Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Marlene Alves-Dias

▶ **To cite this version:**

Marlene Alves-Dias. Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Denis Diderot Paris 7, 1998. Français. NNT : . tel-01252758

HAL Id: tel-01252758

https://theses.hal.science/tel-01252758

Submitted on 8 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS VII
DENIS DIDEROT

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PRÉSENTÉE PAR MARLENE ALVES DIAS

SUJET DE LA THÈSE :

Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire

TOME I

Thèse soutenue le 11 Mai 1998 devant la commission d'examen

JURY :

Michèle ARTIGUE	DIRECTEUR DE RECHERCHE
Tânia M.M. CAMPOS	RAPPORTEUR
Jean Luc DORIER	RAPPORTEUR
Régine DOUADY	EXAMINATEUR
Raymond DUVAL	EXAMINATEUR
Marie Jeanne PERRIN-GLORIAN	EXAMINATEUR
Marc ROGALSKI	EXAMINATEUR

UNIVERSITÉ DE PARIS VII
DENIS DIDEROT

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PRÉSENTÉE PAR MARLENE ALVES DIAS

SUJET DE LA THÈSE :

Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire

TOME I

Thèse soutenue le 11 Mai 1998 devant la commission d'examen

JURY :

Michèle ARTIGUE	DIRECTEUR DE RECHERCHE
Tânia M.M. CAMPOS	RAPPORTEUR
Jean Luc DORIER	RAPPORTEUR
Régine DOUADY	EXAMINATEUR
Raymond DUVAL	EXAMINATEUR
Marie Jeanne PERRIN-GLORIAN	EXAMINATEUR
Marc ROGALSKI	EXAMINATEUR

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Michèle Artigue, directrice de ma recherche, sans qui ce travail n'aurait jamais pu aboutir. Je lui suis particulièrement reconnaissante pour sa patience, ses conseils, ses suggestions, ainsi que pour la confiance qu'elle m'a toujours portée.

Je voudrais exprimer tous mes remerciements à Jacqueline Robinet qui m'a accompagnée dans les premiers moments de cette recherche et qui a été présente tout au long de ce travail en se montrant toujours prête à m'apporter son aide.

Je remercie Jean Luc Dorier et Tânia M.M. Campos d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

Je remercie Régine Douady, Raymond Duval, Marie Jeanne Perrin-Glorian et Marc Rogalski qui ont accepté de faire partie du jury, en particulier Marie Jeanne Perrin-Glorian qui m'a beaucoup aidée lors de mes premières années en France.

Je remercie Jean Luc Dorier et Marc Rogalski pour les remarques et les suggestions apportées.

Je remercie également Aline Robert qui m'a fait profiter de son savoir.

Je remercie Sonia B.C.Igliori, Benedito A. da Silva, Mineko Yamashita, Silvia D.A. Machado et Maria Inês R.Miguel qui ont collaboré dans la passation des tests au Brésil et en particulier Sonia B.C. Igliori qui a coordonné tout ce travail et qui a fait passer les entretiens.

Je remercie Frédéric Praslon, Jacqueline Robinet et André Bellaïche qui m'ont aidé soit en acceptant de passer le test ou des parties du test avec leurs étudiants, soit en me fournissant des copies de leurs examens.

Je remercie tous les étudiants français et brésiliens qui ont rendu possible la réalisation de ce travail. J'espère qu'un jour, ce travail pourra leur être utile.

Je remercie la CAPES qui à travers la Convention CAPES-COFECUB n'a pas été seulement soutien financier de cette recherche, mais qui a aussi toujours bien compris les besoins spécifiques de ce travail, et qui a permis qu'elle se fasse dans des conditions favorables.

Je remercie toute l'équipe de l'IREM de Paris VII qui m'a accueillie chaleureusement, en particulier Régine Douady la directrice de l'IREM. Je voudrais remercier particulièrement Martine, Nadine, Annie, Odette, Chantal, Carole qui étant présentes tous les jours, ont partagé avec moi les problèmes du quotidien et qui sont pour moi aujourd'hui ma petite famille française.

Je remercie tous mes amis qui ont été présents dans les moments difficiles, qu'ils reçoivent ici toute ma reconnaissance. Je voudrais remercier particulièrement Inez Machado Salim, directrice de la Maison du Brésil, qui a été avant tout une vraie amie. Je voudrais remercier aussi en particulier Maria José Cheira et Celeste Jacob qui ont toujours été disponibles dans les moments les plus difficiles.

Je remercie la famille de Michèle Artigue pour son accueil chaleureux.

Je remercie enfin, toute ma famille pour m'avoir soutenue moralement et financièrement tout au long de cette recherche.

Je remercie de façon plus générale les nombreuses personnes qui m'ont apporté une aide et n'ont pas été citées.

A ma famille

INTRODUCTION

Cette recherche est issue de notre mémoire de DEA qui concernait l'analyse des productions d'étudiants de première année en algèbre linéaire, dans le cadre d'un enseignement expérimental. Dans ce travail, notre attention avait été attirée par les difficultés rencontrées par les étudiants dans la résolution de tâches demandant d'articuler les points de vue cartésien et paramétrique dans la représentation de sous-espaces vectoriels.

C'est pourquoi nous avons décidé de prolonger ce travail de DEA en étudiant plus précisément ce phénomène d'articulation de points de vue. Cette question nous apparaissait d'autant plus intéressante que les travaux didactiques mettent de plus en plus l'accent sur le rôle joué par certaines **flexibilités** dans le développement des connaissances et que la question de leur gestion didactique est loin d'être résolue. De plus, même si une articulation entre points de vue comme celle concernée ici peut paraître essentielle, la notion de point de vue reste elle-même didactiquement peu travaillée.

Nous avons ainsi été amenée à étudier ce problème en essayant d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

1. En quoi consiste exactement cette articulation sur le plan mathématique et comment s'est-elle historiquement mise en place ?
2. Quels rapports entretient-elle avec les articulations de cadre et de registres qui, au sein de la didactique, sont des articulations déjà bien théorisées ?
3. Sur quelles connaissances peut-elle se fonder aux différents niveaux : technique, technologique et théorique, si l'on se réfère à la classification proposée par Y. Chevallard (Chevallard, 1995) ?
4. Dans quels systèmes de tâches et de pratiques peut-elle se trouver à se développer ?
5. Comment est-elle gérée institutionnellement ?
6. Quels rapports personnels les étudiants développent-ils vis à vis d'elle au cours de leurs études universitaires ?
7. En quoi ces rapports personnels portent-ils la marque des rapports institutionnels ?

Dans un premier temps, ce projet d'étude nous a amenée à essayer de déterminer comment ces questions de flexibilité étaient prises en charge dans les travaux didactiques et comment se manifestaient les évolutions dans ce domaine. Pour cela nous avons effectué une revue critique et détaillée de quelques travaux didactiques ou épistémologiques, concernant en priorité l'enseignement supérieur, où l'étude de la flexibilité occupait une place plus ou moins forte.

Ceci nous a également permis de situer notre recherche par rapport à d'autres travaux portant sur l'algèbre linéaire. Cette partie de la recherche est décrite dans le chapitre I.

Dans un deuxième temps, vu la spécificité de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique en algèbre linéaire, il nous a semblé nécessaire d'étudier cette articulation sur le plan mathématique de façon à mettre en évidence les différentes connaissances sur lesquelles elle pouvait se fonder. Ceci nous a conduite à une étude de son développement historique, pour laquelle nous nous sommes appuyée sur la recherche menée par Dorier (1993) sur la genèse de la notion de rang. L'étude historique nous a permis de mettre en évidence la complexité de l'articulation et les différents cadres dans lesquels elle était susceptible d'intervenir. Cette partie de notre recherche est décrite dans le chapitre II et nous y introduisons les cinq cadres qui seront utilisés dans la suite du travail pour l'analyse de l'articulation.

Ceci étant, dans un troisième temps, nous avons élaboré une grille d'analyse dont l'objectif était de nous permettre d'étudier comment l'articulation était susceptible d'être mise en jeu dans les différentes tâches et pratiques associées aux premiers enseignements d'algèbre linéaire, en fonction notamment des variables de ces tâches. Pour les besoins de l'analyse, nous avons été alors amenée à complexifier les distinctions entre registres déjà introduites par K. Pavlopoulou (1995) dans sa thèse. Cette partie de la recherche est décrite dans le chapitre III et la grille est mise en fonctionnement sur un certain nombre de tâches plus ou moins classiques.

Cet instrument méthodologique est ensuite exploité dans le chapitre IV pour étudier le fonctionnement institutionnel de l'articulation. Ce fonctionnement est appréhendé via l'analyse d'un ensemble de manuels français, brésiliens et anglo-saxons, en distinguant ce qui est à la charge des enseignants et ce qui est à la charge des étudiants.

Cette étude nous permet de mettre en évidence quelques caractéristiques importantes du rapport institutionnel à l'articulation, dont nous faisons l'hypothèse qu'elles ont une influence certaine sur les rapports personnels développés par les étudiants.

C'est à l'étude de ces rapports personnels, en France et au Brésil, avec des étudiants de divers niveaux que sont consacrés les trois chapitres suivants. Dans le premier, nous présentons les tâches qui vont servir de support à l'étude des rapports personnels et en faisons une analyse a priori, sur le plan mathématique.

Dans le second, nous présentons la partie expérimentale relative aux étudiants français. Il s'agit d'une part d'étudiants de DEUG première année, d'autre part d'étudiants de maîtrise et les données recueillies sont issues d'un partiel et d'un examen pour les étudiants de DEUG, d'un test spécifique pour les étudiants de maîtrise.

Dans le troisième, nous présentons la partie expérimentale relative aux étudiants brésiliens. Il s'agit d'étudiants de « mestrado » pour lesquels un dispositif spécifique a été mis au point, dans le cadre d'une expérimentation à distance. Dans ce second cas, la population concernée est plus faible mais nous disposons, outre des productions écrites, d'enregistrements de travail en groupes et d'entretiens individuels.

Ces deux expérimentations mettent en évidence les difficultés rencontrées par les étudiants tant français que brésiliens, et la faible évolution au fil des études supérieures et nous semblent confirmer les hypothèses induites par les analyses des chapitres précédents.

Finalement, en conclusion, nous reviendrons sur les questions initialement posées, et sur ce qu'apporte vis à vis de ces questions notre travail, et nous mettrons également en perpective ces résultats avec ceux obtenus par d'autres chercheurs ayant travaillé sur les difficultés en algèbre linéaire.

CHAPITRE I

D'UNE COGNITION HIERARCHISEE A UNE COGNITION FLEXIBLE

I. INTRODUCTION

De plus en plus, nous semble-t-il, en didactique des mathématiques, la flexibilité entre formes de connaissances et de représentation sémiotique tend à être reconnue comme une composante essentielle de la conceptualisation, et de l'efficacité du fonctionnement mathématique. Dans ce premier chapitre, nous allons essayer de mettre en évidence cette évolution et certaines de ses caractéristiques, en nous appuyant en priorité sur des travaux concernant le niveau d'enseignement : de l'université et, si possible, le domaine mathématique de notre propre travail : l'algèbre linéaire.

Dans ce but, il nous a semblé important de distinguer deux grandes catégories d'approches de la connaissance mathématique, à savoir :

- D'une part, des approches qui se placent dans le cadre global de modèles « cognitifs » hiérarchisés, mais où une certaine flexibilité peut cependant apparaître via l'accent plus ou moins mis sur les rapports dialectiques existant entre le développement des différents niveaux hiérarchiques, ou sur les jeux possibles entre un niveau n et les niveaux p ($p< n$), une fois le niveau n atteint. Nous nous référerons pour ce type d'approche aux travaux développés par : Piaget et Garcia (1983), Hillel et Sierpinska (1994), Dubinsky (1991), Sfard (1991), Schwingendorf, Hawks et Beineke (1994) ainsi que par Tall (1994). Le choix effectué est motivé par les raisons suivantes : mettre en évidence des degrés divers de prise en compte de la flexibilité, privilégier les exemples où ces approches hiérarchisées ont été exploitées pour étudier le développement cognitif de concepts reliés à l'algèbre linéaire ou tout au moins relevant de *l'Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991).
- D'autre part, des approches où, au contraire, la flexibilité occupe une place centrale, même si la dimension hiérarchique reste le plus souvent présente, sous une forme ou une autre. Nous avons ici choisi de nous centrer plus particulièrement sur des approches mettant l'accent sur la flexibilité entre les différents cadres de fonctionnement d'un concept ou d'un domaine mathématique, entre les différentes registres de représentations sémiotiques dans lesquels ces concepts sont exprimés et travaillés mathématiquement, enfin entre les différents points de vue qui peuvent leur être associés. Ce choix a été motivé par le rôle important que nous semblaient

devoir jouer de telles flexibilités dans l'apprentissage des débuts de l'algèbre linéaire, au vu d'un premier travail réalisé dans ce domaine pour notre mémoire de DEA, mais aussi sans aucun doute parce qu'il s'agissait là d'approches didactiques de la flexibilité qui nous étaient le plus culturellement familières. En ce qui les concerne, nous nous référerons plus particulièrement aux travaux de : Douady (1992), Duval (1995), Pavlopoulou (1994), Rogalski (1992), Robert et Tenaud (1989) et Castela (1995).

Dans ce chapitre, nous présenterons successivement les travaux choisis pour les deux grandes catégories que nous venons de distinguer, en commençant par ceux relevant de modèles hiérarchisés. Nous terminerons en situant brièvement cette réflexion par rapport au cadre anthropologique dans lequel s'inscrit plus globalement notre travail.

II. LE CADRE DE MODELES COGNITIFS HIERARCHISES

Nous allons essayer de mettre en évidence, dans ce paragraphe, à travers les travaux choisis, les évolutions qui nous semblent se manifester, même dans ce cadre de modèles essentiellement hiérarchiques, pour prendre en compte des composantes de la conceptualisation qui échappent à la hiérarchisation et, en particulier, faire place dans l'analyse à certains types de flexibilité.

Dans les travaux cités dans ce paragraphe, la flexibilité n'est pas, en effet, une dimension essentielle de l'analyse. Elle intervient en fait plutôt pour assouplir en un certain sens les modèles hiérarchiques initiaux. Elle peut prendre des formes diverses dont nous allons essayer de rendre compte mais ne s'exprime généralement pas en termes de flexibilité, excepté dans les travaux récents de Tall, qui occupent en quelque sorte une position intermédiaire entre les deux grandes catégories.

Nous présenterons tout d'abord très synthétiquement le cadre théorique développé par Piaget et Garcia, dans leur ouvrage « Psychogenèse et Histoire des Sciences ». Dans ce cadre théorique, la flexibilité est quasiment absente. Nous montrerons comment ceci influence l'analyse développée par Hillel et Sierpinska, qui s'en inspirent directement, dans une recherche concernant la didactique de l'algèbre linéaire, mais aussi l'évolution sensible vers une plus grande prise en compte des rapports dialectiques entre formes de pensée qui se manifeste dans les travaux les plus récents de Sierpinska. Nous en viendrons ensuite à des modèles inspirés des modèles piagétiens, tels ceux développés par Dubinsky et Sfard, en essayant de mettre en évidence la façon dont chacun des auteurs tend à assouplir la rigidité des hiérarchies initiales proposées. Nous terminerons ce paragraphe, en présentant l'approche développée par Tall, reprenant certains éléments des approches précédentes mais qui, via les notions de "procept" et de "versatile thinking", introduit un changement important de point de vue.

II.1. DES TRAVAUX ORGANISES AUTOUR DES TROIS NIVEAUX DE DEVELOPPEMENT DES ACTIONS COGNITIVES INTRODUITS PAR PIAGET ET GARCIA

A) LES TROIS NIVEAUX DE DEVELOPPEMENT DES ACTIONS COGNITIVES

Dans leur livre « Psychogenèse et Histoire de Sciences », Piaget et Garcia (1983), comme le souligne Inhelder dans la préface de l'ouvrage, cherchent « à savoir si les mécanismes de passage d'une période historique à la suivante, dans le contexte d'un système notionnel, sont analogues à ceux de passage d'un stade génétique à ses successeurs » et ils vont s'attacher à prouver que c'est bien effectivement le cas. Trois grands problèmes cognitifs leur paraissent a priori communs à ces deux épistémologies : celui des rapports entre la formation et la signification des instruments cognitifs, celui de la nature des rapports entre le sujet et les objets de sa connaissance, celui enfin de savoir dans quelle mesure une connaissance nouvelle est déjà préformée ou si elle relève d'une construction efficace susceptible elle-même d'avoir été prédéterminée. Ceci les conduit à faire porter l'essentiel de leur recherche non pas sur le contenu des systèmes notionnels étudiés, mais sur les instruments et les mécanismes communs de leurs constructions, à savoir :

- la nature des raisonnements qui comportent des *abstractions réfléchissantes* aussi bien qu'*empiriques* ou des *généralisations constructives* aussi bien qu'*extensionnelles*,
- le fait que, dans tous les domaines, la connaissance comporte un aspect inférentiel et que, pour chaque secteur cognitif, l'apport du sujet est indiscutable,
- le double processus de différenciation et d'intégration dont témoigne tout progrès cognitif, et dont les deux aspects deviennent tôt ou tard solidaires,
- la recherche de raisons qui reviendront dans tous les cas à rattacher les résultats obtenus à des structures ou coordinations de schèmes,
- le fait que les progrès accomplis d'une étape à la suivante ne se succèdent pas de façon quelconque, mais peuvent être sériés sous la forme de *stades* séquentiels qu'il s'agit de caractériser.

Dans ce but, les auteurs distinguent trois niveaux d'enchaînement séquentiel dans la pensée humaine :

- l'analyse **intra**-objectale, ou analyse des objets,
- l'analyse **inter**-objectale, ou étude des relations ou des transformations entre les objets,
- l'analyse **trans**-objectale qui traite des constructions de structures. [ibid., p.41]

et mettent en évidence deux caractères communs à l'histoire des sciences et à la psychogenèse, en termes de mécanismes de passage :

- le premier étant « qu'en cas de dépassement, le dépassé est toujours intégré dans le dépassant. » [ibid.,p.41]
- le deuxième étant le mécanisme « qui conduit de l'*intra*-objectal à l'*inter*-objectal, et de là au *trans*-objectal", la succession obligée des étapes *intra* aux étapes *inter* et seulement enfin aux étapes *trans* montrant à leurs yeux, à l'évidence " le caractère constructiviste et dialectique des activités cognitives. » [ibid.,p.40 et 41]

C'est sur ces considérations théoriques que les auteurs s'appuient ensuite pour étudier le développement de domaines précis comme la mécanique, la géométrie et l'algèbre, en précisant notamment, dans chaque cas, ce qui constitue à leurs yeux les étapes intra, inter et trans-objectales et les mécanismes de transition de l'une à l'autre.

Nous nous bornerons ici à rappeler quels découpages cette ligne d'analyse les conduit à effectuer dans le développement historique des deux systèmes notionnels analysés les plus proches de celui que nous étudions : la géométrie d'une part et l'algèbre d'autre part. En ce qui concerne la géométrie, tout d'abord, les trois étapes sont dénommées intra, inter et trans-figurales :

L'étape **intrafigurale** correspond aux débuts de la géométrie Euclidienne. Il s'agit d'une époque « où l'on étudie les propriétés des figures et des corps géométriques en tant que relations internes entre les éléments de ces figures et de ces corps. Il n'y a pas de prise en considération de l'espace en tant que tel ni, par conséquence, des transformations des figures à l'intérieur d'un espace qui les comprendrait toutes. »

L'étape **interfigurale** est caractérisée « par une mise en relation des figures entre elles, dont la manifestation spécifique est la recherche de transformations reliant les figures selon de multiples formes de correspondances, mais sans aboutir à la subordination des transformations à des structures d'ensemble. C'est la période pendant laquelle la géométrie dominante est la géométrie projective ». Elle débute donc pour Piaget et Garcia avec les travaux de Chasles et Poncelet, mais les auteurs soulignent le rôle joué par la géométrie analytique de Descartes et Fermat et le développement du calcul différentiel et intégral dans les changements de modes de pensée qui l'ont rendue possible, en permettant d'introduire de nouveaux rapports à la figure.

L'étape **transfigurale** est enfin celle caractérisée par la prééminence des structures quand, à travers la notion de groupe de transformations et les invariants correspondants, on peut faire des distinctions précises entre les différents types de géométrie. Selon les auteurs, cette étape débute par la conception globale de la géométrie introduite par Klein et Lie.

Les auteurs soulignent que, dans ce domaine de la géométrie :

> « les notions abstraites des mathématiques ont été d'abord employées dans de nombreux cas particuliers uniquement à titre instrumental; sans avoir donné lieu à une réflexion sur leur signification générale, ni même une prise de conscience du fait qu'on les utilise. Ceci arrive après un processus plus ou moins long, à la fin la notion particulière qui a été employée devient objet de réflexion pour se constituer ensuite en concept fondamental. » [ibid, p;124].

Ce passage de l'usage, ou application implicite, à l'utilisation et à la conceptualisation constitue ce qu'ils conviennent d'appeler une **thématisation**.

Pour ce qui est de l'algèbre, les trois étapes distinguées sont dénotées intra, inter et trans-opérationnelles :

> « les étapes **intra-opérationnelles**[1] : sont celles caractérisées par des liaisons intra-opérationnelles qui se présentent sous des formes isolables, comportant certes, comme leur nom l'indique, des articulations internes, mais ne se composant pas entre elles, et sans des transformations de l'une à l'autre qui supposent l'existence d'invariants,
>
> les étapes **inter-opérationnelles** : sont caractérisées par des correspondances et des transformations entre les formes isolables de l'étape antérieure, avec de plus les invariants que de telles transformations exigent,
>
> les étapes **trans-opérationnelles** : sont caractérisées par la construction de structures dont les relations internes correspondent aux transformations inter-opérationnelles. »

L'algèbre, dans leur analyse, commence avec les travaux de Viète qui effectue le passage du concept d'arithmos[2] à celui de symboles généraux. Les auteurs caractérisent la période qui s'étend de Viète jusqu'à la moitié du XVIII^{eme} siècle comme intra-opérationnelle, puisque, selon eux, dans cette période l'algèbre se limite à l'étude des équations algébriques et des solutions algébriques de problèmes particuliers posés par la géométrie ou par la mécanique, chaque problème ayant besoin d'une méthode de résolution qui lui est propre, d'un cheminement particulier.

Ce sont les développements du calcul infinitésimal qui vont, selon ces auteurs, conduire à l'étape inter-opérationnelle, dans la deuxième moitié du XVIII^{ème} siècle, étape qui voit la formulation, « à l'intérieur de l'algèbre, des problèmes d'une grande généralité, tel le théorème fondamental de l'algèbre. " [ibid., p.173]. Ils considèrent Lagrange comme la figure clef de cette transition. A leurs yeux, les travaux de Gauss, Lagrange, Ruffini, Cauchy et quelques autres encore marquent "l'aboutissement de la période inter-opérationnelle [...]. La méthode de Gauss consiste, pour

---

[1] la dénomination intra-opérationnelle réfère à l'intra-objectal au niveau de l'algèbre tandis qu'au niveau de la géométrie c'est la dénomination intrafigurale. Soulignons encore qu'au niveau du développement des structures géométriques elles-mêmes, la dénomination introduite est " intrastructurale ".

[2] L'arithmos : fait référence immédiatement aux choses et aux unités tandis que les symboles (lettres) [...] renvoient au concept de "nombre en général" [ibid., p.171]

l'essentiel à transformer les fonctions et à trouver les relations qui demeurent stables. Les propriétés qu'ils déduisent ne sont que les invariants de systèmes de transformations. » [ibid., p.178].

Pendant longtemps, ce sont les transformations qui vont dominer l'algèbre, jusqu'à l'émergence de la première structure algébrique, celle de groupe qui conduit la théorie des équations algébriques vers son étape trans-opérationnelle. Par contre, si l'on considère la notion de corps, qui est, selon eux, la dernière étape de l'étude des équations algébriques, la notion de groupe introduite par Galois se situe alors à l'étape inter-opérationnelle et c'est Dedekind qui réussit à dégager et à thématiser la structure de corps initiant ainsi l'étape trans-opérationnelle pour cette nouvelle notion.

On a donc ici affaire à une vision tout à fait hiérarchique de l'évolution des connaissances, même si, à certains moments, les auteurs soulignent les difficultés posées par son exploitation dans tel ou tel système notionnel, par exemple en algèbre car, écrivent-ils, « d'une part le processus d'algébrisation de la mathématique constitue en soi une étape trans-opérationnelle pour ce qui est des branches algébrisées, d'autre part, plusieurs des étapes du développement de l'algèbre ne peuvent être interprétées qu'en tenant compte de leurs interactions avec l'analyse et la topologie. » [ibid., p.163- 164].

Il faut souligner également l'accent fortement mis par les auteurs sur le fait que cette hiérarchie linéaire se fonde sur une succession dialectique :

> « Cet ordre nécessaire de succession comporte alors deux sortes de dépassements dialectiques, l'un ajoutant aux propriétés analysées en Ia (intra) les transformations élaborées en Ir (inter) et l'autre synthétisant en T(trans) le système de ces transformations jusqu'à constituer des totalités dont les caractères d'ensemble sont à leur tour nouveaux relativement à Ir. [...] les séries IaIrT ne consistent pas en de dépassements simples, donc linéaires, tels qu'on les retrouve en toute succession dialectique élémentaire, mais qu'il faut parler d'un dépassement continuel des instruments mêmes de dépassements, ce qui confère aux instruments cognitifs leur richesse et leur complexité particulière. » [ibid., p.207-208].

Plus précisément, comme le soulignent les auteurs en conclusion de l'étude faite sur la géométrie :

> « Le sujet se trouve d'abord dans l'obligation d'en assimiler les données à ses propres schèmes (d'action ou conceptuels). Que ces données consistent en objets, en figures, en relations, etc., leur analyse implique ainsi une équilibration de forme élémentaire entre leur assimilation aux schèmes du sujet et l'accommodation de ceux-ci aux propriétés objectivement données, d'où le caractère "intra" de ces débuts de connaissance. Mais les nouveaux schèmes ainsi construits ne sauraient rester isolés : tôt ou tard le processus assimilateur conduira à des assimilations réciproques et les exigences d'équilibration imposeront aux schèmes ou sous-systèmes ainsi reliés des formes plus ou moins stables de coordinations et de transformations, d'où le caractère "inter" de cette seconde étape. Mais une troisième forme d'équilibre en procédera nécessairement à son tour, car la multiplication des sous-systèmes menacera l'unité du tout, tandis que les différenciations obligées seront contrecarrées par les tendances intégratives. L'équilibre qui s'impose donc entre les différenciations et l'intégration ne saurait alors qu'aboutir à des

systèmes d'interactions tels que les différenciations puissent être engendrées au lieu d'être subies, seul moyen de les harmoniser sans perturbations internes ou conflits entre elles : d'où les structures d'ensemble formatrices caractérisant le niveau "trans". Mais il va de soi que de telles triades (beaucoup plus souples en leur principe que les thèses, antithèses et synthèses de la dialectique classique, quoique reposant aussi sur le rôle des déséquilibres et des rééquilibrations avec dépassements) ne sont que des phases découpées d'un processus continu : les structures atteintes au niveau "trans" donnent lieu à leur tour à des analyses "intra" conduisant à de nouveaux "inter" puis à la production de superstructures "trans", et ainsi de suite indéfiniment. Si un tel mécanisme est aussi général et constamment répétable, il est donc naturel qu'on le retrouve dans le passage d'un niveau au suivant au sein de la psychogenèse comme de l'histoire, et cela indépendamment de la hauteur absolue des niveaux considérés. » [ibid, p.154-155]

Il est clair que ce type d'approche conditionne le regard porté sur l'histoire et qu'en voulant décrire en quelque sorte le développement historique par une telle succession de trilogies, même fondées sur des rapports dialectiques entre niveaux, on rencontre des difficultés, nous semble-t-il, à prendre en compte de façon satisfaisante le rôle joué dans l'évolution des connaissances par les connexions qui s'établissent entre domaines, et les changements dans les modes de pensée et de traitement sémiotique que ces connexions permettent. Peut-on, dans ces conditions, conserver à l'analyse épistémologique son épaisseur réelle ? Pour les deux domaines considérés, la comparaison de l'analyse de Piaget et Garcia et de celle fournie par des ouvrages comme (Dahan-Dalmedico & Pfeiffer, 1986), (Crowe, 1967), (Boyer, 1968) conduit à en douter.

Cependant, dans le domaine qui nous intéresse plus particulièrement, celui de l'algèbre linéaire, l'approche théorique de Piaget et Garcia a été exploitée dans une recherche menée par Hillel et Sierpinska (1994) avec des étudiants débutants.

B) UNE RECHERCHE SUR L'ALGEBRE LINEAIRE EXPLOITANT LA THEORIE PRECEDENTE

En se référant aux travaux de Piaget et Garcia présentés ci-dessus, Hillel et Sierpinska s'interrogent sur les niveaux en jeu dans un premier enseignement d'algèbre linéaire. A leurs yeux, il est clair que très vite, le trans-niveau devient nécessaire pour être capable de :

« Thinking about the objects and operations of algebra not in terms of relations between particular matrices, vectors ans operators but in terms of whole structures of such things : vector spaces over fields, algebras, classes of linear operators, which can be transformed, represented in different ways, considered as isomorphic or not, etc. » [Hillel et Serpinska, 1994, p.65]

Ils vont ensuite essayer de montrer que le recours aux trois niveaux : intra, inter et trans peut aider à comprendre certaines difficultés résistantes rencontrées par les étudiants.

Hillel et Sierpinska identifient tout d'abord un certain nombre de difficultés conceptuelles qui leur paraissent spécifiques de l'algèbre linéaire. Ce sont les suivantes :

« 1. The existence of several levels of description : there is a constant shuffing back and forth between the langage of the general theory (vector spaces, subspaces, dimension, operators, kernel, etc.), the langage of the more specific theory of $\mathbf{R}^n$ (n-tuples, matrices, rank, solutions of systems of equations,

etc.), and finally the geometric langage of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$ (orthogonality, etc.). These three languages or levels of descriptions co-exist, are often interchangeable but certainly not equivalent.

2. Problems of representation : vectors and linear operators have representations which are basis dependent. To add the potential confusion about representations, two representations of a vector can both be n-uplets with no notational devices relativizing them to a basis.

3. Applicability of the general theory : many problems given to students in a traditional linear algebra course can often be solved by direct manipulation techniques that do not require the tools of the general theory. »[ibid, p.66]

Ils vont en fait s'attacher plus particulièrement dans cette recherche à l'étude des difficultés spécifiques qu'ont les étudiants pour comprendre la notion de représentation d'un opérateur linéaire sur une base donnée et le passage d'une telle représentation à une autre par changement de base. Pour eux, ces difficultés attestent l'existence d'un obstacle de nature conceptuelle et ne peuvent être réduites à des difficultés d'exécution d'une procédure, même si une telle procédure existe. Il y a là à leurs yeux des problèmes de langage que l'on peut analyser en se référant aux trois niveaux introduits par Piaget et Garcia :

« The language of linear algebra must be seen as a network of languages and rules of translation between them. However, the understanding of the operation of representing a concrete linear operator in different bases does not require such a high, "trans"-level of thinking. The inter-level is sufficient. Yet, as it appears, even though students are able to think about objects as the inter-level, some have problems with thinking of language at such a level. » [ibid, p.66]

Cette interprétation des difficultés rencontrées par les étudiants les amène à poser les questions suivantes :

« How does one make sure that two externally different representations indeed represent one and the same « thing »?

Isn't it then often the case that one of the many possible representations is chosen as being the thing, or most resembling the thing, and all other representations need to be reported to the chosen one, proved as indeed representing the thing, equivalent, etc.? » [ibid, p.67]

Pour Hillel et Sierpinska :

« As students encounter vectors for the first time mainly in the context of concrete $\mathbf{R}^n$ spaces, strings of numbers become the primary representation or even *the thing*, and whatever is called a vector must bear some resemblance to this representation. However, when it comes to representing linear operators in different bases, the identificarion of vector with a string of numbers becomes very much shaken. One string of numbers represents different vectors depending on the choice of basis. One and the same vector can be represented by different strings of numbers. In someone, for whom vectors are recognized by the strings of numbers which they are supposed to resemble, this ambiguity may cause the whole conception of vector to fall into pieces. Can something that takes on so many forms have any real existence? Strings of numbers, so familiar, so palpable, suddenly feel like « ghosts of departed quantities ».

If the old conception is not replaced by a new way of thinking about the language of linear algebra, one that would be closer to viewing it as a representation, students will tend to fall into the traps of "resemblance" and keep making the same mistakes. » [ibid, p.67]

Les erreurs faites par les étudiants dans les questions relatives aux matrices d'opérateurs linéaires illustrent bien à leurs yeux la difficulté qu'ont les étudiants, même lorsqu'ils ont appris à déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée, et à effectuer des changements de base, à détacher l'objet vecteur de ses représentants. Alertés par des erreurs nombreuses et non prévues commises dans un examen ordinaire, ils organisent en classe une activité spécifique, les étudiants ayant le droit d'utiliser librement leurs documents. Une des questions posées est, par exemple, la suivante :

Soit T: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ un opérateur linéaire représenté par la matrice A = matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ dans la base$\{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 5, 6)\}$ de $\mathbf{R}^3$. Déterminer le vecteur T(1, 1, 1).

Beaucoup d'étudiants répondent en donnant la première colonne de la matrice. Pour Hillel et Sierpinska, une telle erreur trouve son origine dans la confusion faite entre vecteurs images et représentation de ces vecteurs dans une base donnée, soit dans l'identification faite entre vecteur et n-uplet de nombres, confusion rendue d'autant plus facile que, dans le cas où l'on fonctionne avec la base canonique, la réponse fournie est correcte et correspond à la procédure standard.

En partant de cette analyse, les auteurs vont organiser un nouveau cours où ils porteront une attention particulière à la question de la représentation matricielle des opérateurs linéaires et étudier, à l'aide de plusieurs tests, l'évolution des conceptions des étudiants au fil de l'enseignement. Ceci leur permet de montrer que l'erreur identifiée semble être tout à fait résistante et les amène à conclure que :

> « The question of matrix representation of linear operators and translations from representation to another must be recognized as difficult for the students. [...] This understanding must be on the "trans-level" : it requires that the student be able not only to find a matrix representation of a given operator in a given basis, but also to think about matrix representation of linear operators as objects of inquiry themselves, and about the general conditions under which a linear operator can have such and such particularly desirable representation. However, it seems that while with respect to linear algebra « objects » such as linear operators and matrices, students are at least on the inter-level of thinking about them, for quite a few students, their understanding of the language of linear algebra still lags behind on the intra-level : they, in a way, identify the world of linear algebra with its language [...] Viewing language as a representation is still not part of their "nature" even if they can rationally force their minds to work on that level. » [ibid, p.72]

En fait, nous sommes tout à fait d'accord avec les auteurs pour reconnaître que l'enseignement usuel de l'algèbre linéaire oblige très vite les étudiants à fonctionner à des niveaux structurels élevés. Nous sommes aussi d'accord pour reconnaître que la distinction entre vecteurs et

représentants ne va pas de soi[3] et ce, d'autant plus que l'existence d'une base canonique dans R^n favorise au contraire l'assimilation, mais nous voyons moins ce qu'apporte opérationnellement le recours au cadre théorique développé par Piaget et Garcia pour étudier les questions liées à la multiplicité des représentants disponibles ou à la différenciation vecteur/représentant. Il nous semble que, sur ce point, des approches d'ordre sémiotiques et moins strictement hiérarchiques, telles celle développée en didactique des mathématiques par Duval, en termes de registres sémiotiques et conversions entre registres, mettant l'accent sur les liens existant entre conceptualisation et possibilité de coordination de plusieurs registres sémiotiques associés à un même objet, se situent plus directement au coeur du problème étudié. Nous reviendrons sur ces questions dans la seconde partie de ce chapitre, en présentant la thèse de Pavlopoulou qui s'appuie sur les travaux de Duval et, de manière plus approfondie, dans le chapitre II, en développant un cadre théorique qui nous a permis de prendre en compte la complexité des phénomènes de flexibilité en jeu dans les débuts de l'algèbre linéaire. Mais nous voudrions souligner que les travaux menés, plus récemment, sous la direction de Sierpinska, nous semblent aller dans le même sens.

C) A PROPOS DE TROIS MODES DE RAISONNEMENT EN ALGEBRE LINEAIRE

En effet, dans leur article paru dans (Dorier et al., 1997) Sierpinska, Defense, Khatcherian et Saldanha introduisent ce qu'ils appellent trois modes de raisonnement en algèbre linéaire : le mode synthétique - géométrique, le mode analytique - arithmétique et le mode analytique - structurel.

Ils soulignent que, même si ces trois modes de raisonnement ont des origines hiérarchiques, le développement de l'algèbre linéaire doit beaucoup à leur interaction constante. Selon eux :

> « [...] le plus intéressant est que l'algèbre linéaire peut être vue comme le résultat d'un dépassement de deux obstacles ou des deux positions dogmatiques : l'une refusant aux nombres le droit d'entrer dans la géométrie et l'autre refusant à l'« intuition géométrique d'intervenir dans le domaine pur de l'arithmétique ». [Sierpinska et al., 1997, p.249]

Ils insistent de plus sur le fait que ces trois modes de raisonnement ne sont pas à considérer « comme des stades dans l'évolution de la pensée algébrique mais comme des manières de raisonner et de voir les choses qui sont utiles lorsqu'elles sont en interaction ». [ibid, p.250]

Ceci les amène à définir les modes de pensée synthétique et analytique de la façon suivante :

- **le mode synthétique** : c'est un mode où « les objets sont, en quelque sorte, donnés directement à l'esprit qui essaie alors de les décrire »,

[3] Signalons ici, la particularité du système Nord-Américain qui introduit le vecteur comme un n-uplet sans le désigner par un seul symbole comme cela se fait en France et au Brésil, ceci étant, peut-être, un facteur qui favorise l'erreur décrite.

- **le mode analytique** : c'est un mode où « les objets sont donnés indirectement, ils sont seulement construits par des définitions, des propriétés de leurs éléments ». [ibid, p.250]

Le mode analytique est différencié en deux sous-modes : le mode analytique - arithmétique et le mode analytique - structurel. Dans le premier, « un objet se définit par une formule qui permet de le calculer », tandis que dans le second, « un objet est défini par un ensemble de propriétés » [ibid, p.252]. Les auteurs donnent plusieurs exemples où ils essayent de montrer comment fonctionnent les trois modes de raisonnement considérés pour certaines notions d'algèbre linéaire. Nous avons retenu l'exemple ci-dessous qui nous semble le plus proche de notre problématique :

> « Si l'on réfléchit sur les solutions possibles d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues en s'imaginant les positions relatives de trois plans dans l'espace, on est dans le mode synthétique - géométrique. Si l'on pense à ce même problème en termes des résultats possibles de la réduction d'une matrice 3x3, on est dans le mode analytique - arithmétique. On est dans le mode analytique - structurel, si, par exemple, on pense en termes de matrices singulières et régulières. » [ibid, p.251]

La mise en fonctionnement de leurs trois modes de raisonnement sur plusieurs exemples les amène à la conclusion suivante :

> « Dans un raisonnement analytique - arithmétique, on essaie souvent de démontrer que deux processus de calcul mènent au même résultat. D'autre part, un exemple paradigmatique de la pensée structurelle est : pour démontrer que a est b, montrer que a satisfait les propriétés caractéristiques de b. Tandis que la pensée analytique - arithmétique se donne pour but de simplifier les calculs et de les rendre plus précis, la pensée analytique - structurelle tend à élargir notre savoir à propos de concepts. Si nous avons démontré que a est b, nous finissons par en savoir plus sur a et b. » [ibid, p.252]

Ils soulignent également que « chacun de ces trois modes de pensée en algèbre linéaire utilise un système spécifique de représentations ». Là encore, les auteurs illustrent cette affirmation par plusieurs exemples et reviennent à l'exemple des systèmes d'équations, montrant que la pensée analytique-arithmétique va fonctionner sur la base de représentations où le système est explicitement écrit avec tous ses coefficients tandis que la pensée analytique-structurelle s'appuie sur des représentations où le système est associé à une équation matricielle $Ax = b$ ou vectorielle $x_1A_1+...+x_nA_n=b$. Ces différences de représentation sont porteuses de fonctionnements différents.

En effet :

> « Ce qui est important d'un point de vue analytique - arithmétique est de trouver des moyens de résoudre le système. Alors que ce qui est important d'un point de vue analytique - structurel, ce sont, par exemple, les conditions sur la matrice A et le vecteur b pour qu'une solution existe et soit unique. Les propriétés de la matrice sont plus importantes que la nature de ses composantes numériques. » [ibid, p.253]

Mais ils insistent également, ce qui rejoint nos préoccupations, sur le fait que la distinction entre ces deux modes de pensée ne doit pas faire oublier leurs rapports dialectiques et montrent comment ces rapports se manifestent dans le fonctionnement des étudiants, en particulier sous forme de tensions, de productions dans des modes intermédiaires ou mixtes :

« Chacun des trois modes de pensée et de raisonnement en algèbre linéaire mène à des sens différents des notions qui y sont impliquées parce que chacun d'eux est lié à des perspectives théoriques différentes. Ces sens ne sont pas également accessibles aux étudiants débutants. [...] les étudiants utilisent des modes de raisonnement intermédiaires entre les modes ici distingués. Même s'ils ont un certain accès à tous ces modes de pensée, les étudiants ne voient pas pourquoi ils devraient utiliser l'un ou l'autre d'une manière conséquente et pure et préfèrent recourir à des formes "mixtes" qui, pour eux, paraissent convenables et sensées. Ils ont aussi du mal à traduire un mode dans l'autre. » [ibid, p.255]

L'étude de ces formes intermédiaires inventées par les étudiants apparaissent aux auteurs pouvoir être une source d'inspiration pour l'enseignement de l'algèbre linéaire.

II.2. DES TRAVAUX ORGANISES AUTOUR DE LA TRANSITION PROCESSUS-OBJET

Dans les recherches didactiques concernant les mathématiques au niveau universitaire et plus généralement ce qui est qualifié *Advanced Mathematical Thinking*, divers chercheurs ont construit des modèles inspirés des théories piagétiennes, sans pour autant se référer directement aux analyses développées au paragraphe précédent. Les hiérarchies qu'ils proposent sont des hiérarchies organisées autour de la transition processus-objet. Nous présenterons dans ce paragraphe les modèles qui nous semblent les plus exploités à ce niveau d'enseignement, sans prétendre à l'exhaustivité, en essayant de mettre en évidence, ce qui dans les modèles construits va au delà de la seule organisation hiérarchique.

Nous présenterons tout d'abord le cadre élaboré par Dubinsky, en nous référant principalement à (Dubinsky, 1991) et les aménagements proposés par Schwingendorf et al. (1994) avec la distinction faite entre croissance verticale et horizontale des concepts, puis celui de Sfard (1991) qui en est relativement proche, avant d'en venir avec Tall (1994) à la notion de "versatile thinking".

A) LE MODELE DE DEVELOPPEMENT DES CONNAISSANCES ELABORE PAR DUBINSKY

Partant de la notion d'abstraction réfléchissante définie par Piaget, Dubinsky va essayer de :

- montrer comment cette notion peut être utilisée pour décrire l'épistémologie de plusieurs concepts mathématiques,
- indiquer comment elle peut suggérer des explications pour les difficultés rencontrées par les étudiants dans la construction de ces concepts,
- établir comment elle peut influencer un projet d'enseignement qui permette une amélioration significative de la façon dont les étudiants semblent s'approprier les concepts.

L'auteur se situe donc très clairement dans une perspective piagetienne comme le montre la citation suivante :

« Empirical and pseudo-empirical draws knowledge from objects by performing (or imagining) actions on them. Reflective abstraction interiorizes and coordinates these actions to form new actions and, ultimately new objects (which may no longer be physical but rather mathematical such as a function or a group). Empirical abstraction then extracts data from these new objects through mental actions on them, and so on. [...] In empirical abstraction the subject observes a number of objects and abstracts a common property. Pseudo-empirical abstraction proceeds in the same way, after actions have been performed on the object. Reflective abstraction, however, is much more complicated. This is not surprising since, according to Piaget, "The development of cognitive structures is due to reflective abstraction.. » [Dubinsky, 1991, p.98]

L'abstraction réfléchissante est pour lui centrale puisque :

« Piaget considered that it is reflective abstraction in its most advanced form that leads to the kind of mathematical thinking by which form or process is separated from content and that processes themselves are converted, in the mind of the mathematician, into objets of content. »

S'appuyant sur ses connaissances de mathématicien et sur l'observation d'étudiants, Dubinsky se propose alors de trouver, pour des concepts mathématiques précis, un mode de description qui mette en évidence les processus d'abstraction réfléchissante sous-jacents à un processus raisonnable de conceptualisation, ce qu'il appellera une décomposition génétique du concept, et donc aident à construire des stratégies d'apprentissage.

L'analyse des exemples d'abstraction réfléchissante développés par Piaget le conduit à isoler cinq types des méthodes de construction de connaissances par abstraction réfléchissante dans la pensée mathématique avancée, à savoir :

- **l'intériorisation** : traduction d'une succession d'actions matérielles dans un système d'opérations intériorisées, elle va créer le processus,
- **la coordination générale des actions** : composition de coordinations de deux processus ou plus pour construire un nouveau processus,
- **l'encapsulation ou la conversion** d'un processus (dynamique) dans un objet (statique),
- **la généralisation extensionnelle** : l'application d'un schéma existant à une collection de phénomènes plus large,
- **l'inversion** : construction d'un nouveau processus par inversion du processus originel.

Pour construire sa théorie et l'appliquer à des concepts mathématiques spécifiques, l'auteur utilise la notion de schéma[4], en montrant par des exemples qu'un schéma peut jouer le rôle de processus dans un autre schéma.

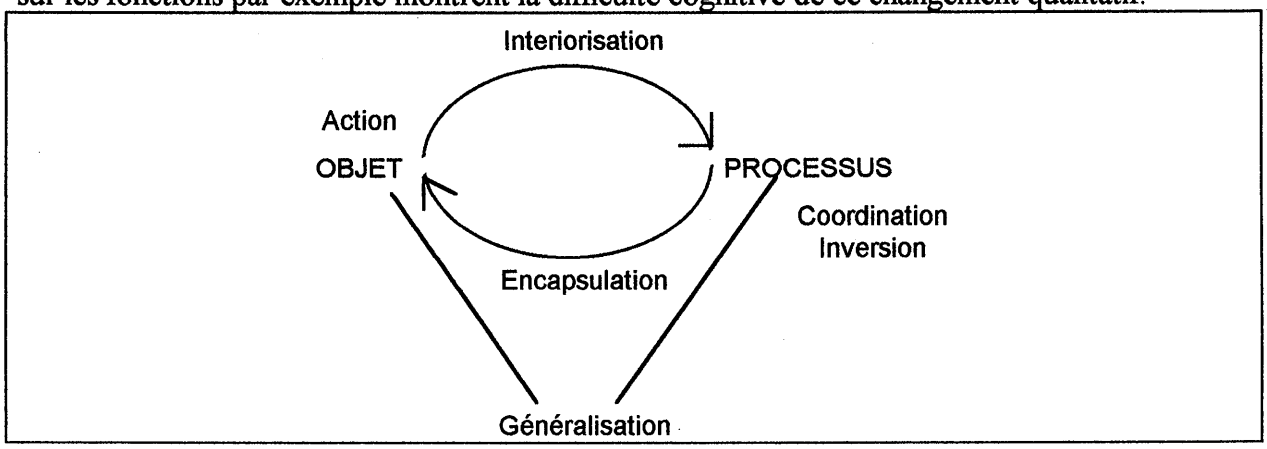
---

[4] **schéma** : collection plus ou moins cohérente d'objets et de processus.

Il se sert des cinq méthodes de construction par abstraction réfléchissante définies ci-dessus pour décrire comment de nouveaux objets, processus et schémas peuvent être construits. Pour ceci, il donne des exemples qui s'appliquent soit à un seul type de construction, soit à une combinaison de deux ou plus d'entre eux. Les cinq mécanismes d'abstraction réfléchissante identifiés ne présentent pas, selon E. Dubinsky, les mêmes difficultés cognitives. Il souligne par exemple que, pour la plupart des étudiants l'intériorisation permettant de construire un processus mental correspondant à la multiplication de deux matrices ne pose pas de réel problème. Selon lui,

> « This could be because there is a straightforward "hand-waving" action, used by most teachers, that is a physical representation of the multiplication and could form an intermediary between the external action and its interiorization. »

D'après lui, les mathématiques deviennent en réalité difficiles quand elles concernent un domaine pour lequel il n'existe pas de représentations visuelles ou physiques simples. De même, il souligne que la généralisation est sans doute la forme la plus simple et la plus familière d'abstraction réfléchissante. Ses recherches montrent par exemple que les étudiants généralisent sans difficulté majeure leur schéma de fonction, dans lequel les fonctions transforment des nombres, pour inclure des fonctions qui transforment d'autres types d'objets : vecteurs, ensembles, propositions... à condition bien sûr que ces objets aient été effectivement encapsulés. C'est sans aucun doute le mécanisme d'encapsulation qui est à ses yeux le mécanisme clef dans le changement qualitatif de statut de la connaissance car c'est celui qui transforme les processus en objets, que l'on peut alors considérer comme des entités conceptuelles et engager dans de nouveaux processus. Ses travaux sur les fonctions par exemple montrent la difficulté cognitive de ce changement qualitatif.



Pour illustrer ce qui précède, dans un domaine qui nous concerne tout particulièrement, nous reprendrons l'analyse que fait E. Dubinsky de la genèse de la notion de dual topologique, en s'appuyant sur ce cadre théorique :

> « First, an action must be **interiorized**. As we have said, this means that some internal construction is made relating to the action. An interiorized action is a *process*. Interiorization permits one to be conscious of an action, to reflect on it and to combine it with other actions. For example, the

computation of the dual of a particular vector space is an action on that object. The idea, independent of any particular vector space, that it may have a dual and it can often be computed, is the process that results from interiorizing this action. Interiorizing actions is one way of constructing processes. Another way is the work with existing processes to form new ones. This can be done, for example, by reversal. [...] Another way of making new processes out of old ones is to **compose** or **coordinate** two or more processes. For example, [...] A subject may have a schema for constructing the dual of a finite dimensional vector space. If an infinite dimensional vector space comes along, then it seems that exactly the same schema can be used to construct its dual, as well. We would say that the new phenomenon (infinite dimensional vector space) has been assimilated to this schema. As mathematical experience goes further, however, this result could not be very satisfactory, and it is particularly convenient to make up use of topological structures. If there is, in the subject's schema, a process for equipping a set with a topology, then this could be coordinated with the vector space schema to obtain a topological vector space. » [ibid, p.107]

Et, plus loin :

« In the beginning, there are vectors, which are the objects, and actions on vectors including addition, scalar multiplication and the gathering together of vectors in a set with these operations, to form a *vector space*. This is a schema that we assume the subject possesses. We also assume that the subject has a schema for function that transform numbers into other numbers. The first step, according to our conjecture, is to generalize the function schema to include as a function any process that transforms vectors into scalars. This could then be coordinated with the addition of vectors and their multiplication by scalars to restrict the functions to processes that transform vectors into scalars, but preserve the algebraic operations of addition and scalar multiplication. We would then say that these functions are encapsulated into objects called linear functionnals and collected together in a single set. At this point we would like to suggest that, although the assigning of a name like linear functional to a process is closely connected with its encapsulation into an object, it is the encapsulation that is fundamental and gives "meaning" to the name. To name processes without encapsulating them is the essence of jargon.[...] In any case, the set of linear functionals can be assimilated to the vector space schema [...] by defining addition and scalar multiplication of these functionals. This can be done very naturally, interpreting the functions as processes and using "point-wise operations". In this way, the set of linear functionals becomes a vector space, called the algebraic dual. Now comes a major interiorization. What we have been describing is an action applied to a vector space E that constructs its algebraic dual E*. When this has been interiorized, one has constructed the beginning of duality theory. One can reverse the process to look for a "pre-dual", that is, given a vector space F, can one find a vector space E whose algebraic dual is F ? [...] Or one can perform the process twice. When two instantiations are coordinated, one obtains the bidual E**. » [ibid, p.108 - 109]

Le modèle construit par Dubinsky reflète donc bien la conception hiérarchique piagétienne, au niveau ici individuel et local : les processus se transforment en objets qui sont ensuite engagés dans de nouveaux processus, la progression des connaissances s'inscrivant ainsi dans une spirale de transformations processus / objets.

En fait, ce modèle initial va être complexifié par Dubinsky et d'autres chercheurs en introduisant à côté de ce qu'ils appelleront la croissance « verticale » des concepts une croissance «horizontale», cette différenciation permettant d'intégrer une certaine forme de flexibilité. Comme précisé par Tall (1994) : « This long term cognitive process in which procedures are routinized to become more compressed and then encapsulated as mathematical objects in their own right is referred to as

vertical growth, in contrast to the horizontal growth of relationships between different representations ». C'est le cas par exemple, dans l'étude développée par Schwingendorf, Hawks et Beineke (1994) à propos de la conceptualisation de la notion de fonction. Ces auteurs définissent, en effet, la croissance horizontale comme « growth in the breadth of the students' concept image », en référence à la notion de « concept image » définie par Tall et Vinner (1981) et la croissance verticale comme « growth in the depth of the students' formal understanding ». C'est suivant ces deux dimensions horizontale et verticale qu'il analysent l'effet d'une expérience d'enseignement basée sur l'utilisation du langage ISETL. Ils montrent à travers l'analyse d'un questionnaire que les étudiants du groupe expérimental développent un concept image plus large que les étudiants du groupe témoin et connectent mieux représentations graphiques et expressions algébriques, les différences entre les deux groupes étant moins nettes en ce qui concerne la croissance dite verticale.

La théorie de la réification élaborée par Sfard est relativement proche de celle développée par Dubinsky. Elle nous semble cependant mettre davantage l'accent sur la dualité et la complémentarité des dimensions structurelles et opérationnelles des concepts mathématiques et s'écarter un peu plus, de ce fait, de conceptions purement hiérarchiques de la connaissance.

B) LA THEORIE DE LA REIFICATION CHEZ SFARD

Sfard part de la question suivante : « Comment l'abstraction mathématique peut-elle différer des autres types d'abstraction dans sa nature, dans son développement, dans ses fonctions et applications ? ». Il lui semble que, pour comprendre la différence entre les mathématiques et les autres sciences, il est important d'étudier de ce point de vue des domaines relevant des mathématiques avancées. Elle fait aussi l'hypothèse qu'une telle réflexion philosophique sur la nature des concepts mathématiques est nécessaire pour comprendre les processus psychologiques qui gouvernent l'émergence des concepts.

Son analyse va la conduire à distinguer pour les concepts mathématiques deux dimensions fondamentales : une dimension structurelle, statique, instantanée et intégrative d'une part et une conception opérationnelle, dynamique, séquentielle, détaillée d'autre part. La première renvoie à la notion d'objet, la seconde à la notion de processus. Pour elle, ces deux dimensions sont duales et complémentaires ; un même concept mathématique peut être considéré à la fois comme un processus et un objet et la possibilité de concevoir un concept sous ces deux dimensions est indispensable à une profonde compréhension des mathématiques :

> « [...] It is very important to emphasize that operational and structural conceptions of the same mathematical notion are not mutually exclusive. Although ostensibly incompatible (how can anything be a processus and a object at the same time ?), they are in fact complementary.[...] the ability of seeing a

function or a number both as a process and as an object is indispensable for a deep understanding of mathematics, whatever the definition of "understanding" is. » [ibid, p.4 - 5]

Cette nature duale des concepts mathématiques se manifeste non seulement au niveau des descriptions verbales, mais aussi au niveau des différents types de représentations symboliques qui leur sont associés et certaines représentations, par exemple, semblent être plus susceptibles d'interprétation structurelle que d'autres.

Elle considère, par exemple, comme conception structurelle du concept de fonction, celle véhiculée par la définition ensembliste de ce concept en tant qu'ensemble de paires ordonnées - et comme conception opérationnelle, celle véhiculée par les définitions en termes de processus calculatoire, d'algorithme ou de méthode bien définie de passage d'un système à un autre. Les représentations associées à la notion de fonction : expressions algébriques, algorithmes, représentations graphiques ne sont pas neutres vis à vis de ces deux conceptions, les deux premières favorisant une vision dynamique, opérationnelle, la troisième favorisant une vision globale, statique, structurelle.

Selon elle, dans le processus de formation d'un concept, les conceptions opérationnelles précèdent les conceptions structurelles. Ceci est vrai en ce qui concerne le développement historique comme l'apprentissage individuel. Dans le cas des fonctions évoqué ci-dessus, elle écrit ainsi :

« The notion of function was initially tightly connected to algebraic processes. The new term was first used to denote « a quantity composed in any manner whatever of [a] variable and constant » (by Jean Bernoulli in 1718), or the so-called " analytic expression " (by Euler in 1747). Thus, in a sense, the concept of function was for algebraic manipulations on variables what the idea of a negative number was for subtraction : something between the product and the process itself. The main problem with the early definitions of function was that they leaned heavily on the concept of variable, which by itself was rather fuzzy and escaped every attempt at reification. [...] All the further history of the notion may be seen as a long sequence of strenuous, if mostly failed, attempts at reification. Euler himself tried to arrive at a fully-fledged structural version by endowing his « changing quantities » with a « solidifying » graphic representation. Euler's idea was not very helpful, however, since neither he, nor any of his contemporaries were able to build a truly satisfactory bridge between the algebraic and graphic approach : each time a definition had been proposed which would fit the algebraic-operational intuition [...] It should be pointed out that at a certain stage, mathematicians and philosophers became fully aware of what for some time had probaly been done only intuitively - of their striving for reification, of their need of definition which would justify the common practice of referring to function as if it was a real « thing ». [...] The numerous failed attempts at translating operational intuition into structural definition led to Dirichlet's rebellion against the algorithmic approach, and eventually to the now widely accepted, purely structural Bourbaki's definition. This simple description presented function as a set of ordered pairs and made no reference whatsoever to any kind of computational process. [...] But when at a long, long last function - initially only a computational process - was converted into a mathematical objet, our schema of concept development could repeat itself once more : on the new objects new operations could now be performed. These new operations are known today as functionals. » [ibid, p.14 à 16]

Cette lecture de l'histoire, pilotée par la volonté théorique, en gomme sans doute l'épaisseur : les rapports entre le développement des conceptions opérationnelles et structurelles sont sans aucun doute plus dialectiques et bien plus complexes qu'il n'est présenté ici et il nous semble difficile de soutenir par exemple que l'intégration des fonctions dans des processus dont elles constituent les objets de base a été subordonnée à l'état de développement du concept présenté ici comme caractéristique de la conception structurelle.

Sfard va de fait construire un modèle du développement cognitif qui reflète au niveau individuel cette lecture du développement historique :

> « [...] if the conjecture on operational origins of mathematical objects is true, then first there must be a process performed on the already familiar objects, then the idea of turning this process into an autonomous entity should emerge, and finally the ability to see this new entity as an integrated, object-like whole must be acquired. » [ibid, p.18]

Elle introduit, pour désigner chacune de ces trois phases de développement du concept, les termes d'*intériorisation*, de *condensation* et de *réification* respectivement :

- Pendant la phase d'**intériorisation,** l'apprenant se situe au niveau des processus et intériorise les actions liées à la manipulation de ces processus. Il manipule par exemple des expressions algébriques de nature fonctionnelle, substituant des valeurs numériques à la variable et intériorisant, à travers ces calculs, l'idée de dépendance sous-jacente aux processus fonctionnels.
- La phase de **condensation** est la période où les séquences d'opérations vont être condensées dans des unités plus commodes, c'est-à-dire où un processus donné va pouvoir être considéré comme un tout, sans que l'on soit obligé de rentrer dans les détails de son exécution. Par exemple, s'il s'agit de fonctions, la personne pourra manipuler une application comme un tout sans être obligée de considérer des valeurs spécifiques, associer globalement des fonctions et des représentations graphiques, combiner des couples de fonctions, déterminer l'inverse d'une fonction....
- La phase de **réification** peut être définie comme la capacité soudaine de voir quelque chose de familier comme quelque chose de totalement nouveau, la capacité de voir tout d'un coup un processus comme un objet autonome. Plusieurs représentations du concept seront sémantiquement unifiées par cette nouvelle abstraction. A. Sfard souligne ici, que tandis que l'intériorisation et la condensation sont des changements graduels et quantitatifs plutôt que qualitatifs, la réification est un saut qualitatif instantané.

Après la phase de réification, la nouvelle entité est détachée du processus qui l'a produite et peut intervenir dans la constitution de nouveaux processus et de nouveaux objets. Par exemple, dans le

cas des fonctions, selon elle, la réification peut-être mise en évidence par la capacité de résoudre des équations dans lesquelles les inconnues sont des fonctions (équations différentielles et équations fonctionnelles notamment).

Le critère énoncé ici n'est sans doute pas aussi simple à manier qu'il le paraît. La résolution algébrique des premières équations différentielles rencontrées par les élèves, par exemple les équations différentielles linéaires à coefficients constants, fait appel à des techniques complètement algorithmisées et la capacité des étudiants à utiliser ces techniques n'exige pas nécessairement un concept très élaboré de la notion de fonction. Sfard est tout à fait consciente de ces difficultés théoriques. Elle remarque en effet qu'il peut y avoir des étudiants qui ne suivent pas ce schéma en trois phases, mais développent, de façon provisoire ou plus stable des conceptions qu'elle qualifie de pseudo-structurelles. Ils sont alors dépendants de prototypes qui se constituent en pseudo-objets, et tout en donnant l'impression de se situer à un niveau structurel, en particulier par l'utilisation d'un langage statique, ne sont pas capables de faire jouer la complémentarité entre les dimensions processus et objet, impliquées par ce niveau de conceptualisation. Les stratégies usuelles d'enseignement, qui ne respectent pas la logique du développement cognitif et introduisent trop précocement des approches structurelles, par exemple la définition ensembliste classique dans le cas des fonctions, ont, à ses yeux, une grande part de responsabilité dans la constitution de ces conceptions pseudo-structurelles.

La théorie développée par Sfard est donc, comme celle développée par Dubinsky, une théorie hiérarchique de la formation des connaissances. Le but est l'avènement d'une pensée structurelle, perçue comme une arme très puissante contre les limitations de notre mémoire de travail et c'est dans le passage des processus aux objets que s'effectuent qualitativement les changements de statut de la connaissance. Plus que Dubinsky cependant, Sfard, met fortement l'accent sur la complémentarité des dimensions opérationnelle et structurelle de la connaissance, et sur la nécessité, dans la résolution de problèmes complexes, d'opérer fréquemment des mouvements dans un sens et dans l'autre, entre ces deux dimensions, pour les besoins de la résolution, des mouvements qui peuvent être plus ou moins facilités par les registres de représentation utilisés pour travailler les concepts.

Cette attention aux formes symboliques, mentionnée chez Sfard et qui semble prendre une importance beaucoup plus grande dans ses travaux les plus récents[5] devient plus centrale dans les théorisations récentes élaborées par Tall, que nous allons présenter maintenant.

---

[5] Nous faisons référence à un texte d'A. Sfard non encore publié intitulé : « Symbolizing mathematical reality into being ».

C) LES NOTIONS DE PROCEPT ET DE VERSATILE THINKING CHEZ TALL

En se servant des trois niveaux de lecture de représentations définies par Bruner : « enactive », « iconique » et « symbolique », Tall introduit la notion de **versatile learning** « to combine the visual gestalts for the overall ideas and the sequential manipulation of the symbols » (Tall, 1994, p.16). Sa position théorique est à la fois inspirée des théorisations précédentes fondées sur la distinction entre processus et objets et sur la volonté de prendre en charge théoriquement la flexibilité de la symbolisation mathématique qui, très souvent, peut être interprétée à la fois au niveau processus et au niveau objet, et favorise de ce fait le jeu entre les deux niveaux nécessaires au travail mathématique.

> « At the time we began to be aware of the use of algebraic symbols in two very different ways - as generalised arithmetic where an expression such as 2 + 3x stood for a *process* of evaluation (once x is given a value) and also as a manipulable mathematical *objet*. »[ibid, p.16].

C'est dans ce but qu'il introduit la notion de **procept**, formée à partir des deux mots : processus et concept, un procept étant l'encapsulation d'un processus dans un objet en liaison avec un symbolisme qui représente tant le processus que le concept :

> « This encapsulation of process into object has as a pivot the use of symbolism to represent either *process* or *concept* and we therefore coined the term ***procept*** to represent this amalgam of a process to be carried out, the symbol for the result of the process and the result itself. By saying and writing the symbol, it can be spoken, heard, seen and read and the combination of this sensory perceptions and actions gave it a cognitive existence as a mathematical objet. But unlike other objets, a procept has an underlying process that enables it to be used for calculation and manipulation to produce a desire result. » [ibid, p.16]

L'auteur distingue trois types de procepts, à savoir :

- les procepts **opérationnels** tels que 3 + 2 qui renvoient à un processus directement exécutable pour produire un résultat.
- les procepts "**template**" tels que 3 + 2x où le processus n'est pas directement exécutable, l'exécution nécessitant d'attribuer des valeurs spécifiques aux variables qui interviennent dans la symbolisation mais où le symbole peut être directement manipulé en tant qu'objet (par exemple ici substitué à une variable y dans une autre expression algébrique).
- les procepts **structurels** tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ qui renvoient bien à un processus (ici passage à la limite), mais pour lesquels il n'existe pas de méthode effective systématique de production d'un résultat.

Dans la théorisation proposée par Tall, l'accent mis sur la flexibilité à travers la notion de procept et celle associée de versatile thinking permettent aussi de relativiser les conceptions hiérarchiques

que nous avons présentées précédemment. En fait, pour Tall, très vite dans l'apprentissage d'un concept, les deux dimensions processus et objet peuvent être présentes, les objets et les processus étant bien sûr alors limités par les références disponibles, et les deux dimensions vont alors évoluer simultanément ; les rapports dans l'évolution entre processus et objets dépendent en fait des individus.

Tous les symboles utilisés en mathématiques ne sont cependant pas des procepts et Tall cite le cas du langage de la géométrie euclidienne classique dans lequel les noms des objets ne sont pas manipulables comme les nombres et les expressions algébriques, mais sont plutôt des extensions mathématiques du langage quotidien. D'autre part, à un niveau plus avancé, les définitions formelles offrent de nouvelles possibilités de définition et de fonctionnement des objets mathématiques. Ceci conduit l'auteur à proposer une adaptation de l'organisation des représentations définie par Bruner, basée sur les catégories suivantes (cf. figure) :

- le système sensori-moteur "enactive", racine de beaucoup de nos activités, notamment celles liées à la perception des objets du monde extérieur et à l'action sur ces derniers ; dans ce système, la vérification passe par des expériences physiques,
- le système visuo-spatial iconique qui utilise la représentation iconique des objets pour nous permettre de donner du sens aux rapports spatiaux, concevoir des expériences mentales et en tirer parti,
- le système verbal qui utilise le langage quotidien, par exemple, dans le contexte de la géométrie euclidienne où il permet de formuler des expériences avec des formes géométriques, faisant appel à un des deux systèmes précédents,
- le système proceptuel qui concerne les symboles de l'arithmétique, de l'algèbre, de l'analyse etc... lesquels sont utilisés pour représenter le résultat d'un calcul ou effectuer les algorithmes sous-jacents aux processus correspondants,
- le système logique, enfin, qui correspond à la combinaison de mots et de symboles utilisés pour définir des concepts mathématiques formels et en déduire ensuite des propriétés dans un système de validation qui est celui de la preuve formelle.

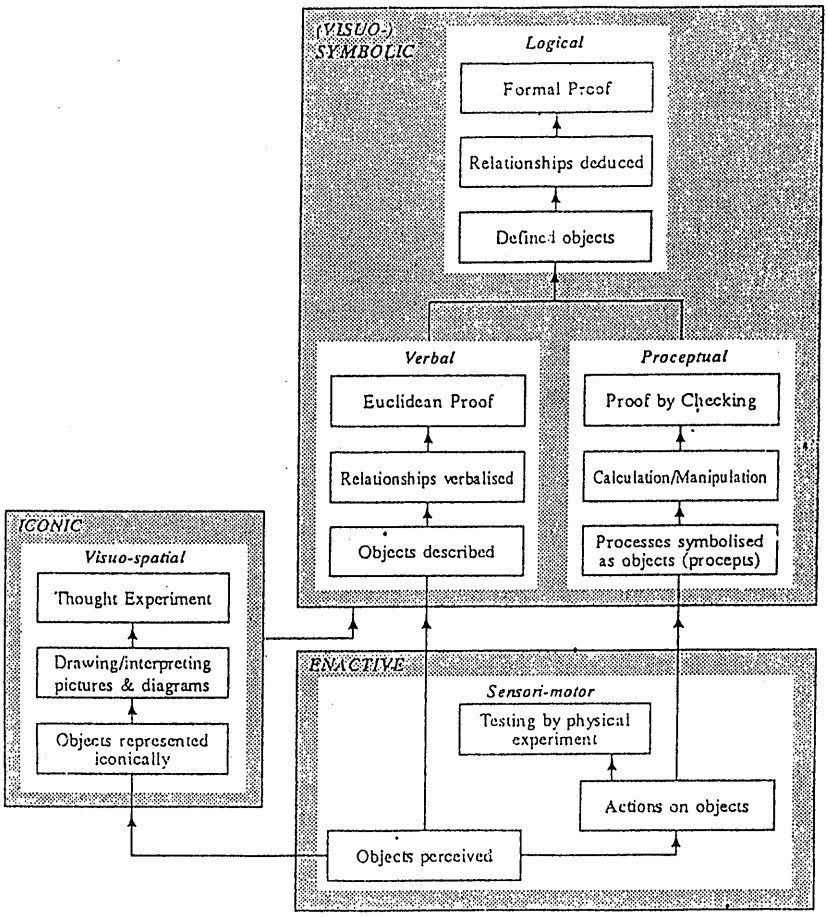


Figure 2: Objects, actions & proofs in different representational modes

[ibid, p.18]

Pour lui, c'est le passage d'un système verbal ou proceptuel à un système logique fondé sur les définitions formelles qui constitue une source de difficultés essentielle, ce qu'il explique ainsi :

« Unlike « objects described » in elementary mathematics, where the student may continue to use any visual imagery to suport their thinking, here it is the verbal definition that play the fundamental role. Any object which satisfies the definition is an instance of the concept. To show the primacy of the verbal definition, I here use the term « defined object » to show its subtle distinction from an elementary « object described ».[...] The differences in the nature of the mathematical objects and of proof cause serious difficulties for many students attempting the transition to university mathematics. Their previous experiences are usually of « objects described » where they have a rich concept image built up with experience and can "see" by thought experiments that most of the theorems of mathematical analysis are trivial. [...] Regrettably their images of the concepts often have very different properties from those of the new "defined objects" that are given by the formal definitions. [...] Given human propensity to interlink a wide range of mental activities, it is natural to link visual, verbal, symbolic and other representations of the concept which give such a wide array of conflicting concept images. [...] A visuo-spatial approach to advanced concepts such as limit, continuity, differentiability, integrability can give

students profound visual insights that support powerful intuitions. Yet, once again, it is not by itself sufficient. The reason ? Because a definition given in this way is an *object defined* and may not be seen as a *defined object* and used as the basis for a formal proof. The definition allows the students to conjure up a mental picture and perform a thought experiment, but it does not of itself alone lead easily into formal mathematics. The latter requires the definition - with its quantifiers ans its formal subtleties - to become operative in such a way that the implications of the definition may be constructed by the students. This formal meaning is very difficult to attain. " [ibid, p.18,22 et 24]

A partir de l'identification de ces différents systèmes de représentation, Tall propose alors une approche multidimensionnelle des mathématiques qui utilise ces différentes sources pour mieux comprendre les chemins via lesquels les différents systèmes cognitifs du cerveau travaillent et interagissent. On est donc ici face à une approche qui, tout en étant clairement articulée autour de certaines hiérarchies, met l'accent sur une multidimensionnalité qui ne s'inscrit que partiellement dans cette hiérarchie. Une telle vision nous semble beaucoup plus apte à rendre compte que les précédentes de la complexité des connexions qui façonnent le développement cognitif. La vision développée de la flexibilité y est cependant encore étroitement conditionnée par le cadre théorique hiérarchique, qui lui sert de fondement et l'on peut se demander si ceci ne peut pas entraver en partie le travail théorique nécessaire pour penser les articulations de représentations et le rôle que ces articulations peuvent jouer dans la conceptualisation. C'est à des travaux qui nous semblent fournir ce type d'instruments que nous consacrerons la deuxième partie de ce chapitre.

III. LE CADRE DES MODELES COGNITIFS NON-HIERARCHISES

C'est dans cette problématique globale d'étude d'une flexibilité non hiérarchisée a priori, de celle des connaissances qui la sous-tendent, de son élaboration, des difficultés que présentent sa maîtrise, ainsi que des questions relatives à sa gestion didactique, que se situe notre travail.

Différents cadres théoriques déjà développés en didactique peuvent soutenir une telle problématique. Nous nous appuierons plus précisément sur la théorisation en termes de cadres, jeux et changement de cadres développée par Douady (1992 et 1994), ainsi que sur celle en termes de registres et conversion de registres développée par Duval (1993 et 1995). Mais notre travail portera plus précisément sur une flexibilité, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, qui reste beaucoup plus floue dans les travaux didactiques, celle entre points de vue, que nous essaierons de situer, dans le contexte précis de notre étude, par rapport aux deux précédentes, en faisant l'hypothèse qu'elle ne saurait y être réductible.

Comme dans la partie précédente, pour présenter les notions introduites et montrer le rôle qu'elles peuvent jouer dans l'analyse didactique, nous nous appuierons en priorité sur des travaux relevant de l'algèbre linéaire ou tout au moins de mathématiques relevant de l'Advanced Mathematical Thinking, en particulier :

- la thèse de Pavlopoulou (1994) qui concerne les débuts de l'algèbre linéaire et se situe dans la perspective développée par Duval,
- la thèse de Tenaud (1991) qui concerne l'enseignement de méthodes en géométrie en terminale et fait intervenir la notion de point de vue,
- le travail de Castela (1995) concernant les conceptions de la notion de tangente et leur évolution au fil de la scolarité au lycée et introduit une notion de point de vue, plus proche de la notion de conception, au sens attribué à ce terme par Artigue et Robinet, notamment, dans leur recherche sur les conceptions du cercle à l'école élémentaire (Artigue et Robinet, 1982).
- les travaux de Rogalski sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG qui mettent l'accent sur l'importance jouée en algèbre linéaire par les deux points de vue cartésien et paramétrique qui seront au centre de notre travail (Rogalski, 1992).

III.1. LA NOTION DE CADRE

Cette notion a été introduite dans sa thèse en 1984 par Douady dans la perspective d'une théorisation didactique basée sur une analyse épistémologique mettant en évidence :

- la dualité des concepts mathématiques, en général d'abord **outils** implicites[6] puis explicites[7] de l'activité mathématique avant de prendre le statut d'**objet**[8] et d'être travaillés en tant que tels.
- le rôle joué par les changements de cadre dans l'activité et la production mathématique.

Cette analyse épistémologique la conduit à transposer ces caractéristiques du fonctionnement des mathématiciens au domaine didactique via les notions de **dialectique outil objet** et de **jeux de cadres** (Douady, 1987 et 1992).

Un **cadre** est alors défini comme :

> « constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. » (Douady, 1992 , p.135)

---

[6] « **outil implicite** : un outil peut être implicite s'il correspond à un concept en cours d'élaboration, et cela peut durer plusieurs années. »[Douady, 1992, p.134]

[7] « **outil explicite** : un outil peut être explicite s'il correspond à la mise en oeuvre intentionnelle d'un objet pour résoudre un problème. » (ibid, p.134]

[8] « **objet** : Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiques, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. Le statut d'objet permet la capitalisation du savoir et donc l'extension du corps des connaissances. Il permet aussi le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine. » [ibid, p.134]

Le **changement de cadres**

> " est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. [...] Quoi qu'il en soit, les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en somme à l'enrichissement du cadre originel et de cadres auxiliaires de travail ". (ibid, p.135 - 136)

Les **jeux de cadre,** organisés par l'enseignant, sont des transpositions didactiques de ces processus et ils sont vus dans la théorie de Douady comme des moyens privilégiés pour susciter à la fois des déséquilibres cognitifs et permettre le dépassement de ces déséquilibres dans des rééquilibrations de niveau supérieur.

Ainsi, la notion de cadre met l'accent sur le fait qu'un même concept est appelé à fonctionner dans différents environnements conceptuels et techniques et que le fonctionnement dans chacun de ces environnements présente des caractéristiques spécifiques, les différences existantes étant justement un des moteurs et outils de la création mathématique. Cette notion de cadre, initialement utilisée par Douady pour étudier les extensions successives de la notion de nombre à l'école élémentaire, a ensuite été exploitée par les didacticiens à tous les niveaux de l'enseignement.

Dans le cas qui nous intéresse ici, l'algèbre linéaire, l'introduction des premiers concepts (notions d'espace vectoriel et d'application linéaire, de sous-espace vectoriel, de dépendance et indépendance linéaire, de dimension et de rang ...) se fait le plus souvent en n'utilisant que les sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ et même en privilégiant les dimensions 2 et 3 qui permettent de jouer sur les jeux entre cadres géométrique et algébrique et d'amorcer ainsi une flexibilité qui deviendra plus métaphorique en dimension supérieure ou dans des espaces plus généraux tels par exemple les espaces Hilbertiens mais qui, on le sait, joue un rôle important dans le travail dans ces espaces.

Les deux cadres auxquels on pensera d'emblée sont donc le cadre algébrique et le cadre géométrique. En fait, pour les besoins de l'analyse didactique, cette distinction entre deux cadres, nous a paru insuffisante. Elle ne permettait pas en effet de prendre en compte l'existence d'environnements conceptuels et techniques proches mais qui, dans les débuts de l'algèbre linéaire, tout en jouant un rôle essentiel, sont loin d'être encore intégrés dans un monde unifié et complètement articulés. Suivant les stratégies d'enseignement choisies, leur positionnement, leur articulation prend de plus des formes très diverses, leur développement autonome est plus ou moins marqué. C'est pourquoi, nous distinguerons en fait dans notre travail cinq cadres intervenant en interaction dans les débuts de l'algèbre linéaire, chacun avec des objets, des problématiques et approches, des techniques, des systèmes sémiotiques partiellement spécifiques : le cadre de la géométrie, en fait ici une géométrie affine euclidienne mais non théorisée en tant que

telle, le cadre des systèmes linéaires, le cadre des matrices, le cadre des déterminants et enfin le cadre dit de l'algèbre linéaire abstraite. Nous préciserons dans le chapitre suivant les caractéristiques de chacun de ces cadres.

III.2. LA NOTION DE REGISTRE

Si la notion de cadre concerne globalement le fonctionnement d'un concept mathématique, celle de registre concerne plus spécifiquement les registres sémiotiques qui permettent de le représenter et de le travailler.

Dans l'introduction de (Duval, 1995), l'auteur présente clairement la problématique de son travail. Partant du fait que l'activité mathématique constitue un champ d'étude privilégié pour l'analyse d'activités cognitives fondamentales comme la conceptualisation, le raisonnement, la résolution de problèmes, la compréhension de textes et que ces activités cognitives requièrent l'utilisation de systèmes d'expression et de représentations autres que la langue naturelle ou les images, il pose d'entrée la question suivante :

> " Cette utilisation de plusieurs systèmes sémiotiques de représentation et d'expression est-elle essentielle ou, au contraire, n'est-elle qu'un moyen commode mais secondaire, pour l'exercice et pour le développement des activités cognitives fondamentales ? " [Duval, 1995, p.1]

Selon lui, cette question renvoie en réalité à la nature même du fonctionnement cognitif de la pensée, de façon globale et :

> " l'apprentissage de mathématiques constitue seulement le domaine dans lequel cette question se pose d'une façon plus manifeste et plus aiguë que dans d'autres. "

Mais il n'est pas pour autant facile de la travailler car :

> " des arguments très puissants semblent imposer la réponse avant même qu'on ait eu le temps de poser la question. " [ibid, p.1]

Il en cite deux :

Le premier est la prééminence donnée à l'objet en mathématiques sur ses représentations, qui conduit à considérer les diverses représentations sémiotiques comme " secondaires et extrinsèques à l'appréhension conceptuelle des objets " ; le second argument, plus global et psychologique, est lié à la prééminence donnée aux représentations mentales sur les représentations externes en terme de conceptualisation :

> " Les représentations sémiotiques, c'est-à-dire ces productions constituées par l'emploi de signes (énoncé en langue naturelle, formule algébrique, graphe, figure géométrique...) ne semblent être que le moyen dont un individu dispose pour extérioriser ses représentations mentales, c'est-à-dire pour les rendre visibles ou accessibles à autrui. Elles seraient donc entièrement subordonnées aux représentations mentales et ne rempliraient que des fonctions de communication. " [ibid, p.2]

Ainsi il nomme **sémiosis** " l'appréhension ou production d'une représentation sémiotique " et **noésis** " les actes cognitifs comme l'appréhension conceptuelle d'un objet, la discrimination d'une différence ou la compréhension d'une inférence ". La sémiosis apparaît donc comme complètement dépendante de la noésis.

Mais le travail de Duval tend à montrer que la noésis dépend fortement de la sémiosis. L'auteur va d'abord s'attacher à montrer qu'en mathématiques les représentations sémiotiques dépassent la seule fonction de communication. Elles sont essentielles à l'activité mathématique même et cette fonction de traitement, qui ne peut être assurée par les représentations mentales, rend la noesis et la sémiosis interdépendendantes. La possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend en effet directement des systèmes de représentation sémiotique utilisés. Par exemple, pour le calcul numérique, les procédures et leur coût dépendent du système d'écriture choisi : écriture binaire, écriture décimale, écriture fractionnaire. D'une façon plus globale, on peut constater, écrit-il :

> " que le progrès des connaissances s'accompagne toujours en mathématiques de la création et du développement de systèmes sémiotiques nouveaux et spécifiques qui coexistent plus ou moins avec le premier d'entre eux, celui de la langue naturelle ". [ibid, p.3]

D'un point de vue génétique, d'autre part, il va s'élever contre les conceptions conduisant à opposer représentations mentales et représentations sémiotiques. Selon lui :

> " le développement des représentations mentales s'effectue comme une intériorisation de représentations sémiotiques [...] A cela il faut ajouter le fait que la pluralité des systèmes sémiotiques permet une diversification des représentations d'un objet qui augmente les capacités cognitives des sujets et par suite leurs représentations mentales. " [ibid, p.3 et 4]

Il conclut que :

> " Etant données la nécessité des représentations sémiotiques pour certaines fonctions cognitives fondamentales et l'implication réciproque des représentations mentales et des représentations sémiotiques, il semble tout aussi légitime d'avancer l'hypothèse contraire : il n'y a pas noésis sans sémiosis, c'est la sémiosis qui détermine les conditions de possibilité et d'exercice de la noésis. " [ibid, p.4]

Pour étudier ces questions, Duval va s'appuyer sur la notion de registre sémiotique de représentation, empruntée à la linguistique et mettre en évidence le rôle joué par ce qu'il appellera les phénomènes de congruence et non-congruence sémantique dans l'articulation de différents registres sémiotiques.

Il définit un **registre de représentations sémiotique** comme :

> " étant un système sémiotique qui doit permettre les trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis :

1. La **formation d'une représentation** identifiable comme une représentation d'un registre donné [...] une sélection de traits et de données dans le contenu à représenter [...] qui se fait en fonction des unités et des règles de formation propres au registre sémiotique dans lequel la représentation est produite. [...]

2. Le **traitement** d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée. [...]

3. La **conversion** d'une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre en conservant la totalité de cette représentation ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. " [Duval, 1993, p.41-42]

Il considère les exemples suivants de systèmes sémiotiques qui ne sont souvent pas reconnus par les élèves comme représentants d'un même objet :

- L'écriture algébrique d'une relation et sa représentation graphique.
- L'écriture numérique d'un rapport et sa représentation géométrique sur une droite ou dans un plan.
- L'énoncé d'une formule en français et l'écriture de cette formule sous forme littérale.

Pour le cas spécifique de l'algèbre linéaire, Pavlopoulou a retenu trois registres de représentation sémiotique pour représenter les objets définis : le registre graphique, le registre des tableaux et le registre de l'écriture symbolique, en précisant les différentes représentations qui peuvent être utilisées pour un même objet. Le tableau ci-après explicite ces distinctions sur lesquelles nous reviendrons dans la suite :

Représentations			Objet mathématique pouvant être ainsi représenté
dans le registre graphique	dans les registre des tableaux (les tableaux qui résultent d'un échelonnement en lignes)	dans le registre de l'écriture symbolique	
flèche, éventuellement accompagnée d'une désignation (du registre symbolique le plus souvent)	- colonne à deux lignes -colonne à trois lignes -colonne à n lignes	lettre(s), dénotant un objet, éventuellement surmontée d'une flèche	vecteur ou élément d'un espace vectoriel
famille de flèches de référence	colonne de référence composée d'un seul 1 et de 0 dans les autres lignes	famille d'objets de référence	base
flèche de même direction qu'une flèche de référence	colonne qui a au plus un coefficient non nul : dans la case qui correspond à la ligne ou la colonne de référence à la valeur 1	objet qui peut être écrit comme un multiple de l'objet de référence	vecteur colinéaire à un vecteur de la base

Tableau : Représentations des objets mathématiques dans les différents registres [Pavlopoulou,p.38]

Duval définit d'autre part les notions de **congruence** et **non-congruence** sémantiques entre représentations d'un même objet qui relèvent de systèmes sémiotiques différents comme suit :

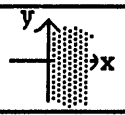
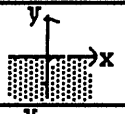
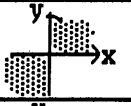
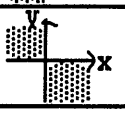
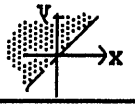
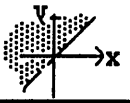
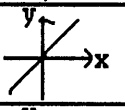
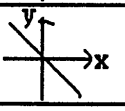
Deux représentations sont **congruentes** lorsqu'elles remplissent les trois critères suivants :

> " correspondance sémantique entre les unités signifiantes qui les constituent, même ordre possible d'appréhension de ces unités dans les deux représentations, et pour convertir une unité signifiante de la représentation de départ une seule unité signifiante dans la représentation d'arrivée. " [Duval, 1993, p.6]

Lorsqu'un de ces trois critères n'est pas vérifié, les représentations sont **non-congruentes** et le passage de l'une à l'autre n'est plus immédiat. Ceci se traduit par des taux de réussite très différents pour des tâches apparemment voisines. Duval cite par exemple les résultats différents obtenus dans les deux tâches de conversion suivantes, avec des élèves de seconde [Duval, 1995, p.55] :

Conversion 1 : Hachurer une zone du plan décrite en langage naturel

Conversion 2 : Choisir entre plusieurs expressions algébriques (y=x, y>x, x>0, y=-x, xy≤0...) celle correspondant à une zone hachurée.

I	II	III	I → III: hachurer	III→ II: choisir l'expres.
1...l'ensemble des points qui ont une abscisse positive	x > 0		67%	51%
2.....qui ont une ordonnée négative	y < 0		67%	61%
3.....dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe	xy ≥ 0		**56%**	**25%**
4.	xy ≤ 0			**23 %**
5.....dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse (*droite y=x étant tracée*)	y > x		**38%**	**38%**
6.....dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse (*droite y=x n'étant pas tracée*)	y > x		19%	25%
7.....dont l'ordonnée est égale à l'abscisse	y =x		**60%**	75%
8.....dont l'ordonnée est l'opposée de l'abscisse	y = - x		**34%**	58%

[ibid, p.55]

Pour l'exemple 5, il n'y a pas d'écart entre les deux conversions puisque, selon Duval :

> " la correspondance terme à terme entre les unités signifiantes est suffisante pour effectuer la conversion. " [ibid, p.46]

Pour l'exemple 1, il explique l'écart de la façon suivante :

> " il manque dans l'écriture algébrique une unité signifiante qui corresponde à " positif ". Il faut recourir à la périphrase " >0 ", combinaison de deux unités signifiantes pour pallier cette absence. " [ibid, p.46]

Et il donne l'explication suivante, du décalage constaté pour xy≥0 :

> " Pour le passage I → III, il y a correspondance sémantique entre les unités signifiantes de l'expression linguistique de la relation et de sa représentation graphique, il y a également univocité sémantique terminale, et l'ordre de prise en compte des unités signifiantes est neutre. Chaque demi-branche du graphe ayant un nom (" abscisse ", " ordonnée ") et un signe exprimée par sa valeur (" positive ", " négative "), on peut à partir de chaque terme de l'expression linguistique donnée retrouver de façon pertinente pour la conversion les unités sémiotiques élémentaires du graphe. En revanche, pour le passage III → II il n'y a pas de correspondance sémantique entre les unités signifiantes de l'expression

algébrique et le graphe, puisqu'aucune unité sémiotique dans le registre algébrique ne permet de traduire l'observation " même signe pour x et y ". Il faut recourir à la globalisation descriptive[9] des deux périphrases : "" (-).(-)>0 " et " (+).(+)>0 ". " [ibid, p. 56]

Ceci le conduit à considérer que :

" la coordination entre des représentations relevant de systèmes sémiotiques différents n'a rien de spontané. [...] Un travail d'apprentissage spécifique centré sur la diversité des systèmes de représentation, sur l'utilisation de leurs possibilités propres, sur la comparaison par mise en correspondance et sur les " traductions " mutuelles de l'un dans l'autre semble nécessaire pour la favoriser. " [ibid, p.6]

Il fait ainsi l'hypothèse qu'un apprentissage de ce type, lorsqu'il est pris en compte, peut produire un saut qualitatif dans le développement des compétences et des performances des étudiants.

Duval souligne également le fait que, si dans l'enseignement les activités cognitives de formation et de traitement sont bien prises en compte, en revanche les activités cognitives de conversion sont supposées comme allant de soi et sans rapport direct ni avec la compréhension des objets mathématiques ni avec leur conceptualisation.

Divers travaux en didactique des mathématiques ont exploité les analyses en termes de registres développées par Duval et ce, dans des domaines très divers. Compte-tenu de notre thème de recherche, nous exemplifierons cette approche en nous référant à la thèse de Pavlopoulou qui étudie les questions de coordination de registres de représentation sémiotique, justement dans le domaine de l'algèbre linéaire.

A) UN EXEMPLE DE COORDINATION DE REGISTRE EN ALGEBRE LINEAIRE

Pavlopoulou se situe directement dans la perspective développée par Duval, tout en se centrant sur l'apprentissage des notions de vecteur, de combinaison linéaire, de dépendance et d'indépendance linéaire, dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$. Elle distingue, comme indiqué plus haut, trois registres de représentation sémiotique, à savoir :

- le registre graphique (G) : où un vecteur est représenté par une " flèche " dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.
- le registre de l'écriture symbolique (S) : où un vecteur est représenté par la combinaison linéaire de deux ou trois vecteurs de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, en particulier ceux de la base canonique.

---

[9] **globalisation descriptive** : R. Duval définit la globalisation descriptive à travers l'exemple suivant :
Un quadrilatère vérifiant l'une des conditions suivantes est un parallélogramme :
(1) les deux côtés opposés sont parallèles,
(2) Deux côtés opposés sont parallèles et ont même longueur. (collection Pythagore 1987, p.162 - 163)
L'énoncé (1) est un cas de globalisation descriptive. Comme l'énoncé (2), lequel coordonne deux propositions indépendantes, l'énoncé (1) requiert deux vérifications indépendantes l'une de l'autre mais il les formule en une seule proposition.

- le registre des tableaux (T) : où un vecteur est représenté par une matrice colonne avec deux ou trois lignes ($\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, représentation d'un vecteur par ses coordonnées).

La conversion entre registres suppose que soient identifiés les traits sémiotiques relatifs à chaque registre et que soient mis en relation les traits spécifiques des différents registres. Illustrons ceci par un exemple extrait de la thèse :

Variations dans le registre des tableaux de la représentation d'un vecteur dans le plan		**Variations concomitantes dans le registre de l'écriture symbolique**
Variables	Valeurs	
une case remplie par un coefficient non nul	- case remplie par un coefficient positif - case remplie par un coefficient négatif	L'objet décrit se présente comme multiple[1] (positif ou négatif respectivement) de l'objet de référence qui a la valeur 1 dans la même ligne.
deux cases remplies par des coefficients non nuls	- les deux cases remplies par des coefficients positifs - une case remplie par un coefficient positif et l'autre case par un coefficient négatif - une case remplie par un coefficient négatif et l'autre case par un coefficient positif - les deux cases remplies par des coefficients négatifs	L'objet décrit se présente comme la somme de multiples[1] de chaque objet de référence.

Tableau 6 : Variations dans le registre des tableaux et variations concomitantes dans le registre de l'écriture symbolique de la représentation d'un vecteur dans le plan.

[Pavlopoulou, 1994, p.136]

Analysant des manuels français et anglais d'enseignement des débuts de l'algèbre linéaire, elle souligne que peuvent coexister divers registres mais que, même si c'est le cas, les problèmes de conversion entre registres ne sont pas posés explicitement en termes d'apprentissage et que, de plus, il existe des sens de conversion fortement privilégiés.

- L'ouvrage de Cairoli (1987), par exemple, est représentatif, selon elle, des ouvrages avec utilisation quasi-exclusive du registre symbolique (les représentations graphiques sont rares, le registre des tableaux intervient uniquement dans des exemples). C'est selon Pavlopoulou le cas

général des ouvrages qui avancent assez rapidement et cela est sans doute lié à des raisons d'économie sémiotique. Il n'y a pas d'activités de conversion proposées et, par exemple, les notions de dépendance et indépendance linéaire auxquelles elle s'intéresse particulièrement sont visualisées d'abord dans le registre graphique, en dimension 3, mais il n'y a ni traitement dans ce registre graphique, ni conversion explicite de cette visualisation dans le registre symbolique. Le travail est, après cette introduction, directement mené dans le registre symbolique.

- L'ouvrage de Strang (1988), au contraire, utilise une grande diversité de registres de représentation pour introduire les notions d'algèbre linéaire. Par exemple, pour les systèmes linéaires 2x2, en dehors de la classique association système - droites, il associe au système linéaire une interprétation en termes de combinaison linéaire de vecteurs dans le registre des tableaux et une représentation de cette combinaison linéaire dans le registre graphique ; les notions de dépendance et d'indépendance linéaires sont introduites en utilisant le registre de l'écriture symbolique accompagné de la langue naturelle mais l'auteur passe très vite à la visualisation de la propriété dans l'espace puis aux représentations dans le registre des tableaux. Le registre des tableaux joue dans cet ouvrage un rôle privilégié mais, comme le souligne Pavlopoulou, les règles de passage entre registres ne sont généralement pas explicitement données et il n'y a pas de conversions systématiques d'un registre dans un autre.

Sur la base de ces analyses, Pavlopoulou organise alors une séquence didactique, avec des étudiants de Mise à Niveau de première année d'université (étudiants ayant déjà suivi sans succès un enseignement traditionnel), son but étant de favoriser la coordination des registres identifiés et d'étudier l'effet cognitif de telles activités.

Suivant un schéma expérimental classique (groupe expérimental, groupe témoin, pré-test et post test), elle montre que les connaissances de conversion se construisent mal spontanément (pré-test) et met en évidence l'effet positif de la séquence didactique élaborée (post-test). Ainsi les résultats au post-test montrent essentiellement que :

- en ce qui concerne l'articulation des registres, les étudiants des groupes expérimentaux réussissent les tâches demandées puisque leurs taux de réussite oscillent entre 0.80 et 1.00. Par contre, les étudiants témoins n'augmentent pas leurs taux de réussite par rapport aux résultats du pré-test : il reste compris entre 0.11 et 0.54.
- en ce qui concerne l'approche de la notion de vecteur, la grande majorité des étudiants des groupes expérimentaux (0.80) semble avoir réussi à dissocier le vecteur de sa représentation "géométrique". Par contre, dans les groupes témoins, aucune évolution n'a pu être remarquée.

- pour les tâches autres que celles de pur changement de registre, elle note aussi une différence significative de réussite entre les groupes expérimentaux et témoins ; c'est le cas par exemple pour la tâche suivante : " Donner un exemple de vecteurs avec une propriété donnée " (témoin : 0.14, expérimentaux : 0.61) [ibid, p.198]
- les exercices où une difficulté de type logique intervient sont les items les moins réussis par tous les étudiants, mais Pavlopoulou souligne que le taux de réussite des groupes expérimentaux est cependant de 20% supérieur à celui des groupes témoins.

Les résultats résumés ci-après montrent les différences trouvées entre groupes expérimentaux et témoins au post-test concernant les différents sens de conversion (espace $\mathbf{R}^3$, 118 étudiants).

	G → S	S → G	T → G	G → T	T → S	S → T
exp.1 : 31	1.00	1.00	1.00	.84	.94	1.00
exp.2 : 32	.91	.94	.97	.91	.84	.97
exp.3 : 20	.65	.95	1.00	.95	.80	.90
tém.1 : 23	.13	.43	.48	.39	.00	.48
tém.2 : 12	.17	.67	.92	.83	.08	.67

Tableau : Résultats post - test concernant les différents sens de conversion [ibid, p. 201 - 202]

Pavlopoulou souligne en conclusion que cet enseignement expérimental non seulement a été efficace mais qu'il a notamment permis de :

- " faire apparaître des difficultés généralement non remarquées parce qu'elles se situent à un niveau considéré comme élémentaire. [...]
- faire distinguer clairement l'objet mathématique de ses représentants. [..]
- favoriser un transfert des connaissances acquises. " [Pavlopoulou, 1994, p. 234 - 235]

Dans notre propre travail, nous reprendrons les distinctions de registres faites par Pavlopoulou, en considérant le registre des tableaux et des matrices, mais en distinguant dans le registre des écritures symboliques plusieurs sous-registres pour prendre en compte les différences sémiotiques qui sous-tendent les différences entre les points de vue considérés ainsi que les différents degrés d'explicitation des objets manipulés.

III.3. NOTION DE POINT DE VUE

Le travail des mathématiciens exige aussi d'autres types de flexibilité et, en particulier, ce que nous désignerons par la suite, comme des changements de point de vue. Comme souligné par Thurston (Thurston, 1995) :

> " On peut penser à la dérivée comme :
>
> 1. Infinitésimal : le rapport du changement infinitésimal de la valeur de la fonction au changement infinitésimal de la variable.
>
> 2. Symbolique : la dérivée de x^n est nx^{n-1}, la dérivée de sin(x) est cos(x), la dérivée de fog est f'og*g', etc.
>
> 3. Logique : f'(x)=d si et seulement si, pour chaque ε, il existe un δ tel que si
>
> $0 < |\Delta x| < \delta$ alors $|[f(x+\Delta x) - f(x)]/\Delta x - d| < \varepsilon$
>
> 4. Géométrique : la dérivée est la pente de la tangente au graphe, si le graphe a une tangente en ce point.
>
> 5. Taux : La vitesse instantanée de f(t) si t est le temps.
>
> 6. Approximation : la dérivée d'une fonction est la meilleure approximation linéaire de cette fonction près d'un point.
>
> 7. Microscopique : la dérivée d'une fonction est la limite de ce que vous voyez sous un microscope en grossissant de plus en plus.
>
> Plutôt qu'une liste de différentes définitions logiques, ceci est une liste de différentes façons de concevoir la dérivée, différentes façons de la penser ". [ibid, p. 10]

Et comme il le souligne quelques lignes plus loin :

> " Cette liste continue ; il n'y a pas de raisons pour qu'elle s'arrête jamais [...] Nous pouvons penser, à un certain moment, que nous savons tout ce qu'il y a à dire sur un certain sujet, mais de nouvelles visions des choses nous attendent au tournant. " [ibid, p. 10]

En didactique cette notion n'est pas aussi bien définie que les notions de cadre et de registre et, en dépit des efforts de certains auteurs, elle nous semble rester relativement vague et proche du sens commun. Nous présenterons dans ce qui suit quelques tentatives faites pour la clarifier.

A) LA NOTION DE POINT DE VUE SELON ROBERT ET TENAUD

Tenaud s'intéresse dans sa thèse à l'enseignement de la géométrie en terminale C, en faisant l'hypothèse que l'interaction dialectique d'un enseignement de méthodes et d'un travail régulier en petits groupes sur des exercices adaptés est bénéfique pour l'apprentissage. L'utilisation de méthodes suppose un certain classement des problèmes à résoudre ainsi qu'une identification des stratégies et techniques disponibles. C'est au niveau des méthodes générales qu'apparaît la notion de point de vue:

" Dans ces conditions, on peut d'une part exposer aux élèves des méthodes générales, comme l'utilité des changements de cadres, stratégies, points de vue, ou formalisations dans les résolutions de problèmes. " [Robert et Tenaud, 1989, p. 36]

Les changements de point de vue concernent ici principalement les figures géométriques et jouent un rôle important du fait des stratégies qu'ils peuvent amorcer. Robert et Tenaud, pour illustrer ceci, considèrent les exemples suivants :

- La figure suivante peut être interprétée comme une droite tangente à un cercle, un cercle tangent à une droite ou une droite et un cercle tangents; ces trois descriptions ne sont pas équivalentes du point de vue des stratégies éventuelles qu'elles peuvent amorcer.

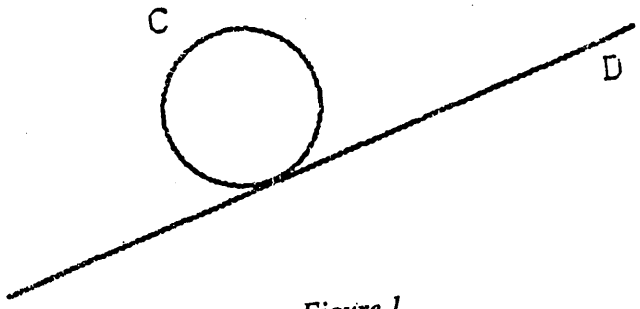


Figure 1

- Pour interpréter le fait que trois droites sont concourantes, on peut utiliser le fait qu'elles passent par un même point, ou qu'il existe un point appartenant à chacune d'elle, ou encore que le point d'intersection de deux d'entre elles est sur la troisième.

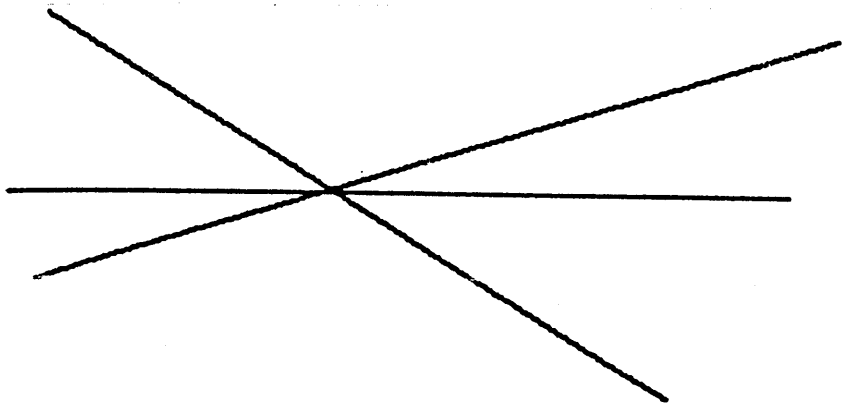


Figure 2

- Un point O est sur la médiatrice d'un segment [AB] s'il vérifie OA=OB mais aussi si la perpendiculaire menée par O à la droite (AB) passe par I le milieu de [AB].

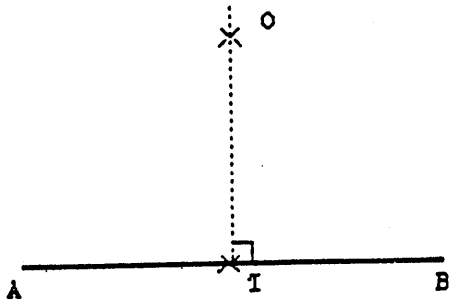


Figure 3

Elles illustrent le rôle joué par de tels changements de point de vue, dans la résolution de problèmes, à partir du problème suivant :

" Soit deux droites qui se coupent en un point O en dehors de la feuille de papier sur laquelle on travaille. Soit I un point de la feuille; tracer la droite (OI) avec une règle et un compas.

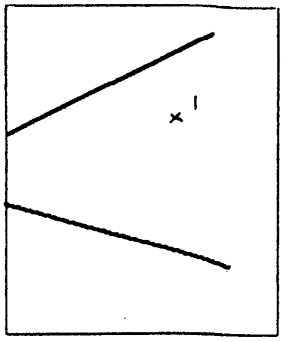


Figure 4

Il s'agit d'un problème de construction; on peut reconstituer une configuration (classique) dont la droite cherchée est un des éléments, ou bien utiliser une transformation pour obtenir une figure semblable à la figure initiale mais dans la feuille, dans ce dernier cas on peut alors construire l'image de la droite cherchée et y revenir par transformation inverse. Ces choix font partie (en principe) des connaissances méthodologiques des élèves.

Si on adopte la première piste, plusieurs points de vue sont encore possibles. Citons en un. Une configuration de base familière, celle du parallélogramme et de ses diagonales qui se coupent en leur milieu, permet par exemple la reconstitution suivante, au moins dans certains cas (première figure ci-dessous) : on fait jouer à I le rôle d'un sommet du parallélogramme et à O le rôle du sommet opposé, les côtés du parallélogramme étant respectivement portés par les deux droites et parallèles à ces droites. Le milieu de la diagonale joignant les sommets portés par les droites données est le point intermédiaire permettant de construire la droite (OI).

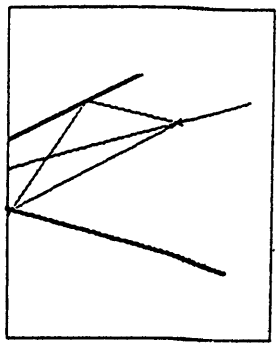


Figure 5

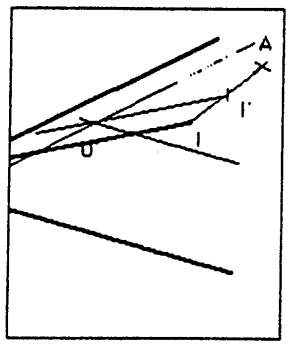


Figure 6

> Dans le deuxième ordre d'idées (deuxième figure ci-dessus), il s'agit de choisir une transformation convenable; on peut choisir une homothétie qui réduit la figure pour être sûr de faire "revenir" O dans la feuille. Si on prend comme centre d'homothétie un point A quelconque, la droite cherchée sera la parallèle à la droite image (O'I') menée par I. " [ibid, p.43-45]

Même si la notion de point de vue ne fait pas ici l'objet d'une définition précise, on voit bien qu'elle n'est pas réductible aux deux notions précédemment introduites. Les distinctions effectuées se situent dans le cadre géométrique et dans le registre des dessins. Mais, dans ce travail, comme dans celui concernant les registres, l'accent est mis sur la nécessité de travailler à certains moments, de façon explicite, les changements de points de vue nécessaires pour aider l'élève au niveau heuristique.

B) LA NOTION DE POINT DE VUE SELON CASTELA

Dans la recherche précédente, la notion de point de vue est explicitement mentionnée, sans faire pour autant l'objet d'une définition précise. On trouve en revanche un essai de définition de cette notion dans un article de Castela concernant une recherche sur les conceptions de la notion de tangente développées par les élèves au cours de leur scolarité secondaire. Castela, en exploitant essentiellement les réponses à un questionnaire, montre la transition difficile entre d'une part des conceptions de la tangente liées à l'objet " tangente au cercle ", le premier rencontré par les élèves, conceptions centrées sur les positions respectives globales et l'unicité du point d'intersection et d'autre part les conceptions sous-jacentes à l'enseignement de l'analyse qui mettent l'accent sur des propriétés locales et la communauté de " direction ". Pour étudier cette transition, elle éprouve le besoin de distinguer l'analyse effectuée au niveau mathématique de l'analyse proprement dite des conceptions des élèves et c'est pour marquer cette distinction qu'elle introduit, au niveau mathématique, la notion de point de vue comme étant :

> " un découpage dans le corps de savoirs mathématiques sur un objet donné, rassemblant définitions, théorèmes, situations et signifiants. Il introduit une différenciation au sein des propriétés identifiées "naturellement" par le mathématicien car logiquement équivalentes. " [Castela, 1995, p.10]

Castela distingue en fait trois points de vue en ce qui concerne la notion de tangente au cercle : " normale au rayon ", " unicité du point d'intersection ", " limite des sécantes ".

Elle souligne que :

> " ce concept (de point de vue) relève donc nettement de l'analyse du savoir, même si, dans les choix qu'il opère pour définir les points de vue, le didacticien ne peut complètement mettre entre parenthèses les comportements des élèves puisqu'il s'agit bien in fine de les modéliser. Chaque point de vue ainsi dégagé donne usuellement naissance à une conception derrière laquelle il s'efface. " [ibid, p.10 - 11]

Elle propose ensuite de définir des conceptions où coexistent des points de vue différents pour décrire certaines étapes transitoires de l'apprentissage du concept de tangente parce que celles-ci lui permettront d'interpréter en termes de cohérence, les réponses contradictoires apportées par certains élèves aux items du questionnaire à la base de sa recherche.

A partir de là, elle souligne que l'analyse :

> " de telles conceptions supposera de préciser comment chaque point de vue y intervient, avec quel contenu, avec quelle déformation éventuellement non respectueuse du fonctionnement scientifique (généralisation abusive, exception à règle...). " [ibid, p.11]

Ceci l'amène finalement à distinguer pour l'objet tangente, de façon générale trois points de vue :

- Le point de vue « Analyse » qui regroupe les trois définitions équivalentes introduites par le calcul différentiel ; la tangente y est caractérisée comme la droite qui approche le mieux la courbe localement.

- Le point de vue « Intersection » qui réunit les caractérisations liées au nombre de points d'intersection et à la position relative; il est global, ignore toute idée d'approximation d'une courbe par une autre et peut être généralisé par les élèves en conservant l'une ou l'autre de ces propriétés, voire les deux ; en cela il diffère du suivant.
- Le point de vue « Normale au rayon » qui fait intervenir les notions d'orthogonalité, centre et rayon, lesquelles peuvent difficilement être étendues aux courbes étudiées en analyse sans que soit introduite l'idée d'une approximation locale par un cercle.

Elle exploite ensuite ces points de vue pour analyser l'évolution des conceptions des élèves au fil de la scolarité du lycée. Elle montre aussi les difficultés que rencontrent les élèves à restructurer leurs connaissances anciennes liées à la tangente au cercle, pour y intégrer les caractéristiques du point de vue " Analyse ".

La notion de point de vue qui apparaît dans ce travail, proche de la notion de conception, est donc, on le voit, sensiblement différente de celle rencontrée dans la thèse de Tenaud. Elle répond plus au besoin de distinguer a priori des découpages cohérents au niveau de l'organisation du savoir. Elle est relativement détachée d'analyses en termes de cadre ou de registre.

C) LA NOTION DE POINT DE VUE SELON ROGALSKI

Les travaux de Rogalski concernent quant à eux l'enseignement de l'algèbre linéaire et utilisent simultanément les notions de cadre, de registre et de point de vue.

En ce qui concerne les cadres, Rogalski distingue uniquement deux cadres : le cadre géométrique et le cadre algébrique. Dans chacun de ces deux cadres, selon lui, fonctionnent plusieurs registres de représentation et par exemple, pour les vecteurs : le registre des dessins (en dimensions 2 et 3) et le registre symbolique dans le cadre géométrique, le registre des tableaux de nombres et le registre symbolique dans le cadre algébrique. On retrouve là en fait des distinctions proches de celles effectuées par Pavlopoulou.

La notion de point de vue est introduite dans les termes suivants :

> " Des points de vue différents sur un objet mathématique sont des manières différentes de le regarder, de le faire fonctionner, éventuellement de le définir. En ce sens, regarder un objet dans différents cadres, c'est avoir différents points de vue. Mais on peut avoir plusieurs points de vue dans un même cadre. "[Rogalski, 1995, notes du séminaire à São Paulo, Brésil]

Dans le cadre de ce qu'il appelle la géométrie vectorielle du secondaire (en fait de la géométrie euclidienne non théorisée) et dans celui de la géométrie analytique, il va distinguer par exemple, à propos de droites et plans, deux points de vue, qu'il appellera respectivement " paramétrique " et

« cartésien ». En fait, ces deux points de vue apparaissent très liés ici aux modes de définitions et/ou types de représentations choisis pour ces objets.

En géométrie analytique, le point de vue « cartésien » est ainsi associé à une représentation par des équations implicites : en dimension 3, un plan est ainsi défini par une équation linéaire, une droite est vue comme intersection de deux plans et définie par un système de deux équations linéaires. Le point de vue « paramétrique » est, comme son nom l'indique, associé à une représentation paramétrique de ces objets, c'est à dire une représentation affine dépendant de deux paramètres pour le plan et d'un seul paramètre pour la droite.

Dans le cadre de la géométrie vectorielle, toujours en dimension 3, Rogalski associe le point de vue cartésien à la vision d'un plan comme défini via un vecteur orthogonal et l'équation $\vec{AB}.\vec{V} = 0$, celle de la droite comme définie comme intersection de deux plans, c'est à dire via deux vecteurs indépendants qui lui sont orthogonaux. Le point de vue paramétrique est associé pour le plan, à la définition de $\vec{AB}$ comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour la droite à la definition de $\vec{AB}$ comme colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ non nul.

Ces deux points de vue se généralisent en fait à des courbes quelconques et Rogalski souligne qu'un même problème peut être facile selon un point de vue, difficile selon un autre : par exemple, exhiber un point d'une courbe est facile si l'on dispose d'une représentation paramétrique, mais peut devenir difficile si l'on ne dispose que d'une représentation cartésienne ; en revanche vérifier qu'un point appartient à une courbe est plus facile à faire à partir de représentations cartésiennes. Suivant les points de vue adoptés, certaines particularités de l'objet sont plus ou moins visibles, plus ou moins cachées et, même si, comme dans le cas ci-dessus, points de vue et registres de représentations semblent étroitement dépendants, pour lui, un changement de point de vue ne se réduit pas à un changement de registre sémiotique, " il s'exprime par un théorème ".

Il donne d'ailleurs dans le texte cité divers exemples où la notion de point de vue apparaît plus ou moins dépendante des registres sémiotiques en jeu.

En algèbre, une inégalité peut s'exprimer sous diverses formes, par exemple :

$|x-2|<3$ $\quad$ $d(x,2)<3$ $\quad$ $-1<x<5$ $\quad$ $x\in]-1,5[$

qui selon lui mettent en jeu des points de vue différents, même si elles se situent toutes dans le registre symbolique.

En analyse, des formules différentes pour une même fonction peuvent donner à voir des propriétés différentes de cette fonction et correspondre à des points de vue plus ou moins efficaces pour répondre à certaines questions. Soulignons que l'on rejoint ici des distinctions proches de celles

effectuées par certains chercheurs en didactique de l'algèbre entre sens et dénotation (Drouhard, 1995).

Enfin, certains des exemples qu'il donne renvoient à l'idée de méthode, par exemple quand il distingue deux points de vue possibles pour prouver a=b : soit montrer que $a \leq b$ et $b \leq a$, soit montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, $a \leq b+\varepsilon$ et, que pour tout $\varepsilon>0$, $b \leq a+\varepsilon$.

On voit donc à l'oeuvre ici une notion de point de vue très extensive et recoupant par ailleurs des catégories d'analyse didactiques diverses, ce qui n'aide pas à sa caractérisation.

III. 4. POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE : LES PERSPECTIVES DE NOTRE TRAVAIL

Les exemples qui précèdent montrent la difficulté qu'il y a à définir la notion de point de vue, qui semble servir à regrouper, en quelque sorte par défaut, les unités de découpage qui échappent aux classifications classiques en termes de conceptions, cadres et registres.

Dans notre recherche, comme nous l'avons déjà annoncé, nous avons essayé de travailler plus spécifiquement l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique sur l'importance de laquelle notre attention avait été attirée, via la recherche menée avec Rogalski dans le cadre de notre DEA. En essayant de comprendre plus précisément ce que recouvre la flexibilité entre ces deux points de vue, comment elle est gérée dans l'enseignement avec quels effets sur les étudiants, nous espérons contribuer à éclairer les questions que pose l'utilisation de cette notion en didactique.

Pour un sous-espace vectoriel donné, nous dirons que nous adoptons un point de vue paramétrique quand nous concevons ce sous-espace comme sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs, que cet ensemble soit minimal ou non. Ce point de vue peut s'exprimer bien évidemment dans plusieurs registres, symboliques, graphiques ainsi que dans le registre de la langue naturelle. Nous dirons que nous adoptons un point de vue cartésien quand nous concevons ce sous-espace comme l'ensemble des vecteurs solutions d'une équation ou d'un système d'équations linéaires. Nous ne prétendons pas épuiser ainsi tous les points de vue possibles sur un sous-espace vectoriel. De plus, le point de vue cartésien, suivant les formulations que l'on envisage, suivant les notions d'algèbre linéaire que l'on fait intervenir, est susceptible d'interprétations diverses dont l'unification est loin d'aller de soi. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre II.

De plus, nous opérerons, dans la suite du travail, au niveau des représentations sémiotiques, les distinctions suivantes, qui nous paraissent a priori importantes pour analyser sur un plan sémiotique, le fonctionnement des deux points de vue :

- les représentations paramétriques « **explicite-intrinsèque** » telles que :

$A = \text{lin}\{a, b\} = \{v/\ v = \alpha a + \beta b, \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\}$,

où le sous-espace est caractérisé par une représentation où la combinaison linéaire est apparente et les vecteurs générateurs sont donnés dans le registre symbolique intrinsèque.

- les représentations paramétriques « **explicite-tableau** » telles que :

$A = \text{lin}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} = \{\alpha (1, 0, 0) + \beta (0, 1, 0), \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$,

où le sous-espace est caractérisé par une représentation où la combinaison linéaire est apparente et les vecteurs générateurs sont donnés dans le registre tableau, en ligne ou en colonne.

- les représentations paramétriques « **implicite-équation** » telles que:

$B = \text{lin}\ \{\ (1, -2, 1, 0),\ (1, -3, 3, 1)\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x = \alpha + \beta, y = -2\alpha - 3\beta, z = \alpha + 3\beta,$

$t = \beta$, avec α et $\beta \in \mathbf{R}$ }

où le sous-espace est caractérisé par les coordonnées d'un vecteur générique, chaque coordonnée de ce vecteur étant exprimée en fonction du ou des paramètres via une équation.

- les représentations paramétriques « **implicite-tableau** » telles que :

$A = \{(\alpha, \beta, 0), \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$,

où le sous-espace est caractérisé par une représentation où il y a condensation des vecteurs générateurs en un seul vecteur donné sous forme de tableau. L'interprétation suivant le point de vue paramétrique suppose alors une décondensation.

- les représentations « **cartésiennes intrinsèques** » telles que :

$A = \{v/\ T(v) = 0\}$, T étant un opérateur linéaire,

où le sous-espace est caractérisé comme noyau d'une application linéaire, les vecteurs étant représentés dans le registre symbolique intrinsèque.

- des représentations « **cartésiennes explicites** » telles que :

$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / z = 0 \text{ et } 2x + y = 0\}$,

où le sous-espace est caractérisé par un système d'équations linéaires.

Comme Rogalski, nous faisons l'hypothèse que la flexibilité entre points de vue cartésien et paramétrique n'est pas réductible à une simple flexibilité sémiotique entre registres de représentation et que l'apprentissage de techniques de traduction et conversion sont insuffisantes à

sa maîtrise. Cette maîtrise met plus profondément en jeu, selon nous, le rapport aux notions fondamentales de l'algèbre linéaire et leur fonctionnement dans les divers cadres en jeu. C'est cette hypothèse que nous travaillerons dans les chapitres suivants.

III.4.1. APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE ET ANALYSE DE LA FLEXIBILITE ENTRE POINTS DE VUE

Sur un plan théorique plus global, notre travail s'inscrit dans l'approche anthropologique du didactique développée par Chevallard. Il s'agit d'étudier sur le plan mathématique le paysage de cette flexibilité puis ensuite d'analyser les rapports institutionnels et personnels qui vivent relativement à ces deux points de vue et à leur articulation. Nous nous référerons plus particulièrement aux travaux récents de Chevallard (1995 et 1996) et de Bosch (1995) en termes de technique - technologie - théorie d'une part, ostensifs - non ostensifs d'autre part. Nous présentons, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, ce que nous retenons principalement de ces travaux.

Pour Chevallard, l'activité mathématique, comme toute activité humaine se laisse décomposer en un certain nombre de tâches. Pour accomplir ces tâches, sont développées des techniques, qui pour être viables doivent apparaître compréhensibles et justifiables, ceci donnant lieu au développement de " technologies " ou discours sur la technique, ces technologies faisant à leur tour l'objet de technologies qu'il identifie comme des théories.

Etudiant la flexibilité entre point de vue cartésien et paramétrique et la voyant comme un émergent d'un certain nombre de pratiques mathématiques, il sera ainsi pour nous particulièrement important d'essayer de cerner dans quels types de tâches mathématiques elle peut a priori trouver à vivre et à se développer, d'identifier les techniques mathématiques existantes pour effectuer ces tâches, de préciser les différents niveaux de discours qui sont susceptibles d'accompagner ces techniques, à titre de commentaires et de justifications, en exploitant éventuellement la distinction entre technologie et théorie, si elle nous apparaît ici pertinente. Ceci sera l'objet des deux chapitres suivants. C'est à ce type d'analyse a priori que nous rapporterons ensuite les pratiques institutionnelles effectives, dans le chapitre IV cherchant à déterminer comment sont exploitées les marges de manoeuvre a priori existantes puis à cerner leurs effets sur les rapports construits par les étudiants aux points de vue considérés, dans les chapitres VI et VII.

Même si l'approche anthropologique de Chevallard et celle développée par Duval sont très éloignées l'une de l'autre, elles se rejoignent par l'intérêt que toutes deux apportent au sémiotique et le refus de voir dans cette dimension de l'activité mathématique un simple sous-produit de la conceptualisation. Chez Chevallard, cet intérêt et ce refus vont s'exprimer via les notions

d'ostensifs et non ostensifs et le principe de l'existence de rapports dialectiques dans leur développement.

> " D'un côté, il y a ainsi des objets que je nomme *ostensifs*, tels un nom, une notation, un graphe, ou encore un schéma gestuel, qui peuvent être *réellement présents* et que l'on peut *effectivement manipuler* dans leur matérialité. D'un autre côté, il y a des objets *non ostensifs*, que je nomme aussi *émergents*, et que l'on peut seulement *évoquer* à l'aide des objets ostensifs. Lorsque le mathématicien dit qu'il manipule la fonction logarithme, c'est en vérité certains des objets ostensifs associés qu'il manipule. Bien entendu objets ostensifs et non ostensifs viennent à l'existence et vivent *ensemble* au sein de la pratique mathématique qui les réunit : ils se déterminent réciproquement. Je ne peux "manipuler" la fonction logarithme qu'à travers certains objets ostensifs associés ; mais, inversement, je ne peux manipuler ces objets ostensifs comme je le fais quand je prétends manipuler la fonction logarithme si n'existe pas pour moi l'objet " Fonction logarithme ". " [Chevallard,1996, p.50]

Rejetant, en référence à Derrida le logocentrisme de nos civilisations européennes, il insiste sur le fait que l'usage des mots dans l'activité mathématique ne peut se comprendre qu'à partir de l'idée englobante d'outil ou d'instrument sémiotique :

> " Au lieu de tenter de penser le formalisme mathématique comme langue (formelle), il faut à l'inverse, penser la langue (verbale) comme participant de la panoplie d'instruments sémiotiques du travail mathématique. [...] La notion d'instrument sémiotique constitue le point de départ d'une théorie unitaire du travail mathématique. Les mots, les symboles - arithmétiques et algébriques, et ceux de tous les formalismes qu'on voudra --, les gestes mêmes, articulés en systèmes de travail réglés, sont, tous ensemble, les instruments concrets - ostensifs - du travail mathématique. Tout système de travail, à cet égard, suppose la combinaison de plusieurs *registres sémiotiques* - oral, écrit, gestuel. " [ibid, p.52 - 53]

Cette analyse en termes d'ostensifs et non-ostensifs est particulièrement bien précisée et exploitée par Bosch dans sa thèse (Bosch, 1995). Les objets ostensifs y apparaissent comme possédant deux valences : une valence instrumentale d'une part et une valence sémiotique d'autre part. La valence instrumentale d'un ostensif les spécifie en tant qu'instrument d'action, de production. Elle est locale, définie par rapport à un certain type de tâches : ainsi, les symboles $\sqrt{}$ et ½ ont une instrumentalité équivalente, selon elle, pour les calculs algébriques classiques, mais une instrumentalité différente quand il s'agit de dériver ou d'intégrer. La valence sémiotique d'un ostensif le spécifie comme instrument donnant à voir et, en ce sens, permettant d'apprécier le travail fait mais aussi d'envisager ce qui peut être fait.

A partir de là, Bosch propose d'analyser la dialectique entre les ostensifs et les non-ostensifs dans l'activité mathématique en mettant en évidence l'interdépendance entre les trois niveaux importés du champ linguistique que sont le niveau syntaxique qui renvoie aux contraintes formelles de formation et de manipulation, le niveau sémantique qui renvoie aux non-ostensifs associés et le niveau pragmatique qui renvoie aux pratiques effectives dans lesquelles l'ostensif est engagé.

> " El estudio del funcionamiento del complejo de ostensivos y no-ostensivos activados (por manipulación o evocación) en una actividad conduce a retomar et generalizar los sistemas de restricciones linguisticas llamados clásicamente " sintaxis " (relación entre ostensivos), " semántica " (relación entre ostensivos y

no-ostensivos) y " pragmática " (relación entre, por un lado, los ostensivos y no-ostensivos y, por otro, las tareas de las que emergen). Estos tres niveles son interdependientes y permiten afinar el análisis entre lo ostensivo y lo no-ostensivo en la actividad matemática. " [Bosch, 1995, p.62]

Ce qu'elle fera dans sa thèse, en s'attachant notamment au domaine de la proportionnalité.

En fait, nous retiendrons de ce qui précède, qu'il est nécessaire de dépasser le niveau d'analyse sémiotique en termes de registres comme nous avons pu la formuler plus haut, et les problèmes d'articulation entre registres. Une analyse fine du travail sémiotique s'impose, en prenant en compte les différents types d'ostensifs auxquels nous pourrons avoir accès, les différentes valences des ostensifs utilisés et en essayant de reconstituer les possibles dialectiques sous-jacentes entre ostensifs et non-ostensifs.

CHAPITRE II

LE PAYSAGE MATHEMATIQUE DE L'ARTICULATION ENTRE POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE

I. INTRODUCTION

Dans son livre « Algèbre linéaire et géométrie élémentaire » J.Dieudonné souligne que :

> « Il me semble qu'il y a tout intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de l'algèbre linéaire, à lui apprendre « à penser linéairement », ce qui est d'autant plus facile qu'il y a peu de notions en mathématiques qui soient plus simples à définir que celles d'espace vectoriel et d'application linéaire. A notre époque d'intense prolifération dans toutes les sciences, tout ce qui condense et tend à l'unification a une vertu qu'on ne saurait surestimer » [Dieudonné, 1964, p.12]

Les rapports entre les deux points de vue cartésien et paramétrique que nous avons introduits au chapitre précédent participent de cette apparente simplicité. En effet, en dimension finie (et nous nous limiterons dans ce chapitre à ce cas là ainsi qu'à des espaces vectoriels sur **R** ou **C**), ils peuvent s'exprimer très simplement de la façon suivante :

> **« Un sous-espace vectoriel de dimension r d'un espace vectoriel de dimension n peut être caractérisé de façon minimale :**
>
> **- soit par un système de n-r équations linéaires homogènes ;**
>
> **- soit par une représentation paramétrique dépendant de r paramètres ».**

Il existe de plus des algorithmes simples, basés sur les techniques de résolution des systèmes linéaires, permettant de passer d'un type de représentation à un autre, qu'il s'agisse d'ailleurs de représentations cartésiennes et paramétriques minimales ou non. Nous préciserons ce point dans la première partie de ce chapitre.

Mais cette simplicité n'est-elle pas simple apparence ? L'énoncé formulé ci-dessus, les techniques algorithmiques de passage d'un type de représentation à l'autre, sont-ils les clefs réelles d'une articulation efficace entre les deux points de vue ? Les erreurs massives d'étudiants auxquelles nous avons été confrontée lors de notre mémoire de DEA nous conduisaient à en douter. C'est pourquoi, il nous a semblé nécessaire de chercher à décrire le plus précisément possible, au-delà de la seule perspective algorithmique, le paysage mathématique dans lequel s'inscrit la mise en relation des deux points de vue cartésien et paramétrique.

Nous le ferons, en nous référant tout d'abord à la dualité qui, conceptuellement structure aujourd'hui ce paysage pour le mathématicien. Mais peut-il en être de même pour l'étudiant débutant en algèbre linéaire ? La place marginale qu'occupe en général la théorie de la dualité dans les premiers cours d'algèbre linéaire nous laisse penser que, pour bon nombre d'enseignants, la réponse, pour le moins pragmatique, à cette question est sans doute : non. Pour nourrir la réflexion, envisager d'autres rapports possibles entre les dimensions technique et conceptuelle de l'articulation ou, si l'on se réfère à la théorisation anthropologique développée par Chevallard en termes de technique / technologie / théorie, pour envisager les technologies intermédiaires qui peuvent prendre place, dans une première approche de l'algèbre linéaire entre la technique de l'articulation et la théorie de la dualité qui la fonde, il n'est sans doute pas inutile de s'interroger sur le développement historique de cette articulation. C'est ce que nous ferons dans la troisième partie de ce chapitre, en nous référant au travail de Dorier sur l'émergence de la notion de rang. Nous chercherons à y repérer des étapes clefs dans la structuration de l'articulation, à repérer aussi ce qui a pu faire obstacle à l'évolution et ce qui, en sens inverse, a pu la rendre possible.

Après ce "détour" historique, nous reviendrons au problème didactique : comment peuvent se situer par rapport à l'histoire comme par rapport à la vision actuelle « savante » de l'articulation, les formes d'organisation de l'articulation d'étudiants débutants en algèbre linéaire, qu'il s'agisse d'étudiants français ou brésiliens ? Nous aborderons cette question dans la quatrième partie de ce chapitre à partir de deux exemples de productions d'étudiants de première année de DEUG. L'étude de ces productions nous conduira dans une cinquième et dernière partie, à poser la nécessité de distinguer, pour les besoins de l'analyse, dans le paysage mathématique que nous cherchons à appréhender, différents cadres, à préciser les formes que peut prendre l'articulation des points de vue dans chacun d'eux ainsi que dans leurs inter-relations. Il en résultera une vision de l'articulation dont la complexité contraste singulièrement avec la simplicité mise en évidence au début du chapitre.

II. RAPPORTS ENTRE POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE : UNE VISION ALGORITHMIQUE

Nous avons affirmé dans l'introduction que l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique peut être gérée, de façon simple, par des algorithmes de passage d'un type de représentation à un autre. Dans cette partie, nous présentons une algorithmisation possible, basée sur la méthode de résolution des systèmes linéaires dite du pivot de Gauss. Nous l'avons privilégiée parce qu'il s'agit d'une méthode familière aux élèves français à partir du lycée et qui tend à occuper, tant en France qu'à l'étranger, une place de plus en plus importante dans

l'enseignement des débuts de l'algèbre linéaire (cf. (Rogalski, 1992), (Calvo, 1995), (Lang, 1975), (Strang, 1993), (Lima, 1995), (Boldrini, Costa, Figueiredo et Wetzler, 1980) par exemple).

Pour faciliter la lecture, nous avons choisi de faire, pour chaque passage, fonctionner d'abord la méthode sur un exemple numérique, considéré comme exemple prototypique, avant de passer à sa description générale. Nous préciserons également, le cas échéant, les moyens d'anticipation et de contrôle associés usuellement à l'utilisation des algorithmes. considérés.

A) PASSAGE D'UNE REPRESENTATION CARTESIENNE A UNE REPRESENTATION PARAMETRIQUE

Etant donné un sous-espace vectoriel caractérisé par une représentation cartésienne, minimale ou non, c'est à dire un système d'équations linéaires homogènes, la recherche d'une représentation paramétrique s'apparente à la recherche d'un système générateur du sous-espace. Si l'on cherche une représentation paramétrique minimale, le système générateur doit être libre, c'est-à-dire doit être une base du sous-espace. La résolution du système d'équations constituant la représentation cartésienne par la méthode du pivot de Gauss est un algorithme produisant une telle base. Ainsi cette technique évacue la question de la minimalité de la représentation paramétrique.

Considérons par exemple le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^5$ caractérisé par la représentation cartésienne suivante :

$$E = \left\{ (x,y,z,t,w) \in R^5 / \begin{array}{r} x+y+z+2t+w=0 \\ 2x-y+3z-4t+5w=0 \\ 8x-y+11z-8t+17w=0 \end{array} \right\}$$

L'application de la méthode du pivot de Gauss permet de ramener ce système au système triangulé suivant :

$$\begin{cases} x+y+z+2t+w=0 \\ -3y+z-8t+3w=0 \end{cases}$$

constitué de deux équations indépendantes.

Il s'ensuit immédiatement, en prenant x et y comme inconnues principales[1], une expression des solutions du système :

[1]On pourrait choisir également dans ce cas x et z, ce qui donnerait des coefficients plus simples, ou x et t, ou x et w, mais le choix de x et y, respectant l'ordre, correspond mieux à la vision algorithmique que nous développons ici.

$$E = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbf{R}^5 / x = -\frac{4}{3}z + \frac{2}{3}t - 2w \text{ et } y = \frac{1}{3}z - \frac{8}{3}t + w\}$$

dans laquelle on lit une représentation paramétrique du sous-espace des solutions, exprimée dans le registre des équations (cf. chapitre précédent) en fonction des trois paramètres z, t et w, le système générateur associé étant formé des trois vecteurs :

$(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, 0)$, $(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, 0, 1, 0)$, $(-2, 1, 0, 0, 1)$

ou, si l'on veut éliminer les dénominateurs, des trois vecteurs :

$(-4, 1, 3, 0, 0)$, $(2, -8, 0, 3, 0)$, $(-2, 1, 0, 0, 1)$

qui forment à l'évidence un système libre vu leurs trois dernières coordonnées

Conformément aux dénominations introduites dans le chapitre précédent, cette représentation paramétrique minimale peut s'exprimer dans divers autres registres :

- le registre tableau implicite :

$$E = \{(-\frac{4}{3}z + \frac{2}{3}t - 2w\ ,\ \frac{1}{3}z - \frac{8}{3}t + w\ ,\ z\ ,\ t\ ,\ w) \in \mathbf{R}^5 / z, t, w \in \mathbf{R}\}$$

- le registre tableau explicite :

$$E = \{z(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, 0) + t(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, 0, 1, 0) + w(-2, 1, 0, 0, 1) / z, t, w \in \mathbf{R}\}$$

Dans le cas général, la méthode du pivot appliquée au système d'équations aboutit comme précédemment à un système triangulé à coefficients non nuls sur la diagonale (on suppose bien sûr qu'il y a au départ au moins une équation non identiquement nulle) et l'expression des inconnues principales en fonction des inconnues secondaires s'interprète, de la même façon, en termes de représentation paramétrique nécessairement minimale.

Remarques :

- Lorsque le système numérique est triangulé, on connaît son rang : r, donc la dimension du sous-espace des solutions : n-r, et le nombre de paramètres d'une représentation paramétrique minimale: n-r.

- Si l'on sait au départ que le système d'équations donné est minimal, ces mêmes informations permettent de prévoir que la triangulation conduira à un système comportant le même nombre d'équations et d'anticiper le nombre de paramètres minimal requis.

Dans le cas d'un système comportant des paramètres, la même méthode est théoriquement utilisable mais les calculs à effectuer peuvent conduire à introduire différents cas particuliers, le rang pouvant varier en fonction des valeurs du ou des paramètres. Illustrons ceci par un exemple :

On considère le système $\begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 0 \\ x + \alpha\beta y + z = 0 \\ x + \beta y + \alpha z = 0 \end{cases}$, où α et β sont des paramètres.

Après avoir appliqué la méthode de pivot de Gauss, on arrive au système triangulé suivant:

$$\begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 0 \\ (-\beta\alpha + \beta)y + (-\alpha^2 + 1)z = 0 \\ (-\alpha^2 - \alpha + 2)z = 0 \end{cases}$$

Dans cet exemple, l'application de la méthode du pivot de Gauss n'est pas perturbée par les paramètres et on conclut directement à partir du système triangulé que le rang dépend des valeurs prises par $\beta(1-\alpha)$ et $(-\alpha^2-\alpha+2)$. Ce qui conduit à étudier les cas particuliers correspondants à : $\beta = 0$, $\alpha = 1$ et $\alpha = -2$.

Si $\beta \neq 0$ et $\alpha \notin \{-2, 1\}$, le système est de rang 3 et a pour seule solution le vecteur nul.

Si $\alpha = -2$, le système devient $\begin{cases} x + \beta y - 2z = 0 \\ 3\beta y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$, et son rang est égal à 2 pour tout $\beta \in \mathbf{R}$.

Si $\alpha = 1$, le système devient $\begin{cases} x + \beta y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$, et son rang est égal à 1 pour tout $\beta \in \mathbf{R}$.

Si $\beta = 0$ et $\alpha \notin \{-2, 1\}$, le système devient $\begin{cases} \alpha x + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + \alpha z = 0 \end{cases}$, et son rang est égal à 2.

Dans le cas de systèmes à paramètres, soulignons que si la notion de déterminant est disponible et le calcul du déterminant facile (comme dans cet exemple d'ordre 3 où le calcul direct par la règle de Sarrus est peu coûteux), on peut faire souvent précéder l'application de l'algorithme du pivot de Gauss du calcul du déterminant et de la recherche des valeurs des paramètres qui l'annulent, pour séparer commodément les différents cas à traiter.[2]

[2] Ceci peut se vérifier à la lecture de quelques manuels classiques.

B) PASSAGE D'UNE REPRESENTATION PARAMETRIQUE A UNE REPRESENTATION CARTESIENNE

Il s'agit cette fois, étant donné le sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs de composantes données, de déterminer une représentation cartésienne minimale de ce sous-espace. L'algorithme de passage est encore une fois basée sur la résolution d'un système d'équations linéaires homogènes par la méthode de Gauss.

Considérons par exemple, la famille de 5 vecteurs de $\mathbf{R}^5$:

a = (1, 2, 3, 0, 0), b = (1, 1, 3, 1, 2), c = (2, 3, 1, 0, 0), d = (2, 4, 6, 0, 0), e = (-2, -1, -6, -3, -6).

Le sous-espace engendré par ces vecteurs admet, de manière évidente, une représentation paramétrique pouvant s'exprimer, suivant le registre choisi :

- dans le registre des équations, par :

$$E = \left\{ (x,y,z,t,w) \in R^5 \;/\; \exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta) \in R^5, \begin{array}{rrr} x = \alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta - 2\theta \\ y = 2\alpha + \beta + 3\gamma + 4\delta - \theta \\ z = 3\alpha + 3\beta + \gamma + 6\delta - 6\theta \\ t = \beta - 3\theta \\ w = 2\beta - 6\theta \end{array} \right\}$$

- dans le registre tableau implicite, par :

E= {(α +β+ 2γ +2δ - 2θ, 2α +β + 3γ + 4δ -θ, 3α+ 3β + γ + 6δ - 6θ, β - 3θ, 2β - 6θ) $\in$ $\mathbf{R}^5$ / α, β, γ, δ, θ $\in$ **R**}

- dans le registre tableau explicite, par :

E = {α(1, 2, 3, 0, 0) + β(1, 1, 3, 1, 2) + γ(2, 3, 1, 0, 0) + δ(2, 4, 6, 0, 0) + θ(-2, -1, -6, -3, -6) / α, β, γ, δ, θ $\in$**R**}

D'où le système d'équations linéaires suivant (non homogène) :

$$\begin{array}{rrrrrr} \alpha + & \beta + 2\gamma + & 2\delta - 2\theta = x \\ 2\alpha + & \beta + 3\gamma + & 4\delta - \theta = y \\ 3\alpha + 3\beta + & \gamma + & 6\delta - 6\theta = z \\ & \beta & - 3\theta = t \\ & 2\beta & - 6\theta = w \end{array}$$

un vecteur (x,y,z,t,w) appartenant au sous-espace E, si et seulement si ce système admet des solutions. Autrement dit, la représentation cartésienne consiste en la condition de résolubilité du système dont les paramètres sont x, y, z, t et w.

L'application de la méthode du pivot de Gauss permet, une fois de plus, de ramener ce système à un système triangulé, ici le système suivant par exemple :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta - 2\theta &= x \\ -\beta - \gamma + 3\theta &= -2x + y \\ -\gamma &= -2x + y + t \\ 0 &= 7x - 5y + z - 5t \\ 0 &= -2t + w \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement une représentation cartésienne du sous-espace E : il est en effet caractérisé par les deux équations linéaires et homogènes qui déterminent les conditions de résolubilité du système.

$$E = \left\{ (x,y,z,t,w) \in R^5 \,/\, \begin{array}{r} 7x - 5y + z - 5t = 0 \\ -2t + w = 0 \end{array} \right\}$$

Cette représentation cartésienne est à l'évidence minimale.

Dans le cas général, la méthode du pivot de Gauss appliquée au système d'équations associé à une représentation paramétrique, minimale ou non, du sous-espace aboutit de la même façon à un système triangulé et les conditions de résolubilité du système constituent un système d'équations linéaires homogènes qui est une représentation cartésienne minimale du sous-espace.

Remarques:

- Si l'on connaît où si l'on détermine au préalable le rang du système de vecteurs, on connaît la dimension du sous-espace: r et donc le nombre d'équations d'une représentation cartésienne minimale: n - r.

- La connaissance du rang du système de vecteurs permet donc de prévoir le nombre de conditions de résolubilité qui seront obtenues après la triangulation et d'anticiper sur le nombre d'équations linéaires et homogènes qui caractérisent une représentation cartésienne minimale.

- De la même façon que dans le passage inverse, si les vecteurs donnés comportent des paramètres, la même méthode est théoriquement utilisable, mais les calculs effectués peuvent conduire à introduire différents cas particuliers, le rang du système pouvant varier en fonction des valeurs du ou des paramètres.

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons déterminé une représentation cartésienne du sous-espace engendré par la famille de vecteurs donnés sans passer par une représentation paramétrique minimale. Mais, nous analyserons cependant ce passage, qui s'inscrit dans la résolution de la tâche (fréquente dans les manuels) : étant donné une famille de vecteurs, en extraire un système libre maximal ou générateur minimal.

On dispose, pour ce faire, encore une fois de méthodes algorithmiques basées sur des triangulations.

- **première méthode**: on applique la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes du tableau de composantes des vecteurs disposés en colonnes et en raisonnant sur le tableau triangulé on déduit le rang de la famille de vecteurs et un système libre maximal. On peut aussi lire les relations de dépendance entre les vecteurs à travers la nullité de certaines colonnes.

Par exemple, étant donnés les vecteurs :

a = (1, 2, 3, 0, 0), b = (1, 1, 3, 1, 2), c = (2, 3, 1, 0, 0), d = (2, 4, 6, 0, 0), e = (-2, -1, -6, -3, -6) dans $\mathbf{R}^5$, on passe ainsi successivement de :

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right| \end{array} \quad \text{à :} \quad \begin{array}{ccccc} a & b-a & c-2a & d-2a & e+2a \\ \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right| \end{array} \quad \text{puis à :}$$

a	$b-a$	$c-b-a$	$d-2a$	$e-a+3b$
1	0	0	0	0
2	− 1	0	0	0
3	0	0	0	0
0	1	− 1	0	0
0	2	− 2	0	0

qui est un tableau triangulé.

En prenant en compte les combinaisons linéaires des vecteurs initiaux indiquées au dessus des colonnes et en raisonnant sur le tableau triangulé, on peut conclure que les vecteurs initiaux engendrent un sous-espace de dimension 3, que {a, b-a, c-b-a} en forment une base (donc ici {a, b, c} aussi) et que les deux derniers vecteurs d et e sont respectivement égaux à : 2a et a - 3b.

- deuxième méthode:

Une deuxième méthode consiste, en revenant à la définition de l'indépendance linéaire, à rechercher les λ_i qui vérifient les équations $\sum \lambda_i u_i = 0$, où les u_i sont les vecteurs engendrant le sous-espace donné, c'est-à-dire écrire le système d'équations linéaires $\sum \lambda_i u_i = 0$, puis appliquer la méthode du pivot de Gauss à ce système et en déduire le rang de la famille de vecteurs génératrice. Dans ce cas, les solutions particulières permettent de déterminer les relations de dépendance entre les vecteurs.

Par exemple, si l'on considère les vecteurs a, b, c, d et e donnés ci-dessus, la recherche des x, y, z, t et w tels que xa + yb + zc + td + wc = 0 conduit à écrire le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 2t - 2w &= 0 \\ 2x + y + 3z + 4t - w &= 0 \\ 3x + 3y + z + t - 6w &= 0 \\ y - w &= 0 \\ 2y - 6w &= 0 \end{aligned}$$

traduisant l'égalité xa + yb + zc + td +we = 0. En appliquant la méthode du pivot de Gauss à ce système, on obtient le système triangulé suivant :

$$
\begin{array}{rrrrr}
x + & y + 2z + & 2t - 2w = 0 & & \\
- y & - z & + 3w = 0 & & \\
 & - 5z & = 0 & & (I) \\
 & - z & = 0 & & \\
 & - 2z & = 0 & &
\end{array}
$$

que l'on peut interpréter de diverses façons. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous en proposons trois ci-après.

Première interprétation :

Le rang du système d'équations (I) est égal à 3. Les inconnues x, y et z peuvent être prises comme inconnues principales et le système obtenu en posant t=0 et w=0 a une solution unique : la solution nulle. Il s'ensuit que a, b et c forment un système libre.

En utilisant les formes ainsi obtenues pour les solutions du système, on obtient nécessairement deux relations de liaisons entre les vecteurs restants d et e et a, b et c. Il suffit en effet de considérer les solutions particulières correspondant à : t=1 et w=0, puis t=0 et w=1. On obtient ainsi :

- si w = 0 et t = 1, la relation de liaison : d = 2a
- si w =1 et t = 0, la relation de liaison : e = a - 3b.

Donc le système de vecteurs est de rang 3 et {a, b et c} est un système libre générateur.

Deuxième interprétation :

L'ensemble de solutions du système (I) étant :

$\{(x, y, z, t, w) \in \mathbf{R}^5 / z = 0, y = 3w \text{ et } x = -w - 2t\}$,

la dimension de ce sous-espace est égale à 2. Donc on ne peut obtenir que 2 relations de liaisons indépendantes entre les vecteurs a, b, c, d, e (bien que plusieurs systèmes de relations soient possibles), donc on peut conclure que la famille de vecteurs est de rang 3.

Troisième interprétation :

Le système (I) est de rang 3, le rang des vecteurs lignes d'une matrice étant égal à celui des vecteurs colonnes, le rang du système de vecteurs est lui aussi égal à 3.

Il est intéressant de souligner que cette interprétation exige une mise en relation de trois notions de rang : celle de rang d'un système de vecteurs, celle de rang d'un système d'équations et celle de rang d'une matrice. Nous y reviendrons dans la dernière partie du chapitre.

Nous voudrions souligner qu'il est clair, à travers ce qui précède, que les deux algorithmes de détermination du rang d'une famille de vecteurs que nous avons présentés, en dépit des similarités techniques (on utilise toujours les mêmes techniques de triangulation) n'ont pas la même complexité mathématique. Dans le second, que l'on fasse une interprétation interne au cadre des systèmes linéaires (interprétations 1 et 2) ou que l'on ait recours à des théorèmes puissants à l'articulation de plusieurs cadres (interprétation 3), le travail d'interprétation suppose de prendre de la distance par rapport à la technique de résolution du système. Nous y reviendrons dans la suite.

Dans le cas d'un ensemble de vecteurs $a_1,\ldots.$, a_n quelconque, l'application de la méthode du pivot de Gauss permet de la même façon de déterminer le rang du système de générateurs et d'en déduire une sous famille libre de la famille de vecteurs donnés. En admettant que le rang du système (r) est aussi celui des vecteurs colonnes associées à la matrice des coefficients du système, on en déduit que le rang de la famille de vecteurs $\{ a_1,\ldots., a_n\}$ est égal au rang du système : r.

On peut déterminer de plus (n-r) relations de dépendance entre les vecteurs en interprétant l'expression des inconnues principales en fonction des inconnues secondaires du sous-espace des solutions du système.

Indépendamment de cette question de l'obtention intermédiaire d'une représentation paramétrique minimale, les passages dans les deux sens, même s'ils sont tous deux algorithmisables, ne sont pas du même niveau de complexité. Le premier s'inscrit en continuité directe avec la résolution du système construit; on se borne à en lire les solutions sous une forme adaptée, le second suppose de mettre à distance le processus de résolution lui -même pour aller chercher, dans les conditions de résolubilité du système, les équations cherchées. Ceci suppose de bien comprendre les différences de rôle respectifs des (x, y, z, t, w) et (α, β, γ, δ, θ), pour reprendre les notations utilisées dans l'exemple traité, rôle que l'absence fréquente de quantification existentielle explicite dans les écritures de représentations paramétriques n'aide d'ailleurs pas à percevoir.

Nous avons développé jusqu'ici une approche algorithmique, technique destinée à justifier l'affirmation d'existence d'algorithmes de passage entre les deux points de vue. Comme les remarques qui précèdent le laissent supposer, une telle présentation ne rend pas compte de la complexité réelle de l'articulation et nous ne pouvons éviter de nous poser la question des

connaissances d'ordre plus technologique ou théorique utiles voire nécessaires pour piloter et contrôler ce travail technique.

Dans le contexte actuel des mathématiques, le cadre théorique adéquat est de toute évidence celui de la dualité. Nous allons donc préciser dans le paragraphe suivant, comment, dans ce cadre théorique de la dualité, se structure l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique.

III. L'ORGANISATION DES RAPPORTS ENTRE POINT DE VUE PARAMETRIQUE ET CARTESIEN A TRAVERS LA NOTION DE DUALITE

Dans le contexte actuel des mathématiques, sur un plan conceptuel, l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique renvoie clairement à la notion de **dualité**.

C'est la notion de dualité qui permet d'abord en effet d'établir une symétrie entre les deux types de représentation, en permettant de penser les équations linéaires homogènes comme des vecteurs, en tant que formes linéaires, de l'espace dual. On associe ainsi à tout système d'équations linéaires homogènes, le sous-espace engendré dans le dual des formes linéaires E*.

De plus, à chaque base de l'espace vectoriel E (de dimension n) est associée canoniquement une base de l'espace dual définie de la façon suivante :

$$e^*_i(e_j) = \begin{cases} \delta_{ij} = 1 & , \ i = j \\ \delta_{ij} = 0 & , \ i \neq j \end{cases} \quad , 1 \leq i \leq n$$

De la donnée de ces formes linéaires "coordonnées" par rapport à la base initiale, il s'ensuit l'égalité des dimensions de E et E* .

La notion d'orthogonalité permet ensuite d'avancer dans l'articulation entre vecteurs de l'espace initial et équations. Ceci découle du fait essentiel que le sous-espace à représenter et le sous-espace du dual engendré par les formes linéaires associées au système d'équations de la représentation cartésienne, sont orthogonaux l'un de l'autre. En effet, l'orthogonal d'un sous-espace F de E est défini comme le sous-espace des formes linéaires de E* qui s'annulent sur F et l'orthogonal d'un sous-espace F de E* est défini comme le sous-espace intersection des noyaux des éléments de F.

La relation liant les dimensions d'un sous-espace F de E et de son orthogonal est :

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E = \dim E^*$$

On l'obtient en déterminant la base duale d'une base de l'espace E obtenue par complétion à partir d'une base du sous-espace F et en montrant que les éléments duaux des éléments rajoutés à la base

de F constituent une base de l'orthogonal de F. Cela permet alors d'affirmer qu'à tout système d'équations linéaires homogènes à n inconnues de rang r correspond un sous-espace vectoriel de solutions de dimension n-r. On établit ainsi la relation entre les tailles respectives des représentations paramétriques et cartésiennes minimales d'un même sous-espace.

Enfin, la notion de transposée complète l'articulation, en permettant d'assurer "la symétrie entre lignes et colonnes", puisque d'une part on démontre qu'une application linéaire f et sa transposée ${}^tf$ ont le même rang et, d'autre part que les matrices M et M' de f et ${}^tf$ dans des bases duales vérifient la relation : $M'={}^tM$.

Il s'ensuit que le rang des vecteurs colonnes d'une matrice est aussi celui de ses vecteurs lignes, donc que le rang d'une matrice est aussi celui du système homogène que l'on peut associer à cette matrice.

Remarque :

Cette vision en termes de dualité fournit une autre technique de passage entre représentation paramétrique et cartésienne, via les techniques de complétion de bases et l'utilisation de bases duales. En effet, si F est un sous-espace de dimension r de E de dimension n et $\{e_1,...,e_r\}$ une base de F. En complétant cette base, on peut obtenir une base $\{e_1,...,e_n\}$ de E. Une représentation cartésienne minimale de F est alors fournie, conformément à ce qui précède, par les équations définissant les noyaux des formes linéaires $e_{r+1}^*,..., e_n^*$.

Illustrons ceci par un exemple:

Soit $E = \mathbf{R}^4$ et lin{(1, 2, 3, 4), (1, -2, -1, 2)} un sous-espace vectoriel F de E. On complète la base de F en une base de E à l'aide de vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$ (ici, on peut choisir, par exemple, les vecteurs (1, 0, 0, 0) et (0, 1, 0, 0)). On sait alors que si $\{e^*_1, e^*_2, e^*_3, e^*_4\}$ est la base duale de la base de E définie par e_1 = (1, 2, 3, 4), e_2 = (1, -2, -1, 2), e_3 = (1, 0, 0, 0), e_4 = (0, 1, 0, 0), les formes linéaires e^*_3 et e^*_4 fournissent une représentation cartésienne minimale de F

Posons : $E^*_i (x, y, z, t) = a_ix + b_iy + c_iz + d_it$. Les conditions définissant e^*_3 et e^*_4 conduisent aux deux systèmes suivants :

$e^*_3 (1,2,3,4) = 0$ $\qquad$ $e^*_4 (1,2,3,4) = 0$

$e^*_3 (1,-2,-1,2) = 0$ $\qquad$ et $\qquad$ $e^*_4 (1,-2,-1,2) = 0$

$e^*_3 (1,0,0,0) = 1$ $\qquad$ $e^*_4 (1,0,0,0) = 0$

$e^*_3(0,1,0,0) = 0$ $\qquad$ $e^*_4(0,1,0,0) = 1$

On obtient ainsi : $e^*_3 = x + \frac{1}{5}z - \frac{2}{5}t$, $e^*_4 = y - \frac{6}{5}z + \frac{2}{5}t$. D'où une représentation cartésienne du sous-espace engendré par ces vecteurs :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / \quad x + \frac{1}{5}z - \frac{2}{5}t = 0 \text{ et } y - \frac{6}{5}z + \frac{2}{5}t = 0\}.$$

Il est évident que cette méthode n'est pas comparable, en termes d'économie, à la première méthode algorithmique citée.

Cette structuration théorique de l'articulation des points de vue par la dualité est pour le mathématicien d'aujourd'hui simple et efficace, mais elle oblige à articuler le travail dans deux types d'espaces et en particulier de travailler dans des espaces de formes linéaires. Or on sait que considérer et gérer des applications linéaires comme des vecteurs ne va pas de soi pour les étudiants, et l'on peut légitimement se demander si c'est à ce niveau là que l'on peut trouver pour eux une structuration de l'univers technique de l'articulation qui permette son pilotage et son contrôle de façon efficace. Comme nous l'avons précisé dans l'introduction du chapitre, il nous a semblé utile, à ce point de la réflexion, pour prendre une certaine distance à la fois par rapport à notre propre univers mathématique et par rapport aux choix usuels de l'enseignement, d'interroger l'histoire de cette articulation. Nous le faisons, en nous basant sur le travail de Dorier (1995) sur l'émergence de la notion de rang qui nous semble apporter aux questions que nous nous posons des éclairages tout à fait intéressants.

IV. UN BREF APERÇU HISTORIQUE SUR L'EMERGENCE DE L'ARTICULATION CARTESIEN ET PARAMETRIQUE.

La genèse de l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique est étroitement liée à celle du concept de rang, plus précisément à la genèse de ce concept dans le contexte de l'étude des systèmes linéaires. C'est donc à cette genèse que nous nous intéressons ici.

Avant de rentrer dans l'étude du développement historique proposée par Dorier, il nous semble intéressant de présenter :

- sa vision du concept de rang;
- les aspects liés à ce concept qu'il distingue pour la clarté de l'exposé;

- les questions qu'il pose pour mesurer la distance, du point de vue épistémologique, entre le processus d'émergence historique et l'approche reconstruite dont dispose le mathématicien actuel.

A ses yeux, la notion de rang est centrale en algèbre linéaire de dimension finie. Il écrit notamment :

> « Le rang est certainement l'un des concepts élémentaires les plus riches de l'algèbre linéaire en dimension finie. » [Dorier, 1993, p.159]

et justifie cette position en soulignant que :

> « Invariant fondamental d'une famille de vecteurs, il [le rang] permet soit d'en mesurer « la taille », en donnant le nombre minimal de ses générateurs, soit d'en évaluer le nombre de liaisons, en donnant le nombre maximal de vecteurs indépendants.
>
> A ce deuxième aspect correspond de façon immédiate l'approche duale, qui consiste à chercher le nombre maximal de conditions indépendantes liant les vecteurs. De façon plus théorique, ce nombre est encore la dimension du sous-espace vectoriel de formes linéaires s'annulant sur la famille, c'est-à-dire du sous-espace orthogonal dans le dual. » [ibid, p.159]

Il souligne également la multiplicité des aspects que la notion de rang revêt et distingue trois aspects principaux :

> « - **l'aspect direct** : nombre maximal de vecteurs indépendants;
>
> - **l'aspect générateur** : nombre minimal de vecteurs qui génèrent la famille ou le même espace que la famille;
>
> - **l'aspect dual** : nombre minimal d'équations de liaisons indépendantes ». [ibid, p.159]

Le rapport avec nos préoccupations est donc ici évident, l'articulation que nous étudions étant celle de deux derniers aspects.

L'analyse de Dorier, qui sera à la fois « séparée » et « conjointe » de ces différents aspects est, comme nous l'avons annoncé plus haut, guidée par un certain nombre de questions, à savoir :

> « Quand et comment chaque aspect a-t-il été pris en compte ?
>
> Quand et comment s'est-on posé la question de l'invariance pour chacun de ces nombres et comment l'a-t-on résolue ?
>
> Quand et comment a-t-on relié ces divers aspects entre eux ? » [ibid, p.160]

Sans négliger les travaux pionniers de Grassmann, mais en soulignant leur marginalité et leur peu de retentissement à l'époque, Dorier précise d'abord que ce n'est pas dans le cadre géométrique mais dans celui des équations linéaires que se construit essentiellement la genèse du concept de rang :

> « Pour ce qui concerne plus précisément le concept de rang, il apparaît que le cadre des systèmes d'équations linéaires est celui dans lequel la quasi totalité des idées maîtresses se sont élaborées jusqu'au

début du XX^{ème} siècle. [...] Pour ce qui concerne la période antérieure au XX^{ème} siècle, l'autre domaine essentiel dans lequel se sont constitués les concepts d'algèbre linéaire est la géométrie. Or le rang me semble être un concept assez pauvrement représenté en géométrie, essentiellement du fait de la limitation à la dimension trois. De plus la géométrie en dimension n, où le rang a un rôle plus crucial, ne s'est vraiment développée qu'à partir de la deuxième moitié du XX^{ème} siècle et elle utilise beaucoup de résultats issus de l'étude des systèmes linéaires et de la théorie des déterminants, au point que le concept de rang apparaît comme une exportation du second cadre dans le premier. [...] Pourtant à l'exception notoire des travaux de Grassmann, il me semble que l'essentiel de la genèse du concept de rang est lié à l'étude des systèmes linéaires. " [ibid, p.160]

Dans ce cadre des systèmes linéaires, l'histoire nous montre une évolution lente, et où l'aspect dual, induit par le contexte des équations, joue un rôle dominant.

La **perception première** de la notion de rang semble en effet se situer au niveau d'une certaine forme de reconnaissance de " dépendance linéaire entre équations ", suscitée notamment par le paradoxe dit de Cramer.

"Le paradoxe de Cramer vient de la confrontation de deux résultats que l'on tenait pour vrais à l'époque :

1) Deux courbes algébriques[3] (appelées lignes courbes par Euler) se coupent en autant de points que le produit de leurs ordres, et il existe des cas où tous ces points sont finis, réels et distincts.

2) Une courbe algébrique d'ordre n est définie, à un coefficient multiplicatif près, par un polynôme en deux variables de degré n, donc comportant (n+1)(n+2)/2 coefficients, il suffit donc de [(n+1)(n+2)/2] - 1 = n(n+3)/2 points pour déterminer une courbe algébrique d'ordre n.

Le paradoxe[4] apparaît dès que n≥3, car alors $n^2 \geq n(n+3)/2$, il semble donc que deux courbes d'ordre n peuvent avoir en commun autant ou plus de points qu'il suffit pour déterminer entièrement une seule d'entre elles. " [ibid, p.162]

Soulignons que la propriété 1, n'est pas à l'époque démontrée de façon satisfaisante mais admise et justifiée en quelque sorte par ses conséquences.

Le travail sur le paradoxe conduit Euler à remettre en cause la deuxième proposition et à expliciter la notion de dépendance d'équations linéaires numériques[5] ainsi qu'à entrevoir l'aspect dual du

---

[3]**courbe algébrique :** Par définition une courbe algébrique dans $\mathbf{C}^2$ est une hypersurface algébrique de $\mathbf{C}^2$, c'est-à-dire l'ensemble de points $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2$ tels que $P(x) = 0$ pour P un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X_1, X_2]$. [Lelong-Ferrand, Arnaudiès, 1978]

[4] Avec la correspondance que permet la géométrie analytique entre courbes algébriques planes d'ordre n et polynômes de degré n en deux variables réelles, les deux problèmes se ramènent aisément à des questions de résolution de systèmes linéaires. [...] La deuxième proposition est un problème de dénombrement, une équation polynomiale de degré n en deux variables comporte (n+1)(n+2)/2 coefficients, qui déterminent à un facteur multiplicatif près une seule équation, il faut donc n(n+3)/2 relations, donc points, pour déterminer une courbe algébrique plane d'ordre n.

[5] Pour distinguer la dépendance linéaire des équations caractérisée par les combinaisons linéaires de celle caractérisée par l'idée d'inclusion des ensembles de solutions, Dorier utilisera pour la première le terme dépendance linéaire et pour la deuxième le terme "dépendance inclusive" ou dépendance au sens d'Euler.

rang. Plus généralement, il le conduit à rechercher à quelles conditions un système linéaire carré d'ordre n n'admet pas une solution unique. Dans le cas où n est égal à 2, il énonce la condition :

> « que les deux équations soient différentes entre elles, ou que l'une ne soit pas déjà comprise dans l'autre. » [ibid, p.164]

Le même type de formulation est donnée par Euler pour une valeur de n quelconque, puisqu'il énonce ensuite la règle suivante :

> « Quand on soutient que pour déterminer n quantités inconnues, il suffit d'avoir n équations qui expriment leur rapport mutuel, il faut ajouter cette restriction que toutes les équations soient différentes entre elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit déjà renfermée dans les autres. » [ibid, p.164]

Le retour à l'étude du paradoxe initial amène Euler à aborder la question de la réduction d'un système d'équations à un système d'équations minimal équivalent, en utilisant des méthodes de substitution apparentées à la méthode du pivot de Gauss, encore non théorisée, donc, comme le souligne J.L. Dorier, à dépasser "le simple problème de la dépendance et aborder la question du nombre (maximal) de liaisons indépendantes", soit l'aspect dual. A travers un exemple, Dorier montre qu'Euler fait la liaison entre le rang du système et la dimension du sous-espace solution même s'il n'utilise pas ces termes ce qui peut être mis en évidence par le passage suivant :

> « Il peut même arriver que deux équations soient déjà comprises dans les deux autres et alors il n'y aura que deux équations qui restent dans le calcul et par conséquent deux inconnues resteront indéterminées. [...] De plus, deux ou plusieurs quantités inconnues resteront indéterminées, s'il y a parmi les équations deux ou plusieurs, qui sont déjà renfermées dans les autres et qui par conséquent ne contribuent rien à la détermination des inconnues. » (Euler, 1750, p.39-40).

Ceci s'avère une première prise en compte de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique même si elle demeure intuitive et implicite. Euler n'est pas d'autre part confronté au problème de l'invariance de ces nombres puisqu'il choisit un repère bien adapté. Dorier conclut cette première étape en soulignant que le texte d'Euler :

> « correspond à une vision très intuitive des rapports entre la taille de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène et le degré de dépendance des équations. [...] Quelques éléments posent les jalons pour le concept de rang. L'aspect dual et l'aspect générateur ne sont qu'ébauchés certes et aucune explicitation ne vient consolider les intuitions. De plus le problème de l'invariance n'est absolument pas soulevé, mais il faut dire que le contexte ne s'y prête pas. Par contre les deux aspects, dual et générateur, sont mis en rapport de façon très claire bien qu'implicite et intuitive.
>
> Ce texte est le premier à discuter des conséquences de la dépendance des équations d'un système en essayant de quantifier l'indétermination ainsi amenée. Euler n'élabore pas des grandes théories, mais explicite une démarche prospective et plutôt empirique pour gérer l'indétermination. »[ibid, p.167]

Par rapport à nos préoccupations, nous retiendrons de cette analyse que l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique n'apparaît pas de façon symétrique mais se fait d'abord dans un seul sens : celui du passage du cartésien au paramétrique. Elle s'effectue de façon

implicite et intuitive ce qui, peut-être, peut contribuer à expliquer le fait qu'Euler ne soulève pas la question de l'invariance.

La **deuxième étape** du développement s'inscrit toujours dans le cadre de la résolution des systèmes linéaires, mais en utilisant la notion de déterminant. Dorier note que l'exploitation de cette notion et des techniques associées va conduire à une occultation des idées antérieures. En effet, pendant près d'un siècle, elle va conduire à une centration sur l'obtention des solutions dans le cas de systèmes admettant une solution unique et donc, se situer en quelque sorte en recul par rapport à la période précédente par rapport à l'articulation qui nous intéresse :

> " Il faudra attendre environ 1840 pour trouver des résultats substantiels et une étude assez systématique de cas d'indétermination. " [ibid, p.168]

En 1840, Sylvester exprime en termes de déterminants la condition nécessaire pour qu'un système homogène ait une solution non nulle. Dans ce travail, l'articulation se fait encore dans le même sens que dans les travaux d'Euler, puisqu'il s'agit de trouver l'ensemble des solutions d'un système et encore Sylvester se limite-t-il à l'étude de systèmes d'équations linéaires et homogènes. Il est intéressant aussi de remarquer que la condition nécessaire qu'il énonce ne suffit pas à fournir les moyens d'une articulation opérationnelle.

En 1843, Cayley[6] relie explicitement les aspects de dépendance (au sens d'Euler) et dépendance linéaire :

> " Cayley considère un tableau de (q+1) lignes et n colonnes, q<n, la première ligne étant constituée des inconnues x_i, les autres de coefficients A_i...K_i.
>
> Il explique ensuite que l'on peut extraire C_n^{q+1} mineurs d'ordre (q+1) de ce tableau qui correspondent à des fonctions linéaires en les x_i. Il dit alors, sans démonstration, que si on annule chacune de ces fonctions, les équations ainsi obtenues se réduisent à (n-q) indépendantes, et qu'alors chacune des autres équations s'écrit comme combinaison linéaire, dont les coefficients ne dépendent pas de x_i, de ces (n-q) équations indépendantes. " [ibid, p.170]

Par rapport à la question de l'articulation, remarquons que Cayley reste lui aussi dans le seul sens de passage du cartésien au paramétrique, en apportant cependant une avancée par rapport à Sylvester puisque, lui, nous donne de moyens de contrôler le nombre d'équations indépendantes.

Le travail ultérieur de Sylvester de 1850 ne va pas changer cette situation.

Kronnecker introduit des améliorations à ces résultats qui permettront d'avancer dans la résolution des systèmes indéterminés, même si se sont plutôt des moyens techniques pour déterminer

---

[6]Résultat partiellement faux rétablit par Sylvester en 1850.

l'ensemble des solutions d'un système, que des outils théoriques visant à déterminer le nombre d'équations indépendantes.

Selon Dorier, tous ces résultats apportent des améliorations techniques non négligeables mais ne produisent pas une avancée conceptuelle substantielle sur la notion de rang. Cette considération peut être transférée aussi à notre étude de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique. Il est intéressant aussi, nous semble-t-il, de souligner que jusqu'ici nous ne pouvons transférer ce progrès, même technique, que dans le seul sens cartésien/paramétrique et n'avons que le moyen de contrôler le nombre d'équations indépendantes.

En 1857, Baltzer avance dans l'étude des solutions d'un système d'équations en employant les déterminants.

En 1862, Trudi complète les résultats de Baltzer mais ces travaux ne vont pas non plus permettre d'avancer sur la notion de rang et donc nous en restons au même stade vis à vis de notre problème d'articulation.

Ainsi à partir de l'analyse de la démonstration de Trudi et en comparant les résultats soulignés dans cette deuxième étape aux travaux d'Euler, Dorier souligne que :

> " la théorie de déterminants, avec ses outils perfectionnés mais techniques éloigne d'une réalité plus intuitive et a pu, à un certain stade de la genèse, être un obstacle épistémologique à une bonne perception du concept de rang. " [ibid, p.173]

A partir des rapports que nous avons faits entre les conditions de développement du concept de rang et notre problème d'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique nous pouvons supposer que cette théorie constitue aussi un obstacle à la symétrisation de l'articulation.

En 1864, Baltzer avance dans l'étude des systèmes indéterminés, en donnant une règle pratique de résolution qui permet de bien comprendre leur nature, à savoir :

> *" Dans un système de n équations en n inconnues, si un mineur d'ordre k ne s'annule pas et si tous les mineurs d'ordre (k+1) construit sur celui-ci s'annulent, alors le système est consistant et (n-k) indéterminé. " [ibid, p.173]*

Dorier souligne la nouveauté introduite par ce résultat puisqu'il dépasse la seule question de dépendance des équations en faisant intervenir la taille de l'ensemble de solutions. En termes d'articulation, c'est la première fois que l'on voit apparaître la liaison entre le nombre d'équations indépendantes et la taille de l'ensemble des solutions, même si on reste encore dans le seul sens cartésien vers paramétrique et si le résultat se limite aux systèmes carrés.

Dorier remarque encore qu'à ce stade :

> " - le rang d'un système carré est devenu un objet explicitable et dont la définition est opératoire grâce aux déterminants.

- C'est un invariant du système.

- Il est relié par l'aspect dual à l'ordre d'indétermination du système, qui correspond à l'aspect générateur du rang.

- Mais dans cette correspondance le problème de l'invariance n'est pas posé pas plus que celui de l'invariance au niveau de l'ensemble des solutions indépendamment du système.

Notons également que Baltzer montre, dans ce même ouvrage, comment trouver les solutions d'un système indéterminé en fonction de celles du système homogène associé. Par contre il ne pose pas le problème de la réciproque. » [ibid, p.174]

A travers ces remarques, nous pouvons revenir à toutes les comparaisons que nous avons faites précédemment pour souligner que c'est l'explicitation de la notion de rang d'un système d'équations (qui s'appuiera toujours sur un autre objet et dans le cas de déterminants sur la définition de cette même notion dans un autre cadre) qui a permis de relier le nombre minimal d'équations indépendantes du système au nombre minimal de vecteurs qui engendrent l'ensemble de solutions de ce système, c'est-à-dire d'avancer dans l'articulation dans le sens cartésien/paramétrique, puisqu'à ce moment nous disposons pour la première fois d'un moyen technique pour contrôler le nombre de paramètres.

A partir de là, plusieurs mathématiciens vont avancer dans la résolution des systèmes d'équations linéaires en donnant des règles de compatibilité et des résultats permettant d'évaluer l'ordre de l'indétermination d'un système. Dorier en distingue deux, pour la précision et la clarté de leurs résultats, à savoir :

Dogdson qui, en 1867, énonce des résultats qui rendent compte de toutes les configurations possibles en fonction des dimensions d'un système d'équations linéaires mais, faute d'une vision d'ensemble, ne peut synthétiser ces résultats.

Rouché qui, en 1880, va atteindre ce but de synthétisation en s'intéressant à un système quelconque de n équations à m inconnues. Par rapport aux travaux de Rouché, il est intéressant de souligner les points suivants retenus par Dorier :

« Rouché introduit le terme de *déterminant principal*, pour désigner un des mineurs de plus grand ordre non nul. Les *inconnues principales* sont alors celles qui correspondent au déterminant principal, les autres étant appelées les *inconnues secondaires*.

Il appelle *déterminant caractéristique* tout mineur d'ordre (p+1), obtenu en rajoutant une colonne de seconds membres et une ligne formée des coefficients d'une équation non principale. La condition nécessaire et suffisante de compatibilité est alors que tous les déterminants caractéristiques soient nuls. Alors l'ordre d'indétermination est (m-n), ce qui correspond au fait que l'on calcule les valeurs des inconnues principales en fonction des inconnues secondaires qui restent arbitraires. » [ibid, p.175]

Jusque là, nous en sommes encore au même niveau d'articulation que celui résultant des travaux de Baltzer, c'est-à-dire que nous disposons de moyens techniques pour faire le passage du cartésien

au paramétrique et pour contrôler le nombre minimal d'équations ainsi que le nombre minimal de paramètres à travers les notions d'inconnues principales et secondaires. La nouveauté des travaux de Rouché par rapport à ceux de Baltzer est que tous les types de systèmes sont maintenant gérés, pas seulement les systèmes carrés.

Dorier souligne, dans l'évolution ultérieure, une meilleure prise en compte, par Smith, de l'aspect direct du rang au niveau de l'ensemble des solutions d'un système; ceci lui permet de poser et de résoudre partiellement la question de l'invariance. Il est intéressant de souligner que cette prise en compte de l'aspect direct du concept du rang ne permettra pas d'avancer directement dans l'articulation puisqu'on fonctionne encore dans le seul sens cartésien/paramétrique où les résultats précédents suffisaient à justifier les liaisons possibles. C'est en fait avec les travaux de Frobenius que se produira le pas décisif.

Avant d'aller plus loin, il nous semble intéressant de rappeler « les points à éclaircir » et « les points faibles » soulignés par Dorier, en bilan de cette seconde période.

Points à éclaircir :

> « - Le rang n'est pas encore explicité, mais il apparaît implicitement comme l'ordre maximal auquel on peut trouver un mineur non nul.
>
> - Les connaissances de l'époque permettent donc de dire que c'est un invariant.
>
> - Cette façon de définir implicitement le rang permet de faire fonctionner une définition d'indépendance linéaire commune aux n-uplets et aux équations, ce qui est une condition sine qua non pour relier tous les aspects du rang.
>
> - Cela permet également de prendre en compte partiellement l'aspect générateur au niveau des solutions, mais il reste à voir que l'ordre de l'indétermination est invariant, ce qui appelle une définition du rang intrinsèque à l'ensemble des solutions. »

Points faibles :

> « - l'explicitation des conséquences de l'annulation de certains mineurs sur le nombre maximal d'équations indépendantes. Ceci permettra de compléter l'aspect dual et d'enrichir l'aspect direct.
>
> - Le pont entre l'aspect direct et générateur, qui permet de coincer le rang, soit en diminuant les générateurs soit en augmentant les familles libres. En particulier l'ordre d'indétermination doit pouvoir être caractérisé autant en terme de degré de dépendance qu'en terme de nombre de générateurs, ce qui n'est pas clair tant qu'on s'appuie sur les notions d'inconnues principales et secondaires, c'est-à-dire une base trop particulière.
>
> - Le problème de l'équivalence entre différents systèmes et donc l'explicitation de l'invariance au niveau des solutions et non pas seulement du système. » [ibid, p.178]

Mais, au delà de ces points faibles, ce que nous retenons c'est la non reconnaissance explicite d'un concept identique de dépendance pour les équations et pour les n-uplets qui ne repose pas sur les déterminants.

Cette deuxième étape ne permet pas d'avancer plus dans l'articulation entre les deux points de vue et il reste clair dans l'exposé de Dorier qu'il y a eu historiquement besoin d'un changement de problématique, plus précisément passage d'une problématique de résolution de systèmes à une problématique de recherche d'invariants. C'est ce changement qui permettra à Frobenius de donner une définition du rang en tant qu'objet et de faire l'articulation dans l'autre sens en introduisant et se servant de la notion de dualité ce qui est souligné dans le passage suivant :

> " Therefore abandoning inclusive dependence for linear dependence was a necessary and decisive step toward the determination of the concept of rank. In the second half of the 19th century many mathematicians made great progress toward this goal. But they used very elaborate technical tools within the theory of determinants and never really made anything clearly explicit. The decisive improvement was made in 1875 by Frobenius. " [Dorier, à paraître]

Une **troisième étape** de l'articulation est donc celle qui débute avec les travaux de Frobenius (1875 et 1879). A propos de l'étude d'un système de m équations homogènes et indépendantes à n inconnues (m < n) noté : $a_1(\mu)u_1 + ...+ a_n(\mu)u_n = 0$, ($\mu = 1,...,m$), Frobenius fait d'abord les remarques suivantes :

- il montre que l'on peut écrire toute équation linéaire homogène dépendante de celles du système comme combinaison linéaire de celles-ci.

- il explique, en guise de préambule, comment l'on peut remplacer les m équations du système de départ par m autres équations indépendantes construites sur les m précédentes, ce qui s'apparente à un changement de bases. La notion de base est, semble-t-il, très claire pour lui et ceci lui permet de montrer l'équivalence des deux systèmes considérés.

Frobenius s'attache ensuite à la caractérisation de l'ensemble de solutions. Par rapport à cette dernière, nous avons retenu, dans la présentation de Dorier, les points suivants :

> " Il remarque tout d'abord qu'une combinaison linéaire de deux solutions du système en est encore une. [...] Puis il considère plusieurs solutions : $A_1(\chi),...,A_n(\chi)$, $\chi = 1,...,k$), et dit que ces solutions seront dites indépendantes si $c_1A\alpha^{(1)} + ... + c_kA_\alpha^{(k)}$ ne peut pas s'annuler pour $\alpha = 1,..., n$, sans que $c_1, ..., c_k$ soient tous nuls, en d'autres termes quand les formes linéaires $A_1(\chi)u_1 +... + A_n(\chi)u_n$ sont indépendantes. " [ibid, p.180]

Ces résultats lui permettent d'assimiler les n-uplets et les équations homogènes en n inconnues au concept de vecteur à travers leur structure algébrique. Selon Dorier :

> " Not only this is a definition quite similar to the modern definition of linear independence but it also explicity shows the similarity between n-tuples of solutions and equations with regard to their linearity. This simple idea allows Frobenius to give in a couple of pages a full overview of the properties of the rank of a system (yet still defined implicitly as the maximal order of non zero minor). " [Dorier, à paraître]

Cette mise en relation est sans aucun doute fondamentale aussi pour le développement de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique puisqu'elle permettra à Frobenius d'établir des résultats de même nature pour les deux sens de passage.

Frobenius énonce ensuite un résultat important sans démonstration : les équations du système initial étant indépendantes, on peut compléter le tableau des coefficients du système : $(a_\alpha{}^{(\mu)})$, par (n-m) lignes de n termes $U_\alpha{}^{(\upsilon)}$, de façon à ce que le déterminant D de ce tableau carré ne soit pas nul. Grâce à ce résultat, il va construire une base de solutions et montrer que toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

« The main idea is to use the concept of associated (*zugeordnet* oder *adjungirt*) system, which is, in modern terms the representation by equations of the orthogonal subspace.

Let us consider the system : $\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\ldots \\ a_{p1}x_1+\ldots+a_{pn}x_n = 0 \end{cases} \quad (I)$

if $(A_1(\chi), A_2(\chi),\ldots,A_n(\chi))$ (χ = 1, 2,..., n - r) - r being the maximal order of non-zero minors - is a basis of solutions of (I), the associated system is :

$$\begin{cases} A_1{}^{(1)}x_1+\ldots+A_n{}^{(1)}x_n = 0 \\ \quad\ldots \\ A_1{}^{(n-r)}x_1+\ldots+A_n{}^{(n-r)}x_n = 0 \end{cases} \quad (I^*)$$

again if $(B_1(\nu), B_2(\nu),\ldots,B_n(\nu))$ (ν = 1, 2,..., q) is a basis of solutions of (I*), then the associated system is :

$$\begin{cases} B_1{}^{(1)}x_1+\ldots+B_n{}^{(1)}x_n = 0 \\ \quad\ldots \\ B_1{}^{(q)}x_1+\ldots+B_n{}^{(q)}x_n = 0 \end{cases} \quad (I^{**})$$

Frobenius proves that, wathever the choices of base are, (I**) is equivalent to (I) and q = r. » [Dorier, à paraître]

Soulignons l'importance jouée ici par l'interprétation des résultats, soit comme des n-uplets, soit comme des équations, bien mise en évidence par Dorier :

« Frobenius joue constamment avec la possibilité qu'il s'est donnée d'interpréter n valeurs comme un n-uplet ou une équation linéaire et homogène. [...] La possibilité d'assimiler une équation à un n-uplet (et même plutôt l'inverse) a été un des éléments décisifs qui a permis à Frobenius, essentiellement en jouant sur les rapports de dualité, d'arriver à cette explicitation quasi-exhaustive des différents aspects du rang. [...] C'est en 1879, que Frobenius définit explicitement le rang pour la première fois.[...] La définition que donne Frobenius est la suivante : *Quand dans un déterminant tout mineur d'ordre (m+1) est nul, et que les mineurs d'ordre m ne sont pas tous nuls, j'appelle m, le rang du déterminant* » [ibid, p.183 à 185]

C'est donc via l'idée maîtresse de la dualité d'assimilation n-uplet/forme linéaire, c'est-à-dire l'idée qui a permis la liaison entre les différents aspects de la notion de rang, que se met en place avec Frobenius la symétrie de l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique. La théorie des déterminants est toujours très présente chez Frobenius, mais les idées intuitives d'Euler sont reinterprétées et prennent forme dans le travail de Frobenius, via la théorie des déterminants. On peut dire que l'obstacle de la technicité est en partie dépassé.

Cette esquisse du développement de l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique, à travers la genèse de la notion de rang, restitue nous semble-t-il à cette articulation l'épaisseur épistémologique nécessaire à l'analyse didactique que la vision moderne aboutie, à la fois sur le plan technique et sur le plan conceptuel, tend à faire disparaître. Elle montre le rôle essentiel joué dans la genèse par le cadre des systèmes linéaires et plus spécifiquement par les déterminants mais aussi les difficultés rencontrées dans l'histoire à tirer parti de ce cadre. Nous retiendrons en particulier à ce niveau, la nécessité d'une conception de la dépendance d'équations qui, au delà des points de vue initiaux en termes d'inclusion d'ensembles de solutions, arrive à s'exprimer en termes de relations de liaison entre équations (indépendamment des déterminants), une évolution de la problématique qui a permis de mettre à distance la seule détermination des solutions pour travailler leurs conditions d'existence, sans se limiter de plus à l'étude de systèmes carrés. Nous retiendrons aussi le rôle joué par la théorie des déterminants, dans sa dimension productrice comme dans sa dimension d'obstacle. Nous retiendrons enfin la dissymétrie de la mise en place de cette articulation : l'articulation dans le sens cartésien / paramétrique se met en place la première, dans le cadre de la théorie des déterminants, il suffit pour son aboutissement de disposer de descriptions efficaces de l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes. L'articulation dans le sens paramétrique / cartésien, qui apparaissait déjà plus complexe sur le seul plan algorithmique analysé au début de ce chapitre, apparaît, quant à elle, beaucoup plus difficile à mettre en place. Elle passe historiquement par une mise à distance au moins partielle des modes de pensée associés à la théorie des déterminants, pour rendre possible d'autres expressions de la dépendance et de l'indépendance que celles fournies par la nullité ou non nullité de déterminants, et, parallèlement, une mise en place de la dualité qui permette de traiter de façon symétrique, comme des n-uplets de réels, solutions et équations. Nous retiendrons également la multiplicité, la diversité des énoncés, des formulations qui marquent les jalons de cette histoire, des énoncés qui nous éclairent sur l'évolution laborieuse de la conceptualisation. Elles peuvent aider, nous en faisons l'hypothèse, à envisager dans l'analyse didactique des rapports technologiques à l'articulation plus diversifiés que ceux qui nous sont a priori familiers, en particulier, envisager plus facilement différents types de rapports à la dualité. Ce problème nous semble en effet particulièrement important pour la raison suivante : l'analyse historique que nous venons

d'esquisser montre le rôle déterminant d'une forme de dualité[7] dans l'achèvement de l'articulation des points de vue. Peut-on en faire l'économie avec des étudiants débutants, comme c'est actuellement le cas dans un certain nombre de manuels (nous reviendrons sur ce point, de façon détaillée, dans le chapitre suivant) ? Si l'on ne se résigne pas à cette économie, comment prendre en compte les difficultés réelles de son introduction ? Comment travailler la dualité pour en faire un outil efficace à la disposition de l'élève ?

Pour avancer dans la réflexion sur ces questions, il nous semble important de conjuguer deux dimensions d'analyse :

- une analyse dirigée vers les étudiants : comment fonctionnent-ils réellement, compte-tenu des moyens que l'enseignement leur fournit ? A quelles difficultés se heurtent-ils réellement ?

- une analyse dirigée vers les savoirs en jeu : quelles sont, au delà de la perspective décrite dans la partie III de ce chapitre, les perspectives techniques et conceptuelles de l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique, dans les différents cadres où cette articulation s'inscrit, et dans leurs inter-relations ?

C'est cette réflexion dont nous allons poser les premiers jalons dans les deux dernières parties de ce chapitre, en revenant tout d'abord aux étudiants.

V. L'ARTICULATION DES POINTS DE VUE : UN PREMIER APERCU CÔTÉ ETUDIANTS

Nous avons choisi, pour cette première approche, deux exemples extraits de notre mémoire de DEA (Alves Dias, 1993) qui portait sur l'analyse d'un enseignement expérimental d'algèbre linéaire en Deug A première année, attentif à la prise en compte de ces questions d'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique (Rogalski, 1992). Ces deux exemples concernent donc des étudiants pour lesquels les tâches proposées n'étaient pas entièrement nouvelles, pour lesquels on avait fait l'effort de mettre en place des techniques d'articulation (basées sur des méthodes de pivot de Gauss) ainsi que des moyens d'anticipation et de contrôle par rapport à ce travail technique.

L'analyse effectuée dans le DEA portait sur un examen écrit de l'année 1992/93 passé par 113 étudiants à la fin du premier semestre. La partie d'algèbre linéaire de cet examen était formée des quatre questions suivantes:

---

[7] C'est une dualité outil implicite plus qu'objet. Du point de vue conceptuel rien n'est fait par Frobenius sur la notion d'orthogonalité ou de dualité. La dualité s'exprime d'abord dans la définition duale (au sens commun) de l'indépendance pour les n-uplets et les formes linéaires qui devient ensuite opératoire à travers la notion de systèmes adjoints.

Dans $\mathbf{R}^4$, on se donne les vecteurs suivants:

a = (0, -1, 1, 0), b = (2, 1, 1, 0), c = (0, 0, 3, 1)

d = (2, 0, 1, 1), e = (1, 0, 1, 1), f = (1, 0, 0, 1)

1) Quel est le rang du système de vecteurs {a, b, c, f}?

2) Pour lin{a, b, c, d} donner une représentation paramétrique et un système d'équations linéaires le définissant.

3) A quoi sont égaux :

a) lin{a, b, c} ∩lin {a, e}?

b) [lin{a, e} + lin{a, c, e}] ∩ lin{a, b, c}?

4) Le système $\begin{cases} 2y+2t=\alpha \\ -x+y=\beta \\ x+y+3z-t=\gamma \\ z-t=\delta \end{cases}$ a-t-il des solutions pour tout (α, β, γ, δ) ∈ $\mathbf{R}^4$?

Nous avons choisi de présenter ici des exemples de réponses des étudiants à la deuxième question. En effet, il s'agit dans cette question de déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne d'un sous-espace engendré par des vecteurs, donnés par leurs coordonnées.

Premier exemple: (Solution de l'élève retranscrite ; le découpage en phases numérotées est introduit par nous-mêmes pour faciliter l'analyse)

1- a, b, c, d sont-ils linéairement indépendants?

On s'aperçoit, sans calcul que d = a + b -c donc a, b, c, d sont linéairement dépendants.

or rang {a, b, c, f} = 4 donc a, b, c sont linéairement indépendants donc

lin{a, b, c, d} = lin{a, b, c}

2-$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$

$2\lambda_2 = 0$

$-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ $\qquad\qquad$ $\lambda_1 = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$ $\qquad \leftrightarrow \quad \lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 0$ $\qquad\qquad$ $\lambda_3 = 0$

3- Si $A(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \text{lin}\{a, b, c, d\}$ alors $A = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$

$2\lambda_2 = \alpha$

$-\lambda_1 + \lambda_2 = \beta$

$\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma$ $\qquad$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^4$

$\lambda_3 = \delta$

$\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma$ $\qquad\qquad$ $\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma$

$2\lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma + \beta$ $\qquad\qquad$ $2\lambda_2 + 3\lambda_3 = \gamma + \beta$

$2\lambda_2 = \alpha$ $\qquad\qquad$ $3\lambda_3 = \gamma + \beta - \alpha$

$\lambda_3 = \delta$ $\qquad\qquad$ $0 = \gamma + \beta - \alpha - 3\delta$

- Si $\gamma + \beta - \alpha - 3\delta \neq 0$ aucune solution.
- Si $\gamma + \beta - \alpha - 3\delta = 0$ une infinité de solutions

4 - Nous sommes dans $\mathbf{R}^4$ or lin {a, b, c, d} est représenté par 3 équations linéairement indépendantes donc dim(lin{a, b, c, d }) = 4 - 3 = 1. Il suffit donc d'avoir 1 paramètre: par exemple si $\gamma + \beta - \alpha - 3\delta = 0$, on a:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \gamma - 3t \qquad \lambda_1 = \gamma - 3t - \frac{\gamma+\beta-3t}{2} \qquad \lambda_1 = \frac{2\gamma-6t-\gamma-\beta+3t}{2} =$$

$$2\lambda_2 = \gamma + \beta - 3t \quad \leftrightarrow \quad \lambda_2 = \frac{\gamma+\beta-3t}{2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\gamma-\beta-3t}{2}$$

$$\lambda_3 = t \qquad \lambda_3 = t \qquad \lambda_2 = \frac{\gamma+\beta-3t}{2} \qquad t \in \mathbf{R}$$

$$0 = \gamma + \beta - \alpha - 3\delta \qquad 0 = \gamma + \beta - \alpha - 3\delta \qquad \lambda_3 = t$$

$$0 = \gamma + \beta - \alpha - 3\delta$$

Les stratégies développées par cette étudiante nous semblent pouvoir être décrites de la façon suivante[8] :

En 1) l'étudiante démarre par la recherche de la dimension du sous-espace engendré par {a, b, c, d} et sa caractérisation comme lin{a, b, c} est très économiquement faite, sans recours à une technique de calcul de rang, en exploitant le résultat trouvé dans la première question.

A priori, elle dispose à ce moment là d'une représentation paramétrique minimale évidente du sous-espace et le passage à une représentation cartésienne peut se faire, comme nous l'avons montré en II, via la triangulation d'un système qui est celui apparaissant en 3) et l'identification de la quatrième équation : $\gamma + \beta - \alpha - 3\delta = 0$ comme équation de A = lin{a, b, c} puisque A est caractérisé par la condition d'existence de solutions du système.

Le travail effectué commence en 2) par l'écriture d'une équation qui est celle correspondant à la vérification de l'indépendance de {a, b, c}. Ceci peut sembler étonnant compte-tenu de ce qui précède. La rédaction ne contient que les lignes de calcul, sans la moindre introduction ou conclusion, ceci nous incite à interpréter ce calcul comme une sorte de rite à accomplir dans le cadre du passage à une représentation cartésienne.

Après cet épisode, s'enclenche le passage proprement dit à une représentation cartésienne. Cette fois, le système est introduit par un énoncé implicatif. On notera d'autre part l'absence de quantification explicite sur les λ_i. Ce système est ensuite traité par la méthode du pivot de Gauss

[8] L'interprétation que nous proposons ici a un statut bien sûr hypothétique. Les dispositifs plus fins d'étude des élèves présentés dans le chapitre VII (passation en temps limité + reprise dans un travail en temps libre à la maison + entretien semi-directif basé sur les 2 productions précédentes) montreront que cette interprétation est cependant tout à fait raisonnable.

et ramené ainsi à un système triangulaire. Jusqu'à ce point, on peut considérer que l'étudiant suit la démarche algorithmique standard. Suit la gestion de la quatrième équation qui permet de séparer les cas d'existence et de non existence des solutions. A ce point le travail technique est terminé. Et c'est là que le fonctionnement dérape. L'interprétation effectuée n'est pas celle attendue : A n'est pas associé à la condition d'existence de solutions du système mais au système lui-même, puisque l'étudiant à partir de conditions de résolution du système essaye de trouver les solutions du système. Ceci amène l'étudiante à conclure que la dimension de lin{a, b, c, d} est 1 puisque le système est de rang 3, en contradiction flagrante avec ce qui a été affirmé précédemment et à proposer une représentation paramétrique de lin{a, b, c, d} en fonction d'un seul paramètre : t.

Pour produire cette représentation, l'étudiante se place explicitement dans le cas où il existe des solutions puis achève la résolution du système, en prenant $\lambda_3 = t$ comme inconnue secondaire et en considérant α, β, γ, δ comme des constantes, transformation de statut que favorise sans doute à la fois la non explicitation des quantificateurs et les lettres utilisées elles-mêmes.

On notera également qu'aucune conclusion n'est ensuite tirée.

Second exemple: Solution

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang = 3 $\rightarrow$ dimension = 1 (car 4 - 3 = 1) $\rightarrow$ 1 paramètre

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$

On choisit x_4 arbitrairement égal à γ

$$x_1 = \frac{\gamma}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\gamma}{3}$$

$$x_3 = -\frac{\gamma}{3}$$

équations paramétriques

$x_4 = \gamma$

système d'équations linéaires $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$- x_2 + x_3 = 0$

$3x_3 + x_4 = 0$

$0 = 0$

Les stratégies développées par cet étudiant nous semblent, quant à elles, pouvoir être décrites de la façon suivante :

- Il y a d'abord recherche du rang du système de vecteurs par une technique de triangulation (qui consiste à appliquer la technique du pivot de Gauss aux lignes du tableau des coordonnées de vecteurs disposés en lignes).

- Après cette triangulation, l'étudiant peut conclure théoriquement que le système de vecteurs est de rang 3, donc que le sous-espace engendré par ce système de vecteurs est de dimension 3 et caractérisé soit par une équation, soit par une représentation paramétrique à trois paramètres.

Là encore, ce n'est pas ce que conclut l'étudiant, puisqu'il conclut que la dimension est 1, glissant semble-t-il du rang du système de vecteurs au rang du système d'équations qui peut être canoniquement associé au même tableau de nombres. Il s'ensuit qu'il y a à chercher une représentation paramétrique à un paramètre.

- Le glissement se poursuit ensuite, dans la recherche de représentations cartésiennes et paramétriques explicites. L'assimilation au système est d'abord implicitement gérée par l'introduction des « inconnues » : « $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$ »

et le choix de x_4 qui apparaît comme l'inconnue secondaire naturelle dans l'association tableau triangulé - système comme paramètre : « on choisit x_4 arbitrairement égal à γ ».

L'étudiant exprime ensuite les solutions du système en fonction de ce paramètre, le calcul, simple, étant correct, puis fournit les trois équations du système comme représentation cartésienne.

Ces deux exemples ne constituent en rien des exemples marginaux dans la population des étudiants. Ils nous montrent clairement que, par rapport à la tâche de production de représentations paramétrique et cartésienne, les étudiants décrits ont développé des schèmes de résolution, proches du moins au départ de la technique algorithmique standard présentée dans la partie I et incluant le passage par la détermination du rang du système de vecteurs, dans le passage paramétrique / cartésien. On peut noter également que ces schèmes incluent des anticipations et contrôles basés sur :

- la connaissance du lien entre le rang d'un système d'équations linéaires homogènes et la dimension du sous-espace solution

- la connaissance du lien entre la dimension d'un sous-espace et le nombre minimal de paramètres permettant sa caractérisation.

La technique de résolution des systèmes par la méthode du pivot de Gauss est semble-t-il maîtrisée, au moins dans les cas simples considérés ici.

On constate en revanche une difficulté très nette à prendre la distance nécessaire avec la résolution proprement dite des systèmes et à conduire les interprétations correctes nécessaires. Il y a dérapage par aplatissement sur le système associé et l'ensemble de ses solutions, non différenciation des différentes notions de rang qui peuvent être en jeu. Cette non discrimination des objets mathématiques pertinents se trouve sans doute favorisée par un système sémiotique qui aplatit des objets différents sur la même représentation en forme de tableaux de nombres, et dont les usages dans la discrimination des symboles d'inconnues, paramètres, constantes, ne favorise pas les changements de point de vue nécessaires à l'interprétation. Enfin, on peut penser que le fait que la quantification des énoncés reste implicite n'aide pas non plus à opérer la distanciation demandée.

Les énoncés susceptibles de servir à l'anticipation et au contrôle sont bien invoqués mais mis au service des interprétations proposées, ce qui semble visiblement très aisé, tant que l'on ne cherche pas à s'assurer d'une cohérence plus globale.

L'existence d'algorithmes basés, en dépit de différences fondamentales, sur une même technique, celle du pivot de Gauss, qui devient en quelque sorte emblématique du travail mathématique à effectuer dans la résolution de tâches multiples en ces débuts de l'enseignement de l'algèbre linéaire, ne finit-elle pas, pour ces étudiants, à se constituer en obstacle, dans l'impossibilité où ils semblent se trouver de disposer de références technologiques et théoriques adaptées et opérationnelles, pour piloter et contrôler le travail technique mené, pour lire au delà des similarités sémiotiques et techniques, les différenciations nécessaires ? Comment surmonter un tel obstacle ?

C'est une question que l'analyse de productions qui précède nous incite à nous poser. C'est une question que nous allons essayer d'aborder dans la dernière partie de ce chapitre sous un autre angle, en essayant de cerner de la façon la plus détaillée possible l'articulation des deux points de vue. En particulier nous la décrivons dans les différents cadres où elle intervient et nous essaierons aussi de préciser les différenciations nécessaires.

VI. DES CADRES DE L'ARTICULATION ENTRE LES POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE

Pour essayer de mieux comprendre l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique, nous proposons de faire dans ce paragraphe une description du paysage mathématique en distinguant artificiellement des cadres locaux qui vivent en étroite dépendance. Cette distinction doit nous aider à mettre en évidence les articulations à construire et les difficultés ou obstacles que cette construction peut rencontrer.

Nous avons considéré les cadres suivants :

1. le cadre de l'algèbre linéaire
2. le cadre de la géométrie affine euclidienne
3. le cadre des systèmes linéaires
4. le cadre matriciel
5. le cadre des déterminants

Soulignons que certains de ces cadres commencent à exister pour les étudiants avant même tout enseignement d'algèbre linéaire, ceci dépendant des cultures, par exemple :

- le cadre de la géométrie affine euclidienne et celui des systèmes linéaires existent déjà pour les étudiants français du lycée,
- le cadre des systèmes linéaires, le cadre matriciel et celui de la géométrie affine euclidienne existent pour les étudiants brésiliens au niveau lycée ou début de l'université.

Nous avons fait cette distinction pour essayer de prendre en compte :

- **La diversité extrêmement grande, suivant les enseignements et les manuels, des cadres introduits et privilégiés, des rapports à ces cadres, des articulations entre cadres développés avant tout enseignement de l'algèbre linéaire, ou pendant l'initiation à ce domaine.**

  Comme nous l'avons déjà souligné en effet, certains de ces cadres peuvent avoir été déjà introduits en préalable à l'algèbre linéaire, de façon plus ou moins indépendante ou coordonnée. Dans les premiers cours d'algèbre linéaire, ils ont aussi des places différentes et jouent des rôles distincts. Les cadres des systèmes linéaires et des matrices peuvent ainsi être introduits en premier lieu, comme cadres autonomes, plutôt sur un plan technique, comme outils servant à la résolution de différentes tâches et ensuite, jouer dans la théorie un rôle plus au moins grand.

- **Le caractère contextualisé du fonctionnement des étudiants,** lié en partie aux découpages proposés par l'enseignement et à l'éclatement du paysage qui en résulte,
- **Le développement et l'articulation de rapports "provisoires" qui soutiennent la flexibilité mais peuvent aussi, ensuite, lui faire obstacle.**

Dans ce chapitre, l'analyse au niveau des cadres restera assez globale. Nous ne chercherons pas à les caractériser de façon très détaillée, notre but étant de dresser dans ses grandes lignes le paysage mathématique de l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique. Nous présenterons aussi pour chacun des cadres considérés un organigramme permettant de visualiser rapidement le rôle qu'il peut jouer dans l'articulation des points de vue. Nous développerons en fait une analyse plus détaillée, dans le chapitre suivant, mais en l'organisant, cette fois autour des tâches dont la résolution est susceptible de nécessiter cette articulation.

Nous débuterons par les cadres qui apparaissent en premier lieu dans l'enseignement brésilien : le cadre des systèmes linéaires et celui des matrices.

VI.1. LE CADRE DES SYSTEMES LINEAIRES

Les organigrammes relatifs à ce cadre se trouvent p.97 et 98.

Dans le cadre des systèmes linéaires, l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique est liée à la représentation des sous-espaces solutions des systèmes, comme nous l'avons déjà souligné en II.

Ce que la résolution d'un système linéaire met en avant, c'est la représentation paramétrique de l'espace des solutions, vectoriel ou affine suivant que le système est homogène ou non. La représentation cartésienne minimale apparaît via la réduction du système à un système d'équations linéairement indépendantes.

La notion de rang d'un système relie les deux types de représentations et on dispose de théorèmes assurant les liaisons dans tous les cas possibles a priori.

Si on ne considère que le cadre des systèmes linéaires, le théorème de Rouché[9], qui assure la liaison entre les deux types de représentations, s'appuie sur les notions suivantes:

---

[9]Théorème de Rouché : Soient $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, (1≤i≤m) un système de m équations à n inconnues, (coefficients a_{ij}, seconds membres b_i), de rang r.

- La définition du rang d'un système linéaire, qui peut être définie à l'intérieur de ce cadre, comme le nombre de pivots choisis dans l'application de la méthode de Gauss.

  Dans ce cas, l'invariance du rang par rapport au choix des pivots ne va pas de soi. Dans son cours, par exemple, M. Rogalski (déjà cité note 6) la démontre, en introduisant la notion de rang d'une famille de vecteurs, par l'utilisation du lemme de l'échange[10]. Ceci permet d'assurer l'invariance du rang d'une famille de vecteurs, dans une succession réversible de combinaisons linéaires. En associant un vecteur (ligne) à chaque équation du système, on obtient alors l'invariance de la notion de rang d'un système d'équations, par rapport aux pivots choisis.

  La détermination du rang d'un système linéaire peut en fait s'effectuer à un niveau très technique, en travaillant sur le tableau de nombres associé. Précisons cependant déjà qu'une résolution purement technique, efficace dans le cadre de la résolution des systèmes, pourra se constituer en obstacle lorsqu'elle devra être adaptée pour la détermination du rang d'une famille de vecteurs, donnée elle aussi par un tableau de nombres.

- La discussion du système, à partir du type de configuration trouvé après l'application de la méthode de Gauss, qui met en relation le rang du système (r), le nombre d'équations (m) et le nombre d'inconnues (n) pour déterminer le type du système, contrôler le nombre de paramètres (n - r) nécessaires pour décrire l'ensemble de solutions et déterminer les (m - r) équations qui représentent les conditions de résolubilité du système.

(a) Le système homogène a toujours une solution :
Si r = n, il y a une et une seule solution, la solution "triviale".
Si r < n le système est compatible et il y a une infinité de solutions. On peut déterminer les inconnues principales en choisissant les inconnues secondaires. Les solutions s'expriment linéairement en fonction de **n - r paramètres**.
(b) Le système non homogène doit satisfaire une des conditions suivantes:
Si r = n = m. Le système est de Cramer et il y a une solution et une seule.
Si r = m < n. Le système est compatible et il y a une infinité de solutions.
Si r = n < m. Il y a **m-r conditions de résolution** que doivent vérifier les seconds membres. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, il n'y a pas de solutions; si ces condition sont vérifiées il y a une infinité de solutions.
Si r < n et r< m. Il y a **m - r conditions de résolution**. Si ces conditions ne sont pas vérifiées, il n'y a pas de solution ; si ces conditions sont vérifiées il y a une infinité de solutions.
Dans les cas r = m < n, r = n <m et r< n < r < m , lorsqu'il y a une infinité de solutions, on peut déterminer les inconnues principales en choisissant les inconnues secondaires. Les solutions s'expriment en fonction de **n - r paramètres.** [Rogalski, 1992, p. 3]

[10] Lemme de l'échange : Si des vecteurs $u_1,...,u_r$ linéairement indépendants sont des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1,...v_p$ alors $r \leq p$, et on peut remplacer des vecteurs v_j par les vecteurs u_i, de telle sorte que tout vecteur combinaison linéaire des vecteurs v_j le soit aussi des nouveaux vecteurs $u_1,...,u_r,v_{q1},...v_{qp-r}$ (où les v_{qi} sont ceux des vecteurs v_j non remplacés). [Rogalski, 1992, p. 8]

A un système, on va associer finalement deux sous-espaces fondamentaux :

- Le sous-espace des solutions du système qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension n-r, pour un système homogène, donc décrit par une représentation paramétrique à (n - r) paramètres, et un sous-espace affine de dimension n-r, admettant le sous-espace précédent comme espace vectoriel sous-jacent si le système est non-homogène mais compatible (cf. paragraphe II. A)).
- Le sous-espace associé aux (m-r) conditions de résolution du système, qui est un sous-espace de $\mathbf{R}^m$ de dimension r (cf. paragraphe II. B)).

Dans le cadre des systèmes, on peut progresser dans l'articulation en montrant que lorsqu'on considère le tableau des coefficients d'un système, le rang des lignes est égal au rang des colonnes, via l'association n-uplet/équations.

Là encore, il faut souligner que, dans l'utilisation de tableaux de nombres, si l'on peut faire les transformations soit sur les lignes, soit sur les colonnes, on change alors la base du sous-espace engendré par une certaine famille de vecteurs et il faut savoir, dans chaque cas, quels sont ces vecteurs et l'espace où ils se situent. Par exemple, dans la matrice des coefficients du système associé à une application linéaire, on peut déterminer la dimension et une base du sous-espace image de cette application en utilisant la méthode de Gauss sur les colonnes de ce tableau. Mais l'application de la méthode de Gauss sur les lignes de ce tableau ne nous donne pas de la même manière directement une base du noyau, même si cette base peut être ensuite déduite des solutions du système. Dans le premier cas, nous sommes en train de déterminer le rang d'une famille de vecteurs et dans le deuxième, le rang d'un système d'équations. La non prise de conscience de ces différences peut faire obstacle au contrôle de l'articulation dans les deux sens, même si l'on est capable de résoudre correctement certaines tâches.

Jusque là, nous avons considéré l'articulation entre point de vue cartésien et paramétrique en restant à l'intérieur du cadre des systèmes linéaires, mais ce cadre, pour autonome qu'il puisse être, ne vit pas isolé sur lui-même, mais entre en interaction avec d'autres cadres.

Par exemple :

- Si l'on articule le cadre des systèmes linéaires avec celui de l'algèbre linéaire, on peut interpréter un système soit en termes d'application linéaire, les solutions correspondant au noyau de l'application dans le cas homogène, au sous-espace affine, image réciproque d'un vecteur donné dans le cas non-homogène, soit en termes de décomposition d'un vecteur sur une famille de vecteurs.

L'articulation fournit alors d'autres moyens théoriques de justification des résultats formulés précédemment.

L'articulation peut également se faire avec le cadre matriciel, le cadre de l'algèbre linéaire servant alors de cadre intermédiaire, via l'isomorphisme entre espaces d'applications linéaires et espaces de matrices, dans les bases canoniques de R^n et R^m.

En ce qui concerne ces interprétations, les connaissances ci-dessous sont nécessaires, pour tirer parti des nouveaux moyens fournis à l'articulation des points de vue :

- Résoudre un système de m équations à n inconnues revient à chercher les antécédents du vecteur associé au second membre par l'application linéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}^m$ dont la matrice par rapport aux bases canoniques est celle des coefficients du système ; ceci permet de montrer que le rang du système est égal au rang de l'application linéaire définie par ce système ou encore que celui-ci est le rang de la matrice des coefficients du système. A ce niveau, il ne s'agit pas d'une simple description du système mais il faut aussi, à travers l'association d'une matrice à une application linéaire, savoir se rapporter à l'isomorphisme entre un espace vectoriel de matrices et un espace d'applications linéaires, de façon à pouvoir employer des théorèmes qui ont été démontrés dans l'un de ces espaces.
- Le rapport entre le système linéaire homogène associé à un système de m équations et n inconnues et le noyau de l'application linéaire définie par ce système, ce qui permet de montrer que la dimension du sous-espace solution du système linéaire homogène est n - r, où n est le nombre d'inconnues et r le rang du système.
- Les liens qui existent entre les quatre notions de rang, c'est-à-dire la notion de rang d'une famille de vecteurs (dimension du sous-espace engendré par une famille de vecteurs), de rang d'une application linéaire (dimension de l'image de l'application linéaire), de rang d'une matrice (rang de la famille de vecteurs colonnes de la matrice) et de rang d'un système linéaire, de façon à pouvoir donner des démonstrations en utilisant une des interprétations du système (matricielle, vectorielle ou fonctionnelle). Cette discussion met en jeu le théorème du rang (dim E = dim Ker(f) + rg(f), $f : E \rightarrow F$, pour f linéaire) qui permet de rapporter la discussion des solutions d'un système aux propriétés de l'application linéaire associée.

Par exemple :

- Supposons que nous voulions montrer que si r = n = m, le système (dit de Cramer) a une solution et une seule. Nous pouvons partir de l'interprétation matricielle du système, c'est-à-dire de l'équation matricielle AX = B (où A est la matrice des coefficients du système, B est la

matrice colonne du second membre et X est la matrice colonne des inconnues du système); puis utiliser la proposition qui garantit qu'une matrice carrée d'ordre n et de rang n est inversible (ce qui peut être démontré en s'appuyant sur l'isomorphisme entre l'espace des matrices nxn et l'espace des applications linéaires $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ si on connaît les propriétés sur le rang d'une application linéaire)[11]. Il est donc clair que le système admet la solution unique $X = A^{-1}B$.

Commentaires :

- Comme nous venons de le souligner à travers ces exemples et remarques, l'articulation entre le cadre des systèmes linéaires et les autres cadres intervenant en algèbre linéaire va permettre des interprétations et des réformulations de résultats sur les systèmes ainsi que de nouvelles preuves. Les tâches proposées seront souvent à l'articulation de deux cadres, ceci correspond au rôle outil du cadre des systèmes linéaires en algèbre linéaire.
- Il est intéressant de remarquer ici, que si l'on se place seulement dans le cadre des systèmes linéaires, la démonstration du théorème de Rouché semble n'exiger que des connaissances sur la résolution des systèmes par la méthode du pivot de Gauss puisque le rang du système peut être déterminé directement à partir de cette méthode, qui fournit également une description du sous-espace solution et l'interprétation des conditions de résolubilité du système. Mais, pour traiter l'invariance, il faut passer par l'association n-uplet/équation et relier le rang d'un système linéaire au rang d'une famille de vecteurs. Par contre, si on considère directement le cadre de l'algèbre linéaire, il faut d'abord savoir représenter un système linéaire en tant qu'application linéaire, ensuite relier les différentes notions de rang, puis interpréter le système dans différentes cadres (matriciel, vectoriel et fonctionnel) pour pouvoir se servir des propositions de chacun de ces cadres, de façon à unifier et généraliser les résultats.
- Pour les étudiants français, de plus en plus, l'accent est mis sur la technique du pivot de Gauss. L'utilisation de déterminants dont on a vu l'importance historique dans ce chapitre, tend à devenir une technique réservée à l'étude des systèmes avec paramètres où elle apparaît comme un moyen économique de déterminer a priori les différents cas à étudier. Soulignons que ces techniques sont mises en place à différents moments en France et au Brésil et que l'étude des systèmes linéaires peut rester très liée à ces techniques, sans faire intervenir le niveau de contrôle technologique lié à la notion de rang et au théorème de Rouché. Dans un tel cas, il est difficile de dépasser le seul niveau de lecture des solutions du système, puisque l'association

[11] le rang d'une matrice peut être aussi défini bien sûr comme l'ordre maximal d'un déterminant extrait non nul, mais ceci fait intervenir alors le cadre des déterminants.

des conditions de résolution du système en tant qu'équations qui caractérisent le sous-espace image de l'application linéaire définie par le système, exige déjà des interprétations. Ainsi, l'habitude de chercher les solutions d'un système linéaire sans avoir à se poser la question de l'existence de solutions peut devenir un obstacle résistant à l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique. Dans l'articulation, on travaille en effet avec des systèmes qui ont toujours des solutions. Dans ce cas, on peut, par des substitutions successives effectuées sans erreurs de calculs, toujours trouver des solutions correctes. Cette habitude peut être largement induite par un enseignement où l'on se situe de façon quasi exclusive dans le cas de systèmes de Cramer, comme par exemple au lycée en France ou au Brésil, un peu comme lors du développement historique de l'étude des systèmes linéaires par les déterminants, où les techniques performantes, éloignées d'une réalité plus intuitive, ont constitué un obstacle à une bonne perception du concept de rang. Cet obstacle sera sans doute plus visible dans l'articulation dans le sens paramétrique / cartésien. En effet, ce sens oblige à sortir du seul niveau de lecture des solutions du système et à faire des interprétations sur les conditions de résolubilité, en considérant, dans le cas d'un système non carré, un autre espace que celui des solutions.

Ceci nous conduit à considérer trois principaux types d'articulation entre le cadre des systèmes linéaires et le cadre de l'algèbre linéaire, à savoir :

- Celui de la résolution locale de tâches relatives au cadre de l'algèbre linéaire (par exemple : détermination du noyau et de l'image d'une application linéaire) où le cadre des systèmes linéaires fonctionne comme outil par rapport au cadre de l'algèbre linéaire.
- Celui d'une utilisation plus globale du cadre des systèmes linéaires comme outil de preuve. Ainsi, à travers la discussion du système, les différentes formes prises par le pivot de Gauss peuvent être vues non seulement comme une méthode de résolution de systèmes, mais surtout comme un moyen de démontrer des résultats généraux d'algèbre linéaire.
- Celui de l'articulation en sens inverse où c'est l'algèbre linéaire qui fournit un cadre interprétatif et un cadre de preuve au cadre des systèmes linéaires.

Comme nous avons pu le remarquer dans l'exemple de la discussion du système, le cadre des matrices peut être un outil efficace pour démontrer des résultats de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique parce que l'isomorphisme entre espaces des matrices et espaces d'applications linéaires nous permet de transférer dans l'un de ces espaces les propriétés déjà démontrées dans l'autre. Quelquefois l'intermédiaire des matrices semble même nécessaire pour

faciliter l'emploi de certaines propriétés. D'où le choix de décrire le cadre matriciel dans le paragraphe suivant.

VI.2. LE CADRE DES MATRICES

L'organigramme relatif à ce cadre se trouve p.99.

Le cadre des matrices a une existence autonome : chaque ensemble $M_{mxn}(K)$ a une structure d'espace vectoriel et, si m est égal à n, $M_n(K)$ a une structure d'algèbre. Mais en ce qui concerne l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique, ce cadre ne peut fonctionner de façon autonome, il faut l'associer à d'autres cadres.

Par exemple :

- On peut associer une application linéaire à une matrice et réciproquement via l'isomorphisme entre l'espace des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimensions n et p et un espace de matrices de format pxn. Cet isomorphisme permet de transférer les propriétés d'un espace à l'autre et donc d'établir les relations entre rang d'une matrice et rang d'une application linéaire associée, ainsi que de transférer les propriétés de la notion de rang d'un espace à l'autre.
- Nous pouvons aussi associer un système de vecteurs (les vecteurs colonnes) à une matrice et l'isomorphisme entre l'espace des matrices mxn et l'espace $(\mathbf{R}^m)^n$ permet de transférer les propriétés du sous-espace engendré par les vecteurs colonnes à la matrice associée. On légitime ainsi l'utilisation sur les colonnes d'une matrice des transformations permises entre vecteurs. Ceci permet aussi d'établir le rapport entre le rang d'une matrice et le rang de la famille des vecteurs colonnes qui constituent cette matrice et donc de transférer les propriétés du rang d'une matrice au rang d'une famille de vecteurs et vice-versa.

A partir de ces associations, il existe donc les moyens de relier trois notions de rang : rang d'une matrice, rang d'une application linéaire et rang d'une famille de vecteurs et, dans tous ces cas, il existe des moyens techniques de détermination du rang qui peuvent s'exprimer par des transformations sur des tableaux de nombres, ne mettant pas nécessairement en évidence les différents concepts en jeu et n'explicitant pas les associations qui ont été faites.

Par exemple :

- En déterminant le rang d'une matrice par des transformations sur les colonnes on peut, à la fin, ne pas remarquer que le nombre d'éléments différents de zéro sur la diagonale est égal au rang des n vecteurs colonnes qui engendrent un sous-espace de $\mathbf{K}^m$ où m est le nombre de lignes de

la matrice, ou encore que c'est le rang du système homogène associé à la matrice, ou encore la dimension de l'image d'une base par l'application linéaire associée à la matrice dans les bases canoniques.

Commentaires :

- Nous pouvons souligner là que, même si la méthode de détermination du rang à travers les tableaux de nombres semble plus simple que la détermination de rang par application de la méthode du pivot de Gauss sur le système (nous avons souligné les différences d'interprétation dans le paragraphe II. B)), lorsque l'on veut justifier l'utilisation de ces tableaux, les concepts et les théorèmes auxquels il faut savoir se rapporter semblent être moins économiques puisqu'ils exigent des interprétations dans d'autres cadres.
- Il faut souligner encore que le cadre matriciel peut être favorable au développement et à l'articulation de rapports "provisoires" dans les espaces de dimension finie. En effet, comme nous venons de souligner, il est possible de démontrer les propriétés pour les matrices, puis de les transférer via des isomorphismes adéquats aux applications linéaires et aux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, en travaillant avec des objets algébriques qui peuvent sembler aux étudiants moins abstraits.

On complète l'articulation, en soulignant que les notions de matrice extraite d'une matrice A et de matrice inversible permettent de montrer que le rang d'une matrice A est le plus grand entier pour lequel il existe une matrice extraite de A qui soit inversible, c'est-à-dire l'ordre du déterminant de plus grand ordre qu'on peut extraire de la matrice et qui n'est pas nul. C'est ce théorème qui nous permet de déterminer le rang d'un système à partir du rang de la matrice des coefficients du système.

En ajoutant le résultat qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si sa transposée l'est, on peut conclure que $rgA = rg{}^tA$, ce qui permet de démontrer l'invariance du rang d'une matrice lorsqu'on fait des transformations soit sur des lignes, soit sur des colonnes.

Il en résulte que le cadre des matrices apparaît comme un cadre commode pour des tâches où nous n'avons besoin que de déterminer le rang d'un système linéaire par la liberté qu'il permet dans les transformations. Mais cette liberté peut aussi constituer un piège pour des étudiants qui ne sauraient pas la contrôler et les conduire à des interprétations vides de sens, des dérapages formels dans le cas d'interprétation nécessitant des articulations avec d'autres cadres.

Nous allons décrire dans le paragraphe suivant le cadre des déterminants qui, on l'a vu, a joué un rôle important dans le développement historique de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique.

VI.3. LE CADRE DES DETERMINANTS

L'organigramme relatif à ce cadre se trouve p.100.

Concernant ce cadre, il est intéressant de souligner que Dorier fait l'hypothèse, que, peut être, les outils performants disponibles à partir du développement de l'étude des systèmes linéaires à travers les déterminants ont pu constituer un obstacle à l'émergence du concept de rang. Il sera intéressant de rechercher si ce même obstacle apparaît par rapport à l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique, puisque, comme nous l'avons déjà souligné dans le cadre des systèmes linéaires, on ne peut vraiment avancer dans l'articulation que lorsqu'on considère la notion de rang. Quel que soit le cadre choisi pour donner une première définition, pour montrer qu'il s'agit d'un invariant, il faut toujours associer des vecteurs aux équations.

Le cadre de déterminants peut être introduit dans un premier cours d'algèbre linéaire via la notion d'application multilinéaire. Or même si la définition en tant que forme multilinéaire alternée est considérée et les propriétés sont déjà démontrées par rapport à cette définition en DEUG, ce n'est pas vraiment à ce niveau que la notion de déterminant va intervenir dans les tâches où se joue l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique (conformément à l'étude historique). Nous pouvons dire que cette définition et les propriétés qu'elle permet de démontrer serviront plutôt à mettre en place les propriétés de calcul qui serviront de base à des transformations élémentaires sur les systèmes (en lignes) et sur les matrices associées à des familles de vecteurs colonnes (en colonnes). Les transformations permises sur les lignes et colonnes, dans le cadre des déterminants, ont autant de degrés de liberté que celles du cadre des matrices. Toutefois il est important de signaler qu'elles ne conservent pas toujours exactement le déterminant, sans néanmoins changer un déterminant non nul en un nul ou vice-versa.

Commentaires :

- La liaison entre le cadre des déterminants et celui des systèmes linéaires peut être faite via la détermination du rang d'un système de vecteurs, c'est-à-dire l'ordre de plus grand déterminant non nul. Dans ce cas, le cadre des déterminants servira plutôt comme moyen économique pour étudier les systèmes, notamment avec paramètres :

  - existence de règles de calcul simples comme la règle de Sarrus en dimension 3 qui ne nécessite pas d'effectuer des combinaisons,

- possibilité de jouer simultanément sur les lignes et les colonnes pour introduire des zéros comme nous l'avons souligné plus haut,

- obtention directe du déterminant comme produit des éléments de la diagonale lorsqu'il est triangulé.

- Lorsque nous voulons relier ce dernier niveau d'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique dans le cadre des déterminants au cadre de l'algèbre linéaire, nous pouvons le faire via la notion de rang d'une matrice.
- Le résultat rgA = rg^{t}A permet de conclure que det A = det^{t}A et donc de compléter l'articulation. Ce résultat étant un moyen économique d'anticipation et de contrôle. C'est pourquoi, en général, l'utilisation de déterminants se prête à l'étude des systèmes à paramètres en permettant de déterminer les différents cas à étudier.

Après ces trois cadres qui ont plutôt un statut d'outil vis à vis de l'articulation, nous en venons au cadre essentiel où elle s'inscrit, vu les objets en jeu.

VI.4. LE CADRE DE L'ALGEBRE LINEAIRE

L'organigramme relatif à ce cadre se trouve p.101.

Dans le cadre de l'algèbre linéaire, les points de vue cartésien et paramétrique sont mis en jeu dans les représentations de sous-espaces vectoriels de dimension finie, de l'intersection de sous-espaces, de sous-espaces engendrés par une famille de vecteurs, de somme de sous-espaces, de noyau et d'image d'une application linéaire.

Dans ce cadre, l'articulation entre ces deux points de vue s'appuie sur les notions de rang d'une famille de vecteurs, de rang d'une application linéaire et de dimension. Elle peut s'appuyer sur deux théorèmes : le théorème du rang, qui établit la relation entre la dimension du noyau d'une application linéaire, le rang de cette application et la dimension de l'espace vectoriel du domaine de cette application (dim Ker(f) + rg(f) = dim E, f: E $\rightarrow$ F); et le théorème de la dimension qui garantit que toutes les bases d'un même espace vectoriel ont la même dimension.

Soulignons ici que ce sont ces mêmes notions qui nous permettront d'établir des moyens d'anticipation et de contrôle de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique à ce niveau.

Lorsqu'on veut compléter l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique ou la traiter à un niveau plus théorique dans le cadre de l'algèbre linéaire, on doit faire intervenir un des quatre cadres que nous avons décrits plus haut ou mettre en jeu la notion de dualité, comme

montré dans la partie II. Nous ne détaillerons pas plus avant ce paragraphe, renvoyant le lecteur à cette partie II.

Nous avons enfin introduit un dernier cadre, celui de la géométrie affine euclidienne qui est sans aucun doute un des premiers sinon le premier où l'articulation est rencontrée par les étudiants.

VI.5. LE CADRE DE LA GEOMETRIE AFFINE EUCLIDIENNE

L'organigramme relatif à ce cadre se trouve p.102.

Nous voudrions tout d'abord préciser ce que nous entendons ici par géométrie affine euclidienne. Il ne s'agit pas d'une théorie axiomatique des espaces affines euclidiens. Il s'agit de la géométrie des droites et plans que les élèves travaillent dès l'enseignement secondaire.

Ce cadre peut intervenir dans l'articulation de diverses façons.

- en permettant d'illustrer les propriétés de cette articulation graphiquement en dimension 2 et 3, cette illustration prenant un statut plus métaphorique en dimension supérieure,.
- en permettant de mettre en place dans ce contexte des relations entre nombre de paramètres et nombre d'équations.

Si le travail dans ce cadre géométrique peut aider à mettre en place dans un contexte simple l'articulation, on peut néanmoins se demander si les généralisations à des dimensions supérieures ne risquent pas pour les étudiants de se faire via des théorèmes en acte erronés.

Dans le cadre de la géométrie affine euclidienne, nous considérons les représentations paramétriques et cartésiennes de droites et de plans dans $\mathbf{R}^3$. Les droites et les plans affines étant les translatés de droites et plans vectoriels, c'est la liaison avec ces espaces vectoriels sous-jacents qui permettra de contrôler les résultats à un autre niveau, c'est-à-dire par les vecteurs directeurs qui caractérisent les droites et les plans et dont le nombre correspond au nombre de paramètres nécessaires pour donner une représentation paramétrique de ces droites et plans, et par des techniques de résolution de systèmes qui permettent de déterminer une représentation cartésienne.

Nous voudrions souligner de plus que lorsqu'on se place dans le cadre de la géométrie analytique en 2 ou 3 dimensions, le passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne s'exprime à travers des systèmes particulièrement simples (3 équations et 3 inconnues au plus) ce qui permet des techniques de résolution simplifiées. De plus, ce cadre autorise divers moyens de contrôle et des techniques spécifiques. Nous les détaillons ci-après.

Par exemple :

- Le passage d'une représentation paramétrique de droite à une représentation cartésienne de droite peut se faire en isolant le paramètre dans les équations de la représentation paramétrique et en égalant les expressions obtenues. On obtient 1 équation dans le plan et 2 équations dans l'espace.

- Le passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique pour une droite dans le plan ou un plan dans l'espace peut se faire très facilement puisque l'on travaille dans les deux cas sur une seule équation qu'il s'agit de lire sous forme de représentation paramétrique " implicite-équation ".

- On peut aussi facilement obtenir une représentation cartésienne en déterminant, via le produit vectoriel, un vecteur normal au plan et ensuite l'équation du plan via la nullité du produit scalaire.

- Une autre technique spécifique qui permet de déterminer une équation qui caractérise une représentation cartésienne d'une droite dans le plan est celle où on calcule $\det(\vec{u}, \vec{AM}) = 0$ pour $\vec{u}$ vecteur directeur de la droite et $\vec{AM}$ un vecteur quelconque de la droite. De même, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AM})$ permet de déterminer une équation qui caractérise une représentation cartésienne d'un plan dans l'espace avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeurs du plan et $\vec{AM}$ un vecteur quelconque de ce même plan.

Les exemples ci-dessus montrent bien la spécificité de traitement de représentations paramétriques et cartésiennes dans le plan et dans l'espace où les moyens de contrôle sont aussi très particuliers puisqu'on a toujours :

- 1 équation et un seul vecteur lorsqu'on veut caractériser une droite dans le plan,

- 2 équations et 1 vecteur lorsqu'on veut caractériser une droite dans l'espace, 1 équation et 2 vecteurs lorsqu'on veut caractériser un plan dans l'espace.

VII. CONCLUSION

Les analyses effectuées montrent, nous semble-t-il, la complexité sous-jacente à l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique. Nous voudrions, en conclusion, insister sur un certain nombre de points qui nous semblent particulièrement importants.

- Pour analyser mathématiquement l'articulation des points de vue, il nous a paru nécessaire de faire intervenir plusieurs cadres : le cadre de l'algèbre linéaire, le cadre de la géométrie affine euclidienne, le cadre des systèmes linéaires, le cadre des matrices et le cadre des déterminants,

et aussi plusieurs registres et sous-registres : des représentations paramétriques " implicite-intrinsèque " et " explicite-intrinsèque ", des représentations paramétriques " implicite-équation ", des représentations paramétriques " explicite-tableau ", des représentations paramétriques " implicite-tableau ", des représentations cartésiennes intrinsèques et des représentations cartésiennes explicites.

Les analyses menées nous semblent renforcer notre hypothèse initiale de l'existence via la notion de " point de vue ", d'une flexibilité spécifique dans le travail mathématique, qui met en jeu de façon imbriquée différents cadres et différents registres, certains registres apparaissant plus spécifiques de certains cadres, mais ne s'y réduisant jamais.

• L'articulation des points de vue présente une dissymétrie évidente, attestée par son développement historique : le passage paramétrique / cartésien est plus exigente que le passage cartésien / paramétrique. Aujourd'hui, sur le plan théorique, elle est pensée dans le cadre théorique de la " dualité " mais l'histoire nous montre que sa mise en place, tout en nécessitant clairement la possibilité d'associer des vecteurs à des équations, peut s'effectuer sans doute avec un niveau de théorisation plus limité que celui correspondant à la théorie actuelle de la dualité.

Les analyses nous conduisent aussi à faire l'hypothèse que, dans ces formes moins théorisées de la dualité, le cadre des systèmes linéaires peut jouer un rôle d'appui essentiel, à condition qu'il ne soit pas réduit à sa fonction technique et que le travail ne s'y limite pas à la seule détermination de solutions de systèmes mais interroge leurs conditions de résolubilité et permette une anticipation de la taille de l'ensemble de solutions.

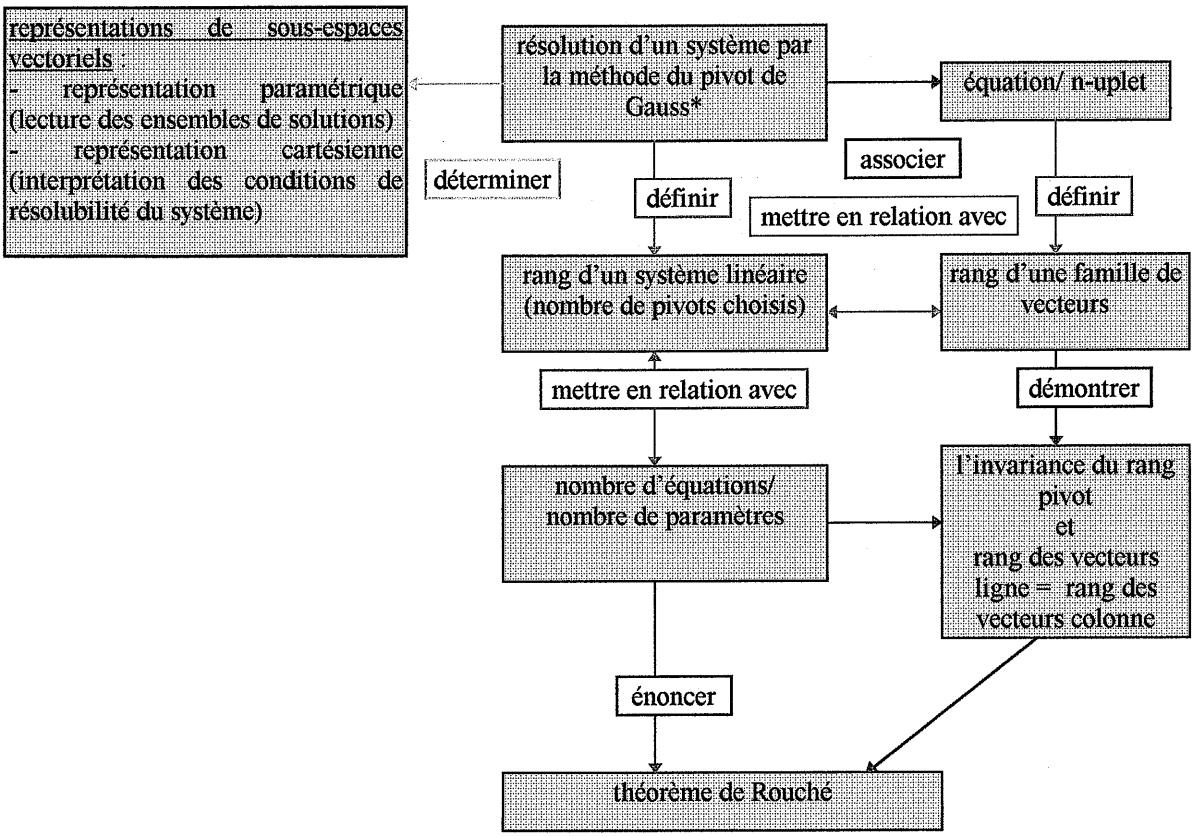
• Dans l'articulation des points de vue, la notion de rang joue un rôle essentiel, transversalement à celle de cadre, mais l'unification qu'elle permet n'est pas aussi évidente qu'on pourrait le penser, puisqu'interviennent en fait quatre notions de rang distinctes qu'il s'agit d'articuler. Soulignons de plus que la notion de rang ne met pas en jeu les objets de la même façon suivant que l'on cherche à passer d'un point de vue cartésien à un point de vue paramétrique, ou d'un point de vue paramétrique à un point de vue cartésien, comme le montre l'histoire de son développement.

• Sur le plan technique, là encore transversalement par rapport aux différents cadres, l'articulation s'appuie sur des manipulations de tableaux de nombres, c'est-à-dire sur un travail sémiotique dans le registre tableau. Mais il nous semble là aussi important de souligner que l'unification fournie par ce registre est moins évidente que l'on pourrait a priori le penser. Suivant le cadre concerné, les transformations de tableaux obéissent à des règles proches mais

non complètement identiques. En effet, les invariants associés à ces transformations et donc les interprétations des résultats obtenus peuvent être tout à fait distincts. De plus, à l'intérieur d'un même cadre, suivant que l'on travaille sur les lignes ou les colonnes, les invariants, les objets sur lesquels ils portent, et donc les interprétations diffèrent aussi. Cette unification technique apparente via le registre des tableaux nous semble pouvoir constituer un obstacle important à la maîtrise de l'articulation des points de vue. Elle nous semble aussi imposer, au delà de la seule maîtrise technique, la mise en place d'instruments permettant d'anticiper et contrôler de façon efficace la manipulation des ostensifs.

• La mise en place de l'articulation peut aussi s'appuyer sur le cadre géométrique plus familier aux étudiants, cadre où ils disposent de techniques spécifiques, de moyens de visualisation, de moyens de contrôle efficaces. La question des modes de généralisation à des espaces de dimension supérieure reste cependant posée et ne nous semble pas évidente.

CADRE SYSTEME (ISOLE)



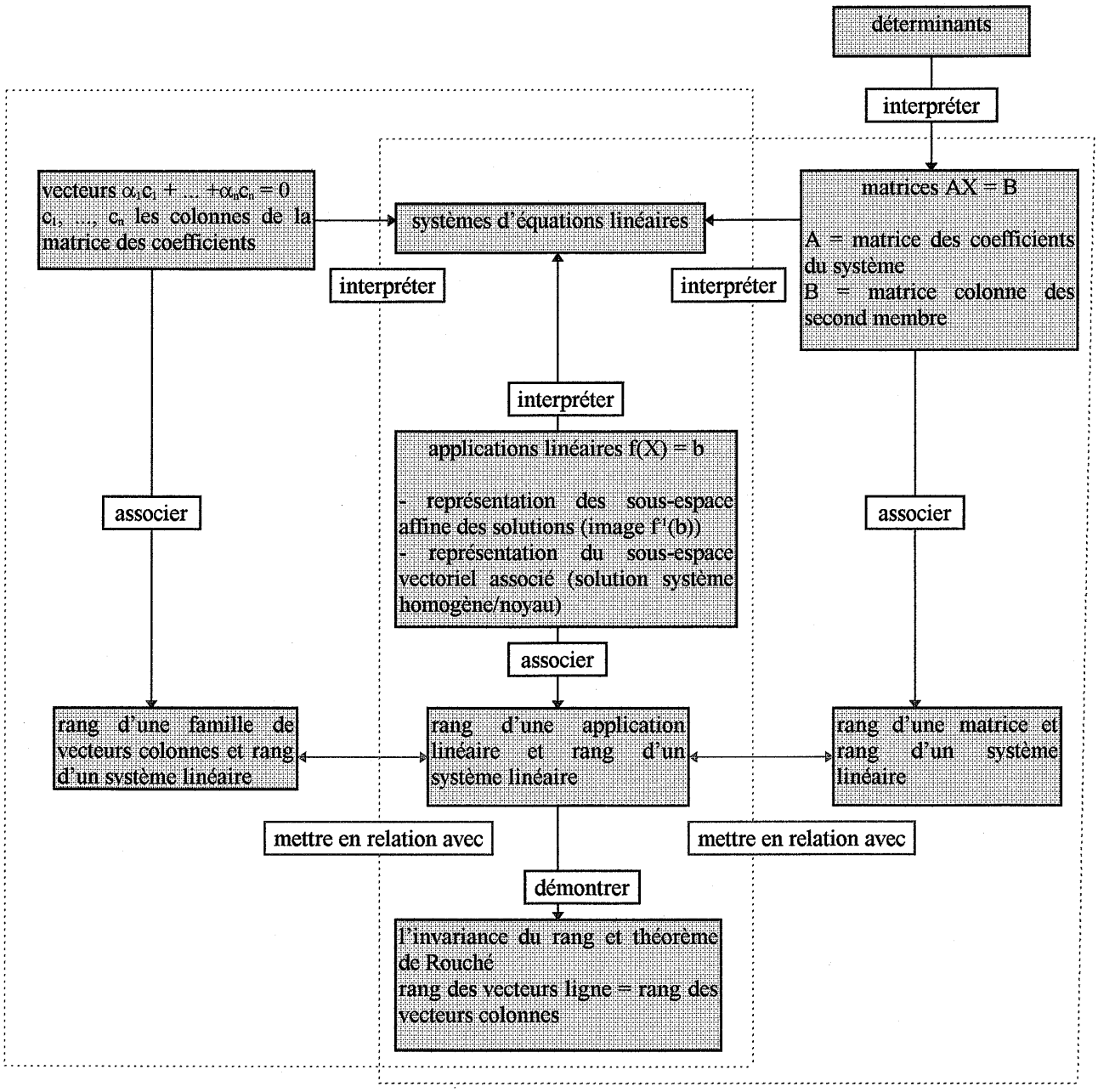
Notions et théorèmes qui permettent de démontrer l'invariance du rang pivot, rang des vecteurs ligne = rang des vecteurs colonne et le théorème de Rouché

- la notion d'indépendance linéaire
- le lemme de l'échange
- l'invariance du rang d'une famille de vecteurs

REMARQUE : Après avoir montré l'invariance du rang d'une famille de vecteurs, on peut conclure à l'invariance du rang pivot si on avait fait l'association n-uplet/équation. (Cette association est considérée par M.Rogalski comme un changement de point de vue)

* Résolution d'un système par Gauss sans intervention de déterminants.

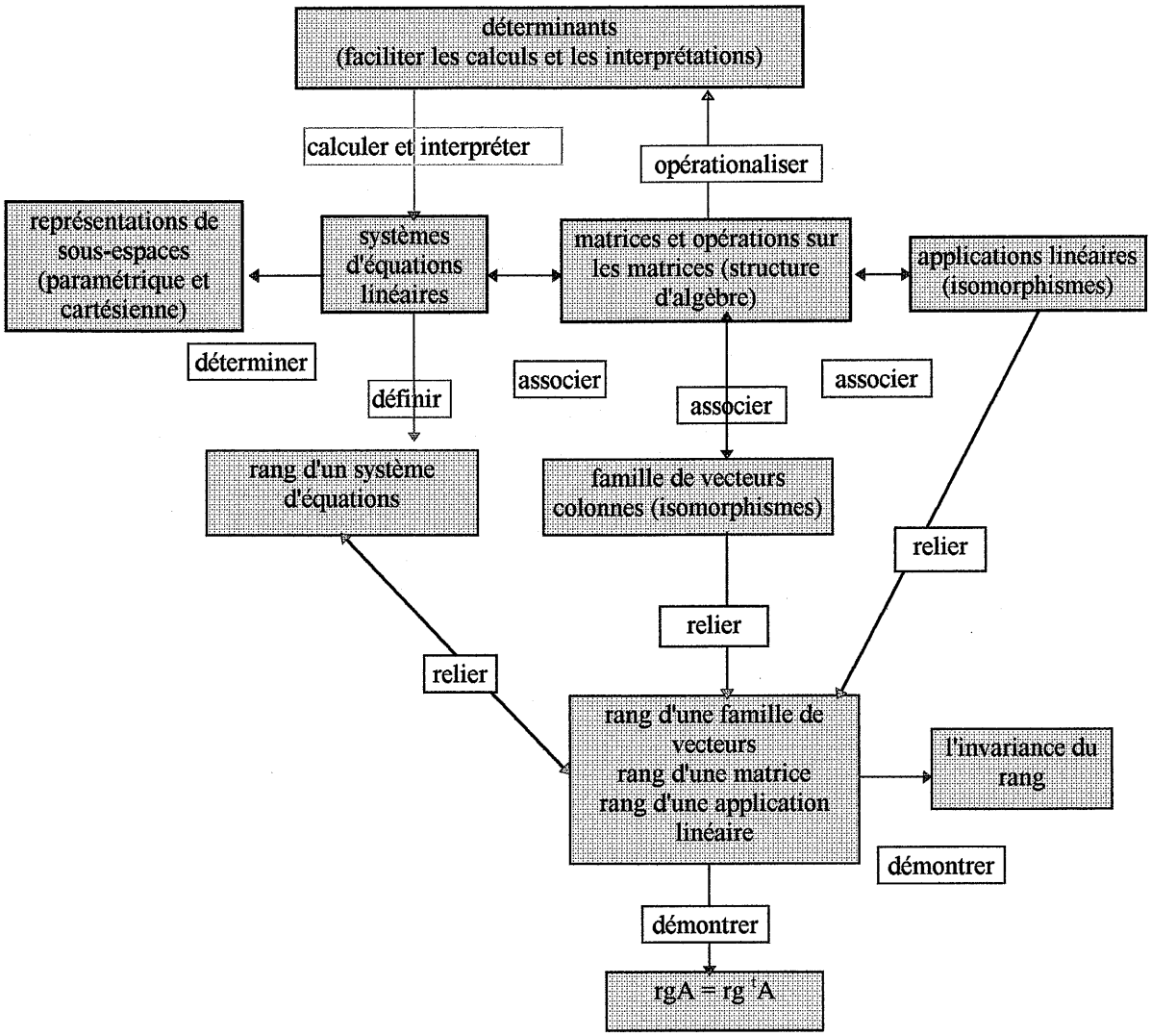
CADRE SYSTEME AVEC LES AUTRES CADRES



Notions et théorèmes qui permettent les démonstrations :
- la notion de noyau et image d'une application linéaire.
- le théorème qui garantit que le noyau et l'image sont des sous-espaces du domaine et contre-domaine.
- le théorème de l'isomorphisme.
- le théorème du noyau et de l'image

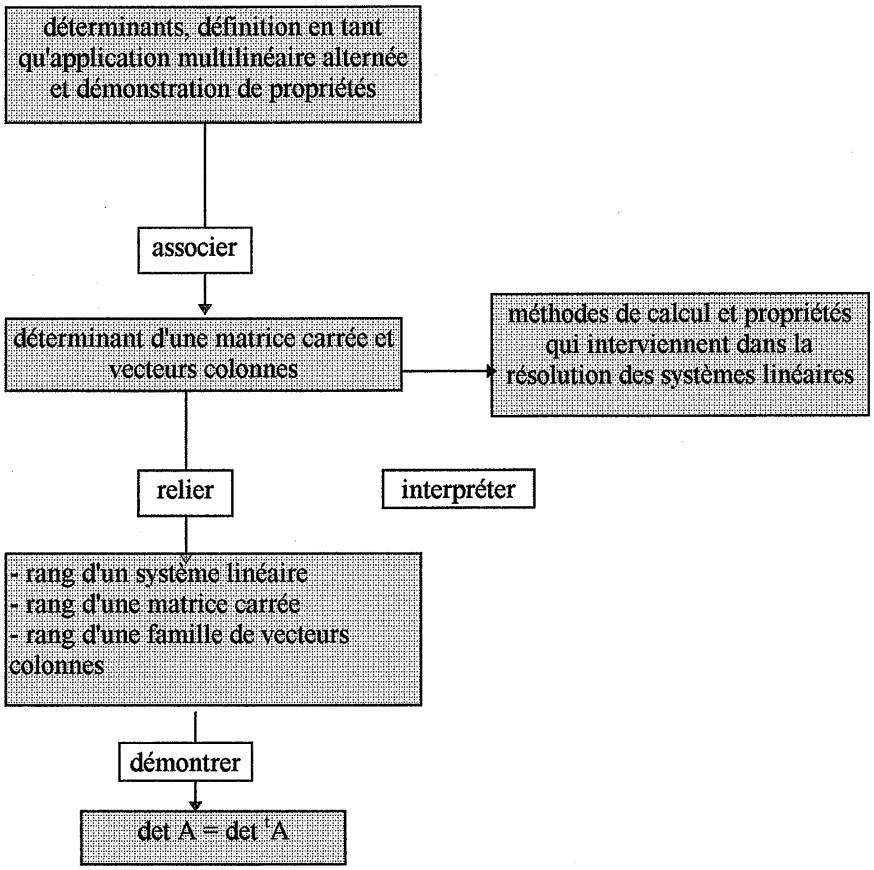
REMARQUE : Le cadre des systèmes linéaires peut être associé : soit au cadre de l'algèbre linéaire (famille de vecteurs, application linéaire), soit au cadre des matrices et dans ce cas nous avons besoin du cadre de l'algèbre linéaire (application linéaire) pour compléter l'articulation.

CADRE DES MATRICES



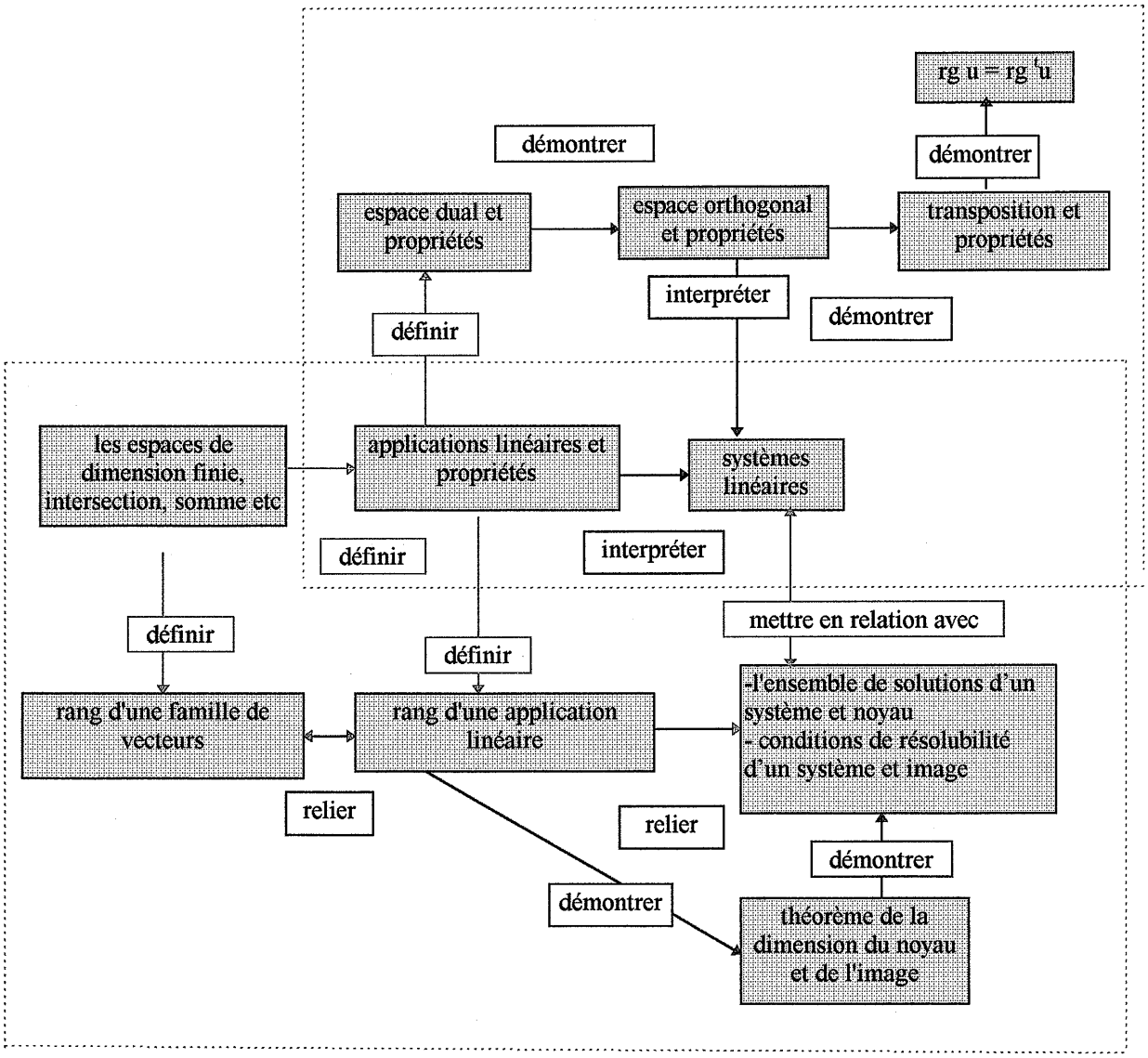
Notions et théorèmes qui permettent les démonstrations :
- la notion d'isomorphisme
- le théorème d'isomorphismes
- la notion de matrice d'une application linéaire
- la notion de matrice extraite
- le théorème du rang (dim E = dim Ker(f) + rg(f), f : E → F)

CADRE DES DETERMINANTS



Notions et théorèmes qui permettent d'avancer l'articulation :
- la notion d'application multilinéaire
- la notion de déterminant d'une matrice carrée
- l'isomorphisme entre matrices et le sous-espace engendré par les vecteurs colonnes de ces matrices
- le théorème d'isomorphisme
- les propriétés de matrices

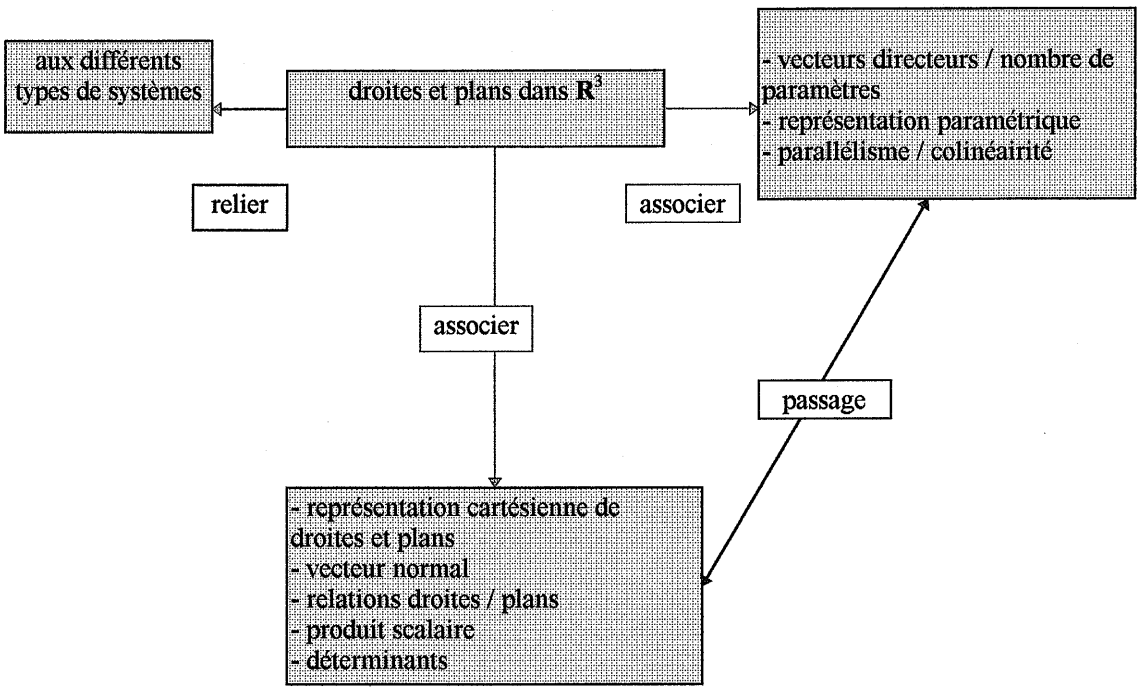
CADRE DE L'ALGEBRE LINEAIRE



Notions et théorèmes qui permettent d'avancer dans l'articulation :
- la notion d'espace vectoriel et ses représentations
- la notion d'application linéaire
- le théorème d'isomorphisme
- la notion de noyau et d'image d'une application linéaire
- le théorème qui garantit que le noyau et l'image sont des sous-espaces vectoriels de l'ensemble de départ et d'arrivée respectivement
- le théorème du noyau et de l'image

* Dans un autre niveau l'articulation se fait via :
- la notion d'espace dual
- la notion d'espace orthogonal
- le théorème qui relie la dimension d'un sous-espace et celle de son orthogonal
- la notion de transposEe qui permet de montrer que rg u = rg ᵗu

CADRE DE LA GEOMETRIE AFFINE EUCLIDIENNE



Notions qui permettent d'avancer dans l'articulation :
- la notion de produit scalaire
- la notion de déterminants 2x2 et 3x3
- la notion de combinaison linéaire
- la notion de parallélisme, colinéarité

CHAPITRE III

ETUDE A PRIORI DES CONDITIONS D'EMPLOI DE L'ARTICULATION ENTRE POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE

I. INTRODUCTION

Nous allons étudier dans ce chapitre dans quel espace de tâches mathématiques, du niveau d'un premier cours d'algèbre linéaire, peut trouver à vivre et se développer a priori la flexibilité que nous étudions, sur quelles techniques la résolution de ces tâches peut s'appuyer et quelles connaissances peuvent être associées à leur mise en oeuvre et à leur pilotage. Pour cela, nous allons définir une grille d'analyse des tâches usuelles intervenant dans un premier cours d'algèbre linéaire, permettant de mettre éventuellement en évidence, pour chacune d'elles, les articulations entre points de vue cartésien et paramétrique nécessaires à la résolution, ou utiles à son pilotage, ainsi que leurs caractéristiques conceptuelles, techniques et sémiotiques.

En préliminaire à ce travail, nous préciserons les différents registres et sous-registres sémiotiques que nous ferons intervenir dans l'analyse en ce qui concerne vecteurs et sous-espaces vectoriels.

II. LES REPRESENTATIONS SEMIOTIQUES DE VECTEURS ET DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

II.1. LES REPRESENTATIONS SEMIOTIQUES DE VECTEURS

En ce qui concerne les représentations sémiotiques de vecteurs nous avons eu besoin de distinguer d'une manière générale entre des représentations intrinsèques et des représentations non-intrinsèques, c'est à dire dépendant dans leur expression sémiotique de la base considérée.

Les espaces vectoriels intervenant dans un premier cours d'algèbre linéaire sont généralement les espaces suivants ou certains de leurs sous-espaces : $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}^2$, $\mathbf{K}^3$, $\mathbf{K}^4$, $\mathbf{K}^n$, $M_{mxn}(\mathbf{K})$, $P_n(\mathbf{K})$, $P(\mathbf{K})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}'$ désignant le corps des réels ou celui des complexes. Dans le registre symbolique intrinsèque, un vecteur d'un de ces espaces sera représenté par une lettre éventuellement surmontée d'une flèche, ou une combinaison linéaire de tels objets. Ce registre intrinsèque est particulièrement adapté à la formulation des définitions, théorèmes, à l'expression des généralisations, vu son économie sémiotique.

Dans notre étude nous avons distingué les registres de représentations sémiotiques suivants pour les vecteurs, outre les descriptions en langue naturelle.

- **En dimension finie**
- Pour les espaces vectoriels $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$, nous reprenons les distinctions introduites par K. Pavlopoulou. (1993)

  - registre de représentation graphique (G) : le vecteur est représenté par une flèche,

  - registre de l'écriture symbolique (S) : le vecteur est représenté par une lettre éventuellement surmontée d'une flèche ou une combinaison linéaire de lettres representant chacun un vecteur de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$.

  - registre de tableau (T) : le vecteur est représenté par une matrice colonne (resp. matrice ligne) avec deux ou trois lignes (resp. colonnes) correspondant à la représentation du vecteur par ses coordonnées dans un repère (cadre algébrique, représentation non intrinsèque);

- Pour les vecteurs géométriques du plan et de l'espace, nous reprenons les catégories précédentes,, en ajoutant au registre des représentations symboliques intrinsèques, le registre des représentations intrinsèques bipoints dont les notations sont du type $\vec{AB}$.
- Pour les espaces $\mathbf{K}^n$ ou leurs sous-espaces :

  - registre des représentations symboliques intrinsèques (S): le vecteur est représenté par une combinaison linéaire de vecteurs donnés dans le registre de l'écriture symbolique, le nombre de vecteurs variant suivant la dimension de l'espace et le système de générateurs considéré (exemple : $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k$ avec $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in K$) ou par une formulation comme $\text{lin}\{x_1, x_2 ..., x_k\}$ qui revient de façon implicite à cette décomposition.

  - registre des tableaux (T): le vecteur est représenté par une matrice colonne (resp. ligne) à n lignes (resp. colonnes), représentation par des coordonnées dans un repère (base), où n est la dimension de l'espace. Exemple :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} \quad / \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K ;$$

- Pour les espaces $M_{mxn}(\mathbf{K})$

  - registre des représentations symboliques intrinsèques (S): défini comme précédemment.

- registre de la représentation matricielle (M) : le vecteur est représenté par une matrice de m lignes et n colonnes ou par la combinaison linéaire de matrices du même type.

- Pour les espaces $P_n(\mathbf{K})$

  - registre de la représentation symbolique intrinsèque (S) : le vecteur est représenté par une combinaison linéaire de polynômes non explicités (exemple : $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + ... + \alpha_k p_k$ où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \alpha \mathbf{R}$ et $p_1, p_2, ..., p_k \in P_n(\mathbf{R})$)

  - registre de la représentation polynomiale explicite (P) : le vecteur est représenté par un polynôme ou par la combinaison linéaire d'autres polynômes explicités (exemple : $a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$ où $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$)

  - registre de la représentation polynomiale fonctionnelle (F) : le polynôme est représenté par une fonction ou une combinaison linéaire de fonctions, dans le registre de la représentation symbolique intrinsèque. Par exemple : $x \rightarrow p(x)$

- **En dimension infinie**

- Pour les espaces de fonctions

  - registre de la représentation symbolique intrinsèque (F) : défini comme précédemment

  - registre de la représentation fonctionnelle explicite (FE) : Le vecteur est représenté par une fonction explicite où par la combinaison linéaire de fonctions explicites (exemple : $x \rightarrow 3\sin x + \cos x$)

- Pour les espaces de polynômes

  idem que pour $P_n(\mathbf{K})$

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit un certain nombre de distinctions entre les représentations sémiotiques possibles de sous-espaces vectoriels, ces distinctions nous paraissant a priori utiles à l'étude des points de vue cartésien et paramétrique. Nous le rappelons dans ce paragraphe, après avoir introduit, parallèlement, certaines distinctions entre les représentations sémiotiques des vecteurs dans le registre symbolique et le registre tableau, qui nous semblent a priori nécessaires elles aussi pour l'étude envisagée, qu'il s'agisse de l'étude des rapports institutionnels à l'articulation via celle des manuels, ou de l'étude des rapports personnels, via celle des productions d'étudiants. Elles donnent à voir en effet, nous en faisons l'hypothèse, des caractéristiques différentes des objets vectoriels et peuvent privilégier des traitements, des interprétations elles aussi différentes.

II.2. LES REPRESENTATIONS SEMIOTIQUES DE SOUS-ESPACES

Les catégories introduites sont ici les suivantes, outre les descriptions en langue naturelle :

- les représentations symboliques intrinsèques telles U+V, U∩V ... qui ne renvoient a priori ni à un point de vue cartésien, ni à un point de vue paramétrique
- les représentations paramétriques de type " implicite-intrinsèque " et " explicite-intrinsèque ", telles que:

  lin{a,b} , ou lin $\{a_1 , a_2 , ... , a_n\}$ pour les premières, $\{ v/ v = \alpha a + \beta b$, avec α et $\beta \in \in \mathbf{R} \}$ ou $\{v/ v = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n \}$ pour les secondes, les premières renvoyant implicitement aux secondes

  avec, pour l'image d'une application linéaire f: E → F : Imf et {f(u) / u ∈ E } respectivement. Nous y rattacherons, par extension la notation Imf, en considérant que cette représentation intrinsèque, bien que non directement paramétrique, renvoie plutôt à ce point de vue.

- les représentations paramétriques de type " implicite-équation ", telles que:

  $A = lin \{ (2, 1, 1) \} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = 2\alpha, y = \alpha, z = \alpha$, avec $\alpha \in \mathbf{R} \}$

  $B = lin \{ (1, -2, 1, 0), (1, -3, 3, 1)\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x = \alpha + \beta, y = -2\alpha - 3\beta, z = \alpha + 3\beta,$

  $t = \beta$, avec α et $\beta \in \mathbf{R} \}$

- les représentations paramétriques " explicite-tableau ", telles que :

  $A = lin \{ (2, 1, 1) \} = \{\alpha(2, 1, 1)$, avec $\alpha \in \mathbf{R}\}$

  $B = lin \{ (1, -2, 1, 0), (1, -3, 3, 1)\} = \{\alpha(1, -2, 1, 0) + \beta(1, -3, 3, 1)$, avec α et $\beta \in \mathbf{R} \}$

- les représentations paramétriques " implicite-tableau ", telles que:

  $A = \{ (2\alpha, \alpha, \alpha)$, avec $\alpha \in \mathbf{R}\}$

  $B = \{(\alpha + \beta, -2\alpha - 3\beta, \alpha + 3\beta, \beta)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$

- les représentations cartésiennes intrinsèques, telles que :

  E = Ker(T) = { v / T(v) = 0} , T étant une application linéaire.

- les représentations cartésiennes explicites, telles que :

  $A = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y = 0; y - z = 0\}$

  $B = \{(x, y, z, t) \in R^4 / 2x + y + t = 0; y + 2z - 3t = 0\}$

Après cette introduction des différents registres de représentation sémiotique que nous serons amenée à distinguer, nous en venons maintenant à l'identification des tâches usuelles dans un premier cours d'algèbre linéaire.

III. LES TACHES USUELLES D'UN PREMIER COURS D'ALGEBRE LINEAIRE

Nous allons présenter ici d'abord une liste des tâches usuelles d'un premier cours d'algèbre linéaire. Nous les avons regroupées en cinq classes, suivant la notion à laquelle elles se rapportent : espace vectoriel, sous-espace vectoriel et opérations entre sous-espaces, base et dimension, application linéaire, système linéaire. Dans cette liste les tâches en caractère gras sont celles qui mettent en jeu, au moins potentiellement, de la flexibilité. Nous présenterons ensuite notre grille d'analyse des tâches en illustrant son fonctionnement par des exemples. Dans les tâches où la flexibilité est potentielle mais non nécessaire, nous essaierons de proposer une tâche décalée qui elle la met en jeu obligatoirement.

- Pour la **notion d'espace vectoriel,** nous avons distingué les tâches suivantes :

- Montrer qu'un ensemble muni d'opérations données est ou n'est pas un espace vectoriel (la plus usuelle).
- Munir un ensemble amorphe d'une structure d'espace vectoriel.
- Trouver des exemples d'espaces vectoriels à partir d'exemples donnés (plus marginalement).

Pour ces trois types de tâches, il n'y a pas d'articulation en jeu, la résolution n'exigeant que l'exploitation directe de la définition axiomatique de la notion d'espace vectoriel.

- Pour la **notion de sous-espace vectoriel et des opérations entre sous-espaces,** nous avons distingué les tâches suivantes :

- Vérifier qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel est ou n'est pas un sous-espace vectoriel.
- Décrire le sous-espace solution d'un système linéaire et homogène.
- Savoir si un objet défini explicitement (pouvant dépendre de paramètres) appartient ou non à un sous-espace vectoriel donné.
- Montrer qu'un vecteur est ou n'est pas combinaison linéaire de certains vecteurs donnés.
- Vérifier qu'un vecteur appartient au sous-espace engendré par d'autres vecteurs.
- Caractériser le sous-espace engendré par des vecteurs donnés.
- Trouver une partie génératrice d'un ensemble de vecteurs donnés ou d'un sous-espace donné.
- Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et/ou d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique.
- Montrer qu'un sous-espace est inclus dans un autre ou que deux sous-espaces sont égaux.

- **Déterminer l'intersection entre deux sous-espaces.**
- **Déterminer la somme de deux sous-espaces.**
- **Montrer que deux sous-espaces sont en somme directe.**
- **Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.**

Les tâches où nous n'avons pas relevé d'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique sont des tâches qui se ramènent soit à l'application d'une définition, soit à la résolution simple d'un système. C'est le cas pour la première où il s'agit de vérifier, pour une partie non vide, la stabilité par addition et multiplication par un scalaire. Dans les trois autres cas, il s'agit de mobiliser soit la définition de sous-espace engendré, soit la définition de combinaison linéaire et trouver les coefficients d'une combinaison linéaire via une technique de résolution de système. Lorsque le sous-espace est donné, le traitement sera interne à une représentation paramétrique "explicite-tableau" ou "implicite-tableau" ou "implicite-équation".

- Pour les **notions de base et de dimension** nous avons distingué les tâches suivantes :

- Montrer que des vecteurs donnés sont ou ne sont pas linéairement indépendants.
- Déterminer les valeurs d'un paramètre m de façon à ce qu'un ensemble de vecteurs donnés dépendant de m soient linéairement indépendants.
- Déterminer le rang d'une famille de vecteurs. (dépendants éventuellement d'un paramètre)
- Compléter un système de vecteurs donnés pour en faire une base.
- Réduire une famille génératrice pour en faire une base.
- **Déterminer une base et la dimension d'un sous-espace donné**

Dans les trois premières tâches, il n'y a pas d'articulation puisqu'elles se ramènent soit à la détermination du rang d'un système de vecteurs, ce qui peut se faire notamment en utilisant la méthode de Gauss sur le tableau de vecteurs disposés en lignes ou en colonnes, soit à la vérification de l'indépendance linéaire par vérification de la propriété :

$$\forall x \forall y \forall z \forall w \ (xa+yb+zc+wd=0 \Rightarrow x=y=z=w=0)$$

ce qui conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires. La quatrième tâche n'exige pas non plus de changement dans les formes d'appréhension des objets.

- Pour la **notion d'application linéaire** nous avons distingué les tâches suivantes :

- Montrer qu'une application f d'un espace vectoriel dans un autre est ou n'est pas une application linéaire.
- En sachant qu'une application est linéaire et connaissant ses valeurs sur les éléments d'une base quelconque, déterminer l'image par l'application d'un vecteur générique (pas forcement exprimé dans la même base).

- **Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.**
- Déterminer une application linéaire satisfaisant des conditions données : image donnée ou dimension de l'image, noyau ou dimension du noyau
- Déterminer l'application inverse d'une application linéaire bijective.
- Vérifier si une application linéaire est ou non bijective.
-Trouver la matrice d'une application linéaire dans une base donnée.

Les tâches où il n'y a pas d'articulation n'exigent que de l'exploitation de définitions ou des connaissances sur les applications linéaires qui ne relèvent pas de l'articulation, exception faite si, pour démontrer qu'une application est un isomorphisme, on détermine noyau et image, ce qui ramène à une tâche précédemment citée.

- Pour la **notion de système linéaire,** nous avons distingué les tâches suivantes :

- **Déterminer l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires et trouver sa dimension.**
- **Déterminer à quelles conditions un système linéaire admet des solutions. (plus marginalement)**

Nous nous limiterons dans la suite de ce chapitre aux tâches qui viennent d'être répertoriées comme susceptibles de mettre en jeu un travail d'articulation des deux points de vue cartésien et paramétrique. Nous présenterons dans le paragraphe suivant notre grille d'analyse pour ces tâches, en illustrant son fonctionnement, comme annoncé, par un ou quelques cas particuliers pour chaque type de tâche.

IV. LA GRILLE D'ANALYSE DES TÂCHES VIS A VIS DE L'ARTICULATION ET SA MISE EN FONCTIONNEMENT

IV. 1. LA GRILLE D'ANALYSE

La grille d'analyse doit être un outil permettant d'analyser les connaissances liées à l'articulation obligatoirement ou potentiellement en jeu :

- en fonction des **notions** d'algèbre linéaire concernées ;
- en fonction des **tâches** usuellement rencontrées à ce niveau ;
- en fonction des **variables de ces tâches**, au nombre desquelles figureront notamment des variables associées aux registres de représentation utilisés dans la définition de la tâche ou utilisables dans la résolution.

Elle doit aussi nous permettre de prendre en compte différents niveaux de fonctionnement de l'articulation dans une tâche donnée.

- En ce qui concerne les **notions** d'algèbre linéaire, nous avons effectué un regroupement en cinq classes :

- la notion d'espace vectoriel
- la notion de sous-espace vectoriel et les principales notions associées aux opérations entre sous-espaces
- les notions de base et dimension
- la notion d'application linéaire
- la notion de système d'équations linéaires

- Par rapport à chacune de ces notions, nous avons déjà mis en évidence les différentes **tâches** trouvées usuellement dans un premier cours d'algèbre linéaire et susceptibles de mettre en jeu l'articulation des deux points de vue. Pour spécifier les tâches par rapport à cette articulation, nous allons prendre en compte les **variables de tâche** suivantes, qui a priori nous semblent jouer un rôle déterminant dans la nécessité et le fonctionnement de cette articulation.

- le ou les types d'espaces concernés
- les types des représentations données pour les sous-espaces considérés : (cf. partie II)
- les types de représentations données pour les vecteurs considérés : (cf. partie II)
- les types de la ou des représentations éventuellement demandées : idem
- les dimensions de l'espace et des sous-espace concernés
- le caractère nécessaire ou seulement potentiel de l'articulation
- les connaissances impliquées par l'articulation, en distinguant les types de connaissances et leur(s) rôle(s)

IV. 2. MISE EN FONCTIONNEMENT DE LA GRILLE, TACHE PAR TACHE

Comme annoncé, nous allons dans ce paragraphe mettre la grille en fonctionnement, tâche par tâche, en essayant de mettre en évidence par le choix des exemples, la diversité des rapports possibles à l'articulation suivant les caractéristiques des tâches.

A. SOUS-ESPACES VECTORIELS ET OPERATIONS

1) Décrire le sous-espace solution d'un système linéaire et homogène.

Exemple: Déterminer le sous-espace de R^3 solution du système suivant : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+4y+5z=0 \end{cases}$

En général, implicitement, le contrat didactique relatif à une telle tâche implique que la solution soit donnée sous forme de représentation paramétrique explicite. Il y a donc passage nécessaire d'un point de vue cartésien à un point de vue paramétrique.

Dans cette tâche particulière, les valeurs prennent les valeurs suivantes :

- type d'espace : $\mathbf{R^3}$;

- type de représentation donnée : représentation cartésienne explicite avec un nombre non minimum d'équations ;

- type de représentation demandée : représentation paramétrique explicite ou, plus marginalement, une représentation cartésienne explicite avec un nombre minimum d'équations ;

- type de représentation des vecteurs : représentation dans le registre tableau ;

- dimension des espaces et/ou sous-espaces : 3

- articulation obligatoire/potentielle : obligatoire, excepté si l'on se satisfait d'une représentation cartésienne minimale, ce qui nous l'avons souligné, ne correspond pas au contrat usuel pour ce type de tâche.

- connaissances liées à l'articulation : au niveau technique, l'articulation s'appuie sur les techniques de résolution des systèmes linéaires et fonctionne dans le sens cartésien/paramétrique, identifié comme le plus aisé. Ce travail technique peut être piloté par des connaissances sur le rapport existant entre nombre minimum d'équations et nombre minimum de paramètres via le théorème de liaison entre ces deux nombres et celle de rang d'un système d'équations si l'on se situe dans le cadre des systèmes linéaires. Si l'on fait intervenir des connexions possibles avec d'autres cadres, elle peut s'appuyer sur les connaissances relatives à l'articulation entre ces cadres, notamment celles concernant les rapports entre les systèmes d'équations linéaires et les applications linéaires : liaison espace des solutions - noyau d'une application linéaire et liaison entre théorème du rang et théorème liant dimension du noyau, de l'image et de l'espace de départ (cf. chapitre II).

2) Caractériser le sous-espace engendré par des vecteurs donnés

Exemples :

a) Soient a, b, c les trois vecteurs de $\mathbf{R}^5$ donnés ci-après, donner une représentation paramétrique de lin{a,b,c} et des équations définissant ce sous-espace.

a = (1, 0, -1, 1, 2), b = (0, 3, 1, -1, 1), c = (-1, -1, 1, 1, 0) (d'après Rogalski)

b) Décrivez le sous-espace de **R**[X] engendré par chacune des parties suivantes :

$\{1, X, \ldots, X^n\}$

$\{1, (1+X)^2, (1-X)^2, X^2\}$ (Liret/Zisman)

On peut envisager comme réponse à ce type de tâche, la donnée d'une représentation paramétrique minimale ou d'une base, ce qui a priori ne nécessite pas d'articulation entre points de vue paramétrique et cartésien. Mais, même si ce n'est pas explicitement indiqué dans l'énoncé, comme dans le premier exemple, la caractérisation peut mettre en jeu une articulation de points de vue, si l'étudiant cherche spontanément à fournir une représentation cartésienne.

Pour les deux tâches concernées, les variables prennent les valeurs :

- type d'espace : $\mathbf{R}^5$ et **R** [X]

- type de représentation des vecteurs : représentation dans le registre tableau, représentation polynomiale explicite

- type de représentations données pour les sous-espaces : représentation symbolique intrinsèque, expression en langue naturelle

- type de représentation demandé : représentation paramétrique explicite minimale sous une des différentes formes que nous avons mises en évidence, représentation cartésienne explicite pour l'exercice a), expression canonique du sous-espace pour l'exercice b)

- dimension de l'espace et des sous-espaces : 5 et 3 pour l'exercice a), infinie, n et 3 pour l'exercice b)

- articulation obligatoire/potentielle : obligatoire pour l'exercice a) dans le sens paramétrique/cartésien, n'intervenant pas dans l'exercice b) où il s'agit d'identifier deux sous-espaces connus de **R**[X], identification directe dans le premier cas et qui, dans le second, passe par l'expression du polynôme X comme combinaison linéaire des polynômes donnés ou par la vérification que $\{1, (1+X)^2, X^2\}$ est une famille libre, d'où la dimension du sous-espace est égale à 3 donc c'est $\mathbf{R}_2$[X].

- connaissances liées à l'articulation : les connaissances techniques liées à la résolution d'un système linéaire et l'identification des conditions de résolution du système comme équations cherchées du sous-espace, comme explicité dans le chapitre II. Comme dans le cas précédent, ce travail technique peut être piloté et contrôlé en faisant intervenir les connaissances sur les systèmes et les applications linéaires déjà citées.

3) Trouver une partie génératrice de l'espace engendré par un ensemble fini de vecteurs donnés ou d'un sous-espace donné.

Exemples :

a) Désignons par E l'ensemble des vecteurs (x,y,z,t) $\in \mathbf{R}^4$ vérifiant la relation z = 0. Trouver une partie génératrice de E. (Liret/Zisman)

b) Trouver une partie génératrice du sous-espace:

$V = \{ (x,y,z) / x + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0 \}$ (Callioli et al.)

c) Soit le sous-espace de **R**[X] engendré par les polynômes $\{1,(1+X)^2,(1-X)^2,X^2\}$, en trouver une partie génératrice minimale.

Si le sous-espace est engendré par un ensemble fini de vecteurs, donnés en représentation explicite, comme dans le cas c), il suffit d'étudier le rang du système de vecteurs et aucun changement de point de vue n'est a priori nécessaire. Si, en revanche, comme dans les exemples a et b, le sous-espace est caractérisé par une ou des équations, il y aura passage à un point de vue paramétrique. Ce passage peut s'effectuer par utilisation des techniques usuelles déjà décrites, mais soulignons que pour des exemples d'équations très simples comme ceux cités ici, le changement de point de vue peut s'effectuer par relecture de la représentation cartésienne de type " explicite équation " en une représentation paramétrique de type " explicite équation " (exemple b) ou en identifiant un hyperplan connu (exemple a) ou encore, sachant que p équations déterminent un sous-espace de dimension n-p, si n est la dimension de l'espace, en exhibant n-p vecteurs à l'évidence linéairement indépendants du sous-espace (exemples a et b).

Les variables des trois tâches considérées sont les suivantes :

- type d'espace : $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^3$, R[X] ;

- type de représentation des vecteurs : représentation de type tableau, polynomial explicite ;

- type de représentations données : représentation cartésienne explicite, description en langue naturelle ;

- type de représentation demandé : ensemble de vecteurs en représentation explicite tableau, ensemble de polynômes en représentation polynomiale explicite ;

- dimension des espaces et sous-espaces : 4 et 3, 3 et 1, infini et 3

- articulation obligatoire/potentielle : obligatoire pour a et b, non obligatoire pour c

- connaissances liées à l'articulation : elles dépendent des stratégies utilisées comme décrit ci-dessus, une résolution prenant en compte les caractéristiques spécifiques des équations proposées permettant ici une évidente économie technique, mais s'appuyant sur des connaissances relatives à l'articulation : dimension du sous-espace défini par une équation, capacité de lire des équations avec un point de vue paramétrique.

4) Passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique.

Exemples :

a) On cherche un paramétrage du sous ensemble E de $\mathbf{R}^5$ défini par les équations suivantes.

$$\begin{cases} x-y+z-t+u=0 \\ x-2y+z+t-2u=0 \\ 2x-2y+z+3t-u=0 \end{cases} \quad \text{(Rogalski)}$$

b) On cherche des équations pour le sous-espace E de R^4 donné par le paramétrage suivant:

$$\begin{cases} x=a-2b \\ y=3a+b+7c \\ z=-a-b-3c \\ t=a+b+3c \end{cases} \quad \text{(Rogalski)}$$

c) Considérez les vecteurs suivants de R^3: (-1,0,1) et (3,4,-2). Déterminez un système d'équations linéaires et homogènes pour lequel le sous-espace solution soit exactement le sous-espace engendré par ces vecteurs. (Callioli et al.)

d) Répétez la tâche avec les vecteurs (1,0,1,2), (0,0,1,0) de R^4. (Callioli et al.)

De telles tâches mettent en jeu de façon directe l'articulation des points de vue. Les caractéristiques de leur gestion ont déjà été décrites, c'est pourquoi nous n'insisterons pas davantage, pour éviter les répétitions. Nous voudrions simplement une fois de plus signaler que certains exemples que l'on rencontre dans un premier cours d'algèbre linéaire peuvent permettre des résolutions très raccourcies par rapport à l'application de la technique générale à condition que des connaissances relatives à l'articulation soient disponibles. Par exemple, ici dans l'exemple

d, les deux vecteurs proposés satisfont l'équation : y=0 si (x,y,z,t) est la représentation générique tableau d'un vecteur de $\mathbf{R}^4$; si l'on prend en compte le fait que les vecteurs étant non colinéaires, le sous espace est de dimension 2, donc caractérisé de façon minimale par deux équations, on peut chercher à trouver une autre relation entre les coordonnées des deux vecteurs. On peut ainsi obtenir l'équation : t=2x, bien moins évidente cependant que la première du fait de sa dégénérescence en 0=0 pour le second vecteur.

Dans l'exemple b, des deux dernières équations, il ressort de manière évidente que z+t=0, mais le sous-espace étant de dimension 2 et non 3 malgré la présence de trois paramètres, ceci ne suffit pas à résoudre la tâche. Précisons aussi que, si l'on dispose d'une théorie des déterminants, même limitée à l'ordre 3, on peut, après avoir repéré la relation entre les deux dernières équations, chercher à vérifier ainsi l'indépendance linéaire des trois vecteurs générateurs pour savoir si l'équation trouvée caractérise ou non le sous-espace. Dans l'exemple c, le fait de se situer dans $\mathbf{R}^3$ permet une anticipation géométrique : les deux vecteurs non colinéaires engendrent un plan qui sera caractérisé par une équation ; de plus, une technique spécifique, celle de la détermination d'un vecteur normal au plan par calcul du produit vectoriel des deux vecteurs donnés, existe pour produire cette équation. On voit, dans le type de raisonnement que nous venons de mentionner, un jeu de l'articulation bien plus subtil que l'algorithmisation décrite dans le chapitre II, par le jeu des anticipations, du recours à des cadres et des techniques plus diversifiés.

Les variables de tâche mises en jeu pour cette tâche sont les suivantes :

- type d'espace : $\mathbf{R}^5$, $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$;

- type de représentation des vecteurs : représentation dans le registre tableau ;

- type de représentations données : représentation cartésienne explicite, représentation paramétrique explicite de type équation ou seulement les représentations dans le registre tableau des vecteurs qui engendrent le sous-espace ;

- type de représentation demandé : représentation paramétrique explicite, représentation cartésienne explicite ;

- dimension de l'espace et du sous-espace : 5 et 2, 4 et 2, 3 et 2, 4 et 2 ;

- articulation obligatoire/potentielle : obligatoire

- connaissances liées à l'articulation : dépendantes des stratégies développées (cf. plus haut)

5) Montrer qu'un sous-espace est inclus dans un autre ou qu'ils sont égaux.

Exemples :

a) Montrer que les deux ensembles de vecteurs {(1,-1,2), (3,0,1)} et {(-1,-2,3), (3,3,4)} engendrent le même sous-espace vectoriel de R^3. (Callioli et al.).

b) Considérez dans R^3 les vecteurs

a = (2,3,-1) b = (1,-1,-2) c = (3,7,0) d = (5,0,-7)

Montrer que le sous-espace engendré par {a,b} est égal au sous-espace engendré par {c,d}. (Liret/Zisman).

c) Comparer les sous-espaces E et F définis respectivement par deux équations et un paramétrage

E (e_1) x - y +2z -t = 0 (e_2) 2x + y -z + 3t = 0

F = lin{u_1,u_2,u_3}, où u_1 = (5,5,-3,-6), u_2 = (-4,-5,2,5) et u_3 = (1,0,-1,-1). (Rogalski)

Les deux types de tâches reposent sur des preuves d'inclusion, l'une des deux inclusions à prouver pouvant être, dans le cas de l'égalité, remplacée par une argument d'égalité de dimension. Dans ce type de tâche, la nécessité ou non d'articuler les points de vue va être fonction des types de représentations fournis pour les sous-espaces considérés.

- Si l'un de sous-espaces est défini par une représentation paramétrique et l'autre par une représentation cartésienne et la tâche consiste à montrer que le sous-espace représenté paramétriquement est inclus dans celui représenté de façon cartésienne, l'articulation ne sera pas nécessaire, la tâche se réduisant à vérifier que les vecteurs générateurs du premier sous espace satisfont les équations du deuxième.
- Si les deux sous-espaces sont définis par des représentations paramétriques, il est également possible de montrer l'inclusion en vérifiant que les générateurs du premier appartiennent bien au second, l'articulation n'est donc pas a priori obligatoire. Le nombre de vérifications à opérer ainsi peut conduire cependant, suivant les variables de la tâche, à considérer comme plus économique le fait de déterminer une représentation cartésienne du second sous-espace, pour se ramener à la situation précédente.
- Si les deux sous-espaces sont définis par des équations il n'y a pas a priori d'articulation nécessaire, puisqu'il suffit de vérifier que le système formé à partir de l'ensemble des équations est équivalent à l'ensemble des équations définissant le plus petit sous-espace, ce qui revient à traduire l'inclusion : $E \subseteq F$ par la relation $E \cap F = E$, mais on peut également chercher à

expliciter les solutions du système associé à E et vérifier ensuite l'inclusion suivant la première stratégie.

- Si l'un des sous-espaces est défini par une représentation cartésienne et l'autre par une représentation paramétrique et la tâche proposée consiste à montrer que celui défini de façon cartésienne est inclus dans celui défini de façon paramétrique, alors il y aura nécessairement articulation des deux points de vue.

Pour les cas où il y a de la flexibilité nous retenons les variables suivantes:

- type d'espace : $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$

- type de représentation donnée pour les vecteurs : représentation dans le registre tableau

- dimension de l'espace et des sous-espaces : 3 et 2, 3 et 2, 4 et 2

- articulation obligatoire/potentielle : non obligatoire dans les exemples a et b (cf. analyse ci-dessus), en particulier dans le cas 2, on notera que la présence de 0 dans les coordonnées des vecteurs c et d rend particulièrement facile la preuve de l'inclusion $\{a,b\} \subseteq \{c,d\}$. Dans l'exemple c, la flexibilité est obligatoire mais peut prendre des formes diverses. Soulignons qu'il est facile de vérifier que $F \subseteq E$. Si alors on prend en compte que $\dim F \geq 2$ puisque les trois vecteurs donnés ne sont pas colinéaires et que $\dim E = 2$ (2 équations non proportionnelles dans un espace de dimension 4 - connaissance relevant de l'articulation des deux points de vue), on évite tout autre calcul.

connaissances liées à l'articulation : elles dépendent des stratégies développées. Pour l'exemple c où l'articulation est nécessaire, elle met au moins en jeu le lien rang du système, dimension du sous-espace associé.

6) Déterminer l'intersection entre deux sous-espaces

Exemple:

a) Considérez dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs :

$a = (2,3,-1)$ $b = (1,-1,-2)$ $c = (3,7,0)$ $d = (5,0,7)$ $e = (0,0,1)$

On désigne par E (resp. F) les sous-espaces engendrés par {a,b} (resp. {e,b}). Déterminez une partie génératrice de $E \cap F$. (Liret/Zisman)

b) Soient U et V les sous-espaces de $\mathbf{R}^3$:

$U = \{ (x,y,z) / x + 2y = 0 \}$

$V = \{ (x,y,z) / x + z = 0 \wedge x - 2y = 0 \}$

Déterminer $U \cap V$. (Callioli et al.)

Dans ce type de tâche, les besoins d'articulation sont a priori réduits sauf si un type particulier de représentation de l'intersection est demandé.

- Si les deux sous-espaces sont définis par des représentations paramétriques, la stratégie naturelle consiste à chercher à quelle condition un vecteur quelconque peut appartenir aux deux sous-espaces, ce qui conduit via la résolution d'un système à une représentation paramétrique de l'intersection. Il n'y aura articulation que si l'énoncé demande une représentation cartésienne de l'intersection
- Si les deux sous-espaces sont définis par des représentations cartésiennes, le système obtenu en groupant les deux systèmes d'équations caractérise l'intersection. Si la tâche " déterminer l'intersection " est comprise comme : " en donner une représentation cartésienne minimale ", il n'y a pas de nécessité d'articulation. Par contre, s'il est demandé une partie génératrice de l'intersection, il y aura nécessairement articulation par passage cartésien / paramétrique.
- Si un des sous-espaces est défini par une représentation paramétrique et l'autre par une représentation cartésienne, il est facile de trouver un système générateur de l'intersection en testant l'appartenance des vecteurs générateurs associés à la représentation paramétrique au sous-espace défini par des équations. Il n'y a donc pas d'articulation nécessaire sauf si on demande une représentation cartésienne de l'intersection.

Pour les exemples proposés, les variables de la tâche sont les suivantes :

- type d'espace : $\mathbf{R}^3$

- type de représentations données pour les vecteurs : représentation dans le registre tableau

- type de représentations données : représentation paramétrique intrinsèque en langue naturelle, représentation symbolique intrinsèque, représentation cartésienne explicite ;

- type de représentations demandées : non précisé

- dimension de l'espace et des sous-espace : 3, 2 et 1 pour l'intersection, 3, 2 et 1, 0 pour l'intersection

- articulation obligatoire/potentielle : non obligatoire ici. Pour l'exemple a, E et F sont trivialement de dimension 2 et leur intersection au moins de dimension 1. Pour montrer qu'elle est réduite à lin{b}, il suffit de vérifier que les sous-espaces sont distincts, ce qui ne nécessite pas de changement de point de vue. Dans l'exemple b, on obtient une caractérisation cartésienne de l'intersection en écrivant le système formé des trois équations ; c'est un système de Cramer admettant donc comme solution unique le vecteur nul.

7) Déterminer la somme de deux sous-espaces.

Exemple:

Donner une partie génératrice du sous-espace U + W de $\mathbf{R}^3$ pour

$U = \{(x,y,z) / x + z = 0 \wedge x - 2y = 0 \}$

$V = \{(x,y,z) / x + 2y - 3z = 0 \}$. (Callioli et al.)

Pour ce type de tâche également, il y a lieu de prendre en compte les représentations des espaces en jeu et les représentations éventuellement demandées pour la somme.

- Si les deux sous-espaces sont définis par des représentations paramétriques. L'écriture de l'appartenance d'un vecteur quelconque à la somme des sous-espaces, écriture qui relève d'un point de vue paramétrique fournit directement une représentation paramétrique de la somme, non nécessairement minimale. Il n'y a donc pas articulation nécessaire sauf si l'on demande une représentation cartésienne de la somme.
- Si les deux sous-espaces sont définis par des représentations cartésiennes, comme dans l'exemple ci-dessus, ces dernières en général ne donnent pas directement accès à une représentation cartésienne ou paramétrique de la somme. La caractérisation de la somme dans le cas général va passer par l'identification d'une base de chaque sous-espace donc le passage d'un point de vue cartésien à un point de vue paramétrique. L'exemple choisi est là pour montrer que, dans les exercices usuellement proposés dans un premier cours d'algèbre linéaire, on se retrouve souvent dans des cas particuliers. Ici l'on est dans $\mathbf{R}^3$ et une interprétation géométrique est possible. U est une droite vectorielle et V un plan vectoriel. Si la droite U n'appartient pas au plan V, la somme des deux sous-espaces sera $\mathbf{R}^3$. On peut donc se ramener à étudier l'intersection des deux sous-espaces, ce qui dans ce cas confirme que l'intersection est réduite au vecteur nul (dans un espace autre, on pourrait utiliser la relation liant la dimension de la somme et de l'intersection pour montrer le cas échéant que la somme est l'espace tout entier). On pouvait aussi déduire sans difficulté des équations données un vecteur générateur de U (par une lecture paramétrique de la conjonction des deux équations) et deux vecteurs générateurs de V, ce qui donnait alors un système générateur de la somme. Mais il est clair que la réponse ici attendue est $\mathbf{R}^3$.
- Si l'un des sous-espaces est défini par une représentation paramétrique et l'autre par une représentation cartésienne, l'articulation est, de la même façon en général obligatoire.

Les variables pour l'exemple particulier proposé sont les suivantes :

- type d'espace : $\mathbf{R}^3$;

- type de représentations données : représentations cartésiennes explicites

- type de représentations demandées : représentation paramétrique explicite

- dimension de l'espace et de sous-espaces : 3, 2, 1 et 3 pour la somme

- articulation obligatoire/potentielle : L'articulation est ici limitée, la somme des deux sous-espaces étant l'espace entier et ce résultat pouvant être obtenu par détermination de l'intersection et utilisation de la formule : $\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U \cap V)$ ou le passage par une interprétation géométrique. Elle se réduit alors à l'identification des dimensions de U et de V à partir du nombre d'équations définissant minimalement ces sous-espaces.

- connaissances liées à l'articulation : cf. analyses ci-dessus.

8) Montrer que deux sous-espaces sont en somme directe, montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.

Nous regroupons ici ces deux tâches qui se ramènent à des tâches déjà étudiées, dans des cas particuliers : détermination de l'intersection des deux sous-espaces (il s'agit ici de vérifier qu'elle est réduite au vecteur nul), détermination de la somme de deux sous-espaces dans le cas de sous-espaces supplémentaires (il s'agit ici de montrer que la somme est l'espace tout entier). Là encore, l'utilisation du théorème liant les dimensions de l'intersection et de la somme aux dimensions des deux sous-espaces peut économiser une partie du travail, en particulier limiter le travail technique à la détermination de l'intersection.

Notons que dans le cas où les sous-espaces supplémentaires sont définis par des représentations paramétriques minimales ou des bases, la preuve peut s'effectuer en montrant que tout vecteur de l'espace a une décomposition unique sur le système de générateurs associé aux deux représentations paramétriques minimales, ce qui revient à montrer qu'un système est de Cramer.

Exemples :

a) Soit $V = \mathbf{K}^3$ pour un corps **K**. Soit W le sous-espace engendré par (1, 0, 0), et soit U le sous-espace engendré par (1, 1, 0) et (0, 1, 1). Montrez que V est la somme directe de W et U. (Lang)

b) Soient U, V et W les sous-espaces de $\mathbf{R}^3$, à savoir:

$U = \{(x, y, z)/\ x = z\}$

$V = \{(x, y, z)/\ x = y = 0\}$

$W = \{(x, y, z)/\ x + y + z = 0\}$

Vérifier que $U + V = \mathbf{R}^3$, $U + W = \mathbf{R}^3$ et $V + W = \mathbf{R}^3$. Quels sont les cas où la somme est directe? (Callioli et al.)

Dans le premier exemple, les sous-espaces sont donnés par des vecteurs générateurs dans le registre tableau. Les dimensions des deux sous-espaces ne posent pas de problème de détermination. Pour prouver qu'il y a somme directe, il suffit de montrer que l'intersection est réduite au vecteur nul, c'est à dire que (1,0,0) n'est pas combinaison linéaire de (1,1,0) et (0,1,1), ce qui ne nécessite pas de changement de point de vue.

Dans le second exemple, les sous-espaces sont donnés en représentation cartésienne explicite. U et W sont des plans vectoriels distincts et V une droite vectorielle n'appartenant pas à l'évidence aux deux plans. Les résultats peuvent être anticipés par un raisonnement géométrique et l'articulation peut se limiter à la liaison nombre d'équations indépendantes / dimension du sous-espace associé, dans ce cas particulier de plans et droites.

B. NOTIONS DE BASE ET DE DIMENSION

Il y a ici une seule tâche répertoriée mettant en jeu une éventuelle articulation paramétrique / cartésien.

Déterminer une base et la dimension de sous-espaces donnés.

Exemple :

a) Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces suivants: V, U, W, $U \cap V$, $V + W$ et $U + V + W$. (Callioli et al.)

$U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = 0\}$

$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / y - 2z = 0\}$

$W = \text{lin } \{(1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$

b) Déterminer une base et la dimension du sous-espace de matrices symétriques de $M_3(\mathbf{R})$. Généraliser à $M_n(\mathbf{R})$. (Callioli et al.)

Pour ce type de tâche, l'articulation entre points de vue paramétrique et cartésien dépend une fois de plus, du mode de définition du sous-espace concerné. S'il est donné par une représentation paramétrique, la détermination d'une base et de la dimension peut se faire sans sortir de ce point de vue, en déterminant le rang du système de vecteurs et en en extrayant un système générateur libre. S'il est défini par une représentation cartésienne, l'articulation est obligatoire mais peut s'effectuer à des niveaux variés comme nous l'avons déjà montré suivant les caractéristiques précises de la tâche.

Pour l'exemple a) proposé, en particulier :

- type d'espace : $\mathbf{R}^3$

- type de représentations données : représentations cartésiennes explicites, représentations paramétriques explicite-tableau, définition symbolique intrinsèque ($U \cap V$, $V+W$ et $U + V + W$)

- type de représentations demandées : représentation paramétrique explicite

- dimension de l'espace et de sous-espaces : 3, 1 et 2

- articulation obligatoire/potentielle : en supposant que les questions soient traitées dans l'ordre. L'articulation est obligatoire pour U et V mais elle peut s'appuyer sur l'interprétation géométrique et la lecture paramétrique des équations fournies. Pour W, elle n'est absolument pas nécessaire. La dimension de $U \cap V$, intersection de deux plans vectoriels est 1 et la détermination d'un vecteur générateur ne pose aucune difficulté. W et V sont deux plans distincts donc leur somme est l'espace tout entier et il en est de même alors de la somme U+V+W.

- connaissances liées à l'articulation : Ce sont essentiellement ici celles liées à la liaison nombre d'équations indépendantes, dimension du sous-espace associé.

Pour l'exemple b) proposé, en particulier :

- type d'espace : $M_3(\mathbf{R})$. et $M_n(\mathbf{R})$;

- type de représentations données : expression en langue naturel;

- type de représentation demandée : aucune;

- dimension de l'espace et de sous-espaces : 9, 6, n^2, $n(n+1)/2$;

- articulation obligatoire / potentielle : revient à traduire $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(R) / a_{ij} = a_{ji} \right\}$ en $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in M_3(R) \right\}$ et en déduire que le sous-espace est de dimension 6 et à généraliser le calcul de la dimension. Il n'y a donc pas d'articulation puisqu'on reste sur le seul point de vue paramétrique.

C. NOTION D'APPLICATION LINEAIRE

Par rapport à cette notion, nous avons répertorié là encore un type de tâche.

Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.

Exemple:

a) E_1 et E_2 étant deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E, on définit l'application f: $E_1 \times E_2 \rightarrow E$ par $f(x_1 , x_2) = x_1 + x_2$.

1) Montrer que f est linéaire;

2) Déterminer le noyau et l'image de f. (Rogalski)

b) Prenons K = **R** et soit u : $\mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau et l'image de l'application. (Calvo)

Pour ce type de tâche, les besoins en articulation vont encore une fois dépendre du mode de définition de l'application et d'autre part des exigences explicitées dans la détermination du noyau et de l'image de l'application. Pour une application explicitement définie, la détermination du noyau va généralement conduire à la résolution d'un système linéaire homogène, le contrat didactique implicite étant que " déterminer le noyau " doit être compris au sens de " trouver la dimension du noyau et en donner une base ". Il y a donc à ce niveau articulation obligatoire dans le sens cartésien / paramétrique. Si l'application est explicitement donnée, l'accès à un système générateur de l'image est direct et en général, la détermination doit être entendue comme pour le noyau comme : " trouver la dimension de l'image et une base ". La détermination de l'image ne nécessite donc pas a priori de changement de point de vue sauf si l'on souhaite obtenir une représentation cartésienne. Enfin, la relation entre dimension du noyau, dimension de l'image et dimension de l'espace de départ permet ici une anticipation et un contrôle des résultats du travail technique.

L'exemple a) proposé ci-dessus est un exemple qui échappe un peu à cette description. En effet, le noyau de f est : $\{(x,-x) / x \in E_1 \cap E_2 \}$ et l'image de f est $E_1 + E_2$. Leur détermination est basée sur une expression intrinsèque de f.

- type d'espace : non précisé, dimension finie.

- type de représentations données pour les vecteurs : intrinsèque.

- type de représentations données : intrinsèque.

- type de représentations demandées : non précisé.

- dimension de l'espace et de sous-espace : finies, non précisées.

- articulation obligatoire/potentielle : revient à traduire $\{(x_1 , x_2) \in E_1 \times E_2 / x_1 + x_2 = 0\}$ en :

$\{(x,-x) / x \in E_1 \cap E_2 \}$

L'exemple b) est un exemple où l'application est définie explicitement par sa matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbf{R}^5$ et $\mathbf{R}^4$. Elle exige son interprétation dans d'autres cadres, soit dans le cadre de systèmes linéaires homogènes pour déterminer le noyau, soit en considérant les colonnes de la matrice comme des vecteurs colonnes qui engendrent le sous-espace image. Dans cette tâche particulière l'articulation de points de vue n'est pas nécessaire à moins que l'on demande explicitement une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.

Pour cette tâche, les variables prennent les valeurs suivantes :

- type d'espace : $\mathbf{R}^5$ et $\mathbf{R}^4$

- type de représentations données pour les vecteurs : les colonnes de la matrice qui définit l'application étant les vecteurs générateurs du sous-espace image on peut dire que les vecteurs sont donnés sur le registre tableau.

- type de représentations données : - si on interprète par un système homogène la matrice qui définit l'application, nous avons une représentation cartésienne explicite non minimale du noyau.

- si on interprète les colonnes de la matrice qui définit l'application comme les vecteurs générateurs du sous-espace image, nous avons une représentation paramétrique de ce sous-espace.

- type de représentations demandées : non précisé

- dimension de l'espace et de sous-espaces : 5, 5, dim Ker(f) = 2, dim Im(f) = 3;

- articulation obligatoire / potentielle : pour le noyau, elle est obligatoire si l'on veut déterminer la dimension et une base. Pour l'image, il n'y aura pas d'articulation nécessaire si on ne demande pas explicitement une représentation cartésienne.

- connaissances liées à l'articulation : les connaissances relatives à l'articulation entre le cadre des systèmes linéaires, le cadre des matrices et le cadre de l'algèbre linéaire, plus spécifiquement, celle de rapport entre systèmes linéaires et applications linéaires, matrices et applications linéaires.

D. NOTION DE SYSTEME LINEAIRE

Par rapport à cette notion, nous avions repéré un premier type de tâche : la détermination de l'ensemble des solutions d'un système linéaire, dont nous avons étudié un cas particulier en V.1. à propos des sous-espaces (celui des systèmes homogènes). Nous n'y reviendrons pas, l'analyse effectuée s'adaptant sans difficulté particulière. Le second type répertorié consistait en tâches non de résolution proprement dite mais d'étude des conditions de résolubilité de systèmes dépendant de paramètres.

Déterminer à quelles conditions un système linéaire admet de solutions.

Exemples :

a) On considère le système linéaire à 3 inconnues x, y, z $\begin{cases} x & +uy & +vz & = & b_1 \\ ux & +y & +z & = & b_2 \end{cases}$ où u, v, b_1, b_2 sont des paramètres. Sans résoudre le système, répondre aux questions suivantes :

1) Pour quelles valeurs des paramètres pourra-t-on exprimer

i) x et y comme fonctions de z ? (Pham / Dillinger)

ii) y et z comme fonctions de x ?

iii) z et x comme fonctions de y ?

(raisonner sur le système à 2 inconnues obtenu en " faisant passer l'une des inconnues au second membre ")

2) Comment faut-il choisir les paramètres pour que le système n'ait pas une infinité à 1 degré de liberté de solutions ?

3) Dans le cas 2), comment faut-il choisir les paramètres pour que le système soit possible ? Que pouvez - vous dire alors de ses solutions ?

Pour cette tâche les variables prennent les valeurs suivantes :

- type d'espace : $\mathbf{R}^3$;

- type de représentations données pour les vecteurs : sans objet ;

- type de représentation donnée : représentation cartésienne explicite ;

- type de représentation demandée : aucune ;

- dimension de l'espace ou des sous-espaces : 3 ;

- articulation obligatoire / potentielle : obligatoire puisqu'ici il faut interpréter les solutions et la condition de résolubilité du système pour déterminer les conditions sur les équations.

- connaissances liées à l'articulation : Dans cette tâche les connaissances ne se posent pas à un niveau technique de résolution puisque pour la partie 1) pour déterminer les conditions sur les paramètres u et v sans résoudre le système, il faut faire intervenir les notions de rang d'un système linéaire et degré de liberté, en pouvant articuler aussi le cadre de systèmes linéaires avec celui de déterminants (pour des questions d'économie), pour trouver la réponse (i) $u^2 \neq 1$, $u \neq v$, $uv \neq 1$. Pour la partie 2) de cette même question, il faut aussi s'appuyer sur la notion de rang d'un système linéaire et de degré de liberté. Dans ce cas, si le rang du système est 1, le degré de liberté est 2 et donc les deux équations sont proportionnelles (u = v = 1) ou (u = v= -1). Pour la partie 3) de la question, il suffit de déterminer la condition de résolubilité du système $\begin{cases} x+y+z=b_1 \\ x+y+z=b_2 \end{cases}$, c'est-à-dire $b_1 = b_2$ ou du système $\begin{cases} x-y-z=b_1 \\ -x+y+z=b_2 \end{cases}$, c'est-à-dire $b_1 = -b_2$

b) Pour quelles valeurs des paramètres (u, v) le système de 4 équations à 3 inconnues x, y, z codé par les tableaux suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & u & v \\ u & v & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \\ u \end{pmatrix} \text{ (Pham / Dillinger)}$$

Admet-il une solution unique ?

Pour cette tâche, les variables prennent les valeurs suivantes :

- type d'espace : $\mathbf{R}^3$;

- type de représentations données pour les vecteurs : représentation dans le registre tableau du vecteur du second membre du système ;

- type de représentations données : la matrice des coefficients du système ;

- type de représentation demandée : aucune ;

- dimension de l'espace ou des sous-espaces : 3 ;

- articulation potentielle / obligatoire : obligatoire puisqu'ici il faut déterminer des conditions sur les paramètres u et v pour que le système soit de rang 3 et possible.

- connaissances liées à l'articulation : Comme dans le cas précédent, les connaissances relatives à l'articulation sont restreintes au cadre des systèmes linéaires, c'est-à-dire à la notion de rang d'un système linéaire et à l'interprétation des conditions de résolubilité du système qui permettront de déterminer les conditions sur les paramètres.

V. CONCLUSION

L'étude que nous avons effectuée dans ce chapitre a permis de préciser l'éventail des types de tâches usuelles relevant d'un premier enseignement d'algèbre linéaire où l'articulation entre points de vue paramétrique et cartésien pouvait trouver à se nourrir et à se développer, en étant travaillée à la fois techniquement et conceptuellement, dans le cadre des systèmes linéaires mais aussi dans l'articulation de ce cadre avec d'autres cadres, notamment au niveau de l'anticipation, de l'interprétation et du contrôle.

En fait l'éventail des tâches usuelles peut paraître à l'issue de cette étude assez vaste pour permettre la mise en place de l'articulation et le développement d'une flexibilité efficace entre les points de vue cartésien et paramétrique. Nous voudrions cependant souligner que, pour la plupart des tâches répertoriées, nous avons mis en évidence une liaison étroite entre les besoins en articulation et le choix de certaines formes sémiotiques de représentations au niveau des données et/ou au niveau des caractéristiques des réponses attendues. Si l'enseignement n'est pas sensible à ce phénomène, il peut ainsi laisser perdre de nombreuses occasions de nourrir l'articulation souhaitée des deux points de vue.

De plus, nous avons montré, nous semble-t-il, que les tâches usuelles rendent obligatoire un certain travail technique sur l'articulation mais qu'elles contraignent beaucoup moins le pilotage ou le contrôle de ce travail technique, voire un travail réflexif à ce niveau. Il faudrait sans doute pour ce faire, inventer de nouvelles formes d'exercices où la demande ne se limite pas au calcul de représentations, ensembles de solutions ou systèmes générateurs.

Enfin, il nous a semblé, lorsque nous cherchions des exemples dans les manuels, que la simplicité des objets manipulés pouvait conduire à développer un certain " rapport de bricolage "[1] vis à vis de l'articulation. En fait, comme nous avons essayé de le montrer dans l'analyse de quelques exercices, la prise en compte raisonnée de cette simplicité pourrait conduire à un fonctionnement de l'articulation tout à fait intéressant, en l'aidant à se déployer dans un monde qui ne soit pas strictement limité à l'algorithmique décrite au chapitre précédent, en faisant agir des techniques diverses et des liaisons entre cadres plus variées. Mais si les formulations des exercices et les contraintes du contrat didactique ne poussent pas fortement à une telle pratique raisonnée, on peut faire l'hypothèse que la facilité offerte à l'obtention de réponses se traduira par des pratiques (de pur bricolage) simplificatrices qui court-circuitent l'articulation.

---

[1] Ce qui nous appelons ici " rapport de bricolage " correspond à un contrôle efficace de certaines données visant à simplifier la technicité de la tâche qui peut du coup court-circuiter l'articulation.

Il nous semble important de mettre maintenant à l'épreuve cette analyse, en étudiant comment effectivement l'enseignement utilise l'espace de manoeuvre que nous avons essayé d'identifier. Nous le ferons de façon externe, en analysant un certain nombre de manuels, dans le chapitre suivant et en faisant l'hypothèse que cette étude nous donne des informations pertinentes sur les pratiques réelles, au moins au niveau des pratiques dominantes.

CHAPITRE IV

ETUDE DE LA PRISE EN COMPTE DE L'ARTICULATION ENTRE LES POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE PAR L'ENSEIGNEMENT : L'ANALYSE DE MANUELS

I. INTRODUCTION

Comme nous avons déjà pu le souligner dans le chapitre précédent, à travers l'analyse des tâches relevant des débuts de l'algèbre linéaire, la mise en place des rapports entre les points de vue cartésien et paramétrique n'est pas forcément facile parce que :

- d'une part, l'éventail des tâches qui rendent vraiment nécessaire l'articulation entre ces deux points de vue est réduit ;

- d'autre part, il n'est pas facile de contrôler le niveau auquel s'effectue cette articulation et, de ce fait, les connaissances qu'elle va mettre en jeu.

Comment l'enseignement exploite-t-il la marge de manoeuvre dont il dispose dans ce domaine ? Comment gère-t-il les difficultés que nous avons identifiées ? Y est-il d'ailleurs sensible ? Et, qu'il soit sensible à ces questions d'articulation de points de vue ou non, que permet-il aux étudiants de construire à travers le cours dispensé et les activités proposées ? C'est sur ces questions que nous allons travailler dans ce chapitre, à travers une analyse de manuels, destinée à nous fournir une première vision d'ensemble.

Nous ne prétendons bien sûr pas ici faire une étude exhaustive. Nous nous baserons en fait sur un ensemble de manuels français, anglo-saxons et brésiliens choisis pour présenter un panorama relativement diversifié. Les choix précis sont motivés par des caractéristiques que nous précisons ci-après :

En ce qui concerne les manuels brésiliens, nous avons choisi deux manuels représentatifs des manuels " classiques ", très utilisés :

1. L'ouvrage de C.A. Callioli, H.H. Domingues, R.C.F. Costa (Callioli et al., 1983), intitulé " Álgebra Linear e Aplicaçoes " (332 pages) et désigné dans la suite par Callioli. Cet ouvrage est un ouvrage d'introduction à l'algèbre linéaire qui s'adresse a priori à tous les étudiants scientifiques. Les auteurs souhaitent proposer un cours où, le plus possible, les concepts d'algèbre linéaire soient introduits à travers des exemples et en s'appuyant sur la géométrie en dimension deux et trois, et ne pas se cantonner à la seule exposition théorique du domaine.

Leur objectif est aussi de donner, dès que c'est possible, des exemples d'application de l'algèbre linéaire à d'autres domaines scientifiques comme par exemple l'économie, la biologie.

2. L'ouvrage de J.L. Boldrini, S.I.R. Costa, V.L. Figueiredo, H.G. Wetzler (Boldrini et al., 1980), intitulé " Álgebra Linear " (411 pages) désigné dans la suite par " Boldrini ". Comme le précédent, cet ouvrage s'adresse à des étudiants de divers secteurs scientifiques : mathématiques, génie civil, physique... Il s'agit de fournir à tous un cours d'initiation présentant les concepts fondamentaux. Ce cours est la suite d'un cours de géométrie analytique.

et un manuel récent, sensiblement différent de ces manuels classiques, au niveau du fond comme de la forme :

3. L'ouvrage de E. Lages Lima (Lages Lima, 1995), intitulé " Álgebra Linear " (310 pages) et désigné dans la suite par " Lages Lima ". Il s'agit selon l'auteur d'un ouvrage d'introduction à l'algèbre linéaire qui n'exige pas de connaissances antérieures sur le sujet. Par contre, il faut se rappeler qu'au Brésil le curriculum universitaire prévoit au moins un semestre de géométrie analytique en préalable au cours d'algèbre linéaire. L'auteur, en particulier, souligne qu'il n'a pas suivi la tradition des ouvrages brésiliens où l'étude de la méthode de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires sert à motiver l'introduction des matrices et des déterminants et que, dans son ouvrage, il se propose de donner un autre statut, " intelligent " à cette méthode, en montrant son utilité dans la résolution de divers problèmes d'algèbre linéaire, en dehors de la résolution des systèmes linéaires.

En ce qui concerne les manuels anglo-saxons, nous n'avons choisi que deux manuels et notre choix est basé sur les caractéristiques suivantes

4. L'ouvrage de S. Lang (Lang, 1976), intitulé " Algèbre Linéaire " (243 pages) et désigné dans la suite par " Lang ". Il s'agit d'un ouvrage ancien, mais qui a joué un rôle premier dans la réflexion sur l'enseignement de l'algèbre linéaire et a eu une influence certaine sur les approches développées dans les deux premiers manuels brésiliens mentionnés. En effet, prenant en compte la généralisation de l'introduction de l'algèbre linéaire dans les premiers cycles de l'enseignement supérieur, l'auteur propose un cours où, pour faciliter l'accès au domaine, il s'appuie très fortement sur la géométrie dans l'espace. Il insiste aussi sur l'intérêt de l'algèbre linéaire en termes d'applications à d'autres disciplines que les mathématiques.

5. L'ouvrage de G. Strang (Strang, 1993), intitulé " Introduction to Linear Algebra " (472 pages) et désigné dans la suite par " Strang ". C'est un ouvrage de référence pour la tradition anglo-saxone mettant au premier plan non pas l'algèbre linéaire abstraite, mais le calcul dans

$\mathbf{R}^n$ et notamment le calcul matriciel, dans la première approche à ce domaine. C'est dans ce cadre que sont introduits les concepts de l'algèbre linéaire.

En ce qui concerne les manuels français, nous avons choisi 5 manuels et 2 polycopiés, en nous basant sur les caractéristiques suivantes :

6. L'ouvrage de J.M. Arnaudiès et H. Fraysse (Arnaudiès et al., 1987) intitulé " Algèbre " (691 pages) et désigné dans la suite par " Arnaudiès ". Il s'agit d'un ouvrage classique de référence, de haut niveau, sans doute peu accessible à l'étudiant ordinaire de DEUG d'aujourd'hui.

7. L'ouvrage de A. et B. Calvo (Calvo et al., 1995) intitulé " Algèbre Linéaire " (174 pages), désigné dans la suite par " Calvo ". Il s'agit d'un ouvrage qui recouvre de façon très synthétique toute l'algèbre linéaire de deux premiers années universitaires et qui présente, en les démontrant, tous les résultats classiques à ce niveau. Il est représentatif à nos yeux d'une approche classique de l'algèbre linéaire abstraite, illustrée d'exemples. Il ne contient pas d'exercices. Ce qui nous a conduit à le choisir parmi d'autres de la même catégorie est le fait que les auteurs y identifient les différents cadres mis en évidence dans le chapitre II et cherchent visiblement à les articuler.

8. L'ouvrage de F. Liret et M. Zisman (Liret et al., 1984) intitulé " Maths " tome 2 (360 pages) et désigné dans la suite par " Liret-Zisman ". Il s'agit d'un cours différent dans son organisation des précédents puisque les auteurs visent un travail autonome des étudiants. D'où une structure en modules courts correspondant à une unité de travail, avec une partie théorique et des exercices de difficulté croissante.

9. L'ouvrage de F. Pham et H. Dillinger (Pham et al., 1996) intitulé " Algèbre Linéaire " (347 pages) et qui sera désigné dans la suite par " Pham ". Il s'agit là aussi d'un ouvrage récent où l'enseignement est organisé de façon à amener les étudiants à maîtriser les aller-retour entre ce que les auteurs définissent comme la pensée géométrique d'une part et le monde des calculs d'autre part. Pour eux, la pensée géométrique débute par l'étude des figures et ils vont proposer des activités où énoncé et réponse s'expriment dans ce registre des figures ; le monde des calculs est celui où la pensée se traduit par des exécutions mécaniques de tâches, mais où il faut se poser des questions sur la logique de leur déroulement. Les techniques fonctionnent d'abord comme de simples outils de la pensée mathématique mais deviennent ensuite les objets de cette pensée. Pour les auteurs le pont entre ces deux modes de pensée est fourni par la dualité qui selon eux a deux sens, à savoir :

"c'est bien sûr la dualité au sens mathématique (notion d'espace dual), mais c'est aussi une dualité entre deux points de vue, celui de la géométrie intrinsèque, et celui du calcul en coordonnées." [Pham et al., avertissement]

10. L'ouvrage de X. Merlin (Merlin, 1995) intitulé " Méthodix Algèbre " (400 pages) qui sera désigné dans la suite par " Merlin ". C'est cette fois un ouvrage récent où l'accent est mis sur les méthodes intervenant dans la résolution des problèmes de concours de ce niveau, un effort particulier étant fait pour justifier les différentes méthodes introduites et détailler leur mise en oeuvre.

Nous avons considéré de plus, au delà des seuls manuels deux polycopiés où l'articulation des deux points de vue nous semble effectivement prise en compte mais de façon sensiblement différente :

11. Celui rédigé par D. Meyer (Meyer, 1992) pour une section de DEUG de l'université Paris 7, désigné dans la suite par " Meyer ". Il s'agit d'un polycopié où l'articulation des points de vue est explicitement prise en compte, d'abord dans le contexte de la géométrie affine dans $\mathbf{R}^3$, l'auteur démontrant ce qu'il appelle un critère géométrique de basicité-équations. A partir de cette reprise approfondie de la géométrie du lycée, l'auteur introduit l'algèbre linéaire en arrivant très vite à la notion de dual d'un espace vectoriel. Il souligne à ce propos que :

" l'intérêt de l'espace dual vient avant tout du fait qu'il permet de considérer une équation linéaire indépendamment de la notion de " base ", comme un vecteur, et de gérer [...] les transformation induites par les changement de "bases" sur la forme des équations. " [Meyer, p.7]

12. Celui rédigé par M. Rogalski (Rogalski, 1992) pour la section expérimentale de DEUG première année de l'université de Lille 1, désigné dans la suite par " Rogalski ". L'auteur met l'accent explicitement sur l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique pour la représentation des sous-espaces vectoriels. Son cours est centré sur les notions d'indépendance linéaire, rang et base dans le cadre de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, notions qui soutiendront l'articulation des deux points de vue.

Après avoir présenté les douze ouvrages retenus et les raisons qui nous ont amenée à les sélectionner, nous allons rentrer dans leur analyse, en centrant cette analyse sur les questions d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique.

II. ORGANISATION DE L'ANALYSE

Notre analyse va être structurée autour des questions suivantes, issues de tout ce qui précède :

- Comment est structuré l'enseignement et en particulier comment s'organise la progression par rapport aux différents cadres identifiés, comment est conçue leur articulation ?

- Comment sont introduits les points de vue cartésien et paramétrique, comment sont-ils articulés ? Comment est gérée l'articulation entre les deux points de vue ?

- A quels niveaux est gérée l'articulation : quel poids respectifs y occupent les dimensions techniques, technologiques et théoriques et comment sont-elles elles-mêmes articulées ? Y a-t-il de plus un discours de type métamathématique[1] présent au niveau du cours ou dans le traitement des exemples qui l'accompagnent pour soutenir cette articulation ?

- Qu'est-ce qui, dans l'articulation est à la charge des enseignants ? Qu'est-ce qui est dévolu aux étudiants ?

Pour essayer de répondre à ces questions, nous avons choisi de procéder de la façon suivante, dans l'analyse de chaque ouvrage :

1. Dans un premier temps, nous présenterons la structure globale de l'ouvrage, sous forme d'un organigramme rendant compte de sa structuration par rapport aux différents cadres identifiés dans le chapitre II et mettant en évidence les notions et théorèmes susceptibles d'être impliqués dans l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique. Nous reprenons ici un type de description mis au point par P. Tavignot dans sa thèse consacrée à l'analyse du processus de transposition didactique, dans le cas de la symétrie au collège (Tavignot, 1991). Chaque organigramme fera de plus l'objet d'un commentaire.

2. Dans un second temps, nous essayerons d'analyser plus précisément la façon dont interviennent les deux points de vue et leur articulation en distinguant ce qui est plutôt à la charge de l'enseignant et ce qui est plutôt à la charge des étudiants. Classiquement, nous considérerons comme relevant de l'enseignant ce qui fait partie du cours et exemples, exercices corrigés qui l'accompagnent et à la charge de l'étudiant, la partie exercices.

En ce qui concerne la partie " cours ", nous étudierons plus précisément :

- le niveau d'identification des points de vue cartésien et paramétrique, même s'ils ne sont pas désignés en ces termes (explicite, implicite...),
- les articulations présentes et travaillées,
- les formulations adoptées à leur propos, en prenant en compte les différents niveaux de discours.

En ce qui concerne les exercices, nous nous baserons sur la grille d'analyse établie au chapitre III, tout en réservant une place aux exercices hors grille qui nous sembleraient pouvoir relever de l'articulation des deux points de vue. Nous présenterons les résultats sous forme d'un

[1] Il faut entendre ici par " métamathématique " le deuxième sens que Polya donne au mot méthode, c'est-à-dire pour lui, une méthode, c'est "comment penser à un truc qui a déjà marché pour le réutiliser". [Enseigner autrement les maths en DeugA première année, 1990]

tableau à double entrée regroupant tous les manuels, en essayant de préciser pour les exercices retenus, quel type d'articulation est en jeu et si elle est vraiment à la charge de l'étudiant.

A) ANALYSE DE L'OUVRAGE DE CALLIOLI ET AL.

L'organigramme de la page 192 montre la progression du cours de Callioli et al., conçu comme un premier cours d'algèbre linéaire à l'université, pouvant être utilisé par les différents publics scientifiques.

Commentaires et analyse :

Les auteurs débutent par le cadre des systèmes linéaires. Ils incluent quelques considérations théoriques sur l'équivalence des systèmes, mais l'accent est mis sur la méthode d'échelonnement pour la résolution et la discussion des systèmes linéaires, les invariants n'étant pas explicités. De nombreux exemples de résolution sont traités (16) et 9 tâches de ce type sont proposées aux étudiants. Le cadre des matrices est ensuite introduit et articulé avec celui des systèmes. Il sera relié ultérieurement aux autres cadres.

Dans le cadre de l'algèbre linéaire, les notions et les théorèmes sont introduits classiquement sans aucune considération explicite sur l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique pour la représentation des sous-espaces vectoriels. Par contre, les deux types de représentations sont manipulés dans les nombreux exemples simples qui accompagnent le cours. La technique de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique décrite dans le paragraphe II.A du chapitre II est en jeu implicitement dans plusieurs exemples, les représentations cartésiennes données étant toujours minimales. Aucun commentaire spécifique n'accompagne ces exemples et aucun des exemples du cours ne met en jeu le passage plus délicat d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne. Les exemples suivants, concernant l'intersection, sont en ce sens typiques des exercices corrigés intégrés au cours.

"1) Consideremos no $\mathbf{R}^3$ os seguintes sub-espaços vetoriais :

$U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1]$ e $V = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$

Determinar um sistema de geradores de $U \cap V$.

Solução :

$w \in U \cap V \Leftrightarrow w \in U, w \in V \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ tais que :

$\alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 1) = \gamma(0, 1, 0) + \delta(0, 0, 1)$

ou ainda que :

$\alpha + \beta = 0, \beta - \gamma = 0, \beta - \delta = 0$. Daí $\alpha = -\beta, \gamma = \beta$ e $\delta = \beta$.

Donde $w = -\beta(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 1) = \beta(0, 1, 1)$. Então $U \cap V = [(0, 1, 1)]$.

2) Dados os sub-espaços $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = 0\}$ do $\mathbf{R}^3$, determinar o sub-espaço $U \cap V$.

Solução

$u = (x, y, z) \in U \cap V \Leftrightarrow u \in U$ e $u \in V \Leftrightarrow x + y = 0$ e $x = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$. Logo $U \cap V = \{(0, 0, z) / z \in \mathbf{R}\}$, que é gerado pelo vetor (0, 0, 1).

Le cadre des matrices est ensuite repris et articulé à celui de l'algèbre linéaire via l'association matrice / application linéaire et utilisé pour déterminer inverses et composées.

La notion de dualité qui est, nous l'avons vu, un des moyens qui permet de théoriser l'articulation des deux points de vue, apparaît comme un paragraphe isolé au milieu de l'articulation matrice / application linéaire, les notions de sous-espace dual et base duale sont introduites accompagnées d'exemples, sans finalité apparente.

Le cadre des déterminants est quant à lui introduit, après un chapitre consacré au produit scalaire et aux isométries, à travers la notion de déterminant d'une matrice carrée et apparaît comme un outil au service du calcul matriciel et de la résolution des systèmes de Cramer.

Les différents cadres que nous avons mis en évidence dans le chapitre II apparaissent donc tous dans ce manuel, à l'exception du cadre géométrique qui est seulement brièvement mentionné lors de l'introduction du cadre linéaire. Même s'ils sont introduits de façon autonome, les cadres des systèmes linéaires, matrices et déterminants ont essentiellement une fonction d'outil. Les articulations entre cadres sont présentes mais l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique n'est jamais prise en compte au niveau théorique ou technologique dans ces articulations entre cadres. Au niveau technique, elles intervient implicitement et dans un sens seulement, dans la détermination d'un système générateur pour un sous-espace vectoriel défini de façon cartésienne minimale.

Les différents registres de représentation des vecteurs et sous-espaces que nous avons introduits au chapitre III apparaissent au fil des nombreux exemples donnés qui concernent cependant toujours des exemples simples, mais les questions de traitement et de conversion sont supposées comme allant de soi, elles ne donnent lieu à aucun commentaire.

Par rapport aux tâches proposées aux étudiants, le tableau récapitulatif (p.205-206) montre que lorsqu'il y a articulation entre les deux points de vue, celle-ci n'est considérée que dans le seul sens du passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique qu'il faut gérer de la même façon que celle proposée dans les exemples.

B) ANALYSE DE L'OUVRAGE DE BOLDRINI ET AL.

L'organigramme de la page 193 présente l'organisation de cours de Boldrini et al. par rapport aux questions que nous avons considérées.

Commentaire et analyse :

Les auteurs débutent par le cadre des matrices, illustrent les opérations matricielles par de nombreux exemples numériques et présentent diverses applications du calcul matriciel à l'économie, à la biologie, aux probabilités et statistiques.

Le cadre des systèmes linéaires est introduit à travers un exemple emprunté à la chimie en mettant l'accent sur la technique de Gauss comme outil important de résolution. L'équivalence des systèmes obtenus par application de la méthode de Gauss est admise dans cette première phase puis démontrée après introduction de l'interprétation matricielle d'un système linéaire, de la notion de matrice équivalente et du théorème assurant que toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée (triangulaire supérieure) unique. La définition du rang d'une matrice permet ensuite d'énoncer et de démontrer le théorème de Rouché. A partir de là, les auteurs traitent dans le cours des exemples simples de systèmes et interprètent les solutions en se référant au " degré de liberté du système " (n-r, pour un système mxn de rang r) qui définit le nombre de " solutions basiques ". Dans cette partie, on note des éléments technologiques associés au passage cartésien / paramétrique, faisant intervenir les notions de degré de liberté, de solutions basiques, de variables libres et de rang du système.

"Exemplo 1 : Resolver o sistema :

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

A matriz associada ao sistéma é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

que reduzida à forma escada fornece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Reinterpretando o sistema, vemos que s e t são variáveis livres (grau de liberdade 2). Chamando $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$ obtemos :

$$x = -5\lambda_1 + \lambda_2$$
$$y = 2\lambda_1 - \lambda_2$$
$$z = \lambda_1$$
$$t = \lambda_2$$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observe que [-5 2 1 0] e [1 -1 0 1] são soluções do sistema obtidas da seguinte forma : a primeira fazendo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, e a segunda, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Elas são chamadas soluções básicas do sistema porque geram todas as outras. Basta reduzir o sistema, obsevar as variáveis livres e atribuir valores 1 para uma delas e sero para as outras, obtendo as soluções básicas (tantas quanto o grau de liberdade). A solução será uma soma destas soluções multiplicadas por constantes. [Boldrini et al., p. 47 et 48]

Le cadre des déterminants n'est introduit que pour des matrices d'ordre 2 et 3 et l'accent est mis sur son caractère outil pour la détermination de l'inverse d'une matrice, la résolution d'un système de Cramer et le calcul du rang d'une matrice.

A partir de considérations géométriques sur les vecteurs du plan et de l'espace, les auteurs introduisent ensuite les notions et les théorèmes de l'algèbre linéaire, classiquement, en s'appuyant sur les espaces $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$ pour proposer des exemples permettant des interprétations graphiques. Les représentations cartésiennes et paramétriques (non nécessairement minimales) sont manipulées dans de nombreux exemples simples qui accompagnent le cours, mais sans aucune considération explicite sur l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique dans la gestion des sous-espaces vectoriels. L'exemple ci-après, intégré au cours, en est un exemple typique :

"Considere :

$V = \{(x, y, z) ; x + y - z = 0\}$

$W = \{(x, y, z) ; x = y\}$

Determinar V + W.

Observe que

$V = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$

$W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

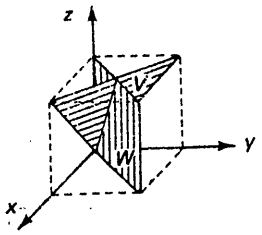
Então

$V + W = [(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

(Veja 4.6.9)[2]

Como, dado $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ podemos escrever

$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, 1, 0) + \delta(0, 0, 1)$



[2] Théorème de la dimension de la somme et de l'intersection

Com

$\alpha = x$ Observe que a solução deste

$\beta = y$ sistema não é única uma

$\gamma = 0$ vez que 4 vetores no $\mathbf{R}^3$ é

$\delta = z - x - y$ necessariamente LD.

Portant $V + W = \mathbf{R}^3$.

Usando 4.6.9,

dim $\mathbf{R}^3$ = dim V + dim W - dim($V \cap W$)

temos que dim($V \cap W$) = 1

Vamos determinar $V \cap W$.

$V \cap W = \{(x, y, z) ; x + y - z = 0 \text{ e } x = y\}$

$= \{(x, y, z) ; x = y = z/2\}$

$= [(1, 1, 2)]$ [ibid, p.121]

Ainsi donc, la technique de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique est en jeu implicitement dans plusieurs exemples de résolution de systèmes, avec un discours technologique explicite qui la relie au degré de liberté du système, mais elle n'est pas reprise et retravaillée dans le cadre de l'algèbre linéaire proprement dit.

Comme dans le premier ouvrage, les différents cadres que nous avons mis en évidence dans le chapitre II apparaissent donc tous dans ce manuel, à l'exception du cadre géométrique qui est seulement employé dans plusieurs exemples et brièvement mentionné lors de l'introduction du cadre linéaire. Soulignons également que les formes linéaires ne sont que rapidement définies dans le chapitre consacré aux formes bilinéaires et que la dualité n'est pas introduite. Même s'ils sont introduits de façon autonome, le cadre des systèmes linéaires et celui des déterminants ont ici essentiellement une fonction outil. Les articulations entre cadres sont présentes et par exemple le théorème de liaison entre dimension du noyau et de l'image d'une application linéaire, dont la démonstration est laissée au lecteur, est mis en place en revenant au cadre matriciel, mais ces articulations restent limitées. Ainsi les systèmes ne sont pas réinterprétés explicitement dans le cadre de l'algèbre linéaire, les formes linéaires, une fois définies, ne sont pas mises en relation avec les systèmes.

Au niveau technique, l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique n'intervient qu'implicitement, uniquement dans le sens de la détermination d'un système de vecteurs générateurs pour un sous-espace vectoriel défini par une représentation cartésienne minimale ou pas seulement, une fois achevé le chapitre sur les systèmes linéaires (cf. plus haut).

Les différents registres de représentation de vecteurs et de sous-espaces que nous avons introduits au chapitre III apparaissent au fil de nombreux exemples simples privilégiant les registres introduits pour $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$, mais les questions de traitement et de conversion sont aussi dans ce manuel supposées comme allant de soi, elles ne donnent lieu à aucun commentaire.

En ce qui concerne les tâches proposées aux étudiants, le tableau récapitulatif montre un nombre très réduit de tâches où l'articulation entre les deux points de vue est vraiment nécessaire et lorsque c'est le cas, il ne s'agit que du cas de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, seul cas traité aussi à travers les exemples.

C) ANALYSE DE L'OUVRAGE DE LAGES LIMA

L'organigramme page 194 décrit l'organisation de cet ouvrage.

Commentaires et analyse :

Les chapitres sont ici organisés par rapport aux différentes notions d'algèbre linéaire et dénommés sections. Comme chez Lang, les nouvelles notions sont parfois introduites lors d'exemples ou d'exercices intégrés au cours.

L'auteur débute par le cadre de l'algèbre linéaire via la notion d'espace vectoriel définie axiomatiquement. Des exercices permettent l'articulation avec le cadre géométrique.

Dans le chapitre suivant il aborde la notion de sous-espace vectoriel et les opérations entre sous-espaces. Encore une fois, l'articulation est faite avec le cadre géométrique puisque, à travers des exemples, l'auteur introduit les notions d'hyperplan et de variété linéaire affine. Il y a aussi, sur l'exemple d'un système de m équations à n inconnues, articulation explicite avec le cadre des systèmes linéaires et des matrices (supposés a priori connus ?). Mais il n'y a pas de travail explicite ou implicite sur les représentations cartésiennes et paramétriques et leur articulation :

Exemple 2.8. O sistema linear de m equações à n incógnitas

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

possui uma solução $(x_1, \ldots, x_n)$ se, e somente se, o vetor $b = (b_1, \ldots, b_n)$ é combinação linear dos vetores-coluna

$$v_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$$

.

.

.

$$v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$$

da matriz $A = [a_{ij}]$. Com efeito, estas equações significam que $b = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$.

Em particular, se os vetores-coluna $v_1, v_2, \ldots, v_n$ gerarem $\mathbf{R}^m$, o sistema possui solução, seja qual for o segundo membro b. [Lages Lima, p.13]

Dans le chapitre 3, toujours dans le cadre de l'algèbre linéaire, l'auteur introduit classiquement les notions de base et dimension et lors de la démonstration du théorème de la dimension, met en place l'association équation/vecteur. La notion d'application linéaire est elle aussi introduite classiquement au chapitre 4 et l'auteur exploite cette notion pour introduire la notion de forme linéaire et d'espace dual et renforcer l'articulation avec le cadre géométrique via des exemples de transformations géométriques. La notion de base duale est définie dans un exemple et il faut démontrer qu'il s'agit d'une base.

Lors de l'introduction des notions de noyau et d'image dans le chapitre 6, l'auteur présente l'interprétation matricielle et fonctionnelle d'un système linéaire et interprète l'ensemble des solutions comme variété affine ayant pour direction le noyau de l'application linéaire associée au système. A partir du théorème du noyau et de l'image, il revient également sur la dimension d'un hyperplan, obtenue précédemment via l'identification d'un système de générateurs. Tout ceci se situe à un niveau théorique.

Après un chapitre sur les notions de somme directe et de projecteur, il introduit la notion de matrice d'une application linéaire et ses propriétés. Enfin, en démontrant, à l'aide de la matrice transposée, une double inégalité, il prouve que le rang des vecteurs ligne = rang des vecteurs colonne.

Suit un chapitre technique sur la méthode d'échelonnement des matrices appliquée ensuite à la détermination de la dimension d'un sous-espace donné par un système de générateurs, du rang d'une matrice et du rang d'une application linéaire ainsi qu'à la résolution des systèmes linéaires.

Nous avons donc une articulation explicite entre les différents cadres qui se situe à la fois au niveau théorique et technologique, le problème du passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique y est géré aux différents niveaux, via la résolution des systèmes mais le problème inverse n'est pas posé. L'exemple suivant est tout à fait typique de ces choix :

"Seja o sistema

$$x + 2y + 3z + 4t = 1$$
$$5x + 6y + 7z + 8t = 2$$
$$9x + 10y + 11z + 12t = 3$$

O escalonamento da sua matriz aumentada segue o squema :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A última matriz obtida é a matriz aumentada do sistema :

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t &= 1 \\ -4y - 8z - 12t &= -3 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x + 2y &= -3z - 4t + 1 \\ -4y &= 8z + 12t - 3. \end{aligned}$$

Este sistema pode ser resolvido de baixo para cima (esquecendo que z e t são incógnitas) e nos dá a solução :

$$y = -2z - 3t + \frac{3}{4}, \quad x = z + 2t - \frac{1}{2} \quad . \qquad (*)$$

O sistema dado possui portanto uma infinidade de soluções, que podem ser obtidas atribuindo-se valores arbitrários a z e t e calculando x e y delas por meio destas duas últimas igualdades. Observe que as igualdades (*) são as equações da variedade afim de dimensão 2 no espaço $\mathbf{R}^4$, formada por todas as soluções do sistema dado. Escrevendo o sistema original sob a forma Av = b, onde A : $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ é a transformação linear cuja matriz tem as linhas (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12) e b = (1, 2, 3), esta variedade afim, formada por todos os vetores

$$v = (z + 2t - \frac{1}{2}, -2z - 3t + \frac{3}{4}, z, t) \in \mathbf{R}^4,$$

onde z, t são números reais arbitrários, é o conjunto de todos os vetores $v \in \mathbf{R}^4$ tais que Av = b.

Observação : O conjunto F = {(z + 2t, -2z - 3t, z, t) $\in \mathbf{R}^4$ é um subespaço vetorial de $\mathbf{R}^4$, núcleo da tranformação linear A : $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ acima considerada. Uma base de F é formada pelos vetores w_1 = (1, -2, 1, 0) e w_2 = (2, -3, 0, 1), obtidos fazendo z = 1, t = 0 e depois z = 0 e t = 1 na expressão dos vetores de F. De um modo geral, para obter uma base para o núcleo de um operador A : $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ o que se tem a fazer é resolver por escalonamento o sistema Ax = 0." [ibid, p.95 à 97]

Le cadre de déterminants est introduit beaucoup plus tard, dans le chapitre 19, en utilisant la notion de forme multilinéaire alternée et, via la définition du déterminant d'une matrice carrée, l'auteur considère les applications aux systèmes de Cramer et au déterminant d'une matrice triangulaire.

Dans cet ouvrage, le cadre de l'algèbre linéaire joue le rôle central, les autres cadres n'apparaissant qu'à travers les exemples ou comme outils pour démontrer des propriétés et des théorèmes. Même si les cadres que nous avons mis en évidence dans le chapitre II ne sont pas présentés de façon autonome, la volonté d'articulation des cadres est manifeste au fil de l'ouvrage. Elle est explicite et se situe davantage aux niveaux théorique / technologique que technique. Sur le plan théorique, les éléments permettant l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique sont présents mais ne font pas appel à la dualité. Mais il n'y a pas explicitation des deux points de vue, le passage cartésien / paramétrique est implicitement géré sur un plan technique et technologique en faisant

appel aux notions développées dans les chapitres précédents, dans le chapitre sur l'élimination, le passage en sens inverse n'est pas abordé.
Au niveau des exercices, soulignons que l'ouvrage comporte de nombreux exercices d'ordre plus théorique qui sont progressivement proposés aux étudiants. Il y a même des notions qui sont introduites à travers les exercices. Les exercices mettant en jeu l'articulation entre les deux points de vue sont très rares, ce qui est cohérent avec le développement du cours et la plupart des exercices se situent comme le cours à un niveau théorique.

D) ANALYSE DE L'OUVRAGE DE LANG

L'organigramme de ce cours d'algèbre linéaire (page 195) montre des différences sensibles avec la majorité des organigrammes précédents.

Commentaires et analyse :

L'auteur débute par la notion de vecteur, y voyant une notion fondamentale car elle fournit une motivation géométrique à l'étude de l'algèbre linéaire. Il en détaille les propriétés aussi bien algébriques que géométriques, illustrant par de nombreux exemples en dimension 2 et 3 les opérations vectorielles introduites (dont les produits scalaire et vectoriel), leurs propriétés et utilisant beaucoup le registre graphique de représentation.

Ensuite, il introduit le cadre de l'algèbre linéaire, classiquement, par la définition axiomatique des espaces vectoriels. A noter que, contrairement aux deux premiers manuels, les exemples intégrés au cours sont souvent des exemples généraux qui permettent d'introduire de nouvelles notions. Quand il s'agit de cas particuliers, les exemples privilégient $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$ et lorsque c'est possible, l'auteur illustre l'exemple par une représentation graphique.

Il n'y a pas de considérations explicites sur l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique. Par contre, les deux types de représentation sont manipulés dans les quelques exercices simples qui suivent le cours.

Dans le cadre des matrices, introduit ensuite, l'auteur profite de l'articulation entre ce cadre et celui de l'algèbre linéaire pour démontrer le théorème de Rouché pour le seul cas de l'existence de solutions, en le séparant en plusieurs petits théorèmes.

Il revient alors au cadre de l'algèbre linéaire pour définir et travailler, de façon classique et intrinsèque, la notion d'application linéaire, après avoir souligné l'importance de manière générale de ce type d'applications en mathématiques, avant de passer à l'étude matricielle des applications linéaires.

Dans le chapitre suivant consacré à produit scalaire et orthogonalité, l'auteur revient aux systèmes linéaires et, utilisant d'une part la relation entre dimension d'un sous-espace et de son orthogonal (au sens du produit scalaire) démontrée précédemment, d'autre part l'interprétation des solutions d'un système comme orthogonal de l'espace engendré par les vecteurs ligne de la matrice associée, il montre que, pour une matrice, rang des vecteurs ligne = rang des vecteurs colonne et donne la dimension du sous-espace solution (n-r avec les conventions habituelles) en fonction des conclusions sur la dimension du sous-espace solution. Il définit ensuite le rang d'un système linéaire comme celui de la matrice associée. Deux exemples complètent cette partie, l'un renvoie, pour les solutions d'un système, à la technique classique de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique décrite au chapitre II, un autre utilise l'orthogonalité pour trouver une base de l'espace des solutions d'une équation, en s'appuyant sur la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Cette technique se rapproche de celle considérée au paragraphe III du chapitre II (développée elle dans le cadre plus général de l'orthogonalité liée à la dualité). Ces deux exemples concernent donc l'articulation du cartésien et du paramétrique et deux moyens différents de la gérer, mais ils ne sont accompagnés d'aucun commentaire mettant en valeur leur intérêt et les généralisations possibles. Le seul discours est celui qui justifie, pas à pas, la résolution.

"Exemple 2. Trouvez la dimension de l'espace des solutions du système d'équations suivant, et déterminez cet ensemble dans $\mathbf{R}^3$:

$$2x + y + z = 1,$$
$$y - z = 0.$$

On voit immédiatement qu'il existe au moins une solution, à savoir $x = 1/2$, $y = z = 0$. Le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est 2. La dimension de l'espace des solutions est donc 1. L'espace des solutions du système homogène associé a pour dimension 1 et une solution de ce système peut être trouvée aisément

$$y = z = 1, \quad x = -1/2.$$

L'ensemble des solutions du système inhomogène est donc l'ensemble des vecteurs

$$(1/2, 0, 0) + t(-1/2, 1, 1),$$

où t décrit l'ensemble des nombre réels. On voit que notre ensemble de solutions est une droite.

Exemple 3. Trouvez une base de l'espace de solutions de l'équation

$$3x - 2y + z = 0$$

L'espace des solutions est l'espace orthogonal au vecteur (3, -2, 1) et est donc de dimension 2. Il existe bien sûr beaucoup de bases de cet espace. Pour en trouver une complétons A = (3, -2, 1) en une base de $\mathbf{R}^3$. On le fait en choisissant des vecteurs B et C tels que A, B et C soient linéairement indépendants. Par exemple, prenons

$$B = (0, 1, 0) \qquad \text{et } C = (0, 0, 1).$$

A, B et C sont alors linéairement indépendants. Pour le voir, on procède de manière habituelle ; si a, b et c sont des nombres tels que

$$aA + bB + cC = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} 3a \quad\quad &= 0, \\ -2a + b \quad &= 0, \\ a \quad + c &= 0, \end{aligned}$$

dont la solution est évidemment

$$a = b = c = 0,$$

si bien que A, B et C sont linéairement indépendants. Orthogonalisons alors ces vecteurs.

Soit

$$B' = B - \frac{\langle B, A\rangle}{\langle A, A\rangle} A = (\frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7})$$

$$\begin{aligned} C' &= C - \frac{\langle C, A\rangle}{\langle A, A\rangle} A - \frac{\langle C, B'\rangle}{\langle B', B'\rangle} B' \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{14}(3,-2,1) - \frac{1}{35}(3,5,1). \end{aligned}$$

Alors {B', C'} est une base de l'espace des solutions de l'équation donnée. [Lang, p.149 et 150]

L'auteur en vient ensuite à la définition des formes bilinéaires et à l'orthogonalité associée puis introduit la notion d'espace dual qui lui permettra de généraliser les notions d'orthogonalité précédemment introduites et leurs propriétés et en particulier d'obtenir la relation entre dimension d'un sous espace et dimension de l'orthogonal pour un produit scalaire non dégénéré et non pas seulement défini positif.

Le cadre de déterminants est introduit progressivement à l'aide du cadre des matrices. L'auteur, à ce niveau, met l'accent sur les applications aux systèmes de Cramer et la détermination du rang d'une matrice, puis sur l'interprétation du déterminant en termes d'aire orientée.

Les différents cadres que nous avons mis en évidence au chapitre II apparaissent dans cet ouvrage avec une articulation à la fois théorique et technologique, les cadres des systèmes linéaires, des matrices et de l'algèbre linéaire jouant un rôle central. En ce qui concerne plus précisément l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique, les éléments théoriques possibles de cette articulation sont présents : théorie des systèmes linéaires, orthogonalité liée au produit scalaire, dualité. Deux techniques de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique apparaissent dans le cours, le problème inverse n'étant pas abordé, mais elles ne sont pas identifiées comme telles et ne font l'objet d'aucun commentaire technologique. Dans ces conditions, il semble bien que l'articulation entre les différents niveaux reste à la charge complète de l'étudiant.

Le travail sur les techniques de passage d'une représentation à une autre ne semble pas être considéré comme une tâche importante, l'auteur ne présente que deux exemples qui se réfèrent de plus au même sens du passage.

Les registres de représentation de vecteurs de $\mathbf{R}^n$, de matrices et de sous-espaces que nous avons considérés au chapitre III apparaissent au fil des exemples donnés, mais les questions de traitement et de conversion sont supposées comme allant de soi, elles ne donnent lieu à aucun commentaire.

Les exercices proposés aux étudiants ne mettent pas plus en jeu cette articulation : trois des tâches de la liste seulement sont représentées, deux seulement nécessitent de l'articulation, toujours dans le sens cartésien / paramétrique, comme dans les exemples du cours.

E) ANALYSE DE L'OUVRAGE D'INTRODUCTION A L'ALGEBRE LINEAIRE DE G. STRANG

L'organigramme page 196 présente l'organisation de l'ouvrage de Strang.

Commentaires et analyse :

L'auteur débute par un chapitre où il étudie, via les vecteurs du plan et de l'espace et leurs opérations, les propriétés affines de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$. Ensuite il interprète géométriquement un système de 3 équations à 3 inconnues, d'une part en lui associant trois plans et leur intersection (" row picture "), d'autre part en le lisant comme une égalité vectorielle entre vecteurs colonnes (" column picture ") :

"Start with a system of three equations in three unknows. Let the unkonws be x, y, z, and let the linear equations be

$$x + 2y + 3z = 6$$
$$2x + 5y + 2z = 4$$
$$6x - 3y + z = 2.$$

We look for numbers x, y, z that solve all three equations at once. [...]

R The row picture shows three planes meeting at a single point. [...]

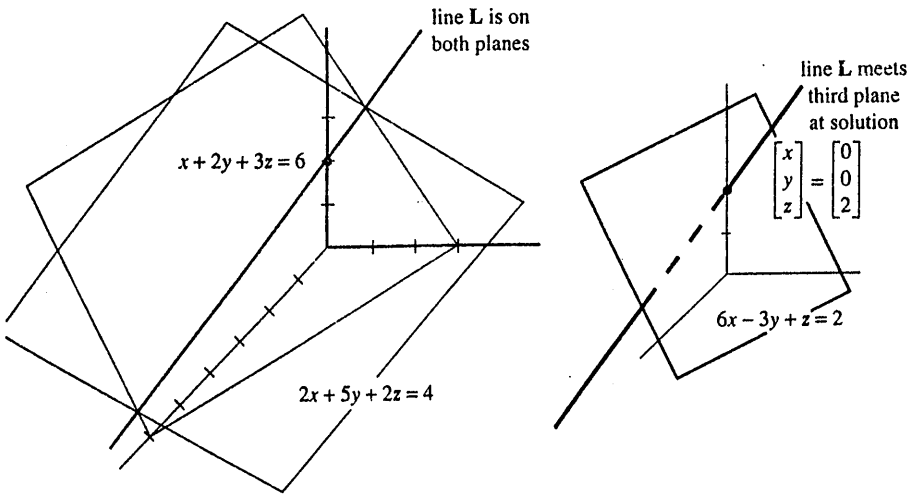


Figure 1.11 Row picture of three equations: Three planes meet at a point.

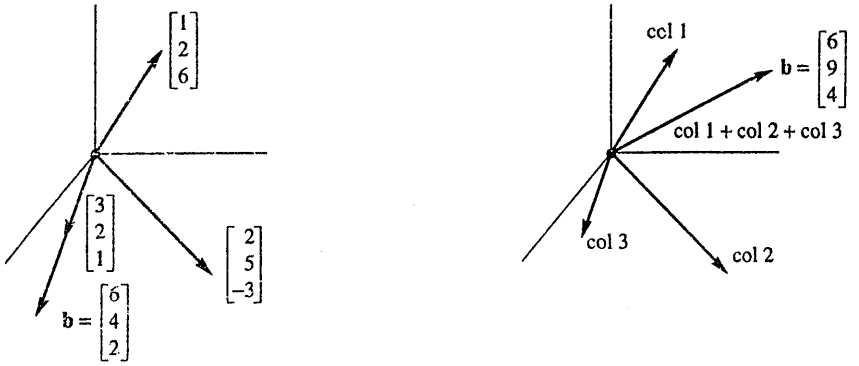


Figure 1.12 Column picture of three equations: Combinations of columns are $\mathbf{b} = 2\times$ column 3 so $(x, y, z) = (0, 0, 2)$; $\mathbf{b}$ = sum of columns so $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

C The column picture combines the columns on the left side to produce the right side. [...] The numbers x, y, z multiply the columns to give b." [Strang, p.28 et 29]

Il donne également une interprétation matricielle du système linéaire.

Il introduit ensuite la méthode de Gauss pour résoudre les systèmes linéaires et l'illustre par des exemples simples qu'il peut interpréter graphiquement en référence aux deux visions ligne et colonne qu'il vient d'introduire :

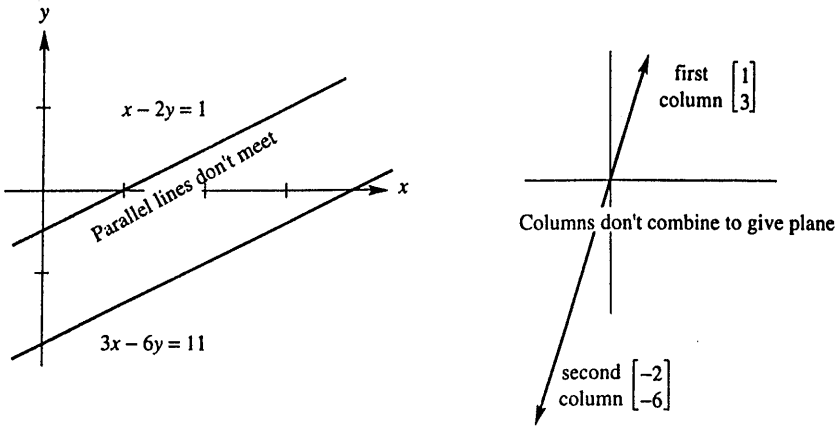


Figure 2.2 Row picture and column picture when elimination fails.

Il développe, dans ce même chapitre, le cadre matriciel (définitions, opérations, propriétés) et utilise dans ce cadre la méthode de Gauss pour échelonner les matrices et étudier les propriétés des matrices triangulaires. Comme il l'a souligné dans l'introduction, dès que possible, toute nouvelle notion est appliquée au cadre matriciel.

Dans le chapitre suivant, il introduit l'algèbre linéaire dans $\mathbf{R}^n$ et fait implicitement l'articulation entre les cadres des systèmes linéaires et des matrices et celui de l'algèbre linéaire via les notions d'espace colonne et d'espace nul[3] d'une matrice. Les exemples traités mettent en jeu, implicitement, une technique de passage entre représentation cartésienne et représentation paramétrique, même si l'auteur n'utilise pas ces termes. La situation est ensuite synthétisée dans le discours suivant, d'ordre technologique, qui explique l'intérêt de la réduction échelonnée et la façon d'utiliser cette technique pour déterminer l'espace nul d'une matrice.

"Summary of the situation

From Ax = 0 : We can't see how many special solutions[4] there are.

We can't see the actual numbers in the special solutions

If m < n, there is at least one free variable and one special solution. The matrix has more columns than rows. There are non zero vectors in its nullspace. If m ≥ n we cannot determine from looking at Ax = 0 whether x = 0 is the only solution.

From Ux = 0 : We can see how many special solutions there are

We can't see the actual numbers in the special solutions.

[3] L'espace colonne associé à la matrice A est l'espace des " sorties ", soit les vecteurs colonnes Au ; l'espace nul est l'espace des entrées qui conduisent à un vecteur nul, soit les vecteurs u tels que Au=0

[4] "special solutions" : c'est une base du sous-espace nul obtenue à partir de la réduction échelonnée de la matrice..

The number of special solutions is the number of free variables. This is the total number of variables (n) minus the number of pivots (r). Then n - r free variables have columns without pivots. To find the n - r special solutions, do back substitutions in $Ux = 0$ after assigning the value 1 to a free variable.

From $Rx = 0$: We can see how many special solutions there are

We can see the actual numbers in the special solutions.

In the reduced echelon matrix R, every pivot equals 1 with zeros above and below. If it happens that these r pivot columns come first, the reduced form looks like

$$R = \begin{matrix} \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix} \\ r \quad n-r & \end{matrix}$$

The pivot part is the identity matrix. The free part F can contain any numbers. They come from elimination on A downward to U and upward to R. When A is invertible, F is empty and R = I.

The special solutions to $Rx = 0$ (also to $Ux = 0$ and $Ax = 0$) can be found directly from R. These n - r solutions go into the columns of a nullspace matrix N. Notice how these block matrices give $RN = 0$:

$$N = \begin{matrix} \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} & \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \\ n-r & \end{matrix}$$

Example $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$.

A has r = 2 pivots and n - r = 3 - 2 free variables. The special solution has free variable $x_3 = -1$ and $x_1 = 1$:

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

The code null constructs N from R. The two parts of N are -F and I as above, but the pivot variables may be mixed in with the free variables so I may not come last." [Strang, p.120 et 121]

L'auteur développe ensuite le même type de travail pour le cas $Ax = b$.

Il avance ensuite, tout en se situant dans $\mathbf{R}^n$, dans l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique à un niveau plus théorique, en introduisant les notions de rang d'une matrice et d'espace ligne d'une matrice, ce qui lui permet de démontrer que le rang des vecteurs ligne est égal au rang des vecteurs colonne.

En s'appuyant sur cette notion de rang, il relie les dimensions des espaces ligne, colonne, espace nul et espace nul à gauche, ceci fournit une base théorique à l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique et met en rapport, pour des sous-espaces de $\mathbf{R}^n$, nombre d'équations et nombre de paramètres. Par contre, aucune technique de passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne n'apparaît explicitement dans ce cours.

Dans le chapitre suivant, l'auteur articule les notions d'espace ligne[5] et de sous-espace nul et aussi d'espace colonne et de sous-espace nul à gauche[6] via la notion d'orthogonalité entre vecteurs (définie via le produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$). Il aborde également dans ce chapitre sur l'orthogonalité, les projections, les bases orthogonales et le processus de Gram-Schmidt. Il donne aussi le schéma suivant qui prend en compte l'articulation introduite :

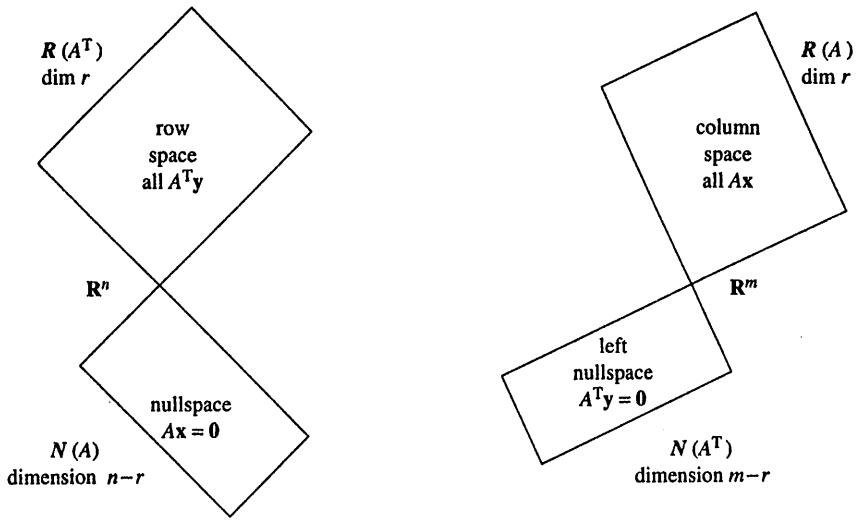


Figure 3.5 The dimensions of the four fundamental subspaces (for U and for A).

Le cadre des déterminants est introduit à travers la notion de déterminant d'une matrice carrée et suivi d'applications aux systèmes de Cramer, au calcul de l'inverse d'une matrice et aux calculs d'aires et de volumes.

Après un chapitre sur les valeurs propres et les vecteurs propres, l'auteur revient au cadre de l'algèbre linéaire et introduit la notion d'application linéaire en prenant en charge l'articulation entre noyau/ sous-espace nul et image/espace colonne :

> "**Note** Transformations have a language of their own. Where there is no matrix, we can't talk about a column space. But the idea can be rescued and used. The column space consisted of all outputs Av. The nullspace consisted of all inputs for which Av = 0. Translate those into "range" and "kernel" :
>
> **Range of T = set of all outputs T(v) : corresponds to column space**
>
> **Kernel of T = set of all inputs for which T(v) = 0 : corresponds to nullspace.**

[5] L'espace ligne associé à la matrice A est le sous-espace engendré par les lignes de cette matrice.

[6] Le sous-espace nul à gauche est l'espace des entrées qui conduisent à un vecteur nul, soit les vecteurs y tels que ${}^tAy = 0$.

The range is a subspace of the output W. The kernel is a subspace of the input space V. When T is multiplication by a matrix, T(v) = Av, you can translate back to column space and nullspace. We won't always say range and kernel when these other words are available. " [ibid, p.305]

Dans cet ouvrage l'algèbre linéaire se construit dans $\mathbf{R}^n$ et le cadre des matrices joue un rôle central. Ceci conduit l'auteur à introduire des notions spécifiques à ce cadre que nous n'avons pas rencontrées dans les autres ouvrages. L'articulation entre cadres s'effectue à des niveaux plus théoriques et technologiques que purement techniques. Elle fait appel à des notions spécifiques au cadre de matrices comme celles d'espace colonne, sous-espace nul, espace ligne, sous-espace nul à gauche. La technique de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique est mise en place implicitement via la méthode de Gauss, c'est-à-dire dans le cadre des systèmes linéaires. Par contre, il n'y a aucune considération sur le passage dans l'autre sens.

Par rapport aux différents registres de représentation des vecteurs que nous avons introduits dans le chapitre III, nous ne trouvons que les représentations de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et $M_{mxn}(R)$ et les représentations paramétriques de sous-espaces associées. Par contre, même si l'auteur considère l'association équation/vecteur, il ne caractérise pratiquement jamais le sous-espace sous forme cartésienne.

En ce qui concerne les tâches proposées aux étudiants, conformément à l'analyse qui précède le tableau du paragraphe V montre la quasi inexistence de tâches habituelles mettant en jeu l'articulation de deux points de vue. Les tâches considérées prennent en compte plutôt les propriétés des matrices et le rôle d'outil d'interprétation et de calcul du cadre matriciel pour le travail dans les autres cadres, ce qui est cohérent avec les objectifs proposés par l'auteur dans l'introduction.

F) ANALYSE DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE ARNAUDIES ET AL.

L'organigramme du cours de Arnaudies/Fraysse figure à la page 197.

Commentaires et analyse :

Il s'agit d'un cours complet d'algèbre où les cadres que nous avons considérés dans le chapitre II sont introduits dans les chapitres VI, IX, XI, XII, XIII et XIV.

Les auteurs introduisent classiquement les notions et théorèmes de l'algèbre linéaire aux chapitres VI, IX et XII, cette introduction est purement théorique, sans aucune considération explicite sur l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique pour la représentation des sous-espaces vectoriels.

Dans le cadre des matrices, au chapitre XI, là encore à un niveau théorique, caractéristique de l'ensemble de l'ouvrage, les auteurs utilisent implicitement l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique en démontrant que le rang des vecteurs ligne = rang de vecteurs colonne et que deux matrices sont équivalentes si elles ont le même rang.

Ils reviennent ensuite au cadre de l'algèbre linéaire, introduisant la notion de dualité et démontrant les théorèmes et propriétés associées, dans le cas des espaces généraux avant de revenir à la dimension fine. Bien sûr, les résultats obtenus mettent en jeu, même si ceci n'est pas explicité, l'articulation des deux points de vue comme nous l'avons montré dans le chapitre II.

Conformément aux caractéristiques générales de l'ouvrage, le cadre des déterminants est introduit à un niveau théorique et les auteurs démontrent à ce propos la relation detA = det ${}^tA$ qui est, elle aussi, un outil de l'articulation restant implicite dans cet ouvrage. La notion de déterminant est présentée comme un outil au service du travail technique, mais les exercices proposés sont essentiellement d'ordre théorique.

Dans le chapitre XIV, les auteurs articulent le cadre de la géométrie affine et celui de l'algèbre linéaire. Cette articulation, effectuée d'abord sur le plan théorique, contient une articulation explicite des points de vue cartésien et paramétrique; même si ces termes ne sont pas employés. Soulignons que l'on trouve aussi dans ce chapitre des exemples simples traités où l'on reste dans le détail du travail technique. Citons-en deux exemples.

Celui de l'inversion de matrice où la technique des déterminants est comparée à celle de la résolution directe d'un système, la comparaison se situant ici au niveau technologique.

"Le corps de base est **C**. Montrer que la matrice $M \in M_3(\mathbf{C})$ ci-après est inversible, et calculer son inverse

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bien sûr, dans un cas aussi simple, il n'est pas interdit de calculer det(M) = 1 et d'appliquer la formule $M^{-1} = (\det(M))^{-1}\,\tilde{M}$, mais procédons comme il est dit dans la remarque 1 : pour un second membre arbitraire (y_1, y_2, y_3) considérons le système linéaire associé à M, aux inconnues (x_1, x_2, x_3) :

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 - 2x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Des deux premières équations on déduit $y_2 - 2y_1 = x_3$ (c'est exactement ce que l'on obtient en tirant x_1 de la première équation et en substituant l'expression obtenue dans la seconde !), puis de la troisième on tire

$$x_1 = 2x_3 + y_3 = -4y_1 + 2y_2 + y_3,$$

et enfin de la première

$$x_2 = y_1 - x_1 = 5y_1 - 2y_2 - y_3.$$

Par suite le système (5) a toujours au plus la solution

$$\begin{cases} x_1 = -4y_1 + 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 5y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_3 = -2y_1 + y_2 \end{cases}.$$

Donc d'après le théorème XIV.2.2[7] il est de Cramer (observation importante : il est donc inutile de vérifier que le triplet obtenu est vraiment solution !) et les formules trouvées pour x_1, x_2, x_3 fournissent la matrice inverse recherchée :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La réponse serait quasiment la même si, au lieu de considérer M comme une matrice à coefficients dans **C**, on avait supposé par exemple

$M \in M_3(\mathbf{Z} / p\mathbf{Z})$ ($p \in N^*$, p premier). [Arnaudiès et al., p.572]

Le second concerne l'étude d'un système à paramètres, considéré comme prototype où les auteurs montrent comment utiliser le travail avec les déterminants pour isoler les cas particuliers, résoudre dans le cas de système de Cramer, déterminer le rang pour les valeurs particulières et les conditions de résolubilité.

"Le corps de base est C, a est un paramètre dans C. Etudier le système linéaire aux inconnues (x, y, z) :

(SL)
$$\begin{cases} 2(a-1)x + 2y - z = 2(a-1) \\ 2x + 2ay + 2z = 4a^2 + 3 \\ 4ax + 2(2a+1)y + (2a+1)z = 16a^3 - 2a^2 - a + 5 \end{cases}$$

Solution : Il s'agit d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues avec second membre. Son déterminant est

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} 2(a-1) & 2 & -1 \\ 2 & 2a & 2 \\ 4a & 2(2a+1) & 2a+1 \end{vmatrix} = \det(M(a)).$$

On commence par calculer ce déterminant, et l'on trouve sans peine $\Delta(a) = 4a(a - 1)(2a - 1)$.

On est donc conduit à considérer l'ensemble $E = \{0, 1, 1/2\}$.

Si $a \notin E$, les formules de Cramer donnent $x = A/\Delta(a)$, $y = B/\Delta(a)$, $z = C/\Delta(a)$ avec

$$A = \begin{vmatrix} 2(a+1) & 2 & -1 \\ 4a^2+3 & 2a & 2 \\ 16a^3 - 2a^2 - a + 5 & 2(2a+1) & (2a+1) \end{vmatrix} = 2a(a-1)(16a^2 + 34a + 19)$$

$$B = \begin{vmatrix} 2(a-1) & 2(a+1) & -1 \\ 2 & 4a^2+3 & 2 \\ 4a & 16a^3 - 2a^2 - a + 5 & 2a+1 \end{vmatrix} = 12a(a-1)(1-2a)(1+2a)$$

$$C = \begin{vmatrix} 2(a-1) & 2 & 2(a+1) \\ 2 & 2a & 4a^2+3 \\ 4a & 2(2a+1) & 16a^3 - 2a^2 - a + 5 \end{vmatrix} = 4a(a-1)(16a^3 - 10a^2 - 17a - 11)$$

d'où

[7] Théorème de Rouché pour le cas d'un système de Cramer.

$$x = \frac{16a^2 + 34a + 19}{2(2a-1)}, \quad y = -3(2a+1), \quad z = \frac{16a^3 - 10a^2 - 17a - 11}{2a-1}.$$

Il reste à étudier les cas particuliers.

Si a = 0, M(a) = $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice de rang 2.

Les lignes de M(a) vérifient $L_3 = L_1 + L_2$ et le second membre ($b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 5$) vérifie b3 = b1 + b2, donc (théorème XIV.3.5) le système est compatible. Ses solutions s'obtiennent en prenant x et y pour inconnues principales, d'où :

x = 3/2 - λ, y = 5/2 - λ/2 , z = λ, avec λ arbitraire.

Si a = 1, M(a) = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ est encore de rang 2.

Les lignes de M(a) vérifient $L_3 = L_1 + 2L_2$, et le second membre ($b_1 = 4$, $b_2 = 7$, $b_3 = 18$) est tel que $b_3 = b_1 + 2b_2$. Donc, à nouveau, le système est compatible, et ses solutions s'obtiennent en prenant encore x et y pour inconnues principales, d'où :

x = 3/2 - 3λ, y = 2 + λ/2, z = λ, avec λ arbitraire.

Si a = 1/2, M(a) = $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ est encore de rang 2.

Les lignes de M(a) vérifient $5L_3 = 6L_1 + 8L_2$, mais le second membre ($b_1 = 3$, $b_2 = 4$, $b_3 = 6$) est tel que $5b_3 \neq 6b_1 + 8b_2$, donc le système est incompatible.

Remarquons que dans les deux cas particuliers où le système reste compatible, les formules du cas a $\notin$ E en donnent une solution particulière (celle qui correspond à λ = 11 si a = 0, celle qui correspond à λ = 22 si a = 1) tandis que pour a = 1/2 les formules du cas a $\notin$ E n'ont plus de sens." [ibid, p.583 à 585]

Les différents cadres que nous avons mis en évidence au chapitre II apparaissent donc dans ce manuel et sont introduits d'une façon autonome, mais l'articulation entre ces cadres est manifeste tout en se situant essentiellement à un niveau théorique. Le cadre de la géométrie affine introduit avec celui des systèmes linéaires, permet aux auteurs de prendre en compte explicitement l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique. Mais il n'existe pas, même pour ce chapitre, de partie du cours qui traite les questions de passage technique d'une forme de représentation à une autre.

En ce qui concerne les différents registres de représentation que nous avons introduits dans le chapitre III, nous pouvons souligner que le registre de représentation symbolique intrinsèque des vecteurs est celui qui est privilégié dans l'ouvrage. Ceci est, vu l'ambition théorique de l'ouvrage en accord avec l'analyse de Pavlopoulou qui a montré que ce registre est le plus adapté lorsqu'il s'agit de donner des définitions et énoncer et démontrer des théorèmes. Les représentations symboliques intrinsèques sont aussi très fortement privilégiées pour les sous-espaces.

Par rapport aux tâches proposées aux étudiants il s'agit, en général, de tâches d'un niveau plutôt théorique mettant en jeu la preuve de propriétés générales. Elles ne concernent pas directement l'articulation de points de vue étudiée.

G) ANALYSE DE L'OUVRAGE D'ALGEBRE LINEAIRE DE CALVO ET AL.

L'organigramme page 198 décrit l'organisation de cet ouvrage.

Commentaires et analyse :

Il s'agit d'un cours de haut niveau, comme celui d'Arnaudiès, où tous les théorèmes sont démontrés soigneusement, mais il est limité cette fois à l'algèbre linéaire. Définitions et théorèmes sont rarement illustrés d'exemples, brièvement présentés.

A chacun des chapitres de l'ouvrage, correspond, comme le montre l'organigramme un des cadres que nous avons identifiés (tous sont présents sauf le cadre géométrique).

Les auteurs débutent par le cadre de l'algèbre linéaire. La présentation est axiomatique et classique. Ils passent ensuite au cadre des matrices, traité de façon théorique, y compris au niveau des quelques exemples présentés.

Le cadre des systèmes linéaires est introduit en mettant tout de suite l'accent sur les conditions de compatibilité d'un système et sur les différentes interprétations possibles : matricielle, vectorielle et fonctionnelle, reliant aussi ce cadre aux deux cadres déjà introduits. C'est via cette articulation que les auteurs énoncent et démontrent alors le théorème de Rouché.

Après cette mise en place purement théorique, les auteurs présentent la méthode de Gauss en tant que méthode de résolution des systèmes linéaires et en donnent des exemples d'applications au calcul de l'inverse d'une matrice, à la résolution et la discussion d'un système linéaire, à la détermination du noyau et de l'image d'une application linéaire, à la caractérisation du sous-espace engendré par une famille de vecteurs, ce qui leur permet d'articuler explicitement les différents cadres à un niveau plus technique. Ils relient aussi à travers un discours de type technologique la technique de Gauss aux notions développées précédemment, prenant en compte ainsi explicitement l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique, même s'ils n'utilisent pas ces termes, comme le montrent bien les exemples suivants :

"4.3.1. Exemple. On prend K = **R**. On se propose de discuter et de résoudre le système (S) à 4 équations et 5 inconnues ci-dessous, où $\beta_1, \ldots, \beta_4$ sont des nombres réels.

$$(S)\quad \begin{cases} \xi_2+\xi_3+2\xi_4+6\xi_5=\beta_1 \\ \xi_1+2\xi_2+2\xi_3+3\xi_4+10\xi_5=\beta_2 \\ 2\xi_1+\xi_2+2\xi_3+\xi_4+5\xi_5=\beta_3 \\ 2\xi_1+3\xi_2+\xi_3+2\xi_4+8\xi_5=\beta_4 \end{cases}$$

On commence par permuter les deux premières équations, puis on retranche deux fois la première équation de la troisième et de la quatrième. On trouve

$$(S_1)\quad \begin{cases} \xi_1+2\xi_2+2\xi_3+3\xi_4+10\xi_5=\beta_2 \\ \xi_2+\xi_3+2\xi_4+6\xi_5=\beta_1 \\ -3\xi_2-2\xi_3-5\xi_4-15\xi_5=-2\beta_2+\beta_3 \\ -\xi_2-3\xi_3-4\xi_4-12\xi_5=-2\beta_2+\beta_4 \end{cases}$$

On ajoute maintenant à la troisième équation 3 fois la seconde et à la quatrième la seconde :

$$(S_2)\quad \begin{cases} \xi_1+2\xi_2+2\xi_3+3\xi_4+10\xi_5=\beta_2 \\ \xi_2+\xi_3+2\xi_4+6\xi_5=\beta_1 \\ \xi_3+\xi_4+3\xi_5=3\beta_1-2\beta_2+\beta_3 \\ -2\xi_3-2\xi_4-6\xi_5=\beta_1-2\beta_2+\beta_4 \end{cases}$$

En ajoutant la troisième multipliée par 2 à la quatrième, on trouve

$$(S_3)\quad \begin{cases} \xi_1+2\xi_2+2\xi_3+3\xi_4+10\xi_5=\beta_2 \\ \xi_2+\xi_3+2\xi_4+6\xi_5=\beta_1 \\ \xi_3+\xi_4+3\xi_5=3\beta_1-2\beta_2+\beta_3 \\ 0=7\beta_1-6\beta_2+2\beta_3+\beta_4 \end{cases}$$

Enfin, en retranchant 2 fois la deuxième équation de la première et la troisième de la deuxième, on obtient

$$(S_4)\quad \begin{cases} \xi_1-\xi_4-2\xi_5=-2\beta_1+\beta_2 \\ \xi_2+\xi_4+3\xi_5=-2\beta_1+2\beta_2-\beta_3 \\ \xi_3+\xi_4+3\xi_5=3\beta_1-2\beta_2+\beta_3 \\ 0=7\beta_1-6\beta_2+2\beta_3+\beta_4 \end{cases}$$

Le système (S) est donc de rang 3. Il est compatible si et seulement si $7\beta_1-6\beta_2+2\beta_3+\beta_4=0$. Lorsque c'est le cas, ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont des inconnues principales, il y a une indétermination d'ordre 2 et l'on trouve pour

$\mathsf{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

$$E_{\mathsf{b}}=\left\{\begin{pmatrix} -2\beta_1+\beta_2+\xi_4+2\xi_5 \\ -2\beta_1+2\beta_2-\beta_3-\xi_4-3\xi_5 \\ 3\beta_1-2\beta_2+\beta_3-\xi_4-3\xi_5 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} \middle|\ (\xi_4,\xi_5)\in R^2\right\}.$$

4.4.4. Exemple. Prenons K = **R** et soit u : $\mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Si b $\in \mathbf{R}^4$, le système (S) correspondant à l'équation fonctionnelle u(x) = b a été traité dans l'exemple 4.3.1. On y a vu rg u = 3. S on prend b = 0, on trouve

$$\text{Ker u} = E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_4 + 2\xi_5 \\ -\xi_4 - 3\xi_5 \\ -\xi_4 - 3\xi_5 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} \middle| \; (\xi_4, \xi_5) \in R^2 \right\}.$$

Si on pose x_1 = (1, -1, -1, 1, 0) et x_2 = (2, -3, -3, 0, 1) il est clair que ker u = [x_1 , x_2] et que (x_1, x_2) est une base de Ker u.

Par ailleurs, on a b $\in$ Imu si et seulement si le système (S) est compatible et on a vu que ceci équivaut à

$$7\beta_1 - 6\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 = 0.$$

Comme ξ_1, ξ_2 et ξ_3 sont des inconnues principales, les trois premiers vecteurs colonnes de la matrice A sont linéairement indépendants et forment une base de Im u. L'équation qui caractérise Im u permet de choisir d'autres bases de Im u que (c_1, c_2, c_3). Ainsi, en posant par exemple, b_1 = (1, 0, 0, -7), b_2 = (0, 1, 0, 6) et b_3 = (0, 0, 1, -2), la famille (b_1, b_2, b_3) est une base de Im u.

4.4.5. Exemple. Sous-espace engendré par une famille de vecteurs. Soient c_1, ..., c_n des éléments de K^m et soit E' = [c_1,..., c_n]. Un élément b de K^m appartient à E' si et seulement si l'équation vectorielle $\xi_1 c_1 + \ldots + \xi_n c_n = b$ admet des solutions. Le système (S) qui correspond à cette équation vectorielle est de rang dim E' et il est compatible si et seulement si b $\in$ E'. La résolution de ce système décrit donc l'espace E'.

Dans le cas où m = n = dim E', la famille (c_1, ..., c_n) est une base de K^n, le système (S) est de Cramer et son unique solution fournit les coordonnées de b sur la base (c_1, ..., c_n).

4.4.6. Exemple. Dans $\mathbf{R}^4$ soit E' le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs c_1 = (1, 1, 2, 7), c_2 = (3, 2, 3, 14), c_3 = (-1, 1, 0, -1) et c_4 = (0, 4, -1, 2). Considérons, pour b = $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbf{R}^4$, le système suivant :

$$(S) \begin{cases} \xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = \beta_1 \\ \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + 4\xi_4 = \beta_2 \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 - \xi_4 = \beta_3 \\ 7\xi_1 + 14\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 = \beta_4 \end{cases}$$

En utilisant la méthode décrite dans le paragraphe 4.3[8], on obtient successivement les systèmes suivants :

[8] méthode de Gauss

$$(S_1)\begin{cases} \xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = \beta_1 \\ -\xi_2 + 2\xi_3 + 4\xi_4 = -\beta_1 + \beta_2 \\ -3\xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4 = -2\beta_1 + \beta_3 \\ -7\xi_2 + 6\xi_3 + 2\xi_4 = -7\beta_1 + \beta_4 \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} \xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = \beta_1 \\ \xi_2 - 2\xi_3 - 4\xi_4 = \beta_1 - \beta_2 \\ -4\xi_3 - 13\xi_4 = \beta_1 - 3\beta_2 + \beta_3 \\ -8\xi_3 - 26\xi_4 = -7\beta_2 + \beta_4 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} \xi_1 + 3\xi_2 - \xi_3 = \beta_1 \\ \xi_2 - 2\xi_3 - 4\xi_4 = \beta_1 - \beta_2 \\ 4\xi_3 + 13\xi_4 = -\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 \\ 0 = -2\beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 + \beta_4 \end{cases}$$

Le système (S_3) montre que la famille (c_1, c_2, c_3) est libre ; c'est une base de E' qui est donc de dimension 3. De plus, on a

$$E' = \left\{\left((\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) \in R^4 / -2\beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 + \beta_4 = 0\right)\right\}$$

En prenant b = 0, en donnant à ξ_4 une valeur arbitraire non nulle et en finissant la résolution du système (S3), on trouve une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls des vecteurs proposés. Par exemple, pour $\xi_4 = 4$, on trouve $\xi_3 = -13$, $\xi_2 = -10$ et $\xi_1 = 17$. On a donc

$17c_1 - 10c_2 - 13c_3 + 4c_4 = 0$." [Calvo et al., p.70 à 74]

Après l'étude des systèmes linéaires, les auteurs reviennent au cadre de l'algèbre linéaire où l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique est reprise à un niveau théorique via la notion de dualité. Dans ce chapitre l'articulation avec les autres cadres ne met plus en jeu le niveau technique.

Le cadre des déterminants est ensuite introduit via la notion d'application multilinéaire alternée là encore de façon théorique. Les auteurs considèrent aussi le déterminant d'une matrice carrée, ce qui leur permet d'avancer dans l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique en démontrant que $\det A = \det {}^tA$. Les exemples fournissent diverses applications au niveau du calcul : étude du rang d'une matrice dont les coefficients dépendent de paramètres, résolution de systèmes de Cramer, étude de systèmes avec paramètres.

Cet ouvrage est un ouvrage théorique qui ne contient qu'un petit nombre d'exemples permettant de faire le lien entre la dimension théorique et la dimension technique. Mais ces exemples sont très bien exploités. Ils sont en particulier l'occasion de développer un discours technologique intermédiaire entre les deux niveaux précédents. Les auteurs soulignent par ailleurs dans l'avant propos que les cadres des matrices, des systèmes linéaires et des déterminants sont selon eux les parties les plus techniques du programme de première année d'algèbre linéaire et que ces

techniques ne peuvent s'acquérir que par la pratique de très nombreux exercices. Ce n'est pas visiblement le but de cet ouvrage synthétique de développer ce type de travail.

L'articulation entre les différents cadres est tout à fait explicite, l'articulation entre les points de vue paramétrique et cartésien, est explicite mais gérée d'abord au niveau théorique, puis prise en charge, plus techniquement, sur quelques exemples. Il n'y a pas d'exercices proposés donc l'ouvrage n'est pas répertorié dans le tableau du paragraphe V.

En ce qui concerne les différents registres de représentation de sous-espaces et vecteurs que nous avons introduits dans le chapitre III, comme dans l'ouvrage d'Arnaudiès il y a prédominance des représentations symboliques intrinsèques, dans le cours proprement dit, les représentations cartésienne et paramétrique et le registre du tableau apparaissent dans les exemples. Ce qui est cohérent, puisque dans les exemples donnés les auteurs ne considèrent que de sous-espaces de $\mathbf{R}^n$.

H) ANALYSE DE L'OUVRAGE DE LIRET/ZISMAN

L'organigramme de la page 199 présente l'organisation du cours de Liret/Zisman par rapport aux questions que nous avons considérées.

Commentaires et analyse :

Le cours consiste en une série des leçons courtes, comportant un module " cours " pouvant comporter des exemples et exercices, et un module " exercices " où les auteurs proposent des exercices de difficultés croissantes. Ce sont ces modules d'exercices que nous avons considérés comme partie à la charge des étudiants, même si le but de l'ouvrage est que l'étudiant puisse travailler sur l'ensemble des modules tout seul.

Les auteurs débutent par une introduction classique accompagnée d'exemples usuels du cadre de l'algèbre linéaire.

Les représentations paramétriques et cartésiennes de sous-espaces n'apparaissent dans aucun de ces exemples ils ne donnent pas lieu dans le cours à des considérations sur les techniques de passage d'une représentation à une autre. Ces représentations sont présentées dans les exercices proposés, mais aucune tâche de conversion n'est présente.

Après cette introduction du cadre de l'algèbre linéaire, les auteurs étudient les espaces de polynômes, les équations différentielles, les séries, les intégrales sur des intervalles non compacts, les fonctions à valeurs vectorielles, l'étude locale des courbes paramétrées.

Ensuite, ils reviennent au cadre de l'algèbre linéaire et toujours dans une approche classique, introduisent la notion de dimension, démontrent les théorèmes classiques (voir organigramme) en dimension finie, donnent la définition du rang d'une application linéaire et ses propriétés. A partir

des notions de forme linéaire et de rang d'une forme linéaire, les auteurs démontrent alors les propriétés des hyperplans, ce qui met en jeu une certaine forme d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique.

Dans le cadre des matrices, les auteurs considèrent d'abord la matrice d'une application linéaire dans des bases données et utilisent les applications linéaires pour définir les opérations sur les matrices et démontrer leurs propriétés. Le cadre de l'algèbre linéaire est donc ici employé comme un outil de démonstration pour le cadre matriciel. Les propriétés du rang d'une matrice et d'un système de vecteurs seront elles aussi démontrées à partir de la notion de rang d'une application linéaire via l'isomorphisme entre matrices et applications. Les auteurs avancent dans l'articulation en démontrant que rang A = rang ${}^{t}A$ où A est une matrice mxn. Là encore, ils s'appuient sur les applications linéaires pour la démonstration.

Ils passent ensuite au cadre des systèmes linéaires et définissent le rang d'un système d'équations linéaires via la notion de rang d'une matrice. A partir de là, ils énoncent et démontrent le théorème de Rouché.

L'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique se montre explicite tant au niveau théorique qu'au niveau technique et elle est toujours relayée par un discours technologique, comme le montre l'extrait suivant :

> "Pour discuter la résolution des systèmes d'équations, nous les classerons en plusieurs types suivant le rang, le nombre d'inconnues et le nombre d'équations : ces trois paramètres sont les entiers r, n, p, en appelant r le rang du système. [...]
>
> Le cas $0 < r < p$ et n quelconque
>
> Cette fois, le sous-espace de K^p engendré par $A_1, ..., A_n$ n'est pas K^p tout entier puisque nous avons $r < p$: c'est un sous-espace E, de dimension r.
>
> Pour tout $x_1, ..., x_n$, le vecteur $x_1A_1 +...+x_nA_n$ appartient à E, donc le système d'équations $x_1A_1+...+x_nA_n = B$ n'aura de solution que si $B \in E$.
>
> Ainsi de deux choses l'une :
>
> ou bien $B \notin E$, et le système n'a pas de solution,
>
> ou bien $B \in E$, et comme tout à l'heure les solutions sont obtenues en cherchant les coordonnées du vecteur
>
> $B - (x_{r+1}A_{r+1} +...+x_nA_n)$ dans la base $A_1, ...,A_r$ de E, si du moins c'est ainsi que nous avons numéroté les vecteurs de cette base. Remarquez qu'ici il est possible d'avoir r = n, auquel cas ce sont simplement les coordonnées du vecteur B qu'il faut chercher, puisque dans l'expression précédente le terme entre parenthèses n'existe pas.
>
> REMARQUE IMPORTANTE 1. - Lorsque B = 0, nous aurons toujours $B \in E$: le système aura donc des solutions dans ce cas. Et puisque dans les deux cas précédents nous avions toujours trouvé des solutions pour le système, nous pouvons affirmer :
>
> Lorsque B = 0, un système a toujours au moins une solution.
>
> Cela vous semble évident? Vous avez raison !

Les vecteurs x solutions de l'équation AX = 0 sont en effet ceux du noyau de l'application linéaire $K^n \rightarrow K^p$ dont la matrice est A : ce noyau contient au moins le vecteur 0, il n'est pas vide !

Lorsque B = 0, on dit que le système est homogène.

Les solutions d'un système homogène forment un espace vectoriel.

REMARQUE 2. - Lorsque B ∈ E et r = n, nous trouvons pour unique solution les coordonnées de B dans la base A_1, ..., A_n de E; ce n'est pas étonnant qu'il n'ait qu'une seule solution, puisque l'application $K^n \rightarrow K^p$ précédente est alors de rang n, donc est injective : le vecteur X ∈ K^n solution du système est celui qui a pour image le vecteur B par cette application." [Liret/Zisman, p.309 à 313]

A un niveau technique, les exemples ci-dessous intégrés aux modules de cours mettent en évidence le fonctionnement de l'articulation. Elle est gérée dans l'ouvrage dans les deux sens et accompagnée d'un discours technologique qui rend claire l'existence d'une articulation entre les objets du cadre de l'algèbre linéaire et ceux du cadre des systèmes linéaires.

- Exemple de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique (ne se situe pas dans le cadre de systèmes linéaires, mais prend en charge son articulation avec le cadre de l'algèbre linéaire) :

"Résoudre dans **R** le système $\begin{cases} 2x \quad +z-t=1 \\ -x+y+z+6t=0 \\ 5x-3y+z-2t=-1 \end{cases}$

Solution : Déterminons le rang du système; en appelant A, B, C et D les vecteurs- colonne, il vient :

A	B	C	D
2	0	1	-1
-1	1	1	6
5	-3	1	-2

B'	C'	D'
0	0	0
1	3	11
-3	-3	1

B' = B C' = 2C - A D' = 2D + A

C''	D''
0	0
0	0
6	34

C'' = C' -3B' D'' = D' - 11B'

3D'' - 17C'' = 0

Les vecteurs obtenus sont : A, B', C", le rang est 3.

Cherchons maintenant trois vecteurs indépendants parmi A, B, C, D :

Nous avons B' = B

C' = C' - 3B' = (2C - A) - 3B,

d'où les égalités en échelon : $\begin{cases} A = A \\ B' = OA + B \\ C'' = -A - 3B + 2C \end{cases}$

qui montrent que A, B et C sont indépendants (puisque $2 \neq 0$).

Nous écrivons donc le système sous la forme :

$$xA + yB + 2C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - tD,$$

c'est à dire simplement :

$$\begin{cases} 2x \quad\quad + z = 1 + t \\ -x \quad + y + z = -6t \\ 5x \quad - 3y + \ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Pour chaque valeur de t, c'est un système de CRAMER de rang 3, comme dans l'exercice 1; résolvons-le :

Multiplions par 2 la seconde équation et ajoutons à la première : 2y + 3z = 1 - 11t

Multiplions par 5 la seconde équation et ajoutons à la troisième équation; il vient : 2y + 6z = -1 -28t.

En soustrayant, nous obtenons : 3z = -2 - 17t, et en reportant cette valeur, nous trouvons : 2y = 3 + 6t,

puis : 6x = 5 + 20t.

Les solutions du système sont donc tous les quadruplets (x, y, z, t) de la forme :

$$(\frac{1}{6}(5 + 20t), \frac{1}{2}(3 + 6t), -\frac{1}{3}(2 + 17t), t).$$ " [Liret/Zisman, p.310 à 312]

- Exemple de passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne (indirectement en jeu dans la tâche proposée) :

"Résoudre dans **R** le système $\begin{cases} x + 5y = u \\ -x + y = v \\ 3x - 2y = w \end{cases}$

Solution : Les vecteurs $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont indépendants, donc le rang du système est 2; nous sommes dans le cas r = n, et de deux choses l'une :

ou bien le vecteur $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ n'appartient pas au sous-espace E de $\mathbf{R}^3$ engendré par A_1, A_2, et le système n'aura pas de solution,

ou bien : $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E$, et le système aura une solution unique.

Mais la condition $B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E$ est équivalente à $rg\{A_1, A_2, B\} = 2$. Appliquons l'algorithme du rang aux vecteurs A_1, A_2, B :

A_1	A_2	B
+1	5	u
-1	1	v
3	-2	w

$A'_2 = A_2 - 5A_1$ $\quad b' = B - uA_1$

A'_2	B'
0	0
6	v+u
-17	w-3u

$B'' = 6B' - (v + u)\, A'_2$

B"
0
0
-u+17v+6w

Puisque l'on a $rg\{A_1, A_2, B\} \geq rg\{A_1, A_2\} = 2$, on a l'égalité $rg\{A_1, A_2, B\} = 2$ si et seulement si $B'' = 0$.

Ainsi : $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow u - 17v - 6w = 0$.

Reste à trouver la solution du système lorsque cette condition est réalisée; c'est bien facile : des deux premières équations, nous tirons $y = \frac{1}{6}(u + v)$,

puis : $\quad x = \frac{1}{6}(u - 5v)$

c'est nécessairement la solution cherchée.

Vérifions nos calculs, en reportant dans la troisième équation :

$$3x - 2y = \frac{1}{6}(3u - 15v - 2u - 2v) = \frac{1}{6}(u - 17v)$$

et après la condition sur u, v, w nous avons bien :

$$3x - 2y = w$$

l'espace E est un hyperplan de $\mathbf{R}^3$, et la condition u - 17v - 6w = 0 est une équation de E." [Liret/Zisman, p.313 à 315]

Dans le cadre de déterminants, les auteurs considèrent d'abord la notion d'application bilinéaire et généralisent en définissant les applications multilinéaires et les application antisymétriques. Ensuite ils définissent successivement le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2, puis d'ordre 3 avant de passer au cas général Pour finir, les auteurs proposent un module d'utilisation des déterminants où ils démontrent les théorèmes de reconnaissance d'une base, de reconnaissance et résolution d'un système de Cramer, de reconnaissance d'une matrice inversible. L'exemple ci-dessous illustre les caractéristiques de cet ouvrage et le soutien technologique au travail technique qui porte toujours sur des exemples relativement simples.

"Soient X_a, X_b, X_c les vecteurs suivants de $\mathbf{R}^4$

$$X_a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \quad X_b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_c = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont des réels. Pour quelles valeurs de a, b, c ces vecteurs sont-ils indépendants, engendrent-ils un sous-espace de dimension 2 ?

Solution. - On voit facilement, comme dans le premier exercice que X_a et X_b sont toujours indépendants, de même que X_b et X_c ; le sous-espace engendré par X_a, X_b,X_c est donc de dimension ≥ 2. La théorie du rang nous a appris que cette dimension sera égale à 2 si et seulement si aucune matrice 3x3 extraite du tableau

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & b & 0 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est inversible : pour obtenir ces matrices, il suffit de rayer une des quatre lignes de ce tableau; pour exprimer que la matrice obtenue n'est pas inversible nous utiliserons la solution du problème 3[9]. Il vient

[9] reconnaître qu'une matrice est inversible. Théorème : La matrice carrée M est inversible si et seulement si on a Det M ≠ 0.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - ab \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & c \\ 2 & b & 0 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 6b + 2c - abc \neq$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 2a - ac \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & b & 0 \end{vmatrix} = 4 - 2c - 3b.$$

La condition pour que le sous-espace engendré par X_a, X_b, X_c soit de dimension 2 est donc

$$\begin{cases} -2 - ab = 0 \\ -8 + 6b + 2c - abc = 0 \\ 3 + 2a - ac = 0 \\ 4 - 2c - 3b = 0 \end{cases}$$

et la dimension du sous-espace sera 3 si l'une au moins de ces égalités n'est pas vérifiée. Si c = 2 nous avons 3+2a-ac = 3 ≠ 0 et par conséquent la dimension cherchée est 3. Si on a c ≠ 2, on tire a de la troisième équation, b de la quatrième et il vient $ab = \frac{3}{c-2} \cdot \frac{4-2c}{3} = -2$: la première équation est donc automatiquement vérifiée. Remplaçons ab par -2 dans la seconde équation : -8+6b+2c+2c = -2(4-3b-2c) = 0. Finalement le sous-espace engendré par Xa, Xb, Xc est de dimension 2 si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} 3 + 2a - ac = 0 \\ 4 - 2c - 3b = 0 \end{cases}$$

Aussi curieux que cela puisse paraître ce n'est pas par miracle que deux équations sont conséquences des deux autres : au prix d'un effort théorique, que vous ferez l'an prochain, il était possible de prévoir ce résultat et donc de se contenter de calculer deux déterminants au lieu de quatre : un peu de théorie peut remplacer beaucoup de calculs.

REMARQUE. - Comparez cette méthode avec celle donnée dans la 106-ième leçon[10]. Et pour cela résolvez maintenant l'exercice précédent en utilisant l'algorithme défini dans la leçon précitée. La méthode d'algorithme est en général plus rapide que celle qui utilise les déterminants." [ibid, p. 342 à 344]

Cet exemple met bien en évidence l'articulation entre le cadre des matrices, le cadre des déterminants et le cadre des systèmes linéaires, dans une tâche où il s'agit de déterminer des conditions entre les paramètres a, b et c de façon à ce que le rang du système soit égal à 2. Après ces articulations, les auteurs remarquent qu'il existe une façon plus simple de déterminer le rang en se référant à la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en colonnes, c'est-à-dire en se référant à l'articulation entre le cadre de systèmes et celui de l'algèbre linéaire.

[10] Calcul du rang d'un système de vecteurs par l'application de la méthode de Gauss sur un tableau de coordonnées des vecteurs disposés en colonnes.

Après l'introduction du cadre de déterminants, les auteurs présentent un module sur les vecteurs propres et les valeurs propres.

I) ANALYSE DE L'OUVRAGE DE PHAM ET AL.

L'organigramme (p.200) montre la structuration du cours de Pham et al.

Commentaires et analyse :

Les auteurs débutent par un chapitre 0 où ils explicitent, à travers divers exemples, ce qu'ils considèrent comme point de vue du calcul et point de vue de la géométrie dans l'activité mathématique, incluant parmi ces exemples le cas des systèmes linéaires et des vecteurs géométriques. A partir de ces réflexions, ils passent au formalisme en mathématiques en présentant des rudiments de logique élémentaire. Ce chapitre met l'accent sur des caractéristiques de l'activité mathématique qui serviront de fil conducteur à l'ensemble de l'ouvrage.

Ensuite, en restant dans le cadre des systèmes linéaires, les auteurs mettent en place progressivement et de façon très attentive aux détails du travail mathématique, à travers l'étude de nombreux exemples, et de nombreuses questions non classiques, la problématique de la réduction des systèmes linéaires et les techniques correspondantes. Soulignons l'importance des développements qui peuvent aider à situer l'articulation à un niveau technologique et non seulement technique, tout au long de cette partie, qui aboutit finalement à l'énonciation et à la preuve du théorème de Rouché. Nous en avons cité deux exemples dans le dernier type de tâche du chapitre III. Citons en un autre :

> "A partir d'un système de deux équations linéaires ε_1, ε_2, on construit le système de trois équations que voici :
>
> $e_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$
>
> $e_2 = 3\varepsilon_1 + \varepsilon 2$
>
> $e_3 = 7\varepsilon_1 + 8\varepsilon_2$
>
> Ces trois équations sont-elles indépendantes?
>
> Jeu : Construisez un exemple explicite de trois équations linéaires homogènes e_1, e_2, e_3, à 3 inconnues ou davantage, dont vous soyez sûr qu'elles vérifient une relation de dépendance linéaire non triviale. Donnez ces équations à un camarade (sans lui dire comment vous les avez fabriquées), et demandez lui de déterminer une telle relation de dépendance linéaire. Vérifiez ensuite si la relation qu'il a trouvée est équivalente à celle que vous connaissiez d'avance. " [Pham, p.62]

Dans le chapitre suivant, les auteurs abordent le cadre de l'algèbre linéaire. En utilisant l'analogie avec les vecteurs géométriques et les opérations sur ces vecteurs (cf. chapitre 0), les auteurs introduisent la notion d'indépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs puis la notion axiomatique d'espace vectoriel. L'approche est ici classique et l'exposé synthétique. Très vite cependant, les auteurs engagent le lecteur à rapprocher cette approche axiomatique de ce qui a été

fait précédemment sur les systèmes linéaires, via le parallèle vecteurs / équations, le parallèle servant notamment à introduire la notion de rang d'un système de vecteurs. Ils insistent également sur le fait que le chapitre précédent présentait le point de vue " finitaire " auquel il est toujours possible de se ramener en dimension finie.

"le point de vue du chapitre 1[11] était "finitaire", c'est-à-dire que nous raisonnions toujours sur des systèmes finis d'objets, que nous transformions par certaines combinaisons linéaires mais sans jamais porter attention sur l'ensemble de toutes leurs combinaisons linéaires ("espace vectoriel engendré", dans le langage du présent chapitre). [...] Pour bien faire le lien entre les deux points de vue, vous êtes invités à relire le paragraphe 1.5.3[12] du chapitre 1 en remplaçant mentalement les "systèmes de formes linéaires" par des "familles de vecteurs" (d'un même espace vectoriel E). Puis vous cherchez à répondre aux questions suivantes.

1. Comment les notions d'implication linéaire $\overset{lin}{\Rightarrow}$ et d'équivalence linéaire $\overset{lin}{\Leftrightarrow}$, quand on les applique à deux familles de vecteurs, se traduisent-elles géométriquement en termes d'espaces vectoriels engendrés?

(indication : l'implication linéaire se traduit par une relation d'inclusion, c'est-à-dire que l'un des espaces vectoriels engendrés est inclus dans l'autre; à vous de voir lequel!).

2. Comment la notion de rang[13] d'une famille de vecteurs se traduit-elle géométriquement en terme d'espace vectoriel engendré?

3. Sachant que S est une famille génératrice de E, et que S $\overset{lin}{\Rightarrow}$ S', à quelle condition sur le rang de S' est-on sûr que S' est aussi une famille génératrice de E?

4. Sachant que S $\overset{lin}{\Leftrightarrow}$ S', et que S est une base de E, que peut-on dire de S'?

Même question si l'on sait de plus que S et S' ont même nombre d'éléments." [ibid, p.96]

Le chapitre continue par une introduction des espaces affines, puis l'étude des fonctions linéaires et affines, faite classiquement.

L'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique se fait à un niveau théorique via la notion de dualité, dans le chapitre suivant intitulé : "Dualité entre géométrie et calcul ", le mot " géométrie " renvoyant ici au monde de la géométrie intrinsèque et le mot " calcul " au monde des calculs en coordonnées, les auteurs gérant à la fois dans cette articulation le cas vectoriel et le cas affine. Les énoncés qui fondent l'articulation sont les suivants :

"Version linéaire Soit $(x_1, ..., x_n)$ un système de coordonnées linéaires sur l'espace vectoriel E. Alors toute fonction linéaire l sur E s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

$$l = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \text{ (avec } a_i \in \mathbf{K}).$$

Version affine Soit $(x_1, ..., x_n)$ un système de coordonnées affines sur l'espace affine E. Alors toute fonction affine f sur E s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme

---

[11] chapitre 1 : étude formelle des systèmes linéaires

[12] paragraphe 1.5.3 : opérations sur les formes linéaires, définitions d'implication et d'équivalence linéaires de deux systèmes de formes linéaires et définition de rang d'un système de formes linéaires et propriétés.

[13] définition calquée sur la définition 1.5.3 ch chap.1, en remplaçant "formes linéaires" par "vecteurs de E".

$f = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + B$ (avec $a_i \in \mathbf{K}$, $b \in \mathbf{K}$).

Proposition : Dans un espace vectoriel (resp. affine) E de dimension n, considérons un sous-espace vectoriel (resp. affine, non vide) F de codimension p. Alors il existe un système de coordonnées linéaires (resp. affines) $(x_1, ..., x_n)$ tel que F soit donné par le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ ... \\ x_p = 0 \end{cases}$$

Corollaire : Toute fonction linéaire sur un sous-espace vectoriel F peut s'écrire comme la restriction d'une fonction linéaire définie sur l'espace ambiant E.

Lemme : Considérons, dans un espace vectoriel E, l'hyperplan vectoriel F défini par l'annulation d'une fonction linéaire l non identiquement nulle. Alors pour m fonctions linéaires $l_1, ..., l_m$ sur E les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $l_1, ..., l_m, l$ sont linéairement indépendantes;
2. $l_1/F, ..., l_m/F$ sont linéairement indépendantes.

Proposition : Le lieu des zéros dans E d'un système de p fonctions linéaires $l_1, ..., l_p$, linéairement indépendantes, est un sous-espace vectoriel F de codimension p.

Proposition : Sous les hypothèses de la proposition précédente, une fonction linéaire l sur E s'annule en restriction à F si et seulement si elle est combinaison linéaire de $l_1, ..., l_p$.

Proposition : Soit $(x_1, ..., x_n)$ un système de coordonnées linéaires d'un espace vectoriel E, et soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension m. Alors m d'entre les fonctions coordonnées $x_1, ..., x_n$ peuvent être choisies de façon à ce qu'après restriction à F elles forment un système de coordonnées sur F.

Corollaire : En désignant par $I \subset \{1, 2, ...,n\}$ l'ensemble d'indices des m fonctions x_i ainsi choisies, et par J l'ensemble des n - m autres indices, le sous-espace vectoriel F peut être défini analytiquement dans les coordonnées $(x_1, ..., x_n)$ par un système de n - m équations de la forme

$$x_j = \sum_{i \in I} a_{ji} x_i \quad (j \in J) \text{ " [ibid, p.130 à 139]}$$

Les auteurs considèrent la version affine des résultats précédents et passent à l'interprétation géométrique d'un système d'équations linéaires où l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique s'effectue via les énoncés suivants :

"Proposition : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène S_0 s'interprète géométriquement comme un sous-espace vectoriel $Sol(S_0)$ de E de codimension r = rang S_0.

Proposition : L'ensemble de solutions d'un système linéaire S s'interprète géométriquement (lorsqu'il n'est pas vide!) comme un sous-espace affine Sol(S) de E dont la direction n'est autre que le sous-espace vectoriel $Sol(S_0)$ de E correspondant aux solutions du système S_0 associé à S. La codimension de Sol(S) est donc égale au rang du système.

Proposition : Supposons que le système S soit possible. Alors l'équation e est linéairement impliquée par S (c'est-à-dire est combinaison linéaire des équations de S) si et seulement si l'hyperplan affine H de E défini par cette équation contient le sous espace affine Sol(S). " [ibid, p.144 à 146]

Les auteurs introduisent ensuite le cadre des matrices et donnent des interprétations fonctionnelle et vectorielle de systèmes linéaires ce qui permet d'avancer dans l'articulation, via la relation : rg

(lignes) = rg (colonnes), démontrée dans le cadre matriciel, en utilisant la conservation du rang par équivalence et la possibilité de réduire toute matrice à une forme canonique de rang r par des transformations élémentaires.

Le cadre de déterminants est introduit progressivement, en mettant l'accent sur l'interprétation géométrique du déterminant en terme d'aire orientée, puis les applications aux systèmes de Cramer et au calcul de l'inverse d'une matrice sont brièvement présentées.

Dans cet ouvrage, le cadre des systèmes linéaires et le cadre géométrique jouent un rôle central, comme annoncé dans la préface. La volonté d'articulation des cadres est elle aussi manifeste. Elle se situe davantage au niveau théorique et au niveau technologique, tout particulièrement développé dans cet ouvrage, notamment au début de l'ouvrage, beaucoup plus qu'au niveau technique. Ceci est manifeste par exemple, dans la façon dont est organisée l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique. Même si ces deux termes ne sont pas présents, cette articulation est explicitement envisagée dans le chapitre " Dualité entre géométrie et calcul " et gérée sur un plan théorique, en utilisant en particulier la notion de base duale. En revanche, il n'existe pas de partie du cours mettant en place le passage technique d'une forme de représentation à une autre. De façon générale, d'ailleurs, dans cet ouvrage, les exercices usuels d'ordre technique d'un cours d'algèbre linéaire sont rares. Il comporte de nombreuses questions et pistes de réflexion proposées à l'étudiant, quelques exercices, mais tous ces éléments sont majoritairement intégrés au cours. La plupart du temps, il s'agit d'activités qui ne visent pas la mise en place de techniques mais plutôt la réflexion et l'interprétation et supposent de fait déjà un certain niveau de maîtrise technique.

L'exercice suivant, seul exercice proposé à la fin du chapitre sur la dualité déjà cité, illustre bien ceci.

> "PREMIER NIVEAU : Demandez à un camarade de vous fournir une matrice de rang non maximal. En considérant cette matrice comme définissant une application linéaire, cherchez une base du noyau, une base de l'image, un système d'équations du noyau, un système d'équations de l'image (dans l'ordre que vous voudrez)
>
> DEUXIEME NIVEAU : Posez-vous les mêmes questions pour une matrice de rang non maximal que vous aurez fabriquée vous même (le fait de savoir comment vous l'avez fabriquée doit vous permettre quelques économies de calcul)." [ibid, p.178]

Comme précisé dans l'introduction, les auteurs s'attachent davantage à amener l'étudiant à " penser des calculs ", à en faire les objets d'un travail mathématique, notamment via l'articulation avec la pensée géométrique qu'à prendre en charge le détail de leur apprentissage technique, qu'à gérer les gammes. On ne note pas non plus, et on peut y voir une cohérence avec ce qui précède, de travail spécifique sur les registres identifiés dans le chapitre III.

J) ANALYSE DE LA PARTIE LINEAIRE DE L'OUVRAGE DE MERLIN

L'organigramme de la page 201 présente l'organisation de l'ouvrage de Merlin.

Commentaires et analyse :

Avant de nous lancer dans l'analyse de cet ouvrage, rappelons brièvement comment le terme méthode a été défini et utilisé par Robert, Rogalski et Samurcay. Selon elles :

> "Une méthode est destinée à l'élaboration de stratégies de résolution de problèmes et à la gestion de ces stratégies. Elle ne décrit ni des procédures mises en oeuvre par des sujets, ni des techniques de solution : elle explicite une démarche efficace d'approche de problèmes d'un certain domaine. Une méthode relève donc du méta-cognitif, du "savoir sur les connaissances"." [Robert et al., 1987]

C'est dans ce sens que Merlin a conçu son ouvrage où il essaye d'expliciter des démarches qui puissent aider les étudiants à résoudre certains types de problèmes, en général, en se référant à des questions qui font partie des concours d'entrée aux grands écoles. Chaque méthode proposée s'accompagne de commentaires sur :

- ce qu'il ne faut pas faire et ce qu'il faut faire. Il s'agit de mettre en évidence quelle est la démarche la plus appropriée pour résoudre un certain type de tâche, et d'écarter certaines stratégies tentantes mais peu ou pas efficaces. Par exemple, dans la méthode : " Comment montrer qu'une partie est un espace vectoriel ", l'auteur écrit :

> "- **ce qu'il ne faut surtout pas faire** : Une fois n'étant pas coutume, la pire des choses à faire ici serait sans doute de chercher à appliquer la définition. Non que cela ne marche pas (on comprendrait d'ailleurs assez mal pourquoi), mais elle se révèle en pratique très malcommode à utiliser. D'ailleurs on ne vous la rappellera même pas ici, on est sûr qu'elle figure en **bonne** place dans votre cours...
>
> - **ce qu'il faut faire** : La bonne méthode consiste à considérer la partie E qu'on vous donne comme sous-partie (au sens de l'inclusion) d'un ensemble plus grand E' dont vous savez que c'est un espace vectoriel et de montrer alors que E est un sous-espace vectoriel de E', ce qui est très simple vu la caractérisation rappelée ci-après d'un sous-espace vectoriel." [Merlin, p. 35, 1995]

- ce qu'il faut connaître (exemples, relations, formules), caractérisations et remarques c'est-à-dire les différents moyens de définir une certaine notion et des propriétés et théorèmes qui servent à rendre plus opératoire une méthode liée à une certaine notion. Par exemple, pour le même titre méthodologique que ci-dessus, l'auteur donne les exemples, les caractérisations et les remarques suivantes :

> "- **Exemples** de parties "dont on sait que ce sont des espaces vectoriels" :
>
> $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$, Mn(R), $M_n(C)$, $R_n[X]$, R[X]
>
> l'ensemble des fonctions continues (resp. de classe $\mathbf{C}^n$) sur un intervalle
>
> l'ensemble des fonctions paires, impaires
>
> l'ensemble des fonctions T-périodiques.

- **Caractérisation** :

Une partie F est un s-ev d'un ev E ssi :

(i) $\{0\} \subset F \subset E$

(ii) $\forall (x, y) \in F^2 \; \forall (\lambda, \mu) \in K^2 \quad \lambda x + \mu y \in F$

On peut aussi, si l'on préfère (c'est parfois plus agréable dans les calculs) découper (ii) en deux parties, à savoir la stabilité par la multiplication par un scalaire et la stabilité par addition.

- **Remarques** :

Il découle de la définition qu'un espace vectoriel n'est jamais vide (autrement dit que l'ensemble vide n'est pas un espace vectoriel) puisqu'il contient automatiquement le vecteur nul.

Il faut se méfier des conclusions hâtives : l'ensemble de fonctions périodiques n'est pas un ev, pas plus que l'ensemble des fonctions constantes ou un singleton {x} constitué d'un vecteur non nul. ce qui ressemble à un espace vectoriel n'en est pas forcément un." [ibid, p.36]

- **sur les principes**, c'est-à-dire les démarches générales que l'on peut choisir pour résoudre une question d'un certain type. Par exemple, dans la méthode : " Comment démontrer une relation entre s-ev ", l'auteur propose les principes suivants :

"Il y a en gros deux principes pour établir des relations entre deux ev :

- soit on passe par les éléments;

- soit on raisonne globalement sur les ensembles et on utilise les relations précédentes.

En pratique, pour prouver l'égalité de deux ev, on ne prouve pas la double inclusion (sauf s'il y a symétrie manifeste) mais une inclusion + une inégalité de dimension (évidemment, lorsqu'on est en dimension finie).

Plus précisément, si on montre facilement que $F \subset G$, il est nécessaire et suffisant de montrer en outre que dim $F \geq$ dim G (attention au sens) pour prouver que $F = G$." [ibid, p.37]

- **sur les techniques générales et spécifiques intervenant dans ces méthodes**. Par exemple, dans la méthode : " Comment prouver qu'une famille est libre ", l'auteur considère les techniques suivantes :

"Techniques générales : La preuve de la nullité des coefficients est dans 75% des cas une preuve directe (on montre qu'ils sont nuls en les calculant); il peut toutefois arriver, notamment dans des familles infinies, qu'on raisonne par l'absurde (on isole alors le vecteur dont le coefficient est supposé non nul).

Par ailleurs, il est fréquent qu'une récurrence intervienne dans la démonstration quand la famille est infinie.

Enfin, il se peut que l'on ait à exprimer les coefficients λ_i comme solutions d'un système linéaire et homogène (par exemple : si on dérive une relation de liaison, on obtient n relations d'où un système).

Il faut alors que le déterminant de ce système soit non nul pour que la famille soit libre (il n'aura alors que la solution triviale). Reportez-vous par exemple au chapitre 9 pour les méthodes de calcul de déterminants.

Techniques spécifiques : Nous allons détailler un peu cette méthode, en passant en revue divers types d'espaces vectoriels, et la façon correspondante d'appliquer la méthode.

- Espaces vectoriels de type $\mathbf{R}^n$: Si on dispose des coordonnées des vecteurs, on tombe sur un système linéaire à résoudre.

Si $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne, ou si l'espace est euclidien, on peut utiliser la propriété suivante (qui se démontre très simplement en faisant le produit scalaire d'un vecteur par la relation de liaison) :

Toute famille orthogonale d'un espace euclidien est libre.

Espaces de polynômes : C'est un sous-espace du type précédent (s'il est de dimension finie) et on peut se ramener aux méthodes précédentes en repassant aux coefficients (mais on le fait assez rarement). On dispose toutefois de deux résultats qu'on utilise constamment:

(i) Toute famille de polynômes de degrés tous différents est libre.

(ii) Toute famille de polynômes à degrés échelonnés ($d°P_i = i$) est libre.

- Fractions rationnelles : On est souvent amené à invoquer l'unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle pour conclure (cf. chapitre 2, méthode 0 : méthode théorique, revenir au théorème fondamental).

- Fonctions quelconques : Les deux techniques qui se combinent fréquemment sont récurrence et dérivation. On peut aussi être amené à regarder des problèmes d'existence de limites ou des calculs de DL pour trancher, voire des problèmes de non-régularité (essentiellement dans les raisonnements par l'absurde). Il peut aussi être judicieux d'appliquer la relation à un ou des réels bien choisis." [ibid, p.40]

En même temps que l'auteur mobilise un discours technologique pour expliciter les techniques relatives à une certaine méthode, il a besoin de faire l'articulation avec les autres cadres pour mettre en place les techniques de calcul. Nous avons remarqué dans cet ouvrage que les cadres des matrices et déterminants sont plutôt développés comme des cadres outils d'interprétation et de calcul des objets de l'algèbre linéaire.

- **sur comment utiliser un théorème ou des formules**. Par exemple, dans la méthode : " Utiliser le théorème de la base incomplète (dim < ∞) ", l'auteur propose l'utilisation suivante :

"Enoncé : (i) Toute famille libre peut être complétée en une base.

(ii) De toute famille génératrice on peut extraire une base.

Utilisation : En dimension finie, le théorème dit de la base incomplète (résultat (i) ci-dessus) peut se révéler très utile pour construire des bases dans des exercices théoriques (évidemment il offre une preuve d'existence non constructive puisqu'on n'obtient pas de "formules" donnant les nouveaux vecteurs).

Attention toutefois, il ne permet pas de déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

Le second résultat est en quelque sorte symétrique de ce théorème." [ibid, p.43]

- **sur des mises en garde**, c'est-à-dire des habitudes qui peuvent amener à des résultats erronés. Par exemple, dans la méthode : " Utiliser le théorème du rang ", l'auteur fait la mise en garde suivante :

"Enoncé : rg(f) + dimKer(f) =n = dim(E)

Mises en garde : L'auteur de ce théorème doit se retourner fréquemment dans sa tombe s'il entend ce que les candidats osent lui faire dire. Signalons les plus grosses énormités souvent entendues :

- Le théorème ne dit pas que le noyau et l'image sont supplémentaires (même pour un endomorphisme) : c'est faux; en revanche, il dit que tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image, ce qui n'est pas pareil. Il n'y a en effet aucune raison pour que l'intersection du noyau et de l'image soit réduite à 0.

- Comme on a souvent l'habitude de travailler sur les endomorphismes, beaucoup connaissent ce théorème sous une formulation plus courte qui est : rg(f) + dimKer(f) = n

Evidemment, lorsque l'espace de départ et d'arrivée sont distincts, on ne sait plus vraiment si n est la dimension de E ou de F ...

- Par conséquent, pour appliquer ce théorème, il suffit que E soit de dimension finie, sans condition sur F." [ibid, p.45]

- **sur l'intérêt et les conséquences pratiques**. Par exemple, dans la méthode : " Utiliser le théorème du rang ", l'auteur présente le discours suivant :

"- Intérêt : Il n'est pas forcément immédiat de déterminer directement l'image d'un endomorphisme, et par voie de conséquence d'en donner le rang.

En revanche, la détermination du noyau, qui se ramène à la résolution de l'équation f(x) = 0, est toujours plus simple.

C'est le même genre de différence qu'entre montrer qu'une famille est génératrice et montrer qu'elle est libre.

- Conséquence pratique du théorème du rang :

$$E = Kerf \oplus Imf \Leftrightarrow E = Kerf + Imf \Leftrightarrow Kerf \cap Imf = \{0\}$$

Ce résultat se démontre à travers des méthodes 2, 4[14] et du théorème du rang." [ibid, p.46]

Lorsque l'auteur introduit le chapitre sur les méthodes de dualité, il fait les commentaires suivants qui, d'une certaine façon, répondent à la question de l'impasse sur la dualité, à savoir :

"Nous ne sommes pas absolument certains que l'ensemble des possesseurs de ce livre (que nous saluons au passage) auront le courage de lire ce chapitre, répugnés qu'ils sont par ce phénomène étrange appelé dualité. Et c'est fort dommage. En effet, nous pourrions répéter ici ce que nous avons déjà écrit là, en d'autres occasions, à propos du calcul différentiel (cf. Méthodix 1, ch.16 p.203) : faire une impasse sur la dualité est un mauvais calcul, car n'est pas si compliqué que cela à comprendre. D'autant que personne n'y comprend rien, et qu'au royaume des aveugles les borgnes sont rois.

Tout cela pour vous encourager à vous prendre un petit peu la tête sur ce chapitre : cela sera à notre avis beaucoup plus profitable que d'inverser une matrice 25x25." [ibid, p.61]

Dans ce chapitre, pour la méthode : " Comment déterminer l'orthogonal d'un sev ", l'auteur a besoin de faire un petit commentaire qu'il appelle " approche heuristique " où il met en valeur la fonction de la représentation symbolique du crochet de dualité et dans la méthode : " Comment utiliser l'orthogonal d'une partie " l'auteur essaye de montrer à travers des exemples l'intérêt d'utiliser la dualité pour simplifier la résolution de certains problèmes. Citons ces passages :

"Approche heuristique : Le crochet de dualité est, nous semble-t-il, une aide mnémotechnique précieuse pour retenir et comprendre la notion d'orthogonalité, puisqu'elle peut faire penser au produit scalaire, et donc à l'orthogonalité entre vecteurs.

Ici on l'aura compris, le crochet de dualité a pour arguments deux éléments de nature distincte, mais duale : une forme et un vecteur." [ibid, p.64]

"Méthode 5 : Comment utiliser l'orthogonal d'une partie

---

[14] méthode 2 : Comment démontrer une relation entre s-ev (on s'intéresse évidemment ici aux relations ensemblistes, c'est-à-dire à l'inclusion ou à l'égalité).

méthode 4 : Comment montrer que 2 sev sont supplémentaires.

Le but ultime de la dualité, vous vous en doutez, n'est pas de vous faire calculer l'orthogonal d'un ev, puis d'un autre jusqu'à ce que mort s'ensuive.

Notre ambition est d'essayer de vous montrer en quoi un raisonnement par dualité permet de simplifier beaucoup de problèmes.

- Principe : Au lieu de démontrer une "propriété", on démontre la propriété duale, c'est-à-dire celle qui traduit la propriété dans l'espace dual.

- Cas d'application : - égalités d'espaces vectoriels : Au lieu de montrer que F = G, on montre que les orthogonaux de ces espaces sont égaux (cela n'a d'intérêt que si les orthogonaux sont simples à exprimer).

- montrer qu'une famille est génératrice : Au lieu de montrer que $Vect(x_i) = E$, on montre que :

$Vect(x_i)^{\perp} = \{0\}$, ce qui revient à démontrer qu'une forme linéaire s'annulant sur tous les vecteurs de la famille est identiquement nulle." [ibid, p.65]

A la fin de chaque chapitre, l'auteur met en évidence les erreurs à ne pas commettre et les astuces qui peuvent aider à résoudre certains problèmes, comme par exemple :

"Erreurs : Beaucoup d'erreurs de raisonnement sont dues au fait qu'on ne prend pas garde à ce qu'une forme linéaire peut parfaitement être nulle. Dans ce cas, évidemment, son noyau n'est pas un hyperplan mais l'espace E tout entier. Moralité : bien préciser que vous considérez une forme linéaire non nulle. [...]

Nous vous déconseillons de traiter matriciellement les problèmes liés à la dualité (même si c'est possible, et tout à fait faisable) : en effet cela nécessite d'être très rigoureux sur les bases dans lesquelles on travaille, etc... bref c'est une erreur.

Astuces : Si vous maîtrisez bien l'algèbre bilinéaire, vous ferez des rapprochements profitables concernant l'orthogonalité et vous comparerez la transposée et l'adjoint. Cela devrait (théoriquement) vous aider à mieux comprendre...[...]

Dès qu'on vous parle d'un hyperplan, ayez le réflexe de le considérer comme le noyau d'une forme linéaire non nulle. Pour peu que vous soyez dans un espace où on connaît l'allure générale de ces formes linéaires, le problème deviendra plus parlant." [ibid, p.70]

Dans cet ouvrage, les questions sont abordées, comme on le voit avec les extraits ci-dessus, à un niveau relativement général. Même quand il s'agit de techniques, elles sont globalement décrites, on ne rentre pas dans le détail de leur fonctionnement.

La question de l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique est présente mais, vu l'esprit de l'ouvrage, elle est abordée à un niveau théorique et technologique. Les méthodes liées à la dualité sont mises en valeur mais leur difficulté n'est pas sous-estimée et elles sont plutôt présentées comme un nouveau moyen d'interpréter et de résoudre des tâches qu'on avait déjà d'autres moyens de résoudre, et illustrées par des cas où l'utilisation de la dualité apporte réellement des simplifications.

L'articulation entre cadres est faite au fur et à mesure des besoins dans chaque méthode, ce que nous avons déjà mis en évidence ci-dessus à travers l'exemple de la méthode : " Comment utiliser l'orthogonal d'une partie ". En général, cette articulation est faite dans les cadres qui serviront comme des cadres outils de nouvelles interprétations et de calculs comme c'est le cas pour le cadre de l'algèbre linéaire lorsqu'on introduit la notion de dualité et les cadres des matrices et des

déterminants. L'auteur ne considère pas le cadre des systèmes linéaires. Celui-ci, supposé déjà connu, est articulé avec le cadre des matrices puisque, pour les méthodes où il faut résoudre un système, l'auteur renvoi soit au cadre des matrices, soit au cadre des déterminants. Dans cet ouvrage, les cadres des matrices et des déterminants servent donc à mettre en valeur les techniques de calcul par rapport aux notions d'algèbre linéaire.

Par rapport aux différents registres de représentation des vecteurs et des sous-espace que nous avons mis en évidence dans le chapitre II et III, nous ne trouvons que les représentations intrinsèques. Il s'agit en effet d'un cours de méthodes générales de l'algèbre linéaire abstraite et lorsque l'auteur a besoin de traiter le cas de vecteurs donnés par leurs coordonnées, il le fait à travers un discours technologique ne nécessitant que des représentations intrinsèques de vecteurs et de sous-espaces. Tout le travail qui se place à un niveau plus technique est complètement laissé à la charge des étudiants.

k) ANALYSE DU POLYCOPIE DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE MEYER.

L'organigramme de la page 203 montre l'organisation du cours d'algèbre linéaire de Meyer.

Commentaires et analyse :

C'est le polycopié d'un cours d'algèbre linéaire de l'année 1992/93 proposé aux étudiants du DEUG SSM-MASS à l'Université Paris VII. Comme nous l'avons déjà précisé dans l'introduction de ce chapitre, nous avons choisi ce polycopié parce que l'auteur y prenait en compte explicitement la question de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique. Il débute par le cadre de la géométrie affine où il explicite les énoncés permettant le passage d'une représentation à une autre, énoncés qui seront repris ensuite dans le cadre de l'algèbre linéaire abstraite.

Dans le cadre de la géométrie affine, l'auteur introduit d'abord la structure d'espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, les notions de droites et plans vectoriels, ce qui lui permet de définir ensuite droites et plans affines. En s'appuyant sur ces notions, l'auteur traite ensuite explicitement l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique. Cette articulation est gérée à un niveau théorique, en énonçant et démontrant les théorèmes qui soutiennent le passage d'une représentation à une autre, même s'il n'utilise pas ces termes.

Après avoir explicité la distinction entre ensembles de points (cadre de la géométrie affine) et ensembles de vecteurs (cadre de la géométrie vectorielle), l'auteur définit les produits scalaire et vectoriel et les applications linéaires. Ceci lui permet d'introduire des exemples d'applications linéaires géométriques et d'étudier leurs propriétés.

Cette partie géométrique est conçue par l'auteur comme une introduction au cours d'algèbre linéaire proprement dit, comme il le souligne lui-même au début du polycopié :

> "La lecture du polycopié "Un peu de géométrie dans $\mathbf{R}^3$" a été conçue comme une introduction aux objets de l'algèbre linéaire : elle constitue, à ce titre, un vaste exemple de nombreuses situations ici rencontrées et on y renvoie, explicitement ou implicitement, tout au long de ce texte." [Meyer, p.1]

En ce qui concerne l'algèbre linéaire, l'auteur débute classiquement par la définition axiomatique de la structure d'espace vectoriel, celle d'application linéaire et leurs propriétés.

Puis, très vite il définit la notion d'espace dual en soulignant son intérêt (cf. introduction de ce chapitre). Il l'exploite en montrant, à partir de l'exemple ci-dessous, comment on peut gérer les transformations induites par les changements de "bases" sur la forme des équations.

> "Le plan vectoriel d'équation $x_1 - x_2 = 0$ dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ n'a pas la même équation linéaire dans la base $\{a_1 = 1/2\ (e_1 + e_2),\ a_2 = 1/2\ (e_1 - e_2),\ a_3 = e_3\}$.
>
> Tout vecteur $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ de $\mathbf{R}^3$ s'écrivant : $X_1a_1 + X_2a_2 + X_3a_3$, on a :
>
> $1/2\ (X_1 + X_2) = x_1$, $1/2(X_1 - X_2) = x_2$, $X_3 = x_3$, l'équation $x_1 - x_2 = 0$ devient dans la base $\{ai\}$, $X_2 = 0$.
>
> Ces deux équations linéaires peuvent cependant être considérées comme définies par un même objet, l'application linéaire $\omega \in (\mathbf{R}^3)^*$ telle que dans la base $\{e_i\}$:
>
> $\omega(e_1) = 1 \quad \omega(e_2) = -1 \quad \omega(e_3) = 0$
>
> (ou dans la base $\{a_i\}$: $\omega(a_1) = 1 \quad \omega(a_2) = -1 \quad \omega(a_3) = 0$).
>
> En effet, $\omega(a_1) = 1/2\ (\omega(e_1) + \omega(e_2)) = 0$, $\omega(a_2) = 1/2\ (\omega(e_1) - \omega(e_2)) = 1$, $\omega(a_3) = \omega(e_3) = 0$.
>
> Dans les deux cas, l'exemple montre que P est l'ensemble des zéros de l'application linéaire ω de $(\mathbf{R}^3)^*$."

Après cette incursion dans la dualité, il revient aux premières notions d'algèbre linéaire en définissant les sous-espaces vectoriels et leurs opérations. Ceci est fait classiquement et l'auteur en profite pour donner la définition de sous-espace orthogonal à un sous-espace donné.

Il revient ensuite à l'algèbre linéaire en dimension finie, introduit la notion de rang d'un système de vecteurs et fournit une méthode pratique pour sa détermination. Il revient également aux applications linéaires, définit matrice et rang d'une application linéaire en démontrant les propriétés qui leur sont associées, sans mettre en place pour autant un cadre matriciel.

Il revient enfin sur la notion de dualité, et traite explicitement, via cette notion, l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique, à un niveau théorique. Au niveau technique, le passage d'un type de représentation à l'autre est abordé dans le seul sens cartésien / paramétrique. L'exemple ci-après illustre cette prise en charge technique non classique et le rôle explicite qu'y joue la dualité.

"Trouver une base du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

où λ est un paramètre réel.

Les formes linéaires reliées à cet exemple, si $\{e_i\}_{i=1,...,4}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^4$, et la base duale $\{e_i^*\}_{i=1,..,4}$ d'icelle, s'écrit :

$$\varphi_1 = e_1^* + e_2^* + e_3^*,$$
$$\varphi_2 = \quad e_2^* + e_3^* + \lambda e_4^*$$
$$\varphi_3 = \quad e_2^* + e_3^* + e_4^*$$

On recherche (d'après le théorème[15] et sa démonstration) le sous-espace F de E dont l'orthogonal est :

$$F^{\perp} = \text{Vect}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$$

La première chose à faire est de préciser la dimension de cet orthogonal suivant les valeurs de λ, donc de chercher le rang du système $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

$$\begin{matrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 1\end{pmatrix} & & \begin{matrix}e_1^*\\ e_2^*\\ e_3^*\\ e_4^*\end{matrix}\end{matrix} \text{ lemme d'échange partout } \begin{matrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 - \varphi_2 \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} & & \begin{matrix}e_1^*\\ e_2^*\\ e_3^*\\ e_4^*\end{matrix}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 - \varphi_2 \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1-\lambda\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} & & \begin{matrix}e_1^*\\ e_2^*\\ e_4^*\\ e_3^*\end{matrix}\end{matrix}$$

Si $\lambda = 1$, $\varphi_2 = \varphi_3$ et le système est de rang 2, une base de $F^{\perp}$ est $\{\varphi_1, \varphi_3\}$ (lemme triangle).

Plan :

pour trouver une base de F (qui est un sous-espace vectoriel de dimension 4 - 2 = 2, i.e. un plan de $\mathbf{R}^4$), on peut compléter $\{\varphi_1,\varphi_3\}$ en une base de $(\mathbf{R}^4)^*$, chercher la base duale et en extraire, via la proposition 5[16], la base de F. C'est la théorie qu'on a produite." [ibid, p.42 et 43]

Ensuite, l'auteur introduit le cadre matriciel et articule matrices, applications linéaires et systèmes linéaires. Il définit une structure d'espace vectoriel sur $M_{m,n}(K)$ et démontre l'isomorphisme entre cet espace et celui des applications linéaires de K^n dans K^m, ce qui lui permet d'avancer dans

---

[15] Un sous-espace vectoriel F de dimension n d'un espace vectoriel de dimension m est déterminé par m-n équations linéaires (scalaires homogènes) indépendantes (i.e. les formes linéaires définissant ces équations sont indépendantes) de $F^{\perp}$. Réciproquement, la donnée de m-n équations linéaires (scalaires homogènes) indépendantes de E détermine un sous-espace vectoriel de dimension n de E.

[16] L'application qui à une base $\{a_i\}_{i=1,...,m}$ associe sa base duale $\{a_i^*\}_{i=1,...,m}$ est une bijection entre bases de E et bases de E*.

l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique en démontrant que le rang des vecteurs ligne est égal au rang des vecteurs colonne et aussi en énonçant et démontrant le théorème de Rouché. Encore ici, l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique se fait explicitement à un niveau théorique. Le petit nombre d'exemples traités et l'absence d'exercices ne nous permettent pas d'analyser vraiment comment l'auteur envisage l'articulation entre les niveaux théoriques et techniques.

En ce qui concerne les registres de représentation des vecteurs et des sous-espaces, soulignons que les registres de représentation des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ sont utilisés sans aucune considération sur les traitements et conversions possibles. Par rapport aux représentations de sous-espaces, nous ne voyons apparaître que la représentation cartésienne explicite et la représentation paramétrique "implicite-tableau" en dehors des représentations symboliques intrinsèques.

L) ANALYSE DU POLYCOPIE DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE ROGALSKI (ANNEE 1992/93)

L'organigramme de la page 204 montre l'organisation du cours d'algèbre linéaire de Rogalski.

Commentaires et analyse :

L'auteur débute par le cadre des systèmes linéaires en l'articulant selon ses besoins avec le cadre de l'algèbre linéaire dans $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire en définissant les notions d'algèbre linéaire dans $\mathbf{R}^n$ au fur et à mesure qu'il en a besoin pour traiter l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique aux différents niveaux : technique, technologique et théorique.

Dans cette approche, l'auteur définit d'abord les systèmes d'équations linéaires, les sous-espaces vectoriels et affines de $\mathbf{R}^n$. Puis, il étudie la méthode du pivot de Gauss, ce qui lui permet de définir le rang d'un système d'équations linéaires, d'énoncer et de démontrer le théorème de Rouché.

Après cela, l'auteur associe équations linéaires et vecteurs et définit le rang d'une famille de vecteurs. A partir de là, d'une part il démontre le théorème de la base incomplète, l'invariance du rang et le fait que le rang des vecteurs ligne est égal au rang des vecteurs colonne, d'autre part il avance explicitement dans l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique en énonçant les théorèmes qui permettent de décrire paramétriquement l'ensemble solution d'un système linéaire homogène ou pas et le sous-espace engendré par les vecteurs du second membre d'un système linéaire. Ceci lui permet de traiter explicitement à travers des exemples, les techniques de passage d'une représentation à une autre comme le montre l'exemple ci-dessous :

> "A. Les solutions du système homogène (I_0)
>
> Commençons par un exemple. Supposons qu'après avoir mis en oeuvre la méthode de Gauss, on arrive au système suivant (3 équations à 4 inconnues, de rang 2) :

$$x_3 - x_4 + 2x_1 - x_2 = 0$$
$$x_4 - x_1 + 3x_2 = 0$$
$$0 = 0$$

Les inconnues x_1 et x_2 sont arbitraires, et les valeurs de x_3 et x_4 sont données en fonction de x_1 et x_2 par

$$x_4 = x_1 - 3x_2$$
$$x_3 = -x_1 - 2x_2$$

Le vecteur x solution peut alors s'écrire

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = x_1 U_1 + x_2 U_2$$

Autrement dit, le sous-espace S_0 des solutions du système homogène est l'ensemble des combinaisons linéaires avec des coefficients qui sont des paramètres arbitraires de deux vecteurs particuliers. De plus, par la méthode des 0 et des 1, il est clair que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. Ce fait est général.

Théorème 5 : (Description de S_0) L'espace vectoriel S_0 des solutions du système homogène (I_0), s'il n'est pas réduit à {0} (c'est à dire si r < n), est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients arbitraires de n - r vecteurs linéairement indépendants :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{p_{r+1}} U_1 + x_{p_{r+2}} U_2 + \dots + x_{p_n} U_{n-r}$$

B. Les conditions de résolutions du système (I)

Reprenons l'exemple précédent : supposons que le système obtenu après la méthode de Gauss

$$x_3 - x_4 + 2x_1 - x_2 = \frac{1}{2} b_3$$
$$x_4 - x_1 + 3x_2 = 2b_1 - b_3$$
$$0 = b_2 - 2b_1 + b_3$$

Alors la condition de résolution est $b_2 - 2b_1 + b_3 = 0$. Le sous espace R de $\mathbf{R}^3$ formé par les vecteurs b vérifiant la condition de résolution est donc formé des vecteurs qui s'écrivent

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_1 V_1 + b_3 V_2$$

et V1 et V2 sont linéairement indépendants. Le cas général est analogue, une fois qu'on a remarqué que les conditions de résolution forment un système triangulaire de m-r équations à m inconnues, de rang exactement m-r (voir le théorème 2[17]) auquel on peut donc appliquer le théorème 4[18] :

---

[17] (forme des conditions de résolution) Les conditions de résolution, quand il y en a, ont la forme suivante :

Théorème 6 (Description de R) L'espace vectoriel R de seconds membres du système linéaire (I) qui vérifient les conditions de résolution est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients arbitraires de r vecteurs de $\mathbf{R}^m$ linéairement indépendants :

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = b_{q_1} v_1 + b_{q_2} V_2 + \dots + b_{q_r} V_r$$

C. Les solutions du système (I)

On sait que l'ensemble S est un sous-espace affine, facile à identifier dès qu'on a une solution particulière, c'est à dire dès que le vecteur b formé par les seconds membres est dans R.

Proposition 5 Si b appartient au sous-espace R, l'ensemble S des solutions du système (I) est un sous espace affine donné par S = a + S_0 où a est une solution particulière. Il admet donc un paramétrage de la forme $x = a + x_{p_{r+1}} U_1 + x_{p_{r+2}} U_2 + \dots + x_{p_n} U_{n-r}$, où U_1, ...,U_{n-r} sont n-r vecteurs linéairement indépendants. Pour trouver une solution particulière a, le plus simple est de résoudre le système où l'on a pris toutes les variables non principales $x_{p_{r+1}}, \dots, x_{p_n}$ égales à O :

$$\begin{aligned} x_{p_1} + \dots\dots\dots\dots &= c_{q_1} \\ x_{p_2} + \dots\dots\dots &= c_{q_2} \\ \dots\dots \quad &\dots\dots \\ x_{p_r} &= c_{q_r} \end{aligned}$$

C'est ainsi que dans l'exemple précédent, en faisant $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, on trouve la solution particulière

---

$$\begin{aligned} b_{q_{r+1}} - \sum_{i=1}^{r} e_{i,q_{r+1}} b_{q_i} &= 0 \\ b_{q_{r+2}} - \sum_{i=1}^{r} e_{i,q_{r+2}} b_{q_i} &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ b_{q_m} - \sum_{i=1}^{r} e_{i,q_m} b_{q_i} &= 0 \end{aligned}$$

R est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^m$, puisque les b_j vérifient m-r équations linéaires homogènes. Ces conditions de résolution sont le résultat de l'élimination des inconnues x_1, ...,x_n entre les m équations initiales : "éliminer signifie "trouver les conditions de résolution".

[18] Théorème 4 On considère un tableau rectangulaire $\left(a_{ij}\right)_{\substack{i \le m \\ j \le n}}$ de nombres à m lignes I_1, ...,I_m et n colonnes c_1, ...,c_n : $I_i = \left(a_{i1}, \dots, a_{in}\right)$, $c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$. Alors le rang des lignes est égal au rang des colonnes : rg(I_1, ...,I_m) = rg(c_1, ...,c_n).

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2b_1 - \frac{1}{2}b_3 \\ 2b_1 - b_3 \end{pmatrix}$$

[ibid, p.10 à 12]

Le discours technologique qui accompagne les techniques considérées permet de relier technique et théorie. Pour établir ce discours, l'auteur utilise un questionnement où il essaie de montrer l'intérêt de l'utilisation des dimensions et des théorèmes qui s'y rapportent comme moyens d'anticipation, d'interprétation et de contrôle.

Il nous semble intéressant de reproduire ici ces questions qui mettent en jeu plus au moins directement l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique.

"1) Etant donnés des vecteurs u_1, ..., u_k dont on veut étudier ou utiliser le sous espace qu'ils engendrent, la première question à se poser est : combien sont vraiment utiles? [...]

2) Etant données des équations dont on veut étudier ou utiliser l'ensemble de solutions, les questions à se poser sont : combien sont vraiment utiles? [...]

3) Etant donnés deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbf{R}^n$, les questions concernant leur position relative qu'on peut avoir à se poser sont les suivantes : a-t-on $E \subset F$? comment montrer cette inclusion? comment montrer que $E = F$? comment déterminer $E \cap F$?

4) Etant donné un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, deux questions fréquentes sont : s'il est donné en paramétrique (sous la forme $E = \text{lin}\{u_1, ..., u_k\}$),comment en trouver des équations, si possible en nombre minimum? s'il est donné par des équations linéaires, comment le paramétrer?

5) Dès que des sous-espaces vectoriels interviennent dans un problème, il faut se poser d'emblée la question de leurs dimensions : ceci permet de ne pas se poser de mauvaises questions, et surtout de faire des contrôles sur les résultats obtenus." [ibid, p.15]

L'auteur essaye ensuite d'y répondre en mettant en évidence quelles techniques on peut utiliser. Ce faisant, il relie les techniques de passage d'une représentation à une autre aux théorèmes qui les sous-tendent et qui permettent en même temps d'établir un discours technologique qui servira à anticiper, contrôler et justifier ces techniques. Par rapport à la question 4) ci-dessus l'auteur donne ainsi l'explication suivante :

"4) Pour passer de la définition par équations à celle par paramètres et inversement, une seule méthode : mettre en oeuvre sur le sous-espace étudié exactement les techniques développées dans les démonstrations du théorème 5[19] et du théorème 8[20] : résolution d'un système par la méthode de Gauss, avec paramétrage par les inconnues non principales, d'une part; et élimination des paramètres dans les relations exprimant que le point $(x_1, ..., x_n)$

---

[19] (Description de S_0)

[20] théorème 8. Si la dimension d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbf{R}^n$ est r, c'est à dire s'il est engendré par r vecteurs indépendants, alors on peut le définir par n-r équations linéaires linéairement indépendantes (c'est la réciproque de théorème 7).
théorème 7. Un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ défini par r équations (homogènes) linéairement indépendantes (ou par m équations de rang r) est un sous-espace vectoriel de dimension n-r.

est dans l'espace, d'autre part, toujours par la méthode de Gauss, afin de trouver les conditions de résolution." [ibid, p.17]

Ensuite, l'auteur donne des exemples de recherche du rang d'un système de vecteurs, de recherche d'un sous-espace défini par des équations, de recherche des équations d'un sous-espace donné par un paramétrage et de comparaison de deux sous-espaces. Dans ces exemples, il utilise un discours technologique lié aux techniques employées, en prenant en compte explicitement l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique. Le cadre des systèmes linéaires et celui de l'algèbre linéaire sont aussi articulés explicitement et dans ces deux cadres, les différents objets apparaissent à la fois en tant qu'outil et qu'objet. Dans ces exemples, l'auteur relie aussi le niveau technique au niveau théorique, à travers un discours explicite comme l'illustre l'exemple suivant :

"4) Comparer les sous-espaces E et F définis respectivement par deux équations et un paramétrage

E : (e_1) x - y + 2z - t = 0 et (e_2) 2x + y - z + 3t = 0

F = lin $\{u_1, u_2, u_3\}$, où u_1 = (5, 5, -3, -6), u_2 = (-4, -5, 2, 5) et u_3 = (1, 0, -1, -1).

Il est facile de voir que les coordonnées des 3 vecteurs u_1, u_2, u_3 vérifient les équations (e_1) et (e_2), donc $E \supset F$. Pour savoir s'il y a inclusion stricte, il faut la dimension de F, c'est à dire le rang de u_i. On constate par l'une des deux méthodes indiquées plus haut que ce rang est 2. Donc dim(F) = 2. Mais les 2 équations définissant E sont indépendantes, donc dim(E) = 4 - 2 = 2. Puisque $E \supset F$ et qu'ils ont même dimension, E = F." [ibid, p.19]

Après cette introduction du cadre de l'algèbre linéaire dans $\mathbf{R}^n$ et son articulation avec le cadre des systèmes linéaires, l'auteur revient à l'algèbre linéaire abstraite. Il introduit la définition axiomatique de la structure d'espace vectoriel et, à partir du traitement général et intrinsèque des notions de combinaisons linéaires, de sous-espaces vectoriels et d'application linéaire, avance dans l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique, en la travaillant d'un point de vue fonctionnel.

Après avoir défini le noyau et l'image d'une application linéaire T : E $\rightarrow$ F entre les espaces vectoriels E et F sur K, il démontre la proposition 3.

Proposition 3 (a) Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est injective;
2. Ker(T) = {0} : le seul vecteur de E d'image nulle est le vecteur O;
3. Quel que soit le vecteur y de F, l'équation T(x) = y a au plus une solution x dans E.

(b) Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est surjective;
2. Im(T) = F;
3. Quelque soit le vecteur y de F, l'équation t(x) = y a au moins une solution dans E.

(c) Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. T est bijective (est un isomorphisme de E sur F);

2. Ker(T) = {0} et Im(T) = F;

3. Quelque soit le vecteur y de F, l'équation T(x)=y a exactement une solution dans E.

Puis il effectue la liaison explicite avec la résolution dans le cadre des systèmes, comme l'illustre l'exercice suivant.

"On considère l'application f de $\mathbf{R}^5$ dans $\mathbf{R}^4$ qui à un élément $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ associe l'élément $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, défini par :

$$(S)\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 = y_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 8x_5 = y_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 = y_4 \end{cases}$$

Montrer que f est linéaire.

Ex 6. On considère A l'ensemble des solutions de (S_H).

$$(s_H)\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 8x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 14x_5 = 0 \end{cases}$$

Quelle est la nature de A ? Que représente A pour l'application f ? Donner une base de A; quelle est la dimension de A ? Donner un système minimal d'équations qui définissent A.

Ex 7. Dans l'espace $\mathbf{R}^4$, on considère les cinq vecteurs : $V_1 = (1, 1, 1, 1)$, $V_2 = (1, 2, 3, 4)$, $V_3 = (3, 1, 4, 2)$, $V_4 = (10, 4, 13, 7)$, $V_5 = (1, 7, 8, 14)$. Que représentent ces vecteurs pour l'application f ?

Ex 8. On considère le système (S) où les inconnues sont les x_i, et où les y_j sont des paramètres ? Comment interpréter les conditions de possibilité de ce système du point de vue de f ?

Ex 9. Donner une interprétation du théorème du rang relativement à ce système. Quel est le lien entre le rang de f et le rang du système ?

Ex 10. Récapituler les différentes interprétations des systèmes (S) et (S_H) présentées dans cette fiche et la précédente." [Rogalski, fiche 014.01]

Les questions posées dans cette tâche peuvent être vues comme un discours technologique de l'auteur visant à obliger les étudiants à utiliser ce même moyen pour faire la liaison entre les techniques employées dans la résolution de la tâche et la théorie qui les sous-tend lorsqu'on passe d'un type de représentation à un autre.

Par rapport aux représentations de vecteurs et de sous-espaces introduites dans le chapitre III, dans la première partie, le registre des tableaux est privilégié, ce qui était prévisible puisqu'il s'agit de sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ et les différentes représentations de sous-espaces apparaissent puisque l'auteur considère explicitement l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique pour les représentations de sous-espaces.

En ce qui concerne les tâches proposées aux étudiants, on note quelques tâches habituelles. Mais aussi des tâches construites de façon à rendre l'articulation entre les deux points de vue explicite et

obligatoire, et mettant de plus en jeu simultanément les trois niveaux : pour les résoudre, il faut articuler la théorie liée à la tâche proposée, la technique qui permet de la résoudre et le discours technologique qui, en général, permet d'anticiper, de contrôler et de justifier les résultats comme nous l'avons mis en évidence dans les chapitre III. Les exemples cités ci-dessus en sont un exemple typique.

III. BREF COMMENTAIRE SUR LES DIFFERENTS OUVRAGES ANALYSES

Avant de passer à l'analyse, versant étudiants, via les exercices proposés dans ces différents ouvrages, nous allons synthétiser l'analyse qui précède concernant l'articulation des points de vue par un bref commentaire sur chacun des ouvrages analysés.

Premier livre (Callioli et al.) : Cet ouvrage présente de nombreux exemples élémentaires avec une mise en place de techniques, non relayée au niveau technologique et une théorie minimale. On en retire l'impression que l'on attend des étudiants qu'ils apprennent le cours et apprennent à reproduire les exercices types corrigés qui l'accompagnent mais les clefs d'une reproduction maîtrisée ne sont pas données au niveau de l'articulation et les tâches proposées la mettent faiblement en jeu.

Le second (Boldrini et al.) : Comme dans le premier ouvrage, on trouve ici de nombreux exemples élémentaires avec une mise en place de techniques, peu relayée au niveau technologique et une théorie minimale. Là aussi, même s'il y a quelques considérations technologiques et une théorie qui relie un peu les deux points de vue, le grand nombre d'exercices d'un même type et toujours très simples nous donne la même impression que celle décrite pour le premier ouvrage.

Le troisième (Lages Lima) : Ce troisième ouvrage brésilien, récent, est d'un bon niveau théorique. Mais on y trouve aussi le souci de relier théorie et technique par une discours technologique. Ce souci est par exemple visible lors de l'introduction du chapitre sur l'élimination, comme nous l'avons déjà souligné dans la présentation des objectifs de cet ouvrage. L'auteur y met l'accent sur son choix d'introduire la technique de Gauss après l'introduction des premières notions d'algèbre linéaire en voyant dans celle-ci un moyen d'interprétation et de calcul en algèbre linéaire. Soulignons cependant qu'il s'agit d'un ouvrage très touffu qui nous semble d'accès difficile à un étudiant débutant.

Le quatrième (Lang) : Il s'agit d'un ouvrage lui aussi d'un bon niveau théorique avec un discours technologique lié à cette théorie, mais un faible traitement technologique au niveau de la liaison entre la théorie et les techniques. Soulignons cependant que les techniques y sont introduites et développées. L'articulation des deux points de vue cartésien et paramétrique est faiblement prise en charge. Même si les deux représentations apparaissent dans le cours, le problème de passage

d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique n'est traité qu'implicitement en termes d'ensemble de solutions d'un système linéaire et le passage dans l'autre sens n'est pas envisagée.

Le cinquième (Strang) : Il s'agit d'un cours où l'approche proposée se différencie complètement de l'approche classique : le cours est centré sur le cadre des matrices et sur leurs propriétés. Toutes les notions d'algèbre linéaire sont d'abord articulées avec le cadre matriciel et ensuite travaillées dans ce cadre. Les choix de l'auteur le conduisent à travailler exclusivement avec des espaces de dimension finie et, comme il privilégie les interprétations graphiques, les exemples sont toujours pour de basses dimensions. L'articulation des points de vue est prise en charge dans le cadre matriciel avec une terminologie spécifique.

Le sixième (Arnaudiès et al.) : Il s'agit d'un ouvrage d'un haut niveau théorique exigeant une grande abstraction. Toutes les articulations entre cadres dans cet ouvrage sont mises en place au niveau théorique et le discours technologique se réfère, bien sûr, à la théorie et non pas à la technique. Celle-ci est laissée complètement à la charge de l'étudiant. Il s'agit sans aucun doute d'un ouvrage d'accès difficile pour un étudiant débutant, mieux adapté à des reprises à un niveau plus avancé.

Le septième (Calvo et al.) : Comme l'ouvrage précédent, il s'agit d'un cours classique où les notions sont introduites à un niveau théorique ou technologique de façon très synthétique, cette fois. Mais un soin particulier nous semble apporté à l'articulation entre cadres qui est explicitement prise en compte dans différents chapitres. Dans le cadre des systèmes linéaires et celui des déterminants, les auteurs développent des exemples techniques où l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique est explicitement mise en jeu et les deux sens du passage sont traités.

Le huitième (Liret / Zisman) : Il s'agit d'un ouvrage prévu pour un travail autonome, en courts modules où la présentation classique de la théorie est suivie par des exercices d'application de difficulté croissante. L'articulation entre cadres est explicite, mais le cadre de la géométrie affine n'intervient jamais. L'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique, est présente dans les deux sens mais n'intervient explicitement qu'au moment de l'introduction du cadre des systèmes linéaires.

Le neuvième (Pham et al.) : Cet ouvrage, récent, est très différent des précédents. Il montre une richesse d'articulation entre cadres évidente, avec beaucoup d'imbrications qui imposent l'articulation mais génèrent aussi une certaine complexité et se situent d'emblée dans un rapport réflexif aux notions introduites. L'accessibilité à l'étudiant débutant ne semble pas de ce fait

garantie en dépit de l'intérêt évident de l'ouvrage. Le travail technique élémentaire semble laissé à la charge du travail privé de l'étudiant ou considéré comme déjà maîtrisé.

Le dixième (Merlin) : Il s'agit d'un ouvrage récent visant une réflexion méthodique. L'articulation entre les différentes cadres et points de vue est présente mais à un niveau théorique et technologique, sans que l'on rentre dans le détail du travail technique qui semble lui supposé maîtrisé. le rapport de l'articulation à la dualité est explicitement pris en compte.

Il s'agit d'un ouvrage de second niveau qui exige que l'étudiant ait déjà acquis une certaine familiarité avec l'algèbre linéaire et des connaissances sur les techniques qui lui permettent de résoudre les problèmes où les représentations ne sont pas intrinsèques.

Le onzième (Meyer) : Il s'agit d'un cours où l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique est explicitement traitée à un niveau théorique et technologique. L'accent est mis d'abord sur l'articulation entre le cadre de l'algèbre linéaire et celui de la géométrie affine, avec le but d'amener l'étudiant à se faire des images des propriétés des espaces vectoriels. Les autres articulations entre cadres sont présentes et l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique est traitée explicitement dès l'introduction de l'algèbre linéaire via la notion de dualité. Par contre, au niveau technique l'auteur ne considère que l'exemple du passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique. C'est un cours d'un haut niveau théorique, mais dont l'accessibilité à l'étudiant débutant, malgré les précautions initiales prises, peut poser problème.

Le douzième (Rogalski) : Il s'agit d'un cours expérimental où l'auteur prend explicitement en compte de manière forte l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique. On note donc une prise en charge explicite de cette articulation par l'enseignement. Elle est soutenue par un discours métamathématique qui sert à relier les notions fondamentales d'un premier cours d'algèbre linéaire à la technique de résolution des systèmes par la méthode de Gauss. Cette technique constitue en effet dans le cours un outil de calcul et démonstration dans le cadre des systèmes linéaires et joue un rôle essentiel dans l'articulation entre ce cadre et celui de l'algèbre linéaire.

IV. LA REPRESENTATION DE TACHES HABITUELLES METTANT EN JEU L'ARTICULATION DANS LES EXERCICES PROPOSES AUX ETUDIANTS

Nous nous intéressons dans cette partie à l'analyse des manuels, versant étudiants, via les exercices proposés aux étudiants. Nous avons pour cela repris la classification des tâches potentiellement porteuses d'articulation présentée aux chapitre III et décompté, pour chaque ouvrage le pourcentage de chaque type de tâche. Nous indiquons également, bien sûr, le nombre total d'exercices proposé par chaque ouvrage.

Les tableaux qui présentent les résultats de ce décompte sont donnés à la fin de ce chapitre. Nous avons séparé, en rajoutant les parenthèses (oui), (non), pour un certain nombre de tâches, les variantes qui requièrent ou non de la flexibilité.

Nous commentons brièvement ces résultats dans ce qui suit. Nous ne prendrons pas en compte ici quatre ouvrages : le Calvo, parce qu'il ne comporte que des exercices corrigés, le Pham, parce que les exercices imbriqués dans le cours, ont été pris en compte en compte dans l'analyse dimension enseignant, le Merlin et le Meyer parce que les exercices, plutôt d'ordre théorique, ne rentrent pas directement dans notre problématique. Rappelons cependant l'intérêt de ces ouvrages, mis en évidence dans la première partie de l'analyse.

A) COMMENTAIRE SUR LES TACHES DE L'OUVRAGE DE CALLIOLI ET AL.

Cet ouvrage comporte 206 exercices dans les chapitres considérés dont 33 seulement, soit 16% ressortent des types prévus a priori[21]. Ces exercices mettant en jeu effectivement l'articulation sont répartis dans les différents types de tâches répertoriées, à l'exception du type 4 (passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique ou passage inverse) et 9 (montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires), mais treize concernent les types 1 et 12 relatifs aux systèmes linéaires.

Les demandes d'articulation sont le plus souvent des demandes faibles, la mettant en jeu dans le sens cartésien / paramétrique (25 exercices sur 33) et les tâches correspondantes peuvent être gérées de façon purement technique par la technique décrite dans le paragraphe II.A du chapitre II.

Dans la tâche de type 12, trois exercices s'intéressent aux conditions de résolubilité mais il n'y a pas de lien obligatoire avec la notion de sous-espace vectoriel à faire.

Deux exercices seulement (tâche de type 2) mettent en jeu l'articulation paramétrique / cartésien (cf. chapitre III), ils correspondent à des tâches nouvelles par rapport à celles abordées en cours.

B) COMMENTAIRES SUR LES TACHES DE L'OUVRAGE DE BOLDRINI ET AL.

Cet ouvrage propose, lui, 138 exercices dont 25 seulement, soit 18%, concernent les tâches usuelles identifiées dans le chapitre III. Comme pour l'ouvrage précédent, on note une centration des tâches d'articulation sur les types 1 et surtout 12 concernant les systèmes linéaires (17

---

[21] Ces tâches correspondent à celles identifiées dans le chapitre III. Pour chaque ouvrage nous avons mis en évidence le nombre de tâches ainsi que le pourcentage. Ces résultats sont résumés dans le tableau (pages 205-206) à la fin de ce chapitre. Dans ce tableau nous avons aussi souligné lorsque l'articulation est obligatoire, potentielle ou s'il n'y a pas d'articulation.

exercices sur 25) et seulement trois exercices nécessitant la prise en compte des conditions de résolubilité. Cette fois, cinq types de tâches ne sont pas présentés (2, 3, 5 et 9). Les demandes d'articulation sont faibles. Ceci est cohérent avec l'analyse déjà faite de l'ouvrage puisque, d'une part le cadre des systèmes linéaires va servir comme un outil de calcul pour certaines notions d'algèbre linéaire sans que l'articulation des deux cadres soit véritablement mise en place, d'autre part l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique n'est pas prise en compte explicitement par l'enseignement.

C) COMMENTAIRES SUR LES TACHES DE L'OUVRAGE DE LAGES LIMA

Cet ouvrage propose, lui, 201 exercices. Dix seulement, soit 5%, concernent les tâches usuelles identifiées dans le chapitre III. Ils se répartissent dans cinq des types a priori identifiés, de façon un peu plus homogène que dans les deux manuels précédents puisque six exercices seulement concernent les systèmes linéaires. Les demandes d'articulation sont faibles et privilégient fortement le passage cartésien / paramétrique.

Ces caractéristiques confirment ce que laissait supposer l'analyse de l'ouvrage suivant le premier pôle, à savoir le fait qu'il suppose maîtrisées les bases techniques de l'articulation (abordées dans deux ouvrages spécifiquement consacrés à la géométrie analytique). Soulignons que beaucoup d'exercices proposés concernent l'analyse et donc des espaces de dimension infinie.

D) COMMENTAIRES SUR LES TACHES DE L'OUVRAGE DE LANG

Cet ouvrage propose 287 exercices dont 28 seulement, soit 9,7% concernent les tâches identifiées dans le chapitre III. On note une centration exclusive sur les types 1 et 12 (26 exercices sur 28). Soulignons de plus que dans le type 12, aucun exercice ne met en jeu les conditions de résolubilité et que les deux exercices restants ne mettent pas en jeu l'articulation.

Ceci est cohérent avec l'analyse déjà faite : l'articulation cartésien / paramétrique n'est pas présente explicitement dans le cours, et le cadre des systèmes linéaires n'est pas explicitement articulé avec celui de l'algèbre linéaire.

E) COMMENTAIRES SUR LES TACHES DE L'OUVRAGE DE STRANG

Cet ouvrage propose beaucoup plus d'exercices que les autres : 670, mais un seul des types de tâches répertoriées dans le chapitre III y est représenté, le type 12 avec seize exercices, dont neuf mettent en jeu les conditions de résolubilité.

Ceci s'explique par la centration opérée dans cet ouvrage sur le cadre matriciel. Les exercices prennent en compte plutôt les propriétés des matrices. Pour l'articulation de points de vue, il y a quelques exercices qui font référence aux notions d'espace colonne, espace ligne, espace nul et

espace nul à gauche où le cadre matriciel est aussi essentiel et l'articulation ne se fait que dans le sens cartésien / paramétrique. On trouve encore des exercices dont l'énoncé fait appel au cadre géométrique où l'articulation est faite aussi dans le sens cartésien / paramétrique. Dans ce cas, il s'agit de tâches très spécifiques et dont l'articulation peut être gérée plus facilement puisqu'il s'agit d'une seule équation dans $\mathbf{R}^3$.

F) COMMENTAIRES SUR LES TACHES DE L'OUVRAGE DE ARNAUDIES ET AL.

Pour cet ouvrage également, le seul type de tâche présent parmi ceux identifiés dans le chapitre III est le type 12 avec seulement quatre exercices, mais mettant en jeu les conditions de résolubilité, sur les 278 proposées.

Ceci est tout à fait conforme aux caractéristiques identifiées de ce manuel : les exercices proposés constituent très majoritairement des prolongements du cours et se situent dans le cadre de l'algèbre linéaire abstraite. L'articulation des points de vue cartésien et paramétrique n'est pas ici un enjeu de l'enseignement.

G) COMMENTAIRES SUR LES TACHES DE L'OUVRAGE DE LIRET / ZISMAN

On retrouve dans cet ouvrage un répartition plus proche des celle de deux premiers ouvrages rencontrés : 144 exercices dont 25, soit 17%, relèvent de la classification élaborée au chapitre III. Une centration sur les systèmes avec quinze exercices sur vingt-cinq et pas de mise en jeu des conditions de résolubilité.

Les tâches proposées aux étudiants sont de différent niveaux et un grand nombre d'entre elles portent sur la démonstration de propriétés.

Ceci est en accord avec les caractéristiques déjà identifiées du manuel où l'articulation entre les points de vue est centrée sur le cadre des systèmes linéaires. Les exemples de passage cartésien / paramétrique du cours avec appui sur le cadre des déterminants ne sont pas repris en exercices.

H) COMMENTAIRES SUR LES TACHES DU POLYCOPIE DU COURS DE ROGALSKI

Le polycopié propose 169 exercices, dont 50, soit 30%, relatifs aux types de tâches identifiées dans le chapitre III. Toutes les rubriques sauf la 3 (trouver une partie génératrice d'un ensemble de vecteurs donnés) sont représentées. Ce sont les types 1 et 12 relatifs aux systèmes linéaires qui sont majoritaires, comme dans les autres ouvrages, avec 22 exercices sur 50 mais on notera que vingt et un de ces exercices sur vingt deux mettent en jeu les conditions de résolubilité.

Soulignons également la présence d'exercices qui ne rentrent pas dans les douze types identifiés mais mettent en jeu explicitement l'articulation : exercices sur les représentations cartésiennes et paramétriques de droites et plans dans l'espace.

Ceci est cohérent avec l'analyse faite de la dimension cours de ce polycopié qui mettait en évidence l'accent mis sur l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique aux différents niveaux.

Il s'agit en effet, d'un cours où l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique n'est pas prise en charge qu'à un niveau purement théorique et technologique comme dans la plupart des ouvrages analysés, mais gérée aussi au niveau technique, en exigeant de l'étudiant un travail conscient, qui ne peut être développé à travers le seul mécanisme de résolution des systèmes par la méthode de Gauss. D'où l'existence d'exercices qui visent à obliger l'étudiant à un travail réflexif par rapport à la technique, ou à l'articulation explicite des différents cadres, comme dans l'exemple cité p.182. Les préoccupations du cours se retrouvent donc directement dans les exercices proposés aux étudiants.

V. CONCLUSION

Après avoir identifié dans le chapitre III des types de tâches où l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique pouvait être travaillée et précisée, suivant les variables de ces tâches, et en fonction du caractère potentiel ou effectif de cette articulation, nous nous sommes intéressée dans ce chapitre à la vie institutionnelle de cette articulation, telle qu'elle pouvait apparaître à travers l'analyse de quelques manuels français, brésiliens et anglo- saxons.

Que ressort-il de cette analyse ?

Tout d'abord, nous semble-t-il, la diversité des approches possibles et existantes de l'algèbre linéaire, une diversité qui va influer nécessairement sur la façon dont seront conçus et travaillés les points de vue cartésien et paramétrique.

Cette diversité est clairement visible dans les organigrammes que nous avons utilisés pour rendre compte de l'organisation de chaque ouvrage. En ce qui nous concerne plus particulièrement, elle se traduit par des différences sensibles dans le rôle joué par les cinq cadres identifiés.

Ainsi, dans un ouvrage comme celui de Strang, un cadre est dominant : le cadre matriciel et c'est à partir de ce cadre que s'organisent les rapports avec les autres cadres. Dans les ouvrages brésiliens comme ceux de Callioli, Boldrini et Lages Lima, comme dans la plupart des ouvrages français, c'est le cadre de l'algèbre linéaire qui est dominant, après une introduction éventuelle faisant appel à d'autres cadres (cadre géométrique, cadre des systèmes). Mais d'une part, ce cadre de l'algèbre linéaire est différemment développé : la dualité par exemple y apparaît ou non, sous des formes faibles ou fortes, et y joue un rôle plus ou moins important. De plus, les relations avec les autres cadres mettent en jeu soit de simples rapports d'utilisation (Callioli, Boldrini), soit des rapports plus riches (par exemple dans le Calvo, où la structure elle-même s'organise en fonction des

différents cadres) ou dans Pham et Rogalski où le cadre des systèmes apparaît comme un appui essentiel à la conceptualisation.

Cette différenciation dans l'importance respective accordée aux différents cadres, dans le rôle qu'ils sont appelés à jouer, a des répercussions directes au niveau des registres sémiotiques privilégiés pour travailler avec vecteurs et sous-espaces. Dans les ouvrages où le travail se fait essentiellement en petites dimensions, le cadre matriciel et celui des systèmes jouent un rôle important, le registre tableau est privilégié et on note un certain recours au registre graphique. Dans des ouvrages plus théoriques, comme Arnaudiès et Merlin, c'est le registre symbolique intrinsèque qui domine. Le registre tableau apparaît doté d'une très forte valence instrumentale mais en même temps, comme nous l'avons déjà souligné, d'une polysémie qui rend son contrôle sémiotique non évident, en effet, il fait appel, suivant les cadres, à des objets non-ostensifs distincts. Ce que montre de façon générale l'analyse effectuée, c'est que les ouvrages qui privilégient le registre tableau semblent peu sensibles aux difficultés qui en résultent.

Les tableaux apparaissent comme des instruments efficaces du travail technique, mais la prise en charge du contrôle de leur instrumentation qui devrait se manifester par un discours technologique adapté est, à quelques exceptions près, peu présente. Le discours technologique qui accompagne les techniques est en effet surtout d'ordre descriptif. S'il existe un autre niveau de discours technologique, il entre dans la catégorie de discours accompagnant, commentant la théorie.

La place accordée au cadre géométrique est variée suivant les manuels. Mais, de manière générale, on note qu'une faible attention est portée à la distinction entre caractéristiques vectorielles et affines. Ceci est particulièrement évident dans les deux premiers ouvrages brésiliens analysés mais, se retrouve dans la plupart des autres ouvrages : on n'y trouve pas une attention explicitement exprimée aux difficultés que la distinction vectoriel / affine est susceptible d'engendrer via un discours ou des activités spécifiques. De même, nous semble-t-il, on ne met pas en place l'extension de l'appui géométrique à des dimensions supérieures à trois, où il ne pourra trouver à s'exprimer dans les mêmes termes. Ceci reste à la charge du travail privé de l'étudiant.

Soulignons de plus que les points de vue cartésien et paramétrique, ne sont pas identifiés en tant que tels, excepté dans le polycopié de Rogalski. Dans la plupart des ouvrages, à l'exception du polycopié de Meyer, l'existence de deux points de vue reste implicite, cachée derrière les systèmes de représentation des objets.

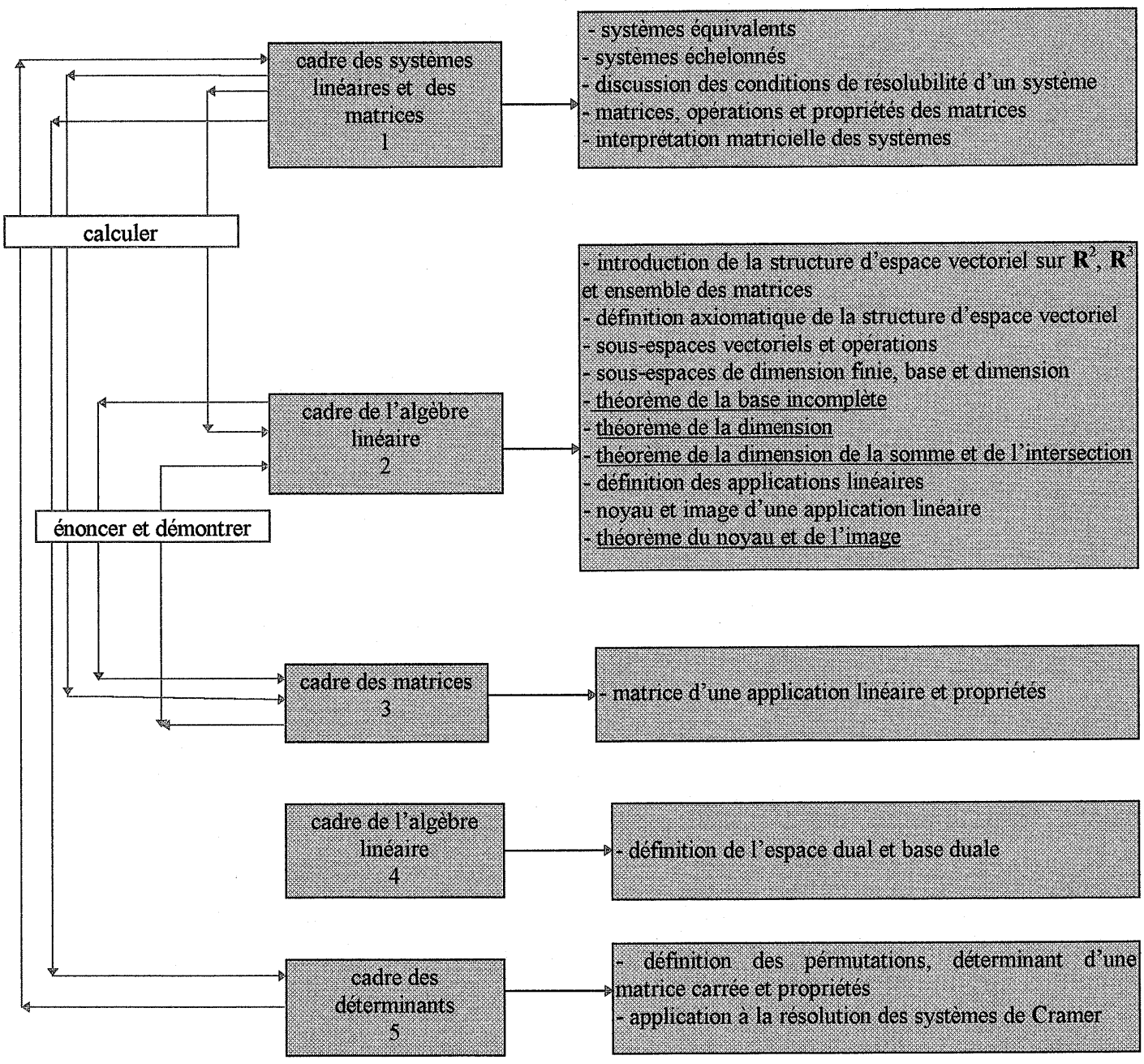
L'analyse des exercices proposés aux étudiants, pour les manuels qui en proposent, montre de plus que les tâches identifiées dans le chapitre III sont faiblement présentes. Si l'on excepte encore une fois, le polycopié de Rogalski, elles n'excèdent pas 18% des exercices proposés, et sont loin de

couvrir toutes les catégories possibles et, à quelques exceptions près, ne mettent en jeu l'articulation qu'à un niveau technique, dans le sens a priori le plus accessible (le sens cartésien / paramétrique) et dans le cadre de la résolution de systèmes linéaires. Soulignons cependant que l'on trouve des activités tout à fait intéressantes, dans un livre comme celui de Pham qui ne font pas partie ici de celles que nous avons repertoriées.

Même, dans les exercices consacrés à la résolution de systèmes, on note, de manière générale, une prédominance des exercices de simple résolution.

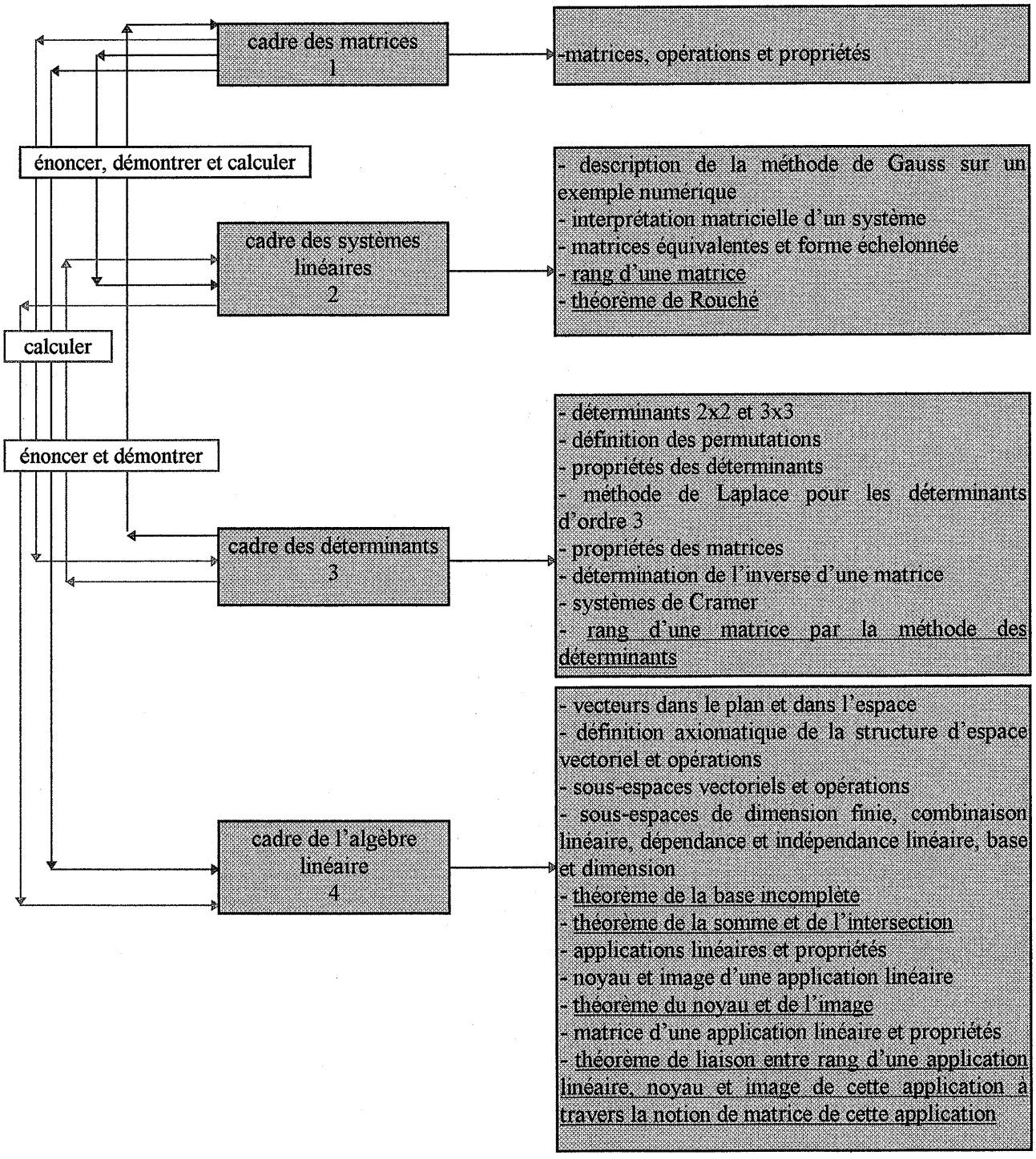
Il en résulte donc que l'espace a priori possible pour mettre en place l'articulation des deux points de vue cartésien et paramétrique, est un espace largement sous exploité, à la fois quantitativement et qualitativement. On peut se demander, dans ces conditions, comment cette articulation se développe chez les étudiants, quelles difficultés plus ou moins durables elle génére. C'est ce que nous étudierons dans les trois chapitres suivants, en France et au Brésil, donc avec des étudiants appartenant à des cultures différentes. Précisons que, pour les étudiants brésiliens concernés, ce sont les deux premiers ouvrages analysés qui constituent la référence.

ORGANIGRAMME DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE CALLIOLI ET AL.



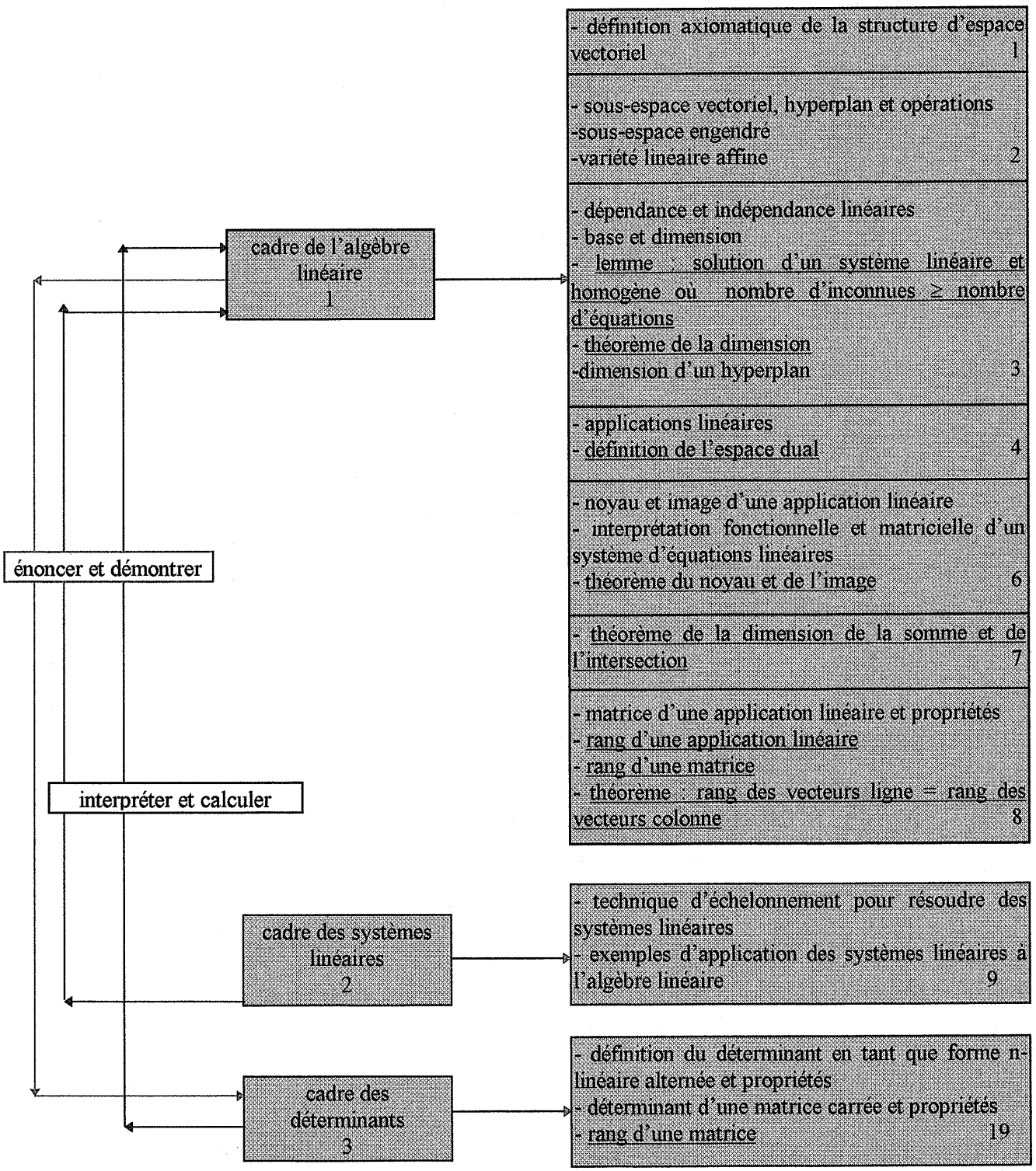
Le cours se poursuit par formes bilinéaires et quadratiques réelles, graphes et matrices, diagonalisation des opérateurs linéaires, polynômes de Lagrange, suites recurrentes , équations différentielles linéaires et méthodes d'approximation

ORGANIGRAMME DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE BOLDRINI ET AL.



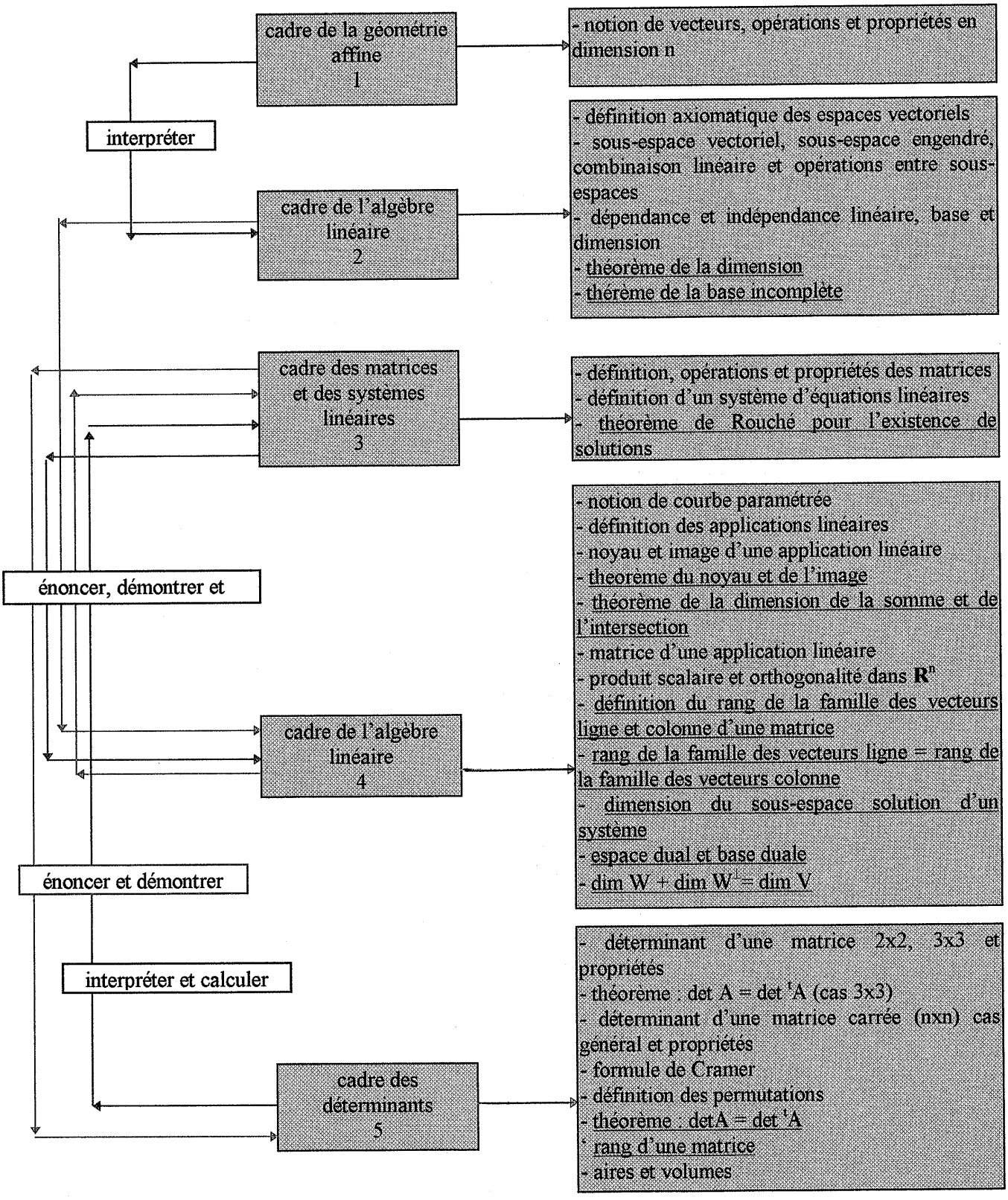
Le cours se poursuit par valeurs propres et vecteurs propres - diagonalisation - produit scalaire - opérateurs orthogonaux et auto-adjoints - formes bilinéaires symétriques et quadratiques - classification des coniques et quadriques - systèmes d'équations différentielles linéaires - processus itératifs - ensembles convexes et programmation linéaire

ORGANIGRAMME DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE LAGES LIMA



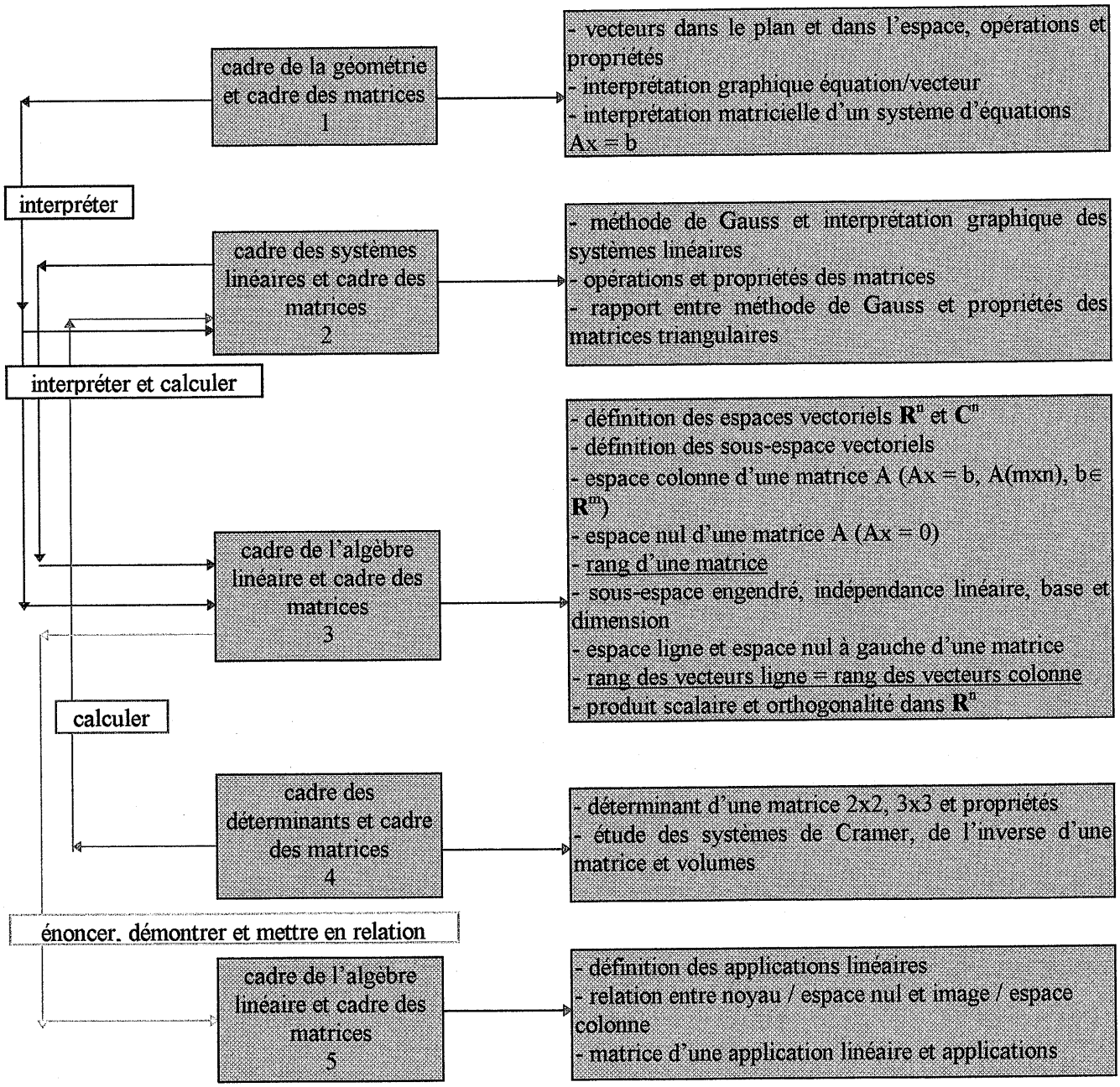
Entre le cadre des systèmes linéaires et celui des déterminants l'auteur introduit les notions de produit scalaire, application adjointe, sous-espaces invariants, opérateurs auto-adjoints, opérateurs orthogonaux, opérateurs anti-symétriques, pseudo-inverse, divers topiques matriciels et enfin les formes quadratiques.
Après le cadre des déterminants, le cours se poursuit par polynôme caractéristique, espaces vectoriels complexes, équations aux différences finies.

ORGANIGRAMME DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE LANG



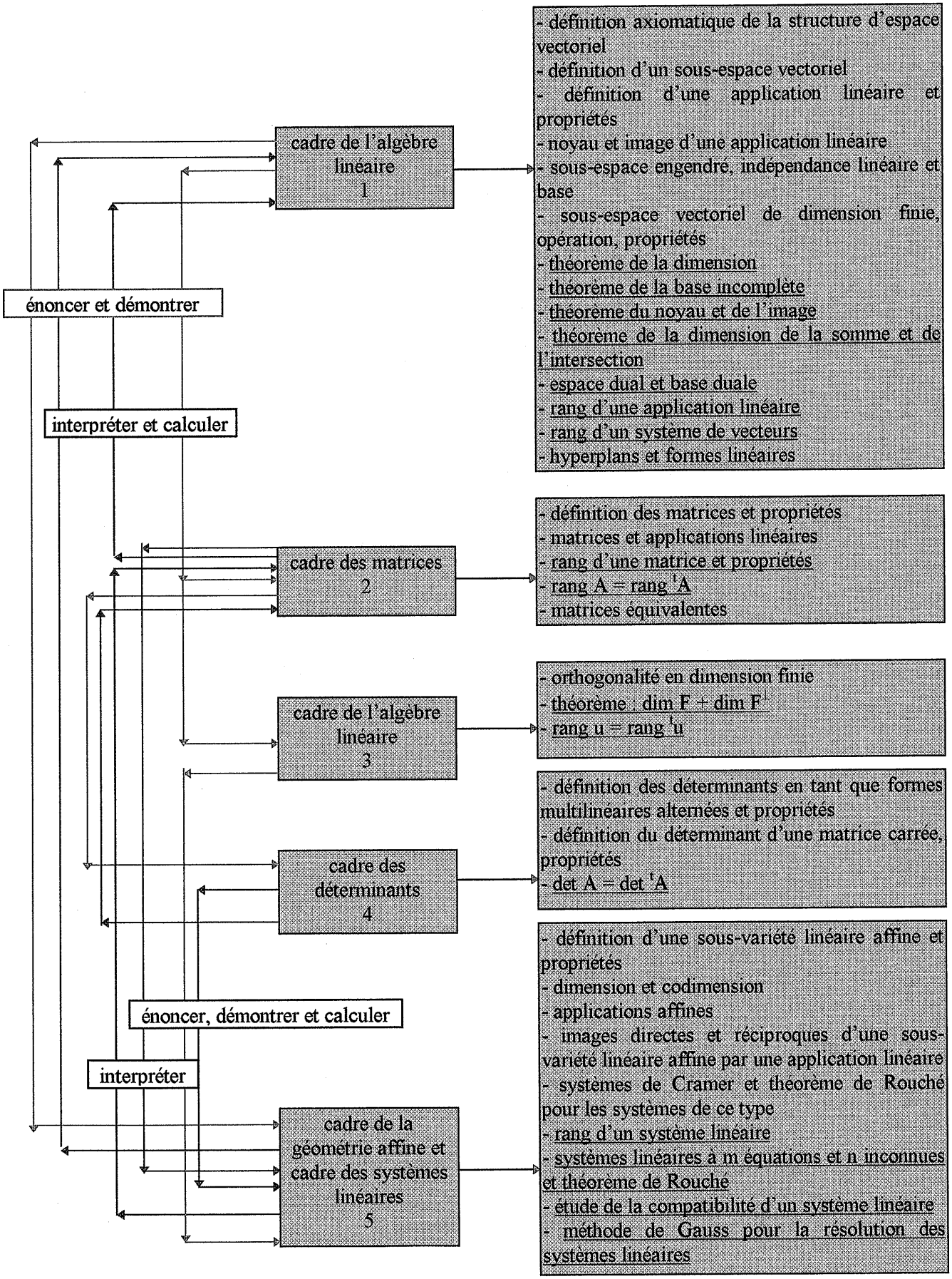
Le cours se poursuit par ensembles convexes, récurrence, corps des nombres complexes, relations d'équivalence et angles

ORGANIGRAMME DE COURS D'INTRODCUTION A L'ALGEBRE LINEAIRE DE STRANG

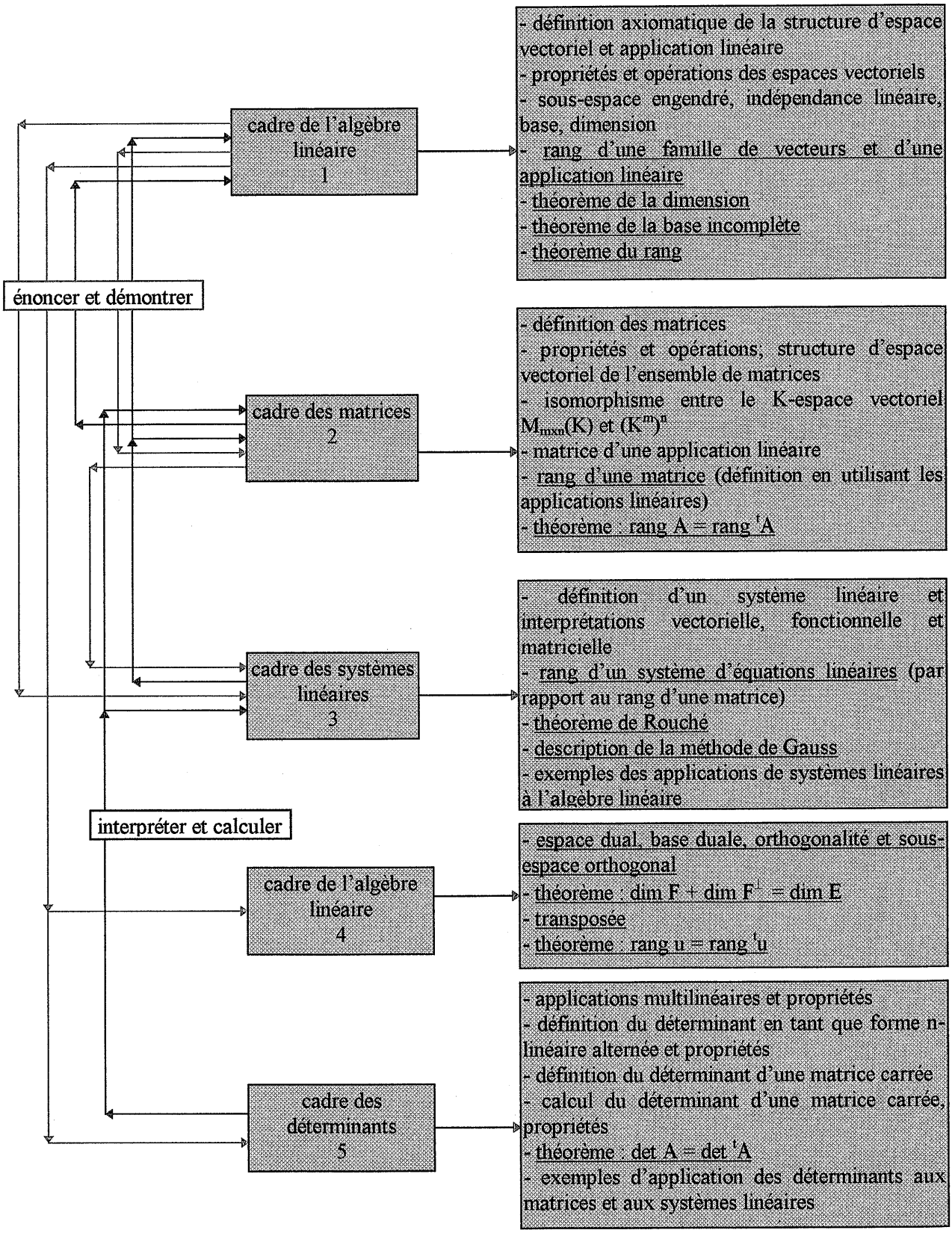


Le cadre 5 vient après un chapitre sur les valeurs propres et vecteurs propres et applications. Après le cours se poursuit par des applications comme graphes et réseaux, algèbre linéaire numérique, méthodes itératives pour l'algèbre linéaire et vecteurs complexes et matrices.

ORGANIGRAMME DE LA PARTIE D'ALGEBRE LINEAIRE DU COURS D'ARNAUDIES / FRAYSSE

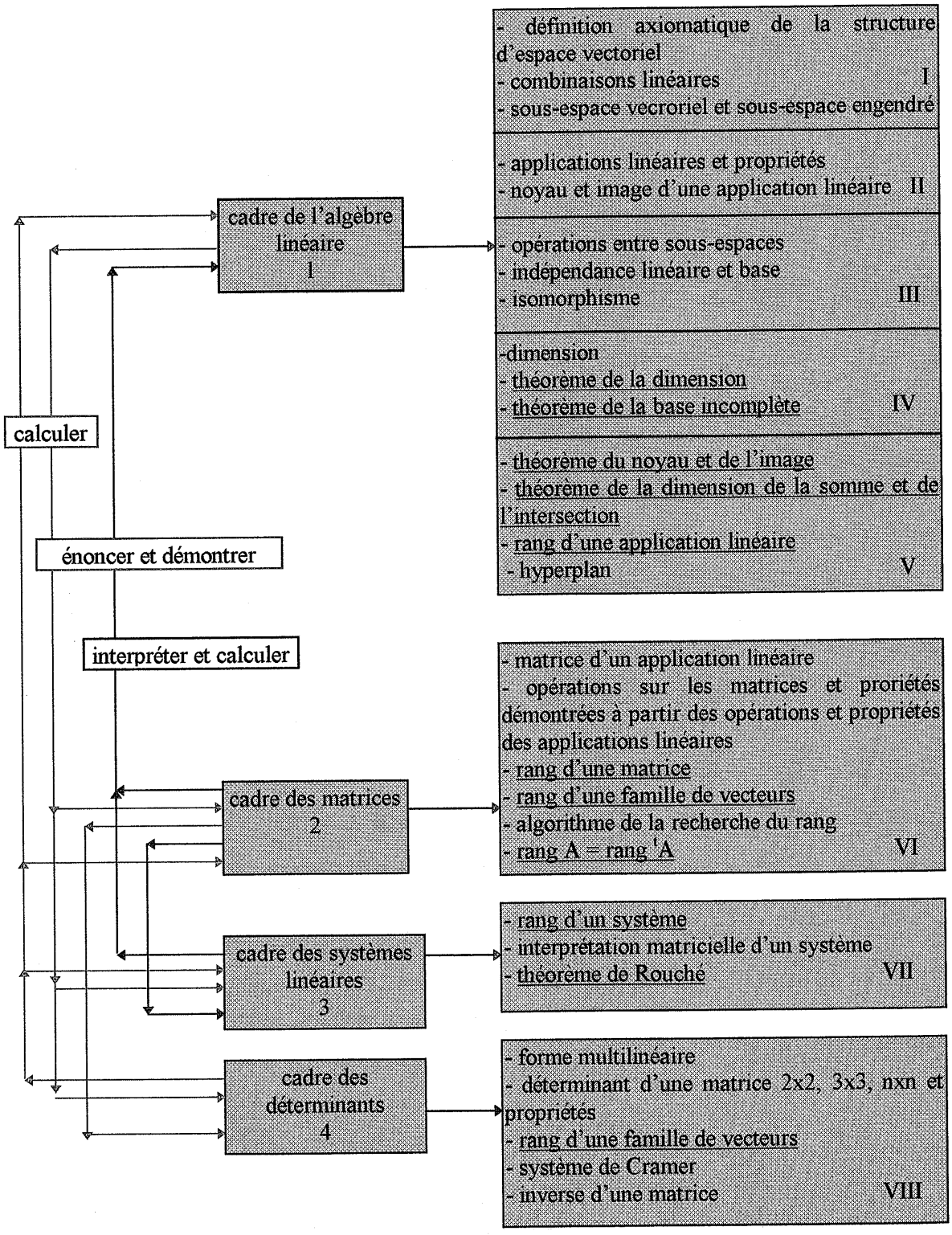


ORGANIGRAMME DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE CALVO ET AL.



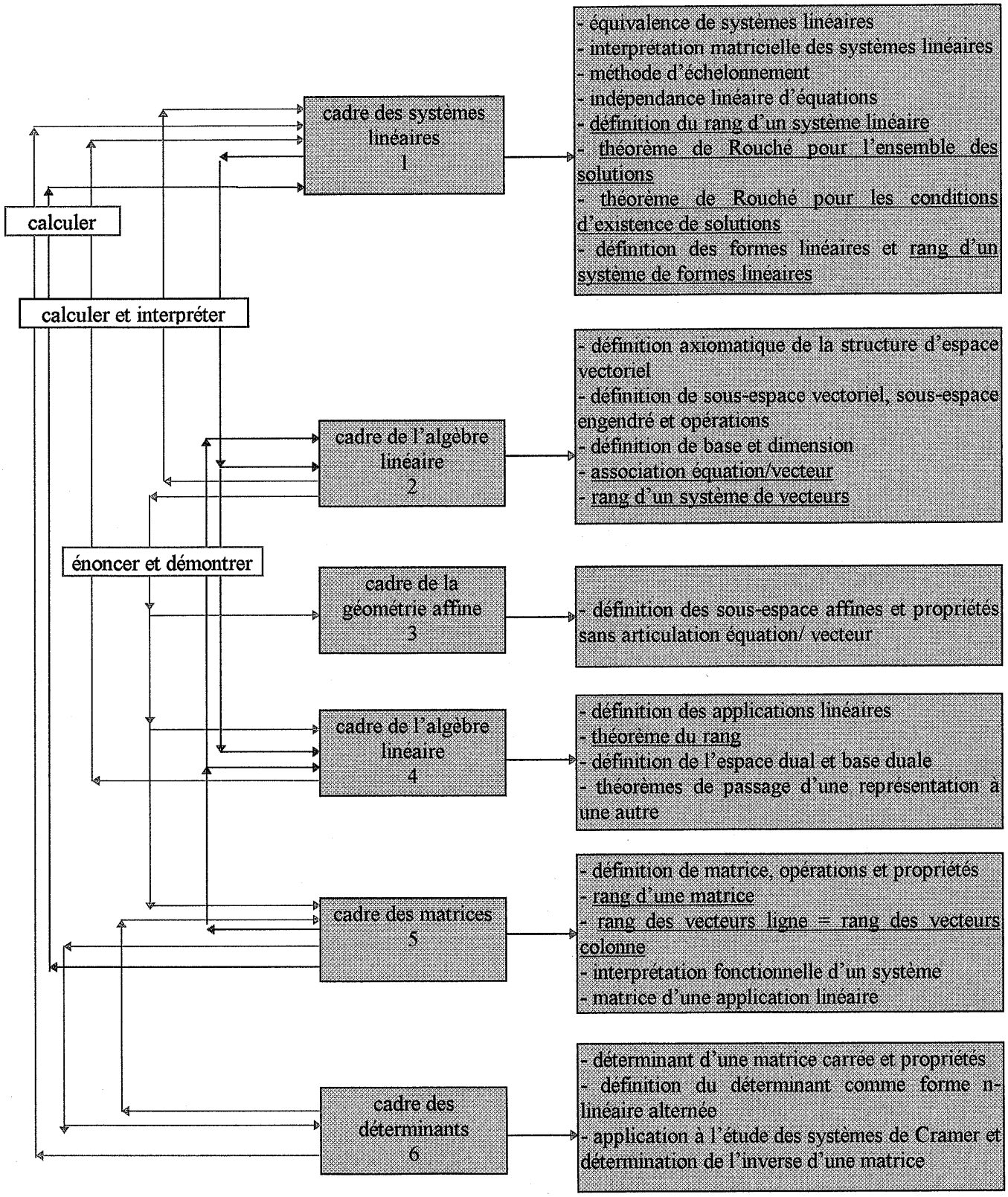
Le cours se poursuit par réduction des endomorphismes, formes quadratiques et espaces euclidiens, formes hermitiennes et espaces hermitiens et des appendices sur corps commutatifs, permutations et groupes symétriques et polynômes.

ORGANIGRAMME DE LA PARTIE LINEAIRE DU COURS D'ALGEBRE DE LIRET / ZISMAN



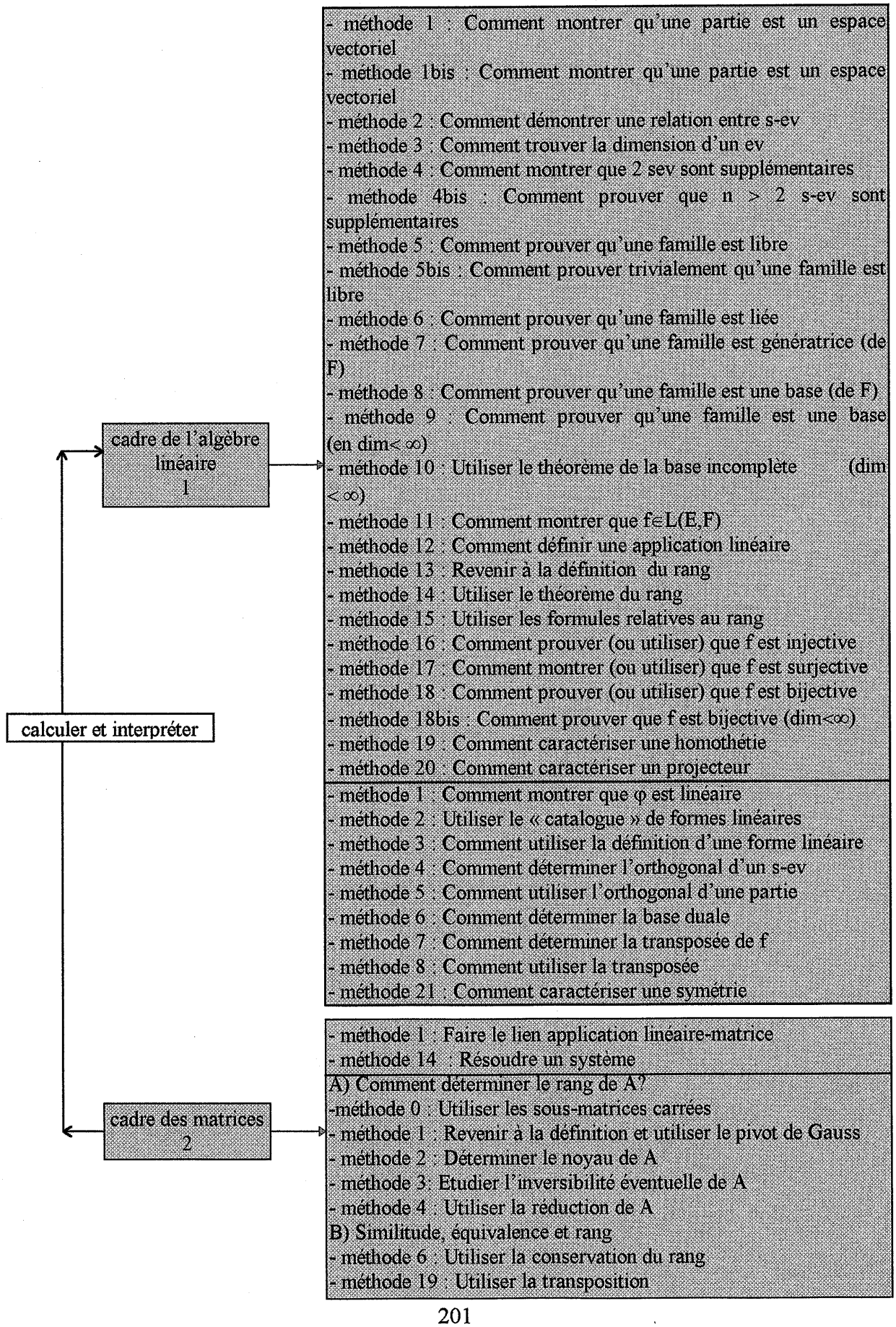
Après le module sur opérations entre sous-espaces et isomorphismes (III) le cours se poursuit par des modules sur polynômes; équations différentielles, séries, intégrales, fonctions à valeurs vectorielles, étude locale de courbes paramétrées et les auteurs reviennent à l'algèbre linéaire et introduisent la notion de dimension et de rang d'une application linéaire. Puis, ils passent au cadre des matrices et déterminants. Ensuite, ils introduisent encore un module sur les vecteurs et valeurs propres.

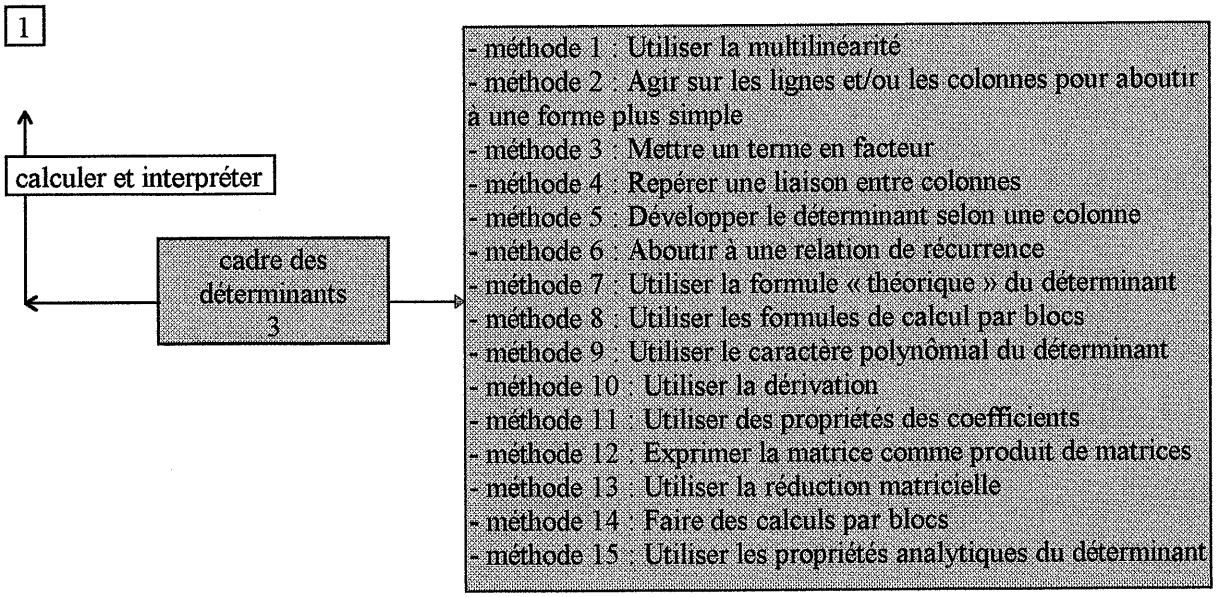
ORGANIGRAMME DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE PHAM / DILLINGER



Le cours se poursuit par valeurs et vecteurs propres, reduction des endomorphismes en dimension n. Les appendices sur polynômes, nombres complexes, rudiments de théorie des ensembles et structures algébriques.

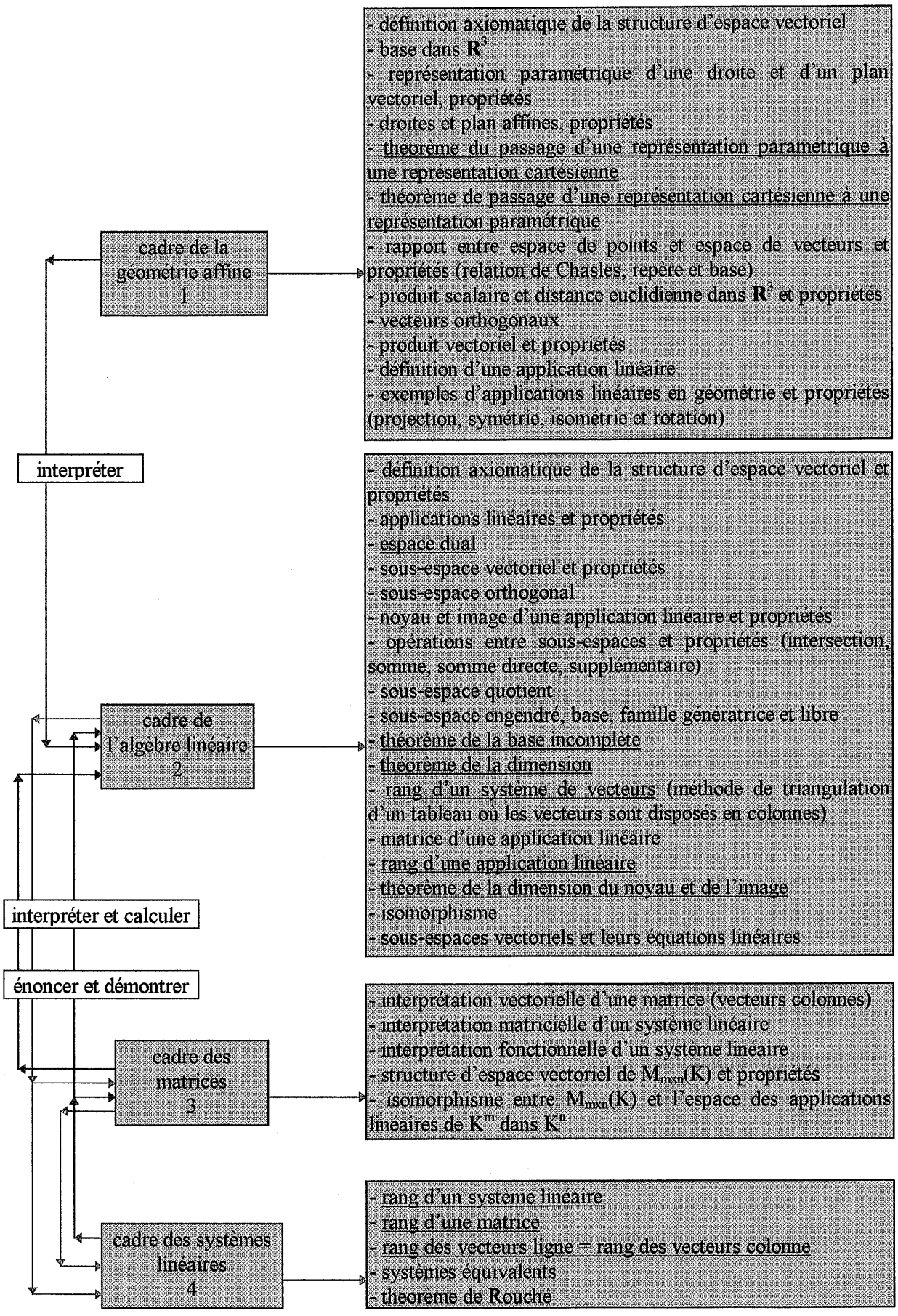
ORGANIGRAMME DE LA PARTIE LINEAIRE DU COURS DE METHODES DE MERLIN



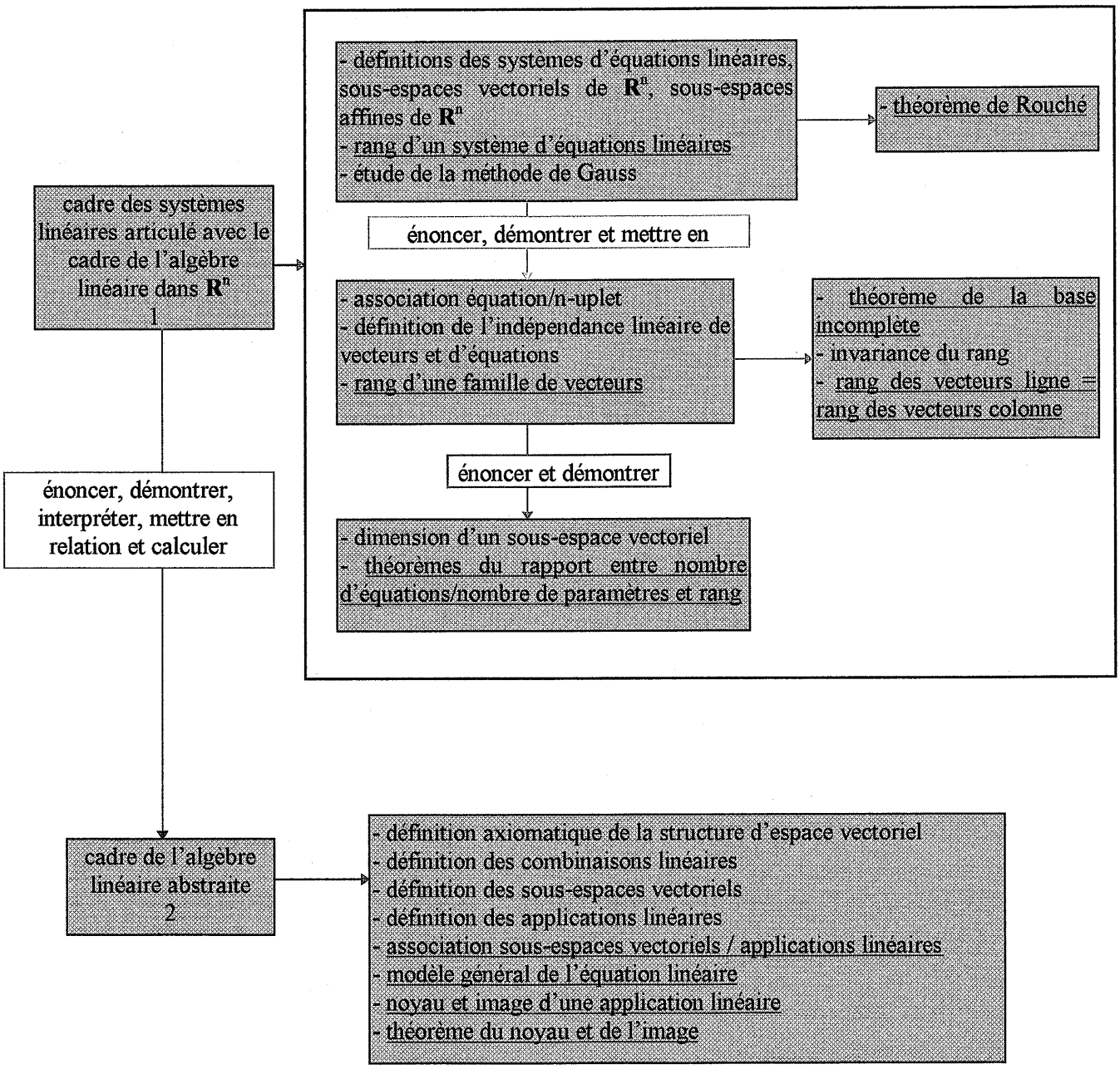


Le livre démarre par les méthodes d'étude des polynômes et les méthodes de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples suivi de l'introduction des trois cadres que nous avons mis en évidence ci-dessus et le livre se poursuit par les méthodes de diagonalisation, les méthodes de réduction théorique, réduction des endomorphismes, les méthodes de topologie matricielle, les méthodes d'étude de l'exponentielle matricielle, les méthodes d'étude des matrices classiques, les méthodes générales d'algèbre linéaire (formes bilinéaires et sesquilinéaires, espaces euclidiens et hermitiens), les méthodes de détermination de la signature, les méthodes d'étude des endomorphismes auto-adjoints et endomorphismes classiques des espaces euclidiens et hermitiens

ORGANIGRAMME DU POLYCOPIE DU COURS D'ALGEBRE LINEAIRE DE MEYER



ORGANIGRAMME DU POLYCOPIE DE COURS DE ROGALSKI



Tâches\Auteurs	Callioli et al.	Boldrini et al.	Lages Lima	Lang	Strang	Arnaudiès/ Fraysse	Liret/ Zisman	Rogalski
1) Décrire le sous -espace solution d'un système linéaire homogène.	4 exos 1,94%	1exo 0,72%	1 exo 0,49%	8 exos 2,78%			2 exos 1,38%	1 exo
2) Caractériser le s.e.v engendré par des vecteurs donnés. a) reconnaissance (non) b) vecteurs de $\mathbf{R^n}$ (oui)	b) 2 exos 0,97%						b) 1 exo 0,69%	b) 4 exos 2,36%
3) Trouver une partie génératrice d'un ensemble de vecteurs donnés ou d'un sous-espace donné. a) équations (oui, faible) b) vecteurs générateurs (non)	a) 1 exo 0,48%							
4) Passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique. a) cartésien/paramétrique b) paramétrique/cartésien								a) 1 exo 0,59% b) 1 exo 0,59%
5) Montrer qu'un sous-espace est inclus dans un autre ou qu'ils sont égaux. a) P $\subset$ C (non) b) C$\subset$ C (non) c) P $\subset$ P (oui) d) C $\subset$ P (oui)	c) 1exo 0,48%						a) 1 exo 0,69%	c) 3 exos 1,77%
6) Déterminer l'intersection entre deux sous-espaces vectoriels. a) P et P (non) a1) demande C (oui) b) C et C (non) b1) demande P (oui) c) P et C (non) c1) demande C (oui)	b1) 1 exo 0,48% c) 1 exo 0,48%	b1) 1 exo 0,72%					a) 1 exo 0,69%	a) 2 exos 1,18%

Tâches \ Auteurs	Callioli et al.	Boldrini et al.	Lages Lima	Lang	Strang	Arnaudiès/ Fraysse	Liret/ Zisman	Rogalski
7) Déterminer la somme de deux sous-espaces. a) P et P (non) a1) demande C (oui) b) C et C (oui) c) C et P (oui)	b) 1 exo 0,48% c) 3 exos 1,45%	b) 1 exo 0,72%						a) 2 exos 1,18%
8) Montrer que deux sous-espaces sont en somme directe. a) P et P (non) b) C et C (oui) c) P et C (non)	b) 1 exo 0, 48% c) 1exo 0,48%	b) 2 exos 1,44%		a) 2 exos 0,69%			b) 1 exo 0, 69%	a) 3 exos 1,77%
9) Montrer que deux sous-espaces sont supplementaires. a) P et P (non) b) C et C (oui) c) P et C (oui)		b) 2 exos 1,44%	a) 1 exo 0,49%				a) 1 exo 0,69%	a) 3 exos 1,77%
10) Déterminer une base et la di- mension des sous-espaces donnés. a) Paramétrique (non) b) Cartésien (oui)	a) 1 exo 0,48% b) 4 exos 1,94%		a) 1 exo 0,49%				a) 1 exo 0,69% b) 1 exo 0,69%	a) 7 exos 4,14% b) 1 exo 0,59%
11) Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire. a) base noyau (oui), base image (non) b) cartésienne noyau (non), cartésienne image (oui)	a) 3 exos 1,45%	a) 2 exos 1,44%	a) 2 exos 0,99%				a) 2 exos 1,38% b) 1 exo 0,69%	a) 1 exo 0,59%
12) Déterminer l'ensemble des solutions d'un système linéaire et trouver sa dimension. a) ensemble de solutions b) ensemble de solutions + conditions de résolubilité	a) 6 exos 2,91% b) 3 exos 1,45%	a) 13 exos 9,42% b) 3 exos 2,17%	a) 3 exos 1,49% b) 2 exos 0,99%	a) 18 exos 6,27%	a) 7 exos 1,04% b) 9 exos 1,34%	b) 4 exos 1,43%	a) 13 exos 9,02%	b) 21 exos 12,42%
Total d'exercices des chapitres considérés	206	138	201	287	670	278	144	169

TABLEAU 1 : TABLEAU DE TACHES HABITUELLES PAR RAPPORT A CHACUN DES AUTEURS CONSIDERES

UNIVERSITÉ DE PARIS VII
DENIS DIDEROT

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PRÉSENTÉE PAR MARLENE ALVES DIAS

SUJET DE LA THÈSE :

Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire

TOME II

CHAPITRE V

ETUDE DE DIFFERENTS NIVEAUX DE GESTION DE LA FLEXIBILITE ENTRE LES POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE : ANALYSE A PRIORI

I. INTRODUCTION

Comme nous l'avons mis en évidence dans les chapitres précédents :

- d'une part, l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique peut être développée de plusieurs façons. Elle dépend du cadre qui est choisi comme cadre central d'introduction et du type d'articulation qui est fait avec les autres cadres; elle dépend aussi des approches privilégiées : approche technique, approche théorique, des rapports établis entre technique et théorie, ainsi que des discours technologiques utilisés pour justifier et expliquer les techniques, pour médiatiser les rapports entre techniques et théorie. Cette diversité mise en évidence dans l'analyse mathématique du chapitre II se retrouve dans l'analyse des manuels du chapitre IV.

- d'autre part, le nombre de tâches "élémentaires" où cette articulation est vraiment obligatoire est réduit. Ceci peut contribuer à la difficulté de sa mise en place en ne donnant pas aux étudiants suffisamment d'occasions de la rencontrer et de la travailler. L'analyse de manuels montre de plus que cet espace de tâches déjà réduit est faiblement exploité, et que la construction de l'articulation est essentiellement laissée à la charge du travail privé des étudiants.

Qu'en est-il alors des étudiants ? Comment se construisent chez eux les points de vue cartésien et paramétrique ? Comment s'articulent-ils ? C'est ce que nous allons étudier dans les chapitres suivants, avec des étudiants français et brésiliens de différents niveaux.

Les tâches proposées sont en fait de deux types. Il s'agit d'une part de tâches qui mettent en jeu explicitement le passage paramétrique / cartésien et / ou cartésien / paramétrique dans la caractérisation et la représentation de sous-espaces vectoriels. Pour les construire, nous sommes partie de tâches classiques dans un premier cours d'algèbre linéaire, que les étudiants pouvaient donc aisément identifier et reconnaître, et nous en avons légèrement modifié les variables, pour forcer le travail d'articulation souhaité.

Il s'agit d'autre part de questions plus générales présentées sous la forme VRAI / FAUX, qui devaient nous permettre de compléter les informations recueillies sur les premières tâches par celles issues du comportement des étudiants sur des questions où l'articulation, même si elle peut

jouer un rôle, est moins explicitement engagée. Ces questions plus générales n'ont concerné, en France et au Brésil, que les étudiants de maîtrise.

II. LES POPULATIONS CONCERNEES ET LE RECUEIL DES DONNEES

Les tâches ont été proposées, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, à des étudiants de différents niveaux, français et brésiliens, avec des dispositifs de passation différents dans les deux pays. En France, elles ont été proposées à des étudiants de DEUG première année de l'université de Marne la Vallée, dans le cadre d'un partiel passé en mai 1996, et à des étudiants de maîtrise de l'université Paris 7, dans le cadre de l'unité de valeur : « Approche historique et didactique des mathématiques », sous forme de test. Au Brésil, les tâches ont été proposées à des étudiants du «mestrado» en éducation mathématique, là encore sous forme de test, mais dans un dispositif plus complexe, incluant un travail en binômes en temps limité, une reprise individuelle à la maison et un entretien individuel portant ensuite sur l'ensemble des deux productions. Ce dispositif sera présenté de façon détaillée dans le chapitre VII consacré à cette partie de l'expérimentation. Dans tous les cas, nous avons précisé en préliminaire ce que nous entendions par représentation paramétrique et cartésienne, l'analyse des manuels ayant montré que la terminologie à ce niveau était soit inexistante, soit fluctuante. Dans le partiel, nous avons simplement introduit celle de représentation cartésienne, l'expression « représentation paramétrique » étant familière aux étudiants concernés.

Dans la version brésilienne des tests, nous avons indiqué de plus le temps maximum que nous souhaitions voir consacrer à chaque tâche, ceci pour éviter que les étudiants ne passent l'intégralité du temps sur la première. Ces indications temporelles étaient commentées par l'enseignante chargée de la passation.

Pour le partiel, les étudiants avaient 1h30 pour résoudre trois exercices, deux correspondant aux tâches 1 et 2 de l'analyse a priori qui sera présentée ci-après.

Les étudiants français de maîtrise avaient à résoudre soit quatre exercices et un exercice de type vrai/faux comportant quatre items (test 1), soit trois exercices et un exercice de type vrai/faux comportant trois items (test 2), les exercices des 2 tests étant de difficulté comparable. Ils disposaient de 2h pour répondre à l'ensemble des questions posées.

Enfin, nous avons ajouté à ce corpus un item d'un exercice d'examen du cours de compléments de mathématiques de première année de l'Université Paris 7 en 1996-97. Nous l'avons choisi parce qu'il s'agit d'un cours où l'enseignant aborde les notions de géométrie des droites et plans dans l'espace et considère explicitement la question des représentations paramétriques et implicites de ces droites et plans.

L'examen lui même comportait trois exercices constitués de plusieurs questions en général dépendantes. Nous avons choisi la quatrième question de l'exercice 1 qui traite explicitement de la question des représentations paramétriques et cartésiennes d'un plan et ne dépendait pas des questions précédentes.

Dans ce chapitre, nous présentons l'analyse a priori des différentes tâches proposées.

III. L'ANALYSE A PRIORI

Dans l'analyse a priori, nous décrivons les tâches en précisant d'abord pour chacune d'elles si elle fait partie d'un test, du partiel ou de l'examen, le pays où elle a été utilisée et le niveau des étudiants qui l'ont résolue. Certaines tâches ont donné lieu à plusieurs versions voisines. Nous les avons regroupées en soulignant les différences introduites et leurs raisons.

Pour chacune des tâches, nous précisons ensuite ce qui est visé et décrivons les principales méthodes de résolution correctes a priori envisageables. Nous nous appuyons sur les méthodes générales décrites dans les chapitres II et III et soulignons comment les choix particuliers des variables de chaque tâche peuvent influer sur la résolution, les justifications et les contrôles possibles.

Les textes intégraux des différents tests, du partiel et de l'examen sont donnés en annexe (cf. annexes 1, 2, 3, 4, 5 et 6).

__QUESTION 1__ : On considère dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs suivants :
$a = (2, 3, -1)$ $b = (1, -1, -2)$ $c = (5, 0, -7)$ $d = (0, 0, 1)$
Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par {a, b} et {c, d}. (question 1 - test 1 - Brésil, question 2 - test 1 - France)

On considère dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs suivants :
$\vec{a} = (2, 3, -1)$ $\vec{b} = (1, -1, -2)$ $\vec{c} = (5, 0, -7)$ $\vec{d} = (0, 0, 1)$
Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ et $\{\vec{c}, \vec{d}\}$. (question 2 - partiel - France,)

La tâche consiste à déterminer une représentation cartésienne de l'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^3$, définis chacun par deux vecteurs linéairement indépendants. Les quatre vecteurs sont donnés dans le registre tableau. Dans les tests brésilien et français les vecteurs sont désignés par une lettre, dans le partiel ils sont désignés par une lettre surmontée d'une flèche, l'enseignant ayant repris les notations auxquelles ses étudiants étaient habitués.

Il s'agit d'une tâche classique (cf. chapitre III) mais où l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique est rendue obligatoire par la demande d'une représentation cartésienne du sous-espace intersection.

Le choix des variables a été fait pour favoriser le recours à une interprétation géométrique (choix de $\mathbf{R}^3$), limiter la complexité des calculs, fournir différents moyens de contrôle, permettre des résolutions très diverses, et enfin étudier le comportement des étudiants face à la perturbation introduite dans l'algorithme standard par le fait que l'un des sous-espaces considérés est simplement le plan vectoriel d'équation y = 0, ce qui est directement inférable de la donnée des vecteurs c et d.

Nous souhaitons à travers cette tâche, étudier les techniques utilisées par les étudiants et les justifications qui les accompagnent, en essayant de déterminer à quel niveau fonctionne pour eux l'articulation, quel rôle y jouent respectivement travail technique, théorèmes généraux, interprétation géométrique.

Méthodes de résolution a priori envisagées :

La résolution de la tâche peut s'appuyer sur la détermination préalable de la dimension du sous-espace intersection. Pour le prendre en compte, nous présenterons ci-après trois méthodes liées aux techniques de détermination de la dimension de l'intersection et trois autres méthodes liées aux techniques de détermination d'une représentation cartésienne de l'intersection.

- Méthodes de détermination de la dimension de l'intersection :

a) Méthode 1 : Elle consiste à déterminer le rang de la famille de vecteurs {a, b, c, d}, ce qui conduit à la constatation que ces quatre vecteurs sont linéairement dépendants, puis à repérer que c = a + 3b et que "d" n'appartient pas à lin{a, b}. D'où la relation lin{c} $\subset$ lin{a, b} $\cap$ lin{c, d}.$\subseteq$ lin{c, d}. Il en résulte que l'intersection est forcement de dimension 1 et donc égale à lin{c}.

b) Méthode 2 : Elle consiste à déterminer, comme dans la méthode 1, le rang de la famille des 4 vecteurs puis à en déduire que la somme des deux sous-espaces vectoriels est de dimension 3 et à appliquer le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection pour déduire que dim(lin{a, b} $\cap$ lin{c, d}) = 1.

c) Méthode 3 : Elle consiste à observer que les deux sous-espaces donnés sont deux plans vectoriels de $\mathbf{R}^3$, puisque les deux vecteurs qui les engendrent ne sont pas colinéaires, et que le vecteur d = (0, 0, 1) n'est pas combinaison linéaire des vecteurs a et b. Les deux plans vectoriels sont donc distincts leur intersection est une droite vectorielle et la dimension du sous-espace intersection est égale à 1.

Les deux dernières méthodes peuvent se prolonger ou non par la caractérisation de l'intersection : lin{a, b} $\cap$ lin{c, d}) comme lin{c}.

- Méthodes de détermination d'une représentation cartésienne du sous-espace intersection :

a) Méthode 4 : Elle consiste à considérer un vecteur X quelconque et à écrire son appartenance à lin{a, b} ∩ lin{c, d}, sous la forme : ∃ x, y, z, t ∈ **R**, X = xa + yb et X = zc + td. On en déduit l'égalité xa + yb - zc - td = 0 qui se traduit par un système que l'on résout. On arrive ainsi aux conditions x = z, y = 3z et t = 0, ce qui permet de conclure que X appartient à l'intersection si et seulement si X est colinéaire à c.

D'où, une représentation paramétrique "explicite tableau" de l'intersection sous la forme :

lin{c} = {α(5, 0, -7) / α ∈ **R**}

qui se traduit sous la forme "implicite tableau" par :

lin {c} = {(5α, 0 , -7α) / α ∈ **R**}

mais qui peut aussi être exprimée sous la forme "implicite équation" par

$$\text{lin}\{c\} = \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 5\alpha \\ (x,y,z) \in R^3 / \; y & = & 0 \\ z & = & -7\alpha \end{array} \right\}.$$

Soulignons que les trois écritures proposées, tout en se situant dans le même registre symbolique, permettent nous semble-t-il, plus ou moins facilement, la transition du point de vue paramétrique vers le point de vue cartésien. Cette transition nous semble en effet plus facile pour les deux dernières formes, la transition se faisant par relecture et élimination de α dans la deuxième, par résolution du système plus classiquement dans la troisième. Cette transition peut sembler a priori très facile, puisqu'elle peut se faire dans les deux cas mentalement, pourtant nous faisons l'hypothèse que cette facilité risque au contraire de perturber les étudiants qui risquent d'avoir quelques difficultés à repérer dans cette simplicité les indices sémiotiques qui leur servent à gérer usuellement la résolution. Précisons cependant qu'en cas de doute, les étudiants disposent a priori de divers éléments de contrôle, en prenant en compte l'articulation des points de vue paramétrique et cartésien dans l'un des cadres où elle est susceptible de s'exprimer et notamment ici dans le cadre des systèmes, le cadre linéaire et le cadre géométrique.

Précisons que cette méthode, dans sa dernière partie, peut être employée pour trouver une représentation cartésienne de l'intersection si celle-ci a été identifiée comme lin{c} par une des trois premières méthodes.

b) Méthode 5 : elle consiste à appliquer la définition de sous-espace engendré à chacun des sous-espaces vectoriels donnés et en déduire une représentation paramétrique "implicite équation" de chacun de ces sous-espaces vectoriels. On passe ensuite de la représentation paramétrique trouvée

de l'un de ces sous-espaces à une représentation cartésienne, en résolvant le système et en interprétant les conditions de résolubilité comme les équations qui caractérisent la représentation cartésienne cherchée. On obtient une seule équation, quel que soit le sous-espace vectoriel considéré et ceci peut être prévu comme dans la méthode 1 en faisant appel à une interprétation géométrique ou aux résultats sur les systèmes. Ensuite, en substituant l'expression paramétrique d'un vecteur quelconque de l'un des sous-espaces vectoriels dans l'équation de l'autre, on arrive à la conclusion que tout vecteur appartenant à l'intersection est proportionnel au vecteur c, d'où il ressort que $\text{lin}\{a, b\} \cap \text{lin}\{c, d\} = \text{lin}\{c\}$.

A partir de là, pour trouver une représentation cartésienne de l'intersection, on suit les mêmes raisonnements que ceux décrits dans la méthode précédente et on peut aussi employer les mêmes moyens de justification.

Soulignons que les choix effectués permettent de simplifier ici cette méthode générale. En effet, le sous-espace $\text{lin}\{c, d\}$ a pour équation $y = 0$ et un vecteur $\alpha a + \beta b$ de $\text{lin}\{a, b]$ appartient donc à $\text{lin}\{c, d]$ si et seulement si $3\alpha = \beta$. Il s'écrit alors $\alpha(a + 3b)$ et est égal à αc.

c) Méthode 6 : Cette méthode, qui peut sembler elle aussi bien adaptée à la tâche proposée, est celle où l'on détermine une représentation cartésienne de chacun des sous-espaces. Pour ceci on peut suivre la démarche décrite pour la méthode précédente. A partir de ces résultats, on construit le système associé à l'intersection et on en trouve une forme minimale. Dans ce cas présent, on obtient directement la forme minimale : $y = 0$ et $7x - 3y + 5z = 0$.

Là encore, le nombre d'équations peut être anticipé à chaque étape par une interprétation géométrique ou un raisonnement prenant en compte l'articulation des points de vue dans le cadre de systèmes ou le cadre linéaire.

d) Méthode 7 : dans cette tâche, les sous-espaces donnés étant deux plans vectoriels de $\mathbf{R}^3$, les étudiants peuvent aussi déterminer une représentation cartésienne de ces deux sous-espaces, en utilisant une technique de géométrie analytique mise en place au lycée, à savoir :

- soit passer par les déterminants et écrire que $\det(\vec{X}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$ et $\det(\vec{X}, \vec{c}, \vec{d}) = 0$, où $\vec{X}$ est un vecteur quelconque du plan et $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont les vecteurs donnés.

- soit passer par le produit vectoriel, c'est-à-dire déterminer l'équation de chacun des plans vectoriels donnés en déterminant d'abord un vecteur normal au plan, c'est-à-dire par exemple $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, et ensuite en déterminant l'équation via le produit scalaire, c'est-à-dire en écrivant $\vec{X}.\vec{n} = 0$, $\vec{X}$ étant un vecteur quelconque du plan.

***QUESTION 2** : 1) Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui, à chaque vecteur (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$, associe le vecteur (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$, défini par :*

$a = x + y + 3z + 10t$
$b = x + 2y + z + 4t$
$c = x \quad + 5z + 16t$

a) Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f ;
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image. (question 2 - test 1 Brésil, question 1 - test 1 - France)

2) Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui, à chaque vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$, associe le vecteur (X, Y, Z) de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$X = x + y + 3z + 10t$
$Y = x + 2y + z + 4t$
$Z = x \quad + 5z + 16t$

a) Déterminer la dimension de l'image, puis celle du noyau ;
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image. (question 1 - interrogation écrite - France)

3) Soit l'application linéaire f de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui à chaque élément (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$ associe l'élément $(x + y + 3z + 10t, x + 2y + z + 4t, x + 5z + 16t)$ de $\mathbf{R}^3$.
a) Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f ;
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image. (question 2 - test 2 Brésil, question 1 - test 2 - France).

Elle prend trois formes différentes suivant le type de représentation choisi par l'enseignant. Dans le test 1 brésilien et le test 1 français, l'application linéaire est définie par un système d'équations linéaires et dans le partiel c'est aussi cette représentation qui a été utilisée modulo le remplacement des lettres a, b, c par X, Y, Z, notations plus familières aux étudiants concernés. Dans la partie a) de cette même question, il y a aussi une petite différence entre les tests et le partiel puisque l'ordre des demandes concernant la dimension de l'image et du noyau est inversé. Dans le test 2 brésilien et le test 2 français l'application linéaire est définie par une représentation fonctionnelle. Nous les analysons ensemble en mettant en évidence les changements que peuvent induire ces différences de représentations.

La tâche proposée ici correspond à une tâche usuelle dans un premier cours d'algèbre linéaire, à ceci près que pour forcer l'articulation des points de vue, nous avons demandé une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image. On demande également en préalable les dimensions du noyau et de l'image, pour inciter les étudiants à se détacher du seul travail technique, leur fournir pour la deuxième question des instruments d'anticipation et de contrôle et étudier la façon dont ils seront éventuellement utilisés. Ces instruments peuvent fonctionner dans divers cadres comme cela a été montré dans le chapitre II.

L'explicitation de la définition du noyau conduit classiquement à une représentation cartésienne non minimale de ce dernier et la détermination d'une base du noyau, au passage de cette représentation cartésienne à une représentation paramétrique. Ce passage se situant dans la continuité de la résolution du système associé au noyau, on peut penser que les étudiants éprouveront peu le besoin de justifier qu'ils ont bien obtenu une base du noyau et ce d'autant plus que la dimension est 2. Par contre, pour déterminer une représentation cartésienne du sous-espace image, il leur faudra interpréter les conditions de résolubilité du système (ici une seule équation) en tant que représentation cartésienne de l'image. Précisons qu'il s'agit ici d'une équation très simple qui peut même être trouvée sans calcul. Ce choix est volontaire, comme dans le cas de la première tâche, pour ouvrir le champ des stratégies de résolution a priori possibles et étudier les justifications qui les accompagnent. Soulignons là encore l'aide qui peut être a priori fournie par une interprétation géométrique puisque le sous-espace image est un sous-espace de $\mathbf{R}^3$.

Nous souhaitons aussi observer l'influence éventuelle de la façon dont est définie l'application sur le comportement des étudiants et si par exemple ceux-ci éprouvent le besoin de traduire en termes fonctionnels l'application lorsqu'elle est donnée via un système d'équations.

Venons-en plus précisément aux différentes méthodes recensées a priori. Nous distinguons deux parties, en séparant, conformément à l'énoncé, la détermination des dimensions de celle des représentations.

- *Détermination des dimensions* :

Nous distinguerons ici essentiellement deux méthodes suivant l'ordre choisi entre noyau et image.

a) Méthode 1 : La première méthode, basée sur la détermination en premier lieu de la dimension du noyau, consiste à appliquer la définition du noyau d'une application linéaire, ce qui amène à un système d'équations linéaires homogènes dont le rang est égal à 2. On détermine alors une représentation cartésienne minimale du noyau, ce qui permet de conclure que dim Ker (f) = 2.

On peut aussi, à partir d'une représentation cartésienne minimale du noyau, terminer la résolution et obtenir une représentation paramétrique "explicite tableau". Cette représentation fournit deux vecteurs non colinéaires qui engendrent le noyau et donc permet de conclure qu'il s'agit d'une base du noyau et que dim Ker(f) = 2.

Dans les deux cas, une fois déterminée la dimension du noyau, on peut en déduire directement la dimension du sous-espace image, en utilisant le théorème du noyau et de l'image et conclure que dim Im(f) = 2. On peut aussi passer à la deuxième méthode basée sur la détermination de la dimension du sous-espace image, sans exploiter les résultats déjà obtenus pour le noyau.

b) Méthode 2 : La deuxième méthode, basée sur la détermination de la dimension du sous-espace image, consiste à déduire de la définition de l'application un système de 4 vecteurs générateurs du sous-espace image. Ensuite, on détermine le rang de ce système de vecteurs, en employant la méthode de Gauss sur les colonnes du tableau des coordonnées de ces vecteurs disposés en colonnes. On en déduit la dimension et une base de l'image.

Précisons que l'on peut déterminer le rang du système de vecteurs de diverses autres façons, notamment en passant au cadre matriciel ou à celui des déterminants, et en jouant éventuellement de la symétrie autorisée par le théorème assurant que le rang des vecteurs lignes est égal au rang des vecteurs colonnes. Soulignons que, dans ce cas, on n'arrive pas nécessairement directement à une base du sous-espace image. Mais le rang étant 2, il suffit alors de revenir aux vecteurs initiaux générateurs de l'image et d'en choisir deux non colinéaires pour obtenir une base.

On peut enfin essayer de déterminer la dimension du sous-espace image en appliquant la définition de l'indépendance linéaire au système de vecteurs générateurs. Il nous semble peu probable que les étudiants emploient cette stratégie.

La dimension du sous-espace image étant déterminée, soit on détermine la dimension du noyau en appliquant le théorème de la dimension du noyau et de l'image, soit on passe à la détermination directe de la dimension du noyau, c'est-à-dire à la première méthode décrite.

- *Détermination des représentations demandées* :

La deuxième partie demande une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image. Nous n'insisterons pas sur la détermination d'une base du noyau, déjà abordée précédemment.

a) Pour ce qui est de l'obtention d'une représentation cartésienne de l'image, à partir d'un système générateur ou d'une base, l'étudiant peut utiliser les méthodes décrites dans le paragraphe II.B du chapitre II qui conduiront à une équation.

Soulignons que les étudiants disposent à ce niveau de divers moyens pour contrôler et justifier leur résultats :

- recourir au cadre géométrique : on peut ainsi conclure que l'image étant un sous-espace de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$ est un plan, caractérisée par une seule équation.

- rester dans le cadre de l'algèbre linéaire et s'appuyer sur le théorème du rapport entre nombre d'équations, nombre de paramètres et dimension d'un sous-espace, dim Im(f).= 2 donc ce sous-espace sera représenté par une seule équation.

b) Une autre méthode permet, en fait, de résoudre simultanément les parties a) et b) de la tâche et peut être favorisée par la donnée de l'application sous forme de système. Elle consiste à résoudre

le système donné en employant la méthode du pivot de Gauss, ce qui conduit par exemple au système réduit suivant : $\begin{cases} x & +y & +3z & +10t & = & a \\ & y & -2z & -6t & = & b-a \\ & & & 0 & = & c-2a+b \end{cases}$.

On sait que le système homogène associé au système donné caractérise le noyau de l'application linéaire associée au système, le rang du système étant égal à 2, la dimension du noyau est égale à 2 et on déduit également une base du noyau.

Si l'on interprète le système, on sait que la condition de résolubilité de ce système c - 2a +b = 0 est l'équation qui caractérise une représentation cartésienne du sous-espace image, la dimension de ce sous-espace est donc elle aussi égale à 2.

Il est clair, que parmi les méthodes décrites, la plus économique est cette dernière méthode, puisqu'elle permet de déterminer par une seule résolution et interprétation du système toutes les questions simultanément, mais la séparation en deux sous-questions ne la favorise pas.

***QUESTION 3** : 1) Trouver une représentation cartésienne et une base du sous-espace de $\mathbf{R}^4$ défini de la façon suivante :*

$$E = \left\{ a\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\7\\-3\\3\end{pmatrix} / a,b,c \in R \right\}$$ *(question 3 - test 1 - France)*

2) Trouver une représentation cartésienne et une base du sous-espace E de $\mathbf{R}^4$ défini de la façon suivante :

$(x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \exists\, a, b, c$ *tel que* $\begin{cases} x = a - 2b \\ y = 3a + b + 7c \\ z = -a - b - 3c \\ t = a + b + 3c \end{cases}$ *(question 3 - test 2 - France).*

Dans cette tâche, on donne une représentation paramétrique "explicite tableau" non minimale d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ dans le test 1 et une représentation paramétrique "explicite équation" dans le test 2 et on demande de déterminer une représentation cartésienne et une base de ce sous-espace vectoriel. La tâche concerne donc, cette fois-ci dans $\mathbf{R}^4$, le passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne.

Pour la résolution, nous envisageons a priori les deux méthodes suivantes :

a) Méthode 1 : La première méthode consiste à vérifier si les vecteurs sont linéairement indépendants. Pour ceci, on peut employer une des méthodes décrites dans le paragraphe II.B du chapitre II ou repérer une relation évidente de liaison (ici on a, si v_1, v_2 et v_3 désignent les vecteurs colonnes : $2v_1 + v_2 = v_3$). Pour le test 2, le démarrage de la méthode impose le passage du paramétrique « implicite équation » au paramétrique « explicite tableau ». Le sous-espace étant de dimension 2, une fois la dépendance linéaire montrée, la détermination de la dimension et d'une base peut se faire directement, quelle que soit la méthode utilisée pour montrer la dépendance linéaire. On est ensuite ramené au passage d'une représentation paramétrique minimale à une représentation cartésienne, déjà analysé. Les relations entre nombre d'équations, dimension de l'espace et du sous-espace permettent d'anticiper et contrôler les résultats obtenus (un représentation cartésienne minimale sera constituée nécessairement de 2 équations non proportionnelles).

b) Méthode 2 : La deuxième méthode, qui nous semble a priori la plus adaptée à la représentation du sous-espace donnée dans le test 2, consiste à passer de la représentation paramétrique "explicite tableau" donnée à une représentation paramétrique "implicite équation" comme celle du test 2 et ensuite en résolvant le système, à obtenir, via les conditions de résolubilité, à la fois une base du sous-espace et une représentation cartésienne minimale. Contrôle et justification peuvent, dans ce cas, s'effectuer en restant dans le cadre de systèmes linéaires.

Dans cette deuxième méthode donc, on ne cherche pas à déterminer a priori la dimension de l'espace E. A posteriori, le repérage de la relation de liaison simple entre les trois vecteurs générateurs, particulièrement visible dans la forme 1 de la tâche, peut servir de contrôle.

Soulignons de plus que, dans cette tâche, le contrôle géométrique n'est plus possible et que des analogies brutales avec les cas de $\mathbf{R}^3$ peuvent conduire à des erreurs.

***QUESTION 4** : Montrer que le sous-espace de $\mathbf{R}^4$; $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x - y + 2z - t = 0$ et $2x + y - z + 3t = 0\}$ et F le sous-espace engendré par les vecteurs $(5, 5, -3, -6)$, $(-4, -5, 2, 5)$, $(1, 0, -1, -1)$ sont égaux. (question 2 - test 2 - Brésil)*

Cette question n'apparaît que dans le test 2 passé au Brésil, la deuxième année. Pour cette deuxième passation, les enseignants brésiliens ont choisi d'autres tâches parmi l'ensemble de celles que nous avions préparées, pour qu'un étudiant refaisant le test, ne soit pas confronté exactement aux mêmes tâches.

Dans cette tâche, il s'agit de montrer que deux sous-espaces vectoriels définis l'un par une représentation cartésienne minimale, l'autre par un système de générateurs dans le registre tableau sont égaux.

Pour résoudre la question, diverses méthodes sont a priori possibles, nous en décrivons quatre ci-après.

a) Méthode 1 : La première méthode consiste à déterminer les dimensions des deux sous-espaces, puis à montrer l'inclusion de F dans E pour conclure à l'égalité. Il s'agit donc d'abord de remarquer que les deux équations qui caractérisent E sont bien linéairement indépendantes puisqu'elles ne sont pas proportionnelles et à en conclure que la dimension du sous-espace vectoriel E est égale à 2, puis de déterminer le rang de la famille de vecteurs générateurs de F ou de montrer la dépendance linéaire des trois vecteurs (cf. analyse de l'exercice précédent). On en conclut que dimE = dimF = 2.

Ensuite, on montre que deux des vecteurs générateurs de F satisfont les équations de E, c'est-à-dire que $F \subset E$. De $F \subset E$ et dim E = dim F ; on en déduit par le théorème de l'inclusion et de la dimension que E = F.

b) Méthode 2 : La deuxième méthode consiste à déterminer une base de E, c'est-à-dire à traduire la représentation cartésienne donnée en une représentation paramétrique "explicite tableau" minimale. Ensuite, on détermine le rang de la famille des cinq vecteurs ainsi obtenus et l'on montre qu'il est égal à 2 par une des méthodes décrites au chapitre II. Il s'ensuit que la dimension du sous-espace vectoriel E + F est égale à 2. On sait donc que dim E = 2, dim F = 2 et dim (E + F) = 2 et en appliquant le théorème de la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels on en déduit que dim $(E \cap F) = 2$. Il s'ensuit nécessairement que E = F par le théorème de l'inclusion et de la dimension.

c) Méthode 3 : La troisième méthode consiste au contraire à déterminer une représentation cartésienne du sous-espace F en employant, par exemple, la méthode décrite dans le paragraphe II.B du chapitre II. On obtient ainsi par exemple, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / 5x - 2y + 5z = 0$ et $5x + y + 5t = 0\}$. Ensuite, on détermine le sous-espace intersection en considérant le système global construit par la réunion des quatre équations qu'on réduit, déterminant ainsi le rang du système, qui est égal à 2, ce qui permet de conclure que dim$(E \cap F) = 2$. On en déduit ensuite comme dans la méthode précédente que E = F.

d) Méthode 4 : La quatrième méthode consiste à montrer que $E \subset F$ et $F \subset E$. La deuxième inclusion est facile à montrer puisqu'il suffit de vérifier que les vecteurs générateurs de F satisfont les équations de E. Pour montrer l'inclusion inverse, on peut soit se ramener au problème

précédent en passant d'une représentation cartésienne de E à une représentation paramétrique "explicite tableau" et en déterminant une représentation cartésienne de F, soit montrer que les vecteurs générateurs de E obtenus à partir de la représentation "explicite tableau" sont bien combinaison linéaire des vecteurs de F.

Les choix effectués au niveau des valeurs numériques ne rendent pas commode cette méthode, a priori naturelle pour montrer une égalité, les relations de dépendance n'étant pas immédiatement visibles.

***QUESTION 5** : On donne 3 sous-espaces de R^3* *$E_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / 5x - 2y + 5z = 0\}$* *$E_2 = \langle (1, 0, -1), (5, 5, -3) \rangle$* *$E_3 = \langle (1, 0, -1), (0, 5, 2) \rangle$* *Comparer $E_1 \cap E_2$ et E_3. (question 2 - test 2 - France)*

E_1, E_2, E_3 désignent en fait le même sous-espace de $\mathbf{R}^3$, défini soit par une représentation cartésienne minimale, soit par deux systèmes générateurs minimaux, ayant un vecteur commun, les vecteurs étant donnés dans le registre tableau. Il s'agit donc de montrer que $E_1 \cap E_2 = E_3$.

Différentes méthodes sont a priori possibles et ont déjà été décrites puisqu'il s'agit de déterminer l'intersection de deux sous-espaces et de comparer deux sous-espaces.

Pour déterminer l'intersection $E_1 \cap E_2$, compte-tenu du fait que E_1 est donné sous forme cartésienne et E_2 par deux générateurs, la méthode générale la plus économique a priori consiste à écrire un vecteur générique du sous-espace E_2 sous la forme « implicite tableau » $((\alpha + 5\beta, 5\beta, -\alpha - 3\beta))$, puis à déterminer à quelle condition sur α et β, ce vecteur appartient à E_1. Soulignons que, vu l'égalité des deux sous-espaces, on arrive aussi à la condition $0 = 0$, susceptible de perturber les étudiants, qu'il faut interpréter correctement comme une absence de conditions sur α et β pour conclure que E_2 est inclus dans E_1.

En raisonnant sur la dimension des sous-espaces ($\dim E_1 = \dim E_2$), on en déduit que $E_1 = E_2$. La comparaison avec E_3 peut elle aussi se gérer par la même méthode générale et elle aboutira à la conclusion souhaitée, mais on peut aussi faire l'hypothèse que, sachant que le vecteur (1, 0, -1) appartient déjà à l'intersection, les étudiants préféront tester l'appartenance du second vecteur générateur de E_3 à E_1.

Soulignons que cette même stratégie de test peut être utilisée pour déterminer l'intersection $E_1 \cap E_2$, les étudiants pouvant repérer par exemple que le premier vecteur générateur de E_2 vérifie de façon évidente l'équation définissant E_1.

Soulignons également que cet exercice offre lui aussi la possibilité de recourir à des interprétations géométriques pour supporter le raisonnement : E_1 est un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ donné par son équation. E_2 et E_3 engendrés par 2 vecteurs non colinéaires sont aussi des plans vectoriels. E_1 et E_2 sont donc soit égaux, soit ont comme intersection une droite vectorielle. E_2 et E_3 sont soit égaux, soit ont comme intersection la droite vectorielle engendrée par le vecteur : (1, 0, -1).

***QUESTION 6** : On considère dans $\mathbf{R}^3$ le plan d'équation $2x + y + 2z = 4$ et les deux points de coordonnées $A : (1 + \lambda, \mu + 2, \lambda + \mu)$ et $B : (2\lambda, \mu, \mu + 2)$. Pour quelles valeurs des paramètres λ et μ, le plan P et la droite (AB) se coupent-ils en un point unique? (question 5 - test 1 - France)*[1]

L'énoncé de cette question comporte un implicite : les deux points A et B tels qu'ils sont définis sont nécessairement distincts ($\mu \neq \mu + 2$) et il tend aussi à suggérer qu'il existe bien des valeurs des paramètres pour lesquelles le plan P et la droite (AB) se coupent en un point unique, ce qui n'est justement pas le cas.

L'interprétation géométrique du problème permet d'anticiper les différents cas possibles : soit la droite (AB) et le plan P sont sécants et il existe effectivement un point d'intersection unique, soit (AB) est parallèle au plan P et il y a alors soit 0, soit une infinité de points d'intersection.

Différentes méthodes sont a priori possibles et nous en avons dégagé cinq :

a) Méthode 1 : La première méthode consiste à traduire la condition d'unicité par la condition : $\vec{AB} \notin \vec{P}$, $\vec{P}$ étant le plan vectoriel associé à P, c'est-à-dire le plan d'équation $2x + y + 2z = 0$. En substituant les composantes de $\vec{AB}$ dans les équations de $\vec{P}$, on obtient la condition : $0 = 0$ qui, correctement interprétée, permet de conclure que le problème n'a pas de solution.

b) Méthode 2 : La deuxième méthode consiste à déterminer classiquement l'intersection de (AB) et P en utilisant une représentation paramétrique de la droite (AB) et en substituant ensuite les coordonnées d'un point quelconque de la droite dans l'équation du plan (P). On arrive ainsi à la relation $4\lambda + 3\mu = 0$ ne faisant plus intervenir t et on peut conclure à l'absence de solution puisque si $4\lambda + 3\mu = 0$ la droite (AB) est incluse dans le plan P et si $4\lambda + 3\mu \neq 0$, la droite (AB) est strictement parallèle à P.

Ces deux méthodes sont a priori les plus économiques. Nous en envisageons cependant trois autres.

---

[1] * Cette tâche nous a été proposée par J.L. Dorier.

c) Méthode 3 : La troisième méthode consiste à déterminer deux vecteurs directeurs du plan, non colinéaires, par exemple $\vec{u} = (1, -2, 0)$ et $\vec{v} = (0, -2, 1)$, et à traduire la condition d'unicité par : $\det(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) \neq 0$. Comme ce déterminant est nul, on en conclut que le problème n'a pas de solution.

d) Méthode 4 : La quatrième méthode consiste à déterminer une représentation cartésienne de la droite (AB), par exemple en partant d'un représentation paramétrique, puis à résoudre le système de trois équations obtenu pour déterminer l'intersection de (AB) et P. On applique la méthode du pivot de Gauss au système et on arrive ainsi par exemple au système triangulé :

$$\begin{cases} 2x & +y & +2z & = & 4 \\ & (2-\lambda)y & +2z & = & 4-4\lambda-\lambda\mu+\mu \\ & & 0 & = & 4\lambda+3\mu \end{cases}$$

et, en interprétant les conditions de résolubilité de ce système, on déduit que:

1) si $4\lambda + 3\mu = 0$ le système à une infinité de solutions qui dépendent d'un seul paramètre pour n'importe quelle valeur de λ et μ, c'est-à-dire que l'intersection entre le plan et la droite est la droite.

2) si $4\lambda + 3\mu \neq 0$, le système n'a pas de solution : la droite est parallèle au plan.

De 1) et 2) on conclut qu'il n'y a pas des valeurs de paramètres λ et μ pour lesquelles la droite et le plan se coupent en un point unique.

e) Méthode 5 : La cinquième méthode est identique à la précédente jusqu'à l'écriture du système. Ensuite on traduit la condition d'unicité par le fait que le système soit de Cramer, et on calcule le déterminant du système. Ce déterminant étant nul, on peut conclure que le problème n'a pas de solution.

***QUESTION 7** : Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse. Si votre réponse est : "faux", essayez de trouver un contre-exemple et, si possible, de transformer l'énoncé pour le rendre vrai.*

Les affirmations concernées sont les suivantes :

a) - Tout sous-espace de $\mathbf{R}^n$ défini par r équations linéaires et homogènes indépendantes est de dimension r. (test 1 - étudiants français - maîtrise)
- Tout sous-espace de $\mathbf{R}^5$ de dimension 3 peut être défini par 3 équations linéaires homogènes indépendantes. (test 2 -étudiants français - maîtrise)

Dans les deux cas, la réponse attendue est "faux" et les étudiants peuvent s'inspirer pour produire des contre-exemples des exercices précédents : par exemple, comme contre-exemple les représentations cartésiennes du noyau ou de l'image déterminés dans la question 1 de leur test, les sous-espaces travaillés dans la question 2 (intersection de deux plans dans $\mathbf{R}^3$ - test 1, comparaison de sous-espaces de $\mathbf{R}^3$ - test 2).

Pour rectifier l'énoncé, il suffit de s'appuyer sur le théorème du rapport entre nombre d'équations, nombre de paramètres et rang d'un système d'équations linéaires pour conclure que la dimension d'un sous-espace caractérisé par r équations linéaires homogènes indépendantes d'un espace vectoriel de dimension n est égale à n-r (ce qui prouve d'ailleurs que l'énoncé a est vrai si n est pair et r = n/2).

b) - L'intersection de deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbf{R}^4$ est toujours un sous-espace de dimension 2. (test 1 - étudiants français - maîtrise).
- L'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ engendrés par trois vecteurs linéairement indépendants est toujours un sous-espace de dimension 2 (test 1 - Brésil)

La réponse attendue est "faux", mais on peut aisément se tromper si l'on oublie que les deux sous-espaces peuvent être égaux.

Néanmoins une réponse correcte peut être produite, soit que les étudiants essaient d'adapter l'énoncé au cas de $\mathbf{R}^3$ où ils peuvent raisonner géométriquement, soit qu'ils prennent conscience de l'oubli du cas particulier dans le courant de la justification. En effet si E_1 et E_2 sont de tels sous-espaces : $\dim E_1 + \dim E_2 = 6$ or $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim (E_1 + E_2) + \dim (E_1 \cap E_2)$, on a alors soit : $\dim (E_1 + E_2) = 4$ et $\dim (E_1 \cap E_2) = 2$,

soit : $\dim (E_1 + E_2) = 3$ et $\dim (E_1 \cap E_2) = 3$, ce second cas ne pouvant se produire si E_1 et E_2 sont égaux. Les contre-exemples sont donc fournis par l'égalité des sous-espaces

c) L'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ définis par une équation linéaire et homogène est toujours un sous-espace de dimension 2. (test 2 - Brésil).

La réponse attendue est faux". Les étudiants peuvent produire des contre-exemples a priori facilement ou faire un raisonnement général s'appuyant sur l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique pour conclure que le sous-espace intersection peut être de dimension 3 (si bien sûr l'équation n'est pas trivialement nulle).

Ce qui nous intéresse ici plus particulièrement, au delà de la réponse, ce sont les justifications produites. Nous serons particulièrement attentifs au recours aux théorèmes généraux ainsi qu'aux

formes prises par des généralisations éventuelles à partir de $\mathbf{R}^3$ ou par l'utilisation du cadre géométrique. On peut s'attendre en effet à des formes de généralisation abusives, conduisant à conclure par exemple que la dimension est de dimension 1 ou 2, puisque c'est l'intersection de deux plans, ou à des confusions affine / vectoriel conduisant à conclure par exemple que l'intersection peut être vide.

d) - Si l'intersection de deux sous-espace de $\mathbf{R}^4$ est de dimension 3, nous aurons pour base de l'intersection trois vecteurs (a, b, c), (d, e, f) et (g, h, i) linéairement indépendants avec a, b, c, d, e, f, g, h, i $\in \mathbf{R}$.(test 1 - étudiants français - maîtrise)
- Le sous-espace $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 2x - 3y = 0\}$ est un sous-espace de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 qui peut-être représenté par la représentation paramétrique suivante :

$$E = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} / x, z \in R \right\}$$ *(test 2 - étudiants français - maîtrise)*

Ce qui est visé ici c'est l'erreur fréquemment faite par les étudiants débutants consistant à confondre dimension et nombre de coordonnées, en particulier lorsque les marques ostensives les y incitent comme dans la deuxième version de cette question.

e) - Soit $E = \{(a + b, 2b + c, a + 5b + 2c) / a, b, c \in \mathbf{R}\}$, dim $E = 3$. (test 1 - étudiants français - maîtrise).
Soit $E = \{(a - 2b, 3a + b + 7c, -a - b - 3c, a + b + 3c) / a, b, c \in \mathbf{R}\}$. Alors dim $E = 3$. (test 2 - étudiants français - maîtrise)

La réponse attendue est "faux" ce qui est visé ici c'est cette fois la confusion entre le nombre de paramètres qui caractérisent une représentation paramétrique d'un sous-espace et la dimension de ce même sous-espace.

Pour montrer que l'affirmation du test 1 est fausse, il suffit de vérifier que la famille de vecteurs {(1, 0, 1), (1, 2, 5), (0, 1, 2), obtenue en transformant la représentation paramétrique "implicite tableau" donnée en une représentation paramétrique "explicite tableau", est liée, en utilisant, par exemple, les méthodes décrites dans le paragraphe II.B du chapitre II. On peut alors conclure que le sous-espace vectoriel E est de dimension 2 en prenant comme système générateur deux quelconques des 3 vecteurs ci-dessus, ce qui permet également de rectifier l'énoncé. Pour le test 2, on peut suivre le même raisonnement en déterminant le rang de la famille de vecteurs {(1, 3, -1, 1), (-2, 1, -1, 1), (0, 7, -3, 3)} ou se rapporter à la question 3 de ce même test où nous avons la même question, mais les sous-espaces sont donnés par des représentations paramétriques différentes et dans ce cas nous pouvons savoir si les étudiants reconnaissent les différentes

représentations paramétriques d'un même sous-espace ou s'ils ont besoin de faire le passage d'une représentation à l'autre pour se rendre compte qu'il s'agit du même sous-espace.

f) Tout sous-espace de $\mathbf{R}^n$ admettant une représentation paramétrique à p paramètres est de dimension $\leq p$. (test 2 - Brésil).

La réponse attendue est "vrai" et nous visons ici autant que la réponse les démonstrations produites, des réponses correctes pouvant notamment s'accompagner de la conviction erronée : p paramètres implique dimension p.

g) Un sous-espace de $\mathbf{R}^5$ qui peut être décrit par une représentation paramétrique avec 3 paramètres est de dimension 3. (test 1 - Brésil).

La réponse attendue est « faux » et on peut donner un contre-exemple en employant n'importe quelle représentation même non minimale (exemple : question e) et justifier avec les mêmes arguments déjà employés pour les questions précédentes. Bien sûr, ces mêmes considérations serviront à rectifier l'énoncé.

h) - Si deux sous-espaces du même espace ont la même dimension, ils sont nécessairement égaux. (test 1 - Brésil)
- Pour montrer que deux sous-espaces d'un même espace sont égaux, il suffit de montrer qu'ils ont la même dimension. (test 2 - Brésil).

Dans les deux cas, la réponse attendue est « faux » et les étudiants disposent de divers contre-exemples dans les questions précédemment traitées. Pour rectifier l'énoncé, il leur faudra faire appel à des théorèmes généraux par exemple le théorème de l'inclusion et de la dimension.

QUESTION 8 :
Soit Q le plan défini par le point B (0, 1, -2) et les vecteurs $\vec{u}$ (1, 0, 4) et $\vec{v}$ (0, 2, -1).
Donner une représentation paramétrique de Q.
Donner une représentation implicite de Q. (examen - étudiants français - compléments de mathématiques)

Cette dernière question n'appartient pas aux tests que nous avons préparés ; il s'agit de la tâche proposée dans un examen de première année de DEUG de sciences exactes de l'année 1996/97 d'un cours de compléments de mathématiques (cf. annexe 6) à l'université de Paris 7 que nous avons évoqué dans l'introduction.

Pour cet exercice, nous envisageons a priori les trois méthodes suivantes :

a) Méthode 1 : La première méthode, qui semble la plus naturelle, vu la façon par laquelle le plan est défini et la question posée, consiste à écrire directement une représentation paramétrique du plan :

$M \in P \Leftrightarrow \exists\ \lambda, \mu$ tels que $\vec{BM} = \lambda\ \vec{u} + \mu\ \vec{v}$, puis à faire le passage à une représentation cartésienne via les déterminants en écrivant $\det(\vec{BM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

b) Méthode 2 : La deuxième méthode débute comme la première mais, une fois déterminée la représentation paramétrique du plan, on utilise une méthode algorithmique semblable à celle décrite dans le paragraphe II.B du chapitre II (résolution du système et interprétation de la condition de résolubilité).

c) Méthode 3 : La troisième méthode, déjà employée au lycée, consiste à déterminer un vecteur normal au plan donné, en faisant le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui engendrent le plan. On obtient ensuite une représentation implicite du plan en écrivant que pour un point M quelconque de ce plan le produit scalaire $\vec{BM}.\vec{n} = 0$.

CHAPITRE VI

ETUDE DES DIFFERENTS NIVEAUX DE GESTION DE L'ARTICULATION ENTRE LES POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE PAR LES ETUDIANTS : L'ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ETUDIANTS FRANCAIS

INTRODUCTION

Cette étude sera d'abord effectuée séparément pour chacun des groupes analysés, puisqu'il s'agit de groupes d'étudiants de niveaux différents qui ont résolu les tâches proposées dans des contextes distincts. Nous ferons ensuite une synthèse globale, en comparant les résultats obtenus en DEUG et en maîtrise.

I. L'ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ETUDIANTS DE DEUG SCIENCES PREMIERE ANNEE - PARTIEL

I.1. LE CONTEXTE

Les copies dépouillées concernent un partiel passé au mois de Mai 1996 dans le cadre du module d'algèbre linéaire de première année de DEUG Sciences à l'Université de Marne La Vallée, soit un total de 122 étudiants. Pour ces étudiants, nous n'avons analysé que les deux premières questions du partiel : les deux questions construites de façon a ce que l'articulation entre les deux points de vue soit obligatoire. L'enseignant a choisi ces deux questions car il s'agissait de questions dans l'ensemble de celles a priori proposées que les étudiants selon lui avaient les moyens de résoudre. Les questions 1 et 2 du partiel correspondent respectivement aux questions 2 et 1 de l'analyse a priori.

I.2. PRESENTATION DE L'ANALYSE

Etant donné l'existence de nombreuses procédures erronées non prévues a priori et la grande variété des productions des étudiants qui quelquefois les conduisent à des résultats vrais, mais qu'ils ne sont pas capables de justifier ou qu'ils justifient de façon erronée, nous avons mis en place un codage plus complexe qui fait référence au travail technique proprement dit, mais qui doit aussi permettre de mettre en évidence les difficultés de justification et ce qu'elles nous apprennent sur l'articulation des deux points de vue étudiés.

L'analyse des résultats sera effectuée question par question, et organisée en deux parties :

a) présentation du codage utilisé, avec des exemples de productions typiques ;

b) résultats globaux et analyse des résultats (les résultats détaillés étudiant par étudiant sont en annexe 8).

QUESTION 1 : On considère dans R^3 les vecteurs suivants :
$\vec{a}$ = (2, 3, -1) $\vec{b}$ = (1, -1, -2) $\vec{c}$ = (5, 0, -7) $\vec{d}$ = (0, 0, 1)
Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ et $\{\vec{c}, \vec{d}\}$.

1) CODAGE UTILISE

Presque tous les étudiants ont démarré par l'une des méthodes a priori identifiées, mais vu le nombre et la diversité des erreurs, de procédures inachevées ou sans conclusion, vu aussi les difficultés de justification rencontrées, nous avons complété le codage issu de l'analyse a priori. Ceci nous conduit à 3 procédures principales **P, C, D**[1] accompagnées d'autres codes pour les comportements spécifiques. En ce qui concerne plus spécifiquement les justifications, au delà des codages justifié, non justifié, nous avons pris en compte la mention ou non de l'indépendance linéaire des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, $\vec{d}$ (codé **IL**) et les théorèmes cités par les étudiants : le théorème de l'inclusion et de la dimension (codé **TID**), le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection (codé **TDS**) et les théorèmes du rapport entre nombre d'équations, nombre de paramètres et rang d'une famille de vecteurs ou rang d'un système d'équations (codé **TPE**).

- LES PROCEDURES LIEES A LA DETERMINATION DIRECTE D'UNE REPRESENTATION CARTESIENNE DU SOUS-ESPACE INTERSECTION

La grande majorité des étudiants utilise une des méthodes 4 (codée **P**) ou 6 (codée **C**), en la faisant précéder d'une détermination de l'intersection par la méthode 1. Mais, l'application de ces méthodes peut n'être que très partielle, s'accompagner de dérapages formels, d'erreurs de calcul. Elle met de plus en évidence, comme prévu, des difficultés dans l'interprétation des résultats obtenus, et l'effet de la perturbation introduite par l'équation y = 0. En fait aucun étudiant ne suit exactement une des méthodes de l'analyse a priori. C'est pourquoi nous introduisons un certain nombre de codages pour rendre compte de cette diversité, à l'intérieur des catégories relatives aux différentes méthodes.

[1] Nous les noterons respectivement par les lettres **P**, **C** et **D** pour favoriser la mémorisation, plutôt que de reprendre les codages numériques de l'analyse a priori. En fait, la méthode **P** ou paramétrique correspond à la méthode 4 de l'analyse a priori où les étudiants débutent par l'application de la définition de sous-espace engendré à un vecteur quelconque de chacun des sous-espaces donnés, écriture de l'égalité de ces vecteurs et résolution du système. Après, détermination d'une base de l'intersection. La méthode **C** où cartésienne correspond à la méthode 6 de l'analyse a priori où les étudiants débutent par l'application de la définition de sous-espace engendré à un vecteur quelconque de chacun des sous-espaces donnés et écriture d'une représentation paramétrique. Puis, passage de chacune de ces représentations à une représentation cartésienne et conclusion directe sur l'intersection par réunion des équations de chacun des sous-espaces. La méthode **D** basée sur la détermination des dimensions pouvant être suivie des méthodes **P** ou **C**.

Méthode P :

Les codages **P** (55 étudiants) correspondent aux procédures basées sur la quatrième méthode de l'analyse a priori. Le codage **P** seul correspond à la quatrième méthode de l'analyse a priori, mais ceci ne correspond à aucune production réelle.

Pour cette méthode nous introduisons des codages permettant de prendre en compte d'une part les variantes dans la résolution, d'autre part, les erreurs en distinguant les erreurs de calcul, celles plus "conceptuelles" les dérapages formels, et les difficultés d'interprétation en fin de résolution, et enfin le recours éventuel à une interprétation géométrique.

Codage des variantes

Les variantes rencontrées consistent :

a) à résoudre le système par la méthode de substitutions successives (variante sans doute favorisée par la simplicité des équations). (code **Va**) (43 étudiants)

b) à lire directement une représentation cartésienne de l'intersection sur les composantes d'un vecteur générique (5 α, 0, - 7α), ce passage n'étant en général accompagné d'aucune justification. (code **Vb**) (8 étudiants)

Codage des erreurs (hors interprétation)

- <u>erreurs de calcul dans la résolution du système</u>. (code **CRS**) (6 étudiants)

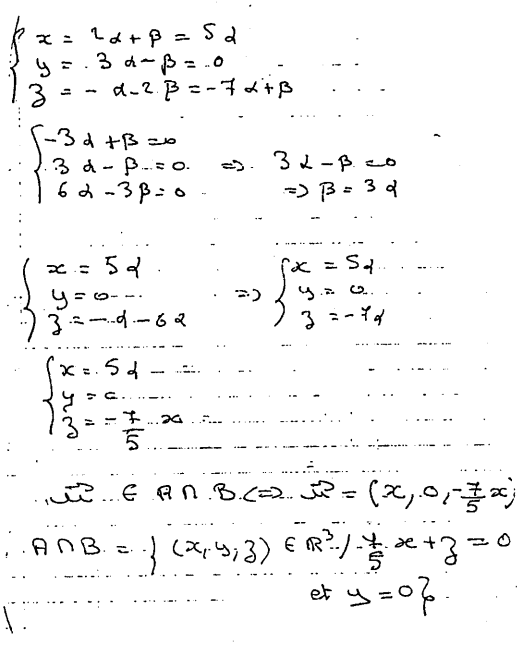
- <u>erreurs "conceptuelles" et dérapages formels</u> :

Celle rencontrée ici consiste à utiliser les mêmes paramètres pour identifier un vecteur générique des deux sous-espaces donnés (c'est-à-dire écrire par exemple X = aα + bβ = cα + dβ). Normalement, cette erreur conduit au système $\begin{cases} -3\alpha & +\beta & = & 0 \\ 3\alpha & -\beta & = & 0 \\ 6\alpha & -3\beta & = & 0 \end{cases}$ dont la seule solution est $\alpha = \beta = 0$, donc à une intersection limitée au vecteur nul; d'où une représentation cartésienne $\begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases}$ à trois équations. Mais à ceci s'ajoute l'erreur commise par certains étudiants, qui trompés par les coefficients, croient voir les trois équations proportionnelles, ils arrivent alors à la relation $-3\alpha + \beta = 0$.

Il y a aussi d'autres étudiants qui arrivent à un résultat correct, en exploitant seulement la seconde condition ci-après : $\begin{cases} x & = & 2\alpha & +\beta & = & 5\alpha \\ y & = & 3\alpha & -\beta & = & 0 \\ z & = & -\alpha & -2\beta & = & -7\alpha & +\beta \end{cases}$ $(3\alpha - \beta = 0)$, puis en substituant β en fonction de α dans les coordonnées du vecteur générique aα + bβ.

Précisons que si les étudiants utilisent cette stratégie avec le vecteur générique $c\alpha + d\beta$, ils arrivent alors à la solution erronée : $(5\alpha, 0, -4\alpha)$. Dans les deux cas, les étudiants ne raisonnant pas par équivalence, ne repèrent pas leur erreur. (code **CDa**) (11 étudiants)

Extrait de copie de l'étudiant 1



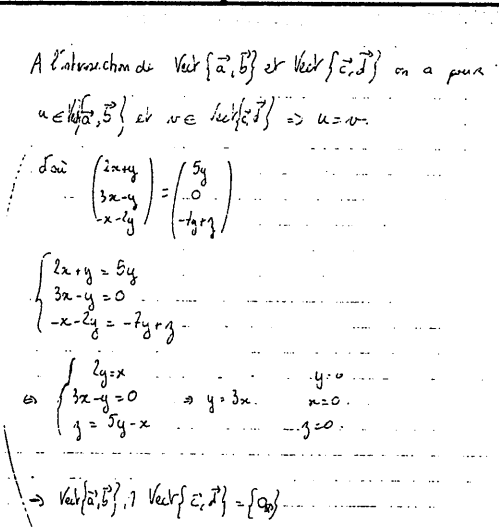
Commentaire : - démarrage erreur paramètre.

- hypothèse que c'est l'erreur fausse proportionnalité qui est commise après le système se réduit.

- la relation trouvée est exploitée par rapport au premier vecteur générique ce qui conduit à une réponse correcte.

Nous l'avons choisie parce qu'on y voit les trois types de fonctionnement décrits.

Extrait de la copie de l'étudiant 19



Commentaire : - erreur de paramètre mais partielle (x, y, z) : trois paramètres introduits.

Codage d'erreurs d'interprétation

- <u>erreurs d'interprétation de la résolution</u>.

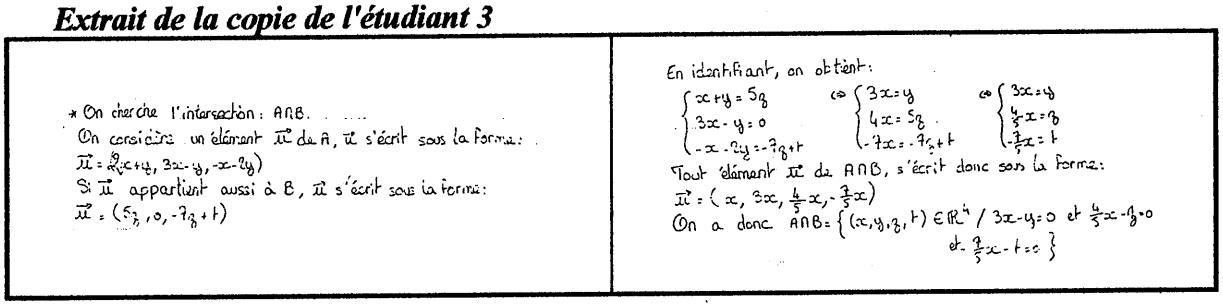
Nous réservons cette catégorie aux erreurs liées à l'interprétation des résultats obtenus à l'issue de la résolution du système. La principale erreur rencontrée est la suivante.

a) l'intersection est déterminée par rapport aux paramètres introduits. Ceci conduit a priori à une intersection dans $\mathbf{R}^4$, mais on trouve également des intersections dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$. Cette erreur est bien entendue facilitée lorsque les étudiants notent les paramètres x, y, z,t au lieu d'utiliser pour eux les lettres grecques usuelles.

Parmi les vingt deux étudiants qui commettent cette erreur quinze (68%) ont noté les paramètres par les lettres x, y, z, t. (code **Ia**) (22 étudiants) :

- Vecteurs dans $\mathbf{R}^4$. (prise en compte des 4 paramètres) (5 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 3

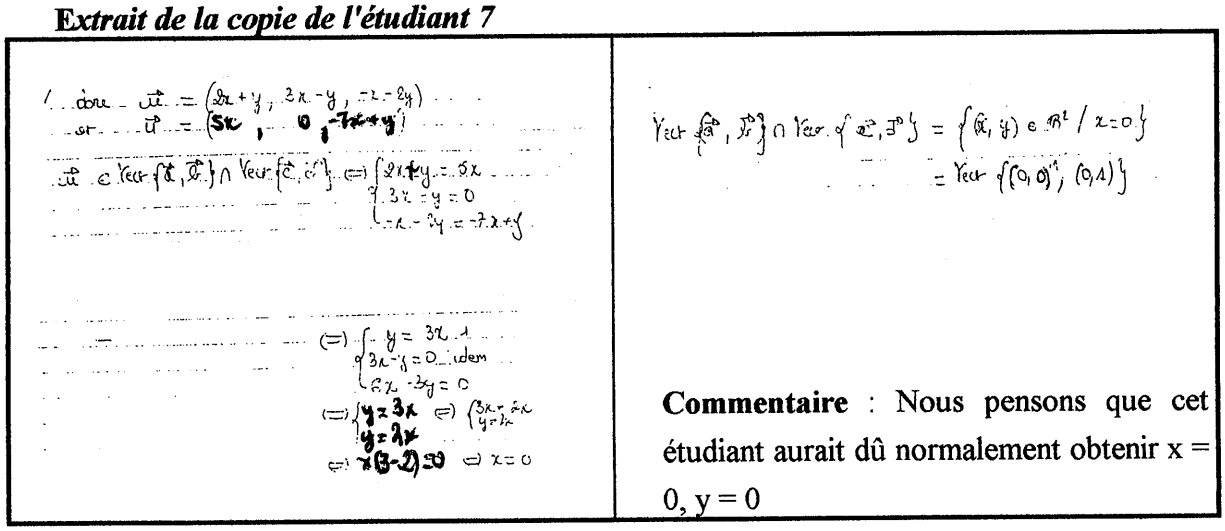


* On cherche l'intersection : A∩B.
On considère un élément $\vec{u}$ de A, $\vec{u}$ s'écrit sous la forme :
$\vec{u} = (2x+y, 3x-y, -x-2y)$
Si $\vec{u}$ appartient aussi à B, $\vec{u}$ s'écrit sous la forme :
$\vec{u} = (5z, 0, -7z+t)$

En identifiant, on obtient :
$\begin{cases} x+y=5z \\ 3x-y=0 \\ -x-2y=-7z+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=y \\ 4x=5z \\ -7x=-7z+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=y \\ \frac{4}{5}x=z \\ -\frac{7}{5}x=t \end{cases}$
Tout élément $\vec{u}$ de A∩B, s'écrit donc sous la forme :
$\vec{u} = (x, 3x, \frac{4}{5}x, -\frac{7}{5}x)$
On a donc $A \cap B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / 3x-y=0 \text{ et } \frac{4}{5}x-z=0 \text{ et } \frac{7}{5}x-t=0\}$

- Vecteurs dans $\mathbf{R}^2$. (conséquence de l'erreur d'identification des paramètres) (7 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 7



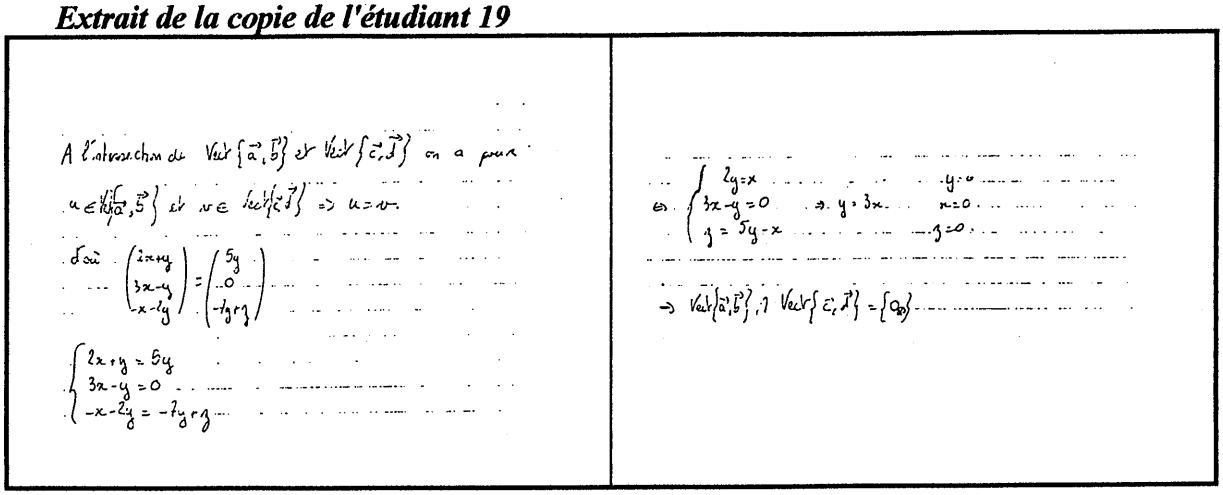
donc $\vec{u} = (2x+y, 3x-y, -x-2y)$
or $\vec{u} = (5x, 0, -7x+y)$
$\vec{u} \in Vect\{\vec{a}, \vec{b}\} \cap Vect\{\vec{c}, \vec{d}\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5x \\ 3x-y=0 \\ -x-2y=-7x+y \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ 3x-y=0 \text{ idem} \\ 6x-3y=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2x \\ y=2x \end{cases}$
$\Leftrightarrow x(3-2)=0 \Leftrightarrow x=0$

$Vect\{\vec{a}, \vec{b}\} \cap Vect\{\vec{c}, \vec{d}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x=0\}$
$= Vect\{(0,0), (0,1)\}$

Commentaire : Nous pensons que cet étudiant aurait dû normalement obtenir x = 0, y = 0

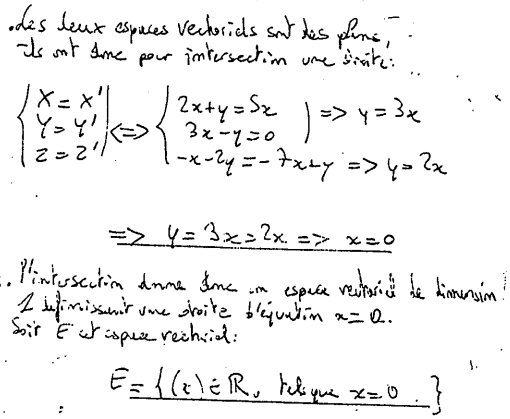
• Vecteurs dans $\mathbf{R}^3$. (9 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 19



• Vecteurs dans **R**. (accumulation d'erreurs différentes) (1 étudiant)

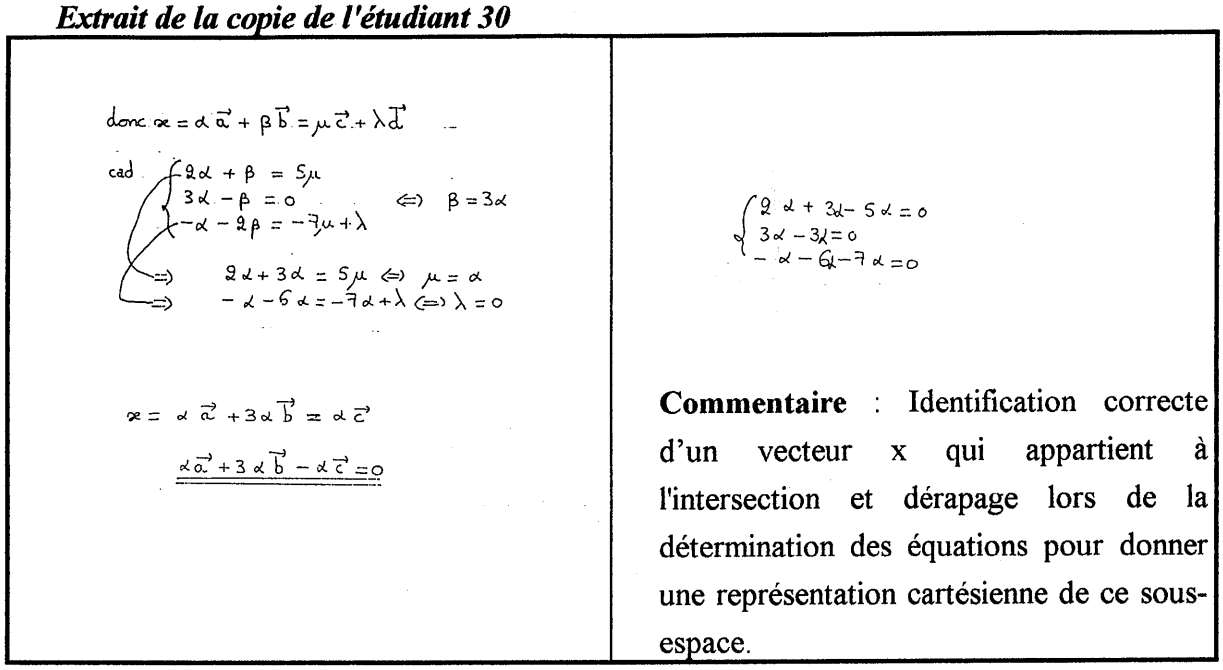
Extrait de la copie de l'étudiant 121



Commentaire : -interprétation géométrique correcte mais qui ne sert pas à contrôler la solution (x = 0 est vue comme une équation de droite). On notera la présence de grandes et petites lettres qui a priori marquent bien la distinction cooordonnées - paramètres, pourtant l'erreur paramètre est commise dans la résolution, la conclusion y = 0 est oubliée.

b) dérapage : Nous regroupons dans cette catégorie les dérapages formels plus marginaux qui se produisent à l'issue de la résolution. (code **Ib**) (6 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 30



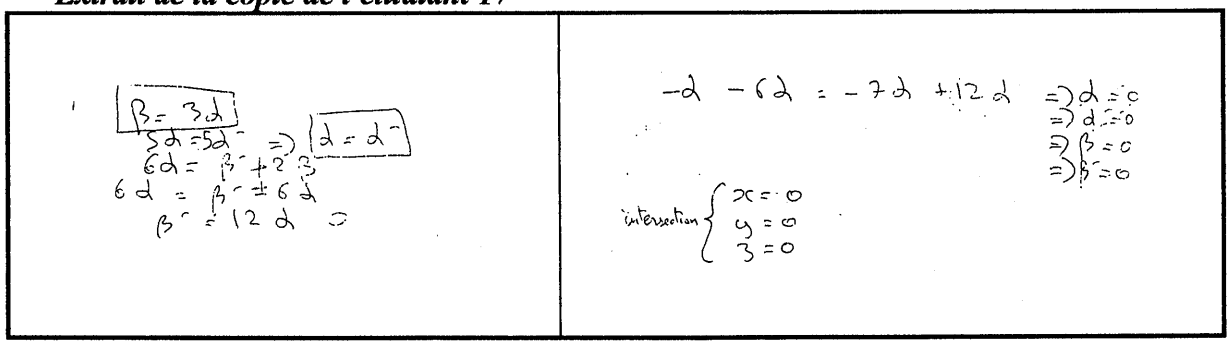
Commentaire : Identification correcte d'un vecteur x qui appartient à l'intersection et dérapage lors de la détermination des équations pour donner une représentation cartésienne de ce sous-espace.

c) d'autres erreurs marginales.

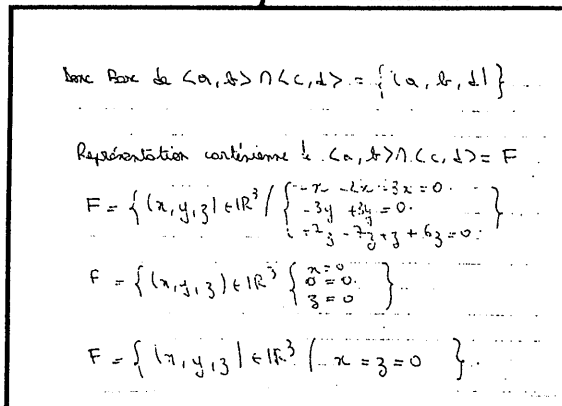
A ces deux catégories s'ajoutent des erreurs marginales diverses que nous coderons pour la prise en compte dans l'analyse. (code **Ic**) (9 étudiants)

Citons en quelques exemples :

Extrait de la copie de l'étudiant 17



Extrait de la copie de l'étudiant 47



Commentaire : confusion intersection et sous-espace engendré par les 4 vecteurs et passage à une représentation cartésienne incompréhensible.

Codage des solutions partielles.

a) Arrêt après détermination d'une représentation paramétrique correcte de l'intersection. (code **SPa**) (4 étudiants)

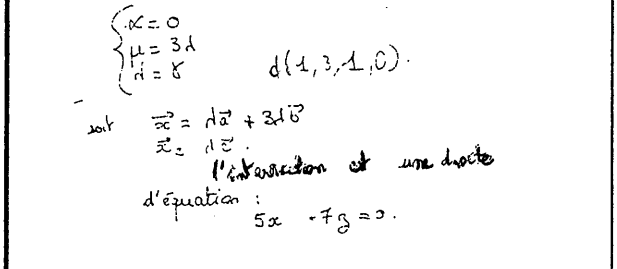
b) Arrêt après écriture d'un vecteur générique de chacun des sous-espaces donnés. (code **SPb**) (3 étudiants)

c) Arrêt après résolution correcte du système. (code **SPc**) (2 étudiants)

Codage du recours au cadre géométrique.

Dans cette méthode P, nous n'avons rencontré que deux recours au cadre géométrique. Dans les deux cas l'intersection est correctement identifiée à une droite, mais exprimée par une seule équation (oubli de y = 0) (copie 41) et suivie de l'erreur paramètre (copie 121). (code **CGa**) (2 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 41



Commentaire : l'étudiant reconnaît correctement que l'intersection est d'une droite, mais lui associe une seule équation sans être capable de contrôler son erreur.

Méthode C :

Les procédures **C** correspondent au cas où l'étudiant a suivi les raisonnements prévus dans la méthode 6 de l'analyse a priori. (29 étudiants)

Le codage **C** seul correspond à la sixième méthode de l'analyse a priori, mais ceci ne correspond à aucune production réelle.

Comme pour la méthode P, nous avons introduit des codages qui permettent de prendre en compte les variantes dans la résolution, les erreurs du calcul, les difficultés d'interprétation en fin de résolution et les recours au cadre géométrique.

Codage des Variantes

Les variantes rencontrées consistent :

a) à résoudre le système par la méthode de substitutions successives. (code **Va**) (20 étudiants)

b) à lire directement l'équation y = 0 (variante prévue dans l'analyse a priori, mais codée vu son importance pour l'analyse) (code **Vb**) (7 étudiants)

Codage d'erreurs (hors interprétation)

- erreurs de calcul dans la résolution du système :

a) par la méthode du pivot de Gauss. (code **CRS1**) (2 étudiants)

b) par la méthode de substitutions successives. (code **CRS2**) (11 étudiants)

Codage d'erreurs d'interprétation

- erreurs d'interprétation de la résolution

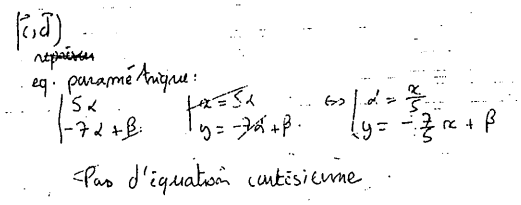
Comme l'on pouvait s'y attendre, la majorité des erreurs d'interprétation sont liées à la perturbation créée par l'équation y = 0.

Elles interviennent dès la recherche d'une représentation cartésienne du sous-espace engendré par c et d produisant des blocages ou erreurs. (13 étudiants) (cf. copies 86 et 99).

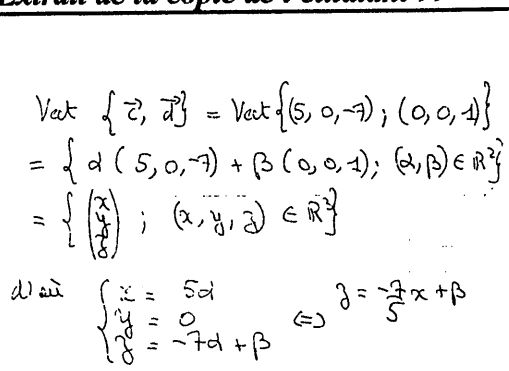
Elles peuvent intervenir plus marginalement après la reconnaissance de y = 0 comme l'équation de lin{c, d}. (7 étudiants) (cf. copie 87 et 88)

A ces erreurs, s'ajoutent quelques erreurs ou blocages se produisant dans la détermination de l'équation de lin {a, b}. (2 étudiants) (cf. copie 90) (code **Id**) (22 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 86

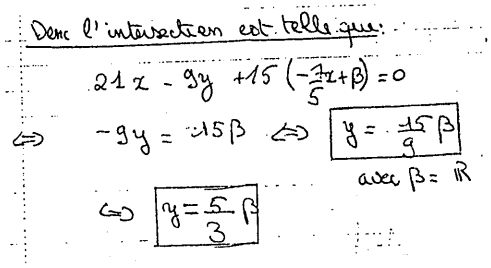
	**Commentaire** : substitution de y par z et évacuation de z.

Extrait de la copie de l'étudiant 99



$$\text{Vect}\{\vec{c},\vec{d}\} = \text{Vect}\{(5,0,-7);(0,0,1)\}$$
$$= \{\alpha(5,0,-7)+\beta(0,0,1);(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}5\alpha\\0\\-7\alpha+\beta\end{pmatrix};(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

d'où $\begin{cases}x=5\alpha\\y=0\\z=-7\alpha+\beta\end{cases} \Leftrightarrow z=\frac{-7}{5}x+\beta$

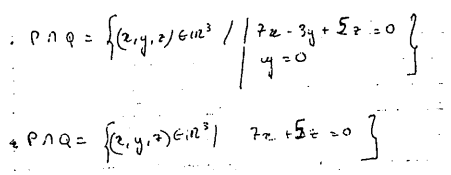


Donc l'intersection est telle que :

$$21x-9y+15\left(\frac{-7}{5}x+\beta\right)=0$$
$$\Leftrightarrow -9y=-15\beta \Leftrightarrow \boxed{y=\frac{15}{9}\beta}$$
avec $\beta=\mathbb{R}$
$$\Leftrightarrow \boxed{y=\frac{5}{3}\beta}$$

Commentaire : Non reconnaissance de y = 0 et bricolages pour déterminer α et β.

Extrait de la copie de l'étudiant 87.

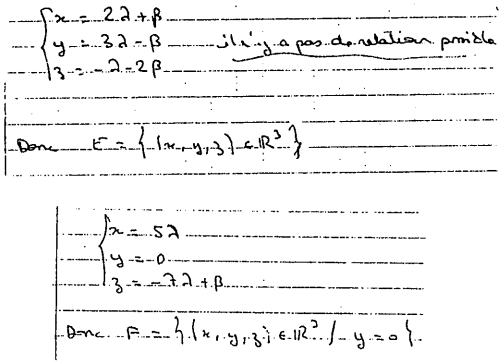


$$\cdot\ P\cap Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; \begin{matrix}7x-3y+5z=0\\ y=0\end{matrix}\right\}$$

$$\cdot\ P\cap Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 7x+5z=0\}$$

Commentaire : évacuation de l'équation y = 0 après écriture correcte d'une représentation cartésienne de l'intersection

Extrait de la copie de l'étudiant 88.

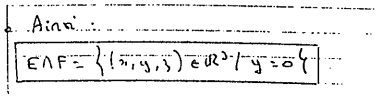


$$\begin{cases}x=2\lambda+\beta\\y=3\lambda-\beta\\z=\lambda+2\beta\end{cases}$$ il n'y a pas de relation privilégiée

Donc $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$$\begin{cases}x=5\lambda\\y=0\\z=-7\lambda+\beta\end{cases}$$

Donc $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\}$

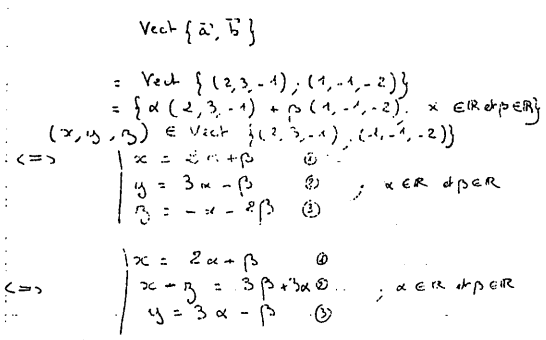


Ainsi :

$$E\cap F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\}$$

Commentaire : reconnaissance de l'équation y = 0 pour lin{c,d} et conclusion de l'impossibilité d'existence de relation entre les coordonnées pour lin{a, b} sans résolution du système.

Extrait de la copie de l'étudiant 90



Commentaire : résolution du système inachevée par bricolage sur les équations. Blocage dans le passage paramétrique / cartésien.

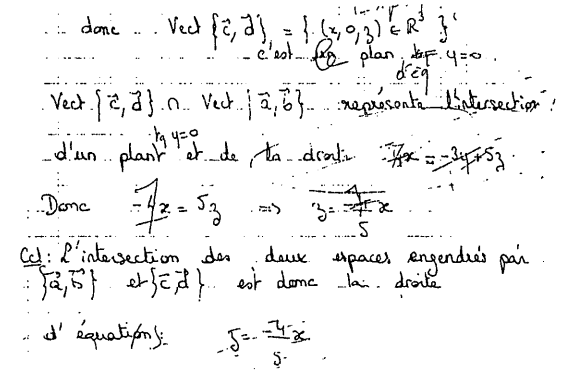
Codage du recours au cadre géométrique

Nous ne rencontrons que deux recours au cadre géométrique, l'un similaire à celui observé pour la méthode P, l'autre correct mais où l'interprétation géométrique se limite à lin{c, d}.

a) recours au cadre géométrique avec erreur de glissement de dimension. (code **CGa**)

(1 étudiant)

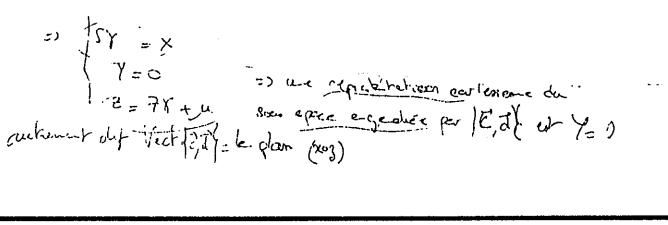
Extrait de la copie de l'étudiant 85



Commentaire : interprétation géométrique correcte de lin {c, d} et erronée de lin{a, b} suivie d'interprétation géométrique correcte de l'intersection et une seule équation pour la caractériser. Même le résultat correct de lin{c,d} ne permet pas à l'étudiant de contrôler les autres erreurs.

b) interprétation correcte de lin {c, d} comme le plan xOz et détermination l'équation y = 0. (code **CGb**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant 84.



Commentaire : recours au cadre géométrique seulement pour lin {c, d}.

Méthode D

Les codages **D** correspondent aux procédures basées sur la méthode 1 de l'analyse a priori. Elles apparaissent soit, comme on a vu dans l'analyse a priori, conjuguées avec les procédures citées précédemment, soit seules mais ne permettant pas d'aboutir. (15 étudiants)

Codage des solutions partielles

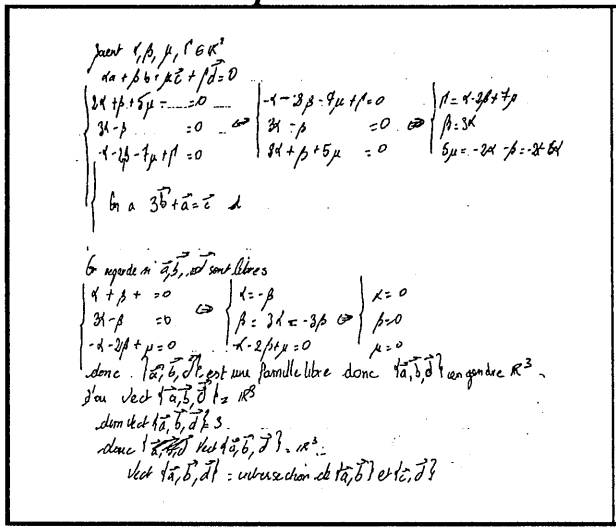
a) déterminer la dimension des sous-espaces engendrés par a, b et c, d soit en utilisant la définition de l'indépendance linéaire, soit par la lecture de la non colinéarité des deux vecteurs donnés. (code **SPe**) (10 étudiants)

b) Montrer la dépendance linéaire des 4 vecteurs a, b, c, d soit par utilisation de la définition d'indépendance linéaire, soit par la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en colonnes. (code **SPf**) (6 étudiants)

Codage des erreurs de caractérisations de l'intersection

a) caractériser l'intersection par lin {a, b, d}, c'est-à-dire par le sous-espace somme. (code **CIa**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant 112



Commentaire : vérification de l'indépendance linéaire des vecteurs a, b, d après la vérification pour les vecteurs a, b, c, d

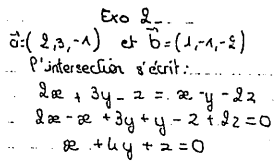
b) caractériser correctement une représentation paramétrique de l'intersection et déterminer une représentation cartésienne avec oubli de l'équation y = 0. (codé **CIb**) (1 étudiant)

Code E

Nous avons codé **E** les cas où l'étudiant n'emploie aucune des méthodes prévues dans l'analyse a priori. Dans cette catégorie nous avons rencontré des associations diverses et erronées d'équations ou de systèmes aux données du problème, mais aussi des associations et résolutions difficilement interprétables. (15 étudiants)

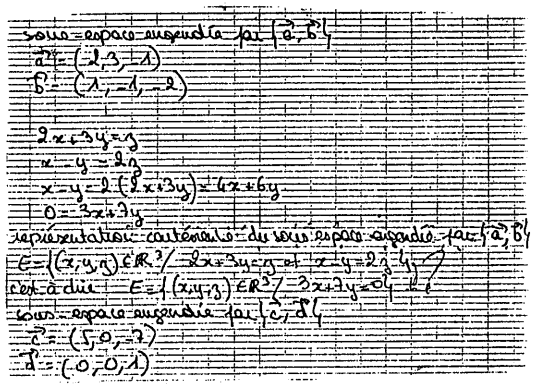
a) Passage direct des coordonnées des vecteurs aux équations (cf. copie 25). (9 étudiants)

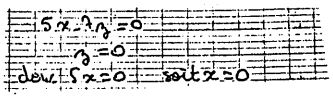
Extrait de la copie de l'étudiant 25

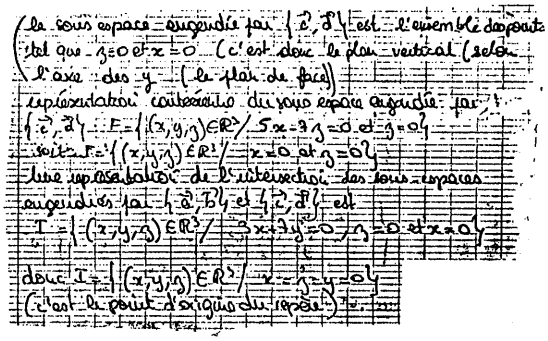

Exo 2
$\vec{a}=(2,3,-1)$ et $\vec{b}=(1,-1,-2)$
l'intersection s'écrit :
$2x+3y-z=x-y-2z$
$2x-x+3y+y-z+2z=0$
$x+4y+z=0$

Commentaire : association équation / vecteur et détermination d'une seule équation par identification des deux équations trouvées.

Extrait de la copie de l'étudiant 98


sous-espace engendré par $\{\vec{a},\vec{b}\}$
$\vec{a}=(2,3,-1)$
$\vec{b}=(1,-1,-2)$
$2x+3y=z$
$x-y=2z$
$x-y=2(2x+3y)=4x+6y$
$0=3x+7y$
représentation cartésienne du sous espace engendré par $\{\vec{a},\vec{b}\}$
$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+3y-z=0 \text{ et } x-y=2z=4y\}$
c'est à dire $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+3y=0\}$
sous-espace engendré par $\{\vec{c},\vec{d}\}$
$\vec{c}=(5,0,-7)$
$\vec{d}=(0,0,1)$

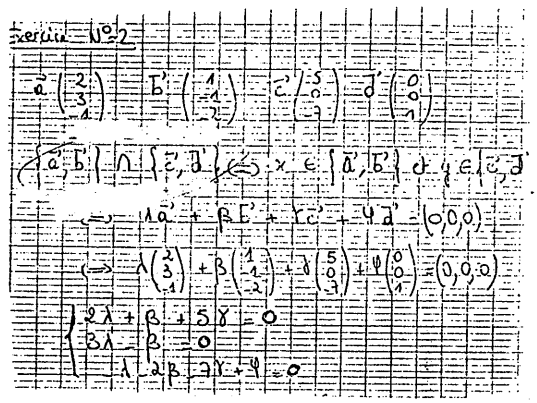

$5x+3y=0$
$y=0$
donc $5x=0$ soit $x=0$


(le sous espace engendré par $\{\vec{c},\vec{d}\}$ est l'ensemble des point tel que $y=0$ et $x=0$ (c'est donc le plan vertical (selon l'axe des y (le plan de face))
représentation cartésienne du sous espace engendré par $\{\vec{c},\vec{d}\}$ $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 5x-3y=0 \text{ et } y=0\}$
soit $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=0 \text{ et } y=0\}$
une représentation de l'intersection des sous-espaces engendrés par $\{\vec{a},\vec{b}\}$ et $\{\vec{c},\vec{d}\}$ est
$I=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 2x+3y=0, y=0 \text{ et } x=0\}$
donc $I=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=y=0\}$
(c'est le point d'origine du repère)

Commentaire : association équation / vecteur et recours au cadre géométrique qui montre de difficultés profondes dans ce cadre.

b) divers systèmes associés où une interprétation est possible, ou encore des systèmes plus difficilement interprétables. (5 étudiants)

Extraits des copies des étudiants 111 et 114



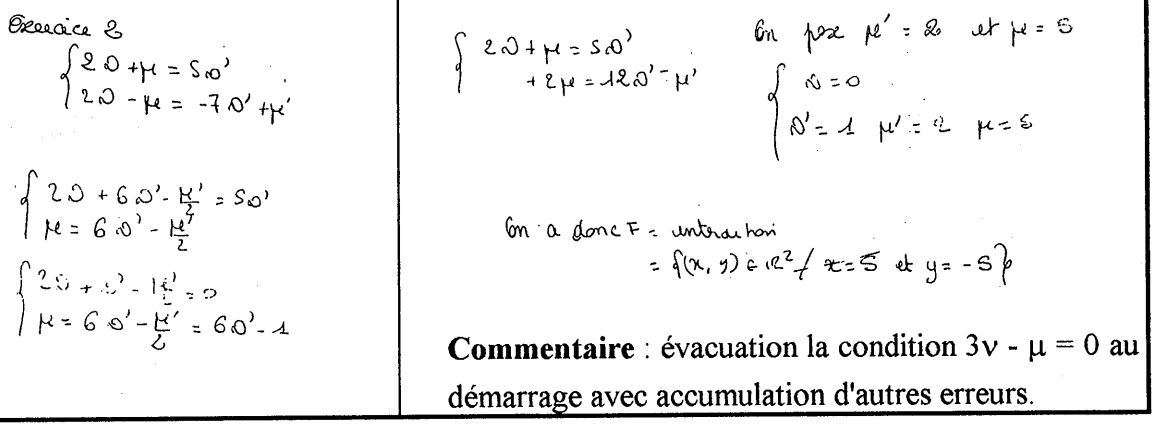
exo 2

$$\begin{cases} 2x + y + 5z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ -x - 2y - 9z = 1 \end{cases} \qquad y = 3x$$

$$2x + 3x + 5z = 0 \qquad x = -z$$

Commentaire : il semble que l'étudiant parte de la relation $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$

Extrait de la copie de l'étudiant 115



Exercice 8

$$\begin{cases} 2\alpha + \mu = 5\alpha' \\ 2\alpha - \mu = -7\alpha' + \mu' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 6\alpha' - \frac{\mu'}{2} = 5\alpha' \\ \mu = 6\alpha' - \frac{\mu'}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \alpha' - \frac{\mu'}{2} = 0 \\ \mu = 6\alpha' - \frac{\mu'}{2} = 6\alpha' - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \mu = 5\alpha' \\ +2\mu = 12\alpha' - \mu' \end{cases}$$

On pose $\mu' = 8$ et $\mu = 5$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha' = 1 \quad \mu' = 2 \quad \mu = 5 \end{cases}$$

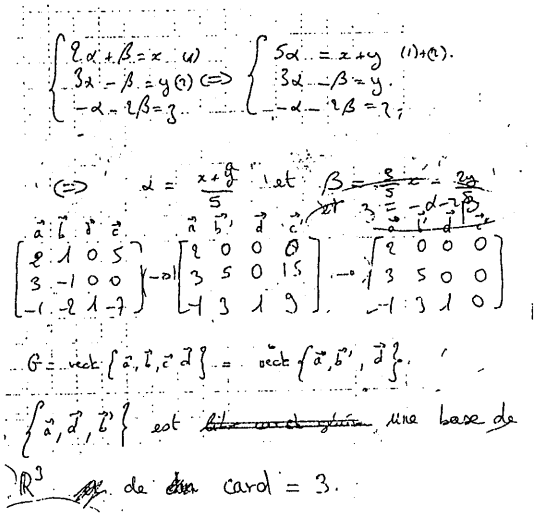
On a donc F = intersection

$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \; x = 5 \text{ et } y = -5\}$

Commentaire : évacuation la condition $3\nu - \mu = 0$ au démarrage avec accumulation d'autres erreurs.

c) d'autres erreurs marginales. (1 étudiant)

Extrait de copie de l'étudiant 81



Commentaire : écriture correcte de systèmes avec résolution erronée, abandon de cette idée et détermination de l'indépendance linéaire des vecteurs a, b, c, d et conclusion correcte que {a,b,d} forment une base de $\mathbf{R}^3$.

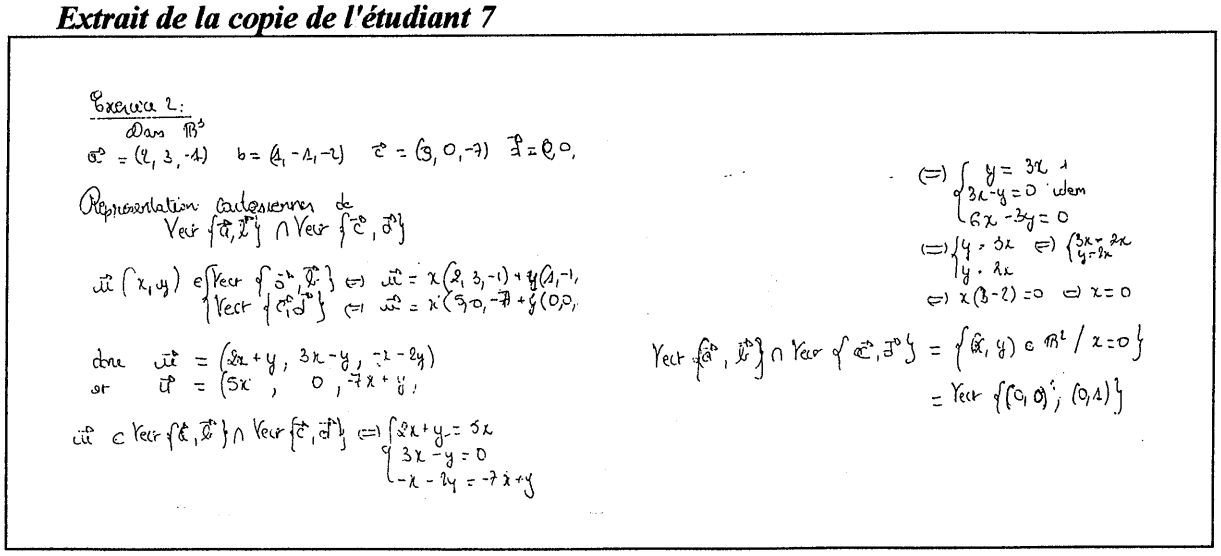
Niveau d'explicitation

Dans la mesure où les productions des étudiants donnent essentiellement à voir des calculs, il nous a semblé important d'introduire et coder différents niveaux d'explicitation. Nous avons distingué les 4 niveaux d'explicitation suivants :

Niveau **0** : lorsque l'étudiant n'aborde pas la question. (19 étudiants) (15%)

Niveau **1** : ne donne à voir qu'une succession de calculs sans articulation logique marquée, ni démarche explicitée. (19 étudiants) (15%)

Extrait de la copie de l'étudiant 7



Exercice 2 :
Dans $\mathbb{R}^3$
$\vec{a} = (2, 3, -1)$ $b = (1, -1, -2)$ $\vec{c} = (3, 0, -7)$ $\vec{d} = (0, 0, 1)$

Représentation cartésienne de
$\text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\} \cap \text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\}$

$\vec{u}(x, y) \in \begin{cases} \text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\} \\ \text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = x(2, 3, -1) + y(1, -1, -2)$
$\Leftrightarrow \vec{u} = x(3, 0, -7) + y(0, 0, 1)$

donc $\vec{u} = (2x + y, 3x - y, -x - 2y)$
or $\vec{u} = (3x, 0, -7x + y)$

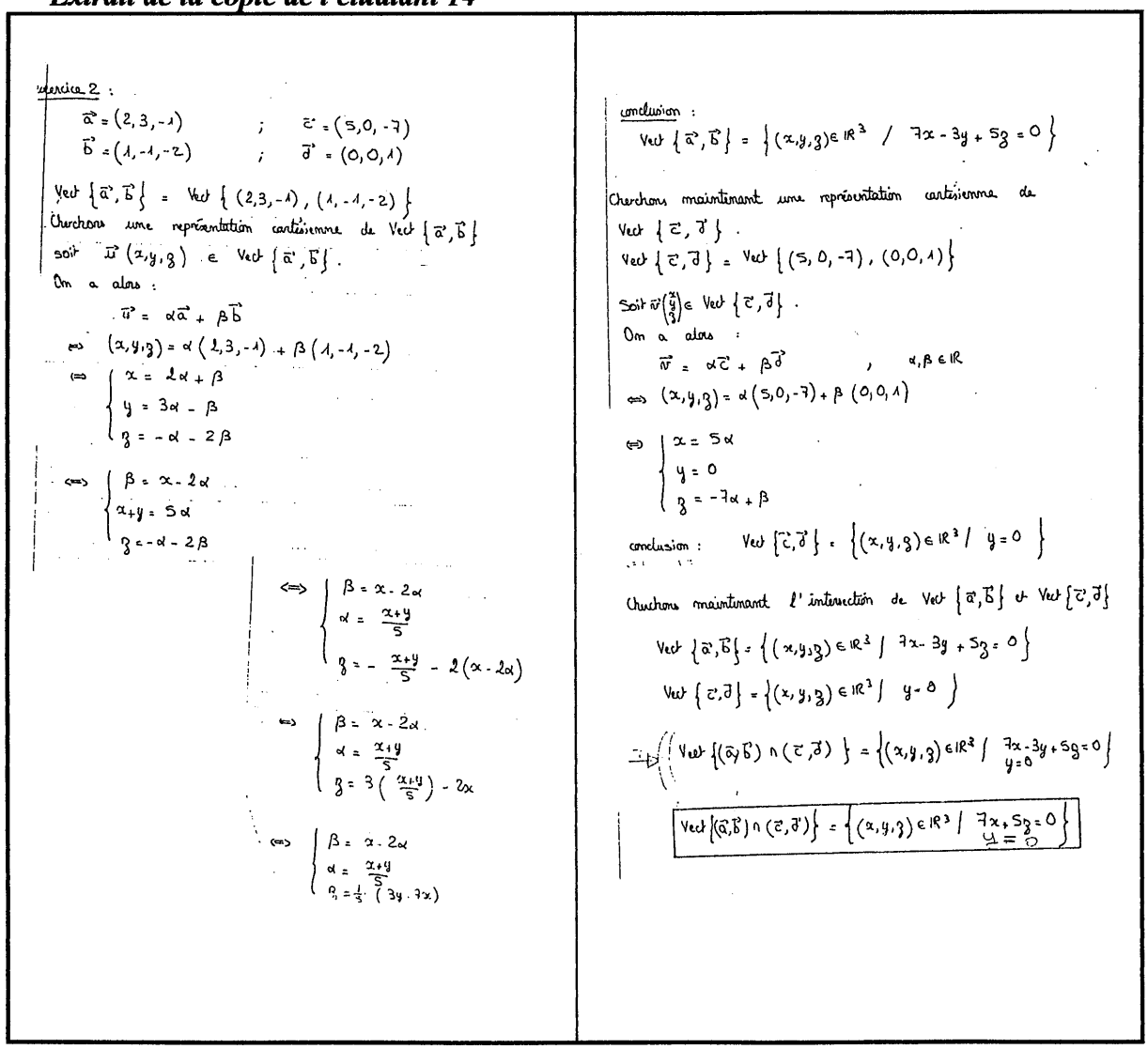
$\vec{u} \in \text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\} \cap \text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3x \\ 3x - y = 0 \\ -x - 2y = -7x + y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x - y = 0 \text{ idem} \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2x \\ y = 2x \end{cases} \\ y = 2x \end{cases}$
$\Leftrightarrow x(3 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\} \cap \text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$
$= \text{Vect}\{(0, 0); (0, 1)\}$

Niveau **2** : donner à voir la démarche suivie avec éventuellement des rappels de définition, mais sans discours justificatif explicite. (74 étudiants) (60,6%)

Extrait de la copie de l'étudiant 14



Exercice 2 :

$\vec{a} = (2, 3, -1)$; $\vec{c} = (5, 0, -7)$
$\vec{b} = (1, -1, -2)$; $\vec{d} = (0, 0, 1)$

$\text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\} = \text{Vect}\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$
Cherchons une représentation cartésienne de $\text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\}$
soit $\vec{u}(x, y, z) \in \text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.
On a alors :

$\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$
$\Leftrightarrow (x, y, z) = \alpha(2, 3, -1) + \beta(1, -1, -2)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha + \beta \\ y = 3\alpha - \beta \\ z = -\alpha - 2\beta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - 2\alpha \\ \alpha + y = 5\alpha \\ z = -\alpha - 2\beta \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - 2\alpha \\ \alpha = \frac{x+y}{5} \\ z = -\frac{x+y}{5} - 2(x - 2\alpha) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - 2\alpha \\ \alpha = \frac{x+y}{5} \\ z = 3\left(\frac{x+y}{5}\right) - 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = x - 2\alpha \\ \alpha = \frac{x+y}{5} \\ 0 = \frac{1}{5}(3y - 7x) \end{cases}$

conclusion :
$\text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 7x - 3y + 5z = 0\}$

Cherchons maintenant une représentation cartésienne de
$\text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\}$.
$\text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\} = \text{Vect}\{(5, 0, -7), (0, 0, 1)\}$

Soit $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\}$.
On a alors :

$\vec{w} = \alpha\vec{c} + \beta\vec{d}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (x, y, z) = \alpha(5, 0, -7) + \beta(0, 0, 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5\alpha \\ y = 0 \\ z = -7\alpha + \beta \end{cases}$

conclusion : $\text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$

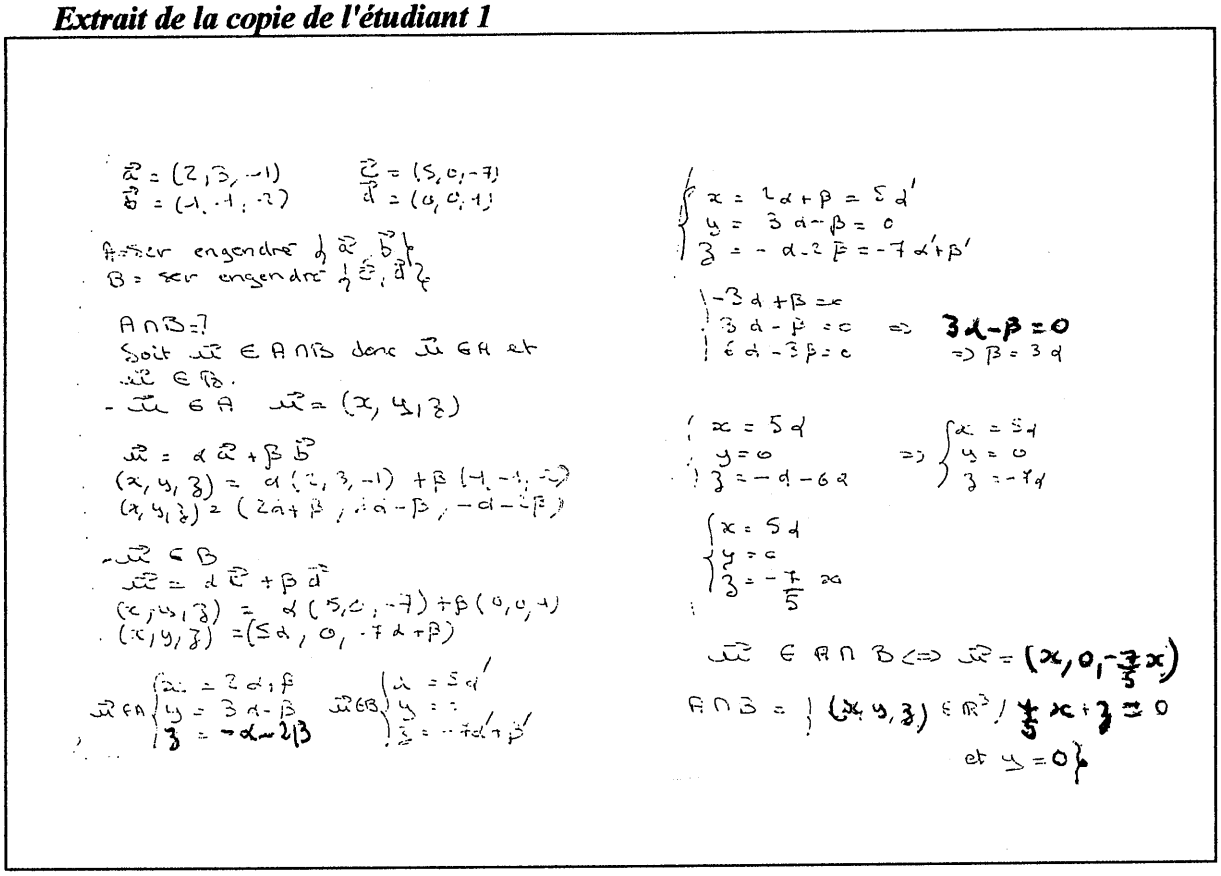
Cherchons maintenant l'intersection de $\text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ et $\text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\}$

$\text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 7x - 3y + 5z = 0\}$
$\text{Vect}\{\vec{c}, \vec{d}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$

$\Rightarrow \text{Vect}\{(\vec{a}, \vec{b}) \cap (\vec{c}, \vec{d})\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} 7x - 3y + 5z = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\}$

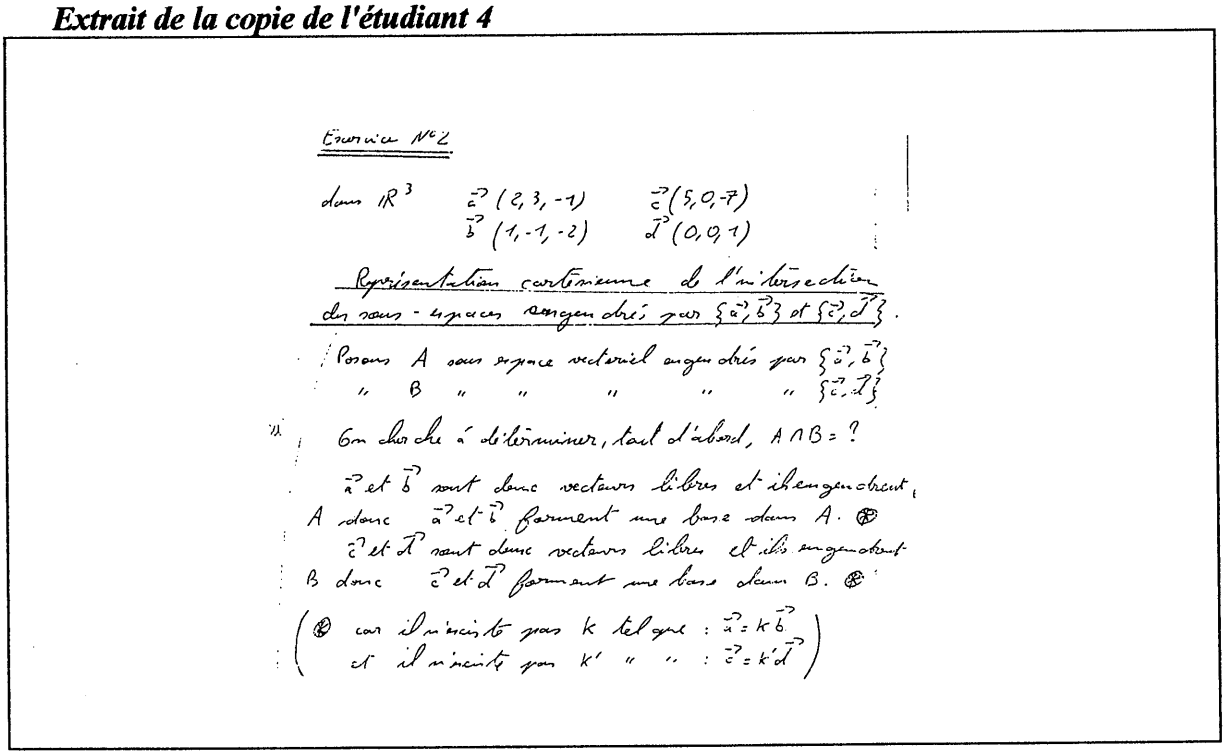
$\boxed{\text{Vect}\{(\vec{a}, \vec{b}) \cap (\vec{c}, \vec{d})\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} 7x + 5z = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\}}$

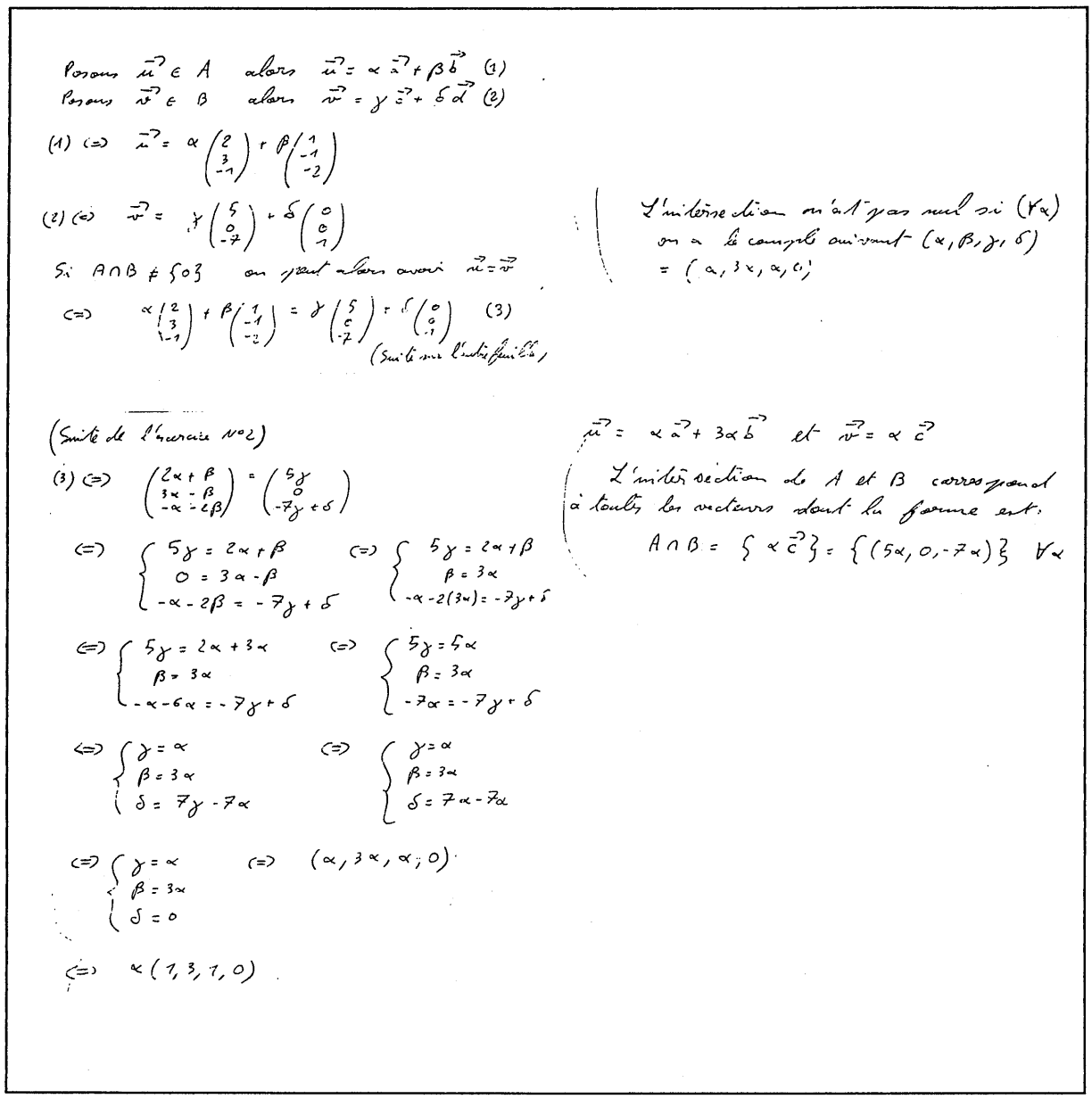
Extrait de la copie de l'étudiant 1



Niveau **3** : donner à voir la démarche suivie avec discours justificatif explicite. (10 étudiants) **(8%)**

Extrait de la copie de l'étudiant 4





2) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE

Nous présenterons dans les tableaux ci-dessous des résultats globaux en reprenant les différentes variables identifiées dans le codage, et en distinguant dans le tableau 2 les différents groupes de travaux dirigés auxquels appartenaient les étudiants.

Réussite (rep. cart. correcte de l'int.)	Réussite partielle (rep. par. correcte de l'int.)	Echec	n'aborde pas la question
9	5	90	18

Tableau 1 : Réussite / Echec

	Procédure P			Procédure C		
TD	**Réussite**	**Echec**	**Inachevée**	**Réussite**	**Echec**	**n'aborde pas**
1	1	15	2	0	2	3
2	5	11	0	0	4	2
3	1	8	0	1	8	2
4	0	5	1	0	7	6
5	0	5	1	1	6	5

Tableau 2 : Réussite / Echec par groupe de TD et pour les méthodes P et Q

	Procédure P	Procédure C	
correctes	7	2	**correctes**
erreur de calcul	6	13	**erreur de calcul**
erreur d'interprétation	28	19	**erreur d'interprétation**
autres erreurs	4	1	**autres erreurs**
recours au cadre géométrique	1	2	**recours au cadre géométrique**
erreur paramètres	11		
inachevée rep. par. correcte	4		
inachevée rés. syst. correcte	2		
Total	55	29	**Total**

Tableau 3 : Les difficultés, les erreurs et le recours au cadre géométrique pour les méthodes P et C

1) Réussite globale

Le résultats montrent tout d'abord que cette question pose des difficultés sérieuses aux étudiants : il n'y a que neuf réussites complètes et ceci, bien que quatre-vingt trois étudiants sur ceux qui abordent la question aient démarré par les procédures codés P et C prévues dans l'analyse a priori. Et même si l'on considère la réussite partielle qui consiste à arriver à une représentation paramétrique correcte de l'intersection, on n'obtient que cinq réussites supplémentaires.

2) Choix de méthodes, méthode et réussite

Parmi les sept méthodes identifiées dans l'analyse a priori, deux sont massivement représentées, les méthodes 4 et 6. La méthode 1 est utilisée par deux étudiants, un seul arrivant à une représentation paramétrique correcte, les méthodes 2, 3, 5 et 7 ne sont utilisées par personne. Ceci confirme les difficultés de recours efficace :

- aux raisonnements portant sur la dimension, l'inclusion, le recours aux théorèmes généraux puisque les méthodes 1 et 2 justement étaient celles qui les sollicitaient,

- au cadre géométrique lorsque la question n'est pas posée déjà dans ce cadre, puisque les méthodes 3 et 7, de nature géométrique ne sont jamais utilisées.

L'absence de recours à la méthode 5 était relativement prévisible. Elle ne fait pas partie des méthodes enseignées, contrairement aux méthodes 4 et 6 (cf. chapitre IV). Elle oblige à gérer différemment les deux sous-espaces et n'est vraiment économique ici que parce que la représentation cartésienne de l'un des sous-espaces peut être déterminée sans calcul, à condition de raisonner sur sa dimension et de mettre en jeu donc l'articulation des points de vue dans le cadre linéaire.

La méthode P (méthode 4) est plus choisie que la méthode C (méthode 6), ce qui peut s'expliquer par le fait que l'écriture de l'appartenance d'un vecteur à l'intersection des deux sous-espaces débouche directement sur cette méthode. On note cependant que la répartition des choix suivant les méthodes P et C n'est pas uniforme dans tous les groupes de TD et que la réussite n'est pas non plus homogène suivant les méthodes, la réussite partielle n'étant associée qu'à la méthode P.

Même si l'on exclut les réussites partielles, la méthode P semble conduire un peu moins à l'échec que la méthode C. On peut faire l'hypothèse que cette différence est due au fait que, dans la méthode C, la perturbation introduite par l'équation $y = 0$ joue plus fortement. Nous y reviendrons dans l'analyse des erreurs. Parmi les quatorze étudiants qui ont réussi (en incluant les réussites partielles) cinquante cinq (45%) ont utilisé la méthode P et vingt neuf (24%) seulement la méthode C et on note aussi une réussite partielle par la méthode D (méthode 1). Il y a donc un décalage net entre les réussites.

Les erreurs de calcul sont peu nombreuses et plus fréquentes pour la méthode C (qui nécessitait la résolution de 2 systèmes) que pour P. Ce sont les erreurs d'interprétation qui dominent massivement. Nous y reviendrons dans l'analyse car ce sont celles qui nous renseignent le plus directement sur les difficultés rencontrées dans l'articulation des points de vue.

3) Le faible recours au cadre géométrique

Nous avons souligné plus haut, la non utilisation des méthodes géométriques identifiées dans l'analyse a priori. Mais, même au niveau interprétatif, le recours au cadre géométrique est très faible : il ne concerne que cinq étudiants et est très peu efficace. En effet, parmi les cinq étudiants qui y ont recours, quatre commettent des erreurs :

- trois après avoir identifié correctement l'intersection comme une droite, ne lui associent qu'une équation.

- un associe à lin{c, d] l'ensemble des points tels que x = 0 et z = 0 (au lieu de y = 0) qu'il identifie ensuite comme un plan vertical de face.

Les erreurs commises mettent bien en évidence les difficultés que les étudiants rencontrent à faire fonctionner l'articulation des points de vue dans le cadre géométrique.

4) La faible exploitation des résultats sur la dimension

Nous avons souligné plus haut, la non utilisation des méthodes basées sur la détermination de la dimension de l'intersection. Mais, même indépendamment du choix de méthode, nous voudrions souligner que les résultats sur la dimension des sous-espaces lin{a, b}, lin{c, d}, lin{a, b, c, d}, lorsqu'ils sont obtenus dans le courant de la résolution, ne sont pas exploités et n'empêchent pas la production de résultats incohérents avec les dimensions trouvées.

5) Analyse des erreurs

Les erreurs de calcul limitées : Comme nous l'avons prévu, les résultats obtenus montrent que cette tâche ne pose pas de difficultés liées aux calculs, ou au choix d'une méthode adaptée pour résoudre le système puisque celui-ci pouvait même être résolu par des bricolages sur les équations. La simplicité du système donné semble amener les étudiants à ne pas utiliser la méthode du pivot de Gauss, ce qui est compréhensible. En général, ils utilisent des méthodes où l'équivalence n'est pas explicitement gérée et ceci peut contribuer sans doute à limiter leurs possibilités de contrôle vis à vis des interprétations produites.

Les difficultés d'interprétation des résultats trouvés : C'est l'analyse de ces difficultés que nous visions plus particulièrement à travers cette tâche. Elles se traduisent en particulier via : la perturbation liée à l'équation y = 0, les blocages et l'erreur "paramètres".

- perturbation y = 0 : Parmi les étudiants qui utilisent la méthode C et sont directement confrontés à cette équation, quatorze étudiants ne la reconnaissent pas, deux seulement donnent cette équation cartésienne de lin{c, d} (dont un par lecture directe), et quatre ayant obtenu cette équation et l'intersection, substituent ensuite 0 à y, donnant ainsi une intersection avec une seule équation.

- blocages : Parmi les étudiants qui utilisent la méthode P et arrivent à une représentation paramétrique correcte de l'intersection (11 étudiants), seuls sept fournissent une réponse correcte (tous par lecture directe), un en déterminant un vecteur générique correct, oublie, lors de la lecture, l'équation y = 0 et se retrouve avec une contradiction non identifiée entre nombre de paramètres et nombre d'équations, quatre bloquent là sans être capables de déterminer une représentation cartésienne par lecture sur les composantes du vecteur générique déterminé.

- erreur "paramètre" : Cette erreur consiste, rappelons-le, à caractériser l'intersection par rapport aux paramètres introduits, que les étudiants aient utilisé ou non les mêmes

paramètres pour les deux sous-espaces. Dans la plupart des cas, elle se traduit par un glissement de dimension[2] dans l'intersection qui aurait dû alerter les étudiants. Il y a ici une confusion paramètre / coordonnées. Le choix des lettres semble déterminant et l'on peut se demander si le choix de lettres x, y, z ... est lié déjà à une non distinction claire paramètre / coordonnées ou si c'est le choix x, y, z .... qui induit ensuite la confusion.

A ces trois grandes catégories, s'ajoutent des erreurs diverses marginales. Soulignons que quatorze d'entre elles traduisent le plus souvent des difficultés profondes dans l'association entre registres de représentations des vecteurs et sous-espaces telles celles que nous avons pu voir sur les copies 25 et 114.

Ce qui précède montre bien les difficultés rencontrées par les étudiants dans l'articulation des deux points de vue au niveau de l'action, dans les différents cadres identifiés pour cette articulation : le cadre des systèmes, le cadre géométrique, le cadre linéaire - et l'absence de liens entre les formes d'articulation dans ces différents cadres.

Ceci se traduit par des blocages et des incohérences.

Ceci se traduit aussi au niveau des explicitations et justifications que nous allons examiner maintenant.

6) Analyse des explicitations et justifications

Explicitations **niveau 0 / niveau 1 / niveau 2 / niveau 3**	**Justifications (théorèmes)** **TID / TDS/ TPE**
19 / 19 / 74 / 10	0 / 0 / 0

Tableau 4 : Niveaux d'explicitation et justification

Le niveau 1 est celui où l'étudiant ne donne à voir qu'une succession de calculs , c'est-à-dire qu'il démarre directement par une définition qu'il ne cite pas explicitement et détermine le système qu'il résout en explicitant ou non l'équivalence (cf. copie 7) (19 étudiants)

Le niveau 2 est celui où l'étudiant donne à voir la démarche suivie, mais sans discours justificatif explicite. Pour ce niveau, les explicitations sont souvent concentrées au début de la résolution et de type "descriptif", c'est-à-dire qu'il y a une introduction et très peu de conclusion. (cf. copies 1 et 14)

Il y a très peu d'écritures quantifiées et pas nécessairement correctes. Quand les quantifications sont utilisées, elles portent prioritairement sur la première phase de définition, ou apparaissent dans les résultats, mais ne sont pas gérées dans la résolution.

---

[2] Le **glissement de dimension** consiste à donner une représentation cartésienne où il y a un changement dans la dimension de l'espace de travail pour être cohérent avec le nombre de paramètres ou le nombre de paramètres est incohérent avec la dimension de l'espace de travail.

L'équivalence peut ou non apparaître et, dans certains cas, il y a mélange avec l'implication. (cf. copies 1 et 81 erreur E) (74 étudiants)

Le niveau 3 est celui où l'étudiant donne à voir la démarche suivie avec discours justificatif explicite. Dans ce cas, les justifications sont plutôt concentrées sur l'indépendance linéaire des deux vecteurs, les autres étant intégrées dans la succession logique des calculs.

Soulignons que l'on ne trouve aucune justification ou commentaire faisant explicitement référence à l'articulation des points de vue dans un quelconque de ses cadres d'intervention, ce qui est confirmé par la non utilisation du théorème de rapport entre nombre d'équations et nombre de paramètres (**TPE**), le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection (**TDS**) et le théorème de l'inclusion et de la dimension (**TID**).

Comme pour le niveau précédent les explicitations et les justifications sont concentrées au début de la résolution suivies dans ce cas d'une articulation logique repérable par les mots "donc", "alors", "dont", "il n'existe pas", "tel que" (cf. copie 4) (10 étudiants).

QUESTION 2 : Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *qui, à chaque vecteur (x, y, z, t) de* $\mathbf{R}^4$*, associe le vecteur (X, Y, Z) de* $\mathbf{R}^3$ *défini par :*

$$\begin{cases} X = x + y + 3z + 10t \\ Y = x + 2y + z + 4t \\ Z = x + 5z + 16t \end{cases}$$

a) Déterminer la dimension de l'image, puis celle du noyau.
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.

1) CODAGE UTILISE

La question 2 correspond à la première question du partiel des étudiants de DEUG sciences. Nous avons introduit des codages pour les procédures décrites de résolution que nous détaillons ci-après. Nous avons introduit aussi des codages spécifiques : pour prendre en compte l'indépendance linéaire des vecteurs du noyau et de l'image (colonne **IL** du tableau donné en annexe), et l'utilisation éventuelle du théorème du noyau et de l'image prévue dans l'analyse a priori (**TNI**), du théorème du rapport entre nombre d'équations et nombre de paramètres (code **TEP**) prévue dans l'analyse a priori comme un moyen de justification des résultats trouvés. Nous avons encore utilisé le code (**SY**) pour repérer les cas où l'étudiant faisait explicitement la confusion entre système d'équations et système de vecteurs et pour la partie b) la méthode de résolution du système utilisée par l'étudiant puisqu'il y a, bien sûr, d'autres méthodes que la méthode du pivot de Gauss prévue (code **MSY**).

Pour identifier les procédures suivies, nous avons procédé à un codage spécifique, même lorsqu'il s'agissait d'une procédure décrite dans l'analyse a priori, afin de mettre en évidence les erreurs commises par les étudiants, dès lors qu'ils ont presque tous démarré par une des procédures prévues, mais l'ont très rarement suivie intégralement. Ceci conduit à identifier

quatre classes de procédures, comprenant chacune de nombreuses variantes liées aux erreurs de calcul, aux niveaux d'interprétation et de justification, au passage d'une représentation à une autre, dans la détermination d'une des représentations demandées, aux bricolages sur les équations, aux procédures non achevées et au recours éventuel au cadre géométrique.

PROCEDURES LIEES A LA DETERMINATION DES DIMENSIONS

Méthode M :

Les codages **M** correspondent aux procédures basées sur la deuxième méthode de détermination des dimensions de l'analyse a priori. Le codage M seul correspond à la deuxième méthode de l'analyse a priori.

Comme pour la question 1, nous avons introduit des codages qui permettent de prendre en compte les erreurs de calcul et d'application du théorème du noyau et de l'image, les erreurs dans la détermination d'une base du noyau et de l'image, les erreurs "conceptuelles" les dérapages formels et l'erreur d'utilisation abusive du théorème du rang (rang des vecteurs lignes = rang des vecteurs colonnes), les solutions inachevées et le recours au cadre géométrique.

Codage des erreurs

- erreurs de calcul dans l'application de la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes ou lignes du tableau de coordonnées de vecteurs disposés en colonnes ou lignes respectivement.

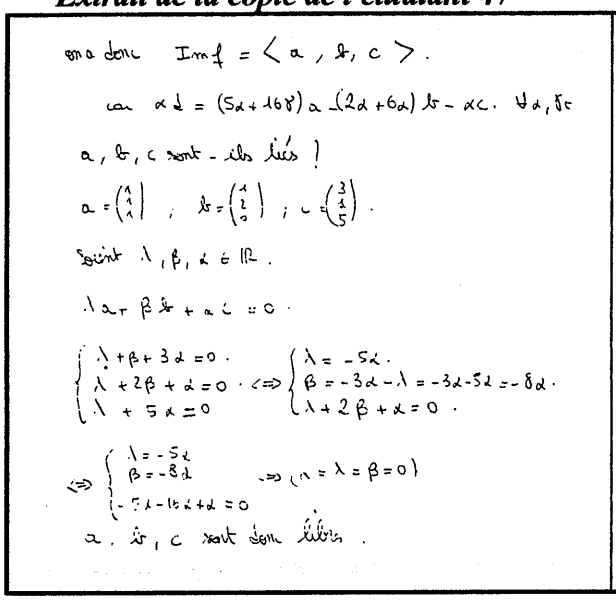
a) avec interférence sur la dimension du sous-espace image (dimension erronée de l'image). (code **CRV1**) (8 étudiants)

b) sans interférence sur la dimension du sous-espace image (dimension correcte de l'image). (code **CRV2**) (2 étudiants)

- <u>erreur de calcul lors de la résolution du système</u>

a) par la méthode de substitutions successives. (code **CRS2**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant 47



on a donc $\text{Im} f = \langle a, b, c \rangle$.

car $\alpha b = (5\alpha + 16\beta)a - (2\alpha + 6\alpha)b - \alpha c$. $\forall \alpha, \beta, \gamma$

a, b, c sont-ils liés ?

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Soient $\lambda, \beta, \alpha \in \mathbb{R}$.

$\lambda a + \beta b + \alpha c = 0$.

$\begin{cases} \lambda + \beta + 3\alpha = 0 \\ \lambda + 2\beta + \alpha = 0 \\ \lambda + 5\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -5\alpha \\ \beta = -3\alpha - \lambda = -3\alpha - 5\alpha = -8\alpha \\ \lambda + 2\beta + \alpha = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -5\alpha \\ \beta = -8\alpha \\ -5\lambda - 16\alpha + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha = \lambda = \beta = 0)$

a, b, c sont donc libres.

base Base de $\text{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

⇒ j'ai fait erreur que je n'arrive pas à trouver.

Commentaire : l'étudiant contrôle son résultat, puisqu'il avait déjà déterminé la dimension, mais il n'est pas capable de trouver son erreur même en reconnaissant qu'il y a une erreur.

- <u>erreur d'application du théorème du noyau et de l'image</u>

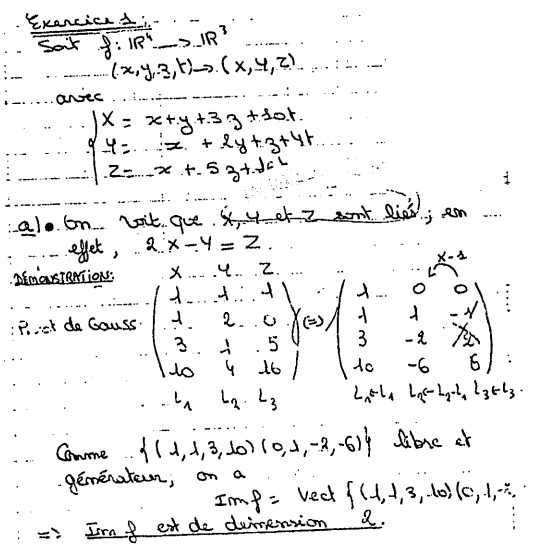
a) confusion espace de départ, espace d'arrivée. (code **F**) (7 étudiants)

- <u>erreurs "conceptuelles" et dérapages formels</u>.

a) traduction erronée des équations par des vecteurs. (code **CDIc**) (14 étudiants)

- erreur de détermination d'une base de l'image. (13 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 107

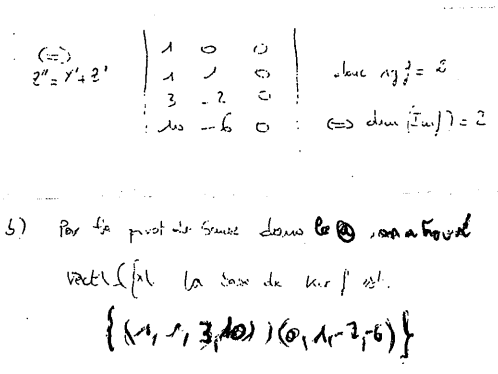


Commentaire : confusion explicite équation/vecteur qui se traduit par la lecture des coefficients des équations comme des vecteurs provoquant un glissement de dimension de l'image que l'étudiant n'est pas capable de contrôler.

- erreur de détermination d'une base du noyau (1 étudiant)

Déterminer une base erronée du noyau par lecture de deux premières colonnes du tableau de coordonnées de vecteurs disposés en lignes après l'application de la méthode de Gauss.

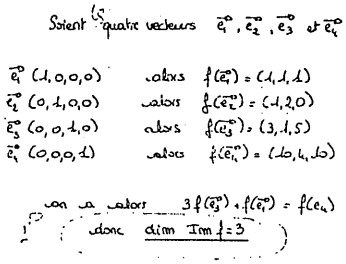
Extrait de la copie de l'étudiant 71



Commentaire : détermination d'une base erronée du noyau à partir des coefficients des équations qui caractérisent une représentation cartésienne minimale ne provoquant pas de glissement de dimension, c'est-à-dire difficulté d'interprétation des résultats obtenus dans le tableau de nombres.

b) ne considérer qu'une seule relation de dépendance pour conclure sur la dimension du sous-espace image. (code **CDIi**) (7 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 27



Commentaire: l'étudiant ne cherche pas à savoir s'il y a d'autres relations lorsqu'il détermine la première. Peut-être fait-il la confusion avec la propriété : 4 vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ sont nécessairement linéairement dépendants.

c) affirmer que rang f = 3, sans vérification c'est-à-dire confondre la dimension de l'espace d'arrivée et celle de l'image. (code **CDIf**) (1 étudiant)

Codage d'utilisation abusive du théorème du rang

Consiste à appliquer la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes ou lignes du tableau de coordonnées de vecteurs disposés respectivement en lignes ou en colonnes sans mentionner le théorème du rang. Alors que cela serait nécessaire. (rang des vecteurs lignes = rang des vecteurs colonnes). (code **Ua**) (18 étudiants)

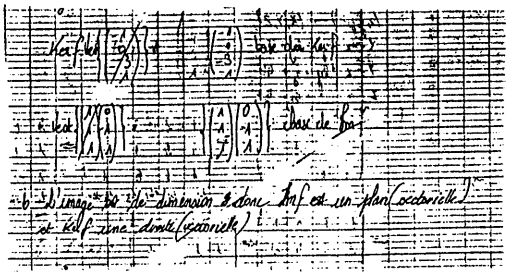
Codage de solutions partielles

Consiste à déterminer seulement la dimension du sous-espace image. (code **SPg**) (1 étudiant)

Codage de recours au cadre géométrique

Consiste à donner une interprétation géométrique correcte du sous-espace image et erronée pour le noyau. (code **CGc**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant 112

	**Commentaire** : l'étudiant donne une interprétation géométrique correcte pour l'image et erronée pour le noyau en se basant sur les bases obtenues, il semble que pour lui un sous-espace de dimension 2 est un plan et un sous-espace de dimension 1 est une droite pour n'importe quel espace de travail. L'étudiant avait déterminé la dimension correcte du noyau antérieurement, mais il n'est pas capable de contrôler son résultat.

Méthode K :

Les codages **K** correspondent aux procédures basées sur la première méthode de l'analyse a priori, c'est-à-dire à celles basées sur la détermination d'une base et de la dimension du noyau.

Comme dans la méthode précédente, nous avons introduit des codages qui permettent de prendre en compte les variantes dans la résolution, les erreurs de calcul, les erreurs dans le passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, les erreurs dans la détermination d'une base du noyau en soulignant les glissements de dimension et les cohérences et incohérences avec la dimension déterminée précédemment, les solutions partielles et les recours au cadre géométrique.

Codage de variantes

Dans ce cas, la seule variante consiste à résoudre le système par la méthode de substitutions successives. (colonne **MSY**) (26 étudiants)

Codage des erreurs

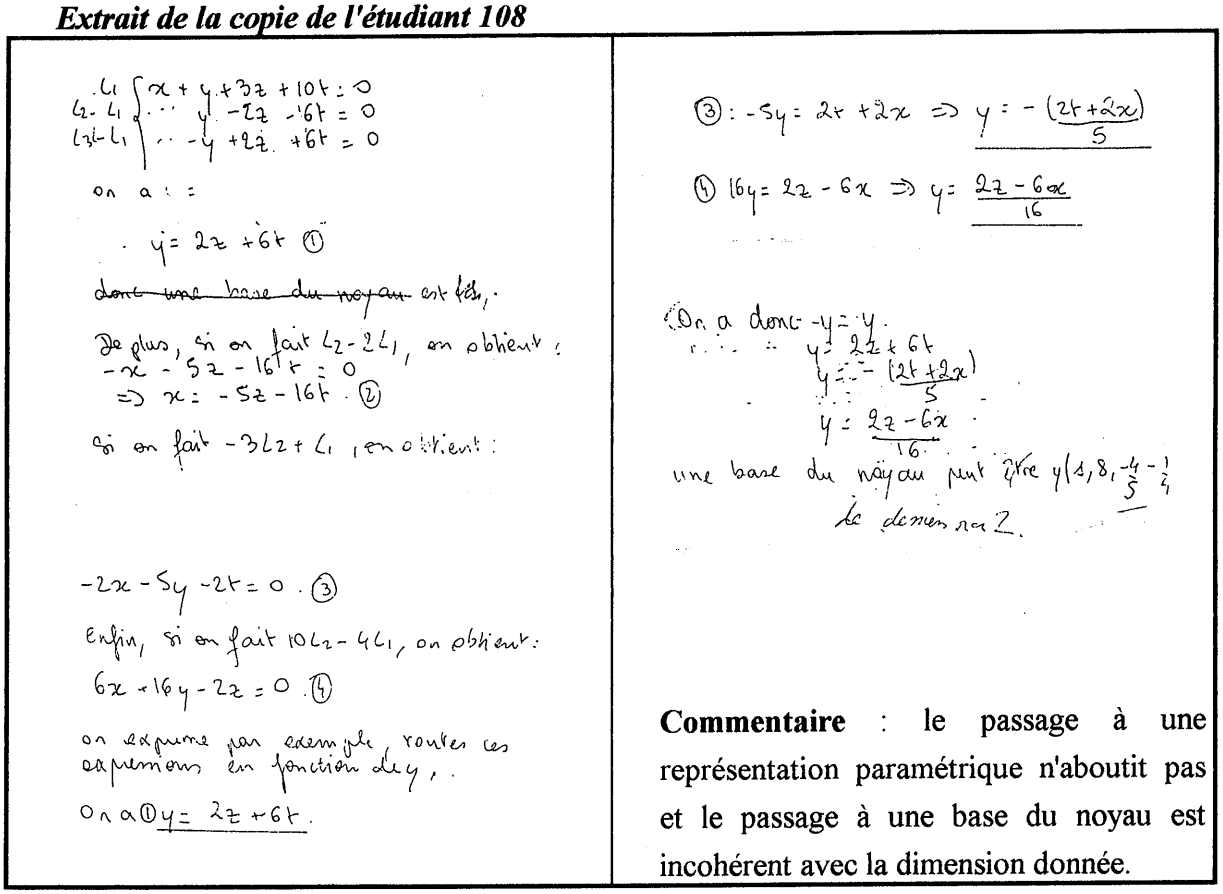
- erreur de calcul dans la résolution du système

  a) par la méthode du pivot de Gauss. (code **CRS1**) (14 étudiants)

  b) par la méthode de substitutions successives. (code **CRS2**) (8 étudiants)

- erreur dans le passage de la représentation cartésienne trouvée pour le noyau à une représentation paramétrique. (code **CPa**) (10 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 108



L_1 $\begin{cases} x + y + 3z + 10t = 0 \\ L_2 - L_1 \quad \cdots \quad y - 2z - 6t = 0 \\ L_3 - L_1 \quad \cdots \quad -y + 2z + 6t = 0 \end{cases}$

on a : =

$y = 2z + 6t$ ①

~~donc une base du noyau est~~ (illegible).

De plus, si on fait $L_2 - 2L_1$, on obtient :

$-x - 5z - 16t = 0$

$\Rightarrow x = -5z - 16t$ ②

si on fait $-3L_2 + L_1$, on obtient :

$-2x - 5y - 2t = 0$ ③

Enfin, si on fait $10L_2 - 4L_1$, on obtient :

$6x + 16y - 2z = 0$ ④

on exprime par exemple toutes ces expressions en fonction de y.

On a ① $y = 2z + 6t$.

③ : $-5y = 2t + 2x \Rightarrow y = -\frac{(2t + 2x)}{5}$

④ $16y = 2z - 6x \Rightarrow y = \frac{2z - 6x}{16}$

On a donc $-y = y$.

$\therefore y = 2z + 6t$

$y = -\frac{(2t + 2x)}{5}$

$y = \frac{2z - 6x}{16}$

une base du noyau peut être $y(1, 8, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{2})$

la dimension ?

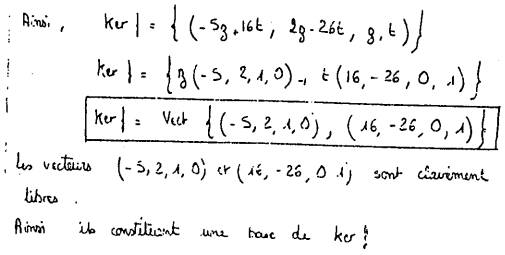
Commentaire : le passage à une représentation paramétrique n'aboutit pas et le passage à une base du noyau est incohérent avec la dimension donnée.

- <u>erreur dans la détermination d'une base du noyau</u>. Nous illustrons ici par des extraits de copies d'étudiants les différentes étapes où l'erreur se manifeste, les cohérences et incohérences avec les dimensions déterminées antérieurement, en montrant les possibilités de contrôle et les glissements des dimensions. (code **CDIk**) (37 étudiants)

a) effet d'erreurs de calcul dans la résolution du système. Il n'y a que cinq étudiants dont l'erreur n'a pas un enjeu conceptuel. Les autres erreurs pouvant être controlées par la dimension déterminée antérieurement. (16 étudiants)

• Vecteurs dans $\mathbf{R^4}$ et cohérence avec la dimension correcte déterminée antérieurement. C'est le cas où l'étudiant ne commet qu'une simple erreur de calcul qui n'a aucune influence sur l'articulation. (5 *étudiants)*

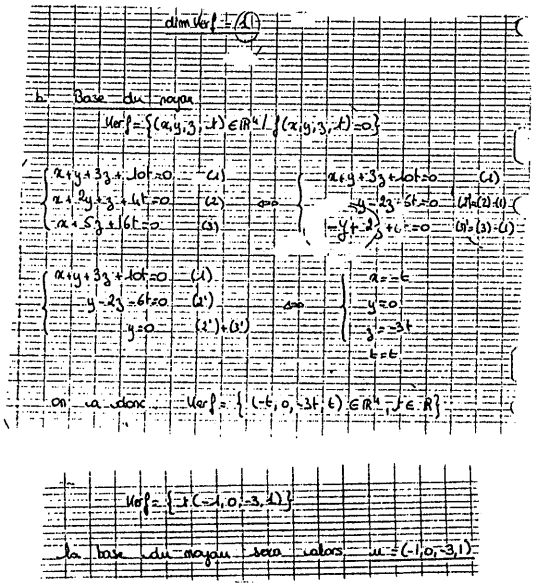
Extrait de la copie de l'étudiant 14



Commentaire : dans ce cas, l'erreur de calcul se traduit par une erreur sur l'un des coefficients des vecteurs, l'articulation de points de vue n'est nullement en jeu

• Vecteur dans $\mathbf{R^4}$ et cohérence avec la dimension fausse déterminée antérieurement. (5 étudiants)

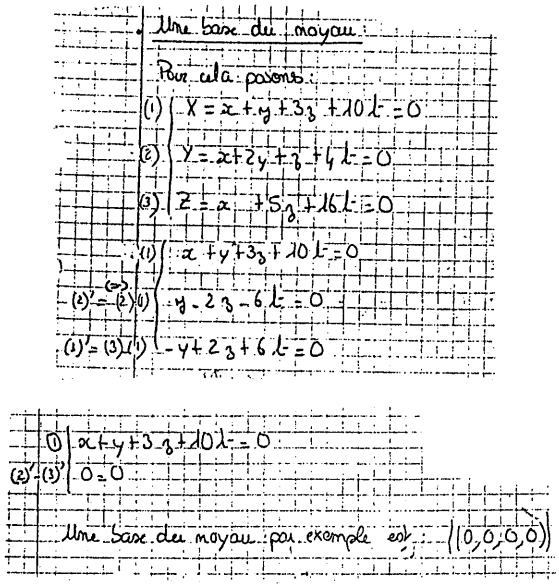
Extrait de la copie de l'étudiant 27



Commentaire : erreur résolution système et interprétation correcte de la représentation paramétrique erronée avec conclusion erronée d'une base qui est cohérente avec la dimension déterminée précédemment, l'étudiant n'avait donc pas de moyen pour contrôler son erreur.

• Vecteur dans $\mathbf{R^4}$ et incohérence avec la dimension déterminée antérieurement. (5 étudiants)

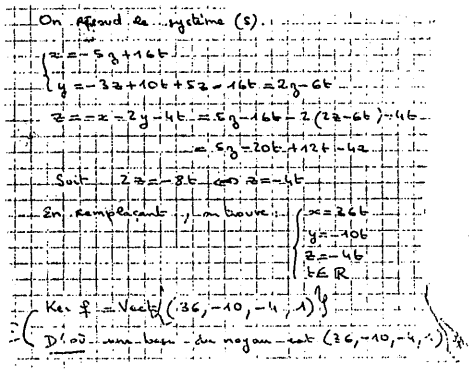
Extrait de la copie de l'étudiant 106



Commentaire : abandon d'une équation après résolution correcte du système et conclusion qu'une base est formée par le vecteur nul sans aucune cohérence avec la seule équation qui reste. L'étudiant n'est pas capable de contrôler son résultat alors qu'il avait déterminé la dimension correcte du noyau précédemment.

• Vecteur dans $\mathbf{R}^4$ et aucun commentaire sur la dimension. (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant 77

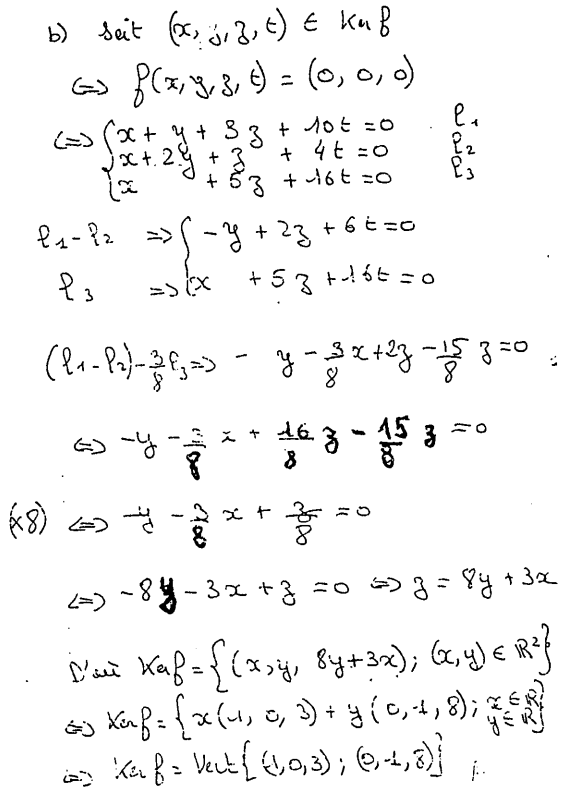


Commentaire : résolution erronée du système avec interprétation correcte d'une représentation paramétrique erronée et interprétation correcte d'une base erronée. L'étudiant ne fait aucun commentaire sur la dimension.

b) effet d'erreurs dans le passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique et interprétation "correcte" de la représentation paramétrique erronée. (7 étudiants)

• Vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ et cohérence avec la dimension déterminée antérieurement. Cette erreur conduit à un glissement de dimension qui pouvait être controlé. (3 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 99



b) Soit $(x, y, z, t) \in \ker f$

$\Leftrightarrow f(x, y, z, t) = (0, 0, 0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z + 10t = 0 & L_1 \\ x + 2y + z + 4t = 0 & L_2 \\ x + 5z + 16t = 0 & L_3 \end{cases}$

$L_1 - L_2 \Rightarrow -y + 2z + 6t = 0$

$L_3 \Rightarrow x + 5z + 16t = 0$

$(L_1 - L_2) - \frac{3}{8} L_3 \Rightarrow -y - \frac{3}{8}x + 2z - \frac{15}{8}z = 0$

$\Leftrightarrow -y - \frac{3}{8}x + \frac{16}{8}z - \frac{15}{8}z = 0$

$(\times 8) \Leftrightarrow -8y - 3x + z = 0 \Leftrightarrow z = 8y + 3x$

D'où $\ker f = \{(x, y, 8y + 3x);\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$\Leftrightarrow \ker f = \{x(1, 0, 3) + y(0, 1, 8);\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$

$\Leftrightarrow \ker f = \text{Vect}\{(1, 0, 3);\ (0, 1, 8)\}$

Ainsi $(1, 0, 3)$ et $(0, 1, 8)$ est générateur de $\ker f$.

Montrons que c'est libre :

$\alpha(1, 0, 3) + \beta(0, 1, 8) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 3\alpha + 8\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

Donc $(1, 0, 3);\ (0, 1, 8)$ est libre.

Ainsi c'est générateur et c'est une famille libre donc

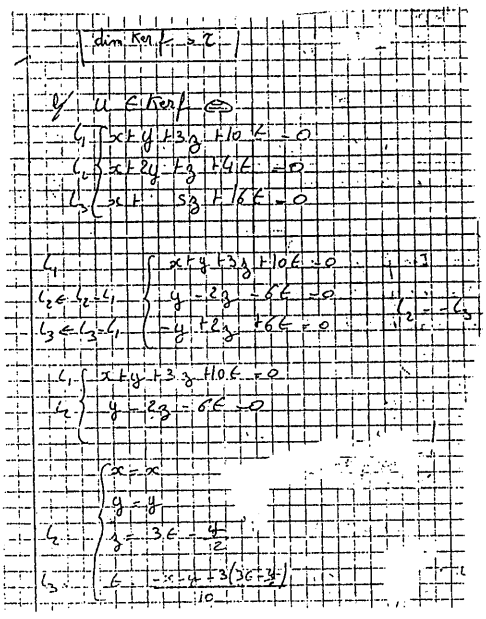
$\underbrace{(1, 0, 3);\ (0, 1, 8)}$

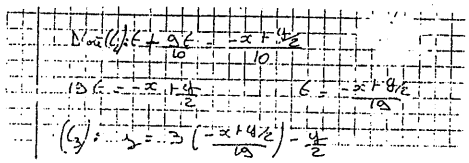
Base de $\ker f$.

Commentaire : passage erroné de la représentation cartésienne trouvée à une représentation paramétrique (oubli de t) qui conduit à un glissement de dimension, mais ensuite une interprétation "correcte" de la représentation paramétrique erronée trouvée en termes de base

- Vecteurs dans $\mathbf{R}^4$ et cohérence avec la dimension déterminée antérieurement. (3 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 61





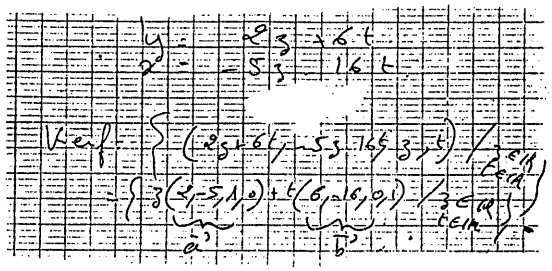
Commentaire : passage incompréhensible d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique.

• Vecteurs dans $\mathbf{R}^4$ et incohérence avec la dimension déterminée antérieurement. (1 étudiant) (cf. copie 108)

c) interprétation erronée d'une représentation paramétrique correcte du noyau, erreur lors du passage à une base. (7 étudiants)

• Vecteur dans $\mathbf{R}^4$ et cohérence avec la dimension déterminée antérieurement. L'erreur n'a pas d'enjeu conceptuel et ne met pas en jeu de difficultés d'articulation de points de vue. (4 étudiants)

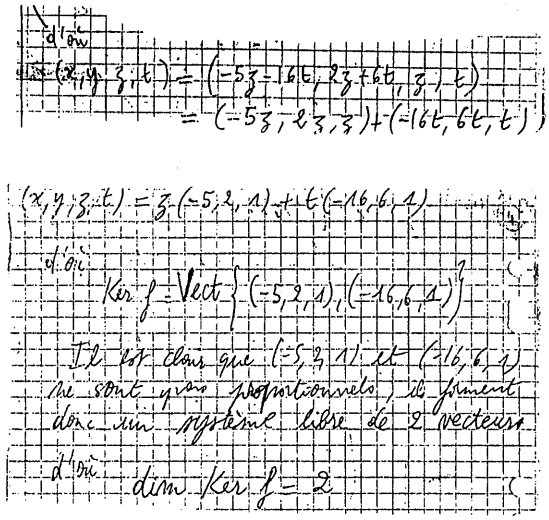
Extrait de la copie de l'étudiant 96



Commentaire : substitution erronée de x et y lors du passage à une représentation paramétrique. Soulignons qu'il s'agit là d'une erreur qui ne met pas en jeu de difficultés d'articulation de points de vue.

• Vecteur dans $\mathbf{R}^3$ et cohérence avec la dimension déterminée antérieurement. (2 étudiants)

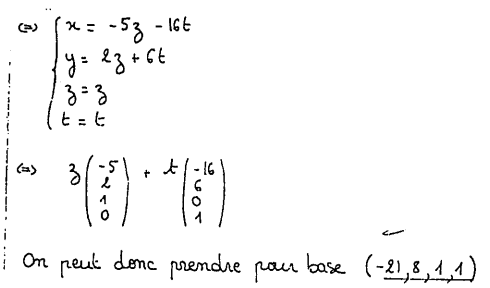
Extrait de la copie de l'étudiant 16



Commentaire : évacuation de la coordonnée nulle lors de l'interprétation de la représentation paramétrique correcte pour déterminer une base.

• Vecteur dans $\mathbf{R}^4$ et incohérence avec la dimension déterminée antérieurement. (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant 33

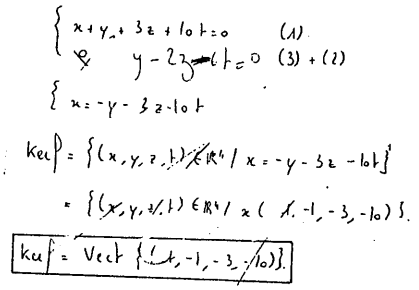


Commentaire : représentation paramétrique correcte et erreur dans le passage à une base, qui s'effectue en prenant la somme des deux vecteurs de base du noyau.

d) association directe équations/vecteurs après réduction correcte du système. (3 étudiants)

- Vecteurs dans $\mathbf{R}^4$ et cohérence avec la dimension déterminée précédemment.

Extrait de la copie de l'étudiant 38



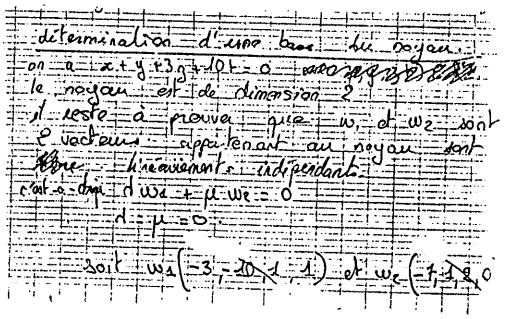
Commentaire : - système réduit correct, évacuation d'une équation.

- dérapage dans l'association équation/vecteur (ceci peut-être) pour rester en cohérence avec la dimension 1 trouvée antérieurement.

e) d'autres erreurs marginales

• Vecteur dans $\mathbf{R}^4$ et cohérence avec la dimension déterminée antérieurement. (2 étudiants)

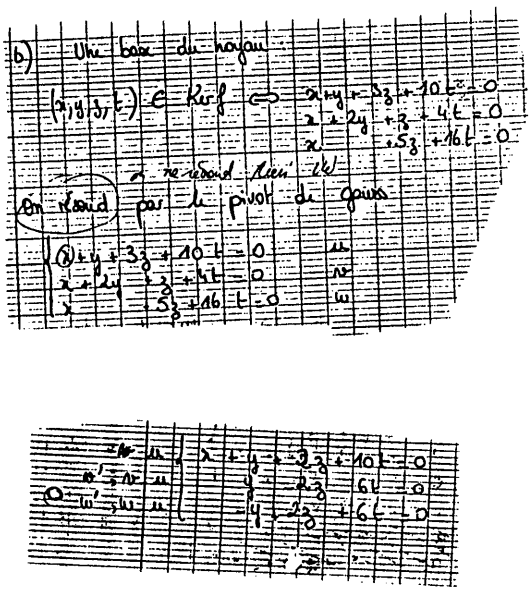
Extrait de la copie de l'étudiant 41

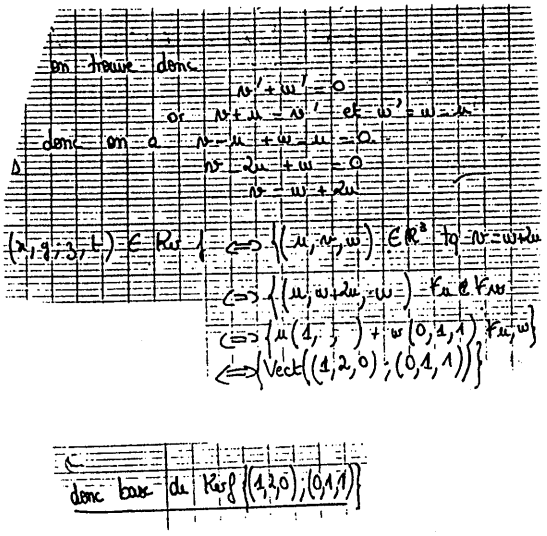


Commentaire : résolution correcte du système, abandon d'une équation et détermination de deux vecteurs par la donnée de valeurs à x, y, z, t de façon à satisfaire la seule équation qui reste.

• Vecteur dans $\mathbf{R}^3$ et cohérence avec la dimension déterminée antérieurement. (2 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 111

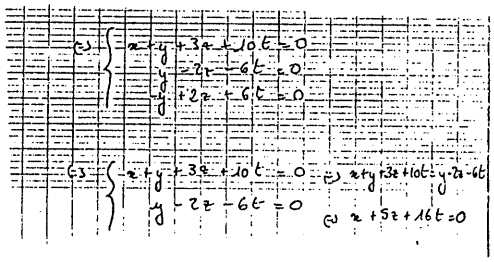


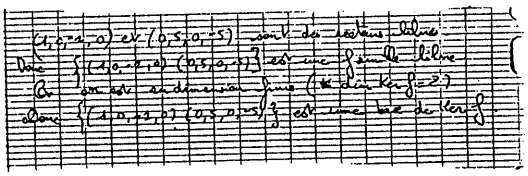


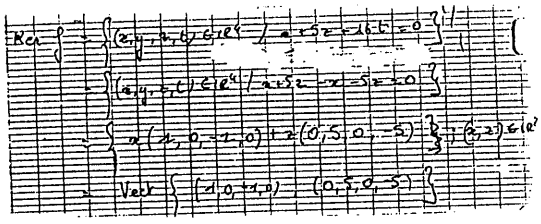
Commentaire : association explicite équation/vecteurs. Détermination d'une base de l'image comme une base du noyau.

• Vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ et cohérence avec la dimension déterminée antérieurement. (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant 87







Commentaire : oubli d'une équation lors de l'interprétation d'une représentation cartésienne du noyau suivie par la détermination correcte d'une représentation paramétrique et d'une base.

- <u>erreur dans la détermination d'une représentation cartésienne de l'image</u>

Donner comme représentation erronée de l'image la représentation cartésienne déterminée pour le noyau. (code **CDIb**) (7 étudiants)

• Vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ et équations dans $\mathbf{R}^4$. (4 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 1

base de ker de f $\{(-5,2,1,0),(-16,6,0,1)\}$ $Imf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+6z+16t=0$ et $y-2z-6t=0\}$	**Commentaire** : base correcte du noyau et équations du noyau reprises pour l'image - notations incohérentes.

- Vecteurs et équations dans $\mathbf{R}^4$ (3 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 19

Donc $\{(-5,2,1,0),(-16,6,0,1)\}$ est une base de $Ker\ f$. $Ker\ f = Vect\{(-5,2,1,0),(-16,6,0,1)\}$. $Im\ f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+5y+16t=0$ et $y-2z-6t=0\}$	**Commentaire** : base correcte du noyau et glissement de dimension pour les vecteurs qui engendrent le sous-espace image puisque l'étudiant considère directement la représentation cartésienne déterminée pour le noyau comme une représentation cartésienne de l'image.

Codage de solutions partielles

a) ne faire qu'appliquer la définition de noyau. (code **SPh**) (6 étudiants)

b) ne faire que le passage d'une représentation cartésienne du sous-espace noyau à une représentation paramétrique. (code **SPi**) (4 étudiants)

c) ne donner qu'une représentation cartésienne minimale correcte du noyau. (code **SPm**) (1 étudiant)

d) arrêt après résolution erronée du système sans aucune conclusion. (code **SPt**) (3 étudiants)

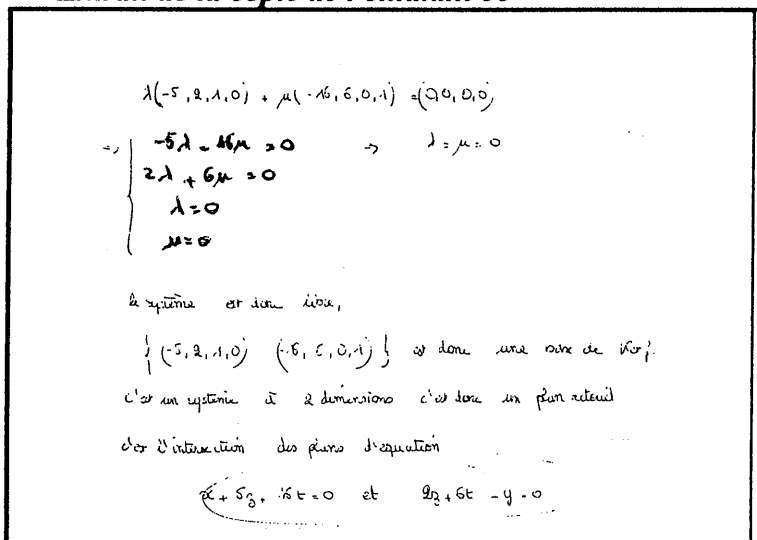
Codage de recours au cadre géométrique

Tentative pour donner des justifications dans le cadre géométrique. Il n'y en a que 2 et elles sont erronées. (code **CGd**) (2 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 44

$(\forall t \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\ (-16t-5z, 6t+2z, z, t) \in Ker\ f$ On voit bien que $Ker\ f$ est un plan vectoriel, et donc que $\dim(Ker\ f) = 2$. D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(Im\ f) = 2$. ($car\ \dim(Im\ f) + \dim(Ker\ f) = 4$)	**Commentaire** : interprétation géométrique qui semble montrer la confusion entre dimension 2 et plan vectoriel pour n'importe quel espace de travail.

Extrait de la copie de l'étudiant 55



Commentaire : interprétation géométrique erronée à partir de deux équations d'une représentation cartésienne du noyau.

PROCEDURES LIEES A LA DETERMINATION DES REPRESENTATIONS DEMANDEES

Méthode S

Les codages **S** correspondent aux procédures basées sur la deuxième méthode de notre analyse a priori de détermination des représentations demandées. Le codage **S** seul correspond à la deuxième méthode de l'analyse a priori, mais ceci ne correspond à aucune procédure réelle.

Comme dans tous les cas précédents, nous introduisons des codages permettant de prendre en compte les variantes dans la résolution, les erreurs de lecture ou interprétation de l'équation qui caractérise le sous-espace image, l'erreur dans la détermination des représentations demandées, les solutions partielles et les recours au cadre géométrique.

Codage des variantes

a) lecture directe de l'équation 2X - Y - Z = 0 qui caractérise une représentation cartésienne du sous-espace image. (code **Vc**) (55 étudiants)

b) passage de la représentation cartésienne déterminée pour le sous-espace image à une représentation paramétrique pour conclure sur la dimension. (code **Vd**) (6 étudiants)

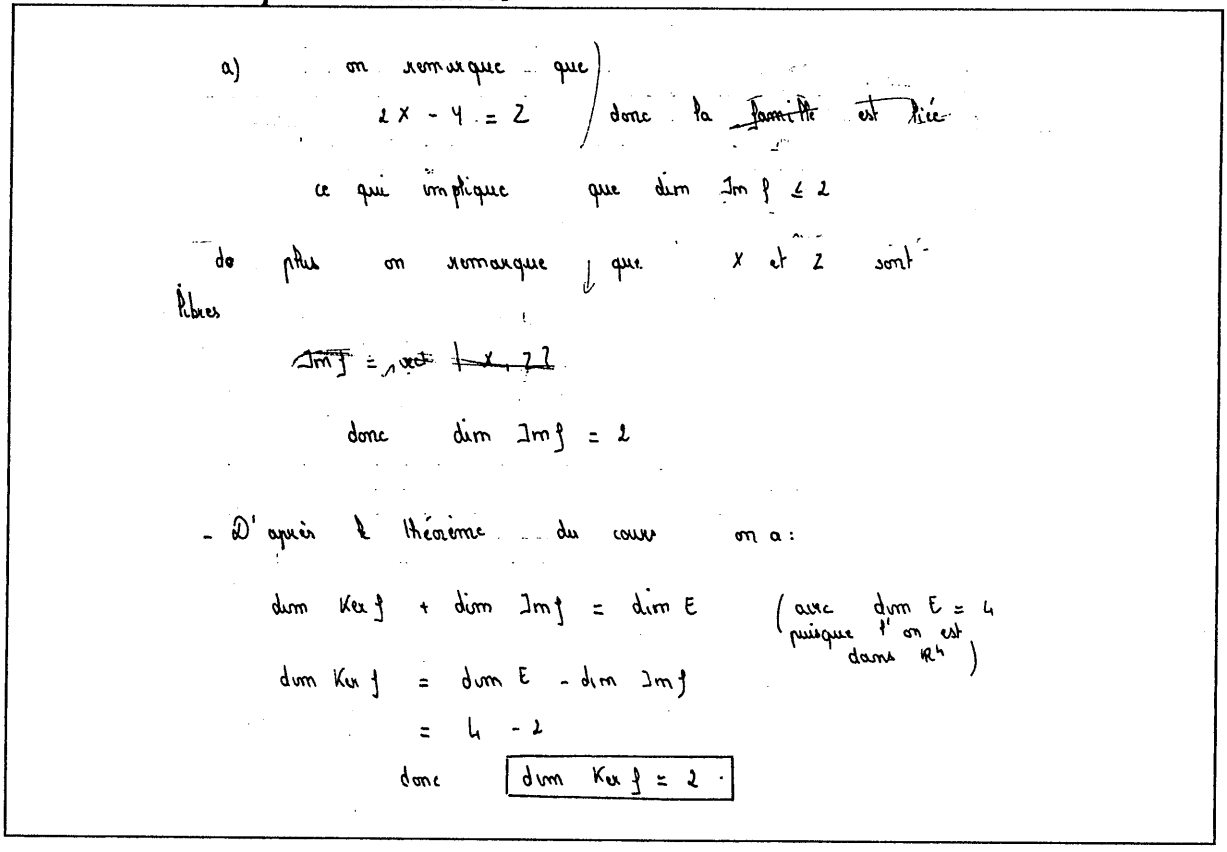
Codage des erreurs

- <u>erreurs dans la lecture ou l'interprétation de l'équation qui caractérise une représentation cartésienne du sous-espace image</u>.

a) consiste à caractériser le sous-espace image par une ou deux relations de liaison entre X, Y et Z, erronées, obtenues semble-t-il par lecture directe. (code **CDId**) (14 étudiants)

b) lecture de la dépendance des équations par la relation 2X - Y - Z = 0 et remarque sur la liaison entre X, Y et Z qui sous-entend un raisonnement sur les vecteurs et non pas sur les équations. (code **CDIm**) (3 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 83


a) on remarque que 2X - Y = Z donc la famille est liée

ce qui implique que dim Im f ≤ 2

de plus on remarque que X et Z sont libres

Im f = vect {X, Z}

donc dim Im f = 2

- D'après le théorème du cours on a :

dim Ker f + dim Im f = dim E (avec dim E = 4 puisque l'on est dans $\mathbb{R}^4$)

dim Ker f = dim E - dim Im f

= 4 - 2

donc dim Ker f = 2.

c) détermination de la dimension correcte du sous-espace image par lecture de l'indépendance linéaire sur l'équation 2X - Y - Z = 0 en faisant explicitement la confusion équation/vecteur. (code **CDIe**) (1 étudiant)

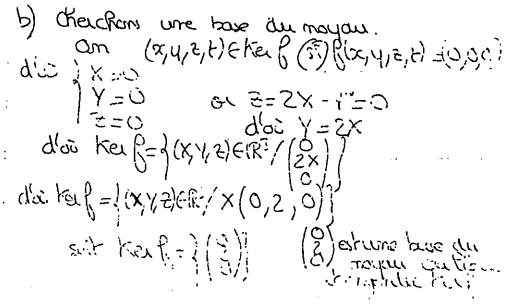
- <u>erreur dans la détermination des représentations demandées</u>.

a) consiste à considérer le système donné comme une représentation cartésienne du sous-espace image. (code **CDIr**) (6 étudiants)

b) détermination d'une base erronée du noyau. (code **CDIk**) (4 étudiants)

- les vecteurs dans $\mathbf{R}^3$.

Extrait de la copie de l'étudiant 48

	**Commentaire** : raisonnement sur l'équation 2X - Y - Z = 0 qui amène à un glissement de dimension lors de la détermination d'une base erronée du noyau.

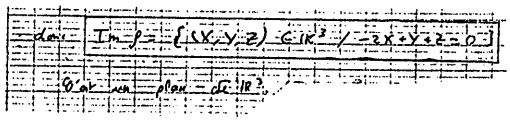
Codage de solutions partielles

Consiste à simplement affirmer que la dimension de l'image est donnée par le rang du système donné. (code **SPa**) (1 étudiant)

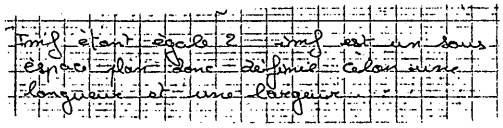
Codage de recours au cadre géométrique

Consiste à remarquer que le sous-espace image est un plan vectoriel de dimension 2. (code **CGc**) (6 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 5

	**Commentaire** : l'étudiant affirme que le sous-espace image est un plan semble-t-il par l'identification de son équation.

Extrait de la copie de l'étudiant 24

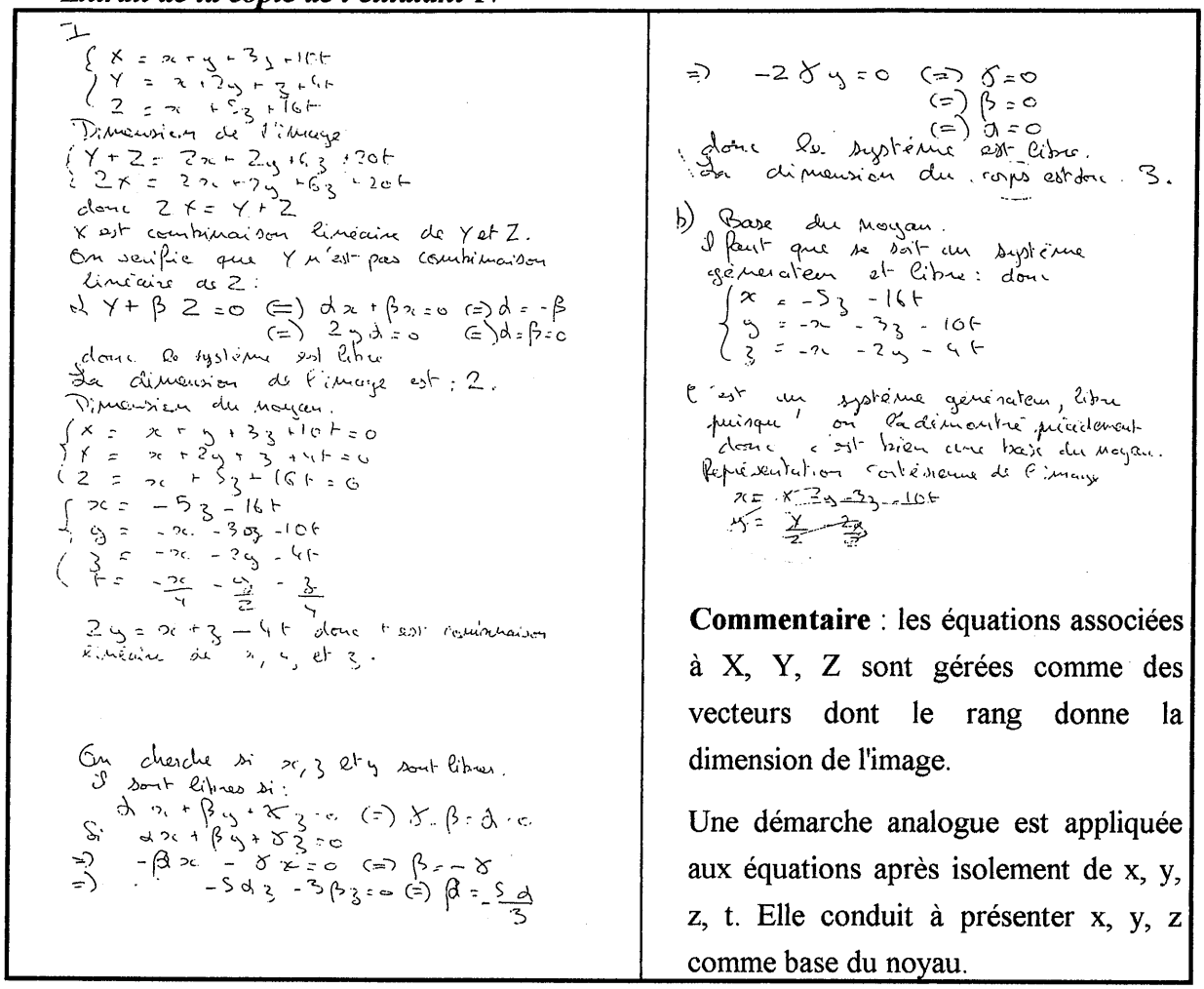
	**Commentaire** : l'étudiant affirme que l'image est un sous-espace plan, semble-t-il, par l'identification d'un plan à la dimension 2. On notera les références très " primaires " à longueur et largeur.

Code E

Nous avons codé **E** les copies où l'on trouve une accumulation des confusions et d'erreurs au milieu parfois de bribes correctes.

Nous illustrons ce code avec les trois exemples ci-après :

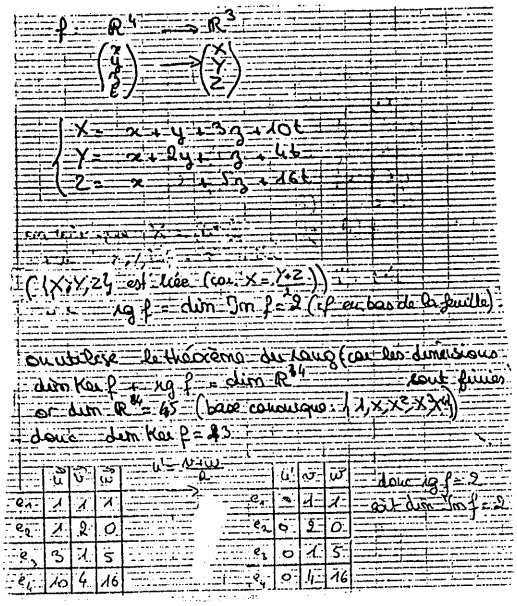
Extrait de la copie de l'étudiant 17

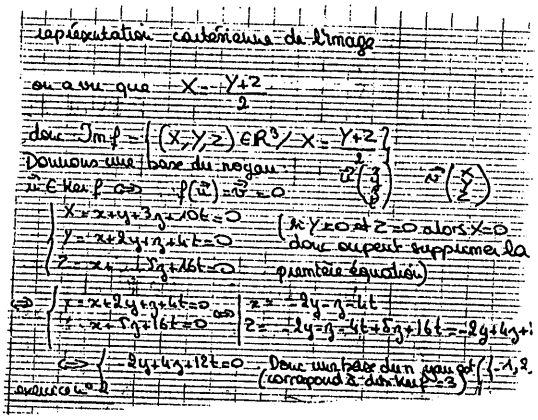


Commentaire : les équations associées à X, Y, Z sont gérées comme des vecteurs dont le rang donne la dimension de l'image.

Une démarche analogue est appliquée aux équations après isolement de x, y, z, t. Elle conduit à présenter x, y, z comme base du noyau.

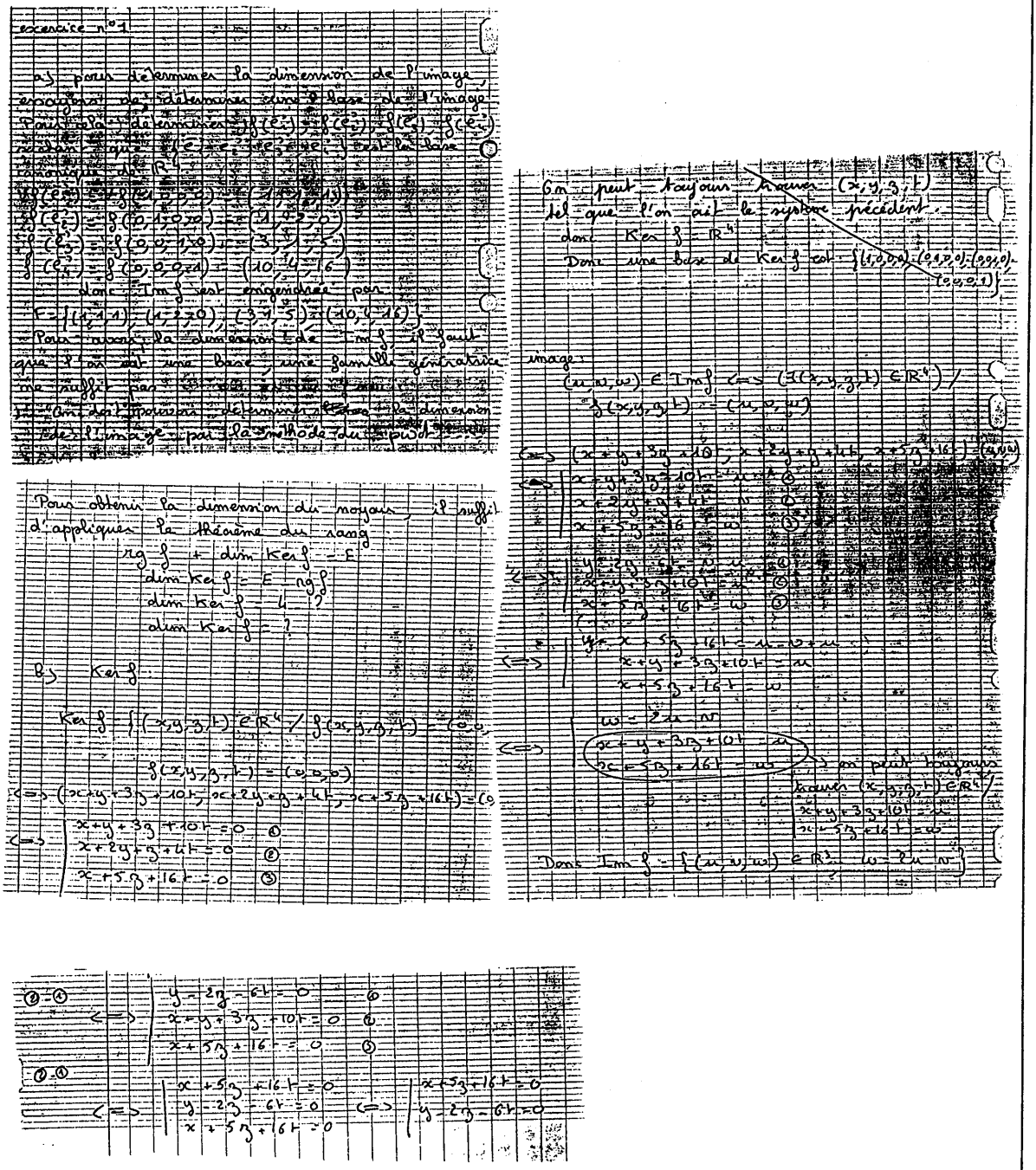
Extrait de la copie de l'étudiant 98





Commentaire : - remarque sur la liaison de X, Y et Z qui sous-entend la confusion équation/vecteur.
- difficulté à déterminer la dimension de l'espace d'arrivée accompagnée de la confusion entre base de $P_4(\mathbf{R})$ et celle de $\mathbf{R}^4$ qui conduit à la conclusion erronée sur la dimension de $\mathbf{R}^4$.
- équation correcte pour caractériser le sous-espace image et abandon d'une équation du système trouvé pour le noyau.

Extrait de la copie de l'étudiant 90



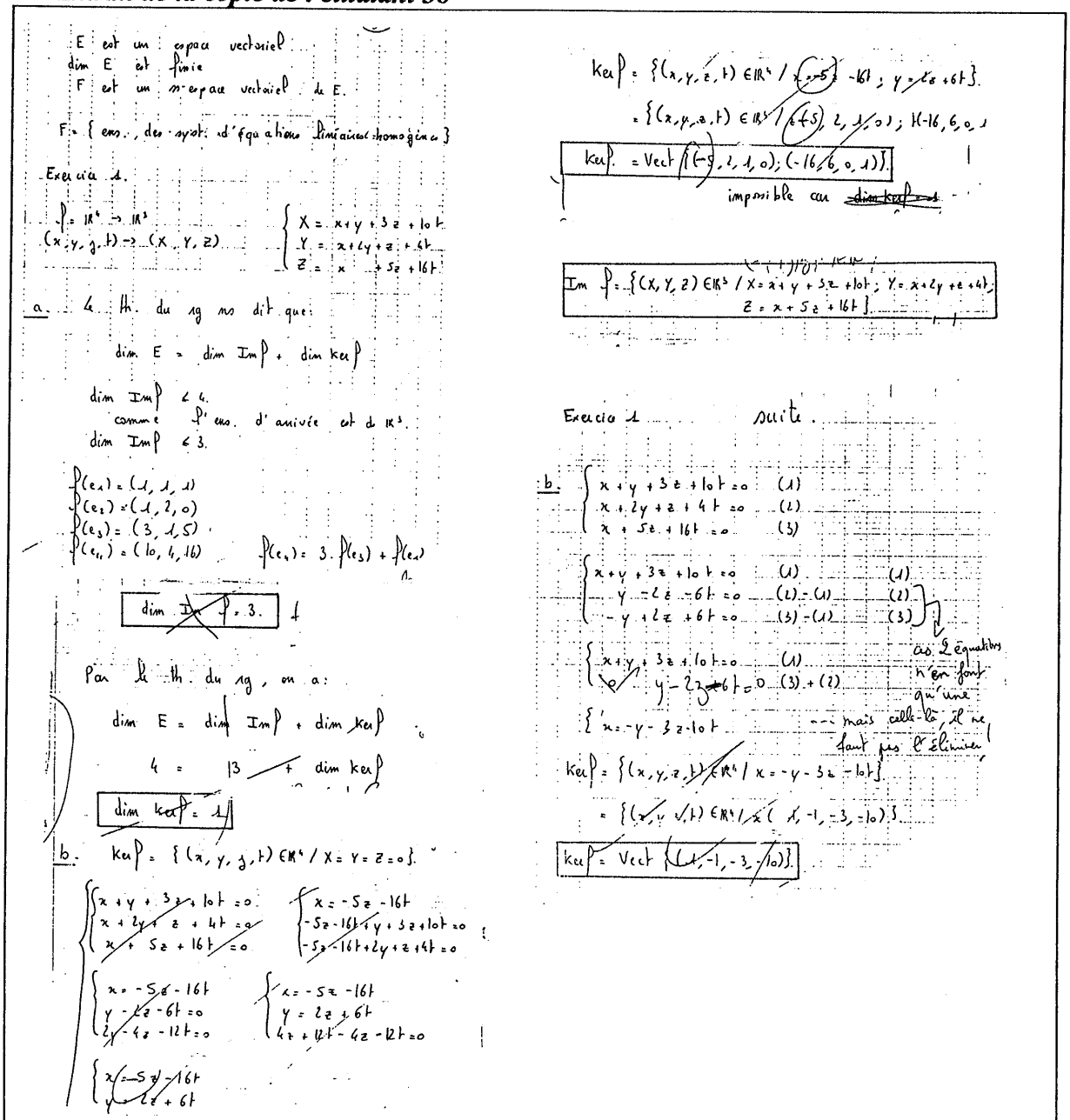
Commentaire : - reconnaissance de la méthode correcte pour déterminer la dimension de l'image et du théorème pour déterminer la dimension du noyau accompagnée de blocage.
- résolution correcte du système suivie d'une conclusion erronée sur une base du noyau sans passage de la représentation cartésienne à une représentation paramétrique.
- équation correcte pour caractériser le sous-espace image après application de la méthode du pivot de Gauss sur le système.

Niveaux d'explicitation

Niveau **0** : il s'agit du cas où l'étudiant n'aborde pas la question ou ne donne qu'une succession de calculs inachevés et sans conclusion.

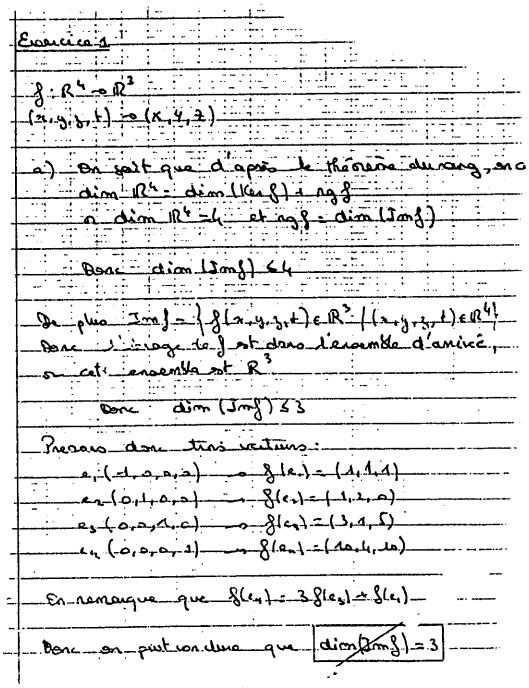
Niveau **1** : L'étudiant donne à voir la démarche suivie avec éventuellement des rappels de définitions et une justification avec le théorème pour déterminer les dimensions dans la partie a).

Extrait de la copie de l'étudiant 38



Commentaire : dans la partie b) il y a très peu d'explicitation, aucune justification et l'équivalence de systèmes n'est pas explicitée.

Extrait de la copie de l'étudiant 88



Exercice 1

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z,t) \to (x,y,z)$

a) On sait que d'après le théorème du rang, on a

$\dim \mathbb{R}^4 = \dim(\ker f) + \operatorname{rg} f$

or $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ et $\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f)$

Donc $\dim(\operatorname{Im} f) \leq 4$

De plus $\operatorname{Im} f = \{ f(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \}$

Donc l'image de f est dans l'ensemble d'arrivée, or cet ensemble est $\mathbb{R}^3$

Donc $\dim(\operatorname{Im} f) \leq 3$

Prenons donc trois vecteurs :

$e_1 (-1,0,0,2) \to f(e_1) = (1,1,1)$

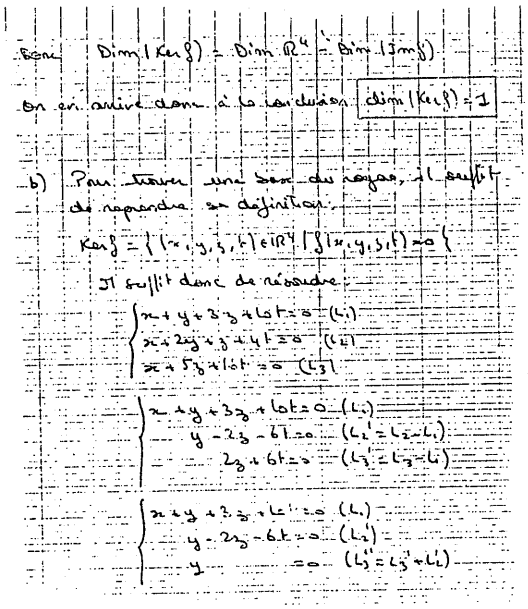
$e_2 (0,1,0,0) \to f(e_2) = (-1,2,0)$

$e_3 (0,0,1,0) \to f(e_3) = (3,4,5)$

$e_4 (0,0,0,1) \to f(e_4) = (10,4,10)$

On remarque que $f(e_4) = 3f(e_3) = f(e_1)$

Donc on peut en déduire que $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$



Donc $\dim(\ker f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\operatorname{Im} f)$

On en arrive donc à la conclusion $\dim(\ker f) = 1$

b) Pour trouver une base du noyau, il suffit de reprendre sa définition :

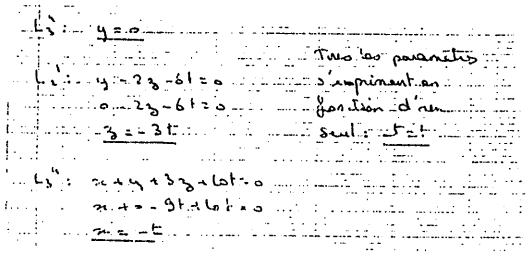
$\ker f = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / f(x,y,z,t) = 0 \}$

Il suffit donc de résoudre :

$$\begin{cases} x + y + 3z + 10t = 0 & (L_1) \\ x + 2y + z + 4t = 0 & (L_2) \\ x + 5z + 16t = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z + 10t = 0 & (L_1) \\ -y - 2z - 6t = 0 & (L_2' = L_2 - L_1) \\ 2z + 6t = 0 & (L_3' = L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z + 10t = 0 & (L_1) \\ y - 2z - 6t = 0 & (L_2') \\ y = 0 & (L_3'' = L_3' + L_2') \end{cases}$$



$L_3'' : y = 0$

$L_2' : y - 2z - 6t = 0$ — Tous les paramètres s'expriment en fonction d'un seul : t

$0 - 2z - 6t = 0$

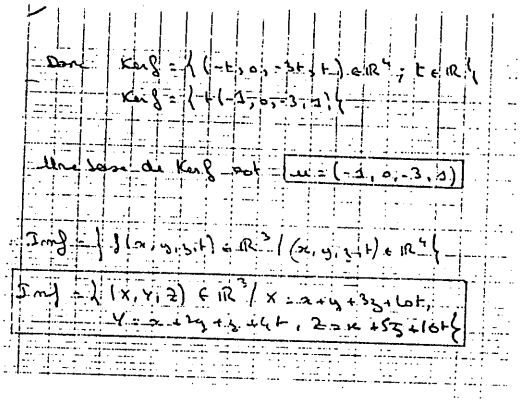
$-3z = -3t$

$z = t$

$L_3'' : x + y + 3z + 10t = 0$

$x + 0 - 3t + 10t = 0$

$x = -t$



Donc $\ker f = \{ (-t,0,-3t,t) \in \mathbb{R}^4 ; t \in \mathbb{R} \}$

$\ker f = \{ t(-1,0,-3,1) \}$

Une base du $\ker f$ est $u = (-1,0,-3,1)$

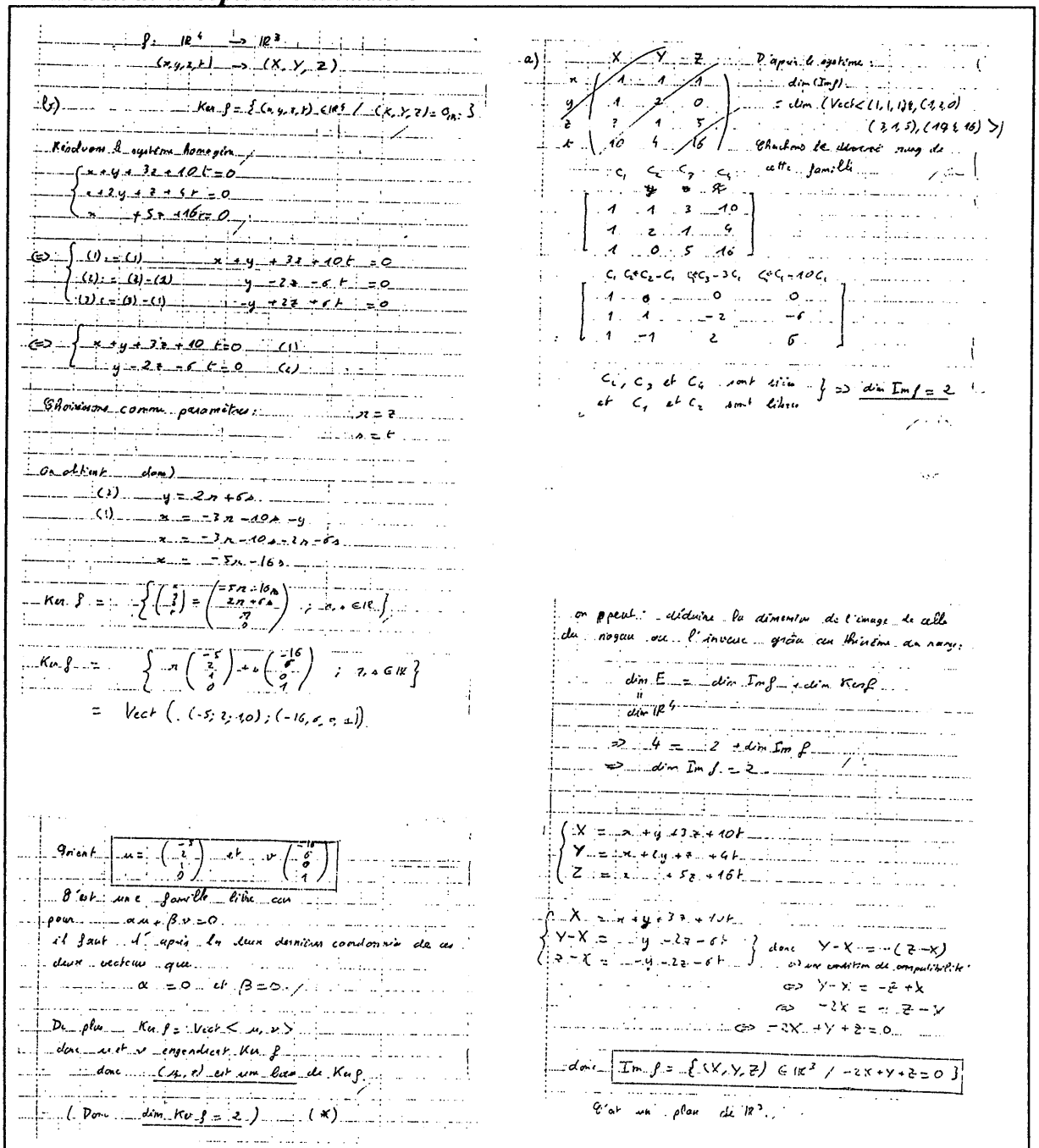
$\operatorname{Im} f = \{ f(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \}$

$\operatorname{Im} f = \{ (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 / X = x + y + 3z + 10t, Y = x + 2y + z + 4t, Z = x + 5z + 16t \}$

Commentaire : il n'y a pas de justification avec le théorème, mais explicitation sur l'espace auquel appartiennent les vecteurs du sous-espace image et justification par une seule relation de dépendance entre les vecteurs, ce qui amène à une conclusion erronée sur la dimension.

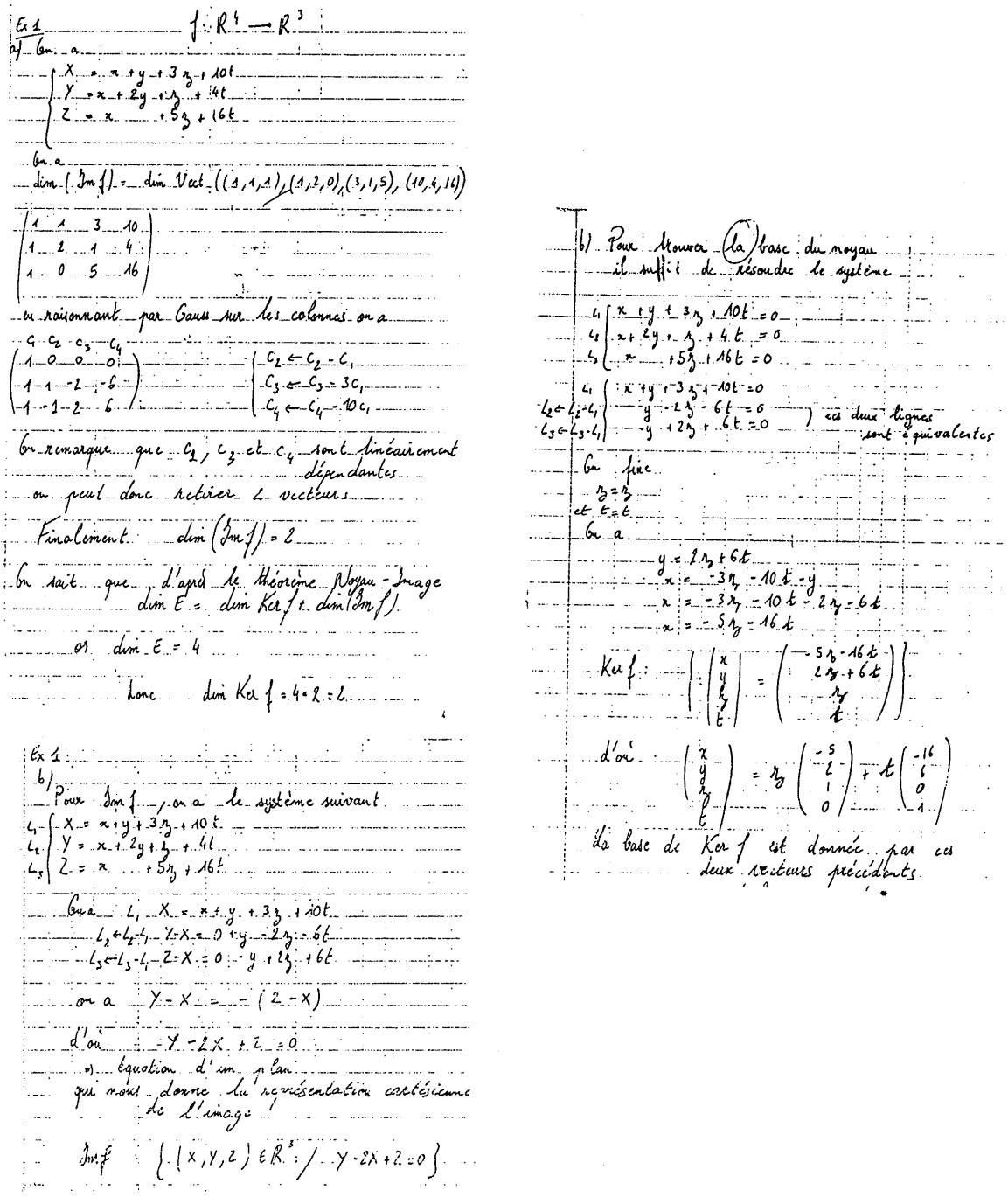
Niveau **2** : donner à voir la démarche suivie avec éventuellement des rappels de définitions et des justifications avec le théorème pour déterminer les dimensions dans la partie a) ainsi que des explicitations et des justifications lors de la détermination de représentations demandées.

Extrait de la copie de l'étudiant 5



Commentaire : justification de l'indépendance linéaire des vecteurs qui engendrent le noyau et l'image et explicitation des méthodes utilisées accompagnée d'une justification géométrique pour l'image mais sans justification de l'équation déterminée dans le cadre linéaire.

Extrait de la copie de l'étudiant 63



Ex 1 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

a) On a

$$\begin{cases} X = x + y + 3z + 10t \\ Y = x + 2y + z + 4t \\ Z = x + 5z + 16t \end{cases}$$

On a

$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,2,0),(3,1,5),(10,4,16))$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

En raisonnant par Gauss sur les colonnes on a

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -6 \\ -1 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 10C_1 \end{cases}$$

On remarque que c_2, c_3 et c_4 sont linéairement dépendantes

on peut donc retirer 2 vecteurs

Finalement $\dim(\mathrm{Im} f) = 2$

On sait que, d'après le théorème Noyau-Image

$\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim(\mathrm{Im} f)$.

or $\dim E = 4$

donc $\dim \mathrm{Ker} f = 4 - 2 = 2$

b) Pour trouver la base du noyau il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + 3z + 10t = 0 \\ x + 2y + z + 4t = 0 \\ x + 5z + 16t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z + 10t = 0 \\ -y - 2z - 6t = 0 \\ -y + 2z + 6t = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$ ces deux lignes sont équivalentes

On fixe

$z = z$

et $t = t$

On a

$y = 2z + 6t$

$x = -3z - 10t - y$

$x = -3z - 10t - 2z - 6t$

$x = -5z - 16t$

$$\mathrm{Ker} f : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5z - 16t \\ 2z + 6t \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -16 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base de $\mathrm{Ker} f$ est donnée par ces deux vecteurs précédents

Ex 1

b) Pour $\mathrm{Im} f$ on a le système suivant

$$\begin{cases} L_1 : X = x + y + 3z + 10t \\ L_2 : Y = x + 2y + z + 4t \\ L_3 : Z = x + 5z + 16t \end{cases}$$

On a L_1 $X = x + y + 3z + 10t$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $Y - X = 0 + y - 2z - 6t$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $Z - X = 0 - y + 2z + 6t$

on a $Y - X = -(Z - X)$

d'où $-Y - 2X + Z = 0$

= équation d'un plan qui nous donne la représentation cartésienne de l'image !

$\mathrm{Im} f = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 / -Y - 2X + Z = 0\}$

Commentaire : - explicitation et justification de la méthode de détermination des dimensions par la notion d'indépendance linéaire et le théorème dans la partie a).

- bricolage sur les équations et justification dans le cadre géométrique de l'équation du plan qui caractérise le sous-espace image.

- détermination d'une base du noyau par la remarque que les vecteurs de la représentation paramétrique "explicite tableau" forment cette base sans plus de justification.

Lors du codage nous n'avons pas séparé les questions a et b pour simplifier l'interprétation des données, nous les avons plutôt regroupées suivant les résultats obtenus pour le noyau et pour l'image.

Pour la présentation des résultats globaux et de l'analyse des résultats, nous séparons les deux questions vu que la plupart des étudiants ont suivi l'ordre prévu par l'énoncé, les quelques variantes étant plus liées à l'obtention ou non d'une base du noyau directement après une détermination directe de la dimension ou l'explicitation d'une base de l'image après la détermination du rang des vecteurs générateurs de l'image.

Le codage nous a permis de prendre en compte ces variantes de façon à mieux comprendre les difficultés dans les questions a et b que nous présenterons séparément pour mettre en évidence les spécificités de chacune de ces questions.

2) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE DE LA QUESTION 2A.

PROC M	PROC K	PROC M + K	PROC S	PROC S + K	PROC E	n'aborde pas la partie a / aucune conclusion	réussite/échec
90	25	18	15	2	10	3 / 1	62 / 56

Tableau 5 : Choix de méthodes et réussites pour la question 2A

1. Réussite globale

La partie a) de cette question a été bien plus réussie que la question précédente puisque soixante deux étudiants (53%) donnent une réponse correcte et justifiée.

2. Méthodes et réussite

La plupart de étudiants démarrent par la procédure M, c'est-à-dire par la détermination d'une base et de la dimension du sous-espace image, ce qui est compréhensible vu que l'énoncé de la question demandait la dimension de l'image, puis celle du noyau. Dix-huit étudiants utilisent à la fois les procédures de détermination d'une base et de la dimension de l'image et du noyau, mais la plupart utilisent le théorème du noyau et de l'image pour déterminer la seconde dimension (95 étudiants). Il y a donc dans cette partie de la question une bonne mobilisation du théorème pour économiser le travail.

Il y a aussi quinze étudiants qui démarrent par la procédure codée S, c'est-à-dire qui déterminent la dimension du sous-espace image par lecture de l'équation $2X - Y - Z = 0$ et huit étudiants qui n'ont employé que la procédure K de détermination d'une base et de la dimension du noyau.

Comme nous l'avons déjà souligné, la question a été plutôt bien réussie, si l'on ne prend en compte que les résultats il n'y a que trois étudiants qui ne l'abordent pas alors que soixante deux donnent une réponse correcte.

Si on ne considère que les conclusions cette question est encore mieux réussie mais il faut souligner que cette réussite peut être accompagnée d'erreurs "conceptuelles" ou de dérapages formels ainsi que d'erreurs d'interprétation et de calcul qui n'interviennent pas sur la détermination de la dimension, comme nous l'avons montré précédemment.

3. Analyse des erreurs

La méthode M prévue dans l'analyse a priori étant massivement employée dans cette partie de la question, les erreurs les plus significatives sont bien sûr relatives à cette méthode et nous avons mis en évidence les faits suivants :

Les erreurs de calcul sont limitées et quelquefois n'influent pas sur les dimensions cherchées. (9 étudiants)

Les confusions entre espace de départ et espace d'arrivée sont aussi limitées. (6 étudiants)

Les difficultés sont, en général, liées à l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique et se traduisent en particulier par : la confusion équations / vecteurs (14 étudiants), l'utilisation abusive (18 étudiants) et les erreurs d'interprétation du théorème du rang (rang des vecteurs lignes = rang des vecteurs colonnes) (8 étudiants) et le contrôle du nombre d'équations de liaison entre les vecteurs (7 étudiants).

- erreur confusion équation/vecteur

La plupart des étudiants appliquent la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice pour réduire la famille des vecteurs qui engendrent le sous-espace image et, parmi ces étudiants, il y en a quatorze qui commettent explicitement l'erreur de traduction des équations par des vecteurs.

- erreur d'utilisation abusive du théorème du rang et d'interprétation de ce théorème

Parmi les dix-huit étudiants qui utilisent la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes du tableau de coordonnées de vecteurs disposés en lignes sans mentionner le théorème, il y a 8 étudiants qui déterminent une base erronée de l'image avec des vecteurs dans $\mathbf{R}^4$, même si, en général, la dimension déterminée pour ce sous-espace est par ailleurs correcte.

- erreur due au contrôle du nombre de relations de liaison entre les vecteurs

Cette erreur amène à déterminer une dimension erronée du sous-espace image et, en général, comme les étudiants ont massivement employé le théorème, du noyau. La détermination de la dimension erronée pour le noyau pouvant ou non intervenir ensuite lors de la détermination d'une base.

Parmi les erreurs commises lors de la détermination des dimensions, en général celles qui donnent une dimension erronée sont celles liées à la confusion entre espace de départ et espace d'arrivée, ou à un défaut de contrôle du nombre de relations de liaison entre les vecteurs. Par contre, l'erreur d'utilisation abusive du théorème du rang qui nous semble mettre en jeu des difficultés plus profondes dans l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique puisqu'elle se traduit, en général, par la confusion équation/vecteur ou par des glissements de dimensions n'influe pas sur les résultats demandés.

Même s'il y a des étudiants ayant recours au cadre géométrique lorsqu'ils utilisent les deux autres méthodes K et S pour déterminer les dimensions, ce recours géométrique ne sert pas efficacement dans la détermination des dimensions, il intervient plutôt dans la détermination d'une équation pour caractériser une représentation cartésienne de l'image.

Ceci montre bien, que même si cette partie de cette question est mieux réussie, il y a encore comme pour la question précédente des difficultés dans l'articulation des points de vue au niveau de l'action, mais ici on trouve des explicitations plus fréquentes et des justifications correctes ou au moins partiellement correctes que nous allons examiner à la fin de la question 2B.

3) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE DE LA QUESTION 2B

BASE DU NOYAU

PROC K	PROC S	PROC M	PROC E	n'aborde pas la question / ne donne aucune conclusion	réussite / échec
98	5	1	6	12 / 3	46 / 61

Tableau 6 : Choix de procédures et réussite dans la détermination d'une base du noyau

REPRESENTATION CARTESIENNE DE L'IMAGE

PROC S	PROC K	PROC M	PROC E	n'aborde pas la question / ne donne aucune conclusion	réussite / échec
72	8	3	7	32 / 1	51 / 38

Tableau 7 : Choix de procédures et réussite dans la détermination d'une représentation cartésienne de l'image

1. Réussite globale

Les résultats permettent de mettre en évidence que la détermination d'une base du noyau pourrait être mieux réussie vu que quatre-vingt dix-huit étudiants ont démarré par la procédure prévue dans l'analyse a priori (méthode 1 de la détermination des dimensions) et qu'il n'y a que douze étudiants qui n'abordent pas cette question. Pourtant, on trouve seulement quarante six étudiants qui ont déterminé une base correcte du noyau.

A priori, la détermination d'une base du noyau met en jeu l'articulation des points de vue dans un sens plus accessible que celui sollicité pour la détermination d'une représentation cartésienne de l'image. C'est aussi sans aucun doute une tâche plus habituelle. Les étudiants y

semblent sensibles. 32 n'abordent pas la question relative à l'image contre douze seulement pour le noyau. En revanche, le décalage au niveau des réussites n'est pas celui qu'on pourrait attendre. En effet, on obtient 46 réponses correctes pour le noyau et 51 équations cartésiennes correctes pour l'image. Il faut voir là, nous semble-t-il, l'effet des caractéristiques spécifiques de cet exercice pour lequel l'image est un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ dont l'équation peut être identifiée par " simple lecture " des formules définissant l'application linéaire. Une réponse complètement correcte à cette question suppose soit l'utilisation de la procédure classique déjà décrite, soit l'exploitation de ces caractéristiques spécifiques, et c'est semble-t-il la démarche plutôt suivie par les étudiants. Mais les conclusions tirées de la lecture directe doivent alors être justifiées par un raisonnement sur les dimensions mettant en jeu l'articulation des points de vue. Ce n'est pas forcément le cas chez les étudiants qui repèrent l'équation comme le montre clairement les extraits précédemment reproduits. Nous y reviendrons dans la suite de l'analyse.

Soulignons enfin que dans la détermination d'une base du noyau, les difficultés peuvent intervenir à deux niveaux : soit lors du passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, soit lors de l'interprétation de la représentation paramétrique trouvée pour déterminer une base.

2. Le faible recours au cadre géométrique

Dans cette tâche, même si la dimension et l'équation du sous-espace image pouvaient être complètement déterminées dans le cadre géométrique, comme nous l'avons montré, le recours au géométrique est encore une fois faible et pas forcément efficace.

- On note deux recours " erronés " concernant le noyau, montrant les dérapages que peut produire une généralisation mal contrôlée en dimension supérieure à 3. (cf. copies 44 et 55)

En ce qui concerne l'image :

- un étudiant, après avoir déterminé la dimension du sous-espace image par la méthode M donne la conclusion correcte "donc comme dim Imf=2 alors Imf est un plan vectoriel", ceci ne l'aide visiblement pas à déterminer une représentation cartésienne de l'image.

- Seuls six étudiants utilisent comme moyen de justification le fait que le sous-espace image est un plan dans $\mathbf{R}^3$, cinq déterminant une équation correcte de l'image et un deux équations erronées sans être capable de contrôler son erreur.

3. Analyse des erreurs

Par rapport aux erreurs qui ont été commises lors de la détermination d'une base du noyau, nous allons nous centrer sur celles qui apparaissent lors de l'utilisation de la méthode K (détermination d'une base et de la dimension du noyau) en remarquant qu'il y a seulement quatre étudiants qui ont déterminé une base erronée du noyau par la méthode S (détermination

directe des représentations demandées et un autre par la méthode M (détermination d'une base et de la dimension de l'image).

Lors de la mise en fonctionnement de la méthode K, les erreurs les plus fréquentes ne sont pas comme nous l'avons déjà souligné de simples erreurs de calcul mais des erreurs qui mettent en jeu plus ou moins directement l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique : dix étudiants en effet échouent dans le passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique et trente sept dans le passage d'une représentation paramétrique à une base du noyau. A ceci s'ajoutent les erreurs consistant à interpréter une représentation cartésienne du noyau comme une représentation cartésienne de l'image.

Plus précisément :

- erreurs dans la détermination d'une base du noyau

  Parmi les trente-sept étudiants ayant déterminé une base erronée du noyau, nous trouvons :

  - dix-sept étudiants dont l'erreur apparaît liée à une erreur de calcul, mais cinq seulement parmi ceux-là dont l'erreur peut être considérée comme une simple erreur de calcul sans autre effet que le changement d'une ou deux composantes des vecteurs de base. Pour les douze restants ces erreurs de calcul vont soit en induire d'autres pouvant aller jusqu'au glissement des dimensions pour rester en cohérence avec la dimension déterminée précédemment (5 étudiants), soit induire des incohérences avec la dimension déterminée précédemment (7 étudiants) qui ne seront pas relevées. Ceci montre la faiblesse du contrôle par des raisonnements sur la dimension des calculs effectués.

  - sept étudiants dont l'erreur est liée à une erreur préalable lors du passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique. Dans ce cas on trouve trois étudiants dont les vecteurs du noyau sont bien dans $\mathbf{R}^4$ et pour lesquels la base donnée est cohérente avec la dimension déterminée précédemment, trois autres dont les vecteurs de base sont dans $\mathbf{R}^3$ (glissement de dimension), la base étant cependant cohérente avec la dimension et un étudiant déterminant une base dont les vecteurs sont dans $\mathbf{R}^4$ mais incohérente avec la dimension. On note donc dans ce cas aussi plus de la moitié des erreurs de calcul associées à des incohérences diverses dans l'articulation.

  - sept étudiants dont l'erreur se traduit par une interprétation erronée d'une représentation paramétrique correcte. Dans ce cas, précisons que cinq étudiants respectent l'appartenance des vecteurs du noyau à $\mathbf{R}^4$, quatre respectant aussi la cohérence : nombre de vecteurs de base = dimension et deux étudiants proposant des vecteurs de base dans $\mathbf{R}^3$ (en respectant cependant la cohérence nombre de vecteurs de base = dimension).

- trois étudiants dont l'erreur se traduit par l'association directe équation/vecteur après réduction correcte du système. Dans ce cas, pour les trois étudiants, les vecteurs sont dans $\mathbf{R}^4$ et il y a cohérence entre nombre de vecteurs de base et dimension.

- A ceci s'ajoutent trois erreurs marginales avec pour l'une un glissement de dimension et un étudiant qui détermine une base correcte du noyau mais incohérente avec la dimension trouvée.

- erreur d'interprétation d'une représentation cartésienne du noyau

- sept étudiants commettent l'erreur de considérer une représentation cartésienne minimale ou pas du noyau comme une représentation cartésienne de l'image.

Finalement, même pour une tâche aussi usuelle (trouver une base du noyau d'une application linéaire explicitement donnée), on ne peut manquer de remarquer le nombre d'erreurs commises. Celles-ci attestent de difficultés directes avec l'articulation qui peuvent se présenter à des niveaux différents lors de la résolution de la tâche et peuvent se traduire par des blocages ou des incohérences. Ces erreurs montrent aussi l'impossibilité de faire jouer l'articulation pour contrôler le travail mathématique.

On remarque encore que lors de la détermination d'une base du noyau il y a de la part des étudiants un travail plus élaboré au niveau des explicitations et justifications et on souligne que même les réponses erronées sont, en général, accompagnées d'explicitations qui permettent plus facilement de repérer les erreurs. Nous reviendrons sur ce point dans la partie 4 lors de l'analyse des explicitations et justifications.

Par rapport aux erreurs mises en évidence lors de la détermination d'une représentation cartésienne de l'image, nous allons nous centrer à présent sur celles commises lors de l'utilisation de la méthode S, vu que la plupart des étudiants qui ont abordé cette partie de la question ont employé cette méthode.

Lors de la mise en fonctionnement de la méthode S, les erreurs les plus fréquentes sont les suivantes :

- erreurs lors de la caractérisation du sous-espace image par une relation de liaison entre X, Y et Z

- quatorze étudiants déterminent une ou deux relations de liaison entre X, Y et Z pour caractériser le sous-espace image. Dans la plupart des cas, il y a incohérence entre le nombre d'équations et la dimension déterminée précédemment ce qui aurait dû alerter les étudiants. Ceci étant le cas aussi des six autres étudiants qui ont considéré le système donné comme une représentation cartésienne de l'image.

- erreurs d'interprétation de l'équation 2X - Y = Z

- quatre étudiants utilisent cette équation pour déterminer une base du noyau, en commettant aussi un glissement de dimension puisque, dans leurs bases, les vecteurs sont dans $\mathbf{R}^3$.

- trois autres étudiants semblent faire la confusion vecteur/équation lorsqu'ils essayent de justifier la dimension de l'image en se référant à l'équation 2X - Y = Z. (cf. copie 81, méthode S)

Aux grandes catégories d'erreurs mises en évidence plus haut, s'ajoutent des erreurs diverses marginales que nous avons codées **E** où l'on trouve une accumulation de confusions et d'erreurs. Comme nous l'avons déjà souligné, les niveaux d'explicitations et justifications sont beaucoup plus élaborés que ceux rencontrés pour la question précédente et ce sont eux que nous allons analyser maintenant.

4. Analyse des explicitations et justifications

Explicitations niveau 0 / niveau 1 / niveau 2	**Justifications(théorèmes et explicitation application) TNI / TEP / FO**
3 / 60 / 59	95 / 0 / 81

Tableau 8 : Niveaux d'explicitation et justification de la question 2

Le niveau 1 consiste à donner à voir la démarche suivie avec un discours justificatif plutôt relié à la première partie a) de la question. La deuxième partie donne plutôt lieu à des explicitations accompagnées éventuellement de définitions concentrées au début de la tâche, dans un discours de type "descriptif".

Il y a très peu d'écritures quantifiées. L'équivalence lors de la résolution du système peut ou non apparaître ainsi que les indications des combinaisons linéaires des équations ou des vecteurs, lors de l'utilisation de la méthode du pivot de Gauss sur le tableau de coordonnées des vecteurs, lors de la détermination de la dimension de l'image.

Toujours au niveau des explicitations, il y a aussi assez fréquemment explicitation du système par une interprétation fonctionnelle (49 étudiants), suivie pour certains étudiants (32 étudiants) par l'identification des vecteurs qui engendrent le sous-espace image comme l'ensemble des images des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Le niveau 2 consiste à préciser la démarche suivie avec des explicitations et justifications tant dans la partie a) que dans la partie b) de la question. Pour la partie b), les justifications sont plutôt concentrées sur la détermination d'une base du noyau puisque, lors de la détermination d'une représentation cartésienne de l'image on trouve seulement 6 étudiants qui donnent une

justification géométrique correcte. De plus, le théorème du rapport entre nombre d'équations et dimension du sous-espace (**TEP**) n'est utilisé par aucun étudiant.

On voit bien, pour cette tâche, dont une partie est tout à fait usuelle, se déployer un discours descriptif et justificatif, institutionnellement appris. En revanche, lorsque la tâche s'écarte de l'usuel par la question portant sur la représentation cartésienne de l'image, on se retrouve dans la situation de la question précédente. Les justifications se raréfient. On notera aussi que les rares qui apparaissent exploitent le cadre géométrique et qu'alors l'articulation dans le cadre linéaire et celui des systèmes n'est pas mobilisée.

II. L'ANALYSE DE PRODUCTIONS DES ETUDIANTS DE MAITRISE EN MATHEMATIQUES

II.1. LE CONTEXTE

Les copies dépouillées concernent deux variantes d'un même test (test 1 et test 2 - annexes 3 et 4) qui ont été passés par un groupe de 15 étudiants de la maîtrise de mathématiques à l'université de Paris VII, dans le cadre d'une séance de travaux dirigé (2h). L'enseignante a distribué aléatoirement les deux tests, nous avons ainsi six étudiants qui ont répondu au test 1 et neuf qui répondent au test 2. Les questions seront analysées, suivant leur ordre dans l'analyse a priori et pour chaque question nous préciserons les variantes éventuelles entre les deux tests.

II.2. PRESENTATION DE L'ANALYSE

Ici aussi, nous avons codé les différentes procédures, même lorsqu'il s'agit d'une procédure décrite dans l'analyse a priori, pour pouvoir mettre en évidence les spécificités de travail des étudiants. Ceci nous permet aussi de pointer les difficultés et de comparer le travail des étudiants de maîtrise avec celui des étudiants de DEUG.

L'analyse des résultats sera aussi organisée en deux parties, comme pour les étudiants de DEUG sciences, à savoir :

a) présentation du codage utilisé, avec des exemples de productions typiques ;

b) résultats globaux et analyse de résultats (les résultats détaillés étudiant par étudiant sont en annexe 9).

QUESTION 1 : On considère dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs suivants :
$a = (2, 3, -1)$ $b = (1, -1, -2)$ $c = (5, 0, -7)$ $d = (0, 0, 1)$
Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par {a, b} et {c, d}.

1) CODAGE UTILISE

Cette question correspond à la deuxième question du test 1 des étudiants de maîtrise et nous l'avons codée de la même façon que pour les étudiants du DEUG en rajoutant des codages pour les nouvelles variantes rencontrées.

Par rapport aux procédures déjà identifiées en DEUG, apparaît une nouvelle technique qui n'avait pas été prévue dans l'analyse a priori. Avant de passer au codage proprement dit, nous allons décrire cette technique. Nous présenterons ensuite les codages nouveaux introduits, en les illustrant par des extraits de copies.

Nouvelle technique (NT) : Cette technique se rattache à la méthode 6 visant à déterminer une représentation cartésienne de chacun des sous-espaces, puis à en déduire une représentation cartésienne de l'intersection.

Pour déterminer une représentation cartésienne d'un sous-espace de R^p engendré par n vecteurs donnés dans le registre tableau, elle consiste à créer un tableau constitué de n+1 colonnes, les n premières correspondant aux vecteurs donnés et la dernière à un vecteur générique $(x_1, ..., x_p)$ du sous-espace.

Ensuite ce tableau est réduit à la forme triangulaire inférieure par la méthode de Gauss appliquée aux colonnes.

On se ramène ainsi, en supprimant éventuellement les colonnes nulles, à un tableau à k+1 colonnes, k étant la dimension du sous-espace donné. Les k premiers vecteurs colonnes forment alors une base du sous-espace, et les p - k termes non nuls de la dernière colonne sont les premiers membres des équations de la représentation cartésienne cherchée. *(si l'un était non nul le rang* de la famille serait k+1 et non k).

Dans le cas du sous-espace lin{a, b}, cette technique fonctionne de la façon suivante :

On passe de $\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ -1 & -2 & z \end{bmatrix}$ à $\begin{matrix} c_1 & c'_2 & 5c'_3-(2y-3x)c'_2 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 14x-6y+10z \end{bmatrix}$ ($c'_2 = c_1 - 2c_2$ et $c'_3 = 2c_3 - x\,c_1$). On en déduit que la dimension est égale à 2 et que l'équation 14x-6y+10z = 0 est une équation qui caractérise une représentation cartésienne du sous-espace donné.

remarque : l'écriture des combinaisons linéaires permet de justifier l'indépendance linéaire des vecteurs qui engendrent le sous-espace.

Dans le cas du sous-espace lin{c, d}, on passe de $\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ -7 & 1 & z \end{bmatrix}$ à $\begin{matrix} c_1 & c_2 & 5c_3 - xc_1 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5y \\ -7 & 1 & 5z+7x \end{bmatrix}$. Pour terminer la réduction triangulaire, on inverse alors les deuxième et troisième lignes et on arrive ainsi à : $\begin{matrix} c_1 & c_2 & 5c_3 - xc_1 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 5z+7x \\ 0 & 0 & 5y \end{bmatrix}$ puis à $\begin{matrix} c'_1 & c'_2 & c'_3 - (5z+7x)c'_2 \end{matrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5y \end{bmatrix}$, d'où la dimension du sous-espace et son équation : y = 0.

Encore une fois, le fait que l'équation du sous-espace soit y = 0 perturbe l'application de la technique standard, et peut conduire à des erreurs, si les étudiants l'appliquent mécaniquement, sans comprendre sur quoi elle repose.

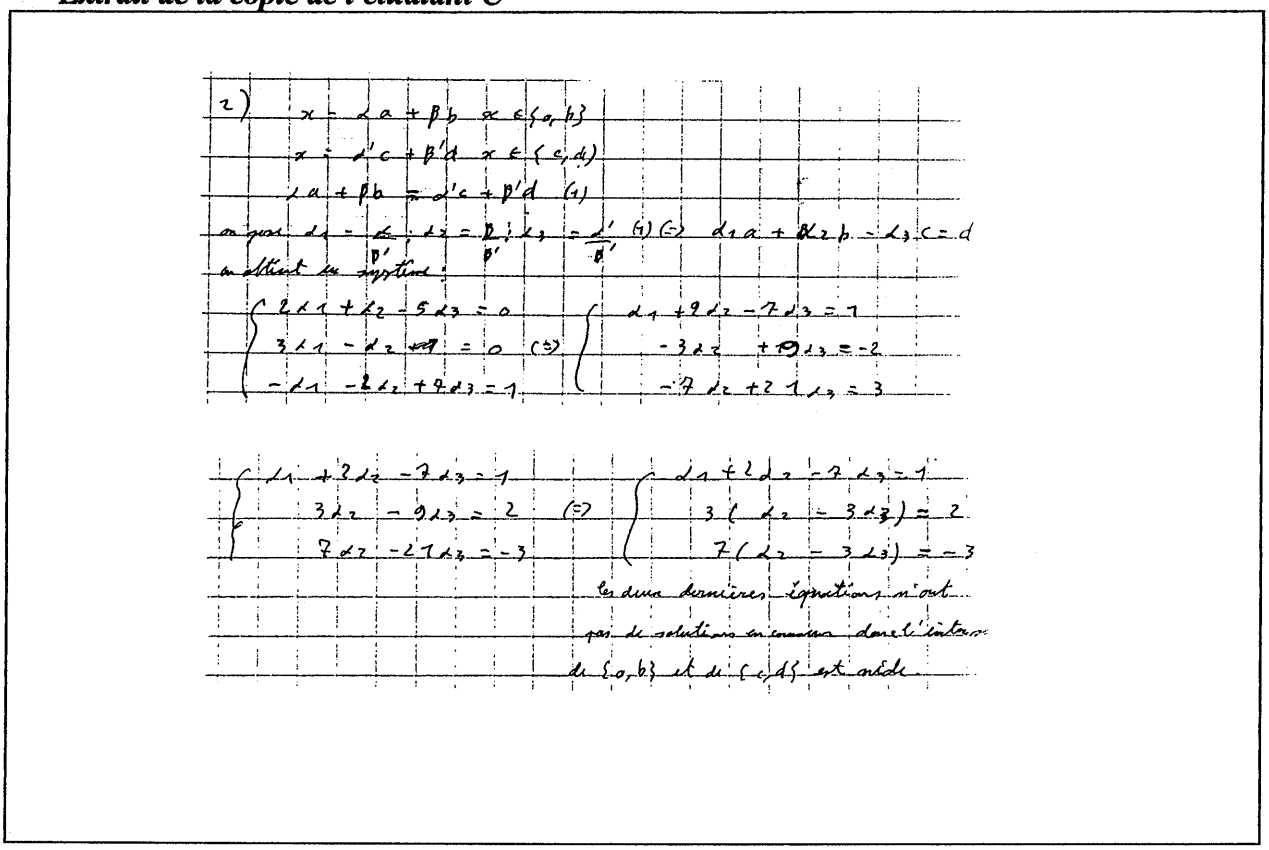
LES PROCEDURES LIEES AUX TECHNIQUES DE DETERMINATION D'UNE REPRESENTATION CARTESIENNE DU SOUS-ESPACE INTERSECTION

Méthode P

Codage d'erreurs d'interprétation

Ecriture correcte (méthode P) de l'intersection, puis réduction à trois inconnues en divisant chacune par le coefficient du vecteur $\vec{d}$ sans prendre en compte le cas particulier où ce coefficient est nul (choix malheureux puisque pour les vecteurs de l'intersection, ce coefficient est justement nul). Ceci conduit à un système de trois équations à 3 inconnues sans solution et l'étudiant conclut que l'intersection est vide sans repérer qu'une telle réponse est impossible. (code **It**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant C



Codage de solution partielle

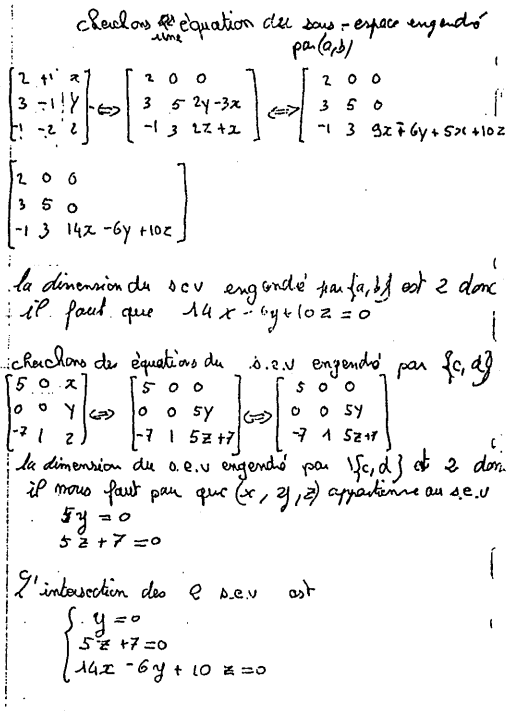
a) Arrêt après détermination du système correct sans résolution. (code **SPq**) (1 étudiant)

Méthode C

Codage d'erreurs d'interprétation

Interprétation incorrecte d'une triangulation partielle par la nouvelle technique. Soulignons que cette interprétation est contradictoire avec la dimension correcte donnée pour le sous-espace. (code **Iu**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant D



Commentaire : La technique est perturbée par y = 0. L'étudiant détermine la dimension correcte de lin{c, d}, mais ne repère pas l'incohérence entre nombre d'équations et dimension.

2) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE DE LA QUESTION 1

Réussite (rep. cart. correcte de l'int)	Réussite partielle (rep. par. correcte de l'int.)	Echec	n'aborde pas la question
0	1	4	1

Tableau 9 : Réussite / Echec

	Procédure P	Procédure C	
correctes	0	0	**correctes**
erreur d'interpr..	1	1	**erreur d'interpr.**
inachevée rep. par. correcte	1		
inachevée syst. sans résolution	1		
Total	3	1	**Total**

Tableau 10 : Les difficultés et les erreurs pour les méthodes P et C

1. Réussite Globale

Même si les résultats doivent être pris avec prudence vu le faible effectif, ces données semblent mettre en évidence que les résultats obtenus par les étudiants de maîtrise sont moins bons que ceux des étudiants de DEUG qui ont passé le test juste après l'enseignement. Aucun des six étudiants concernés ne réussit; un seul détermine une représentation paramétrique "implicite équation" correcte de l'intersection mais il ne réussit pas à l'exploiter pour obtenir une représentation cartésienne correcte.

2. Analyse des productions étudiant par étudiant

Parmi les six étudiants qui avaient cette question à résoudre :

- un étudiant ne l'aborde même pas.

- deux étudiants utilisent la méthode P mais n'aboutissent pas : un s'arrête sans résoudre le système, l'autre s'arrête à une représentation paramétrique "implicite équation". Ce dernier est le seul qui avait la possibilité de déterminer la représentation cartésienne par lecture sur les composantes d'un vecteur générique.

- un étudiant utilise la méthode P, mais commet une erreur de gestion du paramètre lors de la réduction du système (copie C). Cette erreur l'amène à une réponse impossible qu'il n'est pas capable de repérer. Cette erreur n'apparaissait pas en DEUG.

- un étudiant utilise la nouvelle technique (copie D) mais est perturbé par $y = 0$. Bien que disposant d'une technique appropriée qui devait lui permettre de repérer son erreur. La perturbation agit au niveau de l'application et de l'interprétation des résultats de la technique amenant à une incohérence entre nombre d'équations et dimension.

- un dernier étudiant fait une erreur grossière d'association directe équation/vecteur.

3. Niveaux d'explicitations et de justifications

Il n'y a pas différents niveaux d'explicitation et justification comme cela avait été le cas en DEUG, puisque les cinq étudiants qui ont résolu cette tâche ne donnent à voir que la démarche suivie sans discours justificatif explicite.

Il n'y a pas d'écriture quantifiée et l'équivalence apparaît seulement dans trois copies. Le théorème de liaison entre nombre d'équations et dimension du sous-espace caractérisée par ces équations n'est pas mentionné et, comme nous l'avons déjà souligné, le cadre géométrique est absent. Un seul étudiant détermine les dimensions de lin{a, b} et lin{c, d} mais ces dimensions ne lui permettent pas de repérer les incohérences dans sa réponse.

4. Comparaison DEUG / Maîtrise

Si l'on compare plus précisément les productions DEUG et maîtrise, nous voyons un certain nombre de convergences mais aussi des divergences. Bien sûr, tout ceci doit être pris avec de multiples précautions : nous n'avons que six étudiants de maîtrise pour cette tâche.

- Comme en DEUG, la procédure P est majoritaire. (3 étudiants)
- Comme en DEUG, le recours géométrique faible (en fait, il est ici inexistant).
- Comme en DEUG, l'équation y = 0 perturbe certains étudiants et conduit à des erreurs.
- Comme en DEUG, le recours à des énoncés généraux, les moyens de contrôle sont faibles, on note des erreurs grossières et des incohérences.

En revanche, nos six étudiants de maîtrise ne commettent pas l'erreur d'utiliser les mêmes paramètres pour les deux sous-espaces et ils ne commettent pas non plus d'erreurs de glissement de dimension.

Aucun ne détermine une représentation cartésienne par lecture sur les composantes d'un vecteur générique, ce qui était présent même si cela restait peu fréquent en DEUG. Un seul étudiant (cf. copie D) détermine les dimensions de lin{a, b} et lin{c, d} mais ce résultat ne lui permet pas de repérer son incohérence lorsque, suite à un blocage provoqué par la perturbation y=0, il donne pour lin{c, d} une représentation cartésienne à deux équations.

QUESTION 2 :
- Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui, à chaque vecteur (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$, associe le vecteur (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} a = x + y + 3z + 10t \\ b = x + 2y + z + 4t \\ c = x + 5z + 16t \end{cases}$$

a) Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f;
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image. (test 1)

- Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui, à chaque vecteur (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$, associe le vecteur (x + y + 3z + 10t, x + 2y + z + 4t, x + 5z + 16 t) de $\mathbf{R}^3$.
a) Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f;
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image. (test 2)

Cette question correspond à la première question des tests 1 et 2 des étudiants de maîtrise en mathématiques, et même s'il y a une petite variante sur la forme de définition de l'application linéaire, nous allons les analyser ensemble, comme nous l'avons déjà fait dans l'analyse a priori.

1) CODAGE UTILISE

Nous avons utilisé le même codage que celui employé pour les étudiants de DEUG en rajoutant d'autres codes lorsque nécessaire. Nous les précisons ci-après, en les illustrant par des extraits de copies d'étudiants.

PROCEDURES LIEES A LA DETERMINATION DES DIMENSIONS

Méthode M

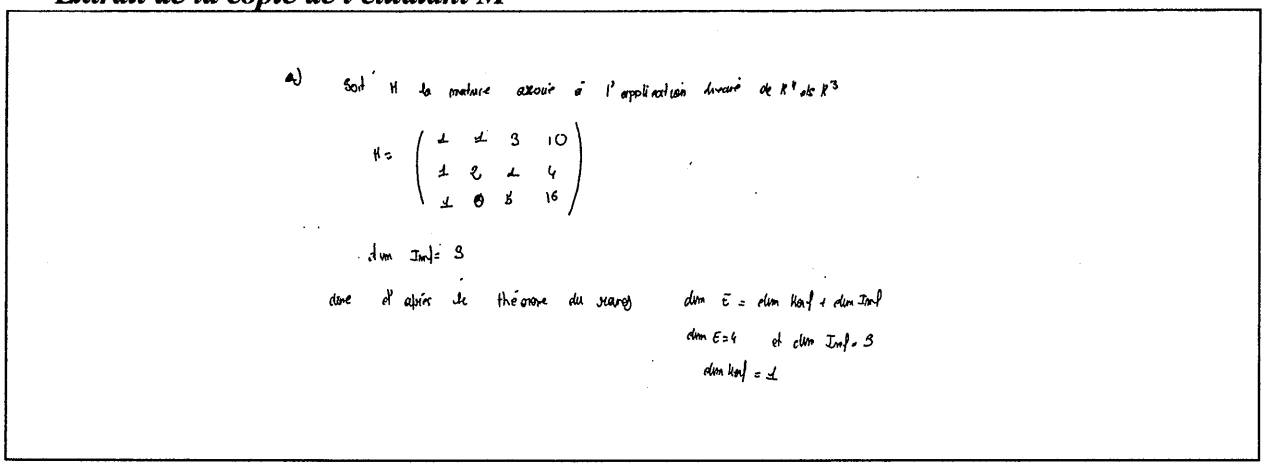
Cette méthode rappelons-le, est basée sur la détermination d'une base et de la dimension du sous-espace image.

Codage des erreurs

Deux nouvelles erreurs apparaissent ici :

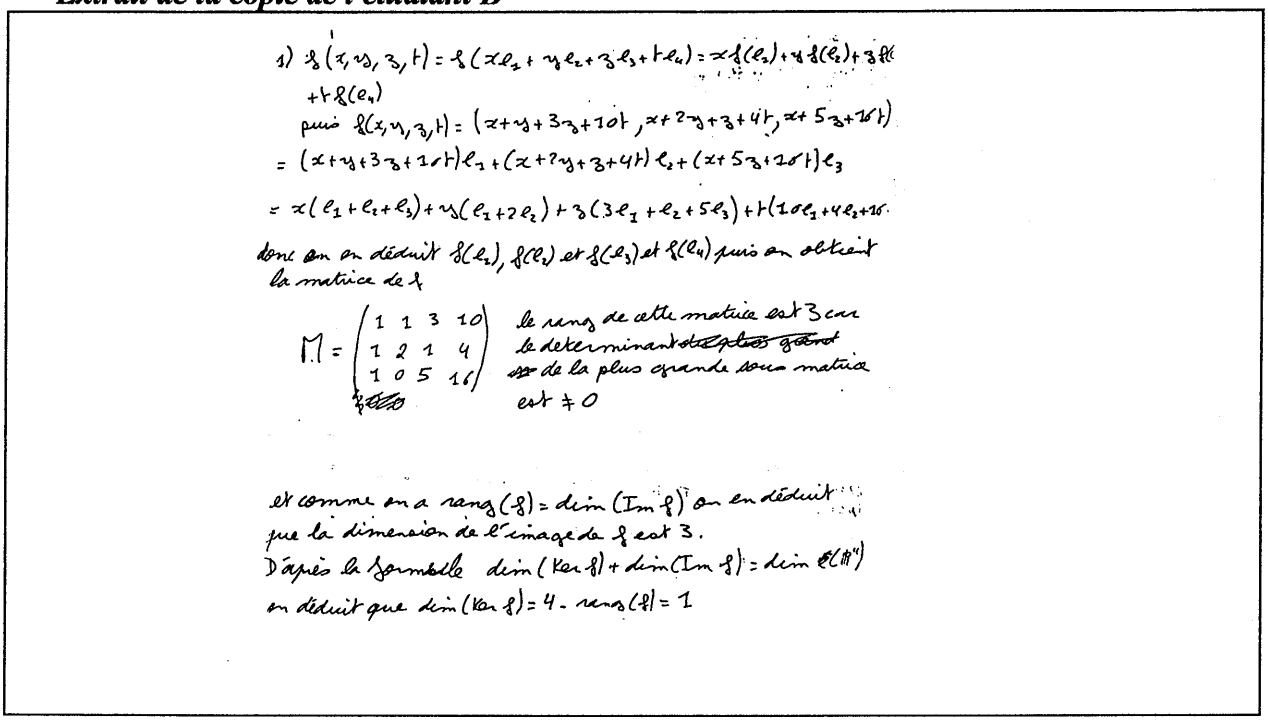
a) écrire la matrice des coefficients du système et conclure de façon erronée que dim Imf = 3, sans aucun commentaire. (code **CDIf**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant M



b) écrire la matrice des coefficients du système et conclure, de façon erronée, que le déterminant d'ordre 3 est différent de zéro. (code **CDIg**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant B



1) $f(x,y,z,t) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4)$

puis $f(x,y,z,t) = (x+y+3z+10t, x+2y+z+4t, x+5z+16t)$

$= (x+y+3z+10t)e_1 + (x+2y+z+4t)e_2 + (x+5z+16t)e_3$

$= x(e_1+e_2+e_3) + y(e_2+2e_2) + z(3e_1+e_2+5e_3) + t(10e_1+4e_2+16$

donc on en déduit $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ et $f(e_4)$ puis on obtient la matrice de f

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 16 \end{pmatrix}$$

le rang de cette matrice est 3 car le déterminant de la plus grande sous matrice est $\neq 0$

et comme on a $\text{rang}(f) = \dim(\text{Im } f)$ on en déduit que la dimension de l'image de f est 3.

D'après la formule $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$

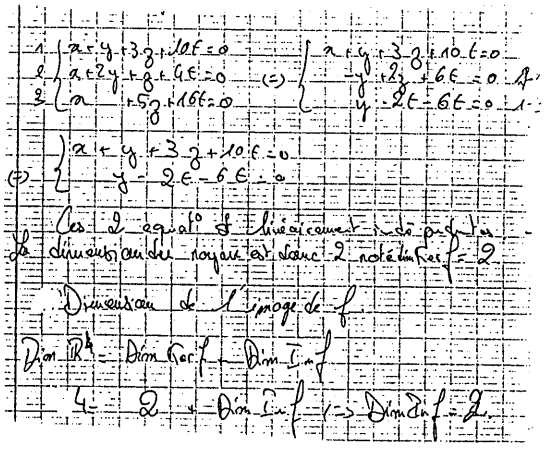
on déduit que $\dim(\text{Ker } f) = 4 - \text{rang}(f) = 1$

Méthode K

Cette méthode est basée sur la détermination d'une base et de la dimension du noyau.

Pour cette méthode, nous n'avons pas introduit de nouveaux codages, même si les formes prises par les erreurs, par exemple dans la détermination d'une base du noyau (5 étudiants) prennent des formes parfois légèrement différentes comme en témoignent les deux extraits suivants (copie K et copie P)

Extrait de la copie de l'étudiant K



$$\begin{cases} x+y+3z+10t=0 \\ x+2y+z+4t=0 \\ x+5z+16t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z+10t=0 \\ y-2z-6t=0 \end{cases}$$

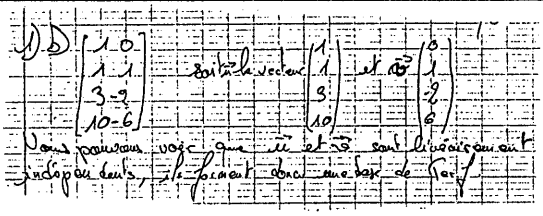
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z+10t=0 \\ y-2z-6t=0 \end{cases}$$

Ces 2 égalités étant linéairement indépendantes la dimension du noyau est donc 2 noté $\dim \text{Ker } f = 2$

Dimension de l'image de f

$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$

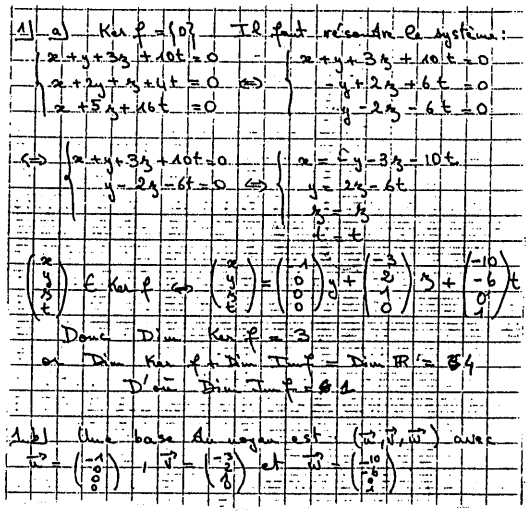
$4 = 2 + \dim \text{Im } f \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = 2$



Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\text{Ker } f$

Commentaire : traduction brutale équation / vecteur après réduction correcte du système correspondant au noyau et identification des deux vecteurs obtenus à une base du noyau.

Extrait de la copie de l'étudiant P



Commentaire : Erreur passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, l'étudiant a oublié de prendre en compte la liaison entre y, z et t.

PROCEDURES LIEES A LA DETERMINATION DES REPRESENTATIONS

LE CAS OU LA STRATEGIE DEVELOPPEE PAR L'ETUDIANT N'A PAS DE CORRESPONDANT DANS L'ANALYSE A PRIORI

Les seuls nouveaux codages introduits correspondent ici à la nouvelle méthode NT, non prévue dans l'analyse a priori et non rencontrée en DEUG.

Méthode NT

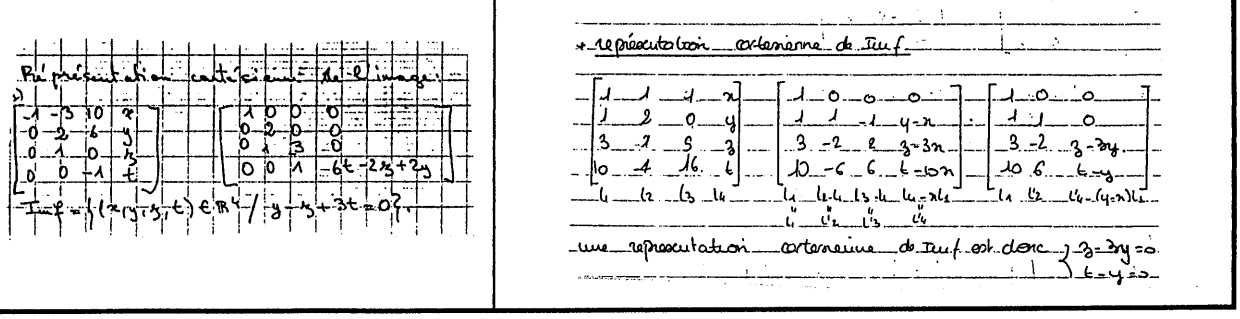
Cette méthode a conduit à des erreurs dans la détermination de la représentation cartésienne de l'image.

Codage d'erreur

- <u>erreur "conceptuelle" ou dérapage formel</u>

Nous introduisons un nouveau code pour l'erreur consistant à traduire brutalement les équations par des vecteurs de $\mathbf{R}^4$, puis à appliquer la nouvelle technique. Ceci, comme on le voit sur les extraits ci-après conduit à considérer l'image comme une partie de $\mathbf{R}^4$. (code **CDInt**) (4 étudiants)

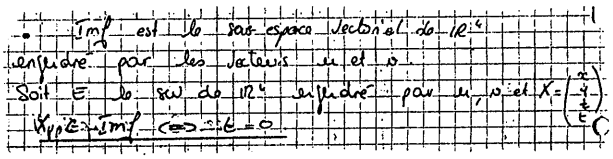
Extrait de la copie de l'étudiant P et de l'étudiant F



Code E

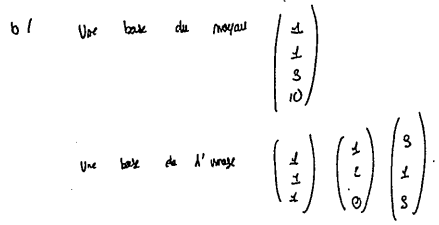
Nous avons codé **E** toutes les erreurs marginales qui ne sont pas associés à des méthodes prévues dans l'analyse a priori. Nous en donnons deux exemples ci-après, le premier étant difficilement interprétable.

Extrait de la copie de l'étudiant G



Commentaire : l'image est donnée comme un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par 2 vecteurs. L'équation t=0 apparaît sans justification.

Extrait de la copie de l'étudiant M



Commentaire : l'étudiant écrit la matrice des coefficients du système et donne comme base erronée du noyau la première ligne de cette matrice et comme base erronée de l'image les trois premières colonnes sans aucun commentaire.

Niveaux d'explicitation

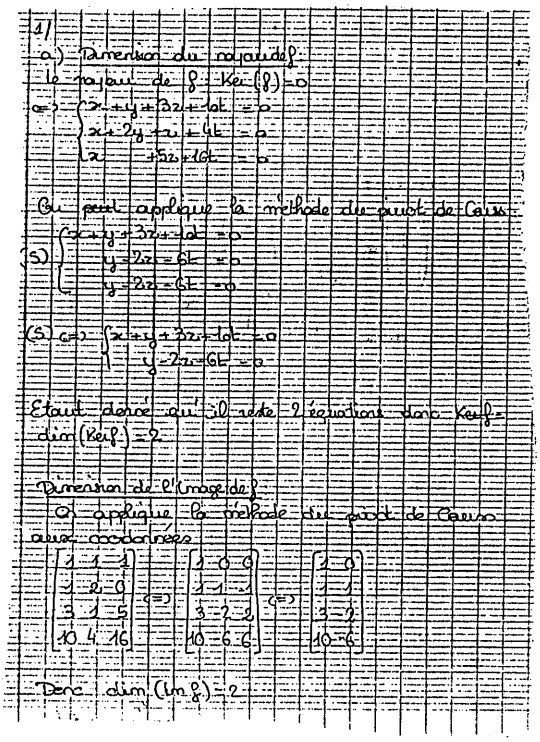
Pour cette question nous avons introduit les deux niveaux d'explicitation suivants :

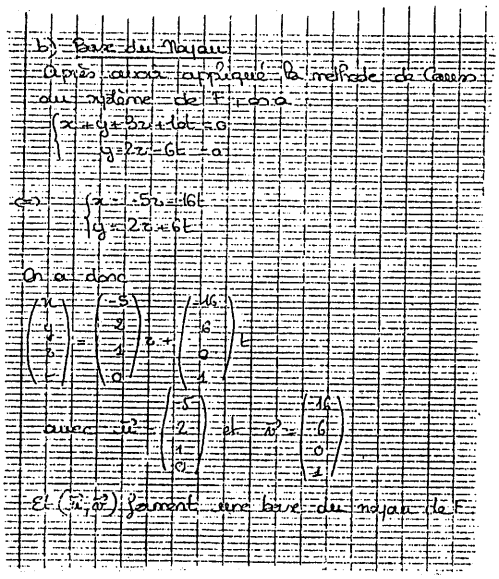
Niveau **0** : ne donner à voir qu'une succession de calculs. (cf. copie C, 1 étudiant)

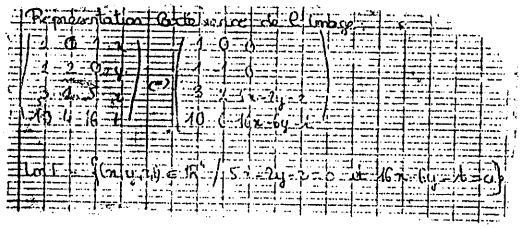
Niveau **1** : donner à voir la démarche suivie avec éventuellement des rappels de définitions et en citant éventuellement le théorème reliant les dimensions du noyau et de l'image dans la partie a). (14 étudiants)

Le copie suivante illustre nous semble-t-il bien les productions de niveau 1.

Extrait de la copie de l'étudiant L







Commentaire : L'étudiant précise les étapes : dimension du noyau, dimension de l'image, base du noyau et représentation cartésienne de l'image. Il donne aussi le nom des méthodes utilisées pour le noyau et la dimension de l'image.
En revanche, les conclusions sont données sans justification à partir des résultats de calculs.
Aussi pour la dimension du noyau, ceci ne nous permet pas de savoir si le nombre 2 est donné simplement parce qu'il reste deux équations ou parce qu'il est vu comme le complément de 2 à 4 (nombre d'inconnues moins nombre d'équations).
De même pour la dimension de l'image, l'étudiant semble appliquer un Gauss-colonne aux vecteurs images disposés en ligne. Comment déduit-il la dimension de l'image ?
On peut penser à une utilisation implicite du théorème du rang mais la fin de la production de l'étudiant où, en fait, la technique NT est utilisée pour déterminer une représentation cartésienne de l'image avec une organisation en tableau qui donne une représentation du noyau permet d'en douter.

2) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE DE LA QUESTION 2A.

PROC M + K	PROC M	PROC K	n'aborde pas la question	réussite / échec
1	4	12	0	7 / 8

Tableau 11 : Choix de méthodes et réussite pour la question 2A

1. Réussite Globale

La partie a) de la question est mieux réussie que la question précédente, comme c'était aussi le cas pour les étudiants de DEUG, mais il y a quand même sur une question aussi banale, moins de 50% de résultats corrects.

2. Analyse des productions des étudiants

La plupart des étudiants (12 étudiants) démarrent par la méthode K, ce qui est normal vu la forme de l'énoncé où le terme « noyau » précède le terme « image », contrairement à la situation en DEUG. Les trois étudiants restant utilisent la méthode M et un seul utilise les méthodes M et K.

Dans la détermination de la dimension du noyau (pour les étudiants ayant utilisé la méthode K), on note peu d'erreurs de calcul dans la résolution du système (2 seulement). C'est une fois le système réduit que vont se produire des erreurs.

- quatre étudiants concluent directement sur la dimension du noyau à partir du système réduit. Trois le font sans aucun commentaire (cf. copie L). Il est difficile dans ces conditions de savoir si la dimension 2 donnée, est vue comme correspondant au nombre d'équations restant ou au complément à quatre de ce nombre.

- huit étudiants passent à une représentation paramétrique du noyau, voire une base, avant de conclure sur la dimension. On note ici des erreurs plus nombreuses, mais vu qu'elles sont sans répercussion sur la dimension donnée, nous les analyserons avec les réponses à 2B.

- la détermination de la dimension de l'image, une fois connue celle du noyau, se fait très majoritairement (8 étudiants) par l'utilisation du théorème du noyau et de l'image. Deux étudiants commettent ici l'erreur consistant à confondre espace de départ et espace d'arrivée dans l'énoncé du théorème. Ces étudiants en déduisent dim Imf = 1 et ne corrigent pas en fonction de l'incohérence, pourtant facilement visible, avec ce qui précède.

- pour les étudiants ayant démarré par la dimension de l'image, deux concluent de façon erronée que la dimension est 3 et en déduisent alors une dimension 1 pour le noyau. Encore une fois, l'erreur pourrait être repérée lorsque les étudiants déterminent une base du noyau. Ceci n'est pas non plus le cas pour ces étudiants.

Notons qu'il n'y a pas dans cette partie 2A, de référence au cadre géométrique, en ce qui concerne l'image.

3) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE DE LA QUESTION 2B

BASE DU NOYAU

PROCK	PROCE	n'aborde pas la question /aucune conclusion	réussite / échec
13	1	1 / 1	7 / 6

Tableau 11 : Choix de méthodes et réussite dans la détermination d'une base du noyau

REPRESENTATION CARTESIENNE DE L'IMAGE

PROCS	PROCNT	PROCE	n'aborde pas la question	réussite / échec
6	4	2	3 / 1	2 / 9

Tableau 12 : Choix de méthodes et réussite dans la détermination d'une représentation cartésienne de l'image

1. Réussite Globale

Le dépouillement met en évidence une réussite très proche de celle des étudiants de DEUG pour la détermination d'une base du noyau, et moins bonne lors de la détermination d'une représentation cartésienne de l'image. En DEUG, rappelons que certains étudiants avaient été capables de déterminer une équation par simple lecture, par contre les deux étudiants de maîtrise qui ont réussi à déterminer une représentation cartésienne correcte sont ceux qui ont utilisé la méthode du pivot de Gauss sur le système.

2. Analyse des productions des étudiants

Les quinze étudiants avaient cette question dans leur test, un étudiant n'aborde pas la détermination d'une base du noyau et trois étudiants n'abordent pas la détermination d'une représentation cartésienne de l'image.

En ce qui concerne la détermination d'une base du noyau :

- cinq étudiants déterminent une base erronée du noyau. Dans trois cas, les erreurs commises mettent en jeu l'articulation des points de vue : évacuation des coordonnées nulles qui conduit à une base de vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ (1 étudiant), association brutale des deux équations du système (voire une seule) réduit à deux vecteurs (voire un vecteur) de base du noyau (2 étudiants). On notera cependant qu'il y a toujours cohérence entre la dimension trouvée et le nombre des vecteurs de la base proposée.

En ce qui concerne la détermination d'une représentation cartésienne de l'image :

- il n'y a que deux réussites associées à l'utilisation de la méthode du pivot de Gauss sur le système associé à l'application. Les deux étudiants déterminent une équation en a, b, et c après réduction du système, un seul donne une représentation ensembliste du sous-espace image.

- quatre étudiants considèrent le système donné comme une représentation cartésienne du sous-espace image.

- quatre étudiants, en utilisant la méthode NT, à partir des vecteurs associés aux équations déterminent des représentations cartésiennes pour des sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ sans se rendre compte du glissement de dimension. A ceci s'ajoute l'étudiant G dont la production correspondant elle aussi à une image dans $\mathbf{R}^4$ est incompréhensible.

3. Analyse des explicitation et justifications

Nous avons distingué ici 2 niveaux d'explicitation :

- un étudiant ne donne à voir qu'une succession de calculs sans aucune explicitation ou justification, nous n'avons pu savoir comment il a conclu correctement sur les dimensions du noyau et de l'image à partir d'une représentation cartésienne minimale du noyau.

- Les quatorze étudiants restants donnent à voir la démarche suivie. Les justifications lorsqu'elles apparaissent sont concentrées sur la partie a) de la question. Ce niveau était aussi majoritaire en DEUG.

Pour cette tâche, les niveaux d'explicitation et de justification sont plus faibles en maîtrise qu'en DEUG : en maîtrise aucun étudiant ne fait référence au cadre géométrique, même pour justifier que le sous-espace image est un plan donc caractérisé par une seule équation. Comme en DEUG, le théorème du rapport entre nombre d'équations et nombre de paramètres n'est pas utilisé et on ne trouve pas d'écritures quantifiées.

Il semble que les difficultés de ces étudiants se situent, comme pour les étudiants de DEUG, dans la disponibilité des moyens d'anticipation, d'interprétation, de contrôle et de justification des techniques mises en jeu dans l'articulation, ce qui les amène à toute sorte d'erreurs et dérapages.

Il semble que les étudiants plus avancés ont tellement confiance en l'efficacité de leurs techniques qu'ils ne se posent même pas la question de savoir s'ils ont vraiment besoin de ces techniques pour résoudre la tâche en jeu. Leur travail montre la mise en fonctionnement de certains mécanismes liés à la manipulation de tableaux de nombres qui ne semblent pas avoir beaucoup de sens.

4. Comparaison DEUG / Maîtrise

Pour la partie a) de la question nous remarquons que :

Contrairement aux étudiants de DEUG, la plupart des étudiants de maîtrise ont démarré par la méthode K de détermination de la dimension du noyau, ce qui est compréhensible puisque l'énoncé plaçait cette fois le noyau avant l'image. Un seul étudiant utilise à la fois les procédures directes de détermination de la dimension du noyau et de l'image. Comme en DEUG, la plupart des étudiants de maîtrise (11 sur 15) utilisent le théorème du noyau et de l'image. En maîtrise, tous les étudiants ont traité cette partie (partie a)) de la question. Par contre, aucun étudiant n'a recouru au cadre géométrique, pour justifier au moins la dimension, ni pour interpréter le résultat obtenu sur la dimension de l'image.

Pour la partie b) de la question. Soulignons que :

Comme en DEUG, la méthode majoritaire pour la détermination d'une base du noyau est la méthode K. Par contre, parmi les dix étudiants qui ont utilisé les méthodes S et NT pour l'image, seulement deux étudiants déterminent une équation correcte, et ce par la méthode S prévue.

La méthode NT a priori très économique semble poser encore plus de difficultés aux étudiants au niveau de son interprétation puisque les quatre étudiants qui l'ont utilisée ont commis l'erreur de traduction équation / vecteur et ont déterminé une représentation cartésienne erronée du sous-espace image avec des vecteurs dans $\mathbf{R}^4$.

Cette technique, qui permettait de déterminer une représentation cartésienne et une base en même temps, ne semble pas être utilisée non plus dans toute sa potentialité vu que les quatre étudiants qui l'utilisent ont eu besoin de passer à la méthode K pour déterminer une base du noyau. Ceci semble confirmer que ces étudiants utilisent mécaniquement cette technique sans reconnaître les notions qui la sous-tendent.

QUESTION 3 : 1) Trouver une représentation cartésienne et une base du sous-espace E de $\mathbf{R}^4$ *défini de la façon suivante :*

$$E = \left\{ a\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\7\\-3\\3\end{pmatrix} / a,b,c \in R \right\}.$$ *(test 1, question 3 - France)*

2) Trouver une représentation cartésienne et une base du sous-espace E de $\mathbf{R}^4$ *défini de la façon suivante :*

$(x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \exists a, b, c$ *tel que* $\begin{cases} x = a - 2b \\ y = 3a + b + 7c \\ z = -a - b - 3c \\ t = a + b + 3c \end{cases}$. *(test 2, question 3 - France)*

La question 3 est la troisième question des tests 1 et 2 et il s'agit du même sous-espace vectoriel dans les deux questions défini par une représentation paramétrique " explicite tableau " dans le test 1 et par une représentation paramétrique " implicite équation " dans le test 2. Elles ont été déjà analysées ensemble dans l'analyse a priori et ici nous allons aussi les analyser ensemble.

Rappelons que, dans l'analyse a priori, nous avons envisagé deux méthodes : la première, plus adaptée à la forme 1, consistant à déterminer d'abord le rang du système de vecteurs, en déduire une représentation paramétrique minimale et passer ensuite à une représentation cartésienne, la seconde, plus adaptée à la forme 2, consistant à résoudre le système associé à la représentation paramétrique « implicite équation » pour obtenir, via les conditions de resolubilité, une représentation cartésienne puis une base.

Rappelons qu'il existe une relation de liaison simple entre les vecteurs générateurs, qui, en particulier dans la forme 1, peut aider à contrôler la résolution.

1) CODAGE UTILISE

Comme pour les questions précédentes nous avons procédé à un codage spécifique même lorsqu'il s'agissait d'une des procédures prévues dans l'analyse a priori, afin de mettre en évidence les erreurs commises par les étudiants et les variantes rencontrées. Ceci conduit à identifier trois classes de procédures, comprenant chacune de nombreuses variantes.

Nous introduirons des codages spécifiques pour noter si les étudiants recourent à une des méthodes classiques de vérification de l'indépendance linéaire (code **IL**), et s'ils utilisent éventuellement le théorème du rapport entre nombre d'équations et dimension (code **TEP**).

Méthode Y

Les codages **Y** correspondent aux procédures basées sur la première méthode de l'analyse a priori. Le codage **Y** seul correspond à la première méthode de l'analyse a priori, mais ceci ne correspond à aucune production réelle.

Pour cette méthode nous introduisons des codages permettant de prendre en compte les variantes dans la résolution, les difficultés d'interprétation et les solutions partielles.

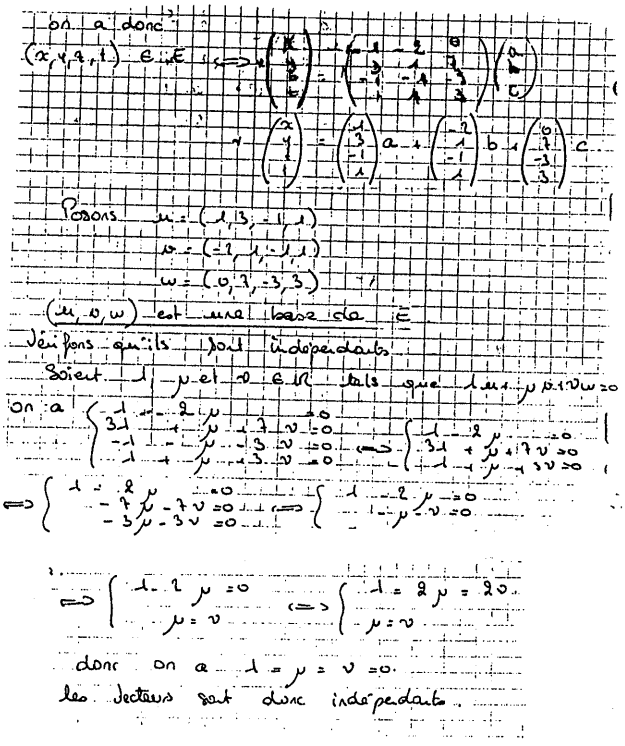
Codage de Variantes

La variante rencontrée consiste à repérer une relation de liaison entre les vecteurs, comme prévu dans l'analyse a priori. (code **Vy**) (1 étudiant)

Codage des erreurs

- erreur d'interprétation de la dépendance linéaire. (code **Ix**) (1 étudiant)

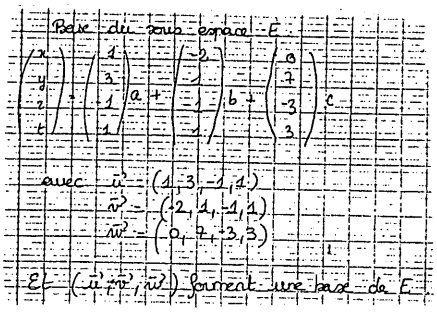
Extrait de la copie de l'étudiant G



Commentaire : après la détermination correcte des relations entre les paramètres, l'étudiant conclut de façon erronée, que les paramètrres sont nuls et donc que les vecteurs sont linéairement indépendants.

- erreur d'interprétation d'une représentation paramétrique "explicite tableau". (code **Iy**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant L



Commentaire : l'étudiant semble considérer que les vecteurs générateurs identifiés forment automatiquement une base et ne pose pas la question de leur indépendance linéaire.

Codage de solutions partielles

Arrêt après détermination d'une base correcte de E par cette méthode. (code **SPy**) (1 étudiant)

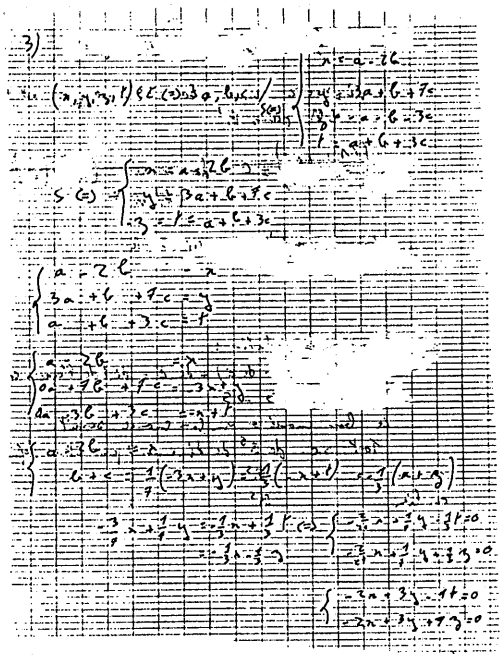
Méthode X

Les codages **X** correspondent aux procédures basées sur la deuxième méthode de l'analyse a priori. Le codage **X** seul correspond à la deuxième méthode de l'analyse a priori, mais ceci ne correspond à aucune production réelle.

Pour cette méthode nous avons introduit des codages permettant de prendre en compte les variantes dans la résolution, les erreurs de calcul et les erreurs de détermination d'une représentation cartésienne.

Codage de variantes

La variante rencontrée consiste à déterminer une représentation cartésienne correcte de E par bricolage sur les équations. (code **Vx**) (1 étudiant)

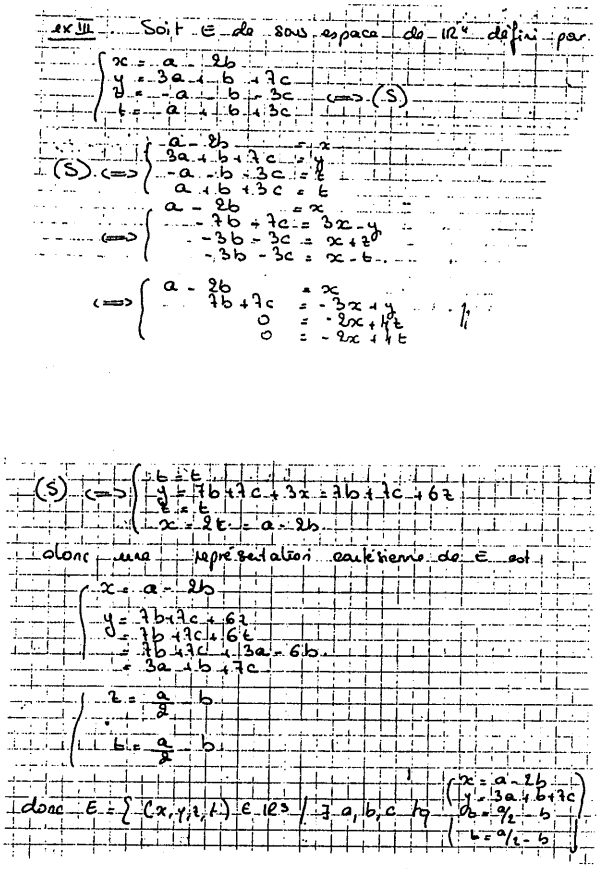
Extrait de la copie de l'étudiant O

Commentaire : Soulignons que si l'étudiant détermine les équations correctes qui caractérisent une représentation cartésienne, il ne donne aucune conclusion explicite. Nous ne pouvons donc être sûre qu'il reconnaît les deux équations obtenues comme celles qui caractérisent une représentation cartésienne, même si c'est l'hypothèse la plus plausible.

Codage des erreurs

- erreur de calcul dans la résolution de système par la méthode du pivot de Gauss. (code **CRS**) (2 étudiants)

- erreur dans la détermination d'une représentation cartésienne. (code **RC**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant G



Commentaire : après réduction erronée du système, l'étudiant semble chercher des solutions et détermine ainsi une nouvelle représentation paramétrique erronée du sous-espace E.

Méthode Z

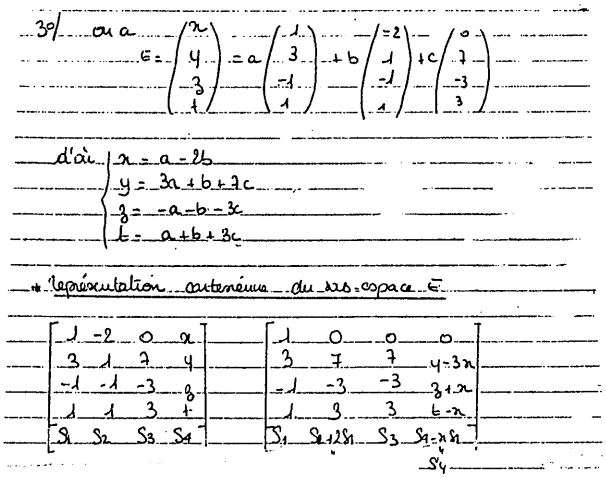
Les codages **Z** correspondent aux procédures basées sur la nouvelle technique. Le codage **Z** seul correspond au cas où l'étudiant détermine une base et une représentation cartésienne correcte par cette nouvelle technique.

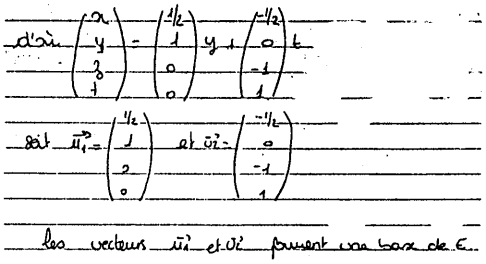
Pour cette méthode, nous introduisons des codages permettant de prendre en compte les erreurs de calcul, les erreurs d'application de la nouvelle technique et les solutions partielles.

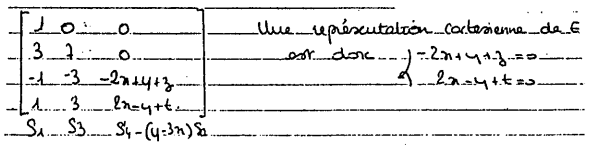
Codage des erreurs

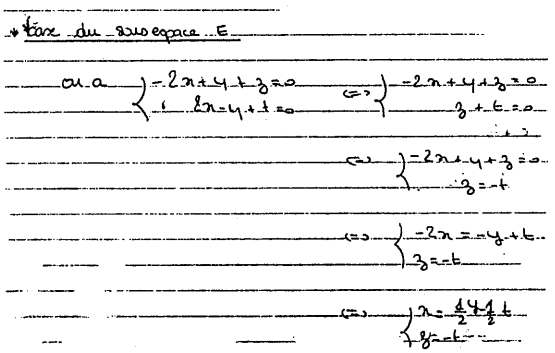
- erreur de calcul dans l'application de la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes du tableau de coordonnées des vecteurs dans la nouvelle technique. (code **CRV**) (2 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant F







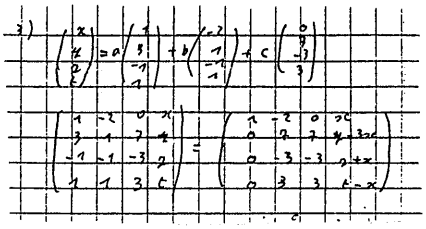


Commentaire : l'étudiant n'est pas bloqué par la technique, son erreur est simplement une erreur de calcul. Soulignons que visiblement il n'est pas conscient que les deux premiers vecteurs constituent une base de E puisqu'il éprouve le besoin de faire le passage correct de la représentation cartésienne erronée à une représentation paramétrique.

- <u>erreur dans l'application de la technique NT</u>. (code **ENT**) (2 étudiants)

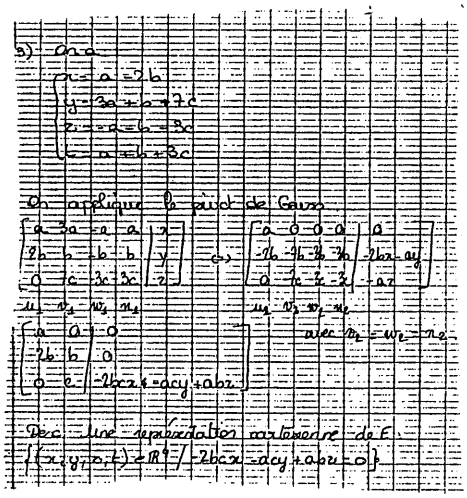
Les deux erreurs sont de natures différentes comme le montrent les extraits ci-après.

Extrait de la copie de l'étudiant C



Commentaire : l'étudiant démarre en multipliant par 2, à partir de la deuxième composante de la première colonne, puis il additionne le résultat aux composantes respectives de la deuxième colonne. Ensuite, il multiplie par -x, toujours à partir de la deuxième composante, la première colonne et additionne le résultat aux composantes respectives du vecteur générique et s'arrête. Peut-être peut on voir dans cette stabilité de la première ligne l'effet d'un théorème en acte associé à la méthode du pivot.

Extrait de la copie de l'étudiant L

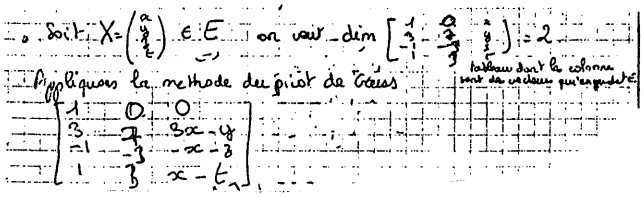


Commentaire : traduction brutale équation / vecteur, avec en plus dans ce cas conservation des paramètres.

Codage des solutions partielles

Arrêt après l'application de la méthode du pivot de Gauss sur la première composante du vecteur générique. (code **SPz**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant J



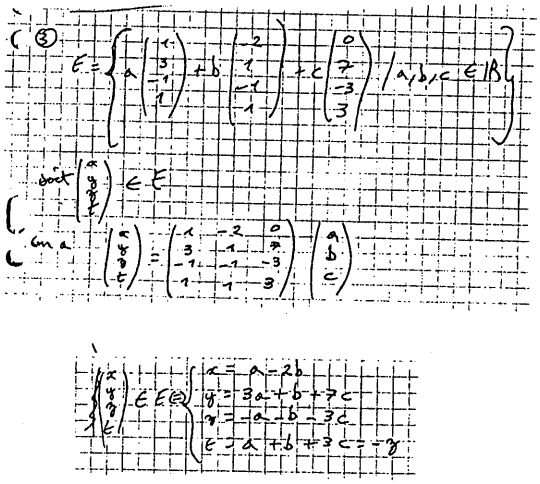
Commentaire : l'étudiant semble bloqué par les zéros de la première ligne.

Code E

Le code **E** correspond au cas où l'étudiant ne démarre ni par une méthode prévue ni par la nouvelle technique NT. (code **E**) (3 étudiants)

a) Passage de la représentation paramétrique "explicite tableau" donné à une représentation paramétrique "implicite équation". (1 étudiant)

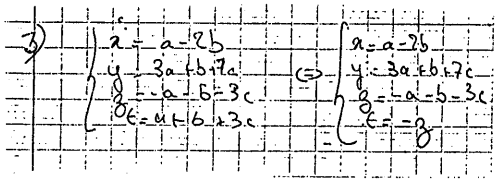
Extrait de la copie de l'étudiant E

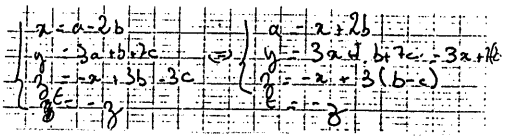


Commentaire : il semble que l'étudiant fasse la confusion entre représentation cartésienne et représentation paramétrique "implicite équation".

b) Bricolage sur les équations. (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant K

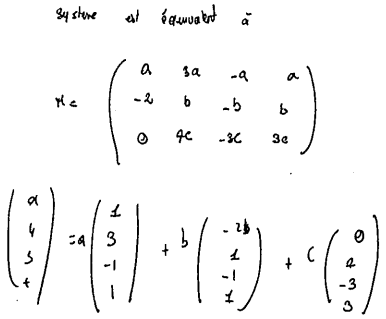




Commentaire : bricolage sur les équations qui n'aboutit à aucun résultat.

c) Interprétation matricielle erronée du système et passage de la représentation paramétrique "implicite équation" donnée à une représentation paramétrique « implicite tableau ». (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant M



Commentaire : interprétation matricielle erronée du système avec les vecteurs en ligne et en incluant les paramètres. Passage correct de la représentation paramétrique "implicite équation" donnée à une représentation paramétrique "explicite tableau".

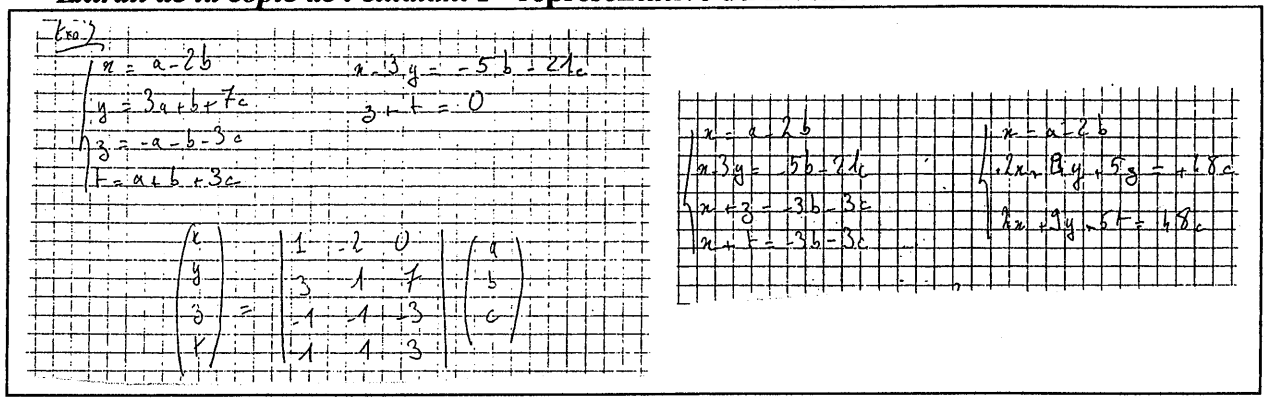
Niveaux d'explicitation

Nous distinguons pour cette tâche les 4 niveaux d'explicitation suivants :

Niveau **0** : lorsque l'étudiant n'aborde pas la question. (2 étudiants)

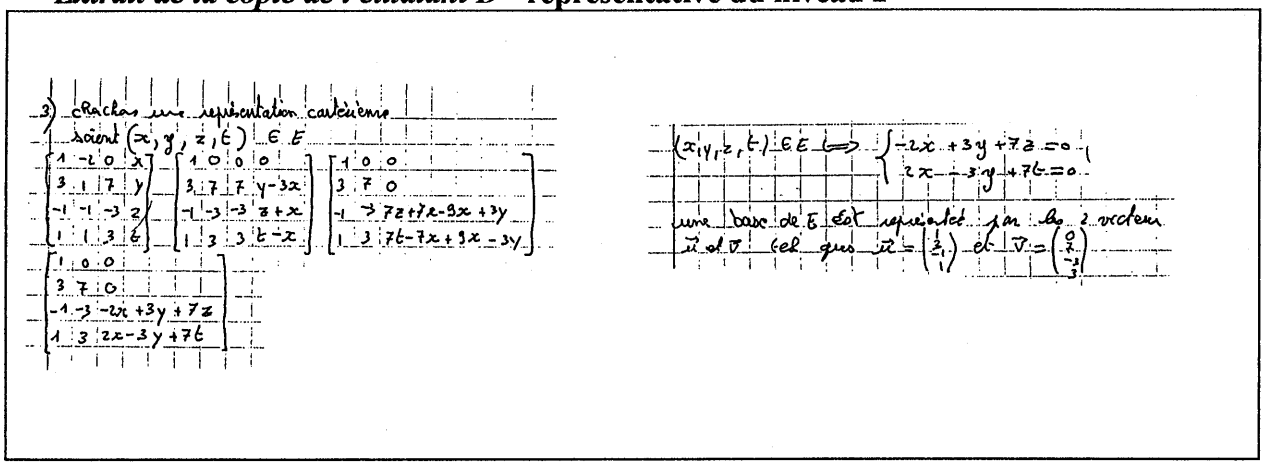
Niveau **1** : lorsque l'étudiant ne donne à voir qu'une succession de calculs. (7 étudiants)

***Extrait de la copie de l'étudiant I* - représentative du niveau 1**



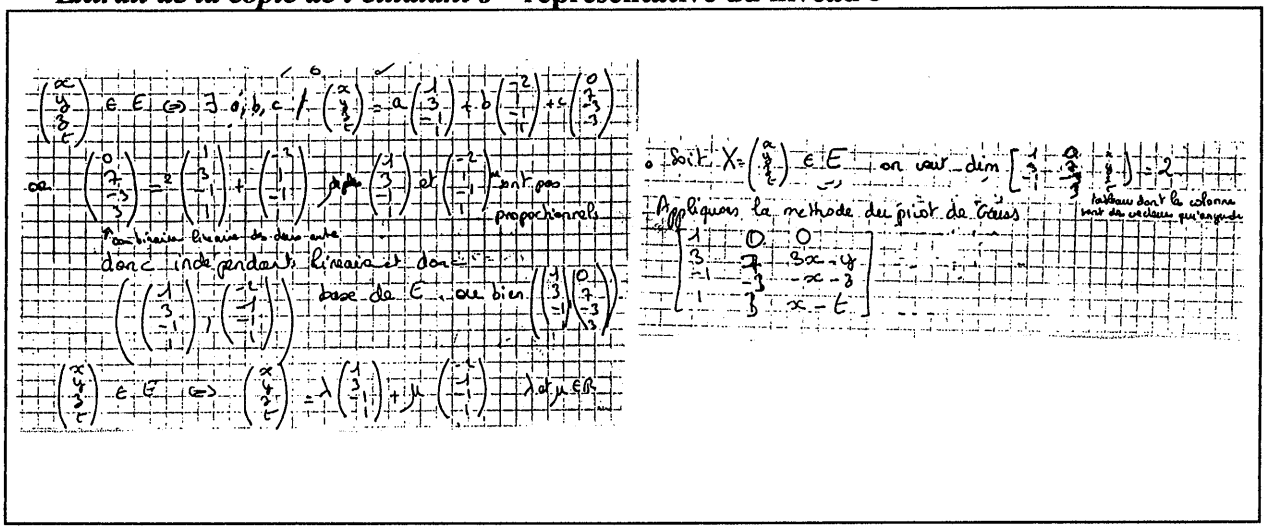
Niveau **2** : lorsque l'étudiant donne à voir la démarche suivie sans discours justificatif explicite. (3 étudiants)

***Extrait de la copie de l'étudiant D* - représentative du niveau 2**



Niveau **3** : lorsque l'étudiant donne à voir la démarche suivie avec discours justificatif explicite lors de la détermination d'une base. (3 étudiants)

***Extrait de la copie de l'étudiant J* - représentative du niveau 3**



2) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE DE LA QUESTION 3

BASE DU SOUS-ESPACE E

PROC X	PROC Y	PROC Z	PROC E	n'aborde pas la question / aucune conclusion	réussite / échec
1	4	4	3	3 / 4	3 / 5

Tableau 13 : Choix de méthodes et réussite dans la détermination d'une base du sous-espace vectoriel E

REPRESENTATION CARTESIENNE DU SOUS-ESPACE E

PROC X	PROC Y	PROC Z	PROC E	n'aborde pas la question / aucune conclusion	réussite / échec
3	0	7	3	2 / 5	3 / 5

Tableau 14 : Choix de méthodes et réussite dans la détermination d'une représentation cartésienne du sous-espace vectoriel E

1. Réussite Globale

Le dépouillement permet de mettre en évidence que cette question pose des difficultés aux étudiants : trois étudiants seulement réussissent à déterminer une base de E, deux seulement réussissent aussi à déterminer une représentation cartésienne de ce même sous-espace. Ce qui est étonnant dans cette tâche est le nombre d'étudiants qui n'arrivent même pas à donner une conclusion soit lors de la détermination d'une base, soit lors de la détermination d'une représentation cartésienne. La détermination d'une base est pourtant une tâche habituelle et n'exigeait ici que le passage de la représentation paramétrique "implicite équation" à une représentation paramétrique "explicite tableau" dans le test 2, suivie de la vérification de l'indépendance linéaire des trois vecteurs qui engendrent le sous-espace pour les deux tests. Nous

nous attendions donc à une meilleure réussite, au moins pour cette partie de la question et ce d'autant plus que la relation de dépendance entre les vecteurs pouvait être déterminée sans calcul.

2. Méthode et réussite

Pour la détermination d'une base, quatre étudiants ont démarré par la méthode Y (méthode 1 de l'analyse a priori) et quatre autres ont utilisé la technique NT, mais on ne trouve qu'un seul étudiant qui détermine une base correcte par cette technique, les deux autres qui ont réussi ayant utilisé la méthode Y.

Pour la détermination d'une représentation cartésienne, nous avons déjà indiqué que trois étudiants démarrent par la méthode X (méthode 2 de l'analyse a priori) et sept autres par la technique NT, mais nous trouvons seulement deux étudiants qui déterminent une représentation cartésienne correcte du sous-espace E par la technique NT et un autre arrivant au résultat par des bricolages sur les équations (copie O).

Les méthodes choisies étaient donc bien adaptées à la résolution de la tâche, mais les échecs sont, en général, liés aux difficultés d'application de la technique NT et d'interprétation des résultats trouvés pour n'importe quelle technique.

3. Analyse des erreurs

Parmi les quatre étudiants qui utilisent la méthode Y (méthode 1 de l'analyse a priori) pour déterminer une base de E :

- un étudiant étudie l'indépendance linéaire des vecteurs en utilisant la définition, sans commettre d'erreurs de calcul mais n'est pas capable d'interpréter correctement les résultats. (cf. copie G)

- un étudiant semble confondre système générateur et base. (cf. copie L)

Dans cette méthode, les erreurs sont donc liées à l'étude de l'indépendance linéaire d'un système de vecteurs.

Un seul étudiant utilise la méthode X (méthode 2 de l'analyse a priori) pour déterminer une base de E et trois étudiants l'utilisent pour la détermination d'une représentation cartésienne. Parmi ces étudiants :

- deux commettent des erreurs de calcul dans la résolution du système par la méthode du pivot de Gauss. L'un finit par donner comme représentation cartésienne de E la représentation paramétrique qu'il a déterminée après résolution du système (cf. copie G) et l'autre reste bloqué, semble-t-il, dans la résolution du système (cf. copie I).

Pour la méthode X, les erreurs se situent plutôt dans la résolution du système et son interprétation.

Il y a enfin quatre étudiants qui utilisent la méthode Z (basée sur la technique NT) pour déterminer une base du sous-espace E et sept étudiants qui l'utilisent pour déterminer une représentation cartésienne de E. Parmi eux :

- deux étudiants commettent des erreurs de calcul lors de l'application de la méthode du pivot de Gauss sur le tableau obtenu.

- deux autres étudiants ont des difficultés à mettre en fonctionnement la technique NT elle-même. (cf. copie C et L)

- un étudiant s'arrête, bloqué, semble-t-il, par la difficulté à gérer le zéro qui apparaît dans la première composante du deuxième vecteur sans calcul.

A ceci s'ajoutent les trois productions qui ne correspondent à aucune des méthodes prévues (cf. copies G, K et L) et qui conduisent elles aussi à des échecs.

On a donc, pour un exercice qui pouvait a priori paraître facile une réussite faible, même lorsque l'articulation entre points de vue n'est pas en jeu (base - forme 1) ou faiblement en jeu (base - forme 2). Les étudiants rencontrent des difficultés diverses, et ce, même au niveau technique. De plus, l'absence de maîtrise et de contrôle de la technique NT, une fois encore bien présente dans les solutions, se trouve confirmée.

QUESTION 5 : On donne 3 sous espaces de $\mathbf{R}^3$

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 5x - 2y + 5z = 0\}$

$E_2 = \langle (1, 0, -1), (5, 5, -3) \rangle$

$E_3 = \langle (1, 0, -1), (0, 5, 2) \rangle$

Comparer $E_1 \cap E_2$ *et* E_3. *(test 2, question 2 - France)*

Cette question est la cinquième décrite dans l'analyse a priori, mais elle est la deuxième du test 2 des étudiants de maîtrise. Il n'y a que neuf étudiants qui ont résolu cette question.

Rappelons que les trois sous-espaces sont en fait égaux et que nous avons identifié a priori pour la résolution plusieurs méthodes possibles qu'il s'agisse de déterminer l'intersection de E_1 et E_2 ou de montrer l'égalité. Nous avons aussi souligné les possibilités de support au raisonnement offerts par le cadre géométrique, les simplifications techniques apportées par le fait que E_1 soit donné sous forme cartésienne et E_2 sous forme paramétrique, mais aussi la perturbation qui pouvait survenir du fait de la condition $0 = 0$ à laquelle on aboutissait. Nous avons aussi remarqué le rôle que pouvaient jouer les théorèmes généraux dans la résolution.

1) CODAGE UTILISE

Nous avons procédé à un codage spécifique qui permet de regrouper les étudiants selon des ressemblances par rapport aux procédures développées, vu que la plupart des étudiants ne démarrent par aucune des méthodes prévues et que ceux qui le font ne suivent pas une méthode intégralement.

Nous avons aussi introduit la colonne (**IL**) pour pointer si les étudiants posent la question de l'indépendance linéaire des vecteurs, les colonnes (**TDS**) et (**TID**) pour repérer si les étudiants mentionnent ou utilisent le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection et le théorème de l'inclusion et de la dimension dans leurs procédures comme il était prévu dans l'analyse a priori. Nous avons enfin introduit la colonne (**TEP**) pour savoir si les étudiants utilisent le théorème du rapport entre nombre d'équations et nombre de paramètres.

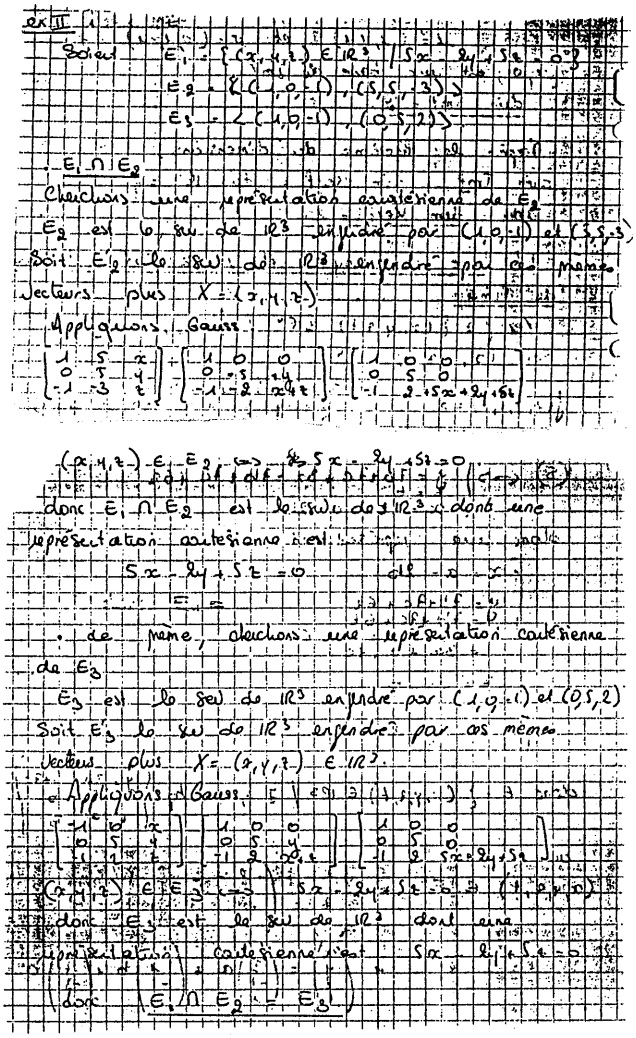
Comme précédemment, nous illustrons la présentation des codes par des productions d'étudiants.

Méthode U

Elle consiste à utiliser la technique NT pour déterminer une représentation cartésienne de E_2 et E_3 et conclure directement.

Cette méthode, qui une fois de plus repose sur la technique NT, n'avait pas été prévue a priori. Nous l'illustrons par la copie G.

Extrait de la copie de l'étudiant G



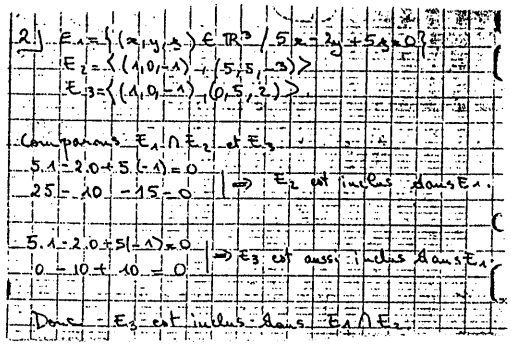
Commentaire : l'étudiant détermine une représentation cartésienne de E_2 par la méthode NT, obtenant la même équation que celle qui caractérise E_1. Il détermine ensuite de la même façon une représentation cartésienne de E_3 et conclut à l'égalité par comparaison des équations. Le travail est ici mené sur les seules représentations. Il permet de conclure sans aucun recours à des théorèmes généraux.

Méthode W

Consiste à démarrer par une méthode prévue a priori. (2 étudiants)

a) Solution partielle avec conclusion erronée. (1 étudiant)

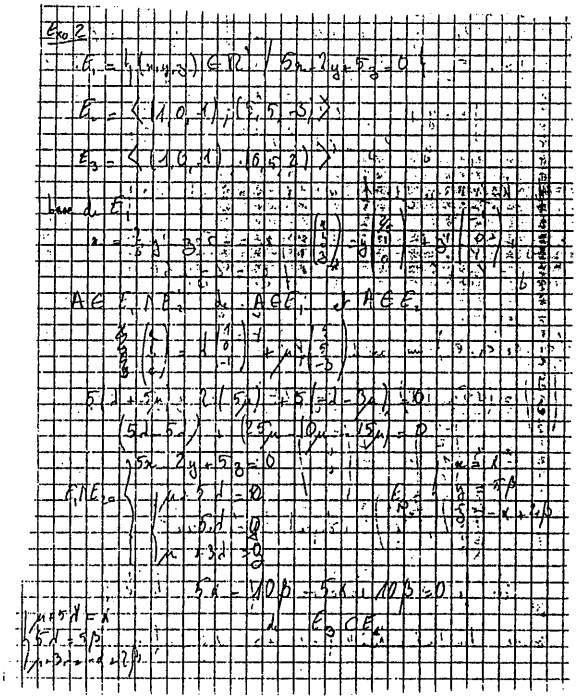
Extrait de la copie de l'étudiant P



Commentaire : Solution partielle avec conclusion abusive. L'étudiant montre que E_2 et E_3 sont inclus dans E_1 en explicitant et justifiant son raisonnement. Puis, il conclut abusivement que E_3 est inclus dans $E_1 \cap E_2$ sans donner aucune justification et s'arrête là.

b) Perturbation crée par la condition 0 = 0. (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant I

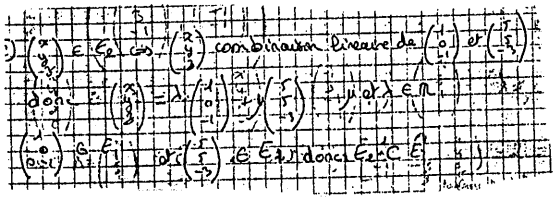


Commentaire : Cette étudiant démarre par la méthode présentée dans l'analyse a priori comme la plus économique, mais visiblement perturbé par la condition 0=0 (qu'il n'écrit d'ailleurs pas) il conclut en juxtaposant la représentation cartésienne de E_1 et trois équations associées à la représentation paramétrique de E_2 (les composantes d'un vecteur générique sont égales à zéro). L'étudiant reprend la même méthode avec E_3 et arrivé à la même perturbation conclut $E_3 \subset E_1$ sans autre justification !

Code E

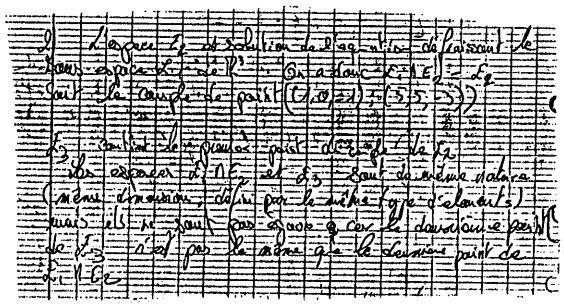
Nous avons codé E tous les copies où le rapport avec les méthodes prévues est moins évident.

Extrait de la copie de l'étudiant J



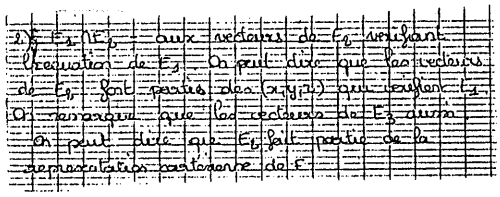
Commentaire : écriture d'une représentation paramétrique de E_2 et conclusion que E_2 est inclus dans E_1 sans que l'on puisse savoir quel est le raisonnement suivi..

Extrait de la copie de l'étudiant K



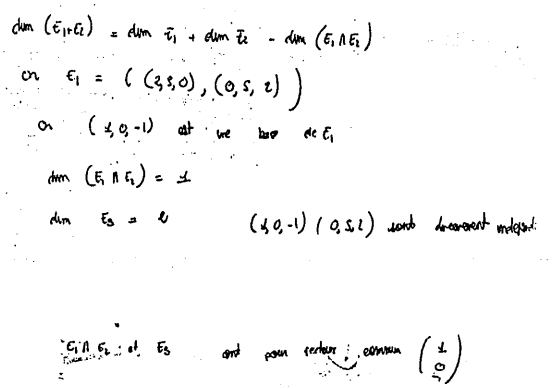
Commentaire : - conclusion correcte que E_2 est l'espace solution de l'équation qui définit E_1 sans aucune justification.
- confusion explicite point / vecteur.
- conclusion que l'intersection et E_3 sont de même dimension et même nature sans qu'on puisse savoir quel est le raisonnement suivi.
- conclusion erronée basée sur une comparaison de vecteurs (appelés points) et non de sous-espaces.

Extrait de la copie de l'étudiant L



Commentaire : Affirme que les vecteurs générateurs de E_2 et E_3 appartiennent à E_1. Conclusion incompréhensible.

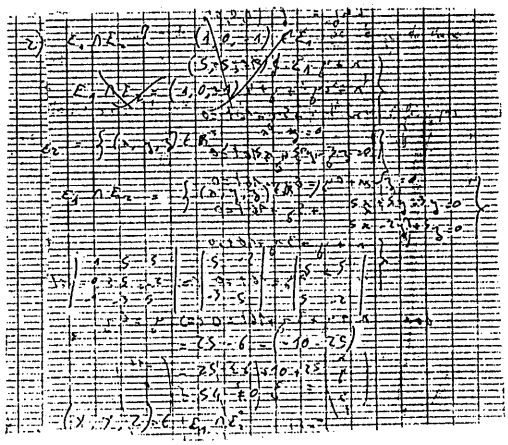
Extrait de la copie de l'étudiant M



Commentaire :

- énoncé du théorème de la dimension de la somme et de l'intersection, mais on ne voit pas comment il est exploité.
- donnée sans justification d'une « base » de E_1.
- repérage du fait que (1,0,-1) commun à E_2 et E_3 est aussi un vecteur de E_1 (donné comme base de façon incohérente avec ce qui précède).
- conclusion erronée sur la dimension de l'intersection; correcte et justifiée sur la dimension de E_3.

Extrait de la copie de l'étudiant O



Commentaire : - détermination d'une représentation cartésienne erronée de E_2 et $E_1 \cap E_2$.

- calcul du déterminant de la matrice des coefficients des trois équations pour caractériser l'intersection.

2) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE DE LA QUESTION 5

1. Méthode et réussite

Un seul étudiant n'aborde pas la question et cinq autres donnent des réponses où nous trouvons diverses confusions et erreurs. Seulement trois étudiants ont démarré par des méthodes prévues, un seul donne une réponse correcte par la comparaison des représentations cartésiennes mais sans commentaire et en utilisant une technique non prévue pour déterminer ces représentations . Un

autre ne démontre que des inclusions, mais dans sa réponse nous rencontrons des éléments de justification. Le troisième subit l'effet de la perturbation 0 = 0 prévue a priori (cf. copie I). Dans les trois cas, les étudiants travaillent seulement sur les représentations. Les moyens d'interprétation, de contrôle et justification ne sont jamais utilisés de façon visible.

Une fois de plus, la question est très mal réussie, (une seule réussite). Excepté pour l'étudiant utilisant la technique NT, le passage d'un type de représentation à un autre n'aboutit pas. Et comme les étudiants n'utilisent pas le théorème de l'inclusion et de la dimension, les inclusions montrées sans articulation, ne permettent pas de conclure à l'égalité.

QUESTION 6 : On considère dans $\mathbf{R}^3$ le plan P d'équation $2x + y + 2z = 4$ et les deux points A et B de coordonnées A : $(1 + \lambda, \mu + 2, \lambda + \mu)$ et B : $(2\lambda, \mu, \mu + 2)$. Pour quelles valeurs de paramètres λ et μ, le plan P et la droite (AB) se coupent-ils en un point unique ?

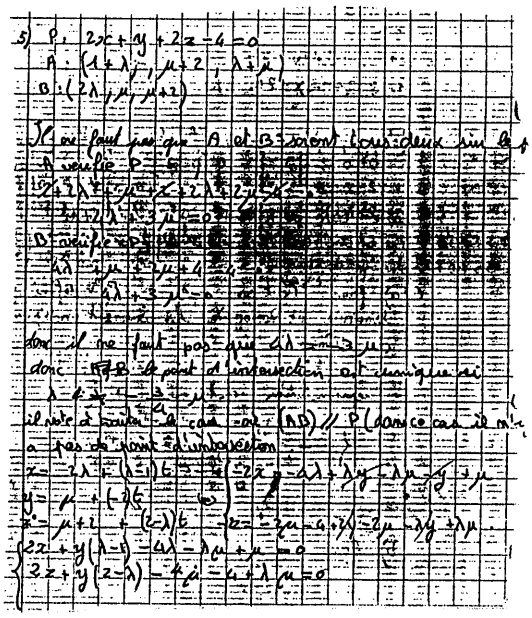
Cette question était la cinquième du test 1 des étudiants de maîtrise et il n'y a donc que six étudiants qui l'avaient dans leur test.

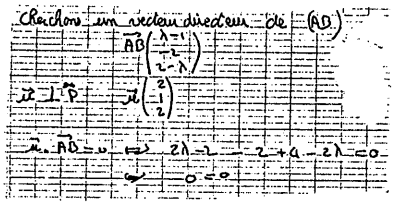
Trois étudiants seulement ont abordé cette question, nous reproduisons ci-après leurs productions :

Extrait de la copie de l'étudiant B

5) Soit un vecteur directeur de (AB) : $\overrightarrow{AB} \begin{cases} 2\lambda - (1+\lambda) = \lambda - 1 \\ \mu - (\mu+1) = -1 \\ \mu+2 - (\lambda+\mu) = 2 - \lambda \end{cases}$	**Commentaire** : l'étudiant écrit seulement les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et s'arrête là.

Extrait de la copie de l'étudiant D



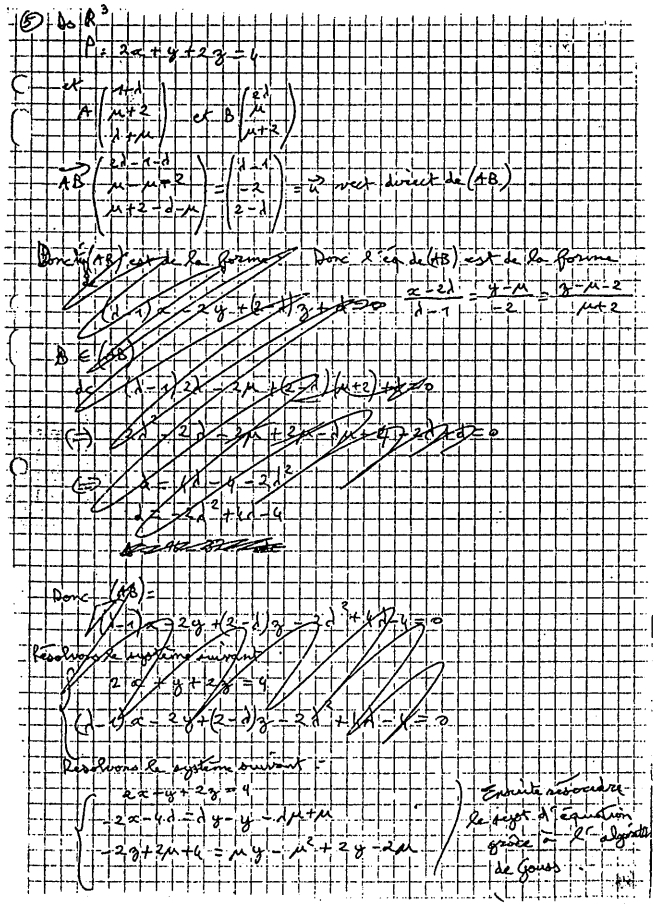


Commentaire : L'étudiant cherche d'abord à écarter le cas A ∈ P et B ∈ P. Ce qui le conduit à la condition $4\lambda+3\mu\neq0$.

Il rajoute ensuite la condition (AB) non parallèle à P. Mais pour gérer cette condition, il écrit un représentation paramétrique de la droite et commence à transformer le système associé.

Il change ensuite de stratégie et traduit le parallélisme par la nullité du produit scalaire du vecteur $\vec{AB}$ par un vecteur normal au plan donné par les coefficients de l'équation, mais bloque sur la condition 0 = 0 et ne conclut pas.

Extrait de la copie de l'étudiant E



Commentaire : L'étudiant détermine une représentation cartésienne de la droite, puis écrit le système associé à l'intersection droite / plan, et s'arrête là.

1) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE DE LA QUESTION 6

Parmi les six étudiants qui avaient cette question dans leur test, seulement trois l'ont abordée et tous les trois ont au moins démarré par une méthode prévue a priori. Un étudiant ne fait que déterminer un vecteur directeur de la droite. Les deux autres avancent dans la méthode choisie et leur difficulté n'est pas liée à la mise en place de la méthode choisie, mais à des difficultés d'interprétation des résultats, ce qui semble confirmer les résultats déjà rencontrés pour les autres questions.

QUESTION 7 :Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse. Si votre réponse est : "faux", essayez de trouver un contre-exemple et, si possible, de transformer l'énoncé pour le rendre vrai.

Pour la question 7 nous n'allons présenter que les résultats de chaque partie par rapport aux différents test et l'analyse de ces résultats en termes de réponse juste ou fausse, suivi d'un commentaire sur la donnée ou non d'un contre-exemple et de la question de rectification de l'énoncé.

partie a *: - Tout sous-espace de* $\boldsymbol{R^n}$ *défini par r équations linéaires et homogènes indépendantes est de dimension r. (test 1, première question V/F)*
- Tout sous-espace de $\boldsymbol{R^5}$ *de dimension 3 peut être défini par 3 équations linéaires et homogènes indépendantes. (test 2, troisième question V/F)*

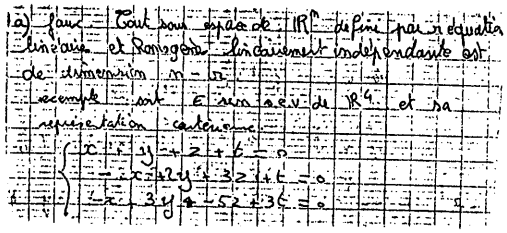
test 1

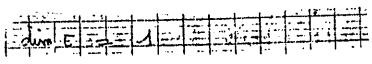
REPONSE juste/fausse	CONTRE-EXEMPLE aucun/juste/faux	RECTIFICATION aucune/juste/fausse
4 / 1	2 / 3 / 0	3 / 2 / 0

Cette question est relativement bien réussie pour le test 1, si on compare à ce qui précède. Parmi les six étudiants qui ont répondu au test 1, cinq abordent cette question et quatre donnent une réponse correcte. Deux sont justifiées de façon satisfaisante, l'énoncé étant rectifié (copies D et F), une est justifiée en prenant un système de Cramer comme contre-exemple (la formulation reste cependant ambiguë (copie C), la dernière justification étant, elle, erronée puisque l'étudiant identifie la dimension du sous-espace solution au nombre d'inconnues (copie B).

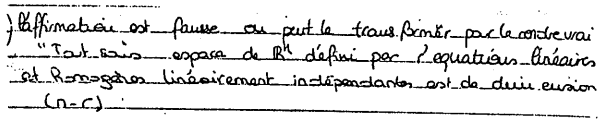
Extraits de copies des étudiants

étudiant D

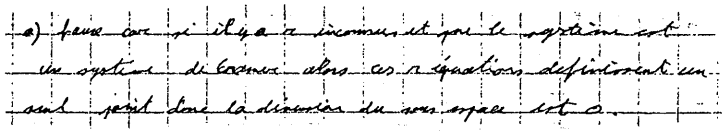




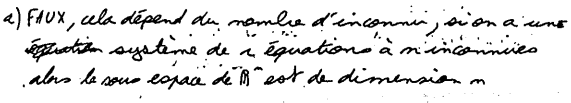
étudiant F



étudiant C



étudiant B



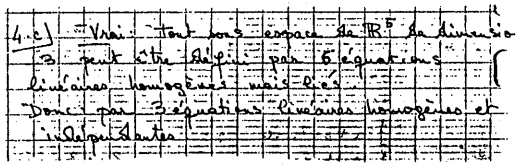
test 2

REPONSE juste/fausse	CONTRE-EXEMPLE aucun/juste/faux	RECTIFICATION aucune/juste/fausse
1 / 1	9 / 0 / 0	8 / 1 / 0

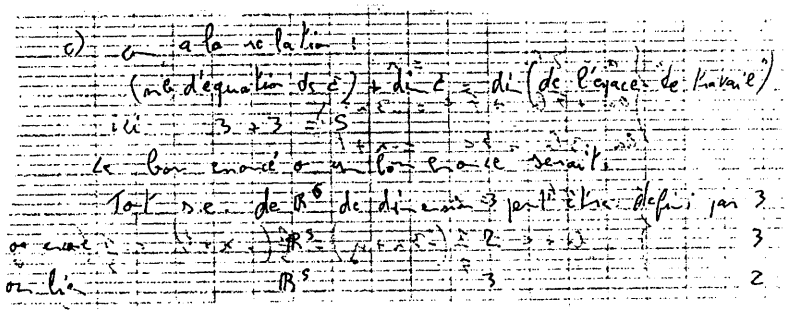
Ces résultats contrastent avec ceux de la première version, puisque, parmi les neuf étudiants concernés, seuls trois abordent la question, deux fournissent une réponse, dans un cas fausse (copie P) dans l'autre cas, correcte et à peu près justifiée même si la formulation reste ici aussi ambiguë au niveau de la formulation du théorème (copie O). Ceci montre bien la faible adaptabilité des connaissances des étudiants dans ce contexte. Dans le cas de la version du test 1, le théorème général peut être immédiatement branché sans modifier les notations et il contredit l'affirmation dans le second cas, on se situe dans un cas particulier et l'énoncé porte sur l'existence d'une définition. Le raisonnement à fournir est à l'évidence plus complexe car il faut en quelque sorte retourner l'énoncé.

Extraits de copies des étudiants

étudiant P



étudiant O



partie b *: - L'intersection de deux sous-espaces de dimension 3 de* $\mathbf{R^4}$ *est toujours un sous-espace de dimension 2. (test 1, deuxième question V/F)*

test 1

REPONSE juste/fausse	CONTRE-EXEMPLE aucun/juste/faux	RECTIFICATION aucune/juste/fausse
4 / 0	3 / 2 / 1	3 / 2 / 1

Parmi les six étudiants qui ont répondu cette question, quatre étudiants donnent une réponse correcte. Un se borne à répondre que l'énoncé est faux, deux identifient les contre-exemples possibles, le quatrième essaie d'utiliser le cadre géométrique.

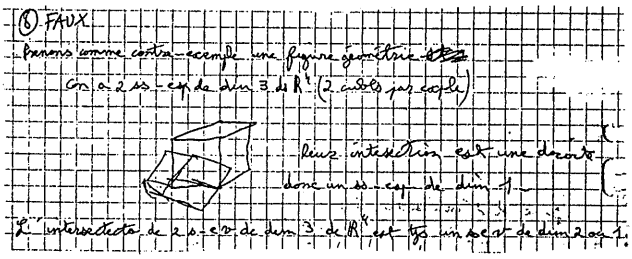
On notera que, même lorsque les étudiants identifient le problème et rectifient plus ou moins explicitement l'énoncé (copie B) ils ne vont pas jusqu'au bout en justifiant avec le théorème de la dimension de l'intersection que le cas d'égalité est le seul type de contre-exemple possible. On notera aussi que le recours au cadre géométrique conduit ici à une réponse correcte mais basée sur une argumentation fausse : l'extension du géométrique en dimension supérieure ou égale à trois encore une fois ne fonctionne pas. Dans ce cas, l'étudiant associe les deux sous-espaces à deux cubes ayant une arête visiblement commune et déclare que l'intersection est limitée à cette arête (copie E).

Extrait des copies des étudiants

étudiant B

b) Pas forcément, si les 2 sous espaces sont confondus alors l'intersection est de dimension 3, sinon il est toujours de dimension 2

étudiant E



partie d : *- Si l'intersection de deux sous-espaces de* $\mathbf{R}^4$ *est de dimension 3, nous aurons pour base de l'intersection trois vecteurs (a, b, c), (d, e, f) et (g, h, i) linéairement indépendants avec a, b, c, d, e, f, g, h, i* $\in \mathbf{R}$. *(test 1, troisième question V/F)*
- Le sous-espace $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 2x - 3y = 0\}$ *est un sous-espace de* $\mathbf{R}^3$ *de dimension 2 qui peut être représenté par la représentation paramétrique suivante :*

$E = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} / x,z \in R \right\}$. *(test 2, première question V/F)*

test 1

REPONSE juste/fausse	RECTIFICATION aucune/juste/fausse
0 / 4	6 / 0 / 0

Parmi les six étudiants qui ont répondu à cette question, aucun ne propose une réponse correcte. Visiblement ils n'ont pas repéré que les vecteurs donnés ne sont pas dans **R**4 mais dans **R**3 comme le montre l'extrait suivant. Cette question se révèle en fait peu informative.

Extrait des copies des étudiants

étudiant B c) VRAI, les vecteurs d'une base sont toujours linéairement indépendants

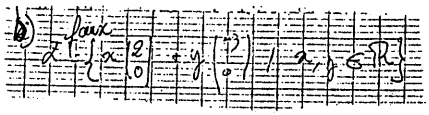
test 2

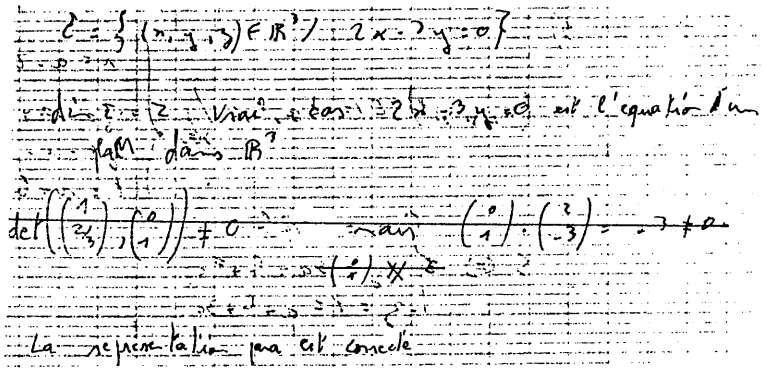
REPONSE juste/fausse	RECTIFICATION aucune/juste/fausse
5 / 1	4 / 4 / 1

La deuxième version (concernant un cas particulier) est cette fois mieux réussie que la version générale. Cinq étudiants fournissent une réponse correcte : quatre la justifient en retrouvant une représentation paramétrique correcte à partir de la représentation cartésienne (copie P). Un base sa réponse correcte sur un raisonnement faux (z est éliminé, les deux vecteurs de base proposés sont colinéaires et ne sont même pas dans le sous-espace vu comme un sous-espace de $\mathbf{R}^2$)(copie K). L'étudiant qui donne une réponse erronée interprète correctement E comme plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$ et après un calcul de déterminant 2x2 barré conclut que la représentation paramétrique est correcte sans autre justification (copie O).

Extrait des copies des étudiants

étudiant P

étudiant K

étudiant O



partie e *: -Soit E = {(a + b, 2b + c, a + 5b + c) / a, b, c ∈ **R**}, dim E = 3. (test 1, quatrième question V/F)*
*- Soit E = {(a - 2b, 3a + b + 7c, -a - b - 3c, a + b + 3c) / a, b, c ∈ **R**}. Alors dim E = 3. (test 2, première question V/F)*

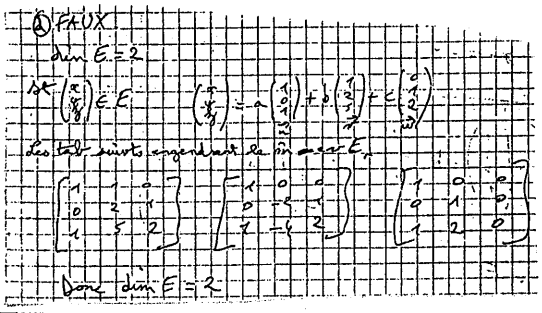
test 1

REPONSE juste/fausse	CONTRE-EXEMPLE aucun/juste/faux	RECTIFICATION aucune/juste/fausse
2 / 1	5 / 1 / 0	5 / 1 / 0

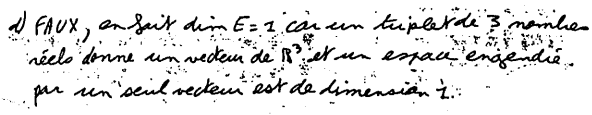
Trois étudiants seulement proposent une réponse. Deux sont apparemment correctes mais seule l'une se base sur un raisonnement correct (copie E). L'autre correspond à une interprétation erronée, inattendue, de la représentation paramétrique implicite donnée (copie B). La réponse fausse est basée sur l'affirmation sans argument de l'indépendance linéaire des trois vecteurs générateurs (copie C).

Extrait des copies des étudiants

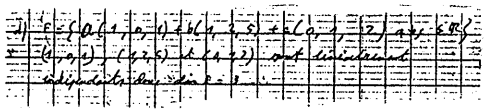
étudiant E



étudiant B



étudiant C



test 2

REPONSE juste/fausse	CONTRE-EXEMPLE aucun/juste/faux	RECTIFICATION aucune/juste/fausse
0 / 6	9 / 0 / 0	9 / 0 / 0

Les copies montrent, pour cette question en apparence banale et déjà rencontrée sous une forme différente dans la question 3, une accumulation d'erreurs diverses et non prévues dans l'analyse a priori.

Un étudiant, (copie G), après avoir transformé la représentation paramétrique implicite, tombe dans le piège prévu, consistant à considérer que les trois vecteurs générateurs sont linéairement indépendants.

Deux étudiants, (copie K), repèrent la proportionnalité des deux dernières coordonnées et en déduisent, dans le glissement coordonnées d'un vecteur générique / équation, déjà rencontré que E est défini par trois équations seulement. A ceci s'ajoute ensuite l'erreur : nombre d'équations = dimension du sous-espace solution, qui les amène à conclure que l'énoncé est vrai.

Un étudiant, (copie O), retraduit en vecteur colonne le vecteur générique de E donné en ligne, calcule le déterminant d'ordre 3 qu'il trouve par erreur non nul. Il en conclut que E est de dimension supérieure ou égale à 3, mais au lieu d'en déduire que E est de dimension trois puisque

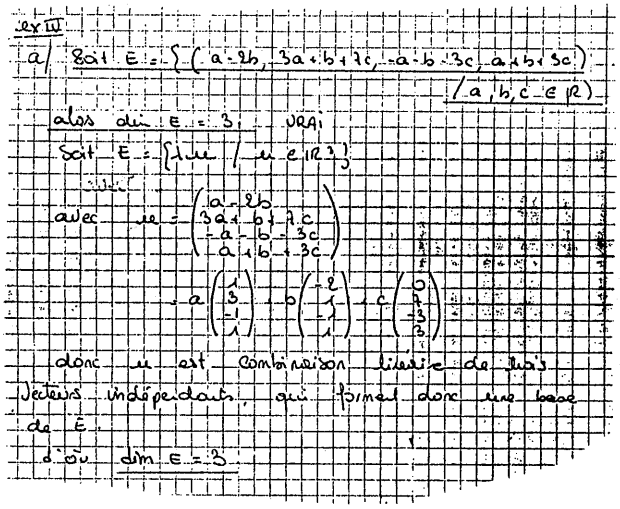
engendré par trois vecteurs, il montre qu'un déterminant 2x2 est nul et en conclut abusivement que la dimension de ce fait ne peut être égale à 4. Il semble que le passage au cadre des déterminants lui ait fait perdre complètement le sens du problème initial.

Enfin, deux étudiants se réfèrent à une interprétation fonctionnelle. L'un s'arrête après avoir conclu directement que l'énoncé est vrai. Le second, lui, n'explicite pas mais écrit le théorème reliant les dimensions du noyau et de l'image, semblant considérer E comme l'espace de départ, alors qu'il s'agit ici de l'image (copie P).

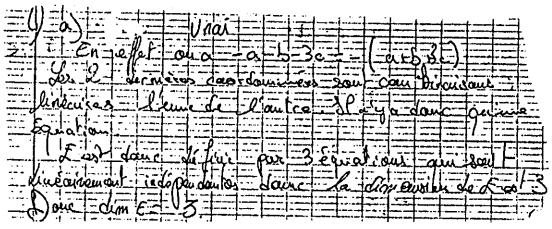
Il détermine ensuite le noyau, puis abandonne cette voie (calcul barré). Il utilise ensuite la technique NT pour déterminer une représentation cartésienne de l'image mais sur un tableau inadapté comme si l'image était elle aussi dans $\mathbf{R}^3$. Trouvant une équation, il en déduit que la dimension de l'image est 1, comme s'il confondait nombre d'équations et dimension, et finit par affirmer que dim E = 3 alors que la formule initiale le conduirait ici à la valeur 2 !

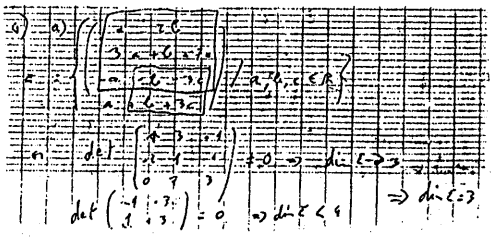
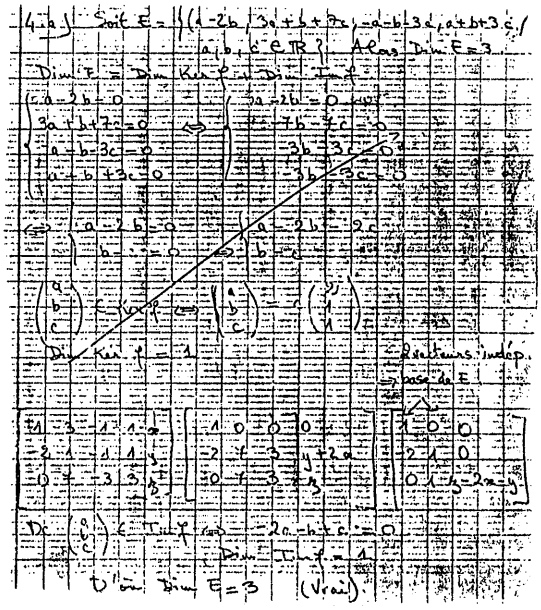
Extrait des copies des étudiants

étudiant G



étudiant K



étudiant O	
étudiant P	

On retrouve ici à l'évidence les difficultés rencontrées dans la question 3. Un seul étudiant reconnaît explicitement qu'il s'agit du même sous-espace, après être passé à une représentation paramétrique implicite équation et donne une réponse erronée mais cohérente avec celle donnée à la question 3.

III. L'ANALYSE DE PRODUCTIONS DES ETUDIANTS DE DEUG SCIENCES PREMIERE ANNEE - COURS DE COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES

III.1. LE CONTEXTE

Les copies dépouillées concernent un examen passé au mois de Juin 96 dans le cadre du module de compléments de mathématiques de première année de DEUG à l'Université de Paris VII, pour un total de 107 étudiants. Pour ces étudiants nous n'avons analysé qu'une seule question de l'examen. Comme précisé dans l'analyse a priori, il s'agissait d'une question simple qui ne dépendait pas des autres et qui nous semblait pouvoir apporter des informations intéressantes :

- d'une part, sur la gestion de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique par des étudiants qui avaient suivi un cours où cette articulation avait été traitée explicitement.

- d'autre part, sur le rôle respectif joué dans les productions des étudiants par les connaissances anciennes apprises au lycée et les connaissances mises en place dans l'enseignement de DEUG.

III.2. PRESENTATION DE L'ANALYSE

Etant donné l'existence de procédures non prévues et aussi de la grande variété des productions des étudiants, nous avons mis en place encore une fois un codage spécifique.

L'analyse des résultats sera organisée en deux parties :

a) présentation du codage utilisé, avec des exemples de productions typiques ;

b) résultats globaux et l'analyse des résultats (les résultats détaillés étudiant par étudiant sont donnés en annexe 10) ;

QUESTION 8 : Soit Q le plan défini par le point B (0, 1, -2) et les vecteurs $\vec{u}$ *(1, 0, 4) et* $\vec{v}$ *(0, 2, -1).*
Donner une représentation paramétrique de Q.
Donner une représentation implicite de Q.

1) CODAGE UTILISE

Pour cette question, trois méthodes avaient été prévues se distinguant suivant les processus de détermination de la représentation cartésienne : écriture de la nullité du déterminant $\det(\vec{BM}, \vec{u}, \vec{v})$, résolution du système associé à la représentation paramétrique et interprétation de la condition de résolubilité pour la seconde, détermination d'un vecteur normal par produit vectoriel dans la troisième. Nous les reprenons d'abord dans cet ordre, en introduisant les codages spécifiques relatifs à chacune d'elles puis présentons ensuite les codages relatifs aux productions ne s'appuyant pas sur ces méthodes. Dans le tableau donné en annexe, nous avons introduit de

plus la colonne (**MSY**) pour préciser quelle méthode l'étudiant a utilisé lorsqu'il avait un système à résoudre.

Méthode A

Les codages **A** (17 étudiants) correspondent aux procédures basées sur la première méthode de l'analyse a priori. Nous avons introduit des codages permettant de prendre en compte les erreurs de calcul, les erreurs dans la formation du déterminant et les solutions partielles.

Codage des erreurs

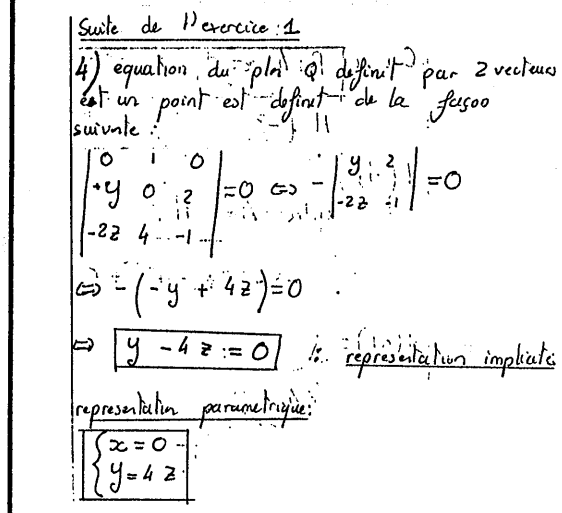
- <u>erreurs de calcul</u>

La seule erreur rencontrée concerne ici le calcul du déterminant. (code **ECDét**) (1 étudiant)

- <u>erreur dans la formation du déterminant</u>

Elle consiste à commettre une erreur lors de la détermination du vecteur $\vec{BM}$. (code **EFDét**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant 48



Commentaire : Cet étudiant visiblement constitue la première colonne en faisant le produit des coordonnées de B et M (point générique du plan) arrivant ainsi à (0, y, -2z) au lieu de (x, y-1,z+2). Ceci le conduit à une représentation cartésienne du plan ne contenant pas explicitement x et dans le passage à la représentation paramétrique, il commet une seconde erreur en égalant x à zéro, au lieu de le considérer comme un second paramètre.

Codage de Solution Partielle

Elle consiste à ne pas déterminer de représentation paramétrique. (code **SPa**) (3 étudiants)

Méthode B

Les codages **B** (48 étudiants) correspondent aux procédures basées sur la deuxième méthode de l'analyse a priori. Nous avons introduit des codages permettant de prendre en compte les variantes dans la résolution, les erreurs de calcul et les solutions partielles.

Codage de Variante

La variante ici correspond à résoudre le système par la méthode de substitutions successives. (code **Vs**) (45 étudiants)

Codage d'erreur

- erreurs de calcul

Une seule erreur de calcul est rencontrée. Elle concerne la résolution du système par la méthode du pivot de Gauss. (code **ECGS**) (1 étudiant)

Codage de Solution Partielle

Elle consiste à déterminer seulement une représentation paramétrique. (code **SPb**) (1 étudiant)

Méthode C

Les codages **C** (19 étudiants) consistent à suivre le raisonnement prévu dans la troisième méthode de l'analyse a priori. Nous avons encore introduit des codages spécifiques pour prendre en compte les erreurs de calcul dans la détermination du produit vectoriel, l'erreur dans l'interprétation du produit vectoriel et les solutions partielles.

Codage des erreurs

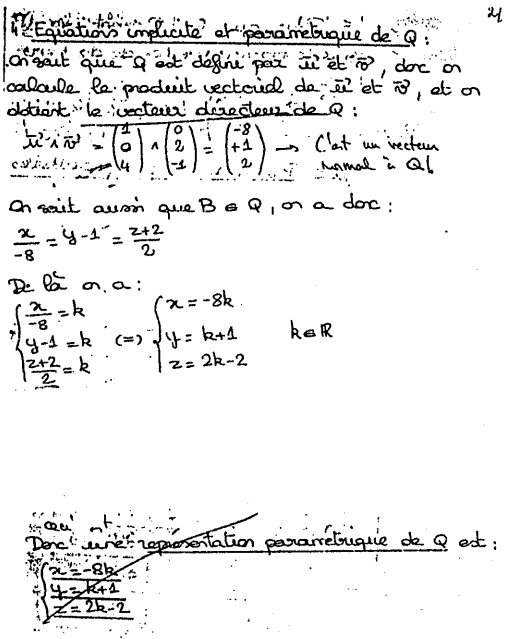
- erreurs de calcul

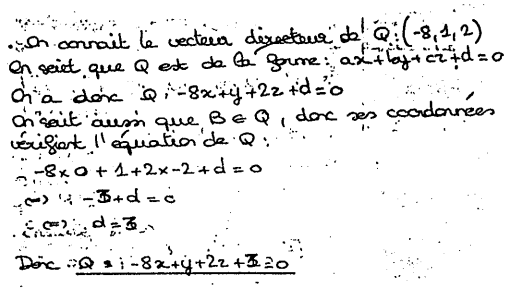
Elles concernent uniquement le calcul du produit vectoriel. (code **ECPV**) (2 étudiants)

- erreur dans l'interprétation du produit vectoriel et glissement de dimension

Elle consiste à considérer le produit vectoriel comme le vecteur directeur du plan. (code **RPc**) (1 étudiant)

Extrait de la copie de l'étudiant 22





Commentaire : L'étudiant démarre par la méthode puis considère le produit vectoriel comme le vecteur directeur du plan. Ceci conduit à des représentations cartésiennes et paramétriques de droite et non de plan. Il ne semble pas comprendre qu'il a produit une représentation cartésienne. Il détermine ensuite une représentation cartésienne correcte en faisant une double confusion entre vecteur normal et vecteur directeur.

Codage de Solution Partielle

Elle consiste à ne pas déterminer de représentation paramétrique. (code **SPc**) (3 étudiants)

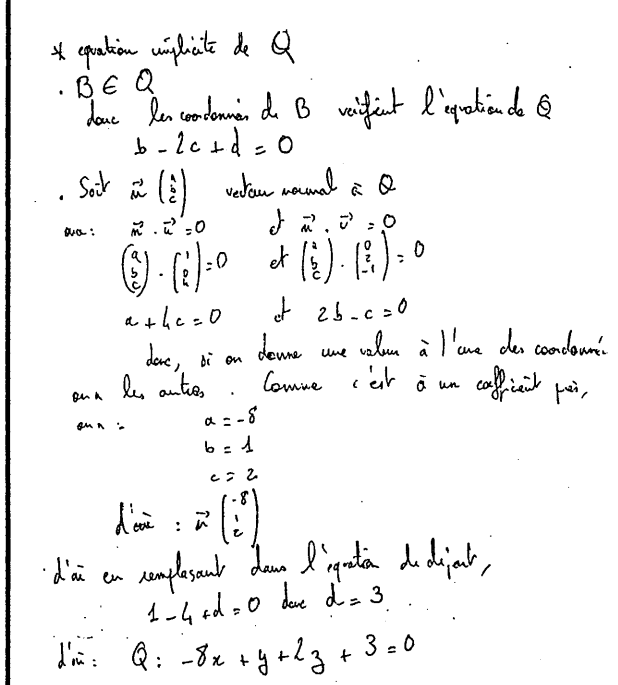
Méthode D

Elle consiste à déterminer une équation du plan Q à partir de l'équation générique ax+by+cz+d=0. Cette méthode n'était pas prévue dans l'analyse a priori. Nous avons procédé à un codage spécifique pour prendre en compte l'erreur classique. (9 étudiants)

En général, ceux qui utilisent cette méthode déterminent a, b, c et d en écrivant que les coordonnées de B satisfont l'équation et les composantes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'équation ax+by+cz=0 sans faire intervenir explicitement le produit scalaire.

Nous reproduisons ci-après la copie d'un étudiant qui a utilisé la méthode D en explicitant et justifiant tout son raisonnement.

Extrait de la copie de l'étudiant 84

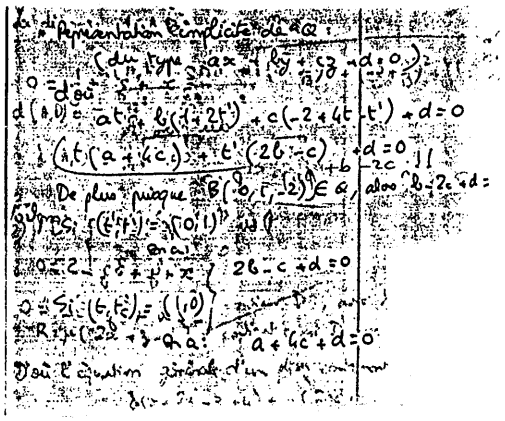


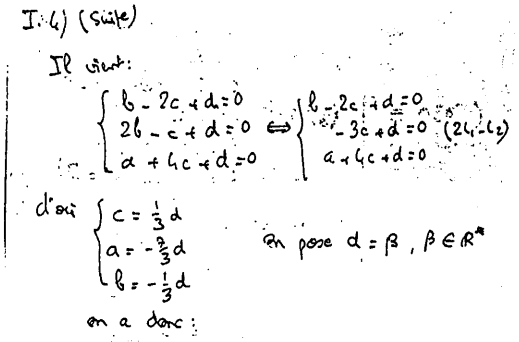
Commentaire : l'étudiant considère l'équation ax+by+cz+d=0 et détermine une première relation en considérant le point B. Partant du fait qu'un vecteur normal au plan Q est de la forme (a,b,c), en utilisant la nullité du produit scalaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ il détermine ensuite deux relations supplémentaires et en déduit (a,b,c) à un coefficient multiplicatif près. Grâce à la première relation il détermine ensuite d.

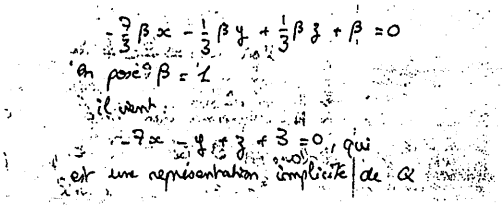
Codage d'erreur

Il concerne l'erreur classique consistant à écrire que les composantes des vecteurs générateurs vérifient l'équation du plan affine. (code **ECD**) (5 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 18







Commentaire : L'étudiant écrit sous forme paramétrique un vecteur $\vec{BM}$ du plan (paramètres t et t') puis écrit que les coordonnées de ce vecteur vérifient l'équation du plan affine. En prenant des valeurs particulières des paramètres il arrive ainsi à deux relations erronées. Il résout le système en fonction de d, change d en β, puis pose β=1 (en fait β=3) et aboutit à l'équation erronée engendrée par la confusion affine / vectoriel.

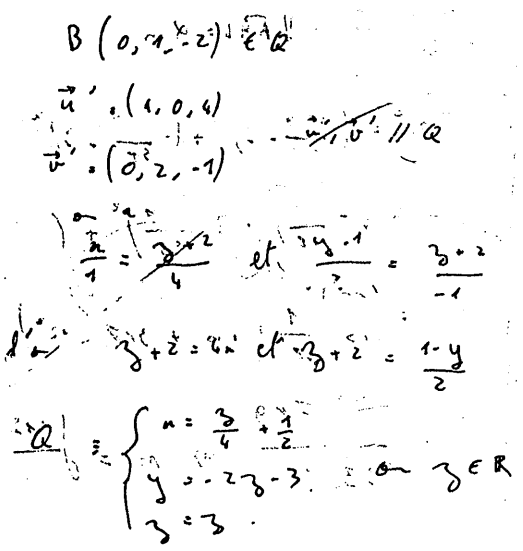
Code E

Les erreurs majoritaires dans cet exercice concernent l'obtention d'une représentation paramétrique. (12 étudiants)

Très majoritairement ces erreurs conduisent à des représentations paramétriques à un seul paramètre. C'est pourquoi nous introduisons pour elles un code spécifique **E**.

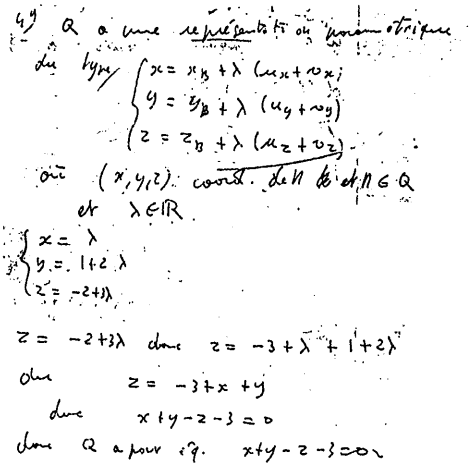
Elles mettent en jeu des processus divers que nous allons illustrer par quelques productions. Nous renvoyons également le lecteur à la copie 48 de la méthode A et à la copie 22 de la méthode C.

Extrait de la copie de l'étudiant 23



Commentaire : Cet étudiant adapte visiblement à la situation donnée les techniques de détermination d'équations de droites : avec une expression de colinéarité de (x,y-1,z+2) et $\vec{u}$, $\vec{v}$ (mais ne prenant en compte que les composantes non nulles de ces derniers), ce qui lui permet d'exprimer x et y en fonction de z.

Extrait de la copie de l'étudiant 68



Commentaire : L'étudiant ici, additionne les deux vecteurs donnés et détermine ainsi une représentation paramétrique à un seul paramètre.

Niveau d'explicitation

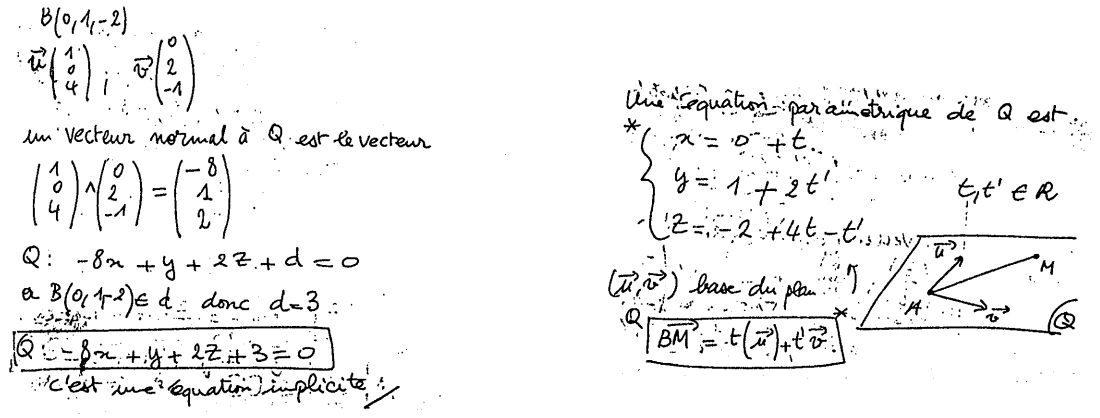
Comme dans les questions précédentes nous avons introduit différents niveaux d'explicitation pour prendre en compte les spécificités des rédactions des étudiants. Nous avons distingué les 4 niveaux d'explicitation suivants :

Niveau **0** : lorsque l'étudiant n'aborde pas la question. (12 étudiants)

Niveau **1** : ne donne à voir que des calculs. (2 étudiants)

Niveau **2** : donner à voir la démarche suivie avec discours justificatif explicite pour la partie traitée. (93 étudiants)

Extrait de la copie de l'étudiant 73



Commentaire : la représentation paramétrique est accompagnée d'un dessin pour l'expliciter.

2) RESULTATS GLOBAUX ET ANALYSE DE LA QUESTION 8

PROC A	PROC B	PROC C	PROC D	ERREUR E	n'abor-de pas la ques-tion	PARAMETRIQUE aucune/juste/fausse	IMPLICITE aucune/juste/fausse
18	48	19	9	12	12	8 / 72 / 15	2 / 81 / 12

Tableau : Choix de procédures et conclusions

Analyse

Visiblement, c'est la méthode B qui l'emporte dans les choix effectués et on peut voir ici l'effet direct de l'enseignement de DEUG. Elle est source de très peu d'erreurs. Les calculs ne sont pas complexes et tous les étudiants sauf trois utilisent la méthode de substitutions successives pour résoudre le système (on notera que la seule erreur de calcul est le fait d'un des deux étudiants qui ont utilisé la méthode de Gauss). On peut penser, que la reconnaissance de l'équation obtenue en x, y, z, comme équation du plan, lorsque les paramètres sont éliminés est naturelle vu le résultat attendu et ne nécessite pas la reconnaissance de cette équation comme condition de résolubilité du système.

Les erreurs rencontrées concernent majoritairement l'obtention d'une représentation paramétrique et sont liées aux méthodes A, C et D. Elles se traduisent presque systématiquement par un

glissement de dimension puisqu'elles conduisent à des représentations paramétriques à un seul paramètre. Elles mettent donc en défaut l'articulation des deux points de vue.

Il nous semble aussi important de souligner que la différence avec les productions jusqu'alors étudiées concerne non seulement le niveau de réussite mais aussi le niveau de formulation puisqu'ici quatre vingt treize des productions sont classées au niveau 2, le discours étant non seulement descriptif mais aussi justificatif. Visiblement, dans ce cadre restreint, les étudiants arrivent à donner sens aux techniques qu'ils utilisent. Ceci ne permet pas de conclure pour autant, pour les raisons explicitées plus haut, que cet acquis géométrique puisse constituer un support au travail dans des espaces de dimension supérieure, si un travail spécifique n'est pas mené.

IV. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons analysé les productions écrites d'étudiants français de DEUG et maîtrise, en réponse à des questions mettant en jeu l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique. Il s'agissait pour nous, comme nous l'avons déjà précisé d'étudier quels rapports ces étudiants développaient aux deux points de vue, et quelles difficultés, plus ou moins résistantes rencontrait la mise en place de ces rapports.

Dans cette conclusion, nous allons essayer de rendre compte, de façon synthétique des résultats obtenus. Si l'on considère d'abord les étudiants de DEUG qui ont répondu aux deux premières questions portant sur l'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 et la détermination du noyau et de l'image d'une application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$, ce qui ressort des données recueillies et de leur analyse, c'est :

1. Le très faible niveau de réussite pour la première tâche, qu'il s'agisse de la caractérisation paramétrique ou cartésienne de l'intersection. Les difficultés rencontrées par les étudiants dans la résolution de cette tâche mettent en évidence de façon nette un rapport déficient à l'articulation des points de vue : (sensibilité à la perturbation introduite par l'équation y = 0), ce à quoi se rajoute une incapacité à interpréter la résolution du système qui se traduisent soit par blocage soit par l'erreur que nous avons qualifiée " d'erreur paramètre " qui consiste à caractériser l'intersection par rapport aux paramètres introduits et conduit à des glissements de dimension, des modes d'association brutaux : vecteur / équation.

Le recours au cadre géométrique et aux théorèmes généraux qui aurait pu permettre ici de contrôler le travail technique est très peu utilisé et n'est pas forcément efficace.

2. La deuxième question, plus classique, est nettement mieux réussie (DEUG : 49% pour la partie a), 37% pour la détermination d'une base du noyau et 40% pour la détermination d'une représentation cartésienne de l'image).

De plus, la détermination d'une représentation cartésienne de l'image qui mettait en jeu l'articulation dans le sens a priori le plus difficile est un peu mieux réussie que la détermination d'une base du noyau qui ne mettait en jeu l'articulation que dans le sens cartésien / paramétrique. Soulignons que les erreurs commises encore une fois sont plutôt des erreurs (de calcul ou conceptuelles) conduisant à des incohérences détectables par un contrôle ou une anticipation sur les dimensions via une gestion de l'articulation pour déduire le nombre de paramètres nécessaires à la représentation du sous-espace. Les erreurs sont diverses et s'accompagnent fréquemment d'incohérences non repérées dans l'articulation des points de vue. La réussite dans la détermination de l'équation cartésienne de l'image apparaît fortement liée aux choix de variables effectués : il y avait une seule équation à trouver puisqu'il s'agissait d'un plan de $\mathbf{R}^3$ et elle pouvait être déduite par simple lecture. On notera cependant que peu d'étudiants justifient correctement le résultat fourni, en s'appuyant ou non sur le cadre géométrique.

On voit de nouveau apparaître ici des associations erronées entre vecteurs et équations et vice versa, ainsi que des glissements de dimension qui peuvent être liés à des utilisations abusives du théorème du rang.

Les quinze étudiants de maîtrise ont, eux, passé deux tests différents. Tous ont à résoudre la deuxième question et seulement six la première. Contrairement à ce que l'on aurait pu attendre, ces étudiants ne réussissent pas mieux que ceux de DEUG au contraire, sur ces questions élémentaires mais posées de façon à rendre obligatoire l'articulation des points de vue : une seule réussite, et encore partielle, à la question 1, deux réussites seulement pour l'obtention de la représentation cartésienne de l'image.

Pour la question 1, les étudiants ne commettent pas " l'erreur paramètre ", mais ne sont pas moins sensibles à la perturbation $y = 0$, ni mieux armés pour l'interprétation : ils ne font pas intervenir le cadre géométrique, le recours à des énoncés généraux est faible, on note des erreurs grossières et des incohérences.

Pour la question 2, contrairement aux étudiants de DEUG, ceux de maîtrise ne lisent pas directement l'équation de l'image. Très majoritairement, ils utilisent une technique très efficace de traitement des tableaux, qui permet de déterminer en même temps, une base et une représentation cartésienne d'un sous-espace, non prévue dans l'analyse a priori mais qui leur pose des difficultés d'interprétation évidentes.

On voit ici se manifester de façon évidente, le problème du contrôle des manipulations de tableau par des non-ostensifs adéquats, un contrôle d'autant plus nécessaire que la technique utilisée est puissante comme ici.

Comme les étudiants de DEUG, sinon plus, ceux de maîtrise ne donnent à voir dans leur production écrite qu'une succession de calculs, éventuellement accompagnée de l'énoncé des étapes successives suivies. Les conclusions sont en général données sans justification.

Les étudiants de maîtrise avaient aussi à résoudre des questions spécifiques : la question 3 centrée sur le passage paramétrique / cartésien, la question 5 correspondant à la comparaison de sous-espaces, la question 6 correspondant à un problème d'intersection droite / plan, avec paramètres ainsi que plusieurs questions de type vrai / faux.

La question 3, très mal réussie (trois réussites), confirme les difficultés rencontrées dans les questions précédentes qu'il s'agisse de l'interprétation de la résolution de systèmes mettant en jeu l'articulation des points de vue, ou de la gestion de la nouvelle technique apparue.

Ces difficultés se conjuguent cette fois avec des difficultés bien connues (Dorier, Rogalski, Ousman) concernant la gestion des questions d'indépendance linéaire.

La question 5 n'est réussie que par un étudiant qui, travaillant au niveau des représentations, arrive à trouver une représentation cartésienne correcte de chacun des trois sous-espaces. Aucun étudiant ne parvient à exploiter de façon efficace des raisonnements sur les dimensions dans la résolution, pour aller au-delà des inclusions immédiates. Il n'y a pas non plus de flexibilité entre les représentations, excepté chez l'étudiant qui réussit.

La question 6 n'est, elle, réussie par aucun étudiant qui apparaissent bloqués à des moments différents suivant la méthode utilisée. Pourtant ici, une interprétation géométrique était tout à fait possible.

Les questions de type vrai / faux donnent, quant à elles, lieu à des résultats plus variés, sans que pour autant la réussite atteigne un niveau satisfaisant. On note une grande sensibilité aux variables de la tâche puisque les variations introduites dans les formulations ont des effets importants (exemple : parties c, d et e). De plus, même lorsque les réponses sont correctes, les étudiants ont le plus souvent des difficultés à justifier leur réponse, dans le cas positif, à fournir des contre-exemples et rectifier l'énoncé, dans le cas négatif.

Le recours au cadre géométrique est quasiment absent et, lorsqu'il est utilisé (exemple : partie b) dans un contexte où une généralisation est nécessaire, source d'erreur. Comme l'on pouvait s'y attendre, vu la généralité et le type des énoncés, on trouve cependant plus de contrôle par des théorèmes généraux.

Ces résultats contrastent avec ceux obtenus en DEUG, dans un contexte géométrique (examen). La réussite est cette fois massive, tant pour la représentation paramétrique que cartésienne, les

réponses sont majoritairement justifiées correctement. On notera cependant que les erreurs commises, très majoritairement attestent de problèmes d'articulation de points de vue, puisqu'elles se traduisent par des incohérences entre dimension, nombre de paramètres et nombre d'équations. Elles sont associées à l'utilisation de méthodes enseignées au lycée pour obtenir la représentation cartésienne d'un plan.

En résumé, les résultats obtenus montrent des difficultés résistantes dans la mise en place de l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique. L'absence d'évolution entre le niveau DEUG et le niveau maîtrise est ici tout à fait préoccupante. Cela, bien sûr, reste à vérifier avec plus d'étudiants. Elle semble montrer que la familiarité accrue avec l'algèbre linéaire ne suffit pas à mieux armer les étudiants par rapport à la résolution de questions somme toute très élémentaires. Ils ne développent pas spontanément de moyens de contrôle à partir des notions et théorèmes qu'ils ont l'occasion d'employer. Et le temps de l'enseignement officiel s'étant éloigné, on a l'impression que les techniques sont encore moins technologiquement soutenues qu'elles ne l'étaient au départ. La résolution apparaît comme relevant du traitement de tableau de nombres mais le pilotage de ces ostensifs par des non-ostensifs est fortement deficient.

CHAPITRE VII

ETUDE DE DIFFERENTS NIVEAUX DE GESTION DE L'ARTICULATION ENTRE LES POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE : ETUDE DE CAS, ETUDIANTS BRESILIENS

I. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons analysé les productions écrites d'étudiants français de DEUG et de maîtrise, en réponse à des questions mettant en jeu l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique. Dans ce chapitre, nous allons analyser la gestion de cette articulation par deux groupes d'étudiants brésiliens.

La méthodologie suivie pour cette phase de la recherche est spécifique. Une première passation de tests avait été menée au Brésil dans des conditions analogues aux conditions de la passation en France, avec des étudiants débutants. Ces derniers se sont trouvés tout à fait déstabilisés par les exercices proposés, tout à fait inhabituels pour eux et nous avons renoncé à exploiter leurs productions.

Il nous a alors semblé plus raisonnable de nous adresser à des étudiants plus avancés qui, même si les exercices étaient pour eux peu habituels, pouvaient mettre à profit une culture mathématique moins récente et plus solide. C'est pourquoi nous avons cherché des volontaires parmi les étudiants du cours de "mestrado" en enseignement de mathématiques qui avaient tous dans leur scolarité suivi et validé au moins un enseignement d'algèbre linéaire. De plus, les productions des étudiants déjà recueillies, nous avaient confrontée à des successions de calculs peu expliquées et justifiées. Et, en particulier dans le cas brésilien, elles semblaient très difficiles à interpréter compte-tenu peut-être des déstabilisations mentionnées. C'est pourquoi nous avons organisé pour les étudiants de "mestrado" un dispositif en trois temps, prenant en compte également notre éloignement géographique du terrain.

I.1. LE DISPOSITIF PREVU

Le dispositif prévu était le suivant :

Dans un premier temps, les étudiants, en petits groupes de 2 ou 3, avaient à résoudre pendant une séance de TD de 2 heures à l'université les tests déjà présentés dans l'analyse a priori. Ils rendaient alors une production pour le groupe.

Dans un deuxième temps, ils avaient à reprendre le test chez eux individuellement, avec tous les documents souhaités et ceci se traduisait par une nouvelle production écrite. Les ensembles de

productions et les enregistrements audio des fonctionnements des groupes nous étaient transmis par les enseignants en charge de la passation et sur la base de leur analyse, nous construisions :

- une analyse détaillée des productions.

- un scénario d'entretien basé sur cette analyse.

L'ensemble était ensuite renvoyé à une enseignante du cours de mestrado qui se chargeait des entretiens et nous en retransmettait ensuite les enregistrements audio pour analyse.

I.2. LA REALISATION EFFECTIVE

Pour des raisons diverses, en particulier des raisons de temps, le dispositif initialement prévu a dû être en partie modifié. Le test 1 n'a pu être proposé aux étudiants qu'à la fin du mois d'octobre 96 et ceci a imposé de préparer les premiers entretiens, qui devaient impérativement être terminés avant la fin de l'année universitaire en décembre, sur la seule base des productions écrites des étudiants. Les enregistrements des groupes, qui ont été difficiles à décrypter, ne l'ont été qu'a posteriori. Les questions, qui servaient de base aux entretiens avaient trois objectifs principaux :

- nous aider à reconstituer le fonctionnement des étudiants lors de la résolution des tâches proposées, les productions écrites des étudiants laissant souvent la porte ouverte à diverses interprétations,
- nous aider à comprendre les changements intervenus entre travail en groupes et travail individuel,
- nous aider à mieux saisir plus généralement le rapport à l'articulation des deux points de vue cartésien et paramétrique développé par les étudiants.

Elles étaient relativement nombreuses, pour chaque étudiant. L'enseignante en charge des entretiens, en fonction du déroulement effectif de l'entretien, et pour limiter ce dernier à une durée raisonnable (environ une heure) a dû effectuer des choix.

Après analyse de la première expérimentation et concertation avec les enseignants brésiliens du mestrado, il a été décidé de proposer un nouveau test (le test 2) à un autre groupe d'étudiants à la fin du mois de mars 97. Pour des raisons de calendrier et compte-tenu de l'expérience acquise lors de la première expérimentation, nous avons ici réduit le dispositif, l'enseignante brésilienne organisant elle-même les grilles d'entretien. Les questions posées dans ces seconds entretiens ont été de fait beaucoup plus générales que celles des premiers.

II. PRESENTATION DES RESULTATS

La présentation sera organisée par rapport aux deux dispositifs que nous venons de décrire, le travail des étudiants et notre propre travail ayant été différents dans les deux dispositifs.

Nous voudrions d'abord souligner que ces dispositifs nous ont permis une analyse bien plus riche que les seules productions écrites recueillies auprès des étudiants français. Dans ce texte, pour des raisons d'espace, nous nous centrerons sur l'analyse du travail d'un groupe, pour chacune des deux expérimentations. Les données relatives aux autres groupes seront présentées, elles, de façon plus synthétique. Nous avons choisi des groupes qui nous semblaient relativement représentatifs, par leurs comportements et dont les protocoles étaient complets, mais d'autres auraient tout aussi bien pu l'être. Il nous a aussi semblé intéressant de mettre en évidence, en particulier pour la première expérimentation, les limites des interprétations faites sur la base des seules productions écrites puisque, dans ce cas, le scénario de l'entretien, pour des raisons de temps a été construit avant le dépouillement des bandes audio.

Comme nous l'avons déjà souligné, pour des raisons d'organisation, nous n'avons pas eu le temps de dépouiller les enregistrements pour les groupes avant la mise en place des entretiens dont les scénarios ont été élaborés sur la base des productions écrites. Il nous semble cependant tout à fait intéressant de restituer ici, a posteriori, les interprétations faites à la lumière des enregistrements.

II.1. LES RESULTATS DE LA PREMIERE PASSATION

Huit étudiants répartis en trois groupes ont été concernés par cette première passation. Sur la base des productions écrites reçues, nous avons préparé six guides d'entretiens. Quatre ont pu être effectivement réalisés, compte-tenu des contraintes diverses, notamment celles liées au fait que les étudiants du mestrado sont des étudiants salariés ayant peu de disponibilités. Nous avons choisi de centrer l'analyse sur un groupe de deux étudiantes qui ont donc passé le test 1 à la fin du mois d'octobre 96 et l'entretien à la fin du mois de novembre 96. Nous présenterons ensuite, de façon synthétique, comme annoncé, les données issues des autres étudiants.

II.1.1. LES RESULTATS DES ETUDIANTS DU GROUPE CHOISI

Il s'agit d'un groupe de deux étudiantes qui nous avons appelées Alfa et Bêta. Nous présenterons d'abord l'analyse a posteriori de leurs productions écrites telle que réalisée pour préparer l'entretien. Nous préciserons alors les hypothèses interprétatives, les questions que ces productions suscitent et que nous avions choisi de travailler dans les entretiens. Enfin, dans un troisième temps, nous étudierons ce que nous apportent, vis à vis de ces hypothèses et questions, les données issues des bandes audio relatives au travail en groupe et les deux entretiens.

A) L'ANALYSE A POSTERIORI DE DEUX PRODUCTIONS DE CHAQUE ETUDIANTE POUR LA QUESTION 1

QUESTION 1 : On considère dans R^3 les vecteurs suivants :
$a = (2, 3, -1)$ $b = (1, -1, -2)$ $c = (5, 0, -7)$ $d = (0, 0, 1)$
Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par {a, b} et {c, d}.

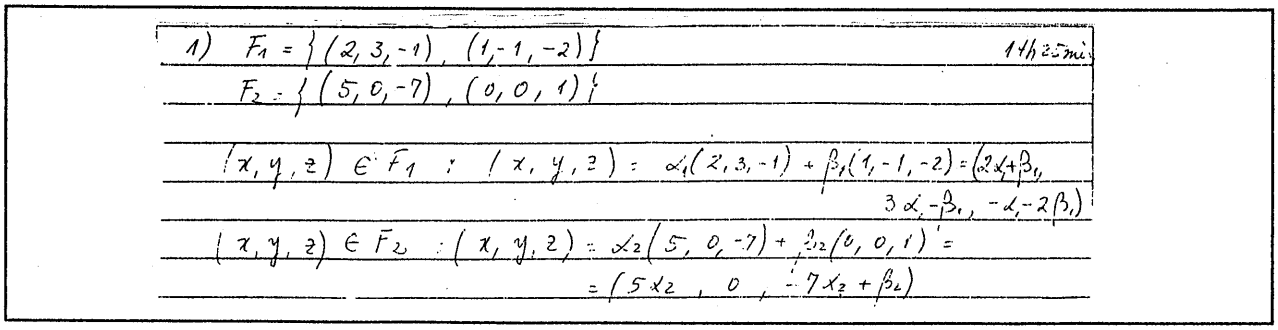
- le travail en groupe :

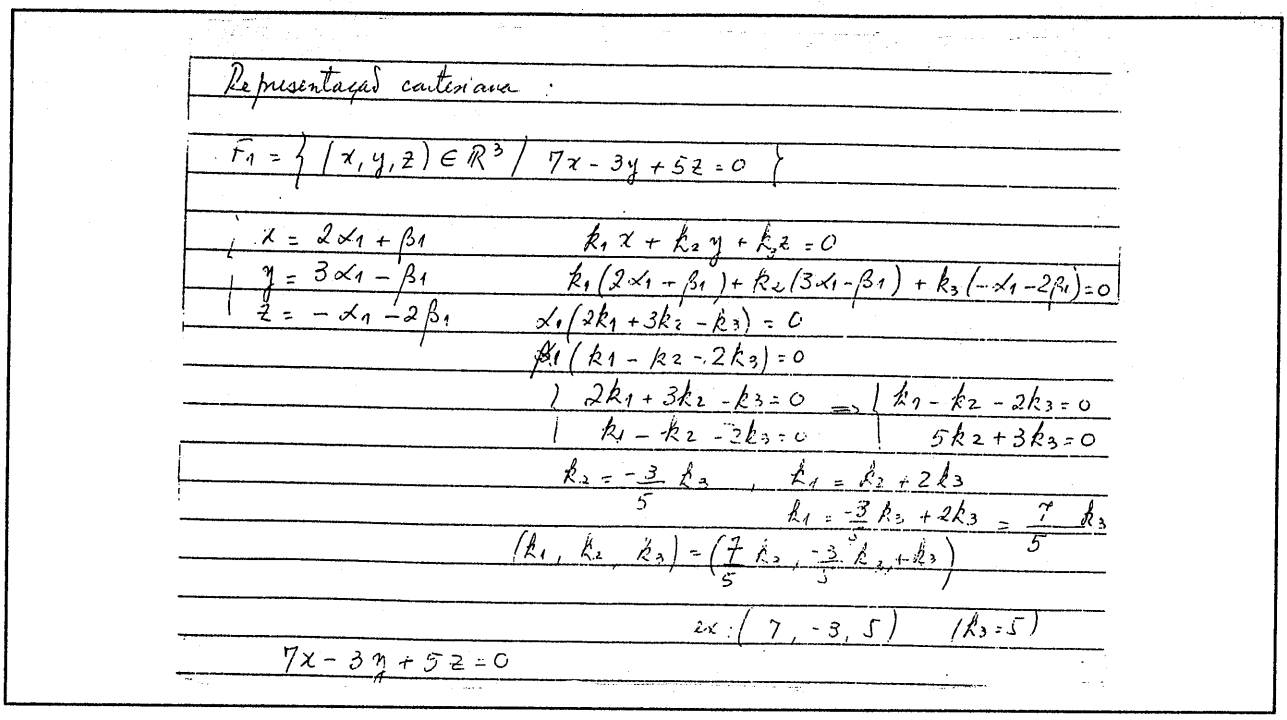
Dans le test fait **en classe,** les étudiantes démarrent par la détermination d'une représentation cartésienne de chacun de deux sous-espaces donnés, c'est à dire la méthode 6 de l'analyse a priori et concluent par la donnée d'une représentation cartésienne correcte de l'intersection, c'est-à-dire la réunion des équations obtenues précédemment. Elles passent sur cette question les 30 minutes indiquées. Leur production écrite commune montre en effet les étapes suivantes :

- L'écriture correcte d'un vecteur générique des sous-espaces engendrés par les vecteurs a et b d'une part, c et d d'autre part, ceci sans aucune quantification comme la plupart des étudiants français.

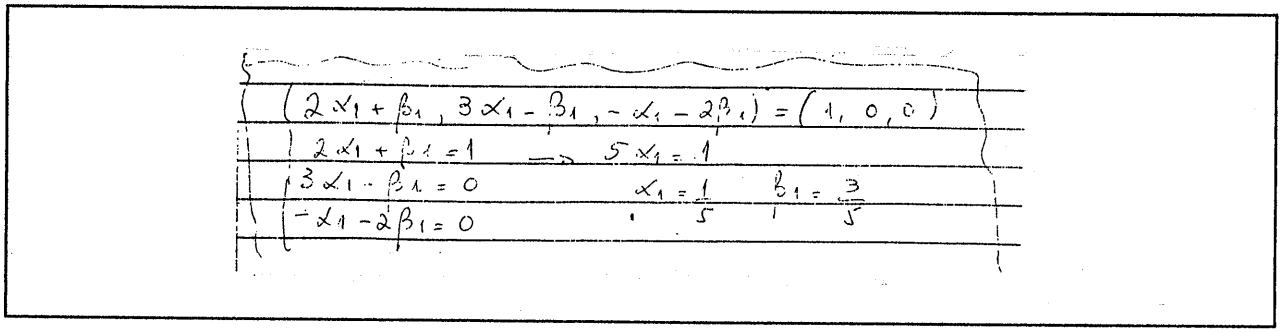
- La reconnaissance du fait que le sous-espace engendré par les vecteurs a et b est caractérisé par une équation du type $k_1x + k_2y + k_3z = 0$ et la substitution à x, y et z des coordonnées d'un vecteur générique de ce sous-espace. Ceci les conduit à l'équation : $\alpha_1(2k_1 + 3k_2 - k_3) + \beta_1(k_1 - k_2 - 2k_3) = 0$, qui n'est elle non plus accompagnée d'aucune quantification.

- L'écriture, à partir de cette équation, du système $\begin{cases} 2k_1 & +3k_2 & -k_3 & = & 0 \\ k_1 & & -k_2 & -2k_3 & = & 0 \end{cases}$. Par application de la méthode du pivot de Gauss, elles déterminent les valeurs de k_1, k_2 en fonction de k_3 ($k_1 = 7/5k_3$, $k_2 = -3/5k_3$) puis, choisissant $k_3 = 5$, obtiennent des valeurs numériques pour k_1, k_2, k_3 et une équation correcte $7x - 3y + 5z = 0$ pour le sous-espace $\langle a, b \rangle$. On notera que, dans la rédaction, l'annonce du résultat précède la succession des calculs effectués, ceci montrant bien qu'il s'agit d'une rédaction a posteriori.


1) $F_1 = \{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ 14h25mi
$F_2 = \{(5, 0, -7), (0, 0, 1)\}$
$(x, y, z) \in F_1 : (x, y, z) = \alpha_1(2, 3, -1) + \beta_1(1, -1, -2) = (2\alpha_1 + \beta_1$
$3\alpha_1 - \beta_1, -\alpha_1 - 2\beta_1)$
$(x, y, z) \in F_2 : (x, y, z) = \alpha_2(5, 0, -7) + \beta_2(0, 0, 1) =$
$= (5\alpha_2, 0, -7\alpha_2 + \beta_2)$



En bas de la même page, les étudiantes « déterminent » α et β pour le vecteur (1, 0, 0) mais rien ne nous indique la raison de ce calcul où les valeurs de α et β trouvées, déterminées à partir du système des deux premières équations ne satisfont pas la troisième, ce qui est normal, le vecteur (1, 0, 0) n'appartenant pas au sous-espace considéré.



- Les étudiantes reproduisent ensuite la même démarche pour le sous-espace ⟨c, d⟩ pour arriver à l'équation y=0, sans se rendre compte qu'elles l'avaient dès le départ.

- Elles écrivent enfin, l'intersection sous forme cartésienne en formant la réunion des deux équations trouvées, et ce sans aucun commentaire.

Cette production commune soulève un certain nombre de questions :

Qu'est-ce-qui conduit les étudiantes à écrire l'équation $k_1x + k_2y + k_3z = 0$? A ce niveau de l'analyse, il nous semble raisonnable de faire l'hypothèse qu'elles ont compris que le sous-espace engendré par les vecteurs a et b linéairement indépendants est un sous-espace de

dimension 2 de $\mathbf{R}^3$, c'est-à-dire un plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$, et ont donc essayé de résoudre la question en partant de la forme attendue comme sa représentation cartésienne, mais cette interprétation nous semble nécessiter une confirmation.

Qu'est-ce-qui motive le passage de l'équation au système ? L'absence de quantificateurs rend difficile ici l'interprétation. Si les étudiantes avaient écrit en intermédiaire :

$\exists\, k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{R}, \forall\, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbf{R} / \alpha_1(2k_1+3k_2-k_3)+\beta_1(k_1-k_2-2k_3)=0$

nous aurions pu raisonnablement faire l'hypothèse qu'elles avaient ensuite choisi les cas particulier $\alpha_1=1$, $\beta 1=0$ et $\alpha_1=0$, $\beta 1=1$. Mais ici, on peut se demander si elles n'ont pas seulement cherché un moyen simple de se débarrasser de α_1 et β_1.

Quel est la raison du calcul mené avec le vecteur (1,0,0) ?

Soulignons enfin que la production écrite ne nous donne à voir qu'une succession de calculs, ce qui ne facilite pas l'interprétation.

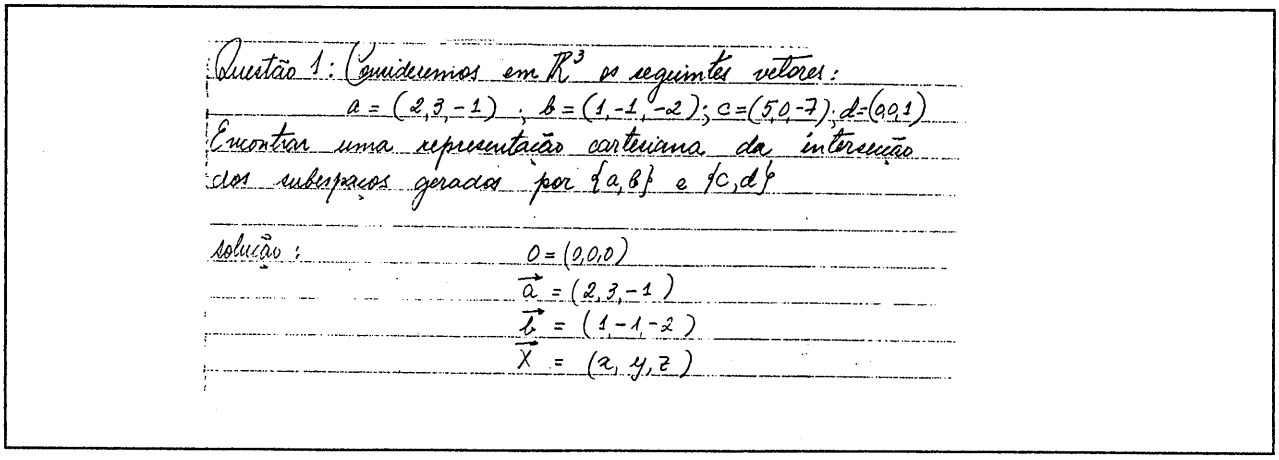
- la production individuelle de l'étudiante Alfa :

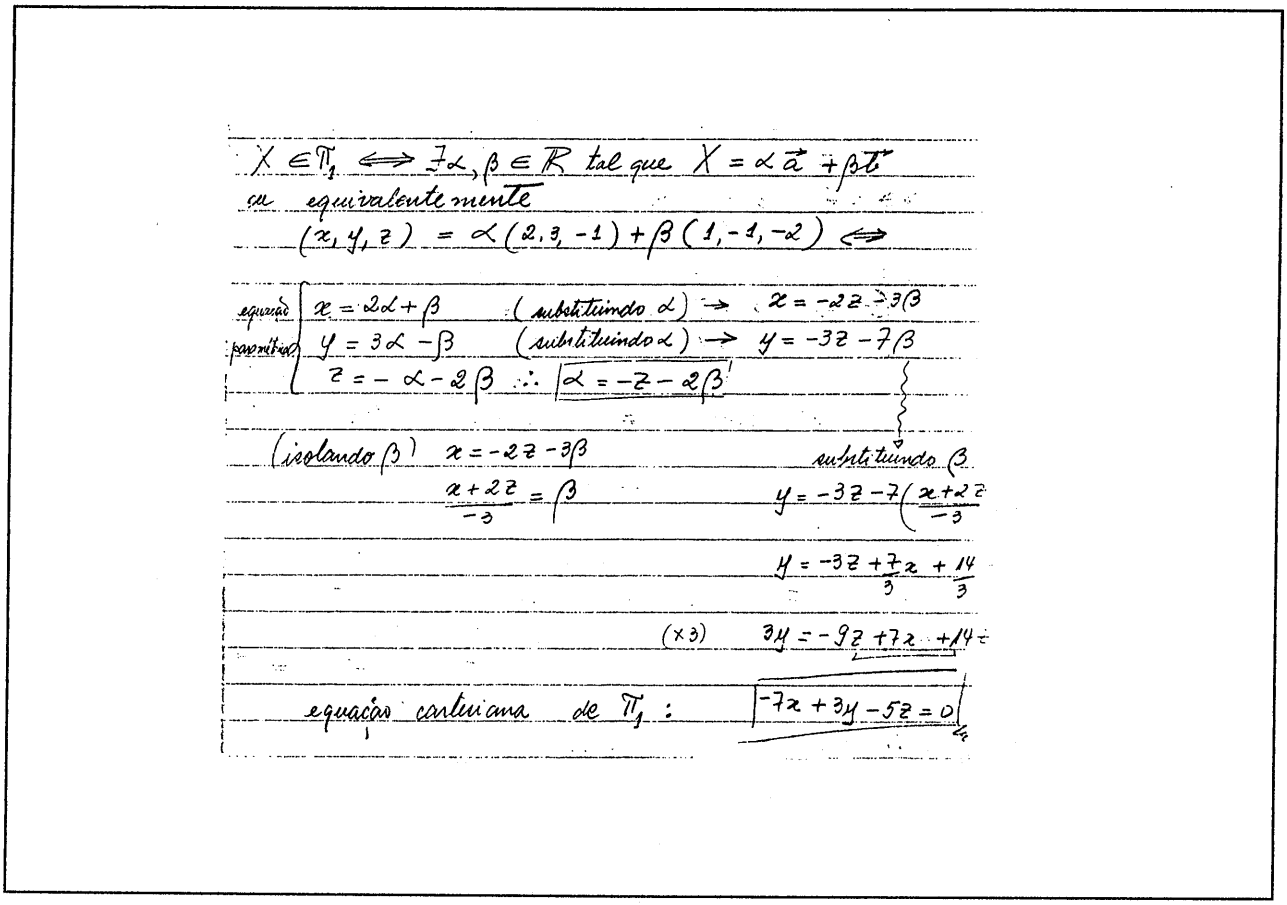
L'étudiante n'utilise pas la même méthode pour le test fait en classe et celui fait à la maison même si elle garde la même stratégie globale. Dans le test fait **à la maison,** elle nous donne en effet à voir les étapes suivantes :

- Ecriture des coordonnées de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{X}$ un vecteur quelconque du sous-espace $\langle a, b\rangle$ qu'elle note π_1, et ceci dans une écriture quantifiée correcte. La notation π_1 semble confirmer notre hypothèse qu'elle a saisi que $\langle a,b\rangle$ était un plan de $\mathbf{R}^3$.

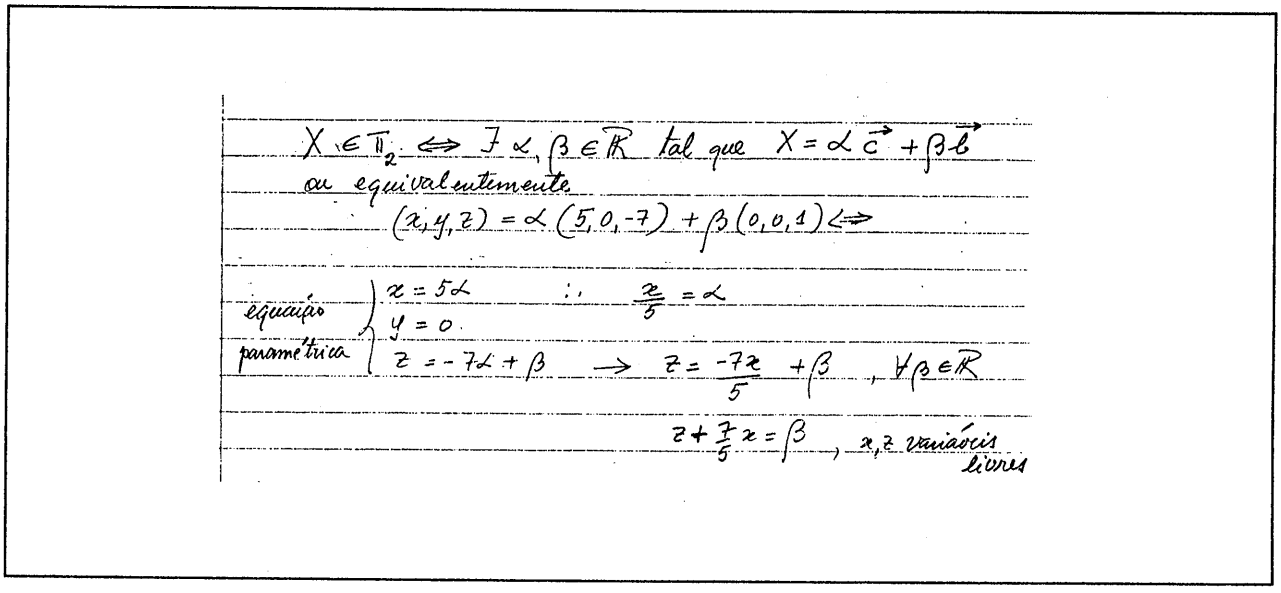
- Explicitation de cette écriture dans le registre tableau et association d'un système.

- Elimination de α et β, par la méthode des substitutions successives, ceci conduisant à une équation identifiée comme équation cartésienne de π_1.


Questão 1: Consideremos em $\mathbb{R}^3$ os seguintes vetores:
$a=(2,3,-1)$; $b=(1,-1,-2)$; $c=(5,0,-7)$; $d=(0,0,1)$
Encontrar uma representação cartesiana da intersecção dos subespaços gerados por $\{a,b\}$ e $\{c,d\}$
solução:
$O=(0,0,0)$
$\vec{a}=(2,3,-1)$
$\vec{b}=(1,-1,-2)$
$\vec{X}=(x,y,z)$

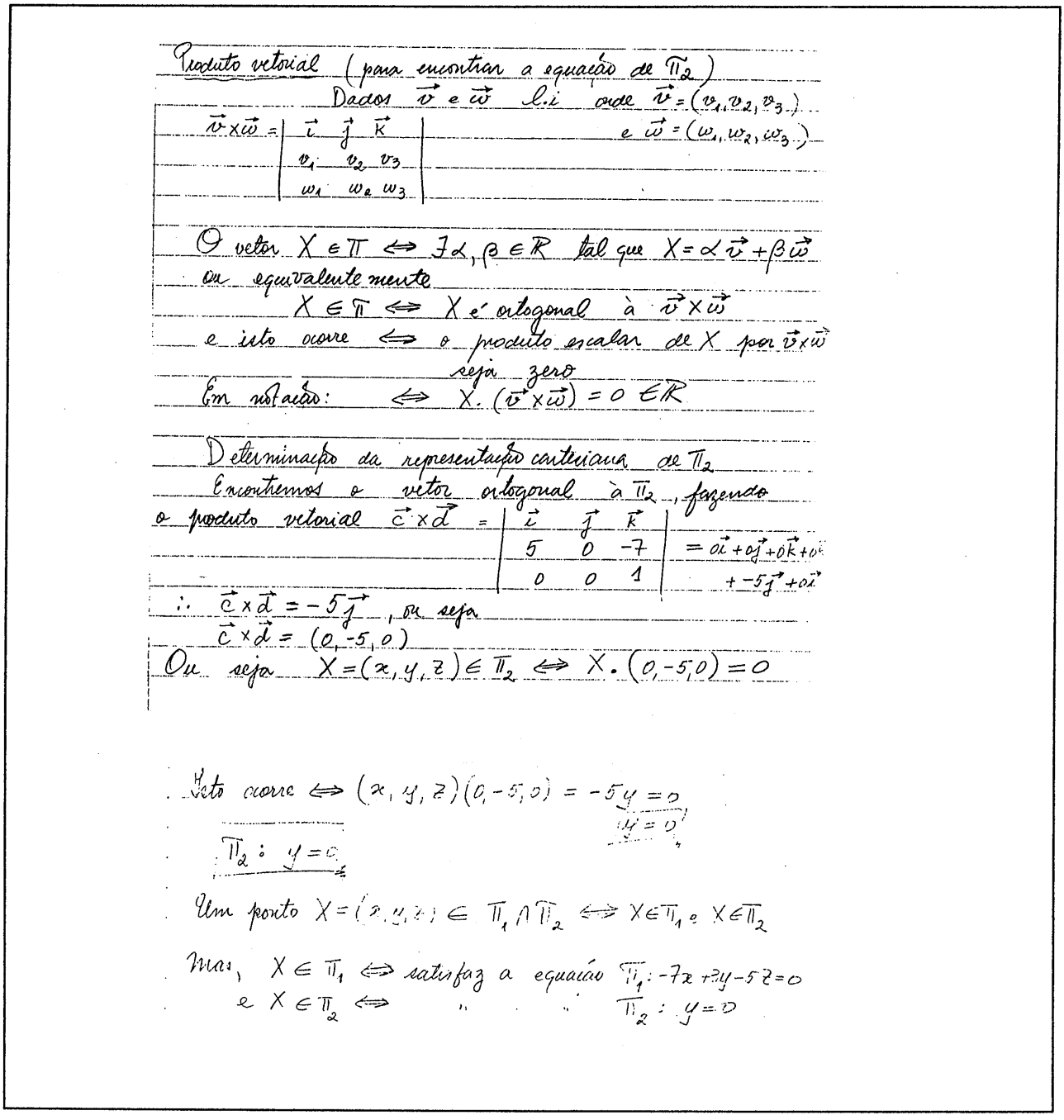


- Utilisation de la même démarche pour déterminer l'équation qui caractérise le sous-espace engendré par les vecteurs c et d, mais cette fois-ci sans arriver à conclure.



- Changement visible de stratégie pour déterminer une équation qui caractérise le sous-espace engendré par les vecteurs c et d, noté π_2 : détermination d'un vecteur normal au plan (via le

produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$) et ensuite d'une équation du plan en écrivant la nullité du produit scalaire d'un vecteur générique du plan et de ce vecteur normal, soit passage à la méthode 7 de l'analyse a priori.



Produto vetorial (para encontrar a equação de π_2)

Dados $\vec{v}$ e $\vec{w}$ l.i onde $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

O vetor $X \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $X = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$

ou equivalentemente

$X \in \pi \Leftrightarrow X$ é ortogonal à $\vec{v} \times \vec{w}$

e isto ocorre $\Leftrightarrow$ o produto escalar de X por $\vec{v} \times \vec{w}$ seja zero

Em notação: $\Leftrightarrow X \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0 \in \mathbb{R}$

Determinação da representação cartesiana de π_2

Encontremos o vetor ortogonal à π_2, fazendo o produto vetorial $\vec{c} \times \vec{d}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} + 0\vec{i} + -5\vec{j} + 0\vec{i}$$

$\therefore \vec{c} \times \vec{d} = -5\vec{j}$, ou seja

$\vec{c} \times \vec{d} = (0, -5, 0)$

Ou seja $X = (x, y, z) \in \pi_2 \Leftrightarrow X \cdot (0, -5, 0) = 0$

Isto ocorre $\Leftrightarrow (x, y, z)(0, -5, 0) = -5y = 0$

$y = 0$

$\pi_2 : y = 0$

Um ponto $X = (x, y, z) \in \pi_1 \cap \pi_2 \Leftrightarrow X \in \pi_1$ e $X \in \pi_2$

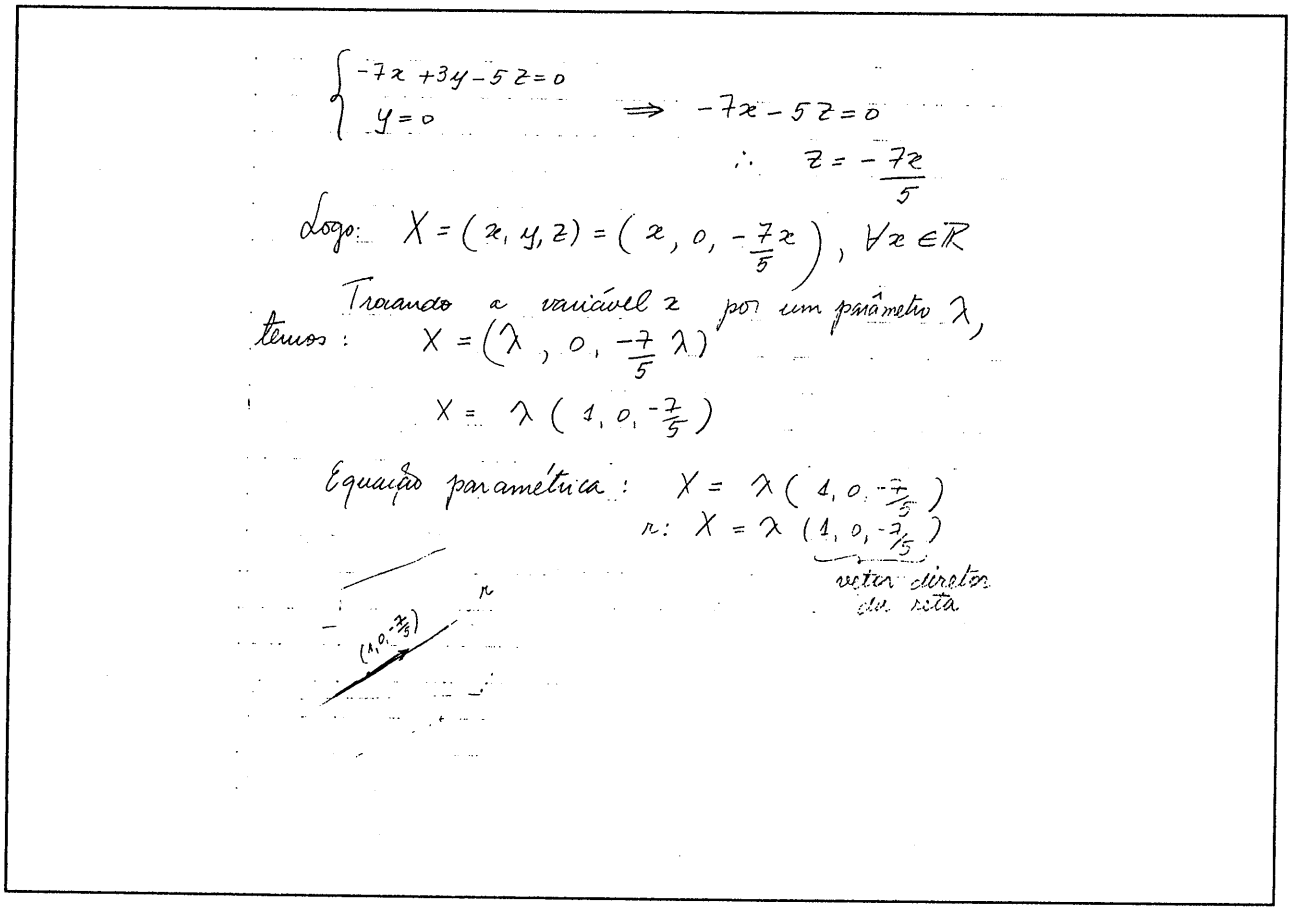
Mas, $X \in \pi_1 \Leftrightarrow$ satisfaz a equação $\pi_1 : -7x + 2y - 5z = 0$

e $X \in \pi_2 \Leftrightarrow$ " " $\pi_2 : y = 0$

- Réunion en système des deux équations obtenues pour les plans π_1 et π_2, et passage à une représentation paramétrique "implicite tableau" puis "explicite tableau" de l'intersection :

$X=(\lambda,0, - 7/5\lambda)$, $X=\lambda(1, 0, -7/5)$.

Ceci est accompagné d'un dessin, mais il n'y a pas de conclusion en ce qui concerne la représentation cartésienne demandée.



Cette production conduit, elle aussi, à un certain nombre d'hypothèses et de questions. Lors de l'entretien, nous souhaitons en particulier travailler les suivantes :

1. Qu'est-ce-qui motive le changement de stratégie par rapport à une résolution commune qui avait abouti pourtant à une représentation cartésienne correcte de l'intersection ? Quel était donc le degré de conviction sur la validité de cette production commune ?

2. Les notations adoptées par l'étudiante semblent confirmer l'hypothèse de l'identification des deux sous-espaces comme plans vectoriels, la notation π_1 dans les manuels brésiliens étant clairement associée à ce type d'objet. Est-ce vraiment le cas ?

3. L'élimination de α et β se fait dans un raisonnement non basé sur l'équivalence de systèmes. Quel est le statut exact de cette élimination. L'équation obtenue est-elle reconnue comme condition de résolubilité du système ou est-elle considérée comme l'équation de π_1, simplement du fait qu'elle ne fait plus intervenir α et β ?

Le blocage rencontré par cette étudiante avec le deuxième sous-espace semble rendre raisonnable cette seconde interprétation. L'étudiante non seulement ne reconnaît pas l'équation y=0 comme celle de π_2, mais de plus sa procédure est bloquée par le fait qu'elle ne dépend pas de α et β. Elle va alors transformer le quantificateur existentiel de β en un quantificateur universel puis écrira que x et z sont des variables libres, sans aucun autre commentaire, deux indices de son désarroi, avant d'abandonner cette démarche.

4. L'étudiante change ensuite de méthode. Qu'est-ce qui la conduit à la méthode 7 choisie cette fois ? On notera la présentation détaillée qui est faite de cette méthode, ceci nous incitant à penser que l'étudiante a eu recours à un manuel et reproduit, en l'adaptant ensuite à son cas particulier, la présentation qui y était faite de la méthode. Est-ce bien le cas et la technique utilisée pour déterminer le produit vectoriel est-elle aussi issue du manuel ?

5. On note dans la rédaction un mélange de notations vectorielles et affines. Jusqu'à quel point l'étudiante distingue-t-elle ces deux cadres ?

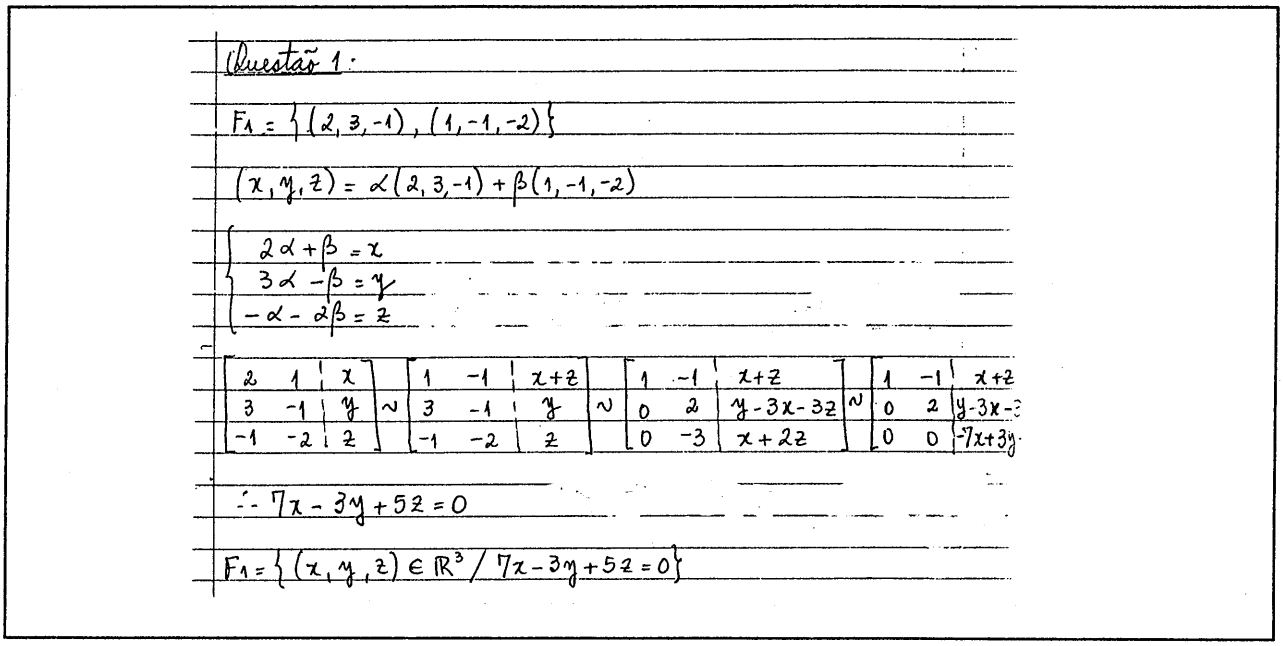
6. Après avoir obtenu une représentation cartésienne de l'intersection, l'étudiante ne conclut pas et continue le travail en passant à une représentation paramétrique. Quel est le sens de ceci ? L'étudiante a-t-elle conscience d'avoir résolu le problème posé ou non ?

7. L'étudiante adopte dans cette résolution un langage géométrique qui n'était pas apparu dans la résolution en groupes. D'où cela vient-il et jusqu'à quel point les calculs sont-ils soutenus par des interprétations géométriques ?

- **La production individuelle de l'étudiante Bêta** : Cette étudiante ne reproduit pas elle non plus à la maison le travail effectué en classe même si elle garde elle aussi la même stratégie globale. Elle nous donne en effet à voir les étapes suivantes :

- Ecriture correcte des composantes d'un vecteur générique du sous-espace engendré par les vecteurs a et b, sans quantification cependant, et traduction par un système d'équations linéaires et homogènes.

- Résolution du système par triangulation de la matrice construite à partir des coefficients du système et des seconds membres de l'équation comme suit : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ -1 & -2 & z \end{bmatrix}$.



Questão 1:

$F_1 = \{(2,3,-1), (1,-1,-2)\}$

$(x,y,z) = \alpha(2,3,-1) + \beta(1,-1,-2)$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = x \\ 3\alpha - \beta = y \\ -\alpha - 2\beta = z \end{cases}$$

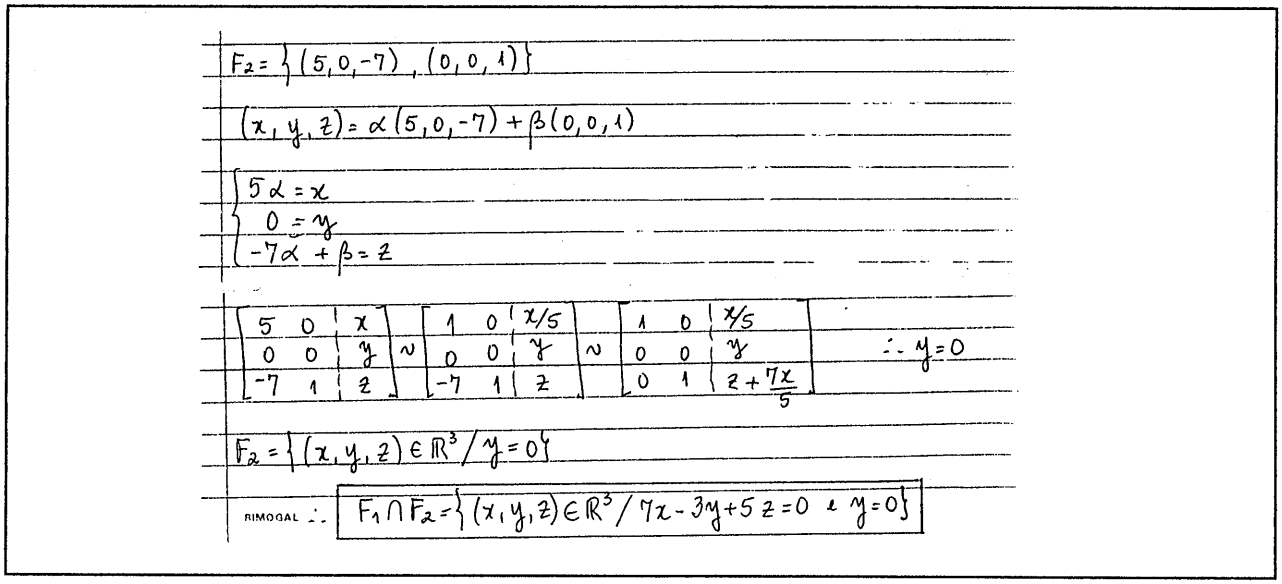
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ -1 & -2 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x+z \\ 3 & -1 & y \\ -1 & -2 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x+z \\ 0 & 2 & y-3x-3z \\ 0 & -3 & x+2z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x+z \\ 0 & 2 & y-3x- \\ 0 & 0 & -7x+3y \end{array}\right]$$

$\therefore -7x - 3y + 5z = 0$

$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 7x - 3y + 5z = 0\}$

Ceci conduit à une équation correcte du plan vectoriel engendré par les vecteurs a et b. L'étudiante ne donne à voir que les calculs, il n'y a aucun commentaire et la quantification est aussi absente.

- Détermination de l'équation qui caractérise le sous-espace engendré par les vecteurs c et d par la même méthode, sans que la particularité de la réduction ne provoque de blocage.



$F_2 = \{(5,0,-7), (0,0,1)\}$

$(x,y,z) = \alpha(5,0,-7) + \beta(0,0,1)$

$$\begin{cases} 5\alpha = x \\ 0 = y \\ -7\alpha + \beta = z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ -7 & 1 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x/5 \\ 0 & 0 & y \\ -7 & 1 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x/5 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & z + \frac{7x}{5} \end{array}\right] \quad \therefore y = 0$$

$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$

RIMOGAL $\therefore$ $F_1 \cap F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 7x - 3y + 5z = 0 \text{ e } y = 0\}$

- Donnée d'une représentation cartésienne correcte de l'intersection de ces deux sous-espaces, par conjonction des deux équations obtenues, toujours sans le moindre commentaire.

Cette résolution individuelle nous incite elle aussi à poser lors de l'entretien certaines questions :

1. Pourquoi ici aussi un changement de stratégie ?

2. Cette étudiante utilise la même notation pour l'ensemble de deux vecteurs générateurs

$F_1 = \{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ et le sous-espace $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 7x - 3y + 5z = 0\}$. On peut se demander quel sens exact est donné ici aux notations ensemblistes.

Enfin plus globalement, on ne note dans ces deux résolutions écrites aucun raisonnement explicite, simplement une succession de calculs. Quels raisonnements pilotent ces calculs ? Quels moyens éventuels d'anticipation, de contrôle ont été utilisés ? Il nous semble important d'essayer d'y avoir accès à travers les entretiens.

B) LA RESOLUTION DE LA QUESTION 1 DANS LES BANDES AUDIO

Nous allons présenter les extraits de l'enregistrement qui nous semblent importants pour comprendre la résolution en groupe de ces deux étudiantes, tester les hypothèses faites à partir de la production écrite, apporter des éléments de réponse à l'ensemble des questions posées ci-dessus.

Les étudiantes lisent les définitions données et essayent de comprendre la notion de "représentation cartésienne", nouvelle pour elles. Elles passent ensuite à la question 1 et écrivent un vecteur quelconque du sous-espace engendré par a et b (respectivement c et d) (cf. copie).

1 α : Maintenant une représentation cartésienne
2 β : de l'intersection
3 α : Elle est de ce type (montre la définition en haut de la feuille), c'est-à-dire un n-uplet appartient à F_1 si et seulement si x
4 β : satisfait les
5 α : satisfait les équations de F_1. Donc ça serait comme ça... Maintenant on fait d'abord une représentation cartésienne de ces ensembles... donc, une représentation cartésienne de F_1 sera l'ensemble de termes (x, y, z) appartenant à $\mathbf{R}^3$
6 β : tels que x + y + z
7 α : Non, ça c'est un exemple [...] Mais comment je vais trouver ces équations ? ... x + y + z... Donc, je dois faire... Donc les équations de F_1, ça c'est x, ça c'est y, ça c'est z
8 β : Donc ce serait 2α + β égal à x, 3α-β...
9 α : Mais égal à 0 ici c'est un exemple, regarde, ça doit être, attends (les étudiantes reviennent à la définition et la relisent à voix haute)... Et quelles sont les équations de F_1 ?... On va faire, par exemple, je vais voir... nous avons.
10 *Les étudiantes réécrivent le système en x, y et z (en vertical)*

11 α : Donc, on va créer des équations, qu'il y ait des systèmes linéaires, des équations homogènes, un système d'équations linéaires homogènes... Par exemple, si j'additionne x et y et je soustrais... z plus y et je soustrais x, j'ai 0... ça donne, celui-là plus celui-là, 2α-2α, ça fait 0... maintenant celui-là plus celui-là, attends un peu... je vais faire comme ça. Quel est... Attends, laisse moi penser, je dois arriver à des équations linéaires... donc, je vais faire... je dois avoir...je dois avoir quelque chose x plus quelque chose y plus quelque chose z égal à 0. L'étudiante écrit $k_1x+k_2y+k_3z = 0$

12 α : Bon, quand j'aurai ces valeurs, je les mets là... Donc, ça fait

13 α, β : $k_1(2\alpha+\beta)+k_2(3\alpha-\beta)+k_3(-\alpha-2\beta) = 0$

14 α : Donc, on va voir ce qu'on a avec α... avec α, on a $2k_1+3k_2-k_3$, oui

15 β : Oui

16 α, β : Avec β on a $k_1-k_2-2k_3$... égal à 0... Donc c'est ça (les étudiantes écrivent le système)

17 α : Maintenant, je tombe sur un système indéterminé je vais mettre celle-là en haut (la deuxième équation), elle est plus simple... je vais faire celle-là moins 2 fois celle-là

18 : Les étudiantes arrivent à $5k_2+3k_3 = 0$ et terminent la résolution en fonction de k_3(voir copie), exprimant les solutions sous forme de vecteur.

19 α : Donc, par exemple, si j'ai la relation comme ça, je vais avoir 0... si je fais k_3 égale 5, donc j'ai ici par exemple une équation possible c'est : $7x - 3y + 5z = 0$

20 β : Oui, ici alors $k_3 = 5$

21 α : Donc celle-ci est une des représentations... C'est bizarre, je peux en faire autant que je veux...regardons ce que nous avons fait

22 *Les étudiantes passent en revue toute la résolution et semblent gênées par le fait de ne pas aboutir à un "vrai" système. Elles vont essayer d'obtenir un système de diverses façons. Leur démarche n'est pas évidente à suivre. Il semble qu'elles reviennent à la recherche d'équations à partir de combinaisons des expressions de x, y et z en fonction de α et β. Ceci fait sortir les relations x=-2z puis y=-z+2z qui aboutissent à (-2z, z, z). Elles décident ensuite de chercher une base, se demandent pourquoi, dans leur résolution, elles ont considéré α et β non nuls et n'y répondent pas vraiment puis veulent résoudre le système :*

$$\begin{cases} 2\alpha & +\beta & = & 1 \\ 3\alpha & -\beta & = & 0 \\ -\alpha & -2\beta & = & 0 \end{cases}$$

en déduisent α = 1/5 et β = 3/5 et décident de passer à la suite

23 α : Bon, laissons ça comme ça et faisons la même chose pour F_2

24 *En utilisant la même stratégie, les étudiantes arrivent ainsi au système :*

$5k'_1-7k'_3=0 \quad k'_3=0$

25 α : Cela donne $k'_1=0$ et $k'_3=0$ et k'_2 est quelconque... Donc, ça fait par exemple, $k'_1=0$, $k'_2=1$, $k'_3=0$, donc ici je vais avoir y=0

26 α : Maintenant si on fait $F_1 \cap F_2$, ça va donner (x, y, z) qui appartient à $\mathbf{R}^3$ tel que on ait les deux choses :

7x-3y+5z=0 et y = 0... Alors, je ne suis pas très sûre, je trouve très... ceci n'a pas de sens

27 β : ça semble parachuté

28 α : Elle demandait de trouver une représentation cartésienne de l'intersection de ces sous-espaces

29 β : engendrés

30 α : En réalité, il faut satisfaire les deux... le deuxième sous-espace, ça veut dire que y doit être nul... regarde, ça fait exactement une demi-heure, on va s'arrêter.

Il apparaît clairement ici que les étudiantes n'ont pas pensé à déterminer l'équation d'un plan, mais qu'elles proposent une équation du type $k_1x+k_2y+k_3z = 0$ par analogie formelle avec l'exemple donné en haut du test. Nous avions donc tout à fait raison de considérer notre première interprétation comme hypothétique.

On voit apparaître aussi un certain nombre de phénomènes liés à l'obtention en quelque sorte arbitraire de l'équation du plan et qui expliquent la partie de la copie que nous n'avions pas réussi à interpréter :

- la gêne vis à vis du fait qu'elles peuvent ainsi obtenir autant d'équations qu'elles le veulent.

- l'analogie formelle qui les pousse à chercher un système d'équations. Ceci renforce, en revanche l'hypothèse formulée pour le passage au système qui semble uniquement conditionné par le fait qu'elles veulent aboutir à un système.

La réponse finale dont nous avons souligné qu'elle était donnée sans commentaire n'est pas en fait très solide et si elles s'arrêtent c'est parce que le temps indicatif donné dans le test est épuisé. Compte tenu de ces informations, on n'est pas étonné a posteriori que la résolution à la maison ait été pour chacune différente de celle en classe qui avait pourtant abouti.

On notera de plus l'absence complète d'articulation des points de vue cartésien et paramétrique dans l'un des divers cadres où elle aurait pu ici se manifester : aucun raisonnement portant sur le nombre d'équations, le nombre de paramètres, les dimensions des sous-espaces, les caractéristiques géométriques des objets manipulés. Le travail de ces étudiantes se situe dans un cadre algébrique formel au niveau des systèmes, après explicitation de la notion de sous-espace engendré dans les cas particuliers considérés.

C) LES DONNEES ISSUES DES ENTRETIENS POUR LA QUESTION 1

Nous allons présenter ces données à partir des réponses aux questions effectivement posées aux étudiantes.

- l'étudiante Alfa

<u>première question</u> : **Qu'as-tu fait à la maison ?**

1 J'ai cherché à trouver une équation pour le sous-espace engendré par les vecteurs a et b et une équation pour les sous-espaces engendré par les vecteurs c et d... J'ai appelé le sous-espace engendré par les vecteurs a et b : π_1 et je suis arrivée à l'équation : -7x+3y-5z=0.

2 Euh! En essayant de trouver l'équation pour le sous-espace formé par les vecteurs c et d que j'ai appelé π_2, j'ai euh!... j'ai trouvé une équation paramétrique qui me semblait un peu bizarre : $x = 5\alpha$, $y = 0$ et $z = -7\alpha+\beta$.
3 Alors, j'ai exprimé α en fonction de x, 1/5 de x et β par z+7/5x. Et j'avais des doutes, comment représenter cette équation de π_2 ? J'ai fait une recherche et j'ai vu que le produit vectoriel, qu'avec le produit vectoriel, je pourrais trouver cette équation de π_2. Et ça m'a confirmé que l'équation de π_2, c'était bien $y = 0$.
4 Bon, alors je suis arrivée au système, un système à deux équations et un vecteur X qui appartient à l'intersection de ces deux sous-espaces, il devait donc être de la forme suivante : x, y est nul et z = 7/5x, pour tout x appartenant à **R**...Donc, dans ce cas, x et z étaient de variables libres... J'ai changé x pour un paramètre, γ non λ fois le triplet (1, 0, -7/5)... donc, ce triplet (1, 0, -7/5) était le vecteur directeur de la droite intersection de π_1 et π_2.

deuxième question : **Pourquoi as-tu choisi l'équation : $k_1x+k_2y+k_3z = 0$, dans le travail en classe ?**

1 Cette expression a été choisie euh! pour voir si on arrivait à obtenir une représentation cartésienne avec cette définition du test, où apparaît x+y+z=0.

troisième question : **Pourquoi as-tu choisi les deux équations : $2k_1+3k_2-k_3=0$ et $k_1-k_2-2k_3=0$?**

1 Je ne sais pas quel est le critère que l'on a utilisé pour choisir ces deux équations.

quatrième question : **Pourquoi l'équation -7x+3y+5z=0 caractérise-t-elle le sous-espace engendré par les vecteurs a et b ?**

1 L'équation -7x+3y+5z=0 est apparue parce que j'ai considéré un vecteur X appartenant au sous-espace engendré par les vecteurs a et b et que cet X était une combinaison linéaire des vecteurs a et b.

cinquième question : **Pouvais-tu prévoir le résultat et pourquoi ?**

Il était prévu dans cette question, si l'étudiante répondait oui, de lui demander à quel moment de la résolution elle avait fait éventuellement ces prévisions, si elle répondait non ou avait des difficultés à justifier, de passer au cadre géométrique pour essayer de l'aider à avancer. Ceci n'a finalement pas été fait.

1 Je n'avais pas les moyens de prévoir cette équation parce que pour y arriver j'ai dû faire beaucoup de calculs.

sixième question : **Pourquoi as-tu changé de méthode pour le sous-espace engendré par les vecteurs c et d ?**

1 J'ai changé de méthode euh! j'ai changé de méthode parce que quand je suis arrivée à l'expression $y = 0$, et après x en fonction de α et z en fonction de α, β, je ne savais pas quoi faire avec ces expressions de x et de z. Alors, j'ai utilisé le produit vectoriel pour trouver l'équation du sous-espace π_2 et je suis arrivée à la conclusion que c'était vraiment $y = 0$ l'équation de π_2.

huitième question : **Est-ce que la méthode où tu as employé le produit scalaire peut être généralisée ?**

1 euh! comme le produit vectoriel pouvait être employé dans ce cas, je l'ai utilisé sans aucun souci sur la possibilité d'être général ou non.

neuvième question : **Pourquoi n'as tu pas conservé la méthode utilisée en cours dans le travail à la maison, puisque tu avais déjà trouvé une solution ?**

1 Euh! pourquoi tu n'a pas conservé la méthode utilisée en cours [...] 2 En cours, on avait le souci avec le temps parce qu'on voulait suivre le temps déterminé 3 Euh! d'où chaque question avait un temps et on voulait y rester 4 Comme c'était Bêta qui écrivait, on a laissé comme ça. A la maison j'ai eu plus de liberté et donc j'ai repensé la question et je suis allée chercher dans les livres.

Ces éléments de l'entretien permettent d'affiner les premières interprétations et analyses. Il nous montrent en particulier, en ce qui concerne le travail individuel :

- que c'est bien la confrontation à une forme non usuelle : l'équation y = 0 qui amène à chercher d'autres moyens de résolution mais que, dès ce moment, l'équation y=0 est perçue comme solution possible. L'étudiante en effet utilise à deux reprises dans l'entretien l'expression : « ça m'a confirmé que y=0 était bien l'équation... » (3, première question, 1 sixième question). On notera de plus, dans la réponse à la question 1, un essai de raisonnement portant sur les paramètres, baptisés d'abord « variables libres » (langage que l'on peut supposer associé à la résolution du système) avec, après un début correct, une confusion sans doute encore une fois induite par la particularité de la situation qui conduit à déclarer que z et x sont les deux variables libres, puis la mise sous forme standard par le changement de nom de la variable libre x en utilisant une notation réservée aux paramètres et à partir de cette traduction dans le registre explicite tableau standard, le passage à une interprétation géométrique adéquate. Ceci confirme bien aussi l'hypothèse faite d'une interprétation géométrique sous-jacente au choix de la notation pour les sous-espaces considérés.
- que c'est bien dans les manuels que l'étudiante Alpha est allée chercher la solution basée sur l'utilisation du produit vectoriel.

En ce qui concerne le travail en groupes, l'entretien confirme ce que montrait l'enregistrement, à savoir :

- que la recherche de l'équation qui caractérise chacun des sous-espaces a bien été faite en s'appuyant sur la définition de la représentation cartésienne donnée et pas sur le fait qu'il s'agissait d'un plan vectoriel (1, troisième question). Ceci contribue à expliquer le doute portant sur la représentation cartésienne du sous-espace engendré par les vecteurs c et d.

- que les étudiantes ont bien cherché à se ramener à un système sans disposer de critères particuliers pour ce passage mais en choisissant la solution la plus commode (1, quatrième question).
- que leur degré de conviction sur la validité de la solution obtenue n'est pas très fort.

On notera de plus que l'étudiante Alpha ne semble pas comprendre la question posée sur la prévision, sans aucun doute ambiguë : elle semble en effet comprendre la prévision comme une prévision portant sur les coefficients. Les réponses aux questions précédentes laissent cependant penser qu'il n'y a pas eu d'anticipation : l'équation est ce sur quoi on tombe en traduisant la définition de sous-espace engendré et en exploitant cette traduction. Elle ne semble pas vue comme condition de résolution d'un système ni liée à la dimension du sous-espace (1, cinquième question).

- l'étudiante Bêta

première question : **Qu'as-tu fait à la maison?**

1 J'ai considéré l'ensemble des vecteurs qui engendrent le sous-espace et j'ai appelé ce sous-espace F_1.
2 J'ai cherché un vecteur qui pouvait être écrit comme combinaison linéaire de ces vecteurs et j'ai construit un système linéaire.
3 Les inconnues étaient les constantes qui multiplient les vecteurs qui engendrent l'espace et les termes indépendants étaient les coordonnées du vecteur générique.
4 En triangulant le système, j'ai trouvé une équation pour que le système ait des solutions... pour que le système soit compatible, dans la troisième équation le résultat indépendant devait être nul. Et j'ai imposé ceci comme condition pour que le système soit compatible.
5 A partir de ça, j'ai écrit l'ensemble sous la forme cartésienne comme c'était dans la définition 2, l'ensemble qui représentait le sous espace.
6 Et là, en utilisant la même notation qu'au début, j'ai compris comme en haut, pour les sous-espace engendré par deux vecteurs, c'était le même sous-espace qui était représenté sous une autre forme à travers la représentation cartésienne proposée.
7 Donc, une paire ou mieux, le vecteur (x, y, z) appartient à cet ensemble parce qu'il satisfait les conditions exigées par la résolution du système.

deuxième question : **Peux-tu expliciter le raisonnement utilisé dans le travail en classe ?**

1 J'ai démarré en appliquant la définition de représentation cartésienne donné dans la définition 2 et en écrivant un vecteur qui appartient au premier sous-espace, euh! le sous-espace engendré par les deux premiers vecteurs a et b.
2 J'ai écrit (x, y, z) comme combinaison linéaire des vecteurs générateurs
3 A ce moment, j'ai écrit le vecteur résultant en faisant les opérations, en multipliant le premier scalaire α_1 par la première coordonnée du vecteur a et additionnant le scalaire β_1 multiplié par la première coordonnée du vecteur b et ainsi de suite.

4 De la même façon, un vecteur qui appartient au deuxième sous-espace, le sous-espace engendré par les vecteurs c et d, a été aussi écrit comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs et j'ai écrit directement le vecteur en faisant aussi les opérations.
5 Ensuite, j'ai construit un système en utilisant l'égalité du vecteur générique (x, y, z) et euh! après les opérations j'ai résolu le système. J'ai égalé euh!
6 euh! c'est bizarre! ça ne donne pas le même résultat.
7 j'ai égalé euh!
8 c'est ça que je pense que j'avais fait.

troisième question : **Pourquoi as-tu choisi l'équation : $k_1x+k_2y+k_3z=0$, dans le travail en classe ?**

1 J'imagine que quand j'ai introduit des valeurs, les scalaires k_1, k_2, k_3 comme coefficients de x, y et z, c'était pour trouver une équation linéaire.

quatrième question : **Pourquoi as-tu choisi les deux équations : $2k_1+3k_2-k_3=0$ et $k_1-k_2-2k_3=0$?**

1 Quand j'ai mis en évidence α et β et qu'ils multipliaient les parenthèses $2k_1+3k_2-k_3$ et $k_1-k_2-2k_3$ ... Euh! ce qui arrivait avant, c'était la somme de ces deux équations égales à 0... Maintenant je pense que j'ai dû choisir une des possibilités, un des résultats possibles... si chaque terme de l'équation était égal à 0 mais j'aurais pu prendre 2 et -2, 1 et -1, 1000 et -1000, du moment que ça s'annulait, parce que c'était deux termes d'une somme.

cinquième question : **Quelle est la signification des ensembles $F_1=\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ et $F_1=\{(x, y, z) \in R^3 / 7x - 3y + 5z = 0\}$?**

1 J'ai appelé F_1 euh! pour moi, j'ai compris qu'il s'agit du même ensemble, le même sous-espace qui d'un côté était représenté par les vecteurs générateurs et d'autre côté était représenté par une forme car..., par une représentation cartésienne euh! qui montre explicitement euh! quelles conditions les vecteurs qui appartiennent au sous-espace engendré par ces vecteurs initiaux doivent satisfaire.

sixième question : **Pourquoi l'équation $7x - 3y + 5z = 0$ est-elle l'équation qui caractérise une représentation cartésienne du sous-espace engendré par a et b ?**

1 J'ai pensé qu'elle caractérise parce qu'elle impose des conditions sur les coordonnées des vecteurs... Elle impose des conditions... le vecteur satisfait le système d'équations s'il obtient cette équation parce que si ce n'est pas zéro, le système sera incompatible euh!... ainsi je ne peux pas représenter les vecteurs de ce sous-espace.

septième question : **Pouvais-tu prévoir ce résultat et pourquoi ?**

1 Au début, je ne pouvais pas prévoir que ce serait cette équation, mais l'existence d'une équation euh! dans laquelle les coefficients des inconnues vont se rendre égaux à zéro, ça oui, parce que j'ai 3 équations et 2 inconnues.

2 D'où, je savais qu'au moins une d'entre elles devait être soumise à une condition au moins qu'elle était aussi égale à zéro. Ceci ne pouvait pas arriver parce que les termes indépendants sont littéraux et donc j'ai prévu qu'il y avait une indétermination dans la dernière équation. D'où je savais avant.

huitième question : **Pouvais-tu prévoir le résultat trouvé pour l'intersection ?**

1 Par rapport au résultat de l'intersection il était prévisible que y = 0 est une des équations d'une représentation cartésienne parce que le sous-espace est engendré par deux vecteurs qui ont y = 0. D'où, ça serait une condition qui devrait apparaître au moment de l'intersection.

neuvième question : **Pourquoi n'as-tu pas conservé à la maison la méthode utilisée en classe puisque tu avais trouvé une solution ?**

1 J'ai pas conservé la méthode utilisée en classe euh! parce que je ne me rappelais pas comment j'avais fait. J'avais été très surprise par les exercices et... c'était ce à quoi j'avais pensé sur le moment, en premier... Maintenant, il me semble que j'ai cherché à respecter la définition, là avec des équations linéaires et homogènes...
2 Quand j'ai été chez moi, je ne me rappelais plus ce que j'avais fait, euh! et j'ai été plus rigoureuse par rapport à la théorie. Je me suis aidée, j'ai consulté des livres et j'ai résolu les exercices avec cette aide. En fait, je ne me souvenais pratiquement d'aucune solution que j'avais faite, de la façon dont j'avais fait en classe.

Cet entretien, confirme un certain nombre de faits déjà mis en évidence concernant le travail en groupe et, en particulier, le fait que, déstabilisées par la tâche proposée, les étudiantes s'en sont d'autant plus raccrochées à des indices formels, dans un travail qui ne les a pas satisfaites et a laissé peu de traces dans leur mémoire. On y retrouve aussi l'aide apportée dans le travail individuel par le recours aux manuels et la volonté de recherche et de compréhension qui s'y manifeste.

Cet entretien montre aussi des différences sensibles entre les deux étudiantes. Contrairement à ce qui s'était passé pour l'étudiante Alpha, il n'y a pas ici d'intervention du cadre géométrique. En revanche, on voit apparaître un rapport sensiblement différent au cadre des systèmes linéaires dans ses relations avec le problème posé. Même si les quantifications restent implicites dans le discours, dès la réponse à la première question, on voit apparaître l'équation du sous-espace très nettement comme condition de résolubilité du système. Ceci se retrouve dans les réponses aux questions 5, 6 et 7. La question de la prévision est cette fois-ci bien interprétée et liée au rang du système même si le terme de rang lui-même n'est pas prononcé et si la formulation reste relativement floue : trois équations, deux inconnues, ceci lui permet de prévoir l'existence d'une condition au moins.

De même, en ce qui concerne la prévision de l'intersection, la condition y=0 satisfaite par les deux vecteurs générateurs du second sous-espace est reconnue comme devant se retrouver dans une représentation cartésienne de l'intersection.

La notion de représentation cartésienne est visiblement quelque chose de nouveau pour cette étudiante auquel elle donne sens via celle de « conditions à satisfaire », dépassant ainsi l'approche formelle du travail en groupe.

On ne note en revanche aucune mise en relation explicite entre nombre d'équations et dimension des sous-espaces concernés, qu'il s'agisse des sous-espaces initiaux ou de l'intersection.

En ce qui concerne la confusion repérée dans la production individuelle, dans les notations ensemblistes, le début de la réponse à la question 1 confirme l'amalgame fait dans la production écrite : « j'ai considéré l'ensemble des vecteurs qui engendrent le sous-espace et j'ai appelé ce sous-espace F1 ». En revanche, il semble bien clair que, pour cette étudiante, F1 ne se réduit pas aux vecteurs générateurs, c'est plutôt une certaine élasticité qui est donnée aux notations ensemblistes.

Les deux étudiantes Alpha et Bêta ont abouti à des représentations cartésiennes correctes, dans le cadre du dispositif spécifique mis en place. La réussite est donc ici bien meilleure que celle obtenue en DEUG et en maîtrise auprès d'étudiants français, dans les conditions de passation individuelle. Mais les enregistrements et entretiens nous montrent bien les problèmes que posent aux étudiantes la résolution de cette tâche pourtant tout à fait élémentaire et le peu d'outils dont elles disposent pour gérer les questions d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique.

D) L'ANALYSE A POSTERIORI DE DEUX PRODUCTIONS DE CHAQUE ETUDIANTE POUR LA QUESTION 2

QUESTION 2 : Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui, à chaque vecteur (x, y, z) de $\mathbf{R}^4$, associe le vecteur (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$, défini par :

$$\begin{aligned} a &= x + y + 3z + 10t \\ b &= x + 2y + z + 4t \\ c &= x + 5z + 16t \end{aligned}$$

a) Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f;
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.

- le travail en groupe :

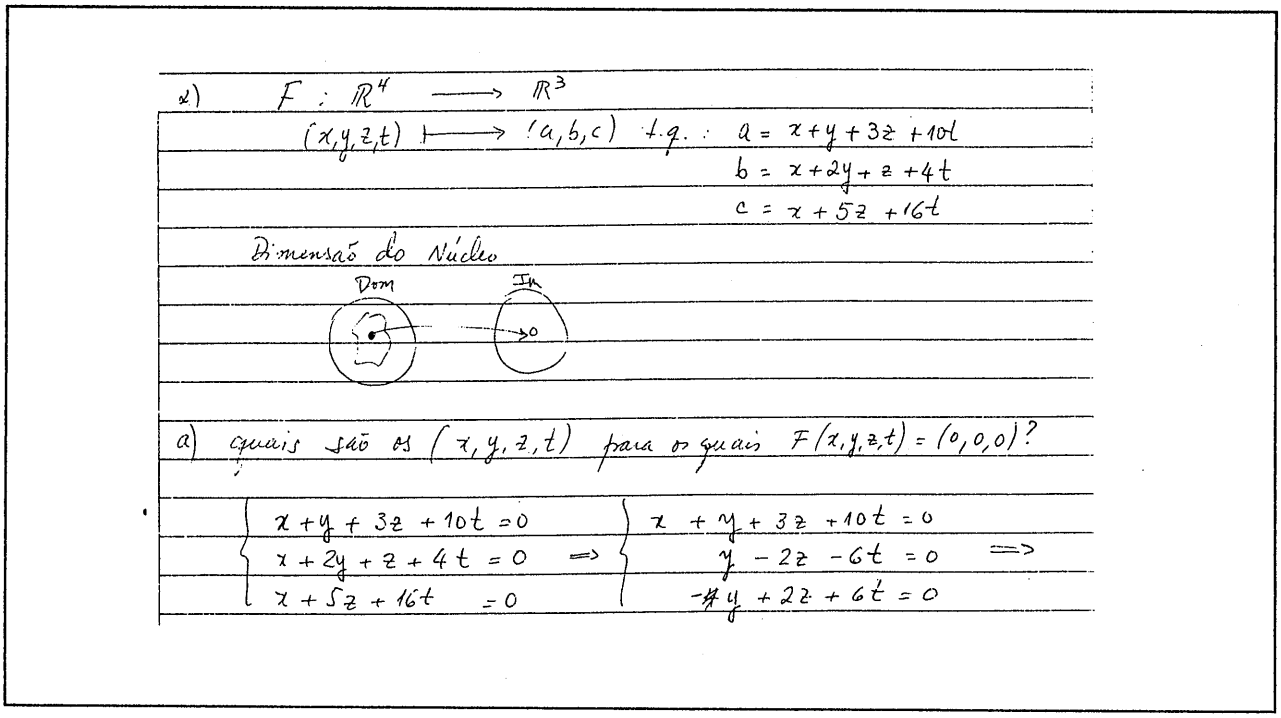
Dans le test **en classe,** la production écrite des étudiantes Alfa et Bêta nous donne à voir, sur cette question au départ très classique pour des étudiants brésiliens, les étapes suivantes qui correspondent au démarrage, à la méthode 1 :

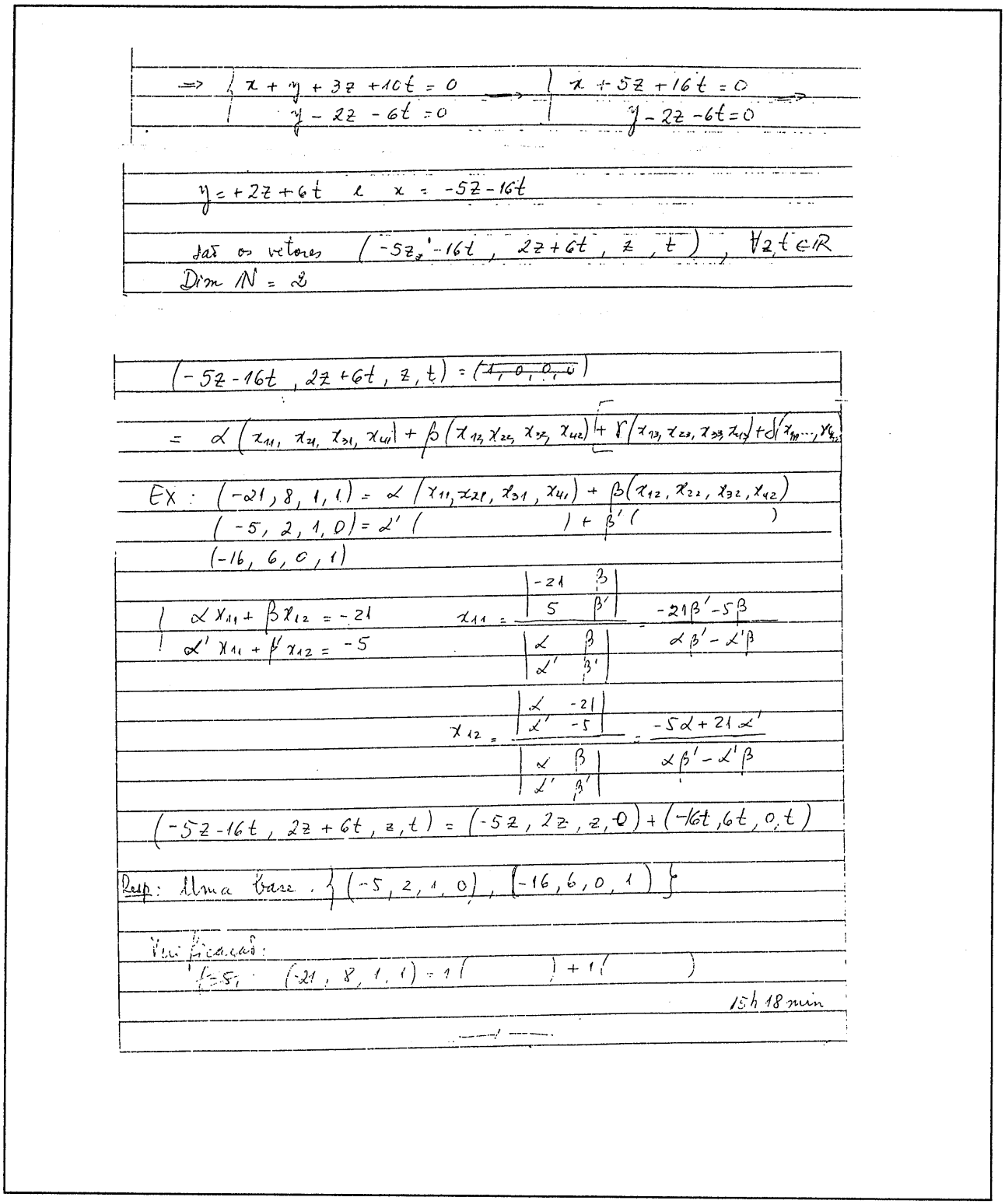
- reformulation de la question concernant le noyau en langue naturelle appuyée par un schéma puis traduction sous forme de système.

- résolution du système linéaire homogène obtenu par la méthode du pivot de Gauss.

- détermination des inconnues principales (x et y) en fonction des inconnues secondaires (z et t) et écriture d'un vecteur quelconque du noyau dans le registre tableau implicite.

- conclusion sur la dimension du noyau et essai de détermination d'une base du noyau.





Contrairement à ce que l'on pourrait penser, le passage à une base du noyau va poser problème. Il semble que les étudiantes cherchent d'abord un système générateur de quatre vecteurs, réduit ensuite à deux, sans doute en prenant en compte la dimension trouvée et cherchent à déterminer

ces vecteurs en prenant les trois vecteurs du noyau associés aux valeurs ((1,1), (1,0) et (0,1) des paramètres z et t, sans que les deux derniers vecteurs ne soient bien sûr reconnus comme les éléments d'une base « naturelle » du noyau. La démarche ne peut bien sûr aboutir. Le système associé est mis en place pour la première composante et les deux premiers vecteurs seulement, ceci conduisant à un système 2x2 avec quatre paramètres inconnus. Le système est résolu par les formules de Cramer puis la démarche semble abandonnée.

La suite de la production écrite nous donne à voir la décomposition du vecteur générique du noyau en séparant les z et les t qui conduit à l'identification des deux vecteurs de base et est suivie d'une vérification portant sur le vecteur (-21,8,1,1).

Le travail des étudiantes sur cette question s'arrête là, visiblement pour des contraintes de temps, l'heure de fin étant notée sur la feuille.

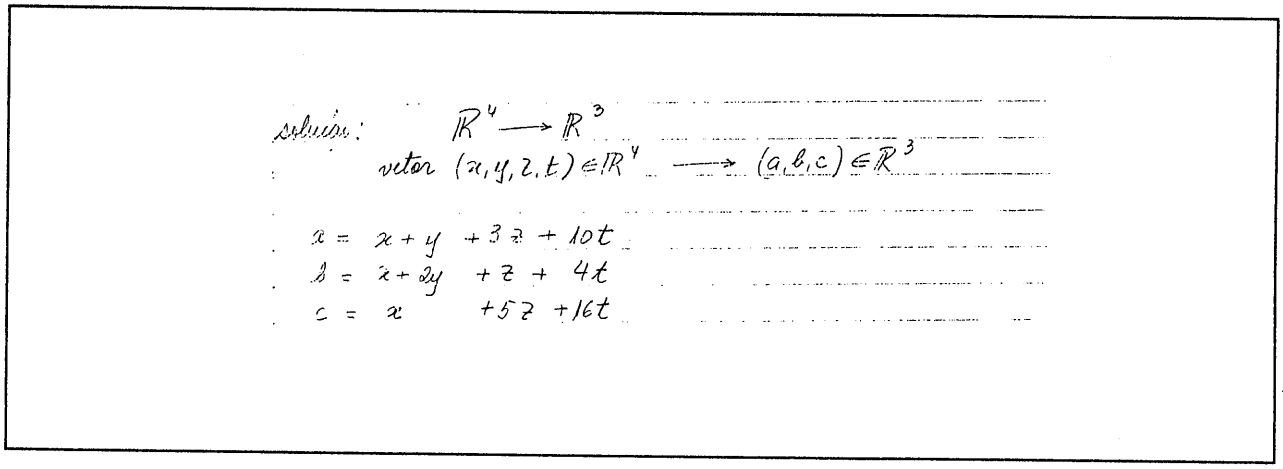
Cette production commune est donc relativement limitée et n'aborde que très partiellement les questions visées par l'étude. Elle nous incite cependant à nous interroger sur les difficultés rencontrées et non prévues dans l'interprétation de la forme implicite tableau d'un vecteur générique du noyau pour la détermination de deux vecteurs de base.

- La production individuelle de l'étudiante Alfa :

La production **à la maison** de l'étudiante Alfa donne à voir les étapes suivantes, correspondant cette fois à la méthode 2 :

- interprétation fonctionnelle et expression matricielle de l'application linéaire donnée ici via un système d'équations.

- démonstration du fait que les vecteurs colonnes de la matrice forment un système générateur de l'image, en revenant à la représentation sous forme de système et ceci de façon très détaillée, sans tirer de conclusion sur la dimension de l'image.



Utilizando notação matricial, seja A o vetor coluna $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Seja X o vetor coluna $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$

Seja $F: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(X) = A$
$X \longmapsto A$ dada pela regra acima

Seja M a matriz 3×4

Continua

continuação...

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

O sistema dado pode ser escrito como:

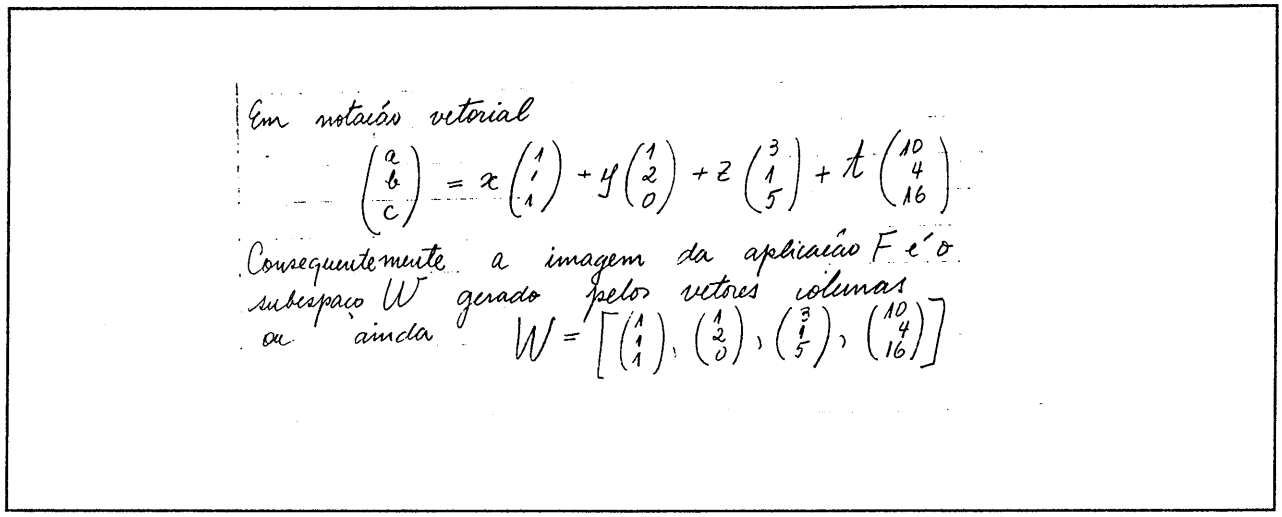
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

A imagem da aplicação F é gerada pelos vetores coluna: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$

porque: $\begin{cases} a = x + y + 3z + 10t \\ b = x + 2y + z + 4t \\ c = x + 5z + 16t \end{cases}$

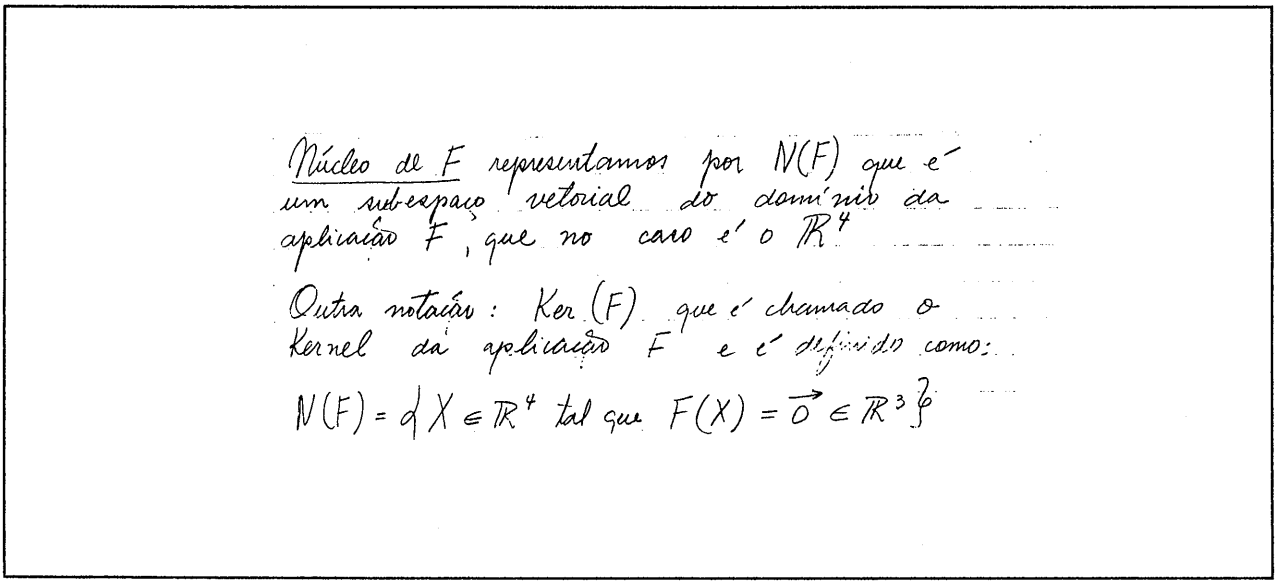
pode ser escrito como:

$$\begin{cases} a = x.1 + y.1 + z.3 + t.10 \\ b = x.1 + y.2 + z.1 + t.4 \\ c = x.1 + y.0 + z.5 + t.16 \end{cases}$$



- passage à la caractérisation du noyau très détaillée, écriture du système associé et résolution du système par la méthode du pivot de Gauss, qui conduit à deux équations indépendantes.

- contrairement à ce que la forme réduite pouvait laisser penser, x et y ne sont pas ensuite d'emblée choisies comme inconnues principales et exprimées en fonction de z et t. C'est t qui est exprimé en fonction de y et z d'une part, de x et z d'autre part, l'égalité des deux expressions conduisant à une équation entre x, y et z, identifiée, sans doute par analogie avec $\mathbf{R}^3$, à celle d'un plan de $\mathbf{R}^4$. Un vecteur générique du noyau est ensuite exprimé sous forme implicite tableau en fonction de x, y et z puis z remplacé en fonction de x et y pour arriver enfin à un paramétrage du noyau en fonction de x et y. Le passage à une représentation explicite tableau semble alors directe ainsi que l'interprétation en termes de base du noyau, suivie d'une conclusion justifiée sur la dimension.



Determinação do núcleo:

$X \in \mathbb{R}^4 \in N(F) \Leftrightarrow F(X) = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow M \cdot X = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + y + 3z + 10t \\ 0 = x + 2y + z + 4t \\ 0 = x + 5z + 16t \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + 3z + 10t = 0 \\ 0 - y + 2z + 6t = 0 \\ 0 \quad y - 2z - 6t = 0 \end{cases}$

equações iguais

$\sim \begin{cases} x + y + 3z + 10t = 0 \\ 0 - y + 2z + 6t = 0 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} 0 - y + 2z + 6t = 0 \quad \therefore t = \dfrac{y - 2z}{6} \\ x + 0 + 5z + 16t = 0 \quad \therefore t = \dfrac{-x - 5z}{16} \end{cases}$

logo: $16y - 32z = -6x - 30z \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 6x + 16y - 2z = 0 \quad (\div 2)$

$3x + 8y - z = 0$ (equação de um plano em $\mathbb{R}^4$)

ou $\boxed{3x + 8y = z}$ Então

$X \in N(F) \Leftrightarrow X = (x, y, z, t) =$

$= \left(x, y, 3x + 8y, \dfrac{y - 2z}{6}\right) =$ → substituindo z

$= \left(x, y, 3x + 8y, \dfrac{y - 6x - 16y}{6}\right) =$

$= \left(x, y, 3x + 8y, -x - \dfrac{15}{6} y\right) =$

$= (x, 0, 3x, -x) + \left(0, y, 8y, -\dfrac{15}{6} y\right)$

$= x(1, 0, 3, -1) + y\left(0, 1, 8, -\dfrac{5}{2}\right)$

Isto significa que o Kernel de F é gerado pelos vetores $(1, 0, 3, -1)$ e $(0, 1, 8, -5/2)$

$Ker(F) = [(1,0,3,-1), (0,1,8,-5/2)]$
Esta é a base do núcleo, cuja dimensão é dois pois esses vetores são linearmente independentes.

- application du théorème du noyau et de l'image pour déterminer la dimension de l'image.

Usando o Teorema: Seja $T: V \to W$ uma aplicação lin
(Boldrini "Alg. Linear" pág 154) (*). Então dim Ker T + dim Im T = dim

Na nossa questão: $V = \mathbb{R}^4$
$W = \mathbb{R}^3$
dim Ker = 2
dim V = 4

Substituindo em (*) Temos: $2 + \dim Im(F) = 4$
$\dim Im(F) = 4 - 2$
$\dim Im(F) = 2$

- interprétation géométrique sous forme de plan et recherche de deux vecteurs indépendants engendrant ce plan. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, arrivée là, l'étudiante Alpha ne se borne pas à constater que les deux premiers vecteurs par exemple sont bien indépendants et à conclure. Elle démontre que les deux derniers sont bien combinaisons linéaires de ces deux là, avant écrit-elle, de « les écarter ».

$Im(F) \subset \mathbb{R}^3$ e tem dim = 2.
Logo: a imagem de F é um plano gerado por dois vetores l.i (quais? Vamos encontrá-los)

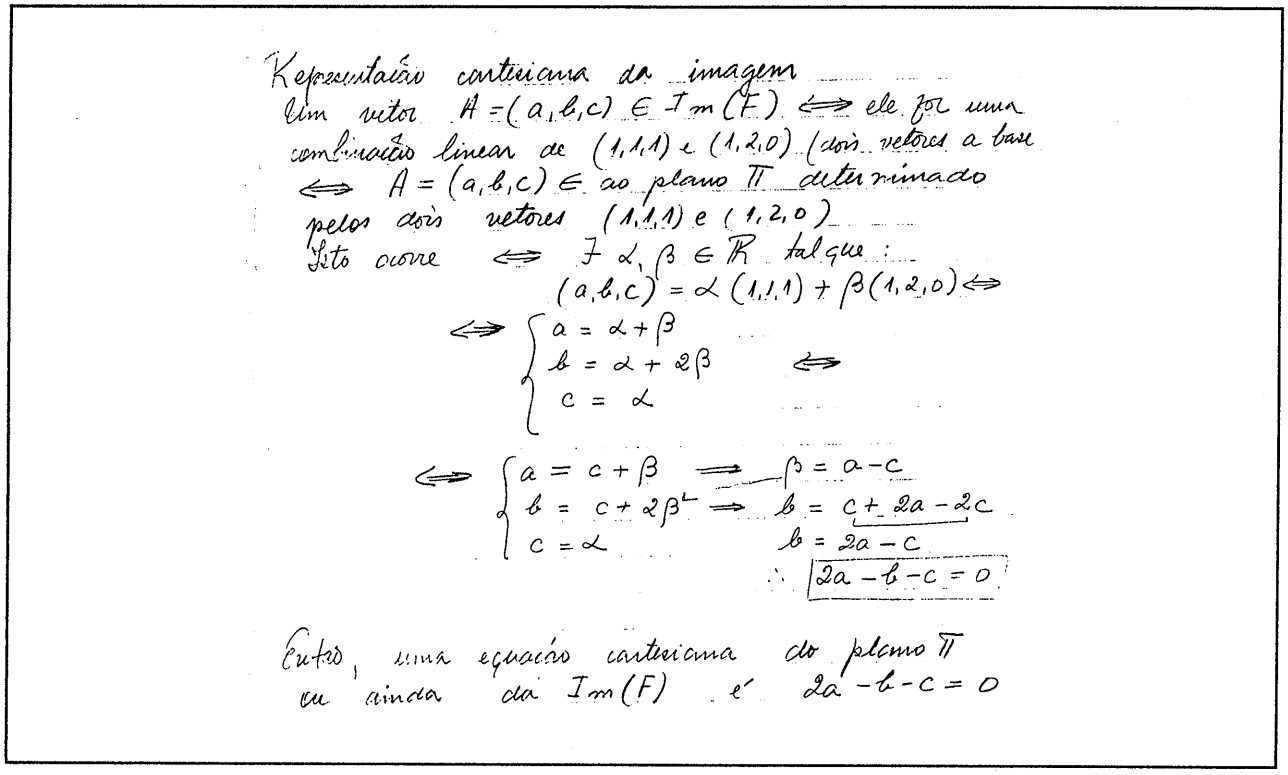
$Im(F) = [(1,1,1), (1,2,0), (3,1,5), (10,4,16), (5,2,8)]$

$5(1,1,1) - 2(1,2,0) = 3(1,1,1) - 1(1,2,0)$

descartando o vetor (3,1,5) e descartando o vetor (5,2,8)

temos $Im(F) = [(1,1,1), (1,2,0)]$ que são l.i e formam uma base

- détermination d'une représentation cartésienne correcte du sous-espace image à partir de l'écrite correcte quantifiée d'un vecteur générique de l'image comme élément du sous-espace engendré par les deux vecteurs de base identifiés et élimination des paramètres α et β pour arriver à une équation identifiée comme celle d'un plan.



Comme pour la première question, le travail à la maison de l'étudiante Alpha nous donne à voir une production très différente de celle associée au travail en groupe, avec, sans aucun doute, un appui visible sur un ou des manuels. En témoigne particulièrement, nous semble-t-il, la première partie concernant la détermination d'un système générateur de l'image où l'étudiante semble recopier en l'adaptant un exercice corrigé et d'ailleurs ne conclut pas sur la question posée qui est celle de la dimension du sous-espace image. En témoigne aussi le détail apporté au début de la détermination du noyau qui semble encore une fois quasiment une reprise d'un cours ou d'un corrigé.

Dans la caractérisation du noyau, le passage d'une représentation paramétrique implicite à une représentation paramétrique explicite ne semble pas poser les mêmes difficultés que dans le travail en groupe. On notera cependant le cheminement long et non canonique qui aboutit du système réduit à la représentation implicite dépendant de deux paramètres seulement. Les deux vecteurs trouvés sont déclarés linéairement indépendants. Il nous semble raisonnable de

faire l'hypothèse que cette affirmation est basée sur la reconnaissance de leur non proportionnalité.

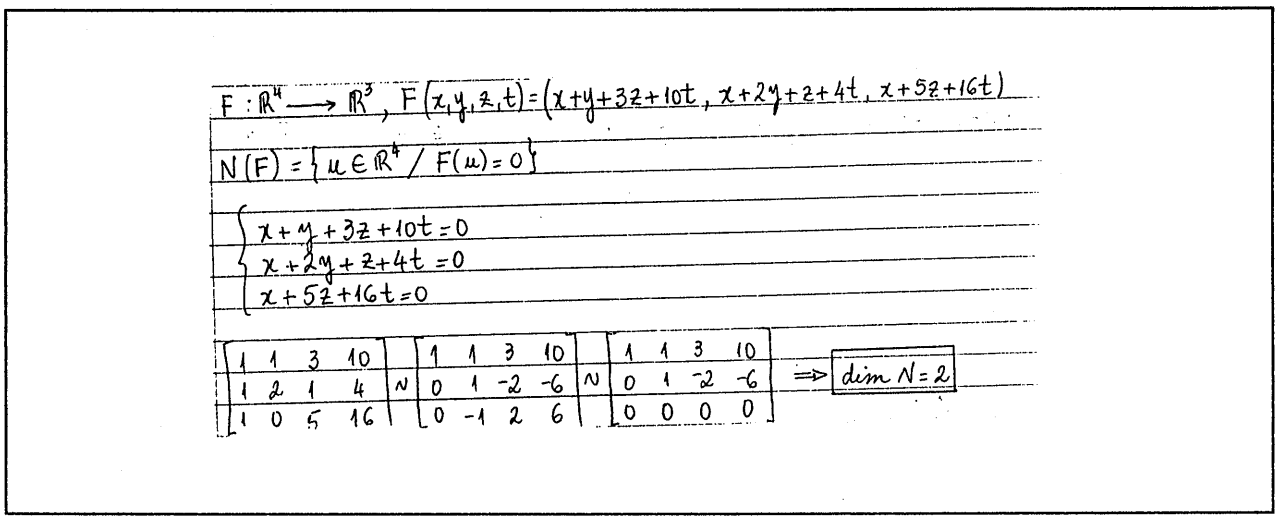
La détermination de la dimension de l'image à partir de celle du noyau s'effectue via le théorème approprié et on note, une fois de plus chez cette étudiante, l'interprétation géométrique immédiatement faite du résultat sur la dimension. Mais l'économie du raisonnement géométrique n'est pas là complètement exploitée, comme nous l'avons indiqué plus haut. On peut penser cependant que c'est ce cadre géométrique qui soutient la détermination de la représentation cartésienne : il s'agit d'obtenir l'équation d'un plan à partir du système écrit, donc d'obtenir une équation ne faisant plus intervenir les paramètres. Le comportement est encore une fois cohérent avec celui observé dans la résolution de la première question.

- La production individuelle de l'étudiante Bêta :

Le travail à la **maison** de l'étudiante Bêta nous donne à voir les étapes suivantes :

- expression fonctionnelle de l'application linéaire, rappel de la définition du noyau et écriture du système associé.

- triangulation de la matrice des coefficients du système et conclusion sur la dimension du noyau donnée égale à 2, sans aucun commentaire.



- explicitation de la définition de l'image et détermination de la dimension de l'image en appliquant le théorème du noyau et de l'image.

$\text{Im}(F) = \{v \in \mathbb{R}^3 / \exists u \in \mathbb{R}^4 \text{ com } F(u) = v\}$

Sabemos que: $\dim N(F) + \dim \text{Im}(F) = \dim \mathbb{R}^4$

$2 + \dim \text{Im}(F) = 4 \Rightarrow \boxed{\dim \text{Im}(F) = 2}$

- détermination d'une base du noyau, en poursuivant la réduction de la matrice du système jusqu'à obtenir la forme canonique puis en repassant à une écriture système, les solutions étant représentées en paramétrique implicite tableau en fonction des paramètres z et t puis en explicite tableau. Le passage à une base du noyau s'effectue ensuite lui aussi de façon standard.

(b)

base do núcleo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 5z + 16t = 0 \\ y - 2z - 6t = 0 \end{cases}$$

$u \in N(F) \Leftrightarrow u = (x, y, z, t) = (-5z - 16t, 2z + 6t, z, t) =$

$= z(-5, 2, 1, 0) + t(-16, 6, 0, 1), \ z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$

$\therefore$ uma base de $N(F) = \{(-5, 2, 1, 0), (-16, 6, 0, 1)\}$

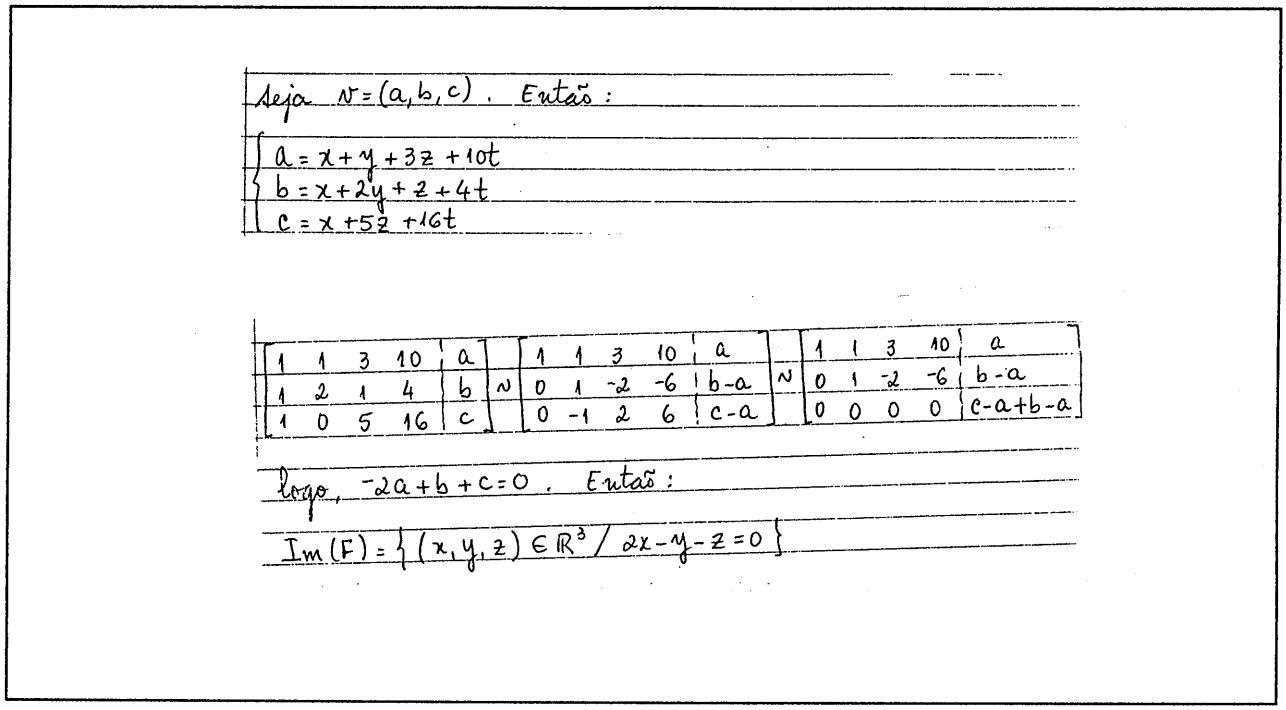
- expression quantifiée de la définition de l'image et traduction sous forme de système.

- triangulation du système exprimé sous forme matricielle et identification, sans commentaire, de la condition de compatibilité comme équation de l'image.

Representação cartesiana da imagem:

$v \in \text{Im}(F) \Leftrightarrow v = F(x, y, z, t)$ para algum $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x, y, z, t \in \mathbb{R} / v = (x + y + 3z + 10t, x + 2y + z + 4t, x + 5z + 16t)$



Pour l'étudiante Bêta, le travail à la maison est lui aussi différent de la production en groupe. Ce travail suit l'ordre des questions posées. On y voit réutilisées les techniques de triangulation sur écriture matricielle qui avaient déjà fonctionné efficacement dans la résolution de la question 1 et la résolution ne semble pas présenter de difficultés. Si les données issues de la question 1 nous incitent à penser que la production de la représentation cartésienne de l'image est sous-tendue par un raisonnement correct, ceci est cependant plus douteux en ce qui concerne la détermination de la dimension du noyau. En effet, la triangulation du système conduit à la réponse 2 mais l'on peut penser que ce nombre 2 renvoie simplement au rang du système et non au complément à 4 de ce rang. Ce point mérite d'être éclairci au niveau de l'entretien.

E) LA RESOLUTION DE LA QUESTION 2 DANS LES BANDES AUDIO

Comme pour la question 1, nous allons présenter brièvement quelques passages qui nous semblent importants dans la résolution en groupe.

Les étudiantes lisent la question et démarrent en disant :
1 α : D'où, F est une application de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui à chaque vecteur (x, y, z, t) associe [...] D'où le a est égal à x+y+z+4t.
2 α : Déterminer la dimension du noyau et de l'image de F. Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.
3 α : D'où, ça veut dire. D'où, le noyau. La dimension [...] le noyau se trouve dans le domaine[...] Le noyau, ce sont les valeurs qui ont une image égale à zéro. N'est-ce-pas ?

4 α : [...] Les (x,y,z,t) pour lesquels F(x,y,z,t) = (0,0,0). D'où, ça va donner. Ceci doit être zéro, ceci zéro, ceci zéro. $\begin{matrix} x & +y & +3z & +10t & = & 0 \\ x & +2y & +z & +4t & = & 0 \\ x & & +5z & +16t & = & 0 \end{matrix}$. D'où en échelonnant on a cette réduction.

5 β : Ça donne une réduction du système.

6 α : Et la dimension aussi. D'où on a : $\begin{cases} x & +y & +3z & +10t & = & 0 \\ & y & -2z & -6t & = & 0 \end{cases}$.

7 β : Le système est indéterminé.

8 α : Il l'était déjà dès le début.

9 β : Il n'est pas intéressant d'isoler l'un en fonction de l'autre ?

10 α : Non, non... Oui, j'ai.

11 β : Faire l'un en fonction de l'autre.

12 α : Il y en a deux de moins, n'est-ce-pas ?

13 β : On peut déterminer une variable en fonction d'une autre.

14 α : Ça reste comme ça. Mais, je vais avoir deux arbitraires : $\begin{cases} y & = & 2z & +6t \\ x & = & -5z & -16t \end{cases}$. D'où, ces valeurs ici sont de type, sont les valeurs (-5z-16t, 2z+6t, z, t). D'où, la dimension est 2, parce que le nombre de variables indépendantes [...] Maintenant, la dimension du noyau plus la dimension de l'image doit être égale [...] est 2. D'où, 2, 2, parce que l'image. Je ne me rappelle plus.[...] Bon, nous avons déjà terminé la première, il faut conserver l'ordre.

15 α, β : Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.

16 α : On fait : (-5z-16t,2z+6t,z,t). D'où, on a (1,0,0,0). J'essaye de faire les quatre possibilités.

17 α, β : D'où, t et z sont zéro.

18 α : Comment on va faire une base ? Ça veut dire [...]

19 β : Ces z et t sont des réels

20 α : D'où, une base, les vecteurs [...] Vois! On va penser que tous les vecteurs du noyau ont cette forme [...] Tous les vecteurs du noyau ont cette forme [...] Je veux trouver des vecteurs de façon qu'après je puisse écrire un vecteur quelconque du noyau comme combinaison linéaire de ces vecteurs [...] comme combinaison linéaire de ces vecteurs [...] Ces vecteurs peuvent s'écrire comme combinaison linéaire. N'est-ce-pas ?

21 *Les étudiantes essayent de déterminer une base, on n'entend pas leur discussion, ça doit être le moment où elles choisissent des vecteurs du noyau et cherchent à les exprimer comme combinasion linéaire des vecteurs de base (voir copie).*

22 α : D'où ces deux et les vecteurs ont 4 termes.

23 β : Tu as pensé à z = 0 ? (ceci correspond au troisième vecteur introduit)

24 α : Les vecteurs appartiennent au domaine, ils sont dans le domaine. Correct, les vecteurs du noyau sont dans le domaine, d'où s'ils sont dans le domaine, ce sont des quadrupléts. [...] Maintenant, je veux déterminer les vecteurs e_1, e_2, e_3 ...je veux trouver [...] Si les deux sont égales à zéro [...] Si l'un est égal à 1 et l'autre égal à 0 [...] est celui-ci (-5,2,1,0) et pour le cas contraire (-16,6,0,1) [...]

25 α : Je veux que tous les vecteurs puissent être écrits de la forme, comme des sommes [...] de deux de ceux-ci [...] mais il existe déjà une relation entre eux [...] je veux déterminer x_{11} et x_{12} [...] tout quadruplé [...] sera (-5z,2z,z,0)+(-16t,6t,0,t). Vois, d'où une base par exemple est l'ensemble {(-5,2,1,0),(-16,6,0,1)}, par exemple [...] c'est une base.
26 α : Tous les vecteurs que j'additionne [...] ceci quand je multiplie par 3, 4 [...] ce que je veux [...] ça va me donner ceci [...] et c'est une base parce qu'ils sont deux [...] et parce que la dimension est 2. Qu'est-ce que tu en penses, c'est correct ?
27 β : Je pense que oui, parce que ça ne semble pas être parachuté, c'est-à-dire, on n'est pas encore sûres.
28 α : Tu veux voir, par exemple (vérification) : on sait que (-5,2,1,0) = (-5,2,1,0) + 0 (-16,6,0,1) [...] ça se résout pas, on va prendre celui-ci (-16,6,0,1) euh! mais ça donne celui-ci plus zéro fois celui-là [...] (-21,8,1,1) est celui-ci plus celui-là [...] est égal à une fois le premier plus une fois le deuxième.
29 β : Correct
30 α : D'où, ceci est une base.
31 β : C'est vrai Alfa, c'est génial, nous avons réussi [...] tu vois, ce n'est pas parachuté.
32 α : Non, ce n'est pas parachuté. Maintenant, tu peux prendre un quelconque [...] un quelconque que tu prends [...] ici, par exemple, si tu donnes des valeurs pour z et t, il ne faut que substituer ces valeurs comme des facteurs ici. [...] Ici, euh! en multipliant ici, avec ceux qui sont des bases. Tu vas donner des valeurs pour z et t.
33 β : C'est génial
34 α : Bien, C'est terminé, c'est la réponse.

Cet extrait complète très utilement les informations issues de la production écrite. Il montre d'abord que le passage d'une représentation cartésienne minimale du noyau à une représentation paramétrique même implicite n'est pas inscrit dans la routine. Il s'accompagne d'un certain flottement et contrairement à ce que l'on aurait pu penser, si c'est l'étudiante Bêta qui suggère d'exprimer des variables en fonction d'autres, c'est l'étudiante Alpha qui propose la forme en z et t et lie la dimension au nombre de variables indépendantes, première occurrence rencontrée de ce type d'articulation. On note aussi la recherche de la dimension de l'image à partir de celle du noyau, non présente sur la copie, mais avec là encore un certain niveau d'incertitude qui explique peut-être que la partie correspondante n'ait pas été rédigée.

Il nous éclaire aussi sur les difficultés rencontrées par les étudiantes à déduire une base du noyau de la représentation paramétrique implicite et met bien en évidence le fait que suivant leur caractère implicite ou explicite, ces représentations ne sont pas du tout identiquement porteuses de signification, ceci justifiant a posteriori le choix que nous avons fait de les distinguer à l'intérieur du registre symbolique des représentations paramétriques. L'interprétation de la représentation paramétrique implicite n'étant pas d'emblée disponible, on voit apparaître un premier raccrochage à la base canonique de $\mathbf{R}^4$, vite abandonné puisqu'il conduit à la nullité des deux paramètres. Suit une expression a priori de la base sous forme de

deux quadruplets avec un contrôle renvoyant à l'inclusion du noyau dans le domaine et un essai de déterminer les vecteurs de base à partir de vecteurs choisis du noyau. Il est ici intéressant de noter que ceci conduit les étudiantes à numériquement séparer les paramètres, expliciter la base canoniquement associée à la représentation implicite trouvée, sans que pour autant la liaison s'effectue. La séparation formelle, elle, finit par s'effectuer en 25 et dès ce moment l'interprétation devient possible. Le rôle joué par la différenciation des représentations sémiotiques est ici évident.

Ce qui a été trouvé est considéré comme une véritable conquête par ces étudiantes. On pourrait penser qu'elles vont reconnaître là quelque chose rencontré à de multiples reprises mais qui, dans le contexte particulier, leur avait échappé. Cela ne semble pas du tout le cas. On assiste au contraire à une sorte de prise de possession de la représentation paramétrique via le fait qu'elle permet d'engendrer avec deux vecteurs, par le libre choix des paramètres, tous les vecteurs du noyau.

F) LES DONNEES ISSUES DES ENTRETIENS POUR LA QUESTION 2

- L'étudiante Alfa

L'étudiante Alpha ayant longuement décrit son travail à la maison, vu la durée prise par l'entretien, les autres questions initialement prévues n'ont pas été posées.

1 Bon, ici dans la question 2, j'ai une fonction de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ tel que f(X) = A défini par le système.
2 D'où, j'ai cherché à écrire le système de façon à pouvoir déterminer les vecteurs qui engendrent l'image. D'où, j'ai écrit les vecteurs colonne, les vecteurs (a,b,c) qui sont égaux à x(1,1,1)+y(1,2,0)+z(3,1,5)+t(10,4,16).
3 D'où, ces vecteurs, eux, euh! ils appartiennent au sous-espace que j'ai appelé W, ils engendrent l'image.
4 Bon, maintenant pour le noyau de l'application f [...]
5 Pour déterminer le noyau de f [...], le f(X) va être égal au zéro de $\mathbf{R}^3$. D'où, je vais avoir (0,0,0) vecteur colonne égal à la matrice de vecteurs colonne construite à partir des vecteurs de W multipliée par le vecteur colonne (x, y, z, t) qui appartient à $\mathbf{R}^4$. N'est-ce-pas ?
6 J'ai déterminé ainsi un système homogène. [...] A partir de là, j'ai déterminé l'équation 3x+8y-z=0. [...] Après, j'ai déterminé z en fonction de x et y. [...] Maintenant, je veux un vecteur X du noyau.
7 Ce X du, ce vecteur X, il a ici quatre coordonnées (x,y,z,t). [...] D'où, j'ai appelé x la coordonnée x, y, à la place de z j'ai mis ce z trouvé "3x+8y" et pour t j'ai pris un des t que j'avais déterminés ci-dessus.
8 D'où, j'ai trouvé cette expression ici [...] pour un X du noyau x, y, 3x+8y qui serait le z et t.

9 Bon, comme je n'avais que x et y, j'ai essayé de séparer ce vecteur ici comme une somme avec deux termes.

10 J'avais ainsi $(x,0,3x,-x) + (0, y,8y,-\frac{5}{2}y)$

11 J'ai isolé x et j'ai isolé y

12 D'où, j'ai conclu que le noyau est engendré par les deux vecteurs $(1,0,3,-1)$, $(0,1,2,-\frac{5}{2})$

13 D'où, le noyau est le sous-espace engendré par ces deux vecteurs et j'ai déterminé ainsi la dimension 2 pour le noyau et les deux vecteurs indépendants.

14 Bon, pour déterminer la dimension de l'image, j'ai utilisé une, une expression euh! un théorème. N'est-ce-pas ?

15 La dimension du noyau de T plus la dimension de l'image de T est égale à la dimension de V. Dans ce cas, V sera $\mathbf{R^4}$ et W sera $\mathbf{R^3}$, la dimension du noyau est 2 et la dimension de V est 4. D'où, en substituant ces valeurs j'ai déterminé que la dimension de l'image est 2.

16 Dans la deuxième question, item b. Je cherche une représentation cartésienne de l'image.

17 Bon, ce que j'avais fait

18 je euh! L'image [...] L'image euh! est... C'est un sous-espace engendré et j'avais déjà obtenu les vecteurs qui engendrent ce sous-espace

19 D'où, j'ai verifié qu'ils étaient linéairement indépendants et j'ai conclu que l'image a deux vecteurs générateurs.

20 Bon, puisque j'avais déterminé ces deux vecteurs générateurs, j'ai cherché une combinaison linéaire entre eux.

21 De cette façon j'ai obtenu le vecteur A=(a,b,c) qui appartient à l'image et qui appartient aussi au plan π déterminé par les vecteurs (1,1,1) et (1,2,0).

22 Bon, d'où euh!

23 J'ai développé ici... j'ai développé que (a,b,c) est $\alpha(1,1,1)+\beta(1,2,0)$ et j'ai trouvé un système où α est égal à c, en substituant [...] euh! Bon, j'ai trouvé $\alpha = c$ et j'ai isolé le b dans la deuxième [...] j'ai isolé β dans la première et j'ai substitué les uns dans les autres jusqu'à trouver une équation cartésienne de l'image de f, c'est-à-dire 2a-b-c=0.

Dans cette partie de l'entretien, l'étudiante, en suivant sa copie, raconte ce qu'elle a fait. Cette partie est moins informative qu'elle n'aurait pu l'être. En particulier, nous sommes peu éclairée sur les raisons du cheminement non canonique qui conduit de la représentation cartésienne à la représentation paramétrique du noyau. Est-ce le fait que x et y correspondent aux premières coordonnées d'un vecteur générique du noyau qui conduit à choisir d'éliminer t et z ? L'étudiante n'est pas du tout explicite sur ce point et n'est pas relancée par l'interviewer. Elle n'explicite pas non plus la relation entre variables principales et non principales, comme elle l'avait fait dans le travail en groupe. En revanche, le récit confirme, dans sa dernière partie, l'hypothèse que nous avions faite concernant l'obtention de la représentation cartésienne de l'image : le calcul est piloté par son but, à savoir trouver une équation entre a, b et c. L'étudiante confirmera aussi dans l'entretien le recours supposé à un manuel, en l'occurrence le manuel de Boldrini (cf. chapitre IV).

- l'étudiante Bêta

Les deux premières questions concernent le travail effectué en classe : prévision de la dimension du noyau, passage à la représentation paramétrique, les deux suivantes, le travail à la maison. Précisons que la première question présente maintenant moins d'intérêt, vu les informations apportées sur ce point par le décryptage.

première question : **Pouvais-tu prévoir le résultat ?**

1 Je ne pense pas que je pouvais prévoir la dimension du noyau sans euh! sans chercher les euh! [..] les vecteurs linéairement indépendants, c'est-à-dire que je ne pouvais pas euh! d'avance [...] savoir [...] combien d'équations j'allais perdre dans la triangulation [...] dans l'échelonnement du système.

deuxième question : **Peux-tu expliciter le passage (-5z-16t,2z+6t,z,t) = $\alpha(x_{11},x_{21},x_{31},x_{41})$+... jusqu'à $x_{12} = \frac{|\quad|}{|\quad|}$.**

1 Euh! en ayant cette expression d'un vecteur générique euh! du noyau [...] d'un possible vecteur du noyau et en sachant que la dimension est 2 j'ai cherché, j'ai égalé ce vecteur générique à une combinaison linéaire de deux vecteurs euh! qui seraient [...] qui pouvaient former une base. 2 Comme tous les vecteurs du noyau peuvent être écrits comme une combinaison linéaire de deux vecteurs qui forment une base, j'ai choisi [...] j'ai donné les valeurs aléatoirement la valeur 1 à x, y et t, d'où pour les coordonnées du vecteur générique. Puis, j'ai considéré la combinaison linéaire euh! de 2 euh! vecteurs qui pourraient former une base. 3 A partir de là, j'ai trouvé un système [...] Bon, j'ai choisi deux valeurs pour z et t, d'une part 1 et 1 d'autre part 1 et 0 [...] De cette façon j'ai construit un système avec ces deux vecteurs quelconques du noyau [...] euh! de façon que je puisse déterminer les coordonnées des vecteurs d'une base. 4 D'où, en choisissant les euh! [...] les deux éléments [...] les deux premières coordonnées du, les deux premiers vecteurs de la base j'ai construit un système, un système euh! que j'ai résolu par la méthode de Cramer [...] j'ai résolu par la méthode de Cramer

troisième question : **Pourquoi as-tu conclu que le noyau est de dimension 2 à partir de l'équivalence de matrices ?**

1 Euh! Pourquoi l'équivalence de matrices m'amène à conclure que la dimension du noyau est 2 ? 2 Parce que en triangulant ces matrices j'ai trouvé euh! le nombre de vecteurs indépendants qui est 2 et donc la dimension du noyau.

quatrième question : **Pourquoi as-tu choisi l'équation 2x-y-z=0 pour l'image ?**

1 L'équation 2x-y-z=0 vient de la condition de [...], à partir de la triangulation de la matrice. 2a-b-c= 0 doit être zéro. Dans ce cas, j'ai changé les lettres pour généraliser. 2 Je n'avais rien de spécial pour remplacer a, b et c par x, y, z. C'était qu'une généralisation en termes d'ensemble, d'ensemble image.

Concernant le travail en groupe, l'étudiante interprète la première question comme une demande de prévision complètement a priori et répond de façon adéquate compte-tenu de cette interprétation. Elle n'est pas relancée sur la possibilité de prévision postérieure à l'échelonnement du système mais, comme nous l'avons rappelé plus haut, le décryptage du travail en groupe nous a partiellement renseignée sur de point. La réponse à la deuxième question confirme les interprétations que nous avions faites, au vu des autres données recueillies. Les deux étudiantes cherchaient une base du noyau et pensaient pouvoir l'obtenir en partant de vecteurs particuliers du noyau. Ces vecteurs particuliers, à ce moment de la recherche, ne sont pas perçus comme des vecteurs de base possible car ils sont engagés dans un autre processus. Il aurait été intéressant de poursuivre l'entretien sur la partie la moins claire, à savoir la fin de cette phase de la recherche et le passage à la formation suivante. Mais ceci n'a pas été fait.

Concernant son travail personnel, l'étudiante confirme, dans sa réponse à la question 3, que la détermination de la dimension du noyau à partir de la triangulation de la matrice, repose sur un raisonnement erroné : le nombre de vecteurs indépendants donnant directement la dimension du noyau. On notera cependant que ce dérapage formel, favorisé sans aucun doute par la diversité des interprétations possibles de la représentation sémiotique utilisée, ne l'a pas empêchée par la suite de réinterpréter correctement le tableau en système pour déterminer des vecteurs de base du noyau.

Enfin, la réponse à la dernière question confirme que l'équation de l'image est bien associée à la condition de compatibilité du système, ce qui est cohérent avec les réponses de cette même étudiante à la question 1.

G) L'ANALYSE A POSTERIORI DE DEUX PRODUCTIONS DE CHAQUE ETUDIANTE POUR LA QUESTION 3

QUESTION 3 : Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse. Si votre réponse est : "faux", essayez de trouver un contre-exemple et, si possible, de transformer l'énoncé pour le rendre vrai.
a) Un sous-espace E de $\mathbf{R}^5$ qui peut être décrit en représentation paramétrique avec 3 paramètres est de dimension 3.
b) Si deux sous-espaces du même espace ont la même dimension, ils sont nécessairement égaux.
c) L'intersection de deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbf{R}^4$ est toujours un sous-espace de dimension 2.

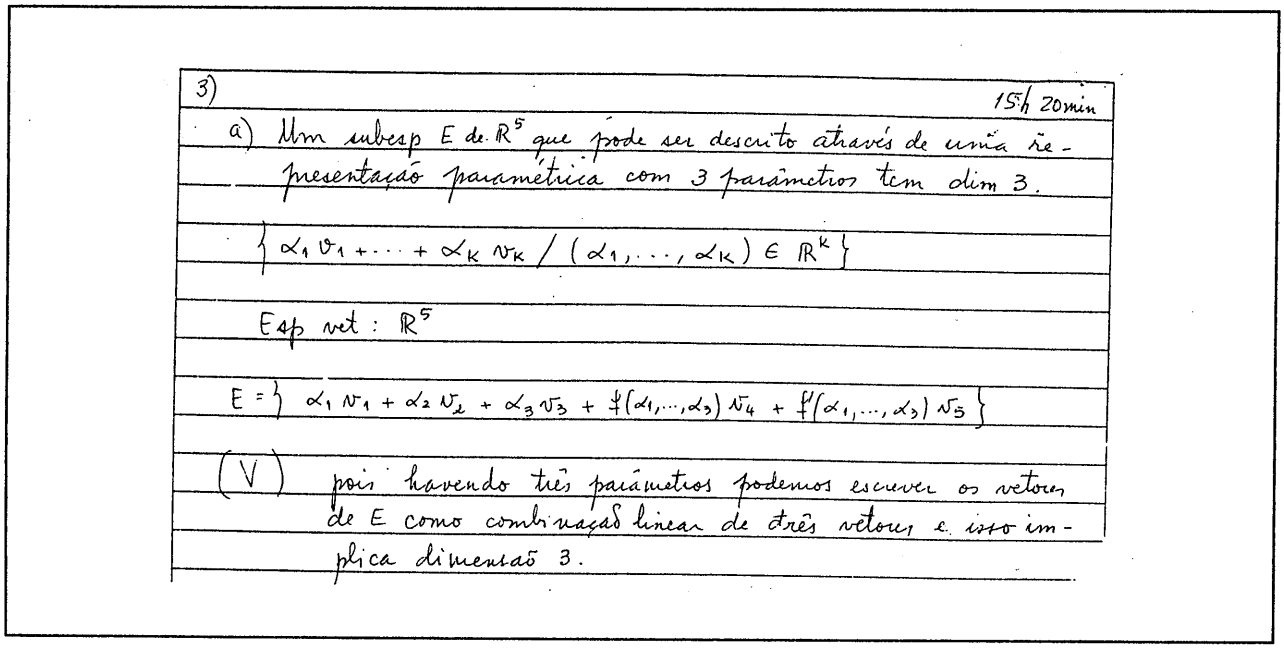
Dans cette question nous allons présenter le travail des étudiantes dans les différentes étapes, en traitant ensemble les trois affirmations.

- **le travail en groupe** : Les étudiantes nous donnent à voir, dans leur production écrite, les réponses et justifications suivantes :

partie a :

- adaptation de l'expression générique d'un vecteur de $\mathbf{R}^k$ comme combinaison linéaire de k vecteurs aux hypothèses en faisant apparaître les deux derniers paramètres comme fonction des trois premiers,

- conclusion erronée à partir de cette représentation, arguant du fait que les vecteurs s'écriraient alors comme combinaison linéaire de trois vecteurs, alors qu'il y a cinq vecteurs apparaissant dans la représentation.



3) 15h 20min

a) Um subesp E de $\mathbb{R}^5$ que pode ser descrito através de uma representação paramétrica com 3 parâmetros tem dim 3.

$\{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_K v_K \,/\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \in \mathbb{R}^K\}$

Esp vet : $\mathbb{R}^5$

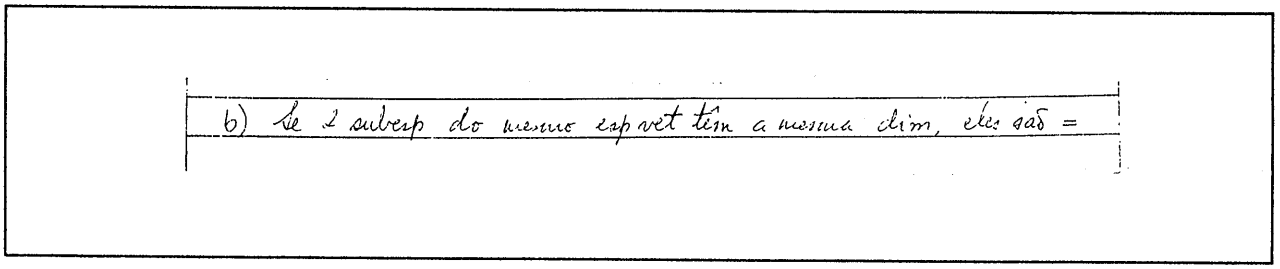
$E = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + f(\alpha_1, \ldots, \alpha_3) v_4 + f(\alpha_1, \ldots, \alpha_3) v_5\}$

(V) pois havendo três parâmetros podemos escrever os vetores de E como combinação linear de três vetores e isso implica dimensão 3.

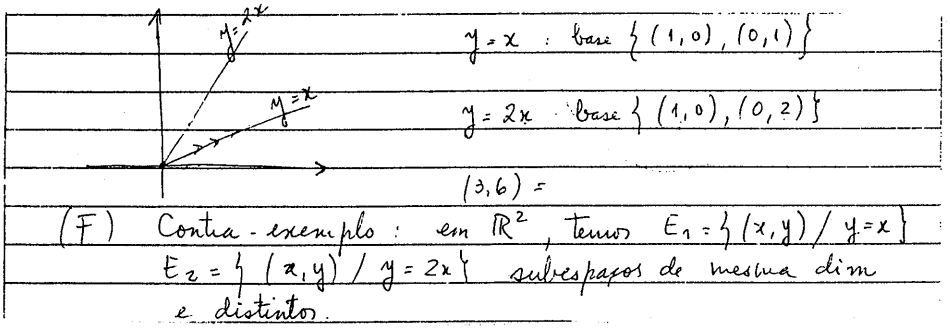
partie b :

- Réponse correcte assortie d'un contre-exemple dans $\mathbf{R}^2$, accompagné d'une représentation géométrique.

En revanche, alors que les deux sous-espaces sont de dimension 1, les étudiantes donnent bizarrement pour chacun une base formée de deux vecteurs.

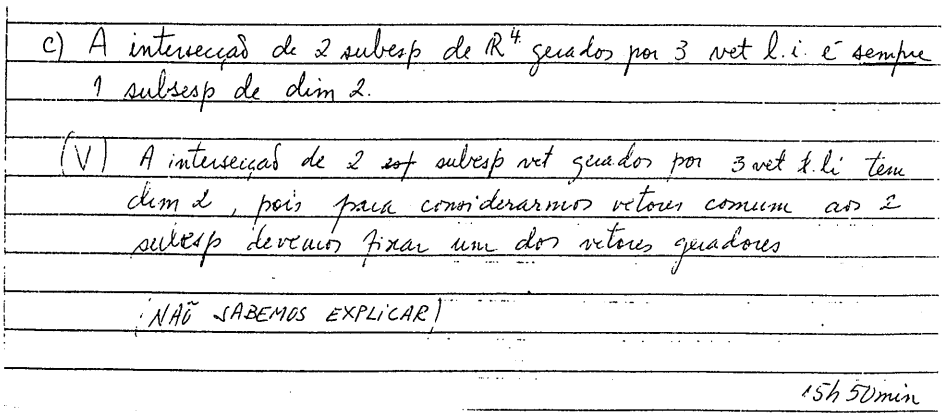


b) Se 2 subesp do mesmo esp vet têm a mesma dim, eles são =



partie c :

- les étudiantes concluent que l'affirmation est vraie et accompagnent cette conclusion d'une justification difficile à comprendre : "l'intersection de 2 sous-espaces vectoriels engendrés par 3 vecteurs linéairement indépendants a pour dimension 2 parce que si on considère les vecteurs communs aux deux sous-espaces on doit fixer un des vecteurs générateurs." Elles ajoutent à cette phrase qu'elle ne savent pas l'expliquer.



Cette production commune soulève un certain nombre de questions, les réponses fournies étant toutes en un sens surprenantes. A quoi renvoient exactement la première et la seconde écriture dans la réponse à la question a. Que représentent exactement les vecteurs v_1, v_2...v_5. Comment la conclusion est-elle reliée à la seconde écriture ?

En ce qui concerne la question b, quelle est pour ces étudiantes la dimension des deux sous-espaces considérés ? A quoi correspondent les bases indiquées, qui semblent obtenues par projection sur les axes d'un vecteur générateur de chacun des sous-espaces ?

En ce qui concerne la question c, à quelle pratique de détermination de l'intersection renvoie la justification donnée et pourquoi oblige-t-elle à fixer un vecteur ?

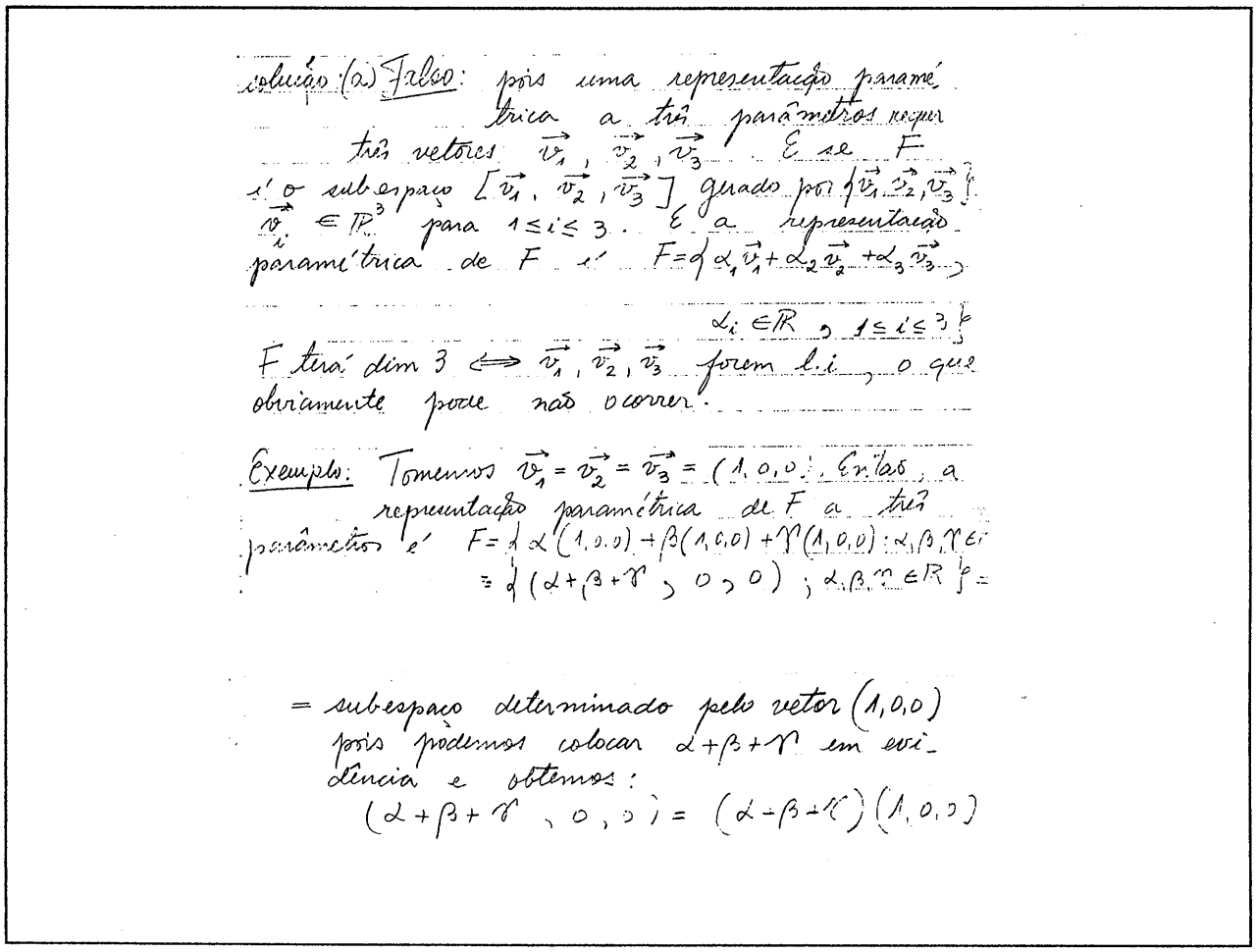
- la production individuelle de l'étudiante Alfa :

Dans son travail à la maison l'étudiante nous donne à voir les réponses et justifications suivantes :

partie a :

- l'étudiante conclut que l'affirmation est fausse et donne une justification générale à la question en considérant une représentation paramétrique à trois paramètres et en affirmant que l'espace sera de dimension 3 si et seulement si les trois vecteurs associés à cette représentation sont linéairement indépendants.

- Ensuite, elle donne un contre-exemple dans $\mathbf{R}^3$, en prenant le cas particulier où les trois vecteurs sont identiques au premier vecteur de la base canonique, écrivant d'abord une représentation paramétrique "explicite tableau", puis une représentation paramétrique "implicite tableau" pour montrer que le sous-espace est bien engendré par le seul vecteur (1,0,0).


solução (a) Falso: pois uma representação paramétrica a três parâmetros requer três vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$. E se F é o subespaço $[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}]$ gerado por $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ $\vec{v_i} \in \mathbb{R}^3$ para $1 \le i \le 3$. E a representação paramétrica de F é $F = \{\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3}$; $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le 3\}$

F terá dim 3 $\Leftrightarrow$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ forem l.i., o que obviamente pode não ocorrer.

Exemplo: Tomemos $\vec{v_1} = \vec{v_2} = \vec{v_3} = (1,0,0)$; então, a representação paramétrica de F a três parâmetros é $F = \{\alpha(1,0,0) + \beta(1,0,0) + \gamma(1,0,0) : \alpha, \beta, \gamma \in$
$= \{(\alpha + \beta + \gamma, 0, 0) ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} =$

= subespaço determinado pelo vetor (1,0,0) pois podemos colocar $\alpha+\beta+\gamma$ em evidência e obtemos:
$(\alpha + \beta + \gamma, 0, 0) = (\alpha + \beta + \gamma)(1,0,0)$

partie b :

- l'étudiante donne un contre-exemple correct, cette fois dans $\mathbf{R}^3$, sans tracé géométrique, mais ne rectifie pas l'énoncé.

(b) Falso.
Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$ temos dois planos distintos passando pela origem
$\pi_1 : z = 0$
$\pi_2 : x = 0$
Ambos tem dim 2 e são distintos

partie c :

- l'étudiante règle d'abord le cas où E = F et précise qu'elle va se situer dans le cas où : $E \neq F$.

- elle considère un ensemble de 3 vecteurs linéairement indépendants qui engendrent E et le complète en déterminant ainsi une base de $\mathbf{R}^4$, puis choisit pour F un sous-espace distinct de E engendré par trois vecteurs définis simplement à partir de cette base et s'interroge sur l'intersection. Cette piste s'arrête là. L'étudiante ne montre d'ailleurs pas que F est bien de dimension 3.

(c) Chamemos esses dois subespaços de E e F
Admitamos $E \neq F$. Caso contrário a intersecção seria o próprio E de dim 3

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ os três vetores l.i que geram E.
Seja o vetor $\vec{z}$ um vetor que completa o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ para uma base de $\mathbb{R}^4$ $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ e vemos F da seguinte maneira
$F = [\vec{z}, \vec{u}, \vec{z} + \vec{v}]$ subespaço gerado

- L'étudiante change visiblement de point de vue : un sous-espace de dimension 3 de $\mathbf{R}^4$ est maintenant vu comme un plan (et ensuite un hyperplan) de $\mathbf{R}^4$, caractérisé en termes d'orthogonalité à un vecteur. D'où, par produit scalaire, l'équation cartésienne d'un tel hyperplan.

- Admettant que deux hyperplans distincts sont associés à des vecteurs orthogonaux linéairement indépendants, elle ramène le problème de l'intersection à la résolution du système de deux équations construit à partir des équations des deux hyperplans.

- Les coefficients n'étant pas proportionnels, on peut, en termes pratiques, écrit-elle, éliminer une des variables et une seule, obtenant ainsi une équation avec trois variables.

- Elle conclut que cela donne un sous-espace de dimension 2 et que la proposition est vraie.

Chute : $E \cap F = ?$

Um subespaço de dim 3 de $\mathbb{R}^4$ é um plano de $\mathbb{R}^4$ e ele tem um vetor ortogonal $\vec{v}$ e aí temos que um ponto X em $\mathbb{R}^4 \in$ plano $\Leftrightarrow X \cdot \vec{v} = 0$

Vamos admitir que temos dois hiperplanos distintos em $\mathbb{R}^4$. Se eles são distintos, os seus vetores ortogonais são obrigatoriamente l.i. Ou seja, para os hiperplanos Π_1 e Π_2 podemos tomar os que lhes sejam respectivamente ortogonais $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são l.i.

Suponhamos que $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$

Então a representação cartesiana de Π_1 : $X \cdot \vec{v} = 0$ ou ainda

$v_1 x + v_2 y + v_3 z + v_4 t = 0$

Analogamente para Π_2 : $X \cdot \vec{w} = 0$

ou ainda $w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t = 0$.

É assim, um ponto $X \in \mathbb{R}^4$ está na intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \iff$ satisfaz tanto a equação π_1 como a equação π_2

Logo: é uma solução do sistema

$$\begin{cases} v_1 x + v_2 y + v_3 z + v_4 t = 0 \\ w_1 x + w_2 y + w_3 z + w_4 t = 0 \end{cases}$$

Os coeficientes v_1, v_2, v_3, v_4 não são proporcionais aos coeficientes w_1, w_2, w_3, w_4 que significa em termos práticos que podemos fazer uma substituição e eliminamos uma única variável

E assim obtemos uma equação com 3 variáveis.

Por exemplo, se eliminarmos a variável x, obtemos uma equação em y, z e t

o que nos dará portanto um subespaço de dimensão 2

Logo: a proposição é Verdadeira

Une fois de plus, le travail à la maison est très différent du travail en classe. Pour la partie a, la réponse est correcte et clairement justifiée. L'énoncé est rectifié et un contre-exemple est donné. On notera cependant, dans ce contre-exemple, le fait que l'étudiante ne se contente pas d'écrire que les trois vecteurs étant égaux, le sous-espace engendré par les trois est forcément celui engendré par un seul vecteur et donc de dimension 1. L'étudiante passe à une représentation paramétrique explicite-tableau, la transforme en représentation implicite-tableau, puis la retransforme, pour bien faire apparaître sémiotiquement la multiplication du vecteur (1,0,0) par le scalaire.

Pour la partie b, la réponse est rapide et exploite le recours au cadre géométrique que l'on a déjà vu fonctionner dans le travail à la maison de cette étudiante, mais l'énoncé n'est pas

rectifié. Soulignons que cette rectification nécessiterait, comme l'a montré l'analyse a priori, le recours à des théorèmes généraux. Ils ne sont pas mobilisés ici.

Pour la partie c, dès le départ, on voit apparaître la condition qui permet de rectifier l'énoncé. Ensuite la démonstration s'engage sur une piste non prévue dans l'analyse a priori, disymétrisant les deux sous-espaces. Elle conduit à choisir pour F un cas particulier. Le sous-espace choisi est bien de dimension 3 (ce qui n'est pas montré) et bien distinct de E puisqu'il contient le vecteur rajouté. On pourrait montrer que l'intersection est bien dans ce cas de dimension 2 car engendrée par les vecteurs u et v, mais ce n'est pas fait et la piste est abandonnée.

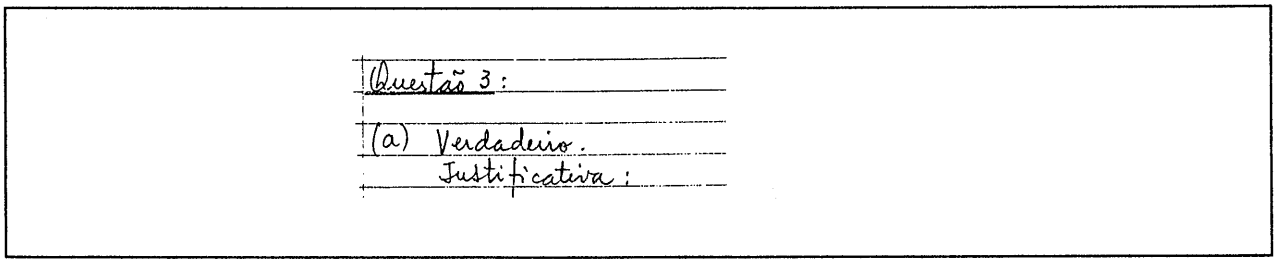
L'étudiante revient alors à un point de vue qui lui a déjà servi précédemment, dans la question 1 à surmonter une difficulté. On note dans les formulations un mélange des langages affines et vectoriels déjà rencontré lui aussi. Ceci permet de ramener le problème à celui de la détermination de la dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire 2x2, de rang 1. Le théorème de Rouché n'est pas utilisé, le langage est celui des substitutions, des éliminations de variables (l'étudiante emploie elle-même le terme de « pratique ») et la conclusion est parachutée, sans que l'on puisse savoir quel raisonnement la sous-tend. La généralité du système ne favorise pas sans aucun doute l'échelonnement effectué dans la question 2 sur le système numérique, un échelonnement qui avait ensuite sous-tendu le raisonnement permettant le passage à la dimension et qui est peut-être, pour cette étudiante, un support nécessaire.

- la production personnelle de l'étudiante Bêta :

Dans son travail à la maison, l'étudiante donne les réponses et justifications suivantes :

partie a :

- l'étudiante considère que dans une représentation paramétrique à 3 paramètres d'un sous-espace de $\mathbf{R}^5$, les vecteurs associés à la représentation paramétrique doivent former une base et elle en conclut que l'affirmation est vraie. Elle justifie ensuite sa réponse en utilisant la définition de la dimension.


Questão 3:
(a) Verdadeiro.
Justificativa:

Se $E \subset \mathbb{R}^5$, $v_k \in E$ são do tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$
Se existem 3 parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, então os vetores de E podem ser escritos na forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ onde $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de E (conjunto de vetores que geram E)

Como por definição a dimensão de um espaço vetorial é o número de vetores de qualquer uma de suas bases, temos $\dim E = 3$.

partie b :

- l'étudiante dit que l'affirmation est fausse et donne un contre-exemple correct, en choisissant deux sous-espaces distincts de $\mathbf{R}^4$ de dimension 2, engendrés chacun par deux vecteurs donnés dans le registre tableau.

- elle montre que les sous-espaces sont distincts en passant à une représentation cartésienne de chacun des sous-espaces, puis en donnant deux vecteurs dont on peut vérifier aisément à partir de ces représentations cartésiennes qu'ils appartiennent chacun à l'un des sous-espaces et non à l'autre.

Les calculs ne sont pas explicités et la non-appartenance des vecteurs aux sous-espaces reste implicite. L'énoncé n'est pas non plus rectifié.

(b) Falso.
Contra-exemplo:

Sejam S_1 e S_2 subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$S_1 = [(3,3,-1,-3), (-1,0,1,4)]$ e $S_2 = [(2,2,1,4), (3,1,-1,4)]$

Temos $\dim S_1 = \dim S_2 = 2$

Vamos verificar que S_1 e S_2 são subespaços distintos:
Temos:

$$S_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ z = \frac{2}{3}y - x \text{ e } t = -4x + 3y\}$$

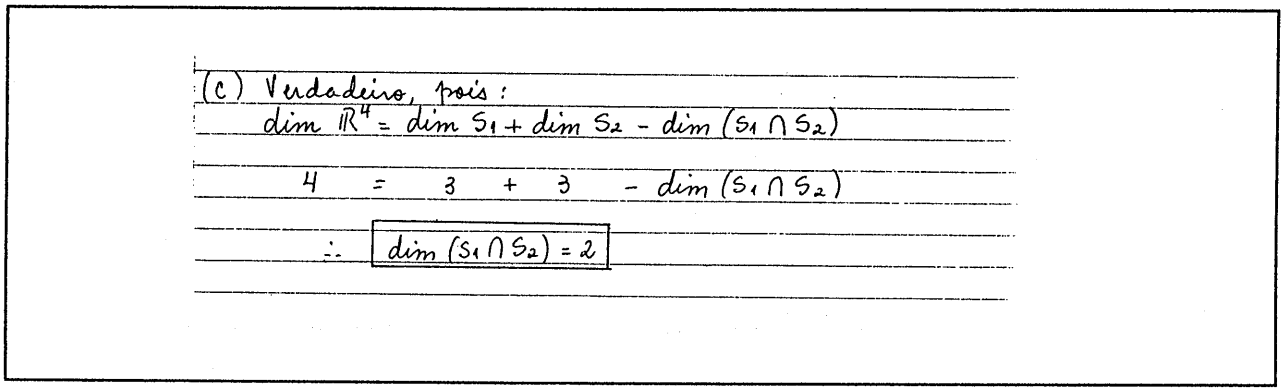
$$S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ z = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \text{ e } t = -17x + 31y\}$$

$(1, 1, -\frac{1}{3}, -1) \in S_1$ e $(1, 1, \frac{1}{2}, 14) \in S_2$

Logo, $S_1 \neq S_2$

partie c :

- l'étudiante conclut que l'affirmation est vraie en employant le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection et en supposant implicitement que la somme des deux sous-espaces est $\mathbf{R}^4$.


(c) Verdadeiro, pois :
$\dim \mathbb{R}^4 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim (S_1 \cap S_2)$
$4 = 3 + 3 - \dim (S_1 \cap S_2)$
$\therefore \boxed{\dim (S_1 \cap S_2) = 2}$

La production à la maison de l'étudiante Bêta diffère elle aussi de sa production en classe mais sans doute moins que dans le cas de l'étudiante Alpha. En ce qui concerne la partie a, les incohérences de la résolution en groupe ont ici aussi disparu mais la notion de représentation paramétrique reste liée à l'idée de base qui pouvait être induite par la première écriture donnée dans le travail de groupe. Pour la partie b, l'étudiante ne reprend pas l'idée d'un contre-exemple géométrique et va chercher, ce qui peut sembler compliqué, un contre-exemple dans $\mathbf{R}^4$. Comme l'étudiante Alpha, elle ne cherche pas non plus à rectifier l'énoncé donné. On peut se demander cependant si ce contre-exemple n'a pas été extrait d'un manuel où les calculs auraient déjà été faits. Dans la partie c, la réponse est erronée mais l'erreur est ici l'erreur attendue, liée à une application un peu brutale du théorème de la somme et de l'intersection.

H) LA RESOLUTION DE LA QUESTION 3 DANS LES BANDES AUDIO

Nous allons présenter brièvement les passages qui nous semblent les plus significatifs, compte-tenu de ce qui précède, dans l'enregistrement du travail du groupe.

Les étudiantes lisent la question et démarrent.

partie a :

1 β : V, F ou je ne sais pas
2 α : On va voir qu'est-ce que c'est une représentation paramétrique (revient à la définition donnée).[...] Vois, 3 paramètres, ce sont ceux-ci. D'où, on a [...], D'où, ceci est une représentation [...] Attends [...] Ceci [...] D'où, $v_1 \ldots . v_k$ sont des vecteurs de $\mathbf{R}^k$, n'est-ce-pas ?
3 β : Oui

4 α : Ici, aussi n'est-ce-pas ? [...] C'est que le sous-espace vectoriel n'a pas nécessairement la dimension de l'espace. D'où, un sous-espace de $\mathbf{R}^5$. D'où, l'espace vectoriel, dans ce cas l'espace vectoriel est [...] peut [...] un sous-espace qui peut [...] D'où E, il peut être décrit par une représentation paramétrique comme celle-ci [...] avec trois paramètres $\alpha_1 v_1$ [...] $+\alpha_2 v_2$, mais il est [...] Euh! c'est correct !

5 α : Vois ce que ça donne [...], il est comme ça $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ +, ici est une fonction de f(α_1, ,α_3)v_4 plus une fonction f' de α_1 etc. α_3 v_5. Tu as compris ? [...] d'où, ceci est le sous-espace [...] c'est ce qui nous avons fait maintenant, n'est-ce-pas ?

6 α : Qu'est-ce qui se passait ici ? (revient sans doute à la question 2)

7 α : Le noyau est un sous-espace, les vecteurs [...] il est contenu en $\mathbf{R}^4$, ses vecteurs avaient toujours deux paramètres [...] D'où, ici la dimension serait 3 [...] Ici, nous avons [...] Vois. Ici, ça serait α_1 et α_2 et ici une fonction de α_1 et α_2, parce que [...]

8 α : Ici on avait 2α, n'est-ce-pas ? [...] On peut donner deux valeurs et la base [...] euh! ils sont deux vecteurs

9 α : D'où, vois [...] je pense que c'est vrai [...] Vois, nous sommes en train de comparer, n'est-ce-pas ? [...] D'où, je dirais que c'est vrai. [...] Tu vois, 3 paramètres [...] Si le nombre de paramètres est trois, nous avons les vecteurs de E comme combinaison linéaire de 3 vecteurs linéairement indépendants et ceci indique que la dimension est 3.

10 β : Tu penses que c'est plus ou moins cohérent avec ce qui nous avons fait ici ?

11 α : Je pense que c'est cohérent.

12 α : Tu as deux paramètres, tu vas comparer en fonction des paramètres. Ça serait comme ça, vois [...]

13 α : On va continuer, après on essaye de justifier.

partie b :

Les étudiantes lisent la question et démarrent.

1 α : Je pense que non [...]

2 α, β : Bon, on va voir [...] On doit créer un espace vectoriel et ensuite monter que ce n'est pas vrai

3 β : Ça serait le contre-exemple, n'est-ce-pas ?

4 α : Oui, mais comment

5 α : Vois. Oui, vois [...] lorsqu'on a $\mathbf{R}^2$ [...] on a, par exemple, une droite [...] Une droite n'est pas un sous-espace de $\mathbf{R}^2$?

6 β : Si

7 α : D'où, il faut donner un contre exemple comme, n'est-ce-pas [...] par exemple, les droites, elles passent par l'origine

8 β : Euh! y = x

9 α : D'où , y=x [...] y=2x [...] D'où, nous avons cette droite y=x et elle est [...] une base de ce sous-espace peut être [...] il n'a pas y [...]

10 α : (1,0), (0,1) [...] dans ce sous-espace tout vecteur a y=x, n'est-ce-pas ?

11 α : Euh! d'où, le vecteur est (1,1), (2,2), (3,3) [...] le (1,1) s'obtient avec la somme (1+0,0+1) et ainsi de suite [...] maintenant, pour celle-ci y=2x [...] elle a pour base [...] euh! (0,0) n'est pas une base, non, ce n'est pas une base [...] d'où, comment ça serait [...] ça veut dire toujours le double, d'où [...] y est toujours de double de x, par exemple (2,4) [...] par exemple le 3 et le 6 [...] c'est le 3 avant et le 6 après.
12 β : C'est correct
13 α : Une base [...] d'où, vois [...] on va voir celui-ci [...] le sous-espace E_1 est l'ensemble des (x,y) tel que y=x et E_2 est l'ensemble de (x, y) tel que y=2x (voir copie)
14 α, β : d'où, nous avons E_1 et E_2 deux sous-espaces de même dimension, mais distincts.

partie c :

Les étudiantes lisent trois fois la question avant de démarrer.

1 β : Je ne sais pas [...] c'est ça que je pense maintenant [...] Vois : vrai, faux et je ne sais pas
2 α : Je ne suis pas d'accord [...] ici, il faut trouver un exemple de sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ engendré par 3 vecteurs
3 β : Et encore déterminer la dimension
4 α : Et encore il faut que la dimension de l'intersection soit 2 [...]
5 β : Deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$, déterminer l'intersection [...]
6 α : On va voir [...] sous-espaces de $\mathbf{R}^4$
7 β : Oui, deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$
8 α : On va voir [...] l'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$
9 β : Tu penses qu'un moyen serait ceci [...] déterminer ces deux [...]
10 α : Attends, on va d'abord essayer de comprendre [...] engendré par 3 vecteurs, c'est-à-dire qu'ils sont de type, ils sont de type [...] comme ça $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$ en fonction des précédents v_4, n'est-ce-pas ? [...] Les deux sont de ce type [...] lorsqu'on fait l'intersection ils vont avoir [...] D'où, on peut faire [...] on a une base [...] une base avec trois vecteurs
Les étudiantes s'arrêtent, parlent d'autre chose avec d'autres étudiants (des autres groupes) puis reviennent à la question
11 α : D'où, une base [...] sont ces deux sous-espaces engendrés par trois vecteurs [..] ici, l'intersection, euh! la dimension [...] je ne sais pas pourquoi la dimension de l'intersection est 2
12 β : Un peu bizarre, non ?
13 α : Lorsqu'on fait l'intersection de deux sous-espaces, on cherche des vecteurs qui satisfont les deux [...] ça veut dire qu'on perd
14 β : Une dimension
15 α : Une dimension [...]
Les étudiantes passent un certain temps sans rien dire puis :
16 α : Il faut chercher un exemple, je ne suis pas sûre [...] bien, ceci de $\mathbf{R}^4$, est de $\mathbf{R}^4$ [...] est un sous-espace de $\mathbf{R}^n$
17 α : Vois, en réalité, vois, je pense que peut-être ceci a du sens, parce qu'un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ [...] pour qu'un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ soit engendré par 3 vecteurs [...] ça va donner un plan et l'intersection de deux plans, si elle existe, est une droite et la dimension est 2. Ceci est cohérent, non ?
18 β : Oui

19 α : Qu'est-ce qu'on cherche [...] au moment où on a ces deux sous-espaces, ils ont des éléments communs s'ils sont alignés, parce que c'est le seul moyen d'être dans les deux
20 α : Comment on peut faire ceci en termes d'espace vectoriel ?
21 α : C'est-à-dire quelle est la signification de ceci [...] lorsqu'on a l'intersection, un des vecteurs générateurs sera...
22 α : C'est intéressant parce qu'on peut comprendre ça géométriquement [...] mais ce mot "toujours". Est-ce que c'est toujours que l'intersection [...] ce qui pose le problème c'est le toujours
23 α : Maintenant, la démonstration [...] la démonstration de ceci [...] Si nous avons conclu vrai, il faut le démontrer, non ? Il faut justifier
24 α : L'intersection de deux sous-espaces [...] et si on considère les vecteurs communs aux deux sous-espaces. On peut considérer ça
25 β : Oui, on peut, mais maintenant je pense que l'intersection pourrait être vide
26 α : Tu sais quelle est l'erreur [...] si l'intersection est vide, ils sont linéairement dépendants [...] si l'intersection est vide [...] si l'intersection est vide
27 β : Ils ne sont pas linéairement indépendants
28 α : Oui, et les vecteurs générateurs [...] qu'est-ce qui arrive avec les vecteurs générateurs si l'intersection est vide [...] il existe un ensemble dont les vecteurs sont parallèles
29 α : Maintenant, j'ai un petit problème ici [...] ce n'est pas l'intersection de deux plans qui donne une droite, mais l'intersection de deux solides qui donne un plan
30 β : Comment !
31 α : La dimension 3 c'est un solide et la dimension 2 c'est un plan [...] D'accord ? Ça serait l'intersection de deux
32 β : Espaces
33 α : De deux solides, parce que [...] Qu'est-ce que c'est un sous-espace de $\mathbf{R}^4$, que nous ne pouvons même pas le voir, engendré par 3 vecteurs linéairement indépendants. Ça serait un solide [...] On aurait, par exemple, quelque chose comme celle-ci qui rencontre une autre.
34 α : Tu vas avoir ici [...] euh! deux dimensions
35 β : Euh !
36 α : La droite n'est pas de dimension 2, elle est de dimension 1, d'accord ? [...] le plan est de dimension 2, la droite est de dimension 1 [...]
37 β : Ici, on va avoir un plan
38 α : Ça va donner une section plane
39 β : Il faut faire attention au temps
40 α : Nous avons encore deux minutes
41 β : Jusqu'à quel point nous sommes en train de particulariser...
42 α : Par exemple, ces deux sous-espaces sont de dimension 3. Ce sont des sous-espaces de $\mathbf{R}^4$, ils sont engendrés par trois vecteurs et lorsqu'on fait l'intersection on veut des termes qui satisfont les deux [...]
43 α : Euh! je ne sais pas expliquer pourquoi. On s'arrête. Je peux écrire, mais je ne sais pas expliquer
44 β : On peut conclure, non ?
45 α : J'ai mal à la tête.

Concernant la partie a, l'enregistrement nous montre bien l'origine des deux écritures. Comme elles l'avaient fait dans la résolution de la question 1, les étudiantes essaient de se raccrocher à la définition d'une représentation paramétrique donnée au début du test et de l'adapter à la situation particulière étudiée. Mais ensuite, elles reviennent à la représentation paramétrique du noyau, obtenue à la question précédente : dans ce cas, les vecteurs du noyau dépendaient de deux paramètres, x et y s'exprimant en fonction de z et t, et dans la base il y avait deux vecteurs. La comparaison les conduit à conclure que l'énoncé est vrai, puisqu'elles n'ont pris en compte comme représentation paramétrique du noyau que la représentation minimale. C'est sans aucun doute de cette comparaison que résulte la dernière phrase de la production écrite, la comparaison elle-même restant implicite. La phrase 10 nous semble pouvoir s'interpréter comme un questionnement portant sur la cohérence entre ce qui résulte de cette comparaison et ce qu'elles ont déjà écrit, les formes n'étant pas analogues.

En ce qui concerne la partie b, on voit que d'emblée l'étudiante Alpha est convaincue que l'énoncé est faux et que, comme dans la partie précédente, c'est elle qui s'exprime le plus, en se situant très vite dans le cadre géométrique. On notera aussi, ce que laissait supposer la partie incompréhensible de la production écrite, que le passage des droites aux sous-espaces pose problème. Sous-espace appelle base et les étudiantes ont des difficultés à associer une base à chaque droite (texte 9-10-11). Le problème ne semble pas résolu quand elles caractérisent les deux sous-espaces par leurs représentations cartésiennes respectives, après une explicitation numérique qui semble un intermédiaire nécessaire pour passer de l'équation de la droite, objet du cadre géométrique à la représentation cartésienne de la droite, objet vectoriel.

La partie de l'enregistrement correspondant à la partie c est elle aussi très intéressante. On y voit bien déjà la complexité engendrée par le passage d'un exemple particulier (question 1) à un énoncé général et l'obligation qui est faite ici de raisonner sur les dimensions (texte 1-15).

Encore une fois, c'est l'étudiante Alpha qui engage le groupe dans la voie géométrique, en reprenant, abusivement, le langage plans et droites de la dimension 3, qui a cependant le mérite d'expliquer la « perte d'une dimension » dans l'intersection de deux hyperplans distincts, elle, valide. Mais si il y a cohérence, il n'y a pas démonstration, ce dont Alpha est tout à fait consciente. L'épisode suivant, peut-être suscité par la gêne de Alpha à propos du « toujours » est lui aussi intéressant. On y voit l'étudiante Bêta penser que l'intersection peut être vide. On ne peut s'empêcher ici de penser à un glissement affine du problème (l'intersection de deux plans étant une droite sauf s'ils sont parallèles), ce que tend à confirmer la reprise par Alpha de ce problème d'intersection vide. Dans la suite, Alpha identifie un autre problème posé par

son interprétation géométrique lié au fait que l'on est dans $\mathbf{R}^4$ et non dans $\mathbf{R}^3$, problème qui ne sera pas surmonté et explique sans doute la dernière phrase de leur production écrite : « nous ne savons pas expliquer ».

I) LES DONNEES ISSUES DES ENTRETIENS POUR LA QUESTION 3

Comme pour les questions précédentes, nous suivons ici l'ordre des questions effectivement posées parmi celles initialement prévues.

- **l'étudiante Alfa** : Cette étudiante, comme pour la question précédente, a décrit son cheminement, et le temps de l'entretien n'a pas permis de lui poser d'autres questions.

partie a :

1 Dans la question 3, j'ai répondu faux et j'ai justifié.
2 F aura pour dimension 3 si et seulement si les 3 vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants, ce qui n'est pas toujours vrai.
3 D'où, j'ai choisi le contre-exemple [...] les vecteurs v_1, v_2 et v_3 égaux, par exemple le triplet (1,0,0).
4 D'où, une représentation paramétrique de F à 3 paramètres est l'ensemble des vecteurs $\alpha(1,0,0)+\beta(1,0,0)+\gamma(1,0,0)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$
5 Bon, en effectuant l'addition, j'ai ce triplet $(\alpha+\beta+\gamma, 0, 0)$. D'où, ce sous-espace est engendré par le vecteur (1,0,0)
6 Euh! parce que si je mets α, β, γ en évidence j'ai l'expression $(\alpha+\beta+\gamma)(1,0,0)$. Ceci montre que c'est faux parce que j'ai un contre-exemple.
7 Maintenant, pour donner un énoncé vrai [...] je rajouterais à l'affirmation "si et seulement si les 3 vecteurs sont linéairement indépendants".

partie b :

1 Dans l'item b de la question 3, j'ai pensé qu'il était faux et j'ai trouvé un contre-exemple.
2 Dans $\mathbf{R}^3$ si je considère deux plans distincts qui passent par l'origine, j'ai deux sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathbf{R}^3$ qui sont distincts et de dimension 2, par exemple
3 le plan π_1 : $z = 0$, le plan π_2 : $x = 0$ sont de dimension 2 et sont distincts.

partie c :

1 Dans la question 3 l'item c [...] l'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ engendrés par trois vecteurs linéairement indépendants est toujours un sous-espace de dimension 2.
2 Bon, la question 3 l'item c euh! elle est fausse si les deux sous-espaces sont égaux [...] Dans ce cas, l'intersection sera un de ces sous-espaces et donc la dimension sera 3
3 Maintenant, j'ai essayé de trouver un exemple où les deux sous-espaces sont distincts, mais j'ai eu des difficultés. J'ai même dit à la fin que la réponse était parachutée.

Cette partie de l'entretien est peu informative. Elle confirme cependant la non trivialité du passage à la dimension 4 pour la partie c, dont nous avions fait l'hypothèse au vu de la production écrite, l'étudiante disant elle-même que sa réponse est parachutée. Les liens entre rang d'un système d'équations linéaires et dimension de l'espace des solutions, dans le cas général, ne sont pas assurés.

- l'étudiante Bêta :

partie a :

<u>première question</u> : **Peux - tu expliciter la notation**

$$E = \{\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)v_4+f'(\alpha_1,\alpha_2\alpha_3)v_5\}$$

utilisée dans le travail en classe ?

1 L'explication de la notation que j'ai utilisée [...] l'ensemble E est l'ensemble euh ! [...] l'ensemble E qui est un sous-espace de $\mathbf{R}^5$ est l'ensemble des combinaisons linéaires euh ! de $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4+\alpha_5 v_5$ [...] parce qu'un vecteur de $\mathbf{R}^5$ aurait euh ! doit avoir euh ! 5 coordonnées.[...]
2 Comme dans l'énoncé il est écrit qu'ils sont [...] qu'il y a 3 paramètres dans la représentation paramétrique [...] j'ai compris que les paramètres α_4, α_5 devaient être fonctions de α_1, α_2 et α_3, d'où ma notation.

<u>deuxième question</u> : **En considérant la définition de représentation paramétrique donnée : est-ce que, dans toute représentation paramétrique, les vecteurs forment une base ?**

1 Les vecteurs [...] Les vecteurs dans une représentation paramétrique forment une base parce que la représentation indique un ensemble euh ! un ensemble de euh ! combinaisons linéaires possibles [..] $\alpha_1 v_1$+...etc... $\alpha_1 v_1$+...etc ...$\alpha_k v_k$, d'où ces vecteurs v_1, ...etc...v_k [...] à mon avis, ils forment une base parce qu'en changeant les scalaires nous allons trouver des vecteurs de ce sous-espace. [...]
2 Euh ! Bon, maintenant, je me suis aperçue que je me suis basée sur un concept erroné parce que j'ai pensé que les vecteurs qui engendrent un sous-espace euh ! devaient former automatiquement une base. [...]
3 Non, je ne me suis pas rendu compte que les vecteurs générateurs ne sont pas nécessairement linéairement indépendants [...]

<u>troisième question</u> : **Maintenant, peux-tu trouver un contre-exemple ?**

1 D'où, un possible contre-exemple serait un sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs linéairement dépendants [...] euh ! et dans ce cas il faut montrer que la dimension n'est pas égale au nombre de vecteurs de euh! [...] le nombre de euh! [...] paramètres, paramètres, non ?
2 Par rapport aux paramètres, le nombre de paramètres qui apparaissent dans une représentation paramétrique.

quatrième question : **Peux-tu rectifier l'énoncé de façon à ce qu'il soit vrai ?**

1 En rectifiant l'énoncé de façon qu'il soit vrai ? [...]
2 Un sous-espace E de $\mathbf{R}^5$ qui peut être défini par une représentation paramétrique à 3 paramètres aura une dimension plus petite ou égale à 3.

partie b :

première question : **Peux - tu expliquer ce que sont ces deux bases que tu as déterminées ?**

1 Euh ! L'idée du contre-exemple a été de considérer l'espace euh ! vectoriel $\mathbf{R}^2$ et deux sous-espaces de cet espace, représentés par des droites.
2 Donc j'ai pensé que pour la droite y=x [...] une base euh! {(1,0), (0,1)} qui sont des vecteurs linéairement indépendants et qui engendrent ce sous-espace et pour la droite y = 2x [...] une base {(1,0), (0,2)} sont [...] Ces bases sont des ensembles des vecteurs linéairement indépendants qui engendrent les sous-espaces
3 Encore, dans cette question je [...] je vois maintenant que ces deux bases ne sont pas des bases des sous-espaces considérés, parce que ces sous-espaces sont de dimension 1
4 Elles sont [...] parce que les sous-espaces sont de dimension 1 [...] Chacune de ces droites est de dimension 1 [...] donc ces bases ne sont pas des bases [...] elles sont, par exemple, l'ensemble de vecteurs générateurs de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ et donc elles ne sont pas des bases de ces sous-espaces.

deuxième question : **Peux-tu expliciter comment tu as déterminé les contre-exemples lors du travail à la maison ?**

1 Pour donner le contre-exemple de deux sous-espaces d'un même espace vectoriel de même dimension et qui ne sont pas nécessairement égaux [...] j'ai choisi, j'ai créé deux sous-espaces S_1 et S_2 engendrés par deux vecteurs
2 Euh ! [...] En considérant que ces vecteurs formaient une base de ces deux sous-espaces [...] chacun des ensembles formaient une base
3 Pour vérifier que les deux sous-espaces étaient distincts et c'est ce que je n'ai pas écrit ici [...] je n'ai pas écrit tous les passages de euh ! de recherche d'une représentation cartésienne de ces sous-espaces
3 J'ai déterminé une représentation cartésienne par triangulation
4 J'ai donné les valeurs 1 et 1 pour les coordonnées de x et y et j'ai vérifié que ceci amenait à z et t et donc que le vecteur n'était pas le même et donc que les sous-espaces étaient distincts.

troisième question : **Est-ce que tu peux rectifier l'énoncé de façon à ce qu'il soit vrai à partir du contre-exemple que tu as donné ?**

1 Si deux sous-espaces d'un même espace ont la même dimension, ils peuvent donc être inégaux.

partie c :

<u>première question</u> : **Peux-tu expliciter le raisonnement suivi ?**

1 L'étudiante lit l'énoncé et sa copie
2 Le raisonnement a été analogue à celui de la théorie des ensembles et, bien sûr, basé sur un théorème :
3 Que la dimension de l'espace vectoriel somme est égale à la somme de la dimension des, des deux sous-espaces moins la dimension du sous-espace intersection
4 Donc, j'ai utilisé le théorème, mais je vois une analogie par rapport à la théorie des ensembles.
L'enseignant chargé de l'entretien a alors posé la question suivante : As-tu pensé que l'affirmation pouvait être fausse ? Puis, devant la réponse négative de l'étudiante, il lui a suggéré de penser au cas où les deux sous-espaces sont égaux
5 Non, je n'ai pas pensé que l'affirmation pouvait être fausse si les deux, si les deux sous-espaces étaient égaux, parce que lorsque j'ai pensé à deux sous-espaces, j'ai pensé à deux sous-espaces distincts automatiquement... Ce qui est une erreur, tout à fait
6 Même avec ça, je n'ai pas vu de sens. J'ai fait des confusions [...] C'est logique que la dimension ne soit plus [...] la dimension de l'intersection ne serait plus 2.
7 D'où, dans ce cas l'affirmation pouvait être fausse et pour la rendre vraie, elle pouvait être changée en : L'intersection de deux sous-espaces distincts de $\mathbf{R}^4$ engendrés par 3 vecteurs linéairement indépendants est toujours un sous-espace de dimension 2.

La partie de l'entretien relative à la partie a confirme les données issues de l'enregistrement mais aussi un problème de distinction entre nombre de coordonnées et nombre de paramètres, sans doute renforcé par le fait que l'on travaille dans R^n. Dans la réponse à la deuxième question, le texte 1 est intéressant, l'étudiante y explicitant la prééminence de la dimension « système générateur » sur la dimension « indépendance » quand elle pense à une base. Et même si elle parvient à proposer une idée de contre-exemple et rectifier l'énoncé, on sent que son expression manque d'assurance.

En ce qui concerne la partie b, l'étudiante confirme bien les difficultés rencontrées dans le passage de la droite géométrique à la droite sous-espace vectoriel de dimension 1. Visiblement au cours de la résolution, la contradiction existant entre la dimension des sous-espaces et les bases explicitées n'avaient pas été perçues. En ce qui concerne le travail à la maison, contrairement à ce que nous pensions, l'étudiante a créé elle-même le contre-exemple relativement compliqué qu'elle a proposé. On notera sa justification du fait que les sous-espaces sont distincts basée sur un choix de valeurs de x et y et le fait qui reste ici implicite qu'il n'existe qu'un vecteur dans chaque espace ayant ces valeurs pour x et y, qui laisse supposer un fonctionnement de type paramétrique de la représentation cartésienne obtenue (qui est d'ailleurs écrite sous forme mixte). La rectification proposée de l'énoncé n'est pas optimale, et ne s'appuie sur aucun théorème.

En ce qui concerne la partie c, on voit fonctionner l'analogie avec la théorie des ensembles mais le rôle joué par la dimension de la somme n'est pas mentionné. L'énoncé rectifié est correct mais n'est pas justifié. Il semble bien que l'étudiante soit à ce moment là de l'entretien fatiguée.

Les difficultés rencontrées par les étudiantes dans cette partie du test sont attestées par l'ensemble des données recueillies, ainsi que les différences évidentes existant entre le travail de groupe et le travail individuel à la maison, s'appuyant sur les ressources fournies par les manuels (Callioli, Boldrini) analysés dans le chapitre IV. Ces questions de type vrai/faux sont, il nous semble important de le souligner, des questions dont la résolution implique un rapport plus théorique à l'articulation, du fait de la généralité des énoncés. Le seul recours aux techniques efficaces dans des contextes spécifiques comme ceux des questions 1 et 2 ne suffit pas. Elles nous permettent de voir comment ce passage à la généralisation et les appuis qu'il supprime ou rend d'une interprétation plus complexe, notamment au niveau sémiotique, sont susceptibles de perturber les étudiants, même si les questions posées peuvent sembler relativement faciles comme ici, lorsque les étudiants sont peu outillés aux niveaux technologique et théorique pour faire face aux questions d'articulation de points de vue et ne disposent que de critères très locaux. Le recours aux manuels est ici insuffisant pour assurer la réussite, ce qui n'est pas en soi étonnant, si l'on prend en compte les analyses du chapitre IV, et même lorsque les étudiants arrivent à des réponses correctes, leur conviction semble peu assurée.

II.1.2. UN BREF APERÇU DES DONNEES RELATIVES AUX DEUX AUTRES GROUPES

Nous allons synthétiser, pour les deux autres groupes, les résultats dans un tableau question par question, en nous centrant dans chaque cas sur l'un des étudiants du groupe.

- **groupe 1** : Il s'agit d'un groupe de trois étudiantes. Nous disposons, outre la production écrite et l'enregistrement correspondant au travail en groupe, de l'ensemble des productions écrites de deux étudiantes et d'un entretien. L'étudiante sur laquelle nous nous centrons, pour le travail à la maison, est celle pour laquelle nous disposons de tous les documents. Soulignons cependant que l'entretien apporte peu d'éléments.

Question 1 : travail en classe : méthode P (méthode 4 de l'analyse a priori) avec arrêt après la résolution du système. travail à la maison : idem mais interprétation correcte des solutions du système et lecture directe d'une représentation cartésienne de l'intersection sur les composantes d'un vecteur générique de cette intersection.

technique utilisée : méthode des substitutions successives pour résoudre le système (en classe et à la maison)
blocage : interprétation des solutions du système (en classe).
dérapages : aucun
existence de quantification : écriture directe d'un vecteur de chacun des sous-espaces sous la forme " explicite tableau " puis passage à la forme " implicite équation ". Pas d'utilisation de quantificateurs.
justifications, explicitations : Aucune, ni dans la production en classe, ni dans le travail à la maison. L'enregistrement du travail de groupe met bien en évidence les difficultés rencontrées par les étudiantes dans l'interprétation des solutions du système et le blocage qui en résulte.
réponse : inachevée en classe, correcte à la maison.
théorèmes généraux utilisés et/ou mentionnés : aucun.
utilisation du langage géométrique : non.

Question 2
partie a :

travail en classe : application de la méthode du pivot de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en colonnes. Mais une fois le tableau échelonné, elles se demandent si cela leur donne la dimension du noyau ou de l'image. Evoquent une relation fausse : dim $\mathbf{R}^4$ = dim Kerf + dim Imf - dim (Kerf $\cap$ Imf) et cherchent à voir ce qui pourrait en être déduit comme dimensions possibles de l'image en partant d'une dimension du noyau. Ensuite elles considèrent les deux vecteurs lignes non nuls du tableau échelonné comme une base du noyau et en déduisent que sa dimension est 2. Hésitent pour la dimension de l'image entre 0, 1 et 2 puis choisissent 2.
travail à la maison : détermination de la dimension du noyau par application de la méthode du pivot de Gauss appliquée au tableau de nombres associé au système et utilisation du théorème pour en déduire la dimension de l'image. Nouvelle détermination de la dimension de l'image par réduction du tableau des vecteurs images des vecteurs de la base canonique disposés en ligne par la méthode du pivot de Gauss appliquée aux lignes.
technique utilisée : utilisation de la méthode du pivot de Gauss sur les lignes de tableaux de nombres.
blocage : aucun
dérapage : interprétation erronée des deux premières lignes du tableau échelonné comme étant les coordonnées des vecteurs d'une base du noyau (en classe et à la maison).
existence de quantification : aucune
justifications, explicitations : En classe, la production ne donne à voir que des calculs. A la maison, l'étudiante justifie l'indépendance des deux vecteurs choisis comme base du noyau et utilise le théorème du noyau et de l'image pour déterminer la dimension de l'image.
réponse : correcte pour les dimensions (mais sur la base d'un raisonnement faux en classe) et erronée pour une base du noyau.
théorème généraux mentionnés et/ou utilisés : le théorème du noyau et de l'image.
utilisation du langage géométrique : non.

partie b :
travail en classe : détermination d'une base de l'image par l'application de la méthode du pivot de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées de vecteurs disposés en lignes.
travail à la maison : idem.
technique utilisée : la méthode du pivot de Gauss sur les lignes d'un tableau de nombres.
blocages : aucun.
dérapages idem qu'à la partie a pour le noyau.
existence de quantification : aucune.
justifications, explicitations : aucune.
réponse : En classe, le groupe détermine une base correcte de l'image et s'arrête là. A la maison, l'étudiante détermine une représentation cartésienne correcte du sous-espace image par bricolage sur les équations associées au tableau réduit (aux vecteurs ligne (1,1,1) et (0,1,-1) générateurs de l'image sont visiblement associées les équations : x=a,x+y=b,x-y=c, mais tout ceci n'est pas explicité). Tant en classe qu'à la maison, la base du noyau déterminée est erronée.
théorème généraux mentionnés et/ou utilisés : aucun.
utilisation du langage géométrique : non.

Question 3 :
partie a :
réponse : correcte en classe et à la maison.
contre-exemple : correct en classe (les vecteurs : (1,1,1,1,1), (2,2,2,2,2) et (4,4,4,4,4)), aucun à la maison.
rectification de l'énoncé : aucune en classe, correcte à la maison mais sans lien explicité dans l'énoncé rectifié avec l'indépendance linéaire (la dimension est inférieure ou égale à trois).
justification : contre-exemple justifié.
utilisation du langage géométrique : non.
partie b :
réponse : aucune en classe, aucune à la maison (réponse : « je ne sais pas », lors du travail en classe).
contre-exemple : aucun en classe, correct à la maison ($\mathbf{R}^2$ et les sous-espaces associés à x=0 et y=0).
rectification de l'énoncé : aucune, ni en classe ni à la maison.
justification : contre-exemple justifié.
utilisation du langage géométrique : non.
partie c :
réponse : correcte en classe, erronée à la maison.
contre-exemple : aucun
rectification de l'énoncé : aucune
justification : erronée en classe (confusion entre le théorème de la dimension du noyau et de l'image et le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection déjà rencontrée dans la question 2 : dim V = 4 et dim Kerf = 3 donc dim Intersection = 1). L'étudiante fait à la maison l'erreur classique en utilisant le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection sans prendre en compte le cas où la somme n'est pas de dimension 4.
utilisation du langage géométrique : non

- groupe 2 :

Il s'agit d'un groupe de trois : deux étudiantes et un étudiant. Nous n'avons que les productions écrites complètes de deux étudiantes et le travail en classe. Nous nous centrons ici, pour le travail à la maison, sur l'étudiante pour laquelle nous avions préparé un entretien qui n'a pu être réalisé.

Question 1 :
travail en classe : vérification de l'indépendance linéaire des vecteurs a et b, puis c et d, par réduction du tableau des composantes disposées en lignes ; détermination d'une représentation cartésienne du sous-espace engendré par a et b par élimination et substitution ; reconnaissance de y=0 comme équation du sous-espace engendré par c et d sur le tableau réduit puis vérification par la technique employée pour a et b ; réunion des deux équations trouvées pour déterminer une représentation cartésienne du sous-espace intersection (méthode 6 de l'analyse a priori).
travail à la maison : affirmation de l'indépendance linéaire des vecteurs a et b et utilisation de la même technique qu'en classe pour déterminer une équation du sous-espace engendré ; début de la même technique pour le sous-espace engendré par c et d et blocage ; passage à la méthode P (méthode 4 de l'analyse a priori) aboutissant à une représentation paramétrique explicite de l'intersection et une base : (5,0,-7) ; déduction erronée par lecture directe d'une représentation cartésienne de l'intersection : 5x-7y=0.
technique utilisée : la méthode de substitutions successives pour résoudre les systèmes (en classe et à la maison)
blocages : aucun en classe, blocage lié sans doute à la perturbation y=0 à la maison induisant un changement de méthode.
dérapages : détermination d'une représentation cartésienne erronée de l'intersection par la lecture des composantes d'un vecteur générateur dans le travail à la maison.
existence de quantification : non en classe, dans l'expression de l'intersection à la maison (cf. ci-dessous)
justifications, explicitations : le groupe ne donne à voir que les calculs et conclusions dans le travail en classe et nous n'avons pas cette fois d'enregistrement pour compléter l'analyse. Dans le travail à la maison, l'étudiante remarque que les vecteurs qui engendrent les deux sous-espaces sont linéairement indépendants et qu'ils en forment une base. Elle décrit les étapes de son travail, mais on ne trouve pas vraiment de justification ; notons aussi l'explicitation d'une définition comme celle de l'intersection : Si $w \in S_1 \cap S_2$, il existe α, β, γ et δ tels que $\alpha(2, 3, -1) + \beta(1, -1, -2) = \gamma(5, 0, -7) + \delta(0, 0, 1)$.
réponse : correcte dans son travail en classe et erronée dans le travail à la maison.
théorèmes généraux mentionnés ou utilisés : aucun.
utilisation du langage géométrique : non.

Question 2

partie a :
travail en classe : détermination de la dimension du noyau à travers le calcul du rang du système (application de la méthode du pivot de Gauss sur les lignes de la matrice des coefficients du système) et détermination de la dimension de l'image à travers le calcul du rang d'un système de vecteurs (application de la méthode du pivot de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en lignes).

travail à la maison : identique à celui en classe pour l'image par laquelle l'étudiante débute et utilisation du théorème de la dimension du noyau et de l'image pour en déduire la dimension du noyau.
blocage : aucun.
dérapages : le groupe considère de façon erronée les deux premières lignes de la matrice des coefficients comme une base du noyau dans le travail en classe et la même erreur se retrouve dans le travail à la maison.
existence de quantification : aucune quantification tant dans le travail en classe qu'à la maison, travail exclusif sur des tableaux de nombres.
justifications , explicitations : le groupe ne donne à voir qu'une succession de calculs dans le travail en classe. Dans le travail à la maison, l'étudiante décrit les étapes de son travail et son discours est complètement basé sur le travail technique, par exemple : « Maintenant on a besoin de vérifier si ces vecteurs sont linéairement indépendants et en échelonnant la matrice on a : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. »
réponse : correcte pour les dimensions.
théorèmes généraux mentionnés ou utilisés : théorème de la dimension du noyau et de l'image à la maison.
utilisation du langage géométrique : non.

partie b :

travail en classe : comme dans la partie a pour le noyau et résolution du système par bricolage sur les équations pour l'image (technique identique à celle du groupe 1 mais cette fois-ci explicitée).
travail à la maison : l'étudiante applique d'abord la définition du noyau, puis elle considère la matrice des coefficients du système et ensuite elle suit les mêmes raisonnements que lors de la résolution en classe.
techniques utilisées : méthode du pivot de Gauss sur un tableau de nombres et méthode de substitutions successives.
justifications, explicitations : Aucune dans le travail en classe, dans le travail à la maison l'étudiante essaye d'expliciter son travail technique, mais on ne trouve pas de traces d'une justification plus conceptuelle dans son discours.
blocages : aucun.
dérapages : la même que dans la partie a pour le noyau.
réponse : base erronée du noyau et représentation cartésienne correcte de l'image.
théorèmes généraux mentionnés ou utilisés : aucun.
utilisation du langage géométrique : non.

Question 3

partie a :
réponse : correcte en classe et à la maison.
contre-exemple : correct, le groupe utilise comme contre-exemple le sous-espace noyau de la question 2 en classe et ce contre-exemple est repris par l'étudiante à la maison.
rectification de l'énoncé : correcte.
utilisation du langage géométrique : non.
justification : correcte.

partie b :
réponse : correcte en classe et à la maison.
contre-exemple : correct en classe ($\{(x,2x,0) / x\in\mathbf{R}\}$ et $\{(x,-2x,0) /x\in\mathbf{R}\}$) et à la maison où l'étudiante réutilise la question 1.
rectification de l'énoncé : aucune en classe, partielle à la maison (deux sous-espaces de même dimension sont isomorphes, mais qu'ils ne sont pas nécessairement égaux).
utilisation du langage géométrique : non.
justification : justification des contre-exemples et la remarque citée plus haut.

partie c :
réponse : erronée en classe et à la maison.
contre-exemple : aucun.
rectification de l'énoncé : aucune.
utilisation du langage géométrique : non.
justification : erronée, utilisation du théorème de la dimension de la somme et de l'intersection sans prendre en compte le cas où la somme n'est pas l'espace tout entier.

Les données issues de ces deux groupes sont cohérentes avec ce que l'analyse détaillée du paragraphe précédent nous montrait.

1. Les tâches proposées ne sont pas pour ces étudiantes et étudiants des tâches routinières et ils rencontrent des difficultés notables dans la résolution, notamment dans le travail en groupes en classe où ils ne disposent pas de la ressource des manuels qui leur sont familiers.

2. Dans le travail technique, la manipulation de tableaux de nombres associés soit aux composantes de vecteurs, soit aux coefficients de systèmes joue un rôle déterminant. Les deux manuels auxquels ils semblent se référer présentent ce travail en disposant les vecteurs en lignes et en effectuant, en cohérence avec cette disposition, des opérations de combinaisons linéaires sur les lignes, ceci conduisant à un même type de traitement pour les systèmes et les ensembles de vecteurs. Les étudiants, même s'ils semblent ici privilégier cette disposition en lignes, ne semblent pas nécessairement bien conscients du rôle joué dans les opérations effectuées (cf. les mélanges de la question 2). De plus, si l'objet tableau appelle l'opération d'échelonnement, l'interprétation de ce que l'on obtient après échelonnement ne va pas de soi. Les étudiants arrivent assez souvent à des résultats corrects, mais on peut se

demander si ceci n'est pas un simple effet de la combinatoire des possibles, en particulier lorsque l'on prend en compte la dimension des espaces auxquels les objets manipulés appartiennent. Le dérapage concernant la base du noyau que l'on retrouve dans les deux groupes en est un symptôme. La discussion du groupe 1 dans la partie a de la question 2, telle qu'elle apparaît dans l'enregistrement, en est un autre témoignage.

3. Le recours au géométrique est inexistant et, même lorsque des contre-exemples sont donnés dans R^2 et R^3 dans la question 3, on ne note dans les productions écrites aucune formulation géométrique.

4. Les étudiants ne semblent pas disposer, au vu des productions écrites mais aussi des enregistrements et des entretiens de moyens de contrôle de leur activité mettant en jeu l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique. Les raisonnements faisant intervenir la dimension se limitent à l'application directe des deux théorèmes classiques que sont le théorème du noyau et de l'image et le théorème de la somme et de l'intersection, voire, pour le groupe 1, à des énoncés hybrides constitués à partir de ces deux théorèmes.

II.2. LES RESULTATS DES ETUDIANTS DU DEUXIEME DISPOSITIF

Trois groupes ont participé à cette deuxième expérimentation : deux groupes de 3 étudiants et un groupe de 2 étudiants. Il s'agissait d'étudiants de "mestrado". Ils ont répondu au test 2 (variante du test 1) à la fin du mois de mars 97 et un étudiant au moins de chaque groupe a passé un entretien. C'est l'enseignante qui a fait passer le test qui a organisé les entretiens, comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre. Les questions posées étaient plutôt des questions générales où les étudiants étaient invités à décrire les difficultés qu'ils avaient rencontrées lors du travail en classe et à la maison.

Nous avons reçu les productions en classe des trois groupes. Pour chacun de ces trois groupes, nous disposons également des productions écrites à la maison et de l'entretien d'au moins un étudiant. Comme annoncé au début du chapitre, pour des raisons de place, nous nous centrerons dans cette partie, sur le travail d'un groupe et, dans ce groupe, plus particulièrement sur le travail de l'étudiant qui a passé un entretien, une semaine environ après avoir rendu le travail effectué à la maison. Nous avons choisi cette fois de considérer un groupe de trois étudiants, parce que, dans ce groupe se trouvait une étudiante qui avait participé à la première expérimentation (étudiante Bêta). En fait, dans les deux groupes de trois, le travail a semblé s'effectuer quasiment en binôme, un des étudiants participant très peu, la situation n'est donc pas très différente sur ce point de celle de la première expérimentation.

Nous compléterons ensuite l'analyse en présentant de façon synthétique, comme nous l'avons fait pour la première expérimentation, les données issues de chacun des autres groupes.

II.2.1. LE TRAVAIL DU GROUPE CHOISI

Nous suivrons ce travail dans sa chronologie, en présentant et en analysant d'abord le travail réalisé en classe à travers la production écrite et l'enregistrement du groupe, puis en considérant le travail à la maison de l'étudiant choisi que nous appellerons Delta et de l'étudiante Bêta et enfin l'entretien de l'étudiant Delta. Comme pour la première expérimentation, nous fonctionnerons question par question.

A) LA RESOLUTION DE LA QUESTION 1

QUESTION 1 : Montrer que le sous-espace de $\mathbf{R}^4$; $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 / x-y+2z-t=0$ et $2x+y-z+3t=0\}$ et F le sous-espace engendré par les vecteurs (5,5,-3,-6), (-4,-5,2,5), (1,0,-1,-1) sont égaux.

Nous allons considérer les extraits de l'enregistrement qui montrent le raisonnement suivi par les étudiants lors de la résolution de cette question en classe. Nous les avons appelés Bêta, Delta et Téta, l'étudiant Delta étant celui sur lequel nous nous centrons plus particulièrement.

Au démarrage, l'étudiant Delta demande la parole. Il va faire un certain nombre de commentaires relatifs aux objets, comme s'il testait la cohérence des données : les éléments de $\mathbf{R}^4$, ont quatre composantes, mais un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ peut-être engendré par moins de quatre vecteurs (ici il y en a trois pour F).

1 β : Donc, nous pouvons commencer.
2 δ: D'abord, je voudrais dire quelque chose.
3 β, δ : Oui
4 δ : Bon, dans $\mathbf{R}^4$, d'accord ? [...] Euh ! Ce qui importe, c'est que les vecteurs ont quatre composantes. Correct !
5 β: Euh !
6 δ : Maintenant, le sous-espace engendré est une combinaison linéaire quelconque. Correct ! Euh ! d'un [...] d'un sous-espace. Correct ! Maintenant ici, la dimension n'intervient pas dans la question, d'accord ? C'est-à-dire que je n'ai pas nécessairement besoin de 4 vecteurs pour engendrer un sous-espace.
7 β : Non, non ce n'est pas nécessaire.

Sur proposition de l'étudiante Bêta, le groupe va essayer ensuite de montrer l'égalité des deux sous-espaces en montrant qu'on peut « mettre les deux sous-espaces sous la même représentation ».
Chacun, visiblement, travaille un moment dans son coin et la phase suivante de ce travail n'apparaîtra pas dans la production commune écrite par Bêta.
La discussion redémarre lorsque l'étudiant Delta montre son travail. Il a visiblement construit un système à partir des vecteurs définissant F.

19 δ : Je sais [...] échelonner, mais ici, pour ce cas [...] j'ai besoin de résoudre le système ou au moins de discuter s'il y a des solutions. [...] Quand est-ce que je peux conclure que les deux sous-espaces sont égaux ? Ça commence ici, c'est le point de départ.
20 β : Attends, un peu [...] D'où, euh ! NON, ici c'est le suivant [...] J'essaye de comprendre ce que tu as fait [...] Tu a pris ceux-ci, ceux-ci euh !
21 δ : 5x+5y-3z-6t
22 β : Je ne comprends pas pourquoi
23 δ : Ce sont les coordonnées
24 β : Ceci est nul. Pourquoi ceci ? Cette représentation ici est erronée, je pense. [...] parce que je pense, parce que tu prends un vecteur et tu l'égales à zéro, pourquoi ? [...] Ça veut dire que tu as additionné les coordonnées des vecteurs et tu les égalées à zéro.
25 δ : Euh !
26 β : Je ne vois pas.
27 δ : Je pense que l'autre sous-espace a été lui aussi obtenu de cette façon
28 β : Mais ceci ne signifie pas qu'il est engendré par les vecteurs (1,-1,2,-1), non ?

L'étudiant Delta a visiblement construit le système associé aux vecteurs générateurs de F par passage direct des coordonnées des vecteurs aux équations (erreur déjà rencontrée dans le chapitre VI et codée E). L'étudiante Bêta réagit et va lui expliquer, en s'appuyant sur le cas du sous-espace E, que le passage ne peut pas s'effectuer ainsi. Le groupe discute longuement et l'on voit bien les difficultés rencontrées par Delta à dépasser une certaine confusion sous-espace / vecteur, même après avoir explicité l'expression d'un vecteur générique de F (voir extrait ci-après).

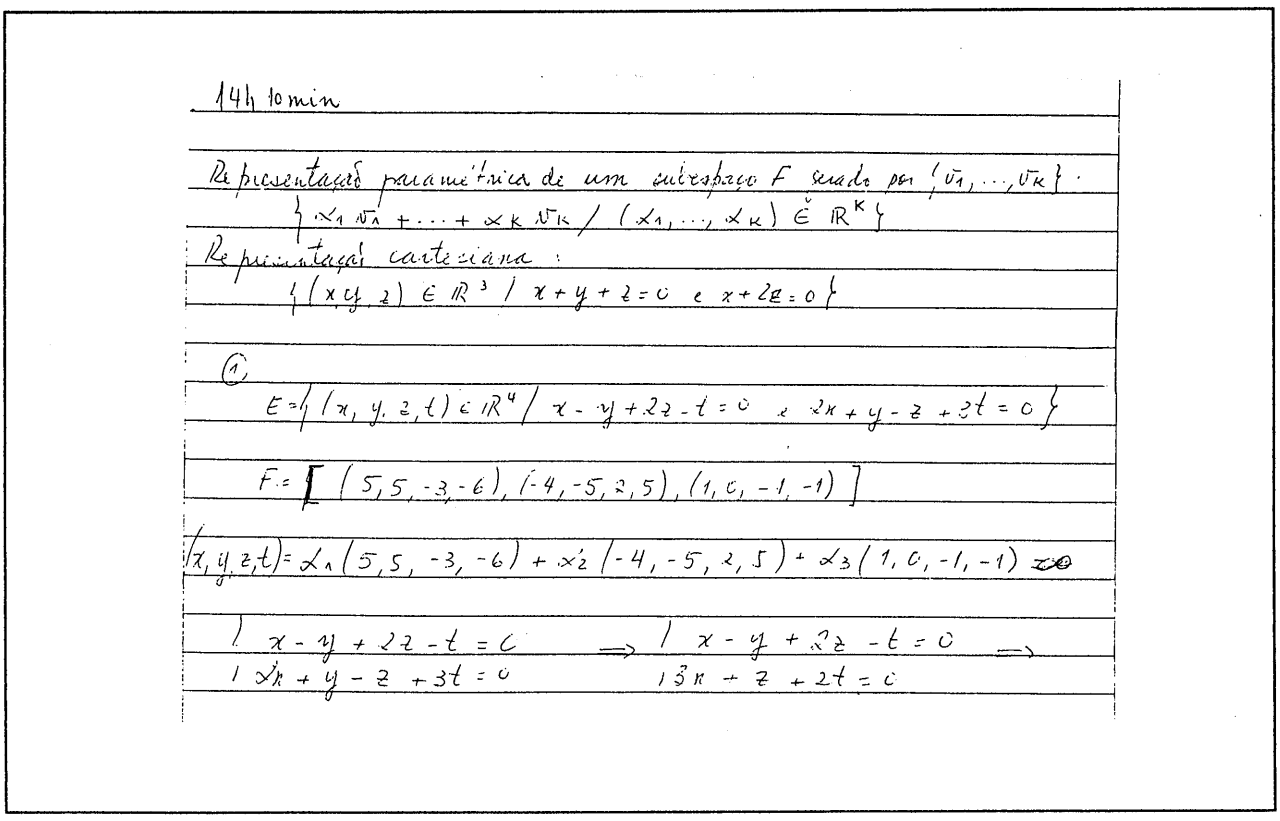
34 δ : Je vois euh ! [...] un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$ peut être écrit comme une combinaison linéaire de, de cet ensemble [...] qui serait [...] on peut dire une base [...] Non, on ne peut pas encore parler de base parce que nous ne savons pas si les vecteurs sont linéairement indépendants.
35 β : Oui, d'accord, d'où ici, c'est comme ça, vois
36 δ : il va engendrer [...] c'est un générateur
37 β : D'où, ici c'est comme ça [...] s'il appartient à F il peut être écrit de cette façon [...]
38 δ : tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire [...]

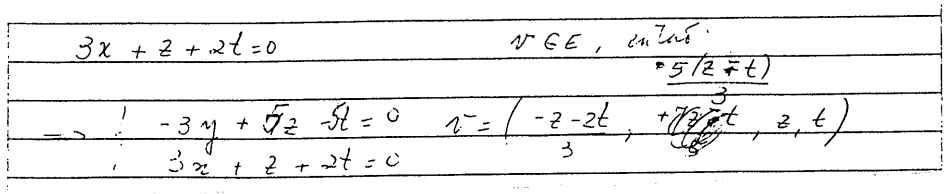
Les étudiants discutent « comment » représenter le sous-espace F.

48 β : D'où, ce qu'il faut faire est chercher, c'est-à-dire trouver une façon de représenter [...]
49 θ : ça serait la forme canonique, non ? Ce n'est pas ça ? [...]
50 δ : cartésienne
51 β : paramétrique, non ?
52 θ : Mais, cette égalité, ce serait comme si tu avais choisi la forme canonique et égalé à ceci, non ?
53 β : Non, la forme canonique c'est (1,0,0,0), (0,1,0,0).
54 δ : Ça, c'est la base canonique, non ?
55 β : Oui, c'est la base canonique, mais ce n'est pas la forme canonique de E [...] D'où, on essaye de transformer soit en une représentation paramétrique, soit en une représentation cartésienne [...] l'une ou l'autre

56 δ : Oui. C'est ça que j'avais dit aussi [...] Ce sont tous des sous-espaces de $\mathbf{R}^4$. Ce sous-espace [...] J'ai un sous-espace particulier de $\mathbf{R}^4$. [...] Ce qu'il voulait dire c'est que le sous-espace engendré par ces deux vecteurs est le même, n'est-ce pas ? C'est ça qu'il faut montrer [...] Le problème c'est plus ou moins [...] L'idée est comprise [...]
57 β : Le sous-espace est engendré par quels vecteurs ?
58 δ : Par ces, ces deux vecteurs, non ?
59 β : Quels vecteurs ?
60 δ : Les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$.
61 β : Ce sont deux sous-espaces [...]
62 δ : Oui, ce sont deux [...]
63 β : sous-espaces. Oui [...] Donc [...]
64 δ : Correct. Les sous-espaces engendrés par ces vecteurs sont égaux [...]
65 β : Attends ! Laisse moi faire une chose [...]
66 δ : Ceci signifie que le sous-espace engendré par ces trois vecteurs est le même que E [...]

L'étudiante Bêta se lance semble-t-il alors dans un calcul visant à transformer la représentation cartésienne de E donnée. Les calculs correspondants figurent sur la production écrite, où ils sont raturés car plus tard les étudiants découvriront une erreur de calcul. Quand elle est arrivée à la représentation : $\left(\frac{-z-2t}{3}, \frac{-7z+t}{3}, z, t\right)$, l'étudiante montre son travail aux autres et leur explique ce qu'elle a fait : élimination de y par addition des deux équations puis multiplication par 3 de la première équation et soustraction pour éliminer x. En fait l'erreur de calcul s'est produite pendant la soustraction et, en refaisant les calculs, l'étudiante Bêta s'en aperçoit et rectifie.



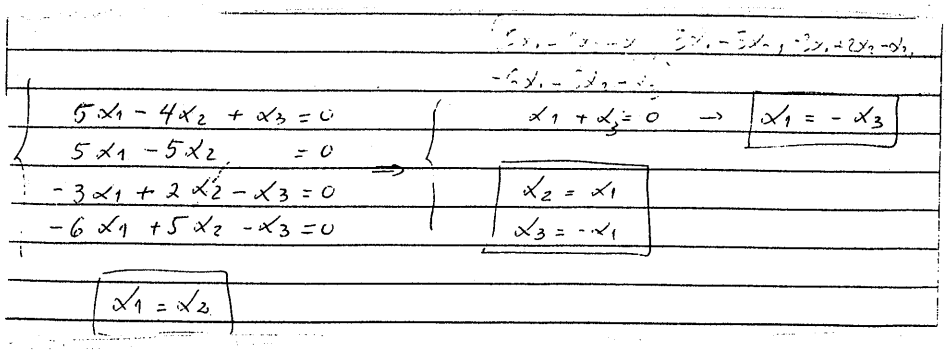


Elle conclut en disant que « ça donne un vecteur semblable au vecteur de l'autre sous-espace », puis passe à F. Visiblement les étudiants sont gênés par les différences de représentations et se demandent comment arriver à une forme semblable à celle qu'ils viennent d'obtenir :

93 β : Je ne peux faire 5x parce que 5 est à la place de x [...] ce n'est pas 5x [...] Il faut que je fasse $x=5\alpha_1$ [...]
94 θ : C'est ça $x=5\alpha_1$, c'est ça [...]
95 δ : D'où, à la place de x, nous allons mettre ....
96 β : Non, je ne peux pas encore mélanger [...] je dois arriver à une conclusion [...] De toutes façons, je dois arriver à une conclusion [...] que tous les vecteurs de l'autre espace qui sont aussi représentés de cette façon vont satisfaire cette expression [...]
97 δ : Donc, laisse, laisse [...] je vais faire quelque chose [...] puis, si ça ne marche pas, on efface [...]
98 β : Euh !
99 δ : Donc, mon x [...] Ceci, ça veut dire que mon $x=5\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_3$ [...] D'où, ça est x [...] Pour mieux visualiser, on va mettre un au-dessous de l'autre [...] Ceci n'est que pour voir si les valeurs sont correctes
100 β, δ : D'où, $5\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_3$ ceci c'est le x[...] Le y c'est quoi [...] c'est $5\alpha_1-5\alpha_2$ et z est égal $-3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ et t est égal à $-\alpha_1$ [...] non [...] $-6\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3$ [...]
101 δ : D'où, ça c'est les coordonnées de mon vecteur [...] et ce sont aussi celles-là [...]
102 β : Non, il faut montrer
103 δ : Il faut qu'on démontre
104 β : Oui, maintenant
105 δ : Si on détermine [...] Si on oublie et substitue [...] J'ai ici euh ! [...] 3 équations et 3 inconnues [...] Si je fais la même chose [...] Est-ce que je peux trouver une équation de ce type avec α_1, α_2, et α_3 [...]
106 β : une équation [...] 3 équations et 3 inconnues [...]
107 δ : Si j'échelonne
108 β : oui, mais on égale à quoi ?
109 δ : en construisant une équation [...] un système homogène [...]
110 β : Euh ! Oui, c'est ça que j'avais dit [...] c'était ça que j'avais dit [...] C'est le suivant [...] l'idée
111 δ : C'est que je n'avais pas visualisé de cette façon, ici [...]

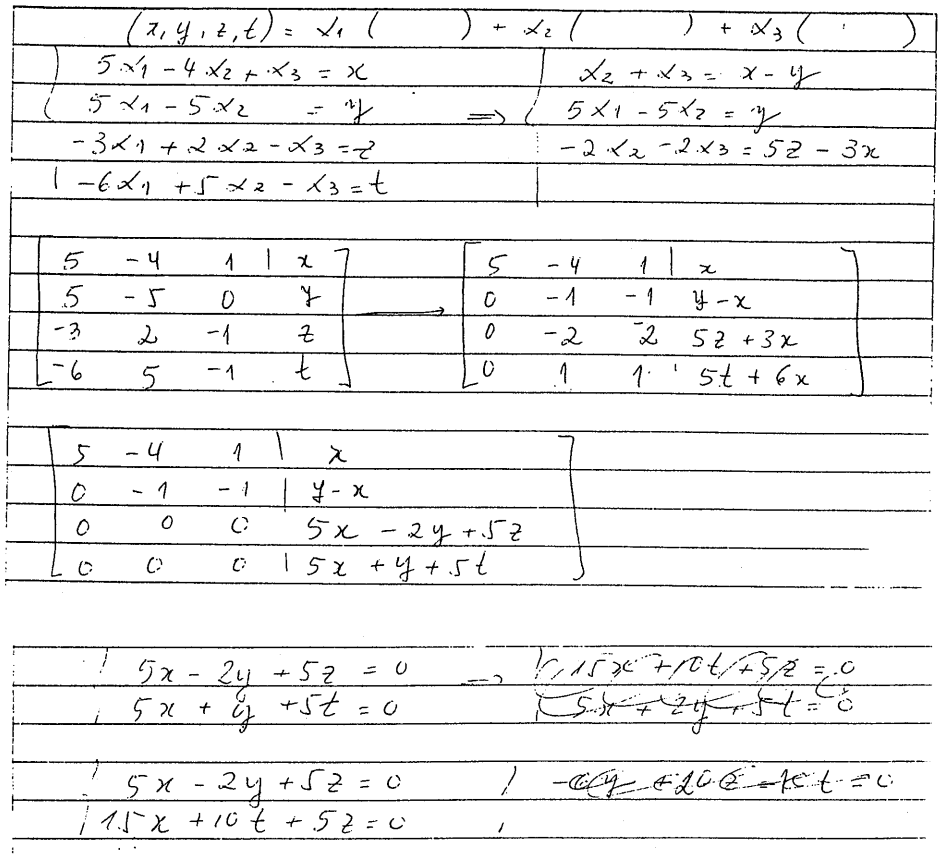
112 β : L'idée est la suivante [...] le vecteur nul appartient à tous les sous-espaces [...] Pour être un espace vectoriel, il faut que le vecteur nul appartienne [...] D'où, vois bien lorsqu'on calcule [...] Euh ! C'est bon [...] Attends, un peu [...] Nous avons 4 équations et 3 inconnues [...] ça veut dire que nous allons perdre des équations [...]
113 δ : Oui
114 β : Donc, ça donne [...]
115 δ : Je peux exprimer le vecteur nul dans [...]

Après diverses discussions, ils vont décider de fabriquer un système en égalant les expressions à 0, choix qu'ils justifient en disant que ça doit marcher pour le vecteur nul car il appartient à tous les sous-espaces. Ils envisagent d'abord d'échelonner le système, puis l'étudiant Delta remarque que la deuxième équation se réduit à : $\alpha_1 = \alpha_2$, ce qui les oriente vers la résolution par substitution reproduite ci-après.

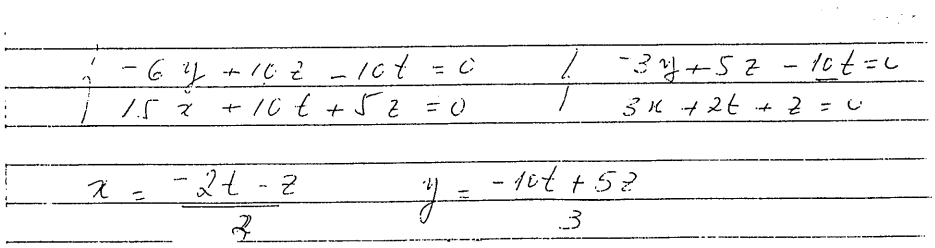


Ils ne savent ensuite trop quoi faire de ces résultats et c'est l'étudiante Bêta qui va proposer de résoudre le système avec comme seconds membres x, y, z et t :

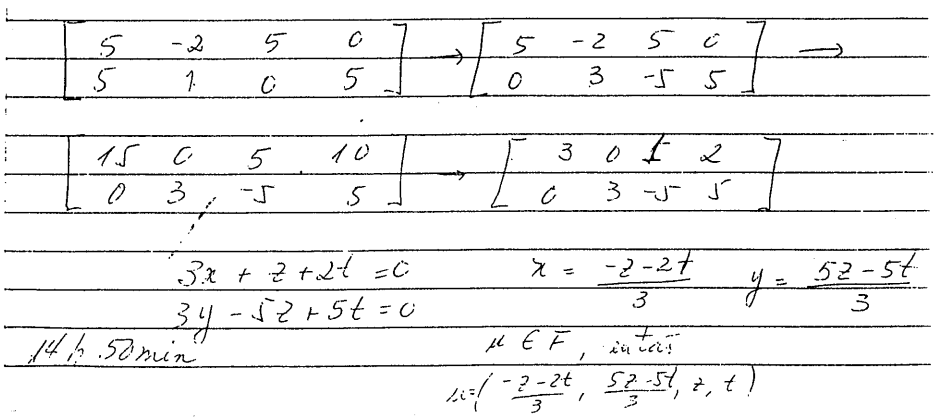
161 β : Attends un peu [...] Je vais faire une chose [...] Ici [...] $\begin{cases} 5\alpha_1 & -4\alpha_2 & +\alpha_3 & = & x \\ 5\alpha_1 & -5\alpha_2 & & = & y \\ -3\alpha_1 & +2\alpha_2 & -\alpha_3 & = & z \\ -6\alpha_1 & +5\alpha_2 & -\alpha_3 & = & t \end{cases}$ Puis [...]
Donc, si on échelonne de cette façon [...] Par exemple : Si je fais α_1, α_2, α_3 en fonction de x, y, z et t [...] On va trouver l'égalité pour tous
162 δ : C'est l'égalité que nous avons déjà déterminée [...]
163 β : Ici, tu as une chose pour tous [...]



Ils arrivent ainsi à deux équations et la suite de la résolution va être pilotée par la volonté d'exprimer x et y en fonction de z et t, pour se mettre dans le même cas que pour E. Encore une fois, une erreur de calcul vient perturber le processus. Pour éliminer y l'étudiante Bêta multiplie la deuxième équation par 2 et ajoute la première. Ensuite, pour éliminer x, elle multiplie la première par 3 et soustrait la seconde, puis dans la simplification par 2 de l'équation obtenue, oublie de diviser 10t par 2. D'où les expressions ci-après :



Les étudiants refont les calculs et trouvent l'erreur.



Les résultats sont égaux à une différence de signe près sur y (erreur faite dans le calcul relatif à E qui est, à son tour rectifiée). Ceci étant, l'étudiante Bêta dit : « Maintenant, il faut comprendre ce que nous avons fait ». Nous reproduisons ci-après la partie qui suit dans l'enregistrement.

237 β : Nous avons essayé [...] c'est comme tu as dit [...] d'écrire un vecteur
238 θ : correct
239 β : comme étant $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ et ainsi nous avons construit un système
240 δ : exactement, exactement
241 β : Nous avons construit un système [...] pour que ce système soit compatible [...] ces deux équations doivent être égales à zéro [...] et à partir de ces équations on a déterminé le paramétrique
242 δ : exactement, exactement [...]
243 δ : Bon, on passe à la question suivante
244 β : Combien de temps nous avons passé dans cette question ?
245 δ : 40 minutes
246 β : Nous avons commencé à 14h et 10 min et maintenant il est 14h et 50 min
247 δ : nous n'avons fait aucun intervalle
248 β : Il fallait passer 30 minutes dans cette question [...] Maintenant, nous avons besoin de 10 minutes [...] bon, maintenant il est 14h 50min
249 δ : Maintenant, on peut commencer dans la question suivante
250 β : Attends, nous n'avons pas formalisé [...] nous n'avons fait que montrer que les deux sous-espaces sont égaux
251 δ : Oui, nous avons montré

252 β : ça veut dire [...] on peut faire comme ça [...] Vois [...] Si x ∈ E [...] d'où, v s'écrit de cette façon [...] et si u ∈ F [...] d'où u s'écrit de cette façon aussi

Le travail des étudiants dans cette phase est à l'évidence piloté par l'étudiante Bêta. On peut penser que le fait qu'elle ait participé au premier dispositif expérimental lui confère ici un statut particulier. Il sera donc d'autant plus intéressant de comparer à ce travail en groupe, ce que sera la production de l'étudiant Delta à la maison, lorsqu'il travaillera de façon autonome et d'analyser aussi son vécu du travail en groupe tel qu'il transparaîtra dans l'entretien.

Visiblement, au début de l'entretien, cet étudiant Delta a du mal à se situer par rapport à l'énoncé proposé. Ensuite il entre dans la suggestion faite par l'étudiante Bêta de trouver une forme de représentation commune pour les deux sous-espaces pour prouver l'égalité, mais ceci le conduit à un passage brutal du système générateur de F à un ensemble d'équations, via l'association directe vecteur / équation. Ces difficultés dans l'appréhension des relations vecteurs semblent résister au moins partiellement à l'intervention de l'étudiante Bêta et au contre-exemple qu'elle lui propose. Qu'en sera-t-il dans son travail à la maison ?

La suite de la résolution se situe au niveau de la forme. Il s'agit de rapprocher la représentation donnée pour E des quadruplets associés à F, ce qui est mené à bien par Bêta, aux erreurs de calcul près sans difficulté particulière, mais s'arrête sur l'obtention d'une représentation paramétrique implicite tableau, sans que l'on arrive à une explicitation de vecteurs générateurs de E. Il s'agit ensuite de rapprocher la forme générique obtenue pour les vecteurs de F en fonction des αi de cette forme. Là encore les discussions menées dont nous avons ici reproduit un extrait montrent le niveau essentiellement formel auquel se situe le pilotage des transformations effectuées et le fait que l'écriture d'un système en x, y, z et t, ne s'impose pas de façon immédiate aux étudiants. On retrouve ici des traits de comportement observés dans le premier dispositif.

Même si, la résolution terminée, l'étudiante Bêta la récapitule en faisant apparaître les équations trouvées comme les conditions de résolubilité du système, les processus ici mis en oeuvre sont à l'évidence loin de ceux que nous avions imaginés dans l'analyse a priori. Les étudiants ne s'interrogent à aucun moment sur la dimension des sous-espaces E et F, les rapports entre E et F ne sont jamais traduits en termes d'inclusion réciproque. Il n'y a aucun contrôle exercé faisant intervenir l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique.

- la production individuelle de l'étudiant Delta

L'étudiant nous donne à voir la production suivante :

- Expression de l'appartenance au sous-espace F d'un vecteur u et traduction sous forme « implicite équation ».

1- Mostrar que os subespaços vetoriais E e F são iguais :

$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+2z-t=0 \text{ e } 2x+y-z+3t=0\}$

$F = [(5,5,-3,-6),(-4,-5,2,5),(1,0,-1,-1)]$

Resolução:

$u \in F \Leftrightarrow u=(x,y,z,t) = \alpha(5,5,-3,-6)+\beta(-4,-5,2,5)+\gamma(1,0,-1,-1)$

$\Rightarrow x = 5\alpha - 4\beta + \gamma \quad ; \quad z = -3\alpha+2\beta-\gamma$

$y = 5\alpha - 5\beta \quad ; \quad t = -6\alpha+5\beta-\gamma$

- Repérage du fait que le vecteur générateur (1,0,-1,-1) est combinaison linéaire de deux autres et simplification de la représentation " implicite équation " mais l'indépendance linéaire des deux vecteurs générateurs restants et la dimension du sous-espace F ne sont pas explicitées.

Podemos notar que o vetor $(1,0,-1,-1)$ é combinação linear dos outros dois, não sendo portanto necessário na expressão de um vetor genérico do subespaço F. Ficamos então, com:

$x = 5\alpha - 4\beta$; $y = 5\alpha - 5\beta$; $z = -3\alpha + 2\beta$; $t = -6\alpha + 5\beta$

- Substitution des expressions obtenues pour les composantes d'un vecteur générique de F dans les équations définissant E, pour vérifier l'égalité des deux sous-espaces. Ceci prouve en fait l'inclusion de F dans E et ne suffirait pour conclure que si l'égalité des dimensions des deux sous-espaces était établie, ce qui n'est pas le cas ici.

Se estes valores paramétricos de x, y, z e t satisfizerem o sistema homogéneo do subespaço E, teremos $E = F$. Verifiquemos:

I: $x-y+2z-t = 5\alpha - 4\beta - (5\alpha - 5\beta) + 2(-3\alpha+2\beta) - (-6\alpha+5\beta)$

$= 5\alpha - 5\alpha - 6\alpha + 6\alpha - 4\beta + 5\beta + 4\beta - 5\beta = 0$

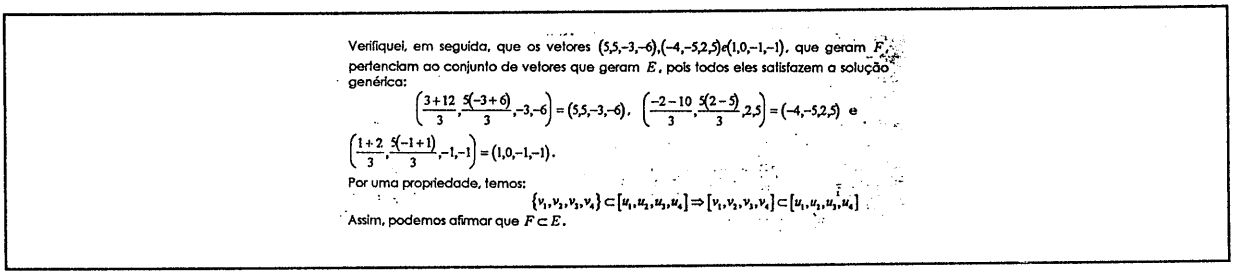
II: $2x+y-z+3t = 2(5\alpha-4\beta) + (5\alpha-5\beta) - (-3\alpha+2\beta) + 3(-6\alpha+5\beta) =$

$= 10\alpha + 5\alpha + 3\alpha - 18\alpha - 8\beta - 5\beta - 2\beta + 15\beta = 0$

Analyse : Comme on le voit, la résolution à la maison de l'étudiant Delta est différente de la résolution fournie par le groupe en classe, même si Delta utilise l'expression d'un vecteur générique de F. D'une part, il fait intervenir un élément nouveau : la dépendance linéaire des trois vecteurs générateurs, d'autre part il exploite tout à fait différemment la représentation obtenue, ne cherchant pas cette fois à obtenir des représentations identiques pour les deux sous-espaces. C'était l'étudiante Bêta qui était à l'origine de cette idée dans le travail en groupe, elle n'est pas reprise ici. Sa démarche le conduit à une conclusion abusive. Il sera intéressant dans l'entretien d'essayer de déterminer jusqu'à quel point l'étudiant est convaincu de bien avoir résolu le problème mais, qu'il le soit ou non, l'arrêt sur cette vérification nous semble aussi un symptôme de la difficulté à articuler de façon flexible les deux types de représentation, l'inclusion étant ici montrée dans le sens le plus accessible, selon l'analyse a priori. On notera de plus que, comme dans le travail en classe, on ne trouve aucune considération sur les dimensions. Dans ces conditions, le théorème de l'inclusion et de la dimension ne peut être utilisé. En revanche, l'étudiant Delta ne commet pas dans son travail à la maison l'erreur d'association directe vecteur / équation qui avait marqué le début du travail en classe. D'emblée, l'appartenance à F est correctement exprimée.

- la production individuelle de l'étudiante Bêta

L'étudiante Bêta, dans son travail à la maison, comme l'on pouvait s'y attendre, nous donne à voir une démarche plus proche de la résolution en classe mais qui en diffère cependant sensiblement, en ce que le problème n'est pas résolu en termes d'obtention de représentations identiques pour les deux sous-espaces mais de double inclusion. Elle détermine ainsi d'abord une représentation paramétrique "implicite tableau" du sous-espace E et l'utilise, ce qui n'avait pas été fait en classe, pour montrer soigneusement que tout vecteur de F appartient à E.



Verifiquei, em seguida, que os vetores $(5,5,-3,-6),(-4,-5,2,5)$ e $(1,0,-1,-1)$, que geram F, pertenciam ao conjunto de vetores que geram E, pois todos eles satisfazem a solução genérica:

$\left(\frac{3+12}{3}, \frac{5(-3+6)}{3}, -3, -6\right) = (5,5,-3,-6)$, $\left(\frac{-2-10}{3}, \frac{5(2-5)}{3}, 2, 5\right) = (-4,-5,2,5)$ e $\left(\frac{1+2}{3}, \frac{5(-1+1)}{3}, -1, -1\right) = (1,0,-1,-1)$.

Por uma propriedade, temos:

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset [u_1, u_2, u_3, u_4] \Rightarrow [v_1, v_2, v_3, v_4] \subset [u_1, u_2, u_3, u_4]$$

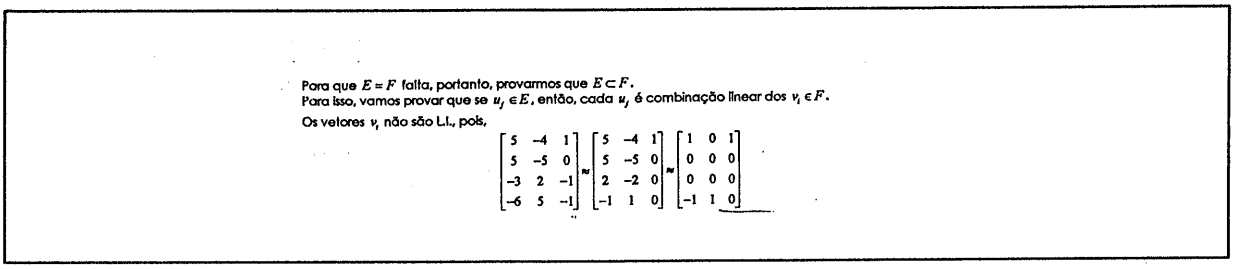
Assim, podemos afirmar que $F \subset E$.

Elle utilise ensuite la méthode de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées des vecteurs générateurs de F disposés en colonnes. Elle se retrouve avec le tableau $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et conclut simplement que les vecteurs ne sont pas linéairement indépendants. Visiblement non satisfaite,

elle abandonne cette piste pour montrer directement que le premier vecteur générateur de F est combinaison linéaire des deux autres (système résolu par substitution).

Elle transforme ensuite la représentation paramétrique « implicite tableau » de E en « explicite tableau » pour en déduire 2 vecteurs de base de E.

Elle montre ensuite que ces deux vecteurs de base de E sont combinaison linéaire des vecteurs de base de F, puis conclut à l'inclusion E⊂F et à l'égalité.


Para que $E = F$ falta, portanto, provarmos que $E \subset F$.
Para isso, vamos provar que se $u_j \in E$, então, cada u_j é combinação linear dos $v_i \in F$.
Os vetores v_i não são L.I., pois,

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -6 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Analyse : Il est intéressant de noter les différences ici introduites et le commentaire que fait l'étudiante, en se demandant le sens qu'elle donne au mot « formel ». Visiblement, le plus formel renvoie à une démonstration qui ne se base pas seulement sur la reconnaissance formelle de l'identité des représentations mais exploite le travail sur les représentations pour montrer les deux inclusions. Ceci peut laisser penser que le travail effectué en classe par le groupe n'a pas satisfait complètement l'étudiante Bêta, même si c'est elle qui l'a piloté. Dans le travail mettant en jeu l'articulation des points de vue, à travers les transformations de représentations, on note l'importance prise par les tableaux, comme dans l'expérimentation relative au premier dispositif, avec une manipulation lignes / colonnes non justifiée. Mais que finalement elle n'arrive pas à interpréter, sans doute du fait qu'elle a obtenu deux lignes nulles mais raisonne sur les vecteurs colonnes qui eux ne sont pas nuls. On note aussi qu'en dépit des changements introduits par rapport à la résolution en classe, il n'y a pas de recours à un raisonnement portant sur la dimension : les deux inclusions font l'objet d'une démonstration directe.

- l'entretien de l'étudiant Delta

Cet entretien présente un caractère plus général que ceux étudiés dans le premier dispositif, comme nous l'avons déjà annoncé. Les questions posées essaient d'amener l'étudiant à poser lui-même ses propres difficultés. Nous allons utiliser des caractères gras pour les interventions et les questions posées par l'enseignante et pour l'étudiant des caractères normaux.

1 Je suis Delta et j'ai travaillé en groupe avec Bêta et Téta.
2 Bon, euh ! Le problème est que, dans le travail en groupe, nous n'avons pas trouvé facilement la solution [...]
3 Nous avons essayé de construire des systèmes euh! [...] d'échelonner jusqu'à un certain moment, [...] jusqu'à ce que nous ayons trouvé une solution [...]
4 Euh ! Nous avons fait en groupe et Bêta était celle qui écrivait [...]

5 Bon, lors du travail à la maison, j'ai essayé de reproduire ce que nous avions fait en classe, n'est-ce pas ? [...] j'avais compris et donc j'ai essayé plusieurs fois de trouver une même expression (il se réfère à la représentation d'un vecteur générique sous la forme "implicite tableau") pour les deux sous-espaces.

6 En regardant la résolution en groupe, je me suis aperçue que vous aviez caractérisé l'espace vectoriel E par une représentation cartésienne et que vous aviez fait le passage à une représentation paramétrique. Pourquoi avez-vous transformé les représentations pour montrer l'égalité des deux sous-espaces ?

7 Euh ! Nous avons pensé euh ! que [...] En réalité, nous n'avons pas pensé que nous étions en train de représenter paramétriquement, n'est-ce pas ? Nous avons pensé à transformer ce qui était donné dans une forme qu'on pouvait mieux visualiser, n'est-ce pas ? [...] et ainsi nous avons pensé que c'était à travers cette représentation que nous avons trouvé [...] euh ! un vecteur générique en fonction d'un paramètre t.

8 Euh ! Donc nous avons pensé à faire la même chose pour le sous-espace F, n'est-ce pas ? [...] qui était donné par les générateurs [...] d'où, nous avons fait la même chose [...] nous avons construit un système [...] nous l'avons échelonné [...] euh ! nous avons trouvé aussi une expression cartésienne, n'est-ce pas ? [...] peut-être on pouvait déjà comparer et montrer qu'ils étaient égaux [...] je ne sais même pas si nous n'avons pas fait ça [...]

9 Non, ça ne serait pas égal, non ?

10 Mais, ici nous avons pensé à travailler avec cette expression cartésienne jusqu'à ce qu'on détermine une expression paramétrique, n'est-ce pas ?

11 Je pense que c'était le cheminement, ce qui semblait le plus simple à visualiser.

13 La même représentation : Tu veux dire la même représentation paramétrique ? Est-ce que c'est la même ?

14 $(\frac{-z-2t}{3}, \frac{5z-5t}{3}, z, t)$ en fonction de [...] euh ! deux paramètres, n'est-ce pas ? [...] ça veut dire dimension 2 et [...]

15 L'étudiant s'arrête et l'enseignante pose une autre question

16 Tu as dit que tu n'as pas réussi par le même cheminement à déterminer une solution dans le travail à la maison

17 Oui, à la maison j'ai essayé [...] euh ! j'ai eu besoin d'un certain temps, n'est-ce pas ? J'ai pas pu le faire le lendemain [...] D'où, j'ai essayé de me rappeler euh ! de suivre le même cheminement [...] mais, comme je n'ai pas réussi [...] j'ai trouvé un autre moyen, n'est-ce pas ?

18 J'ai construit une expression de chaque [...] euh ! coordonnées d'un vecteur générique du sous espace F, n'est-ce pas ?

19 J'ai appelé un vecteur générique (x, y, z, t) de F et j'ai obtenu une expression euh ! [...] en fonction de 3 autres paramètres, n'est-ce pas ? [...] un vecteur générique du sous-espace F

20 Euh! [...] là, comme un de ces vecteurs était combinaison linéaire des autres, je l'ai éliminé, n'est-ce pas ? [...] donc j'ai écrit un vecteur générique de ce sous-espace en fonction de deux paramètres

21 Ensuite j'ai remplacé x, y, z et t en fonction de α et β dans l'équation de E et j'ai remarqué que c'était correct [...] D'où, j'ai pensé que c'était une justification de E = F, non ?

22 Pour moi, ce n'est pas égal, mais [...]

Analyse : Cet entretien nous donne des informations à la fois sur la façon dont l'étudiant Delta a vécu le travail en classe et sur son travail à la maison qui n'étaient pas directement déductibles des autres sources dont nous disposions. Pour le travail en classe, la stratégie d'identification via les représentations est bien identifiée et elle apparaît comme une stratégie où les choix sont pilotés par la visualisation. Il ne s'agit pas de passer d'une représentation cartésienne à une représentations paramétrique mais de trouver des formes

qui permettent de mieux voir les rapports entre les deux sous-espaces. L'étudiant s'interroge a posteriori sur la possibilité de voir ces rapports, directement, à partir des équations de F (8-9) et semble conclure négativement. Tout ceci bien sûr se fait avec un certain flou qui transparaît bien dans le langage de Delta.

En ce qui concerne le travail à la maison, nous apprenons que l'étudiant Delta a essayé de reproduire la même stratégie mais sans y parvenir et que c'est ce qui l'a conduit à la solution présentée. On voit également qu'il n'est pas très sûr d'avoir vraiment résolu le problème (21-22), même si l'enregistrement sur ce point reste peu explicite. Mais, visiblement, pour cette tâche qui n'est pas routinière, il ne dispose pas de moyens plus élaborés. La vérification faite nous semble donc a posteriori plus à voir comme une vérification se situant au niveau sémiotique, dans la continuité du travail effectué en classe, qu'une vérification se situant dans une démarche de preuve d'inclusion.

B) LA RESOLUTION DE LA QUESTION 2

***Question 2** : Soit l'application linéaire f de R^4 dans R^3 qui à chaque élément (x, y, z, t) de R^4 associe l'élément (x + y + 3z + 10t, x + 2y +z + 4t, x + 5z + 16t) de R^3.*

a) Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f;

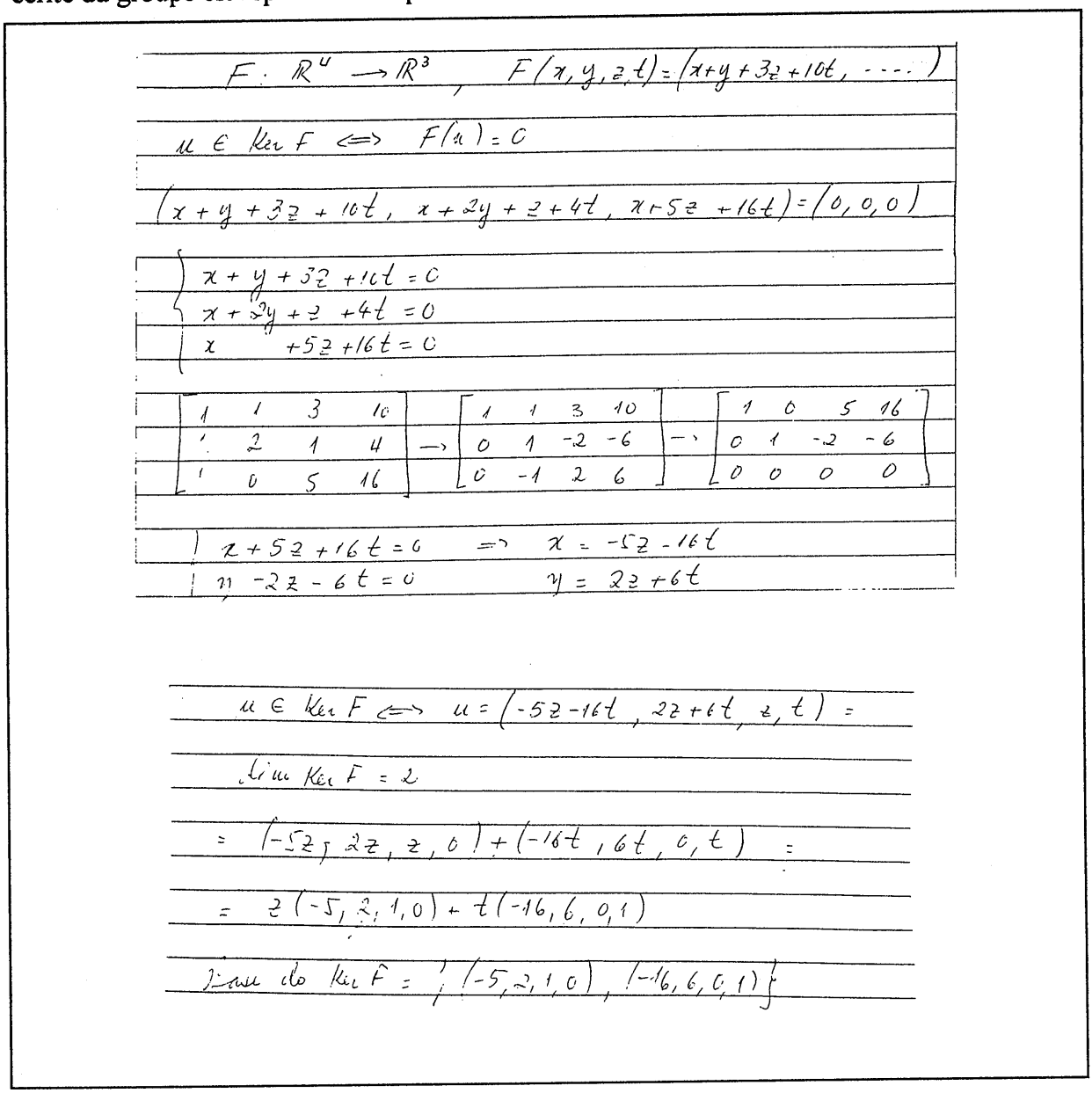
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.

Dans la question 2, les étudiants examinent au départ le travail à faire. Delta, qui lit la question ne semble pas a priori la trouver routinière mais, une fois de plus, l'étudiante Bêta, qui, de plus, a déjà résolu le même exercice dans la première expérimentation, prend les rênes. Elle sait visiblement comment faire pour déterminer la dimension et une base du noyau et pense que cela va être plus difficile pour trouver une représentation cartésienne de l'image.

7 L'étudiant Delta lit la question jusqu'à "déterminer la dimension du noyau et de l'image"
8 δ : Je ne sais pas faire ça, non plus
9 β : C'est facile. Vois [...] Euh ! Un vecteur u qui appartient au noyau de f [...] ça signifie que f(u) = 0
10 δ : envoie sur zéro [...] f(u) = 0 [...] Parfait
11 β : f(u) = 0. D'où, euh ! on prend [...]
12 δ : Comment on écrit [...] Ker
13 β : Ker
14 δ : Ker (f)
15 β : D'où, on va prendre ça et envoyer en zéro
16 δ : égaler à zéro [...] correct [...] et résoudre le système
17 β : Et ainsi déterminer la dimension [...] et la base aussi [...] on détermine aussi la base
18 δ : Euh ! Euh !
19 β : Maintenant, une représentation cartésienne de l'image [...] ça va être plus difficile.

La détermination du noyau est menée par l'étudiante Bêta qui est toujours celle qui écrit visiblement, l'étudiant Delta semblant, lui, pressé de passer à l'image. La technique est celle d'échelonnement du tableau des coefficients du système, bien explicitée dans l'enregistrement

et le passage à une représentation paramétrique implicite puis explicite du noyau, l'identification des vecteurs de base ne pose pas de problème. La dimension est affirmée sur la base de la représentation implicite, comme allant de soi. La partie associée de la production écrite du groupe est reproduite ci-après.

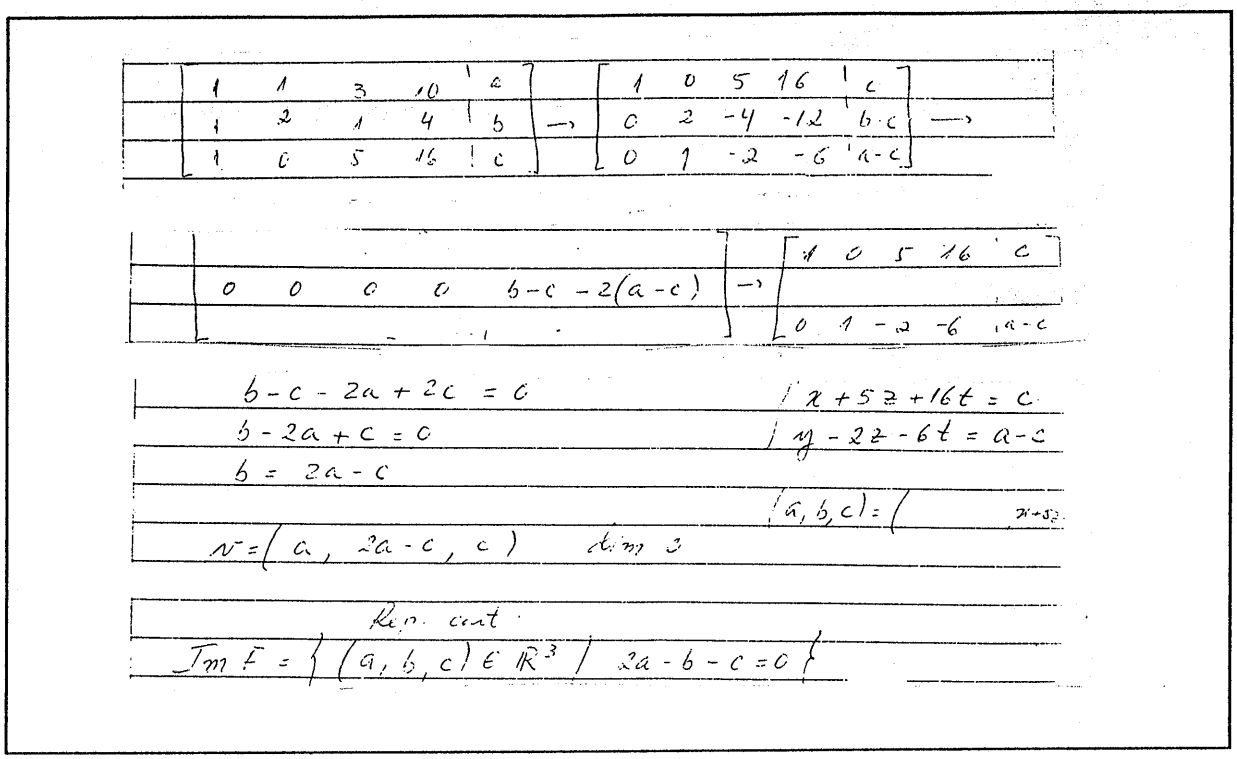


Le groupe passe ensuite à l'image. L'étudiant Delta évoque le théorème de la dimension du noyau et de l'image mais s'interroge sur ses conditions de validité. Les autres ne l'aident pas réellement et ils abandonnent finalement cette piste au profit d'une résolution directe, proposée encore une fois par l'étudiante Bêta mais qui cette fois ne sait pas aussi bien où elle va.

34 δ : il ne manque que l'image
35 β : l'image [...] Maintenant, l'image [...] un vecteur v appartient à l'image de f
36 δ : de f
37 β : si, et seulement si [...] il existe u appartenant à $\mathbf{R}^4$ tel que f(u) = v. Correct [...] s'il existe u

38 δ : Bon, l'image [...] on peut déterminer directement [...] l'image, on peut déterminer directement [...] La dimension [...] la dimension du noyau plus la dimension de l'image [...] Euh ! [...] mais ce n'est pas vrai parce que c'est une application et ça on ne peut l'appliquer que pour un opérateur [...] c'est-à-dire quand c'est de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^4$ [...] la dimension du noyau plus la dimension de l'image est [...] la dimension de l'ensemble [...] mais il faut qui ça soit de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^4$ [...] dans ce cas, dans $\mathbf{R}^3$ [...] ce n'est pas vrai [...]
39 δ : Il faut que ceci soit un opérateur linéaire, non ?
40 β : Il faut [...]
41 δ : Bizarre ! [...] application linéaire
42 β : Et une transformation ?
43 δ : c'est la même chose que transformation
44 β : Et la fonction [...] Qu'est-ce que c'est la fonction linéaire ? [...] Nous voulons déterminer la dimension de l'image [...] la dimension de l'image [...]
45 δ : Il faut trouver une formule, non ? Il n'y a pas une formule, une autre ? [...] le théorème du noyau et de l'image qui est vrai pour [...] il est vrai non seulement pour les opérateurs [...] c'est général [...] mais, je ne me rappelle pas [...]
46 β : la dimension de l'image [...] elle ne dépasse pas 3, n'est-ce pas ? [...] parce que le contre - domaine est 3
47 δ : il y a une formule, mais je ne me rappelle pas [...]
48 β : Les éléments de l'image [...] on veut la dimension de l'image
49 θ : il avait une formule, non ?
50 β : la dimension du contre - domaine est égale à 3
51 δ : Je ne me rappelle pas
52 β : Ici, on fait a, b, c égal à ça
53 δ : $a = x + y + 3z + 10t$
54 β : ça dépendra de combien ? [...] on va écrire a, b, c [...] $(x + y + 3z + 10t, x + 2y + z + 4t, x + 5z + 16t)$
55 δ : oui, mais [...]
56 β : c'est terminé
57 δ : c'est terminé
58 β : D'où, on fait $x + y + 3z + 10t = a$, $x + 2y + z + 4t = b$, $x + 5z + 16t = c$
59 θ : D'où, on fait de la même façon que nous avons fait dans l'autre
60 β : Je pense que ça a un peu de sens [...] ce que je vais vérifier c'est si je perds quelque chose, c'est-à-dire si a est fonction de b ou zéro, etc. [...] Si je ne suis pas capable de faire [...] Si je ne perds aucune équation [...] la dimension est 3
61 δ : Euh ! Euh !

Suit la mise en tableau et l'échelonnement suivant la technique qui est visiblement familière à l'étudiante Bêta. Ils arrivent ainsi à la condition $b=2a-c$ qui est d'abord exploitée pour mettre le vecteur v initialement introduit sous forme paramétrique implicite en fonction de a et c et conclure sur la dimension de l'image.



L'identification de l'équation obtenue entre a, b et c comme représentation cartésienne de l'image va ensuite poser problème car l'étudiante Bêta voit, semble-t-il, une contradiction au fait de n'obtenir qu'une équation alors qu'il y a deux variables arbitraires a et c. Nous reproduisons intégralement le passage correspondant de l'enregistrement du groupe qui met bien en évidence les difficultés d'articulation des deux points de vue cartésien et paramétrique que rencontrent ces étudiants, difficultés insoupçonnables à la seule lecture de leur production écrite.

74 β : la base du noyau on a déjà déterminé [...] Maintenant, une représentation cartésienne de l'image serait comme ceci [...]
75 β : Im f = {(a, b, c) ∈ $\mathbf{R}^3$ / 2a - b - c = 0}
76 δ : représentation cartésienne
77 θ : oui
78 β : Vois [...] tu sais ce que je trouve un peu bizarre [...]
79 δ : Euh !
80 β : Si nous avons deux variables arbitraires [...] la dimension ne sera pas égale [...]
81 δ : 2, parce que l'autre variable est fonction de ces deux là
82 θ : Et si tu fais en fonction de a et c
83 β : Si c'était comme ça (a, b, a - b) [...] la dimension ne serait pas 2
84 δ : (a, b, a - b) ?
85 β: oui
86 θ : oui
87 β : ce n'est pas possible [...] parce que pour l'ensemble il y a trois coordonnées [...] chaque coordonnées arbitraire va diminuer la dimension de 1 [...] je ne comprends pas pourquoi une seule relation et non deux [...] lorsque nous avons déterminé, ici, dans l'autre [...] ici, nous n'avons pas parlé de dimension [...] mais, par exemple, ce sont 4 coordonnées et on a deux arbitraires [...] la dimension est 2 [...] mais, si ce sont 3 coordonnées et que deux sont arbitraires [...] la dimension est 1
88 δ : non, je pense que ce n'est pas comme ça

89 β : parce que ça va donner ça [...] ça va donner un système comme celui-ci [...] ça veut dire que nous avons ici 4 colonnes et 2 équations [...] c'est cohérent [...] deux sont arbitraires [...] Je me trompe ?
90 δ : Si tu as deux équations [...] ça veut dire que tu a deux variables arbitraires [...] d'où, la dimension est 2, c'est comme ça que j'ai compris [...]
91 β : Par exemple : ceci c'est un plan [...] l'équation d'un plan [...]
92 δ : Et la dimension d'un plan est 2
93 β : maintenant, par exemple ici [...] lorsque ça donne ce sous-espace [...] ici, ce sont deux plans [...]
94 δ : Euh !
95 β : non, non ce ne sont pas deux plans [...] la dimension ici est 4
96 δ : ce sont des hyperplans
97 β : hyperplans !
98 δ : Tu ne peux pas faire l'image (l'étudiant se réfère à un dessin) [...] Tu ne peux pas faire une visualisation [...]
99 β : Donc, l'intersection sera [...] l'intersection sera un plan [...]
100 δ : l'intersection doit être un plan, non ? [...] S'ils sont dans un espace de dimension 4 [...] Si on pense à deux plans [...] l'intersection est une droite [...] Maintenant, ici [...] c'est une intersection ou une réunion ? [...] ce n'est pas une intersection [...]
101 β : il faut satisfaire les deux en même temps [...]
102 δ : s'il faut satisfaire les deux en même temps [...] c'est une intersection [...] donc, je pense que c'est cohérent [...] Ici, la dimension est 3, n'est-ce pas ? [...] Nous ne l'avons pas déterminée, mais c'est ça, n'est-ce pas ? [...] parce que j'ai compris [...] non, c'est 2 aussi [...] c'est aussi 2 [...] Est-ce que c'est ça ton doute ? [...] peut-être que nous ne pouvons pas faire cette analogie entre $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$
103 β : Qu'est-ce que tu dirais s'il n'y avait qu'une arbitraire ?
104 δ : dimension 1. Correct ! Et si aucune ne pouvait être écrite en fonction de l'autre, la dimension serait 3.
105 β : Ici, ça signifie deux droites [...] ça veut dire, par exemple [...] dimension 1, une droite [...] le c en fonction, par exemple [...] tu veux voir (a, b, a + b) [...] ça veut dire que le c est fonction des deux autres coordonnées [...] si j'écris [...]
106 δ : Mais, ici aussi nous avons b en fonction de deux coordonnées [...]
107 β : Oui, c'est vrai [...] ce n'est pas ça !
108 δ : Tu aurais [...] Tu [...]
109 δ : la dimension 1, ce serait (a, 2a, a+1) par exemple [...]
110 β: Ainsi la dimension est 1[...]
111 δ : Ça veut dire qu'il ne dépend que de a [...] la droite [...] je pense que c'est comme ça qu'on peut voir dans $\mathbf{R}^3$, mais dans $\mathbf{R}^4$ on ne peut pas voir [...]
112 β : Bon [...] nous avons fait cette question en 20 minutes
113 δ : C'est bien, n'est-ce pas ? [...] je n'avais pas l'habitude de faire des exercices de ce type, ceux du livre de Callioli sont plus élémentaires [...] On passe à la troisième, maintenant ce sont les concepts [...]

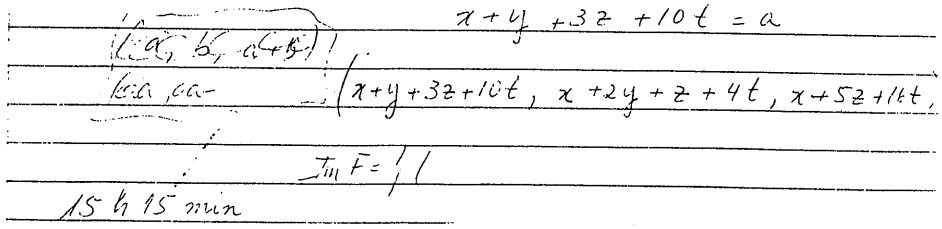
Contrairement à ce que l'on pourrait penser la question de la représentation cartésienne va rebondir une fois de plus, parce que l'étudiante Bêta pose une question :

114 β : Attends un peu ! Ici, est-ce que cette représentation cartésienne il ne faut pas l'écrire en x, y, z ?

Suit de nouveau une assez longue discussion qui va les conduire à réexprimer a, b et c en fonction de x, y, z et t : leur point de départ. L'étudiant Delta pense qu'il y a là un simple problème de notation mais a du mal à imposer sa position.

119 δ : Donc, ici ce n'est qu'une question de notation
120 β : Que ça ? [...]
121 δ : Oui, nous avons (x, 2x - z, z) [...] ce n'est qu'une question de notation
122 β : Par exemple, le vecteur u qui appartient à $\mathbf{R}^4$ a les coordonnées suivantes. Si on veut exprimer le vecteur (a, b, c) [...] ça sera [...] le c est x + 5z + 16 t et après le a [...]
123 δ : en fonction de x, y, z
124 β : Pour déterminer le a j'additionne les deux [...] Laisse-moi voir comment je fais ça [...]
125 δ : C'est simple, si au lieu de a, b et c on considère x, y, z on obtient le même résultat [...] Seulement [...]
126 β : Non, mais moi je ne vais pas changer
127 δ : Euh !
128 β : Je ne vais pas changer ici [...] on va faire des confusions
129 δ : Non, nous n'allons pas faire des confusions [...] Mais, la représentation cartésienne peut être comme ça [...]
130 β : x + y + 3z + 10t, si on additionne on a [...] D'où, à la place de a, je considère ça, à la place de c, je considère ça et à la place de b [...] D'où, ça sera comme ça [...] à la place de b et je considère 2a - c, d'où (x + y + 3z + 10t) + (-x +2y +z + 4t) [...] après je considère le c (x + 5z +16t). Euh !

qui se traduit au niveau de la production écrite par les lignes suivantes sur lesquelles s'achève la production du groupe :



L'étudiant Delta reste dubitatif. Il semble réussir à convaincre l'étudiante Bêta mais la résolution reste cependant inachevée à l'écrit.

131 δ : Tu penses que c'est ça la représentation cartésienne [...]
132 β : J'ai pensé que c'était ceci [...] La représentation cartésienne est comme ça Im f est [...] non, je ne sais pas [...]
133 δ : Mais, c'est parce qu'ici [...] Vois [...] Ton a sous-entend ceci [...] c'était ça que tu as fait ici [...] D'où, c'est la même chose [...]
134 β: c'est vrai, c'est la même chose [...]
135 δ : A mon avis, c'est la même chose [...] Le doute, c'est de savoir si la représentation cartésienne peut être comme ça, ,n'est-ce pas [...] en utilisant a, b et c ?
136 β : Mais, je pense que c'est correct [...]

137 δ : Moi aussi [...] parce qu'en réalité si tu penses comme ça [...] de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ [...] ici, j'ai (x, y, z, t) [...] ici j'ai (x, y, z) aussi [...] d'où, au moment de définir on le change parce que sinon on va faire des confusions avec par exemple les deux x, n'est-ce pas ? [...] Mais, en réalité, ces coordonnées sont les coordonnées de $\mathbf{R}^3$ [...]
138 β : C'est logique [...] ça veut dire que la relation entre les coordonnées des éléments de l'image est celle-ci.
139 δ : celle-ci.

Analyse : Cet épisode qui concerne une question que l'étudiante Bêta avait déjà traitée dans l'entretien précédent montre clairement ce que savent faire les étudiants mais aussi les difficultés qu'ils rencontrent. Rappelons que, dans le premier dispositif, le groupe dont faisait partie l'étudiante Bêta avait eu des difficultés à passer d'une représentation paramétrique implicite - tableau du noyau à l'identification de vecteurs de base et n'avait pas abordé ensuite les questions relatives à l'image. Dans son travail à la maison, l'étudiante Bêta avait déterminé la dimension du noyau par réduction du tableau des coefficients du système d'une façon que l'entretien avait montré erronée puis retravaillé correctement le système pour obtenir une base du noyau. Elle avait utilisé le théorème du noyau et de l'image pour en déduire la dimension de l'image, avait ensuite obtenu l'équation cartésienne de l'image en l'identifiant clairement dans l'entretien comme condition de compatibilité du système. Elle avait également transformé l'équation en a, b, c en une équation en x, y et z, en expliquant qu'elle l'avait fait pour généraliser.

Dans ce nouveau travail en groupe, on ne note pas de dérapage dans la détermination de la dimension du noyau, malgré la même utilisation des tableaux de nombres, ceci étant peut-être dû au fait que la dimension n'est explicitée qu'après explicitation de la représentation paramétrique en fonction de z et t. Comme dans la question précédente, c'est la présence des deux paramètres qui légitime la dimension donnée, sans plus de justification. Le passage aux vecteurs de base du noyau semble ensuite aller de soi mais leur indépendance n'est pas non plus soulignée.
En revanche, les étudiants vont rencontrer des difficultés sérieuses à déterminer la dimension de l'image et l'étudiante Bêta qui avait pourtant utilisé le théorème dans son travail à la maison la fois précédente, n'aide pas l'étudiant Delta à répondre aux questions qu'il se pose. On a plus l'impression qu'elle essaie de se souvenir de l'action mise en jeu (52-60), ce qui la conduit d'ailleurs assez rapidement à une équation cartésienne de l'image, l'obtention du résultat étant cependant moins assurée que dans l'entretien du premier dispositif : 74. « Maintenant une représentation cartésienne de l'image serait comme ceci. » Un conditionnel qui annonce peut-être le doute déjà présent sur les questions de dimension. Les explicitations de l'étudiante Bêta qui suivent la formulation de ce doute montrent le flou dans lequel elle se débat en ce qui concerne les relations entre nombre d'équations, nombre de paramètres, avec une prise de position a priori contradictoire avec celle qui a servi dans le raisonnement sur le noyau mais qui nous

sur le sens de la conclusion : « dimension 2 » qui avait été donnée au vu des deux paramètres. On voit aussi ses essais pour se raccrocher à une interprétation géométrique et le peu d'aide qu'ils lui apportent. L'étudiant Delta, tout en mettant en doute les analogies entre $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$, ne l'aide pas vraiment à clarifier la situation. Et finalement, on a l'impression que la discussion se clôt sans que la question soit clairement résolue, le seul point à peu près établi semblant être que quelle que soit la dimension de l'espace, quand il n'y a qu'un paramètre, on a une droite et la dimension est 1 (avec cependant un mélange affine / vectoriel dans l'exemple donné), au moins pour l'étudiant Delta.

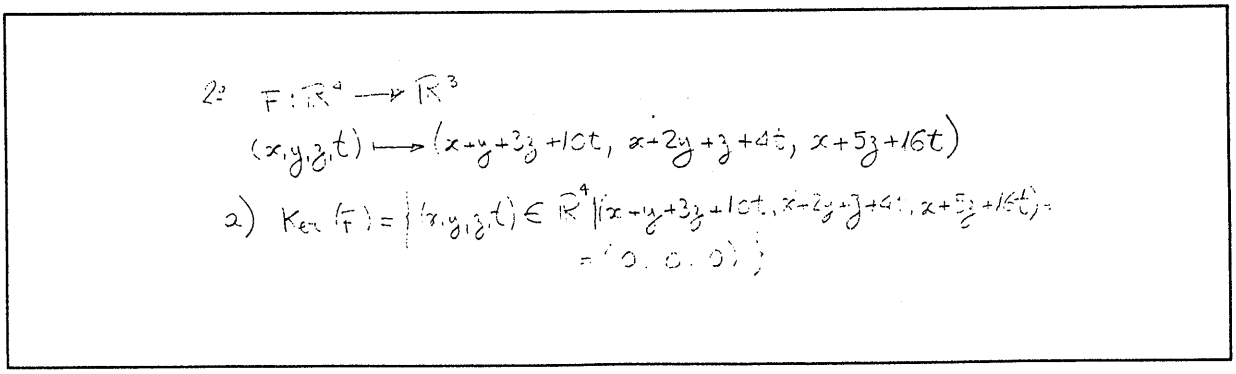
La dernière partie, qui correspond à un rebondissement inattendu nous montre bien les attaches sémiotiques de la notion de représentation cartésienne. Même si l'étudiant Delta semble moins dépendant des notations usuelles, il a du mal à développer une argumentation claire et convaincante, en se raccrochant au sens de la représentation cartésienne ; il en reste à un problème de notation.

Encore une fois, nous pouvons voir que si certaines techniques sont disponibles, ce qui pose problème, c'est l'interprétation et la justification des résultats qu'elles permettent d'obtenir. Le maître mot semble l'échelonnement de tableaux et ensuite on se raccroche à divers indices pour essayer d'exploiter ce que l'échelonnement a fourni.

Nous voudrions enfin souligner ce que l'enregistrement du travail en classe nous apporte par rapport aux seules productions écrites où les processus de résolution tendent à s'effacer, ne nous donnant à voir, et le fait qu'il s'agisse d'algèbre n'est peut-être pas étranger à ces caractéristiques, que des calculs.

- La production individuelle de l'étudiant Delta

Si l'on se réfère à la production écrite de l'étudiant Delta, après avoir explicité la définition du noyau de l'application F, l'étudiant écrit le système associé qu'il échelonne, en marquant explicitement l'équivalence des systèmes successifs. Il conclut ensuite que le système est indéterminé (moins d'inconnues que d'équations) et que la dimension est égale au nombre d'inconnues moins le nombre d'équations et il précise que ceci signifie que « les quatre coordonnées du noyau peuvent être exprimées en fonction de deux d'entre elles ». A titre d'exemple, il exprime alors x et y en fonction de z et t.



$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & + y & + 3z & + 10t & = 0 \\ x & - 2y & - z & + 4t & = 0 \\ x & & - 3z & + 15t & = 0 \end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{rrrrl} x & + y & + 3z & + 10t & = 0 \\ & - y & + 2z & + 6t & = 0 \\ x & & + 3z & + 15t & = 0 \end{array}\right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{\begin{array}{l} x + y + 3z + 10t = 0 \\ -y + 2z + 6t = 0 \end{array}\right.$$

Como as duas equações já estão na forma escalonada, o sistema é indeterminado (mais incógnitas que equações). A dimensão será o número de incógnitas menos o número de equações: $4 - 2 = 2$.

Isto significa que podemos expressar as quatro coordenadas do vértice em função de duas delas. Por exemplo:

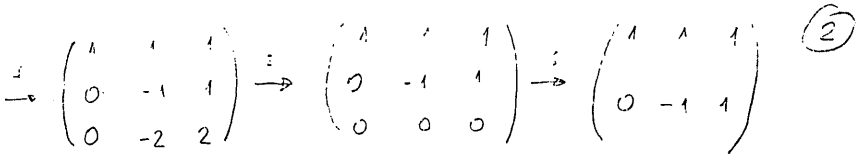
$y = 2z + 6t \Rightarrow x + 2z + 6t + 3z + 10t = 0 \Rightarrow x = -5z - 16t$

Logo: $\dim \mathrm{Ker}(F) = 2$

Il passe ensuite à la détermination de la dimension de l'image. Après une écriture de l'image, incorrecte sur le plan ensembliste mais mettant en évidence les vecteurs de l'image comme combinaison linéaire des vecteurs images de la base canonique dans le registre tableau, ces vecteurs sont disposés en ligne dans un tableau, selon la méthode présentée dans les manuels brésiliens déjà cités et le tableau est échelonné par application de la méthode de Gauss sur les lignes, les différentes transformations effectuées étant numérotées et décrites et les lignes nulles étant supprimées au fur et à mesure. L'étudiant conclut que les deux vecteurs restant forment une base de Imf et que la dimension de ce sous-espace est donc égale à 2.

$$\mathrm{Im}(F) = x(1,1,1) + y(1,2,0) + z(3,1,5) + t(10,4,15)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 10 & 4 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



(2)

1. Primeira linha vezes segunda linha no lugar da segunda linha
2. " " vezes (-5) + 4ª linha, no lugar da 4ª linha
3. 2ª linha vezes (-3) + 4ª linha, no lugar da 4ª linha
4. 1ª linha vezes (-3) + 3ª linha, no lugar da 3ª linha
5. 2ª linha vezes (-2) + 3ª linha, no lugar da 3ª linha
6. Eliminando a 3ª linha (vetor nulo) ficamos com vetores na forma escalonada, formando então, uma base de $Im(F)$.

$\dim Im(F) = 2$

L'étudiant passe visiblement ensuite à la partie b de la question. Il détermine une base correcte du noyau à partir de la forme "implicite tableau", exactement comme dans le travail en classe, sans semble-t-il éprouver le besoin de justifier davantage le passage.

En ce qui concerne l'image, il donne comme base les deux vecteurs lignes du tableau réduit, puis adapte à ces deux vecteurs l'expression qu'il avait donnée pour Im(F). Il s'agit en fait, exprimée incorrectement, d'une représentation paramétrique, les deux paramètres étant notés x et y. Mais elle est baptisée représentation cartésienne et traduite ensuite de la forme explicite-tableau à la forme implicite-tableau. Ceci n'est accompagné d'aucune justification ou explication.

b) $Ker(F) = (-5z - 16t, 2z + 6t, z, t) =$

$= z(-5, 2, 1, 0) + t(-16, 6, 0, 1)$

Logo, uma base de $Ker(F)$ é: $\{(-5, 2, 1, 0), (-16, 6, 0, 1)\}$

Uma base da imagem é: $\{(1, 1, 1), (0, -1, 1)\}$

Representação Cartesiana: $Im(F) = x(1, 1, 1) + y(0, -1, 1) =$

$= (x, x - y, x + y)$

Analyse : Le travail écrit de l'étudiant Delta concernant le noyau suit le fil de la résolution en classe au niveau technique. On notera en revanche l'intégration par l'étudiant à cette résolution de justifications qui n'étaient pas apparues dans le travail en classe. Ces justifications portent sur l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans le cadre des systèmes linéaires et elles sont soigneusement détaillées, même si le théorème de Rouché n'est pas explicitement cité. Nous sommes tentée de faire l'hypothèse que la déstabilisation introduite par l'étudiante Bêta, lors du travail en classe, et non résolue de façon satisfaisante, a conduit l'étudiant Delta, lors de son travail à la maison, à chercher à éclaircir ce point des rapports entre nombre d'équations, nombre d'inconnues, nombre de paramètres et dimension, en cherchant dans les manuels. Et c'est justement dans ce cadre des systèmes que l'articulation est présente dans les deux manuels brésiliens familiers à ces étudiants.

Le passage à une base du noyau ensuite ne semble pas mériter de justification particulière à ses yeux, en dehors de la suite de réécritures nécessaires pour mettre en évidence les deux vecteurs de base.

En ce qui concerne la détermination de la dimension de l'image, après la traduction de l'expression de l'application F qui met en évidence les quatre vecteurs à considérer, on note de nouveau un soin minutieux dans la description des transformations effectuées pour échelonner le tableau de nombres mais le pourquoi de cette démarche n'est lui, absolument pas détaillé, comme s'il s'agissait là d'un travail routinier. En revanche le passage à la représentation cartésienne est plus inattendu. L'étudiant Delta a ici directement travaillé sur les tableaux de nombres à partir de vecteurs générateurs du noyau, il ne dispose donc pas, comme c'était le cas dans le travail en groupe, d'une équation candidate à être la représentation cartésienne. Déterminer cette équation constitue une nouvelle tâche dans laquelle il ne se lance pas. Peut-être du fait de la discussion lancée en classe par l'étudiante Bêta, alors même que lors du travail en classe il nous avait paru en réserve par rapport à la position de Bêta, il semble confondre représentation cartésienne et représentation paramétrique avec des notations cartésiennes pour les variables, à savoir x et y. Il sera intéressant de voir si l'entretien arrivera à éclaircir sa position sur ce point et le rôle joué à ce niveau par le travail en groupe.

- La production individuelle de l'étudiante Bêta :

Elle rappelle la définition d'une base. Ensuite, elle reproduit à la maison pour la caractérisation du noyau la démarche utilisée en groupe arrivant à une représentation paramétrique explicite.

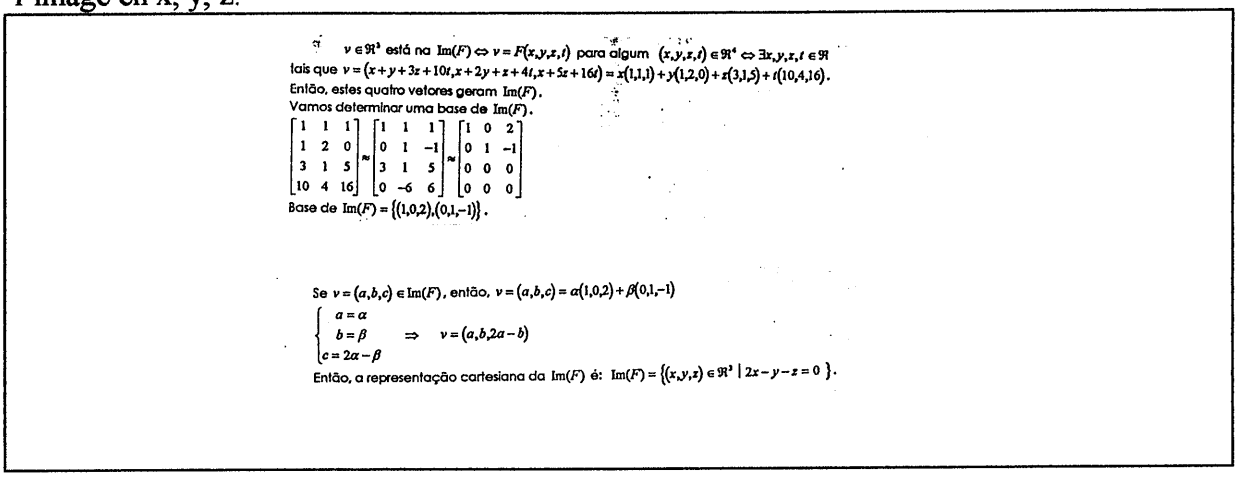
Elle justifie que les 2 vecteurs obtenus forment une base du noyau en évoquant seulement leur caractère générateur et en conclut que la dimension est 2.

La détermination de la dimension de l'image est déduite ensuite par application du théorème usuel.

Pour déterminer ensuite une représentation cartésienne de l'image, l'étudiante Bêta, elle, réécrit un vecteur générique de l'image sous forme paramétrique explicite en x, y, z. Puis elle détermine par Gauss ligne / ligne une base de l'image.

Elle réécrit un vecteur générique de l'image sous forme paramétrique explicite en a, b, c par rapport aux deux vecteurs de base obtenus.

Comme, dans le travail en groupe, par résolution du système, elle arrive à la représentation (a, b, 2a-b) pour un vecteur de l'image et, par lecture, en déduit une représentation cartésienne de l'image en x, y, z.



Analyse : La démarche de l'étudiante Bêta est particulièrement intéressante pour l'image. Même si elle arrive à une solution correcte, exprimée en x, y, z, on voit à travers les méandres suivis que les rapports entre représentation cartésienne et paramétrique ne sont pas complètement clarifiés même dans ce cas particulier qui est celui de R^3. Et contrairement à ce qu'elle avait exprimé dans la première expérimentation, on a l'impression que la représentation cartésienne n'est pas clairement reliée à la condition de résolubilité d'un système. Ceci ne doit pas nous étonner vu les doutes qu'elle a manifestés dans le travail en groupe.

C) LES QUESTIONS ET LES REPONSES A L'ENTRETIEN POUR LA QUESTION 2

Comme pour la question 1, les passages en caractères gras correspondent aux questions et interventions de l'enseignante.

Dans la deuxième question, on donnait une application linéaire de R^4 dans R^3 par sa forme fonctionnelle et on vous demandait de trouver la dimension du noyau et de l'image de cette application. Comment as-tu travaillé cette question ? Quelles difficultés avez-vous eu dans le travail en classe et quelles difficultés as-tu rencontrées dans le travail à la maison ?

1 Euh ! Pour ce type d'exercice, on savait qu'il existait un théorème, n'est-ce pas, qui donnait, n'est-ce pas [...] une formule directe de résolution.
2 Nous n'avons pas réussi à nous le rappeler.
3 Et Bêta euh! [...] a trouvé un autre moyen, j'ai suivi mais je ne sais pas reproduire son raisonnement [...] au moment où elle l'expliquait, j'ai compris [...] Mais, à la maison, je suis allé voir quel était le théorème et ainsi j'ai réussi à trouver le résultat.

4 C'est un type d'exercice que je connais [...] j'avais déjà fait des exercices semblables, mais aussi euh ! [...] j'ai eu besoin d'aller chercher [...]
5 Dans la partie b de la deuxième question, on demande une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.
6 Bon, avec la théorie un peu plus [...]
7 A la maison, n'est-ce pas ?
8 Oui, à la maison, à la maison
9 Mais, en classe ?
10 En classe [...] nous avons déterminé une base parce que nous avions déjà l'expression de la transformation, n'est pas ? [...] donc c'était facile de trouver une base.
11 Nous n'avons pas imaginé une représentation cartésienne, n'est-ce pas ? [...] Mais, quand j'ai résolu le test à la maison, j'ai vu une représentation avec x, y, z [...] dans ce cas, avec x et y et ainsi j'ai pensé que ce serait euh ! une représentation cartésienne [(x, x - y, x + y)].
12 je pouvais faire cette représentation [...]
13 Est que ceci est une représentation cartésienne de l'image de F ?
14 Euh ! Tout d'abord, n'est-ce pas ? [...] lorsque nous avons entendu "représentation cartésienne", nous avons imaginé qu'il fallait faire une figure, n'est-ce pas ?
15 Une représentation graphique, dans un repère cartésien x, y, z [...] Euh ! Mais je n'ai pas vu cette figure. ce serait une droite x, l'autre, une droite x - y et une autre droite x + y, non ?
16 J'ai pensé que ce serait un peu compliqué de faire cette figure et donc je n'ai représenté que par l'expression algébrique
17 Si à la place de x et de y tu avais t et w, est-ce que tu aurais encore cette image d'une représentation cartésienne ?
18 Euh ! Pas directement, non ? mais, le fait que ce soit x et y, ou t et w, ou a et b n'a aucune importance, n'est-ce pas ?
19 Euh ! le nom de la lettre ne veut rien dire [...] mais, il est habituel, n'est-ce pas [...] qu'une représentation cartésienne, ce soit x et y.
20 Bon, peux-tu relire la définition de représentation cartésienne donnée dans le test et regarder s'il s'agit exactement de ce que tu a déterminé, la représentation que tu appelles représentation cartésienne de l'image de F ?
21 Est-ce que je peux, maintenant rendre plus clair la suite :
22 Euh! une représentation cartésienne de l'image, n'est-ce pas ? [...] l'image serait un sous-espace [...] euh! euh !
23 Bon, je pense que c'est correct [...] Même si, dans la définition de représentation cartésienne, on représente par des systèmes linéaires.
24 Euh ! Je veux dire non, non [...] On représente par des systèmes linéaires
25 As-tu ces systèmes linéaires ?
26 Non, je ne les ai pas, je ne les ai pas [..]

Analyse : Dans cette partie de l'entretien, l'étudiant Delta dit d'abord qu'ils ont cherché à se remémorer, sans y arriver, une formule. Si l'on se réfère à l'enregistrement du travail en groupe, on peut penser qu'il évoque ici l'épisode de recherche de la formule liant la dimension du noyau et celle de l'image, dont il avait eu l'initiative et qui n'avait pas abouti. Il avoue ensuite avoir suivi le raisonnement de Bêta puis ne pas avoir été capable de le reproduire à la maison et être allé chercher le théorème. Il s'agit sans aucun doute de l'introduction par l'étudiante Bêta des équations avec a, b et c, qui manquait en effet singulièrement de clarté mais dont nous pensions, au vu des discussions ultérieures dans le groupe qu'il avait effectivement perçu le sens. Ceci explique sans doute la formulation

qu'il va introduire, quant à lui, pour exprimer Im(F) et ensuite le travail détaillé à partir de l'expression en tableau de nombre qu'il est visiblement allé chercher dans un manuel. En revanche, ceci ne nous éclaire pas sur la source réelle des justifications nouvelles apparues pour la dimension du noyau.

Mais c'est sur le point du passage à une représentation cartésienne de l'image que cet entretien est le plus instructif car il nous montre que l'étiquette « cartésien » est raccrochée par cet étudiant à la notion de graphe cartésien et non à celle de représentation cartésienne au sens où nous l'entendons ici. Et nous devons avouer que nous étions loin d'imaginer l'interprétation qu'il allait se faire de la tâche, telle qu'il l'explicite dans le passage 14-16. Il est clair que la confusion faite a des sources évidentes : au Brésil, on appelle représentation cartésienne une représentation d'une fonction dans un repère orthogonal et en général on utilise, comme ailleurs, les lettres x et y, mais, si nous supposions un fonctionnement par analogie formelle, nous n'avions pas pensé à une telle transformation des objets mathématiques concernés. Ainsi, la réponse qu'il donne à la question posée en 17 par l'enseignante, lorsqu'il dit que les lettres n'ont pas d'importance, est à restituer dans le cadre de cette interprétation du mot « cartésien ». Ceci nous conduit à reprendre complètement l'interprétation que nous faisions de sa position dans la discussion en séance avec l'étudiante Bêta. Ce n'était pas l'équation qui était l'invariant en jeu dans son discours à ce moment là mais la notion de coordonnée.

On aurait sans doute pu, dans l'entretien, travailler avec Delta de façon plus approfondie cette notion de représentation cartésienne, en revenant à la nature des objets que l'on cherche à représenter et à l'espace dans lequel ils se situent. On peut penser que le raccrochage fait en termes d'équations et systèmes apparaît ici de façon trop formelle pour pouvoir assurer une quelconque prise de sens.

D) LA RESOLUTION DE LA QUESTION 3

QUESTION 3 : Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse. Si votre réponse est : "faux", essayez de trouver un contre-exemple et, si possible, de transformer l'énoncé pour le rendre vrai.

partie a : *Tout sous-espace de* $\mathbf{R}^n$ *qui peut être décrit par une représentation paramétrique à p paramètres est de dimension* $\leq p$.

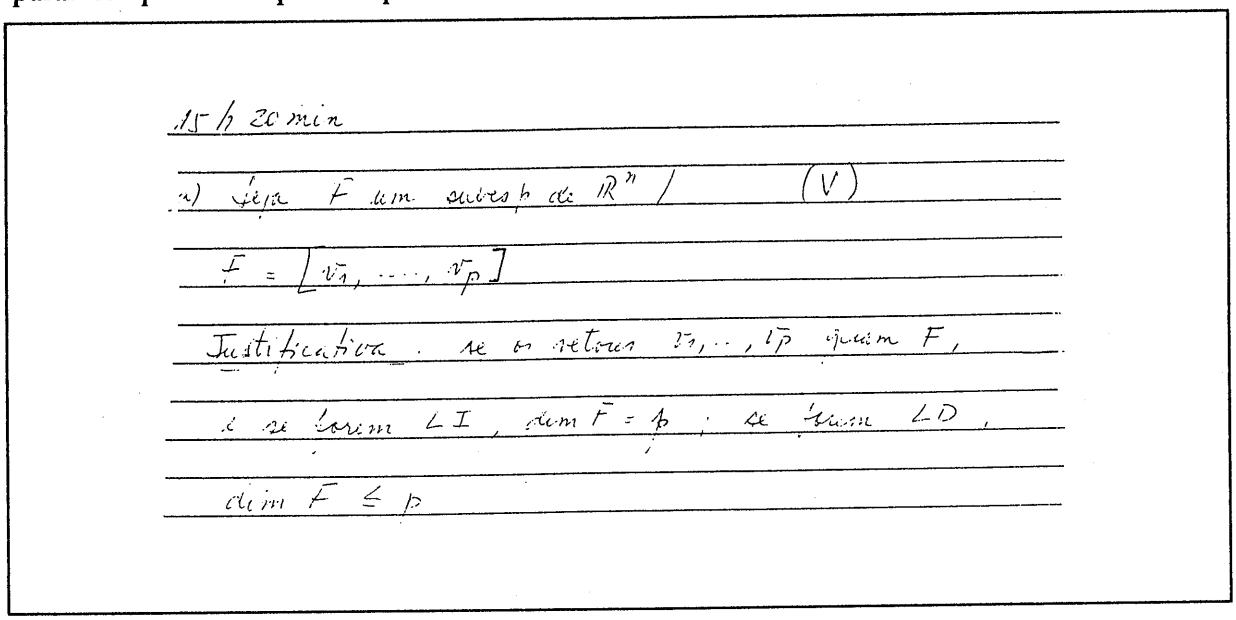
- Le travail en classe :

La résolution de cette question ne pose visiblement pas de problème au groupe et, cette fois, c'est l'étudiant Delta qui est en position de leader.

3 δ : Paramétrique avec p paramètres [...] Je pense que c'est vrai [...]
4 β : Laisse-moi penser[...]
5 δ : Un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ qui admet une représentation paramétrique à p paramètres [...]

6 β : Ça veut dire qu'on aurait : Soit F un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ tel que F est engendré par v_1, ...,v_p [...]
7 δ : Ça veut dire que si ces vecteurs, si ces vecteurs [...]
8 β: représentation paramétrique
9 δ : Euh ! Euh ! D'où, si ces vecteurs sont linéairement indépendants la dimension est p [...] elle est égale à p [...] Mais, il peut être engendré par un ensemble de vecteurs linéairement dépendants et dans ce cas la dimension est plus petite que p.
10 β : Ça veut dire qu'une base peut être de dimension plus petite que p [...]
11 δ : Elle peut, elle peut [...] parce qu'ici c'est un ensemble de générateurs, n'est-ce pas ?

Ils passent ensuite à la rédaction de la justification et là encore c'est Delta qui impose son point de vue, en disant qu'il est inutile de dire que si un vecteur est combinaison linéaire des autres, la dimension est p-1, qu'il suffit de dire que s'ils ont linéairement dépendants la dimension est plus petite que p. On voit ici l'étudiante Bêta douter un peu, en se demandant s'il n'y a pas un piège mais Delta reprend son argumentation en revenant à la notion de représentation paramétrique et finit par l'emporter. Finalement la rédaction proposée est la suivante.


15 h 20 min
a) Soit F un sous-esp de $\mathbb{R}^n$ / (V)
$F = [\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}]$
Justification : si ts vecteurs $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_p}$ ds F,
s'ils forment LI, dim F = p ; s'ils forment LD,
dim F ≤ p

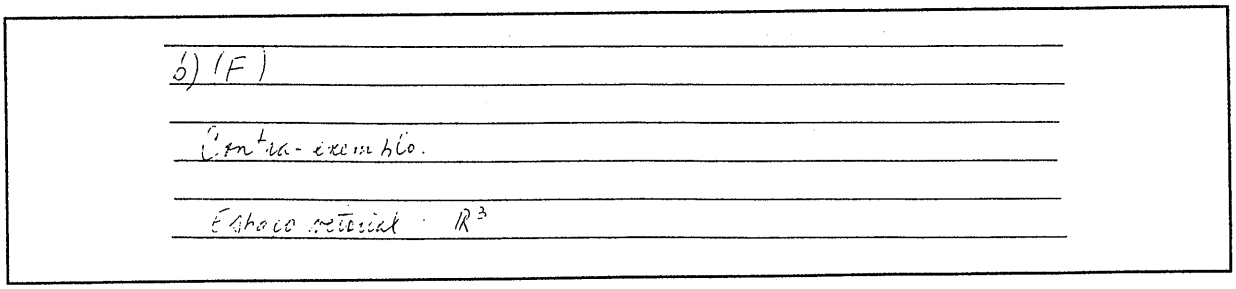
***partie b** : Pour montrer que deux sous-espaces d'un même espace sont égaux, il suffit de montrer qu'ils ont la même dimension.*

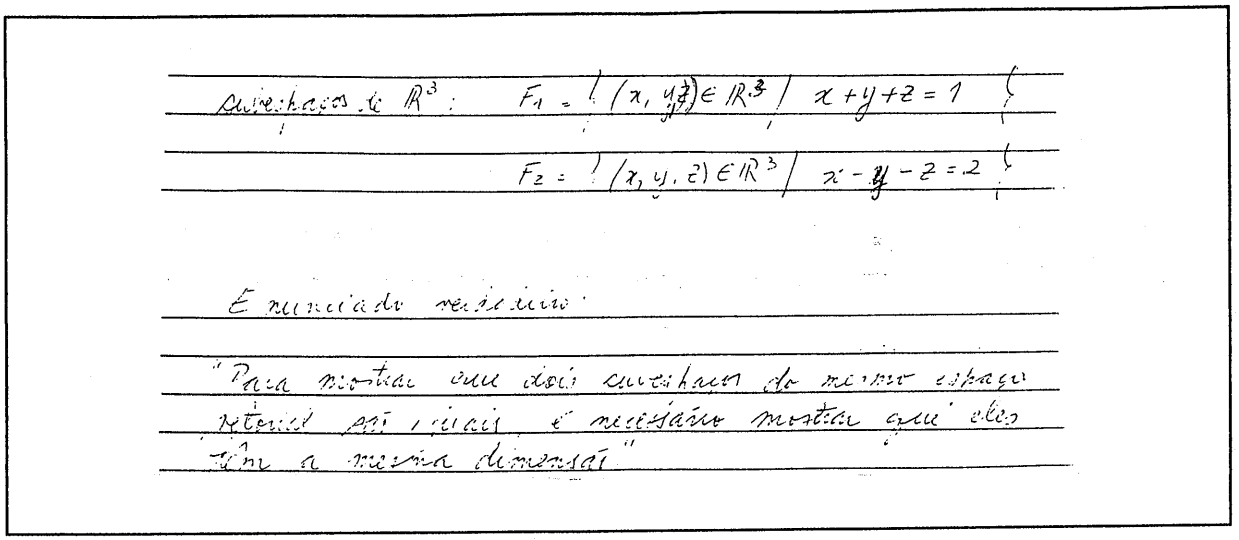
Dans la partie b de la question 3, les étudiants donnent une réponse correcte, mais le contre-exemple qu'ils fournissent montre une confusion entre le cadre affine et le cadre vectoriel et la rectification de l'énoncé met en évidence leur difficulté à se référer à des théorèmes généraux. D'emblée Delta et Bêta sont convaincus que l'énoncé est faux et décident de chercher un contre-exemple. Delta pense d'abord à la question 1 mais Bêta lui fera un peu plus tard remarquer qu'ils ont justement montré l'égalité. Elle propose ensuite de prendre des plans dans $\mathbf{R}^3$

8 β : Dans $\mathbf{R}^3$, par exemple, on a les plans comme des sous-espaces. Donc, si tu considères [...] les plans ont dimension 2 [...]
9 δ : Mais, les plans ne sont pas tous égaux

10 β : Mais, il faut donner un contre-exemple [...] D'où, on peut choisir un espace vectoriel, par exemple $\mathbf{R}^3$ [....] et ainsi on peut construire un contre-exemple [...] l'espace vectoriel est $\mathbf{R}^3$ et les sous-espaces de $\mathbf{R}^3$ peuvent être des droites et des plans.
11 δ : D'où, on peut considérer le même [...] Euh ! le même exercice
12 β : Le noyau et l'image ?
13 δ : Non, le premier
14 β : Deux sous-espaces, mais ils sont égaux. Nous avons montré qu'ils sont égaux
15 δ : Ils sont égaux et ils ont la même dimension, n'est-ce pas ?
16 β: Il faut qu'on détermine deux sous-espaces de même dimension, mais qui ne sont pas égaux.
17 δ : Et si je change ici [...] Il faut avoir une expression différente de celle-ci
18 β : Non, ce n'est pas nécessaire de faire ça [...] il suffit de considérer $\mathbf{R}^3$
19 δ : Euh ! deux plans quelconques de $\mathbf{R}^3$ qui ne sont pas parallèles.
20 β : Deux plans quelconques qui ne sont pas proportionnels
21 δ : Euh ! Je pense que ce n'est pas nécessaire de trouver un autre cas. Pour simplifier, on peut revenir ici et changer ces expressions, ils auront la même dimension mais ils ne sont plus égaux.
22 β : D'où, on pourrait faire comme ça : $F1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 /$
23 δ : $x + y = 1$, c'est un plan ?
24 β : Non. $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + z = 1\}$.
25 δ : L'ensemble de points de $\mathbf{R}^3$.
26 β: qui satisfont
27 δ : Euh ! Euh !
28 β : l'équation d'un plan [...]
29 δ : ce que tu avais écrit ici avec x et y c'est qu'une droite [...]
30 β : Tu avais dit $x + y + z = 1$?
31 δ : Non, j'avais dit $x + y = 1$
32 β : oui, oui c'est une droite [...] mais une droite est aussi un sous-espace de $\mathbf{R}^3$
33 δ : Exactement, mais ici c'est $\mathbf{R}^2$ [...] ou tu penses à un sous-espace de $\mathbf{R}^3$ [...] un plan, mais ici c'est $\mathbf{R}^3$
34 β : Et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 /$
35 δ : Une autre expression différente [...] $x - y - z = 2$
36 β : $x - y - z = 2$, tu es sûr qu'ils sont différents ?
37 δ : C'est un autre plan [...] et ils ont la même dimension [...] et maintenant, comment on peut construire un énoncé vrai [...] Pour montrer que deux sous-espaces de même dimension sont égaux il n'est pas suffisant de montrer qu'ils ont la même dimension.
38 β : Euh ! [...] c'est nécessaire
39 δ : Il ne faut qu'écrire une phrase qui rend l'énoncé vrai [...] il est nécessaire qu'ils aient la même dimension, mais ce n'est pas suffisant.

La rédaction qu'ils proposent est la suivante :





Analyse : Comme nous l'avions annoncé, les étudiants sont convaincus que l'énoncé est faux et ont tout de suite des idées de contre-exemples. La recherche de contre-exemples dans $\mathbf{R}^3$ va cependant les faire basculer dans l'univers affine, sans qu'ils s'en rendent compte, et les contre-exemples produits ne seront pas des sous-espaces vectoriels. Les mots de plan et de droite soutiennent bien entendu ce glissement vers l'affine qui va se traduire aussi par l'évocation du parallélisme. Ceci nous étonne d'autant moins que l'enseignement au Brésil travaille peu la distinction affine / vectoriel.

On note, dans l'enregistrement, une discussion sur droites et plans dans $\mathbf{R}^3$, qui n'est pas facile à interpréter. Visiblement, vu le rajout sur la production écrite, l'étudiante Bêta a bien commencé dans $\mathbf{R}^2$ mais elle rectifie très vite puisque le rajout ne semble pas toucher l'équation. En revanche, on peut s'interroger sur le sens de la remarque de Delta en 29 et sur la réponse que lui fait Bêta en 32. Est-ce que l'identification à une droite est liée à $\mathbf{R}^2$ ou à la disparition de z ? Au vu de ce que dit Delta en 33, on peut penser qu'il raisonne correctement mais les perturbations créées dans le premier dispositif par l'équation y=0 nous incitent à la prudence sur les interprétations.

Enfin, comme dans la question 1, on ne voit pas intervenir ici le théorème de l'inclusion et de la dimension qui s'impose pourtant si l'on veut rectifier l'énoncé.

***partie c** : L'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ définis par une équation linéaire et homogène est toujours un sous-espace de dimension 2.*

Nous reproduisons de larges extraits de la partie de l'enregistrement qui correspond à cette question. Elle montre clairement les difficultés déjà identifiées dans les rapports entre nombre d'équations et nombre de paramètres, les problèmes que pose le recours au cadre géométrique, le langage des droites et des plans, ainsi que la difficulté à bien séparer les questions de dimensions des questions de nombre de coordonnées.

1 δ : L'intersection [...] de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ définis par une équation linéaire et homogène est toujours un sous-espace de dimension 2. [...] Je pense que non [...] l'intersection [...]
2 β : de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ définis par une équation linéaire et homogène

3 δ : Correct par une équation [...] est toujours un sous-espace de dimension 2.[...] si on fait une analogie avec $\mathbf{R}^3$, on peut mieux voir
4 θ : Ici
5 β : L'intersection [...] On peut d'abord imaginer un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ défini par une équation linéaire et homogène [...] Comment il est ? [...] Il pourrait
6 δ : $x + y + z + t = 0$. Euh! C'est ça la question : nous avons un sous-espace défini par deux équations linéaires et homogènes
7 β : C'est une droite dans l'autre question
8 δ : Dans l'autre question c'était une droite [...] Non, ce n'était pas une droite [...]
9 β : Euh ! Oui, c'est une droite [...] Quels sont les points de $\mathbf{R}^3$ qui satisfont les deux équations en même temps ? [...] c'est un plan ?
10 δ : De $\mathbf{R}^3$ ou de $\mathbf{R}^4$.
11 β : Je regarde l'exemple 2
12 δ : Dans l'exemple ?
13 β : Dans l'exemple de la définition [...] Par exemple : tu veux voir [...] Vois la question 1 [...] L'espace vectoriel est $\mathbf{R}^4$ [...] Le sous-espace est caractérisé par deux équations linéaires et homogènes [...]
14 δ : Euh ! Euh !
15 β : Correct [...] D'où, quand tu fais l'intersection de ces deux [...] Tu vas imposer aux éléments [...] Dans la question 1, nous avons trouvé [...] Euh ! [...] les éléments qui satisfont [...]
16 δ : Nous avons trouvé en fonction de deux variables z et t, n'est-ce pas ?
17 β : dimension 2. C'est combien ? C'est combien ? [...] D'où, les éléments qui satisfont les deux droites [...] Une c'est -z-2t et l'autre c'est z-t. N'est-ce pas ?
18 δ : Donc, si dans l'intersection on n'en satisfait qu'une seule [...] on a dimension 3, parce que je ne peux que donner une seule en fonction des autres [...]
19 β : Moi, je pense que la dimension est 1. [...] et ce que nous avons déjà fait [...]
20 δ : Oui, mais ceci signifie que par exemple, que le x, le x est une combinaison linéaire de x dans les quatre coordonnées et donc la dimension est 1. Mais, si j'ai une seule équation, je ne peux pas éliminer x dans les trois autres. Je ne pensais pas comme ça avant, mais je vois maintenant comme ça, maintenant parce que c'est très étrange, très étrange. [...] Parce qu'ici, vois, nous avions deux équations et nous avons pu exprimer deux coordonnées en fonction de deux autres [...] Si j'ai une seule équation je ne vais pas avoir plus d'équation pour exprimer [...]
21 β: D'où, tu vas avoir 3 arbitraires et une qui dépend des autres 3 [...]
22 δ : qui dépend des autres 3
23 β : D'où, si tu varies les 3 autres tu travailles dans un plan [...]
24 δ : la dimension est 3
25 β, δ : on travaille dans l'espace
26 β : dans l'espace
27 δ : Donc cette affirmation est fausse. [...] Je comprends comme ça [...] je ne sais pas si [...]
28 β : Maintenant, on imagine deux sous-espaces définis chacun par une équation linéaire [...]
29 δ : Correct [...] D'où, c'est ça [...] Deux sous-espaces [...] Donc c'est le même cas que la question 1.
30 β : Ça veut dire que l'intersection sera un plan.
31 δ : Vois, la dimension peut être 2. Dans le cas de la question 1, la dimension est 2, mais elle peut être encore plus petite.

32 β : Oui. On va repenser la question [...] Si on a un sous-espace [...] l'intersection de deux sous-espaces définis chacun, n'est-ce pas ?
33 δ : par une [...] est
34 β : D'où, une seule équation linéaire
35 δ : elle est homogène
36 β : mais elle peut être [...] mais ce sous-espace il peut être [...] On va supposer qu'il est de dimension [...] Attends un peu [...] sous-espace, ce sous-espace ne peut pas avoir 3 coordonnées
37 δ : Mais lui [...] S'il est un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ [...] il doit avoir les quatre coordonnées, n'est -ce pas ? [...] il ne peut pas avoir un nombre plus petit de coordonnées [...] Euh !
38 θ : le problème est toujours celui-ci, n'est-ce pas ?
39 δ : Euh ! Je peux avoir un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ défini par l'équation $x + y = 0$. [...] Je peux parce que c'est un sous-espace de $\mathbf{R}^4$, n'est-ce pas ? [...]
40 β : ça veut dire que si on considère [...] On peut penser en termes de sous-espace engendré [...] il peut être engendré par 3 vecteurs de $\mathbf{R}^4$, par 2 ou par 1 [...]
41 δ : Nous pouvons [...]
42 β : Si les deux sont [...] si les deux sont définis par une seule équation
43 δ : Cette équation [...] nous ne savons pas si cette [...]
44 β : 3 ou 2 ou 1
45 δ : 3 ou 2 ou 1 coordonnées [...] Mais, je pense qu'il faut avoir les 4 coordonnées parce que sinon ce ne sera pas un sous-espace de $\mathbf{R}^4$, n'est-ce pas ? [...] Vous avez déjà vu un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ qui n'a pas 4 coordonnées ? [...] Je ne suis pas sûr, mais je pense qu'il faut commencer par là [...]
46 β : Si les sous-espaces ont les 4 coordonnées et une seule équation [...] ça veut dire qu'il y a 3 variables indépendantes [...] S'il y a 4 variables indépendantes, c'est un plan et s'il s'agit de deux plans l'intersection est une droite. [...] C'est ça, n'est-ce pas ?
47 δ : Non, on revient [...] Si le sous-espace a 3 variables indépendantes c'est un espace [...] 3 indépendantes [...] parce qu'un plan serait z égale à quelque chose x + quelque chose y , n'est pas ?

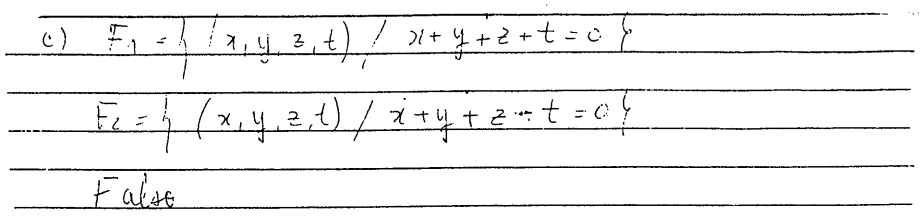
Ils discutent ensuite sur les possibilités d'éliminer des variables, puis toutes les variables sauf une pour conclure que l'on pourrait alors avoir un sous-espace de dimension 1 puis essaient de fabriquer un contre-exemple à partir de cette idée sans aboutir.

62 β : $x + y + z + t$, $x + y + z - t$ [...] sont deux sous-espaces, donc on considère :
$F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$ et $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 / x + y + z - t = 0\}$
63 δ : Exactement. Vois ici [...] Si tu élimines x, y, z, t [...] x, y et z d'une des équation [...] Il suffit de soustraire l'une de l'autre et ainsi tu as $t = 0$
64 β : Correct
65 δ : Euh ! Ceci n'est vrai que si t est égal à zéro [...] et ainsi ça se réduit à une seule équation : $x + y + z = 0$.
66 β : Donc ça serait comment ?
67 δ : Je pense qu'il faut s'arrêter ici [...]

Les étudiants s'interrogent ensuite sur la possibilité d'avoir une intersection réduite au vecteur nul.

75 δ : Je pense que ça peut arriver [...] je ne sais pas s'il y a quelque chose qui empêche
76 θ : Est - ce qu'on pouvait avoir (x, 0, 0 , 0) et (0, y, 0, 0) ?
77 δ : Bien sûr qu'on peut [...] ces vecteurs n'ont en commun que le vecteur nul

78 θ : Que le vecteur nul
79 β : Est - ce qu'on peut avoir deux sous-espaces qui n'ont rien en commun ?
80 θ : c'est le plan [...] c'est l'exemple [...] c'est le plan et la droite
81 δ : Que le vecteur nul !
82 θ : (x, y, z) c'est le plan ici et la droite
83 δ : le point d'intersection c'est l'origine
84 θ : Oui. C'est le (x, 0, 0) et ici c'est le (0, y, z)
85 β : D'où, attends un peu [...] D'où, la possibilité de l'un des sous-espaces être une droite et l'autre un plan
86 θ : Oui
87 β : Et dans ce cas l'intersection [...] Elle peut
88 θ : l'intersection est zéro
89 β : L'intersection n'est pas, n'est pas de dimension 2
90 δ : C'est parce que je ne peux pas exprimer la droite [...] Euh ! Cette droite avec trois coordonnées [...] Cette droite n'est pas 3, c'est (x, 0, 0) [...]
91 β : Dans $\mathbf{R}^4$: (x, 0, 0, 0)
92 δ : $\mathbf{R}^4$, (x, 0, 0, 0) [...] D'où, c'est vrai
93 β : D'où, l'équation linéaire sera y [...] Quelle est l'équation linéaire ?
94 δ : Quelle est l'équation linéaire ?
95 β : L'équation linéaire qui représente un sous-espace de **R**4 euh ! [...] comment sera l'axe des x ? [...] il est [...] euh ! x + y ou y + z
96 β : On n'a que 3 minutes
97 δ : D'où, on peut écrire ce que nous avons obtenu [...]
98 β : Faux
99 θ : Il faut donner un contre-exemple
100 δ : L'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ définis par une équation linéaire et homogène est toujours un sous-espace de dimension plus petite ou égale à 2. Serait-il ça ?
101 θ : Non, ce n'est pas un contre-exemple ce que tu dis
102 δ : Non, ce n'est pas un contre-exemple [...] C'est la rectification de l'énoncé [...]
103 θ : Et maintenant le contre-exemple
104 δ : Il est ici
105 *Après toute cette discussion les étudiants ne reproduisent dans leur production écrite que les deux sous-espaces ci -dessus qui n'est pas un contre-exemple correct et la conclusion "faux", comme nous pouvons souligner à travers la copie de cette production dans la page qui suit.*

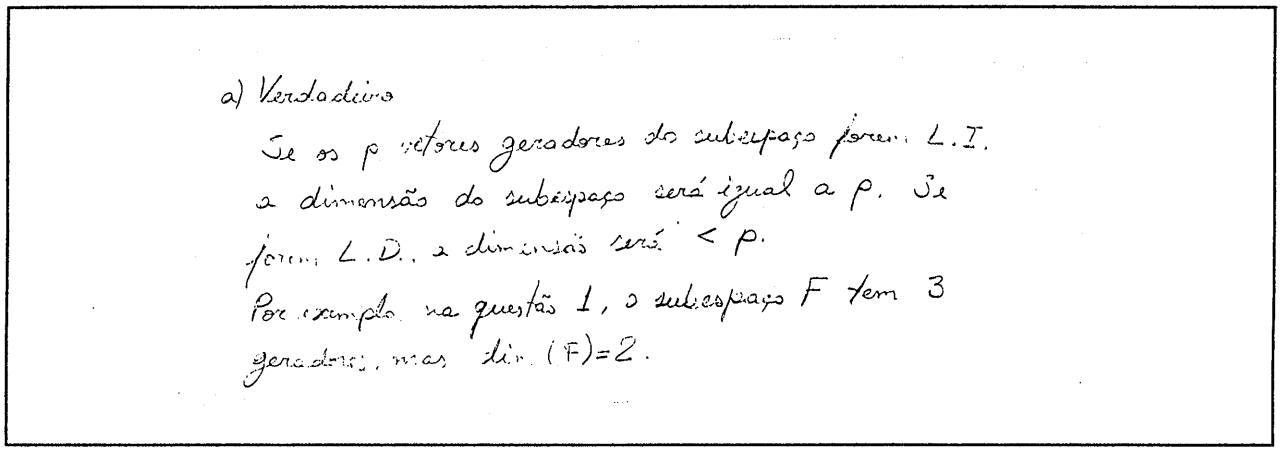


Analyse : Les étudiants en ayant des difficultés pour travailler dans l'espace $\mathbf{R}^4$ proposent de passer à $\mathbf{R}^3$, mais comme dans les questions précédentes ils continuent à faire la confusion entre les cadres affine et vectoriel et il est clair dans leur discussion qu'ils n'ont pas de moyens pour contrôler le nombre d'équations et la dimension du sous-espace ni dans le cadre de l'algèbre linéaire, ni dans le cadre de la géométrie affine. Ceci les amène à poser cette question du rapport entre nombre d'équations et dimension du sous-espace et ils vont donc chercher dans les autres questions un moyen de relier les équations à la dimension, mais il semble aussi dans ce cas que le cadre géométrique (qui semble ne pas être lui non plus bien maîtrisé par les étudiants par rapport à l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique) fonctionne plutôt comme un obstacle à la mise en place de cette articulation par ces étudiants. Voir passages (7 à 27), (46 à 56) et (79 à 92).
Dans cette question les étudiants ont encore des difficultés à gérer les équations du type, par exemple : $x + y = 0$ lorsqu'il s'agit d'un sous-espace de $\mathbf{R}^4$. En effet, on trouve ici aussi la perturbation liée au fait que deux coordonnées n'apparaissent pas explicitement dans les équations (39 à 45). Un peu plus loin on voit apparaître aussi la perturbation $t = 0$ (62 à 65) et encore un peu plus loin le même type de perturbation, c'est-à-dire $y = 0$, $z = 0$ et $t = 0$ (93 à 95).
Du point de vue algébrique les étudiants étaient proches de déterminer la relation entre nombre d'équations et nombre de paramètres dans le cadre des systèmes linéaires, mais ils sont toujours bloqués au moment où ils essayent de faire des analogies dans le cadre géométrique en se référant à des droites et plans.
Ils font aussi la confusion entre coordonnées des vecteurs et dimension du sous-espace, ce qui amène un des étudiants à poser la question aux autres, s'ils ont déjà rencontré des sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ où les vecteurs ont moins de 4 coordonnées.
Cette confusion et l'obstacle créé par la mauvaise utilisation du cadre géométrique ne permettent pas aux étudiants de trouver une réponse cohérente pour les questions qu'ils se posent pendant la discussion en classe. Même s'ils donnent une réponse correcte ils ne déterminent qu'un contre-exemple erroné et encore ils ne sont pas capables de justifier et de rectifier l'énoncé. Il faut souligner aussi que pendant la discussion ces étudiants ont fait référence à la première question où il fallait montrer l'égalité de deux sous-espaces, mais ils n'arrivent même pas à obtenir de cette question un contre - exemple correct.

E) L'ANALYSE A POSTERIORI DE LA QUESTION 3

- L'étudiant Delta

partie a : L'étudiant donne la réponse correcte "vrai" et justifie correctement sa réponse en disant que si les p vecteurs qui engendrent un sous-espace sont linéairement indépendants la dimension est p et s'ils sont linéairement dépendants la dimension est plus petite que p et donc l'affirmation est correcte. Il donne aussi un exemple : le sous-espace F de la question 1 qui est engendré par 3 vecteurs mais dont la dimension est 2.



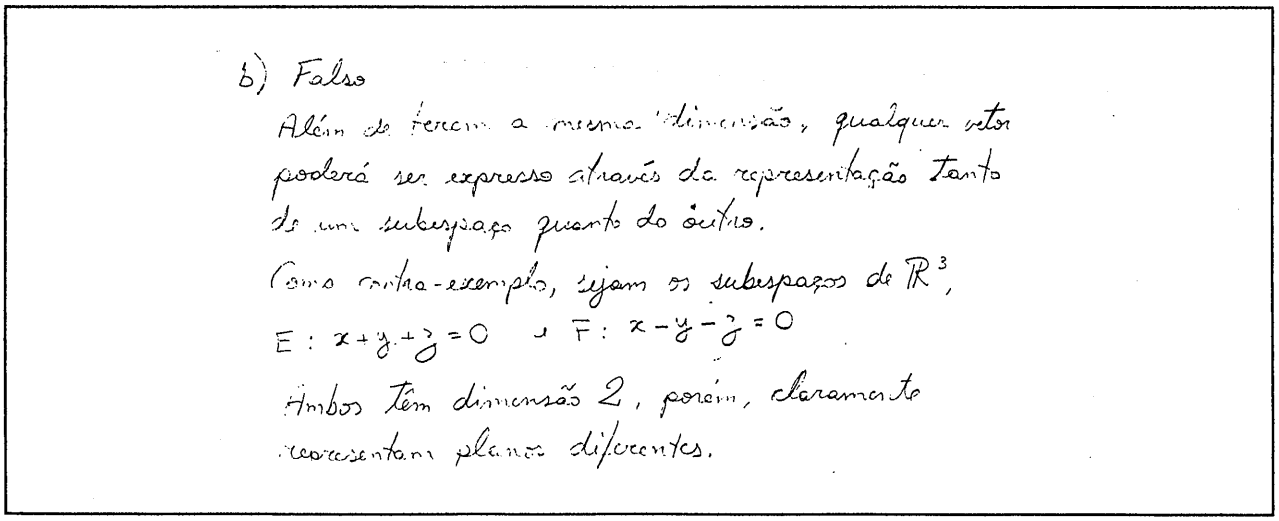
a) Verdadeiro

Se os p vetores geradores do subespaço forem L.I. a dimensão do subespaço será igual a p. Se forem L.D. a dimensão será < p.

Por exemplo na questão 1, o subespaço F tem 3 geradores, mas dim (F)=2.

Analyse : Comme dans le travail en classe cette question ne semble poser aucun problème à cet étudiant.

partie b : L'étudiant conclut correctement que la réponse est "fausse" et donne un contre-exemple correct en considérant deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ dont les équations ne sont pas proportionnelles. On ne trouve pas trace ici des difficultés rencontrées dans le travail en groupe, les équations correspondent bien à des sous-espaces vectoriels dont la dimension est affirmée et qui sont donnés à l'évidence comme distincts.



b) Falso

Além de terem a mesma dimensão, qualquer vetor poderá ser expresso através da representação tanto de um subespaço quanto do outro.

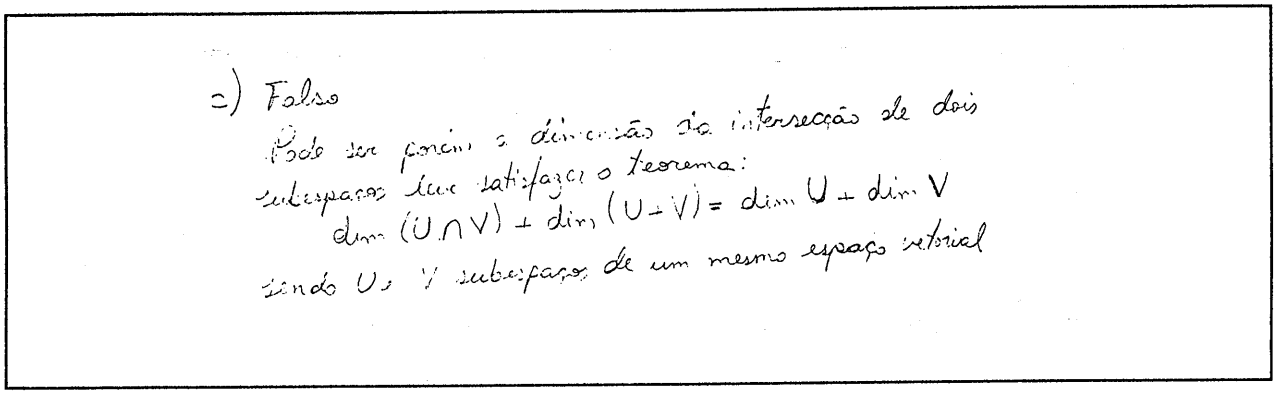
Como contra-exemplo, sejam os subespaços de $\mathbb{R}^3$,

$E: x+y+z=0$ e $F: x-y-z=0$

Ambos têm dimensão 2, porém, claramente representam planos diferentes.

Analyse : On notera que les contre-exemples ressemblent cependant à ceux du travail en groupe, mais cette fois en dimension 3 et non 4. On peut penser que le contrôle géométrique a pu s'exercer ici pour l'étudiant Delta, en remarquant que dans le travail en groupe, c'était lui qui semblait le plus à l'aise dans ce cadre. En revanche, il n'y a pas de rectification de l'énoncé et de mention des théorèmes généraux.

partie c : L'étudiant conclut correctement que l'affirmation est "fausse", mais il ne donne aucun contre exemple. Il dit que l'intersection peut être 2, mais que la dimension de l'intersection de deux sous-espaces doit satisfaire le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection.


c) Falso
Pode ser porque a dimensão da intersecção de dois subespaços tem satisfazer o teorema:
$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V$
sendo U e V subespaços de um mesmo espaço vetorial

Analyse : Comme nous avons pu remarquer dans le travail en classe, cette question a posé beaucoup de difficultés aux étudiants et il semble que même avec l'aide des manuels cet étudiant n'a pas été capable de trouver de réponse aux questions qui sont apparues au moment de la discussion en classe. Il ne revient pas aux exemples envisagés dans le travail en classe et en reste à l'énoncé d'un théorème général qu'il n'arrive pas à exploiter. Il sera intéressant de voir si l'entretien peut nous éclairer sur sa recherche car sa production écrite nous informe peu.

- l'étudiante Bêta

partie a : L'étudiante reproduit très clairement le raisonnement fait en classe par Delta qu'elle s'est donc tout à fait approprié.

partie b : L'étudiant Bêta propose un contre-exemple dans $\mathbf{R}^2$.

$S_2 = \{(x, y) / x+y = 0\}$, $S_1 = \{(x, y) / 2x-y = 0\}$ sans utiliser un langage géométrique. Elle précise un vecteur de base pour chaque sous-espace et montre qu'il n'appartient pas à l'autre. Elle propose la même rectification que dans le travail en groupe.

partie c : L'étudiante répond qu'elle ne sait pas. Elle a pourtant fait des recherches dit - elle. Elle reprend le premier sous - espace S_1 proposé dans le travail en groupe et exprime un vecteur générateur de ce sous - espace sous forme " implicite tableau " en fonction de x, y, z concluant

que sa dimension est 3. Elle considère ensuite le second, cite le théorème de la somme et de l'intersection, mais avoue ne pas savoir si la dimension de $S_1 + S_2$ est 4. Si c'est le cas dit - elle, mais elle n'en est pas sûre, la dimension de $S_1 \cap S_2$ sera 2.

Analyse : Soulignons que seule, elle ne revient pas au cadre géométrique qu'elle n'avait d'ailleurs pas utilisé spontanément lors de la première expérimentation et donc ne rencontre pas les perturbations associées visibles dans le travail en groupe.

Sa recherche dans les manuels la conduit à rappeler dans sa production un certain nombre de définitions et à utiliser des théorèmes. On notera que dans la question c, elle ne commet pas l'erreur usuelle associée à l'utilisation du théorème et pose explicitement la question de la dimension de $S_1 + S_2$ sans parvenir à la résoudre.

F) LES QUESTIONS ET LES REPONSES A L'ENTRETIEN POUR LA QUESTION 3

Comme pour les questions précédentes, les passages en caractères gras correspondent aux questions et interventions de l'enseignante.

Cet extrait relatif à la partie a confirme bien l'analyse faite à partir des données recueillies.

1 Dans la question 3 on demandait si les affirmations données sont "vraies" ou "fausses". partie a :
2 *L'enseignante lit la première affirmation et ce qui était demandé*
3 Euh ! Euh! Nous avons pensé que c'était vrai, n'est-ce-pas ? [...] cette première
4 Euh ! Laisse-moi me rappeler [...] Je peux regarder un peu [...]
5 Oui. Ici, plus petit ou égal à p, parce que
6 La dimension sera égale à p si tous les vecteurs qui engendrent le sous-espace sont linéairement indépendants [...] on peut avoir un ensemble de vecteurs générateurs qui sont linéairement dépendants, d'où la dimension sera plus petite que p. C'est ce raisonnement que nous avons fait [...]
7 Par exemple, dans la question 1, nous avons un sous-espace avec 3 vecteurs générateurs et dont la dimension est 2
8 A la maison
9 A la maison, pour cette question il y a eu un équilibre, c'est-à-dire que le raisonnement en classe a été le même à la maison.

partie b :
1 *L'enseignante lit la question et l'étudiant démarre*
2 Celle-ci. D'abord j'ai pensé qu'elle était fausse, mais Bêta n'était pas d'accord [...]
3 Après, dans le travail à la maison, je me suis aperçu [...] j'ai trouvé un théorème [...] je me suis aperçu que peut-être elle avait pensé à ce théorème et c'est pour ça qu'elle était un peu confuse
4 Quel est ce théorème ?
5 Euh ! Le théorème dit que si un sous-espace a la même dimension qu'un espace euh! ils sont égaux.

6 La même dimension que l'espace dans lequel il est inclus
7 Oui, la dimension de l'espace où il est [...] ils sont égaux [...] ils sont les mêmes
8 Au moment où j'ai trouvé ce théorème, je me suis aperçu que j'avais commis une erreur, mais dans ce cas, ce n'est pas vrai puisqu'il s'agit de deux sous-espaces d'un même espace et donc je peux avoir plusieurs qui ont la même dimension et qui sont différents
9 C'est pour ça que j'ai conclu que l'affirmation était fausse
10 As-tu donné un contre-exemple ?
11 Donner un contre-exemple [...] Dans le travail en groupe, c'était à la fin et nous n'avons pas eu le temps de penser à un contre-exemple, mais j'ai pensé à un très simple [...] dans $\mathbf{R}^3$, un plan [...] une équation d'un plan et une équation d'un autre plan.
12 Deux sous-espaces de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 et différents, deux plans différents [...] C'est ainsi que j'ai compris la question et donc j'ai conclu faux.
13 As-tu une formulation correcte pour cette affirmation ?
14 Oui, ça serait comme ça : Pour montrer que deux sous-espaces d'un même espace sont égaux, il est nécessaire de montrer qu'ils ont la même dimension.
14 Est-ce qu'il n'y a pas une autre formulation ?
15 une autre formulation ?
16 Si on revient au début, le théorème dont tu as dit que c'était peut-être lui qui avait perturbé ta collègue Bêta. Le théorème que tu as énoncé était : Si un sous-espace a la même dimension que l'espace dont il est sous-espace, c'est ça qui tu avais dit, n'est-ce-pas ?
17 C'est l'espace parce qu'ils sont égaux
18 Est-ce que l'on n'a pas dans cette même direction quelque chose de semblable ?
19 Semblable pour rectifier l'énoncé et le rendre vrai
20 Le sous-espace est comment dans l'espace ! Est-il contenu dans l'espace ?
21 Oui, il est contenu dans l'espace
22 D'où, on peut penser à deux sous-espaces et tu as déjà dit que deux sous-espaces ne sont pas nécessairement tout l'espace. Comment pouvais-tu changer une condition pour les deux sous-espaces pour rendre l'affirmation vraie ?
23 Changer une condition sur les deux sous-espaces pour que [...] si je [...] s'ils sont disjoints, n'est-ce-pas ?
24 S'ils sont disjoints ?
25 Ce serait donc des plans parallèles [...] je peux considérer comme le même sous-espace [...] des plans parallèles [...] je pense [...] je fais une analogie avec les vecteurs [...]
26 L'entretien s'arrête là.

partie c :
1 *L'enseignante lit la question et l'étudiant démarre.*
2 C'est "faux", n'est-ce-pas ?
3 Ici, il y a un théorème
4 Cette question dans le travail en classe nous n'avons que conclu qu'elle est fausse, mais nous n'avons pas su expliquer et comme c'était la fin du temps nous avons laissé comme ça
5 Tu savais qu'elle était fausse comment ? C'était une intuition ?
6 Oui, c'était une intuition
7 Tu te rappelles à partir de quelle intuition vous avez conclu qu'elle était fausse ?

8 Parce que [...] Vois [...] Deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ définis par une équation linéaire et homogène, n'est-ce-pas ?
9 D'abord, parce que le toujours, n'est pas [...] il est un peu radical [...] c'est difficile quelque chose qui arrive toujours [...]
10 Et la dimension 4 et la dimension 2 [...] ça ne semble pas une suite naturelle [...] si la dimension était 3 on pourrait [...] mais l'intersection de deux sous-espaces, n'est-ce-pas ?
11 Est-ce que le fait d'avoir une équation linéaire n'a pas provoqué quelque réaction ? Est-ce que ce qui a provoqué une réaction a été le fait que la dimension de l'espace est 4 et la dimension du sous-espace est 2 ? C'est ça ?
12 Non [...] le fait de n'avoir qu'une équation nous a fait aussi poser les questions : pourquoi une seule équation ? Est-ce qu'on pouvait avoir plus qu'une ? Et si on avait plus qu'une, est-ce que serait différent [...] Mais, dans ce cas aussi nous n'avons pas su visualiser
13 Je pense qu'à la maison ça a été la même chose [...] c'est le même raisonnement que j'ai suivi [...] je ne sais pas si je réussi à mieux justifier
14 Ici, il y a un théorème [...] le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection de deux sous-espaces [...] mais il faut [...] j'ai même trouvé un contre-exemple dans le livre de Callioli
15 Je ne l'ai pas mis parce qu'il s'agissait d'une simple copie [...] ça n'aurait pas été quelque chose que j'avais construit, n'est-ce-pas ?
16 Mais, même maintenant je n'ai pas un moyen de construire mon propre contre-exemple [...] mais c'est en me basant sur ce théorème que je me suis senti sûr pour justifier.

Analyse : L'extrait relatif à la partie a) confirme (cf. page 98) l'analyse faite à partir des données recueillies.

En ce qui concerne la partie b), apparaît une partie de la recherche intéressante et non visible dans la production écrite. Visiblement la recherche dans le manuel éclaire Delta en lui montrant pourquoi on pourrait penser à tort que l'énoncé est vrai et il attribue ce point de vue à l'étudiante Bêta, ce qui ne correspond pas forcément à la réalité. Mais ceci ne lui permettra pas cependant de rectifier l'énoncé malgré les aides appuyées de l'enseignante.

L'entretien confirme aussi le rôle joué par le cadre géométrique, comme nous en avions fait l'hypothèse. Cet étudiant sait que dans $\mathbf{R}^3$, il peut visualiser, ce qu'il a déjà exprimé à plusieurs reprises en même temps que sa méfiance vis à vis des analogies avec $\mathbf{R}^4$.

Dans la partie c, l'entretien confirme les difficultés rencontrées par l'étudiant et par le groupe, avouant que son travail personnel ne lui a pas permis d'avancer. On peut s'interroger sur la nature du contre-exemple trouvé dans le manuel. Les caractéristiques du manuel, le fait que les seuls contre-exemples sont ici obtenus pour l'égalité des sous-espaces qu'on ne peut manquer de repérer, et le fait que l'étudiant ne se sente pas capable de fabriquer son propre contre-exemple nous incite à penser que ce n'était pas un contre-exemple dans $\mathbf{R}^4$ qui était fourni.

II.2.2. UN BREF APERÇU DU TRAVAIL DES DEUX AUTRES GROUPES

Comme pour le premier dispositif, nous allons présenter les données issues du travail des deux autres groupes dans un tableau question par question, en nous centrant plus particulièrement dans chaque cas, sur l'un des étudiants du groupe.

- **groupe 1** : Il s'agit d'un groupe de deux étudiantes. Nous disposons des deux productions écrites et de l'entretien de l'une d'elles. Nous avons aussi la production écrite du groupe et de l'enregistrement du travail en classe. L'étudiante sur laquelle nous nous centrons est celle pour laquelle nous disposons de toutes les données.

Question 1 :
travail en classe : vérification de l'indépendance linéaire des vecteurs qui engendrent le sous-espace F par recours à la définition. Une erreur de calcul dans la résolution du système associé conduit à la conclusion erronée $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, mais il n'y a pas de conclusion exprimée sur la dimension de F. Passage ensuite de la représentation cartésienne de E donnée à une représentation paramétrique "implicite tableau" puis "explicite tableau", le but explicité étant de trouver soit une même base pour les deux sous-espaces, soit la même dimension. Concluent que comme les dimensions des deux sous-espaces sont différentes, elles ne peuvent pas montrer l'égalité.
travail à la maison : même raisonnement que celui fait en classe pour déterminer une représentation paramétrique et une base de E. Ensuite vérification de l'indépendance linéaire des vecteurs générateurs de F avec de nouveau une erreur de calcul qui conduit à la même conclusion erronée que dans le travail en classe. Conclusion sur le fait que les vecteurs générateurs forment une base de F. Ensuite est posée la question de l'égalité de E et de F, en termes d'inclusion réciproque. L'inclusion $E \subset F$ est traitée en exprimant un vecteur générique de E à partir de la base trouvée, en exprimant son appartenance à F et en résolvant le système associé. La résolution est correcte et aboutit à un système indéterminé. L'étudiante conclut que E est inclus dans F. La même méthode est utilisée ensuite pour tester l'inclusion de F dans E conduisant à un système à solution unique. L'étudiante conclut que l'inclusion est satisfaite et les deux sous-espaces égaux.
technique utilisée : la méthode de substitutions successives en classe et à la maison pour la résolution des systèmes.
blocage : en classe, lié à l'erreur de calcul et son interprétation cohérente. A la maison, une erreur analogue n'est pas traitée de la même façon, l'étudiante adopte une autre stratégie et conclut à l'égalité sans repérer l'incohérence avec les dimensions trouvées.
dérapages : aucun
existence de quantification : à la maison : $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$

$$\left(\frac{-a-2b}{3}, \frac{5a-5b}{3}, a, b\right) = \alpha_1(5, 5, -3, -6) + \alpha_2(-4, -5, 2, 5) + \alpha_3(1, 0, -1, -1),\ \forall\ a, b \in \mathbf{R}$$

justifications, explicitations : tant en classe qu'à la maison explicitation des différentes étapes du raisonnement ce qui permet de mettre en évidence le blocage, par exemple : "On voudrait déterminer des bases et des dimensions égales ».
réponse : incorrecte en classe mais cohérente, correcte à la maison mais incohérente.
théorèmes généraux utilisés et/ou mentionnés : aucun.

Question 2
partie a :
travail en classe : détermination d'une base du noyau et application du théorème du noyau et de l'image pour en déduire la dimension de l'image.
travail à la maison : idem
technique utilisée : en classe, le résultat de la résolution du système est donné directement, à la maison, la méthode du pivot de Gauss est détaillée.
blocage : aucun
dérapage : aucun
existence de quantification : aucune
justification, explicitations : dans le travail à la maison, l'étudiante remarque que les vecteurs qui engendrent le noyau sont linéairement indépendants et forment une base dans le travail à la maison, dans le travail en classe, les étudiantes concluent directement en termes de dimension.
réponse : correcte
théorèmes généraux mentionnés et/ou utilisés : le théorème de la dimension du noyau et de l'image.
utilisation du langage géométrique : non

partie b :
travail en classe : détermination déjà faite d'une base du noyau et aucune considération sur le sous-espace image.
travail à la maison : idem.
technique utilisée : idem item a.
blocages : la question sur la détermination d'une représentation cartésienne du sous-espace image n'est pas abordée. Dans l'entretien, l'étudiante dira qu'elle a cherché une façon de trouver des équations linéaires homogènes pour faire une représentation cartésienne mais qu'elle n'a pas su comment s'y prendre mais qu'ensuite, en discutant avec les autres, elle a vu qu'en échelonnant le système, on pouvait en trouver.
dérapages : aucun.
existence de quantifications : aucune.
phrases, justifications, explicitations : idem item a.
réponse : correcte pour le noyau.
théorèmes généraux mentionnés et/ou utilisés : aucun.
utilisation du langage géométrique : non.

Question 3 :
partie a :
réponse : correcte.
justification : en classe, écrivent que le sous-espace peut être engendré par moins de vecteurs sans plus de précision, à la maison l'étudiante relie ceci à la dépendance linéaire des vecteurs générateurs.
partie b :
réponse : correcte.

contre-exemple : correct en classe et à la maison. C'est le même : $\{(x,x) ; x \in \mathbf{R}\}$ et $\{(x,2x) ; x \in \mathbf{R}\}$ dans $\mathbf{R}^2$, les étudiants précisant que les sous-espaces sont de dimension 1.
rectification de l'énoncé : aucune.
justification : représentation sur un repère orthogonal des deux droites de $\mathbf{R}^2$.
utilisation du langage géométrique : oui (cf. ci-dessus).

partie c :
réponse : je ne sais pas en classe et à la maison.
contre-exemple : aucun.
rectification de l'énoncé : aucune.
justification : aucune.

Analyse : Dans la première question nous avons pu mettre en évidence que cette étudiante présente les difficultés suivantes :

- difficulté à relier les notions en jeu dans la question,

- d'interprétation et de contrôle de résultats trouvés qui sont renforcées par des erreurs de calcul sur le système.

En réalité, l'étudiante reconnaît les notions en jeu dans la question, mais elle n'est pas capable de les organiser.

Pour la question 2, l'étudiante ne donne qu'une base du noyau et les dimensions du noyau et de l'image puisqu'elle applique le théorème. Elle n'aborde pas la détermination d'une représentation cartésienne de l'image et dans son entretien elle affirme qu'elle a eu des difficultés pour déterminer cette représentation puisqu'elle ne savait pas comment le faire.

La question 3 permet de mettre en évidence les difficultés de se référer à des théorèmes généraux ce qui ne lui permet pas dans l'item b de justifier sa réponse et dans l'item c de donner une réponse à la question. Ces mêmes difficultés avaient été déjà remarquées dans les autres questions.

- groupe 2 :

Il s'agit d'un groupe de trois étudiantes. Nous n'avons que les productions écrites de deux de ces étudiantes et l'entretien de l'une d'elles. C'est sur cette dernière que nous nous centrons.

Question 1 :
travail en classe : essai de détermination d'une représentation cartésienne du sous-espace F, les étudiants bricolent sur les équations de façon à déterminer la même représentation que celle donnée pour le sous-espace E. Les étudiantes arrivent à $-x-2z+y+t=0$ et s'arrêtent là sans aucun commentaire.

travail à la maison : détermination d'une représentation cartésienne du sous-espace F par échelonnement du système. Elle montre ensuite que les solutions des deux systèmes d'équations associés à E et F sont les mêmes en passant à une représentation paramétrique "implicite tableau" en fonction de z et t et conclut à l'égalité.
technique utilisée : en classe, bricolage sur les équations, à la maison échelonnement.
blocages : en classe, arrêt après obtention d'une équation pour F par bricolage.
dérapages : aucun.
existence de quantification : aucune.
justifications, explicitations : en classe, la production écrite ne donne à voir que des calculs, à la maison l'étudiante explique sa démarche.
réponse : aucune en classe, correcte à la maison.
théorèmes généraux mentionnés ou utilisés : aucun.

Question 2

partie a :
travail en classe : détermination d'une base du noyau et de l'image par travail sur le tableau de nombres associé à l'application et utilisation du théorème de la dimension de l'image et du noyau comme moyen de vérification.
travail à la maison : idem
technique utilisée : en classe et à la maison, la méthode du pivot de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en lignes pour déterminer une base.
blocage : aucun.
dérapages : aucun.
existence de quantification : aucune.
justifications , explicitations : explicitation de la démarche, vérification de l'indépendance linéaire des deux vecteurs obtenus pour le noyau par la technique des tableaux.
réponse : correcte
théorèmes généraux mentionnés ou utilisés : théorème de la dimension du noyau et de l'image.
utilisation du langage géométrique : non.

partie b :
travail en classe : idem partie a pour le noyau et détermination d'une représentation cartésienne de l'image par identification de la condition de résolubilité du système.
travail à la maison : idem.
techniques utilisées : pour le noyau, idem item a.
Pour l'image, la méthode du pivot de Gauss sur le système.
justifications, explicitations : idem item a.
blocages : aucun.
dérapages : aucun.
réponse : correctes.
théorèmes généraux mentionnés ou utilisés : aucun.
utilisation du langage géométrique : non.

Question 3

partie a :
réponse : correcte et énoncé rectifié en classe.
justification : correcte en classe et avec des exemples à la maison (trois vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ linéairement dépendants, justification par technique de tableau).

partie b :
réponse : correcte
contre-exemple : correct (en classe, dans $\mathbf{R}^3$, x=0 et y=2z, à la maison, dans $\mathbf{R}^3$, x=-y et y=3x).
rectification de l'énoncé : aucune en classe, à la maison précise comment montrer l'égalité via les représentations cartésiennes.
utilisation du langage géométrique : non.
justification : par contre-exemple.

partie c :
réponse : erronée en classe et à la maison. En classe, la conclusion « vrai » est justifiée par un exemple : les sous-espaces d'équations respectives x=0 et x=2y dans $\mathbf{R}^4$. L'intersection est déterminée sous forme paramétrique implicite ($\{(0,0,z,t) / z \text{ et } t \in R\}$). A la maison, l'étudiante se réfère au théorème de la somme et de l'intersection mais en faisant l'erreur usuelle. Elle donne aussi un exemple et le justifie (sous-espaces d'équation y-2x=0 et z-t=0).
contre-exemple : aucun.
rectification de l'énoncé : aucune.
justification : en classe par exemple, à la maison via le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection et le théorème du rapport entre nombre d'équations et dimension du sous-espace.

Analyse : Pour la question 1, tant dans le travail en classe que dans le travail à la maison l'étudiante essaye de montrer l'égalité par comparaison des représentations cartésiennes ou paramétriques. Elle reste dans le seul niveau des représentations et elle n'est pas capable de mettre en place les connaissances en jeu dans la question.

La question 2 est bien réussie et il semble que l'étudiante ne voit pas le besoin de justifier le résultat après l'application de la méthode du pivot de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en lignes tellement elle est habitué à cette technique. Par rapport à la détermination d'une représentation cartésienne de l'image il semble qu'elle ait choisi l'équation homogène qui est restée après l'application de la méthode de Gauss sur le système puisqu'elle fait l'observation suivante : "la représentation cartésienne de F est constituée de tous les systèmes d'équations linéaires homogènes qui caractérise F". De toute façon, elle ne donne aucune justification et dans son entretien elle affirme qu'elle a eu des difficultés pour comprendre ce qu'est une représentation cartésienne puisque cette notion était nouvelle pour elle.

La troisième question semble permettre de mettre en évidence des difficultés à relier les théorèmes généraux utilisés à la question posée même si l'étudiante reconnaît les théorèmes correctement, c'est-à-dire des difficultés d'interprétation du théorème par rapport à la question.

III. CONCLUSION

Il nous semble tout d'abord important de rappeler un certain nombre de caractéristiques de l'enseignement brésilien.

• Au lycée, au Brésil, les étudiants ne sont confrontés qu'à un bref aperçu de la géométrie analytique dans $\mathbf{R}^2$ basé sur le théorème de Pythagore et donc sur le seul point de vue cartésien. La définition d'équation paramétrique (représentation paramétrique) des droites est donnée sous la forme « implicite-équation », mais il n'y a aucune référence à la notion de vecteur générateur, la notion de vecteur n'étant pas introduite en mathématiques. Les seuls vecteurs rencontrés au lycée le sont en physique. Ils sont définis en termes d'intensité, direction, sens et servent à déterminer des vitesses, des accélérations et des forces.

• L'étude des vecteurs ne commence donc, en mathématiques, qu'à l'université. Au premier semestre ou sur une année, en première année à l'université, les étudiants suivent un module de géométrie analytique où ils traitent la question des représentation cartésiennes et paramétriques, même si ces mots ne sont pas employés (on utilise plutôt les expressions d'équations paramétriques et cartésiennes de droites et plans dans l'espace). A l'université, la géométrie analytique s'étend aussi à la dimension 3.

• Comme le montrent les deux manuels « classiques » que nous avons analysés au chapitre IV :

- la question de l'articulation des points de vue n'est pas réellement prise en compte explicitement par l'enseignement, même si les étudiants sont confrontés à des tâches où le passage d'un point de vue à l'autre est nécessaire,

- l'enseignement ne prend pas compte non plus la question des différences entre vectoriel et affine,

- le cadre des systèmes linéaires est présent mais peu articulé avec celui de l'algèbre linéaire. Il tend à être réduit essentiellement à une fonction d'outil technique et le théorème de Rouché est énoncé,

- le cadre des matrices est lui aussi présent et peu articulé avec celui de l'algèbre linéaire. Dans l'ouvrage de Boldrini, il est articulé au cadre de systèmes linéaires et le complément de ces articulations reste à la charge des étudiants,

- enfin, la théorie de la dualité est absente.

Compte-tenu de ces caractéristiques, on pouvait penser que d'une part les étudiants brésiliens seraient mieux préparés à l'articulation dans le cadre géométrique, mais qu'en revanche ils disposeraient de peu d'outils d'anticipation et de contrôle au niveau théorique, et risqueraient d'être perturbés par les relations affine / vectoriel.

Les données issues des étudiants brésiliens et analysées dans ce chapitre nous montrent tout d'abord que, comme les étudiants français, ils rencontrent de grosses difficultés dans l'articulation des deux points de vue. Ces difficultés sont particulièrement évidentes dans les productions en classe et les enregistrements du travail en groupe associées.

- difficultés d'interprétation des résultats trouvés. Dans la question 1 portant sur l'intersection de sous-espaces, ces difficultés se traduisent par des blocages (cf. par exemple le groupe 1 du premier dispositif, l'enregistrement montrant clairement que les étudiantes de ce groupe, après avoir résolu correctement le système se demandent quoi faire alors puis, faute de trouver une réponse satisfaisante, s'arrêtent là, elles se traduisent aussi, comme en France, par les perturbations introduites par l'équation « y=0 ».

- difficultés dans l'interprétation même de la notion de représentation cartésienne. Ceci est visible par exemple dans le travail des étudiantes Alpha et Bêta et les conduit à fonctionner « par l'analogie formelle ».

- difficultés de passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique se traduisant par des association brutales « équation / vecteur » (exemple : groupe 1, premier dispositif) ou par des difficultés à trouver une base du noyau dans la question 2, alors que la question semblait résolue (cf. enregistrement des étudiants Alpha et Bêta)

- difficultés de recours efficace aux raisonnements portant sur la dimension, l'inclusion, y compris les relations entre dimension du noyau et de l'image. On notera en particulier l'absence de raisonnement explicite jouant sur les rapports entre nombre d'équations et dimension du sous-espace associé.

De plus, contrairement à ce que l'on pouvait attendre, le recours au cadre géométrique est faible et peu opératoire (exemple : enregistrement des étudiants Delta, Téta et Bêta du deuxième dispositif). Les difficultés liées à la distinction affine / vectoriel ressortent aussi (cf. groupe des étudiants Delta, Téta et Bêta, deuxième dispositif).

Le dispositif mis en place permet cependant ici une reprise par les étudiants du travail effectué en groupe. Dans le travail à la maison, ces étudiants visiblement retravaillent très sérieusement les

exercices proposés, en ayant recours aux manuels et en essayant de surmonter les difficultés rencontrées dans le travail en groupe.

La progression est alors évidente, les étudiant(e)s faisant d'ailleurs assez souvent appel à de nouvelles stratégies.

Ainsi, on note chez l'étudiante Alpha, un recours efficace au cadre géométrique (ce recours reste cependant marginal dans l'ensemble de la population).

Ainsi on note l'utilisation par l'étudiante Bêta dans le premier dispositif, d'une technique d'utilisation des tableaux de nombres, non apparue dans le travail en groupe, pilotée correctement.

Les théorèmes généraux sont également davantage utilisés.

On note également, alors que les productions en classe ne donnent à voir pratiquement que des calculs, un effort évident d'explicitation des notions et des démarches, pour le moins, dans les productions à la maison.

Mais il reste encore des difficultés liées à l'extension et au contrôle (cf. l'enregistrement du groupe Delta, Téta et Bêta deuxième dispositif et l'entretien de Delta).

Nous voudrions souligner pour terminer l'intérêt que nous voyons au dispositif construit, en dépit des difficultés que nous avons eues à le faire fonctionner :

- le travail en deux temps (en classe puis à la maison) a permis de montrer comment, suivant le contexte, le rapport personnel à l'articulation des points de vue des étudiants pouvait se donner à voir de façon différente, comme nous l'avons montré plus haut, même si des régularités évidentes se manifestaient. Ceci nous incite à la prudence dans les interprétations.

- le travail en groupe, réellement effectif dans le cas des binômes s'est révélé riche lors des séances en classe, par les discussions qu'il a générées, mais aussi par l'influence qu'il semble avoir eue dans certains cas sur le travail à la maison.

- les enregistrements du travail en classe, les entretien individuels ensuite qui montrent bien les limites d'un travail expérimental qui, comme dans le chapitre précédent, ne peut se baser que sur des productions écrites standard.

CONCLUSION

Nous avons débuté cette recherche avec un certain nombre d'objectifs. Il s'agissait pour nous d'étudier, sur un exemple précis : relatif à l'algèbre linéaire une question qui nous semblait didactiquement intéressante : celle de point de vue et d'articulation de points de vue.

Nous voulions essayer de comprendre ce que recouvrait exactement, dans ce cas précis, la notion de point de vue, la situer par rapport aux notions de cadre et de registre plus familières aux didacticiens, partant de l'hypothèse qu'elle ne pouvait se réduire à aucune de ces dernières.

Nous voulions aussi étudier comment était gérée institutionnellement l'articulation des deux points de vue cartésien et paramétrique, qui nous semblait fondamentale en algèbre linéaire, et mettre en rapport les difficultés rencontrées par les étudiants, dont nous soupçonnions la résistance, avec les caractéristiques de cette gestion institutionnelle pour dépasser une approche simplement cognitive de ces questions.

Ces objectifs nous ont conduite à une certaine organisation du travail de recherche.

Dans un premier temps, nous avons cherché à clarifier notre problématique, en la resituant plus globalement dans l'évolution récente des travaux didactiques. L'analyse menée nous a permis de mettre en évidence le rôle croissant joué dans les travaux didactiques par les questions de flexibilité cognitive - mais aussi la diversité des approches existantes vis à vis de cette flexibilité. Dans les travaux relevant d'une centration sur processus et objet, comme ceux de Sfard, Dubinsky, Tall, cette flexibilité va trouver à s'exprimer dans une prise en compte croissante des rapports dialectiques entretenus par les dimensions procédurales et structurelles des notions mathématiques, tant au niveau conceptuel que sémiotique. Dans les travaux récents de Sierpinska sur l'algèbre linéaire, initialement inspirés des théories épistémologiques de Piaget et Garcia, cette flexibilité s'exprime à travers les rapports dialectiques existant entre trois modes de pensée : le mode synthétique -géométrique, le mode analytique-arithmétique et le mode analytique-structurel. Dans les travaux de R. Douady, cette flexibilité s'exprime en termes de changements de cadres, ces changements de cadres étant perçus comme moteurs de processus d'équilibration majorante ou moteurs de construction de connaissances non directement accessibles. Dans les travaux de R. Duval, cette flexibilité s'exprime en termes de conversion entre registres sémiotiques, et l'accent est mis sur les rapports dialectiques entretenus entre la sémiosis et la noésis.

Par rapport à ces constructions théoriques, la notion de point de vue apparaissait comme une notion commune utilisée par un certain nombre de didacticiens avec des acceptions sensiblement différentes. Dans ses formes les moins locales, la notion de point de vue semblait attachée à des objets mathématiques, des cadres de fonctionnement de ces objets, des registres d'expression et de traitement, de façon plus ou moins complexe.

Sans espérer à proprement parler pouvoir lui conférer un statut didactique précis, il nous semblait néanmoins intéressant, d'essayer de comprendre cette organisation dans le cas précis qui nous intéressait plus particulièrement : celui de l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dont nous postulions, à la suite de Marc Rogalski, qu'elle présentait une autonomie incontestable par rapport aux catégories déjà introduites.

Le premier pas dans la compréhension de cette organisation nous semblait être nécessairement celui de l'analyse mathématique. Nous nous y sommes attachée dans le chapitre II. A première vue, l'articulation des deux points de vue s'exprime simplement. Elle se traduit sémiotiquement par deux grandes catégories de représentations que nous avons qualifiées respectivement de type paramétrique et cartésien, par analogie avec la terminologie en vigueur en géométrie analytique. Le passage d'un catégorie à l'autre s'effectue grâce à des techniques algorithmiques élémentaires. Cependant, une analyse détaillée des représentations et des techniques laisse déjà soupçonner une complexité plus grande et des difficultés possibles. A l'intérieur d'un même type de représentation, la visibilité des objets était plus ou moins grande, et le passage à l'autre point de vue plus ou moins « préparé ». Ceci nous a incitée à distinguer a priori différents sous-registres dans les registres déjà identifiés (tableau - symbolique - équations). Les techniques de passage n'étaient pas symétriques, l'une se situant dans la continuité de la résolution de systèmes linéaires, l'autre nécessitant la prise en compte des conditions de résolubilité.

A ceci s'ajoutait le décalage qui nous semblait exister entre les techniques algorithmiques de passage et le cadre théorique dans lequel s'inscrit aujourd'hui naturellement l'articulation des points de vue à savoir : la dualité.

Ceci nous a conduite à aller chercher dans l'histoire de la genèse mathématique des informations supplémentaires sur l'articulation des points de vue. Cette genèse apparaît étroitement liée à celle de la notion de rang. La dissymétrie ci-dessus mentionnée s'y retrouve dans un décalage temporel important entre les deux sens de l'articulation, le sens cartésien / paramétrique étant premier et le sens inverse apparaissant dépendant d'un changement de point

de vue sur la résolution des systèmes (avec décentration de la recherche de solutions) et la possibilité d'associer équations et vecteurs. L'histoire montre aussi que des techniques performantes comme celles établies dans le cadre de la théorie des déterminants pouvaient freiner la mise en place de l'articulation. Enfin, elle nous montre que l'articulation des points de vue peut vivre à des niveaux théoriques plus ou moins élaborés et que, si elle nécessite la flexibilité entre équations et vecteurs, elle ne nécessite pas une théorisation complète de la dualité.

Cette étude nous a conduite à distinguer cinq cadres où l'articulation va s'exprimer et se travailler sous des formes spécifiques : le cadre des systèmes linéaires, le cadre de la géométrie, le cadre de l'algèbre linéaire (lui-même comportant deux niveaux distincts suivant que l'on fait intervenir ou non la dualité) ainsi que celui des matrices et celui des déterminants même si ces derniers n'ont pas réellement d'existence autonome vis à vis de l'articulation.

Elle nous a conduite aussi à faire l'hypothèse qu'un rapport mathématiquement efficace à l'articulation des points de vue ne pouvait pas se construire à l'intérieur d'un seul de ces cadres, mais mettait nécessairement en jeu l'interaction au moins des trois premiers mentionnés (ceci ne signifiant pas nécessairement une théorie de la dualité).

Cette analyse mathématique étant effectuée, nous nous sommes alors intéressée à la question des moyens didactiques de l'interaction des points de vue, en cherchant à préciser dans quel type de tâches elle pouvait trouver à se développer et vivre dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Il nous semblait raisonnable d'envisager pour une première rencontre avec cette articulation, des espaces de petite dimension, qui permettaient de jouer techniquement et conceptuellement sur les différents cadres et registres, dans les débuts de l'enseignement de l'algèbre linéaire. C'est dans cette phase de première rencontre que nous nous sommes centrée. C'est pourquoi nous avons répertorié les types de tâches intervenant classiquement dans un premier cours d'algèbre linéaire et analysé, suivant les caractéristiques précises des tâches, leurs besoins en termes d'articulation, au niveau technique, technologique et théorique. Nous avons ainsi identifié douze types de tâches potentiellement porteuses d'interaction. Ceci peut paraître a priori suffisant mais nous voudrions souligner que l'analyse plus fine menée au niveau des variables des tâches a clairement montré que pour construire des tâches nécessitant réellement un travail d'articulation, et encore plus, pour construire des tâches où cette articulation mette en jeu obligatoirement des processus d'anticipation, de contrôle, au delà du seul traitement algorithmique, il fallait accorder une vigilance toute particulière au choix des variables des tâches.

Exemple 1 : Considérons les deux tâches suivantes :

1. On considère dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs suivants : a = (2,3,-1), b = (1,-1,-2), c = (5,0,-7), d = (0,0,1). Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par {a, b} et {c, d}.

2. On désigne par E et F le sous-espace de $\mathbf{R}4$ engendrés par

a_1=(1,1,1,1), a_2=(1,1,-1,-1), a_3=(1,-1,1,-1) ; b_1=(1,1,-1,1), b_2=(2,-2,0,0), b_3=(3,-1,1,1)

Donner une base de E une base de F de E∩F et de E+F. Même question en prenant pour b_3 le vecteur (3,2,2-α,α). (Ousman, 1996, p.51)

La première reprend une question du test et nous avons déjà montré les besoins d'articulation que sa résolution met en jeu. La deuxième est extraite de la thèse de Ousman (1996). Elle est en apparence voisine mais ne nécessite aucune articulation de points de vue puisqu'on demande une base des sous-espaces. Soulignons de plus que E + F = $\mathbf{R}^4$.

Exemple 2 :

Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par
$f(e_1) = 3e_1+5e_2-2e_3$, $f(e_2) = -2e_1-3e_2+e_3$ et $f(e_3) = -e_1-e_2$
Donner une base de Kerf et montrer que Imf est un plan dont on donnera une équation. A-t-on Kerf⊂Imf ? Imf⊂Kerf ? $\mathbf{R}^3$ = Kerf⊕Imf ? (Ousman, 1996, p.122)

Cette tâche est, elle aussi extraite de la thèse de Ousman. Sa résolution met en jeu plusieurs niveaux d'articulation et ce, dès le début, puisqu'il faut soit passer par une conversion entre le registre symbolique et le registre tableau pour expliciter l'application donnée par les images des vecteurs de la base canonique, soit faire directement une interprétation matricielle des relations données.

Ensuite l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique est obligatoire dans les deux sens puisqu'il y a demande explicite d'une représentation cartésienne du sous-espace image. Soulignons cependant que l'étudiant est ici fortement aidé par les informations données dans le cadre géométrique : on précise que l'image est un plan caractérisé par une équation. Pour l'inclusion et la somme, soulignons que des raisonnements s'appuyant sur la dimension peuvent simplifier la résolution et qu'encore une fois l'interprétation géométrique peut favoriser les anticipations et les contrôles.

Une question se posait alors inévitablement : Comment cet espace de travail de l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique est-il exploité institutionnellement ? Comment sont perçus les facteurs que nous avons mis en évidence ? Pour répondre à cette question, nous avons eu recours, de façon classique, à l'analyse de manuels, faisant l'hypothèse que ces

derniers nous permettaient pour le moins de saisir les caractéristiques dominantes des rapports institutionnels.

Vu notre projet, nous avons choisi des manuels français et brésiliens auxquels nous avons ajouté deux manuels anglo-saxons exerçant une influence certaine sur l'enseignement brésilien. Nous avons considéré des ouvrages de référence classiques dans les deux pays ainsi que les ouvrages plus récents. Pour la France, nous avons ajouté deux polycopiés, choisis en raison de l'attention portée par leurs auteurs aux questions qui nous intéressaient.

Les manuels ont été analysés en deux temps, d'abord par une analyse « versant enseignant » prenant en compte la partie cours - exercices corrigés - puis par une analyse « versant étudiant » prenant en compte la partie « exercices » pour les ouvrages qui en comportaient. Pour ce versant, l'analyse s'est effectuée en référence aux tâches précédemment répertoriées.

L'analyse met en évidence la diversité des rapports institutionnels possibles suivant les cultures mais aussi au sein d'une même culture. En dépit de cette diversité, en ce qui concerne l'articulation des points de vue, un certain nombre de régularités apparaissent (ceci n'excluant pas quelques rares exceptions). C'est sur ces régularités que nous souhaiterions insister dans cette conclusion. Tout d'abord les analyses mettent en évidence une faible sensibilité aux questions d'articulation qui apparaissent souvent de façon implicite et sont très rarement travaillées en tant que telles. On rejoint ici des caractéristiques déjà mises en évidence dans les recherches didactiques sur l'articulation de registres sémiotiques. Cette articulation s'organise autour de deux pôles : d'une part celui technique de la résolution des systèmes linéaires, d'autre part celui théorique de la dualité. Mais l'organisation entre cadres est rarement prise en charge. Suivant les ouvrages, c'est un pôle ou l'autre qui domine et la technologie présente est relative à ce pôle.

De plus, dans le cas où c'est le pôle technique qui domine, la technologie est essentiellement descriptive. En ce qui concerne les exercices proposés aux étudiants, l'analyse montre que, à quelques exceptions près comme précédemment, l'espace disponible n'est que peu exploité. Les exercices nécessitant l'articulation des points de vue restent tout à fait marginaux, se situent majoritairement dans le sens cartésien / paramétrique et sont associés de façon privilégiée à la résolution de systèmes.

Venons-en maintenant à la partie expérimentale de la recherche concernant l'analyse des rapports personnels à l'articulation développés par les étudiants. Pour les besoins de cette analyse, nous avons construit un ensemble de tâches, en nous inspirant directement de la

typologie préalablement élaborée - les tâches qui en résultent ne sont en rien originales, elles sont très proches de tâches ordinaires et ne s'en distinguent que par des choix de variables qui rendent obligatoire l'articulation des points de vue, favorisent plus ou moins le contrôle géométrique, facilitent le travail technique ainsi que des modes de résolution moins algorithmiques permettant la mise en jeu de connaissances spécifiques pour le contrôle et l'anticipation. A ceci s'ajoutent deux tâches de nature géométrique.

Les résultats obtenus, tant en DEUG qu'en maîtrise en France ou en mestrado au Brésil, mettent en évidence les difficultés résistantes rencontrées par les étudiants dans l'élaboration d'un rapport personnel efficace et flexible aux deux points de vue considérés. Les taux de réussite, même pour des tâches élémentaires comme celles proposées sont bas, voire très bas, si l'on excepte la tâche de géométrie analytique issue de l'examen de DEUG, elle, bien réussie.

L'analyse des erreurs des étudiants montre clairement que, pour les exercices proposés, les difficultés rencontrées par les étudiants sont très majoritairement des difficultés qui mettent en jeu d'une façon ou d'une autre l'articulation des points de vue, que les étudiants se trouvent en situation de blocage ou qu'ils produisent des résultats incohérents avec ceux liés à l'articulation. La résolution des tâches est enfermée, au niveau technique, pour beaucoup d'étudiants dans le traitement de tableaux de nombres.

Ces tableaux, qui étaient loin d'apparaître avec une telle fréquence dans les manuels semblent l'instrument sémiotique privilégié via lequel s'aplatissent et se traitent les informations. Mais, le plus souvent, la technologie qui sous-tend le traitement semble sinon perdue, du moins non activée, et les étudiants paraissent incapables de contrôler leur travail.

Ils ne contrôlent pas localement mais ils ne le contrôlent pas non plus en faisant spontanément appel à des théorèmes généraux.

La situation entre DEUG et maîtrise ne semble pas évoluer dans le sens d'une réussite accrue mais plutôt dans le sens de perte des repères locaux qui avaient accompagné sans aucun doute la phase officielle d'enseignement.

Le travail mathématique se situe pour beaucoup au niveau des ostensifs sans qu'une dialectique efficace avec des non-ostensifs soit mobilisée.

Le recours au cadre géométrique est, très peu présent et peu opératoire. Les étudiants qui veulent l'utiliser sont souvent induits en erreur, soit faute de distinguer clairement affine et

vectoriel, soit parce qu'ils veulent généraliser les invariants à des dimensions supérieures à trois sans trop savoir comment le faire.

Les modes de rédaction des étudiants ne les aident pas à contrôler leur travail. Quand ils ne se bornent pas à donner à voir une succession de calculs, ils sont plus d'ordre descriptif qu'explicatif et justificatif. Ils servent essentiellement à ponctuer la démarche et ne permettent pas de la questionner. Il est d'ailleurs intéressant de souligner que la seule tâche réussie s'accompagne d'un niveau de rédaction, lui, d'ordre explicatif et justificatif.

Les difficultés que nous avons mentionnées ci-dessus sont des difficultés spécifiques de l'articulation. Dans le travail mathématique des étudiants, elles se conjuguent avec d'autres difficultés déjà identifiées dans les travaux d'algèbre linéaire, en particulier des difficultés d'ordre logique ou ensembliste. On pourra sur ce point se référer à la classification proposée par Ousman, dans sa thèse.

Ces résultats expérimentaux apparaissent sans doute comme très négatifs. Nous voudrions cependant souligner que les rapports personnels développés par les étudiants ne peuvent être analysés en faisant abstraction des rapports institutionnels qui les façonnent.

Ce que nous apprennent d'abord les productions des étudiants, c'est que dans le cadre de rapports institutionnels peu sensibles aux questions d'articulation de points de vue, même si les moyens tant techniques que théoriques de l'articulation font partie du curriculum, les étudiants ne peuvent construire, seuls, un rapport personnel satisfaisant à cette articulation. celle-ci doit être travaillée en tant que telle, en se donnant les moyens de la faire vivre aux différents niveaux : technique, technologique et théorique et en développant dans ce but des moyens technologiques adaptés prenant en compte les différents cadres dans lequel fonctionne l'articulation, les différents registres dans lequel elle s'exprime. Des résultats comme ceux obtenus à l'examen même s'ils ne concernent que de façon limitée cette articulation, comme nous l'avons montré, laissent penser que d'autres stratégies pourraient conduire à des résultats sensiblement différents.

Nous voudrions souligner que des tâches aussi banales que celles que nous avons proposées peuvent être des instruments de travail efficace, si elles sont convenablement gérées, notamment en mettant l'accent sur l'anticipation et le contrôle.

BIBLIOGRAPHIE

ARNAUDIES, J.M. et FRAYSSE H. (1987) : *Cours de mathématiques - 1, Algèbre,* Dunod Université, Bordas, Paris.

ARTIGUE, M., ROBINET, J. (1982) : Conceptions du cercle chez l'enfant de l'école élémentaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 3.1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 5-64.

ARTIGUE, M. (1989) : *Epistémologie et Didactique,* Cahier DIDIREM n° 3, IREM de Paris VII.

ARTIGUE, M. et DIAS, M. (1995) : Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra, in *The proceeding of the 19th annual meeting of international group for Psychology of Mathematics Education,* Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brésil, 3 vols, 2 : 34 - 41.

ARTIGUE, M. (1996) : Rapports entre dimensions technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques, *Actes de l'Université d'Eté de Rennes,* Août 1996, IREM de Rennes (à paraître).

BENEZRA, A. (1992) : *Comparaison des apprentissages réalises par des étudiants ayant suivi le même enseignement à distance ou non et essai d'une méthodologie de recherche portant sur un enseignement long,* Mémoire de DEA, Université de Paris 7.

BOSCH, M. (1994) : *La dimensión ostensiva en la actividad matemática : el caso de la proporcionalidad.* Doctoral thesis. Universitat Autonoma de Barcelona.

BOLDRINI J.L., COSTA, S.I.R., FIGUEIREDO, V.L., WETZLER, H.G. (1980) : *Álgebra Linear,* Harper & Row do Brasil, São Paulo.

BOYER, C.B. (1968) : *A History of Mathematics,* John Wiley & Sons, Inc., New York.

BROUSSEAU, G. (1986) :Fondements et méthodes de la didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 7.2., La Pensée Sauvage, Grenoble, 33-116.

CALLIOLI C. A., DOMINGUES H.H., COSTA R.C.F. (1983) : *Álgebra Linear e aplicações,* Atual Editora, São Paulo.

CALVO, A. et CALVO, B. (1995) : *Algèbre Linéaire,* Masson, Paris.

CASTELA, C. (1995) : Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures - un exemple concert : celui de la tangent, *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* vol.15.1., La Pensée Sauvage, Grenoble, 7-47.

CHEVALLARD, Y. (1990) : *La transposition didactique.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1992) : Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol.12.1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1995) : La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la VIII école d'été de Saint-Sauves d'Auvergne, 83-122.*

CHEVALLARD, Y. (1996) : Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Petit-x, n°42,* 33-57.

COUOT, C. (1993) : *La méthode de Gauss en DEUG A première année. Eléments sur les connaissances des étudiants et sur le contrôle qu'ils opèrent après un trimestre d'enseignement,* Mémoire de DEA, Université de Paris VII.

CROWE, M.J. (1967) : *A history of vector analysis : the evolution of the idea of a vectorial système,* Notre Dame : Universiy Press, 1967, rééd., New-York : Dover, 1985.

DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J. (1986) : *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Points Sciences, S49. Le Seuil, Paris.

DIAS, M. (1993) : *Contribution à l'analyse d'un enseignement expérimental d'algèbre linéaire en DEUG A première année,* Mémoire de DEA, Université de Paris 7.

DIAS, M. (1997) : Articulation de points de vue en algèbre linéaire : le cas de la représentation de sous-espaces vectoriels, *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate,* (à paraître)

DIEUDONNÉ, J. (1964) : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire,* Hermann, Paris.

DIEUDONNÉ (1978) : *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700 - 1900. I Algèbre, Analyse classique, théorie des nombres,* Hermann, Paris.

DORIER, J.-L. (1990a) : *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire, Approches historique et didactique,* Thèse de Doctorat de l'Université J. Fourier - Grenoble 1.

DORIER, J.-L. (1990b) : *Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire,* Cahier DIDIREM n° 6, IREM de Paris VII.

DORIER, J.-L; (1990c) : *Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire,* Cahier DIDIREM, n°7, Paris : IREM de Paris VII.

DORIER, J.-L. (1991) : Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques 11(2/3), 325-364.*

DORIER, J.-L. (1992) : *Illustrer l'aspect unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire.* Cahier DIDIREM n°14, IREM Paris VII.

DORIER, J.-L. (1993) : L'émergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, *Cahier du séminaire d'histoire des mathématiques* (2^e série) 3, 159-190.

DORIER, J.L. (1993) : L' " Ausdehnungslehre " de Grassmann : Une étape clef dans la théorisation du linéaire, *Actes de la rencontre internationale : " Nombres Complexe et Vecteur ",* D. Flament ed., Paris, (à paraître)

DORIER, J.L. (1994) : Aperçu Epistémologique de la Théorie de l'Extension de Hermann Günther Grassmann (1844), *Seminaire DidaTech,* Grenoble, 23-64.

DORIER, J.L. (1995a) : Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 29(2), 175-197.

DORIER, J.L. (1995b) : A general outline of the genesis of vector space theory, *Hist. Math.* 22(3), 227-261.

DORIER, J.L. (à paraître) : Use of history in a research work on the teaching of linear algebra, In Katz, V (ed) : MAA publication.

DORIER, J.-L,. ROBERT, A., ROBINET, J., ROGALSKI, M. (1994a): L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une engenérie longue et questions, In *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France,* Artigue M. et al. (eds), Grenoble : La Pensée Sauvage, 328-342.

DORIER, J.L., ROBERT, A., ROBINET, J., ROGALSKI, M., HAREL, G., HILLEL, J., SIERPINSKA, A. et al. (1997) : *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* La pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY, R. (1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques,* Thèse de doctorat d'état, Université Paris VII.

DOUADY, R. (1986) : *De la didactique des mathématiques à l'heure actuelle*, Cahier de Didactique des Mathématiques, n° 6, IREM de Paris VII.

DOUADY, R. (1986) : *Jeux de cadres et Dialectique Outil-Objet*, Recherches en Didactiques des mathématiques, vol 7.2. La Pensée Sauvage, Grenoble, 5-31.

DOUADY, R. (1992) : Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères - IREM,* n°6, 132-158.

DOUADY, R. (1994) : Ingénierie Didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères - IREM*, n° 15, 37-61.

DROUHARD, J.Ph. (1995) : Algèbre, calcul symbolique et didactique, *Actes de la VIII école d'été de Saint-Sauves d'Auvergne*, 325-344.

DUBINSKY, E. (1991) : Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in *Advanced Mathematical Thinking*, D.Tall (ed.), Dordrecht : Kluwer, 95-123.

DUVAL, R. (1993) : Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives 5*, Strasbourg : IREM, 37-65.

DUVAL, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Paris.

ENSEIGNER AUTREMENT LES MATHEMATIQUES EN DEUG A PREMIERE ANNEE. Brochure de la Commission Inter-IREM Université, 1990.

EULER, L. (1750) : Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes, *Mémoires de L'Académie des Sciences de Berlin 4, 219-223.*

GRUGEON, B. (1997) : Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°17/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 167-209.

HAREL, G. et KAPUT, J. (1991) : The role of conceptual entities in building advanced mathematical concepts and their symbols, in D. Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht : Kluwer, 82-94

HILLEL, J. et SIERPINSKA, A. (1994) : On one persistent mistake in linear algebra, *In Proceedings of the XVIII International Conference of PME,* Portugal, Vol. II, 65-72.

LAGES LIMA, E. (1995) : *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, SBM-Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro.

LANG, S. (1976) : *Algèbre Linéaire I*, InterEditions, Paris.

LEHMAN, E. (1984) : *Mathématiques pour l'étudiant de première année 1 et 2,* Belin, Paris.

LELONG-FERRAND, J. et ARNAUDIES, J.M. (1978) : *Cours de Mathématiques-Algèbre,* tome I, Dunod Université, Bordas, Paris.

LIRET, F. et ZISMAN, M. (1984) : *Maths*, tome 2, Dunod Université, Bordas, Paris.

MERLIN, X. (1995) : *Méthodix-Algèbre*, Ellipses, Paris.

MEYER, D. (1992) : *Un peu de géométrie dans* $\boldsymbol{R}^3$, Cours polycopié de l'Université Paris VII, 1992/93

MEYER, D. (1992) : *Algèbre Linéaire*, Cours polycopié de l'Université Paris VII, 1992/93.

MUIR, T. (1960) : *The theory of Determinants in the Historical Order of Development,* Dover Publications, New York, Vol III, 82-93, Vol IV, 96-107.

OUSMAN, R. (1996) : *Contribution à l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'université,* Thèse de doctorat de l'université de Rennes I.

PAVLOPOULOU, K. (1993) : Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives 5*, Strasbourg : IREM, 67-93.

PAVLOPOULOU, K. (1994) : *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1), prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée.

PERRIN-GLORIAN, M.J. (1993) : Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives, *Colloque de Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*, EDS : Artigue, M., Gras, R., Laborde,C., Tavignot, P., La Pensée Sauvage, Grenoble, 97-147.

PHAM, F., DILLINGER, H. (1996) : *Algèbre linéaire*, Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris.

PIAGET, J. et GARCIA, R. (1983) : *Psychogenèse et histoire de sciences*, Flammarion, Paris.

ROBERT, A., ROBINET, J. et TENAUD, I. (1987) : *De la géométrie à l'algèbre linéaire-*, Brochure 72, IREM de Paris VII.

ROBERT A., ROGALSKY, J., SAMURCAY, R. (1987) : *Enseigner des méthodes,* Cahier de Didactique des Mathématiques, n° 38, IREM de Paris VII.

ROBERT, A. et ROBIBET, J. (1989) : *Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG*, Cahier de Didactique des Mathématiques, n° 53, IREM de Paris VII.

ROBERT, A. et TENAUD, I. (1989) : Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9.1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 31-70.

ROBERT, A. (1992) : Projets longs et ingénierie pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, *Recherches en Didactique des Mathématiques 12.2/3,* La Pensée Sauvage, Grenoble, 181-220.

ROBINET, J. (1986) : *Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire,* Cahier de Didactique des Mathématiques 29, IREM de Paris VII.

ROGALSKI, M. (1990a) : Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire ?, in *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG Première Année*, Commission inter-IREM université, 279-291.

ROGALSKI, M.(1991) : *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année*, Cahier de Didirem, n° 11, IREM de Paris VII.

ROGALSKY, M. (1992a) : *Patouillages, combinaisons linéaires et paramètres dans la méthode de Gauss*, Cours polycopié de l'université de Sciences et Technologies de Lille I, 1992/93.

ROGALSKY, M. (1992b) : *Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ ... sans jamais oser le demander*, Cours polycopié de l'université de Sciences et Technologies de Lille I, 1992/93.

ROGALSKY, M. (1992c) : *L'algèbre linéaire abstraite*, Cours polycopié de l'université de Lille I, 1992/93.

ROGALSKI, M. (1994) : L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG A, *La Gazette des Mathématiques 60*, 39-62.

ROGALSKI, M. (1995) : Notes du séminaire à São Paulo, Brésil.

ROUCHE, E. (1880) : Note sur les équations linéaires, *Journal de L'Ecole Polytechnique,* Gauthier-Villar, Paris, 221-228.

SCHWINGENDORF, K. ; HAWKS, J. ; BEINEKE, J. (1992) : The concept of function - Aspects of Epistemology and Pedagogy, *Edited by Guershon Harel and ED Dubinsky, volume 25, 133-149.*

SFARD, A. (1991) : On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on process and objets as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

STRANG, G. (1993) : *Introduction to linear algebra,* Wellesley-Cambridge Press, Wellesley.

TALL, D. (1994) : A versatile theory of visualisation and symbolisation in mathematics, *Invited plenary lecture at the CIAEM Conference,* Tome I, Toulouse, France, 15-26.

TALL, D. et VINNER, S. (1981) : *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, Boston.

TAVIGNOT, P. (1991) : *L'analyse du processus de transposition didactique, l'exemple de la symétrie orthogonale au collège.* Thèse de Doctorat de l'université René Descartes, Paris V.

TAVIGNOT, P. (1994) : Réflexion sur les aspects méthodologiques de la recherche en didactique des mathématiques, *Vingt an de didactique des mathématiques en France*, EDS; Artigue, M., Gras, R., Laborde C., Tavignot, P., La Pensée Sauvage, Grenoble, 410-415.

TENAUD, I. (1991) : *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthodes de travail en petits groupes*, Thèse de Doctorat de l'université de Paris VII.

THRUSTON, W.P. (1995) : Preuve et progrès en mathématiques, *Repères IREM,* n° 21, Topiques Editions, 5-26.

VERGNAUD, G. (1981) : *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 2.2, La pensée Sauvage, Grenoble, 215-231.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 2

CHAPITRE I : D'UNE COGNITION HIERARCHISEE A UNE COGNITION FLEXIBLE 5

I. Introduction 5
II. Le cadre de modèles cognitifs hiérarchisés 6
II.1. Des travaux organisés autour des trois niveaux de développement des actions cognitives introduits par Piaget et Garcia 7
A) Les trois niveaux de développement des actions cognitives 7
B) Une recherche sur l'algèbre linéaire exploitant la théorie précédente 11
C) A propos de trois modes de raisonnement en algèbre linéaire 14
II.2. Des travaux organisés autour de la transition processus-objet 16
A) Le modèle de développement des connaissances élaboré par Dubinsky 16
B) La théorie de la réification chez Sfard 20
C) Les notions de Procept et de Versatile Thinking chez Tall 24
III. Le cadre des modèles cognitifs non-hiérarchisés 27
III.1. La notion de cadre 28
III.2. La notion de registre 30
A) Un exemple de coordination de registre en algèbre linéaire 35
III.3. Notion de point de vue 39
A) La notion de point de vue selon Robert et Tenaud 39
B) La notion de point de vue selon Castela 43
C) La notion de point de vue selon Rogalski 44
III.4. Points de vue cartésien et paramétrique : les perspectives de notre travail 46
III.4.1. Approche anthropologique et analyse de la flexibilité entre points de vue 48

CHAPITRE II : LE PAYSAGE MATHEMATIQUE DE L'ARTICULATION ENTRE POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE 51

I. Introduction 51
II. Rapports entre points de vue cartésien et paramétrique : une vision algorithmique 52
A) Passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique 53
B) Passage d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne 56
III. L'organisation des rapports entre points de vue paramétrique et cartésien à travers la notion de dualité 62
IV. Un bref aperçu historique sur l'émergence de l'articulation cartésien et paramétrique 64
V. L'articulation des points de vue : un premier aperçu côté étudiants 75
VI. Des cadres de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique 82
VI.1. Le cadre des systèmes linéaires 83
VI.2. Le cadre des matrices 89
VI.3. Le cadre des déterminants 91
VI.4. Le cadre de l'algèbre linéaire 92
VI.5. Le cadre de la géométrie affine euclidienne 93
VII. Conclusion 94
Organigrammes 97

CHAPITRE III : ETUDE A PRIORI DES CONDITIONS D'EMPLOI DE L'ARTICULATION ENTRE POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE 103

I. Introduction 103
II. Les représentations sémiotiques de vecteurs et de sous-espaces vectoriels 103
II.1. Les représentations sémiotiques de vecteurs 103
II.2. Les représentations sémiotiques de sous-espaces 106
III. Les tâches usuelles d'un premier cours d'algèbre linéaire 107
IV. La grille d'analyse des tâches vis à vis de l'articulation et sa mise en fonctionnement 109
IV.1. La grille d'analyse 109
IV.2. Mise en fonctionnement de la grille, tâche par tâche 110
A) Sous-espaces vectoriels et opérations 111
B) Notions de base et de dimension 121
C) Notion d'application linéaire 123
D) Notion de système linéaire 125
V. Conclusion 127

CHAPITRE IV : ETUDE DE LA PRISE EN COMPTE DE L'ARTICULATION ENTRE LES POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE PAR L'ENSEIGNEMENT : L'ANALYSE DE MANUELS 129

I. Introduction 129
II. Organisation de l'analyse 132
A) Analyse de l'ouvrage de Callioli et al. 134
B) Analyse de l'ouvrage de Boldrini et al. 136
C) Analyse de l'ouvrage de Lages Lima 139
D) Analyse de l'ouvrage de Lang 142
E) Analyse de l'ouvrage de Strang 145
F) Analyse du cours d'algèbre linéaire et Arnaudiès et al. 150
G) Analyse de l'ouvrage d'algèbre linéaire de Calvo et al. 154
H) Analyse de l'ouvrage de Liret / Zisman 158
I) Analyse de l'ouvrage de Pham et al. 165
J) Analyse de la partie linéaire de l'ouvrage de Merlin 169
K) Analyse du polycopié du cours d'algèbre linéaire de Meyer 174
L) Analyse du polycopié du cours d'algèbre de Rogalski 177
III. Bref commentaire sur les différents ouvrages analysés 183
IV. La représentation de tâches habituelles mettant en jeu l'articulation dans les exercices proposés aux étudiants 185
A) Commentaires sur les tâches de l'ouvrage de Callioli et al 186
B) Commentaires sur les tâches de l'ouvrage de Boldrini et al. 186
C) Commentaires sur les tâches de l'ouvrage de Lages Lima 187
D) Commentaires sur les tâches de l'ouvrage de Lang 187
E) Commentaires sur les tâches de l'ouvrage de Strang 187
F) Commentaires sur les tâches de l'ouvrage de Arnaudiès et al. 188
G) Commentaires sur les tâches de l'ouvrage de Liret / Zisman 188
H) Commentaires sur les tâches du polycopié du cours de Rogalski 188

V. Conclusion 189
Organigrammes 192
Tableau de tâches habituelles par ouvrage 205

CHAPITRE V : ETUDE DE DIFFERENTS NIVEAUX DE GESTION DE LA FLEXIBILITE ENTRE LES POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE : ANALYSE A PRIORI 207

I. Introduction 207
II. Les populations concernées et le recueil des données 208
III. L'analyse a priori 209
Question 1 209
Question 2 213
Question 3 216
Question 4 217
Question 5 219
Question 6 220
Question 7 221
Question 8 224

CHAPITRE VI : ETUDE DES DIFFERENTS NIVEAUX DE GESTION DE L'ARTICULATION ENTRE LES POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE : L'ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ETUDIANTS FRANÇAIS 226

Introduction 226
I. L'analyse des productions des étudiants de DEUG Sciences première année - partiel 226
I.1. Le contexte 226
I.2. Présentation de l'analyse 226
Question 1 :
1) Codage utilisé 227
2) Résultats globaux et analyse 243
1) Réussite globale 244
2) Choix de méthodes, méthode et réussite 244
3) Le faible recours au cadre géométrique 245
4) La faible exploitation des résultats sur la dimension 246
5) Analyse des erreurs 246
6) Analyse des explicitations et justifications 247
Question 2 :
1) Codage utilisé 248
2) Résultats globaux et analyse de la question 2A 272
1) Réussite globale 272
2) Méthodes et réussite 272
3) Analyse des erreurs 273
3) Résultats globaux et analyse de la question 2B 274
1) Réussite globale 274
2) Le faible recours au cadre géométrique 275
3) Analyse des erreurs 275
4) Analyse des explicitations et justifications 278
II. L'analyse de productions des étudiants de maîtrise en mathématiques 279
II.1. Le contexte 279
II.2. Présentation de l'analyse 279

Question 1 :
1) Codage utilisé 280
2) Résultats globaux et analyse de la question 1 283
1) Réussite globale 284
2) Analyse des productions étudiant par étudiant 284
3) Niveaux d'explicitations et de justifications 284
4) Comparaison DEUG / Maîtrise 285
Question 2 :
1) Codage utilisé 286
2) Résultats globaux et analyse de la question 2A 291
1) Réussite globale 291
2) Analyse des productions des étudiants 291
3) Résultats globaux et analyse de la question 2B 292
1) Réussite globale 292
2) Analyse des productions des étudiants 292
3) Analyse des explicitations et justifications 293
4) Comparaison DEUG / Maîtrise 294
Question 3 :
1) Codage utilisé 295
2) Résultats globaux et analyse de la question 3 304
1) Réussite globale 304
2) Méthode et réussite 305
3) Analyse des erreurs 305
Question 5 :
1) Codage utilisé 307
2) Résultats globaux et analyse de la question 5 311
1) Méthode et réussite 311
Question 6 :
1) Résultats globaux et analyse de la question 6 314
Question 7 315
IV. L'analyse de productions des étudiants de DEUG Sciences première année - Cours de compléments de mathématiques 323
IV.1. Le contexte 323
IV.2. Présentation de l'analyse 323
Question 8 :
1) Codage utilisé 323
2) Résultats globaux et analyse de la question 8 330
V. Conclusion 331

CHAPITRE VII : ETUDE DE DIFFERENTS NIVEAUX DE GESTION DE L'ARTICULATION ENTRE LES POINTS DE VUE CARTESIEN ET PARAMETRIQUE : ETUDE DE CAS, ETUDIANTS BRESILIENS 335

I. Introduction 335
I.1. Le dispositif prévu 335
I.2. La réalisation effective 336
II. Présentation des résultats 337
II.1. Les résultats de la première passation 337
II.1.1. Les résultats des étudiants du groupe choisi 337

A) L'analyse a posteriori de deux productions de chaque étudiante pour la question 1....338
- le travail en groupe....338
- la production individuelle de l'étudiante Alfa....340
- la production individuelle de l'étudiante Bêta....344
B) La résolution de la question 1 dans les bandes audio....346
C) Les donnes issues des entretiens pour la question 1....348
- l'étudiante Alfa....348
- l'étudiante Bêta....351
D) L'analyse a posteriori de deux productions de chaque étudiante pour la question 2....355
- le travail en groupe....355
- la production individuelle de l'étudiante Alfa....357
- la production individuelle de l'étudiante Bêta....363
E) La résolution de la question 2 dans les bandes audio....365
F) Les données issues des entretiens pour la question 2....368
- l'étudiante Alfa....368
- l'étudiante Bêta....370
G) L'analyse a posteriori de deux productions de chaque étudiante pour la question 3....371
- le travail en groupe....372
- la production individuelle de l'étudiante Alfa....374
- la production individuelle de l'étudiante Bêta....378
H) La résolution de la question 3 dans les bandes audio....380
I) Les données issues des entretiens pour la question 3....385
- l'étudiante Alfa....385
- l'étudiante Bêta....386
II.1.2. Un bref aperçu des données relatives aux deux autres groupes....389
II.2. Les résultats des étudiants du deuxième dispositif....395
II.2.1. Le travail du groupe choisi....396
A) La résolution de la question 1....396
- la production individuelle de l'étudiant Delta....404
- la production individuelle de l'étudiante Bêta....405
- l'entretien de l'étudiant Delta....406
B) La résolution de la question 2....408
- la production individuelle de l'étudiant Delta....415
- la production individuelle de l'étudiante Bêta....418
C) Les questions et les réponses à l'entretien pour la question 2....419
D) La résolution de la question 3....421
E) L'analyse a posteriori de la question 3....429
- l'étudiant Delta....429
- l'étudiante Bêta....430
F) Les questions et les réponses à l'entretien pour la question 3....431
II.2.2. Un bref aperçu du travail des deux autres groupes....434
III. Conclusion....439

CONCLUSION....442

BIBLIOGRAPHIE....449

TABLE DES MATIÈRES....454

ANNEXES

Annexe 1 : Test 1 - Brésil....460
Annexe 2 : Test 2 - Brésil....461
Annexe 3 : Test 1 - France....462
Annexe 4 : Test 2 - France....463
Annexe 5 : Partiel DEUG Sciences - Première Année....464
Annexe 6 : Examen DEUG - Première Année....465
Annexe 7 : Codage Utilisé....467
Annexe 8 : Résultats détaillés étudiant par étudiant - DEUG Sciences Première Année....472
Annexe 9 : Résultats détaillés étudiant par étudiant - étudiants de maîtrise....496
Annexe 10 : Résultats détaillés étudiant par étudiant - étudiants DEUG (compléments de mathématiques)....500

ANNEXES

ANNEXE 1 - TEST 1 - BRESIL

Teste 1

Definições: Seja $\mathbf{R}^n$ um espaço vetorial sobre **R**.

1 - Se $v_1, ..., v_k$, são vetores de $\mathbf{R}^n$, F o subespaço $[v_1, ..., v_k]$ gerado por $\{v_1, ..., v_k\}$ então $\{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k \ / \ (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbf{R}^k\}$ é, por definição, uma **representação paramétrica** de F com k parâmetros, $\alpha_1, ..., \alpha_k$.

2 - Se F é um subespaço de $\mathbf{R}^n$, chamamos uma **representação cartesiana** de F todo sistema de equações lineares e homogêneas que caracteriza F (isto é, $(x_1, ..., x_n) \in F$ se e somente se $(x_1, ..., x_n)$ satisfaz as equações de F).
Exemplo: $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / \ x + y + z = 0 \text{ e } x + 2z = 0\}$.

Questão 1 : Consideremos em $\mathbf{R}^3$ os seguintes vetores:
a = (2, 3, -1); b = (1, -1, -2); c = (5, 0, -7); d = (0, 0, 1). Encontrar uma representação cartesiana da intersecção dos subespaços gerados por {a, b} e {c, d}. (30 min)

Questão 2 : Consideremos F uma aplicação linear de $\mathbf{R}^4$ em $\mathbf{R}^3$ que a cada vetor (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$ associa o vetor (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$ definida por:

$a = x + y + 3z + 10t$
$b = x + 2y + z + 4t$
$c = x \quad + 5z + 16t$

a) Determinar a dimensão do núcleo e da imagem de F.
b) Dar uma base do núcleo e uma representação cartesiana da imagem. (1h)

Questão 3 : As afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas? Justifique sua resposta. Se você responder "falso" tente encontrar um contra-exemplo e, se achar razoável, tente transformar o enunciado proposto para torná-lo verdadeiro.
a) Um subespaço E de $\mathbf{R}^5$ que, pode ser descrito através de uma representação paramétrica com 3 parâmetros tem dimensão igual a 3. **V F Não sei**
b) Se dois subespaços do mesmo espaço têm a mesma dimensão, eles são necessariamente iguais. **V F Não sei**
c) A intersecção de dois subespaços de $\mathbf{R}^4$ gerados por três vetores linearmente independentes é sempre um subespaço de dimensão 2. **V F Não sei**
(30 min)

ANNEXE 2 - TEST 2 - BRESIL

Teste 2

Definições: Seja $\mathbf{R}^n$ um espaço vetorial sobre **R**.

1 - Se v_1 ,..., v_k, são vetores de $\mathbf{R}^n$, F o subespaço $[v_1$,..., $v_k]$ gerado por $\{v_1$,..., $v_k\}$ então $\{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k \ / \ (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbf{R}^k \}$ é, por definição, uma **representação paramétrica** de F com k parâmetros, $\alpha_1, ..., \alpha_k$.

2 - Se F é um subespaço de $\mathbf{R}^n$, chamamos uma **representação cartesiana** de F todo sistema de equações lineares e homogêneas que caracteriza F (isto é, $(x_1, ..., x_n) \in F$ se e somente se $(x_1, ..., x_n)$ satisfaz as equações de F).
Exemplo: $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / \ x + y + z = 0 \text{ e } x + 2z = 0\}$.

Questão 1: Mostre que os subespaços vetoriais de $\mathbf{R}^4$, $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 /$ $x - y + 2z - t = 0$ e $2x + y - z + 3t = 0\}$ e F o subespaço gerado pelos vetores (5,5,-3,-6), (-4,-5,2,5),(1,0,-1,-1) são iguais. (30 min)

Questão 2: Seja F uma aplicação linear de $\mathbf{R}^4$ em $\mathbf{R}^3$ que a cada elemento (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$ associa o elemento (x+y+3z+10t, x+2y+z+4t, x+5z+16t) de $\mathbf{R}^3$.
a) Determinar a dimensão do núcleo e da imagem de F.
b) Dar uma base do núcleo e uma representação cartesiana da imagem. (1h)

Questão 3: As afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas? Justifique sua resposta. Se você responder "falso" tente encontrar um contra-exemplo e, se achar razoável, tente transformar o enunciado proposto para torná-lo verdadeiro.
a) Todo subespaço de $\mathbf{R}^n$ que admite uma representação paramétrica com p parâmetros é um subespaço de dimensão $\leq p$. **V F Não sei**

b) Para mostrar que dois subespaços do mesmo espaço são iguais é suficiente mostrar que eles têm a mesma dimensão. **V F Não sei**

c) A interseção de dois subespaços de $\mathbf{R}^4$ definidos por uma equação linear e homogênea é sempre um subespaço de dimensão 2. **V F Não sei**

(30 min)

ANNEXE 3 - TEST 1 - FRANCE

Définitions:
1 - Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur **R**.
Si v_1, ..., v_k sont des vecteurs de E et F est le sous-espace engendré par v_1, ..., v_k, noté $\langle v_1, ..., v_k \rangle$= lin$\{v_1, ..., v_k\}$ = Vect $\{v_1, ..., v_k\}$
$\{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k / (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbf{R}^k\}$ est par définition une **représentation paramétrique** de F à k paramètres: α_1, ..., α_k
2 - Si F est un sous-espace de E, on appelle **représentation cartésienne** de F tout système d'équations linéaires homogènes qui caractérise F.
Exemple: $F = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x + 2z = 0 \}$.

1) Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui, à chaque vecteur (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$, associe le vecteur (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$, défini par:

$$a = x + y + 3z + 10t$$
$$b = x + 2y + z + 4t$$
$$c = x \quad +5z + 16t$$

a) Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f;
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.

2) On considère dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs suivants:
a = (2, 3, -1) b = (1, -1, -2) c = (5, 0, -7) d = (0, 0, 1)
Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par {a, b} et {c, d}.

3) Trouver une représentation cartésienne et une base du sous-espace E de $\mathbf{R}^4$ défini de la façon suivante:

$$E = \left\{ a\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\7\\-3\\3\end{pmatrix} / a,b,c \in R \right\}$$

4) Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses? Justifiez votre réponse. Si votre réponse est: "faux", essayez de trouver un contre-exemple et, si possible, de transformer l'énoncé proposé pour le rendre vrai.

a) Tout sous-espace de $\mathbf{R}^n$ défini par r équations linéaires et homogènes linéairement indépendantes est de dimension r.

b) L'intersection de deux sous-espaces de dimension 3 de $\mathbf{R}^4$ est toujours un sous-espace de dimension 2.

c) Si l'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^4$ est de dimension 3, nous aurons pour base de l'intersection trois vecteurs (a, b, c), (d, e, f) et (g, h, i) linéairement indépendants avec a, b, c, d, e, f, g, h, i $\in \mathbf{R}$.

d) Soit $E = \{(a + b, 2b + c, a + 5b + 2c) / a, b, c \in \mathbf{R}\}$, dim E = 3.

5) On considère dans R^3 le plan P d'équation 2x + y + 2z = 4 et les deux points A et B de coordonnées
A: $(1 + \lambda, \mu + 2, \lambda + \mu)$ et B: $(2\lambda, \mu, \mu + 2)$. Pour quelles valeurs des paramètres λ et μ, le plan P et la droite (AB) se coupent-ils en un point unique?

ANNEXE 4 - TEST 2 - FRANCE

Définitions:
1 - Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur **R**.
Si v_1, ..., v_k sont des vecteurs de E et F est le sous-espace engendré par v_1, ..., v_k, noté $\langle v_1, ..., v_k \rangle$= lin$\{v_1, ..., v_k\}$ = Vect $\{v_1, ..., v_k\}$
$\{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$ / $(\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbf{R}^k\}$ est par définition une **représentation paramétrique** de F à k paramètres: $\alpha_1, ..., \alpha_k$
2 - Si F est un sous-espace de E, on appelle **représentation cartésienne** de F tout système d'équations linéaires homogènes qui caractérise F.
Exemple: F = { (x, y, z) $\in \mathbf{R}^3$ / x + y + z = 0 et x + 2z = 0 }.

1) Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui, à chaque élément (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$, associe l'élément (x + y + 3z + 10t, x + 2y + z + 4t, x + 5z + 16t) de $\mathbf{R}^3$.
a) Déterminer la dimension du noyau et de l'image de f;
b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.

2) On donne 3 sous-espaces de $\mathbf{R}^3$
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 5x - 2y + 5z = 0\}$
$E_2 = \langle (1, 0, -1), (5, 5, -3) \rangle$
$E_3 = \langle (1, 0, -1), (0, 5, 2) \rangle$
Comparer $E_1 \cap E_2$ et E_3.

3) Trouver une représentation cartésienne et une base du sous-espace E de $\mathbf{R}^4$
défini de la façon suivante:

(x, y, z, t) $\in$ E $\Leftrightarrow \exists$ a, b, c tel que $\begin{cases} x = a - 2b \\ y = 3a + b + 7c \\ z = -a - b - 3c \\ t = a + b + 3c \end{cases}$

4) Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses? Justifiez votre réponse. Si votre réponse est: "faux", essayez de trouver un contre-exemple et, si possible, de transformer l'énoncé proposé pour le rendre vrai.

a) Soit E = {(a - 2b, 3a + b + 7c, -a -b - 3c, a + b +3c) / a, b, c $\in$ **R**}. Alors dim E = 3.

b) Le sous-espace E = {(x, y, z) $\in \mathbf{R}^3$ / 2x - 3y = 0} est un sous-espace de $\mathbf{R}^3$ de dimension 2 qui peut-être représenté par la représentation paramétrique suivante:

$$E = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} / x, z \in R \right\}$$

c) Tout sous-espace de $\mathbf{R}^5$ de dimension 3 peut être défini par 3 équations linéaires homogènes linéairement indépendantes.

Partiel n° 3 de Mathématiques (30/05/1996)

U.M.V.L. - Module: Algèbre linéaire M2 -

- Deug Sciences -

Calculatrices et Documents interdits

(1h30)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur **R** ; on rappelle que si F est un sous-espace de E, on appelle **représentation cartésienne** de F tout système d'équations linéaires homogènes qui caractérise F.

Exemple: $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x + 2z = 0\}$.

Ex n°1) Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ qui, à chaque vecteur (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$, associe le vecteur (X, Y, Z) de $\mathbf{R}^3$ défini par:

$$\begin{cases} X = x + y + 3z + 10t \\ Y = x + 2y + z + 4t \\ Z = x \quad\quad + 5z + 16t \end{cases}$$

a) Déterminer la dimension de l'image, puis celle du noyau.

b) Donner une base du noyau et une représentation cartésienne de l'image.

Ex n°2) On considère dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs suivants:

$\vec{a} = (2, 3, -1)$ $\vec{b} = (1, -1, -2)$ $\vec{c} = (5, 0, -7)$ $\vec{d} = (0, 0, 1)$

Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ et $\{\vec{c}, \vec{d}\}$.

Q.C Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

Démontrer que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E,

et que $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

ANNEXE 6 - EXAMEN DEUG - PREMIERE ANNEE

EXAMEN DU 20 JUIN 1996
(Documents autorisés. Calculatrices interdites)

I

Soit $\mathcal{D}$ la droite de l'espace définie par :

$$\begin{cases} x+2y-z+4 &= 0 \\ 2x+z-1 &= 0 \end{cases}$$

1. Donner la représentation implicite du plan $\mathcal{P}$, perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et contenant le point $A\ (5,-3,1)$.
En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$, ainsi que la distance $d(A,\mathcal{D})$.

2. Donner l'équation générale d'un plan contenant $\mathcal{D}$.

3. Donner l'équation du plan $\mathcal{P}'$ qui contient la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur de coordonnées $(2,0,1)$.
En déduire une représentation implicite de la droite (AH).

4. Soit $\mathcal{Q}$ le plan défini par le point $B\ (0,1,-2)$ et les vecteurs $\vec{u}\ (1,0,4)$ et $\vec{v}\ (0,2,-1)$.
Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{Q}$.
Donner une représentation implicite de $\mathcal{Q}$.

5. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles.
Soit $\mathcal{D}' = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Vérifier que le point $(0,-9,3)$ appartient à $\mathcal{D}'$ et donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$.

II

1. On s'intéresse aux nombres entiers x, y, z qui vérifient l'équation

$$x^3+y^3=z^3.$$

a. Calculer k^3 mod 9 pour $0 \leqslant k \leqslant 8$.

b. En déduire que 9 divise x^3 ou y^3 ou z^3.

c. Conclure de là que si $x^3+y^3=z^3$ alors 3 divise xyz.

T.S.V.P.

2. *a.* Calculer 1996^{1997} mod 7.

b. Calculer 2000 mod 7.

c. Montrer que $5^6 \equiv 1 \pmod 7$.

d. En déduire la valeur de 2000^{2001} mod 7.

e. Montrer que 7 divise $1996^{1997} + 2000^{2001}$.

III

Soient D et D' deux droites du plan concourantes en O, et soit A un point du plan n'appartenant ni à D ni à D'. Soit P un point de D. On lui associe P', intersection de (AP) avec D'.

1. Faire une figure. Montrer que P et P' sont en correspondance homographique. (On pourra utiliser un repère choisi.)

2. On note I le milieu du segment $[PP']$. Quel est le lieu de I lorsque P décrit D ? (On calculera les coordonnées de I, et on donnera une équation du lieu de I.)

ANNEXE 7 - CODAGE UTILISE

QUESTION 1

1) CODAGE UTILISE

Pour rendre compte de différences de chacune des procédures prévues et des différents stratégies utilisées par les étudiants, nous avons introduit le codage suivant :

- colonne **IL**

0 lorsque la question de l'indépendance linéaire n'a pas été abordée;
1 quand la question de l'indépendance est abordée à travers la proportionnalité de deux vecteurs;
2 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers l'application de la méthode de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées disposés en lignes;
3 quand la notion de l'indépendance linéaire est abordée à travers l'application de la méthode de Gauss sur les colonnes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en colonnes;
4 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers écriture de système correcte sans quantification;
5 quand la question de l'indépendance linaire est abordée à travers écriture de système correcte avec quantification incorrecte.

- colonne **TID**

On a employé le code **TID** lorsque le théorème de l'inclusion et de la dimension a été utilisé. Dans ce cas :
0 indique qu'il n'a pas été exprimé;
1 indique qu'il a été exprimé.

- colonne **TDS**

On a employé le code **TDS** lorsque le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection a été utilisé. Dans ce cas :
0 indique qu'il n'a pas été exprimé;
1 indique qu'il a été exprimé.

- colonne **TPE**

On a employé le code **TPE** lorsque les théorèmes du rapport entre le nombre d'équations, le nombre de paramètres et le rang d'une famille de vecteurs ou d'un système de vecteurs a été utilisé. Dans ce cas :
0 indique qu'il n'a pas été utilisé;
1 indique qu'il a été utilisé.

- colonne **Q**

On a employé le code **Q** lorsqu'il y a écriture quantifiée. Dans ce cas :
0 indique qu'il n'y a pas d'écriture quantifiée
1 indique qu'il y a une ou des écritures quantifiées

- colonne **EQ**
On a employé le code **EQ** lorsque l'équivalence du système est utilisée. Dans ce cas :
0 l'équivalence n'est pas explicitée
1 l'équivalence est explicitée

- colonne **TD**
Nous avons introduit la colonne **TD** pour remarquer le cours de TD que l'étudiant a suivi. Il y a 5 groupes de TD.

- colonne **CO**
On a ici 5 codages possibles pour la conclusion, à savoir :
1 si elle était juste mais inachevée;
2 si elle était juste;
3 si elle était fausse;
4 si elle était justifiée;
5 si elle n'était pas justifiée.

QUESTION 2

1) CODAGE UTILISE - partie a

- colonne **IL**
0 lorsque la question de l'indépendance linéaire n'a pas été abordée;
1 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers l'application de la méthode de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées disposés en lignes;
2 quand la notion de l'indépendance linéaire est abordée à travers la méthode de Gauss sur les colonnes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en colonnes;
3 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers écriture de système correcte sans quantification;
4 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers écriture de système correcte avec quantification incorrecte;
5 quand la question de l'indépendance est abordée à travers la proportionnalité de deux vecteurs.
6 quand l'indépendance linéaire est abordée à travers l'application de la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en lignes sans mention du théorème du rang (rang des vecteurs lignes = rang des vecteurs colonnes).

- colonne **TNI**
On a utilisé le codé **TNI** lorsque le théorème de la dimension du noyau et de l'image a été employé. Dans ce cas :
0 indique qu'il n'a pas été utilisé;
1 indique qu'il a été utilisé.

- colonne **TEP**
On a employé le code **TPE** lorsque les théorèmes du rapport entre le nombre d'équations, le nombre de paramètres et le rang d'une famille de vecteurs ou d'un système de vecteurs a été utilisé. Dans ce cas :

0 indique qu'il n'a pas été exprimé;
1 indique qu'il a été exprimé.

- colonne **SY**

Nous avons employé le code **SY** pour savoir s'il y avait eu confusion entre "système de vecteurs" et "système d'équations', dans ce cas, ont été utilisés les codes suivants :

0 s'il n'a pas de confusion explicite;
1 si la confusion a été explicitée.

- colonne **Q**

On a employé le code **Q** lorsqu'il y a écriture quantifiée. Dans ce cas :

0 indique qu'il n'y a pas d'écriture quantifiée
1 indique qu'il y a une ou des écritures quantifiées

- colonne **FO**

On a rajouté la colonne **FO** pour savoir si l'étudiant a eu besoin de donner une interprétation fonctionnelle au système donné. Dans ce cas :

0 indique qu'il n'y a pas d'interprétation fonctionnelle
1 indique que l'étudiant donne explicitement une interprétation fonctionnelle du système
2 indique que l'étudiant donne une interprétation fonctionnelle du système suivie de l'identification des vecteurs qui engendrent le sous-espace image comme des images des vecteurs de la base canonique.

- colonne **CO**

Nous avons ici 4 codages possibles pour la conclusion, à savoir :

1 si elle est juste;
2 si elle est fausse;
3 si elle est justifiée;
4 si elle n'est pas justifiée.

partie b

- colonne **MSY**

Nous avons rajouté la colonne **MSY** pour savoir quelle méthode l'étudiant a utilisé pour résoudre le système, à savoir :

0 si le système n'est pas résolu;
1 si le système a été résolu par la méthode du pivot de Gauss;
2 si le système a été résolu par la méthode de substitutions successives.

- colonne **CO**

Nous avons ici 6 codages possibles pour la conclusion , à savoir :

1 si la base déterminée pour le noyau est juste;
2 si la base déterminée pour le noyau est fausse;
3 si la représentation cartésienne déterminée pour l'image est juste;
4 si la représentation cartésienne déterminée pour l'image est fausse;
5 si la réponse est justifié;
6 si la réponse n'est pas justifié.

QUESTION 3

- colonne **IL**

0 lorsque la question de l'indépendance linéaire n'a pas été abordée;
1 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers l'application de la méthode de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées disposés en lignes;
2 quand la notion de l'indépendance linéaire est abordée à travers la méthode de Gauss sur les colonnes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en colonnes;
3 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers écriture de système correcte sans quantification;
4 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers écriture de système correcte avec quantification incorrecte;
5 quand la question de l'indépendance est abordée à travers la non proportionnalité de deux vecteurs.

- colonne **TEP**

0 indique qu'il n'a pas été exprimé;
1 indique qu'il a été exprimé.

- colonne **CO**

Nous avons ici 6 codages possibles pour la conclusion , à savoir :

1 si la base est juste;
2 si la base est fausse;
3 si la représentation cartésienne est juste;
4 si la représentation cartésienne est fausse;
5 si la réponse est justifié;
6 si la réponse n'est pas justifié.

QUESTION 5

- colonne **IL**

0 lorsque la question de l'indépendance linéaire n'a pas été abordée;
1 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers l'application de la méthode de Gauss sur les lignes du tableau de coordonnées disposés en lignes;
2 quand la notion de l'indépendance linéaire est abordée à travers la méthode de Gauss sur les colonnes du tableau de coordonnées des vecteurs disposés en colonnes;
3 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers écriture de système correcte sans quantification;
4 quand la question de l'indépendance linéaire est abordée à travers écriture de système correcte avec quantification incorrecte;
5 quand la question de l'indépendance est abordée à travers la non proportionnalité de deux vecteurs.

- colonne **TDS**
On a employé le code **TDS** lorsque le théorème de la dimension de la somme et de l'intersection a été utilisé. Dans ce cas :

0 indique qu'il n'a pas été exprimé;
1 indique qu'il a été exprimé.

- colonne **TPE**
On a employé le code **TPE** lorsque les théorèmes du rapport entre le nombre d'équations, le nombre de paramètres et le rang d'une famille de vecteurs ou d'un système de vecteurs a été utilisé. Dans ce cas :

0 indique qu'il n'a pas été utilisé;
1 indique qu'il a été utilisé.

- colonne **TID**
On a employé le code **TID** lorsque le théorème de l'inclusion et de la dimension a été utilisé. Dans ce cas :

0 indique qu'il n'a pas été exprimé;
1 indique qu'il a été exprimé.

- colonne **CO**
On a ici 4 codages possibles pour la conclusion, à savoir :

1 si elle était juste;
2 si elle était fausse;
3 si elle était justifiée;
4 si elle n'était pas justifiée.

QUESTION 8

- colonne **MSY**
Nous avons considéré la colonne **MSY** pour savoir quelle méthode l'étudiant a utilisé pour résoudre le système, à savoir :

0 si le système n'est pas résolu;
1 si le système a été résolu par la méthode du pivot de Gauss;
2 si le système a été résolu par la méthode de substitutions successives.

- colonne **CO**
Nous avons 4 codages pour la conclusion, à savoir :

1 si la représentation paramétrique déterminée est correcte;
2 si la représentation paramétrique déterminée est erronée;
3 si la représentation implicite déterminée est correcte;
4 si la représentation implicite déterminée est erronée.

ANNEXE 8 : RESULTATS DETAILLES ETUDIANT PAR ETUDIANT - DEUG SCIENCES PREMIERE ANNEE

QUESTION 1 :

étud.	TD	IL	PROC	TID	TDS	TPE	EX	EQ	Q	CO	CITATIONS ET *COMMENTAIRES*
1	1	0	P, CDa, Vb, Va	0	0	0	2	1	0	25	*mêmes paramètres, lecture de représentation cartésienne à travers un vecteur générateur de l'intersection*
2	1	0	P, Va, Ia	0	0	0	2	1	0	35	donc I = {(α, β, λ, μ) ∈ $\mathbf{R}^4$ / 3α-β=0 et α-λ=0 et 7 μ+8α=0}
3	1	1	P, Va, Ia D, SPe	0	0	0	3	0	0	35	*{a, b} est une famille libre. Vecteurs de l'intersection dans $\mathbf{R}^4$.*
4	1	1	P, Va, SPa D, SPe	0	0	0	3	1	0	15	A∩B = {$\alpha\vec{c}$}={(5α, 0, -7 α)} ∀α.
5	3	0	P, Va, Vb	0	0	0	2	1	0	25	*que des formules et calculs*
6	1	0	P, Va, CDb, Ia	0	0	0	1	0	0	35	E = {(x, y) et (x', y') ∈ E/ y = 3x, x = x' et y' = 0}
7	1	0	P, Va, CDa; Ia	0	0	0	1	1	0	35	{(x, y) ∈ $\mathbf{R}^2$/ x = 0} = Vect{(0,0), (0, 1)}
8	1	0	P, Va; Ib	0	0	0	1	0	1	35	{α, β, λ, μ} = {α, 3α, α, 0} = S ⇒ αa + 3αb - αc = 0d = 0
9	1	0	P, CDa; Ia	0	0	0	2	0	0	35	{(x, y) ∈ $\mathbf{R}^2$/ 3x-y=0 et 6x-3y=0}
10	1	0	C, Va, CRS2	0	0	0	2	1	1	35	Vect{a, b} ∩ Vect{c, d} = {(x, 0, z) ∈ $\mathbf{R}^3$ / 2x + z = 0}
11	1	0	P, Va, CRS, Ib	0	0	0	2	0	0	35	*mélange entre paramètres et composantes des vecteurs génériques.*
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
13	1	0	P, Ib	0	0	0	2	1	0	35	*détermine les équations en posant les paramètres égaux à x et y*

14	1	0	C, Va, Id	0	0	0	2	1	0	35	*que des calculs*
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
16	1	0	P, Va, CRS, Ia	0	0	0	2	1	0	35	$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / 3x - y = 0\}$
17	1	0	P, Va, CRS, Ic	0	0	0	2	0	0	35	intersection $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
18	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
19	1	4	P, Va, CDa D, SPe	0	0	0	3	0	0	35	*interprétation correcte, erreur paramètres*
20	1	0	P, Va, SPa	0	0	0	1	1	0	15	*pas de représentation cartésienne*
21	1	0	P, Va, Ia	0	0	0	2	0	0	35	$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 /$ $3x-y=0$ et $6z-2y=0\}$ *résolution correcte, erreur paramètre*
22	1	0	P, Ic	0	0	0	1	0	0	0	*résolution du système non abouti*
23	1	0	P, CDa, Ia	0	0	0	2	1	0	35	$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / -3x+y=0\}$
24	1	0	E	0	0	0	1	0	0	0	$(2, 3, -1) = 2x +3y - z$
25	1	0	E	0	0	0	1	0	0	0	équation : $x +4y + z = 0$
26	1	0	C, Va, CRS2, Id	0	0	0	2	1	0	0	*pas d'intersection*
27	1	0	P, CDa, SPb	0	0	0	2	0	0	0	*que la définition de sous-espace engendré*
28	2	0	C, Va, CRS2	0	0	0	1	0	0	0	*que les équations d'une rep.par.explicite équation du sous-espace engendré par les vecteurs a et b*
29	2	0	P, Va, Ia	0	0	0	2	1	0	0	*résolution très longue et détaillée et dérapage à l'interprétation, blocage*
30	2	0	P, Va, Ib	0	0	0	2	0	0	35	*interprétation erronée et blocage*
31	2	0	P, Va, SPc	0	0	0	2	1	0	0	*résolution correcte, pas d'interprétation*

32	2	0	P, Va, Ia	0	0	0	2	1	0	35	$A = \{(\lambda, \mu, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^4 / \mu - 3\lambda = 0, \lambda - \beta = 0, \gamma = 0\}$
33	2	0	E	0	0	0	1	0	0	0	*que le nom de chacun de sous-espaces*
34	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
35	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*copie les vecteurs a, b, c et d*
36	5	0	P, CDa, Va, Ia	0	0	0	2	0	0	35	$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x = y = 0\}$
37	5	0	P, Va, Ia	0	0	0	2	1	0	35	$\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3 / \beta = 3\alpha$ et $\alpha = \gamma\}$
38	5	0	P, Va, SPa	0	0	0	2	0	0	15	$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = 5a, y = 0$ et $z = -7a\}$
39	5	0	P, Va, Ic	0	0	0	2	1	0	35	$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 5x - 7z = 0$ et $y = 0\}$
40	4	0	P, Va, SPa	0	0	0	2	1	0	15	$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = 5\alpha, y = 0, z = -7\alpha, \forall \alpha \in \mathbf{R}\}$
41	4	0	P, Va, CGa	0	0	0	2	0	0	35	l'intersection est une droite d'équation $5x - 7z = 0$
42	4	0	P, Va, Ia	0	0	0	2	1	0	35	$\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^3 / \delta = 3\alpha = 3\gamma$ et $\beta = 0\}$ $\beta = 0$ (toujours vrai) $\{(\alpha, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^3 / \delta = 3\alpha = 3\gamma\}$
43	4	0	P, CDa; Ia	0	0	0	2	1	0	35	$\{(x, y) / y = x = 0\}$
44	4	0	P, Ic	0	0	0	2	0	0	35	$\{(x, 0, z)\ \mathbf{R}^3 / x \in A \wedge z \in B\}$ *(incohérent)*
45	4	0	P, SPb	0	0	0	2	0	0	35	*résolution inachevée*
46	3	0	P, Va, Ic	0	0	0	2	0	0	35	$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 7x + 5z = 0\}$
47	3	1	P, Va, CRS, Ic D, SPe	0	0	0	3	1	0	35	$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x = z = 0\}$
48	3	0	P, CDa, SPc	0	0	0	2	0	0	0	$\beta = 3\alpha$ et $6\alpha + 0$ *résolution inachevée*
49	5	0	P, Va, CRS, Ia	0	0	0	2	0	0	35	$\{x = y/3$; y; $z = -y/3$ avec $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}$ *erreur de calcul résolution*

50	5	0	P, Va, Ia	0	0	0	1	1	0	35	{(x, y, z, t) ∈ $\mathbf{R}^4$/ t=0,3x=3z=y}
51	5	4	D, SPe	0	0	0	3	0	0	0	*montre seulement que les vecteurs a, b et c, d sont l.i. et générateurs*
52	2	4	P, Va, Ia D, SPe	0	0	0	3	0	0	35	{(λ, μ, ν) ∈∈ $\mathbf{R}^3$ / λ -2/3 μ + ν = 0}
53	2	0	P, Va, Ib	0	0	0	2	1	0	0	a + 3b -c = 0
54	2	0	P, Va, Ia	0	0	0	2	0	0	35	{(e, f, g,h) $\mathbf{R}^3$/ h=3e=3g et h=0}
55	2	0	P, Va, Ic	0	0	0	2	1	0	35	l'intersection de ces 2 sous-espaces engendrés par {a, b} et {c, d} est donc le point de coordonnée (0, 0, 0) dans $\mathbf{R}^3$ c'est à dire dans l'espace à 3 dimensions *(arrive à X = 0 pour l'intersection et ne donne pas d'équation)*
56	2	0	P, Va, Vb	0	0	0	2	1	0	25	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ 7x+5z=0 et y=0}
57	2	0	P, SPb, Ic	0	0	0	2	0	0	0	*erreur de détermination du système*
58	2	0	C, CRS1, Id	0	0	0	2	1	0	35	{(x, y, z) $\mathbf{R}^3$/ 10x+5z=0}
59	2	0	P, Va, Vb	0	0	0	2	0	0	25	*ne donne que les équations : 7x+5z = 0 y=0*
60	2	0	P, Va, Ia	0	0	0	2	0	0	35	S = {(α, λ, β, μ) / α - λ=0 α - β/3 = 0 μ = 0}
61	2	0	P, Va, Vb	0	0	0	2	0	0	25	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ 7x+5z=0 et y=0}
62	2	0	P, Va, CRS	0	0	0	2	0	0	35	{(5α, 0, 5α) ∈ $\mathbf{R}^3$/ α ∈ **K** = **R**} *(vecteur générateur erroné de l'intersection)*
63	2	0	P, Va, Vb	0	0	0	2	0	0	25	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ 5z+7x=0 et y=0}
64	2	0	P, Va, Vb	0	0	0	2	0	0	25	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ 5z+7x=0 et y=0}

65	2	0	P, Va, Ia	0	0	0	2	0	0	35	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ x=z et y =3x} *(changement nom de paramètres en x, y, z)*
66	3	0	P, CDa, Ia	0	0	0	2	0	0	35	{(x, y, z) tq y=3z}
67	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*copie les vecteurs a, b, c et d*
68	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
69	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
70	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*copie les vecteurs a, b, c et d*
71	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
72	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
73	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
74	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
75	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
76	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
77	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
78	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
79	5	0	C, Va, Id	0	0	0	2	1	0	25	Donc l'équation de l'intersection est z+7x/5=0 y=0
80	5	0	E	0	0	0	0	0	0	0	{αa + βb ; α=β=0}
81	5	0	E	0	0	0	2	0	1	35	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ (∃α∈**R**) (∃γ∈**R**) (∃β∈**R**) tq 2α=x 3 α+5 β=y -α+3 β+ γ=z}
82	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
83	5	0	C, Vb, Id	0	0	0	2	0	0	0	*ne détermine pas une repr. cart. du sous-espace engendré par a et b*
84	5	0	C, CGa	0	0	0	3	0	0	0	Une rep.cart. du sous-espace engendré par {c, d} est le plan (xOz)
85	5	0	C, CRS1, Vb, CGb	0	0	0	3	0	1	34	représente l'intersection d'un plan tq y=0 et de la droite -4x=-3y+5z[...] donc la droite d'équation z=-4/5x

86	5	0	C, CRS2, Id	0	0	0	2	1	0	35	*pas d'équation cartésienne pour le sous-espace engendré par {c, d}. Aucun commentaire sur l'intersection*
87	4	0	C, Va, Vb, Id	0	0	0	2	1	0	35	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ 7x-3y+5z=0 et y = 0} {(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$ / 7x + 5z = 0}
88	4	0	C, Vb, Id	0	0	0	2	0	0	35	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ y=0} *ne détermine pas une représentation cartésienne du sous-espace engendré par a et b*
89	4	0	E	0	0	0	1	0	0	0	Vect{(a,b)} = Vect{(2,3,-1); (1, -1, -2)} = $\{\sum_{i=0}^{i} \alpha_i x_i\}$
90	4	0	C, Vb, Id	0	0	0	1	0	0	0	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ y=0} *ne détermine pas une représentation cartésienne du sous-espace engendré par a et b*
91	4	0	C, Id, CRS2	0	0	0	2	1	0	0	représentation cart de {c, d} est : 7/5x+z-γ=0 et y=0 avec γ∈**R**. *repr. cart. erronée du sous-esp. engendré par a et b ne détermine pas rep cart. de l'intersection*
92	4	0	C, Va, CRS2	0	0	0	2	1	0	35	{(x, y, z) / x+5z=0 et y=0}
93	4	0	C, Va, Id	0	0	0	2	1	0	35	Pour l'intersection, il faut que l'équation du s.e.v engendré par {a, b} = l'équation du s.e.v engendré par {c, d}
94	3	0	C, Va, Vb, CRS2	0	0	0	2	1	0	25	intersection ⇒ {y = 0, 5z+7x=0}
95	3	0	C, Va, Vb, Id	0	0	0	1	0	0	35	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ 7x-3y+5z=0 y=0} {(x, y, z) $\mathbf{R}^3$/ 7x+5z=0}

96	3	3	D, SPf, CIb	0	0	0	2	0	0	15	$E \cap F = \{\alpha(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / \alpha \in \mathbf{R}\ x = 5, y = 0, z = -7\} = \{\alpha(5, 0, -7) / 7x = y + 5z = 0\}$ *passage par lecture erronée, oubli y = 0*
97	3	3	D, SPf	0	0	0	2	0	0	0	*l'indépendance linéaire, Gauss colonne sur les colonnes*
98	3	0	E	0	0	0	2	0	0	35	le sous-espace engendré par {c, d} est l'ensemble de points tel que z=0 et x=0 (c'est donc le plan vertical (selon l'axe des y (le plan de face)) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / 3x+7y=0$, z=0 et x=0} $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x=z=y=0\}$
99	3	0	C, Va, CRS2, Id	0	0	0	2	1	0	35	$y = 5/3\ \beta$
100	3	0	C, Va, CRS2, Id	0	0	0	1	0	0	35	*l'étudiant égale les deux équations obtenues* $7x+5z-5\alpha = 3x+y+z$
101	5	0	C, Id	0	0	0	2	1	1	35	Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que y = 0 et 7x-3y+5z=0, c'est-à-dire $7x + 5z = 0$
102	5	0	C, Va, Id	0	0	0	2	1	0	0	*aucun commentaire sur l'intersection*
103	3	0	C, Va, Id	0	0	0	2	1	0	0	*aucun commentaire sur l'intersection*
104	3	0	C, Va, Id	0	0	0	2	0	0	35	z+x=0 Voici l'équation cartésienne
105	3	3	D, SPf	0	0	0	2	0	0	0	c et d sont libre alors Vect(c, d) est un plan vectoriel *(ne término pas la résolution du système)*
106	3	0	C, Va, Id	0	0	0	2	1	0	0	*aucun commentaire sur l'intersection*
107	2	0	C, Va, Id	0	0	0	2	1	0	0	*aucun commentaire sur l'intersection.*
108	2	0	E	0	0	0	1	0	0	0	*aucun commentaire sur l'intersection*

109	2	0	C, Va, Id	0	0	0	2	1	1	0	*aucun commentaire sur l'intersection*
110	2	3	E D, SPe	0	0	0	2	0	0	35	S'il y a intersection, alors on a y=0 car {c, d} ne dépend pas de y
111	2	4	E D, SPf	0	0	0	1	0	0	0	*confusion intersection/indépendance linéaire*
112	3	14	D, SPe, SPf,CIa	0	0	0	3	0	0	34	Vect{a, b, d} = intersection de {a, b} et {c, d}
113	3	3	E D, SPe	0	0	0	3	0	0	35	Déterminons une équation cartésienne unique vérifiant {a,b} ∩ {c, d}
114	4	0	E	0	0	0	1	0	0	0	*que le système*
115	4	0	E	0	0	0	1	0	0	35	{(x, y) ∈ $\mathbf{R}^2$ / x = s et y = -s}
116	4	0	C, Va, CRS2, Id	0	0	0	2	1	0	0	*aucun commentaire sur l'intersection*
117	4	43	E D, SPf	0	0	0	2	0	0	35	2a+6b-2c=0 : *représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrées par {a,b} et {c, d}*
118	3	0	P, Va, Ib D, SPe	0	0	0	2	1	0	35	{(λ, γ, δ) ∈ $\mathbf{R}^3$/ λ-γ=0 et -12γ+δ=0} {(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ x+5z=0} *(X= $\lambda_1 a$ +3$\lambda_1 b$+$\lambda_1 c$, résolution qui aboutit à x + 5z = 0 et y = 0 et oubli de y = 0)*
119	3	0	P, Va, Ic	0	0	0	2	1	0	35	{x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ 5x-7z=0 et y=0}
120	3	0	C, Va, CRS2	0	0	0	2	1	0	35	{(x, y, z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ 4x+5z=0 et y =0}
121	3	0	P, CDa, Ia, CGa	0	0	0	2	1	0	35	{(x) ∈ **R** tels que x=0}

122	4	0	E	0	0	0	2		0	35	Les ensembles {a, b} et {c, d} ne peuvent pas engendrer un espace vectoriel connus puisque le second ensemble n'en engendre aucun

QUESTION 2 - partie a

étudiant	RG	PROC	TNI	TEP	SY	CO	CITATIONS ET *COMMENTAIRES*
1	2	M, CRV1	1	0	0	23	*erreur de calcul, Gauss colonne*
2	2	M, F	1	0	0	24	dimE=rg(f)+dimKer(f) or dimE=3
3	2	M	1	0	0	13	E est l'ensemble de départ. rg(f)=dimIm(f)
4	2	M	1	0	0	13	*pose la question si les vecteurs qui engendrent le s.e.v image sont liés*
5	23	K M	1	0	0	13	on peut déduire la dimension de l'image de celle du noyau ou l'inverse grâce au théorème du rang
6	2	K M	0	0	0	13	*à partir d'une rep. par. minimale l'étudiant conclut que les vecteurs du noyau sont libres*
7	2	M K	1	0	0	13	Comme le système est libre alors dim Imf = 2
8	2	M K	0	0	0	13	*l'étudiant détermine Vect du noyau et de l'image, observe que le système des vecteurs est libre*
9	23	M K	0	0	0	13	Imf=Vect{e_1, e_2} avec {e_1, e_2} libre donc dimImf=2.
10	2	M	1	0	0	13	*l'étudiant démarre en écrivant les vecteurs de l'image comme des images des vecteurs de la base canonique de* $\boldsymbol{R^4}$
11	2	M K, CDIk	0	0	0	14	*erreur dans le passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique*
12	2	M	1	0	0	13	*théorème du noyau et de l'image et l'ensemble des vecteurs générateurs est libre*
13	2	M K	0	0	0	13	*l'étudiant applique les définitions, détermine une famille génératrice minimale pour conclure la dimension*
14	2	M	1	0	0	13	*les vecteurs qui engendrent l'image forment une base.*
15	2	M, CRV1	1	0	0	24	*erreur du calcul dans Gauss d'une famille de vecteurs*
16	6	M, Ua, CDIc	1	0	1	14	*Gauss colonne avec vecteurs en ligne sans mentionner le théorème base du noyau dans* $\boldsymbol{R^3}$*, base de l'image dans* $\boldsymbol{R^4}$
17	0	E	0	0	0	24	*confusion équation/ vecteur*

18	2	M, SPg	0	0	0	24	*que la dimension correcte du sous-espace image*
19	2	M	1	0	0	13	$\{e_1, e_2\}$ est un système libre qui plus est générateur donc $\{e_1, e_2\}$est une base
20	2	M, CRV1 K, CRS1	0	0	0	24	*dim Imf = 3 et dimKerf = 4*
21	2	M, F	1	0	0	24	*erreur formule du théorème du noyau et de l'image*
22	0	K	1	0	0	13	*l'étudiant n'écrit pas comment il a résolu le système, mais la solution est correcte*
23	2	M K	0	0	0	13	*erreur de calcul dans la méthode de Gauss*
24	2	M K, CRS1	1	0	0	13	*l'étudiant applique la définition de noyau, mais il conclut la dimension à travers le théorème*
25	2	M, F	1	0	0	24	*erreur formule du théorème du noyau et de l'image*
26	2	M	1	0	0	13	*indication de combinasions linéaires Gauss colonne*
27	3	M, F, CDIi	1	0	0	24	$3f(e_3) + f(e_1) = f(e_4)$, donc dim Imf=3
28	6	M, Ua K	0	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en ligne*
29	0	S, SPj	0	0	0	0	*la dimension de l'image est donnée par le rang du système*
30	6	M, Ua, CDIc	1	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en lignes*
31	6	S, Vc M, Ua	1	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en ligne. Gauss système erronée pour l'image, il y a une équation qui dispparaît.* Soit $u \in \text{Imf}\ u\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ $\exists v$ tq $f(v) = u\ v\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in$ $\mathbf{R}^4$ $u \in \mathbf{R}^3$
32	2	M K	0	0	0	13	trois de ces vecteurs sont colinéaires donc dim Imf = 2
33	6	M, Ua	1	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en ligne*
34	6	M, Ua	1	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en ligne*

35	2	M	1	0	0	13	*images des vecteurs de la base canonique*
36	2	M, CRV2	1	0	0	14	*erreur de calcul en Gauss*
37	2	M, CRV1	1	0	0	24	*erreur de calcul en Gauss*
38	0	M, CDIi	1	0	0	24	*images des vecteurs de la base canonique*
39	0	S, Vc, CDIe K	0	0	1	14	*confusion coordonnés/vecteurs*
40	2	M	1	0	0	13	il y deux colonnes non nulles
41	0	S, Vc, CGc	1	0	0	14	*dimensions noyau et image correctes*
42	0	S, Vc	1	0	1	24	*confusion équation/vecteur*
43	3	M	1	0	0	13	*vérifie l'indépendance linéaire des vecteurs par définition*
44	0	K, CGd	1	0	0	14	Kerf est un plan vectoriel
45	2	M K, SPi	0	0	0	13	les colonnes 2, 3 et 4 sont proportionnelles
46	0	K	1	0	0	13	u et v sont libres et générateurs
47	3	M, CRS2 K	1	0	0	13	*dimensions correctes, base erronée de l'image et commentaire* : "j'ai fait erreur que je n'arrive pas à trouver"
48	0	S, Vc, Vd, F	1	0	0	24	*dimension correcte de l'image*
49	0	S, CDId	1	0	0	14	*dimension correcte du sous-espace image*
50	2	S	1	0	0	13	rang de la matrice = rang f, *interprétation matricielle du système*
51	0	S, Vc, Vd	1	0	0	13	*dimension correcte de l'image*
52	12	M	1	0	0	13	E est l'espace de départ
53	0	S, Vc, Vd	1	0	0	13	*dimension correcte du sous-espace image*
54	2	M K	0	0	0	14	*ne détermine que la dimension de l'image*
55	23	M	1	0	0	13	*vérification de l'indépendance linéaire par la définition*

56	2	M	1	0	0	13	donc pour déterminer la dimension de l'image il faut déterminer le rang du système
57	2	M, CDIf, CRV1	1	0	0	24	rang f = 3
58	2	M	1	0	0	13	deux vecteurs dont un avec une des coordonnées égale à 0
59	6	M, CDIc K, CDIk	0	0	0	24	*Gauss colonne, vecteurs en ligne dimension image correcte et noyau erronée*
60	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires dans Gauss*
61	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires dans Gauss*
62	2	M, CRV1	1	0	0	14	*erreur de calcul dans Gauss*
63	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires dans Gauss*
64	6	M, Ua	1	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en ligne*
65	0	E	0	0	0	24	*bricolage sur les équations*
66	3	M	1	0	0	13	donc seuls 2 vecteurs sont libres
67	2	M	1	0	0	13	on constate qu'il y a 2 vecteurs linéirement indépendants
68	0	K, SPh	0	0	0	24	*ne donne aucune conclusion*
69	6	M, Ua, CDIc, CRV1	1	0	1	24	*Gauss colonne, vecteurs en ligne base erronée de l'image avec un seul vecteur dans* $\boldsymbol{R^4}$
70	6	M, Ua	1	0	0	14	*Gauss ligne, vecteurs en colonne*
71	6	M, Ua, CDIc	1	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en ligne*
72	23	M K	1	0	0	13	*montre que les vecteurs sont libres par définition*
73	0	K, CRS1	0	0	0	24	*que la définition du noyau et résolution erronée du système*
74	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
75	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*

76	6	M, Ua, CDIc, F	1	0	1	24	*Gauss colonne, vecteurs en ligne vecteurs de l'image dans* $\boldsymbol{R^4}$
77	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la partie a*
78	2	M, CDIi	1	0	0	14	on remarque que $3xc_3 = c_4$ donc c_4 et c_3 sont liés
79	2	M, CDIi	1	0	0	14	3(3) = (4) donc (3) et (4) sont liés
80	0	S, Vc, CDIm	1	0	1	14	*confusion vecteurs/coordonnées*
81	0	S, Vc, Vd	1	0	0	14	*passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique pour déterminer une base de l'image*
82	6	M, Ua, CDIc	1	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en lignes* Le rang est donc égal à 2 car un vecteur sur trois est nul.
83	0	S, Vc, CDIm	1	0	1	14	*confusion vecteurs/coordonnées*
84	0	S, Vc M, CDIi	1	0	0	14	*oubli d'un vecteur de la base canonique de* $\boldsymbol{R^4}$
85	0	S, Vc, CDIm M, CDIc	1	0	1	14	*confusion vecteurs/coordonnées*
86	6	M, Ua, CDIc	1	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en lignes*
87	2	M	1	0	0	13	2 colonnes différentes de 0
88	0	M, CDIi	1	0	0	24	dim Imf = 3, dim Ker f = 1
89	6	M, Ua, CDIc	1	0	1	14	*Gauss colonne, vecteurs en lignes base de l'image avec des vecteurs dans* $\boldsymbol{R^4}$
90	0	E	1	0	0	24	*accumulation de confusions*
91	2	E	1	0	0	24	*accumulation de confusions*
92	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*
93	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*
94	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*
95	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*

96	6	M, Ua, CDIc	1	0	1	14	*Gauss colonne, vecteurs en ligne base de l'image avec des vecteurs dans* $\boldsymbol{R^4}$
97	6	E	1	0	0	24	*accumulation de confusions*
98	0	E	1	0	0	24	dim $\mathbf{R}^4$ = 5, base canonique {1, X, X^2, X^3, X^4}, *accumuation de confusions*
99	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*
100	2	M	1	0	0	13	car (e_1, e_2) sont libres
101	2	M	1	0	0	13	c'est une famille liée car 4 éléments dans $\mathbf{R}^3$
102	0	M, CDIi	1	0	0	14	$u_1 = u_4 - 3u_3$
103	2	M	1	0	0	13	or {(1,1,1),(0,1,-1)} est libre (évident!)
104	0	S, Vc, Vd	1	0	0	24	Imf = {(X,Y,Z) $\in \mathbf{R}^3$ / X(1,2,0) +Y(0,1,-1)} la dimension de l'image est donc 3
105	2	M, F	1	0	0	24	dim E = dim $\mathbf{R}^4$ = 3
106	2	M	1	0	0	13	nous avons donc deux vecteurs non nuls
107	6	M, Ua, CDIc	1	0	1	14	*Gauss colonne, vecteurs en ligne base de l'image avec des vecteurs dans* $\boldsymbol{R^4}$
108	6	M, Ua, CDIc	1	0	0	14	*Gauss colonne, vecteurs en ligne traduction équation vecteur*
109	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*
110	6	M, Ua K, CRS1, CDIk	0	0	0	24	*Gauss colonne, vecteurs en ligne* dim Kerf = 1 dim Imf = 1
111	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*
112	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*
113	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*
114	0	K, CDIb	0	0	0	24	*aucune conclusion*
115	0	E	0	0	0	14	*accumulation de confusions*
116	2	M, CRV2	1	0	0	14	*erreur de calcul en Gauss*

117	0	E	1	0	0	14	*accumulation de confusions*
118	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*
119	0	E	0	0	0	14	*accumulation de confusions*
120	2	M	1	0	0	24	*erreur de calcul en Gauss*
121	0	E	0	0	0	24	*accumulation de confusions*
122	2	M	1	0	0	13	*indique les combinaisons linéaires*

QUESTION 2 : partie b

étudiant	PROC	TEP	MSY	Q	FO	EX	CO	CITATIONS ET *COMMENTAIRES*
1	N- K I- K, CDIb	0	2	0	1	2	15 46	*représentation cartésienne du noyau comme représentation cartésienne de l'image*
2	N- 0 I- 0	0	0	0	2	1	0	*n'aborde pas la partie b*
3	N- K I- S, Vc	0	0	0	1	2	15 36	Im f = {(x, x-y, x+y) avec x, y $\in$ **R**} = {(x, y, z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ / y+z-2x=0}
4	N- K I- S, Vc	0	1	0	1	2	15 36	on peut affirmer puisque ces deux vecteurs sont libre qu'ils forment une base de Ker f
5	N- K I- S, Vc, CGc	0	1	0	1	2	15 35	{(X, Y, Z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ / -2X+Y+Z=0}, c'est un plan dans $\mathbf{R}^3$
6	N- K I- S, Vc	0	1	0	2	2	15 36	{(x', y', z') $\in$ $\mathbf{R}^3$ / -2x'+y'+z'=0}
7	N- K I- S, CDId	0	1	0	1	2	15 46	{(X, Y, Z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ / z+y=0, Y=x+y, X=x}
8	N- K I- E	0	1	1	1	2	15 46	$\exists!$ (α, β, λ) tq $\alpha X+\beta Y+\lambda Z=0$
9	N- K I- K, CDIb	0	1	0	1	2	15 46	Im f = {(x, y, z, t) $\in$ $\mathbf{R}^4$ / x+y+3z+10t=0 et x+2y+z+4t=0 et x+5z+16t=0}, *après montrer que l'image est un s.e.v de* $\boldsymbol{R^3}$
10	N- K I- S, Vc	0	2	1	2	2	15 36	{(X, Y, Z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ / 2X-Y-Z=0}
11	N-K, CPa, CDIk I- S, Vc	0	1	0	0	1	25 36	{(X, Y, Z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ / -2X+Y+Z=0}
12	N- K, SPh I- S, Vc	0	0	0	1	2	0 36	D'après les coordonnées de X, Y, Z, on remarque que 2X-Y-Z=0 {(X, Y, Z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ / -2X+Y+Z=0}
13	N- K I- S, CDId	0	2	0	0	2	15 46	{(X, Y, Z) $\in$ $\mathbf{R}^3$ / X+Y+Z=0 et X+2Z=0}
14	N-K, CRS2, CDIk I- S, Vc	0	1	0	1	2	25 36	*erreur de calcul en Gauss, base erronée du noyau*

15	N- K, CDIs I- S, CDId	0	1	0	1	1	16 46	*base correcte du noyau et dimension erronée* $\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3 / X+Y+Z=0$ et $X+2Z=0\}$
16	N- K, CDIk I- S, Vc	0	1	0	0	1	26 36	$\{(-5, 2, 1), (-16, 6, 1)\}$ *base erronée du noyau* $\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3 /$ $-2X+Y+Z=0\}$
17	N- E I- E	0	0	0	0	1	26 46	*confusion équation/vecteur*
18	N- 0 I-0	0	0	0	0	1	0 0	*n'aborde pas la partie b*
19	N- K I- K, CDIb	0	1	0	1	2	15 46	*vecteurs qui engendrent le noyau sont libres* Im f = $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 /$ $x+5z+16t=0$ et $y-2z-6t=0\}$
20	N- 0 I- 0	0	0	0	1	1	0 0	*n'aborde pas la partie b*
21	N- K, CRS2, SPt I- S, CDId	0	2	0	1	1	0 46	*résolution système inachevée*
22	N- K I- 0	0	0	0	0	2	15 0	(-5,2,1,0) et (-16,6,0,1) est un système libre
23	N- K, CRS1, CDIk I- S, Vc	0	1	0	1	2	26 36	$\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3 / Y+Z-2X=0\}$ $\{(-7, 2, 1, 0), (-22, 6, 0, 1)\}$ *base du noyau*
24	N- K, CRS1, CDIk I- S, CDId, CGc	0	1	0	0	2	26 46	Im étant égale 2 est un sous-espace plan donc définie selon une longueur et une longueur $\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3 / X+2Y=0$ et $X+3Y=0\}$
25	N- K, CRS2, SPt I- K, CRS2, CDIb	0	2	0	1	1	26 46	$\{f(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^3 / z=t=0\}$
26	N-K, CDIk I- S, Vc	0	1	1	2	2	26 36	*erreur passage représentation cartésienne à une représentation paramétrique*
27	N-K, CRS1, CDIk I- S, CDIr	0	1	0	2	1	26 46	*erreur de calcul en Gauss*
28	N- K I- K, CDIb	0	12	0	1	1	16 46	*erreur de calcul en Gauss*
29	N- 0 I-0	0	0	0	0	1	0	*n'aborde pas la partie b*

30	N- K I- S, Vc	0	1	0	1	2	15 46	(-5,2,0,1) et (-16,6,0,1) sont libres et générateurs donc une base de Kerf
31	N- K I- S, CDId	0	1	1	1	2	15 46	c'est générateur et libre
32	N- K I- S, Vc	0	1	0	2	2	16 36	*pas de justifiction pour la base du noyau*
33	N- K, CDIk I- S, CDIr	0	1	0	0	1	26 46	*base du noyau avec un seul vecteur, Gauss correcte*
34	N- K, CRS1, CDIk I- 0	0	1	0	1	1	26 0	*base du noyau avec un seul vecteur, erreur du calcul en Gauss*
35	N- K, CRS2, CDIk I- 0	0	2	0	2	2	26 0	une base du noyau : (1,0;3,-1), (0,1,-15/6,8)
36	N- K I- S, Vc	0	1	0	0	1	16 36	donc Z=2X-Y est une représentation cartésienne de l'image
37	N- K, CPa, CDIk I- S, Vc	0	1	0	0	1	26 36	*base du noyau avec trois vecteurs dans $\mathbf{R}^3$, mais cohérente avec la dimension*
38	N- K, CRS2, CDIk I-S, CDIr	0	2	0	2	1	26 46	*dimension du noyau incohérente avec la base*
39	N- K, CDIk I- S, Vc, CGc	0	1	0	0	2	26 35	rep. cart. de Im f : est un plan vectorielle d'équation -2X+Y+Z=0
40	N- K I- S, CDId	0	1	0	2	2	15 46	vecteurs du noyau sont libres
41	N- K, CDIk I- S, Vc, CGc	0	1	0	1	2	26 35	c'est l'équation d'un plan
42	N- K, SPh I- S, Vc	0	2	0	0	1	0 36	Im f = {(x, y, z, t) $\in \mathbf{R}^4$ / X-Y=Z-X}, *il avait détermine l'équation correcte au début*
43	N- K I- S, Vc	0	2	0	1	2	15 36	*vérification de l'indpendance linéaire par la définition*
44	N- K, CGd I- 0	0	2	1	0	1	16 0	Kerf est un plan vectoriel
45	N- K, SPi I- S, Vc	0	0	0	1	2	26 36	*ne donne pas une base du noyau, même en ayant un vecteur correct sur la forme "implicite tableau"*
46	N- K I- S, Vc, Vd	0	1	0	1	2	15 36	u' et v' sont libres et générateurs donc une base de Imf

47	N- K I- 0	0	12	0	1	2	15 0	*n'aborde pas la représentation cartésienne de l'image*
48	N- S, Vc, CDIk I- S, Vc	0	1	0	1	1	26 36	$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$ or Z = 2X - Y, d'où Y=2X
49	N- K, CDIk I- S, CDId	0	1	1	1	1	26 46	*oubli d'une coordonnée du noyau, vecteurs dans* $\boldsymbol{R^3}$
50	N- K, CDIk I- S, Vc	0	0	0	0	2	26 36	*interprétation matricielle du système*
51	N- K, SPh I- 0	0	0	0	1	2	0 0	*ne résout pas le système*
52	N- K I- S, Vc	0	1	0	2	2	15 36	*définition pour montrer que les vecteurs du noyau sont l.i.*
53	N- K I- S, Vc	0	12	1	1	2	15 36	X-Y=Z-X 2x-Y+Z=0 *(erreur de signe)*
54	N- K I- S, Vc	0	1	0	2	1	16 36	*aucune justification*
55	N- K I- K, CGd	0	1	0	0	2	16 0	c'est un plan à 2 dimensions, donc un plan vectoriel. C'est l'intersection de deux plan d'équations x+5z+16t=0 et 2z+6t-y=0
56	N- K I- S, Vc	0	1	0	2	2	15 36	il suffit deux vecteurs non colinéaires vérifiant la relation
57	N- K, CRS2, CDIk I- M, CRV1	0	2	1	1	1	26 0	*erreur de calcul en Gauss*
58	N- K I- S, Vc	0	1	0	2	2	15 36	comme Imf, c'est donc une base de Kerf
59	N-K, CPa, CDIk I- S, Vc	0	1	0	1	1	26 36	(1,0,0,0), (0,5,0,0),(0,0,0,16)
60	N-K, CRS1, CDIk I- 0	0	1	1	2	2	26 0	*erreur dans le passage représentation cartésienne à une représentation paramétrique*
61	N- K, CPa, CDIk I- S, Vc	0	2	0	0	2	26 36	*erreur dans le passage représentation cartésienne à une représentation paramétrique*
62	N-K, SPm I-0	0	1	0	0	1	26 0	*ne donne qu'une représentation cartésienne du noyau*
63	N- K I- S, Vc, CGc	0	1	0	1	2	15 35	c'est l'équation d'un plan

64	N- K, SPi I- 0	0	1	0	0	1	26 0	donc une base de Kerf est: (x,y,z,t) = z(-5,2,1,0) + t(16,6,0,1)
65	N- K, CRS1, CDIk I- K, CDIb	0	0	0	0	1	26 46	Imf = {(x,y,z,t) ∈ $\mathbf{R}^3$/ x+y+3z+10t=0 et x+2y+z+4t=0 et x+5z+16t=0}
66	N- K I- 0	0	1	0	0	2	15 0	comme (-5,2,1,0) et (-16,6,0,1) sont libres c'est une base de Kerf
67	N- K, CRS1, CDIk I- S, Vc	0	0	0	2	2	26 36	Ker f = Vect{(1,2,0), (0,1,1)}
68	N- 0 I-0	0	0	1	0	1	0 0	*n'aborde pas la partie b*
69	N- K, CPa I- S, CDId	0	1	0	1	1	0 46	Imf = {(x,y,z) ∈ $\mathbf{R}^3$/ x+y+z-t/2=0}
70	N- K I- 0	0	1	0	0	1	16 0	il faut vérifier que cette base est libre
71	N- M, CDIc I-0	0	0	0	0	1	26 0	*Gauss colonne, vecteurs en ligne et deux premières colonnes comme base erronée du noyau*
72	N- K I-0	0	1	0	1	2	16 0	*n'aborde pas la représentation cartésienne de l'image*
73	N- K, CRS1, SPt I- 0	0	1	0	0	2	0 0	*aucune conclusion*
74	N- 0 I- 0	0	0	0	0	0	0 0	*n'aborde pas la question*
75	N- 0 I- 0	0	0	0	0	0	0 0	*n'aborde pas la question*
76	N- S, CDIk I- 0	0	2	0	1	1	26 0	(-21,8,1,1) est donc une base de Kerf
77	N- K, CRS2, CDIk I- 0	0	2	0	0	0	26 0	Kerf = Vect(36,-10,-4,1)
78	N- K, SPh I- S, CDId	0	1	0	1	1	26 46	2x-Y-y = 0
79	N- S, CPa, SPi I- S, Vc	0	1	1	2	1	26 36	(x,y,z,t)=t(-16,6,0,1)+ z(-5,2,0,1)
80	N- S, CPa, SPi I- S, CDId	0	2	0	1	1	26 46	la forme générale des bases du noyau est : α(-5,2,1,0) + β(-16,-6,0,1)
81	N- 0 I- S, Vc	0	1	0	0	1	0 36	*n'aborde pas une base du noyau*

82	N- K, CRS1, CDIk I- 0	0	1	0	0	1	26 0	*n'aborde pas représentation cartésienne de l'image*
83	N- S, CDIk I- S, Vc	0	0	0	1	1	26 36	*vecteurs du noyau dans* $\boldsymbol{R^3}$
84	N- S, Vc, CDIk I- S, Vc	0	0	0	2	1	26 36	constate que 2X-Y=Z *vecteurs du noyau dans* $\boldsymbol{R^3}$
85	N- K I- M, CDIc	0	1	0	0	1	16 46	Vect {X,Y} = {λ(1,1,3,10) + μ(1,2,1,4)/ (λ,μ) $\in$ $\mathbf{R}^2$} *confusion équation/vecteur*
86	N- K I- S, Vc	0	1	0	2	1	16 36	*lecture équation l'image à partir d'une représentation paramétrique*
87	N-K, CPa, CDIk I- S, Vc	0	1	0	1	2	26 36	*erreur passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique*
88	N- K, CRS1, CDIk I- S, CDIr	0	1	0	2	1	26 46	*erreur de calcul en Gauss*
89	N- E I- 0	0	12	0	0	1	26 0	*accumulation de confusions* {(7,7,1,-1),(0,1,3,-1)} *base noyau*
90	N- E I- S, Vc	0	1	0	2	1	26 36	*accumulation de confusions*
91	N- K I- E	0	1	0	1	1	16 46	*accumulation de confusions, deux dimensions pour le noyau et base correcte*
92	N- K I- S	0	1	0	2	2	15 36	*Gauss système pour l'équation qui caractérise l'image*
93	N- K, CPa, CDIk I- S, Vc	0	2	0	2	2	26 36	*vecteurs du noyau dans* $\boldsymbol{R^3}$
94	N- 0 I- 0	0	0	0	0	2	0 0	*n'aborde pas la partie b*
95	N- K I- 0	0	2	0	1	2	16 0	*que des calculs*
96	N- K, CDIk I- S, CDIr	0	1	0	1	1	26 46	*erreur passage représentation paramétrique à une base*
97	N- 0 I- 0	0	0	0	1	1	0 0	*n'aborde pas la partie b*
98	N- E I- E	0	0	0	0	1	26 46	si Y=0 et Z=0 alors X=0 donc on peut supprimer la première équation *accumulation de confusions*

99	N- K, CPa, CDIk I- S, Vc	0	2	0	2	2	26 36	*vecteurs du noyau dans $\mathbf{R}^3$*
100	N- K I- S	0	1	0	1	2	15 36	*détermine l'équation après résolution du système par Gauss*
101	N- K I- S, Vc	0	1	0	2	2	15 36	famille génératrice et libre
102	N- K, CDIk, I- S, CDIr	0	1	0	2	1	26 46	*traduction équation/ vecteur*
103	N- K, CRS2, CDIk I- S, CDId	0	2	0	2	2	26 46	$\{(X,Y,Z)\in\mathbf{R}^3 / Y+Z=0$ et $X=\frac{Y+Z}{2}$
104	N- S, CDIk I- S, CDId	0	0	0	0	1	26 46	*raisonnement sur l'équation $2X+Y=Z$ pour déterminer une base du noyau*
105	N- K, SPh I- 0	0	0	0	1	1	0 0	*que des calculs*
106	N- K, CRS1, CDIk I- S, Vc	0	1	0	2	2	26 36	*erreur de calcul en Gauss* une base du noyau par exemple est : {(0,0,0,0)}
107	N- K I- S, Vc	0	1	0	1	2	15 36	libre et générateurs donc c'est une base de Kerf
108	N- K, CPa, CDIk I- 0	0	12	0	0	1	26 0	*traduction équation/vecteurs*
109	N- K I- S, Vc, CGc	0	1	0	2	2	15 35	c'est un plan de dimension 2
110	N- K, CRS1, CDIk I- 0	0	1	0	1	1	26 0	*erreur de calcul en Gauss, base de l'image avec 1 vecteur dans $\mathbf{R}^4$ et $f(x,y,z,t)=(-x,-y,-z,-t)$*
111	N- K, CDIk I- S, Vc	0	0	0	2	2	26 36	*considérer une base de l'image comme une base du noyau*
112	N- K, CRS1, CDIk I- M, CGc	0	1	0	1	2	26 45	donc comme dim Imf = 2 alors Im f est un plan vectoriel *mais ne détermine pas une équation*
113	N- K I- S, Vc	0	1	0	1	2	16 36	on a bien une base dans $\mathbf{R}^4$
114	N- 0 I- K, CDIb	0	1	0	0	1	0 46	*que des calculs*
115	N- E I- E	0	0	0	0	1	0 0	*accumulation de confusions*

116	N- K I- S, Vc, CDId	0	1	0	2	1	16 46	or dim Kerf =2 et on obtient 2 vecteurs
117	N- K I- E	0	1	0	1	1	16 46	Ker f = {z(-5,2,1,0) + t(-16,6,0,1)}
118	N- K I- 0	0	1	0	2	2	15 0	*définition d'indépendance linéaire pour montrer que les vecteurs du noyau forment un système libre*
119	N- E I- E	0	0	0	0	1	26 46	*accumulation de confusions*
120	N- 0 I- S, Vc	0	0	0	2	1	0 46	Imf = {(x,y,z) ∈ $\mathbf{R}^3$ / y-2x+z=0}
121	N- E I- S, Vc, CGc	0	0	0	0	1	26 35	équation cartésienne d'un plan
122	N- K I- S, Vc	0	2	0	0	2	16 46	$\begin{cases} x = -5z -16t \\ y = 2z +6t \\ -4z +2y -12t = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -5z -16t \\ y = 2z +6t \end{cases} \Rightarrow$ Kerf = {(-5z-16t, 2z+6t, z, t)}

ANNEXE 9 - RESULTATS DETAILLES ETUDIANT PAR ETUDIANT - ETUDIANTS DE MAITRISE

QUESTION 1 - test 1 - étudiants de maîtrise

étudiant	IL	PROC	TID	TDS	TEP	CO	citations et *commentaires*
A	0	P, SPq	0	0	0	35	*s'arrête sans résoudre le système*
B	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
C	0	P, It	0	0	0	35	*intersection est vide*
D	3	C, In	0	0	0	35	*perturbation pose par y = 0 dans la nouvelle technique*
E	0	P, SPa	0	0	0	35	*représentation paramétrique de l'intersection*
F	0	E	0	0	0	35	*traduction vecteur / équation*

QUESTION 2 - test 1 et 2 - étudiants de maîtrise

partie a
test1

étudiant	IL	PROC	TNI	TEP	SY	CO	citations et *commentaires*
A	0	K, F	1	0	0	23	forment une base de Ker f car indépendants
B	0	M, CDIg	1	0	0	24	le rang de cette matrice est 3 car le déterminant de la plus grand sous matrice est $\neq 0$
C	0	K	0	0	0	14	*que des calculs*
D	0	K, CRS1, CDIk	1	0	0	24	*erreur de calcul en Gauss (système)*
E	0	K	1	0	0	13	*interprétation matricielle du système*
F	2	K M, Ua	0	0	1	14	il reste deux équations donc dim Kerf= 2

test2

étudiant	IL	PROC	TNI	TEP	SY	CO	citations et *commentaires*
G	2	M	1	0	0	13	(u, v) est une base de Imf
H	0	K	1	0	0	13	*détermine une base du noyau*
I	0	K	1	0	0	13	*vecteurs qui engendrent le noyau sont linéairement indépendants*
J	3	K	1	0	0	13	*définition d'indépendance linéaire*
K	2	K	1	0	1	14	*indépendance linéaire des équations*
L	2	K M, Ua	0	1	0	14	il reste deux équations

M	0	M, CDIf	1	0	0	24	*même pas la succession de calculs*
O	0	K, CRS2, CDIk, F	0	0	0	24	*ne détermine pas la dimension du sev image*
P	0	K, CPa, CDIk	1	0	0	24	*erreur passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique*

partie b
test1

étudiant	PROC	TEP	MSY	CO	citations et *commentaires*
A	N - K I - S	0	1	15 36	forment une base car indépendants
B	N - 0 I - 0	0	0	0 0	*n'aborde pas la partie b*
C	N - K, SPs I - 0	0	1	0 0	*seulement une représentation paramétrique "explicite tableau" du noyau*
D	N - K, CRS1, CDIk I - 0	0	1	26 0	*ne donne aucune représentation pour l'image*
E	N - K I - S, CDIr	0	1	15 46	$x+y+3z+10t$ $x+2y+z+4t$ $x+5z+16t$
F	N - K I - NT, CDInt	0	1	16 46	*erreur traduction équation / vecteur lors de l'utilisation de la nouvelle technique*

test2

étudiant	PROC	TEP	MSY	CO	citations et *commentaires*
G	N - K, CDIk I - E	0	1	26 46	*erreur passage d'une représentation paramétrique "implicite équation" à une représentation paramétrique "explicite tableau"*
H	N - K I - S, CDIr	0	1	15 46	*définition de l'image*
I	N - K I - S, CDIr	0	1	15 46	*définition de l'image*
J	N - K I - S, CDIr	0	1	15 46	*définition de l'image*

K	N - K, CDIk I - NT, CDInt	0	1	26 46	*base du noyau les deux premières colonnes du tableau, représentation cartésienne erronée de l'image, les deux équations du tableau pour la caractériser, par la nouvelle technique*
L	N - K I - NT, CDInt	0	1	16 46	*représentation cartésienne erronée de l'image, les deux équations du tableau pour la caractériser, par la nouvelle technique*
M	N - E I - E	0	1	26 0	*base erronée du noyau (première ligne de la matrice des coefficients du système)* *base erronée de l'image (trois premières colonnes de la matrice des coefficients du système)*
O	N - K, CRS2, CDIk I - S	0	1	26 36	*erreur de calcul*
P	N - K, CPa, CDIk I - NT, CDInt	0	1	26 46	*représentation cartésienne erronée de l'image, l'équation du tableau pour la caractériser, par la nouvelle technique*

QUESTION 3 - test 1 et 2 - étudiants de maîtrise

test 1

étudiant	IL	PROC	TEP	CO	citations et *commentaires*
A	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
B	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
C	0	Z, ENT	0	0	*tableau de vecteurs en colonne et coordonnées d'un vecteur générique*
D	0	Z	0	16 36	*représentation cartésienne correcte, les deux équations du tableau pour la caractériser, par la nouvelle technique*
E	0	E	0	0	*passage d'une représentation paramétrique "explicite tableau" à une représentation paramétrique "implicite équation"*
F	0	Z, CRV	0	26 46	*représentation cartésienne erronée, les deux équation du tableau pour la caractériser (erreur de calcul), par la nouvelle technique*

test 2

étudiant	IL	PROC	TEP	CO	citations et *commentaires*
G	0	X, CRS, RC Y, Ix	0	26 46	*erreur de calcul en Gauss (système) et erreur détermination d'une représentation cartésienne*

H	2	Y, SPy Z	0	15 36	*représentation cartésienne correcte, les deux équations du tableau pour la caractériser et base correcte avec les deux premiers vecteurs par la méthode 1 de l'analyse a priori*
I	0	X, CRS	0	0	*interprétation matricielle du système*
J	5	Y, Vy Z, SPz	0	15 46	les vecteurs ne sont pas proportionnels
K	0	E	0	0	*bricolage sur les équations*
L	0	Y, Iy Z, ENT	0	26 46	*représentation cartésienne erronée, une équation du tableau (erreur de calcul)* *base erronée du noyau, les vecteurs donnés*
M	0	E	0	0	*écriture de la matrice de coefficients du système*
O	0	X, Vx	0	0 36	bricolage sur les équations et obtention d'une représentation cartésienne correcte
P	0	Z, CRV	0	26 46	*représentation cartésienne erronée, une équation du tableau* *base erronée avec trois vecteurs (effet erreur de calcul)*

QUESTION 5 - test 2 - étudiants de maîtrise

étudiant	IL	PROC	TDS	TEP	TID	C0	citations et *commentaires*
G	0	U	0	0	0	14	*égalité et intersection à partir des représentations*
H	0	0	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
I	0	W	0	0	0	0	*aucune conclusion*
J	0	E	0	0	0	0	*n'aborde pas la question*
K	0	E	0	0	0	23	*confusion point/vecteur*
L	0	E	0	0	0	23	*aucune conclusion sur l'égalité*
M	0	E	1	0	0	24	*aucune conclusion sur l'égalité*
O	0	E	0	0	0	0	*aucune conclusion sur l'égalité*
P	0	W	0	0	0	24	$E_3 \subset E_1 \cap E_2$

ANNEXE 10 - RESULTATS DETAILLES ETUDIANT PAR ETUDIANT - ETUDIANTS DEUG (compléments de mathématiques)

QUESTION 8

étudiant	PROC	MSY	CO	citations et *commentaires*
1	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique "implicite équation"*
2	B	1	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
3	C	0	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
4	D	0	13	*vecteur normal à chacun des vecteurs donnés*
5	C, SPc	0	03	*ne donne pas une représentation paramétrique*
6	0	0	0	*n'aborde pas la question*
7	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
8	0	0	0	*n'aborde pas la question*
9	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
10	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
11	0	0	0	*ne fait que copier les donnés*
12	0	0	0	*n'aborde pas la question*
13	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification* *erreur coefficients de l'équation*
14	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
15	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
16	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
17	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
18	D, ECD	0	14	*erreur classique, confusion affine / vectoriel*
19	C	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique avec quantification correcte*
20	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
21	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
22	C, RPc	0	23	*représentation paramétrique à un seul paramètre*

23	C, ECPV E	0	24	*erreur de calcul du produit vectoriel* *représentation paramétrique à un seul paramètre*
24	C	0	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
25	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
26	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
27	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
28	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
29	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
30	C	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
31	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
32	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique avec quantification correcte*
33	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
34	C, SPc	0	03	*ne donne pas une représentation paramétrique*
35	0	0	0	*n'aborde pas la question*
36	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
37	C, SPc, ECPV	0	04	*ne donne pas une représentation paramétrique*
38	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
39	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
40	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
41	D	0	03	*ne donne pas une représentation paramétrique* *vecteur normal à chacun des vecteurs donnés*
42	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
43	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
44	C	0	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
45	0	0	0	*n'aborde pas la question*

46	D, ECD E	0	24	*erreur classiquen, confusion affine / vectoriel*
47	A, SPa	0	03	*ne donne pas une représentation paramétrique*
48	A, EFDét	0	24	*erreur dans la détermination du vecteur $\vec{BM}$, confusion point/vecteur*
49	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique "implicite équation"*
50	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
51	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
52	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
53	D, ECD E	0	24	*erreur classique, confusion affine / vectoriel* *représentation paramétrique à un seul paramètre*
54	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
55	0	0	0	*n'aborde pas la question*
56	D, ECD E	1	24	*erreur classique, confusion affine / vectoriel* *représentation paramétrique à un seul paramètre*
57	C	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
58	D E	0	23	$\vec{BM} = t\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ *représentation paramétrique à un seul paramètre* *vecteur normal à chacun des vecteurs donnés*
59	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
60	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
61	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
62	B, Vs	2	14	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"* *erreur de calcul*
63	A, SPa	0	04	*erreur de calcul*
64	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
65	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique "implicite équation"*
66	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique "implicite équation"*

67	A	0	13	*écrit directement une représentation paramétrique "implicite équation"*
68	E	0	20	*rep. paramétrique à un seul paramètre (u + v)*
69	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
70	C E	0	24	*erreur du calcul du produit vectoriel,* *représentation paramètrique à un seul paramètre*
71	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
72	C	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
73	C	0	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
74	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
75	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
76	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
77	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
78	A, ECDét	0	14	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
79	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
80	C	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
81	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
82	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
83	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
84	D	0	13	*vecteur normal à chacun des vecteurs donnés*
85	B, SPb	0	10	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
86	C E	0	23	*représentation paramétrique avec un seul vecteur*
87	A	0	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
88	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
89	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
90	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*

91	B, ECGS	1	14	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
92	A	0	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
93	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
94	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
95	B, Vs	2	13	*écrit directement une représentation paramétrique sous la forme "implicite équation"*
96	A, SPa	0	03	*ne donne pas une représentation paramétrique*
97	0	0	0	*n'aborde pas la question*
98	0	0	0	*n'aborde pas la question*
99	0	0	0	*n'aborde pas la question*
100	C E	0	23	*représentation paramétrique à un seul paramètre*
101	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
102	D, ECD E	2	24	*représentation paramétrique à un seul paramètre* *erreur classique, confusion affine / vectoriel*
103	C E	0	23	*représentation paramétrique à un seul paramètre*
104	B, Vs	2	13	*écrit la définition de représentation paramétrique sans quantification*
105	C E	0	03	*représentation paramétrique erronée*
106	0	0	0	*n'aborde pas la question*
107	0	0	0	*n'aborde pas la question*

RESUME

L'articulation de points de vue joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Ce travail de thèse étudie les questions didactiques relatives à son enregistrement et à son apprentissage, dans un domaine précis : celui de l'algèbre linéaire, en considérant les deux points de vue "cartésien" et "paramétrique". La notion de point de vue et les questions d'articulation de points de vue sont d'abord resituées dans une perspective plus globale : celle de la prise en compte croissante des questions de flexibilité cognitive en didactique des mathématiques. Les points de vue cartésien et paramétrique sont ensuite analysés sur le plan mathématique. On montre la dissymétrie de l'articulation entre ces deux points de vue, en s'appuyant notamment sur le développement historique de la notion de rang. On met aussi en évidence les différents cadres dans lesquels l'articulation s'inscrit et les différents registres sémiotiques dans lesquels elle s'exprime. Cette analyse mathématique met en évidence la complexité de l'articulation et sert de base à l'élaboration d'une grille d'analyse des tâches intervenant dans un premier cours d'algèbre linéaire du point de vue de l'articulation. La thèse étudie ensuite comment les deux points de vue et leur articulation sont pris en compte dans l'enseignement de l'algèbre linéaire en étudiant un ensemble de manuels considérés comme représentatifs des rapports institutionnels dominants en France et au Brésil. Les analyses mettent ici en évidence une sensibilité réduite à ces questions et une faible exploitation de l'espace de travail a priori possible. La dernière partie de la thèse porte sur l'étude des rapports personnels des étudiants à l'articulation. L'étude concerne des étudiants français et brésiliens de divers niveaux. Pour les étudiants français, elle est basée sur l'analyse de réponses à des questionnaires. Pour les étudiants brésiliens, un dispositif plus complexe incluant travail en groupe, individuel et entretiens a été mise en place dans le cadre d'une expérimentation à distance. Les données obtenues montrent les difficultés importantes et résistantes rencontrées par les étudiants des deux pays et les dérapages induits par une pratique de l'articulation limitée généralement à sa seule dimension technique.

MOTS CLES

mathématiques, didactique, algèbre linéaire, point de vue cartésien, point de vue paramétrique, flexibilité cognitive,registres sémiotiques,rapport institutionnel.

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la
publication : R. CORI
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal :1998
ISBN : 2-86612-170-8