces petits détails qui forme à la longue un bon observateur".¹³³

N'en est-il pas de même pour un bon calculateur?

Les calculs à exécuter sont très longs.

"C'est un travail que M. le général Liagre qualifiait de long et fastidieux et que M. le colonel Perrier appelait un travail de bénédictin"¹³⁴

Adan reconnaît qu'

"il était de toute impossibilité de songer à la résolution de toutes les équations à la fois. Les plus grands dévouements seraient venus à se briser contre le développement des calculs et la moindre erreur pouvait réduire à néant le travail de plusieurs mois, voire de plusieurs années"¹³⁵.

Aussi la méthode qu'il fait adopter est celle de la compensation par groupe (correspondant à une trentaine d'équations de conditions), 6 groupes pour les chaînes primordiales et 6 pour les stations de remplissage. Adan propose de plus d'introduire des équations supplémentaires:

"Le réseau de premier ordre a été divisé en douze groupes de triangles compensés séparément, mais rattachés les uns aux autres par des équations supplémentaires dont l'idée appartient au colonel Adan; de sorte que chaque correction d'angle n'a qu'une valeur unique et que les côtés communs à deux groupes voisins sont théoriquement égaux."¹³⁶

L'enjeu de cette compensation est très important. Toute l'Europe entreprend de tels calculs dans le but de calculer des arcs de méridiens et par suite de déterminer la forme de la terre. Une des questions posées par le Dépôt de la Guerre belge est de savoir si l'ellipsoïde osculateur que l'on a adopté pour les calculs est oui ou non celui qui est propre à la Belgique ou s'il lui est très sensiblement différent.

¹³³J. Loodts, op. cit. § IV

¹³⁴*Notice sur les travaux nécessaires pour compléter le réseau géodésique belge*, A. Delporte, 1884, p. 8. Remarquons qu'il s'agit du colonel François Perrier.

¹³⁵J. Loodts op. cit. § III, 8, remarque 4.

¹³⁶A. Delporte *Notice sur les travaux nécessaires pour compléter le réseau géodésique belge*, Bruxelles, 1884.

Laissons Adan nous résumer la marche des calculs liés aux travaux commencés à l'initiative de Nerenburger:

"Dès 1858, le Major Diedenhoven, aidé du Lieutenant Adan, et ensuite du Capitaine Terlinden, avait mis à l'essai les procédés de la méthode allemande de Bessel et Baeyer, mais ce travail ne fut pas jugé suffisamment rigoureux par le major Ferrier qui en 1865, le recommença avec le capitaine Hennequin, en adoptant un arrangement différent du premier.

Toutefois ces nouveaux calculs furent limités à une partie du réseau, et les manuscrits existants dans les archives étaient incomplets lorsqu'on voulut, en 1875, compléter l'oeuvre commencée.

Afin d'éviter certains inconvénients qui seront relatés dans le chapitre traitant de la compensation, on apporta une modification à la marche suivie en Allemagne. Elle eut pour conséquence de rendre le réseau absolument géométrique, moyennant un surcroît de travail.

En 1875, un seul officier, le lieutenant d'infanterie Schmit, est affecté à la section géodésique. Il seconde le chef, dans l'achèvement de la compensation partielle aux stations, connue sous le nom de recherche des directions probables. Puis Vermesch, capitaine d'État major et Delporte lieutenant d'État major n'hésitèrent pas à faire les études mathématiques nécessaires pour entreprendre et parfaire les longs calculs de la triangulation.

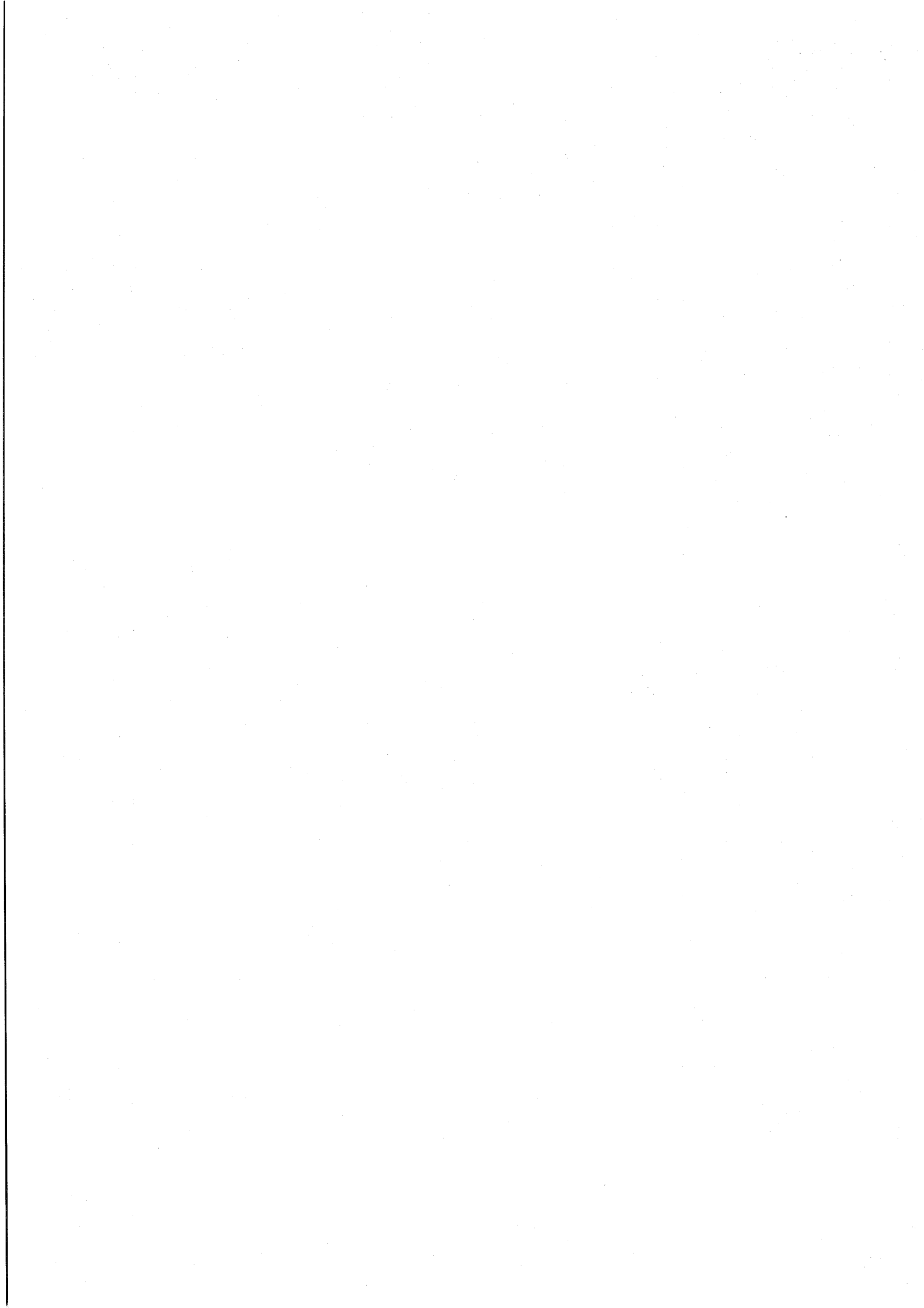
L'institut cartographique militaire achève ainsi des travaux commencés il y a 30 ans"

La Combe, 30-1-80

Lieutenant Colonel Directeur Adan¹³⁷

¹³⁷Extrait de l'introduction de "Observations et calculs de la triangulation du 1^{er} ordre" in *Triangulation du Royaume de Belgique*, Tome IV, 1^{er} volume, 1880.

DEUXIÈME PARTIE



Partie B: Les méthodes probabilistes s'introduisent en géodésie: Exposé de la méthode allemande selon le traité de Liagre

Dès que les géodésiens ont commencé à trianguler, ils ont été conduits à se poser des questions essentielles: quel milieu¹ faut-il prendre entre plusieurs mesures? Comment évaluer et minimiser le risque de se tromper? Comment évaluer l'amplitude des erreurs possibles? Comment combiner des observations effectuées dans des conditions différentes afin d'obtenir les meilleures estimations possibles de plusieurs grandeurs liées entre elles par diverses conditions?

Il s'agit d'obtenir avec la meilleure précision possible la mesure d'objets, ici longueurs et angles, en combinant au mieux des observations différentes et surabondantes d'une même grandeur. En essayant de répondre à ces questions, mathématiciens et géodésiens² ont contribué à construire une nouvelle théorie: la théorie des erreurs.

De nombreux ouvrages, que nous citons dans la bibliographie, ont déjà traité ce sujet. Aussi dans cette partie, nous nous proposons, plus spécialement d'analyser la façon dont les probabilités s'introduisent en géodésie, en particulier après ce que l'on appelle la synthèse de Gauss-Laplace (1823); nous essayerons de mettre en évidence ce que les Belges Meyer et Liagre considèrent comme spécifique à l'école allemande. La méthode des moindres carrés étant au centre de ce processus, nous lui consacrerons le paragraphe 2.

Comme pour toute nouvelle théorie qui s'élabore le vocabulaire n'est, dans le deuxième quart du XIX^{ème} siècle, encore ni stabilisé ni homogénéisé. Nous pensons donc utile au préalable, dans un premier paragraphe, d'étudier quelques différences entre les termes utilisés en France et ceux utilisés en Allemagne.

Enfin, nous examinerons de façon plus précise, dans le troisième paragraphe, le problème des compensations en géodésie.

¹Cette notion de milieu est étudiée dans Feldmann, Lagneau et Matalon *Moyenne, milieu, centre. Histoires et usages*, Ed. de l'EHESS, Paris, 1991. M. Armatte ("Théorie des erreurs, moyenne et loi "normale" " in Feldmann et ..op. cit. p. 68) voit en ce mot un heureux terme qui ne présage pas encore de sa forme mathématique. Il renvoie, par exemple, à l'article "Milieu" du Supplément à l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, rédigé dans les années 1770 par Jean III Bernoulli. Laplace fait aussi usage de ce mot et indique que par milieu, on peut entendre une infinité de choses différentes (voir par exemple dans la Bibliographie de cette thèse, Laplace 1774 ou 1777 ou 1781).

²Notre étude se limite à la géodésie, mais il est bien évident que les astronomes par exemple ont amplement participé à cette évolution du traitement des données; d'ailleurs, rien que pour la période qui nous concerne, plusieurs savants, tels Bessel, Struve, Gauss, ont une double formation et sont à la fois astronomes et géodésiens.

Au cours de cette étude, nous ne manquerons pas de signaler quelques liens entre la géodésie et d'autres branches des mathématiques, par exemple avec la théorie de la résolution des systèmes linéaires.

Le propos étant vaste, nous nous contenterons de prendre comme fil directeur, une lecture commentée de l'ouvrage de Liagre *Calcul des probabilités et théorie des erreurs*, dont la table des matières se trouve à l'annexe 29. Nous présentons et citons la première édition publiée en 1852, sauf mention de notre part lorsque nous soulignons des changements ou des ajouts relevés dans la deuxième édition de 1879.

A chaque fois que cela nous est possible, nous indiquerons les différences qui apparaissent entre l'ouvrage précédent et le traité qui sert de référence en France depuis sa première parution en 1805: *Traité de Géodésie* de Puissant.³ Nous indiquerons à chaque fois, en mentionnant la date, l'édition citée.

Il nous paraît intéressant de faire suivre cette partie B d'un épilogue (C) qui donnera quelques pistes pour repérer l'introduction de ces méthodes probabilistes dans le milieu des géodésiens français et pour pointer les réticences qui surgissent aussi bien chez les praticiens que chez les théoriciens.

³Diverses éditions de cet ouvrage existent: 1^e édition. 1805, 2^e éd. 1819, Supplément 1827, 3^e éd. 1842 (qui prend en compte la "Nouvelle description géométrique de la France" de 1832). Bien que les trois éditions diffèrent très sensiblement, elles sont toujours rédigées dans le même esprit. Puissant, qui n'est pas vraiment modeste, semble considérer que toute nouvelle recherche confirme la justesse de ses vues. Pour ce qui concerne ceci, à savoir essentiellement l'introduction du calcul des probabilités et de la MMC, on remarque aisément de nombreux changements surtout dans la deuxième et la troisième édition. Ceux-ci sont pour la plupart explicités dans le Supplément de 1827. Si l'on examine le contenu de ces modifications, qui ont d'ailleurs fait l'objet en général de communications à l'Académie des Sciences, on voit immédiatement que Puissant invoque systématiquement Laplace et surtout les deuxième et troisième Suppléments de la *Théorie analytique des probabilités*. Les probabilités sont alors utilisées à divers propos, notamment pour la mesure des bases, le nivellement, etc.. Mais ces nouveaux calculs sont purement "locaux" et ne remettent absolument pas en cause la façon générale de concevoir l'ensemble; il n'est d'ailleurs jamais question de compensations. Signalons que cet ouvrage est largement diffusé en Europe; dans la préface de la troisième édition datant de 1842, il est précisé que l'on peut se procurer un exemplaire chez les éditeurs suivants: Charpentier à Toulouse, Michelsen à Leipzig, Dulau à Londres, Cherbuliez à Genève, Graff à St-Petersbourg, Pic-Bocca à Turin, Rohrmann à Vienne. Nous citerons aussi Salneuve *Traité de Topographie et Géodésie* 1841.

B.I. Vocabulaire

Le vocabulaire probabiliste en vigueur dans les ouvrages de la première moitié du XIX^{ème} siècle diffère du nôtre. D'une part des ambiguïtés existent dues au manque de fondements théoriques, d'autre part le vocabulaire n'est pas unifié et suivant les pays, les termes utilisés ne sont pas les mêmes, ou n'ont pas le même sens. Dans son ouvrage, Liagre s'attache à pointer ces différences et attire l'attention des lecteurs sur les confusions qui peuvent en résulter.

1 Mise en place de la "Théorie des erreurs"

- Erreur

Le chapitre 8 de Liagre, intitulé "Théorie des erreurs. Précision des observations", inaugure la troisième section "Partie pratique - Probabilités appliquées" et commence ainsi:

"Toute mesure humaine faite par l'homme est nécessairement entachée d'erreur: à force de soins et d'adresse un observateur pourra s'approcher beaucoup de la vérité, mais il ne doit jamais espérer d'atteindre à la vérité elle-même". (§ 95, p. 175)

Ainsi, Liagre entend par "erreur" la différence entre la vraie valeur et la valeur mesurée. En géodésie, la vraie valeur des grandeurs mesurées (longueur d'une base, mesure d'un angle, détermination astronomique) n'est pas connue; nous en cherchons une estimation et, par le langage probabiliste, nous précisons le degré de confiance que l'on peut attacher à cette dernière. Liagre suit l'école allemande et, tel Gauss, range les erreurs en deux catégories, non évoquées par Puissant:

"On peut ranger les erreurs en deux grandes classes: les unes sont constantes ou plutôt régulières; [...] Celles de la seconde catégorie sont nommées indifféremment erreurs irrégulières, accidentelles, fortuites ou inévitables. L'observateur le plus soigneux ne peut s'en affranchir complètement⁴.(p. 175-176)"

⁴Liagre rapproche ce classement de celui qu'il a proposé pour les causes au § 72. Les erreurs constantes se rapportent aux causes constantes et variables, les autres aux causes accidentelles. Dans une note, il dit avoir emprunté cette répartition des causes en trois catégories à Quetelet (voir *Lettres sur la théorie des probabilités*) et précise que les auteurs allemands ne considèrent que deux espèces de causes 1° Constantes ou régulières (constante oder regelmässige Ursachen); 2° fortuites ou irrégulières (zufällige oder unregelmässige). Il est clair que pour le classement des erreurs, il se réfère au choix des Allemands.

Avec cet effort de classement des erreurs, remontant à Gauss et à Bessel, nous assistons ici à l'émergence de la notion d'erreur aléatoire, erreur qui pourra subir un traitement mathématique. La chasse aux erreurs systématiques est ouverte⁵. On assiste à une prise de conscience du fait qu'une mesure physique peut être entachée de deux sortes d'erreurs: des erreurs systématiques correspondant à l'aspect déterministe de l'opération de mesure et des erreurs accidentelles correspondant à l'aspect aléatoire de l'opération de mesure.

Le mot "erreur", utilisé encore récemment, est remis en cause en cette fin du XX^{ème} siècle; en effet, il a une connotation négative alors que la différence qu'il désigne est normale. On préfère parler de décalage systématique ou de biais à la place d'"erreur systématique" et d'écart aléatoire au lieu "d'erreur accidentelle". Le mot "erreur" est alors réservé pour une défaillance humaine ou matérielle, ce que Liagre appelle "faute".

Dans la troisième section de son ouvrage, Liagre ne s'intéressera qu'aux erreurs accidentelles, excluant comme le recommandent expressément Gauss et Bessel, les erreurs systématiques avant tout traitement probabiliste.

- Loi et Courbe de possibilité

Puis, en admettant les mêmes hypothèses que Gauss sur la répartition des erreurs d'observation⁶, réduites aux erreurs accidentelles, Liagre énonce au § 98 ce résultat devenu classique à l'époque: Les erreurs accidentelles se répartissent suivant la loi exprimée par la formule $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$, où x est la grandeur de l'erreur, y sa probabilité et h un paramètre.

Il résulte de cette loi, appelée aujourd'hui loi de Gauss, que la valeur la plus probable de l'inconnue est précisément celle qui rend aussi petite que possible la somme des carrés des erreurs.

⁵De nombreux auteurs insistent sur l'importance à accorder à l'élimination des erreurs constantes. Dans "Neue Untersuchungen über die Geraden-Aufsteigungen der 36 Fundamentalsterne (24 mars 1825), Bessel recommande d'éviter avec soin toutes les causes étrangères d'erreurs en opposition aux erreurs dues au hasard. Signalons aussi que A.A. Cournot dans son ouvrage *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* paru en 1843 (réédité chez Vrin en 1984 avec des commentaires de B. Bru) consacre le chapitre XI "Des moyennes entre les mesures et les observations" à ce sujet. Auparavant au chapitre IX, "De la statistique en général", il a pris la peine de distinguer les "causes régulières ou permanentes" des "causes accidentelles ou fortuites". Pour lui, "l'élimination des causes accidentelles, l'investigation des causes permanentes sont l'objet essentiel des recherches statistiques". Cournot dès le début du chapitre XI insiste sur la nécessité de se soustraire aux causes constantes: "Une série de mesures, ainsi affectée d'une cause constante d'erreur, doit être rejetée comme impropre à déterminer la vraie valeur de la grandeur; et la sagacité des expérimentateurs consiste principalement à trouver les moyens de se soustraire à l'influence de semblables causes d'erreur, à les analyser, et à en éluder ou à en corriger l'effet".

⁶Nous renvoyons à la partie B II de cette thèse.

Signalons que, dans le cas général, le vocabulaire n'est pas encore mis en place de façon définitive pour désigner l'expression "loi des erreurs". Gauss, dans *Theoria motus* parle de "probabilitas errori tribuenda" tandis que dans *Theoria combinationis* il utilise le terme "facilitas relativa". Laplace, quant à lui, désigne cette loi par "loi de facilité des erreurs". Au début du XX^{ème} siècle, les Allemands disent "Fehlergesetz" et les Anglais "law of facility of errors".⁷

Liagre nomme la courbe qu'il obtient en traçant la représentation graphique de la fonction ci-dessus "courbe de possibilité" ou "courbe de probabilité"; cette dernière expression est aussi utilisée par Cournot. Liagre nomme la fonction "loi de possibilité" et introduit l'expression $P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2 x^2} dx$ indiquant la probabilité qu'une erreur x soit comprise entre les limites 0 et a .⁸ Liagre procède par analogie avec le cas d'une variable discrète prenant appui sur la loi binomiale, d'où des ambiguïtés. Il parlera de "probabilité d'une erreur" en lisant l'ordonnée de la courbe de possibilité, l'erreur étant en abscisse (voir § 33 à 36 de son livre, p. 59-67). Les modèles discrets et continus cohabitent.⁹

2 Signification de quelques termes¹⁰

Regardons les termes dont Liagre a jugé bon de préciser la signification.

- Moyenne

La nécessité de préciser ce que l'on entend par moyenne était indispensable à l'époque.

Liagre distingue les mots "valeur moyenne" et "moyenne arithmétique". Il se réfère, sans aucun doute, à la notion d'homme moyen mise en place par Quetelet comme le suggère, au § 73, le passage suivant:

"L'idée de la moyenne se présente naturellement à notre esprit chaque fois que nous voulons restreindre le vague d'une expression collective, lui donner de l'individualité. [...] (p. 121)

⁷Ces différences de vocabulaire sont soulignées par A. Andoyer dans l'article "Théorie des erreurs" exposé, d'après l'article allemand de J. Bauschinger in *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Tome I.22 (de 1906 à 1911); réédité chez J. Gabay, 1992.

⁸Nous reconnaissons ici la fonction de répartition dont la gestation est fort longue au XIX^e siècle et qui sera surtout popularisée par P. Lévy, *Calcul des probabilités*, 1925.

⁹Faye reste lui aussi proche d'une situation discrète. Nous renvoyons à ses *Cours* et à l'annexe 39.

¹⁰Nous avons trouvé d'autres témoignages de la signification de ces différents termes. Un cours de Faye datant de 1855-56 consigné par un de ses élèves à l'Ecole polytechnique (voir l'annexe 39); le dictionnaire de H. Sonnet (1^{ère} éd. 1867, 2^{ème} éd. 1874) qui cite d'ailleurs l'ouvrage de Liagre à côté de ceux de Gauss et Bessel à l'article "Erreurs (Théorie des)".

A la suite de Quetelet, Liagre cite deux exemples; en premier, le cas de la hauteur des maisons d'une rue déterminée puis en second celui d'une série d'observations. Puis il poursuit:

"Dans le second exemple que nous avons cité, la grandeur cherchée existe réellement.[...] Dans l'impossibilité où nous sommes d'assigner au résultat sa valeur rigoureuse, nous admettons la *valeur moyenne*, comme étant la plus vraisemblable.

Il n'en est pas de même dans le premier exemple: là, l'emploi de la *moyenne arithmétique* n'a eu pour but que de donner, par un nombre abstrait, une idée de la grandeur de plusieurs quantités essentiellement inégales, mais homogènes entre elles. Cette distinction est tellement importante, que nous avons employé des mots différents pour mieux l'établir. On ne confondra donc pas la *valeur moyenne* proprement dite, avec la *moyenne arithmétique*." (p.122)

Liagre saisit parfaitement la différence existant au niveau de l'interprétation entre les deux espèces de moyenne. Mais, à l'instar de Quetelet auquel il emprunte l'exemple de la taille moyenne des soldats d'un régiment, il pense que la différence entre ces deux notions n'existe pas toujours et va jusqu'à conclure:

"La nature, dans ces créations, cherche à se rapprocher d'un *type*, qui est unique pour une même race d'homme." (p. 123)

On ne peut que penser à Quetelet et à son histoire métaphorique du roi de Prusse commandant à mille sculpteurs une copie d'une statue d'Apollon!

Même dans la dernière édition de son traité, Puissant ne fait nullement allusion à ces différents sens du mot "moyenne" (ce qui est normal, son *Traité de géodésie* ne faisant jamais allusion à une quelconque loi de distribution des erreurs) mais juge nécessaire de préciser le mot "moyenne arithmétique". Il écrit:

"On en prend la moyenne arithmétique. Il n'est peut-être pas inutile de dire qu'on entend par moyenne arithmétique, le quotient qu'on obtient en divisant par le nombre total des observations la somme de tous les arcs parcourus sur le limbe. Si, par exemple, n est le nombre des observations de la première série, et A l'angle simple; que n' et A' soient relatifs à la seconde série; que n'' et A'' se rapportent à la troisième série; l'angle moyen sera $(nA+n'A'+n''A'')/(n+n'+n'')$. En faisant chaque série d'un même nombre d'observations, la règle est plus simple, puisqu'il ne s'agit que de diviser la somme des résultats partiels par leur nombre." (Livre troisième, chapitre III, p. 179)

Puissant utilise le mot moyenne arithmétique pour moyenne pondérée.

- Le paramètre h (§ 99-100, p. 180-184)

Ce paramètre h est tel, qu'à probabilité égale, l'erreur est d'autant moindre qu'il est plus grand. Ainsi l'exactitude des observations est proportionnelle à la grandeur du paramètre h qui lui correspond. Liagre pense que pour ce motif, Gauss l'a nommé "la mesure de précision" (mensura praecisionis; das Mass der Präcision oder der Genauigkeit). Meyer et Liagre emploieront ce terme. Il indique aussitôt le vocabulaire utilisé par les français: "module de précision" ou "module de convergence". Effectivement, le premier terme est utilisé par Cournot et le deuxième par Laplace, Poisson et Puissant.

- La valeur de x tel que $P=1/2$ ¹¹

Liagre étudie le cas remarquable où $P = 1/2$; il désigne par r la valeur de x correspondante. Il montre que r dépend de h: $r = 0,4769/h$.

Il remarque, p. 181, que les auteurs allemands appellent r "der wahrscheinliche Fehler", traduit par "l'erreur probable"¹², tandis qu'en France, Cournot l'appelle "médiane de l'écart" ou "erreur médiane" et Laplace, Poisson, Puissant "l'erreur moyenne".¹³

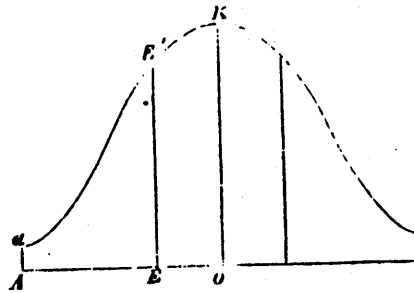
Cette valeur est telle qu'il est aussi probable dans une série d'observations, de commettre une erreur inférieure à r que d'en commettre une qui lui est supérieure. Liagre considère cette valeur comme très importante et en donne une interprétation graphique:

¹¹Par P, il faut entendre $P = P\{|X| \leq x\}$ où x est l'erreur.

¹²Gauss introduit ce vocabulaire dans *Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae Pars Prior*, présentée à la Société royale de Göttingen le 15 février 1821 (Nous n'avons consulté que la traduction de Bertrand). Sonnet, dans son dictionnaire op. cit. p. 490, précise que parfois on peut aussi trouver la traduction "erreur à craindre". En réalité, nous avons trouvé les expressions "erreur moyenne à craindre" ou "erreur moyenne" dans la traduction de Gauss par Bertrand *Méthode des moindres carrés*, 1855, p. 7.

¹³A l'époque, les artilleurs utilisent un vocabulaire différent: "écart probable"

Les astronomes allemands ont donné à la quantité r le nom d'*erreur probable* (*der wahrscheinliche Fehler*). Comme sa considération est très-importante, nous insisterons sur l'idée qu'elle exprime, en disant que c'est l'abscisse $O E$ de la courbe de possibilité, dont l'ordonnée correspondante $E E'$ divise la surface $A O K a$ en deux segments équivalents : il y a donc numériquement *autant d'erreurs plus petites que r , que d'erreurs plus grandes*; et il est *aussi probable*, dans une série d'observations, de commettre une erreur inférieure à r que d'en commettre une qui lui soit supérieure.



- La valeur qui deviendra l'écart-type

Cette valeur est privilégiée par les Allemands. Liagre, reprenant les notations de Gauss¹⁴, pose:

$$[o] = \sum o_i \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = \frac{[o]}{p} - o_i \quad (\S 103, 105)$$

les o_i étant les valeurs des diverses observations et p le nombre de ces observations.

$$\text{Puis il pose} \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{[o^2] - \frac{[o]^2}{p}}{p}} \quad (\S 105, 109)$$

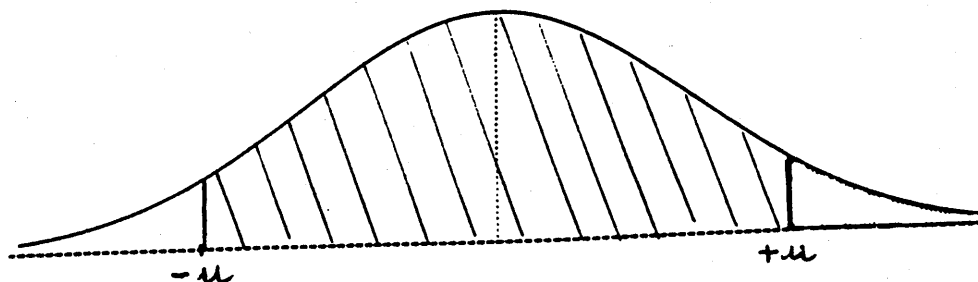
Les Allemands, souligne Liagre, appellent ce nombre "der mittlere Fehler" traduit par "erreur moyenne" ou "der zubefürchtende Fehler" traduit par "erreur à craindre".¹⁵ Liagre démontre que cette valeur correspond au point d'inflexion de la courbe de probabilités (p. 195).

¹⁴Gauss introduit ces notations dans le *Supplément à la théorie de la combinaison des observations* du 16 septembre 1826 (dans la traduction de Bertrand); le vocabulaire quant à lui est introduit dans Gauss 1823 op. cit. p. 8.

¹⁵Précisons, à ce sujet, que les artilleurs utilisent des mots différents: "écart moyen" ou "moyen écart"; cf. I. Didion, *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles*, 1858, §2, p. 8-10.

En France, cette notion n'est pas utilisée en géodésie. Cependant, on la trouve chez Bienaymé sous le nom de "Constante de Laplace".¹⁶

Les Français se posent le problème en d'autres termes: Combien d'erreurs doivent tomber entre $]-u;u[$ ou quelle est la valeur u de x telle que P égale p pour $x \in]-u;u[$?



On peut alors dire qu'il y a "p" à parier contre 1 pour que l'erreur d'une observation soit moindre, en valeur absolue, que u . Cette manière de penser est très proche des traditions françaises issues des jeux.

Nous pouvons dire que pour les "Français" (c'est-à-dire l'école de Laplace) l'écart-type n'est pas une mesure type de l'erreur à craindre; c'est une constante qui intervient dans la formule asymptotique de Laplace. En effet, Laplace considère qu'une erreur est mesurée en valeur absolue et non en carré de distance. En revanche, Laplace a fait la théorie asymptotique de la MMC dès 1810.

Bien sûr toutes ces valeurs sont liées entre elles; la détermination de l'une d'entre elles, par le calcul ou par les observations, permet alors de déterminer les autres.

$$h = \frac{1}{\varepsilon_2 \sqrt{2}} \quad \text{d'où } h\varepsilon_2 \approx 0.70\dots$$

$$hr \approx 0.476936 \quad r \approx 0.674489\varepsilon_2 \quad \text{c - à - d} \quad r \approx \frac{2}{3}\varepsilon_2$$

Remarquons que Liagre a conscience que la formule indiquée pour l'écart-type n'est pas exacte, la moyenne arithmétique n'étant pas la vraie valeur.

¹⁶Dans un manuscrit datant de 1855, Bienaymé, qui a développé en 1853 une théorie mathématique de la variance, appelle "constante de Laplace" ce qui deviendra l'écart-type, certainement en réaction au traité de Liagre. Voir à ce sujet O. Bienaymé, M.F. Bru, B. Bru, "Un manuscrit inédit d'I. J. Bienaymé" in *Actes de la journée Bienaymé*, EHESS, Centre Koyré, 1997.

"Lorsque l'on substitue à O sa valeur la plus probable, les différences entre le calcul et l'observation, doivent être considérées comme les erreurs d'observations *les plus probables*, et nous les admettons comme les erreurs *réelles*, aussi longtemps que nous n'avons pas de nouveau moyen d'approcher davantage de la véritable valeur O." (§ 105, p. 191)

Liagre indique que Gerling appelle la valeur précédente *l'écart-moyen par rapport à la moyenne* (die mittlere Abweichung vom Mittel) et qu'il propose une autre formule

donnant une valeur plus proche de la réalité:
$$E_2 = \sqrt{\frac{[o^2] - \frac{[o]^2}{p}}{p-1}} \quad (\S 109, p. 199)^{17}$$

3 Notion de poids d'une valeur moyenne

Comme le souligne Liagre, suivant les pays, on donne le nom de poids à des quantités différentes, ce qui est un obstacle important à l'étude des applications de la théorie des probabilités particulièrement en géodésie.

- En France

Le poids est le produit du module de convergence g (désigné aussi par h) par la racine carrée du nombre n des observations.¹⁸ Soit P_f le poids en France; on a :

$$P_f = g\sqrt{n}$$

- En Allemagne

¹⁷Ce problème est déjà traité par Gauss en 1823 dans *Theoria Combinationis observationum A* l'article 37, Gauss considère l'estimation " M / ϖ " comme "erronée" et propose à l'article 38 "une théorie rigoureuse", ayant montré que ε_2 est "biaisé". (cf. p. 31 de la traduction de Bertrand, rééditée par l'IREM

Paris VII, 1996). Gauss conclut: " $\sqrt{\frac{M}{\varpi - \rho}}$ pourra être regardé comme une valeur approchée

(ϖ est le nombre des observations et ρ celui des inconnues)

Faye, p. 60 du cours que nous donnons à l'annexe 39, donne une formule similaire. Plus loin, il remarque que de ce fait, les calculs résultants de l'application de la MMC sont réduits.

¹⁸Nous trouvons cette notion chez Cournot *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, chapitre XI, 1843 (p. 153 de la réédition commentée par B. Bru, 1984. Nous recommandons la lecture de cet ouvrage comportant des notes nombreuses et fort instructives de B. Bru). Signalons aussi que Cournot évoque à plusieurs reprises, dans le chapitre XI, les applications aux opérations géodésiques. Cf. aussi note 16.

Notons P_a le poids allemand. Gauss définit P_a qu'il appelle "une quantité réciproque au carré de l'erreur moyenne ε_2 " par la relation:

$$P_a = \frac{1}{\varepsilon_2^2}$$

Gauss utilise le mot latin "Pondus" traduit en allemand par "Das Gewicht". Il écrit:

"Si nous comparons plusieurs systèmes d'observations ou plusieurs grandeurs résultant d'observations auxquelles on n'accorde pas la même précision, nous regarderons leur *poids* relatif comme inversement proportionnel à m^2 , et leur *précision* comme inversement proportionnelle à m . Afin de pouvoir représenter le poids par des nombres, on devra prendre, pour unité, le poids d'un certain système d'observations arbitrairement choisi."¹⁹ (Gauss désigne par m l'erreur moyenne).

- Comparaison

D'après les deux définitions ci-dessus, on peut écrire la relation suivante entre le poids français et le poids allemand:

$$P_a = 2 \frac{P_f^2}{n}$$

Liagre donne la définition suivante du poids:

"On nomme poids d'une valeur le nombre d'observations également précises, requis pour que leur moyenne arithmétique ait la même précision que la valeur donnée, la précision de chaque observation simple étant prise pour unité de précision." (§ 104, p. 190)

Il note que l'unité de poids est arbitraire et fait une analogie avec "la position du centre de gravité d'une droite". Nous constatons que la valeur du poids d'une moyenne est différente selon que l'on adopte la formule française ou la formule allemande²⁰ mais ses propriétés restent les mêmes: il est proportionnel au nombre des mesures effectuées et inversement proportionnel aux écarts; il est d'autant plus élevé que le nombre des mesures effectuées a été grand, et qu'elles s'écartent moins de la moyenne.

¹⁹Gauss, 1823, op. cit. p. 8.

²⁰Ce qui dans la pratique ne facilite pas les éventuelles comparaisons de précision entre les résultats obtenus par les deux écoles de géodésiens.

Liagre explique que cette notion de poids est essentielle puisqu'elle permet de ramener à la même unité de précision des observations inégalement précises. (§ 110, p. 199). Ainsi, on peut prendre en compte dans une même série des observations d'inégales précisions. Cette remarque, énoncée par Gauss ci-dessus, est importante et justifie les modes d'agencements et les pratiques qui en découlent dans la tradition allemande.

Parmi les exemples choisis par Liagre (§ 113, p. 202-209) pour illustrer cette notion, retenons le 8^{ème} (p. 211-214): Comment déterminer le poids d'un côté dans une triangulation? L'exactitude de la longueur de ce côté dépend de plusieurs paramètres. Les Français se servent de ce constat pour bien conditionner une chaîne. Par exemple, Salneuve, § 82 et 321 de son traité de 1841, calcule l'influence de la valeur des angles d'un triangle sur les éventuelles erreurs et trouve que l'erreur est la plus petite lorsque les angles s'approchent de 60°, d'où la forme équilatérale conseillée des triangles²¹. Bessel et Baeyer s'intéressent aussi à ce problème. Ils ont effectué le calcul d'un même côté, Trunz-Wildenhof, en précisant l'erreur moyenne. Pour cela, ils attribuent des poids différents, ne prenant pas en compte les mêmes paramètres; Baeyer considère seulement le nombre des triangles intermédiaires entre la base et un côté. Liagre, comprenant l'importance de ce sujet, dépose en 1852 un mémoire à l'Académie royale de Belgique sur ce thème.²² Exploitant la notion de poids, son approche est probabiliste, tandis que celle de l'école géodésique française est de type déterministe. Un tel exemple permet de mettre en évidence les traitements différents d'un même problème par les deux traditions géodésiques.

²¹Le calcul est donné p. 213 de cette thèse.

²²Nous donnons en annexe 30, les documents relatifs à ce sujet: Baeyer, *Die Küstenvermessung* §104; Bessel, *Gradmessung in Ostpreussen*, p. 168; Liagre, *Calcul des Probabilités...*, p. 211, 1852; le mémoire de Liagre dans le tome XIX, n°4 des bulletins de l'ARB avec les rapports de Nerenburger et de Timmermans. Avec des passages de Salneuve analysés au § BIII 5, ils permettent de faire une étude comparative des façons de traiter ce problème.

termes actuels	En Allemagne au XIX ^e s	En France au XIX ^e s	
		Laplace Poisson Puissant	Cournot
paramètre de la loi normale: h	mesure de précision	module de convergence ou module de précision	
médiane: r	erreur probable	erreur moyenne	médiane de l'écart ou erreur médiane
écart-type ϵ_2	erreur moyenne ou erreur à craindre	Constante de Laplace	
Poids d'une valeur moyenne	le poids est $1/\epsilon_2^2 = 2h$	$h\sqrt{p}$, où p est le nombre d'observations de précision h	

Ces ambiguïtés sur le vocabulaire et simultanément les choix différents des écoles allemande et française se situent à une époque où la réflexion sur les valeurs extrêmes d'une série est à peine amorcée.²³ Les extrêmes, c'est-à-dire les plus grandes et les plus petites valeurs, ont des fréquences faibles. Ils sont dans l'esprit de tous liés au problème du traitement des valeurs aberrantes. On peut en effet douter de l'accord avec les autres données de ces valeurs excessivement grandes ou petites. Au XIX^{ème} siècle, c'est surtout la question suivante qui tourmente les astronomes, les artilleurs et les géodésiens: Que faire des grandes erreurs? Faut-il les rejeter ou les conserver? Or le comportement des valeurs centrales, c'est-à-dire médiane et moyenne arithmétique, vis-à-vis des extrêmes est très différent. La médiane n'est pas sensible aux valeurs extrêmes dans leur amplitude mais dans leur fréquence. Au contraire, la moyenne dépend beaucoup des valeurs extrêmes. Or, l'hypothèse de composition dans la théorie des erreurs qui garantit la convergence vers la loi normale, est que l'erreur totale résulte de la somme d'un grand nombre d'erreurs partielles indépendantes et très petites. L'influence des erreurs extrêmes, qui pourraient faire diverger la somme, est ainsi réduite. Mais que se passe-t-il dans le cas où les grandes erreurs sont fréquentes?²⁴

Ce problème, évoqué par Liagre, est lié à la notion de poids. Dans une série de mesures, doit-on garder toutes les mesures, quitte à leur attribuer des poids différents ou peut-on en rejeter? Les avis sont partagés. Nous avons vu précédemment dans la partie A III comment la commission chargée d'analyser la triangulation d'Erzey condamne le choix arbitraire des mesures prises en compte dans une série pour effectuer les calculs. Liagre pose le problème en ces termes: "Faut-il, pour rétablir l'accord, diminuer le poids de cette observation douteuse?" (§ 122, p. 239). Sa position face à ce problème est la suivante:

"Cette marche est condamnée par tous les bons observateurs, et on n'est autorisé à y avoir recours que si les notes inscrites sur le registre, pendant la durée même du travail, signalent l'observation comme ayant présenté quelque particularité qui soit de nature à la rendre douteuse. Encore vaut-il mieux dans ce cas rejeter *complètement* l'observation que d'invoquer le secours équivoque d'un poids arbitraire, pour modifier à son gré des résultats discordants, et établir ainsi sur le papier un

²³On peut voir des réflexions précoces çà et là sur les extrêmes (par exemple dans le traitement des petites probabilités dans l'ouvrage de Poisson de 1837), mais pour l'essentiel ce n'est que dans la décennie 1920 que se développera une étude probabiliste et statistique des valeurs extrêmes; voir S. Hertz, "Emil Julius Grumbel (1891-1966) et la statistique des extrêmes", Thèse, Université de Lyon 1, juin 1997.

²⁴Ce qui ne se produit guère en géodésie. Le caractère d'universalité de la loi normale et de la moyenne n'est pas remis en cause à ces dates. Ce n'est que Frechet, par exemple, qui en 1927 le fera en abordant le problème en ces termes: d'autres modes de composition des erreurs ne sont-ils pas envisageables? voir S. Hertz, cité à la note précédente.

semblant d'harmonie qui, au fond, ne prouve rien pour l'exactitude réelle. Il est, d'ailleurs très-dangereux pour un observateur de rentrer dans cette voie de transaction." (§ 122, p. 240)

Liagre insiste cependant pour que le rejet d'une observation ne soit qu'un recours extrême et s'appuie en cela sur des avis de savants allemands tel Hagen et Gerling:

"C'est toujours un procédé très-aventureux, dit Hagen (*Grundzüge*, etc., p. 132), que d'exclure d'une série d'observations celles qui paraissent offrir des discordances." (id.)

"Toute observation, dit Gerling, qui n'est pas signalée comme suspecte par le registre des observations, est pour moi un témoin qui vient déposer de la vérité. Je n'ai plus le droit de récuser son témoignage, sous prétexte qu'il s'écarte des autres dépositions, que je n'ai celui de le torturer jusqu'à ce qu'il ait dit ce que je veux lui faire dire." (id.)

Cette torture dont parle Gerling fait sans doute allusion au secours arbitraire du poids pour rétablir un accord fictif. Seuls les poids correspondants à des caractéristiques attachées à un instrument ou à une autre norme sont autorisés. De ce fait, tout un travail sur les normes des instruments se met en place; comme nous l'avons déjà dit, Bessel contribue grandement à ce développement.

Venons en maintenant au coeur du livre de Liagre dont l'objectif essentiel est de diffuser en langue française l'application de la MMC à la géodésie. D'une part, il veut faire connaître les notations introduites par Gauss ainsi que les algorithmes de calculs et d'autre part, en prenant des exemples en géodésie, il veut aussi faire connaître les instruments et les méthodes utilisés par les Allemands.

B.II. La méthode des moindres carrés (MMC)

"La méthode des moindres carrés conduit sans ambiguïté et automatiquement, dans chaque cas particulier, à une solution unique, où l'appréciation personnelle n'intervient pas, solution qui présente le maximé de vraisemblance"

P. Pizzetti "Triangulation géodésique"
traduit par H. Noirel p. 22
in *Encyclopédie des sciences mathématiques* VI 1 (1906)

1. Quelques rappels

-Remarques historiques

Il ne saurait être question ici de donner, même de façon synthétique, une histoire de "la" théorie des erreurs ou de la méthode des moindres carrés. Il existe de nombreuses recherches historiques, études et réflexions sur le sujet, auxquelles nous renvoyons. Parmi les ouvrages consacrés à cette question nous en distinguerons, à titre d'exemples, trois qui nous paraissent spécialement éclairants :

*E. Czuber, *Theorie der Beobachtungsfehler*, 1891, Leipzig, parce qu'il montre très bien la synthèse qui domine à la fin du XIX^{ème} siècle,

*S. Stigler, *The history of statistics*, 1986, Cambridge, parce que, plaçant la question dans une perspective plus vaste et plus moderne de statistique mathématique, il fournit un jugement sûr de mathématicien tout en conservant une perspective historique,

*O. Sheynin, *The History of the Theory of Errors*, 1996, Frankfurt, enfin, parce qu'il est consacré exclusivement à l'histoire de la théorie des erreurs, qu'il vise à l'exhaustivité et qu'il donne une bibliographie abondante et ciblée.

Toutefois, pour notre propos, un certain nombre de remarques s'imposent. Rappelons d'abord quelques faits bien connus.

Pour les observations effectuées avant le XIX^{ème} siècle, aucune théorie des erreurs n'est construite et aucun protocole n'est réellement élaboré, bien que l'on tienne compte d'une certaine façon des erreurs d'observations. Seules quelques recommandations existent et sont transmises d'observateur à observateur. Par exemple, Laplace conseille "3 séries de 20 observations" lors de l'usage du cercle répétiteur. ¹

¹De nombreux géodésiens citent dans le compte rendu de leurs observations ou dans les conseils concernant la manipulation du cercle répétiteur cette recommandation qu'ils attribuent à Laplace; voir par exemple Peytier "Notes sur les opérations géodésiques" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, tome IX, p. 387.

Ceci ne veut pas dire, bien entendu, que les savants du XVIII^{ème} siècle aient été incapables de réflexion et de méthodes à propos des erreurs et des combinaisons d'observations, surtout en astronomie. Citons, par exemple, Euler 1749², T. Mayer 1750³, Boscovich 1755⁴, Lagrange 1770-1773⁵, Laplace à maintes reprises⁶, etc... On trouvera tout cela exposé dans les ouvrages que nous venons de citer. On fait d'ailleurs habituellement remonter l'expression "Théorie des erreurs" à Lambert (1765)⁷.

Insistons sur le fait que ces auteurs traitent en général la question par des méthodes différentes de la MMC et que ces points de vue trouvent aujourd'hui un regain d'intérêt pour des raisons que nous évoquerons brièvement plus loin.

Donnons, pour fixer les idées, une formulation simple, parmi d'autres, de la MMC:

Adoptons les notations de Liagre, en introduisant cependant des indices pour la commodité des écritures.

²Voir Euler Leonhard, *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter, sujet proposé pour le prix de l'année 1748, par l'Académie royale des Sciences de Paris*, 1749

³Voir Mayer Tobias, "Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe und die scheinbare Bewegung der Mondsflecken" in *Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748*. Il apporte une solution ingénieuse pour minimiser les écarts consistant à regrouper plusieurs équations par groupe.

⁴Roger Boscovich rencontre ce problème lors de la triangulation des Etats du Pape. Il invente une technique géométrique pour minimiser la somme des valeurs absolues des écarts entre les valeurs observées et les valeurs ajustées. Laplace reprendra cette idée pour la traiter d'un point de vue mathématique, mais renonce devant la complexité des calculs. Boscovich publie ses travaux sous le titre *De litteraria expeditione per pontificiam ditionem ad dimitiendos dous meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam*, Rome, 1755. Il traduit cette oeuvre en français en 1770 et la publie sous le titre *Voyage astronomique et géographique dans l'État de l'Église* en y ajoutant un supplément de 11 pages en vue d'obtenir la valeur de l'aplatissement terrestre. Nous signalons un article de Nikola Cubranic, Université de Zagreb "Ruder Boskovic et la géodésie scientifique" in *Annales de l'Institut Français de Zagreb*, 3^e série, n°3, 1977-1982. Cet article présente l'oeuvre précédente en apportant d'intéressants commentaires.

⁵Il se place du point de vue du calcul des probabilités. "Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations" in *Mélanges de philosophie et de mathématiques de la Société royale de Turin*, 5, 1770-73

⁶Citons par exemple Laplace "Applications du calcul des probabilités aux opérations géodésiques", 1818 in OC VII, p. 531-558; 2^{ème} et 3^{ème} Suppléments de la troisième édition de la *Théorie Analytique des Probabilités*, 1820, OC VII, p. 561-608.

⁷Lambert J.H. (1728- 1777) introduit l'expression "Theorie der Fehler" en 1765. Déjà dans *Photometria sive de mensura...*, 1760, il cherche une loi régissant les erreurs qu'il rencontre lors des expériences accomplies en photométrie. Au § 281, il écrit: "il est en effet clair que toute cette affaire se réduit à une probabilité" (traduit du latin par J. Boyé et M. Saillard). Voici les références que donne O. Sheynin op. cit. p. 36: "This term is due to Lambert who mentioned it in the *Vorberichte* to volume 1 of his *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Berlin". Bessel utilise aussi ce terme en 1820 dans "Beschreibung auf des Königsberger Sternwarte" in *Astron. Jahrb. für 1823*, 161-168, Berlin et en 1838 § 9 dans *Gradmessung.....* op. cit. Par la suite d'autres auteurs reprennent cette expression dans le titre de leur ouvrage ou comme titre de chapitre; citons parmi les premiers: Fischer, *Lehrbuch der Höheren Geodäsie*, Darmstadt, 1845; Liagre op. cit. 1853; Airy *On the Algebraic and numerical Theory of errors of Observations and the Combination of Observations*, Londres, 1861; A. Meyer *Cours de Calcul des Probabilités ...op. cit.*, 1874; etc...

Soient V_i des fonctions linéaires au nombre de p , et soient m inconnues x, y, z, \dots (On suppose $p > m$.) Soient O_i des valeurs de ces fonctions trouvées par l'observation.

$$\text{Posons } \Delta_i = V_i(x, y, z, \dots) - O_i$$

Demandons que ces écarts soient les plus petits possibles, c'est-à-dire comment minimiser les Δ_i .

La MMC ordinaire consiste à minimiser la somme des carrés des écarts. On veut donc que $\sum \Delta_i^2$ soit minimum. Mais ceci recouvre en fait des démarches très différentes.⁸

Il est clair qu'on pourrait, a priori tout aussi raisonnablement, chercher à minimiser $\sum |\Delta_i|$ ou d'autres quantités. La MMC a ses avantages, ses inconvénients, sa part d'arbitraire (comme toute méthode). Les critiques qui lui sont adressées au XIX^{ème} n'ont rien d'inepte: la longueur des calculs (avec les moyens de l'époque), la gestion très difficile des valeurs extrêmes par la MMC sont des questions bien réelles. Nous pourrions dire aujourd'hui que la moyenne arithmétique et plus généralement, la MMC constituent des traitements L^2 des observations, alors que la médiane et plus généralement la minimisation de $\sum |\Delta_i|$ forment un traitement L^1 . Le traitement L^2 est bien adapté à ce que nous appellerions les espaces vectoriels et les formes quadratiques, bref à certains types de mathématiques qu'on sait bien faire fonctionner depuis un ou deux siècles. Le traitement L^1 a aussi ses qualités et ses faiblesses. On peut certes faire des calculs (Laplace en a effectué), mais ils sont encore plus longs et, lorsqu'il y a de nombreuses équations, on n'a pu les rendre raisonnables que depuis quelques décennies.

Ces remarques, très simplifiées, ne doivent pas cacher qu'il existe d'autres façons de traiter les observations, et que leur pertinence ne peut être décidée dans l'absolu indépendamment ni des tâches qui se présentent à l'astronome ou au géodésien, ni des moyens de calcul et des théories mathématiques des époques considérées. Par exemple, aujourd'hui, les géodésiens élaborent des méthodes intermédiaires entre les traitements L^1 et L^2 afin d'obtenir des compromis conservant l'essentiel des avantages des deux méthodes.

Pour générales et connues qu'elles soient, ces remarques doivent rester présentes à l'esprit quand on examinera les réticences d'alors devant la MMC, les résistances, ou à

⁸ Nous pouvons nous en rendre compte dans la manière dont Legendre et Gauss introduisent cette méthode. D'ailleurs, une polémique, bien connue, surgit entre Gauss et Legendre (pour de plus amples détails, voir Stigler op. cit, p. 15 et 139). En effet, Gauss prétend avoir utilisé cette méthode dès 1795. En 1801, il détermine avec une grande rapidité l'orbite d'une nouvelle planète, Cérès, que Piazzi a observé à Palerme. Mais ce n'est qu'en 1809 qu'il expose dans *Theoria Motus Corporum...* la méthode qu'il a utilisée: il s'agit de la méthode des moindres carrés. (Voir "Gauss et la méthode des moindres carrés" de J.L. Chabert in *Revue Histoire des Sciences*, XLII, 1989).

l'inverse les utilisations imprudentes. Même si les savants ou les militaires des années 1820-1860 qui combattent ou négligent la MMC ont certainement plutôt tort et apparaissent comme des vaincus de l'histoire, ils expriment aussi à leur façon des idées qu'on ne doit pas rejeter, sans examen, d'un revers de manche, et qui, dans des termes un peu différents et à d'autres époques, peuvent révéler une certaine fécondité.

Revenons à la MMC, pour rappeler trois faits historiques célèbres et que tout le monde a en tête dans les années 1830 et suivantes.

*La méthode a été introduite au début du XIX^{ème} siècle indépendamment par Legendre et Gauss. Une querelle acerbe s'en est suivie, surtout dans les années 1810-1820.⁹ Peu importe ici. Retenons seulement ceci:

a) Deux angles d'attaque différents sont développés (Legendre est plus empirique et ne place pas sa méthode dans un cadre probabiliste; Gauss la développe beaucoup plus largement et ajoute des justifications probabilistes théoriques);

b) Gauss a probablement très tôt mentionné ses idées à quelques collègues avant 1805, mais Legendre a su la mettre en valeur, l'exposer clairement et a obtenu immédiatement un succès de diffusion qui en a montré l'importance.

*Ensuite, la MMC est marquée par une longue discussion sur ses fondements entre Gauss et Laplace, discussion qui aboutit à diverses justifications probabilistes non pas dans l'absolu (ce qui n'aurait aucun sens ou du moins serait faux), mais sous de larges hypothèses intéressantes.¹⁰ C'est ce processus qui conduit à ce qu'on appelle aujourd'hui la "synthèse de Gauss-Laplace de 1823". On a tendance quelquefois à forcer le trait et à oublier les hypothèses que ces savants admettent pour prouver la pertinence de la MMC. Gauss ne dit-il pas lui-même:

"C'est une règle convenable proche de la réalité pour l'appliquer il faut donc une grande prudence".¹¹

*Enfin, la réflexion sur les fondements se poursuit, bien que de façon plus ou moins sporadique.¹² Par exemple, vers le milieu du XIX^{ème} siècle, de vives discussions

⁹S. Stigler, "Gauss and the inventions of least squares" in *The Annals of Statistics*, 1981, vol. 9, n° 3, p. 465-474 et les références citées au début de ce paragraphe.

¹⁰Parmi les études portant sur ces fondements, citons J.J. Droesbeke et P. Tassi *Histoire de la statistique*, Que sais-je? 2527, Paris, 1990; C.C. Heyde et E. Seneta *I.J. Bienaymé: Statistical Theory Anticipated*, 1977, New York; M.G. Kendall et R.L. Plackett, *Studies in the History of Statistics and Probability*, 2 volumes, 1977, Londres.

¹¹ cité par E. Knobloch lors d'un exposé au séminaire d'Histoire du calcul des probabilités et de la statistique de l'EHESS, le 8 octobre 1993.

¹² Nous renvoyons, par exemple, à E. Knobloch (Professeur d'Histoire des Sciences à la *Technische Universität* de Berlin) "Historical Aspects of the Foundations of Error Theory" in *The space of mathematics Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations* edited by Echevin, Ibarra,

s'élèvent en France sur l'utilisation de la méthode des moindres carrés et sur ses avantages. La polémique Bienaymé-Cauchy relatée dans les comptes rendus de l'Académie des Sciences de 1853 en est le témoignage.¹³

-Sur les liens entre la MMC et la géodésie

Avant 1853, en France, la géodésie ne fait un appel que très local à la MMC, par exemple à propos de la réfraction.¹⁴ Tout se passe comme si les intéressantes considérations de Laplace étaient plutôt citées à titre d'hommage que pour approfondir le problème.¹⁵

La tradition allemande est toute différente, comme on sait: la MMC s'impose dans une grande variété de problèmes de géodésie, elle se transforme aussi en pratique, se développe au lieu de rester à l'état embryonnaire, elle devient une véritable méthode de travail.

Rappelons qu' on doit à Gauss :

- *l'algorithme de la méthode
- *la détermination des équations normales, du poids des inconnues
- *la recherche de la précision des résultats
- *de nombreuses applications pratiques.

Mais ajoutons que ce processus est progressif au cours des décennies 1820, 1830 et qu'il n'est pas dû qu'à Gauss; sa systématisation doit beaucoup à ses collègues et disciples, tel Bessel... Nous reviendrons sur cet aspect dans le § 2 suivant sur la diffusion de la MMC. Pour le moment rappelons brièvement la problématique générale telle que la pratique l'école allemande. Suivons le résumé de Liagre dans l'édition 1852 de son ouvrage *Calcul des probabilités et Théorie des erreurs* :

Après avoir étudié les cas où ne se présente qu'une inconnue, l'auteur aborde au chapitre onzième le cas de plusieurs inconnues à déterminer.

Mormann, 1993.

¹³Les problèmes relatifs à la réfraction sont étudiés par Laplace dans *La mécanique céleste*, par Le Verrier et par Puissant (voir par exemple, 1^{ème} édition, 1805, chapitre XV, p. 223 à 226).

¹⁴Chasles, *Cours* à l'Ecole polytechnique, 1846, p. 144 et ss.

¹⁵B. Bru, "Laplace et la critique probabiliste des mesures géodésiques" in H. Lacombe et P. Costabel *La figure de la Terre ...*, op. cit. p. 223-244.

"Dans la pratique, le dernier cas est le seul que nous ayons à considérer¹⁶; car l'observateur est libre, en général, de prolonger les observations autant qu'il le juge convenable; et il cherchera dans le nombre des épreuves un correctif aux erreurs inévitables qu'il doit commettre.

On voit donc qu'il est nécessaire de faire concourir toutes les observations à la détermination des inconnues; et c'est ainsi qu'a pris naissance la *règle des moindres carrés des erreurs*." (§ 123, p. 241)

Les géodésiens allemands - nous l'avons dit en A II- n'hésitent pas à mettre en place des méthodes leur assurant des mesures surabondantes. ex: tour d'horizon, quadrilatère... La mise en place des équations de conditions s'obtient en écrivant les différentes contraintes mathématiques auxquelles sont soumises les inconnues. Relativement à la mesure des angles d'une triangulation, elles sont de deux types: les équations aux angles et les équations aux côtés. Rappelons qu'en général, on constate un défaut d'accord entre les résultats du calcul et ceux de l'observation directe, mettant en évidence les erreurs d'observations. Par exemple, dans un triangle plan, on observe les trois angles. La valeur de A obtenue par l'observation est a, celle de B est b, et celle de C est c. Le plus souvent, il y a un désaccord entre c et $180^\circ - (a + b)$. Il faut alors corriger les mesures obtenues par l'observation. Le premier travail du mathématicien sera de trouver une méthode qui ramène la résolution du système de départ à celle d'un système ayant un nombre d'équations égal à celui des inconnues et dont les solutions approchent au mieux les valeurs cherchées c'est-à-dire tel que les valeurs obtenues se rapprochent le plus de la vérité. Les erreurs d'observation doivent être réparties de la façon la plus plausible sur les grandeurs observées. Les observations ainsi corrigées sont nommées par les auteurs allemands "observations compensées" traduction de *observationes compensatae* employée par Gauss et de *ausgegliche Beobachtungen* utilisée par Gerling.

2. Sur la diffusion de la MMC

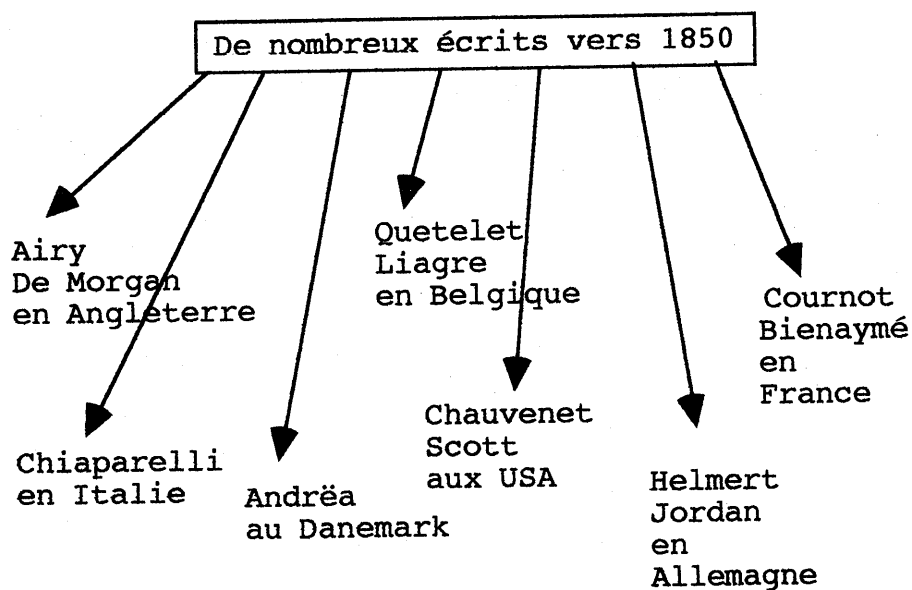
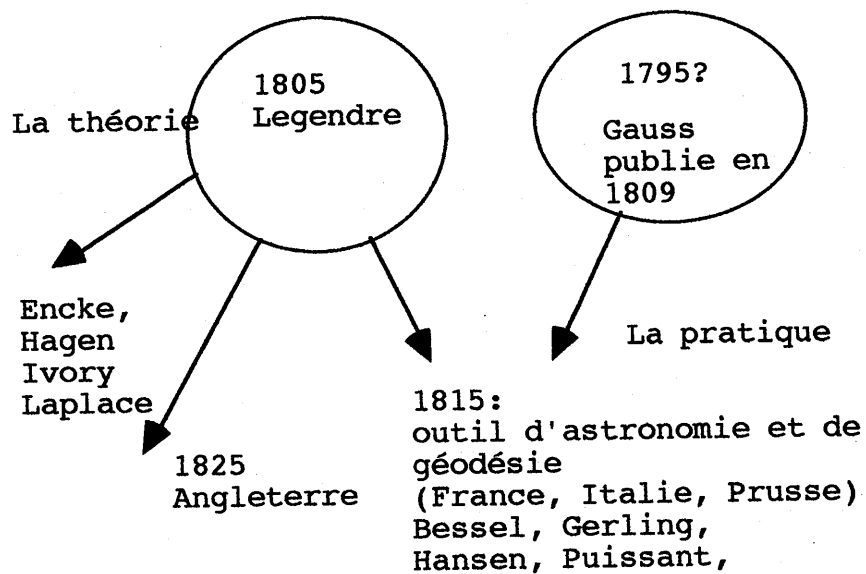
-Une diffusion plus progressive qu'on ne croit

A certains égards, on peut dire que la diffusion de la méthode est rapide. Merriman ne recense-t-il pas en 1877 plus d'une centaine d'écrits à son sujet? 70 titres publiés entre 1805 - 1834 et 179 titres publiés entre 1839 - 1864.¹⁷!

¹⁶Il s'agit de celui où le nombre des observations est supérieur à celui des inconnues.

¹⁷Voir Merriman Mansfield, "A list of writing relating to the method of least squares, with historical and critical notes" in *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences* 4, 1877. Cette liste n'est pas exhaustive.

Voici un aperçu de cette diffusion; nous avons fabriqué un petit schéma d'après les renseignements donnés, en particulier, par S. Stigler et O. Sheynin:¹⁸



¹⁸Voir S. Stigler *The History of Statistics*, op. cit. part 1 et p. 157-158; O. Sheynin, *The History of the Theory of Errors* op. cit. chapitre 3 à 6, p. 51-125.

Mais cette diffusion ne se fait pas de façon égale dans chaque pays. Ainsi Faye, constate-t-il encore, dans son cours d'astronomie de 1881, que la méthode des moindres carrés est encore peu utilisée en France:

"Bien que la méthode que nous venons d'exposer soit d'origine française, son emploi pour la discussion des observations est peu connu dans notre pays; nous avons dû adopter ici les notations et les règles de Gauss, qui sont universellement appliquées hors de France." (tome I, p. 230)

Un commentaire s'impose ici. La géodésie est pratiquée par des gens assez divers: astronomes, simples observateurs, ingénieurs-géographes, militaires d'armes et de grades divers, mathématiciens professionnels, etc... Leurs formations mathématiques sont inégales, les degrés de précision qu'ils recherchent peuvent l'être aussi. Cependant la géodésie constitue une pratique institutionnalisée et internationale, et cela de plus en plus au cours du siècle; elle exige des formes de travail bien organisées, une certaine uniformité, un certain caractère systématique.

Les techniques d'observation, la conduite des calculs réclament un certain niveau de professionnalisme: l'accessibilité des méthodes à des hommes ayant une bonne formation mathématique, mais ne partageant pas le génie de Gauss, apparaît donc essentielle. Or Gauss et Laplace n'ont écrit que ce que l'on pourrait appeler des mémoires de recherche. La diffusion, par Gauss, d'une MMC "de terrain" se fait au moins autant par ses rencontres au cours des campagnes de triangulation et dans sa correspondance.¹⁹

Pour que les méthodes se diffusent autrement que par imitation du savoir-faire sur le terrain, il est donc capital de rédiger et de publier largement de bons traités, d'organiser de bons enseignements, etc... Or, si nous regardons le principal traité de probabilités de la première moitié du XIX^{ème} siècle, à savoir celui de Lacroix (1^{ère} édition 1816, et plusieurs fois réédité), on s'aperçoit immédiatement que la MMC n'y figure qu'à l'état de première ébauche, d'initiation en quelque sorte, sans lien profond avec la pratique géodésique de pointe. Rien d'étonnant à cela: Lacroix reste en phase avec l'école française, et nous avons d'ailleurs vu que son traité sert à la fois de base et de témoignage de l'enseignement à l'Ecole polytechnique.²⁰

¹⁹La correspondance entre Gauss et Bessel, Gauss et Gerling, Gauss et Schumacher, Gauss et Olbers transpire d'échanges relatifs à des préoccupations scientifiques et de confidences sur les campagnes géodésiques. A. Galle dans "Über die geodätischen Arbeiten von Gauss" in *Gauss Werke*, tome XI, 2 cite de nombreuses lettres en référence; nous y renvoyons. Voir aussi, *Gauss Werke*, tome IX; citons par exemple: "Über die Wahl der Bedingungsgleichung aus den Seitenverhältnissen" Lettre de Gauss à Gerling, Göttingen, 11 février 1824 et 19 janvier 1840, p. 249-250.

²⁰Voir partie A I p. 45.

Voilà pourquoi il est important d'insister sur ce qui va constituer la vraie diffusion de la MMC en direction des milieux géodésiens, autour de la pratique de Gauss et de Bessel. Une étape bien localisée dans le temps (1832-1843) se détache: elle est marquée par les publications de Encke (1832-34), par les traités de Hagen (1837), et de Gerling (1843). Ces publications sont en allemand, aucun équivalent (même de loin) n'existe en français avant le livre de Liagre (1853) que nous étudions ici.

Or si Liagre "transforme Gauss en traité" à certains égards, il convient de noter qu'il cite abondamment Hagen, Gerling, etc... et écrit même en note, à propos de ce dernier:

"* *Die Ausgleichungs-Rechnungen der practischen Geometrie* Cet ouvrage élémentaire, modèle d'ordre et de clarté, nous a été très-utile dans notre troisième section [c'est-à-dire celle que nous étudions ici et couvre les deux tiers de l'ouvrage: la théorie des erreurs et l'application de la MMC en particulier à la géodésie]: Plusieurs de nos paragraphes n'en sont qu'une traduction littérale. Nous avons aussi puisé dans l'ouvrage consciencieux de Fischer, *Lehrbuch der höheren Geodäsie*, etc.. et dans les recueils géodésiques de Bessel et de Baeyer" (§ 122, p. 240)

Voilà qui justifie amplement notre parti pris d'un suivi pas à pas de l'ouvrage de Liagre, et de sa comparaison avec les traités français des années 1840 de Puissant et de Salneuve, pour comprendre le fond du paysage scientifique, du passage de l'hégémonie française à l'hégémonie allemande en géodésie.

- Un mot sur les traductions de Gauss en français

Malgré l'importance des travaux de Gauss sur la MMC, il faut, comme nous l'avons déjà dit, attendre 1855 pour qu'en paraisse une version française. D'ailleurs, peu d'oeuvres de Gauss sont portées à la connaissance d'un public français. Nous pouvons cependant citer dès 1807, une traduction de *Disquisitiones arithmeticae* parue sous le titre de *Recherches arithmétiques*, publiée chez Courcier à Paris, traduction due à Pouillet-Delisle, élève de l'École polytechnique et professeur de mathématiques à Orléans²¹. Il faut ensuite attendre 1852 pour que paraisse la traduction de *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (publié en 1828), sous le titre de *Recherches générales sur les surfaces courbes*. La traduction par Bertrand des mémoires de Gauss relatifs à la méthode des moindres carrés paraît avec l'autorisation de l'auteur, l'année de sa mort en 1855. Bertrand nous rappelle que la meilleure manière de combiner les observations est aux yeux de Gauss:

²¹Elle est disponible en réimpression à la Librairie Blanchard, Paris.

"un des problèmes les plus importants de la philosophie naturelle".²²

Gauss souhaite que ses idées se répandent davantage et encourage Bertrand dans son entreprise de traduction.

Les différents mémoires traduits sont présentés dans cet ordre sous les références suivantes:

* *Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* :

Pars Prior présentée à la société royale de Göttingen le 15 février 1821 et *Pars posterior* présentée le 2 février 1823 suivi d'un supplément présenté le 16 septembre 1826,

* un extrait de *Theoria Motus Corporum coelestium in sectionibus solem ambiens* publié à Hambourg en 1809,

* un extrait de *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* paru dans le tome I des mémoires de Göttingen le 25 novembre 1810,

* *Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtung* paru en 1816 dans le tome I du *Zeitschrift für Astronomie und Verwandte Wissenschaften*,

* un extrait d'une lettre de Gauss à Schumacher paru dans *Astronomische Nachrichten* n°6 Tome I, relatif à une application du calcul des probabilités à un problème de géométrie pratique,

* un mémoire sur la détermination chronométrique des longitudes paru dans le tome V de *Astronomische Nachrichten*.

Nous pouvons nous demander pourquoi ces traductions si tardives sont faites l'année de la mort de Gauss. Malheureusement, nous n'avons plus à l'heure actuelle aucune trace d'une correspondance entre Gauss et Bertrand. Nous avons seulement connaissance de trois lettres, mais deux ont brûlé chez Bertrand lors de la Commune et la troisième a été perdue par Chasles.²³

Dans ces conditions, nous ne pouvons qu'émettre des hypothèses.

J. Bertrand, examinateur d'admission à l'École polytechnique, est suppléant au Collège de France depuis 1847. Il y expose le grand mémoire de Gauss *Theoria Motus*, mémoire que l'on enseigne aussi à l'Observatoire. Aurait-il fait cette traduction contre Le Verrier, directeur de l'Observatoire de Paris? N'oublions pas qu'en 1850, ce dernier impose une

²²Dès le milieu du XVIII^e siècle, ce problème est abordé en astronomie de précision. Sur ce sujet, nous renvoyons par exemple aux travaux du REHSEIS sur Condorcet et en particulier aux textes rares et inédits de Condorcet sur l'arithmétique politique et le calcul des probabilités publiés par P. Crépel en collaboration avec B. Bru en 1994, Paris, INED.

²³Voir annexe 5.

réforme de l'enseignement à l'École polytechnique dans laquelle il demande une suppression de l'enseignement de la méthode des moindres carrés.

Est-ce à la demande des géodésiens qu'il effectue cette traduction? En effet, en 1853, Peytier indique précisément comme référence l'ouvrage récent du général belge Liagre, qui divulgue en langue française les nouvelles méthodes géodésiques usitées en Allemagne depuis les années 1820. Ces méthodes de compensation utilisent le calcul des probabilités et la méthode des moindres carrés. Faye, passant outre la réforme Le Verrier initie ses élèves de l'École polytechnique à ces méthodes, comme l'atteste un cours de 1855-56. Bertrand, à cette date enseigne dans cette école un cours d'analyse; il y enseignera aussi un cours de théorie des erreurs.

A-t-il besoin à cette occasion d'une traduction des mémoires de Gauss relatifs à ce sujet?

La France, alors dans une période charnière, prend-elle vraiment conscience du changement de domination?

Tout cela paraît vraisemblable, mais les sources sûres nous manquent encore pour l'affirmer de façon péremptoire.

- Quelques recommandations de Liagre

Le livre de Liagre, nous l'avons dit, joue un rôle majeur dans le mouvement de diffusion des méthodes modernes. Il s'attache à indiquer des conseils très pratiques pour que la MMC, une fois connue, soit utilisée de façon sûre et efficace par les praticiens. Attardons nous sur quelques unes de ces recommandations.

***De l'ordre et de la division dans le travail**

Les notations de Legendre sont peu commodes; dans les calculs, Liagre adopte celles introduites par Gauss et qui se révèlent d'une utilisation aisée. Nous les emploierons dans la suite de cette étude.

En effet, Gauss habile calculateur invente des formules permettant d'effectuer les calculs de façon plus efficace et rapide. Il propose des tableaux pour calculer les coefficients intervenant dans les résolutions, de façon formelle, automatique et mécanique, sans tenir compte de leur signification, position opposée à celle que Delambre décrivait ainsi:

"La méthode de Mr Legendre a les avantages et quelques uns des inconvénients attachés a toutes les solutions analytiques: c'est-à-dire la longueur des calculs, le grand nombre de lettres et symboles dont il est presque impossible de retenir la signification, si l'on ne prend la précaution d'en dresser un tableau, qu'on est sans cesse obligé d'avoir sous les yeux; enfin l'espèce d'obscurité

qui fait que le calculateur est réduit à suivre une marche longue sans voir clairement à chaque instant, ce qu'il fait ni où il va: au lieu que, dans les méthodes astronomiques, quelquefois plus longues encore, et souvent plus indirectes, on voit au moins l'objet particulier de chaque portion du calcul; c'est tel côté, tel angle d'un triangle qu'on a sous les yeux ou dans la mémoire. (...) Ce qui peut cependant assurer à la longue, la préférence aux méthodes analytiques, fondées sur des connaissances qui se répandent de plus en plus, c'est que généralement parlant, ces méthodes sont directes et sûres (...)"²⁴

L'esprit français répugne à ce genre de procédé systématique, où le sens se perd pour un moment, le temps du calcul. Delambre perçoit le besoin de créer des tableaux pour les calculs, mais rien n'est vraiment mis en place à l'époque. Aussi, 40 ans après, Liagre dans son ouvrage se sert-il des notations et des dispositions de calcul introduites par Gauss, que Struve, Baeyer et Bessel ont largement utilisé dans leurs travaux²⁵. Il reconnaît que l'usage si peu répandu de la méthode des moindres carrés a pour cause les calculs longs et pénibles qu'exige son emploi.

"Grâce aux notations de Gauss, les formules *littérales* sont aujourd'hui aussi simples qu'élégantes" (§ 165, p. 378)

Le style allemand ici est marqué par l'introduction de notations astucieuses et fécondes. Mais malgré tout, les applications numériques restent très laborieuses.²⁶ Les calculs sont présentés sous forme de tableaux tels que ceux que nous présentons à l'annexe 32. Ces tableaux peuvent être de taille considérable.

"Pourquoi donc son usage est-il si peu répandu, que la plupart des calculateurs ne la connaissent pour ainsi dire que de nom? Cette espèce d'antipathie que l'on éprouve en général contre la méthode des moindres carrés s'explique, à notre avis, par les calculs longs et pénibles qu'exige son emploi, et par l'aspect compliqué sous lequel on présente souvent ces formules. Ces deux inconvénients sont réels: aussi les plus grands géomètres de l'Allemagne; Gauss, Jacobi, Encke, Bessel, etc., n'ont-ils pas dédaigné de descendre, à ce sujet, dans de minutieux détails de calcul, pour chercher les moyens d'abrèger ou de régulariser le travail" (§ 165, p. 378)

²⁴Ces quelques lignes sont extraites du *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques*, p. 179, rédigé par Delambre en 1808 à la demande de l'Empereur. Elles sont écrites quatre ans seulement après la publication de Legendre.

²⁵Nous donnons à l'annexe 31 les pages où Gauss introduit ces notations, puis des exemples d'utilisation issus des ouvrages de Bessel, Baeyer.

²⁶Certaines compensations exigent qu'une armée de calculateurs travaille pendant plusieurs mois! Stigler dans *The history of statistics* p. 158, indique que la triangulation des Iles Britanniques effectuée en 1858 a nécessité le traitement de 1554 équations à 920 inconnues. Il a fallu deux équipes d'hommes travaillant pendant deux ans et demi pour mener à terme ces résolutions.

Liagre rend hommage à ces grands géomètres qui ont accepté de sortir de la sphère des mathématiques théoriques pour (le terme est-il trop fort?) s'abaisser à des considérations d'ordre matériel et pratique relatives à la conduite et au suivi des calculs. C'est à ce prix, que la méthode théorique se répandra dans les divers milieux de praticiens dont les études nécessitent son utilisation.

Dans l'exemple donné au § 126, p. 251, nous voyons l'utilisation de la méthode dans le cas de 4 équations à 3 inconnues. Nous ne voyons plus apparaître que les calculs sur les coefficients. Cet exemple dû à Gauss lui-même²⁷ sera très souvent repris par les différents auteurs; nous le retrouvons par exemple chez Liagre, Bertrand, Deltheil, etc...

Liagre donne ensuite le profil d'un bon calculateur.²⁸

"Un bon calculateur doit bien connaître son sujet. Lorsqu'il s'en sera suffisamment pénétré, il distinguera avec tact ce qui est essentiel de ce qui ne l'est pas; ce qui est indispensable à la rigueur du résultat, de ce qui ne conduirait qu'à une exactitude apparente et illusoire.

L'ordre, la division du travail, facilitent singulièrement les calculs les plus compliqués. Les calculateurs exacts peuvent en général travailler longtemps sans fatigue, parce qu'ils introduisent dans la conduite de leur ouvrage une régularité pour ainsi dire *mécanique* " (§ 165, p. 379)

Même s'ils ne relèvent parfois que du bon sens, ces préceptes sont à méditer. Ils constituent en quelque sorte le mode d'emploi de la MMC, mode d'emploi qui manquait peut-être aux calculateurs français (voir annexe 33).

***Le choix de la table de logarithmes**

"Un point très important pour le calculateur qui veut opérer promptement et avec une exactitude suffisante, c'est de choisir une table de logarithmes *convenable*: j'entends par là qu'elle ne doit pas renfermer plus de décimales qu'il n'en faut; car les tables volumineuses sont longues à feuilleter"²⁹

²⁷Gauss traite cet exemple au § 10 de la note I "Exposition de la méthode des moindres carrés" des notes de *Theoria Motus Corporum coelestium*.

²⁸ Les préceptes sur la conduite des calculs qu'indique Liagre sont peut-être un héritage de Meyer. En effet, Meyer, comme nous l'avons dit en A III, a rempli les fonctions de calculateur au Dépôt de la Guerre. Répond-il à ces critères? A-t-il voulu aller en Allemagne pour obtenir des conseils d'hommes s'étant frottés à ce type de calculs? A-t-il su se créer des routines?

²⁹Voir note 17.

Liagre est sensible aux recommandations des auteurs allemands en ce domaine.

Gauss insiste sur l'importance du choix des tables de logarithmes. Les mieux appropriées doivent respecter les deux conditions suivantes: les calculs doivent être de la précision désirée et doivent être les plus rapides possible, équilibre qui demande une grande pratique. Faut-il choisir une table à 7, 9, 11 décimales, sachant que l'on veut minimiser le temps des calculs mais maximiser la précision, tout en tenant compte de la précision des instruments? Chaque auteur indiquera donc les tables qu'il utilise. Encke remarque:

"Les durées d'un même calcul, fait avec des tables à 7, 6, 5 décimales, sont comme les nombres 3, 2, 1." (§ 165, p. 378)

Citons aussi Struve qui justifie le choix de tables à sept décimales de Bagay et de Taylor qu'il utilise en ces termes :

"L'emploi de tables de plus de sept décimales m'a paru inutile, par la considération suivante. L'erreur probable d'un logarithme donné immédiatement dans les tables est 0,25 de la septième décimale, l'erreur probable d'un log. déduit par l'interpolation entre deux chiffres tabulaires n'est que de 0;20 unité de la septième décimale. A cette incertitude correspond une erreur probable du nombre naturel d'un vingt-deux millionième. Mais nos bases ne sont exactes que tout au plus à un millionième. Pour un angle primitif de 60° , l'erreur probable, dans les triangles Baltiques qui sont les plus exacts, étant $0''387$, nous avons l'erreur probable du $\log.\sin 60^\circ = 4,70$ unités de la septième décimale, qui est 23 fois plus forte que l'erreur engendrée par les tables. Les tables à sept décimales, en donnant ainsi des éléments de calcul entre 20 et 30 fois plus certains, que les autres éléments de calcul tirés des observations, sont par conséquent entièrement suffisantes pour la résolution des triangles. Une objection contre ce raisonnement, puisé dans l'accumulation des erreurs, n'est point valable, vu que les erreurs produites par les chiffres donnés par l'observation s'accumulent, dans le progrès du calcul, d'une manière analogue, mais toujours à un montant bien des fois plus fort que celui des erreurs tabulaires."³⁰

Il est clair dans ce passage que les calculateurs doivent mener une réflexion constante sur le choix de la table de logarithmes. La décision à prendre ne peut être définitive puisque la précision des instruments de mesures évolue ainsi que la réalisation des tables, notamment avec les nouvelles techniques, comme nous l'évoquons ci-dessous.

³⁰Struve *Arc du méridien de 25° 20'.....*, op. cit. (partie A II), tome I, p. 94.

***La technique au secours du calculateur³¹**

Les tables de logarithmes sont indispensables aux astronomes et aux géodésiens. Or leur constitution exige de grands calculs. Ils sont alors effectués à la main, grâce aux approximations polynomiales et au calcul des différences développés par Prony (aussi y rencontre-t-on beaucoup d'erreurs!). Lorsqu'au XVIII^{ème} siècle, un besoin en calculs plus complexes que ceux effectués par les négociants ou les comptables apparaît, les machines arithmétiques classiques ne suffisent plus à la tâche. Au XIX^{ème} siècle, calculs statistiques, calculs scientifiques et techniques s'alourdissent. Ils deviennent gigantesques et seules des machines de types nouveaux pourront les résoudre: les machines analytiques comme les machines à différences par exemple. L'Anglais Babbage conçoit une telle machine dès 1840. Elle apporte une économie de temps et d'intelligence importante; elle permet le partage des tâches³², idée que nous retrouvons présente dans l'organisation des calculs indiquées ci-dessus.

En 1855, la machine de Scheutz, inventeur suédois, reçoit une médaille d'or à l'Exposition universelle de Paris et sera utilisée à l'Observatoire de Paris pour faire des calculs réels (120 lignes à l'heure). Mais Le Verrier s'oppose à son acquisition, prétextant que le calcul à la main bien organisé, est supérieur au calcul numérique. Pourtant Le Verrier a passé plus d'un an au calcul des perturbations de l'orbite d'Uranus qui aboutit à la découverte de Neptune!³³

Nous pensons qu'une enquête sur l'utilisation de telles machines dans les différents dépôts de la guerre européens serait sans doute riche d'enseignement sur la prise en compte par les calculateurs de ces nouvelles techniques qui sont disponibles dès le milieu du XIX^{ème} siècle.

3. Sur quelques techniques d'application de la MMC

Ce § 3 aurait paru bien banal à un géodésien d'après 1870. Il nous semble cependant utile de rappeler ce cadre de "science normale", afin de mieux saisir divers

³¹Nous nous sommes essentiellement inspirés du livre de Jean Marguin, *Histoire des instruments et machines à calculer*, Hermann, Paris, 1994, pour rédiger ce paragraphe. L'auteur présente dans son ouvrage un modèle de machine servant à effectuer les calculs géodésiques.

³²Ada Augusta (1815-1852) amie de Babbage, fille du poète Lord Byron, participe à la promotion de ce nouveau produit dont elle parle si joliment en ces termes: "La machine analytique tisse les expressions algébriques, comme le métier de Jacquard tisse des fleurs et des feuilles"

³³Elle est achetée pour l'observatoire Dudley, à Albany, aux Etats-Unis et sert, ainsi que celle d'un autre suédois Wilberg, à calculer des tables de logarithmes, ce qui permet de corriger d'autres tables antérieures.

enjeux, par exemple sur le choix des instruments (§ 4) ou sur les compensations (B III). nous suivons Liagre, mais nous aurions pu suivre bien d'autres auteurs allemands à partir des décennies 1840.

- Observations directes, indirectes, conditionnelles

Les problèmes auxquels on peut appliquer la MMC se répartissent en trois groupes suivant la nature des observations. Liagre propose (§ 123, p. 242) le classement qui s'impose rapidement à tous:³⁴

1) Observations directes ou immédiates

Ce cas est le plus simple. Le problème ne comporte qu'une inconnue, observée directement; la MMC conduit alors à la moyenne (ex: mesure d'un angle au théodolite).

2) Observations indirectes ou médiates.

On observe certaines quantités, indépendantes les unes des autres afin d'en déterminer d'autres qui leur sont liées par des relations données (ex: observations des lieux d'une planète).

3) Observations conditionnelles

Ce cas se produit lorsqu'il existe, entre les quantités observées, outre les équations ci-dessus qui doivent être vérifiées "au mieux", des équations de condition qui doivent être rigoureusement satisfaites. Les grandeurs cherchées ne sont plus indépendantes l'une de l'autre.³⁵

"Dans une triangulation géodésique, par exemple, il faut avant d'employer les angles observés, les modifier de manière à transformer le réseau trigonométrique en un véritable polygone mathématique; et cela en altérant le moins possible les résultats immédiats des observations. Les corrections à faire reposent donc sur l'emploi de la méthode des moindres carrés."³⁶

En géodésie, les conditions portent sur trois points principaux:

* Dans un triangle, les angles a_i doivent vérifier: $\sum a_i = 180^\circ + e$. Cette condition est la plus simple.

³⁴Voir par exemple C.L. Gerling, *Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie*, 1843.

³⁵Nous donnons en annexe 34 les exemples donnés par Liagre dans son livre pour illustrer ces trois catégories de problèmes.

³⁶Liagre op. cit. p. 298.

"on y a eu égard dès l'enfance de la triangulation"³⁷

* Dans un tour d'horizon, les angles a_i doivent vérifier: $\sum a_i = 360^\circ$.

Combinée avec la précédente, elle devient moins simple à traiter. Liées, l'une à l'autre, ces deux premières conditions donnent lieu à des équations de conditions simultanées qui doivent embrasser toute l'étendue de la triangulation.

*Dans tout triangle ABC, il y a des relations du type $AB/AC = \sin ACB/\sin ABC$. En utilisant, par exemple l'identité $AB/AC \times AC/AD \times AD/AB = 1$, on obtient une relation entre les sinus des angles.

Le réseau géodésique serait composé de triangles mathématiques si chaque sommet n'était déterminé que par l'intersection de deux rayons visuels, mais des rayons en plus grand nombre sont dirigés vers un même signal. Il faut donc modifier ces corrections, mais le moins possible, pour les faire concourir en un seul point géométrique. Ces corrections ne peuvent pas être faites indépendamment des précédentes. On obtient un système unique d'équations de condition, système de grande taille. Alors chaque côté calculé ne pourra offrir qu'une valeur quelle que soit le chemin suivi pour obtenir sa longueur en fonction de la base.

Dans les trois cas, Liagre propose la technique mise en place par Gauss, consistant à minimiser $\sum x^2$. Au chapitre 11 (§ 124, p.243), il expose en détail le deuxième cas.³⁸ Son propos est surtout de mettre en évidence, l'algorithme à suivre et d'indiquer les notations à introduire pour simplifier les calculs:

Les variables sont indépendantes³⁹; on écrit que les différentielles par rapport à chaque variable sont nulles et on obtient les équations normales (ou Normalgleichungen). Puis pour trouver la valeur des différentes inconnues, on utilise la méthode des substitutions successives à partir du système des équations finales (ou Endgleichungen).

Liagre reconnaît que la partie la plus pénible du travail est celle qui consiste à former les coefficients auxiliaires. En effet, si i est le nombre des inconnues, leur nombre est égal à $i(i+1)(i+5)/6$; ainsi, pour 4 inconnues, il y a 30 coefficients à calculer; lorsque le

³⁷ibid p. 298.

³⁸(Pour le premier, il renvoie au chapitre 9; le troisième cas peut se ramener au second.

³⁹Lorsque les fonctions intervenant dans les relations liant les grandeurs ne sont pas linéaires, il est toujours possible, dit-on, de se ramener à des équations linéaires par rapport aux inconnues, en utilisant des valeurs approchées des inconnues et le développement de la série de Taylor. Une discussion plus serrée sur les approximations ainsi opérées serait nécessaire pour montrer les limites de cette affirmation habituelle, mais rapide.

nombre des inconnues augmente, on voit dans quelle proportion la longueur des calculs croît! ⁴⁰

Pour les hommes du XIX^{ème} siècle, le principal inconvénient de la MMC réside dans la longueur des calculs, mais les avantages l'emportent largement. Voici comment Liagre les présente:

"L'utilité de la méthode des moindres carrés ne réside pas seulement dans la précision du résultat qu'elle fournit: un de ses avantages les plus précieux est de permettre d'apprécier numériquement le degré d'exactitude que ce résultat comporte. Nous allons donc chercher le poids de nos inconnues." (§ 128, p. 253)

"Cette recherche exige dans la pratique peu de calculs nouveaux; car les coefficients des équations de poids sont les mêmes que ceux des équations normales." (§ 128, p. 257)

"Cette méthode qui est celle de Gauss (Theor. motus corpr. coel. § 182) fournit donc à la fois les inconnues et les poids". (§ 128, p. 258)

Liagre explique la manière de déterminer ces poids⁴¹ et, toujours dans le but d'amener un plus grand nombre de personnes à utiliser cette méthode, il établit une règle pratique simple:

"Pour trouver le poids P_n d'une inconnue, x , on remplace, dans l'équation normale relative à x , la quantité toute connue par -1 ; dans toutes les autres équations normales, on remplace la quantité toute connue par zéro. En même temps, on met q_n à la place de x , et l'on élimine toutes les inconnues restantes." (§128, p. 257)

Dans la deuxième édition, p. 381, figurent une indication et un conseil nouveau au sujet du poids:

"Le poids trouvé correspond à une unité pour laquelle l'erreur l est égale ici à 1 minute. Répétons à ce propos qu'il est toujours indispensable d'accompagner l'expression du poids de l'indication de l'unité d'erreur correspondante."

⁴⁰Nous donnons à l'annexe 32 le modèle d'un tableau, donné par Liagre p. 250, pour consigner les différents coefficients intervenant dans les calculs ci-dessus.

⁴¹Il est important de souligner que Liagre se limite au poids; il n'introduit pas la notion d'intervalle de confiance, ni celle de zone de confiance.

Cette remarque, sans doute un des ajouts dus à Pény, est importante. Les calculs de compensation sont en effet souvent exécutés plusieurs années après les observations et par d'autres personnes, et les registres doivent, pour être utilisables et permettre des comparaisons comporter ce type de renseignements. Rappelons qu'en 1852, date de la 1^{ère} édition du livre de Liagre, aucun grand calcul de compensation n'est commencé en Belgique.⁴²

- Comment simplifier les calculs?

Des simplifications sont proposées pour alléger le calcul de l'erreur probable et la résolution des systèmes linéaires. Là encore, nous suivons Liagre (§ 113 p. 210-211).

***Calcul de l'erreur probable**

La formation des carrés des erreurs est pénible. Aussi, plusieurs auteurs proposent des méthodes pour abrégé les calculs.

1) Proposition de Encke en 1834 dans *Berliner astronomisches Jahrbuch*

N'utiliser au calcul de l'erreur probable que des premières puissances des erreurs.

$$r = \varepsilon_1 \rho \sqrt{\pi} \left\{ 1 \pm \frac{\rho}{p} \sqrt{\pi - 2} \right\} \quad \text{ou} \quad r = 0,845347 \varepsilon_1 \left\{ 1 \pm \frac{0,509584}{\sqrt{p}} \right\}$$

$$\text{avec } \varepsilon_1 = \frac{\sum |\varepsilon_i|}{p}$$

(les ε_i sont les erreurs)

Mais les limites sont plus larges qu'avec ε_2

2) Baeyer dans *Die Küstenvermessung* § 97 remarque que ε_2 s'exprime en fonction de ε_1 .⁴³

⁴²Dans ce paragraphe, nous notons d'autres différences entre les deux éditions. Liagre s'aventure, dans la première à donner une justification, pour le procédé permettant de calculer les poids, par un raisonnement, qui dit-il "paraîtra peut-être insuffisant à quelques esprits rigoureux : nous la croyons toutefois très-propre à graver le principe dans la mémoire". (§ 128, p. 258); alors que dans la deuxième édition, il n'est plus question que d'une "particularité qui peut s'expliquer...".

⁴³Ce passage (ainsi que sa traduction) se trouve à l'annexe 35.

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 \pm \frac{\rho}{\sqrt{p}} \sqrt{\pi - 2} \right\} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_2 = 1,2533\varepsilon_1 \left\{ 1 \pm \frac{0,509584}{\sqrt{p}} \right\}$$

il trouve sur 311 erreurs $\varepsilon_1 = 84'' 0938$ d' où $\varepsilon_2 = 0'' 339 \pm 0'' 010$
soit 1 / 3 seconde

*Résolution des systèmes linéaires

"Il était de toute impossibilité de songer à la résolution de toutes les équations à la fois. Les plus grands dévouements seraient venus à se briser contre le développement des calculs et la moindre erreur pouvait réduire à néant le travail de plusieurs mois, voir de plusieurs années."⁴⁴

Dans la première édition de Liagre, on ne trouve que les méthodes de résolution introduites par Gauss, Bessel ou Baeyer. La Belgique n'a commencé les calculs de compensation qu'à partir de 1858, aussi Liagre en 1853 n'a pas la possibilité de donner des exemples issus des triangulations belges, ni d'indiquer les éventuelles difficultés rencontrées par les premiers calculateurs: le Major Diedenhoven (Jacques) et le Lieutenant Adan.⁴⁵ Dans la deuxième édition de 1879, C. Pény ajoute au § 162 les changements apportées par les Belges pour la résolution des grands systèmes. Nous énumérons quelques méthodes élaborées par divers savants et/ou géodésiens pour venir à bout des grands systèmes rencontrés.

Le traitement des calculs géodésiques par l'application de la MMC conduit en effet à la résolution de grands systèmes linéaires. Ainsi, lors de l'étalonnage des règles de Bessel, Nerenburger est amené à résoudre un système de 60 équations à 22 inconnues⁴⁶. Pour traiter les équations de conditions relatives à la compensation d'un réseau, Bessel a dû résoudre des systèmes de 31 équations à 70 inconnues et Baeyer des systèmes de 47

⁴⁴Citation de Adan qui prescrit une compensation par groupe d'environ une trentaine d'équations, pour pallier à cet inconvénient. (citation rapportée par J. Loodts *Histoire de la triangulation en Belgique* 1969, §III, remarque 4). Cette proposition d'Adan sera mise à l'ordre du jour de l'AGI.

⁴⁵Dans la *Triangulation du royaume de Belgique*, livre IV, 2^{ème} volume, 1880, Adan nous indique que ces premiers calculs suivent les procédés de la méthode allemande de Bessel et de Baeyer, mais le Major Ferrier ne les trouve pas assez rigoureux et les recommence donc avec le capitaine Hennequin en 1865 en adoptant un arrangement différent. Dans l'édition de 1852, un seul exemple numérique est exposé au § 154, p. 343, à partir des données belges: triangulation effectuée en 1850, sous la direction du colonel Nerenburger, pour relier la petite base de Linthout à l'Observatoire royal de Bruxelles.

⁴⁶Les calculs sont effectués par Liagre, puis Diedenhoven et Dekeuwer, selon la méthode de Baeyer. Ils sont relatés par Nerenburger dans *Compte rendu des opérations de la commission instituée pour étalonner les règles qui ont été employées en 1850*, 51, 52 et 53 par MM les officiers d'Etat-Major de la section géodésique du Dépôt de la Guerre à la mesure des bases géodésiques belges, Bruxelles, 1855, p. 129 et ss.

équations puis de 86 équations de conditions.⁴⁷ Des recherches sont alors accomplies en vue de pouvoir traiter de tels calculs, et surtout d'abrégier leur marche trop longue. La résolution des systèmes linéaires s'est d'abord faite par des méthodes exactes, puis on voit apparaître des méthodes itératives. En voici quelques exemples:

*Jacobi en 1845 donne des conseils à Dase, calculateur de Baeyer, pour effectuer les calculs relatifs aux travaux de Baeyer.⁴⁸ Nous savons d'autre part que Jacobi cette année là, applique une méthode itérative à la résolution d'un système de 7 équations établies par Le Verrier pour calculer une partie des irrégularités séculaires du système planétaire.⁴⁹

* Une lettre de Gauss à Gerling de 1823 témoigne des réflexions que suscite la résolution de tels systèmes; des essais de méthodes itératives sont réalisés⁵⁰.

*Pour traiter les équations de conditions, l'utilisation du procédé ordinaire d'élimination est long et on préfère donc utiliser le procédé des coefficients indéterminés, faisant intervenir des équations dites corrélatives. Les calculs restent longs mais sont très symétriques et de ce fait plus faciles à exécuter. Liagre expose cette méthode dans son livre §128, p. 253 et § 138, p. 299-302. Il rapporte exactement la méthode mise en place par Gauss.⁵¹

* Gauss met en place des méthodes approchées⁵²

* Des essais de regroupements sont effectués permettant de résoudre des systèmes encore plus importants.⁵³

⁴⁷Ce dernier renseignement nous est fourni par Baeyer lui-même, dans l'introduction de *Die Küstenvermessung* op. cit. (voir annexe 13 pour la traduction). Il écrit: "La première tentative de résolution a été exécutée par Mr Dase avec les 47 équations de la chaîne côtière du § 84 [...] et après avoir réussi cette tentative Mr Dase résolut vraiment pendant la période du 1-06 jusqu'à la mi-septembre 1847 les 86 équations de conditions indiquées au § 92". Nous trouvons dans Bessel *Gradmessung in Ostpreussen* op. cit. § 37 p. 149 et ss, les 31 équations à résoudre.

⁴⁸Baeyer *Die Küstenvermessung*, 1849, introduction (traduite à l'annexe 12).

⁴⁹Jacobi "Sur un nouveau procédé de résolution des équations linéaires qui se présentent dans la méthode des moindres carrés" in *Astronomische Nachrichten*, tome 22 (1845) p. 297 et ss.

⁵⁰Une traduction de cette lettre, par Anne Michel-Pajus, est présentée à l'annexe 36.

⁵¹Gauss *Supplément à la Théorie de la Combinaison des observations*, in Traduction de Bertrand (1855), § 8 à 14, p. 79 à 89.

⁵²Gauss *Supplément à la Théorie de la Combinaison des observations*, in Traduction de Bertrand (1855), § 20, p. 96. Gauss indique l'idée de la méthode, qui consiste à partager les équations en deux ou plusieurs groupes, de chercher d'abord des modifications satisfaisant au premier groupe, puis à partir des valeurs rectifiées de considérer le deuxième groupe, et ainsi de suite. Un exemple est étudiée dans la lettre à Gerling op. cit.

⁵³Le Verrier avait déjà regroupé des équations mais dans le cadre de l'astronomie (Le Verrier "Recherches astronomiques; chapitre VII: résolution d'un système d'équations de condition, en nombre supérieur au nombre des inconnues", p. 60-65 in *Annales de l'Observatoire de Paris*, Tome 1, 1855). Ces méthodes

* En 1867, Schleiermacher fait une communication à l'AGI: on en trouve une trace dans la deuxième édition du livre de Liagre.⁵⁴ Il propose une méthode de séparation des équations aux côtés et des équations aux angles, ce qui diminue considérablement les calculs. Cette méthode lui permet de faire des compensations impossibles par la méthode de Gauss. Fischer rapporte cette méthode qui permet la compensation d'un réseau, là où celle de Gauss devient impossible (nombre des équations supérieurs ou égal à 70)⁵⁵.

Après avoir exposé cette partie technique relative à la MMC, en ayant "milité" pour son usage qui, moyennant quelques nouvelles habitudes de travail, peut être simplifié, Liagre propose à ses lecteurs une série d'exemples pour les convaincre des nombreuses situations où l'on peut faire usage de cette méthode. Comme il l'a annoncé dans sa préface, il choisit ses exemples en géodésie. Par la même occasion, il va nous familiariser avec la tradition allemande. Nous nous proposons donc dans les paragraphes suivants de nous attarder sur deux thèmes (abordés aussi par Meyer dans son rapport de 1846): choix des instruments pour mesurer les angles et méthodes d'observations de ces angles.

4. Le choix des instruments

Nous assistons durant la période 1815-1850 à une large réflexion sur les instruments. Comment trouver les constantes instrumentales? Comment éliminer les erreurs instrumentales? De quels types sont-elles?

peuvent-elles se transposer en géodésie? Quelles influences ont-elles sur la précision des résultats? En somme, Le Verrier fait des moyennes de fonctions. Lorsqu'il impose de supprimer l'enseignement de la MMC dans le cadre de la réforme de 1850 à l'École polytechnique, il suggère d'effectuer des regroupements d'équations (voir p. 4 du texte de 1855). Sheynin signale une méthode utilisée par Hauber (1830-1832) en réduisant le nombre des équations, puis Breen (1849) qui utilise une méthode hybride. S. Stigler rappelle qu'en Angleterre (pays non étudié dans cette thèse) la triangulation effectuée en 1858 conduit aussi à de très grands systèmes: 1554 équations à 920 inconnues! (S. Stigler *The history of statistics* op. cit. p. 158; il cite comme référence: Clarke. A. R. *Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland*, London, 1858; *Geodesy*, Oxford, 1880, p. 243).

⁵⁴Plusieurs des ajouts de C. Pény sont dus à des communications de l'AGI.

⁵⁵En 1871, Baeyer distribuera, lors d'une conférence de l'AGI, un exposé scientifique, en neuf points, des méthodes de calcul employées par le bureau central; ces diverses méthodes de résolution y sont peut-être indiquées (actuellement, nous ne l'avons pas encore consulté). Plus tard, d'autres propositions seront faites. Ainsi, André Cholesky (1875-1918), (polytechnicien 1895A) artilleur et géodésien, dont les travaux de triangulation en Tunisie marquent l'époque ultérieure, est connu pour un algorithme de résolution des systèmes linéaires obtenus dans l'application de la MMC. Cette méthode, très utilisée par les numériciens actuels, est employée sous son nom dans le monde entier pour les applications informatiques.

Toute une série de recherches sont réalisées, des mémoires sont déposés dans les Académies. Des expériences sont entreprises en vue de déterminer la précision relative des divers instruments. La valeur obtenue dépend de la combinaison de plusieurs paramètres: système optique, cercles divisés, habileté de l'opérateur (mise en place de la notion d'équation personnelle⁵⁶), usage de l'instrument...

On suppose par hypothèse que les erreurs sont assez petites pour que leurs effets soient indépendants; on peut alors soit en tenir compte par des formules convenables soit les éliminer par un agencement spécial de la méthode d'observation.

Voici une liste non exhaustive des erreurs étudiées dans les ouvrages de géodésie consultés⁵⁷:

- *erreur d'inclinaison
- *erreur de collimation
- *erreur d'excentricité
- *erreur de division
- *erreur de lecture
- *erreur de pointé
- *correction de la tare
- *excentricité de la lunette
- *erreurs des vis de l'oculaire
- *erreurs des vis des microscopes
- *erreurs de phase
- *réfractions latérales
- *réduction au centre

⁵⁶Habituellement, les historiens citent Bessel comme un des précurseurs de cette notion. Sheynin (1996) écrit p. 150: "Among other researches made by him (Bessel) I single out his discovery of the personal equation" et il donne comme référence l'article de 1823: "Persönliche Gleichung bei Durchgangsbeobachtungen" in *Abhandlungen von F.W. Bessel*, Leipzig, 1875-1876, tome 3, p. 300-304. Cependant, Maskelyne dès 1796 (cité par Bessel op. cit.), Walbeck (1819 op. cit.) ont effectué des paires de mesures mettant en évidence des différences de lectures. Struve (voir p. 71 de cette thèse) était aussi sensible à ce phénomène. Signalons que dans un cours de géodésie de 1867 dispensé à l'Ecole militaire de Bruxelles, certes tardif, un paragraphe nouveau traitant de l'équation personnelle apparaît: "Quand deux observateurs concourent au travail, ils doivent déterminer leur équation personnelle pour pouvoir réduire les chiffres qu'ils auront notés à ceux qu'aurait marqués un observateur moyen entre eux deux". (Archives du Musée de l'Armée de Bruxelles CI VII 3430)

⁵⁷Voir par exemple: Puissant *Traité de Géodésie.*, (1805, Livre III, excentricité chap. IV, p. 78; erreur de phase chap. VII, p. 99); Salneuve, 1841; Towne, *Astronomie astrophysique Géodésie, Topographie...* Paris, 1896, 2^{ème} partie, § 265 p. 186 et ss.; J. Mascart "Théorie des instruments astronomiques de mesures angulaires, des méthodes d'observations et de leurs erreurs" traduit de l'article allemand de F. Cohn in *Encyclopédie des sciences mathématiques* VII 1, p. 273 à 319, édition française dirigée par J. Molk (début XX^{ème} siècle).

Des formules de correction s'étaient élaborées dans la tradition française: correction au centre, à l'horizon, pour la réfraction, etc..⁵⁸ Des méthodes d'observations sont mises en place afin d'éliminer certaines erreurs. Par exemple, l'erreur d'excentricité s'élimine par la lecture à 2 verniers; l'erreur de division s'élimine par la méthode de répétition ou de réitération puis par l'utilisation de machines à diviser; l'excentricité de la lunette s'élimine par retournement de la lunette à la moitié des mesures; l'erreur de phase et les réfractions latérales en mesurant un grand nombre de fois les mêmes éléments à des heures et des jours différents.⁵⁹

Parmi les pratiques énumérées ci-dessus, l'une a particulièrement attiré notre attention, puisque dans les différents ouvrages étudiés, elle est pointée comme une différence marquante entre la tradition française et la tradition allemande; nous voulons parler de l'usage du cercle répétiteur ou du cercle réitérateur.⁶⁰

Les méthodes de répétition et réitération sont présentées par Liagre § 137, p. 287-298. Dans ces paragraphes, Liagre ne s'intéresse pas à la description technique des instruments mais simplement aux avantages de ces deux méthodes quant à la précision des résultats; il se propose de les comparer. La discussion qu'il expose est facile à suivre. Nous la présentons ci-dessous en ajoutant quelques détails simples afin de comprendre les différents managements effectués lors de l'observation des angles.

-Le cercle répétiteur

***Description**

⁵⁸On peut se référer par exemple à Puissant 1805 op. cit. et à l'annexe 9.

⁵⁹Nous renvoyons aux différents traités de géodésie du XIX^{ème} siècle indiqués en bibliographie, Puissant 1805, Salneuve 1841, Liagre 1845, Faye 1881, etc.. ainsi qu'à l'article de Mascart op. cit. (qui contient de nombreuses références).

⁶⁰Nous avons déjà présenté un historique de l'invention et de l'utilisation de ces deux instruments aux pages 37, 67 et dans l'annexe 2.

Sans entrer dans des détails techniques, qui n'ont pas leur place dans ce travail, nous pensons utile de décrire rapidement un cercle répétiteur afin de rendre compréhensible les commentaires qui suivront.⁶¹

Le cercle se compose en général d'un limbe finement gradué, à l'intérieur duquel tourne un limbe concentrique au premier, portant un ou plusieurs verniers. Ces deux limbes peuvent se mouvoir autour d'un axe perpendiculaire à leur plan, le limbe extérieur entraînant dans son mouvement le limbe intérieur: c'est ce qu'on appelle le mouvement général. Le limbe extérieur peut être arrêté par une pince dans une certaine position; alors le limbe intérieur tourne seul: c'est le mouvement particulier.

Dans le cercle répétiteur de Borda, exécuté par Etienne Lenoir (1744-1832)⁶², chaque limbe porte une lunette à réticule dont l'axe est parallèle au plan commun des limbes. La mesure simple d'un angle s'effectue ainsi: chaque lunette est dirigée vers l'un des points à viser; l'angle compris entre le zéro du vernier et le zéro du limbe est égal à l'angle des deux directions considérées.

Mais pour avoir plus de précision et diminuer les effets des erreurs de pointé, lecture et division, on utilise le procédé de répétition.

En voici le principe:

1°) Le O' du vernier étant en face du O du limbe, on vise A par le mouvement général.

2°) Par le mouvement particulier, on vise B; le O' du vernier vient devant la graduation a, qui mesure l'angle $A\Omega B$, où Ω est le centre du cercle. On ne lit pas a.

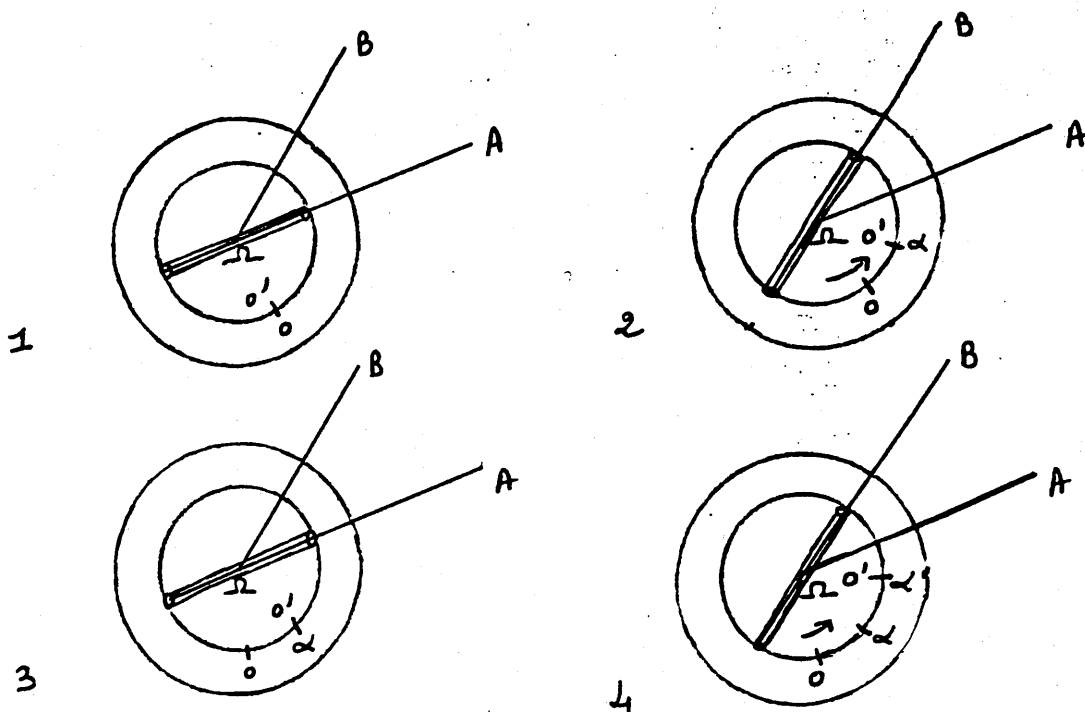
3°) Serrant la pince du mouvement particulier, on ramène par le mouvement général la visée sur A.

4°) Par le mouvement particulier, on vise B. Le O' s'arrête devant a', à peu près le double de a.

On ne lit pas a', et l'on recommence la même série d'opérations 20, 30, 40 fois selon le cas. On lit seulement l'angle final.

⁶¹Pour une description précise de cet instrument, nous renvoyons à Puissant 1805 op. cit. livre III, chap. III, p.66-77 et l'appendice p. 311-315.

⁶²Parmi les mécaniciens français de renom, constructeurs d'instruments de géodésie, citons aussi Bellet (un cercle répétiteur qu'il construit en 1805 est exposé au CNAM), Fortin Jean Nicolas (1750-1831) puis Gambey Henri Prudence (1787-1847).



*Quel est l'avantage d'un tel procédé?

La répétition est telle que les erreurs dues à l'instrument lui-même, aux défauts de la graduation du limbe⁶³ par exemple sont divisées par le nombre des observations.

On prend donc une moyenne entre des mesures effectuées consécutivement sur le même cercle. Remarquons que théoriquement, puisque nous aurons cumulé bout à bout n fois la valeur de l'angle recherché, il suffit de diviser par n la lecture faite sur le limbe augmentée du nombre de tours nécessaire, sans qu'il soit utile de faire les lectures intermédiaires.

La valeur de l'angle avec les notations ci-dessus est donc:

$$\frac{\alpha' + \varepsilon' - \alpha - \varepsilon}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha' - \alpha}{n} + \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{n} \quad \text{où } \varepsilon \text{ et } \varepsilon' \text{ représentent les erreurs faites en lisant } \alpha \text{ et } \alpha'.$$

L'erreur sur la valeur de l'angle est divisée par le nombre de répétitions.

Remarquons que pour mesurer un angle, on prend à chaque fois pour origine la division du limbe à laquelle on est arrivé dans la mesure précédente. Le calcul ci-dessus

⁶³Rappelons que les graduations sur les limbes ne sont pas régulières, tant que le procédé de fabrication n'est pas mécanisé. M. Daumas dans *Les instruments scientifiques au XVII^{ème} et au XVIII^{ème} siècle*, 1953 présente, en gravure fig. 113, les premières machines à diviser les cercles construites par Ramsden (1735-1800). D'autres part, à cette époque, les unités choisies pour les divisions varient suivant les pays; il est à noter, d'après les utilisateurs, que les divisions centésimales permettent un gain de temps car la lecture est plus facile.

est applicable si l'origine de chaque lecture est rigoureusement la division finale de la lecture précédente; ce qui n'est jamais réalisé dans la pratique, en raison du jeu des axes!⁶⁴

Cependant cette méthode présente un grand avantage: "Les erreurs commises sur chaque mesure intermédiaire, à moins d'une fatalité malheureuse, tendent à se détruire entre elles, de sorte que l'angle cherché, obtenu en divisant l'arc final par le nombre de répétitions effectuées, est connu avec d'autant plus de précision." Dans son mémoire de 1818⁶⁵, Laplace remarque que les erreurs des angles mesurés avec un cercle répétiteur, étant des moyennes de toutes les erreurs commises au cours des répétitions, doivent nécessairement, d'après le théorème de Laplace de 1810⁶⁶, être régis par une loi en e^{-hxx} . Le cercle répétiteur de Borda va donc jouer un rôle déterminant dans la théorie laplacienne des erreurs des mesures astronomiques.⁶⁷ Mais les auteurs allemands et Liagre ne manqueront pas de remarquer que l'hypothèse d'indépendance n'est pas respectée, ce qui sera gênant lors de la compensation.

"Mais ce qui caractérise la répétition des angles, c'est que chaque observation dépend de celle qui la précède" (Liagre § 137, p.288)

Voici un avis, critiquable nous semble-t-il, sur les avantages du cercle répétiteur, avis qui perdurera longtemps en France:

"Invention qui est telle que la précision d'un angle observé n'a plus d'autre limite que celle du temps ou de la patience de l'observateur"⁶⁸

⁶⁴La seule condition instrumentale à respecter, comme nous l'avons dit, est que l'instrument ne se dérange pas lorsque l'on passe de la première mesure à la deuxième car il faut que le point d'arrivée de la première mesure soit le même que le point de départ de la deuxième mesure. Or Faye, dans son *Cours d'astronomie et géodésie*, 1881, 1^{ère} partie, chapitre "Description des instruments" attire l'attention sur le fait suivant: ce qui par construction peut être réalisé dans le cas de la mesure d'angles horizontaux, ne le peut pas dans le cas de la mesure d'angles verticaux. En effet, dans le premier cas, le cercle tourne autour d'un axe vertical tandis que dans le deuxième cas, il tourne autour d'un axe horizontal. Faye met ainsi ici en évidence une erreur systématique: "Les distances zénithales sont affectées d'une même erreur dans un même sens, erreur qui va en augmentant avec le temps, à mesure que le jeu des axes augmente avec l'usure." Après avoir pris conscience de ce défaut, dit-il, "on renonça peu à peu à cette méthode et on résolut à adopter une méthode plus longue: celle de la réitération; elle demande plus de pointés et plus de lectures de verniers, mais elle échappe au vice précédent".

⁶⁵Laplace, "Applications du Calcul des Probabilités aux opérations géodésiques" in *Deuxième supplément de la théorie analytique*, OC VII, p. 531-558.

⁶⁶Laplace, *Mémoires sur les approximations*, OC XII, p. 301-353.

⁶⁷Voir B. Bru dans "Laplace et la critique probabiliste des mesures géodésiques" in *La figure de la Terre*, op. cit., 1988, p. 223-244.

⁶⁸Cette phrase se trouve dans Meyer, *Cours de géodésie*, 1845, donc avant son enquête en Allemagne de 1846. Elle reprend une affirmation hâtive et naïve des premiers utilisateurs du cercle répétiteur; en fait, seule l'erreur de lecture est divisée par le nombre des observations.

-Le cercle réitérateur

***Description**

Dans un cercle azimutal ou dans le théodolite, seul le limbe intérieur porte une lunette; l'axe de la rotation des deux limbes est vertical, les limbes restent dans un plan horizontal et donc il n'est pas nécessaire de faire une réduction à l'horizon.

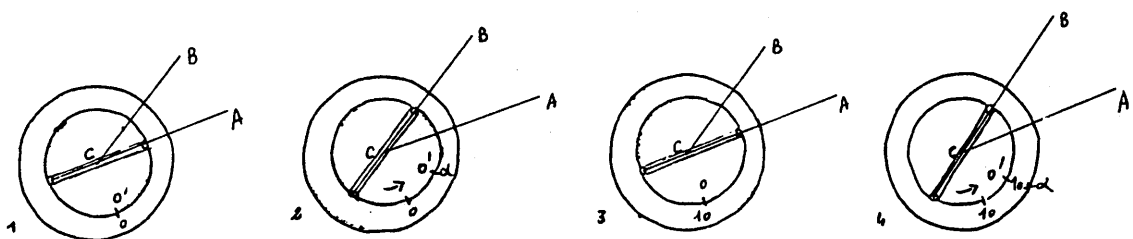
Souvent, le limbe intérieur porte quatre verniers équidistants. De ce fait, la mesure simple d'un angle s'obtient par une moyenne:

Soit l'angle ACB à mesurer; on met le zéro du vernier en face du zéro du limbe, on lit les graduations auxquelles correspondent les trois autres verniers, puis par le mouvement général on amène la lunette sur le point A ; la visée faite, on fixe le mouvement général, et, par le mouvement particulier, on amène la lunette sur B ; le zéro a dans ce mouvement parcouru un arc qui mesure ACB réduit à l'horizon, et en lisant la graduation qui se trouve en face des quatre verniers, retranchant de ces nombres les angles lus à la première visée et prenant la moyenne, on a la valeur de l'angle ACB .

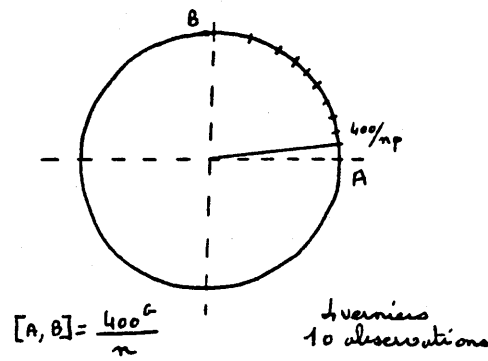
Voici comment on réitère un angle afin d'améliorer la précision:

- 1°) Les zéros étant l'un en face de l'autre, on vise A par le mouvement général.
- 2°) Puis on vise B par le mouvement particulier; on lit a' , en face de O' .
- 3°) On amène ensuite le point O' en face d'une autre division du limbe, tel que 10° ; on vise A par le mouvement général.
- 4°) On vise B par le mouvement particulier; on lit le nouvel angle $10^\circ + a'$;

On recommence en partant de la division 20° et on lit $20^\circ + a''$ etc... La moyenne de a, a', a'' ...représente l'angle cherché.



Dans cette méthode, il y a autant de lectures que de visées. Mais les lectures sont indépendantes les unes des autres.



D'une façon générale, si le limbe comporte n verniers équidistants, la méthode de réitération consiste à mesurer p fois le même angle, en prenant pour origine des divisions équidistantes de $400^p / np$.

Les lectures sont donc : $u, u + \frac{400}{np}, u + 2\frac{400}{np}, \dots, u + (p-1)\frac{400}{np}$

A chaque lecture, on trouve $u \pm e$, où e est l'erreur de lecture ; la somme est $pu \pm pe$ et la moyenne $u \pm e$. Donc ici, l'erreur de lecture peut être la même que dans la mesure simple.

*Comparaison entre la répétition et la réitération

La répétition atténue donc plus que la réitération l'erreur de lecture. Mais elle présente des inconvénients comme nous allons le voir.

a) Il est nécessaire de compter très exactement le nombre de visées, et le nombre de tours entiers faits par la lunette.

b) Le mouvement général peut entraîner le mouvement particulier, et inversement, si les vis de pression ne sont pas serrées à fond.

c) Dans cet enchaînement d'opérations qui toutes concourent au but final, si une seule visée laisse à désirer, si l'appareil est tant soit peu dérangé, tout le travail est perdu, et la valeur admise pour l'angle cherché est mauvaise.

Ces divers inconvénients ne se produisent plus lorsque l'on procède par réitération; chaque lecture se fait et s'inscrit séparément; les visées sont indépendantes les unes des autres, ce qui est essentiel pour l'application du calcul des probabilités dans le traitement des données ainsi recueillies.⁶⁹

⁶⁹D'autre part, signalons que les instruments réitérateurs sont beaucoup plus simples; ils sont débarrassés d'un grand nombre d'axes, de pinces et de vis de rappel. Leur manipulation est donc plus facile, d'où un gain de temps très avantageux. La méthode de réitération permet de viser dès que deux points sont visibles donc les observations des tours d'horizon ou des séries sont plus rapides.

Plusieurs auteurs ont bien remarqué ces différences. Remarquons qu'en France, le colonel Peytier, en 1853, dans *Notes sur les opérations géodésiques*, présente un examen de quelques-uns des principaux travaux exécutés jusqu'à ce jour. Il destine ces notes aux jeunes officiers d'État-major car la nouvelle carte de France étant achevée, ceux-ci n'auront plus guère l'occasion de se former à la pratique des opérations géodésiques.⁷⁰ Il commence par décrire les travaux de la Méridienne de Dunkerque. Parmi les reproches qu'il fait aux habiles astronomes qui les ont exécutés et qui prenaient des précautions minutieuses pour éviter toutes les causes d'erreurs, on trouve celle-ci:

"quelques angles n'ont pas été obtenus par un assez grand nombre de séries, et il y a même deux angles conclus (...) dans la mesure d'une chaîne aussi importante que la méridienne de Dunkerque, chaque angle aurait dû être obtenu par trois séries, au moins de 20 répétitions chacune, ainsi que cela fut prescrit, sur la proposition de Laplace, pour les chaînes primordiales de la nouvelle carte de France."⁷¹

On voit ici le poids incontestable et la référence constante à l'autorité du grand maître que fut Laplace!

Plus loin, Peytier reproche à Delambre et Méchain, à Biot et Arago de faire des choix arbitraires dans les séries observées:

"Il est vrai que Delambre a souvent fait un choix dans ses séries; qu'il a quelquefois pris l'une d'elles au lieu de la moyenne; que d'autres fois il a adopté un résultat approchant de la série qu'il regardait comme la meilleure."⁷²

Voici quelques exemples qu'il cite:

"Ainsi, à Villers-Bretonneux, des trois séries suivantes de l'angle entre Sourdon et Arvillers:

1^{re} série. 20 répétitions, 60°20'40"80 (Arvillers, éclairé tout blanc; on voit les girouettes)

2^e série. 30 répétitions, 60°20'50"53 (grand vent et beaucoup d'ondulations)

⁷⁰Ces notes de Peytier se trouvent p. 381 et ss., à la fin du tome IX du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*. Dans la partie A I de cette thèse, nous avons indiqué que les observations des chaînes du 1^{er} ordre ainsi que des espaces de 1^{er} ordre complémentaire, sont achevées en 1844. Peytier, sous-directeur du Dépôt de la Guerre n'a sous ses ordres en 1852 et 1853 que des officiers dont la seule tâche est l'achèvement de la Carte de France, tâche ne nécessitant pas de connaissances approfondies en géodésie.

⁷¹Voir Peytier op. cit. p. 386- 387.

⁷²Ibid. p. 387.

3^e série. 20 répétitions, 60°20'50"18 (objets beaux; ni vent ni soleil)

Delambre a adopté la dernière série, qui est presque identique avec la seconde, prise par temps défavorable, et n'a pas tenu compte de la première, quoiqu'on vit les girouettes. A Sourdon, il a pris deux séries de l'angle entre Arvillers et Villers-Bretonneux:

1^{er} série. 52°1'7"91 (point de vent; les deux objets sont beaux)

2^e série 52°1'5"88 (objets difficiles à voir; puis beaux après)

et au lieu de la moyenne, Delambre a pris 52°1'7"00, ce qui est un peu arbitraire."⁷³

Ces méthodes sont empiriques, fondées sur une pratique plutôt que sur une théorie ou un protocole à suivre. Dans le calcul de la moyenne, Delambre a fait entrer chaque série proportionnellement au nombre de répétitions.

"Nous pensons qu'il serait préférable de n'employer que des séries d'un nombre à peu près égal de répétitions, toutes obtenues dans des circonstances favorables, et de prendre la moyenne; tout autre mode laisse trop à l'arbitraire".⁷⁴

Peytier continue son analyse des erreurs en distinguant les erreurs de pointé et les erreurs de lecture. En effet dans l'observation d'un angle simple, on commet deux erreurs de pointé une pour chaque objet, et deux erreurs de lecture l'une dans la mise à zéro et l'autre dans la lecture de l'angle; dans un angle double pris avec le cercle répétiteur, on commet quatre erreurs de pointé, mais seulement deux erreurs de lecture; dans une série de 20 répétitions, on commet 40 erreurs de pointé mais seulement deux erreurs de lecture, au commencement et à la fin de la série. Il pense qu'entre les erreurs de pointé il y a sans doute des compensations. Que se passe-t-il si l'on prend 20 angles simples? on a les 40 erreurs de pointé mais aussi 40 erreurs de lectures! et Peytier de conclure:

"les avantages de la répétition sont donc évidents"⁷⁵

Peytier ensuite nuance son propos et dose les avantages de la répétition:

"ceux ci sont surtout considérables lorsque la division est imparfaite; mais avec des instruments très bien divisés, ces avantages diminuent, et quelques savants observateurs, craignant les

⁷³Ibid. p. 388. Il s'agit d'un triangle situé au sud d'Amiens. Signalons que lors de l'examen de la triangulation du royaume belge exécutée avant 1830 par Erzey, Quetelet, Nerenburger et Meyer, mettent le doigt sur des pratiques similaires. (voir le texte du rapport à l'annexe 18)

⁷⁴Ibid. p. 388.

⁷⁵Ibid p. 399, ligne 15

dérangements que peut occasionner le défaut de fixité dans les vis de rappel, préfèrent alors opérer par réitération".⁷⁶

Remarquons que dans les deux méthodes, on arrive à compenser les erreurs de division, en changeant le point de départ. Peytier reconnaît là un "précieux avantage!". La critique de Peytier ne va pas plus loin, aucune évaluation n'est entreprise dans cet ouvrage. L'auteur cite les arguments avancés par les savants anglais contre l'utilisation du cercle répétiteur⁷⁷: ceux-ci craignent les arrangements occasionnés par le défaut de fixité dans la vis de rappel. Hershell, dans son *Traité d'astronomie*⁷⁸, ne manque pas de souligner ce fait et dit que

"les avantages théoriques de la répétition semblent être balancés dans la pratique par quelque cause inconnue qui tient probablement à l'imperfection des appareils destinés à arrêter les mouvements de l'instrument".

Peytier, p. 400, reconnaît que le point faible se trouve dans les vis de rappel, dans le défaut de fixité. Mais, souligne-t-il, les Français ne l'ignoraient pas:

"M. Biot voudrait qu'il y eût deux vis d'arrêt et de rappel à chaque lunette. [...] M. Biot voudrait encore qu'on ajoutât des rappels pour centrer rigoureusement l'oculaire avec l'objectif"

Puissant, lui aussi reconnaît ces défauts:

"Néanmoins, il n'est pas exempt de quelques imperfections, et l'une des plus grandes, selon nous, est dans l'effet de la vis tangente; [...] Un autre inconvénient est que la colonne est si longue, que le cercle oscille par un vent faible ou par le moindre choc".⁷⁹

Les critiques, relevées ci-dessus, relatives au cercle répétiteur -instabilité de l'instrument, non respect des trois séries de 20 répétitions, choix arbitraires dans les séries- avaient déjà étaient indiquées dans le rapport de Nerenburger sur l'oeuvre

⁷⁶Ibid p. 399, ligne 27. C'est nous qui soulignons l'expression "par réitération". Peytier continue en précisant que Bessel et Baeyer ont opéré ainsi en Prusse orientale .

⁷⁷Dans l'avant-propos de l'ouvrage op. cit. , Peytier nous dit avoir connaissance des travaux anglais "d'après des traductions que Servier a faites de quelques rapports sur les travaux américains et de quelques parties des ouvrages des colonels Mudge, Everest et Hall". Il renvoie aussi p. 383 à "compte-rendu par Delambre des travaux exécutés en Angleterre in *Connaissance des temps de 1818*.

⁷⁸Peytier donne ses sources en note p. 399: "Hershell, *Traité d'Astronomie*, traduit par Cournot, Paris, 1834, p. 124".

⁷⁹*Traité de Géodésie*, 1842 §114, p.170 Puissant se satisfait des modifications techniques apportées par les constructeurs (axe de fer muni de trois branches de cuivre faisant fonction d'arcs-boutants et assurant une stabilité suffisante du cercle) et n'évoque pas l'abandon du cercle répétiteur.

géodésique accomplie sous le gouvernement des Pays-Bas, paru le 14 juin 1847 dans le *Moniteur belge*.⁸⁰

Il n'est pas inutile d'examiner le point de vue de Liagre sur ce sujet. Dans son livre de 1853, rédigé à l'intention de ses élèves, un paragraphe s'intitule "Application à la mesure des angles géodésiques: exposé théorique du principe de la répétition. Détermination des erreurs de pointé et de lecture. Comparaison des méthodes par répétition et par réitération" § 137, p. 287-298. Dans la deuxième édition de son livre datant de 1879, le contenu de ce paragraphe (§ 142) est un peu modifié comme nous allons le voir. Le titre même indique que Liagre va appliquer la MMC pour comparer ces deux façons d'évaluer la mesure d'un angle: il va en effet, comparer les erreurs moyennes.

"Il est clair que la comparaison des erreurs moyennes, correspondant aux résultats obtenus par l'un et l'autre procédé, pourra seule donner des lumières sur ce point." (p. 296)

Appelons, comme Liagre, α l'erreur moyenne de pointé et β l'erreur de division combinée à l'erreur de lecture. Posons comme hypothèse, que ces erreurs sont indépendantes l'une de l'autre. Pour déterminer ces erreurs moyennes, Liagre calcule d'abord le poids de l'inconnue x , différence entre deux lectures qu'il appelle m et m' , en utilisant la MMC. Puis, connaissant ce poids, il en déduit alors facilement l'erreur moyenne, racine carrée de l'inverse du poids (voir annexe 37).

Pourquoi procède-t-il ainsi, alors que l'on peut déterminer directement la valeur de l'erreur moyenne? (pour cela, il renvoie au § 117) Que veut-il légitimer ainsi?

Les deux méthodes donnent les mêmes résultats, à savoir:

*pour une mesure simple, puisqu'il y a deux visées et deux lectures, l'erreur moyenne est:

$$\mu = \pm\sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2}$$

*par la méthode de répétition, puisqu'il y a deux lectures et n visées, l'erreur moyenne est:

$$\mu' = \pm\sqrt{\frac{2}{n} \times \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n} \right)}$$

*par la méthode de réitération, puisqu'il y a n visées et n lectures, l'erreur moyenne est:

$$\mu'' = \pm\sqrt{\frac{2}{n} \times (\alpha^2 + \beta^2)}$$

⁸⁰Voir Annexe 18.

D'autre part, il résout le système des équations normales par élimination successive des inconnues à l'exception des x (2^{ème} éd. p. 420). Mais il n'y a pas une détermination unique! le système est indéterminé puisque $x=m-m'$ et nous ne pouvons nous empêcher de penser qu'il savait le résultat auquel il voulait arriver! ⁸¹

Liagre étudie ensuite la différence $\mu''-\mu'$.

$$\mu'' - \mu' = \sqrt{\frac{2}{n}} \times \frac{\frac{n-1}{n} \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n}} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Cette différence est positive donc théoriquement la méthode de répétition est supérieure à la méthode de réitération. Nous savons qu'en pratique, il n'en est rien à cause par exemple de l'entraînement du limbe lors des différents mouvements. La formule précédente montre que l'écart $\mu''-\mu'$ croît avec β . De ce fait l'écart entre les deux méthodes diminue avec la perfection de la division des cercles et de leurs microscopes. Depuis que les constructeurs ont fait des progrès, on peut donc choisir le cercle réitérateur. Dans son édition de 1879 (la remarque n'apparaissant pas en 1853), on lit:

"Dans tous les travaux modernes, en Belgique comme à l'étranger, cette méthode est la seule usitée". (§ 142, p. 433)

⁸¹De même, dans la 2^{ème} éd. p. 422, il divise par $a/2!$.

B.III Les enjeux des compensations

1. Généralités sur la compensation

"De cette façon, non seulement la forme de l'Europe, mais la figure de l'hémisphère Nord et la valeur de l'aplatissement, déjà si admirablement bien déterminé par Bessel, seront connues avec une exactitude encore plus grande."

Discours de de Kuhn, Ministre de la Guerre de l'Autriche, 3^{ème} Conférence internationale géodésique, Vienne, 21-28 septembre 1871.¹

Au cours des XVIII^{ème} et XIX^{ème} siècles, le territoire européen, comme nous l'avons vu dans la partie A, se couvre peu à peu de triangulations. Ces dernières sont un matériel disponible pour les savants qui désirent mieux connaître la forme de la terre. L'enjeu scientifique est donc important. La valeur de l'aplatissement utilisée dans un pays est-elle valable pour le pays voisin? Le cercle osculateur est-il le même? De combien les rayons diffèrent-ils? Peut-on trouver des valeurs utilisables sur tout le territoire européen? Pour répondre à ces questions une idée prend forme: rattacher ces différents réseaux qui ont été élaborés sans lien entre eux, puisque réalisés dans des pays différents, à des époques différentes et selon des traditions différentes. Faye écrit:

"La science en est venue à ce point qu'après avoir couvert chaque contrée d'Europe de ses triangulations, elle doit s'attacher désormais à les relier entre elles."²

Mais le raccordement de ces différentes chaînes européennes pose plusieurs problèmes qui engendrent des besoins nouveaux. Comment relier ces réseaux entre eux? Comment réaliser les jonctions entre ces différentes chaînes?

La Belgique, comme nous l'avons montré dans la partie A III, se trouve au coeur du nouveau mouvement géodésique qui redémarre vers les années 1850. Elle désire, non seulement réaliser une carte mais faire aussi la jonction avec la triangulation prussienne et avec la triangulation française.

¹cf. *Comptes rendus des Conférences internationales géodésiques*, Année 1871 (Nous avons consulté ces rapports à la Bibliothèque du Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris, ainsi que les comptes rendus des séances de la Commission permanente de cette association, des années 1864 à 1900)

²CRAS Tome 56, 1863, p. 28 "Rapport verbal sur le protocole de la Conférence géodésique tenue à Berlin en avril 1862" cité par J.J. Levallois, *300 ans de Géodésie...* op. cit. p. 153.

La France, au moins jusque vers les années 1860 n'effectue pas de compensation mais se contente de répartir les erreurs en utilisant le théorème de Legendre³, après avoir pris toutes les précautions pour que la chaîne soit bien conditionnée.

Malgré cette imperfection, l'oeuvre de Delambre et Méchain est longtemps considérée en Europe comme un modèle à suivre. La commission des Poids et des Mesures, composée de Laplace, Delambre, Legendre, Méchain et *des savants étrangers* invités à venir contrôler l'exactitude des mesures françaises qui doivent servir d'étalon universel, procède en l'an VII (1799) aux calculs géodésiques et astronomiques. La précision de l'ensemble des 53 triangles, liant Melun à Perpignan, est telle que la longueur de la base de Perpignan déduite de celle de Melun ne diffère de sa valeur mesurée que de 0,33m. La commission refuse de compenser les angles pour faire disparaître cette différence, ne voulant à aucun prix ajouter de l'arbitraire, aussi minime soit-il, à des mesures effectuées avec un tel soin. Le rôle de Laplace n'est sans doute pas négligeable dans cette décision.

"On pourra méditer un instant sur cette sacralisation des mesures géodésiques que l'on doit respecter absolument dans les erreurs mêmes."⁴

Laplace est un de ceux qui insistent pour que l'on ne change aucune mesure; cependant, il écrira 20 ans plus tard en 1819:

"Le procédé que nous adoptâmes dans la Commission qui fixa la longueur du mètre était le plus convenable, dans l'ignorance où nous étions alors de la vraie théorie de ces corrections."⁵

Les pratiques sont diverses; on utilise le théorème de Legendre, ou même on procède de façon arbitraire. Ainsi, en 1806, Delambre afin de faire disparaître la différence de 0m33 évoquée ci-dessus, ajoute ou retranche, suivant les cas, quelques secondes à la mesure des angles des triangles intervenant dans les calculs.

En 1841, encore, Salneuve, dans son traité, n'évoque pas du tout la compensation. Il écrit: "les erreurs dans ce cas se compensent", c'est-à-dire que de façon empirique il laisse les mesures se compenser, il fait confiance à une grande pratique et à une bonne observation des tableaux de mesures, et pense aussi que l'application du théorème de Legendre est telle que:

³ voir p. 66, p. 186 et l'annexe 7.

⁴B. Bru "Laplace et la critique probabiliste des mesures géodésiques" op. cit. p. 227.

⁵Laplace, Troisième supplément *Théorie analytique des probabilités*, 1819, OC VII, p. 590-591, cité par B. Bru op. cit. p. 228.

"De cette manière, l'erreur d'observation est comprise implicitement dans la quantité que l'on retranche de chaque angle."⁶

La compensation est donc peu faite en France même au milieu du siècle; elle est pourtant indispensable surtout lorsque l'on veut rattacher ensemble les différentes triangulations faites en Europe afin de réaliser un réseau unique, problème qui émerge naturellement vers le milieu du XIX^{ème} siècle.

En 1902, G. Perrier écrira:

"Il y a une infinité de manières de compenser un réseau. Une des plus employées consiste, comme on le sait, à établir les équations de condition aux angles et aux côtés auxquelles doit satisfaire la figure géométrique que l'on considère, où entrent comme inconnues les corrections cherchées, et à déterminer ensuite celles-ci en s'imposant la condition que la somme de leurs carrés soit un minimum. C'est la méthode qui a été utilisée dans la compensation de la nouvelle méridienne."⁷

Cette méthode vient de la tradition allemande comme nous l'avons abondamment montré dans la partie A de cette thèse.

Mais quels en sont les principes? Dans quelles circonstances l'utilise-t-on? Comment l'applique-t-on? Autant de questions auxquelles nous allons essayer de répondre dans la suite de cette étude. Nous nous proposons, en suivant notre guide Liagre, de voir comment les Allemands appliquent la MMC pour répartir les erreurs lors d'observations surabondantes.

Nous nous limitons à l'étude de quelques méthodes de compensations utilisées en géodésie dans des situations où interviennent des mesures d'angles horizontaux. Nous verrons fonctionner sur des exemples numériques les procédés de calculs (algorithmes). En même temps, nous décrirons des procédés d'observations mis au point par les Allemands pour agencer les mesures et nous les comparerons aux méthodes utilisées en France.

Quatre problèmes seront abordés: *fermeture d'un triangle* (§ 2), *tour d'horizon* (§ 3), *compensation d'un réseau* (§ 4), *comment raccorder des chaînes ou des réseaux?* (§ 5)

⁶ Salneuve, *Cours de Topographie et de Géodésie*, 1841, p. 303.

⁷ Perrier, "Nouvelle description géométrique de la France" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, Tome XXII, n°2, 1902, p. 302.

Nous savons qu'une des premières applications de la MMC à la compensation géodésique date de 1826. Gauss lance un programme pour la triangulation du Hanovre. Il utilise une chaîne de 26 triangles. Les mesures sont nombreuses et il applique, pour compenser, le réseau la MMC.⁸ La meilleure manière de combiner les observations est à ses yeux "un des problèmes les plus importants de la philosophie naturelle."

Rappelons brièvement ce que Gauss entend par compensation des observations. Au cours d'une triangulation, on est amené à mesurer des angles à partir de certains points, les sommets des triangles. Dans ce cas, comme le dit Gauss:

"la nature du problème fournit certaines conditions auxquelles les valeurs observées doivent rigoureusement satisfaire"⁹.

Par exemple:

"Les équations de conditions qui existent entre les angles d'un système de triangles, peuvent, en général, se partager en trois catégories.

I. La somme des angles horizontaux, formés autour d'un même sommet et embrassant la totalité de l'horizon, doit être égale à quatre droits.

II. La somme des angles de chaque triangle peut toujours être regardée comme connue; car, lors même que le triangle est situé sur une surface courbe, l'excès de la somme de ses angles sur deux droits peut être calculé avec une telle approximation, qu'il est permis de considérer le résultat comme absolument exact.

III. Enfin, on obtient un troisième genre de relations en examinant les rapports des côtés dans les triangles qui forment un réseau fermé."¹⁰

Les angles jouent donc à la fois le rôle d'inconnues et de fonctions mesurées et ces inconnues sont astreintes à certaines relations nécessaires, ce que Gauss nous explique:

"Si l'on nomme, en effet, w le nombre des grandeurs observées, et v celui des équations de condition, en choisissant, parmi les premières $w-v$ quantités, rien ne nous empêche de les considérer comme des fonctions de celle-là, que les équations de condition définissent."¹¹

⁸ Voir à l'annexe 38 un extrait de Gauss, "Supplément à la théorie de la combinaison des observations qui expose aux moindres erreurs", présenté le 16-09-1826 à la Société Royale de Göttingen, in *Méthode des Moindres carrés*, traduction de Bertrand, 1855, Réédition préfacée par M.F. Jozeau dans la série textes anciens nouvelle série n°11, IREM, Université Paris VII, 1996.

⁹ Ibid. Gauss, § 1, p. 70.

¹⁰ Ibid. Gauss, § 22, p. 98

¹¹ Ibid. Gauss, § 1, p. 70

On dit qu'il s'agit d'observations conditionnelles. En général, il y a plus d'inconnues que de relations. Il est donc toujours possible de modifier les valeurs mesurées des angles de façon à ce que ces relations de condition soient vérifiées exactement, ce que Gauss appelle "la compensation des observations"¹². Ceci peut s'effectuer d'une infinité de manières. Nous allons le préciser pour quatre problèmes fondamentaux.

2 Fermeture d'un triangle. Théorème de Legendre

Nous indiquons d'abord les procédés français pour répartir les erreurs provenant des observations, puis nous présentons les nouvelles méthodes allemandes.

Le célèbre théorème, établi par Legendre à la demande de Delambre et Méchain, consiste, comme nous l'avons dit en A I, à retrancher à chaque angle le tiers de l'excès sphérique.

En note, Legendre souligne l'utilisation de ce théorème dans les opérations géodésiques :

"Dans les opérations géodésiques les triangles sont le plus souvent formés entre trois stations inégalement éloignées du centre de la terre; mais, par des réductions convenables, on substitue aux triangles observés les triangles qui résultent de la projection des stations sur une surface sphérique perpendiculaire à la direction de la pesanteur."¹³

Ainsi, en assimilant la terre à une sphère, il est possible d'utiliser le théorème de Legendre (les côtés de 40 km sont "très-petits" par rapport au rayon de la terre) et de ramener la question à un problème de trigonométrie plane. La lecture de la démonstration de Legendre nous révèle que si nous considérons les côtés comme des infiniment petits du premier ordre, le théorème est vrai au quatrième ordre près¹⁴.

Cependant, ce théorème peut-il s'appliquer dès que les triangles sont de plus grandes dimensions ou que le triangle est formé non pas par trois portions de cercles de la sphère mais par trois lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde? L'apport de Gauss dans ce domaine est essentiel¹⁵.

¹²Ibid. Gauss, § 9, p. 81

¹³Legendre, *Eléments de Géométrie*, Paris, 3^{ème} édition, 1800, note 1, p. 464.

¹⁴Puissant présente ce théorème dans *Traité de Géodésie*, 1805, Livre II, chap. 3, p. 41. Nous proposons en annexe 7, une démonstration manuscrite de ce théorème trouvée dans "Correspondance mathématique de Quetelet, liasse 76" des archives de l'ARB, ainsi qu'une étude commentée de ce théorème présentée à des élèves de terminales.

¹⁵D'ailleurs, Struve, *Arc du 25°20'*....op. cit. Partie I, chapitre VIII, p. 77, pour ses calculs de l'excès des

Ainsi, dans la tradition allemande, le théorème de Legendre généralisé, ou forme exacte du théorème de Legendre donnée par Gauss, est utilisé pour les calculs géodésiques¹⁶.

Rappelons que dans la tradition française, l'utilisation du théorème de Legendre "permet" de répartir les erreurs de mesures sur les trois angles (incertitudes de pointé, de lecture ou imperfections de l'instrument.)¹⁷ Pour connaître ces erreurs, il suffit donc de calculer a priori l'excès sphérique ε . Son expression est :

$$\varepsilon = \frac{bc \sin A}{2r^2 \sin 1''} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta}{r^2} = \varepsilon$$

où Δ est la surface du triangle sphérique.

Si $\sum \alpha_i = 200 + \varepsilon'$, ε' se décompose ainsi: $\varepsilon' = \varepsilon + \delta$,

où ε' est l'erreur du triangle, ε est l'excès sphérique et δ l'erreur de fermeture, erreur due aux observations.

En appliquant le théorème de Legendre, l'erreur δ se trouve répartie également sur les trois angles. Puissant explique qu'ainsi, on peut vérifier si les résultats sont concordants¹⁸; Cette pratique de compenser les angles d'un triangle se faisait déjà avant Legendre de façon empirique; n'est-ce pas ce qui semble le plus naturel comme méthode? répartir de façon égale l'erreur sur les trois angles? Krayenhoff en a fait usage lors de ses travaux en Belgique et en Hollande; Nerenburger dans son rapport (voir annexe 18) signale: "Les triangles, au nombre de 54, sont calculés par le théorème de Legendre."

triangles sur le sphéroïde terrestre, se sert du mémoire de Gauss. "C'est à M. Gauss que la science est redevable d'une analyse complète des différents problèmes qui se rattachent à l'usage de l'excès, sur la sphère et le sphéroïde, analyse qui est contenue dans son admirable mémoire: "Disquisitiones generales circa superficies curvas" publié en 1828* dans les Commentationes Soc. Goett. rec. math. vol VI p. 99 à 146." Ce mémoire ne sera traduit en France qu'en 1852 par T. Abadie, ancien élève de l'École polytechnique, puis par E. Roger, Grenoble, 1855 (réédition Blanchard, 1967). Il paraît sous le titre "Recherches générales sur les surface courbes". Struve, à la même page, précise que Buzengeiger avait déjà indiqué en 1818 le rapport entre l'aire du triangle sphérique et celle du triangle plan analogue. Il renvoie à Lindenau et Bohnenberger *Zeitschrift für Astronomie* vol VI p. 264 et suiv.

*Nous avons corrigé la date: Struve indique 1818.

¹⁶Voir par exemple Helmert, *Höhere Geodäsie*, Leipzig, 1880, §13, p. 88.

¹⁷Voir par exemple Salneuve, 1841, op. cit. p. 303.

¹⁸Voir Puissant, "Nouvelle description géométrique de la France", in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, tome VI, 1^{ère} partie, chapitre VI, p. 141, 1832 et *Traité de Géodésie*, 3^{ème} éd., 1842, p. 265-266.

Cependant Peytier signale toujours en 1853, dans la même publication:

"Dans le calcul des chaînes primordiales exécutées en France, l'erreur a été généralement répartie par tiers sur chaque angle; mais ce mode n'est pas suivi partout, et l'on est assez dans l'usage maintenant d'appliquer le calcul des probabilités à la recherche de la partie de l'erreur que doit supporter chaque angle."¹⁹

Il rapporte que le colonel Everest en Inde

"a calculé l'erreur probable de chacun des angles d'après les écarts autour de la moyenne des divers résultats obtenus, et dans la répartition de l'erreur il a eu égard au coefficient de probabilité de chaque angle"²⁰.

Examinons maintenant la tradition allemande, toujours en suivant Liagre.

Il se trouve que dans le cas où les mesures des angles ont la même précision, la compensation des 3 angles d'un triangle par la méthode des moindres carrés aboutit à un résultat similaire à celui obtenu par la méthode de Legendre: La correction à faire subir aux trois angles est la même pour chacun d'eux et égale au tiers de l'erreur de fermeture. Liagre donne cet exemple (§ 140, p. 303):

Soit un triangle dans lequel on a mesuré les trois angles

$$o' = 36^{\circ} 25' 45''$$

$$o'' = 90^{\circ} 36' 28''$$

$$o''' = 52^{\circ} 57' 57''$$

Ici l'incompatibilité à faire disparaître, c'est la différence de la somme des trois angles à 180° : elle est de $12''$; l'équation de condition est donc

$$x' + x'' + x''' + 12'' = 0$$

Équations corrélatives

Équation normale

$$x' = k'$$

$$x'' = k'$$

$$12 + 3k' = 0$$

¹⁹Peytier, "Nouvelle description géométrique de la France" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, tome IX, p. 421-422, 1853.

²⁰Peytier op. cit. p. 422. Peytier, dans l'avant-propos, explique qu'il a connaissance des travaux d'Everest par les traductions de quelques parties de ses ouvrages (qu'il ne cite pas) faites par Servier.

$$x''' = k'$$

On en déduit $k' = -4$; $x' = x'' = x''' = -4$.

$$[\Delta^2] = 48 ; \varepsilon = \sqrt{48} = \pm 6'',93$$

Il conclut que l'on retrouve un principe bien connu:

"L'erreur commise sur la somme des trois angles d'un triangle doit être répartie également sur chacun d'eux, en admettant que les observations soient également exactes." (p. 304)

Le propos au départ est pourtant différent: Legendre se propose de remplacer un triangle sphérique par un triangle plan, afin de pouvoir utiliser les formules plus simples de la trigonométrie plane alors que Gauss essaye de répartir les erreurs de fermeture.

Les méthodes de calcul sont différentes: dans un cas on utilise des développements de fonctions en séries de Taylor et on néglige certains termes alors que dans l'autre cas on utilise la méthode des moindres carrés. Le point de vue et la signification des calculs n'ont rien à voir, mais les résultats reviennent au même et peuvent, pour les praticiens, cacher le sens de la démarche. Dans la méthode des moindres carrés, on se place dans le cas où les mesures ont la même précision. Dans le cas du théorème de Legendre, ne peut-on pas dire que, de façon implicite, les angles auraient la même précision? Certes, le propos n'est pas ici de répartir les erreurs; mais dans les calculs de Legendre les $a/r, b/r, c/r$ sont des infiniment petits du même ordre.

Bien sûr, dès que la précision des mesures n'est plus la même pour chaque angle, la répartition de l'erreur de fermeture en tiers sur chacun des angles ne convient plus comme le montre cet autre exemple de Liagre: (§ 143, p. 307)

Nous supposons maintenant que le nombre de répétitions est différent pour chacun des angles des triangles: 4 pour le premier angle, 2 pour le second et 3 pour le troisième. On a donc $p' = 4, p'' = 2, p''' = 3$

L'équation de condition ne change pas; c'est:

$$x' + x'' + x''' + 12'' = 0$$

Équations corrélatives

$$x' = 1/4k'$$

Équation normale

$$x'' = 1/2k'$$

$$12 + (13/12k') = 0$$

$$x''' = 1/3k'$$

On en déduit $k' = -144/13 = -11,077$;

et par suite $x' = -2''77$

$$x'' = -5,54$$

$$x''' = -3,69$$

On voit que l'erreur commise sur la somme des trois angles doit se répartir ici sur chacun d'eux en raison inverse des poids. Le calcul de l'erreur moyenne donnera

$$\eta = \sqrt{132,8231} = \pm 11'',52$$

$$\text{d'où } \varepsilon' = \pm 5'',76 ; \varepsilon'' = \pm 8'',15 ; \varepsilon''' = \pm 6'',65$$

On comprend alors toute l'importance donnée dans la tradition française au bon conditionnement des triangles, à la nécessité d'avoir toujours le même instrument, le même observateur, la même procédure d'observations etc. Dès que les Français notent une discordance, ils recommencent alors que les Allemands donnent des poids différents à chaque mesure avant d'appliquer la MMC. On comprend que ce point de vue deviendra essentiel lorsqu'il faudra relier des chaînes, car alors forcément, les instruments, les observateurs, les agencements et méthodes différeront.

Nous reproduisons ci-dessous une autre citation analogue, parce qu'elle provient d'un des premiers Français ayant pris conscience du problème.

"Calcul géodésique

En retranchant de chaque angle d'un triangle géodésique le tiers de l'excès de la somme de ses angles sur deux droits, on satisfait au théorème de Mr Legendre et en même temps, on répartit les erreurs inévitables de l'observation suivant les règles de la probabilité des erreurs.⁽¹⁾

note (1): Nous rencontrons ici un cas très simple de la théorie de la compensation des erreurs, compensation à laquelle il faut avoir recours lorsque les données obtenues par les mesures directes sont plus nombreuses que les inconnues et fournissent des équations de condition qui doivent être rigoureusement satisfaites. Ne pas confondre cette répartition systématique des erreurs de mesure avec ce que l'on nomme vulgairement "coup de pouce". Un autre cas élémentaire de compensation se présente dans la mesure des azimuts lorsque l'observateur a achevé le tour d'horizon, la somme des angles compensés doit alors faire 360° . Si chaque angle a été mesuré par le même nombre de

répétitions ou de réitérations, la compensation des erreurs consistera encore à répartir l'erreur également entre tous les angles, quelle que soit leur grandeur.

La règle qui sert de base à cette théorie se réduit à rendre minimum la somme des carrés de petite correction qu'il faut ajouter à chaque mesure pour obtenir la compensation des erreurs

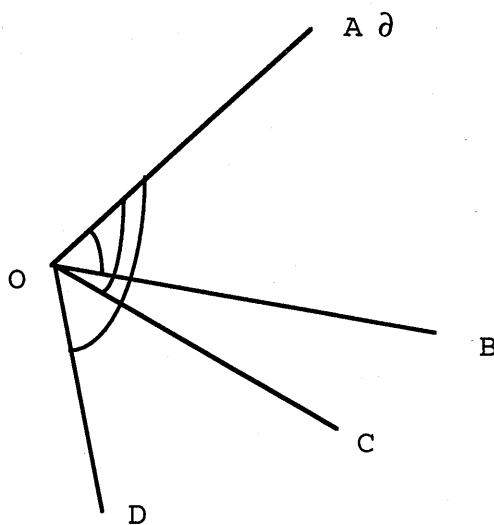
(Gauss *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*)²¹

3 Tour d'horizon

En chaque station, il y a plusieurs directions à observer, c'est-à-dire plusieurs angles à déterminer. Alors un problème se pose: celui de savoir comment agencer les mesures d'angles horizontaux. Deux procédés sont utilisés sous le nom de tour d'horizon. Précisons la signification de ce terme:

Liagre attire notre attention sur ce terme recouvrant des méthodes d'observation différentes en France et en Allemagne. L'expression française "tour d'horizon" ne doit pas être confondue avec l'expression allemande "Horizont-Abschluss", méthode recommandée par les auteurs allemands sous ce nom. (§ 132, p. 270 note)

- En France



²¹Faye *Cours de 52 à 56* à l'Ecole polytechnique (Archives "Faye Géodésie" cote BVII 27), dont nous donnons quelques extraits relatifs à la théorie des erreurs à l'annexe 40.

On observe toutes les directions issues de la station O, les unes à la suite des autres, dans un sens déterminé en les rapportant toutes à l'une d'entre elles prise comme origine ou référence. On observe, dans le cas ci-dessus, trois angles:

$$A\hat{O}B, A\hat{O}C, A\hat{O}D.$$

Les angles s'obtiennent par différence.

$$\text{Par exemple: } B\hat{O}C = A\hat{O}C - A\hat{O}B$$

La méthode française serait parfaite si tous les signaux étaient toujours visibles; en effet, les tours d'horizon seraient alors complets et on pourrait calculer une valeur pour chaque angle, obtenue par différence. Mais dans la pratique, il en est tout autrement. En effet, les conditions atmosphériques font que les signaux sont rarement tous visibles en même temps.²² Pour reconstituer le tour d'horizon, il faut donc utiliser des observations faites dans des conditions différentes (observateurs différents, heure et jour différents, éventuellement, instruments ou procédures d'observations différentes). Aucune homogénéité n'est respectée; il faudrait dans ce cas, attribuer des poids différents aux mesures, ce que l'école française ne fait pas.

- En Allemagne

On observe les 6 angles:

$$A\hat{O}B, A\hat{O}C, A\hat{O}D, B\hat{O}C, B\hat{O}D, C\hat{O}D$$

Un angle s'obtient alors soit directement soit par combinaison d'observations.

exemple: $B\hat{O}C$ s'obtient directement

$$B\hat{O}C = A\hat{O}C - A\hat{O}B$$

$$B\hat{O}C = B\hat{O}D - C\hat{O}D$$

$$B\hat{O}C = A\hat{O}D - A\hat{O}B - C\hat{O}D$$

L'avantage de cette méthode est que l'on peut observer dès que l'on aperçoit deux signaux quelconques, alors que la méthode précédente demande parfois de longues périodes d'attente. Bien que le nombre des observations soit plus élevé, le temps passé n'est pas toujours plus long.²³ Le nombre d'observations effectuées est égal à C_4^2 .

²²Au début du XIX^{ème} siècle, la réalisation de tour d'horizon complet est un des critères pour juger de la qualité du travail effectué par un géodésien sur le terrain. Nous en avons un témoignage par exemple dans Berthaut *Les ingénieurs géographes*, tome 2, chapitre IV; Berthaut cite De Castres, effectuant une mission en 1807, en lien avec les Saxons Beigel et von Zach: "La meilleure partie du travail consistait en tour d'horizon très complet, qui avait permis d'établir une sorte d'équilibre entre les résultats."

²³Dans les deux méthodes de tour d'horizon, on observe en utilisant la méthode des couples, c'est-à-dire

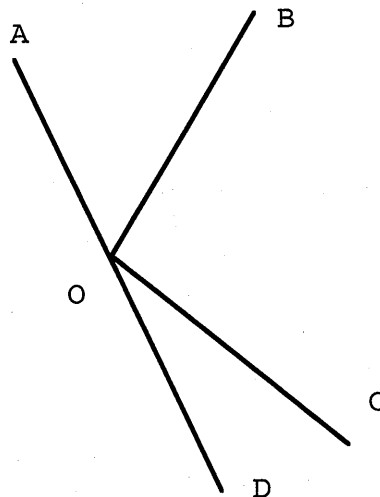
La différence essentielle tient au fait que dans le cas français, il n'est pas nécessaire de faire une compensation de station; ce qui devient indispensable lorsque l'on procède par la méthode allemande. En effet, la valeur de l'angle pouvant se trouver de plusieurs façons, il est indispensable de faire une compensation afin de n'obtenir qu'une valeur pour chaque angle.

-Fermeture d'un tour d'horizon

Venons-en maintenant au problème de la fermeture d'un tour d'horizon

*Chez Puissant²⁴

1^{er} cas: $A + B + C + D = 200g^r + e$



Puissant pose que les corrections dA, dB, dC, dD de ces angles sont évidemment proportionnelles à e , erreur totale sur le tour d'horizon, et sont en raison inverse des nombres de répétitions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

que l'on observe dans le sens direct puis dans le sens rétrograde afin d'éliminer les erreurs dues à la rotation que subissent les signaux élevés sous l'influence du soleil.

²⁴Puissant "Description géométrique de la France. Discours préliminaire" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, Tome VI, 1832, p. 65 et ss. Remarquons que Liagre dans son livre § 143, p. 307 cite ce passage de Puissant, observant "Puissant suit une marche particulière, très élémentaire et très simple, pour corriger un tour d'horizon: sa formule, du reste, revient à celle que l'on déduirait de notre procédé général"; ce procédé est une application de la MMC que nous exposons ci-dessous.

Cet axiome que Puissant pose est certes arbitraire, mais il correspond à une longue pratique et traduit ce que le bon sens dicte. En effet, plus l'erreur totale est grande, plus les erreurs réparties le seront; le nombre de répétitions influe aussi: plus il est grand, moins l'erreur commise est grande. Partant de cet axiome, Puissant écrit donc:

$$dA = \mu \frac{e}{\alpha}, \quad dB = \mu \frac{e}{\beta}, \quad dC = \mu \frac{e}{\gamma}, \quad dD = \mu \frac{e}{\delta}$$

où dA, dB, dC, dD représentent les corrections des angles
et où μ est le coefficient de proportionnalité à déterminer.

Remarquons que Puissant utilise la notation différentielle pour sans doute indiquer la petitesse des erreurs. Il continue ainsi:

Or $A' + B' + C' + D' = 200^{\text{GR}}$ avec A', B', C', D' valeurs des angles corrigés.

$$\text{donc } dA + dB + dC + dD = -e$$

$$\text{soit } \mu \times \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} \right) = -1$$

$$\text{d'où } \mu = \frac{-\alpha\beta\gamma\delta}{\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \gamma\alpha\beta}$$

On trouve alors dA, dB, dC, dD.

2^{ème} cas: Dans ce paragraphe, Puissant envisage le cas où, dans l'intention de vérifier les valeurs de certains angles, on mesure la somme ou la différence de certains angles (de ce fait, on se rapproche de la méthode de l'Horizont-Abschluss). Par exemple, on a mesuré $E=A+B$. On a donc une condition de plus: $E+C+D=200^{\text{GR}}+e$. Puis Puissant, p. 67, procède comme ci-dessus, en posant:

$dE = \mu \frac{\theta}{\varepsilon}$ où ε est le nombre de répétitions pour E et

$$\theta = e - e'$$

$$(4) \quad dE + dC + dD = -e'$$

ou bien

$$(4') \quad dC + dD = -e' - dE;$$

et comme la relation (2) $dA + dB + dC + dD = -e$ donne

$$(2') \quad dC + dD = -e - dA - dB,$$

il s'ensuit que $dA + dB - dE = e' - e = \theta$

$$\text{On a d'ailleurs } dA = \frac{\mu\theta}{\alpha}, \quad dB = \frac{\mu\theta}{\beta}, \quad -dE = \frac{\mu\theta}{\varepsilon},$$

$$\text{et par conséquent } \mu \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\varepsilon} \right) = 1,$$

$$\text{enfin } \mu = \frac{\alpha\beta\varepsilon}{\alpha\beta + \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon}$$

Tel est le facteur qu'il conviendrait d'adopter dans ce second cas:

il servirait à déterminer dA , dB , dE , puisque les erreurs e, e' seraient

connues. Ensuite l'équation (4') ou (2') procurerait dC et dD ;

en effet, soit $dC + dD = -e' - dE = \theta'$

$$\text{on aurait } dC = \frac{\mu' \theta'}{\gamma}, \quad dD = \frac{\mu' \theta'}{\delta};$$

$$\text{partant } \mu' = \frac{\gamma\delta}{\gamma + \delta}$$

Et Puissant de conclure:

"Quel que soit le nombre des relations analogues à celles (1) et (3), il sera toujours facile d'obtenir, par ce procédé direct et exempt de tout arbitraire, la correction à faire aux angles observés, de manière qu'ils satisfassent complètement un tour d'horizon."²⁵

Ce procédé est-il vraiment exempt de tout arbitraire? Que se passerait-il, s'il avait combiné autrement les données?

Essayons par exemple $dE + dC + dD = -e'$ ²⁶

²⁵Puissant op. cit. p. 67.

²⁶Il semble que le choix des signes pour les erreurs soit implicite.

$$\text{Il poserait } dE = -\mu \frac{e'}{\varepsilon}, dC = -\mu \frac{e'}{\gamma}, dD = -\mu \frac{e'}{\delta}$$

$$\text{d'où } \mu = \frac{\varepsilon\gamma\delta}{\gamma\delta + \varepsilon\delta + \varepsilon\gamma}$$

Dans ce cas la valeur obtenue pour dE est différente. Un arbitraire subsiste donc; celui de combiner les diverses observations. Il semble que Puissant considère la relation minimale.

Par contre, les Allemands, en utilisant la MMC, compensent en tenant compte de toutes les combinaisons possibles, comme nous allons le voir.

***Chez Liagre**

Parmi les exemples d'application de la MMC en géodésie, Liagre présente au § 132, p. 270-272, une compensation réalisée dans le cas d'observation d'angles par la méthode "Horizont-Abschluss", afin de déterminer la valeur la plus probable du résultat. Dans cet exemple, les notations utilisées sont assez maladroitement et prêtent à confusion; la distinction n'est pas explicite entre les valeurs observées, les valeurs réelles et les valeurs adoptées. D'autre part, Liagre, comme c'est le cas dans les sciences d'observations, connaît les valeurs approximatives des angles: il suffit par exemple de prendre les valeurs observées o . Les calculs s'en trouvent simplifiés et ne portent que sur les corrections à apporter aux valeurs provisoires; on transforme les équations de condition entre les grandeurs, en équation de condition entre les corrections. Il suffit pour cela de remplacer, o par $o+x$, puis d'appliquer la formule de Taylor et de négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à 2.

Par la suite Liagre donne d'autres exemples d'application de la MMC en géodésie: fermeture d'un tour d'horizon complet avec, soit des observations d'égale précision, soit des observations d'inégale précision. Dans le premier cas, il obtient confirmation de la règle suivante:

"Quand un tour d'horizon ne ferme pas exactement, et que les observations sont d'égale précision, on doit répartir l'erreur *également* sur tous les angles, sans s'inquiéter de leur grandeur." (§ 140, p. 303)

Il trouve le même résultat que pour la fermeture d'un triangle et obtient la même conclusion qu'avec le théorème de Legendre. Ainsi, dans ce cas particulier -observations

d'égale précision- la MMC donne des résultats qui peuvent s'obtenir d'une façon plus simple, par exemple comme le fait l'école française.

Poursuivant ces exemples, Liagre complexifie de plus en plus les situations. Avant d'aborder la compensation d'un réseau, il considère le cas d'une chaîne de triangles (§ 140, 3^{ème} exemple, p. 304). Il considère un cas simple, celui de trois triangles. Il a donc à réaliser la fermeture de trois triangles et celui d'un tour d'horizon. La résolution se fait donc sur quatre équations de conditions et les valeurs obtenues permettent de réaliser simultanément les quatre fermetures, la répartition des erreurs sur les angles ne se faisant pas de façon égale dans ce cas.²⁷

Faisons le point.

On voit ainsi peu à peu se mettre à jour des méthodes de compensation d'un réseau. La compensation des figures de proche en proche, mais isolément, est remplacée par une compensation d'ensemble. De ce fait le nombre des équations de condition augmente. Cette compensation plus compliquée est cependant plus rationnelle puisqu'elle prend en compte *simultanément* toutes les conditions nécessaires à la réalisation d'un réseau géométrique. Le traitement de ces systèmes d'équations par la méthode des moindres carrés permet d'obtenir une valeur unique de correction pour les différentes mesures, valeur la plus probable sous les conditions exigées.

Les Allemands, d'autre part, mettent en place une technique d'observation, la méthode des directions (§ 144, p. 315), qui les conduit à corriger les directions, et non les angles; la direction, contrairement à l'angle, a la propriété d'être commune à deux figures géométriques. Cette méthode a déjà été présentée en A II dans le paragraphe sur les travaux de Struve. Nous allons suivre maintenant l'approche de Liagre, pour la compensation d'un réseau.

4 Compensation d'un réseau

A partir du § 138 p. 298, Liagre met en place progressivement les techniques nécessaires à la compensation d'un réseau. Il annonce clairement l'objectif à atteindre:

"On voit que pour une triangulation de quelque étendue, la question s'élargit et se complique. Quand toutes ces corrections auront été déterminées, et qu'on les aura appliquées au réseau géodésique, chaque côté calculé ne pourra offrir qu'une seule et même valeur, quel que soit le chemin qu'on ait suivi pour obtenir sa longueur en fonction de celle de la base."

²⁷Ces exemples sont donnés en annexe 34.

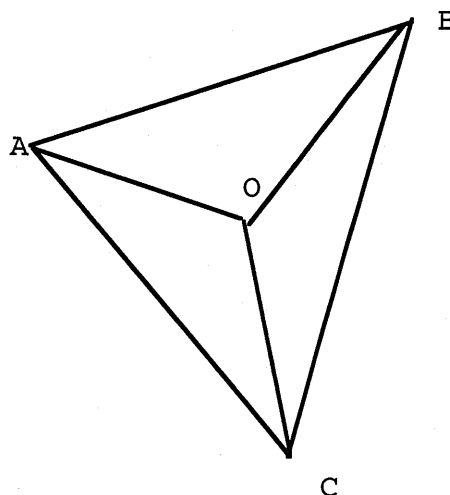
Quelques années plus tard, ces techniques deviendront courantes dans les milieux français comme nous le confirme Perrier:

"Il y a une infinité de manières de compenser un réseau. Une des plus employées consiste, comme on le sait, à établir les équations de condition aux angles et aux côtés, auxquelles doit satisfaire la figure géométrique que l'on considère, où entrent comme inconnues les corrections cherchées, et à déterminer ensuite celles-ci en s'imposant la condition que la somme de leurs carrés soit un minimum."²⁸

En effet, les triangles font partie d'un réseau trigonométrique; ils ne sont pas isolés et on ne peut pas appliquer les règles relatives à la fermeture d'un triangle ou d'un tour d'horizon de façon séparée; il faut, comme nous l'avons indiqué ci-dessus effectuer une compensation d'ensemble en écrivant plusieurs conditions, assurant la forme géométrique du réseau.

En général, en chaque station, on vise tous les signaux que l'on aperçoit nettement; chaque point se trouve donc déterminé par le recoupement de plusieurs directions (en nombre supérieur à 2) et de ce fait est introduite une condition supplémentaire.

Par exemple, dans la figure ci-contre, O est déterminé par le recoupement de trois rayons visuels.



²⁸Perrier "Nouvelle description géométrique de la France" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, tome XII n°2, p. 301, 1902.

La méthode suivie et décrite par Liagre est celle introduite par Gerling²⁹:

Partant de l'identité suivante:

$$\frac{OA}{OB} \times \frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OA} = 1$$

on obtient par la règle des sinus:

$$\frac{\sin \hat{O}BA}{\sin \hat{O}AB} \times \frac{\sin \hat{O}CB}{\sin \hat{O}BC} \times \frac{\sin \hat{O}AC}{\sin \hat{O}CA} = 1$$

c'est - à - dire en passant aux logarithmes:

$$\log \sin \hat{O}BA + \log \sin \hat{O}CB + \log \sin \hat{O}AC \\ - \log \sin \hat{O}AB - \log \sin \hat{O}BC - \log \sin \hat{O}CA = 0$$

De plus on doit avoir:

$$\hat{O}AB + \hat{O}BA + \hat{A}OB = 180^\circ$$

$$\hat{O}BC + \hat{O}CB + \hat{B}OC = 180^\circ$$

$$\hat{O}AC + \hat{O}CA + \hat{A}OC = 180^\circ$$

$$\hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{C}OA = 360^\circ$$

Ces cinq conditions doivent être rigoureusement satisfaites. On applique la MMC et on obtient les valeurs les plus probables des angles entrant dans cette relation.

Remarquons que l'équation aux côtés, en logarithmes, n'est pas linéaire. On la rend linéaire en remarquant que:

$$\log(1+x) \approx x \text{ pour } x \text{ petit}$$

$$\text{et } \sin x \approx x \times \frac{1''}{\sin 1''} \text{ pour } x \text{ petit}$$

$$\text{donc } \sin(o+x) = \sin o \cos x + \cos o \sin x$$

$$\approx \sin o + x \cos o \frac{\sin 1''}{1''}$$

$$\approx \sin o \left[1 + \frac{\sin 1''}{1''} x \cotano \right]$$

De ce fait, si nous écrivons, par exemple, l'angle $\hat{O}AB$ sous la forme $N+x$ où x est une petite correction, il vient:

soit $\log \sin(N+x) = \log \sin N + x\Delta$, Δ étant la différence tabulaire en seconde si x est en seconde.

²⁹Gerling *Die Ausgleichsrechnungen der praktischen Geometrie*, 1843, cité par Liagre. Nous n'avons pas repris les mêmes notations; Liagre (§ 144) utilise celles de Gerling (peu faciles pour nous à taper).

En utilisant une expression de ce type dans l'équation aux côtés initiale, on obtient une équation linéaire en x .

Comment déterminer le nombre des équations de conditions?

Dans la compensation d'une figure géométrique, il est nécessaire de pouvoir fixer par avance le nombre des équations aux angles et celui des équations aux côtés. Liagre, p. 333-334, cite un théorème dû à Gauss permettant de déterminer ces nombres³⁰ :

Si une figure comporte p points et q lignes alors le nombre des équations aux angles est $q-p+1$ et le nombre des équations aux côtés est $q-2p+3$. Le nombre total des équations de condition est donc égal à $2q-3p+4$.

Ainsi dans la compensation d'un quadrilatère, puisque $p=4$ et $q=6$, le nombre des équations de condition est $12-12+4=4$ dont $6-4+1=3$ équations aux angles et $6-8+3=1$ équation aux côtés.

Comme nous l'avons déjà vu ci-dessus, avec Liagre, les compensations se font soit sur les angles soit sur les directions. Avant de suivre les explications que donnent Liagre sur ces deux procédés, citons des exemples que l'on voit déjà apparaître chez Gauss en 1826³¹ Celui-ci, propose trois méthodes:

*La première méthode, dit-il, est la plus classique. "Dans la pratique la plus ordinaire, on observe les angles que l'on peut regarder comme les éléments eux-mêmes"

* Pour la deuxième méthode, Gauss fait référence à Struve (voir partie A II de cette thèse)³²

"Il en sera autrement si l'on adopte la méthode d'observation de M. Struve, qui consiste à déterminer toutes les directions autour d'un même sommet, en les rapportant toutes à une seule et même direction arbitraire."

³⁰Liagre n'indique pas de référence. Nous n'avons pas trouvé ce théorème dans la traduction de Bertrand (1855), par contre, Noirel dans "Triangulation géodésique" op. cit. p. 48 renvoie, à propos de ce théorème, aux lettres de C.F. Gauss à Ch. L. Gerling du 5 juin 1838 et du 14 novembre 1838, Werke 9, Göttingue 1903, p. 297, 323. Noirel renvoie aussi à Gerling op. cit. 1843, à Helmert *Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*, Leipzig, 1872, p. 325.

³¹Gauss, "Supplément à la Théorie des combinaisons..." in *Méthode des Moindres carrés*, traduction de Bertrand, 1855, § 22, p. 100 et ss.

³²Gauss renvoie à Struve, *Astronomische Nachrichten*, II, p. 431.

*Enfin, dans ce passage, Gauss propose une troisième méthode que nous baptiserons de "mixte" car elle combine les deux précédentes.

Au § 23, Gauss donne des exemples numériques pour illustrer les deux premières méthodes.

1^{er} mode d'observation: angles observés

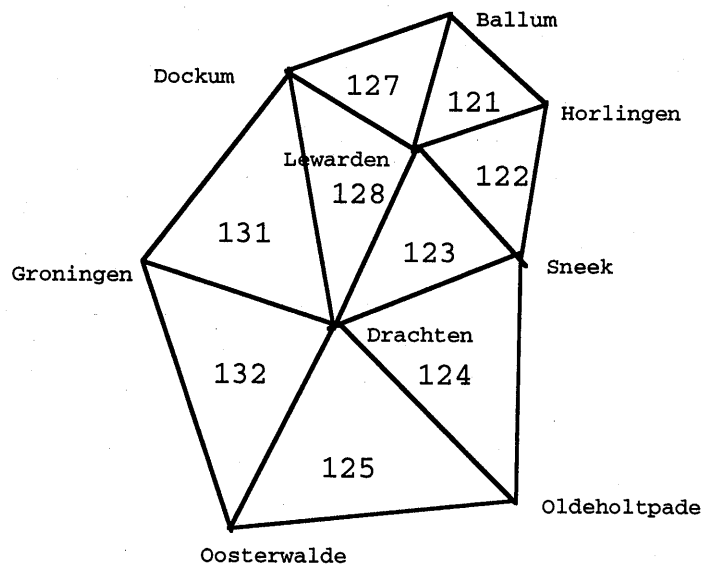
Le premier exemple reprend des résultats d'observations dus à Krayenhoff³³ (voir partie A III de cette thèse). Ce dernier utilisait des méthodes proches de la tradition française. Gauss applique ces calculs et compare les angles compensés obtenus ainsi que les valeurs moyennes. Voici les résultats qu'il obtient: la somme des carrés des corrections de Krayenhoff est de 341,4201 tandis que celle de Gauss est de 97,8845 d'où une erreur moyenne plus faible.³⁴

Nous proposons ci-dessous un schéma reconstitué à partir des données citées par Gauss (sans toutefois respecter la valeur des angles; ce qui nous intéresse est la disposition des triangles).

Les numéros des triangles sont ceux attribués par Krayenhoff.

³³Gauss utilise les résultats qu'il a trouvés, dit-il, dans Krayenhoff, *Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande.*, La Haye, 1815.

³⁴Dans une intervention lors de la conférence géodésique internationale à Stuttgart en 1877, (cf. *Comptes rendus des séances de la V^{ème} Conférence géodésique internationale 1778*, §8, p.222) Ferrero s'appuie sur cette remarque de Gauss pour alimenter son point de vue sur les questions relatives à la précision à exiger dans les triangulations: "Si au contraire les corrections apportées aux quantités observées sont toutes dans les limites des erreurs d'observation, il n'y a pas de raison pour que le système compensé ne soit pas possible et par cela-même acceptable. (note: C'est ainsi que Gauss a jugé la question à propos de la compensation donnée par Mr Krayenhoff dans son ouvrage sur la triangulation des Pays-Bas)".



Dans cette portion de réseau, il y a 2 tours d'horizon complets et 9 triangles.

Il faut donc assurer:

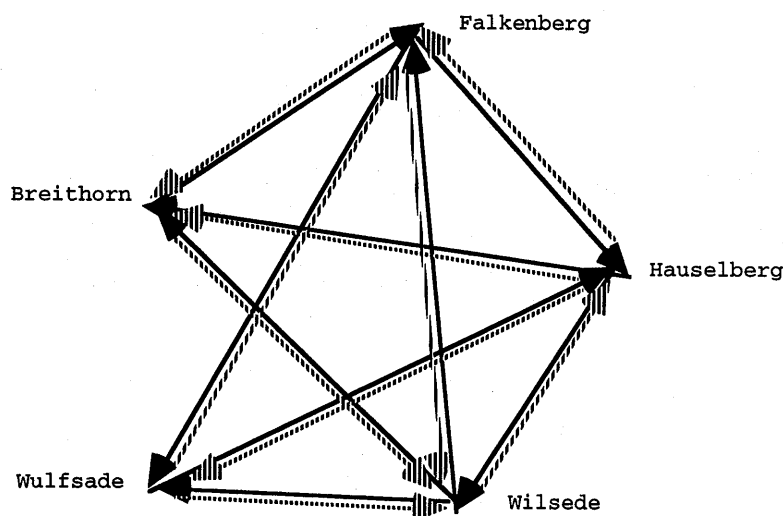
2 fermetures de tour d'horizon

9 fermetures de triangle

2 conditions relatives aux côtés.

2^{ème} mode d'observation: directions observées

Les observations choisies, par Gauss, sont celles qu'il a réalisées avec Schumacher lors de la triangulation du Hanovre en 1826. Cette fois-ci, ils observent les directions. Les angles des triangles sont obtenus par différence, donc il n'est plus nécessaire d'écrire la fermeture d'un tour d'horizon. Là aussi, nous avons élaboré le schéma suivant:



On forme ainsi sept triangles.

On a donc sept fermetures de triangles à assurer.

On écrit 5 équations aux angles et 2 équations aux côtés.

Pourquoi cette méthode des directions? Liagre nous aide à comprendre (§ 316-320) la différence entre ces deux méthodes.

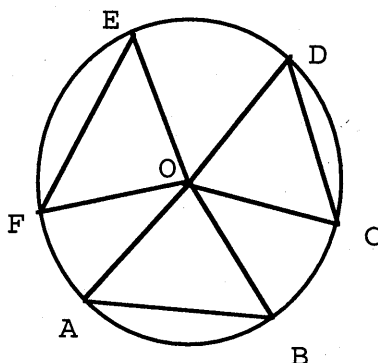
Auparavant, Nerenburger, dans le rapport paru dans le *Moniteur belge* du 14 juin 1847, attire notre attention sur une erreur commise alors par certains géodésiens. Ainsi, pour réaliser l'accord entre toutes les parties du canevas, Krayenhoff utilise le théorème des angles inverses de Delambre:

"Quand une suite de triangles forme un tour d'horizon autour d'un sommet commun, et que vous formez deux suites des angles à la base, en mettant dans une suite différente les angles séparés par un côté commun, le produit des sinus de tous les angles de la première suite sera égal au produit des sinus de la seconde suite, en sorte que la somme des logarithmes de ces sinus sera égale de part et d'autre."³⁵

Le reproche adressé est le suivant: ce théorème est nécessaire mais non suffisant. Il est en effet flagrant que la réciproque est fautive. Il est en effet facile de trouver trois

³⁵Nerenburger "Rapport..." in *Le Moniteur belge* du 14 juin 1847, p. 1457 (voir Annexe 18, p. 103 tome 2 *Annexes* de cette thèse).

triangles par exemple y satisfaisant sans que les angles au sommet forment un tour d'horizon complet. Prenons un contre-exemple extrême:



Il est évident ici que BO et CO ne sont pas confondus, c'est-à-dire que les côtés des deux triangles ne sont pas "collés".

La condition exprimée par ce théorème est donc nécessaire mais elle est insuffisante pour rendre rigoureusement géométrique un réseau de triangles. Il faut ajouter une condition traduisant le fait que le rayon visuel dirigé d'un sommet à un autre sommet et le rayon inverse constituent une seule et même ligne.

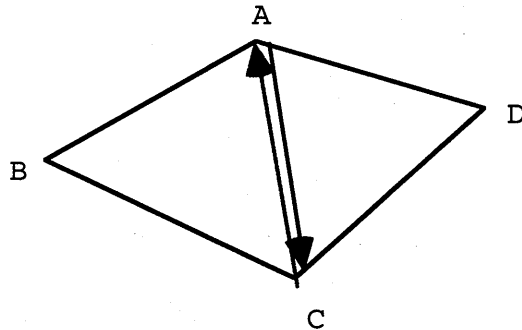
"C'est par l'introduction simultanée de ces deux conditions dans les calculs géodésiques, introduction qui exige la méthode des moindres carrés, pour qu'elle soit rationnelle, que l'on peut seulement établir, d'une manière rigoureuse, l'accord parfait entre tous les éléments d'un réseau géodésique. Ce mode exact de répartition des erreurs est d'invention toute moderne"³⁶.

Krayenhoff ne pouvait donc pas l'appliquer. En outre, il n'est peut-être pas évident de s'apercevoir de l'insuffisance de ce théorème lorsque les angles tels que COD sont très petits; cette lacune cependant nous étonne.

Nous pensons que c'est pour remédier à cette petite discordance, ne rendant pas de ce fait le réseau géométrique que la méthode des directions est mise en place et que de façon nécessaire, la MMC est utilisée. Rappelons qu'avec Struve, dans la partie A II, nous avons aussi montré que cette méthode est engendrée par l'utilisation de la méthode de réitération pour observer les angles.

³⁶Voir Nerenburger *Notice sur les triangulations*, op. cit. 1^{ère} partie, p. 22.

Il s'agit donc de réaliser la condition suivante: les deux côtés de deux triangles juxtaposés doivent être confondus.

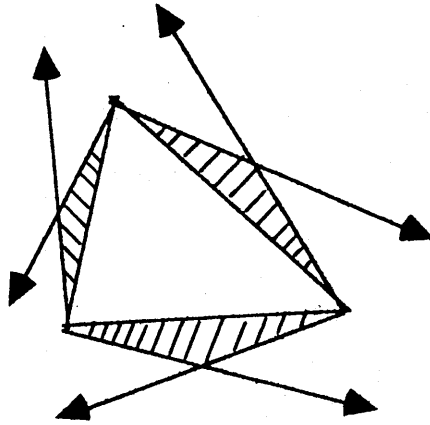


C'est-à-dire, qu'après compensation le côté AC du triangle ABC doit être confondu avec le côté AC du triangle ACD, compensation faite à partir des visées de A vers C ou de C vers A. Le côté AC ne va donc plus être considéré comme le côté d'un triangle ou d'un angle mais comme une direction déterminée à partir d'une direction de référence.

Liagre donne quelques exemples et insiste principalement sur l'esprit différent des deux méthodes même si les résultats sont égaux (§ 144). Dans le cas d'un triangle isolé, les directions sont compensées d'un sixième de l'excès, ce qui revient à compenser les angles d'un tiers de l'excès. Mais:

"Au lieu de compenser trois angles, en faisant varier les deux côtés à la fois, elle opère la compensation de six angles, dont chacun a un côté invariable de position." (§ 144, p. 316-317)

Et Liagre propose, p. 317, un schéma pour mettre en évidence la différence de conception.



"Dans l'exemple que nous venons de traiter, comme l'erreur totale +12" est positive, chaque direction de *gauche* a laissé fautivement à *droite* le véritable point de visée; chaque direction de *droite* l'a laissé d'autant à gauche: de sorte que les corrections d'une direction, aux deux extrémités de laquelle on a fait des visées réciproques, sont égales et de signes contraires. Les petits triangle d'erreur, formés par les directions compensées, et par les directions observées sont isocèles, semblables, et *extérieurs* à la figure: ils lui seraient *intérieurs* si l'erreur totale était négative."³⁷

Il remarque aussi que:

ε_δ erreur moyenne d'une direction est telle que

$\varepsilon_a = \varepsilon_\delta \sqrt{2}$ où ε_a est l'erreur moyenne de l'angle

donc $\varepsilon_\delta \leq \varepsilon_a$

et précise que lorsque les compensations ne sont pas faites de façon égale, visuellement, les petits triangles de la figure ci-dessus ne sont pas semblables. C'est le cas par exemple dans la compensation d'une chaîne.

Il est évident que cette méthode est plus souple; l'observation des directions et non des angles n'oblige pas les deux côtés de ces derniers à être solidaires lors des compensations. Remarquons que dans cette méthode, l'erreur moyenne d'un angle est supérieure à celle obtenue dans la compensation des angles car la valeur compensée est assujettie à deux contraintes. Cette méthode évite des discordances puisque la compensation permet de tenir compte de l'ensemble.

³⁷Liagre op. cit. p. 317.

Nous venons de voir combien Liagre s'attarde sur ces méthodes de compensations. Indispensables pour assurer la possibilité de relier des triangulations exécutées suivant des protocoles différents, elles sont peu utilisées hors de l'"Allemagne". Le traité de Liagre est un premier moyen de diffusion de ces méthodes vers des futurs praticiens; il se veut élémentaire dans la présentation et les exemples. Cependant, au § 155, p. 347-352, intitulé "Théorie de la compensation d'un réseau géodésique", l'auteur aborde une situation plus complexe. Il reconnaît qu'alors le travail est énorme et termine le paragraphe en indiquant une marche à suivre en huit points. Ce problème de compensation d'un réseau dans son ensemble est très important et donnera lieu à des recherches et à des débats nombreux lors des réunions de la Commission géodésique internationale dont nous parlons dans l'épilogue.³⁸

5 Comment raccorder des chaînes ou des réseaux?

Ce sujet est à l'ordre du jour, au milieu du XIX^{ème} siècle, comme nous l'avons expliqué dans la partie A de cette thèse. En effet, une grande partie de l'Europe est couverte par des triangulations et il s'agit de les relier entre elles le mieux possible, un des buts à atteindre étant de constituer un seul réseau homogène et continu, en particulier pour déterminer la figure de la Terre.

Liagre présente en 1852 un mémoire, à l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-arts de Bruxelles, intitulé: "Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations".³⁹ Les rapporteurs sont Nerenburger, Timmermans et Pagani. Les rapports favorables concluent à l'impression.

"Le mémoire présenté par Mr Liagre à l'Académie, a pour objet l'une des applications les plus intéressantes de la théorie des probabilités à la géodésie. Il suppose que deux canevas géodésiques différents

³⁸Liagre est conscient de la difficulté à compenser sur des grands réseaux dans leur ensemble. au début du § 155, il souligne que tous les "Allemands" ne procèdent pas de la même façon en pratique et dans la deuxième édition de son livre, on trouve des ajouts correspondants à des propositions de l'Association géodésique internationale, par exemple au § 162.

³⁹*Bulletin de l'ARB*, tome XIX, 1^{ère} partie, p. 513-534, 1852. L'intégralité de ce mémoire, ainsi que le texte de Baeyer cité en référence, se trouve à l'annexe 30. Précisons que la capitaine Liagre dépose sa notice manuscrite à la séance de la Classe des Sciences le 6 Mars 1852. (Tome XIX, 1^{ère} partie, 1852, p. 405). J.R. Leconte dans sa notice biographique in *Biographie nationale publiée par l'ARB*, tome 39, 1964, présente, p. 450, ce mémoire comme "la plus importante application des idées émises dans l'ouvrage ci-dessus"; L'ouvrage dont il s'agit est le livre que Liagre publie en 1852 sous le titre *Calcul des probabilités et Théorie des erreurs*.

aient donné, pour un certain côté commun de deux triangles, des valeurs inégales, et il propose de déterminer la vraie valeur, la plus probable de ce côté."⁴⁰

D'après Nerenburger, ce sujet n'avait jamais fait,

"l'objet d'un examen approfondi. M. le colonel Baeyer; chef du bureau trigonométrique à Berlin, s'en était occupé à la vérité, mais incidemment et sans tenir compte de toutes les circonstances qui la compliquent".⁴¹

En effet, en lisant le texte de Baeyer (*Die Küstenvermessung*, p. 425-426; voir annexe 30), on s'aperçoit que celui-ci ne tient pas compte de toutes les causes qui peuvent intervenir dans la détermination de la valeur d'un côté. Il considère seulement le nombre de triangles intermédiaires entre la base et le côté calculé.

Dans son mémoire, Liagre essaye de déterminer l'influence de 5 autres circonstances sur la détermination du poids de ce côté:

- la précision avec laquelle la base a été mesurée
- la grandeur de la base relativement à celle du côté en question
- la précision de la mesure d'un angle
- la grandeurs des côtés de ces triangles
- leur conformation plus ou moins avantageuse

Pour cela, "il suppose les deux réseaux identiques, sauf en ce qui concerne la circonstance dont il recherche l'influence". En somme, il fait varier un paramètre, fixant les autres.⁴² De cette façon, il trouve 6 formules qui lui permettent de calculer l'erreur moyenne du côté commun, résultat de chacune des causes énoncées ci-dessus et donc le poids du côté commun. Il démontre les résultats suivants:

- 1) Les poids sont réciproques aux carrés des erreurs moyennes résultant de la mesure des bases.
- 2) Ils sont directement proportionnels aux carrés des longueurs des bases.
- 3) Ils sont réciproques au carré de l'erreur moyenne de l'instrument avec lequel les angles ont été mesurés.
- 4) Ils sont inversement proportionnels au nombre de triangles intermédiaires entre les côtés en question et les bases, dans les deux triangulations.
- 5) Ils sont directement proportionnels à l'aire du triangle moyen.

⁴⁰Rapport de Timmermans in *Bulletin de l'ARB*, tome XIX, 1^{ère} partie, p. 512, 1852.

⁴¹Rapport de Nerenburger in *Bulletin de l'ARB*, tome XIX, 1^{ère} partie, p. 511, 1852.

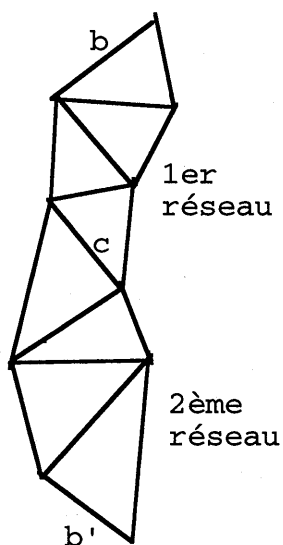
⁴²Il n'est guère possible à l'époque de traiter le problème autrement. Seul, Bienaymé tente les lois conjointes dans des cas simples. (cf. Heyde et Seneta, 1977, op. cit.)

6) Enfin, quant à la forme des triangles, les poids sont inversement proportionnels aux quantités

$$\frac{1}{n} \sum \frac{\Delta^2}{T^2} \text{ où } n \text{ est le nombre de triangles,}$$

Δ l'aire d'un triangle et T l'aire du triangle équilatéral de même périmètre.

Voici une synthèse des formules établies par Liagre dans ce mémoire et correspondant aux six points énoncés ci-dessus:



Notations

b base
 b' base
 c côté commun

Liagre adopte les notations suivantes:

db, db' : erreur moyenne sur les bases
 α, α' : erreur moyenne sur les instruments utilisés
 n, n' : nombre de triangles
 ϵ, ϵ' : excès sphérique
 T_i, T'_i : surface des triangles
 Δ_i, Δ'_i : surface des triangles équilatéraux
 de même périmètre
 Σ, Σ' : surface des 2 triangulations
 da_n : erreur moyenne due à la forme du triangle
 de rang n

Il obtient alors les résultats suivants:

$$1) p:p' = \frac{1}{db^2} : \frac{1}{db'^2}$$

$$2) p:p' = b^2 : b'^2$$

$$3) p:p' = \frac{1}{\alpha^2} : \frac{1}{\alpha'^2}$$

$$4) p:p' = \frac{1}{n} : \frac{1}{n'}$$

$$5) p:p' = \frac{n}{\Sigma} : \frac{n'}{\Sigma'} \text{ d'où } p:p' = \frac{1}{\Sigma} : \frac{1}{\Sigma'}$$

$$6) da_n : da'_n = \frac{\Delta_n}{T_n} : \frac{\Delta'_n}{T'_n}$$

$$p:p' = n \left[\frac{\Delta'^2}{T'^2} \right] : n' \left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right]$$

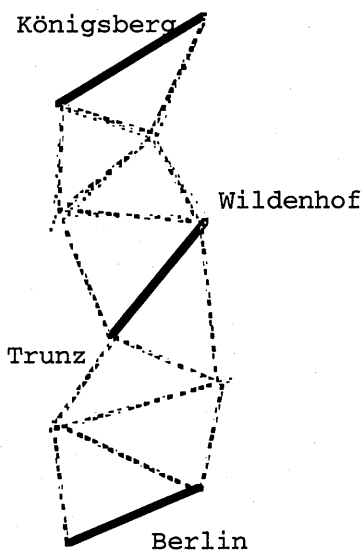
donc $\Pi = \frac{b^2}{\alpha^2 db^2} \times \frac{n}{\Sigma} \times \frac{1}{\left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right]}$, où Π est le poids du côté commun

ou $\Pi = \frac{b^2}{\alpha^2 db^2} \times \frac{1}{[T]} \times \frac{[T^2]}{[\Delta^2]} \times \frac{1}{n}$

ou $\Pi = \frac{b^2}{\alpha^2 db^2} \times \frac{1}{[\varepsilon]} \times \frac{[\varepsilon^2]}{p^4} \times \frac{1}{n} \quad (1)$

Application numérique

Liagre reprend, p. 529-533 du mémoire, le calcul de Baeyer relatif à la valeur moyenne du côté Trunz-Wildenhof; les longueurs des côtés sont données en toises



$n=7$ $n'=35$
 $b=935t$ $b'=1198t$
 $db=11816$ $db'=11341$

$$\alpha = \alpha'$$

$$[\varepsilon] = 12''45 \quad [\varepsilon'] = 91''91$$

$$[\varepsilon^2] = 76''54 \quad [\varepsilon'^2] = 571''77$$

$$p^4 : p'^4 = 11,63:54,15$$

La formule (1) s'écrit:

$$\Pi_1 = \frac{935^2}{\alpha^2 (11816)^2} \times \frac{1}{12''45} \times \frac{76''54}{p^4} \times \frac{1}{7}$$

$$\Pi_2 = \frac{1198^2}{\alpha^2 (11341)^2} \times \frac{1}{91''91} \times \frac{571''77}{[p'^4]} \times \frac{1}{35}$$

$$\text{donc } \Pi_1 : \Pi_2 \approx \frac{7}{3}$$

Il trouve que la valeur la plus probable du côté est de 30123t,6749, l'erreur moyenne est de 0,0791; ce résultat diffère de celui indiqué dans *Die Küstenvermessung* par Baeyer, les mêmes causes n'étant pas toutes prises en compte.

Dans son livre, Liagre ne fait qu'évoquer cette question:

"Nous avons ici, en petit, ce qui se passe en grand dans une triangulation: la base, adoptée comme exacte, est transportée par le calcul sur tous les autres côtés du réseau, et l'on obtient pour ces côtés, une précision plus ou moins grande, suivant le *nombre* et la *qualité* des

angles intermédiaires; mais si la base est affectée d'une erreur, cette erreur se transporte sur les côtés calculés, *proportionnellement* à leur *grandeur*, et s'ajoute à la première". (p. 376).

Voyons comment les Français abordent ce problème.

Il n'est pas tout à fait vrai, comme le dit Nerenburger dans le rapport précédent, que personne avant Baeyer ne se soit intéressé à ce problème. Nous allons essayer de relater la façon dont les géodésiens français traitent la question. En 1832, Puissant écrit dans le paragraphe relatif au calcul des côtés des triangles:

"On conçoit qu'en déterminant plusieurs chaînes liées entre elles, on arrive sur des côtés communs; on reconnaît donc par ce moyen si les résultats numériques comparables sont concordants."⁴³

La tradition française, dans le choix des points de station et dans les vérifications effectuées, tient compte, lors des nouvelles mesures, des différentes influences qui seront passées en revue par Liagre. Les géodésiens le font de façon empirique et en se référant à une longue pratique et donnent les conseils suivants:

- Les triangles doivent s'approcher autant que possible de la forme équilatérale
- Il ne faut pas avoir à calculer un grand côté par un petit côté
- Il faut choisir comme base de départ les côtés qui inspirent le plus confiance et dont la grandeur est le plus en rapport avec celles des côtés des triangles.
- Il faut opérer la jonction au milieu (car il est probable que l'erreur sur un côté est d'autant plus grande que l'on emploie un plus grand nombre de triangles pour le calculer).

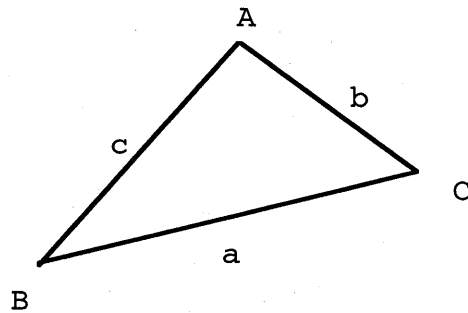
Regardons comment Salneuve⁴⁴ étudie les variations des erreurs en fonction de diverses causes, en utilisant une méthode de différentiation:

* "l'imperfection des angles observés causait sur les côtés opposés, des erreurs d'autant plus considérables que les côtés étaient grands" (voir cause n° 4 du mémoire de Liagre).

* La cause n° 5 du mémoire de Liagre était étudiée en ces termes par Salneuve: Quelle forme la plus avantageuse donner au triangle d'une chaîne?

⁴³"Nouvelle description géométrique de la France. Discours préliminaire" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, tome VI, p. 53, 1832.

⁴⁴ Voir Salneuve *Cours de Topographie et de Géodésie*, 1841, § 82 et 321.



Soient α et β les erreurs d'observations sur A et B.

On a: $a \sin B = b \sin A$ (1)

Soit b la base mesurée supposée exacte.

La relation (1) ne donnera pas une valeur exacte pour a mais une valeur approchée $a + da$.

$$(a + da) \sin(B + \beta) = b \sin(A + \alpha)$$

$$(a + da) [\sin B \cos \beta + \sin \beta \cos B] = b [\sin A \cos \alpha + \sin \alpha \cos A]$$

or α et β sont petits donc on peut écrire $\sin \beta \approx \beta$ et $\cos \beta \approx 1$

$$d' où $a \sin B + a\beta \cos B + da \sin B + da\beta \cos B = b \sin A + b\alpha \cos A$$$

en tenant compte de (1), on obtient:

$$a\beta \cos B + da \sin B = b\alpha \cos A, \text{ en supprimant } da\beta \cos \beta \text{ qui est du } 2^{\text{e}} \text{ ordre}$$

$$d' où $da = b\alpha \frac{\cos A}{\sin B} - a\beta \cot anB$$$

$$da = a(\alpha \cot anA - \beta \cot anB)$$

Salneuve conclut que:

"da est d'autant plus petit que A et B diffèrent peu entre eux, et malgré les erreurs angulaires on obtient exactement a quand $A = B$ ".

Il conseille donc de choisir pour ABC un triangle presque équilatéral : on dit alors que ABC est bien conformé.⁴⁵

* La cause n°2 du mémoire de Liagre relative à l'influence des côtés était envisagée par Salneuve sous cette forme:

⁴⁵Cette question de "la forme la plus avantageuse à donner à un triangle" donne encore lieu à des recherches en France dans les années 1850. Nous avons trouvé des traces de ces recherches dans les CRAS: "Hossard, recherches sur la forme la plus avantageuse à donner aux triangles", tome XXX, p. 446, 711; Piobert, tome XXXI, p. 151 à 159 et p. 409 à 418, 1850. Signalons que Salneuve et Piobert ont tous les deux enseigné à l'Ecole d'Application de Metz; la solution de Piobert est intéressante, car son point de vue probabiliste semble fortement influencée par ses travaux en artillerie.

Soient A et B exacts.

$$(1) \text{ s'écrit } (a + da)\sin B = (b + db)\sin A$$

$$\text{d'où } a\sin B + da\sin B = b\sin A + db\sin A$$

ou en tenant compte de (1) :

$$da = db \sin A / \sin B$$

Dans le cas le plus favorable où $A = B$, on a la même erreur sur a et b mais si $B < A$ l'erreur sur a sera plus grande que l'erreur sur b.

Salneuve de conclure :

" On ne doit pas prendre une base trop courte, ou il ne faut pas faire croître rapidement les côtés des triangles, puisqu'alors A étant plus grand que B, on aurait $da > db$ et les erreurs iraient toujours en augmentant."⁴⁶

Pour choisir les stations, ces différents paramètres sont pris en compte. Leur respect conduit à des chaînes "bien conditionnées". Après les calculs de vérification, si les discordances trouvées sont trop importantes, les Français recommencent avec des agencements meilleurs alors que selon la technique allemande, on aurait accordé des poids différents aux différents angles et côtés intervenant dans les calculs, puis on aurait mis en place la méthode des moindres carrés.

Puissant propose des formules pour calculer les corrections à appliquer aux angles d'une chaîne afin opérer l'accord de deux bases mesurées aux extrémités.⁴⁷ Il commence par poser deux principes fondamentaux qui lui permettront de démontrer "des formules géodésiques de probabilité". Il veut par cette démarche n'emprunter au 2^{ème} et au 3^{ème} *Supplément* de la *Théorie analytique des Probabilités* (théorie qu'il qualifie d'abstraite) "que les principes fondamentaux les plus indispensables" et n'utiliser que "des procédés purement élémentaires" (p. 136). Voici les principes généraux qu'il énonce p. 137-139:

"1) Si l'on considère x comme le résultat moyen d'un grand nombre n de valeurs particulières provenant de la mesure réitérée d'une même quantité; et si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ les écarts de

⁴⁶De cette remarque de Salneuve découle le principe d'amplification* de la base.

⁴⁷Ces formules ne se trouvent pas dans la première édition de 1805. Elles constituent les modifications que Puissant apporte à sa première édition. Dans "Description géométrique de la France. Discours préliminaire" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, tome VI, p. 136, 1832; ce chapitre VI est une fusion des deux mémoires qu'il a lus à l'Académie des Sciences, en mars 1830 et au commencement de l'année 1831, avec quelques additifs. Il écrit, p. 137: "Je pense que par là les applications du calcul des probabilités aux grandes opérations géodésiques seront ramenées à des procédés purement élémentaires, et qu'elles deviendront plus faciles et plus fréquentes."

ces valeurs de part et d'autre de leur moyenne x , l'erreur δx de ce résultat, dont la probabilité est 1/2 aura pour expression:

$$\delta x = \frac{1}{2n} \sqrt{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2)},$$

ou plus exactement

$$\delta x = \pm \frac{0,47708}{n} \sqrt{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2)};$$

c' est ce qu' on nomme l' erreur moyenne. En donnant à cette expression la forme $\delta x = \pm 0,47708 g$,

le facteur $g = \frac{1}{n} \sqrt{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2)}$ sera la mesure

ou le module de la précision du résultat d' un grand nombre d' observations.

2) Si X désigne une fonction de plusieurs quantités x, y, z, \dots déterminées par des séries d'observations sujettes à des erreurs fortuites, et que sa différentielle ait cette forme:

$$dX = A dx + B dy + C dz + \dots$$

A, B, C, \dots étant des constantes données, et dx, dy, dz, \dots exprimant des erreurs indépendantes les unes des autres; L'erreur moyenne à craindre sur la valeur de cette fonction sera:

$$\delta X = \pm \left\{ A^2 (\delta x)^2 + B^2 (\delta y)^2 + C^2 (\delta z)^2 + \dots \right\}$$

en prenant respectivement pour $\delta x, \delta y, \delta z, \dots$ les erreurs moyennes de x, y, z, \dots conformément au premier principe, c'est-à-dire celles dont la probabilité est 1/2. ainsi, au même degré de probabilité, la fonction X sera enfermée dans les limites

$$X + \delta X, \quad X - \delta X,$$

lesquelles se resserreront d'autant plus que les observations seront plus précises et plus nombreuses.

Si l'on désigne par g, g_1, g_2, \dots les modules relatifs aux erreurs x, y, z, \dots la probabilité que l'erreur δX sera généralement comprise entre les limites

$$\pm t \sqrt{A^2 g^2 + B^2 g_1^2 + C^2 g_2^2 + \dots}$$

est

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int dt. e^{-t^2},$$

π étant le rapport de la circonférence au diamètre, e représentant la base des logarithmes népériens, et l'intégrale commençant depuis $t=0$. Lorsqu'on veut que $p = 1/2$, il faut prendre $t = 0,47708$." (p. 139)

Puissant étudie ensuite le problème suivant:

"Méthode pour établir de la manière la plus avantageuse la concordance de deux bases mesurées directement aux extrémités d'une chaîne de triangles." (p.139)

Il considère un réseau composé de n triangles liant deux bases extrêmes a et a_n. Il cherche à savoir qu'elle est l'erreur moyenne dont sera affecté le dernier côté a_n déduit de cette base, et quelles en sont les limites.

Après avoir utilisé les deux règles ci-dessus, il arrive à la conclusion suivante:

"Concluons de là que l'erreur moyenne cherchée a réellement pour valeur

$$\lambda = \frac{1}{3} \sqrt{(l^2 + m^2 - lm)T^2 + (l_1^2 + m_1^2 - l_1m_1)T_1^2 + \dots};$$

ou enfin

$$\lambda = \frac{1}{3} \theta \sqrt{\frac{l^2 + m^2 - lm + l_1^2 + m_1^2 - l_1m_1 + \dots}{n}},$$

n étant le nombre de triangles; ce qui est d'autant plus permis que ce nombre est plus grand.

Il est remarquable que ce dernier résultat est le même que Laplace a obtenu par une analyse très subtile et par des considérations entièrement fondées sur la doctrine des probabilités; c'est donc dans l'ouvrage cité de cet illustre géomètre que l'on trouvera une démonstration directe et rigoureuse de la formule actuelle, s'il restait quelques doutes sur l'exactitude de celle que nous venons de donner." (p.143)

Conclusion de la partie B

Alors que la partie A était beaucoup plus historique, à propos de la France, de l'Allemagne, de la Belgique, et étudiait quelques-unes des interactions entre les recherches géodésiques de ces pays, la partie B est plus scientifique et technique. Nous ne croyons pas en effet possible de se dispenser d' un examen approfondi des travaux scientifiques eux-mêmes.

Nous venons donc d'examiner les différences entre les traditions française et allemande, à plusieurs points de vue: organisation mêmes des campagnes d'observation; choix des paramètres que l'on décide de mesurer, choix des instruments; mathématiques utilisées ou forgées pour ces objectifs; ordre et division du travail, disposition des calculs; positions sur les approximations, la précision, les poids et établissement d'un vocabulaire adapté; rapport à la théorie et retombées des préoccupations théoriques sur les tâches concrètes; place accordée au calcul des probabilités; réflexions douloureuses sur les

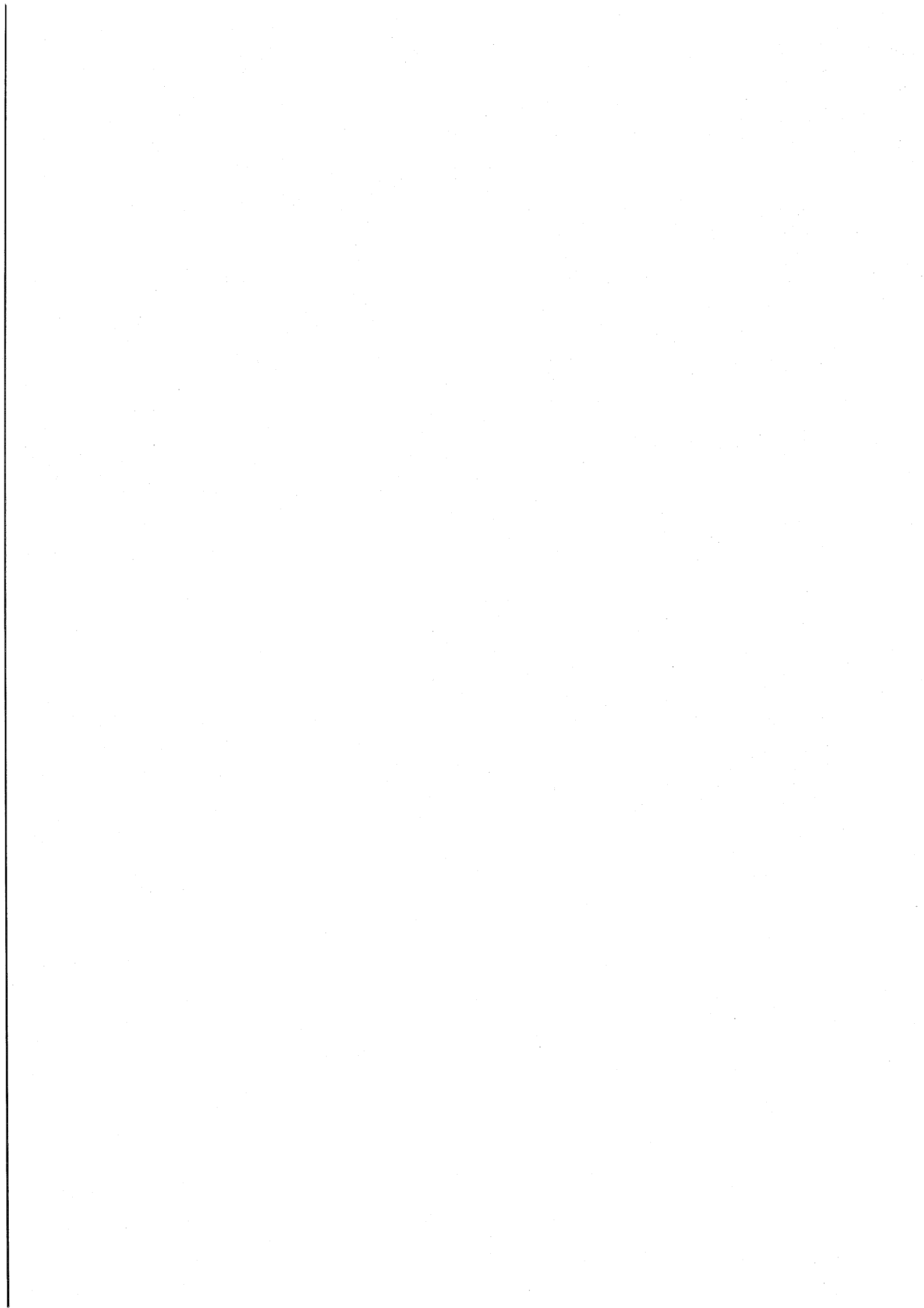
façons de traquer l'arbitraire; rôle des traités dans la formation d'un domaine scientifique et technique, etc...

Le lien central à partir duquel nous avons ordonné cette partie est celui tissé entre les "compensations" et la "méthode des moindres carrés". Nous avons traité quelques exemples, relatifs surtout à la mesure des angles, qui nous semblent cruciaux, il y en a d'autres (y compris dans le livre de Liagre) concernant la mesure des bases, le nivellement ou divers problèmes astronomiques ou optiques.

Les mathématiques mises en jeu ici apparaissent certes relativement élémentaires: trigonométrie plane et sphérique, notions de base sur le calcul des probabilités, résolution de systèmes linéaires... Cependant le rapport à ces mathématiques entretenu par les savants étudiés est beaucoup moins élémentaire. C'est tout le problème d'une statistique mathématique à l'état de gestation, c'est la lucidité dans le tri, le groupement et le traitement des équations débouchant sur des méthodes remarquables d'analyse numérique toujours utilisées et en plein développement de nos jours, qui sont au coeur de cet ensemble complexe. Et il est clair que, pour Gauss et Bessel, en particulier, leur volonté et leur perspicacité de nature *théorique* ont des retombées très *concrètes* sur les pratiques géodésiques qu'ils promeuvent... Sans parler naturellement des aspects proprement théoriques de "höhere Geodäsie" sur la forme de la Terre qui sont directement à l'origine de la création de résultats très novateurs de géométrie différentielle (question que nous n'examinons pas ici).

Du coup, nous comprenons mieux le rôle du livre de Liagre, à la fois comme bilan, synthèse et couronnement des dix années (1843-1852) de mise en place d'une géodésie moderne en Belgique, et comme premier traité solide mettant à la disposition du public francophone la révolution géodésique issue des pays de langue allemande; mais aussi comme point de départ possible pour un renouveau de la géodésie française.

1852-1853 représente donc une année charnière pour les Français. Année de la parution non seulement de l'ouvrage de Liagre, mais également de *La nouvelle description géométrique* de Peytier (qui marque un renouveau de lucidité des géodésiens français), mise en place de la politique scientifique du Second Empire avec tous les conflits qu'elle ne peut manquer d'engendrer (par exemple pour ce qui nous concerne entre les proches de Le Verrier et ceux de Faye). C'est ce retour en France que nous allons évoquer plus brièvement maintenant dans l'Epilogue (partie C de cette thèse).



EPILOGUE

Partie C: La France face à ces nouveaux enjeux. Diffusion des méthodes allemandes en France

On se souvient que dans les décennies 1820-1840, les travaux géodésiques français ont été effectués en ignorant largement les innovations majeures de la tradition allemande, ses nouveaux instruments, son utilisation systématique des moindres carrés et du calcul des probabilités, son caractère méthodique et uniformisé. Qu'en est-il à partir du milieu des années cinquante ?

Les savants, les militaires, les observateurs français sont-ils conscients du décalage ? Evoluent-ils et si oui quand, au contact de qui ? Y a-t-il des débats et sont-ils explicites ? Quelles sont les réticences au changement ? Comment se traduit en France le besoin d'une internationalisation de la géodésie avec les raccordements des réseaux ? Faudra-t-il attendre la défaite de 1870 pour assister à des changements ? Peut-on évaluer l'impact en retour des travaux belges, du livre de Liagre, sur les positions des astronomes, géodésiens et cartographes français ?

Nous n'aurons pas la prétention de répondre en détail à toutes ces questions et à quelques autres bien naturelles. Nous nous contenterons d'indiquer trois pistes:

- C I. L'accueil de la "tradition allemande" chez les ingénieurs géographes et les responsables de la géodésie, notamment le colonel Peytier (successeur de Coraboeuf, lui-même successeur de Puissant à la direction de la section "Géodésie, Topographie, Dessin et Gravure" du Dépôt de la Guerre) et l'astronome H. Faye, académicien, professeur à l'Ecole polytechnique dès les années cinquante. Ceci nous conduira notamment à examiner les contenus des cours à l'Ecole polytechnique.
- C II. Les objections faites à la MMC et les réponses à ces objections.
- C III. Les conséquences de l'internationalisation nécessaire de la géodésie, en particulier avec la création de la Mittel-Europäische Gradmessung (future Association géodésique internationale) par Baeyer, qui se réunit pour la première fois à Berlin en 1864.¹

¹Le premier nom de cette association est traduit en langue française par Association pour la mesure des degrés dans l'Europe centrale. En 1867, après l'adhésion de l'Espagne et du Portugal, elle prend le nom d'Europäische Gradmessung traduit par Association géodésique internationale pour la mesure des degrés en Europe. En 1887, elle devient l'Internationale Erdmessung connue sous le nom classique de l'Association géodésique internationale. Actuellement, elle constitue la Section de Géodésie de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale.

Nous verrons dans les milieux français intéressés à la géodésie, sous le Second Empire (donc avant la guerre de 1870), à la fois une certaine conscience du retard accumulé et des erreurs de perspective; mais aussi les blocages, les hésitations et les obstacles objectifs pour que ces changements se traduisent d'une façon ou d'une autre dans les réalités.²

C.I. Réception des nouvelles méthodes en France

Est-il possible que les ingénieurs géographes français, les professeurs de géodésie à l'Ecole polytechnique soient à ce point coupés de la science et de la pratique qui se font à l'étranger, au point d'ignorer les progrès remarquables de la géodésie allemande, à l'instigation de savants aussi célèbres que Gauss ou Bessel?³

Pas tout à fait, bien entendu. Bien que l'examen approfondi des causes du déclin de la géodésie française dans le deuxième quart du XIX^{ème} siècle ne soit pas notre sujet central, il convient d'en dire un mot et de reprendre ici quelques conclusions des historiens de la géodésie française⁴. On peut d'abord citer la réaction classique: les succès de l'époque révolutionnaire et l'avance de la France avec Delambre et Méchain provoquent en retour dans les pays étrangers une émulation et en France une tendance à "s'endormir sur ses lauriers". Ensuite, il existe de nombreux problèmes institutionnels: en confiant l'exécution de la triangulation du 1^{er} ordre aux ingénieurs géographes militaires en 1817, la Restauration met l'Observatoire et le Bureau des Longitudes largement à l'écart ce qui ne peut que déboucher sur une dérive praticiste et rejeter au second plan les études théoriques et scientifiques plus générales. Cette dérive est accentuée en 1831 par la suppression du corps des ingénieurs géographes: la poursuite de la carte, avec ses

²Les réticences des milieux français, à utiliser la MMC, perdurent encore au XX^{ème} siècle. Ainsi H. Bouasse, dans *Géographie mathématique*, 1923, écrit p. 286: "Le problème étant ainsi posé, les ellipsoïdes de Bessel, de Clarke, d'Helmert et *tutti quanti* deviennent équivalents: *ce ne sont plus des surfaces de référence*. On ne tripatouille plus les nombres, parce que l'intéressant cesse d'être la moyenne pour devenir ce en quoi les nombres diffèrent de cette moyenne *conventionnelle*. [...]. On a continué de fourrer des moindres carrés, des poids et autres fichaises!" M. d'Hollander a le sentiment que Bouasse n'expose la théorie des moindres carrés dans aucun de ces nombreux traités de Mathématiques et de Physique.

³La connaissance de certains travaux allemands en France est incontestable; par exemple, en 1841 Arago fait un rapport verbal à l'Académie des Sciences de l'ouvrage *Nivellement entre Swinemünde et Berlin*, ouvrage de Baeyer présenté par Humbolt (voir CRAS tome XIII, p. 343); en 1857, l'Académie des Sciences reçoit l'ouvrage de Struve *Arc du méridien*op. cit. (voir CRAS tome XLV p. 509-515); en 1858, Baeyer offre un ouvrage "Jonction des triangulations prussiennes et russes près de Thorn et de Thornowitz" à l'Académie des Sciences (voir CRAS tome XLVI, p. 1148); d'autre part, nous avons vu qu'en 1853, Peytier cite les deux ouvrages de Bessel et Gauss, regrettant de ne pas les avoir lu. L'existence de ces travaux est connue en France, leur contenu l'est peut-être moins avant 1853. (Nous ne citons pas les travaux astronomiques d'auteurs allemands tels Bessel, Argelander, Schumacher... qui sont eux-aussi présentés à l'Académie durant ces mêmes années).

⁴Par exemple, J.J. Levallois, op. cit. p. 127; voir aussi ce que nous avons cité plus haut dans l'introduction et au chapitre A I.

triangulations du 2^{ème} et du 3^{ème} ordre, moins précises, effectuée par des gens aux préoccupations essentiellement militaires (et ayant de surcroît d'autres tâches), accroît l'esprit de routine et bloque l'esprit de critique et d'initiative, précisément à un moment où la discussion des méthodes s'imposerait.

1. Les Ingénieurs géographes

Puissant meurt en 1843 alors qu'il venait de publier en 1842 la dernière édition de son *Traité de Géodésie*. (Il préparait une troisième édition de son *Traité de Topographie*.)⁵ Cet ouvrage de référence, vecteur de la diffusion de la tradition française⁶, contient divers ajouts par rapport à l'édition d'origine de 1805, refondue en 1819. "Parmi les nombreuses additions, pour suppléer à ce qui manquait dans la deuxième édition, les plus notables ont rapport aux applications du calcul des probabilités aux opérations géodésiques",⁷ et sont reprises du Supplément de 1827 (p.39-42) et du mémoire de 1832. Voici une description rapide de ces passages:

* *Livre III. Opérations et Calculs géodésiques.*

- p. 251. L'analyse des probabilités est utilisée pour déterminer l'erreur moyenne commise dans la mesure d'une base.

- p. 394-410. Un paragraphe s'intitule "Application du calcul des probabilités à la géodésie"

- p. 488. Recherche de l'erreur moyenne probable d'un nivellement par la méthode savante de Laplace.

* *Livre VI. Questions de Haute Géodésie.*

- p. 342. Un paragraphe s'intitule "Application de la MMC à la recherche des dimensions de l'ellipsoïde"

Donc, alors qu'en 1805, Puissant présentait la MMC en suivant Legendre⁸, il se réfère maintenant à la méthode des probabilités de Laplace.

Les travaux de Gauss ou Bessel ne sont pas cités. Puissant nomme erreur moyenne⁹, l'erreur dont la probabilité est 1/2 et se réfère au Troisième Supplément de la

⁵Voir p. 52 de l'*Eloge historique de Louis Puissant* par Elie de Beaumont, lu le 14 juin 1869 en séance publique, Académie des Sciences.

⁶Nous avons indiqué p. 134 les différents éditeurs européens diffusant ce traité. Signalons que P. Pizzetti dans l'article "Höhere Geodäsie" in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 1906-1925, tome VII 3, p. 120, cite encore le traité de Puissant parmi une liste de traités de géodésie tous postérieurs à 1880.

⁷Avant-propos de la 3^{ème} édition, p.viiij. Les additions citées par Puissant sont plus nombreuses mais nous ne retenons que celles directement en rapport avec notre propos.

⁸p.137-141 de cette édition.

Théorie analytique des probabilités de Laplace pour déterminer les limites de l'erreur et obtenir les corrections les plus avantageuses. Mais il qualifie cette méthode de "savante"¹⁰ et en 1832, il se propose dans le *Discours préliminaire*¹¹ de démontrer élémentairement les formules géodésiques de probabilités.¹² Un effort est fait pour faciliter l'accès par ces formules aux applications possibles des probabilités en géodésie, car la lecture de Laplace n'est pas accessible à tous les ingénieurs géographes. A la page 168, Puissant applique la MMC en se référant à Legendre dont il énonce la règle; pour légitimer l'utilisation de cette règle, il s'appuie sur Laplace et Poisson qui ont prouvé par les probabilités que cette méthode est la plus avantageuse. A la p. 169, il donne un exemple avec 10 équations de conditions pour la détermination de l'aplatissement de l'ellipsoïde osculateur en France, question de haute géodésie.¹³

Il convient ici de s'interroger sur le rôle personnel de Puissant. L'extrême personnalisation de la géodésie française pendant son long règne, la protection dont ce militaire jouit de la part de Laplace (mort en 1827), dont il apparaît ensuite comme le "véritable exécuteur testamentaire [...] dans le domaine de la géodésie trigonométrique", selon la jolie expression de J.J. Levallois¹⁴ et auquel il succède à l'Académie des Sciences, nous enjoignent de ne pas négliger à cet endroit la part des individualités. Il suffit de lire l'avant-propos de la 3e édition de 1842 du *Traité de géodésie*, pour comprendre que le manque de modestie de son auteur n'a pu que lui faire sous-estimer l'intérêt des travaux étrangers en plein essor¹⁵ (et qui d'ailleurs ne se limitent pas aux questions que nous étudions dans cette thèse¹⁶).

⁹p.488 de l'édition de 1842.

¹⁰p.488 op.cit.

¹¹p.168. Précisons que ce *Discours préliminaire* est extrait de la première partie de la *Description géométrique de la France* qui forme le tome VI du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*.

¹²Ces formules ont été présentées dans la partie B. Rappelons que Puissant avait déjà lu deux mémoires sur ce sujet à l'Académie des Sciences: "Applications de l'analyse des probabilités à la mesure de la précision d'un grand nivellement trigonométriques" le 8 Mars 1830 et "Application du calcul des probabilités aux grandes opérations géodésiques" le 17 Janvier 1831. Il en présente ici une fusion avec quelques additions.

¹³Puissant a présenté le contenu de ce paragraphe dans un mémoire "Détermination de la figure de la terre par les mesures astronomiques et géodésiques" à l'Académie des Sciences le 27 juin 1825. Les rapporteurs sont Legendre et Mathieu. Le rapport est lu par Mathieu dans la séance du 2 janvier 1826 (*Procès verbaux de l'Académie des Sciences de Paris*, tome VIII, p. 327). Il s'exprime ainsi: "Dans le troisième paragraphe, M. Puissant cherche par la méthode des moindres carrés l'aplatissement de l'ellipsoïde osculateur en un point quelconque de la surface de la terre par la combinaison d'un arc de méridien avec un arc de parallèle" [p. 329] puis plus loin: "M. Puissant cherche par la méthode des moindres carrés le sphéroïde osculateur qui satisfait le mieux à l'ensemble des observations de longitude.[...] En déterminant la valeur la plus probable par la méthode des moindres carrés, il trouve en même temps les erreurs des amplitudes observées." La conclusion du rapport est adoptée par l'Académie. Il est dit entre autres: "Nous ne proposons pas à l'Académie d'insérer le Mémoire de M. Puissant dans le volume des Savants étrangers, parce qu'il est tellement lié à son *Traité de géodésie* qu'il en est devenu un supplément nécessaire. Nous savons d'ailleurs qu'il doit être imprimé dans le *Mémorial du Dépôt de la Guerre*."

¹⁴Voir J.J. Levallois *300 ans de Géodésie* op. cit. p. 127.

¹⁵Voici les termes utilisés par Puissant à la fin de cet avant-propos: "Telles sont les principales matières que renferme cette troisième édition, et qui ont été, pour la plupart, le sujet de mes cours au Dépôt de la

Revenons à la question du traitement des erreurs. Puissant se réfère à Laplace, mais le suit-il vraiment ? Il y a de quoi en douter. La méthode des moindres carrés, y compris sous ses versions probabilistes, n'a rien de clandestin en France, puisqu'elle figure dans les oeuvres de Laplace et même dans le traité de Lacroix sous forme vulgarisée. Or l'impression qui ressort de la lecture du Supplément de 1827 au *Traité de Géodésie*, de la "Nouvelle description géométrique de la France" de 1832, et des ajouts de la 3e édition du *Traité de Géodésie* (qui reprennent les textes précédents), c'est que la MMC n'est utilisée que du bout des lèvres, sans véritable articulation avec les problèmes de la géodésie. Puissant ne manque pas une occasion de vouloir la simplifier, et ne semble pas essayer de la comprendre comme un principe général du traitement des observations dans un cadre global. En d'autres termes, c'est l'opposé de l'un des apports essentiels de Gauss. Et, à partir de 1827, Laplace n'est plus là.

Coraboeuf succède à Puissant en 1843 à la direction de la géodésie; puis il est remplacé par Peytier en 1850. Avec lui, le ton devient tout différent. Colonel d'État Major, chef de la première section du Dépôt de la Guerre, Peytier publie en 1853, "Nouvelle description géométrique de la France" dans *Mémorial du dépôt de la Guerre* tome IX. Dans l'avant-propos, il indique clairement ses intentions:

"La géodésie de la carte de France étant terminée, les jeunes officiers d'état major auront rarement l'occasion de se former à la pratique de ces opérations. Il m'a paru utile de leur présenter dans cet ouvrage un examen de quelques uns des principaux travaux exécutés jusqu'à ce jour, et d'en déduire une réunion d'indications pratiques qui formerait, en quelque sorte, un complément à un traité de géodésie;"

D'une manière élégante, Peytier laisse entendre que le traité de référence de Puissant a besoin d'un complément, d'une remise à jour. A un autre endroit, Peytier est moins allusif et regrette que Puissant "n'ait pas entrepris de mettre les chaînes d'accord", constatant l'immensité du travail à effectuer maintenant pour rattraper cette erreur.¹⁷ De plus, il regrette l'absence de bureau de calcul spécialisé, de plan de calcul.¹⁸

Guerre. Elles montrent à quel degré j'y avais porté l'enseignement de la Géodésie, science [...] qui est admise dans les *programmes* de l'Ecole polytechnique, et dont l'étude particulière est devenue un des besoins de l'époque actuelle". P. Bret op. cit. p.138 nous précise que Puissant est le principal représentant des ingénieurs géographes au Conseil de perfectionnement de Polytechnique entre 1809 et 1826.

¹⁶Voir toujours J.J. Levallois, p. 127, par exemple.

¹⁷Nous avons cité ce passage dans l'introduction, note 14.

¹⁸J.J. Levallois ajoute (cf. *300 ans de géodésie ...op. cit. p. 130*) une évaluation apocalyptiquement longue du temps nécessaire avec les moyens de l'époque pour compenser le réseau du 1er ordre (30 à 40 ans!) D'ailleurs il est clair que rattraper une compensation n'est pas simple pour des raisons d'homogénéité, il faut donc bien concevoir le cadre au départ.

Il est donc clair que Peytier, qui a travaillé longtemps sous les ordres de Puissant, estime que celui-ci a bloqué les nouveautés. Ces dernières portent essentiellement sur les instruments, les méthodes d'observations et la compensation des triangulations. Peytier fait référence aux travaux américains et à ceux des anglais Mudge, Everest et Hall "dont Mr Servier a bien voulu traduire des passages". Il regrette de n'avoir pas pu encore examiner les travaux de Bessel et du colonel Baeyer en Prusse, sans doute à cause d'un manque de connaissance de la langue allemande, et conseille "la lecture du livre du général belge Liagre." Nous retrouvons dans son ouvrage les mêmes conseils que dans le rapport de Meyer: utilisation de l'héliotrope, usage de tours en maçonnerie pour l'établissement des signaux, utilisation des règles de Bessel pour mesurer les bases et de la réitération pour mesurer les angles, etc...L'exemple de la Belgique est cité explicitement. D'ailleurs, on apprend qu'en juin 1853, le commandant Hossard est envoyé à Ostende pour voir fonctionner les règles de Bessel; la petitesse des bases est soulignée. Pour le calcul des triangles, on lit:

"Dans le calcul des chaînes primordiales exécutées en France, l'erreur a été généralement répartie par tiers sur chaque angle; mais ce mode n'est pas suivi partout, et l'on est assez dans l'usage maintenant d'appliquer le calcul des probabilités à la recherche de la partie de l'erreur que doit supporter chaque angle."¹⁹

On doit donc bien constater ici la date de 1853 comme cruciale. S'il est vrai qu'un certain malaise était latent face à la dérive de la géodésie française, il n'en est pas moins vrai, chez certains responsables comme Peytier, que la filière belge apparaît comme la voie d'une prise de conscience réelle des travaux allemands pour les responsables du Dépôt de la Guerre.

2. École polytechnique

Vu le rôle central de l'Ecole polytechnique dans la formation des militaires français, y compris des ingénieurs géographes ou de ceux qui les remplacent lorsque ce corps est supprimé, il importe de revoir de plus près l'évolution des enseignements de géodésie. Nous avons donc suivi, sur les sommaires des leçons, sur les feuilles lithographiées et sur les notes d'élèves quand elles existent²⁰, l'évolution des cours dispensés dans cette école de 1810 à 1880 *Cours de géodésie ou de théorie des erreurs*.

Nous avons dit quelques mots de cette question au chapitre A I pour les premières décennies du siècle, rappelant qu'une leçon intitulée "erreurs d'observations, méthodes

¹⁹Peytier "Nouvelle description géométrique de la France 3^{ème} partie" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre* tome IX, 1853 p.421-422.

²⁰On sait que cette institution possède des archives, riches, bien cataloguées et faciles d'accès.

des moindres carrés" est donnée (par Arago) dès 1819 dans le cadre du cours d'"analyse appliquée, géodésie et arithmétique sociale"²¹, le principe de la MMC étant expliqué sans référence aux probabilités, même si y figure (pour la forme ?) une allusion à Laplace. La situation ne va guère évoluer jusqu'à la réforme Le Verrier en 1850 qui supprime l'enseignement de la MMC comme nous l'avons déjà dit. Mais si l'on se repenche sur les cours de géodésie (maintenant séparés du cours de probabilités, à partir de 1836), on constate l'immuabilité: on y professe les méthodes traditionnelles françaises avec leurs instruments (cercle répétiteur, aucune allusion au cercle réitérateur), l'application de la MMC à la géodésie apparaissant en appendice, pour des problèmes locaux, particuliers. Or, là encore, et malgré Le Verrier, se profile un changement dès le milieu des années cinquante.

On sait que c'est seulement en 1873 que Faye rétablit officiellement l'enseignement de la méthode des moindres carrés à l'Ecole polytechnique. Cependant en consultant les cours manuscrits rédigés par ses élèves, nous en avons trouvé un, daté de 1855-56, comportant un chapitre intitulé "Théorie des erreurs". Ce fait nous semble très important et significatif d'une volonté certaine de Faye à diffuser les nouvelles méthodes allemandes de géodésie. Comment en a-t-il eu connaissance? Nous savons que Liagre effectue un voyage scientifique en 1853 à Paris, où il rencontre précisément l'astronome Hervé Faye, futur professeur de géodésie et d'astronomie à l'Ecole polytechnique en 1855-56 (puis de 1873 à 1893). On peut donc raisonnablement émettre l'hypothèse qu'au cours de cette rencontre, les deux hommes évoquent ces questions autour du livre récent de Liagre. Faye enseigne donc les méthodes allemandes dans son cours de 1854-55, mais toutefois, sans les exiger à l'examen, probablement parce qu'il ne lui est guère loisible de s'attaquer de front à l'autorité au début du Second Empire.²²

La géodésie se réorganise dans les années 1860 sous l'impulsion de Faye puis de François Perrier et bien sûr après la guerre de 1870 avec le réveil brutal des militaires français. L'astronome pourra développer ces méthodes de façon explicite à partir de 1873.²³ Ainsi dans le sommaire d'un cours de 1874-75 on apprend l'existence d'une séance sur: "Objections qu'on a faites en France à l'emploi de la méthode des moindres

²¹Pour ces questions, voir P. Crépel, 1989 et 1993, cité au chapitre A I.

²²Nous donnons quelques extraits significatifs de ce cours à l'annexe 37. Dans un autre chapitre de ce cours, Faye compare les méthodes de répétition et de réitération et conclut à l'"avantage de la répétition si le cercle est mal divisé." Mais il reconnaît que "cette méthode a un vice: il existe une erreur constante notable." Plus loin il ajoute: "C'est cette propriété d'atténuer rapidement (mais non pas indéfiniment) les erreurs de la division, qui a fait adopter cette méthode pour les grandes opérations géodésiques du siècle dernier. A cette époque, nos artistes n'auraient pu diviser le cercle avec la précision exigée."

²³Les successeurs de Faye, Callandreau, puis les militaires Bourgeois et Georges Perrier continueront dans le même esprit.

carrés. Réfutation de ces objections qui tiennent toutes à ce qu'on ne distingue pas bien les erreurs systématiques des erreurs accidentelles."

Les Cours de Faye et les notes de Peytier prouvent bien que les méthodes allemandes sont connues en France dès 1853, la seule traduction permettant aux Français d'y accéder directement étant celle de Liagre. Il reste que ce n'est pas l'ensemble des méthodes allemandes, encore moins l'état d'esprit de la géodésie allemande, qui se répand. Ces méthodes ne sont pas essayées, aucun travail ne débutant d'ailleurs en France dans ces années là. Plusieurs freins persistent: les idées de Gauss, Bessel, etc. sont considérées comme savantes et théoriques, peut-être même au sens péjoratif de ces termes.

C.II. Quelques réticences françaises face à la méthode des moindres carrés

Sans entrer dans le détail des débats dans les milieux scientifiques français, au milieu du XIX^{ème} siècle, quant à l'utilisation de la méthode des moindres carrés, il nous faut rappeler quelques faits²⁴.

Rappelons, par exemple, en plus de l'opposition farouche de Le Verrier et ses conséquences institutionnelles, la polémique entre Cauchy et Bienaymé en 1853. Cauchy propose une méthode d'interpolation particulière pour remplacer la méthode des moindres carrés, mais Bienaymé démontre par ses travaux la supériorité de cette dernière et met fin à la discussion.²⁵

D'autre part, 1855 est à la fois l'année de la mort de Gauss et celle de la traduction et diffusion par J. Bertrand de certains travaux du mathématicien allemand sur les moindres carrés, comme nous l'avons dit au chapitre A II.

Relatons seulement ici plusieurs "erreurs" mises en évidence par certains savants français pour combattre cette méthode. Nous nous contenterons, à cet effet, d'évoquer comment Faye nous les rapporte dans son *Cours d'astronomie et de géodésie* de 1881²⁶. Cet astronome relève des objections de plusieurs types. Constatant que l'emploi du calcul

²⁴Nous renvoyons à Stigler, *The History of statistics* op.cit. p. 148 et ss, C.C. Heyde et E. Seneta I.J. Bienaymé : *Statistical theory anticipated*, New York, Springer-Verlag, 1977, O.B. Sheynin, *The History of the Theory of Errors*, op. cit. p. 139-141, I. Schneider "Laplace and Thereafter: The status of Probability Calculus in the Nineteenth Century" in *The probabilist revolution* volume I édité par L. Krüger, L.J. Daston et M. Heidelberger, Cambridge, 1990, p. 189-210.

²⁵On trouvera dans CRAS, 1853, Tome XXXVI, n°26, p. 1114-1122; Tome XXXVII, n°1, p. 5-13; n°3, p. 64-69; n°4, p. 100-109; les diverses communications relatives à cette polémique.

²⁶J. Bertrand, dans *Calcul des probabilités*, 1888, donnera à peu près les mêmes. Cournot avait déjà évoqué ces erreurs dans *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris, 1843.

des probabilités, bien que d'origine française, a longtemps été délaissé en France, il regrette d'être obligé d'adopter les notations et les règles de Gauss. D'après lui:

"Le discrédit, qui a longtemps frappé chez nous la méthode de Legendre, complétée par Gauss, tient à deux préjugés."²⁷

Quels sont ces deux préjugés?

1) Premier préjugé

Il résulte de l'opinion que la méthode des moindres carrés ne s'applique légitimement qu'à un grand nombre d'observations.

Mais qu'entend-on par grand nombre d'observations? Personne n'a jamais défini ce grand nombre!

De plus, ceux qui font cette objection n'hésitent pas à appliquer à une douzaine d'observations ou même à deux, la règle de la moyenne arithmétique, forme particulière de la méthode générale.

Faye pense que la question n'est pas dans le grand nombre mais dans le nombre suffisant. Il en donne la définition suivante:

"Un ensemble de mesures ou d'équations de condition comporte légitimement l'application des méthodes précédentes lorsque les résidus manifestent nettement la loi de probabilités des erreurs fortuites."

Quand est-il légitime d'utiliser la MMC? Faye cite un exemple pour illustrer l'énoncé précédent. Il présente une situation où dans un cas avec seulement 9 mesures on peut appliquer cette méthode tandis que dans un autre cas avec 19 mesures on ne peut même pas prendre une simple moyenne, "les écarts ne suivant pas la loi de probabilité des erreurs accidentelles".

2) Deuxième préjugé

Il s'appuie sur le fait que, parfois, des éléments importants, obtenus par cette méthode avec une erreur probable très faible, ont été trouvés ultérieurement en défaut de quantités bien supérieures à la dite erreur probable.

Quels sont les exemples cités par Faye pour illustrer cette opinion?

²⁷Faye *Cours d'astronomie et de géodésie* 1881, Tome 1, Livre III, chapitre XII, p. 230 et ss

a) Encke déduit de la discussion des passages de Vénus sur le Soleil observés en 1761 et 1769, la parallaxe du Soleil : $8",53 \pm 0",0370$. Il y a donc 1 contre 1 à parier que la vraie parallaxe est comprise entre $8",53$ et $8",61$ (Or nous savons aujourd'hui que la parallaxe est de $8",80$). A la suite d'une discussion qui s'instaure sur la probabilité de faire une erreur, Faye trouve 1 contre 100000 pour une erreur correspondant à l'écart ci-dessus.

b) Newton a déduit, des mesures exécutées par Pound sur les satellites de Jupiter, la masse de cette planète: $1/1067$ de celle du Soleil. Plus tard, Bouvard trouve la fraction $1/1070$. Laplace applique le calcul des probabilités et trouve qu'il y a un million à parier contre 1 que la valeur $1/1070$ n'était pas en erreur de $1/100$ de sa valeur. Or, peu d'années après, les astronomes sont obligés de l'augmenter du double de cette quantité et de porter cette masse à $1/1050$ de celle du soleil.

Dans les deux cas, les astronomes sont déçus. Mais il n'y a aucune raison d'accuser l'emploi de la MMC ou du calcul des chances. Si on a bien compris sa nature, son emploi n'est légitime que dans le cas où les observations ont été purgées de toute erreur systématique sensible! Ce qui n'est pas le cas dans les exemples cités ci-dessus.²⁸

Faye, cependant, pense que l'introduction de la MMC a rendu un grand service aux astronomes car elle a fixé leur attention sur la recherche et l'élimination préalable de ces grandeurs dangereuses.

Voici comment Faye conclut le chapitre XII (tome 1, livre III, 1881) intitulé "Application du calcul des probabilités à la théorie des erreurs":

"Si nous avons insisté longuement sur la méthode des moindres carrés, c'est qu'il est bon de la connaître et de savoir l'appliquer au besoin.²⁹ C'est un moyen puissant de discussion dont les hommes de science tirent parti lorsqu'ils veulent savoir jusqu'à quel point leurs théories, leurs formules s'adaptent à la réalité, ou bien lorsqu'ils veulent obtenir, avec toute la précision possible, des constantes fondamentales dans la Science. Par exemple lorsqu'on a réuni les mesures géodésiques d'arcs de méridien effectuées à grand frais sur tous les continents, afin d'étudier la vraie

²⁸Des explications relatives aux erreurs pratiques d'application de la MMC sont données par Cournot op. cit. et par Bienaymé (1852). La MMC n'est vraiment entrée dans la pratique astronomique et géodésique que tardivement en France, au moment où les premières calculatrices ont été disponibles. Cf. H. Mineur *Méthode des moindres carrés*, collection Borel, 1930.

²⁹Quel enthousiasme peu convaincant!

figure du globe, c'est par la méthode des moindres carrés qu'on devra traiter les équations de condition, dû le calcul durer des mois entiers et exiger tout un personnel de calculateurs."³⁰

Déjà, en 1843, Cournot cite l'exemple relatif à la masse de Jupiter.³¹, et conclut:

" Le défaut de la conclusion de Laplace peut tenir à des termes fautifs ou incomplets dans le développement des formules d'approximation qui donnent les perturbations planétaires, ou à des fautes dans le calcul des équations de condition, [...]. Mais ce défaut peut tenir aussi à ce qu'on a mal à propos admis *a priori* que les mesures de Pound ne comportaient que des corrections très-petites."

C.III. L'entrée dans l'AGI

Après la parution du livre de Liagre, dont ont tout de suite connaissance, comme nous l'avons vu, Faye, Peytier, donc aussi tous les responsables de la géodésie française, comment expliquer que, sous le Second Empire, la France reste relativement coupée des progrès de la géodésie internationale ?

La figure de la Terre est un enjeu important. Il s'agit de déterminer les paramètres de l'ellipsoïde, d'obtenir la courbure de la surface terrestre de manière complète et indépendante. L'idée est donc de déterminer des arcs terrestres (méridiens ou parallèles) les plus étendus possibles et par suite de relier entre eux les différents réseaux existant déjà en Europe. Bien sûr, cela nécessite d'avoir des réseaux ayant été déterminés avec les mêmes exigences et le même degré de précision. A l'initiative de Baeyer, cet essai d'unification des méthodes géodésiques se concrétise par la mise en place de la "Mittel-Europäische Gradmessung". En avril 1861, Baeyer adresse un rapport au Ministère de la Guerre du Royaume de Prusse dans lequel il expose les perspectives scientifiques qu'ouvrirait une coopération officielle des états limitrophes de l'Europe Centrale dans le domaine de la connaissance de la forme de la Terre. Il y joint un texte scientifique: "Über die Grösse und Figur der Erde". Le 20 juin 1861, le Roi de Prusse fait connaître son accord.³² L'objectif est clair: mettre en commun les données géodésiques européennes,

³⁰Dans l'édition de 1926, livre cinquième, chapitre XVIII, p. 60, on lit cette remarque, montrant que l'adhésion à l'utilisation de la MMC n'est pas unanime: "De l'avis de bien des géodésiens, il vaut mieux employer son temps et ses ressources à perfectionner sur le terrain les mesures nécessaires qu'à recueillir des mesures superflues dont on est ensuite incapable de tirer parti dans le cabinet, à moins de calculs très longs et très compliqués, qui n'ajoutent que bien peu de choses à la probabilité des corrections".

³¹Voir Cournot op. cit. p. 162 et les notes de B. Bru p. 328. Ce dernier renvoie à: Newton, *Principia mathematica* ... livre 3, t. II, p. 6-24 dans la traduction de M^{me} du Chatelet; Laplace, OC, XIII, p. 102-103 ou OC, VII, p. 159 et à Poisson, *Jugements*, p. 316-317 où il analyse l'erreur de Laplace.

³²Voir J.J. Levallois qui présente une notice historique de l'AGI dans *Bulletin géodésique*, 1980, Volume 54, n°3.

unifier les méthodes d'observations et de calcul, collaborer dans les recherches. En 1862, les pays suivants ont donné une réponse positive: Danemark, Saxe-Gotha, Pays-Bas, Russie (sans la partie polonaise), Suisse, Hanovre, Belgique, Bade, Saxe, Italie, Autriche, Suède, Norvège, Bavière, Mecklembourg.³³ La première conférence a lieu à Berlin en 1864.

"Il fut décidé dès l'origine, que chaque triangulation devait être soumise à un contrôle sévère, que toutes les mesures de direction ou de longueur dont l'erreur probable dépasserait une seconde sexagésimale au 1/25000 ne pourrait être employées pour les degrés de l'Europe moyenne".³⁴

Nous remarquons l'absence française! En 1864, Le Verrier s'est excusé. La France ne sera représentée aux conférences qu'à partir de 1872. Faye, Villarceau et Perrier seront présents en 1874 et en 1875, date de l'adhésion française. La Commission permanente se réunit à Paris du 20 au 27 septembre 1875.

Mais en fait, la France connaît et suit d'emblée les travaux de cette association. Nous en avons plusieurs témoignages. Dès le début des années cinquante, Faye milite activement pour une réouverture internationale de la géodésie française. D'accord avec Arago, Directeur de l'Observatoire et Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences, il insiste par exemple pour la prise en compte des méthodes télégraphiques américaines.³⁵

Cependant, 1853 est aussi l'année de la mort d'Arago. Le Verrier, personnage déjà tout puissant et dictatorial du Second Empire autoritaire, va alors diriger l'Observatoire, y créer une atmosphère irrespirable. Faye va donc se heurter à ce nouvel obstacle. S'il est vrai que Le Verrier (avec son fidèle Villarceau) se livre dès les années cinquante à des mesures précises utiles à la géodésie, il est tout aussi vrai qu'en coupant l'Observatoire du Bureau des longitudes, et en étant réticent quant aux liaisons internationales des savants français, il contribue lui aussi à accentuer l'isolement de la géodésie française.

* En 1862, le Bureau des Longitudes obtient la possibilité de donner des avis sur les questions scientifiques relatives à la géophysique, à la géodésie et à l'astronomie. Il crée alors une commission qui adopte un rapport à la fin de l'année. Les commissaires

³³Dans les Archives de l'Observatoire de Paris, Fonds DANJON carton 3 Ms 1060 II B 2, se trouve un imprimé, daté de novembre 1862 de J.J. Baeyer, relatif au rapport général sur la mesure des degrés. Une lettre manuscrite, traduction de ce rapport datée du 20 janvier 1863, nous apprend : "Dans le registre suivant sont exposés, d'après l'ordre des déclarations envoyées par les états, les noms des délégués respectifs qui participent à la mesure de l'Europe centrale. La France, quoique refusant de participer directement, parce que le projet ne touche qu'une partie de son territoire, permet d'utiliser les matériaux dont elle dispose. Elle a autorisé Mr le général Blondel, directeur du Dépôt de la Guerre de se mettre en rapport directement avec Mr le général lieutenant Baeyer."

³⁴Notice d'Adan sur l'AGI, mars 1876, Bruxelles, p. 8.

³⁵Voir par exemple J.J. Levallois, p. 128, 138-9.

sont Delaunay et Laugier; le rapporteur est Faye. Ce rapport: "Sur l'état actuel de la Géodésie et sur les travaux à entreprendre par le Bureau des Longitudes, de concert avec le Dépôt de la Guerre, pour compléter la partie astronomique du réseau français", très complet sur l'état des travaux en Europe, conclut à la nécessité de créer un établissement semblable à l'Ordonnance Survey anglais, consacré uniquement aux études, aux calculs et aux observations géodésiques, établissement dont le Dépôt de la Guerre possède les principaux éléments.³⁶ Il est évident que ce rapport est dirigé contre les vues de Le Verrier.

* On conçoit donc que le Bureau des Longitudes va se trouver naturellement en phase avec de nombreuses propositions de Baeyer. Faye rend l'année suivante un rapport relatif au "Protocole de la Conférence géodésique" tenue à Berlin en avril 1862³⁷. En voici quelques extraits:

"L'Europe serait couverte d'un immense réseau où la science puiserait pour ainsi dire à pleines mains les éléments numériques des plus importantes recherches, tant sur la figure mathématique du globe terrestre que sur les irrégularités locales dont cette figure porte l'empreinte."

Faye souligne l'importance de ce projet "sorte d'association géodésique allemande". Il reconnaît la part de progrès accomplie en Allemagne "plus théorique que pratique" selon lui. Il qualifie l'application de la MMC aux calculs géodésiques "des plus heureuses." Seulement "les petits arcs de méridiens de Hanovre et de Prusse s'évanouissent pour ainsi dire devant les grands arcs français, anglais, russes; ils n'ajoutent presque rien à la valeur des résultats". L'Allemagne a besoin du concours de ces nations!

Il ne manque pas, en outre, de remarquer que la réunion de Berlin coïncide avec les études que le Bureau des Longitudes a entreprises à la même époque (avril 1862), "en invoquant l'indispensable concours du Dépôt de la Guerre, pour le couronnement du réseau français". Il s'agit de déterminer avec exactitude les coordonnées astronomiques des principaux sommets des triangles français, point faible des triangulations. Les projets français et ceux de Baeyer sont en réalité solidaires: "on parle déjà du grand parallèle européen".³⁸

Suivent divers commentaires de Faye, dont les suivants:

³⁶Ce rapport de 20 pages est publié dans *Connaissance des temps pour 1864*.

³⁷CRAS, n° 56, 1863, p. 28-37.

³⁸Nous donnons à l'annexe 41 un rapport "Sur la triangulation européenne en longitude sous la latitude de 52°" que nous avons trouvé dans les archives de l'ARB. Il est constitué d'une série d'articles donnant les conclusions relatives à la partie astronomique de cette entreprise internationale. On notera là aussi, l'absence de la France. Ce rapport daté d'avril 1863 est signé par Baeyer, Argelander et O. Struve.

"Mais ce qui frappe le plus à la lecture de ce protocole, c'est, après la grandeur du plan lui-même, la volonté exprimée d'introduire dans toutes les parties du travail une complète uniformité de méthodes, soit pour l'observation, soit pour le calcul."

"Les savants allemands semblent compter, pour cela, sur l'emploi du calcul des probabilités; nous, nous serions disposés à compter un peu plus sur l'expérience directe. Or dans la pratique, les choses changent du tout au tout selon que l'on se place à l'un ou à l'autre point de vue.³⁹"

Doit-on les considérer comme des réticences, comme une résurgence des traditions différentes des deux pays ou comme la mise à plat de problèmes bien réels sur lesquels il faudra réfléchir ? Une étude plus précise serait nécessaire pour analyser cet ensemble. Ce qui doit être noté ici, pour poursuivre notre propos, c'est que Le Verrier s'empresse de "compléter" cet exposé de Faye en précisant que l'Observatoire impérial de Paris a toujours rendu compte de ces études relatives aux longitudes aux autres pays et qu'il apportera "à la Conférence des géodésistes et astronomes allemands tout le concours qu'elle voudra bien réclamer".⁴⁰ En fait, on voit aisément que ce "complément" de Le Verrier, prend autant qu'il le peut le contrepied de son collègue et minimise l'ampleur des tâches à accomplir, invitant simplement à poursuivre l'oeuvre de Delambre et Méchain, "en lui appliquant les perfectionnement que réclame l'état incessamment progressif de la science, mais avec réserve et intelligence"⁴¹. En d'autres termes, les difficultés institutionnelles rencontrées en France entre Bureau des Longitudes, Dépôt de la Guerre, Observatoire de Paris, trois institutions qui doivent s'entendre pour mener à bien les travaux géodésiques sur le territoire français, perdurent!⁴²

* En fait, la conscience du retard de la géodésie française est générale vers la fin du Second Empire. Même Villarceau, proche de Le Verrier, écrit en décembre 1866:

" Sous le rapport de l'exactitude des grandes opérations géodésiques, nous sommes aujourd'hui dépassés par la Russie, l'Angleterre, l'Allemagne, l'Amérique, et si nous n'y prenons garde l'Espagne, l'Égypte et le Portugal nous dépasseront peut-être demain. Nous touchons par nos

³⁹ Dans ce passage, Faye parle du traitement des anomalies locales.

⁴⁰ Nous avons confirmation des propos de Le Verrier dans un manuscrit "Résumé des rapports annuels sur les travaux de Commission centrale de la MittelEuropäische Gradmessung ; Année 1863 à 1869" (Archives de l'Observatoire de Paris, Fonds DANJON carton 3 Ms 1060 II B 2). Nous donnons uniquement l'intégralité des extraits concernant la France à l'annexe 41.

⁴¹ Nous retrouvons cette idée exprimée dans une lettre de Le Verrier à son collègue Michel Chevalier datée du 10 octobre 1869. (cf. Archives de l'Observatoire de Paris, Fonds DANJON carton 3 Ms 1060 II B 2). Le texte de cette lettre se trouve retranscrit à l'annexe 43.

⁴² Nous renvoyons le lecteur à l'ensemble du n°56 des CRAS, par exemple au rapport de Delaunay p. 149: "Sur la géodésie française ...". J.J. Levallois, p.131, remarque que ces querelles "ont attiré l'attention des hautes autorités sur la nécessité de moderniser le réseau géodésique des ingénieurs géographes".

fronts à la Belgique, l'Allemagne, la Suisse, l'Italie et à l'Espagne et notre réseau de triangles ne peut être lié aux triangles qui couvrent ces pays à cause de ses défauts.⁴³

Le constat est sévère. La France, une des grandes nations en matière de géodésie au XVIII^{ème} siècle, se trouve au banc des accusés. Villarceau propose un plan afin que "la France reprenne dans la science une place qu'elle n'aurait pas dû laisser s'amoinrir". Il adresse une requête au Ministère de l'Instruction Publique montrant les relations difficiles entre les trois institutions citées ci-dessus et un partage des tâches ne facilitant pas un concours entre les déterminations géodésiques et astronomiques des sommets des triangles. Nous avons d'autre part un témoignage des contacts existant entre la France et Berlin:

"Les représentants de la Géodésie dans divers états de l'Europe se sont rassemblés à Berlin, au mois d'octobre dernier (1867). Les deux présidents de cette conférence internationale, M. le général Baeyer pour la Prusse et M. Struve pour la Russie, avaient bien voulu antérieurement se réunir avec nous à l'Observatoire impérial de Paris le 11 Août dernier. Là, nous avons examiné, avec un soin scrupuleux, la situation géodésique, en ce qui concernait la France, et nous sommes tombés unanimement d'accord que la première contribution qu'on devait demander à notre pays était de revoir certaines parties de ses triangles, comme nous l'avons proposé.

On voit donc qu'il y a un complet accord entre la Conférence de Berlin et la France en tant qu'il dépend de l'Observatoire de Paris. Puisse cette partie de notre communication parvenir à rassurer ceux qui, après avoir naguère soutenu que la géodésie française était terminée et qu'il n'y avait pas lieu d'y rectifier quoique ce soit, font entendre aujourd'hui des doléances parce que la France n'est pas allée prendre des ordres à Berlin. On s'est entendu à Paris."

Ainsi des contacts sérieux existent entre la France et Berlin. Mais, d'après ces écrits, nous sentons bien des blocages venant des institutions françaises en jeu.⁴⁴ L'accord est difficile entre ces institutions et le choix du délégué officiel à envoyer à Berlin est certainement délicat.

Il existe donc des prises de conscience importantes de certains dans les milieux français: Faye, professeur à l'École polytechnique, rapporteur à l'Académie des sciences; Peytier, le géodésien au Dépôt de la Guerre; Villarceau, l'astronome de l'Observatoire de Paris. Un apaisement va apparaître à la fin du Second Empire, une nouvelle commission

⁴³Extrait d'un exposé de Villarceau "Sommaire des travaux géodésiques exécutés par les savants français et proposition d'une nouvelle mesure de la méridienne de Dunkerque" (Observatoire de Paris. Documents divers (1854-1872) Tome 3-4 cote 3567).

⁴⁴Les échanges entre Faye et Le Verrier rapportés dans les CRAS de l'année 1863 sont révélateurs de ces blocages. Nous les donnons à l'annexe 42.

au Bureau des Longitudes s'adjoindra Villarceau. Avec le retour d'Algérie de F. Perrier⁴⁵, les projets sont là et la modernisation de la géodésie française est à portée de main. Les premières opérations commencent avant la guerre franco-prussienne.

⁴⁵Ce dernier écrit, en relatant le rattachement franco-anglais auquel il a participé en 1861: "La comparaison fut éclatante. J'en fus si profondément frappé que je résolus dès lors de consacrer ma vie à la régénération du service géodésique de l'Armée, si tristement tombé en défaillance". Lors de la jonction avec l'Algérie, Perrier utilisa pour la première fois la méthode de réitération avec le cercle de Brünner. Ce théodolite de Brünner sera aussi utilisé vers 1870 lors de la nouvelle mesure de la Méridienne de Paris.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous avons proposé d'apporter une contribution à l'analyse du basculement de la domination française vers la domination allemande en géodésie, puis d'esquisser quelques comparaisons entre ce cas spécifique de la géodésie et le déclin progressif de la science française au milieu du XIX^{ème} siècle jusqu'au réveil amer et laborieux après la défaite de 1870-1871.

Avant de procéder à un premier bilan sur ce type de questions, rappelons que notre travail n'est ni une thèse d'histoire de la géodésie, ni une histoire du calcul des probabilités et de la théorie des erreurs. Nous nous sommes délibérément placée au carrefour de ces deux fils conducteurs, nous n'avons donc pu embrasser qu'une partie de chacune de ces disciplines, et cela au cours des décennies 1830 à 1860. Nos réponses ne pourront donc qu'être modestes.

Que pouvons-nous donc ajouter aux analyses bien connues? Rappeler l'essoufflement d'un pays qui a trop longtemps dominé la science, le réveil d'un autre qui cherche son unité; évoquer les divers blocages institutionnels en France (souvenons nous des tensions qui règnent entre le Bureau des Longitudes et l'Observatoire de Paris et la position instable du "Corps" des ingénieurs géographes); relever le peu d'intérêt pour les questions théoriques en France alors que dans différents états allemands existe un lien étroit entre la théorie et le terrain; signaler les différences d'envergure des diverses personnalités, Puissant d'un côté, Gauss et Bessel de l'autre.

Notre analyse permet de dégager au moins deux phases. La première, progressive, dure jusque vers le milieu du XIX^{ème} siècle. Les responsables des institutions scientifiques françaises font preuve d'une certaine suffisance, due à leurs succès passés; ils ne s'abaissent guère à lire l'allemand. Il est vrai qu'à l'Observatoire de Paris, depuis la parution de la revue allemande *Astronomisches Jahrbuch*, une connaissance élémentaire de la langue allemande est nécessaire. On trouve dans la bibliothèque de l'Observatoire ou de l'Académie des Sciences, certaines traductions d'extraits d'ouvrages allemands, portant surtout sur l'astronomie mais fort peu de traductions de textes mathématiques. Il

est d'ailleurs possible que les traducteurs de cette époque n'aient pas eu de véritable formation scientifique. Les Français restent largement inconscients des avancées non seulement outre-Rhin, mais même dans d'autres pays. La seconde phase devient très marquée à partir de 1853, c'est-à-dire après la parution du livre de Liagre et de la visite de ce savant officier à Paris; la plupart des responsables, à commencer par les deux principaux, Faye (pour le Bureau des Longitudes et l'Académie) et Peytier (pour le Dépôt de la Guerre), prennent conscience du retard des techniques françaises de géodésie. Les résistances aux progrès sont dues d'abord à l'inertie des militaires, puis perdurent du fait de l'autoritarisme et du sectarisme de Le Verrier et de ses soutiens politiques. L'incurie progressive du Second Empire ne permet pas à la France de nouvelles avancées en géodésie au moment où les Prussiens développent de nouvelles méthodes et prennent l'initiative de créer l'Association géodésique internationale qui assure leur suprématie sur la discipline. Les géodésiens belges jouent un rôle important dans le passage d'une phase à l'autre chez les Français.

Ceci dit, il ne faut pas donner à cet exemple de la géodésie plus de portée qu'il n'en a. Un processus analogue se déroule dans d'autres domaines scientifiques ou militaires, ne serait-ce qu'en mathématiques ou en artillerie. Là, le détour belge est moins clair; il est, de plus, difficile d'accuser le mépris des questions théoriques et la méconnaissance du calcul des probabilités d'être à l'origine du déclin relatif de l'artillerie française face à son homologue prussienne: on sait au contraire que les polytechniciens français deviennent au cours du XIXe siècle les porte-drapeaux (certes méconnus) des méthodes probabilistes, et que la redoutable efficacité de l'Artillerie française pendant la Première guerre mondiale sera largement reconnue.

Notre étude souligne aussi quelques remarques trop facilement oubliées dans les études d'histoire des mathématiques: le caractère fondamental de la collaboration entre astronomes, constructeurs d'instruments, mathématiciens, observateurs et calculateurs. En géodésie, cette collaboration est indispensable pour garantir une bonne précision et une fiabilité des résultats, notamment quant à leur utilisation future. L'histoire de la géodésie ne peut donc ignorer les progrès technologiques d'un pays: progrès en mécanique de précision, en optique, apparition de nouvelles tables de calcul, de machines à calculer... Mais les progrès scientifiques relatifs aux calculs des probabilités, à la théorie des erreurs, aux calculs d'approximations font aussi partie intégrante de l'histoire de la géodésie. Rien ne le montre mieux que le rapport de Meyer de 1846. Parti enquêter en Allemagne, ce mathématicien belge revient avec des documents éclairants sur les nouvelles méthodes utilisées en géodésie et finalement, une question apparaît

déterminante pour la période étudiée, alors qu'elle ne l'était peut-être pas au départ: la prise de conscience, dans les milieux de géodésiens, de la nécessité de compenser un réseau géodésique; et pour ce faire, le seul outil dont on peut disposer à l'époque est la méthode des moindres carrés. Cette démarche sera féconde de progrès tant sur le plan des théories mathématiques que sur celui de la conduite pratique des calculs.

Prenons un témoignage important: celui de l'Association géodésique internationale un peu plus tard, dans les années soixante-dix. Des compensations sont faites dans chacun des pays européens, mais de façon autonome. De ce fait, à l'issue de la période étudiée dans cette thèse un problème reste entier: de quelles manières traiter les matériaux fournis par l'observation afin de relier entre eux les différents réseaux existants? Signalons, pour une étude à venir, qu'après 1860, les méthodes probabilistes allemandes se sont répandues et deviennent peu à peu familières surtout avec les progrès des machines à calculer. Réunie en octobre 1876 à Bruxelles, la commission permanente de l'Association géodésique internationale met à son programme plusieurs questions. Intéressons-nous aux questions 5a et 5b qui soulèvent des problèmes non résolus à l'époque: Doit-on dans la compensation d'un réseau reliant deux bases ou deux côtés limitrophes introduire comme "équation de condition" l'accord absolu entre ces deux bases ou ces deux côtés? Comment séparer les réseaux pour constituer des groupes permettant de réaliser une compensation d'ensemble? La mise en discussion de ces questions soulève une polémique importante relative à la liberté des milieux scientifiques. Comment concilier les exigences des programmes établis à l'échelle internationale et la liberté des milieux scientifiques? Le Dr Hirsch, suisse, regrette que plane "la crainte imaginaire de voir la liberté de la science compromise par l'entente à laquelle nous espérons arriver sur la convenance de suivre certaines méthodes plutôt que d'autres." Il souhaite qu'une discussion scientifique et objective puisse permettre d'élucider certains points douteux et qu'il soit licite, après une étude sérieuse de déclarer tel procédé préférable à tel autre pour l'avancement de l'oeuvre commune. Il trouve décevant que certains se sentent obligés dans une telle association de rappeler que "La Science n'est localisée dans aucun pays et dans aucune personne." Faye demande que chaque pays conserve sa liberté d'action; sous cette condition, il accepte qu'une commission spéciale fasse une enquête sur les points 5a et 5b et fournisse une base à l'appréciation des délégués des Gouvernements. Ce débat n'est-il pas devenu encore plus actuel aujourd'hui? Les pays dominateurs (la Prusse alors, d'autres aujourd'hui) imposent leurs méthodes, pas uniquement dans l'intérêt de la science désintéressée. Cependant les avis sur la question 5a sont presque unanimes: il convient d'abord de compenser les réseaux ou les chaînes de triangles sans avoir égard à l'accord des bases et des côtés de

jonction entre lesquels ils s'étendent puis d'étudier par quelles méthodes il sera possible de faire concorder toutes les bases et tous les côtés de jonction sur l'ensemble du territoire européen. Une idée suggérée par Adan (Belgique) est de faire entrer les portions d'arcs dans le calcul définitif avec des poids différents. Faire autrement préjugerait une réponse à la question fondamentale:

"Jusqu'à quel point on pourra envisager tout le continent européen comme appartenant à une seule et même surface de révolution et dans quelles limites on pourra étendre et confondre les ellipsoïdes osculateurs auxquels conduiront les observations géodésiques et astronomiques faites dans les différents pays"¹

De même, quant à la question 5b, chacun reconnaît que la compensation par groupe est inévitable pour les réseaux d'une certaine étendue. Quelques règles semblent utiles: chaque groupe doit contenir une base et au moins deux points astronomiques; d'autre part comme le suggère Liagre, la délimitation des groupes ne doit pas forcément tenir compte des frontières mais "doit s'étendre sur toute la surface terrestre pour laquelle on se croit en droit d'adopter un seul et même ellipsoïde osculateur".

Ferrero dans son rapport sur les questions 5a et 5b insiste sur l'importance qu'il faut accorder au degré de précision des résultats et sur la légitimité d'une compensation.

"Lorsque l'on a un système d'observations qui ne satisfait pas aux conditions géométriques du réseau, l'on peut dire que ce système est géométriquement impossible. La compensation a pour but de faire disparaître cette impossibilité en substituant au système des quantités un nouveau système qui satisfait aux conditions géométriques. Mais la légitimité de cette substitution doit être établie par des considérations inhérentes à la nature du problème. Soit a une des observations, a' sa valeur compensée, la quantité a est impossible géométriquement, mais la quantité corrigée a', qui est possible géométriquement, pourrait être impossible comme observation si la valeur de la différence a' - a, ou de la correction apportée à l'observation, était supérieure aux erreurs d'observations. (...). C'est pour cette raison que je trouve louable la méthode de quelques observateurs de donner non seulement l'erreur probable du résultat, mais aussi l'erreur probable d'une observation directe."²

¹ Intervention du professeur Hirsch, 24 juillet 1877 in *Comptes rendus des séances de la V^{ème} Conférence géodésique internationale* à Stuttgart, p. 239, publié en 1878.

² Rapport de Ferrero, in *Comptes rendus des séances de la V^{ème} Conférence géodésique internationale* op. cit. § 8, p. 222-223.

Revenons à l'idée la plus importante, pour nous, qui s'est dégagée au cours de la recherche menée dans cette thèse : les progrès théoriques sont rendus nécessaires mais également possibles par les avancées des techniques; vont de pair les développements et les améliorations de l'efficacité des calculs pratiques. Tous ces développements sont, de manière cruciale, favorisés ou freinés par le contexte politique et social. En France, depuis la suppression du Corps des ingénieurs géographes en 1831, on assiste à une division des compétences entre les militaires d'une part, et d'autre part deux écoles différentes d'astronomes, ceux de de l'Observatoire de Paris et ceux du Bureau des Longitudes. Ces oppositions ne facilitent pas une osmose entre les aspects théoriques et les aspects pratiques intervenant en géodésie. D'autre part, le long règne de Puissant au Dépôt de la Guerre puis la mégalomanie de Le Verrier, directeur de l'Observatoire de Paris pendant une vingtaine d'années, ont ralenti les prises de décisions qui auraient pu permettre de favoriser les progrès possibles de la géodésie française. En effet, dès 1853, les Français ont découvert les méthodes allemandes dans le traité de Liagre puis dans la traduction française, par Bertrand en 1855, des articles de Gauss relatifs à la méthode des moindres carrés . La Belgique, dans les années 1840-1860, est un maillon exemplaire de l'histoire de la géodésie européenne. Elle a favorisé la réception des méthodes allemandes, et plus particulièrement dans les milieux français. Son regard nous a permis de mieux approcher la période et le thème étudiés. Nous ne parlerons pas cependant à son sujet de révolution géodésique; mais qu'advierait-il des idées nouvelles sans diffusion? qu'advierait-il d'idées théoriques sans application? Baeyer le savait, lui qui dans l'introduction de *Die Küstenvermessung* écrit:

"Cependant si quelqu'un compare le chemin que j'ai suivi à celui que Bessel a montré d'une main de maître dans la mesure du degré, il se demandera à juste raison, pourquoi j'en ai dévié. Je dois donc indiquer plus précisément le point de vue dont je suis parti. Bessel écrivait en tant que savant à des savants: la tâche à laquelle j'ai cru devoir m'atteler au contraire était d'écrire en tant que praticien à des praticiens." ³

La Belgique est dans ces années-là un vaste chantier où les méthodes allemandes sont expérimentées, améliorées, publiées, enseignées. Les géodésiens belges commencent à utiliser ces nouvelles méthodes sur leur territoire, de faible superficie, comme est le territoire du Hanovre sur lequel Gauss a développé sa méthode. Convaincus de l'intérêt de ces procédés, ils testent leurs limites surtout sur le plan des calculs. L'adaptation à des réseaux de plus en plus vastes est envisagée. Les débats qui suivent au sein de l'Association géodésique internationale en sont l'écho. L'étude systématique de

³ L'intégralité de la traduction de l'introduction se trouve à l'annexe 13.

ces débats pourrait apporter un éclairage sur la dichotomie et la nécessaire articulation entre science locale et science internationale, science théorique et science pratique.

Ce fragment d'histoire des sciences illustre un double processus d'échanges féconds entre deux pays. Au moment de son indépendance, la Belgique fait appel à des cadres de formation française pour mettre en place ces nouvelles institutions; quelques décennies plus tard, elle participe à la diffusion d'idées nouvelles permettant une prise de conscience indispensable pour assurer les progrès de la géodésie française.

La mise en place à un niveau international d'un réseau géodésique afin de préciser la forme de la Terre est déjà un exemple d'une "Big Science" avant le XX^{ème} siècle. Cette étude a mis en évidence l'importance de différents facteurs, toujours d'actualité, décisifs en histoire des sciences : rôle des institutions et des hommes occupant des postes clés, modes de communication entre les savants et les ingénieurs, moyens d'échanges existant entre les milieux scientifiques des différents pays, élaboration de protocoles conciliant les exigences des programmes établis à l'échelle internationale et la liberté des milieux scientifiques.

BIBLIOGRAPHIE

ARCHIVES

Archives à l'Académie royale de Belgique

Inventaire de la correspondance d'Adolphe Quetelet par Liliane Wellens-De Donder, Bruxelles, Palais des Académie, 1966, 299 p.

Liasse 15 École militaire

Liasse 76 Notes relatives à la géodésie

Liasse 275 Correspondance avec Baeyer (1849 à 1864)

Liasse 324 Lettres de Beaulieu (1842 à 1852)

Liasse 332 Lettres de G. Beer (1839 à 1841)

Liasse 467 Lettres de Brouillart (1846)

Liasse 649 Chapelié

Liasse 529 Correspondance avec Baeyer (1830 à 1860)

Liasse 1083 Gambey à Quetelet (1839 à 1842)

Liasse 1102 Lettres de Gauss (1836 à 1842), au sujet des observations magnétiques.

Liasse 1342 Lettres de Houzeau à Quetelet (1844 à 1854)

Liasse 1577 Lettre de Lenoir (1829) au sujet du cercle répétiteur

Liasse 1599 Correspondance avec Le Verrier 1846 à 1869)

Liasse 1605 Correspondance avec Liagre (1841 à 1867)

Liasse 1825 Lettres de F. Folie (1874)

Liasse 1890 Correspondance Nerenburger de 1836 à 1867

Liasse 1933 Correspondance avec A. Outies

Liasse 1937 Correspondance avec Pagani (1825 à 1852)

Liasse 2305 Lettres de Simms (1834)

Liasse 2494 Lettres de Vandermaelen (1828 à 1867)

Liasse 2659 Calculateur mental

Liasse 2767 Rapport sur le spécimen d'une carte de Belgique au 20 000^e présenté par Vandermaelen, par Nerenburger, 1844

Liasse 2774 Courrier avec le ministère de l'Intérieur de 1834 à 1858.

Liasse 2985 Nerenburger à Mme Quetelet
Liasse 3090 Lettre et questionnaire envoyé par l'A.G.I (1875-1876)
Liasse 3092 Rapport d'Ernest Quetelet sur le projet du général Baeyer d'une triangulation européenne
Liasse 3127 Bessel à Schumacher (1827)
Liasse 3167 Lettre de Houzeau à Bailly (1855)

Inventaire des Archives de l'Académie Royale de Belgique
1769-1984, Bruxelles, 1986

Liasse 2766 Correspondance avec le ministère de la guerre

Liasse 2768 Concerne le rapport paru au moniteur belge du 14 juin 1847.

Liasse 2769 Dossier relatif à la collaboration de A. Quetelet à la nouvelle triangulation du royaume en déterminant l'azimut du côté observatoire.

Liasse 4990 A. Meyer, Rapport sur les méthodes géodésiques en usage en Allemagne.

Liasse 5017 Une note déposée par Nerenburger et Quetelet relative à un projet sur les moyens d'exécution de la triangulation du royaume et 8 lettres relatives à la triangulation du royaume 1847

Liasse 5043 Au sujet d'une note de Meyer

Liasse 5160 Rapport de Nerenburger sur le travail de Brasseur

Liasse 7181 Mémoire de Meyer

Liasse 7233 Liagre: rapports et correspondance 1848-1849

Liasse 7234 Rapport de Nerenburger: "Sur une méthode propre à faire trouver la collimation d'une lunette méridienne au moyen des observations astronomiques" 1849 (commissaire Quetelet)

Liasse 7558 Nerenburger et Donny 1849: Enveloppe scellée renfermant une note sur un instrument propre à mesurer la distance d'un point où l'on stationne sans pouvoir s'en écarter, à un autre point éloigné du premier de 2 à 3000m au plus.

Liasse 8042 Dossiers Personnels

Liasse 8060 Dossier personnel de Meyer

Liasse 8068 Nerenburger: Dossier personnel après décès

Liasse 8818-8842 Fonds J.B Liagre

*Liasse 8821 Correspondance avec J.C.Houzeau

*Liasse 8834 Correspondance avec Baeyer

*Liasse 8835 Correspondance avec Nerenburger

Archives de l'Ecole militaire de Bruxelles

Il ne se trouve pratiquement plus d'archives correspondant à la période étudiée. Le conservateur du Musée de l'armée pense que les archives militaires en 1914 ont été envoyées à Potsdam (pour maintenir la neutralité belge) puis en 1940, elles auraient été transférées à Moscou!

Archives du Musée de l'Armée de Bruxelles

Dossier 525: Nerenburger

Dossier 3467: Liagre J

Carnet de "la Fourragère" n°5 (15° série), 1964

Fonds Jolly: Les cartons 7, 8, 9, 22, 27, 28, 29 ont été regardés en détail.

CI VII 3430: Cours de géodésie et Cours de topographie de 1845, don de M de Broelse du 7-4-1927; Cours de Géodésie de 1867, don de Mme De Minck mai 1944 ainsi qu'un cours de Géologie de 1870 etc.

CI VII 3590 Des cours de constructions de cartes des années 1854, 1862, 1872, 1879, 1910

CI VII 3528 Cours de topographie du professeur Maury 1923, 332p.

CI VII 3480 Historique de la Triangulation en Belgique J. Loodts 1969.

Archives du Service Historique de l'Armée à Vincennes

Dossier personnel de Nerenburger XO 12

Dossier sous-série XO cote 147: Registre des élèves 1818-1830

Dossier sous-série XO cote 168: Registre des professeurs et des employés à partir de 1841

Dossier XO15 Programme des cours 1818-1914

Dossier personnel d'Epailly n° 29.172 (3YF)

Dossier personnel de Salneuve n° 27 031 (4YF)

Dossier personnel de Peytier n° 89983 (3YF)

Archives de l'Ecole polytechnique

Cours manuscrits de Géodésie de Chasles, de Faye

Archives de l'Académie des Sciences

Dossier personnel de L. Puissant

Dossier personnel de F.G.W. Struve

Archives de l'Observatoire de Paris

Fonds manuscrits DANJON: Carton 3 *Ms 1060 II B 1 La géodésie en France

*Ms 1060 II B 2 La géodésie

activité internationale

*Ms 1060 IV B 5 Relations avec les

sociétés étrangères

*Ms 1060 II C Le bureau des

Longitudes

REVUES

Nous avons consulté:

Correspondance mathématique et physique, de A. Quetelet, Bruxelles, Années 1825, 1826, 1827, 1828, 1829, 1830.

Publikationen der Zentralbureau der Mitteleuropäischen und Europ Gradmessung, Berlin 1861-1884

Conférence géodésique internationale pour la mesure des degrés en Europe, Comptes rendus des années 1871, 1876, 1877, 1878, 1880, 1883, 1884, 1887, 1889, 1890, 1891, 1893 1895, 1896, 1897, 1905, 1907, 1908, 1910, 1911.

Bulletin de l'Académie des Belles-lettres et des Sciences de Bruxelles Bruxelles, Années 1834 à 1839, 1842 à 1854, 1880, 1881, 1887.

Mémorial du Dépôt de la Guerre, Paris, Tome I à X, depuis sa création 1802 jusqu'à 1875. (Pour le détail du contenu des différents tomes, voir annexe).

Bulletin de la Société de Géographie, Paris, Années 1822 à 1861

Le Journal de Bruxelles , Année 1846.

MANUELS ET TRAITÉS

- BÉGAT P., *Traité de Géodésie à l'usage des marins*, Paris, 1839
BERTRAND J., *Calcul des probabilités*, 2^e éd., 1907
BOURGEOIS R., *Géodésie élémentaire*, Paris, 1908
BOURGEOIS et NOIZET, *Géodésie élémentaire*, Paris, 1948
CHASLES M., *Cours à l'Ecole polytechnique*, 1846.
COURNOT A.A., *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, 1843
Réed. par B. Bru, Paris, Vrin, 1984
DELTHEIL, *Probabilités - Erreurs* 3^eed., Paris, 1929
DIDION I., *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles*, Paris, 1858
DIDION I., *Traité de Balistique*, Paris, 1847, réédité en 1860
FAYE H., *Cours d'astronomie de l'école polytechnique* 1^{er}ed. Paris 1881-1883
FAYE H., *Cours d'astronomie et de géodésie de l'école polytechnique* 1^{er} ed. Paris 1881, 2^e ed., Paris, 1928
FRANCOEUR L.B., *Astronomie pratique*, Paris, 1^{er}éd.1830, 2^{ed}.1840
FRANCOEUR L.B., *Géodésie*, Paris, 1855, 5^eed. 1879
HELMERT F.R., *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, 2 tomes, Leipzig, 1880-1884
HELMERT F.R., *Höhere Geodäsie* , Leipzig, 1880.
HERSCHELL *Traité d'astronomie*, traduit par Cournot, Paris, 1834.
JORDAN W., *Handbuch der Vermessungskunde*, 1880
LACROIX S.F., *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, Paris, 1^{er}éd. 1816, 2^{ed}. 1822
LEFRANCAIS *Cours de Géodésie*, 1834
LEGENDRE *Eléments de Géométrie* , Paris, 1794
LEVALLOIS J.J., *Géodésie Générale* , Eyrolles,1970
PUISSANT L., *Traité de Géodésie*, Paris, 1^e éd. An XIV = 1805; 3^eed. 1842
PUISSANT L., *Traité de Topographie, d'arpentage et de nivellement*, Paris, 1807; *Supplément au second livre*; Paris, 1810
SALNEUVE *Cours de Topographie et Géodésie*, 1841
SONNET *Dictionnaire des mathématiques appliqués*, Paris, 1^o ed.1867; 2^oed.1874
TARDI P., *Traité de Géodésie*, Paris, 1934
TARDI et LACLAVÈLE *Traité de Géodésie*, Paris, 1954

WOLF. *Astronomie et Géodésie*, 1891 (Cours à la Sorbonne, rédigé par Barbier et Bourguignon)

OUVRAGES D'INTÉRÊT GÉNÉRAL sur l'histoire de la géodésie

Nous signalons trois ouvrages donnant des références bibliographiques, indiqués par Pizzetti P. dans son article "Höhere Geodäsie" paru dans *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, VI 1,3, 1906-1925:

BÖRSCH O., *Geodätische Literatur*, auf Wunsch der Permanenten Kommission im Zentralbureau zusammengestellt, Berlin, 1889

GORE J.H., *A bibliography of geodesy*, 2. ed. Report of the superintendent of the U.S coast and geodetic survey 1901-02 Washington 1903-p. 429

SADEBECK B.A.M., *Literatur der praktischen und theoretischen Gradmessungsarbeiten*, Berlin, 1880 (auch im Generalbericht der Europäischen Gradmessung 1880).

Les éditions Konrad Wittner consacrent une série entière à l'histoire de la géodésie et de la cartographie. Citons:

VOLKER Bialas, *Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung. Die Geschichte der Geodäsie als Teil der Kulturgeschichte*, 1985.

GREWE Klaus, *Bibliographie zur Geschichte der Vermessungswesen*, 1985.

* En France

BASSOT. "La géodésie française", in *Bulletin de la Société de Géographie*, Série 7, Tome 12, 1891

BOSCOVICH R.J., et MAIRE C., *Voyage astronomique et géographique, dans l'état de l'église*, Paris, 1770 (cet ouvrage contient une traduction du livre paru à Rome en 1755)

DUPUY M., et DUFOUR H.M., *La Géodésie*, Que sais-je n°1320, Paris, PUF, 1969

Encyclopédie moderne ou Bibliothèque universelle de toutes les connaissances humaines, article "Géodésie", Paris, Duménil, Tome XIII, 1842.

GUEDJ D., *La Méridienne* Seghers 1989

LACOMBE H., et COSTABEL P., *La Figure de la Terre du XVIII^e siècle à l'ère spatiale* Paris, 1988, Académie des Sciences, Gauthiers-Villars.

MARTIN J.P., *La figure de la terre récit de l'expédition française en Laponie suédoise (1736-1737)*

LEVALLOIS J.J., *Mesurer la Terre 300 ans de Géodésie Française : De la toise du Châtelet au satellite*, Presse générale des Ponts et Chaussée, Paris, 1988.

LEVALLOIS J.J., "Notice Historique" in *Bulletin géodésique*, Volume 54, n°3, 1980.

LEVALLOIS J.J., "La méridienne de Dunkerque à Barcelone et la détermination du mètre (1792-1799)" in *Actes du 114^e congrès national des sociétés savantes*, Paris, 3-9 avril 1989.

NOIREL H., "Triangulation géodésique" in *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Tome VI.1 (de 1906 à 1911); réédité chez J.Gabay, 1992

PERRIER G., *Petite histoire de la géodésie*, Paris, PUF, 1939

PERRIER G., "Conférence de géodésie: La géodésie française; La géodésie moderne; La géodésie à l'étranger", Mai 1912 (cote B.U. Sciences, Lyon :51002).

SAIGEY *Petite histoire du globe*, Paris, 1842

* En Allemagne

JORDAN W., et STEPPES K., *Das deutsche Vermessungswesen*, Stuttgart, 1882. (Nous regrettons de ne pas avoir pu consulter cet ouvrage).

PIZZETTI P., "Höhere Geodäsie" in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, VI 1,3, 1906-1925

REINHERTZ C., "Niedere Geodäsie" in *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, VI 1,1, 1906-1925

* En Belgique

LEMOINE-ISABEAU C., *Les militaires et la cartographie des Pays-Bas et de la Principauté de Liège à la fin du XVII^e et au XVIII^e siècle*, Bruxelles, 1984.

LEMOINE-ISABEAU C., *La carte de Belgique et l'Institut Cartographique Militaire 1830-1914*, Centre d'histoire militaire, Bruxelles, 1988 (Cet ouvrage comporte des références très précises sur les archives concernant cette période).

LOODTS I., *Histoire de la triangulation en Belgique*, Bruxelles, 1969

Triangulation du Royaume de Belgique, Bruxelles, 1855-1890. (Pour le détail du contenu des tomes voir la note 125 de la partie AIII de la thèse).

WELLENS-DE DONDER L., *Philippe Vandermaelen 1795-1869*, Catalogue de l'exposition, Bibliothèque Royale Albert 1^{er}, Bruxelles, 1969

*** En Angleterre**

Account of the opérations for the trigonometrical survey of England, 1799

CLARKE J., *Account of the observations and calculations of the principal triangulation*, London, 1858

CRANDALL *Geodesy and last Squares*,

GORE J.H., *Geodesy*, Boston, 1891 (Nous indiquons cet ouvrage à titre d'information mais nous ne l'avons pas consulté).

EVEREST G., *Account of Survey*, 1830, 1847.

SOURCES PRIMAIRES

Remarque: Pour les oeuvres de Liagre, Meyer, Nerenburger, Struve voir les annexes suivantes:

Annexe 14 Liste des publications de Nerenburger

Annexe 16 Liste des oeuvres de Meyer

Annexe 24 Oeuvres de Liagre

Partie A II p. Au sujet des oeuvres de Struve

ADAN E., *Notice sur l'Association Internationale de Géodésie*, 1876

ADAN E., "Notice sur la compensation" in *Bulletin de l'ARB*, Tome L, 1880

ADAN E., *Triangulation du royaume de Belgique*, livre IV et V, Bruxelles, 1880

AIRY G., *On the algebraic and numerical Theory of errors of Observations and the Combination of Observations*, Londres, 1861.

ALEMBERT (D'), Article "Quart de cercle" in *Encyclopédie méthodique; Mathématiques*, Paris, 1785, Réédition du bicentenaire, ACL-éditions, Paris, 1987

ARENDT K., *Luxemburger Porträtgalerie*, Tome I, 1904.

BAEYER J.J., *Die Küstenvermessung* Berlin 1849

BEAUTEMPS, BEAUPRE, DAUSSY *Précis d'opérations géodésiques*, Paris, 1829

- BERGMANS C., Notice sur A.Meyer dans la *Biographie Nationale de Belgique*, Tome XIV, col 765-773. 1897
- BESSEL F.G., "Betrachtungen über die Methode der Vervielfältigung der Beobachtungen" in *Astronomische Nachrichten*, vol.11, n°256, 1834.
- BESSEL F.G., *Astronomische Untersuchungen I et III*, Königsberg, 1815, 1817 et 1841.
- BESSEL F.G., *Fundamenta Astronomiae*, 1818
- BESSEL F.G., *Gradmessung in Ostpreussen*, Berlin 1838
- BESSEL F.G., "Persönliche Gleichung bei Durchgangsbeobachtungen" in *Abhandlungen von F.W. Bessel*, Leipzig, 1875-1876.
- BIENAYME I.J., "Sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés" in *Journal des mathématiques pures et appliquées*, série 1, tome 17, 1852.
- BIENAYME I.J., "Sur un principe que M. Poisson avait cru découvrir et qu'il avait appelé loi des grands nombres" in *Séances et travaux de l'Académie des sciences morales et politiques*, 31, 1855.
- BIVER P.E., *Théorie des Moindres Carrés* Bruxelles 1851
- BLUM M., *Biographie Luxembourgeoise*, tome 2, 1902-1908.
- BORDA J.C. de, *Description et usage du cercle de reflexion*, Paris, 1787.
- BOUVIER L., *Dissertation sur la Théorie des Moindres Carrés* Bruxelles 1848
- BRAVAIS "Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point" in CRAS Tome 9, p.255/332, 1846
- CALLIAS "Rapport sur les instruments pour mesurer les angles. Ht-Rhin" in CRAS, 1848
- CASSINI J., *Eléments d'astronomie*, Paris, 1740
- CASSINI DE THURY *La méridienne de l'Observatoire de Paris*, 1744
- CASSINI DE THURY *Description géométrique de la France*, Paris, 1783
- CATALAN "Remarques sur la théorie des Moindres carrés" in *Mémoires de l'ARB*, 1880-1882, tome XLIII
- BOUGUER. *La Figure de la Terre*, Paris, 1749
- CONDORCET. Le Marquis de *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendus à la pluralité des voix*, Paris, 1785
- DE BEAUMONT E., *Eloge historique de L. Puissant*, lu le 14 juin 1869 à l'Académie des Sciences, Paris, 1869.
- DE TILLY *Discours nécrologique*, 1891
- DELAMBRE J.B., *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc de méridien, précédé d'un mémoire sur le même sujet par Legendre*, Paris, An VII.

- DELAMBRE J.B., *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789 et sur leur état actuel* , Paris, 1810.
- DELAMBRE J.B., *Base du système métrique décimal* 3 vol. Paris 1806-1810
- DELAMBRE J.B., "Compte rendu des travaux exécutés en Angleterre" in *Connaissance des temps de 1818*.
- DELAUNAY "Sur la géodésie française" in CRAS, 1863
- DELAUNAY *Sur l'état actuel de la géodésie*, 1864
- DELPORTE A., *Notice sur les travaux nécessaires pour compléter le réseau géodésique belge*, Bruxelles, 1884
- ENCKE J.F., "Über die Methode der Kleinsten Quadrate" in *Astronomisches Jahrbuch*, 1834 p.249-312; on trouvera d'autres articles à 1835, p. 267-272, 1836 p. 263, Berlin
- FAYE H., "Moindres carrés" in CRAS, tome 80
- FAYE H., "Rapport sur l'Europäische Gradmessung", in CRAS, Tome 56, 1863.
- FERRERO A., "Note sur la possibilité de calculer a priori les poids et la précision d'une triangulation par la simple connaissance de son canevas" in *Int Erdm*, 1880
- FERRERO A., "Note pour l'accord entre plusieurs bases" in *Astronomische Nachrichtung*, n°2316, 1880
- FISCHER. *Lehrbuch der Höheren Geodäsie*, Darmstadt, 1845.
- GALLE A., "Über die Geodätischen Arbeiten von Gauss" in Gauss. C. F *Werke*, Göttingen 1863-1927, Nachdruck Hildesheim: Olms, 1973, (Band IX, 1903).
- GAUSS C.F., *Méthode des Moindres Carrés. Mémoire sur la combinaison des observations* , traduction de J.Bertrand, Paris, 1855
- GAUSS C.F., *Werke*, Band 1-12, Göttingen 1863-1927, Nachdruck Hildesheim: Olms, 1973. On consultera plus particulièrement "Über die Geodätischen Arbeiten von Gauss" , Band IX, A.Galle, 1903.
- GAUSS C.F., *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae Pars Prior*, présenté à la société royale de Göttingen, le 15 février 1821.
- GAUSS C.F., *Theoria Motus Corporum coelestium in sectionibus solem ambientium*, Hambourg, 1809.
- GERLING C.L., *Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie* , Hambourg et Gotha, 1843
- HAGEN G.H.L., *Grundzüge des Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin,1837; 2°ed. 1867; 3°ed. 1882. (Liagre signale cette ouvrage sous le titre suivant: *Théorie des moindres carrés appliquée à la topographie*, 1837)
- HELMERT *Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*, Leipzig, 1872.

HENNEQUIN *Discours nécrologique* 1891

HOUZEAU J.C., *Lettres adressées des États-Unis à sa famille (1757-1868)* Editées par Hassam Elkhadem, Annette Felix, Liliane Wellens-De-Donder, Bruxelles, Centre National d'histoire des Sciences, 1994

JACOBI in *Astronomischen Nachrichtung*, n°523, 1845, p.297

KRAYENHOFF, *Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande*, La Haye, 1815.

LA CONDAMINE *Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral*, Paris, 1751.

LAGRANGE J.L., *Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations; dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités*, 1776; republié dans *Oeuvres de Lagrange*, Paris, 1867-1892.

LAMBERT J.L., *Beyträge zum Gebrauche des Mathematik und deren Anwendung*, Berlin, 1765.

LAPLACE P.S., *Oeuvres Complètes*, Paris, 1878-1912

LAPLACE P.S., *Théorie analytique des probabilités avec suppléments* Paris, 3^e éd., 1820

LAPLACE P.S., "Applications du calcul des probabilités aux opérations géodésiques", 1818 in *Oeuvres Complètes*, Tome VII, Paris, 1878-1912.

LAPLACE P.S., "Mémoires sur les approximations" in *Oeuvres Complètes*, Tome XII.

Le journal de Bruxelles, Année 1846.

Le Moniteur Belge du 14 juin 1847: Rapport de la commission instituée par arrêté royal du 9 février 1846

LEGENDRE *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* Paris 1806

LEGENDRE *Eléments de Géométrie*, Paris, 1^e éd., 1794, 3^e éd., 1800

LEROY A., dans le "Liber memorialis de l'Université de Liège", 1869, col. 438-446.

LE VERRIER U., "Recherches astronomiques" in *Annales de l'Observatoire de Paris*, Tome 1, 1855.

LEVY P., *Calcul des probabilités*, Paris, 1925.

LIAGRE *Calcul des probabilités et théorie des erreurs*, 1^o ed., 1852 / 2^o ed., 1879, Bruxelles

LIAGRE, "Notice sur Nerenburger", in *Annuaire de l'ARB*, Tome 37, Bruxelles, 1871, p.369-389

- LIAGRE, "Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations" in *Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, tome 19, 1852
- LIAGRE, "Sur la probabilité de l'existence d'une cause d'erreur régulière dans une série d'observations" in *Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, Tome 22, 1855
- LINDHAGEN D.G., *Über den geodätischen Theil der norwegischen Gradmessung Operation*, 1854.
- MASCHERONI L., *La géométrie du compas*, 1798, réédition Manom, 1980
- MATHIEU M., "Rappot du 10ème jury. Instrument de mathématiques, de physique, d'astronomie..." in *Exposition Universelle de Paris de 1851. Travaux de la Commission Française sur l'industrie des nations*, Paris, 1855.
- MAUPERTUIS *Le degré du méridien entre Paris et Amiens*, Paris, 1740
Mémorial du Dépôt de la Guerre, Paris
- MERRIMA M., "A list of writing relating to the method of least squares, with historical and critical notes" in *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*, 4, 1877.
- MEYER A., *Leçons de trigonométrie rectiligne*, 1843, Bruxelles
- MEYER A., *Leçons de trigonométrie sphérique*, 78 p. in 8° avec 1 table, 1844, Bruxelles
- MEYER A., *Cours de Géodésie* professé au Dépôt de la Guerre 144 p. in fol., autographié, 1845, Bruxelles
- MEYER A., *Nouveaux éléments de la Goniométrie*, in 8°, 85 p., 1854, Liège
- MEYER A., "Examen critique de la Notice de M.Liagre sur la probabilité de la cause d'une erreur constante dans une série d'observations" insérées dans le tome XXII, 2° partie du *Bulletin de l'Académie de Belgique*, in 8°, 15p., 1857
- MEYER A., *Cours de calcul de probabilités fait à l'université de Liège de 1849 à 1857*, Publié sur les manuscrits de l'auteur par Folie, Bruxelles, 446 pages in 8°, 1874
- MEYER A., "Mémoire sur l'application du calcul des probabilités aux opérations de nivellement topographique" in les *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, tome XXI, 23 p., 1848.
- MEYER A., *Mémoire concernant une proposition géodésique énoncée par Liagre*, communications à l'Académie royale de Belgique, 3 novembre 1855.
- NERENBURGER *Notice sur les triangulations qui ont été faites en Belgique depuis 1617 jusqu'à nos jours* Bruxelles, 1856
- NEYEN A., *Biographie Luxembourgeoise*, tome 1, 1860

- OUTHIER R., (l'Abbé) *Journal d'une expédition au nord en 1736 et 1737*, Paris, 1744.
- PERRIER Mémorial du Dépôt de la Guerre, 1889, tome 12
- PEYTIER "Notes sur les opérations géodésiques" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, Tome IX, Paris, 1853
- PICARD J., *La mesure de la Terre*, Paris, 1671.
- POISSON S.D., "Sur la probabilité des résultats moyens des observations" in *Connaissances des Temps pour l'an 1827*; 1832
- POISSON S.D., *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédés des règles générales du calcul des probabilités*, Paris, Bachelier, 1837.
- PUISSANT L., *Traité de Géodésie* 1° ed., 1805 / 3° ed. 1842, Paris
- PUISSANT L., Discours préliminaire in Mémorial du dépôt de Guerre Tome 6 1832
- QUETELET A., Rapport de la commission instituée par arrêté royal du 9 Février 1846 in *Le Moniteur belge* du 14 juin 1847
- QUETELET A., *Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les belges*, 1864, Bruxelles
- QUETELET A., *Histoire des Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIX^{ème} siècle*, Bruxelles, 1866.
- QUETELET A., *Astronomie élémentaire*, Paris, 1826
- QUETELET A., *Instructions populaires sur le calcul des probabilités*, Bruxelles, 1828
- SCHUMACHER in *Astronomische Nachrichten*
n°6 vol.I; n°110 vol.V
n°116 ; n°256 Tome XI (1834)
n°121(1827)
- STRUVE F.W., *Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands*, 2 volumes, Dorpat, 1831.
- STRUVE F.W., *Arc du méridien de 25°20' entre le Danube et la mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855*, sous la direction de C.Tenner, C.Hansten, N.H.Selander et F.G.W.Stuve, Tome I, 1860; Tome II, 1857.
- SVANBERG "Exposition des opérations faites en Laponie, pour la détermination d'un arc de méridien de 1801, 1802, 1803 par MM Osverbom, Halmquist et Palander" in *Connaissance des Temps*, 1808.
- WALBECK H.J., *De forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcibus meridiani definiendis*, Abo, 1819 (Abo est le nom suédois de Turku, port de Finlande).

SOURCES SECONDAIRES

ARMATTE M., "Théorie des erreurs, moyenne et loi "normale"" in Feldmann, Lagneau et Matalon *Moyenne, milieu, centre. Histoires et usages*, Ed. de l'EHESS, Paris, 1991.

ARMATTE M., *Histoire du modèle linéaire*, thèse de doctorat, Paris, 1995

ANDOYER.H., "Théorie des erreurs" in *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, tome I 22, Paris, 1906-1911, réédité chez Gabay, Paris, 1992.

BARBUT M., "Moyennes et valeurs centrales" in *Moyenne, milieu, centre*, Ed. de l'EHESS, 1991

BELHOSTE B., et PICON A., *L'Ecole d'application de l'artillerie et du génie de Metz (1802-1870)*, Paris, Ministère de la Culture, Musée des plans-relief, 1996.

BERTHAUT H.M., *La carte de France 1780-1898*, Paris, 1898-1899

BERTHAUT H.M., *Les ingénieurs géographes militaires 1624-1831. Etude Historique*, Paris, 1902.

BIGOURDIN G., *Le système des poids et mesures*, Paris, 1901.

BRENY H., "Histoire du cours de "Calcul des probabilités" à l'Université de Liège (1835-1963)" in *Regards sur 175 ans de science à l'Université de Liège 1817-1992*, Liège, 1992.

BRET P., "L'astronome Nicolas-Antoine Nouet (1740-1811), membre de l'Institut d'Egypte, Directeur de la carte de Savoie" in *Les scientifiques et la montagne*, Paris, CTHS, 1993.

BRIALMONT *Notice sur le général Liagre*, 1892

BRU B., "Laplace et la critique probabiliste des mesures géodésiques" in *La Figure de la Terre du XVIII^e s à l'ère spatiale*, Paris, Académie des Sciences, Gauthiers-Villars, 1988.

BRU B., "Le problème de l'efficacité de tir à l'Ecole de Metz. Aspects théoriques et expérimentaux" in Belhoste. B. et A. Picon *L'Ecole d'application de l'artillerie et du génie de Metz (1802-1870)*, Paris, Ministère de la Culture, Musée des plans-relief, 1996.

BÜHLER W.K., *Gauss, A Biographical Study*, Springer, Verlag 1981

CALOT J.P., CAMUS M., *Histoire et prospective de l'Ecole polytechnique*, Paris-Limoges, 1993

Catalogue de l'exposition "Philippe Vandermaelen 1795-1869)" par Liliane- De Donder, introduction de A.De Smet, Bruxelles, Bibliothèque Royale Albert I^{er}, 1969.

- Catalogue de l'exposition *Les géomètres-arpenteurs du XVI^{ème} au XVIII^{ème} siècle dans nos provinces*, Bruxelles, 1976.
- CAULLE J., "Delambre, sa participation à la détermination du mètre" in *Recueil des publications de la Société havraise*, 1936.
- CHABERT J.L., "Gauss et la méthode des moindres carrés" in *Revue d'Histoire des Sciences*, XLII, 1989.
- CHAMPAGNE R., *The role of five eighteenth century French mathematicians in the development of the metric system: Condorcet, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge*, thèse dactyl., Columbia, 1979.
- CHAUVIN L., *Histoire du mètre d'après les travaux et rapports de Delambre, Méchain*, Limoges, 1901.
- COLLARD A., "La vie et l'oeuvre de A. Quetelet" in *Ciel et Terre*, vol.44, 1928
- COSTABEL P., "Du pendule simple au mètre étalon" in *La vie des sciences*, Tome 1, n°1 1984
- CRÉPEL P., "De Condorcet à Arago L'enseignement des probabilités en France de 1786 à 1830" in *Bulletin de la SABIX*, n°4.
- CRÉPEL P., "Le calcul des probabilités : de l'arithmétique sociale à l'art militaire" in B. Belhoste, A. Dahan Dalmedico, A. Picon (dir.), *La formation polytechnicienne (1794-1994)*, Paris, Dunod.
- CRÉPEL P., (en collaboration avec B. BRU) *Textes rares et inédits de Condorcet sur l'arithmétique politique et le calcul des probabilités*, Paris, INED, 1994;
- CZUBER E., *vorlesung über Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig, 1879. (Il s'agit de la traduction du livre de A. Meyer *Cours de calcul des probabilités fait à l'Université de Liège de 1849 à 1857*, publié par F. Folie.
- CZUBER E., *Theorie des Beobachtungsfehler*, Leipzig, 1891
- DAUMAS M., (le lieutenant colonel) *Le Sahara algérien, études géographiques, statistiques et historiques, sur la région au sud des établissements français en Algérie.*, ouvrage rédigé sur les documents recueillis par M. le lieutenant colonel Daumas, directeur central des affaires arabes à Alger et publié avec l'autorisation de Mr le maréchal, Duc de Dalmatie, président du conseil, ministre de la guerre, Paris, 1845.
- DAUMAS M., *Arago*, Paris, 5^{ed.} 1943
- DAUMAS M., *Les instruments scientifiques au XVII^{es} et XVIII^{es}*, Paris 1953
- DAUMAS M., *Histoire de la Science*, collection La Pléiade, Paris, 1956
- DEBARBAT S., "The IGA and the origins of the international scientific unions" in *Global change and history of geophysics*, p. 155-160, Brême, Germany, 1996

- DEBARBAT S., et WEIMER Th., "Gauss et l'astronomie géodésique ou le succès différé de la méthode des hauteurs égales" in *Historical events and people in geosciences*, p. 81 à 90 édité par Schröder, Frankfurt am Main, 1985.
- DE SMET A., *La cartographie hollandaise*, Bibliothèque Royale, 1971
- DEGUISE V., *Histoire de l'école militaire de Belgique*, Bruxelles, 1895
- DESROSIERES A., *La politique des grands nombres*, Paris, 1993
- DHOMBRES N., et J., *Naissance d'un pouvoir: sciences et savants en France (1793-1824)*, Paris, 1989.
- DIEUDONNÉ J., *C.F.Gauss*, in Encyclopaedia Universalis, Tome 10
- DUNNINGTON G.W., *Gauss, a Titan of Science*, 1955
- ERRERA A., et GODAUX L., *Les mathématiques en Belgique de 1830-1930. Livre d'or du centenaire de l'Indépendance de la Belgique*, 1930 et Mathésis, Bruxelles, 1932
- "Exposition universelle de Paris de 1851. Travaux de la commission française sur l'industrie des nations publiés par ordre de l'Empereur", Paris, Imprimerie impériale, 1855
- FELDMANN, LAGNEAU et MATALON *Moyenne, milieu, centre. Histoires et usages*, Ed. de l'EHESS, Paris, 1991.
- GALLOIS L., *Les géographes allemands de la Renaissance*, Paris, 1890
- GALLOIS L., "L'Académie des Sciences et les origines de la carte de Cassini" in *Annales de géographie*, n°99-100, 1909.
- GLODEN A., "La vie et l'oeuvre scientifique de neuf mathématiciens belges d'origine luxembourgeoise", in *THEMECHT Zeitschrift für Luxemburger Geschichte*, 1949.
- GODEAUX L., *Esquisse d'une histoire des sciences mathématiques en Belgique*, Bruxelles, 1943, pp. 33-34.
- GREENBERG J., *The problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut*, Cambridge University Press, 1995.
- GUEDJ D., *La Mesure des Lumières; Le système métrique décimal* Thèse, Paris, 1995
- Histoire de l'école militaire, 1834-1934*, Bruxelles, 1935
- HANKINS F.H., *Adolphe Quetelet as Statistician*, New York, 1908
- HELMERT F.R., *Rapport sur les travaux du Bureau central pendant les 50 premières années de l'AGI*, Leyde, 1913 (Les comptes-rendus sont en allemand et en français)
- HENKE R., *Über die Methode der kleinsten Quadrate*, Leipzig, 1891

- HERTZ S., *Emil Julius Grumbel (1891-1966) et la statistique des extrêmes*, Thèse, Université de Lyon 1, juin 1997.
- HEYDE C., et SENETA E., *I.J. Bienaymé. Statistical theory anticipated*, New York, Springer, 1977.
- HOLLANDER (d') "L'oeuvre cartographique du Dépôt de la Guerre" in *Revue historique des armées*, n°171, juin 1988.
- JONGMANS F., *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie; Républicain sans république*, SBPMef, Mons (Belgique), 1996
- JONGMANS F., et SENETA E., "The Bienaymé family history from archival materials and background to the turning-point test" in *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, Vol. 62, 3, 1993.
- JOZEAU M.F., "La mesure de la Terre au XIX^e siècle: nouveaux instruments, nouvelles méthodes" in *La Mesure, Instruments et Philosophes*, Sous la direction de J.C BEAUNE, p. 95-106, 1994
- JOZEAU M.F., et GRÉGOIRE M., "Measuring the meridian" edited by Ronald Calinger, *History of Mathematics*, Washington, 1996
- JÜRGEN H., (Dr) *Friedrich Wilhelm Bessel*, Berlin, 1984
- KNOBLOCH E., "Historical Aspects of the Foundations of Error Theory" in *The space of mathematics Philosophical, Epistemological and Historical Explorations*, edited by Echeverria, Marmann, 1993.
- LAWRYNOWICZ K., (traduit du russe par Katja Hansen Matissek et Heinz Matissek) "Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)" in *Vita Mathematica.*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1995.
- LECONTE J.R., "Notice bibliographique" in *Biographie Nationale* publiée par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, Tome 32, 1964
- LOTTIN J., *Quetelet, Statisticien et Sociologue*, Louvain, 1912.
- MARGUIN J., *Histoire des instruments et machines à calculer*, Hermann, Paris, 1994.
- MARQUET L., "Condorcet et la création du système métrique décimal", in P. Crépel, C. Gilain (dir.), *Condorcet mathématicien, économiste, philosophe, homme politique*, Paris, Minerve, 1989.
- MASCART J., "Théorie des instruments astronomiques de mesures angulaires, des méthodes d'observations et de leurs erreurs" in *Encyclopédie des Sciences mathématiques* Tome VII, 6, Paris, de 1906 à 1911.
- MAY K.O., *Gauss*, in *Dictionary of Scientific Biography*, Tome V, C.Scriber, New-York

- MOTAIS DE NARBONNE A.M., *Une mesure révolutionnaire: le mètre* Observatoire de Paris, 1988.
- PAJUS A.M., "Résolution de systèmes d'équations linéaires" in *Histoire d'Algorithmes*, Paris, 1994
- PAQUET P., "Bicentenaire de la naissance d'Adolphe Quetelet, Fondateur de l'Observatoire de Bruxelles" in *Bulletin Astronomique*, XI, 1, Observatoire Royal de Belgique, 1996
- PASSERON I., *Clairaut et la figure de la Terre au XVIIIème siècle*, Paris, 1994
- PELLETIER. *La carte de Cassini*, Presse des Ponts et Chaussée, Paris, 1990.
- PICOLET G., *Jean Picard et les débuts de l'astronomie de précision au XVIIème siècle*, acte du colloque du tricentenaire réuni à Paris en octobre 1982, Paris, Editions du CNRS, 1987.
- PORTER T.M., *The rise of Statistical Thinking 1820-1900*, Princeton, 1986
- SCHNEIDER I., "Laplace and Thereafter: The status of Probability Calculus in the nineteenth Century" in *The probabilist revolution*, édité par L.Krüger, Tome 1, 1990
- SCHOLTZ E., "Gauss und die Begründung der "höheren" Geodäsie" in *Amphora*, Berlin.
- SHEYNIN O., "Laplace's theory of errors" in *Archives for History of Exact Sciences*, vol.17, 1977
- SHEYNIN O., "Gauss and the theory of errors" in *Archives for History of Exact Sciences*, vol.20, 197?
- SHEYNIN O., *The history of the theory of errors*, Francfort, 1996
- STIGLER S.M., *The history of statistics*, Cambridge, 1986
- STIGLER S.M., "Gauss and the invention of Least Squares" in *Annals of Statistics*, 9 (1981) p.465-474
- TOWNE G., *Astronomie astrophysique, Géodésie, Topographie et photogrammétrie pratique*, 2 tomes, Paris, 1896.
- VERDET J.P., *Une histoire de l'astronomie*, Paris, 1990.
- WELLENS-DE-DONDER L., *A. Quetelet*, Bibliothèque royale Albert 1^{er}, Bruxelles, 1974.
- WOLF A., *A history of science, technologie and plilosophy in the 16 th and 17 th centuries*, London, 1935
- WOLF A., *A history of science, technologie and plilosophy in the eighteenth century*, London, 1938 (Les deux ouvrages précédents ne comportent pas de chapitre "geodesy" mais les chapitres V "Scientific instruments" p. 71 à 120 or "Astronomical instruments" p. 121 à 145 ainsi que les chapitres relatifs à

l'Astronomie ou la Géographie décrivent divers instruments et relatent divers travaux de géodésie)

WOLF, *Histoire de l'Observatoire*, Paris, 1902

NOTICES BIOGRAPHIQUES

Nous présentons une courte biographie des principaux personnages cités et indiquons ceux qui se trouvent dans le *Dictionary of scientific biography* (DSB) de Gillepsie (16 vol.), Scribner's sons, New York, 1970-1980, précisant seulement, pour certains, leurs travaux géodésiques.

Pour des compléments biographiques, on peut se reporter aux dictionnaires biographiques suivants qui ont servi de base à notre documentation :

* *Biographie Universelle ancienne et moderne* de Michaud, 46 volumes, Paris, 1811-1862.

* *Deutsche Biographische Enzyklopädie*, Munich-Paris-Londres 1995 (en cours d'édition)

* *Dictionary of National Biography*, Oxford, University Press, 22 volumes, 1917.

* *Biographie nationale* publiée par l'Académie Royale de Bruxelles, 27 Tomes 1866-1938, puis des tomes supplémentaires.

* *Allgemeine Deutsche Biographie*, Leipzig, Berlog von Dunder et Humbolt, 56 volumes sans les suppléments 1875-1912.

* *Nouvelle biographie universelle depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours*, Hoefer, 46 volumes, Firmin-Didot, Paris, 1855-1866.

Certains noms ne se trouvent pas dans les ouvrages cités ci-dessus; nous avons alors consulté par exemple les dossiers personnels au Service Historique de l'Armée de Terre (Vincennes), au Musée Royale de l'Armée (Bruxelles), à l'Académie des Sciences (Paris).

Remarque : La mention "X 17.. ou 18..", accompagnant certains noms signale sa date de promotion à l'Ecole polytechnique (voir *Répertoire général des anciens élèves de l'Ecole polytechnique*, SABIX, 4 vol., 1980).

Pour les noms suivants, nous renvoyons à la DSB:

- BABBAGE, Charles** (1792-1871) DSB 1. 354-356
BERNOULLI Jakob (Jacques) I (1654-1705) DSB 2. 46-51
BERTRAND Joseph Louis François (1822-1900) DSB 2. 87-89. X 1839
BIENAYME Irénée Jules (1796-1878) DSB 15. 30-33
BORDA Jean-Charles (1733-1799) DSB 2.299-300. X 1815
BOUGUER Pierre (1698-1758) DSB 2.343-344
BRAHÉ Tycho (1546-1601) DSB 2. 401-406
BRAVAIS Auguste (1811-1863) DSB 2.430-432. X 1829
CALLANDREAU Pierre Jean Octave (1852-1904) DSB 3.18-19. X 1872
CASSINI de Thury (1714-1784) DSB 3. 107-109
CASSINI Jacques (1677-1756) DSB 3. 104-106
CASSINI Jean-Dominique (1625-1712) DSB 3. 100-104
CASSINI Jean-Dominique (1748-1845) DSB 3. 106-107
CAUCHY Augustin Louis (1789-1857) DSB 3. 131-148. X 1805
CLAIRAUT Alexis Claude (1713-1765) DSB 3. 281-286
CONDORCET (1743-1794) DSB 3. 383-388
COTES Roger (1682-1716) DSB 3. 430-433
COURNOT Antoine Augustin (1801-1877) DSB 3. 450-454
DELAMBRE Jean Baptiste Joseph (1749-1822) DSB 4. 14-18
DIGGES Leonard (1520-1559) DSB 4. 97
DIGGES Thomas (1546-1595) DSB 4. 97-98
FLAMSTEED John (1646-1719) DSB5. 22-26
FRANCAIS Jacques Frédéric (1775-1833) DSB 5. 110-112. X 1797
FRISIUS voir GEMMA (1508-1555) DSB5.349
JACOBI Carl Gustav Jacob (1804-1851) DSB 7. 50-55
LA CONDAMINE Charles Henri (de) (1701-1774) DSB 15. 269-273
LACROIX Sylvestre-François (1765-1843) DSB 7. 549-551
LAPLACE Pierre Simon (Marquis de) (Beaumont-sur-Auge 1749-Paris 1827) DSB 15. 273-403
LEGENDRE Adrien-Marie (Paris 1752-Paris 1833) DSB 8. 135-143
MATHIEU Emile Léonard (Metz 1835-Nancy 1890) DSB 9. 174-175
MAUPERTUIS Pierre-Louis Moreau de (St-Malo 17 juillet 1698-Bâle 27 juillet 1759) DSB 9. 186-189
MECHAIN Pierre François André (1744-1804) DSB 9. 250-252
PERRIER Georges (1872-1946) DSB 10. 523-524. X 1892 A
POISSON Siméon Denis (1781-1840) DSB 15. 480-490. X 1798

QUETELET Lambert Adolphe Jacques (1796-1874) DSB 11. 236-238
SNELLIUS Willebrord(1580-1626) DSB 12. 499-502

BELGIQUE

ADAN Emile H.J

(Bruxelles 1830- Bruxelles 1882)

Colonel, Géodésien et Cartographe. Il seconde Houzeau au Dépôt de la Guerre; il enseigne à l'Ecole Militaire; puis en devient directeur en 1878.

BOUILLART Joseph-Albert-Théodore

(Soignies 1811- Dour 1866)

Sous-lieutenant, il fait ses études à l'Ecole militaire de Bruxelles; il est demandé par le Dépôt de la Guerre en 1837 et employé en 1839 à la Commission des limites. Il réduit des plans de communes et se rendra au Guatemala en 1844.

En 1845, Nerenburger le propose comme secrétaire à la Commission chargée de la triangulation du royaume.

En 1846, il est nommé aide de camp du général major Chapelié; il est en même temps chargé d'enseigner la topographie à l'Ecole militaire. Promu capitaine puis général major, il meurt du choléra.

CATALAN Eugène Charles

(1814-1894).

X 1833

D'origine française, mathématicien, professeur à l'Université de Liège.¹

CHAPELIÉ J.

(Marseille 1792-Bruxelles 1864)

X 1812 A

Il fonde l'Ecole Royale Militaire Belge qu'il dirige pendant 30 ans.

¹cf. JONGMANS. F. *Eugène Catalan, Géomètre sans patrie; Républicain sans république*, SBPMef, Mons (Belgique), 1996

DANDELIN Germinal-Pierre

(Le Bourget 1794- Bruxelles 1847) DSB 3. 554-555. X 1813

Mathématicien, officier du génie. Il entre à l'Ecole polytechnique de Paris en 1813 et se fait naturaliser en 1816. Professeur à l'école des mines de Liège puis à l'université en 1825. Membre de l'Académie des Sciences. Il écrit des mémoires sur la géométrie. Il est promu capitaine du Génie en 1830, puis lieutenant colonel en 1831.

ERZEY. J ou I.²

Major au Général Staf et Premier Capitaine ingénieur détaché au Bureau topographique, à une date non précisée.³ Le 15 juillet 1830, il était sur le point d'achever son travail à Perwez. Le 19 octobre 1830, il revient au Bureau topographique et il est appelé à d'autres tâches à Delf. Avec le Lieutenant Colonel Baron van Delen et F.B van Gabern, il établit la triangulation liant Cassini à Krayenhoff.⁴ Il communiqua ses travaux sur la frontière des Pays-Bas au Dépôt de la Guerre de France en 1828.⁵

FOLIE François

(1833-1905)

Mathématicien, astronome, directeur de l'Observatoire royal de Belgique, professeur à l'université de Liège.

GOBLET Albert

(1790-1873). X 1809 G

Lieutenant-général, homme d'état; ministre des affaires étrangères de Belgique de 1843 à 1854.

HOUZEAU DE LEHAIE Jean-Charles

(Mons 7 octobre 1820-Schaerbeek 12 juillet 1888)

Astronome, directeur de l'Observatoire royal de Bruxelles.

Il étudie l'astronomie à Mons et voyage à Paris de 1842 à 1844 pour parfaire ses connaissances. Il est attaché à l'Observatoire de Bruxelles à partir de 1846. Pour raison politique, il est révoqué en 1849. Il part alors en voyage en Allemagne, en

²Les quelques renseignements qui suivent nous ont été communiqués par Mme Lemoine-Isabeau. Ils proviennent du dossier personnel d'Erzey, conservé aux Algemeen Rijksarchief à La Haye (Stamboek 312, n°24).

³Dans le fonds Jolly, carton 2/71, M.R.A, on apprend qu'il est capitaine depuis le 1er Août 1817.

⁴Selon Koeman, *Geschiedenis van de Cartografie van Nederland*, 1983, p.195.

⁵cf. SHAT, Dépôt de la Guerre, 27/2

Suisse et en France. Puis, Nerenburger lui confie de 1854 à 1857 le travail astronomique relatif à la carte de Belgique. En 1856, il est nommé membre de la classe des sciences de l'Académie. De 1857 à 1876, Houzeau part en exil en Amérique pour des raisons politiques; les libéraux sont alors au pouvoir. A son retour, il succède à Quetelet comme directeur de l'Observatoire de Bruxelles.

JOLLY André E.

(Bruxelles 1799 - Bruxelles 1883)

Directeur du Dépôt de la Guerre de 1834 à 1842.

LAMARLE Anatole Henri Ernest

(1806-1875)

X 1825

Mathématicien d'origine française, professeur à l'université de Liège. Membre de l'Académie royale de Belgique.

LIAGRE J.B

(1815-1891)

Astronome, géodésien, topographe, lieutenant général, commandant de l'Ecole militaire, ministre de la guerre (voir la partie AIII de cette thèse).

MEYER Antoine

(1803-1857)

Mathématicien (voir la partie AIII de cette thèse).

NERENBURGER Guillaume Adolphe

(1804-1869)

Lieutenant général, cartographe (voir la partie AIII de cette thèse).

OUTIES Antoine Joseph Julien

(1796-1871)

Ingénieur géographe, colonel

PAGANI Gaspard-Michel

(1796-1855)

D'origine italienne (naturalisé en 1826)

Mathématicien belge, professeur aux universités de Louvain et Liège

RENOZ Prosper-Auguste

(Liège 1811- Alger 1845)

Capitaine d'Etat-Major en 1830, il est attaché au Dépôt de la Guerre. Il participe à des opérations géodésiques à partir de 1838, effectuant les calculs en collaboration avec Meyer. Autorisé à suivre les opérations de l'armée française en Afrique, chargé de mission en Algérie il y meurt en 1845.

SCHAAR Mathias

(1817-1867)

Mathématicien, professeur à Gand puis à Liège en probabilités.

VERHULST Pierre-François

(1804-1849) DSB 13. 616

Mathématicien, professeur à l'Ecole militaire.

ALLEMAGNE

ARGELANDER, Friedrich Wilhelm August

(Memel en Prusse 22 mars 1799-Bonn 17 février 1875) DSB 1. 240-243

Astronome de renom, il est membre : des Académies de St Petersburg, Londres, Berlin, Stockolm, Paris, Vienne, Boston et Bruxelles; des sociétés Fennica à Helsinki; de la Société Royal d'Astronomie de Londres; de l'Académie Nationale des Sciences des Etats-Unis.

Brillant élève de Bessel, il prend une part active comme calculateur à l'observatoire de Königsberg.

A 21 ans, convaincu par l'astronomie de Bessel et sur sa recommandation, il rentre comme assistant à l'observatoire d'Abo (en Finlande)⁶.

De 1827 à 1832, il est professeur à l'Université d'Helsinki et y construit un nouvel observatoire.

En 1836, il est nommé professeur d'astronomie à "Prussian University" de Bonn

⁶Cet observatoire est équipé avec d'excellents instruments provenant de la meilleures usine allemande. Ceci montre la suprématie de la technologie allemande à cette époque.

BAEYER, Johann Jakob

(Müggelheim 1794- Berlin 1885)

Géodésien (Voir partie AII de la thèse)

BESSEL Frédéric-Guillaume

(Minden 22 Juillet 1784-17 Mars 1846) DSB 2. 97-102 et partie AII de la thèse.

Commis dans une maison de commerce, il travaille la nuit. Il est nommé inspecteur des instruments astronomiques de l'université de Göttingen. Il préside à la construction de l'Observatoire de Königsberg dont il devient directeur en 1810. Un grand nombre de ses travaux porte sur les observations d'étoiles. Il enseigne l'astronomie et effectue des travaux de géodésie.

BONHENBERGER Johann Gottlieb Friedrich

(5 juin 1765 -19 avril 1831)

Il étudie la théologie à l'Université de Tübingen; en 1793, il effectue un voyage à Gotha et rencontre le directeur de l'Observatoire de Seeberg, le baron Zach; il se rend aussi à Göttingen. En 1796, il devient adjoint à l'Observatoire de Tübingen. Professeur de Mathématiques et d'Astronomie, sa réputation est faite avec l'ouvrage "Unleitung zur geographischen Ortsbestimmung". Comme géodésien, il se distingue par la triangulation du Wurtemberg.

BREITHAUPT Friedrich Wilhelm

(23 juillet 1780-20 juin 1855)

Mécanicien, fabricant d'instruments à Cassel.

ENCKE Johann Franz

(Hambourg 23 septembre 1791- Spandau 28 août 1865) DSB. 4. 369-370

Astronome

En 1811, il entre à l'université de Göttingen. Durant ses études, il rencontre Gauss qui le guide et lui offre, en mai 1816, un poste d'assistant à l'observatoire de Seeberg, dont il deviendra directeur. Il y fait de nombreux travaux sur les comètes. En 1825, il devient directeur de l'Observatoire royal de Berlin et professeur à l'Académie des Sciences de Berlin. Pour ses travaux astronomiques, il utilise les méthodes de Gauss.

ERTEL Hans

(29 septembre 1778 - 8 février 1858)

Directeur de l'Institut de Mathématiques et de Mécanique de Reichenbach à Munich

FRAUNHOFER (Joseph Von)

(Straubing 6 mars 1787-Munich 7 juin 1826) DSB 5. 142-144

Opticien et physicien. Inventeur d'un héliomètre achromatique. Constructeur d'un télescope pour les observations astronomiques.

GAUSS

(Brunswick 30 avril 1777 -Göttingen 1855) . DSB 5. 298-315

Parfois appelé "le prince des Mathématiques", il s'intéresse à la théorie des nombres, puis à l'algèbre, à l'analyse, à la géométrie et aux probabilités, mais aussi à de nombreuses autres disciplines comme l'astronomie et la géodésie.

Pour les travaux géodésiques de Gauss, voir le Tome IX et l'article de A.Galle au Tome XI des oeuvres complètes de Gauss.

GERLING Christian Ludwig

(Hambourg 10 juillet 1788- Margbourg 15 janvier 1864)

Docteur en philosophie, il est nommé professeur de mathématiques, d'astronomie et de physique à l'université de Marbourg. (Meyer le rencontre dans cette ville en 1846). Ses travaux concernent essentiellement l'astronomie et la géodésie. Plusieurs de ses lettres à Bessel et à Gauss sont relatives aux méthodes de calculs utilisées dans ses travaux.

HAGEN Gotthilf.Heinrich.Ludwig

(3 mars 1797- Berlin 3 février 1884)

Il étudie les mathématiques et l'astronomie à l'université de Königsberg de 1816 à 1818. En 1819, il devient métreur puis ingénieur en 1822. Il fait un voyage d'étude en 1822-1823. En 1830, il est nommé comme associé du professeur Schinkel à Berlin. De 1834 à 1849, il enseigne l'hydrographie à l'Académie de "Bau" et à l'école d'Artillerie et d'Ingénieur .

HANSEN Peter Andreas

(Tondern 8 décembre 1795- Seeberg 28 mars 1874), DSB 6. 103-104

Horloger dans sa ville natale, puis de 1820 à 1825 assistant de Schumacher. En 1821, ils travaillent ensemble sur les mesures d'un arc du méridien à Holstein, à

l'observatoire d'Altona; en 1823, il est assistant éditorial et collaborateur de l'*Astronomische Nachrichten*; l'été 1824, il se rend, avec Schumacher à Helgoland pour déterminer la position géographique exacte de cette île. En 1825, il succède à Encke comme directeur de l'observatoire de Seeberg près de Gotha, jusqu'à la moitié du siècle. En 1831, il reçoit le prix de l'Académie Royale des Sciences de Berlin. Les mécaniques célestes constituent une grande part de ses travaux, mais il s'intéresse également à la théorie des instruments astronomiques. Son travail avec Schumacher le conduit à beaucoup de subtilité de la géodésie théorique et ainsi à plusieurs contributions aux calculs des probabilités.

LÄMLÉ Reinhold. L

(Danzig 4 mai 1801-Berlin 25 octobre 1888)

Comptable et fonctionnaire militaire

MAYER Tobie

(1723-1762) DSB 9. 232-235

Astronome, professeur à Goettingen. Il propose de substituer à l'octant le cercle de réflexion. Mayer a fait gravé le dessin de son cercle dans son livre *Theoria lunae* imprimé à Londres en 1767.

OLBERS Heinrich Milhelm Mathias

(11 octobre 1758-2 mars 1840) DSB 10. 197-199

Astronome et médecin

PISTOR Karl Philipp Heinrich

(Berlin 3 janvier 1778- 2 avril 1847)

Astronome et mécanicien. Il ouvre une firme où les différents observatoires européens commanderont des instruments.

REICHENBACH Georg Friedrich Von

(Durlach⁷ 24 août 1771- Munich 21 mai 1826), DSB 11. 354-355

Ingénieur mécanicien et fabricant d'instruments.

De 1791 à 1793, il étudie l'ingénierie moderne en Angleterre où il rencontre Boulton, Watt et Ramsden. Puis, il devient ingénieur officier dans l'armée de Bavière. En 1804, il travaille au "Mathematisch-Mechanisches Institut" avec Utsschneider et Liebherr. Il y construit des instruments astronomiques et de

⁷Cette ville constitue actuellement une partie de Karlsruhe

triangulation, devenus rapidement célèbres pour leur perfection de précision et mécanique, dont des astronomes comme Bessel, Gauss et Laplace en firent les éloges. En 1804, avec Utzschneider et J. Fraunhofer, il fonde l'"Optical Institute". En 1820, il devient directeur du bureau central de la Bavière des Ponts et Chaussées. Il est élu à l'Académie des Sciences de Paris et celle de Munich.

REPSOLD Johann Georg

(19 septembre 1770- 14 janvier 1830) DSB 11. 376-378

Mécanicien à Hambourg

SCHUMACHER Heinrich Christian

(Bramstedt 3 septembre 1780-Altona 28 décembre 1850) DSB 12. 234-235

Après une initiation aux mathématiques et à l'astronomie au Gymnasium d'Altona, il étudie l'astronomie, en 1807, sous la direction de Gauss à l'université de Göttingen. Ils deviennent très amis.

De 1808 à 1810, il étudie les mathématiques à Hambourg et traduit "La géométrie de Position" de Lazare Carnot. Puis il travaille à l'observatoire de Hambourg et en 1810, il est nommé professeur d'astronomie à l'université de Copenhague.

De 1817 à 1820, il prend part aux triangulations de Schleswig et Holstein, à la mesure du degré entre Skagen et Lauenburg⁸, à la détermination de la longitude le long de l'arc entre Copenhague et la côte ouest de Jutland. En 1821, il dirige la triangulation du Danemark et travaille plusieurs années à l'observatoire d'Altona. Il est élu à la Société Royale de Londres. En 1823, il édite *Astronomische Nachrichten*.

UTZSCHNEIDER Joseph Von

(1763-1840)

Industriel ayant des ateliers de cuir et d'instruments d'optique et de mécanique; il est en relation avec Fraunhofer

FRANCE

⁸La détermination de la mesure de la base par la mesure du degré entre Skagen et Lauenburg est une pièce maîtresse d'exactitude et est en parfait accord avec les mesures de Gauss au Hanovre et les triangulations à Hessian et en Bavière.

ANDREOSSY Comte Antoine-François

(7 mars 1761-10 septembre 1828)

Géographe, lieutenant général

En 1798, membre de l'Institut au Caire (Egypte), il est chargé d'opérations géodésiques. Il devient directeur du Dépôt de la Guerre, au début du XIXème siècle; puis il est ambassadeur à Londres.

ARAGO Dominique François Jean

(1786-1853) DSB 1.200-203

Il entre à l'Ecole polytechnique à 17 ans, il est élu à l'Académie des Sciences à 23 ans et enseigne à l'Ecole polytechnique à 24 ans. En 1806, Biot lui demande de relier les triangles espagnols de la grande méridienne aux Baléares. Directeur de l'Observatoire de Paris en 1843, il détermine le coefficient de réfraction astronomique, étudie la libration de la lune, achève la mesure de la grande méridienne et effectue la jonction avec l'Angleterre. Député, ministre à la suite de la révolution de 1848, il joue un rôle politique officiel ou occulte. Il aide et protège l'Ecole polytechnique

BEAUTEMPS-BEAUPRE Charles François

(1766-1854)

Ingénieur hydrographe

Il effectue des levées hydrographiques dans le Pacifique (1791-1796). En 1810, il entre à l'Institut. Membre de la Société Royale de Goettingue et du Bureau des Longitudes. En juin 1814, il devient ingénieur hydrographe en chef et conservateur adjoint du dépôt de la marine. Il est chargé, à partir de 1820, de rédiger et de publier les premières cartes marines des côtes de France.

BIOT Jean-Baptiste

(1774-1862) DSB 2. 133-140. X 1794

Physicien, chimiste

Membre de l'Académie des Sciences, il entre à l'Observatoire de Paris et fait partie du Bureau des Longitudes. En 1806, il se rend en Espagne avec Arago, pour continuer la triangulation de la méridienne, commencée par Méchain. En 1809, il est nommé professeur d'astronomie physique à la Faculté des Sciences de Paris.

BROUSSEAUD

Attaché au corps royal des ingénieurs géographes militaires.

Participe à la mesure d'un arc du parallèle moyen entre le pôle et l'équateur (Il publie un ouvrage sur cette mesure à Limoges en 1839) dans les Alpes.

CHASLES Michel

(1793-1880) DSB 3. 212-215. X 1812

Professeur d'astronomie et de géodésie à l'Ecole Polytechnique en 1844.

CORABOEUF Jean-Baptiste

(1777-18..) Première promotion de l'Ecole polytechnique (X 1794). Membre de l'expédition d'Egypte de 1778 à 1803. Il est employé au Dépôt de la Guerre en 1801. Ingénieur-géographe, il est employé à la Carte du Mont-Blanc de 1802 à 1805, puis à la Carte d'Italie de 1805 à 1814. En avril 1818, il est employé aux travaux de la Carte de France et est chargé de la révision des calculs géodésiques de la carte de France en août 1832. Il est le principal collaborateur de Puissant dans la rédaction des volumes du *Mémorial de la Guerre* qui contiennent la description géométrique de la France.

DELAUNAY Charles Eugène

(1816-1872) DSB 4. 19-20

X 1834M

Professeur à l'Ecole polytechnique, au Collège de France et à la Sorbonne; il étudie les mouvements de la lune.

DUFOUR Guillaume Henri

(1787-1875) DSB 4. 217

X 1807G Géographe, il exécute la carte de la Suisse durant 33 ans !

EPAILLY Anatole François

(30 septembre 1769-30 octobre 1856)⁹ X 1795

Lieutenant Colonel au Corps Royal des ingénieurs-géographes en janvier 1819. Employé au Dépôt de la Guerre en juin 1801 pour les travaux de la carte de France, il est à la deuxième section aux travaux historiques, statistique militaire et est bibliothécaire aux archives historiques, cartes et plans. Il fera plusieurs

⁹pour plus de détails voir P. Letouzey *Dictionnaire de biographie française*, tome 12, 1970 et dossier personnel au SHAT.

campagnes topographiques: jusqu'en 1803, carte de la Souabe; de 1805 à 1806, la carte de Hanovre; de 1811 à 1812, la carte de la Hollande; en 1815, la carte des environs de Paris; de 1816 à 1829, employé à la commission des limites de l'est de la France. En 1812, il est nommé professeur à l'Ecole d'application des ingénieurs géographes. Mis à la retraite en 1829, il est maintenu en fonctions comme inspecteur surveillant des travaux extérieurs de la carte de France.

FAYE Hervé

(1814-1902) DSB 4. 555

X 1832

Astronome, il découvre en 1843 une comète. Membre de l'Institut, professeur d'astronomie et de géodésie à l'Ecole polytechnique.

GAMBEY Henri Prudence

(Troyes 8 octobre 1787-Paris 29 janvier 1847) DSB 5. 271

Ingénieur mécanicien français, fabricant d'instruments de précision.

Il est recommandé à l'attention du Bureau des Longitudes qui jusqu'alors ne se servait que d'instruments allemands et anglais. Grâce à ses innovations, dont le théodolite portatif, la renommée des instruments français s'étend à l'étranger. En 1819, il présente à Paris plusieurs instruments dont un cercle répétiteur astronomique et remporte une médaille d'or. En 1823 et 1827, il est également récompensé pour d'autres instruments. Il devient ingénieur en instruments de navigation du Ministère de la Marine et est reçu à l'Académie des Sciences, à la section mécanique en 1837. Il enrichit l'Observatoire de Paris de créations : lunettes de passages, cercle mural méridien de 2 m de diamètre divisé par des procédés entièrement nouveaux. L'année de sa mort, il laisse inachevé un exposé méthodique relatif à cet instrument.

LAHIRE Philippe de

(Paris 1640-Paris 1719)

Astronome et mathématicien, il entre à l'Académie des Sciences en 1678. En 1683, il entreprend avec Cassini la mesure de l'arc de méridien traversant la France de Dunkerque à Perpignan.

LAMBERT Johann Heinrich

(1728-1777) DSB 7. 595-600

Né à Mulhouse, autodidacte, il travaille à Göttingen puis à Berlin; il a rencontré Euler. Il est surtout connu pour ses travaux en cartographie, en perspective et pour avoir démontré l'irrationalité de π . Mais nous ne devons pas oublier les recherches qu'il accomplit en photométrie afin de mesurer la lumière.

LENOIR Etienne

(1744-1832)

Ingénieur du roi, célèbre fabricant d'instruments scientifiques, connu surtout pour son cercle répéteur, ayant servi à Delambre et Méchain pour mesurer la méridienne de Paris. Il devient membre du Bureau des Longitudes, en 1814, en qualité de premier artiste.

LE VERRIER Urbain Jean Joseph

(Saint-Lô 1811-Paris 1877) DSB 8. 276-279

X 1831

En 1837 un poste de professeur de Chimie à l'Ecole polytechnique lui échappe; il accepte alors une fonction de répétiteur au cours d'astronomie et de géodésie. Sur le conseil d'Arago, il s'applique à la théorie de Mercure et y apporte des perfectionnements. Il étudie les perturbations d'Uranus. A la suite de la découverte de Neptune, il occupe la chaire de mécanique céleste, puis celle d'astronomie à la Sorbonne. En 1854, après la mort d'Arago, il devient directeur de l'observatoire de Paris. Autoritaire, son caractère exécrable lui suscite de nombreux ennemis qui lui retirent cette charge en 1870. (elle lui sera restituée)

OUTHIER Reginald

(1694-1774) DSB 10. 255-256

Astronome, ecclésiastique.

Correspondant à l'Académie des Sciences en 1731 En 1736, il accompagne l'expédition conduite par Maupertuis en Laponie suédoise.

PEYTIER Jean Pierre Eugène Félicien

(1793-1864). X 1811

Chef de la 1^{ère} section du Dépôt de la Guerre, Colonel au Corps d'Etat-major.

Il étudie à l'Ecole d'application du Corps des ingénieurs-géographes en 1813. En 1815, il est employé à la reconnaissance d'une partie des environs de Paris; puis aux travaux de la Carte de France, en 1818. En 1828, il part en mission en Grèce. Il est admis au Corps Royal d'Etat-major, en 1831. En 1833, il est

employé comme chef de section à de nouvelles opérations géodésiques et topographiques en Morée. A la 1^{ère} section du Dépôt de la Guerre (Géodésie - topographie - dessin et gravure), il est chargé de la révision, du classement, de la conservation, des calculs astronomiques et géodésiques, de la rédaction de la partie scientifique du Mémorial du Dépôt de la Guerre et de la conservation des instruments d'astronomie, de géodésie, de topographie.

PERRIER François

(1833-1888). X 1853 Etat-major

Général, il participe au rattachement du réseau géodésique de la France à celui de l'Angleterre. Il devient le spécialiste le plus autorisé de la géodésie dans l'armée. Soutenu par Le Verrier et Faye, patronné par le Bureau des Longitudes, il parvient à renouveler les méthodes et le matériel de son service.

PICARD Jean

(1620-1682) DSB 10. 595-597

Astronome, membre de l'Académie des Sciences dès 1666, il est chargé de la mesure d'un degré terrestre (1669-70). A cette occasion, il fait construire des instruments très précis et invente le micromètre.

PIOBERT Guillaume

(1793-1871). X 1813 A

Général français, il enseigne l'artillerie à l'Ecole d'application de l'artillerie et du génie de Metz de 1833 à 1837.

Fin 1839, il est reçu à l'Académie des Sciences. En 1845, il devient colonel d'artillerie. Il fait des recherches en balistique expérimentale et tente d'élucider le mouvement des gaz lors d'une explosion de poudre et tente de mettre au point des formules théoriques.

PUISSANT Louis

(1769-1843)

Il entre au Dépôt de la Guerre en 1790. Il se distingue par son habileté dans le dessin topographique. Il suit les cours de Laplace et de Lagrange. Il participe à la triangulation de l'île d'Elbe, puis à celle de Lombardie (1803-1804). Il est nommé professeur au Dépôt de la Guerre où il enseigne la géodésie et la topographie aux ingénieurs géographes lesquels qui effectuent les relevés nécessaires pour établir la carte d'Etat major. Il est nommé en 1828 à l'Académie

des Sciences, au fauteuil de Laplace. Puissant est le premier à présenter, dans un *Traité de Géodésie*, une synthèse des travaux de Delambre, constituant la géodésie en un corps de doctrine. Cet ouvrage servira longtemps de référence aux géodésiens français.

SALNEUVE Jean Félix

(1794-1862). X 1812

Capitaine d'Etat-Major

Il étudie à l'Ecole d'application du Corps Royal des ingénieurs-géographes en 1813 où il est l'élève de Puissant.

En 1815, il est employé à la reconnaissance d'une partie des environs de Paris. En 1817, il entre au Corps Royal des ingénieurs-géographes; il est employé aux travaux extérieurs de la Carte de France en 1818, puis en 1824, il poursuit ses travaux à la demande du Dépôt de la Guerre. Il enseigne la topographie à l'Ecole d'application du Corps Royal d'État-Major, en 1832.

AUTRES

AIRY Sir Georg Bidell

(27 juillet 1801-4 janvier 1892) DSB 1. 84-87

Astronome royal, Directeur de l'Observatoire de Greenwich

BOSCOVICH Roger Joseph

(1711-1787) DSB 2. 326-332

Jésuite, Mathématicien italien. Son apport en géodésie est important pour l'époque. Il effectue, en 1750, la mesure d'un arc de méridien dans l'Etat de l'Eglise allant de Rome à Rimini, construisant des instruments nouveaux et inventant une méthode de compensation des mesures. Les résultats qu'il obtient lui permettent de confirmer l'hypothèse selon laquelle la forme de la Terre n'est pas un ellipsoïde parfait.

EVEREST Sir Georges

(1790-1866).

Ingénieur militaire, lieutenant colonel en 1838.

Il prend en 1823 la direction du service géodésique de l'Inde dont il réalise une triangulation.

LINDHAGEN Daniel Georg

(27 juillet 1819-?)

Participe à des travaux géodésiques en Norvège puis devient en 1856 assistant astronome à l'Observatoire de Upsula. En 1860, il observe une éclipse de Soleil en Espagne. En 1862, 67 et 69, il effectue des travaux géodésiques en Europe.

MUDGE William

(1762-1820)

En 1777, il entre à l'Académie royale militaire. En 1813, il prolonge jusqu'en Ecosse l'arc de méridien anglais. Biot participe à cette détermination.

STRUVE Friedrich Georg Wilhelm

(1793-1864) DSB 13. 108-113

Astronome, géodésien

Diplômé en philosophie à l'Université de Dorpat en 1810, il étudie ensuite les mathématiques, l'astronomie et la géodésie. Il travaille à l'observatoire de l'université et obtient en 1813, son doctorat de mathématiques et d'astronomie.

Conseiller d'état, Professeur en mathématiques et en astronomie à Dorpat, il enseigne également l'astronomie et la géodésie au Corps d'armée topographe et au Département hydrographique. Il équipe l'observatoire d'instruments, dont un cercle méridien (construit par Reichenbach) et un télescope (construit par Fraunhofer).

Il est invité par l'Académie des Sciences de St Petersburg pour s'occuper du nouvel observatoire à Pulkovo, dont il est nommé directeur en 1834. Cet observatoire est inauguré en 1839.

TROUGHTON Edward

(1753- 1836) DSB 13. 470-471

Fabricant d'instruments d'astronomie, membre de la Royal Astronomical Society Il se rend à Paris en 1825. Travaillant très tôt dans les ateliers de son oncle et de son frère, il acquiert une renommée internationale.

WALBECK. Henric. Johan

(Abo 11 octobre 1793- Abo 23 octobre 1822)

Docteur en philosophie, Docteur de Mathématiques à l'Université de Abo (1816). Astronome à l'Observatoire de Abo (1817), il effectue un voyage à l'étranger de 1819 à 1821.

Oeuvres citées dans *Biographisch literarisches Handwörterbuch*, Poggendorf, 2, p. 1243:

De forma et magnitudine telluris ex dimensis arcibus meridiani definiendis., 1819

"Über die Genauigkeit der Beobachtungen am Mittagsfernrohr der Dorpater Sternwarte" in *Bode's Jahrb. für 1823*.

"Vergleichung der Secundenpendel-Beobachtungen Karter's unter sich selbst nach die MMC" in *Astronomische Nachrichten*, 1, 1823

"Noch verschiedene astronomische Beobachtung daselbst" in *Svensk. Vet. Acad. Handl.*, 1816

"18 U." in *Von Zach's Correspondanz astronomisch*, I, 1820

Übersetzte Ch. L. Gerling's Trigonometrie ins Schwedische, Abo, 1821

(Dans la *Biographie générale de l'astronomie*, vol.2 1882 Holland Press, il est signalé une biographie de Walbeck en suédois ou finlandais: Tengström, *Chronologiska Förteckningar och Anteckningar öfver Finska Universitets fordna Proconcellerer, samt öfver Faculteternas Medlemmar och Adjuncter*, Helsingfors, 1836)

GLOSSAIRE

Amplification de la base : Dans la pratique, on ne mesure pas directement un côté d'un triangle, mais simplement un segment d'une dizaine de km de longueur appelé *base*. Par des opérations de triangulations, on incorpore la base à un triangle de la chaîne, c'est l'amplification de la base.

Aplatissement : Quantité a , relative à un ellipsoïde, définie par: $a = (a-b) / a$ où a est le grand axe et b le petit axe.

Azimut : Angle d'un plan vertical avec un autre plan vertical choisi pour plan origine (par exemple en astronomie : angle du plan vertical d'un astre avec le méridien du point d'observation).

Base : voir amplification

Carte chorographique : intermédiaire entre les cartes géographiques et les cartes topographiques, son échelle varie de 1/100.000 à 1/1.000.000 (source: Marechalle, *Traité de dessin*, 1880).

Cartographie : (définition de l'Association Cartographique Internationale, 1966, et de l'UNESCO). Ensemble des études et des opérations scientifiques, artistiques et techniques intervenant à partir de résultats d'observations directes ou de l'exploitation d'une documentation, en vue de l'élaboration de cartes, plans et autres modes d'expression.

Chaînes primordiales : Forme la plus souvent donnée à une triangulation du 1^{er} ordre. Elle suit de préférence un parallèle ou un méridien. Elles constituent l'ossature d'un réseau géodésique.

Ellipsoïde : Solide engendré par la rotation d'une ellipse autour de l'un de ses axes.

Ellipsoïde de référence: En première approximation, la terre a la forme d'un ellipsoïde de révolution dont les dimensions sont données par les quantités suivantes: demi-axe équatorial $a = 6378160\text{m}$; aplatissement $a = (a-b)/a = 1/298,25$ où b est le demi-axe polaire. (source: La recherche, n°33, avril 1973).

Ellipsoïde de Bessel: 1841

Ellipsoïde de Clarke 1866

Ellipsoïde de Clarke 1880

Géodésie : Science qui a pour objet l'étude de la forme de la terre et de ses dimensions.

Géoïde : Surface équipotentielle représentant le niveau moyen des océans. Il est voisin d'un ellipsoïde.

Limbe : Cercle sur lequel est porté la graduation angulaire d'un instrument de mesure.

Topographie : Science du levé des plans et des cartes avec prise en compte du relief.

Triangulation du 1^{er} ordre : Elle est obtenue en couvrant une région d'un réseau de grands triangles de 40km de côté en moyenne. Chaque côté est mesuré avec le plus grand soin.

Triangulation du 2^{ème} ordre : Elle est obtenue en subdivisant les mailles d'une triangulation du 1^{er} ordre.

Triangulation du 3^{ème} ordre : Elle est obtenue en subdivisant les mailles d'une triangulation du 2^{ème} ordre.

Université Denis Diderot Paris VII

**GEODESIE
AU XIX^{ème} SIECLE :**

**De l'hégémonie française
à l'hégémonie allemande.**

Regards belges

ANNEXES

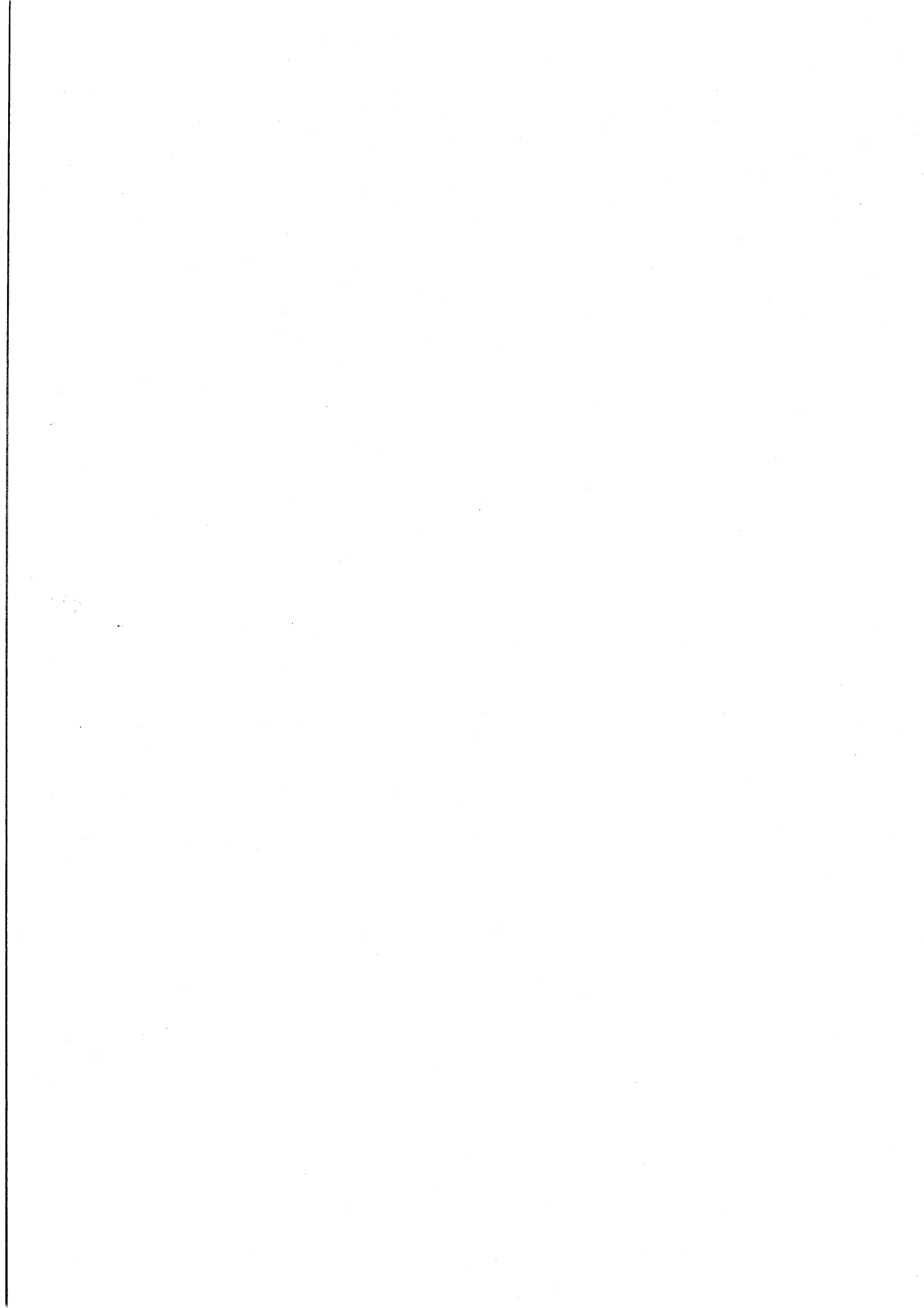
TOME II

Marie-Françoise JOZEAU

Thèse de Doctorat Nouvelle formule
Spécialité: Epistémologie et Histoire des Sciences

sous la direction de Pierre CREPEL

soutenue le 18 Juin 1997



Présentation des annexes

Dans ce tome, nous présentons différents types d'annexes :

* Des annexes techniques (n° 1, 2, 3, 6, 7, 9) permettant au lecteur non géodésien de mieux situer les problèmes.

* Des annexes bibliographiques ou de sources (n° 4, 5, 8, 10, 14, 16, 19, 21, 23, 24, 25, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 42, 46).

* Des annexes transcriptions ou traductions : inédits, lettres, préfaces (n° 11, 12, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 26, 27, 30, 35, 36, 40, 41, 43, 44, 45).

Parmi ces annexes, nous distinguerons :

* L'annexe 27 : *Rapport de Meyer* qui est la transcription d'un rapport manuscrit (dossier 4990 de l'ARB) inédit et non publié.

* Les annexes 14 à 30, 40, 44 et 45: ces annexes correspondent à la partie A III de la thèse : *La Belgique* .

* Les annexes 11 à 13 et 35 sont des traductions d'extraits de Bessel et de Baeyer, ainsi qu'une partie de l'annexe 30.

* L'annexe 36 est une traduction d'une lettre de Gauss à Gerling (26 décembre 1823).

* L'annexe 39 est un extrait d'un cours reprographié de Faye, à l'Ecole Polytechnique, daté 1855-1856.

N.B. : Les annexes sont numérotées dans l'ordre de lecture de la thèse.

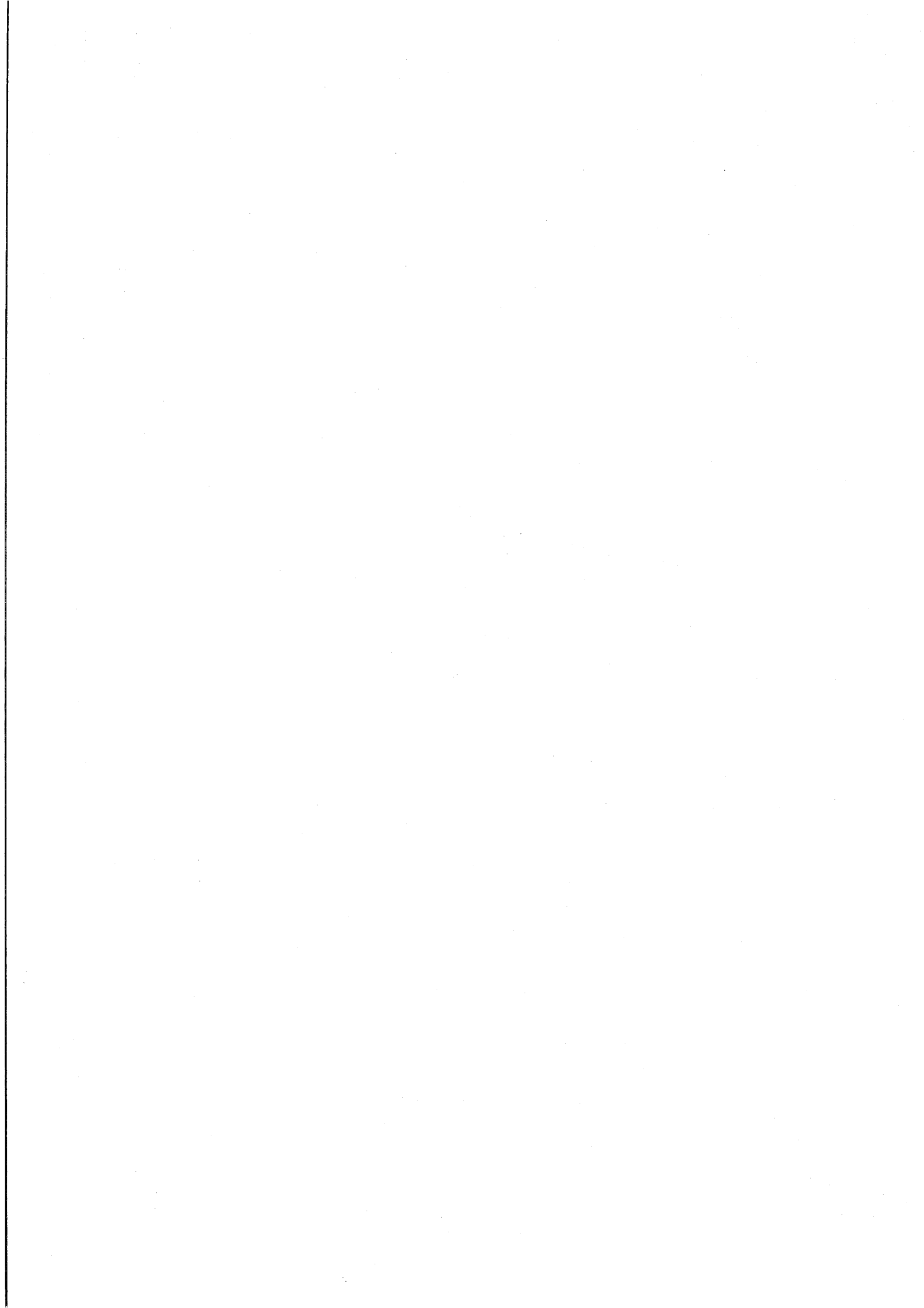


TABLE DES ANNEXES

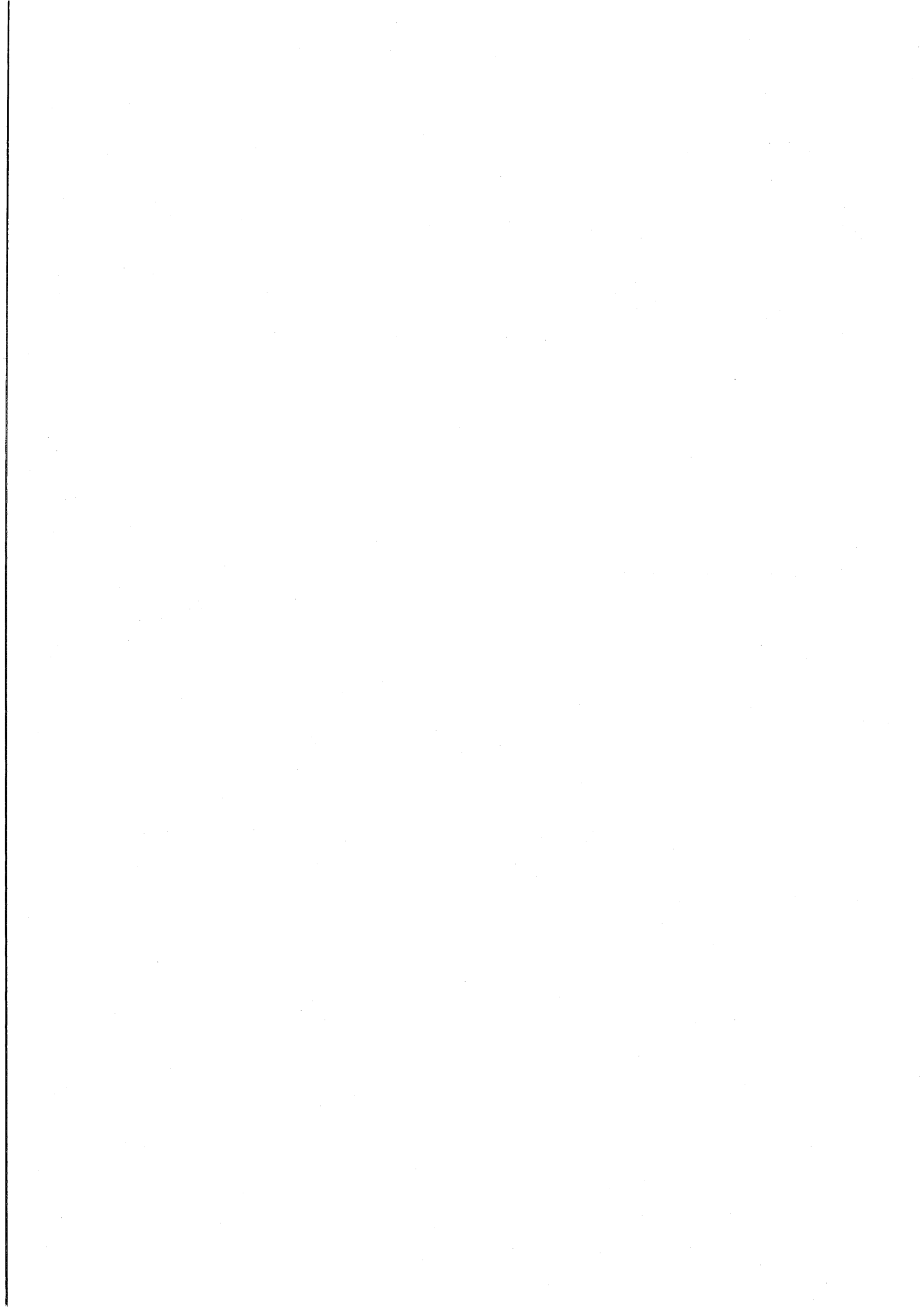
Annexe 1	Triangulation.....	3
Annexe 2	Instruments de géodésie.....	8
	Cercle répétiteur, gravure	
	Cercle réitérateur, gravure	
Annexe 3	Mesure des angles; méthodes d'observation	14
Annexe 4	Tableau servant à consigner les observations et à exécuter les calculs, suivant l'école française.....	19
Annexe 5	Au sujet d'une lettre de Gauss à Bertrand.....	24
Annexe 6	Le point sur les triangulations au XIX ^{ème} siècle en Europe, avec carte.....	27
Annexe 7	Théorème de Legendre	32
Annexe 8	Tableau des qualités moyennes dans les triangles des 7 régions Struve.....	39
Annexe 9	Réduction au centre.....	41
Annexe 10	Calcul de compensation de Struve en partant de deux hypothèses différentes.....	47
Annexe 11	Traduction de l'introduction du chapitre 3 de <i>Gradmessung in Ostpreussen</i> de Bessel, Berlin, 1838.....	51
Annexe 12	Traduction de l'introduction de <i>Gradmessung in Ostpreussen</i> de Bessel, Berlin, 1838.....	54
Annexe 13	Traduction de l'introduction de <i>Die Küstenvermessung</i> de Baeyer, Berlin, 1849.....	62
Annexe 14	Liste des publications de Nerenburger.....	71
Annexe 15	Correspondance de Nerenburger	
	Dossier 1890 de l'ARB	74
Annexe 16	Liste des oeuvres de Meyer.....	87
Annexe 17	Fonds Jolly: lettres de Renoz; calcul géodésique; manuscrits de Meyer	92
Annexe 18	Le Moniteur belge du 14 juin 1847.....	99
Annexe 19	Thèse de L. Bouvier: Table des matières, introduction, § 35.....	108
Annexe 20	Mémoire "non conservé" de Meyer, Dossier 7181 de l'ARB.....	115
Annexe 21	Table des matières d'un cours de géodésie dispensé au Dépôt de la Guerre belge après 1846.....	118
Annexe 22	Lettre de Baeyer à Liagre; Fonds Liagre de l'ARB, liasse 8834.....	122

Annexe 23	Liste des sociétés dont Liagre est membre.....	126
Annexe 24	Oeuvres de Liagre.....	128
Annexe 25	Listes d'observatoires européens et de leurs directeurs de 1800 à 1860.....	131
Annexe 26	Séance du 1er Août 1846 de l'Académie Royale de Bruxelles: Rapport de Meyer.....	133
Annexe 27	Rapport de Meyer; Dossier 4990 de l'ARB.....	138
Annexe 28	Tableau de la marche des opérations géodésiques en Belgique: chronologie et cartes.....	165
Annexe 29	Table des matières de <i>Calcul des probabilités et théorie des erreurs</i> de Liagre.....	171
Annexe 30	Mémoire de Liagre: <i>Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations</i>	178
Annexe 31	Notations introduites par Gauss.....	191
Annexe 32	Exemples de tableaux intervenant dans les compensations.....	195
Annexe 33	"Préceptes sur la conduite des calculs" de Liagre.....	206
Annexe 34	Exemples donnés par Liagre: MMC et géodésie.....	212
Annexe 35	<i>Die Küstenvermessung</i> de Baeyer, Berlin, 1849, § 97.....	217
Annexe 36	Lettre de Gauss à Gerling, 26 Décembre 1823.....	220
Annexe 37	Extrait de Gauss: Supplément à la théorie de la combinaison des observations § 8, 9, 10; 1826.....	224
Annexe 38	Exemples de Gauss relatifs à la géodésie.....	228
Annexe 39	Cours de Faye à l'Ecole polytechnique (1855-56): Théorie des erreurs.....	236
Annexe 40	"Rapport sur la triangulation européenne en longitude sous la latitude de 52°" et Lettre de Baeyer à Quetelet; Dossier 275 de l'ARB.....	251
Annexe 41	Rapports annuels sur les travaux de la Commission centrale de l'Europäische Gradmessung.....	262
Annexe 42	"Géodésie" dans les CRAS Année 1863.....	265
Annexe 43	Lettre de Le Verrier à Michel Chevalier.....	269
Annexe 44	Dossier 76 in <i>Correspondance de A. Quetelet</i>	271
Annexe 45	Correspondance avec Nerenburger (1852-1869) ARB Fonds Liagre. 8835	274
Annexe 46	<i>Mémorial du Dépôt de la Guerre</i>	281

ANNEXE 1

TRIANGULATION

Cette annexe rappelle le principe de triangulation et son origine.



TRIANGULATION

1) Le principe

Comme il est généralement impossible en pratique de mesurer de grandes distances, à cause des accidents de terrain dus au relief et des différents obstacles existants sur le sol d'une région, on utilise le procédé indirect dit de "triangulation", à partir de points facilement repérables (sommets, clochers...), appelés sommets géodésiques. Il est en effet plus facile de mesurer des angles.

Soient deux points I et J à la surface de la Terre. Ces deux points sont liés par une suite de triangles. Pour effectuer la jonction géodésique des deux points, on mesure un seul côté de triangle, que l'on appelle la base et on mesure ensuite les angles des différents triangles. Grâce à la formule de trigonométrie plane $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$, on peut calculer de proche en proche les côtés des triangles, longueurs à partir desquelles il est alors possible de calculer la distance IJ connaissant l'azimut d'un des côtés.

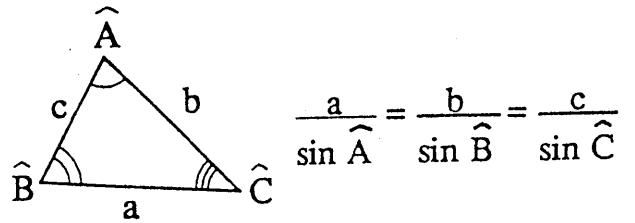
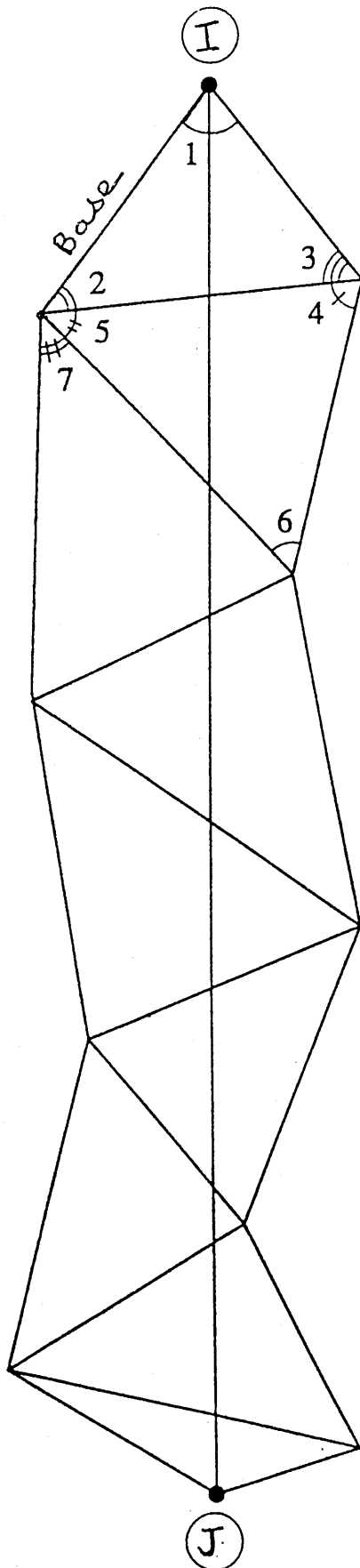
En réalité, il suffirait de mesurer seulement deux angles dans chaque triangle. Le troisième angle pourrait alors se déduire par la formule:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ + \varepsilon, \text{ où } \varepsilon \text{ représente l'excès sphérique.}$$

Cependant, la mesure du troisième angle est effectuée comme moyen de vérification ou pour augmenter l'exactitude des résultats.

Remarque: la longueur de la base et des côtés varie suivant les pays et les époques. En France, la longueur des côtés d'une chaîne primordiale, triangulation du 1^{er} ordre, est environ 40 km; les chaînes d'ordre supérieur correspondent à des sous-triangulations avec des triangles de plus en plus petits.

SCHEMA D'UNE TRIANGULATION



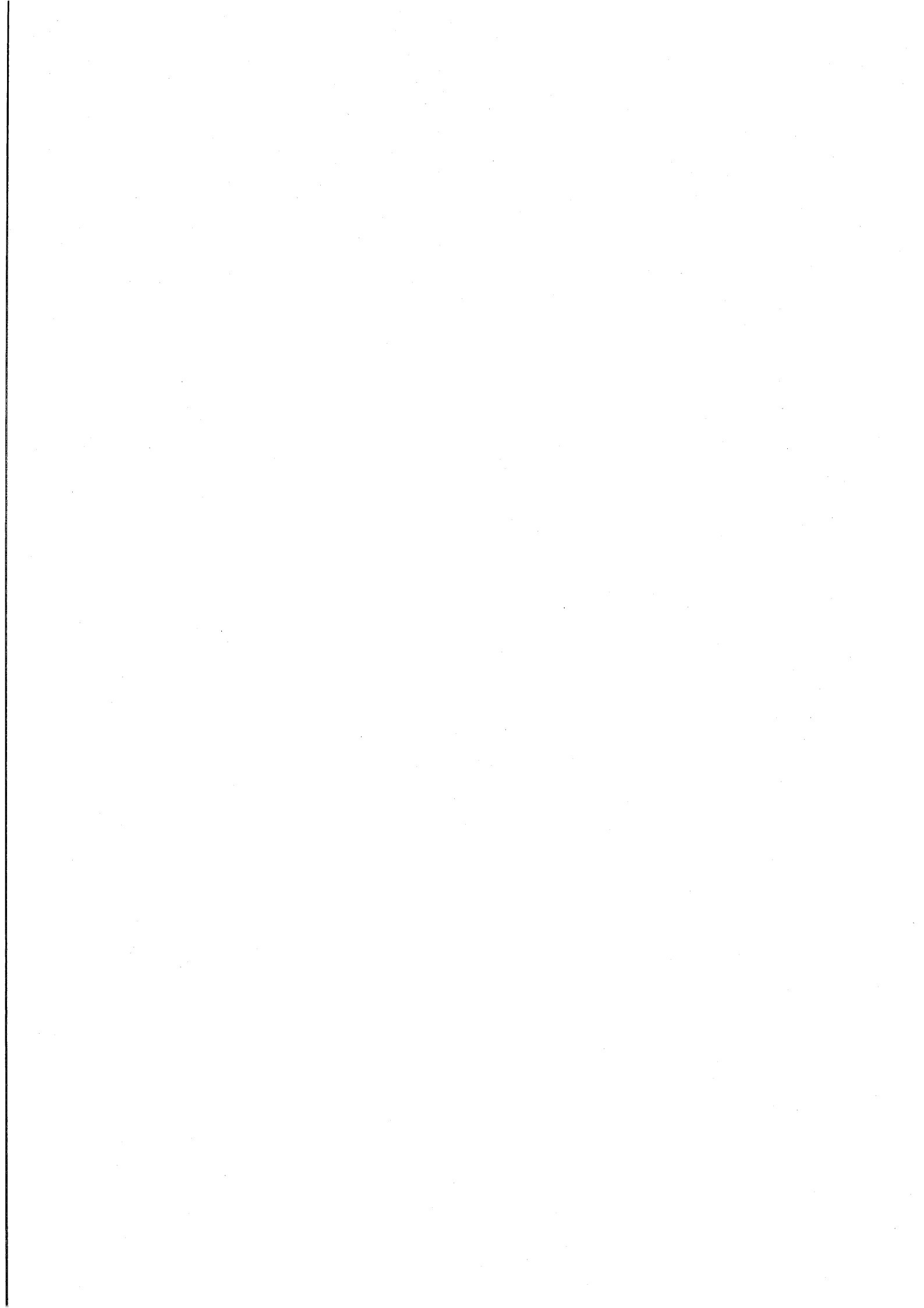
2) Historique

Cette méthode est exposée dans le *Libellus de locorum describendorum ratione* par le mathématicien flamand Gemma Frisius en 1533 dans le but de réaliser des cartes locales en Flandre. Mais il est fort probable que ce procédé était déjà utilisé par Jacques De Deventer, contemporain de Frisius, lors des levées qu'il effectuait dans le duché de Brabant. Le principe de triangulation est appliqué vers 1617 par le Hollandais Snellius qui travaille toute sa vie à l'établissement d'une carte des Pays-Bas. En 1578, Tycho-Brahé aurait déjà utilisé cette méthode pour rattacher l'île de Hveen (Danemark), où se trouve l'observatoire de Uraniborg - premier observatoire des temps modernes qui lui a été octroyé en février 1576 par Frédéric II - à la côte du Danemark.

En France, cette méthode est utilisée pour la première fois par l'astronome, l'abbé Jean Picard, chargé en 1669 par l'Académie des Sciences de mesurer la distance entre Sourdan et Malvoisine, correspondant à un degré de méridien de Paris.

ANNEXE 2
INSTRUMENTS DE
GÉODÉSIE

Cette annexe donne une brève présentation de quelques instruments utilisés en géodésie. Nous indiquons ceux qui sont présentés lors de l'Exposition universelle de Paris, en 1851.



INSTRUMENTS DE GEODESIE

Nom	Usage
Le cercle méridien (installé dans le plan méridien)	Détermination d'un point terrestre
Le théodolite (comporte un cercle horizontal et un cercle vertical)	Mesure des angles horizontaux et des angles verticaux
Le cercle géodésique ou le cercle azimutal (théodolite comportant seulement le cercle horizontal)	Mesure des angles horizontaux
Les règles	Mesure des bases

Le théodolite mesure les angles réduits à l'horizon tandis que le cercle répétiteur mesure les angles dans leur plan, ce qui nécessite ensuite une réduction à l'horizon.

Le théodolite est un instrument qui permet de mesurer simultanément des angles horizontaux et des angles verticaux. Cela implique l'existence sur le même appareil de deux cercles ou du moins de deux demi-cercles divisés. Ce principe si simple et qui nous paraît évident mettra en France et en Belgique environ 250 ans pour s'imposer. (Ils étaient peu pratiques et fort coûteux car ils exigeaient deux cercles gradués).

L'inventeur est un anglais. On pense à l'anglais Léonard Digges (Description faite par son fils Thomas en 1571 dans *A geometrical practical treatize named Pantometria*). C'est la combinaison d'un cercle d'arpentage et du demi-cercle. Puis Ramsden (1730-1800) y ajoute des micromètres et ensuite des microscopes. Le théodolite est surtout construit en Angleterre et en Allemagne. En France, même lors des grandes opérations géodésiques du XVIII^{ème} siècle, on donnera toujours la préférence aux cercles pouvant être basculés dans les deux positions.

En 1851, lors de l'Exposition universelle de Paris, le dixième jury doit se prononcer sur les instruments de mathématiques, de physique, d'astronomie, etc.... qui sont présentés à l'occasion de cette manifestation. Nous remarquons, dans le catalogue de cette Exposition, que J. Herschell est membre titulaire du jury et A. Quetelet membre associé; mais il n'y a aucun représentant de l'Allemagne, bien que plusieurs instruments de ce pays soient exposés.

Les instruments de précision présentés sont répartis en douze catégories: machines à calculer, planimètres, instruments de passage, dynamomètres, baromètres et manomètres, comparateurs, machines à diviser la ligne droite, mélanges, lunettes

astronomiques et longues-vues, instruments d'astronomie et de géodésie, instruments d'astronomie nautique, instrument d'arpentage.

Relevons dans le rapport du dixième jury rédigé par Mathieu, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, les points suivants :

Dans la présentation des instruments de passage, une discussion est faite autour de la notion d'erreur personnelle de l'observateur. Des travaux de Bessel et d'Arago (1842) puis de Bond sur ce sujet sont cités.

Trois comparateurs sont exposés; cet instrument "sert à comparer deux règles et à évaluer leur différence de longueur avec une grande précision".

* Le comparateur de Gambey apporte des changements notables par rapport aux anciens modèles; il comporte une vis micrométrique horizontale, une petite lunette et deux microscopes.

* Le comparateur de Brünner possède "une aiguille combinée avec la vis micrométrique (sphéromètre)".

* Barman de Berlin expose un comparateur à niveau dans le système de Bessel; mais "cet instrument ne peut servir que pour comparer deux mètres à bouts". Il est indiqué comme délicat d'usage et ne pouvant pas être mis entre des "mains usuelles".¹

Le rapport, avant de présenter les lunettes astronomiques et longues-vues, insiste sur les efforts faits par l'Allemagne et la France "pour fabriquer du bon fint-glass homogène, diaphane et d'une densité convenable". Ces travaux de recherche sur la fabrication du verre sont évidemment très importants et permettront une amélioration de la précision de divers instruments tant astronomiques que géodésiques.

Examinons plus en détail le paragraphe relatif aux instruments d'astronomie et de géodésie. Après diverses considérations générales d'ordre historique sur l'invention de ces instruments, Mathieu ne manque pas de mettre en valeur le rôle d'Arago qui a tout fait pour encourager les constructeurs français et leur permettre d'acquérir une reconnaissance internationale aux côtés des constructeurs anglais et allemands.

"Les Anglais Sisson, Graham, Harrison, Dollond, Bird, Ramsden, Troughton, ont longtemps été en possession de faire des instruments astronomiques pour toute l'Europe.[...] C'est vers le commencement de ce siècle que nous voyons s'élever à Munich deux établissements considérables qui ont été illustrés par les travaux de Reichenbach et de Fraunhofer. Leurs dignes successeurs, MM. Ertel et Merz, continuent à construire pour le monde entier.[...] En France,[...] c'est vers les années 1790 que Lenoir, sous la direction de Borda, a construit les instruments et

¹Nerenburger en fera la critique et y apportera des changements. Pour plus de détails, on peut consulter son *Compte-rendu des opérations de la commission instituée par le ministre de la guerre pour étalonner les règles qui ont été employées à la mesure des bases géodésiques belges*, 1855.

tous les cercles répéteurs qui ont servi dans la grande opération de la méridienne de France. Fortin, à la même époque, commence à construire, pour les physiciens et les astronomes, des instruments remarquables par la précision,[...]. Cependant nous demandions encore les grands instruments à nos voisins d'outre-Manche; Mais, grâce aux sentiments de nationalité et à la puissante intervention d'Arago, ce vénérable et consciencieux artiste fut chargé en 1822, par le bureau des longitudes, d'exécuter un cercle mural de deux mètres de diamètre pour l'observatoire de Paris.[...] Arago avait deviné, en 1815, un grand artiste dans les premiers essais de Gambey; il le conserva à la France au moment où le découragement l'entraînait en Amérique. Quelques années après, Arago, par sa position dans la science et la faveur dont il jouissait dans le parlement, entreprit avec succès la régénération de l'observatoire de Paris et des instruments. Il chargea Gambey de la construction de la grande méridienne qui a remplacé celle de Ramsden, d'un cercle mural de deux mètres de diamètre et d'un équatorial dont les deux cercles ont un mètre de diamètre.[...] Après avoir été longtemps les tributaires de nos voisins, nous avons vu, à notre tour, les instruments de Gambey recherchés dans le monde entier."

Signalons, entre autres, qu'il a construit la lunette méridienne de Bruxelles et celle de Genève.

Mathieu regrette que les constructeurs n'aient envoyé à l'Exposition que les échantillons dont ils pouvaient disposer. Ce qui explique dit-il "l'absence des instruments d'astronomie, et même de géodésie du premier ordre, qui auraient pu donner une juste idée de ce que produisent des hommes d'élite pour le service des sciences".

Parmi les instruments présentés se trouvent:

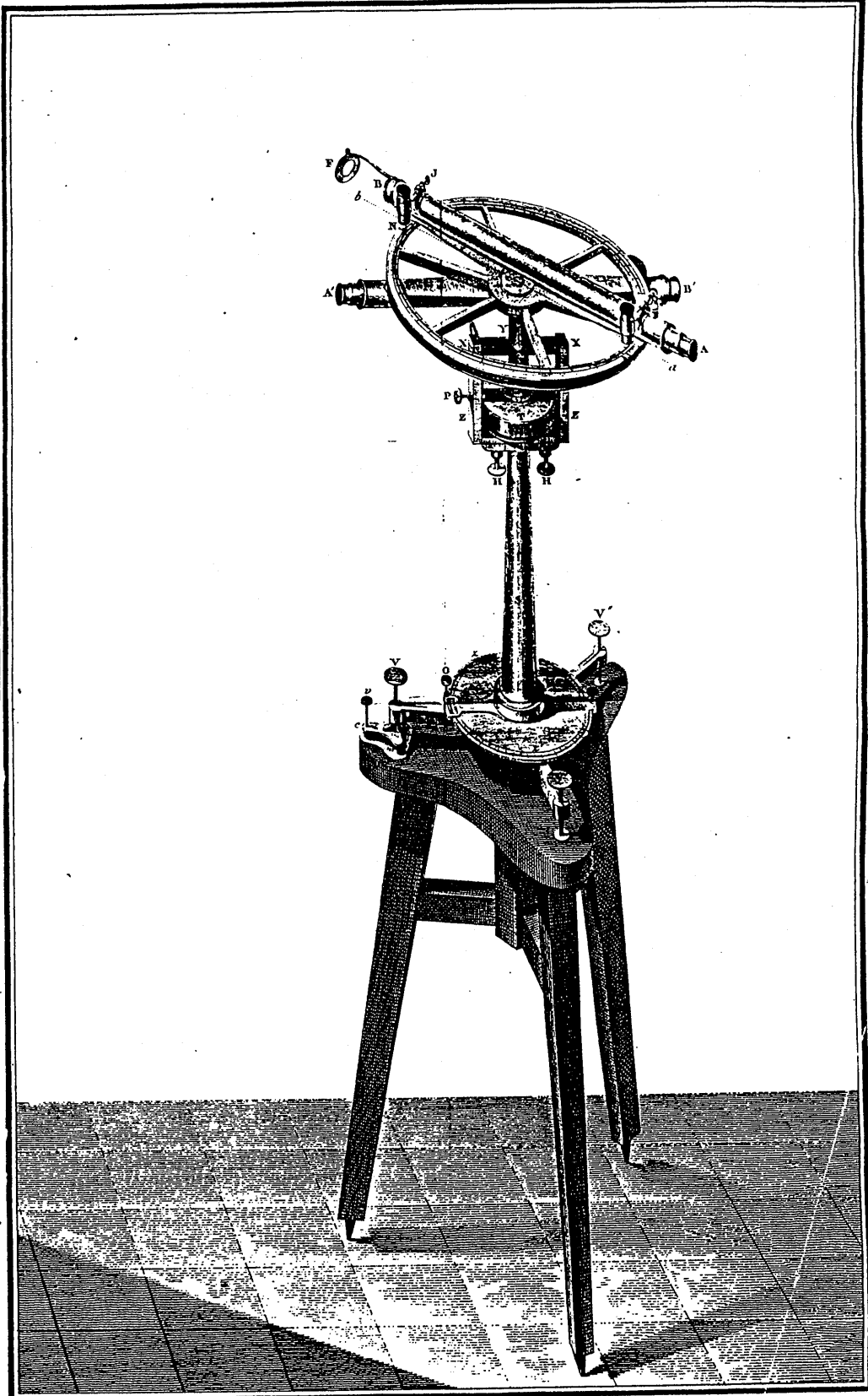
*L'instrument universel de Ertel (Munich)

*Le théodolite de Beaulieu, théodolite répéteur construit dans le système de Gambey.²(Bruxelles)

*Des instruments divers de Simms et Dollond (Londres)

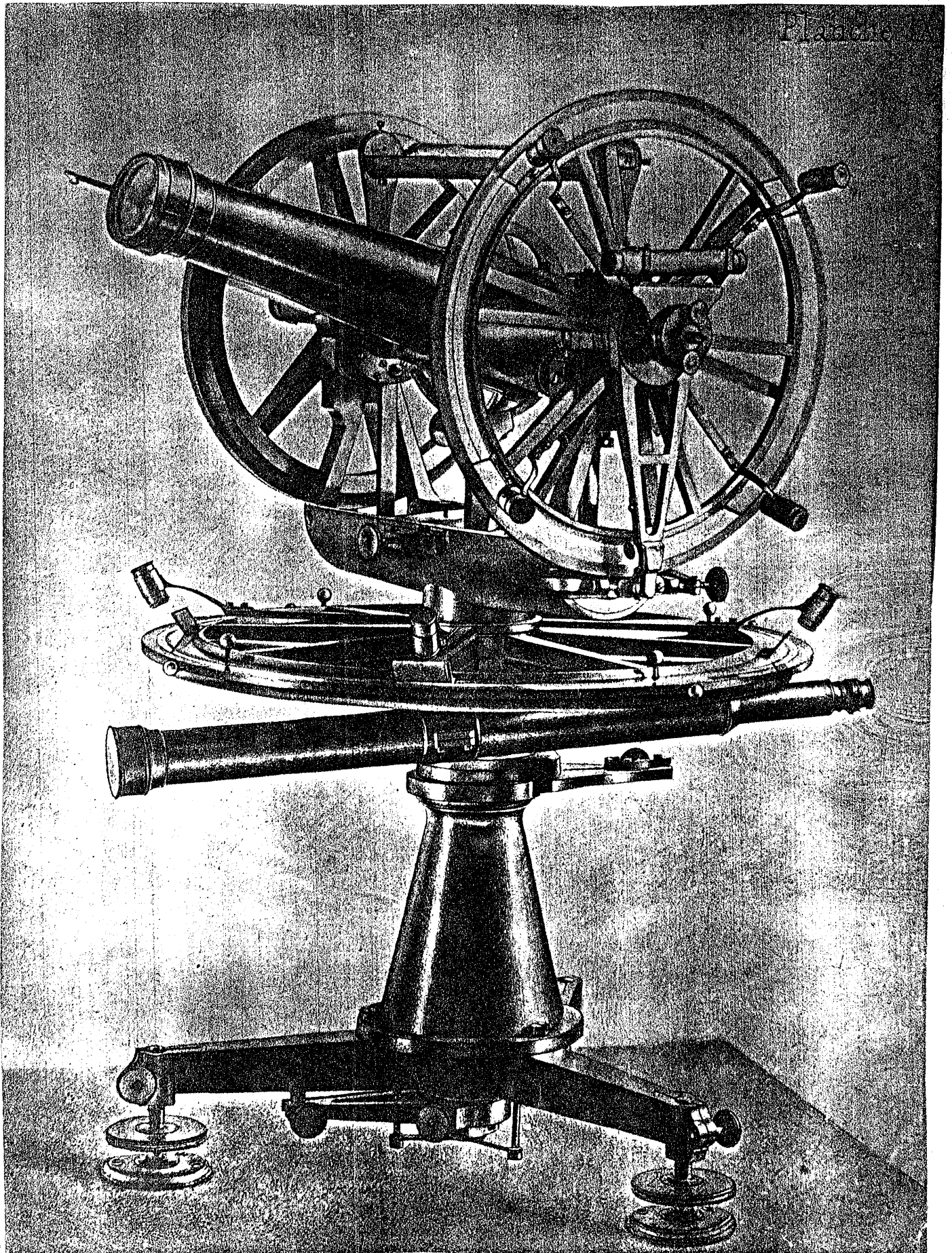
Les deux premiers instruments ont obtenu des récompenses du second ordre. L'accent est mis sur la "belle division de ce cercle; on n'a trouvé qu'une seule fois une discordance de 3"6". On peut lire dix secondes centésimales ou 3"24 sexagésimales sur le deuxième instrument.

²Cet instrument a un grand avantage sur le cercle répéteur de Borda. En effet, il donne les angles observés réduits immédiatement à l'horizon. Il y a donc un gain de temps considérable dans les opérations géodésiques et dans les calculs.

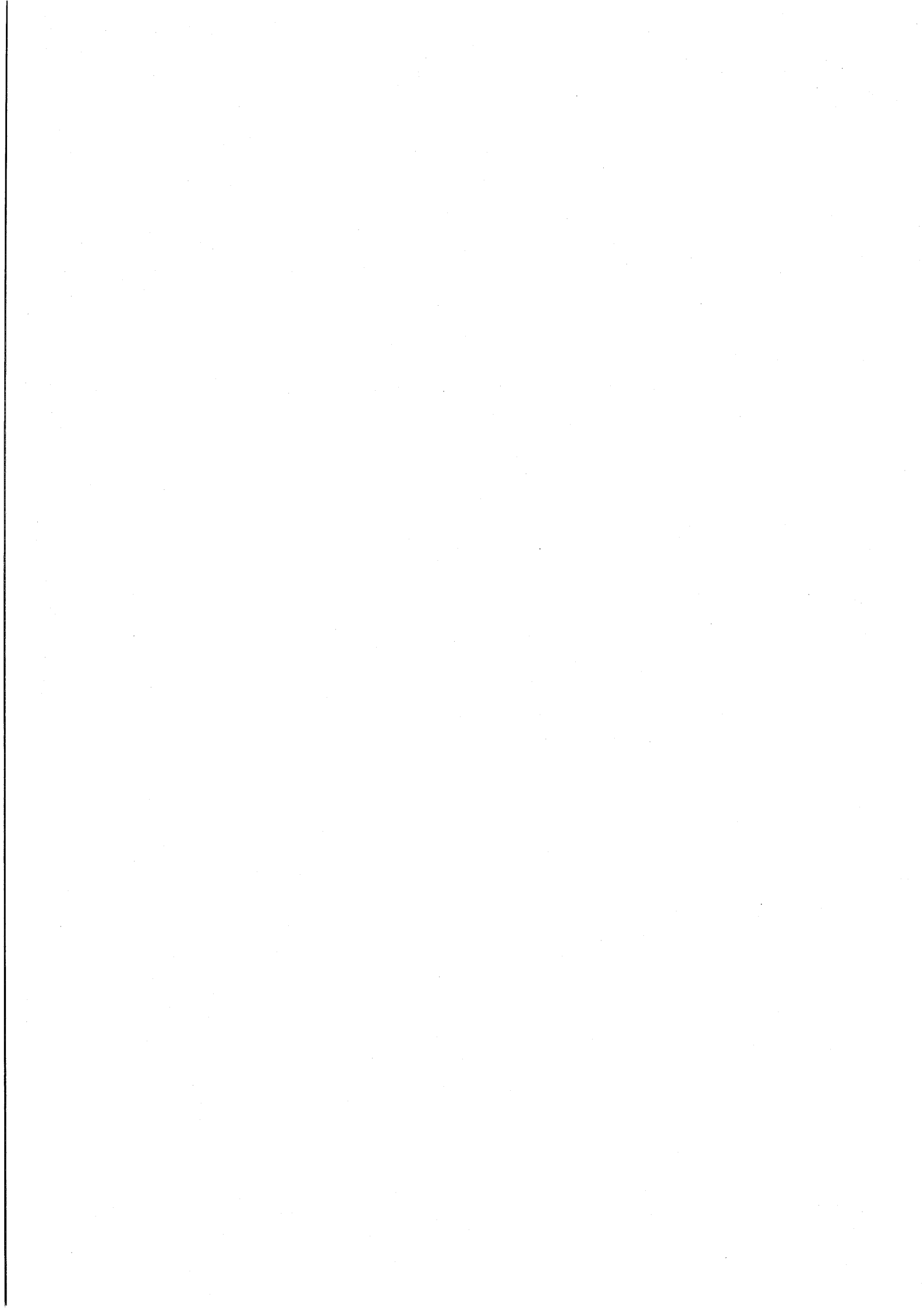


Cercle répétiteur

Traité de Géodésie, L. Puissant, 1805



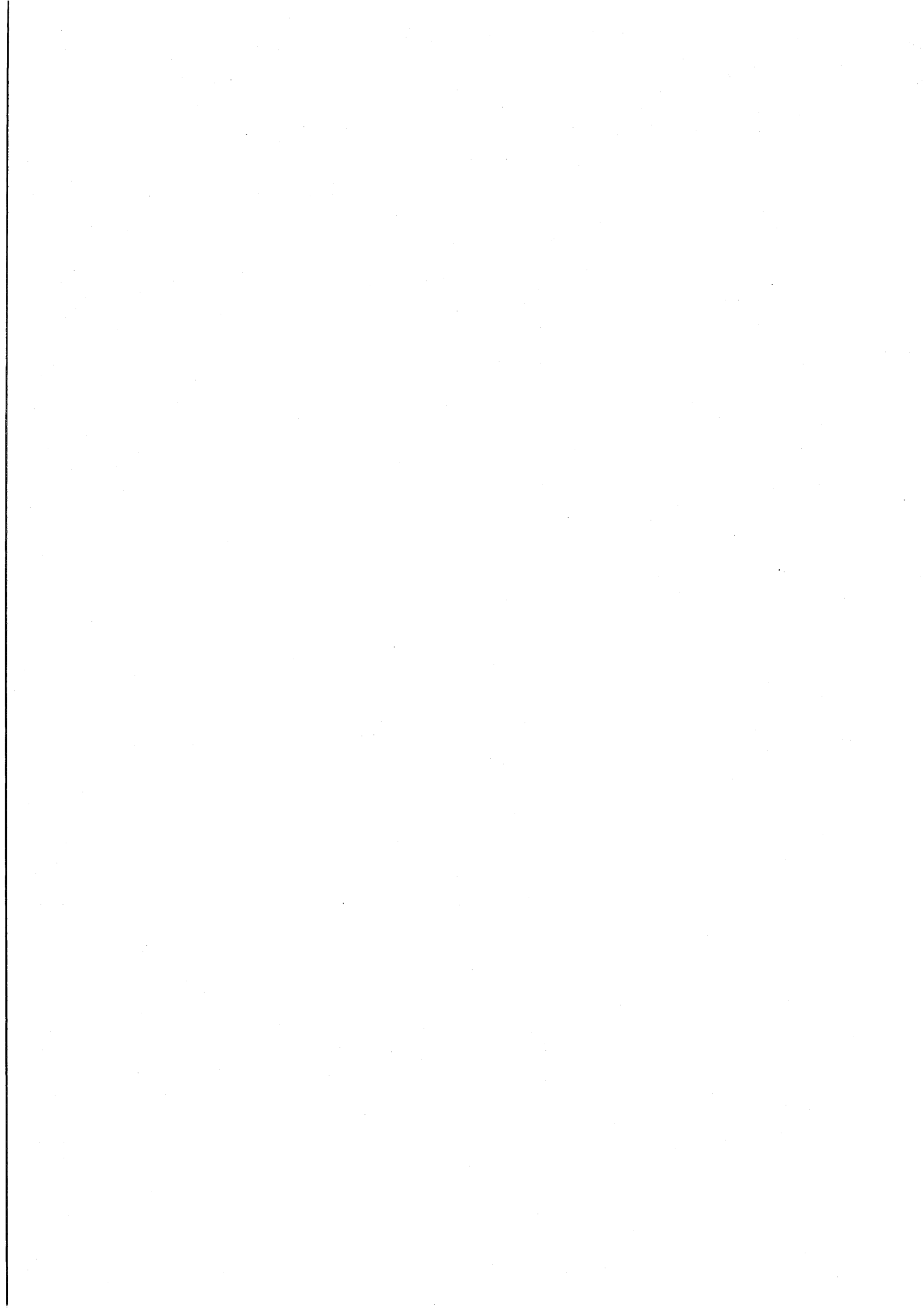
Cercle réitérateur
Instrument construit par Ertel à Munich
Dossier 47100B Musée de l'Armée Bruxelles



ANNEXE 3

MESURE DES ANGLES
MÉTHODES D'OBSERVATION

Au XIX^{ème} siècle, trois méthodes d'observation sont utilisées pour observer les angles horizontaux. Nous en exposons brièvement les principes.



MESURE DES ANGLES MÉTHODES D'OBSERVATION

Dans les mesures d'angles, trois méthodes d'observation peuvent être utilisées: méthode simple ou ordinaire, méthode de la répétition, méthode de la réitération.

1) Méthode simple ou ordinaire

Cette méthode consiste à mesurer l'angle simple; on fait la lecture des verniers, après le pointé. Il est recommandé de faire la lecture dans les deux positions de la lunette (lunette à droite puis lunette à gauche) et d'effectuer ensuite la moyenne des lectures. Cette méthode est avantageuse par sa simplicité et peut s'effectuer avec n'importe quel type d'instrument mais elle n'est pas la plus exacte. Aussi, deux autres méthodes d'observation sont inventées afin de diminuer voire d'éliminer les erreurs dans la mesure des angles.

2) Méthode de la répétition

a) son principe

Cette méthode consiste, au lieu de mesurer l'angle simple, de mesurer un de ses multiples. Pour cela, on répète la mesure un certain nombre de fois en prenant à chaque fois pour origine la division du limbe à laquelle on est arrivé dans la mesure précédente. La valeur de l'angle cherchée est obtenue en divisant la dernière mesure trouvée par le nombre de mesures que l'on a effectué. Cette méthode ne peut être employée qu'avec certains instruments car elle nécessite des agencements particuliers de leurs différents organes. Certains cercles ou théodolites se prêtent à cette méthode; suivant la construction, il est possible de distinguer la répétition simple ou la répétition double. Cette dernière est possible avec le cercle répéteur de Borda.

b) Historique

Cette méthode est inventée vers 1752 par l'astronome allemand Tobie Mayer (1723-1762), directeur de l'observatoire de Göttingen³. Il substitue au secteur⁴ de 45° un

³T. Mayer, "Nova methodus perficiendi instrumenta geometrica et Novum instrumentum goniometricum" in *Commentarii Societatis scientiarum Gottengensis* 1, 1752.

⁴Le secteur de 45° ou quart de cercle est encore utilisé au XVIII^e siècle comme instrument de précision en astronomie et en géodésie. Mais cet instrument est lourd, encombrant et sa manipulation est lente. Aussi

cercle entier, pour y effectuer la répétition des mesures angulaires. Il envoie un dessin au Bureau des Longitudes de Londres et Bird construit un premier instrument permettant d'utiliser cette méthode. Une description de ce cercle, cercle à réflexion à l'usage des marins, est publiée en 1767 sous le titre "Theoria lunae juxta systema newtonianum" in *Mémoires de Goettingue*, t. II, p. 325.⁵

Puis, le navigateur français Borda, voulant améliorer le cercle de Mayer, fait exécuter son premier cercle à réflexion vers 1772 par le constructeur français Étienne Lenoir. En 1784, ce dernier construit le premier cercle répéteur; cet instrument est une adaptation du principe du cercle à réflexion à des mesures de géodésie et de topographie. Comme ces mesures sont faites sur terre, il n'est pas nécessaire d'avoir des miroirs; le cercle porte deux lunettes et on pratique la méthode de répétition simple ou double suivant le dispositif du cercle. Ce cercle est utilisé officiellement en 1787 pour la rectification de la frontière entre la France et l'Espagne puis lors de la jonction des triangulations de Greenwich et de Paris. Il est choisi pour servir aux grandes triangulations effectuées par Delambre et Méchain sous la Révolution en vue d'établir le Mètre, unité de longueur universelle. Par la suite, de nombreux cercles sont construits tant en France qu'à l'étranger. Précisons qu'avec ces instruments, on travaille dans le plan des objets et qu'il faut donc effectuer une réduction à l'horizon.

c) Avantages et inconvénients

Le principal avantage de cette méthode est de diminuer les erreurs dues à la lecture des mesures. La mesure d'un angle est obtenue ainsi avec une précision d'environ de 1 à 2" au lieu d'1/4 de minute, précision obtenue avec le quart de cercle. En effet, la méthode de répétition ne nécessite que deux lectures, une au début et une à la fin de l'opération. Soit A la valeur de l'angle et e l'erreur de lecture; après n répétitions, la mesure lue est $nA \pm e$; donc la valeur de la mesure de l'angle est $A \pm e/n$. Les erreurs de pointé ne sont pas réduites puisque l'on doit à chaque répétition faire un pointé. Mais par ce procédé, l'erreur due à la division du limbe qui peut être irrégulière (car encore faite manuellement) est atténuée voire compensée puisque l'on utilise toutes les graduations du cercle.

Malgré ces avantages, l'usage du cercle présente divers inconvénients: il exige la présence de deux observateurs; il est nécessaire de compter exactement le nombre de visées et le nombre de tours entiers faits par la lunette; chaque mesure d'angle exige deux pointés, ce qui est source d'erreur; il faut que l'origine d'une mesure sur le limbe coïncide

essaye-t-on d'abord d'améliorer sa précision (usage des micromètres, apparition des lunettes achromatiques...) puis avec les progrès techniques, on peut construire des cercles entiers moins encombrants et plus performants.

⁵On pourra trouver une description de cet instrument et de son utilisation dans l'ouvrage *L'art de lever les plans* de J.J. Verkaven, 1811, deuxième partie, chapitre V.

exactement avec l'extrémité de la mesure précédente - ce qui est rarement le cas - et de ce fait les mesures sont dépendantes. De plus, la manoeuvre de l'instrument est assez compliquée par construction parce qu'il faut employer alternativement le mouvement général du limbe et le mouvement particulier de l'alidade: lors de ces mouvements, le jeu des axes et leur usure introduit forcément des erreurs. Précisons enfin que certains cercles sont affectés d'erreurs constantes surtout lorsque le cercle sert à des mesures d'angles verticaux.

3) Méthode de la réitération

a) son principe

Cette méthode consiste à prendre plusieurs mesures simples, successives et indépendantes, de l'angle cherché, et à adopter pour résultat la moyenne de ces observations isolées. Pour effectuer ces mesures, on part de points du limbe également répartis sur le demi ou le quart de la circonférence, suivant le nombre de verniers. Cette méthode peut être employée avec des instruments d'une grande simplicité, car les cercles n'ont pas besoin de vis de rappel.

b) historique

Cette méthode⁶ est introduite par Struve dans les opérations géodésiques de Russie à partir de 1822. Gauss et Bessel utilisent d'abord la méthode de répétition avec des instruments répéteurs mais ils l'abandonnent au profit de la méthode de réitération, surtout lors des tours d'horizon ou séries. Ainsi, Gauss l'adopte lors des triangulations qu'il réalise au Hanovre de 1821 à 1842. Bessel, de 1830 à 1838 en Prusse, l'utilise avec des théodolites construits tout spécialement par Ertel. Ces informations sont à nuancer par l'historique que donne Struve dans le rapport de ses travaux⁷: l'anglais Mudge indique déjà ce procédé en 1799 et le colonel Everest l'emploie en Indes orientales depuis 1823.

Cette méthode est choisie par le Dépôt de la Guerre belge pour les travaux de triangulations effectués en vue de l'établissement de la carte de Belgique à partir de 1850. Le français F. Perrier voit utiliser cette méthode par les géodésiens anglais lors de la jonction de 1861-1862. Il essaye alors cette méthode, vers 1863, lorsque le Dépôt de la Guerre décide des opérations régulières en Algérie et utilise à cette fin un cercle azimutal, qu'il fait construire par Brünner à ses frais. Après cet essai, la France abandonne la méthode de répétition.

⁶Mascart dans l'article VII 6 de l'Encyclopédie des Sciences (1906-1911) utilise l'expression "procédé d'observation par positions alternées du cercle" pour désigner cette méthode.

⁷Voir *Arc du méridien de 25°20' entre le Danube et la mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855*, Tome 1, 1860; Tome 2, 1857, St-Petersbourg.

c) Avantages et inconvénients.

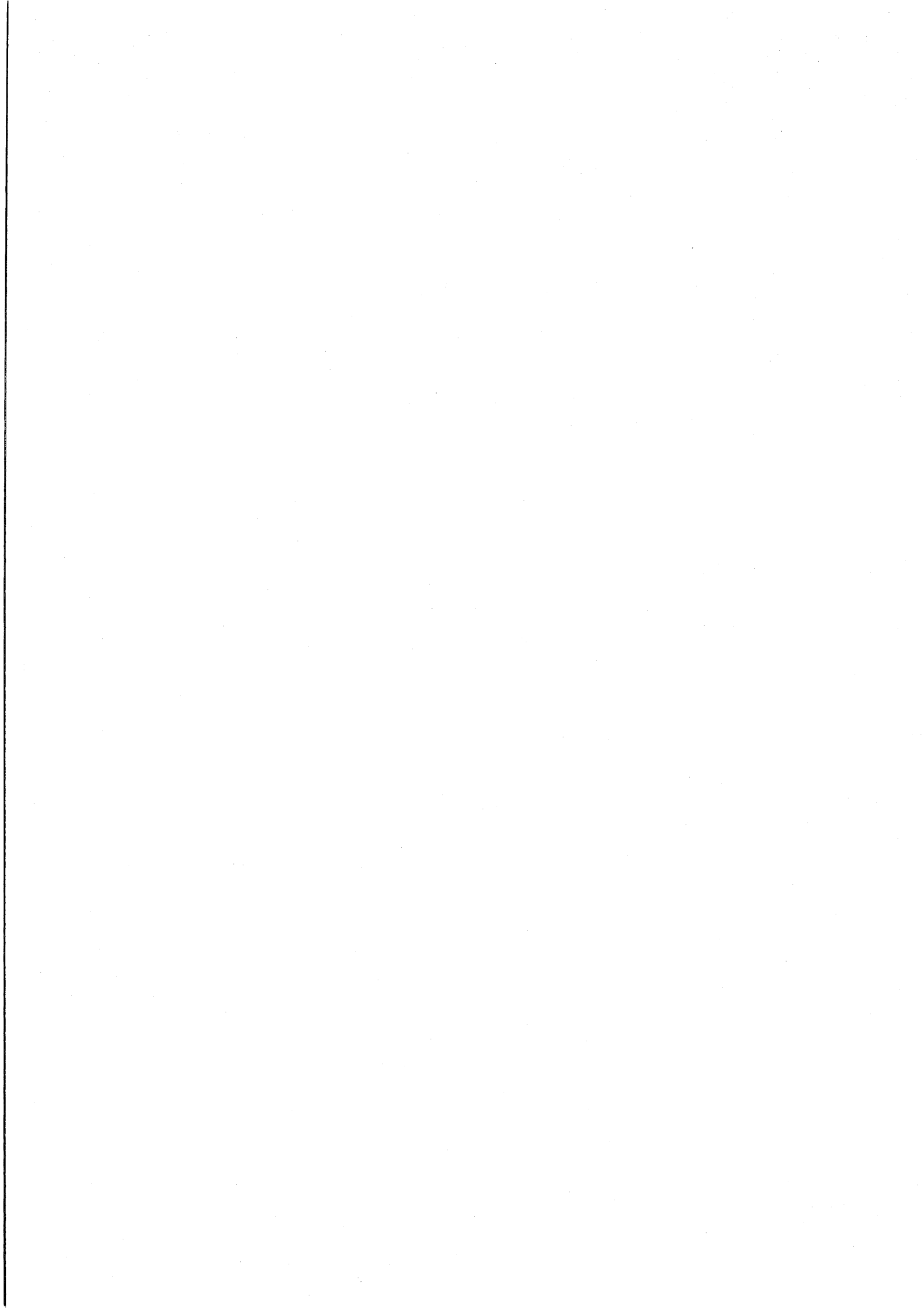
Tout d'abord, ce procédé est utilisable sur des instruments de construction simple, donc les observations sont faciles et rapides; les erreurs dues au jeu des axes sont insignifiantes. Ensuite cette méthode a le précieux avantage de pouvoir éliminer par compensation les erreurs de division du limbe puisque l'on répartit les points de départ et d'arrivée des angles sur toute la circonférence. Bien sûr, cette méthode exige plus de lectures que la méthode de répétition, mais les avantages l'emportent sur cet inconvénient.

Remarque: La méthode de la répétition perd son avantage lorsque les cercles ont un limbe de mieux en mieux divisé. Les premiers essais de division mécanique des limbes, permettant d'obtenir de bonnes divisions, datent du premier quart du XIX^{ème} siècle avec Reichenbach et Gambey.

ANNEXE 4

TABLEAU SERVANT A
CONSIGNER LES OBSERVATIONS
ET A EXECUTER LES CALCULS,
SUIVANT L'ECOLE FRANCAISE

Salneuve, à la fin de son *Cours de topographie et de géodésie* (1841), donne les modèles de tableaux utilisés en France pour recueillir les résultats obtenus lors des campagnes trigonométriques.



STATION à			
ANGLE { D ENTRE } G		On pointe sur	
n	nO	nΔ	nA
2	O	2	2
4	O	4	4
6	O	6	6
8	O	8	8
10	O	10	10
O = y = O+y = dR =			
ANGLE { D ENTRE } G		On pointe sur	
n	nO	nΔ	nA
2	O	2	2
4	O	4	4
6	O	6	6
8	O	8	8
10	O	10	10
O = y = O+y = dR =			

TABLEAU PREMIER.

On recueille dans ce premier tableau, les angles et les distances zénitales multiples, ainsi que les divers éléments de réductions au centre, à l'horizon et au sommet du signal.

Les angles multiples se placent dans la colonne nO, à côté des chiffres 2, 4, 6, etc., les quotients par ces mêmes chiffres s'écrivent dans la 3^e colonne O, et la comparaison des différents résultats indique la marche de la série. C'est le dernier quotient qui doit servir dans le calcul des triangles.

Les distances zénitales multiples sont inscrites dans la colonne nΔ, et les quotients correspondants dans la colonne contiguë Δ.

Pour obtenir l'élément de réduction y, on se dispense de remettre le vernier à zéro. Au moment où l'observation d'un angle est terminée, la lunette supérieure est dirigée sur l'objet de gauche et le vernier marqué nO : on la rend libre pour la pointer sur l'axe du signal; l'angle qu'on lit ensuite et qui sur le tableau est désigné par V, se composant de nO + y, il suffit d'en retrancher nO pour connaître y.

394 COURS DE TOPOGRAPHIE

TABLEAU II.

NOMS des SOMMETS.	ANGLES OBSERVÉS.	LOGARITHMES des sinus des ANGLES.	CALCUL des CÔTÉS.	CÔTÉS en MÈTRES.
(S)	°		L.DG c. L. sin. S L. sin. D	m.
(D)			L.S.G	
(G)			L.DG+ c. L. sin. S L. sin. G	
			L.SD	
(S)	°		L.DG c. L. sin. S L. sin. D	m.
(D)			L.SG	
(G)			L.DG+ c. L. sin. S L. sin. G	
			L.SD	
(S)	°		L.DG c. L. sin S L. sin. D	m.
(D)			L.SG	
(G)			L.DG+ c. L. sin. S log. sin. G	
			L.SD	

Calcul des triangles provisoires.

Ces calculs ont pour objet la détermination approximative des côtés de triangles qui entrent comme données indispensables dans la formule de réduction au centre.

Il suffit de prendre les logarithmes à 3 décimales. On pourrait à la rigueur se dispenser des calculs provisoires, en faisant avec soin le canevas au moyen des angles observés. On y prendrait graphiquement les longueurs des côtés. Néanmoins, ces calculs ont un autre but encore, celui de servir de vérification aux calculs définitifs.

STATION A.

NOMS des OBJETS	RÉDUCTION À L'HORIZON. $\text{tang. } O = \frac{r \sin \gamma}{D \sin \Delta}$ $\text{cotang. } O = \frac{r \sin \gamma}{D \sin \Delta}$	RÉDUCTION AU CENTRE. $C = O + \frac{r \sin \gamma}{D \sin \Delta}$ $\frac{r \sin \gamma}{D \sin \Delta}$	RÉDUCTION DES DISTANCES ZÉNITHALES. $\frac{dH}{K \sin \Delta}$
a.	$\Delta =$ $\Delta' =$ $\Delta - \Delta' =$ Réduction $k =$	$O + \gamma =$ $\Delta =$ $\Delta' =$ Réduction $C =$ Réduction $\gamma =$	$\Delta =$ Réduction = $\delta =$
b.	$dH =$ $\Delta =$ $\Delta' =$ Réduction $k =$	Angle observé = Angle réduit =	$\Delta =$ Réduction = $\delta =$
a.	$\Delta =$ $\Delta' =$ $\Delta - \Delta' =$ Réduction $k =$	$O + \gamma =$ $\Delta =$ $\Delta' =$ Réduction $C =$ Réduction $\gamma =$	$\Delta =$ Réduction = $\delta =$
b.	$dH =$ $\Delta =$ $\Delta' =$ Réduction $k =$	Angle observé = Angle réduit =	$\Delta =$ Réduction = $\delta =$

TABLEAU III.

Réductions des angles observés à l'horizon et au centre, et des distances zénithales aux sommets des signaux.

La réduction à l'horizon n'a lieu que lorsque les angles sont observés avec le cercle répétiteur. Le théodolite les donne tous réduits.

Ces réductions peuvent se calculer au moyen des tables de logarithmes, en se bornant à 3 décimales, ou avec des tables que M. le colonel Pissart a insérées dans son Traité de géodésie sous les numéros 1 et 2. On entre dans la table 1 avec l'angle observé O , et l'on trouve les nombres correspondants aux premiers facteurs des deux termes de la correction, dans les colonnes intitulées tangentes et cotangentes. La table 2 donne les seconds facteurs et les arguments sont $200 - (\Delta + \Delta')$, et $\Delta - \Delta'$: on multiplie et l'on fait la somme algébrique des deux termes.

La réduction au centre s'effectue au moyen des logarithmes ou d'une table semblable à celles indiquées ci-dessus, et comprise sous le n° 1 dans l'instruction sur la disposition et la tenue des registres de calculs, publiés anciennement par le dépôt de la guerre.

La réduction des distances zénithales est positive quand dH est positif ; c'est-à-dire, lorsque l'observation se fait au-dessous du point de mire : elle est négative dans le cas contraire.

Quand on calcule les différences de niveau des points du troisième ordre, on ne rapporte pas la distance zénithale au sommet du signal : on emploie Δ ; mais alors il faut corriger la hauteur obtenue de la quantité dH , puisque l'on part de la cote du sommet et non de celle du lieu de l'observation. Ainsi, lorsque l'on opère au-dessous du point de mire, il faut retrancher dH du résultat obtenu, et l'ajouter dans le cas beaucoup plus rare où l'instrument est au-dessus de la mire. Ceci n'a lieu que pour des échelles terminées par une plate-forme ou une balustrade ; on bien encore pour les signaux construits en pierre.

On peut aussi calculer de la même manière les points du second ordre : on fait deux calculs différents avec chacune des distances zénithales réciproques non corrigées.

N. IV

NOMS des SOMMETS.	ANGLES		LOGARITHMES DES SINUS des angles corrigés.	CALCUL des côtés.	CÔTÉS en MÈTRES.
	RÉDUITS.	CORRIGÉS.			
(s)				$L. D. G.$	m
(d)				$c. L. \sin. S.$	
(s)				$L. \sin. D.$	
				$L. S. G.$	
				$L. D. G. + c. L. \sin. S =$	
				$L. \sin. G.$	
				$L. S. D.$	
		200,000,0			
Erreur dont il faut corriger la somme des trois angles en la répartissant par tiers.					

TABLEAU IV.

Calcul des triangles définitifs.

Les logarithmes des côtés de triangles du premier et du deuxième ordres, c'est-à-dire ceux dont les trois angles ont été observés, se prennent à sept décimales. Cinq suffisent pour les triangles du troisième ordre. On nomme ainsi ceux dans lesquels un angle est concit : on n'a pas fait station à ce troisième angle. Les points ainsi obtenus doivent être calculés sur deux bases.

La seconde colonne du tableau IV, contient les angles réduits au centre et à l'horizon. Si le triangle était rectiligne, et s'il n'y avait pas d'erreur dans les observations, la somme des trois angles devrait être précisément 200°. La différence que l'on trouvera sera donc due, d'une part, à l'excès sphérique, et de l'autre, aux erreurs de pointé, de lecture et à celle causée par l'imperfection de l'instrument. Si l'on veut savoir avec quel degré de précision l'on a opéré, on calcule à part l'excès sphérique que l'on sait être égal à la surface du triangle réduite en secondes, dont l'expression est $\frac{1}{2} \delta c. \frac{\sin. A}{r. 2 \sin. 1''}$.

En préparant ces calculs, il est bon de transcrire les deux premiers chiffres des logarithmes des sinus, d'après le calcul des triangles provisoires : cela évite de commettre des erreurs, en prenant parfois des cosinus pour des sinus et réciproquement.

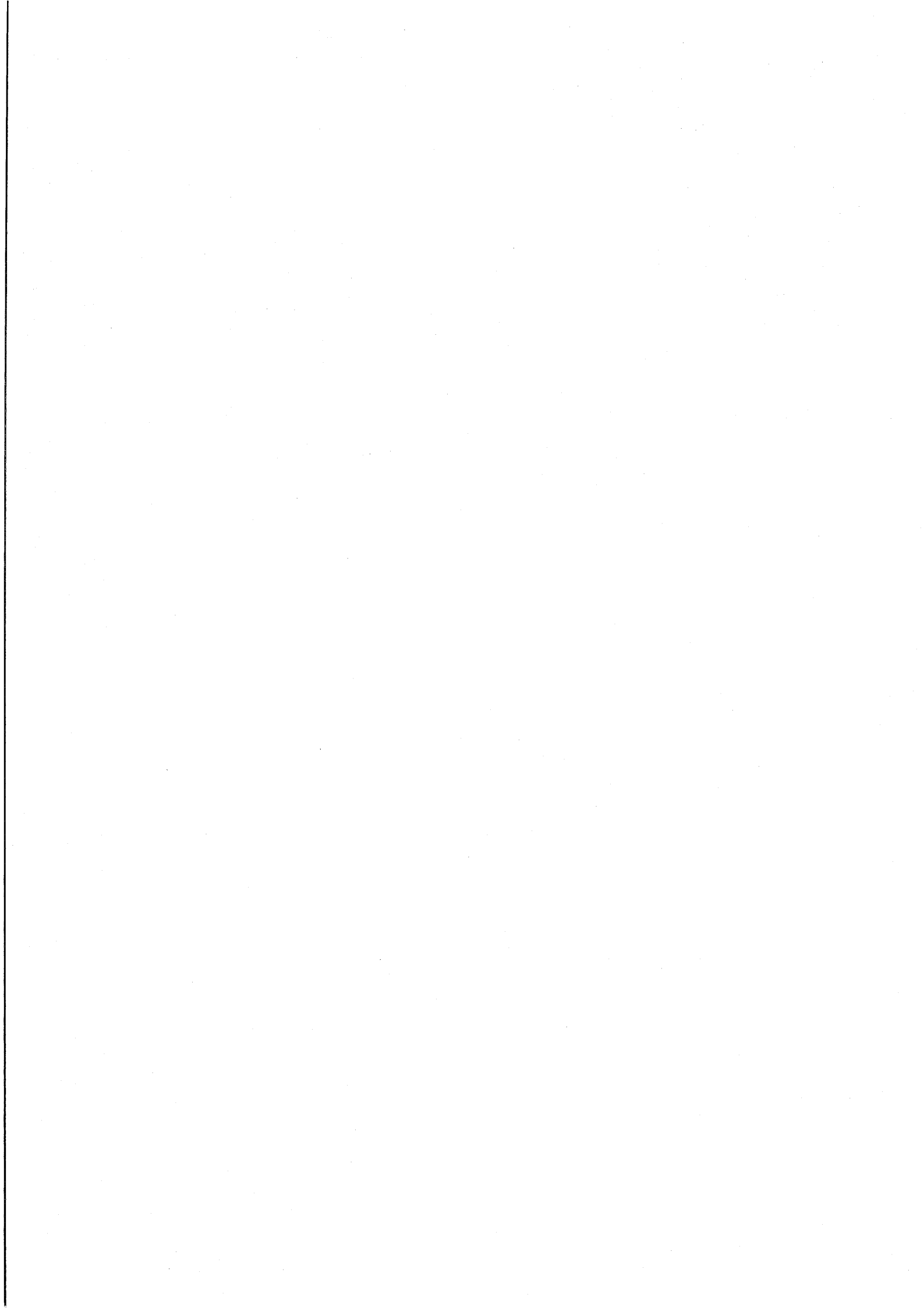
Les triangles doivent fermer à 15'' environ. L'erreur est souvent beaucoup moindre : quelquefois, quand les côtés sont petits, elle peut aller jusqu'à 40''.

On doit trouver la longueur des côtés du second ordre à 2m près au plus. Pour le troisième ordre, l'erreur va parfois jusqu'à 4m rarement cependant.

ANNEXE 5

AU SUJET D'UNE LETTRE DE
GAUSS A BERTRAND

J. Bertrand traduit, en 1855, les textes de Gauss relatifs à la méthode des moindres carrés à la demande de ce dernier. Malheureusement, nous ne possédons à ce jour, aucune correspondance pouvant l'attester. Cependant, dans les CRAS (Tome 40, p. 1082, Paris, 1855), J. Bertrand rapporte un extrait d'une lettre "qui peut-être est la dernière que Gauss ait écrite."



34. Über einen Brief von Gauss an J. Bertrand, betreffend eine Stelle in der *Theoria Motus*.

[Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tome 40, p. 1082, Paris 1855.
Lettre de M. J. BERTRAND.]

{M. VALSON, professeur au lycée de Marseille, vient de soumettre au jugement de l'Académie un Mémoire intéressant sur un cas d'exception que présente la méthode à l'aide de laquelle M. GAUSS détermine l'orbite d'une planète[*]. J'avais indiqué ce cas d'exception dans une leçon au Collège de France, en signalant à mes auditeurs le passage du *Theoria motus*, auquel M. VALSON fait allusion, comme une tache regrettable dans un ouvrage aussi parfait.

Ayant eu, peu de temps après, occasion d'écrire à M. GAUSS, je crus pouvoir lui soumettre les doutes que j'avais conçus sur l'exactitude du paragraphe 160 de son livre. L'illustre géomètre a bien voulu répondre à mon objection par une Lettre datée du 22 janvier 1855. Je crois devoir transmettre à l'Académie un passage de cette Lettre, qui peut-être est la dernière que GAUSS ait écrite.}

». Vous mentionnez des scrupules concernant un cas exceptionnel dans le *Theoria motus corporum coelestium*, dans lequel les méthodes exposées dans cet ouvrage cessent d'être applicables. Je parle[**] du cas où une orbite devrait être déterminée par trois lieux géocentriques dont le troisième coïncide avec le premier. Comment avez-vous pu me prêter l'idée absurde que, dans ce cas, l'orbite deviendrait indéterminée en elle-même? Il n'est question dans le lieu cité que de la solution du problème: trouver une première approximation, et il est clair comme le jour que, dans ce cas, la méthode générale ne donne rien: mais il n'en est pas moins vrai que les data ne laisseraient pas l'orbite indéterminée, et le problème de la déterminer aurait beaucoup d'intérêt pour la théorie, quoique peut-être assez peu pour la pratique; du moins, je présume que, généralement, il existe deux solutions peu différentes et énormément affectées des erreurs inévitables des observations.

Je reçus votre Lettre dans un temps où l'état de ma santé fut très-maladif, ce qui me disposa à en différer la réponse de semaine en semaine; mais mes espérances d'une restauration prompte ne se sont pas accomplies; au contraire, ma santé se détériorant de plus en plus, j'ai cru devoir ne plus tarder à me purger d'une accusation tout à fait injuste.»

{On voit par ces dernières lignes quelle importance M. GAUSS attachait à ne pas être soupçonné d'une erreur même légère et portant sur un point

[*] Ein Auszug der Abhandlung von VALSON: *Examen de la méthode de M. Gauss pour la détermination des orbites planétaires* befindet sich in dem gleichen Bande der Comptes rendus, p. 1023.]

[**] Werke VII, S. 217.]

secondaire de son oeuvre. Cette préoccupation chez un homme aussi éminent n'a rien qui doive surprendre. M. GAUSS se distinguait, en effet, entre les géomètres du premier ordre, par le soin qu'il a toujours eu de ne livrer au public que des ouvrages longuement médités. Aussi, tout en sachant que des inadvertances de détail n'auraient rien ôté à l'admiration qu'inspirait son rare génie, on conçoit qu'il se montrât cependant jaloux de joindre au mérite d'avoir fait tant d'immortels travaux, le mérite beaucoup moindre, quoique fort rare, de ne s'être jamais trompé.}

BEMERKUNG.

In einem »Paris 2 mai 1877« datierten Briefe schreibt J. BERTRAND an E. SCHERING: »J'ai reçu moi même trois lettres de C. F. GAUSS mais deux d'entre elles ont été brûlées dans l'incendie de la commune en 1871 en même temps qu'une lettre adressée à ARAGO qui était entre mes mains. L'une des trois lettres qui m'ont été adressées est entre les mains de M. CHASLES à qui je l'ai donnée, mais il ne l'a pas encore retrouvée et à l'âge de 84 ans sa mémoire lui fait souvent défaut. Je m'empresserai dès qu'il l'aura retrouvée de vous en envoyer la copie. Une des lettres que GAUSS m'a fait l'honneur de m'écrire a précédé sa mort de quelques semaines seulement et elle était relative à une inadvertance que j'avais cru remarquer dans le *theoria motus corporum coelestium* et contre laquelle il protesta énergiquement. Je l'ai insérée dans les comptes rendus de l'académie des sciences tome 40, 1855 en supprimant seulement ce qui n'était pas relatif à la science.«

Hieraus geht mit ziemlicher Sicherheit hervor, dass die Handschrift des Briefes, den GAUSS am 22. Januar 1855 an BERTRAND gerichtet hatte, zu denen gehört, die beim Brande im Jahre 1871 vernichtet worden sind. Dies wird auch in einer Mitteilung des Sohnes von J. BERTRAND, Colonel J. BERTRAND, an N. E. NÖRLUND vom 12. Juli 1927 als sehr wahrscheinlich bezeichnet.

BRENDEL. SCHLESINGER.

C.F. Gauss, *Werke*, Band XII, p. 165

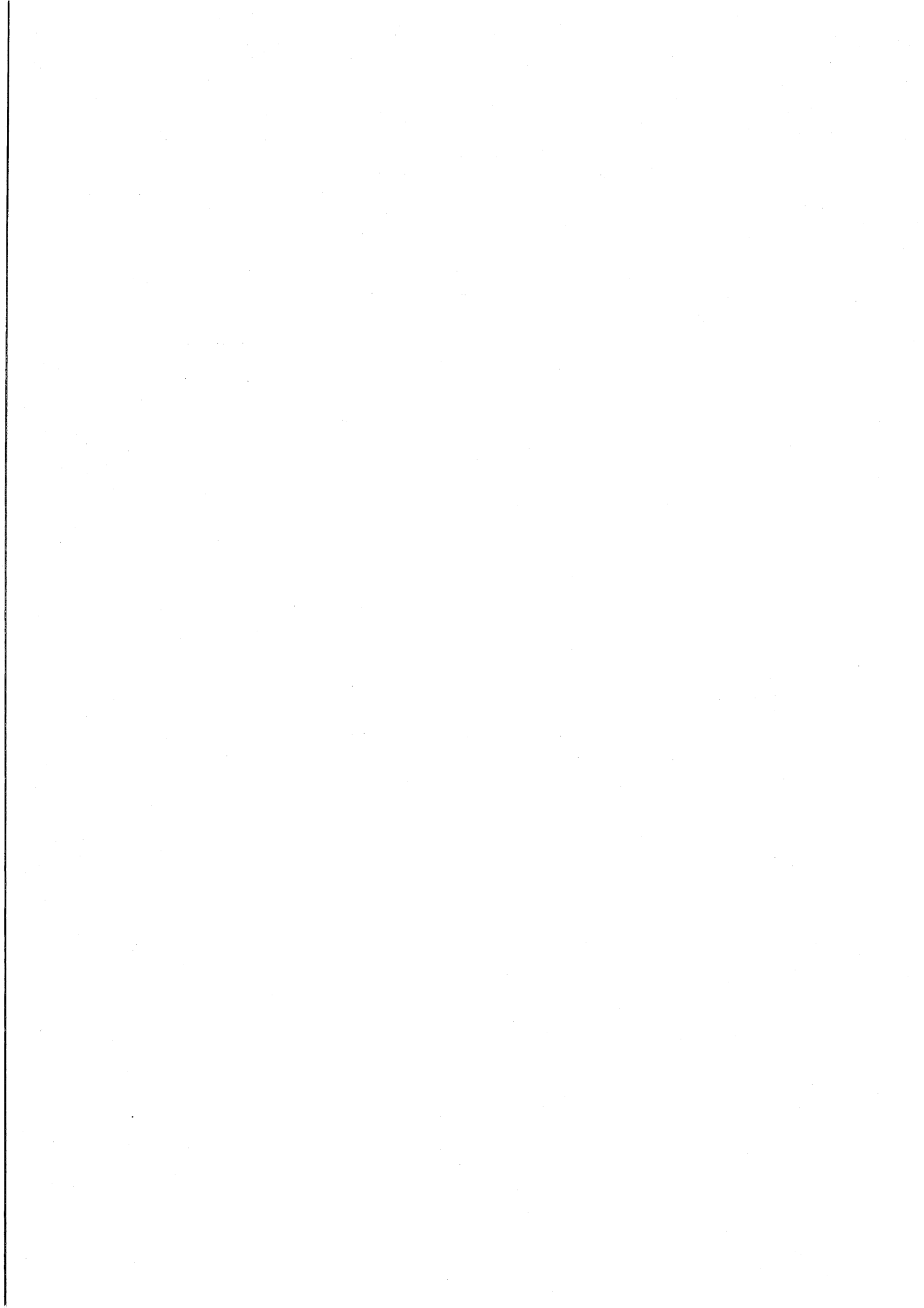
Göttingen 1863-1927

Nachdruck Hildesheim, Olms, 1973

ANNEXE 6

LE POINT SUR LES
TRIANGULATIONS AU XIXÈME
SIÈCLE

De nombreuses triangulations sont réalisées, surtout en Europe, au XVIII^{ème} et au XIX^{ème} siècles. Nous en donnons ici une synthèse.



LE POINT SUR LES TRIANGULATIONS AU XIXÈME SIÈCLE

Avant le XIX^{ème} siècle

La France est le seul pays à exécuter des triangulations en vue de préciser la forme de la Terre jusqu'au milieu du XVIII^{ème} siècle.

date	lieu	nom
1525	Paris-Amiens	Fernel
1615	méridien de Leyde	Snellius
1666	Malvoisine-Amiens	Picard
1718	méridienne de Paris	Cassini II La Hire
1735	Laponie Pérou	Maupertuis La Condamine
1739	vérification de la méridienne de Paris	Cassini de Thury La Caille
1750	cap de bon espérance	La Caille
1792/99	Dunkerque-Barcelone	Delambre Méchain
1808	prolongation jusqu'à l'Île de Formentera	Biot, Arago

Signalons, qu'en 1750, Boscovich réalise une triangulation dans les Etats du Pape et le père Liesgonig en réalise une en Hongrie.

De même, dans les années 1790/1800, Mudge triangule l'Angleterre, Svanberg la Suède et Lambton les Indes.

Précisons que l'on fait généralement débiter la géodésie de précision avec les travaux que Delambre et Méchain exécutent entre 1792 et 1799.

Entre 1800 et 1820

Sans entrer dans le détail, remarquons que peu à peu le territoire européen se couvre de triangulations. La France crée, sous la République et l'Empire, un corps d'ingénieurs géographes pour trianguler et lever les pays conquis afin d'établir des cartes topographiques pour répondre aux besoins de l'armée.

date	lieu
campagne de l'an III	cours du Rhin entre Strasbourg et Coblenz
1800	La Souabe et le Wurtemberg
en 3 ans	Carte de l'Egypte
1800-1805	Les départements réunis, la Hollande, l'Allemagne, l'Autriche*
1801-1813	l'Italie
1801-1807	la Bavière**

* carte au 1/100000

** couverte d'un réseau régulier en l'appuyant sur une base de 21 km et demi, mesurée à Golbach près de Munich.

Un parallèle est mesuré entre Strasbourg et Brest, un autre passant par le Mont-Blanc, sur la suggestion de Laplace.

Après 1808, on assiste à un arrêt des triangulations des ingénieurs géographes; mais suivant l'exemple de la France, d'autres pays triangulent.

Le point vers 1850

France Angleterre	réseau complet de triangles
Russie Allemagne Italie Belgique	des portions incomplètes et des tracés dispersés
Espagne	rien; terre vierge de tout travail de ce genre*

*Ibanez sera l'ouvrier et l'architecte de cette oeuvre.

En dehors de l'Europe, des triangulations sont réalisées aux USA et aux Indes.

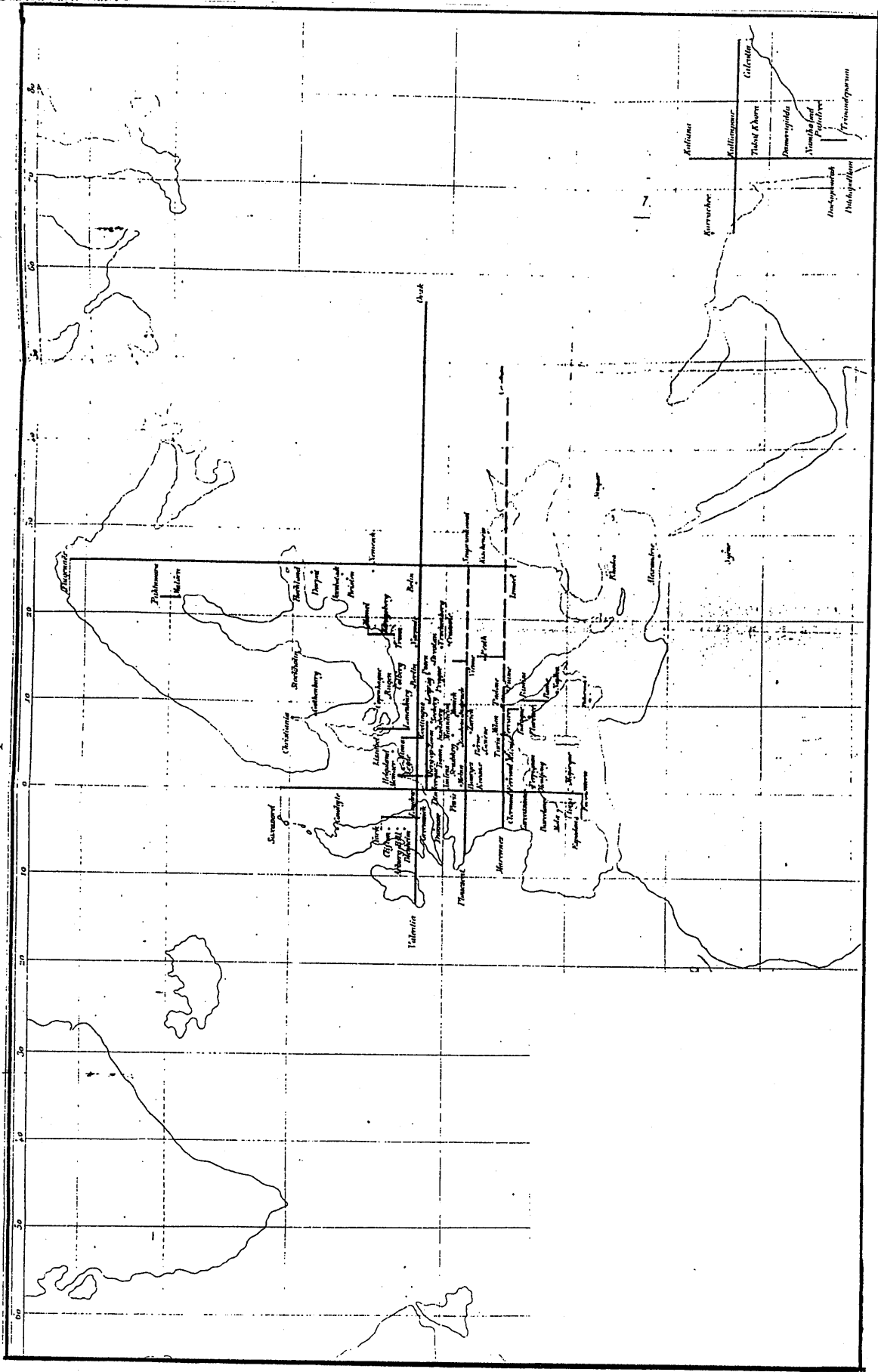
Les entreprises géodésiques, présentées dans le tableau ci-dessus, se sont déroulées dans deux buts:

- * L'établissement des cartes des pays.
- * La détermination de la figure de la Terre.

Elles ont un caractère international, car elles n'ont toute leur utilité qu'à la condition d'être généralisées. L'idée d'une association géodésique internationale prend peu à peu forme, dans le but de coordonner et de rattacher les travaux accomplis dans les divers pays pour les faire servir à la mesure du globe terrestre.

ARCS DE MÉRIDIDIENS ET ARCS DE PARALLÈLES MESURÉS SUR LE GLOBE TERRESTRE.

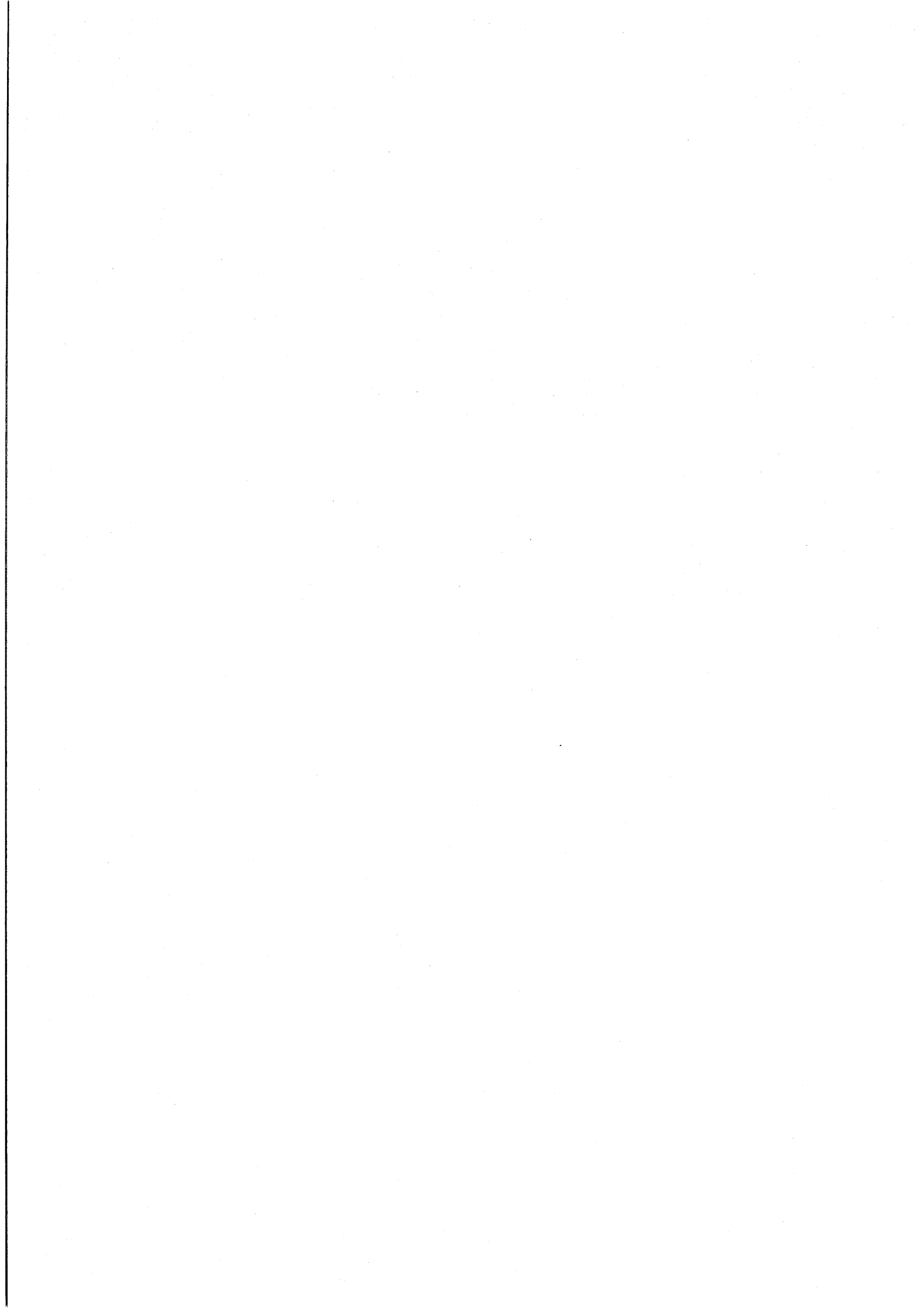
1615 — 1870.



Carte extraite de "La géodésie française", Bassot in *Bulletin de la société de géographie*,
Série 7, Tome 12 (1881)

ANNEXE 7
THEOREME DE LEGENDRE

Legendre, dans les *Eléments de Géométrie* (1800), présente un théorème relatif à la résolution d'un triangle sphérique très-peu courbe. Nous le présentons sous une forme commentée, accompagné d'un problème destiné à des élèves de terminales scientifiques.



THEOREME DE LEGENDRE

Extrait des *Eléments de Géométrie* de Legendre (1800), ce théorème explique comment ramener la résolution d'un triangle sphérique très-peu courbe à celle d'un triangle rectiligne. Il a été établi par Legendre à la demande de Delambre et Méchain:

Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués deviendront les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé.

A. Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique (en forme d'exercice pour des classes de 1ère ou terminales).

Soient A, B, C, trois points d'une sphère Σ de centre O, n'appartenant pas à un même grand cercle.

Définitions

1) On appelle triangle sphérique la portion de la surface de la sphère comprise entre 3 arcs de grands cercles, inférieurs à un demi-cercle.

2) Ces arcs sont les côtés du triangle sphérique. On désignera, suivant l'habitude, la mesure de l'arc AB par c, celle de l'arc AC par b et celle de l'arc BC par a (ces mesures d'arcs sont égales aux mesures des angles au centre qui interceptent ces arcs). On peut donc écrire⁸: $\cos \text{BOC} = \cos a$

⁸ On sera attentif au fait que, dans le texte de Legendre, a, b, c désignent les longueurs des côtés du triangle sphérique, c'est-à-dire des longueurs d'arcs de grands cercles, et non les mesures des arcs, qui sont alors égales, en radians, à a/r , b/r , c/r où r désigne le rayon de la sphère. Sur une sphère de rayon 1 et lorsque les angles sont mesurés en radians, la mesure de l'arc est égale à la longueur de l'arc.

3) Les angles du triangle sont des angles de plans. Ainsi, l'angle A est l'angle des plans (OAC) et (OAB). Cet angle est aussi égal à l'angle des tangentes en A aux grands cercles définissant les côtés.

I) Soit un triangle sphérique ABC d'une sphère Σ de centre O. On trace AO. La tangente en A à l'arc AB coupe la droite (OB) en K, la tangente en A à l'arc AC coupe la droite (OC) en H. On note A l'angle HAK.

a) Quelle est la nature des triangles HAO et KAO?

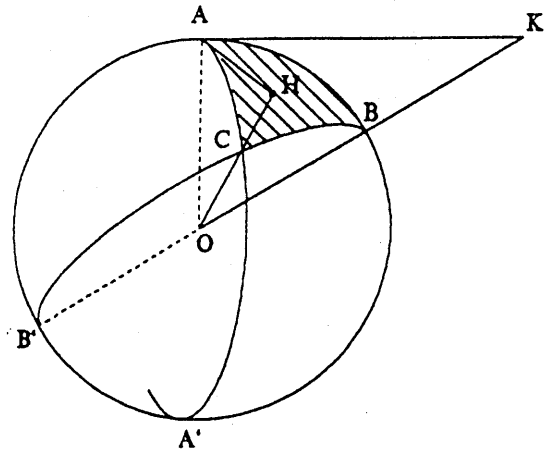
b) Compléter les formules suivantes:

$$HK^2 = AH^2 + \dots - 2 \dots$$

$$HK^2 = HO^2 + \dots - 2HO.KO\dots$$

$$AK = \dots \tan c \quad AH = AO \dots$$

$$OK = AO / \dots \quad OH = AO / \dots$$



c) En déduire que : $\cos A = (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c)$

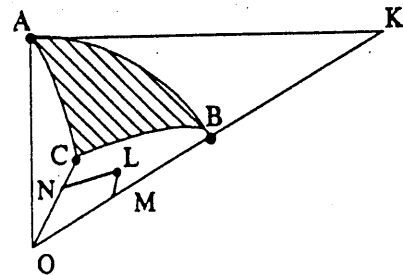
d) Ecrire deux autres formules analogues.

II) Soit une sphère Σ de centre O et un triangle sphérique ABC. On appelle L la projection orthogonale de A sur le plan (OBC). On appelle M et N les projections orthogonales de L sur (OB) et sur (OC).

a) Comparer l'angle ANL et l'angle C du triangle sphérique. Comparer l'angle AML et l'angle B.

b) Etablir que : $AL = R \sin c \sin B$

$$AL = R \sin b \sin C$$



N.B. On peut ainsi établir les formules classiques:

$$\sin a / \sin A = \sin b / \sin B = \sin c / \sin C$$

B. Etude du théorème de Legendre

Pour cette partie, on a besoin des développements limités des fonctions sinus et cosinus. Les élèves de lycée peuvent suivre les calculs en utilisant des approximations polynomiales de ces fonctions

§. V. Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.

cv. Lorsque les côtés a, b, c , sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, le triangle proposé est peu différent d'un triangle rectiligne; et, en le considérant comme tel, on peut en avoir une première solution approchée, mais

on néglige de cette manière l'excès de la somme des angles sur 200° . Pour avoir une solution plus approchée, il faut tenir compte de cet excès, et c'est ce qu'on peut faire très-aisément, au moyen d'un principe général que nous allons démontrer.

Soit r le rayon de la sphère sur laquelle est situé le triangle proposé; si l'on imagine un triangle semblable tracé sur la sphère dont le rayon est 1, les côtés de ce triangle seront

$$\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}, \text{ et on aura } \cos A = \frac{\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}}{\sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}}. \text{ Mais puis-}$$

que r est fort grand par rapport à a, b, c , on aura d'une manière très-approchée, $\cos \frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 r^4}$, $\cos \frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 r^4}$, $\cos \frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 r^4}$, $\sin \frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{2 \cdot 3 r^3}$, $\sin \frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2 \cdot 3 r^3}$. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et négligeant les termes où b et c ont plus de quatre dimensions, on aura

$$\cos A = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{2 \cdot 4 r^4} - \frac{b^2 c^2}{4 r^4}}{\frac{bc}{r^2} \left(1 - \frac{b^2}{6r^2} - \frac{c^2}{6r^2} \right)}$$

Multipliant les deux termes de cette fraction par $1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2}$, et réduisant, on aura

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2}{2 + bcr^2}$$

(1) il s'agit ici de degrés décimaux (c'est-à-dire de grades) et non de degrés sexagésimaux.

a, b, c sont les longueurs des côtés; $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ sont les longueurs d'arcs sur la sphère de rayon 1 ou les mesures des arcs en radians.

(2) il est évident qu'à partir d'ici, les angles et les arcs sont considérés comme mesurés en radians, pour utiliser les développements limités de cosinus et sinus.

Soit maintenant Λ' l'angle opposé au côté a , dans le triangle rectiligne dont les côtés seroient égaux en longueur aux arcs a, b, c ; on aura $\cos \Lambda' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ et $4b^2 c^2 \sin^2 \Lambda' = 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. Donc

$$\cos \Lambda = \cos \Lambda' - \frac{bc}{6r^2} \sin^2 \Lambda'$$

Soit $\Lambda = \Lambda' + x$, on aura en rejetant le carré de x , $\cos \Lambda = \cos \Lambda' - x \sin \Lambda'$, d'où l'on voit que $x = \frac{bc}{6r^2} \sin \Lambda'$.

et puisque x est du second ordre par rapport à $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$, il s'ensuit que ce resultat est exact aux quantités près du quatrième ordre. On aura donc

$$\Lambda = \Lambda' + \frac{bc}{6r^2} \sin \Lambda'$$

Mais $bc \sin \Lambda'$ est l'aire du triangle rectiligne dont a, b, c sont les trois côtés, laquelle ne diffère pas sensiblement de celle du triangle sphérique proposé. Donc, si l'une ou l'autre aire est appelée α , on aura $\Lambda = \Lambda' + \frac{\alpha}{3r^2}$, ou $\Lambda' = \Lambda - \frac{\alpha}{3r^2}$.

On auroit semblablement $B' = B - \frac{\alpha}{3r^2}$, $C' = C - \frac{\alpha}{3r^2}$, et il en résulte $\Lambda' + B' + C' = 2\cos^0 = \Lambda + B + C - \frac{\alpha}{r^2}$. On peut donc

considérer $\frac{\alpha}{r^2}$ comme étant l'excès de la somme des trois angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits. Cela posé, on a ce théorème remarquable qui réduit la résolution des triangles sphériques très-petits, à celle des triangles rectilignes.

Etant proposé un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués deviendront les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé, ou en d'autres termes :

Le triangle sphérique très-peu courbe dont les angles sont Λ, B, C , et les côtés opposés a, b, c , répond toujours à un triangle rectiligne qui a les côtés de même longueur a, b, c , et dont les angles opposés sont $\Lambda - \frac{1}{3}\epsilon, B - \frac{1}{3}\epsilon, C - \frac{1}{3}\epsilon$, ϵ étant l'excès de la somme des angles du triangle sphérique proposé sur deux angles droits.

car. L'excès ϵ ou $\frac{\alpha}{r^2}$, qui est proportionnel à l'aire du triangle, peut toujours se calculer *a priori* par les données du triangle sphérique considéré comme rectiligne. Si deux côtés b, c , sont donnés avec l'angle compris Λ , on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2} bc \sin \Lambda$; si on donne un côté a et les deux angles adjacents B, C , on aura l'aire $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$.

(3) x est très petit,

donc $\cos x \approx 1$ et $\sin x \approx x$

(4) remarquons qu'il faudrait écrire

$$2\pi = A + B + C - \frac{\alpha}{r^2},$$

puisque $\frac{\alpha}{r^2}$ est exprimé en radians.

Ensuite

on aura $\epsilon = \frac{\alpha}{r^2} R$, R étant le nombre de secondes comprises dans le rayon, et de cette manière ϵ sera exprimé en secondes.

Si on veut appliquer ces formules aux triangles tracés sur la surface de la terre, considérée comme sphérique (1), il faudra supposer que les côtés a, b, c , ainsi que le rayon de la terre r sont exprimés en mètres. Or, puisque le quart du méridien $\frac{1}{4} \pi r$ est égal à 10000000 mètres, on en conclut $\log r = 6,8038801$; d'un autre côté le rayon R exprimé en secondes, a pour logarithme 5,8038801. Donc si au logarithme de l'aire α exprimée en mètres carrés, on ajoute le logarithme constant 2,196119, et qu'on retranche 10 unités de la somme, on aura le logarithme de l'excès ϵ exprimé en secondes.

Connaissant ϵ on retranchera ou on supposera retranché $\frac{1}{2} \epsilon$ de chaque angle du triangle sphérique proposé, et alors dans le triangle rectiligne formé par les côtés a, b, c , et les angles $A' = A - \frac{1}{2} \epsilon$, $B' = B - \frac{1}{2} \epsilon$, $C' = C - \frac{1}{2} \epsilon$, on aura les données nécessaires pour en déterminer toutes les parties. Ainsi on connaîtra en même temps celles du triangle sphérique proposé.

(5) R est le coefficient de proportionnalité permettant de passer des radians en secondes. R est en fait, la mesure en "secondes" d'un arc de grand cercle terrestre dont la longueur est celle du rayon. La "seconde" ici employée est une seconde décimale (10^{-4} grade). On obtient ainsi:

$$R = \frac{2}{p} 10^6$$

r étant la mesure en mètres du rayon de la terre, on a

$$r = \frac{2}{p} 10^7, \text{ d'où l'on tire } \log R = \log r - 1$$

(le logarithme utilisé étant le logarithme décimal). Ainsi $\log r \sim 6,80388016$ et $\log R \sim 5,8038801$

$$\text{Par ailleurs, } \epsilon = \frac{\alpha R}{r^2} = \frac{100\pi}{2} \alpha 10^{-10} \text{ d'où } \log \epsilon = \log \frac{100\pi}{2} + \log \alpha - 10$$

Legendre appelle "logarithme constant" le nombre $\log \frac{100\pi}{2} \sim 2,196119$ et obtient ainsi une relation directe entre $\log \epsilon$ et $\log \alpha$.

Exemple : $C = 123^\circ 19' 99,23''$ $\log a \sim 4,5891503$ $\log b \sim 4,5219271$

$\log (\text{absin } C) = \log a + \log b + \log \sin C - \log 2 \sim 8,78055$

$\log \epsilon \sim 2,196119 + 8,78055 - 10 \sim 0,97667$ donc $\epsilon \sim 9,48$ secondes ; $(1/3)\epsilon \sim 3,24$ secondes et puisque $C' = C - (1/3)\epsilon$; on obtient $C' = 123^\circ 19' 96,07''$

Question subsidiaire:

Évaluer l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsqu'on confond A et A' dans le cas où r est le rayon de la terre et où b et c sont les côtés des triangles d'une triangulation du premier ordre c'est-à-dire valent à peu-près 40 km. Les approximations faites par Legendre sont-elles justifiées ?

Problème
 On donne un arc de cercle de rayon R et de longueur l. On demande de trouver l'angle au centre qui le sous-tend.
 Soit α l'angle au centre, R le rayon et l la longueur de l'arc.
 On a $l = R\alpha$ d'où $\alpha = \frac{l}{R}$.

Théorème de Legendre
 Soit un triangle ABC, on a $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
 Si on suppose que l'angle A est très petit, on peut développer le cosinus en série.
 $\cos A \approx 1 - \frac{A^2}{2}$.
 On a donc $1 - \frac{A^2}{2} \approx \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Si on suppose que l'angle A est très petit, on peut développer le cosinus en série.
 $\cos A \approx 1 - \frac{A^2}{2}$.
 On a donc $1 - \frac{A^2}{2} \approx \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

On a donc $1 - \frac{A^2}{2} \approx \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
 Si on suppose que l'angle A est très petit, on peut développer le cosinus en série.
 $\cos A \approx 1 - \frac{A^2}{2}$.

On a donc $1 - \frac{A^2}{2} \approx \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
 Si on suppose que l'angle A est très petit, on peut développer le cosinus en série.
 $\cos A \approx 1 - \frac{A^2}{2}$.

On a donc $1 - \frac{A^2}{2} \approx \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
 Si on suppose que l'angle A est très petit, on peut développer le cosinus en série.
 $\cos A \approx 1 - \frac{A^2}{2}$.

On a donc $1 - \frac{A^2}{2} \approx \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
 Si on suppose que l'angle A est très petit, on peut développer le cosinus en série.
 $\cos A \approx 1 - \frac{A^2}{2}$.

On a donc $1 - \frac{A^2}{2} \approx \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
 Si on suppose que l'angle A est très petit, on peut développer le cosinus en série.
 $\cos A \approx 1 - \frac{A^2}{2}$.

On a donc $1 - \frac{A^2}{2} \approx \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
 Si on suppose que l'angle A est très petit, on peut développer le cosinus en série.
 $\cos A \approx 1 - \frac{A^2}{2}$.

Manuscrit relatif au théorème de Legendre

Archives de l'Académie Royale de Bruxelles: Inventaire de la Correspondance d'Adolphe Quetelet; Liasse 76, non daté, non signé

ANNEXE 8

TABLEAU DES QUALITES
MOYENNES DANS LES TRIANGLES
DES SEPT REGIONS

Ce tableau est réalisé par F.G.W. Struve. Il y indique "les qualités moyennes des triangles des 7 régions" triangulées en vue de les comparer. Afin d'établir les poids généraux des triangles, Struve a choisi auparavant comme triangle normal de poids 1, le triangle équilatéral de 15000 toises de longueur de côtés.

§ 71. Comparaison des triangles des 4 régions de l'arc méridional et des 3 régions de l'arc septentrional.

Le tableau ci-joint réunit les différentes quantités, T. I, p. 4 à 11 et T. II, p. 4 à 9, qui se rapportent aux qualités des triangles des 7 régions, situées entre le Danube et la Mer Glaciale. Il nous donne ainsi un certain coup-d'oeil comparatif sur les qualités moyennes des triangles de ces régions.

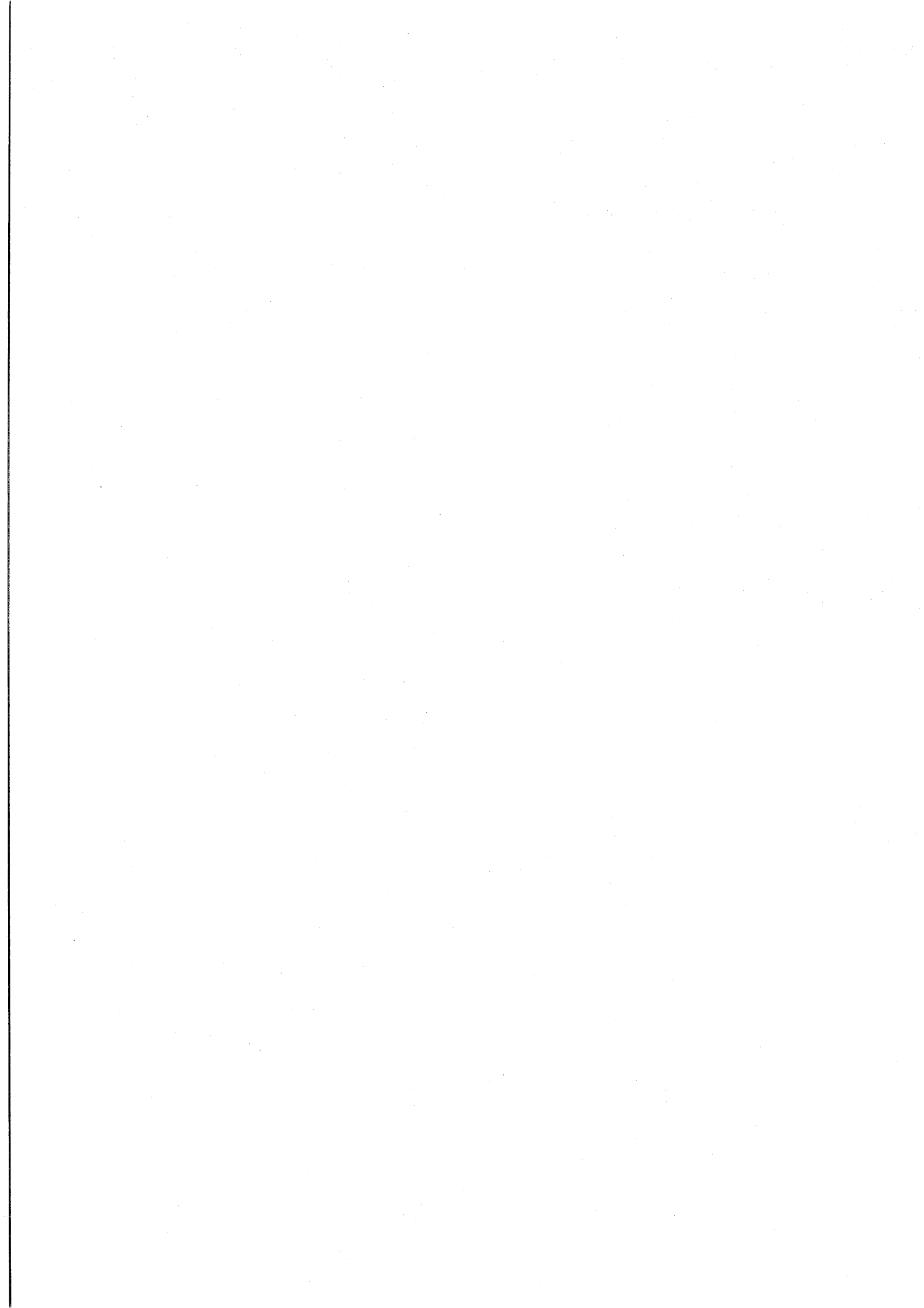
Tableau des qualités moyennes dans les triangles des 7 régions.

Région.	Étendue. verses.	Nombre des triangles.	Hauteur moyenne h.	Longueur moyenne d'un côté de triangle.	Progrès moyen d'un triangle.	Poids de contin. p.	Poids géométr. g.	Poids trigonom. t.	Poids général p.
1. Bessarabie.....	335	43	107	11967 (21,9 verses.)	4505 (8,2 verses.)	0,670	0,402	0,938	0,378
2. Volynie.....	356	33	146	13975 (25,5 verses.)	5423 (10,0 verses.)	0,766	0,554	0,632	0,350
3. Lithuanie.....	482	49	99	13583 (24,8 verses.)	5380 (9,8 verses.)	0,697	0,500	0,749	0,374
4. Prov. Baltiques	384	28	80	15318 (28,0 verses.)	7315 (13,4 verses.)	0,400	0,390	3,040	1,186
5. Finlande.....	645	70	79	12846 (23,4 verses.)	4956 (9,0 verses.)	0,641	0,424	1,312	0,556
6. Laponie.....	336	21	150?	17254 (31,5 verses.)	8721 (15,9 verses.)	0,562	0,653	0,639	0,417
7. Finmarken.....	183	12	343	16050 (29,3 verses.)	8200 (15,0 verses.)	0,529	0,578	0,242	0,140.

T. II.

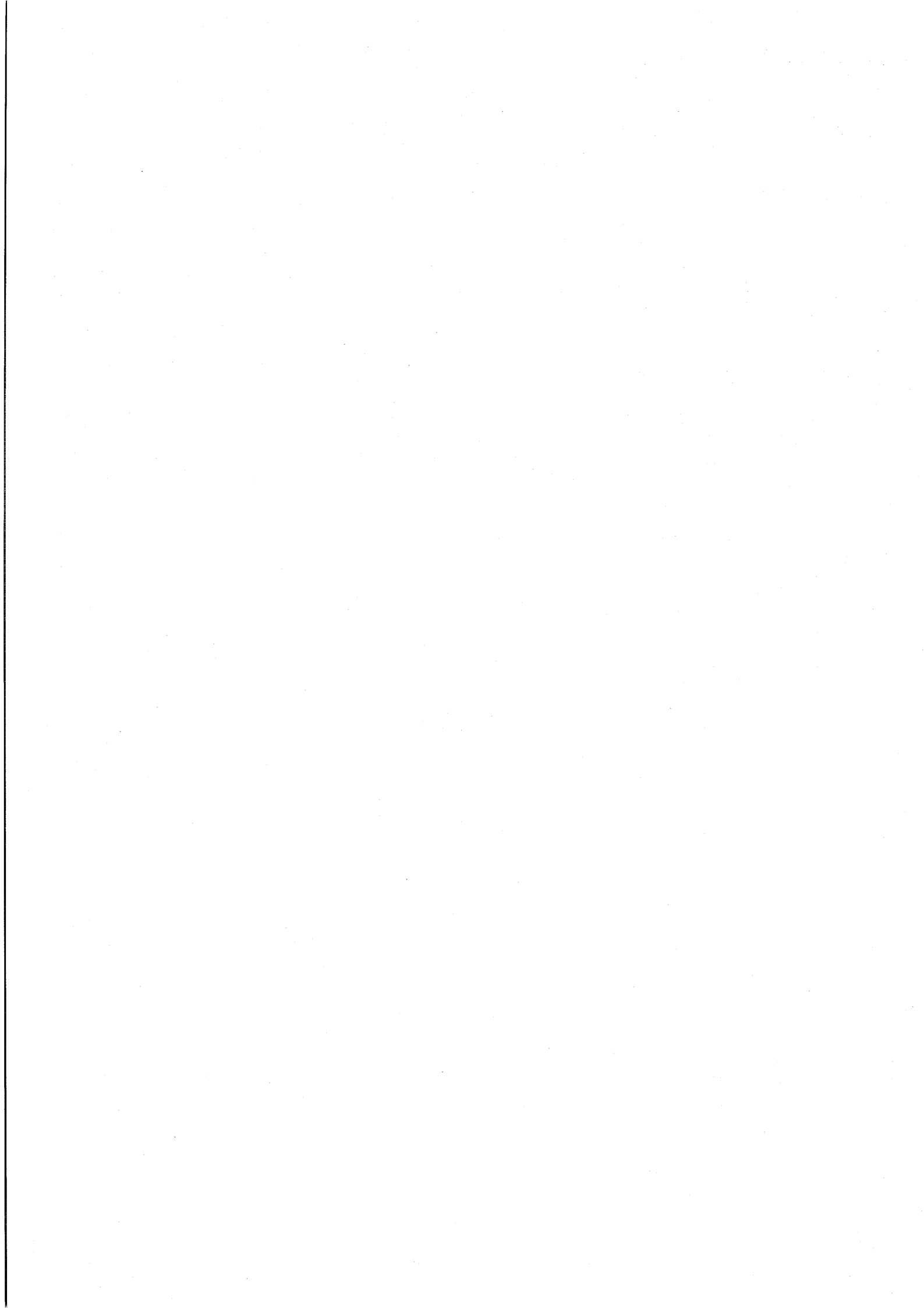
2

F.G.W. Struve Arc du méridien de 25° 20' entre le Danube et la mer glaciale, mesuré depuis 1916
jusqu'en 1855, Tome 2, page 9, 1860



ANNEXE 9
REDUCTION AU CENTRE

Cette correction est nécessaire lorsque l'instrument n'est pas placé au centre de la station.
Nous en présentons ici le principe.



REDUCTION AU CENTRE

Il arrive parfois que le théodolite ne peut pas être centré exactement sur le repère géodésique, (par exemple si le centre de la station est la croix d'un clocher, l'instrument est posé à côté) ou qu'inversement, on peut être amené à viser un point différent du point de la station. Dans les deux cas, on effectue une réduction au centre⁹.

Etude de la "Réduction au centre"

Le point C est la position du signal visé dans les mesures précédentes (clocher, sommet de tour ou de montagne, ...). Il est appelé centre de la station. S'il n'est pas accessible pour y poser le cercle répétiteur, on place celui-ci en un point O, le plus proche possible de C. L'angle mesuré est donc AOB (noté O), alors que l'angle dont on doit tenir compte dans la chaîne des triangles est ACB, noté C. On pose $r = OC$, $y = \angle BOC$, $O = \angle AOB$, $G = BC$, $D = AC$, $\Delta \parallel (BC)$ $\Delta' \parallel (AO)$

1) Montrer que $C = O + A - B$ en utilisant les angles auxiliaires introduits dans la figure.

2) En utilisant la formule des sinus, montrer que

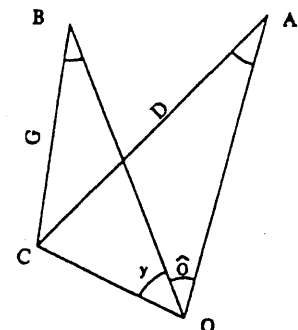
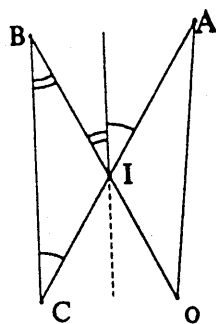
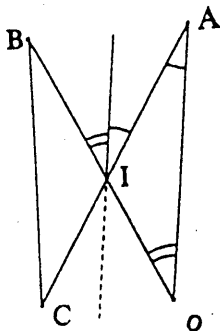
$$\sin B = \frac{r \sin y}{G} \quad \text{et que} \quad \sin A = \frac{r \sin(O+y)}{D}$$

3) Si les angles A et B étaient mesurés en radians, et puisqu'ils sont petits (la distance OC est très petite par rapport aux distances CA et CB de l'ordre de 40km), on pourrait écrire $\sin A \approx A$ et $\sin B \approx B$. Si x'' est la mesure d'un angle en secondes d'un angle, quelle est sa mesure en radians? Considérons un angle d'une seconde; sa mesure en radians y peut être confondue avec son sinus; donner donc une approximation de $\sin 1''$. En déduire l'approximation $\sin x'' \approx x \sin 1''$

4) En déduire la formule approchée de réduction au centre

$$ACB \approx O + \frac{r \sin(O+y)}{D \sin 1''} - \frac{r \sin y}{G \sin 1''}$$

Vérifier la correction faite par Delambre à la deuxième ligne de la p.96, en prenant pour G et D une approximation des distances BC et AC estimées à l'aide de l'échelle de la carte.



⁹Le texte suivant correspond à un travail que nous avons réalisé avec nos élèves de 1S au lycée Gérard de Nerval à Luzarches (Val d'Oise). Il a donné lieu à une exposition lors des fêtes du Bicentenaire de la Révolution Française, dans la même ville.

Dans l'extrait suivant (p.97) de la *Base du système métrique décimal* rédigé par Delambre 1806, figure diverses corrections dont une réduction au centre.

Entre le Panthéon et Dammartin.

	36 3041 ^s 629	84 ^s 48969	= 76° 2' 26"6	D. puis B.
	18 1520 ^s 817	84 ^s 48986	= 76° 2' 27"06	F. n° 1.
			76° 2' 26"83	
$r = 0^{\circ}21'18''$	$y = 6^{\circ}56'53''$		+ 2"48	
			76° 2' 29"31	
	20 1689 ^s 792	84 ^s 4896	= 76° 2' 26"30	D. n° 1.
$r = 0^{\circ}37'15''$	$y = 10^{\circ}51'10''$		+ 3"98	
			76° 2' 30"28	
Première série			76° 2' 29"08	
Seconde série			76° 2' 29"54	
Moyenne			76° 2' 29"63	
			+ 1"20	
Horizon			76° 2' 30"83	

La première ligne indique que Delambre (D.) puis son adjoint Bellet (B.) ont réalisé 36 mesures de l'angle qui a pour sommet le clocher de St Martin du Tertre et pour côtés les directions du Panthéon et de Dammartin. Le cercle répétiteur indique 3041,629 grades¹⁰; la 36ème partie, 84,48969, convertie en degrés vaut 76° 2' 26" 6 La seconde ligne indique que Le Français, autre collaborateur de Delambre a fait une série de 18 mesures du même angle avec le premier cercle-répétiteur (n°1) dont la moyenne est 76° 2' 27" 06. La moyenne des deux mesures de l'angle est faite à la troisième ligne. Une série supplémentaire de 20 mesures de l'angle est encore reprise par Delambre avec ce même cercle-répétiteur (D. n°1), mentionnée à la ligne 6.

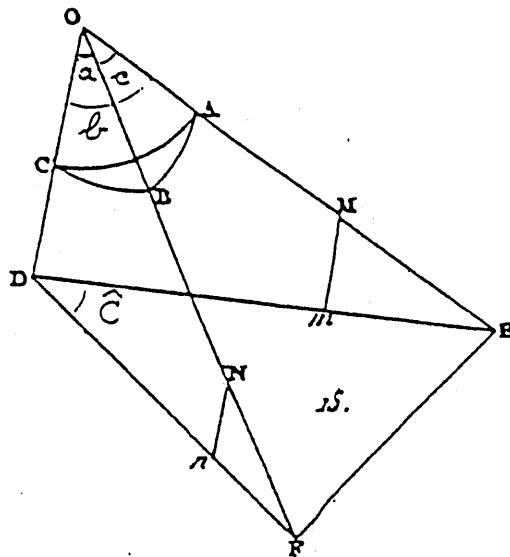
Une correction, intitulée "réduction au centre" est effectuée aux lignes 4 et 7. C'est le cas lorsque le cercle répétiteur ne peut, pour des raisons pratiques, être exactement placé au centre C de la station (clocher d'église, sommet de tour par exemple); c'est ce point qui

¹⁰ La mesure décimale des angles en grades avait été également instituée par la commission des Poids et Mesures, mais les tables de sinus à la disposition des astronomes n'existaient que pour des angles mesurés en degrés.

a été visé depuis le sommet précédent de la chaîne de triangles et qui servira également de mire aux mesures suivantes. Delambre calcule la différence entre l'angle effectivement mesuré AOB et l'angle théorique ACB.

Sur les dernières lignes figure une correction intitulée "réduction à l'horizon", nécessaire lorsque l'angle mesuré c n'est pas situé dans un plan horizontal. Delambre calcule alors la mesure de la projection C sur le plan horizontal de l'angle c, à l'aide d'une formule qui a été établie sur la demande spécifique de Delambre, par le mathématicien Legendre, par l'intermédiaire de la trigonométrie sphérique.

$$\sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a - b + c}{2} \sin \frac{b + c - a}{2}}{\sin b \sin a}$$



Clocher de Saint-Christophe.

5 5055124 10050248 }
 + 051 } 10051248 = 90° 6' 44"

St.-Martin du
Terre.

(dans le ciel.) D. n° 1. Il n'étoit pas possible de prendre ces deux distances au zénit par les angles doubles, comme à l'ordinaire : la direction étoit trop oblique à l'ouverture par laquelle nous observions. La manière dont on a pris ces angles exige une correction dont on verra la détermination ci-après. (Voyez Dammartin et Brie.)

Clocher de Dammartin.

10 10015209 10051209 = 90° 6' 31"72 (dans le ciel.)
 D. n° 1. Le vent, les nuages et le soleil ont nui à ces angles.

Dôme du Panthéon.

10 10025812 10052512 = 90° 15' 11" (dans le ciel.) F. n° 1.

A N G L E S.

LE clocher de Saint-Martin du Tertre a été rebâti en 1745, c'est-à-dire environ cinq ans après les opérations de la *Méridienne vérifiée*. Déjà cependant il menace ruine. Il n'est pas à la même place que l'ancien clocher. $dH = 3^s5$.
 La charpente est dans le plus mauvais état, et nous ne pouvions faire le moindre mouvement sur notre échafaud sans faire tout trembler. Cette station d'eux a été très-rude par les vents impétueux et les pluies continuelles.

D I S T A N C E S A U Z É N I T.

Tourelle de Clermont.

5 5055810 1005162 }
 Correction du niveau . . . 051 } 1005262 = 90° 14' 9"
 (dans le ciel.) F. n° 1.

Entre Saint-Christophe et Clermont.

20 83558225 415791125 = 37° 36' 43"24
 P. n° 1. Clermont tantôt blanc, tantôt noir ; le plus souvent difficile à observer.

20 835581975 4157909875 = 37° 36' 42"80
 F. n° 1. Clermont éclairé et dichotome.

Moyenne 37° 36' 43"02
 $r = 0^s44444$ $y = 208^s 51' 37''$ — 3"75

Centre 37° 36' 39"27
 Correction du soleil (Voyez p. 83.) 2"93

Angle corrigé 37° 36' 36"34
 20 835580375 4157901875 = 37° 36' 40"2 :

F. n° 1. Clermont éclairé en face ; ce qui rend nulle la correction du soleil.
 $r = 0^s45159$ $y = 207^s 9' 11''$ — 3"89

Centre 37° 36' 36"32
 — 0"02

Horizon 37° 36' 36"30
 — 0"02

S A I N T - M A R T I N D U T E R T R E.

X X I I.

St.-Martin du
Terre.

St.-Martin du
Terre.

Entre Dammarin et Saint-Christophe.

20	1251820	6255910	=	56° 19' 54"34
r	= 0'430555	y = 291' 39" 24"	+	5"04
Centre	56° 19' 59"92		
24	150251765	6255906041	=	56° 19' 53"56
r	= 0'430555	y = 289' 5' 20"	+	4"85
Centre	56° 19' 58"41		

D. n° 1. 15 et 16 septembre 1792. Ces deux séries me paroissoient bonnes; elles marchent avec beaucoup de régularité: il est pourtant très-probable qu'elles sont mauvaises, et cela provient sans doute de la mobilité de l'échafaud. Le mouvement que je faisois pour porter l'œil d'une lunette à l'autre se communiquoit à l'instrument et altéroit l'angle.

Moyenne..... 56° 19' 59"17

20 1251891 62559455 = 56° 20' 6"34

F. n° 1. Cet angle ne s'accordant pas du tout avec le mien, le citoyen le Français l'a recommencé.

20 1251879 62559385 = 56° 20' 4"07

F. n° 1. On voyoit mieux que dans la série précédente.

r = 0'44444 y = 288° 44' 29" + 4"97

Centre..... 56° 20' 10"17

Pour savoir si la différence entre ces deux séries et les deux miennes provenoit en effet de la mobilité du plancher, j'ai fait prendre le même angle par les citoyens le Français et Bellet réunis.

Cinquième série.

24 15025243 6255934585 = 56° 20' 2"8

F. et B. n° 1. Cette dernière série paroit devoir mériter la préférence. Je

n'y ai pas pris de part moi-même. La taille du citoyen le Français se prètoit mieux à l'espace que nous avions, et lui permettoit de faire porter le poids de son corps sur les avrents du clocher. Aussi les deux séries qu'il a observées s'accordent très-passablement avec la dernière, dans laquelle les deux observateurs ont toujours conservé la même position.

r	= 0'5	y = 296' 3' 50"	+	6"2
Centre	56° 20' 9"0		
Horizon	56° 20' 9"41		

Entre le Panthéon et Dammartin.

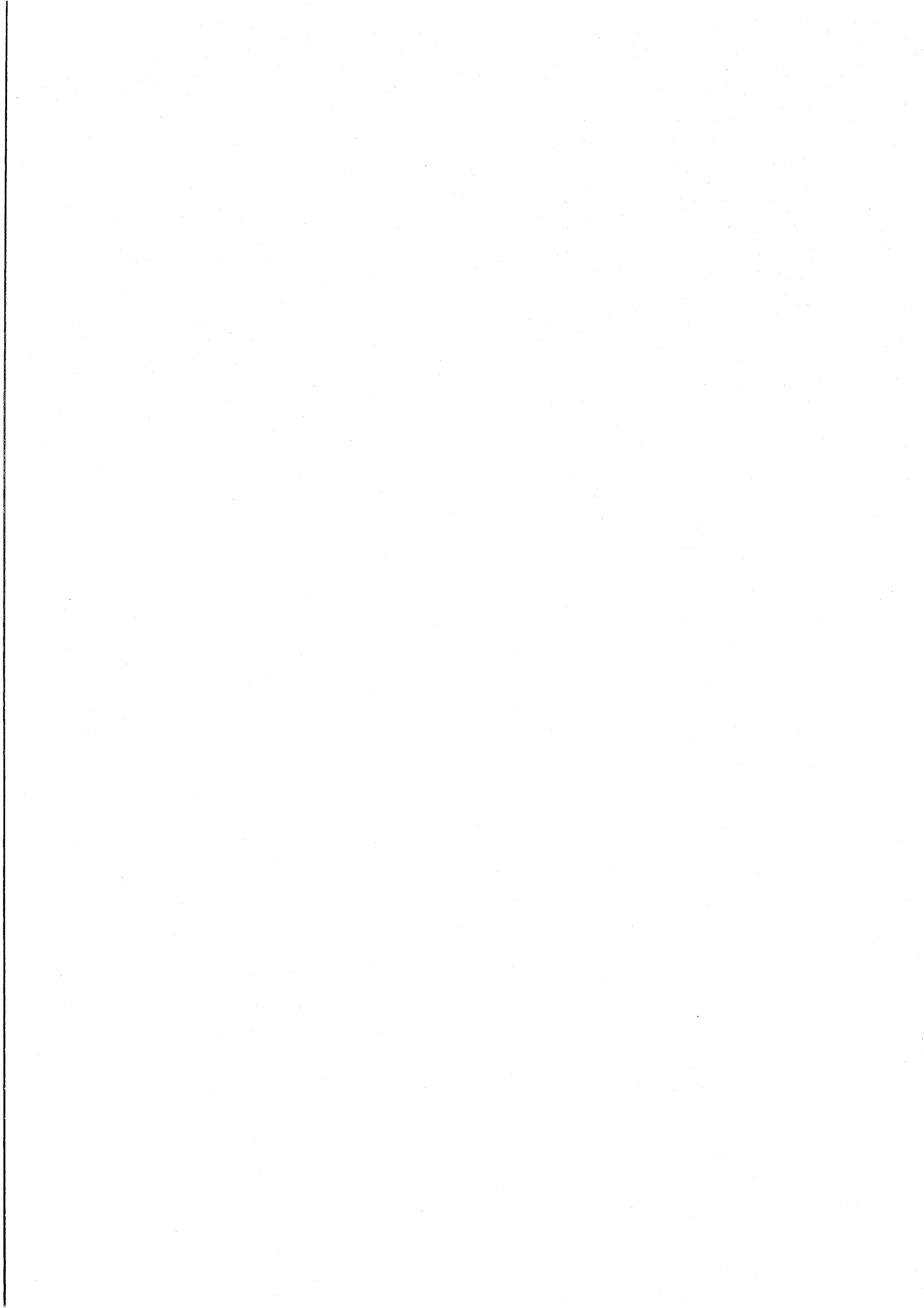
36	30416629	84548969	=	76° 2' 26"6	D. puis B.
18	15208817	84548986	=	76° 2' 27"06	F. n° 1.

r = 0'21181 y = 6° 56' 53" 76° 2' 26"83 + 2"48
76° 2' 29"31

20 16895792 8454896 = 76° 2' 26"30 D. n° 1.
r = 0'37153 y = 10° 51' 10" + 3"98

Première série..... 76° 2' 30"28
Seconde série..... 76° 2' 29"08
Moyenne..... 76° 2' 29"63

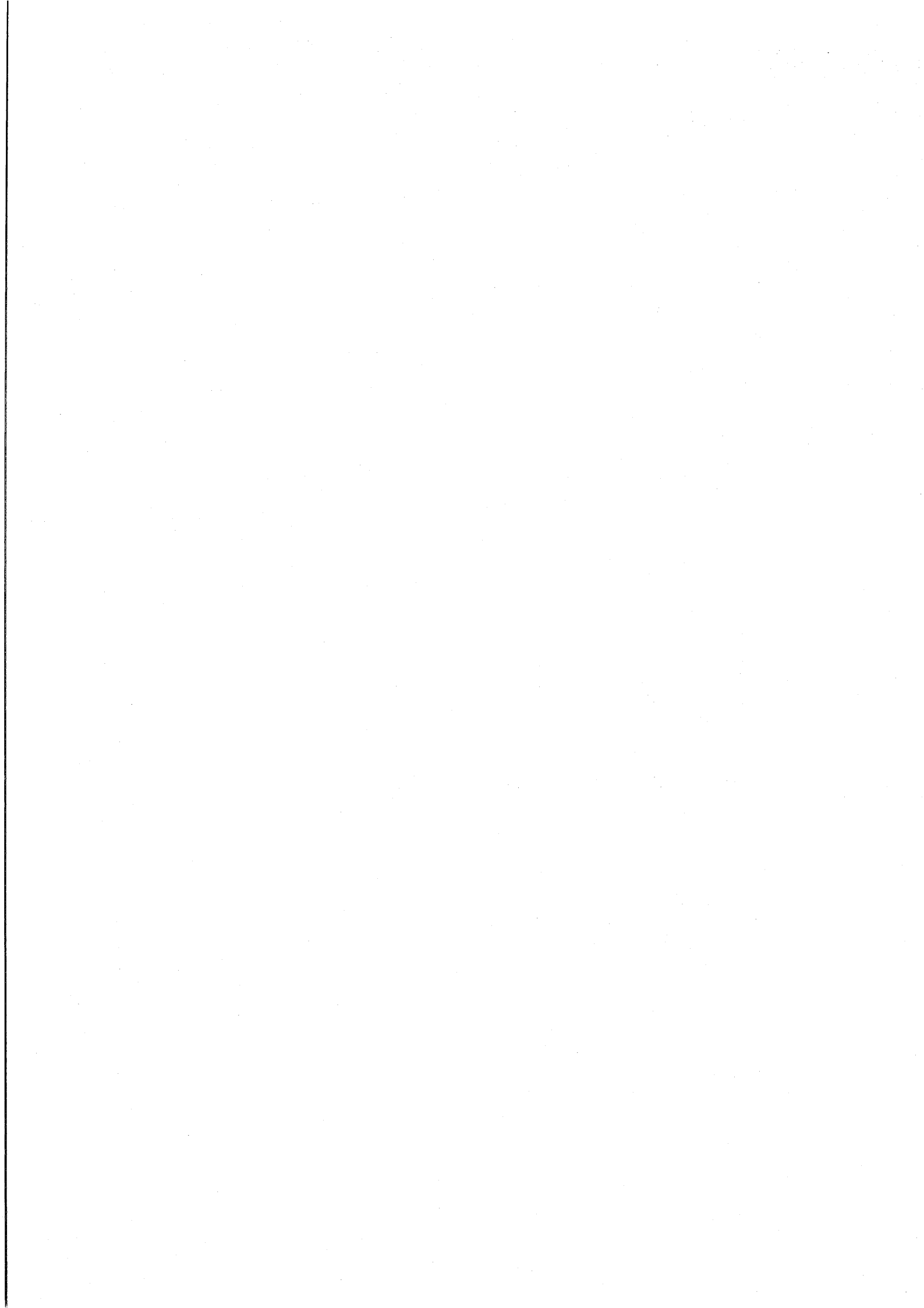
Horizon..... 76° 2' 30"33



ANNEXE 10

CALCUL DE COMPENSATION EFFECTUE PAR STRUVE, EN PARTANT DE DEUX HYPOTHESES DIFFERENTES

Après avoir mis en place la méthode des directions, méthode d'observation des angles horizontaux, Struve en teste l'influence sur les compensations géodésiques. En effet, l'élaboration des équations initiales est différente suivant que l'on prenne comme valeurs observées la mesure d'un angle ou la mesure d'une direction.



1. Directions observées, et corrections c de ces directions.

A. TERME SEPT. DE LA BASE.			D. BREFFBERG.		
Objet.	Obserr.	Corr. c.	Objet.	Obserr.	Corr. c.
B	0° 0' 0,000	- 0,629	G	0° 0' 0,000	+ 0,121
D	23 41 1,918	- 0,259	E	74 50 43,986	- 0,397
C	79 42 10,982	+ 0,888	F	90 54 11,972	- 0,206
			G	124 49 35,144	- 0,070
			A	141 7 39,596	+ 0,316
			B	158 8 30,309	+ 0,237
B. TERME MÉRID. DE LA BASE.			E. LÄHDET-KALLIO.		
D	0° 0' 0,000	- 0,044	F	0° 0' 0,000	- 0,248
C	103 6 16,063	- 0,625	C	95 47 9,702	+ 0,330
A	139 18 6,382	+ 0,669	D	147 13 0,406	+ 0,167
			G	224 35 35,633	- 0,250
C. LINNAN-KALLIO.			F. MUSTILA.		
A	0° 0' 0,000	- 0,943	C	0° 0' 0,000	- 0,419
B	64 5 54,429	+ 0,529	D	20 3 3,127	- 0,106
D	107 40 43,819	+ 0,212	E	36 46 34,202	- 0,128
G	148 26 54,234	- 0,286	G	67 36 31,521	+ 0,654
E	186 16 2,482	- 0,414			
F	233 42 16,468	+ 0,900			

G. KORSMALM.

Objet.	Obserr.	Corr. c.
F	0° 0' 0,000	+ 0,164
E	13 45 38,436	- 0,595
C	27 8 4,119	+ 0,380
D	41 42 19,720	+ 0,052

2. Angles observés entre les objets voisins et corrections k et k' de ces angles.

Les corrections k' de ce second tableau sont celles qu'a fournies le calcul de compensation qui part des angles. A côté de ces corrections k' j'ai placé les corrections k que donne, pour les mêmes angles, la compensation des directions du tableau précédent. Ces k sont les différences des couples de c successifs du premier tableau, et la correction k du premier des angles BAD p. e. s'est trouvée par $k = + 0,329 - 0,259 = + 0,370$.

A. TERME SEPT. DE LA BASE.

Angle.	Obserr.	Corr. k.	Corr. k'.
BAD	23° 41' 1,918	+ 0,774	+ 0,370
DAC	56 1 9,064	+ 1,327	+ 1,147
B. TERME MÉRID. DE LA BASE.			
DBC	103° 6' 16,063	- 0,379	- 0,581
CBA	36 11 50,319	+ 0,890	+ 1,294

D. BREFFBERG.

Angle.	Obserr.	Corr. k.	Corr. k'.
GDE	74° 50' 43,986	- 0,535	- 0,518
EDF	16 3 27,986	+ 0,080	+ 0,191
FDC	33 55 23,172	- 0,128	+ 0,136
CDA	16 18 4,452	- 0,037	+ 0,386
ADB	17 0 50,713	- 0,282	- 0,079

E. LÄHDET-KALLIO.

FEC	95° 47' 9,702	+ 0,455	+ 0,578
CED	51 25 50,704	- 0,161	- 0,163
DEG	77 22 35,227	- 0,441	- 0,417

F. MUSTILA.

CFD	20° 3' 3,127	+ 0,374	+ 0,313
DFE	16 43 31,075	+ 0,212	- 0,022
EFG	30 49 57,319	+ 0,866	+ 0,782

G. KORSMALM.

Angle.	Obserr.	Corr. k.	Corr. k'.
FGE	13° 45' 38,436	- 0,990	- 0,759
ECC	13 22 25,683	+ 0,923	+ 0,975
CGD	14 24 15,601	- 0,236	- 0,338.

T. II.

Les différences $k' - k$ entre les corrections des angles, trouvées par les deux compensations, vont depuis 0,000 jusqu'à $\pm 0,423$. La somme des $(k' - k)^2 = 1,237$ conduit à une différence probable $(k' - k) = \pm 0,358$, qui est de beaucoup inférieure à l'erreur probable à laquelle reste sujet l'angle, après avoir été compensé, erreur dont le montant se trouve entre 0,5 et 0,6.

Si nous ajoutons maintenant les corrections k et k' aux angles observés du second tableau, nous parvenons à deux systèmes d'angles compensés, qui effectuent la jonction définitive entre la base AB et le côté fondamental FG . Le tableau qui suit contient ces deux systèmes I et II, relatifs aux corrections k et k' .

3. Angles définitifs dans les deux systèmes I et II.

A. TERME SEPT. DE LA BASE.		D. BREFFBERG.	
	I.	I.	II.
BAD	23° 41'	2° 288	2° 692
		GDE	74° 50'
DAC	56 1	10,211	10,391
		EDF	16 3
B. TERME MÉRID. DE LA BASE.		FDC	33 55
	I.	CDA	16 18
	II.	ADB	17 0
DBC	103° 6'	15,482	15,684
		CBA	36 11
CBA	36 11	51,613	51,209
C. LINNAN-KALLIO.		E. LÄRDET-KALLIO.	
	I.	I.	II.
ACB	64° 5'	55,901	55,720
		FEC	95° 47'
BCD	43 34	49,073	49,496
		CED	51 25
DCC	40 46	9,917	10,216
		DEG	77 22
GCE	37 49	8,120	8,194
		F. MUSTILA.	
ECF	47 26	15,300	15,031
		I.	II.
		CFD	20° 3'
		DDE	16 43
		EEG	30 49

G. KORSMALEN.

	I.	II.
FGE	13° 45'	37,677
ECC	13 22	26,658
CCD	14 24	15,273

Dans chacun des deux systèmes, les angles jouissent de cette qualité, que les différentes combinaisons possibles et qui forment une suite de triangles, depuis la base AB jusqu'au côté FG , donnent le même rapport $AB : FG$, ou des valeurs identiques de FG en partant de AB , abstraction faite des petites inexactitudes que produit l'accumulation des erreurs tabulaires. Cette identité sert de contrôle pour l'exactitude de l'opération de compensation. Des dites combinaisons, j'ai choisi deux, pour lesquelles le calcul était le plus avantageux, et j'ai regardé, dans chaque système, la moyenne des deux valeurs obtenues comme la valeur finale de FG . Les corrections k et k' conduisent encore à la détermination de l'erreur probable d'une direction observée pour le système I, et d'un angle observé pour le système II. Cette recherche a donné :

dans le système I, l'erreur probable d'une direction observée = 0,458
 » » » II, » » d'un angle observé = 0,586.

Nous déduisons du premier chiffre l'erreur probable d'un angle observé quelconque $0,458 \sqrt{2} = 0,648 > 0,586$. Par conséquent l'expérience a confirmé, ce qui a été dit T. II, p. 24, que les angles entre deux objets voisins sont un peu plus exacts que les angles formés par deux directions quelconques.

L'opération de compensation fournit à côté de la valeur définitive de FG encore la détermination de l'erreur probable de cette quantité, en tant qu'elle dépend de l'imperfection de la mesure angulaire.

Par ces voies sont obtenus les chiffres suivants relatifs à la longueur du côté $FG = L''$, dans les deux systèmes.

	err. pr.
Système I, $L'' = 9304,2264 \pm 0,0526$ toises; $\lg L'' = 3,9686802.7 \mp 24.5$	
» II, = 9304,2626 $\pm 0,0520$ »	= 3,9686819.6 ∓ 24.3
Différence	0,0382 toise
	0,0000016.9.

Nous prenons à présent la moyenne des deux valeurs, et à cette moyenne nous attribuons également une erreur probable moyenne entre les deux, quoiqu'elle doit être tant soit peu plus petite que cette moyenne. Cette erreur moyenne doit être combinée avec l'erreur probable de la base elle-même, T. II, p. 19. C'est ainsi que nous portons au résultat que voici :

Longueur du côté fondamental.

MUSTILA—KORSMALEN.....	$L'' = 9304,2445 \mp 0,0529$ toises;
	$\lg L'' = 3,9686811.2 \mp 24.7.$
Carré de l'err. moy. en $\lg L''$:	$F'' = 1310,2 + 27,1 = 1337,3.$

TRIANGLES DE FINLANDE,
mesurés sous la direction de M. Struve.

Jonction entre la Base d'Uleaborg, AB, et le
côté principal Linnunsilmi-Sarvi-kangas.

Stations.

- A Oriskaari
- B Klemola
- C Länksien-kangas
- D Inlon-kangas
- E Sarvi-kangas
- F Kembele
- G Linnunsilmi

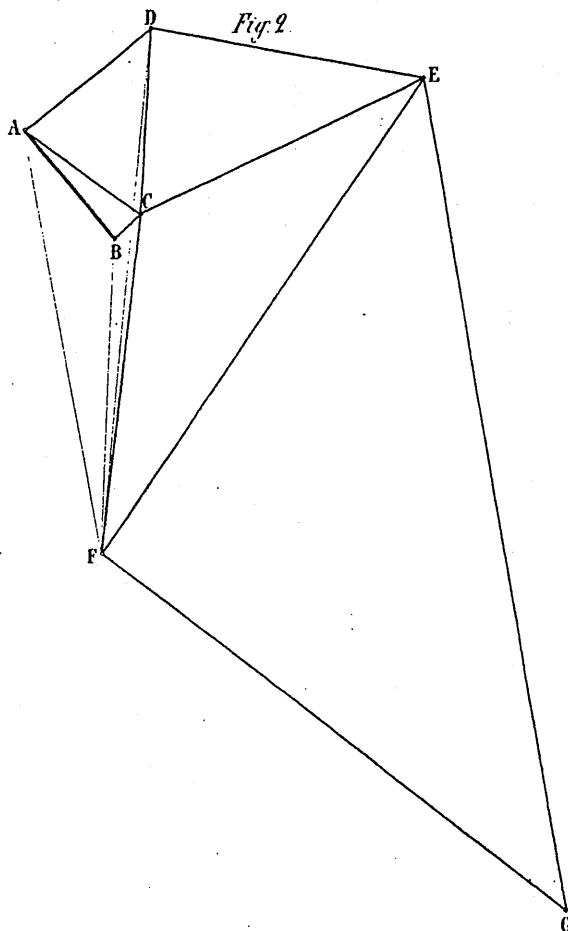
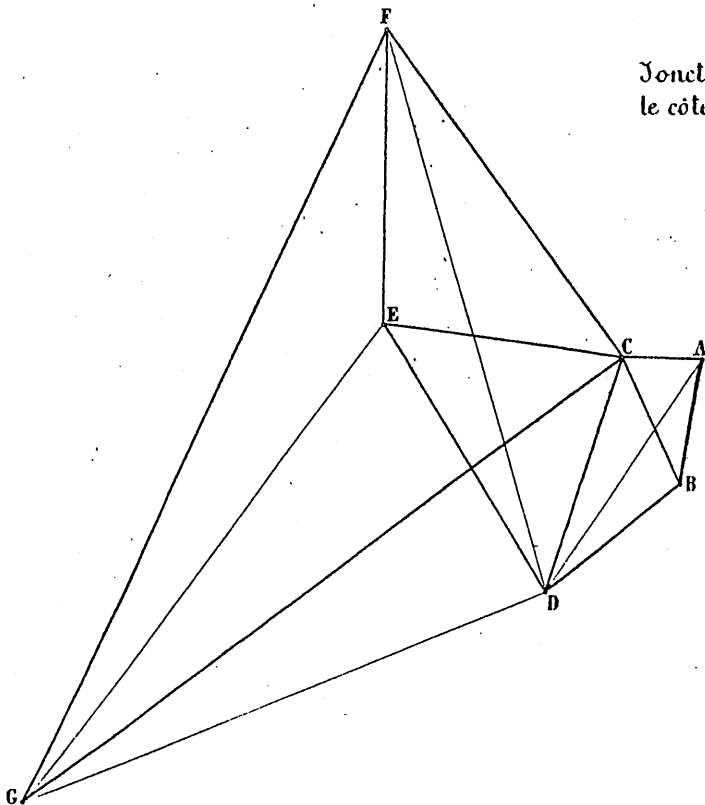


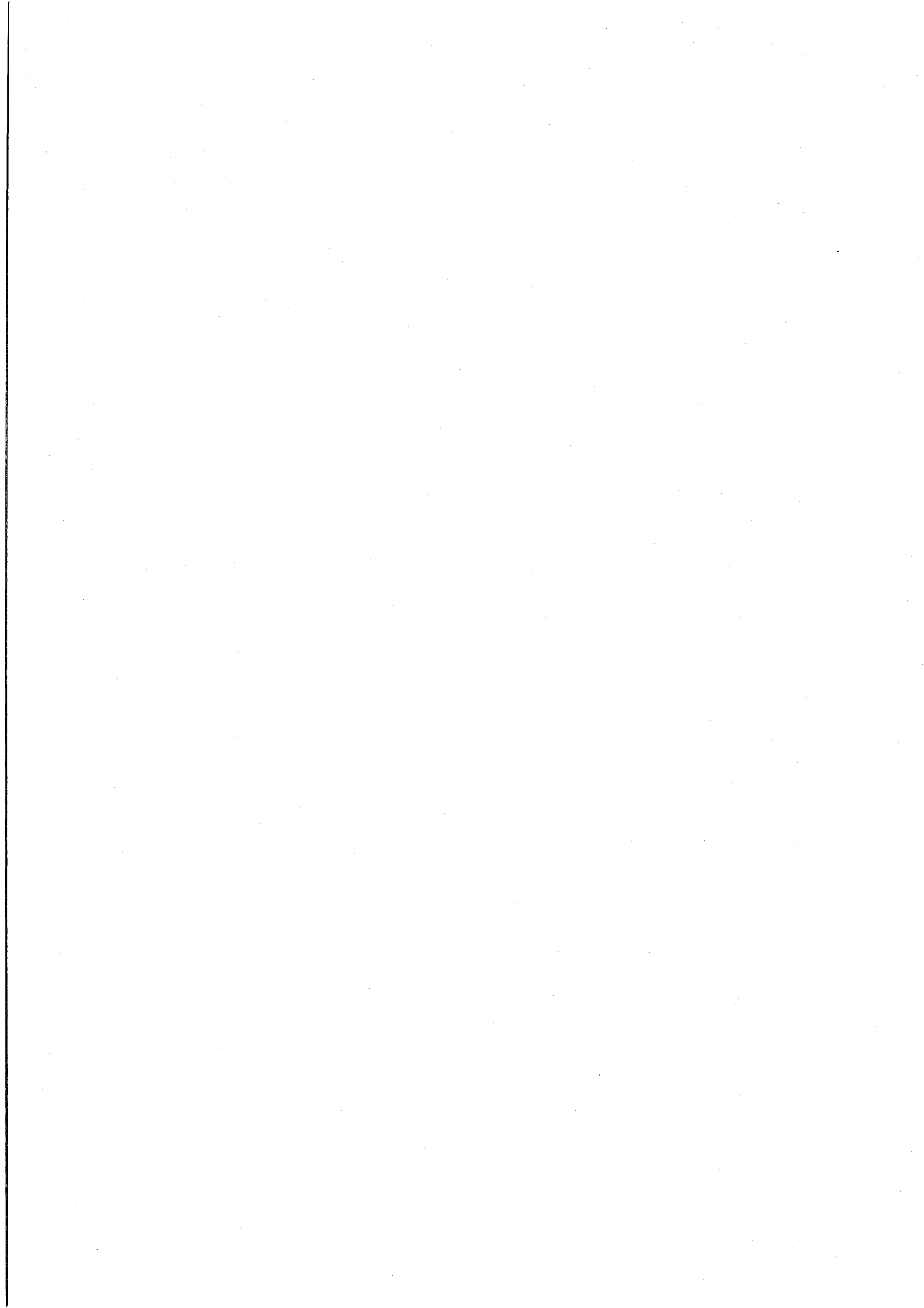
Fig. 1.

Jonction entre la Base d'Elimie, AB, et
le côté principal Mustila-Korsmalm.

Stations.

- A Terme sept. de la Base
- B " " mét. "
- C Linnan-kallio
- D Brestberg
- E Lähdel-kallio
- F Mustila
- G Korsmalm

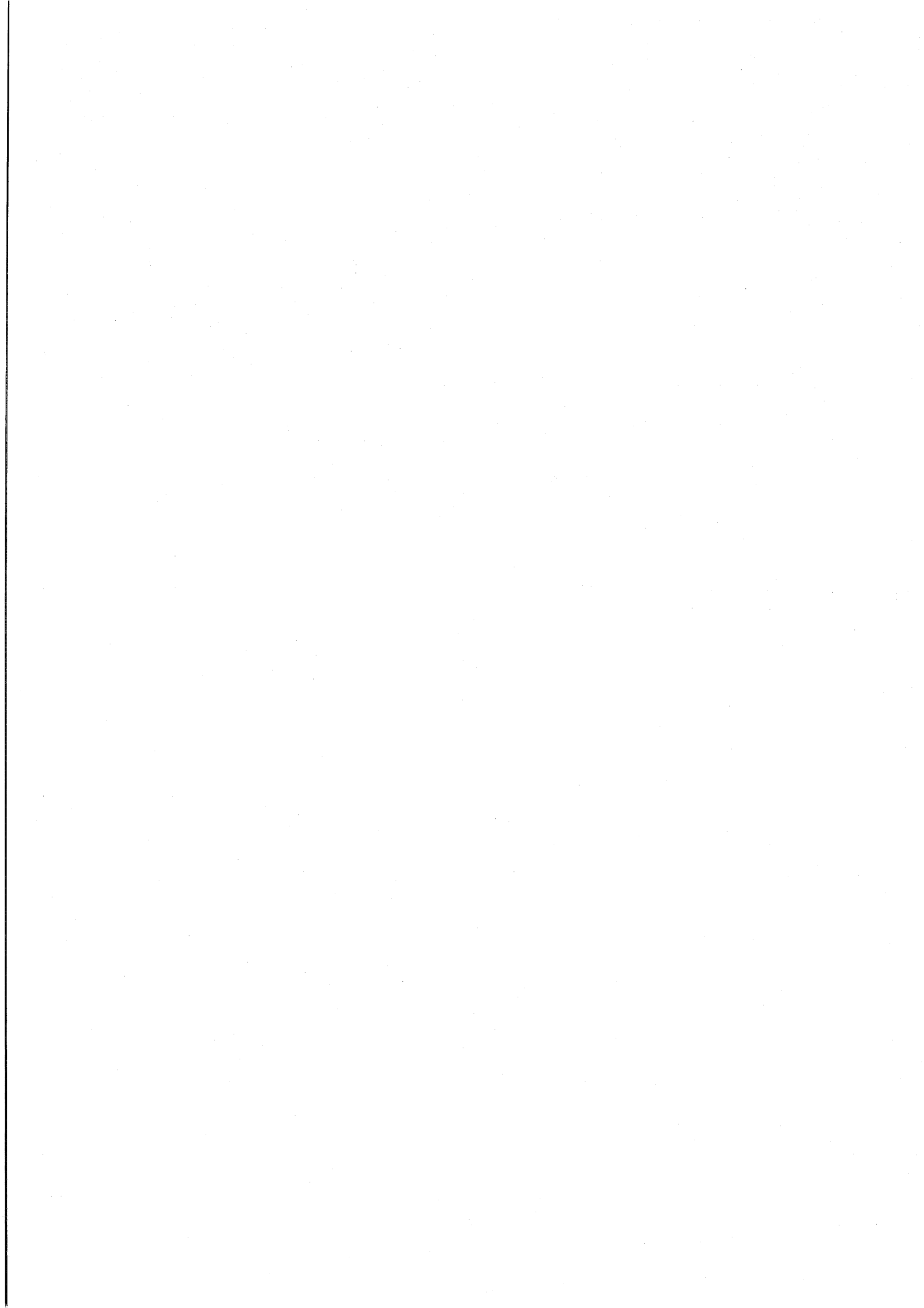




ANNEXE 11

TRADUCTION DE L'INTRODUCTION
DU CHAPITRE 3 DE *GRADMESSUNG*
IN OSTPREUSSEN
BESSEL, 1838.

Ce passage, dont nous donnons la traduction, a retenu l'attention de F.G.W. Struve. Les nombreuses compensations qu'il réalise avec ses collaborateurs l'amène à un retour aux sources, afin de réfléchir sur tous les cas qui peuvent se présenter, suivant les conditions d'observations et le choix des données initiales.



TRADUCTION D'UN EXTRAIT DE
GRADMESSUG IN OSTPREUSSEN,
BESSEL, 1838, p.129

Troisième chapitre
Calcul du réseau de triangles

Le problème, qui consiste à tirer, des mesures d'angles entre des points situés à la surface de la terre, le résultat qui leur correspond le mieux, n'a été, comme on sait, résolu autrefois que dans le cas où l'on trouve un résultat coïncidant parfaitement. Dans ce cas, chaque triangle est considéré comme un tout fermé en soi, et des observations répétées de ses 3 angles ne sont compensées entre elles, qu'afin de déterminer les deux angles nécessaires à la construction de ce triangle, angles qui seront alors considérés comme directement observés.

Quand alors, parmi les observations dont on voulait déduire la construction d'un réseau en dehors de celles nécessaires au calcul de chaque triangle isolé d'autres observations encore étaient fournies dont il résultait une liaison de plusieurs triangles entre eux, on pouvait en remplissant plus ou moins parfaitement les conditions données, obtenir même une confirmation de l'exactitude des observations faites. Par contre, on n'était pas à même d'utiliser ces mêmes conditions pour augmenter l'exactitude du résultat. Mais comme l'approche de la vérité, que seules les observations peuvent donner, s'accroît en général plus les observations sont nombreuses et plus leur dispositif contrarie une accumulation de leurs inévitables imperfections, il s'agit essentiellement ici, comme dans tous les autres cas dans lesquels on projette d'atteindre la plus grande sécurité appropriée aux moyens d'observation, non seulement de tirer des observations faites tout le profit qu'elles peuvent procurer, mais aussi de décider celles qui sont à faire pour obtenir les liaisons les plus nombreuses possibles entre les différents triangles.

Il était donc nécessaire de trouver une solution générale du problème du calcul des observations géodésiques. Cette solution doit satisfaire à 2 exigences:

* elle doit en effet modifier les observations faites directement ou les compenser mutuellement, de manière qu'elles rentrent dans un possible réseau de triangles, dans un réseau ne se trouvant pas en opposition avec lui-même, ni dans un réseau donnant deux valeurs différentes pour un côté ou un angle;

* elle doit en outre déterminer ces modifications de manière que la somme de leurs carrés atteigne un minimum.

L'éditeur¹¹ a obtenu cela par une solution connue grâce à une application qu'en a faite Mr le Professeur Rosenberger. Cette solution du problème, nous l'avons utilisée pour le calcul de notre réseau de triangles de manière qu'à chacune des mises au point particulières de l'un des instruments exactement la même importance soit donnée aux deux instruments, chacun des instruments ayant quant à lui le poids qui lui revient.

Quand on regarde dans le précédent chapitre les observations communiquées, on remarque facilement qu'elles déterminent les directions d'un point vers différents autres points avec des importances inégales.

Le cas que Mr le Conseiller à la cour Gauss a supposé dans son excellent mémoire¹² sur ce sujet, selon lequel toutes les directions sont déterminées indépendamment les unes des autres, ne se rencontre pas dans nos observations, attendu qu'elles ont été faites dans différentes combinaisons des directions à déterminer.

Si l'on avait voulu donner à toutes les directions une importance égale, on aurait été obligé de manquer les occasions assez fréquentes de déclencher les observations moins dépendantes de l'état de l'atmosphère, pour attendre les occasions plus rares qui auraient permis en même temps l'observation de toutes les directions.

Mais évidemment, il n'aurait pas été possible de soumettre les observations à cette exigence; il aurait été aussi peu possible par le choix d'un point arbitraire n'appartenant pas au réseau comme point de départ de toutes les directions, d'obtenir par une perte de temps que celles-ci soient indépendantes les unes des autres.

Comme donc ces deux cas ne se sont pas produits, il est nécessaire de faire le calcul du réseau d'après les règles qui permettent d'admettre les observations telles qu'elles ont été faites selon la situation occasionnelle.

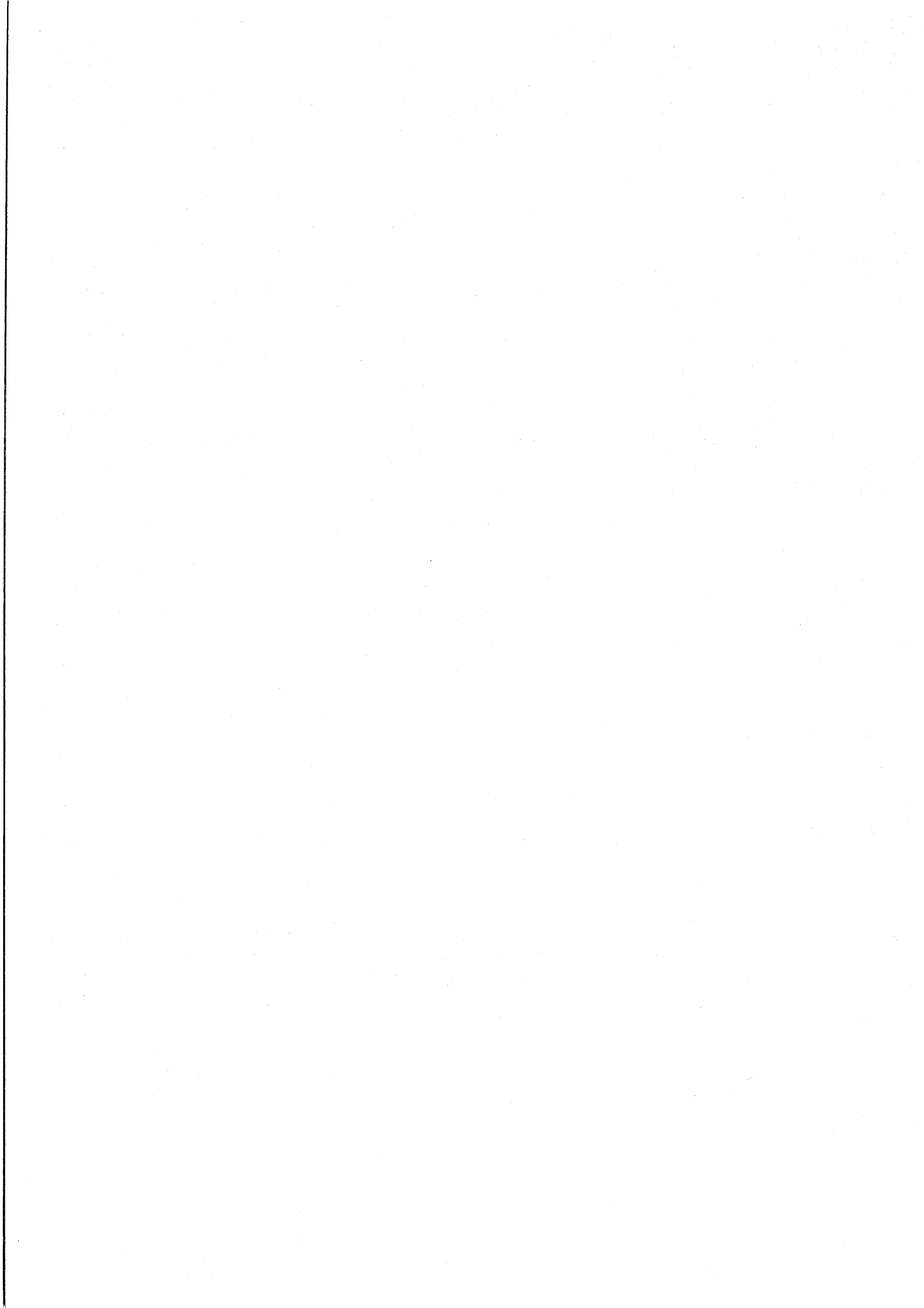
¹¹Schumacher. Astronomische Nachrichten n°121 Altona Aug 1827 (note de Bessel)

¹²Supplementum Theoriae combinationis observationum. Goettingen 1828 (note de Bessel)

ANNEXE 12

TRADUCTION DE L'INTRODUCTION DE
GRADMESSUNG
IN OSTPREUSSEN
DE BESSEL, BERLIN, 1838

Dans cette introduction, Bessel précise l'objectif et le cadre de son travail. Il indique, en particulier, les difficultés rencontrées lors des longues campagnes géodésiques et le nom de ses collaborateurs, parmi lesquels Baeyer.



H 11862

Gradmessung in Ostpreußen

und ihre Verbindung

mit

Preussischen und Russischen Dreiecksketten.

Ausgeführt

von

F. W. Bessel,
Director der Königsberger Sternwarte.

Baeyer,
Major im Generalstabe.

Mit 7 Kupfertafeln.

Berlin.

Gedruckt in der Druckerei der Königlichen Akademie
der Wissenschaften.

1838.

In Commission bei F. Dümler.

Hc



TRADUCTION DE L'INTRODUCTION DE GRADMESSUNG IN OSTPREUSSEN DE BESSEL, BERLIN, 1838

En 1830, à la demande de sa majesté le roi¹³, fut exécuté le travail d'astronomie et de géodésie que nous publions maintenant.

Le gouvernement impérial de Russie avait fait savoir en 1829, à notre gouvernement, qu'il souhaitait que l'on donne au directeur de l'observatoire de Königsberg¹⁴ la possibilité d'établir une liaison trigonométrique entre les mesures faites par Mr son excellence le Général major de Tenner dans l'empire russe et l'observatoire précédemment cité. De notre côté, l'empressement de remplir ce souhait était à la hauteur des avantages que cette liaison promettait pour la connaissance de la figure de la Terre. A l'ouest du pays, dans lequel la liaison devait être exécutée, il existait en France, en Angleterre, au Hanovre et au Danemark des mesures de degré de méridien recouvrant amplement ces régions; et il existe une chaîne de triangles mesurée avec soin que Mr le général lieutenant de Müssling a mené à travers la Hesse, le Thuringe et le Brandebourg vers la Silésie, en se basant sur les triangles de Mr Tranchot. Cette chaîne met en relation les triangulations françaises et anglaises déjà reliées entre elles, non pas seulement avec les mesures dano-hanovriennes mais aussi avec les mesures bavaroises et autrichiennes; en outre elle est menée sous l'autorité du chef actuel de l'État-major royal, Mr son excellence le général lieutenant Krauseneck, et continue à travers le grand-comté de Posen et la Prusse occidentale jusqu'à la frontière de la récente Haff. A l'est, se trouvent les triangles de Mr son excellence général major de Tenner qui sont reliés à ses propres mesures et avec celles que Mr son excellence le conseiller de Struve poursuit maintenant en Finlande. On pouvait en recouvrant la Prusse orientale d'une chaîne de triangles et en reliant celle-ci à l'ouest au dernier côté du triangle de l'État-major royal et à l'est à un côté des triangles russes, obtenir une liaison trigonométrique ininterrompue de Formentera et du nord de l'Angleterre jusqu'à l'extrême sud des mesures de Tenner et l'extrême nord des mesures de Struve; un raccordement trigonométrique, en affectant la plupart des observatoires européens et donc par la comparaison de nombreuses déterminations astronomiques réparties sur la plus grande partie de l'Europe, avec la position des différents points définis sur la surface de la terre, permettait d'obtenir une base pour la détermination de la figure de la Terre, au moins en ce qui concerne cette partie du monde et promettait un poids bien plus important aux conclusions fondées là-dessus que les mesures isolées pouvaient garantir jusqu'alors.

¹³Il s'agit de Guillaume IV

¹⁴Bessel est directeur de cet observatoire depuis 1809.

Sa majesté le roi daigne autoriser à ce que les moyens et les forces de l'État-major royal soient unis au signataire et à ce qu'ils oeuvrent pour obtenir ce raccordement. Nous décidions, de ne pas nous contenter d'une simple série d'observations d'angles entre l'observatoire de Königsberg et la chaîne de triangles prussiennes et russes, mais d'établir indépendamment la mesure des côtés des triangles, grâce à une nouvelle base; De même, nous décidions de déterminer aux points de jonction avec les chaînes de triangles précitées, les hauteurs polaires et les directions des méridiens par des observations astronomiques. Notre travail amène donc non seulement au raccordement envisagé des deux chaînes de triangles aussi bien avec lui-même qu'avec l'observatoire de Königsberg, mais aussi garantit-il à chacune des chaînes une comparaison complète et en fait finalement une mesure autonome.

En 1831, nous commençons l'exécution mais nous fûmes interrompus trop tôt dans notre travail, à cause du choléra sévissant aussi dans notre pays, pour pouvoir accomplir une autre partie du travail en dehors des préparatifs. L'année suivante, nous projetions le réseau de triangles et nous comprimes que nous allions réussir à trouver entre nos deux points extrêmes Trunz et Memel, éloignés de plus de 100000 toises, deux autres points visibles l'un de l'autre, et tel que de l'un on pouvait voir Trunz et de l'autre Memel. Grâce à cela nous obtenions la possibilité de comparer les directions des méridiens de Trunz et Memel en effectuant seulement deux mesures d'angles; cette même comparaison pouvait s'obtenir entre Trunz et Königsberg grâce à seulement une mesure d'angle. Étant donné que cette façon simple de comparer les directions des méridiens devait nous mettre en mesure de l'exécuter avec une exactitude considérable, nous n'omettions pas de pousser plus loin cet avantage et de chercher à côté de l'apport pour déterminer la configuration de la terre à laquelle on pouvait arriver par l'observation des hauteurs polaires, de trouver parallèlement un deuxième avantage lequel reposait sur l'observation des directions des méridiens et leurs comparaisons entre elles. Quand, comme dans le cas de notre réseau de triangles, la direction d'un point déterminée astronomiquement vers un autre ne coïncide ni avec le méridien ni ne le coupe verticalement, mais s'approche plus ou moins de l'azimut de 45° , alors les deux contributions précédemment citées suffisent à la détermination d'une sphéroïde donnée et de l'axe de la rotation de la terre, axe parallèle qui passe horizontalement par les deux points. Si la terre est réellement une sphéroïde de cette sorte, alors sa figure et sa taille peuvent être entièrement déterminées par une seule mesure de degrés. Il semble qu'avant nos essais, on n'ait jamais poussé plus loin ce constat; seulement, nous ne réclamons pas sa paternité, puisque notre grand astronome allemand Tobias Mayer, a déjà eu la même idée comme il en ressort d'une note redécouverte et imprimée en juin 1836 dans les *Nouvelles astronomiques* de Mr le conseiller Schumacher et seulement la façon de penser

l'exécution a été différente étant donné que les idées et les aides de son époque sont différentes de la nôtre.

Après avoir terminé en 1832, le projet de notre réseau de triangles, après avoir établi les stations d'observations et s'être frayé des chemins à travers les forêts afin de ne pas être obligé de placer nos sommets de triangles sur des emplacements trop hauts, nous avons fait les observations astronomiques à Trunz. Ensuite, nous essayons de mesurer la longueur de la base dont les extrémités étaient déjà fixées sous la surface de la terre et étaient indiquées au-dessus de celle-ci par des piliers. Seulement, des pluies violentes et presque ininterrompues ramollissaient considérablement la terre à un tel point que les mesures prises pour fixer des jalons se sont révélées insuffisantes et nous avons été contraints, après avoir perdu 12 jours, de procéder à la mesure lors d'une année plus favorable. Puisque entre temps, un grand théodolite dont nous devons l'exécution à Mr Ertel de Munich est arrivé, nous pouvons dans cette année même exécuter des mesures d'angles, aux deux extrémités de la base et aux points d'appui, qui devraient garantir la jonction avec le réseau des triangles principaux. A la fin de l'automne, nous avons eu à Memel une réunion avec Mr son excellence le général major de Tenner dans laquelle nous avons établi des dispositions communes nécessaires à cause de la liaison des triangles des deux côtés.

L'été 1833 a été finalement utilisé exclusivement à l'observation des angles des réseaux de triangles; Le début de l'été 1834 à l'achèvement de ceux-ci. Toute la fin de cet été, nous l'avons consacré aux observations astronomiques à Memel et à la reprise de la détermination déjà faite du méridien de Trunz laquelle était nécessaire pour des raisons que l'on expliquera dans la partie concernant les observations astronomiques. Plus tard, on mesura la base. En 1835, on exécuta une jonction spécifique de triangle le but était de relier de façon plus sûre l'observatoire de Königsberg avec le réseau des triangles principaux, ce que l'on n'aurait pas pu faire en partant de deux points visibles du réseau. Maintenant, il ne manquait plus que l'observation des mêmes étoiles depuis l'observatoire de Königsberg, sur lesquelles reposaient la détermination des hauteurs polaires de Trunz et de Memel. Elle devait être réalisée avec le même appareil, que l'on avait utilisé pour ces points là. Mais, elle ne put être entreprise en 1835, car aucun de nous ne pouvait être présent à Königsberg. Elle fut donc repoussée à 1836 et fut vraiment exécutée cette année-là.

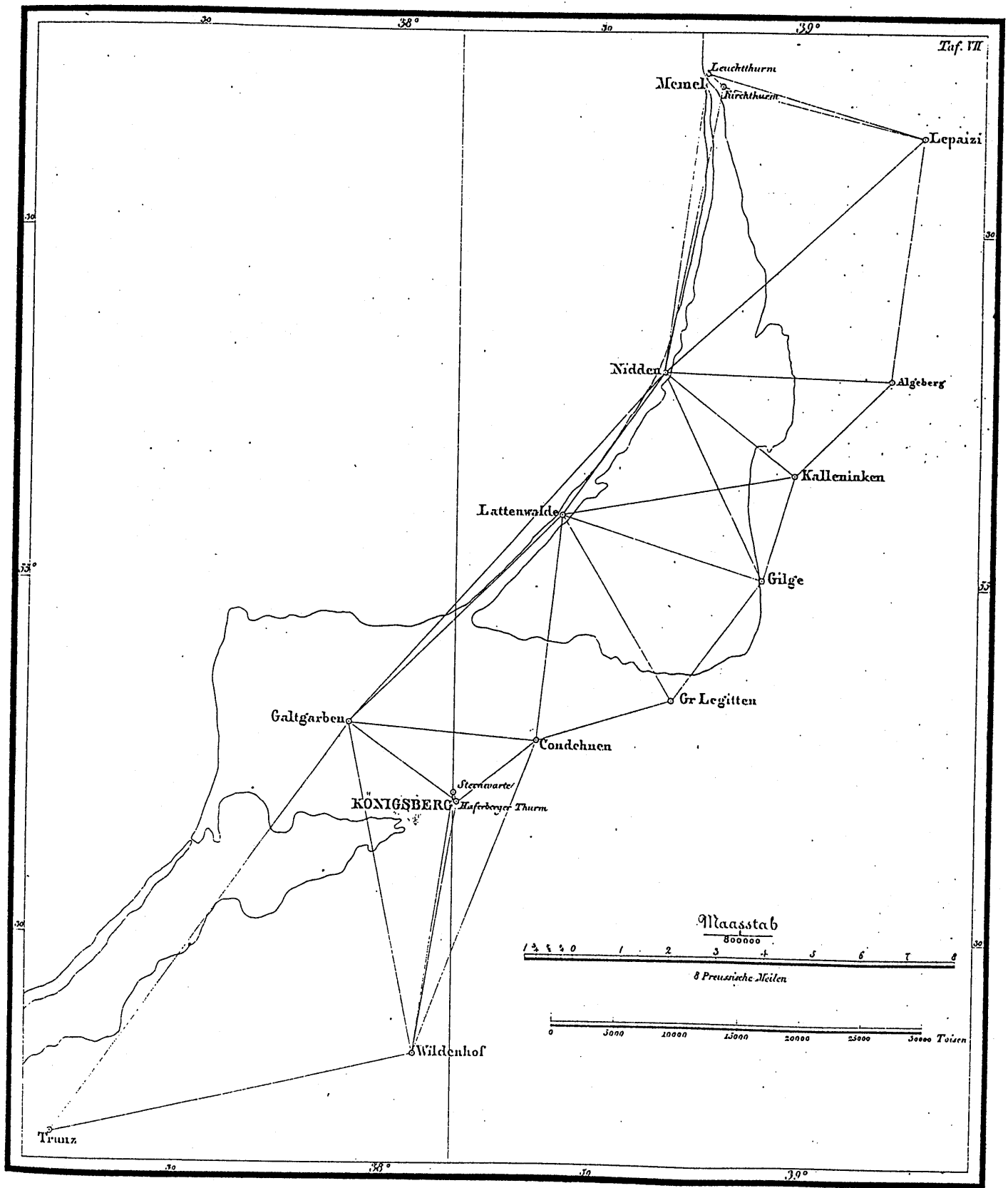
Il nous reste l'agréable devoir de nommer ceux qui nous ont soutenu dans notre travail. En premier, nous nommons Mr le premier lieutenant Kulenkamp, dont les connaissances et la circonspection nous ont été d'une grande utilité. Non seulement il a exécuté les mesures d'angles aux points de Legitten, Gilge, Kalleninken et Algeberg, mais il a aussi achevé avec l'un de nous, lors de son séjour à Königsberg pendant l'hiver

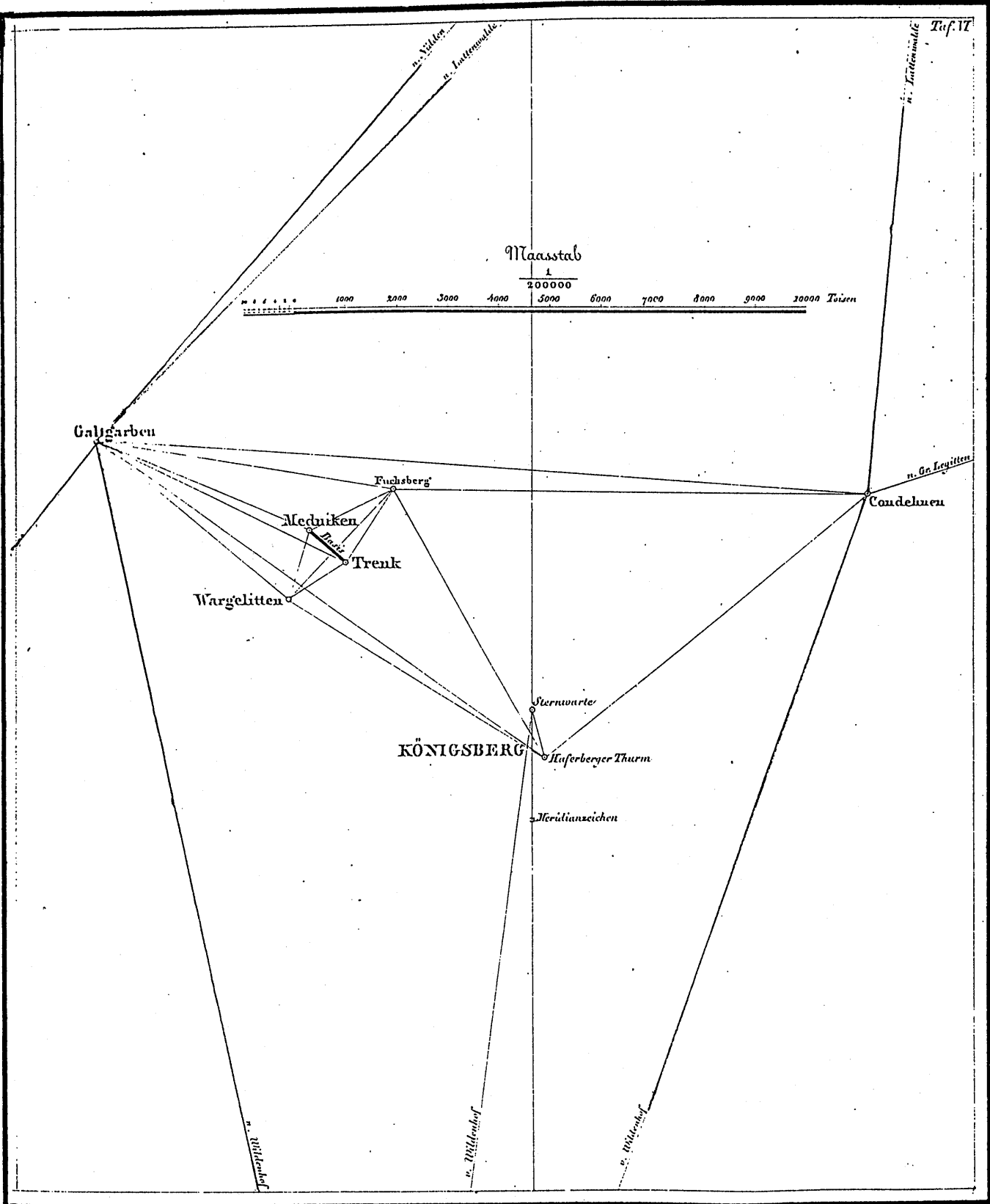
1834-1835, les calculs exigeaient par les mesures de la base et ceux beaucoup plus conséquent menant à la compensation complète de toutes les observations d'angles et à la construction définitive du réseau de triangles, de sorte que, de jour en jour, chaque résultat pouvait être comparé et que nous obtenions la plus parfaite conviction de leur exactitude.

Ensuite, nous nommons Mr l'ingénieur géographe Bertram, dont la connaissance exacte des travaux de ce type nous a apporté une aide multiple même si nous ne voulions pas lui attribuer un travail particulier afin de disposer de lui partout où son aide était nécessaire. Nous jouissions d'une aide identique de la part de Messieurs les lieutenants de Borke, de Happe et de Mörner; Ce dernier nous aidait également dans la reprise de certaines parties des calculs. Avec une reconnaissance particulière, nous mentionnons les soutiens que Mr l'ingénieur principal Schwink et Mr le professeur Feldt à Braunsberg ont apporté aux mesures de notre base: ces aides consistaient à accepter le travail pénible lié à de grands sacrifices lors de l'exécution même; le premier par la construction des piliers aux extrémités de la base, à leurs points d'appui et aux points du triangle principal Galtgarben et Condehnen. Pour mesurer la base, nous avons aussi bénéficié de l'aide de Messieurs Albert Busolt et Wilhelm Bessel auxquels nous avons confié certaines opérations partielles. Le dernier a entrepris seul l'opération déjà mentionnée menant à la jonction plus sûre entre l'observatoire et le réseau de triangles.

En ce qui nous concerne, nous avons vécu ensemble pendant les mois d'été des années 1831 à 1834 de façon presque ininterrompue et il nous est vraiment difficile de déterminer dans quelle mesure chacun d'entre nous a participé à l'achèvement du travail, même si nous ne trouvons aucun plaisir à faire un mélange intentionnel. Lorsque c'est utile de nommer l'un de nous, notamment pour l'exécution des observations astronomiques, nous n'avons pas manqué de le faire. Nous n'aurions pas pu dire qui a fait une partie du travail seul si l'éloignement de nos résidences et la diversité de nos autres occupations ne nous avaient pas séparé pendant les saisons défavorables au travail à l'extérieur. Une seule tâche échouait à une seule personne, à cause de sa nature: c'est la rédaction du livre que nous publions maintenant. Étant donné que je dois ici apparaître seul, je profite de l'occasion qui m'est donnée, de remercier chaleureusement Mr le major Baeyer pour sa participation cordiale à toutes les décisions communes.

W.F. Bessel

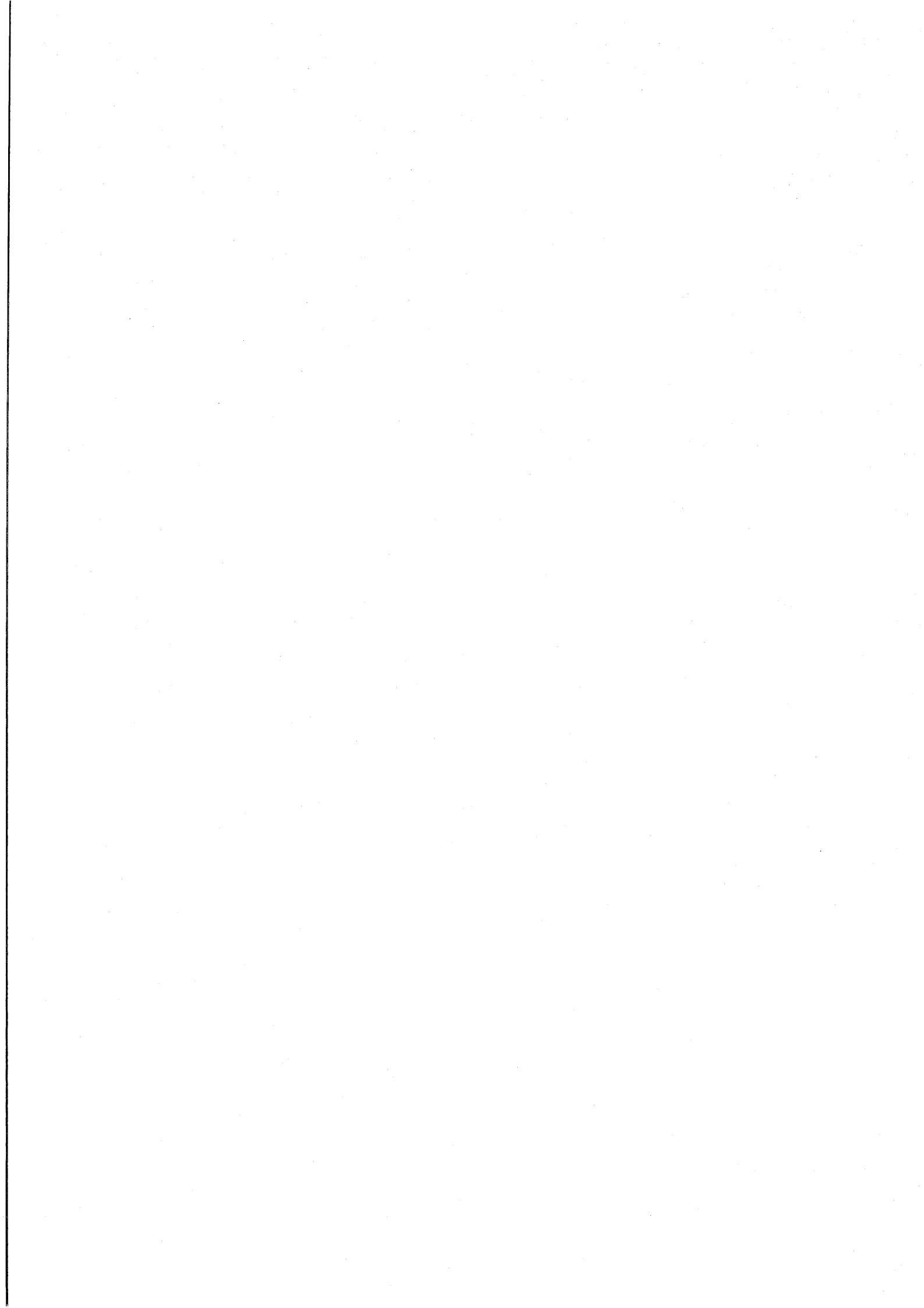




ANNEXE 13

TRADUCTION DE
L'INTRODUCTION DE *DIE*
KÜSTENVERMESSUNG UND IHRE
VERBINDUNG MIT DER BERLINER GRUNDLINIE ,
BAEYER, 1849

Cette introduction nous a paru intéressante à traduire pour les mêmes raisons que celles citées à l'annexe 12. La différence de points de vue adoptés par Bessel et Baeyer (l'un écrit pour les savants, l'autre pour les praticiens) est à souligner. Remarquons aussi que Baeyer, à l'exemple de Bessel, n'utilise pas le mètre mais la Toise du Pérou. Il en donne une justification qui nous semble être un élément à verser à l'histoire du système métrique.



Die
Küstenvermessung

und ihre Verbindung

mit der

Berliner Grundlinie.

Ausgeführt

von der trigonometrischen Abtheilung des Generalstabes.

Herausgegeben

von

J. J. Baeyer,

Oberst und Abtheilungs-Vorsteher im Generalstabe und Dirigent
der trigonometrischen Abtheilung.

Mit 3 Figurentafeln und einer Karte.

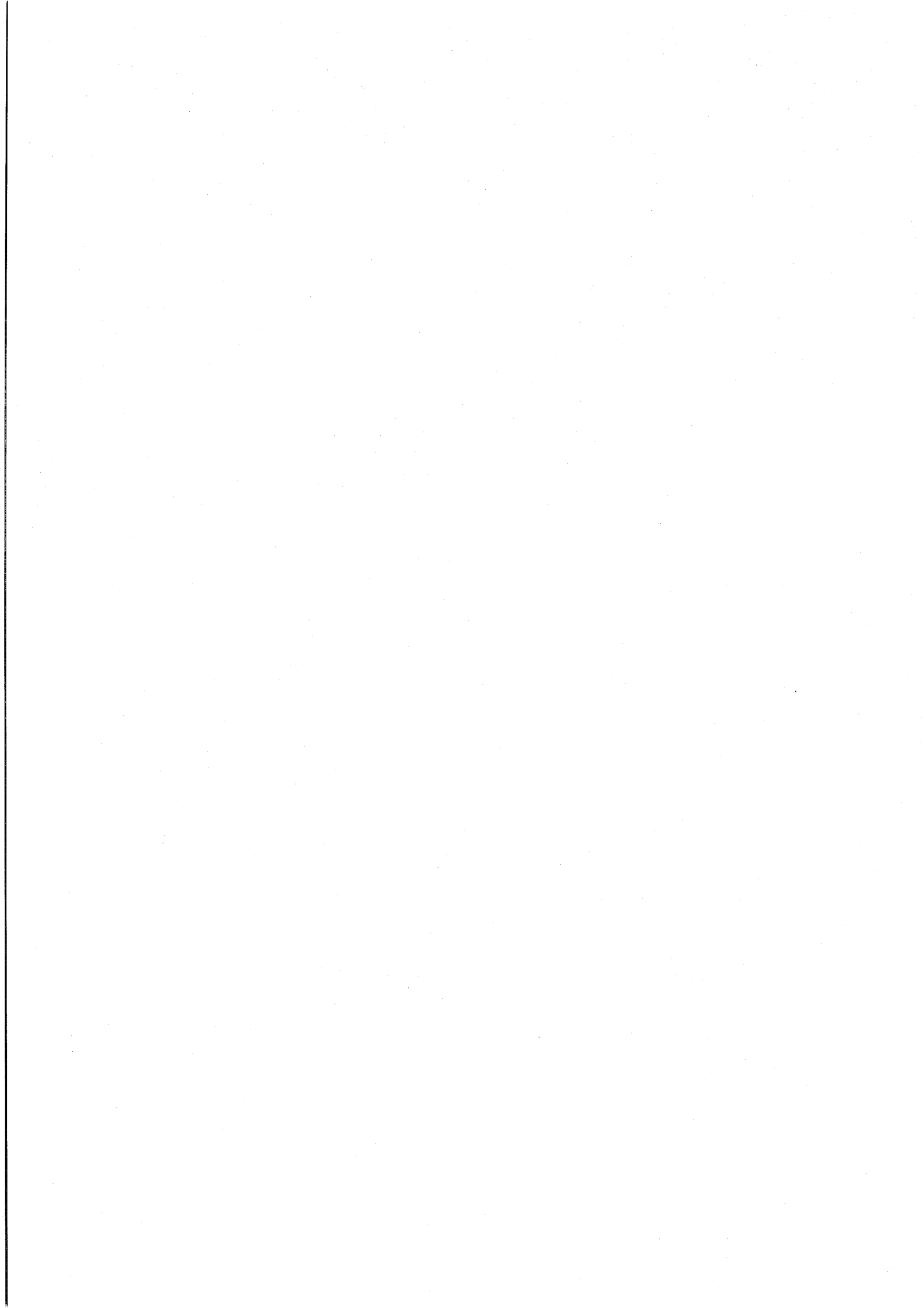
Berlin.

In Commission von Ferd. Dümmler's Buchhandlung.

1849.

Gedruckt bei Tro witzsch & Sohn.

Hc



TRADUCTION DE L'INTRODUCTION DE *DIE*
KÜSTENVERMESSUNG, BAEYER, 1849

[...] Étant donné que les gouvernements de [...] ¹⁵ et de Meklenburg ont volontiers donné leur accord et leur soutien nécessaires à cette liaison, nous avons pu l'exécuter en 1839 et 1840. Durant les deux années suivantes, en 1841 et 1842, les angles entre Rügen et Gollenberge furent observés et la mesure des triangles côtiers, qui met en relation du point de vue scientifique la liaison géodésique entre les observatoires de Königsberg, Copenhague et Altona ¹⁶, fût achevée. On avait déjà eu auparavant l'intention de relier la chaîne côtière à Berlin et aux triangles de de Müssling, en partant de Stettin. Ce projet a gagné en importance grâce à un rattachement aux triangles danois par le fait qu'il permet en même temps une liaison entre l'observatoire allemand et ceux cités ci-dessus.

Ce travail fut accompli dans les années qui suivirent et achevé pendant l'automne 1845. Au printemps 1846, la base ¹⁷ fut mesurée près de Berlin; au cours de l'été, on observa les angles qui faisaient partie de l'opération de la mesure de la base ce qui permit de clore la partie en cours des mesures trigonométriques.

Des déterminations astronomiques des points isolés des triangles n'ont pas encore été exécutées jusqu'alors, ce qui sera chose faite dès que les travaux trigonométriques seront terminés.

Mon intention lors de l'édition des opérations géodésiques de l'État-major est la suivante: commencer par les mesures trigonométriques, calculer ensuite les coordonnées polaires sphériques de tous les points des triangles à partir de Berlin et de les réunir dans

¹⁵Nous avons consulté cet ouvrage à la bibliothèque de Strasbourg. Malheureusement, il manque le début de la préface, et donc une partie de cette phrase se trouvant en haut de la page IV.

¹⁶Altona est actuellement une banlieue d'Hambourg.

¹⁷Traduction d'une note de Baeyer: Avec l'appareil de mesure, que Bessel a utilisé pour la base de Königsberger, 5 bases ont déjà été mesurées depuis cette époque: à Königsberg, à Copenhague, à Upsala, à Berlin et à Bonn et actuellement cet appareil se trouve en Belgique, où il doit être employé pour mesurer une sixième et peut-être une septième base.

un tome à part avec les déterminations astronomiques qui restent encore à exécuter afin de pouvoir entreprendre des recherches sur la figure de la Terre.

Puisque depuis 1837, le personnel du service de trigonométrie a connu des changements, je pense qu'il est de mon devoir, pour rendre justice à tout le monde, de préciser davantage et de façon brève la part que chacun a pris aussi bien aux observations qu'aux calculs. De 1837 à fin 1841 le capitaine d'État-major de Mörner et le lieutenant et ingénieur géographe Bertram ont été mes collaborateurs. Jusqu'à cette période, j'ai compensé les angles de Trunz jusqu'à Gollenberge (opération à laquelle Bertram a pris une part intermittente) et j'ai formé l'équation finale servant à la compensation du réseau des triangles grâce à l'aide du capitaine de Mörner.

En été 1841, je ne pouvais pas prendre moi-même part aux travaux sur le terrain car sa majesté le roi m'a confié la mission de faire un voyage scientifique en France et en Angleterre. Cette année là, le capitaine de Mörner et le lieutenant Bertram exécutèrent seuls les mesures d'angles. L'hiver suivant, le capitaine de Mörner tombe malade et meurt. L'État-major et en particulier le service trigonométrique perdit en lui un officier infatigable à la tâche et plein de talent. Il fut remplacé par le lieutenant de Hesse, (actuellement capitaine d'État-major), qui réussit en peu de temps, grâce à son courage et à ses solides connaissances, à se perfectionner de telle manière, qu'avec l'aide du lieutenant et ingénieur géographe Rodowicz, il put faire la compensation de la chaîne de Bahn jusqu'à la base de Berlin; à cette occasion, il fit preuve d'une persévérance et d'une habileté rares aux calculs. Le lieutenant Bertram ne pouvait prendre part à ces travaux qu'occasionnellement, car il travaillait en plus sur des calculs de précisions et car il a été envoyé 2 ans à Altenburg pour y finir le relevé du cadastre qui y avait été commencé.

En dehors des messieurs déjà nommés, Mr le premier lieutenant de Wrangel, qui à l'époque appartenait à l'État-major qui fut rattaché au service trigonométrique, prit part aux mesures de la base de Berlin ainsi qu'aux différents calculs, et me rendit une aide considérable grâce à son ardeur et sa persévérance. Les calculs des distances mesurées des zéniths et la compensation des hauteurs furent effectuées en dernier par moi-même pendant l'hiver 1848/49 avec l'aide du lieutenant Bertram et du lieutenant et ingénieur géographe Beckerhaus. Ce dernier fut nommé en remplacement du lieutenant Rodowicz qui passa au service de Holstein à l'automne 1848. Enfin, il me faut encore rappeler l'aide d'un participant qui n'appartient pas au service trigonométrique, c'est monsieur Zacharias Dase; Monsieur le professeur Jacobi réussit à mettre au profit de la science le merveilleux talent de celui-ci puisqu'il donna le mode d'emploi pour résoudre les équations de condition formées selon la méthode des moindres carrés. La première tentative de résolution a été exécutée par Mr Dase avec les 47 équations de la chaîne côtière du §84 qui avait déjà été résolue par von Hesse, et après avoir réussi cette tentative

Mr Dase résolut vraiment dans la période du 1^{er} juin jusqu'à la mi-septembre 1847 les 86 équations de condition indiquées au §92. Je pense donc recommander Mr Dase, comme une personne de confiance, à tous ceux qui ont de semblables calculs à résoudre et il est regrettable que l'on n'ait jusqu'alors pas encore réussi à lui assurer une existence solide afin qu'il puisse consacrer son talent à de seuls travaux utiles.

A ce premier tome sur les mesures trigonométriques de l'état de Prusse suivra, dès que les circonstances le permettront, un deuxième tome qui contiendra l'ancienne chaîne de triangles allant du Rhin jusqu'à Berlin et là, à travers la Silésie et le grand duché de Posen, jusqu'à la jonction du côté Trunz-Brosenken (près de Elbing). On aurait commencé avec ces triangles s'il n'avait pas fallu attendre d'autres travaux complémentaires différents. Pour la chaîne de triangles du Rhin, une base fut mesurée près de Bonn en 1847, et l'observatoire de là-bas, grâce à la participation du professeur Argelander, a été relié au réseau de triangles. En outre un rattachement de la nouvelle triangulation belge, qui ne sera commencé que cette année sous la conduite de Nerenburger, avec celle du Luxembourg serait souhaitable. En Haute-Silésie, on a déjà commencé pour 1848 une liaison avec la triangulation russe du général lieutenant Von Tenner dans le royaume de Pologne mais celle-ci devait être ajournée à des temps plus favorables en raison des événements politiques.

Lors de la rédaction de ce livre, j'ai souvent ressenti douloureusement la grande perte de Bessel, mon ami et maître vénéré. J'ai toujours trouvé auprès de lui conseil et aide en toutes difficultés. Sa devise était: "Il suffit de s'y mettre avec sérieux, et les chemins qui mènent au but se trouveront d'eux-mêmes" et j'ai toujours cherché à suivre cette devise. Cependant si quelqu'un compare le chemin que j'ai suivi à celui que Bessel a montré d'une main de maître dans la mesure du degré, il se demandera à juste raison, pourquoi j'en ai dévié. Je dois donc indiquer plus précisément le point de vue dont je suis parti. Bessel écrivait en tant que savant à des savants; la tâche à laquelle j'ai cru devoir m'atteler au contraire était d'écrire en tant que praticien à des praticiens. J'espérais alors donner davantage d'ouverture à l'application de la méthode des moindres carrés dans les travaux trigonométriques, que cela n'avait été le cas jusqu'ici. C'est pourquoi, je ne pouvais compter sur les acquis théoriques et pratiques que dans une certaine mesure et je devais chercher à rendre à chaque individu, qui les possédait, la théorie aussi compréhensible que possible et permettre une application facile et son exécution sûre. Dans la mesure où je l'ai réussi ou non, je considère ma tâche menée à bien ou non.

Par rapport à l'unité de mesure, j'ai suivi l'exemple de Bessel dans la mesure du degré et j'ai utilisé uniquement la Toise du Pérou. Et ceci pour les raisons suivantes:

1) La Toise est la mesure la plus connue en général et a obtenu par la mesure du degré au Pérou une importance historique.

2) Elle est la base dont on se sert dans presque toutes les autres mesures où elle est la mesure de référence.

3) Elle n'a jamais été modifiée par une nouvelle réglementation.

4) S'il semble extrêmement souhaitable, que l'on aspire à l'introduction générale d'une unité de mesure scientifique, afin qu'il ne s'installe pas dans les relations scientifiques la même confusion qu'il existe déjà parmi les mesures des différents pays, alors la Toise est plus que n'importe quelle autre mesure adaptée et justifiée pour être cette unité et de préférence pour des mesures géodésiques.

Si des modifications de mesures, faites souvent par une réglementation, n'ont pour but que l'introduction de divisions décimales alors elles sont utiles, car celles-ci sont une suite conséquente et naturelle du système décimal déjà accepté mais si elles s'étendent sur un changement de l'unité de mesure elles n'auront pas d'autres conséquences si ce n'est que l'on remplace une unité arbitraire autrefois en vigueur par une nouvelle unité arbitraire; et le pire est que l'on ne pourra même pas se passer complètement de la première et que l'on sera, lors de nouvelles comparaisons, obligé d'avoir recours à l'ancienne unité. Le seul cas où de tels changements apparaissent justifiés serait *l'introduction générale d'une et même unité*. Mais même dans ce cas, la Toise mériterait d'être préférée à toute autre mesure car des longueurs très proches d'elles se retrouvent dans des mesures encore usuelles dans presque tous les pays sous des noms différents: Klafter, Lachter, Faden, Sajen, Fathom, Toesa etc., et même la plupart des verges s'approchent de la double Toise.

Après avoir exposé les raisons pour lesquelles la Toise était conservée lors des indications des distances et des hauteurs, je passe aux parties principales des mesures que l'on exécute. Si on compare les mesures horizontales avec les mesures de dénivellation, on constatera que les premières sont exécutées avec bien plus de régularité et de soin que les dernières. La raison en est que les mesures de dénivellation devaient être considérées comme accessoires étant donné que ni le temps ni les moyens accordés ne suffisaient pour que l'on puisse les traiter avec le même soin.

De même, on se demandera peut-être pourquoi je n'ai pas lié à ces mesures des observations barométriques, thermométriques et psychrométriques. La réponse se trouve certes déjà dans des remarques précédentes mais j'ai en outre eu d'autres raisons. Si de tels observations ne sont pas exécutées avec de grands soins et de précautions alors elles n'ont que peu de valeurs ou pas du tout. Les instruments météorologiques doivent être posés sur la même ligne de niveau et en lieu sûr où ils sont protégés contre toutes les influences locales. Pour cette raison, sur un signal habituel, on ne peut pas les installer sous la tente d'observation. Sur le poteau d'observation on ne peut pas les fixer car il n'y a pas de place; on ne peut pas non plus les mettre sur l'échafaudage (pas le baromètre) car

celui-ci est soumis à toutes sortes de tremblements. Si donc on veut les installer de manière censée, il faut prendre des précautions particulières qui occasionnent des coûts particuliers. En plus, ne se trouvait sur une station qu'un seul observateur qui pendant ce court délai où on peut observer était si occupé à mesurer les angles horizontaux et les distances zénithales qu'il devait concentrer son attention afin de ne pas être dérangé dans sa relation avec l'observateur vis-à-vis en face sur l'autre station.

Un rapport que l'on puisse utiliser entre les observations météorologiques et la réfraction n'ayant pas pu être prouvé jusqu'ici, et étant donné qu'il est peu sûr qu'un jour on pourra déterminer, à partir des observations relatives aux extrémités, les tangentes à la courbe de réfraction sur une longueur de plusieurs miles, d'autant qu'elle est exposée sur son trajet à toutes les influences locales terrestres, on doit admettre que seules les observations les plus précises et effectuées de telle manière à ce que la lecture des distances zénithales soit faite en même temps que celle des instruments météorologiques pourraient contribuer de façon utile à la résolution de cette tâche difficile. Mais ceci n'est faisable que par des observateurs qualifiés. A cela s'ajoute, que malgré des observations simultanées et opposées on ne découvre pas les angles de réfraction mais seulement leur somme, et c'est pourquoi on ne peut même pas faire un essai direct dans l'espoir de découvrir un lien entre la réfraction terrestre et les observations météorologiques.

Ces considérations n'étaient pas aptes à éveiller un intérêt suffisamment vif pour ces observations, intérêt qui aide à dépasser toutes les difficultés. C'est pourquoi j'ai préféré ne pas faire du tout d'observations météorologiques, ni d'en faire faire pour lesquelles je n'aurais eu aucune confiance.

D'après la théorie de la mesure des hauteurs développée dans le §115, selon laquelle l'angle de réfraction peut être entièrement déterminé, la chose se présente autrement, et dès que j'aurai l'occasion d'exécuter un nivellement de cette manière, j'essaierai de toutes mes forces d'y relier des observations météorologiques, au moins dans les stations qui se prêtent à l'estimation de la valeur de la réfraction. Cette occasion semble se profiler pour l'été prochain, étant donné qu'un nivellement est prévu d'ici à la Thuringe, nivellement qui doit se raccorder à celui que j'ai précédemment réalisé de Swinemünde à Berlin.

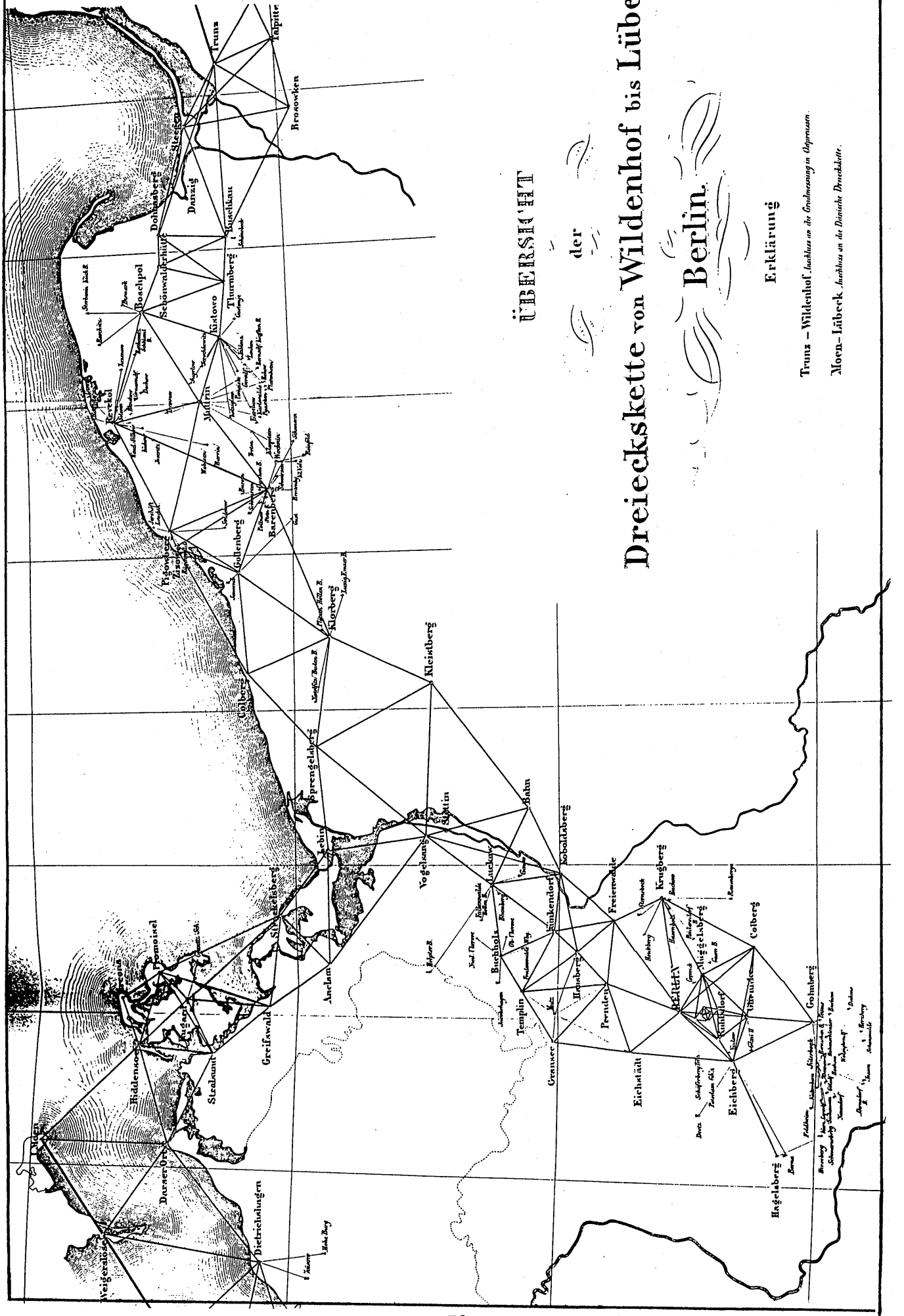
Puisque j'ai dû faire face à des difficultés inhabituelles pendant la publication (l'impression commença en janvier de l'année précédente), celles-ci doivent être mentionnées ici, car elles ont eu une influence sur l'ensemble. Suite aux événements politiques de Mars, l'impression fut plusieurs fois interrompue et le typographe changea 3 fois; pour ces mêmes raisons, la correction des feuillets passa dans des mains différentes. Je fus éloigné de mon travail pendant des mois à cause d'une longue maladie, de sorte que les différents paragraphes de la dernière partie, devaient aller tout de suite à

l'impression dès qu'ils étaient finis. Ces mauvaises conditions créaient de différentes inégalités dans l'orthographe de certains mots et ceci aussi dans le choix des lettres dans les titres, et au paragraphe X dans l'ordre des calculs mais qui ne concernaient que la forme et non pas le contenu lui-même; certaines répétitions non plus, n'ont pu également être évitées.

Vu la difficulté que rencontre la rédaction d'une oeuvre scientifique lors d'une période politiquement agitée, la question de savoir si je ne ferais pas mieux de remettre le travail à des temps meilleurs, s'imposait de plus en plus souvent à moi; seule comptait la considération qu'il n'y avait que peu de chance de voir arriver ce moment de si tôt, et que je pourrais à l'avenir être empêché facilement de reprendre l'oeuvre commencée, et c'est ainsi que je me décidais à tout mettre en oeuvre pour la terminer sans tarder. Je peux affirmer que le travail néanmoins m'est devenu très pénible dans de telles circonstances, que je ne regrette pas la décision prise et je tiens à remercier chaleureusement mon chef vénéré, le chef par intérim de l'état-major de l'armée Son Excellence Mr le lieutenant général v. Reyher, qui m'a toujours encouragé et soutenu dans cette entreprise.

Berlin, Mai 1849

J.J. Baeyer



ÜBERSICHT

der

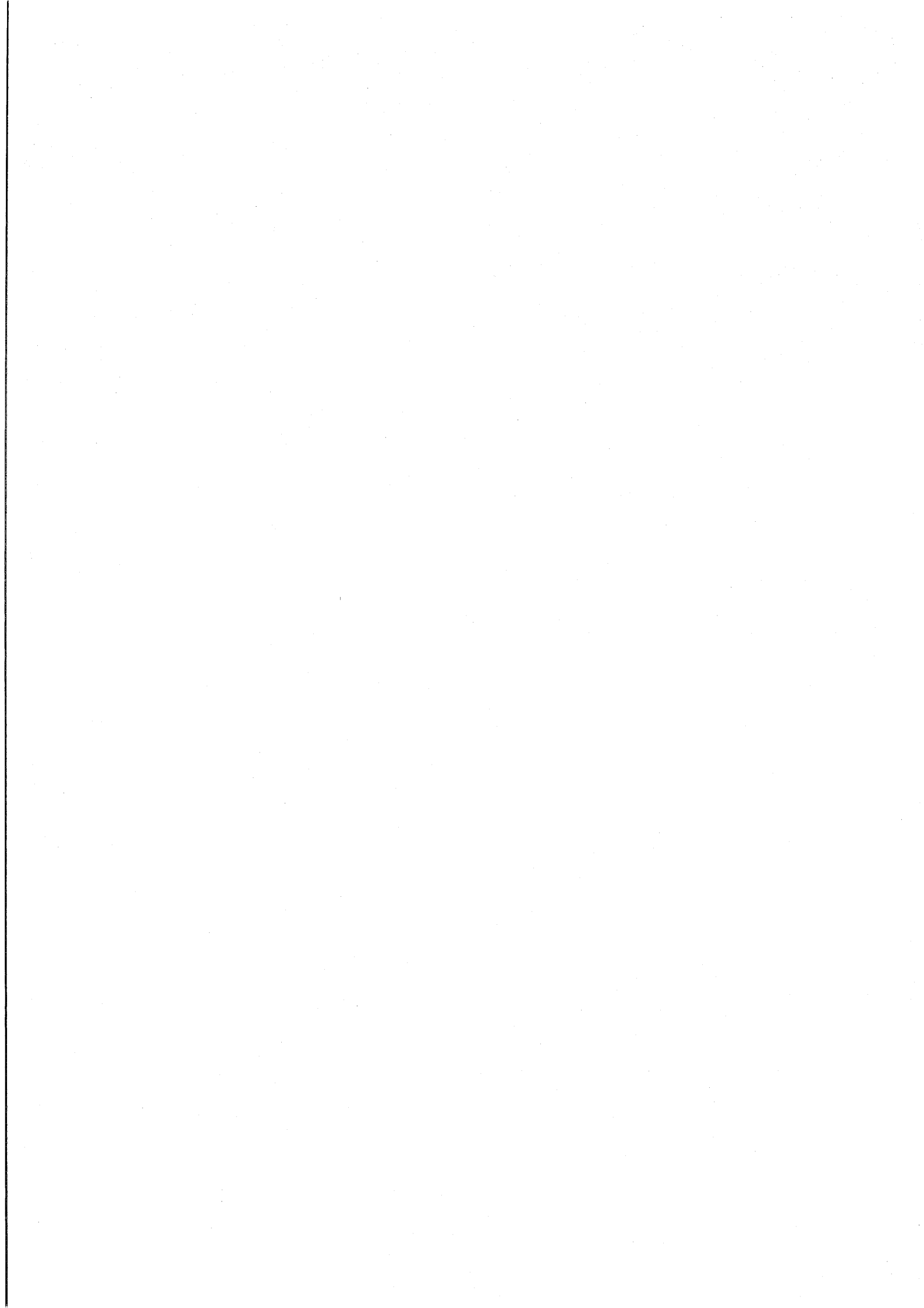
Dreiecksreihe von Wildenhof bis Lübeck

Berlin.

Erklärung

Trunz - Wildenhof. *Justiz an die Grundmessung in Olypnus.*

Moen - Lübeck. *Justiz an die Deutsche Dreiecksreihe.*



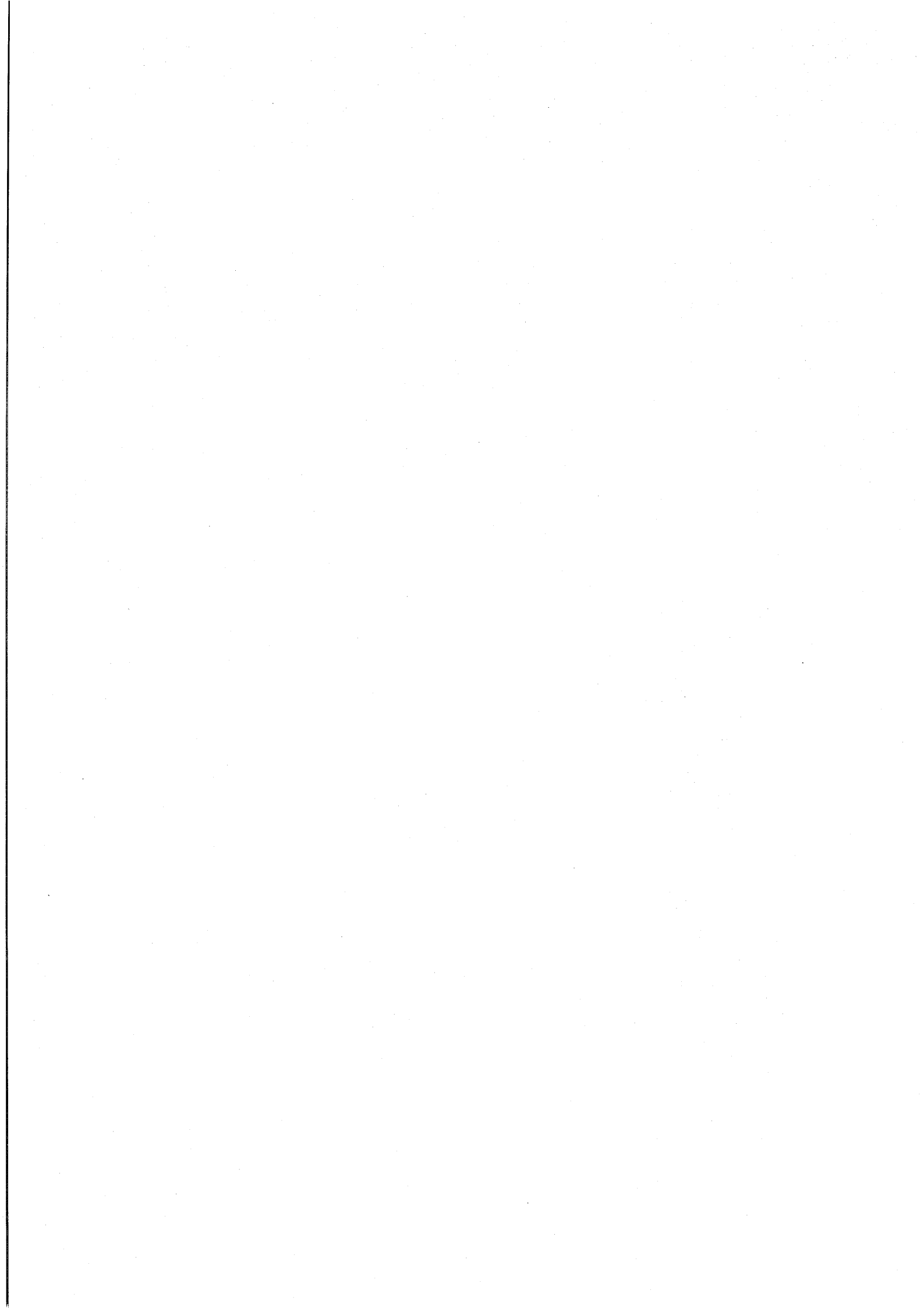
ANNEXE 14

LISTE DES PUBLICATIONS
DE NERENBURGER

Cette liste est réalisée à partir des biographies consultées (voir partie A III).

Il faut y ajouter: le rapport paru au *Moniteur Belge* du 14 juin 1847 auquel Nerenburger a certainement pris part; le rapport sur un mémoire de Liagre "Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations", 1852 paru dans *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, tome XIX, n° 4.

Les biographes indiquent tous que *Compte-rendu des opérations de la commission instituée par le ministre de la guerre pour étalonner les règles qui ont été employées à la mesure des bases géodésiques belges*, 1855, est sans doute l'oeuvre de Nerenburger à retenir. On la trouve dans le Tome 1 de la *Triangulation du Royaume de Belgique*.



LISTE DES PUBLICATIONS DE NERENBURGER

Dans Correspondance physique et mathématique

"Théorème sur les transversales", Tome III, 1827, p. 65

"Théorème sur le concours des droites", ibid. p. 122

"Problème sur la décomposition des nombres", ibid. p. 124

"Réponse à la question: «Examiner les différentes circonstances du mouvement d'un corps suspendu par un point à l'extrémité d'un fil et assujetti à se mouvoir en vertu d'une vitesse de rotation imprimé au fil»", Tome IV, 1828, p. 134

Dans la série de précis lithographiés pour l'usage de l'École militaire

Précis des leçons sur la perspective, la coupe des pierres et la charpente, 1835-1843

Précis des leçons pour la construction des cartes géographiques, 1835-1843

Dans les documents qui émanent du Dépôt de la Guerre

Instruction pour la réduction des plans parcellaires du cadastre, 1847

Tables de projection pour servir à la construction des points trigonométriques de la carte de Belgique, 1849

Base géodésique mesurée en juillet 1850 aux environs de Bruxelles. Triangulation qui relie cette longueur à l'observatoire de Bruxelles, 1851

Instruction pour MM les officiers d'état-major employés aux travaux topographiques des environs de la place d'Anvers en 1853, 1853

Compte-rendu des opérations de la commission instituée par le ministre de la guerre pour étalonner les règles qui ont été employées à la mesure des bases géodésiques belges, 1855

Dans les Bulletins de l'Académie royale de Belgique

Un certain nombre de rapports (1848-1868)

"Sur les triangulations qui ont été faites en Belgique antérieurement à 1830", Tome XXII, 2^e partie, 1855

"Sur les triangulations qui ont été faites en Belgique postérieurement à 1830", 2^e série, tome 1, 1856

"Sur la mesure de l'arc de parallèle européen du plus grand développement", 2^e série, tome XI, 1861

"Réflexions sur l'enseignement des sciences en Belgique", 2^e série, tome XXII, 1866

Notices sur les triangulations qui ont été faites, en Belgique, depuis 1617 jusqu'à nos jours, Bruxelles, 2 tomes, Hayez, 1856

ANNEXE 15

CORRESPONDANCE DE NERENBURGER
ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
CORRESPONDANCE DE A. QUETELET
DOSSIER N° 1890 : CORRESPONDANCE
NERENBURGER DE 1836 À 1867
(57 LETTRES; 1 BILLET; 4 MINUTES)

Cette correspondance de Nerenburger à Quetelet est intéressante à maintes égards. Elle nous renseigne sur le rôle que ces deux hommes ont dans la vie scientifique de la Belgique.

**CORRESPONDANCE DE NERENBURGER ACADEMIE ROYALE DE
BELGIQUE (EXTRAITS)
CORRESPONDANCE DE A. QUETELET
DOSSIER N°1890 : CORRESPONDANCE NERENBURGER 1836 A 1867
(57 LETTRES ; 1 BILLET ; 4 MINUTES)**

1 A Mr Quetelet, professeur de mathématiques, non datée, signé "votre élève et ami"

Le départ de mon père, en me procurant l'occasion de vous écrire me fournit celle de m'excuser s'il est possible d'avoir attendu si longtemps pour vous témoigner ma reconnaissance de la dernière marque de bonté que vous m'avez donné en venant me voir au mois d'août.

Dans 8 mois, j'espère vous voir plus librement; à cette époque je quitte l'école pour entrer au service, dans le corps d'état-major, si mon numéro de sortie me le permet. Toutefois, ce ne sera qu'après 3 mois de congé, à partir du 1^{er} octobre. [...]

2 et 3 A Mr Quetelet, en ville, non datée, Lettre de remerciement et d'excuse

4 Bruxelles, le 23 novembre 1836

Pour répondre à l'invitation que vous avez bien voulu me faire de fournir quelques articles à *La correspondance mathématique et physique* (dont l'exhumation est une bonne fortune pour nos compatriotes qui cultivent les sciences) j'ai commencé à mettre en ordre des annotations sur un sujet qui vous a occupé autrefois. Il s'agit de la transformation de figures planes irrégulières en figures régulières. J'ai donc l'honneur de vous adresser les 1^{ères} lignes de mon travail en vous priant de vouloir bien les insérer dans le 1^{er} numéro de la correspondance, si vous jugez toutefois qu'elles puissent offrir un intérêt suffisant pour mériter une publicité.

5 A Mr Quetelet, directeur de l'observatoire, Bruxelles, le 12 septembre 1837
Lettre de remerciement pour l'envoi du n°1 de *La correspondance*

6 A Mr Quetelet, directeur de l'observatoire, Bruxelles, le 30 avril 1844

Mr Quetelet a eu l'obligeance d'offrir au Colonel Directeur du Dépôt de la Guerre de faire vérifier l'exactitude des divisions du niveau à équerre qui fait partie de l'appareil destinée à la mesure d'une base. D'après les ordres du colonel, le lieutenant colonel Nerenburger prend la liberté d'envoyer à Mr Quetelet l'instrument en question, en le prévenant que chaque division est un demi-grade.

7 A Mr Quetelet, directeur de l'observatoire, Bruxelles, le 30 septembre 1844

Bruxelles 30 ⁷br 1844.



Monsieur Montigny,

En consultant vos deux mémoires, j'ai vu que vous y étiez
à votre connaissance que mes recherches, dans le
but de déterminer quelque précision sur la triangulation
d'Orléans, m'avaient conduit à son établissement définitif
pour la latitude et longitude de Bruxelles.

J'en ai fait usage, dans le moment, à son sujet
pour d'un triangle qui une triangulation concordance
a fait venir en moi, et que je désirais bien
à faire bien longtemps, sans avoir pu jusqu'ici en
trouver l'occasion. Permettez-moi de croire que
notre collaboration s'en sera bien trouvée, et
permettez que je tienne ici mon journal d'un
note que j'ai rédigé sur le travail d'Orléans.

" Pour dire, me référant, quelques mots sur
" la détermination géographique de la tour Nord
" de la grande, par M. La pointe a été
" retranchée à la triangulation d'Orléans par un
" triangle de terre ayant pour base la
" ligne de la tour Nord. Les trois angles de ce
" triangle

8 Bruxelles, le 13 octobre 1845

Je m'empresse de vous rembourser le montant des avances que vous avez faites pour le chronomètre (Vondieck) acquis par le Dépôt de la Guerre. Si cet instrument vous avait occasionné d'autres frais [...]

9 Bruxelles, le 12 décembre 1845

Je vous envoie en communication, une note que j'ai adressée tout récemment à Mr le Ministre de la Guerre, et que celui-ci vient de me rendre apostillée de sa main.

Il en approuve la substance, et veut donner suite immédiatement à l'idée de créer une commission sous votre présidence. Il m'a autorisé à entrer en relation avec vous pour cet objet, tout en recommandant, ainsi qu'à vous le secret.

Si vous avez la bonté de me donner un jour et une heure où je pourrais vous entretenir sans trop vous déranger, je me rendrais chez vous et nous pourrions nous concerter pour battre le fer pendant qu'il est chaud.

10 Bruxelles, le 13 décembre 1845

Je viens de recevoir à l'instant de la cour des comptes le mandat de la somme qui est due par le Dépôt de la Guerre, au sieur Vondieck. J'ai donc écrit à ce dernier pour le prévenir que les 45 livres sterling allaient être envoyées directement par l'entremise du ministère des affaires étrangères à l'ambassade de Londres où ils seront à sa disposition.

J'aurai le plaisir d'aller vous voir Jeudi prochain pour l'affaire de la carte.

11 Bruxelles, le 20 décembre 1845

Je vous envoie mon factum pour le soumettre non à votre approbation mais à votre critique bienveillante. Peu habile à écrire [...]

J'ai pensé qu'un secrétaire, en sixième, pour voix délibérative, pourrait être utile: c'est pourquoi j'en ai fait mention dans le projet d'arrêté. Veuillez me dire votre avis sur ce point. Mon choix s'est porté sur Mr Brouillard pour 2 raisons. La 1^{ère} c'est que cet officier me paraît posséder les qualités nécessaires, la seconde est une raison d'équilibre.

Je m'explique: 2 membres de la commission seraient des officiers du génie, et je connais assez tous les membres du corps d'état-major pour être assuré qu'ils en concevraient de l'ombrage si l'état-major n'était pas représenté, suffisamment à leur gré, dans la commission.

Je passerai entre midi
et 1h à l'Observatoire.
etc.....

12 Bruxelles, le 23 Février 1846

Présumant que la commission aura d'abord à prendre connaissance des documents à examiner, je viens vous prier de vouloir, avant de fixer le jour de la 1^{ère} séance me permettre de terminer le classement et l'inventaire de ces documents que je désirerais pouvoir présenter dans un ordre convenable.

Si cet arrangement vous convient, dès que la mise en ordre des archives sera terminé, ce qui exigera quelques jours, je vous en préviendrai et de mon côté, rien ne s'opposera plus à ce que la 1^{ère} réunion ait bien lieu.

13 A Mr Quetelet, Directeur de l'Observatoire, le 2 mars 1846

Je crois devoir vous prévenir que le Général Chapelié a répondu, ce matin à la lettre de convocation qui lui avait été adressée, qu'il ne prendrait pas part aux travaux de la commission. Une lettre à votre adresse était jointe à la réponse, pour vous être remise par le secrétaire, le jour de la réunion.

Je dois avouer que ma surprise a été grande, et je pense que la vôtre ne le sera pas moins.

14 Bruxelles, le 10 avril 46

J'ai pris des informations au sujet de la proposition faite en faveur de Mr l'astronome Schumacher et du major Olsen.

Pour y donner suite, on attendait une réponse du gouvernement danois que l'on avait cru devoir consulter. Cette réponse est arrivée pendant l'interrègne ministériel. Mais

en l'absence d'un ministre effectif, on n'a pas voulu terminer cette affaire. Aujourd'hui que le département de la guerre a un chef, rien ne s'oppose plus à ce qu'elle le soit; j'ai bien lieu de croire qu'elle le sera bientôt.

15 Lettre en tête Ministère de la Guerre, Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 12 novembre 1846

Nous aurons terminé Mr Meyer et moi vers la fin de la semaine, le calcul de vérification des observations examinées en commission.

En outre, ainsi que vous l'a annoncé le Ministre de la Guerre, les copies demandées en Hollande ont été reçues par moi, et l'examen de ces nouveaux documents exige que la commission se réunisse.

Je pense donc que nous ferions bien de nous réunir la semaine prochaine.

Nous pourrons vous donner la latitude de Hosselt: mais quelques jours nous sont nécessaires pour la calculer. Les observations d'où elle doit résulter ont été faites seulement le mois dernier. En vous la communiquant, par l'intermédiaire du ministre, je joindrai pour votre gouverne une petite note explicative.

16 Lettre en tête Ministère de la Guerre, Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 18 janvier 1847

J'ai l'honneur de vous envoyer le travail fait par Mr Meyer et moi, pour que vous en preniez connaissance à loisir.

Une simple lecture en commission serait, croyez nous, insuffisante; c'est pourquoi il nous a paru préférable d'envoyer ce travail en communication à chaque membre.

Si quelques explications verbales vous étaient nécessaires, veuillez je vous prie, me le faire savoir, et je me rendrai chez vous avec grand plaisir pour vous les donner.

Le Colonel Dandelin, comme vous le savez est fort malade. Mr Meyer est pris de nouveau par la goutte. Ces circonstances obligeront vraisemblablement à remettre à la semaine prochaine la reprise de nos séances. En attendant, si vous le trouvez bon, je m'occuperai du rapport, en me bornant à l'ébaucher de mon mieux.

17 Lettre en tête Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 29 janvier 1847

Mr Meyer étant rétabli, on peut reprendre nos séances.

18 Lettre en tête Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 11 février 1847

J'ai l'honneur de vous envoyer le projet de rapport, accompagné des annexes A, B, C.

Veillez je vous prie le revoir et le châtier à en faire une oeuvre digne de recevoir votre signature. J'ai laissé les conclusions dans l'espoir que vous voudrez bien vous charger de les présenter.

19 Lettre en tête Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 2 mars 1847

J'ai l'honneur de vous envoyer une note que Mr Meyer vient de me remettre sur les principaux travaux géodésiques exécutés en Europe. Je ne sais si elle est de nature à vous satisfaire, elle me paraît bien laconique.

Je joins à cette note un document qui pourra peut-être vous servir.

Si ces matériaux vous paraissent insuffisants, veuillez me le faire savoir et je m'efforcerai de les rendre plus complets.

20 Lettre en tête Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 20 mars 1847

Un billet que j'ai reçu de Mr Beaulieu me met dans l'incertitude au sujet du théodolite dont Mr Houzeau se proposait de faire usage.

Celui-ci, d'après Mr Beaulieu, se serait décidé à employer pour son opération, une boussole de déclinaison appartenant à l'observatoire. Dès lors l'envoi du théodolite deviendrait inutile.

Veillez, je vous prie avoir l'obligeance de me faire connaître positivement les intentions de Mr Houzeau. Je tiens à sa disposition un théodolite de 0m33.

Si jamais il renonce à en faire usage, je vous demanderai alors d'être assez bon pour m'aider à dissiper un doute au sujet du même instrument qui a été demandé par Mr le Général Commandant de l'École Militaire pour exercer les élèves.

D'après le C. Brouillard, l'instrument resterait déposé à l'observatoire et les élèves s'y exerceraient là.

Est-ce vrai? où dois-je envoyer l'instrument?

21 Lettre en tête Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 31 mars 1847

Veillez, je vous prie, laisser reprendre le théodolite déposé en ce moment à l'observatoire. Cet instrument m'est indispensable attendu que celui sur lequel je comptais pour la reprise de mes travaux lundi prochain n'est pas en état.

Quand les élèves devront s'exercer, je vous enverrais celui dont se sert Mr Beaulieu.

22 Lettre en tête Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 4 avril 1847

En vous envoyant le rapport et un projet de conclusion, je désire vivement que vous puissiez trouver le temps de revoir le tout une dernière fois, et que vous veuillez retoucher les passages qui ne vous satisfassent pas.

(prochaine réunion samedi 8 Mai à 10h)

23 Lettre en tête Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 23 avril 1847

Mr Meyer faisant partie du Jury d'examen pour les universités, [...] Peut-on faire le rapport à nous deux?

24 Bruxelles, le 1^{er} mai 1847

[...] Votre fils peut passer à la section des jeunes officiers qui se destinent à l'État-major.

25 Lettre en tête du Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 8 Mai 1847

Je joins au rapport 2 lettres faisant partie des archives de la commission, dans lesquelles se trouvent quelques notes sur l'état mental de Mr Erzey, bien suffisantes, je pense, pour nous excuser de ne pas nous être adressés à lui.

Je joins également la lettre de sa main, dont je vous ai parlé, qui ne semble pas pouvoir être attribuée à une personne privée de raison. Vous remarquerez dans l'une des 2 autres que l'on parle de moments lucides.

prochaine réunion en 8.

26 Lettre en tête du Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 15 septembre 1847

Je m'empresse de vous envoyer 4 exemplaires du Moniteur du 14 Juin dernier qui contient le rapport de la commission.[...]

Je m'occuperai de la lettre du Secrétaire Perpétuel au ministre pour attirer l'attention sur la nécessité d'une bonne triangulation du Pays.

27 Lettre en tête du Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 27 octobre 1847

Je désirerais faire une ascension dans la tourelle de l'observatoire mais sans vous déranger [...]

28 Bruxelles, le 18 décembre 1847

La classe des sciences m'a nommé au nombre de ses correspondants.[...]

Je demande qu'il ne soit pas donné suite à ma nomination, j'en suis indigne.

29 Lettre en tête du Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 11 janvier 1848

Je prends la liberté de vous adresser la note ci-incluse qui pourrait avoir pour conséquence de simplifier pour le moment, notre mission, si les considérations et calculs que cette note renferme vous paraissent exacts.

30 Lettre en tête du Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 29 octobre 1848

Puis-je me rendre aujourd'hui à l'observatoire, sans trop déranger Mr Quetelet, pour examiner l'appareil qui sert à mesurer les déviations de l'aiguille aimantée?

Dans l'affirmative, à quelle heure?

31-32-33-34 Lettres de 1850 relatives au mesurage d'une base avec les règles prussiennes.

35 Bruxelles, le 11 octobre 1852

Lettre de félicitations pour la promotion de Quetelet à l'ordre de Léopold.

36 Bruxelles, le 16 septembre 1852

[...] Le mémoire de votre fils sur les médianes peut être présenté à l'académie.

37-38 Lettres de 1854 relatives à l'étalonnage des règles.

39 Bruxelles, le 10 janvier 1857

Vous trouverez ci-joint une lettre de Mr le général Baeyer. Le point important de cette lettre, pour le Dépôt de la Guerre, est que Mr Encke ne s'opposerait pas à l'opération de Verviers, mais qu'il préférerait commencer entre les deux points extrêmes seuls. Il y aurait un moyen de satisfaire ce désir. Ce serait de placer les opérations du Dépôt à la fin des opérations principales. Celles-ci se trouveraient ainsi divisées en deux parties: d'abord Bruxelles et Berlin seuls; puis après telle date, Bruxelles et Berlin et Berlin avec Verviers.

Mr Encke insiste sur deux points:

1°) La nécessité de tenir compte des équations personnelles. J'ai eu l'honneur de vous le signaler dans nos conversations.

2°) La difficulté d'avoir la méridienne à $0^{\partial},1$, même dans un très grand observatoire. Or $0^{\partial},1$ (de temps) = $1''5$

En présence de la réserve de MM. Encke et Baeyer, on se demande ce que peut donner le procédé télégraphique; admettons que l'incertitude de la méridienne soit de 4" dans un observatoire temporaire par exemple à Verviers. Ajoutons 2" pour l'incertitude de l'opération télégraphique elle-même; la longitude sera connue à 6" sexagésimale.

On ne peut guère aller plus loin avec des méridiennes indépendantes comme celles que suppose Mr Encke: mais entre 2 lieux situés sur le même parallèle (Bruxelles et Viviers), il est possible de régler la lunette méridienne avec les mêmes étoiles, observées sensiblement aux mêmes hauteurs. Dans ce cas, l'on élimine l'erreur absolue de la méridienne (erreur qui provient de celle qui existe sur les ascensions droites des étoiles employées), et si les deux méridiennes adoptées sont déviées, elles le sont toutefois dans le même sens et de la même quantité. Il y a là un parti très avantageux à tirer de la situation de Verviers.

P.S. Ci-joint une traduction de la lettre de Baeyer, Berlin, 4-1-57.

40 Lettre de remerciement d'être nommé à la commission centrale de statistique, Bruxelles, le 5 janvier 1856.

41-42 Lettres personnelles

43 Bruxelles, le 20 janvier 1858

La demande que vous adresse Mr James porte sur un objet si minime que je ne puis y voir de motif pour entrer personnellement en relation avec lui.

Je me borne donc à vous mettre à même de lui répondre en vous adressant deux calques de plans au 1/2500, et 2 feuilles de l'atlas cadastral au 5000° publié par Vandermaelen avec tableaux indicatifs.

J'ai lieu de croire que ces documents répondront au but que s'est proposé Mr James en demandant un spécimen de nos plans cadastraux.

Ci-joint la lettre de Mr James

44 Lettre en-tête du Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 27 octobre 1860

Le colonel James me demande par votre intermédiaire d'après le passage de la lettre que vous avez reçu de lui et dont vous me communiquez le texte même, des indications sur la partie du réseau géodésique belge qui s'étend le long de la côte.[...]

45 Lettre en-tête du Dépôt de la Guerre, Bruxelles, le 6 février 1862

Conformément au désir que vous m'exprimez, je m'empresse de vous adresser deux exemplaires du compte rendu des opérations de la commission instituée pour l'étalonnage des règles que je vous prie de vouloir offrir à la société royale de Londres.

Ci-joint la lettre de M. Miller secrétaire pour l'étranger.

46 24 décembre 1863 Excuse au sujet de la "tardiveté" de l'envoi dû à un retard de bureaucratie.

47 Bruxelles, le 25 octobre 1863

Remerciement pour l'exemplaire de l'annuaire de l'observatoire.

48 à 59 Lettres en-tête de l'École militaire

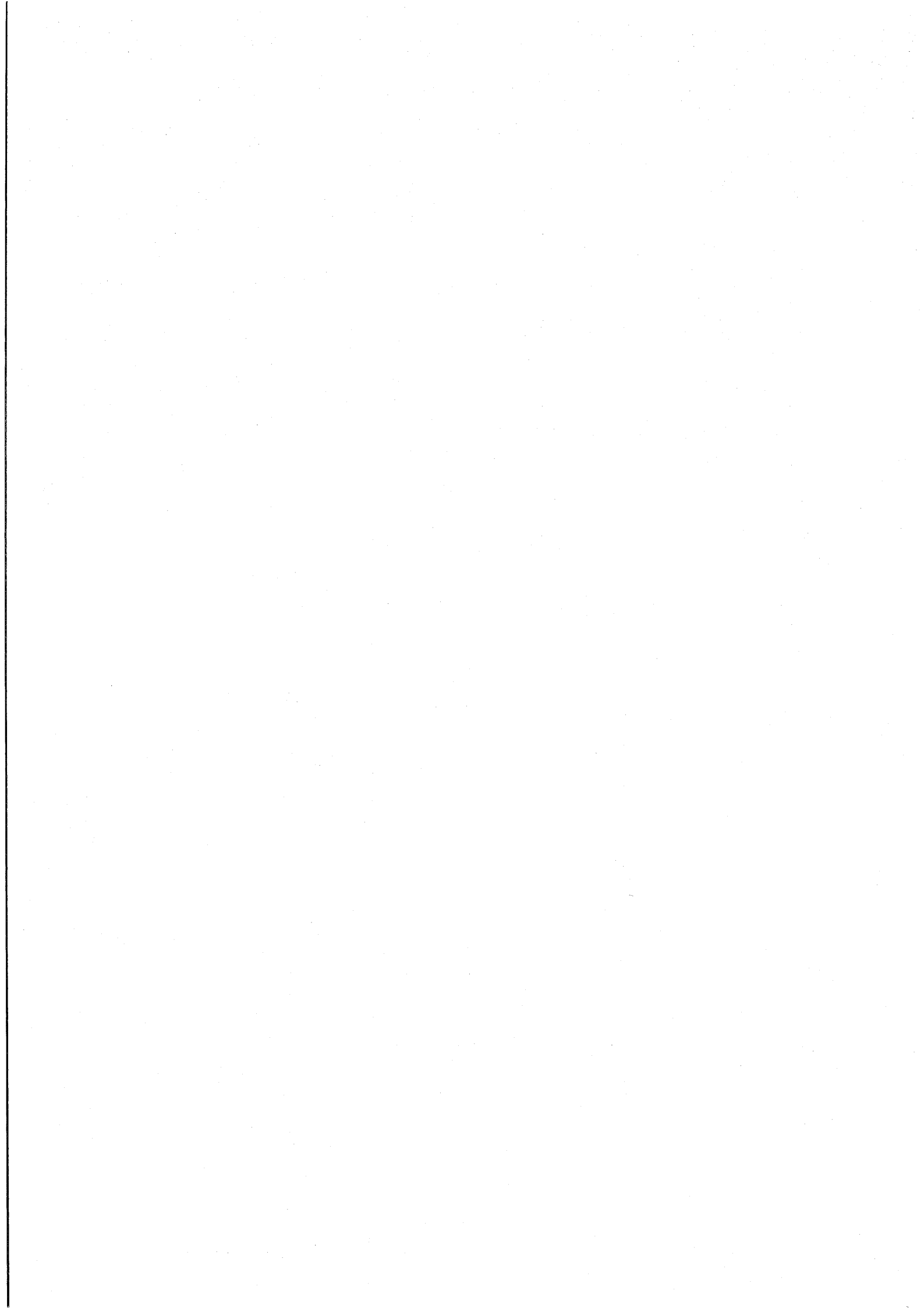
Remarquons une lettre du 4 avril 1865 indiquant la reprise des cours d'astronomie le 23 mai, une lettre du 20 mai 1865 annonçant un voyage de quinze jours à Paris et une lettre du 9 mai 1867 avertissant Quetelet de sa mise à la retraite ou mise en disponibilité.

ANNEXE 16
LISTE DES OEUVRES DE MEYER

Cette liste est dressée à partir des différentes notices biographiques citées en tête de cette annexe. Nous n'avons pas indiqué les oeuvres littéraires.

Le cours de géodésie autographié de 1845 n'a été localisé qu'aux archives du Musée royal de l'Armée à Bruxelles (cote Cl VII 3430).

Il faut ajouter à cette liste le rapport, manuscrit inédit, de 1846 retranscrit à l'annexe 27.



LISTE DES OEUVRES DE MEYER

Articles sur A.Meyer

ARENDR K., *Luxemburger Porträtgalerie*, Tome I, 1904.

BERGMANS C., "Notice sur A.Meyer" in *Biographie Nationale de Belgique*, Tome XIV, col 765-773.

BLUM M., *Biographie Luxembourgeoise*, tome 2, 1902-1908.

ERRERA A. et GODEAUX L., "Les mathématiques en Belgique de 1830-1930" in *Livre d'or du centenaire de l'Indépendance Belge*, 1930 et *Mathesis*, Bruxelles, 1932.

GLODEN A., "La vie et l'oeuvre scientifique de neuf mathématiciens belges d'origine luxembourgeoise", in *Themecht Zeischrift für Luxemburger Geschichte*, 1949.

BÈDE E., "Notice nécrologique de M. Antoine Meyer", in *Annales de l'enseignement public*, tome 1, Verviers, 1857, pp. 360-364

GODEAUX L., *Esquisse d'une histoire des sciences mathématiques en Belgique*, Bruxelles, 1943, pp. 33-34.

LEROY A., "Meyer" in *Liber memorialis de l'Université de Liège*, 1869, col. 438-446.

NEYEN A., *Biographie Luxembourgeoise*, tome 1, 1860.

JONGMANNNS F., "Recrutement, au XIX^{ème} siècle, de mathématiciens étrangers par l'université de Liège", in *Actes du 4e congrès de l'Association des cercles francophones d'histoire et d'archéologie de Belgique*, Liège, 1994

Oeuvres scientifiques de A. MEYER

Il publie des travaux originaux et des ouvrages d'enseignement mathématiques. Plusieurs articles et mémoires paraissent dans les recueils de l'Académie Royale de Belgique, le journal de CRELLE, la Correspondance mathématique et physique de QUETELET, les mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, etc...

1823, cité par Blum et Bergmann *Dissertatio inauguralis mathematica, de maximorum, minirum theoria, exemplis illustrata...* Lux, J. Lamart, imprimé en 1823.

1827, Fragment d'une lettre trouvée à l'ermitage d'Echternach (indiqué par Blum avec la mention "Lux. Scmit-Brück, 1827").

1827, "Instrument pour dessiner la perspective" in *Correspondance mathématique et physique*, p. 210.

- 1830, *De maximis et minimis*, Lux. J. Lamart, in 4°, 15 p. (cité par Blum).
- 1841, *Nouveaux éléments de mathématiques pures*, tome I, Arithmétique, 120 p., in 8° (une première livraison est faite puis abandonnée à cause du changement de ministère; Blum cite la date de 1841, tandis que celle de 1843 est citée dans Jong Hemecht 1928).
- 1843, *Leçons de trigonométrie rectiligne*, détaché de l'ouvrage précédent. (1844 d'après Jong Hemecht; cours donné en 1842 au Dépôt de la Guerre sur la demande du général Joly; Blum cite 1843, 248 p. in 8° avec 2 pl.).
- 1844, *Leçons de trigonométrie sphérique*. (Cours fait au Dépôt de la Guerre pour les officiers d'état-major attachés à la division du général Trumper); 78 p. in 8° avec 1 table.
- 1845, *Cours de Géodésie* professé au Dépôt de la Guerre (sans titre Bruxelles) 134 p. in fol. (autographié).
- 1851, *Exposé élémentaire de la théorie des intégrales définies*, in 8°, 510 p., publié par la Société royale des sciences de Liège (il comble ainsi une lacune dans la science, car c'est le seul traité qui existe sur la matière).
- 1854, *Nouveaux éléments de la Goniométrie*, in 8°, 85 p. Liège.
- 1855, *Manuel d'un cours de calcul différentiel*, in 8°, 440 p. Liège (introduction aux intégrales définies; cet ouvrage est inséparable de celui de 1851; Meyer présente plusieurs théorèmes d'une manière plus simple et plus claire que ses devanciers!)
- 1856, *Nouveaux éléments du calcul des variations*, in 8°, 132 p. Liège.
- 1856, *Démonstration de deux propositions nouvelles sur le calcul des probabilités, précédée de la réfutation des objections formulées contre elle au sein de l'Académie de Belgique*, in 4°, 24 p. Liège. (Bergmann renvoie aux *Annales de l'enseignement public* tome I, p. 154)
- 1857, *Examen critique de la Notice de M. Liagre sur la probabilité de la cause d'une erreur constante dans une série d'observations insérées* dans le tome XXII 2^{ème} partie du Bulletin de l'Académie de Belgique, in 8°, 15p.
- 1857, *Essai sur une exposition nouvelle de la théorie analytique des probabilités a posteriori* (ouvrage posthume signalé par A. Gloden en 1949; Blum en 1902-1908 cite Anvers, 1857, 123 p. in 4°; Bergmann cite Liège, sous presse à la mort de Meyer).
- 1859, *Plan de plusieurs cours donnés par J-F-X Würth et A.Meyer*, Liège, in 8°
- 1860, *Essai sur une exposition naturelle de la théorie analytique des probabilités a priori* (signalé par A. Neyen; les manuscrits seront sans doute publiés par ses amis après sa mort)
- 1874, *Cours de calcul de probabilités fait à l'université de Liège de 1849 à 1857*. Publié sur les manuscrits de l'auteur par F. Folie, Bruxelles, 446 pages in 8°.

1879, *Cours de calcul des probabilités* publié par F. Folie après sa mort.

Il est traduit en allemand et retravaillé par Emmanuel Czuber, publié à Leipzig en 1879 sous le titre *Vorlesung über Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 554 p. in 8°.

Mémoires et Notices

A) dans les Bulletins de l'Académie (1847-1857)

* *Recueil de quelques développements peu connus en analyse combinatoire*, 64 p. et la table in 4° avec 1 planche; (signalé dans Jong Hemecht 1928) (est-ce le même ouvrage que celui de 1838, Bruxelles, intitulé "quelques développements de l'analyse combinatoire"?).

* *Sur la base géodésique que l'on mesure actuellement dans les environs de Bonn*, tome XIV, 2, 1847, p. 14.

* *Théorèmes sur les polyèdres*, tome XV1, 1848, p. 261.

* *Résolution d'un problème sur le calcul des probabilités*, tome XV, 2, 1848, p. 508

* *Note sur quelques intégrales définies*, tome XVI, 1, 1849, p. 334

* *Note sur le Théorème inverse de Bernoulli*, tome XXIII, 1, 1856, p. 97 et 148

* *Plusieurs rapports*

B) dans les Mémoires du même corps savant

* *Mémoire sur deux fonctions irrationnelles particulières*, tome XXI, 1848.

* *Mémoire sur l'application du calcul des probabilités aux opérations de nivellement topographique*, *ibid*, 23 p. in 4°.

* *Mémoire sur le développement en série de quatre fonctions*, *ibid* 23 p. in 4°.

* *Mémoire sur l'intégration de l'équation générale aux différences partielles du même (ou 1°ordre?) ordre d'un nombre quelconque de variables*, tome XXVII, 1853, 24 p. in 4°.

C) des manuscrits inachevés (signalé par A. Neÿen op. cit. p. 458, sans détail).

D) communications à l'Académie royale de Belgique ayant fait l'objet de rapports.

* 7 août 1847, *Mémoire sur une nouvelle exposition complète du Théorème de Taylor.*

* 7 octobre 1848, *Mémoires sur quelques formules nouvelles de la Trigonométrie sphérique.*

* 13 janvier 1849, *Note sur l'intégration des différentielles binomes.*

* 3 mars 1849, *Note sur deux intégrales définies d'Euler.*

* 8 janvier 1850, (cité par Blum seulement) *Mémoire sur les fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles et des séries de quantités périodiques*, 28 p. in 4°.

Bergmann signale ce mémoire dans le journal de Crelle année 1852, tome XLIII, datant d'avril 1850.

* 2 mars 1850, *Note sur l'expression du rayon vecteur d'une planète en série suivant les cosinus des multiples de l'anomalie moyenne.*

* 8 novembre 1851, *Notice sur l'intégration d'un système quelconque d'équations linéaires simultanées à coefficients constants, les seconds membres étant égaux à zéro.*

* 3 novembre 1855, *Mémoire concernant une proposition géodésique énoncée par Liagre.*

* 1 mars, 5 avril, 14 juin 1856, *Démonstration nouvelle d'un théorème de Bernoulli.*

* 27 mars 1856, *Mémoire sur une exposition nouvelle de la théorie des probabilités a posteriori (voir ci-dessus).*

* sans date (cité seulement par Bergmann) *Sur l'héliotrope de Bertram* (avec Quetelet).

E) dans la Correspondance mathématique et physique de Quetelet

* 1826, *Une lettre à M.A. Quetelet sur quelques conséquences déduites du théorème sur le carré de l'hypoténuse.*

* 1829, *Note sur l'élimination d'une inconnue entre deux équations.*

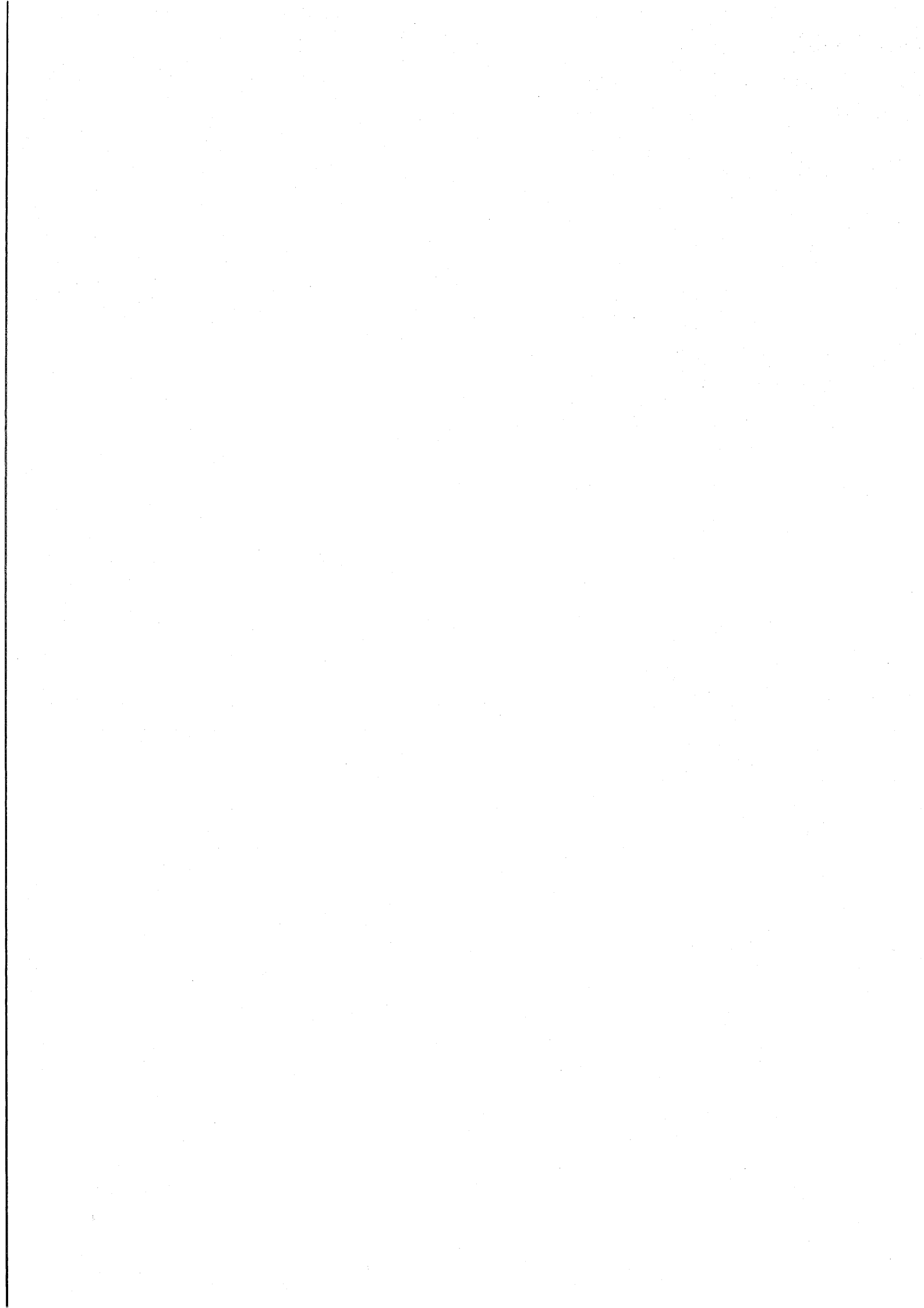
ANNEXE 17

LETTRES DE RENOZ ET CALCULS GEODESIQUES MANUSCRITS DE MEYER FONDS JOLLY CARTONS 8 ET 9

Jolly est directeur du Dépôt de la Guerre belge de 1834 à 1842.

Le fonds Jolly apporte de multiples renseignements sur cette institution. Un catalogue dactylographié datant de 1961 existe, mais il ne permet pas d'éviter un dépouillement systématique de certains cartons.

Ces quelques documents présentés ici témoignent des travaux réalisés par Meyer en tant que calculateur au Dépôt de la Guerre.



LETTRES DE RENOZ (FONDS JOLLY CARTONS 8 ET 9)

carton 8/239

Renoz à Jolly

8 juillet 1839

"Une circonstance indépendante de notre volonté m'empêche de vous envoyer avant demain soir la liste des points du 3^{ème} ordre qui se trouvent aux environs de Maestricht: Le travail du 1^{er} ordre de Tranchot est fait en grades. Il était donc rationnel que les triangles du 2^{ème} ordre fussent aussi calculés en grades. Les en-têtes des angles portent même G^{des}; il ne devait pas nous rester de doutes à cet égard. Mais ayant avant hier voulu faire placer pour votre facilité, ces points sur la carte, il s'est présenté des différences inadmissibles. Nos vérifications nous ayant cependant prouvé que nos calculs étaient justes, ce n'est que par hasard que nous nous sommes aperçus que le travail du 2^{ème} ordre, malgré l'indication G^{des}, était en degrés, ce qui nécessitera une révision générale, que nous espérons avoir terminée pour demain."

carton 8/260

Renoz à Jolly

12 juillet 1839

"Mon colonel, je vous envoie ci-joint le travail que vous m'avez demandé. Je vous assure qu'il nous a coûté des sueurs et des veilles, à cause des perturbations que nous avons trouvées.

La note de Meyer vous prouvera que quoique je puisse répondre de l'exactitude de nos calculs, vous devez avoir peu de confiance dans nos résultats, vu que les données du 2^{ème} ordre de Tranchot paraissent mauvaises. Je ne vous engage donc pas à en faire usage. Quoique nos points ne se rapportent pas dans nos calculs à la position qu'ils ont sur la carte, à cause que c'est un développement, néanmoins ils conservent la distance qu'ils avaient entre eux sur la carte, à deux exceptions près, qui proviennent je pense de mauvaises données."

carton 9/149

Meyer à Jolly

Bruxelles, 2 septembre 1839

"Il est constant que nos points comparés à ceux de la carte du général Van Gorkum sont généralement trop élevés et trop vers la droite (...).

L'anomalie qui existe pour les points Echt et Ophoven, dont j'ai refait le calcul aujourd'hui, est une chose indéchiffrable. Elle provient sans doute de ce qu'il y a deux Ophoven sur la carte, peu éloignés l'un de l'autre, et que l'on ne sait pas précisément lequel de ces deux Ophoven est celui qui figure comme somme de plusieurs angles dans le travail de Tranchot. Aussi, dans ce travail, les angles (sommet à Ophoven) sont tantôt mesurés sur le clocher, tantôt dans un moulin à vent."

carton 9/157

Jolly à Renoz

4 septembre 1839

"(...) Je ne puis vous donner l'ordre de vous rendre à Bruxelles pour aller y calculer vos triangles de concert avec Mr Meyer. Il faut que vous les calculiez là où vous vous trouvez. Vous pourriez cependant envoyer les données à Mr Meyer afin qu'il calcule de son côté. Ce double travail présentera un moyen suffisant de contrôle pour une opération qui, comme celle que nous sommes amenés à faire en ce moment, n'exige pas une exactitude aussi rigoureuse que s'il s'agissait d'une carte générale du pays. La saison est trop avancée pour que l'on s'expose à perdre en voyage un temps précieux ; il faut au contraire profiter de ce qui reste de beaux jours pour pousser vos opérations sur toute la ligne non seulement depuis la frontière de France jusqu'à Martelonge mais depuis ce dernier point jusqu'à la Prusse."

carton 9/161 à 165 Calculs géodésiques de Meyer sur feuilles manuscrites
(reproduites pp. 96-98).

carton 9/198

Jolly à Meyer

Maestricht, 11 septembre 1839

"J'ai l'honneur de vous prier de me faire parvenir la valeur des côtés du triangle Peer-Pommel-Nederneart. Vous voudrez bien faire en sorte que ces données me parviennent par le retour du courrier"

carton 9/211

Renoz à Jolly

15 septembre 1839

"Il est impossible que j'ai exécuté aucun calcul.(...) J'ai fait en 5 semaines 22 stations primaires dont les angles ont été observés par quatre séries, sans compter les stations secondaires, tandis qu'en France on n'exige que 25 stations secondaires par année.

Je rentrais à mon logement n'en pouvant plus et fort peu disposé à travailler à des calculs. (sauf les jours pluvieux).

Si vous jugez convenable que j'exécute ici mes calculs (...) j'ai besoin pour avoir terminé ce travail d'au moins un mois de temps, me trouvant seul pour calculer."

Monsieur le Colonel

J'ai l'honneur de vous annoncer que j'ai remis le matin (5 Sept.) à M^r le Capitaine Desjardis, les renseignements que vous m'avez demandés par votre Dépêche du 3 courant, que j'ai reçue hier soir.

Je sais à cette occasion pour vous faire voir que l'anomalie dans les positions respectives d'Escht et d'Ophoven, ne peut provenir que de fausses données.

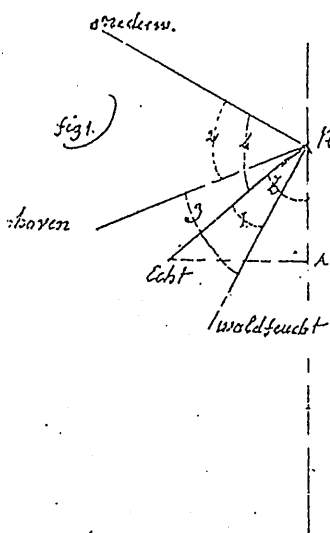


fig. 1) ... Pour le calcul de Escht,
 angle 2 = $63^{\circ} 10' 45'', 2$
 " 3 = $38^{\circ} 45' 55'', 2$
 somme = $101^{\circ} 56' 40'', 4$
 angle 1 = $40^{\circ} 31' 28'', 2$
 Diffé. ou angle 4 = $61^{\circ} 25' 12'', 2$
 Azim. Rurem. Medem = $119^{\circ} 3' 29'', 2$
 Différen. ou α = $57^{\circ} 37' 17'', 0$

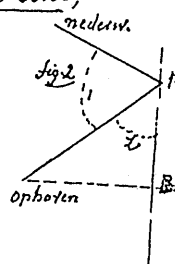


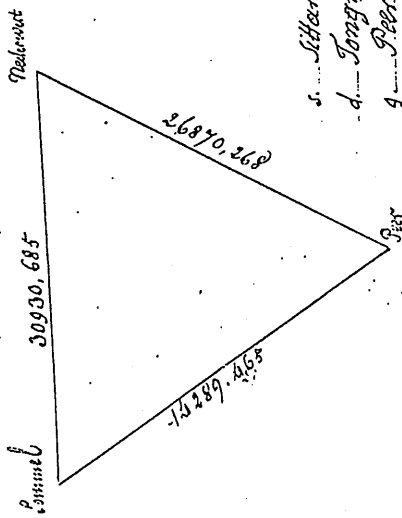
fig. 2) Pour le calcul de Ophoven
 Azim. Rurem. Medem = $119^{\circ} 3' 29'', 2$
 angle 1 = $63^{\circ} 10' 45'', 2$
 Diffé. ou angle 2 = $55^{\circ} 51' 44'', 0$

Or en comparant les deux α , l'on voit que celui de Escht, ou $57^{\circ} 37' 17'', 0$, est plus grand que celui d'Ophoven, ou $55^{\circ} 51' 44'', 0$. Par conséquent, d'après ces données, Escht doit se trouver à gauche de Ophoven, ce qui, d'après la carte, est évidemment faux.

Recevez s'il vous plaît, Monsieur le Colonel, l'assurance de mon profond respect.

Bruxelles le 5 Sept. 1839.

A. Meyer.



s. Sittart dg = 29169,353
 d. Songrad dg = 32806,900
 g. Peer dg = 27349,060

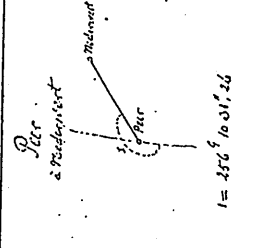
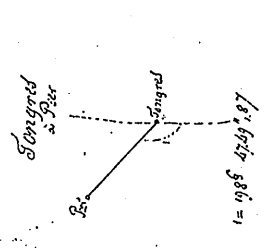
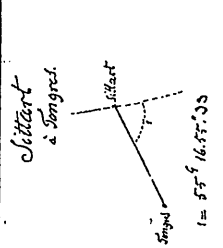
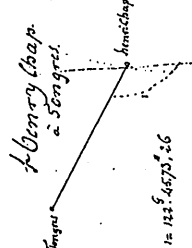
s. Heinrichchappelle dg = 37244,060
 d. Sittart dg = 34261,139
 g. Songrad dg = 36189,453

s. Sittart dg = 26070,268
 d. Peer dg = 33031,783
 g. Nadelort dg = 32806,823

Y
 g. Nadelort dg = 11679,28
 d. Sittart dg = 29956,81
 Songrad dg = 45145,18
 Heinrichchappelle dg = 55800,86

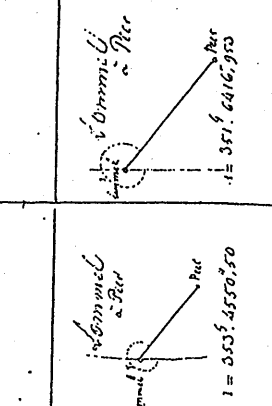
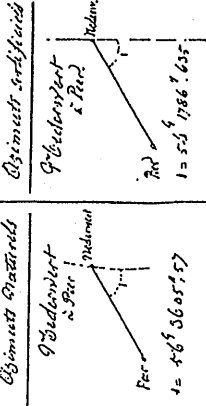
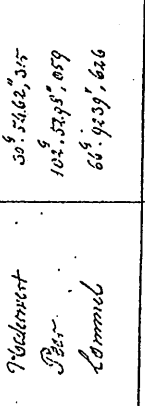
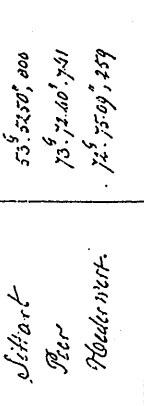
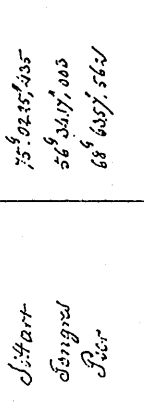
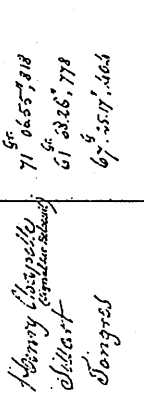
76. B.
 Nous entendons par Azimut
 naturels, ceux formés par les
 méridiens vrais, qui passent
 par les Pôles.
 Les Azimuts sont indiqués
 dans les figures de cette colonne
 par des arcs ponctués, et numé-
 rées par le chiffre 1.

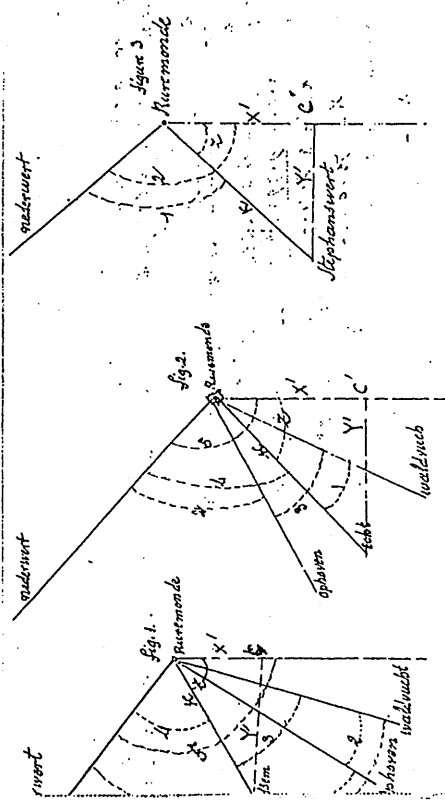
Azimuts naturels



77. B.
 Nous entendons par Azimut
 artificiels, ceux formés par des
 parallèles, au méridien de
 Bruges.
 Les Azimuts sont indiqués
 dans les figures de cette colonne
 par des arcs ponctués, et numé-
 rées par le chiffre 2.

Azimuts artificiels





3: note fig. 3

Le point Strophant est à être calculé par le triangle Strophant-Harmmonide, C, dans lequel x a été pris en retranchant l'angle 1 de l'angle 2. Voici le calcul de ce x et de X et Y, fait avec soin.

Calcul de X		Calcul de Y	
$k = 4.0836653$	$k = 12.124,54$	$k = 4.0836653$	
$\sin z = 9.9924825$		$\sin z = 9.9924825$	
$\angle X' = 3.8761178$		$\angle Y' = 3.9782766$	
$X = 7578,26 -$		$Y = 9572,10 -$	
$X \text{ de Harm} = 2323,22$		$Y \text{ de Harm} = 92861,19 +$	
$X = -5195,04$		$Y = +183529,09$	

1^{re} note sur le Franchot de Franchot. Fig. 1

Coordonnées X' et Y' du point Harmmonide, ont été déterminées par la solution du triangle rectangle que nous construisons en même temps la carte de la Délimitation de Genève et Harmmonide, C. L'angle x de ce triangle a d'abord été déterminé, avec le plus grand soin, par la méthode de la Délimitation complète, savoir: la manière suivante: on a ajouté les angles 1 et 2, fig. 1, ce qui nous a donné l'angle 6; l'angle 6 on a retranché l'angle 3, alors on avait pour reste l'angle 4; enfin on a retranché l'angle 4 de l'angle 5, et on avait x. Voici le calcul:

1 = 63° 10' 45", 2
2 = 38° 45' 55", 0
6 = 101° 56' 40", 2
3 = 68° 49' 12", 4
4 = 41° 7' 37", 8
5 = 119° 2' 29", 2
x = 78° 54' 51", 4

Pendant nous étant aperçu après que l'angle 4 pouvait se prendre directement dans Franchot où il est de 61° 25' 3", nous retranché ce dernier 5, ce qui nous a donné pour x une valeur entièrement différente de la précédente, savoir 57° 37' 25", 7.

2^e Note. Fig. 2

Le point Echot a été calculé par le triangle rectangle Echot-Harmmonide, C'. Pour avoir l'angle x, on a ajouté d'abord les angles 2 et 3, de leur somme on a retranché l'angle 1, ce qui a fait connaître l'angle 4; on a retranché l'angle 4 de l'angle 5 et on avait x. Voici le calcul ainsi que celui des coordonnées.

Calcul de X		Calcul de Y	
$k = 4.1103058$	$k = 12892,46$	$k = 4.1103058$	
$\sin z = 9.9987689$		$\sin z = 9.9987689$	
$\angle X' = 3.8391047$		$\angle Y' = 3.8391047$	
$X = 61° 25' 12", 2$		$X = 6964,06 -$	
$5 = 19° 3' 29", 2$		$X \text{ de Harm} = 2323,22 +$	
$Y = 57° 37' 17", 0$		$Y = -4570,84$	

Si nous comparons maintenant les résultats des deux calculs précédents, et si nous construisons en même temps la carte de la Délimitation de Genève et Harmmonide, nous trouverons une particularité importante, savoir: D'après Franchot l'angle x de Echot est plus grand que le x de Harmmonide; D'après la carte, le contraire a lieu.

1^o D'après Franchot et nos calculs Echot est plus éloigné vers l'Est que Harmmonide; la carte montre le contraire.

2^o D'après Franchot et nos calculs Echot est plus éloigné vers l'Est que Harmmonide; la carte montre le contraire.

3^o D'après Franchot et nos calculs Echot est plus éloigné vers l'Est que Harmmonide; la carte montre le contraire.

Nos calculs se pondant font fait avec une rigueur et une précision à l'abri de toute objection.

ANNEXE 18
LE MONITEUR BELGE
DU 14 JUIN 1847

Ce numéro du *Moniteur Belge* contient le rapport de la commission instituée par arrêté royal du 9 février 1846. Elle avait pour mission "d'examiner les documents géodésiques de la triangulation du royaume, exécutée antérieurement à 1830, et d'arrêter les bases principales et le mode d'exécution du travail complémentaire de celui auquel ces documents appartiennent." (Nous n'avons pas trouvé le supplément annoncé p. 1460)

Ce rapport met bien en valeur les différentes étapes du travail d'un géodésien au XIX^{ème} siècle ainsi que les différents choix auxquels il est confronté (en particulier pour le choix des observations à garder). Le problème du raccord des réseaux est évoqué; la nécessaire collaboration entre les pays est soulignée (par exemple un lien avec Baeyer est établi).



Intérieur.

Bruxelles, le 24 Juin 1847

RAPPORT

De la commission instituée par arrêté royal du 9 février 1846,
à M. le Ministre de la guerre.

M. le Ministre,

La commission instituée par arrêté royal du 9 février 1846 avait pour mission « d'examiner les documents géodésiques de la triangulation du royaume, exécutée antérieurement à 1850, et d'arrêter les bases principales et le mode d'exécution du travail complémentaire de celui auquel ces documents appartiennent. »

Arrivée au terme de ses travaux, elle ne croit pas pouvoir se borner à vous en faire connaître simplement les résultats. La nature toute spéciale de la mission qu'elle avait à remplir exige qu'elle vous rende compte de ses opérations avec quelque développement, ne fût-ce que pour justifier ses conclusions.

Le rapport qu'elle a l'honneur de vous adresser se divise en trois parties : la première est relative à l'objet de la triangulation ; la seconde concerne l'examen des observations ; et la troisième, la vérification des calculs.

PREMIÈRE PARTIE.

Objet de la triangulation.

Depuis un siècle environ, les différentes nations civilisées de l'Europe s'occupent de réunir avec la plus louable émulation des séries de travaux géodésiques. Ces travaux n'ont pas seulement pour objet de rattacher entre eux par une triangulation les principaux points d'un pays, pour en déduire les positions géographiques et les altitudes, mais encore d'arriver à la construction d'une carte exacte qui reproduise les mouvements du terrain jusque dans ses moindres détails. On a parfaitement compris l'utilité dont de pareils documents peuvent être, non-seulement pour la science, mais surtout pour les différentes branches d'administration ; et, pour n'en citer qu'un seul exemple, la Belgique aurait fait une économie considérable de temps et d'argent, si, dans les études nécessaires pour l'établissement de ses chemins de fer, elle avait possédé des éléments topographiques de quelque précision.

La France est entrée la première dans cette voie, par la publication de sa *carte topographique*, à laquelle, dans le dernier siècle, la triangulation de Cassini de Thury a servi de base. Les autres nations se sont empressées de suivre ce bel exemple, et toute l'Europe se trouve actuellement couverte d'un immense réseau de triangles, réseau dans lequel la Belgique seule laisse malheureusement encore une lacune.

Le récit des immenses travaux qui ont été entrepris à ce sujet, et dont la plupart ne sont pas encore achevés, formera l'une des plus belles pages de l'histoire des progrès de l'esprit humain. La France qui avait donné l'exemple aux autres nations et avait produit un travail qu'elles ont, pendant longtemps, suivi comme modèle, la France a jugé qu'elle pouvait faire mieux encore, et, sans reculer devant les énormes dépenses qui devaient en résulter, elle a entrepris en 1818, la *Nouvelle description géométrique* de son territoire.

Pendant que toutes les nations de l'Europe rivalisaient ainsi de zèle et de talent pour améliorer leurs connaissances géodésiques, et que le gouvernement russe étendait sa triangulation jusqu'au fond de la Sibérie, rien ne se faisait, dans les limites de la Belgique, pour suivre cette généreuse impulsion. La carte de Ferraris, satisfaisante, sans doute, pour l'époque où elle fut construite, n'était plus à la hauteur des travaux qui s'exécutaient chez nos voisins ; et pendant que, chez eux, la précision dans la mesure des angles allait jusqu'à la seconde, cette carte consacrait encore des erreurs considérables (1).

Le gouvernement précédent avait senti ce que cet état de choses présentait de fâcheux, et il avait résolu d'y porter remède.

La première opération qu'il s'agissait d'entreprendre était celle

(1) Dans cette carte, d'ailleurs si recommandable, la géodésie n'a pas toute l'exactitude requise ; Perny a trouvé jusqu'à deux degrés d'erreur pour un seul angle. (Vémemorial français du dépôt de la guerre, tome I, page 295.)

d'une triangulation de premier ordre. On sait que ce travail important consiste à lier ensemble les principaux points d'un pays par de grands triangles dont on mesure les angles avec la plus scrupuleuse exactitude. Il devient nécessaire, en outre, de mesurer au moins un côté de cette triangulation, comme aussi de fixer par des observations astronomiques la position de l'un des sommets à la surface du globe.

Ces divers travaux préalables, d'une exécution très-délicate et très-difficile, ont été faits dans les différents pays, conjointement par les astronomes et par les officiers des armes savantes.

Dans la triangulation dont nous avons à rendre compte, un seul officier fut chargé de tous les détails de cette vaste entreprise. Toutefois, pour éviter la mesure de la base ainsi que les observations astronomiques, il alla rattacher la série de ses triangles au côté Mont-Cassel-Hondschoot de la triangulation du général Krayenhoff, et profita ainsi indirectement des déterminations obtenues par les astronomes français, chargés de la mesure de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelone.

Le général Krayenhoff avait suivi une marche analogue, et avait rattaché la triangulation de la Hollande au côté Mont-Cassel-Dunkerque, des triangles de Delambre, en traversant les Flandres et la province d'Anvers. Un autre observateur, le colonel Tranchot, avait également rattaché à la triangulation de France celle des provinces rhénanes, au moyen d'un réseau géodésique qui traversait nos provinces septentrionales.

En adoptant un pareil système, le travail qui nous a été soumis se réduisait donc à la mesure des angles des triangles dont l'ensemble devait couvrir la superficie de la Belgique.

DEUXIÈME PARTIE.

Examen des observations.

Après avoir pris connaissance des documents à examiner, la commission jugea que les plus importants, ceux qui devaient fixer plus particulièrement son attention, comme pouvant exercer une influence prépondérante sur l'appréciation du travail, étaient les registres d'observations. En effet, si les observations étaient jugées bonnes, il importait assez peu que les calculs fussent inexacts, puisqu'il y avait toujours possibilité de les refaire avec toute la précision désirable.

La bonté des observations n'était pas, d'ailleurs, le seul point à examiner : il fallait rechercher encore si le choix des séries, tel qu'il a été arrêté par l'auteur du travail, est basé sur une saine appréciation des circonstances dans lesquelles elles ont été faites. Mais préalablement, la commission dut se former une opinion sur la qualité des registres soumis à son examen. Avait-elle en sa possession des registres-minutes ou seulement des copies ? Aucune pièce dans les archives ne fournit d'éclaircissements sur ce point. Le doute, il est vrai, n'aurait pu porter que sur les registres remis primitivement à la commission, car ceux qui, en dernier lieu, lui ont été envoyés de Hollande sont des copies reconnues.

L'existence, dans les archives, de deux registres cotés G 8, et renseignés sur la liste générale des documents dont la commission a pu disposer (annexe A), lui a permis d'acquiescer à la certitude que, sauf ces deux registres, tous sont des copies.

Cette circonstance connue, il était important de savoir si ces dernières sont la reproduction fidèle des minutes. C'est, malheureusement, ce qui n'a pu avoir lieu que pour le petit nombre d'observations contenues dans les deux registres cotés G 8. Ceux-ci ont donc été collationnés soigneusement avec leurs copies, et de ce travail est résultée l'annexe B, qui montre des différences quelquefois considérables entre des valeurs qui devraient être rigoureusement les mêmes. Il est à remarquer d'ailleurs que dans ces registres-minutes se trouvent de notables altérations de nombres.

Ces irrégularités semblent, aux yeux de la commission, de nature à diminuer le degré de confiance que devraient inspirer des observations aussi importantes.

L'annexe C contient le détail des altérations qui affectent les angles multiples dans les registres-minutes et qui ne peuvent, par ce motif, être justifiées. En effet, chaque angle de cette espèce, lu sur l'instrument après l'observation, est inscrit immédiatement et ne doit être modifié que par une observation nouvelle. La commission reconnaît cependant qu'après les observations, une erreur dans la lecture du nombre des degrés d'un angle peut être constatée, et qu'elle est susceptible de correction ; mais elle pense qu'il n'en saurait être de même des secondes.

L'examen des registres d'observations (minutes ou copies) a fourni, en outre, l'occasion de constater que l'auteur de la triangulation a négligé une précaution essentielle dans la mesure des angles. Les renseignements recueillis par la commission et les notes consi-

guées dans les registres, font connaître que l'instrument employé était un cercle répétiteur de Lenoir, de 16 pouces, muni de quatre verniers, en tout conforme à la description qu'on en trouve dans le traité de géodésie par Puissant. Or, quoique l'observateur eût à sa disposition quatre verniers, il paraît n'en avoir jamais employé qu'un seul. On sait cependant que la différence entre les nombres donnés par le premier vernier et le vernier moyen est souvent assez importante pour qu'il ne soit pas permis de la négliger.

L'usage d'un seul vernier doit avoir nu sensiblement à la précision des résultats fournis par l'instrument.

L'examen des observations a donné lieu à un travail assez étendu que les tableaux de l'annexe D résument en partie, et à de nombreuses remarques, tant sur le choix des séries adoptées par l'auteur de la triangulation que sur les séries elles-mêmes. Dans un grand nombre de cas, les conditions propres à assurer aux observations le degré d'exactitude voulu pour une triangulation de premier ordre, où le moindre écart peut exercer une fâcheuse influence sur la précision des résultats, semblent avoir été méconnues. Elles sont relatives à la stabilité de l'instrument, aux circonstances atmosphériques, à la forme et à la construction des signaux, au nombre et au choix des séries. Nous citerons quelques exemples d'observations faites dans des circonstances défavorables, qui ont néanmoins été employées.

Ainsi à la station de Vollezeele « le moulin est toujours agité; le plancher très-élastique; et à cause de ces circonstances il était très-difficile, sinon impossible d'obtenir de bons résultats. »

À Montaigu « le plancher sur lequel reposait l'instrument était également très-élastique, » et le même inconvénient s'est rencontré en plusieurs autres stations.

À Mont-Kemmel « l'observateur et l'instrument étaient fort exposés au vent. L'angle Mont-Trinité-Courtray n'a pu être obtenu avec précision, et cela, dit l'observateur, pour diverses causes. »

À la station d'Ath, où le plancher avait « une élasticité très-grande et tellement incommode que les observations en étaient entravées, l'ébranlement continu de la flèche occasionné par le vent ou par le branle des cloches, rendait les observations très-pénibles. »

Il est vraisemblable, en outre, qu'elles sont fort peu sûres, si l'on en juge par la remarque suivante relative à deux séries concernant l'angle Audenhoven-Mont-Trinité.

« Mont-Trinité faiblement dessiné; Audenhoven assez visible. Le vent et le son des cloches communiquent à la tour un ébranlement qui met les lunettes et le niveau dans un mouvement continu, ce qui entrave les observations. »

Comment, dans une situation pareille, qui, de l'aveu de l'observateur, s'est prolongée pendant toute la durée de la station, a-t-il été possible d'observer? Et, chose extraordinaire, en aucun autre point du réseau, l'accord des séries n'est plus satisfaisant.

Voici les résultats obtenus à la station d'Ath :

Mont-Trinité-Péruwelz	1 ^{re} série	57° 7' 9"
	2 ^e —	57 7 9
Mont-Trinité-Audenhoven...	1 ^{re} —	87 20 52
	2 ^e —	87 20 32,3
Mons-Rœulx	1 ^{re} —	27 37 45
	2 ^e —	27 37 45
Mons-Lequesnoy	1 ^{re} —	48 43 6
	2 ^e —	48 43 7
Mont-Trinité-Lequesnoy	1 ^{re} —	80 3 19,3
	2 ^e —	80 3 19,3
Mons-Péruwelz	1 ^{re} —	71 59 10,3
	2 ^e —	71 59 9,3
Audenhoven-Vollezeele		46 23 15
Rœulx-Vollezeele		69 31 53,3
Audenhoven-Herfeling	1 ^{re} —	56 24 33
	2 ^e —	56 24 30
Herfeling-Rœulx	1 ^{re} —	59 30 39
	2 ^e —	59 30 39

La commission n'a pu que rejeter la totalité de ces observations.

À Malines, l'observateur, selon ses propres expressions, « est entièrement exposé à une lumière gênante et aveuglante », ce qui ne l'empêche pas de procéder aux observations, mais à la vérité, sans succès. Deux séries relatives à l'angle Duysbourg-Montaigu obtenues sous l'influence de cette lumière aveuglante donnent pour résultats.

69° 2' 57" 2.
69° 1' 38"

Valeurs qui diffèrent de :
1' 19" 2.

Cette différence est si considérable que le rejet des séries devait s'ensuivre infailliblement. Mais l'observateur les maintient en les combinant toutefois avec une troisième série accompagnée de cette note :

« Montaigu dessiné faiblement et d'une manière douteuse; Duysbourg à voir distinctement. »

D'une autre part, un angle observé à la station d'Assche est donné par quatre séries obtenues dans des circonstances identiques, décrites ainsi qu'il suit :

« Les deux objets assez bien dessinés, l'air transparent, calme et soleil. »

Il semblerait donc que chaque série dût donner à très-peu près le même résultat; mais c'est ce qui n'a pas lieu, ainsi qu'on peut en juger par les nombres suivants :

- 86° 44' 5".
- 86° 45' 51" 5.
- 86° 45' 50" 5.
- 86° 44' 2" 5.

Si l'on considère que c'est d'un même point et dans des circonstances identiques, que les quatre séries d'observations ont été faites, on ne peut s'expliquer les différences extraordinaires entre les deux séries intermédiaires et les séries extrêmes. Dans ce cas, le rejet des observations devenait nécessaire, ou du moins, il fallait procéder à de nouvelles séries; et néanmoins, toutes quatre ont été maintenues.

Une circonstance se reproduit fréquemment, au sujet de laquelle le savant auteur de la base du système métrique a fait connaître son opinion : c'est l'identité des résultats de deux séries. On lit à la page 159 du premier volume de l'ouvrage cité :

« Il résulte encore de tout ceci une conséquence remarquable, c'est que l'accord de deux séries ne prouve rien, à moins qu'elles n'aient été faites dans des circonstances qui ne laissent aucun doute, c'est-à-dire quand les deux signaux étaient bien visibles, bien terminés, et dans l'ombre, ou tous deux éclairés sur une face qui se présentait directement à l'observateur. Or, la réunion de ces deux dernières circonstances est infiniment rare. »

Il est vraisemblable que l'auteur de la triangulation ne partageait point cette manière de voir; car, à de rares exceptions près, lorsque deux séries s'accordent, il les adopte à l'exclusion de toutes autres, alors même qu'elles n'ont point été faites dans les meilleures circonstances.

Les tableaux de l'annexe D présentent de nombreux exemples qui confirment cette assertion.

Quelquefois il est tout à fait impossible de s'expliquer les motifs qui ont dirigé le choix des séries. Par exemple, trois séries, faites à la station de Mont-Trinité pour l'angle Carvin-Mont-Kemmel, donnent les résultats suivants :

- 47° 48' 4"
- 47° 48' 2"
- 47° 48' 6"

À la première, « les deux objets sont faiblement dessinés, nébuleux, avec une faible lumière de soleil. »

À la seconde, « les deux objets sont éclairés de côté et de plus faiblement dessinés. »

À la troisième, « les deux objets sont faiblement dessinés et éclairés de côté. »

Dans ces circonstances, l'auteur adopte exclusivement la troisième série, quoiqu'aucune raison, en apparence du moins, ne justifie le rejet de la seconde.

L'angle Samré-Weris, observé de la station de Tailles, donne lieu également à trois séries, dont les résultats sont :

- 48° 43' 7".
- 48° 43' 6".
- 48° 43' 5".

dans les circonstances suivantes :

Première série. « Les signaux faiblement marqués : éclairément variable, air calme. »

Deuxième série. « Les deux signaux sont très-clairement marqués. »

Troisième série. « Le signal Weris peu distinct; Samré, très-distinct. »

L'observateur accorde la préférence à la première série, quoique les circonstances les plus favorables appartiennent à la seconde.

La commission reconnaît toutefois, que des raisons particulières peuvent déterminer un observateur habile à préférer une série à une autre en dépit de circonstances un peu moins favorables; mais alors ces raisons doivent être produites.

Il est à remarquer que dans tout le cours du travail il ne se présente pas un seul exemple de réduction à l'axe du signal; bien que l'observateur se soit trouvé dans le cas de devoir en faire.

A Hautfays, l'observation de l'angle Menil-Saint-Blaise-Poussel donne lieu à cette remarque :

« Air calme et transparent, les signaux distincts. Le plancher trop élastique et le signal de Poussel trop large pour cette distance. »

Le signal de Poussel se terminait carrément comme ceux de Mont-Kemmel, Andehoven, Avernas, Jalhey, Wane, Saint-Hubert, Henri-Chapelle, Bourscheid, Noville, Hamipré et Hierreberg. L'insuffisance des renseignements sur chacun d'eux ne permet pas de savoir quelles en étaient les dimensions horizontales vers l'extrémité; mais en les supposant terminés par quatre faces rectangulaires de deux mètres environ de côté dans le sens horizontal, un exemple puisé dans le premier volume de la Base du système métrique (1), prouve que la correction due à la phase du signal aurait pu s'élever, dans ce cas, à 5", 6. Dire que le signal de Poussel était trop large pour la distance à laquelle on s'en trouvait éloigné, ou, comme dans un autre circonstance, à la station de Bouillon, que « le signal de Poussel était trop large pour pouvoir pointer juste, » c'est avouer que la réduction à l'axe du signal n'a pas été appliquée. Et, en effet, les cahiers des calculs ne font aucune mention de réductions de cette espèce.

— Nous ne pouvons, sans sortir des limites d'un rapport, signaler ici toutes les observations faites dans des circonstances défavorables. Pour citer encore quelques exemples, on lit dans l'annexe D, à la station de Stoumont : « L'agitation de l'instrument, causée par le vent, rend les observations très-incertaines. »

« A Jalhey, « le vrai signal de Henri-Chapelle a été dérobé, la base en est restée; mais elle est très-difficile à distinguer du toit de la maison de Belœil; ce qui reste du signal de Henri-Chapelle est faible et non distinct. »

« A Hautfays, « le plancher est trop élastique pour faire de bonnes observations. »

« A Bouilloz, « Le vent imprime des secousses violentes au signal observatoire. »

« A Poussel, « le signal Noirtrou est trop petit et donne du jeu à la croisée des fils. »

« A Peer, « les observations de Sittard sont très-incertaines à cause d'un objet interposé dans cette direction. »

On conçoit difficilement que des observations aient pu être faites dans de pareilles conditions et conservées dans les calculs; cependant si on examine les tours d'horizon formés par l'observateur, on les trouve généralement très-bons, meilleurs même, dans beaucoup de cas, que ceux obtenus par Delambre et Mechain dans les opérations de la méridienne, et infiniment supérieurs aux tours d'horizon de plusieurs autres travaux très-recommandables quoique moins connus.

L'annexe E se compose de quelques tableaux destinés à fournir la preuve de cette assertion.

Cette particularité s'expliquerait-elle par l'altération des registres-minutes et les discordances entre ceux-ci et leurs copies? C'est ce que la commission n'a pas été à même de constater faute d'avoir eu en sa possession la totalité des registres-minutes. Il est bien vrai que les calculs de réduction faits par l'observateur ne sont pas irréprochables ainsi qu'on le verra plus loin, et qu'en les rectifiant on en change un peu les résultats.

Les opérations géodésiques de premier ordre exigent les plus minutieuses précautions et on ne saurait apporter trop de soin à n'en omettre aucune. Dans tous les pays où la science géodésique est cultivée, et ces pays sont nombreux aujourd'hui, des instructions détaillées dirigent les travaux de cette espèce. Elles prescrivent les mesures les plus propres à prémunir l'observateur contre les causes d'inexactitudes toujours nombreuses; elles traient la meilleure marche à suivre et des règles consacrées par l'expérience; la reconnaissance et le choix des stations, la forme et la construction des signaux, le mode à suivre dans les observations, y sont l'objet de prescriptions nombreuses.

Rien de semblable ne se rencontre dans le travail soumis à l'examen de la commission. L'observateur, abandonné à lui-même, opère suivant ses vues particulières ou tout au plus suivant des instructions verbales. C'est du moins ce qui semble résulter d'une pièce jointe aux archives (carton n° 6 G). On y lit :

« Il est ordonné à M. le capitaine ... et à M. le lieutenant du génie ... de faire incessamment le projet de la triangulation primaire sur les provinces belgiques, en conséquence des instructions verbales qu'ils ont reçues à ce sujet. »

(1) Page 26.

Cette pièce, datée du 8 octobre 1814; est signée Krayenhoff. On voit, d'ailleurs, par quelques fragments de correspondance, que l'observateur avait toute liberté.

L'absence de direction se fait sentir en toute occasion. Si l'on examine la carte des triangles, il est facile, à en juger par certaines directions observées qui ne font partie d'aucun triangle, que, contrairement à l'ordre rapporté ci-dessus, aucune reconnaissance n'ait été faite en vue d'arrêter le choix des stations. Ce n'est pas que les triangles soient généralement mal conformés; sous ce rapport, au contraire, il y a peu à reprendre; mais en procédant comme on l'a fait, des lacunes subsistent dans le réseau qu'il serait peut-être fort difficile de combler, si on voulait rattacher les uns aux autres par de bons triangles les côtés qui les circonscrivent.

La construction des signaux, particulièrement celle des signaux appelés observatoires, dont la grande élévation, dans beaucoup de cas, semble avoir été négligée par l'état des lieux, n'était pas de nature à procurer une stabilité suffisante à l'instrument.

Dans les observations des distances zéniithales, plusieurs séries comprennent jusqu'à 20 répétitions et plus. Or, il est reconnu qu'un grand nombre de répétitions, avantageux dans certains cas, peut quelquefois devenir nuisible dans l'observation des distances au zéniith, à cause des variations fréquentes et rapides de la réfraction terrestre. Il est difficile de s'expliquer le motif qui a porté l'observateur à procéder ainsi pour quelques distances zéniithales, lorsque la plupart du temps, par un excès contraire, il se borne à deux répétitions, ce qui est trop peu.

Relativement aux angles de position, la commission a pu reconnaître que le nombre des séries pour un même angle est généralement insuffisant; dans plusieurs stations, l'angle définitif résulte de deux séries. D'une autre part, certains angles de direction, déduits d'un premier angle observé, sont fantais.

La commission aurait pu se borner, peut-être, à constater les faits rapportés dans l'exposé qui précède et conclure au rejet du travail soumis à son examen. Mais elle a voulu prévenir une objection qui, à raison de ces faits mêmes, serait plus spécieuse que fondée.

Les observations, pourrait-on dire, conduisent à de fort beaux résultats; les tours d'horizon sont généralement très-satisfaisants, la somme des trois angles de chaque triangle ne l'est pas moins, et l'accord entre certains côtés du réseau et ceux des triangulations contiguës, faites antérieurement par d'autres observateurs, est dans un grand nombre de cas, aussi parfait que possible.

Tout cet accord n'est qu'apparent, et les raisons qu'on pourrait faire valoir en sa faveur perdent leur force par le seul fait de l'altération des registres-minutes et des discordances entre ceux-ci et leurs copies, surtout si l'on considère que les calculs manquent d'exactitude en plusieurs points et qu'un choix plus rationnel des séries donnerait des résultats essentiellement différents.

Quoi qu'il en puisse être, la commission a voulu apprécier l'exactitude des calculs faits par l'auteur de la triangulation, autant pour être en mesure de répondre à l'objection qu'elle prévoit, que pour satisfaire pleinement aux dispositions de l'arrêté du 9 février 1816.

Elle a donc examiné aussi les calculs, ou plutôt elle les a refaits.

Une remarque relative aux tableaux de l'annexe D terminera cette première partie du rapport. Ces tableaux renferment une colonne intitulée: *Décisions de la commission*, dans laquelle on rencontre assez fréquemment ces mots: *la commission adopte telles séries*. En s'exprimant ainsi, la commission n'a pas entendu reconnaître la bonté des observations auxquelles elle accorde la préférence, elle a seulement voulu montrer comment elle aurait agi si elle s'était trouvée dans le cas de devoir faire usage des résultats obtenus par l'auteur de la triangulation.

TROISIÈME PARTIE.

Examen et vérification des calculs.

Des méthodes de calculs.

Les méthodes de calcul employées par l'auteur de la triangulation sont celles dont le général Krayenhoff a fait usage, et qu'il a exposées dans *Précis historique des opérations géodésiques et astronomiques faites en Hollande* (La Haye, 1815). Elles diffèrent très-peu des méthodes employées et décrites par Delambre dans le premier volume de la Base du système métrique. Les formules de réduction sont :

Pour la réduction au centre :

$$C = O + \frac{r \sin(\alpha + \nu)}{D \sin^2 \alpha} - \frac{r \sin \nu}{G \sin^2 \alpha}$$

Pour la réduction à l'horizon :

$$x = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (H+h) \tan^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 \frac{1}{2} (H-h) \cot^2 \frac{1}{2} A}{\cos H \cos h \sin^2 \alpha} \quad (1);$$

(1) Base du système métrique, tome I, page 141.

Pour la réduction aux cordes:

$$y = -\sin^2 \frac{1}{2} (a+b) \operatorname{tang} \frac{1}{2} (A+x) + \sin^2 \frac{1}{2} (a-b) \operatorname{cot} \frac{1}{2} (A+x) (1).$$

Des tables, rapportées dans le premier volume de la Base du système métrique et le Traité de géodésie par Puissant, servent aux applications numériques des deux dernières formules. Les triangles, au nombre de cinquante-quatre, sont calculés par le théorème de Legendre.

Les calculs de réduction sont contenus dans des cahiers qui comprennent, chacun, la totalité des angles observés à une même station. Chaque cahier est terminé par un dispositif tiré du Précis historique, ayant pour titre : *Logarithmes des sinus des angles inverses*, et dont il n'est pas inutile d'expliquer l'objet.

On démontre, dans l'ouvrage cité (page 53), que lorsque des triangles plans ou sphériques ont un sommet commun, les bases opposées à ce sommet forment un polygone, les produits des sinus des angles inverses sont égaux.

Cette propriété fournit donc un excellent moyen de vérification, pour les angles observés, inverses. C'est l'emploi de ce moyen qui donne lieu, dans chaque cahier, au dispositif en question. Mais l'auteur du Précis n'a pas employé la propriété des angles inverses seulement comme moyen de vérification, il l'a fait servir, en outre, de moyen de correction, ainsi qu'il est expliqué dans le passage suivant extrait de son ouvrage :

« Pour faire disparaître ces différences grandes ou petites (il s'agit des différences entre les valeurs de mêmes côtés), j'ai dû entreprendre un second calcul dont voici les principes :

« J'ai fait à chaque tour d'horizon l'addition des logarithmes des sinus des angles inverses ou opposés des triangles, dont il est composé, ayant leurs sommets au centre de la station; les sommes de ces deux séries de logarithmes doivent nécessairement être égales, et ce qui diffère doit être considéré comme erreur.

« J'ai traité de même plusieurs tours d'horizon à la fois qui étaient en rapport plus ou moins éloignés entre eux, et après avoir reconnu ces différences des logarithmes des sinus des angles inverses de tous les triangles qui les composent, j'ai de nouveau consulté mes registres pour examiner s'il y avait moyen de faire disparaître ces irrégularités en substituant aux observations sur lesquelles j'avais basé mon premier calcul, d'autres qui fussent plus d'accord entre elles, et qui m'a souvent réussi.

La commission ne peut approuver l'emploi de cette méthode, dont l'existence n'est nullement démontrée, et la substitution d'autres observations à celles qu'on avait adoptées d'abord, lui semble contraire aux vrais principes de la géodésie.

Le choix des observations une fois arrêté doit être maintenu invariablement, et on ne peut le modifier par la raison que certains angles satisfont mieux que d'autres aux conditions géométriques du canevas. Au reste, on n'insiste ici sur le moyen de correction employé par le général Krayenloff, que parce qu'il semble avoir été employé également par l'auteur de la triangulation.

Ren dans les documents n'indique le procédé par lequel on a valué les distances D et G comprises dans les éléments de la réduction au centre. Les nombres qui les expriment diffèrent quelquefois de 50, 60, 100 mètres et plus des valeurs qui leur sont assignées dans le calcul définitif des triangles.

Vérification des calculs. — Calculs de réductions.

Le but de la commission, en vérifiant les calculs, a été principalement de savoir si le réseau géodésique, composé des cinquante-quatre triangles calculés, dérive rigoureusement des observations les qu'on les trouve consignées dans les archives.

On a jugé par les conséquences déduites de la vérification de ces calculs faite par deux membres de la commission.

Dans la marche qu'ils ont cru devoir suivre, et qui a reçu l'approbation de la commission, ils s'assuraient d'abord, pour chaque série, de l'exactitude de l'angle simple déduit du dernier angle multiple observé. Chacun d'eux faisait séparément cette vérification pour les angles de position comme pour les distances zénithales.

Les distances au centre inscrites dans les cahiers d'observations dans les cahiers de calculs étaient collationnées avec soin, et lorsqu'il se trouvait quelque différence on adoptait pour vraies valeurs les des cahiers d'observations. Les angles de direction observés furent vérifiés de même; les angles de cette espèce déduits étaient liés par chaque calculateur. Enfin pour vérifier les valeurs des distances D et G, inscrits seulement dans les cahiers de calculs,

) Base du système métrique, tome I, page 166.

on les comparait avec celles que le calcul définitif des triangles, compris dans les archives, leur assigne; et lorsque des différences trop considérables ne permettaient pas d'adopter les premières, on leur substituait les secondes.

Toutes les données des calculs de réductions ainsi vérifiées, étaient alors inscrites, séparément par chaque calculateur, dans des tableaux en double. (1) et (2), (annexes F, G, H, I); puis collationnées. Ces précautions prises, les calculateurs procédaient, chacun de leur côté, aux calculs: ils comparaient ensuite leurs résultats, et s'ils ne différaient au plus que de 0,005, ils les admettaient comme exacts, en les inscrivant à l'encre, dans les tableaux, au fur et à mesure qu'ils étaient énoncés; dans le cas contraire, ils recherchaient les causes des différences qui, ne pouvant être attribuées qu'à des erreurs commises par eux, disparaissaient du moment où les calculs fautifs étaient rectifiés.

Pour le calcul des réductions au centre et à l'horizon, on a fait usage des formules connues.

$$C = 0 + \frac{r \sin (\alpha + \gamma)}{D \sin 1''} - \frac{r \sin \gamma}{G \sin 1''}$$

$$\text{Red.} = \frac{1}{2} \sin 1'' \left\{ [180^\circ (\alpha + \gamma)^2] \operatorname{tang} \frac{1}{2} C - (\alpha - \gamma)^2 \operatorname{cot} \frac{1}{2} C \right\}$$

Afin d'établir une comparaison facile entre les résultats de la vérification et ceux des cahiers, on a réuni les uns et les autres dans un tableau (3) (annexe K).

La 5^e colonne de ce tableau donne les différences entre les deux calculs de vérification, et la 6^e les différences entre les résultats de l'un de ces calculs et ceux des archives.

De ces deux colonnes, la première ne contient aucune valeur, sauf pour un tour d'horizon, qui excède 0'' 004; la seconde, au contraire, en présente d'assez considérables. N'ayant égard qu'à celles de ces différences qui excèdent une seconde, on en a fait un relevé dans le tableau (4) (annexe L), qui montre : 1^o que, sur 208 angles réduits par l'auteur du travail, 21 sont fautifs; 2^o que les erreurs sont comprises, savoir :

Pour 7 angles entre 1" et 2"			
1	—	3	— 5
1	—	5	— 4
2	—	4	— 5
1	—	5	— 6
1	—	9	— 10
2	—	11	— 12

3^o Enfin que la plupart des erreurs sont dues à des fautes de calcul.

En ne considérant que les angles des 54 triangles calculés, la commission y a constaté d'importantes omissions. Les cahiers d'observations manquent pour les stations de Hondschout, Mont-Cassel, Duysbourg, Gelders, Ekeleas, Obey, Samré et Neurburg; et, en outre, les cahiers mis à la disposition de la commission présentent les lacunes suivantes :

A la station de Mont-Lencus...	Mont-Trinité-Ath.
» d'Ath.....	Ath-Audenhoven.
» de Vollezele.....	Mont-Trinité-Mont-Lencus.
» d'Assche.....	Mont-Lencus-Audenhoven.
» de Bertrée.....	Assche-Duysbourg.
» de Tongres.....	Vollezele-Duysbourg.
» de Henri-Chapelle.	Duysbourg-Montaigu et la distance zénithale de Obey.
	Bertrée-Vierset.
	Vierset-Beaufays.
	Stoumont - Jalhay et la distance zénithale de Sittard.

Sur 162 angles compris dans les 54 triangles, 23 manquent : c'est environ le sixième.

Pour certains de ces angles, on trouve les séries qui s'y rapportent, mais le choix n'en ayant pas été arrêté par l'auteur, les calculs de réductions ne figurent point dans les cahiers.

Ces angles sont :

A la station d'Audenhoven...	Assche-Gand.
» de Bertrée.....	Mont-Lencus-Gand.
» de Sittard.....	Ath-Mont-Lencus.
» de Henri-Chapelle.	Ath-Vollezele.
	Vollezele-Assche.
	Tongres-Montaigu.
	Tongres-Vierset.
	Erkeleas-Nederwert.
	Nederwert-Peer.
	Peer-Tongres.
	Tongres-Henri-Chapelle.
	Tongres-Beaufays.
	Beaufays-Stoumont.

Afin de pouvoir vérifier le calcul du plus grand nombre des triangles, il a fallu faire, pour chacun de ces angles, un choix parmi les séries. La commission, en y procédant, s'est imposé de suivre, autant que possible, les errements habituels de l'observateur, dans le but de prévenir des discordances entre ses résultats et ceux de ce dernier. Elle croit devoir entrer dans quelques détails sur la marche qui a été suivie.

Le cahier F¹¹ (station d'Andenhoven) contient onze séries :
 2 — pour l'angle Assche-Gand.
 2 — Gand-Mont-Lenclus.
 2 — Assche-Vollezeele.
 2 — Ath-Vollezeele.
 2 — Ath-Lenclus.

Assche-Gand; deux séries :
 84° 29' 22" 5.
 84° 26' 21" 5.

« Les deux signaux faiblement dessinés et éclairés de côté. La tour de Gand se fait voir d'une manière très-irrégulière. L'horizon calme mais couvert. Le point de station de l'observateur est gênant. »

Dans ces circonstances, il a paru naturel d'adopter la moyenne des deux séries,

84° 26' 22"
 Gand-Mont-Lenclus, trois séries.
 100° 24' 22" 5.
 100° 24' 26" 5.
 100° 24' 21" 5.

Pour les deux premières, les circonstances sont exactement les mêmes que précédemment. La troisième est accompagnée de cette note :

« Air brumeux, temps variable. La maison de Mont-Lenclus faiblement dessinée. La tour de Gand douteuse. »

Cette dernière circonstance aurait déterminé le rejet de la troisième série. La commission l'a néanmoins conservée pour se conformer à la manière habituelle de procéder de l'auteur, qui donne la préférence aux séries dont les résultats s'accordent le mieux. Elle a donc pris pour valeur de l'angle la moyenne des première et troisième séries, savoir :

100° 24' 22"
 Assche-Vollezeele; deux séries :
 41° 10' 50"
 41° 10' 29"

Première série. « Assche faiblement dessiné.

« Le sommet du moulin de Vollezeele se montre bien. Le soleil alternativement couvert de nuages. »

Deuxième série. « Assche très-bien dessiné. Le moulin de Vollezeele se montre moins clairement qu'à la série n° 5. Soleil plus clair. »
 La commission a pris la moyenne des deux séries ;
 41° 10' 29" 5.

Ath-Vollezeele; deux séries :
 69° 18' 56"
 69° 18' 55"

Première série. « Ath se voit mal. Le moulin de Vollezeele se voit assez bien. Le soleil alternativement couvert. »

Deuxième série. « Les deux signaux sont mal dessinés. »
 La commission s'est arrêtée à la moyenne des deux séries :
 69° 18' 55" 5.

Ath-Mont-Lenclus; deux séries :
 64° 40' 28" 5
 64° 40' 50"

« Les deux signaux sont faiblement dessinés, surtout la chapelle de Mont-Lenclus. Brouillard, Soleil clair. »

La commission a adopté :
 64° 40' 29" 23,

moyenne des deux séries.

Après avoir réduit au centre et à l'horizon les cinq angles de cette station, arrêtés conformément aux explications précédentes, on a trouvé pour le tour d'horizon :

559° 59' 798.

Il est donc présumable que le choix des observations a été bien fait, ou du moins qu'il remplit les conditions que s'est imposées l'observateur ;

Station d'Avernas. — Tongres-Vierset; trois séries :
 74° 18' 24" 00.
 74° 18' 50" 00.
 74° 18' 23" 50.

Première série. « Soleil variable, on voit à peine les deux tours. »

Deuxième série. « Vent, soleil variable; la tour de Vierset faible et entourée de nuages. »

Troisième série. « La tour de Vierset faiblement dessinée; Tongres éclairé de côté. »

La circonstance que les deux tours étaient à peine visibles aurait déterminé le rejet de la première série; mais la commission, d'après les motifs allégués plus haut, l'a maintenue, parce qu'elle s'accorde à 1" 5 près avec la troisième; en conséquence, elle a pris la moyenne des trois séries, savoir :

74° 18' 26" 5.

Tongres-Montaigu; trois séries :

84° 00' 50" 625.
 84° 00' 56" 500.
 84° 00' 51" 000.

Première série. « Tongres se voit bien. Montaigu, de plus en plus entouré de brouillard, devient invisible à la seizième observation. »

Deuxième série. « Montaigu entouré de nuages. Tongres éclairé de côté; l'air agité. »

Troisième série. — « Les deux signaux se voient clairement. L'air couvert de nuages. »

Eu égard aux circonstances favorables dans lesquelles la dernière série a été faite, celle-ci a été adoptée par la commission à l'exclusion des deux autres.

Station de Sittard. — Erkelens-Nederweert; quatre séries :

88° 27' 00"
 88° 27' 00"
 88° 26' 54"
 88° 26' 55" 6.

Première série. — « Le temps est brumeux; les objets se distinguent faiblement; Erkelens est éclairé un peu de côté. »

Deuxième série. — « Le temps est un peu plus clair. On distingue bien les objets. »

Troisième série. — « Brouillard et vent. La tour d'Erkelens est éclairée obliquement; celle de Nederweert devient par moment invisible. »

Quatrième série. — « Le mauvais temps ne permet pas de continuer les observations au delà de la 14. Les objets se dessinent faiblement. »

A raison de ces circonstances, la seconde série seule a été adoptée par la commission.

Nederweert-Peer; trois séries :

48° 10' 22" 5.
 48° 10' 25" 5.
 48° 10' 21" 0.

Première série. — « La tour de Nederweert se dessine clairement; celle de Peer se distingue faiblement; temps calme. »

Deuxième série. — « Comme ci-dessus. »

Troisième série. — « Vent, brouillard et soleil. La tour de Nederweert était éclairée en face; celle de Peer obliquement. On distingue faiblement les deux objets. »

La moyenne des trois séries a été prise par la commission.

48° 10' 22" 553.

Peer-Tongres; trois séries :

67° 51' 10" 5.
 67° 51' 10" 5.
 67° 51' 4" 5.

Première série. — « Tongres se distingue faiblement. Peer est peu visible; l'observation de ce point est difficile et incertaine, à cause d'une autre tour qui se trouve placée dans la même direction. »

Deuxième série. — « Comme ci-dessus. »

Troisième série. — « La tour de Tongres est éclairée par derrière et très-visible; celle de Peer se distingue faiblement. »

Malgré l'accord des deux premières séries, il a paru que l'incertitude signalée dans la remarque qui s'y rapporte, ne permettait pas de les adopter. En conséquence, la commission a donné la préférence à la troisième.

Tongres-Henri-Chapelle; trois séries :

86° 49' 27"
 86° 49' 25" 5.
 86° 49' 24"

Première série. « Temps brumeux. La tour de Tongres se dessine très-faiblement. »

Deuxième série. « Le brouillard se dissipe un peu. Les points de mire sont très-visibles. »

Troisième série. « La tour de Tongres est éclairée par derrière, et très-visible. Henri-Chapelle se dessine faiblement. Soleil. »

La commission a pris la moyenne des trois :

56° 49' 25" 5.

Erkelens-Henri-Chapelle; trois séries :

99° 2' 16" 5.

99° 2' 15" 0.

99° 2' 22" 5.

Première série. « Brouillard, lumière ordinaire; les deux objets sont assez visibles; temps calme. »

Deuxième série. « Comme ci-dessus. »

Troisième série. « Le signal de Henri-Chapelle est éclairé obliquement; la tour d'Erkelens l'est en face et se dessine très-faiblement. »

La commission a adopté la moyenne des deux premières séries :

99° 2' 15" 75.

Station de Henri-Chapelle. — Beaufays-Stoumont; trois séries :

41° 25' 6"

41° 25' 5"

41° 25' 6"

Première série. « Beaufays très-distinctement dessiné. Le signal de Stoumont faible avec soleil et grand vent. »

Deuxième série. « Beaufays assez mal dessiné. Le signal de Stoumont, pas très-distinct, devient peu à peu plus faible, et après la 10^e observation tout à fait enveloppé de brouillards et invisible. »

Troisième série. « Beaufays très-distinct et nettement dessiné; éclairé par derrière; le signal de Stoumont moins distinct, cependant bien visible; soleil et grand vent. »

La commission a adopté :

41° 25' 6",

valeur donnée par la première et la troisième série.

Tongres-Beaufays; trois séries :

53° 25' 45"

53° 25' 44"

53° 25' 44"

Première série. « Beaufays se dessine fortement et se trouve éclairé par derrière. Tongres disparaît de plus en plus et se trouve entièrement enveloppé dans les brouillards vers la fin des observations. »

Deuxième série. « Beaufays assez visible. Tongres est moins visible et se trouve entièrement enveloppé dans les brouillards à la dixième observation. »

Troisième série. « Au commencement des observations on distingue assez bien Tongres; mais vers la fin ce point est à peine visible. Beaufays se dessine clairement. Temps calme et couvert. »

La commission adopte la moyenne des trois séries en tenant compte du nombre d'observations par série.

Tongres-Sittard; trois séries :

63° 57' 45"

63° 57' 40" 5

63° 57' 59"

Première série. « Les deux signaux se dessinent très-faiblement. A la seizième observation, ils se trouvent entièrement enveloppés dans les brouillards. »

Deuxième série. « Tongres est très-visible. On distingue faiblement Sittard. Les lunettes et le niveau sont constamment en mouvement par le vent violent et le peu de stabilité du plancher. La position de l'observateur est gênée. »

Troisième série. « Mêmes observations que ci-dessus. On distingue même plus faiblement Sittard. »

Des circonstances si défavorables auraient dû faire rejeter les trois séries. Faute de mieux, la commission s'est trouvée dans la nécessité de les adopter. Elle en a pris la moyenne :

63° 57' 40" 853

CALCUL DES TRIANGLES.

Vérification du calcul des triangles.

Les triangles calculés par l'auteur du travail, au nombre de 54, forment deux chaînes. La première, composée de 21 triangles, numérotés de 1 à 21, s'étend de l'ouest à l'est et longe la triangulation du général Krayenhoff. Elle a pour base de départ le côté Mont-Cassel-Hondschoot, dont la valeur, 21,415^m274, est tirée du précis historique.

La seconde, longeant la première, s'appuie par le triangle n° 22 sur le côté Courtray-Mont-Trinité du triangle n° 4, et comprend les 33 triangles restants, dont la succession et l'enchaînement sont indiqués, sur la carte des triangles (annexe P); par les numéros d'ordre de 22 à 54.

En se proposant de calculer de nouveau ces deux chaînes, la commission avait espéré que les documents fournis, en dernier lieu, par le gouvernement hollandais, combleraient les lacunes dont l'existence avait été signalée dans les archives qui lui ont été remises, à sa première séance; mais cet espoir ne s'est pas réalisé. Les nouveaux documents en faisant disparaître quelques vides en ont laissé subsister qui s'opposent à ce que la totalité des triangles puisse être soumise à un calcul de vérification basé sur les observations. Cette circonstance est infiniment regrettable. Sur 54 triangles calculés par l'auteur, il n'en est que 53 pour lesquels les observations soient complètes. Les 21 autres comprennent 14 triangles dont deux angles par triangle sont observés et pour chacun des sept autres on ne connaît qu'un seul angle.

Il a donc été tout à fait impossible de refaire la totalité des calculs des triangles.

Toutefois, si une vérification complète des calculs n'a pu être obtenue faute d'en posséder tous les éléments, les matériaux dont la commission a disposé lui ont permis de constater que le réseau géodésique constitué par le calcul des triangles consigné aux archives, ne dérive pas rigoureusement des observations.

C'est ce qui va être établi. Les feuilles 6^e (annexe N), contiennent, en double, les calculs des 53 triangles pour chacun desquels les observations des trois angles sont données. Ces triangles ne forment pas un réseau continu; on n'a donc pu les calculer qu'en empruntant à l'auteur de la triangulation les bases nécessaires. Mais tous les angles de ces triangles sont extraits de la 4^e colonne des tableaux 5 (annexe K), et ont par conséquent les valeurs que les calculs de la commission leur assignent.

Le tableau 7 (annexe O), dont le cahier des archives contenant le calcul des triangles et les feuilles 6^e (annexe N), ont fourni les éléments, à pour objet de faciliter la comparaison entre les résultats de la commission et ceux de l'auteur. Il fait ressortir de nombreuses différences, soit entre les valeurs des angles corrigés, soit entre celles des côtés opposés. Ces différences peuvent être attribuées à deux causes principales :

1^o Aux valeurs différentes assignées par l'auteur de la triangulation et par la commission, aux angles réduits au centre et à l'horizon. (Voir le tableau 5, annexe K);

2^o A ce que dans le calcul du triangle n° 52 (Tongres-Montaigu-Bertrée), l'auteur a évidemment substitué, pour l'angle à Montaigu une valeur différente de celle que lui assignent ses calculs de réductions.

Quant au premier point, les calculs de la commission, faits en double, offrent des résultats qui diffèrent au plus de 0^m,004. Ils sont basés, pour la réduction à l'horizon, sur la formule :

$$\text{Réd} : = \frac{1}{2} \sin 1'' \{ [180^\circ - (\sigma + \sigma')]^2 \text{ tang } \frac{1}{2} c. - (\sigma - \sigma')^2 \cot \frac{1}{2} c \}$$

Il est donc permis de croire que les erreurs qui donnent lieu à ces différences ne sont pas du fait de la commission. Le tableau 4, (annexe L) en est une preuve convaincante.

La substitution d'un angle à un autre qui résulte des documents que possède la commission, est de nature à jeter un doute fâcheux sur les observations. Quelle confiance en effet est-il possible de leur accorder du moment où, dans le calcul des triangles, un angle est introduit qui ne résulte pas de l'observation ?

Ce fait a lieu pour l'angle Montaigu du triangle n° 52. Le cahier F 14 (station de Montaigu, page 7), assigne à l'angle Tongres-Avernas, les valeurs :

45° 14' 50" 5

45° 14' 50" 0

Au lieu de la moyenne, l'auteur adopte :

45° 14' 50" 4 (cahier F, page 9).

Réduit au centre et à l'horizon, cet angle devient :

45° 15' 7" 278.

Telle était donc la valeur à introduire dans le calcul du triangle, n° 52.

Or en ouvrant le cahier qui contient le calcul des triangles, à la page 11, on y trouve pour l'angle Montaigu du triangle n° 52 :

45° 15' 51" 157.

A la vérité, cette valeur est présentée comme celle de l'angle corrigé, d'après le théorème de Legendre. Mais cette circonstance ne saurait suffire pour expliquer les différences entre la valeur de l'angle réduit et celle de l'angle corrigé, qui s'élève dans cet exemple à 43" 879, tandis que pour les triangles les plus grands, elle ne doit pas dépasser quelques secondes; il faut donc admettre ou bien

qu'une erreur considérable sur la somme des trois angles a été reportée en totalité sur l'angle Montaigu ou qu'une valeur différente de celle trouvée par l'observation et le calcul des réductions a été substituée à cette dernière. Dans le premier cas, les observations sont tout à fait inadmissibles : dans le second, il est indispensable que le motif de la substitution soit connu.

Au reste le triangle n° 52 n'est pas le seul qui contienne un angle différent de celui donné par l'observation. Le n° 51 en offre un second exemple. L'angle Montaigu de ce triangle, d'après le cahier F. (page 11) a pour valeur,

$$70^{\circ} 41' 50'' 676$$

et dans le calcul du triangle on le trouve égal à

$$70^{\circ} 40' 45'' 176.$$

Ces deux angles diffèrent de 45" 5.

Il est donc prouvé que les triangles calculés par l'auteur du travail ne dérivent pas rigoureusement des observations. En outre, l'état incomplet de ces dernières s'oppose à ce que les résultats auxquels elles conduiraient, soient connus.

Si cependant on voulait accepter de confiance la triangulation calculée par l'auteur, des motifs puisés dans un autre ordre de considérations, et qui vont être exposés, s'y opposeraient.

Jonction du réseau avec la triangulation de Prusse.

Il est à remarquer d'abord que le côté de départ Mont-Cassel-Hondschoot, auquel l'auteur attribue, d'après le général Krayenhoff (Précis historique, page 87), 21,415^m,274 a pour valeur dans le Mémorial du dépôt de la guerre (tome VI, page 489), selon Delambre, 21,414^m,40, nombre qui diffère du précédent de 0^m,874. Pour un côté de départ la considération de cette quantité n'est pas à négliger.

En outre, la jonction du réseau au nord-est, avec les triangles prussiens, et au midi avec la triangulation du nord de la France, prouve qu'au nord-est les côtes sont trop petits et au midi trop grands comparativement à ceux auxquels ils se joignent.

Un membre de la commission s'étant adressé au chef du bureau trigonométrique à Berlin, M. le lieutenant-colonel d'état-major Baeyer, pour avoir communication des côtés communs aux triangulations de Belgique et de Prusse, en a reçu des renseignements, dont voici le résumé :

Après avoir constaté que les seuls points communs au réseau belge et aux chaînes prussiennes, sont Gueldres, Erkelens et Sittard, M. Baeyer ajoute que les triangles de Tranchot sont les seuls que l'on possède en Prusse, sur la rive gauche du Rhin.

D'après Tranchot, les côtés qui unissent deux à deux ces points ont pour valeurs :

- Gueldres-Herongen 14,511^m73
- Erkelens-Herongen 55,429^m67
- Erkelens-Sittard 52,643^m73

Deux jonctions ont été faites avec les triangles de Tranchot. L'une, près de Coblenz (voir le croquis annexe P), a pour départ le côté Neuburg-Fleckert; l'autre, près de Wesel, aboutit au côté Camp-Gueldres.

Les deux chaînes de jonction sont liées près de Cassel avec les triangles de M. Gauss et ont pour base commune le côté Hercules-Hohenhagen, qui est calculé d'après la base de Hambourg. Ces chaînes et ces bases sont distinguées sur le croquis (annexe P).

D'après la chaîne westphalienne :

- Le côté Gueldres-Herongen est de 14,514^m70
- Erkelens-Herongen 55,455 70
- Erkelens-Sittard 52,650 56

Réunissant ces nombres et les précédents on a ce tableau :

DÉSIGNATION	VALEURS	VALEURS	DIFFÉRENCES.
des	d'après	déduites de la chaîne	
CÔTÉS.	TRANCHOT.	westphalienne.	
Gueldres-Herongen...	14,511 ^m 73	14,514 ^m 70	5 ^m 03
Erkelens-Herongen...	55,429 67	55,455 70	6 03
Erkelens-Sittard.....	52,643 73	52,650 56	4 65

M. Baeyer fait observer que la jonction de la chaîne westphalienne avec les triangles de Tranchot n'atteint pas les meilleurs triangles de cet ingénieur; que, par exemple, du triangle Erkelens-Herongen-Camp, deux angles seulement ont été observés. Il ajoute que les différences rapportées ci-dessus dépassent toute limite d'erreur admissible.

La chaîne teintée en rouge sur le croquis donne pour le côté Nürburg-Fleckert, déduit du côté Hercules-Hohenhagen, 49,757^m18; d'après la base de Melun, la valeur de ce même côté, extraite d'une communication du dépôt de la guerre à Paris, est 49,755^m72.

En introduisant la première de ces deux valeurs, celle déduite du côté Hercules-Hohenhagen, dans les meilleurs triangles de Tranchot (ce sont les triangles du croquis qui unissent Nürburg-Fleckert et Sittard-Erkelen), on trouve, pour ce dernier côté, 52,619^m11. Ce même côté, calculé par les mêmes triangles, mais d'après la valeur 49,755^m72, est de 52,618^m12.

La différence des deux nombres est donc seulement de 99 centimètres.

« Ce résultat, dit M. le lieutenant-colonel Baeyer, mérite beaucoup plus de confiance que les autres; mais à quelle valeur donner la préférence? Je n'ose décider, peut-être à la moyenne. Eu égard à ce que vous approchez plus de la base de Melun, celle-la pourrait mériter la préférence. »

En adoptant la moyenne, on aurait pour

$$\text{Sittard-Erkelen} 52,618^m61.$$

La valeur assignée à ce même côté par l'auteur de la triangulation est 52,645^m58, conséquemment plus petite que la précédente de 5^m03.

Si on compare les valeurs des côtés Gueldres-Herongen, Erkelens-Herongen, Erkelens-Sittard, trouvées par le même, à celles déduites, d'une part, des triangles de Tranchot, et d'autre part, de la chaîne westphalienne, on a ce tableau :

DÉSIGNATION	VALEURS	VALEURS	VALEURS	DIFFÉRENCES	DIFFÉRENCES
des	d'après	du cahier des	déduites de la	des	des
CÔTÉS.	Tranchot.	archives	chaîne	colonnes	colonnes
1.	2.	(calcul	westphalienne.	2 et 3.	3 et 4.
		des triangles.)			
Gueldres-Herongen....	14,511 ^m 73	14,312 ^m 24	14,514 ^m 70	+ 0 ^m 49	- 2 ^m 46
Erkelens-Herongen....	55,429 67	55,450 87	55,455 70	+ 1 20	- 4 83
Erkelens-Sittard.....	52,643 73	52,643 58	52,650 56	+ 0 13	- 4 78

Il en résulte que les valeurs des côtés fournies par le cahier des archives contenant le calcul des triangles, diffèrent peu de celles données par Tranchot, et que, comme celles-ci, elles sont trop petites, quoiqu'à un moindre degré, comparativement aux résultats du calcul de la chaîne westphalienne.

Jonction du réseau avec la triangulation de France.

Il reste à faire connaître comment le réseau a pu être rattaché à la triangulation du nord de la France, et les résultats de cette nouvelle jonction.

Le Mémorial du dépôt de la guerre donne (tome VI, page 510) les valeurs des côtés Bouillon-Hamipré et Bouillon-Noitrou. (Voir la carte des triangles, annexe P.)

Sur le côté Bouillon-Hamipré reposent les triangles :

Saint-Hubert,
Bouillon,
Hamipré.

A.

Bras,
Saint-Hubert,
Hamipré.

Le côté Noitrou-Bouillon peut servir de base aux triangles :

Pousset,
Noitrou,
Bouillon.

Saint-Pubert,
Pousset,
Bouillon,

B.

Hamipré,
Saint-Hubert,
Bouillon.

Bras,
Saint-Hubert,
Hamipré.

(Voir le supplément.)

En calculant ces deux suites de triangles dont les archives fournissent les angles, on obtient deux valeurs pour le côté Bras-Saint-Hubert, qui se trouve ainsi rattaché aux triangles français.

Un second côté, Bras-Bourscheid, peut être calculé également au moyen des triangles :

Rinschleider,
Bras,
Hamipré

Et

Bourscheid,
Bras,
Rinschleider,

faisant suite, soit aux triangles A, soit aux triangles B.

Les feuilles 6 (annexes O et N) donnent ces calculs, à l'exception du dernier, et le tableau 7 (annexe P) en montre les résultats. Les triangles sont distingués, dans ces feuilles, par des numéros d'ordre en chiffres romains.

Les triangles I et II qui unissent le plus directement le côté Bras-Saint-Hubert et le côté français, Bouillon-Hamipré, donnent pour valeur du premier déduit du second (voir la feuille 7, triangle n° II), 28,890^m47.

Le même côté, calculé par l'auteur de la triangulation, est de : 28,895^m63.

La différence est de 5^m18.

Le calcul des triangles III, IV, V et VI (voir les feuilles 7, triangle n° VI) assigne à ce même côté la valeur :

28,891^m47,

dont la différence avec la dernière est de : 4^m18.

Si on prend la moyenne des résultats 28,890^m47 et 28,891^m47, la valeur qu'on obtient,

28,890^m97,

comparée à celle de l'auteur,

28,895^m63,

en diffère de

4^m68.

Le second côté de la triangulation, savoir : Bras-Hamipré, déduit du côté français Bouillon-Hamipré, par les triangles I, II, VII et VIII (voir les feuilles 6 et 7, annexes N et O), est de

18,465^m80.

D'après le calcul du triangle n° 53, par l'auteur de la triangulation, ce même côté est de

18,473^m07,

qui diffère, en plus, du précédent, de

7^m27.

Pour avoir le côté Bras-Bourscheid, d'après le côté français Noirtrou-Bouillon, il suffit de multiplier

18,465^m80,

par le rapport

$\frac{30,457^m61}{30,456^m54}$,

dont le premier terme est la valeur, par Bras-Hamipré, déduite de Noirtrou-Bouillon, et le second celle du même côté calculé par Bouillon-Hamipré. On aura donc pour Bras-Bourscheid, provenant de Noirtrou-Bouillon,

18,466^m45

qui diffère du nombre calculé par l'auteur, de 6^m62.

Ces différences, notamment celles qui se rapportent aux côtés Bras-Hamipré et Bras-Bourscheid, sont trop considérables. On pourrait objecter qu'elles tiennent à une différence dans les points de station; mais cette objection n'est pas admissible si on considère que les observations de France et de Belgique se faisaient à peu près à la même époque, et que les mêmes signaux ont servi des deux parts.

Jonction du réseau avec la triangulation du général Krayenhoff.

Les triangles du général Krayenhoff offrent un dernier moyen de comparaison. Le tableau de l'annexe P, intitulé : *Tableau comparatif des côtés communs aux triangulations du général Krayenhoff et de l'auteur du travail soumis à l'examen de la commission*, montre les résultats de cette comparaison; et il s'en suit que l'accord entre les côtés communs est très-satisfaisant, puisque la plus grande différence ne s'élève qu'à 1^m520, et que les autres, pour la plupart, sont à peine de quelques décimètres.

Conclusions.

De cet exposé résultent les conséquences suivantes :

1° La triangulation n'a été faite que pour une partie du royaume;
2° Dans la partie triangulée il y a des lacunes nombreuses qui ne permettent pas de refaire les calculs pour la vérification complète du réseau;

3° Les observations qu'on possède et qui forment à peine la moitié de celles qu'exige la superficie du territoire, ne présentent pas les garanties d'exactitude que réclame un travail de cette nature. Des précautions essentielles ont été négligées dans la mesure des angles, et les calculs, fautive en plusieurs points, ne reposent pas toujours sur les nombres fournis par l'observation, tels du moins que les cahiers mis à la disposition de la commission les donnent;

4° Lors même que les observations seraient bonnes, on n'aurait pas les moyens d'y rattacher d'une manière sûre les observations qui resteraient à faire, puisqu'un grand nombre de signaux sont détruits et qu'il n'en existe même plus de traces.

Dans cet état de choses, la commission pense qu'il y aurait imprudence à baser, sur le travail dont l'examen lui a été confié, les opérations géodésiques ultérieures, et elle se trouve dans la nécessité de conclure à ce que ce travail soit considéré comme non avenu.

Bruxelles, le 8 juin 1847.

Le président de la commission :

(Signé) QUETELET.

Les membres :

(Signé) A. NERENBURGER.

MEYER. (1)

Au 31 mai, les charges des fabricants de sucre de betterave présentent à la défécation un total de 3,797,347 kil., tandis que les quantités produites, et qui ont été constatées par les employés, s'élèvent, pour les fabricants raffineurs à 1,171,067 kil., et pour les fabricants non raffineurs à 2,400,236 kil. : ensemble 3,571,323 kil.

Ce dernier chiffre ne doit pourtant pas être considéré comme définitif; il est probable qu'il subira quelques modifications résultant soit du redressement d'erreurs commises dans les comptes ouverts aux fabricants, soit des quantités produites et constatées pendant le mois de juin courant.

ÉTAT des recettes perçues du 1^{er} juillet 1846 au 31 mai 1847, pour droits d'accises sur les sucres de canne et de betterave.

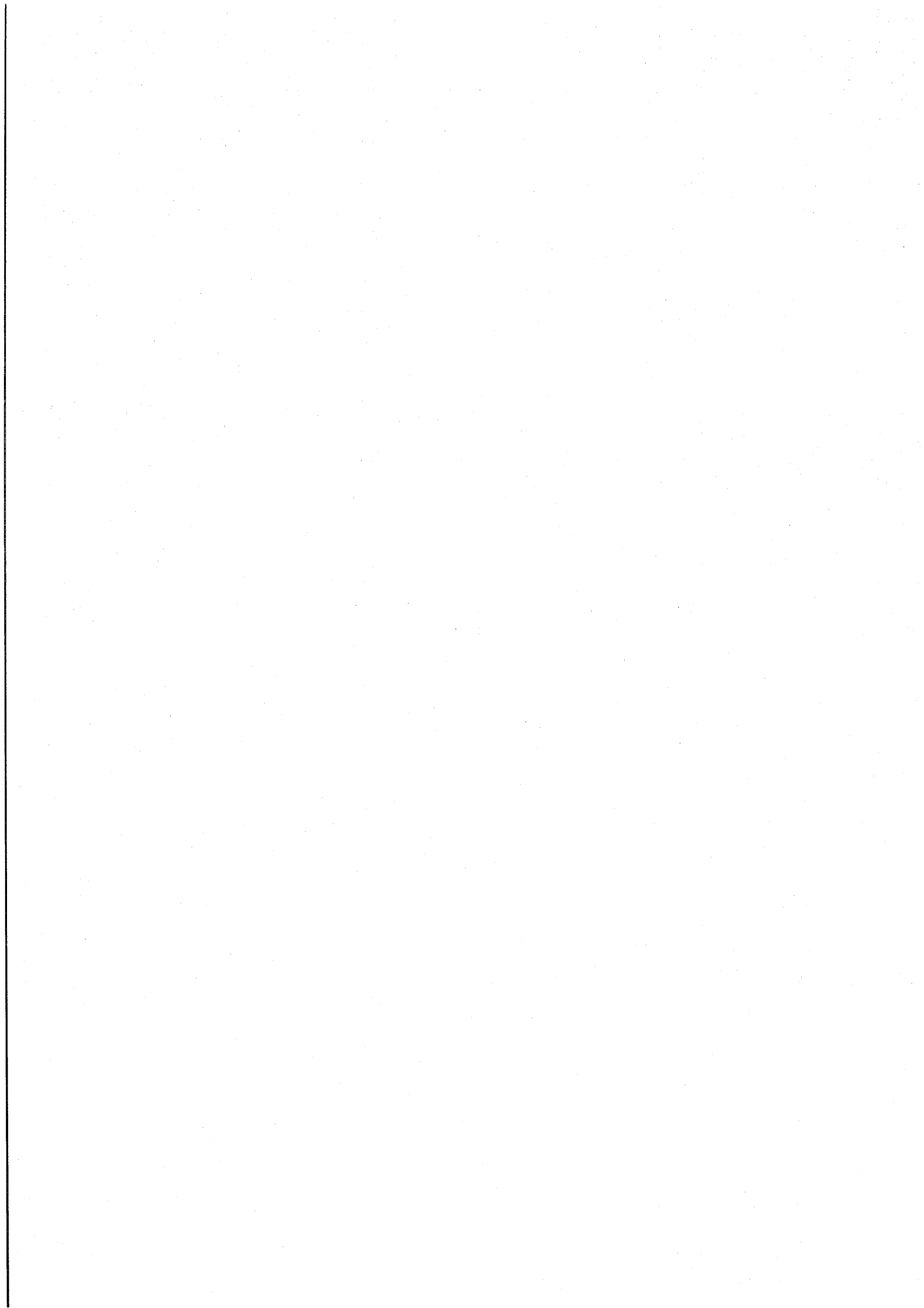
PÉRIODE.	SUCRE DE CANNE.				SUCRE DE BETTERAVE.			TOTAL GÉNÉRAL
	ANCIEN droit.	Régime de la loi du 4 avril 1843.	Régime de la loi du 17 juillet 1846.	TOTAL.	Régime de la loi du 4 avril 1843.	Régime de la loi du 17 juillet 1846.	TOTAL.	
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	5 ^e et 8 ^e col.
Du 1 ^{er} juillet au 31 décembre 1846 (six mois).	795 63	1,342,951 88	3,056 97	1,346,802 20	197,717 27	6,003 04	203,720 31	1,550,522 51
Du 1 ^{er} janvier au 31 mai 1847 (cinq mois).	1,000 "	54 88	283,996 78	283,081 63	8,870 49	98,217 77	107,088 26	592,150 89
Totaux (onze mois).	1,795 63	1,343,006 46	287,053 72	1,331,335 55	206,587 76	104,220 81	310,808 57	1,642,662 40

(1) M: le colonel Dandelin qui avait pris part, comme membre, à tous les travaux de la commission, est mort au commencement de cette année.

ANNEXE 19

THESE DE L. BOUVIER: TABLE DES MATIERES; INTRODUCTION et § 35

L. Bouvier, élève de Meyer à l'Université de Bruxelles, présente en 1848 une thèse sous le titre : "Dissertation sur la Théorie des moindres carrés". Nous trouvons dans ce travail un écho certain du voyage réalisé par Meyer en 1846 en Allemagne et une réflexion sur les ouvrages théoriques qu'il en a ramené. Le § 35 correspond à la matière d'un travail de Meyer présenté à l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, et non retenu.



UNIVERSITÉ DE BRUXELLES. — FACULTÉ DES SCIENCES.

DISSERTATION

SUR LA

THÉORIE DES MOINDRES CARRÉS,

Soutenue publiquement

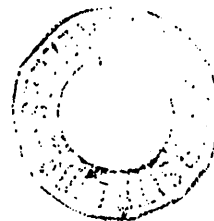
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BRUXELLES,
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR AGRÉGÉ

PAR

LAMBERT BOUVIER,

Docteur en sciences mathématiques et physiques.

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \text{etc.} = \text{minimum.}$$



BRUXELLES,

J. - B. - J. DE MORTIER, ÉDITEUR,

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE,

83, rue Léopold, faubourg de Namur.

—
1848

TABLE DES MATIÈRES.

MONSIEUR A. MEYER,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ
DE BRUXELLES.

Monsieur,

Vous avez bien voulu me guider dans le travail que je publie aujourd'hui. Cet Essai vous appartient à plus d'un titre ; et la reconnaissance me ferait un devoir de vous le dédier, si mon respect pour votre caractère et mon admiration pour vos talents, ne m'en imposaient d'ailleurs la douce obligation.

Votre respectueux élève,

I. BOUVIER.

	Page.
INTRODUCTION.	I
CHAPITRE I. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.	1
CHAPITRE II. OBSERVATIONS DE MÊME PRÉCISION.	10
Observations isolées, probabilités des erreurs, estimation de la précision.	10
Détermination du résultat le plus exact déduit de plusieurs observations.	11
Section A, une seule inconnue. — Précision du résultat obtenu par la moyenne arithmétique. — Poids, erreur probable, erreur moyenne.	12
Construction de la formule $\varphi \Delta$ et transformation de la constante h	25
Section B, plusieurs inconnues. — Principe des moindres carrés. — Poids des inconnues.	24
CHAPITRE III. OBSERVATIONS DE DIVERSES PRÉCISIONS.	47
CHAPITRE IV. VALEUR LA PLUS PROBABLE D'UNE FONCTION DES INCONNUES, ET PRÉCISION DE CETTE VALEUR.	49
CHAPITRE V. VALEURS MOYENNES.	56
De quelques propriétés des valeurs moyennes.	59
Solution de deux problèmes.	65
Diverses formes de Ω	74
Détermination de la valeur approchée de l'erreur moyenne d'une observation.	77
CHAPITRE VI. PRÉCISION D'APRÈS LAPLACE.	79
RÉSUMÉ DES FORMULES OBTENUES.	94

67290

manière la plus avantageuse. Cette recherche s'effectue à l'aide de la méthode des *équations de condition*.»

Côtes est le premier géomètre qui s'est servi des équations de condition. Lorsqu'il n'avait qu'un seul élément à déterminer, il préparait les équations de condition, de manière que le coefficient de l'élément inconnu fût positif dans chacune d'elles; et il arrivait, par voie d'addition, à une équation finale qui lui donnait la valeur de l'élément cherché. La règle de *Côtes* fut suivie par tous les observateurs. *Euler* se servit des équations de condition pour déterminer les éléments du mouvement elliptique de Jupiter et de Saturne. Enfin, *Tobie Mayer* en fit usage dans ses belles recherches sur la libration de la lune, et ensuite pour la formation de ses tables lunaires.

Tant qu'on n'avait à déterminer qu'un seul élément, la règle de *Côtes* rencontrait une application facile; il n'en était plus de même s'il fallait en déterminer plusieurs. Dans ce dernier cas, on n'avait aucune règle fixe pour combiner les équations de condition, de manière à obtenir les équations finales nécessaires: seulement, on choisissait, pour chaque élément, les observations les plus propres à la déterminer. Ce fut dans cet état que Legendre et Gauss trouvèrent cette partie de la science. Pour éviter les tâtonnements auxquels avaient recourus la plupart des observateurs, ces deux illustres géomètres concurent une idée dont l'application devait être féconde. On avait négligé jusqu'alors de considérer la somme des carrés des erreurs des observations; ils eurent la pensée d'en tenir compte et de la rendre un minimum; ils obtenaient par ce moyen autant d'équations finales qu'il y avait d'éléments.

Une question importante se présentait ici. Les valeurs déterminées par ces équations méritaient-elles la préférence sur toutes celles que l'on pouvait obtenir par les procédés connus? Le doute était permis; mais le Calcul des Probabilités fit voir que Legendre et Gauss ne s'étaient pas trompés. Laplace démontra que non-seulement la méthode offre l'avantage de fournir, sans tâtonnements, les équations finales nécessaires à la correction des éléments; mais qu'elle donne, en même temps, les corrections les plus précises; du moins, lorsqu'on ne veut employer que des équations finales

INTRODUCTION.

La théorie des moindres carrés, imaginée concurremment par Legendre et par Gauss, a excité, depuis, l'intérêt d'un grand nombre d'observateurs. Toutefois, il n'a été publié jusqu'ici, à notre connaissance, aucun traité spécial sur cette importante théorie. Sans avoir la prétention de remplir une lacune qui déferait sans doute nos efforts, nous publions cet Essai, dans lequel la question est envisagée sous un point de vue pratique.

Qu'il nous soit permis de citer un passage du Dictionnaire de Montferrier (*Équ. de condition*), qui aidera à l'intelligence de notre sujet.

« Les tables astronomiques, comme celles des planètes et de la lune, dont la construction repose essentiellement sur la théorie de l'attraction universelle, ont acquis de nos jours un grand degré d'exactitude; cependant, comme les principaux éléments qui entrent dans cette construction sont empruntés des observations, celles-ci, quelque parfaites qu'elles soient, ne sauraient l'être toutes que dans un cas tout à fait fortuit, parce qu'elles sont très-déliçates à faire, même dans les circonstances les plus favorables: aussi remarque-t-on souvent entre les tables et les résultats d'un grand nombre d'observations, recueillies à des époques éloignées de celle qui a servi de point de départ, de petites différences qui sont alors regardées comme exprimant les *erreurs des tables*. De là, la nécessité de corriger de temps à autre les éléments des tables, particulières à chacun des astres; mais il est nécessaire, pour cela, de connaître les rapports que l'analyse mathématique établit entre eux, afin d'y avoir égard dans la recherche des corrections dont ils sont susceptibles; corrections qui doivent être faites de la

qui soient linéaires; condition indispensable lorsque l'on considère à la fois un grand nombre d'observations; sinon, l'élimination des inconnues et leur détermination seraient impraticables.

Gauss a considéré la théorie des moindres carrés sous deux points de vue. Dans la première méthode, dont il a traité dans son ouvrage ayant pour titre *Theoria motus corporum cœlestium*, il part de la loi supposée connue de la probabilité de l'erreur; dans la seconde méthode, consignée dans les annales de la société de Gœttingue, il s'affranchit de cette loi, en admettant que la valeur moyenne du carré de l'erreur est égale au carré de l'erreur moyenne à craindre; et il avoue judicieusement que cette hypothèse est toute gratuite. « Ainsi », dit-il, « cette question a quelque chose de vague par sa nature, en ce qu'elle ne peut être définie qu'au moyen d'un principe en quelque sorte arbitraire. La détermination d'une quantité par des observations entachées d'erreurs plus ou moins grandes, peut-être assez bien comparée à un jeu dans lequel il n'y a que des pertes sans gains; car on peut assimiler toute erreur à craindre à une perte. Les frais d'un tel jeu sont estimés d'après la somme des produits de toutes les pertes possibles par leurs probabilités respectives. Or, à quelle fonction de perte conviendra-t-il de rapporter chaque erreur d'observation? C'est ce qu'on ne saurait dire; il y a plus, cette détermination est tout à fait arbitraire. Il est clair qu'on ne peut pas évaluer la perte à l'erreur elle-même, vu que, si les erreurs positives pouvaient être acceptées comme pertes, les erreurs négatives devraient représenter des gains. La grandeur d'une perte doit être plutôt exprimée par une fonction de l'erreur, telle qu'elle soit toujours positive de sa nature. Comme la variété de ces fonctions est infinie, la plus simple qui jouisse de cette propriété paraît devoir être préférée, et c'est, sans contredit, le carré. »

Gauss a également donné deux méthodes d'élimination, et rendu ainsi possible l'élimination entre un très-grand nombre d'équations de condition. Un des grands mérites de cet illustre mathématicien, c'est d'avoir appliqué la méthode des moindres carrés à toutes les opérations de la géodésie, et d'avoir ainsi remplacé les procédés de tâtonnements, employés jusqu'ici, par une méthode sûre qui donne des résultats d'une grande précision.

Les ouvrages qui nous ont particulièrement servi dans ce travail sont les suivants :

De motu corporum cœlestium, par GAUSS.

Ost preussische Gradmessung, par BESSEL.

Astronomisches Jahrbuch, par ENCKE, année 1854.

Zeitschrift für Physik, etc., von EITINGSHAUSEN, par HAUBER; tome 7 et suivants 8, 9, 10.

Ausgleichungs Rechnungen der practischen geometrie, par GERLING, année 1845.

Astronomische Nachrichten, par SCHUMACHER; voir :

N ^o 6,	vol. I,	pages 81
« 110,	« V,	« 401
« 121, 122,	« VI,	« 1
« 192,	« VII,	« 463
« 202, 205, 206,	« IX,	« 189
« 338, 559,	« XV,	« 369
« 561, 562,	« XVI,	« 9-27
« 599,	« XVII,	« 225
« 404,	« XVII,	« 505
« 419,	« XVIII,	« 16
« 491,	« XXI,	« 165.

Théorie analytique des probabilités, livre II, chap. 4, 5, 8, 9, suppléments 1, 2, 3, par LAPLACE.

Mémoire sur la probabilité des résultats moyens des observations. Connaissance des temps, 1827 et 1852, par POISSON.

Mémoire sur les résultats moyens, tome VI, des *Recherches statistiques sur la ville de Paris*, par FOURIER. X

Et le mémoire de GAUSS, ayant pour titre: *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*, tome V de l'ouvrage intitulé: *Commentationis Societatis regiae scientiarum Göttingensis recentiores*.

Nous avons mis en outre à contribution, et pour une part très-large, les belles leçons de M. Meyer, professeur à l'Université de Bruxelles; et nous nous faisons un devoir de le déclarer, si ce faible Essai se recommande par quelques qualités, c'est en grande partie aux travaux consciencieux et aux conseils éclairés de ce savant mathématicien qu'il en sera redevable.

M. Meyer a guidé nos pas dans la carrière, où ses encouragements nous ont constamment soutenu. Qu'il nous soit permis d'espérer qu'il voudra bien agréer ce témoignage public de notre gratitude.

35. Nous prendrons pour application des formules précédentes, la détermination de l'erreur moyenne, du poids et de l'erreur probable, d'une longueur de 120 mètres au moyen d'une chaîne de 40 mètres, puis d'une longueur de 100 mètres au moyen d'un cordon de 8 mètres.

Les chiffres nous ont été fournis par le savant M. Meyer, professeur à l'Université de Bruxelles.

Aux extrémités de la longueur de 120 mètres, nous supposons qu'on ait placé deux piquets.

En portant la chaîne de 40 mètres 12 fois sur la longueur don-

née, on trouve que la dernière chaîne dépasse le second piquet de 11 centimètres et 7 millimètres. De sorte que la première observation nous donnera $n = 0,117$.

En répétant cette opération dix fois, on trouve respectivement pour les observations $n, n', n'',$ etc.

$$n = 0,117, n' = 0,078, n'' = 0,090, n''' = 0,095, n^{iv} = 0,093 \\ n^v = 0,116, n^{vi} = 0,115, n^{vii} = 0,109, n^{viii} = 0,085, n^{ix} = 0,099.$$

En faisant la somme de toutes ces observations, il vient

$$(n) = 1,004.$$

et leur moyenne sera

$$\frac{(n)}{10} = 0,1004.$$

On aura, par suite, pour les erreurs $\Delta, \Delta', \Delta'',$ etc.

$$\Delta = \frac{(n)}{10} - n = 0,1004 - 0,117 = -0,0166 = \bar{0},0166$$

$$\Delta' = \frac{(n)}{10} - n' = 0,1004 - 0,078 = 0,0224$$

et ainsi de suite.

En élevant ces dernières égalités au carré, il en résulte

$$\Delta^2 = 0,00027556, \Delta'^2 = 0,00050176, \text{ etc.}$$

La somme des carrés des erreurs sera

$$(\Delta^2) = 0,00165840$$

Or, on sait que l'erreur moyenne est donnée par

$$m = \sqrt{\frac{(\Delta^2)}{p-1}}$$

qui devient, en mettant au lieu de (Δ^2) et p leurs valeurs,

$$m = \sqrt{\frac{0,00165840}{9}} = \sqrt{0,00018426} = 0,0135$$

Le poids est donné par

$$p = \frac{1}{m^2}$$

donc,
$$p = \frac{1}{(0,0135)^2} = 5486,9$$

Pour l'erreur probable, on a par la formule

$$r = 0,674489 \times m$$

donc,
$$r = 0,674489 \times 0,0135 = 0,009105$$

On procédera de la même manière pour la longueur de 100 mètres, au moyen du cordon de 8 mètres.

Voici les opérations dans les deux tableaux suivants :

[- -]

CORDON DE CINQ MÈTRES.

1 ^{re} ligne de 100m	$m = 0,0317$	$r = 0,0214$
2 ^o " " 80	$m = 0,0124$	$r = 0,0084$
3 ^o " " 60	$m = 0,0324$	$r = 0,0218$
4 ^o ligne de 40	$m = 0,0107$	$r = 0,0072$
5 ^o " " 20	$m = 0,0056$	$r = 0,0038$

Ce relevé prouve d'abord que l'erreur moyenne n'est pas proportionnelle aux distances mesurées; qu'elle ne semble dépendre que de la nature de l'instrument. Sous ce rapport, on voit 1^o que le mètre fournit les résultats les plus précis; 2^o que la chaîne de 8 mètres donne des résultats d'une exactitude à peu près comparable à celle du mètre; 3^o que la chaîne de 10 mètres donne des résultats plus précis que celle de 20 mètres; enfin 4^o que celle-ci et le cordon donnent le moins de précision; en outre qu'elle est la plus variable comparativement aux distances.

Des mesures tout-à-fait semblables ont été faites et calculées par M. Stampfer, professeur à l'école polytechnique de Vienne (voyez son ouvrage sur le nivellement, page 87); et ensuite par M. Gerling, professeur de mathématiques à l'Université de Marbourg (voyez son ouvrage *Ausgl. Rechnung*, page 44); voyez aussi *Archiv. der Math. und Phys.*, par Grunnert, tome VI, cah. 4, page 373.

Ces sortes de relevés ne sont pas sans importance; ils présentent des résultats assez utiles pour fixer l'attention.

Sous le point de vue théorique, ils font connaître 1^o de quelle manière l'erreur moyenne se distribue, suivant les divers instruments de distance; 2^o si elle dépend uniquement de l'instrument ou aussi de la longueur mesurée; 3^o quelle est, sous le rapport de la précision, la classification à établir entre les instruments pour la mesure des distances.

Sous le point de vue pratique, ces relevés nous fournissent le moyen 1^o de rendre comparable entre elles des distances mesurées avec des instruments divers; 2^o de rendre possible l'application des moindres carrés à la mesure d'une ligne obtenue par des mesures répétées de ses parties. En géodésie, par exemple, il y a des cas de réduction au centre de la station, où la distance au centre est de 100 et plus de 100 mètres. Comme on doit se procurer cette donnée avec une grande précision, on partage de semblables bases en 2, 3, ou plusieurs parties, puis on mesure à l'aide d'une chaîne, ou du simple mètre, ces parties, 1 à 1, 2 à 2, etc., plusieurs fois de suite; puis on conclut, par le calcul, la distance totale la plus exacte possible; 3^o lorsqu'il s'agit de juger la préférence à donner à plusieurs instruments, ou de reconnaître si un nouvel instrument a des avantages sur les anciens, par exemple, si l'on introduisait chez nous le nouvel instrument pour niveler, dont on se sert maintenant surtout en Autriche, et qu'on emploie en même temps pour mesurer les distances (distanço-mètre), il faudrait d'abord chercher son erreur moyenne, comme distanço-mètre, et comparer les résultats aux erreurs moyennes attachées aux instruments connus.

CHAÎNE DE DIX MÈTRES. LONGUEUR DE 120 MÈTRES.			
OBSERVATIONS.	Δ	Δ^2	$m = \sqrt{\frac{(\Delta^2)}{p-1}}$ $r = 0,07480 \times m$
0,117	0,0166	0,00027550	$m = 0,0135$ $r = 0,0091056015$
0,078	0,0224	0,00050170	
0,090	0,0014	0,00000190	
0,093	0,0074	0,00005470	
0,093	0,0074	0,00005470	
0,116	0,0156	0,00024536	
0,115	0,0146	0,00021310	
0,100	0,0080	0,00007396	
0,085	0,0154	0,00023710	
0,099	0,0014	0,00000190	
$(m) = 1,004$		$(\Delta^2) = 0,00165840$	
$(r) = 0,1004$		$(\Delta^2) = 0,00018426$	
10		0	
CORDON DE CINQ MÈTRES. LONGUEUR DE 100 MÈTRES.			
0,012	0,0287	0,00081569	$m = 0,0517$ $r = 0,0216813013$
0,011	0,0297	0,00088209	
0,000	0,0407	0,00165640	
0,035	0,0057	0,00003240	
0,015	0,0257	0,00066049	
0,060	0,0193	0,00037240	
0,044	0,0033	0,00001089	
0,082	0,0413	0,00170569	
0,055	0,0143	0,00020440	
0,093	0,0525	0,00273529	
$(m) = 0,407$		$(\Delta^2) = 0,00008410$	
$(r) = 0,407$		$(\Delta^2) = 0,00100934$	
10		0	

M. Meyer nous ayant communiqué les résultats de ses mesurés, nous croyons devoir les insérer ici, à cause de l'utilité de semblables chiffres dans plusieurs cas pratiques.

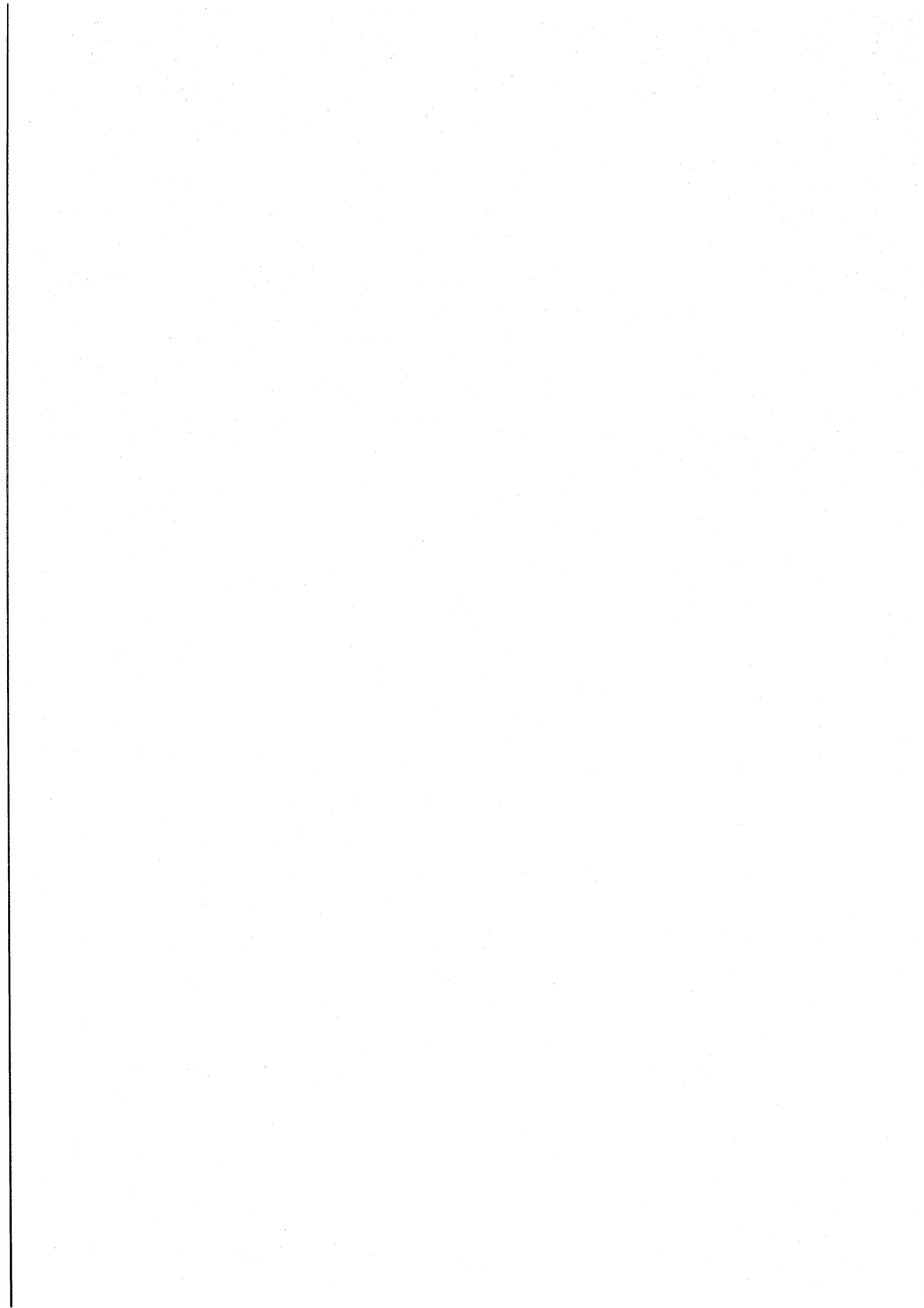
CHAÎNE DE VINGT MÈTRES.	
1 ^{re} ligne de 200 ^m	$m = 0,0304$ $r = 0,0205$
2 ^e " " 160.	$m = 0,0160$ $r = 0,0114$
3 ^e " " 130.	$m = 0,0071$ $r = 0,0048$
4 ^e " " 80.	$m = 0,0141$ $r = 0,0095$
5 ^e " " 40.	$m = 0,0085$ $r = 0,0057$
CHAÎNE DE DIX MÈTRES.	
1 ^{re} ligne de 200 ^m	$m = 0,0189$ $r = 0,0137$
2 ^e " " 160.	$m = 0,0130$ $r = 0,0087$
3 ^e " " 120.	$m = 0,0155$ $r = 0,0091$
4 ^e " " 80.	$m = 0,0082$ $r = 0,0055$
5 ^e " " 40.	$m = 0,0050$ $r = 0,0030$
CHAÎNE DE CINQ MÈTRES.	
1 ^{re} ligne de 100 ^m	$m = 0,0057$ $r = 0,0038$
2 ^e " " 80.	$m = 0,0092$ $r = 0,0062$
3 ^e " " 60.	$m = 0,0028$ $r = 0,0018$
4 ^e " " 40.	$m = 0,0051$ $r = 0,0021$
5 ^e " " 20.	$m = 0,0030$ $r = 0,0015$
LE MÈTRE.	
1 ^{re} ligne de 100 ^m	$m = 0,0115$ $r = 0,0077$
2 ^e " " 80.	$m = 0,0068$ $r = 0,0046$
3 ^e " " 60.	$m = 0,0037$ $r = 0,0025$
4 ^e " " 40.	$m = 0,0021$ $r = 0,0014$
5 ^e " " 20.	$m = 0,0007$ $r = 0,0005$

ANNEXE 20

DOSSIER 7181 ARB : AU SUJET D'UN MEMOIRE "NON CONSERVE" DE MEYER

En 1847, Meyer présente à l'Académie Royale de Bruxelles, un mémoire "Sur l'application du calcul des probabilités aux opérations de nivellement". Sur le dossier se trouve la mention "Mémoire non conservé (s.d)".

Nous présentons ici les rapports remerciant Meyer de sa communication, dont nous retrouvons la trace en 1848 dans la thèse de L. Bouvier (Voir § 40, p. 55), ainsi que dans le tome XXI des *Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, 1848. Liagre, p. 310 de son livre (1852) cite ce mémoire parmi les applications de la méthode des moindres carrés.



DOSSIER 7181 ARB : MEMOIRE "NON CONSERVE" DE MEYER

Sur la chemise

Classe des sciences

Mr Verhulst est prié de bien vouloir examiner le mémoire intitulé:
"Sur l'application du calcul des probabilités aux opérations de nivellement"

Date de l'envoi le 10/1/47

Le secrétaire perpétuel

Quetelet

Une lettre signé de J.M. Pagani, Louvain, le 6 janvier 1847

J'ai pris connaissance du Mémoire de Mr Meyer sur une application du calcul des probabilités. Ce travail m'a paru résoudre un problème fort intéressant relatif aux opérations de nivellement topographique. Je regrette seulement de n'avoir pu me procurer les ouvrages d'Encke et de Hagen, cités par l'auteur; et j'ai été obligé d'admettre, sur parole, les formules que Mr Meyer doit avoir prises dans le travail du premier.

Au reste la partie du Mémoire, qui appartient en propre à Mr Meyer, me semble bien traitée, et je pense que ce travail pourra figurer avec honneur dans les recueils de l'Académie. Je désire, du reste, entendre l'avis des autres commissaires avant de me décider définitivement.

Un mot de Mr Verhulst

Le mémoire de Mr Meyer est une application des formules connues du Calcul des probabilités à l'un des problèmes de nivellement que l'on rencontre le plus fréquemment.

Je conclus à ce que l'Académie vote des remerciements à l'auteur pour lui avoir communiqué son travail, qui trouverait parfaitement sa place dans un cours complet de géodésie ou de topographie.

Un rapport de Quetelet daté du 1^e février 1847

Le mémoire de M. Meyer a pour objet une application intéressante de la théorie des probabilités et je pense comme mes deux honorables confrères, Pagani et Verhulst, que la classe doit des remerciements à l'auteur pour la communication qu'il a bien voulu lui faire.

Le premier commissaire a demandé l'impression du mémoire et le second ne s'est pas exprimé à ce sujet peut-être a-t-il été arrêté par les mêmes considérations que moi?

Mr Meyer a cru devoir présenter dans la première partie de son travail un résumé de la théorie connue de la probabilités des erreurs. Or cette théorie se trouve exposée dans un assez grand nombre d'ouvrages français et étrangers, et particulièrement dans les traités sur les probabilités par Laplace, Poisson, Cournot, Lacroix etc. ...

Il était naturel alors de se demander s'il n'était pas hors des usages académiques d'insérer dans les mémoires des résumés de théories connues.

Je m'abstiendrai de (?) et laisserai à la classe le soin de juger cette question.

Je crois en tout cas que si l'impression avait lieu, la première partie devrait être placée en note à la suite des deux autres parties qui renferment les applications de la théorie.

ANNEXE 21

TABLE DES MATIERES D'UN COURS DE GEODESIE DISPENSE AU DEPÔT DE LA GUERRE BELGE EN 1867

ET § RELATIF À LA THÉORIE DE LA COMPENSATION D'UN
RÉSEAU DE TRIANGLES

Dans la table des matières, nous avons souligné les parties nouvelles de ce cours de géodésie, après comparaison avec le cours de Meyer datant de 1845 (Voir Archives du Musée de l'Armée à Bruxelles, cote Cl VII 3430). Nous présentons aussi le paragraphe relatif à la théorie de la compensation d'un réseau de triangles, où l'on reconnaît facilement la méthode et les notations introduites par Gauss.

TABLE DES MATIÈRES¹⁸

- Leçon 1 Définitions. Des erreurs. Triangulation. Forme des triangles. Sommets. Signaux artificiels.
- Leçon 2 Héliotrope de Bertram. Etablissement des stations. Reconnaissance du terrain. Des bases en général. Des règles. Mesure de leur inclinaison.
- Leçon 3 Etalonnage. Réduction d'une base au niveau de la mer. Règles à traits. Bases mesurées en Belgique. Appareil de Bessel. Étalonnage en Belgique.
- Leçon 4 Mesure des angles. Verniers. Microscopes à fil curseur. Lunette. Manière d'observer les angles. lunette concentrique et excentrique. Répétition simple, double. Réitération: Excentricité de l'alidade. Niveau à bulle.
- Leçon 5 Théodolite. Corrections. Mise en station pour la mesure d' angles horizontaux, verticaux.
- Leçon 6 Instrument à réflexion; description en usage.
- Leçon 7 Des arcs et des angles. Excès sphérique, sa valeur. Théorème de Legendre Calcul des directions probables.
- Leçon 8 Calcul provisoire des triangles. Réduction au centre de la station et à l'axe du signal. Correction due à l'excentricité d'une lunette. Réduction des angles à l'horizon. Erreur d'un triangle. Calcul définitif des côtés. Manière de rendre un réseau géométrique.
- Leçon 9 Observations astronomiques. Instrument universel. Mesures des distances zénithales par les observations doubles. Formule pour calculer la distance zénithale correspondant à la moyenne des temps des observations.
- Leçon 10 Correction due à la réfraction observée du soleil. Emploi du sextant. Dépression de l'horizon visuel. Usage des éphémérides. Calcul de l'angle horaire. Détermination de l'heure. Hauteur correspondante.
- leçon 11 Observation du soleil. Chronomètre. latitude. Méthode de Valz, Bessel, Littrow. Azimat.
- Leçon 12 Longitudes. Méthodes télégraphiques.
- Leçon 13 Détermination de l'équation personnelle. Calcul de la position d'un sommet géodésique. Grandeur et figure de la Terre. Arc de méridien.
- Leçon 14 Recherche de l'aplatissement. Longueur du mètre. Coordonnées sur le sphéroïde. Calcul de la normale. Divers procédés pour obtenir un arc de méridien. Arc de parallèle. Note historique. Recherche du général James sur la forme de la Terre.
- Leçon 15 Nivellement trigonométrique. Nivellement barométrique

¹⁸Voir dossier 3430 Archives du Musée de l'Armée, Bruxelles.

Théorie de la compensation d'un réseau de triangles. — Lorsque tous les triangles sont calculés, la triangulation est achevée et l'on a les éléments que peuvent fournir les mesures terrestres pour la fixation des différents sommets sur le globe. Les angles que l'on a employés à ces calculs sont entachés de petites erreurs inévitables, que l'on répartit de manière, que les côtés que l'on peut calculer plusieurs fois, aient toujours même valeur, et qu'en calculant un côté, une base par exemple, par la suite des triangles qui l'unissent à la base de départ, on trouve exactement la valeur mesurée. Ce résultat s'obtient par la compensation du réseau en supposant les directions liées entre elles par des conditions géométriques qui les font entrer dans des triangles, des quadrilatères, etc. C'est un travail très compliqué pour des triangulations de quelque étendue, se fait par l'application de la théorie des moindres carrés.

En recherchant les directions les plus probables des objets observés à une station, nous sommes arrivés à des équations de la forme :

$$\begin{aligned} a n &= + a \alpha A - a b B - a c C \\ (1) \quad b n &= - a b A + b b B - b c C \\ c n &= - a c A - b c B + c c C \end{aligned}$$

Quelle que soit la méthode que l'on emploie pour trouver les valeurs de A, B, C, \dots , on arrivera toujours au résultat désiré en multipliant ces équations respectivement par des coefficients indéterminés, $\alpha \alpha, \alpha \beta, \alpha \gamma$

$$\begin{aligned} a n \cdot \alpha \alpha &= + \alpha \alpha \cdot a \alpha A - \alpha \alpha \cdot a b B - \alpha \alpha \cdot a c C \\ b n \cdot \alpha \beta &= - \alpha \beta \cdot a b A + \alpha \beta \cdot b b B - \alpha \beta \cdot b c C \\ c n \cdot \alpha \gamma &= - \alpha \gamma \cdot a c A - \alpha \gamma \cdot b c B + \alpha \gamma \cdot c c C \end{aligned}$$

Faisons la somme, et, pour avoir A , posons son coefficient égal à un, ceux de B et de C étant annulés, nous avons :

$$A = a n \cdot \alpha \alpha + b n \cdot \alpha \beta + c n \cdot \alpha \gamma$$

les indéterminées étant fournies par

$$\left. \begin{aligned} a \alpha \cdot \alpha \alpha - a b \cdot \alpha \beta - a c \cdot \alpha \gamma &= 1 \\ - a b \cdot \alpha \alpha + b b \cdot \alpha \beta - b c \cdot \alpha \gamma &= 0 \\ - a c \cdot \alpha \alpha - b c \cdot \alpha \beta + c c \cdot \alpha \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \text{1}^{\text{er}} \text{ groupe.}$$

Multiplications de même successivement et respectivement les équations (1) par $\alpha \beta, \beta \beta, \beta \gamma$; puis par $\alpha \gamma, \beta \gamma, \gamma \gamma$, nous avons :

$$\begin{aligned} B &= a n \cdot \alpha \beta + b n \cdot \beta \beta + c n \cdot \beta \gamma \\ C &= a n \cdot \alpha \gamma + b n \cdot \beta \gamma + c n \cdot \gamma \gamma \end{aligned}$$

et comme conditions :

$$\left. \begin{aligned} a \alpha \cdot \alpha \beta - a b \cdot \beta \beta - a c \cdot \beta \gamma &= 0 \\ - a b \cdot \alpha \beta + b b \cdot \beta \beta - b c \cdot \beta \gamma &= 1 \\ - a c \cdot \alpha \beta - b c \cdot \beta \beta + c c \cdot \beta \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \text{2}^{\text{e}} \text{ groupe.}$$

$$\left. \begin{aligned} a \alpha \cdot \alpha \gamma - a b \cdot \beta \gamma - a c \cdot \gamma \gamma &= 0 \\ - a b \cdot \alpha \gamma + b b \cdot \beta \gamma - b c \cdot \gamma \gamma &= 0 \\ - a c \cdot \alpha \gamma - b c \cdot \beta \gamma + c c \cdot \gamma \gamma &= 1 \end{aligned} \right\} \text{3}^{\text{e}} \text{ groupe.}$$

Les trois groupes d'équations qui donnent les indéterminées s'écrivent plus simplement par l'annotation de Gauss.

Le premier reste le même, dans le 2^e on élimine $\alpha\beta$ et dans le 3^e, $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$; on obtient ainsi sans avoir égard aux signes :

$$(2) \begin{cases} 1 = a\alpha \cdot \alpha\alpha + ab \cdot \alpha\beta + ac \cdot \alpha\gamma \\ 0 = ab \cdot \alpha\alpha + bb \cdot \alpha\beta + bc \cdot \alpha\gamma \\ 0 = ac \cdot \alpha\alpha + bc \cdot \alpha\beta + cc \cdot \alpha\gamma \\ \\ 1 = bb \cdot 1\beta\beta + bc \cdot 1\beta\gamma \\ 0 = bc \cdot 1\beta\beta + cc \cdot 1\beta\gamma \\ \\ 1 = cc \cdot 2\gamma\gamma \end{cases}$$

Ces équations étant résolues, donnent les indéterminées auxquelles on additionne les inconnues par les équations

$$(3) \begin{cases} A = a\alpha \cdot \alpha\alpha + b\alpha \cdot \alpha\beta + c\alpha \cdot \alpha\gamma \\ B = a\alpha \cdot \alpha\beta + b\alpha \cdot \beta\beta + c\alpha \cdot \beta\gamma \\ C = a\alpha \cdot \alpha\gamma + b\alpha \cdot \beta\gamma + c\alpha \cdot \gamma\gamma \end{cases}$$

Ces directions devant satisfaire à des conditions géométriques, il en résultera pour elles de nouvelles corrections par (1), (2), (3), ... de sorte qu'elles deviendront $A + (1)$, $B + (2)$, $C + (3)$, ... Les quantités $a\alpha$, $b\alpha$, ... changeront aussi et deviendront, $a\alpha + [1]$, $b\alpha + [2]$, ...

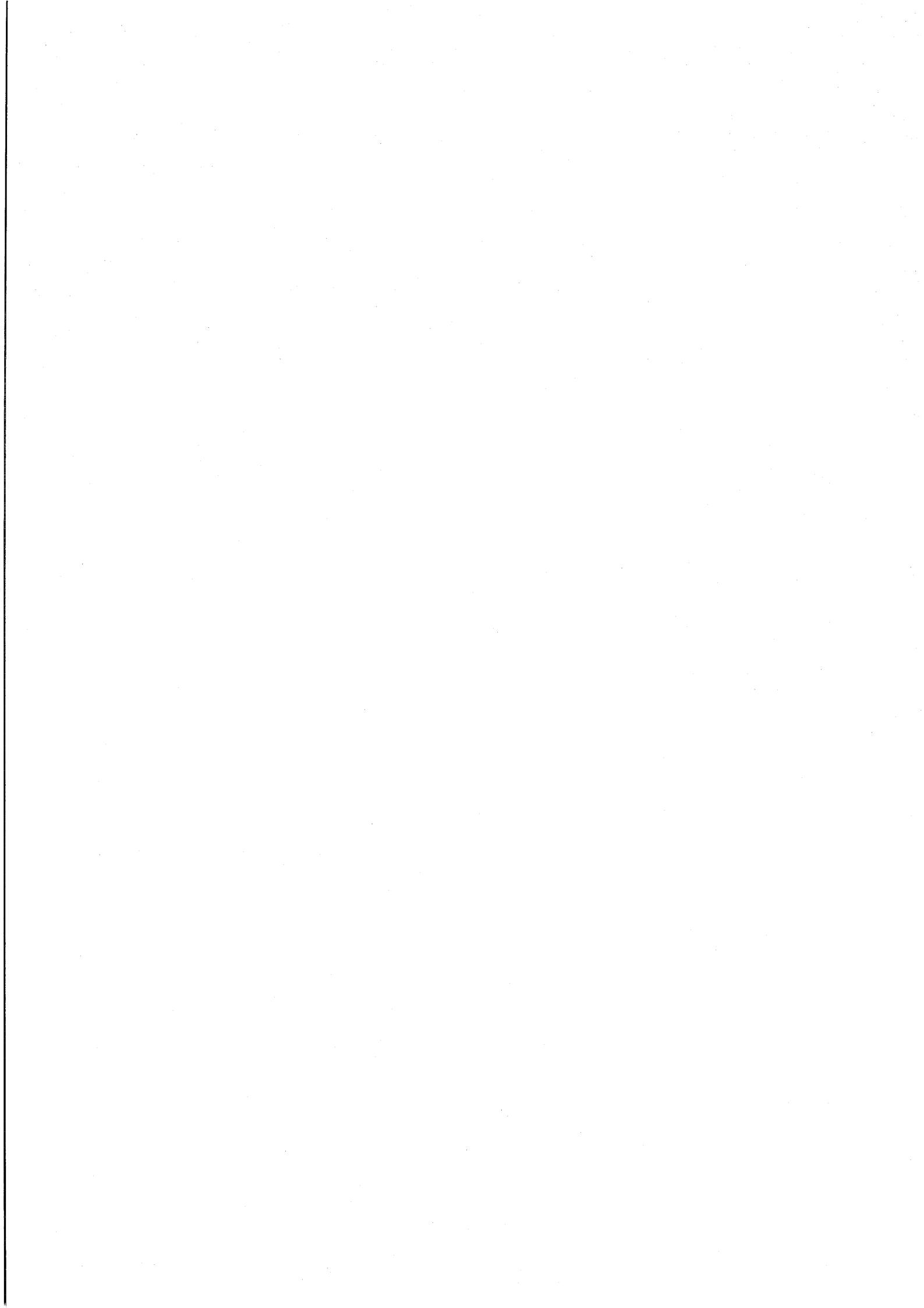
Substituant dans les équations (1), on trouve :

$$(4) \begin{cases} [1] = + a\alpha (1) - ab (2) - ac (3) \\ [2] = - ab (2) + bb (2) - bc (3) \\ [3] = - ac (1) - bc (2) + cc (3) \end{cases}$$

Faisons de même dans les équations (3),

$$(5) \begin{cases} (1) = \alpha\alpha [1] + \alpha\beta [2] + \alpha\gamma [3] \\ (2) = \alpha\beta [1] + \beta\beta [2] + \beta\gamma [3] \\ (3) = \alpha\gamma [1] + \beta\gamma [2] + \gamma\gamma [3] \end{cases}$$

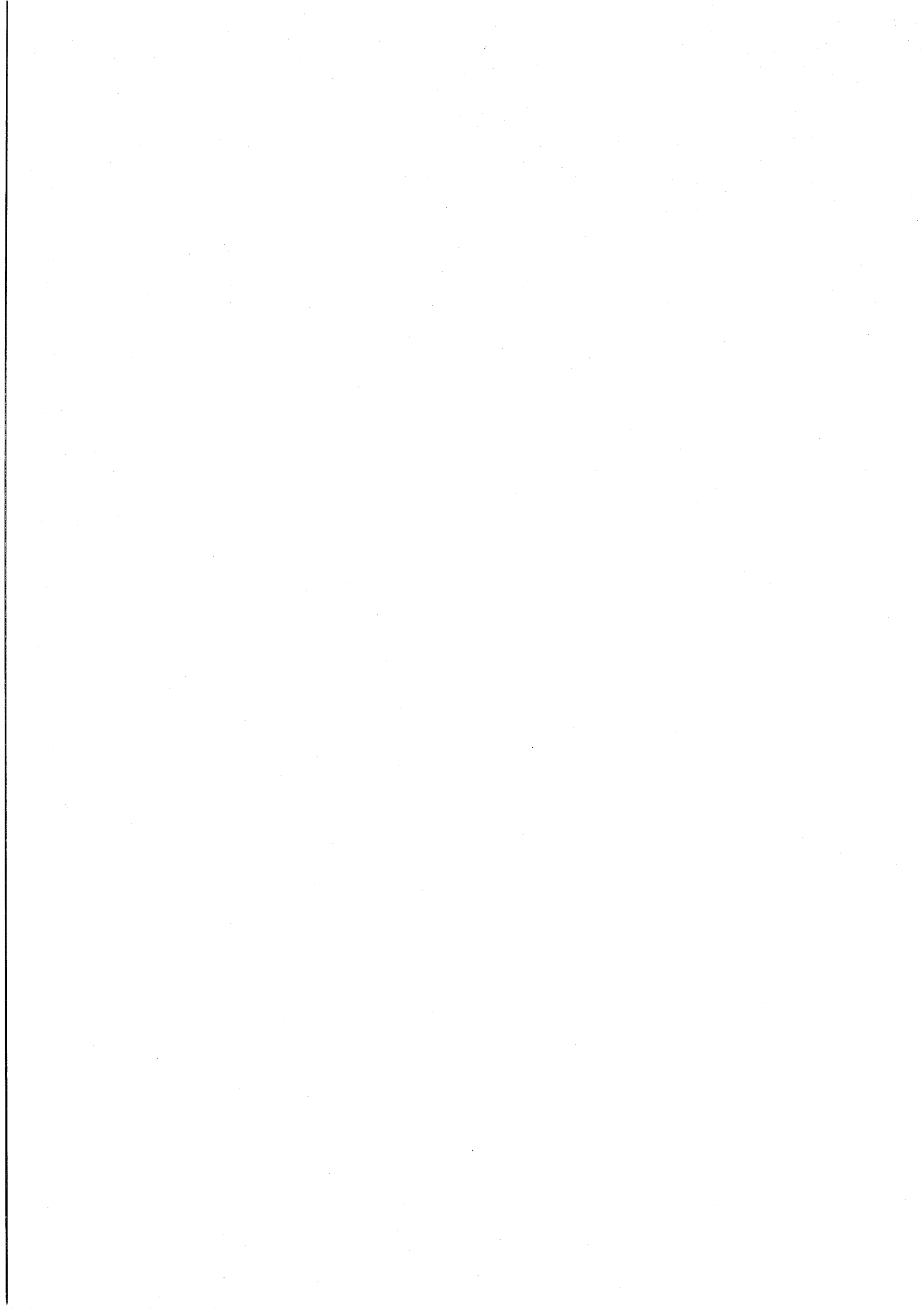
L'une ou l'autre des groupes (4) et (5), exprime la dépendance qui existe entre les corrections à faire aux directions, par suite de la manière dont elles ont été observées à chaque station. Elles servent uniquement pour la compensation du réseau. Au Dépôt de la Guerre, on se servait d'après le général Dayer, des équations (5) qui peuvent être posées après chaque campagne pour les stations achevées. On les nomme équations de poids.



ANNEXE 22
LETTRE DE BAEYER A LIAGRE

Dans cette lettre de 1853 (Archives de l'ARB, Fonds Liagre, Liasse 8834), Baeyer remercie Liagre pour l'envoi de son livre *Calcul des probabilités et Théorie des erreurs*. Il reconnaît que Liagre, par ce livre, "a rendu un grand service à la Science".





**TRADUCTION D'UNE
LETTRE DE BAEYER A LIAGRE**

Berlin, le 15 février 1853

Au sieur de haute naissance,
Au très honoré Capitaine,

 Votre précieux cadeau m'a causé une très grande joie et je vous en remercie vivement. J'ai remis vos oeuvres, que vous destiniez à la Bibliothèque du Grand Quartier Général, au lieutenant Von Reyer et celui-ci m'a chargé de façon pressante de vous remercier.

 Ayez la bonté d'excuser le retard mis à vous répondre, la raison en est une forte grippe, dont j'ai tant souffert 14 jours durant que j'étais dans l'incapacité de travailler. De plus, mon désir était de lire intégralement votre oeuvre avant de vous écrire. A présent, c'est fait et je peux, avec toute ma conviction souhaiter bonne chance à la présentation parfaitement réussie de la subtile théorie du calcul des probabilités.

 Votre façon de traiter le sujet est si claire et si intelligible, les applications et explications au moyen d'exemples sont si nombreuses et si constructives que quiconque, ayant à étudier à fond la méthode des moindres carrés aura recours, avec profit, à votre livre.

Vous avez rendu un grand service à la Science et aurez de ce fait la joie d'avoir contribué à la diffusion de cette méthode, la réintroduisant notamment en France, d'où elle est arrivée en Allemagne; car les Français, depuis Legendre, l'inventeur de la méthode, n'ont su tirer de celle-ci qu'un bien mince profit.

En vous remerciant pour la joie que vous m'avez faite par cette oeuvre si précieuse, je vous prie de présenter mes respect à messieurs Quetelet et Nerenburger.

Avec ma considération particulière, j'ai l'honneur d'être

Votre bien né et bien dévoué

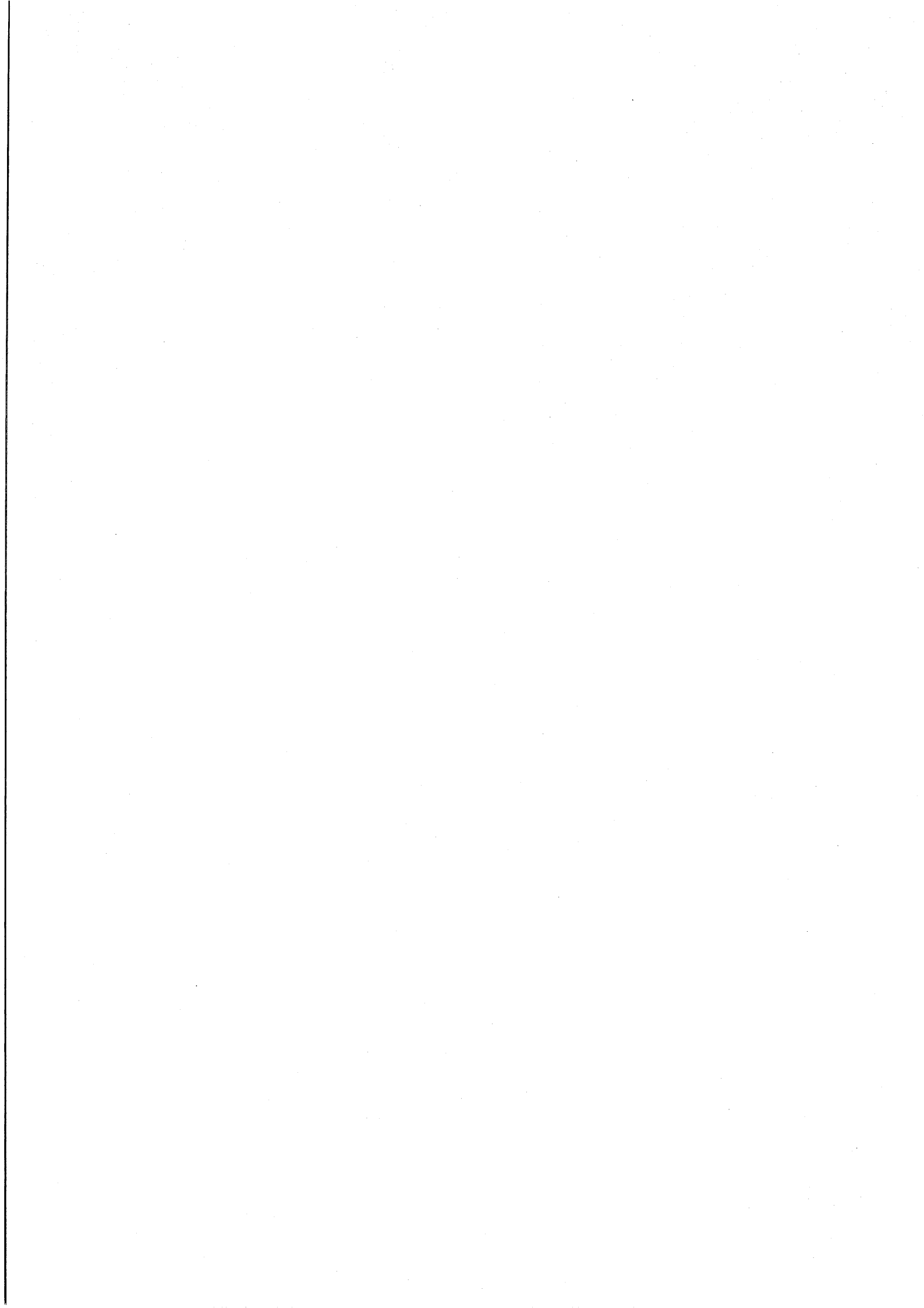
Baeyer

à Mr le capitaine Liagre,
de haute naissance,
appartenant à l'Académie
Royale des Ingénieurs...
à Bruxelles

ANNEXE 23

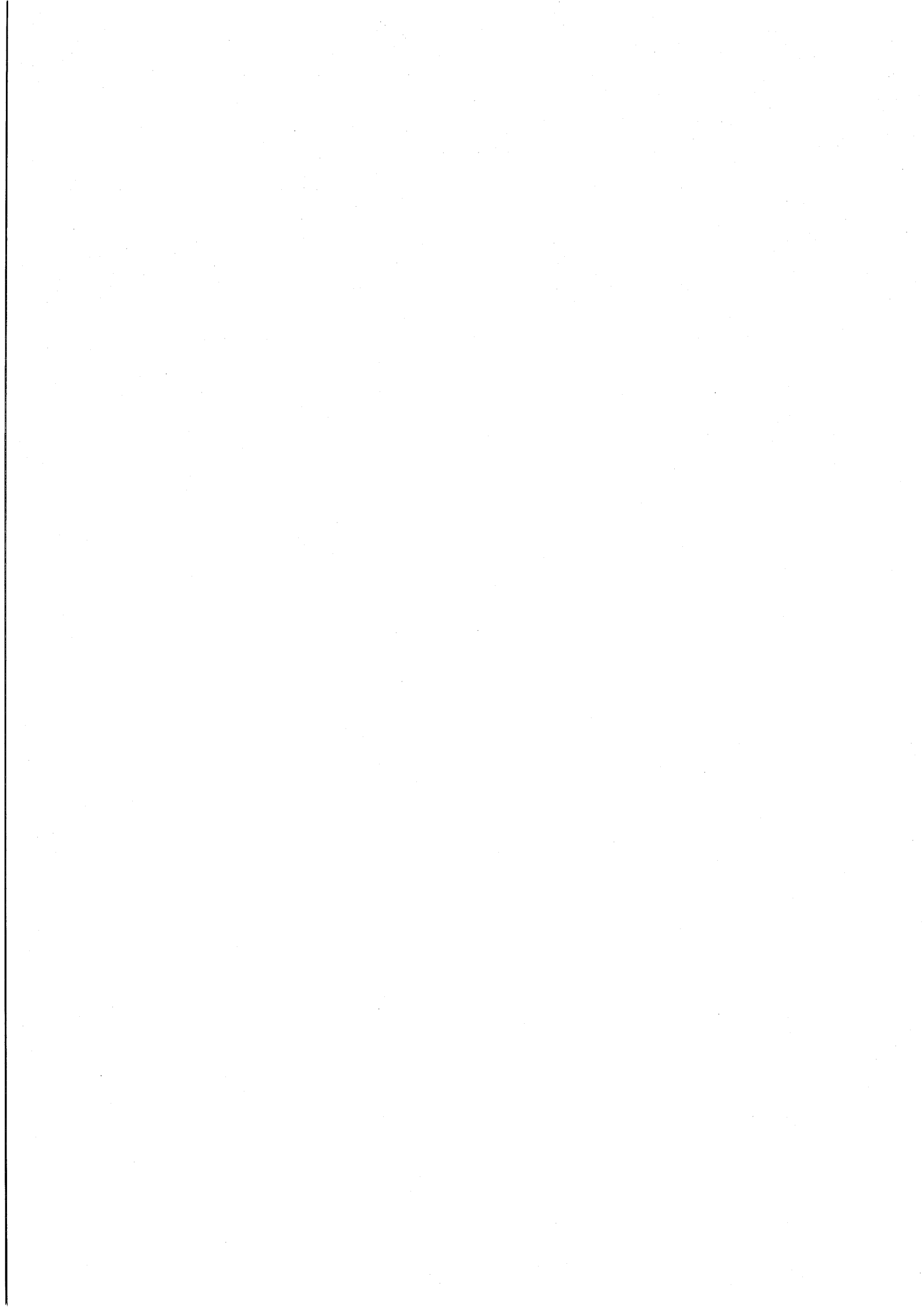
LISTE DES SOCIETES
DONT LIAGRE EST MEMBRE

Cette liste extraite du *Carnet de la Fourragère*, septembre 1863, montre, par sa longueur, la place importante de Liagre dans la vie scientifique de la Belgique.



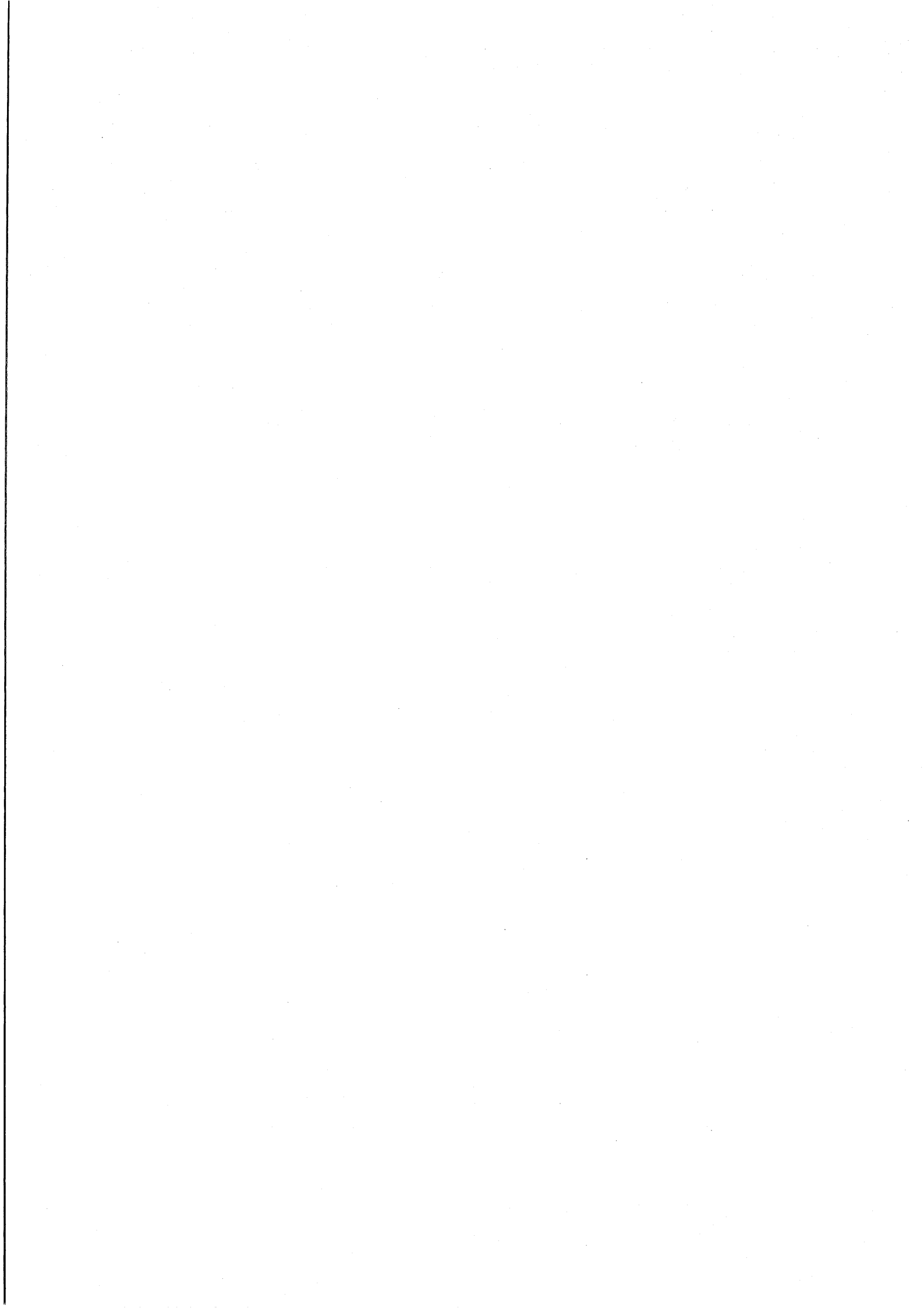
LISTE DES SOCIÉTÉS DONT LIAGRE EST MEMBRE

- Correspondant de l'Académie royale des sciences de Turin;
Membre correspondant de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Besançon (1874);
Associé honoraire de l'Académie agraire de Pésaro (id.);
Membre correspondant de la Société nationale des sciences naturelles de Cherbourg (1876);
Membre correspondant de la Société de géographie de Lisbonne (id.);
Membre honoraire de l'Institut royal grand-ducal de Luxembourg (id.);
Membre correspondant de la Société de climatologie algérienne (id.);
Membre honoraire de la Société royale historique de la Grande-Bretagne (1877);
Associé étranger du Comité central permanent de géographie du Portugal (id.);
Membre correspondant de la Société impériale et royale de géographie de Vienne (id.);
Membre honoraire de la Société de géographie de l'Est (1880);
Membre honoraire de la Société normande de géographie (id.);
Membre honoraire de la Société de géographie de Hongrie (id.);
Membre correspondant de la Société néerlandaise de géographie (1883);
Membre d'honneur de la Société de topographie de France (id.);
Membre associé de la Société de statistique de Paris (id.);
Membre correspondant de la Société de géographie de Rio-Janeiro (1884);
Membre correspondant étranger de l'Académie royale des sciences de Lisbonne (1885);
Membre honoraire de l'Institut international de statistique (id.);
Membre correspondant de la Société mexicaine de géographie et de statistique (id.);
Membre correspondant étranger de la Société de géographie de Paris (1887).



ANNEXE 24
OEUVRES DE LIAGRE

Cette liste est constituée d'après la notice biographique de J.R Leconte "Liagre" in *Biographie Nationale* publiée par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Tome XXXII, supplément Tome 4, Bruxelles, 1964. Les références sont succinctes; nous avons pu parfois les compléter.



OEUVRES DE LIAGRE

- * 1843 Ecrit anonyme sur les comètes publié dans *Le trésor historique*
 - * 1844 "Note sur les oscillations du niveau à bulle d'air". Voir *Bulletins de l'Académie* , 1844, Tome 11, 2^{ème} volume, p. 140. L'impression est ordonnée le 2 novembre.
 - * 1845 "Sur les corrections de la lunette méridienne" Mémoire présenté à la classe de Sciences de l'Académie Royale de Belgique le 11 janvier 1845 (voir *Bulletins de l'Académie* , 1845, Tome 12 , p. 86; rapports sur ce mémoire p. 451-453; imprimé dans les *Mémoires*, Tome XVIII.
 - * 1845 "Note sur une méthode propre à faire tourner la collimation d'une lunette méridienne au moyen des observations astronomiques", en réponse à une critique sur le mémoire précédent. Voir les *Bulletins de l'Académie* , Année 1849, Tome 16, tome II, 9.
 - * 1848 "Sur la détermination de l'heure, de la latitude et de l'azimut au moyen des doubles passages d'une étoile sur différents verticaux" in *Mémoires couronnés de l'Académie royale*, 1848-1849.
 - * 1850 "Note sur les points focaux de l'ellipse; Eléments de géométrie" dans *l'Encyclopédie Populaire*. Voir aussi les *Bulletins de l'Académie* , Tome 17, tome II, p. 497.
 - * 1850 "Traité élémentaire de topographie" dans *l'Encyclopédie Populaire*.
 - * 1852 Parution du livre "Calcul des probabilités et théorie des erreurs", Bruxelles, 1852; 2^{ème} édition, 1879.
 - * 1852 Liagre dépose à l'Académie, le 6 mars 1852, un mémoire constituant la plus importante application des idées émises dans l'ouvrage ci-dessus:
"Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations" (voir *Bulletins de l'Académie* , tome XIX, 1^{ère} partie, 1852, p. 405).
Un rapport est fait sur cette notice à la séance du 3 avril 1852 (voir *Bulletins de l'Académie* , tome XIX, 1^{ère} partie, 1852, p. 511-513). La note est publiée dans le même bulletin, p. 513-537.
- Il publie aussi dans les *Bulletins de l'Académie* :
- * 1852 "Sur la loi de répartition des hauteurs barométriques par rapport à la hauteur moyenne", tome XIX, 2^{ème} partie, p. 502-514.
 - * 1853 "Sur l'erreur probable d'un passage observé à la lunette méridienne de l'Observatoire de Bruxelles", tome XX

* 1853 "Sur les mesures des distances au moyen de la stadia", tome XX, 1^{ère} partie, p. 324.

* 1853 "Mémoire sur l'organisation des caisses de veuves", tome XX, p. 137-142.

* 1854 "Méthode pour déterminer la latitude par les observations multiples d'une étoile faites dans le voisinage de sa plus grande élongation"

* 1854 "Etude expérimentale sur la stadia nivelante"

* 1855 "Mémoire sur la probabilité de l'existence d'une cause d'erreur régulière dans une série d'observations", tome XXII, 2^{ème} partie, p. 9-54.

* 1855 "Sur l'aberration en azimut et en hauteur"

* 1855 "De l'influence des phases lunaires sur la pression atmosphérique"

* 1855 "Problème des crépuscules"

* 1857 "Sur la mesure de précision des observations méridiennes"

* 1859 "Sur le mouvement propre des étoiles et du soleil"

* 1859 "Recherches sur les pensions militaires"

* 1862 "Notice sur la vitesse et sur l'aberration de la lumière"

* 1862 "Des institutions de prévoyance en général et des assurances sur la vie en particulier"

Dans les *Bulletins de la Société royale de Géographie* :

* 1877 "Les sciences géographiques"

* 1884 "Les marées"

Liagre fait un grand nombre de rapports académiques sur des communications et des mémoires relatifs à la géodésie.

Il prononce des *Discours académiques* :

* 1859 *Discours sur la pluralité des mondes*

* 1861 *Discours sur la structure de l'Univers*

A la suite de ce discours, il publie en 1883 *Cosmographie stellaire*.

Il rédige pour l'Académie quatre notices biographiques, insérées dans son *Annuaire* :

* 1869 Professeur Brasseur

* 1871 "Nerenburger" in *Annuaire de l'ARB*, Tome XXXVII, 1871, p. 369-389.

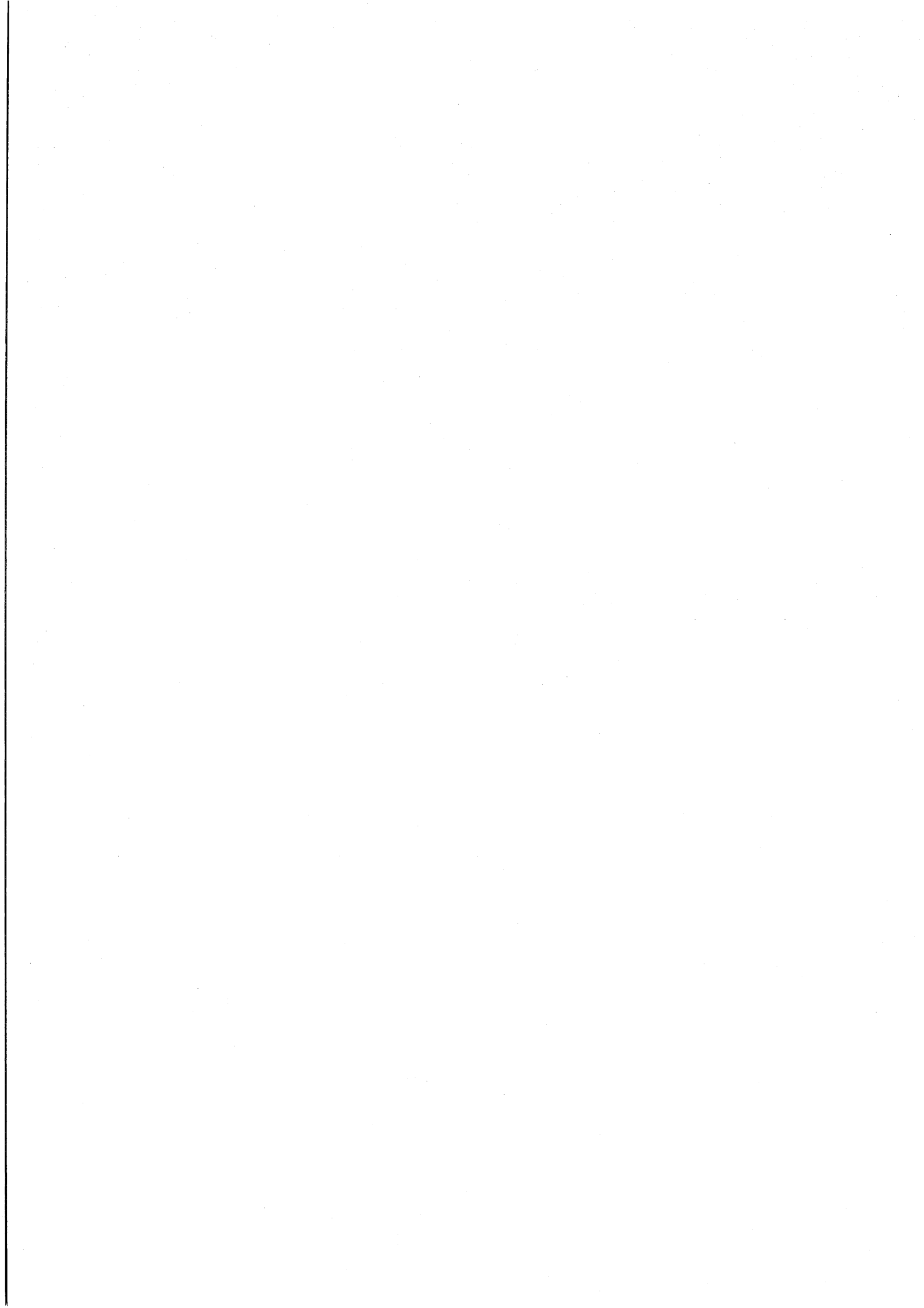
* 1883 Colonel Adan

* 1890 Houzeau

ANNEXE 25

LISTE D'OBSERVATOIRES EUROPEENS ET DE LEURS DIRECTEURS DE 1800 A 1860

Cette liste, non exhaustive, a été constituée à partir des documents lus lors de nos recherches. Elle est révélatrice des liens étroits et réguliers unissant ces différents observatoires.



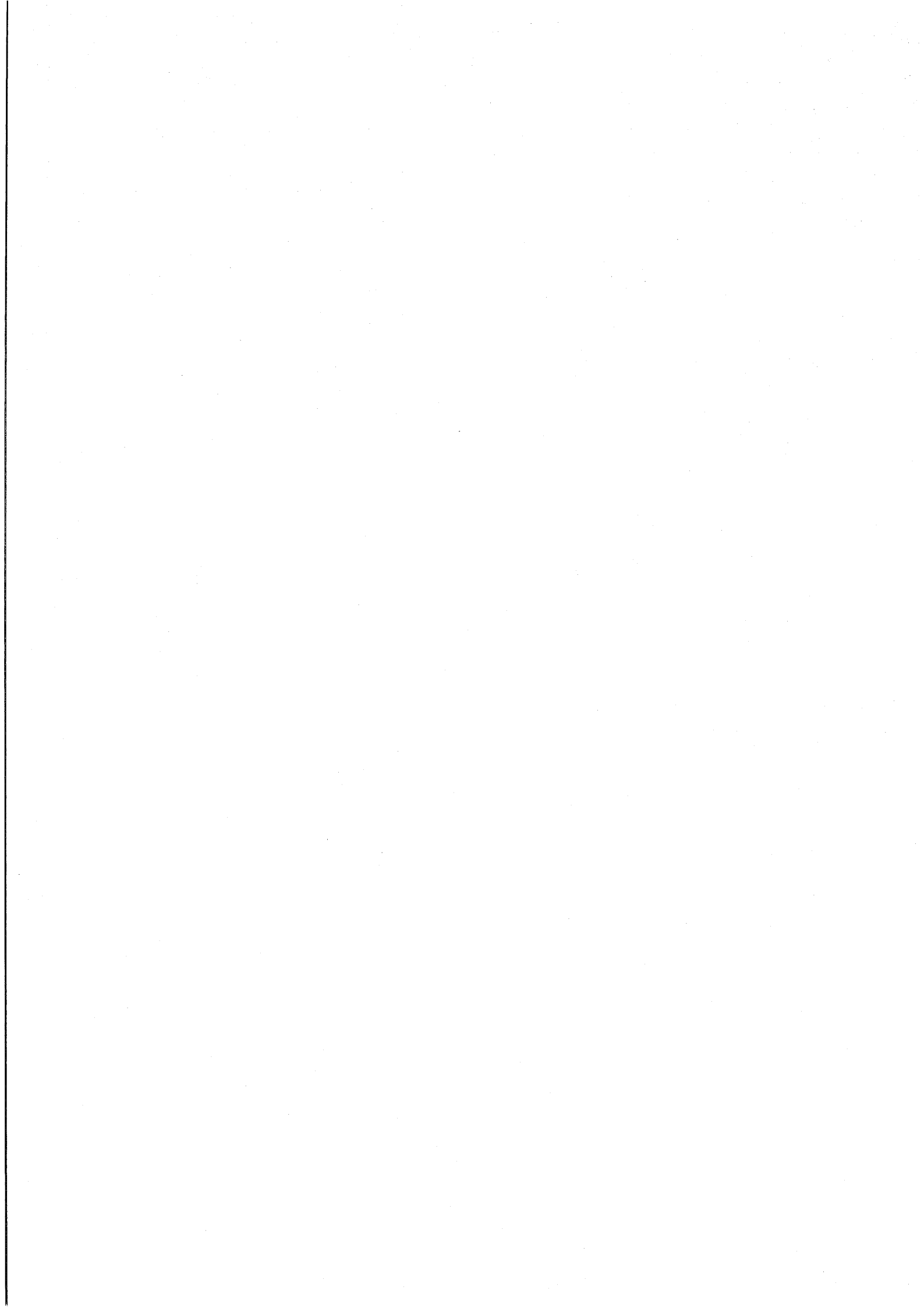
LISTE D'OBSERVATOIRES EUROPEENS ET DE LEURS DIRECTEURS DE 1800 A 1860

De par leur fonction, les directeurs des observatoires doivent, de façon régulière, entrer en relation. En particulier, la mise en place du calcul des longitudes avec l'introduction d'une nouvelle technologie tel que le télégraphe va susciter de nombreux échanges. Nous donnons à la suite de ce tableau¹, un manuscrit de 4 pages (dossier 76 de la Correspondance de A. Quetelet, ARB), montrant combien ce problème était alors à l'ordre du jour. Dans les différentes archives consultées, de nombreuses lettres traitent de ce problème.

villes	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870
Paris ²	Méchain	Delambre		Bouvard	Arago		Le Verrier	
Göttingen		Bessel	Gauss			Gauss		
Königsberg			Bessel					
Bruxelles				Quetelet				
Poulkova				W.G. Struve		W.G. Struve	O. Struve	
Dorpat		W.G. Struve						
Greenwich								
Berlin				Encke				
Bonn		Abo et Helsinki		Argelander				
Gotha				Hansen				
Naples				Cappoci				
Seeberg		Lindenau	Encke		Hansen			
Alrona			Schumacher	Schumacher				
Stockholm						Selander		
St-Petersbourg								

¹Ce tableau ne se veut pas exhaustif. Il a été constitué à partir des différentes lectures effectuées lors de nos recherches.

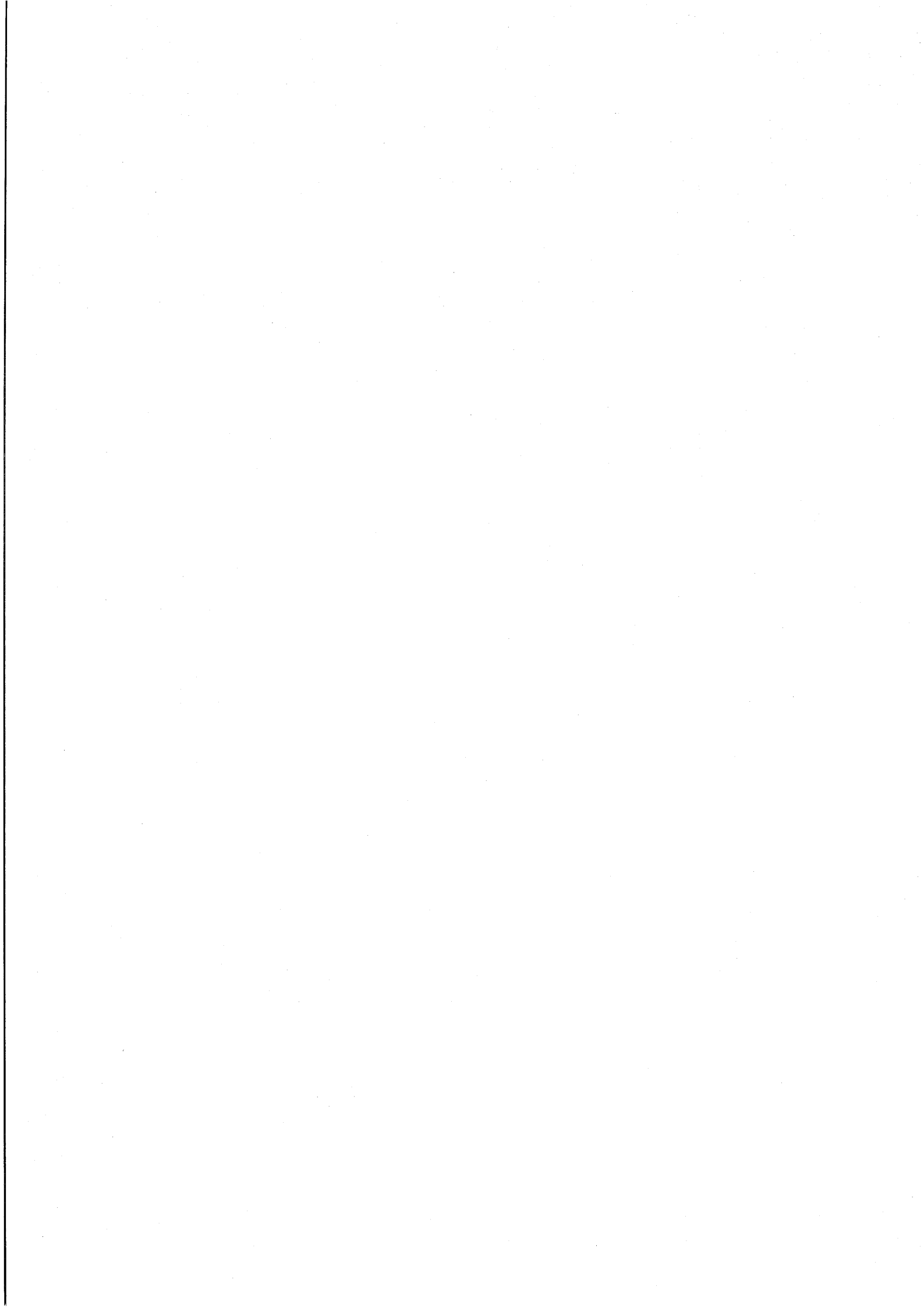
²L'Observatoire de Paris a édité en 1984 un ouvrage sur son histoire couvrant la période 1667-1963. (ISBN 2-901057-04-7). Remarquons que le 31 janvier 1854, un décret impérial nomme Le Verrier comme directeur de l'Observatoire impérial de Paris, ce qui met fin à la direction collégiale assumée depuis 1795 par le Bureau des Longitudes. (cf. p. 33).



ANNEXE 26

SEANCE DU 1ER AOÛT 1846 DE
L'ACADEMIE ROYALE DES
SCIENCES, DES LETTRES ET DES
BEAUX-ARTS DE BRUXELLES:
RAPPORT DE MEYER

Nous présentons ici les documents, contenus dans le dossier 4990 des archives de l'ARB, relatifs à la présentation d'un rapport écrit par Meyer à la suite du voyage qu'il effectue en Allemagne, courant 1846.



**Archives de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Bruxelles:
dossier 4990**

Classe des Sciences

Séance du 1^{er} Août 1846

Mr Verhuslt est prié de bien vouloir examiner le dossier de Mr Meyer sur la géodésie.

Date de l'envoi le 3 Août 46

Date du renvoi le 6 Août 46

Le secrétaire Quetelet

Mr Dandelin est prié de bien vouloir examiner le dossier de Mr Meyer sur la géodésie.

Date de l'envoi le 6 Août 46

renvoyé à Mr Verhuslt le 2-9-46

reçu le 11-9

renvoyé à Mr Dandelin le 12-9

Ce rapport de 24 pages manuscrites a pour titre:

"Rapport sur les méthodes géodésiques en usage en Allemagne par A.Meyer employé au dépôt de la guerre"

Ce rapport n'a pas été publié. On en trouve une trace dans les *Bulletins de l'ARB*, 1847, Tome 14, 1^{ère} partie, p. 279-281.

"Sur un mémoire de M. Meyer, concernant les méthodes géodésiques en usage en Allemagne "

Rapport de M. Quetelet, *Bulletin de l'ARB*, 1847, tome 14, 1^{ère} partie, p.279-281.

Mr Meyer nous apprend qu'il a reçu du gouvernement un subside pour voyager en Allemagne, et y recueillir des données sur les méthodes géodésiques suivies dans ce pays; et, en exécution de l'arrêté royal qui lui accorde ce subside, il a soumis à la classe le mémoire qui fait l'objet de ce rapport.

Une 1^{ère} partie de ce travail, est consacrée à faire connaître sommairement:

*l'instrument universel,
le théodolite astronomique,
le théodolite géodésique,
et l'héliotrope.*

On conçoit que, malgré les soins de l'auteur, de pareilles descriptions, dépourvues de dessins, sont toujours très difficiles à saisir, excepté pour les personnes familières avec le maniement des instruments d'astronomie et de géodésie.

Une seconde partie présente des renseignements sur les appareils employés par les géomètres allemands pour la mesure d'une base. Ces renseignements concernent particulièrement la base bavaroise, mesurée par Lämmlé en 1819; la base de Finlande mesurée par Struve en 1827; la base prussienne mesurée par Bessel en 1835 et enfin la base de Seeberg et la petite base de Spire mesurée par Schwert.

Dans une 3^{ème} partie, Mr Meyer parle des signaux et des stations. Il fait remarquer que pour le choix des stations, les observateurs allemands s'astreignent surtout à ces conditions:

1°) d'établir leurs instruments sur le sol, sans faire usage de tours ou de charpente.

2°) de voir du point de la station le plus grand nombre possible d'autres points. Les signaux sont donnés autant que possible par l'héliotrope.

Un 4^{ème} et 5^{ème} chapitre sont destinés à faire connaître les méthodes d'observation et les méthodes de calcul. Ainsi, dans la mesure des angles, les observateurs allemands accordent moins de confiance que les français à la prétendue précision indéfinie qu'on obtient par les instruments répétiteurs; et, dans les calculs, ils ont toujours soin d'estimer la valeur de leurs résultats, en les soumettant à l'appréciation du calcul des probabilités.

Les renseignements que Mr Meyer donne, ont été surtout recueillis à Marbourg et à Bonn, dans les conversations de MM Gerling et Argelander.

Mr Meyer, dont nous apprécions tout le mérite, a su mettre à profit l'expérience de ces savants distingués. Il est fort à regretter que l'état de sa santé et la modicité du subside qui lui a été accordé ne lui ait pas permis de pénétrer plus avant en

Allemagne, et de prendre des renseignements sur les lieux même où les opérations ont été exécutées.

Cependant les notes qu'il nous communique prouvent amplement qu'il a su faire un excellent emploi de son temps, et qu'il a bien répondu à la confiance que le gouvernement lui a témoignée. Chargé de travaux géodésiques au Dépôt de la Guerre, il était pour lui de la plus grande importance d'avoir des relations avec des savants de mérite qui avaient été chargés de semblables travaux.

Je propose donc que la classe remercie Mr Meyer pour son intéressante communication, et lui donne acte qu'il a convenablement répondu à la confiance du gouvernement."

Les 2 autres commissaires MM Verhulst et Devaux approuvent.

Lettre de Meyer en date du 1^{er} Août

Monsieur

Je ne sais pas si je dois remettre directement mon rapport à l'Académie ou si je dois d'abord l'envoyer au ministère de l'intérieur. Je suis venu pour avoir "... " et l'avis de Mr Quetelet, lui annoncer mon retour et lui faire des compliments de la part de Mr Argelander.

Recevez

Meyer

Lettre de Verhulst non datée

Les méthodes géodésiques ne sont point de ma compétence. D'autres membres sont beaucoup mieux à même que moi de juger le travail de Mr Meyer, entre autre MM Quetelet et Thiry.

Verhulst

Sur la même lettre est ajouté un mot de Dandelin:

Je ne sais pas pourquoi précisément mon confrère et ami commun se réfuse et sur la discussion actuelle, en fait de géodésie, tous les hommes qui ont son mérite ont en même temps tout ce qu'il faut pour apprécier les bonnes méthodes, et cela est d'abord vrai dans un genre de travail où se rencontre tant de point "... et applications du calcul des probabilités.

Je tiens à ce que Mr Verhulst reste rapporteur, et je suis sûr que ces lumières savantes sont ici d'une grande utilité: pour mon compte, nos longues absences, ma mauvaise santé, et le travail dont je suis accablé pour quelques semaines encore, ne nous rendent plus guère capable d'autre chose que d'opiner du bonnet quand notre Verhulst aura fait son réquisitoire.

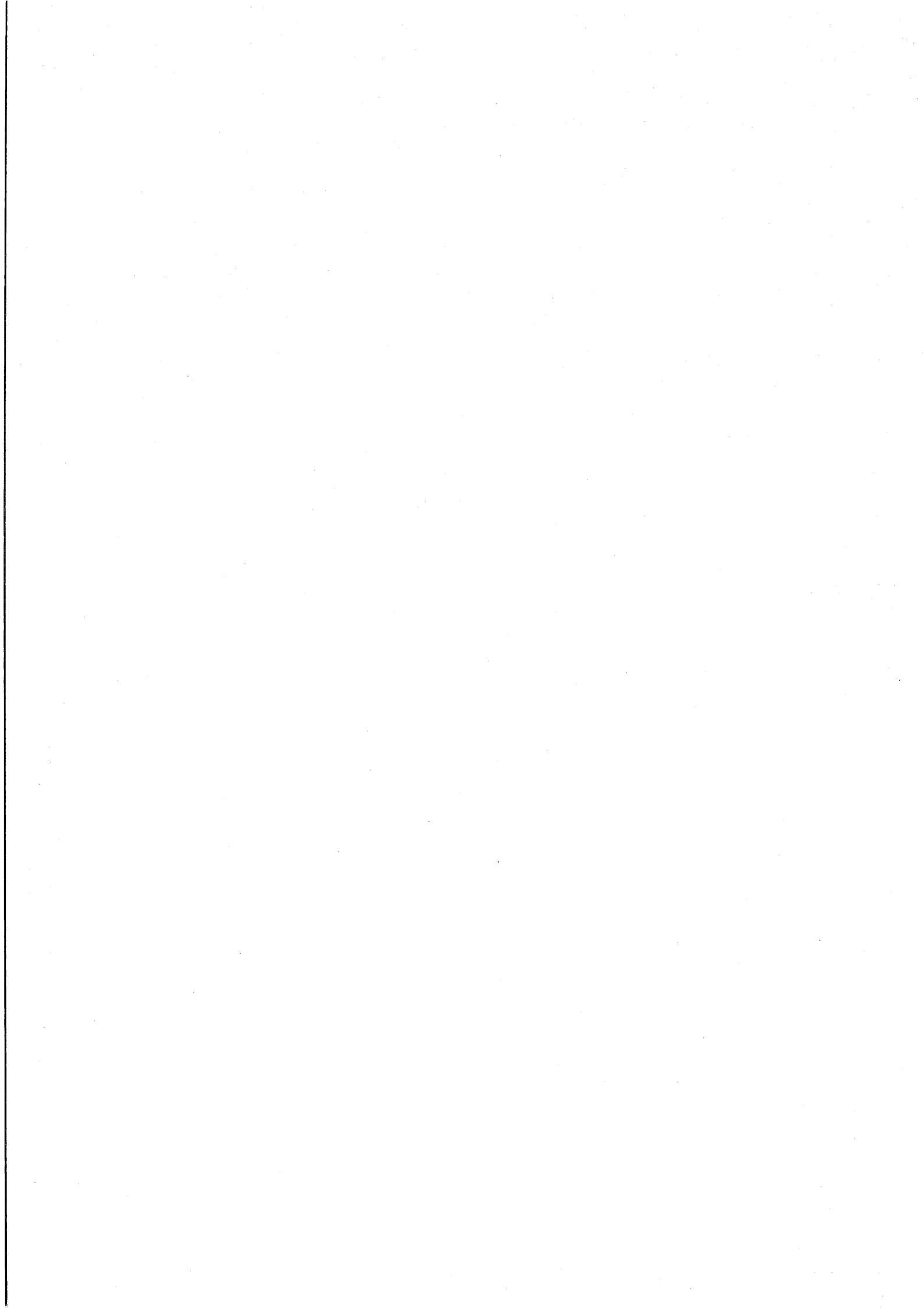
Dandelin

ANNEXE 27

RAPPORT DE MEYER DOSSIER 4990 DE L'ARB

Au retour de son voyage en Allemagne, Meyer écrit un rapport. Celui-ci, présenté à l'Académie Royale de Bruxelles le 1^{er} Août 1846, n'a jamais été publié. Meyer enquête sur les méthodes géodésiques allemandes et nous livre les résultats de ses investigations. Ce rapport est un élément important, ouvrant en Belgique une période de réflexion sur les méthodes à adopter en vue d'établir une nouvelle carte du Royaume.

Nous avons fait le choix de laisser intact l'orthographe rencontrée dans ce rapport. Nous avons ajouté des notes, permettant de replacer les propos de Meyer dans le contexte de l'époque ou apportant des précisions sur les remarques de Meyer, ainsi qu'un index des noms de lieux et de personnages cités dans ce rapport.



Messieurs

L'arrêté qui m'accorde un subside pour voyager en Allemagne, afin d'y recueillir des données sur les méthodes géodésiques suivies dans ce pays, m'impose l'obligation de faire, à l'Académie, lors de mon retour un rapport sur ces méthodes; je viens, Messieurs, remplir cette obligation, en soumettant à votre savante appréciation le travail ci-joint.

J'y considère successivement les instruments en usage, les principaux appareils employés par divers géomètres pour la mesure des bases; les signaux, les méthodes d'observation et de calcul. Je finirai par une conclusion qui aura pour but de résumer les points principaux qui font de la géodésie des géomètres allemands, une géodésie nouvelle, plus rigoureuse que celle en usage dans d'autres pays. Il est à regretter que les méthodes dont il s'agit soient si peu connues, et surtout si peu suivies chez d'autres nations; peut-être, au moins, le faible travail avoir l'avantage d'en donner une idée aux personnes instruites de mon pays.

J'ai l'honneur de prier l'Académie de vouloir bien considérer que ce travail n'est qu'un rapport et que sous ce point de vue elle ne doit pas attendre des développements circonstanciés, que l'on ne peut donner que dans un traité complet sur la matière. Je regrette même que je ne puisse indiquer que très sommairement un point de doctrine, qui a principalement été mis à l'ordre du jour de mon voyage, et pour l'éclaircissement duquel j'ai trouvé dans M^r le professeur Gellin de Marsbourg un homme aussi obligeant qu'il est profondément instruit.

Ce qui reste, mon intention est de recueillir pour l'usage du dépôt de la Guerre, sous forme d'instructions, plusieurs matières non développées dans ce rapport, et de traduire pour usage de la même institution des documents, que quelques savants de l'Allemagne ont eu l'obligeance de me confier temporairement. J'ose espérer que ces instructions, et ces traductions, formeront le complément de ce rapport, faciliteront la propagation des méthodes allemandes chez nous, et par suite vers l'Occident de l'Europe.



RAPPORT DE MEYER

Messieurs

L'arrêté²⁰ qui m'accorde un subside pour voyager en Allemagne, afin d'y recueillir des données sur les méthodes géodésiques suivies dans ce pays, m'impose l'obligation de faire, à l'académie, lors de mon retour un rapport sur ces méthodes; je viens, Messieurs, remplir cette obligation, en soumettant à votre savante appréciation le travail ci-joint.

J'y considère successivement les instruments en usage, les principaux appareils employés par divers géomètres pour la mesure des bases; les signaux, les méthodes d'observation et de calcul. Je finirai par une conclusion qui aura pour but de résumer les points principaux qui font de la géodésie des géomètres allemands une géodésie nouvelle, plus rigoureuse que celle en usage dans d'autres pays²¹. Il est à regretter que les méthodes dont il s'agit soient si peu connues, et surtout si peu suivies chez d'autres nations; puisse, au moins, ce faible travail avoir l'avantage d'en donner une idée aux personnes instruites de mon pays²².

J'ai l'honneur de prier l'académie de vouloir bien considérer que ce travail n'est qu'un rapport et que sous ce point de vue elle ne doit pas attendre des développements circonstanciels, que l'on ne peut donner que dans un traité complet sur la matière. Je regrette même que je ne puisse indiquer que très sommairement un point de doctrine, qui a principalement déterminé mon voyage²³, et pour l'éclaircissement duquel j'ai trouvé

²⁰Meyer reçoit du gouvernement belge un subside pour effectuer un voyage en Allemagne (lettre du 1^{er} Août 1846 dossier 4990 ARB). Léopold 1^{er} est alors Roi de la Belgique, pays indépendant depuis le 4 octobre 1830. Meyer, à cette date, est professeur à l'Université de Bruxelles et employé comme calculateur au Dépôt de la Guerre dirigé par le Général Nerenburger depuis le 22 décembre 1845. On peut supposer que cette mission lui est confiée en tant que membre de la Commission instituée par ordre royal du 9 février 1846 pour l'examen des triangulations d'avant 1830. Quetelet est président de cette commission. Je pense que ce voyage a eu lieu entre début avril et fin juillet (Bessel est décédé le 17 mars et le rapport est remis à l'Académie le 1^{er} Août). Cette commission se réunit les 31-7, 21-8, 28-8, 19-9, 17-11-46. Meyer et Nerenburger refont les calculs relatifs à la triangulation d'Erzey en septembre et octobre 46 (cf. dossier 467 Correspondance de Quetelet et Brouillart)

²¹Meyer fait sans doute allusion ici à la France. La Belgique était sous le régime français de 1795 à 1815 puis elle a fait partie du Royaume des Pays-Bas de 1815 à 1830. Plusieurs triangulations (Tranchot 1804, Crayenhoff ou Krayenhoff 1811 ...) sont réalisées avec les méthodes françaises, méthodes utilisées par Delambre et Méchain lors de la mesure de la Méridienne de Dunkerque à Barcelone entre 1792 et 1799. Ce sont ces méthodes qui étaient enseignées à l'Ecole Militaire Belge, école dont le premier directeur en 1831 est Chapelié, ancien élève de l'Ecole Polytechnique. Nerenburger, ancien élève de St-Cyr, école royale militaire française, connaît aussi parfaitement ces méthodes.

²²Ce rapport sera soumis à la lecture de Verhulst, Nerenburger, Dandelin, Quetelet. (dossier 4990 ARB)

²³Meyer veut parler ici de la méthode des moindres carrés.

dans M^r le professeur Gerling²⁴ de Marbourg un homme aussi obligeant qu'il est profondément instruit.

Au reste, mon intention est de rédiger pour l'usage du Dépôt de la Guerre, sous forme d'instructions, plusieurs matières non développées dans ce rapport, et de traduire pour la même institution des documents, que quelques savants de l'Allemagne ont eu l'obligeance de me confier temporairement²⁵. J'ose espérer que ces instructions et ces traductions, formant le complément de ce rapport, faciliteront la propagation des méthodes allemandes chez nous, et par suite vers l'occident de l'Europe.

Des Instruments

Nous considérerons successivement les instruments suivants : l'instrument universel; le théodolite astronomique; le théodolite géodésique; et l'héliotrope.

a) Instrument universel

M^r Argelander²⁶ a eu la complaisance de me montrer cet utile et encyclopédique instrument. Il est décrit en détail, et gravé sur plusieurs planches dans un ouvrage de M^r Struve²⁷, que j'avais entre les mains à la bibliothèque de Bonne, et qui a pour titre Breiten-Gradmessung in den Ostsee-provinz Russlands; (2 vol. in fol.). Son nom d'universel provient sans doute, de la multiplicité des fonctions qu'il sait remplir. On s'en

²⁴Gerling (1788-1864) Christian Ludwig, astronome allemand, un des derniers étudiants de Gauss.

²⁵Meyer a-t-il écrit pour le Dépôt de la Guerre les notices dont il parle?

Dans ses diverses biographies, il est signalé l'ouvrage suivant:

Cours de Géodésie Bruxelles, 1845, in-fol, II-134 pages Autographié.

Meyer a en effet donné des cours aux officiers détachés au Dépôt de la Guerre entre 1840 et 1849, date à laquelle il est nommé professeur à l'Université de Liège. Ce cours est écrit avant son voyage en Allemagne. (voir partie A III). De son voyage, il ramène un exemplaire de *Gradmessung in Ostpreussen* de Bessel, 1838. En a-t-il traduit certains passages comme il le laisse entendre? J'ai retrouvé deux thèses de 1848 et 1851 utilisant les documents qu'il cite à la fin de ce rapport: 1) Thèse de Lambert Bouvier, écrite sous sa direction en 1848 *Dissertation sur la théorie des moindres carrés*, soutenue à la faculté des sciences de l'université de Bruxelles 2) Thèse de P-E Biver *Théorie des moindres carrés établie par l'analyse pure* en 1851. D'autre part, Liagre signale dans son ouvrage de 1853 intitulé *Calcul des probabilités*, qu'il a traduit des passages tirés du livre *Die Ausgleichungs des praktischen Géométrie* 1843 de Gerling. Ces quelques remarques attestent d'une diffusion des méthodes allemandes suite à ce voyage, en Belgique puis en France. Faye, dans le cours de Géodésie qu'il donne à l'École Polytechnique en 1855-56 (voir Archives de cette école) évoque à plusieurs reprises la tradition allemande au paragraphe "Théorie des erreurs".

²⁶Argelander, Friedrich Wilhelm August (1799-1875), astronome allemand, directeur des observatoires d'Abo et Helsingfors puis professeur à l'université de Bonn en 1837 et directeur de l'observatoire de cette ville.

²⁷Struve (1793-1864) Friedrich Georg-Wilhelm, astronome russe, directeur de l'observatoire de Dorpat, puis de Poulkovo. L'ouvrage cité par Meyer date de 1831.

sert pour mesurer des angles horizontaux et verticaux; pour les observations d'azimuth; pour les déterminations de temps et de latitude; il peut servir comme instrument de passage, et en cette qualité il devient propre à rendre tous les services qui entrent dans les attributions de cet instrument; celui que j'ai vu donne les secondes; il se transporte facilement, et devient par là très propre pour les besoins des opérations géodésiques²⁸. M^r Struve s'en est servi presque exclusivement dans ses opérations en Russie, qui avaient pour but la mesure d'un arc de méridien, dans les provinces orientales de cet empire²⁹. M^r Ertel³⁰ de Munich, qui fabrique ces instruments, en fournit à des prix divers, de 1600 fl., 1000 fl., 750 fl., 525 fl., et même à 400 fl. Ces instruments, comme tous ceux de M^r Ertel, se distinguent par l'étonnante précision de la division des limbes³¹, et la grande force des lunettes. les verres optiques de tous les instruments sortent des ateliers si célèbres de MM. Utsschneider et Fraunhofer de Munich³².

L'instrument universel considéré dans son ensemble, ne ressemble pas mal à un obusier montée sur son affut. Les pièces principales sont : a) deux cercles verticaux aux extrémités d'un axe horizontal qui porte une lunette mobile autour de cet axe; b) un cercle horizontal avec sa lunette d'épreuve; c) un trépied au dessous duquel se trouve le cercle azimuthal. d) niveaux, microscopes, etc comme dans tous les instruments³³. Quoique cet instrument semble au premier abord très compliqué, néanmoins on m'a affirmé que son usage était simple, mais, il exige deux observateurs pour le gouverner.

²⁸Lors des opérations géodésiques, divers types de mesure sont faites: des mesures géodésiques (angles horizontaux intervenant dans les triangles formant une triangulation) et des mesures astronomiques (angles verticaux, azimut, latitude permettant de positionner la triangulation). L'instrument universel présente l'avantage de pouvoir réaliser ces différentes mesures, puisqu'il est à la fois un cercle méridien et un théodolite.

²⁹Ces opérations se déroulèrent de 1822 à 1827.

³⁰Il a construit un grand théodolite de 15 pouces qui servit à Bessel et Baeyer pour la triangulation de la Prusse orientale et pour le levé du littoral de la mer Baltique. Cet instrument donnait directement les 2 secondes.

³¹Le limbe est une couronne circulaire sur laquelle est portée la graduation angulaire d'un instrument de mesure, soit en degré, soit en grade, suivant les modèles. D'abord divisé à la main de façon imparfaite, avec les progrès de la mécanique de précision, Reichenbach et Gambey font vers la fin du premier quart du XIX^{ème} siècle des essais pour graver les divisions sur le limbe avec une machine à diviser les cercles, ce qui diminue considérablement les erreurs dues à la gravure.(cf. Daumas, cité note 21).

³²L'optique allemande connaît un développement très important au début du XIX^{ème} siècle; les instruments d'astronomie et de géodésie bénéficient aussitôt de ces progrès remarquables. En particulier, les progrès faits dans la fabrication du verre d'optique et du bon flint-glass homogène permettent la construction de lentilles achromatiques d'un diamètre de plus en plus grand et améliorent ainsi les observations par lunettes. Fraunhofer Joseph (1787-1826), opticien et physicien allemand monte en 1824 une lunette de 24 cm d'ouverture à l'observatoire de Dorpat dirigé par Struve. La découverte des lunettes achromatiques revient à John Dollond en 1758.

³³Quetelet, dans son rapport sur le travail de Meyer, lui reproche l'absence de schéma qui aurait pu aider à la compréhension des avantages de ces instruments (dossier 4990 ARB).

b) Théodolithe astronomique

On s'en sert dans les observations terrestres d'angles horizontaux et verticaux, et aussi pour tous les besoins astronomiques en géodésie, de là son nom. M^r Struve, Tom I pag. 41 de l'ouvrage cité, donne la description de cet instrument, et la manière de le rectifier. Celui dont il s'est servi dans ses opérations avait 8 po. et donnait 10', le vertical en avait 5, et donnait 1'. M^r Ertel vend les instruments de cette dimension 736 fl., et 600 fl., ils sont accompagnés d'un cercle azimuthal de 4 po. Ils ont 3 lunettes, dont les 2 principales ont des objectifs acromatiques de 15 lignes d'ouverture. J'ai vu chez M^r Gerling un cercle de cet espèce; comme la construction des théodolithes³⁴ est universellement connue, je m'abstiendrai d'entrer en d'autres détails.

Cependant, avant de quitter ce sujet je dois dire un mot du théodolithe astronomique dont feu M^r Bessel³⁵ s'est servi dans ses opérations géodésiques dans la Prusse orientale (: voir son ouvrage : Gradmessung in Ostpreusen , Berlin 1838 un Vol. in 4° :). Ce théodolithe a été construit par Ertel d'après les dessins de M^r Schumacher³⁶ : il est de 0^T, 2326 élevé au dessus de son pied, il a 15 po., le vertical en a 8; il donne 2". Les lunettes sont acromatiques, munies d'un réticule à 4 fils en croisé; leur tube, afin d'en empêcher la courbure, est formé de 2 cônes tronqués qui se joignent par leur grande base. M^r Bessel s'en est servi pour les observations terrestres de ses triangles principaux, et dans toutes les observations astronomiques qu'exigeaient ces opérations. J'ai demandé à M^r Argelander des renseignements sur ce précieux instrument; il n'a pas su m'en donner de très précis, car il me disait ne pas l'avoir vu; il ajoutait qu'il croyait que M^r Repsold³⁷ de Hambourg l'avait construit, ce qui cependant est contraire à ce que je lis p.61 de l'ouvrage cité³⁸. M^r Bessel dit aussi, en cet endroit, qu'un des avantages principaux de cet instrument consistait dans la facilité avec laquelle on en obtenait les distances zénithales. Il ne l'a jamais employé comme instrument répéteur, il a trouvé qu'il était plus avantageux de le faire servir à l'observation des angles simples. Je donnerai bientôt un résumé sur ce que j'ai pu recueillir, touchant la question de la répétition des angles par plusieurs arcs consécutifs³⁹.

³⁴Le premier théodolithe est sans doute construit par l'anglais Leonard Digges. Il est décrit par son fils Thomas dans *A geometrical practical treatise named pantometria*" Dans ce type d'instrument, les angles sont réduits à l'horizon. Ramsden (1730-1800) y ajoute le micromètre.

³⁵Bessel Friedrich (1784-1846) astronome allemand.

³⁶Schumacher Henri-Christian (1780-1850) astronome danois.

³⁷Repsold, directeur d'une firme.

³⁸Voici une traduction du passage évoqué: "De loin la plus grande partie des mesures d'angles a été faite avec un théodolithe de 15 pouces de diamètre fabriqué à Munich par Mr Th. Ertel"

³⁹Voir page suivante de ce rapport.

c) Théodolithe géodésique

M^r Gerling m'a fortement recommandé les théodolites à 12 po. . M^r Ertel les fabrique au prix de 800 fl. Ils sont très transportables et d'une construction parfaite : M^r Gerling s'en est constamment servi dans ses opérations géodésiques de la Hesse électorale (voir son ouvrage : Beiträge zur geographie Kurhessens, 2 vol. in 8°); il m'a dit qu'il ne voudrait jamais faire usage d'un autre instrument pour des opérations de cette nature. Il m'a cité un exemple remarquable pour prouver la force des lunettes de cet instrument; En pointant d'Ober-Reilig, sur le signal bavarois placé au Taufstein, extrémités d'un côté d'un triangle du 1^{er} ordre, il lui a semblé que l'axe de la perche qui supportait la mire, n'était pas verticale, conjecture qui s'est réalisé quand il s'est transporté à la station de Taufstein. Le cercle horizontal donne 4"; il a 4 verniers; le vertical de 6 po. n'en a qu'un seul, et donne 1 minute. La lunette principale (: la lunette rompue :) est achromatique, le champ du foyer est de 13 po. ; elle a 15 lig. d'ouverture. On peut s'en servir comme instrument répétiteur ou comme instrument simple. C'est ici le lieu d'examiner sommairement la valeur de la méthode par répétition dans le sens de Tobie Mayer⁴⁰, inventeur de la méthode, et de Borda⁴¹, qui a crée le cercle répétiteur; voici ce que j'ai appris à cet égard en Allemagne.

Notice sur la méthode par répétition

M^r Borda, en profitant d'une idée de Tobie Mayer a fait construire le 1^{er} instrument parfait basé sur le principe de répétition d'un même angle par des arcs gradués consécutifs. Aussi, les cercles de Lenoir ont-ils jouit, pendant près d'un quart de siècle, d'une vogue alors justement méritée. Car avant que M^r Reichenbach⁴², ne soit parvenu à donner à la division des limbes gradués l'étonnante précision qu'ils ont aujourd'hui, la répétition, dans l'instrument de Borda, a utilement suppléée à l'imperfection des limbes gradués de son époque. Son instrument a alors rendu de grands services à la géodésie⁴³. Cependant plusieurs personnes pensent encore que la précision, à laquelle on arrive avec

⁴⁰Tobie Mayer, astronome allemand, publie en 1752 la méthode de répétition pour mesurer les angles. Il substitue au quart de cercle un cercle entier et imagine de répéter plusieurs fois la même observation sur le cercle sans revenir à zéro; puis, il effectue une moyenne pour trouver la valeur de l'angle mesuré.

⁴¹En 1784, le navigateur français Borda comprend l'avantage du procédé de Mayer et fait exécuter un cercle répétiteur par le constructeur Lenoir. Ce cercle nécessite une réduction à l'horizon et donne la lecture à 1' près. Pour plus de détails, cf. *Les instruments scientifiques aux 17^{ème} et 18^{ème} siècles* de Daumas, Paris, 1953, p. 243 et *Base du système métrique* de Delambre, Paris, 1806, tome II, p. 160-169.

⁴²Reichenbach, Carl Ludwig (1788-1869) industriel allemand aura pour successeur Ertel.

⁴³C'est avec cet instrument que deux astronomes français, Delambre et Méchain effectuent la mesure de l'arc de méridien entre Dunkerque et Barcelone de 1792 à 1799 en vue d'établir le mètre étalon.

cet instrument, est indéfinie et en raison du nombre des répétitions⁴⁴. Ceci est une erreur; car la répétition ne peut conduire qu'à une précision permise par les causes constantes d'erreurs de l'instrument⁴⁵; une fois arrivé à cette limite, qu'on ne saurait dépasser, les résultats restent stationnaires, ou du moins ne font qu'osciller dans une très petite étendue, autour de cette limite, et les répétitions ultérieures ne sont que du temps et de la peine perdus. C'est aussi par ce fait que je me rend compte de la possibilité que deux séries d'un même angle, observé par répétition, peuvent conduire à la même valeur finale, ou à 2 valeurs qui ne diffèrent presque pas entre-eux. J'ai eu occasion de parler de ce dernier fait à quelques savants, ils ont approuvé mon interprétation, tout en ajoutant que des causes éventuelles propices pourraient entrer aussi pour beaucoup dans la production de ce fait⁴⁶.

Quelque fut la vogue du cercle répéteur, il était néanmoins des artistes contemporains, qui n'ont jamais voulu accepter la souveraineté du principe répéteur, et dans ce cas se trouvait le célèbre artiste Troughton⁴⁷ de Londres. Il a préféré substituer à ce principe, celui de mesurer le même angle, par divers arcs non consécutifs du limbe gradué; il a appliqué ce principe à ses instruments astronomiques, au moyen d'un mouvement particulier des lunettes. M^r Reichenbach de son côté n'a jamais ajouté une confiance entière au même principe. Il s'est appliqué à perfectionner la division des limbes, et quand il fut arrivé à la précision qu'on loue généralement dans la division de ses instruments, il a abandonné la méthode par répétition dans les grands instruments. On ne connaît pas les motifs pour lesquels il l'ait conservé dans les théodolites à petits diamètres. Car des expériences de M^r Struve (page 75 et suiv. T.I de l'ouvrage cité) prouvent que, même pour un théodolite de 8 po. la perfection du limbe gradué est telle, que l'erreur probable commise à la lecture des verniers, ne pouvait surpasser 1", erreur bien au dessous? des 10" que donnent immédiatement les verniers de cet instrument. Pour se faire une idée de la précision des instruments de Munich, je citerai les expériences que Bessel a faites pour estimer les erreurs dans la graduation de son cercle d'Ertel de 36

⁴⁴Plusieurs traités de géodésie laissent effectivement croire que l'on peut atténuer indéfiniment les erreurs de division. Ainsi, *Le Cours d'Astronomie de l'Ecole Polytechnique* de Faye, 1881 contient encore une telle affirmation. Signalons, par contre, que Cournot, dans *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* de 1843, est d'un avis contraire: "on ne peut pas dépasser un certain degré de précision, quel que soit le nombre des mesures particulières que l'on fait concourir à la détermination de la moyenne;" p.165 de la réédition par B. Bru parue chez Vrin en 1984.

⁴⁵Parmi les causes constantes, citons le jeu des axes augmentant par l'usure.

⁴⁶Cette remarque souligne peut-être les compensations possibles dans les erreurs de pointé. Quelle valeur accorder alors aux moyennes?

⁴⁷De nombreux instruments d'astronomie sortent de la firme anglaise Troughton et Simms. Ainsi, en 1827, Quetelet ramène de Londres une boussole d'inclinaison, pièce unique; en 1836, il achète une lunette méridienne portative (voir le catalogue de l'exposition "Ces reflets de la Belgique" 1980)

po. Il résulte de ces expériences que l'erreur de la moyenne de 4 divisions, distantes entre elles d'un quadrant, est au dessous de 1/3000 de ligne⁴⁸.

Voyons maintenant quelles sont les circonstances qui peuvent menacer la bonté des observations obtenues par répétition.

Le but de la méthode par répétition consiste à réduire, par la mesure d'arcs successifs, l'erreur due à la division et à la lecture à une partie, marquée par le nombre des répétitions. Or l'on voit que pour atteindre ce but, il faut que le mécanisme de l'instrument satisfasse à une condition indispensable; il faut que le mécanisme soit tel que le commencement de chaque nouvel arc coïncide exactement avec la fin de l'arc précédent⁴⁹. Or voici les circonstances qui rendent cette continuité impossible; il s'agit du théodolite répétiteur.

En premier lieu, pour que la continuité, dont il est question se réalise, il faut que les 2 limbes, (:intérieur et extérieur:) invariablement liés entre-eux par la vis de pression, rétrogradent ensemble de l'arc donné, sans que, dans cette marche, ils ne puissent changer de position entre-eux. Il faut ensuite que la lunette inférieure avance, dans le sens contraire, d'une quantité égale à l'arc donné, en tournant autour de l'axe du limbe extérieur, avec lequel axe elle est liée invariablement; examinons maintenant les effets que doivent produire ces deux mouvements. La 1^{ère} de ces deux rotations, en vertu de la force centrifuge qu'elle fera naître, tend à faire séparer le limbe extérieur du limbe intérieur, en lui imprimant une vitesse plus grande qu'à celui-ci. La 2^{ème} de ces rotations imprime au limbe extérieur une tendance à tourner en sens contraire. Ces deux tendances, dans le cas où elles ne se fassent équilibre, ce qui n'arrive pas en général, doivent produire, dans les deux limbes, un déplacement relatif quelconque, dans le cas où les deux limbes ne sont pas, d'une manière absolue, invariablement liés entre-eux. Or cette circonstance ne saurait avoir lieu; car au point même où la vis sert les 2 limbes, la réaction de l'élasticité du limbe, contre la force morte de la vis pressante, met un obstacle à une liaison parfaite.

En second lieu, en tournant la lunette inférieure, l'axe à laquelle elle est liée se déplace un peu, à cause du jeu qui se trouve au centre, or ce changement d'excentricité de l'axe doit produire un petit déplacement dans le limbe extérieur.

⁴⁸A titre comparatif, en septembre 1787, lors des opérations géodésiques franco-britanniques assurant la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich, le premier cercle de Borda, construit par Lenoir, est utilisé: " le cercle a permis de réduire l'écart entre la somme des trois angles observés et leur somme géométrique à moins de 9" ". Bessel a aussi fait des mesures relatives aux erreurs de pointé (cf. Liagre p.295).

⁴⁹Liagre, lieutenant général belge (1815-1891) auteur de "Calcul des probabilités et de la théorie des erreurs" 1852 remarque: "Mais ce qui caractérise la répétition des angles, c'est que chaque observation dépend de celle qui la précède"; l'hypothèse d'indépendance n'est pas respectée.

En 3^{ème} lieu, le frottement au centre doit produire aussi un petit déplacement en agissant plus sur l'un des limbes que sur l'autre. Cette cause cependant pourrait disparaître savoir dans le cas où il y aurait équilibre entre la force morte du frottement, et l'élasticité des rayons du limbe produite par leur courbure.

Enfin, cette même courbure, qui est très sensible dans les grands instruments, doit produire un petit déplacement des verniers.

Voilà quatre causes qui produisent dans les instruments, employés comme répétiteurs, des erreurs constantes, qui n'existent pas dans l'observation simple⁵⁰. Quoiqu'il soit difficile d'évaluer leur grandeur, néanmoins l'expérience se joint à la théorie pour en mettre l'existence hors de doute. M^r Gauss dans ses opérations géodésiques du Hanovre⁵¹, a constaté des erreurs constantes dans ses angles horizontaux, chaque fois qu'il a observé par répétition. M^r Struve dans ses opérations en Russie, avait employé d'abord la méthode par répétition; il a constaté alors que, sur sept stations, les angles observés de gauche à droite étaient constamment supérieur aux mêmes, observés en sens contraire. Il a abandonné depuis cette méthode; les manoeuvres qu'elle exige demandent un temps considérable, sans profit pour la bonté des résultats. (voy. l'ouvrage cité Tom I page 5:)⁵².

Mais Bessel est celui qui a conduit le calcul le plus en avant dans la question qui nous occupe. Dans un mémoire sur la théorie mathématique des instruments répétiteurs (:voy. astr. nachrichten de Schumacher Tom.XI n°256 Altona 1834:), il est conduit à ce résultat : si le limbe est divisé avec précision, si de plus les lunettes sont d'une grande force, il vaut mieux observer les angles par le même arc de limbe, mais itérativement dans l'un et l'autre sens.

d) Héliotrope

Lorsqu'on quitte une station pour se transporter à une autre, on laisse, au lieu où le théodolite était placé un héliotrope, et l'aide employé à le gouverner ou, celui-ci, au moyen de cet instrument, dont la pièce principale est un miroir, envoie à l'observateur de la lumière solaire réfléchie, et cette image devient pour l'observateur un point de mire. Cet instrument, dont l'invention est dûe à M^r Gauss⁵³, est l'un des plus précieux de la

⁵⁰Les géodésiens français finissent par reconnaître que des erreurs constantes existent dans l'utilisation des cercles répétiteurs. Mais ce n'est qu'en 1863, que Perrier, lors des opérations régulières en Algérie, utilise la méthode de réitération avec un cercle azimutal qu'il fait construire à cet effet.

⁵¹Ces opérations ont eu lieu entre 1821 et 1827 (voir tome IX des oeuvres complètes de Gauss).

⁵²La mesure d'un angle avec un cercle répétiteur demande de nombreuses manipulations. Si les signaux ne sont plus visibles, il faut stopper la mesure; celle-ci nécessite donc parfois plusieurs jours d'observations.

⁵³Gauss (1777-1855) invente cet instrument en 1820. Avant, on utilisait des feux ou des réverbères pour point de mire; les observations devaient donc se faire de nuit. D'ailleurs, Laplace recommandait les

géodésie moderne. Il est décrit en détail dans les astr. nach. de M^r Schumacher n° 116. Pourvu qu'il n'y ait du soleil, on peut envoyer de la lumière à l'observateur quelsoit la distance; par là il n'y a plus de limites à l'étendu des cartes géodésiques du moins il n'y a plus d'autres obstacles à cette étendue que celle provenant de la courbure de la surface du globe.

Il y a des héliotropes de diverses sortes; celui de M^r Gauss est le plus parfait; mais il est cher, compliqué, et difficile à rectifier. M^r Bertram, ingénieur géographe en Prusse, en a fait construire de très simples; on peut les avoir chez M^r Pistor et Schickt, fabricants d'instruments à Berlin. On peut les arranger de telle sorte à ce qu'ils soient propres à correspondre, à la manière des télégraphes, d'une distance à un autre. Ceci est très utile dans l'observation des distances zénithales réciproques et simultanées. Voy. l'ouvrage du Major Bayer⁵⁴ intitulé trigonometrisches Nivellement zwischen Berlin und Schwinemünde. M^r Gerling ma montré quelques uns de ces instruments de diverse construction. En voici un des plus ordinaires : Une règle de quelques décimètres porte à l'une de ses extrêmités un miroir, auquel on peut imprimer deux sortes de mouvements; l'un autour d'un axe vertical, l'autre autour d'un axe horizontal; un trou circulaire est pratiqué à l'endroit où les 2 axes se coupent. A l'autre bout de la règle est adapté un petit tuyau, dont l'ouverture la plus éloignée du miroir porte 2 fils qui se croisent. On cache ces fils à volonté au moyen d'un petit écran blanc. On dirige le tuyau, qui fait les fonctions de pinules, vers l'observateur; on baisse l'écran; on donne au miroir une position telle que l'ombre portée par le trou du miroir vienne se projeter sur l'écran à l'endroit où les fils se croisent; on est certain alors que les rayons lumineux réfléchis par le miroir, parallèles au cylindre d'ombre iront rencontrer l'observateur. Un 2^{ème} miroir servant à réfléchir sur le premier l'image du soleil, puis un écran servant à interrompre la lumière réfléchie, à volonté, complètent cet appareil*. (* voy. trigonom. nivellement der Oder durch Hoffmann p.13 Berlin 1841). M^r Breithaupt de Cassel en construit à des prix raisonnables.

II Appareils employés par divers géomètres allemands pour la mesure d'une base⁵⁵.

observations nocturnes pour pallier les effets de la réfraction atmosphérique. Mais Puissant en 1832, dans *Nouvelle Description Géométrique de la France* p. 156 émet des doutes à ce sujet.

⁵⁴Bayer (1794-1885) géodésien allemand, élève de Bessel. Il participe avec ce dernier à la triangulation de la Prusse orientale puis du littoral de la mer Baltique. Plus tard, en 1862, il fonde l'*Europäische Gradmessung* en vue " d'associer les efforts de tous les états civilisés, en les unifiant, à la recherche de la forme et de la figure de la Terre."

⁵⁵La mesure de la base d'une triangulation est essentielle. Elle doit se faire avec une grande précision puisque d'elle dépend le reste des calculs. Signalons qu'aucune base n'était mesurée en Belgique et que les triangulations d'avant 1830 s'appuyaient sur des bases françaises. Il est donc important pour Meyer d'observer la façon dont les bases sont mesurées en Allemagne.

Les principales bases mesurées en Allemagne, ou, d'après les méthodes allemandes, sont 1° la base bavaroise entre Spir et Oggersheim, mesurée par Lämmlé en 1819; 2° la base Danoise de Braack, mesurée par Schumacher en 1820, 3° la base entre Kattro et Woibifes mesurée en 1827 par Struve, en Finlande. 4° La base prussienne entre Trenk et Medniken, mesurée par Bessel en 1835; 5° enfin la base de Seeberg, et la petite base de Spir par M^r Schwert.⁵⁶

Il nous est impossible d'entrer dans de grands détails au sujet de ces divers appareils, les limites dans lesquelles nous devons renfermer ce rapport, nous en empêchent. Il suffira que nous indiquions sommairement les appareils qui se rapportent, dans ces diverses mesures, aux points principaux de la mesure d'une base. Ces points, forment en même temps, les conditions auxquelles le géomètre doit satisfaire, quoiqu'il soit entièrement libre dans le choix des moyens. Les points sont: 1° les règles; 2° appareil pour mesurer leur température; 3° appareil pour l'étalonnage; 4° appareil pour mesurer l'inclinaison des règles; 5° appareil pour mesurer les petits espaces qui séparent les règles; 6° enfin appareil pour marquer le point, où la mesure s'arrête chaque jour.

1° Base bavaroise

a) Règles⁵⁷ Ce sont des parallélépipèdes de fer de 4mm, sur 0m,01 d'épaisseur. Les extrémités sont en acier, formées en tranchants; l'un de ces tranchants est perpendiculaire à l'axe de la règle dans le sens vertical, l'autre dans le sens horizontal. On place les règles consécutives de manière à ce que le tranchant horizontal d'une règle corresponde au tranchant vertical de la règle précédente. Chaque règle est placée dans une caisse, les extrémités en acier seules sont à jour. La règle est fixée à la caisse par son milieu; ses extrémités sont libres, et peuvent s'étendre des deux côtés par l'effet de la dilatation.

b) Température. On mesure la température des règles à l'aide de thermomètres ordinaires. On les loge dans des enfoncements convenables pratiqués dans la règle. La partie supérieure de la caisse qui répond à l'échelle du thermomètre, est percée à jour, mais fermée par une petite vitrine qui permet la lecture des indications du thermomètre. Avant et après la lecture on ferme cette vitrine au moyen d'une petite planche, engagée dans un châssis.

⁵⁶En 1846, Baeyer mesure une base près de Berlin. L'erreur moyenne commise est seulement de $\frac{1}{341}$ sur une longueur de 1198 toises. (voir p. 286 du livre de Liagre et *Die Küstenvermessung* de Baeyer, Berlin, 1849). En 1847, deux officiers belges, les capitaines Polking et Hellebaut, se rendront à Bonn pour assister à la mesure d'une base effectuée par Baeyer. (*Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique*, tome 14, 1847).

⁵⁷Le règle utilisée en France par Delambre est une règle bimétallique platine/cuivre. Auparavant, on utilisait des perches de bois.

c) Inclinaison. l'inclinaison de chaque règle s'obtient par un niveau à bulle d'air. La petite règle en cuivre sur laquelle il repose, entre par ses extrémités dans deux montants, qui ne lui permettent d'autre mouvement que dans le sens vertical. Pour mesurer l'inclinaison, on fait entrer sous la règle du niveau un coin en verre gradué, qu'on fait avancer jusqu'à ce que la bulle soit entre ses repères. L'ordonnée déterminée par la graduation du coin, et la longueur de la petite règle en cuivre sont les données desquelles on déduit l'inclinaison par le calcul.

d) Espace laissé entre les règles. Cet espace se mesure au moyen d'un coin gradué en verre, qu'on fait glisser lentement entre les deux règles, jusqu'à ce qu'il s'arrête; la division du coin qui répond à ce point mesure l'espace vuide qui sépare deux règles.

M^r Reichenbach a substitué le coin à la languette pour plusieurs raisons. 1° on n'a pas besoin de tenir compte de la dilatation des languettes. 2° de la correction constante provenant du jeu, etc, de la languette. Cette correction doit être déterminée par des expériences préliminaires, et elle est toujours difficile à apprécier au juste. 3° on n'a pas besoin de tenir compte de l'épaisseur des languettes. 4° Pour qu'il n'y ait pas frottement, la languette doit glisser librement dans ses rainures, or il est à craindre alors, qu'en la faisant avancer pour la mesure de l'espace vuide, elle ne s'écarte de la direction de l'axe de la règle.

2° Base danoise

Ici je dois remercier M^r Gerling. Il a eu l'obligeance de me prêter le petit écrit de M^r Schumacher: "Schreiben an den Herrn D^r W.Olbers in Bremen" Altona 1821", excessivement rare, le seul écrit où l'on puisse trouver une description de l'appareil, employé par M^r Schumacher. Cet appareil, exécuté par le célèbre Repsold, est, sans contredit, le plus parfait de tous ceux qui ont jamais servi à la mesure d'une base. Pour l'essayer, on avait mesuré d'abord 924^T, et en reprenant l'année suivante la mesure définitive, on n'a trouvé, dans cette partie de 924^T, qu'une différence de 1 ligne. M^r Schumacher attribue cette différence principalement à la circonstance que dans l'intervalle des deux mesures, on avait perfectionné l'appareil, principalement sous le rapport des moyens de connaître plus intimement la température des Règles. C'est effectivement le défaut de ces moyens, ou plutôt l'impossibilité de connaître exactement cette température, qui constituera toujours l'imperfection des appareils quelconques pour la mesure d'une base, et qui sera la plus grande source des erreurs à craindre dans cette mesure. Le gouvernement danois n'a pas épargné les frais pour cette opération; l'appareil à coûté 3000 Thaler; onze personnes étaient employées pendant la mesure; un détachement de troupes était commandé pour surveiller les règles pendant la nuit; car elles restaient

toujours sur place; l'opération a durée six semaines. Je tiens ces particularités de M^r Gerling.

a) Règles Les Règles, au nombre de 3, sont des parallélépipèdes de fer tiré de 12 pi, sur 1 1/3 pou. d'épaisseur. Les bouts sont en acier poli. l'une des extrémités est façonnée en segment sphérique, l'autre est plane. Dans la pose des règles, on a toujours soin que le bout rond d'une règle correspond à l'extrémité plane de la suivante. Les 2 extrémités sont cylindriques, et formées ainsi au tour. Chaque angle est isolé au milieu d'une caisse de manière à ne toucher aucune parois. Les extrémités seules sortent de la caisse. Des contrepoids, empêchent la courbure des règles. Au reste, comme les règles ont été étalonnées dans leurs caisses, cette courbure n'a aucune influence. A l'aide d'un levier on peut faire avancer ou reculer chaque règle dans la caisse à volonté. Pour le transport, on fixe l'une des extrémités de la règle, l'autre reste toujours libre. La traverse du pied sur laquelle repose la caisse est susceptible de monter et de descendre, au moyen de vis adaptés à l'appareil à cet usage. 2 autres vis peuvent faire avancer la caisse vers la droite ou vers la gauche, selon les exigences de l'alignement.

b) Température La température de chaque règle est indiquée par le Thermomètre, logée à la surface dans l'épaisseur de la règle. Des parois en verre, munies de couvercles, permettent de lire les indications.

c) Inclinaison des règles au moyen des vis de la Traverse mobile du pied, et de niveaux à bulle d'air, on met les règles chaque fois dans une position horizontale. Si dans une rampe les règles sont placées, leur ensemble présente assez l'aspect d'un escalier. La réduction à l'horizon est nulle.

d) Mesure des intervalles. Si le terrain est horizontal, cette mesure ne souffre aucune difficulté. On laisse glisser dans l'espace vide un coin en verre jusqu'à ce qu'il s'arrête; la profondeur à laquelle il s'enfonce est lue sur une échelle graduée, qu'on plante à l'extrémité de la règle, et le long de laquelle le coin glisse.

Si le terrain est en pente, on se sert d'un cylindre dont les dimensions sont connues. Le cylindre, au moyen d'un appareil particulier, se place verticalement dans l'espace qui sépare les règles; on mesure, à l'aide du coin en verre l'espace entre le cylindre et chaque règle.

e) point où s'arrête la mesure de chaque jour⁵⁸.

Le bras d'une pièce qu'on enfonce en terre est muni d'une plaque mobile, qu'on peut fixer à l'aide d'une vis. la plaque est percée d'un trou cylindrique dans lequel on fait

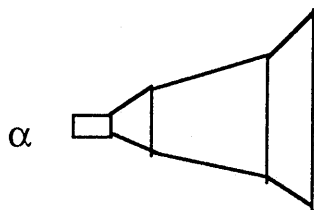
⁵⁸Ce point sera perfectionné par Nerenburger lors des mesures de base qu'il effectua de 1850 à 1853 avec les règles de Bessel, prêtées par l'Allemagne fin novembre 1847. Il invente un appareil pour marquer les fins de journées, remplaçant l'utilisation du fil à plomb.

entrer le cylindre ci dessus. On le dresse verticalement à quelque distance de la dernière règle, puis à l'aide du coin, on mesure la distance entre le cylindre et l'extrémité de la règle. On fixe la plaque, on ôte le cylindre, on laisse les règles en place, pendant la nuit, sous la garde de sentinelles, et le lendemain on mesure de nouveau la distance du cylindre à la règle, puis on commence une nouvelle journée.

3° Base finlandaise

J'ai consulté l'ouvrage cité de Struve à la bibliothèque de l'université de Bonne; j'en ai extrait entre autres matières, le résumé suivant (:voy. pour les détails le Tom.I pag. 51 et suiv.):)

a) Règles M^r Struve a employé les règles carrés de fer forgé. ayant 12 pieds sur 15 lig. d'équarrissage. L'un des bouts de chaque règle, façonné au tour, est en acier, il est à peu près de cette forme :



L'autre extrémité est munie d'un petit levier coudé en acier, dont le grand bras, armé d'un index, parcourt les divisions d'un secteur gradué. Le petit bras est terminé en bouton. Si l'index est au milieu de l'arc gradué, marqué par 20, on a, pour la longueur de la règle, la distance entre a et l'extrémité du petit bras du levier coudé. Chaque règle repose vers ses extrémités, sur des appuis, de manière qu'elle n'est nulle part en contact avec les parois de la caisse. celle-ci loge la règle entière, il n'y a que ses extrémités qui soient à jour.

b) Température. vers les extrémités de chaque règle est placé un thermomètre, perpendiculairement à la règle. la boule du thermomètre est logée dans la règle; l'échelle graduée traverse la caisse pour entrer dans une cage, dont l'une des parois est en verre; là se fait la lecture des indications du thermomètre. Les règles sont entourées de uate dans toute leur longueur; cette précaution est prise pour que les thermomètres indiquent plus exactement la température des règles.

c) Inclinaison. L'inclinaison des règles se mesure au moyen d'un niveau à bulle d'air dont l'une des extrémités peut se mouvoir verticalement afin de mettre la bulle entre ses repères.

d) Comparateur. C'est une véritable mesure de cordonnier, sans les dimensions, et les moyens mécaniques pour atteindre à la plus grande précision.

Chacune des 4 règles a été comparée avec une 5^e, que M^r Struve nomme N, et qui forme la règle normale, ou le module. La règle N a été comparée à une Toise de Fortin de même longueur que la Toise du Pérou⁵⁹.

e) Mesure des intervalles. M^r Struve met le bout d'une règle en contact avec le bouton du petit bras du levier de la règle précédente, puis il note l'indication de l'index du grand bras du levier.

f) point où les mesures journalières s'arrêtent.

à la face supérieure d'un pieu, qu'on bat en terre, se trouve une plaque horizontale, sur laquelle glisse, au moyen de vis, un petit cône tronqué. La petite base de ce cône est un cercle en argent dont le centre est marqué. On amène ce centre sous le fil à plomb, abaissé de l'extrémité de la dernière règle, puis on fixe le cône.

L'appareil de la base prussienne est décrit dans l'ouvrage déjà cité de M^r Bessel, page 4 et suivantes. Comme cet appareil ne se rattache à mon voyage par aucune particularité, je dois passer sa description sous silence.

Je n'ai pu recueillir aucune donnée sur la base de Seeberg. La base de Schwerd est décrite dans son ouvrage "die kleine Speyerer Basis". Il s'est servi d'un appareil semblable à celui de Lämmlé. J'ai parlé à M^r Gerling du travail de M^r Schwerd; il m'a dit qu'il n'oserait suivre son système dans une opération sérieuse; qu'il avait fait ce travail étant jeune, sous l'influence d'une idée qui lui souriait. Cependant M^r Bessel semble faire assez de cas de la tentative de M^r Schwerd; car, dans l'ouvrage cité, page 38 il dit " M^r le professeur Schwerd est le premier qui ait entrepris de calculer une grande base au moyen d'une petite base de 441 Toises, mesurée directement, et liée à la grande par quelques triangles⁶⁰. Il a publié les heureux résultats de son essai dans un ouvrage qui mérite beaucoup d'être lu".

⁵⁹La toise du Pérou est instaurée par Louis XV en 1766 comme étalon national. Elle joue un rôle important dans la création du système métrique puisqu'elle a servi à mesurer les bases de Melun et de Perpignan dans la triangulation de Delambre et Méchain. Pour plus de détails voir *Le pendule à secondes et les étalons de longueur utilisés par l'expédition à l'équateur; la "toise du Pérou"* par L. Marquet in *La figure de la Terre du XVIII^{ème} siècle à l'ère spatiale*, p. 191 (1 toise = 1,949m).

⁶⁰La base Trenk-Mednicken mesurée par Bessel en 1832 a une longueur de 935t et celle mesurée par Baeyer, près de Berlin, en 1846 est longue de 1198t. En France, les bases mesurées sont beaucoup plus

III Signaux et stations

a) Stations.

Pour le choix des stations les géomètres allemands s'astreignent surtout à 2 conditions : il faut qu'ils puissent établir l'instrument sur le sol, jamais ils ne choisissent des tours, des édifices, ou des constructions élevés en charpente⁶¹. Il faut ensuite que du point de station, ils puissent découvrir le plus grand nombre possible d'autres points pouvant servir de points de station⁶². J'ai observé à M^r Gerling, que dans un pays plat comme la Belgique, il serait difficile de satisfaire à ces conditions, surtout à la dernière, sans se placer dans des clochers, ou sans s'élever sur des signaux en charpente. Il m'a répondu que M^r Gauss avait opéré à travers la bruyère de Lunebourg, pays plat comme la Belgique, sans déroger à ces conditions.

Pour faire la reconnaissance de ses stations, M^r Gerling m'a dit qu'accompagné de deux officiers d'état major, il avait traversé le pays de la Hesse, dans tous les sens, qu'il était grimpé sur toutes les hauteurs, et qu'il ne s'était décidé pour un point que lorsqu'il trouvait qu'il remplissait ces deux conditions. Pour tout instrument, il ne se servait dans les reconnaissances, que d'une boussole, d'une longue vue, et d'une carte. M^r Gauss, m'a-t-il dit, s'est servi avec un grand succès de l'héliotrope dans ses reconnaissances.

Voici qui paraît singulier au premier abord. Plusieurs géomètres, et en autres Struve, (tom.I page 85), préfèrent les stations excentriques, lorsque le point de mire n'est pas une lumière d'héliotrope. Car 1° lorsqu'on doit séjourner longtemps à une station, en

longues; elles sont d'environ 6000t. Plusieurs travaux portent sur la longueur des bases; Liagre, dans une notice sur Nerenburger (*Annuaire de l'ARB* tome 37, 1871) écrit: "Le raisonnement ainsi que l'expérience paraissent avoir donné raison aux Allemands qui, grâce à leurs excellents instruments goniométriques, passent rapidement d'une base de 2000m à des côtés de triangles ayant une longueur d'une quarantaine de milles mètres." (voir aussi par exemple, *Compte-rendu des opérations de la commission instituée par M. le Ministre de la Guerre, pour étalonner les règles*, Bruxelles, 1855, p. xiii ainsi que "Notes sur les opérations géodésiques" in *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, Paris, tome ix, p. 462 de Peytier). Plus tard, le colonel Adan écrit: "On a donné la préférence aux petites bases sur les grandes qui avaient prévalu en France, parce que la substitution des unes aux autres semble constituer un progrès, dans ce sens que les nouvelles méthodes d'observations et de calcul, donnant des résultats plus précis que les méthodes anciennes, permettent de déduire un grand côté d'un petit côté avec une exactitude à peu près égale à celle d'une mesure directe, qui aurait pour objet d'assigner la longueur du 1^{er} de ces côtés." in Loodts *Histoire de la triangulation en Belgique*, Bruxelles, 1969.

⁶¹Ici, la différence avec la France est bien marquée. En effet, Delambre et Méchain pour la mesure de la Méridienne installent toujours leur station en hauteur, dans des clochers ou des tours.

⁶²Liagre attire notre attention à la p. 270 de son livre sur la différence existant entre l'expression française "tour d'horizon" et l'expression allemande "Horizont-Abschluss". Dans le premier cas, il s'agit de mesurer d'une station O les angles entre deux stations consécutives AOB, BOC, COD... tandis que dans le deuxième cas, on mesure tous les angles possibles AOB, AOC, AOD, BOC, BOD, COD....

établissant l'instrument à côté du signal sous une tente, on est d'abord à l'abri des injures du temps, et les observations se feront mieux. Ensuite, on peut disposer d'un plus grand espace pour la manoeuvre de l'instrument, et on est plus commodément établi pour faire les rectifications que l'instrument exige. 2° en établissant l'instrument sous la mire du signal, il est vrai qu'alors on épargne les calculs pour la réduction au centre; mais d'un autre côté on perd presque un temps équivalent par les soins qu'exige un établissement au centre, et puis, on ne parvient, non obstant ces soins, qu'accidentellement à mettre l'axe de l'instrument au centre du signal. Il y a toujours, quoiqu'on fasse, une petite excentricité dont on ne peut pas tenir compte. Cette petite excentricité qu'on néglige, balance bien l'erreur que l'on commet dans le calcul approché de la réduction au centre⁶³. 3° En travaillant à côté du centre, on ne connaît la valeur des angles réduits au centre qu'à la fin de toute l'opération; ce qui fait qu'on observe sans prévention, sans crainte ni joi? libre de tout arrangement, ou changement arbitraire des observations.

Quoique les excentricités considérables ne doivent pas être recherchées, néanmoins on trouve, chez les géomètres allemands, des stations excentriques très fortes. Il est vraies qu'elles sont rares, et que la nécessité seule les a dictées. Ainsi M^r Gerling, à sa station d' Amoeneburg, a choisi une position dont la distance au centre était de 22 perches, à peu près 45 toises; cela, pour ne pas devoir s'établir dans un clocher. à Kersel M^r Struve était forcé de se placer à côté du centre, à une distance de près de 90 T., et cependant il prouve que cette grande excentricité ne pouvait pas donner une erreur de 0",018 dans l'angle réduit (: voy. Tom I. pag.86 et 118; tom II pag.1 et suiv.)

b) Signaux Il y en a de deux sortes, pyramides et de simples blocs en maçonneries.

Pyramides Elles sont de forme quadrangulaires, en charpente solide, ouvertes de tous côtés. Un plancher carré, solidement établi à une faible distance du sol, les poutres sur lesquels il repose étant placées sur le sol. le point d'intersection des diagonales du carré est le centre de la station. La pyramide est surmontée d'une pièce de bois cylindrique plus ou moins élevée. la base de cette pièce, ou le sommet de la pyramide est le point de mire. On emploie ces sortes de constructions lorsqu'on ne peut pas se servir d'héliotropes, ou bien pour faire reconnaître plus facilement la station d'une grande distance. Le plancher est souvent remplacé par un bloc de pierre, une maçonnerie, propre à y placer l'instrument et à y faire les observations. M^r Argelander m'a observé avec

⁶³La réduction au centre se fait à l'aide de la formule suivante:

$$C = O + (r \sin(O+y) : D \sin 1'') - (r \sin y : G \sin 1'')$$

raison, qu'on pourrait construire de ces signaux, par un simple assemblage de corps d'arbres, à peu de frais.

Blocs, ou maçonnerie Ces blocs ou ces constructions (que les géomètres allemands appellent "Stein postament") ont dans la règle 2 pieds d'equarrissage, 3 pieds de hauteur, et entrent dans le sol aussi à une distance de 3 pieds; la base repose en outre sur un lit de maçonnerie. Cet établissement sert tour à tour pour y placer le Théodolite et l'héliotrope⁶⁴. On y place le théodolite, lorsqu'on observe; on y place l'héliotrope pour servir de mire lorsqu'on pointe d'une autre station, sur celle-ci. l'observateur, et l'instrument sont toujours abrités sous une tente. Le bloc est souvent remplacé par un tronc d'arbre. L'héliotrope doit être établi à la même place où se trouvait le théodolite; on prend, pour le mettre au centre de la station, les mêmes soins que pour l'autre instrument.

IV Méthodes d'observation

a) angles verticaux Le jeu au centre de l'instrument répétiteur, fait que, pendant la manoeuvre pour la répétition, la pesanteur doit déplacer, tant soit peu, les 2 limbes. C'est en cela que consiste l'erreur constante, attachée à la méthode de répétition, dans l'observation des angles de hauteur, découverte par le professeur Bohnenberger⁶⁵

b) angles horizontaux Il y a deux sortes de répétitions : répétition d'un même angle par des arcs successifs du limbe, ou par le même arc du limbe. dans ce qui va suivre le mot répétition doit s'entendre sous la dernière signification⁶⁶.

circonstances extérieures On attend des circonstances atmosphériques favorables. Il est vrai que cette méthode demande plus de temps, mais cette perte est rachetée par la bonté des observations. C'est ainsi que Struve, Bessel, Gauss ont agi dans leurs observations géodésiques. S'il arrive que les circonstances fussent telles, qu'ils ne précisent qu'avoir peu de confiance dans une série d'observations, ils la renouvellent dans des moments plus favorables. Ils tachent que les points observés à la même station soient mis sous les fils à peu près dans les mêmes circonstances atmosphériques; ce qui fait qu'on ne peut pas répéter un même nombre de fois tous les angles observés à la même station. Si un signal présente des phases le matin et le soir, ou bien pendant que le soleil est couvert, ou qu'il ne l'est pas, on a soin d'observer ce point dans toutes ces

⁶⁴Au lieu d'observer le haut du clocher, on observe l'héliotrope mis à la place de l'instrument.

⁶⁵Prêtre wurtembourgeois, Professeur à Tübingen (1765-1831) reconnu comme un des plus anciens protagonistes de la géodésie allemande avec Soldner astronome bavarois (1776-1853). Faye indique aussi ce défaut pour les angles verticaux (voir son *Cours d'astronomie* de 1881)

⁶⁶Dans toute la suite, Meyer utilise le mot répétition dans le sens de réitération, c'est-à-dire répéter la mesure d'un angle simple sur le pourtour du limbe en se décalant à chaque fois de 10° en 10° par exemple, puis en prenant la moyenne des diverses mesures.

circonstances. Quoique le nombre des répétitions ne puisse pas être le même pour tous les points, cependant on fait en sorte que l'on pointe des diverses stations, autant que possible le même nombre fois vers le même point⁶⁷.

moments favorables aux observations On évite avant tout les heures de la journée, où les ondulations de l'air font trembler l'image de la mire dans la lunette; dans ces moments ils cessent d'observer. M^r Struve s'est fait une loi de ne jamais observer dans un pareil cas. Il donne même des règles à cet égard. A midi dit-il, le matin, et au coucher il y a trop d'ondulations, il faut éviter ces moments pour l'observation des angles horizontaux. dans la matinée, vers 10h l'air est ordinairement très transparente et calme; ce moment convient, mais il est de courte durée. Entre midi, et le soleil couchant, on a toujours des moments plus ou moins longs, où les objets sont immobiles sous les fils. Ce temps arrive quelques heures avant le soleil couchant. M^r Struve trouve que, pour la latitude de 58°, la durée des images tranquilles est de 2h10'. voici l'indication par mois des heures qu'il trouve être les plus favorables aux observations des angles horizontaux.

Mai	à	5h4	T.er??
Juin	"	5h7	"
Juillet	"	4h9	"
Aout	"	4h3	"
Septembre		manque	
Octobre	"	2h6	"

Tout ceci bien entendu est pour le climat de la Finlande, à la latitude 58°.

Pour l'observation des angles verticaux on doit faire attention à la réfraction, ce qui trouble un peu la statistique précédente quant à ces angles. La réfraction terrestre est la plus constante à midi juste, au moment où les images sont le plus agitées. A mesure que celles-ci deviennent tranquilles, la réfraction augmente⁶⁸. Donc, pour observer des distances au zénith, on doit choisir dans l'après-midi le moment qui précède un peu celui où les images deviennent tranquilles; et dans la matinée, celui où l'image, après avoir été tranquille, recommence à trembler. On doit éviter d'observer des angles de hauteur un peu après le lever, ou un peu après le coucher du soleil.

⁶⁷D'où peut-être la nécessité des poids. Lorsque le nombre de répétitions n'est pas le même, on pondère les mesures par un poids avant de faire les calculs. Une pratique courante est la suivante: "lorsqu'on veut obtenir un angle au moyen de plusieurs séries de répétitions, on multiplie le résultat fourni par chaque série, par le nombre de répétitions qui lui correspond, et l'on divise la somme des produits par la somme des nombres de répétitions: c'est qu'ici l'unité de poids est l'observation simple." (voir p. 201, Liagre).

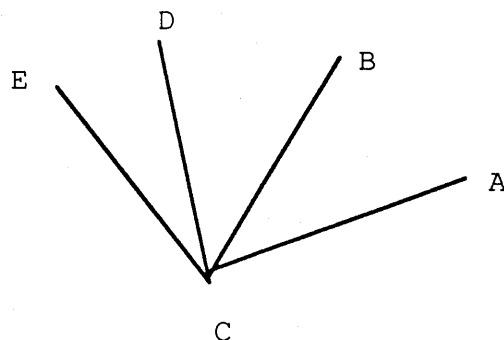
⁶⁸Les problèmes de réfraction ont été étudiés par Laplace dans *La Mécanique Céleste* et par Le Verrier.

Dans un pays plat de trop grands triangles ne valent rien, à cause de la réfraction latérale. (Tom I. pag. 149)⁶⁹

moment où il faut quitter une station Voici une règle que M^r Gerling prescrit à cet égard.

Calculez chaque jour, le soir, la correction H (:nous verrons bientôt ce que c'est:). Si le moment arrive où ces corrections ne changent plus qu'imperceptiblement on peut quitter la station, on est alors certain qu'on a fait tout ce que l'on est capable de faire avec son oeil et son instrument.

Ordre dans les observations M^r Gauss à qui la géodésie allemande est redevable de presque tous ses avantages, a aussi introduit un nouvel ordre d'observer les angles. Avant lui on observait, l'un après l'autre, les angles des triangles d'un réseau géodésique. Il a changé cet ordre. A chaque station on observe par répétition, selon l'ordre des combinaisons, les angles que font entre eux les signaux qu'on découvre de cette station; de plus, on laisse arbitraire la direction du rayon visuel vers l'objet⁷⁰.



Supposons, par exemple, que l'observateur se trouve en C. Il laissera arbitraire la direction CA; ou bien il désignera si vous voulez par x l'azimuth inconnu de CA; puis il observe, chacun par répétition, les angles combinés:

$$\begin{aligned} \text{BCA} &= a & \text{DCB} &= s & \text{ECD} &= y \\ \text{DCA} &= a' & \text{ECB} &= s' \end{aligned}$$

⁶⁹Liagre p. 369 de son livre remarque: "Lorsqu'il existe quelque doute sur la valeur du coefficient de réfraction, l'incertitude qui en rejailit sur les différences de niveau est d'autant plus grande que l'on opère sur des points plus éloignés : elle croît comme le carré de la distance."

⁷⁰Gauss change la méthode d'observation qui était celle des Français. (Voir p. 100 de la traduction de Bertrand). Une direction arbitraire est choisie pour le premier objet, prise comme point zéro. On corrige ainsi individuellement les directions des côtés des angles au lieu de corriger d'un seul coup l'amplitude de l'angle lui-même. Remarquons que cette direction n'intervient pas lorsque l'on ne considère que la valeurs des angles des triangles; par contre, elle sera calculée lors des compensations de directions (voir p. 350 du livre de Liagre). Cette méthode des directions est utilisée par F.G.W. Struve puis par F.W. Bessel.

$$ECA = a''$$

Alors on a, pour les directions des droites CA, CB, CD, CE respectivement directe de CA, ou azimuth de CA = x

$$" \quad " \quad CB = x + a$$

$$" \quad " \quad CD = x + a'$$

$$" \quad " \quad CE = x + a''$$

etc

au moyen des angles a, a', a'', etc on forme par addition et soustraction les angles qui doivent entrer dans la composition des triangles. Cet ordre dans l'observation devient nécessaire lorsqu'on veut obtenir les valeurs les plus probables des angles des triangles, et porter, en même temps un jugement pour la précision du travail⁷¹.

V Méthode de calcul

Le plus grand service que M^r Gauss ait rendu à la géodésie, consiste dans l'application du calcul des probabilités aux observations angulaires⁷². En appliquant les méthodes de calcul qu'il prescrit, on obtient pour chaque angle observé à la même station une première correction que M^r Gauss désigne par corr H, et si on corrige l'angle observé de la valeur marquée par corr H, on aura la valeur la plus probable de l'angle vrai.

Après avoir observé les angles aux diverses stations dans l'ordre décrit précédemment, et après avoir corrigé ces angles de la valeur corr H, on forme avec ces angles réduits, par addition et soustraction, tous les angles des triangles du réseau. Ces angles formés, on les soumet à un nouveau calcul qui a pour objet de fournir les petites corrections que M^r Gauss désigne par corr D et après avoir corrigé les angles des triangles de cette nouvelle erreur, on commence le calcul des côtés d'après le théorème de Legendre⁷³. Les corr D font que le système de triangles vrais, dont se compose le réseau,

⁷¹L'utilisation de la MMC permet d'obtenir les résultats "les plus probables": " Pour trouver les valeurs les plus probables des inconnues x, y, z, v... il faut les déterminer de manière que la somme des carrés des erreurs soit un minimum." Ici la façon d'observer est nécessaire pour appliquer le calcul des probabilités comme Meyer va l'expliquer dans le § suivant. Cette façon d'observer permet d'écrire les équations de conditions aux angles.

⁷²Voir les textes traduits par Bertrand en 1855.

⁷³Dans ses *Éléments de Géométrie* de 1794, Legendre démontre le théorème suivant dans un paragraphe intitulé "Résolution des triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère": "Etant donné un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si de chacun de ses angles on retranche le tiers de l'excès de la somme des trois angles sur deux droits, les angles ainsi diminués pourront être pris pour les angles d'un triangle rectiligne, dont les côtés sont égaux en longueur à ceux du triangle sphérique proposé." Legendre signale l'utilisation possible de ce théorème dans le cadre des opérations géodésiques.

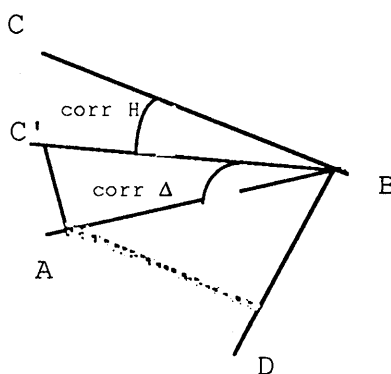
est remplacé par un autre système qui en diffère le moins possible⁷⁴. L'imperfection de nos organes et de nos instruments s'opposent à ce que nos observations puissent nous conduire au relevé exact d'un système de triangles, ou d'une figure géométrique vraie; Les corr H et D nous conduisent cependant à une figure géométrique la plus approchée possible de la figure vrai.

Il m'est impossible d'entrer dans les détails nécessaires pour décrire la méthode par laquelle on fait le calcul de ces deux corrections. Pour en donner une notion intelligible, je devrais exposer tout ce calcul. ce serait faire un livre, et je m'écarterai du but de mon rapport.

Le travail pénible, que fait naître la détermination de ces corrections, consiste d'une part dans la recherche des équations de conditions, puis surtout dans l'élimination⁷⁵.

Le principal objet de mon voyage était précisément le désir d'être éclairé sur plusieurs points de cette doctrine; je confesse que M^r Gerling m'a rendu sous ce rapport des services qui m'enchaîneront à lui par une éternelle reconnaissance.

Avant de quitter ce sujet je vais rendre sensible, par une figure, en quoi consiste les 2 corrections.



⁷⁴On dit que l'on a compensé le réseau. Cette pratique n'existe pas en France avant la fin du XIX^{ème} siècle. La répartition des erreurs se faisait essentiellement en utilisant le théorème de Legendre et surtout par un agencement correct des stations avant d'effectuer les mesures.

⁷⁵Il existe deux sortes d'équations de conditions, celles relatives aux angles et celles relatives aux côtés. La MMC conduit à la mise en place d'équations normales (Normalgleichungen). L'élimination entre ces équations est un travail long et pénible. Liagre écrit p. 349 de l'ouvrage cité plus haut: "Telle est la marche la plus simple en théorie: mais lorsque l'on veut l'appliquer, on doit attendre, pour commencer les calculs, que *toutes* les observations soient terminées. Or ces calculs sont si longs que, pour une triangulation un peu considérable, leur accumulation présente un travail effrayant." En effet, les systèmes à traiter peuvent être grands (par exemple, Bessel est amené à traiter un système de 31 équations de conditions et de 70 inconnues. Quant à Baeyer il traite un système de 47 équations et de 86 inconnues. Gauss établit des formules donnant le nombre des équations de conditions relatives à un réseau donné). Ces calculs longs et pénibles expliquent peut-être l'antipathie que certains savants et calculateurs éprouvent à son égard. Ainsi, Le Verrier en France demande sa suppression des programmes de l'Ecole Polytechnique lors de la réforme de 1850.

Soit ABD un angle vrai; on l'observe à la station B. à cause de l'imperfection de l'instrument et de nos organes, nous obtenons l'angle DBC , qui par l'application de la correction h se change en DBC'. La correction D fait voir de combien la direction corrigé BC' diffère encore de la direction vraie BA; de sorte qu'en appliquant cette correction à l'angle DBC', on obtient l'angle DBA, ou un angle qui en diffèrera le moins possible. Quoique corr D soit très petite, il est un moyen de rendre sensible, de construire cette très petite valeur angulaire. A cet effet, on calcule le côté V du triangle rectangle ABC', et l'on trouve

$$V = (D \times \text{corr } D) / S$$

D est le côté connu AB du triangle ABD. S est le rayon de la terre pour le lieu du centre de gravité de ce triangle.

Les principaux ouvrages dans lesquels la doctrine des moindres carrés, sur laquelle repose les calculs mentionnés, soient développée avec étendue sont:

Gauss, theoria motus corporum coelestium 1809 lib II sec III

Gauss, theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae 1823

Gauss, supplementum theoriae, etc 1826,

Ces deux écrits se trouvent insérés dans le vol. VI des annales de la société de Göttingue⁷⁶.

Enke, über die Methode der Kleinsten quadrate. Berliner Astro. Jahrbuch 1834,1835,1836⁷⁷

Gerling, Die Ausgleichungs Rechnungen der practischen Géométrie 1843.

Plusieurs mémoires remarquables ont paru sur cette matière dans le recueil de M^r Schumacher. Voici les indications des n^os des Astro. Nachrichten, où on peut les lire; je tiens cette note de l'obligeance de M^r Argelander

n ^o 6	vol I	pag. 81 et suiv.	par Gauss ⁷⁸
n ^o 110	" V	" 101 "	" Gauss ⁷⁹

⁷⁶Bertrand réalise en 1855 une traduction française des différents textes de Gauss relatifs à la MMC et à l'application du calcul des probabilités à la géodésie.

⁷⁷Dans *Berliner astronomisches Jahrbuch* de 1834, Encke donne une formule pour éviter la formation des carrés des erreurs qui constitue une des parties pénibles des calculs (voir p. de la thèse).

⁷⁸Cet article est édité en 1822: *Anwendung der Wahrscheinlichkeitrechnung auf eine Aufgabe der practischen Geometrie von Herrn Hofrath und Ritter Gauss.*

⁷⁹Cet article de Gauss date de 1826. Son titre est *Chronometrische Längenbestimmungen.*

n° 121,122	" VI	" 1	" "	Rosenberger ⁸⁰
n° 192	" VIII	" 463	" "	" Hansen ⁸¹
n° 202,203,205,206,	vol IX	pag. 189	" "	" Hansen
n° 358,359	" XV	" 369	" "	" Bessel ⁸²
n° 361,362	" XVI	" 9 +? 27	" "	" Hansen
n° 399	" XVII	" 925	" "	" Bessel
n° 404	" XVII	" 325	" "	" Jacobi ⁸³
n° 419	" XVIII	" 16	" "	" Hansen
n° 491	" XXI	" 163	" "	" Argelander

Dans tous les calculs géodésiques, où les valeurs numériques des dimensions de la terre, et de l'aplatissement sont exigées, on se sert en Allemagne des nombres de Walbeck, qui a publié, 1819, un ouvrage qui a pour titre: de forma et magnitudine telluris, ex dimensis accubus meridiani, detimiendis. Abo 1819 ⁸⁴.

M^r Walbeck a déduit son aplatissement de 1/302,78 de l'ensemble des arcs de méridien mesurés avant la publication de son travail. M^r Bessel a combiné, 1837 (: voy. astro. nach. n°333 :), les 10 arcs mesurés jusqu'à ce jour, et en a conclu l'aplatissement correspondant. Mais comme depuis M^r Puissant a découvert une erreur d'environ 68T dans la détermination déduite des observations de Biot et d'Arago (: voy. la connaissance des temps pour 1844 :), il a repris son calcul, et il en a consigné le résultat dans le même recueil⁸⁵. M^r Argelander m'a aussi conseillé de lire un travail de cette notion par Bessel, qui se trouve dans le 4^o vol. n°86 des astron.nach. de Schumacher; il s'agit dans ce mémoire du calcul des longitudes et des latitudes.

⁸⁰Rosenberger, directeur de l'observatoire de Halle en Prusse, a conduit les calculs concernant les recherches sur les ascensions droites des 36 étoiles fondamentales à partir des relevés d'observations effectuées de 1820 à 24 par Bessel à l'aide du cercle méridien de Reichenbach. (voir document DD1022 Centre A. Koyré).

⁸¹Hansen, Peter Andreas (1795-1874), astronome danois.

⁸²Dans ce volume, Bessel donne une vérification expérimentale de la loi de Gauss; cette vérification serait l'une des seules réalisées à l'époque. Bessel a choisi une série de 470 observations faites par Bradley pour déterminer la différence d'ascension droite entre le soleil et l'une des deux étoiles Atair et Procyon. Signalons aussi l'article n° 256 vol.11 (1834) p. 269: *Betrachtungen über die Methode der Vervielfältigung der Beobachtungen*, Bessel.

⁸³Jacobi, Carl (1804-1851) mathématicien allemand, il invente en 1841 la méthode des déterminants. Sur la demande de Baeyer, Jacobi donne des directives pour résoudre les 17 équations de conditions obtenues par la MMC; les calculs sont exécutés par Dase du 1^o juillet au 15 septembre 1847 (voir introduction de *Die Küstenvermessung* par Baeyer, 1849).

⁸⁴Walbeck, de Koenigsberg, a utilisé pour ce calcul les résultats des triangulations exécutées en Prusse, au Hanovre et au Danemark. Schmitt, de Goettingue trouve 1/297. Quant à Airy, et Bessel en 1840, ils trouvent 1/(299,15+-3,15). Pour plus de détails, voir *Rapport sur l'état actuel de la géodésie, pour compléter la partie astronomique du réseau français* par Delaunay, Laugier, Faye in *Connaissances des Temps* 1864. En France, on utilise les résultats de Delambre: 1/308,64 (cf. *Mesurer la Terre* de J.J. Levallois, 1988, p. 68)

⁸⁵Voir aussi *La Description Géométrique de la France p.161 et suivantes*, Puissant, Paris, 1832.

Conclusion

Les méthodes géodésiques en Allemagne se distinguent de celles qui se pratiquent en d'autres pays, principalement par les points suivants:

1) la bonté des instruments, (précision dans la graduation, force des lunettes,) leur a fait abandonné la méthode de répétition par des arcs successifs.

2) usage général de l'héliotrope.

3) le théodolite et l'héliotrope se placent sur le sol

4) grande précision des appareils pour la mesure d'une base

5) observations des angles horizontaux entre tous les signaux qui se découvrent d'une même station

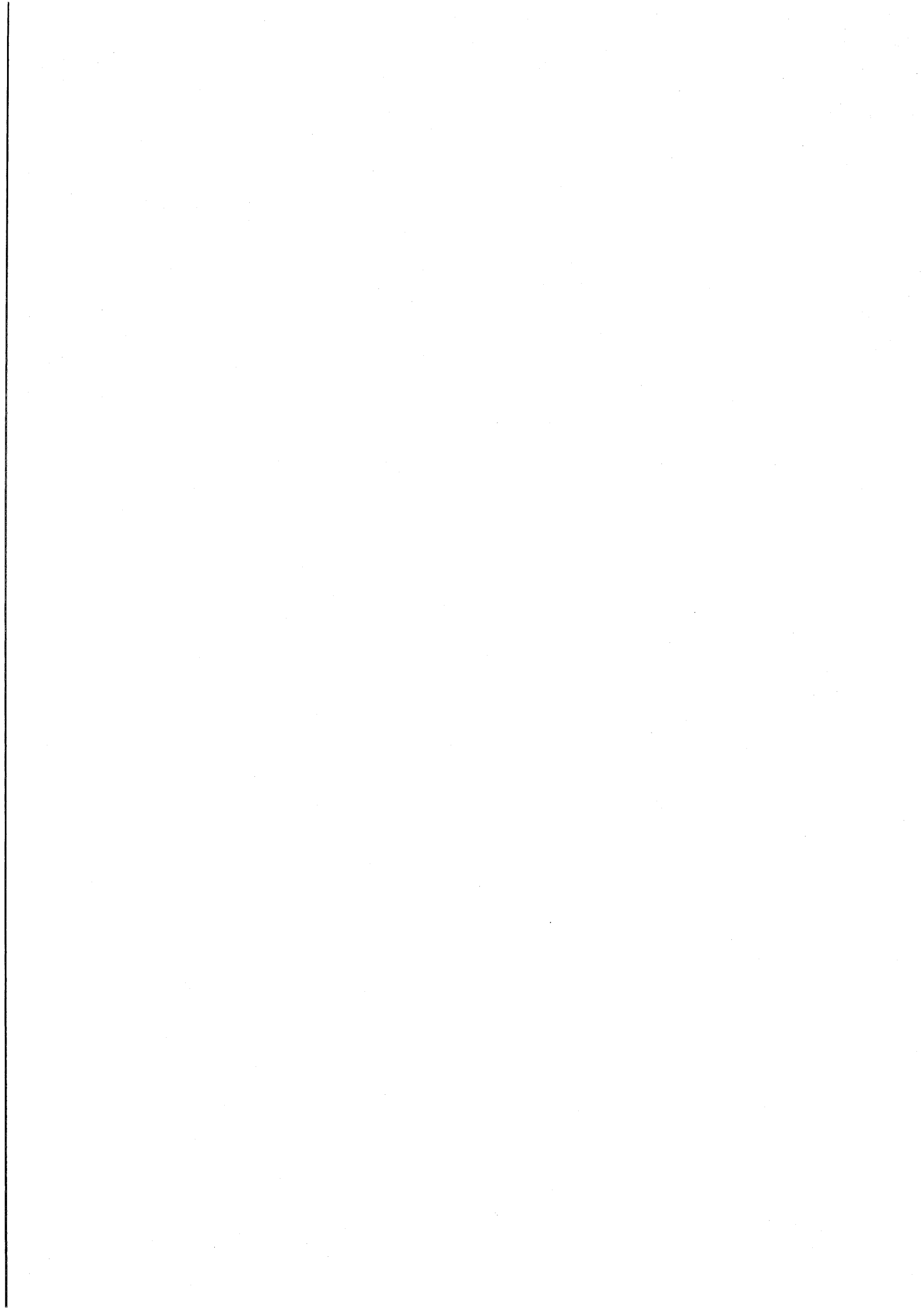
6) application du principe des moindres carrés à toutes les opérations, et principalement la valeur des corrections H et D

INDEX des NOMS de PERSONNES CITES

Arago	Jacobi
Argelander	Lämmle
Baeyer	Legendre
Bertram	Lenoir
Bessel	Mayer Tobie
Biot	Pistor
Bohnenberger	Puissant
Borda	Reichenbach
Breithaupt	Repsold
Encke	Schumacher
Ertel	Schick
Fraunhofer	Schwert
Gauss	Struve
Gerling	Troughton
Hansen	Uttschneider
	Walbeck

INDEX DES PAYS ET VILLES CITES

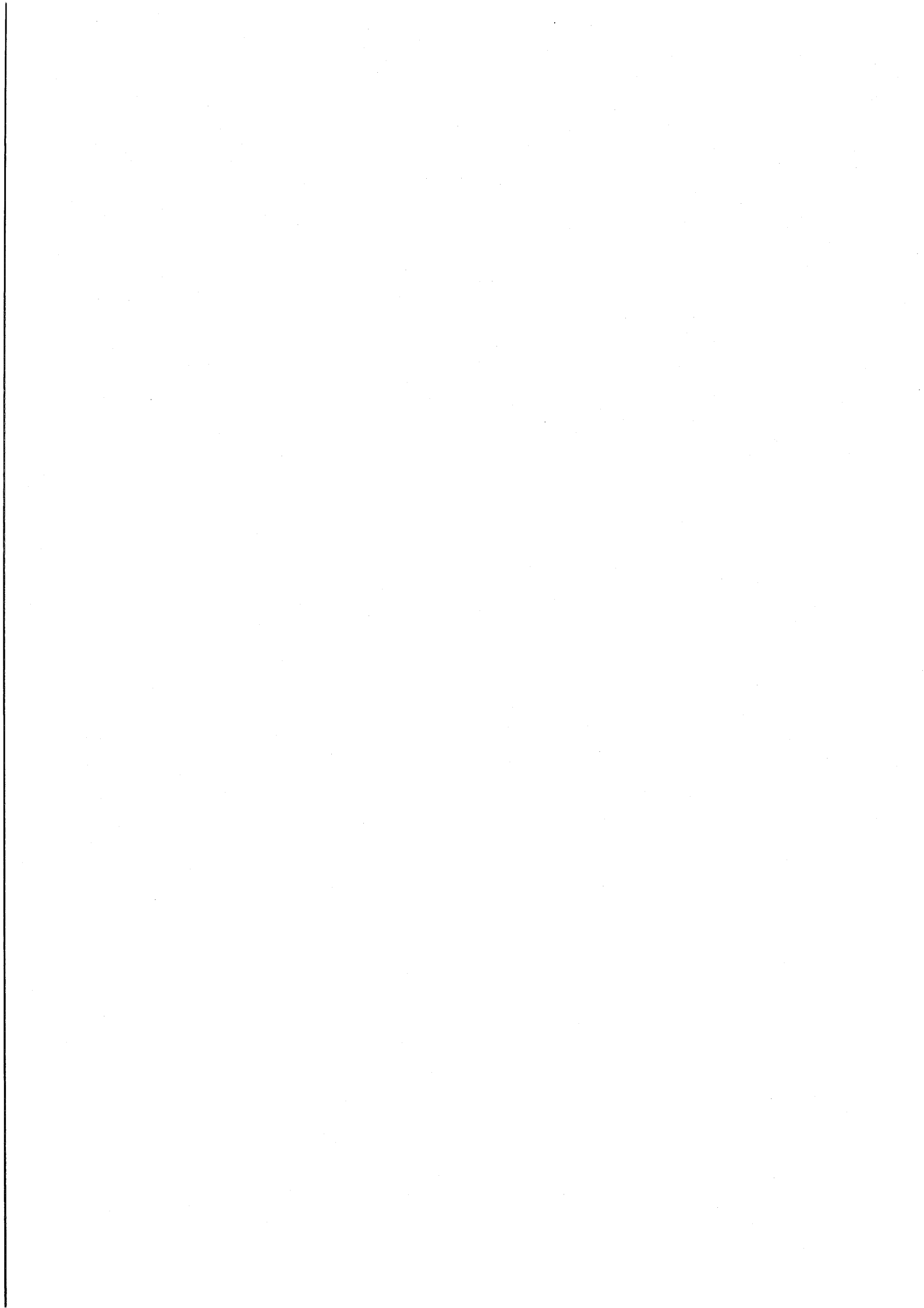
Allemagne	Ober
Altona	Occident de l'Europe
Amoeneburg	Oggersheim
Bavière	Ostpreusen
Berlin	Ostsee (provinz Russlands)
Bonne	Pérou (Toise du)
Braack	Prusse
Cassel	Reilig
Danemark	Russie (Province orientale)
Finlande	Seeberg
Fortin (Toise de)	Spir
Götingue	Taufstein (bavarois)
Hambourg	Trenk
Hanovre	Waibifes
Hesse (Pays de la)	
Kattro	
Kersel	
Londre	
Lunebourg (Bruyère de)	
Marbourg	
Mednicken	
Münich	



ANNEXE 28

TABLEAU DE LA MARCHE DES OPERATIONS GEODESIQUES EN BELGIQUE (CHRONOLOGIE - CARTES)

Les opérations géodésiques (observations sur le terrain, calculs, ...) sont des travaux qui durent de longues années. En Belgique, elles sont effectuées de 1853 à 1873 pour les observations. Les calculs, quant à eux, ne sont achevés qu'en 1880. Ci-joint un extrait du rapport du général Hennequin à la Commission permanente de l'Association géodésique internationale à La Haye en 1882.



III. — Belgique.

N°	INDICATION DES POINTS	LATITUDE	LONGITUDE	ÉPOQUE	DIRECTEURS ET OBSERVATEURS	INSTRUMENTS	REMARQUES
1a	Base d'Ostende Terme A	51° 11' 10"	20° 33' 50"	1853	Général Nérenbürger, ma- jor Diedenhoven.	Théodolite de Gam- bey (construit à Pa- ris.)	
1b	Base d'Ostende Terme B	51 12 30	20 34 11	1853	id.	id.	
1c	Base d'Ostende Terme C	51 11 50	20 34 1	1853	id.	id.	
2	Zandvoorde	51 11 44	20 35 46	1853	id.	id.	
3	Raverzyde	51 11 58	20 30 40	1853	id.	id.	
4	Ostende	51 13 49	20 35 8	1853	id.	id.	
5	Ghislottes	51 9 30	20 37 57	1853-55	id.	id.	
6	Nieuport	51 7 53	20 25 20	1855-56	Général Nérenbürger, ma- jor Diedenhoven, lieute- nant Adan, M ^r Houzeau.	id.	
7	Dixmude	51 2 5	20 31 46	1855	Général Nérenbürger, ma- jor Diedenhoven.	id.	
8	Bruges	51 12 32	20 53 24	1855	id.	id.	
9	Hondschoote	50 58 56	20 15 4	1856	id.	id.	France.
10	Dunkerque	52 2 11	20 2 28	1856	id.	id.	N. 23, France
11	Cassel	50 48 0	20 9 13	1856	id.	id.	N. 21, France
12	Mt. Kemmel	50 46 47	20 28 41	1856-57	id.	id.	
13	Hooglede	50 58 44	20 44 50	1856-57	id.	id.	
14	Thielt	51 0 4	20 59 26	1857	id.	id.	
15	Courtrai	50 49 42	20 55 59	1857	Général Nérenbürger, lieu- tenant Adan.	Théod. de Beaulieu (construit à Bruxel- les).	
16	Aardenburg	51 16 26	21 6 47	1857	Général Nérenbürger, ma- jor Diedenhoven.	Théod. de Gambey.	Pays-Bas.
17	Assenede	51 13 43	21 25 7	1858	Général Nérenbürger, lieu- tenant Adan.	Théod. de Beaulieu.	
18	Gand	51 3 14	21 23 30	1858	Général Nérenbürger, ma- jor Diedenhoven.	Théod. de Gambey.	
19	Mt. l' Encluse	50 45 30	21 9 24	1858-61	id.	id.	
20	Andenkoven	50 50 8	21 27 40	1859-60	Général Nérenbürger, ma- jor Diedenhoven, capi- taine Terlinden.	Théod. de Gambey, Théod. de Beaulieu.	
21	Assche	50 54 42	21 51 42	1857-60-64	Général Nérenbürger (en 1864 général Simons), major Diedenhoven, lieu- tenant Adan, M ^r Houzeau.	id.	
22	Bruxelles	50 50 37	22 2 11	1857-61	Général Nérenbürger, lieu- tenant Adan.	Théod. de Beaulieu.	
23	Malines	51 1 46	22 8 38	1857-60-61	Général Nérenbürger, ma- jor Diedenhoven, mon- sieur Houzeau.	Théod. de Gambey, Théod. de Beaulieu.	
24	Anvers	51 13 17	22 3 58	1860	Général Nérenbürger, ma- jor Diedenhoven.	Théod. de Gambey.	
25	Herenthals	51 10 31	22 30 5	1860-61	id.	id.	
26	Montaigu	50 58 52	22 38 39	1852-61	id.	id.	
27	Moll	51 11 6	22 46 54	1852	id.	id.	
28	Lommel (tour)	51 13 46	22 58 49	1862	id.	id.	
28a	Lommel (signal)	51 10 7	22 58 6	1851-52	id.	id.	
29	Camp de Beverloo	51 6 52	22 56 9	1851-52	id.	id.	
28b	Base de Lommel ... Terme A	51 9 6	22 56 9	1851	id.	id.	
28c	Base de Lommel ... Terme B	51 8 45	22 58 3	1851	id.	id.	
28d	Base de Lommel ... Terme C	51 8 54	22 57 15	1851	id.	id.	
30	Peer	51 8 1	23 7 0	1852-62-63	id.	id.	

Rapport belge de Hennequin
Commission permanente de l'AGI à La Haye, 1882

III. — Belgique.

INDICATION DES POINTS	LATITUDE	LONGITUDE	ÉPOQUE	DIRECTEURS ET OBSERVATEURS	INSTRUMENTS	REMARQUES
Tongres.....	50° 46' 54"	23° 7' 48"	1861-62-73	Général Nérenbürger (en 1873 général Le Maire), major Diedenhoven, capitaine Arendt.	Théod. de Gambey.	
Nederweert.....	51 17 13	23 24 50	1862	Général Nérenbürger, major Diedenhoven.	id.	Pays-Bas.
Raremonde.....	51 11 50	23 39 1	1862	id.	id.	Pays-Bas.
Uhagsberg.....	50 50 49	23 37 8	1861-62	id.	id.	Pays-Bas.
Henry Chapelle....	50 40 38	23 35 11	1861	id.	id.	
Hulst.....	51 16 53	21 43 10	1862	Général Nérenbürger, capitaine Ferrier.	Théod. de Beaulieu.	Pays-Bas.
Bergen op Zoom....	51 29 43	21 57 12	1862	id.	id.	Pays-Bas.
Hoogstraeten.....	51 24 6	20 25 37	1863	id.	Théod. de Gambey.	
Duysbourg.....	50 49 0	22 13 4	1863-64	Général Simons, major Diedenhoven.	id.	
Castre.....	50 46 38	21 46 12	1863	Général Nérenbürger, major Diedenhoven.	id.	
Lion de Waterloo..	50 40 45	22 4 13	1863-72	Général Nérenbürger (en 1872 général Le Maire), major Diedenhoven, major Ferrier.	id.	
Mt. St. Aubert.....	50 39 19	21 3 53	1861	Général Nérenbürger, capitaine Terlinden.	Théod. de Beaulieu.	
Mt. Mainvault.....	50 39 38	21 22 14	1861-62-73	Général Nérenbürger (en 1873 général Le Maire), capitaine Terlinden.	id.	
Bon Secours.....	50 29 53	21 16 21	1862	Général Nérenbürger, capitaine Terlinden.	id.	
Mons.....	50 27 17	21 36 55	1862-63	id.	id.	
La Houssière.....	50 35 22	21 49 49	1863	Général Simons, capitaine Terlinden.	id.	
Jumel.....	50 27 6	22 5 29	1863	id.	id.	
Mt. St. Geneviève..	50 22 59	21 54 16	1864	id.	id.	
Avernas.....	50 42 7	22 44 13	1864	Général Simons, major Diedenhoven.	Théod. de Gambey.	
Perwez.....	50 37 12	22 29 3	1872	Général Le Maire, major Ferrier.	id.	
Hanziuelle.....	50 17 56	22 13 54	1864-66-71	Général Simons, capitaine Terlinden.	Théod. de Beaulieu.	
Philippeville.....	50 11 56	22 12 37	1864-69	id.	id.	
Sautain.....	50 9 52	21 53 29	1864-70	id.	id.	
Bois de Villers....	50 23 17	22 29 6	1865-66-72	Général Simons (en 1872 général Le Maire), colonel Diedenhoven, capitaine Brewer.	Théod. de Gambey.	
Ohey.....	50 25 50	22 47 31	1866	Général Simons, capitaine Brewer.	id.	
Beaufays.....	50 33 47	23 18 56	1865-66-70	Général Simons, cap. Ferrier, capit. Hennequin.	id.	
Stoumont.....	50 26 0	23 28 53	1866-70	Général Simons, capitaine Ferrier.	id.	
Flavion.....	50 15 38	23 22 53	1866-67-71	Général Simons, capitaine De Formanois.	Théod. de Lorieux, (constr. à Paris).	
Mesnil St. Blaise..	50 10 44	22 34 50	1866-67	Général Simons, capitaine De Formanois, capitaine Brewer.	Théod. de Lorieux, et Théod. de Gambey.	
Achêne.....	50 16 15	22 43 32	1867-69	Général Simons, capitaine Ferrier.	Théod. de Beaulieu.	
Hautfays.....	50 0 9	22 40 54	1867	Général Simons, capitaine Bouyet, capitaine Hennequin.	Théod. de Lorieux.	

III. — Belgique.

N°	INDICATION DES POINTS	LATITUDE	LONGITUDE	ÉPOQUE	DIRECTEURS ET OBSERVATEURS	INSTRUMENTS	REMARQUES
62	St. Hubert.....	50° 1' 54"	23° 5' 34"	1867-69-73	Général Simons (en 1873 général Le Maire), major Ferrier, capitaine De Formanois, cap. Brewer.	Théod. de Lorieux et Gambey.	
63	Wéris.....	50 19 8	23 12 8	1867-68-72	Général Simons (en 1872 général Le Maire), capitaine Bouyet.	Théod. de Gambey.	
64	Wardin.....	49 59 14	23 29 22	1868	Général Simons, capitaine Ferrier (Ed.)	id.	
65	Noville.....	50 2 25	23 26 20	1868	Général Simons, capitaine Ferrier.	id.	
66	Arlon.....	49 59 47	23 27 13	1868	id.	id.	
67	Montquintin.....	49 32 44	23 8 22	1868	id.	Théod. de Lorieux.	
68	Bouillon.....	49 46 12	22 43 19	1868	id.	Théod. de Beaulieu.	
69	Hamipré.....	49 50 1	23 8 19	1868	id.	Théod. de Gambey.	
70	Bého.....	50 12 34	23 40 11	1869	Général Simons, capitaine Hennequin.	Théod. de Lorieux.	
71	Wanne.....	50 19 53	23 38 36	1869	id.	id.	
72	Cul des Sarts.....	49 58 3	22 9 1	1869-70	Général Simons, capitaine Brewer.	Théod. de Gambey.	
73	Anlier.....	49 49 9	23 22 2	1870	Général Simons, major Ferrier.	id.	
74	Willerzie.....	49 57 5	22 30 37	1871	id.	Théod. de Lorieux.	
75	Jalhay.....	50 31 18	23 43 42	1872	Général Le Maire, major Ferrier.	id.	
76	Vierset.....	50 29 1	22 57 49	1868-69-70 71-72	Général Simons, général Le Maire, major Ferrier, capitaine Bouyet, capitaine Dehaes.	Théod. de Gambey et Beaulieu.	
77	Bande.....	50 7 22	23 5 3	1868-69-72 73	Général Simons, général Le Maire, major Ferrier, capitaine Dehaes.	id.	
78	Malempré.....	50 15 6	23 23 45	1867-71-72 73	Général Simons, général Le Maire, major Ferrier.	Théod. de Gambey.	

Renseignements, concernant le calcul de l'exactitude relative de la triangulation de 1^{er} ordre de la Belgique au moyen de la formule

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{3n}}$$

Les triangles sont au nombre de 219, formés par 84 sommets, et le calcul a conduit à la valeur

$$m = \pm 0'', 89226$$

Il est à observer que cette valeur de l'erreur moyenne des angles diffère fort peu de celle qui a été obtenue, après la compensation du réseau, par l'application de la formule de Encke. Celle-ci a fourni, en effet, pour limites d'erreur moyenne générale d'observation: $E = \pm 0'', 92322 \mp 0'', 02040$ (*Triangulation du Royaume de Belgique*, t. II, 1885, p. 585).

Le Lieutenant-colonel directeur
de l'Institut cartographique

E. HENNEQUIN.

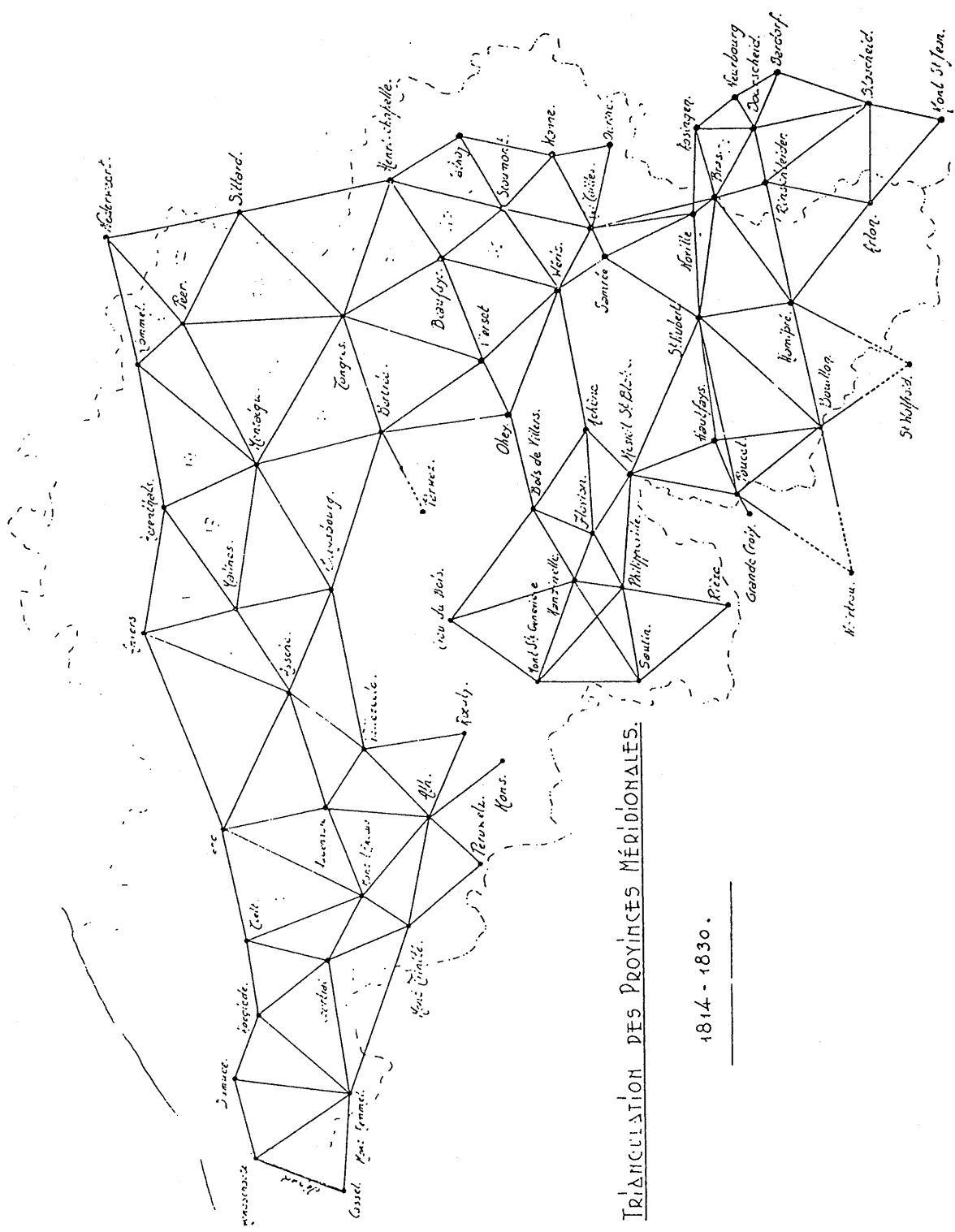


Figure 5.

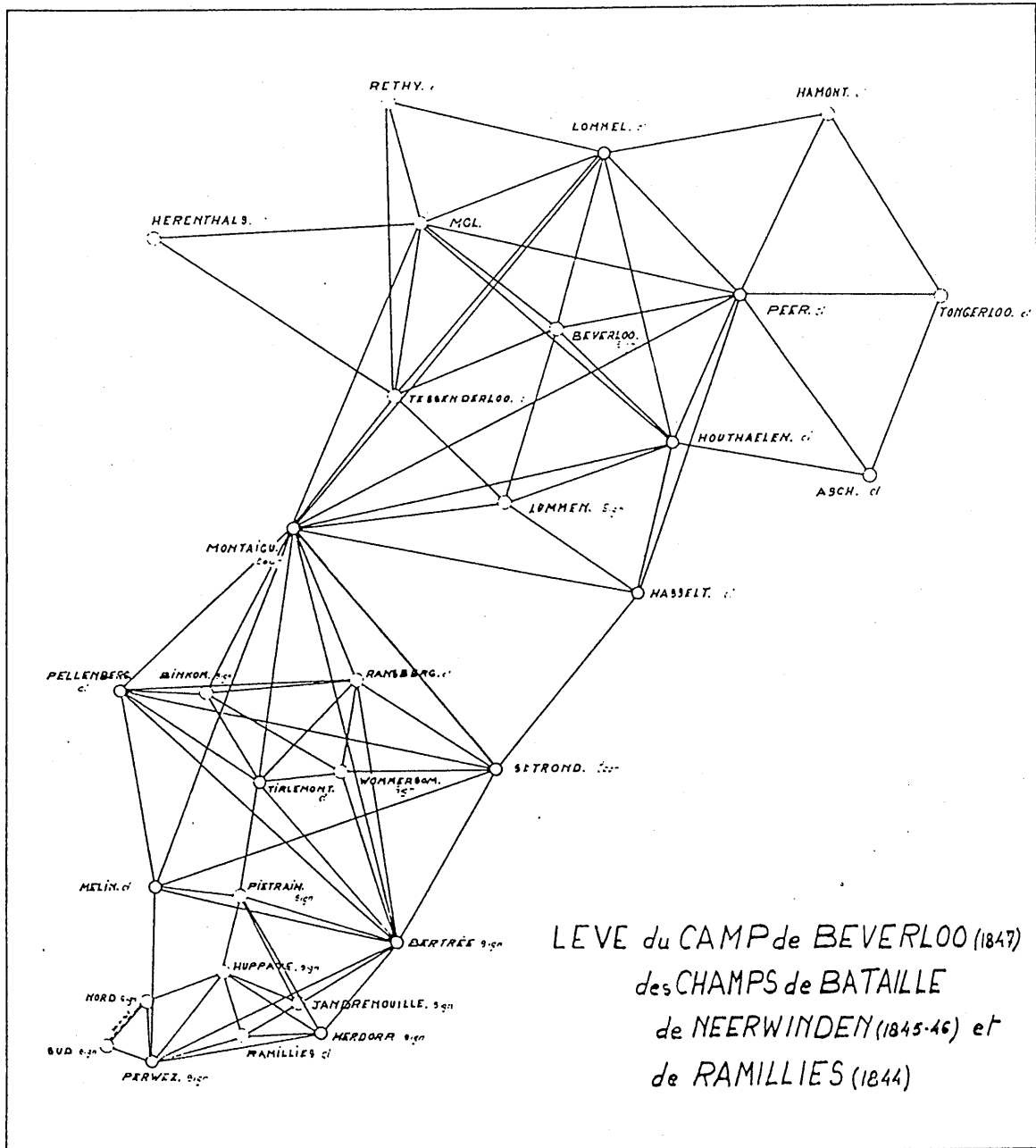
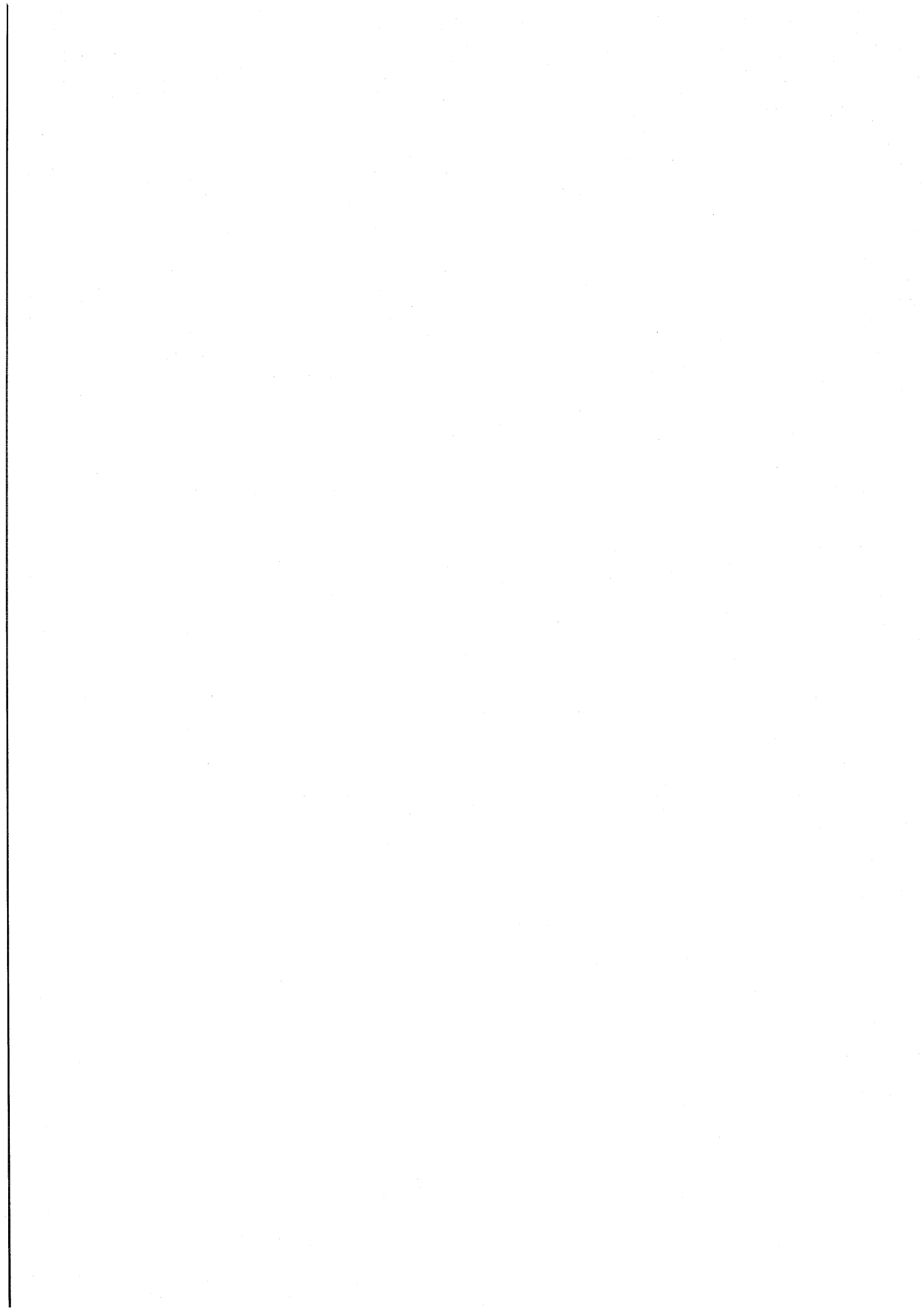


Figure 6.



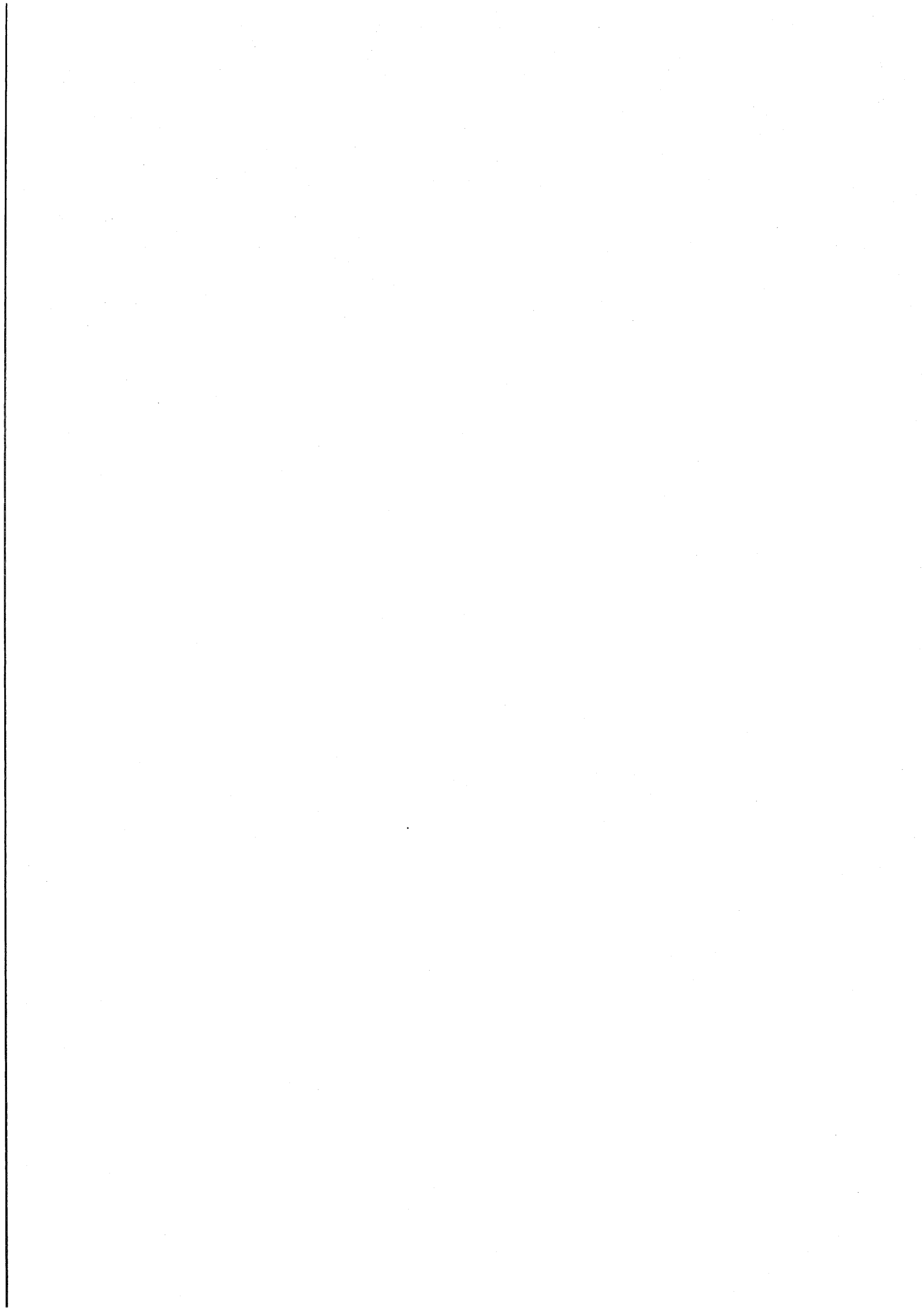
ANNEXE 29

TABLE DES MATIERES
DE

*CALCUL DES PROBABILITÉS
ET
THÉORIE DES ERREURS*

DE LIAGRE
(1852)

Cet ouvrage de Liagre est un des éléments qui a permis la diffusion des méthodes allemandes en langue française. La partie B de cette thèse en commente la troisième section. Nous présentons ici la totalité de la table des matières.



CALCUL

DES PROBABILITÉS

ET

THÉORIE DES ERREURS,

AVEC

DES APPLICATIONS AUX SCIENCES D'OBSERVATION EN GÉNÉRAL,

ET À LA GÉODÉSIE EN PARTICULIER :

PAR

A. B. S. SINGET,

CAPITAINE DU GÉNIE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE MILITAIRE DE GÉOLOGIE,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

BRUXELLES.

SOCIÉTÉ POUR L'ÉMANCIPATION INTELLECTUELLE.

ALEXANDRE JAMAR, ÉDITEUR,

10, RUE DES BURNINES.

Table des Matières.

PRÉFACE 5

PREMIÈRE SECTION.

PARTIE THÉORIQUE. — PROBABILITÉS A PRIORI.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES. — DES COMBINAISSONS ET DE L'ORDRE.

§ 1. Définition et mesure de la <i>probabilité</i> mathématique	13
2. Des chances	14
3. De la <i>probabilité contraire</i>	16
4. Probabilités <i>a priori</i> et <i>a posteriori</i>	17
5 à 10. Rappel des principales formules relatives aux permuta- tions et aux combinaisons	18
11. Permutations avec répétition	23
12. Combinaisons avec répétition	23
13. Formule du binôme	24
14. Exemples numériques	25

CHAPITRE DEUXIÈME.

DE LA PROBABILITÉ ABSOLUE ET RELATIVE; SIMPLE ET COMPOSÉE.

§ 15. Autre définition de la probabilité, applicable au cas où le nombre des chances est infini	28
16. Probabilité <i>absolue</i> et <i>relative</i>	29
17. Probabilité de l'existence simultanée d'un certain nombre d'événements dépendants les uns des autres	30
18. Probabilité du concours de plusieurs événements indépen- dants les uns des autres	31
19. Applications des probabilités <i>composées</i>	32
20. Problème relatif au recrutement militaire.	35
21. Manière d'évaluer la probabilité, dans certains cas, sans avoir recours à l'énumération des chances	36

§ 22. Questions de probabilité résolues à l'aide de considérations géométriques	37
CHAPITRE TROISIÈME.	
DES LOIS DE LA PROBABILITÉ MATHÉMATIQUE DANS LA RÉPÉTITION DES ÉVÉNEMENTS.	
§ 23. Développement du <i>binôme</i> appliqué aux probabilités	44
24. Exemples numériques	43
25. Détermination du nombre d'épreuves nécessaire pour qu'un événement acquière une probabilité donnée.	44
26. Paradoxe de d'Alembert	45
27. Probabilité de gain d'un joueur qui peut rendre un certain nombre de points à son adversaire	46
28. Recherche du plus grand terme du développement du binôme. — Propriété remarquable de ce terme.	46
29. Rapport du plus grand terme avec les termes voisins.	48
30. Agglomération des termes les plus forts du développement, dans le voisinage du terme maximum, à mesure que l'exposant du binôme augmente. — Loi des grands nombres.	49
31. Traduction graphique des résultats précédents	53
32. Théorème de <i>Bernoulli</i> sur la marche de la probabilité dans les grands nombres d'épreuves.	55
33. Notions générales sur la <i>courbe de possibilité</i>	59
34. Cas de deux événements ayant la même probabilité. — Equation de la courbe de possibilité.	60
35. Recherche de la <i>constante</i> par la méthode de Cauchy	64
36. Equation de la <i>courbe de probabilité</i>	66
37. Assimilation au cas d'une urne renfermant des boules blanches et des boules noires en nombre égal	67
38. Rapport entre la <i>précision</i> des observations et la grandeur des erreurs également possibles	68
39. Échelles de possibilité et de précision	74
40. Formule relative aux tirages répétés, lorsque les boules extraites ne sont pas remplacées dans l'urne	72

CHAPITRE QUATRIÈME.

DE LA VALEUR VÉRALE DES CHANCES ET DES PROBABILITÉS. —
DU MARCHÉ ALÉATOIRE ET DU JEU EN GÉNÉRAL.

§ 41. De l' <i>espérance mathématique</i> . — Règle des <i>paris</i>	76
--	----

42. Règle des <i>paris</i>	77
43. Applications des deux règles précédentes	78
44. Événement le plus probable lorsque les espérances mathématiques des joueurs sont égales	80
45. Probabilité de perte ou de gain de l'un des joueurs, après un certain nombre de parties, lorsque les conditions du jeu sont égales	80
46. Même question, lorsque les conditions du jeu sont inégales.	82
47. Nécessité de faire entrer la <i>répétition des épreuves</i> dans l'évaluation du degré de confiance qu'on doit accorder à la probabilité mathématique	83
48. Dans un jeu <i>égal</i> , il y a une probabilité, croissant avec le nombre des parties, que la perte <i>absolue</i> de chaque joueur surpassera une somme donnée, quelque considérable que soit cette somme.	83
49. Application de la formule de l'espérance mathématique au cas où il y a plus de deux événements à chaque épreuve.	85
50. De la valeur <i>morale</i> d'un bien quelconque. — Règle de <i>Buffon</i>	85
51. Règle de <i>Daniel Bernoulli</i>	87
52. De la <i>fortune morale éventuelle</i> . — <i>Fortune physique éventuelle</i> . — <i>Espérance morale</i>	88
53. Applications numériques de la règle de <i>Daniel Bernoulli</i>	90
54. Problème de <i>Petersbourg</i>	92
55. Considérations générales sur le jeu	94

DEUXIÈME SECTION.

PARTIE PHYSIQUE. — PROBABILITÉS A POSTERIORI.

CHAPITRE CINQUIÈME.

DÉTERMINATION DE LA PROBABILITÉ DES CAUSES PAR LES OBSERVATIONS. —
PROBABILITÉ D'UN NOUVEL ÉVÉNEMENT.

§ 56. Probabilité des causes ou des <i>hypotheses</i> . — Règle de <i>Bayes</i>	97
57. Exemple numérique	99
58. Probabilité des événements qui ont lieu dans chaque hypothèse.	400
59. Cas où le nombre des chances est <i>infini</i>	404

§ 60. Valeur de l'intégrale $\int_m dx (1-x)^n$ 402

61. Probabilité des événements *futurs*. 103

62. Probabilité de la reproduction d'un événement observé *m* fois de suite 104

63. Probabilité d'un événement composé, sur un certain nombre de renouvellements du même hasard 106

64. Formule qui réunit dans une seule expression toutes les probabilités des divers événements composés 107

65. Les probabilités *à posteriori* sont une sorte de probabilités moyennes. 109

66. *Hypothèse* la plus probable. 110

67. Elle s'approche sans cesse de la véritable *probabilité*, à mesure que le nombre des épreuves devient plus considérable. 114

68. Limites de l'écart 114

69. Probabilité de l'existence d'une cause qui facilite l'arrivée d'un événement observé plusieurs fois 115

70. Cas où l'événement a été observé plusieurs fois *de suite*. 116

71. La probabilité de l'existence d'une cause croît beaucoup plus rapidement que la probabilité du prochain retour de l'événement. 117

CHAPITRE SIXIÈME.

ÉTUDE DES CAUSES. — MOYENNES ET LIMITES. — APPLICATIONS.

§ 72. Causes constantes, variables et accidentelles 120

73. Considérations sur la moyenne 121

74. Cas où les valeurs qui concourent à la formation de la moyenne sont inégalement probables 123

75. Exemples où la courbe de possibilité perd sa forme symétrique. — Variation diurne de la température. 125

76. Application au prix des grains 126

77. Les causes accidentelles disparaissent à la longue vis-à-vis des causes constantes. — Prédominance des naissances masculines sur les naissances féminines. 127

78. Causes variables qui ont un caractère de *périodicité*. — Applications aux naissances et aux décès en Belgique 131

79. Discussion des documents statistiques. — Application aux mort-nés en Belgique 134

§ 80. Utilité des constructions graphiques pour représenter la marche d'une variable. — Application aux températures. 135

CHAPITRE SEPTIÈME.

DES LOIS DE LA MORTALITÉ ET DE LA POPULATION. — DES ASSOCIATIONS. — DES ASSURANCES SUR LA VIE ET LES CHÔSES.

§ 81. Des tables de mortalité. — De la *vie probable*. 140

82. Tables de population 142

83. *Vie moyenne*. — Table de la vie moyenne en Belgique. — Courbes de la mortalité et de la *vie moyenne* 144

84. Questions relatives à la population des États. 148

85. De la loi de mortalité. — Nouvelle table de mortalité pour la Belgique. 149

86. De la loi de population. — Calcul de la vie moyenne en fonction du chiffre de la population et de celui des naissances annuelles. 153

87. Recherches sur la marche de la population 154

88. Équation de la courbe de population 156

89. Application à la Belgique. 158

90. Probabilité de la coexistence de plusieurs individus 160

91. *Rentes viagères*. 161

92. *Tontines* 163

93. *Caisses de prévoyance, de secours, de retraite*. — *Caisses de veuves* 165

94. *Assurances* sur les choses 168

Note sur la densité de la population dans les différents États de l'Europe, et dans les différentes provinces de la Belgique 173

TROISIÈME SECTION.

PARTIE PRATIQUE. — PROBABILITÉS APPLIQUÉES.

CHAPITRE HUITIÈME.

THÉORIE DES ERREURS. — PRÉCISION DES OBSERVATIONS.

§ 95. Différentes espèces d'erreurs. 175

96. Observations compensées 176

7^e exemple. Application numérique, et réduction des poids. —
 Calcul de l'erreur moyenne, en n'employant que
 les premières puissances des erreurs. 208

8^e " Détermination du poids d'un côté d'une triangu-
 lation. 211

9^e à 12^e ex. Équation de la courbe de possibilité; valeurs de
 l'erreur moyenne et de l'indice de précision, dans
 différents cas particuliers. 214

§ 144. Application à l'essai des armes à feu. — Exemple relatif
 au tir du fusil. 219

CHAPITRE DIXIÈME.

PRÉCISION DES FONCTIONS DE QUANTITÉS OBSERVÉES.

§ 145. Connaissant les erreurs moyennes de deux quantités o et o' ,
 observées directement, trouver l'erreur moyenne de la
 fonction $u = o \pm o'$ 226

146. Application à la mesure d'un angle composé de la somme
 de deux autres. 227

Application à la détermination des longitudes par la mé-
 thode des signaux. 228

147. Précision de la somme algébrique d'un nombre quelcon-
 que de quantités observées. 229

148. Détermination du poids de la fonction $u = a' o'$ 232

149. Poids de la fonction linéaire $u = a' o' \pm a'' o'' \pm a''' o'''$ 233

Application à la mesure d'une base topographique.

120. Poids d'une fonction quelconque $u = F(o', o'', o''')$. —
 Application au calcul trigonométrique d'un triangle. 235

121. Remarques relatives à la détermination de l'unité de poids. 238

122. Considérations pratiques sur le poids à accorder aux ob-
 servations. 239

CHAPITRE ONZIÈME.

DÉTERMINATION DU RÉSULTAT LE PLUS EXACT DÉDUIT DE PLUSIEURS
 OBSERVATIONS. — PRÉCISION DE CE RÉSULTAT.

(PLUSIEURS INCONNUES À DÉTERMINER. — MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.)

§ 123. Division des observations en *immédiates*, *médiates* et *condi-*
tionnelles. 241

124. Principe des *moindres carrés*. — Son application, ou *mé-*
thode des moindres carrés. 243

TABLE DES MATIÈRES.

412

§ 97. Les erreurs accidentelles se répartissent suivant la loi de
 possibilité. 177

98. *Mesure de précision* ou *module de convergence*. 178

99. *Erreur probable*. 180

400. Tracé géométrique de la courbe des erreurs. 183

401. Exemple de l'accord qui règne entre la théorie et l'obser-
 vation. 184

CHAPITRE NEUVIÈME.

DÉTERMINATION DU RÉSULTAT LE PLUS EXACT DÉDUIT DE PLUSIEURS
 OBSERVATIONS. — PRÉCISION DE CE RÉSULTAT.

(UNE SEULE INCONNUE À DÉTERMINER.)

§ 102. La valeur la plus probable de l'inconnue est la *moyenne*
 entre tous les résultats d'observation. 187

103. Précision de la moyenne. — Elle croit comme la *racine*
carrée du nombre d'observations qui ont concouru à
 former la moyenne. 189

104. *Poids* d'une valeur. — Comment il sert à ramener à la
 même unité de précision des mesures inégalement pré-
 cises. 190

105. *Erreur moyenne*. 191

106. Expression du poids et de la mesure de précision, en fonc-
 tion de l'erreur moyenne. 192

107. Valeur de la mesure de précision, lorsque le nombre des
 observations est *illimité*. 193

108. *Limites probables* de la mesure de précision et de l'erreur
 probable. 196

109. Distinction entre l'erreur moyenne et l'*écart moyen*. 198

110. Considérations sur le poids. 199

111. De l'*unité* de poids. 201

112. Erreur moyenne de l'unité de poids. 202

113. Divers exemples numériques. 202

1^{er} exemple. Application à la mesure d'un angle. 204

2^e " " à la détermination d'une latitude. 204

3^e " " à la recherche de la densité moyenne
 de la terre. 205

4^e " " à la recherche de la composition de l'eau. 205

5^e " " aux observations astronomiques. 206

6^e " " Poids d'un angle mesuré dans des circonstances dif-
 férentes. 207

	PAG.
§ 140. 1 ^{er} exemple. Fermeture d'un tour d'horizon	302
2 ^e " " Fermeture d'un triangle	303
3 ^e " " Fermeture d'une chaîne de triangles	304
141. Observations conditionnelles d' <i>mégale précision</i>	305
142. <i>Erreur moyenne</i> de ces observations	306
143. 1 ^o Application à la fermeture d'un triangle	306
2 ^o " " d'un tour d'horizon	307
3 ^o Cas où l'on a observé surabondamment la <i>somme</i> de certains angles entrant dans le tour d'horizon	308
4 ^o Question relative au nivellement topographique	310
144. Compensation des <i>directions</i>	315
145. Application à une chaîne de triangles	317
146. Avantages et propriétés de la compensation des directions.	320
147. Équations de condition aux <i>angles</i> et aux <i>côtés</i>	321
148. Déterminer la position d'un point inaccessible, sur lequel on a visé de trois stations au moins	324
149. Exemple présentant simultanément les deux espèces d'équations de condition.	327
150. Exemple dans lequel se trouvent à la fois des mesures <i>linéaires</i> et des mesures <i>angulaires</i>	330
151. Division des équations de condition en trois classes. Théorèmes de Gauss relatifs au <i>nombre d'équations de condition</i> que présente un système de points reliés entre eux par un certain nombre de lignes. — Exemple tiré de la triangulation de la Prusse orientale, par Bessel et Baeyer.	332
152. Détermination des directions les plus probables fournies par les observations faites à une station géodésique	338
153. <i>Corrections</i> à faire subir à ces directions, par suite des conditions géométriques auxquelles doit satisfaire le réseau trigonométrique.	342
154. Exemple numérique tiré de la petite triangulation faite par le Dépôt de la guerre aux environs de Bruxelles.	343
155. Théorie générale de la compensation d'un réseau trigonométrique	347
156. Calcul de la correction à faire subir à la <i>direction initiale</i> , servant d'origine aux angles observés à chaque station.	350
157. Théorie du nivellement trigonométrique	352

	PAG.
§ 125. Remarques sur la formation des équations <i>normales</i> . — Tableau des calculs, suivant la méthode de Gauss.	250
126. Exemple numérique. — Résolution de quatre équations entre trois inconnues.	251
127. Calcul de l' <i>erreur moyenne</i> des observations.	252
128. <i>Poids</i> des inconnues déterminés d'après la méthode des moindres carrés	253
129. Application à l'exemple du § 126	258
130. Questions relatives à la méthode des moindres carrés : 1 ^o Trouver l'équation de la droite qui satisfait le plus exactement possible à la condition de passer par quatre points donnés.	259
2 ^o Trouver, par expérience, l'équation approchée de la trajectoire d'un projectile.	260
3 ^o Exprimer la résistance que l'air oppose à un mobile, en fonction de la vitesse de ce mobile	261
4 ^o Faire concourir à la détermination de la longueur du pendule les expériences faites sous différentes latitudes.	264
5 ^o Évaluer en secondes la valeur d'une division du niveau à bulle d'air.	266
131. Modification à apporter à la méthode générale des moindres carrés, lorsque les équations primitives <i>ne sont pas linéaires</i>	268
132. Application à la mesure des angles horizontaux.	270
" " à la réduction au centre de la station.	273
133. Précision des quantités calculées <i>en fonction</i> des inconnues qui ont été déterminées par la méthode des moindres carrés. — Exemple numérique.	276
134. Poids d'une <i>fonction linéaire</i> de ces inconnues.	277
135. Modification à apporter à la méthode générale des moindres carrés, lorsque les observations sont d' <i>mégale précision</i> . — Exemple numérique.	278
136. Application au calcul de l'erreur moyenne d'une base géodésique	281
137. Application à la mesure des angles géodésiques . — Exposé théorique du principe de la <i>répétition</i> . — Détermination des erreurs de <i>pointé</i> et de <i>lecture</i> . — Comparaison des méthodes par <i>répétition</i> et par <i>réitération</i>	287
138. Observations <i>surabondantes</i> ou de <i>contrôle</i> . — Résolution des équations <i>conditionnelles</i>	298
139. Calcul de l' <i>erreur moyenne</i> des observations	302

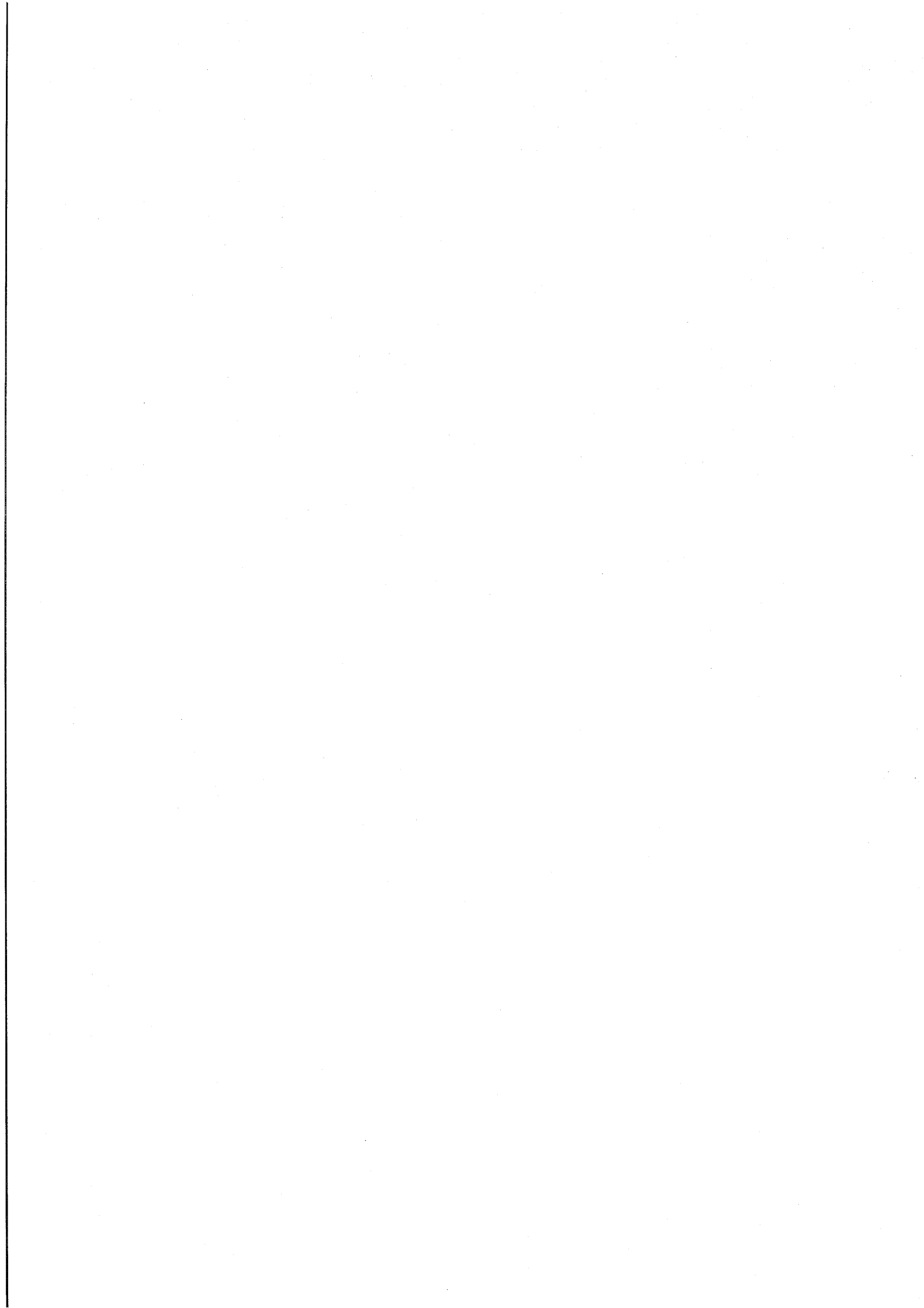
	PAG.
§ 158. Compensation des erreurs d'un nivellement trigonométrique, d'après la méthode des moindres carrés	356
159. Application numérique tirée de la triangulation faite en Prusse par le colonel Baeyer	362.
160. Méthode particulière employée par Bessel, pour compenser un nivellement trigonométrique. — Exemple tiré de la triangulation de la Prusse orientale.	366
161. Valeur la plus probable du coefficient de réfraction, déduite des distances zénithales réciproques et simultanées.	369
162. Précision des quantités calculées <i>en fonction</i> d'observations conditionnelles	371
163. Exemple numérique. Précision d'un côté de triangle, calculé en fonction d'un autre côté, et de deux angles compensés à l'aide de l'observation du troisième angle .	374
164. Cas où les observations conditionnelles, qui ont servi à la compensation, sont d' <i>inéga</i> le précision.	376
165. Conclusion. — Préceptes pratiques relatifs à la conduite des calculs, dans la méthode des moindres carrés.	378
Détermination des indices de précision	380
Calcul des coefficients sommatoires	384
Calcul des coefficients auxiliaires	384
Principes et formules résumant le calcul des probabilités et la théorie des erreurs.	387
Tables numériques.	404

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ANNEXE 30

MEMOIRE DE LIAGRE SUR LA VALEUR LA PLUS PROBABLE D'UN CÔTÉ GEODESIQUE COMMUN A DEUX TRIANGULATIONS, 1852

Cette annexe présente un mémoire de Liagre (*Bulletins de l'ARB*, Tome XIX, n°4, p. 512 à 534). Ce mémoire, d'après ses biographies, constitue une des plus importantes applications des méthodes qu'il expose dans son livre. Nous y avons ajouté les rapports de Nerenburger et Timmermans, ainsi que la traduction d'un passage de Baeyer *Die Küstenvermessung*, 1849, qu'il cite en référence.



Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations; par M. le capitaine Liagre, correspondant de l'Académie.

Rapport de M. le colonel Nérenburger.

« La question traitée par notre collègue, M. le capitaine Liagre, dans la notice intitulée : *Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations*, n'avait pas, jusqu'ici, fait l'objet d'un examen approfondi. M. le colonel Baeyer, chef du bureau trigonométrique à Berlin, s'en était occupé à la vérité, mais incidemment et sans tenir compte de toutes les circonstances qui la compliquent. Notre confrère, restituant au problème sa généralité, considère pour chacune des triangulations auxquelles appartient le côté commun, 1° la précision avec laquelle la base a été mesurée; 2° la grandeur de la base relativement à celle du côté; 3° la précision de la mesure d'un angle; 4° le nombre de triangles intermédiaires entre la base et le côté calculé; 5° la grandeur de leurs côtés; 6° enfin leur conformation plus ou moins avantageuse; puis il traite successivement chacun de ces points en supposant les réseaux identiques, sauf en ce qui concerne la circonstance particulière dont il recherche l'influence. Cette voie simple et ingénieuse le conduit à six formules, qui permettent de

(512)

calculer l'erreur moyenne, et par suite le poids du côté commun, résultant, pour chaque triangulation, de chacune des causes énoncées ci-dessus; et comme le poids définitif de ce côté est en raison composée des six valeurs particulières trouvées, il en assigne l'expression par une formule très-simple, eu égard à la nature du sujet.

Malheureusement, l'influence qu'exerce sur le côté commun la conformation plus ou moins avantageuse des triangles n'est pas appréciable rigoureusement et donne lieu à une formule empirique. Nonobstant cette circonstance, le travail de notre jeune et savant confrère mérite à tous égards de fixer l'attention des géomètres, et j'ai l'honneur de proposer à la classe d'en ordonner l'impression. »

Rapport de M. Timmermans.

« Le mémoire présenté à l'Académie par M. le capitaine Liagre, a pour objet l'une des applications les plus intéressantes de la théorie des probabilités à la géodésie. Il suppose que deux canevas géodésiques différents aient donné, pour un certain côté commun de deux triangles, des valeurs inégales, et il se propose de déterminer la vraie valeur, la plus probable de ce côté. La recherche de cette valeur qui dépend visiblement des chances d'erreur que présentent les deux suites d'opérations, donne lieu à une discussion intéressante, à l'occasion de laquelle l'auteur rectifie quelques erreurs commises par des géomètres qui se sont occupés avant lui de questions analogues. Comme cette polémique toute scientifique ne peut que

(513)

tourner au profit de la science, je propose d'insérer le travail de M. Liagre dans un des recueils de l'Académie. »

Les conclusions des rapports précédents auxquelles souscrit M. Pagani, troisième commissaire, sont adoptées par la classe.

Sur la valeur la plus probable d'un côté géodésique commun à deux triangulations; par M. le capitaine Liagre, correspondant de l'Académie.

I. Au point de vue de la détermination de la figure de la terre, les triangulations particulières, qui couvrent aujourd'hui une grande partie de l'Europe, acquièrent d'autant plus d'importance qu'elles sont mieux reliées entre elles; car l'objet de ces réseaux partiels est de former en définitive un seul réseau homogène et continu.

Lorsque deux triangulations viennent ainsi opérer leur jonction, il se présente en général une difficulté: le côté qui doit leur être commun reçoit presque toujours deux valeurs assez différentes, suivant qu'on le calcule en fonction de l'une ou de l'autre chaîne géodésique; et il est alors très-intéressant de savoir lui assigner sa valeur la plus probable. C'est cette dernière question que nous nous proposons de traiter ici.

On pourrait croire, à la première vue, que la valeur la

(514)

plus probable du côté commun est la moyenne arithmétique (la demi-somme) entre les deux résultats différents que l'on a obtenus; mais, en agissant ainsi, on admettrait que les opérations qui ont conduit aux deux valeurs différentes du côté, ont la même *précision*, ou, en d'autres termes, que les deux résultats ont le même *poids*, ce qui n'a jamais lieu. Cette remarque n'a pas échappé au colonel Baeyer, qui, en traitant ce sujet d'une manière incidente (*Die Küstenvermessung*, etc., p. 425), pose en principe que « la longueur calculée d'un côté géodésique présente d'autant plus d'incertitude, qu'il est séparé de la base » par un plus grand nombre de triangles. En conséquence, ce savant distingué assigne à la valeur du côté calculé un poids inversement proportionnel au nombre de triangles intermédiaires entre la base et lui (1). Il suppose d'ailleurs, que les angles et la base ont été mesurés avec la même précision dans les deux triangulations.

Lorsqu'on se livre à un examen spécial de cette question, et qu'on cherche à en analyser toutes les circonstances, aussi complètement que le permet la nature très-délicate du sujet, on est conduit à modifier la règle précédente, qui ne tient compte ni de la longueur relative de la base, ni de la grandeur des triangles, ni de la forme

(1) Le texte dit que l'erreur de la détermination est *inversement* proportionnelle au nombre des triangles intermédiaires; mais, évidemment, il y a ici une inadvertance de copiste, ou une faute typographique. Il faut donc, dans le texte, supprimer le mot *inversement* (*umgekehrt*), ou bien remplacer le mot *erreur* (*fehler*) par celui de *poids* (*gewicht*). Le choix n'est pas indifférent, puisque les poids sont réciproques aux carrés des erreurs; mais la suite des calculs du colonel Baeyer montre que c'est la seconde variante qu'il faut adopter, si l'on veut rendre exactement la pensée de l'auteur.

(515)

plus ou moins avantageuse de ces derniers. Suivant nous, les circonstances qui influent sur l'exactitude d'un côté géodésique, et auxquelles il faut avoir égard pour la détermination définitive du *poids* de ce côté, sont :

- 1° La précision avec laquelle la base a été mesurée;
- 2° La grandeur de la base relativement à celle du côté;
- 3° La précision de la mesure d'un angle;
- 4° Le nombre de triangles intermédiaires entre la base et le côté calculé;
- 5° La grandeur de leurs côtés;
- 6° Enfin, leur conformation plus ou moins avantageuse.

Nous allons traiter successivement chacun de ces points, en considérant seulement *deux* triangulations; mais nos raisonnements seront applicables à un nombre *quelconque* de triangulations aboutissant à un côté commun.

II. 1° Les deux réseaux triangulaires que l'on compare étant supposés *identiques*, à l'exception de la *précision de la base*, le côté commun, c , calculé en fonction de l'une ou de l'autre triangulation, sera une *même* fonction, f , de la base; en sorte que l'on aura :

$$\text{Dans le premier cas } c = f.b.$$

$$\text{Dans le second cas } c' = f.b'.$$

Soit db l'erreur moyenne de la première base; db' celle de la seconde; on en déduit pour l'erreur moyenne du côté commun

$$dc = f. db$$

$$dc' = f. db'$$

d'où

$$dc : dc' = db : db'.$$

Ainsi, (1°) « l'erreur moyenne d'un côté calculé est pro-

» portionnelle à celle de la base correspondante; » et comme le poids, p , d'un résultat est réciproque au carré de l'erreur moyenne (*), on pourra poser

$$p : p' = \frac{1}{db^2} : \frac{1}{db'^2} \dots \dots \dots (1)$$

2° Admettons maintenant que les deux triangulations ne diffèrent que par les longueurs de leurs bases, b et b' : l'erreur $db = db'$, commise sur la mesure de chacune de ces bases, se transportera sur tous les côtés calculés, même en supposant le reste des opérations parfaitement exact; et elle affectera ces côtés en proportion de leurs longueurs relatives. L'erreur moyenne du côté commun sera donc

$$dc = db \cdot \frac{c}{b},$$

$$dc' = db' \cdot \frac{c}{b'},$$

suivant qu'on le calculera en fonction de la première ou de la seconde chaîne de triangles; d'où, à cause de $db = db'$:

$$\left. \begin{aligned} dc : dc' &= b' : b; \\ p : p' &= b^2 : b'^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Ici donc (2°) « le poids du côté est directement proportionnel au carré de la longueur de la base. »

(*) Nous prenons le mot poids dans l'acception que Gauss a donnée aux expressions *pondus*, ou *gewicht*, et que toute l'école allemande a adoptée. Les auteurs français attachent en général à ce mot une signification un peu différente.

(518)

au moyen de laquelle on calcule un côté quelconque $DE = c$ d'une triangulation, en fonction de la base $AB = b$, et des angles mesurés, peut toujours se mettre sous la forme

$$c = b \frac{\sin. 1. \sin. 3. \sin. 5. \dots}{\sin. 2. \sin. 4. \sin. 6. \dots},$$

ou plus généralement, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ les angles observés,

$$c = b \cdot F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots).$$

La base étant supposée parfaitement exacte, la précision du côté calculé ne dépendra que de celle des angles mesurés; et l'erreur de ce côté sera liée à celle des angles par la formule différentielle

$$dc = b(\pm l_1 d\alpha_1 \pm l_2 d\alpha_2 \pm l_3 d\alpha_3 \pm \dots),$$

l_1, l_2, l_3, \dots désignant les quotients différentiels partiels de la fonction, par rapport aux variables $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Élevons les deux membres au carré, et remarquons que les doubles produits du second membre, à cause du double signe dont ils sont indifféremment affectés, doivent s'évanouir d'eux-mêmes dans la formation de l'erreur moyenne (*); nous obtiendrons :

$$dc^2 = b^2 (l_1^2 d\alpha_1^2 + l_2^2 d\alpha_2^2 + l_3^2 d\alpha_3^2 + \dots).$$

Or, par hypothèse, les deux réseaux géodésiques qui aboutissent au côté commun ne diffèrent que par le nombre des triangles; on doit donc supposer tous ces triangles

(*) Ce rejet du double signe, dans la formation de l'erreur moyenne, a été développé avec beaucoup de clarté par Gerling (*Die Ausgleichungs-Rechnungen*, etc., pages 71 et 72).

3° Rien n'est plus simple que de tenir compte de la précision de l'instrument goniométrique qui a servi à mesurer les angles. Il est clair, en effet, que, toutes autres choses égales, l'erreur moyenne du côté est proportionnelle à l'erreur moyenne, α , de l'instrument employé; c'est-à-dire que l'on a :

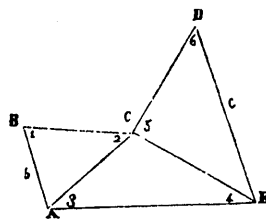
$$dc : dc' = \alpha : \alpha'$$

ou

$$p : p' = \frac{1}{\alpha^2} : \frac{1}{\alpha'^2} \dots \dots \dots (3)$$

Ainsi, dans ce troisième cas (3°), « le poids du côté est » réciproque au carré de l'erreur moyenne de l'instrument » avec lequel les angles ont été mesurés. »

4° Les deux questions suivantes, savoir celles qui se rapportent au nombre et à la grandeur des triangles, peuvent se traiter séparément ou simultanément. Pour rendre la discussion aussi complète que possible, nous nous placerons successivement à ces deux points de vue, qui doivent nous conduire au même résultat final.



Les deux chaînes sont donc supposées d'abord ne différer entre elles que par le nombre des triangles interposés entre chacune des bases et le côté commun. La relation

TOME XIX.

56

(519)

égaux entre eux, ce qui rend la fonction F symétrique par rapport à tous les angles. D'ailleurs, do_1, do_2, do_3, \dots étant les erreurs moyennes de l'observation des angles, sont égaux entre eux pour toute la triangulation : il vient donc, en représentant par n le nombre des angles compris dans la fonction,

$$dc^2 = b^2 \cdot n \cdot l_1^2 \cdot do_1^2$$

$$dc = b \cdot l_1 \cdot do_1 \sqrt{n},$$

ou enfin

$$p = \frac{1}{b^2 l_1^2 do_1^2} \times \frac{1}{n}.$$

Mais la seconde triangulation est identique avec la première, sauf en ce qui concerne le nombre des triangles; en outre, les angles y ont été observés avec la même précision, puisque nous avons déjà tenu compte (3°) de la différence qui pourrait exister de ce chef : on aura donc, pour elle,

$$p' = \frac{1}{b'^2 l_1^2 do_1^2} \times \frac{1}{n};$$

d'où

$$p : p' = \frac{1}{n} : \frac{1}{n} \dots \dots \dots (4)$$

Ce qui démontre que « le poids du côté commun est inversement proportionnel au nombre de triangles intermédiaires entre lui et la base. »

Ce résultat est précisément celui qu'on aurait obtenu, si l'on avait mesuré deux fois successivement le côté commun, en portant à la suite l'une de l'autre, d'abord n règles, ensuite n' règles; l'erreur moyenne de la pose d'une règle étant d'ailleurs regardée comme indépendante de sa longueur, ou comme la même dans les deux opérations.

5° Pour apprécier l'influence de la grandeur des côtés

sur le poids du résultat, nous devons considérer, dans l'une et l'autre chaîne, deux triangles semblables, A, A'. Or si, dans deux triangles semblables, on commet une même erreur sur un angle, celles qui en résulteront sur les côtés opposés seront proportionnelles aux côtés homologues : on a donc en général

$$da : da' = a : a'$$

et par suite

$$p : p' = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a'^2} = \frac{1}{\Lambda} : \frac{1}{\Lambda'}$$

Le poids dû à la grandeur des côtés d'un triangle quelconque est donc réciproque à la surface de ce triangle : par conséquent, le poids de la triangulation elle-même est réciproque à la surface du triangle moyen. Soient Σ , Σ' les surfaces des deux triangulations; n , n' les nombres de triangles qui composent chacune d'elles, on aura

$$p : p' = \frac{n}{\Sigma} : \frac{n'}{\Sigma'} \dots \dots \dots (5)$$

Ainsi, « le poids du côté est inversement proportionnel à la surface du triangle moyen. »

Remarquons immédiatement que l'excès sphérique, ϵ , d'un triangle géodésique, est proportionnel à sa surface : on peut donc, dans la dernière formule, remplacer les quantités Σ , Σ' par la somme des excès sphériques, dans chacune des deux triangulations.

La proportion $da : da' = a : a'$, à laquelle nous avons ramené la solution de la question, se déduirait de considérations géométriques fort simples, si l'on voulait assimiler le calcul d'une triangulation à la construction graphique d'un réseau triangulaire, dans lequel un côté et tous les angles seraient donnés. En effet, lorsque l'on

(522)

d'où

$$dc^2 : dc'^2 = na^2 : n'a'^2;$$

soit σ la surface d'un triangle du premier réseau; Σ la surface du réseau lui-même; σ' et Σ' les quantités analogues pour le second réseau : on aura

$$dc^2 : dc'^2 = n\sigma : n'\sigma' = \Sigma : \Sigma',$$

ou enfin

$$p : p' = \frac{1}{\Sigma} : \frac{1}{\Sigma'} \dots \dots \dots (5')$$

résultat qui n'est autre chose que la combinaison de ceux que nous avons obtenus (4° et 5°).

6° Dans chacun des cinq cas que nous venons de traiter, il a été assez facile d'isoler le genre spécial d'erreur qui le caractérisait, et d'exprimer que les deux réseaux géodésiques ne différaient que par le seul point que nous avions en vue. La question n'est plus aussi simple et aussi précise lorsqu'il s'agit :

D'abord d'exprimer analytiquement que deux triangles correspondants ne diffèrent que par la forme;

Ensuite d'assigner à cette forme le poids qui lui revient.

Quand on change la figure d'un triangle en faisant varier ses angles, la grandeur de ses côtés varie nécessairement; mais on peut exprimer que ces côtés conservent néanmoins une même longueur moyenne : il suffit pour cela d'introduire la condition que le périmètre du triangle reste constant.

Ce premier pas nous met sur la voie qui, suivant nous, mène le plus simplement à la solution de la seconde partie du problème. En effet, on sait que, dans un réseau géodésique, la forme la plus avantageuse est celle du triangle équilatéral : or, de tous les triangles d'un même périmètre,

construira successivement la figure à deux échelles différentes, a et a' , les erreurs commises sur deux côtés homologues quelconques, et provenant de l'inexactitude des angles, seront évidemment dans le rapport des échelles.

(4° et 5°) Les considérations relatives à l'influence du nombre et de la grandeur des triangles sur le poids du côté commun, peuvent très-bien, comme nous l'avons dit, se réunir dans un raisonnement unique. Il suffit de regarder les deux réseaux que l'on compare comme différant à la fois par le nombre et par la grandeur de leurs triangles (mais non par leur forme); autrement dit, les deux triangulations sont supposées maintenant renfermer des nombres différents, n et n' de triangles tous semblables entre eux.

Reprenons les équations trouvées (4°)

$$dc^2 = b^2 n l_1^2 do_1^2 \text{ pour la } 1^{\text{o}} \text{ triangulation;}$$

$$dc'^2 = b^2 n' l_1^2 do_1^2 \text{ " } 2^{\text{o}} \text{ "}$$

et remarquons que l'erreur moyenne, do_1 , est angulaire et par suite hétérogène avec dc . Si nous nous sommes contentés de ces deux formules dans le § 4, c'est parce que nous n'avions pas à nous y occuper de la grandeur des côtés des triangles, et que nous la supposions partout la même : do_1 était donc, dans les deux équations, multiplié par un même rayon pris pour unité. Mais maintenant que nous considérons les triangles comme différant de grandeur, il faut remplacer l'erreur angulaire do_1 par les erreurs linéaires ado_1 dans le premier cas, $a'do_1$ dans le second, a et a' représentant deux côtés homologues, il vient en conséquence

$$dc^2 = b^2 n l_1^2 a^2 do_1^2$$

$$dc'^2 = b^2 n' l_1^2 a'^2 do_1^2$$

(523)

lui qui renferme la plus grande surface. On sait, en outre, que la forme reste encore avantageuse, tant que l'on ne s'éloigne pas trop du triangle équilatéral; mais que l'on s'expose à de notables erreurs, quand on admet dans un triangle géodésique un angle très-aigu : or, tant qu'un triangle à périmètre invariable ne fait qu'osciller légèrement autour de la forme équilatérale, sa surface reste à peu près constante; mais elle diminue avec rapidité, dès qu'un des côtés diffère considérablement des autres. — Enfin, lorsqu'un triangle renferme un angle obtus, la somme des erreurs à craindre est d'autant plus faible qu'il s'approche davantage d'être isocèle; de même, de tous les triangles construits avec un angle donné, compris entre deux côtés dont la somme est constante, celui dans lequel ces deux côtés sont égaux renferme la surface maximum.

Il existe donc une corrélation frappante (si pas une proportionnalité rigoureuse, qui nous semble difficile à établir mathématiquement) entre l'erreur moyenne due à la forme d'un triangle géodésique, et la quantité dont sa surface diffère de celle du triangle équilatéral de même périmètre; et nous croyons pouvoir admettre que cette erreur moyenne est proportionnelle au rapport de la seconde surface à la première. Soient donc T_1, T_2, T_3, \dots les surfaces des divers triangles du premier réseau; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ celles des triangles équilatéraux de mêmes périmètres. Désignons, dans le second réseau, les quantités analogues par les mêmes lettres accentuées : nous aurons, pour deux triangles de même rang,

$$da_n : da'_n = \frac{\Delta_n}{T_n} : \frac{\Delta'_n}{T'_n}$$

Dans une triangulation quelconque, l'erreur moyenne

tiendra, comme au § 4°, en posant d'abord

$$ds = \pm \frac{\Delta_1}{T_1} \pm \frac{\Delta_2}{T_2} \pm \frac{\Delta_3}{T_3} \pm \dots$$

puis, élevant au carré et négligeant les doubles produits

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\Delta_1}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{T_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_3}{T_3}\right)^2 + \dots} = \sqrt{n \left(\frac{d}{l}\right)^2}$$

en faisant

$$\left(\frac{d}{l}\right) = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\left(\frac{\Delta_1}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{T_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_3}{T_3}\right)^2 + \dots \right]}$$

l'erreur du triangle moyen sera donc

$$dT = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\left(\frac{\Delta_1}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{T_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_3}{T_3}\right)^2 + \dots \right]}$$

et son poids, c'est-à-dire le poids dû à la forme moyenne des triangles du réseau, sera :

$$p = \frac{1}{dT^2} = \frac{n}{\left(\frac{\Delta_1}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{T_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_3}{T_3}\right)^2 + \dots} = \frac{n}{\left[\frac{\Delta^2}{T^2}\right]}$$

d'où

$$p : p' = n \left[\frac{\Delta'^2}{T'^2} \right] : n' \left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right] \dots \dots \dots (6)$$

si l'on veut remplacer les surfaces T_1, T_2, T_3, \dots par les excès sphériques calculés, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ la valeur de p pourra d'abord se mettre sous la forme

$$p = \frac{n (\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2}{\Delta_1^2 (\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2 + \Delta_2^2 (\epsilon_1 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2 + \Delta_3^2 (\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4 \dots)^2 + \dots} \dots \dots (6')$$

ou bien, comme les surfaces des triangles équilatéraux

(526)

Si les erreurs moyennes des deux bases sont dans le même rapport que leurs longueurs; si, en outre, les angles des deux triangulations ont été mesurés avec la même précision, la formule générale (7) devient

$$\Pi = \frac{n}{\Sigma \left[\left(\frac{\Delta^2}{T^2} \right) \right]} \dots \dots \dots (7'')$$

ou

$$\Pi : \Pi' = n \Sigma' \left[\left(\frac{\Delta'^2}{T'^2} \right) \right] : n' \Sigma \left[\left(\frac{\Delta^2}{T^2} \right) \right] \dots \dots (7''')$$

C'est dans cette hypothèse que nous allons la discuter pour différents cas particuliers.

a. Si les deux triangulations que l'on compare sont composées d'un même nombre de triangles égaux, on a

$$n = n' ; \Sigma = \Sigma' ; \left(\frac{\Delta'}{T'} \right) = \left(\frac{\Delta}{T} \right) ;$$

d'où $\Pi = \Pi'$, ce qui était évident *a priori*.

b. Si les deux chaînes géodésiques renferment des triangles, tous égaux entre eux, mais en nombres différents, n et n' , on pourra poser

$$\Sigma = nT ; \Sigma' = n'T ; \left(\frac{\Delta'}{T'} \right) = n \cdot \frac{\Delta_1^2}{T_1^2} ; \left(\frac{\Delta}{T} \right) = n' \cdot \frac{\Delta_1^2}{T_1^2} ;$$

et il viendra

$$\Pi : \Pi' = n' : n.$$

l'influence du nombre reste seule en évidence.

c. Lorsqu'on n'a pas égard à la conformation des triangles, ou qu'on admet que les erreurs qui en résultent se compensent dans les deux triangulations, il faut faire

$$\left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right] = \left[\frac{\Delta'^2}{T'^2} \right],$$

sont proportionnelles aux carrés de leurs périmètres, P_1, P_2, P_3, \dots

$$p = \frac{n (\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2}{P_1^2 (\epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2 + P_2^2 (\epsilon_1 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2 + P_3^2 (\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4 \dots)^2 + \dots} \dots \dots (6'')$$

On peut donner à cette formule une apparence plus homogène, en exprimant en secondes chacune des surfaces $P_1^2, P_2^2, P_3^2, \dots$. Il suffit pour cela de poser

$$\eta_1 = \frac{P_1^2}{R^2 \sin. 1''},$$

$$\eta_2 = \frac{P_2^2}{R^2 \sin. 1''} \dots \dots \dots \text{etc.}$$

R représentant le rayon de la terre exprimé en fonction de la même unité linéaire que les côtés de la triangulation. Il viendra alors

$$p = \frac{n (\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2}{(\eta_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2 + (\eta_2 \epsilon_1 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2 + (\eta_3 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4 \dots)^2 + \dots} \dots \dots (6''')$$

mais les poids étant des quantités purement relatives, cette homogénéité est inutile, et la formule (6'') sera la plus commode dans l'application.

III. Le poids définitif du côté commun est en raison composée des six valeurs particulières que nous venons de trouver; son expression sera donc :

$$\Pi = \frac{b^2}{\alpha^2 d b^2} \times \frac{n}{\Sigma} \times \frac{1}{\left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right]} \dots \dots \dots (7)$$

ou bien

$$\Pi = \frac{b^2}{\alpha^2 d b^2} \times \frac{(\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \dots)^2}{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \dots} \times \frac{n}{(\eta_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \dots)^2 + (\epsilon_1 \eta_2 \epsilon_3 \dots)^2 + (\epsilon_1 \epsilon_2 \eta_3)^2 + \dots} \dots \dots (7')$$

(527)

et il reste

$$\Pi : \Pi' = \frac{n}{\Sigma} : \frac{n'}{\Sigma'}.$$

Ici l'influence de la grandeur du triangle moyen se manifeste seule.

d. Supposons les triangles tous semblables entre eux, mais en nombre différent dans chacun des deux réseaux, nous aurons

$$\left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right] = n \cdot \frac{\Delta_1^2}{T_1^2} ; \left[\frac{\Delta'^2}{T'^2} \right] = n' \cdot \frac{\Delta_1^2}{T_1^2}$$

d'où

$$\Pi : \Pi' = \Sigma' : \Sigma ;$$

on retombe ainsi sur la formule (5'), qui tient compte à la fois du nombre et de la grandeur des triangles.

e. Les triangles des deux réseaux ayant tous même périmètre, et étant en même nombre, admettons, pour la facilité de la comparaison, que tous ceux du premier réseau soient équivalents entre eux, de même que tous ceux du second, il viendra, après réductions faites

$$\Pi : \Pi' = T_1 : T_1'$$

et en général la triangulation la plus avantageuse sera celle qui, à égal périmètre, embrasse la plus grande surface.

f. Enfin, pour le cas où tous les triangles auraient même surface et seraient en même nombre, on aurait

$$\Pi : \Pi' = [\Delta'^2] : [\Delta^2],$$

et les poids sont d'autant plus grands que les périmètres sont plus petits, à surface égale. Cette proposition est un corollaire évident de la précédente.

IV. Avant de passer à une application numérique de

la formule (7), nous allons la transformer en une autre plus commode pour le calcul. Dans ce but, remarquons que si l'on a une suite de termes tels que

$$\frac{\Delta_1^2}{T_1^2} + \frac{\Delta_2^2}{T_2^2} + \frac{\Delta_3^2}{T_3^2} + \dots = \left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right],$$

et qu'on ajoute entre eux tous les numérateurs et tous les dénominateurs, l'expression résultante

$$\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots}{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + \dots} = \left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right],$$

sera plus grande que la plus petite des quantités particulières :

$$\frac{\Delta_1^2}{T_1^2}, \frac{\Delta_2^2}{T_2^2}, \dots \text{ etc.,}$$

et plus petite que la plus grande d'entre elles. D'ailleurs, dans le cas qui nous occupe, toutes ces quantités diffèrent très-peu l'une de l'autre, puisque l'on évite les triangles mal conformés : on commettra donc une erreur très-faible en remplaçant chacune d'elles par sa valeur intermédiaire $\left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right]$, et en posant

$$\left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right] = n \left[\frac{\Delta^2}{T^2} \right],$$

la formule (7) devient par ce moyen

$$11 = \frac{b^2}{a^2 db^2} \cdot \frac{1}{[T]} \cdot \left[\frac{T^2}{\Delta^2} \right] \frac{1}{\sim} \dots (8)$$

$$11 = \frac{b^2}{a^2 b d^2} \cdot \frac{1}{[\varepsilon]} \cdot \left[\frac{\varepsilon^2}{P^4} \right] \dots (8')$$

(530)

mun en fonction de l'une ou de l'autre triangulation, est en conséquence :

$$\begin{aligned} \text{Par la base de Königsberg.} & \dots - 0,0752 = dl_1 \\ \text{de Berlin} & \dots + 0,1708 = dl_2 \end{aligned}$$

Pour trouver l'erreur moyenne (*) de la valeur la plus probable du côté commun, représentons par e_2 l'erreur moyenne de l'observation qui aurait pour poids l'unité : nous aurons

$$\frac{e_1^2}{dl_1^2} = \frac{p_1}{1}; \quad \frac{e_2^2}{dl_2^2} = \frac{p_2}{1} :$$

ajoutant ces deux équations, on en déduit :

$$e_2 = \sqrt{\frac{1}{2} [p_1 dl_1^2 + p_2 dl_2^2]}.$$

Comme d'ailleurs le nombre d'observations ayant l'unité pour poids est représenté par $(p_1 + p_2)$, l'erreur moyenne d'une de ces observations sera à celle, E_2 , du résultat moyen, comme $\sqrt{p_1 + p_2} : 1$; d'où

$$E_2 = \frac{e_2}{\sqrt{p_1 + p_2}} = \sqrt{\frac{p_1 dl_1^2 + p_2 dl_2^2}{2(p_1 + p_2)}} \dots (9) (**)$$

On mettra cette expression sous une forme plus simple

(*) Il ne faut pas oublier que l'erreur moyenne d'un résultat est la racine carrée de la moyenne des carrés des erreurs individuelles.

(**) Autre démonstration de la formule (9).

• Si les deux valeurs que l'on vient de trouver pour le côté commun avaient le même poids, l'erreur moyenne de leur moyenne serait

$$E_2 = \sqrt{\frac{dl_1^2 + dl_2^2}{2}},$$

• or, on sait que le poids de la moyenne entre plusieurs quantités, est égal

C'est cette dernière que nous avons employée pour calculer la valeur moyenne du côté *Trunz-Wildenhof*, qui appartient à la fois à deux triangulations, savoir : celle de la Prusse orientale, faite par Bessel et Baeyer (voy. *Gradmessung in Ostpreussen*), et celle du littoral de la mer Baltique, faite par Baeyer (voy. *Die Küstenvermessung*, etc.)

Entre la base de Königsberg et le côté en question, il y a sept triangles; on en compte trente-cinq entre le même côté et la base de Berlin. Dans la première triangulation, la somme des excès sphériques est 12",43; la somme des carrés de ces excès est 76",54. Dans la seconde les quantités analogues sont respectivement 91",91 et 571",77.

$$\text{Le rapport } [P^2] : [P^4] = 11,65 : 51,15.$$

La première base est de 955^r et son erreur moyenne de 1^{ur},816; la seconde base est de 1198^r et son erreur moyenne de 1^{ur},341.

Enfin, le théodolite employé à la mesure des angles était le même dans les deux opérations. Transportant ces données dans la formule (8'), on en déduit

$$p_1 : p_2 = 7 : 5.$$

Or, le côté *Trunz-Wildenhof*, calculé d'après

$$\text{La première triangulation, est de } 30123,7481 = l_1,$$

$$\text{D'après la seconde, il est de } \dots 30123,5041 = l_2;$$

sa valeur la plus probable est donc

$$L = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2}{p_1 + p_2} = 30123,6749.$$

L'erreur à craindre, lorsque l'on calcule le côté com-

(531)

à calculer, si l'on remarque que les quantités dl_1, dl_2 sont les différences entre les longueurs particulières l_1, l_2 et la valeur moyenne L ; c'est-à-dire que

$$dl_1 = \frac{p_1^2 (l_1 - L)^2}{(p_1 + p_2)^2} = \frac{p_1^2 \lambda^2}{(p_1 + p_2)^2};$$

$$dl_2 = \frac{p_2^2 (l_2 - L)^2}{(p_1 + p_2)^2} = \frac{p_2^2 \lambda^2}{(p_1 + p_2)^2}.$$

substituant dans (9), on a :

$$E_2 = \frac{\lambda}{p_1 + p_2} \sqrt{\frac{1}{2} p_1 p_2} \dots (9')$$

appliquant les nombres, c'est-à-dire faisant $\lambda = 0,2440$; $p_1 = 7$; $p_2 = 5$, on obtient enfin

$$E_2 = \pm 0,0791.$$

Si les deux déterminations avaient le même poids, la valeur la plus probable du côté commun serait la moyenne arithmétique $\frac{l_1 + l_2}{2}$; l'erreur moyenne de chacune des deux déterminations serait

$$\frac{l_1 + l_2}{2} - l_1, \quad \text{ou bien} \quad \frac{l_1 + l_2}{2} - l_2 = \pm \frac{l_1 - l_2}{2};$$

• à la somme des poids de ces diverses quantités; on sait, en outre, que, pour ramener à la même unité de précision des grandeurs dont les poids sont différents, il faut multiplier chacune d'elles par la racine carrée de son poids. On a donc

$$E_2 \sqrt{p_1 + p_2} = \sqrt{\frac{p_1 dl_1^2 + p_2 dl_2^2}{2}},$$

• ou bien

$$E_2 = \sqrt{\frac{p_1 dl_1^2 + p_2 dl_2^2}{2(p_1 + p_2)}} \dots$$

et celle de leur moyenne deviendrait par conséquent

$$\frac{l_1 - l_2}{2\sqrt{2}}$$

C'est ce qu'on obtiendrait directement en faisant $p_1 = p$, dans l'équation (9').

Le résultat numérique que nous venons d'obtenir pour l'erreur moyenne de côté *Trunz-Wildenhof*, s'écarte sensiblement de celui qu'on trouve à la page 426 de la « Triangulation du littoral de la Baltique (*Die Küstenvermessung*, etc.). La discordance toutefois ne provient pas, comme on pourrait le croire à la première vue, de la différence des poids adoptés : elle est due à ce que, dans l'ouvrage en question, l'erreur moyenne du côté est calculée à l'aide d'une formule qui nous semble inexacte.

L'auteur admet en effet (p. 425) que, lorsqu'un côté géodésique est commun à p triangulations, son erreur probable doit se calculer par la formule

$$E_s = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 \dots)} \dots \dots (10)$$

a, b, c, \dots représentant les écarts entre chaque détermination particulière du côté, et sa valeur moyenne. Or, si, dans cette formule, on suppose $a = b = c, \dots$, elle donnera, quel que soit p ,

$$E_s = \pm a,$$

d'où l'on tirerait la conséquence évidemment erronée, que l'erreur probable due à la *combinaison* d'un nombre quelconque de déterminations également précises, est la même que celle d'une observation isolée.

En admettant les données numériques du texte que nous discutons, nous obtenons, par notre formule,

$$E_s = \pm 0,0643,$$

au lieu de

$$E_s = \pm 0,1466$$

que l'on trouve dans l'ouvrage en question.

En réalité, la formule (10) n'exprime autre chose que l'erreur probable de la valeur moyenne d'un côté, dont on aurait divisé la longueur en p parties égales, pour mesurer p fois chacune d'elles; l'erreur probable d'une mesure étant a pour la première partie, b pour la seconde, etc.

Soit, par exemple, une base géodésique divisée en deux parties égales, dont chacune a été mesurée deux fois : si a est l'erreur moyenne de la première section, b celle de la seconde, l'erreur moyenne de la somme des deux parties, (ou celle de la base entière) sera

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}.$$

V. Dans une triangulation de quelque étendue, on mesure autant que possible les deux côtés extrêmes, autrement dit la base de départ et celle de vérification; et l'on juge de l'exactitude des opérations d'après l'accord qui règne entre le calcul de la base de vérification et sa mesure directe. Si les deux résultats diffèrent d'une quantité sensible, on doit modifier toute la triangulation, de manière à faire disparaître ce désaccord. Dans ce but, il suffira de regarder chaque côté comme commun à deux chaînes, s'appuyant sur chacune des deux bases. La formule (7) montre suffisamment que, pour les deux triangles extrêmes, il n'y a pas de correction à faire, quand on les calcule en fonction de leurs bases respectives. Quant aux triangles intermédiaires, ils subiront des corrections graduelles, que la même formule apprend à déterminer.

Si les N triangles du réseau étaient tous également avantageux, la valeur la plus probable du côté commun

TOME XIX.

57

(534)

appartenant au triangle de n° rang serait

$$L = \frac{l_1(N-n) + l_2 n}{N} \dots \dots (11)$$

l_1, l_2 désignant les deux valeurs que reçoit le côté, suivant qu'on le calcule en fonction de la première ou de la seconde base. Les corrections à faire à ces deux valeurs seront donc respectivement

$$L - l_1 = \frac{(l_2 - l_1) n}{N} = dl_1,$$

$$l_2 - L = \frac{(l_2 - l_1)(N - n)}{N} = dl_2.$$

La somme des corrections, prises en grandeur absolue, est

$$dl_1 + dl_2 = l_2 - l_1.$$

Ce qui était évident *a priori*, puisque les deux côtés ne doivent plus différer entre eux après qu'ils ont été corrigés.

Enfin, pour le triangle du milieu, on aurait $N - n = n$, et, par suite,

$$L = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

$$L - l_1 = l_2 - L = \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

§ 104 Comparaison de la base de Berlin avec la Base de Königsberg

Lors des mesures d'angles, également bonnes⁸⁶, on pourra admettre que la détermination de la longueur du côté d'un triangle devient moins fiable⁸⁷ plus il est éloigné de la base, ou bien qu'il se trouve plus de triangles entre lui et la base.

C'est pourquoi, quand on a déterminé plusieurs fois, à partir de plusieurs bases également bien mesurées, le côté d'un triangle, on pourra, à la condition énoncée ci-dessus, également évaluer les erreurs⁸⁸ probablement inhérentes à toute détermination, comme étant inversement proportionnelles au nombre des triangles qui se trouvent entre les bases et le côté concerné, et (on pourra) déterminer la valeur moyenne du côté ainsi que son erreur probable.

Si l'on représente par l_1, l_2, l_3, \dots les différentes longueurs d'un seul et même côté des triangles, qui ont été trouvées à partir des bases K, B, T, et si l'on représente par m, n, o, \dots le nombre des triangles qui se trouvent entre les bases et ce côté, la valeur la plus probable de la longueur du côté du triangle est

$$= \frac{1}{Q} \left\{ \frac{1}{m} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{o} l_3 + \dots \right\} \text{ si l'on pose } Q = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{L'erreur provenant de la base K} &= \frac{1}{Q} \left\{ +\frac{1}{n} (l_2 - l_1) + \frac{1}{o} (l_3 - l_1) + \dots \right\} \\ \text{" " " B} &= \frac{1}{Q} \left\{ -\frac{1}{m} (l_2 - l_1) + \frac{1}{o} (l_3 - l_1) + \dots \right\} \\ \text{" " " T} &= \frac{1}{Q} \left\{ -\frac{1}{m} (l_3 - l_1) - \frac{1}{n} (l_3 - l_2) + \dots \right\} \end{aligned}$$

et l'erreur probable du côté du triangle est :

$$\sqrt{\frac{1}{p} (a^2 + b^2 + c^2 + \dots)}$$

dans laquelle p représente le nombre de bases, et a, b, c, \dots représentent les expressions des erreurs.

Pour deux bases K et B on obtient donc:

$$\text{l'erreur provenant de la base K} = \frac{\frac{1}{n} (l_2 - l_1)}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

⁸⁶ou "d'égales précisions"

⁸⁷ou "plus incertaine"

⁸⁸Comme le souligne Liagre, il s'agit ici d'une faute. On devrait lire "poids".

" " "

$$B = \frac{-\frac{1}{m}(l_2 - l_1)}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

la valeur la plus probable = $\frac{\frac{1}{m}l_1 + \frac{1}{n}l_2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$

et l'erreur la plus probable est: $\frac{l_2 - l_1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right]}$

D'après Bessel, (*Gradmessung in Ostpreussen* page 168)

le côté Trunz-Wildenhof est = $l_1 = 30123^T,7481$

d'après le § 99 page 371 = $l_2 = 30123^T,5041$

 $l_2 - l_1 = -0,2440$

De la base de Königsberg jusqu'au côté Trunz-Wildenhof, il existe $7 = m$ triangles et de là jusqu'à la base de Berlin $35 = n$ triangles.

On en déduit:

l'erreur provenant de la base de Königsberg = -0^T0407

" " " "Berlin = $+0^T2033$

la valeur la plus probable du côté du triangle = $30123^T,7074$

l'erreur de ce même côté soit $\pm 0^+T,1466$ ou égale au $1/205500^\circ$ de la longueur.

De la même manière on peut trouver les valeurs les plus probables de l'ensemble des côtés du triangle, telles qu'elles résultent des deux bases.

Huitième exemple. — Dans une triangulation, l'exactitude avec laquelle on obtient la longueur d'un côté quelconque dépend de plusieurs circonstances qui influent sur la détermination du poids de ce côté. Ces circonstances sont :

- 1° La précision avec laquelle la base a été mesurée ;
- 2° La grandeur de la base relativement à celle du côté en question ;
- 3° La précision de la mesure d'un angle ;
- 4° Le nombre de triangles intermédiaires entre la base et le côté ;
- 5° La grandeur des côtés de ces triangles ;
- 6° Enfin, leur conformation plus ou moins avantageuse.

Le lecteur qui serait curieux de voir cette question traitée en détail peut recourir au t. XIX, n° 4, des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*.

Si l'on veut se contenter, avec Baeyer (*die Küstenermessung*, p. 104), de n'avoir égard qu'au nombre de triangles intermédiaires, on pourra admettre avec lui que la longueur calculée d'un côté géométrique présente d'autant plus d'incertitude, qu'il est plus éloigné de la base, ou qu'il en est séparé par un plus grand nombre de triangles. Lors donc qu'un même côté a été calculé de plusieurs manières, en fonction de différentes bases, les poids p' , p'' , p''' , ... de ces diverses déterminations peuvent être supposés réciproquement proportionnels aux nombres de triangles intermédiaires; ce qui permet d'apprécier la valeur moyenne du côté, ainsi que son erreur probable.

Soient l_1, l_2, l_3, \dots les différentes longueurs d'un seul et même côté, déduites des bases M, N, O, \dots au moyen de m, n, o, \dots triangles intermédiaires; posons $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{o} + \dots$ Q : la valeur la plus probable du côté commun sera la *moyenne*, c'est-à-dire

$$\frac{p'l_1 + p''l_2 + p'''l_3 + \dots}{p' + p'' + p''' + \dots} = \frac{1}{Q} \left\{ l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{o} l_3 + \dots \right\}$$

L'erreur de ce côté, lorsqu'on le calcule en fonction de la base M , est donc

$$a = \frac{1}{Q} \left\{ -l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{o} l_3 + \dots \right\} \quad l_1 = \frac{1}{Q} \left\{ \frac{1}{n} (l_2 - l_1) + \frac{1}{o} (l_3 - l_1) \right\}$$

de même, l'erreur à craindre sur le côté, lorsqu'on le calcule en partant de la base N ou de la base O , sera

$$b = -\frac{1}{Q} \left\{ \frac{1}{m} (l_2 - l_1) + \frac{1}{o} (l_3 - l_2) \right\}$$

$$c = -\frac{1}{Q} \left\{ -\frac{1}{m} (l_3 - l_1) - \frac{1}{n} (l_5 - l_2) \right\}$$

Pour trouver l'erreur à craindre sur la moyenne, représentons par γ_2 l'erreur moyenne de l'unité de poids : nous aurons (§ 112)

$$\gamma_2^2 = p'a^2 = p'b^2 = p''c^2 \dots$$

d'où, en supposant p triangulations,

$$p\gamma_2^2 = p'a^2 + p'b^2 + p''c^2 \dots$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{p'a^2 + p'b^2 + p''c^2 + \dots}{p}}$$

Représentant par E_2 l'erreur moyenne de la moyenne arithmétique entre les différentes déterminations, on aura (§ 114, K^{vi})

$$E_2 = \sqrt{\frac{p'a^2 + p'b^2 + p''c^2 + \dots}{p(p' + p'' + p''' \dots)}}$$

Dans le cas de deux triangulations, il vient simplement

$$E_2 = \sqrt{\frac{p'a^2 + p''b^2}{2(p' + p'')}}$$

On mettra cette dernière expression sous une forme plus commode, en remplaçant a et b par leurs valeurs, savoir :

$$a = \frac{p''(l_2 - l_1)}{p' + p''} = \frac{p'' dl}{p' + p''}$$

$$b = \frac{p'(l_1 - l_2)}{p' + p''} = -\frac{p' dl}{p' + p''}$$

Substituant, on a

$$E_2 = \frac{dl}{p' + p''} \sqrt{\frac{4}{2} \frac{p'p''}{p' + p''}}$$

D'après Bessel (*Gradmessung in Ostpreussen*, p. 168), le côté *Trunz-Wildenhof* est. $l_1 = 50125,7481$; et d'après Baeyer (*die Küstenermessung*,

page 571), ce même côté $l_2 = 50125,5044$; d'où $l_2 - l_1 = -0,2440$.

Or, depuis le côté *Trunz-Wildenhof*, il y a sept triangles jusqu'à la base de Königsberg, et trente-cinq jusqu'à la base de Berlin. On trouve donc :

Pour l'erreur provenant de la base de Königsberg. — 0,0407 :
 " " " de Berlin + 0,2033 :
 Valeur la plus probable du côté 30123,7074 :
 Erreur à craindre sur cette valeur. ± 0,0643.

On peut, de cette manière, calculer les valeurs les plus probables de tous les côtés de la triangulation, en égard aux deux bases mesurées.

Wildenhof.

		Log. Entfern.	Entfernung.
Galtgarben	— 0,3127	4,4329387,2	$\overset{x}{27098,0923}$
Sternwarte Sign.	19 42 45,7345		
Haferberg	20 44 58,3994	4,3103456,8	20433,6372
Condehnen	32 34 16,7710	4,4312107,9	26990,4914
Trunz	269 0 49,3546	4,4789090,1	30123,7481

Trunz.

Pfahl A	+ 0,0026		
Pfahl B	4 39 52,8756		
Pfahl M	2 19 55,5326		
Galtgarben	36 52 42,8515	4,6113355,7	40863,5004
Wildenhof	78 24 40,8127	4,4789090,1	30123,7481

Gradmessung in Ostpreussen, p. 168

der Dreieckspunkte unter einander.

371

Sommerfeld.

		Log. Entfern.	Entfernung.
Talpitten	+ 0,0597	3,9605227,6	$\overset{x}{9131,0929}$
Trunz	54 55 32,5729	4,2123588,7	16306,4292
Wildenhof	153 29 16,1303	4,3620450,6	23016,8062

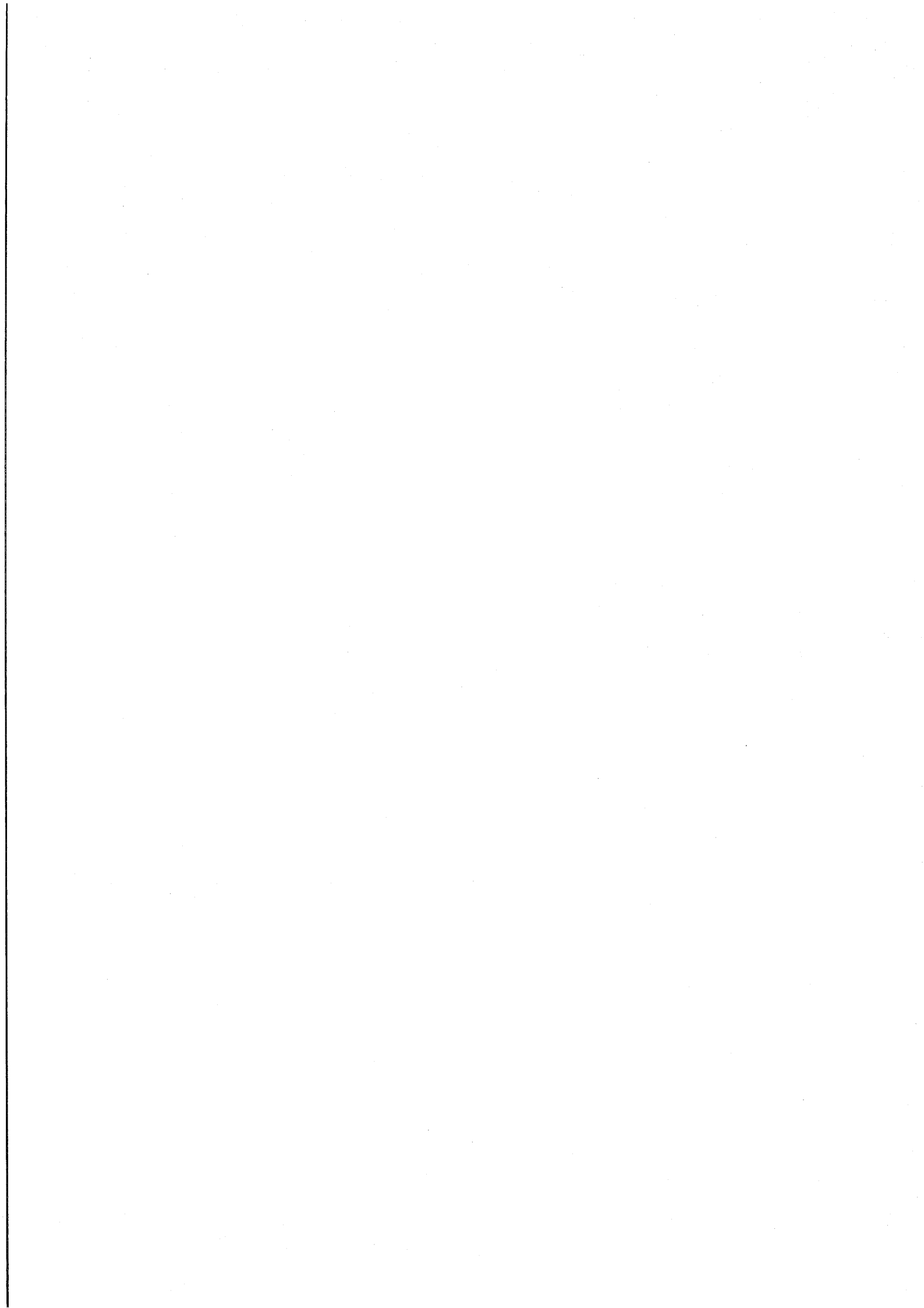
Wildenhof.

Sommerfeld. . . .	— 0,8930	4,3620450,6	23016,8062
Trunz	32 21 48,3659	4,4789054,9	30123,5041

Die Küstenvermessung, p. 371

ANNEXE 31
NOTATIONS INTRODUITES
PAR GAUSS

Ces notations simplifient l'exposition des calculs qui découlent de l'application de la méthode des moindres carrés. Liagre les recommande dans son livre. Nous donnons ci-après les pages où Gauss les introduit. (note II, "application de la méthode des moindres carrés à la correction des éléments de la planète Pallas" in *Mémoires sur la combinaison des observations*, traduction de J. Bertrand, Paris, 1855, p. 136 à 141; cet ouvrage de Gauss est réédité dans *Reproduction de textes anciens*, nouvelle série, n° 11, IREM Paris VII, 1996).



Les explications suivantes sont littéralement traduites du Mémoire de M. Gauss.

2.

Dans l'impossibilité où nous sommes de satisfaire exactement aux onze équations proposées, c'est-à-dire d'annuler tous les seconds membres, nous chercherons à rendre la somme de leurs carrés aussi petite que possible.

On aperçoit facilement que si l'on considère les fonctions linéaires

$$\begin{aligned}
a + ap + bq + cr + ds + \dots &= w, \\
a' + a'p + b'q + c'r + d's + \dots &= w', \\
a'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \dots &= w'', \\
\dots & \dots
\end{aligned}$$

les équations qu'il faut résoudre pour rendre

$$\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 + \dots$$

un minimum, sont

$$\begin{aligned}
aw + a'w' + a''w'' + \dots &= 0, \\
bw + b'w' + b''w'' + \dots &= 0, \\
cw + c'w' + c''w'' + \dots &= 0, \\
\dots & \dots
\end{aligned}$$

ou, en posant, pour abrégé,

$$\begin{aligned}
an + a'n' + a''n'' + \dots &= (aa), \\
a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots &= (aa), \\
ab + a'b' + a''b'' + \dots &= (ab), \\
\dots & \dots \\
b^2 + b'^2 + b''^2 + \dots &= (bb), \\
bc + b'c' + b''c'' + \dots &= (bc), \\
\dots & \dots
\end{aligned}$$

p, q, r, s , etc., devront se déterminer par les équations sui-

vantes :

$$\begin{aligned}
(aa) + (aa)p + (ab)q + (ac)r + \dots &= 0, \\
(bb) + (ab)p + (bb)q + (bc)r + \dots &= 0, \\
(cc) + (ac)p + (bc)q + (cc)r + \dots &= 0, \\
\dots & \dots
\end{aligned}$$

L'élimination, très-pénible lorsque le nombre des inconnues est considérable, peut se simplifier notablement de la manière suivante. Outre les coefficients (an) , (aa) , etc., [dont le nombre est $\frac{1}{2}(i^2 + 3i)$, si le nombre des inconnues est i], supposons que l'on ait calculé la somme

$$n^2 + n'^2 + n''^2 + \dots = (nn);$$

on voit facilement que l'on a

$$\begin{aligned}
\Omega = (nn) + 2(an)p + 2(bn)q + 2(cn)r + \dots \\
+ (aa)p^2 + 2(ab)pq + 2(ac)pr + \dots \\
+ (bb)q^2 + 2(bc)qr + 2(bd)qs + \dots \\
+ (cc)r^2 + 2(cd)rs + \dots
\end{aligned}$$

et, en désignant

$$(aa) + (aa)p + (ab)q + \dots$$

par Λ , tous les termes de $\frac{\Lambda^2}{(aa)}$ qui contiennent le facteur p , se trouvent dans l'expression Ω , et, par suite,

$$\Omega - \frac{\Lambda^2}{(aa)}$$

est une fonction indépendante de p . C'est pourquoi, en posant

$$\begin{aligned}
(nn) - \frac{(an)^2}{(aa)} &= (nn, 1), \\
(bn) - \frac{(an)(bn)}{(aa)} &= (bn, 1), \\
(cn) - \frac{(an)(cn)}{(aa)} &= (cn, 1), \\
\dots & \dots
\end{aligned}$$

C.F. Gauss, note II, "Application de la Méthode des moindres carrés à la correction des éléments de la planète Pallas" in *Mémoires sur la combinaison des observations*, Traduction de J. Bertrand, Paris, 1855

(139)

En continuant ainsi, nous formerons une suite d'expressions $\Omega, \Omega', \Omega'',$ etc., dont la dernière sera indépendante des diverses inconnues, et représentée par (m, μ) , si μ désigne le nombre de ces inconnues; nous aurons alors

$$\Omega \equiv \frac{A^2}{(aa)} + \frac{B^2}{(bb, 1)} + \frac{C^2}{(cc, 2)} + \frac{D^2}{(dd, 3)} + \dots + (m, \mu).$$

On prouvera facilement que Ω étant une somme de carrés

$$w^2 + w'^2 + w''^2 + \dots,$$

et ne pouvant devenir négative, les diviseurs $(aa), (bb, 1), (cc, 2),$ etc., sont tous positifs. (Nous supprimons, pour abrégér, le détail de la démonstration.) D'après cela, la valeur minimum de Ω correspond évidemment aux valeurs des inconnues, pour lesquelles

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \dots,$$

et, en commençant à résoudre le système par la dernière équation, qui ne contient qu'une inconnue, on trouvera les valeurs de $p, q, r, s,$ etc., sans avoir aucune élimination à effectuer. La méthode donne, en même temps, la valeur minimum de Ω , qui est (m, μ) .

3.

Appliquons ces principes à notre exemple, dans lequel $p, q, r, s,$ etc., sont remplacés par $dL, dI, d\pi, d\varphi, d\Omega, d\delta$. J'ai trouvé, par des calculs exécutés avec soin :

$(mn) =$	148848,	$(ac) =$	- 0,093461,
$(mm) =$	- 371.09,	$(ad) =$	- 2,28516,
$(bn) =$	- 580104,	$(ae) =$	- 0,34664,
$(nn) =$	- 113,45,	$(af) =$	- 0,18194,
$(dn) =$	+ 268,53,	$(bb) =$	+ 1083425,
$(en) =$	+ 91,26,	$(bc) =$	- 49,06,
$(fn) =$	- 31,81,	$(bd) =$	- 3229,77,
$(an) =$	+ 5,91569,	$(be) =$	- 198,64,
$(ab) =$	+ 7203,91	$(bf) =$	- 143,05,

(138)

$$\begin{aligned} (bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} &= (bb, 1), \\ (bc) - \frac{(ab)(ac)}{(aa)} &= (bc, 1), \\ (bd) - \frac{(ab)(ad)}{(aa)} &= (bd, 1), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} \Omega - \frac{A^2}{(aa)} &= (nn, 1) + 2(bn, 1)q + 2(cn, 1)r + 2(dn, 1)s \dots \\ &+ (bb, 1)q^2 + 2(bc, 1)qr + 2(bd, 1)qs \\ &+ (cc, 1)r^2 + 2(cd, 1)rs \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

nous désignerons cette fonction par Ω' .

De même, en posant

$$(bn, 1) + (bb, 1)q + (bc, 1)r \dots = B,$$

la différence

$$\Omega' - \frac{B^2}{(bb, 1)}$$

sera indépendante de q ; nous la représenterons par Ω'' .

En posant, de même,

$$\begin{aligned} (nn, 1) - \frac{(bn, 1)^2}{(bb, 1)} &= (nn, 2), \\ (cn, 1) - \frac{(bn, 1)(bc, 1)}{(bb, 1)} &= (cn, 2), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$(\dots, 1) - \frac{(bc, 1)^2}{(bb, 1)} = (cc, 2),$$

et

$$(en, 2) + (cc, 2)r + (cd, 2)s + \dots = C,$$

la différence

$$\Omega'' - \frac{C^2}{(cc, 2)}$$

sera une fonction indépendante de r .

(140)

- (*cc*) = + 0,71917
- (*cd*) = + 1,13382,
- (*ce*) = + 0,06400,
- (*cf*) = + 0,26341,
- (*cd*) = + 12,00340,
- (*de*) = - 0,37137,
- (*df*) = - 0,11762,
- (*ce*) = + 2,28215,
- (*cf*) = - 0,36136,
- (*ff*) = + 5,62456.

D'où l'on déduit :

- (*nn*, 1) = + 125569,
- (*bn*, 1) = - 138534,
- (*cn*, 1) = - 119,31,
- (*dn*, 1) = - 125,18,
- (*en*, 1) = + 72,52,
- (*fn*, 1) = - 43,22
- (*bb*, 1) = + 2458225,
- (*bc*, 1) = + 62,13,
- (*bd*, 1) = - 510,58,
- (*bc*, 1) = + 213,84,
- (*bf*, 1) = + 73,45,
- (*cc*, 1) = + 0,71769,
- (*cd*, 1) = + 1,09773,
- (*ce*, 1) = - 0,05852,
- (*cf*, 1) = + 0,26054,
- (*dd*, 1) = + 11,12064,
- (*de*, 1) = - 0,50528,
- (*df*, 1) = - 0,18790,
- (*ce*, 1) = - 0,26185,
- (*cf*, 1) = - 0,37,202,
- (*ff*, 1) = + 5,61905.

De la même manière :

- (*nn*, 2) = + 117763,
- (*cn*, 2) = - 115,81,
- (*dn*, 2) = - 153,95,
- (*en*, 2) = + 84,57,

- (*su*, 2) = - 30,03,
- (*cc*, 2) = + 0,71612,
- (*cd*, 2) = + 1,11063,
- (*ce*, 2) = - 0,06397,
- (*cf*, 2) = + 0,25818,
- (*dd*, 2) = + 11,01466,
- (*de*, 2) = - 0,46288,
- (*df*, 2) = - 0,17265,
- (*ce*, 2) = + 2,24325,
- (*cf*, 2) = - 0,37811,
- (*ff*, 2) = + 5,61686.

D'où :

- (*nn*, 3) = + 99034,
- (*dn*, 3) = + 25,66,
- (*en*, 3) = + 74,23,
- (*fn*, 3) = + 2,75,
- (*dd*, 3) = + 9,29213,
- (*de*, 3) = - 0,36175,
- (*df*, 3) = - 0,57384,
- (*ce*, 3) = + 2,23754,
- (*cf*, 3) = - 0,35532,
- (*ff*, 3) = + 5,52342.

De même :

- (*nn*, 4) = + 98463,
- (*cn*, 4) = + 75,23,
- (*fn*, 4) = + 4,33,
- (*ce*, 4) = + 2,22346,
- (*cf*, 4) = - 0,37766,
- (*ff*, 4) = + 5,48798.

D'où :

- (*nn*, 5) = + 96418,
- (*fn*, 5) = + 17,11,
- (*ff*, 5) = + 5,42383.

D'où enfin :

- (*nn*, 6) = + 96364.

(141)

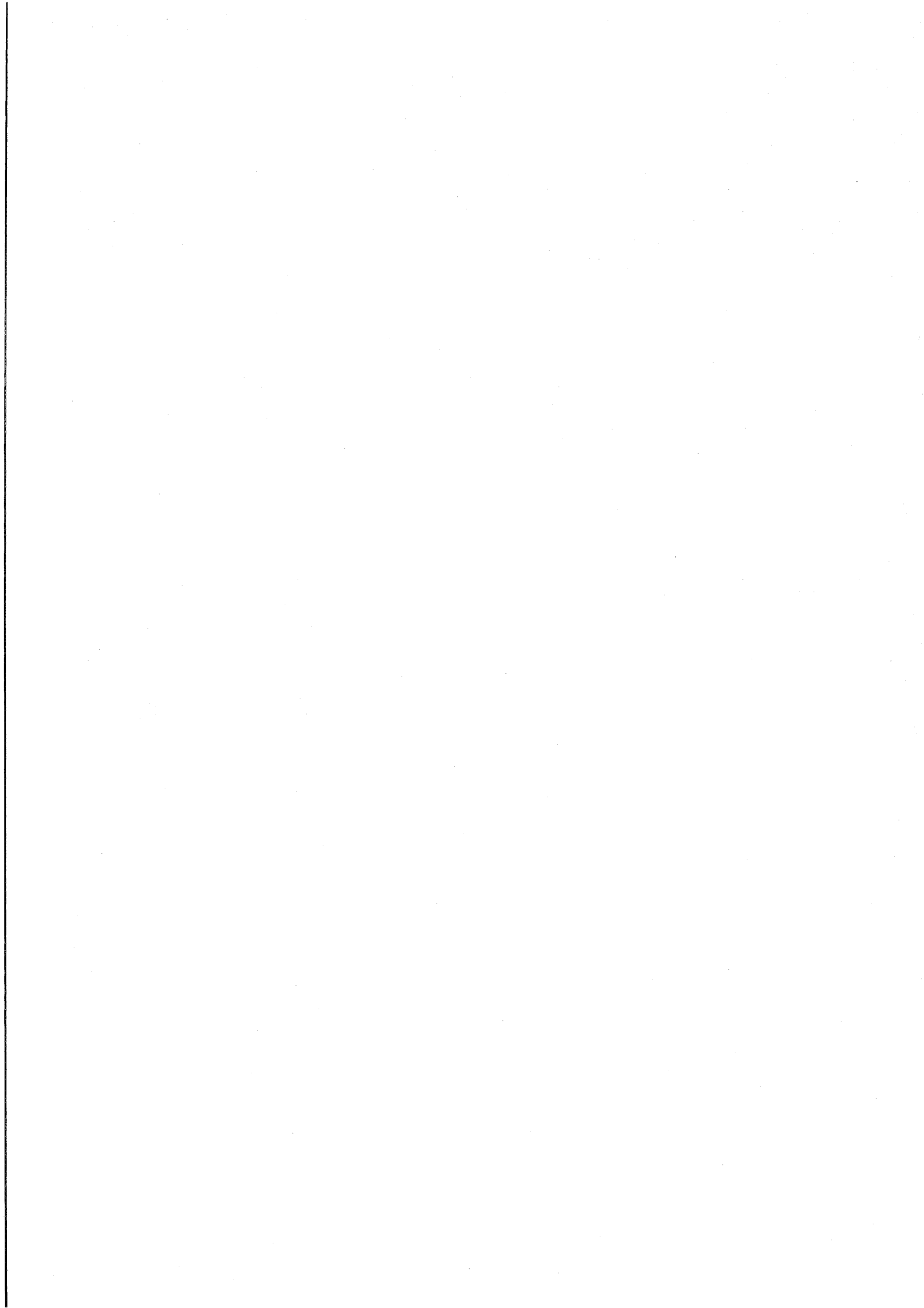
Nous avons donc les six équations suivantes :

- 0 = + 17",11 + 5,42383 *di*,
- 0 = + 75",23 + 2,22346 *dΩ* - 0,37766 *dι*,
- 0 = + 25",66 + 9,29213 *dφ* - 0,36175 *dΩ* - 0,57384 *dι*,
- 0 = - 115",81 + 0,71612 *dπ* + 1,11063 *dφ* - 0,06397 *dΩ* + 0,25818 *dι*,
- 0 = - 13854" + 2458225 *dι* + 62,13 *dπ* - 0,51058 *dφ* + 213,84 *dΩ* + 73,45 *dι*,
- 0 = - 371",09 + 5,91569 *dL* + 7203,91 *dι* - 0,00344 *dπ* - 2,20516 *dφ* - 0,34664 *dΩ* - 0,18194 *dι*;

d'où l'on déduit :

- dι* = - 3",15;
- dΩ* = - 34",37;
- dφ* = - 4",29;
- dπ* = + 166",44;
- dι* = + 0",051335;
- dL* = - 3",06.

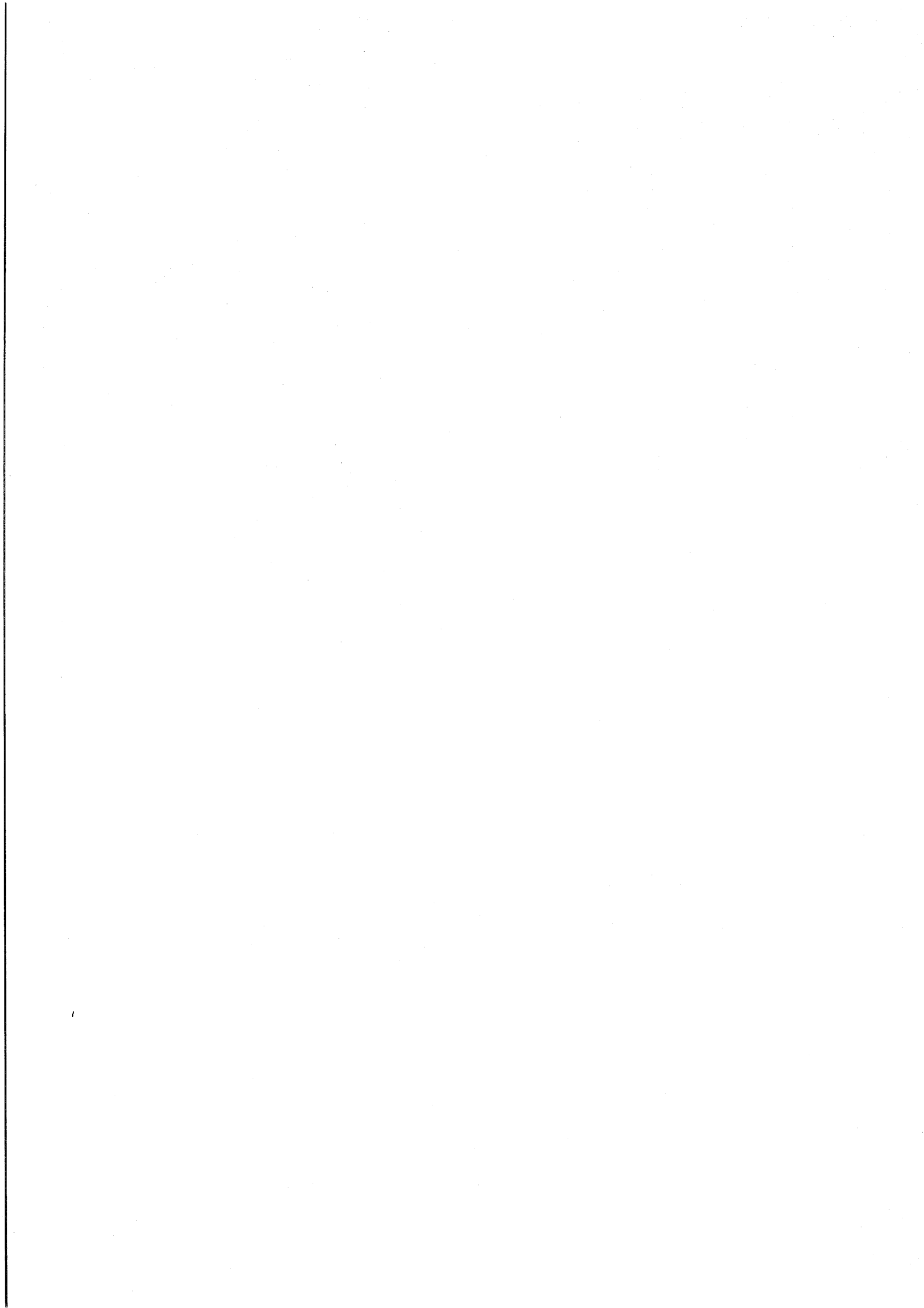
Telles sont les corrections qu'il faut apporter aux éléments trouvés d'abord pour la planète.



ANNEXE 32

EXEMPLES DE TABLEAUX
INTERVENANT
DANS LES COMPENSATIONS

Afin de faciliter la tâche des calculateurs utilisant la méthode des moindres carrés, Liagre recommande l'utilisation de tableaux tel que celui qu'il indique à la page 250 de son livre. Nous donnons aussi des tableaux que l'on rencontre dans les ouvrages de Bessel et de Baeyer.



an	$aa.x$	$ab.y$	$ac.z$	$ad.v$	bn	bb	bc	bd	cn	cc	cd	dn	dd
$1. an$	$1. aa$	$1. ab$	$1. ac$	$1. ad$	$-\frac{ab.an}{aa}$	$-\frac{ab}{aa}$	$-\frac{ab.ac}{aa}$	$-\frac{ab.ad}{aa}$	$-\frac{ac}{aa}$	$-\frac{ac}{aa}$	$-\frac{ac}{aa}$	$-\frac{ad}{aa}$	$-\frac{ad}{aa}$
$1. \frac{an}{aa}$		$1. \frac{ab}{aa}$	$1. \frac{ac}{aa}$	$1. \frac{ad}{aa}$	bn	bb	bc	bd	cn	cc	cd	dn	dd
$\frac{an}{aa}$		$1. y$	$1. z$	$1. v$	$1. bn$	$1. bb$	$1. bc$	$1. bd$	$-\frac{bc}{bb}$	$-\frac{bc}{bb}$	$-\frac{bc}{bb}$	$-\frac{bd}{bv}$	$-\frac{bd}{bb}$
$-\frac{ab}{aa}y$		$1. y \frac{ab}{aa}$	$1. z \frac{ac}{aa}$	$1. v \frac{ad}{aa}$	$1. \frac{bn}{bb}$	$1. \frac{bb}{bb}$	$1. \frac{bc}{bb}$	$1. \frac{bd}{bb}$	cn	cc	cd	dn	dd
$-\frac{ac}{aa}z$					$\frac{bn}{bb}$		$1. z$		$1. cn$	$1. cc$	$1. cd$	dn	dd
$-\frac{ad}{aa}v$					$-\frac{bc}{bb}$		$-\frac{bc}{bb}$	bd	$1. \frac{cn}{cc}$		$1. \frac{cd}{cc}$	dn	dd
x					y				$-\frac{cd}{cc}$		$1. r$	$1. dn$	$1. dd$
									z			v	

Résumé des calculs de la méthode de Gauss
Liagre, *Calculs des probabilités*, p. 250, 1852

$an =$	aa	ab	ac	ad	bn	bb	bc	bd	cn	cc	cd	dn	dd
$\log an$	$\lg aa$	$\lg ab$	$\lg ac$	$\lg ad$	$-\frac{an}{aa}$	$-\frac{ab}{aa}$	$-\frac{ac}{aa}$	$-\frac{ad}{aa}$	$-\frac{an}{aa}$	$-\frac{ac}{aa}$	$-\frac{ad}{aa}$	$-\frac{an}{aa}$	$-\frac{ad}{aa}$
$\log \frac{an}{aa}$		$\lg \frac{ab}{aa}$	$\lg \frac{ac}{aa}$	$\lg \frac{ad}{aa}$	$bn.1 =$	$bb.1.x$	$bc.1.y$	$bd.1.z$	$cn.1$	$cc.1$	$cd.1$	$dn.1$	$dd.1$
$\frac{an}{aa}$		$\lg x$	$\lg y$	$\lg z$	$\lg bn.1$	$\lg bb.1$	$\lg bc.1$	$\lg bd.1$	$-\frac{bn.1}{bb.1} \frac{bc.1}{bb.1}$	$-\frac{bc.1}{bb.1} \frac{cd.1}{bb.1}$	$-\frac{bd.1}{bb.1} \frac{cd.1}{bb.1}$	$-\frac{bn.1}{bb.1} \frac{dn.1}{bb.1}$	$-\frac{bd.1}{bb.1} \frac{dd.1}{bb.1}$
$-\frac{ab}{aa}$		$\lg x$	$\lg y$	$\lg z$	$\frac{bn.1}{bb.1}$		$\lg \frac{bc.1}{bb.1}$	$\lg \frac{bd.1}{bb.1}$	$cn.2 =$	$cc.2.y$	$cd.2.z$	$dn.2$	$dd.2$
$-\frac{ac}{aa}$					$\frac{bn.1}{bb.1}$		$\lg y$	$\lg z$	$\log cn.2$	$\lg cc.2$	$\lg cd.2$	$-\frac{cn.2}{cc.2} \frac{cd.2}{cc.2}$	$-\frac{cd.2}{cc.2} \frac{dd.2}{cc.2}$
$-\frac{ad}{aa}$					$-\frac{bc.1}{bb.1}$		$\lg y$	$\lg z$	$\lg \frac{cn.2}{cc.2}$		$\lg \frac{cd.2}{cc.2}$	$dn.3 =$	$dd.3.z$
$\frac{ad}{aa}$					$-\frac{bd.1}{bb.1}$		$\lg y$	$\lg z$	$\frac{cn.2}{cc.2}$		$\lg z$	$\lg dn.3$	$\log dd.3$
$\frac{ad}{aa}$					x				$-\frac{cd.2}{cc.2}$		$\lg z$	$\lg \frac{dn.3}{dd.3}$	
$\frac{ad}{aa}$									y			z	

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Gleichungen 11. wie folgt:

1	aa	ab	ac	ad	0	bb	bc	bd	0	cc	cd	0	dd	
						1	$bb.1$	$bc.1$	$bd.1$	0	$cc.1$	$cd.1$	0	$dd.1$
										1	$cc.2$	$cd.2$	0	$dd.2$
												1	$dd.3$	
													$\frac{1}{dd.3} = dd$	

Die Auflösungen der letzten Gleichungen, die größtentheils schon in den ersten enthalten sind, geben die Coeffizienten $aa, a\beta, a\gamma$ u. s. w.

Als Beispiel mögen hier die vollständig durchgeführten Rechnungen von einer Station folgen.

III. §. 37. Ausdrücke der Gröfsen (1), (2), (3) ... bis (70), u. s. w. 149

§. 37. Ausdrücke der Gröfsen (1), (2), (3) ... bis (70), durch I, II, III, ... bis XXXI.

Durch die im vorigen §. gegebenen Bedingungsgleichungen für unser Netz, verbunden mit den im 2^{ten} Abschnitte mitgetheilten Resultaten der Beobachtungen auf jedem Dreieckspunkte, erhält man unmittelbar die im §. 34. durch (D) bezeichneten Gleichungen:

$$\begin{aligned} (aa) (1) + (ab) (2) + (ac) (3) + \dots &= \alpha I + \beta II + \gamma III + \dots \\ (ab) (1) + (bb) (2) + (bc) (3) + \dots &= \alpha' I + \beta' II + \gamma' III + \dots \\ (ac) (1) + (bc) (2) + (cc) (3) + \dots &= \alpha'' I + \beta'' II + \gamma'' III + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

z. B. für den Dreieckspunkt *Trenk*, welcher in der Aufzählung der Beobachtungen den Anfang macht (§. 17):

$$\begin{aligned} 12,75 (1) - 4,25 (2) - 3,25 (3) &= I + III + VI - 45,279 VIII \\ - 4,25 (1) + 10,75 (2) - 2,25 (3) &= -II - III + 47,903 VIII \\ - 3,25 (1) - 2,25 (2) + 8,75 (3) &= -VI - 2,624 VIII \end{aligned}$$

Um aber die Wiederholung der schon im zweiten Abschnitte mitgetheilten, ersten, die Verbesserungen der auf den einzelnen Dreieckspunkten beobachteten Richtungen enthaltenden Glieder zu vermeiden, werden wir sie durch [1], [2], [3], ... [70] bezeichnen, so dafs z. B. [51], dem §. 27. zufolge:

$$- 5,833 (49) - 7,350 (50) + 42,650 (51) - 6,767 (52) - 6,850 (53)$$

bedeutet. Dieser Bezeichnung gemäfs sind die Gleichungen zwischen (1), (2), (3) ... (70) und I, II, III, ... XXXI die folgenden:

$$\begin{aligned} \text{§. 17.} &\left\{ \begin{aligned} [1] &= +I + III + VI - 45,279 VIII \\ [2] &= -II - III + 47,903 VIII \\ [3] &= -VI - 2,624 VIII \end{aligned} \right. \\ \text{§. 18.} &\left\{ \begin{aligned} [4] &= +II + 8,965 IV - 19,622 IX \\ [5] &= -VII - 17,857 IX \\ [6] &= -I + 9,354 IV + VII + 37,479 IX \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

- [7] = + I + 35,824 IV - VII
- [8] = + V + VI + VII + XI - 47,207 XV
- [9] = - XIV + 12,188 XV
- [10] = - X - XI + XIV + 5,049 XV
- [11] = - I - III + 78,421 IV - VI
- [12] = + II + III + 64,348 IV - 89,174 VIII
- [13] = + X - 4,461 XII
- [14] = - V + 1,532 VIII + 4,532 IX + 1,532 XII
- [15] = - II + 24,826 IV + 41,294 IX
- [16] = + X + XI - 6,379 XII - XIV
- [17] = 0
- [18] = + XIII + XIV - 5,905 XVII
- [19] = - X - 38,348 XII
- [20] = + V - 36,802 VIII - 36,802 IX - 36,802 XII
- [21] = - XIII - 34,841 XV - XVI + XIX + 17,839 XXVII
- [22] = - V - VI - VII - 34,786 VIII - 49,983 IX - XI - 7,272 XII + 44,074 XV
- [23] = + VII + 86,785 IX
- [24] = + VI + 74,588 VIII
- [25] = + XVI - 10,762 XVII - XVIII
- [26] = + XVIII
- [27] = - XXV + 316,938 XXVII
- [28] = - XIX + XXV - 334,777 XXVII
- [29] = + XIV + 25,444 XV
- [30] = + XIII - 22,430 XV + XVI - 16,434 XVII - XIX - 0,329 XXVII
- [31] = + XIX - XX - 8,475 XXVII
- [32] = + XX + 8,804 XXVII
- [33] = - XVI - 5,996 XVII
- [34] = 0
- [35] = + 44,814 XVII
- [36] = + XVI - 32,960 XVII
- [37] = - XVIII
- [38] = 0
- [39] = 0
- [40] = - XVIII
- [41] = + XVIII

durch I, II, III, ... bis XXXI.

- [42] = - XXIII + XXIV + 14,751 XXVII
- [43] = + XXIII - XXV - 197,234 XXVII
- [44] = + XXV + 185,483 XXVII
- [45] = - XXX - 346,429 XXXI
- [46] = + 374,845 XXXI
- [47] = - XXIX + XXX - 23,416 XXXI
- [48] = - XXVIII + XXIX
- [49] = - XIX + XX
- [50] = + XIX - XXV
- [51] = - XXIII + XXV + 44,235 XXVI
- [52] = - XXII - 20,746 XXVI
- [53] = - XXI + XXII + XXIII + 6,511 XXVI
- [54] = + 53,280 XXXI
- [55] = + XXX - 12,621 XXXI
- [56] = 0
- [57] = + XXX - 555,492 XXXI
- [58] = 0
- [59] = - XXIX
- [60] = + XXIX - XXX - 14,104 XXXI
- [61] = + XXVIII - XXIX
- [62] = + XXIX
- [63] = + XXII - 19,296 XXVI
- [64] = + XXIV + 27,156 XXVI - XXVIII
- [65] = + XXVIII
- [66] = + XXI - XXII - XXIII + 20,085 XXVI - 27,178 XXVII
- [67] = + XXIII - XXIV - 42,443 XXVI + 20,085 XXVII
- [68] = + XXII + XXIV + 22,358 XXVI
- [69] = - XX + 5,402 XXVII
- [70] = + XXI + 8,671 XXVII

Die Ausdrücke von (1), (2), (3) ... (70) durch I, II, III ... XXXI erhält man am leichtesten, wenn man ihrer Ableitung die Auflösung der Gleichungen:

$$\begin{aligned} (aa) (1) + (ab) (2) + (ac) (3) + \dots &= P \\ (ab) (1) + (bb) (2) + (bc) (3) + \dots &= Q \quad (k) \\ (ac) (1) + (bc) (2) + (cc) (3) + \dots &= R \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} (1) &= \mathcal{A}P + \mathcal{A}'Q + \mathcal{A}''R + \dots \\ (2) &= \mathcal{B}P + \mathcal{B}'Q + \mathcal{B}''R + \dots \\ (3) &= \mathcal{C}P + \mathcal{C}'Q + \mathcal{C}''R + \dots \end{aligned} \quad (l)$$

u. s. w.

nämlich:

vorangehen läßt. Indem man zuerst (l) in (k), dann (k) in (l) substituirt, erhält man, da die Gleichungen hierdurch identisch werden müssen:

$$\begin{aligned} 1 &= (aa) \mathcal{A} + (ab) \mathcal{A}' + (ac) \mathcal{A}'' + \dots & 1 &= (aa) \mathcal{A} + (ab) \mathcal{B} + (ac) \mathcal{C} + \dots \\ 0 &= (ab) \mathcal{A} + (bb) \mathcal{A}' + (bc) \mathcal{A}'' + \dots & 0 &= (ab) \mathcal{A} + (bb) \mathcal{B} + (bc) \mathcal{C} + \dots \\ 0 &= (ac) \mathcal{A} + (bc) \mathcal{A}' + (cc) \mathcal{A}'' + \dots & 0 &= (ac) \mathcal{A} + (bc) \mathcal{B} + (cc) \mathcal{C} + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

u. s. w.

$$\begin{aligned} 0 &= (aa) \mathcal{B} + (ab) \mathcal{B}' + (ac) \mathcal{B}'' + \dots & 0 &= (aa) \mathcal{A}' + (ab) \mathcal{B}' + (ac) \mathcal{C}' + \dots \\ 1 &= (ab) \mathcal{B} + (bb) \mathcal{B}' + (bc) \mathcal{B}'' + \dots & 1 &= (ab) \mathcal{A}' + (bb) \mathcal{B}' + (bc) \mathcal{C}' + \dots \\ 0 &= (ac) \mathcal{B} + (bc) \mathcal{B}' + (cc) \mathcal{B}'' + \dots & 0 &= (ac) \mathcal{A}' + (bc) \mathcal{B}' + (cc) \mathcal{C}' + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

u. s. w.

$$\begin{aligned} 0 &= (aa) \mathcal{C} + (ab) \mathcal{C}' + (ac) \mathcal{C}'' + \dots & 1 &= (aa) \mathcal{A}'' + (ab) \mathcal{B}'' + (ac) \mathcal{C}'' + \dots \\ 0 &= (ab) \mathcal{C} + (bb) \mathcal{C}' + (bc) \mathcal{C}'' + \dots & 0 &= (ab) \mathcal{A}'' + (bb) \mathcal{B}'' + (bc) \mathcal{C}'' + \dots \\ 1 &= (ac) \mathcal{C} + (bc) \mathcal{C}' + (cc) \mathcal{C}'' + \dots & 1 &= (ac) \mathcal{A}'' + (bc) \mathcal{B}'' + (cc) \mathcal{C}'' + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

u. s. w.

Da hieraus

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \mathcal{A}', \quad \mathcal{C} = \mathcal{A}'', \quad \mathcal{D} = \mathcal{A}''', \dots \\ \mathcal{C}' &= \mathcal{B}', \quad \mathcal{D}' = \mathcal{B}'', \dots \\ \mathcal{D}'' &= \mathcal{C}'', \dots \end{aligned}$$

hervorgeht, so kann man die Form der Auflösung der Gleichungen (k)

$$\begin{aligned} (1) &= (aa) P + (ab) Q + (ac) R + \dots \\ (2) &= (ab) P + (bb) Q + (bc) R + \dots \\ (3) &= (ac) P + (bc) Q + (cc) R + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

bezeichnen *), wo (aa), (ab), (ay) ..., (ββ), (βγ), ..., (γγ) ... aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= (aa) (aa) + (ab) (aβ) + (ac) (aγ) + \dots \\ 0 &= (ab) (aa) + (bb) (aβ) + (bc) (aγ) + \dots \\ 0 &= (ac) (aa) + (bc) (aβ) + (cc) (aγ) + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} 0 &= (aa) (aβ) + (ab) (ββ) + (ac) (βγ) + \dots \\ 1 &= (ab) (aβ) + (bb) (ββ) + (bc) (βγ) + \dots \\ 0 &= (ac) (aβ) + (bc) (ββ) + (cc) (βγ) + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} 0 &= (aa) (aγ) + (ab) (βγ) + (ac) (γγ) + \dots \\ 0 &= (ab) (aγ) + (bb) (βγ) + (bc) (γγ) + \dots \\ 1 &= (ac) (aγ) + (bc) (βγ) + (cc) (γγ) + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

oder, nach der bekannten Gauß'schen Bezeichnungsart, aus

$$\begin{aligned} 1 &= (aa) (aa) + (ab) (aβ) + (ac) (aγ) + \dots \\ 0 &= (ab) (aa) + (bb) (aβ) + (bc) (aγ) + \dots \\ 0 &= (ac) (aa) + (bc) (aβ) + (cc) (aγ) + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} 1 &= (bb \cdot 1) (ββ) + (bc \cdot 1) (βγ) + \dots \\ 0 &= (bc \cdot 1) (ββ) + (cc \cdot 1) (βγ) + \dots \end{aligned}$$

u. s. w.

$$1 = (cc \cdot 2) (γγ) + \dots$$

u. s. w.

hervorgehen. Indem dieselben Gleichungen, unter Annahme bestimmter Werthe von P, Q, R ... schon aufgelöst worden sind, um dadurch das Resultat der Beobachtungen auf jedem Dreieckspunkte zu erhalten, ist alles was die Rechnung auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen ergiebt, schon bekannt, und man gelangt mit sehr geringer Mühe zu der Kenntniß

*) Gauß's Supplementum theoriae etc. P. 12 et P. 28.

von (αα), (αβ), (αβ) ..., (ββ), ... u. s. w. Sobald die Werthe dieser Größsen gefunden sind, erhält man:

$$\begin{aligned}
 (1) &= (\alpha\alpha) [1] + (\alpha\beta) [\beta] + (\alpha\gamma) [\beta] + \dots \\
 (2) &= (\alpha\beta) [1] + (\beta\beta) [\beta] + (\beta\gamma) [\beta] + \dots \\
 (3) &= (\alpha\gamma) [1] + (\beta\gamma) [\beta] + (\gamma\gamma) [\beta] + \dots
 \end{aligned}$$

u. s. w.

Aus dieser Rechnung sind die gesuchten Ausdrücke folgendermaßen hervorgegangen:

- (1) = + 0,1111 I - 0,0356 II + 0,0356 III + 0,0356 VI - 2,515 VIII - 0,0063 XI
- (2) = + 0,0356 I - 0,1209 II - 0,0703 III + 0,00210 IV + 3,3856 VIII - 0,0063 XI
- (3) = + 0,0356 I - 0,0306 II + 0,00210 III - 0,00200 VI - 0,3256 VIII
- (4) = + 0,00250 I + 1,1300 II + 1,702 IV - 1,285 IX - 0,00250 XI
- (5) = + 0,00250 I + 0,00250 II + 1,149 IV - 0,00250 VII - 1,161 IX + 0,00250 XI
- (6) = + 0,1200 I + 0,00250 II + 1,726 IV + 0,00250 VII + 2,324 IX - 0,00250 XI
- (7) = + 0,0656 I - 0,00250 III + 6,168 IV + 0,0218 V - 0,0109 VI - 0,0395 VII - 0,0063 X - 0,0063 XI
- (8) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (9) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (10) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (11) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (12) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (13) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (14) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (15) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (16) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (17) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (18) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (19) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (20) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (21) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (22) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (23) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (24) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI
- (25) = + 0,00250 I - 0,00250 II + 0,00250 IV + 0,00250 V - 0,00250 VI - 0,00250 VII - 0,00250 VIII - 0,00250 IX - 0,00250 X - 0,00250 XI

- (26) = - 0,196 XII - 0,0060 XIII - 0,1102 XV + 0,0024 XVI - 0,1185 XVII + 0,0023 XVIII + 0,0087 XIX + 0,0164 XXV - 0,202 XXVII
- (27) = - 0,209 XII - 0,0125 XIII - 0,1108 XV - 0,0025 XVI - 0,0648 XVII + 0,0007 XVIII + 0,00374 XIX - 0,0062 XXV + 1,3175 XXVII
- (28) = - 0,163 XII - 0,00246 XIII - 0,0833 XV + 0,00130 XVI - 0,062 XVII - 0,0007 XVIII - 0,0018 XIX + 0,0580 XXV - 3,350 XXVII
- (29) = + 0,01060 XIII + 0,0731 XIV + 1,0733 XV + 0,0021 XVI - 0,215 XVII - 0,0187 XIX + 0,00461 XX + 0,038 XXVII
- (30) = + 0,0253 XIII + 0,01020 XIV - 0,2148 XV + 0,00716 XVI - 0,823 XVII - 0,0480 XIX - 0,0013 XX + 0,044 XXVII
- (31) = + 0,0108 XIII + 0,0080 XIV - 0,1045 XV - 0,0090 XVI - 0,251 XVII + 0,0488 XIX - 0,0417 XX - 0,346 XXVII
- (32) = + 0,0720 XIII + 0,01024 XIV + 0,0023 XV - 0,0108 XVI - 0,187 XVII + 0,00456 XIX + 0,0720 XX + 0,208 XXVII
- (33) = + 0,0159 XIII - 0,00820 XIV - 0,153 XV - 0,0000 XVI - 0,671 XVII + 0,00125 XIX - 0,0079 XX - 0,087 XXVII
- (34) = + 0,0325 XVI + 2,721 XVII - 0,0070 XVIII + 2,721 XVIII - 0,0079 XXVIII + 2,721 XXIX - 0,0434 XXXI
- (35) = + 0,0414 XVI + 0,209 XVII - 0,0434 XVIII + 0,208 XXVII - 0,1068 XXVIII
- (36) = 0
- (37) = 0
- (38) = 0
- (39) = 0
- (40) = - 0,0124 XVIII + 0,0256 XXVIII
- (41) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (42) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (43) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (44) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (45) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (46) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (47) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (48) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (49) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (50) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (51) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (52) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (53) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (54) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (55) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (56) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (57) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (58) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (59) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (60) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (61) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (62) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (63) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (64) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (65) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (66) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (67) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (68) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (69) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI
- (70) = + 0,01296 XXVIII + 0,01732 XXVII + 0,00349 XXV + 0,7831 XXVII - 0,01763 XXVIII + 0,00013 XXIX - 0,00510 XXX - 1,8286 XXXI

Die zu der Auflösung der vorigen Gleichungen vorteilhafteste Reihenfolge derselben, ist also die folgende:

	II	VIII	IX	I	III	IV	V	VII	X	XI	XII	XV	XIV	XIII	XVII	XIX	XXVII	XXV	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV	XXVI	XXVIII	XXIX	XXX	XXXI			
$0 = +0,926$	$+0,2843$	$-9,6206$	$-3,9793$	$-0,11806$	$+0,13720$	$+3,400$	$-0,00250$																								
$0 = +39,0$	$-9,3206$	$164,983$	$-183,727$	$-2,3133$	$-17,6889$	$-903,577$	$+2,3250$	$+3,6630$	$+8,428$	$+1,3354$	$+73,220$	$-58,830$																			
$0 = -60,5$	$-3,9793$	$+816,474$	$+2,3424$	$-2,3424$	$+2,8350$	$+333,960$	$+1,1143$	$-2,6107$	$+2,8350$	$+1,1243$	$+28,335$	$-50,000$																			
$0 = +0,364$	$-0,11806$	$-2,3133$	$+2,8350$	$+0,33984$	$+0,11473$	$-4,0653$	$-0,00336$	$-0,12012$	$+0,00293$	$-0,00043$																					
$0 = -0,310$	$+0,13720$	$-17,6889$	$-903,577$	$+0,11473$	$+0,33227$	$+1,7471$	$+0,09321$	$+0,00714$	$+0,09844$	$-0,00520$	$-0,1933$	$+0,0291$																			
$0 = -44,7$	$+4,3400$	$-903,577$	$+333,960$	$-4,0583$	$+1,7471$	$1765,061$	$-3,5763$	$-2,6649$	$+2,6520$	$-0,3818$	$-17,414$	$+0,871$																			
$0 = -0,253$	$-0,00250$	$+2,7230$	$+1,1145$	$+0,11037$	$-0,00336$	$-3,0338$	$-3,0338$	$+0,06116$	$+0,06116$	$-0,00223$	$-0,06107$	$-1,9206$																			
$0 = -1,160$		$+3,6630$	$-2,6107$	$-0,00336$	$+0,26183$	$+0,06452$	$+0,06452$	$+0,00318$	$-0,00318$	$+0,05371$	$-0,00640$	$-0,00640$																			
$0 = -1,029$		$+0,7103$	$-2,6107$	$-0,00336$	$+0,00336$	$+0,00336$	$+0,00336$	$+0,00336$	$+0,00336$	$+0,00336$	$+0,00336$	$+0,00336$																			
$0 = +1,738$		$-5,8128$	$+2,8350$	$+0,00250$	$+0,09844$	$+2,6520$	$-0,00223$	$-0,00318$	$+0,05371$	$-0,00318$	$+0,0731$	$-1,977$																			
$0 = +0,917$		$+1,3354$	$+1,1243$	$-0,00043$	$+0,00293$	$-0,3818$	$-0,00223$	$-0,00318$	$+0,05371$	$-0,00318$	$+0,0731$	$-1,977$																			
$0 = -34,1$		$+73,220$	$-58,830$																												
$0 = +23,9$		$-33,354$																													
$0 = -0,003$																															
$0 = +0,536$																															
$0 = -31,3$																															
$0 = -0,387$																															
$0 = 0,000$																															
$0 = -1,337$																															
$0 = -407,5$																															
$0 = +1,666$																															
$0 = +1,339$																															
$0 = -0,418$																															
$0 = +1,679$																															
$0 = +45,2$																															
$0 = +1,622$																															
$0 = -0,722$																															
$0 = -1,332$																															
$0 = -0,980$																															
$0 = +703,9$																															

§. 40. Bestimmung von (1), (2), (3) ... bis (70).

Die Substitution der jetzt gefundenen Werthe von I, II, III ... XXXI in die Ausdrücke von (1), (2), (3) ... (70) (§. 37.) führt zu folgenden Werthen der letzteren:

(1)	= + 0,39266	(36)	= + 0,25470
(2)	= + 0,01030	(37)	= + 0,13528
(3)	= - 0,21055	(38)	= 0
(4)	= - 0,64824	(39)	= 0
(5)	= - 0,06076	(40)	= - 0,06805
(6)	= + 0,35562	(41)	= + 0,03316
(7)	= - 0,18698	(42)	= + 0,19240
(8)	= + 0,57006	(43)	= - 0,10715
(9)	= + 0,71000	(44)	= + 0,17615
(10)	= + 0,59146	(45)	= + 0,08384
(11)	= + 0,21392	(46)	= - 0,16026
(12)	= + 0,34160	(47)	= - 0,06576
(13)	= - 0,55410	(48)	= + 0,05000
(14)	= - 0,60660	(49)	= - 0,35463
(15)	= + 0,60908	(50)	= + 0,09334
(16)	= - 1,19306	(51)	= - 0,16042
(17)	= - 0,36377	(52)	= + 0,08258
(18)	= - 0,61166	(53)	= - 0,39341
(19)	= - 0,58056	(54)	= - 0,04621
(20)	= - 0,01414	(55)	= + 0,29601
(21)	= - 0,02243	(56)	= 0
(22)	= - 0,29739	(57)	= + 1,09139
(23)	= - 0,07194	(58)	= + 0,18087
(24)	= - 0,30335	(59)	= - 0,29691
(25)	= - 0,08151	(60)	= + 0,25789
(26)	= - 0,04773	(61)	= - 0,14456
(27)	= + 0,66345	(62)	= + 0,53691
(28)	= - 0,67972	(63)	= + 0,80923
(29)	= - 0,45788	(64)	= - 0,89072
(30)	= + 0,03316	(65)	= + 0,02682
(31)	= + 0,28496	(66)	= - 0,01765
(32)	= - 0,24493	(67)	= - 1,10486
(33)	= - 0,35821	(68)	= - 2,02976
(34)	= + 0,32616	(69)	= + 0,97440
(35)	= + 0,83907	(70)	= + 0,04221

III. §. 39. Auflösung der vorigen Gleichungen.

§. 39. Auflösung der vorigen Gleichungen.

Die *Gauß'sche* Auflösungsart der Gleichungen von der Beschaffenheit derer, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate immer führt und auch hier geführt hat, ist bekannt; ihre Anwendung auf die oben mitgetheilten 31 Gleichungen wird dadurch beträchtlich erleichtert, daß immer nur eine mäfsige, nie 11 überschreitende Anzahl der unbekanntten Gröfsen, auf das Glied in der Diagonalreihe der Tafel folgt. Die Logarithmen der 31 unbekanntten Gröfsen gehen daraus folgendermassen hervor:

log I	0,84985 <i>n</i>	log XVII	9,49976
II	0,92929 <i>n</i>	XVIII	0,15213
III	0,65468	XIX	0,20533
IV	6,58950	XX	0,89195 <i>n</i>
V	0,87436	XXI	8,92943 <i>n</i>
VI	0,53391	XXII	0,16187 <i>n</i>
VII	9,93634 <i>n</i>	XXIII	1,04542 <i>n</i>
VIII	9,02429 <i>n</i>	XXIV	0,51390
IX	8,37988	XXV	1,00743 <i>n</i>
X	0,85537 <i>n</i>	XXVI	9,47546 <i>n</i>
XI	0,71248 <i>n</i>	XXVII	8,51517
XII	9,25185	XXVIII	0,46902
XIII	0,43189	XXIX	0,91999
XIV	0,59499 <i>n</i>	XXX	0,61950
XV	8,76610 <i>n</i>	XXXI	8,14012 <i>n</i>
XVI	0,70270		

§. 41. Bestimmung der gemeinschaftlichen Verbesserungen aller,
auf einem Dreieckspunkte beobachteter Richtungen.

Die eben gegebene Tafel enthält die Ausgleichungen der aus den Beobachtungen auf jedem der Dreieckspunkte gefolgerten Richtungen in soweit vollständig, als sie zu der Berechnung des Netzes nothwendig sind. Will man aber auch der zum Anfange dieser Richtungen gewählten Richtung, den Beobachtungsfehler beilegen, welcher ihr, nach der Auseinandersetzung im §. 34., gebührt, so muß man noch die dort durch z bezeichnete GröÙe, für jeden Beobachtungspunkt aufsuchen. Man findet sie aus den Gleichungen:

Trenk	63	$z = - 18 (1) - 15 (2) - 12 (3)$
Mednicken	64	$z = - 16 (4) - 16 (5) - 16 (6)$
Fuchsberg	166	$z = - 17 (7) - 32 (8) - 16 (9) - 40 (10) - 18 (11)$
Wargelitten . . .	73	$z = - 15 (12) - 15 (13) - 13 (14) - 15 (15)$
Haferberg	126	$z = - 20 (16) - 10 (17) - 40 (18) - 28 (19)$
Galtgarben	575	$z = - 36 (20) - 118 (21) - 36 (22) - 24 (23) - 23 (24) - 47 (25) - 52 (26) - 32 (27) - 32 (28)$
Condehnen	248	$z = - 22 (29) - 33 (30) - 32 (31) - 51 (32) - 25 (33)$
Wildenhof	204	$z = - 65 (34) - 30 (35) - 53 (36) - 29 (37)$
Trunz	174	$z = - 45 (38) - 12 (39) - 28 (40) - 44 (41)$
Nidden	726	$z = - 116 (42) - 93 (43) - 28 (44) - 57 (45) - 61 (46) - 68 (47) - 72 (48)$
Lattenwalde . . .	357	$z = - 43 (49) - 57 (50) - 63 (51) - 54 (52) - 51 (53)$
Leuchtethurm . .	120	$z = - 25 (54) - 29 (55) - 8 (56)$
Lepaizi	140	$z = - 22 (57) - 10 (58) - 24 (59) - 46 (60)$
Albeberg	151,114	$z = - 42,664 (61) - 53,501 (62)$
Kalleninken . . .	89,629	$z = - 17,212 (63) - 34,238 (64) - 16,977 (65)$
Gilge	129,059	$z = - 45,610 (66) - 38,025 (67) - 21,415 (68)$
Legitten	122,218	$z = - 37,571 (69) - 23,538 (70)$

welche ergeben:

Trenk	- 0,07453	(1) bis (3)
Mednicken	+ 0,08834	(4) - (6)
Fuchsberg	- 0,34549	(7) - (11)
Wargelitten	+ 0,02653	(12) - (15)
Haferberg	+ 0,54143	(16) - (19)
Galtgarben	+ 0,05170	(20) - (28)
Condehnen	+ 0,08592	(29) - (33)

ANNEXE 33
PRECEPTES SUR LA CONDUITE
DES CALCULS
CALCUL DES PROBABILITÉS
LIAGRE

Situé à la fin du livre de Liagre (p. 378 à 386), ce paragraphe illustre bien le propos de Liagre: transmettre des conseils afin de rendre plus facile l'utilisation de la méthode des moindres carrés. Les géodésiens, lors des compensations, doivent en effet résoudre de grands systèmes linéaires.

à 1/4000 dans celui des longueurs, des tables à 4 décimales sont suffisantes. Elles doivent aller à 5 décimales, si l'on veut avoir les angles exacts à 5'' près, et les longueurs avec l'approximation de 1/40000 — 6 décimales donnent presque sûrement la demi-seconde, et 7 décimales le vingtième de la seconde.

Un bon calculateur doit bien connaître son sujet. Lorsqu'il s'en sera suffisamment pénétré, il distinguera avec tact ce qui est essentiel de ce qui ne l'est pas; ce qui est indispensable à la rigueur du résultat, de ce qui ne conduirait qu'à une exactitude apparente et illusoire.

L'ordre, la division du travail, facilitent singulièrement les calculs les plus compliqués. Les calculateurs exacts peuvent en général travailler longtemps sans fatigue, parce qu'ils introduisent dans la conduite de leur ouvrage une régularité pour ainsi dire *mécanique*.

Évitez de faire des opérations *de tête*, à moins que vous n'avez pour elles une aptitude particulière. En général il sera plus sûr, et par conséquent plus court, d'écrire tous les calculs que vous avez à faire.

Donnez-vous des moyens fréquents de vérification, surtout dans les commencements d'un long calcul : c'est alors que les erreurs sont les plus communes et les plus fâcheuses.

Enfin, faites d'une seule traite chaque genre d'opérations. Ainsi consacrez plusieurs heures, s'il le faut, rien qu'à former les canevas de vos tableaux numériques; puis transcrivez tous vos logarithmes; une fois occupé à calculer, effectuez tous vos calculs (ordinairement ce ne sont que des additions et des soustractions); enfin ouvrez de nouveau les tables, pour chercher tous les nombres correspondants aux logarithmes calculés.

La solution d'une question par la méthode des moindres carrés comporte en général quatre parties distinctes : on doit

- 1° Déterminer les indices de précision, h, h', h'' ... et multiplier par eux les équations primitives.
- 2° Établir les équations du minimum, ce qui exige le calcul des coefficients sommatoires.
- 3° Éliminer les inconnues, ce qui exige le calcul des coefficients auxiliaires.
- 4° Enfin calculer les poids des inconnues.

Nous allons entrer dans quelques développements sur les trois premiers points, le dernier n'exigeant aucune considération nouvelle.

CONCLUSION

§ 165. — Ici se termine notre exposition de la *méthode des moindres carrés* et de ses applications. On peut juger maintenant de sa haute utilité, et des précieuses ressources qu'elle offre dans un ordre très-étendu de questions. Pourquoi donc son usage est-il si peu répandu, que la plupart des calculateurs ne la connaissent pour ainsi dire que de nom? Cette espèce d'antipathie que l'on éprouve en général contre la méthode des moindres carrés s'explique, à notre avis, par les calculs longs et pénibles qu'exige son emploi, et par l'aspect compliqué sous lequel on présente souvent ses formules. Ces deux inconvénients sont réels : aussi les plus grands géomètres de l'Allemagne, Gauss, Jacobi, Encke, Bessel, etc., n'ont-ils pas dédaigné de descendre, à ce sujet, dans de minutieux détails de calcul, pour chercher les moyens d'abrèger ou de régulariser le travail —

Grâce aux notations de Gauss, les formules *littérales* sont aujourd'hui aussi simples qu'élegantes; mais leurs applications *numériques* sont encore très-laborieuses. Cependant, ici comme en toutes choses, les premiers pas sont les plus pénibles : il faut avoir la force, ou plutôt le courage de les faire, et tel calcul, qui paraît effrayant dans les commencements, se simplifie à mesure qu'on le pratique, et enfin ne devient plus qu'un jeu.

Un point très-important pour le calculateur qui veut opérer promptement et avec une exactitude suffisante, c'est de choisir une table de logarithmes *convenable* : j'entends par là qu'elle ne doit pas renfermer plus de décimales qu'il n'en faut; car les tables volumineuses sont longues à feuilleter. Encke, que l'on peut citer comme l'un des calculateurs les plus habiles et les plus expérimentés de notre époque, dit à ce sujet : « Les durées d'un même calcul, fait avec des tables à 7, 6 ou 5 décimales, sont comme les nombres 5, 2, 1. »

Quand on s'arrête à la *minute* dans le calcul des angles, et

DÉTERMINATION DES INDICES DE PRÉCISION.

La détermination des divers indices de précision (h), ou, ce qui revient au même, des erreurs probables (ρ), ou des poids (p), à attribuer à chaque observation, doit précéder les calculs. Si les h sont donnés, on remplacera les équations littérales (§ 124) par les suivantes :

$$\begin{aligned} h \Delta &= ahx + bhy + chz + dhr \dots + nh \\ h' \Delta' &= a'h'x + b'h'y + c'h'z + d'h'r \dots + n'h' \\ h'' \Delta'' &= a''h''x + b''h''y + c''h''z + d''h''r \dots + n''h'' \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

et il faudra rendre un minimum la somme des carrés des seconds membres. Il est clair d'ailleurs que, pour la détermination des valeurs absolues de x, y, z, \dots il est indifférent de rapporter h à telle ou telle unité; de sorte qu'il ne s'agit que d'effectuer les multiplications par une suite de nombres proportionnels à

$$\begin{aligned} &h, h', h'' \dots \\ &1 \quad 1 \quad 1 \\ &\rho \quad \rho' \quad \rho'' \dots \\ &\text{ou enfin à} \quad \sqrt{p}, \sqrt{p'}, \sqrt{p''} \dots \end{aligned}$$

La détermination de ces différents h est la seule partie de la méthode qui laisse un certain arbitraire: c'est assurément la plus délicate, et celle qui exige le plus de tact et d'expérience. Elle est très-aisée lorsque les résultats fournis sont des moyennes entre plusieurs observations également précises: dans ce cas, les h sont proportionnels à la racine carrée du nombre des observations (§ 104). Mais il devient très-difficile d'exprimer numériquement l'exactitude relative, pour des observations d'espèces différentes; et plus difficile encore d'apprécier l'influence des circonstances extérieures, ou bien de traduire par un h convenable ce sentiment intime qui fait qu'un observateur se juge *meux disposé* à tel instant qu'à tel autre.

L'exemple des observateurs les plus distingués montre combien est réelle cette difficulté d'estimer exactement la mesure de précision: Gauss, Bessel, Struve, dans leurs observations géodésiques, paraissent avoir pris pour principe de n'observer, autant que possible, que là où les circonstances étaient complètement favorables. Souvent, lorsqu'ils auraient pu faire un grand nombre d'observations de valeur iné-

gale, ils abandonnaient cette occasion pour ne pas être forcés d'apprécier numériquement les précisions relatives de leurs résultats.

« Nous avons pris pour règle invariable, dit Bessel (*Gradmessung in Ostpreussen*) de regarder l'existence même des observations comme un indice suffisant des circonstances favorables qui les accompagnait; c'est-à-dire que nous avons fait concourir à la formation du résultat, et avec des poids *égaux*, toutes les observations qui ont été faites; sans regarder comme un motif d'exclusion, la coïncidence fortuite entre des circonstances défavorables pour observer, et un écart considérable dans le résultat. Il n'y a, croyons-nous, que la stricte observance de cette règle, qui puisse bannir tout arbitraire de nos calculs. D'ailleurs, si les observations faites par des circonstances très-favorables présentent souvent un remarquable accord, il arrive aussi parfois que cet accord n'est pas plus grand que pour le cas de circonstances défavorables. Il semble que le temps plus long que l'on emploie, et que l'on doit employer aux observations dans ce dernier cas, compense en grande partie les influences extérieures; et que souvent certaines causes d'erreur, dont l'observateur ne se doute pas, n'ont pas moins d'action que celles qui se manifestent ouvertement à lui. »

Quand on n'est pas libre de choisir les circonstances, comme cela arrive dans la plupart des observations astronomiques, il vaudra mieux, dans les modifications à apporter aux grandeurs de h , faire trop peu que trop. Si l'on ne juge pas certaines observations assez douteuses pour devoir être rejetées, il ne faut pas leur accorder des poids tellement faibles, qu'elles soient pour ainsi dire annulées par le fait. En ne laissant ainsi varier les h que dans d'étroites limites, on aura du moins l'avantage de n'altérer sensiblement ni les observations ni les conséquences qu'on en tire; car, il faut le dire, cette altération se fait rarement avec une entière bonne foi; et l'on ne saurait trop se défier de la tendance ordinaire, et pour ainsi dire instinctive, qui entraîne l'observateur et le calculateur vers les résultats qui paraissent leur offrir le plus de concordance.

CALCUL DES COEFFICIENTS SOMMATOIRES.

Le calcul des coefficients sommatoires [aa], [bb]... [ab], [ac], etc., est une opération très-laborieuse, qui exige beaucoup d'ordre.

Voici la marche que Encke recommande pour cette partie du travail. On commence par remplir le tableau suivant.

Valeurs de n	$\log n$	$\log n'$	$\log n''$	$\log n'''$	$\log n^{iv}$...
Coef. de $x \dots a$	$\log a$	$\log a'$	$\log a''$	$\log a'''$	$\log a^{iv}$...
Coef. de $y \dots b$	$\log b$	$\log b'$	$\log b''$	$\log b'''$	$\log b^{iv}$...
Coef. de $z \dots c$	$\log c$	$\log c'$	$\log c''$	$\log c'''$	$\log c^{iv}$...
Coef. de $v \dots d$	$\log d$	$\log d'$	$\log d''$	$\log d'''$	$\log d^{iv}$...
Sommes des coef. $\dots s$	$\log s$	$\log s'$	$\log s''$	$\log s'''$	$\log s^{iv}$...

Puis, sur le bord inférieur d'une feuille de papier, on inscrit les $\log n, \log n' \dots \log n^{iv}$, de manière qu'ils puissent correspondre aux colonnes du tableau, $\log n$ au-dessus de $\log n$; $\log n'$ au-dessus de $\log n'$ etc. Additionnant les deux logarithmes qui se correspondent verticalement, on aura $\log nm$; $\log n'n'$; ... $\log n^{iv}n^{iv}$.

On glisse ensuite le papier une ligne plus bas, $\log n$ du papier au-dessus de $\log a$ du tableau; $\log n'$ au-dessus de $\log a'$ etc. On obtient ainsi $\log an$; $\log a'n'$; ... $\log a^{iv}n^{iv}$. En continuant de même jusqu'à $\log dn$; $\log d'n'$... on aura épuisé toutes les multiplications par n .

On inscrit ensuite sur le bord inférieur d'une feuille de papier les $\log a, \log a' \dots \log a^{iv}$; on commence par placer cette feuille au-dessus de la ligne du tableau qui renferme les $\log a$; on additionne, et l'on a les $\log aa$; puis, baissant successivement le papier, on va jusqu'aux $\log ad$, ce qui termine les multiplications par a . On continue ainsi jusqu'à la dernière ligne, qui donne les $\log dd$.

Passant aux nombres, et additionnant ceux qui correspondent à une même position du papier mobile, on trouve les quantités que nous avons représentées par $[m], [an], [bn], [aa], \dots$ jusqu'à $[dd]$. Faisons ici quelques remarques pratiques.

Lorsqu'on doit ajouter ou soustraire deux logarithmes, il est avantageux de faire l'opération de gauche à droite, et non de droite à gauche comme on la fait ordinairement. De cette manière on obtient en premier lieu les chiffres les plus importants, et l'on écrit le nom-

bre plus vite et plus régulièrement. Quant aux reports, un peu d'habitude permet d'en tenir compte à vue, tant qu'on n'opère que sur deux logarithmes.

Pour les signes des quantités, dans le calcul logarithmique, la meilleure méthode, employée par les calculateurs allemands et anglais, consiste à placer un petit n à droite du logarithme d'un nombre *positif*. Un nombre *pair* de n se détruit dans la combinaison des logarithmes; un nombre *impair* laissent subsister le n au résultat.

Le calcul des coefficients sommatoires, servant de base au reste de l'opération, a besoin d'une preuve facile et exacte. Dans ce but, on fera, pour chaque équation, la somme algébrique de tous les coefficients des inconnues

$$a + b + c + d \dots = s$$

$$a' + b' + c' + d' \dots = s' \dots \text{etc.}$$

et l'on traitera les s comme les coefficients d'une *cinquième* inconnue (puisqu'on nous raisonnons dans l'hypothèse de quatre inconnues, pour fixer le discours). Les plaçant à la dernière ligne du tableau précédent, on formera les nombres

$$sn = an + bn + cn + dn \dots$$

$$s'n' = a'n' + b'n' + c'n' + d'n' \dots \text{etc.}$$

de sorte que

$$[sn] = [an] + [bn] + [cn] + [dn] + [dn]$$

$$[as] = [aa] + [a] + [ac] + [ad]$$

$$[bs] = [ab] + [bb] + [bc] + [bd]$$

$$[cs] = [ac] + [bc] + [cc] + [cd]$$

$$[ds] = [ad] + [bd] + [cd] + [dd]$$

De cette manière, par la formation de cinq nouvelles sommes, on vérifie toutes les autres, à l'exception de $[mn]$; et cela, d'autant plus sûrement que la plupart d'entre elles se présentent deux fois, dans deux différentes sommations.

Apprécions enfin la longueur du travail qu'entraîne le calcul des coefficients sommatoires, dans le cas de m inconnues. Le nombre de ces coefficients est égal au nombre de combinaisons deux à deux de $(m + 1)$ éléments (avec répétition) $= \frac{1}{2} (m + 1) (m + 2)$. S'il y a

λ équations, chacun de ces coefficients renfermera λ termes, de sorte qu'il faut faire $\frac{1}{2} \lambda (m+1) (m+2)$ carrés ou produits, et les réunir en $\frac{1}{2} (m+1) (m+2)$ sommes.

Les coefficients primitifs $a, b, c, \dots, n; a', b', c', \dots, n' \dots$ peuvent être donnés directement, ou par leurs logarithmes. Dans le premier cas, on doit d'abord chercher leurs logarithmes, et ensuite $\frac{1}{2} \lambda (m+1) (m+2)$ nombres correspondants : on doit par conséquent ouvrir les tables un nombre de fois représenté par $(m+1) \lambda + \frac{1}{2} \lambda (m+1) (m+2) = \frac{1}{2} \lambda (m+1) (m+4)$. Dans le second cas, on est dispensé de la première partie du travail, et l'on ne doit ouvrir les tables que $\frac{1}{2} \lambda (m+1) (m+2)$ fois.

CALCUL DES COEFFICIENTS AUXILIAIRES.

Pour procéder à l'élimination des inconnues entre les équations du minimum (équations normales), et pour calculer les poids, on doit former, avons-nous vu, les coefficients auxiliaires de Gauss, depuis [bb. 1] jusqu'à [dd. 5]. « En considérant leur forme, dit Encke, on reconnaît facilement une loi simple, d'après laquelle ces coefficients dérivent les uns des autres. Tous ceux qui renferment dans la parenthèse le chiffre 1 et la lettre b , sont formés par la différence entre la parenthèse renfermant les mêmes lettres sans chiffre, et un produit dont l'un des facteurs, $\frac{ab}{aa}$, est le même pour tous, tandis que l'autre facteur présente les combinaisons successives de la lettre a avec toutes les autres lettres. — Une règle analogue a lieu « pour les lettres c, d, \dots »
 « Les coefficients qui renferment dans la parenthèse le chiffre 2 se forment de la même manière, par le moyen de ceux qui sont affectés du chiffre 1. »

La disposition suivante se comprendra donc d'elle-même. On écrit d'abord sur une ligne horizontale les quantités

$$[aa] [ab] [ac] [ad] \dots [\dots] [as] [an],$$

et au-dessous leurs logarithmes.

Sous ces logarithmes, à partir du second, on place les quantités

$$[bb] [bc] [bd] \dots [\dots] [bs] [bn].$$

On prend alors le logarithme de $\frac{[ab]}{[aa]}$, et on l'ajoute successivement aux logarithmes de $[ab], [ac] \dots [an]$, c'est-à-dire à tous les logarithmes qui sont à droite du numérateur de cette fraction, y compris le numérateur même. On place le nombre correspondant à la somme de ces deux logarithmes sous la quantité qui lui correspond verticalement : en d'autres termes, on place le produit

$$\frac{[ab]}{[aa]} \quad [ab] \text{ sous } [bb]$$

$$\frac{[ab]}{[aa]} \quad [ac] \text{ sous } [bc]$$

$$\frac{[ab]}{[aa]} \quad [ad] \text{ sous } [bd] \dots \text{etc.}$$

On retranche ces deux nombres l'un de l'autre et l'on obtient les quantités $[bb. 1]; [bc. 1]; [bd. 1] \dots [bs. 1]; [bn. 1]$.

sous chacune desquelles on inscrit son logarithme.

On traite ensuite de la même manière les quantités

$$[cc] [cd] \dots [\dots] [cs] [cn];$$

c'est-à-dire que l'on place le produit

$$\frac{[ac]}{[aa]} \quad [ac] \text{ sous } [cc]$$

$$\frac{[ac]}{[aa]} \quad [ad] \text{ sous } [cd]$$

$$\frac{[ac]}{[aa]} \quad [as] \text{ sous } [cs]$$

$$\frac{[ac]}{[aa]} \quad [an] \text{ sous } [cn]$$

Puis, par une simple soustraction, on obtient les produits

$$\{ce . 1\}; \{cd . 1\}; \{cs . 1\}; \{cn . 1\};$$

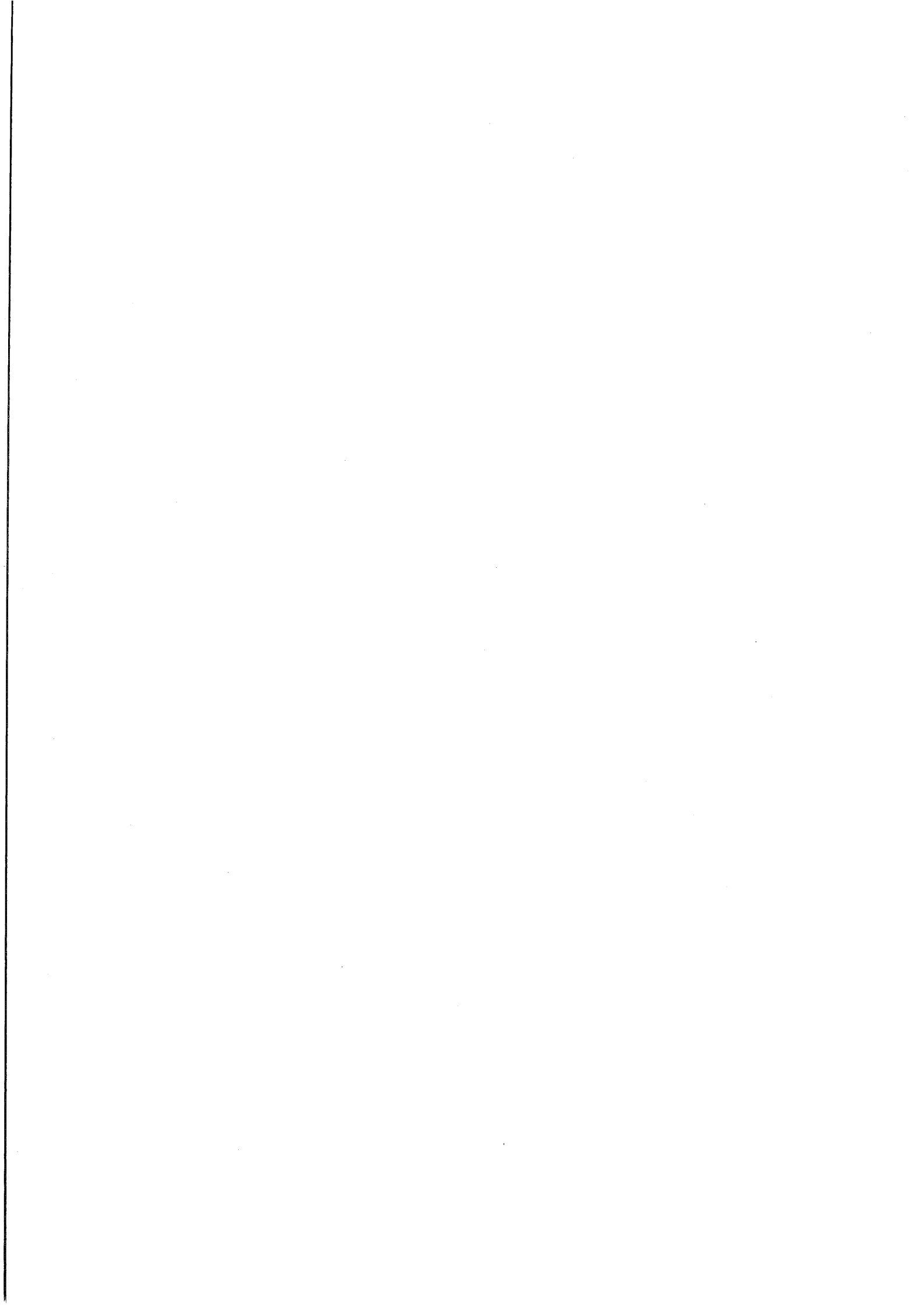
et ainsi de suite.

Ici encore, le calcul se vérifie au moyen de la quantité s . En effet, comme

$$\begin{aligned} \{as\} &= \{aa\} + \{ab\} + \{ac\} + \{ad\} \\ \{bs\} &= \{ab\} + \{bb\} + \{bc\} + \{bd\}; \text{ on a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{bs . 1\} &= \{bs\} - \frac{\{ab\}}{\{aa\}} \{as\} \\ &= \{bb\} - \frac{\{ab\}}{\{aa\}} \{ab\} + \{bc\} - \frac{\{ab\}}{\{aa\}} \{ac\} + \\ &+ \{bd\} - \frac{\{ab\}}{\{aa\}} \{ad\} + \dots \\ &= \{bb . 1\} + \{bc . 1\} + \{bd . 1\} \dots \end{aligned}$$

L'analogie suffit pour montrer comment on calculerait les parenthèses renfermant les chiffres 2, 3... etc.



ANNEXE 34
EXEMPLES DONNES PAR
LIAGRE :
MMC ET GEODESIE

Liagre donne dans son livre de nombreux exemples, afin de rendre familière l'application de la méthode des moindres carrés. Nous avons sélectionné quelques exemples simples illustrant l'utilisation de cette méthode en géodésie.



Premier exemple. — On a mesuré 14 fois un angle au théodolite, et l'on a obtenu les valeurs successives inscrites dans la seconde colonne du tableau suivant.

On a pris la moyenne O des résultats, et formé les différences $(O - o) = (x)$ portées dans la troisième colonne.

Enfin on a mis dans une dernière colonne les carrés de ces différences.

NUMÉROS DES Observations.	VALEURS DES o .	VALEURS DES x .	VALEURS DES x^2 .
1	17° 56' 45",00	— 5",37	28,84
2	31 ,25	+ 8 ,38	70,22
3	42 ,50	— 2 ,87	8,24
4	45 ,00	— 5 ,37	28,84
5	37 ,50	+ 2 ,43	4,54
6	38 ,33	+ 1 ,30	1,69
7	27 ,50	+12 ,43	147,14
8	43 ,33	— 3 ,70	13,69
9	40 ,63	— 1 ,00	1,00
10	36 ,25	+ 3 ,38	11,42
11	42 ,50	— 2 ,87	8,24
12	39 ,47	+ 0 ,46	0,21
13	45 ,00	— 5 ,37	28,84
14	40 ,83	— 1 ,20	1,44
»	$[o] = 554,79$	+27, 78 —27, 75	$[x^2] = 354,35$

Nous en déduisons $O = \frac{[o]}{14} = 39",63$ et nous avons en premier lieu $O = 17° 56' 39",63$ pour la véritable grandeur de l'angle, autant que nous puissions conclure sa valeur de ces seules observations.

Pour calculer l'erreur moyenne d'une observation

isolée, et celle du résultat moyen, nous aurons recours aux formules (k'') et (k''') : nous avons :

$$\begin{aligned} \log [x^2] &= 2,54943 & \log \varepsilon_2^2 &= 1,43549 & \varepsilon_2 &= \pm 5",22 \\ c. \log 13 &= 8,88606 & \log E_2^2 &= 0,28936 & E_2 &= \pm 1",40 \\ c. \log 14 &= 8,83387. \end{aligned}$$

Ainsi, nous ne devons pas *craindre* d'erreur plus grande que celle qui nous donnerait, pour une observation subséquente, $3\frac{1}{4}",41$ au minimum et $4\frac{1}{4}",85$ au maximum. Pour ce qui concerne la moyenne, la véritable grandeur de l'angle mesuré doit se trouver entre $38",23$ et $41",03$: cette valeur est plus précise que celle d'une mesure isolée, dans le rapport de $\sqrt{14}$ à 1 (ou $3\frac{3}{4}$ fois plus précise).

Pour avoir les erreurs *probables*, il faudrait ajouter aux log. de ε_2 et de E_2 le log. 9,82898 : on trouverait ainsi $r = \pm 3",52$, $R = \pm 0",94$; et l'on pourrait parier un contre un qu'une observation subséquente sera comprise entre $36",11$ et $43",15$; et la véritable valeur de l'angle entre $38",69$ et $40",57$.

Enfin, pour avoir les limites probables de ε_2 et E_2 , il faut commencer par les multiplier (§ 112) par

$$\frac{0,476936}{\sqrt{14}},$$

ce qui donne $\mp 0,67$ et $\mp 0,18$: il y a un à parier contre un que ε_2 n'est pas plus petit que $4",55$, ni plus grand que $5",89$; et que E_2 n'est pas plus petit que $1",22$, ni plus grand que $1",58$.

Liagre, *Calcul des probabilités*, 1852

§ 113, p. 202 Cas des observations directes, une inconnue à déterminer
exemple 1: mesure d'un angle au théodolite

Sixième exemple. — Deux observations o', o'' du même angle ont été faites avec le même instrument et dans les mêmes circonstances ; mais la première repose sur 10 répétitions et la seconde sur 15. Pour les réduire à la même unité de précision, il faut connaître leurs poids : or, le plus simple est ici de prendre une observation individuelle pour unité de poids, et de faire par conséquent $p' = 10, p'' = 15$. Mais on pourrait choisir toute autre unité de poids, en s'astreignant seulement à la condition $p' : p'' = 10 : 15 = 2 : 3$. Le rapport des précisions sera toujours exprimé par $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ et

celui des erreurs moyennes par $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. Si nous posions $p' = 2, p'' = 3$, l'unité de poids serait la moyenne entre 5 répétitions.

Si les deux angles avaient été observés une seule fois chacun, mais avec des théodolites différents, il faudrait commencer par chercher, comme dans le premier exemple, l'erreur moyenne correspondant à chacun des deux instruments. Supposons qu'on ait trouvé $\epsilon' = 10'' ; \epsilon'' = 5''$; alors les poids devront être déterminés de telle manière qu'on ait $p' : p'' = 25 : 100 = 1 : 4$. — Ici, nous prendrons naturellement l'observation o' pour unité de poids, et nous attribuerons à o'' un poids quadruple ou une précision double. Mais si nous avons quelque motif de préférer, pour unité de poids, les observations faites avec un troisième théodolite dont nous nous servirions habituellement, et dont l'erreur moyenne serait, par exemple, de $7''$, alors les produits $p'\epsilon'^2, p''\epsilon''^2$ devraient être égaux à r_2^2 (§ 116), d'où $p' \times 100 = p'' \times 25 = 49$; ou enfin

$$p' = \frac{49}{100} ; p'' = \frac{49}{25}$$

exemple 6: mesure d'un angle avec des poids différents

Liagre, p. 207

Septième exemple. — Reprenons les angles rapportés dans le premier exemple, mais en ayant égard cette fois au nombre de répétitions de chacun d'eux : pour cela, nous adopterons d'abord une unité de poids qui sera ici l'observation simple; p ne sera donc autre chose que le nombre de répétitions inscrit dans le registre d'observations, et le tableau suivant se comprendra de lui-même.

N ^o D'ORDRE.	p	o	po	x	px	x^2	px^2
1	5	45'',00	225,00	- 5,22	- 26,10	27,248	136,24
2	4	31 ,25	125,00	+ 8,53	+ 34,12	72,761	291,04
3	5	42 ,50	212,50	- 2,72	- 13,60	7,398	36,99
4	3	45 ,00	135,00	- 5,22	- 15,66	27,248	81,74
5	3	37 ,50	112,50	+ 2,28	+ 6,84	5,198	15,59
6	3	38 ,33	115,00	+ 1,45	+ 4,35	2,103	6,31
7	3	27 ,50	82,50	+12,28	+ 36,84	150,798	452,39
8	3	43 ,33	130,00	- 3,55	- 10,65	12,603	37,81
9	4	40 ,63	162,50	- 0,85	- 3,40	0,723	2,89
10	2	36 ,25	72,50	+ 3,53	+ 7,06	12,461	24,92
11	3	42 ,50	127,50	- 2,72	- 8,16	7,398	22,19
12	3	39 ,17	117,50	+ 0,61	+ 1,83	0,372	1,12
13	2	45 ,00	90,00	- 5,22	- 10,44	27,248	54,49
14	3	40 ,83	122,50	- 1,05	- 3,15	1,103	3,31
»	54 46	»	1830,00	»	+ 91,04 - 91,16	»	4167,03

Après avoir formé $[p o]$ on calcule, d'après la formule (F'),

$$o = \frac{1830}{46} = 39'',78.$$

L'erreur moyenne d'une observation simple, ou de l'unité de poids, se calculera avec le secours de la formule (k^{ix}) : on trouve ainsi

$$\eta_2 = \pm 9'',475;$$

celle de la moyenne arithmétique, par la formule (k^{vi}) :

$$E_2 = \pm 1'',397;$$

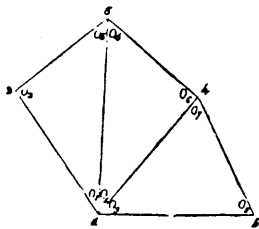
celle de chaque observation, eu égard à son poids, par la formule (k^v) : on a donc,

- pour les observations (10) et (13) $\epsilon_2 = \pm 6'',70$;
 — (4), (5), (6), (7), (8), (11), (12), (14) $\epsilon_2 = \pm 5'',47$;
 — (2) et (9) $\epsilon_2 = \pm 4'',74$;
 — (1) et (3) $\epsilon_2 = \pm 4'',24$;

Les observations que nous venons de citer ont été faites par des élèves, avec un théodolite qui, entre les mains d'un observateur exercé, a donné $\eta_2 = 6'',5$: elles sont donc de moitié moins exactes qu'elles pourraient l'être, puisque $\left(\frac{9,475}{6,5}\right)^2 = 2$ à peu près; et si l'on voulait joindre le résultat précédent à celui qu'aurait déjà obtenu un bon observateur, il faudrait, au lieu de $[p] = 46$, prendre $[p] = 23$.

exemple 7: mesure d'un angle avec des poids différents
 Liagre, p. 208

Troisième exemple. — La marche précédente s'applique aussi au cas d'une chaîne de triangles.



Supposons qu'on ait obtenu

$$\begin{array}{lll} o_1 = 36^\circ 25' 47''; & o_4 = 50^\circ 26' 13''; & o_7 = 70^\circ 43' 28''; \\ o_2 = 90^\circ 36' 28''; & o_5 = 42^\circ 4' 7''; & o_8 = 56^\circ 19' 37''; \\ o_3 = 52^\circ 57' 57''; & o_6 = 87^\circ 29' 25''; & o_9 = 52^\circ 56' 34''; \\ \hline 180^\circ 0' 42''; & 179^\circ 59' 45''; & 479^\circ 59' 39''; \end{array}$$

Les trois équations de condition à satisfaire sont donc :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 12 &= 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 - 15 &= 0 \\ x_7 + x_8 + x_9 - 21 &= 0. \end{aligned}$$

En les traitant comme ci-dessus, on obtient

Équations corrélatives.	Équations normales.	
$x_1 = x_2 = x_3 = k_1$	$+ 12 + 3k_1$	$= 0$
$x_4 = x_5 = x_6 = k_2$	$- 15 + 3k_2$	$= 0$
$x_7 = x_8 = x_9 = k_3$	$- 21 + 3k_3$	$= 0$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = x_3 &= - 4''; \\ x_4 = x_5 = x_6 &= + 5''; \\ x_7 = x_8 = x_9 &= + 7''; \\ [\Delta^*] &= 3.16 + 3.25 + 3.49 = 270. \\ \epsilon &= \sqrt{\frac{270}{3}} = \pm 9'',43. \end{aligned}$$

Admettons que, pour fermer le tour d'horizon au point 1, on ait mesuré l'angle *extérieur* formé entre les deux directions 1.2 et 1.5, et qu'on l'ait trouvé de $228^\circ 33' 52'' = o_{10}$. Le comparant avec la somme des trois angles o_1, o_5, o_9 , on trouvera que l'excès sur 360° est de $+ 20''$; et l'on aura une quatrième équation de condition

$$x_1 + x_5 + x_9 + x_{10} + 20 = 0.$$

Les équations corrélatives seront maintenant

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 + k_4 \\ x_2 = x_3 &= k_1 \\ x_4 = x_5 = x_6 &= k_2 \\ x_7 = x_8 &= k_3 \\ x_9 &= k_3 + k_4 \\ x_{10} &= k_4 \end{aligned}$$

et les équations normales

$$\begin{aligned} 0 &= + 12 + 3k_1 && + k_4 \\ 0 &= - 15 && + 3k_2 && + k_4 \\ 0 &= - 21 && && + 3k_3 && + k_4 \\ 0 &= + 20 + k_1 + k_2 + k_3 + 4k_4. \end{aligned}$$

Éliminant, on trouve

$$\begin{aligned} k_1 &= - 0,89 \\ k_2 &= + 8,11 \\ k_3 &= + 10,11 \\ k_4 &= - 9,33; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} x_1 &= - 10'',22 \\ x_2 = x_3 &= - 0,89 \\ x_4 = x_5 = x_6 &= + 8,11 \\ x_7 &= - 1,22 \\ x_8 = x_9 &= + 10,11 \\ x_{10} &= + 0,78 \\ &= - 9,33. \end{aligned}$$

Appliquant ces corrections, on fera fermer simultanément les triangles et le tour d'horizon.

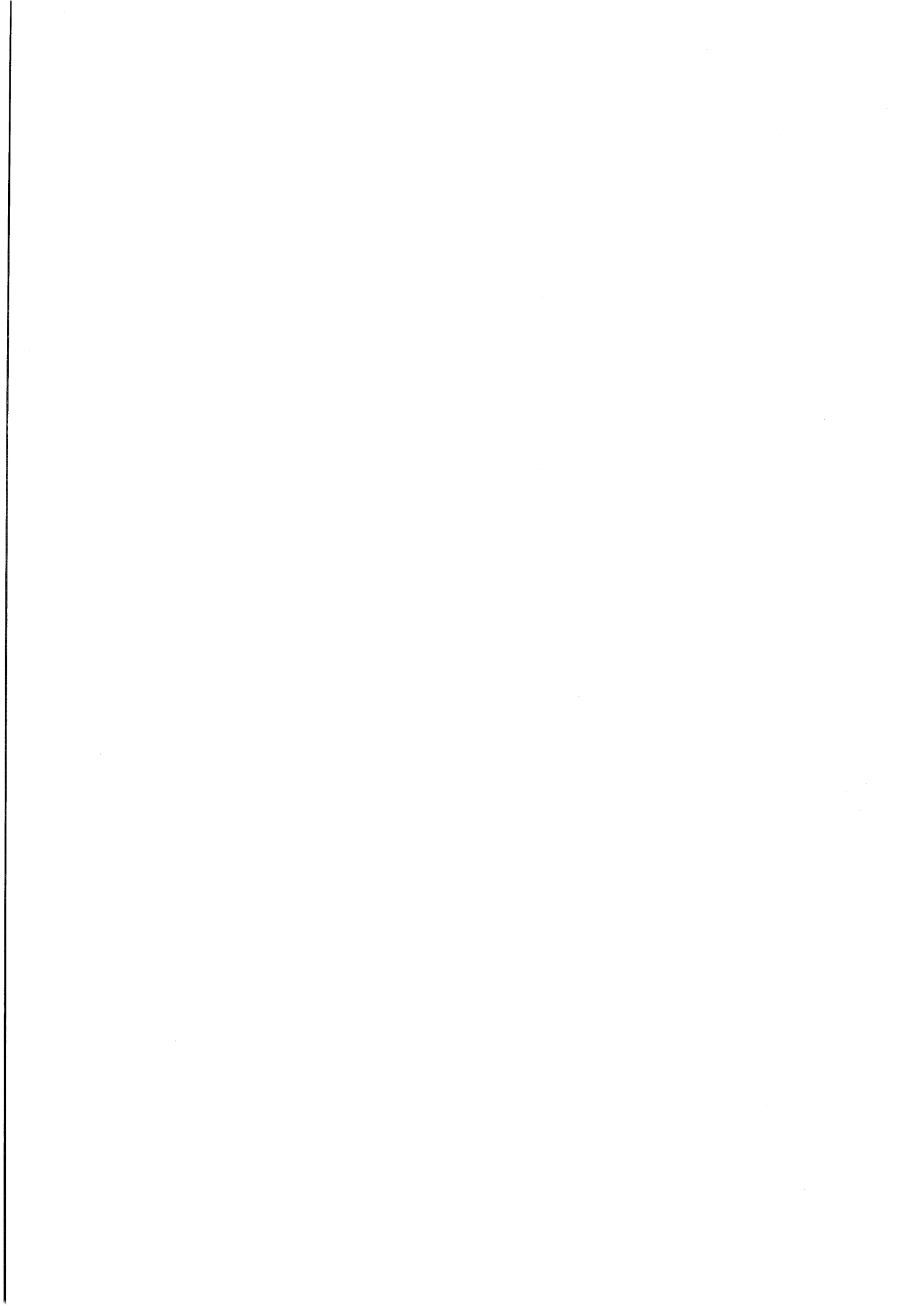
Cas des observations conditionnelles
Fermeture des triangles et du tour d'horizon

Liagre, p. 304

ANNEXE 35

Die Küstenvermessung
de Baeyer, Berlin, 1849, § 97

Dans ce passage, que nous avons traduit, Baeyer indique une formule introduite par Encke pour simplifier le calcul de l'erreur probable.



§. 97. Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen.

Bekanntlich ist das Quadrat des mittleren Fehlers

$$\varepsilon\varepsilon = \frac{(\nu\nu)}{m-1}$$

wo $(\nu\nu)$ die Summe der Quadrate der Fehler und m die Anzahl der Bestimmungen bedeuten.

Bei einer großen Anzahl bekannter Fehler ist aber die Berechnung der Summe ihrer Quadrate immer zeitraubend und daher eine einfachere Bestimmung des mittleren Fehlers wünschenswerth. Zu diesem Zweck giebt *Enke* im Jahrbuche von 1834 Seite 292 die Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers

$$r = \varepsilon, \varrho \sqrt{\pi} \left\{ 1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{m}} \sqrt{\pi - 2} \right\}$$

wo ε , das arithmetische Mittel der Fehler, also $= \frac{s}{m}$ ist, wenn s die Summe der Fehler bezeichnet ohne Rücksicht auf die Zeichen. Die Constante ϱ ist $= 0,4769$.

Es ist aber auch $r = \varrho \sqrt{2} \cdot \varepsilon$, wo ε den mittleren Fehler bedeutet. Setzt man beide Werthe von r einander gleich, so findet man die Grenzen des mittleren Fehlers

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{s}{m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 \pm \frac{\varrho \sqrt{\pi - 2}}{\sqrt{m}} \right\} \\ &= 1,2533 \frac{s}{m} \left\{ 1 \pm \frac{0,5096}{\sqrt{m}} \right\} \end{aligned}$$

In §. 88 beträgt die Anzahl der Fehler 145, die Summe ihrer Zahlenwerthe 34,3764. Daraus folgen die Grenzen des mittleren Fehlers

$$\varepsilon = 0,297 \pm 0,013$$

In §. 96 beträgt die Anzahl der Fehler 166, die Summe ihrer Zahlenwerthe 49,7174. Daraus folgt:

$$\varepsilon = 0,375 \pm 0,015$$

Die Anzahl aller Fehler zusammen beträgt 311, die Summe ihrer Zahlenwerthe 84,0938. Man erhält daher die Grenzen des mittleren Fehlers

$$\varepsilon = 0,339 \pm 0,010$$

Der mittlere Fehler der Winkelmessungen beträgt hiernach sehr nahe $\frac{1}{3}$ Secunde.



Traduction du § 97

Détermination de l'erreur moyenne dans les mesures d'angles

On connaît le carré de l'erreur moyenne

$$\varepsilon\varepsilon = \frac{(vv)}{m-1}$$

dans lequel vv est la somme des carrés des erreurs et m le nombre représentant la détermination.

Dans le cas d'un grand nombre d'erreurs connues, le calcul de la somme de leurs carrés prend toujours beaucoup de temps et il est donc souhaitable de déterminer plus simplement l'erreur moyenne. Dans ce but, Encke donne dans son annuaire de 1834 p. 292 les limites de l'erreur probable

$$r = \varepsilon, \zeta\sqrt{\pi} \left\{ 1 \pm \frac{\zeta}{\sqrt{m}} \sqrt{\pi-2} \right\}$$

équation dans laquelle ε , est la moyenne arithmétique des erreurs, donc égale à s/m quand s représente la somme des erreurs, sans considération des signes; la constante ζ est = 0,4769.

Mais aussi $r = \zeta\sqrt{2} \cdot \varepsilon$, où ε signifie l'erreur moyenne. Si l'on pose les deux valeurs de r semblables, on trouve les limites de l'erreur moyenne:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{s}{m} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 \pm \frac{\zeta\sqrt{\pi-2}}{\sqrt{m}} \right\} \\ &= 1,2533 \frac{s}{m} \left\{ 1 \pm \frac{0,5096}{\sqrt{m}} \right\} \end{aligned}$$

Dans le § 88, le nombre des erreurs s'élève à 145, la somme de leurs valeurs numériques à 34"3764. D'où en conséquence, les limites de l'erreur moyenne

$$\varepsilon = 0,297 \pm 0,013$$

Dans le § 96, le nombre des erreurs s'élève à 166, la somme de leurs valeurs numériques à 49,7174. D'où

$$\varepsilon = 0,375 \pm 0,015$$

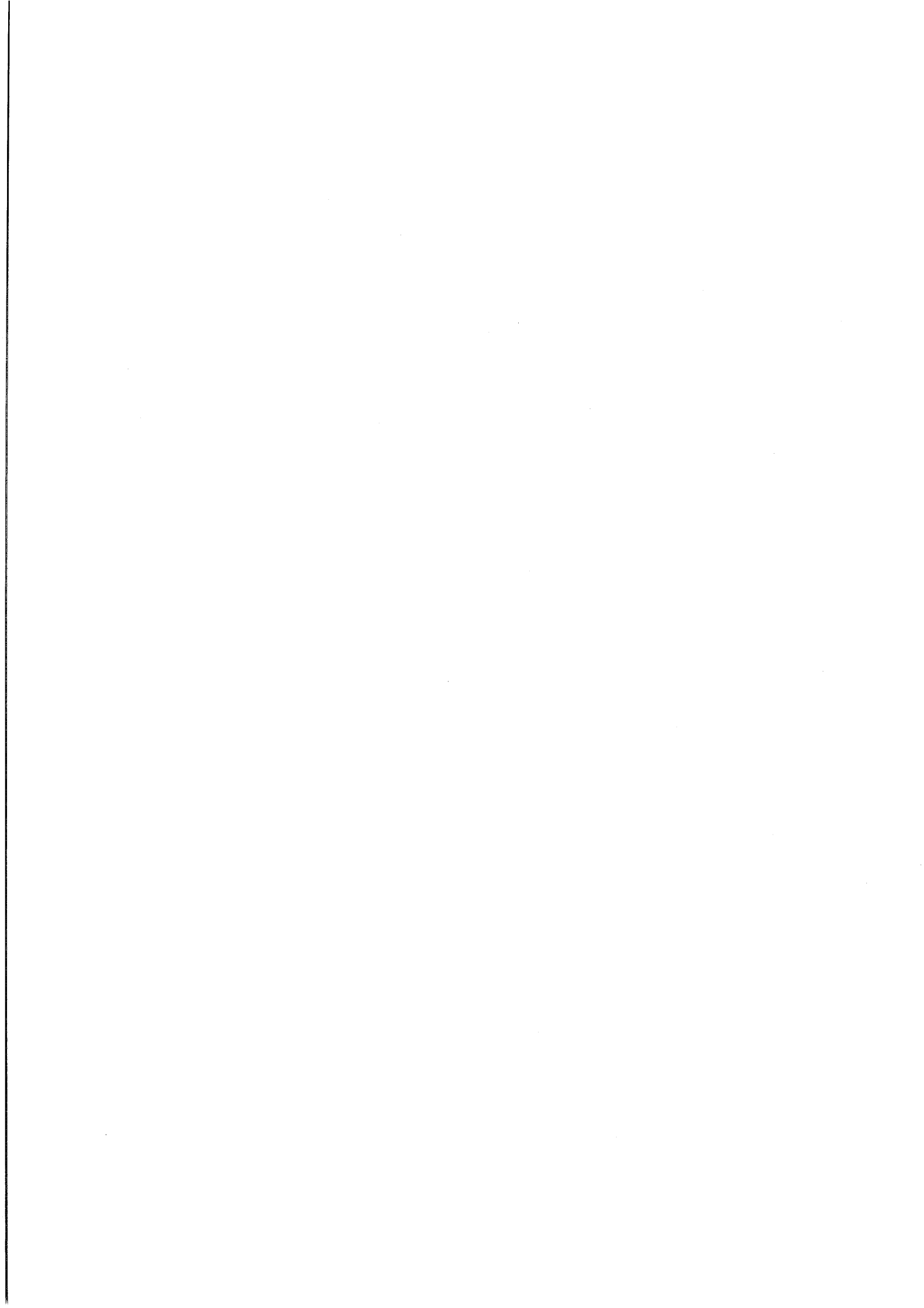
Le nombre de toutes les erreurs réunies se monte à 311, la somme de leurs valeurs numériques à 84,0938. D'où l'on obtient les limites de l'erreur moyenne

$$\varepsilon = 0,339 \pm 0,010$$

L'erreur moyenne des mesures d'angles s'élève à peu près à 1/3 de seconde.

ANNEXE 36
LETTRE DE GAUSS À GERLING,
26 DECEMBRE 1823

Cette lettre, traduite par Anne Michel-Pajus, concerne la résolution d'un système d'équations normales par approximations successives. Cette méthode permet de résoudre des grands systèmes, lorsqu'une méthode directe donne des calculs impraticables.



Ma lettre est parvenue trop tard à la poste et on me l'a rapportée. J'en profite pour ajouter quelques indications pratiques pour l'élimination. Toutefois, cette méthode a beaucoup de petits avantages particuliers qu'on n'apprend qu'à l'usage.

Par exemple, prenons vos mesures pour Orber-Reisig.*

Je prends d'abord [pour l'angle vers]** 1 = 0

d'où, avec 1.3 3 = 77°57'53",107

(Je choisis celui-ci car 1.3 a plus de poids que 1.2) ; donc avec

$$\begin{array}{l|l|l} 13 & 1.2 & 2 = 26^{\circ}44'7,423 \\ 50 & 2.3 & 2 = \phantom{26^{\circ}44'}6,696 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l|l|l} 13 & 1.2 & 2 = 26^{\circ}44'7,423 \\ 50 & 2.3 & 2 = \phantom{26^{\circ}44'}6,696 \end{array}} \right\} 2 = 26^{\circ}44'6,696;$$

finalement avec

$$\begin{array}{l|l|l} 26 & 1.4 & 4 = 136^{\circ}21'13,481 \\ 6 & 2.4 & 4 = \phantom{136^{\circ}21'}8,529 \\ 78 & 3.4 & 4 = \phantom{136^{\circ}21'}11,265 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l|l|l} 26 & 1.4 & 4 = 136^{\circ}21'13,481 \\ 6 & 2.4 & 4 = \phantom{136^{\circ}21'}8,529 \\ 78 & 3.4 & 4 = \phantom{136^{\circ}21'}11,265 \end{array}} \right\} 4 = 136^{\circ}21'11,641.$$

Pour améliorer l'approximation, j'obtiens, avec

$$\begin{array}{l|l|l} 13 & 1.2 & 1 = -0,727 \\ 28 & 1.3 & 1 = 0 \\ 26 & 1.4 & 1 = -1,840 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l|l|l} 13 & 1.2 & 1 = -0,727 \\ 28 & 1.3 & 1 = 0 \\ 26 & 1.4 & 1 = -1,840 \end{array}} \right\} 1 = -0,555.$$

* Les mesures d'angle données par Gerling (trouvées sur une feuille dans les papiers de Gauss) étaient, sachant que I représente Berger Warte

2 Johannisberg

3 Taufstein

4 Milseburg

Répétitions	Angle
13	1.2 = 26°44'7",423
28	1.3 = 77 57 53,107
26	1.4 = 136 21 13,481
50	2.3 = 51 13 46,600
6	2.4 = 109 37 1,833
78	3.4 = 58 23 18,161

(Note de Krüger, qui a préparé le volume 9 des WERKE)

** [] ajouté par Krüger

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Ludwig Christian Gerling,

Berlin, 1927

Traduction de Anne Michel-Pajus, 1995

Puisque l'on ne s'occupe que de positions relatives, je peux ajouter + 0",855 aux quatre valeurs et je pose

$$\begin{aligned} 1 &= 0^{\circ} 0' 0,000 + a \\ 2 &= 26 44 7,551 + b \\ 3 &= 77 57 53,962 + c \\ 4 &= 136 21 12,496 + d. \end{aligned}$$

Dans la méthode indirecte, il est très avantageux de donner une variation à chaque valeur. Vous pouvez facilement vous en convaincre, en calculant le même exemple sans ce truc, vous perdez alors le grand avantage de pouvoir vérifier que la somme des termes constants* = 0, comme contrôle.

Maintenant, je forme les équations normales suivant le schéma suivant (en fait, si les termes sont trop nombreux, je sépare les négatifs des positifs) : **

$$\begin{array}{cccc} ab - 1664 & ba + 1664 & ca + 23940 & da - 25610 \\ ac - 23940 & bc + 9450 & cb - 9450 & db + 18672 \\ ad + 25610 & bd - 18672 & cd - 29094 & dc + 29094. \end{array}$$

Les équations normales sont donc

$$\begin{aligned} 0 &= + 6 + 67a - 13b - 28c - 26d \\ 0 &= - 7558 - 13a + 69b - 50c - 6d \\ 0 &= - 14604 - 28a - 50b + 156c - 78d \\ 0 &= + 22156 - 26a - 6b - 78c + 110d; \end{aligned} \quad (S)$$

Somme = 0.

* Il s'agit des termes de la première colonne du système S, donné plus bas.

** (Note de Krüger): l'unité des constantes est le millième de seconde.

Pour l'élimination indirecte, je remarque que, si 3 des quantités a, b, c, d sont prises égales à 0, c'est quand d est choisie comme quatrième, que la quatrième prend la valeur la plus grande. C'est pourquoi je pose $d = -201$ et la remplace par cette valeur. Les termes absolus deviennent +5232, -6352, +1074, +46 ; les autres termes ne changent pas.

Maintenant, c'est au tour de b, on trouve $b = +92$, on remplace et on obtient comme termes constants : +4036, -4, -3526, -506. Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus rien à corriger. Pour tout ce calcul, j'écris seulement le tableau suivant :

	$d = -201$	$b = +92$	$a = -60$	$c = +12$	$a = +5$	$b = -2$	$a = -1$
$\div 6$	+5232	+4036	+16	-320	$\div 15$	+41	-26
-7555	-6352	-4	$\div 776$	$\div 176$	$\div 111$	-27	-14
-14604	+1074	-3526	-1846	$\div 26$	-114	-14	+14
+22156	+46	-506	+1054	$\div 115$	-12	0	+26

Dans la mesure où je pousse le calcul seulement jusqu'au 2000ème au plus près de seconde, je vois qu'il n'y a plus rien à corriger. Je récupère alors

$$\begin{array}{r}
 a = -60 \quad b = +92 \quad c = \div 12 \quad d = -201 \\
 +5 \quad \quad \quad -2 \\
 \hline
 -1 \\
 \hline
 -56 \quad \quad \quad +90 \quad \quad \quad +12 \quad \quad \quad -201
 \end{array}$$

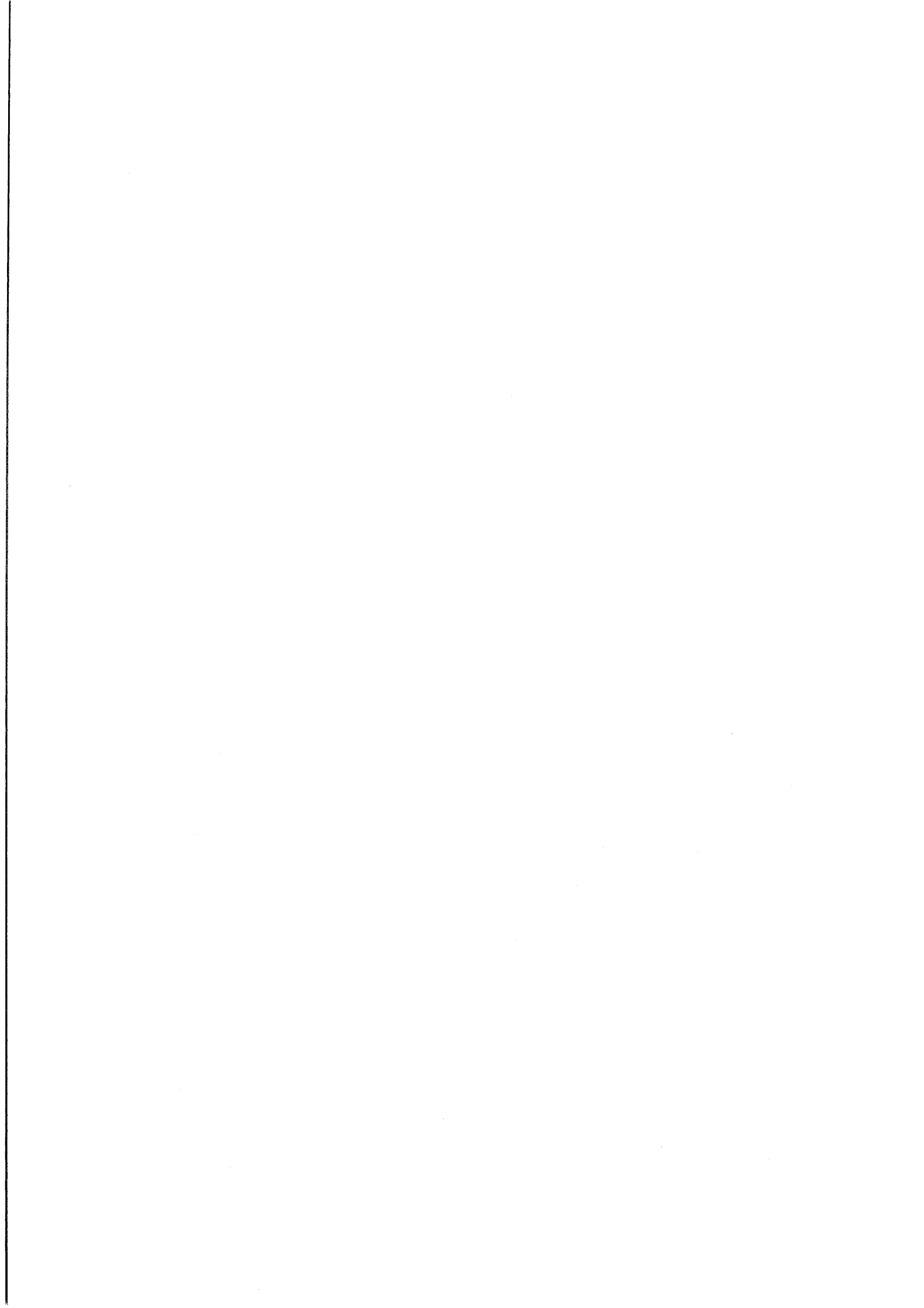
en ajoutant à chacun la correction +56, j'obtiens :

$$a = 0 \quad b = +146 \quad c = \div 65 \quad d = -145,$$

donc les valeurs sont :

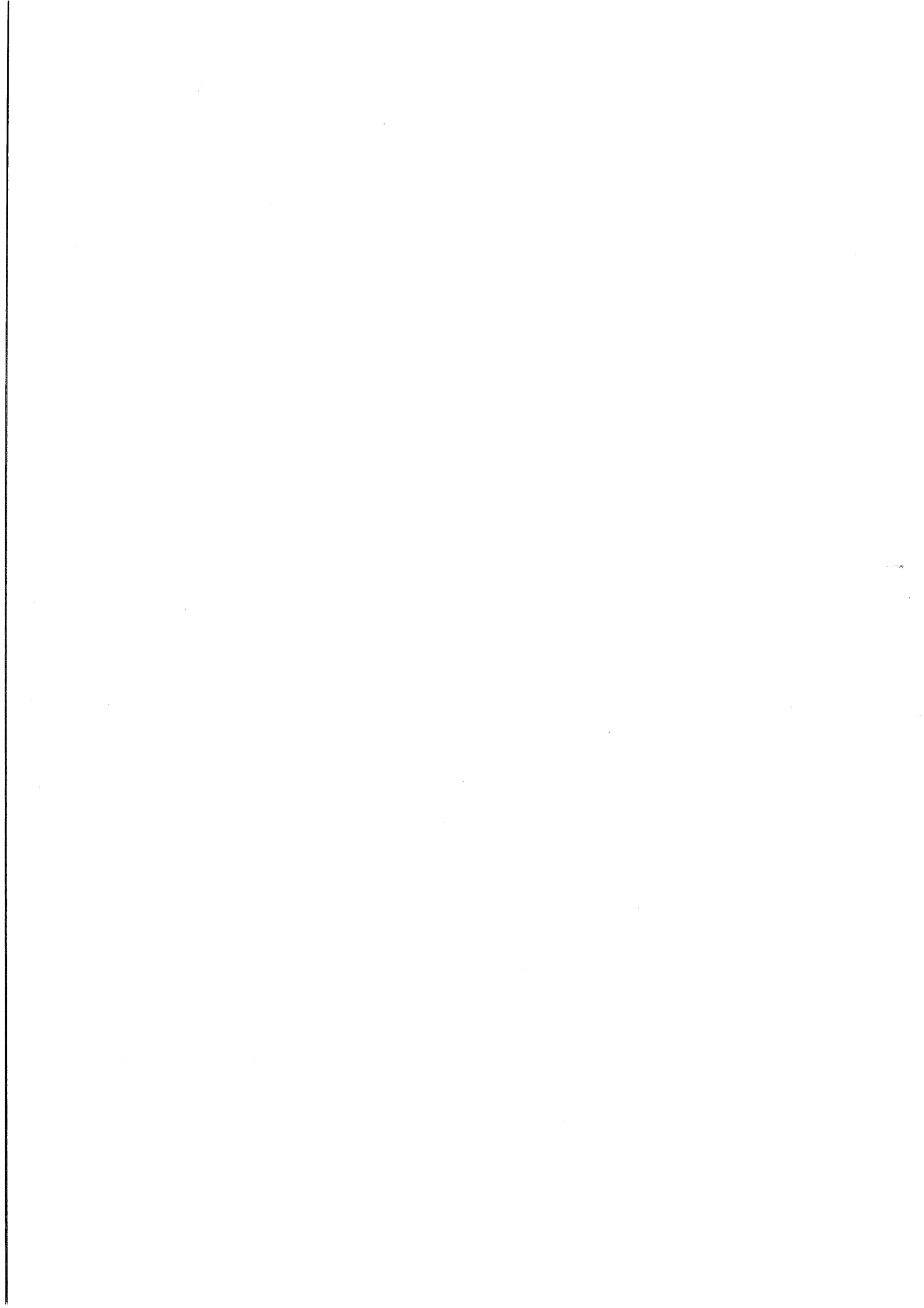
1	0° 0' 0,000
2	26 44 7,697
3	77 57 54,030
4	136 21 12,351

Presque chaque soir, je fais une nouvelle édition du tableau, qu'il est facile d'améliorer n'importe où. Contre la monotonie du travail d'arpentage, c'est toujours une plaisante distraction ; on peut aussi voir immédiatement si quelque chose de douteux s'y est glissé, ce qui reste à obtenir, etc ... Je vous recommande cette méthode comme modèle. Il ne vous arrivera presque plus jamais de faire une élimination directe, du moins quand vous avez plus de deux inconnues. La procédure indirecte peut se faire à moitié endormi, ou en pensant à autre chose.



ANNEXE 37
EXTRAITS DE GAUSS

Dans ce passage extrait de *Supplément à la théorie de la combinaison des observations qui expose aux moindres erreurs*, présenté le 16 septembre 1826 à la Société Royale de Göttingue (traduction de Bertrand, § 8, § 9 et § 10, p. 79 à 83, 1855), Gauss définit ce qu'il nomme *compensation des observations* et énonce un théorème dans lequel "on reconnaît le principe des moindres carrés".



8.

La solution générale que nous venons d'exposer s'applique principalement au cas où l'on n'a qu'une seule inconnue à déterminer. Lorsqu'on cherche, au contraire, les valeurs les plus plausibles de plusieurs inconnues, dépendant des mêmes observations, ou lorsqu'on ignore quelles sont les inconnues qu'il faut, de préférence, déduire des observations, il convient de procéder d'une manière différente, dont nous allons actuellement nous occuper.

Considérons x, y, z , etc., comme des indéterminées, et posons

$$(6) \quad \begin{cases} (aa)x + (ab)y + (ac)z + \dots = \xi, \\ (ab)x + (bb)y + (bc)z + \dots = \eta, \\ (ac)x + (bc)y + (cc)z + \dots = \zeta, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Supposons que l'on en déduise, par l'élimination,

$$(7) \quad \begin{cases} (\alpha\alpha)\xi + (\alpha\beta)\eta + (\alpha\gamma)\zeta + \dots = x, \\ (\beta\alpha)\xi + (\beta\beta)\eta + (\beta\gamma)\zeta + \dots = y, \\ (\gamma\alpha)\xi + (\gamma\beta)\eta + (\gamma\gamma)\zeta + \dots = z; \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

et remarquons, avant tout, que les coefficients placés symétriquement sont nécessairement égaux, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} (\beta\alpha) = (\alpha\beta), \\ (\gamma\alpha) = (\alpha\gamma), \\ (\gamma\beta) = (\beta\gamma), \\ \dots \end{cases}$$

comme cela résulte de la théorie de l'élimination et comme d'ailleurs nous le démontrons plus loin; nous aurons

$$(8) \quad \begin{cases} x^3 = -(\alpha\alpha)(\alpha\alpha) - (\alpha\beta)(\beta\alpha) - (\alpha\gamma)(\gamma\alpha) - \dots \\ y^3 = -(\beta\alpha)(\alpha\alpha) - (\beta\beta)(\beta\beta) - (\beta\gamma)(\gamma\beta) - \dots \\ z^3 = -(\gamma\alpha)(\alpha\alpha) - (\gamma\beta)(\beta\beta) - (\gamma\gamma)(\gamma\gamma) - \dots \\ \dots \end{cases}$$

et en posant

$$(9) \quad \begin{cases} (\alpha\alpha) \alpha + (\alpha\beta) \beta + (\alpha\gamma) \gamma + \dots = A, \\ (\beta\alpha) \alpha + (\beta\beta) \beta + (\beta\gamma) \gamma + \dots = B, \\ (\gamma\alpha) \alpha + (\gamma\beta) \beta + (\gamma\gamma) \gamma + \dots = C, \\ \dots \end{cases}$$

nous obtiendrons

$$1 = k - A(\alpha\alpha) - B(\beta\beta) - C(\gamma\gamma) - \dots;$$

et si nous posons de plus,

$$(10) \quad \begin{cases} aA + bB + cC + \dots = p\varepsilon, \\ a'A + b'B + c'C + \dots = p'\varepsilon, \\ a''A + b''B + c''C + \dots = p''\varepsilon, \\ \dots \end{cases}$$

il viendra

$$(11) \quad K = k - l\varepsilon - l'\varepsilon' - l''\varepsilon'' - \dots$$

0.

La comparaison des équations (7) et (9) nous apprend que les quantités auxiliaires A, B, C, etc., sont les valeurs que prennent les indéterminées $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, etc., lorsque l'on suppose

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \zeta = \gamma, \dots$$

on en conclut évidemment,

$$(12) \quad \begin{cases} (aa) A + (ab) B + (ac) C + \dots = \alpha, \\ (ba) A + (bb) B + (bc) C + \dots = \beta, \\ (ca) A + (cb) B + (cc) C + \dots = \gamma, \\ \dots \end{cases}$$

En ajoutant les équations (10) après les avoir multipliées par $\frac{a}{p}, \frac{a'}{p'}, \frac{a''}{p''}$, etc., on obtient

$$(13) \quad \begin{cases} \alpha = a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \dots, \\ \text{et de même} \\ \beta = b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \dots, \\ \gamma = c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \dots, \\ \dots \end{cases}$$

α , étant, comme on l'a dit, la valeur que prend X lorsqu'on substitue à ν, ν', ν'' , etc., leurs valeurs observées, on aperçoit facilement que si l'on applique à chacune de ces quantités les corrections $-\varepsilon, -\varepsilon', -\varepsilon''$, etc., la valeur de X devient égale à zéro, et que de même Y, Z, etc., s'évanouissent par cette hypothèse. L'équation (11) prouve aussi que K est la valeur que prend u par suite des mêmes substitutions.

En nommant *compensation des observations*, l'application des corrections $-\varepsilon, -\varepsilon', -\varepsilon''$, etc., aux grandeurs directement observées, nous sommes conduit à une conséquence très-importante :

Les observations *compensées* comme nous l'avons indiqué, satisfont exactement à toutes les équations de condition, et font prendre à toute fonction des quantités observées la valeur qui résulterait de la combinaison la plus convenable des observations non modifiées; et puisque les équations de condition sont trop peu nombreuses pour qu'on puisse en déduire les valeurs exactes des erreurs, nous aurons au moins trouvé, par ce qui précède, les erreurs *les plus plausibles*. C'est sous ce nom que les quantités $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, etc., seront désormais désignées.

10.

Le nombre des observations étant plus grand que celui des équations de condition, outre le système des corrections les plus plausibles, on peut en trouver un nombre infini qui rendent les équations de condition exactement satisfaites.

Il importe d'examiner les relations qui lient entre eux ces divers systèmes. Soit $-E, -E', -E''$, etc., un pareil système de corrections, autre que le système le plus plausible; nous aurons

$$\begin{aligned} aE + a'E' + a''E'' + \dots &= \mathcal{A}, \\ bE + b'E' + b''E'' + \dots &= \mathcal{B}, \\ cE + c'E' + c''E'' + \dots &= \mathcal{C}, \\ \dots\dots\dots & \end{aligned}$$

Multipliant ces équations par A, B, C , etc., et ajoutant, il vient, en ayant égard aux équations (10),

$$p\epsilon E + p'\epsilon'E' + p''\epsilon''E'' + \dots = A\mathcal{A} + B\mathcal{B} + C\mathcal{C} + \dots$$

Mais les équations (13) combinées de la même manière donnent

$$(14) p\epsilon^2 + p'\epsilon'^2 + p''\epsilon''^2 + \dots = A\mathcal{A} + B\mathcal{B} + C\mathcal{C} + \dots;$$

de la combinaison de ces résultats on déduit facilement

$$\begin{aligned} pE^2 + p'E'^2 + p''E''^2 + \dots &= p\epsilon^2 + p'\epsilon'^2 + p''\epsilon''^2 + \dots \\ &+ p(E - \epsilon)^2 + p'(E' - \epsilon')^2 + p''(E'' - \epsilon'')^2 + \dots, \end{aligned}$$

et, par suite, la somme

$$pE^2 + p'E'^2 + p''E''^2 + \dots$$

est, nécessairement, plus grande que

$$p\epsilon^2 + p'\epsilon'^2 + p''\epsilon''^2 + \dots,$$

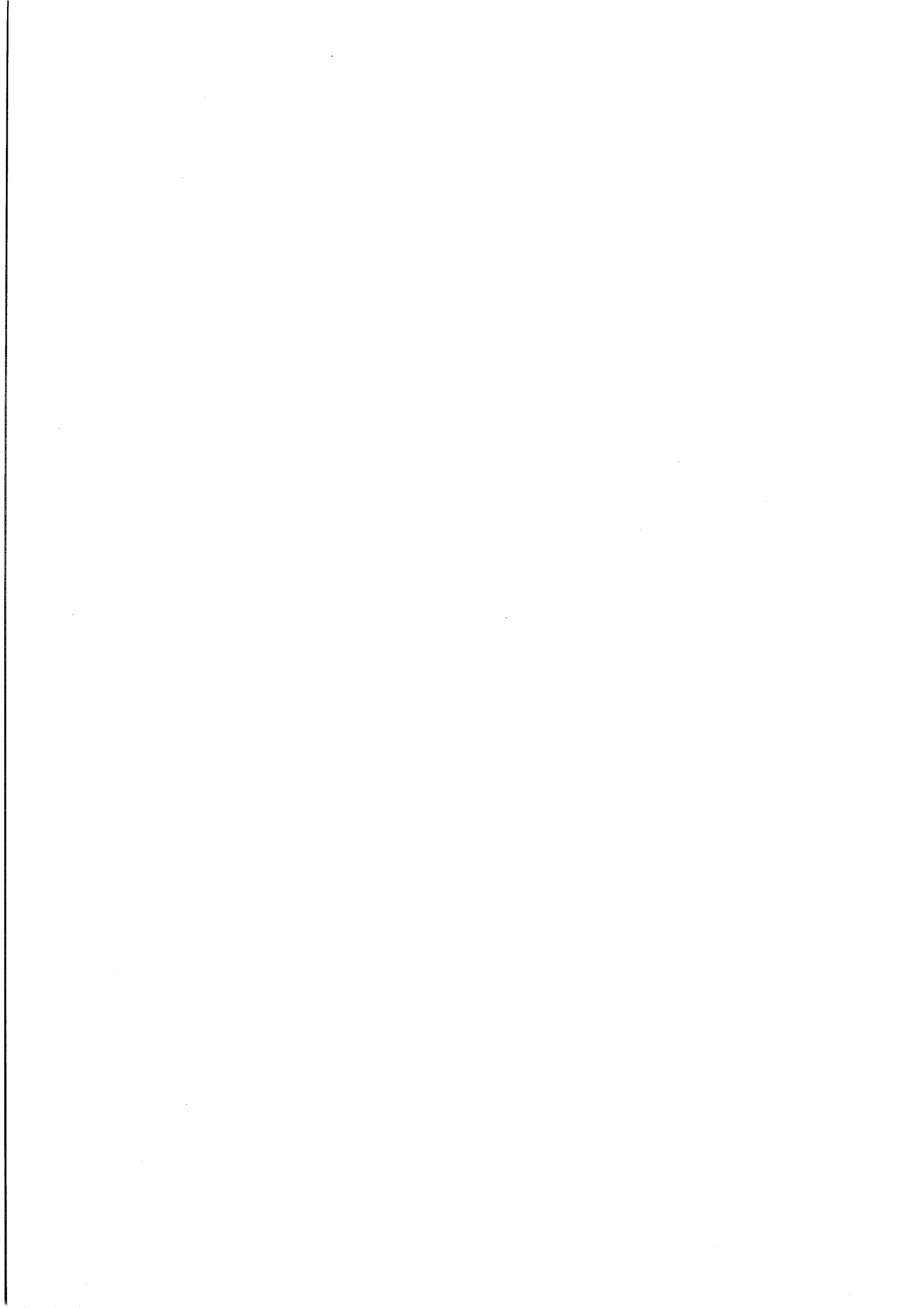
ce que l'on peut énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Les carrés des corrections qui peuvent*

concilier les observations avec les équations de condition étant respectivement multipliés par les poids des observations correspondantes, donnent une somme minimum quand on adopte les corrections les plus plausibles.

On reconnaît précisément le principe des moindres carrés dont, au reste, les équations (12) et (10) peuvent facilement se déduire. La somme minimum, que nous désignerons désormais par S , est égale, d'après l'équation (14), à

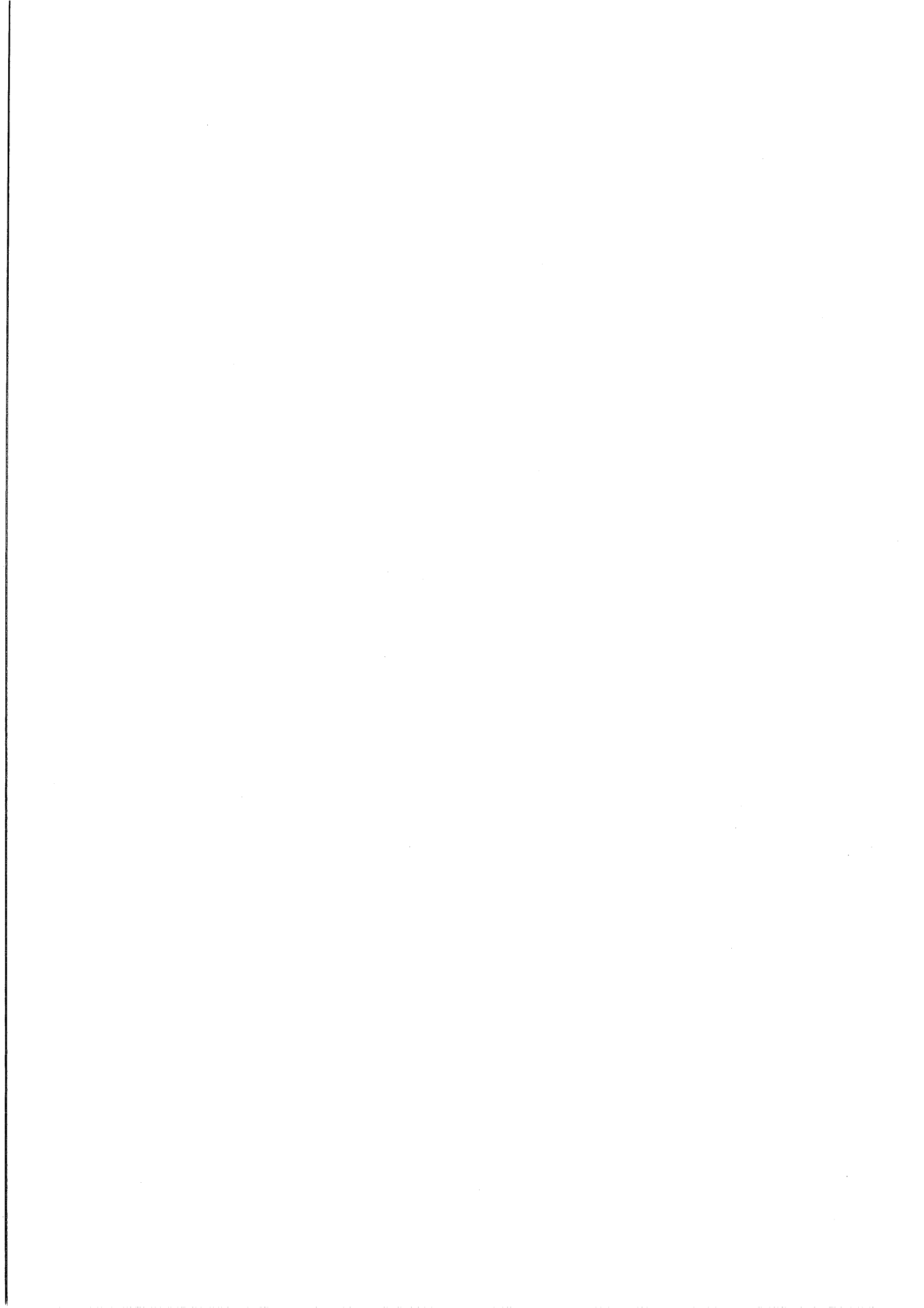
$$A\mathcal{A} + B\mathcal{B} + C\mathcal{C} + \dots$$



ANNEXE 38

EXEMPLES DE GAUSS,
RELATIFS À LA GÉODÉSIE

Gauss, dans *Supplément à la théorie de la combinaison des observations qui expose aux moindres carrés*, § 23 à 25, 16 septembre 1826 (traduction de Bertrand, p. 101 à 112, 1855), donne deux exemples s'appuyant sur des résultats d'observations réalisées d'une part par Krayenhoff en Hollande et d'autre part par lui-même au Hanovre. Ces exemples lui permettent d'illustrer des méthodes d'observation différentes: observations des angles ou observations des directions.



pourra alors introduire des équations relatives aux figures qui ont plus de trois côtés. Dans une autre occasion, nous reviendrons avec plus de détails sur ces diverses circonstances, dont l'examen nous éloignerait en ce moment de notre but. Nous ne pouvons cependant nous dispenser de faire ici une remarque indispensable à ceux qui voudraient faire l'application rigoureuse de notre théorie : nous supposons toujours que les quantités désignées par ν , ν' , ν'' , etc., ont été observées immédiatement, ou déduites d'observations telles, que leurs déterminations soient indépendantes les unes des autres, ou, au moins, puissent être regardées comme telles. Dans la pratique la plus ordinaire, on observe les angles que l'on peut regarder comme étant les éléments ν , ν' , ν'' , etc., eux-mêmes. Mais on ne doit pas oublier que si le système contient, en outre, des triangles dont les angles n'aient pas été directement observés et aient été déduits de ceux que l'on connaissait, par des additions ou soustractions, ces angles ne devront pas être mis au nombre des grandeurs déterminées par l'observation, et l'on devra les faire entrer dans le calcul comme des fonctions des éléments qui ont servi à les former. Il en sera autrement si l'on adopte la méthode d'observations de M. Struve (*Astronomische Nachrichten*, II, page 431), qui consiste à déterminer toutes les directions autour d'un même sommet, en les rapportant toutes à une seule et même direction arbitraire. Les angles mesurés ainsi seront pris alors pour ν , ν' , ν'' , etc., et les angles des triangles se présenteront tous comme des différences. Les équations de la première catégorie devront dans ce cas, être supprimées comme superflues, car elles seront identiquement satisfaites. Le procédé que j'ai suivi moi-même dans les triangulations exécutées pendant ces dernières années, diffère des deux méthodes précédentes; on peut cependant l'assimiler, quant au résultat, avec le procédé de M. Struve, en ce sens que, dans chaque station, on doit regarder ν , ν' , ν'' , etc., comme les angles fournis

par les directions qui en partent, avec une même ligne arbitrairement choisie.

Nous donnerons deux exemples : le premier se rapporte au premier mode d'opération, et le second est relatif à des observations faites d'après la seconde méthode.

23.

Le premier exemple nous sera fourni par l'ouvrage de M. Krayenhof : *Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande*. Nous chercherons à commenter la partie des observations relatives au terrain compris entre Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde et Gröninge. Entre ces points, on a formé neuf triangles numérotés, dans l'ouvrage cité, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132. Les angles observés sont les suivants :

TRIANGLE 121.	
0. Harlingen.....	50° 58' 15", 238
1. Leeuwarden.....	82. 47. 15, 351
2. Ballum.....	46 14. 27, 202
TRIANGLE 122.	
3. Harlingen.....	51. 5. 39, 717
4. Sneek.....	70. 48. 33, 445
5. Leeuwarden.....	58. 5. 48, 707
TRIANGLE 123.	
6. Sneek.....	49 30. 40, 051
7. Drachten.....	42. 52. 59, 382
8. Leeuwarden.....	87. 36. 21, 057
TRIANGLE 124.	
9. Sneek.....	45. 36. 7, 492
10. Oldeholtpade.....	67. 52. 0, 048
11. Drachten.....	66. 31. 56, 513

TRIANGLE 125.

- 12. Drachten. 53° 55' 24", 745
- 13. Oldholtspade. 47. 48. 52. 580
- 14. Oosterwolde. 78. 15. 42. 347

TRIANGLE 127.

- 15. Leeuwarden. 59. 24. 0. 645
- 16. Dockum 76. 34. 9. 021
- 17. Ballum. 44. 1. 51. 040

TRIANGLE 128.

- 18. Leeuwarden. 72. 6. 32. 043
- 19. Drachten 46. 53. 27. 163
- 20. Dockum. 61. 0. 4. 494

TRIANGLE 131.

- 21. Dockum. 57. 1. 55. 292
- 22. Drachten. 83. 33. 14. 515
- 23. Groningen. 39. 24. 52. 397

TRIANGLE 132.

- 24. Oosterwolde. 81. 54. 17. 447
- 25. Groningen. 31. 52. 46. 094
- 26. Drachten. 66. 12. 57. 246

La considération de ces triangles montre que les vingt-sept angles, directement fournis par l'observation, ont entre eux treize relations nécessaires, savoir : deux de la première espèce, neuf de la seconde, et deux de la troisième. Mais il n'est pas utile d'écrire ici toutes ces équations sous leur forme finie, car pour le calcul nous avons besoin seulement des quantités, désignées dans la théorie générale, par $a, a', a'', \dots, \alpha, b, b', b'', \dots$, c'est pourquoi nous écrirons immédiatement les équations (13), qui mettent ces quantités en évidence. Au lieu de $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \dots$, nous écrirons simplement ici (0), (1), (2), etc. De cette manière, aux deux équations du premier genre répondent les

suivantes :

$$(1) + (5) + (8) + (15) + (18) = - 2'', 197,$$

$$(7) + (11) + (12) + (19) + (22) + (26) = - 0'', 436.$$

Nous trouvons ensuite, pour les excès sphéroïdiques des neuf triangles : 1'', 749; 1'', 147; 1'', 243; 1'', 698; 0'', 873; 1'', 167; 1'', 104; 2'', 161; 1'', 403. Nous aurons alors l'équation de condition du second genre :

$$\rho^{(0)} + \rho^{(1)} + \rho^{(2)} - 180'' - 0' 1'' 749 = 0,$$

et ainsi des autres, et nous avons les neuf équations suivantes :

$$(0) + (1) + (2) = - 3'', 958,$$

$$(3) + (4) + (5) = + 0, 722,$$

$$(6) + (7) + (8) = - 0, 753,$$

$$(9) + (10) + (11) = + 0, 355,$$

$$(12) + (13) + (14) = - 1, 201,$$

$$(15) + (16) + (17) = - 0, 461,$$

$$(18) + (19) + (20) = + 2, 596,$$

$$(21) + (22) + (23) = + 0, 043,$$

$$(24) + (25) + (26) = - 0, 616.$$

Les équations de condition du troisième genre s'expriment plus facilement par le moyen des logarithmes : la première est

$$\log \sin (\rho^0 - 0'', 583) - \log \sin (\rho^1 - 0'', 583) - \log \sin (\rho^2 - 0'', 382)$$

$$+ \log \sin (\rho^3 - 0'', 382) - \log \sin (\rho^4 - 0'', 414)$$

$$+ \log \sin (\rho^5 - 0'', 414) - \log \sin (\rho^6 - 0'', 389)$$

$$+ \log \sin (\rho^7 - 0'', 389) - \log \sin (\rho^8 - 0'', 368)$$

$$+ \log \sin (\rho^9 - 0'', 368) = 0.$$

Il semble inutile de développer l'autre sous forme finie. A ces deux équations répondent les suivantes, dans lesquelles les coefficients se rapportent à la septième décimale des lo-

garithmes vulgaires (*):

- 17,068(0) - 20,174(2) - 16,993(3) + 7,328(4) - 17,976(6)
- + 22,672(7) - 5,028(16) + 21,780(17) - 19,710(19)
- + 11,671(20) = -371,
- 17,976(6) - 0,880(8) - 20,617(9) + 8,564(10) - 19,082(13)
- + 4,375(14) + 6,798(18) - 11,671(20) + 13,657(21)
- 25,620(23) - 2,995(24) + 33,854(25) = + 370.

Aucune raison ne nous portant à attribuer des poids inégaux aux diverses observations, nous supposons

p^0 = p^1 = p^2 = ... = 1.

En désignant les corrélatifs des équations de condition dans l'ordre même où ces équations ont été écrites, par

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N,

nous les déterminerons par les équations suivantes:

- 2",197 = 5 A + C + D + E + H + I + 5,917 N,
- 0,436 = 6 B + E + F + G + I + K + L + 2,962 M,
- 3,958 = A + 3 C - 3,106 M,
- + 0,722 = A + 3 D - 9,665 M,
- 0,753 = A + B + 3 E + 4,696 M + 17,096 N,
- + 2,355 = B + 3 F - 12,053 N,
- 1,201 = B + 3 G - 14,797 N,
- 0,461 = A + 3 H + 16,752 M,
- 2,596 = A + B + 3 I - 8,039 M - 4,874 N,
- + 0,043 = B + 3 K - 11,963 N,
- 0,515 = B + 3 L + 30,859 N,
- 371 = 2,962 B - 3,106 C - 9,665 D + 4,696 E
- + 16,752 H - 8,039 I + 2902,27 M
- 459,33 N,
- + 370 = 5,917 A + 17,996 E - 12,053 F - 14,707 G
- 4,874 I - 11,963 K + 30,859 L
- 459,33 M + 3385,96 N

(* Ces coefficients ont été tous multipliés, après la différentiation, par 180.60.60 et divisés par 206264,8 = 180.60.60 / pi, pour convertir les erreurs en secondes.

J. B.

Nous en déduisons par l'élimination:

- A = - 0,598
- B = - 0,255
- C = - 1,234
- D = + 0,086
- E = - 0,447
- F = + 1,351
- G = + 0,271
- H = + 0,659
- I = + 1,650
- K = + 0,577
- L = - 1,351
- M = - 0,109792
- N = + 0,119681.

Les erreurs les plus plausibles sont enfin données par les formules

- (0) = C + 17,068 M
- (1) = A + C
- (2) = C - 20,174 M
- (3) = D - 16,993 M,
-

et nous obtenons les valeurs numériques suivantes, auxquelles nous adjoignons, pour qu'on fasse la comparaison, les corrections adoptées par M. Krayenhof:

	uz Kr.	uz Kr.
(0)	= - 3",108	(14) = + 0",795
(1)	= - 1,832	(15) = + 0,061
(2)	= + 0,981	(16) = + 1,211
(3)	= + 1,952	(17) = - 1,732
(4)	= - 0,719	(18) = + 1,265
(5)	= - 0,512	(19) = + 2,959
(6)	= + 3,648	(20) = - 1,628
(7)	= - 3,221	(21) = + 2,211
(8)	= - 1,180	(22) = + 0,322
(9)	= - 1,116	(23) = - 2,489
(10)	= + 2,376	(24) = - 1,709
(11)	= + 1,096	(25) = + 2,701
(12)	= + 0,016	(26) = - 1,606
(13)	= - 2,013	

La somme des carrés de nos corrections est 97,8845; l'erreur moyenne, telle que l'indiquent les 27 angles observés, est

par conséquent,

$$\sqrt{\frac{97,8845}{13}} = 2'',7440.$$

La somme des carrés des corrections de M. Krayenhof, est de 341,4201.

24.

Les triangles dont les sommets, dans la triangulation du Hanovre, ont été placés à Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsoede et Wilsede, nous fourniront un second exemple.

On a observé les directions suivantes :

A la station de FALKENBERG.

- 0. Wilsede..... 187° 47' 30" 311
- 1. Wulfsoe..... 225.9.39.676
- 2. Hauselberg..... 266.13.56.239
- 3. Breithorn..... 274.14.43.634

A la station de BREITHORN.

- 4. Falkenberg..... 94.33.40.755
- 5. Hauselberg..... 122.51.23.054
- 6. Wilsede..... 150.18.35.100

A la station de HAUSELBERG.

- 7. Falkenberg..... 86.29. 6.872
- 8. Wilsede..... 154.37. 9.624
- 9. Wulfsoede..... 189. 2.56.376
- 10. Breithorn..... 302.47.37.732

A la station de WULFSODE.

- 11. Hauselberg..... 9. 5.36.593
- 12. Falkenberg..... 45.27.33.556
- 13. Wilsede..... 118.44.13.159

A la station de WILSEDE.

- 14. Falkenberg.. ... 7.51. 1.027
- 15. Wulfsoede..... 298.29.49.519
- 16. Breithorn..... 330. 3. 7.392
- 17. Hauselberg..... 334.25.26.746

Ces observations permettent de former sept triangles.

TRIANGLE I^r.

- Falkenberg..... 8° 0' 47",395
- Breithorn..... 28.17.42,299
- Hauselberg..... 143.41.29,140

TRIANGLE II.

- Falkenberg... .. 86.27.13,323
- Breithorn..... 55.44.54,345
- Wilsede..... 37.47.53,635

TRIANGLE III.

- Falkenberg..... 41. 4.16,563
- Hauselberg..... 102.33.49,504
- Wulfsoede..... 36.21.56,963

TRIANGLE IV.

- Falkenberg. 78.26 25,928
- Hauselberg..... 68. 8. 2,752
- Wilsede..... 35 25.34,281

TRIANGLE V.

- Falkenberg..... 37.22. 9,365
- Wulfsoede..... 73.16.39,603
- Wilsede..... 69.21.11,508

TRIANGLE VI.

- Breithorn..... 27.27.12,046
- Hauselberg.. . . . 148.10,28,108
- Wilsede..... 4.22.19,354

TRIANGLE VII.

- Hauselberg..... 34.25.46,752
- Wulfsoede 109 38.36,566
- Wilsede..... 35.55.37,227

Nous avons ici sept équations de condition du second genre (il n'y a pas lieu évidemment d'en former du premier genre); pour les former, nous devons chercher, avant tout,

les excès sphéroïdiques des sept triangles, et pour cela il est indispensable de connaître la longueur d'un côté. Celui qui réunit Wilsede à Wulfsode est 22877^m.94. On en conclut, pour les excès sphéroïdiques des divers triangles : I...0'',202; II...2'',442; III...1'',257; IV...1'',919; V...1'',957; VI...0'',321; VII...1'',295.

Si l'on désigne par $\nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$, $\nu^{(3)}$, etc., les angles qui déterminent les directions indiqués plus haut, et marqués des mêmes indices, les angles du premier triangle seront

$$\nu^{(3)} - \nu^{(2)}, \nu^{(5)} - \nu^{(4)}, 360 + \nu^{(7)} - \nu^{(6)},$$

et la première équation de condition est par conséquent

$$- \nu^{(2)} + \nu^{(3)} - \nu^{(4)} + \nu^{(5)} + \nu^{(7)} - \nu^{(6)} + 179^{\circ}59'59''.798 = 0.$$

Les six triangles restants fourniront six équations analogues, mais un peu d'attention montrera que ces équations ne sont pas indépendantes; la seconde est en effet identique avec la somme de la première, de la quatrième et de la sixième; la somme de la troisième et de la cinquième est identique avec celle de la quatrième et de la septième : c'est pourquoi nous n'écrivons la seconde et la cinquième. Au lieu des équations restantes sous forme finie, nous écrivons ici les équations correspondantes (13), en substituant aux notations ε , ε' , ε'' , etc.; (0), (1), (2), etc. :

$$\begin{aligned} - 1'',368 &= - (2) + (3) - (4) + (5) + (7) - (10), \\ + 1'',773 &= - (1) + (2) - (7) + (9) - (11) + (12), \\ + 1'',042 &= - (0) + (2) - (7) + (8) + (14) - (17), \\ - 0,813 &= - (5) + (6) - (8) + (10) - (16) + (17), \\ - 0,750 &= - (8) + (9) - (11) + (13) - (15) + (17). \end{aligned}$$

On peut obtenir, au moyen des triangles du système, huit équations du troisième genre, et pour cela il est permis de combiner trois des quatre triangles I, II, IV, VI, ou des triangles III, IV, V, VII; cependant un peu d'attention

montre qu'il suffit d'en considérer deux appartenant respectivement aux deux systèmes de triangles et que celles-là comprendront toutes les autres.

Nous aurons ainsi, pour sixième et septième équation de condition,

$$\begin{aligned} &\log \sin(\nu^{(3)} - \nu^{(2)} - 0'',067) - \log \sin(\nu^{(5)} - \nu^{(4)} - 0'',067) \\ &+ \log \sin(\nu^{(11)} - \nu^{(10)} - 0'',640) - \log \sin(\nu^{(9)} - \nu^{(8)} - 0'',640) \\ &+ \log \sin(\nu^{(6)} - \nu^{(5)} - 0'',107) - \log \sin(\nu^{(17)} - \nu^{(16)} - 0'',107) = 0, \\ &\log \sin(\nu^{(2)} - \nu^{(1)} - 0'',419) - \log \sin(\nu^{(12)} - \nu^{(11)} - 0'',419) \\ &+ \log \sin(\nu^{(11)} - \nu^{(10)} - 0'',640) - \log \sin(\nu^{(9)} - \nu^{(8)} - 0'',640) \\ &+ \log \sin(\nu^{(13)} - \nu^{(12)} - 0'',432) - \log \sin(\nu^{(17)} - \nu^{(16)} - 0'',432) = 0, \end{aligned}$$

auxquelles répondent les équations

$$\begin{aligned} + 25 &= + 4,31(0) - 153,88(2) + 149,57(3) \\ &+ 39,11(4) - 79,64(5) + 40,53(6) \\ &+ 31,90(14) + 275,39(16) - 307,29(17), \\ - 3 &= + 4,31(0) - 24,16(1) + 19,85(2) \\ &+ 36,11(11) - 28,59(12) - 7,52(13) \\ &+ 31,90(14) + 29,06(15) - 60,96(17). \end{aligned}$$

Si nous attribuons la même certitude aux diverses directions, en supposant $\nu^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)} \dots = 1$, les corrélatifs des sept équations de condition étant désignés par A, B, C, D, E, F, G, leur détermination dépendra des équations suivantes :

$$\begin{aligned} - 1,368 &= + 6A - 2B - 2C - 2D + 181,72F - 19,85G, \\ + 1,773 &= - 2A + 6B + 2C + 2E - 153,88F - 20,69G, \\ + 1,042 &= - 2A + 2B + 6C - 2D - 2E + 181,00F \\ &+ 108,40G, \\ - 0,813 &= - 2A - 2C + 6D + 2E - 462,51F - 60,96G, \\ - 0,750 &= + 2B - 2C + 2D + 6E - 307,29F - 133,65G \\ + 25 &= 184,72A - 153,88B + 181,00C - 462,51D \\ &- 307,29E + 224,868F + 16694,1G, \\ - 3 &= - 19,85A - 20,69B + 108,40C - 60,96D \\ &- 133,65E + 16694,1F + 8752,39G. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, par élimination,

- A = - 0,225,
- B = + 0,344,
- C = - 0,088,
- D = - 0,171,
- E = - 0,323,
- F = + 0,00215915,
- G = - 0,005474620,

et les erreurs les plus probables sont données par les formules

- (0) = - C + 4,31 F + 4,31 G,
- (1) = - B - 24,16 G,
- (2) = - A + B + C - 153,88 F + 19,85 G,

d'où l'on déduit les valeurs numériques suivantes :

- (0) = + 0",065
- (1) = - 0,212
- (2) = + 0,339
- (3) = - 0,193
- (4) = + 0,233
- (5) = - 0,071
- (6) = - 0,162
- (7) = - 0,481
- (8) = + 0,406
- (9) = + 0",021
- (10) = + 0,054
- (11) = - 0,219
- (12) = + 0,501
- (13) = - 0,282
- (14) = - 0,256
- (15) = + 0,164
- (16) = + 0,230
- (17) = - 0,139.

La somme des carrés de ces erreurs est égale à 1,2288; l'erreur moyenne résultant des 18 directions observées est, par conséquent,

$$\sqrt{\frac{1,2288}{18}} = 0",4190.$$

25.

Afin de donner un exemple de la dernière partie de notre théorie, cherchons dans quelle précision les observations compensées déterminent le côté Falkenberg-Breithorn,

au moyen du côté Wilsede-Wulfsode. La fonction u , par laquelle il est exprimé, est, dans ce cas,

$$u = 22877^m,94 \times \frac{\sin(\nu^{(13)} - \nu^{(12)} - 0",652) \cdot \sin(\nu^{(11)} - \nu^{(10)} - 0",814)}{\sin(\nu^{(1)} - \nu^{(0)} - 0",652) \cdot \sin(\nu^{(8)} - \nu^{(7)} - 0",814)};$$

sa valeur déduite des observations corrigées est

$$26766^m,68.$$

La différentiation de cette équation fournit, en exprimant $d\nu^{(0)}$, $d\nu^{(1)}$, etc., en secondes,

$$du = [0^m,16991(d\nu^{(0)}) - d\nu^{(1)}] + 0^m,08836(d\nu^{(1)} - d\nu^{(0)}) - [0^m,03899(d\nu^{(12)}) - d\nu^{(13)}] + 0^m,16731(d\nu^{(7)} - d\nu^{(8)});$$

on déduit de là :

- (du) = - 0,08836,
- (bt) = + 0,13092,
- (ct) = - 0,00260,
- (dt) = + 0,07895,
- (et) = + 0,03899,
- (ft) = - 40,1315,
- (gt) = + 10,9957,
- (ht) = + 0,13238,

Les méthodes indiquées plus haut donnent, en prenant le mètre pour unité de longueur,

$$\frac{1}{p} = 0,08329 \text{ ou } P = 12,006.$$

On en conclut que l'erreur moyenne à craindre dans la valeur du côté Falkenberg-Breithorn est 0",2886 m (m désignant l'erreur moyenne à craindre dans les directions observées, cette erreur étant exprimée en secondes), et, par conséquent, si nous adoptons la valeur de m annoncé plus haut, cette erreur moyenne à craindre est 0",1209.

Au reste, l'inspection du système de triangles montre immédiatement qu'on pouvait complètement laisser de côté la station Hauselberg, sans rompre le réseau qui réunit les

quatre autres. Mais il ne serait pas permis pour cela de supprimer les opérations qui se rapportent à ce point, car elles contribuent certainement à augmenter la précision de l'ensemble. Pour montrer plus clairement quel accroissement de précision en résulte, nous terminerons en faisant de nouveau le calcul, après avoir exclu tous les résultats qui se rapportent au point Hauselberg. Des dix-huit directions mentionnées plus haut, huit cessent alors de servir, et les erreurs les plus plausibles sur celles qui restent, sont

$$\begin{array}{l|l}
 (0) = + 0'',327 & (12) = + 0'',206 \\
 (1) = - 0,206 & (13) = - 0,206 \\
 (3) = - 0,121 & (14) = + 0,327 \\
 (4) = + 0,121 & (15) = + 0,206 \\
 (6) = - 0,121 & (16) = + 0,121
 \end{array}$$

La valeur du côté Falkenberg-Breithorn devient alors $26766^m,63$, résultat peu différent de celui qui a été obtenu plus haut. Mais le calcul du poids donne

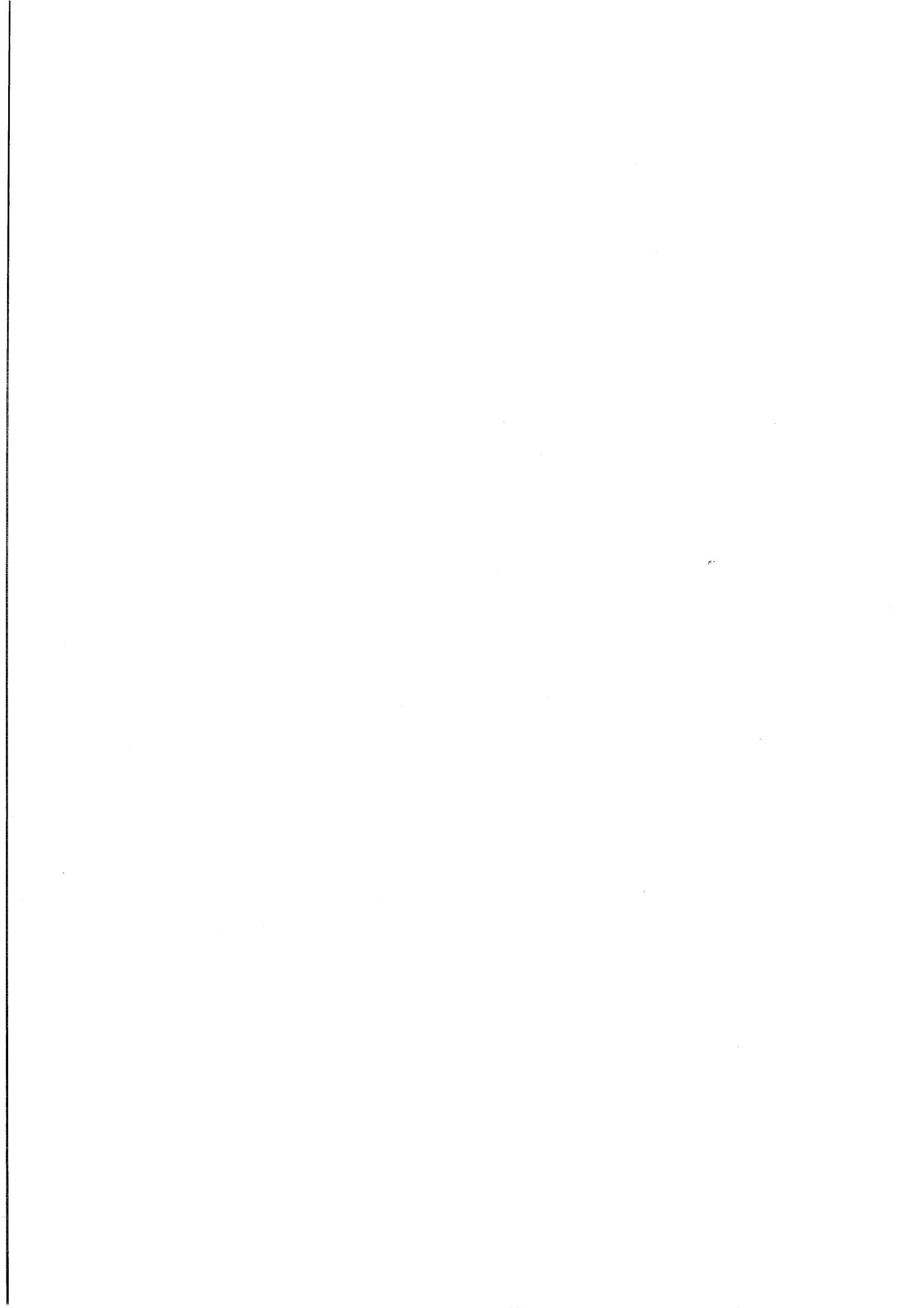
$$\frac{1}{P} = 0,13082 \quad \text{ou} \quad P = 7,644,$$

et l'erreur moyenne à craindre est, en mètres,

$$0,36169^m = 0^m,1515.$$

On voit que par l'adjonction des opérations qui se rapportent à Hauselberg, le poids de la détermination du côté Falkenberg-Breithorn est augmenté dans le rapport de 7,644 à 12,006, c'est-à-dire dans le rapport de l'unité à 1,571.

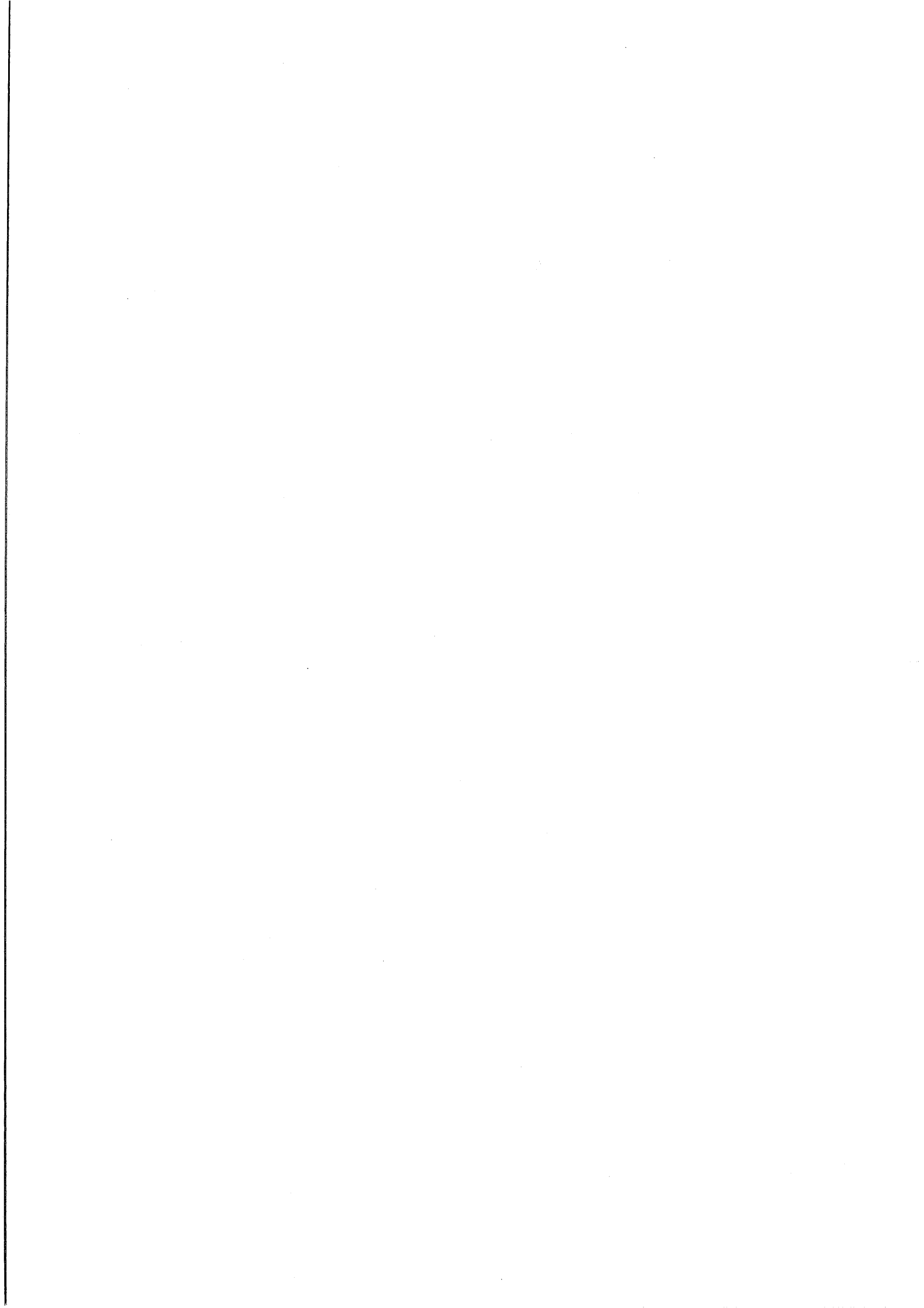




ANNEXE 39

EXTRAITS D'UN COURS DE FAYE À L'ECOLE POLYTECHNIQUE (1855-56)

En 1850, Le Verrier demande la suppression de la méthode des moindres carrés dans les cours enseignés à l'Ecole polytechnique. Or nous avons trouvé dans les archives de cette école, un cours de Faye, datant de 1855-56, où il expose cette méthode. Dans ce même cours, il évoque les méthodes allemandes (instruments, vocabulaire différent du vocabulaire français...) Nous en donnons ici quelques extraits.



Théorie des erreurs. ⁽²⁾

Erreurs. — On a divisé plus haut les erreurs en systématiques ou constantes et en accidentelles ou fortuites. Ces dernières sont les seules qu'on puisse espérer atténuer par la multiplication des observations. Les premières doivent être recherchées avec soin, ainsi qu'il précède, pour les éliminer.

Nous sommes conduits ainsi à faire connaître quelques principes élémentaires et pratiques de la théorie des probabilités. Dans aucune science plus qu'en astronomie et en géodésie, la théorie des chances ne trouve de plus fréquentes applications; elle y conserve son caractère de vérité thématique en raison de la répétition des observations, de la multiplicité des causes d'erreurs, de leur indifférence à agir dans un sens ou dans le sens opposé.

À l'étranger, beaucoup plus qu'en France, en Allemagne surtout, on fait un fréquent usage du calcul des probabilités.

Probabilité. — La probabilité d'un événement est exprimée par une fraction ayant pour numérateur le nombre de cas favorables à cet événement et pour dénominateur le nombre de cas possibles. On suppose que tous les cas ont une égale tendance à se produire.

La probabilité contraire, c'est-à-dire celle de la non-arrivée de l'événement, a pour numérateur la différence entre le nombre de cas possibles et celui de cas favorables, et pour dénominateur le nombre de cas possibles.

Si tous les cas sont favorables à l'événement, il y a certitude qu'il arrivera. La certitude se trouve ainsi représentée par l'unité.

Application au tirage d'une boule blanche dans une urne renfermant m boules de couleur blanche et $(m - a)$ de couleur noire.

La théorie des probabilités consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité.

Les erreurs fortuites qui résultent d'un nombre suffisamment grand d'observations semblent se distribuer suivant une loi régulière. Les plus nombreuses sont les erreurs nulles ou très-petites. Leur nombre diminue à mesure que ces erreurs deviennent plus grandes; on trouve ainsi une limite de grandeur qu'elles ne dépassent pas.

La théorie admet que les erreurs fortuites sont le résultat de la combinaison d'un grand nombre de petites erreurs dues à des causes inconnues qui agissent indifféremment dans un sens ou dans le sens contraire et que la grandeur des erreurs totales dépend de leur nombre à celles des combinaisons de lettres dans la formation des coefficients du binôme de Newton.

Soit, par exemple, une urne renfermant des boules blanches et noires en nombre égal et défini. Si l'on fait une suite de tirages de 1000 boules à chaque fois, la combinaison qui a le plus de chance de sortir sera celle de 500 boules blanches et 500 boules noires; puis la combinaison de 501 et 499 noires, ou réciproquement, d'un de ces résultats étant regardé comme positif et l'autre comme négatif, &c. —

Voici quelques chiffres qui prouvent avec quelle rapidité la probabilité de tirage de chaque groupe va en diminuant.

Groupe tiré.	Probabilité du tirage de chaque groupe
500 sur 500	0, 025
480 520	0, 012
460 540	0, 001
440 560	0, 00002
420 580	0, 0000004

Faye, Cours de géodésie 1855-1856, § Théorie des erreurs

Archives de l'Ecole polytechnique, BVII27

① Les démonstrations des questions de probabilité comprises dans ce chapitre et le suivant ne valent rien; mais comme ces questions sont d'un grand intérêt en géodésie, les élèves devront du moins en connaître les inconvénients, qui sont écrits en rouge.

cel tirage aurait une grande analogie avec les chances d'erreur d'une série nombreuse

qui un grand nombre d'observations a fourni des valeurs différentes d'une même quan-
 tité représentée par x l'erreur de l'une quelconque de ces valeurs par l'ordonnée correspon-
 dante. Le nombre des erreurs qui tomberaient dans l'intervalle d'une unité sur l'axe des x ,
 en supposant qu'elle se produise, ou leur possibilité, restait constante dans cet intervalle et égale
 à celle qui correspond à l'abscisse x , on formera ainsi une courbe dite courbe de possibilité,
 symétrique des deux côtés de l'axe des y , et deviendra tangente à l'axe des x à la
 limite. Cette limite ne pouvant être assignée, on suppose la courbe asymptote
 à l'axe des x , et on lui donne la forme algébrique

$$y = Y e^{-h^2 x^2} \dots \dots \dots (1)$$

où Y représente l'ordonnée correspondante à une erreur nulle, et h est un paramètre
 qui est le nom de mesure de précision, parce que, ainsi que nous le verrons, pour une
 stabilité, l'erreur x diminue dans le rapport de l'accroissement de ce paramètre.

La surface élémentaire $y dx$ exprimera le nombre d'erreurs correspondantes à la variation
 de la surface $\int_0^x y dx$ donnera le nombre des erreurs comprises entre $x = a$ et $x = 0$.
 La surface totale sera

$$Y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = Y \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

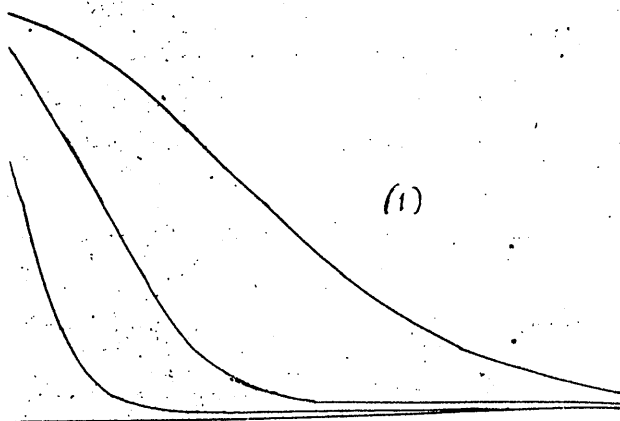
Lorsqu'on prend pour unité cette surface totale qui comprenant tous les cas correspond
 à l'unité, on aura

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

La courbe devient

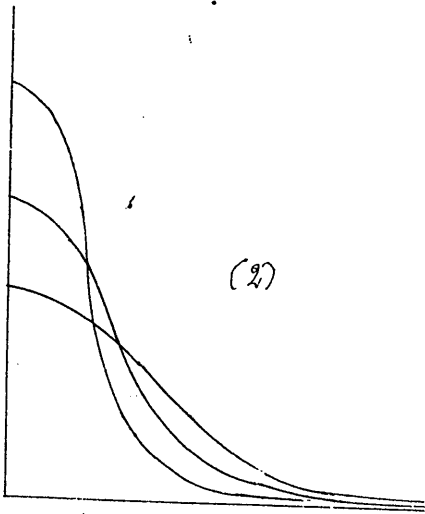
$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \dots \dots \dots (2)$$

La courbe de probabilité.



Sous la forme (1) l'ordonnée ma-
 ximum reste constante, et en faisant croître
 le paramètre les courbes se réfèrent
 vers l'axe des y .

Sous la forme (2) (voir fig. 2) l'ordonnée
 maximum varie, la surface reste cons-
 tante, et la courbe se réfère également
 vers l'axe des y à mesure que le
 paramètre augmente.



Dans ce dernier cas, l'intégrale entre $x = +a$ et $x = -a$ ou bien la probabilité que l'erreur soit comprise entre ces limites aura pour valeur

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+a} e^{-h^2 x^2} h dx.$$

Pour un autre ordre d'observations

$$P_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+a_1} e^{-h_1^2 x_1^2} h_1 dx_1,$$

Pour que la probabilité restât la même dans les deux cas, il faudrait que x et x_1 fussent liés par la relation

$$hx = h_1 x_1,$$

et a et a_1 par

$$ah = a_1 h_1$$

Ce qui prouve qu'à probabilité égale, l'erreur est d'autant moindre que le paramètre h est plus grand, et justifie sa dénomination de mesure de précision.

Étant donné a relatif à l'une des courbes, on aurait pour une autre

$$a_1 = \frac{ah}{h_1}.$$

On a construit une table de l'intégrale

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt$$

correspondant au paramètre $h = 1$.

Elle servira à obtenir, pour une même probabilité, l'erreur x appartenant à une autre courbe de paramètre h , on aura

$$x = \frac{t}{h}.$$

On peut intégrer au moyen du développement connu

$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots$$

Quelques termes de cette table feront voir avec quelle promptitude le nombre

à mesure qu'on s'éloigne de l'erreur nulle.

Valeur de l'intégrale définie $P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$					
Intensité de l'erreur t.	Probabilité ou double du nombre d'erreurs comprises entre 0 et t.	Complément à l'unité.	Intensité de l'erreur t.	Probabilité ou double du nombre d'erreurs comprises entre 0 et t.	Complément à l'unité.
0.0	0.000	1.000	1.4	0.952	0.048
0.2	0.223	0.777	1.6	0.976	0.024
0.4	0.428	0.572	1.8	0.989	0.011
0.6	0.604	0.396	2.0	0.995	0.005
0.8	0.742	0.258	2.2	0.998	0.002
1.0	0.843	0.157	2.4	0.999	0.001
1.2	0.910	0.090	" "	" "	" "

Dans ces erreurs, il est une remarquable qu'on obtient par interpolation, c'est celle dont la probabilité est $\frac{1}{2}$, ce qui veut dire que les chances sont égales pour que l'erreur d'une observation soit plus grande ou plus petite que cette erreur particulière; elle répond à l'ordonnée qui divise la surface en deux parties égales.

La Place, Laplace, qui part la nomment: erreur moyenne; les Allemands lui donnent le nom d'erreur probable; nous adopterons la désignation d'erreur médiane proposée par M. Cournot.

Dans l'hypothèse de $h=1$, sa valeur est

$$p = 0.47694.$$

On peut remarquer qu'une erreur égale à cinq fois l'erreur médiane a pour probabilité 0.999; c'est-à-dire qu'il y a 999 à parier contre un que l'erreur d'une observation est moindre que

$$5p = 2.4.$$

Pour d'autres observations ayant h pour mesure de précision, l'erreur probable serait

$$r = \frac{p}{h}$$

La quantité $\left(\frac{1}{r}\right)$ pourrait donc servir de mesure de précision.

Détermination de l'erreur médiane. — Soit n observations dont on a pris la somme; soit encore $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ les différences des résultats avec cette moyenne, et

$$\sum (\mathcal{E}^2) = \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^2 + \dots$$

la somme des carrés de ces différences considérées comme représentant les erreurs.

On prouve que la mesure de précision d'un résultat a pour valeur

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{2 \sum (\mathcal{E}^2)}{n-1}}}$$

et par suite, que l'erreur médiane d'un résultat partiel est

$$r = 0.47694 \sqrt{\frac{2 \sum (\mathcal{E}^2)}{n-1}} \approx 0.67449 \sqrt{\frac{\sum (\mathcal{E}^2)}{n-1}}$$

Il nous verrons plus loin qu'il faudrait diviser par $\sqrt{\pi}$ pour obtenir la même valeur rapportée à la moyenne des n observations, et qu'ainsi

$$H = \frac{1}{\sqrt{\frac{2 \sum (\mathcal{E}^2)}{n(n-1)}}}, \quad \text{et} \quad R = 0.67449 \sqrt{\frac{\sum (\mathcal{E}^2)}{n(n-1)'}}$$

n étant ordinairement très-grand, on pourrait simplifier cette dernière expression et écrire.

$$R = \frac{0.67449}{n} \sqrt{\sum (\mathcal{E}^2)}$$

La valeur de $\sqrt{\sum (\mathcal{E}^2)}$ s'obtiendrait d'ailleurs très-promptement par une construction géométrique qui consisterait à prendre au compas, en s'appuyant sur les deux côtés d'un angle droit, les hypoténuses des triangles rectangles successifs.

$$H_1 = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2}, \quad H_2 = \sqrt{H_1^2 + \mathcal{E}_3^2} = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^2}, \quad \&c.$$

Si l'on remarque:

1^o Que la nature de la courbe de probabilité, dont on se propose d'obtenir l'erreur médiane est complètement inconnue, et qu'en adoptant la forme $y = Y e^{-k^2 x^2}$ on a simplement choisi une fonction qui possède la propriété de convenir à un certain ordre de faits analogues aux tirages aléatoires, et d'être en même temps le type algébrique des quantités qui décroissent symétriquement et avec une grande rapidité de part et d'autre de l'axe des y , sans être la seule qui jouisse de cette propriété.

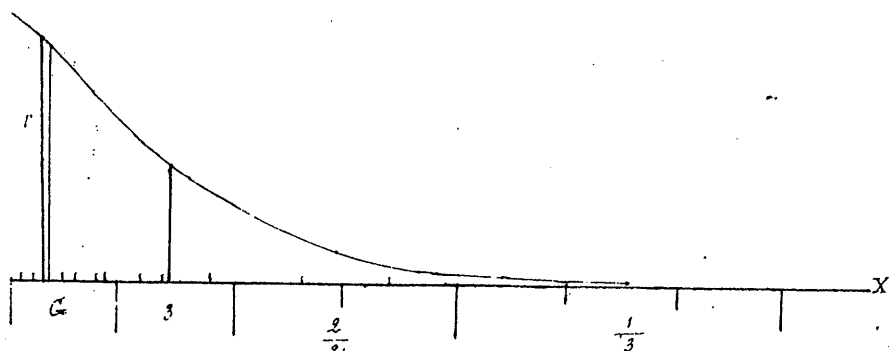
2^o Que le calcul des probabilités, à moins d'un nombre considérable d'observations, ne fournit que des chiffres approximatifs dans lesquels les décimales perdent rapidement toute importance.

On sera porté à se demander si, au point de vue pratique, il n'y aurait pas souvent avantage à substituer aux calculs extrêmement laborieux des formules algébriques, une simple construction empirique basée sur les résultats eux-mêmes de l'observation.

Construction géométrique. — La détermination de l'erreur médiane suppose que l'on a fait

ne assez considérable d'observations. Après avoir tracé deux axes rectangulaires, on portera sur celui des abscisses, en fonction d'une unité adoptée, toutes les erreurs déduites de la comparaison de différents résultats avec le résultat moyen. Et partant de l'origine et sur une longueur z , on partagera l'axe des x en parties égales et assez grandes pour que le nombre des erreurs dans ces divisions suivent une progression sensiblement décroissante. Dans chaque division, centre de gravité des points où sont marquées les erreurs, on élèvera au milieu de la division, on élèvera une ordonnée proportionnelle au nombre des erreurs comprises dans la division, sur laquelle on opère.

Quand les erreurs seront devenues très-rares et qu'on sera contraint de grouper plusieurs pour former une ordonnée, la valeur de celle-ci sera divisée par le nombre des erreurs qui auront concouru à la former.



où r est la valeur de l'erreur médiane cherchée.

Sur la figure ci-dessus on a trouvé pour l'erreur médiane d'une seule observation

$$r = 1.3.$$

et conséquemment pour la moyenne des 20 observations

$$R = \frac{1.3}{\sqrt{20}} = 0.29;$$

on se rapprocherait probablement autant de la vérité que celle qu'on aurait pu déduire d'une seule observation.

Cette figure servirait à résoudre d'autres questions de probabilité, telles que celle-ci: chercher la probabilité pour qu'une erreur soit comprise dans une limite déterminée.

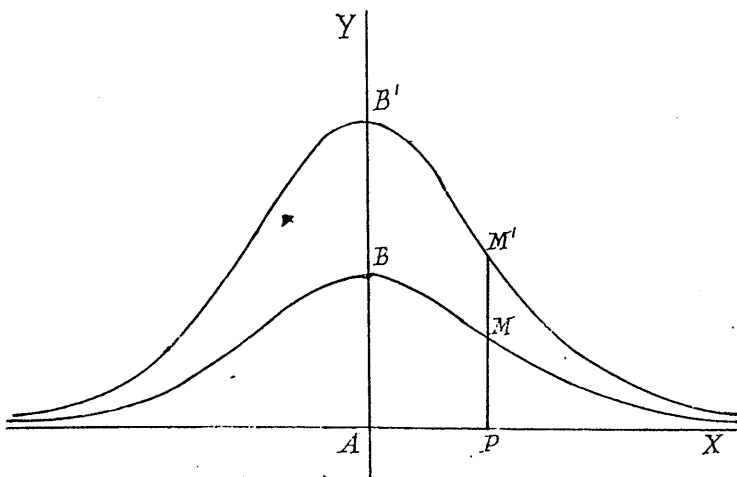
Ainsi on trouverait, dans l'exemple ci-dessus qu'il y a 16 à parier contre 1 que l'erreur d'une observation ne dépasserait pas 3 unités, et que la moyenne des 20 observations

2^e Division. 1855-56.

Compte de Géodésie. - 16^e Feuille.

serait comprise entre 0 et $\frac{3}{\sqrt{20}} = 0.67$.

Erreur à craindre sur la moyenne de plusieurs observations. — Soit donnée une courbe de probabilité BM , d'une nature quelconque, mais s'étendant des deux côtés de l'axe des y , dans laquelle l'ordonnée PM représente la probabilité de l'erreur x ; on demande quelle serait la courbe de probabilité si cette erreur, au lieu d'appartenir à une seule observation, était celle de la moyenne de n résultats obtenus par des observations semblables. Pour y arriver, nous supposons qu'on ait fait autant de fois n observations qu'il y avait d'erreurs dans la première courbe. Si ces observations sont de même nature, il est évident que toutes les erreurs se distribueront suivant la même loi; seulement, elles seront n fois plus nombreuses, et pour une même erreur x , l'ordonnée PM' sera n fois plus grande que l'ordonnée PM . La probabilité pour que l'erreur tombe entre A et P restera la même qu'avant, car le rapport des surfaces correspondantes aux mêmes abscisses n'aura pas changé.



Supposons maintenant qu'on réunisse toutes ces erreurs simples par groupes de n , d'après une loi quelconque, qu'on prenne la moyenne et qu'on forme ainsi autant de groupes qu'il y avait d'erreurs simples. On pourra remarquer alors que l'ordonnée correspondante à l'une quelconque de ces moyennes sera la même que dans la courbe de probabilité des erreurs simples: elle sera, en effet, elle-même la moyenne des ordonnées correspondantes aux

erreurs qui ont servi à former $x^{(1)}$. Toutefois il nous restera à réduire la surface de la nouvelle courbe à l'unité en la divisant par n ; mais en faisant la courbe semblable à elle-même, afin de ne pas altérer le rapport qui existe entre l'intensité d'une erreur et la probabilité qui y correspond. Or, dans la nouvelle courbe, les coordonnées sont ny et x ; elle deviendra

(1) $(x + \alpha), (x + \alpha'), (x + \alpha'') \dots$ étant les erreurs dont x est la moyenne, on a

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots = 0.$$

$(y + \xi), (y + \xi'), (y + \xi'') \dots$ étant les ordonnées correspondantes, la moyenne sera $y + \frac{\xi + \xi' + \xi'' + \dots}{n}$; or le dernier terme doit être supprimé nul par suite de l'ignorance complète de son

signe, soit la valeur positive ou négative qu'il pourrait prendre dans chaque cas.

$$y\sqrt{n} \text{ et } \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

signifiera que dans cette réduction le rapport des surfaces n'a pas été altéré, et qu'ainsi la probabilité que l'erreur déduite de n observations ne dépassera pas $\frac{x}{\sqrt{n}}$ est la même que la probabilité que elle ne dépassera pas x dans le cas d'une observation unique. Si la probabilité est $\frac{1}{2}$ dans l'un des cas, elle sera $\frac{1}{2}$ dans l'autre.

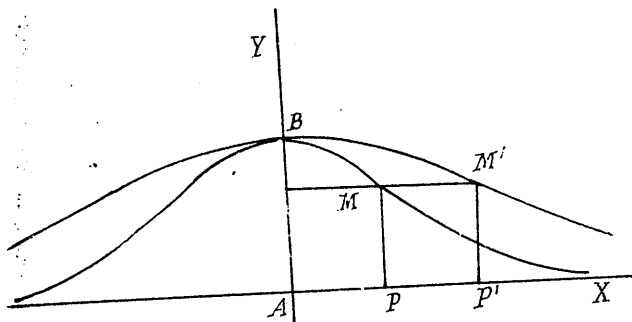
C'est en ce sens qu'il faut comprendre le principe énoncé plus haut que

L'erreur sur la moyenne d'un certain nombre d'observations est égale à l'erreur à craindre pour seule d'entre elles divisée par la racine carrée du nombre des observations.

On, si l'on veut, que

La précision du résultat croît comme la racine carrée du nombre des observations.

Erreur à craindre sur un résultat provenant de plusieurs opérations successives. — Étant une courbe de probabilité relative à l'erreur d'une seule observation, on passerait facilement par un raisonnement géométrique analogue au précédent, à la courbe de probabilité relative à des résultats dont chacun serait obtenu par la succession de n opérations semblables. On trouverait pour coordonnées de cette courbe



$$\frac{y}{\sqrt{n}} \text{ et } x\sqrt{n}$$

On en déduirait cet autre principe

Lorsqu'un résultat final est obtenu par suite d'opérations successives de même nature, l'erreur à craindre sur ce résultat est égale à l'erreur à craindre sur un résultat partiel, multipliée par la racine carrée du nombre des opérations.

On peut d'ailleurs déduire très simplement ce second principe du premier, par la raison suivante :

Soit E l'erreur à craindre sur le résultat final, e', e'', e''' les erreurs partielles, e l'erreur à craindre sur un seul résultat partiel,

on a

$$e' + e'' + e''' + \dots = E;$$

et en vertu du premier principe

$$\frac{e' + e'' + e''' + \dots}{n} = \frac{e}{\sqrt{n}};$$

donc

$$\frac{E}{n} = \frac{e}{\sqrt{n}} \quad , \quad \text{et} \quad E = e\sqrt{n}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Détermination des résultats moyens.

Moyenne arithmétique. — Lorsqu'on a obtenu plusieurs mesures d'une même quantité et qu'elles présentent la même garantie d'exactitude, il est d'usage d'adopter pour résultat définitif la moyenne arithmétique de tous les résultats partiels; c'est-à-dire que le résultat regardé comme le plus probable est égal à la somme des résultats partiels divisée par leur nombre.

Cherchons à justifier cette méthode, et afin de mieux fixer le raisonnement, prenons la quantité dont on prend la moyenne par des lignes géométriques. Soient deux mesures également précises, il est évident que le point à adopter pour l'extrémité de la moyenne se trouverait le milieu entre les positions qui résulteraient des deux mesures. Si ensuite on combine ce premier résultat avec une troisième mesure simple, il semble naturel de lui attribuer une influence double, et que la nouvelle position moyenne cherchée soit deux fois plus près du point qui représente deux observations que de celui qui appartient à une observation unique. Cela admis, le même raisonnement deviendrait applicable à un point triple, &c. et l'on est conduit à déterminer la position définitive de toutes les mesures par une moyenne arithmétique. On peut remarquer d'ailleurs que cette méthode n'est autre que celle employée dans la détermination du centre de gravité de corps également pesants.

Par analogie, on nomme poids d'un résultat le nombre de résultats simples à qui on a attribué la même précision entre eux, dont la moyenne aurait la même précision que le résultat dont on veut déterminer le poids. Cette appréciation suppose qu'on a adopté une unité de poids.

Généralement: La moyenne de quantités dont les poids sont différents est égale à une fraction dont pour numérateur la somme de toutes ces quantités multipliées par leurs poids respectifs, et pour dénominateur la somme des poids.

$a, b, c, \&c. \dots$ étant ces quantités,
 $p, p', p'', \&c. \dots$ leurs poids respectifs,

on aura pour la moyenne arithmétique

$$M = \frac{pa + p'b + p''c + \&c. \dots}{p + p' + p'' + \dots}$$

Il ne faut pas confondre le poids d'un résultat avec la quantité que nous avons représentée par e dans sa mesure de précision. Cette dernière valeur que nous avons représentée par e

erreur par $\frac{1}{r}$ est proportionnelle à la racine carrée du nombre des observations simples
 le résultat en question serait la moyenne; c'est-à-dire à la racine carrée de son poids.

Ainsi on peut écrire

$$h = \sqrt{p}$$

ou $h^2 = p$

Il en résulte que la moyenne arithmétique exprimée en fonction de la mesure de précision
 indrait

$$M = \frac{h^2 a^2 + h^2 b^2 + h^2 c^2 + \dots}{h^2 + h^2 + h^2 + \dots}$$

Enfin nous ferons remarquer que la moyenne arithmétique entraîne cette condition que la
 algébrique de toutes les erreurs est nulle.

On a en effet, en nommant x la valeur vraie

$$(x - \varepsilon_1) + (x - \varepsilon_2) + (x - \varepsilon_3) + \dots = 0;$$

Cette relation se trouve d'ailleurs liée à la suivante, à savoir que la somme des carrés
 des erreurs

$$(x - \varepsilon_1)^2 + (x - \varepsilon_2)^2 + (x - \varepsilon_3)^2 + \dots$$

un minimum, qui est plus générale.

Méthode des moindres carrés. — Lorsqu'on a obtenu par l'observation plusieurs quantités
 qui servent à en déterminer d'autres avec lesquelles elles sont liées par une relation, si l'on
 a un grand nombre d'équations que d'inconnues, on emploie alors pour déterminer ces inconnues la
 méthode des moindres carrés due à Legendre et à Gauss.

Elle repose sur ce principe que le résultat le plus probable est celui qui satisfait à la condition
 de rendre minimum la somme des carrés des erreurs.

Soit les relations linéaires

$$\left. \begin{aligned} ma + nb + pc + \dots &= 0 \\ ma' + nb' + pc' + \dots &= 0 \\ ma'' + nb'' + pc'' + \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

lesquelles $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots$ ont été obtenus par l'observation, et m, n, p, \dots &c.
 des coefficients inconnus et indépendants les uns des autres.

Les quantités déduites de l'observation n'étant pas rigoureusement exactes, les équations
 sont pas mathématiquement vérifiées, et l'on aura:

$$\left. \begin{aligned} ma + nb + pc + \dots &= \varepsilon_1 \\ ma' + nb' + pc' + \dots &= \varepsilon_2 \\ ma'' + nb'' + pc'' + \dots &= \varepsilon_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

La condition la plus avantageuse pour déterminer les coefficients est d'établir

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \dots = \text{minimum};$$

ce qui conduit aux relations

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 \frac{d\epsilon_1}{dm} + \epsilon_2 \frac{d\epsilon_2}{dm} + \epsilon_3 \frac{d\epsilon_3}{dm} \dots &= 0 \\ \epsilon_1 \frac{d\epsilon_1}{dn} + \epsilon_2 \frac{d\epsilon_2}{dn} + \epsilon_3 \frac{d\epsilon_3}{dn} \dots &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (III)$$

m, n, p, \dots étant indépendants.

La différentiation successive des équations (II) nous donnera

$$\frac{d\epsilon_1}{dm} = a, \quad \frac{d\epsilon_2}{dm} = a', \quad \frac{d\epsilon_3}{dm} = a'';$$

$$\frac{d\epsilon_1}{dn} = b, \quad \frac{d\epsilon_2}{dn} = b', \quad \frac{d\epsilon_3}{dn} = b'';$$

Substituant les valeurs de $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ et des coefficients différentiels $\frac{d\epsilon_1}{dm}, \frac{d\epsilon_2}{dm}, \dots, \frac{d\epsilon_1}{dn}, \frac{d\epsilon_2}{dn}, \dots$ dans les équations (III), il viendra

$$\begin{aligned} a(ma + nb + pc + \dots) + a'(ma' + nb' + pc' + \dots) \dots &= 0 \\ b(ma + nb + pc + \dots) + b'(ma' + nb' + pc' + \dots) \dots &= 0, \end{aligned}$$

Ces équations qui sont en même nombre que les inconnues peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} m \Sigma a^2 + n \Sigma ab + p \Sigma ac \dots &= 0, \\ m \Sigma ab + n \Sigma b^2 + p \Sigma bc \dots &= 0, \\ m \Sigma ca + n \Sigma cb + p \Sigma c^2 \dots &= 0, \end{aligned}$$

Leur formation est évidente. On en déduira les valeurs de m, n, p .

Cependant, les calculs peuvent devenir très longs lorsque les coefficients à déterminer sont nombreux et qu'on a fait un grand nombre d'observations.

On peut prouver que la méthode des moindres carrés revient en réalité à une moyenne arithmétique en attribuant à chaque observation l'influence qu'elle a avoir; c'est-à-dire à écrire que la somme des erreurs est égale à zéro, sans donner à chacune d'elles son importance.

En effet, si dans les équations (II) on fait varier m en laissant n, p, \dots & constants;

alors

$$dE_1 = a \, dm$$

ou

$$dm = \frac{1}{a} dE_1;$$

ou même

$$dm = \frac{1}{a'} dE_2;$$

$$dm = \frac{1}{a''} dE_3;$$

.....

.....

Si $a, a', a'' \dots$ étaient égaux, il est évident que m serait également bien déterminé par $E_1, E_2, E_3 \dots$ et nous rentrerions dans le cas de quantités mesurées directement, pour lesquelles on prend une moyenne arithmétique; d'où la relation

$$E_1 + E_2 + E_3 + \dots = 0;$$

mais si les quantités a, a', a'' ne sont pas égales, on ne pourra opérer ainsi, m n'étant plus influencé de la même manière par les variations de E_1, E_2, E_3, \dots &c.

Dans l'équation

$$dm = \frac{1}{a} dE_1$$

on peut remarquer que la variation de m se fera en raison inverse de a ; c'est-à-dire que E_1 influencera d'autant mieux à déterminer m que a sera plus grand.

On peut conclure que, dans la détermination de m , les erreurs $E_1, E_2, E_3 \dots$ doivent avoir une influence d'autant plus grande que les quantités observées $a, a', a'' \dots$ sont elles-mêmes plus grandes, et que si l'on remplace ces erreurs par $aE_1, a'E_2, a''E_3 \dots$ on rentrera dans le cas de quantités mesurées directement; d'où la relation

$$aE_1 + a'E_2 + a''E_3 + \dots = 0,$$

et de même

$$bE_1 + b'E_2 + b''E_3 + \dots = 0,$$

$$cE_1 + c'E_2 + c''E_3 + \dots = 0.$$

.....

Ces équations ne sont autres que les équations (III) qui sont déduites de la condition des moindres carrés.

On rendra ce raisonnement palpable par un exemple.

Je suppose qu'on connaisse l'équation générale de la trajectoire décrite par un projectile, et qu'on se propose de déterminer, par des observations, les constantes qui sont l'inclinaison et la vitesse initiale.

Plusieurs observateurs, placés en dehors du plan de la trajectoire et à égale distance

de ce plan sont chargés d'observer normalement à ce plan, l'angle de hauteur du projectile au moment de son passage dans le vertical d'observation. On suppose encore que les observations aient le même degré de précision.

Pour une égale erreur d'observation, les éléments de la trajectoire subissent une variation considérable si les deux points nécessaires pour sa détermination sont peu éloignés de la bouche du mortier, et seront au contraire peu altérés si ces points sont situés vers la partie opposée de la courbe. Si l'influence était la même dans les deux cas, on adopterait pour résultat final la moyenne arithmétique des résultats partiels; mais si dans le second cas une erreur d'observation altère 10 fois moins les constantes que dans le premier, n'est-il pas évident que les dernières observations seront 10 fois plus avantageuses que les premières, et qu'elles devront entrer comme 10 dans la moyenne, si les premières y figurent comme un?

Si donc, nous admettons comme suffisamment démontré que dans les mesurer directes la moyenne arithmétique est l'expression la plus exacte du résultat final, nous devons arriver à conclure que la méthode des moindres carrés, qui comprend comme cas particulier la moyenne arithmétique, doit être adoptée dans le cas général.

La méthode des moindres carrés ayant fourni le résultat le plus probable, on peut se demander quelle est l'erreur médiane de ce résultat; c'est à dire celle dont la probabilité est $\frac{1}{2}$, ou qui est telle qu'il y aurait autant à parier pour une erreur plus grande que pour une erreur plus petite.

Si l'on représente par e le nombre d'équations, par c le nombre des constantes à déterminer, et que l'on fasse comme plus haut

$$\Sigma (E^2) = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \dots$$

on trouvera pour l'erreur médiane d'une des équations

$$r = 0.67449 \sqrt{\frac{\Sigma (E^2)}{e - c}}$$

et pour l'erreur médiane du résultat déduit des e équations

$$R = 0.67449 \sqrt{\frac{\Sigma (E^2)}{e(e - c)}}$$

On déterminera E_1, E_2, E_3, \dots en calculant d'abord les valeurs des c constantes, puis en les substituant dans les e équations qui feront alors connaître ces erreurs.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé les équations linéaires, c'est à dire que les inconnues y entrent au 1^{er} degré seulement; voyons comment on opère lorsque les équations sont quelconques.

Application 5

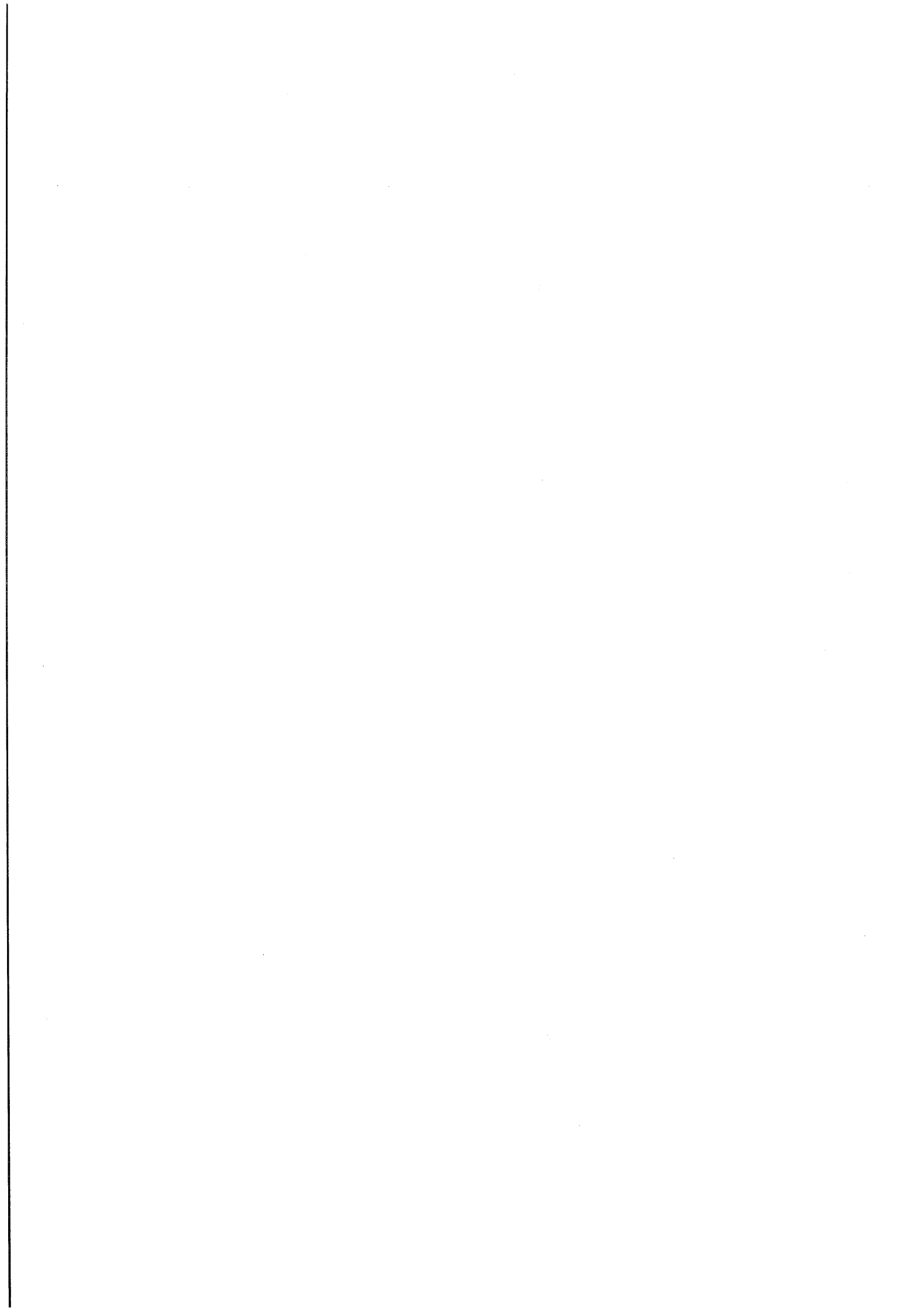
ANNEXE 40

LETTRE DE BAEYER
A QUETELET

"RAPPORT SUR LA TRIANGULATION
EUROPÉENNE EN LONGITUDE SOUS
LA LATITUDE DE 52°"

Dossier 275 Archives de l'ARB

Le morceau d'histoire de la géodésie traité dans cette thèse mène à la création en 1864 de la *MittelEuropäische Gradmessung*. Baeyer expose son projet dans une lettre à Quetelet, datée du 25 octobre 1861. Nous donnons aussi, dans sa traduction française, le rapport daté d'avril 1863 indiquant les différents points de ce projet. Ce rapport, envoyé à tous les gouvernements susceptibles de participer à cette association, se trouve également à l'Observatoire de Paris.



Berlin Schellingstr. 9. le 25 Oct.
1861



Monsi très cher Monsieur le Professeur.

Après avoir fini la jonction des triangles Prifiens avec les triangles Belges dans les environs d'Aix la Chapelle, j'ai fait, depuis le 6 Sept. un voyage en Suisse et j'ai été si bien favorisé du temps que j'y resta jusqu'à la moitié du mois d'October. Re-tourné le 20 à Berlin j'ai trouvé votre lettre du 15 Sept. Je suis bien fâché de ce retardement de ma réponse et je vous prie de m'excuser par cette circonstance particulière.

Je sais bien Mr. le Professeur que vous avez déjà exécuté des travaux différents, concernant la détermination de la courbure de la surface terrestre, mais je croyais utile pour une opération qui se doit étendre sur toute l'Europe moyenne que le gouvernement Belge prenait part officiellement. C'est pourquoi le gouvernement

à

Monsieur le Professeur Quetelet

à Bruxelles

exécutés et projetés entre Utrecht et Leyden.
De cette manière il s'agit pour l'observatoire de Brno, que la détermination de l'apex pour compléter votre coopération a cette grande entreprise géographique et astronomique.

Vous m'avez écrit, Mr le Professeur, que vous aviez eu la bonté de m'envoyer les résultats de votre détermination des différences de temps entre Berlin et Lande mais malheureusement je ne les ai pas reçus, mais je suis sûr que Mr. Encke les possède et qu'il ne les communiquera très volontiers.

La difficulté de la langue française est un si grand obstacle pour moi que je ne suis pas sûr, si ma prose vous conviendra tout à fait; mais j'espère que vous compléterez les lacunes de mon écriture par la nature de la chose pour prendre vos mesures.

Agreez Mr. le Professeur l'assurance de mes sentiments les plus distingués avec lesquels je suis toujours votre très dévoué serviteur

Bayer

J'ai bien communiqué mon projet au gouvernement Prussien et je suis bien charmé que vous voulez bien prêter votre coopération.

La Suisse a accepté mon plan avec un grand intérêt et a nommé une commission pour diriger les travaux.

Mr. le Professeur Hansteen à Christiania en Norvège a proposé la prolongation de l'opération jusqu'à Bergen et Drontheim (hauteur du pôle 63° 25' 50"; longitude 28° 3' 15")

ce qui donne une amplitude entre Palermo et Drontheim de 25° 16'. Par conséquent, les points les plus occidentaux seront Genève, Bruxelles, Leyden et Bergen. Pour ces points il serait nécessaire de connaître les hauteurs du pôle, les distances entre ces points et leurs apices.

Spécialement pour l'observatoire de Bruxelles, la situation de cette observatoire avec les triangles de Drontheim en arête existe déjà, si je ne me trompe pas.

Il est évident qu'il s'agit que l'apex qui manque. Quant aux travaux astronomiques, les différences de longitude seront connues par vos travaux déjà

Europäische Längengradmessung unter 52° Breite.

In Erwägung, daß die die europäische Längengradmessung be-
treffenden trigonometrischen Operationen auf der ganzen Länge des
Bogens zwischen Valentia und Orsk entweder bereits vollendet sind
oder, muthmaßlich im Sommer des laufenden Jahres zum Abschluß
kommen, vereinigten sich Ende März 1863 in Berlin

der Generalleutenant Baeyer

der Director der Bonner Sternwarte Prof. Argelander

und der Director der Pulkowaer Sternwarte Otto Struve.

um über den astronomischen Theil dieses internationalen Unterneh-
mens sich zu berathen und ihre Ansichten darüber auszu-
tauschen wie dasselbe dem jetzigen Standpunkte der Wissenschaft entsprechend
am geeignetsten zu Ende zu führen sei. Die Beschlüsse dieser Confe-
renzen sind in den nachfolgenden Punkten zusammengefaßt, deren
Bestätigung, soweit sie dessen bedürfen, bei den betreffenden Regierun-
gen oder Behörden nachzusuchen ist.

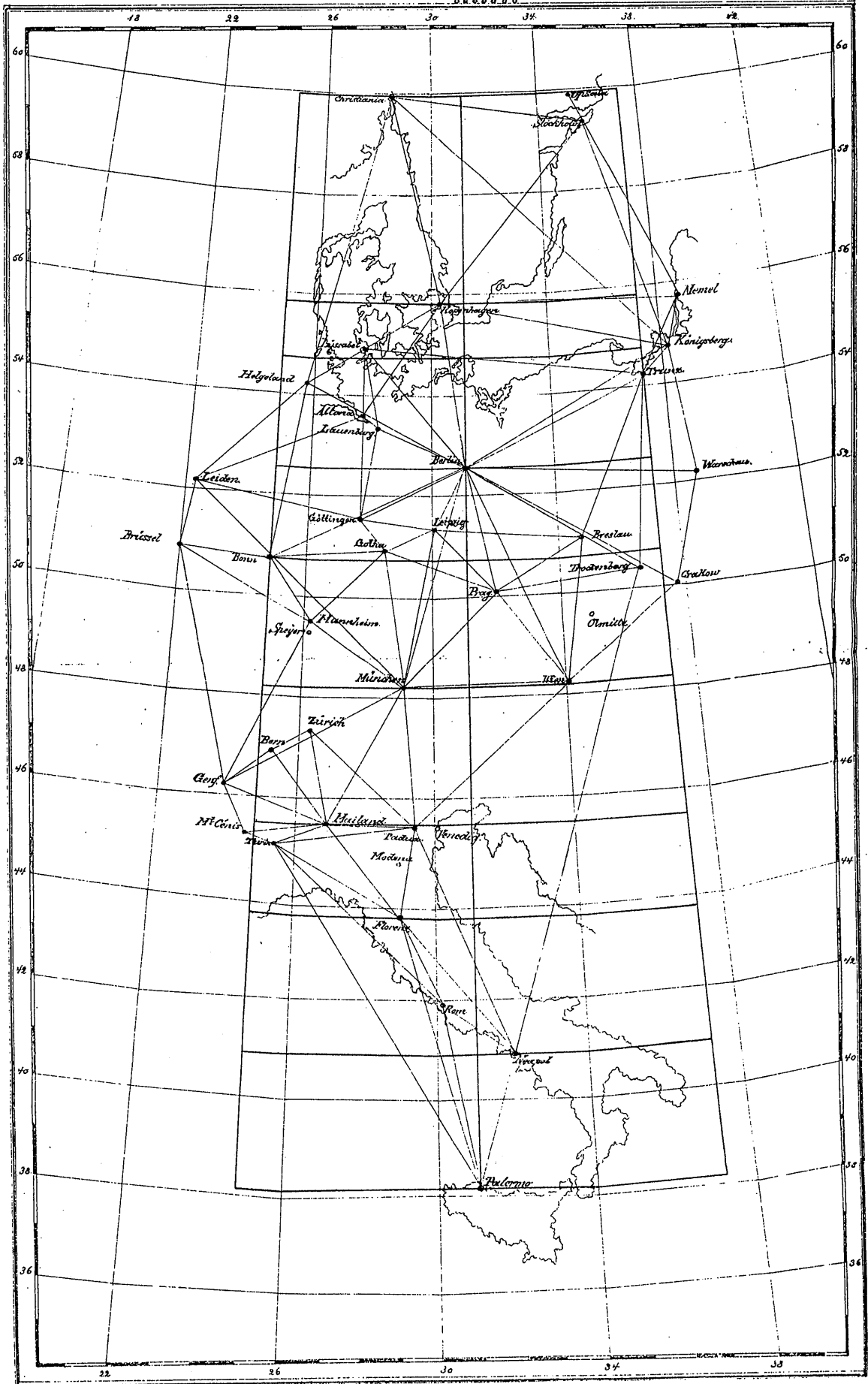
1.

Um eine möglichst große Genauigkeit in den astronomischen Be-
stimmen.



ENTWURF

zu einer
Mittel Europäischen Gradmessung
Maassstab 1:100,000





Triangulation Européenne - en longitude Sous la latitude de 52° .

Considérant que les opérations trigonométriques qui se rapportent à la triangulation Européenne en longitude sous déjà terminées sur toute la longueur de l'arc compris entre Valcutta, et Orsk, ou seront probablement terminées dans le courant de l'été prochain, se sont réunis à Berlin à la fin de May 1863

le lieutenant général Baeyer
le directeur de l'Observatoire de Bonn, professeur Argelaender
et le directeur de l'Observatoire de Gulkowa Otto Struve.

pour se consulter sur la partie astronomique de cette entreprise internationale et pour échanger leurs vues sur le mode d'exécution le plus convenable dans l'état actuel de la science. Les conclusions de ces conférences sont comprises dans les articles suivants, dont la ratification, en ce qui se concerne, doit être demandée aux gouvernements et aux autorités.

(1)
Pour obtenir la plus grande précision possible dans les déterminations astronomiques de la différence de longitude entre les stations principales choisies sur l'arc de parallèle, il est désirable que ces déterminations soient prises partout par les mêmes observateurs, au moyen des mêmes instruments et de mêmes méthodes de calcul.

(2)
Sont proposés comme stations principales, en allant de l'Est à l'Ouest
Orsk, Orenburg Samara Usman (?) Orel Bobruisk
Grodno, Varsovie (Observatoire) Breslau Leipzig Bonn Ostende
Freemich (Observ.) Côté ouest de Galles (?) Valcutta.

Des modifications dans le choix des stations principales sont laissées au jugement des directeurs scientifiques de ces opérations dans le différent pays, mais cependant en observance comme règle que deux stations successives doivent être distantes entre elles d'environ 30 milles géographiques (5 degrés de longitude)

(3).

Pour la détermination de longitudes, la transmission galvanique du temps sera toujours employée. Si, jusqu'à l'achèvement du travail aux autres Stations, la ligne télégraphique entre Orenbourg et OSK n'était pas terminée, la différence de longitude de ces deux points ferait l'objet d'un travail supplémentaire particulier de la part des astronomes et géodètes Russes.

(4)

Les signaux galvaniques du temps doivent suivre des lignes directes sans emploi de relais. Mais comme en Russie la liaison galvanique directe n'existe qu'entre un petit nombre de points isolés, mais qui tous au contraire sont directement reliés à Moscou, le mode suivant d'opérations sera employé. Pendant toute la durée des opérations en Russie un même observateur reste stationné à Moscou, tandis que deux autres se rendent ensemble à une Station à l'auteur, déterminées ^{à l'avance} à chacune indépendamment l'une de l'autre et échangeant avec l'observateur de Moscou des signaux galvaniques indépendants. Ce même mode sera aussi employé pour l'Allemagne et les autres pays participants où les observateurs de Berlin et Greenwich serviront de Stations de comparaison. Les Observateurs de Varsovie et Rome seront comme Stations de passage, dont le 1^{er} doit être lié directement au Moscou et Berlin et le dernier au Berlin et Greenwich.

(5).

Une détermination de longitude est regardée comme terminée, quand aux deux Stations à lier, 3 nuit à chacune, on a obtenu de bonnes déterminations du temps et que des signaux galvaniques satisfaisants ont été reçus et envoyés.

(6).

Les deux Stations de la ligne ne sont ni une Station de passage et le même sera employé à la détermination du temps. L'observateur de Sulkowa se charge de fournir celui-ci d'après un plan proposé O. Struve et approuvé par les autres participants. Un instrument analogue sera fourni par le gouvernement prussien aux Stations de comparaison Berlin et Greenwich. Pour Moscou et aussi le cas échéant pour l'usage dans le travail supplémentaire entre OSK et Orenbourg l'observateur de Sulkowa se charge de fournir un instrument de même espèce.

(7)

Comme règle pour une bonne détermination du temps, il faut que
12 étoiles d'heure soient observées, 3 dans la position I de l'instrument,
6 dans la position II, et de nouveau 3 dans la position I. Le centre
dans chaque position au moins une étoile polaire (au dessus de 75° et
quand il est possible au dessus de 80°). Le nombre de signaux galvaniques
dans chaque nuit d'observation est fixé à 16 pour chaque observation
répondant à 32 pour l'observation de la Station de comparaison.

(8)

Dans la détermination du temps, pour annuler l'incertitude visible et incerti-
-tude dans les ascensions droites d'étoiles à observer, il est désirable que les mêmes
étoiles soient observées la même nuit aux deux Stations à lier. Dans ce
but et sous ce but pour chaque époque de l'année un certain nombre d'
étoiles convenablement disposées dans l'observatoire sera exigé et obser-
-vées. Dans le cas contraire on le strict observateur de cette

condition retarderait trop inévitablement la marche des opérations
arrêtées, il serait permis aux observateurs de s'en écarter et au
lieu de ces étoiles normales d'en observer d'autres qui cependant devront
être choisies dans un Catalogue composé spécialement dans ce but.
Une nouvelle détermination d'ascensions droites d'étoiles qui composeront
ce Catalogue est promise par l'Observatoire de Bonn et de Bultkova
Les Directeurs de ces Observatoires s'entendront aussi pour le choix
d'étoiles polaires et pour la confection du Catalogue d'étoiles d'heure

(9)

Les Directeurs des différents lignes télégraphiques doivent être priés dans
la nuit désignée pour l'observation de mettre aux Stations à lier
les lignes télégraphiques à la disposition d'observateurs pendant 2 heures
dans des intervalles de 2 à 3 heures et de façon que les signaux passent
par le Veri le plus directe dans un laps de temps. Les signaux à
observer doivent être donnés d'un façon tout à fait indépendante d'observateur.

(10).

Pour les observations où la détermination par la différence de longitudes
 sera exécutée, pour la triangulation, doivent être mis en relation
 avec les Stations Géographiques par un Conducteur Spécial, pour pouvoir
 donner et recevoir les Signaux sans quitter le lieu de l'observation.
 Pour l'érection d'observations temporaires, là où il n'y a pas d'observatoire
 régulier, le point doit être choisi aussi versin que possible des Stations Géographiques.
 Sans ce choix et faire aussi remarquer que la liaison d'observations
 temporaires avec le point principal le plus voisin, de la triangulation ne doit
 pas offrir de grandes difficultés, de manière que la réduction d'un point à
 l'autre puisse être obtenue avec un succès assuré.

(11)

Il est à désirer que l'observation de Bruxelles, comme point Central de
 triangulation belge, soit liée par cette circonstance à cette occasion exactement
 par la longitude avec les Stations de la ligne Vierge, Bonn et Ostende,
 puisque les Signaux à échanger entre ces points peuvent aussi recevoir
 à l'Observatoire de Bruxelles. Et d'une manière remarquable ce travail pourrait
 aussi offrir aux Observatoires situés dans le voisinage de l'axe de parallèle, un moyen
 de déterminer leur longitude avec grande précision sans beaucoup d'embaras,
 (si ceci peut se faire sans grandes modifications d'observations aux Stations de la ligne),
 Sur quoi on appellera l'attention dans l'Astronomisch Nachrichten.

(12)

à tous les Stations principales, dans excepter les observations fixes, en un
 temps que les observations par la longitude, la hauteur du pôle sera exactement
 déterminée et cela par un seul et le même observateur au l'emploi
 du même instrument, un cercle Vertical de Repsold. Et considérée comme
 une observation complète par la hauteur du pôle, quand, (après qu'un état
 a été observé au Sud) elle a été observé au Nord du Zénith à peu près
 à la même distance Zénithale, chacun d'eux observés dans les 2 positions du Cercle.
 Les observations complètes de ce genre peuvent être regardées comme suffisantes
 pour déterminer la hauteur du pôle. Les Ciris, à observer dans ce but, seront
 choisies d'avance par le directeur d'Observation de Bonn et de Sulkow et les déli-
 -mations seront données à un moment exact en Poignés.

(13)

Des observations sur l'inclinaison de la pesanteur n'appartiennent pas, directement
 au plan de la triangulation. Il est à craindre

Les déterminations astronomiques par l'arc de parallèle ne peuvent pas être exécutés
à tous les États principaux dans le cours d'un été mais de manière à ce qu'ils
pendant lesquels ces travaux pourraient s'étendre à 2 mois (1 an de longitude)
Le commencement de travaux se fera à avril 1864 et comme pendant
observe la ligne Varsovie Dublin et propose, d'en le travail sur des rails vers
l'ouest. D'après cela tous les préparatifs pour ce travail devront être terminés
dans l'année courante 1863.

(15)
aux États de comparaison Moscou Dublin Greenwich les observations seront faites
dans les observations mêmes et quand il y a possibilité, ceci doit être fait aussi
dans les observations choisies comme États de la ligne. Dans les autres États
de la ligne on doit s'occuper pour les observations temporaires. Il suffit pour tous ces
États que dans le cours de cette année les piliers nécessaires à porter les
instruments soient bâtis. En même temps que les instruments les deux envois
d'un État à l'autre ne peut être facile à transporter qui est
destiné à les préserver.

L'observation de Bulhova de charge de la fourniture de cette petite maison
qui est en possession de un depuis de celle-ci ainsi que
de l'œuvre précitée, sur les dessins et la disposition des piliers deux envois au profit
qui est possible aux autres participants.

(16)
Les déterminations de terre sur les continents à
à Moscou par M. le Directeur Prof. Schwirer.
à Dublin par M. le docteur Gortler.
à Greenwich pour un ~~observatoire~~ observatoire consacré à l'usage par l'Astr. royal.

de ceux-ci recevra aussi en ce point les signaux. Pour les observations sur les
États de la ligne sans envoi de l'usage deux observations exécutées choisies
pour les officiers de l'état-major l'un pour les déterminations de longitude, l'autre
pour les hauteurs du pôle et opérations secondaires. Pour la suite d'observations
indépendantes pour déterminer la différence de longitude l'observation sera
terminée par la boussole.

(17)
Le lieutenant général Saenger de charge d'obtenir la construction et l'appareil
de certains belges, par autant qu'ils sont nécessaires à l'exécution du plan précédent
sur la grande Bretagne. Il devra en charge par les autres participants d'agir
pour l'exécution du projet et à son prochain voyage de connaître l'opinion de l'
Astronomie Royal sur ce point. Si et dans quelle mesure l'exécution de plan
peut compter sur le concours de autorités anglaises et en particulier de
profiter de son expérience confirmée par les détails d'exécution notamment
en ce qui concerne la transmission de signaux galvaniques.

Les modifications et additions au projet général sur lequel M. le vicomte de Saenger
s'occupera de recevoir les contributions au profit des autres participants.

(18)

Le travail de l'arc géodésique mesuré par les géodètes autrichiens entre Valcutia
et les triangles helvétiques est terminé. Le travail respectable du Kanton
géodésique depuis l'établissement de la triangulation accomplie jusqu'à la base
mesurée dans le voisinage de Vaxford est effectué par le général Payer
de cette base allant vers l'Est jusqu'à Osk. Sur le travail des
officiers d'état-major Bredt sur la direction scientifique du Directeur de
l'Observatoire de Sulkowa.

amitié que ce travail sera complété ce sera le besoin
de l'Observatoire de Sulkowa de décider de la comparaison de ces résultats
aux observations astronomiques, des résultats scientifiques sur la figure
de la Terre et de les publier dans une forme convenable.

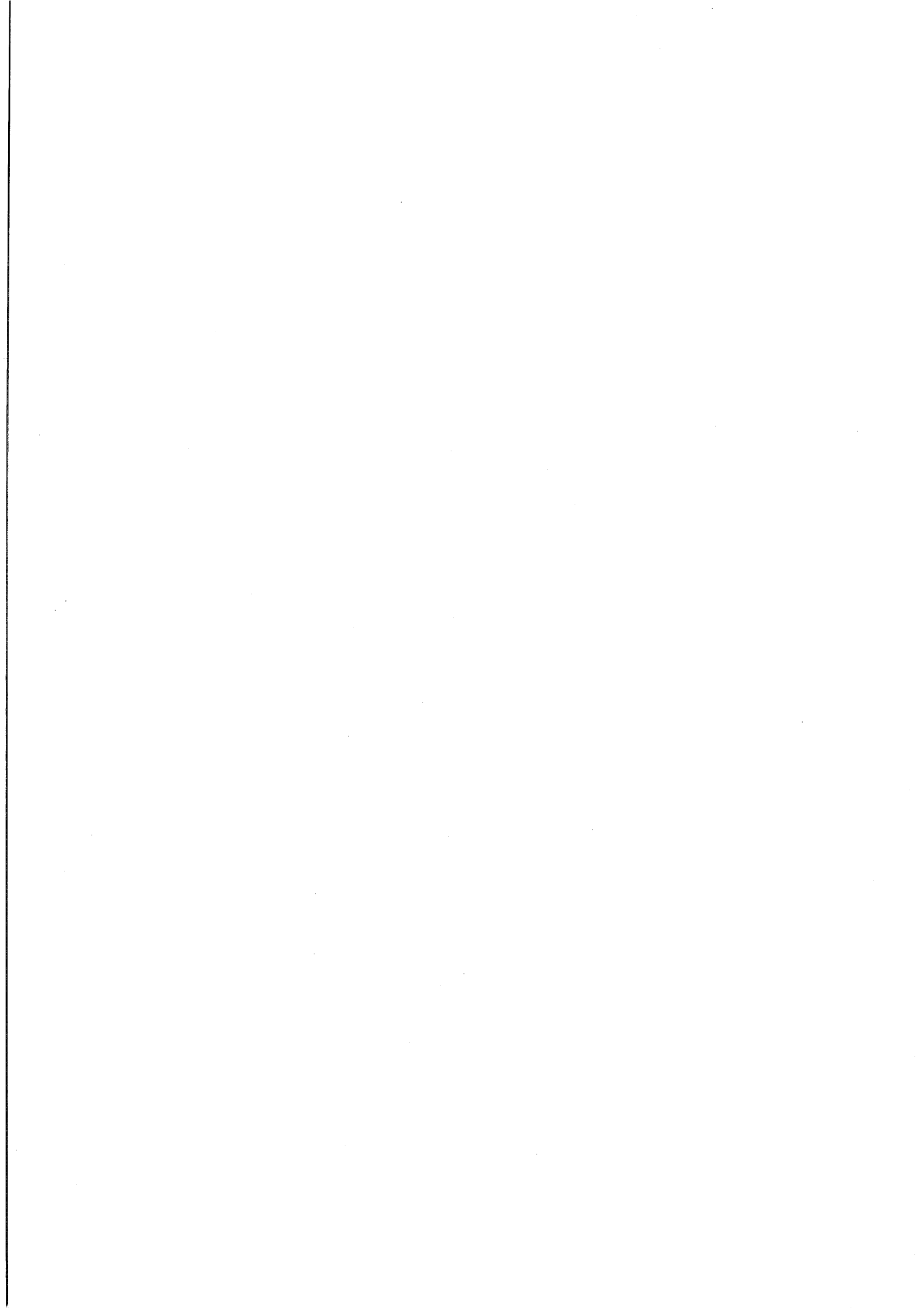
Putin
avril 1869.

Payer
acplaudes
Steiner.

ANNEXE 41

RAPPORTS ANNUELS SUR LES TRAVAUX DE LA COMMISSION CENTRALE DE L'EUROPÄISCHE GRADMESSUNG

A l'Observatoire de Paris (Fonds DANJON carton 3 Ms 1060 II B 2) est conservé un résumé de ces rapports pour les années 1863 à 1869. Les passages relatifs à la France sont traduits; nous les retranscrivons ici. On remarque que la "collaboration grandiose annoncée" n'a pas été facile à mettre en place.



Résumé des rapports annuels sur les travaux de la Commission centrale de l'Europäische Gradmessung pour les années 1863 à 1869. Extraits relatifs à la France.

Manuscrit portant la mention "traduit littéralement de l'allemand" (Archives de l'Observatoire de Paris, Fonds DANJON carton 3 Ms 1060 II B 2).

"Rapport pour 1863

Le gouvernement impérial ne méconnaissant pas l'intérêt scientifique de la mesure des degrés dans l'Europe centrale, se dispose à une coopération grandiose, qui doit s'étendre à toute la France. La conduite des opérations est entre les mains de Mr Le Verrier. Comme la triangulation française est presque achevée, Mr Le Verrier a porté son attention sur une détermination télégraphique soignée des longitudes sur les divers parallèles et principalement dans les stations principales de Marennes, Clermont-Ferrand et du Mont-Cenis, ce qui donnerait la mesure du degré le long du parallèle moyen. Au Mont-Cenis, on pourrait rattacher télégraphiquement Milan, Padoue et Fiume. On aurait ainsi vérifié le parallèle moyen entre Marennes et Fiume et aussi rattaché les mesures de l'Europe centrale à la grande mesure de Formentera à Dunkerque pour la détermination de la courbure de la surface de la terre en Europe.

Rapport pour 1864

On attend encore une communication de Mr Le Verrier sur la grande coopération française.

Rapport pour 1865

La détermination des longitudes entre Paris et Leipzig et entre Paris et Vienne, qu'on avait en vue, n'a pas encore été faite. Depuis 1864, on n'a aucune communication sur la coopération française. Le bureau central ignore d'où peuvent venir les empêchements; il aspire à les voir disparaître et n'en continuera pas moins ses communications, espérant en réussir en échange.

Rapport pour 1866

On a reçu une brochure de Mr Villarceau (Notice sur les travaux scientifiques 1866) et on a pu se rendre compte ainsi de ce que l'Observatoire de Paris a fait pour la mesure des degrés dans l'Europe centrale. On cite la détermination de longitudes....

Rapport pour 1867

Il correspond à l'envoi de 4 brochures écrites en français.

Rapport pour 1868

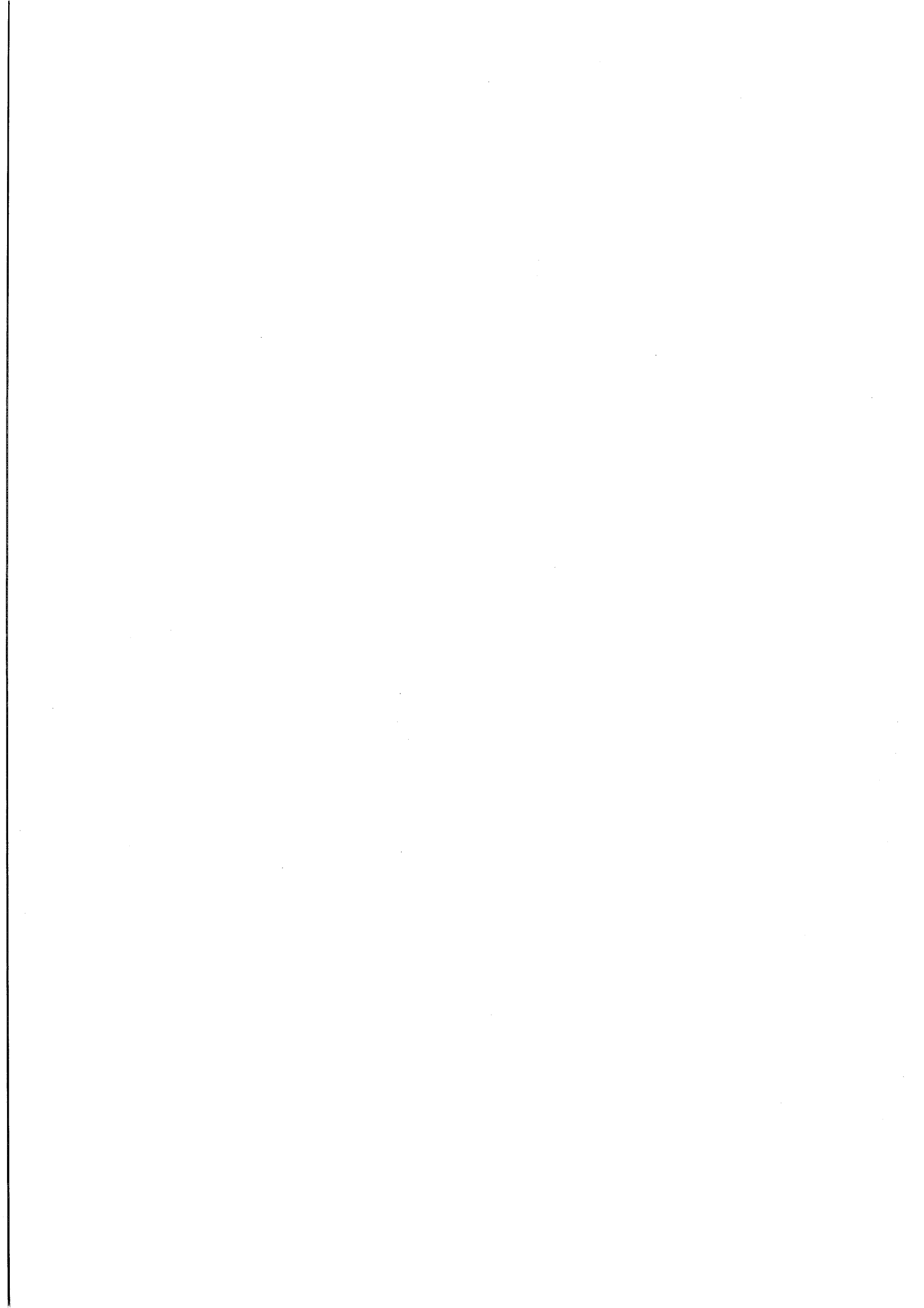
Mr Villarceau a envoyé à la bibliothèque du Bureau central des extraits des Annales de l'Observatoire de Paris sur les déterminations astronomiques qu'il a effectuées entre 1862 et 1866.

Rapport pour 1869

France: pas de rapport."

ANNEXE 42
"GÉODÉSIE"
DANS LES CRAS
ANNÉE 1863

En 1863, Faye fait un rapport verbal à l'Académie sur le protocole de la Conférence géodésique tenue à Berlin en avril 1862. Plusieurs débats relatifs à la géodésie ont lieu cette année là à l'Académie des Sciences de Paris. On remarque notamment les échanges entre Faye et Le Verrier.



(Entrée par matière: GEODESIE)

Nouvel appareil pour la mesure des bases géodésiques; Note de M. Faye, p. 372

M. Le Verrier entretient à cette occasion l'Académie des mesures que prend l'Administration pour qu'il soit procédé prochainement à la mesure de plusieurs bases, p. 380

Sur la possibilité d'une mesure de degré au Spitzberg; Note de M. Grad, p. 634

Sur les instruments géodésiques et sur la densité moyenne de la Terre; Note de M. Faye, p. 557

M. Boussingault remarque à l'occasion d'un passage de cette communication, que depuis longtemps M. Elie de Beaumont a montré l'heureux emploi que l'on peut faire d'un appareil analogue à l'un de ceux que propose M. Faye, p. 566

M. Elie de Beaumont donne quelques détails à ce sujet et présente des considérations à l'appui de l'idée exprimée par M. Faye concernant l'intérêt d'expériences sur les déviations du fil à plomb dans le voisinage du Puy-de-Dôme et en général dans la chaîne des monts Dôme, p. 566

M. Regnault rappelle qu'il a depuis longtemps décrit dans ses cours un appareil destiné à répéter l'expérience de Cavendish pour la détermination de la densité de la Terre, appareil dont il n'a pu par conséquent emprunter le principe à la présente communication de M. Faye. Il tient à le constater dès aujourd'hui, p. 567

Note de M. D'Abbadie accompagnant la présentation des trois volumes manuscrits renfermant les calculs exécutés pour sa "Géodésie d'une partie de la Haute Ethiopie", p. 865

Rapport verbal sur le protocole de la Conférence géodésique tenue à Berlin en avril 1862; Rapporteur M. Faye, p. 28

Remarque de M. Le Verrier à l'occasion de ce rapport, p. 34

Réponse de M. Faye, p. 66

M. Le Verrier annonce qu'il attendra l'impression des critiques de M. Faye pour y répondre s'il y a lieu, p. 72

Réfutation de quelques critiques et allégation portées contre les travaux de l'Observatoire impérial de Paris; Note de M. Le Verrier, p. 105

Première réponse de M. Faye, p. 116

Réplique de M. Le Verrier, p. 118

Sur la géodésie française et sur le rôle qu'y ont l'Académie des Sciences et le Bureau des Longitudes; Mémoire de M. Delaunay, p. 149

Réponse à une inculpation de M. Le Verrier relativement à la part qu'a prise M. Faye à la détermination de la longitude entre Londres et Paris; Note de M. Faye, p. 154

Réponse de M. Faye à la partie scientifique des deux derniers articles de M. Le Verrier, p. 158

Remarque de M. Le Verrier à l'occasion des communications de M. Delaunay et de M. Faye, p. 163

De l'influence des erreurs systématiques dans quelques recherches d'astronomie; Note de M. Le Verrier, p. 164

Réponse de M. Faye à M. Le Verrier, p. 170

Réplique de M. Le Verrier à M. Faye, p. 170

Remarques de M. Faye à l'occasion du compte rendu où se trouve reproduite cette réplique de M. Le Verrier, p. 193

M. Le Verrier déclare se refuser à pousser plus loin cette discussion, p. 194

Note de M. Le Verrier annonçant le dépôt de documents réclamés par M. Faye, p. 248

M. Faye déclare que les pièces produites ne forment qu'une petite partie de celles qu'il a demandées et dont il demande encore le dépôt, p. 249

Lettre de M. Bruhns à M. Le Verrier concernant une nouvelle détermination de longitude de Leipsick, p. 184

Sur le télémètre et le nautomètre à prismes. Etude analytique sur les appareils propres à déterminer la distance au but. Mémoire de M. Goulier, p. 343 et p. 345

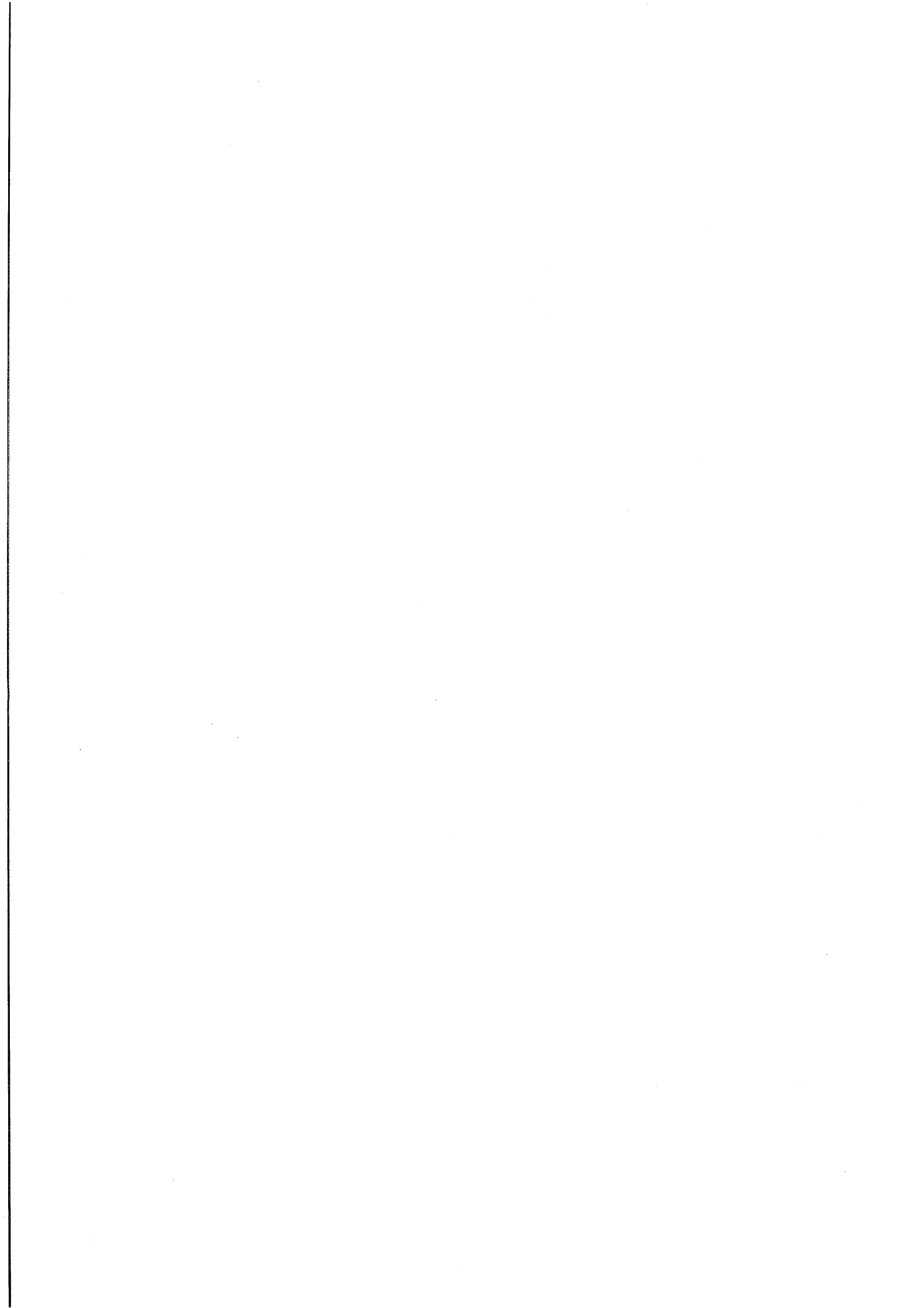
CRAS Tome 57, année 1863

(Entrée par matière: GEODESIE)

M. Le Verrier, en présentant en son nom et au nom de M. le Directeur du Dépôt de la Guerre un mémoire contenant la discussion des opérations astronomiques pour la détermination de la longitude de Berry-Bouy, près de Bourges, fait connaître les noms des savants qui ont pris part à ces opérations, p. 181

Communication de M. Le Verrier concernant la mission qu'il avait reçue de l'Académie pour la conservation de la pyramide de Villejuif, p. 757

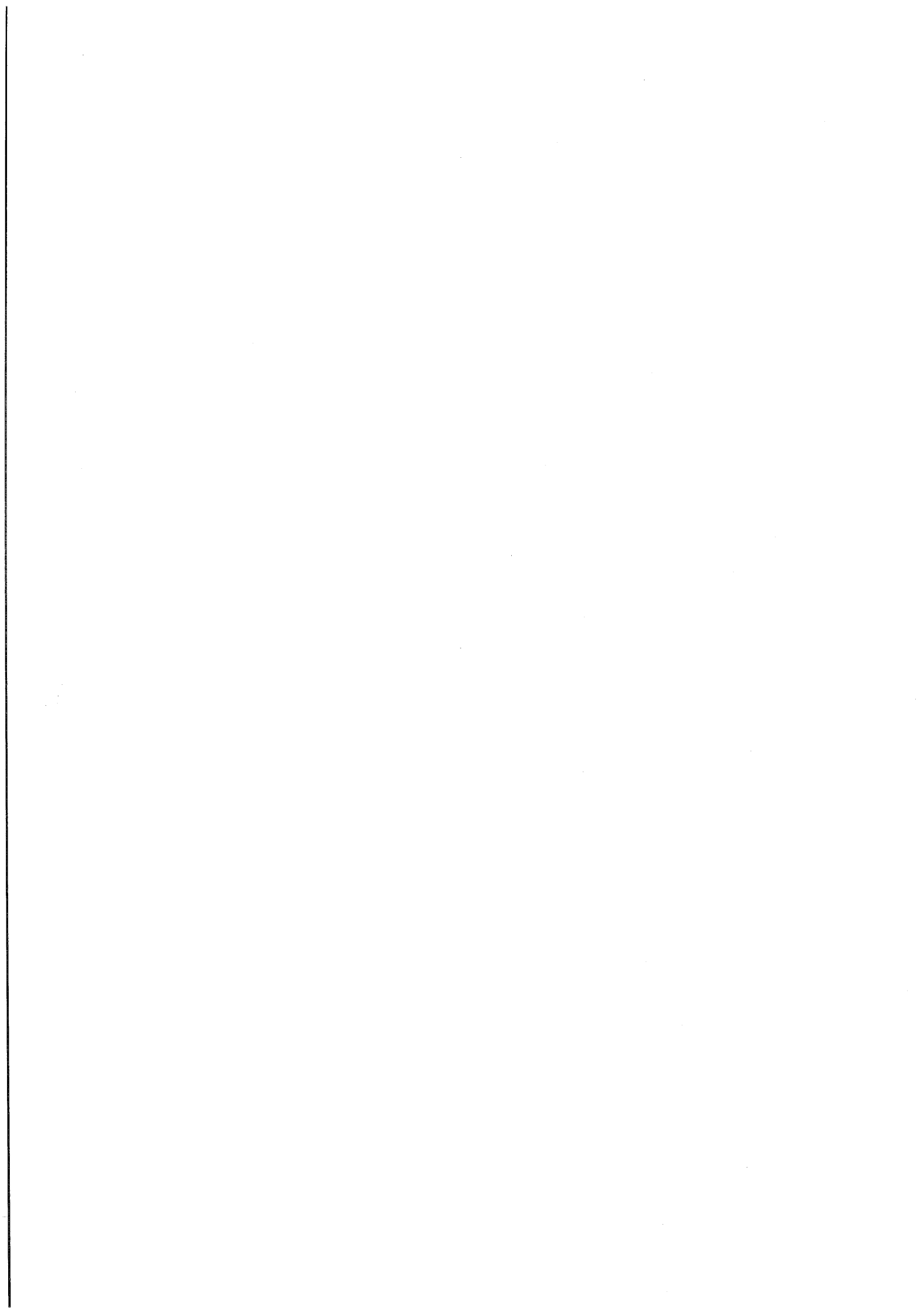
M. Le Verrier communique une lettre adressée à M. le Maréchal Vaillant par M. Blondel, Directeur du Dépôt de la Guerre, touchant la conservation des signaux encore existants de la carte de France, p. 834



ANNEXE 43

LETTRE DE LE VERRIER
À
MR MICHEL CHEVALIER

Cette lettre est fort instructive. Elle rend compte d'un débat, encore actuel dans la France de 1869, concernant le lien entre la géodésie et le mètre. Nous apprenons que Le Verrier s'est rangé du côté de ceux qui acceptent de réviser la méridienne sans pour autant toucher au mètre.



Copie de la lettre
envoyée à Mr Michel
Chevalier

Le 12 octobre 1869

Mon cher collègue,

Mr Foucault m'a dit, hier mercredi, que vous désiriez quelques renseignements sur une question de Géodésie agitée dernièrement à l'Académie des Sciences. C'est un sujet extrêmement étendu, et comme Mr Foucault n'a rien spécifié je ne puis que me mettre entièrement à votre disposition.

L'avis que j'ai développé et que je suis prêt à soutenir est le suivant:

"La triangulation française de la méridienne a le plus grand besoin d'être révisée dans le midi; il s'agit exclusivement de la question de la figure de la Terre.

Quant au mètre, il a été fixé par la loi à 443 lignes 296 et il n'y a plus à y toucher".

Ce simple énoncé suffit pour vous montrer combien mon opinion a été transformée par ceux qui ont rendu compte de la discussion.

Il s'élève en effet des personnes qui viennent dire que le mètre ayant été rattaché à la géodésie, si vous perfectionnez ce qui concerne la figure de la Terre, il faudra aussi changer le mètre.

C'est une opinion déplacée anti-scientifique et que je combats. Les illustres géomètres qui ont rattaché le mètre à la figure de la Terre ont bien expliqué qu'il était fixé une fois pour toutes, nonobstant les progrès ultérieurs de la géodésie qu'ils n'ont pas voulu enrayé et auxquels ils ont travaillé eux-mêmes.

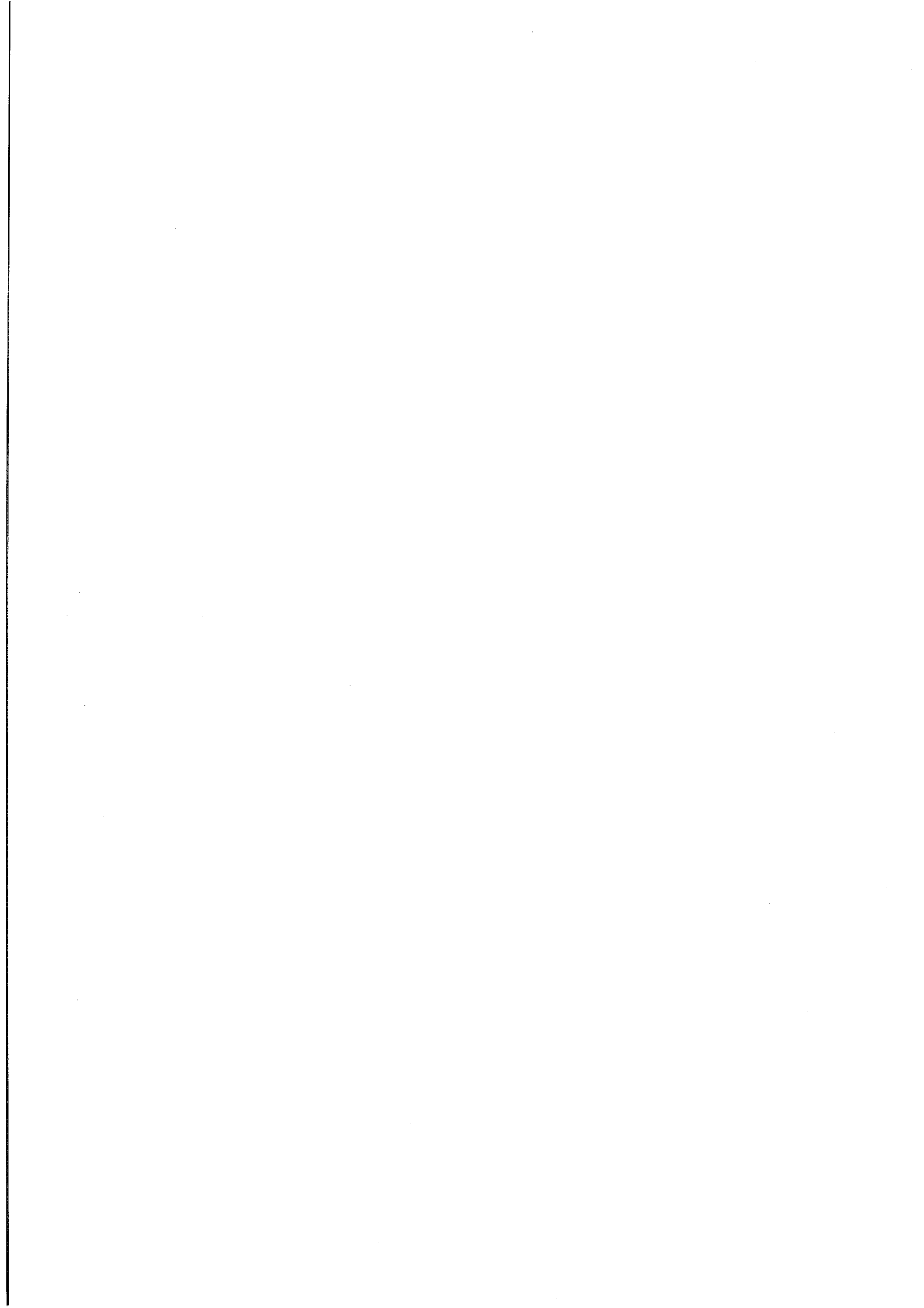
Delambre ipse a établi que le quart du méridien passant par Paris a 10000720m.

Ainsi donc, mon cher collègue, maintenir carrément la fixation du mètre légal, y rapporter tous les travaux ultérieurs, et procéder aux perfectionnements que réclament impérieusement certains points de la géodésie française tel est le terrain sur lequel je me place.

S'il est le vôtre, nous pouvons faire une campagne fort utile à ce double point de vue: surtout défiez vous des endormeurs qui sous prétexte de conserver, perdent tout.

Veillez, agréer....

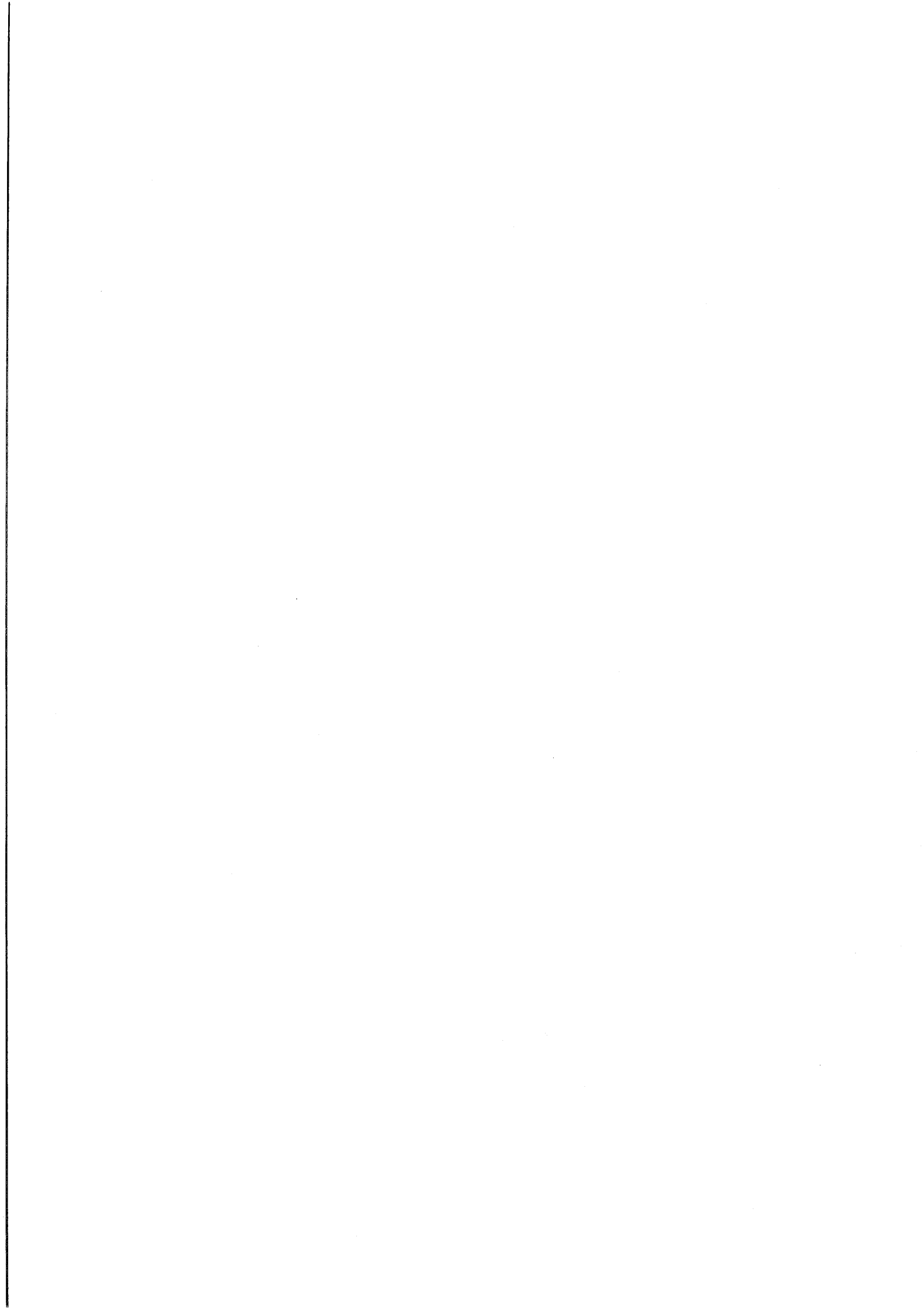
Signé Le Verrier



ANNEXE 44
DOSSIER 76
IN
*CORRESPONDANCE DE
A. QUETELET*

Dossier 76 des Archives de l'Académie Royale de Belgique

Ce dossier contient des notes relatives à la géodésie. Nous retranscrivons ici quelques extraits significatifs du document 2, lettre manuscrite de quatre pages, non signée, non datée, très raturée; l'écriture laisse penser que cette note est de A. Quetelet. Elle témoigne d'une période de relations intenses entre les observatoires en vue de préciser les calculs de longitude par la télégraphie.



Note relative à la géodésie.

"[...] Du reste, j'admettrais volontiers la plus grande exactitude dans les observations et les calculs d'une même triangulation : mais comment expliquer ensuite l'erreur à laquelle on s'expose en liant ensemble, dans 2 triangulations différentes, les 2 points par exemple qui doivent être le mieux connus du monde entier c'est-à-dire les observatoires de Greenwich et de Paris ! Or, il se trouve que des mesures successives entre les établissements ont donné près d'une seconde différence en temps [...]. Cependant les observateurs et les instruments offraient toutes les garanties que l'on peut espérer des meilleurs établissements astronomiques.

[...] La latitude aujourd'hui pouvant se déterminer dans les principaux observatoires avec une précision très grande, et je ne crois pas aller trop loin en élevant seulement à un sixième de seconde une erreur qu'on peut avoir à craindre. Les latitudes d'ailleurs forment un élément essentiel de toutes les triangulations.

Les longitudes peuvent s'exprimer également avec beaucoup d'exactitude au moyen de la télégraphie électrique. Il faudrait opérer ici avec une exactitude particulière que l'on a pas encore employé jusqu'à présent; ce serait de déterminer les longitudes respectives des 3 sommets d'un même triangle.

J'avais eu l'occasion de correspondre à ce sujet avec le célèbre directeur de l'Observatoire de Greenwich, lorsqu'il fut question de lier ensemble les observatoires télégraphiques à faire à la fois entre Paris, Greenwich et Bruxelles.

Malheureusement, cette opération capitale n'a point été faite jusqu'à présent. On peut concevoir cependant l'utilité immense que peut en retirer la science.

Par exemple, une série de signaux partiraient de Paris et iraient à Londres en passant par B. Un quart d'heure après, les signaux partiraient de B et iraient à P en passant par L, puis une troisième série irait de L à B en passant par Paris.

Cette première série d'observations qui aurait duré 3/4 d'heure par exemple, recommencerait ensuite en suivant un ordre inverse.

P-L-B

L-B-P

B-P-L

Cette série d'observations répétées pendant plusieurs jours pour obtenir une valeur aussi exacte que possible, déterminerait avec vérification les longitudes relatives des différents points.

L'opération se ferait ensuite dans le même ordre entre L, B et Leyde ou bien en conservant la même base on prendrait pour sommet Bonn, Hambourg ou Altona. La

distance bien déterminée préalablement entre L et B, donnerait des moyens précieux pour apprécier la régularité de l'observation.

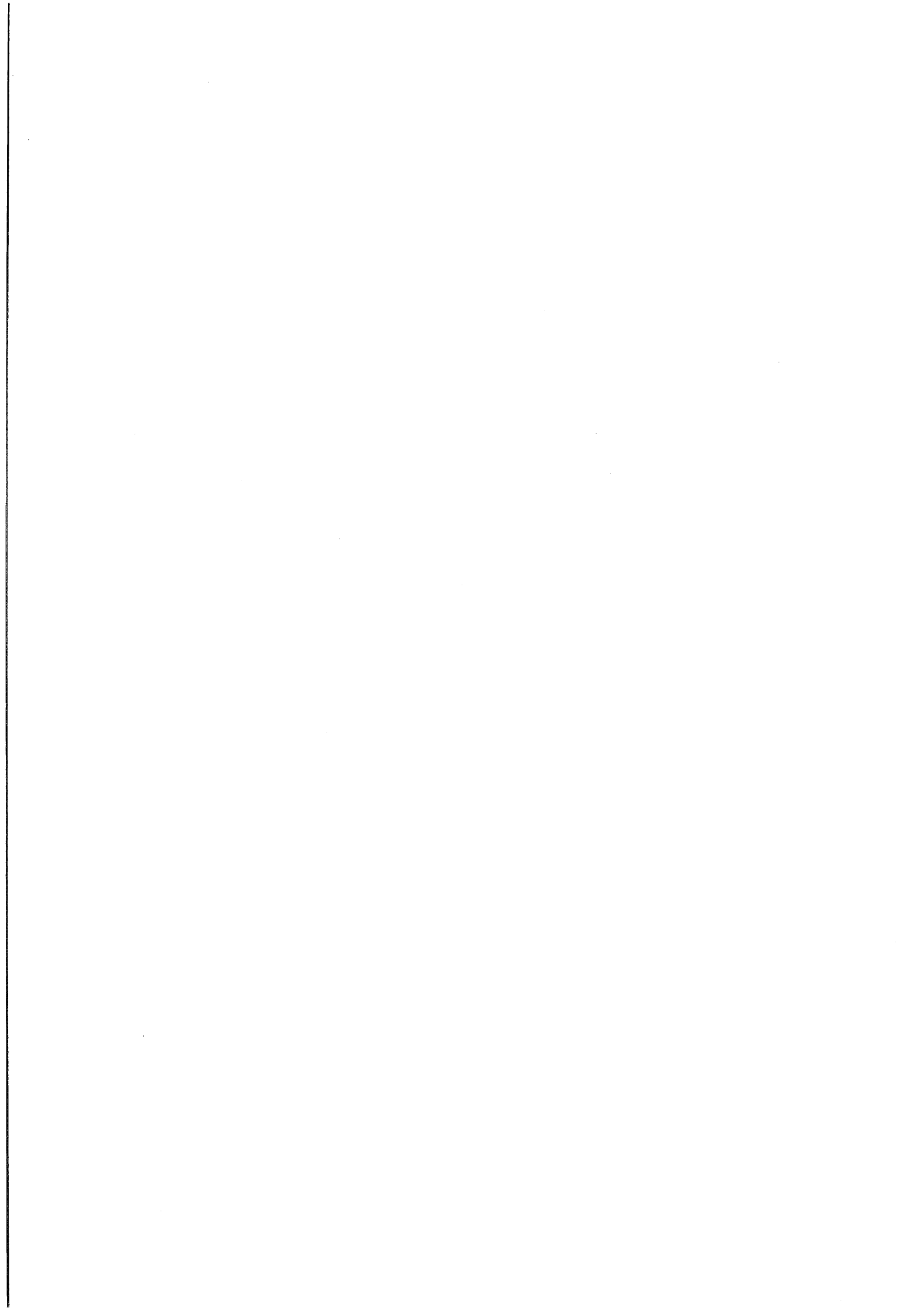
Rien n'empêcherait ensuite de varier le mode d'observation; de déterminer par exemple directement la distance de B à Pulkova comme a bien voulu le proposer M. Struve, ou de sous diviser cette distance; on ferait parvenir le signal par d'autres observatoires. Ainsi, le signal partant de B à Königsberg, ou de K à B, pourrait passer par Berlin. [...]"

ANNEXE 45

CORRESPONDANCE AVEC
NERENBURGER (1852-1869)

ARB 8835 Fonds Liagre.

Ces quelques lettres témoignent de l'amitié et de l'estime qui existent entre ces deux hommes. Avant de mourir, Nerenburger demande à Liagre d'accepter le commandement de l'Ecole militaire de Bruxelles.



@ Lettre n°1 (sans en tête), 27-11-1852

Mon cher Capitaine,

J'accepte avec reconnaissance, l'exemplaire de votre ouvrage, sur le calcul des probabilités, que vous m'offrez si généreusement, et je vous remercie beaucoup de cette attention à laquelle je n'avais d'autre droit que ma haute estime et ma bonne amitié pour vous.

Vous êtes vraiment trop aimable de redouter l'oeil du maître. Sachez donc, mon cher capitaine, et ne l'oubliez pas, que le maître et l'élève d'autrefois se sont substitués l'un à l'autre aujourd'hui et que cette substitution, dont je m'enorgueillis, est toute à mon avantage.

Agréez, je vous prie, avec mes vifs remerciements, la nouvelle expression de mes sentiments les plus affectueux.

Nerenburger

@ Lettre n°2 (sans en tête), Bruxelles, le 10-11-1854,

Mon cher Capitaine,

Je savais depuis longtemps que vous êtes un aigle, mais je ne connaissais pas bien la couleur de votre plumage.

Une dépêche que je reçois à l'instant de Berlin, m'apprend que vos plumes sont rouges.

Gardez pour vous, jusqu'à nouvel ordre, cette nouvelle qui me fait beaucoup de plaisir, recevez mon compliment, et croyez moi pour toujours.

Votre bien dévoué

Nerenburger

@ Lettre n°3, Bruxelles, le 9-10-1858

Mon cher Capitaine,

Je vous demande bien pardon d'avoir conservé aussi longtemps, votre intéressant travail sur les questions des sous-officiers et soldats.

Ma lenteur à vous le rendre vous fait supposer peut-être, que j'y trouve matière à critiquer, alors que j'y rencontre une nouvelle occasion.

1°) d'admirer l'habileté avec laquelle vous savez, dans une question ingrate, tirer parti de données à peine suffisantes et en faire jaillir des conséquences certaines.

2°) de reconnaître la justesse de vos déductions.

Je vous en dirais beaucoup plus long si je me laisse aller à vider mon sac en ce qui vous concerne :

La crainte seule de vous blesser me retient.

Je me borne donc à vous transmettre mon approbation en deux tours, et je profite de la circonstance pour vous assurer une fois de plus, d'une vieille et franche amitié.

Nerenburger

@ Lettre n°4 (sans en tête), Bruxelles, le 26-11 (ou 9)-1863

Mon cher Liagre,

Je viens de lire votre judicieuse critique de l'organisation de l'enseignement de notre école. Elle renferme de si excellentes idées qu'il faudrait être mon prédécesseur pour n'en point apprécier les mérites. Je compte bien que nous en ferons notre profit en temps opportun.

En attendant, merci pour cette nouvelle émanation de votre projet lumineux.

Tout à vous

Nerenburger

@Lettre n°5 (sans en tête), Bruxelles, le 4-01-1864

Mon cher Liagre,

Depuis que je fonctionne, mon temps est absorbé de telle sorte qu'il m'est à peine possible d'écrire quelques lignes, et surtout je veux marcher dans la voie du progrès.

Le moment me paraît opportun pour prolonger votre nomination comme directeur des études, et je viens solliciter de votre obligeance, de me venir en aide en vous chargeant de mettre en oeuvre dans une lettre, et de la manière qui vous est habituelle, la matière ébauchée dans les quelques pages ci-jointes. Il vous sera facile de donner une tournure à mon idée et plus facile encore d'y joindre les vôtres.

Je me permets donc de compter sur vous pour obtenir bientôt une lettre solidement pensée et tournée de manière à capter un ministre tout comme les oiseleurs prennent à la glu un moineau.

Tout à vous

Nerenburger

@ Lettre n°6 (École militaire), Bruxelles, le 14-10-1864

Mon cher Liagre,

Un message officieux m'annonce à l'instant votre nomination comme directeur des études.

Je ne puis vous dire le plaisir que j'en éprouve.

Je vois dans cette circonstance un avenir brillant pour les études.

Si je l'obtiens... je vous embrasserais, je me borne à vous serrer la main du meilleur de mon coeur.

Nerenburger

@ Lettre n°8 (École militaire, Direction des études)

Récit de la mort du Général Nerenburger fait à la demande de son ami Lavisé.

Le vendredi 19 mars entre 11h 45 et 11h 50, je me rendais suivant mon habitude au bureau du général Nerenburger.

Ne le voyant pas assis à la place ordinaire, place que j'apercevais de l'antichambre, j'allais me retirer sans entrer, lorsque je crois entendre au fond de la salle et vers la droite une respiration assez bruyante. J'avançais de quelques pas et je vis le général dans une position qui me fit croire d'abord qu'il dormait.

Il était assis à terre, les jambes étendues sur le tapis; le dos contre le canapé; le coude droit appuyé sur le siège du canapé et la tête reposant sur la main droite. Il regardait par conséquent vers le fond de la salle.

Étonné de cette situation, je restais quelques secondes immobile et indécis; et le général qui m'avait entendu, me dit d'une voix ferme et calme, mais triste, et sans tourner la tête ces mots :

"Est-ce vous Liagre ? Approchez, mon ami; je viens de me brûler la cervelle".

Je me précipitais vers lui, ne pouvant croire à ses paroles; quelques gouttes de sang tachaient le devant de sa chemise et la manche droite de son paletot. "Mon général êtes-vous blessé, qu'avez-vous ?" lui dis-je.

"Je me suis brûlé la cervelle" dit-il de nouveau. "N'avez-vous pas entendu le coup? Le pistolet est là par terre. Ramassez-le mais prenez garde, il est encore chargé (c'était un pistolet à six coups). Je me suis manqué au 1^{er} coup et je m'en suis tiré un second. Je ne comprends pas comment je vis encore, comment je conserve ma pleine connaissance avec une balle dans la tête. Voyez, mon cher Liagre." Il souleva un peu la tête et retira la main qui cachait sa tempe droite. Cette main était pleine de sang, le sang coulait sur le col de son habit; quelques gouttes étaient répandues sur le tapis.

Général, lui dis-je, il est impossible que la balle ait pénétré dans le cerveau : vous ne parleriez pas avec tant de raison. Les blessures à la tête ne sont pas dangereuses lorsqu'on ne meurt pas sur le coup. La balle aura glissé sur l'os. Du courage et du calme et tâchons que ce malheur ne s'ébruite pas. Pourquoi donc vous êtes vous porté à cette extrémité ? Vous savez, répondit-il, cette maison, ces tracasseries... cela était devenu intolérable.

Je mis mon mouchoir sur sa blessure, et lui appuyais de nouveau la tête sur la main. Je cours chercher un médecin, lui dis-je... Allez d'abord chercher l'aumônier, car je veux avant de mourir, me mettre en règle avec Dieu. Tâchez surtout que ma femme n'apprenne pas cela brusquement. Midi et demi sont bientôt sonnés.; C'est l'heure du déjeuner. Ne me voyant pas arriver, elle pourrait venir me chercher ici, et me trouver dans cet état. Prévenez la doucement.

Je courus donner l'ordre aux plantons d'aller chercher des médecins dans le voisinage, et de faire venir l'aumônier, j'approchais le Lieutenant Baudour, qui se trouvait dans la salle d'examens pour qu'il vînt m'aider à soulever le général, et à le placer sur le canapé.

Pendant une minute au plus, que dura mon absence, les yeux du général s'étaient un peu obscurcis; sa respiration était devenu plus forte; de grosses gouttes de sueur perlaient sur le front; mais l'intelligence était restée entière. Lorsque le Lieutenant Baudour entra avec moi, il me demanda sans tourner la tête quelle était la personne que j'amenais : je le lui dis et il tendit la main au lieutenant.

Nous plaçâmes le général sur le canapé, et trempant mon mouchoir dans l'aiguière qui se trouvait sur la cheminée, j'étanchais le sang, fort peu abondant du reste qui sortait de sa blessure. Il me prodiguait les paroles les plus affectueuses avec un abandon que je ne lui avais jamais vu; il me serrait les mains et me demandait pardon des peines qu'il me donnait.

"Je sais bien, disait-il, que je suis coupable, mais il y a des moments où la vie est à charge. J'ai mis là sur mon bureau, une lettre pour vous, mon cher Liagre, et une autre que vous remettrez à une femme et qui renferme mon testament. Dites adieu à tous mes amis, à Lavisé, à Lerrongue". Sa voix s'affaiblissait.

Voyant que mon mouchoir était mouillé et plein de sang, il essaya de retirer le foulard qui se trouvait dans la poche de derrière de son paletot; je l'aidais, et il me dit alors avec un accent devenu presque inintelligible :

"Mon porte-monnaie est dans le tiroir de mon bureau".

Le docteur Carpentier arrivant, le général me demanda qui c'était : ce fut la dernière parole qu'il prononça. Il faisait depuis quelques instants des efforts pour vomir; ses yeux se fermèrent et toute connaissance l'abandonna.

Peu à peu arrivèrent le docteur Racs, l'aumônier, les docteurs Leto et Lebenu.

On sonda la blessure et on pratiqua une saignée.

L'aumônier était allé prévenir Mme Nerenburger que son mari avait été frappé d'un coup de sang; elle arriva toute effrayée et voulut se jeter vers le général.

Je l'en empêchais, lui disant que sa présence troublerait les médecins occupés d'examiner l'état du malade. Comme elle demandait avec inquiétude qu'elle était l'opération que l'on faisait à la tête de son mari, je lui répondis que, pour combattre plus efficacement la congestion, on lui pratiquait une saignée à la tempe.

On força Mme Nerenburger à se retirer, lui promettant de la rappeler lorsque les premiers soins à donner au malade seraient achevés; on posa un lit de camp près du canapé et on y plaça le Général. Il garda constamment les yeux fermés et parut jusqu'à la fin complètement insensible aux opérations qu'on pratiqua sur lui. Sa respiration était stertoreuse et sa poitrine se soulevait par instants avec (?) coup de pouce.

Plusieurs de ses amis avaient été prévenus et vinrent assister à son agonie.

Vers 7h du soir, le docteur Decharge parvint à extraire la balle : elle s'était logée dans l'os temporal sans le traverser et avait refoulé celui-ci contre le cerveau. On n'osa pas dépasser le blessé à cause des artères qu'il aurait fallu rencontrer dans l'opération : il mourut dans la nuit à 11h20mn.

@Lettre n°9 (École militaire), le 19 mars 1869

A mon ami Liagre,

Je mets fin à une existence devenue intolérable.

Puisse Dieu me pardonner cette résolution.

Je vous laisse le commandement de l'école et désire bien vivement que vous le consentiez.

Ci-joint un pli pour ma femme. Il renferme mon testament.

Ai-je besoin de demander que les honneurs militaires ne soient pas rendus à ma dépouille, que pas un mot ne rappelle une indigne existence ?

Je dépose la clé de la caisse sur ce billet.

Adieu, mon cher Liagre

Votre affectueux

Nerenburger

ANNEXE 46

*MÉMORIAL DU DÉPÔT
DE
LA GUERRE*

Cette revue dont le premier numéro paraît en 1802, est rééditée à partir de 1825. Le contenu est riche en enseignement sur les travaux géodésiques exécutés en France. La liste des travaux, les résultats des observations, les méthodes employées y sont consignés. Nous donnons ici le détail du contenu des neuf premiers tomes de la réédition.



HISTORIQUE

1) Le premier numéro paraît en septembre 1802 sous le titre *Mémorial topographique et militaire*

Pascal-Vallongue, adjoint d'Andreossy et de Sanson de 1801 à 1803, fait fonction de rédacteur et joue un rôle moteur dans cette revue qui périclita après son départ.

Cet organe du Dépôt a deux buts:

*pédagogique intéressant principalement le Corps

*information externe, qui semblait avoir les faveurs du pouvoir.

Sept numéros seulement paraissent jusqu'en 1810

2) La suite, avec une deuxième édition refondue sous le nom de *Mémorial du Dépôt de la Guerre* ne fut donnée qu'à partir de 1825

*n°8 de 1825 publié en 1826

*Le 12-8-1826, la réédition des 7 premiers numéros est autorisée. Ils forment dans une édition refondue et annotée de la revue.

*Le volume I (1829)

*Le volume II (1831)

CONTENU⁸⁹

Contenu du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, imprimé par ordre du ministre (Observatoire cote 1819)

TOME I, 1802-1803, Paris, 1829

@ Numéro premier publié en vendémiaire an XI (septembre 1802)

*Avertissement, pp. 1-3, signé A. BERTHIER

*Notice historique et analytique sur la CONSTRUCTION DES CARTES géographiques, pp. 4-24, signé LACROIX, membre de l'Institut

⁸⁹P. Bret (voir "Le Dépôt de la Guerre" in *Annals of Science*, 48, 1991, p. 113-157) indique que 51,9% des articles correspondent à des aspects scientifiques et techniques "Il est avant tout une institution scientifique méconnue" Il remarque une "Entrée en force de l'analyse dans le Mémorial avec Puissant" Alors que "Contenu précédent: méthode de Dionès du Séjour, Legendre, Delambre".

*Des OPERATIONS GEODESIQUES, pp. 25-78, signé Chevalier BONNE,
Colonel au corps royal des ingénieurs géographes

Contient : Tables pour réduire les angles d'un plan A UN AUTRE PLAN (TABLE
I-VII), pp. 79-101

*DE LA DETERMINATION DES HAUTEURS par DES OBSERVATIONS
BAROMÉTRIQUES, pp. 102-110, signé PUISSANT, Lieutenant-colonel au corps royal
des ingénieurs géographes

@Mémorial topographique et militaire, Numéro deuxième publié en brumaire an XI
(novembre 1802)

*Avertissement, pp. 11-114, signé Le Colonel du génie P. VALLONGUE

*Notice historique sur le dépôt général de la guerre, pp. 115-136, signé Pascal
VALLONGUE, Colonel du génie. Prairial an X (Juin 1802)

*NOTICE sur les principaux historiens anciens et modernes, considérés
militairement, pp. 137-173

Cette notice, revue et corrigée au Dépôt général de la Guerre, est due en grande
partie à M. Lagardiolle, officier employé en ce moment à la Guadeloupe, à l'état-major du
général Richepanse. Prairial an X (Juin 1802)

*Historiens considérés militairement - Catalogue alphabétique des auteurs cités
dans la notice, avec indications des meilleures éditions, pp. 174-180

Berthier. Campagnes de Bonaparte en Egypte et en Syrie, 1 vol. in-8°, Paris, an
VIII (1800)

*Réflexions sur un ouvrage traduit de l'allemand intitulé ESPRIT DU SYSTÈME
DE LA GUERRE MODERNE, pp. 181-189

*DE LA BATAILLE DE LEUTHIEN gagnée par le roi de Prusse, le 5 décembre
1757, contre l'armée impériale aux ordres du prince Charles de Lorraine, pp. 190-211,
signé A. PARIGOT, chef de bataillon (aujourd'hui maréchal-de-camp)

*RAPPORT DU MINISTRE DE LA GUERRE, aux consuls de la république, sur
les travaux du dépôt général de la guerre pendant le cours de l'an A (1802), pp. 212-224

Contient un aperçu des travaux à exécuter en l'an XI (1803), p. 223

14 vendémiaire an XI (6 octobre 1802), signé le ministre de la guerre, Alex
BERTHIER

@Mémorial topographique et militaire. Numéro troisième publié en nivôse an XI
(Janvier 1803)

*Avertissement, pp. 225-234, signé feu le Général P. VALLONGUE

*Des opérations géodésiques de détail, pp. 235-264, signé Le chef-de-bataillon MURIEL, aujourd'hui Colonel d'Etat-Major

*NOTICE SUR LA TOPOGRAPHIE considéré chez les diverses nations de l'Europe, avant et après la carte de France par CASSINI ; suivie d'un catalogue des meilleures cartes, pp. 265-338, Nivôse an XI (décembre 1802), signé SOULAVIE, Capitaine ingénieur géographe, conservateur des cartes manuscrites du Dépôt général de la Guerre

@Mémorial topographique et militaire. Numéro quatrième publié en mars 1803 (germinal an XI)

*Avertissement, pp. 339-340

*Discours préliminaire, par le général Vallongue, pp. 341-368

*Essai sur les reconnaissances militaires, par la Chevalier ALLENT, pp. 369-522

Contient :

Première partie : But et sujets des reconnaissances militaires, pp. 371-396

Seconde partie : Des moyens d'observations propres aux reconnaissances militaires, pp. 367-520

Appendice à l'essai sur les reconnaissances militaires, p.521

Avertissement, p. 522

*I/ Notions de géodésie expéditive ou coup d'oeil sur les méthodes qui peuvent servir à former le canevas d'une carte de reconnaissance, pp. 523-541

*II/ Notions d'hydrographie générale appliquées aux bassins du nord de la France, et spécialement au bassin de l'AA., pp. 542-686

*III/ Notice historique sur le général Vallongue, pp. 687-692

@Tables des matières, pp. 693-696

TOME II, 1803-1805 et 1810, Paris, 1831

@Numéro cinquième (Topographie), pp. 1-140

@Numéro sixième (Reconnaissances militaires), pp. 141-378

@Numéro septième (Géodésie), pp. 379-610

Contient :

*Avertissement, p. 379

*Analyse appliquée aux opérations géodésiques, par M. PUISSANT, membre de l'Académie des Sciences. (Planche 29), pp. 380-429

*Mémoire sur la projection des cartes géographiques, adaptée au Dépôt général de la Guerre, par HENRI, Colonel au corps des ingénieurs géographes. (Planches 30, 31, 32 et 33), pp. 430-587

Contient : Tables relatives à la projection des cartes géographiques, pp. 559-587

*Additions au Mémoire de M. HENRI sur la projection des cartes géographiques par M. PUISSANT, Colonel au corps royal d'état-major, membre de l'Institut. (Planche 34), pp. 588-610

@Table des mémoires, Tome second, nouvelle édition, pp. 611-620

TOME III, année 1825, Paris, 1826

* Rapport fait au ministre de la guerre, le 19 mai 1824, I

*Notices préliminaires, V

- section historique, XIV

-section topographique, XXV

-construction et dessin des cartes, plan, etc, XXXVII

-gravure, XLV

-section des travaux d'instruction des officiers d'état-major, LI

*Notice sur la Carte de France, 1

*Note sur la mesure de l'arc du parallèle moyen compris entre les tours de FIUME et de CORDOUAN, 21

*De la Détermination des longitudes terrestres par le moyen des signaux de feu, 25

*Mémoire sur la détermination de la figure de la terre, par les mesures géodésiques et astronomiques, par M. PUISSANT, 61

*Essais de géographie méthodique et comparative, ou plan d'une nouvelle méthode d'enseigner et d'apprendre la géographie, propre à faciliter l'étude de cette science et à la faire servir de base à la théorie du terrain appliquée aux reconnaissances militaires, 101

*Essai d'une reconnaissance militaire sur le bassin de Danube, rédigé d'après les matériaux existants au Dépôt de la Guerre, 165

*Notice sur la mesure de l'arc de longitude compris entre Munich et Brest, exécutée dans le cours de l'année 1825, faisant suite au mémoire sur le même objet, inséré page 25 de ce recueil, par le Chevalier Bonne, 395

*Revue sommaire des ouvrages militaires publiés en France et à l'étranger en 1824 et 1825, et qui font partie de la bibliothèque du Dépôt de la Guerre, 407

@Table des matières, pp. 469-474

TOME IV, année 1826, Paris, 1828

*Notices préliminaires

*Notice sur la carte de France (Astronomique et géodésique du 1er, 2e, 3e ordre), pp. 1-12

*Notice sur les tables de projection calculées par le Capitaine PLESSIS, ingénieur géographe, et adaptées pour la construction du canevas de la nouvelle carte de France, par M. PUISSANT, pp. 13-30

*Nouvelles tables applicables au calcul d'un nivellement trigonométrique du premier ordre, par M. PUISSANT, pp. 31-39

*Tables pour faciliter le calcul des différences du niveau dans les opérations topographiques, par M. le Chevalier BONNE, pp. 40-61

*Notice sur la latitude et l'azimut observés à Clermont-Ferrand pour faire suite au mémoire sur la mesure d'un arc du parallèle moyen, par M. BROUSSEAUD, pp. 62-69

*Rapport sur la stadia à Monsieur le Comte Guilleminot, par le Chevalier de Lostende, pp. 70-77

*Essais d'une reconnaissance militaire sur le bassin du Danube, par M. le Comte de Castres, pp. 78-267

*Rapprochement entre diverses relations de la bataille de Marengo, pp. 268-344

*Lettre de M. le Lieutenant, général Vicomte Dode, président de la commission de topographie, A. S. Exc. le Ministre de la Guerre, pp. 345-346

*Résumé des discussions et décisions de cette commission qui a été chargée par S. Ex. le ministre de la guerre d'établir de l'uniformité dans le mode de figurer le relief du terrain, pp. 347-391

*Fragment historique attribué à M. de Guibert, pp. 392-398

*Extrait de la correspondance du Comte de Gisors, avec son père le Maréchal de Belle-Isle, pp. 399-412

*Lettres inédites de Louis XIV, pp. 413-436

*Revue sommaire des ouvrages les plus importants publiés en 1826, et qui font partie de la bibliothèque du Dépôt de la Guerre, pp. 437-494

@Table des matières, pp. 495-498

TOME V, années 1827 et 1828, Paris, 1829

*Notice sur les travaux du Dépôt général de la Guerre en 1827-1828.

*Campagne des français en Allemagne, année 1800. Moreau, Général en chef, par le Colonel de Cavalerie, Marquis CARRION-NISAS, pp. 1-434

*Sur la mesure et le calcul des azimuts propres à la détermination des longitudes terrestres, par M. Puissant (Extrait de son mémoire inséré parmi ceux de l'Institut de France), pp. 434-457

*Suite du résumé des discussions et délibérations de la commission qui a été chargée, par S. Ex. le ministre de la guerre, d'établir de l'uniformité dans le mode de figurer le relief du terrain, pp. 458-485

*Revue sommaire, pp. 486-488

@Table des matières, pp. 489-490

TOME VI, contenant la première partie de la nouvelle description géométrique de la France, Paris, 1832

-Nouvelle description géométrique de la France, ou précis des opérations des résultats numériques qui servent de fondement à la nouvelle carte du royaume ; suivi d'une carte générale des triangles du premier ordre, comprenant le tableau d'assemblage des feuilles de gravure, par L. PUISSANT

@Première partie, Paris, 1832

*Objet et plan de cet ouvrage, pp. 1-2

*Première section, contenant l'histoire des opérations fondamentales de la nouvelle carte topographique du royaume, et l'exposé des méthodes d'observation et de calcul qui y sont employées, pp.3-171

*Deuxième section, renfermant le précis des opérations géodésiques et l'énoncé de quelques résultats astronomiques qui servent de fondement à la nouvelle carte de France, pp. 172 et ss.

TOME VII, seconde partie de la nouvelle description géométrique de la France, Paris, 1840

-Nouvelle description géométrique de la France, ou précis des opérations des résultats numériques qui servent de fondement à la nouvelle carte du royaume ; suivi d'une

carte générale des triangles du premier ordre, comprenant le tableau d'assemblage des feuilles de gravure, par L. PUISSANT

@Deuxième partie

*Troisième section faisant connaître les progrès de la triangulation intermédiaire depuis 1832 jusqu'en 1837, pp. 1-378

*Quatrième section, contenant l'exposé des observations astronomiques faites en différents lieux de la France, pp. 379-644

*Appendice, pp. 645-678

TOME VIII contenant les campagnes de 1805, 1806, 1807 et 1809, Paris, 1843

-Histoire des campagnes de l'empereur Napoléon dans la Bavière et l'Autriche en 1805, dans la Prusse et la Pologne en 1806 et 1807, dans la Bavière et l'Autriche en 1809, 272 p.

TOME IX, contenant la troisième et la dernière partie de la nouvelle description géométrique de la France, Paris, décembre 1853

-Nouvelle description géométrique de la France, ou précis des opérations des résultats numériques qui servent de fondement à la nouvelle carte du royaume ; suivi d'une carte générale des triangles du premier ordre, comprenant le tableau d'assemblage des feuilles de gravure, par L. PUISSANT

@Troisième partie, par E. Peytier, Paris, décembre 1853

*Cinquième section, formant le complément de la triangulation intermédiaire comprise dans les 1^{ère} et 2^{ème} parties de cet ouvrage, pp. 1-217

*Sixième section, contenant la suite de l'exposé des observations astronomiques, pp. 218-317

*Supplément à la deuxième section, donnant quelques résultats omis dans la première partie et quelques rectifications, pp. 318-380

*Notes sur les opérations géodésiques par le colonel Peytier, pp. 381 et ss.

TOME X, contenant la description géométrique de l'Algérie, Paris, 1871

-La base géodésique mesurée en 1853, entre Blidah et Coliah est la base initiale des travaux accomplis en Algérie (...).

Afin de contrôler l'exactitude des éléments linéaires et angulaires, le Capitaine Perrier a mesuré, en 1866 et 1867, vers l'est et l'ouest de nos possessions algériennes, deux nouvelles bases de vérification, dites base de Bône et base d'Oran.

*Mémoire sur la mesure des bases par F. Perrier. Capitaine d'Etat-Major, 410 p.

@Première partie : Mesure des bases

@Deuxième partie : Observations géodésiques du premier ordre

@Troisième partie : Observations astronomiques

@Quatrième partie : Opérations secondaires de triangulations

SUPPLEMENT au TOME X, Mémoire sur la triangulation de l'île de Corse par le Commandant Perrier, Paris, 1875

*Géodésie de la Corse, 67 p.

REMARQUE

Dans *Bulletin de la société de géographie* (Gouvieux cote Z 232), Tome XVI, p.216 à 221 n°103-104, Nov-Déc 1831, on trouve le texte suivant de Peytier:

"Analyse du tome II du Mémorial topographique du Dépôt de la Guerre"

Il s'agit d'une réédition en un seul volume des numéros 5, 6, 7 de la 1^{ème} édition avec des additions remarquables. Le 5 est consacré à la topographie, le 6 aux reconnaissances militaires et le 7 à la Géodésie. Ce numéro renferme un mémoire de M. Puissant intitulé *Analyse appliquée aux opérations géodésiques*, et un mémoire de feu M. le colonel Henri sur la projection des cartes adoptée au dépôt de la guerre avec des additions de M. Puissant.(Projection de Flamsteed modifiée adoptée au Dépôt de la Guerre)

Conclusion: ce numéro II sera un des plus utiles.

Citons d'autres articles relatifs à la géodésie:

Dans le tome 5, 4^o série, juin 1853, p.353-354 "Notice sur les opérations géodésiques que les ingénieurs géographes français exécutèrent à Rome en 1809-1810 par M. le colonel Coraboeuf". La suite se trouve dans le Tome 6, 4^o série, juillet 1853, p. 5 à 26 + carte p. 73

Dans le tome 1, 4^o série, 1851 p.41 à 51 "notice historique sur le Coast Survey des États-Unis (reconnaissance des côtes) ; p.146 à 162 article de Daussy sur "reconnaissance des côtes des États-Unis" ;

p.179, "opérations géodésiques et topographiques en Algérie" ;

p.273 "Mesure d'un arc de méridien entreprise par la Russie sous la direction de M. le conseiller d'Etat Struve directeur de l'observatoire de Pulkova, depuis Ismael, près de la mer Noire, sous le 45° degré 20 minutes de latitude environ jusqu'à Tornéa situé par 65° est heureusement terminé en ce qui concerne la coopération de la Norvège.

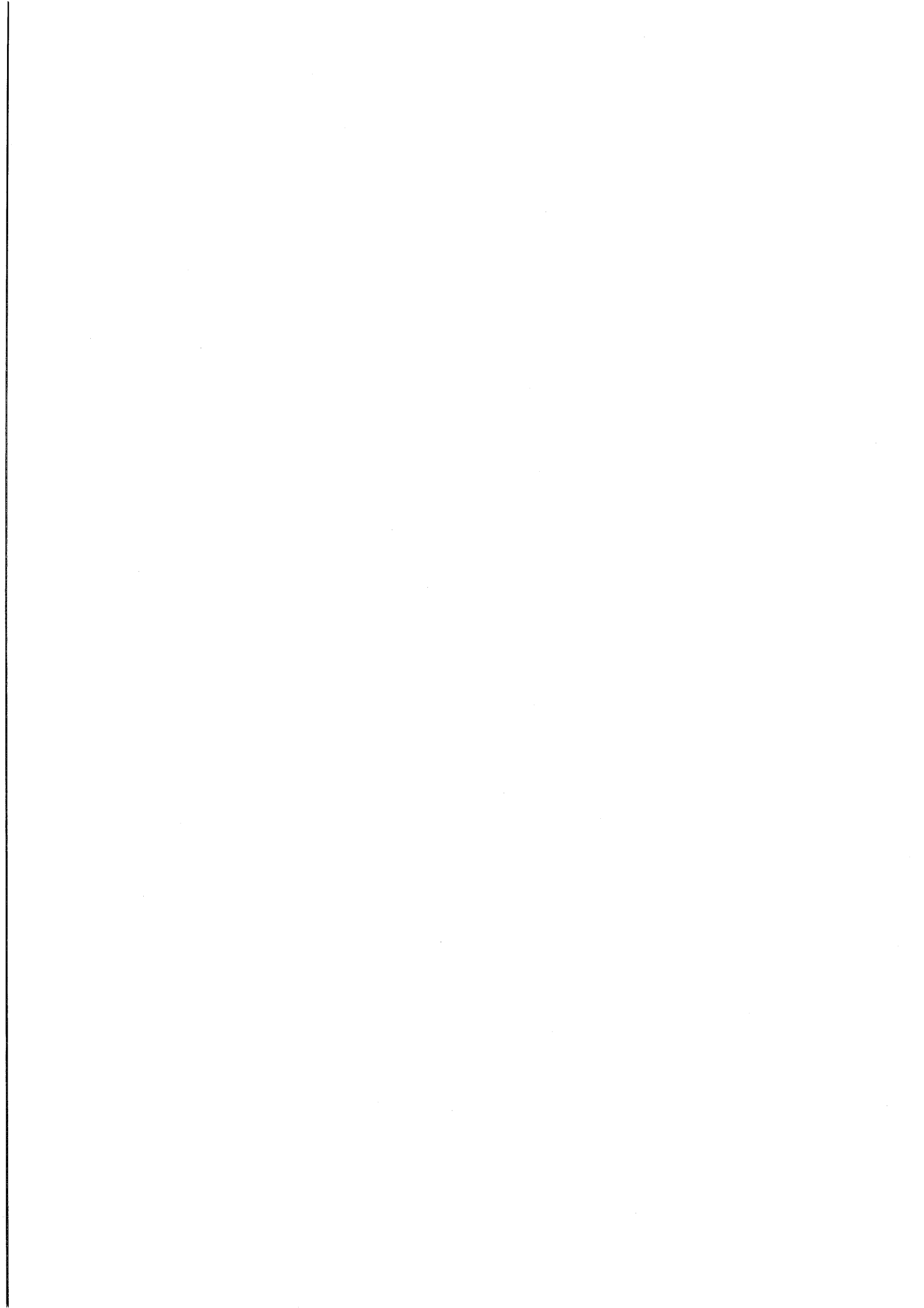
avril 51, p.321 à 326 Nécrologie de Schumacher par M. de la Roquette secrétaire générale de la commission centrale

juin 1851, p.557 à 575 M. de la Roquette présente un panorama des cartes publiées en Allemagne dans les années 1849-1850.

p.627- 634 (voir aussi 3^{ème} série tome XIV novembre 1850)

Coup d'oeil sur la part prise par la Norvège dans la mesure d'un arc de méridien commencée par la Russie par M. Vire traduit du norvégien par M. de la Roquette suite et fin.

Dans le tome V, 4^{ème} série, 1853 : lettre de Coraboeuf à Mr le président de la commission centrale de la société de géographie sur des opérations géodésiques en Italie neuilly le 27 juin 1853 ; objet de la lettre: vérification de la triangulation de Boscovich opérations à Rome de 1809 à 1810. base de Boscovich mesurée en 1751 on veut la retrouver sur la via appia



Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

<http://www.irem-paris7.fr.st/>

- Demander notre catalogue en écrivant à

**IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05**

RESUME

Au cours de la première moitié du XIX^{ème} siècle, l'hégémonie dans le domaine de la géodésie se déplace de la France vers l'Allemagne. La Belgique, indépendante en 1830, doit se doter d'une carte moderne. Cette thèse analyse comment les géodésiens belges enquêtent sur les instruments et les méthodes utilisés pour effectuer une triangulation du premier ordre, en France et en Allemagne, comme le témoigne un rapport inédit de A.Meyer (1801-1857) présenté à l'Académie Royale de Belgique en 1846. La méthode des moindres carrés s'introduit alors, avec Gausset et Bessel, dans les pratiques géodésiques de compensation. En 1852, avec l'édition du livre Calcul des probabilités et théories des erreurs de J. Liagre (1815-1891) les méthodes probabilistes allemandes deviennent plus familières en France. Des traces de la réception de ces nouvelles méthodes (cours à l'Ecole polytechnique, débats à l'Académie des Sciences de Paris, etc...) apparaissent en France dès 1853. Cependant, il faut attendre encore une décennie pour qu'avec Perrier la géodésie française se modernise et prenne une part active à la conception d'un réseau géodésique européen, oeuvre orchestrée par l'Association géodésique internationale créée en 1864 par J.J Baeyer (1794-1885) en vue d'améliorer la connaissance de la forme de la Terre.

MOTS CLES

géodésie au XIX^{ème} siècle,
méthode des moindres carrés,
compensation géodésique,
A.Meyer(1801-1857)J.Liagre(1815-1891),
instruments géodésiques,
triangulation en Belgique

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Juin 1997
ISBN : 2-86612-169-4