HAL
open science

Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effets sur leur formation

Valentina Celi

▶ **To cite this version:**

Valentina Celi. Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effets sur leur formation. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Paris 7 - Denis Diderot, 2002. Français. NNT : . tel-01255392

HAL Id: tel-01255392

https://theses.hal.science/tel-01255392v1

Submitted on 13 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

Ecole doctorale « Savoir scientifique : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »

Année 2001-2002

THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée et soutenue publiquement par

Valentina CELI

le 16 décembre 2002

Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effets sur leur formation

Directeurs de thèse : Marie Jeanne PERRIN, François COLMEZ

Jury

Mme Michèle ARTIGUE	Professeur des Universités, Paris 7	Présidente
M. François COLMEZ	Maître de Conférence, Paris 7	Directeur de Thèse
Mme Elisa GALLO	Professeur Associé, Université de Turin	Rapporteur
Mme Colette LABORDE	Professeur des Universités, IUFM Grenoble	Rapporteur
Mme Nicoletta LANCIANO	Professeur, Université de Rome	Examinateur
Mme Marie Jeanne PERRIN	Professeur des Universités, Artois	Directeur de Thèse

UNIVERSITE DE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

Ecole doctorale « Savoir scientifique : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »

Année 2001-2002

THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée et soutenue publiquement par

Valentina CELI

le 16 décembre 2002

Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effets sur leur formation

Directeurs de thèse : Marie Jeanne PERRIN, François COLMEZ

Jury

Mme Michèle ARTIGUE	Professeur des Universités, Paris 7	Présidente
M. François COLMEZ	Maître de Conférence, Paris 7	Directeur de Thèse
Mme Elisa GALLO	Professeur Associé, Université de Turin	Rapporteur
Mme Colette LABORDE	Professeur des Universités, IUFM Grenoble	Rapporteur
Mme Nicoletta LANCIANO	Professeur, Université de Rome	Examinateur
Mme Marie Jeanne PERRIN	Professeur des Universités, Artois	Directeur de Thèse

"Insomma, c'erano anche da noi tutte le cause della Rivoluzione Francese.
Solo che non eravamo in Francia, e la Rivoluzione non ci fu.
Viviamo in un paese dove si verificano sempre le cause e non gli effetti".

Italo Calvino (1957), *Il Barone Rampante*

Merci à...

Marie Jeanne Perrin et François Colmez pour avoir suivi mon travail, pour la confiance qu'ils ont eue en moi, pour les conseils savants qu'ils m'ont fournis en cours de route, leurs « leçons de français » ayant été précieuses et constructives autant que nos « discussions didactiques ».

Mesdames Colette Laborde et Elisa Gallo pour avoir accepté d'être rapporteurs ainsi qu'à Mesdames Michèle Artigue et Mme Nicoletta Lanciano d'être membres du jury.

Ma mère et mon père pour avoir souvent réussi à me faire oublier la distance qui nous sépare.

Mauro sans qui je n'aurais peut-être pas eu le courage de traverser les Alpes.

Arianna, une amie sincère et très patiente.

Wanda à qui une amitié sincère me lie.

Lucilla Cannizzaro pour ses témoignages d'attention depuis la fin de mes études « romaines ».

Magali, Agnès et Mariam : nos échanges amicaux et culturels ont été toujours encourageants et enrichissants.

L'équipe de jeune chercheurs ainsi qu'à l'équipe Didirem.

Annie, Martine, Nadine, Nicole, William dont je n'oublierai pas les aides morales et matérielles.

Ugo et à « nos » élèves.

Tous ceux qui, à travers un simple sourire ou un mot d'encouragement, m'ont aidée à aller jusqu'au bout.

Tous ceux que je ne cite pas explicitement mais qui savent avoir une place importante dans ma vie et dans mon cœur.

Table des matières

Introduction 7

Chapitre 1. La problématique, les cadres théoriques et la méthodologie

I. LE POINT DE DEPART DE LA RECHERCHE 13
Les intentions des programmes scolaires italiens actuels 13
Un premier regard sur les manuels scolaires italiens 15
Quelques didacticiens italiens s'expriment 16
La tradition euclidienne 17

II. POURQUOI UNE COMPARAISON ? 18
Les années soixante : une période de réformes 18
La fin des années soixante-dix : réactions à la réforme 22
Les intentions des programmes scolaires français actuels 24
Un premier regard sur les manuels scolaires français 25

III. LES CADRES THEORIQUES 27
III.1 La géométrie 27
La géométrie dans l'histoire 27
L'évolution de la géométrie dans la société et la culture 28
La géométrie dans l'enseignement 29
Intuition, expérience, déduction 31
Les "paradigmes géométriques" 32
L'"organizzazione della Geometria" 33
Les "attitudes" face à la géométrie 36
III.2 La preuve 39
Explication, preuve, démonstration 39
Preuves pragmatiques et preuves intellectuelles 40
Les types de preuves 41
III.3 L'approche anthropologique : la transposition didactique 43
L'élaboration et les "artisans" (du texte) du savoir à enseigner 45
Le manuel scolaire : un produit conçu en dehors de l'école pour l'école elle-même 46
III.4 L'approche anthropologique : la notion de *praxéologie* 47
Les notions de tâche, technique, technologie et théorie 48
Savoirs et savoir-faire 49

IV. LA PROBLEMATIQUE ET LA METHODOLOGIE 50
IV.1 Reprise des questions 50
IV.2 La méthodologie 52
Le manuel scolaire : un objet et un outil de recherche 52
Les "canevas" des textes du savoir T_{GF} et T_{GI} : une lecture analytique des textes officiels des programmes scolaires 53
Articulation des textes du savoir T_{GF} et T_{GI} : une lecture analytique des manuels scolaires 54
Le cas des aires : les réseaux conceptuels 56
Autour du triangle des milieux 56
La partie expérimentale 57

Chapitre 2. Une lecture analytique des textes officiels des programmes scolaires

Un préalable 63

I. LE COLLEGE ET L'ÉCOLE SECONDAIRE INFERIEURE 65
I.1 Finalités et objectifs de l'enseignement des mathématiques 66
I.2 Suggestions méthodologiques, organisation de l'enseignement 68
I.3 Finalités et objectifs de l'enseignement de la géométrie 70

II. La classe de Seconde et l'École Secondaire Superieure 73
II.1 Finalités et objectifs dans l'enseignement des mathématiques 73
II.2 Suggestions méthodologiques, organisation de l'enseignement 74
II.3 Finalités et objectifs dans l'enseignement de la géométrie 75
Sur les responsabilités de l'enseignant dans les textes officiels 78
En résumant... 79

III. Explicitation des contenus d'apres les textes officiels 81
III.1 Les programmes scolaires italiens 81
Les contenus des programmes de l'ESI 81
Les contenus des programmes de l'ESS 83
III.2 Les programmes français 85
Les contenus des programmes du Collège 85
Les contenus des programmes de la classe de Seconde 88

IV. Une comparaison globale des programmes scolaires 90
IV.1 Le *syllabus* 90
Quelques commentaires sur les tableaux du syllabus 91
IV.2 Les constructions géométriques 102

V. La repartition des contenus par niveau scolaire 104
Le questionnaire pour les enseignants de l'ESI 104
Une répartition par année des contenus des programmes italiens 105
Un regard d'ensemble sur les contenus des programmes scolaires italiens 106
Un regard d'ensemble sur les contenus des programmes scolaires français 109
Comparaison des contenus des programmes scolaires par niveaux 112

VI. Évolution des programmes scolaires français 125
VI.1 Le Collège 125
VI.2 La classe de Seconde 129
VI.3 Explicitation des contenus d'après les textes officiels 131
Les programmes de Collège 132
Le programme de la classe de Seconde 136

Chapitre 3. Premiers jalons pour l'élaboration de la partie expérimentale

I. Methode de choix des problemes 140
Le "problème" 140
Les "problèmes" 141
Des problèmes, pour qui et pour quoi ? 142
La structure des énoncés 143

II. Le triangle des milieux : un probleme de construction 147
II.1 L'analyse a priori du problème A 147
II.2 Choix des énoncés pour la partie pré-expérimentale 160

III. Le triangle des milieux : un probleme d'aire et de perimetre 164
III.1 L'analyse a priori du problème B 164
III.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale 176

IV. Le triangle des milieux : un probleme de centre de gravite 177
IV.1 L'analyse a priori du problème C 177
IV.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale 181

V. Dans le triangle des milieux, quadrilateres de meme aire 183
V.1 L'analyse a priori du problème D 183
V.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale 184

VI. LE PARALLELOGRAMME DES MILIEUX I 185
VI.1 L'analyse a priori du problème E 185
VI.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale 188

VII. LE PARALLELOGRAMME DES MILIEUX : UN PROBLEME DE CONSTRUCTION 191
VII.1 L'analyse a priori du problème F 191
VII.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale 197

VIII. DU TRIANGLE AU PARALLELOGRAMME 197
VIII.1 L'analyse a priori du problème G 197
VIII.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale 200

IX. LE PARALLELOGRAMME DES MILIEUX II 200

X. L'ORGANISATION DE LA PARTIE PRE-EXPERIMENTALE 201

Chapitre 4. Une lecture analytique des quelques manuels scolaires

I. PREMIERS ELEMENTS D'ANALYSE DES MANUELS SCOLAIRES 208
I.1 Le choix des manuels scolaires 208
I.2 Description globale des divers ouvrages 209
I.3 Rapport cours/exercices et approche de la démonstration 217
I.4 Les dispositifs d'analyse des manuels scolaires 223
Le cas des aires : le réseau conceptuel visualisé 223
Réalisation de la liste des propositions liée au réseau conceptuel des aires 224
Autour de la configuration du triangle des milieux 226

II. LE RESEAU CONCEPTUEL DES AIRES DANS LES DIVERS MANUELS SCOLAIRES 228
La liste des propositions liée au réseau conceptuel des aires 230
La collection HAT 240
La collection HAC 243
Le manuel MAR 248
Le manuel BOV 250
Le manuel CAT 252
La collection MAT 254
Conclusions 256

III. AUTOUR DE LA CONFIGURATION DU TRIANGLE DES MILIEUX 258
A. Définition de droites parallèles et propriétés éventuelles 267
B. Caractérisation angulaire du parallélisme 278
C. Distance d'un point à une droite. Hauteur d'un triangle, hauteur d'un parallélogramme 282
D. Propriétés caractéristiques du parallélogramme 283
E. Théorème des milieux et sa réciproque 289
F. Théorème de Thalès et sa réciproque 291
Conclusions 298

IV. CONCLUSIONS 300

Chapitre 5. La partie pré-expérimentale : l'efficacité des problèmes proposés

I. LA PASSATION DES HUIT PROBLEMES 312

II. RETOUR SUR L'ANALYSE A PRIORI 313
II.1 La figure 314
II.2 Les divers genres de tâches. Les catégories de techniques et les technologies correspondantes 316
Les trois catégories de techniques : définitions 317

Les sept genres de tâches et les techniques possibles *319*
Les preuves *326*

III. L'ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ELEVES *328*
III.1 Généralités principales de l'analyse a posteriori **328**
Un problème de méthodologie *328*
Un retour sur les types de preuves *332*
III.2 Les critères de l'analyse a posteriori **335**
III.3 Les problèmes de la fiche A **336**
III.3.1 L'analyse du Problème 1A 337
Le tracé et l'usage de la figure *338*
Les réponses et les procédures des élèves *341*
Les discours des élèves *348*
III.3.2 L'analyse du Problème 2A 350
III.3.3 Conclusions sur les problèmes de la fiche A 357
III.4 Les problèmes de la fiche B **358**
III.4.1 L'analyse du Problème 1B 358
Le tracé et l'usage de la figure *358*
Les procédures des élèves *361*
Les discours des élèves *367*
III.4.2 L'analyse du Problème 2B 368
III.4.3 Conclusions sur les problèmes de la fiche B 370
III.5 Les problèmes de la fiche C **371**
III.5.1 L'analyse du Problème 1C 371
Le tracé et l'usage de la figure *372*
Les réponses et les procédures des élèves *373*
Les discours des élèves *380*
III.5.2 L'analyse du Problème 2C 381
Le tracé et l'usage de la figure *381*
Les réponses et les procédures des élèves *382*
Les discours des élèves *388*
III.5.3 L'analyse du Problème 3C 388
III.5.4 Conclusions sur les problèmes de la fiche C 390
III.6 Les problèmes de la fiche D **391**
III.6.1 L'analyse du Problème 1D 391
Le tracé et l'usage de la figure *391*
Les réponses et les procédures des élèves *392*
Les discours des élèves *397*
III.6.2 L'analyse du Problème 2D 398
III.6.3 Conclusions sur les problèmes de la fiche D 401

IV. CONCLUSIONS *402*
IV.1 L'analyse des résultats par genre de tâche **402**
IV.2 Quelques conclusions générales sur la phase pré-expérimentale **404**

Chapitre 6. La partie expérimentale

I. LA PREPARATION DE LA PARTIE EXPERIMENTALE *411*
I.1 Le choix des énoncés **411**
I.2 Les critères de l'analyse a posteriori **425**
Le tracé et l'usage de la figure *425*
Les procédures des élèves *428*
Les discours des élèves *429*

II. L'ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ELEVES *429*
II.1 Les problèmes de la fiche 1 ..... **429**
II.1.1 L'analyse du problème A1 429
Le tracé et l'usage de la figure *430*
Les réponses et les procédures des élèves *435*
Les discours des élèves *446*

Conclusions *447*
II.1.2 L'analyse du problème A2 447
Les programmes de construction *448*
Les procédures et les discours des élèves *456*
Conclusions *461*
Conclusions sur les problèmes de la fiche 1 ..... *461*
II.2 Les problèmes de la fiche 2 462
II.2.1 L'analyse du problème B1 463
Le tracé et l'usage de la figure *463*
Les procédures des élèves *467*
Les discours des élèves *483*
Conclusions *484*
II.2.2 L'analyse du problème B2 484
Le tracé et l'usage de la figure *485*
Les procédures des élèves *487*
Les discours des élèves *492*
Conclusions *492*
Conclusions sur les problèmes de la fiche 2 ..... *493*
II.3 Les problèmes de la fiche 3 493
II.3.1 L'analyse du problème C1 493
Le tracé et l'usage de la figure *494*
Les réponses et les procédures des élèves *497*
Les discours des élèves *504*
Conclusion *505*
II.3.2 L'analyse du problème C2 505
La construction et les procédures des élèves *509*
Les discours des élèves *513*
Conclusions *513*
Conclusions sur les problèmes de la fiche 3 ..... *514*

III. REFLEXIONS SUR LES RESULATS DES ANALYSES DES PRODUCTIONS DES ELEVES 514
Le rôle du tracé et l'usage de la figure lors de la résolution des problèmes proposés *514*
Les techniques adoptées et les preuves produites : l'attitude rationnelle est-elle atteinte ? *518*
Les constructions géométriques : quelle signification pour les élèves observés ? *520*
Les tâches sur les aires : quelles différences entre les élèves français et les élèves italiens ? *522*
Les transformations géométriques : où sont-elles ? *523*

Conclusions **525**

Bibliographie **535**

Annexes

Introduction

Quel est actuellement et quel peut être l'enseignement de la géométrie au niveau du second degré ? Pour aborder cette question – qui peut assez bien résumer les motivations qui ont donné naissance à cette recherche – nous avons choisi de faire une comparaison des systèmes scolaires français et italien : au-delà de l'intérêt culturel, les différentes organisations des *contenus* et des *méthodes pédagogiques,* perçues au premier abord à travers notre expérience personnelle, nous ont incitée à amorcer ce travail et persuadée qu'une telle confrontation nous apporterait des moyens pour mieux pointer la place de certaines problématiques dans les deux institutions et, par là, éclairer les choix faits dans chacune d'elles et, au-delà de ces choix, leur importance dans ce que pourrait être un enseignement de la géométrie dans un tronc commun du secondaire.

À travers l'objectivation de ces quelques différences, nous voudrions mener une réflexion plus générale et ainsi apporter notre contribution modeste à un débat enclenché il y a longtemps et dont l'aboutissement ne semble pas prochain.

Les systèmes scolaires des deux pays n'ont pas la même organisation, les documents de référence n'ont pas la même structure, les habitudes des enseignants et des élèves ne sont pas forcément les mêmes et, dans le vaste domaine de la géométrie élémentaire, la sélection des contenus d'enseignement n'est pas la même. Pour mener à bien notre comparaison et éviter d'en rester à une description générale, nous avons dû mettre en place un certain nombre de dispositifs d'observation et d'analyse qui nous permettent d'appréhender de façon assez concrète les objectifs d'enseignement et ce que les élèves savent faire après cinq ans d'enseignement secondaire dans les deux pays. A ce niveau-là, les contenus se rejoignent et on peut supposer que les objectifs visés par les programmes ont été plus ou moins atteints et que l'élève dispose d'un bagage de connaissances suffisamment consolidées.

Dans le **Chapitre 1,** nous exposons la problématique et les cadres théoriques sur lesquels elle s'appuie ainsi que les principaux éléments de la méthodologie mise au point pour effectuer la comparaison.

La comparaison progresse par des *zooms* – étapes de plus en plus détaillées. Dans le **Chapitre 2,** lors de l'analyse des programmes scolaires, nous avons établi d'une manière assez complète les textes du savoir qui sont reconnus dans les deux institutions concernées – cela à l'aide des programmes et de quelques manuels scolaires – en repérant les objets communs et non communs sans pourtant nous préoccuper des rapports institutionnels aux objets de savoir repérés dans les deux institutions.

Une deuxième étape a consisté alors à localiser un ensemble d'objets plus restreint à utiliser pour élaborer la partie expérimentale de notre travail.

C'est ainsi que nous avons recherché une *configuration de base* qui revenait souvent dans les problèmes proposés dans les manuels des deux institutions. Nous avons alors construit un problème représentant la partie commune et essentielle de l'enseignement dans les deux pays. A partir de ce problème générique, nous avons bâti différents énoncés. Dans le **chapitre 3**, à travers une analyse *a priori* détaillée, nous exposons la genèse des problèmes qui ont été ensuite proposés à des élèves français et italiens au cours de la partie expérimentale de notre travail.

Grâce à l'analyse des problèmes élaborés, nous avons identifié des objets précis sur lesquels nous avons centré une *lecture analytique* des textes du savoir scolaire tels qu'ils sont développés dans quelques manuels scolaires parmi les plus adoptés dans les deux institutions concernées. Cette lecture fait l'objet du **Chapitre 4** : ici, en déduisant les rapports institutionnel et personnel au savoir géométrique des auteurs des manuels, nous tirons les premières conclusions en relation avec notre problématique de départ.

La partie expérimentale de notre travail comporte deux phases. Pendant la *phase pré-expérimentale*, nous testons les problèmes élaborés auprès d'un petit groupe d'élèves français et italiens : ici, nous portons un regard particulier sur l'efficacité des énoncés proposés par rapport aux objectifs de notre travail. Pendant la *phase expérimentale* proprement dite, les problèmes revus sont définitivement proposés à une population plus importante d'élèves : ici, notre intérêt porte principalement sur les élèves et leurs productions écrites.

Dans le **chapitre 5**, nous commentons et analysons les résultats issus de la *phase pré-expérimentale* en fournissant les éléments essentiels qui ont influencé l'élaboration des énoncés exploités lors de la phase expérimentale. L'analyse détaillée de quelques exemples nous a amenée à préciser la partie théorique et à définir un cadre d'analyse pour la partie expérimentale. En effet, il s'agit d'un travail propédeutique aussi au niveau de l'organisation du dépouillement des productions écrites des élèves car, au cours de cette phase – bien que les critères de dépouillement suivis soient moins fins que ceux que nous adoptons dans la phase ultérieure – nous recueillons des éléments d'analyse qui méritent un approfondissement et qui paraissent utiles aux questionnements fondamentaux de notre travail.

Dans le **Chapitre 6,** nous commentons et analysons enfin les résultats issus de la *phase expérimentale*. Nous en tirons des informations sur le rapport personnel au savoir géométrique des élèves français et italiens et aussi sur les effets que les textes du savoir qui vivent dans les deux institutions concernées et leur mise en œuvre semblent avoir sur leur formation.

En conclusion de notre travail. Nous revenons sur les hypothèses de départ, discutons l'efficacité de la méthodologie choisie pour mener une telle investigation, en envisageant quelques ouvertures possibles sur d'autres axes de recherche.

Chapitre 1

La problématique, les cadres théoriques et la méthodologie

PLAN DU CHAPITRE

I. LE POINT DE DEPART DE LA RECHERCHE

II. POURQUOI UNE COMPARAISON ?

III. LES CADRES THEORIQUES

III.1 La géométrie

III.2 La preuve

III.3 L'approche anthropologique : la transposition didactique

III.4 L'approche anthropologique : la notion de *praxéologie*

IV. LA PROBLEMATIQUE ET LA METHODOLOGIE

IV.1 Reprise des questions

IV.2 La méthodologie

I. LE POINT DE DEPART DE LA RECHERCHE

Les intentions des programmes scolaires italiens actuels

Un regard global sur les programmes scolaires italiens actuels du cycle secondaire nous montre une organisation de l'enseignement de la géométrie fondée sur la volonté de transmettre un savoir ainsi que sa genèse. L'idéologie qui les anime est que l'étude d'une science acquerra signification, si l'on apprend la manière dont elle a été fondée : selon un projet qui s'étale sur tout le cycle secondaire en tenant compte des modalités d'apprentissage propres à chaque âge, on commence par la géométrie euclidienne comme "première représentation du monde physique" pour terminer avec une vision de celle-ci en tant que modèle d'une théorie mathématique formalisée. En outre, l'élément innovateur de ces programmes est l'introduction des *transformations géométriques* qui, pour le cycle supérieur, peuvent devenir un instrument éventuel de démonstration – les *critères de congruence*[1] et *de similitude des triangles* demeurant encore parmi les objets d'enseignement.

Actuellement, en ce qui concerne les méthodes pédagogiques, les instructions officielles parlent d'*enseignement par les problèmes*[2] et de processus de *mathématisation de la réalité*. En accord avec les études modernes sur la pédagogie et la didactique, on critique un enseignement traditionnel, autoritaire, où on demandait un apprentissage *passif* basé sur la récitation des notions énoncées par l'enseignant : en opposition avec les méthodes qui laissent l'élève dans une position passive, on encourage l'adoption de méthodes *actives* où l'élève participe à la construction de ses connaissances.

Au cycle secondaire inférieur, les instructions officielles soulignent l'importance des mathématiques en tant que discipline apte à développer une mentalité scientifique *puisqu'elles abordent les problèmes à travers un rapport constructif et dynamique avec le réel*. Notamment, nous lisons[3] :

> "Le processus d'initiation à la méthode scientifique proposé aux élèves devra respecter les temps et les modalités d'apprentissage qui caractérisent leur âge: il devra donc se dégager à partir de ce qui peut stimuler leur curiosité et leur intuition, des expériences facilement compréhensibles et de l'action; il devra aussi permettre de se familiariser à la déduction à travers une évolution progressive des processus d'abstraction. C'est pourquoi les élèves seront engagés, individuellement ou par groupes, en situations d'action, d'investigation et de réflexion introduites

[1] Précisons qu'en Italie on utilise "*critères de congruence*" dans le sens qu'en France on utilise "*cas d'égalité*".

[2] Consciente que cette locution peut se prêter à des interprétations subjectives disparates, nous tenons à préciser la nôtre. En effet, nous la rattachons à un scénario d'enseignement où *le professeur contextualise les objets à enseigner. Il choisit ou adapte ou construit un problème dont l'étude fait appel à ces objets en question. Dans ce cas les élèves ont à traiter une situation... pour accroître le savoir, il leur faudra ensuite avec le concours du professeur engager un processus de décontextualisation et de dépersonnalisation, travail dont l'accomplissement toutefois ne peut être que le fait de l'enseignant...*" (citation tirée de DOUADY R. (1992), *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*, REPERES – IREM, n. 6, janvier 1992).

[3] Tout au long de ce travail, nous avons nous-même réalisé les traductions des citations des programmes et des manuels italiens ainsi que des extraits de documents italiens.

convenablement par l'enseignant afin d'atteindre, selon la nature du sujet, des développements mathématiques plus approfondis et généraux et, en même temps, une construction cohérente par rapport aux résultats expérimentaux. Les investigations, expérimentale et mathématique pourront perdurer longtemps ensemble, en s'intégrant sans se confondre. On souligne l'importance d'activités de laboratoire aussi bien pour les sciences expérimentales que pour les mathématiques..."[4].

Dans ce discours, nous reconnaissons que l'intention de transmettre le savoir en question doit s'accompagner de la volonté de former un esprit scientifique : la découverte et l'approfondissement d'une notion doivent s'accomplir à travers la mise en place de situations d'action, d'investigation et de réflexion ; la validation des résultats doit (peut ?) s'effectuer par les biais de l'expérience, ce qui n'empêche pas l'initiation au raisonnement déductif.

Dans le système scolaire italien actuel[5], la transition de la géométrie *intuitive* vers la géométrie *déductive*[6] coïncide avec le passage du secondaire inférieur au secondaire supérieur. Des mutations concrètes et tangibles – l'établissement, l'enseignant, le manuel, etc. – s'associent aux changements d'ordre didactique et pédagogique.

D'après les programmes, au cours des deux premières années du secondaire supérieur, l'enseignement de la géométrie s'éloigne du *concret* pour se rapprocher de l'*abstrait* ; on familiarise graduellement l'élève avec le *raisonnement déductif*, tout en considérant que cela devra permettre de parvenir peu à peu à une réorganisation axiomatique de la géométrie, dans les années suivantes. On lit dans les instructions officielles :

"La finalité principale de l'étude de la géométrie au cours des deux premières années de lycée est de mener progressivement l'élève de l'intuition et de la découverte de propriétés géométriques à leur description rationnelle ; celle-ci représente donc la voie privilégiée vers l'argumentation. L'enseignant peut y parvenir à travers une méthode qui tient compte des connaissances intuitives acquises antérieurement et progresse vers le développement rationnel d'un nombre limité d'enchaînements déductifs ; pourtant, il faut que toute hypothèse ou énoncé admis soient manifestement reconnus et formulés de façon explicite, quelle que soient les raisons qui amènent à les choisir en tant que point de départ de l'argumentation. C'est à l'enseignant d'entamer la phase heuristique du processus d'axiomatisation à partir de situations simples empruntées à divers domaines. Cela dans la perspective de familiariser les élèves avec la méthode hypothético-déductive et d'aboutir, dans les années suivantes, à la construction d'un système d'axiomes pour la géométrie élémentaire... il est préférable... de programmer un choix des propriétés (théorèmes) des figures planes à démontrer, en ayant recours à la géométrie des transformations ou bien en suivant un parcours traditionnel..."[7].

L'esprit des programmes semble clairement exprimé. Ici, on n'incite pas à un passage instantané vers l'abstraction et on n'encourage pas non plus à ce que l'initiation et l'entraînement ultérieur au raisonnement déductif respectent une organisation *axiomatique* et *complète* du savoir géométrique. Au contraire, il nous

---

[4] *Programmi, orari di insegnamento e prove di esame per la scuola media statale (D. M. 9 febbraio 1979)*, Ministero della Pubblica Istruzione, Roma 1994

[5] cf. Annexe 1A (Le système scolaire italien)

[6] Ici, nous employons naïvement cette terminologie – utilisée couramment dans les instructions officielles et, plus généralement dans l'enseignement des mathématiques – tout en considérant que, par la suite, nous avons ressenti l'exigence de nuancer leur acception. De même pour d'autres termes tels que *concret, abstrait, raisonnement déductif, démonstration, ...*

[7] *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni. Le proposte della commissione Brocca*, Studi e documenti

semble percevoir une incitation à bien distinguer la phase de la réorganisation explicite de la géométrie euclidienne en tant qu'exemple de système axiomatique de la phase d'apprentissage de la démonstration, celle-ci devant être présentée comme une réponse à la nécessité de justifier rationnellement les résultats acquis par le biais de l'expérience. Dans un contexte convenablement aménagé, on peut offrir encore à l'élève les moyens pour construire son savoir – bien qu'il s'éloigne du concret – et pour saisir progressivement cette exigence de rationalité et d'abstraction.
A l'égard des outils de démonstration, le choix est laissé à l'enseignant, tout en considérant qu'il dispose aussi bien d'outils traditionnels – tels que les critères de congruence et de similitude des triangles – que des transformations géométriques.

Au niveau des contenus, aussi bien au cycle inférieur qu'au cycle supérieur, la portée des *transformation géométriques* est ambiguë : faut-il les considérer comme le fil conducteur à travers lequel développer les autres chapitres de la géométrie élémentaire ou plutôt comme un nouveau chapitre à ajouter aux autres plus classiques ? Cette situation nous conduit à nous interroger sur **le statut réel de ce *nouvel* objet et les relations qu'il entretient avec les autres objets des programmes scolaires.**

Un premier regard sur les manuels scolaires italiens

Un travail préliminaire de comparaison des programmes et des manuels scolaires italiens nous a conduite à remarquer qu'il subsiste un écart important entre les intentions des premières et le contenu des autres : la plupart des manuels actuels ne reflètent pas convenablement les innovations introduites dans les dernières réformes.

Au cycle inférieur, ils semblent fournir seulement du savoir mathématique, exprimé souvent à travers un langage complexe et un style magistral : la partie théorique demeure considérable – de style encyclopédique – et d'habitude précède la partie pratique. **Est-ce que cela fait place à des situations qui favorisent l'action et la découverte ? Quels sont les objectifs des exercices et des problèmes proposés ? Sollicitent-ils l'investigation et la réflexion ou plutôt l'application de notions déjà construites ?**

La situation n'est pas tellement différente pour le cycle supérieur : la plupart des manuels scolaires semblent encore privilégier le savoir sans offrir de moyens tangibles pour s'approprier progressivement le savoir-faire. **Les exercices et les problèmes proposés, incitent-ils l'élève à la construction rationnelle**

---

degli Annali della Pubblica Istruzione, Roma 1991, Le Monnier

de ses connaissances ou bien le découragent-ils ? Étant donné qu'à ce niveau le raisonnement déductif acquiert une signification majeure, **l'apprentissage des techniques de démonstration se fait-il par degrés ou bien une approche axiomatique peut-elle servir à l'élève pour se familiariser à l'abstraction du raisonnement déductif** (comme cela semble ressortir de la lecture des manuels) **? Est-ce en apprenant une démonstration déjà toute bâtie qu'on apprend à démontrer ?**

Quelques didacticiens italiens s'expriment...

La lecture de plusieurs publications nous montre que, depuis longtemps, les chercheurs en didactique des mathématiques sont conscients des contradictions existant entre les intentions des textes officiels et le contenu des manuels. Voici, ci-dessous, quelques extraits :

> (1989) "... (les enseignants), quelquefois, n'ont pas été aidés par les manuels scolaires adoptés car ceux-ci n'ont pas mis en évidence ce que les nouveaux programmes demandaient"[8].

> (1993) "Je ne veux pas dire que tout est resté exactement comme avant les nouveaux programmes : quelques modifications positives ont eu sans doute lieu. Pourtant, on est surpris d'une commune réticence aux innovations... un autre élément témoigne aussi d'une réticence aux innovations : dans les éditions les plus récentes d'un même manuel on propose les nouveaux sujets (souvent sous forme d'annexes indépendantes du reste de l'ouvrage) mais on n'allège ou on ne modifie presque jamais la présentation de sujets déjà existants dans les anciennes éditions... parfois, on découvre différentes présentations, sans lien entre elles, du même sujet (par exemple, propriétés géométriques abordées aussi bien par rapport à l'examen de figures distinctes qu'en termes de transformations géométriques ou bien vérifiés par des moyens analytiques). Il est presque inévitable que dans ce *zibaldone*[9], les enseignants retiennent les parties traditionnelles et ignorent les changements qui ne sont pas bien insérés dans l'ensemble de l'ouvrage"[10].

> (1994) "... Enfin, un point crucial : les exercices sur les transformations géométriques. Je dois constater que, à défaut d'une tradition didactique consolidée, la plupart des exercices proposés dans les manuels sont très peu significatifs et stimulants et ils s'enchaînent très mal avec les autres chapitres de la géométrie"[11].

> (1998) "... there were, at the end of the 70's, large possibilities of teaching in many different ways. These possibilities continue, but the pressures on teachers make it unusual for such books to be used as other than trend-setters by more commercially minded writers. At present there is a great production of big textbooks, mainly used as collections of 'exercises', having thousand of these. As so often happens, the quality of these books tends to deteriorate, and none has taken hold as a standard. The need for useful guide-lines for teachers is quite evident: are books a suitable instrument when compared with other techniques of in-service training?" [12]

En fait, bien que les travaux d'un bon nombre de didacticiens italiens témoignent de leur attention à ce problème, les auteurs de manuels n'abandonnent pas un style magistral ainsi que le recours à une

---

[8] Mammana C. (1989) *Il ruolo della geometria*, dans L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate

[9] Capharnaüm, bric-à-brac

[10] Villani V. (1993), *Linsegnamento della matematica nella scuola italiana oggi : dalle elementari ai bienni delle scuole secondarie superiori*, dans Scuola Concorsi, marzo 1993

[11] Villani V. (1994), *L'insegnamento della geometria nei nuovi programmi della scuola italiana*, dans L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, n.6, novembre-dicembre 1994

[12] Galuzzi M. (1998), *On the evolution and underlying ideas of geometry textbooks in Italy*, dans Mammana C., Villani V. (coordonné par), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI study, Kluwer Academic Publishers.

exposition traditionnelle de l'enseignement de cette discipline : nous constatons une absence de modernisation des méthodes d'enseignement et d'apprentissage et donc d'activités favorisant la participation active de l'élève à la construction de ses connaissances et à leur organisation rationnelle ; une fusion inadéquate des nouveaux objets avec les anciens ainsi qu'une introduction insuffisante d'exercices et de problèmes qui peuvent encourager à relier ces objets et offrir une vision unitaire de la discipline en question.

Quand nous parlons d'une fusion inadéquate de quelques nouveaux objets, nous faisons surtout allusion au chapitre *nouveau* concernant les transformations géométriques qui – par suite des dernières réformes – cohabite, dans la plupart des manuels, avec le chapitre traditionnel des critères de congruence et de similitude des triangles. Leur présentation peut varier d'un manuel à l'autre et, parfois, le rôle qu'il doit jouer demeure ambigu.
Si les transformations géométriques offrent une vision plus dynamique de la géométrie, les critères de congruence et de similitude des triangles sont des outils de démonstration d'utilisation plus facile que celles-ci. Un enseignement qui envisage la cohabitation de ces deux chapitres doit être bien motivé car, sinon, le premier apprentissage fait obstacle au plus récent qui n'arrive pas à s'intégrer convenablement aux autres connaissances plus élémentaires de l'élève.

La tradition euclidienne

Les *Éléments* d'Euclide ne sont pas seulement une monographie exhaustive de tout le savoir géométrique connu à son époque mais il a représenté, pendant des siècles, un modèle indéniable de rationalité et de rigueur : la structure logique des contenus a été une référence fondamentale pour le développement ultérieur des sciences mathématiques en tant que système hypothético-déductif.
Le caractère d'exhaustivité que ce traité conférait à la géométrie savante a perduré longtemps (pratiquement jusqu'à Hilbert, fin du 19ème siècle) et il a été toujours source d'inspiration pour la réalisation de nombreux textes de mathématiques et manuels à l'intention de disciples du monde entier. Il a été un modèle pour l'*organisation des contenus* : de la géométrie dans le plan à la géométrie dans l'espace, du triangle au cercle, etc. ; ainsi que pour leur *présentation* : définitions, postulats, notions communes et propositions. Le style de rédaction euclidien a eu et a encore une influence remarquable :

> "Idéalement, une proposition euclidienne est divisée en parties constitutives... Il s'agit de : l'énoncé, l'ecthèse, le diorisme, la construction, la démonstration, la conclusion particulière, la conclusion générale...Ces parties articulent deux niveaux de discours : l'un, universel, est celui de l'**énoncé** et de la conclusion générale ; l'autre renvoie au diagramme et au lettrage. Il indique une exemplification ou instanciation : la preuve va être déroulée sur un exemple particulier dans sa désignation (introduite dans l'ecthèse) mais générique... Le diorisme formule à nouveau ce qu'il est requis de démontrer ou faire – mais dans le terme de l'exemple. La **construction** introduit les éléments nécessaires qui ne faisaient pas partie des données initiales... La partie "**démonstration**", au sens strict du

terme (l'*apodeixis* en grec) commence sur le diagramme ainsi complété... chaque segment grammatical de la preuve est justifié, ou justifiable, à l'aide des principes ou des acquis antérieurs du traité"[13].

C'est ainsi que, lorsque nous parlons de **tradition euclidienne**, nous considérons que nous avons hérité d'Euclide non seulement un *savoir géométrique* qui suggère, au premier regard, une idée d'exhaustivité et d'immuabilité mais aussi un exemple de *style* et de *méthode* pour que ce savoir soit transmis.
Or, aujourd'hui où on parle d'*enseignement par les problèmes*, où on met l'accent sur la nécessité de méthodes pédagogiques qui permettent à l'apprenant de prendre conscience de ce qu'est une véritable démarche scientifique, il nous paraît qu'une présentation de la géométrie telle qu'elle nous a été proposée dans les *Éléments* n'est plus appropriée si l'on veut répondre convenablement à ces exigences.

Nous avançons alors l'**hypothèse** suivante :
Hypothèse 1. La *tradition euclidienne*, fortement enracinée dans l'enseignement italien de la géométrie, fait obstacle aux changements souhaités : cette tradition influe sur les contenus et sur leur organisation ainsi que sur les méthodes d'enseignement.

II. Pourquoi une comparaison ?

Quelle est la place de la géométrie dans l'enseignement italien actuel ? Pour aborder cette question – qui peut bien résumer les motivations qui ont donné naissance à cette recherche – nous avons choisi de faire une comparaison des systèmes scolaires français et italien : au-delà de l'intérêt culturel, les différentes organisations des *contenus* et des *méthodes pédagogiques* perçues nous ont incitée à amorcer ce travail et persuadée qu'une telle confrontation nous apporterait des moyens pour mieux pointer certaines des problématiques qui apparaissent dans une institution et non pas dans l'autre et par là éclairer les choix faits dans chacune d'elles.
L'enseignement de la géométrie dans les deux pays était semblable jusqu'aux années soixante.

Rappelons brièvement ce qui est advenu depuis.

Les années soixante : une période de réformes

Dans les années soixante, l'exigence d'une remise en question de l'enseignement secondaire des

[13] Vitrac B. (2000), *Trois exemples de démonstration*, Les Cahiers de Science et Vie, n. 55, février 2000. A l'égard du même sujet, nous renvoyons aussi à la lecture de Arsac G. (1999), *Variations et variables de la démonstration géométrique*, RDM, n.57, 19/3, La Pensée Sauvage Édition

mathématiques a pris une ampleur internationale : le célèbre Colloque de Royaumont, organisé en 1959 dans le dessein d'enquêter sur l'état de cet enseignement dans les différents pays européens, avait été l'occasion de passer en revue les facteurs en faveur d'un renouvellement radical – cette nécessité étant par ailleurs confortée par les transformations profondes que la signification des mathématiques avait subies aussi bien du point de vue social que culturel.

Le progrès économique et technologique se faisant toujours plus pressant, la société demandait aux nouvelles générations une formation scientifique plus conforme à ses besoins : les mathématiques et leur langage spécifique devaient désormais occuper une place essentielle dans l'élaboration de la connaissance car elles étaient considérées comme l'instrument indispensable pour comprendre toute réalité.

Cet état d'esprit trouvait un écho dans le monde de l'éducation et dans le monde académique car le développement de champs de recherche nouveaux, qui depuis presque un siècle avaient profondément modifié la pensée mathématique et son langage, avait amplifié l'écart entre les mathématiques enseignées et les mathématiques savantes. La réorganisation des fondements et la création de nouvelles disciplines unifiantes faisaient contraste avec l'enseignement traditionnel où l'algèbre et la géométrie étaient développées indépendamment l'une de l'autre et au moyen d'un langage qui paraissait désormais anachronique.

D'autres événements internationaux furent alors organisés et offrirent la possibilité de mettre au point des propositions de modernisation de l'enseignement des mathématiques. C'est ainsi que, à l'occasion du Congrès de Dubrovnik (1960), furent jetées les bases de la mise en place de la réforme dite des *mathématiques modernes.* La conviction fort répandue alors était que l'algèbre linéaire était la clé de voûte des mathématiques contemporaines et que, par conséquent, pour dispenser une vision unifiée de cette discipline, il fallait introduire les *structures algébriques* – convenablement transposées – dès les premières classes du secondaire : les mathématiques devaient être enseignées à tous et dans leur vision moderne, cela permettant ainsi de combler les lacunes existant entre le savoir scolaire et le savoir académique. Dans cette perspective, la géométrie élémentaire disparaissait alors derrière son apparence structurale et devenait un chapitre subordonné à l'algèbre linéaire, l'étude des *Éléments* d'Euclide étant désormais inadéquate par rapport au nouvel aménagement que la géométrie savante avait eu grâce aux résultats des récentes découvertes dans ce domaine des mathématiques. Promoteur convaincu de cette idéologie innovatrice, le mathématicien Jean Dieudonné proposa – à la suite du célèbre colloque de 1959 – un programme qui, d'après lui, aurait dû remplacer l'étude de la géométrie d'Euclide. À ce propos, il écrivait :

"... depuis les travaux de Grassmann et Cayley entre autres (qui remontent à plus de cent ans), on dispose, en

" Géométrie élémentaire ", comme l'a si bien dit Choquet, d'une " route royale " par laquelle, à partir d'axiomes extrêmement simples à énoncer (au contraire de ceux d'Euclide-Hilbert) tout s'obtient da la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints " cas d'égalité " ou " cas de similitude " des triangles, points d'appui de toute la technique traditionnelle ... Une autre caractéristique de la méthode mathématique contemporaine... est qu'elle permet de regrouper suivant leurs affinités profondes des théories d'aspect superficiel souvent fort différent... Il me semble qu'il y a intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de cette discipline [l'algèbre linéaire], à lui apprendre à " penser linéairement ", ce qui est d'autant plus facile qu'il y a peu de notions, en mathématiques, qui soient plus simples à définir que celles d'espace vectoriel et d'application linéaire. A notre époque de prolifération intense dans toutes les sciences, tout ce qui condense et tend à l'unification a une vertu qu'on ne saurait surestimer... je ne peux pas ne pas observer que l'un des avantages de l'Algèbre linéaire, c'est qu'elle permet de présenter tous les développements de la "Géométrie élémentaire" d'une façon parfaitement rigoureuse, et cela *sans effort*, alors que l'on sait trop bien que les systèmes d'axiomes proposés depuis la fin du siècle dernier et se rattachant étroitement à la tradition euclidienne, sont d'une telle complexité et d'une telle subtilité qu'il est pratiquement impossible de les enseigner avant la Licence. D'où la nécessité, si pénible pour un mathématicien, de ne présenter à ses élèves que des pseudo-raisonnements qui ne résistent pas à une critique même superficielle ; je pense en particulier aux invraisemblables confusions et paralogismes auxquels donne lieu une notion aussi simple que celle d'"angle" quand on la prend du point de vue traditionnel, alors que, du point de vue de l'Algèbre linéaire, ce n'est pas autre chose que l'étude du groupe des rotations dans le plan..."[14].

Mais d'autres facteurs culturels s'ajoutèrent aux précédents. Les études sur le développement cognitif de l'enfant – menées par l'école piagétienne – progressèrent grâce à la mathématique moderne et, en retour, semblèrent suggérer des réponses innovatrices aux problématiques pédagogiques relatives à l'enseignement des mathématiques ; c'était l'élément principal d'un débat qui s'était enclenché bien avant les années soixante. Dans ses travaux, J. Piaget justifie la construction des connaissances mathématiques chez l'enfant d'un point de vue structural : selon son modèle, par exemple, les connaissances géométriques se construisent suivant un schéma tel qu'il est défini par F. Klein dans son célèbre Programme d'Erlangen. Tout cela contribua donc à renforcer l'idéologie selon laquelle les mathématiques sont le modèle de toute connaissance et à confirmer la nécessité du renouvellement préconisé.

Comment, l'Italie, répondit-elle à la nouvelle vague innovatrice ? Le processus de modernisation fut marqué par une sorte de réticence. En effet, les tentatives d'introduire les mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire furent très faibles : elles ne furent accompagnées ni de projets d'expérimentations efficaces ni d'une mise à jour adéquate des manuels scolaires ; les quelques publications scolaires – qui se voulaient innovatrices – étaient délibérément ignorées par les enseignants, ce qui pouvait s'expliquer par un manque de préparation des enseignants sur les contenus autant que sur les méthodes.

En 1963, la mise en place d'une réforme décréta la naissance de la "*scuola media unificata*" – l'actuelle école secondaire inférieure (11-14 ans) – mais, bien que les objectifs et les suggestions méthodologiques accompagnant les programmes fussent animés par un esprit d'innovation, rien ne fut explicitement proposé

[14] Dieudonné J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris

et le développement des contenus resta fidèle à l'ancienne organisation. Voici l'extrait d'une publication, parue parmi d'autres dans les années soixante-dix, qui témoigne sans doute de l'inertie qui caractérisa l'institution scolaire de l'époque ainsi que du malaise qu'elle engendrait dans l'esprit de quelques enseignants :

> "Après plusieurs années de fonctionnement de la *Scuola Media*, si l'on veut être franc, l'enseignement des mathématiques suit encore des méthodes traditionnelles et de la même façon sont conçus la plupart des manuels scolaires adoptés... dans l'école secondaire inférieure nous continuons à enseigner comme il y a cent ans. On est dans une véritable contradiction. Dans l'attente de la légendaire réforme de l'école secondaire supérieure... pourquoi n'envisage-t-on pas un aménagement des programmes scolaires actuels ? Pensons, par exemple,... à un enseignement traditionnel de la géométrie qui n'offre pas de possibilité d'une vision plus ample en obligeant l'élève à croire qu'elle est la seule vérité absolue... Hélas !, en Italie nous avons très peu de manuels de mathématiques modernes pour l'école secondaire... Il faut que le Ministère organise des mises à jour de plus longue durée, et que les Universités organisent des séminaires pour former les enseignants à la tâche qui les attend. Qu'arrivera-t-il autrement ? On aura les programmes, on aura la réforme mais... on n'aura pas celui qui compte le plus, le seul capable de mettre en œuvre la réforme elle-même : l'enseignant"[15].

Quant aux diverses filières de l'école secondaire supérieure (14-19 ans), les remaniements des programmes ne furent pas radicaux non plus : en général, les objets nouveaux se juxtaposèrent aux anciens – parfois sans aucune homogénéité apparente ; en outre, les programmes n'incluaient aucune suggestion méthodologique sur la façon dont ces objets auraient pu s'intégrer les uns avec les autres et ainsi moderniser l'enseignement. Évidemment, cela soulagea la majeure partie des enseignants qui continuèrent à suivre une gestion traditionnelle.

La France, au contraire, accueillit les propositions de Royaumont avec enthousiasme et, au début des années soixante-dix, la réforme des mathématiques modernes fut décrétée : les programmes de l'enseignement secondaire subirent un changement radical – caractérisé par un formalisme extrême – et, notamment, ils officialisèrent l'abandon de l'organisation traditionnelle de la géométrie euclidienne. Des manuels scolaires appropriés furent alors édités et les IREM[16] – créés pour l'occasion – assurèrent le "recyclage" des enseignants.

Un ouvrage de référence pour les professeurs des classes de lycée fut le livre de Jean Dieudonné, "Algèbre linéaire et géométrie élémentaire", dans lequel il a exposé ce *que devrait être le bagage minimum du bachelier ès-sciences au moment où il entre dans les classes du 1er cycle de l'Enseignement supérieur*. En expliquant les raisons qui l'avaient conduit à écrire cet ouvrage, il précisait :

> "Il y a déjà plusieurs années que l'on s'est inquiété un peu partout du divorce grandissant entre les méthodes et l'esprit de l'enseignement des mathématiques, dans les lycées d'une part, dans les Universités de l'autre. Ayant participé à plusieurs discussions sur ce problème, j'ai pu me convaincre que, même parmi les professeurs de l'Enseignement secondaire les plus conscients de la nécessité d'une réforme, il subsiste une grande incertitude sur la

[15] Merlo L. (1971), *La matematica moderna nella scuola di secondo grado*, dans Nuova Didattica della Matematica, Associazione Piemonte Italia, Torino 1971

[16] Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques

teneur de ce que devraient être les programmes nouveaux et sur leur articulation, tant interne qu'en relation avec les programmes de l'Enseignement supérieur. C'est donc en fait à eux que ce livre est avant tout destiné ; je l'ai conçu comme un " *livre du maître* ", en d'autres termes une ossature sur laquelle bâtir un enseignement oral vivant et adapté aux élèves qui doivent le recevoir.
... les acquisitions nouvelles et les réflexions qu'elles [les mathématiques] suscitent amènent à *repenser* les théorèmes anciens, à examiner à la lumière des théories plus récentes leurs rapports mutuels et à les insérer de façon plus rationnelle dans un contexte renouvelé... L'enseignement des Université ne peut bien entendu se permettre d'ignorer longtemps ces remises en ordre de l'édifice mathématique, sous peine de perdre toute son efficacité et jusqu'à sa raison d'être. Mais jusqu'à une époque récente il n'y a pas eu de refonte qui touchât vraiment aux notions de base laissées traditionnellement à l'Enseignement secondaire, et l'apprentissage des mathématiques dans Euclide n'était pas une mauvaise préparation aux mathématiques dites " supérieures " pour un contemporain de Viète ou même de Cauchy... il en est tout autrement aujourd'hui, où la tendance essentielle des mathématiques modernes, depuis environs un siècle, a été de chercher, par un effort supplémentaire d'abstraction, à *décomposer* en quelque sorte ces " idées fondamentales "... ils [les mathématiciens] ont pu découvrir, dans les produits de cette " dissociation ", des outils nouveaux d'une puissance insoupçonnée de leurs devanciers, grâce auxquels ils ont pu attaquer avec succès de nombreux problèmes laissés ouverts par ceux-ci.
Pendant ce temps, l'Enseignement secondaire, qui par sa nature même est fort éloigné du niveau où se font les recherches mathématiques contemporaines, était tranquillement resté, avec quelques additions superficielles, ce qu'il était avant Grassmann et Cantor, c'est-à-dire essentiellement la géométrie d'Euclide...
... doit-on considérer que l'Enseignement secondaire est destiné à accumuler toute une série de connaissances particulières, plus ou moins hétéroclites, en vue de préparer à toutes les professions imaginables ; ou au contraire, faut-il essayer avant tout d'apprendre aux enfants à penser, sur un petit nombre de notions générales bien choisies, et laisser les techniques spéciales se ranger plus tard sans effort dans une " tête bien faite " ?" [17].

De son côté, l'ouvrage de G. Choquet, "L'enseignement de la Géométrie", représenta une source d'inspiration pour *les professeurs de mathématiques de l'enseignent du second degré, pour ceux qui se préparent à l'être et pour tous ceux qui aiment la géométrie* ainsi que pour les élèves de 15 à 18 ans sous la direction de leurs professeurs.

À la suite de discussions qu'il avait eues avec de nombreux mathématiciens et enseignants, français et étrangers, Choquet conçut un livre présentant *une axiomatique de la géométrie basée sur les notions de parallèle, de perpendiculaire et de distance, mais sous une forme qui conduit de façon naturelle et rapide à la structure algébrique du plan et de l'espace* :

"Euclide basait la géométrie plane sur les cas d'égalité des triangles. Vingt-trois siècles plus tard les mathématiciens définissent le plan comme un espace affine à deux dimensions muni d'un produit scalaire. J'ai pensé que nos enfants avaient besoin d'un exposé de la géométrie qui parte, comme chez Euclide, de notions tirées du monde sensible, mais qui leur permette d'utiliser très vite les outils souples et féconds de l'algèbre"[18].

La fin des années soixante-dix : réactions à la réforme

Même si les causes furent différentes, les réformateurs des deux pays apprécièrent mal les questions pédagogiques que l'enseignement des mathématiques posait depuis toujours. Dès les années cinquante, la création de la CIEAEM[19] témoignait d'une véritable prise de conscience de cette problématique : le projet

[17] Dieudonné J. (1964), ouvrage déjà cité
[18] Choquet G. (1964), *L'enseignement de la Géométrie*, Hermann, Paris
[19] Commission Internationale d'Étude et d'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques

éducatif de cette discipline étant celui de former l'esprit scientifique, toute méthode d'enseignement qui laissait l'élève dans une position passive était de plus en plus rejetée. Les mathématiques sont une création de la pensée humaine, une modélisation de la réalité et, en retour, un instrument pour la compréhension de celle-ci. Mais alors, pourquoi fallait-il les enseigner de façon à être si loin de la réalité ? L'élève devait être mis dans la condition d'agir, de participer à la construction de ses connaissances, en essayant de les harmoniser avec ses propres expériences. Évidemment, cette *pédagogie de l'action* demandait une réflexion sur la présentation des contenus car il paraissait évident qu'une organisation axiomatisée des mathématiques ne pouvait qu'être transmise à l'aide de méthodes d'apprentissage passif.

Dans ce cadre, la géométrie était au cœur du débat. Par sa nature, cette discipline est un exemple éloquent de la manière dont le monde physique et le monde de l'abstraction peuvent se joindre en concourant l'un à la compréhension de l'autre. L'introduction du traité d'Euclide dans des classes de jeunes élèves avait influencé non seulement la présentation des contenus mais aussi les méthodes : la résolution de proposer une géométrie fondée explicitement et aussitôt sur des bases axiomatiques, ne favorisait pas un apprentissage actif et ne permettait non plus d'avancer progressivement du concret vers l'abstrait. Mais, dans cette perspective, la réforme des mathématiques modernes ne sembla pas venir en aide car elle remplaçait l'axiomatique euclidienne par une autre axiomatique, celle de Bourbaki :

> "A la place d'une méthode qui laisse l'enfant dans une position passive, va s'installer une méthode qui n'est pas moins autoritaire"[20].

C'est ainsi que, pour que les questions pédagogiques soient davantage prises en compte, la nécessité d'une nouvelle remise en cause des contenus prenait de plus en plus corps : en alternative à la *géométrie traditionnelle*, fondée sur les critères de congruence et de similitude des triangles, l'idée que la *géométrie des transformations géométriques* offre une vision dynamique de cette discipline, suggérait l'introduction de celles-ci en tant que concept fondamental dans l'investigation géométrique ou bien, d'une manière plus atténuée, son intégration à l'organisation classique inspirant jusqu'alors les programmes scolaires. Ce fut peut-être à cette époque-là qu'une sorte d'amalgame se produisit, à savoir qu'un *dynamisme* des contenus allait avec un *activisme* des méthodes pédagogiques.

L'institution scolaire italienne, depuis le début du 20ème siècle et lors des divers aménagements qui suivirent, semblait rester étrangère à toute action innovatrice en n'abordant la problématique que d'un seul point de vue : l'âge le plus propice pour le passage du concret à l'abstrait et, éventuellement, la nécessité de ce passage pour toutes les filières. La distinction entre la *géométrie intuitive* et la *géométrie déductive*

---

[20] Castelnuovo E. (1977), *L'enseignement des mathématiques*, Educational Studies in Mathematics, n.8

était très marquée dans l'esprit des réformateurs et l'axiomatique euclidienne demeurait toujours la référence fondamentale dans l'organisation et le choix des contenus. Le débat semblait avoir abouti à une solution au début des années quatre-vingts car une nouvelle réforme de l'école secondaire inférieure a été mise en place. Au même moment, des expérimentations ont commencé dans certaines classes du secondaire supérieur et se sont peu à peu généralisées, dans l'attente d'une réforme radicale non encore officialisée à ce jour. En théorie, les contenus et l'esprit des programmes officiels ont été complètement bouleversés mais...

Dans l'institution scolaire française – qui avait poursuivi des objectifs différents – il a fallu attendre le milieu des années soixante-dix pour que la réaction aux mathématiques modernes se manifeste. La nouvelle réforme, s'opposant à la précédente, a été caractérisée par un retour au concret et c'est ainsi que l'activité de l'élève a acquis une importance primordiale dans le projet éducatif. La géométrie retrouve alors une place dans les programmes mais son enseignement privilégie les méthodes aux dépens des contenus qui, pourtant, conservent une marque de modernisation due à l'introduction des transformations géométriques.

Les intentions des programmes scolaires français actuels[21]

Actuellement, dans l'enseignement français de la géométrie, les transformations géométriques ont remplacé les critères de congruence et de similitude des triangles[22] : elles constituent le fil conducteur à travers lequel le savoir géométrique se déploie au cours des années scolaires. Au collège, les résultats étudiés sont pour la plupart admis tandis qu'au lycée – pour certains d'eux – le choix de les admettre ou de les prouver est laissé à l'enseignant[23].

Les instructions officielles françaises incitent les enseignants à adopter des méthodes qui engagent les élèves à participer à la construction de leurs connaissances :

> "Une approbation [sic] mathématique, pour l'élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées, et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes..."[24].

Cela nous montre aussi que le projet éducatif de l'institution française se fonde sur l'idée que celle-ci *doit faire acquérir des connaissances et des méthodes*. Bien que l'on reconnaisse ici l'intention d'accorder la

---

[21] cf. Annexe 1B (Le système scolaire français).

[22] A l'époque où ce travail a débuté, les nouveaux programmes n'étaient pas encore en vigueur.

[23] A ce propos, dans le chapitre 4, consacré aux manuels scolaires, nous étudierons les diverses acceptions attribuées à la *preuve d'un résultat* dans les deux institutions.

[24] *Mathématiques, classes de collèges*, Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, CNDP 1996

même importance tant au savoir qu'au savoir-faire, nous remarquons que plus loin on précise :

> "... Il ne s'agit pas tant d'augmenter le volume global des connaissances à transmettre, que de mieux identifier l'essentiel, c'est-à-dire ce qu'il est indispensable d'acquérir dans chaque discipline, afin de permettre à tous les collégiens de mieux les maîtriser..."[25].

C'est ainsi que, lorsqu'on passe à la lecture des contenus, on constate qu'ils sont organisés suivant un réseau restreint et que les compétences exigibles des élèves reposent surtout sur les aspects techniques de la discipline.

Un premier regard sur les manuels scolaires français

Dans les manuels français, en accord avec les instructions officielles, la *fonction documentaire* du texte est accentuée : les contenus, qui se bornent à l'essentiel, sont exprimés à l'aide d'un langage très simple et l'aspect théorique (savoir) des mathématiques est minimisé au profit des méthodes (savoir-faire). L'élève est amené à découvrir les nouvelles notions et à construire ses connaissances à travers la réalisation d'activités bien définies et le recours à l'expérience demeure essentiel dans la majorité de ces activités ; l'apprentissage des techniques de démonstration se fait par degrés et l'enrichissement des compétences s'accompagne d'une exigence mesurée et progressive d'abstraction.

Cette réticence envers la surabondance de contenus, la complexité du langage et l'abstraction excessive semble correspondre à un choix pédagogique qui relève de plusieurs facteurs :

- la faculté d'abstraction nécessite un entraînement progressif ;
- ce n'est pas la rigueur d'un discours qui en assure la compréhension ;
- un champ de savoirs trop vaste incite un enseignement purement théorique et ne permet pas une contribution active de l'élève tandis qu'un ensemble restreint de contenus est plus accessible et maîtrisable ;
- c'est à travers l'acquisition du savoir faire que l'élève participe à la formation de son esprit scientifique, qui lui permet ensuite d'enrichir ses connaissances.

Évidemment, cette approche favorise un *enseignement par les problèmes* : un problème est une occasion pour introduire des notions nouvelles qui, en revanche, devraient provoquer d'autres problèmes. Or, **ce réseau de contenus restreint conduit-il à aller plus loin ? Les exercices et les problèmes proposés dans les manuels, sont-ils source d'enrichissement ? Ou bien, tournent-ils autour de ce petit réseau ?**

---

[25] cf. note précédente.

Ou encore, ne seraient-ils pas choisis de manière que l'on puisse *éviter* certaines difficultés ?

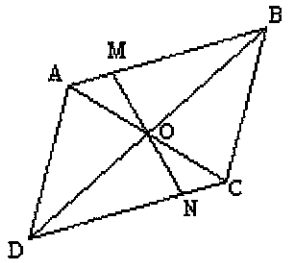
A travers une étude préliminaire de comparaison des enseignements français et italiens, nous avons donc pointé quelques éléments généraux et notamment :

- les manuels scolaires italiens et français sont conçus et structurés différemment ;
- l'enseignement italien de la géométrie est fondé sur un réseau de contenus plus riche que l'enseignement français ;
- le découpage de l'ensemble des objets d'enseignement est différent et leur répartition par niveaux scolaires aussi ;
- dans l'enseignement français, les méthodes pédagogiques adoptées semblent suggérer davantage une participation active de l'élève et, par conséquent, semblent tenir mieux compte de son développement génétique ;
- dans l'enseignement français de la géométrie, le passage du concret vers l'abstrait semble s'étaler dans le temps d'une manière plus large et s'accomplir à travers la mise en place d'activités plus adéquates.

Notre intérêt est d'explorer ces aspects et – à travers une analyse raisonnée des activités, des exercices et des problèmes proposés dans divers manuels français et italiens – de mettre en évidence les objectifs réellement visés dans l'enseignement de cette discipline dans les deux pays.

Ayant remarqué qu'un point d'arrivée commun est l'apprentissage des techniques de démonstration, nous voudrions analyser les outils de démonstration enseignés dans les deux institutions. Particulièrement, nous faisons allusion aux *transformations géométriques* : nous sommes persuadée que ces notions en tant qu'objets favorisent une présentation dynamique des contenus mais, en revanche, nous croyons qu'un apprentissage de la démonstration, ayant principalement ces notions pour outils, n'est pas considéré comme facile. A ce propos, analysons l'exemple suivant :

"Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Soit M un point du segment [AB], distinct de A et B. La droite (OM) coupe [CD] en N. Démontrer que O est le milieu de [MN]".



La preuve demandée peut être validée en adoptant deux types de techniques, l'une s'appuyant sur l'un des *critères de congruence des triangles*, l'autre sur les *propriétés de la symétrie centrale*.
Pour mettre en place la première technique, l'outil suggère aussitôt les bons éléments à repérer, notamment les triangles AMO et CNO ; en revanche, la deuxième technique s'avère plus complexe, les éléments à prendre en compte demandent une analyse d'ensemble de la figure et l'enchaînement des diverses étapes n'est pas évident lorsque l'on ne maîtrise pas adroitement l'outil *symétrie centrale*.

Il faut voir M comme point d'intersection de droites et obtenir son image à partir de l'image de ces droites. L'une, (OM), est invariante car elle passe par le centre de symétrie ; l'autre, (AB), a pour image la droite (CD), déterminée par les images C et D des points A et B. Cela demande un changement d'attitude pour aller au-delà de la perception de la figure alors que, pour les critères de congruence, il suffit de percevoir des surfaces limitées par les bords[26].

Nous voudrions alors étudier la manière dont les manuels français abordent la question pour voir s'ils parviennent à éviter une trop grande complexité. Cela pourrait fournir des réponses ultérieures à la problématique dégagée plus haut à propos de l'enseignement italien.

C'est pourquoi nous avançons l'**hypothèse** suivante :
Hypothèse 2. Les transformations géométriques, bien qu'elles occupent une place considérable dans l'enseignement français, "ont du mal" à devenir des outils de démonstration.

III. LES CADRES THEORIQUES

III.1 La géométrie

La géométrie dans l'histoire

Le traité d'Euclide – les *Éléments* – est le premier ouvrage où la géométrie est élaborée sur des bases axiomatiques. Il a eu, en tout temps, une influence considérable sur la construction du savoir scientifique mais bien qu'elle représente le premier exemple de système hypothético-déductif, cette œuvre n'a pas été à l'abri des critiques :

"... le fait qu'Euclide ne réussit pas à démontrer le 5e postulat, fut considéré comme l'un des défauts, ou mieux le

[26] cf. Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne

majeur, des *Éléments*... Depuis l'antiquité donc on chercha de corriger ce défaut afin de rendre l'œuvre d'Euclide inattaquable face aux critiques. Cependant, présenter comme indémontrable une propriété dont la vérité semblait évidente, si cela ne contrevenait à la rigueur de l'exposé, par contre cela apparaissait comme une manifestation d'impuissance ou tout au moins un défaut d'élégance. En 1763, George Klügel dans un de ses travaux recueillit les tentatives principales faites pendant les siècles afin de démontrer le 5e postulat (trente environ) et beaucoup d'autres par la suite témoignèrent de l'intérêt que cet sujet suscita..."[27].

Au début du 19ème siècle, le développement des géométries non euclidiennes - conçues à la suite de nouveaux essais de démonstration du cinquième postulat - enlève toute hégémonie à la géométrie euclidienne.

Ce n'est qu'à la fin du 19ème siècle que le mathématicien Félix Klein, en proposant son célèbre *programme d'Erlangen*, restitue à la géométrie son unité et, par conséquent, restitue sa dignité à l'organisation euclidienne.

D'autres ouvrages témoignent de la tentative d'une réorganisation plus rigoureuse du savoir géométrique : parmi les nouvelles positions assumées, on ne peut pas oublier l'œuvre de David Hilbert avec ses *Fondements de la Géométrie* (1899).

Évidemment, ces étapes remarquables de l'histoire de la géométrie ont eu une influence non négligeable sur l'élaboration et le développement du savoir scolaire.

L'évolution de la géométrie dans la société et la culture

Le savoir enseigné résulte aussi bien d'un savoir académique que d'un savoir social et culturel. La géométrie s'est constituée à partir de questions pratiques mais, depuis l'antiquité, est apparue l'exigence de la concevoir en tant que support théorique, permettant de résoudre des questions du micro-espace[28] ainsi que du macro-espace[29] ; au cours du temps, d'autres exigences se sont naturellement ajoutées et superposées aux besoins de nos ancêtres, cela à cause du progrès scientifique et technologique qui a évolué en transformant ainsi les pratiques des hommes et les références sociales. A notre avis, de nos jours, le recours *explicite* à la géométrie dans les pratiques sociales est fortement réduit : un certain nombre de termes pour désigner des formes réelles, quelques formules pour résoudre des problèmes relatifs à la mesure (surface d'une pièce, d'une paroi, etc.), quelques notions pour consulter cartes géographiques et topographiques ou bien analyser des tableaux statistiques... Les nouvelles technologies ont profondément modifié notre société mais, bien que la géométrie y soit encore impliquée, elle n'est pas

---

[27] Maracchia S. (1975), *La matematica come sistema ipotetico-deduttivo, profilo storico*, Felice Le Monnier, Firenze

[28] "Le micro-espace est le secteur de l'espace proche du sujet, et qui contient des objets accessibles à la vision comme à la manipulation... Puisque toutes les positions relatives entre le sujet et l'objet sont également possibles et faciles à obtenir, la perception de l'objet peut se caractériser comme exhaustive... " (Berthelot R. et Salin M. H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, thèse, Université de Bordeaux 1, 1992)

[29] "Le macro-espace urbain correspond à un secteur de l'espace dont la dimension est telle qu'on peut l'embrasser seulement par l'intermédiaire d'une succession de visions locales, séparées entre elles par les déplacements du sujet sur la surface terrestre... les objets restent fixes, c'est le sujet qui se déplace..." (Berthelot R. et Salin M. H. (1992), ouvrage déjà cité)

apparente ; il faut surtout la voir en tant que *théorie mathématique*. Nous citons ci-après l'extrait d'un article de R. Bkouche qui exprime bien notre opinion :

> "... En ce qui concerne la géométrie, il faut prendre en compte... une *dé-géométrisation* du quotidien dans une société de plus en plus *numérisée* par l'informatisation ; ainsi la lecture numérique du temps via les cadrans à cristaux liquides qui se substitue à la lecture géométrique de la position des aiguilles sur le cadran d'une montre ou d'une horloge, ainsi la pesée numérique qui remplace la pesée géométrique de la balance romaine ou de la balance de Roberval. Ainsi disparaît toute une part d'une culture géométrique "quotidienne", ce qui ne peut être sans influence sur l'enseignement.
> Cependant, à côté de cette dé-géométrisation, la géométrie réapparaît sous une forme plus sophistiquée dans les domaines les plus avancés de la science et de la technique ; on peut citer, d'une part la géométrisation universelle que l'on rencontre dans divers domaines de la science d'aujourd'hui, d'autre part l'importance de la géométrie dans le nouveau domaine des images de synthèse"[30].

C'est pourquoi, en plus des possibilités d'applications pratiques et utilitaires que nous reconnaissons, nous croyons que cette discipline peut particulièrement contribuer à la formation intellectuelle d'un individu.

La géométrie dans l'enseignement

Actuellement, quels sont les objectifs que l'on peut assigner à l'enseignement de la géométrie ? Pourquoi est-il opportun et/ou nécessaire d'enseigner la géométrie ? C'est dans le dessein de répondre à ces questions que, en 1995, la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques (ICME VIII) a ouvert un débat sur les *perspectives de l'enseignement de la géométrie au 21ème siècle*. Il nous a paru intéressant d'examiner le document qui a accompagné le commencement de cette étude, compte tenu du fait que notre travail touche deux pays qui y ont pris part et que cette Commission représente l'harmonisation de plusieurs voix – les didacticiens de divers pays. A l'égard des objectifs envisagés dans ce document, nous lisons :

> "... Lequel des énoncés qui suivent peut être considéré comme l'objectif les plus pertinent de l'enseignement de la géométrie ?
> - Décrire, comprendre et interpréter le monde réel et ses phénomènes
> - Proposer un exemple de théorie axiomatique
> - Fournir une collection riche et variée de problèmes et d'exercices pour le travail personnel des élèves
> - Entraîner les apprenants à faire des estimations, à poser des conjectures, à démontrer et à trouver des exemples et des contre-exemples
> - Servir d'outil dans les autres domaines des mathématiques
> - Enrichir l'image des mathématiques dans le public"[31].

Ici, plusieurs aspects sont pris en compte – dimensions sociale, cognitive, épistémologique, pédagogique – et la référence explicite à une *culture géométrique quotidienne* n'apparaît plus vraiment. Cette discipline est considérée comme une *théorie d'idées et de méthodes avec lesquelles nous pouvons construire et étudier des modèles idéalisés du monde physique aussi bien que d'autres phénomènes du monde réel* mais

---

[30] Bkouche R. (1997), *Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie*, REPERES-IREM, n.26, janvier 1997

[31] Cf. REPERES-IREM, n.18, janvier 1995. Pour plus de détails, cf. Mammana C., Villani V. (1998), ouvrage déjà cité.

aussi comme une *théorie formelle* et comme support propice pour développer des capacités d'organisation rationnelle de la pensée. Cela engendre inévitablement des questions sur les contenus (*qu'enseigner ?*), sur les méthodes (*comment enseigner la géométrie ?*) et, par conséquent, sur la manière dont ces contenus et ces méthodes pourraient évoluer suivant le développement de l'apprenant (*comment faire évoluer les diverses approches ?*). Mais, ces questions peuvent-elles avoir une réponse unique ?

La géométrie en tant que discipline d'enseignement existe depuis longtemps et, dans les divers pays, les variables qui participent à son image présente sont disparates : les divers aspects, les diverses approches et les divers objectifs liés à cette discipline ainsi que la tradition peuvent contribuer d'une manière dissemblable à l'élaboration du savoir qui va vivre dans tel ou tel système scolaire. D'après nous, ces dissemblances sont à prendre en compte pour que l'évolution du débat soit constructive, leur mise en évidence pouvant aider à cerner des problématiques qui, autrement, ne seraient pas observables.
Bien que le savoir géométrique de référence soit le même et qu'un certain nombre de réflexions pédagogiques et d'objectifs soient communs aux deux institutions scolaires ici concernées, les relations existant entre les objets d'enseignement peuvent différer d'un système à l'autre ; ou encore, dans une même institution, un objet peut être transposé de différentes manières selon les lieux.
À travers l'objectivation de ces quelques différences, nous voudrions mener une réflexion plus générale et ainsi offrir notre contribution (modeste) à un débat enclenché il y a longtemps et dont l'aboutissement ne semble pas prochain.

Plus haut, nous avons repéré des éléments concernant la géométrie et son enseignement (signification, objectifs, etc.) et qui sont partagés par un certain nombre d'acteurs de la noosphère (notamment la communauté de didacticiens). Ci-après, nous allons préciser les approches que l'on peut distinguer en fonction de *ce que l'on peut faire de la géométrie* en le reliant aux aspects *cognitif* et *pédagogique*.

Dans l'enseignement de la géométrie, on parle traditionnellement de transition du concret vers l'abstrait en distinguant de manière générale la *géométrie intuitive* de la *géométrie déductive*, l'une relevant du domaine de l'expérience et l'autre du domaine de la rationalité. Dans la géométrie intuitive, liée à l'espace physique, les objets d'étude sont concrets et leurs propriétés sont saisies par le biais de l'expérience tandis que dans la géométrie déductive, liée à l'espace géométrique, ces objets sont idéaux et on parvient à la détermination de leurs propriétés à travers un enchaînement de raisonnements précis et rigoureux.

Pour tenir compte du caractère polysémique du terme "géométrie", nous avons repéré tout terme ou expression révélateurs de ses différentes acceptions en nous persuadant que la distinction entre géométrie

intuitive et déductive semble simpliste et insuffisante car ainsi la démarcation entre intuition et rigueur demeurerait trop catégorique et nette. Si l'on veut "nuancer" les divers stades reconnus dans l'enseignement de cette discipline, l'exigence de préciser le sens attribué à quelques termes liés au vocabulaire géométrique s'impose, cela afin de mieux définir l'acception de ces diverses approches.

Pour ce faire, nous avons puisé dans la littérature spécialisée et, afin de mieux organiser nos questions, nous avons essayé de rapprocher les deux théories développées respectivement par C. Houdement, A. Kuzniak[32] et F. Speranza sur l'organisation de la géométrie dans l'enseignement. La signification de ce rapprochement se dévoilera peu à peu dans les paragraphes qui suivent.

Intuition, expérience, déduction

L'*intuition*, l'*expérience* et la *déduction* représentent une *triade* fondamentale qui caractérise la géométrie dont *le rapport avec la réalité est tout à fait particulier car la réalité non seulement inspire, suggère, pose des problèmes mais elle est elle-même, en partie, objet d'étude*[33]. Ces idées se retrouvent dans les travaux de Houdement-Kuzniak qui, à leur tour, se sont inspirés de F. Gonseth.

L'*intuition* – synonyme du terme *perception* (percevoir, saisir par le sens) – est le premier médiateur entre nous et la réalité ; elle nous permet de *connaître* mais elle pourra être modifiée et "éduquée" par les connaissances à venir. Le passage suivant, tiré d'un ouvrage de F. Gonseth, exprime bien notre idée d'intuition :

> "... il ne s'agit plus de savoir si les notions et les jugements que je viens d'appeler intuitifs ont un sens plein. C'est en quelque sorte leur nature qui est maintenant en question. Je ne puis me le représenter que comme *des ébauches encore en constant état de devenir*... Il n'y a rien de paradoxal, me semble-t-il, dans l'alliance étroite de la plénitude du sens et de l'indétermination actuelle d'un devenir encore ouvert. C'est ainsi que l'on perçoit un objet à distance, que l'on reconnaît une personne dans une caricature (ou même dans un portrait), que l'on retrouve un paysage familier dans un tableau, etc. En un mot : *Pour être effective, la connaissance n'a pas besoin d'être portée à la perfection dans aucune direction*"[34].

D'habitude, l'*expérience* est reliée à l'observation : "faire une expérience" peut signifier "observer dans le but de vérifier des phénomènes" ; elle peut être considérée comme la voie d'accès à la géométrie par le biais de l'action. C'est ainsi que, pour vérifier une propriété d'une figure, on peut agir matériellement sur elle au moyen de manipulations ou d'instruments de mesurage. Néanmoins, l'expérience peut être aussi une "action mentale" : on peut demander simplement d'imaginer des découpages et des déplacements afin

---

[32] Pour une question de simplicité d'écriture, par la suite nous citerons les deux auteurs ainsi "Houdement-Kuzniak", en espérant qu'ils ne nous en veulent pas.

[33] Marchi M. (1995), *Intuizione e rigore in geometria*, Notiziario dell'Unione Matematica Italiana, supplément au n.8-9, août-septembre 1995

[34] Gonseth F. (1936), *Les Mathématiques et la Réalité*, Librairie Scientifique et technique Albert Blanchard

de suggérer des idées.

On peut concevoir la *déduction* non seulement en tant que composante liée à la démonstration mais aussi en tant que développement et organisation rationnels d'informations à partir de connaissances déjà acquises soit à travers les sens soit à travers des observations expérimentales. Reprenons, ci-après, ce qui en disent Houdement-Kuzniak :

> "On peut définir la déduction en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, elle consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences. La déduction permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. Elle permet de réorganiser les apports de l'expérience... Le pôle déductif et logique est certainement le plus naturel quand on pense à la géométrie. Certains ne justifient le maintien de l'enseignement de la géométrie que pour les apports logiques qu'elle est censée apporter. Mais il est important de ne pas réduire ces aspects déductifs à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. L'enfant peut aussi faire des déductions et prouver des affirmations déduites de ses observations et basées sur des constructions..."[35].

Cette position s'approche beaucoup de celle de F. Speranza avec sa définition de *rationnel* :

> "Souvent "géométrie rationnelle" est considérée comme synonyme de "organisation hypothético-déductive". Cependant, toute élaboration de l'expérience est en quelque sorte "rationnelle" : nous pouvons admettre que la rationalité intervient explicitement quand on commence à caractériser, reconnaître des classes remarquables de figures et de transformations (polygones, sphères, isométries,...), et donc à parler de concepts abstraits. Cette phase (qui, répétons-le, doit être précédée d'un travail systématique sur le "concret") commence déjà à l'école primaire ; on l'approfondit à l'école secondaire inférieure et [ensuite] elle peut devenir objet d'une réflexion explicite. Le premier pas *ne* consiste pas [à donner] des définitions précises : celles-ci doivent être à leur tour la conclusion d'une recherche – recherche d'une propriété caractéristique d'une classe d'objets qui sont intuitivement connus. Il ne faut pas oublier que les gens (souvent les mathématiciens aussi) apprennent plus aisément à reconnaître un concept à travers des exemples plutôt que sur la base de définitions mathématiques : cela est d'autant plus vrai pour la géométrie, où les exemples se présentent avec la force de l'image"[36].

Les "paradigmes géométriques"

Dans leurs travaux, Houdement-Kuzniak, en valorisant l'approche épistémologique, proposent *trois synthèses dialectiques de la géométrie* qui résultent d'une adaptation des travaux de F. Gonseth, mathématicien et philosophe des sciences qui intègre ses études sur la géométrie dans un discours plus étendu de réflexion sur la démarche scientifique.

Avec leurs trois synthèses, ils cherchent à réconcilier les ruptures qui communément distinguent l'évolution de la géométrie dans l'enseignement ; ils adoptent une vision unificatrice grâce à *une idée de synthèse dialectique évolutive entre trois modes de connaissance identiques – intuition, expérience, déduction – mais qui évoluent dans le temps.*

> "*La géométrie naturelle ou la confusion entre la géométrie et la réalité.* La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le sensible. Elle comprend les trois aspects, intuition, expérience, déduction, mais la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. En ce

[35] cf. Houdement C., Kuzniak A. (1999), *Géométrie et paradigmes géométriques*, Petit x, n.51

[36] cf. Speranza F. (1989), *La razionalizzazione della geometria*, Periodico di Matematiche, n.1

sens la géométrie d'Euclide n'est pas naturelle ; il s'agit plutôt de celle de Clairaut (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où on ne doit pas encombrer l'esprit en démontrant des choses évidentes... la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est le raisonnement de type constructif qui est fréquent dans la résolution de problèmes...

La géométrie axiomatique naturelle ou la géométrie comme schéma de la réalité. Dans la synthèse axiomatique euclidienne, les aspects "non rigoureux" et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus précis possible... L'axiomatisation est certes une formalisation, mais elle n'est pas nécessairement formelle ; la syntaxe n'est pas nécessairement coupée de la sémantique. La deuxième synthèse dialectique propose une géométrie qui n'est pas réduite au naturel, mais qui conjugue les notions d'horizon de la réalité, de schéma et de modèle. Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité. La géométrie euclidienne classique est basée sur ce pas de côté, mais l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite...

La géométrie axiomatique formaliste ou l'indépendance de la géométrie et de la réalité. Cette fois, à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose... Dans l'enseignement cette conception a permis d'introduire une géométrie élémentaire basée sur l'algèbre linéaire dont l'espace sous-jacent est l'espace R^3 muni d'un produit scalaire..."[37].

Dans le cadre de leur étude, qui intéresse *des enseignants apprenant des mathématiques pour les enseigner ensuite à des élèves,* Houdement-Kuzniak – formateurs d'instituteurs – privilégient les approches épistémologiques car ils reconnaissent que celles-ci *valorisent la relation entre le sujet et l'objet de connaissances*. Leurs trois synthèses dialectiques représentent un chemin possible permettant *d'articuler de manière cohérente la progression globale de l'enseignement de la géométrie.* Leur propos est d'offrir aux futurs enseignants une source de clarification qui *doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de cette discipline et de la comparer avec le paradigme géométrique dans lequel leurs élèves doivent évoluer.*

L'"Organizzazione della Geometria"

Dans les travaux de Speranza, les approches cognitive et épistémologique s'associent : l'auteur propose une étude sur l'évolution de l'enseignement de la géométrie en considérant, à la fois, le développement de l'intelligence ainsi que le développement de cette discipline en tant que champ du savoir scientifique.

En s'inspirant de la théorie piagétienne, il considère les quatre stades du développement cognitif de l'enfant[38] :

- le *stade sensori-moteur*, qui concerne le déplacement du corps et des objets dans l'espace ;
- le *stade préopératoire*, qui désigne une phase durant laquelle l'enfant ne maîtrise pas certaines opérations logiques, telles que la conservation ou la réversibilité ;
- le *stade des opérations concrètes* durant lequel l'enfant est capable de résoudre des problèmes portant sur des réalités physiques ;

[37] cf. Houdement C., Kuzniak A. (1999), ouvrage déjà cité

[38] cf. Speranza (1988), *Salviamo la geometria*, La Matematica e la sua didattica, n.2

- le *stade des opérations formelles* durant lequel l'enfant est capable d'émettre une hypothèse abstraite, puis de se lancer dans une expérimentation pour en vérifier la validité et enfin tire des conclusions de son observation.

Conjointement, il identifie six *sources traditionnelles d'inspiration* qui, d'après lui, ont contribué davantage à l'évolution du savoir géométrique au cours des siècles et notamment :

a) la *tradition artisanale et artistique* qui souligne l'importance du lien entre géométrie et art : le "savoir-faire" géométrique implicite dans la construction des Pyramides, dans l'architecture grecque, dans l'ingénierie romaine, dans la construction des cathédrales byzantines, gothiques, la peinture du 13ème siècle... ;
b) la *tradition égyptienne et babylonienne* écrite qui propose calculs d'aires et de volumes et qui résulte de questions pratiques et utilitaires ;
c) la *tradition critique* qui s'interroge sur le savoir pour, éventuellement, le mettre en crise. Il suffit, ici, de penser à la découverte des incommensurables, aux questions sur l'infini, au postulat des parallèles, etc. ; souvent, la tradition critique oblige à passer sur un plan méta-théorique ;
d) la *tradition euclidienne* qui valorise l'organisation, qu'on voudrait définitive, du savoir ;
e) la *tradition cartésienne* qui conduit à interpréter la géométrie en terme algébriques ;
f) la *tradition astronomique et physique* où le savoir géométrique se met au service des sciences de la nature aussi bien pour des applications que pour des découvertes ultérieures.

Quant à sa vision du développement de la géométrie en tant que discipline d'enseignement, nous avons synthétisé le discours de Speranza en parvenant à l'identification de trois *cycles* principaux[39] :

1) La première approche de la géométrie est d'ordre physique : la capacité d'interagir avec la réalité spatiale se développe et les premières images mentales se forment. Dès ce cycle, il faut accorder autant d'importance au *savoir-faire* et au *savoir-parler* car ces deux *savoirs* tirent parti d'une interaction réciproque ; les activités de latéralisation permettent de commencer à raisonner en terme d'*invariants* et de *propriétés indépendantes de l'observateur* ; la découverte de symétries permet un accès naïf aux transformations géométriques. En tout cela c'est la tradition artisanale et artistique qui intervient. En outre, la découverte des principes de conservation – fondamentale aussi pour les sciences expérimentales – fait intervenir aussi la tradition astronomique et physique.
2) Durant le deuxième cycle, la tradition critique fait sa première apparition. L'activité d'organisation de la géométrie en termes rationnels commence : les objets de la géométrie sont regroupés selon leurs caractéristiques communes en classes à chacune desquelles correspond un concept collectif et,

[39] Ici, nos ouvrages de référence principaux sont Speranza (1988), *Salviamo la geometria*, La Matematica e la sua didattica, n.2, Speranza (1989), *La razionalizzazione della geometria*, Periodico di Matematiche, n.1

éventuellement, un nom commun ("cercle", "triangle", "prisme",...) ou bien une expression linguistique qui a fonction de nom commun ("triangle équilatéral",...). Peu à peu, d'autres processus d'abstraction conduisent aux concepts de relation ("être parallèle à", "être perpendiculaire à",...) et de transformation géométrique. Dans une première phase, pour reconnaître si une figure appartient à une classe donnée, on n'a pas besoin d'apprendre sa définition formelle ; ce sont les cas ambigus qui motiveront l'exigence de caractérisations précises et non surabondantes. Ici, le recours aux objets concrets demeurant encore fondamental, les propriétés des figures sont à vérifier par les biais de l'expérience ; seulement plus tard, on commencera à justifier ces propriétés à travers des raisonnements déductifs simples et c'est alors que la tradition critique interviendra. L'étude des grandeurs et de leurs mesures s'inspire de la tradition astronomique et physique ; selon l'auteur, un champ d'application de cette tradition est offert par l'étude des phénomènes célestes ; abordé d'une manière rudimentaire et concrète, cela permettrait d'introduire un système qui présente beaucoup d'analogies mais aussi beaucoup de différences avec la géométrie euclidienne.

3) La formation de réseaux de raisonnement de plus en plus étendus fait surgir l'exigence de les organiser dans un système axiomatique unique. En ce sens là, la construction euclidienne représente un passage historiquement important : bien qu'elle soit organisée indépendamment de l'expérience, la nature des objets dont elle s'occupe est encore assurée ; en revanche, ici, la théorie mathématique et le modèle spatial sont développés conjointement tandis qu'aujourd'hui, dans une théorie axiomatisée, la distinction entre les aspects *syntactiques* (les démonstrations formelles) et *sémantiques* (l'investigation des modèles) apparaît essentielle. C'est durant ce cycle que la tradition critique intervient avec beaucoup de prégnance : la scène est prête pour une interprétation formelle de la géométrie et cela peut s'accomplir selon des approches différentes qui, d'après l'auteur, devraient être combinés afin d'ouvrir un chemin à des réflexions critiques sur les théories géométriques. Notamment, l'auteur distingue :

- l'approche *axiomatique*, où la théorie devient un *jeu* hypothético-déductif qui se prête à diverses interprétations ; cependant, afin de donner une valeur critique effective à cette approche, il conviendrait de se limiter à quelques parties significatives (la géométrie affine, par exemple) car, en ce sens-là, un développement exhaustif de la géométrie euclidienne apparaît assez complexe ; ici, c'est la tradition euclidienne qui prédomine ;
- l'approche *algébrique*, où c'est la tradition cartésienne qui intervient, les propriétés géométriques se transforment en théorèmes de l'algèbre ;
- l'approche *"comparative"*, où on peut étudier les diverses géométries (métrique, affine,...) selon le modèle proposé par F. Klein.

En rapprochant les synthèses de Houdement-Kuzniak et les cycles de Speranza, nous reconnaissons des similitudes notables : en excluant le *premier cycle*, qui concerne plutôt l'âge pré-scolaire et qui correspondrait à un niveau préalable aux trois *paradigmes*, il nous semble que le premier paradigme de Houdement-Kuzniak et le *deuxième cycle* de Speranza se rejoignent tandis que les deux autres paradigmes comprennent le *troisième* cycle – approche algébrique et approche axiomatique. Cependant, nous tenons à souligner que ces deux cadres théoriques naissent de nécessités distinctes.

L'étude de Houdement-Kuzniak prend en compte les caractères d'une réalité bien précise – l'enseignement de la géométrie au sein de l'institution scolaire française – dans le dessein d'approfondir la problématique qui existe autour d'elle : l'exigence d'une approche épistémologique semble naître du fait que, dans l'institution française, l'aspect pédagogique a pris le pas sur le savoir. Cette étude s'inspirer des écrits du mathématicien et philosophe des sciences F. Gonseth.

Speranza – professeur d'université en Italie – s'est occupé, pendant plus de trente ans, de problèmes didactiques en contribuant notablement au débat sur l'enseignement de la géométrie dans le secondaire. Avec ses travaux, il a essayé de *retrouver un rôle pour la géométrie dans l'école d'aujourd'hui*, persuadé que de telles méditations sont indispensables puisque l'enseignement italien actuel se heurte au *paradoxe d'une présence significative de la géométrie dans les programmes officiels tandis que, paraît-il, elle est fortement réduite dans les pratiques des enseignants*. C'est pourquoi, dans ses discours – en se référant aux théories développées par le psychologue J. Piaget – il met l'accent sur l'aspect cognitif.

Nous constatons donc que, bien que les travaux de ces didacticiens affirment le besoin d'élucider quelques points d'une problématique concernant la même matière d'enseignement, ils adoptent deux approches différentes dans la perspective de pallier la faiblesse des réflexions respectives sur l'aspect épistémologique dans l'enseignement français et sur l'aspect pédagogique dans l'enseignement italien. Cette double approche est à la base de nos réflexions et nous y reviendrons par la suite, notre intention étant – entre autres – celle d'objectiver les différences essentielles qui distinguent les deux systèmes scolaires concernés.

Les "attitudes" face à la géométrie

Nous avons tiré parti des travaux exposés ci-dessus et nous avons réorganisé les diverses approches de la géométrie dans l'enseignement secondaire pour les adapter au cadre de notre recherche. Étant donné que nous nous intéressons à l'organisation du savoir géométrique dans l'enseignement secondaire et à la façon dont il évolue au fil des années scolaires concernées, nous distinguons, dans le développement des connaissances géométriques, trois *attitudes* principales. Elles décrivent non seulement l'**activité de l'élève** mais aussi **ce que l'on attend de lui.**

- ***L'attitude de l'intuition rationnelle.*** L'élève est déjà en possession d'un certain nombre de connaissances issues de l'expérience. On l'aide alors à élaborer ces observations : il enrichit son vocabulaire, il apprend à classer les objets géométriques, à les mettre en relation, à les mesurer. Le processus de modélisation commence mais cela ne signifie pas que les objets doivent être définis d'une façon formelle : le recours à l'intuition et à l'expérience joue encore un rôle considérable ; la déduction est présente en tant qu'organisation de celles-ci.

  Considérons, par exemple, la propriété des triangles isocèles d'avoir les angles à la base égaux. Au cours de la période de développement de cette attitude, on peut mettre l'élève dans la condition de découvrir cette propriété et on l'autorise – dans un premier temps – à la valider expérimentalement à partir d'un objet physique particulier (la maquette, le dessin…), en recourant au pliage, à un gabarit ou à un rapporteur. Les notions sous-jacentes (telles que la *symétrie axiale* ou la *congruence de triangles*) seront abordées *naïvement* et permettent de se détacher petit à petit de l'objet sensible. Cette situation, parmi d'autres, permettra aussi de préciser le vocabulaire et d'en souligner l'importance et la nécessité dans l'activité mathématique.

- ***L'attitude rationnelle.*** Un réseau de plus en plus important de concepts se développe et l'exigence d'une organisation autonome et générale – qui s'éloigne de l'espace physique pour se rapprocher de l'espace géométrique – surgit. L'élève se familiarise avec le raisonnement déductif (déduction en tant que composante liée à la *démonstration*) et se parfait progressivement ; l'intuition peut aider à ne pas perdre de vue les points de départ et les objectifs tandis que l'expérience peut jouer le rôle d'action mentale.

  En reprenant l'exemple précédent, lors du développement de cette attitude, on ne se contente plus du pliage comme moyen de validation (quitte à y avoir recours en tant qu'action mentale – déplacements, superpositions, etc.) mais on sollicite une preuve de caractère générique où l'imprécision d'une maquette ou d'un dessin n'intervienne plus. Les procédures de démonstration pour aboutir vont dépendre des outils dont l'élève dispose mais ce qui importe ici est de préciser le point de départ de manière à garder la cohérence d'une axiomatique qui, pourtant demeure *implicite*. La propriété des triangles isocèles offre l'occasion de montrer que les changements du point de départ – est-ce qu'on a déjà introduit la notion de bissectrice ? Ou la symétrie axiale ? – engendrent des enchaînements déductifs différents.

- ***L'attitude formelle.*** Tout ce que l'élève a appris devient objet de réflexion et, dès lors, l'organisation axiomatique de la géométrie est la matière à étudier ; l'exigence d'un langage formel acquiert enfin

une signification majeure. L'attitude précédente a été nécessaire pour que l'élève apprenne les mécanismes et les techniques du raisonnement déductif, pour qu'il se familiarise avec la méthode hypothético-déductive sans le souci de construire un système axiomatique exhaustif. C'est maintenant qu'il peut apprécier la géométrie élémentaire en tant que modèle d'un système formel et l'étudier dans sa globalité.

L'harmonisation de ces trois attitudes doit tenir compte du développement génétique (ou mathématique) de l'individu. Le passage de l'attitude de l'intuition rationnelle à l'attitude rationnelle ne peut alors se faire que par une longue dialectique : chaque activité mathématique étant l'occasion de plusieurs aller-retour d'une attitude à l'autre, ceci doit se faire d'une manière naturelle, les éléments rationnels introduits le sont pour prendre en compte les éléments correspondants de l'intuition rationnelle mais pas du tout pour des raisons formelles. Le recours au concret n'est pas du tout impossible dans l'organisation rationnelle mais une acquisition inadéquate de celle-ci peut compromettre et faire obstacle à l'organisation formelle. De même, l'entrée dans l'organisation formelle nécessite un entraînement graduel et constant au processus d'abstraction (de modélisation) et une introduction prématurée peut demeurer vide de sens.

Dans nos discours, nous nous intéressons prioritairement à l'enseignement de la géométrie euclidienne. En distinguant les diverses *attitudes*, nous n'envisageons pas celle concernant l'approche algébrique : dans notre vision, celle-ci représente en quelque sorte un *changement de cadre*, un lieu où la géométrie se prête à des interprétations nouvelles et fonctionne en support pour faire évoluer certaines connaissances. En ce sens-là, cette approche peut être abordée dès les premières classes du secondaire avec l'introduction de la méthode des coordonnées et se poursuivre avec le développement de la géométrie analytique et ensuite l'algébrisation de la géométrie. Dans nos analyses, le cas échéant, nous en tiendrons compte seulement d'une manière transversale lorsque nous irons aborder le discours sur les relations existant entre les objets du savoir géométrique au sein des deux institutions concernées.

Dans l'enseignement, l'organisation de la géométrie peut se faire selon des approches et des méthodes différentes. Dans les deux institutions, nous voudrions étudier les démarches suivies pour coordonner les trois *attitudes* afin d'en analyser les effets productibles et/ou produits : **y a-t-il rupture ? Une attitude est-elle privilégiée sur les autres ? Y a-t-il des superpositions de deux de ces attitudes ? A quel moment interviennent-elles ?**

III.2 La preuve

Ce qui caractérise et édifie les *attitudes* face à la géométrie est la nature des activités qui les accompagnent ainsi que l'institutionnalisation de certaines *règles*. Au cours du développement de l'*attitude de l'intuition rationnelle*, pour valider un énoncé, le recours à l'action demeure encore fondamental ; pour le développement de l'*attitude rationnelle*, par contre, on exigera l'explicitation des raisons qui permettent d'établir la vérité ou la fausseté de cet énoncé et, pour ce faire, il faudra se servir d'une *théorie*, d'un ensemble de propriétés et définitions construites suivant des règles logiques et rigoureuses. C'est lorsqu'on développe l'*attitude formelle* que la construction logique de cette théorie est explicitée et qu'elle devient objet d'étude. Nous constatons alors que la transition d'une *attitude* vers l'autre engendre un changement de statut de l'activité mathématique et requiert un changement de rôle de la part de l'apprenant.
Pour mieux éclaircir cet aspect, nous avons donc eu recours à la théorie développée par N. Balacheff à propos du *processus de preuve et des situations de validation*, en l'adaptant à nos propos d'analyse des manuels scolaires ainsi que des productions écrites d'élèves, comme nous le verrons dans le chapitre 4 et suivants.

Explication, preuve, démonstration

Dans l'enseignement des mathématiques, lorsqu'on aborde le chapitre concernant la géométrie, la question de l'enseignement et de l'apprentissage de la *démonstration* acquiert – à tort ou à raison – une importance majeure. Or, comme Balacheff le souligne bien, *il est nécessaire que nous clarifiions quelques points du vocabulaire* afin de nuancer les diverses acceptions de verbes tels que *expliquer*, *prouver*, *vérifier*, communément employés en tant que synonymes de *démontrer*. Nous retenons donc les définitions des termes **explication**, **preuve**, **démonstration** et **raisonnement** telles qu'elles sont proposées par Balacheff :

> "... Nous appelons **explication** un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis par le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat. Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées.
> Nous appelons **preuve** une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.
> Au sein de la communauté mathématique ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons **démonstrations** ces preuves.
> Nous réservons le mot **raisonnement** pour désigner l'activité intellectuelle, la plupart du temps non explicite, de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.
> Ces distinctions de vocabulaire mettent en relief les dimensions sociales de la démonstration en tant que résultat d'un processus particulier de preuve.
> ... l'étude des processus de preuve doit être conduite en référence *à la fois* à celui qui les met en œuvre en tant que

sujet connaissant et à la *situation* dans laquelle il les met en œuvre..."[40].

Preuves pragmatiques et preuves intellectuelles

Dans la transition d'une *attitude* vers l'autre, le changement de statut de l'activité mathématique engendre une évolution dans le rôle de l'apprenant :

> "... de lieu du *tracé précis des figures* la géométrie devient le lieu de *l'étude des figures*... D'**élève-praticien** tout orienté vers la maîtrise d'un *savoir-faire*, on passe à l'**élève-théoricien** dont la justification de l'activité est celle de *connaître*. C'est au nom de la connaissance que l'évidence est à rejeter pour fonder une vérité et non au nom de la pratique. Il faut passer d'un lieu où le critère est celui de l'**efficacité**, à un autre où le critère est celui de la **rigueur** : la rigueur comme fin en soi est étrangère à la pratique, c'est une préoccupation de savant..."[41].

Balacheff distingue alors deux *types de preuves*, l'une ancrée dans l'action, l'efficacité et l'autre dans le discours, la théorie : le passage de l'une vers l'autre repose sur trois pôles qui interagissent fortement – le pôle des connaissances, le pôle langagier et le pôle de la validation.

Les **preuves pragmatiques** recourent à l'action effective ou à l'ostension. Elles sont produites pour établir la vérité d'une proposition à travers la réalisation matérielle d'une décision ou celle du contenu d'une affirmation :

> "... la preuve pragmatique est hypothéquée par la singularité de l'événement qui la constitue. Elle est, de plus, tributaire d'un contingent matériel : outils imprécis, défaut de fonctionnement..."[42].

Les **preuves intellectuelles** se détachent de l'action et reposent sur la prise de conscience du caractère générique des situations envisagées :

> "... Ce détachement du pragmatique ne va pas de soi : la pratique interdite peut être évoquée et le discours rester très près de ce que le locuteur a vécu. Il s'exprimera dans le **langage de la familiarité**... L'action explicitée par ce langage porte la marque du temps et de la durée, la marque de celui qui agit et du contexte de son action. Néanmoins ce langage exige déjà un pas de côté pour que l'action puisse être décrite et expliquée, et donc prennent place ici les premiers moments d'une construction cognitive... Le développement sur le terrain des preuves intellectuelles exige un changement de position, le locuteur doit prendre de la distance par rapport à l'action et au processus effectif de résolution du problème (rappelons que les élèves à qui on pose la question du pourquoi y répondent souvent en réitérant les opérations qu'ils ont réalisées pour résoudre le problème). La connaissance, jusque-là agie, devient objet de réflexion, de discours, voire de débats. Le langage de la familiarité, dont le support essentiel est la langue naturelle, permet une évolution dans cette direction. Mais il faut plus que cela pour élaborer des preuves "formelles", voire des démonstrations. Le langage doit devenir un outil pour le calcul logique et plus seulement un moyen de communication. L'élaboration de ce langage fonctionnel requiert en particulier une **décontextualisation**, ...une **dépersonnalisation**,... une **détemporalisation**... L'élaboration de démonstrations requiert de plus un statut particulier des connaissances. Elles doivent être constituées en une véritable théorie qui doit être reconnue comme telle, c'est-à-dire acceptée par une communauté qui ne s'autorise plus à aller chercher où elle veut les arguments qu'elle utilise..."[43].

---

[40] Balacheff N. (1987), *Processus de preuve et situations de validation*, Educational Studies en Mathematics, n.18

[41] Balacheff N. (1987), ouvrage déjà cité

[42] Balacheff N. (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*, Thèse d'État, Université Joseph Fourier, Institut National Polytechnique, Grenoble

[43] Balacheff N. (1988), ouvrage déjà cité

Les types de preuves

Nous reconnaissons alors qu'à la transition de l'*attitude de l'intuition rationnelle* vers l'*attitude rationnelle* correspond une évolution des *preuves pragmatiques* vers les *preuves intellectuelles* : le caractère du langage change ainsi que le statut et la nature des connaissances ; dans ces preuves, nous constatons aussi un changement de signification de l'expérience et de la rationalité au sens que nous avons précisé plus haut.

Cependant, pour nuancer cette évolution, Balacheff a identifié quelques sous-types de preuves que l'on peut reconnaître dans la genèse cognitive de la démonstration : l'**empirisme naïf**, l'**expérience cruciale**, l'**exemple générique**, l'**expérience mentale**, le **calcul sur les énoncés**. Chaque type de preuve dépend intimement de la lecture que le sujet fait de la situation dans laquelle il est, de l'*auditoire* qu'il veut (doit) convaincre, du niveau de conceptualisation auquel est parvenu le sujet par rapport aux notions mises en jeu dans le problème ; un même sujet peut produire des preuves différentes suivant les concepts mis en jeu dans la situation et suivant la nature du problème proposé.

L'**empirisme naïf** conduit à garantir la vérité d'un énoncé à travers l'observation ou la vérification sur quelques exemples. Les sources de ce type de preuve relèvent soit de l'évidence des faits – et alors l'observation suffit pour assurer l'exactitude de l'énoncé – soit de l'évidence de raison – et alors la conviction en la validité d'une assertion n'amène pas à l'explicitation des conceptions sur lesquelles la preuve est fondée.

Un exemple de preuve pragmatique qui relève de l'empirisme naïf consiste à vérifier à travers le pliage que, dans un triangle, les médiatrices des côtés se rencontrent en un point.

Dans la période de développement de l'*attitude de l'intuition rationnelle*, nous ne trouvons pas déqualifiant le recours à ce type de preuve ; au contraire, cela pourrait être le point de départ pour dégager un débat sur la nécessité de validation d'un énoncé et de sa fiabilité. Cependant, ce sera interprété comme une forme de résistance de l'apprenant à la généralisation dans le cas où ce type de preuve persisterait dans la phase de développement de l'*attitude rationnelle*.

L'**expérience cruciale** est un procédé de validation qui conduit à vérifier la validité d'un énoncé à travers la réalisation d'un cas *aussi peu particulier que possible*. Ici, le problème de la généralisation est explicitement posé. En géométrie, des preuves qui portent la marque de l'expérience cruciale pourraient être celles qui, pour (se) convaincre de la validité d'un énoncé, amènent à tracer des figures *pathologiques*.

L'**exemple générique** est un procédé consistant en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet considéré en tant que représentant d'un ensemble d'objets : bien que la formulation – dont l'ostension est le moyen privilégié – renvoie aux

propriétés caractéristiques de cet ensemble, elle est encore reliée au nom propre et à l'exhibition de ce représentant. Cependant Balacheff précise :

> "... Les preuves reposant sur un exemple générique constituent un stade intermédiaire dans la mesure où la décision sur le caractère générique de l'exemple ne peut être prise qu'en connaissant l'usage qui en est fait : ou bien cet exemple est le lieu de réalisation des opérations effectives qui assurent la validité d'un énoncé, il est le moyen de les montrer, et alors nous le considérons du côté des preuves pragmatiques ; ou bien il fournit au locuteur un moyen pour exprimer sa preuve et alors nous le considérons du côté des preuves intellectuelles..."[44].

Dans la structure des preuves chez Euclide, on constate qu'il y a toujours une partie (*ecthèse*) où le résultat à prouver est contextualisé et la preuve se déroule sur un cas particulier, celui envisagé dans le tracé (*diagramme*). On pourrait alors reconnaître ici la marque d'un exemple générique à la suite duquel l'auteur conclut à la véracité du résultat général[45].

L'**expérience mentale** est un procédé qui marque véritablement le passage d'une preuve pragmatique à une preuve intellectuelle : ici l'action n'est plus effective mais intériorisée, invoquée dans le discours, se détachant de sa réalisation sur un représentant particulier : ici l'explication des raisons avancées pour établir la vérité d'un énoncé, repose sur l'analyse des propriétés – formulées dans leur généralité – de l'objet concerné. Les critères de congruence des triangles, tels qu'ils sont prouvés dans les *Éléments*, représentent un exemple remarquable de preuves qui relèvent de l'expérience mentale. Plus généralement, dans ce type de preuve, les opérations à réaliser par la pensée n'ont pas de statut mathématique.

Le **calcul sur les énoncés** désigne une preuve qui ne doit rien à l'expérience et qui apparaît comme le résultat d'un calcul inférentiel sur des énoncés ; elle va au-delà de l'expérience cruciale qu'on ne peut pas reconnaître en tant que démonstration :

> "... Les élèves ne font appel ni à des exemples, ni à des constats sur la figure, ni à des expériences mentales, ils effectuent un raisonnement ("calcul") à partir de propriétés ("énoncés") pas toujours très explicites et surtout pas toujours vraies. Ces preuves ne sont pas des démonstrations, soit parce que le raisonnement est faux, soit parce que les propriétés sont fausses.
> C'est certainement le type de preuves que nous avons rencontré le plus souvent et ce, tant au niveau des problèmes numériques que des problèmes géométriques... Voici un exemple [de production d'élève] concernant le problème de la somme des angles d'un triangle : "*La somme des angles d'un triangle est égale à 180° parce qu'un triangle équilatéral a ses trois côtés* [sic] *égaux car chacun fait 60° donc le maximum est de 180° (60 x 3)*"..."[46].

En parcourant les diverses étapes de l'histoire des mathématiques elles-mêmes, on constate qu'elle nous offre des exemples hétérogènes sur le fonctionnement de la preuve en géométrie, la signification des objets mis en jeu et le style variant d'un auteur à l'autre, d'une époque à l'autre[47]. C'est notamment à l'époque grecque qu'on assiste à la conversion du rôle du géomètre qui, de praticien qu'il était, devient théoricien.

---

[44] Balacheff N. (1988), ouvrage déjà cité

[45] Arsac G. (1999), *Variations et variables de la démonstration géométrique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19, n.3. Nous reviendrons sur ce type de preuve dans le chapitre 5 en expliquant les raison qui nous ont conduite à préciser la défintion d'*exemple générique*.

[46] Arsac G. et alii (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presse Universitaire de Lyon, I.R.E.M.

[47] cf. Arsac G. (1999), ouvrage déjà cité.

D'une manière semblable, ce phénomène se manifeste dans l'enseignement de la géométrie, l'un de ses objectifs étant en plus celui de favoriser la négociation du passage d'une *attitude* à l'autre ; ces *attitudes* se caractérisent à travers les types d'activités qui les accompagnent et notamment par les types de preuves qu'on exhibe dans des situations d'enseignement et qu'on exige lors de la résolution d'un problème. Pour rendre plus exhaustive la comparaison des démarches suivies dans les deux institutions concernées, pour coordonner les trois *attitudes*, il faut examiner non seulement la manière dont les contenus se présentent mais aussi la nature des activités qui les accompagnent. Pour ce faire, nous révisons la théorie développée par Balacheff en l'adaptant à nos analyses et en nous posant les questions suivantes : **quelles méthodes sont proposées dans les divers manuels scolaires pour inciter l'enseignant à favoriser la transition d'une preuve pragmatique à une preuve intellectuelle ? De quelle façon l'élève est-il sollicité afin d'apprendre certaines règles nécessaires pour accomplir cette transition ?**

III.3 L'approche anthropologique : la transposition didactique

Si l'on situe ce travail dans le cadre de la théorie développée par Y. Chevallard[48], on dira que l'objectif est d'analyser les processus de transposition didactique qui ont lieu dans deux institutions différentes – les institutions française et italienne – et d'évaluer leur rapport au savoir géométrique.

Nous noterons G = "Géométrie" le savoir de référence et IF et II les deux institutions en question, notamment :

IF = "enseignement de GF à des élèves de 11 à 16 ans, en France"

II = "enseignement de GI à des élèves de 11 à 16 ans, en Italie",

où GF et GI désignent respectivement le savoir reconnu par IF et II et pour lesquels des *rapports institutionnels* RI(IF,GF) et RI(II,GI) existent.

Manifestement, IF et II engagent la prise en compte d'autres éléments de l'environnement (système scolaire et son fonctionnement, etc.).

GF et GI sont découpés en *objets* O^{GF} et O^{GI}, articulés en deux *textes du savoir* T_{GF} et T_{GI}, et pour chacun d'eux existe un rapport institutionnel qui exprime *ce qui se fait* dans l'institution avec ces objets et comment ils y sont mis en jeu. Notre intérêt est centré donc sur T_{GF} et sur T_{GI} – le choix des différents découpages et articulations qui ont été effectués au sein de IF et II – et, en outre, sur les principes

[48] Chevallard Y. (1989), *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel* (Grenoble, Séminaire de Didactique des Mathématique et de l'Informatique...), Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Chevallard Y. (1992), *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, RDM, vol.12/1.

pédagogiques et/ou culturels qui ont donné naissance à ces textes du savoir.

Or, un problème se pose, à savoir quels sont les objets communs et les objets reconnus dans une institution et non pas dans l'autre et quels sont les rapports institutionnels à ces objets. Notamment, **les objets de savoir communs à T_{GF} et à T_{GI}, deviennent-ils les mêmes objets d'enseignement ?** C'est pourquoi nous sommes intéressée aussi à une analyse de l'*écologie institutionnelle de* GF et GI afin d'établir les *habitats* et les *niches écologiques*[49] de quelques-uns des objets qui vivent dans IF et II, cela dans le but de mieux comprendre la cohérence de l'organisation interne de l'enseignement de la géométrie et, par conséquent, les objectifs visés dans les deux institutions concernées.

IF et II sont peuplées d'un certain nombre d'individus (acteurs) qui diffèrent selon la position qu'ils y occupent. Pour une institution donnée, à chacune de ces positions correspond un rapport institutionnel à l'objet O, $R_{X,x}$ (O), qui exprime ce que l'on fait ou ce que l'on est censé faire avec O quand on occupe la position x au sein de l'institution X. Nous distinguons particulièrement :

$R_{IF,N}(O^{GF})$	$R_{II,N}(O^{GI})$	*Rapport institutionnel de ceux qui participent à l'élaboration du texte du savoir qui va vivre dans les institutions IF et II (*Noosphère*)*
$R_{IF,P}(O^{GF})$	$R_{II,P}(O^{GI})$	*Rapport institutionnel de ceux qui professent le texte du savoir (*Professeur*)*
$R_{IF,E}(O^{GF})$	$R_{II,E}(O^{GI})$	*Rapport institutionnel de ceux qui reçoivent le texte du savoir (*Élève*)*

Évidemment, chacun de ces acteurs entretient un rapport différent avec le savoir. Pour N, ce rapport aura pour contenu une problématique d'élaboration de T_G ; pour P et E, il s'agira d'un rapport d'utilisation, ayant pour contenu respectivement une problématique d'enseignement (*savoir à enseigner*) pour P et d'apprentissage (*savoir à acquérir*) pour E. Pourtant le rapport de N *peut* influencer le rapport de P et de E tandis que le rapport de P *peut* influencer le rapport de E. Pour cela, il vaudra mieux introduire aussi la notion de *rapport personnel* (indiqué, par la suite, par $R_X(O^{GF})$) :

> "... Un individu X ne peut avoir, à un objet de savoir donné, O^S, qu'un rapport personnel, lequel est un émergent d'un système de relations institutionnelles (telle que la relation didactique), relations ternaires où l'individu X entre avec l'objet de savoir O^S et un ou des agents de l'institution I.
> De ce rapport personnel relève notamment tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire – en termes de savoir, de savoir-faire, de conceptions, de compétences, de maîtrise, d'images mentales, de représentations, d'attitudes, de fantasmes, etc. – de X à propos de O^S..."[50].

---

[49] "... l'analyse de l'écologie institutionnelle du savoir S conduit à établir, étant donné un objet O^S, ce que sont ses habitats, soit les endroit où on le trouve, et les objets $O^{S'}$ avec lesquels il y entre en association : et ce qu'est, en chacun de ses habitats, sa niche écologique, soit ce que sont l'ensemble des interrelations que l'objet O^S considéré y entretient avec les objets $O^{S'}$, ainsi que la structure et les fonctions de ces interrelations..." (Chevallard Y., 1989, ouvrage déjà cité)

[50] Chevallard Y. (1989), ouvrage déjà cité

L'élaboration et les "artisans" (du texte) du savoir à enseigner

La première étape du processus de transposition didactique naît de la conjugaison d'un *savoir social* et *culturel* – qui se transforme au fur et à mesure par suite d'inévitables innovations qui ont lieu dans une société – et d'un savoir de référence, le *savoir savant* – élaboré dans une institution de production du savoir mathématique. Les effets de cette conjugaison produisent le *savoir à enseigner* qui, en conséquence, donne naissance aux objets d'enseignement, articulés dans le texte du savoir en question.

Les objets d'enseignement se forment à partir de choix relatifs aux *objectifs*, aux *contenus* et aux *méthodes* et ils évoluent aussi bien dans le temps interne t_I de l'institution (le *temps institutionnel*) que dans le temps externe T (le *temps de la société*). Qui est censé opérer ces choix et sous quelle forme ? Il s'agit d'un ensemble de forces qui agissent au sein d'un système social d'éducation : des commissions de réflexion – chercheurs, enseignants, etc. (*noosphère*) – sont chargées par le Ministère de L'Éducation Nationale d'élaborer le *canevas* du texte du savoir qui va vivre dans l'institution. Elles prennent en considération les multiples facteurs qui peuvent influencer le savoir à définir : exigences sociales et culturelles, avancées technologiques, innovations pédagogiques et didactiques. Évidemment, ces facteurs sont variables. A un moment donné, des exigences réelles et effectives demandent des changements et des mises à jour. Si ceux-ci sont en nombre considérable, alors un complexe (et parfois lent !) processus de réflexion est mis en place pour aboutir enfin à une *réforme*.

La *tradition*, elle aussi, peut jouer un rôle décisif : un objet, qui est l'apanage du patrimoine culturel d'une société, peut bien devenir et demeurer pour longtemps – à tort ou à raison – un objet d'enseignement. Par la suite, le même objet, bien enraciné, pourrait fonctionner comme obstacle à l'introduction de nouveaux objets. Un exemple significatif est le cas des *transformations géométriques* dans l'institution italienne : bien que cet objet soit présent dans les programmes du secondaire inférieur depuis une vingtaine d'années, la plupart des enseignants ne le considèrent pas en tant qu'objet d'enseignement, les *critères de congruence* et de *similitude des triangles* étant des objets bien plus commodes et intégrés avec l'ensemble des objets qui constituent le texte du savoir à enseigner !
En terme de temps T, on pourrait parler d'*immobilité* (*stagnation*) et s'interroger sur ce qui peut expliquer ce blocage. Dans l'institution française, par exemple, sera-t-il difficile de revenir spontanément aux *critères de congruence des triangles* compte tenu du fait que les professeurs qui exercent aujourd'hui n'ont pas été formés pour penser comme cela ?

La résultante des forces qui participent à la construction du texte d'un savoir, est libellée dans les *textes*

officiels des programmes scolaires, qui diffèrent selon le niveau concerné. Ici, on trouve la description d'indications d'ordre général, les finalités et les objectifs, les suggestions méthodologiques, la répartition des heures, la liste des contenus et, le cas échéant, les relations à entretenir avec d'autres disciplines. Néanmoins, les programmes scolaires ne représentent qu'une première version du texte du savoir car il faut considérer aussi que celui-ci est ensuite développé dans les *manuels scolaires*.

Le manuel scolaire : un produit conçu en dehors de l'école pour l'école elle-même

Quelle place, le *manuel scolaire*, occupe-t-il dans le processus de transposition didactique ? Le manuel est le fruit d'un travail individuel ou d'équipe. L'auteur – ou le groupe d'auteurs – fait partie de la *noosphère* ; normalement, il traduit les contenus et les méthodes dictés dans les textes officiels et il les développe. C'est ici que les objets d'enseignement vont se particulariser et que le savoir de référence subit une transposition. Aux exigences conscientes des programmes scolaires, il faut ajouter l'expérience personnelle de l'auteur et sa vision de la matière en question. C'est pourquoi, par la suite, nous distinguerons deux sous-ensembles R (Rédacteurs) et A (Auteurs) de la noosphère N qui désignent respectivement ceux qui participent à l'élaboration du *canevas* du texte du savoir (les *programmes scolaires*) et ceux qui participent au développement de ce texte (les *manuels scolaires*), tout en considérant qu'un même individu peut être dans les deux sous-ensembles mais qu'il peut avoir un rapport différent en tant que rédacteur de programmes et en tant qu'auteur de manuels. Ici, nous différencierons :

$R_{IF,R}(O^{GF})$	$R_{II,R}(O^{GI})$	*Rapport institutionnel de ceux qui participent à l'élaboration du texte du savoir qui va vivre dans les institutions IF et II sous forme de programmes scolaires*
$R_{IF,A}(O^{GF})$	$R_{II,A}(O^{GI})$	*Rapport institutionnel de ceux qui participent au développement du texte du savoir sous forme de manuel scolaire*
$R_A(O^{GF})$	$R_A(O^{GI})$	*Rapport personnel de ceux qui participent au développement du texte du savoir sous forme de manuel scolaire*

Le rapport personnel R_A (O^G) de l'auteur au savoir influe sur le style de sa production : nous nous interrogeons alors **sur les objectifs – implicites ou explicites – de l'auteur lorsqu'il conçoit tel ou tel manuel.**

Le manuel est une composante essentielle du processus car il représente un instrument pédagogique privilégié à partir duquel l'enseignant transmet le savoir et l'élève l'apprend.

Pour l'enseignant, le(s) manuel(s) constitue(nt) une source d'information sur les objets à enseigner et un outil pour organiser son cours. A son tour, il interprète les contenus du manuel et il élabore son enseignement en rapport avec ses connaissances et ses représentations : le rapport R_P (O^G) de l'enseignant au savoir influe sur le style de son enseignement. C'est dans ce contexte que le processus de transposition didactique s'achève : le savoir à enseigner se transforme en *savoir enseigné*, fruit du travail de l'enseignant. On peut alors se poser des questions sur les possibles rapports au savoir de l'enseignant : **comment l'enseignant *pourrait*-il tirer profit de tel ou tel manuel pour organiser ses cours ? Quelles méthodes pédagogiques un manuel donné incite-t-il à pratiquer ?** En d'autres termes, il est question de s'interroger sur l'influence de R_A (O^G) sur R_P (O^G). Nous ne sommes pas donnée les moyen pour répondre à ces questions. Cependant, elles restent présentes en filigrane dans la mise en œuvre de notre travail.

Dans la formation de l'élève, plusieurs variables interviennent : le manuel est la voie d'accès à la culture mais il n'est pas le moyen prédominant à travers lequel il construit ses connaissances, l'enseignement qui lui est dispensé par le(s) professeur(s) ayant une fonction médiatrice et demeurant primordial. Néanmoins, si l'on fixe l'attention sur le *travail individuel* de l'élève et qu'on envisage le manuel en tant qu'outil de référence pour suivre et approfondir la leçon reçue pendant la classe, une aide au travail en dehors de la classe, on peut se poser des questions à propos du *savoir à acquérir* (*à apprendre*) et ensuite faire des conjectures sur le rapport R_E (O^G) au savoir de l'élève. **Dans tel ou tel manuel, quelles sont les méthodes proposées pour apprendre le savoir en question ? Quel sont les objectifs que l'on espère atteindre ? Lors d'un travail individuel, si l'élève recourait au manuel, quelle utilisation *pourrait*-il en faire ? Dans une phase d'apprentissage, que *pourrait* lui apporter le manuel ?** Ces questions concernent alors l'influence possible de R_A (O^G) sur R_E (O^G). Nous ne répondrons pas à ces questions même si elles guident nos analyses.

On voit donc que le manuel occupe une place intermédiaire mais considérable. Il est conçu, en dehors de l'école, en conjuguant le savoir savant avec les programmes scolaires et les instructions officielles ; dans l'école, il participe au passage du savoir à enseigner au savoir enseigné mais il se fait aussi *administrateur* (responsable) du savoir à acquérir. Pour que l'analyse d'un manuel soit suffisamment exhaustive, il faut donc tenir compte des multiples variables qui contribuent à sa parution et son utilisation.

III.4 L'approche anthropologique : la notion de *praxéologie*

Plus haut, nous avons parlé de *savoir* et de *savoir-faire* dont l'acception mérite d'être mieux caractérisée.

Ainsi avons-nous résolu de nous conformer à la définition attribuée par Y. Chevallard dans sa théorie *praxéologique*[51]. Ci-après, nous exposons les traits principaux de la *notion de praxéologie* qui comprend, entre autres, les notions de *tâche* et de *technique* dont, d'ailleurs, nous nous servirons dans la partie expérimentale de notre travail.

Les notions de tâche, technique, technologie et théorie

A la racine de la notion de praxéologie se trouvent les notions solidaires de *tâche t*, et de *type* de tâches *T*. Un *verbe* suivi d'un objet bien identifié exprime une tâche : *construire* un parallélogramme dont deux côtés sont donnés, *résoudre* dans $[0 ; \pi]$ l'équation $2 \sin(x) = 1$, etc.

La notion de *type* de tâches suppose un objet relativement précis : *construire* un carré, *résoudre* une équation sont des types de tâches, mais *construire, résoudre* sont ce que l'auteur appelle des *genres* de tâches, qui contrairement aux types de tâches, appellent un déterminatif. Réellement, un genre de tâche n'existe que sous la forme de différents types de tâches, dont le contenu est strictement explicité.

Étant donné un type de tâches *T*, une praxéologie relative à *T* contient une *technique* τ relative à *T*, c'est-à-dire une *manière d'accomplir les tâches t* qui appartiennent à *T*. Reprenons, par exemple, la tâche mentionnée ci-dessus :

"Construire un parallélogramme dont deux côtés sont donnés".

Dans l'institution française, pour réaliser cette construction à partir de deux segments ayant une extrémité commune, l'élève de Sixième apprend deux *techniques*, l'une à l'aide de la règle et de l'équerre, l'autre à l'aide du compas et de la règle.

Toutefois, une technique τ peut réussir seulement sur une partie $P(\tau)$ – la *portée* de la technique – des tâches du type *T* auquel elle est relative : on dira que "l'on ne sait pas accomplir les tâches du type *T*" lorsque cette technique tend à *échouer* sur $T \backslash P(\tau)$. Dans l'exemple ci-dessus, cela serait le cas lorsque, au lieu d'avoir les côtés, on aurait un côté et une diagonale ayant une extrémité commune. La même technique à l'aide du compas et de la règle échoue si l'on ne fait pas de considérations préalables permettant de *voir* un segment qui est déterminé mais qui n'est pas tracé. En effet, dans ce cas, plusieurs techniques sont possibles, l'une s'avérant *supérieure* aux autres. En outre, dans une institution *I* donnée, à propos d'un type de tâches *T* donné, il peut exister en général *une seule* technique (ou du moins un nombre restreint de techniques) reconnue par *I*, d'autres pouvant certainement exister mais dans d'autres

[51] Chevallard Y. (1998), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique*, dans Actes de l'Université d'été, 4-11 juillet 1998, La Rochelle – Charentes-Maritimes, édition coordonnée par Noirfalise R., Université Pascal Blaise, IREM de Clermont-Ferrand

institutions.

On appellera *technologie θ*, un *discours* dont la fonction principale est de *justifier rationnellement* la technique τ en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T : dans l'exemple ci-dessus mentionné, c'est la définition de parallélogramme qui permet, entre autres, de justifier la technique de construction à l'aide de la règle et de l'équerre alors que l'une de ses propriétés permettra de justifier la technique à l'aide de la règle et du compas.
A propos de la fonction de *justification*, l'auteur précise :

> "Le style de rationalité mis en jeu varie bien entendu dans l'espace institutionnel, et, en une institution donnée, au fil de l'histoire de cette institution, de sorte qu'une rationalité institutionnelle donnée pourra apparaître... peu rationnelle depuis une autre institution..."

Néanmoins, une technologie peut aussi servir pour *expliquer*, *rendre intelligible* la technique. C'est ainsi que l'auteur souligne qu'en mathématiques, suivant la tradition, la fonction de *justification* l'emporte sur la fonction d'*explication*. Dans le contexte de notre travail, on peut considérer en fait que, dans le développement des connaissances, l'élève est censé modifier son *attitude* face à la géométrie ; par conséquent, on lui demande de faire évoluer aussi les discours qui accompagnent les techniques adoptées pour accomplir telle ou telle tâche : à la transition d'une *attitude* vers l'autre correspondra ainsi un passage d'une fonction à l'autre de la technologie produite. D'ailleurs, cette distinction de fonctions attribuées à une technologie peut bien se rapprocher de la théorie de Balacheff à propos des *types de preuves*.
Une technologie peut aussi avoir la fonction de *production* de techniques : il existe des technologies *potentielles*, en attente de techniques. Néanmoins, au sein d'une institution, un phénomène de *sous-exploitation* des technologies disponibles peut se produire, cela dans l'une des trois acceptions possibles. En ce sens-là, dans l'institution italienne, on pourrait vraisemblablement reconnaître ce phénomène à propos de l'objet *transformations géométriques*.

Un *discours technologique* contient des énoncés dont la raison se situe à un niveau supérieur de justification-explication-production : ils apparaissent comme *abstraits* et éloignés de soucis simplement techniques ou technologiques. Ces énoncés constituent alors la *théorie* Θ, dont la nature peut se modifier suivant l'histoire de l'institution et, dans ce cas, on parlera de *progrès théorique*. La *théorie* reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique.

Savoirs et savoir-faire

Étant donné un unique type de tâches T, une praxéologie *ponctuelle* $[T/\tau/\theta/\Theta]$ est définie par une technique τ, une technologie θ et une théorie Θ. On dira que celle-ci est constituée d'un "bloc

technologico-théorique" [θ/Θ] et d'un "bloc *pratico-technique*" [*T*/τ] qui s'identifient respectivement avec ce que l'on appelle ordinairement *un savoir* et un *savoir-faire*. A ce propos, l'auteur souligne :

> "... on désigne couramment comme étant un savoir la praxéologie [*T*/τ/θ/Θ] *toute entière*, ou même une partie quelconque de celle-ci. Mais cette manière de faire encourage à minorer le savoir-faire, notamment dans la production et la diffusion des praxéologies : ainsi qu'on l'a noté, on rencontre souvent des technologies qui "attendent leur premier emploi", ou qui ont "perdu leur emploi". Une telle mise en avant du savoir n'est nullement fortuite. On ne rencontre en fait que rarement des praxéologies ponctuelles. Généralement, en une institution *I* donnée, une théorie Θ répond de *plusieurs technologies* θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles *plusieurs techniques* τ_{ij} répondant à *autant de types de tâches* T_{ij}. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisation *locales*, [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$], centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisation *régionales*, [$T_{ij}/\tau_{ij}/\theta/\Theta$], formée autour d'une théorie Θ... Or, le passage d'une praxéologie ponctuelle[*T*/τ/θ/Θ] à une praxéologie locale [$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$] met en avant la technologie θ, de la même façon que le passage ultérieur à une praxéologie régionale [$T_{ij}/\tau_{ij}/\theta/\Theta$] portera au premier plan la théorie Θ. Dans les deux cas la visibilité du bloc du savoir s'accroît, au détriment du savoir-faire. Un tel déséquilibre, sans doute, n'est pas sans justification : car s'il est vrai que, en bien des cas, le type de tâches *T* précède *génétiquement* le bloc [θ/Θ] (lequel se construit alors comme moyen de produire et de justifier une technique τ appropriée à *T*), il n'en reste pas moins que, *structuralement*, le savoir [θ/Θ] permet d'engendrer τ (pour *T* donné). Pour cette raison, le savoir-faire [*T*/τ] pourra être classiquement *présenté*, dans le *texte* du savoir, comme une simple *application* du "savoir" [θ/Θ]..."

D'après la problématique mise en évidence dans les paragraphes précédents, on pourrait donc dire que, dans l'institution italienne, c'est le bloc *technologico-théorique* qui l'emporte sur le bloc *pratico-technique*, la vision de fond est celle d'un savoir qui engendre un savoir-faire, ce dernier ne demeurant qu'une simple application de l'autre ; en revanche, dans l'institution française, le bloc *technologico-théorique* est minimisé au profit du bloc *pratico-technique*, ce dernier étant primordial pour que l'élève participe à la construction et à l'enrichissement éventuel de ses connaissances.

IV. LA PROBLEMATIQUE ET LA METHODOLOGIE

IV.1 Reprise des questions

A travers notre recherche, nous voudrions mener une réflexion sur l'enseignement de la géométrie tel qu'il est aujourd'hui. Plus haut, nous avons dévoilé les premières analogies et différences entre les deux institutions concernées en pointant les éléments à mettre en question. Ici, nous reprenons les éléments essentiels de notre problématique, quelques questions et les hypothèses avancées afin de les reformuler en relation avec les cadres théoriques choisis.

Notre intérêt porte sur l'articulation des textes du savoir T_{GF} et T_{GI} et sur l'écologie institutionnelle des objets des savoirs GF et GI qui sont reconnus respectivement par les institutions française IF et italienne II. Les premières questions sont alors les suivantes :

- **le rapport institutionnel aux objets géométriques communs à T_{GF} et T_{GI} est-il le même ?**

- **De quelle façon, les objets différents, influent-ils sur l'articulation de T_{GF} et T_{GI} ?**

C'est au cours de la lecture analytique de quelques manuels, et après un examen des programmes officiels, que nous allons analyser l'évolution du rapport institutionnel de quelques objets et, conjointement, la façon dont les *attitudes* face la géométrie se coordonnent au cours des années scolaires. C'est ainsi que nous relèverons des éléments pour confirmer ou démentir nos hypothèses.

En exposant notre problématique, nous avons souligné la présence simultanée des quelques objets – les *transformations géométriques* et les *critères de congruence et de similitude des triangles* – dans le texte T_{GI} qui vit dans l'institution II. Les rapports institutionnels de différents acteurs – les rédacteurs de programmes et les auteurs de manuels – à ces objets ne nous paraissent pas très compatibles. D'une manière générale, il en va de même des diverses *attitudes* vis-à-vis de la géométrie auxquelles nous faisons référence.

La *tradition euclidienne* a pour conséquence une présentation linéaire des contenus sous une forme presque identique à tous les niveaux, dans un langage assez formalisé. La principale différence porte éventuellement sur les types de preuves proposés.

Nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1. Cette présentation de la géométrie d'une part ne favorise pas la négociation d'un passage progressif d'une *attitude* à l'autre ; d'autre part, elle ne facilite pas non plus l'intégration de l'objet *transformations géométriques*, parmi les autres objets de la géométrie au sein du savoir enseigné, et encore moins comme outil de *démonstration*.

A l'égard de l'objet *transformations géométriques*, nous pensons qu'un texte du savoir fondé sur cet objet favorise une approche dynamique au cours de la période de développement de *l'attitude de l'intuition rationnelle* tandis qu'il devient difficilement saisissable si l'on veut développer l'*attitude rationnelle*. C'est ainsi que, concernant l'institution française IF, nous avançons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2. Le rapport institutionnel à l'objet *transformations géométriques*, bien qu'il occupe une place considérable dans le texte du savoir T_{GF} qui vit dans IF, n'évolue pas lors du passage de la première *attitude* vers la deuxième, c'est à dire qu'il est difficilement utilisé dans les *démonstrations*.

Nous voulons tester ces hypothèses dans notre recherche, à travers les effets que nous pouvons en percevoir dans l'analyse de manuels scolaires ainsi que dans de productions d'élèves.

En effet, nous ne nous intéressons pas seulement à l'analyse des processus de transposition qui ont eu lieu dans les deux institutions en question – tout cela vu à travers la lecture de quelques-uns des manuels

scolaires adoptés actuellement dans les deux pays – mais notre attention porte aussi sur le rapport personnel de l'élève au savoir géométrique. Particulièrement, nous nous interrogeons sur les effets que les deux textes du savoir T_{GF} et T_{GI} et leur mise en œuvre peuvent engendrer sur sa formation.

Notamment, nous nous posons les questions suivantes :

- **Est-ce qu'il y a des différences lorsque les élèves français et italiens doivent mobiliser leurs connaissances dans l'accomplissement d'une tâche sur la géométrie élémentaire ? Face à une même tâche, comment réagissent-ils ?**
- **Lorsqu'on leur demande d'accomplir une tâche, arrivent-ils à organiser et structurer les outils nécessaires et suffisants pour mettre en place une technique efficace ?**

Pour tenir compte de ce que le texte du savoir T_{GI} est plus *étendu* que le texte T_{GF}, nous nous demandons :

- **Dans un réseau très riche d'objets, les élèves italiens, sont-ils capables de choisir le bon outil pour une tâche donnée ?**
- **Les élèves français, s'engagent-ils dans la recherche d'une technique de résolution malgré un réseau d'objets plus limité ?**

Et encore, compte tenu des différences d'articulation de T_{GF} et de T_{GI} dans les deux institutions, nous essayerons de répondre aussi à d'autres questions :

- **Est-ce qu'on trouvera des techniques analogues ? Si les élèves disposent des mêmes outils, privilégient-ils la même technique ?**
- **Est-ce qu'on pourra repérer des rapports personnels identiques ? Et, dans ce cas, est-ce que les connaissances en amont diffèrent ou non ?**

IV.2 La méthodologie

Le manuel scolaire : un objet et un outil de recherche

Comme nous avons pu le constater plus haut, le manuel est en quelque sorte le protagoniste de notre recherche. C'est à travers ce filtre que nous avons étudié les processus de transposition didactique qui ont eu lieu dans les deux institutions IF et II, évalué les rapports institutionnels de certains des objets qui constituent les textes T_{GF} et T_{GI}, médité sur les rapports possibles qu'il engendre au sein des deux institutions. Cependant, tout au long de notre travail, nous lui avons attribué au fur et à mesure des fonctions différentes : selon les diverses phases abordées, il est mis en cause en tant qu'*objet* d'étude ou bien il nous sert d'*outil* pour mieux pointer quelques discours qui, autrement, ne pourraient pas aboutir. Ainsi, les programmes français sont très détaillés et indiquent assez précisément ce qui est attendu des

élèves alors que les programmes italiens sont très succincts. Nous avons donc eu un premier recours aux manuels (tables des matières et intitulés des paragraphes qui constituent les pages de cours), en tant qu'outil pour mieux définir les objets fondamentaux qui constituent les textes du savoir. Nous avons créé un *syllabus*, à savoir une liste des connaissances géométriques que – d'après les programmes et les manuels – l'élève est censé avoir acquis à la fin de la tranche de la scolarité prise en compte dans notre recherche. Ce *syllabus* se développe autour d'un certain nombre de *figures géométriques élémentaires* dans le plan et dans l'espace (droites parallèles, droites perpendiculaires, angles, triangles, etc.) et, grâce à la manière dont nous l'avons conçu, il nous permet de signaler les premières différences et analogies en motivant davantage nos interrogations de départ. Ici nous ne consultons les manuels que de façon sommaire sans tenir compte des pages relatives aux activités pratiques où, sous forme de problème, certains objets peuvent apparaître.

Ci-après, nous présentons les volets principaux de notre travail en précisant, chaque fois, la fonction attribuée au manuel et les raisons qui nous ont conduite à tel ou tel choix.

Les "canevas" des textes du savoir T_{GF} et T_{GI} : une lecture analytique des textes officiels des programmes scolaires

Pour amorcer cette analyse, nous avons d'abord étudié la structure des textes officiels en parvenant à distinguer trois volets :

- les *finalités* et les *objectifs* : ici, nous avons repéré tous les éléments essentiels pour saisir et comparer la signification attribuée à l'einseignment de la géométrie (et, plus généralement, à l'enseignement des mathématiques) par les rédacteurs des programmes et la façon dont ils envisagent le développement des diverses *attitudes* face à la géométrie au cours des années scolaires suivant l'âge de l'apprenant ;
- les *suggestions pédagogiques* et l'*organisation de l'enseignement* ;
- les *contenus* des programmes : pour l'élaboration de ce volet, nous avons distingué trois parties.
  1) *Explicitation des contenus d'après les textes officiels*. La transcription des contenus tels qu'ils sont officiellement libellés témoigne du statut différent que les instructions officielles acquièrent au sein des deux institutions.
  2) *Comparaison globale des contenus*. Nous avons développé ce volet grâce au *syllabus* constitué.
  3) *Répartition des contenus par niveau scolaire*. Un découpage annuel des contenus géométriques dans les deux programmes scolaires nous a permis de saisir leur cohérence interne. Pour ce faire, nous avons eu recours aux tables des matières d'un certain nombre de manuels, à la passation d'un questionnaire auprès d'enseignants italiens du cycle secondaire inférieur ainsi qu'aux résultats d'une enquête menée en Italie et portant sur le même sujet, pour faire des hypothèses sur la répartition

des contenus suivant les années scolaires[52].

Évidemment, certaines des variables repérées dans ces volets ont été utiles lors de l'analyse des manuels scolaires afin d'évaluer la manière dont le rapport des rédacteurs influe sur le rapport de divers auteurs de manuels ; nous avons tenté aussi de dégager le rapport institutionnel à la géométrie de l'enseignant et de l'élève dans les deux pays.

Articulation des textes du savoir T_{GF} et T_{GI} : une lecture analytique des manuels scolaires

D'après nos intentions, la comparaison dont il est question progresse par des *zooms* – étapes de plus en plus détaillées. Dans la première étape, lors de l'analyse des programmes scolaires, nous avons reconstitué d'une manière assez complète les textes du savoir qui sont reconnus dans les deux institutions concernées – cela à l'aide de manuels scolaires – en repérant les objets communs et non communs sans pourtant nous préoccuper de leur rapport institutionnel au savoir en question.

Une deuxième étape a consisté à localiser un ensemble d'objets plus restreint à utiliser lors de l'analyse de quelques manuels scolaires ainsi que pour élaborer la partie expérimentale de notre travail.

C'est ainsi que nous avons décidé de passer en revue les pages d'activités pratiques proposées dans divers manuels, tout pays et tout niveau confondus, à la recherche d'une *configuration de base* qui revenait le plus souvent et simultanément d'énoncés de problèmes communs aux deux institutions. Finalement, l'ensemble d'énoncés recueillis nous a conduite à reconnaître que la figure-clé la plus exploitée est celle du *triangle des milieux*. Nous avons construit un *problème* représentant la partie commune et essentielle de l'enseignement dans les deux institutions : il fait intervenir les *propriétés liées à la configuration du triangle des milieux* ainsi que la *notion d'aire*, notion présente à tous les niveaux scolaires des deux institutions mais avec des approches différentes.

A partir de ce problème générique, nous avons bâti différents énoncés pour les élèves reprenant des parties de ce problème. C'est ainsi que, après une analyse a priori et une phase pré-expérimentale, nous avons conservé *six* problèmes.

Grâce à l'élaboration et à l'analyse des énoncés de ces problèmes, nous avons centré des objets précis pour amorcer une lecture *analytique* des textes du savoir scolaire tels qu'ils sont développés dans les manuels scolaires.

Or, pour mieux cerner le rapport à la géométrie élémentaire qui transparaît dans les manuels, il nous paraît

[52] Signalons que les programmes et les manuels italiens sont élaborés pour des cycles de trois et de deux ans.

nécessaire de considérer la *structure* (forme) et le style des manuels et non pas seulement les *contenus* et les *méthodes* proposés pour les transmettre. D'après nous, cet aspect *extérieur* peut peser sur les contenus : un discours complexe risque d'agir en obstacle à la compréhension du fond – mais aussi sur les méthodes – un style magistral ne laisse pas beaucoup de place à une vision *active* de l'enseignement et de l'apprentissage.

Pour que cette phase soit suffisamment exhaustive, nous avons donc envisagé trois niveaux d'analyse, à savoir l'*analyse de la forme*, l'*analyse des contenus* et l'*analyse des méthodes pédagogiques sous-jacentes*. Dans nos convictions, aucun de ces niveaux n'est prioritaire mais c'est plutôt l'ensemble qui atteste la fonction du manuel. Ils ont une relation mutuelle : la forme peut bien influencer le choix des contenus et des méthodes alors que celles-ci peuvent bien influencer la forme et les contenus.

L'*analyse de la forme*. Pour examiner le langage et le style utilisés pour développer et exposer le texte du savoir scolaire, l'importance accordée au texte écrit par rapport aux images, etc., nous avons construit une brève grille en nous inspirant des travaux de A. N. Malara[53] et des quelques travaux français qui ont été développés à partir de la grille d'analyse des manuels scolaires publiée par l'A.P.M.E.P.[54]. Faisant ainsi, nous n'avons nullement eu l'intention de réaliser un produit exhaustif, cette grille devant permettre de discerner les différences principales surtout en ce qui concerne la structure d'un manuel et ainsi de dégager les conceptions qu'on a de cet outil pédagogique dans chacune des deux institutions concernées.

L'analyse des contenus. Pour examiner les objets qui constituent le texte du savoir scolaire, leur rapport institutionnel etc. (analyse de l'*écologie institutionnelle* du savoir concerné), nous avons réalisé deux dispositifs dont nous détaillons le fonctionnement dans le paragraphe suivant.

L'analyse des méthodes pédagogiques sous-jacentes. Pour examiner la manière dont les auteurs des manuels proposent l'acquisition du savoir et l'appropriation du savoir-faire, les deux volets précédents nous ont permis de dégager quelques éléments qui ont été complétés par une analyse globale des activités pratiques proposées dans les divers manuels.

---

[53] Malara N. A. (1992), *Il libro di testo per la matematica* dans " I libri di testo per la scuola media ", a cura di Diega Orlando Cian, Gregoriana Libreria Editrice

[54] Il s'agit d'une grille conçue au sein de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public visant, entres autres, à "*hâter les prises de conscience et de conduire à des manuels qui soient toujours plus capables d'être des éveilleurs... aussi bien que des références d'essentiel*" (Grille d'analyse des manuels scolaires de mathématique, 3e version, novembre 1977).

Le cas des aires : les réseaux conceptuels

Lors des premières phases de notre recherche, nous avons résolu d'approfondir une notion-clé : l'*aire* ; la manière différente dont elle est abordée dans les deux institutions ayant influencé notre choix.
À partir de là, nous avons réalisé un *réseau conceptuel* qui se présente sous la forme de graphes, dont les nœuds sont des objets géométriques et les arêtes des énoncés, permettant de *visualiser* un sous-ensemble d'objets relatifs à la notion en question et qui constituent les textes du savoir géométrique qui vont vivre sous la forme de manuel dans les deux institutions concernées, leurs *habitats* et leurs *niches écologiques*.

Dans un réseau, tout objet est placé dans un cadre : si l'objet apparaît dans le manuel, le cadre est en trait continu, autrement il a un trait pointillé ; les objets sont reliés par un trait ou une flèche – dont le sens va de l'objet ancien vers l'objet nouveau – qui changent selon la nature de la liaison : un objet peut être lié à un autre à travers une définition ou un théorème.

Pour chacun des manuels, nous avons rédigé une *liste de propositions*, comprenant définitions et théorèmes. A chaque énoncé correspond un numéro qui apparaît dans le réseau (à côté des traits, des flèches ou des cadres) permettant de saisir la nature de la liaison. Cette liste numérotée contient aussi des sigles qui signalent à quel niveau scolaire, selon le manuel étudié, telle ou telle proposition est présentée et, s'il s'agit d'une propriété, si elle est accompagnée d'une preuve et la typologie de cette preuve ; c'est ici donc que nous avons fait référence au cadre théorique de N. Balacheff. La présentation simultanée de ces données sous forme de tableau a permis ainsi de faire une comparaison : les différences graphiques ont fait ressortir des différences de conceptions.

Ce réseau conceptuel nous a donc permis une analyse de l'écologie institutionnelle du savoir scolaire à propos d'un objet bien précis ; mais il a été conçu pour permettre aussi de faire ressortir :

- certains aspects relatifs à la *forme* sous laquelle ce savoir est présenté, la réalisation de la *liste de propositions* étant faite à partir de chacun des manuels choisis et en gardant le plus fidèlement possible le langage utilisé par les auteurs ;
- d'autres aspects relatifs aux *méthodes pédagogiques*, cela à travers la prise en compte du niveau scolaire où une proposition est présentée et des typologies de preuve qui l'accompagnent.

Autour du triangle des milieux

Pour pointer d'autres objets du savoir qui vivent dans les institutions italienne et française, nous avons mis en place un deuxième réseau autour de la *configuration de Thalès* ou du "*triangle des milieux*", permettant

encore d'examiner le langage et le style utilisé par les divers auteurs des manuels choisis pour développer et exposer les *contenus* ainsi que les *méthodes pédagogiques* proposées pour l'acquisition du savoir et l'appropriation du savoir-faire.

Pour ce faire, nous avons exploité, entre autres, les résultats de notre analyse a priori. Comme nous l'avons déjà expliqué, nous avons sélectionné des problèmes à partir de la *configuration du triangle des milieux*, une configuration qui apparaît donc d'une manière plus ou moins explicite dans tous les énoncés. L'analyse des techniques de résolutions possibles nous a permis de mettre en évidence certains outils liés à la configuration en question. Les outils communs aux deux institutions apparaissent aussi (en tant qu'*objets*) dans le *syllabus* que nous avons établi lors de l'analyse des textes officiels des programmes scolaires relatifs aux deux institutions. A partir de quelques sous-configurations de base contenues dans le *triangle des milieux* et en nous appuyant sur les objets communs répertoriés dans le *syllabus*, nous avons donc fixé un nombre restreint d'objets géométriques, notamment :

A. *Définition de droites parallèles et propriétés éventuelles.*
B. *Caractérisation angulaire du parallélisme.*
C. *Distance d'un point d'une droite. Hauteur d'un triangle, hauteur d'un parallélogramme.*
D. *Propriétés caractéristiques du parallélogramme.*
E. *Théorème des milieux et sa réciproque.*
F. *Théorème de Thalès dans le triangle et sa réciproque.*

Nous avons situé ces objets par rapport aux contenus proposés dans les différents manuels pour nous intéresser ensuite à la manière dont ils sont introduits et l'usage que les auteurs en proposent dans les pages d'activités pratiques, à savoir les *genres de tâches* proposés pour les mobiliser en tant qu'outils.

Dans ce deuxième volet consacré à l'analyse des manuels scolaires, l'idée de *réseau* apparaît à travers les énoncés et leur structuration. Cependant, sa représentation graphique s'avérant beaucoup moins éloquente – voire inefficace – que dans le cas des aires, nous avons résolu d'exposer les divers objets exclusivement d'une manière discursive.

La partie expérimentale

L'analyse fine des manuels scolaires s'est faite en parallèle avec l'élaboration de la partie expérimentale. Comme nous l'avons dit plus haut, grâce à la consultation de divers manuels, nous avons rédigé un texte de problème unique gravitant autour du *triangle des milieux*. Bien que ce premier choix nous ait permis de localiser les objets à partir desquels une analyse plus fine des contenus a été entamée, par la suite, nous avons bâti *sept* énoncés indépendants reprenant des parties de ce texte, cela afin de les structurés convenablement en vue d'une passation auprès des élèves.

Sur ces *sept* énoncés sélectionnés, nous avons développé une analyse a priori en deux étapes. D'abord, nous avons réalisé une analyse d'un point de vue strictement mathématique en exposant les raisons qui nous ont amenée à remanier les énoncés de façon à produire *neuf* problèmes qui ont été ensuite testés lors de la phase pré-expérimentale.

Dans une deuxième étape, nous avons effectué une analyse des *neuf* problèmes en pointant notre regard sur les attitudes possibles des élèves face à ces problèmes. C'est ici que nous avons eu recours à la théorie praxéologique développée par Y. Chevallard. En effet, au cours de cette phase, nous avons analysé les problèmes suivant deux volets principaux :

- la *figure* et ses *usages* possibles ;
- les divers *genres de tâches* et les *catégories de techniques* correspondantes.

Les deux volets nous ont ainsi permis de bien pointer certains items spécifiques lors de l'analyse a posteriori. Notamment, outre l'analyse problème par problème, le deuxième volet nous a permis d'examiner les résultats des productions des élèves aussi par rapport aux tâches du même genre.

Lors de la préparation des *neuf* énoncés, nous avons pris en compte les différences remarquables sur la nature et la structure des activités pratiques que nous avons repérées pendant cette phase d'exploration : nous avons, par exemple, formulé quelques énoncés comprenant des questions préliminaires et/ou des étapes intermédiaires, cela étant une caractéristique plus familière pour les élèves français.

Avant la mise en place définitive de la partie expérimentale proprement dite, nous avons organisé la passation des problèmes sur un petit échantillon. Les résultats du dépouillement de cette partie pré-expérimentale nous ont conduite à remanier ces quelques énoncés et à en exclure d'autres : en définitive, nous avons gardé *six* problèmes.

Vu les niveaux scolaires auxquels nous nous intéressons et la manière dont les programmes de géométrie se déroulent dans les deux institutions, nous avons décidé d'analyser les productions écrites d'élèves de seize ans (2nde française, deuxième année de ESS scientifique[55] italienne) ; à ce niveau-là, on présume que les objectifs visés par les programmes ont été plus ou moins atteints et que l'élève dispose d'un bagage de connaissances suffisamment consolidées. En leur proposant ces problèmes, nous avons cherché à étudier :

- l'aptitude de l'élève à prouver, à justifier certaines propriétés d'une figure géométrique donnée : est-il capable de produire des *preuves intellectuelles* – notamment des *démonstrations* ?

[55] Compte tenu de l'importance attribuée à l'enseignement des mathématiques dans le système scolaire français, nous avons cru plus pertinent de prendre en compte la filière scientifique dans le système scolaire italien.

- l'aptitude de l'élève à mobiliser les connaissances dont il dispose – parfois on sait mais on ne sait pas faire ! – et son attitude vis-à-vis d'une difficulté ;
- l'aptitude de l'élève à reconnaître ou à reproduire, dans une figure complexe, des sous-figures plus familières et utiles pour avancer et ainsi à relier des situations apparemment différentes ;
- les habitudes de l'élève par rapport au tracé d'une figure (recours aux instruments de dessin, tracé quelconque ou particulier ; recours au codage...) et l'importance attribuée à ce tracé : a-t-il atteint la phase où un cas particulier ou une constatation sur le dessin ne suffisent pas pour prouver une affirmation ? Autrement dit, a-t-il acquis une attitude rationnelle lui permettant de recourir à des techniques mathématiques pour accomplir une tâche ?
- la familiarité de l'élève avec les constructions géométriques : sont-elles des situations où on produit des tracés précis et soigneux ou bien des situations aptes à faire fonctionner ses propres connaissances théoriques ?

La partie pré-expérimentale nous a été utile, entre autres, pour mettre au point l'analyse des productions des élèves. Cette analyse a posteriori s'étend sur trois niveaux principaux :

- Le *tracé* et *l'usage de la figure.*
- Les *procédures des élèves.*
- Les *discours des élèves.*

Les résultats de l'analyse des productions des élèves sont enfin mis en relation avec les résultats issus de l'examen des manuels scolaires afin de trouver des réponses aux quelques questions qui ont donné naissance à notre travail.

Dans le chapitre suivant, nous présentons notre lecture analytique des textes officiels des programmes scolaires. Comme nous l'avons dit plus haut, nous aurons un premier recours aux manuels scolaires, ce qui nous conduira à anticiper quelques éléments d'analyse des contenus d'enseignement tels qu'ils sont proposés par les auteurs de manuels mais ne nous permettra pas de tirer de véritables conclusions sur le rapport institutionnel au savoir géométrique (prévu par les) des rédacteurs de programmes.

Chapitre 2

Une lecture analytique des textes officiels des programmes scolaires

PLAN DU CHAPITRE

I. LE COLLEGE ET L'ÉCOLE SECONDAIRE INFERIEURE

I.1 Finalités et objectifs de l'enseignement des mathématiques
I.2 Suggestions méthodologiques, organisation de l'enseignement
I.3 Finalités et objectifs de l'enseignement de la géométrie

II. LA CLASSE DE SECONDE ET L'ÉCOLE SECONDAIRE SUPERIEURE

II.1 Finalités et objectifs dans l'enseignement des mathématiques
II.2 Suggestions méthodologiques, organisation de l'enseignement
II.3 Finalités et objectifs dans l'enseignement de la géométrie

III. EXPLICITATION DES CONTENUS D'APRES LES TEXTES OFFICIELS

III.1 Les programmes scolaires italiens
III.2 Les programmes français

IV. UNE COMPARAISON GLOBALE DES PROGRAMMES SCOLAIRES

IV.1 Le *syllabus*
IV.2 Les constructions géométriques

V. LA REPARTITION DES CONTENUS PAR NIVEAU SCOLAIRE

VI. ÉVOLUTION DES PROGRAMMES SCOLAIRES FRANÇAIS

VI.1 Le Collège
VI.2 La classe de Seconde
VI.3 Explicitation des contenus d'après les textes officiels

Dans le processus de transposition didactique, les textes officiels des programmes scolaires représentent le *canevas* du texte du savoir qui va vivre dans une institution donnée à un moment donné. Ici, nous nous intéressons aux deux institutions IF et II telles qu'elles ont été définies dans le chapitre précédent : notre objectif est d'établir les rapports institutionnels aux savoirs géométriques GF et GI des objets qui constituent respectivement les textes du savoir T_{GF} et T_{GI}. En outre, cette lecture nous paraît nécessaire d'une part pour tenter de dégager le rapport institutionnel de l'enseignant et de l'élève prévu par les rédacteurs des programmes et d'autre part pour localiser quelques éléments utiles lors de l'analyse des manuels scolaires afin d'évaluer de quelle façon le rapport au savoir géométrique des rédacteurs influe sur le rapport de divers auteurs de manuels.

Un préalable[1].

Lors de la dernière réforme des programmes de l'école secondaire inférieure, en 1979, l'exigence d'un renouvellement du secondaire supérieur n'a pas tardé à paraître. Les nouveaux objets d'enseignement introduits dans les classes inférieures ne figuraient pas encore dans les supérieures, l'esprit novateur non plus. C'est pourquoi, dans les années quatre-vingts, deux projets de réforme pour le secondaire supérieur ont été mis en œuvre et des nouveaux programmes ont fait l'objet d'expérimentations dans quelques établissements italiens. Ces deux projets – le PNI[2] et le projet Brocca – se ressemblent à quelques détails près ; les objectifs généraux des deux premières années sont les mêmes et les contenus relatifs à la géométrie sont globalement équivalents : l'innovation essentielle concerne l'introduction des transformations géométriques et des indications plus précises sont données sur la manière dont l'enseignement de cette discipline *devrait* progresser au long des années.

Les programmes du projet Brocca visent plus explicitement l'étude de la géométrie en tant que système hypothético-déductif et proposent l'apprentissage de la notion générale de système formel et de modèle tandis que dans le PNI on ne parle de système formel qu'en relation à l'organisation axiomatique de la géométrie euclidienne. Comme nous le préciserons plus loin, cet aspect intéresse uniquement les trois dernières années du secondaire supérieur.

Bien qu'une véritable réforme ne soit pas encore accomplie, ces programmes ont été autorisés – depuis 1985 pour le PNI et depuis 1990 pour le projet Brocca – et sont appliqués dans des établissements de plus en plus nombreux.

Dans notre travail, nous avons choisi de nous rapporter aux nouveaux programmes du projet Brocca sans pourtant oublier l'organisation (découpage temporel) des programmes anciens[3] qui, officiellement, sont encore en vigueur et dont la connaissance nous aidera à mieux comprendre la réalité italienne actuelle et certains aspects caractéristiques strictement liés à la tradition scolaire.

---

[1] Avant de débuter la lecture de ce chapitre, il est souhaitable avoir pris connaissance de l'annexe 1.

[2] Piano Internazionale per l'Informatica

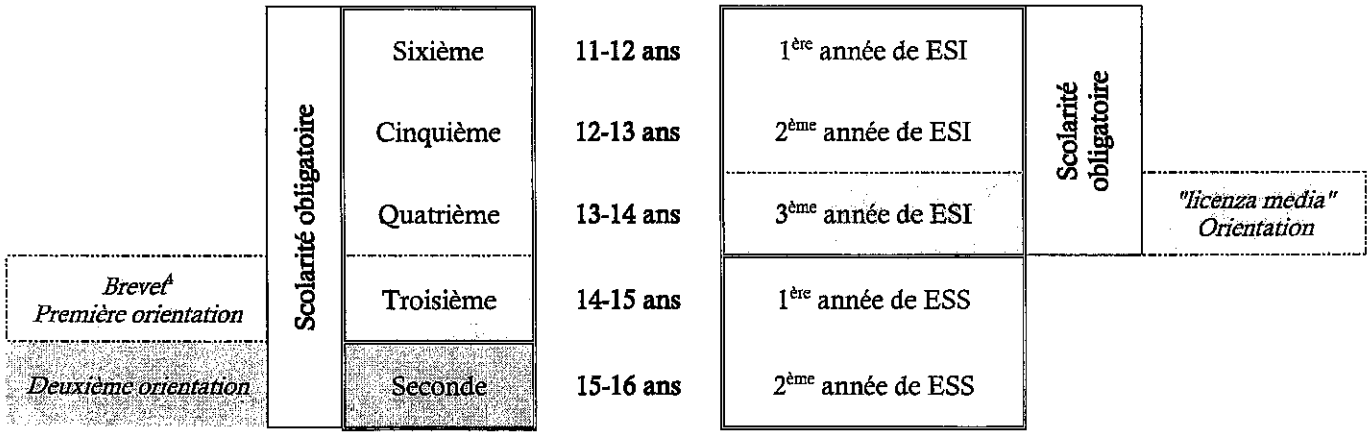
[3] cf. annexe 2 (Les programmes scolaires italiens avant le projet *Brocca*)

Le projet Brocca présente deux programmes différents, l'un pour une orientation scientifique et l'autre pour une orientation littéraire. Bien que ces différences soient minimes, l'esprit de l'école française obligatoire s'approche mieux des programmes scolaires italiens de la filière scientifique. C'est pourquoi, tout au long de notre travail, nous nous référons exclusivement aux textes officiels relatifs à cette filière.

En considérant les organisations différentes des deux systèmes scolaires, pour que notre description soit claire, nous distinguerons :

- les classes de collège
- la classe de seconde du lycée
- les trois classes de l'école secondaire inférieure (ESI)
- les deux premières classes de l'école secondaire supérieure (ESS)

Dans un premier temps, afin de saisir l'esprit des deux systèmes éducatifs, nous comparerons collège/ESI – qui forment, tous les deux, un cycle complet - et lycée/ESS, cela simplement parce que les textes officiels sont libellés séparément. Par la suite, concernant les contenus des programmes, nous les analyserons d'abord globalement – pour les cinq ans (11-16 ans) – et ensuite niveau par niveau, comme précisé dans le schéma ci-après.



Dans une première partie, après avoir dégagé les principes éducatifs visés par les deux institutions, nous comparons les *finalités pédagogiques* et *didactiques* et les *suggestions méthodologiques*. Nous fournissons quelques informations générales, nous transcrivons et commentons tous les passages essentiels qui portent sur la géométrie ou qui sont en relation avec son enseignement.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons particulièrement aux *contenus dans l'enseignement de la géométrie élémentaire*. Pour des raisons qui se dégageront au fur et à mesure, nous avons

[4] Le Brevet n'a pas d'incidence sur l'orientation, en fin de Troisième (sauf en cas de passage devant une commission d'appel où la réussite au Brevet peut jouer en faveur de l'élève). Par contre, la réussite à la "licenza media" italienne pèse sur le passage en ESS.

structuré cette deuxième partie en distinguant trois volets :

- l'explicitation des contenus tels qu'ils sont libellés dans les textes officiels ;
- une comparaison qui embrasse tous les contenus des programmes scolaires des cinq ans en question sans tenir compte de la chronologie ;
- une comparaison des découpages par années.

Pour les programmes français, nous considérons :

- l'arrêté du 14 novembre 1985, pour le collège[5] ;
- l'arrêté du 25 avril 1990 et l'aménagement des programmes du 16 juin 1993 pour la classe de seconde[6].

En effet, il s'agit des programmes suivis par les élèves que nous avons observés pour développer la partie expérimentale de notre recherche.

Pour les programmes italiens, nous considérons :

- l'arrêté du 9 février 1979, pour le ESI[7] ;
- l'arrêté de juin 1990 (programmes Brocca), pour le ESS[8].

Dans ce chapitre, plusieurs extraits sont tirés de ces documents. Chaque fois que deux textes sont en regard, celui de gauche concerne la France, celui de droite l'Italie.

Un paragraphe est enfin consacré aux changements dans les nouveaux programmes français[9] qui sont entrés en vigueur en 1996 en classe de Sixième, en 1997 en Cinquième, en 1998 en Quatrième, en 1999 en Troisième et en 2000 en Seconde.

I. *LE COLLEGE ET L'ÉCOLE SECONDAIRE INFERIEURE*

La première différence dans les deux systèmes concerne la scolarité obligatoire : jusqu'à 16 ans[10] en France, jusqu'à 14 ans[11] en Italie.

L'ESI représente un cycle éducatif qui dure trois ans et vise un double objectif : une école pour tous – afin *d'élever le niveau d'éducation et d'instruction personnelle de tout citoyen* – mais aussi une école d'orientation : après l'école primaire, elle fournit une préparation culturelle de base et les prémices pour un éventuel accès à l'école secondaire supérieure. Au **Collège**, l'objectif de l'orientation n'est

---

[5] *Mathématiques, classe de 6e, 5e, 4e, 3e*, Ministère de L'Éducation Nationale de l'Enseignement Supérieur de la Recherche, 1994.

[6] *Mathématiques, classe de Seconde...*, Ministère de L'Éducation Nationale de l'Enseignement Supérieur de la Recherche, 1998

[7] Scuola Media Statale, Programmi e orari d'insegnamento..., Ministero della Pubblica Istruzione, Roma 1994

[8] Piano di Studio della Scuola Secondaria Superiore e Programmi dei Primi Due Anni. Le proposte della Commissione Brocca, Studi e Documenti degli Annali della Pubblica Istruzione, Roma 1991

[9] cf. www.cndp.fr

[10] En France, la scolarité obligatoire a été élevée à 16 ans depuis la classe d'âge des élèves nés en 1953.

[11] A partir de la rentrée scolaire 1999/2000, la scolarité obligatoire a été prolongée jusqu'à 15 ans. C'est seulement quand un nouveau projet de réforme sera accompli qu'elle sera élevée jusqu'à 16 ans.

explicitement pris en compte qu'à la fin de la classe de Troisième. Dans les textes officiels des deux institutions, nous lisons[12] :

"L'école doit faire acquérir des connaissances et des méthodes, elle forme des hommes instruits dans la continuité de l'école élémentaire, les programmes du collège doivent permettre à l'élève de réussir sa scolarité, de suivre avec profit l'enseignement des lycées et d'acquérir la culture nécessaire à tous dans leur vie..."	"[L'école secondaire inférieure concourt] à la formation de l'homme et du citoyen et favorise l'orientation des jeunes aux fins d'un choix conscient des activités futures."

Néanmoins, nous reconnaissons le même esprit dans l'explicitation de quelques objectifs comme, par exemple, l'importance attribuée au langage et au travail personnel de l'élève, seul ou en groupe, pendant et en dehors des heures de classe.

Dans les instructions officielles **italiennes**, on souligne à plusieurs reprises que la perspective de dispenser une éducation de type scientifique ne trouve pas seulement son centre d'intérêt spécifique dans l'enseignement des disciplines scientifiques mais doit intéresser tout le processus de formation. Nous lisons :

> "... En particulier, l'éducation à la méthode scientifique, qui est un des objectifs principaux de l'école secondaire inférieure, est favorisée par des procédures qui à partir d'expériences facilement compréhensibles et réalisables par l'élève lui-même développent graduellement la capacité d'abstraction et d'organisation...".

Dans les instructions **françaises**, cette perspective peut être mise en parallèle avec l'un des objectifs prioritaires à atteindre dans le collège. Nous lisons :

> "Les élèves doivent devenir progressivement capables d'observer les réalités, d'analyser des idées et des concepts, de les organiser pour construire des raisonnements, de commencer à argumenter de manière rigoureuse."

Nous voyons donc que, dans les deux institutions, le développement des capacités d'analyse critique et d'organisation rationnelle de la pensée à travers l'expérience, représentent les éléments qui concourent à la formation culturelle et psychologique de l'élève.

I.1 Finalités et objectifs de l'enseignement des mathématiques

Bien que les objectifs relatifs aux mathématiques soient exprimés sous des formes différentes, ils présentent une grande analogie dans les deux textes. La *mathématisation du réel* est, pour les rédacteurs des deux pays, un aspect primordial : l'idée de base est qu'une *approche par les problèmes* pourra soutenir et motiver la généralisation et l'organisation théorique. À travers l'enseignement des mathématiques, l'élève doit apprendre à relier des observations du réel à des représentations et des

[12] Rappelons que, dans tout le chapitre, si on ne le précise pas, dans les paragraphes rédigés en colonnes, les textes sur la gauche et sur la droite concernent respectivement la France et l'Italie.

concepts mathématiques afin de saisir le caractère pragmatique de cette discipline. Cela permettra, entre autres, d'établir des relations avec d'autres domaines du savoir et d'acquérir des compétences linguistiques plus précises en distinguant le langage commun du langage plus formel des mathématiques.

A l'**ESI**, les disciplines scientifiques sont enseignées par un même professeur (qui garde la même classe pendant les trois années). C'est pourquoi, dans les textes officiels **italiens** relatifs à cette école, la description de leurs objectifs et de leurs contenus est regroupée dans un même chapitre : ils sont présentés d'abord d'une manière globale et puis spécifique pour les mathématiques.
Dans le paragraphe commun, on insiste encore une fois sur l'importance du processus d'initiation à la méthode scientifique, tout en respectant le développement génétique de l'apprenant.

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, les objectifs visés sont **exprimés** de la manière suivante :

- ✓ Acquisition de la *méthode scientifique* à travers le développement de capacités conceptuelles et opérationnelles telles que :
  - l'examen de situations et phénomènes
  - l'identification de propriétés invariantes ou non, analogies et différences
  - l'organisation et le traitement des données
  - l'identification d'un problème et la conjecture d'un résultat
- ✓ l'évaluation de la cohérence entre les hypothèses formulées et les résultats expérimentaux
- ✓ Incitation à l'emploi d'un langage d'expression et de communication qui, tout en demeurant spontané, devient de plus en plus clair et précis, en ayant recours aussi aux symboles, aux représentations graphiques qui facilitent l'organisation de la pensée
- ✓ Développement des capacités de synthèse afin de favoriser une clarification progressive des concepts acquis et de permettre l'organisation de questions différentes dans un même schéma logique
- ✓ Éveil d'un intérêt qui favorise l'emploi des capacités intuitives
- ✓ Exhortation graduelle au contrôle de la validité des intuitions et des conjectures à travers des raisonnements de plus en plus structurés.

Étant donné que, d'après l'esprit des rédacteurs, cette discipline doit contribuer au développement et à l'organisation rationnels des connaissances à partir de ce que l'on a acquis à travers l'intuition et l'observation et que son enseignement vise une progression étalée dans le temps du processus de modélisation, le dernier des objectifs cités ci-dessus – tel qu'il est énoncé – se prête à une interprétation en termes d'initiation de l'élève au raisonnement déductif, même si cela n'est manifestement déclaré nulle part.

D'après les intentions des instructions officielles **françaises**, l'enseignement des mathématiques - géré par un professeur différent d'une année à l'autre et n'enseignant pas d'autres disciplines scientifiques - ne se réduit pas seulement à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations mais aussi à la capacité de mobiliser ces connaissances pour résoudre des problèmes. Même si les rédacteurs ne le disent pas explicitement, l'entraînement à la pratique d'une *démarche*

scientifique représente une motivation de base dans l'éducation mathématique. Autrement, les objectifs peuvent être **résumés** de cette façon :

- ✓ Prise de conscience de ce qu'est une activité mathématique à travers le développement de capacités telles que :
  - l'identification d'un problème, l'aptitude de recherche et de découverte
  - la conjecture d'un résultat
  - la construction d'une argumentation
  - la rédaction d'une solution
  - le contrôle des résultats obtenus et de leur pertinence en fonction du problème posé
- ✓ Développement conjoint et progressif des capacités d'expérimentation, d'imagination et d'analyse critique
- ✓ Apprentissage des différentes formes d'expression autres que la langue usuelle
- ✓ Participation à l'enrichissement de l'emploi de la langue, en particulier par la pratique de l'argumentation
- ✓ Entraînement progressif au raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration[13].

On voit donc que la composante déductive est manifestement prise en compte par les rédacteurs **français**. Même si, ici, ils ne parlent pas explicitement d'intuition, il nous semble en reconnaître des traces : d'une part le développement des capacités d'*imagination* se prête à une interprétation en terme de développement des capacités intuitives, d'autre part, puisque *les élèves doivent devenir progressivement capables d'observer les réalités et qu'il est indispensable que les connaissances prennent du sens à partir des questions qu'ils se posent*, il nous semble que l'idée sous-jacente est que l'accès au monde de la déduction doit s'accomplir au moyen de l'intuition mais que le raisonnement déductif doit être aussi saisi par l'élève en tant que procédé pour contrôler – valider ou bien infirmer – ses intuitions.

I.2 Suggestions méthodologiques, organisation de l'enseignement

En ce qui concerne les suggestions méthodologiques, on reconnaît le même esprit de fond : on incite à privilégier une approche expérimentale où le lien avec la réalité demeure indispensable. Pour ce faire, les instructions officielles proposent – plus ou moins explicitement et en conformité avec les objectifs visés – d'élaborer des activités où l'élève puisse apprendre à observer des faits et à les analyser dans les détails, à reconnaître et à poser des problèmes, à conjecturer des solutions et ensuite à les traduire et à les interpréter en termes mathématiques, l'habitude d'organiser avec cohérence ses idées et de les exprimer à travers un langage de plus en plus précis étant un élément essentiel.

Dans les instructions officielles **italiennes**, les suggestions de méthodes à pratiquer dans la classe de mathématiques ne sont pas largement traitées.

Dans une introduction générale, valable pour tous les enseignements, on reconnaît les points

[13] Signalons que le terme *démonstration* n'apparaît que dans les textes officiels de la classe de Troisième. Nous verrons plus loin que, dans les programmes officiels actuels, dès la classe de Cinquième, les rédacteurs parlent explicitement d'*apprentissage progressif de la démonstration*.

principaux sur lesquels le professeur doit appuyer son programme éducatif : il bâtira les activités et les cours de manière à atteindre des objectifs d'apprentissage qui prennent en compte les situations de départ des élèves et les connaissances acquises durant le cycle primaire, en déterminant ainsi les méthodes et les instruments qui, d'après lui, sont les plus appropriés.
En particulier, pour les mathématiques, on fait ressortir surtout l'importance du processus d'initiation à la méthode scientifique, tout en respectant le développement génétique de l'élève. En visant une progression étalée dans le temps du processus de modélisation et en considérant que toute notion acquise doit s'intégrer dans un réseau de plus en plus structuré, l'enseignant choisira des situations qui stimulent la curiosité et l'intuition et des procédures actives de recherche qui permettent une participation directe et efficace de l'élève à une construction rationnelle de ses connaissances.

Les contenus des programmes étant globaux et répartis par thèmes, le rôle de l'enseignant ne consiste pas seulement à organiser ses cours "au jour le jour" en alternant convenablement les thèmes mais aussi à programmer sur les trois années scolaires leur déroulement et – le cas échéant – leur connexion relative ainsi que leur lien avec les autres disciplines scientifiques (compte tenu de ce que celles-ci sont gérées par le même enseignant) et non scientifiques.

Pour les mathématiques et les sciences expérimentales, six heures hebdomadaires sont prévues : bien que ce ne soit pas possible d'établir une répartition horaire nette, il paraît nécessaire que l'enseignant prévoie, pour chaque année, une distribution équilibrée du temps à consacrer respectivement aux deux enseignements.

Dans les instructions officielles **françaises**, au contraire, ces suggestions sont très bien explicitées. En accord avec les objectifs, elles se développent sur plusieurs points principaux.
Pour la compréhension et la mise en œuvre des nouveaux concepts et l'approfondissement des connaissances acquises, on suggère :

> "... les séquences courtes (information donnée par le professeur, exercice d'application directe, réponse et commentaire) doivent se combiner avec des séquences plus longues. Celles-ci sont centrées sur l'étude de situations mettant en jeu les «outils» visés et utilisés, selon le cas, comme terrain d'observation ou comme champ d'intervention des connaissances... les professeurs vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des «outils»... afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des «outils» qui permettront un enchaînement vers une connaissance meilleure ou différente".

Concernant la prise en compte de l'hétérogénéité des élèves, on lit :

> "On devra privilégier l'activité de chaque élève. Mais on n'oubliera pas la nécessité d'une pédagogie n'assujettissant pas tous les élèves aux mêmes rythmes, sans que soit délaissé l'objectif d'acquisition commune... Les activités choisies doivent... permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que les connaissances solidement acquises par tout le monde".

Afin de développer les capacités de raisonnement, on conseille :

> "Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures... Fournir aux élèves, aussi souvent

que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats... en prévoyant divers cheminement qui permettent de fructueuses comparaisons... Ménager des séquences déductives motivantes, de plus en plus prolongées, nombreuses et de difficulté progressive au long des quatre années de collège".

On met l'accent ensuite sur l'intérêt des connaissances mathématiques en interaction avec d'autres disciplines et avec la vie quotidienne, sur l'importance de choisir toujours des arguments accessibles aux élèves afin de ne pas perturber leur développement génétique, sur l'importance d'accorder constamment une place remarquable au langage et à son utilisation correcte à travers, entre autres, l'apprentissage de la lecture et de la compréhension d'un texte mathématique.

À l'égard des contenus, ils sont répartis par années et détaillés en rubriques : le rôle de l'enseignant consiste donc à organiser l'année scolaire en les alternant convenablement sans pourtant oublier les compétences exigibles prescrites dans les instructions officielles.

Pour les mathématiques, trois heures hebdomadaires sont prévues dans les classes de Sixième et de Cinquième et quatre heures pour les autres classes.

Dans cette perspective, où l'acquisition d'une *méthode scientifique*, une *approche par les problèmes* et une *participation active de l'élève* acquièrent une signification majeure, il paraît évident que, pour les rédacteurs des deux textes, le projet éducatif ne consiste plus à dispenser *magistralement* du savoir indépendamment du savoir-faire, les contenus et la pratique avançant du même pas. Nous reconnaissons donc que ces éléments sous-entendent des indications sur les méthodes et sur l'organisation de l'enseignement : l'identification et l'analyse d'un problème peuvent aider l'enseignant à introduire les contenus et, réciproquement, les contenus peuvent être utiles pour poser des problèmes. La tâche de l'élève n'étant plus seulement "j'apprends, j'applique", il devrait saisir que la résolution d'un problème est source d'enrichissement : c'est ainsi qu'il pourra prendre conscience du caractère d'«outil» des mathématiques et de la manière dont celles-ci peuvent l'aider à développer et à organiser rationnellement ses intuitions et ses idées ; en lui apprenant à aborder le même problème selon des points de vue différents nécessitant le recours à des méthodes variées ou bien à relier des questions apparemment indépendantes en essayant de simplifier à travers des techniques appropriées ce qui paraît complexe ou encore à découvrir qu'il existe des problèmes non résolubles, il pourra s'habituer à *apprécier convenablement des affirmations et des informations pour aboutir finalement à des convictions fondées et à des résolutions conscientes.*

I.3 Finalités et objectifs de l'enseignement de la géométrie

Nous constatons que les instructions officielles **italiennes** prescrivent un enseignement *dynamique* de

la géométrie dans lequel le chapitre sur les transformations géométriques semblerait jouer un rôle décisif. L'intention de dispenser une éducation scientifique qui tient compte des innovations didactiques, pédagogiques et disciplinaires semble être manifestement explicitée :

> "L'étude de la géométrie tirera parti d'une présentation non statique des figures afin de rendre évidentes leurs propriétés pendant leur déplacement ; il sera aussi préférable d'utiliser du matériel et de recourir au dessin. La géométrie dans l'espace... devra aussi éduquer à la vision spatiale. C'est dans cette conception dynamique qu'il faut aborder le thème sur les transformations géométriques".

Les innovations introduites visent des modifications de l'enseignement de la géométrie dans les contenus et dans les méthodes. L'objet "transformations géométriques" représente une *nouveauté* : d'après nous, les rédacteurs incitent – sans pourtant le prescrire explicitement – à ce que cela ne soit pas à interpréter comme un nouvel objet s'ajoutant à ceux qui, traditionnellement, constituent l'enseignement de la géométrie, son introduction voulant suggérer un éloignement de l'organisation *statique* de la géométrie d'Euclide pour adhérer à une nouvelle façon d'exposer cette discipline s'inspirant de l'approche proposée à la fin du 19ème siècle par Felix Klein. Il ne s'agit plus donc d'une présentation *statique* des figures comme objets du plan ou de l'espace tridimensionnel mais de la recherche des propriétés des figures à l'aide des transformations géométriques. D'ailleurs, en reliant la citation ci-dessus mentionnée avec l'un des objectifs généraux cités plus haut – celui concernant l'aptitude à "identifier des propriétés invariantes" – il nous paraît clair que le propos des rédacteurs est d'évoquer la définition *moderne* de la géométrie en tant que théorie qui étudie les invariants des figures relatifs à un groupe de transformations.
En outre, puisqu'*il est préférable d'utiliser du matériel et de recourir au dessin,* à savoir que tout raisonnement doit se développer à l'aide de l'intuition et de la manipulation d'objets concrets et d'instruments, cela conduit à reconnaître – en accord avec les objectifs généraux et les suggestions méthodologiques – une exhortation à développer chez l'élève l'*attitude de l'intuition rationnelle.*

Dans les instructions **françaises,** les objectifs relatifs à l'enseignement de la géométrie progressent selon le niveau scolaire concerné et les objets en question. Pourtant, on identifie des aspects généraux qui reviennent au fil des années :

- les travaux géométriques doivent prendre appui sur l'usage des instruments de dessin et de mesure et cet usage doit se parfaire au fur et à mesure ;
- l'objectif essentiel demeure la description et la représentation d'objets géométriques usuels dans le plan et dans l'espace ;
- les travaux effectués doivent comporter l'initiation et l'entraînement progressif au raisonnement déductif ;
- les transformations géométriques jouent un rôle fondamental dans l'enrichissement et la réorganisation des connaissances.

De même ici, nous remarquons que l'objet "transformations géométriques" ne concerne pas seulement les contenus mais aussi les méthodes car, au fil des années, c'est autour de cet objet que la géométrie doit se développer. Nous constatons qu'un passage tempéré de *l'attitude de l'intuition rationnelle* vers l'*attitude rationnelle* est pris en compte d'une façon plus explicite. D'après nous, cet aspect est à mettre en relation avec une variable essentielle qui différencie les deux institutions : nous verrons ci-après que, déjà au Collège, les rédacteurs français envisagent clairement l'initiation et l'entraînement ultérieur aux procédures de démonstration tandis que, dans l'institution italienne, cette variable n'est prise en compte explicitement qu'à partir de l'ESS.

Dans l'enseignement, étant donné que la géométrie est le lieu privilégié de la démonstration, nous avons repéré tout élément pouvant nous renseigner à l'égard de la place que la *preuve* occupe dans les programmes en essayant de distinguer deux statuts différents : sa place en tant qu'instrument de validation des théorèmes étudiés ou bien en tant que procédure pour résoudre des problèmes géométriques.

Dans les programmes **italiens**, on n'envisage d'aborder systématiquement la démonstration qu'à partir de la première année de l'**ESS**. Aux niveaux antérieurs, nous avons déjà remarqué une sorte d'ambiguïté par rapport à l'apprentissage du raisonnement déductif et rien d'autre n'est dit ailleurs à ce propos-là ; pourtant – en conformité avec les finalités visées à l'**ESI** – nous croyons que les rédacteurs sous-entendent, le cas échéant, un recours à des preuves de type pragmatique.

Dans les programmes **français**, on parle d'enrichissement de l'emploi du langage mathématique par la pratique de l'*argumentation*, d'initiation et d'apprentissage progressif du raisonnement déductif *de façon à développer les capacités de découverte et de conjecture autant que de démonstration* ; on incite l'enseignant à ménager des séquences déductives motivantes, de plus en plus prolongées et de difficulté progressive, ce qui sous-entend la prise en compte de l'enseignement de procédures démonstratives et donc d'un passage mesuré des preuves pragmatiques vers les preuves intellectuelles – sans pourtant en abuser car *il ne faut pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes*[14]. À l'égard de la preuve en tant qu'instrument de validation des résultats figurant au programme, ce statut est à traiter avec beaucoup de précaution : son emploi est fixé dans les commentaires qui accompagnent l'explicitation des contenus où, en général, les rédacteurs précisent les propriétés qui doivent être admises ; en outre, ils soulignent, le cas échéant, que les propriétés caractéristiques étudiées doivent être formulées à l'aide de deux énoncés séparés.

---

[14] À ce propos, cf. Cousin-Fauconnet A. (1995), *Enseigner la géométrie au collège*. Ici, l'auteur établi un certain nombre de *propriétés perçues comme évidentes*. Il fait remarquer qu'il y en a certaines qui, en effet, correspondent aux axiomes de la géométrie savante et d'autres qui *ne peuvent pas être pleinement justifiées au niveau de l'enseignement secondaire, ni même complètement explicitées*.

Plus loin, nous aurons l'occasion d'examiner plus en détail ces quelques aspects ainsi que la question relative au système d'axiomes sous-jacent dans les deux organisations et de l'approfondir lors de l'analyse des manuels scolaires.

II. *LA CLASSE DE SECONDE ET L'ÉCOLE SECONDAIRE SUPERIEURE*

A la fin de l'**ESI**, la passation d'une sorte de brevet, nommé *licenza media*, décrète le passage de l'élève italien d'une école d'orientation à une école de formation : il a le choix entre un ensemble de filières scientifiques et un ensemble de filières littéraires. Nous verrons ensuite que ce changement coïncide avec une rupture d'ordre didactique et pédagogique.

Voici donc une autre différence, à savoir deux ans de décalage par rapport au choix de la formation : à la fin de la Troisième, l'élève français passe le brevet et reçoit une première orientation vers l'enseignement professionnel ou l'enseignement général mais la Seconde demeure une classe avec un même programme *pour tous les élèves* de l'enseignement général, conservant un caractère d'orientation.

II.1 Finalités et objectifs dans l'enseignement des mathématiques

L'enseignement des mathématiques à l'**ESS** doit permettre à l'élève de prendre conscience du double caractère de cette discipline :

> "Les mathématiques... ont toujours opéré sur deux fronts : d'une part, elles ont permis de résoudre des problèmes et de répondre aux hautes questions que l'homme se posait au fur et à mesure sur la signification de la réalité ; d'autre part, en se développant indépendamment, elles ont posé des interrogations captivantes sur la portée, la signification et le fondement de leurs propres constructions culturelles... En accord avec cela, l'enseignement des mathématiques s'est toujours orienté dans deux directions différentes : d'une part, 'lire le livre de la nature' et mathématiser la réalité ; d'autre part, symboliser et formaliser ses propres instruments de lecture à travers la construction de modèles interprétatifs...".

Les finalités visées sont clairement exprimées. Entres autres, elles favorisent :

- ✓ le développement des capacités intuitives et logiques
- ✓ les capacités d'utilisation de procédures heuristiques
- ✓ la maturation des processus d'abstraction et de formation de concepts
- ✓ la capacité de raisonnement inductif et déductif
- ✓ le développement des attitudes analytiques et synthétiques
- ✓ l'habitude de la précision du langage
- ✓ le développement des capacités d'argumentation.

Ces finalités *sont communes à toutes les filières car, en accord avec l'enseignement des autres*

disciplines, elles participent...à la formation humaine de tous les jeunes, même ceux qui n'entameront pas d'études scientifiques et ceux qui décident de s'orienter vers le monde du travail[15].

À l'égard des objectifs généraux d'apprentissage, à la fin des deux premières années de l'**ESS**, l'élève est censé avoir acquis des aptitudes, parmi lesquelles certaines concernent expressément la géométrie ; notamment :

- ✓ identifier les propriétés d'invariance pour les transformations élémentaires
- ✓ démontrer les propriétés de figures géométriques
- ✓ reconnaître concepts et règles de la logique dans des situations d'argumentation et de démonstration.

Voici donc que le développement de l'*attitude rationnelle* trouve explicitement sa place dans les programmes **italiens**. Néanmoins, le sens du deuxième point – démontrer les propriétés de figures géométriques – paraît ambigu : l'élève devrait-il être capable d'utiliser les procédures démonstratives pour établir des propriétés ou bien de reproduire les résultats des démonstrations du cours ? Nous verrons plus loin ce qui est dit à ce propos sous la rubrique relative à l'enseignement de la géométrie. Nous remarquons enfin que le premier point semble exprimer une recommandation, de la part des rédacteurs, d'aborder l'étude des transformations géométriques.

Pour la **classe de Seconde**, les finalités respectent les lignes tracées au collège. On lit :

> "...la classe de mathématiques est d'abord un lieu de **découverte**, d'**exploitation de situations**, de **réflexion** et de **débat** sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de synthèse dégageant clairement quelques idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée."

Entres autres, on favorise toujours :

- ✓ l'entraînement à la pratique d'une démarche scientifique (formulation de problèmes, conjectures, expérimentation, etc.)
- ✓ le travail personnel de l'élève à travers des activités de résolution de problèmes et d'acquisition de méthodes
- ✓ le développement des capacités d'organisation et de communication.

Contrairement aux italiennes, les instructions **françaises** soulignent à plusieurs reprises l'importance de l'acquisition de méthodes.

II.2 Suggestions méthodologiques, organisation de l'enseignement

À propos des méthodes suggérées pour élaborer un programme d'enseignement, les instructions relatives aux deux institutions, retracent en substance les idées rencontrées pour les cycles précédents.

---

[15] Comme dans les instructions officielles de l'ESI, nous retrouvons ici l'idée qu'une éducation de type scientifique est fondamentale à la formation de tout individu, un aspect qui s'oppose à l'esprit des programmes anciens où l'on ne reconnaissait aux mathématiques aucune valeur formatrice sinon leur utilité pratique (cf. Vita V., 1986, ouvrage déjà cité).

Pour l'**ESS**, encore une fois, l'*approche par les problèmes* demeure un élément crucial des programmes scolaires. En organisant les activités et les cours, le professeur – qui est le même pendant les deux années – choisira des situations propres à faire surgir spontanément conjectures, hypothèses et questions traduisibles en termes mathématiques. Ce choix sera mis en place grâce à :

- ✓ l'évaluation des disponibilités psychologiques et des niveaux de départ de chaque élève
- ✓ l'analyse et la détermination des objectifs d'apprentissage
- ✓ l'analyse et la sélection des contenus
- ✓ la caractérisation de méthodes et techniques opportunes
- ✓ l'adoption de modalités adéquates d'évaluation.

Pour les mathématiques, cinq et quatre heures hebdomadaires sont prévues respectivement pour la première et la deuxième année de l'ESS.

Comme au collège, le professeur de la **classe de Seconde** *garde toute liberté pour l'organisation de son enseignement* en assurant *un bon équilibre entre les différentes parties* du programme et une bonne articulation ancien-nouveau et sans oublier de ne fonder ses évaluations que sur les *capacités mentionnées comme exigibles*.

Ici, l'entraînement aux procédures démonstratives est conduit dans l'esprit des classes antérieures. Par contre, relativement à la preuve en tant que moyen de validation des théorèmes étudiés, c'est au professeur de décréter l'opportunité de les admettre ou de les prouver, à l'exception de quelques théorèmes que les commentaires qui accompagnent les programmes demandent d'admettre ; rien n'est dit explicitement sur le type de preuve permettant de valider les résultats mais, vu le niveau concerné, nous croyons que les rédacteurs sous-entendent des preuves de type intellectuel.

Pour les mathématiques, l'horaire hebdomadaire est réparti de la façon suivante : deux heures et demi de cours, quarante cinq minutes de *module* et une heure dispensée en *travaux pratiques*[16].

II.3 Finalités et objectifs dans l'enseignement de la géométrie

En ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, nous remarquons que les finalités visées à ce niveau scolaire, sont substantiellement différentes. Nous lisons :

[16] Cette répartition des heures étaient valable jusqu'en 1999. Dans les *travaux pratiques*, les élèves sont répartis en demi-classes fixes que le professeur prend à tour de rôle. Dans les *modules*, le professeur est entièrement libre de l'organisation : il réunit une partie des élèves sur un objectif précis, les groupes varient suivant l'objectif.

"En géométrie plane comme en géométrie dans l'espace, tout point de vue axiomatique est exclu. La pratique des figures doit tenir une place centrale, car elle joue un rôle décisif pour la maîtrise des notions mathématiques mises en jeu... (pour la géométrie dans le plan) il s'agit d'entraîner les élèves à résoudre des problèmes concernant des configurations (usuelles)... on utilise les acquis du collège sur les configurations de base et leur symétries... (pour la géométrie dans l'espace) les objets usuels étudiés au collège constituent un terrain privilégié pour les activités... dégager progressivement quelques énoncés concernant les droites et les plans de l'espace... la géométrie dans l'espace est utilisée comme terrain pour mobiliser des acquis d'algèbre, d'analyse et de géométrie plane...".

"La finalité principale de l'étude de la géométrie au cours des deux premières années de lycée est de mener progressivement l'élève de l'intuition et la découverte de propriétés géométriques à leur description rationnelle ; celle-ci représente donc la voie privilégiée vers l'argumentation. L'enseignant peut y parvenir à travers une méthode qui tient compte des connaissances intuitives acquises antérieurement et progresse vers le développement rationnel d'un nombre limité d'enchaînements déductifs ; pourtant, il faut que toute hypothèse ou énoncé admis soient manifestement reconnus et formulés de façon explicite, quelles que soient les raisons qui amènent à les choisir en tant que point de départ de l'argumentation. C'est à l'enseignant d'entamer la phase heuristique du processus d'axiomatisation à partir de situations simples empruntées à divers domaines. Cela dans la perspective de familiariser les élèves avec la méthode hypothético-déductive et aboutir, dans les années suivantes, à la construction d'un système d'axiomes pour la géométrie élémentaire... il est préférable... de programmer un choix des propriétés (théorèmes) des figures planes à démontrer, en ayant recours à la géométrie des transformations ou bien en suivant un parcours traditionnel...".

Nous voyons donc que ce n'est qu'à partir de l'**ESS** qu'en Italie l'apprentissage de la démonstration est explicitement envisagé (décalage d'un an). Mais celle-ci n'est pas la seule différence car, contrairement aux finalités visées dans le lycée français, l'enseignement de la géométrie – pendant les deux premières années de ce cycle – doit préparer le terrain pour parvenir, dans les années qui suivent, à l'étude *explicite* de la géométrie euclidienne en tant que modèle de système hypothético-déductif.

Il paraît évident que, dans l'esprit des rédacteurs, deux aspects fondamentaux sont mis en cause : la place de la démonstration dans son double statut ainsi que l'intention de dispenser une vision globale de la discipline en question. Le projet serait ambitieux si l'on voulait ménager un enseignement où ces deux aspects avancent du même pas. La question s'éclaircit lorsqu'on poursuit la lecture des textes officiels car c'est seulement dans les programmes des trois dernières années de l'**ESS** que nous lisons :

"Les sujets de géométrie indiqués pour les trois dernières années sont à voir en liaison étroite avec les sujets suggérés pour les deux premières années et complètent la formation de l'élève en lui offrant une vision, autant que possible, exhaustive de la discipline... Le changement de repère permettra d'écrire les équations des isométries, déjà étudiées au cours des deux premières années par voie synthétique ; de celles-ci on passera aux équations des similitudes et puis aux équations des transformations affines... Cette procédure, qui s'inspire du modèle de la géométrie de Klein, visera à montrer à l'élève le développement progressif des groupes de transformations et de quelle façon les propriétés caractérisant les diverses figures se réduisent au passage de la géométrie des congruences à la géométrie des transformations affines... La présentation des géométries non euclidiennes... sera utile pour éclaircir la signification d'axiome et système hypothético-déductif ; la démonstration élémentaire de quelques propriétés fondamentales des géométries non euclidiennes et la construction de modèles représentatifs pourront être précédés, si cela est considéré comme pédagogiquement avantageux, de la présentation des tentatives les plus significatives de la démonstration du cinquième postulat d'Euclide. La réflexion critique conduira l'élève... à organiser axiomatiquement la géométrie euclidienne... et donc à saisir le concept de théorie mathématique formalisée et la signification de problématiques méta-théoriques relatives".

Nous constatons que l'*attitude formelle* n'est à développer pleinement qu'au cours de la dernière année

de l'**ESS**. En effet, parmi les contenus de la géométrie figurant au programme de cette dernière année, on trouve les chapitres suivants :

1. Les géométries non euclidiennes d'un point de vue élémentaire.
2. La méthode hypothético-déductive : concepts primitifs, axiomes, définitions, théorèmes ; cohérence et indépendance d'un système d'axiomes. Systèmes formels et modèles.
3. Les axiomes de la géométrie euclidienne.

Un autre élément permet de saisir clairement la nécessité d'un développement progressif et tempéré d'une attitude vers l'autre : lorsqu'on lit les finalités relatives à la dernière tranche de l'**ESS**, les rédacteurs précisent que pendant cette phase de la vie scolaire, l'étude des mathématiques vise, entre autres, *l'acquisition de connaissances à des niveaux plus élevés d'abstraction et de formalisation* ainsi que le développement de *l'attitude qui consiste à réexaminer de façon critique et à réorganiser logiquement les connaissances acquises antérieurement.*

Il nous semble donc que le fait de conduire progressivement l'élève à une construction axiomatique du savoir géométrique et non pas de lui dispenser un savoir complet et déjà bâti est un élément qui demeure essentiel dans l'esprit des rédacteurs.

Il reste à comprendre les intentions à propos de l'articulation de la démonstration dans son double statut d'instrument de validation des théorèmes étudiés et de procédure pour résoudre des problèmes.
Si l'objectif primordial est que l'élève saisisse la manière dont le savoir géométrique a été *construit*, il nous paraît que – d'après les intentions des rédacteurs – les deux aspects sont à prendre en compte conjointement en prenant garde de bien les équilibrer : rien n'empêche de délimiter le choix des théorèmes à étudier en admettant des résultats, en en démontrant d'autres ou en en omettant d'autres encore, l'apprentissage des procédures démonstratives étant un aspect qui aide l'élève à saisir le *processus constructif* de cette discipline. Au contraire, un abus de démonstrations déjà toutes faites, peut fonctionner comme obstacle à cette prise de conscience et devenir une méthode stérile car ce n'est pas seulement en apprenant du savoir qu'on apprend à l'utiliser.

Il nous semble donc reconnaître que – d'après les intentions des rédacteurs italiens – dans l'étude de la géométrie, il faudra bien distinguer deux phases :

- dans un premier temps, où l'*attitude rationnelle* face à la géométrie acquiert une priorité fondamentale, l'élève apprendra les procédures démonstratives en ayant à sa disposition un certain nombre de propriétés géométriques ;
- c'est seulement plus tard que l'*attitude formelle* se développe : les connaissances acquises feront l'objet de réflexions et fourniront l'occasion de proposer la géométrie en tant qu'exemple de système axiomatique formel et, encore, de lui montrer que la géométrie euclidienne n'est qu'un modèle parmi d'autres.

Enfin, nous remarquons que l'enseignant **italien** garde toute liberté à propos du parcours à suivre pour entraîner l'élève à prouver : il aura le choix d'organiser son programme d'enseignement selon une approche traditionnelle ou bien en ayant recours à la géométrie des transformations[17]. Cela est possible puisque, comme nous le verrons dans la partie suivante, les nouveaux programmes comprennent aussi bien les critères de congruence et de similitude des triangles – outils permettant un parcours traditionnel – que les transformations géométriques.

Comme nous avons pu le constater plus haut, dans l'institution **française**, l'initiation au raisonnement déductif doit commencer explicitement depuis la première année de collège pour devenir, en Quatrième, un apprentissage systématique qui conduira l'année d'après à des véritables exercices de démonstration. Néanmoins, la théorie axiomatique sur laquelle l'enseignement de la géométrie s'appuie, est dissimulée et doit rester implicite : les rédacteurs insistent sur l'importance de développer chez l'élève l'*attitude rationnelle*, en l'harmonisant convenablement avec l'*attitude de* l'*intuition rationnelle*, mais rejettent un développement possible de l'*attitude formelle*, en excluant tout renvoi au point de vue axiomatique.

Nous verrons plus loin que l'approche à suivre pour développer la géométrie est effectivement dictée par le choix des contenus prescrits dans les programmes et que des commentaires détaillés définissent expressément leur portée.

Sur les responsabilités de l'enseignant dans les textes officiels

Avant de terminer cette lecture, il nous paraît important de tenir compte du rôle de l'enseignant et de ses responsabilités au sein de l'institution scolaire. Dans les instructions du collège et de l'ESI, nous lisons :

> "Le choix des méthodes et des démarches relève de la responsabilité du professeur, sous réserve que soient atteints les objectifs et acquises les connaissances. La liberté des méthodes pédagogiques libère la force de l'esprit et stimule la capacité d'innovation... Il est nécessaire que les professeurs possèdent dès le départ une solide formation professionnelle, qui nécessite la maîtrise des disciplines qu'ils enseignent, la connaissance du métier qu'ils exercent. Cette formation doit correspondre aux nouveaux objectifs de méthode et de connaissance fixés par les programmes. Mais il est non moins nécessaire qu'avec l'aide de la formation continue, et à leur propre initiative, ils

> "(il faut) une formation approfondie aussi bien du point de vue culturel spécifique que d'un point de vue didactique et pédagogique. Par conséquent, (il faut) une mise à jour permettant à l'enseignant de moderniser ses propres connaissances et d'acquérir les outils nécessaires pour accomplir consciemment sa tâche. Dans le respect des droits de l'élève, l'enseignant - acteur principal des choix pédagogiques - doit, en même temps, agir de manière à atteindre les niveaux éducatifs et culturels suggérés par les programmes".

[17] A ce propos, cf. Crespina E., Menghini M., Percario L. (1995), *Geometria "tradizionale" e geometria "delle trasformazioni" : itinerari a confronto*, dans *Atti del 17° Convegno UMI-CIIM*, Latina 27-29 ottobre 1994, supplément à NUM, n. 8-9. En s'adressant aux enseignants du secondaire supérieur, les auteurs proposent un parcours à suivre selon l'approche choisie, l'une s'appuyant sur l'axiomatique de Euclide-Hilbert, l'autre sur l'axiomatique de Choquet.

cherchent toujours à apprendre pour actualiser leurs connaissances, pour approfondir la didactique de leurs disciplines et mieux maîtriser l'ensemble des méthodes pédagogiques".	

Concernant la liberté laissée au professeur dans l'organisation de son enseignement, nous aurons l'occasion, par la suite, de constater certains effets que cette faculté produit au sein de l'institution italienne.

En résumant...

Nous résumons ci-après les différences principales concernant les deux systèmes éducatifs pendant les cinq ans qui nous intéressent :

Scolarité obligatoire jusqu'à 16 ans	Scolarité obligatoire jusqu'à 14 ans
Passation *facultative* du brevet à 15 ans (fin du Collège)	Passation *obligatoire* de l'examen de *licenza media* à 14 ans (fin du ESI)
De la Sixième à la Troisième, une école pour tous et première orientation en fin de Troisième vers l'enseignement professionnel	ESI, une école d'orientation pour tous avec orientation finale
En Seconde, une classe d'orientation pour tous les élèves de l'enseignement général	ESS, une école de formation séparée en sections (filières littéraires, scientifiques, professionnelles...)
De la Sixième à la Seconde, le professeur de mathématiques peut changer d'une année à l'autre	À l'ESI, un seul professeur de mathématiques pendant les trois ans
	À l'ESS, un seul professeur de mathématiques pendant les deux premières années

A propos des objectifs et des suggestions méthodologiques, les différences principales sont les suivantes :

Enseignement de la géométrie fondé sur les transformations géométriques	A l'ESI, enseignement s'appuyant sur les transformations géométriques (approche naïve)
	A l'ESS, choix entre un enseignement traditionnel de la géométrie ou un enseignement fondé sur les transformations géométriques
Initiation au raisonnement déductif à partir de la classe de Sixième	
Apprentissage systématique de la démonstration à partir de la classe de Troisième	Apprentissage de la démonstration à partir de la première classe de ESS
Tout point de vue axiomatique est exclu	L'enseignement vise à offrir une vision complète de la géométrie en tant que modèle d'un système hypothético-déductif appuyé sur des axiomes qui devraient n'être explicités que dans les années ultérieures

D'après les textes officiels…

Initiation au raisonnement déductif	Sixième	Géométrie des transformations	11-12 ans	Géométrie des transformations	1ère ESI	Initiation au raisonnement déductif
	Cinquième		12-13 ans		2ème ESI	
Entraînement systématique au raisonnement déductif	Quatrième		13-14 ans		3ème ESI	
Apprentissage et entraînement progressif aux procédures démonstratives	Troisième		14-15 ans	Géométrie des transformations ou Géométrie Traditionnelle	1ère ESS	Apprentissage et entraînement aux procédures démonstratives
	Seconde		15-16 ans		2ème ESS	
					(ensuite)	Étude de la Géométrie en tant que modèle de système hypothético-déductif

… mais dans la réalité ?

III. *EXPLICITATION DES CONTENUS D'APRES LES TEXTES OFFICIELS*

Nous transcrivons ci-après les contenus des programmes scolaires tels qu'ils sont libellés dans les textes officiels. La nature différente de ces textes justifie la démarche suivie par la suite, notamment un premier recours aux manuels scolaires afin de mieux préciser les objets qui constituent les textes du savoir T_{GF} et T_{GI}.

Dans deux paragraphes distincts, nous décrivons la structure utilisée pour présenter respectivement les textes T_{GI} concernant l'ESI et l'ESS et les textes T_{GF} concernant le collège et la classe de Seconde et reproduisons les parties qui nous intéressent davantage.

III.1 Les programmes scolaires italiens

Les contenus des programmes de l'ESI

Pour les mathématiques, la structure des programmes est globale et ne respecte plus une subdivision classique qui prévoyait un enseignement de chaque chapitre indépendamment l'un de l'autre : *les contenus sont regroupés en thèmes dont l'ordre ne coïncide pas avec le découpage annuel, cela dans le but de faciliter le repérage des idées qui apparaissent essentielles au développement de la pensée mathématique des élèves*. Chacun de ces thèmes comprend plusieurs points – *Contenus relatifs aux thèmes* – dont les objets concernés demeurent souvent implicites ; d'après l'esprit des rédacteurs, au cours des années scolaires, ils doivent alterner et s'intégrer dans un itinéraire pédagogique le plus convenable, selon le jugement de l'enseignant. On peut reconnaître ici une incitation à proposer une image *moderne* des mathématiques suggérant une idée unitaire de la discipline en question.

Parmi les sept thèmes envisagés, deux (distincts) portent sur la géométrie, à savoir :

(I) *La géométrie, première représentation du monde physique.*

(II) *Transformations géométriques.*

La *géométrie analytique* fait l'objet d'un autre thème, nommé "La méthode des coordonnées" : ici, entre autres, les rédacteurs suggèrent de considérer quelques transformations géométriques dans un repère cartésien. Ensuite, un thème porte sur les "Ensembles numériques" ; la *logique*, les *probabilités*, les *statistiques* font l'objet d'un même thème nommé "Mathématiques de la certitude et mathématiques du probable" – ce qui est à interpréter comme une incitation à spécifier la nature du raisonnement inductif et déductif et à mettre l'accent sur les interprétations différentes de certains phénomènes suivant la logique, naturelle ou formelle, sur laquelle ils se fondent ; l'*algèbre* fait l'objet d'un thème nommé "Problèmes et équations" : à ce propos, les rédacteurs précisent que *"résoudre un problème"*

ne signifie pas seulement appliquer des règles figées à des situations déjà schématisées mais veut dire aussi aborder des problèmes bruts qui demandent à l'élève un engagement complet dans la traduction en termes mathématiques. Un dernier thème transversal, nommé "Correspondances et analogies de structures", invite à mettre en évidence des analogies et des différences entre situations issues de contextes dissemblables, cela comme une première approche *naïve* de la notion de structure algébrique. Aucune référence explicite ne porte sur l'informatique mais on prévoit l'utilisation d'instruments de calcul tels que les calculatrices.

Dans le tableau ci-dessous, nous notons les objets figurant dans les thèmes relatifs à la géométrie et renvoyons à l'annexe 3 pour la consultation du texte complet.

École Secondaire Inférieure	**La géométrie, première représentation du monde physique** Des objets aux concepts géométriques : à partir de modèles physiques, étude de figures dans le plan et dans l'espace. Longueurs, aires, volumes, angles et leur mesure. Problèmes simples sur les figures de même périmètre et sur les figures de même aire. Le théorème de Pythagore. Constructions géométriques : utilisation de la règle, de l'équerre et du compas[18]. **Transformations géométriques** Isométries planes (ou congruences) – translations, rotations, symétries – à partir d'expériences concrètes. Composition d'isométries. Figures planes directement ou indirectement congruentes. Similitudes planes, notamment homothéties, à partir d'agrandissements et réductions. Réductions à l'échelle. Observations d'autres transformations géométriques : ombres produites par les rayons solaires ou par d'autres sources lumineuses, représentations en perspective (photos, peintures etc.), images déformées, etc. **La méthode des coordonnées** Utilisation de la méthode des coordonnées dans des situations concrètes ; lecture de cartes topographiques et géographiques. Coordonnées d'un point du plan. Représentation et étude de figures simples du plan. Lois mathématiques simples issues du monde physique, économique, etc. et leur représentation dans un repère cartésien : proportionnalité directe et indirecte, dépendance quadratique, etc.

La locution "*des objets aux concepts géométriques*" peut être interprétée comme une intention de ménager un passage progressif de l'espace physique à l'espace géométrique : en d'autres termes, il nous paraît que les rédacteurs suggèrent de bâtir l'enseignement de la géométrie autour d'activités qui permettent l'initiation au raisonnement déductif, cela représentant manifestement la voie à parcourir pour avancer de l'*attitude de l'intuition rationnelle* vers l'*attitude rationnelle*, des *objets* vers les *concepts*.

Compte tenu du fait que la répartition par thème est conçue afin de mettre en évidence les idées

[18] Aucun commentaire ne précise la portée de l'objet *constructions géométriques*.

essentielles à partir desquelles l'élève doit être mis en condition de fonder son apprentissage, il nous paraît que le thème "Transformations géométriques" acquiert une importance majeure, en accord avec ce qu'on lit dans le volet relatif aux finalités.

On saisit clairement qu'il faut développer ce thème à partir d'activités concrètes : il ne s'agit donc pas d'aborder formellement chaque transformation mais plutôt de familiariser l'élève avec ces objets et – en relation avec le thème sur les analogies de structures – de le conduire à dégager leurs invariants. Ainsi deviendront-ils des *outils* à l'aide desquels l'élève découvre les propriétés des figures et organise ses connaissances géométriques.

Or, selon les finalités exprimées, on pouvait s'attendre à ce que les rédacteurs soulignent explicitement la nécessité de considérer les transformations comme un thème transversal car nous redoutons qu'une lecture inattentive puisse plutôt suggérer de les traiter indépendamment des autres objets.

Les contenus des programmes de l'ESS

Le texte de l'**ESS** garde plus ou moins la même structure que celui qui concerne les programmes de l'ESI : les contenus sont globaux[19] pour les deux années et peu détaillés ; ils s'articulent en cinq thèmes – "Géométrie dans le plan et dans l'espace", "Ensembles numériques et calcul (algébrique)", "Relations et fonctions", "Probabilités et Statistiques", "Logique et Informatique[20]" – dont l'ordre proposé n'est pas à interpréter comme un ordre de développement : c'est à l'enseignant de les aborder en les intégrant convenablement et en soulignant les relations existantes. Cependant, quelques unes de ces relations émergent des commentaires qui accompagnent chaque thème. À propos du thème sur la *logique*, par exemple, les rédacteurs précisent que l'objectif principal est d'habituer l'élève à utiliser le langage formel, à formuler correctement les propositions mathématiques et à les enchaîner de façon cohérente pour prouver des théorèmes ; c'est seulement vers la fin des deux premières années de l'**ESS** qu'on doit parvenir à l'étude explicite des règles de déduction. D'ici émerge donc la volonté de considérer la logique surtout comme thème transversal, comme outil indispensable qui contribue à la construction du langage et du raisonnement propres aux mathématiques.

Le thème géométrique comprend aussi le volet sur la géométrie analytique permettant ainsi une liaison avec le calcul algébrique et les fonctions : les rédacteurs recommandent, entre autres, d'interpréter les résolutions des équations, des inéquations en termes géométriques et de relier les fonctions $x \to ax + b$, $x \to ax^2 + bx + c$ et $x \to a/x$ à leur représentation dans un repère cartésien.

Le thème sur les fonctions est approfondi au cours des trois dernières années de l'**ESS** prévoyant, entre autres, la représentation graphique d'une fonction dans un repère, l'étude des fonctions sinus et cosinus et leurs courbes représentatives, etc. Au cours des deux premières années, la notion de fonction doit permettre à l'élève de décrire et de visualiser des lois et des phénomènes issus d'autres domaines ; la

[19] Par contre, pour les trois dernières années de l'ESS, les programmes sont repartis par années.

[20] L'informatique est un thème à développer d'un point de vue théorique ainsi que comme outil à intégrer aux autres thèmes.

représentation graphique de fonctions simples est à voir surtout en termes qualitatifs.

École Secondaire Supérieure	**Géométrie dans le plan et dans l'espace**[21]. Le plan euclidien et ses transformations isométriques. Figures et leurs propriétés. Polygones équidécomposables ; théorème de Pythagore. Homothéties et similitudes dans le plan. Théorème de Thalès. Repère cartésien : droite, parabole, hyperbole équilatère. Cosinus et sinus des angles rentrants. Relation entre les côtés et les angles dans les triangles rectangles. Exemples significatifs de transformations géométriques dans l'espace. Examen de symétries des solides géométriques particuliers. *Objets décrits dans les autres rubriques* : Équations et systèmes d'équations de premier et de second degré. Inéquation de premier degré. Fonctions $x \to ax + b$, $x \to ax^2 + bx + c$ et $x \to a/x$ et leur représentation graphique.

De même ici, les objets liés aux divers points demeurent surtout implicites et aucune indication précise n'est donnée sur le niveau de départ pour les développer. À ce propos, nous constatons que dans une version antérieure des programmes envisagés dans le projet Brocca[22], cet aspect était précisé davantage. Nous lisons :

> "Le programme est conçu dans la continuité de l'école secondaire inférieure, une continuité ... adaptée à la phase ultérieure de développement de l'élève. Il n'est pas réalisable si celui de l'école secondaire inférieure n'a pas été développé de façon exhaustive, car il n'est pas possible d'aborder à un niveau de réflexion rationnelle des thèmes qui n'ont pas été précédemment explorés suivant une approche intuitive – et à travers la manipulation – qui caractérise l'apprentissage avant l'adolescence".

Ce passage, qui a pourtant disparu dans la version la plus récente, traduisait bien la préoccupation explicite des rédacteurs à l'égard d'une harmonisation progressive de l'*attitude de l'intuition rationnelle* vers l'*attitude rationnelle*. Cet aspect peut maintenant se saisir à travers ce qu'on dit sur les finalités et, puisqu'on remarque que – par rapport aux contenus de l'ESI – certains objets réapparaissent, on est conduit à comprendre qu'ils seront abordés à un niveau différent.

Enfin, l'articulation des contenus laisse entendre que, quoi qu'il en soit, les *transformations géométriques* doivent être objets d'enseignement mais qu'éventuellement, si le professeur – en accord avec les finalités – choisit une approche traditionnelle, elles ne deviendront pas des outils de démonstration. Cette obligation d'enseignement (des transformations géométriques) est encore renforcée par les remarques suivantes :

- d'une part l'une des aptitudes que l'élève est censé acquérir consiste à savoir *identifier les propriétés invariantes de transformations élémentaires* ;
- d'autre part, dans les classes suivantes, les transformations géométriques – *déjà étudiées par la voie synthétique* – seront reprises en s'inspirant du modèle géométrique proposé par F. Klein.

---

[21] La plupart des contenus relatifs à la géométrie dans l'espace sont au programme des trois dernières années de l'ESS.
[22] *Circolare Ministeriale*, 29 janvier 1987

III.2 Les programmes français

Les contenus des programmes du Collège

Les contenus des programmes français sont détaillés selon le niveau scolaire concerné, et regroupés en trois rubriques principales : "Travaux géométriques", "Travaux numériques", "Organisation et gestion de données. Fonctions". Comme nous le verrons, la volonté d'offrir une vision unitaire de la discipline s'explicite davantage.

Les *travaux géométriques*, dont les dominantes des contenus sont détaillées ci-après, prennent appui sur l'usage des instruments de dessin et de mesure ; la description et la représentation d'objets géométriques usuels du plan et de l'espace, le calcul de grandeurs attachées à ces objets demeurent des objectifs fondamentaux de cette rubrique ; au cours des années, les connaissances s'organisent et s'enrichissent en se fondant sur les transformations géométriques.

Les *travaux numériques* prennent appui sur la pratique du calcul sous différentes formes ; la *résolution de problèmes* – issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante – constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme.

L'*organisation et la gestion de données* ont pour objectif de familiariser l'élève avec la lecture, l'interprétation et l'utilisation de diagrammes, de tableaux, de graphiques ; ici, les activités proposées se développent autour de situations combinant différents cadres – numérique, graphique et géométrique ; les premiers rudiments des statistiques sont abordés. Le chapitre relatif à la géométrie analytique apparaît à plusieurs reprises dans les diverses rubriques.

L'emploi de calculatrices ainsi que d'un ordinateur est prévu au cours des quatre années.

La liste des contenus est accompagnée d'informations qui *ont pour objet de préciser les objectifs désignés dans les programmes* : ces objectifs figurent en bandeau, sur la gauche on fixe *le sens et les limites des contenus du programme* et sur la droite *les compétences exigibles des élèves*. Nous joignons en annexe 4 le texte concernant la géométrie : nous trouvons là l'aspect le plus important qui différencie les textes français des textes italiens. En effet, la nature des commentaires qui accompagnent la liste des contenus permet de saisir explicitement le niveau de départ pour les développer et leur portée ainsi que certains aspects concernant les méthodes d'enseignement.

Dans le tableau suivant nous ne transcrivons que les dominantes des contenus relatifs à la géométrie.

SIXIEME	Figures planes et aires planes. Reproduction de figures planes simples. Comparaison d'aires planes. Parallélépipède rectangle : description, représentation en perspective, patrons. Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite (symétrie axiale), en exploitant des problèmes nécessitant des manipulations, des dessins et des mesures. Construction de l'image d'un point, d'une figure simple ; mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles, des aires. Exemples d'utilisation de ces propriétés. Construction d'axes de symétrie (médiatrices, bissectrice...). Construction de triangles isocèles, de quadrilatères possédant des axes de symétrie (rectangles, losanges, ...). Énoncé et utilisation de quelques propriétés. Caractéristiques des figures précédentes. *Objets décrits dans les autres rubriques* : Exercices concernant le repérage d'un point sur une droite orientée munie d'une origine et régulièrement graduée. Coordonnées d'un point du plan, en repère orthogonal. Exemples issus d'activités à base géométrique : calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, du volume d'un parallélépipède rectangle, de la longueur d'un cercle. On se servira de ces exemples, selon les cas, pour : reconnaître, s'il y a lieu, une proportionnalité ; déterminer une quatrième proportionnelle ; effectuer un changement d'unité. Initiation aux écritures littérales. Il s'agit, dans des situations concrètes, de schématiser un calcul (périmètre, aire, ...) en utilisant des lettres qui, à chaque usage, seront remplacées apr des valeurs numériques.
CINQUIEME	Prismes droits et cylindre de révolution : description, représentation en perspective, patrons ; aperçus élémentaires sur le parallélisme et l'orthogonalité dans l'espace. Dans le plan, transformation de figures par symétrie centrale en exploitant des situations-problèmes nécessitant des manipulations, des dessins et des mesures. Construction de l'image d'un point, d'une figure simple ; mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles, des aires. Exemples d'utilisation de ces propriétés. Caractérisations angulaires du parallélisme. Construction et caractérisation du parallélogramme. Exemple de figures simples ayant centre(s) ou axe(s) de symétrie. Triangle: somme des angles, aire, construction du cercle inscrit. *Objets décrits dans les autres rubriques* : Équations numériques du type $a + x = b$ ou $ax = b$ ($a \neq 0$). Exemples issus d'activités à base géométrique : échelles ; calcul de l'aire d'un parallélogramme, d'un triangle, du volume d'un prisme droit, de l'aire du disque, de l'aire et du volume d'un cylindre de révolution.
QUATRIEME	Dans le plan, projection sur une droite, selon une direction. Conservation du milieu par projection ; configurations triangulaires prenant appui sur cette propriété. Projection orthogonale ; cosinus d'un angle comme opérateur de projection orthogonale. Problèmes de plus courte distance : inégalité triangulaire ; distance d'un point à une droite. Triangle : médianes et centre de gravité, hauteurs et orthocentre, bissectrices et cercle inscrit. Triangle rectangle : cercle circonscrit ; propriété de Pythagore et sa réciproque. Sphère: section par un plan, aire et volume. Dans le plan, transformation de figures par translation ou rotation ; translation et vecteur ; polygones réguliers. *Objets décrits dans les autres rubriques* : Applications linéaires et proportionnalité : représentation graphique d'une application linéaire ; notion de coefficient directeur, de pente.

TROISIEME	Énoncé de Thalès relatif au triangle et sa réciproque, application à des problèmes de construction (moyenne géométrique...). Pyramide et cône de révolution ; volume. Section par un plan parallèle à la base. Effets d'agrandissement et de réduction sur les longueurs, aires et volumes, masses Angles. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Angles inscrits dans un cercle et angle au centre. Dans le plan, construction de transformées de figures par composition de deux translations, de deux symétries centrales, de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires. Translation et vecteur. Égalité vectorielle. Dans le plan rapporté à un repère : effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur. Distance de deux points dans un repère orthonormal. Équation d'une droite sous la forme $y = mx$, $y = mx + p$, $x = p$; coefficient directeur. Parallélisme, orthogonalité en repère orthonormal. *Objets décrits dans les autres rubriques* : Équations et inéquations du premier degré : méthodes graphiques de résolution (d'un système) d'équations et d'inéquations du premier degré à coefficients numériques. Applications affines : représentation graphique d'une application affine.

Les transformations géométriques et leur composition n'ont à aucun moment à être présentées comme des applications du plan dans lui-même ; elles doivent apparaître dans leur action sur une figure ou comme laissant invariante une figure. Nous reconnaissons ici des traces évidentes du processus de l'*après-réforme* et du rejet explicite de tout formalisme dont la *réforme* des mathématiques modernes se faisait promotrice.

Nous constatons que les problèmes de construction acquièrent un double statut : dans l'introduction au programme, les rédacteurs précisent que l'élève doit acquérir et parfaire l'usage d'instruments de tracé et de mesure, ce qui conduit à considérer les problèmes de construction comme des situations permettant l'apprentissage de techniques de dessin produisant des tracés précis et soignés ; les commentaires qui accompagnent les contenus conduisent à considérer les problèmes de construction comme un moyen de mettre en jeu les connaissances relatives aux figures géométriques figurant au programme.

Un aspect intéressant de cette partie des programmes porte sur la signification attribuée aux *travaux* et aux *activités*. Remarquons que la rubrique elle-même est nommée "Travaux géométriques", ce qui renvoie à une idée d'action, de construction de la discipline en question. À plusieurs reprises, des locutions telles que "*des activités sur... permettront de retenir sous forme d'images mentales...*", "*l'effort portera sur un travail expérimental...*", "*des travaux permettront, sous la direction du professeur, de mettre en œuvre...*", "*tirer parti des travaux pour préciser...*", "*les travaux développeront les capacités à...*", "*des activités expérimentales permettront de dégager...*" soulignent l'importance que les rédacteurs attachent à des méthodes d'enseignement qui permettent la découverte des résultats à acquérir en s'appuyant sur des situations problématiques et sur les acquis antérieurs, suggérant l'idée que l'élève pourra ainsi participer à la construction de ses connaissances et à la

modélisation du réel.

Encore remarquons-nous une exhortation, de la part des rédacteurs, à progresser graduellement dans le développement de l'*attitude de l'intuition rationnelle* vers l'*attitude rationnelle* : depuis les premières classes, ils sollicitent la mise en place d'activités qui habituent l'élève à expérimenter et à conjecturer, de séquences déductives de plus en plus riches mettant en jeu les outils mathématiques du programme. En outre, à plusieurs reprises, ils incitent à prendre garde de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes, de formuler toute équivalence à l'aide de deux énoncés séparés.

Les contenus des programmes de la classe de Seconde

Comme pour le texte du Collège, les contenus sont accompagnés de commentaires précisant *le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repérant, le cas échéant, l'interaction du sujet étudié avec d'autres figurant au programme*. On distingue quatre rubriques principales, "Problèmes numériques et algébriques", "Fonctions", "Statistiques" et "Géométrie". Dans chacune de ces rubriques, une section nommée "Travaux pratiques" précise *le champ des problèmes et des techniques que les élèves ont à étudier* et le niveau relatif d'approfondissement[23]. On signale au fur et à mesure ce que l'élève doit acquérir, ce qui est hors programme ou qu'il faut aborder à travers des exemples simples ou encore les résultats admis sans démonstration.

C'est sous la rubrique "Problèmes numériques et algébriques" que la *résolution de problèmes* issus d'autres rubriques, d'autres disciplines et de la vie courante acquiert une signification essentielle. La rubrique "Fonctions" vise, entre autres, à familiariser l'élève avec la *description de phénomènes continus à l'aide de fonctions* en exploitant des situations algébriques ou géométriques, des situations issues des sciences, des techniques et de la vie économique et sociale. La rubrique "Statistiques" complète les connaissances du collège ; ici, les activités doivent permettre à l'élève de parfaire la façon dont des données à l'état brut s'organisent, se représentent et se traitent. Sous la rubrique "Géométrie", les rédacteurs précisent les objectifs essentiels, notamment la poursuite de l'étude, déjà engagée au Collège, des configurations usuelles du plan et de l'espace et la mise en place et l'exploitation de quelques éléments de calcul vectoriel, en relation avec l'étude des configurations et des transformations et avec l'enseignement de la physique. On distingue deux volets : la *géométrie plane* et la *géométrie dans l'espace*.

Le premier volet est subdivisé en deux parties : *Calcul vectoriel* et *Transformations et configurations*. Ici, on envisage la résolution de problèmes concernant des configurations – alignement, concours, parallélisme, orthogonalité, calcul de distances, d'angles, d'aires – en s'appuyant sur les acquis du

---

[23]On peut trouver le texte complet des programmes de géométrie de la classe de Seconde dans l'annexe 4.

Collège, sur de nouveaux outils, notamment le calcul vectoriel, et sur l'action des transformations. Quelques problèmes simples de lieux géométriques et de construction peuvent être abordés. Pour les vecteurs, on exploite les acquis du collège et on conserve le même point de vue *naïf* pour l'étude des opérations vectorielles.
Le deuxième volet donne l'occasion de mobiliser des connaissances d'algèbre, d'analyse et de géométrie plane.

Nous remarquons que, ici également, les rédacteurs ne repartissent pas le programme suivant une organisation classique mais, au contraire, incitent à ce que les différentes rubriques ne soient pas à traiter indépendamment les unes des autres.

CLASSE DE SECONDE	*Géométrie dans le plan.* *Calcul vectoriel.* Égalité vectorielle et son interprétation géométrique. Norme d'un vecteur. Opérations sur les vecteurs et leur interprétation géométrique. Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, du centre de gravité d'un triangle. Configuration de Thalès et sa réciproque dans un cas particulier. Homothétie. Repères d'une droite du plan ; abscisse d'un point, mesure algébrique. Bases, repères du plan ; coordonnées d'un vecteur, dans une base, d'un point dans un repère, coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et de $\lambda\vec{u}$. Condition de colinéarité de deux vecteurs. Équation cartésienne d'une droite. Orthogonalité et mesure des angles orientés. Vecteurs orthogonaux. Bases orthonormales ; repères orthonormaux (ou orthonormés). Expression de la distance et de la norme ; condition d'orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites. Rudiments de trigonométrie. *Transformations et configurations.* Effet d'une réflexion, d'une rotation, d'une translation ou d'une homothétie sur le parallélisme, l'alignement, les distances, les angles et les aires. Image d'une droite, d'un segment, d'un cercle. Image du milieu d'un segment, d'un parallélogramme. Symétries du cercle : tangentes à un cercle de direction donnée ou issues d'un point donné. Axes de symétrie d'une bande. Ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite. Axes de symétrie de la configuration formée par deux droites concourantes. Ensemble des points équidistants de deux droites concourantes. *Géométrie dans l'espace.* Propriétés usuelles (admises) du parallélisme de deux droites, de deux plans, d'une droite à un plan. Projection sur un plan selon une direction de droite. Propriétés usuelles (admises) de l'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan. Plan médiateur. Projection orthogonale sur un plan. *Objets décrit dans les autres rubriques* : Résolution et étude graphique de système de deux équations ou inéquations linéaires à deux inconnues à coefficient numériques. Représentation graphique d'une fonction dans un repère (orthogonal ou orthonormal). Étude des fonctions cosinus et sinus. Courbes représentatives. Exemples de lecture de propriétés de fonctions à partir de leur représentation graphique.

Dans les contenus du programme de Seconde, nous reconnaissons des traces évidentes, bien que faibles et tempérées par un refus explicite de tout formalisme surabondant, d'une vision moderne des mathématiques telle qu'elle fut propagée par les promoteurs de la célèbre *réforme* des années soixante.

Dans les parties qui suivent, nous commenterons davantage et comparerons le déroulement l'enseignement des divers objets au cours des cinq années, notamment dans la partie relative à la répartition par niveau scolaire. Cependant, nous pouvons déjà faire quelques remarques assez

frappantes comme l'absence du calcul vectoriel dans les programmes italiens. Au contraire, dans l'institution française, en partant de l'introduction de la géométrie dans un repère (calcul analytique), on s'engage sur la voie d'un processus d'algébrisation de la géométrie avec l'introduction du calcul vectoriel. En ce sens, les objectifs finaux des deux institutions diffèrent considérablement car, comme nous l'avons déjà vu plus haut, les rédacteurs italiens visent plutôt à rapprocher la géométrie de la logique mathématique suivant un discours de nature épistémologique et philosophique.

IV. *UNE COMPARAISON GLOBALE DES PROGRAMMES SCOLAIRES*

IV.1 Le *syllabus*

Comme nous l'avons vu plus haut, la structure des programmes italiens – globaux pour chaque cycle et peu détaillés – ne permet pas d'entamer une analyse satisfaisante des contenus. C'est pourquoi nous avons cru indispensable, d'ores et déjà, un premier recours aux manuels afin de mieux déterminer les objets fondamentaux d'enseignement pour ensuite les comparer avec ceux qui apparaissent dans les programmes officiels français.

Ici, nous avons établi une sorte de *syllabus* des connaissances que – d'après les textes officiels et/ou les manuels scolaires – l'élève est censé connaître à la fin de cette tranche de la scolarité.

Ce *syllabus* se développe autour d'un certain nombre de *figures géométriques élémentaires*, à savoir :

Géométrie dans le plan	DROITES PARALLELES DROITES PERPENDICULAIRES ANGLES[24] TRIANGLES QUADRILATERES PARTICULIERS (trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré) POLYGONES CERCLE ET DISQUE
Géométrie dans l'espace	DROITES ET PLANS POLYEDRES (prisme, parallélépipède, cube, pyramide, polyèdres réguliers) SOLIDES DE REVOLUTION (cylindre, cône, sphère)

Nous avons considéré les contenus et les commentaires des programmes français ainsi que les tables

[24] Bien qu'il soit plus exact de parler de *secteur angulaire*, nous nous conformons au vocabulaire utilisé dans les programmes et dans les manuels scolaires !

des matières – et, si celles-ci ne sont pas suffisamment détaillées, les intitulés des paragraphes qui constituent les pages de cours – de quelques manuels italiens et français ; nous avons ainsi dressé une liste des objets géométriques de référence qui sont en relation avec chacune des figures élémentaires choisies, sans tenir compte de la manière dont ils s'enchaînent.

Lors de cette opération, nous avons remarqué que les auteurs des manuels français respectent assez fidèlement l'organisation des contenus et les prescriptions des programmes officiels tandis que du côté italien, l'organisation, les contenus et leur portée peuvent varier d'un manuel à l'autre : cela nous a rendu la tâche un peu plus laborieuse et, pour surmonter l'obstacle, nous n'avons considéré que les objets communs à la plupart des manuels italiens consultés. Cette manière de faire est nettement pris en compte lors des conclusions que nous allons tirer à la fin de ce chapitre.

Dans chaque liste, rédigée sous forme de tableau, nous avons distingué les objets communs et les objets étudiés dans une institution et non pas dans l'autre. Puisqu'il s'agit d'une comparaison globale, ici les objets ne sont pas indiqués dans les détails mais ils sont souvent désignés par des expressions générales qui, par ailleurs, nous ont permis d'utiliser un langage plus homogène.

En ce qui concerne les *constructions géométriques* de figures à l'aide d'instruments de tracé, nous avons préféré les classer dans un paragraphe à part où nous expliquons, en outre, les raisons de ce choix.

Quelques commentaires sur les tableaux du syllabus

Le *syllabus* met en évidence les premières analogies et différences en motivant davantage nos interrogations de départ.

Des thèmes transversaux peuvent être facilement repérés : nous voyons que, par exemple, les *transformations géométriques*, la notion d'*aire* et encore les *vecteurs* apparaissent dans plusieurs tableaux.

Comme nous l'avons déjà remarqué, le *calcul vectoriel* est un outil qui ne fait pas partie des programmes italiens[25] : on ne rencontre la notion de *vecteur* qu'en relation avec la *translation*. Au contraire, cette notion prédomine dans les programmes français : abordée naïvement depuis le collège, elle devient un outil essentiel en classe de Seconde ; plusieurs notions acquises antérieurement sont abordés en termes vectoriels.

[25] Au cours de la quatrième année de l'ESS, sous le thème nommé "Ensembles numériques et structures", les programmes prévoient l'enseignement de la notion d'espace vectoriel (structure vectorielle dans R^2 et R^3).

Dans les colonnes concernant l'institution française, des objets sont absents : ici, nous n'avons consulté les manuels que de façon sommaire sans tenir compte des pages relatives aux travaux pratiques où, sous forme de problème, certains objets peuvent apparaître : c'est le cas, par exemple, pour le *théorème du pied de la bissectrice* (cf. Tableau IV) qui peut apparaître en exercice dans les manuels français mais fait partie du cours italien.

Nous verrons que les colonnes concernant l'institution italienne sont assez riches. Les contenus des programmes/manuels italiens sont plus étendus et complets : par exemple, le *théorème de Thalès* est proposé dans le cas général ; les *transformations géométriques* comprennent aussi des *affinités* et des *projections* ; le chapitre sur les polygones est abordé d'une manière assez exhaustive ; le chapitre sur les *aires* comprend, entre autres, la notion d'*équidécomposabilité*. Cette volonté d'exhaustivité mérite une attention particulière et sera discutée davantage dans le chapitre consacré à l'analyse des manuels scolaires.

Un autre aspect – qui a donné naissance à notre travail – est la présence, à la fois, des *critères de congruence et de similitude des triangles* et des *transformations géométriques*. Entre autres, nous examinerons la manière dont ces objets *cohabitent* dans l'institution italienne.

Dans les pages qui suivent, nous présentons chaque tableau du syllabus en l'accompagnant de quelques commentaires.

Tableau I – Droites parallèles

Objets français	Objets communs	Objets italiens
	Définition de droites parallèles.	Axiome d'Euclide (*Par un point qui n'appartient pas à une droite, on peut mener une seule droite parallèle à cette droite*).
	Caractérisation angulaire du parallélisme. Angles formés par deux droites et une sécante. Conditions de parallélisme de deux droites.	
Parallélisme en termes vectoriels.	Direction et droites parallèles. Vecteurs et translation.	
	Orthogonalité et parallélisme.	
	Propriété transitive du parallélisme.	Parallélisme comme relation d'équivalence.
	Caractérisation des quadrilatères convexes par rapport aux côtés. Les trapèzes et les parallélogrammes.	
	Effet d'une transformation sur le parallélisme. Par une transformation, image d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment. Transformées de figures par composition de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles (translation).	
	Ensemble des points situés à une distance imposée d'une droite donnée. Distance de deux droites parallèles.	
Théorème de la projection, théorème de Thalès et théorème des milieux en termes vectoriels.	Projection d'un point sur une droite, parallèlement à droite donnée. Théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque. Théorème des milieux (Droite des milieux).	Théorème de Thalès (cas général où le nombre des droites est supérieur à trois)

Ici, la différence essentielle porte sur quelques objets qui, dans les programmes français, sont abordés aussi en termes vectoriels.

L'*axiome d'Euclide* demeure implicite lorsqu'on apprend la construction relative à la configuration de deux droites parallèles.

Le *parallélisme* est aussi abordé en termes vectoriels ; de même pour le *théorème de la projection*, le *théorème de Thalès* et pour le *théorème des milieux*.
L'énoncé général du *théorème de Thalès* est hors programme même s'il est à dégager à partir d'activités expérimentales reliées à la pratique de la projection.
La *projection* n'a pas à être présentée comme application du plan sur une droite.

(Dans les manuels), le *théorème de Thalès* est présenté dans le cas général où le nombre des droites est supérieur à trois et le *théorème des milieux* en est un cas particulier de sa réciproque.

Tableau II – Droites perpendiculaires

Objets français	Objets communs	Objets italiens
Orthogonalité en termes vectoriels. Vecteurs orthogonaux. Condition d'orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites.	Définition de droites perpendiculaires.	Unicité de la droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point.
	Angles droits. Angles complémentaires. Axe de symétrie d'un angle plat.	
	Parallélisme et orthogonalité.	
	Caractérisation du triangle rectangle, du rectangle, du carré et du trapèze rectangle.	
	Symétrie orthogonale. Figures ayant un ou des axes de symétrie. Diagonales du losange et du carré.	
	Transformations conservant l'orthogonalité. Composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites perpendiculaires (symétrie centrale). Image d'une droite par une rotation d'un demi-tour.	
	Médiatrice d'un segment. Médiatrices d'un triangle.	
	Projection orthogonale. Distance d'un point à une droite. Hauteur d'un triangle. Largeur d'une bande à bords parallèles : hauteur d'un parallélogramme et d'un trapèze.	Apothème d'un polygone régulier.
	Cosinus comme opérateur de projection orthogonale.	
	Droite tangente à un cercle. Centre d'un cercle. Droite passant par le centre d'un cercle. Propriétés. Carré inscrit dans un cercle. Triangle inscrit dans un demi-cercle.	

Dans les programmes français, l'*orthogonalité* est une notion reliée aussi aux *vecteurs* ; le résultat concernant l'unicité de la droite perpendiculaire à une droite donnée – abordé et prouvé explicitement dans les programmes italiens – demeure implicite lorsqu'on apprend la construction relative à cette configuration.

Tableau III – Angles

Objets français	Objets communs	Objets italiens
	Définition d'angle. Angle orienté.	
Mesure d'angle : le radian. Mesure de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires, mesure principale.	Mesure d'angle : le degré.	
	Angles saillants, rentrants. Angles remarquables : angle droit, angle plat, angle plein. Angles aigus, obtus. Angles adjacents. Angles opposés par le sommet. Angles complémentaires. Angles supplémentaires.	
	Comparaison d'angles. Somme de deux angles.	Différence de deux angles. Multiple et sous-multiple d'un angle.
	Angles au centre, angles inscrits. Propriétés. Arcs interceptés. Longueur d'un arc.	Aire d'un secteur circulaire.
	Bissectrice d'un angle.	
	Angles et orthogonalité.	
	Angles formés par deux parallèles et une sécante.	
	Caractérisation angulaire des triangles. Somme des angles internes d'un triangle. Bissectrices dans le triangle.	Angle extérieur d'un triangle. Propriétés. Somme des angles internes et extérieurs d'un polygone convexe. Somme des angles internes d'un quadrilatère.
	Caractérisation angulaire des quadrilatères particuliers.	Propriétés angulaires d'un quadrilatère. Angles et quadrilatères convexes inscrits dans un cercle.
	Caractérisation angulaire des polygones réguliers.	Angles extérieurs d'un polygone régulier.
	Effet d'une transformation sur les angles. Composée de deux symétries par rapport à des droites sécantes (rotation). Rotation. Composée de rotations. Rotation d'angle 180° : symétrie centrale. Rotations laissant invariant un polygone régulier.	
	Dans le triangle rectangle, relations entre les côtés et les angles.	

Dans les programmes italiens, le chapitre sur les angles est plus riche que dans les programmes français : on traite systématiquement les propriétés angulaires d'un polygone convexe et, notamment d'un polygone régulier et encore d'un quadrilatère.

La définition de *radian* est introduite en classe de Seconde, au Collège l'unité à évoquer n'étant que le degré décimal.

L'étude générale des *rotations* est hors programme.

La notion de *radian* est introduite à la 3ème ou 4ème année de ESS lorsqu'on aborde davantage le chapitre sur la trigonométrie.

Tableau IV – Triangles

Objets français	Objets communs	Objets italiens
	Caractérisations des triangles par rapport aux côtés.	
	Triangle et symétries. Caractérisation des triangles par rapport aux axes de symétrie.	
Relation de Chasles	Inégalité triangulaire.	
	Caractérisation angulaire des triangles. Somme des angles internes d'un triangle.	D'autres propriétés angulaires des triangles (théorème de l'angle extérieur d'un triangle, etc.)
	Triangle et rotation. Rotation laissant invariant un triangle équilatéral.	
		Critères de congruence des triangles. Critères de congruence des triangles rectangles.
Propriété de la médiane en termes vectoriels.	Droites et points remarquables d'un triangle : définitions et propriétés.	Théorème du pied de la bissectrice.
	Triangle inscrit dans un cercle. Triangle circonscrit à un cercle.	
Théorème des milieux en termes vectoriels.	Théorème des milieux.	
Théorème de Thalès en termes vectoriels.	Théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque.	Théorème de Thalès (cas général où le nombre des parallèles est supérieur à trois).
Homothétie en termes vectoriels.	Agrandissement et réduction dans le triangle. Triangle et homothétie.	Similitude. Critères de similitude des triangles. Critères de similitude des triangles rectangles.
	Propriétés caractéristiques d'un triangle rectangle : théorème de la médiane ; théorème du cercle circonscrit ; théorème de Pythagore et sa réciproque.	Théorèmes d'Euclide (relations métriques dans un triangle rectangle).
	Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.	
	Formules pour le calcul de l'aire du triangle, du triangle rectangle.	Formule de Héron (pour le calcul de l'aire du triangle en connaissant les mesures des côtés).
		Triangles de même périmètre Triangles de même aire.

Ce tableau est très significatif : dans les programmes italiens, on trouve les *critères de congruence et de similitude des triangles* qui, d'après les prescriptions des textes officiels de l'**ESS**, peuvent devenir un outil de démonstration essentiel ; on remarque aussi la présence de théorèmes qui ont disparu depuis longtemps des programmes français où, d'ailleurs, le *calcul vectoriel* demeure un outil essentiel permettant de reconsidérer autrement quelques objets.

Le recours aux "cas d'égalité" des triangles pour l'étude de figures géométriques est exclu. Cependant, les textes officiels prescrivent l'apprentissage de la construction d'un triangle connaissant les longueurs des trois côtés, etc.

Le *théorème du pied de la bissectrice* est un exemple de résultat qui, dans la plupart des manuels, apparaît en exercice et dont le titre souligne l'importance.

L'*agrandissement* et la *réduction*, tels qu'ils sont présentés dans quelques manuels de Troisième, supposent leur lien avec l'*homothétie*. En effet, d'après les rédacteurs, l'homothétie, introduite en Seconde en termes vectoriels, est à dégager en s'appuyant *sur des situations portant sur les agrandissements et les réductions.*

Dans certains manuels, les *homothéties* sont introduites comme cas particulier de similitude alors que, dans d'autres, la similitude est introduite comme composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Les *théorèmes d'Euclide* suivent le *théorème de Pythagore* ou bien, dans quelques manuels, on y a recours pour démontrer ce dernier.

La *formule de Héron* est soit dans le chapitre relatif aux aires soit présentée comme exemple d'application du théorème de Pythagore.
Dans quelques manuels, on relie l'étude de triangles de même aire ou de même périmètre avec les coniques.

Tableau V – Quadrilatères particuliers

Objets français.	Objets communs.	Objets italiens.
	Caractérisation des trapèzes. Définitions et propriétés.	
	Caractérisation des parallélogrammes : rectangle, losange, carré. Définitions et propriétés.	
	Caractérisation des quadrilatères par rapport aux axes et aux centres de symétrie.	
	Vecteur et parallélogramme. Somme de deux vecteurs. Translation et parallélogramme. Symétrie centrale et parallélogramme (image d'un segment).	
	Isométries laissant invariant un carré.	
	Carré inscrit dans un cercle.	Quadrilatères inscrits dans un cercle : le rectangle, le trapèze isocèle. Quadrilatères circonscrits à un cercle : le carré et le losange.
	Formules de calcul du périmètre et de l'aire du rectangle, du carré, du losange, du trapèze.	Equidécomposabilité et quadrilatères particuliers.

Nous remarquons que, dans les programmes italiens, la notion d'*équidécomposabilité* est explicitement envisagée pour déterminer les *formules de calcul des aires*. Cette notion permet aussi de prouver, dans un cadre purement géométrique, le *théorème de Pythagore* et les *théorèmes d'Euclide*. Par contre, dans les programmes français, cette notion demeure implicite dans toute activité expérimentale (décomposition, découpage, etc.) visant à l'institutionnalisation de ces objets.

D'après les prescriptions des rédacteurs, les isométries laissant invariant un carré devraient être un argument pour dégager des éléments relatifs au thème transversal sur *les analogies de structures.*

Tableau VI – Polygones

Objets français.	Objets communs.	Objets italiens.
	Définition de polygone régulier.	Définition de polygone convexe et concave. Relation entre les côtés d'un polygone convexe. Polygones inscrits dans un cercle. Polygones circonscrits à un cercle. Propriétés.
	Caractérisation angulaire des polygones réguliers.	Somme des angles internes et extérieurs d'un polygone. Diagonales dans un polygone convexe. Relation entre le côté et l'apothème d'un polygone régulier. Formule pour le calcul de l'aire d'un polygone régulier.
		Polygones congruents : propriétés. Polygones de même aire. Transformation d'un polygone en un autre de même aire.
		Polygones de même périmètre. Relations entre le périmètre et l'aire dans l'ensemble des polygones réguliers.
		Polygones semblables : propriétés. Rapport entre les périmètres, rapport entre les aires.
		Polygones réguliers et cercle. Propriétés. Relation entre les côtés d'un polygone régulier et les rayons du cercle circonscrit.
	Symétries et rotations laissant invariant un polygone régulier.	

Ce tableau est aussi très éloquent : il nous montre clairement que, dans l'institution française, les seuls polygones étudiés systématiquement sont les *triangles* et les *quadrilatères*. Au contraire, on voit que les notions relatives aux *polygones* sont dégagées d'une manière exhaustive dans l'institution italienne.

Tableau VII – Cercle et Disque

Objets français.	Objets communs.	Objets italiens.
	Définition de cercle et de disque.	Caractérisation de cercles congruents.
	Éléments d'un cercle : centre, rayon, diamètre, corde, arc de cercle. Droites passant par le centre d'un cercle. Médiatrice d'une corde.	Secteur circulaire, segment circulaire, couronne circulaire.
	Angle au centre. Angle inscrit dans un cercle ; théorème de l'angle inscrit. Angles inscrits interceptant le même arc.	
	Positions relatives d'une droite et d'un cercle : tangente, sécante et droite extérieure. Positions relatives de deux cercles Tangentes à un cercle passant par un point extérieur imposé.	Propriétés des sécantes et des tangentes à un cercle.
	Cercle inscrit dans un triangle. Cercle circonscrit à un triangle. Condition d'existence d'un cercle.	Rayon du cercle inscrit dans un triangle. Rayon du cercle circonscrit à un triangle.
	Cercle circonscrit à un triangle rectangle. Propriétés.	
	Polygones réguliers.	Cercle circonscrit à un polygone, à un quadrilatère. Propriétés. Relation entre les côtés d'un polygone régulier et le rayon du cercle circonscrit.
		Cercle inscrit dans un polygone. Propriétés.
	Image d'un cercle par une transformation géométrique. Axes et centre de symétrie d'un cercle.	
	Longueur d'un cercle. Aire d'un disque. Longueur d'un arc de cercle.	Aire d'un secteur circulaire, du segment circulaire, d'une couronne circulaire.

Ce tableau nous montre encore une fois que les objets d'enseignement dans l'institution italienne sont plus nombreux ; nous remarquons, entre autres, qu'à propos des aires, on prend explicitement en compte les formules relatives à des parties de disque tandis que, dans les programmes français, on se limite seulement à l'aire du disque. Il reste à voir si ces formules sont à dégager à partir de problèmes proposés dans les pages de travaux pratiques.

Dans le programme de Quatrième, on lit : "*La pratique des tracés de figures mettant en jeu des triangles ou des cercles montrera l'intérêt de l'inégalité triangulaire...*". Pourtant toute relation avec les positions relatives de deux cercles, demeure implicite dans la plupart des manuels scolaires.

Tableau VIII – Droites et Plans dans l'espace

Objets français.	Objets communs.	Objets italiens.
	Plans dans l'espace. Propriétés. Détermination d'un plan.	
	Positions relatives d'une droite et d'un plan : droite et plan disjoints, droite appartenant au plan, droite sécante, droite parallèle, droite perpendiculaires.	
	Positions relatives de deux droites : droites coplanaires (sécantes, parallèles), droites non coplanaires.	
	Positions relatives de deux plans : plans parallèles, plans sécants, plans perpendiculaires. Distance de deux plans parallèles.	
	Projection d'un point sur un plan selon une direction. Projection orthogonale d'un point sur un plan. Plan médiateur d'un segment.	Symétrique d'un point par rapport à un plan. Projection d'une figure sur un plan parallèle au plan de la figure, sur un plan non parallèle au plan de la figure : transformation affine, transformation projective.
	Représentation d'un solide en perspective cavalière. Sections planes d'un solide.	
		Angles dièdres. Rectiligne d'un dièdre. Angles solides.

Ce tableau, ainsi que les deux qui suivent, porte sur la *géométrie dans l'espace*. Les rédacteurs français précisent que l'objectif principal est celui d'apprendre à voir dans l'espace, en recourant à l'utilisation des représentations en perspective et à la fabrication de patrons, et à calculer des aires et des volumes. De même, les rédacteurs italiens indiquent qu'il ne faut pas se limiter à des considérations sur les seules figures à trois dimensions mais que l'étude de la géométrie dans l'espace a pour objectif celui de développer l'intuition spatiale. Dans l'enseignement français, ce chapitre doit se combiner avec celui qui concerne la géométrie plane tandis que, dans l'enseignement italien, ce choix est laissé à l'enseignant.

Nous remarquons que les *transformations affines et projectives* paraissent parmi les objets relatifs à l'institution italienne (ce qui n'est pas le cas dans l'institution françaises, au moins explicitement). Cet aspect nous semble être cohérent avec les objectifs finaux fixés par les rédacteurs italiens : comme nous l'avons souligné plus haut, en effet ils prévoient – au cours de la dernière année de l'ESS – d'établir une réorganisation de la géométrie suivant le modèle proposé par F. Klein.

Dans l'espace, les notions de vecteur et de repère sont hors programme.

D'après les programmes de l'ESI, les transformations affines et projectives sont à développer d'une manière naïve à travers des activités expérimentales telles que l'observation des ombres produites par le soleil, par une ampoule, etc.

Les rédacteurs des programmes de l'ESS prescrivent de fournir des exemples significatifs de transformations géométriques dans l'espace. Au cours de la 3ème année de l'ESS les équations des transformations, y compris les transformations affines, sont au programme ; cela semble donc suggérer de les aborder aussi auparavant.
Quelques notions de géométrie dans l'espace sont reprises au cours de la quatrième année de l'ESS (parallélisme, orthogonalité, angles).

Tableaux IX – Polyèdres

Objets français.	Objets communs.	Objets italiens.
		Définition de polyèdre.
	Parallélépipède droit. Patron. Aire. Volume.	Parallélépipèdes obliques.
	Prisme droit. Patron. Aire. Volume.	Prisme. Prisme régulier.
	Cube. Patron. Aire. Volume. Sections planes d'un cube.	
	Pyramide. Pyramide droite. Tronc de pyramide. Patron. Aire. Volume. Sections planes d'une pyramide. Effet d'un agrandissement et d'une réduction sur les volumes.	Tronc de pyramide droit. Aire. Volume.
		Polyèdres réguliers. Aire. Volume. Relation d'Euler. Axes de symétrie.

Tableau X – Solides de révolution

Objets français.	Objets communs.	Objets italiens.
		Rotation dans l'espace.
	Cylindre. Patron. Aire. Volume.	
	Sphère et boule. Aire d'une sphère. Volume d'une boule. Parties d'une sphère, d'une boule. Intersection d'une sphère et d'un plan.	Positions relatives d'un plan et d'une sphère, d'un plan et d'une boule.
	Cône (de révolution). Patron. Aire. Volume. Sections planes d'un cône. Effet d'un agrandissement et d'une réduction sur les volumes.	Tronc de cône. Patron. Aire. Volume.
		D'autres solides de révolution : rotation complète d'un triangle, d'un trapèze autour d'un côté.

Ces deux tableaux montrent que les programmes/manuels italiens, par rapport aux français, prévoient une présentation plus exhaustive des figures à trois dimensions. Normalement, ce chapitre est abordé systématiquement au cours de l'ESI ; on reprend les symétries de quelques solides géométriques particuliers au cours des deux premières années de l'ESS, les polyèdres réguliers et les solides remarquables pendant la quatrième année de l'ESS.

IV.2 Les constructions géométriques

Une construction géométrique peut être considérée comme un véritable problème graphique dans lequel, à partir de quelques éléments connus, il faut en déterminer d'autres qui sont en relation avec ceux-ci. Normalement à l'école élémentaire, on apprend à effectuer des constructions géométriques à l'aide d'instruments de tracé : la règle graduée pour mesurer et la règle non graduée pour tracer des segments ; l'équerre pour tracer des angles droits ; le compas pour tracer des cercles et pour reporter des segments ; le rapporteur pour mesurer ou reporter des angles donnés. Selon les instruments utilisés, les procédures suivies peuvent être différentes et le savoir géométrique mis en jeu diffère aussi ; néanmoins, si le savoir sous-jacent demeure implicite, les procédures apprises deviennent simplement des techniques de construction. Considérons, par exemple, la position relative de deux cercles : à partir de cette notion, on peut "découvrir" la condition d'existence d'un triangle dont la longueur de ses côtés est donnée et apprendre à le construire ; c'est ainsi que l'élève pourrait donner du sens à la technique de construction d'un triangle à l'aide de la règle et du compas et saisir davantage les liens existant entre les divers objets géométriques.
En d'autres termes, il s'agit pour nous de comprendre les vrais objectifs visés dans les deux institutions en question : les constructions géométriques servent-elles pour apprendre à produire des dessins précis et soignés ou bien représentent-elles aussi une occasion de faire fonctionner des connaissances acquises ou en introduire des nouvelles ? Pour répondre à cette question, il faut prendre en compte plusieurs variables comme, par exemple, le moment où l'apprentissage de telle ou telle construction est pris en compte dans la scolarité, les instruments permis et encore les procédures envisagées.

Les programmes officiels italiens, relatifs à **l'ESI**, prévoient l'enseignement des constructions géométriques à l'aide d'instruments de tracé. Dans les commentaires qui accompagnent les contenus, les rédacteurs évoquent implicitement l'importance que ces instruments pourraient avoir dans le développement du programme de géométrie : pour que la présentation des propriétés des figures géométriques soit dynamique, ils suggèrent de *recourir au dessin*. Nous croyons donc que, d'après l'esprit des rédacteurs, les constructions géométriques doivent conduire à la mise en jeu des connaissances acquises ou à acquérir. Puisqu'aucun exemple n'est offert à l'enseignant pour bâtir des activités s'appuyant sur l'utilisation des instruments de tracé, il s'agira encore une fois de se reporter aux manuels afin de mieux comprendre quel statut attribuer aux constructions géométriques dans l'enseignement de la géométrie à l'ESI.

Dans les textes officiels français relatifs au **collège**, un des objectifs visés met en évidence l'importance des instruments de dessin et de mesure dans l'enseignement de la géométrie : les travaux géométriques doivent prendre appui sur l'usage de ces instruments et cet usage doit se parfaire au fur et à mesure ; en outre, dans les commentaires qui accompagnent l'explicitation des contenus, on

détaille les constructions à envisager en relation avec les divers objets d'enseignement ; les problèmes de construction doivent permettre aussi bien d'apprendre des techniques que de mettre en jeu des connaissances acquises ou à acquérir.

Par contre, ni dans les programmes de l'**ESS** ni dans les programmes de **Seconde**, rien n'est dit à ce propos.

Toujours à l'aide des textes officiels et de quelques manuels scolaires, nous avons classé les diverses constructions géométriques qui se trouvent dans les pages de cours. Cela nous sera utile dans la partie suivante lorsque nous établirons une répartition des contenus par niveau scolaire ainsi que pendant l'analyse des contenus des manuels où nous pourrons effectivement examiner la portée de cet objet d'enseignement.

Dans la liste suivante, nous nous proposons de transcrire en *italique* les objets qui concernent seulement l'institution italienne et en souligné ceux qui concernent l'institution française tandis que les autres sont communs aux deux institutions :

1. Angles congruents à un angle droit donné.
2. Droite parallèle à une droite donnée passant par un point qui ne lui appartient pas.
3. Droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point qui ne lui appartient pas.
4. Droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point qui lui appartient.
5. Milieu d'un segment.
6. Médiatrice d'un segment.
7. Bissectrice d'un angle. *Division d'un arc de cercle en deux arcs congruents.*
8. Cercle passant par trois points donnés. Centre d'un cercle.
9. Droite tangente à un cercle donné passant par un point qui appartient au cercle.
10. *Droite tangente à un cercle donné passant par un point qui n'appartient pas au cercle.*
11. Triangle isocèle. Triangle équilatéral. Triangle rectangle.
12. Triangle dont on connaît la longueur des trois côtés, la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents, les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces côtés.
13. Triangle rectangle dont on connaît la longueur de l'hypoténuse, d'un côté et de l'angle droit ; les longueurs de deux côtés de l'angle droit.
14. Image d'un objet par une symétrie orthogonale, par une symétrie centrale, per une rotation d'angle et de centre donnés, par une translation de vecteur donné.
15. Rectangle dont on connaît les longueurs de deux côtés. Losange dont on connaît les longueurs des diagonales. Carré dont on connaît les longueurs du côté. Parallélogramme dont on connaît les longueurs de deux côtés et de la hauteur.
16. Polygones réguliers (carré, hexagone, *octogone*, triangle équilatéral).
17. Agrandissement, réduction d'un objet géométrique.
18. Division d'un segment en un nombre fixé de segments congruents.
19. *Division d'un segment en segments dont les longueurs sont proportionnelles aux longueurs de deux (ou plus de deux) segments donnés.*
20. Quatrième proportionnelle.

Remarquons qu'il n'y a pas de mots soulignés !

V. LA REPARTITION DES CONTENUS PAR NIVEAU SCOLAIRE

Comme pour le *syllabus*, afin de répartir les contenus par niveaux scolaires, nous avons eu recours à d'autres documents que les programmes officiels.

Les manuels publiés en Italie sont répartis par année ou bien par thèmes (arithmétique, géométrie, algèbre). Cette particularité ne pouvant à elle seule venir en aide pour établir cette répartition, pour les classes de l'ESI nous avons fait passer un questionnaire auprès d'enseignants tandis que, à l'égard des deux classes de l'ESS, notre expérience personnelle directe dans plusieurs classes de ce cycle nous a autorisée à ne pas enquêter davantage en recourant à la passation d'un questionnaire[26] mais la consultation de quelques manuels et la prise en compte des programmes scolaires anciens[27] nous a paru suffisante.

Le questionnaire pour les enseignants de l'ESI

Nous avons réalisé le questionnaire à la suite de la consultation de quelques manuels parmi les plus adoptés à présent. Après quelques questions préliminaires, pour avoir des renseignements plus précis, nous avons envisagé une question, articulée en plusieurs points, sur l'organisation du programme de géométrie pendant ce cycle de trois ans : nous avons fourni des tableaux contenant la liste des objets principaux en demandant à l'enseignant de remplir les cases relatives aux objets abordés en indiquant le temps consacré et de rayer ceux qu'il ne traite pas (cf. un exemple de tableau ci-après).
La liste a été conçue en considérant tous les objets qui reviennent le plus souvent dans les divers manuels consultés. Puisque la plupart de ces manuels respectent une même organisation de la matière, nous avons choisi de présenter ces objets dans le même ordre, cela pouvant nous fournir implicitement des informations supplémentaires, à savoir si l'enseignant reste fidèle à cette organisation et la suit pas à pas au cours de trois ans.

	Primo anno		**Secondo anno**		**Terzo anno**	
	I quadrimestre	II quadrimestre	I quadrimestre	II quadrimestre	I quadrimestre	II quadrimestre
Le terne pitagoriche				1 ora		
Il teorema di Pitagora ~~e sue inverse~~				3 ore		
Applicazioni				6 ore		

[26] Cf. Annexe 5. Ici, on trouve un exemplaire rempli qui représente bien l'ensemble des réponses.
[27] Cf. Annexe 2.

Des cinquante questionnaires mis en circulation dans divers établissements scolaires de l'ESI, nous en avons récupéré vingt-neuf. Bien que ce nombre soit faible, le dépouillement des informations nous a permis d'en tirer quelques conclusions intéressantes qui s'approchent vraisemblablement de la réalité. Nous avons comparé nos informations avec les données obtenues lors d'une enquête menée sur grande échelle par Raimondo Bolletta[28] ; bien que ce travail date d'une dizaine d'années, nous avons considéré que depuis cette époque, il n'y a pas eu de changements importants ni dans les programmes, ni dans la publication de manuels. Abstraction faite de quelques différences d'items, les résultats sont très proches.

À l'égard de l'ordre dans lequel les divers objets se suivent au cours des trois ans, les résultats issus du questionnaire nous confirment que les enseignants interrogés respectent assez fidèlement l'organisation que nous avons proposée, à savoir une organisation linéaire qui progresse des objets primitifs vers les objets plus complexes. Cependant, nous n'avons pas pu établir une répartition très précise car quelques objets sont susceptibles d'être enseignés soit au cours d'une année soit l'année d'après. En outre, nous remarquons que les *transformations géométriques* cohabitent avec les *critères de congruence et de similitudes des triangles* et font partie des objets qui ne sont pas toujours abordés : compte tenu du fait qu'il s'agit d'un élément issu du dépouillement d'un questionnaire s'adressant aux enseignants, cela nous fournit des informations importantes à l'égard de notre problématique et des indices sur le rapport personnel de l'enseignant à cet objet. Soulignons que cela est en accord avec les résultats issus de l'enquête de Bolletta.

Une répartition par année des contenus des programmes italiens

Voici ci-dessous une répartition probable des contenus des programmes de l'**ESI**. Nous avons noté en italique les objets qui, d'après les réponses au questionnaire, sont susceptibles d'être négligés par les enseignants.

1ère année	Les éléments fondamentaux de la géométrie. Points. Droites, demi-droites, segments. Les angles et leur mesure. Droites perpendiculaires et droites parallèles. Les triangles : définitions et propriétés. Critères de congruence des triangles.
1ère et/ou 2ème année	Les quadrilatères : définitions et propriétés. Trapèzes. Parallélogrammes : rectangle, carré, losange. *Les isométries : définitions, propriétés ; composées d'isométries.* *Constructions géométriques.*
2ème année	Les polygones : définitions et propriétés. Les aires. Le théorème de Pythagore. Applications.

[28] Bolletta R. (1988), *Preparazione matematica in Italia al termine della Scuola Media. Rapporto dell'indagine VAMIO*, I quaderni di Villa Falconieri, CEDE Frascati

2ème et/ou 3ème année	Le cercle et le disque : définitions et propriétés. Polygones inscrits et circonscrits. Polygones réguliers. *Similitudes et homothéties. Critères de similitude des triangles. Théorèmes d'Euclide. Théorème de Thalès.* *Transformations affines et projections.*
3ème année	Droites et plans dans l'espace. Polyèdres, polyèdres réguliers, solides de révolution : définitions, propriétés, aires et volumes.

Concernant les contenus des programmes de l'**ESS**, une répartition plausible est la suivante :

1ère année	Les éléments fondamentaux de la géométrie. Points. Droites, demi-droites, segments. Les angles et leur mesure. Droites perpendiculaires et droites parallèles. Les triangles : définitions et propriétés. Critères de congruence des triangles. Les quadrilatères : définitions et propriétés. Trapèzes. Parallélogrammes : rectangle, carré, losange. Les isométries : définitions, propriétés.
1ère et/ou 2ème année	Le cercle : définitions et propriétés. Polygones inscrits et circonscrits. Polygones réguliers. Les aires. Polygones équidécomposable. Théorèmes d'Euclide. Le théorème de Pythagore.
2ème année	Similitudes et homothéties. Critères de similitude des triangles. Théorème de Thalès. Définition de cosinus et sinus d'un angle aigu. Premières applications au triangle rectangle. *Exemples de transformations géométriques dans l'espace. Symétries des solides particuliers.*

À l'aide des résultats résumés dans les tableaux ci-dessus, du *syllabus* ainsi que de tout le matériel utilisé jusqu'à présent dans ce chapitre, nous avons enfin reconstitué une répartition par année des contenus des programmes italiens, cela afin de les comparer d'une manière plus circonstanciée avec les programmes français. En ce qui concerne l'institution italienne, la démarche suivie nous oblige d'une part à renvoyer à plus tard quelques conclusions et d'autre part à anticiper quelques réflexions qui concernent les manuels scolaires.

Un regard d'ensemble sur les contenus des programmes scolaires italiens

D'après les textes officiels **italiens**, la transition de l'*attitude de l'intuition rationnelle* à l'*attitude rationnelle* face à la géométrie paraît très nette en passant d'un cycle à l'autre. Mais ce changement d'attitude touche surtout la manière dont les contenus sont étudiés et utilisés car un élément caractéristique des programmes italiens - peu perceptible dans l'explicitation des contenus (cf. § III.1) mais confirmé par la démarche que nous avons suivie pour établir la répartition par années scolaires (questionnaires, consultation sommaire de manuels, etc.) - est que plusieurs objets sont communs aux deux cycles.

Ces objets sont abordés à deux reprises au cours des cinq ans avec un niveau de généralité et d'approfondissement croissant[29] : la plupart des résultats admis ou vérifiés expérimentalement au cours de l'ESI, sont introduits sur de nouvelles bases et prouvés durant l'ESS. Le résultat concernant la *somme des angles internes d'un triangle,* par exemple, est rencontré pour la première fois durant la première année de ESI : en accord avec l'esprit des textes officiels, sa validité peut être vérifiée à l'aide d'une preuve pragmatique (pliage, découpage, exemples significatifs etc.) et il peut représenter surtout un outil dans des problèmes à résoudre dans un cadre numérique ; éventuellement, il permet d'enchaîner les premières séquences déductives simples en l'utilisant, par exemple, pour prouver les résultats relatifs à la somme des angles d'un quadrilatère ou d'un polygone régulier. On rencontre le même résultat à l'ESS : il peut être démontré – en recourant à l'unicité de la droite parallèle et aux propriétés angulaires du parallélisme – et devenir un outil de démonstration.

Mais de quelle façon, les objets, s'enchaînent-ils ? La répartition établie nous montre que, dans chaque cycle, les contenus avancent suivant un développement relatif au savoir géométrique : *des objets primitifs aux objets plus complexes* (sur le plan de la théorie), l'organisation de ces contenus respecte assez fidèlement celle proposée dans *Les Éléments* d'Euclide et, en général, dans l'exposé d'un ouvrage classique de géométrie.
En outre, tout chapitre de la géométrie, dès qu'il est introduit, est abordé d'une manière exhaustive. Prenons, par exemple, le chapitre sur les *aires* à l'ESI : normalement, il apparaît après les chapitres sur les triangles, les quadrilatères et les polygones – où l'élève a étudié leurs définitions et leurs propriétés fondamentales – et il inclut la théorie relative aux formules pour le calcul des aires de toutes les figures géométriques précédemment rencontrées. Concernant les *isométries* – si elles deviennent des objets d'enseignement et, dans ce cas-là, elles cohabiteraient avec les *critères de congruence des triangles* – sont abordées toutes dans un seul chapitre, au cours de la 1ère et/ou 2ème année ; l'*homothétie* et la *similitude* sont éventuellement abordées en relation avec le *théorème de Thalès* et les *critères de similitude des triangles* au cours de la 2ème et/ou 3ème année de l'ESI ; de même pour les transformations affines et projections qui seraient abordées dans un chapitre qui précède la partie sur la géométrie dans l'espace. Cela nous conduit à estimer qu'en général - contrairement aux prescriptions des rédacteurs - les transformations géométriques ne sont pas utilisées pour développer et organiser les connaissances relatives aux diverses figures géométriques du programme mais qu'elles constituent plutôt des objets isolés qui, par conséquent, risquent de demeurer vides de sens ; néanmoins, nous verrons plus loin que ces choix sont fortement influencés par l'organisation de la géométrie telle qu'on la retrouve dans la plupart des manuels scolaires où les transformations géométriques cohabitent avec les critères de congruence et de similitude des triangles.

[29] À l'ESS, selon le manuel, ces quelques objets sont soit repris systématiquement et approfondis soit consolidés et approfondis.

Venons enfin aux *constructions géométriques*. À l'ESI, comme nous l'avons signalé plus haut, le recours aux instruments de dessin devrait représenter une aide pour favoriser une présentation plus dynamique des divers objets géométriques. Néanmoins, les résultats issus de notre sondage nous montrent que cet objet est susceptible d'être négligé par la plupart des enseignants interrogés (souvent, sous le prétexte d'un manque de temps !). Or, dans un bon nombre de manuels scolaires, les constructions géométriques sont réunies dans un seul chapitre qui se trouve après la partie consacrée au cercle, rares ou très peu adoptés sont les manuels où les constructions sont exposées au fur et à mesure pour introduire ou enrichir et relier des notions. Encore une fois, il nous semble que l'organisation proposée dans les divers manuels influence le choix des enseignants : comme la partie relative aux constructions géométriques est isolée et parfois privilégie l'aspect technique, l'enseignant préfère l'omettre en considérant probablement (mais à tort car les objectifs sont différents !) que ce sujet concerne plutôt le cours d'*éducation technique*[30], discipline gérée par un autre enseignant, pendant lequel l'élève apprend les techniques du dessin géométrique à l'aide d'instruments de tracé.

Nous croyons que cette méthode d'apprentissage "par chapitres" si d'une part elle permet à l'élève d'avoir une vision cohérente et complète des connaissances relatives à un objet, d'autre part peut le conduire à un enregistrement stérile de connaissances qu'il oubliera facilement si elles ne sont pas réinvesties. En tant que méthode d'enseignement, en outre, il paraît que cette répartition "par chapitres" autorise l'enseignant à omettre ceux qui s'intègrent mal avec les autres considérés comme plus importants et utiles à la cohérence du programme de géométrie.

La répartition par années, que nous avons établie, nous montre donc que le souci de cohérence de la matière prend le pas sur l'aspect pédagogique. Cependant, n'oublions pas que nous avons établi cette répartition à partir des manuels scolaires : bien que ces informations soient significatives, elles ne sont pas seulement issues d'une interprétation des prescriptions officielles qui ne suffisait pas pour établir cette répartition. Au contraire, il nous semble qu'elles sont en désaccord avec les propos des rédacteurs de programmes, ce qui nous conduit à anticiper que les contenus de la plupart de manuels scolaires ne reflètent pas les intentions des textes officiels et que cela a une influence non négligeable sur les aspects pédagogiques.

Nous remarquons que la répartition établie ressemble davantage aux textes officiels des programmes anciens[31]. Les nouveaux programmes relatifs aux deux cycles, se voudraient novateurs sur le plan des contenus ainsi que des méthodes pédagogiques. Les rédacteurs des programmes actuels sollicitent explicitement la pratique de méthodes d'enseignement visant l'harmonisation de la transmission de

---

[30] Remarquons au passage que, dans l'enseignement français, les cours de *technologie* ne traitent pas spécifiquement des instruments usuels de géométrie.
[31] cf. annexe 2.

contenus avec les aspects pédagogiques : la transmission d'un savoir ne doit pas être le seul souci de l'enseignant, la façon dont ce savoir est transmis étant un aspect à prendre en charge tout autant. Mais que proposent les rédacteurs à l'égard de ce savoir ? Le caractère *hermétique* des textes officiels italiens ne suggère rien de précis à propos des contenus et de leur articulation, ils restent flous, ils ne fournissent pas d'exemples d'activités en laissant à l'enseignant la liberté d'interpréter convenablement tout ce qui *se cache* derrière les thèmes proposés et de choisir leur ordre de développement.

Tels qu'ils sont rédigés, **les programmes ne permettent donc pas de fixer un texte du savoir qui serve de référence pour l'enseignement. C'est plutôt le manuel qui est chargé de cet office** et, puisque les publications scolaires présentent une grande variété, on ne peut parler d'un véritable texte du savoir géométrique mais on pourrait plutôt conclure qu'**une sorte de *consensus*, demeuré implicite au sein de l'institution italienne, fait que la *tradition* joue encore un rôle considérable dans le choix des objets d'enseignement et surtout dans leur organisation.**

Un regard d'ensemble sur les contenus des programmes scolaires français

Dans les programmes **français**, les contenus semblent progresser en même temps que les méthodes. Contrairement à ce qui se passe au sein de l'institution italienne, les auteurs de manuels scolaires restent assez fidèles aux prescriptions des textes officiels, ce qui nous permet de mieux percevoir le rapport au savoir géométrique des rédacteurs de programmes et des auteurs de manuels.

Une fois abordée, une notion est considérée comme acquise : elle sera mobilisée et utilisée le plus souvent possible par la suite mais, d'après les instructions officielles, il faudra éviter toute reprise systématique des notions vues antérieurement. Dans la transition *de l'attitude de l'intuition rationnelle vers l'attitude rationnelle*, les connaissances antérieures sont intégrées aux nouvelles et approfondies. Le résultat concernant la *somme des angles internes d'un triangle*, par exemple, est abordé en Cinquième et utilisé dans un cadre numérique ou bien pour des problèmes de construction. Ensuite, quand l'apprentissage de la démonstration commence, en le considérant comme une notion acquise, il est simplement rappelé et devient ainsi un outil de démonstration même s'il n'a été établi qu'à partir d'une preuve pragmatique de type pliage ou découpage[32].

Dans les programmes français, un chapitre de la géométrie se poursuit au fil des années : on ajoute des notions nouvelles qui le concernent et les contenus avancent en conformité avec un développement cognitif supposé, *du plus familier vers le moins familier, de la perception (objet) vers la théorie (concept)*.

[32] Les programmes ne disent rien à ce sujet et les manuels réagissent de manière variée.

À la recherche d'une cohérence interne de l'organisation des contenus, une lecture transversale des programmes nous a aidée à repérer trois chapitres principaux, à savoir les *figures géométriques dans le plan*, les *transformations géométriques*, les *figures géométriques dans l'espace*. Comme on peut le voir dans le tableau ci-après, durant chaque année, trois ensembles d'objets-clé - appartenant chacun à l'un de trois chapitres principaux - prédominent dans le programme de géométrie et sont reliés entre eux à travers d'autres objets.

Sixième	RECTANGLE TRIANGLE CERCLE	SYMETRIE AXIALE	PARALLEPIPEDE RECTANGLE
Cinquième	PARALLELOGRAMME TRIANGLE	SYMETRIE CENTRALE	PRISME DROIT CYLINDRE DE REVOLUTION
Quatrième	TRIANGLE PARALLELOGRAMME CERCLE	PROJECTION dans le plan TRANSLATION ROTATION	SPHERE
Troisième	TRIANGLE PARALLELOGRAMME	AGRANDISSEMENT et REDUCTION COMPOSITION DE DEUX ISOMETRIES	PYRAMIDE CÔNE DE REVOLUTION
Seconde	PARALLELOGRAMME	HOMOTHETIE PROJECTION dans l'espace	...

En Sixième, l'objet "droites perpendiculaires" apparente le *rectangle* à la *symétrie axiale* et au *parallélépipède droit* ; l'inclusion du *cercle* dans le programme de Sixième est justifiée par la présence des premières activités de construction à l'aide d'instruments de tracé, un volet qui doit se parfaire tout au long du cycle secondaire. Pour le triangle, il s'agit surtout d'une révision de vocabulaire et de quelques caractéristiques simples des triangles particuliers dégagées à partir de la symétrie axiale.

En Cinquième, les propriétés élémentaires de la *symétrie centrale* sont à relier à la caractérisation du *parallélogramme* et elles permettent aussi d'apparenter ce dernier au triangle.

En Quatrième, les projections permettent de dégager quelques propriétés relatives au triangle : la proportionnalité des longueurs entre segments et projetés conduit, par exemple, à la définition du cosinus d'un angle aigu, une notion qui permet ainsi de mettre en place des activités autour du triangle rectangle. L'inégalité triangulaire permet de relier le triangle au cercle ; la caractérisation du triangle rectangle se poursuit grâce à la présence de la *propriété de Pythagore* dans le programme de

Quatrième. La translation est reliée au parallélogramme, étudié antérieurement en relation avec les autres isométries, et elle permet d'introduire "naïvement" les vecteurs, une notion qui est approfondie dans les classes suivantes. La rotation, apparentée au cercle, est aussi reliée aux polygones réguliers (triangle équilatéral, carré, hexagone et éventuellement octogone), cela suggérant de concevoir ces figures comme l'effet de la rotation d'un triangle isocèle ; d'ailleurs, la sphère aussi peut être conçue comme l'effet de la rotation d'un demi-cercle.
L'*énoncé de Thalès*, figurant au programme de Troisième, est restreint au triangle ; il permet de relier les agrandissements et les réductions au triangle et à la pyramide. Le parallélogramme est aussi un objet-clé car, en Troisième, des travaux sont prévus pour que l'élève se familiarise davantage avec les vecteurs : l'égalité vectorielle et la somme de deux vecteurs sont étudiées à partir des propriétés du parallélogramme et de la composition de deux translations.
En Seconde, les activités sur les vecteurs dominent le programme, ce qui fait que le parallélogramme demeure un objet-clé ; le chapitre sur les transformations géométriques s'achève avec l'introduction de l'homothétie en termes vectoriels ; la géométrie dans l'espace se parfait avec l'introduction des projections dans l'espace et l'approfondissement d'autres notions telles que le parallélisme, l'orthogonalité, etc.

Nous voyons donc que cette organisation des contenus s'éloigne de l'enchaînement classique qui caractérise les programmes italiens. En effet, dans l'institution française, une rupture avec la *tradition* a déjà eu lieu à l'époque de la réforme des mathématiques modernes où le *parallélogramme* est devenu un objet prédominant et les *critères de congruence des triangles* ont cédé la place aux transformations géométriques :

> "... Il est bien établi que l'«axiomatique» d'Euclide ne répond plus à nos exigences logiques... L'axiomatique d'Euclide-Hilbert est basée sur les notions de longueur, d'angle, de triangle. Elle cache à merveille la structure vectorielle de l'espace, au point que de nombreux siècles ont ignoré la notion de vecteur. Le fait qu'un triangle soit la moitié d'un parallélogramme n'a pas empêché qu'on mette l'accent pendant plus de vingt siècles sur l'étude détaillée des hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices des triangles, sur les cas d'égalité des triangles, et sur les relations métriques dans le triangle. On voyait le triangle, mais non le parallélogramme qui aurait pu conduire aux vecteurs..."[33].

Depuis les années soixante-dix, d'autres renouvellements ont été apportés aux programmes du secondaire mais des échos de la célèbre réforme semblent persister au niveau des contenus.

Aujourd'hui, **les programmes scolaires français semblent être le résultat d'un compromis entre les aspects pédagogiques** (les contenus avancent suivant un développement conforme au développement cognitif supposé) **et l'exigence d'une prise en compte d'une vision moderne du savoir géométrique** (on s'engage sur la voie d'un processus d'algébrisation de la géométrie avec l'introduction du calcul vectoriel). Peut-être est-ce ce compromis qui empêche d'identifier clairement

[33] Choquet G., (1964), *L'enseignement de la Géométrie*, Hermann

une axiomatique sous-jacente à ce savoir. Les axiomatiques proposées pour le collège à l'époque des mathématiques modernes ont disparu. La présentation actuelle des contenus ne respecte plus l'ordre de l'axiomatique classique d'Euclide-Hilbert et l'axiomatique sous-jacente ne se dégage pas directement des programmes[34]. Cependant, certains auteurs, comme A. Cousin-Fauconnet[35], en ont explicité une.

Comparaison des contenus des programmes scolaires par niveaux

Afin de mieux identifier les décalages existant entre les objets communs aux deux programmes, nous avons enfin comparé les contenus des programmes scolaires par niveaux.

A la fin de ce paragraphe, nous montrons les résultats de cette comparaison sous la forme de tableaux où, sur trois colonnes, nous distinguons les contenus communs et les contenus qui font partie des programmes d'une institution et non de l'autre. Néanmoins, nous reportons ci-dessous les conclusions que nous en avons tirées.

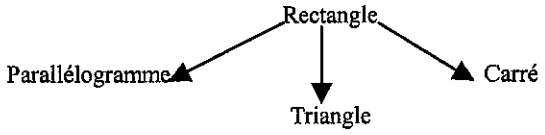
Comme nous l'avons déjà remarqué dans le *syllabus*, le chapitre sur le *calcul des aires de figures planes* est développé d'une manière plus exhaustive dans les programmes **italiens** où il est abordé en une seule fois en 2ème année de l'ESI et approfondi au lycée.
Dans les programmes **français**, on le commence plus tôt, en Sixième, pour le conclure l'année d'après. Il faut, pourtant, tenir compte du fait que - d'après les prescriptions officielles - *pour toutes les classes, les connaissances acquises antérieurement sont mobilisées et utilisées le plus souvent possible*, ce qui conduit à penser que l'on rencontre encore des activités sur les aires après la Cinquième.

Dans les programmes **français**, on retrouve seulement le calcul de l'*aire* du *rectangle*, du *carré*, du *triangle rectangle* en Sixième ; l'*aire* du *triangle*, du *parallélogramme* et du *disque* en Cinquième. Toutefois, comme nous l'avons déjà remarqué ailleurs, il se peut que l'on retrouve le calcul de l'aire d'autres polygones dans les pages de travaux pratiques.	Concernant les *aires*, dans les programmes **italiens**, il s'agit d'un chapitre abordé au cours de la 2ème année de l'ESI et qui sera repris en 1ère et/ou 2ème année de l'ESS. Normalement, le *théorème de Pythagore* suit cette partie ; de même pour le calcul de l'*aire du disque* qui, pourtant, est abordé en 2ème ou 3ème année de l'ESI dans le chapitre relatif au cercle et au disque.

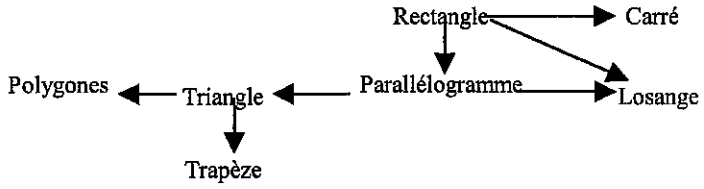
Il est intéressant de remarquer que, dans les deux programmes, l'introduction des formules pour le calcul des aires ne suit pas le même ordre. Dans le programme **français**, on introduit celles du rectangle et du carré ; à partir du rectangle, on déduit celles du triangle rectangle et du parallélogramme.

---

[34] D'ailleurs, nous avions déjà remarqué une sorte de réticence envers une présentation qui explicite l'axiomatique sous-jacente : dans les instructions officielles de la classes de Seconde, les rédacteurs soulignent que *tout point de vue axiomatique est exclu.*
[35] Cousin-Fauconnet A., (1995), *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin



Dans les programmes **italiens**, le départ est le même mais, par la suite, c'est à partir du rectangle qu'on déduit la formule de calcul de l'aire du parallélogramme et, à partir de celui-ci, celle du triangle ; le triangle rectangle est considéré comme un cas particulier de triangle (un côté de l'angle droit est alors une hauteur et l'autre est la base). Le losange est considéré soit comme un parallélogramme particulier soit comme une figure ayant l'aire égale à la moitié de celle d'un rectangle dont les mesures des côtés sont les mêmes que celles des diagonales du losange. Puis, à partir du triangle, on déduit les formules pour le trapèze et, enfin, pour les polygones.



Nous reviendrons sur ce sujet dans le chapitre 4, consacré à l'analyse des quelques manuels scolaires ; ici, d'autres éléments se dégageront, les différences dans la manière d'aborder le chapitre sur les aires étant primordiales d'une institution à l'autre.

Le *calcul des aires et des volumes de solides* et, plus généralement, la *géométrie dans l'espace*, est une partie développée d'une manière plus complète dans les programmes **italiens** où elle est abordée en une seule fois au cours de la 3ème année de l'ESI. Dans les programmes **français**, cette partie s'étale sur les cinq ans avec un degré de complexité et d'abstraction croissants. C'est au niveau de la Quatrième que les deux programmes se rencontrent avec les notions relatives à la *sphère*. À propos de l'organisation de cette partie, remarquons que le volet abordé en Seconde correspond au premier volet dans les programmes italiens, ce qui conduit à supposer que le degré de complexité est tout à fait différent ; pour les polyèdres, on suit le même ordre (parallélépipède droit, cube, prisme droit, pyramide) ; pour les solides de révolution, dans les programmes **italiens**, la sphère vient en dernier.

En Sixième, on retrouve le *parallélépipède droit* ; en Cinquième, le *prisme droit* et le *cylindre* ; en Quatrième, la sphère ; en Troisième, la *pyramide* et le *cône de révolution* ; en Seconde, les notions de parallélisme, d'orthogonalité et de projection dans l'espace.	Le chapitre sur les transformations affines et les projections (dans le plan et dans l'espace) - s'il est abordé - précède la partie sur la géométrie dans l'espace. Cette partie, où l'on distingue les parallélépipèdes et les solides de révolution, est développée selon l'ordre suivant : - *parallélépipède droit* ; *cube* ; *prisme droit* ; *pyramide* ; - *cylindre* ; *cône* ; *sphère*.

Dans les programmes **français**, un aspect de l'organisation de la géométrie renvoie à l'idée qui, à la fin du 19ème siècle, bouleversa le monde de l'éducation en proposant un enseignement conjoint de la

géométrie dans le plan et dans l'espace au lieu d'une organisation plus traditionnelle qui prévoit d'abord un développement systématique de la géométrie plane et ensuite celui de la géométrie dans l'espace comme, d'ailleurs, on fait encore dans l'enseignement italien[36]. En passant, remarquons que, à l'école élémentaire française, l'enseignement de la géométrie ne suit pas non plus une organisation traditionnelle car on va de l'espace au plan, du plan à la droite, de la droite au point.

À propos des *isométries*, remarquons que l'ordre de développement n'est pas le même dans les deux programmes.

Dans les programmes **français**, on aborde : - la *symétrie axiale* en Sixième ; - la *symétrie centrale* en Cinquième ; - la *translation* et la *rotation* en Quatrième ; - la *composition de deux isométries* en Troisième où on retrouve encore la translation dans la partie relative aux premiers rudiments de calcul vectoriel.	Dans les programmes **italiens**, il s'agit d'un chapitre qui serait éventuellement abordé en 1ère et/ou 2ème année de l'ESI et, généralement, selon l'ordre suivant : - la *translation* ; - la *symétrie axiale* ; - la *symétrie centrale* ; - la *rotation*. On les retrouve aussi au cours de la 1ère année de l'ESS.

Ici, on voit encore que, dans les deux programmes, le choix dans l'organisation des contenus est tout à fait différent. Dans l'enseignement **français**, la décision de commencer le chapitre des *transformations géométriques* avec la symétrie axiale semble provenir d'un souci pédagogique : cette isométrie est peut-être plus familière à l'élève et des exemples concrets permettent de l'introduire *naïvement* - le reflet d'une image dans un miroir, activités de pliage, etc. Mais il y a aussi un autre élément qui donne cohérence - du point de vue mathématique - au choix des rédacteurs français : à partir de la composition de symétries axiales, on obtient les autres isométries, une caractéristique que l'élève français découvre partiellement en Troisième.

Dans l'enseignement **italien**, le choix de commencer le chapitre des *transformations géométriques* avec la translation semble avoir encore une cohérence académique : les applications vectorielles associées sont de complexité croissante et les propriétés d'invariance vont en se restreignant. Du point de vue pédagogique, ce choix demeure discutable car, dans les manuels scolaires les plus adoptés, la translation est liée aux *vecteurs*, une notion encore trop abstraite pour le niveau scolaire concerné.

Le chapitre sur les transformations géométriques se complète avec les projections et l'homothétie. Ici, encore, l'organisation diffère dans les deux institutions.

---

[36] Villani V. (1993), *L'insegnamento della matematica nella scuola italiana oggi : dalle elementari ai bienni delle scuole secondarie superiori*, dans Scuola e Concorsi, marzo 1993

Dans les programmes **français**, les *projections* sont introduites naïvement en Quatrième et permettent de dégager quelques propriétés relatives au triangle (théorème des milieux, cosinus d'angle aigu, etc.). Reliées aux projections, dans le programme de Quatrième, on trouve la notion de *distance*, la *projection orthogonale*.

Les *agrandissements* et les *réductions* du plan et de l'espace trouvent leur place dans le programme de Troisième ; ils sont reliés aux sections planes d'une pyramide ou d'un cône de révolution.

En classe de Seconde, on trouve la notion d'*homothétie* en termes vectoriels ; la projection est approfondie dans la partie concernant la géométrie de l'espace.

Dans les programmes **italiens**, on retrouve la *projection orthogonale* en 1ère année de l'ESI dans le chapitre concernant le parallélisme et l'orthogonalité où l'on aborde aussi des questions de distance. La projection orthogonale est réinvestie en 2èmé et/ou 3ème année de l'ESI dans le chapitre concernant le théorème de Thalès et les théorèmes d'Euclide où, en outre, on introduit les *agrandissements* et les *réductions*, l'*homothétie* et la *similitude*. Tous ces sujets sont reconstruits systématiquement en 1ère et en 2ème année de l'ESS, plus ou moins dans le même ordre.

À l'ESI, les *projections dans l'espace* sont abordées avec les *transformations affines* dans un chapitre qui précède la géométrie de l'espace.

Nous avons ensuite comparé l'ordre dans lequel les diverses *figures géométriques planes* sont présentées au cours des années en repérant, conjointement, des résultats importants qui les concernent. Nous avons déjà remarqué que les contenus des programmes italiens progressent plutôt suivant une cohérence mathématique, du plus simple vers le plus complexe, tandis que les contenus des programmes français progressent suivant une cohérence pédagogique, du plus familier vers le moins familier. Ces aspects se manifestent davantage en ce qui concerne les figures géométriques planes.

Dans les programmes **français** de **Sixième** et de **Cinquième**, il s'agit surtout d'enrichir et de réorganiser les connaissances sur les *quadrilatères particuliers*, sur les *triangles* et sur le *cercle*. Ces figures sont à caractériser en relation avec les isométries. À ces niveaux, les dessins à l'aide d'instruments de tracé acquièrent une importance majeure.

La caractérisation angulaire des triangles (SOMME DES ANGLES INTERNES) est abordée en **Cinquième**.

En **Quatrième**, on approfondit le chapitre relatif au triangle : INEGALITE TRIANGULAIRE, DROITES ET POINTS REMARQUABLES ; CARACTERISATION DU TRIANGLE RECTANGLE (cercle circonscrit, THEOREME DE PYTHAGORE, etc.) trouvent leur place. Les *polygones réguliers* sont reliés à la rotation. À partir de la projection orthogonale, on introduit la notion de *cosinus d'un angle aigu* reliée au triangle rectangle avec la première relation trigonométrique.

En **Troisième**, les *relations trigonométriques* dans le triangle rectangle se complètent. Le THEOREME DE THALES RELATIF AU TRIANGLE est utilisé surtout dans des problèmes de construction.

En **Seconde**, c'est le *parallélogramme* qui revient en liaison avec les vecteurs.

Dans les programmes **italiens**, de la **1ère à la 3ème année de l'ESI**, on introduit les figures planes selon l'ordre suivant :

Le *triangle*.

- INEGALITE TRIANGULAIRE, SOMME DES ANGLES INTERNES, DROITES ET POINTS REMARQUABLES, CRITERES DE CONGRUENCE DES TRIANGLES en 1ère année
- THEOREME DE PYTHAGORE en 2ème année
- CRITERES DE SIMILITUDE DES TRIANGLES, THEOREME DE THALES et THEOREMES D'EUCLIDE en 2ème et/ou 3ème année

Les *quadrilatères particuliers*.

- trapèze, parallélogrammes - rectangle, carré et losange - en 1ème et/ou 2ème année
- les *polygones*, les *polygones réguliers* (relation entre les côtés, caractérisation angulaire) en 2ème année

Le *cercle* et les POLYGONES INSCRITS ET CIRCONSCRITS en 3ème année

La plupart de ces objets sont reconstruits systématiquement à l'ESS.

En général, les résultats remarquables, communs aux deux institutions, sont donc abordés plus tôt en Italie qu'en France. Notamment :

Quatrième	**Inégalité triangulaire**	1ère année de l'ESI
Quatrième	**Droites et points remarquables dans un triangle**	1ère année de l'ESI
Quatrième	**Théorème de Pythagore**	2ème année de l'ESI
Troisième	**Théorème de Thalès**	2ème et/ou 3ème année de l'ESI

C'est surtout lors de l'analyse du découpage annuel que nous avons pu objectiver quelques éléments signalés dans le chapitre précédent.

À la recherche de la cohérence interne des programmes scolaires **italiens**, nous avons pu constater qu'en effet c'est surtout un souci académique qui guide le développement des contenus et que l'aspect pédagogique ne surgit pas clairement.
La transition de l'*attitude de l'intuition rationnelle* vers l'*intuition rationnelle* apparaît comme une véritable rupture au passage de l'ESI à l'ESS.
Les résultats issus du questionnaire proposé aux enseignants révèlent une réticence aux innovations ; cela est dû peut-être aux contenus des manuels et non pas aux prescriptions officielles où les rédacteurs prônent plutôt des changements aussi bien du point de vue des contenus que du point de vue pédagogique : en réalité, on constate – et nous le montrerons davantage par la suite – que souvent les auteurs de manuels n'ont ni allégé ni modifié la présentation des objets déjà existants dans les anciens programmes.
Nous avons donc eu du mal à reconnaître les motivations pédagogiques dans le choix des objets d'enseignement, ce choix répondant surtout à une exigence de cohérence académique.

Au contraire, lorsque nous avons tenté de dégager les motivations de fond des programmes **français**, nous avons constaté que leur cohérence interne répond davantage à une exigence pédagogique fortement affirmée, tout en préservant une harmonie du point de vue mathématique.
Nous reconnaissons que dans les deux premières classes de collège, c'est surtout l'*attitude de l'intuition rationnelle* qui prévaut, la déduction demeurant en filigrane en tant qu'organisation de l'expérience ; dans les classes suivantes, l'*attitude rationnelle* prend le pas et cela est dû aussi au fait que les contenus s'enrichissent avec l'introduction appréciable de résultats géométriques utiles pour mettre en place des séquences déductives plus complexes. En empruntant une expression issue de la théorie développée par Houdement et Kuzniak[37], il nous semble que le programme de la classe de Seconde – caractérisé par la présence prégnante des *vecteurs* – se veut comme une ouverture vers la *géométrie*

[37] cf. chapitre 1, § III.1, *Les « paradigmes » des la géometrie*

axiomatique formaliste qui ne sera abordée qu'à l'Université.

À ce propos, il nous paraît intéressant de revenir aux théories, exposées dans le chapitre 1, de Houdement et Kuzniak d'une part et Speranza d'autre part. Nous disions que ces didacticiens adoptent deux approches différentes dans la perspective de pallier la faiblesse des réflexions respectives sur l'aspect épistémologique dans l'enseignement français et sur l'aspect pédagogique dans l'enseignement italien. En effet, les résultats issus de l'analyse des textes officiels nous permettent une première confirmation sur cet élément de divergence qui caractérise chacune des deux institutions.

Nous reviendrons sur ces aspects au cours de l'analyse des manuels scolaires où, entre autres, nous prendrons en compte le fait que plusieurs objets d'enseignement ne sont pas introduits au même niveau scolaire : alors, par une analyse plus détaillée, nous examinerons la portée qui leur est attribuée.

Classe de Sixième et 1ère année de ESI

Contenus français	Contenus communs	Contenus italiens[38]
		Les éléments fondamentaux de la géométrie : point, droite, demi-droite, segment, plan.
	Définition d'angle. Bissectrice d'un angle. Construction 7 (cf. § IV.2)	Angles saillant, rentrants. Angles remarquables. Angles aigus, obtus. Angles adjacents. Angles opposés par le même sommet. Angles complémentaires. Angles supplémentaires. Comparaison d'angles. Somme et différence de deux angles. Multiple et sous-multiple d'un angle. Mesure d'angle : le degré.
	Droites parallèles et droites perpendiculaires. Définitions et propriétés ; constructions 2, 3 et 4 (cf. § IV.2) Orthogonalité et parallélisme. Médiatrice d'un segment : définition, construction 6 (cf. § IV.2)	Unicité de la droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point. Axiome d'Euclide. Relation d'équivalence du parallélisme. Caractérisation angulaire du parallélisme ; angles formés par deux droites et une sécante ; condition de parallélisme de deux droites. Ensemble des points situés à une distance imposée d'une droite donnée. Distance de deux droites parallèles. Projection d'un point sur une droite, parallèlement à une droite donnée. Projection orthogonale. Distance d'un point d'une droite.
À partir de l'aire d'un rectangle, évaluation de l'aire d'un triangle rectangle.	Définition de triangle. Triangle isocèle, triangle équilatérale triangle rectangle : leur caractérisation per rapport aux côtés, aux angles	Inégalité triangulaire. Somme des angles internes d'un triangle. Angle extérieur d'un triangle. Droite et points remarquables d'un triangle. Critères de congruence des triangles, des triangles rectangles.
Définition *naïve* de la symétrie axiale. En exploitant la symétrie axiale, construction d'un triangle isocèle, d'un triangle équilatéral, d'un losange, d'un rectangle, d'un carré.	Invariants dans une symétrie axiale ; action de la symétrie axiale sur une figure ; axe(s) de symétrie dans une figure. Construction du symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite, d'une ligne polygonale, d'un cercle. Tracés d'axe(s) de symétrie d'un triangle isocèle, d'un triangle équilatéral, d'un losange, d'un rectangle, d'un carré.	[*Les isométries : translation, symétrie axiale, symétrie centrale, rotation). Invariants dans une isométrie. Construction d'un objet géométrique par une isométrie. Composition de deux isométries. Isométries directes et indirectes. Caractérisation de polygones par rapport aux axes de symétrie et au centre de symétrie*]
Calcul du périmètre et de l'aire d'un rectangle, d'un carré.	Les parallélogrammes : rectangle, losange, carré. Définition et propriétés caractéristiques	[Définition de quadrilatère. Le trapèze : définition et propriétés caractéristiques].
	Utilisation du compas : reporter une longueur, reproduire un angle, un arc de cercle de centre donné (construction 1 et 7, cf. § IV.2)	[*Constructions géométriques* (Constructions de 11 à 16, cf. § IV.2)]
Description et reproduction du cercle. Calcul de la longueur d'un cercle.		
Parallélépipède droit : représentation en perspective cavalière, propriétés. Liens avec le rectangle. Volume du parallélépipède droit.		

[38] Les paragraphes en italique concernent les parties qui sont susceptibles d'être abordés au cours d'une année soit l'année d'après. Les paragraphes entre crochets concernent les parties qui sont susceptibles d'être négligés par les enseignants.

Classe de Cinquième et 2ème année de ESI

Contenus français	Contenus communs	Contenus italiens
		Définition de polygone convexe et non convexe. Relation entre les côtés d'un polygone convexe. Définition de polygone régulier. Caractérisation des polygones par rapport aux angles. Somme des angles internes et extérieurs d'un polygone. Diagonales dans un polygone convexe.
Définition *naïve* de la symétrie centrale, invariants dans une symétrie centrale. Construction du symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite, d'une ligne polygonale, d'un cercle. Tracés d'axe(s) de symétrie d'un triangle isocèle, d'un triangle équilatéral, d'un losange, d'un rectangle, d'un carré. Dans une figure simple, identification du centre de symétrie, d'axe(s) de symétrie. Figure simples ayant centre ou axe(s) de symétrie. Problème de construction sur les quadrilatères particuliers en utilisant les propriétés relatives aux côtés, aux diagonales, aux angles, aux éléments de symétrie. Caractérisation d'un parallélogramme en relation avec la symétrie centrale, notamment rectangle, losange, carré. Caractérisation angulaire du parallélisme. Angles complémentaires, supplémentaires, opposés par le même sommet, adjacents, alternes-internes, correspondants. Somme des angles internes d'un triangle. Les angles d'un triangle équilatéral, isocèle. Construction du cercle circonscrit à un triangle. Construction d'un triangle dont on connaît la longueur des trois côtés, la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents, les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces côtés.		
À partir de l'aire du rectangle, évaluation de l'aire du triangle.	À partir de l'aire d'un rectangle, évaluation de l'aire du parallélogramme.	Equidécomposabilité et polygones. Aire du rectangle. À partir de l'aire d'un rectangle, évaluation de l'aire du carré, du losange. À partir de l'aire d'un parallélogramme, évaluation de l'aire d'un triangle. Formule de Héron. Triangles de même aire. À partir de l'aire d'un triangle, évaluation de l'aire d'un trapèze, d'un polygone régulier ; relation entre les côtés et l'apothème. Polygones de même périmètre, de même aire. Le théorème de Pythagore et ses applications.
Aire d'un disque. Prisme droit et cylindre de révolution : représentation en perspective cavalière et propriétés. Propriétés du parallélisme et de l'orthogonalité dans l'espace. Prisme droit dont la base est un triangle, un parallélogramme. Volume d'un prisme droit, de l'aire et du volume d'un cylindre de révolution.		[Définitions de cercle et de disque. Éléments d'un cercle et d'un disque. Droites passant par le centre d'un cercle. Médiatrice d'une corde. *Symétries dans un cercle.* Angles au centre, angles inscrits dans un cercle. Angles inscrits interceptant le même arc. Positions relatives d'un cercle et d'une

		droite, de deux cercles. Longueur d'un cercle. Aire d'un disque. Aire d'un secteur circulaire, d'un segment circulaire, d'une couronne circulaire. *Constructions 8, 9 et 10* (cf. § IV.2)] [Définitions et propriétés de polygones inscrits et circonscrits. Cercle inscrit dans un triangle ; rayon d'un cercle inscrit dans un triangle. Cercle circonscrit à un triangle ; rayon d'un cercle circonscrit à un triangle ; condition d'existence d'un cercle. Cercle circonscrit à un triangle rectangle. Cercle circonscrit à un quadrilatère. Polygones réguliers. Relation entre les côtés d'un polygone régulier et le rayon du cercle circonscrit. Cercle inscrit dans un polygone] [Agrandissement et réduction d'un objet géométrique ; *homothétie*. Figures géométriques semblables. Critères de similitude des triangles. Relation entre les éléments de triangles semblables. Effet d'une similitude sur les longueurs et les aires. Théorème de Thalès et ses applications. Théorèmes d'Euclide et leurs applications. *Constructions 17, 18, 19, 20* (cf. § IV.2)] [*Transformations affines et projections*]

Classe de Quatrième et 3ème année de ESI

Contenus français	Contenus communs	Contenus italiens
		Positions relatives d'une droite et d'un plan, de deux droites, de deux plans. Projection d'un point sur un plan selon une direction donnée ; projection orthogonale d'un point sur un plan. Plan médiateur d'un segment. Symétrique d'un point par rapport à un plan. Angles dièdres. Rectiligne d'un dièdre. Angles solides. Définition de polyèdre. Les parallélépipèdes : parallélépipède droit ; cube, sections planes d'un cube, prisme droit ; pyramide, pyramide régulière, sections planes d'une pyramide, tronc de pyramide. Polyèdres réguliers. Relation d'Euler. Aires et volumes.
	Sphère, sections planes d'une sphère par un plan et position de son centre. Aire et volume de la sphère.	Rotation dans l'espace. Cylindre. Cône ; section planes d'un cône. Tronc de cône. Aires. Volumes. D'autres solides de révolution : rotation complète d'un triangle, d'un trapèze.
Définition *naïve* de la projection. Projection sur une droite, selon une direction donnée. Conservation du milieu d'un segment par projection. Construction du projeté d'un point, d'un segment. Propriété du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle (théorème des milieux). Proportionnalité des longueurs entre segments et projetés (projection orthogonale). Cosinus d'un angle aigu. Dans un triangle rectangle, relation entre le cosinus et les longueurs des côtés adjacents. Inégalité triangulaire (à travers des construction mettant en jeu des triangles ou des cercles). Régionnement du plan par la médiatrice. Distance d'un point à une droite. Ensemble des points situés à une distance imposée d'un droite donnée. Position relative d'une droite et un cercle. Axe de symétrie dans une figure formée par une droite et un cercle. Construction 9 (cf. § IV.2) Triangle. Droites et points remarquables. Cercle circonscrit à un triangle rectangle. Théorème de Pythagore et sa réciproque. Caractérisation du triangle rectangle par la médiane relative à l'hypoténuse, par le théorème de Pythagore ; des points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit. Définition *naïve* de translation et de rotation. Invariants dans une translation, dans une rotation et leur utilisation dans des constructions. Construction de l'image, par une translation ou une rotation, du d'un point, d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle. Translation et parallélogramme. Polygones réguliers : triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone. Construction 6 (cf. § IV.2) Symétries laissant invariants un triangle équilatéral et un carré.		

Classe de Troisième et 1ère année de ESS

Contenus français	Contenus communs	Contenus italiens
		Les éléments fondamentaux de la géométrie : point, droite, demi-droite, segment, plan. Les angles et leur mesure : définitions et propriétés fondamentales. Droites parallèles et droites perpendiculaires : définitions et propriétés fondamentales. Caractérisation angulaire du parallélisme : angles formés par deux droites et une sécante.
Théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque ; application à des problèmes de construction (construction 20, cf. § IV.2). Définition de sinus et de tangente d'un angle aigu. Dans le triangle rectangle, relation entre le cosinus, le sinus ou la tangente et les longueurs de deux côtés du triangle.		Définition de triangle. Inégalité triangulaire. Caractérisation des triangles par rapport aux côtés, aux angles. Somme des angles internes d'un triangle. Angle extérieur d'un triangle. Droite et points remarquables d'un triangle. Critères de congruence des triangles, des triangles rectangles. Définition de quadrilatère. Le trapèze : définition et propriétés caractéristiques. Les parallélogrammes : rectangle, losange, carré. Définitions et propriétés caractéristiques.
Composition de deux transformations. Construction de transformées de figures par composition de deux translations, de deux symétries centrales ou orthogonales par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires. Invariants dans les transformations étudiées. Translation et vecteurs. Addition vectorielle et composition de deux translations. Égalité vectorielle et parallélogramme. Construction de l'image d'un point par translation connaissant le vecteur de la translation. Relation de Chasles.		Translation et vecteurs. Symétrie axiale. Symétrie centrale. Rotation. Invariants dans une isométrie. Construction d'un objet géométrique par une isométrie. Composition de deux isométries. Isométries directes et indirectes[39].
	Propriétés de l'angle inscrit dans un cercle et de l'angle au centre. Angles inscrits interceptant le même arc.	[Définition de cercle et ses parties ; propriétés fondamentales. Positions relatives d'un cercle et d'une droite, de deux cercles. Unicité d'un cercle passant par trois points donnés ; de la tangente à un cercle donné passant par un point de ce cercle ; propriétés des tangentes à un cercle par un point extérieur au cercle] [Définitions et propriétés *de* polygones inscrits et circonscrits. Cercle inscrit dans un triangle ; rayon d'un cercle inscrit dans un triangle. Cercle circonscrit à un triangle ; rayon d'un cercle circonscrit à un triangle ; condition d'existence d'un cercle. Cercle circonscrit à un triangle rectangle. Cercle circonscrit à un polygone, à un quadrilatère. Polygones réguliers. Relation entre les côtés d'un polygone régulier et le rayon du cercle circonscrit. Cercle inscrit dans un polygone]
Utilisation du théorème de Pythagore pour des calculs de longueurs (diagonale d'un parallélépipède droit, rayon d'une section plan d'une sphère, hauteur d'une pyramide régulière).		[Polygones équidécomposables. Théorème de Pythagore. Théorèmes d'Euclide]

[39] Nous rappelons que cette partie est susceptible d'être négligée par l'enseignant qui, d'après les prescriptions des textes officiels, choisit une approche traditionnelle pour développer le programme de géométrie (cf. § III.1, *Les contenus des programmes de l'ESS*)

Agrandissement et réduction d'un objet géométrique du plan ou de l'espace ; effet sur les longueurs, les aires et les volumes. Section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base en relation avec les réductions. Pyramide et cône de révolution : représentation en perspective cavalière et propriétés. Représentation d'une pyramide dont une arête latérale est aussi la hauteur ; pyramide régulière à trois, quatre ou six faces latérales. Volumes de tous les solides étudiés.		

Classe de Seconde et 2ème année de ESS

Contenus français	Contenus communs	Contenus italiens
Représentation géométrique d'un vecteur ; interprétation géométrique de l'égalité vectorielle. Norme d'un vecteur. Addition vectorielle. Opposé d'un vecteur. Relation de Chasles. Représentation géométrique de la somme et de la différence de deux vecteurs ; de la multiplication par un nombre. Vecteurs colinéaires. Relation entre le parallélogramme, la translation, l'égalité et l'addition des vecteurs ; entre l'opposé d'un vecteur et la symétrie centrale.		
Caractérisation vectorielle du parallélisme de deux droites, de l'alignement de points, de l'appartenance à une droite définie par deux points ou par un point et un vecteur directeur. Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, du centre de gravité d'un triangle.		
Configuration de Thalès et homothétie en termes vectoriels ; application au triangle.		Théorème de Thalès et ses applications. Théorème des milieux. Théorèmes d'Euclide et leurs applications. Théorème de la bissectrice dans un triangle. Propriétés des sécantes et des tangentes à un cercle. Cosinus et sinus d'un angle aigu. Dans un triangle rectangle, relations entre les longueurs des côtés et les angles.
Vecteurs orthogonaux, condition d'orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites.		
Propriétés conservées par une isométrie, par une homothétie. Symétries du cercle : tangentes à un cercle de direction donnée ou issues d'un point donné. Axes de symétrie de la configuration formée par deux droites concourantes. Ensemble des points équidistants de deux droites concourantes.		Homothéties. Similitudes. Figures géométriques semblables. Critères de similitude des triangles. Relation entre les éléments de triangles semblables. Effet d'une similitude sur les longueurs et les aires.
Propriétés du parallélisme de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan dans l'espace. Projection sur un plan selon une direction de droite. Propriétés de l'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan dans l'espace. Plan médiateur. Projection orthogonale sur un plan.		*Exemples de transformations géométriques dans l'espace. Symétries dans des solides particuliers.*

VI. *ÉVOLUTION DES PROGRAMMES SCOLAIRES FRANÇAIS*

À l'époque où notre recherche venait de commencer, des aménagements dans l'enseignement secondaire ont eu lieu. Les nouveaux programmes sont applicables à compter de :

- la rentrée scolaire 1996 pour la classe de Sixième ;
- la rentrée scolaire 1997 pour la classe de Cinquième ;
- la rentrée scolaire 1998 pour la classe de Quatrième ;
- la rentrée scolaire 1999 pour la classe de Troisième ;
- la rentrée scolaire 2000 pour la classe de Seconde.

En général, les objectifs et les suggestions méthodologiques demeurent les mêmes qu'auparavant mais les textes sont plus détaillés. Les contenus ont été quelque peu modifiés, les commentaires qui les accompagnent précisent davantage quelques aspects pédagogiques : on saisit mieux, par exemple, la portée attribuée aux constructions géométriques, la progression à suivre dans l'apprentissage du raisonnement déductif ainsi que le statut conféré à la démonstration.

Avant de terminer ce chapitre, nous examinons les modifications importantes en relation avec les textes officiels précédents et analysons les passages qui méritent une attention particulière.

VI.1 Le Collège

Les premières classes de collège ont été réorganisées en cycles :

- le *cycle d'adaptation* désigne la Sixième ;
- le *cycle central* désigne les classes de Cinquième et de Quatrième.

Les intentions officielles conservent globalement l'esprit des précédentes. Cet esprit est exprimé sous une forme qui ressemble davantage à celle des instructions italiennes. Dans un paragraphe, intitulé *Les mathématiques comme discipline de formation générale*, on lit :

> "Au collège les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique... À travers la résolution de problèmes et la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié".

En effet, dans les instructions officielles italiennes, les rédacteurs soulignent à plusieurs reprises l'importance de l'acquisition de la *méthode scientifique* à travers le développement de capacités

conceptuelles et opérationnelles telles que l'identification d'un problème et la conjecture d'un résultat, l'organisation et le traitement de données, l'évaluation de conformité entre les hypothèses formulées et les résultats expérimentaux, l'exhortation graduelle au contrôle de la validité des conjectures à travers des raisonnements de plus en plus structurés. Dans les textes officiels français, tout cela correspond à l'importance de l'entraînement à la pratique d'une *démarche scientifique*, à l'apprentissage progressif du raisonnement déductif et à la prise de conscience progressive de ce qu'est une véritable activité mathématique. Ces aspects, qui paraissent dispersés dans les divers paragraphes des textes officiels précédents, sont donc mis en évidence dans les nouveaux.

En analysant les finalités des instructions précédentes, nous avions remarqué que, même si l'on ne parlait pas explicitement d'*intuition*, cette composante semblait poindre au travers du terme *imagination*. En effet, notre interprétation est confirmée car, dans les textes officiels nouveaux, ces deux éléments sont associés dans la même phrase :

> "[Les mathématiques] concourent à la formation intellectuelle de l'élève, à la formation du citoyen, et doit notamment... stimuler l'imagination, l'intuition...".

Par ailleurs, les objectifs généraux sont les mêmes qu'auparavant et ils demeurent valables pour les quatre ans de collège : apprendre à relier des observations à des représentations qui, à leur tour, sont à relier à une activité mathématique et à des concepts, cette démarche devant permettre de bâtir un réseau de connaissances interdisciplinaires.

A l'égard des méthodologies et de l'organisation de l'enseignement, les suggestions demeurent les mêmes.
Les rédacteurs invitent à bien distinguer entre activités de formation, d'évaluation et de synthèse.
Les activités de formation, aussi riches que diversifiées, sont l'occasion de mobiliser et de consolider les acquis dans une perspective élargie.
Les activités d'évaluation portent exclusivement sur les compétences exigibles inscrites au programme.
Les activités de synthèse portent sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître ainsi que sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu, elles rythment les acquisitions communes et permettent l'appropriation du raisonnement. Puisque les programmes, tels qu'ils sont conçus, prévoient que les sujets abordés antérieurement soient consolidés et approfondis sans reconstruction systématique, ces moments de synthèse offrent l'occasion d'élaborer des séquences déductives de complexité graduelle qui requièrent l'utilisation des propriétés mathématiques à reprendre.

Nous constatons ici encore que le savoir et le savoir-faire doivent acquérir la même importance : toute activité doit viser à consolider les connaissances antérieures, à favoriser un nouvel enrichissement mais

aussi à apprendre et maîtriser des méthodes.

Comme dans les précédents programmes, la résolution de problèmes occupe une place importante car ils *sont à la fois* ***source*** *et* ***critère*** *des connaissances mathématiques*[40] : ils constituent une aide dans le processus d'appropriation d'une connaissance nouvelle, de consolidation et de réinvestissement de connaissances acquises. *C'est tout le métier de l'enseignant d'adapter la complexité des problèmes proposés à ses élèves*. À ce propos, les rédacteurs suggèrent alors de faire référence à trois grands types de problèmes :

- ceux qui correspondent à des situations de la vie quotidienne et présentent une complexité raisonnable ;
- ceux qui sont posés dans d'autres domaines afin de commencer un travail de mathématisation ;
- ceux qui portent directement sur des objets mathématiques et sollicitent la curiosité mathématique et l'esprit de recherche ; dans cet ensemble, on différenciera les problèmes d'application et les problèmes de recherche et de réflexion.

Dans l'analyse des textes officiels anciens, nous avions souligné qu'à propos de l'apprentissage de la démonstration[41], rien d'explicite n'était prescrit jusqu'à la classe de Troisième, où les rédacteurs soulignaient l'importance *de développer les capacités de découverte et de conjecture autant que de démonstration*. Néanmoins, un certain nombre d'éléments laissaient sous-entendre la prise en compte d'un apprentissage progressif de procédures démonstratives depuis les premières classes du collège.

Dans les instructions actuelles, ce qu'auparavant on lisait entre les lignes est désormais explicitement abordé et développé :

> "... À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves peuvent prendre conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique...".

Dès le cycle d'adaptation, les rédacteurs indiquent que les *travaux géométriques* doivent permettre de "prendre contact" avec des théorèmes et apprendre à les utiliser ; de passer de l'identification perceptive de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés :

> "Les élèves commencent à se familiariser avec les propriétés d'une figure et c'est dans cette classe que se mettent en place un certain nombre d'éléments et de relations qui se développeront ultérieurement dans des situations de validation et de preuve".

Le passage "épineux" de l'*attitude de l'intuition rationnelle* vers l'*attitude rationnelle* face à la géométrie, est davantage pris en considération. Pour que ce passage soit bien accompli, les rédacteurs décrètent – dès

---

[40] Ce que, ailleurs, nous avons appelé "approche par les problèmes".

[41] Rappelons que le terme *démonstration* n'apparaissait qu'en Troisième.

la classe de Sixième – l'importance de la nécessité de *développer des apprentissages qui initient les élèves à la démonstration* : à partir de la mise en place de courtes séquences déductives, l'initiation au raisonnement déductif se transforme petit à petit en un véritable apprentissage de la démonstration.

L'apprentissage de la démonstration devient un des objectifs principaux des programmes du cycle central du collège : celle-ci est prise en compte non seulement en tant qu'instrument pour résoudre des problèmes mais aussi en tant qu'instrument pour valider les théorèmes du cours. On lit :

> "... les études expérimentales permettent d'émettre des conjectures et donnent du sens aux définitions et aux théorèmes. Elles ont donc toute leur place dans la formation scientifique des élèves. On veillera toutefois à ce que les élèves ne les confondent pas avec des démonstrations : par exemple, pour tout résultat mathématique énoncé, on précisera explicitement qu'il est admis lorsqu'il n'a pas été démontré..."

En poursuivant l'initiation très progressive au raisonnement déductif commencé dans le cycle précédent, on prescrit de passer à l'élaboration complète d'une démarche déductive dans des cas simples. Plus loin, on lit :

> "En classe de Cinquième, l'étude des figures planes se poursuit. Un nouvel outil, la symétrie centrale, permet d'enrichir et de réorganiser les connaissances sur les figures, dont certaines propriétés pourront être démontrées...".

Dans les commentaires qui accompagnent les contenus de la classe de Cinquième, les rédacteurs indiquent alors ce qui pourra être démontré ainsi que la méthode à suivre. Notamment :

> "Le travail entrepris sur le parallélogramme et la symétrie centrale aboutit ainsi à des énoncés précis que les élèves doivent connaître. Des séquences déductives pourront s'appuyer sur ces énoncés... La symétrie centrale ou la caractérisation angulaire du parallélisme qui en découle, permettent de démontrer que la somme des angles internes d'un triangle est égale à 180°... la caractérisation de la médiatrice d'un segment à l'aide de l'équidistance... permet de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes et justifie la construction du cercle circonscrit à un triangle".

En classe de Quatrième, des nouveaux outils s'ajoutent à ceux des classes antérieures : cet enrichissement doit favoriser le développement des capacités de découverte et de démonstration. De même ici, nous lisons des prescriptions plus précises :

> "La symétrie centrale et les propriétés caractéristiques du parallélogramme permettent de démontrer [les théorèmes relatifs aux milieux de deux côtés d'un triangle]... certaines des [propriétés de concours des droites remarquables d'un triangle] pourront être démontrées... l'inégalité et la symétrie axiale, vues en classe de cinquième, permettent de démontrer les résultats relatifs à la distance d'un point à une droite, lequel peut aussi être relié au théorème de Pythagore".

Évidemment, il serait intéressant d'examiner la façon dont ces prescriptions ont été interprétées par les auteurs de manuels scolaires : particulièrement, la signification qu'ils attribuent au verbe "démontrer" et, par conséquent, les types de *preuves* qu'ils proposent pour valider les résultats figurant aux programmes.

En classe de Troisième, qui représente une année de clôture pour le collège mais aussi d'ouverture vers le

lycée, on précise encore que l'enseignement des mathématiques concourt au développement de l'aptitude à chercher, de la capacité à analyser, de l'habitude à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit. D'après les rédacteurs, le recours à une approche expérimentale doit toujours aider à formuler des conjectures et à donner du sens aux définitions et aux théorèmes, tout en veillant à ce que l'élève sache distinguer entre conjecture et théorème. Il nous semble reconnaître ici l'invitation à harmoniser les diverses *attitudes* en considérant l'*intuition*, l'*expérience* et la *déduction* comme des composantes qui peuvent concourir ensemble à une meilleure appréhension de l'esprit mathématique.

Au cours de cette dernière année de collège, la poursuite du développement des capacités de découverte et de démonstration - *mises en œuvre en particulier dans des situations non calculatoires* - demeurent parmi les objectifs essentiels.
Remarquons qu'ici, contrairement à ce qu'on trouve dans les programmes des classes antérieures, les rédacteurs ne prescrivent rien au sujet des résultats à admettre ou à démontrer. Or, puisqu'ils sollicitent l'aménagement d'activités mettant l'élève le plus souvent possible en situation de rédiger et d'élaborer des démonstrations, il nous semble que cela montre qu'en Troisième l'utilisation de la démonstration dans la résolution des problèmes l'emporte sur son utilisation dans la validation des résultats du cours. Ainsi, l'accent est mis sur la production de démonstrations par les élèves plutôt que sur l'établissement rigoureux des résultats du cours. La démonstration passe donc dans le *topos*[42] de l'élève.

VI.2 La classe de Seconde

La Seconde est une classe de détermination, où l'élève peut enfin définir son orientation. Le programme est composé de trois grands chapitres - *statistiques, calcul et fonctions, géométrie* - et, pour chacun d'eux, les capacités attendues (*en nombre volontairement limité*) constituent la base commune à partir de laquelle se fonderont les programmes des années ultérieures. Le rôle de cette première année de lycée est souligné par les rédacteurs lorsqu'ils disent que l'enseignant ne doit pas oublier qu'*il transmet une image des mathématiques, importante pour l'avenir de ses élèves*.

Les objectifs principaux assignés à l'enseignement de la géométrie en Seconde, se placent dans la continuité du collège. Notamment, ils visent le développement de la vision dans l'espace et l'utilisation des connaissances et des méthodes acquises antérieurement.

---

[42] cf. Chevallard Y. (1998), ouvrage déjà cité.

La nouveauté du programme de géométrie porte sur la réintroduction des *critères de congruence* et *de similitude des triangles* et sur une présence plus importante de problèmes concernant les *aires* :

> "Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires"

C'est donc sous le prétexte d'offrir un *outil* qui facilite le travail d'approfondissement et évite toute reconstruction systématique que les "cas d'égalité" et les "triangles semblables" - disparus des programmes il y a une trentaine d'années mais qui demeuraient l'objet d'un débat au sein de la noosphère - *ressuscitent* dans l'institution française[43]. Que proposent alors les rédacteurs pour les réintégrer dans les programmes ? Dans les commentaires qui accompagnent les contenus, on lit :

> "À partir de la construction d'un triangle caractérisé par certains de ses côtés ou de ses angles, on introduira la notion de triangles isométriques. On pourra observer que deux triangles isométriques le sont directement ou non... On pourra utiliser la définition suivante : "deux triangles ont la même forme si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre" (il s'agit de triangles semblables)"

L'appellation "triangles isométriques" doit évidemment évoquer le lien avec les *isométries*, étudies dans les classes antérieures ; de même, l'observation de triangles directement isométriques ou non permet de distinguer la symétrie axiale des autres isométries. Ces résultats sont tacitement admis, cela trouvant une justification plausible - du point de vue mathématique - dans l'axiomatique hilbertienne où le premier critères de congruence des triangles compte parmi les axiomes de congruence.

Les critères de similitude des triangles *se cachent* derrière l'appellation "triangles de même forme". Les rédacteurs suggèrent de les caractériser, grâce au théorème de Thalès, par l'existence d'un coefficient d'agrandissement ou de réduction, ce qui relie cet objet à des questions d'aires. Cette partie se veut donc comme un complément du chapitre, introduit en Quatrième et poursuivi en Troisième, sur les *triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes* et le théorème de Thalès et sa réciproque ; mais elle se veut aussi comme un remplacement de l'homothétie - qui, en 1999, par la suite des allégements portant sur les anciens programmes a disparu[44] - et des projections qui n'apparaissent plus nulle part dans les programmes des classes antérieures.

Ces modifications conduisent évidemment à s'interroger sur leurs effets sur l'enseignement de la géométrie : comment les auteurs de manuels scolaires intègrent-ils les nouveaux objets ? Abrogent-ils les

---

[43] Nous rappelons que, dans les précédents programmes de Cinquième, le recours aux "cas d'égalité" des triangles pour l'étude des figures géométriques est exclu.

[44] Dans le texte relatif à ces allégements, la définition vectorielle d'homothétie apparaît parmi les objets à supprimer. On lit : "En ce qui concerne l'homothétie, on se contentera de revoir l'aspect agrandissement-réduction ainsi que l'effet sur les aires (et éventuellement les volumes)". Cf. *Programmes des Lycées*, le B.O. n° 5, 5 août 1999

anciens objets ? Et si l'on considère que les enseignants qui exercent aujourd'hui n'ont pas été formés pour penser en termes de congruence et de similitude, comment réagissent-ils à ces changements ? Et les élèves comment les accueillent-ils ? Nous ne nous sommes pas donné les moyens pour répondre à ces questions. Pourtant, la nature de notre problématique pourrait fournir quelques éléments pour envisager les effets de ces changements.

VI.3 Explicitation des contenus d'après les textes officiels

Nous indiquons ci-après les innovations et les modifications essentielles qui ont été apportées par rapport aux anciens programmes.

Sixième	RECTANGLE TRIANGLE CERCLE	SYMETRIE AXIALE	PARALLEPIPEDE RECTANGLE
Cinquième	PARALLELOGRAMME **TRIANGLE** **CERCLE**	SYMETRIE CENTRALE	PRISME DROIT CYLINDRE DE REVOLUTION
Quatrième	**TRIANGLE** PARALLELOGRAMME CERCLE	~~Projection dans le plan~~ TRANSLATION ~~Rotation~~	PYRAMIDE CÔNE DE REVOLUTION ~~Sphère~~
Troisième	**TRIANGLE** PARALLELOGRAMME	~~Agrandissement et réduction~~ COMPOSITION DE DEUX ISOMETRIES ROTATION	SPHERE ~~Pyramide~~ ~~Cône de révolution~~
Seconde	**TRIANGLE**	~~Homothétie~~ ~~Projection dans l'espace~~	DROITES ET PLANS

Notre problématique nous conduit à repérer trois chapitres principaux dans les programmes, à savoir les *figures géométriques dans le plan*, les *transformations géométriques*, les *figures géométriques dans l'espace*. Le tableau ci-dessus montre les trois ensembles d'objets-clé qui prédominent dans les programmes nouveaux. Les objets qui, en relation avec les anciens programmes[45], acquièrent plus

[45] cf. § V, *Un regard d'ensemble sur les contenus des programmes français*

d'importance sont marqués en gras ; les objets disparus ou décalés sont barrés.

Les programmes de Collège

A) Cycle d'adaptation : classe de Sixième.

La plupart des notions mathématiques enseignées au cycle d'adaptation sont en cours d'acquisition, l'apprentissage est à voir comme un approfondissement de l'expérience que les élèves apportent de l'école élémentaire. L'objectif fondamental est encore la description et le tracé de figures simples. L'*attitude de l'intuition rationnelle* joue ici un rôle fondamental : le vocabulaire se précise, les connaissances s'enrichissent et se réorganisent à l'aide de nouveaux outils tels que la symétrie axiale.

Les diverses activités doivent prendre appui sur l'usage d'instruments de dessin et de mesure, y compris dans un environnement informatique, et cet usage doit se parfaire au fil des années. Ils sont un moyen pour apprendre une *utilisation progressive et prudente de lettres pour désigner les points d'une figure* ainsi que pour mobiliser définitions et propriétés de figures :

> "Le tracé est une chose, sa description raisonnée en est une autre. Les élèves sont amenés à mettre en œuvre des définitions ou des propriétés caractéristiques de figures géométriques et des propriétés d'une transformation qui agit sur ces figures. L'intérêt d'une construction porte plus sur la procédure utilisée que sur l'objet obtenu. La justification qui l'accompagne est une occasion de raisonnement... En outre, l'examen d'une figure géométrique peut conduire à un inventaire (non nécessairement exhaustif) de ses propriétés, puis à un choix de certaines d'entre elles en vue d'une construction. Ces propriétés retenues jouent alors le rôle d'hypothèse, les autres de conclusions. Une telle démarche contribue à la compréhension du statut d'un énoncé dans une démonstration"

Nous voyons donc qu'ici les constructions géométriques acquièrent très clairement un double statut : les problèmes de construction doivent permettre aussi bien d'apprendre des techniques de construction que de mettre en jeu des connaissances acquises ou à acquérir. Cet aspect demeurait ambigu dans les programmes précédents.

Les contenus du programme de Sixième n'ont pas subi de changements remarquables mais c'est plutôt l'esprit de fond qui diffère. Les modifications apportées visent à insister sur la continuité avec l'école primaire, à expliciter plus clairement les démarches à suivre, à rechercher une plus grande progressivité des exigences en géométrie dans l'espace[46].

À propos de la géométrie dans l'espace, c'est encore le parallélépipède rectangle qui est au programme.

---

[46] Cela est dû peut-être au fait qu'aucune compétence concernant les mesures de volumes n'est inscrite au programme du cycle des approfondissements.

Néanmoins, les rédacteurs précisent :

> "L'objectif est d'entretenir et d'approfondir les acquis de l'école élémentaire... L'usage d'une perspective cavalière et la fabrication d'un patron sont complémentaires. Mais ces travaux s'appuient sur l'étude de vrais objets éventuellement réalisés en technologie. Passer de l'objet à ses représentations constitue l'essentiel du travail dans l'espace à ce niveau... L'usage d'outils informatiques (logiciels de géométrie dans l'espace,...) peut permettre de mieux visualiser les différentes représentations d'un objet".

Dans les programmes précédents, l'utilisation d'outils informatiques était prévue mais aucune prescription précise n'était suggérée. Ici, à plusieurs reprises et tout au long des années scolaires, les rédacteurs en sollicitent le recours[47].

En outre, comme nous l'avons souligné plus haut, l'accent est mis surtout sur une initiation progressive au raisonnement déductif. On lit :

> "Les travaux géométriques permettront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant, par exemple, sur la définition du cercle et les propriétés d'orthogonalité et de parallélisme. On prendra garde, à ce sujet, de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes".

Tous ces nouveaux éléments montrent que, bien qu'on soit en plein développement de l'*attitude de l'intuition rationnelle*, on ouvre un premier accès à l'*attitude rationnelle*.

B) Cycle central.

Le programme de géométrie du cycle central vise à approfondir la connaissance de propriétés et de relations métriques relatives aux configurations de base, à familiariser les élèves avec d'autres transformations du plan (symétrie centrale et translation) ainsi qu'avec les représentations de figures de l'espace, à progresser dans l'apprentissage de la démonstration.

Classe de Cinquième. Ici, les contenus ont été quelque peu modifiés et les commentaires qui les accompagnent sont plus détaillés.

La présence du triangle devient plus prégnante. L'introduction de l'inégalité triangulaire est une innovation de ce programme car auparavant cet objet n'était introduit qu'en classe de Quatrième et en relation avec des problèmes de distance ; ici, par contre, il est relié aux constructions de triangles et, par conséquent, au cercle. On commence implicitement à familiariser les élèves avec les critères de congruence à l'aide de problèmes de construction de triangles.

Également, le cercle prend une place plus importante. Les problèmes de construction, qui consolident les connaissances sur les quadrilatères particuliers, permettent aussi de mettre en œuvre droites et cercles ; la construction du cercle circonscrit à un triangle apparaît ici (et non plus en Quatrième) et elle justifiée à

[47] Nous croyons que l'efficacité d'outils informatiques pour *mieux visualiser les différentes représentations d'un objet* est un sujet délicat à aborder. Néanmoins, à ce sujet, nous nous limitons à reporter ce qui est écrit dans les textes officiels.

l'aide de la caractérisation de la médiatrice d'un segment.

La symétrie centrale (introduite à partir d'activités expérimentales permettant de dégager progressivement ses invariants), les propriétés du parallélogramme et la caractérisation angulaire du parallélisme deviennent explicitement des outils de démonstration.

Classe de Quatrième. Les contenus du programme de Quatrième ont subi beaucoup de modifications mais la représentation d'objets géométriques du plan et de l'espace, la caractérisation de certains de ces objets et le calcul de grandeurs demeurent les objectifs majeurs.

Le triangle est la figure fondamentale du programme : le *théorème des milieux* et sa réciproque peuvent être démontrés à l'aide de la symétrie centrale et des propriétés caractéristiques du parallélogramme. Certaines des propriétés de concours des droites remarquables d'un triangle peuvent être démontrées donnant ainsi l'occasion de réinvestir des connaissances antérieures.

Les projections ont disparu : on ne parle plus de "conservation du milieu par projection et de configurations prenant appui sur cette propriété" mais *de triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes*. Cette nouvelle configuration est strictement liée à des problèmes de proportionnalité - un objet qui, dans le cycle central constitue un fil conducteur des diverses rubriques du programme. Avec le théorème des milieux, cette configuration se présente implicitement comme un cas particulier du théorème de Thalès ou de sa réciproque.
En conséquence, le cosinus n'est plus à présenter comme opérateur de projection orthogonale :

> "La propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes permet de définir le cosinus comme un rapport de longueurs. On peut également le définir comme l'abscisse d'un point sur le quart de cercle trigonométrique situé dans le premier quadrant".

Le *théorème de Pythagore et sa réciproque* sont encore des résultats qui – avec le cercle – caractérisent le triangle rectangle. Le théorème de Pythagore est désigné en tant que théorème dans les colonnes des contenus et des commentaires et il redevient une *propriété* dans la colonne des compétences exigibles. Il peut être relié au résultat relatif à la distance d'un point à une droite qui aussi peut être démontré à l'aide de la symétrie axiale et de l'inégalité triangulaire.

En ce qui concerne les transformations géométriques, la rotation est reportée à la classe de Troisième ainsi que les vecteurs et les polygones réguliers. La translation est à définir à partir du parallélogramme et peut être introduite à partir d'activités expérimentales permettant d'en dégager les invariants qui, par la suite, pourront être *justifiés*. Les rédacteurs précisent que définition et propriétés pourront être utilisés dans la

résolution d'exercices très simples de construction.

Pour la géométrie dans l'espace, on trouve la pyramide et le cône de révolution au lieu de la sphère qui est proposée à la classe suivante, *en même temps que les problèmes de sections planes*. Ces objets peuvent offrir l'occasion de mettre en œuvre la proportionnalité.

C) Classe de Troisième.

Le programme vise à parfaire les connaissances de propriétés et de relations métriques dans le plan et dans l'espace, à préparer l'outil vectoriel dont l'utilisation systématique est prévue au lycée, à familiariser avec la rotation, à poursuivre le développement des capacités de découverte et de démonstration.

Les contenus du programme de Troisième ont subi, eux aussi, des changements remarquables.

Dans le chapitre concernant la géométrie dans l'espace, on trouve la sphère et les problèmes de sections planes des solides étudiés dans les classes antérieures.

Comme pour le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu sont à définir comme rapports de longueurs ou à l'aide du quart de cercle trigonométrique.

La propriété de Thalès est proposée comme un prolongement de l'étude faite en classe de Quatrième et elle n'est prise en compte qu'en relation avec le triangle. La construction de la quatrième proportionnelle n'est plus citée et, à sa place, on trouve le problème de construction relatif à la division d'un segment en parties proportionnelles à deux segments donnés.

Les vecteurs sont enfin introduits comme un prolongement des acquis du cycle central sur les parallélogrammes et sur la translation : on étudie l'égalité vectorielle et la somme de deux vecteurs en les reliant aux propriétés du parallélogramme et de la composition de deux translations. On reprend aussi la translation comme l'effet de la composition de deux symétries centrales successives de centres différents.

Les propriétés de la rotation doivent être dégagées à partir d'activités expérimentales et en relation avec les polygones réguliers et elles pourront être utilisées dans la résolution de problèmes de construction. Les activités de recherche des transformations qui laissent invariant un triangle équilatéral ou un carré seront l'occasion pour réviser les transformations étudiées dans les classes antérieures.

Le programme de la classe de Seconde

Par suite des allégements apportés en 1999 et des modifications ultérieures, l'esprit du programme de Seconde a beaucoup changé.

Comme nous l'avons souligné plus haut, les critères de congruence et de similitude représentent un thème fondamental, en prenant la place des transformations géométriques qui ne sont plus mentionnées. En ce sens-là, l'esprit des programmes se transforme : l'introduction des transformations géométriques, dès le cycle d'adaptation, se veut un moyen pour *envisager l'espace géométrique tout entier* alors que les critères de congruence et de similitude conduisent à *traquer les longueurs égales ou les angles égaux sans regarder l'ensemble d'une figure*[48].

En outre, toute la partie concernant le calcul vectoriel a été extrêmement réduite : on se limitera à la consolidation des acquis du collège et les vecteurs vont vivre surtout en tant qu'outils reliés aux sciences physiques. C'est ainsi que l'objet "vecteurs" change d'*habitat* et de *niche écologique* !

L'engagement sur la voie d'un processus d'algébrisation de la géométrie semble donc être remis à plus tard... est-ce qu'il disparaîtra dans l'avenir ?

Néanmoins, nous remarquons qu'une attention particulière est donnée à la logique. Dans l'introduction, les rédacteurs précisent :

> "Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. À l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité"

Cet aspect semble lié directement au fait que les rédacteurs des programmes de collège ont attribué une importance plus explicite à l'apprentissage de la démonstration, ce qui suppose une attention plus particulière aux aspects logiques de la géométrie.

[48] cf. Cousin-Fauconnet, ouvrage déjà cité.

Chapitre 3

Premiers jalons pour l'élaboration de la partie expérimentale

PLAN DU CHAPITRE

I. METHODE DE CHOIX DES PROBLEMES

II. LE TRIANGLE DES MILIEUX : UN PROBLEME DE CONSTRUCTION

II.1 L'analyse a priori du problème A

II.2 Choix des énoncés pour la partie pré-expérimentale

III. LE TRIANGLE DES MILIEUX : UN PROBLEME D'AIRE ET DE PERIMETRE

III.1 L'analyse a priori du problème B

III.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

IV. LE TRIANGLE DES MILIEUX : UN PROBLEME DE CENTRE DE GRAVITE

IV.1 L'analyse a priori du problème C

IV.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

V. DANS LE TRIANGLE DES MILIEUX, QUADRILATERES DE MEME AIRE

V.1 L'analyse a priori du problème D

V.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

VI. LE PARALLELOGRAMME DES MILIEUX I

VI.1 L'analyse a priori du problème E

VI.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

VII. LE PARALLELOGRAMME DES MILIEUX : UN PROBLEME DE CONSTRUCTION

VII.1 L'analyse a priori du problème F

VII.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

VIII. DU TRIANGLE AU PARALLELOGRAMME

VIII.1 L'analyse a priori du problème G

VIII.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

IX. LE PARALLELOGRAMME DES MILIEUX II

Nous poursuivons la comparaison entre les systèmes scolaires français et italien en détaillant de plus en plus notre analyse mais en nous centrant sur un ensemble d'objets plus restreint.

Au cours de l'analyse des textes officiels des programmes scolaires, nous avons *brossé* des tableaux panoramiques embrassant l'ensemble de deux paysages. Nous avons reconstitué d'une manière assez complète les textes du savoir T_{GF} et T_{GI} reconnus dans les deux institutions IF et II et nous avons identifié les principes pédagogiques et culturels qui ont donné naissance à ces textes du savoir ; en repérant les objets communs et non communs, nous avons donc analysé l'articulation de ces textes et déterminé leur cohérence interne. C'est ainsi que nous avons amorcé une première analyse de l'*écologie institutionnelle* des savoirs GF et GI reconnus par les institutions IF et II.

Comme nous l'avons déjà annoncé, nous ne nous intéressons pas seulement à l'analyse des processus de transposition qui ont eu lieu dans les deux institutions concernées mais notre attention porte aussi sur le rapport personnel de l'élève au savoir géométrique qui peut s'établir dans chacune d'elles. Pour objectiver quelques effets que les deux institutions peuvent engendrer sur la formation des élèves français et italiens, nous voulons examiner les productions de ces élèves face au même problème : arrivent-ils à articuler les outils nécessaires et suffisants pour parvenir à une solution ? S'engagent-ils de la même manière dans la recherche d'une solution ? S'ils disposent des mêmes outils, privilégient-ils les mêmes procédures ? Sont-ils aptes à produire des preuves intellectuelles ou bien recourent-ils encore à des preuves pragmatiques ?

Un pas ultérieur a consisté alors à chercher une image plus détaillée des deux paysages, en délimitant notre champ d'intérêt et en approfondissant notre analyse sur un nombre restreint d'objets afin d'organiser l'examen des manuels scolaires autour de ces objets et de les exploiter aussi pour la réalisation de la partie expérimentale de notre recherche. Or, le problème se posait d'établir un critère de délimitation. Pour ne pas perdre de vue les objectifs de notre travail, nous avons donc pointé des éléments permettant de retenir certains des objets qui constituent les deux textes T_{GF} et T_{GI} mais dans des écologies différentes.

Notre problématique suggère explicitement l'objet *transformations géométriques*. Toutefois, nous le considérons plutôt comme un point d'arrivée que de départ : ce qui nous intéresse est de chercher à savoir si, de fait, cet objet représente un thème transversal, s'il ressort en tant qu'outil pour développer les autres chapitres de la géométrie.
Un autre aspect qui nous intéresse porte sur l'examen des méthodes d'apprentissage des procédures démonstratives. Comme nous l'avons déjà constaté, dans l'institution italienne, cet apprentissage

commence officiellement au début du cycle supérieur, en géométrie du plan ; la géométrie dans l'espace n'est donc pas abordée dans cette optique. C'est pourquoi, nous avons exclu les objets de l'espace tridimensionnel.
Nous avons aussi éliminé tout ce qui concerne l'approche algébrique - y compris le calcul vectoriel - car, selon nous, cela représente plutôt un *changement de cadre*, un lieu où la géométrie se prête à des interprétations nouvelles ; le cas échéant, nous prenons en compte ce nouveau cadre d'une manière transversale lorsque nous avons besoin de souligner l'évolution à long terme de GF et GI et leur cohérence.

Nous avons focalisé notre attention sur cette première sélection. Dans un premier temps, nous avons envisagé d'examiner les sujets proposés dans les évaluations nationales. Néanmoins, nous avons abandonné cette piste car de telles initiatives, en Italie, sont locales et concernent seulement certaines régions ; en conséquence, elles n'ont pas le même statut qu'en France.

Nous avons donc résolu de recourir de nouveau aux manuels scolaires comme moyen d'exploration : nous avons ainsi passé en revue quelques manuels italiens et français, tous niveaux confondus, à la recherche d'une *configuration de base*[1] qui revenait le plus souvent dans les activités pratiques proposées et simultanément de problèmes communs aux deux institutions. C'est ainsi que nous avons sélectionné des énoncés exploitant le TRIANGLE DES MILIEUX (des côtés d'un triangle) comme figure-clé.

I. *METHODE DE CHOIX DES PROBLEMES*

Le "problème"

C'est à partir des énoncés sélectionnés concernant le TRIANGLE DES MILIEUX et en considérant aussi ce qui gravite autour de cette configuration que nous avons cherché à élaborer un problème qui soit représentatif de la partie commune de l'enseignement de la géométrie dans les cinq premières années de la scolarité secondaire. Nous avons alors rédigé un texte de problème unique comportant plusieurs étapes.

---

[1] Figure comportant peu d'éléments, associée à des propriétés institutionnalisées et dont la reconnaissance comme sous-figure lors de l'étude des propriétés d'une figure donnée fournit un outil de démonstration souvent utilisé.

Une analyse sommaire de ce texte fournit déjà des parcours à suivre pour relier entres eux les principaux objets géométriques communs aux deux institutions, abstraction faite de celle où il va vivre : les figures géométriques élémentaires qui apparaissent dans l'énoncé - le *milieu d'un segment*, les *triangles*, les *quadrilatères*, les *quadrilatères particuliers* (parallélogramme, rectangle, carré) et le *cercle* - constituent un ensemble d'objets plus restreint, tout en demeurant suffisamment riche et cohérent pour aménager une analyse des manuels scolaires et pour mettre en place la partie expérimentale.

Le "problème"

Soient I, J, K trois points non alignés.

(a) Construire le triangle ABC tel que I, J, K soient respectivement les milieux des côtés [AB], [BC] et [AC].

(b) Montrer que ABC est décomposé en quatre triangles congruents.

(c) Montrer que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité G.

(d) Soit M un point variable de la droite (BC), autre que J. Prouver que l'aire du quadrilatère AIMK ne dépend pas de la position de M sur (BC).

(e) Soient S, P, Q, R les milieux des côtés du quadrilatère AIMK. Montrer que SPQR est un parallélogramme.

(f) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles circonscrits aux triangles ABC et IJK. Montrer que la longueur du rayon de $\mathcal{C}'$ est égale à la moitié de celle du rayon de $\mathcal{C}$

(g) Soit C' le symétrique du point C par rapport au milieu de [AB]. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ? Comment faudrait-il choisir les points I, J, K pour que ACBC' soit un rectangle ou un carré ? Dans ce dernier cas, quelle serait la position du point C' ? Et du cercle $\mathcal{C}'$?

Nous avons testé le problème tel qu'il était auprès de quelques élèves français et italiens du niveau Seconde. Afin de recentrer davantage les objets de l'analyse, nous avons éliminé toute question sur le cercle. C'est ainsi que nous avons focalisé notre intérêt sur deux configurations principales, le TRIANGLE DES MILIEUX et le PARALLELOGRAMME DES MILIEUX (des côtés d'un quadrilatère).

Les "problèmes"

Puisque ce texte unique est trop long et trop complexe pour être exploité comme test dans la partie expérimentale de notre travail, nous l'avons découpé en énoncés indépendants en introduisant des modifications sur le style. C'est à ce moment là que nous avons décidé d'introduire aussi l'énoncé d'un problème de construction relatif au parallélogramme des milieux (problème F, cf. encadré ci-après) en

obtenant donc sept "problèmes", tout en envisageant que chaque élève ne devrait en traiter que deux ou trois.

En nous appuyant sur l'analyse a priori des problèmes sélectionnés initialement, nous avons pointé un certain nombre de variables utiles pour remanier des énoncés et les rendre exploitables lors de la réalisation de la partie expérimentale de notre travail.

Les "problèmes"

(A) Construire le triangle ABC tel que I, J, K soient respectivement les milieux des côtés [AB], [BC], [CA]. Décrire et justifier la construction.

(B) Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]. Compléter les égalités suivantes en remplaçant les petits points par les nombres qui conviennent :

$$\mathcal{P}(ABC) = \dots \mathcal{P}(IJK) ;$$
$$\mathcal{A}(ABC) = \dots \mathcal{A}(IJK)$$

($\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$ désignent respectivement les mesures du périmètre et de l'aire des triangles). Justifier.

(C) Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]. Prouver que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité G.

(D) Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]. Soit M un point de la droite (BC), autre que J. Comparer les aires des quadrilatères AIMK et AIJK.

(E) Soient S, P, Q, R les milieux des côtés du quadrilatère AIMK. Prouver que SPQR est un parallélogramme.

(F) Soit AIEO un carré. Construire un quadrilatère CLMR tel que A, I, E, O soient respectivement les milieux de [CL], [LM], [MR], [RC] et que l'angle CLM soit droit.

(G) Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC].
(I) Soit C' le symétrique de C par rapport à I. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?
(II) Si les points A, B, C sont tels que IJK soit un triangle rectangle in I, quelle est la nature de ACBC' ? Comment faudrait-il choisir le triangle ABC pour que ce quadrilatère soit un carré ? Justifier les réponses.

Des problèmes, pour qui et pour quoi ?

Dans le chapitre consacré à l'analyse et à la comparaison des textes officiels des programmes scolaires des deux institutions concernées, nous avons déjà identifié quelques différences essentielles. Un certain nombre d'objets sont abordés à des niveaux scolaires différents, des objets enseignés dans une institution n'apparaissent pas dans l'autre et surtout il existe un décalage à propos de l'apprentissage systématique des procédures démonstratives. En effet, nous avons pu constater que - dans l'institution italienne - le programme de géométrie est caractérisé par une reconstruction systématique des objets

d'enseignement dans le passage de l'ESI à l'ESS et par le fait que l'apprentissage des procédures démonstratives ne commencerait qu'à partir de l'ESS. C'est pourquoi nous avons composé ces textes en vue d'une passation auprès d'élèves français et italiens à la fin du parcours scolaire pris en compte dans notre recherche (16 ans), cela afin d'atténuer l'effet de quelques décalages existants et pour tenir aussi compte du fait que l'idée de fond est d'analyser l'aptitude de l'élève à mobiliser ses connaissances pour produire une *démonstration*.

Lors de l'analyse a priori, en envisageant de remanier les énoncés des problèmes sélectionnés, au-delà du fait que leur difficulté dépend de la manière de poser les diverses questions, nous avons aussi pris en compte des objectifs spécifiques visés à travers la proposition de ces problèmes. Notamment, nous avons voulu étudier la capacité des élèves à prouver, à justifier les propriétés d'une figure donnée ; à mobiliser les connaissances dont ils disposent et leur réaction face à une difficulté ; à reconnaître, dans une figure complexe, des sous-figures habituelles et utiles pour faire fonctionner leurs connaissances ; leur familiarité avec des problèmes sur les constructions géométriques.

La structure des énoncés

Pendant cette phase de la recherche, le recours au manuel en tant qu'outil d'exploration s'est avéré à nouveau fructueux pour plusieurs raisons car – au-delà du fait qu'en suivant une piste différente nous avons reconnu les quelques objets communs (*contenus*) – nous avons relevé les premières différences concernant la *forme* (langage et style) utilisée pour exposer le texte du savoir scolaire dans un bon nombre de manuels ainsi que les *aspects pédagogiques sous-jacents*, à savoir la manière dont les auteurs de ces manuels proposent l'acquisition du savoir et l'appropriation du savoir-faire.

A travers la lecture des pages relatives aux activités pratiques de plusieurs manuels, nous avons en fait constaté que la structure des énoncés diffère considérablement d'un manuel français à un manuel italien mais que des caractéristiques constantes subsistent lorsqu'on examine séparément les manuels de chaque institution[2]. Ces éléments étaient nécessairement à prendre en compte lors de la rédaction des problèmes à proposer aux élèves car, d'après nous, ils font partie de l'ensemble des habitudes qui peuvent caractériser telle ou telle institution.

Voici un exemple qui peut bien témoigner de ces différences. Dans deux manuels destinés respectivement aux élèves de Quatrième et de l'ESI[3], nous avons trouvé les énoncés suivants :

---

[2] cf. chapitre 4, § I.3, *Rapport cours/exercices et approche de la démonstration*

[3] L'énoncé est contenu dans un chapitre qui, vraisemblablement, est abordé à la fin de la 2ème année ou bien au début de la 3ème année de l'ESI.

"Marquer deux points A et B distants de 8 cm, puis construire un point C de façon que : • le triangle ABC soit rectangle en C ; • la hauteur relative à l'hypoténuse mesure 3 cm. Préciser le nombre de solutions".	"Construisez un triangle rectangle dont l'hypoténuse et la hauteur relative à l'hypoténuse mesurent respectivement 8 cm et 2,1 cm".

Le problème du manuel français est proposé dans le chapitre relatif aux *propriétés du triangle rectangle* où, dans les pages de cours, on apprend que "*dans un triangle rectangle, le sommet de l'angle droit est sur le cercle ayant l'hypoténuse pour diamètre*". L'énoncé présente une structure par étapes intermédiaires ; les propriétés de la figure à tracer sont bien mises en évidence ; la dernière consigne guide explicitement l'élève vers la recherche de toute solution possible mais aucune donnée ne suggère le recours au cercle. D'après la classification établie par A. Robert[4], il s'agirait donc d'un énoncé *semi-fermé* où l'on indique ce qu'il y a à faire sans donner d'indication de méthodes. Finalement cet exemple montre qu'un énoncé, où quelques étapes intermédiaires sont explicitées et des questions explicites sont posées, peut éduquer à rechercher des éléments qui, autrement, ne viendraient pas à l'esprit de l'apprenant. Nous avons remarqué que cet aspect caractérise largement les énoncés proposés dans les manuels français et nous y reviendrons plus loin, dans le chapitre 4 consacré à l'analyse des manuels scolaires.

Le problème du manuel italien est proposé dans le chapitre relatif aux *polygones inscrits et circonscrits* où, dans les pages de cours, rien n'est dit à propos des propriétés caractéristiques d'un triangle rectangle inscrit[5]. Il s'agit donc d'un énoncé *ouvert* où tout est laissé à l'initiative de l'élève qui doit convenablement transformer la consigne en étapes intermédiaires. Depuis les premières classes du secondaire, il en est ainsi pour la plupart des énoncés proposés dans les manuels italiens.

Lors de la rédaction des énoncés sélectionnés, nous avons essayé de concilier ces deux aspects divergents, cela dans l'intention de ne pas trop perturber les élèves et leurs habitudes.

La présence d'un tracé dans le corps du texte est aussi un caractère distinctif des deux institutions. Nous verrons que, dans la plupart des manuels italiens, les images – quelle que soit leur nature : photographies, dessins à main levée, bandes dessinées, figure à compléter, etc. – sont de moins en moins utilisées au passage d'un niveau scolaire à l'autre tandis que, dans les manuels français, elles sont largement présentes à tout niveau scolaire.

---

[4] Robert A. (1988), *Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels*, Cahier de didactique des mathématiques n. 51, Université Paris VII

[5] Ces propriétés sont abordées dans un chapitre précédent, à propos des angles inscrits et des angles au centre correspondants.

La figure caractérise le problème lui-même car elle représente une variable de la même manière que les données discursives fournies : sa présence ou son absence peut modifier considérablement les intentions d'un problème ainsi que la technique à envisager pour aboutir.
Par ailleurs, il faut aussi considérer la dialectique dessin/figure : la figure est un objet de la théorie tandis que le dessin en est sa représentation matérielle. Pour tracer un triangle rectangle, l'attitude rationnelle conduit à ne plus se servir d'une équerre mais on peut se contenter d'une réalisation grossière car il suffit de savoir qu'il est rectangle en plaçant, par exemple, le signe iconique de l'angle droit : c'est le savoir géométrique qui est mis en jeu pour résoudre le problème, le recours à la perception constituant désormais une aide à l'élaboration de la solution. À un niveau avancé de son apprentissage, si l'élève reproduit une figure "précise" et s'il s'en sert ensuite pour mesurer et répondre à telle ou telle question, cela dénonce clairement la présence d'un obstacle qui fait que le passage d'une *attitude* à l'autre ne s'est pas réalisé ou bien que la difficulté de la consigne l'empêche de mobiliser efficacement ses connaissances.

Lors de la construction des problèmes, nous avons donc pris en compte la présence d'un dessin dans l'énoncé et, dans quelques uns, nous avons décidé de ne pas le fournir avec le texte, notre propos étant d'évaluer la propension des élèves à envisager des cas particuliers – ce qui faciliterait ou pervertirait la tâche – ainsi que le statut qu'ils confèrent au tracé : est-ce qu'ils reproduisent soigneusement une figure à l'aide d'instruments de dessin ? Est-ce qu'ils recourent au codage en l'utilisant ensuite pour rédiger la preuve ? Tous ces éléments sont à considérer, entre autres, lors de l'analyse des productions d'élèves comme indices du passage de l'*attitude de l'intuition rationnelle* vers l'*attitude rationnelle.*

En procédant à la recherche de résolutions possibles de ces problèmes, nous avons pris en compte les deux objectifs de cette *analyse a priori* :

- structurer et adapter convenablement ces textes pour les exploiter lors de la réalisation de la partie expérimentale ;
- identifier les *outils* géométriques mobilisables pour répondre aux diverses questions, ce qui est indispensable pour avancer des hypothèses sur les résultats issus de l'analyse des productions des élèves observés ainsi que pour déterminer un ensemble d'objets utiles pour développer l'analyse des manuels scolaires.

Dans les pages qui suivent, nous commentons quelques résolutions possibles en indiquant, entre autres, à quel niveau scolaire les outils mobilisés sont abordés dans les deux institutions. En outre,

pour chacun des sept problèmes, nous exposons les raisons qui nous ont conduite à remanier les divers énoncés.

Avant d'exposer les diverses résolutions, nous tenons à faire des précisions à propos de quelques outils mobilisés.

Comme nous l'avons déjà annoncé et comme nous le verrons plus en détail dans le chapitre 4, dans l'institution italienne, l'énoncé du *théorème de Thalès* est général, la configuration qui l'accompagne étant constituée de deux droites sécantes et plusieurs droites parallèles ; le rapport des longueurs des segments parallèles, ayant les extrémités sur les deux droites sécantes, est alors une conséquence de ce théorème qui fait l'objet d'un énoncé à part. Parfois, on n'énonce même pas cette propriété ou bien on la déduit lorsqu'on aborde les critères de similitude des triangles ou l'homothétie ; le cas dans le triangle est aussi traité comme un corollaire de ce théorème. En revanche, dans l'institution française, l'énoncé du *théorème de Thalès* est complété, la configuration qui l'accompagne étant constituée de deux droites sécantes en un point et deux droites parallèles ; le rapport des longueurs des segments parallèles, ayant les extrémités sur les deux droites sécantes, fait partie de l'énoncé.

Or, compte tenu du fait que, dans les problèmes sélectionnés, nous avons besoin de cet outil, nous précisons que, dans les pages qui suivent, l'*énoncé* du **théorème de Thalès** est le suivant : " *Soient d et d' deux droites sécantes en A telles que A, B et C sur d et A, B' et C' sur d', soient alignés dans le même ordre. Si les droites (BB') et (CC') sont parallèles, alors AB/AC = AB'/AC'* ". L'*énoncé général* de la **réciproque** est alors le suivant : " *Soient d et d' deux droites sécantes en A telles que A, B et C sur d et A, B' et C' sur d', soient alignés dans le même ordre. Si AB/AC = AB'/AC', alors les droites (BB') et (CC') sont parallèles* ".

L'*énoncé* ***complété*** du **théorème de Thalès** sera alors le suivant : " *Soient d et d' deux droites sécantes en A telles que A, B et C sur d et A, B' et C' sur d', soient alignés dans le même ordre. Si les droites (BB') et (CC') sont parallèles, alors AB/AC = AB'/AC' = BB'/CC'* ".

En outre, précisons que, nous désignerons comme *complet* l'énoncé du **théorème des milieux** suivant : " *Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et a pour longueur la moitié de celle de ce troisième côté* ".

Dans le chapitre 5, nous effectuons un retour sur l'analyse a priori en pointant, à ce moment-là, notre regard sur les attitudes possibles des élèves face aux divers problèmes. Ici, le cas échéant, nous avançons pourtant quelques éléments.

II. *LE TRIANGLE DES MILIEUX : UN PROBLEME DE CONSTRUCTION*

II.1 L'analyse a priori du problème A

Soient I, J, K trois points non alignés. Construire le triangle ABC tel que I, J, K soient respectivement les milieux des côtés [AB], [BC], [CA]. Décrire et justifier la construction.

Il s'agit d'un *problème de construction.* On demande de construire une figure répondant à des conditions imposées, de décrire et de justifier cette construction :

> "Il s'agit de mettre au point et d'indiquer un "programme" permettant de réaliser effectivement la construction demandée à partir d'éléments géométriques donnés ou non, avec des instruments précisés ou non. En réalité, selon les exercices, l'accent est mis sur ce programme, alors assez simple et souvent réalisable à la règle et au compas (ou à la règle seule ou au compas seul...) ou au contraire sur l'existence (et l'identification) de ce qui est à construire... D'autres constructions sont demandées à partir d'une figure donnée ; elles sont définies par des conditions géométriques (en référence à des configurations connues ou par des propriétés d'incidence ou de contact...)... Dans certains cas, on doit supposer le problème résolu, et travailler sur la figure correspondante (analyse) pour en déduire des propriétés permettant dans un deuxième temps (synthèse) de mener effectivement la construction à partir des éléments donnés. Supposer le problème résolu revient à disposer d'une figure par une construction réalisée dans un ordre différent de celui de l'énoncé, "à l'envers" (par exemple pour obtenir un cercle tangent à deux droites données, on trace d'abord le cercle puis les droites). Là, encore, ce n'est pas en général dans ce type de problèmes sur le programme de construction qu'est mis l'accent mais plutôt sur la discussion lors de la synthèse"[6].

L'énoncé évoque implicitement le triangle des milieux ; en ayant recours à la *méthode d'analyse et de synthèse,* il faut être familiarisé avec cette configuration de base et ses propriétés.

La phase d'analyse conduit aux trois parallélismes et aux trois relations entre les longueurs[7]. En effet, elle consiste à considérer les milieux des côtés du triangle ABC : le triangle obtenu en joignant ces points est alors le triangle IJK et, par l'énoncé *complet* du *théorème des milieux,* ses côtés sont respectivement parallèles aux côtés de ABC et leurs longueurs sont respectivement égales à la moitié des longueurs des côtés de ABC. C'est ainsi que l'on constate que divers démarrages de construction sont possibles.

- On peut considérer le parallélisme et effectuer la construction en suivant des parcours différents :
  a) on construit uniquement les droites parallèles respectivement aux trois côtés du triangle IJK et passant respectivement par les trois sommets de ce triangle ; ici, les trois droites tracées et les trois points obtenus jouent un rôle symétrique ;
  b) on construit deux droites parallèles respectivement à deux côtés du triangle IJK et passant respectivement par deux sommets de ce triangle ; en d'autres termes, il s'agit de compléter l'un des parallélogrammes qui apparaissent dans la figure finale.

---

[6] Robert A. (1995), *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques, I. Géométrie,* Ellipses

[7] Les élèves le savent mais ce qui est difficile pour eux c'est de distinguer ces propriétés.

c) on construit une seule parallèle et on exploite le fait que les longueurs des côtés de ABC sont égales au double des longueurs des côtés de IJK ;

- On ne considère pas le parallélisme mais l'on étudie la figure en termes dynamiques :
  - on exploite la notion de centre de gravité et ensuite celle d'homothétie ;
  - on exploite la notion de symétrie centrale.

Notre analyse de la figure ne se veut pas exhaustive, la configuration en question permet de nombreux démarrages de construction.

Dans la justification des constructions possibles, nous distinguons deux approches principales :

- d'une part on exploite les propriétés liées au *parallélogramme* et au *triangle*, sous-figures perceptibles à l'intérieur de cette configuration ;
- d'autre part on exploite les propriétés relatives aux transformations géométriques, notamment l'*homothétie* et la *symétrie centrale.*

Parmi les constructions possibles, nous distinguons enfin quatre grands groupes. Dans le tableau suivant, nous résumons l'idée fondamentale qui caractérise les constructions de chaque groupe ainsi que les grandes lignes de quelques unes des démonstrations justifiant ces constructions.

En général, les outils mobilisés dans les diverses procédures sont disponibles, chez l'élève, depuis la deuxième année du cycle secondaire. Pourtant ici, au-delà des contenus mis en jeu, c'est l'articulation de ces contenus qui joue un rôle fondamental : à travers la proposition de ce problème, nous voulons évaluer les capacités de l'élève à rédiger des solutions qui demandent non seulement la connaissance de contenus mais aussi une maîtrise des procédures démonstratives.

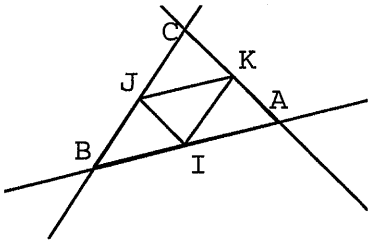
	CONSTRUCTION		DEMONSTRATION	
1er groupe	On trace **trois** droites parallèles respectivement à chaque côté du triangle IJK dont les intersections sont les points A, B, C. Il s'agit de montrer les égalités de longueurs : AI=IB, etc.		**Solution A_1** **Solution A'_1**	On reconnaît le *parallélogramme* comme sous-figure contenue dans la figure construite et l'on prouve l'égalité de longueurs à travers l'une de ses propriétés.
			Solution A''_1	On reconnaît le *parallélogramme* et le *triangle* comme sous-figures contenues dans la figure construite et l'on prouve l'égalité de longueurs à travers la *relation de congruence de figures* et sa propriété transitive.
			Solution A'''_1	On exploite le *parallélisme* pour prouver l'égalité de couples d'angles ; ensuite, pour prouver l'égalité de longueurs, l'on recourt à l'un des *critères de congruence des triangles.*
2ème groupe	On trace **deux** droites parallèles respectivement aux côtés [JK] et [IJ] du triangle IJK et passant respectivement par les points I et K : elles se coupent en A.	On trace les points B et C tels que AI=IB et AK= KC. Il s'agit de montrer que J est le milieu de [BC].	**Solution A_2**	Il faut montrer l'alignement des points B, J, C. Pour ce faire, il faut reconnaître que, parmi les sous-figures perceptibles à l'intérieur de ABC, il y a deux parallélogrammes. Pour le prouver, on pourrait être confronté à une question de convexité.
		On trace le point B tel que AI=IB. On trace la droite (BJ) : elle coupe (AK) en C. Il s'agit de montrer que J et K sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].	**Solution A_3**	On prouve que J et K sont les milieux respectifs de [BC] et [AC] en recourant à la réciproque du théorème des milieux (ou bien au théorème de Thalès).
3ème groupe	On trace **une** droite parallèle au côté [JK] du triangle IJK et passant par I. Sur cette droite, on trace les points A et B tels que JK = AI = IB, A du côté de K et B du côté de J.	On trace C, symétrique de A par rapport à K. Il s'agit de montrer que J est le milieu de [BC].	**Solution A_4**	On prouve que IJKA est un parallélogramme. Ensuite il faut montrer l'alignement des points B, J, C. Pour ce faire, il faut reconnaître que, parmi les sous-figures perceptibles à l'intérieur de ABC, il y a deux parallélogrammes.
		On trace (AK) et (BJ) : elles se coupent en C. Il s'agit de montrer que J et K sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].	**Solution A_5**	On prouve que IJKA est un parallélogramme. Ensuite on prouve que J et K sont les milieux respectifs de [BC] et [AC] en recourant à la réciproque du théorème des milieux (ou bien au théorème de Thalès).

4ème groupe	On ne trace **aucune** droite parallèle.	On trace G, centre de gravité du triangle IJK. On définit l'homothétie de centre G et de rapport -2…Il s'agit de prouver que I, J, K sont bien les milieux des côtés du triangle ABC.	**Solution A_6**	On recourt aux propriétés de l'homothétie.
		On cherche le premier sommet du triangle ABC et puis on effectue une suite de symétries centrales.	**Solution A_7**	On recourt aux propriétés de la symétrie centrale et de la composée de symétries centrales.
		On trace les symétriques respectifs des sommets de IJK par rapport aux milieux de ses côtés.	**Solution A_8** **Solution A'_8**	On recourt aux propriétés de la symétrie centrale.

CONSTRUCTION 1

Ici, la phase d'analyse consiste à considérer les trois parallélismes.

On considère le triangle IJK. On trace la droite qui passe par I et parallèle à (KJ), la droite passant par K et parallèle à (IJ), la droite passant par J et parallèle à (KI). On définit le point A comme intersection de la droite passant par I et de la droite passant par K; le point B comme intersection de la droite passant par I et de la droite passant par J ; on définit le point C comme intersection de la droite passant par J et de la droite passant par K.

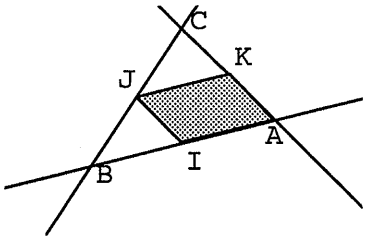


Les trois droites tracées se coupent deux à deux car elles sont parallèles respectivement à trois droites qui se coupent deux à deux.

Solution A_1

Le quadrilatère AIJK est un parallélogramme

⇓



Définition de parallélogramme

AI = KJ et KA = IJ. *Les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur*

De même, en considérant les parallélogrammes IJCK et IBJK, on prouve que IJ = CK et IK = JC, IK = JB et IB = KJ.

AI = IB, BJ = CJ, KA = CK *La relation d'égalité est transitive*

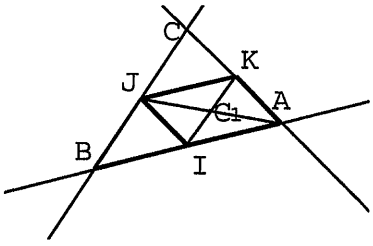
⇓

I, J, K sont respectivement les milieux de [AB], [BC], [AC]. *Définition du milieu d'un segment*

Pour réaliser cette construction, nous estimons que la difficulté majeure porte surtout sur la distinction des deux phases d'*analyse* et de *synthèse*. Pour la discussion lors de la synthèse, les outils mobilisés – la *définition* et l'une des *propriétés du parallélogramme* – sont disponibles depuis la Cinquième et la 1ère et/ou 2ème année de l'ESI. Toutefois, l'élève sera capable de les mobiliser, s'il reconnaît le parallélogramme comme sous-figure contenue dans le triangle des milieux.

Solution A'$_1$

Ici, on exploite la propriété du point de concours des diagonales du parallélogramme d'être le centre de symétrie de ce quadrilatère particulier. C'est ainsi que l'un des invariants de la symétrie centrale (conservation des longueurs) permet de justifier l'égalité des côtés opposés du parallélogramme. C'est la même démonstration que A_1 mais avec une justification de l'égalité des côtés opposés d'un parallélogramme.



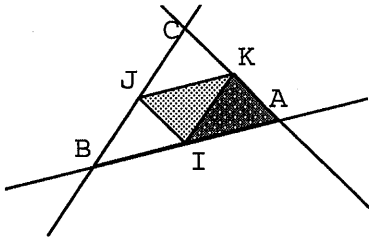
Nous estimons que cette procédure est improbable à trouver dans les productions des élèves surtout si l'on considère que, pour recourir à la propriété des diagonales du parallélogramme, il faut envisager de tracer la deuxième diagonale qui n'apparaît pas dans la figure construite. Éventuellement, elle serait plus familière aux élèves français qui apprennent à voir le parallélogramme comme *quadrilatère à symétrie centrale.*

Solution A''$_1$

Ici, pour justifier la construction, on a recours à une autre propriété des parallélogrammes et à la congruence de triangles.

Le quadrilatère AIJK est un parallélogramme

⇓



Définition de parallélogramme

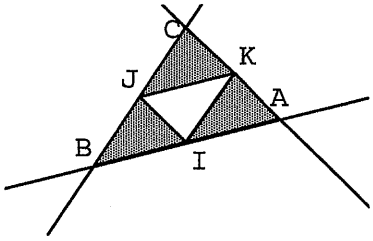
AKI ≡ IJK

Un parallélogramme est partagé par chaque diagonale en deux triangles congruents

De même, on prouve que IJK est aussi congruent à IJB et JCK.

IJK ≡ IJB ≡ AKI ≡ JCK

⇓



La relation de congruence entre figures est transitive

AI = IB, BJ = JC, AK = KC

⇓

I, J, K sont respectivement les milieux de [AB], [BC], [AC].

Dans deux triangles congruents, les côtés sont congruents deux à deux

Définition de milieu d'un segment

Nous estimons que cette procédure serait la plus probable à trouver dans les productions d'élèves italiens. Notamment, elle est à la portée d'élèves de la 1ème année de l'ESS qui sont censés connaître les notions relatives à la congruence de triangles, un outil qui, en revanche, n'est pas disponible chez les élèves français. Éventuellement, ces derniers pourraient justifier la *superposabilité* des divers triangles en question en reliant convenablement les notions de *parallélogramme* et de *symétrie centrale*.

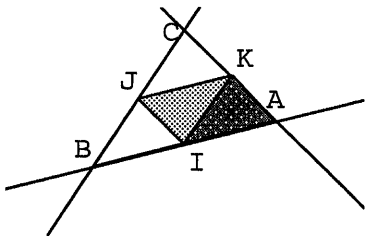
Solution A'''$_1$

Ici, d'après la phase d'analyse, on exploite le *parallélisme* pour prouver l'égalité de couples d'angles et ensuite on recourt à l'un des *critères de congruence des triangles*. Cette procédure consiste donc à prouver la congruence des triangles en plus de la solution précédente.

∠JKI = ∠KIA

∠JIK = ∠IKA

⇓



Deux droites parallèles et une sécante forment des angles alternes internes égaux

Les triangles IJK et IKA sont congruents

Critère de congruence des triangles (un côté et les deux angles adjacents égaux)

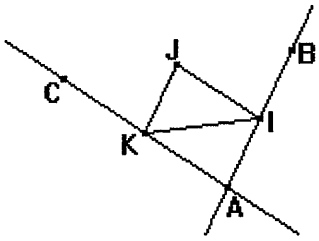
De même, on prouve que IJK est aussi congruent à IJB et JCK. Ensuite, en suivant la même procédure que dans la solution précédente, on parvient à la thèse.

Nous estimons que cette preuve est à la portée d'élèves italiens de la 1ère année de l'ESS. En revanche, il est improbable que les élèves français recourent à la propriété caractéristique des droites parallèles car le fait de prouver l'égalité des angles ne les conduit nulle part ou bien risque de les amener à utiliser un résultat faux (*deux triangles ayant les angles deux à deux égaux sont congruents*).

CONSTRUCTION 2

Ici, de la phase d'analyse on ne retient que deux parallélismes et la relation entre les longueurs.

On considère le triangle IJK. On trace la droite passant par I et parallèle à [JK]. Puis on trace la droite passant par K et parallèle à [IJ]. Les deux droites se coupent en un point car elles sont parallèles respectivement à deux droites sécantes[8] : soit A leur point de concours.

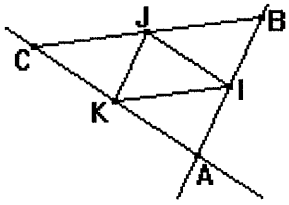


Solution A_2

D'abord, on complète la construction : sur la première droite, on trace un point B tel que AI = IB et, sur la deuxième droite, on trace C tel que CK = AK. I et K sont alors les milieux respectifs de [AB] et [AC] (*définition de milieu d'un segment*).

Il suffit alors de montrer que B, J, C sont alignés et que CJ = JB, à savoir que J est bien le milieu de [BC].

(CK) est parallèle à (JI)
CK = JI[9]



Par construction

IJKA est un parallélogramme
⇓
JI = AK
⇓

Définition de parallélogramme

Les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur

[8] Ici, on mobilise un résultat – *si deux droites sont respectivement parallèles à deux droites concourantes, alors elles sont aussi concourantes* – qui souvent n'est même pas institutionnalisé au niveau scolaire concerné et demeure implicite lors de la production d'une preuve. Les élèves pourraient donc produire cette solution sans le souci d'évoquer ce résultat.

[9] En termes vectoriels, on peut déduire que les vecteurs **CK** et **JI** sont égaux (même direction, même longueur, même sens).

CK = IJ	*Propriété de transitivité de l'égalité*
IJCK est un parallélogramme ⇓	(*) *Un quadrilatère convexe*[10] *dont deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme* ou bien *Si L, M, N, O sont quatre points non alignés tels que les vecteurs* ***LM = NO*** *alors LMON est un parallélogramme*
(IK) est parallèle à (CJ) et IK = CJ	*Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et ont même longueur*

De même, on prouve que BJKI est un parallélogramme et que, par conséquent, (IK) est parallèle à (JB) et IK = JB. Il suffit alors de prouver que C, J et B sont alignés pour en déduire que J est le milieu de [BC].

(CJ) parallèle à (JB) (cas particulier où les deux droites coïncident) et CJ = JB ⇓	*Les relations de parallélisme et d'égalité sont transitives*
C, J, B sont alignés et J est le milieu de [BC]	*Si deux droites (XY) et (YZ) sont parallèles, alors X, Y et Z sont alignés*[11] et *propriété transitive de l'égalité* et *définition de milieu d'un segment*

Ici, si l'on recourt à la propriété (*), on sera confronté à un problème de convexité. D'après nous, ni les élèves italiens ni les élèves français ne mobilisent aisément cette notion car elle demeure souvent implicite au niveau scolaire concerné. Toutefois, pour les élèves français, la preuve de la convexité est garantie (et demeure implicite) car ils peuvent recourir à la propriété du parallélogramme en termes vectoriels ; en revanche, les élèves italiens – qui ne disposent que de la propriété (*) – seraient obligés de la prouver, sauf à recourir à un résultat incomplet (voir inexact).

En outre, une fois la question de la convexité réglée (qu'elle soit prouvée ou passée sous silence !), la question de l'alignement des points – et, par conséquent, de l'unicité de la droite parallèle – est un autre obstacle à la réussite de cette procédure : au niveau concerné, de tels passages peuvent bien représenter une "technique de virtuose".

Finalement, nous estimons que les élèves produiraient ce type de preuve sans pourtant se préoccuper des questions d'alignement de points et de convexité, ces éléments pouvant le lire directement (et implicitement) sur leur tracé.

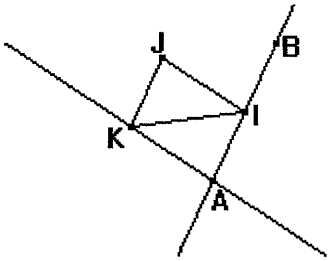
---

[10] A et J sont de part à autre de (IK), A et C sont de part à autre de (IK) : J et C sont du même côté de (IK). K et C sont du même côté de (IJ).

[11] A la rigueur, il faut recourir à l'axiome de l'unicité de la droite parallèle dont la propriété citée en est une conséquence.

Solution A_3

Pour détourner la difficulté de l'alignement des points, après avoir tracé les deux droites parallèles, on complète différemment la construction.



Sur la première droite, on trace un point B tel que AI = IB. I est alors le milieu de [AB]. Ensuite on trace la droite (BJ) : elle coupe la droite (AK) en C[12].

Il suffit alors de montrer que J et K sont les milieux respectifs de [BC] et [AC]. Pour ce faire, on peut avoir recours à la *réciproque du théorème des milieux* (ou bien à l'*énoncé complété* du *théorème de Thalès*) dans le triangle ABC.

D'après nous, cette procédure est à la portée des élèves observés car les propriétés mobilisées sont connues depuis la Troisième et la 1ère classe de l'ESS. Éventuellement, la difficulté reste celle de la méthode d'analyse et de synthèse : lors de la phase d'analyse, les élèves devraient être capables de discerner les difficultés d'une procédure par rapport à une autre pour enfin choisir la moins complexe. Évidemment, nous n'attendons pas que les élèves se posent la question de l'incidence des droites tracées, ce passage demeurant souvent implicite aux niveaux scolaires concernés.

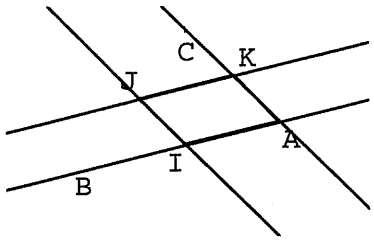
Autrement, on prouve que IJKA, BJKI et IJCK sont des parallélogrammes et que, par conséquent, BJ = JC et KA = AC pour conclure que J et K sont les milieux respectifs de [BC] et [AC]. Néanmoins, pour prouver que BJKI et IJCK sont des parallélogrammes, comme précédemment, on est confronté à la question de la convexité.

CONSTRUCTION 3

Ici, de la phase d'analyse on retient qu'au moins un côté du triangle ABC est parallèle à l'un des cotés du triangle IJK et que sa longueur est le double de celle du côté de IJK. Finalement, les sommets de ABC sont respectivement les sommets de trois parallélogrammes qui apparaissent comme sous-figures dans la construction finale.

On trace (KJ) et puis la parallèle à celle-ci passant par I. Sur cette dernière droite, on place les deux points situés à la distance KJ de I. On appelle A celui qui est du même côté que K de la droite (IJ) et B l'autre. On trace (KA). On trace C, symétrique de A par rapport à K (ou bien C tel que CK = KA).

[12] (BJ) n'est pas parallèle à (KA) sinon (BJ) serait confondue avec (JI). On déduit que (BJ) coupe (KA) en C.



Cette construction demeure plus complexe de la précédente : il faut coordonner deux informations, à savoir le parallélisme et l'égalité de longueurs, ce qui conduit à prouver que IJKA est un parallélogramme en recourant à l'une des ses propriétés et non pas à sa définition ; la difficulté de la question de la convexité demeure alors plus prégnante que dans les solutions précédentes. D'après nous, une telle procédure ne serait pas spontanément effectuée par des élèves du niveau concerné.

Solution A_4

IJKA est un parallélogramme ⇓	*Un quadrilatère convexe*[13] *dont deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur est un parallélogramme* ou bien *Si L, M, N, O sont quatre points non alignés tels que **LM** = **NO** alors LMON est un parallélogramme*
(KA) est parallèle à (IJ)	*Définition de parallélogramme*
K est le milieu de [AC]	*Si deux points X et Y sont symétriques par rapport à un point I, alors I est le milieu de [XY]*[14]

Maintenant, on est dans la situation envisagée dans la **Solution A_2** : en procédant de la même manière, on prouve que C, J et B sont alignés et que J est bien le milieu de [BC].

Comme dans la Solution A_2, la preuve de l'alignement de points et de la convexité s'ajoutent aux autres difficultés : bien que les outils mobilisés soient disponibles chez les élèves observés, leur articulation est trop complexe pour qu'ils produisent spontanément cette preuve.

Solution A_5

Pour détourner la question d'aligner de points, on peut compléter la construction d'une manière différente.

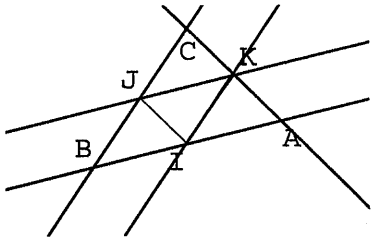
Après avoir tracé la droite (KA), on complète la construction en traçant la droite (BJ) : elle coupe la droite (AK) en C[15].

---

[13] cf. note 9.

[14] Si l'on trace le point C tel que AK = KC, on n'a pas besoin de recourir aux propriétés de la symétrie centrale.

[15] Cf. note 11.



On prouve que IJKA est un parallélogramme – ce qui amène éventuellement à traiter une question de convexité. Ensuite, à l'aide de la *réciproque du théorème des milieux* ou du *théorème de Thalès (énoncé complété)* dans le triangle, on peut prouver que J et K sont les milieux respectifs de [BC] et [AC].

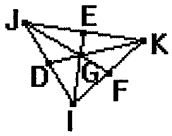
Cette procédure serait à la portée d'un élève de Seconde et de 1ère année de l'ESS, sauf en ce qui concerne la convexité.

CONSTRUCTION 4

Nous regroupons ici les constructions qui se servent des propriétés des transformations géométriques où l'on ne considère aucune droite parallèle pour démarrer. Elles se prêtent plutôt à être utilisées avec un logiciel de géométrie dynamique.

L'homothétie. Ici, la phase d'analyse consiste à envisager que les deux triangles ont le même centre de gravité ; en exploitant les propriétés du centre de gravité d'un triangle, on peut ainsi définir convenablement une homothétie de rapport négatif ayant ce point comme centre.

On trace le triangle IJK, ses médianes EI, FJ, DK et on appelle G son centre de gravité. On considère l'homothétie $H = H_{G,-2}$ de centre G et rapport k = -2.



On trace A, B et C, images respectives de J, K et I dans l'homothétie $H = H_{G,-2}$ de centre G et rapport k = -2.

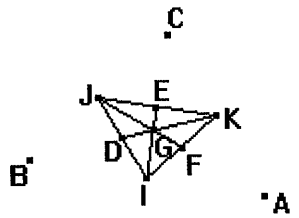
Cette construction demande une connaissance approfondie des propriétés du triangle des milieux et une maîtrise excellente de l'outil "homothétie".

Solution A_6

H (G) = G

Le centre de l'homothétie est un point fixe de l'homothétie

H (E) = I, H (F) = J, H (D) = K



Propriété du centre de gravité du triangle

H (I) = C, H (J) = A, H (K) = B

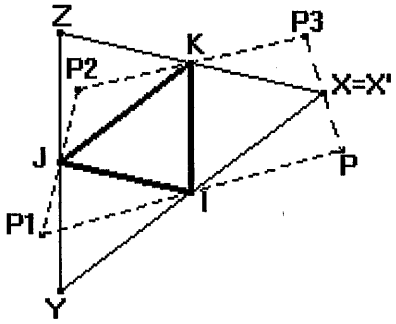
application de l'homothétie $H_{G,\ -2}$ aux points I, J, K

Puisqu'une homothétie conserve l'alignement des points, la mesure des angles, le rapport des distances et le milieu, ABC est un triangle et il est bien celui qu'on cherchait.

Compte tenu du fait que, dans l'institution française, l'homothétie est un outil disponible seulement à partir de la Seconde et que, dans l'institution italienne, peut-être ne devient-il même pas objet d'enseignement, nous pensons que les élèves ne produiraient pas spontanément de telles démonstrations.

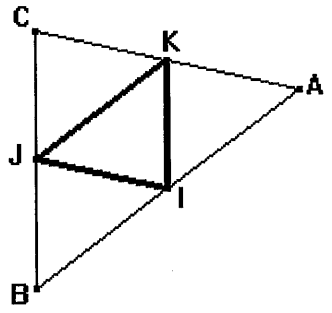
La symétrie centrale 1. L'analyse de la figure finale conduit à considérer une suite de points symétriques respectivement par rapport aux points I, J, K donnés. La difficulté réside dans le fait que ce n'est pas n'importe quel point de départ qui convient pour aboutir.

On choisit un point P. On trace le symétrique P_1 de P par rapport à I ; le symétrique P_2 de P_1 par rapport à J ; le symétrique P_3 de P_2 par rapport à K : si P_3 coïncide avec P, PP_1P_2 sera le triangle cherché. Autrement, on considère le point X, milieu du segment $[PP_3]$ et à partir de ce point on répète la même procédure.



On trace le symétrique Y de X par rapport à I ; le symétrique Z de Y par rapport à J. On trace le symétrique X' de Z par rapport à K : X' coïncide avec X, XYZ est alors le triangle cherché.

On renomme X avec la lettre A, Y avec la lettre B et Z avec la lettre C.



Solution A_7

On passe de P à P_3 par une suite de symétries centrales S_I, S_J, S_K de centres I, J, K. La composée de trois symétries centrales est une rotation d'angle 3π. Comme $3\pi \equiv \pi$ (mod. 2π), la composée est une symétrie centrale de centre W, soit S_W. Or, puisque $S_W(P) = P_3$, on déduit que W est le milieu du segment $[PP_3]$, donc W=X. Pour que P et P_3 coïncident, il faut placer P sur X (qui est le seul point fixe de la symétrie S_X : $S_X(X) = X$).

On passe de P à P_2 par les symétries centrales S_I et S_J. Or, puisque la composée de deux symétries centrales est une translation, on déduit que l'on passe de P à P_2 par la translation T_{2IJ}. Ensuite, on passe de P_2à P par les symétries centrales S_K et S_X d'où on déduit que l'on passe de P_2 à P par la translation T_{2KX}. On revient donc sur P par la translation $T_{2(IJ+KX)}$. Une translation qui a un point fixe est l'identité, d'où **(IJ+KX) = 0** et donc **JI = KX**. Le point X est alors défini de manière unique à partir de IJK : il s'agit du quatrième sommet d'un parallélogramme construit sur le triangle IJK.

Cette procédure demande une bonne maîtrise de la composition de symétries centrales et des résultats qui en découlent. C'est pourquoi, comme pour la précédente, nous estimons qu'elle n'est pas disponible chez un élève de Seconde et de 2ème année de l'ESS. Elle est plutôt à attendre comme procédure d'essais et rectifications, lorsqu'on ne maîtrise pas la méthode d'*analyse* et de *synthèse*. Assez naturelle au démarrage mais qui n'aboutit que difficilement, elle peut être utilisée avec des logiciels de géométrie dynamique : en déplaçant le point de départ, on examine ce qui se passe. C'est ainsi qu'à travers une preuve *pragmatique*, l'élève peut être conduit à l'appréhension d'une preuve plus rigoureuse.

La symétrie centrale 2. Dans la phase d'analyse, on s'aperçoit que la figure finale est constituée de parallélogrammes construits sur IJK et dont les quatrièmes sommets sont respectivement les sommets du triangle ABC. On exploite alors les propriétés de cette sous-figure.

La *définition* de parallélogramme amène à choisir le point de départ comme l'intersection des deux droites respectivement parallèles aux côtés de IJK et passant par les sommets opposés. En faisant ainsi, on rejoint les solutions du 2ème groupe.

On trace A, point d'intersection de deux droites, l'une parallèle à (IJ) et passant par K et l'autre parallèle à (JK) et passant par I. On trace ensuite le point B, symétrique de A par rapport à I et C, symétrique de B par rapport à J.

Solution A_8

Les points I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC] (*propriété de la symétrie centrale*).
En outre, puisque la composée des deux symétries de centres I et J est la translation de vecteur **2IJ**, on déduit que (AC) parallèle à (IJ). Puisque (AK) est parallèle à (IJ) (*par construction*), les droites (AC) et (AK) coïncident d'où A, K, C sont alignés et AK = IJ (*propriété du parallélogramme*). Or, puisque AC = 2IJ, on conclut que K est bien le milieu de [AC].

Autrement, la *propriété* des diagonales d'un parallélogramme amène à considérer les points symétriques respectivement des points I, J, K donnés par les symétries de centre les milieux des segments [JK], [IK], [IJ].

On trace les points E, D, et F, milieux respectifs des segments [JK], [IK], [IJ]. On définit les symétries centrales S_E, S_D, S_F de centres respectifs E, D et F. On trace alors les points A, B, C tels que S_D (J) = A, S_F (K) = B, S_E (I) = C.

Solution A'_8

S_D (I) = K	*Propriété du milieu d'un segment (si un point est le milieu d'un segment, alors il est aussi le centre d'une symétrie qui fait correspondre les extrémités du segment)*
S_D (J) = A ⇓	*Par construction*
S_D ([IJ]) = [KA] ⇓	
[IJ] parallèle à [KA] et IJ = KA	*Dans une symétrie centrale, l'image d'un segment est un segment qui lui est parallèle et de même longueur.*

Grâce à la symétrie S_E, on prouve que [IJ] parallèle à [CK] et IJ = CK d'où l'on déduit que CK = KA. Ensuite, on prouve que C, K, A sont alignés (*Si deux droites (XY) et (YZ) sont parallèles, alors X, Y et Z sont alignés*) d'où K est le milieu de [AC]. En suivant la même procédure, on prouve que J et I sont les milieux respectifs de [BC] et [AB].

Parmi les solutions qui s'appuient sur les transformations géométriques, celles-ci apparaissent comme les plus abordables car elles demandent moins de maîtrise de l'outil symétrie centrale. Cependant, la difficulté réside dans l'articulation d'une analyse en termes de configuration et d'une démonstration en termes de transformations.

II.2 Choix des énoncés pour la partie pré-expérimentale

La difficulté majeure de ce problème porte sur le recours à la méthode d'*analyse* et de *synthèse*. Nous avons donc résolu de rédiger un énoncé où l'on présente trois propositions différentes pour commencer la construction ; puis l'on demande de compléter chacune de ces constructions et enfin d'en choisir une

pour prouver que la figure obtenue répond aux conditions imposées. Pour quelques-unes de ces propositions, nous avons prévu un début de construction. En nous inspirant des solutions envisagées, nous avons sélectionné cinq débuts de programmes de construction de niveaux différents de difficulté : nous en avons choisi volontairement quelques-uns auxquels les élèves ne recourraient pas spontanément, d'autres qui laissent le problème suffisamment *ouvert* pour qu'ils puissent compléter la construction et la justifier suivant des procédures variées.

A la suite de cette sélection, nous avons décidé de constituer deux problèmes dont voici ci-après les textes complets[16].

1) *Problèmes 1 et 2, construction A.* Ce début de construction s'inspire de la *Solution* A_7 (4ème groupe) où l'on exploite les propriétés de la composition de symétries centrales. Après un premier essai où le dernier point ne coïncide pas avec le point de départ, c'est à l'élève de comprendre qu'il faut choisir le milieu du segment joignant ces deux points ; autrement, il pourrait comprendre que le point de départ est le quatrième sommet d'un parallélogramme (*Solutions* A_8 ou A'_8 ou bien solution du 2ème ou 1er groupe). Le degré de difficulté demeure élevé mais nous voudrions voir si les élèves parviennent à une solution et la justification qu'ils produisent.

2) *Problème 1, construction B.* Ce début de construction s'inspire des solutions du 3ème groupe où l'on ne considère qu'une droite parallèle à l'un des côtés du triangle IJK. Le problème demeure suffisamment ouvert pour que les élèves puissent choisir la suite du programme de construction ainsi que les techniques à suivre pour le justifier (cf. *Solutions* A_4, A_5). Selon les cas, les questions d'alignement de points, d'incidence de droites, de coïncidence de points et de convexité se posent : nous faisons l'hypothèse que, dans les productions des élèves, ces aspects resteront implicites.

3) *Problème 1, construction C.* Cette proposition s'inspire de la *Solution* A'_1 où l'on exploite la propriété des diagonales d'un parallélogramme mais elle rejoint aussi les constructions du quatrième groupe, notamment la *Solution* A_8. D'après les données discursives et graphiques pour commencer la construction, nous imaginons que les élèves réitèrent la construction pour les deux autres sommets du triangle donné. Ainsi faisant, si d'une part l'on facilite la tâche en suggérant de construire des parallélogrammes comme sous-figures de la figure finale, d'autre part la question de l'alignement des points se pose et demeure la difficulté majeure : au cas où les élèves la choisiraient, nous faisons alors l'hypothèse qu'ils ne se poseront pas cette question d'alignement[17].

---

[16] Une feuille avec les seuls tracés a été remise aux élèves censés résoudre ces problèmes pour qu'ils puissent travailler la construction à leur aise.

[17] Dès qu'on prouve que les côtés du triangle cherché sont respectivement parallèles aux côtés de IJK, on peut avoir recours à l'une des propriétés invariantes des projections (conservation du milieu)…

Problème 1

Soit T, G, L trois points non alignés du plan. Construis le triangle AIO tel que T, G, L soient les milieux respectifs des côtés [AI], [IO], [OA].

Tu trouveras ci-dessous trois propositions différentes pour entamer ton programme de construction.

a) Complète chacune des constructions.
b) Choisis une des constructions pour prouver que la figure obtenue répond bien aux conditions imposées.

Construction A.

Je choisis un point quelconque du plan. Je trace le symétrique de ce point par rapport à T ; le symétrique de ce deuxième point par rapport à G ; le symétrique de ce troisième point par rapport à L. Si ce dernier point et le point de départ ne sont pas confondus, je n'ai pas de triangle.

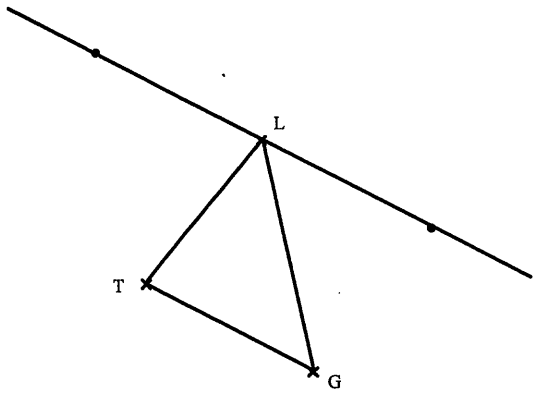
Je recommence en prenant cette fois pour point de départ...

(*c'est à toi de faire la figure*)

Construction B.

Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points tels que ...

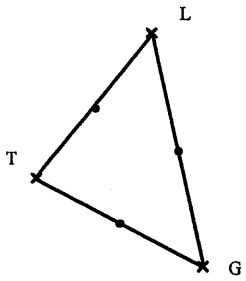
(*la figure est commencée*)



Construction C.

Je trace le triangle TGL et les milieux de ses côtés. Je trace le symétrique de T par rapport à... La figure obtenue est un...

(*la figure est commencée*)



Problème 2

Soit T, G, L trois points non alignés du plan. Construis le triangle AIO tel que T, G, L soient les milieux respectifs des côtés [AI], [IO], [OA].

Tu trouveras ci-dessous trois propositions différentes pour entamer ton programme de construction.

a) Complète chacune des constructions.

b) Choisis une des constructions pour prouver que la figure obtenue répond bien aux conditions imposées.

Construction A.

Je choisis un point quelconque du plan. Je trace le symétrique de ce point par rapport à T ; le symétrique de ce deuxième point par rapport à G ; le symétrique de ce troisième point par rapport à L. Si ce dernier point et le point de départ ne sont pas confondus, je n'ai pas de triangle.

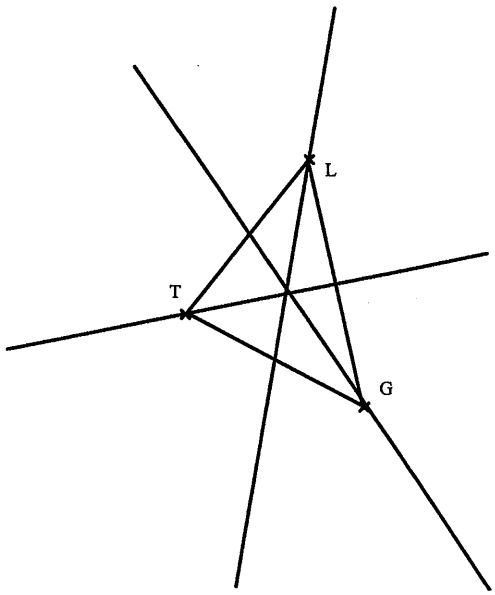
Je recommence en prenant cette fois pour point de départ...

(*c'est à toi de faire la figure*)

Construction B.

Je trace le triangle TGL et les trois médianes. Leur point de concours est tel que...

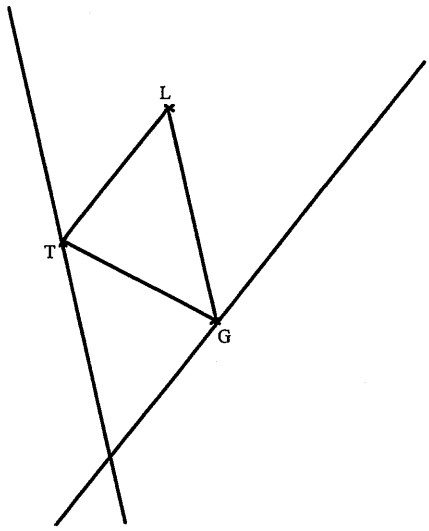
(*la figure est commencée*)



Construction C.

Par T je trace la droite parallèle au côté LG et par G je trace la droite parallèle au côté TL...

(*la figure est commencée*)



4) *Problème 2, construction B*. Ce début de construction s'inspire de la *Solution A_6* (4ème groupe) où l'on exploite les propriétés du centre de gravité d'un triangle et qui devrait conduire à mobiliser l'outil "homothétie". En la proposant, nous voudrions examiner comment les élèves l'utilisent et la justification éventuelle qu'ils produisent.

5) *Problème 2, construction C*. Cette proposition s'inspire des solutions du 1ème et 2ème groupe où l'on exploite les propriétés caractéristiques du parallélogramme, à condition de reconnaître ce dernier comme sous-figure contenue dans la figure à tracer. Le problème demeure suffisamment ouvert car les élèves ont plusieurs possibilités pour compléter la construction ainsi que pour la justifier (cf. *solutions* de A_1 à A_5). Pour prouver que la figure obtenue répond aux conditions imposées, cette construction est susceptible d'être privilégiée par rapport aux autres. Néanmoins, nous faisons encore l'hypothèse que, selon les cas, les élèves ne se poseront pas de questions sur l'alignement des points ni surtout sur l'incidence des droites ou encore sur la convexité.

III. *LE TRIANGLE DES MILIEUX : UN PROBLEME D'AIRE ET DE PERIMETRE*

III.1 L'analyse a priori du problème B

Il s'agit d'un problème *classique*, qu'on retrouve dans beaucoup de manuels scolaires depuis les premières classes du cycle secondaire : il peut être résolu par une preuve aussi bien *pragmatique* (découpage et superposition) qu'*intellectuelle* (démonstration).

Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]. Compléter les égalités suivantes en remplaçant les petits points par les nombres qui conviennent :

$$\mathcal{P}(ABC) = \dots \mathcal{P}(IJK) ;$$
$$\mathcal{A}(ABC) = \dots \mathcal{A}(IJK)$$

($\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$ désignent respectivement les mesures du périmètre et de l'aire des triangles).

Justifier.

Dans un travail précédent, nous étions intéressée aux *connaissances disponibles chez des élèves français pour justifier l'égalité des aires de polygones de forme différente*[18]. Les objectifs de ce travail

[18] Celi, V. (1997), *Comment des élèves de Troisième utilisent-ils leurs connaissances pour justifier l'égalité des aires de polygones de forme différente ?* , Mémoire de D.E.A. en Didactique des Mathématiques, Université Paris 7

étaient différents et la partie expérimentale moins développée que dans le travail présent ; les conclusions tirées nous ont incitée à un approfondissement ultérieur :

> "... Pour résoudre les exercices, on a prévu l'utilisation des formules de calcul de l'aire du triangle, du rectangle, du carré et du losange. Les résultats obtenus confirment que des élèves ont des difficultés à se souvenir des formules : même quand ils proposent leur utilisation, cela ne signifie pas qu'ils les maîtrisent... les erreurs le plus souvent remarquées sont les suivantes : confusion entre périmètre et aire, entre aire et volume, entre les formules de calcul de l'aire du triangle et du rectangle".

En proposant ce problème, nous aimerions repérer d'autres éléments permettant de mieux objectiver les résultats issus de notre travail antérieur mais aussi vérifier si les mêmes *conceptions* apparaissent dans les productions des élèves italiens qui, comme nous l'avons remarqué dans l'analyse des programmes scolaires, "explorent" davantage le chapitre relatif aux *aires*.

Pour compléter les égalités proposées dans l'énoncé, nous avons envisagé deux approches principales : l'une s'appuyant sur les *critères de congruence et de similitude des triangles* et l'autre sur les *transformations géométriques*. En principe, l'élève italien aurait à choisir entre ces deux approches tandis que l'élève français disposerait de la deuxième. Néanmoins, les propriétés de la proportionnalité - reliées à la notion de *similitude* - peuvent être récupérées, dans l'institution française, à travers les notions d'*agrandissement* et de *réduction*, figurant au programme de la classe de Troisième, où les élèves sont censés savoir que, si le rapport des longueurs est k, alors les aires sont multipliées par k^2.

Au cours de l'étude ci-dessus mentionnée, nous avions aussi constaté que les élèves (français) observés avaient tendance, spontanément, à justifier la superposabilité de triangles en ayant recours aux critères de congruence, sans pourtant en avoir une conception précise : ce problème nous offre l'occasion d'approfondir aussi cet aspect, au cas où il se reproduirait.

Comme le problème précédent, celui-ci peut être résolu en suivant des procédures assez variées : nous verrons que la plupart d'entre elles sont susceptibles d'être produites surtout par les élèves italiens.

Les données du problème évoquent la configuration du triangle des milieux (ou la configuration de Thalès relative au triangle) : dans la plupart des procédures envisagées, la *réciproque du théorème de Thalès* ou bien le *théorème des milieux* sont nécessaires pour démarrer.
Pour établir la relation entre les périmètres des triangles ABC et IJK, il faut déterminer la relation existant entre les longueurs des côtés des deux triangles :

- par le *théorème des milieux*, on y parvient directement (*solution B_1*) ; néanmoins, ce théorème permet de mettre en évidence que les deux triangles sont semblables et de parvenir au résultat par les propriétés de la similitude (*solution B_6*) ;

- la *réciproque du théorème de Thalès* ne garantit que le parallélisme, des étapes intermédiaires sont donc nécessaires ; selon les cas, on y parvient par la définition de parallélogramme et ses propriétés (*solution B_2*), par les propriétés caractéristiques du parallélisme et les critères de congruence ou de similitude des triangles (*solution B_3, solution B_8*), par la définition de parallélogramme et les isométries (*solution B_4*), par l'homothétie et ses propriétés (variante de la *solution B_5*) ;
- en recourant convenablement à l'*homothétie* (*solution B_5*) ou à la *similitude* (*solution B_7*), on y parvient sans passer par les théorèmes cités ci-dessus.

Parmi les procédures démonstratives envisagées pour établir la relation entre les aires des triangles ABC et IJK, nous distinguons quatre grands groupes :

1er groupe	**FORMULES DE CALCUL**	**Solution B_1, Solution B'_1**
2ème groupe	**TRIANGLES CONGRUENTS**	**Solution B_2, Solution B_3**
3ème groupe	**TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES**	**Solution B_4 (ISOMETRIES)** **Solution B_5 (HOMOTHETIES)**
4ème groupe	**TRIANGLES SEMBLABLES (ou HOMOTHETIQUES)**	**Solution B_6, Solution B_7, Solution B_8**

Dans le 1er groupe, on retrouve les solutions où l'on recourt soit à la formule de calcul de l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur correspondante soit à la formule de calcul de l'aire d'un triangle dont on connaît les longueurs de ses côtés.

Dans les solutions du 2ème groupe, on exploite la notion de congruence de triangles soit par les demi-parallélogrammes contenus dans la figure soit par les critères de congruence des triangles.

Dans le 3ème groupe, on exploite la conservation des aires ou des rapports d'aires dans les transformations géométriques.

Dans les 4ème groupe, on parvient à trouver la relation entre les aires en recourant aux propriétés de la similitude et, notamment, aux critères de similitude des triangles.

En présentant les solutions envisagées, nous avons organisé les procédures relatives à la question des périmètres avec celles relatives à la question sur les aires suivant une cohérence permettant d'exploiter les outils mobilisés pour la première réponse aussi pour la deuxième. Évidemment, la disposition que nous proposons n'est pas unique, quelques procédures pouvant se combiner autrement. D'autre part, les élèves peuvent traiter les deux questions de manière totalement indépendante.

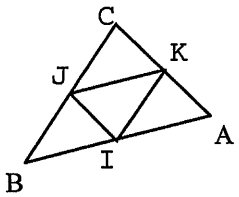
Solution B_1

Ici, pour déterminer la relation existant entre les périmètres des deux triangles, on recourt au *théorème des milieux* ; pour compléter l'égalité relative aux aires, on utilise la formule de calcul de l'aire, ce qui demande de trouver la relation entre les hauteurs des deux triangles.

(AB), (BC) et (CA) sont respectivement parallèles à (KJ), (JI) et (JK)

AB = 2 JK, BC = 2 IK, CA= 2 IJ

⇓

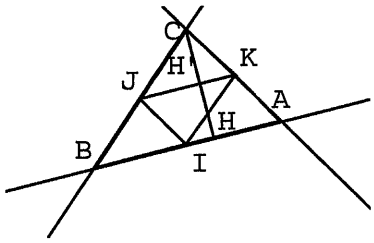


Théorème des milieux

P (ABC) = AB + BC + CA = 2 (JK + IK + IJ) = **2 P (IJK)**

Calcul du périmètre d'un triangle

Dans le triangle ABC, on trace la hauteur [CH] relative à [AB]. Soit H' le point de concours de (AB) et (JK).

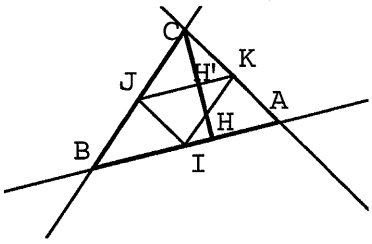


HH' est perpendiculaire à (JK)

Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre

On a prouvé que (AB) et (JK) sont parallèles. On considère le triangle BCH :

H' est le milieu de [CH]



Réciproque du théorème des milieux

CH = 2 HH'

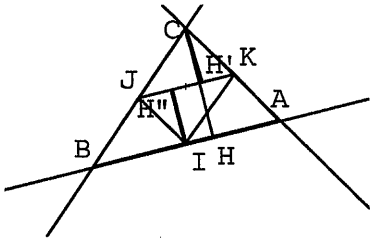
Définition de milieu d'un segment

Dans le triangle IJK, on trace la hauteur [IH"] relative à [JK].

(HH') est parallèle à (IH") et

HH' = IH"

⇓



Si deux droites sont perpendiculaires à une même droit, elles sont parallèles entre elles ET *étant données deux droites parallèles, tout point appartenant à l'une est à la même distance de l'autre*

2 IH" = CH

La relation d'égalité est transitive

$$\mathbf{A\,(ABC)} = (AB \cdot CH)/2$$
$$= (2JK \cdot 2CH'')/2 = \mathbf{4\,A\,(IJK)}$$

Formule de calcul de l'aire d'un triangle

Une procédure alternative pour prouver que CH = 2 IH" consiste à prouver que IJCK est un parallélogramme et que, par conséquent, la diagonale JK le partage en deux triangles congruents (isométriques). Dans deux triangles congruents, les éléments correspondants sont congruents (CH' = IH"). Puisqu'on a prouvé que CH = 2CH', on conclut que CH = 2 IH".
Autrement, on prouve que H"H'HI est un rectangle d'où l'on déduit que IH" = HH', etc.

Dans l'institution française, le *théorème des milieux* occupe une place importante ; en outre, puisque le chapitre sur les aires n'est pas très développé, la question sur les aires évoque pour la plupart des élèves le recours à la formule de calcul de l'aire du triangle. Voici donc l'une des procédures que nous pouvons attendre surtout dans les productions des élèves français.
Le fait d'envisager le tracé des hauteurs des triangles (qui n'apparaissent pas dans la figure de départ) pourrait être une difficulté et une source d'erreur au cas où les élèves ne maîtrisent pas assez la différence entre la hauteur et la médiane[19] d'un triangle.
Une autre difficulté se rencontre lorsqu'il faut prouver que les longueurs des deux hauteurs tracées sont proportionnelles : bien que les outils à mobiliser pour le prouver sont disponibles depuis les premières classes du secondaire, leur articulation demeure quelque peu laborieuse.

Solution B'$_1$

A propos de la relation entre les aires, les élèves italiens pourraient détourner les difficultés ci-dessus mentionnées en recourant à une procédure alternative qui consiste à utiliser la *formule de Héron*, un outil qui n'est pas disponible chez les élèves français.

On établit la relation entres les périmètres des deux triangles : **P (ABC) = 2 P (IJK)**. Soient P (ABC) = 2P et P (IJK) = 2p :

$$\mathbf{A\,(ABC)}$$
$$= \sqrt{P\,(P-AB)(P-BC)(P-AC)}$$
$$= \sqrt{2p(2p-2JK)(2p-2IK)(2p-2IJ)}$$
$$= \sqrt{16p\,(p-JK)\,(p-IK)\,(p-IJ)}$$
$$= \mathbf{4\,A\,(IJK)}$$

Formule de Héron

[19] Dans la tracé de départ, puisque les milieux des côtés du triangle ABC sont marqués, l'élève pourrait être conduit à tracer la médiane au lieu de la hauteur.

Cette procédure, que l'on ne peut pas attendre des élèves français mais qui est à la portée d'un élève italien de la première année de l'ESS, serait peut-être la plus simple à produire ; toutefois, nous croyons que la *formule de Héron* n'est pas un outil aisément mobilisable chez l'élève italien. En fait, dans notre expérience d'enseignement, nous avons souvent constaté que des élèves de l'ESS connaissent son existence mais qu'ils ont des difficultés à l'appliquer car ils ont oublié son "écriture"[20]. Remarquons enfin qu'ici le changement de cadre - du géométrique à l'algébrique - est explicite et prégnant.

Solution B_2

Lorsqu'on utilise l'*énoncé complet du théorème des milieux*, on peut directement déduire que les quatre triangles ont les côtés deux à deux de même longueur et, par le troisième *critères de congruence des triangles*, justifier leur congruence. Puisque ABC est constitué alors de quatre triangles congruents, on en déduit que **A (ABC) = 4 A (IJK).**

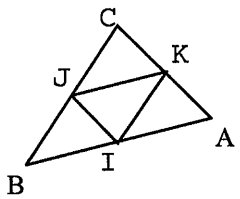
Solution B'_2

Ici, on utilise la *réciproque du théorème de Thalès* (*énoncé général*), on prouve que les quadrilatères contenus dans la figure sont des parallélogrammes et enfin on prouve la congruence de triangles par les demi-parallélogrammes.

CK/CA = CJ/CB = 1/2 — *Définition de milieu d'un segment*

⇓

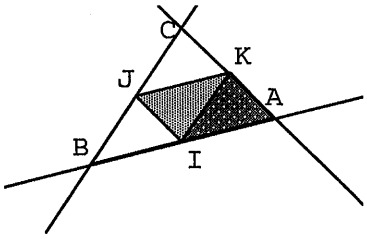
(AB) et (JK) sont parallèles — *Réciproque du théorème de Thalès*



De même, on prouve que (BC) et (CA) sont respectivement parallèles à (IK) et (IJ).

Le quadrilatère AIJK est un parallélogramme — *Définition de parallélogramme*

⇓



[20] A notre avis, cette difficulté est due à son introduction précoce au cours de la deuxième année de l'ESI où on n'a pas de moyens pour la justifier.

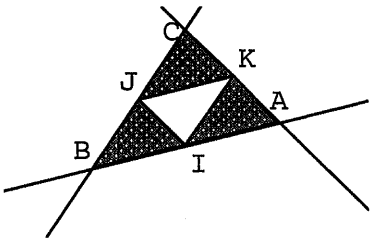
AKI ≡ IJK

Un parallélogramme est partagé par chaque diagonale en deux triangles congruents

De même, on prouve que IJKB et IJCK sont des parallélogrammes et que, par conséquent, IBK et IJK sont congruents ainsi que JCK et IJK.

IJK, AIK, IBK et JCK sont congruents

⇓



La relation de congruence est transitive

IJ = KA = KC

JK = AI = IB

IK = BJ = JC

⇓

AB = 2 JK

BC = 2 KI

CA = 2 JI

⇓

P (ABC) = AB + BC + CA = 2 (IJ + KI + CA) = **2 P (IJK)**

Des triangles congruents ont les côtés correspondants de même longueur.

Calcul du périmètre d'un triangle

A (IJK) = A (IJB) = A (AKI) = A (JCK)

⇓

A (ABC) = A (IJK) + A (IJB) + A (AKI) + A (JCK) = **4 A (IJK)**

Des triangles congruents ont la même aire

Relation additive de la mesure

Cette procédure est à la portée des élèves italiens de la première année de l'ESS. Les élèves français pourraient aussi la produire sans pourtant parler explicitement de critères de congruence des triangles mais en recourant aux invariants de la symétrie centrale.

Solution B"$_2$

À l'aide de la *réciproque du théorème de Thalès*, on prouve que AIJK, IJKB et IJCK sont des parallélogrammes. Ensuite, on recourt à la *propriété du parallélogramme* d'avoir les côtés opposés de même longueur pour en déduire que **P (ABC) = 2 P (IJK)**. À l'aide du *troisième critère de congruence des triangles*, on peut prouver que ABC est constitué de quatre triangles congruents d'où l'on déduit que **A (ABC) = 4 A (IJK)**.

Solution B'''$_2$

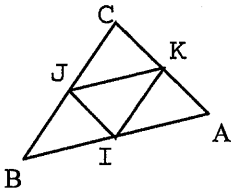
Si l'on recourt directement à l'*énoncé complété de la réciproque du théorème de Thalès* dans les triangles ABC et JCK, ABC et IBJ, ABC et IAK pour en déduire que AB = 2JK, etc. À partir de là, on peut conclure comme dans la **Solution B'$_2$** où, pour prouver la *superposabilité* des triangles, on recourt aux invariants de la symétrie centrale. Cette solution est tout à fait à la portée d'élèves français de Seconde.

Solution B$_3$

Ici, on prouve la congruence de triangles par les critères de congruence, ce qui demande de prouver l'égalité de quelques angles. Puisque l'énoncé général de la *réciproque du théorème de Thalès* garantit le parallélisme, on peut avoir recours aux *propriétés caractéristiques du parallélisme*.

Après avoir prouvé, par la *réciproque du théorème de Thalès*, que les triangles ABC et IJK ont les côtés deux à deux parallèles, on prouve l'égalité de quelques angles, en choisissant convenablement le couple de droites parallèles et la sécante relative :

Les angles BJI, JIK et IKA sont égaux
Les angles CJK, JKI et KIA sont égaux
Les angles BIJ, IJK et JKC sont égaux
⇓



Deux droites parallèles et une sécante forment angles alternes internes égaux

et

La relation d'égalité est transitive

IJK, AIK, IBK et JCK sont congruents

Critère de congruence des triangles (un côté commun et deux angles adjacents égaux)

et

la relation de congruence est transitive

C'est ainsi qu'on se retrouve dans la situation précédente : pour établir les valeurs des rapports des périmètres et des aires des deux triangles, on peut donc suivre la même procédure.

Pour justifier la congruence des triangles, on peut aussi prouver que les quatre triangles ont deux côtés correspondants congruents et l'angle formé par ces côtés égal (autre critère de congruence). Pour ce faire, il faut recourir à l'énoncé complet du théorème des milieux (les triangles ABC et IJK ont les côtés deux à deux parallèles et la longueur de chaque côté de ABC est respectivement égale au double de la longueur de chaque côté de IJK[21]) ; par la définition de milieu d'un segment, on parvient à prouver que les quatre triangles ont donc deux côtés de même longueur.

Les outils mobilisés dans ces procédures sont à la portée des élèves de la 1ère année de l'ESS : ici, en fait, on exploite les critères de congruence des triangles, des notions disponibles - en tant qu'objet ! - chez l'élève italien depuis les premières classes du cycle inférieur.

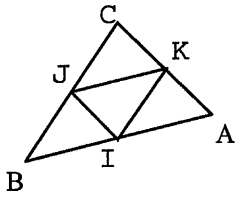
[21] Cette propriété de la figure peut être aussi prouvée en exploitant l'*énoncé général de la réciproque du théorème de Thalès* et puis les *propriétés du parallélogramme*, qui apparaît comme sous-figure dans la figure de départ.

Pour résoudre ce problème, puisque les critères de congruence demeurent un outil bien efficace, nous estimons que les élèves italiens y auraient facilement recours pour parvenir aux résultats cherchés.

Solution B_4

Ici, on utilise les isométries et les propriétés qui en découlent. En d'autres termes, il s'agit de procédures équivalant à celles où l'on recourt à la congruence de triangles. C'est un type de preuve que l'on souhaite trouver lorsqu'on aborde une géométrie dynamique - la géométrie des transformations - qui s'éloigne d'une approche traditionnelle de celle-ci.

Par la réciproque du théorème de Thalès (ou le théorème des milieux), on prouve que les côtés de ABC sont respectivement parallèles aux côtés de IJK, d'où on déduit que AIJK, IJCK et IBJK sont des parallélogrammes.



Les triangles AIK, CJK et BJI sont alors les images de IJK dans trois symétries de centre respectivement les milieux des côtés [IK], [JK], [IJ]. Puisque la symétrie centrale conserve les longueurs et les aires et que la relation d'isométrie est transitive, on parvient aux résultats cherchés.

Autrement, puisqu'on a déduit que la figure de départ contient comme sous-figures des parallélogrammes, on peut avoir recours à la translation et à puis la symétrie centrale en procédant ainsi :
on définit la translation de vecteur **CK**, par exemple, et on déduit que KIA est l'image de CJK par cette translation. De même, on définit la translation de vecteur **CJ** et on déduit que BJI est l'image de CJK par cette translation. CJK est l'image de IKJ par la symétrie de centre le milieu de [JK]. Puisque les isométries conservent les aires et que la relation d'isométrie est transitive, on parvient aux résultats cherchés.

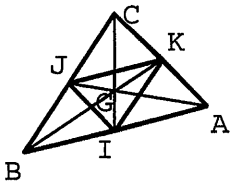
Les élèves français sont censés connaître les notions de symétrie centrale et de translation respectivement depuis la Cinquième et la Quatrième. En principe, ils pourraient adopter de telles procédures - qui, d'ailleurs, remplacent celles où l'on recourt aux critères de congruence des triangles - pour produire des démonstrations. Néanmoins, en accord avec les hypothèses avancées dans notre recherche, nous n'attendons pas ce type de justifications dans leurs productions car, bien qu'ils connaissent ces objets géométriques, ils ne les exploitent pas aisément en tant qu'outils de démonstration.

Solution B_5

Voici une autre solution s'appuyant sur les transformations géométriques. A notre avis, cette procédure est un très bel exemple qui atteste de l'*efficacité*, dans certains cas, de l'outil "homothétie". Ici, une bonne partie des propriétés du triangle des milieux se résume d'un seul coup, ce qui suppose une maîtrise de toutes les notions reliées à cette configuration de base. Remarquons qu'ici, pour démarrer, on ne recourt pas à la réciproque du théorème de Thalès ni au théorème des milieux.

Soit G le centre de gravité du triangle ABC. On affirme ou bien on prouve (cf. problème C) que les triangles ABC et JKI se correspondent dans une homothétie $H = H_{G,-2}$ de centre G et rapport k = -2 :

H (IJK) = ABC
⇓



par une homothétie, l'image d'un triangle est un triangle dont les côtés homothétiques ont longueurs proportionnelles

P (ABC) = 2 P (IJK)

une homothétie de rapport k *multiplie les longueurs par* |k|

A (ABC) = 4 A (IJK)

une homothétie de rapport k *multiplie les aires par* k^2

Évidemment, on parviendra au même résultat, si l'on considère l'homothétie $H'_{G,-½}$ de centre G et rapport k' = -½ où H' (ABC) = JKI, etc.

Sans prendre en compte le fait que les deux triangles ont le même centre de gravité, on pourrait considérer les trois homothéties respectivement de centre A, B, C et de rapport égal à 2et déduire l'aire du quatrième triangle par additivité.

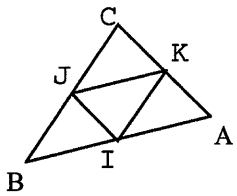
Autrement, on considère les trois homothéties respectivement de centre A, B, C et rapport k=½, sans les composer : AIK est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et rapport k=½, etc. On déduit la relation entre le côtés des deux triangles ABC et IJK et, par conséquent, celle entre leurs périmètres. Puis, on considérant que l'homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2, on déduit que A(AIK) = ¼ A(ABC) etc. On conclut alors que A(ABC) = 4 A(IJK). Néanmoins, cela demande aussi de voir l'isométrie de triangles, ce qui conduirait directement à la solution cherchée.

Nous ne croyons pas que les élèves produisent de telles justifications pour compléter les égalités proposées dans l'énoncé car, aux niveaux concernés, l'homothétie est un objet en cours d'*assimilation* qui ne deviendra peut-être même pas un outil mobilisable lors d'une démonstration. En outre, il ne faut pas oublier que les élèves italiens disposent des critères de similitude des triangles et plus généralement, des propriétés de la similitude, des outils qu'ils mobilisent peut-être plus aisément.

Solution B_6

Ici on utilise le *théorème des milieux* (*énoncé complet*) et l'on exploite ensuite les propriétés relatives aux figures semblables.

AB/JK = BC/IK = AC/JI = 2
⇓



Théorème des milieux

ABC et IJK sont semblables
⇓

Deux triangles sont semblables si les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles (critère de similitude

des triangles)

$AB/JK = P(ABC)/P(IJK)$

$\Downarrow$

$P(ABC) = 2\,P(IJK)$

Si deux triangles sont semblables, le rapport des périmètres est égal au rapport des côtés homologues

$AB^2/JK^2 = A(BIJ)/A(IJK)$

$\Downarrow$

$A(ABC) = 4\,A(IJK)$

Si deux triangles sont semblables, le rapport des aires est égal au rapport des carrés des côtés homologues

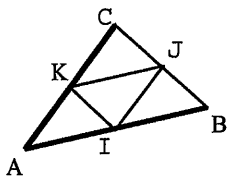
Puisque la notion de similitude (souvent introduite en termes d'agrandissement et de réduction) est connue depuis la fin du cycle secondaire inférieur, cette procédure est vraisemblablement à la portée des élèves italiens de la 2ème classe de l'ESS.

Néanmoins, les élèves français pourraient produire cette démonstration en recourant aux notions d'*agrandissement* et de *réduction* : dès qu'ils déterminent la relation entre les longueurs des côtés des deux triangles, ils peuvent en tirer les conclusions nécessaires (si les longueurs sont multipliées par un même nombre k, le périmètre est multiplié par k et l'aire est multipliée par k^2). A la rigueur, cette procédure pourrait être justifiée par la composition d'une symétrie centrale et d'une homothétie. Cependant, les notions d'agrandissement et de réduction sont présentées comme introduction naïve à l'homothétie. C'est pourquoi on peut s'attendre que la procédure des élèves français relève plutôt du cadre algébrique où on recourt implicitement aux propriétés de la *proportionnalité* (figurant aux programmes depuis la Cinquième).

Solution B_7

Voici une autre solution où, pour démarrer, l'on ne recourt pas à la réciproque du théorème de Thalès ni au théorème des milieux. Finalement, il s'agit d'une démonstration faisant partie de la géométrie traditionnelle que l'on peut retrouver chez les élèves italiens. Elle correspond à la procédure proposée parmi les variantes de la solution B_5 où les triangles *semblables* sont remplacés par des triangles *homothétiques*, ce qui fait passer du registre des figures au registre des transformations géométriques.

$AB = 2AI$, $AC = 2AK$



Définition de milieu d'un segment

$\angle CAB = \angle KAI$

$\Downarrow$

ABC et AIK sont semblables

Deux triangles sont semblables si les longueurs des deux côtés homologues

⇓ *sont proportionnelles et les angles formés par ces côtés sont égaux (critère de similitude des triangles)*

De même, on prouve que ABC et BJI sont semblables ainsi que ABC et CJK :

CB = 2IK, AC = 2IJ, AB = 2JK *Dans deux triangles semblables, les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles*

⇓

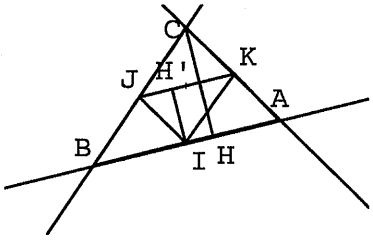
ABC et IJK sont semblables *Deux triangles sont semblables si les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles*

Maintenant, pour compléter les égalités proposées dans l'énoncé, on peut suivre les méthodes exposées dans la solution précédente. Pour l'égalité relative aux aires, on peut aussi exploiter la propriété des hauteurs de figures semblables.

Dans les deux triangles ABC et IJK, on trace [CH] et [IH"], respectivement hauteurs relatives à [AB] et [JK] :

CH /IH' = AB/JK

⇓



Si deux triangles sont semblables, les mesures des hauteurs sont proportionnelles aux mesures des bases relatives.

CH = 2 IH'

⇓

A (ABC) = (AB · CH)/2

= (2JK · 2IH')/2 = **4 A (IJK)** *Formule de calcul de l'aire d'un triangle*

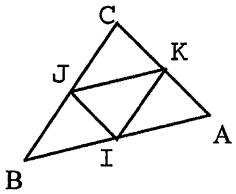
De même ici, on exploite la notion de similitude et les propriétés qui en découlent. D'après nous, cette procédure est à la portée des élèves italiens de la 2ème année de l'ESS même si l'analyse de la figure de départ et, par conséquent, l'articulation des outils à mobiliser demeure plus complexes par rapport à la procédure précédente ; en effet, il s'agit d'une procédure où l'on redémontre un résultat admis dans la solution précédente.

Solution B_8

Voici une dernière solution à répertorier, elle aussi, parmi les démonstrations de la géométrie traditionnelle. Ici, après avoir utilisé la *réciproque du théorème de Thalès* ainsi que l'une des propriétés du parallélogramme, on recourt aux critères de similitude des triangles.

(AB) est parallèle à (JK)
(BC) est parallèle à (KI)
(AC) est parallèle à (JI)

⇓



Réciproque du théorème de Thalès

AIJK, BIKJ, CJIK sont des parallélogrammes ⇓	*Définition de parallélogramme*
∠IAK = ∠IJK, ∠JBI = ∠JKI, ∠JCK = ∠JIK	*Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux*
ABC et IJK sont semblables ⇓	*Deux triangles sont semblables si les angles homologues sont égaux (critère de similitude des triangles)*

Maintenant, pour compléter les égalités proposées dans l'énoncé, on peut suivre une des méthodes exposées dans les solutions précédentes.

Sans recourir aux propriétés du parallélogramme, une autre procédure pour prouver l'égalité des angles homologues consiste à mobiliser les propriétés des angles formés par deux droites parallèles et une sécante. Cette procédure est aussi efficace bien que, d'après nous, demeure plus laborieuse.

Lorsque l'élève italien aperçoit le parallélogramme comme sous-figure contenue dans une configuration donnée, il peut exploiter l'égalité de quelques angles pour recourir ensuite à l'un des critères de similitude des triangles. Par contre, la comparaison des angles ne conduirait nulle part l'élève français, sauf à mobiliser "implicitement" le critère de similitude concerné ; dans ce cas là, il s'agirait alors d'un "théorème en acte" car – vu les outils disponibles chez l'élève français – il ne peut pas déduire la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles de l'égalité des angles (voir, par exemple, le cas d'un carré et d'un rectangle : ils ont les mêmes angles mais...).

III.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

Cet énoncé ne subit pas beaucoup de modifications.

Soit trois points non alignés A, B, C. Trace I, J, K, milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC]. Dans les égalités suivantes :

$$P(ABC) = m\,P(IJK)$$
$$A(ABC) = n\,A(IJK)$$

où P et A désignent respectivement les mesures du périmètre et de l'aire des triangles, *m* et *n* des nombres.

Cherche les valeurs de ces nombres pour que les deux égalités soit vraies.

Justifie en explicitant les propriétés de la figure.

Vu le nombre de solutions possibles que ce problème offre, nous estimons que l'analyse des productions des élèves nous fournira des éléments intéressants sur le rapport au savoir géométrique de l'élève .

Pour résoudre ce problème, l'élève pourrait avoir recours au mesurage : nous le proposons sans figure initiale car, selon nous, la nature du tracé fourni par l'élève pourrait influencer sa preuve en nous offrant des éléments importants lors de l'analyse. Parmi les conceptions erronées, nous nous attendons à trouver la même valeur pour le périmètre et pour l'aire, soit $m = n = 2$ soit $m = n = 4$, selon ce que les élèves perçoivent en premier ; ou bien que $n = 3$ car il faut trois autres triangles isométriques (congruents) à IJK pour compléter le triangle ABC.

IV. *LE TRIANGLE DES MILIEUX : UN PROBLEME DE CENTRE DE GRAVITE*

IV.1 L'analyse a priori du problème C

Il s'agit encore d'un problème *classique*, un autre exemple prouvant la richesse des propriétés contenues dans la configuration de base choisie dans notre travail, ce qui pourrait justifier les raisons qui font qu'on la retrouve à plusieurs reprises au cours du programme de géométrie du secondaire dans les deux institutions concernées.

Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]. Prouver que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité G.

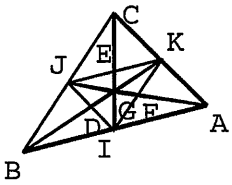
Les procédures possibles sont variées, cela est dû au fait que l'on peut envisager un certain nombre de sous-figures et, par conséquent, mobiliser convenablement tel ou tel outil.
En effet, nous avons envisagé trois groupes de solutions. Au démarrage, on déduit quelques propriétés de la figure donnée par le *théorème des milieux* ou bien la *réciproque du théorème de Thalès* et ensuite on exploite les propriétés du *parallélogramme*, les notions d'*homothétie*, de *similitude*. Nous verrons que, au lieu de la similitude, les élèves français pourraient se reporter à la *configuration de Thalès* et aux notions d'*agrandissement* et de *réduction*.

L'énoncé, tel qu'il est proposé ci-dessus, évoque implicitement la notion de médiane. Le fait que cet élément n'apparaît pas dans la figure de départ peut représenter un obstacle à la réussite du problème.

Solution C_1

Ici, on utilise le *théorème des milieux* dans le triangle ABC. Puis, on trace ses médianes : en considérant des sous-figures contenues dans la figure obtenue, on utilise la réciproque de ce théorème.

Par le *théorème des milieux*, on déduit que, dans le triangle ABC, (JK) est parallèle à (AB) et que AB = 2JK = 2AI. On trace les segments [CI], [BK] et [AJ], médianes du triangle ABC (*définition de médiane*), et l'on considère le triangle ACI et E, point d'intersection de (KJ) et (CI).

E est le milieu de [IC] et AI = 2 KE		*Réciproque du théorème des milieux*
AI = JK ⇓ AI = 2 KE		*Propriété de transitivité de l'égalité*
⇓ E est le milieu de [JK]		*Définition de milieu d'un segment*

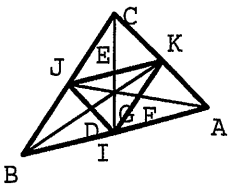
De même, dans le triangle BAK, on prouve que D est le milieu de [IJ] et que, donc, [EI], [KD] sont les médianes de IJK. Par conséquent, G est le centre de gravité de IJK.

Ici, le fait de considérer des éléments graphiques qui n'apparaissent pas dans la figure initiale pourrait être un obstacle au démarrage. En outre, le recours à un résultat et puis à sa réciproque pourrait être une difficulté pour les élèves qui souvent, dans un énoncé, confondent l'hypothèse et la thèse. Autrement, compte tenu des outils à mobiliser, il s'agit d'une procédure à la portée d'élèves de Troisième ou bien de la 1ère année de l'ESS.

Solution C_2

Ici, les médianes de ABC jouent aussi le rôle de diagonales des parallélogrammes contenus dans la figure de départ ; c'est la propriété des diagonales qui permet d'aboutir. Il faut donc envisager le parallélogramme comme sous-figure contenue dans la figure de départ et compléter celle-ci avec des éléments supplémentaires.

On trace les segments [CI], [BK] et [AJ], médianes du triangle ABC (*définition de médiane*). Puis on considère les quadrilatères IJKA et IBJK.

(AB) est parallèle à (JK) (BC) est parallèle à (IK) (AC) est parallèle à (IJ) ⇓		*Réciproque du théorème de Thalès*
IJKA et IBJK sont des parallélogrammes		*Définition de parallélogramme*
F, D sont respectivement les milieux des côtés [IK], [IJ]		*Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu*

[JF], [DK] sont les médianes de IJK — *Définition de médiane d'un triangle*

⇓

G est le centre de gravité de IJK — *Définition de centre de gravité*

Cette procédure est à la portée d'un élève de Troisième ou bien de la 1ère année de l'ESS. Les outils à mobiliser sont peut-être plus familiers aux élèves que ceux envisagés dans les solutions suivantes, percevoir convenablement des sous-figures et tracer des éléments graphiques supplémentaires demeurent les difficultés éventuelles. Néanmoins, nous pouvons attendre cette procédure dans les productions des élèves observés.

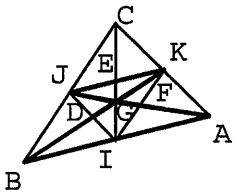
Solution C_3

Ici, on utilise l'homothétie et les propriétés qui en découlent. La définition de médiane ainsi que la propriété du centre de gravité d'un triangle sont nécessaires pour démarrer.

On trace les segments [CI], [BK] et [AJ], médianes du triangle ABC (*définition de médiane*). Soit G leur point de concours, à savoir le centre de gravité du triangle ABC. [CI], [BK] et [AJ] rencontrent [JK], [IJ] et [IK] respectivement en E, D, F.

On considère le couple de triangles KGJ, AGB.

AB = 2 JK



Théorème des milieux

BG = 2 GK
AG = 2 GJ — *Propriété du centre de gravité d'un triangle*

⇓

On considère l'homothétie $H = H_{G,-1/2}$ de centre G et rapport h = -1/2 :

H(AB) = JK — *Une homothétie transforme segments en segments*

⇓

E est le milieu de [JK] — *L'homothétie conserve l'alignement des points et le rapport des distances*

⇓

[IE] est une médiane du triangle IJK — *Définition de médiane*

De même, on prouve que F (D) est le milieu de [IK] ([IJ]) et que, par conséquent, [JF] ([KD]) est une médiane de IJK. Puisque [IE] et [IK] se rencontre en G, on déduit que G est le centre de gravité de IJK.

Une procédure alternative consiste à considérer l'homothétie de centre G qui transforme A en J. On montre qu'elle transforme aussi B en K et C en I et que, donc, l'image de [AB] est [JK], etc. Il s'agit de l'homothétie de centre G et rapport -½ . Puisque l'homothétie conserve l'alignement des points et le rapport des distances, on prouve que E est le milieu de [JK] etc.

Ou bien, on considère les homothéties $H_{A,\,½}$, $H_{B,\,½}$, $H_{C,\,½}$. D'après les invariants de l'homothétie ci-dessus mentionnés, on parvient au même résultat.

On pourrait aussi considérer l'homothétie $H = H_{G,\,-1/2}$ et le couple de triangles JGE, IGA. Cette procédure est aussi efficace bien que, d'après nous, demeure plus laborieuse (cf. solution C_4).

Pour les raisons déjà exposées plus haut à propos de l'outil "homothétie", nous pensons qu'il est improbable de trouver ces procédures dans les productions des élèves observés. En outre, le fait d'envisager les sous-figures qui conviennent demeure une difficulté éventuelle pour le démarrage.

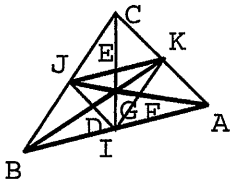
Solution C_4

Ici, au lieu l'homothétie, on parle en termes de triangles semblables en recourant aux critères de similitude des triangles.

On trace les médianes du triangle ABC. Comme dans la solution précédente, on pourrait considérer le couples de triangles KGJ, AGB mais, ainsi faisant, la procédure demeure laborieuse. Pour varier, nous allons cette fois considérer le couple de triangles JGE, AGI.

(AB) est parallèle à (JK) et
AB = 2 JK
⇓

AI = JK



Théorème des milieux

(JK) et (AB) sont coupées par les droites (AJ) et (EI) :

∠EJG = ∠GAI
∠JEG = ∠GIA

Deux droites parallèles et une sécante forment angles alternes internes égaux.

∠JGE = ∠IGA

Angles opposés par le même sommet

⇓

JGE, AGI sont semblables

Deux triangles ayant les angles égaux deux à deux sont semblables (critère de similitude des triangles)

⇓

On sait que G est le centre de gravité de ABC. On déduit que GA = 2 GJ (*propriété du centre de gravité d'un triangle*). Donc :

AI/JE = IG/EG = GA/GJ = 2

Dans deux triangles semblables, les mesures des côtés homologues sont proportionnelles

⇓

AI = JK = 2JE

⇓

E est le milieu de [JK]

Définition de milieu d'un segment

⇓

[EI] est une médiane de IJK

Définition de médiane

De même, on considère les triangles GKF et GBJ et on prouve que [JF] est une médiane de IJK.

[EI] et [JF] se coupent en G	*Par construction*
⇓	
G est le centre de gravité de IJK	*Définition de centre de gravité d'un triangle*

Évidemment, on parvient au même résultat si l'on considère la similitude inverse de rapport k = ½.

Cette procédure, s'appuyant sur les propriétés de la similitude, est à la portée d'un élève de la 2ème année de l'ESS.

Comme nous l'avons vu plus haut, les élèves français pourraient proposer des justifications s'appuyant sur l'homothétie, au lieu de la similitude. Ils peuvent aussi s'appuyer sur leurs connaissances relatives à la *configuration de Thalès* et aux propriétés d'*agrandissement* et de *réduction* sans mettre en jeu les égalités d'angles mais seulement la proportionnalité de quelques longueurs.

On considère les triangles JGE, IGA : les côtés [AI] et [EJ] sont parallèles (*théorème des milieux* pour les triangles ABC et IJK) ; E appartient à (GI) et J appartient à (GA). Les côtés de JGE sont proportionnels aux côtés *associés* de IGA (théorème de Thalès relatif au triangle). Puisque GA = 2 GJ (*propriété du centre de gravité d'un triangle*), on déduit que JGE est une réduction de IGA etc.

Ici, une fois les médianes tracées, il s'agit d'apercevoir convenablement une sous-configuration de base pour ensuite recourir aux propriétés de la similitude ou de l'agrandissement et la réduction. Pourtant, tracer des éléments qui n'apparaissent pas dans la figure de départ et reconnaître des sous-figures qui conviennent sont des difficultés qui pourraient faire obstacle à la réussite. Finalement, nous n'attendons pas que les élèves puissent produire de telles preuves car l'articulation des outils mis en jeu est plutôt complexe.

IV.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

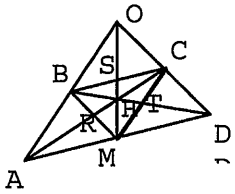
Les résultats de l'analyse a priori nous ont conduite à transformer tout à fait cet énoncé. Bien que la *configuration du triangle des milieux* soit familière aux élèves, nous sommes persuadée que les sous-figures de base à considérer pour aboutir ne viennent pas aisément à leur esprit. Les variables à prendre en compte pour parvenir à une solution sont nombreuses ; en principe, la plupart des outils à mobiliser devraient être familiers aux élèves observés mais c'est leur articulation qui, d'après nous, demeure complexe. On ne présente plus explicitement la configuration du triangle des milieux mais c'est à l'élève de la construire d'après les indications du texte. Ceci nous semble de nature à aider les élèves à organiser davantage leur raisonnement.

On part donc d'un trapèze pour arriver, à travers des étapes intermédiaires, au triangle des milieux :

> **Soit un trapèze ABCD avec (AD) parallèle à (BC) et AD = 2 BC. Les diagonales se coupent en H et les droites (AB) et (CD) en O.**
> **a) Prouve que B est le milieu de [OA].**
> **b) Prouve que (OH) coupe [AD] en son milieu M.**
> **c) Prouve que H est le centre de gravité du triangle BCM.**
> **d) Compare les aires des triangles AOD et BCM.**

La structure par étapes de cet énoncé ne ferme pas trop le problème car les élèves ont encore le choix sur les outils à mobiliser. En réalité, la configuration initiale du trapèze est un artifice : elle veut évoquer - selon les cas - la *configuration de Thalès* ou bien la configuration de base pour les *projections*, les *homothéties* et les *similitudes*, ce qui fournit un ensemble suffisamment riche d'outils pour répondre aux différentes questions.

Pour prouver que B est le milieu de [OA], on dispose de divers outils :
- le *théorème de Thalès* dans les triangles OBC et OAD (*énoncé complété*) ;
- l'homothétie de centre O et rapport k = OA/OB (ou bien k = OB/OA) ;
- les critères de similitude des triangles.



Pour prouver que (OH) coupe [AD] en son milieu M, la procédure la plus simple consiste à prouver que C est aussi le milieu de [OD] (*réciproque du théorème des milieux* ou bien *théorème de Thalès*) et que, par conséquent, [AC] et [BD] sont deux médianes du triangle AOD ; H est alors le centre de gravité de AOD, OM est l'autre médiane du triangle, donc M est le milieu de [AD].

Pour prouver que H est le centre de gravité du triangle BCM, on peut avoir recours à l'une des procédures envisagées lors de l'analyse a priori précédente. Néanmoins, ici, des éléments supplémentaires significatifs sont désormais tracés (ce qui, dans l'autre version, serait laissé à l'initiative de l'élève), des propriétés de la figure sont mises en évidences : c'est aux élèves de conclure en choisissant convenablement la procédure à suivre.

Pour la question sur les aires, on peut avoir recours à l'une des procédures envisagées dans le problème B, en privilégiant peut-être celles liées à la similitude et à l'homothétie.

Lorsqu'on demande de comparer les aires des deux triangles, la plupart des propriétés de la figure ont été mises en évidence dans les étapes précédentes : c'est à l'élève de les organiser convenablement pour aboutir. En introduisant cette question, nous voudrions analyser l'aptitude de l'élève à relier des situations apparemment indépendantes.

De même ici, le texte ne comprend pas d'informations graphiques (tracé). Si l'élève trace un trapèze particulier, il risque d'utiliser des propriétés supplémentaires relatives à son tracé particulier. Cela nous

permettra d'évaluer, entre autres, la capacité de l'élève à décontextualiser un problème en considérant un cas général de figure.

V. *DANS LE TRIANGLE DES MILIEUX, QUADRILATERES DE MEME AIRE*

V.1 L'analyse a priori du problème D

Il s'agit d'un problème concernant les *aires* et qui, contrairement aux précédents, offre une solution *quasi obligée*. Évidemment, nous lui conférons un intérêt différent des autres problèmes : en le proposant, nous pourrions évaluer la capacité de l'élève à mobiliser des outils dans un cas où ils sont particulièrement efficaces pour aboutir.

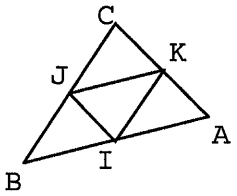
Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]. Soit M un point de la droite (BC), autre que J. Comparer les aires des quadrilatères AIMK et AIJK.

Pour localiser les bons outils à mobiliser, il faut considérer un élément supplémentaire qui n'apparaît pas dans les données : il s'agit de la diagonale [IK], commune aux deux quadrilatères. C'est seulement ainsi qu'on met en évidence la configuration de base qui permet de résoudre le problème, à savoir un couple de triangles ayant un côté commun et le troisième sommet distinct appartenant à une droite parallèle à ce côté.

A notre avis, il s'agit d'un exemple de problème géométrique où il est primordial d'examiner "ce qu'on a pour faire ressortir ce qu'on n'a pas". En effet, on peut disposer des outils nécessaires, sans voir comment les utiliser.

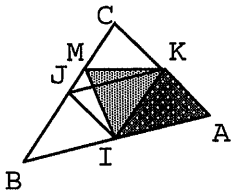
Solution D_1

(BC) est parallèle à (IK)



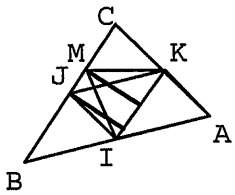
Réciproque du théorème de Thalès (théorème des milieux)

On considère le quadrilatère AIMK comme la réunion des deux triangles disjoints, AIK et KIM.



M et J sont à la même distance de (KI)

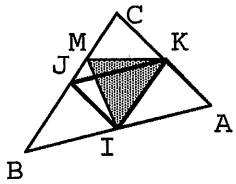
⇓



Étant données deux droites parallèles, tous les points appartenant à l'une sont à la même distance de l'autre[22]

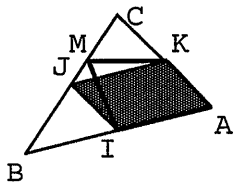
KIJ et KIM ont la même aire

⇓



Deux triangles de même base et de même hauteur associée, ont la même aire

AIMK et AIKJ ont la même aire



Deux surfaces polygonales qui sont réunion de surfaces respectivement congruentes ou de même aire, ont la même aire

V.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

L'énoncé ne subit pas beaucoup de modifications. Sans fournir d'informations graphiques, nous avons aussi introduit la question sur la relation existant entre les aires du triangle donné et du quadrilatère mais, contrairement au problème B, nous avons résolu de fournir dans le texte l'égalité à justifier.

---

[22] On peut connaître directement l'**énoncé de la parallèle** ("*Deux triangles ayant un côté commun et tels que la droite passant par le troisième sommet soit parallèle à ce côté commun, ont même aire*") ou le démontrer par la formule.

Soit un triangle NMR et U, E, O les milieux des côtés [NM], [MR], [RN]. Soit X un point de la droite (NM), autre que U.

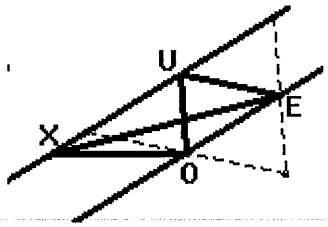
a) Compare les aires des quadrilatères ROUE et ROXE.

b) Justifie l'égalité suivante :

$$\mathcal{A}(NMR) = 2\,\mathcal{A}(ROXE)$$

où $\mathcal{A}$ désigne la mesure de l'aire des polygones.

Ici il faut considérer que tous les polygones mis en jeu sont la réunion de triangles superposables et/ou de même aire et donc compléter la figure initiale avec un élément supplémentaire en obtenant ainsi la configuration du triangle des milieux. Ensuite il faut envisager une deuxième configuration (cf. figure ci-dessous) : c'est l'articulation de ces deux configurations qui permet d'aboutir.



À travers la proposition de ce problème, on pourra alors évaluer l'aptitude de l'élève à compléter une figure pour faire intervertir des outils liés à des configurations de base connues. Évidemment, l'intérêt sur les compétences de l'élève à propos de questions d'aires demeure toujours important.

VI. *LE PARALLELOGRAMME DES MILIEUX I*

VI.1 L'analyse a priori du problème E

Il s'agit d'un problème *classique* qui s'appuie sur le *théorème des milieux* et engendre un ensemble de situations liées aux quadrilatères particuliers.

Soient S, P, Q, R les milieux respectifs des côtés [AI], [IM], [MK], [KA] du quadrilatère AIMK. Prouver que SPQR est un parallélogramme.

L'intérêt de ce problème porte aussi sur le fait que, quelle que soit la nature du quadrilatère AIMK, convexe ou non, croisé ou non, le quadrilatère SPQR sera toujours un parallélogramme.

Parmi les procédures envisagées, nous distinguons deux groupes. Nous résumons ci-après les outils principaux mobilisés dans les diverses démonstrations.

1e groupe	PARALLELOGRAMME	**Solution E_1.** Théorème des milieux ou réciproque du théorème de Thalès ; définition ou propriétés caractéristiques du parallélogramme. **Solution E'_1.** Théorème des milieux ; propriétés caractéristiques du parallélogramme.
2ème groupe	TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES	**Solution E_2.** Théorème des milieux ou réciproque du théorème de Thalès ; homothétie ; composée de deux homothéties ; égalité vectorielle. **Solution E_3.** Définition de milieu d'un segment ; symétrie centrale ; égalité vectorielle.

Suivant les cas, on trace ou non des éléments supplémentaires dans la figure de départ. Notamment :

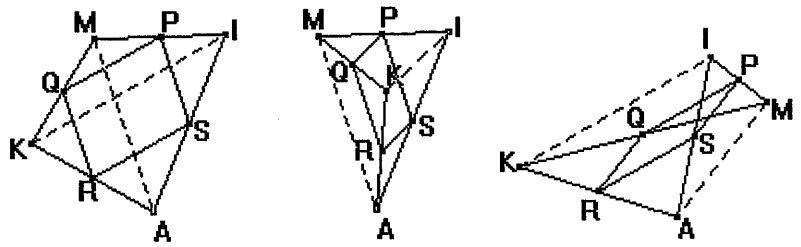
- si l'on trace les deux diagonales du quadrilatère AIMK, on peut se reporter à la droite des milieux et parvenir à la solution en recourant à la définition de parallélogramme ;
- si l'on trace une des diagonales du quadrilatère AIMK, on peut se reporter à la droite des milieux et parvenir à la solution en recourant à l'une des propriétés du parallélogramme ; autrement, on peut exploiter la notion d'homothétie ;
- sans tracer de diagonales, on peut parvenir à la solution en exploitant les propriétés de la symétrie centrale.

Une des difficultés - surtout dans le cas où le quadrilatère de départ est non convexe, croisé ou non - consiste à envisager des éléments qui ne sont pas suggérés dans l'énoncé. En outre, d'après nous, les transformations géométriques ne sont pas des outils que les élèves mobilisent spontanément. Il s'agit donc d'un problème où les obstacles à la réussite peuvent provenir, selon les cas, d'un manque de familiarité avec les outils à mobiliser et/ou d'une inaptitude à articuler les outils disponibles ainsi qu'à envisager les sous-figures qui conviennent pour aboutir.

Par ailleurs, si les élèves tracent une figure assez soigneuse, ils pourraient se contenter de produire une preuve pragmatique pour justifier leurs argumentations. En effet, cette situation se prête à être exploitée efficacement avec des logiciels de géométrie dynamique : en déplaçant un sommet du quadrilatère AIMK, on voit bien que le quadrilatère SPQR demeure toujours un parallélogramme.

Solution E_1

On trace le quadrilatère AIMK et les milieux S, P, Q, R de ses côtés. On trace ensuite le quadrilatère SPQR et les diagonales KI et AM de AIMK. On considère les triangles AIK et KIM.



Par le *théorème des milieux* (*ou bien réciproque du théorème de Thalès*) et la propriété transitive du parallélisme, on prouve que (QP) est (RS) sont donc parallèles. De même, en considérant les triangles AIM et AKM, on prouve que (SP) et (RQ) sont parallèles pour conclure que SPQR est un parallélogramme (*définition de parallélogramme*).

En principe, les outils mobilisés dans cette procédure sont disponibles chez des élèves de Quatrième et de la 1ère année de l'ESI.

Solution E'_1

Une variante de cette solution consiste à ne tracer que la diagonale IK de AIMK et à recourir à l'*énoncé complet du théorème des milieux* : (QP) est (RS) sont parallèles et QP = RS. A ce moment là, se pose le problème de la convexité. On pourra alors distinguer deux procédures.

1) On prouve que QPSR est un parallélogramme par l'*égalité vectorielle* : si les vecteurs **QP** et **RS** sont égaux, alors QPSR est un parallélogramme. Pour ce faire, il faut disposer d'un énoncé vectoriel du théorème de Thalès dans un triangle.
2) On prouve que le quadrilatère SPQR est convexe (ce qui n'est pas évident !). Ensuite, puisqu'il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, on peut conclure qu'il est bien un parallélogramme.

A notre avis, les élèves préfèrent mobiliser la définition de parallélogramme plutôt que ses propriétés caractéristiques. Toutefois, remarquons que l'outil vectoriel n'est disponible que chez les élèves français ; nous croyons que, si les élèves italiens produisaient la deuxième solution, la preuve de la convexité du quadrilatère SPQR demeurerait implicite.

Solution E_2

On trace le quadrilatère AIMK et les milieux S, P, Q, R de ses côtés. On trace ensuite le quadrilatère SPQR et la diagonale IK de AIMK. On considère les homothéties $H = H_{M,\,2}$, de centre M et rapport k = 2, et $H' = H_{A,\,½}$,de centre A et rapport k' = ½ .
On compose les deux homothéties : $H_A * H_M$ ([QP]) = [RS] ; on obtient une translation $T = T_{PS}$ de vecteur **PS** d'où on déduit que les vecteurs **QR** et **PS** sont égaux et que, par conséquent, SPQR est un parallélogramme.

Autrement, on considère les homothéties $H = H_{M,\,½}$, de centre M et rapport k = ½, et $H' = H_{A,\,½}$,de centre A et rapport k' = ½, d'où on déduit que le vecteur **QP** est égal au vecteur **KI**/2 et que le vecteur **RS** est égal au vecteur **KI**/2 pour parvenir ensuite à la même conclusion.

Comme nous l'avons déjà dit, nous ne nous attendons pas à trouver ces procédures dans les productions des élèves observés. Nous pensons que les élèves italiens ne disposent pas des outils mobilisés ici ; bien que, en principe, les élèves français disposent des objets "homothétie" et "translation" (en principe, c'est en fin de Seconde qu'ils apprennent que la composée de deux

homothéties de rapport inverse est une translation), il est improbable qu'ils recourent spontanément à ces procédures.

Solution E_3

On trace le quadrilatère AIMK et les milieux S, P, Q, R de ses côtés. On trace ensuite le quadrilatère SPQR. D'après les données, on déduit que I est le symétrique de A par rapport à S, etc. (*définition de milieux d'un segment et de symétrie centrale*). On considère les symétries centrales S_S , S_P , S_Q, S_R.

$S_P * S_S(A) = T_{AM}$, **AM = 2 SP** — *La composée de deux symétries centrales est une translation...*

$S_Q * S_R(A) = T_{AM}$, **AM = 2RQ** — *La composée de deux symétries centrales est une translation...*

On déduit donc que les vecteurs **RQ** et **SP** sont égaux et que, par conséquent, RQPS est un parallélogramme.

Bien que, d'après les programmes, les élèves français disposent depuis la Troisième des outils nécessaires pour produire cette solution, nous estimons qu'ils ne les mobiliseraient pas spontanément.

VI.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

Comme nous l'avons déjà dit, ce problème fait partie des *classiques* de la littérature géométrique. Nous l'avons modifié pour éviter le cas où certains élèves l"auraient déjà traité. Au lieu de demander de prouver que *le quadrilatère obtenu en joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est un parallélogramme*, nous avons alors crée l'énoncé suivant qui demande la mobilisation de cette propriété dans un problème de construction et où nous avons aussi ajouté une question sur les aires.

> **Soient A, S, P, Q quatre points du plan. Trace :**
> **le point B, symétrique de A par rapport à S ;**
> **le point C, symétrique de B par rapport à P ;**
> **le point D, symétrique de C par rapport à Q.**
> **a) Comment placer un point R sur [AD] pour que SPQR soit un parallélogramme ? Justifie la réponse.**
> **b) Compare les aires des quadrilatères ABCD et SPQR.**

Les points de départ A, S, P, Q sont déjà fournis avec l'énoncé de façon à obtenir un quadrilatère ABCD convexe, ce qui réduit le degré de difficulté et fait que la question sur les aires ne perd pas de signification. Cependant, on laisse à l'élève la charge de compléter la figure.

Il s'agit encore d'un problème où on peut disposer des outils nécessaires, sans voir comment et pourquoi les utiliser. La difficulté est qu'il y a un seul point R qui complète le parallélogramme SPQR.

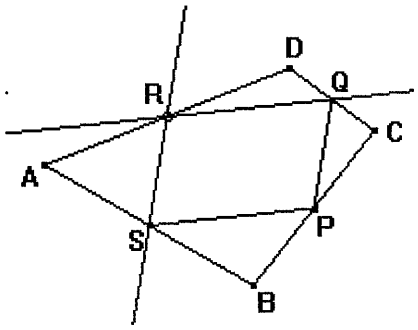
Il faut donc prouver que ce point est sur [AD] et pour ce faire, il est plus commode de prouver qu'il est le milieu de [AD]. Cela revient à prouver quelque chose de plus fort que ce qui est nécessaire.

Ici, la formulation de la question attire l'attention sur [AD]. Il suffit donc de deviner que le milieu de [AD] convient et de le prouver. Cela ne montre pas que c'est le seul point possible. Il y a fort à parier que les élèves ne verront pas que le quatrième sommet d'un parallélogramme est entièrement déterminé, indépendamment de [AD]. On ne peut pas réaliser toutes les conditions par construction donc tout dépend de la manière dont on complète la figure. Plusieurs voies sont possibles.

a) On trace [AD], on prend R milieu de [AD] et on prouve que SPQR est un parallélogramme, cela revient exactement aux démonstrations du parallélogramme des milieux.

b) On trace [AD] et on essaie d'obtenir un parallélogramme avec R sur [AD].

1) On trace, par exemple, la parallèle à [SP] passant par Q : elle coupe [AD] en R. Par le *théorème des milieux* dans le triangle ABC, par sa *réciproque* dans le triangle ADC et puis par la *définition de parallélogramme*, on prouve que le SPQR est bien un parallélogramme et que R est le milieu de [AD].



c) On complète le parallélogramme SPQR :

– par les deux parallèles

2) On trace la parallèle à [QP] passant par S, la parallèle à [SP] passant par Q : elles se coupent en R. On est ainsi confronté à un problème d'incidence et d'alignement de points : il faut prouver que R appartient au segment [AD] et que R est équidistant de ses extrémités (*définition de milieu d'un segment*). Cela se résout en prouvant que (SR) et (QR) coupent [AD] en son milieu, à l'aide du *théorème de Thalès*.

– par les diagonales

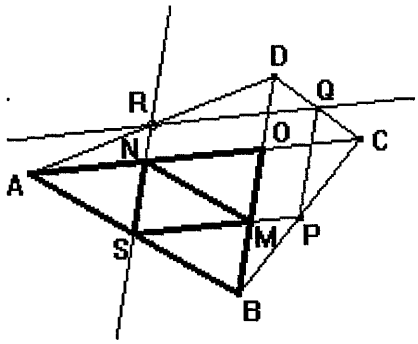
3) On trace [SQ] et son milieu M. On trace l'image de P par la symétrie de centre M... On est encore confronté à un problème d'incidence et d'alignement de points. Pour prouver que R est le milieu de [AD], on recourt au *théorème des milieux* dans le triangle ABC et puis au *théorème de Thalès* dans le triangle ADC.

Comme nous le verrons dans l'analyse du problème suivant, les questions d'incidence de droites et d'alignement de points ne sont pas du tout faciles à justifier. Au cas où les élèves recourraient à ces procédures, nous faisons toujours l'hypothèse qu'ils ne se poseront pas ces questions.

Pour répondre à la question sur les aires, plusieurs procédures sont possibles. Elle sont plus ou moins favorisées selon le point de vue adopté pour la question précédente.

1) On trace les diagonales de ABCD, soit O leur point de concours. On fixe l'attention sur une partie de la figure obtenue, par exemple le triangle AOB. En recourant à la réciproque du théorème des milieux ou bien au théorème de Thalès, on prouve que M et N sont les milieux respectifs des côtés [AO] et [BO] du triangle AOB. On trace le segment [MN]. En recourant à l'une des procédures envisagées pour résoudre le problème

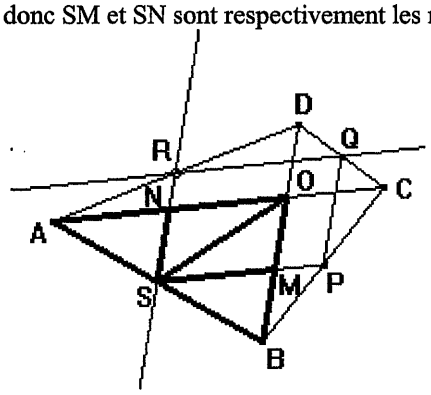
B (notamment les solutions B_2, B_3 et B_4) , on montre que AOB est la réunion de quatre triangles congruents (isométriques). En reproduisant la même procédure pour les triangles BOC, COD et DOA, on parvient à prouver que l'aire du quadrilatère est double de celle du parallélogramme.



2) On peut avoir recours à d'autres procédures envisagées pour résoudre le problème B (notamment la variante de la solution B_5 ou bien la solution B_7). Par l'homothétie ou la similitude, on prouve que A(SBP) = ¼ A(ABC) et que A(RDQ) = ¼ A(ADC) d'où A(SBP) + A(RDQ) = ¼ A(ABCD). De même A(ARS) + A(PCQ) = ¼ A(ABCD). On a alors que A(SBP) + A(RDQ) + A(ARS) + A(PCQ) = ½ (ABCD), d'où on conclut que l'aire du quadrilatère ABCD est double de l'aire du parallélogramme SPQR.

3) Comme pour le problème D, on prouve que le quadrilatère SMON est un parallélogramme et que son aire est la moitié de celle du triangle AOB, etc.

4) On trace les segments qui joignent O avec les sommets de SPQR. En recourant à la réciproque du théorème des milieux ou bien au théorème de Thalès, on prouve que M et N sont les milieux respectifs des côtés [AO] et [BO] du triangle AOB et que donc SM et SN sont respectivement les médianes des triangles ASO et OSB.



Puisqu'une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire, on a que les triangles ASN et NSO ainsi que OSM et MSB ont la même aire. En reproduisant la même procédure avec les triangles BOC, COD et DOA, on parvient à prouver que l'aire du quadrilatère est le double de celle du parallélogramme.

5) Soit [AH] la hauteur de ABD associée à [BD]. La mesure de l'aire de ABD est égale à ½ AH×BD. A l'aide du théorème des milieux, on prouve que RS = ½ BD. Soit K le point d'intersection de (BD) et (RQ) ; on prouve que la hauteur du parallélogramme RSMK est égale à AH/2, d'où la mesure de l'aire de RSMK est égale à ½AH× ½BD et, par conséquent, la mesure de l'aire de RSMK est égale à la moitié de celle de ABD. En suivant la même procédure, on établit que la mesure de l'aire de QPMK est égale à la moitié de celle de CBD, d'où le résultat cherché.

Évidemment, dans ce problème, l'aptitude de l'élève à reconnaître des sous-figures en traçant des éléments supplémentaires ainsi qu'à articuler convenablement les outils dont il dispose joue un rôle décisif pour la réussite. En outre, la deuxième question met en évidence les outils disponibles chez l'élève à propos des aires, autres que les formules de calcul.

VII. *LE PARALLELOGRAMME DES MILIEUX : UN PROBLEME DE CONSTRUCTION*

VII.1 L'analyse a priori du problème F

Ce problème de construction est un compromis issu de l'examen d'un ensemble de travaux pratiques – proposés dans les divers manuels scolaires consultés – s'appuyant sur le *parallélogramme des milieux* (cf. problème E) et s'inspire d'un sujet proposé au concours des Professeurs d'École dans l'Académie de Grenoble en 1996.

Soit AIEO un carré. Construire un quadrilatère CLMR tel que A, I, E, O soient respectivement les milieux de [CL], [LM], [MR], [RC] et que l'angle CLM soit droit.

Étant donnés quatre points I, J, K, L, existe-t-il un quadrilatère ABCD tel que les points donnés soient les milieux de ses côtés ? Si les points donnés ne sont pas les sommets d'un parallélogramme, le problème n'a pas de solution. A partir de cette condition, les énoncés trouvés dans les manuels prévoient d'autres données caractérisant soit le parallélogramme IJKL soit le quadrilatère ABCD ; parmi les situations possibles, on trouve notamment des problèmes s'appuyant sur les caractéristiques suivantes :

- Le parallélogramme IJKL est un losange si et seulement si les diagonales du quadrilatère ABCD ont même longueur (cas particuliers : le rectangle, le trapèze isocèle) ;
- Le parallélogramme IJKL est un rectangle si et seulement si les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires (cas particulier : le losange, le "cerf volant") ;
- Le parallélogramme IJKL est un carré si et seulement si les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires et ont même longueur (cas particulier : le carré).

Ce type de problèmes permet alors de mettre en jeu les propriétés caractéristiques des parallélogrammes en les reliant à des quadrilatères qui, tout en ayant des particularités (avoir les diagonales de même longueur ou bien perpendiculaires, etc.), confèrent un niveau de généralisation au problème puisqu'ils ne sont pas nécessairement des quadrilatères particuliers, familiers aux apprenants depuis les premières années de leur scolarité.

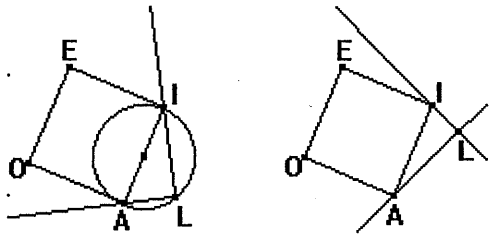
Dans le problème général, lorsque la solution existe, le premier sommet du quadrilatère peut être un point quelconque du plan. La condition que l'angle CLM soit droit, d'une part caractérise ultérieurement le quadrilatère cherché et suggère à l'élève le choix du point de départ pour démarrer la

construction et d'autre part nous permet d'évaluer l'aptitude de l'élève à procéder par analyse/synthèse et à envisager des solutions non particulières.

Puisqu'il s'agit d'un problème de construction, en effet, le recours à la *méthode d'analyse et de synthèse* s'impose. Néanmoins, contrairement au problème A, ici les variables à considérer sont plus nombreuses. C'est pendant la phase d'analyse qu'on devrait s'apercevoir que la condition de l'angle droit et celle du carré sont indépendantes. Pour la construction du quadrilatère, l'examen de la figure finale suggère diverses approches : puisque A, I, E, O doivent être les milieux des segments cherchés, l'outil "symétrie centrale" s'avère très efficace mais il s'agira, dans la phase de synthèse, de prouver que les points initial et final coïncident ou bien que le quatrième sommet du carré est le milieu du segment ayant pour extrémités le troisième point construit et le premier ; on peut aussi analyser le quadrilatère cherché comme dans le problème E et montrer que ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur.

Dans le programme de construction, on peut alors distinguer deux phases.

1ère phase. On construit le point L, sommet de l'angle droit. Pour ce faire, deux constructions sont possibles[23] :



- on trace une droite passant par A et puis la droite perpendiculaire à celle-ci et passant par I ; pour que le quadrilatère CLMR soit convexe, il faut que la droite passant par A ne coupe ni [IE] ni [EO] ou bien qu'elle forme avec [OA] un angle inférieur à 90° ;
- on choisit le point L sur le cercle de diamètre [AI] et puis on trace les droites (AL) et (IL) ; pour que le quadrilatère CLMR soit convexe, il faut placer L sur le demi-cercle à l'extérieur du carré.

2ème phase. On construit le quadrilatère cherché dont on connaît maintenant l'un des quatre sommets, le point L. On peut compléter la construction suivant des programmes différents :

- à partir de L, on définit quatre symétries successives qui donneront les quatre sommets du quadrilatère cherché. Il faut prouver que le quatrième point obtenu coïncide avec L (*solution F_1*) ;
- à partir de L, on définit trois symétries successives qui donneront les trois autres sommets du quadrilatère cherché. Il s'agit de prouver que le troisième point obtenu, soit le point C, appartient à la droite (AL) et que A est le milieu de [CL] (*solution F_2*) ;

[23] On prend le point L à l'extérieur du carré, ce qui donnera un quadrilatère convexe. Si l'on prend L à l'intérieure du carré, on obtiendra un quadrilatère concave mais l'angle droit sera alors extérieur au quadrilatère.

- on trace les symétriques de L par rapport à A et à I en obtenant les sommets C et M. On trace (ME) et (CO) : elles se coupent en R. Il faut prouver que E et O sont bien les milieux de [RM] et de [RC] (*solution F_3*) ;
- on trace les symétriques de L par rapport à A et à I en obtenant les sommets C et M. On construit [LR] tel que (LR) soit perpendiculaire à (CM) et que LR = CM. Il s'agit encore de prouver que E et O sont bien les milieux de [RM] et de [RC] (*solution F'_3*) ;
- on trace le symétrique de L par rapport à A en obtenant le sommet C. On trace la parallèle à (AI) passant par C, elle coupe [LI) en M. Pour obtenir le quatrième sommet de CLMR, on peut suivre l'une des deux constructions précédentes (*solution F_4*) ;
- on place R tel que (LR) soit perpendiculaire à (AI) et que LR = 2 AI. On trace (RE) et (OR) : elles coupent respectivement (IL) en M et (AL) en C (*solution F_5*).

Parmi les constructions envisagées, celles s'appuyant sur les symétries centrales nous paraissent plus spontanées que les autres tandis que, comme nous le verrons ci-après, leur justification est plus complexe. Remarquons que, au lieu de recourir à la notion de symétrie centrale, les élèves pourraient être plus à l'aise en évoquant la définition de milieu.

Solution F_1

Dans cette procédure, on exploite les propriétés de la symétrie centrale. Ainsi faisant, les points initial et final coïncident : à notre avis, si les élèves recouraient à cette procédure, ils ne se préoccuperaient pas de le prouver ou bien ils auront du mal à le faire car il faut considérer la composée de symétries centrales, un outil que – aux niveaux concernés – les élèves ne maîtrisent pas aisément même si les élèves français sont censés le faire.

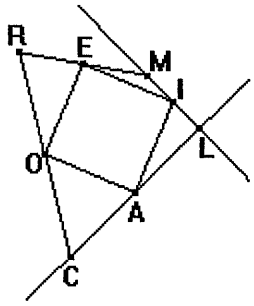
Construction. On trace le carré AIEO et puis le point L (en suivant l'une des procédures décrites ci-dessus). On trace le symétrique de L par rapport à I, soit M ($S_I(L) = M$) ; le symétrique de M par rapport à E, soit R ($S_E(M) = R$) ; le symétrique de R par rapport à O, soit C ($S_O(R) = C$) ; le symétrique de C par rapport à A, soit X ($S_A(C) = X$).

Il suffit de prouver que X et L coïncident pour affirmer que CLMR est le quadrilatère cherché : c'est par la définition de *symétrie centrale* qu'on déduit que A, I, E, O sont bien les milieux des côtés de CLMR.

IL = IM, EM = ER, RO = OC

⇓

I, E, O sont les milieux respectifs de [LM], [MR, [CR]



Définition de symétrie centrale

Définition de milieu d'un segment

$S_A * S_O * S_E * S_I$ (L) = L si la composée de ces quetre symétries centrales est l'idéntité. Or, $S_E * S_I$ (L) = T_{2IE} (L) = R et $S_A * S_O$ (R) = T_{2OA} (R) = X. Mais T_{2OA} (R) $*$ T_{2IE} (L) = T_0 puisque **IE** = **-OA** (vecteurs ayant même longueur, même direction et sens opposé, côtés opposés d'un carré), donc X = L et, par conséquent, A est le milieu de [CL].

Solution F_2

Ici on utilise encore les propriétés de la symétrie centrale mais le problème d'alignement de points se pose ainsi que le fait qu'il faut tracer un élément supplémentaire qui convient pour aboutir. Les élèves pourrait recourir à cette construction très naturelle mais ne pas voir qu'il faut ensuite démontrer des propriétés (A milieu de [CL]).

Construction. On trace le carré AIEO et puis le point L (en suivant l'une des procédures décrites ci-dessus). On trace le symétrique de L par rapport à I, soit M ($S_I(L) = M$) ; le symétrique de M par rapport à E, soit R ($S_E(M) = R$) ; le symétrique de R par rapport à O, soit C ($S_O(R) = C$). Il faut prouver que A est le milieu de [CL].

On prouve que I, E, O sont les milieux respectifs de [LM], [MR], [RC] (*définition de symétrie centrale et de milieu d'un segment*). On trace ensuite la diagonale [CM] de CLMR. Il faut prouver que C, A, L sont alignés et que A est le milieu de [CL] pour affirmer que CLRM est le quadrilatère cherché.

$S_E * S_O (C) = M = T_{2OE} (C)$

$\Downarrow$

$C = T_{-2OE} (M)$

AI = OE

$\Downarrow$

2IA = -2OE

La composée de deux symétries centrales est une translation...

Le carré est un parallélogramme particulier et...

$C = T_{2IA} (M) = S_A * S_I (M)$

$\Downarrow$

$S_A (L) = C$

$\Downarrow$

C, A, L sont alignés et A est le milieu de [CR]

Définition de symétrie centrale

Solution F'_2

Pour prouver que C, A, L sont alignés et que A est bien le milieu de [CL], on peut aussi utiliser le théorème des milieux dans le triangle MRC et puis sa réciproque dans le triangle CLM. C'est d'ailleurs ainsi que l'on obtient la composée de deux symétries centrales.

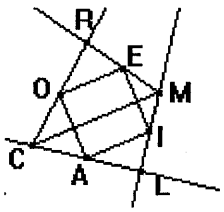
(OE) est parallèle à (CM)

et

(AI) est parallèle à (OE)

$\Downarrow$

(CM) est parallèle à (AI)



Théorème des milieux

et

Définition de carré

Propriété transitive du parallélisme et de la relation d'égalité

La droite (AI) coupe la droite (CL) en son milieu, soit A', et CM = 2A'I (*réciproque du théorème des milieux*). On déduit que A'I = AI et que, par conséquent, A' = A.

Ici, la nécessité de tracer le bon élément graphique supplémentaire est encore essentiel pour réussir. Un recours correct à un théorème et à sa réciproque reste toujours une difficulté non négligeable. Néanmoins, dans les productions des élèves, nous nous attendons à trouver plutôt cette procédure que celles s'appuyant sur les transformations géométriques. Les outils utilisés ici sont familiers aux élèves italiens qui, éventuellement, recourraient à la notion de milieu et non pas de symétrie centrale pour justifier la première partie de la construction.

Solution F_3

Construction. On trace le carré AIEO et puis le point L (en suivant l'une des procédures décrites ci-dessus). On trace le symétrique de L par rapport à A, soit C ($S_A(L) = C$) ; le symétrique de L par rapport à I, soit M ($S_I(L) = M$). On trace les droites (ME) et (CO) : elles se coupent en R[24].

Il faut prouver que E et O sont bien les milieux de [RM] et [RC].
Par la *composée des deux symétries* définies ou bien par le *théorème des milieux* relatif au triangle CLM, on prouve que (CM) et (AI) sont parallèles et que CM = 2AI. Puisque (AI) et (OE) sont parallèles et que AI = OE (*définition de carré*), on déduit que (CM) et (OE) sont parallèles et que CM = 2OE.
On considère alors les triangles ORE et CRM : puisqu'ils sont semblables[25] (homothétiques), on déduit que RM = 2 RE et que RC = 2RO pour conclure que E et O sont bien les milieux de [RM] et [RC].
Après avoir prouvé que (AI) est parallèle à (CM) et que CM = 2AI (*théorème des milieux, énoncé complet*), on peut recourir à l'*énoncé complété du théorème de Thalès* dans les triangles CMR et OER, etc.

Lorsqu'on prouve que (CM) et (OE) sont parallèles et que CM = 2OE, on peut aussi déduire que M est l'image de C par la translation T_{2OE} de vecteur **2OE.** Puisqu'une translation est la composée de deux symétries centrales, on déduit que $S_E * S_O$ (C) = M et que, par conséquent, il existe un point X qui permet de passer de C à M par la composition des deux symétries S_E et S_O : il s'agit du point de concours de (ME) et (CO), d'où X = R (*deux droites se coupent en un point et un seul*).

Ici, on ne considère que deux isométries. Si l'on omet le problème d'incidence, cette procédure est plus simple que celles envisagées jusqu'ici. Cependant, d'après nous, l'analyse de la figure n'est pas tellement spontanée : les élèves ayant familiarité avec la méthode d'analyse et de synthèse, pourraient choisir cette construction à la suite d'une démarche heuristique qui les conduit à écarter celles qui, bien que faciles à réaliser, sont plus difficiles à justifier.
Remarquons enfin que le recours à l'*énoncé complété du théorème de Thalès* nous paraît plus conforme aux programmes de Collège et peut-être un outil plus probable à trouver dans les productions des élèves français.

Solution F'_3

Dans cette procédure, on exploite la propriété du quadrilatère cherché d'avoir les diagonales

---

[24] Cf. Problème B où des questions sur l'incidence de droites ont été déjà traitées.
[25] cf. Problème B

perpendiculaires et de même longueur. Cela peut s'envisager si les élèves ont déjà traité le problème direct du parallélogramme des milieux.

Construction. Une fois les points L, C, M tracés, on peut construire le segment [LR] tel que (LR) soit perpendiculaire à (CM) et que LR = CM[26].

On prouve alors que (AI) est parallèle à (CM) et que CM = 2AI (*théorème des milieux, énoncé complet*). Or, puisque LR = CM et que AI = IE (*définition de carré*), on déduit que LR = 2IE. En outre, puisque (AI) est parallèle à (CM) et que (LR) et (IE) sont respectivement perpendiculaires à (CM) (*par construction*) et (AI) (*définition de carré*), on conclut que (LR) est parallèle à (IE) (*deux droites perpendiculaires à deux droites parallèles sont parallèles entre elles*). Grâce à la *réciproque du théorème des milieux* ou au *théorème de Thalès* (*énoncé complété*), on déduit que (IE) coupe (MR) en son milieu, soit X, et LR = 2IX. Puisque LR = 2IE, on déduit que IE = IX d'où X et E coïncident.
En suivant la même procédure, on prouve que O est le milieu de [RC].

Comme on l'a déjà dit, lors de la phase d'analyse, il faudrait que l'élève s'aperçoive que la propriété des diagonales du quadrilatère cherché est décisive pour aboutir. En général, pour prouver que la figure obtenue répond aux conditions imposées, on mobilise des outils disponibles chez les élèves italiens et français observés. C'est encore l'articulation de ces outils qui demeure complexe ; par exemple, le fait d'avoir recours successivement à un théorème et à sa réciproque pourrait être source d'erreur alors que la question d'alignement de point peut être passée sous silence.

Solution F_4

Construction. On trace le carré AIEO et puis le point L (en suivant l'une des procédures décrites ci-dessus). On trace le symétrique de L par rapport à A, soit C ($S_A(L) = C$). On trace la droite parallèle à (AI) et passant par C : elle coupe (IL) en M[27]. Une fois le triangle CLM tracé, on peut compléter la construction et la justifier en suivant l'une des deux procédures décrites dans la solution précédente.

Cette construction est peu naturelle sauf si l'on vient de résoudre le problème direct. L'analyse de la figure ainsi que l'articulation des outils à mobiliser pour justifier la construction demeurent encore des difficultés non négligeables.

Solution F_5

Ici, on ne considère aucune symétrie mais l'on exploite le fait que les diagonales de CLMR sont perpendiculaires et de même longueur et que cette longueur est le double de celle du côté de AIEO. Là encore, ce n'est envisageable que si l'on vient de traiter le problème direct.

Construction. On trace le carré AIEO et puis le point L (en suivant l'une des procédures décrites ci-dessus). Sur la perpendiculaire à (AI) passant par L, on place R tel que LR = 2AI et R du même côté que O et E par rapport à [CM]. On trace (ER) et (RO) : elles coupent respectivement (IL) en M et (AL) en C.

---

[26] Évidemment, il faut construire le bon segment car il y en a deux. Il faut choisir R du même côté que O et E par rapport à [CM].

[27] Autrement, on peut placer M tel que CM = 2AI.

D'après la construction, on déduit que (LR) est parallèle à (AO) et (EI) et que LR = 2AO = 2EI. On prouve que CLR et CAO sont semblables (homothétiques) et l'on déduit que L et O sont les milieux respectifs de [CL] et [RC]. De même pour les triangles MLR et MIE. Autrement, on définit les homothéties respectivement de centre C et M et de rapport k = 2, etc.
Les élèves français peuvent aussi avoir recours au *théorème de Thalès* (*énoncé complété*) dans les triangles CLR et CAO et puis dans les triangles MLR et MIE.

Cette construction ainsi que sa justification sont peut-être plus accessibles que les précédentes. Toutefois, c'est encore l'analyse de la figure qui demeure complexe : au niveau concerné, nous ne croyons pas que l'élève soit déjà capable de saisir de tels détails et de discerner ce qui lui permettrait de justifier de la manière la plus simple la construction choisie pour obtenir la figure demandée.

VII.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

Cet énoncé n'a pas été beaucoup modifié.

Soit AIEO un carré. Construis un quadrilatère CLMR tel que :
les points A, I E, O soient les milieux relatifs aux [CL], [LM], [MR], [RC] ;
l'angle CLM soit droit.
a) Rédige le programme de construction.
b) Prouve que la figure répond bien aux conditions imposées.

En proposant ce problème tel qu'il est, nous voudrions évaluer l'aptitude des élèves face à une construction dont la transformation en étapes reste entièrement à leur initiative ainsi que leur aptitude à envisager des solutions non particulières ; en outre, nous pourrions constater si les élèves discernent la phase de description de la construction de la phase de démonstration.

VIII. *DU TRIANGLE AU PARALLELOGRAMME*

VIII.1 L'analyse a priori du problème G

Ici on cite explicitement dans l'énoncé une transformation géométrique. Il s'agit d'un problème abordable depuis les premières classes du secondaire.

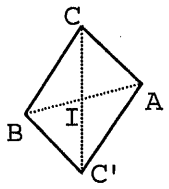
Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC].
a) Soit C' le symétrique de C par rapport au milieu de [AB]. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?
b) Si les points A, B, C sont tels que IJK soit un triangle rectangle en I, quelle est la nature de ACBC' ? Comment faudrait-il choisir les points A, B, C pour que ce quadrilatère soit un carré ? Justifier les réponses.

Ici, le triangle des milieux apparaît comme sous-figure contenue dans la figure de départ : la majeure partie de ses propriétés citées jusqu'ici permet de répondre aux questions posées. Il faut donc que l'élève ait une bonne connaissance de cette configuration de base afin de l'exploiter convenablement dans un problème qui ne la met pas en cause directement. En outre, il faut que l'élève sache mobiliser aisément les propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers.

En le proposant, on pourrait évaluer s'il existe, chez les élèves, une préférence lorsqu'ils disposent d'un réseau suffisamment riche de propriétés relatives au parallélogramme et qui peuvent être mobilisées indifféremment.

Solution G_1

I est le milieu de [CC']
I est le milieu de [AB]
⇓



Propriété de la symétrie centrale
et
définition de milieu d'un segment

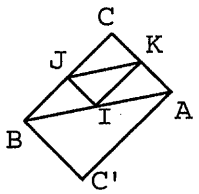
I est le point de concours des diagonales du quadrilatère AC'BC
⇓

ACBC' est un parallélogramme

Un quadrilatère dont les diagonales se croisent en leur milieu est un parallélogramme

On considère le quadrilatère CJIK : il s'agit d'un parallélogramme (*théorème des milieux* et *définition de parallélogramme*). Puisque, par hypothèse, IJK est un triangle rectangle, l'angle KIJ est droit :

L'angle BCA (JCK) est droit
⇓



Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux

ABC est un triangle rectangle
⇓

Définition de triangle rectangle

ACBC' est un rectangle

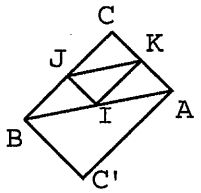
Un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle

Pour que ACBC' soit un carré, il faudrait AC = BC (*définition de carré*). Par conséquent, il faudrait choisir ABC tel qu'il soit un triangle rectangle isocèle.

Autrement, en suivant les procédures montrées dans le problème B (*le triangle des milieux : un problème d'aire et de périmètre*), on prouve que les triangles ABC et IJK sont semblables. IJK est rectangle en I :

ABC est rectangle en C

⇓



Dans deux triangles semblables, les angles opposés à côtés homologues sont égaux

ACBC' est un rectangle

Un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle

Si ACBC' était un carré, il serait la réunion de deux triangles rectangles isocèles disjoints, ABC et ABC'. Donc, comme ABC et IJK sont semblables, même ABC serait un triangle rectangle isocèle.

Solution G_2

On prouve que A est le symétrique de B par la symétrie de centre I (*définition de milieu d'un segment et de symétrie centrale*) et on déduit que ACBC' est un parallélogramme (*définition de parallélogramme*) grâce aux invariants de la *symétrie centrale.*

Autrement, compte tenu des conditions imposées, le quadrilatère ACBC' est convexe car ses diagonales se coupent en un point. Par la symétrie de centre I, on déduit que les côtés opposés de ACBC' sont de même longueur ou bien que deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur ou encore que ses angles opposés sont égaux. L'une de ces propriétés permet alors de conclure que ACBC' est bien un parallélogramme.

Ou encore, la symétrie de centre I permet de déduire que les vecteurs **AC** et **C'B** sont égaux et que donc ACBC' est un parallélogramme.

Pour répondre aux autres questions, on peut suivre l'une des procédures envisagées dans la solution précédente.

Puisque les élèves italiens disposent d'une connaissance superficielle et naïve de la symétrie centrale, pour répondre à la question (a) du problème, la première procédure exposée est probablement la seule qu'ils peuvent produire plus aisément que les autres. Sinon, les élèves français devraient être capables d'utiliser indifféremment l'une de trois procédures.

Dans la deuxième partie du problème, l'expérience en termes d'action mentale peut être très utile pour aboutir. C'est une situation dynamique où l'on demande à l'élève de "faire bouger" la figure de départ pour en obtenir une nouvelle. C'est à lui de traduire son expérience mentale sous la forme de preuve intellectuelle, ce qui montrerait donc que, chez l'élève, le passage d'une *attitude* vers l'autre s'est

accompli et que, bien que l'évidence lui permettrait de répondre aux diverses questions, il ressent enfin le besoin de produire un raisonnement intellectuel pour prouver ses réponses.

VIII.2 Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale

Ce texte ne subit pas beaucoup de modifications : on le propose en trois étapes corrélées. C'est à l'élève de tracer la figure initiale et, éventuellement, celles qu'on obtient par la suite.

> **Soit un triangle CNM et I, E, A les milieux respectifs des côtés [CN], [NM] et [MC].**
> **1. On appelle M' le symétrique de M par rapport à I. Quelle est la nature du quadrilatère CMNM' ?**
> **2. Comment faudrait-il choisir le triangle CNM pour que le triangle IEA soit rectangle en I ? Quelle est alors la nature de CMNM' ?**
> **3. Comment faudrait-il choisir le triangle CNM pour que CMNM' soit un carré ?**
> **Justifie les réponses.**

Comme nous l'avons déjà souligné, l'intérêt de ce problème porte sur le fait que l'on demande implicitement de "faire bouger" la figure : ici l'intuition et l'expérience jouent un rôle fondamental, il reste à voir si l'élève ressent l'exigence de produire une preuve intellectuelle pour justifier ses argumentations.

IX. *LE PARALLELOGRAMME DES MILIEUX II*

Cet énoncé, issu de nos réflexions lors de l'analyse a priori des trois problèmes concernant la configuration du *parallélogramme des milieux*, reprend à la fois le sens direct et la réciproque de la construction du parallélogramme des milieux.

> **Soit deux droites perpendiculaires : sur la première on place deux points A et C, sur la deuxième deux points B et D. Trace le milieu I de [AB], le milieu J de [BC], le milieu K de [CD], le milieu L de [DA].**
> **a) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Pourquoi ?**
> **b) Compare les aires de ABCD et IJKL.**
> **c) Les points A, B, C étant déjà placés, comment disposer D pour que le quadrilatère IJKL soit un carré ? Justifie la réponse en explicitant les propriétés de la figure.**

Les questions (a) et (b) renvoient à l'analyse a priori du problème E (*Le parallélogramme des milieux*). La question (c) renvoie au problème F (*Le parallélogramme des milieux : un problème de*

construction) en favorisant la solution appuyée sur les propriétés des diagonales du quadrilatère ABCD[28].

Suivant la manière dont on place les points A, B, C et D, on peut obtenir un quadrilatère convexe, concave ou croisé. Dans les trois cas, IJKL sera un rectangle mais, dans le dernier cas, la question sur les aires perd son sens.

Tout est laissé à l'initiative de l'élève. Cependant, lorsqu'on trace la figure décrite, les diagonales du quadrilatère apparaissent et sont perpendiculaires : ces éléments contribuent à rendre moins laborieuse la question sur les aires – où les quelques triangles à considérer ont même forme et non pas seulement même aire ! – mais sollicitent aussi l'intuition aux dépens de la déduction car, d'après un tracé soigneux, on voit bien que le quadrilatère IJKL est un rectangle ; de même pour la dernière question où la symétrie évoquée par le carré pourrait conduire l'élève à conclure, sans prouver ses argumentations, que le point D doit être le symétrique de A etc.

Ce problème demeure donc intéressant pour plusieurs raisons. Il permet d'évaluer les connaissances des élèves à propos des aires, leur prédisposition à produire des preuves intellectuelles pour valider leurs argumentations. Il permet aussi d'évaluer leur capacité à considérer une situation dans son exhaustivité car ils devraient considérer que les données fournies correspondent à trois cas de figure – convexe, concave, croisé – et exclure celui qui n'a pas de signification lorsqu'ils abordent la question sur les aires.

X. *L'ORGANISATION DE LA PARTIE PRE-EXPERIMENTALE*

Nous avons assemblé les divers problèmes selon la disposition suivante :

FICHE A	**Problème 1A**	**Le triangle des milieux : un problème d'aire et de périmètre**
	Problème 2A	**Le triangle des milieux : un problème de construction (version 1)**

[28] Le quadrilatère CLMR dans le problème F.

FICHE B	Problème 1B	Le triangle des milieux : un problème de centre de gravité
	Problème 2B	Le triangle des milieux : un problème de construction (version 2)
FICHE C	Problème 1C	Du triangle au parallélogramme
	Problème 2C	Le parallélogramme des milieux I
	Problème 3C	Dans le triangle des milieux, quadrilatères de même aire
FICHE D	Problème 1D	Le parallélogramme des milieux II
	Problème 2D	Le parallélogramme des milieux : un problème de construction

FICHE A. Dans les deux énoncés, la figure exploitée est la même. Les propriétés de cette figure, explicitées pour résoudre le premier problème, peuvent être utiles pour résoudre l'autre.

FICHE B. La figure est encore la même. La solution du premier problème – où il y a, entre autres, une question sur les aires – peut être une aide pour compléter et justifier l'une des trois constructions proposées dans l'énoncé de l'autre.

FICHE C. Les trois problèmes sont jumelés par des dénominateurs communs qui pourraient s'expliciter au fur et à mesure pendant la résolution : en effet, la configuration du triangle des milieux n'est pas mise explicitement en cause mais, dans les trois cas, elle peut être utile pour avancer. Dans deux de ces problèmes, une question porte sur les aires.

FICHE D. Ici, la figure exploitée est la même. Les propriétés explicitées pour résoudre le premier problème, notamment celle relative à la dernière question, suggèrent une des procédures possibles pour construire le quadrilatère envisagé dans l'autre problème. Ici aussi, dans le premier des deux énoncés, une question porte sur les aires.

Pour la réalisation de la partie pré-expérimentale, nous avons prévu la passation des problèmes commentés jusqu'ici auprès d'un petit groupe d'élèves français et italiens. Nous avons visité deux classes italiennes pour un total de 34 (19+15) élèves et une classe française de 31 élèves. Nous leur avons proposé les problèmes en leur laissant la liberté de choisir la procédure et de recourir aux instruments de dessin ; ils ont eu une heure de temps avant de nous remettre leur production écrite. A notre demande, chaque classe a été organisée en quatre groupes hétérogènes, sélectionnés selon le jugement de leur enseignante. Chaque élève de chaque groupe a eu à résoudre individuellement soit deux soit trois problèmes sans contraintes sur l'ordre à suivre.

Dans le chapitre 5, nous commentons et analysons les résultats issus de la phase pré-expérimentale : nous détaillerons aussi les critères suivis pour le dépouillement des productions écrites des élèves observés et fournirons les éléments essentiels qui ont influencé l'élaboration ultérieure des énoncés afin de les exploiter lors de la phase expérimentale définitive. Auparavant, nous allons effectuer une analyse plus détaillée des manuels scolaires français et italiens, notamment sur les principaux contenus en jeu dans ces problèmes : les aires et le théorème de Thalès.

Chapitre 4

Une lecture analytique de quelques manuels scolaires

PLAN DU CHAPITRE

I. PREMIERS ELEMENTS D'ANALYSE DES MANUELS SCOLAIRES

I.1 Le choix des manuels scolaires

I.2 Description globale des divers ouvrages

I.3 Rapport cours/exercices et approche de la démonstration

I.4 Les dispositifs d'analyse des manuels scolaires

II. LE RESEAU CONCEPTUEL DES AIRES DANS LES DIVERS MANUELS SCOLAIRES

III. AUTOUR DE LA CONFIGURATION DU TRIANGLE DES MILIEUX

Le manuel scolaire occupe une place intermédiaire mais considérable dans le processus de transposition didactique. En dehors de l'école, il concourt à la définition du savoir à enseigner en conjuguant le savoir savant avec les programmes scolaires et les instructions officielles ; dans l'école, il participe au passage du savoir à enseigner au savoir enseigné en se faisant aussi *administrateur* – direct ou indirect – du savoir à acquérir.

Le manuel scolaire est le fruit d'un travail individuel ou d'équipe. En principe, l'auteur (A) - ou le groupe d'auteurs - interprète les intentions des Rédacteurs (R) et il développe le "canevas" du texte du savoir (qui va vivre dans l'institution) que ces derniers ont préalablement élaboré. Les objets d'enseignement O^G vont se particulariser et le savoir de référence G subit une transposition. Néanmoins, le rapport personnel R_A (O^G) de l'Auteur au savoir en question influe sur le style de sa production : son interprétation personnelle pourrait alors faire surgir un désaccord important avec les intentions des Rédacteurs. Dans ce chapitre, nous nous intéressons particulièrement à cette première phase de la transposition en nous interrogeant sur les objectifs – implicites ou explicites – de l'Auteur lorsqu'il conçoit tel ou tel manuel et sur l'influence des prescriptions officielles dans sa production, au niveau des contenus ainsi que des méthodes pédagogiques proposées pour les transmettre.

Dans le chapitre 2, nous avons essayé de définir les rapports institutionnels $R_{R,\,IF}$ (O^{GF}) et $R_{R,\,II}$ (O^{GI}) des Rédacteurs français et italiens au savoir mathématique, notamment géométrique. Pour ce faire, nous avons distingué trois niveaux d'analyse des textes officiels français et italiens : ces textes nous ont permis de dégager les éléments fondamentaux pour saisir et confronter la signification attribuée dans les deux institutions IF et II par les Rédacteurs (les *finalités* et les *objectifs*) ainsi que les *suggestions pédagogiques* proposées à l'enseignant ; pour préciser le troisième volet, concernant les *contenus*, le seul recours aux textes officiels s'est avéré insuffisant à cause du caractère succinct des programmes italiens. Une consultation sommaire de quelques manuels scolaires nous a donc aidée à mieux définir les objets fondamentaux qui constituent les textes du savoir élaborés dans les deux institutions en question. C'est à travers la démarche suivie par la suite que nous nous sommes donné les moyens de structurer notre lecture analytique des textes du savoir scolaire tels qu'ils sont développés dans les manuels scolaires. Cette lecture prend en compte trois niveaux d'analyse, analyse de la *forme*, des *contenus* et des *méthodes pédagogiques sous-jacentes*, cela afin de définir les rapports des divers auteurs de manuels au savoir géométrique et, conjointement, d'examiner l'*écologie institutionnelle* sur un ensemble plus restreint d'objets relatifs au savoir concerné.

I. *PREMIERS ELEMENTS D'ANALYSE DES MANUELS SCOLAIRES*

I.1 Le choix des manuels scolaires

Parmi les manuels scolaires **français** actuellement publiés, nous avons retenu les deux collections suivantes[1] :

Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B.	*Mathématiques Pythagore 6e*	Hatier 1990	**HAT6e**
Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B.	*Mathématiques Pythagore 5e*	Hatier 1991	**HAT5e**
Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B.	*Mathématiques Pythagore 4e*	Hatier 1992	**HAT4e**
Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B.	*Mathématiques Pythagore 3e*	Hatier 1993	**HAT3e**
Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B.	*Mathématiques Pythagore 2e*	Hatier 1994	**HAT2e**
Delord R., Vinrich G.	*Mathématiques 6e*	Hachette 1990	**HAC6e**
Delord R., Vinrich G.	*Mathématiques 5e*	Hachette 1991	**HAC5e**
Delord R., Terracher P. H. Vinrich G.	*Mathématiques 4e*	Hachette 1992	**HAC4e**
Delord R., Terracher P. H. Vinrich G.	*Mathématiques 3e*	Hachette 1993	**HAC3e**
Terracher P. H., Ferachoglou R.	*MATH Seconde*	Hachette 1994	**HAC2e**

Pour les manuels italiens, nous avons eu recours à diverses sources. Concernant l'École Secondaire Inférieure (ESI), nous avons tenu compte des résultats des travaux de N. A. Malara[2], de R. Zan[3] et de R. Bolletta[4]. Nous avons donc retenu les deux ouvrages suivants :

Mariscotti M.	*Scienze Matematiche per la Scuola Media GEOMETRIA*	Petrini Editore 1992	**MAR**
Bovio E., Manzone Bertone L.	*Geometria Sperimentale*	Lattes 1987	**BOV**

Une maison de distribution de Rome nous a confirmé que ces manuels sont actuellement parmi les plus utilisés. Signalons que les deux ouvrages portent exclusivement sur la géométrie.

Concernant l'École Secondaire Supérieure (ESS), nous avons choisi les manuels les plus adoptés dans les établissements qui nous ont accueillie pour la mise en place de la partie expérimentale de notre travail. Nous avons alors retenu les ouvrages suivants :

Cateni L., Fortini R., Bernardi C.	*Il nuovo pensiero geometrico 1 per il biennio del liceo scientifico*	Le Monnier 1997	**CAT**
Maraschini W., Palma M. (coordinato da)	*MANUMAT 1*	Paravia 1994	**MAT1**
Maraschini W., Palma M. (coordinato da)	*MANUMAT 2*	Paravia 1994	**MAT2**

Ce dernier manuel a été choisi aussi pour des raisons personnelles : depuis quelques années nous avons la possibilité d'observer l'utilisation de ce manuel par un certain nombre d'élèves au cours de leur travail personnel. Signalons que le premier ouvrage porte exclusivement sur la géométrie alors que l'autre traite tous les volets du programme de la 1ère et de la 2ème année de l'ESS.

---

[1] À côté de chaque titre, nous signalons le codage utilisé par la suite pour chaque manuel.

[2] Malara N. A. (1992), *Il libro di testo per la matematica* dans « I libri di testo per la scuola media », a cura di Diega Orlando Cian, Gregoriana Libreria Editrice.

[3] Zan R. (1987), *Il libro di testo di matematica nell'opinione degli insegnanti di scuola media...*, Brochure n.195, Università degli Studi di Pisa, Dipartimento di Matematica

[4] Bolletta R. (1988), ouvrage déjà cité

I.2 Description globale des divers ouvrages

Dans les tableaux suivants (4.1 à 4.6), nous fournissons une description de chaque collection, cela permettant déjà de saisir les premiers éléments d'analyse. Nous avons conçu la grille d'analyse descriptive des manuels – dont les tableaux suivants sont le produit effectif – en nous inspirant de quelques travaux français[5] et italiens[6]. Les informations fournies sont tirées de la préface de chaque ouvrage ou bien, si celle-ci n'est pas suffisamment exhaustive, en feuilletant chaque tome.

Nous commentons ci-dessous quelques uns des aspects qui surgissent en comparant les divers tableaux : en effet, cette première étape permet de discerner les différences principales sur la structure des manuels en questions et ainsi de dégager les conceptions que l'on a de cet outil pédagogiques dans les deux institutions concernées.

Le manuel comme travail d'équipe semble être une conception plus ou moins acquise dans les deux institutions[7]. Dans la collection **HAC**, un professeur de français compte parmi les personnes qui ont participé à sa rédaction. Dans le manuel **BOV**, les auteurs déclarent explicitement avoir écouté les conseils *précieux* venus par ailleurs et se montrent favorables à tout commentaire venant de la part des *enseignants qui, en adoptant cet ouvrage, voudront apporter des suggestions et des conseils pour l'améliorer*. Dans la collection **MAT**, les auteurs ont eu, entre autres, la possibilité de prendre en compte les apports de nombreux enseignants ainsi que de nombreux élèves, ces derniers ayant été des *cobayes* à leur insu. Le manuel **MAR** est le seul où aucun indice ne permet de saisir s'il a été conçu en exploitant les apports de personnes autres que l'auteur.

Les **manuels français** sont découpés par année scolaire. Néanmoins, chaque tome est organisé de manière à avoir, suivant le niveau, deux ou trois parties indépendantes, le volet consacré à la géométrie étant souvent en dernier. Les **manuels italiens** privilégient un découpage par thèmes : même en considérant qu'un même tome est utilisé au cours de deux ou trois années scolaires, nous constatons que le nombres de pages consacrées à la géométrie est plus élevé que dans les manuels français.

---

[5] Il s'agit d'un travail conçu au sein de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public visant, entres autres, à "*hâter les prises de conscience et de conduire à des manuels qui soient toujours plus capables d'être des éveilleurs... aussi bien que des références d'essentiel*" (Grille d'analyse des manuels scolaires de mathématique, 3e version, novembre 1977).

[6] Malara N. A. (1992), ouvrage déjà cité.

[7] Dans l'étude de Malara N. A. (1992), ouvrage déjà cité, nous lisons pourtant que le pourcentage d'ouvrages italiens réalisés par un seul auteur demeure encore élevé.

Tableau 4.1 – Description de la collection HAT

Auteur(s)	La collection est le fruit d'un travail d'équipe.
Découpage de l'ouvrage	Le découpage est *par année*, suivant l'organisation proposée dans les textes officiels. Chaque tome est constitué en moyenne de deux cent soixante pages et de quinze chapitres ; la partie consacrée aux *Travaux géométriques* compte en moyenne **huit chapitres** et **cent vingt pages** (y compris la géométrie dans l'espace).
Fonction attribuée à l'ouvrage par les auteurs	L'ouvrage représente un moyen pour *découvrir les mathématiques, apprendre à parler "mathématique"*. Un accent particulier est mis sur l'appropriation du *savoir-faire*. Les activités proposées visent le travail individuel ainsi que par petits groupes (... *confronter sa recherche avec d'autres élèves, expliquer sa démarche...*).
Style de communication et langage	Le style de communication est impersonnel. Le passage du langage naturel au langage technique se produit d'une manière graduelle, ce dernier restant toujours clair et simple.
Indications opérationnelles	Elles sont très utilisées aussi bien dans les activités préparatoires (problèmes d'investigation guidée) que dans les activités pratiques.
Structure globale de chaque tome	La répartition en rubriques correspond à celle proposée dans les textes officiels. Chaque rubrique est divisée en chapitres ; notamment, la rubrique sur la géométrie comprend en moyenne huit chapitres. A la fin de chaque tome, on trouve un *mini-dictionnaire*, un *formulaire*, un *index alphabétique*, un index des *méthodes*.
Structure des chapitres	Un chapitre peut compter plusieurs volets. En général, on distingue : – des activités préparatoires et de rappel ; – le cours, les résultats *essentiels* qui *doivent être appris* ; – les activités pratiques. A partir du troisième tome, les pages de cours incluent trois sections : – une section *Outils* (le cours) ; – une section *Méthodes*, un recueil de pistes utiles pour aborder un problème ; – des *modèles de problèmes* résolus entièrement rédigés et corrigés.
Structure des paragraphes	En général, un paragraphe est constitué de phrases courtes et d'illustrations de nature variée.
Fonction des activités pratiques	Les exercices sont divisés en plusieurs rubriques : – *Savoir faire* : il s'agit d'exercices d'*entraînement* (seuls quelques textes sont accompagnés d'un résultat permettant un travail individuel) ; – (dans les deux premiers tomes) *Lire, comprendre et rédiger* : il s'agit d'exercices qui permettent d'utiliser le langage technique ; – (dans les deux tomes qui suivent) *Apprendre à démontrer* : il s'agit d'exercices qui *cultivent l'art de faire des démonstrations* ; – *Chercher* : il s'agit d'exercices *qui demandent souvent de l'initiative car il convient d'enchaîner plusieurs étapes pour arriver au résultat.* Dans les diverses rubriques, les exercices sont classés suivant les résultats importants abordés dans le chapitre. La plupart des exercices proposés sont accompagnés d'un intitulé.
Typographie du texte écrit	Le texte est très aéré. La polychromie est beaucoup utilisée pour distinguer les titres des chapitres et des paragraphes ainsi que les intitulés de groupes d'exercices. Le style des caractères est varié suivant que l'on tient à distinguer des mots ou des phrases entières.
Typographie des illustrations	De nature très diversifiée (figures géométriques, graphismes, B.D. etc.), des illustrations polychromes recouvrent une partie importante dans chaque page.

Tableau 4.2 – Description de la collection HAC

Auteur(s)	La collection est le fruit d'un travail d'équipe.
Découpage de l'ouvrage	Le découpage est *par année*, suivant l'organisation proposée dans les textes officiels. Chaque tome est constitué en moyenne de deux cent quatre vingt pages et treize chapitres ; la partie consacrée à la géométrie compte en moyenne **six** chapitres et **cent trente pages** (y compris la géométrie dans l'espace).
Fonction attribuée à l'ouvrage par les auteurs	Les auteurs mettent l'accent surtout sur l'aspect pratique de la discipline, l'intention principale étant celle d'offrir de moyens pour apprendre à utiliser les mathématiques à partir d'un nombre restreint de résultats théoriques.
Style de communication et langage	Le style de communication est impersonnel. Le passage du langage naturel au langage technique se produit d'une manière graduelle, ce dernier restant toujours clair et simple.
Indications opérationnelles	Elles sont assez utilisées aussi bien dans les activités préparatoires (problèmes d'investigation guidée) que dans les activités pratiques.
Structure globale de chaque tome	Répartition en chapitres où l'on retrouve les objets d'enseignement proposés dans les textes officiels. Notamment, chaque tome contient en moyenne six chapitres consacrés à la géométrie. A la fin de chaque tome, on trouve un *index alphabétique*, un *mini-lexique* ou des *planches récapitulatives*, des *solutions* des activités proposées dans le corps du livre.
Structure des chapitres	Un chapitre peut compter plusieurs volets. En général, on distingue : – des activités d'approfondissement d'une notion déjà rencontrée ou d'introduction d'une nouvelle notion ; – le cours, les connaissances de base *exigées par les programmes* ; – une partie portant sur des exercices résolus, des conseils, des *erreurs à éviter* ; – les activités pratiques.
Structure des paragraphes	En général, un paragraphe est constitué de phrases courtes et d'illustrations de nature variée.
Fonction des activités pratiques	En général, dans les pages consacrées aux activités pratiques, on distingue plusieurs rubriques : – *Premières applications* pour un *fonctionnement immédiat des connaissances* ; – *Vrai ou faux*, des affirmations qui demandent de la réflexion ; – (deuxième au quatrième tome) *Lire et comprendre des énoncés* ; – *Exercices*, activités d'entraînement classées par thèmes selon les points importants du chapitre ; dans chaque thème, les difficultés sont croissantes ; – *Problèmes*, activités plus élargies rassemblant plusieurs thèmes du chapitre. La plupart des exercices proposés sont accompagnés d'un intitulé.
Typographie du texte écrit	Le texte est très aéré. La polychromie est beaucoup utilisée pour distinguer les titres des chapitres et des paragraphes ainsi que les intitulés de groupes d'exercices. Le style des caractères est varié suivant que l'on tient à distinguer des mots ou des phrases entières.
Typographie des illustrations	De nature très diversifiée (figures géométriques, graphismes, B.D. etc.), des illustrations polychromes recouvrent une partie importante dans chaque page.

Tableau 4.3 – Description de la collection MAR (Petrini)

Auteur(s)	L'ouvrage est le fruit du travail d'un seul auteur.
Découpage de l'ouvrage	Le découpage est *par thèmes* (arithmétique, géométrie, algèbre), suivant plutôt l'organisation des programmes anciens où l'on intègre les thèmes des prescriptions officielles plus récentes. Le tome sur la géométrie comporte **six cent trente huit pages** et **vingt deux chapitres** (y compris la géométrie dans l'espace).
Fonction attribuée à l'ouvrage par les auteurs	L'ouvrage a été conçu suivant *l'évolution des curricula officiels et des nouvelles exigences pédagogiques.* L'approfondissement de quelques aspects et l'introduction d'informations supplémentaires de la vie courante et interdisciplinaires semble être le moyen *pour solliciter un meilleur intérêt dans l'apprentissage.*
Style de communication et langage	Le style de communication est varié. Le passage du langage naturel au langage technique est parfois abrupt.
Indications opérationnelles	Des indications apparaissent exclusivement dans les pages consacrées aux activités pratiques.
Structure globale de chaque tome	Répartition en chapitres, la théorie et les activités pratiques correspondantes sont dans deux parties distinctes du tome. Au début de chacun des trois tomes, on trouve une table des matières détaillée.
Structure des chapitres	Au début de chaque chapitre, on précise les pré-requis, les objectifs et les contenus. Outre l'exposition de la théorie, on trouve une *fiche de récapitulation* et une *fiche d'évaluation.* Dans plusieurs chapitres, on trouve une *fiche complémentaire* portant sur des observations, curiosités et informations de caractère historique.
Structure des paragraphes	En général, un paragraphe est constitué de phrases longues. Il est accompagné, le cas échéant, de graphismes essentiellement de nature mathématique. Des exercices résolus d'une manière magistrale peuvent apparaître à la fin d'un paragraphe en guise d'exemple d'application de la notion introduite.
Fonction des activités pratiques	Les chapitres d'activités pratiques sont placés dans une deuxième partie du tome, chacun d'eux correspondant à plusieurs paragraphes du chapitre de la partie théorique. On distingue deux sections : – *Pour comprendre*, activités variées comprenant vrai ou faux, phrases à compléter, définitions à fournir, tests à choix multiple… : – *Pour opérer*, exercices de toutes sortes et de complexité graduelle.
Typographie du texte écrit	Le texte est assez serré, il demeure toujours considérable par rapport aux illustrations. Dans la partie théorique, la polychromie est beaucoup utilisée pour distinguer les titres des chapitres. Le style des caractères change dans les titres des chapitres et des paragraphes. Les résultats importants sont signalés par des flèches et marqués en gras.
Typographie des illustrations	La nature des illustrations est quasi exclusivement liée à la matière traitée. La polychromie est utilisée dans la partie théorique alors que les illustrations qui accompagnent les activités pratiques sont trichromatiques.

Tableau 4.4 – Description de la collection BOV (Lattes)

Auteur(s)	L'ouvrage est le fruit d'un travail d'équipe.
Découpage de l'ouvrage	Le découpage est *par thèmes* (arithmétique, géométrie, algèbre), suivant plutôt l'organisation des programmes anciens où l'on intègre les thèmes des prescriptions officielles plus récentes. Le tome sur la géométrie comporte **cinq cent vingt huit pages** et **seize chapitres** (y compris la géométrie dans l'espace).
Fonction attribuée à l'ouvrage par les auteurs	L'ouvrage a été conçu pour offrir *plusieurs occasions de 'mathématisation du réel' et de liaisons interdisciplinaires. La présence de lectures à caractère historique sollicite la recherche et le débat en favorisant ainsi une vision évolutive et dynamique de la discipline en initiant les disciples à la lecture de sujets scientifiques. L'articulation par thèmes n'oblige pas l'enseignant à suivre une succession pré-constituée des sujets à traiter mais lui laisse la possibilité d'adapter le cours à la réalité de la classe.*
Style de communication et langage	Le style de communication est varié. Le langage est *clair, simple, graduel mais rigoureux.*
Indications opérationnelles	Rares, les indications apparaissent exclusivement dans les pages consacrées aux activités pratiques.
Structure globale de chaque tome	Répartition en chapitres : chaque chapitre comprend une partie théorique et une partie consacrée aux activités pratiques. A la fin du livre, on trouve un *formulaire de géométrie* et des *tables numériques*, une table des matières assez détaillée.
Structure des chapitres	Chaque chapitre comprend deux volets : – la théorie, divisée en paragraphes (*les résultats sont présentés suivant une méthode inductive*) ; – les exercices. Parfois, ils se concluent avec des lectures à caractère historique.
Structure des paragraphes	En général, un paragraphe est constitué de phrases longues. Il est accompagné, le cas échéant, de graphismes essentiellement de nature mathématique. Des exercices résolus d'une manière magistrale peuvent apparaître dans le corps du paragraphe en guise d'exemple d'application de la notion introduite.
Fonction des activités pratiques	En général, dans les pages consacrées aux activités pratiques, on distingue quatre sections : – exercices du type vrai/faux, phrases à compléter, tests à réponse multiple *aptes à solliciter et habituer les élèves à la consultation du texte* ; – exercices pour tester la *connaissance des nouveaux objets* introduits dans le chapitre et la *compréhension des termes spécifiques ainsi que leur utilisation* ; – exercices qui permettent *d'analyser, organiser et coordonner les données* ; d'apprendre les techniques de résolution dans des situations progressivement complexes ; – exercices d'*approfondissement.*
Typographie du texte écrit	Le texte est assez serré, il demeure toujours considérable par rapport aux illustrations. Dans la partie théorique, la *polychromie* est beaucoup utilisée pour distinguer les titres des chapitres. Le style des caractères change dans les titres des chapitres et des paragraphes. Les résultats importants sont encadrés.
Typographie des illustrations	La nature des illustrations est quasi exclusivement liée à la matière traitée. La polychromie est utilisée dans la partie théorique alors que les illustrations qui accompagnent les activités pratiques sont bicolores.

Tableau 4.5 – Description de la collection CAT (Le Monnier)

Auteur(s)	L'ouvrage est le fruit d'un travail d'équipe. Sa première édition remonte aux années cinquante. C'est à l'occasion de la deuxième édition qu'un troisième auteur s'est uni aux autres.
Découpage de l'ouvrage	Il s'agit d'un ouvrage consacré à la géométrie : un tome porte sur la géométrie dans le plan et un deuxième sur la géométrie dans l'espace. Le premier tome est constitué de **quatre cent cinquante six pages** et **quinze chapitres**.
Fonction attribuée à l'ouvrage par les auteurs	Un ouvrage classique qui tient compte d'une manière équilibrée des nouvelles tendances concernant l'enseignement de la géométrie. Sans renoncer à la rigueur propre à cette discipline, on a introduit des informations qui *peuvent favoriser le développement de l'intuition géométrique.*
Style de communication et langage	Le style de communication est impersonnel. Le langage est rigoureux.
Indications opérationnelles	Elles sont présentes exclusivement dans la partie consacrée aux activités pratiques.
Structure globale de chaque tome	Répartition en chapitres, la théorie et les activités pratiques correspondantes sont dans deux parties distinctes du tome. Un chapitre de lectures surtout à caractère historique est placé entre les deux parties. Une table des matières assez détaillée est placée à la fin du livre.
Structure des chapitres	Dans chaque chapitre consacré à la théorie, les propositions se suivent l'une après l'autre, intercalées de temps en temps de deux types de fiches : – *Une vérification intuitive* : dans certains cas, on propose de valider un résultat en s'appuyant sur une preuve pragmatique, cela dans le dessein de *souligner la différence entre la méthode expérimentale et la méthode scientifique* ; – *Notes de logique* : de simples notions de logiques sont présentées pour *aider l'élève à réfléchir sur ce qu'il est en train d'apprendre.*
Structure des paragraphes	En général, un paragraphe est constitué de phrases longues. Il est accompagné, le cas échéant, de graphismes exclusivement de nature géométrique.
Fonction des activités pratiques	La partie sur *exercices et problèmes* est divisée en trois sections : – *Problèmes de géométrie synthétique* : cette section est divisée en parties correspondant aux chapitres de la partie théorique. – *Problèmes de géométrie plane (à résoudre dans un cadre numérique)* ; – *Problèmes de géométrie plane (à résoudre dans un cadre algébrique).* Dans cette partie, on peut trouver des exercices résolus et corrigés. A la fin du livre, on trouve une annexe intitulée *Peut-on résoudre cet exercice*? où plusieurs situations sont proposées pour permettre à l'élève d'examiner si les données sont suffisantes, oiseuses ou contradictoires.
Typographie du texte écrit	Le texte est assez serré, il demeure toujours considérable par rapport aux illustrations. Le style des caractères change dans les titres des chapitres et des paragraphes. Les résultats importants sont encadrés. On utilise la bichromie.
Typographie des illustrations	La nature des illustrations est exclusivement liée à la matière traitée. Les illustrations sont bicolores.

Tableau 4.6 – Description de la collection MAT (Paravia)

Auteur(s)	L'ouvrage est le fruit d'un travail d'équipe.
Découpage de l'ouvrage	Il est découpé par année. Chaque tome est constitué en moyenne de six cent pages et quatorze chapitres ; la partie consacrée à la géométrie plane[8] compte **deux chapitres** et en moyenne **cent quarante trois pages**.
Fonction attribuée à l'ouvrage	Il veut fournir *une image des mathématiques comme un ensemble d'instruments, modèles, structures et procédures aptes à décrire et à interpréter le réel, à résoudre des problèmes à travers des processus d'abstraction et de formalisation.* Il propose une interprétation des textes officiels qui tient compte aussi de la réalité scolaire d'aujourd'hui.
Style de communication et langage	Le style de communication est varié. Le langage est rigoureux.
Indications opérationnelles	On trouve des indications aussi bien dans la partie théorique que dans celle qui est consacrée aux activités pratiques.
Structure globale de chaque tome	Chaque tome est structuré par unités thématiques dont deux sont consacrées à la géométrie. Dans chaque unité on distingue : – *un problème initial, convenablement exposé et résolu, qui introduit à la classe de problèmes que les sujets traités dans les paragraphes suivants permettent de résoudre.* – les *unités didactiques fondamentales*, divisées en paragraphes ; – une fiche *pour l'étude* qui veut fournir aux élèves des instruments permettant *d'apprendre des méthodes d'apprentissage individuel et efficace pour les mathématiques* ; chaque fiche contient une liste des termes dont l'élève est censé connaître la signification, des exercices où l'on demande de traduire le langage naturel en symboles ; dans la fiche, on précise ce que l'élève est censé *savoir faire* en proposant aussi des modèles d'exercices correspondants.
Structure des unités	Les unités sont structurées en paragraphes (entre trois et cinq par unité).
Structure des paragraphes	Dans chaque paragraphe, on distingue trois parties : – l'exposition du cours où *le sujet est présenté clairement, à l'aide de nombreux exemples et explications mais aussi à travers les enchaînements logiques nécessaires* ; – des exemples *qui, suivant la situation, peuvent être exposés collectivement à la classe ou bien être proposés comme exercices* ; – des informations récapitulatives, d'approfondissements et d'éclaircissement. Ici, le texte est organisé sur deux colonnes : les deux premières parties se trouvent sur la gauche alors que l'autre sur la droite.
Fonction des activités pratiques	On trouve des activités pratiques dans le corps ou à la fin d'un paragraphe, à la fin de chaque unité thématique (fiches *pour l'étude*) et à la fin du livre. Dans ces derniers, l'enseignant trouvera ce qui correspond le mieux à ses exigences, celles de la classe et de chaque élève. On y trouve exercices et problèmes de routine, de consolidation, d'approfondissement.
Typographie du texte écrit	Les divers paragraphes étant structurés sur deux colonnes, sur la gauche le texte monochromatique est assez serré et, le cas échéant, accompagné d'illustrations dont la nature est liée à la matière traitée ; sur la droite, le texte est plus aéré, le style varie suivant les informations données (en gras, encadré, en couleur).
Typographie des illustrations	La nature des illustrations est surtout liée à la matière traitée. Les illustrations sont bicolores.

[8] Dans le deuxième tome, l'un des deux chapitres contient aussi deux parties consacrées respectivement aux *fonctions trigonométriques* et aux *lieux géométriques*.

Il paraît très évident que les auteurs **français** mettent l'accent sur la pratique de la discipline.
A propos des manuels **italiens**, nous constatons que les auteurs de **BOV**, **MAR** et **CAT** tiennent à préciser la conformité des contenus aux curricula officiels alors que, pour les auteurs de la collection **MAT**, il s'agit plutôt d'un compromis entre les textes officiels et la réalité scolaire d'aujourd'hui.
Dans les manuels **MAR**, **BOV** et **MAT**, les auteurs mettent aussi l'accent sur l'importance d'offrir aux élèves des moyens pour interpréter le réel et, notamment dans **MAR** et **BOV**, ils soulignent l'intérêt à relier les mathématiques aux autres disciplines scolaires, ce qui d'ailleurs est suggéré dans les instructions officielles. En ce sens là, les auteurs du manuel **CAT** se distinguent des autres : la transmission d'un savoir, qui ne renonce ni à la rigueur du raisonnement ni à l'utilisation d'un langage approprié, semble être la préoccupation primordiale et une prise en compte équilibrée des évolutions que ce savoir à subi leur permet de fournir une description très classique de la géométrie.

Comme nous le verrons plus loin, les auteurs **français** accordent beaucoup d'importance aux *indications opérationnelles* pour les élèves, celle-ci apparaissent en fait tout au long de l'ouvrage et aussi bien dans les pages de cours que dans les activités pratiques. Pour les auteurs **italiens**, le recours à ce type d'indications – quand il y en a ! – semble être plutôt un aspect à prendre en compte dans les pages d'exercices : cela pourrait conduire à confirmer l'image d'un apprentissage qui favorise le *hiatus* entre la théorie et la pratique. À ce propos, la collection **MAT** se distingue des autres car, comme dans les manuels français, cet item apparaît comme primordial et nécessaire pour guider l'élève aussi bien lorsqu'il apprend que lorsqu'il applique telle ou telle autre notion.

La structure des chapitres caractérise fortement les manuels français et italiens. Dans les manuels **français**, une notion à introduire ou à rappeler est toujours précédée de plusieurs activités contextualisées qui demandent la participation de l'élève et les activités pratiques se trouvent dans le chapitre où l'on traite la théorie. En ce sens, la collection italienne **MAT** semblerait rejoindre l'esprit français mais, en réalité, cette ressemblance est assez partielle car la marque d'un style magistral dans la présentation de la partie théorique est toujours présente : en effet, le *problème initial* – qui se veut comme une introduction aux diverses notions abordées dans une unité – est exposé et résolu et il semble plutôt être un prétexte pour approfondir des aspects généraux de la culture mathématique. Par exemple, en ce qui concerne deux unités consacrées à la géométrie, un problème initial porte sur le *Tangram*, un autre sur les *lunules d'Hippocrate*.
Parmi les autres manuels **italiens**, les auteurs de **MAR** et **CAT** proposent la répartition classique de l'ouvrage en deux volets : le premier est consacré à la théorie et divisé en chapitres, l'autre est consacré aux activités pratiques et divisé en chapitres qui correspondent aux chapitres du volet précédent. Évidemment, cela contribue à amplifier la dichotomie entre la théorie et ses applications possibles.
En revanche, dans le manuel **BOV**, un même chapitre comprend deux parties, l'une pour la théorie et l'autre pour les exercices : bien que cela apparaisse comme un effort pour relier les deux aspects,

théorique et pratique, la structure adoptée semble seulement venir en aide à l'élève dans la consultation de l'ouvrage, la dichotomie entre les deux parties étant encore perceptible.
Nous revenons sur ces aspects dans le paragraphe suivant.

Au niveau de la typographie, les différences sont aussi importantes. Les manuels **français** exploitent la couleur, des illustrations variées et le texte est très aéré alors que les manuels **italiens**, quel que soit le niveau scolaire, présentent en général un texte serré et sobre en couleurs.

I.3 Rapport cours/exercices et approche de la démonstration

Dans les **manuels italiens**, comme nous l'avions déjà constaté dans le chapitre 2, en ce qui concerne la géométrie, les divers objets d'enseignement sont organisés suivant une structure linéaire qui rappelle celle d'un ouvrage classique. La partie théorique précède toujours les activités pratiques et demeure plus importante que ces dernières. Contrairement à ce que certains auteurs affirment, tout objet est exposé d'une manière magistrale, le travail de l'élève semble consister à apprendre le cours et à l'appliquer ensuite dans des exercices et problèmes. Dans le manuel **BOV**, par exemple, les auteurs mettent l'accent sur le fait que les règles sont présentées suivant une *méthode inductive*, cela étant pour eux un élément novateur qui veut tenir compte des nouvelles méthodes d'apprentissage, un élément qui encourage la *découverte* et la *participation active* de l'apprenant dans la construction des ses connaissances. Néanmoins, l'adoption de cette méthode constructive demeure *fictive* : lorsque l'on analyse les divers paragraphes, on s'aperçoit que, bien que la plupart des contenus soient introduits à partir de l'observation de quelques cas particuliers et que le résultat général suive l'expérience, l'apprenant n'est nullement incité à agir, aucune initiative ne lui est laissée pour qu'il *découvre* le résultat visé. Nous reviendrons sur cet aspect lors de l'analyse détaillée de quelques contenus.

Le langage se fait assez vite complexe. Par exemple, dans le manuel **MAR** (destiné aux élèves de l'ESI), la *symétrie centrale* est déjà introduite explicitement en termes de *correspondance biunivoque du plan sur lui-même*. Par la suite, nous aurons l'occasion de commenter les différences du langage utilisé dans les manuels français et italiens, cela surtout à propos du *théorème de Thalès*.

Dans un tel contexte, où la théorie est toujours portée au premier plan, il est inéluctable que les activités pratiques viennent derrière et qu'elles aient surtout un statut d'application. Bien entendu, cela ne signifie pas que les auteurs ne proposent pas d'activités qui demandent de l'initiative et de la réflexion. On trouve bien souvent des problèmes *ouverts* mais ce qui est le plus remarquable – surtout dans les manuels destinés aux élèves de l'ESI – c'est qu'aucune distinction volontaire et progressive n'est faite entre ces problèmes et les exercices d'application : les énoncés des problèmes sont assez

standard au point que, parfois, on trouve les mêmes dans les ouvrages destinés au niveau supérieur, l'énoncé étant presque identique. Voici quelques exemples :

> **(MAR, niveau ESI)** "Après avoir dessiné le parallélogramme ABCD, déterminez les milieux E, F, G, H des ses côtés et vérifiez que le quadrilatère EFGH est bien un parallélogramme".
>
> **(CAT, niveau ESS)** "Démontrez que le quadrilatère ayant pour sommets les milieux des côtés d'un quadrilatère est un parallélogramme".
>
> **(BOV, niveau ESI)** "Dessinez un parallélogramme et construisez les bissectrices des ses angles. Vérifiez qu'elles forment un rectangle".
>
> **(CAT** et **MAT, niveau ESS)** "Démontrer que les bissectrices des angles intérieurs d'un parallélogramme se coupent en quatre points qui sont les sommets d'un rectangle".

Dans les manuels **MAR** et **BOV**, à propos du genre de tâche "*Vérifier que...*", nous verrons plus loin que sa portée demeure assez floue. D'ailleurs, soulignons que, dans les manuels analysés, aucun des auteurs n'estime nécessaire mettre en place une méthode pédagogique – explicite ou non – qui puisse mener progressivement l'apprenant vers la *démonstration*, qui puisse le conduire clairement à un changement d'*attitude* face à la géométrie et, généralement, qui puisse l'aider à organiser ses raisonnements dans l'accomplissement d'une tâche.

Ici, il nous paraît intéressant d'approfondir certains aspects relatifs aux manuels **CAT** et **MAT** s'adressant aux élèves de l'ESS. Notamment, nous voulons montrer de quelle manière les auteurs s'y prennent pour initier les élèves à l'*art de la démonstration.*

Comme nous l'avons déjà souligné, le manuel **CAT** adopte une présentation assez classique de la géométrie. Ici, les premiers chapitres attirent particulièrement notre attention.
Au début du chapitre 1, intitulé *RAPPELS DE GEOMETRIE INTUITIVE DANS LE PLAN*, les auteurs annoncent :

> "Dans ce chapitre, dont le caractère est purement introductif, on rappelle brièvement quelques unes des notions rencontrées à la *Scuola Media* [ESI]... La matière traitée est développée en ayant souvent recours à l'intuition, sans la prétention d'une organisation rationnelle rigoureuse. Les propriétés et les concepts exposés ici seront donc repris, précisés et approfondis dans les chapitres qui suivent...".

Ils semblent donc envisager le passage de l'*attitude de l'intuition rationnelle* à l'*attitude rationnelle* en termes de rupture. Mais de quelle manière proposent-ils d'initier les élèves à l'adoption de cette nouvelle attitude ? Voici ce qu'ils annoncent au début du chapitre 2, intitulé *L'ETUDE DE LA GEOMETRIE RATIONNELLE* :

> "... Quelques élèves peuvent se demander pourquoi on doit reprendre des sujets qui semblent être déjà connus : en feuilletant les pages qui suivent, il leur arrivera de retrouver des figures et des termes familiers, déjà rencontrés à la *Scuola Media* [ESI].
> Nous leur répondrons en disant que, en premier lieu, ce nouveau traité veut approfondir des points qui ont été abordés superficiellement, ou tout à fait négligés, pendant les années précédentes et, en deuxième lieu, qu'on passera désormais de l'étude *intuitive* à l'étude *rationnelle*... Nous devons donc aborder l'étude de la géométrie

> en suivant une méthode rationnelle. Comment s'y prendre pour atteindre cet objectif ? Nous le verrons au fur et à mesure dans les pages qui suivent.
> Nous ne voulons pas inquiéter nos lecteurs. En effet, nous n'avons pas la prétention d'exposer intégralement un traité rigoureux de la géométrie ; et, en tout cas, nous aborderons progressivement l'étude à l'aide de la méthode rationnelle. De temps en temps, nous aurons encore recours à l'expérience (comme les textes officiels le prescrivent). Dans d'autres cas, nous nous limiterons à énoncer certaines propriétés sans les démontrer et, parfois, nous arriverons à la traduction logique de quelques questions, cela après avoir introduit et clarifiée la situation avec des exemples tirés de la vie réelle.
> Surtout dans les premiers chapitres, nous nous efforçons aussi de rendre plus clair le discours *en comparant la méthode intuitive avec la méthode rationnelle*: pour certaines propriétés, nous accompagnerons un raisonnement déductif d'une **vérification expérimentale**, ... Nous essayerons ainsi de mettre en évidence le fait qu'une vérification pratique peut être convaincante et peut aider l'intuition mais qu'elle n'a pas la valeur objective et générale d'une démonstration".

Apparemment, les auteurs s'adressent à l'apprenant. C'est ainsi que, en lisant ce passage, plusieurs questions nous viennent à l'esprit. Suffit-il de parler de passage de l'*intuition* à la *rationalité* pour que l'apprenant saisisse l'attitude à adopter pour aborder la lecture de l'ouvrage ? L'élève a-t-il déjà rencontré un *traité rigoureux de la géométrie* pour comprendre qu'ici la matière n'est pas traitée d'une manière exhaustive ? Suffit-il de mettre en regard une preuve pragmatique et une preuve intellectuelle pour que l'élève en saisisse la différence en privilégiant spontanément une vérification rigoureuse car elle a *une valeur objective et générale* ? Entre autres, lorsqu'on parcourt l'ouvrage, aucun *exemple tiré de la vie réelle* se présente : les auteurs se réfèrent-ils plutôt au fait que, dans le peu de cas où ils proposent de vérifications expérimentales, ils recourent à des manipulations ? En tout cas, dans ces vérifications expérimentales, le style demeure toujours magistral et ne semble pas laisser de la place à la participation active de l'élève.

Tout cela nous laisse perplexe, mais allons plus loin. Avant d'entrer dans le vif du sujet et suivant l'esprit du discours que les auteurs viennent de produire, ils proposent les définitions de *définition*, *concept primitif*, *théorème*, *implication logique*, *hypothèse*, *thèse*, *démonstration*, *corollaire*, *théorème réciproque* et *postulat* (ou *axiome*)... Notamment, à propos de la *démonstration*, ils disent :

> "Dans les implications logiques de type mathématique, la dépendance entre la thèse et l'hypothèse correspondante est acceptée non en raison de son évidence ou parce que l'expérience répétée nous prouve que cette dépendance subsiste effectivement, mais en vertu d'un *raisonnement* que l'on appelle **démonstration**".

Une liste de définitions suffit-elle pour comprendre l'enjeu d'une démonstration ? Toutefois, les auteurs concluent ainsi :

> "De ce que nous venons d'exposer jusqu'ici, il devrait être clair que les postulats fournissent des informations sur les concepts primitifs en précisant leurs propriétés fondamentales. De ces propriétés fondamentales, on déduit – à l'aide de démonstrations opportunes – d'autres propriétés (les théorèmes). Le discours sera au fur et à mesure plus clair en étudiant les paragraphes et les chapitres qui suivent".

Il nous semble qu'ici les auteurs justifient la nécessité de l'adoption d'une *attitude rationnelle* en faisant un discours qui nécessite une *attitude formelle* suffisamment développée pour comprendre ce que l'on trouve dans cet ouvrage. L'*attitude de l'intuition rationnelle* va-t-elle trouver encore sa place ? Cette approche favorise-t-elle la dialectique entre les diverses attitudes ?

Reliés à ce chapitre, nous trouvons un petit groupe d'exercices où l'on demande de distinguer les hypothèses de la thèse dans une proposition donnée, de justifié la vérité d'une implication et de sa

réciproque, de construire des implications vraies en utilisant des morceaux de phrases données, de reconnaître l'exactitude d'un discours.

L'approche des auteurs de la collection **MAT** est assez semblable à la précédente. Dans le premier tome, ils consacrent une partie aux *AXIOMES DE LA GEOMETRIE DANS LE PLAN*. Dans un paragraphe de deux pages, ils débutent avec la définition d'*axiome* et ils affirment qu'à partir d'axiomes fixés, *tout le reste doit être* ***démontré****, à l'aide d'un raisonnement persuasif.* Ils définissent ensuite les termes *théorème, démonstration, hypothèse, thèse, théorème réciproque* ; ils proposent des exercices résolus où l'on demande de distinguer les hypothèses de la thèse dans une suite de phrases données et de préciser si quelques quantificateurs sont sous-entendus. Ils concluent le paragraphe ainsi :

> "Dans les paragraphes qui suivent, nous utiliserons la méthode axiomatique pour l'étude de la géométrie dans le plan. Au-delà de tes connaissances antérieures, tout devrait être déduit à partir des axiomes du plan qui seront établis ici ".

Outre le type d'exercices proposés dans CAT, nous trouvons dans **MAT** des exercices où l'on demande de vérifier, dans une situation donnée, les axiomes établis. De même ici, il nous paraît que, pour que l'élève puisse saisir l'esprit de l'ouvrage, il doit avoir déjà développé une *attitude formelle*, cela pourtant sans avoir encore vraiment acquis une *attitude rationnelle* !
Dans les deux ouvrages, il nous paraît qu'un souci académique prend le pas sur un souci pédagogique. Sans doute cette manière d'introduire le cours de géométrie est-elle imposée par le choix qui est au cœur des ouvrages eux-mêmes : les auteurs adoptent un point de vue axiomatique pour présenter la matière en question, il ne leur reste qu'à introduire un vocabulaire qu'ils utiliseront par la suite lorsqu'ils exposeront les divers résultats du cours.

Nous verrons que, les **manuels français** attribuent plus d'importance aux activités pratiques en réduisant à l'essentiel la partie théorique. Par rapport au style magistral des manuels italiens, les manuels français *semblent* offrir plus de place à la *découverte*, le passage d'une *attitude* vers l'autre pouvant s'accomplir d'une manière plus adaptée, ce qu'on peut aussi saisir à travers le langage utilisé.

Suivant les prescriptions officielles, beaucoup d'attention est portée è l'apprentissage des techniques, surtout à partir de la classe de Quatrième où l'élève est initié à *l'art de la démonstration*. Comme nous le verrons plus loin, depuis les premiers tomes de l'ouvrage, nous reconnaissons une volonté de la part des auteurs de préparer le terrain à la démonstration ; l'approche aux techniques démonstratives semble ainsi s'étaler dans le temps à travers une dialectique entre l'*attitude de l'intuition rationnelle* et l'*attitude rationnelle*. Notamment, dans le tome **HAT4^{e}**, les auteurs envisagent le recours à des *schémas*, comme l'on peut voir dans la Figure 4.1.

2 C'est ma première démonstration

Le problème

Soit ABCD un trapèze tel que (AB)//(CD). On construit la hauteur (AH) du triangle ACD, puis la droite *d* parallèle à (AH) et passant par C. Démontrer que *d* est la hauteur du triangle ABC issue de C.

a/ La figure

Dessiner un trapèze ABCD *tel que* (AB)//(CD).
Tracer ensuite la hauteur (AH) *puis la droite d.*

b/ Les hypothèses et la conclusion

Au départ, nous savons que :
- ABCD est un trapèze de bases (AB) et (CD),
- (AH) est la hauteur du triangle ACD,
- *d* est parallèle à (AH) et passe par C.

Nous voulons démontrer que *d* est la hauteur de ABC passant par C.

*Indiquer les **hypothèses** (ce que l'on sait) et la **conclusion** (ce que l'on veut démontrer).*

Hypothèses :
- (AB)//(CD)
- ..... ⊥ .....
- .....

Conclusion :
d est .....

c/ Un schéma de démonstration

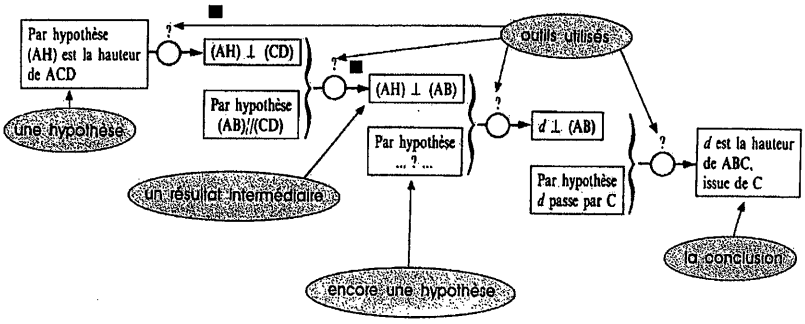
Pour faire une démonstration, il faut des outils.
Voici une mini-boîte à outils qui contient une **définition** D et une **propriété** P :

mini boîte à OUTILS

D Dans un triangle ABC, la **hauteur** issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).

P Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Compléter le schéma de démonstration suivant :



d/ La rédaction

Rédiger en français la démonstration.

Figure 4.1 – UNE APPROCHE DE LA DEMONSTRATION (HAT4e)

Les notions nouvelles sont toujours précédées par des activités d'exploration et résumées dans un nombre restreint de paragraphes avec un langage simple : en fait, la fonction de ces activités préparatoires serait celle de mettre l'élève dans la condition de *prouver* lui-même les résultats qui seront ensuite institutionnalisés dans les pages de cours. C'est souvent dans les pages d'exercices que l'on retrouve des approfondissements et des propriétés dont le choix de l'institutionnalisation est évidemment laissé au professeur.

À propos de la nature des exercices et problèmes proposés dans les pages d'activités pratiques, on

constate des différences importantes par rapport à ceux qui sont proposés dans les manuels italiens. D'abord, en passant d'un tome à l'autre, on remarque que la nature de l'investissement demandé à l'élève varie progressivement et explicitement, ce qu'on peut voir aussi à travers la volonté des auteurs à partager les activités pratiques en rubriques et dans le fait que celles-ci se modifient et se précisent en passant d'un niveau scolaire à l'autre.

Dans un même tome, la nature des activités est plus riche que dans les manuels italiens et surtout les énoncés ne sont pas standard. Par exemple, on propose de repérer des erreurs dans les copies d'élèves fictifs, on demande de reconstituer le texte de la résolution d'un problème dont les étapes ne sont pas données dans le bon ordre, etc.

La nature des énoncés est aussi assez différente par rapport aux manuels italiens. Pour saisir cette différence, voici ci-dessous l'énoncé d'un problème dont la propriété à prouver est la même que dans les deux derniers problèmes montrés plus haut. Signalons que l'énoncé est inclus dans le tome où l'apprentissage de la *démonstration* se fait explicitement, la nature des tâches étant donc bien identifiée.

(HAT4e) "*Bissectrices d'un parallélogramme.*

a) Démontrer que deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.
b) En déduire que les bissectrices de deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont perpendiculaires puis que celles des deux angles opposés sont parallèles.
c) Que peut-on dire du quadrilatère formé par les bissectrices d'un parallélogramme ?"

Cet exemple permet de relever plusieurs éléments caractérisant les activités pratiques des manuels français. Nombreux problèmes sont accompagnés d'un intitulé : ce moyen est utilisé pour attester de l'importance du résultat cherché ou bien pour fournir des indications opérationnelles. En outre, les énoncés sont souvent présentés en détaillant plusieurs étapes : si l'on interprète cela comme une intention de guider l'élève dans l'organisation de son raisonnement, nous nous interrogeons sur les effets qu'une telle méthode peut engendrer sur l'esprit d'initiative que l'élève devrait développer au cours de sa scolarité. Quelle compétence va-t-il acquérir pour aborder des problèmes de plus en plus ouverts ?

L'exemple ci-dessous se révèle significatif aussi pour une autre raison : comme nous le verrons plus loin, la propriété (a), qui apparaît ici sous la forme de problème est, dans les manuels italiens, un résultat du cours à apprendre. Cet aspect caractérise donc les manuels français dans le sens que, bien que les pages de cours soient réduites à l'essentiel, beaucoup de propriétés sont ensuite proposées aux élèves dans les pages d'activités pratiques.

Lors de l'analyse détaillée des manuels, nous préciserons davantage tout élément permettant de saisir les méthodes sous-jacentes proposées par les divers auteurs pour favoriser la transition d'une attitude à l'autre et, par conséquent, de quelle manière ils sollicitent le passage d'une preuve pragmatique à une preuve intellectuelle.

I.4 Les dispositifs d'analyse des manuels scolaires

Comme nous l'avons annoncé précédemment, le choix des problèmes élaborés pour la mise en place de la partie expérimentale ainsi que leur analyse a priori nous ont aussi été utiles pour l'élaboration de deux dispositifs cohérents et efficaces lors de l'analyse des manuels scolaires.

C'est ainsi que nous avons choisi d'approfondir la *notion d'aire* – en examinant de quelle manière elle est abordée dans les deux institutions – ainsi qu'un ensemble restreint d'objets géométriques mis en jeu dans la *configuration du triangle des milieux.*

Dans le premier cas, nous avons mis au point un outil graphique, le *réseau conceptuel visualisé*[9], permettant de montrer l'ensemble des relations existant entre les figures géométriques liées à la notions d'aire. Dans le deuxième cas, un tel réseau aurait été trop complexe, nous avons donc résolu de décrire seulement d'une manière discursive les objets en relation avec la configuration choisie en analysant aussi les types de tâches proposés dans les divers manuels pour que ces objets deviennent des outils. D'une manière transversale, l'analyse des *contenus* ainsi menée nous a aussi permis d'examiner la manière dont les divers auteurs proposent l'acquisition du savoir et l'appropriation du savoir-faire.

Le cas des aires : le réseau conceptuel visualisé

Dans chaque fiche préparée pour la passation, les élèves sont confrontés au moins à une tâche sur les *aires*. C'est ainsi que, à partir de cette notion-clé, nous avons constitué un premier ensemble des objets présents dans les textes du savoir géométrique des manuels des deux institutions en question.

Afin de *visualiser* ce sous-ensemble, nous avons conçu un outil graphique qui permet conjointement de repérer les *habitats* et les *niches écologiques* des objets considérés : nous avons réalisé un *réseau conceptuel*, un *graphe* dont les nœuds sont des objets géométriques et les arêtes des énoncés.

Dans le réseau, tout objet (nœud) est placé dans un cadre : si l'objet apparaît dans le manuel, le cadre est un trait continu, autrement c'est un trait pointillé. Les objets sont reliés par un trait ou une flèche (arêtes) dont le sens va de l'objet ancien vers l'objet nouveau et qui changent selon la nature de la liaison. Pour compléter un réseau, nous prenons en compte les propositions qui apparaissent *explicitement* dans le manuel (exprimées en toutes lettres ou en langage symbolique) et, le cas échéant,

[9] En effet, le réseau ici conçu n'est autre chose que l'organisation d'une partie du champ conceptuel au sens de Vergnaud (cf. Vergnaud, G. (1990), *La théorie des champs conceptuels*, RDM, vol. 10, n. 213

celles qui apparaissent d'une manière *implicite* dans les pages de cours. Un objet peut donc être lié à un autre à travers :

1) une définition ou un théorème qui apparaissent *explicitement* dans le manuel mais qui vivent dans un *habitat* autre que celui relatif au réseau ; dans les deux cas, les arêtes sont respectivement représentées par un trait et une flèche mince ;

2) une définition ou un théorème qui apparaissent *explicitement* dans le manuel et concernent le réseau ; dans les deux cas, les arêtes sont respectivement représentées par un trait et une flèche épaisse ;

3) une définition ou un théorème qui apparaissent *implicitement* dans le manuel considéré – alors qu'ils sont explicites dans d'autres manuels – et concernent le réseau ; dans les deux cas, les arêtes sont représentés par un trait pointillé.

Voici l'ensemble des nœuds qui servira pour tous les manuels, la description de chaque manuel se fera en modifiant l'aspect des cadres et en plaçant les arêtes.

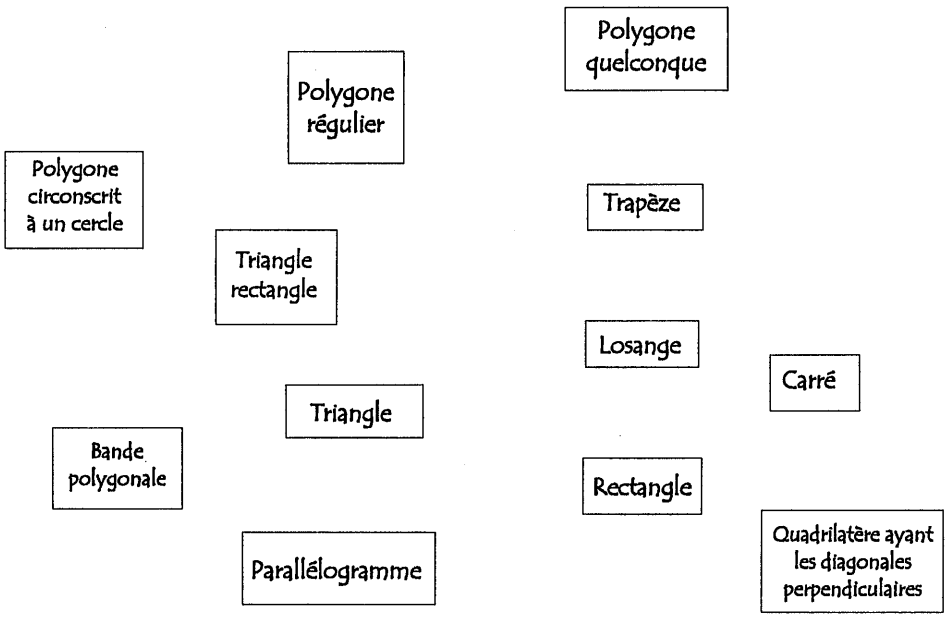


Figure 4.2 – LES NŒUDS DU RESEAU CONCEPTUEL

Réalisation de la liste des propositions liée au réseau conceptuel des aires

Nous avons rédigé une *liste de propositions*, comprenant définitions et théorèmes (cf. **Tableau 4.7**, page 231 et suivantes). A chaque énoncé correspond un code qui sera repris dans le réseau – à côté des arêtes ou des nœuds –permettant de saisir la nature de la liaison. Cette liste codée a été réalisée à partir de chacun des manuels choisis en gardant le plus fidèlement possible le langage utilisé par les auteurs. Nous indiquons le manuel dans lequel la proposition apparaît en utilisant le codage indiqué plus haut,

ce qui permet de saisir aussi le niveau scolaire concerné.

En ce qui concerne les propositions, lorsqu'il s'agit d'un théorème, nous indiquons s'il est implicite, s'il apparaît sous la forme d'exercice, s'il est admis ou, dans le cas contraire, le type de preuve qui l'accompagne. Pour les types de preuves, nous nous appuyons sur la terminologie mise au point par Balacheff que nous avons adaptée à notre problématique. Nous rappelons ci-dessous le vocabulaire (et le codage) utilisé. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 5 pour une description plus complète expliquant les raisons qui nous ont conduite à nuancer quelques uns de ces termes :

Empirisme naïf : évidence des faits EF	Ce type de preuve, dont les sources relèvent de l'*évidence des faits*, conduit à garantir la vérité d'un énoncé à travers l'observation ou la vérification sur quelques exemples.
Exemple générique EXG	Le discours porte sur l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet considéré en tant que représentant d'un ensemble d'objets. Même si la formulation – dont l'ostention est le moyen privilégié – renvoie aux propriétés caractéristiques de cet ensemble, elle est encore reliée au nom propre de ce représentant.
Expérience mentale EM	Ici, l'action n'est plus effective mais intériorisée, invoquée dans le discours, se détachant de sa réalisation sur un cas particulier : l'explication des raisons avancée pour établir la vérité d'un énoncé, repose sur l'analyse des propriétés – formulées dans leur généralité – de l'objet concerné. Toutefois, conformément à la définition d'*expérience* que nous avons établie dans le chapitre 1, il nous paraît nécessaire de préciser que l'*action mentale* – où l'on imagine des pliages, des déplacements, etc. – peut assumer une double signification. Elle peut être une source d'idées ou un support pour produire une preuve *intellectuelle* mais elle peut aussi être considérée comme un moyen satisfaisant pour assurer la validité des argumentations et, dans ce cas, le discours produit est à considérer du côté des preuves *pragmatiques*.
Évidence des raisons ER	L'observation vient en aide pour soutenir sa propre conviction en la validité de ses assertions qui sont éventuellement discutées mais dont l'analyse est fondée sur des connaissances qui ne sont pas explicitées alors qu'elles sont disponibles. Nous considérons que les sources de cette preuve relèvent de l'*évidence des raisons* et qu'elle est plutôt du côté des preuves *intellectuelles*.
Exemple générique euclidien EGE	Nous appellerons *exemple générique euclidien* toute preuve intellectuelle où – conformément à la définition de Balacheff – le renvoi au tracé et à son codage est un moyen pour exprimer la preuve elle-même et où – conformément au style euclidien – les outils mobilisés ne sont pas cités (ni mot à mot ni suivant l'appellation qui leur est attribuée dans le cours de géométrie) ou bien on ne cite que les plus importants ou encore ils sont évoqués en reproduisant partiellement la structure de leur énoncé et en les contextualisant à l'aide du codage introduit sur le tracé. Évidemment il faut que le lecteur puisse repérer ces outils sans ambiguïté.
Démonstration DEM	Nous appellerons *démonstration* toute preuve ayant les caractéristiques suivantes : – elle respecte l'organisation propre d'un système hypothético-déductif, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain nombre de propositions considérées comme vraies (les hypothèses, les données du problème), les autres sont déduites de celles-ci suivant des règles logiques ; – l'enchaînement des énoncés est *explicitement* justifié en utilisant les résultats d'une *théorie*, ensemble de propriétés et définitions construites, à leur tour, suivant des règles logiques.

C'est ainsi que ce dispositif – le *réseau conceptuel* et la *liste des propositions* qui l'accompagne – nous permet une analyse de l'*écologie institutionnelle* d'une partie du savoir scolaire qui vit dans les deux

institutions en question ainsi que certains aspects relatifs aux *méthodes pédagogiques* et à la *forme* sous laquelle ce savoir est présenté.

En effet, lors de la rédaction de la *liste de propositions*, nous avons été confrontée à un problème de vocabulaire qui révèle, en quelque sorte, les premières différences dans la manière de transmettre le savoir en question aussi bien au niveau de la forme que des méthodes.

Une différence importante porte sur l'acception de quelques termes et, en quelques sorte, des concepts liés à ces termes. En général, dans l'institution **italienne**, en ce qui concerne les *aires*, pour distinguer la *grandeur* de la *mesure* (ou *grandeur mesurée* ?), on utilise respectivement les termes *superficie* (ou *étendue*) et on définit l'*aire* comme la *mesure de la superficie* par rapport à une unité de mesure fixée.

En revanche, dans l'institution **française**, pour distinguer la *grandeur* de la *mesure*, on utilise respectivement les termes *aire* et *mesure d'aire*. Nous verrons pourtant que cette distinction n'est pas toujours respectée dans les divers manuels, la différence pouvant se saisir par le contexte du discours.

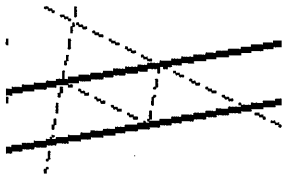
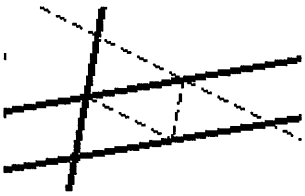
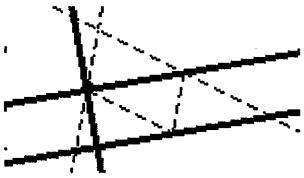
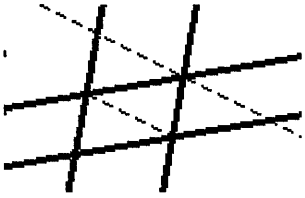
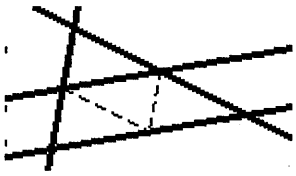
Dans la *liste des propositions* codée, nous distinguons les propositions liées à l'*aire-grandeur* de celles liées à l'*aire-mesure*. Lorsque la proposition en jeu concerne l'aire-grandeur, elle est identifiée par un numéro ; lorsque à celle-ci correspond une proposition concernant l'aire-mesure, nous l'avons identifiée par le même numéro accompagné de la lettre M. C'est pourquoi, dans cette liste, la numérotation ne suit pas toujours un ordre croissant. En outre, nous avons regroupé sous un même numéro, suivi par une petite lettre, les propositions qui sont en quelque sorte apparentées. Par exemple, les propriétés identifiées par le numéro 11 concernent le triangle : les propriétés qui relient le triangle au parallélogramme sont identifiées par le code 11a, celles qui relient le triangle au rectangle sont identifiées par le code 11b ; par conséquent, la proposition relative à la formule de l'aire d'un triangle est indiquée par le code 11aM ou 11bM.

Autour de la configuration du triangle des milieux

Pour analyser d'autres objets du savoir qui vit dans les institutions italienne et française en relation avec les problèmes proposés aux élèves dans la partie expérimentale, nous avons procédé différemment pour établir un dispositif permettant encore d'examiner le *langage* et le *style* utilisé par les divers auteurs des manuels choisis pour développer et exposer les contenus ainsi que les *méthodes pédagogiques sous-jacentes* proposées pour l'acquisition du savoir et l'appropriation du savoir-faire.

Pour ce faire, nous avons encore exploité les problèmes analysés dans le chapitre 3. Nous avons sélectionné ces problèmes à partir de la *configuration du triangle des milieux*, une configuration qui

apparaît donc d'une manière plus ou moins explicite dans tous les énoncés. L'analyse des procédures de résolution possibles nous a permis de mettre en évidence certains outils liés à la configuration en question. Les outils communs aux deux institutions apparaissent aussi (en tant qu'*objets*) dans le *syllabus* que nous avons établi et qui a été représenté dans le chapitre 2, lors de l'analyse des textes officiels des programmes scolaires relatifs aux deux institutions. Ci-après, nous présentons quelques sous-configurations de base contenues dans le *triangle des milieux*. C'est à partir de celles-ci et, en nous appuyant sur les objets communs répertoriés dans le *syllabus*, que nous avons fixé un nombre restreint d'objets géométriques.

 *Deux droites parallèles*	A. Définition de droites parallèles et propriétés éventuelles.
 *Deux droites parallèles et une sécante I*	B. Caractérisation angulaire du parallélisme.
 *Deux droites parallèles et une sécante II*	C. Distance d'un point à une droite. Hauteur d'un triangle, hauteur d'un parallélogramme.
 *Droites deux à deux parallèles*	D. Propriétés caractéristiques du parallélogramme.
 *Deux droites parallèles et deux sécantes*	E. Théorème des milieux et sa réciproque. F. Théorème de Thalès dans le triangle et sa réciproque.

Nous avons donc situé ces objets par rapport aux contenus proposés dans les différents manuels pour nous intéresser ensuite à la manière dont ils sont introduits et l'usage que les auteurs proposent dans les

pages d'activités pratiques, à savoir les *genres de tâches* proposées pour les mobiliser en tant qu'outils. Parmi les *constructions géométriques* en rapport avec ces objets, nous avons retenu celle qui concerne *la parallèle à une droite donnée* en examinant particulièrement la manière dont elle est présentée dans les divers manuels scolaires analysés.
Dans les pages suivantes, lorsque nous commentons ces divers objets tel qu'ils sont présentés dans chaque manuel, nous incluons quelques extraits, à titre d'exemple sur la manière de concevoir cet outil pédagogique dans les deux institutions concernées.

II. LE RESEAU CONCEPTUEL DES AIRES DANS LES DIVERS MANUELS SCOLAIRES

Dans les paragraphes qui suivent, nous analysons les contenus qui nous ont permis de constituer le *réseau conceptuel* des aires pour chacun des manuels scolaires choisis. Avant de fournir la *liste des propositions*, nous précisons encore quelques détails et dégageons les premiers éléments de comparaisons. La *liste* ainsi constituée nous permet en fait de résumer d'ores et déjà quelques aspects généraux relatifs aux *contenus* ainsi qu'au *style* et aux *méthodes* utilisés pour les transmettre.

Ici, nous n'avons pas explicitement pris en compte les notions de *congruence* (*superposabilité*) et d'*isométrie* qui pourtant représentent un point de départ pour développer le chapitre sur les aires. Signalons que, dans les manuels **MAR**, **BOV** et **CAT**, la notion de *congruence*[10] est explicitement reliée au concept intuitif de *déplacement* et on dit que *deux figures congruentes ont la même superficie et la même forme*, d'où le lien avec les aires se fait donc d'une manière spontanée. Dans le manuel **MAT**, cette notion est explicitement reliée à la notion d'*isométrie* et, à travers l'invariance des aires par une isométrie, elle demeure aussi liée à la notion d'aire. Dans les manuels français, le terme *superposable* est utilisé dans son acception sémantique courante, le lien avec les notions d'isométrie et d'aire se fait d'une manière plus ou moins implicite suivant l'ouvrage.

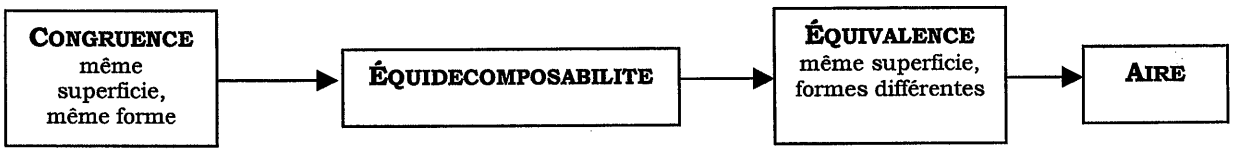
Comme nous l'avons déjà constaté dans le chapitre 2, dans les manuels **français**, le chapitre sur les aires est abordé exclusivement dans les deux premières classes du Collège. En revanche, dans les manuels **italiens**, il est abordé aussi bien à l'ESS qu'à l'ESI, la différence porte alors sur une approche et un approfondissement différents.

Dans la première partie (*Congruence, Équidécomposabilité et Équivalence*) de la *liste* (**Tableau 4.7**, page 231 et suivantes), on constate que les manuels **français** ne figurent pas autant que les manuels **italiens**. En effet, concernant les aires, l'approche est tout à fait différente dans les deux institutions.

---

[10] Dans les manuels BOV et CAT, les auteurs utilisent aussi d'une manière synonyme le terme *égalité*.

Les manuels **italiens** font appelle à une approche assez classique. Ils développent le chapitre sur les aires à partir de la notion d'*équidécomposabilité* et que, grâce à cette notion, ils définissent la notion de *figures équivalentes* pour arriver à la notion d'*aire* en passant par la *théorie des grandeurs et des proportions*, cela d'une manière plus ou moins explicite. L'enchaînement adopté est grosso modo le suivant :



En revanche, dans les manuels **français**, les notions de *superposabilité* (congruence) et d'*équidécomposabilité* apparaissent d'une manière implicite ou allusive.

C'est lorsque l'on passe à la deuxième partie de la *liste* (*Mesure de l'aire, formules de calcul des aires*) que la présence des manuels **français** se fait plus importante mais reste cependant toujours moindre que celles des manuels **italiens**. Cela prouverait que le chapitre sur les aires n'est pas très approfondi mais surtout qu'il est abordé essentiellement en termes de *mesure*. C'est pourquoi, dans l'analyse détaillée plus loin, nous avons essayé de repérer tout indice permettant de pointer les propriétés qui apparaissent d'une manière implicite ou sous la forme d'exercice, alors que ces propriétés sont normalement institutionnalisée dans les manuels italiens.

Concernant les types de *preuves* qui accompagnent les diverses propriétés, nous constatons aussi des différences. Dans les manuels **français**, elles sont exclusivement validées à l'aide de preuves qui relèvent de l'*évidence des faits*, cela pouvant se justifier par le niveau scolaire où elles sont introduites. Dans les manuels **italiens**, c'est surtout au niveau inférieur (ESI) que l'on recourt à des *preuves pragmatiques*. Il nous paraît néanmoins intéressant de remarquer que, pour certaines propriétés, le même type de *preuve intellectuelle* est proposée aussi bien à l'ESI qu'à l'ESS. Rappelons que, dans l'institution italienne, le chapitre est abordé à la 2ème année de l'ESI (12 ans) et puis repris à la 1ère et/ou 2ème année de l'ESS[11] (14/15 ans). Nous trouverons encore d'autres exemples où l'*attitude* demandée aux élèves est la même en passant d'un niveau à l'autre.

Enfin, en ce qui concerne le style utilisé, nous reconnaissons que les auteurs **français** s'expriment souvent à l'aide d'un langage familier, informel et succinct alors que, dans les manuels **italiens**, il est plus conforme à une rigueur qui est propre de la matière traitée.

[11] Cf. chapitre 2, § V.

La liste des propositions liée au réseau conceptuel des aires

Avant de détailler les résultats de nos analyses et de présenter le réseau conceptuel visualisé relatif à chaque manuel, nous fournissons ci-dessous la *liste des propositions* (**Tableau 4.7**). Néanmoins, pour simplifier la lecture de ces analyses, nous conseillons de se référer à la *liste des propositions abrégée* (**Tableau 4.8**) : ici, les mêmes propositions apparaissent en ordre croissant, sans tenir compte ni du type de preuve qui les accompagnent ni de la manière dont elles se suivent dans les divers ouvrages.

Tableau 4.7 – La liste des propositions liée au réseau conceptuel des aires

	CONGRUENCE, EQUIDECOMPOSABILITE, EQUIVALENCE.	MANUELS FRANÇAIS	MANUELS ITALIENS
1	(*Définition*) Deux polygones sont équidécomposables si l'on peut les décomposer en un même nombre de polygones respectivement congruents.		CAT MAT
2	Deux polygones congruents sont équidécomposables. La réciproque n'est pas vraie.		CAT (EM)
3	L'équidécomposabilité est une relation d'équivalence. Tout polygone est équidécomposable avec soi-même. Si un polygone A est équidécomposable avec B, alors B est équidécomposable avec A. Si un polygone A est équidécomposable avec B et B est équidécomposable avec C, alors A est équidécomposable avec C.		MAT (ER) CAT (EF) CAT (EF) CAT (ER)
4	Les polygones qui sont somme de polygones congruents ou équidécomposables, sont équidécomposables[12]. Les polygones qui sont différence de polygones congruents ou équidécomposables, sont équidécomposables.		CAT (DEM) CAT (admis)
5	Lorsqu'un polygone P est décomposé en parties polygonales, si l'on en élimine quelques unes, on ne peut pas reconstituer avec les autres un polygone P' équidécomposable avec P (→ Principe de DE ZOLT : Une surface ne peut pas être équivalente à l'une de ses parties).		CAT (admis)
6	(*Définition*) Deux polygones sont équivalents lorsqu'ils sont équidécomposables. (*Définition*) Deux figures planes équivalentes ont la même superficie. Deux figures planes ayant la même superficie sont équivalentes. (*Définition*) Deux figures planes sont équivalentes lorsqu'elles ont la même superficie ou aire. Des figures planes constituées de parties superposables ont la même aire.	 HAT6^{e} (implicite) HAC6^{e} (EF)	MAT BOV BOV MAR
7	Deux figures planes congruentes sont équivalentes. En général, deux figures planes équivalentes ne sont pas congruentes. L'équivalence est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour la congruence de polygones.		MAR (EM) MAT (admis)

Légende. DEM = démonstration
EF = évidence des faits ;
EGE = exemple générique euclidien ;
ER = évidence des raisons ;
EXG = exemple générique ;
EM = expérience mentale ;

[12] Dans les quatre manuels italiens, les auteurs précisent l'acception du terme *somme*, cela indiquant la *réunion de polygones disjoints*. De même, le terme différence est utilisé dans son acception ensembliste.

8a	Toute figure plane est équivalente à soi-même.		MAR (admis)
8b	Si une figure plane est équivalente à une figure plane, celle-ci est équivalente à la première.		MAR (admis)
8c	Deux figures planes équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles.		BOV (admis) MAR (admis)
9	Deux figures planes constituées de parties respectivement congruentes, c'est-à-dire équidécomposables, sont équivalentes. La réciproque n'est pas toujours vraie. Les différences de figures respectivement congruentes, sont équivalentes entre elles.		BOV (EF)
	Des figures planes qui sont sommes de figures planes congruentes (équivalentes) sont équivalentes. Des figures planes équidécomposables en figure planes respectivement congruentes sont équivalentes. La réciproque n'est pas toujours vraie. Des figures planes qui sont différences de figures planes respectivement congruentes (équivalentes) sont équivalentes.		MAR (EF)
	Deux polygones sont équivalents lorsqu'ils sont sommes (c'est-à-dire s'ils sont équidécomposables) ou différences de polygones égaux.		CAT (admis)
	On peut "ajouter" ou "soustraire" des parties congruentes à des figures planes équivalentes en obtenant encore des figures planes équivalentes.		MAT (EF)
10a	Tout parallélogramme est équivalent à un rectangle ayant même base et même hauteur.		CAT (EGE) BOV (EF) MAR (EF) MAT (EGE)
	Un parallélogramme et un rectangle ayant la base et la hauteur respectivement de même longueur ont même aire.	HAT5^e (implicite) HAC5^e (implicite)	
10b	Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.		CAT (ER) BOV (EGE) MAR (EGE)
11a	Tout triangle est équivalent à un parallélogramme ayant pour base la moitié de sa base et la même hauteur.		CAT (ER)
	Un triangle est équivalent à la moitié d'un parallélogramme ayant la même base et la même hauteur.		BOV (EGE) MAR (EGE)
	L'aire d'un triangle est égale à la moitié de l'aire d'un parallélogramme ayant la base et la hauteur respectivement de même longueur.	HAT5^e (implicite) HAC5^e (exercice)	
11b	Tout triangle est équivalent à un rectangle de même base et démi-hauteur. Un triangle de base b et de hauteur h et un rectangle de base b et de hauteur h/2 ont la même aire.	HAT5^e (exercice)	MAT (EGE)
	L'aire d'un triangle rectangle est égale à la moitié de l'aire d'un rectangle ayant la base et la hauteur respectivement de même longueur.		
	Un triangle rectangle est la "moitié" d'un rectangle.	HAT6^e (implicite)	

11c	Deux triangles de même base et de même hauteur associée sont équivalents.	HAC6^e (EF)	BOV (EGE) CAT (EGE)
11d	La somme de plusieurs triangles ayant la même hauteur est équivalente au triangle ayant la même hauteur et pour base la somme des bases.		MAR (EGE) MAT (ER) BOV (EGE)
12	Un losange est équivalent à la moitié d'un rectangle ayant pour côtés ses diagonales. En général, un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires est équivalent à la moitié d'un rectangle ayant pour côtés ses diagonales.		BOV (EF) MAR (ER) MAT (exercice résolu)
	Un rectangle dont les côtés ont respectivement la même longueur que les diagonales d'un losange a une aire double de celle du losange.	HAT6^e (EF)	
13a	Un trapèze est équivalent à un triangle de même hauteur et dont la base est égale à la somme des longueurs des bases du trapèze.		CAT (EGE) MAR (EGE) MAT (exercice résolu, ER)
13b	Un trapèze est équivalent à la moitié d'un parallélogramme de même hauteur et ayant pour base la somme des bases du trapèze.	HAT5^e (implicite)	BOV (EF)
14a	Un polygone peut être transformé en un autre polygone équivalent ayant un côté en moins.		CAT (EGE) MAT (EGE)
14b	Tout polygone peut être transformé en un triangle équivalent.		CAT (ER)
14c	Tout polygone peut être transformé en un rectangle équivalent. Tout polygone est équivalent à un rectangle.		CAT (EXG) MAT (EXG)
14d	Un polygone régulier est équivalent à un triangle ayant par base et par hauteur respectivement le périmètre et l'apothème du polygone.		CAT (ER)
14e	Un polygone circonscrit à un cercle est équivalent à un triangle ayant la base égale au périmètre du polygone et pour hauteur le rayon du cercle.		BOV (EXG, ER) MAR (EXG, ER)

	LA MESURE DE L'AIRE. LES FORMULES DE CALCUL DES AIRES.	MANUELS FRANÇAIS	MANUELS ITALIENS
15	(*Définition*) La mesure d'une grandeur par rapport à une unité fixée est le nombre réel positif qui exprime le rapport de cette grandeur et de la grandeur choisie comme unité. La mesure d'une superficie s'appelle aire.		CAT
	(*Définition*) Mesurer la superficie d'une figure plane signifie la comparer avec la superficie d'une autre figure plane choisie comme unité de mesure et établir combien de fois l'une est contenue dans l'autre. Le nombre qui désigne la mesure de superficie d'une figure s'appelle aire de la figure.		BOV MAR
16a	(*Définition*) L'aire d'un carré de côté l est égale au produit l^2 (nombre réel commun à toute la classe de carrés congruents entre eux).		MAT
16b	Tout rectangle de base b et de hauteur h est équivalent à un carré d'aire $l^2 = b \times h$.		MAT (EGE)
16c	(*Définition*) On définit l'aire d'un polygone comme l'aire d'un carré équivalent à ce polygone. L'aire d'un polygone est donc un nombre réel non négatif commun à tous les polygones équivalents entre eux.		MAT

17	Des figures planes équivalentes ont la même aire (et réciproquement). Quand on passe des grandeurs aux mesures relatives, les relations d'équivalence se transforment en égalités. Des figures planes constituées de parties superposables ont la même mesure d'aire.	 HAC6^e, HAC5^e (implicite) HAT6^e (implicite)	BOV (assertion) CAT (assertion)
18	L'aire d'un rectangle est égale au produit de la mesure de la base par celle de la hauteur. Aire d'un rectangle : $L \times l$.	 HAC6^e (admis) HAT6^e (admis)	CAT (EGE) BOV (EF) MAR (EF) MAT (ER)
19	L'aire d'un carré est égale au carré des longueurs de son côté. Aire d'un carré : $c \times c = c^2$.	 HAC6^e (EF) HAT6^e (EF)	CAT (ER) MAR (EF)
10M	L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la mesure d'une base par celle de la hauteur associée. Aire d'un parallélogramme : $b \times h$. L'aire d'un losange est égale au produit de la longueur d'un côté par celle de la hauteur associée.	 HAC5^e (EF) HAT5^e (EF) HAC5^e (exercice)	CAT (ER) BOV (ER) MAR (ER) MAT (ER) BOV (ER) MAR (ER)
11aM	L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de la mesure d'un côté par la mesure de la hauteur associée. L'aire d'un triangle de base b et de hauteur h est égale à ½ $b \times h$. Aire d'un triangle rectangle : b×h (où b est la longueur de l'hypoténuse et h celle de la hauteur associée). L'aire d'un triangle rectangle est égale au demi-produit des longueurs des côtés de l'angle droit.	 HAC5^e (admis) HAT5^e (EF) HAT5^e (exercice)	CAT (ER) BOV (ER) MAR (ER) MAT (ER) MAR (EF) BOV (ER) MAR (EF)
11bM	Aire d'un triangle rectangle : $(x \times y) : 2$.	HAC6^e (EF) HAT6^e (EF)	
11M'	Formule de Héron (calcul de l'aire d'un triangle dont on connaît les côtés).		CAT (EGE) BOV (admis) MAR (admis) MAT (EGE)

12M	L'aire du losange est égale au demi-produit des longueurs des diagonales.		BOV (ER) MAR (ER)
	Aire d'un losange : A $=(d\times d') : 2$.	HAC5^e (exercice) HAT6^e (EF)	MAT (exercice résolu)
	L'aire d'un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires est égale au demi-produit des mesures des ses diagonales.		MAT (exercice résolu) BOV (ER) MAR (ER)
	L'aire d'un carré est égale à la moitié du carré de la mesure de sa diagonale.		CAT (ER) BOV (ER) MAR (ER)
13M	L'aire d'un trapèze est égale au demi-produit de la somme des mesures des bases par la longueur de la hauteur.		CAT (ER) BOV (ER) MAR (ER)
	Aire d'un trapèze : $\frac{1}{2}(b_1+b_2)\times h$.	HAC4^e (admis) HAT5^e (admis)	MAT (ER)
14dM	L'aire d'un polygone régulier est égale au produit de la mesure du démi-périmètre par celle de l'apothème.		CAT (ER) BOV (EXG, ER) MAR (EXG, ER)
14eM	L'aire d'un polygone circonscrit à un cercle est égale au demi-produit de la mesure de son périmètre par celle du rayon.		BOV (EXG, ER) MAR (EXG, ER)
20a	L'aire d'une bande polygonale est égale à la différence de l'aire du polygone extérieur et l'aire du polygone intérieur.		BOV (EF) MAR (EF)
	L'aire d'un polygone irrégulier est égale à la somme des aires des polygones qui le composent.		BOV (EF) MAR (EF)
20b	Pour calculer l'aire d'un polygone quelconque, on le partage en triangles rectangles et en trapèzes.	HAT5^e (exercice)	
	Pour calculer l'aire d'une figure compliquée, on aura souvent intérêt à la découper en plusieurs rectangles et/ou plusieurs triangles rectangles.	HAC6^e (EF)	

	EQUICOPLEMENTABILITE. LES THEOREMES D'EUCLIDE. LE THEOREME DE PYTHAGORE.	MANUELS FRANÇAIS	MANUELS ITALIENS
21	Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur un côté de l'angle droit est équivalent à un rectangle ayant pour dimension l'hypoténuse et le projeté de ce côté sur l'hypoténuse.		CAT (EGE) BOV (EGE) MAR (EGE)
21M	Dans tout triangle rectangle, l'aire du carré construit sur un côté de l'angle droit est égale à l'aire du rectangle ayant pour dimension l'hypoténuse et le projeté de ce côté sur l'hypoténuse.		CAT (ER)
22	Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur la hauteur relative à l'hypoténuse est équivalent au rectangle ayant pour dimensions les projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.		CAT (EGE) BOV (EGE) MAR (EGE)

22M	L'aire du carré construit sur la hauteur relative à l'hypoténuse est égale à l'aire du rectangle ayant pour dimensions les projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.		CAT (ER)
23a	(*Définition*) Deux figures sont équicomplémentables si, en ajoutant un nombre fini de polygones respectivement congruents, on obtient deux figures congruentes.		MAT
23b	Deux polygones équicomplémentables sont équivalents.		MAT (admis)
24	Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.		CAT (EGE) BOV (EF) MAR (EF) MAT (ER)
24M	Dans tout triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.	HAC4e (EF) HAT4e (EF)	CAT (ER) BOV (ER)

Tableau 4.8 – Le réseau conceptuel des aires : la liste *abrégée*

1	(*Définition*) Deux polygones sont équidécomposables si l'on peut les décomposer en un même nombre de polygones respectivement congruents. CAT MAT
2	Deux polygones congruents sont équidécomposables. La réciproque n'est pas vraie. CAT
3	L'équidécomposabilité est une relation d'équivalence. MAT Tout polygone est équidécomposable avec soi-même. Si un polygone A est équidécomposable avec B, alors B est équidécomposable avec A. Si un polygone A est équidécomposable avec B et B est équidécomposable avec C, alors A est équidécomposable avec C. CAT
4	Les polygones qui sont somme de polygones congruents ou équidécomposables, sont équidécomposables. Les polygones qui sont différence de polygones congruents ou équidécomposables, sont équidécomposables. CAT
5	Lorsqu'un polygone P est décomposé en parties polygonales, si l'on en élimine quelques unes, on ne peut pas reconstituer avec les autres un polygone P' équidécomposable avec P (→ Principe de DE ZOLT : Une surface ne peut pas être équivalente à l'une de ses parties). CAT
6	(*Définition*) Deux polygones sont équivalents lorsqu'ils sont équidécomposables. MAT (*Définition*) Deux figures planes équivalentes ont la même superficie. BOV Deux figures planes ayant la même superficie sont équivalentes. BOV (*Définition*) Deux figures planes sont équivalentes lorsqu'elles ont la même superficie ou aire. MAR Des figures planes constituées de parties superposables ont la même aire. HAT6^{e} HAC6^{e}
7	Deux figures planes congruentes sont équivalentes. En général, deux figures planes équivalentes ne sont pas congruentes. MAR L'équivalence est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour la congruence de polygones. MAT
8a	Toute figure plane est équivalente à soi-même. MAR
8b	Si une figure plane est équivalente à une figure plane, celle-ci est équivalente à la première. MAR
8c	Deux figures planes équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles. BOV MAR
9	Deux figures planes constituées de parties respectivement congruentes, c'est-à-dire équidécomposables, sont équivalentes. La réciproque n'est pas toujours vraie. Les différences de figures respectivement congruentes, sont équivalentes entre elles. BOV Des figures planes qui sont sommes de figures planes congruentes (équivalentes) sont équivalentes. Des figures planes équidécomposables en figure planes respectivement congruentes sont équivalentes. La réciproque n'est pas toujours vraie. Des figures planes qui sont différences de figures planes respectivement congruentes (équivalentes) sont équivalentes. MAR Deux polygones sont équivalents lorsqu'ils sont sommes (c'est-à-dire s'ils sont équidécomposables) ou différences de polygones égaux. CAT On peut "ajouter" ou "soustraire" des parties congruentes à des figures planes équivalentes en obtenant encore des figures planes équivalentes. MAT
10a	Tout parallélogramme est équivalent à un rectangle ayant même base et même hauteur. CAT BOV MAR MAT Un parallélogramme et un rectangle ayant la base et la hauteur respectivement de même longueur ont même aire. HAT5^{e} HAC5^{e}
10b	Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents. CAT BOV MAR
10M	L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la mesure d'une base par celle de la hauteur associée. CAT BOV MAR MAT Aire d'un parallélogramme : $b \times h$. HAC5^{e} HAT5^{e} L'aire d'un losange est égale au produit de la longueur d'un côté par celle de la hauteur associée. HAC5^{e} BOV MAR

11a	Tout triangle est équivalent à un parallélogramme ayant pour base la moitié de sa base et la même hauteur. CAT Un triangle est équivalent à la moitié d'un parallélogramme ayant la même base et la même hauteur. BOV MAR L'aire d'un triangle est égale à la moitié de l'aire d'un parallélogramme ayant la base et la hauteur respectivement de même longueur. HAT5^e HAC5^e
11b	Tout triangle est équivalent à un rectangle de même base et démi-hauteur. MAT Un triangle de base b et de hauteur h et un rectangle de base b et de hauteur h/2 ont la même aire. HAT5^e L'aire d'un triangle rectangle est égale à la moitié de l'aire d'un rectangle ayant la base et la hauteur respectivement de même longueur. HAT6^e Un triangle rectangle est la "moitié" d'un rectangle. HAC6^e
11c	Deux triangles de même base et de même hauteur associée sont équivalents. BOV CAT MAR
11d	La somme de plusieurs triangles ayant la même hauteur est équivalente au triangle ayant la même hauteur et pour base la somme des bases. MAT BOV
11aM	L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de la mesure d'un côté par la mesure de la hauteur associée. CAT BOV MAR L'aire d'un triangle de base *b* et de hauteur *h* est égale à ½ *b×h*. MAT HAC5^e HAT5^e Aire d'un triangle rectangle : b×h (où b est la longueur de l'hypoténuse et h celle de la hauteur associée). HAT5^e MAR
11bM	L'aire d'un triangle rectangle est égale au demi-produit des longueurs des côtés de l'angle droit. BOV MAR Aire d'un triangle rectangle : *(x×y) : 2*. HAC6^e HAT6^e
11M'	Formule de Héron (calcul de l'aire d'un triangle dont on connaît les côtés). CAT BOV MAR MAT
12	Un losange est équivalent à la moitié d'un rectangle ayant pour côtés ses diagonales. En général, un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires est équivalent à la moitié d'un rectangle ayant pour côtés ses diagonales. BOV MAR MAT Un rectangle dont les côtés ont respectivement la même longueur que les diagonales d'un losange a une aire double de celle du losange. HAT6^e
12M	L'aire du losange est égale au demi-produit des longueurs des diagonales. BOV MAR MAT Aire d'un losange : A =*(d×d') : 2*. HAC5^e HAT6^e MAT BOV MAR L'aire d'un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires est égale au demi-produit des mesures des ses diagonales. CAT BOV MAR L'aire d'un carré est égale à la moitié du carré de la mesure de sa diagonale.
13a	Un trapèze est équivalent à un triangle de même hauteur et dont la base est égale à la somme des longueurs des bases du trapèze. CAT MAR MAT
13b	Un trapèze est équivalent à la moitié d'un parallélogramme de même hauteur et ayant pour base la somme des bases du trapèze. BOV HAT5^e
13M	L'aire d'un trapèze est égale au demi-produit de la somme des mesures des bases par la longueur de la hauteur. CAT BOV MAR Aire d'un trapèze : $\frac{1}{2}(b_1+b_2)\times h$. HAC4^e HAT5^e MAT
14a	Un polygone peut être transformé en un autre polygone équivalent ayant un côté en moins. CAT MAT
14b	Tout polygone peut être transformé en un triangle équivalent. CAT
14c	Tout polygone peut être transformé en un rectangle équivalent. Tout polygone est équivalent à un rectangle. CAT MAT
14d	Un polygone régulier est équivalent à un triangle ayant par base et par hauteur respectivement le périmètre et l'apothème du polygone. CAT

14e	Un polygone circonscrit à un cercle est équivalent à un triangle ayant la base égale au périmètre du polygone et pour hauteur le rayon du cercle. BOV MAR
14dM	L'aire d'un polygone régulier est égale au produit de la mesure du démi-périmètre par celle de l'apothème. CAT BOV MAR
14eM	L'aire d'un polygone circonscrit à un cercle est égale au demi-produit de la mesure de son périmètre par celle du rayon. BOV MAR
15	(*Définition*) La mesure d'une grandeur par rapport à une unité fixée est le nombre réel positif qui exprime le rapport de cette grandeur et de la grandeur choisie comme unité. La mesure d'une superficie s'appelle aire. CAT (*Définition*) Mesurer la superficie d'une figure plane signifie la comparer avec la superficie d'une autre figure plane choisie comme unité de mesure et établir combien de fois l'une est contenue dans l'autre. Le nombre qui désigne la mesure de superficie d'une figure s'appelle aire de la figure. BOV MAR
16a	(*Définition*) L'aire d'un carré de côté l est égale au produit l^2 (nombre réel commun à toute la classe de carrés congruents entre eux). MAT
16b	Tout rectangle de base b et de hauteur h est équivalent à un carré d'aire $l^2 = b \times h$. MAT
16c	(*Définition*) On définit l'aire d'un polygone comme l'aire d'un carré équivalent à ce polygone. L'aire d'un polygone est donc un nombre réel non négatif commun à tous les polygones équivalents entre eux. MAT
17	Des figures planes équivalentes ont la même aire (et réciproquement). BOV Quand on passe des grandeurs aux mesures relatives, les relations d'équivalence se transforment en égalités. CAT Des figures planes constituées de parties superposables ont la même mesure d'aire. HAC6^e HAC5^e HAT6^e
18	L'aire d'un rectangle est égale au produit de la mesure de la base par celle de la hauteur. CAT BOV MAR Aire d'un rectangle : $L \times l$. HAC6^e HAT6^e MAT
19	L'aire d'un carré est égale au carré des longueurs de son côté. CAT MAR Aire d'un carré : $c \times c = c^2$. HAC6^e HAT6^e
20a	L'aire d'une bande polygonale est égale à la différence de l'aire du polygone extérieur et l'aire du polygone intérieur. BOV MAR
20b	L'aire d'un polygone irrégulier est égale à la somme des aires des polygones qui le composent. BOV MAR Pour calculer l'aire d'un polygone quelconque, on le partage en triangles rectangles et en trapèzes. HAT5^e Pour calculer l'aire d'une figure compliquée, on aura souvent intérêt à la découper en plusieurs rectangles et/ou plusieurs triangles rectangles. HAC6^e
21	Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur un côté de l'angle droit est équivalent à un rectangle ayant pour dimension l'hypoténuse et le projeté de ce côté sur l'hypoténuse. CAT BOV MAR
21M	Dans tout triangle rectangle, l'aire du carré construit sur un côté de l'angle droit est égale à l'aire du rectangle ayant pour dimension l'hypoténuse et le projeté de ce côté sur l'hypoténuse. CAT
22	Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur la hauteur relative à l'hypoténuse est équivalent au rectangle ayant pour dimensions les projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse. MAR CAT BOV
22M	L'aire du carré construit sur la hauteur relative à l'hypoténuse est égale à l'aire du rectangle ayant pour dimensions les projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse. CAT
23a	(*Définition*) Deux figures sont équicomplémentables si, en ajoutant un nombre fini de polygones respectivement congruents, on obtient deux figures congruentes. MAT
23b	Deux polygones équicomplémentables sont équivalents. MAT
24	Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. CAT BOV MAR MAT
24M	Dans tout triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. HAC4^e HAT4^e CAT BOV

La collection HAT

Compte tenu de l'organisation interne de cette collection, nous analysons les activités préparatoires ainsi que les exercices qui suivent. Nous examinons notamment les manuels HAT6^e, HAT5^e, HAT4^e où la notion d'aire fait l'objet de quelques paragraphes ; en effet, dans les deux autres tomes de la collection, aucun nouveau résultat n'apparaît, ceux qui ont été déjà étudiés se trouvent dans les pages de rappel.

Le manuel HAT6^e. On rencontre la notion d'*aire* dans un chapitre intitulé *RECTANGLE. CARRE, AIRE.* Trois activités préparatoires attirent notre attention.

Dans la première activité (intitulée COMPARAISON D'AIRES), on demande de *comparer les aires de deux surfaces* polygonales tracées sur papier quadrillé et de donner la différence en terme de carreaux. Puisque aucune référence explicite n'est faite aux unités d'aire, on peut bien croire qu'il faut traiter les aires en termes de grandeurs en considérant que *les deux surfaces* sont composées de petits carrés superposables.

Dans la deuxième activité (AIRE D'UN LOSANGE), on demande de *construire un losange* dont les longueurs des diagonales sont données[13]. On demande ensuite de *montrer que ce losange est contenu dans un rectangle d'aire double* d'où il faut *déduire l'aire du losange* (proposition 12 de la liste[14]). Évidemment, ici, on demande de produire une preuve pragmatique (*évidence des faits*) : en complétant convenablement la figure reproduite, l'élève devrait percevoir des petits triangles superposables et, suivant la même procédure que dans l'activité précédente, déduire la propriété à prouver. C'est ainsi qu'en passant aux *nombres*, il devrait déduire *la formule de calcul de l'aire d'un losange* (12M), comme on le demande dans la dernière phase de l'activité. Ici, le passage de la grandeur à la mesure se fait d'une manière implicite et subreptice, ce qui empêche probablement l'élève de réfléchir sur leur distinction.

Une dernière activité de manipulation (POLY-PUZZLE) porte *implicitement* sur la notion d'*équidécomposabilité* et ses propriétés (6) : à partir d'un losange dont on connaît les longueurs des diagonales, l'élève doit le décomposer en suivant un programme fourni. Avec les cinq pièces du puzzle obtenu, il doit construire un carré (dont on demande de déduire la longueur du côté) et puis un rectangle.

Signalons que les autres activités proposées nécessitent une connaissance de la *notion d'unité d'aire* et des *formules de calcul de l'aire du rectangle et du carré* : sans doute sont-elles des activités de rappel sur des notions que l'élève est censé avoir acquises antérieurement.

C'est dans les pages de cours que l'on trouve les connaissances institutionnellement exigibles,

---

[13] La définition de *losange* et ses premières propriétés sont introduites dans le chapitre précédent.

[14] Par la suite, nous n'indiquons que le numéro.

notamment les *formules de calcul de l'aire d'un rectangle* (18), *d'un triangle rectangle* (11bM), *d'un carré* (19) *et d'un losange* (12M). Aucun commentaire ne les accompagne.
Pour le *triangle rectangle*, c'est l'évidence des faits qui devrait amener l'élève à comprendre que *l'aire d'un triangle rectangle est la moitié de celle d'un rectangle construit sur les côtés de l'angle droit* (11b) et que donc, dans la formule il faut diviser par 2 : en effet à côté d'un rectangle, on reproduit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont la même longueur que les côtés du rectangle.
Pour la formule de calcul de l'aire d'un *carré*, il s'agit sans doute de le relier au rectangle en mobilisant les connaissances relatives aux quadrilatères particuliers que l'élève vient d'apprendre dans le même chapitre[15]. Le lien entre le carré et le losange n'est pas utilisé pour expliciter la formule de calcul de l'aire d'un carré en fonction de la longueur de sa diagonale, c'est éventuellement à l'élève de s'en apercevoir.

Dans les pages consacrées aux activités pratiques[16], on trouve des exercices sur les unités d'aires dans la rubrique *Savoir faire*. Dans la rubrique *Chercher*, il s'agit surtout de problèmes d'aires à résoudre dans un cadre numérique : l'idée principale qui se dégage est que l'*on peut calculer l'aire d'une figure comme somme ou différence d'aires de figures connues*. Un seul exercice est à résoudre dans un cadre géométrique, cela permettant de mettre éventuellement en évidence que *deux figures ont la même aire lorsqu'elles sont différence de figures superposables deux à deux* (9).

Signalons que, à propos du trapèze, dans un des premiers chapitres du manuel (EXPRESSIONS NUMERIQUES), une activité porte sur la formule de calcul de l'aire du trapèze, cela étant évidemment un prétexte pour faire fonctionner certaines connaissances à propos de l'utilisation des parenthèses et de la priorité de la multiplication sur les autres opérations lors d'un calcul en chaîne. Néanmoins, nous pouvons constater que l'on amène l'élève à transformer le trapèze en un parallélogramme. Aucune activité pratique n'est proposée à propos de la formule.

Le manuel HAT5^e. Dans un chapitre consacré aux *DISQUES ET CALCULS D'AIRES*, cinq activités préparatoires attirent notre attention.
Dans la première activité, l'élève devrait remarquer qu'*un parallélogramme et un rectangle ayant les longueurs des bases et des hauteurs associées égales ont même aire* (10a), cela vraisemblablement en s'appuyant sur la notion d'*équidécomposabilité*.
Après une activité qui devrait permettre d'exploiter la propriété de l'invariance des aires sous l'effet d'une symétrie centrale[17], on amène l'élève à déduire la *formule de calcul de l'aire d'un triangle*

---

[15] En effet, dans les pages précédentes, on trouve la propriété suivante : *Un carré est à la fois un rectangle et un losange.*
[16] Sauf avis contraire, signalons que tous les exercices dont on parle dans ce paragraphe sont accompagnés d'un dessin.
[17] Remarquons que c'est la seule situation où l'on exploite implicitement le fait que *deux figures symétriques ont la même aire*. Ensuite, on retrouve cette propriété dans le manuel de 2e où l'on rappelle quelques propriétés des transformations géométriques.

(11aM) en la reliant à celle d'un parallélogramme : plus vraisemblablement, on demande à l'élève de tracer le symétrique du triangle donné et puis de constater sur le dessin que l'on obtient deux triangles superposables (*évidence des faits*). Signalons au passage que cette activité permettrait aussi de conclure qu'*un parallélogramme est partagé par sa diagonale en deux triangles de même aire.*

A propos du trapèze, on propose de trouver *une* formule permettant de calculer l'*aire d'un trapèze* (13M) dont on connaît les longueurs des bases et de la hauteur. Aucune indication n'est donnée : on peut bien croire que l'élève doit y parvenir en traçant une diagonale du trapèze pour le décomposer en deux triangles ; autrement, l'activité précédente devrait lui suggérer de tracer l'image du trapèze donné par rapport au milieu d'un des deux côtés non parallèles pour se ramener à un parallélogramme (13b), cette dernière technique n'étant pas assez évidente à mettre en œuvre. Remarquons que, dans les pages de cours, aucune formule de calcul de l'aire du trapèze n'est institutionnalisée et que, dans les tomes suivants celle-ci apparaît dans les pages de rappel en tant que connaissance acquise.

Dans une dernière activité préparatoire consacrée aux aires de surfaces polygonales, l'élève est amené à découvrir la *formule de Pick*, un objet qui fait pourtant partie d'un tout autre domaine (calcul numérique s'appuyant sur la théorie des distributions).

Les pages d'activités pratiques permettent de dégager de nombreux résultats qui devraient enrichir les connaissances de base introduites jusque là.

Dans la rubrique *Savoir faire*, trois exercices sont à faire sur papier quadrillé. On demande de calculer les aires de groupes de polygones ayant, suivant les cas, des caractéristiques communes ; la technique n'est pas imposée et, vraisemblablement, l'élève devrait comprendre qu'il a le choix entre les formules de calcul des aires et la formule de Pick. Les résultats suivants pourraient se dégager :

- *des parallélogrammes de même base et de même hauteur associée ont la même aire* (10) ;
- *des triangles de même base et de même hauteur associée ont la même aire* (11c) ;
- *des trapèzes de même base et de même hauteur associée ont la même aire.*

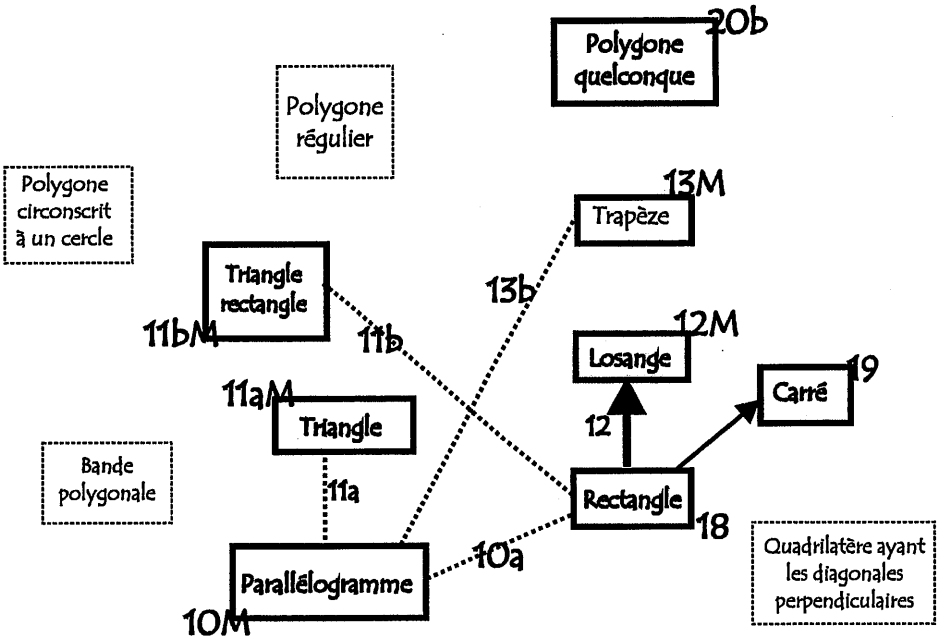
Deux groupes d'exercices portent sur l'aire de polygones quelconques à résoudre respectivement dans un cadre numérique ou algébrique : on suggère explicitement à l'élève que, *pour calculer l'aire d'un polygone quelconque, on le partage en triangles et trapèzes* (20b). Remarquons que, dans les dessins fournis, le partage y est déjà.

Dans la rubrique *Chercher*, d'autres résultats se dégagent. A l'aide de l'*équidécomposabilité*, on devrait découvrir qu'*un triangle de base b et de hauteur h et un rectangle de même base et de hauteur h/2 ont la même aire* (11b) ; de considérer que l'*aire d'un triangle rectangle est égale au demi-produit de la longueur de l'hypoténuse par celle de la hauteur associée* (11bM).

Un bon nombre d'exercices – où l'on demande de comparer des aires dans un cadre géométrique – se fondent sur le fait que des *polygones de formes différentes peuvent avoir la même aire.* Entre autres, on reconnaît que l'on veut amener l'élève à considérer que *des triangles ayant la même base et le troisième sommet qui appartient à une droite parallèle à cette base ont la même aire.*

Le manuel HAT4e. Les formules de calcul des aires apparaissent dans un formulaire à la fin du livre. Dans le chapitre consacré au *théorème de Pythagore* (24M), très peu d'exercices conduisent à utiliser les formules de calcul des aires mais surtout aucun exercice reliant le théorème aux aires n'est proposé dans la rubrique *Apprendre à démontrer*.

Le réseau conceptuel visualisé relatif à la collection française HAT



Ces observations nous montrent que l'objectif effectif de cette collection est celui d'institutionnaliser un nombre restreint d'objets dont l'utilisation en tant qu'outils permettrait d'approfondir et enrichir l'*habitat* lors de l'investissement dans des activités pratiques. Cette *exiguïté* de contenus semble répondre davantage à une exigence pédagogique fortement affirmée même dans le style du langage, ce qui fait que certains aspects demeurent implicites. Il nous paraît pourtant marquant le fait que cette distinction fondamentale entre grandeur et nombre ne soit clairement explicitée nulle part : on n'utilise jamais d'une manière distincte les termes *aire* et *mesure d'aire*, ce qui ne permet pas de saisir clairement la différence entre *grandeur* et *nombre*.

A la suite de cette analyse, nous avons donc reconstitué un réseau assez *pauvre*.

La collection HAC

De même ici, nous analysons les activités préparatoires et les exercices qui concernent les aires en considérant les trois premiers manuels de la collection ; les résultats étudiés dans ceux-ci apparaissent sous la forme de rappel dans les deux autres tomes de la collection.

Le manuel HAC6^e. On retrouve la notion d'aire dans le deuxième module d'un chapitre (*DU COTE DES FIGURES PLANES*) consacré aussi aux premières propriétés des triangles remarquables et des quadrilatères particuliers. Les quatre activités proposées au début du module ont plutôt un statut de rappel.

Dans les deux premières activités, il s'agit de *comparer le périmètre, puis l'aire* de groupes de figures reproduites respectivement sur papier quadrillé et triangulé. On en tire deux conclusions : *des surfaces constituées de parties superposables ont la même aire* (6) et *l'aire d'une figure ne dépend pas de son périmètre*. Compte tenu du fait que, dans un groupe, une figure a les côtés courbés[18], il nous paraît évident que la notion sous-jacente est l'*équidécomposabilité* et donc l'aire en terme de grandeur et non pas de mesure. Signalons, en outre, qu'ici le terme *superposable* est introduit sans être défini, ce qui conduit à croire qu'il est utilisé dans son acception courante ; nous reviendrons sur ce point plus loin.

Dans la troisième activité, on propose des figures variées reproduites sur papier quadrillé : il s'agit de considérer l'aire en termes de nombre et pour ce faire, on précise qu'un carreau représente l'unité d'aire. Dans certains cas de figures, il faut découper ou compléter la figure en la ramenant à des figures simples connues. Remarquons qu'ici, pour la première fois, on trouve l'indication *un triangle rectangle est la "moitié" d'un rectangle* (11b). Par cette expression, on ne met pas l'accent sur la différence entre l'aire et sa mesure, de plus on risque d'inculquer des *conceptions erronées* comme, par exemple, une liaison entre l'aire et le périmètre.

Une dernière activité de manipulation porte sur l'un des *puzzles de Sam Loyd*. Le puzzle est dessiné sur une feuille de cahier : il s'agit de le reproduire sur papier quadrillé, de le découper pour en reconstituer des figures de forme donnée (une croix grecque, un carré, un rectangle). Aucune conclusion n'est faite explicitement sur les aires de figures *équidécomposables* (6), les questions posées amenant rapidement à résoudre le problème dans un cadre numérique.

Cette activité ainsi que la précédente sont très riches et pourraient conduire à dégager plusieurs résultats mais la seule conclusion que l'on en tire est que *pour calculer l'aire d'une figure compliquée, on aura intérêt à la découper en plusieurs rectangles et/ou plusieurs triangles rectangles* (20b).

Dans la partie consacrée aux connaissances de base à retenir, peu de résultats sont mis en évidence, cela sans doute pour respecter les prescriptions des textes officiels. On porte l'attention sur le fait que *des surfaces n'ayant ni la même forme ni le même périmètre peuvent avoir la même aire*. On rappelle les *unités d'aire* et puis *les formules de calcul de l'aire du rectangle* (18), *du triangle rectangle* (11bM) *et du carré* (19).

Pour le *triangle rectangle*, on souligne encore qu'il *est la "moitié" d'un rectangle*, ce qui – d'après les auteurs – devrait justifier le fait que, dans la formule, on divise par 2 (le triangle dessiné a les côtés de même longueur que les cotés du rectangle dessiné sur sa gauche). Pour le *carré*, on rappelle qu'il s'agit d'un *rectangle particulier* d'où sa formule.

---

[18] Au passage, signalons que, dans ce couple de figures, la comparaison des périmètres peut bien se faire d'une manière perceptive.

Dans la partie *Pour résoudre des problèmes*, on reprend les idées dégagées précédemment en les enrichissant un petit peu. Par exemple, on propose de *ranger, sans calculs, les aires des trois surfaces données par ordre croissant* : il s'agit de deux parallélogrammes et d'un trapèze reproduits sur papier quadrillé. Par ostention, on suggère qu'il faut décomposer les figures pour les réassembler de manière à obtenir des triangles ou des triangles rectangles. Quelques résultats pourraient se dégager mais ils sont passés sous silence ; notamment, on pourrait conclure qu'*un parallélogramme et un rectangle ayant la même base et la même hauteur ont la même aire* (10a).

Les activités pratiques proposées sont surtout à résoudre dans un cadre numérique : les énoncés sont toujours accompagnés d'un dessin, la nature des figures proposées étant assez variée. Seulement dans deux exercices, on pourrait dégager des nouveaux résultats, notamment les suivants :

- *l'aire d'un triangle est la moitié de celle d'un rectangle ayant la base et la hauteur associée de même longueur* (11b) ;
- *deux triangles ayant les bases et les hauteurs associées de même longueur ont la même aire* (11c).

Le manuel HAC5^e. Dans un chapitre consacré à des rappels des connaissances acquises en Sixième, on évoque les formules de l'aire du rectangle, du triangle rectangle et du carré. Dans un exercice proposé, on rappelle la méthode suivante :

> "Dans un calcul d'aires, il faut souvent **décomposer la figure en "morceaux" ou reconstituer une figure connue** puis, selon le cas, on **ajoute** ou on **soustrait** les aires de ces figures simples. **Important !** Ne pas oublier les **unités**".

Dans un deuxième exercice, on demande de construire un losange[19] dont les longueurs de diagonales sont données et puis de calculer son aire. Évidemment, il faut encore se reporter à une figure connue et, en tenant compte des axes de symétrie du losange, exploiter éventuellement le fait qu'il est constitué de quatre triangles superposables. Même par la suite, aucune activité préparatoire n'est prévue pour *découvrir* la formule de l'aire d'un losange. Nous verrons que, dans la partie consacrée aux activités pratiques, on retrouve deux exercices qui amènent à calculer l'aire d'un losange de deux manières différentes (10M et 12M).

Dans un chapitre intitulé *DU COTE DES TRIANGLES*, on propose une activité sur le calcul de l'*aire d'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés* : on précise explicitement qu'il s'agit de consolider les connaissances sur les grandeurs attachées au triangle, entre autres les aires mais, puisque dans le tome précédent rien n'est dit sur l'aire d'un triangle quelconque, il s'agit probablement de le considérer comme réunion ou différence de deux triangles rectangles. C'est à l'élève de considérer convenablement la hauteur correspondant à la base choisie, cela en mesurant sur le tracé. L'objectif de l'activité demeure ambigu surtout si l'on considère qu'elle se termine avec le commentaire

[19] Dans les pages précédentes, entre autres, on rappelle que *les diagonales d'un losange ont le même milieu et sont perpendiculaires.*

suivant :

"Même si l'on connaît les longueurs des côtés d'un triangle, on ne peut pas calculer son aire".

On veut probablement pointer qu'on ne peut pas appliquer une formule connue et qu'on en est réduit à mesurer. Néanmoins, d'une part cette affirmation nous paraît maladroite (et la formule de Héron ?), d'autre part rien n'a été vraiment institutionnalisé à propos des hauteurs du triangle qui puisse mettre l'élève dans la condition de manipuler aisément cet objet géométrique. Remarquons que, dans le tome de Sixième, un petit paragraphe dans les pages de cours *montre à travers un dessin codé* ce qu'est la hauteur d'un triangle !

Dans les pages de cours, on évoque la *formule de calcul de l'aire d'un triangle* (11bM) en se limitant à préciser que, *dans un triangle, il y a trois hauteurs*. Un dessin *montre* que, suivant la nature du triangle et suivant la base choisie, les hauteurs peuvent tomber à l'extérieur du triangle.

Dans les pages d'activités pratiques, la majeure partie des exercices proposés est à résoudre dans un cadre numérique ou algébrique. Un nouveau résultat se dégage dans la résolution d'un exercice qui devra être mobilisé dans les exercices qui suivent ; notamment, on amène l'élève à considérer que *des triangles ayant base commune et le troisième sommet qui appartient à une droite parallèle à cette base ont la même aire*. Un groupe d'exercices – où l'on relie les aires aux constructions de triangles – se révèle intéressant : on propose, par exemple, de *tracer trois triangles non superposables dont la mesure de l'aire est donnée* ou bien de *tracer un triangle dont la mesure de l'aire et une hauteur sont données*.

Dans un chapitre intitulé *"GROS PLAN" SUR LES QUADRILATERES USUELS*, les auteurs annoncent que l'on va *étudier le parallélogramme en liaison avec les propriétés de la symétrie centrale, introduite au chapitre précédent*. Une activité préparatoire est consacrée à l'*aire du parallélogramme* en la reliant à l'aire du rectangle. Ici, on amène à considérer que *des parallélogrammes ayant les bases et les hauteurs associées de même longueur ont la même aire* et que, *en décomposant convenablement un parallélogramme, on peut le ramener à un rectangle de même aire* (10). Soulignons que ces propriétés ne sont pas exposées mais elles guident implicitement l'activité présentée d'une manière ostensive et graphique à travers un *film* qui montre la transformation d'un parallélogramme en rectangle.

Dans les pages de cours, on écrit la *formule de calcul de l'aire d'un parallélogramme* (10M) en se limitant à fournir un dessin qui *montre* que, suivant la base choisie, la hauteur peut "tomber" à l'extérieur du parallélogramme. Enfin, sous la rubrique *Pour résoudre un problème*, deux exercices sont proposés, l'un portant sur le calcul et l'autre sur la comparaison d'aires. Notamment, dans ce dernier, on demande de comparer les aires des deux triangles obtenus en traçant une diagonale d'un parallélogramme. La résolution se fonde sur les invariants de la symétrie centrale : à l'aide d'une preuve qui relève de l'*évidence des raisons*, on établit que les deux triangles sont symétriques par rapport au centre de symétrie du parallélogramme pour en conclure qu'ils ont la même aire. Or, dans un chapitre précédent, on a admis que *deux figures symétriques sont superposables*, ce dernier terme

étant utilisé dans son acception commune sans pourtant le relier à la notion d'aire. C'est donc seulement dans cet exercice que l'invariance des aires sous l'effet d'une isométrie devrait se dévoiler et le terme *superposable* acquérir une signification plus précise.

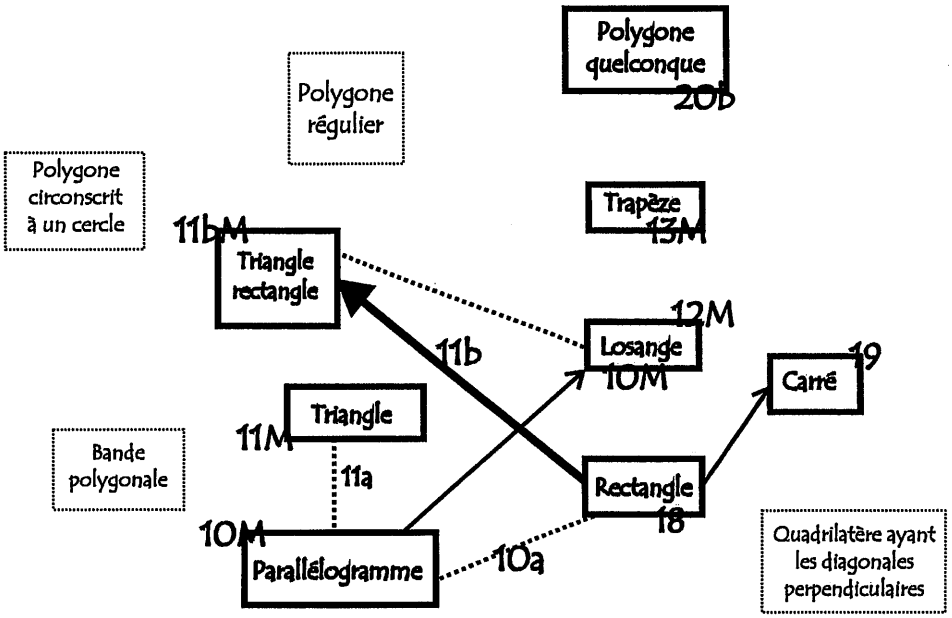
Dans les pages d'activités pratiques, on trouve des exercices à résoudre dans les différents cadres. Quelques exercices permettent de considérer que *des polygones qui sont différences de polygones superposables ont la même aire, sans avoir la même forme* (9). On relie encore les constructions aux aires : dans ce cas, on propose des exercices à résoudre dans un cadre purement géométrique[20] où il s'agit de comparer des aires ; aucun dessin n'accompagne l'énoncé.
C'est enfin dans un exercice que l'on retrouve une technique pour relier la formule de calcul de l'aire d'un triangle à celle du parallélogramme en passant par la symétrie centrale : puisque l'invariance des aires sous l'effet d'une isométrie n'a pas encore été explicitement introduite sinon à travers le biais de la notion de superposabilité, l'élève devrait se reporter à l'exercice résolu où l'on *prouve* que le parallélogramme obtenu par la symétrie de centre le milieu d'un côté du triangle est constitué de deux triangles superposables.
Deux exercices portent sur le losange. Dans l'un, on demande de justifier l'égalité (d×d'):2 où d et d' sont les longueurs des diagonales ; dans l'autre, on amène l'élève à envisager le losange comme un parallélogramme particulier dont l'aire est calculée à l'aide de la formule générale (10M).

Le manuel HAC4^e. Les formules de calcul des aires apparaissent dans un chapitre de rappels de connaissances acquises antérieurement ; parmi celles-ci on trouve la *formule de calcul de l'aire d'un trapèze* (13M) dont aucune activité préparatoire n'a pas été proposée dans aucun tome de la collection. Dans le chapitre consacré au *théorème de Pythagore* (24M), un bon nombre d'exercices conduisent à utiliser les formules de calcul des aires, cela afin d'appliquer convenablement le théorème en question.

Les remarques relatives à cette collection sont les mêmes que dans la collection précédente. En plus, il nous paraît que les auteurs considèrent les formules des aires des polygones fondamentaux comme des objets de connaissance déjà consolidée : les diverses activités préparatoires proposées semblent avoir plutôt le statut de rappel et d'approfondissement éventuel que d'introduction[21]. De même ici, les observations recueillies nous conduisent à reconstituer un réseau assez *pauvre*.

[20] Ici, on précise clairement qu'il ne faut pas effectuer de calculs.
[21] En effet, les formules de calcul des aires sont introduites depuis l'école primaire.

Le réseau conceptuel visualisé relatif à la collection française HAC



Le manuel MAR

Ici, un chapitre entier est consacré à la notion d'*aire* et de *mesure d'aire* de figures polygonales. Pour distinguer les deux notions, l'objet et le nombre, on introduit tout d'abord la notion d'*équivalence de figures*. Comme nous l'avons précisé plus haut, l'enchaînement adopté est en gros le suivant :

où les deux premiers passages sont considérés comme évidents et déjà acquis alors que la notion d'équivalence de figures est introduite d'une manière intuitive. Notamment, on évoque deux maquettes découpées dans une même matière (en carton ou en fer laminé) ayant une épaisseur uniforme. En pesant les deux maquettes, si elles ont le même poids, alors on conclut que leurs superficies sont les mêmes, d'où on introduit la locution *figures équivalentes* et on établit la définition suivante :

"Deux figures planes sont équivalentes lorsqu'elles ont la même superficie". (6)

Après avoir discuté les critères d'équivalence des figures planes (8b à 9), les auteurs précisent que, puisque la superficie est une grandeur, elle peut être mesurée en choisissant convenablement une unité de mesure (15). Par la suite, les formules de calcul des aires sont proposées selon l'ordre suivant :

Formule de calcul de l'aire d'un…	
Rectangle (18)	Partage d'un rectangle en carrés congruents choisis comme unité d'aire
Carré (19)	Rectangle particulier
Parallélogramme (10M)	(10)
Triangle (11aM)	(11a)
Triangle rectangle (11aM)	Triangle particulier
Losange (12M)	Parallélogramme particulier (12)
Quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires (12M)	(12)
Carré (12M)	Losange particulier
Trapèze (13M)	(13a)
Polygone régulier (14dM)	(11aM)
Polygone circonscrit à un cercle (14eM)	(14e)
Bande polygonale (20a)	Différence d'aires
Polygone quelconque (20b)	Somme d'aires de polygones connus

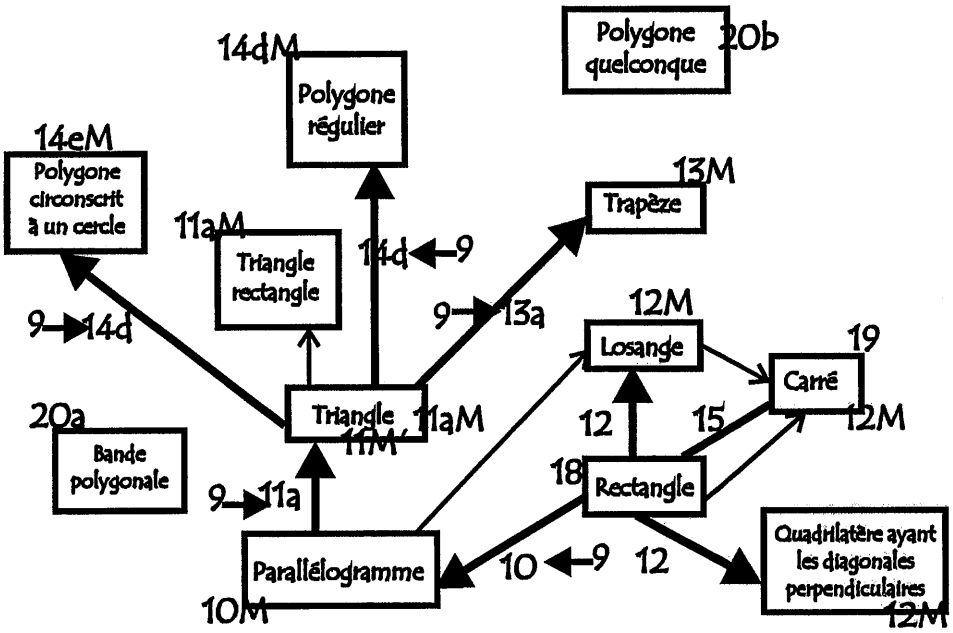
Les preuves qui permettent de valider les résultats sont exposées d'une manière magistrale. Les types de preuves sont variés : souvent c'est l'*évidence des raisons* qui permet de parvenir à un résultat, d'autres fois c'est l'*évidence des faits*. Lorsque l'on prouve l'équivalence d'un trapèze et d'un triangle, la preuve produite porte la marque de l'*exemple générique euclidien* et, d'ailleurs, il s'agit de la même preuve que l'on trouve dans le manuel CAT s'adressant à des élèves de l'ESS. D'après nous, ce qui est le plus important à remarquer c'est que dans aucun cas l'élève n'est incité à agir et découvrir telle ou telle propriété : bien que la propriété soit explicitement énoncée après la preuve, *la découverte est tout à fait fictive* car aucune initiative n'est laissée à l'apprenant.

Dans la partie consacrée aux activités pratiques, on trouve beaucoup d'exercices, la plupart étant à résoudre dans un cadre numérique et dont l'énoncé est standard (*Calculez l'aire de…*). Il s'agit d'exercices dont la difficulté est croissante : il faut mobiliser les connaissances exposées dans la partie théorique et les étapes à enchaîner se complexifient graduellement. Les énoncés ne sont pas toujours accompagnés d'un dessin ; quand ce dessin existe, il n'est pas nécessairement codé. Concernant les exercices à résoudre dans un cadre géométrique, on propose aussi des activités de manipulation (*Construisez une maquette de… et découpez-la…disposez les parties de manière à…*).

La manière dont la matière en question est présentée semble être un compromis entre un souci académique et une exigence pédagogique qui voudrait tenir compte de l'âge des élèves auxquels l'auteur s'adresse. La présentation des contenus est suffisamment simplifiée, tout en essayant de préserver une cohérence d'un point de vue mathématique : la distinction entre grandeur et nombre

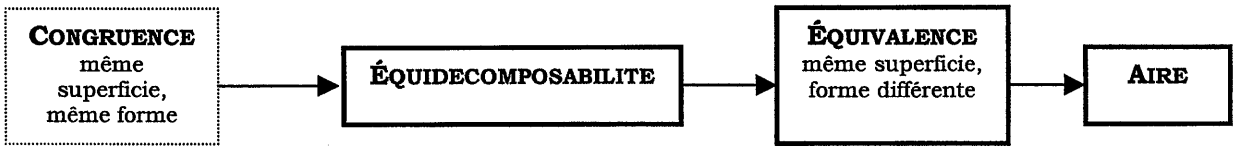
apparaît d'une manière assez claire. Toutefois, les méthodes pédagogiques sous-jacentes n'apparaissent pas très convaincantes : l'exposition des contenus se fait toujours d'une manière magistrale, la volonté de solliciter l'élève à agir apparaît plutôt comme une intention inachevée.
C'est donc ce souci académique qui a permis de reconstituer un réseau assez riche.

Le réseau conceptuel visualisé relatif au manuel italien MAR



Le manuel BOV

Ici, un chapitre entier est consacré à la notion d'*aire* et de *mesure d'aire* de figures polygonales. On suit la même procédure que dans le manuel MAR, sauf que l'on explicite la méthode d'*équidécomposabilité* à travers un exemple sur un cas en précisant qu'elle permet d'établir l'équivalence de figures planes :



L'ordre de présentation des formules de calcul est aussi le même. Seulement, la *formule de calcul de l'aire du trapèze* est justifiée en passant par le parallélogramme (13b) : on considère qu'un trapèze est équivalent à la moitié d'un parallélogramme de même hauteur et ayant pour base la somme des bases du trapèze. Finalement, on considère implicitement le symétrique du trapèze par rapport au milieu d'un coté non parallèle de celui-ci. Voici ci-après un extrait du paragraphe concernant cet objet :

"Construisez avec du carton une maquette d'un trapèze quelconque ABCD, et puis un autre égal à celui-ci et ré-assemblez-les de manière que la petite base de l'un soit le prolongement de la grande base de l'autre et vice-versa. Vous obtiendrez ainsi un quadrilatère AEFD qui, ayant les côtés opposés [AE] et [DF] égaux et

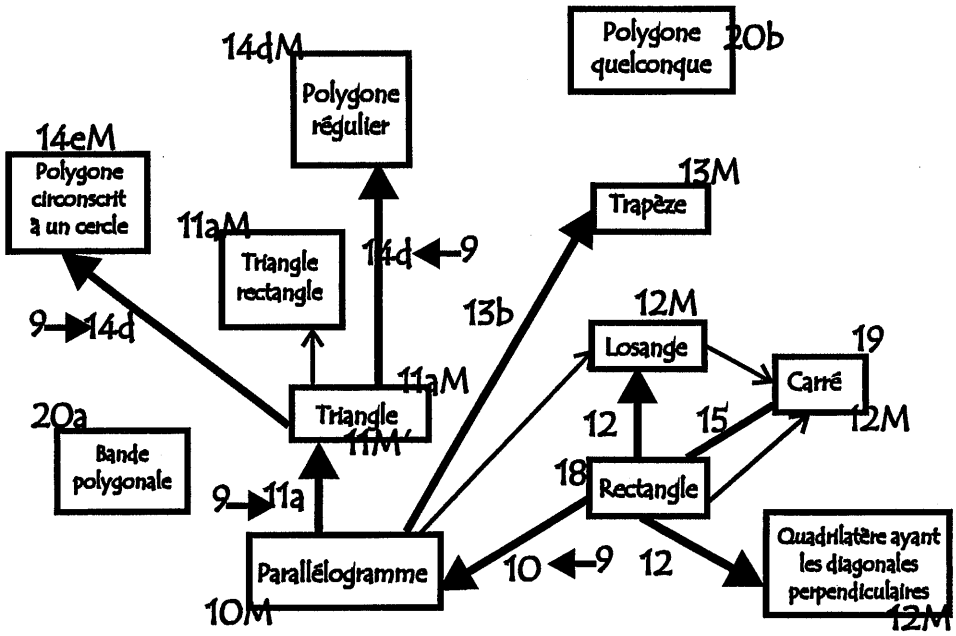
parallèles, est un parallélogramme[22]. Il est évident que ce parallélogramme – qui a pour hauteur la même hauteur que le trapèze et pour base la somme de ses bases - est équivalent au double du trapèze en question...".

Ici, l'incitation à agir ainsi que la découverte demeurent fictives : après avoir proposé au lecteur/apprenant la réalisation des deux maquettes, on aurait bien pu lui poser des questions qui lui permettent d'établir tout seul le résultat visé ; toutefois, par la suite, tout est dit et il ne reste qu'à lire et apprendre le résultat. Le style de présentation des preuves produites est analogue dans les autres paragraphes.

Dans la partie consacrée aux activités pratiques, on trouve beaucoup d'exercices de difficulté croissante, la plupart étant à résoudre dans un cadre numérique et dont l'énoncé est standard. Parmi les exercices à résoudre dans un cadre géométrique, des exercices de manipulation sont aussi proposés.

De même ici, la manière dont la matière en question est présentée apparaît comme un compromis entre un souci académique et une exigence pédagogique qui voudrait tenir compte de l'âge des élèves auxquels les auteurs s'adressent. La présentation des contenus est suffisamment simplifiée, tout en essayant de préserver une cohérence d'un point de vue mathématique : la distinction entre grandeur et nombre apparaît d'une manière assez claire. L'exposition des contenus se faisant toujours d'une manière magistrale, la volonté de solliciter l'élève à agir apparaît plutôt comme une intention inachevée. C'est donc ce souci académique qui a permis de reconstituer un réseau assez *riche*.

Le réseau conceptuel visualisé relatif au manuel italien BOV

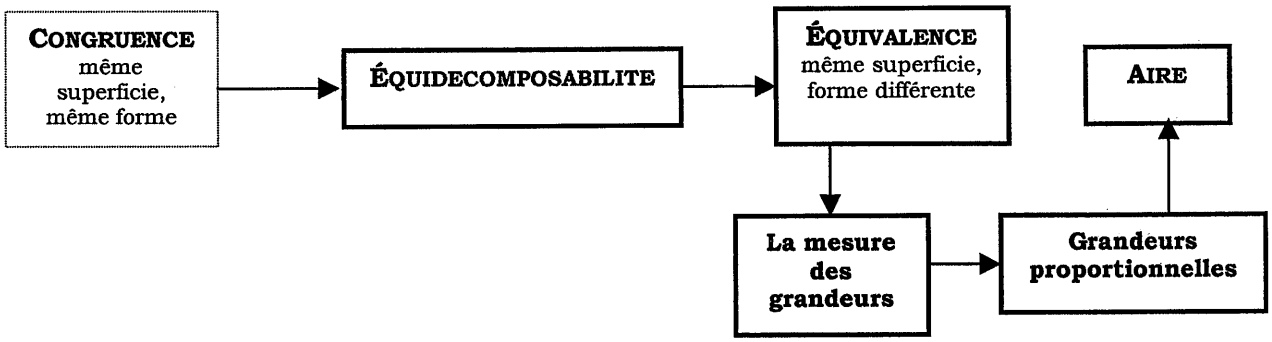


[22] Ici, un numéro entre parenthèses indique la référence de la propriété qui permet de justifier l'assertion.

Le manuel CAT

Ici, un chapitre est consacré à la notion d'aire. Ensuite, après avoir exposé la théorie des grandeurs et des proportions, on consacre un paragraphe à la mesure de l'aire des polygones.

Le chapitre consacré à l'aire s'intitule *POLYGONES EQUIDECOMPOSABLES*. Ici, on donne d'abord une idée expérimentale de la *notion d'équivalence* pour souligner ensuite l'intention d'introduire d'une manière rigoureuse l'équivalence des polygones. L'enchaînement adopté suit le schéma ci-après ; la notion de congruence est abordée ailleurs, le lien avec les aires se fait d'une manière spontanée.



On définit donc la notion d'*équidécomposabilité* (1) et l'on établit le lien entre avec la congruence (2) ; on prouve ensuite qu'il s'agit d'une relation d'équivalence ainsi que d'autres propriétés (3 à 5). A partir de là, on annonce que :

> "Pour démontrer que **deux polygones A et B sont équivalents**, nous prouverons que **A et B sont les sommes de polygones congruents** (c'est-à-dire **équidécomposables**) ou bien qu'ils sont les **différences** de polygones congruents". (9)

en reliant ainsi l'équidécomposabilité à l'équivalence, ce qui amène à prouver les propriétés (10 à 14) qui permettront par la suite d'établir les formules de calcul des aires de quelques polygones fondamentaux.

Les activités pratiques relatives à ce chapitre sont des propriétés à prouver dans un cadre purement géométrique à l'aide des propositions établies dans la partie théorique (*Démontrer que...est équivalent à ...*) ou des figures équivalentes à reproduire suivant des conditions imposées (*Tracer un... équivalent à un... et tel que...*). Il s'agit surtout d'activités d'approfondissement où il faut enchaîner plusieurs étapes avant d'aboutir. Notamment, on retrouve *les démonstrations "géométriques"* (à prouver) *de trois identités remarquables* (les énoncés sont accompagnés d'un dessin).

Avant d'aborder la mesure de l'aire, deux chapitres sont consacrés à la *théorie des grandeurs et des proportions*. Dans le premier chapitre, entre autres, on établit que *la **mesure** d'une grandeur par rapport à une **unité** (de mesure) fixée est le **"nombre réel positif"** qui exprime le **rapport** entre la première grandeur et celle fixée comme unitaire* (15). On définit donc l'*aire* comme la *mesure d'une superficie*. Dans le deuxième chapitre, après avoir développé la théorie des proportions, on introduit

alors les aires de polygones.

On fixe comme superficie unitaire le carré construit sur un segment choisi en tant qu'unité des longueurs. Grâce à l'une des propriétés de grandeurs directement proportionnelles, on prouve ensuite la *formule de calcul de l'aire d'un rectangle* (18). En s'appuyant alors sur les théorèmes relatifs aux polygones équivalents, on prouve les autres formules selon l'ordre suivant :

Formule de calcul de l'aire d'un...	
Carré (19)	Rectangle particulier
Parallélogramme (10M)	(10)
Triangle (11aM)	(11a)
Trapèze (13M)	(13a)
Polygone régulier[23] (14dM)	(11aM)

Les *formules de calcul de l'aire d'un triangle rectangle en fonction des côtés de l'angle droit* (11M), *d'un losange et d'un carré en fonction de la diagonale* (12M) sont fournies dans la partie des activités pratiques, dans un paragraphe récapitulatif sur la géométrie plane. Notamment, la formule de calcul de l'aire du carré en fonction de la longueur de la diagonale est prouvée à l'aide du *théorème de Pythagore* (24M)[24].

Dans la partie d'activités pratiques consacrée aux exercices à résoudre dans un cadre géométrique, on trouve des problèmes de démonstration et de constructions où il faut mobiliser les résultats relatifs à l'équivalence de figures planes ; ici, on propose aussi une relecture en termes géométriques de quelques identités remarquables. Dans la partie consacrée aux exercices à résoudre dans un cadre algébrique, on trouve des exercices de difficulté croissante mais surtout des textes qui demandent de la réflexion où il est nécessaire d'enchaîner plusieurs étapes avant d'arriver au résultat.

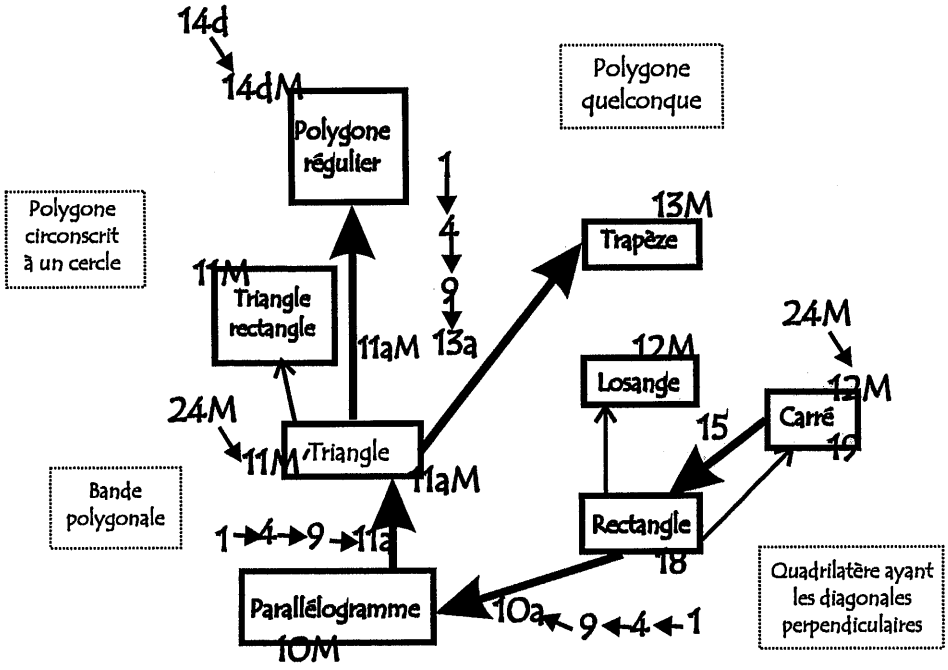
Comme les auteurs l'annoncent dans la préface du livre, cet ouvrage ne renonce pas à la rigueur, un souci académique étant le moteur fondamental dans son organisation interne. C'est ainsi que, pour que l'apprenant puisse saisir la nécessité de cette rigueur, il faut absolument qu'il ait déjà développé une *attitude rationnelle*, autrement la manière dont la matière en question est présentée lui apparaît comme stérile et oiseuse. Dans cette optique, l'intuition et l'expérience trouvent encore leur place : l'une pour ne pas perdre de vue le point de départ et les objectifs, l'autre en tant qu'action mentale. Évidemment, le réseau constitué se présente très *riche*.

---

[23] Remarquons au passage que, de la formule de calcul de l'aire d'un polygone (14dM), on déduit la proposition 14d en suivant finalement une procédure inverse par rapport aux autres objets. En fait, ici, les auteurs font implicitement appel au *Théorème de Bolyai-Gerwien* (*Si deux polygones ont la même aire, alors elles sont équidécomposables*).

[24] "Dans un carré, soit l et d les mesures respectives du côté et de la diagonale, soit S son aire. On a $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$ (*théorème de Pythagore*). On déduit que $d = l\sqrt{2}$, $S = l^2 = d^2/2$".

Le réseau conceptuel visualisé relatif au manuel italien CAT



La collection MAT

La notion d'aire et de mesure d'aire sont abordées dans le deuxième tome : on leur consacre deux paragraphes, le premier contenu dans une unité intitulée *COMPARAISON DE SEGMENTS, D'ARCS ET DE SUPERFICIES* et l'autre dans une unité intitulée *SEGMENTS PROPORTIONNELS*.

Dans le premier paragraphe, on définit la notion d'*équidécomposabilité* (1) et l'on prouve qu'il s'agit d'une relation d'équivalence (3). On fournit alors la définition de *polygones équivalents* :

"Deux polygones sont équivalents lorsqu'ils sont équidécomposables". (6)

L'objectif est ensuite celui de prouver que *tout polygone est équivalent à un rectangle* (14c). Le paragraphe se termine avec la définition de l'aire d'un carré de côté *l* (16a).

Comme dans le manuel précédent, les activités pratiques relatives à ce paragraphe sont des propriétés à prouver dans un cadre purement géométrique à l'aide des propositions établies dans la partie théorique ou des figures équivalentes à reproduire suivant des conditions imposées. Elles sont peu nombreuses et aucune n'est accompagnée de dessin. Il s'agit surtout d'activités d'approfondissement où il faut enchaîner plusieurs étapes avant d'aboutir. De même ici, on retrouve l'interprétation géométrique de trois identités remarquables.

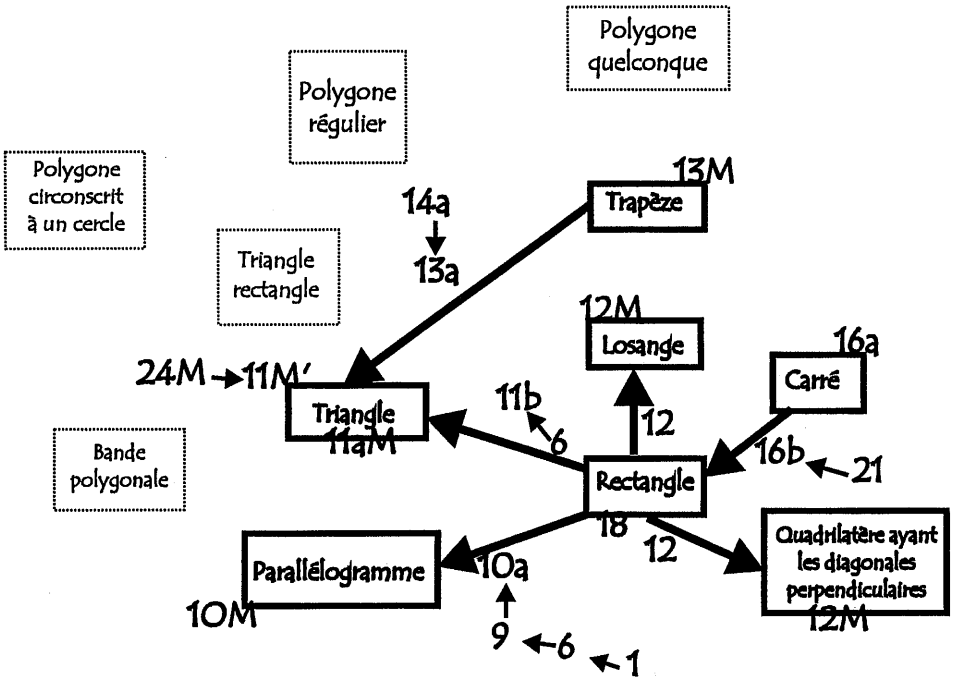
Dans le deuxième paragraphe, après avoir établi les *théorèmes d'Euclide*[25], on exploite ces outils pour prouver que *tout rectangle de base b et de hauteur h est équivalent à un carré d'aire* $l^2 = b \times h$ (16b). Pusique *tout polygone est équivalent à un rectangle* (14c), on déduit que *tout polygone est équivalent à un carré*, d'où la définition de l'*aire d'un polygone* (16c). C'est ainsi que l'on prouve les formules des aires selon l'ordre suivant :

Formule de calcul de l'aire d'un...	
Rectangle	(18)
Parallélogramme (10M)	(10)
Triangle (11aM)	(11a)
Trapèze (13M)	(13a)

Les *formules de calcul de l'aire d'un losange* et *d'un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires* (12M) sont fournies dans un exercice résolu.

Aucune activité pratique spécifique n'est proposée, les formules étant utiles dans des exercices de nature différente à résoudre surtout dans un cadre algébrique. D'ailleurs, on saisit bien que la partie théorique est développée dans le but de formaliser la notion d'aire car, au moment de fournir les formules, les auteurs affirment qu'ils vont donner des résultats que *vous* [*les élèves*] *connaissez déjà*.

Le réseau conceptuel visualisé relatif à la collection italienne MAT



[25] Ces théorèmes sont démontrés à l'aide des *critères de similitude des triangles semblables* et donc en exploitant les propriétés des proportions.

Cet ouvrage apparaît comme un compromis entre le classicisme et le modernisme. A propos de la matière en question, il fournit l'essentiel sans pourtant abandonner complètement le style magistral des ouvrages classiques. Les exigences pédagogiques s'intègrent donc à une nécessité de préserver une harmonie d'un point de vue mathématique. C'est ainsi que nous avons constitué un réseau qui se présente assez *riche* mais cependant moins que les autres manuels italiens.

Conclusions

Grâce à la réalisation des *réseaux conceptuels* (cf. la fin de ce chapitre pour une vue d'ensemble des six réseaux constitués) et à la *liste des propositions* correspondantes, nous avons pu constater que le rapport à l'objet *aires* est tout à fait différent en passant des manuels d'une institution aux manuels de l'autre.

Dans le chapitre 2, lors de l'analyse des textes officiels, nous avons eu un premier recours aux manuels scolaires en tant qu'outil permettant d'établir d'une manière détaillée une répartition des contenus suivant les années scolaires. Dans l'institution **italienne**, nous avions constaté que ces contenus avancent suivant un développement relatif au savoir : des objets primitifs aux objets plus complexes, l'organisation proposée respecte assez fidèlement celle proposée dans un ouvrage classique de géométrie. En revanche, dans l'institution **française**, les contenus avancent en conformité avec un développement cognitif supposé, du plus familier au moins familier, de la perception vers la théorie.
Cette dissemblance peut se percevoir dans *le cas des aires*.

Dans les manuels **français**, on établit les formules de calcul des aires des figures usuelles au moment où l'on étudie les propriétés de ces figures. Par exemple, les formules des aires du parallélogramme et du triangle s'étudient en Cinquième lorsque l'on introduit les propriétés des parallélogrammes en s'appuyant sur la symétrie centrale. Ou encore, la formule de calcul de l'aire d'un triangle rectangle est établie en Sixième en la reliant *naïvement* à la formule du rectangle : cet ordre de présentation semble donc être justifié par le fait que ces deux figures sont plus familières à un élève qui vient de l'école primaire.
Les objets en question semblent souvent avoir un statut de *rappel*, cela sans doute dans l'esprit d'une continuité des programmes du cycle primaire et en conformité avec les textes officiels qui prescrivent d'éviter toute reprise systématique de notions vues antérieurement. Cependant, cette réticence envers la surabondance et la répétition de contenus influe sur leur cohérence : cela se manifeste, par exemple, dans le fait que la distinction entre aire-grandeur et aire-mesure n'est pas toujours facile à saisir.
En effet, nous avons constaté que l'on institutionnalise les formules de calcul des aires alors que les propriétés liées à l'aire-grandeur demeurent implicites : souvent cachées derrière un dessin éloquent pour un œil expert, les quelques propriétés pourraient se dégager mais, sans doute pour des questions de contrat, elles ne sont jamais institutionnalisées. C'est le cas, par exemple, lorsque l'on introduit la

formule de l'aire d'un parallélogramme en le reliant au rectangle : ici, la notion d'*équidécomposabilité* et les propriétés qui en découlent ne sont pas exposées alors qu'elles permettraient de justifier cette formule et lui donner du sens.

En revanche, dans les manuels **italiens**, le chapitre sur les aires est présenté comme un bloc unique, quand on a abordé les propriétés des divers polygones (triangles, quadrilatères particuliers, etc.). Il est systématiquement repris en passant d'un cycle à l'autre, la différence portant *éventuellement* sur les types de preuves proposées ainsi que sur le niveau d'approfondissement. En effet, le point de vue axiomatique surgit davantage dans les deux manuels s'adressant aux élèves de l'ESS.
Ici, c'est un souci de cohérence sur le plan de la théorie qui conduit à organiser ce chapitre de la manière que nous avons pu voir plus haut. Les formules de calcul des aires des divers objets géométriques sont justifiées en s'appuyant explicitement sur les notions d'*équidécomposabilité* et d'*équivalence* : la place donnée au traitement géométrique des aires devrait permettre à l'élève d'apprendre les formules en leur attribuant une signification plus consistante ainsi qu'à discerner plus aisément les notions de *congruence* et d'*équivalence*.
Par exemple, dans les manuels MAR et CAT, pour justifier la formule de l'aire d'un trapèze, on prouve d'abord qu'*un trapèze est équivalent à un triangle de même hauteur et dont la base est égale à la somme des longueurs des bases du trapèze*. A ce propos, remarquons que le type de preuve qui accompagne ce théorème est le même dans les deux ouvrages. Cela nous amène à faire des considérations plus générales sur les méthodes pédagogiques sous-jacentes dans les divers manuels analysés, nous y reviendrons plus loin dans le paragraphe qui termine ce chapitre.

Il nous paraît intéressant de remarquer que, dans les manuels italiens, le chapitre sur les aires est présenté d'une manière plus exhaustive que dans les manuels français aussi d'un autre point de vue : en effet, en comparant les divers réseaux établis, on voit bien que quelques objets apparaissent dans les réseaux relatifs aux manuels italiens alors qu'ils ne sont pas pris en compte dans les réseaux relatifs aux manuels français. C'est le cas, par exemple, des polygones circonscrits à un cercle : dans les deux manuels pour l'ESI, la formule de l'aire d'un polygone circonscrit est établie à l'aide d'un exemple générique en s'appuyant sur les notions d'*équidécomposabilité* et d'*équivalence*. En revanche, cette formule et, en général, les polygones circonscrits ne sont pas étudiés au Collège.

C'est ainsi que nous avons pu repérer les premiers éléments pour confirmer que la *tradition euclidienne* influe fortement sur le développement du savoir géométrique dans les divers manuels scolaires italiens : une idée d'exhaustivité semble guider les auteurs dans les choix de contenus et dans leurs relations mutuelles.

III. AUTOUR DE LA CONFIGURATION DU TRIANGLE DES MILIEUX

Comme nous l'avons annoncé plus haut, dans cette deuxième phase de l'analyse des manuels scolaires, nous nous sommes intéressée aux groupes d'objets géométriques suivants :

A. *Définition de droites parallèles et propriétés éventuelles.*

B. *Caractérisation angulaire du parallélisme.*

C. *Distance d'un point à une droite. Hauteur d'un triangle, hauteur d'un parallélogramme.*

D. *Propriétés caractéristiques du parallélogramme.*

E. *Théorème des milieux et sa réciproque.*

F. *Théorème de Thalès dans le triangle et sa réciproque.*

Dans un premier temps, nous avons localisé ces différents objets en dressant une liste pour **chacun** de manuels considérés (cf. **Tableaux 4.9 à 4.14**, page 260 et suivantes). Ce choix nous a paru comme le plus efficace car, au sein d'un même groupe, le nombre de propositions peut varier en passant d'un manuel à l'autre.

Pour la réalisation de **chaque** liste, nous avons suivi les critères suivants.

- Les propositions sont casées suivant l'ordre d'apparition dans la collection ou le manuel et en respectant le langage utilisé par les auteurs d'une manière la plus fidèle possible.
- Les propositions sont codées :
  - une *lettre en majuscule* indique le groupe auquel la proposition appartient, cela suivant le codage utilisé ci-dessus (A, B, C, ...) ;
  - au sein du même groupe, un *numéro* indique l'ordre d'apparition dans la liste ;
  - concernant les *théorèmes*, si un énoncé est le réciproque d'un autre, nous les indiquons avec une *lettre en minuscule* dont l'ordre alphabétique permet aussi de saisir l'ordre d'apparition ;
  - à propos des *constructions géométriques*, nous les incluons dans tel ou tel groupe selon la tendance qui prédomine dans le manuel à relier sa justification à tel résultat ou à tel autre. C'est ainsi que, dans un même tableau, une construction peut apparaître à plusieurs reprises.
- Pour les ouvrages répartis par années, un trait épais marque le passage d'un tome à l'autre ; le passage d'un chapitre à l'autre est signalé par un trait pointillé.

C'est ainsi que la comparaison de ces listes permet déjà de saisir les premières analogies et différences substantielles sur l'*habitat* des divers objets ainsi que sur le langage utilisé par les divers auteurs, cela surtout dans le cas de certains objets comme, par exemple, le *théorème de Thalès*.

Les objets considérés suivent – au détail près – l'ordre que nous avons choisi. Néanmoins, il ne faut pas oublier que, pour chaque manuel, il s'agit d'une partie d'un texte du savoir dont l'ordre de

présentation des objets qui le constituent, a été *grosso modo* établi dans le chapitre 2 lorsque nous avons eu recours au manuel en tant qu'outil d'exploration. Ici, le cas échéant, nous signalons les relations éventuelles des objets considérés avec les autres parties du manuel.

Ci-dessous, nous présentons les six listes des propositions. Nous commentons ensuite les contenus des listes des divers manuels selon le schéma reporté ci-dessus. Le cas échéant, nous nous référons au codage établi.

Tableau 4.9 - Autour de la configuration du triangle des milieux : la collection HAT

A1a	*Propriété.* Si deux droites d et d' sont perpendiculaires à une même troisième D, alors ces deux droites sont parallèles : SI d ⊥ D et d' ⊥ D, ALORS d // d'.
A1b	*Propriété.* Si deux droites d et d' sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre : SI d // d' et D ⊥ d, ALORS D ⊥ d'
D1	*Définition.* Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ses **côtés opposés parallèles.**
D2	*Propriété.* Les **côtés opposés** d'un parallélogramme ont **même longueur.**
D3	(*Construction* au compas d'un parallélogramme connaissant ses trois premiers sommets).
D4	(*Construction* au compas et à la règle d'une droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée).
B1	*Propriétés*[26]. • Si les droites **d** et **d'** sont parallèles alors les angles **alternes internes** sont **symétriques** par rapport à I : ils ont donc **même mesure.** • Si les droites **d** et **d'** sont parallèles alors les angles **correspondants** ont **même mesure.**
B2	*Propriétés réciproques.* • Si les angles **alternes internes** ont même mesure **alors d** et **d'** sont parallèles. • Si les angles **correspondants** ont même mesure **alors d** et **d'** sont parallèles.
D1	*Définition du parallélogramme.* Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a ses **côtés opposés parallèles.**
D2a	*Propriétés.* Un **parallélogramme** admet un **centre de symétrie** : le point d'intersection de ses **deux diagonales.** **Conséquence pour les diagonales.** Les **diagonales** d'un parallélogramme se coupent en leurs **milieux.** **Conséquence pour les côtés.** Les **côtés opposés** d'un parallélogramme ont **même longueur.** **Conséquence pour les angles.** Les **angles opposés** d'un parallélogramme ont **même mesure.**
D2b	*Conditions pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme.* Un quadrilatère vérifiant **l'une** des conditions suivantes est un parallélogramme. • Les côtés opposés sont parallèles. • Les diagonales se coupent en leurs milieux. • Les côtés opposés ont même longueur. • Les angles opposés ont même mesure. • Deux côtés opposés sont parallèles et ont même longueur.
C1	[Dans un triangle]La **hauteur** issue de A est la droite passant par A, perpendiculaire à (BC)[27].
A2	*Définition.* Deux droites d et d' sont parallèles lorsqu'elles n'ont aucun point commun ou lorsqu'elles sont confondues.
A3	*Axiome d'Euclide.* Étant donnés une droite d et un point A, il existe une seule droite parallèle à d et passant par A.
A4	*Propriété.* Des droites parallèles à une troisième droite sont parallèles entre elles.
B3	*Propriété.* Si deux droites sont parallèles, **alors** toute sécante à l'une est sécante à l'autre.
E1a	*Propriété.* La droite parallèle à un côté d'un triangle et passant par le milieu d'un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.
E1b	*Propriété de la droite des milieux.* Dans un triangle ABC, la droite passant par les milieux I et J des côtés [AB] et [AC] est parallèle au troisième côté [BC]. De plus, IJ = ½ BC.
E2	(*Construction* : partage d'un segment en longueurs égales).
C2	*Définition.* La distance du point A à la droite d est AH, le point H étant la projection orthogonale de A sur D.
F1a	*Propriété de Thalès et sa réciproque*[28]. *Propriété de Thalès.* Soit un triangle ABC, un point M sur (AB) et un point N sur (AC) : les triangles ABC et AMN ont un "coin commun" en A, la position de M par rapport à A et B est la même que celle de N par rapport à A et C. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$. Autrement dit : si les triangles ABC et AMN ont leurs troisièmes côtés parallèles, alors ils ont leurs trois côtés proportionnels.
F1b	*Propriété réciproque.* Si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
F2	(*Construction* : partage d'un segment en n parties égales).
F3	(*Construction* : étant donnés trois segments, construire le segment quatrième proportionnel).

[26] Les énoncé sont accompagnés d'un dessin codé et de la phrase suivante : *lorsque les droites **d** et **d'** sont parallèles, le milieu **I** de [AB] est centre de symétrie de la figure*, où A et B sont les points d'intersections respectifs des deux droites parallèles avec la sécante.

[27] La définition est accompagnée d'un dessin codé représentant un triangle ABC, le pied de la hauteur n'est pas nommé. Remarquons que la hauteur tracée est en réalité un segment : il part de A et il s'arrête sur le côté opposé [BC].

[28] Ici, on considère trois cas de figure. Cf. la Figure 4.11, page 291.

Tableau 4.10 - Autour de la configuration du triangle des milieux : la collection HAC

A1	*Définition.* Deux droites qui ne se coupent pas sont parallèles.
A2a	*Propriété.* Lorsqu'on trace deux droites perpendiculaires à une même droite, on obtient deux droites parallèles : si d ⊥ Δ et d' ⊥ Δ, alors d // d'.
A2b	*Propriété.* Si deux droites sont parallèles, à chaque fois que l'on trace une perpendiculaire à l'une, on obtient une perpendiculaire à l'autre : si d // d' et d ⊥ Δ, alors d' ⊥ Δ.
A3	(Construction : tracer la parallèle à une droite donnée passant par un point donné à l'aide de la règle et de l'équerre).
D1	*Définition.* **Parallélogramme** : quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
D2	*Propriété.* Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont la même longuer.
A4	*Propriété.* Lorsque deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles.
B	*Propriété.* Angles formés par deux droites parallèles et une sécante (la propriété et sa réciproque sont fournies à l'aide de dessins codés par des lettres, des nombres et des marques convenablement coloriées en bien distinguant *les données* du *résultat*).
D1	***Définition.*** Un parallélogramme est un quadrilatère ayant les côtés opposés parallèles.
D2a	*Propriétés.* Un parallélogramme admet un centre de symétrie : le point d'intersection de ses deux diagonales. D'où : • Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux. • Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur. • Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux. • Deux angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires.
D2b	***Propriétés.*** Pour être **sûr** qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il **suffit** de savoir : • *ou bien* que ses côtés opposés sont parallèles. • *ou bien* que ses diagonales ont le même milieu (autrement dit : il y a un centre de symétrie[29]). • *ou bien* que ses côtés opposés ont même longueur (le quadrilatère *n'étant pas croisé*).
E1a	*Théorème.* Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté. Le segment qui joint les milieux de deux côté a pour longueur la moitié de celle du troisième côté.
E1b	*Théorème.* Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un autre côté coupe le troisième côté en son milieu.

F1a	*Le théorème de Thalès relatif au triangle*[30].
	Définitions. La configuration des deux triangles. Il s'agit de deux triangles déterminés par deux droites sécantes coupées par deux droites parallèles. Dans les deux cas : D ∈ (AB), E ∈ (AC) et (DE) // (BC). Les côtés de même support ou de supports parallèles sont appelés côtés *associés.*
	L'énoncé de Thalès. Dans la configuration des deux triangles, les côtés de l'un sont *proportionnels* aux côtés *associés* de l'autre.
	Autre énoncé. Étant donné deux triangle ABC et ADE, tels que D ∈ (AB), E ∈ (AC) et (DE) // (BC), alors $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\left(ou\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}\right)$.

F1b	*La "réciproque" de Thalès.* Étant donné deux triangles ABC et ADE tels que A, B et D d'une part, et A, C et E d'autre part, soient *alignés* dans le *même ordre.* Si $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, alors les droites (DE) et (BC) sont parallèles. On a, en outre, $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.
F2	(*Construction* d'une quatrième proportionnelle).
F3	(*Construction* : partage d'un segment en n parties égales).

[29] Soulignons que, dans l'activité préparatoire correspondante, les auteurs précisent "Si un quadrilatère *non croisé* a un centre de symétrie…".
[30] Ici, on considère deux cas de figures. Pour cela, cf. Figure 4.11 (a) et (b) à la page 291 où, au lieu M et N, on lira respectivement D et E.

Tableau 4.11 - Autour de la configuration du triangle des milieux : le manuel MAR

A1	*Définition.* Deux droites sont dites parallèles si elles appartiennent au même plan et n'ont aucun point commun ou bien si elles sont confondues.
C1	*Définition.* On appelle distance d'un point à une droite le segment de perpendiculaire menée du point à la droite.
A2	(*Construction* de deux droites parallèles avec la règle et l'équerre).
A3	*Postulat d'Euclide.* Par un point qui n'appartient pas à une droite, on peut mener une seule droite qui lui est parallèle.
B1a	*Propriété.* Deux droites parallèles coupées par une sécante forment – des angles alternes internes égaux – des angles alternes externes égaux – des angles d'un même côté de la sécante internes supplémentaires – des angles d'un même côté de la sécante externes supplémentaires – des angles correspondants égaux.
B1b	*Propriété* (réciproque). Deux droites coupées par une sécante sont parallèles si elles forment un couple – d'angles alternes internes égaux ou bien – d'angles alternes externes égaux ou bien – d'angles d'un même côté de la sécante internes supplémentaires ou bien – d'angles d'un même côté de la sécante externes supplémentaires ou bien – des angles correspondants égaux.
C2	*Propriété.* Si deux droites sont parallèles, les points de l'une ont même distance de l'autre.
A4	(*Construction* : partage d'un segment en un nombre donné de segments congruents).
C3	*Définition.* On appelle *hauteur* d'un triangle associée à un côté le segment de perpendiculaire à la droite support du côté, mené par le sommet opposé. Le côté est nommé *base.*
D1	*Définition.* On appelle *parallélogramme* tout quadrilatère ayant les côtés opposés parallèles.
C4	[*Définition.* Dans tout parallélogramme, chaque côté peut être considéré comme une base]. *Définition.* On appelle *hauteur* d'un parallélogramme la distance des deux parallèles auxquelles la base et le côté opposé appartiennent.
D2	*Propriété.* Tout parallélogramme est partagé par chacune de ses diagonales en deux triangles congruents.
D3a	*Propriété.* Dans tout parallélogramme a. les côtés opposés sont congruents. b. les angles opposés sont congruents. c. les diagonales se coupent réciproquement à moitié d. les angles adjacents à chaque côté sont supplémentaires.
D3b	*Propriété.* Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a a. les côtés opposés congruents ou bien b. les angles opposés congruents ou bien c. les diagonales qui se coupent réciproquement à moitié est un parallélogramme ou bien d. les angles adjacents à chaque côté sont supplémentaires.
D4	*Propriété.* Tout quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et congruents est un parallélogramme.
B2	(Construction de deux droites parallèles à l'aide de la règle et du compas).
F1	*Définitions*[31]. Soit un faisceau de droites parallèles a, b, c, ... interceptées par deux transversales t et t'. les points A et A', B et B', C et C', ... sont dits **correspondants** s'ils sont interceptions d'une même droite du faisceau avec les deux transversales. De même, les segments AB et A'B', CD et C'D', AD et A'D', ... sont dits **correspondants** si leurs extrémités sont des ponts correspondants.
F2	*Théorème de Thalès.* Un faisceau de droites parallèles interceptées par deux transversales déterminent sur une transversale segments directement proportionnels aux segments de l'autre transversale.
F3	*Conséquence du théorème de Thalès.* Toute droite parallèle à un même côté d'un triangle, qui intercepte les deux autres, partage les côtés interceptés en segments proportionnels.
F4	*Conséquence du théorème de Thalès.* La droite parallèle à un côté d'un triangle, menée par le milieu d'un autre côté, partage le troisième côté en deux segments congruents.
F5	(*Construction* du segment quatrième proportionnel de trois segments donnés).
F6	(*Construction* : partage d'un segment en parties proportionnelles à deux segments donnés).
F7	(*Construction* : partage d'un segment en parties proportionnelles à trois ou plus segments donnés).

[31] Cf. Figure 4.12, page 292.

Tableau 4.12 – Autour de la configuration du triangle des milieux : le manuel BOV

C1	*Définition.* La distance d'un point à une droite est la longueur du segment de perpendiculaire menée du point à la droite.
A1	*Définition.* Deux droites sont dites parallèles si elles appartiennent au même plan et n'ont aucun point commun ou bien si elles sont confondues.
A2	(Construction de deux droites parallèles avec la règle et l'équerre).
A3	*Postulat d'Euclide.* Par un point qui n'appartient pas à une droite, on peut mener une seule droite qui lui est parallèle.
B1a	*Propriété.* Deux droites parallèles coupées par une sécante forment des angles alternes internes ou externes égaux, des angles correspondants égaux, des angles d'un même côté de la sécante internes ou externes supplémentaires.
B1b	*Propriété* (réciproque). Deux droites coupées par une sécante sont parallèles si elles forment des angles alternes internes ou externes égaux, des angles correspondants égaux, des angles d'un même côté de la sécante internes ou externes supplémentaires.
C2	*Propriété.* Si deux droites sont parallèles, les points de l'une ont même distance de l'autre.
A4	(*Construction* : partager un segment en un nombre donné de parties égales).
C3	*Définition.* La hauteur d'un triangle associée à un des ses côtés (base) est la distance de ce côté du sommet opposé.
D1	*Définition.* On appelle parallélogramme tout quadrilatère ayant les côtés opposés parallèles.
C4	*Définition.* [Deux côtés opposés d'un parallélogramme s'appellent **bases**], la distance entre les deux est la **hauteur** du parallélogramme.
D2	*Propriété.* Tout parallélogramme est partagé par chacune de ses diagonales en deux triangles congruents.
D3a	*Propriété.* Dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont congruents. Les angles opposés sont congruents. *Propriété.* Dans tout parallélogramme, les diagonales se coupent réciproquement à moitié.
D3b	*Propriété.* Tout quadrilatère ayant les côtés opposés congruents, les angles opposés congruents et le diagonales qui se coupent réciproquement à moitié est un parallélogramme.
D4	*Propriété.* Tout quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et congruents est un parallélogramme.
F1	*Théorème de Thalès.* Un faisceau de droites parallèles détermine sur deux transversales segments correspondants directement proportionnels.
F2	(*Construction* du segment quatrième proportionnel de trois segments donnés *a*, *b*, *c*).
F3	(*Construction* : partager un segment donné *a* en parties directement proportionnelles à deux segments donnés *p* et *q*).

Tableau 4.13 – Autour de la configuration du triangle des milieux : le manuel CAT

A1	*Postulat d'Euclide.* Dans le plan, étant donnés une droite *r* et un point P qui ne lui appartient pas, il existe une seule droite *s* passant par P et n'ayant aucun point en commun avec *r*.
A2	*Définition.* On appelle **parallèles** deux droites *r* et *s* qui sont confondues ou bien qui n'ont aucun point commun.
A3	*Corollaire.* Étant donnés une droite *r* et un point P (qui lui appartient ou non), par P on peut mener une seule droite *s* parallèle à *r*.
C1	*Définition.* Dans un triangle ABC, on appelle **hauteur** relative au côté [BC] le segment de perpendiculaire [AH] mené du sommet A à la droite [BC].
A4	*Théorème.* Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles. *Théorème.* Si la droite *a* est parallèle à la droite *b*, alors la droite *b* est parallèle à la droite *a*. *Théorème.* Toute droite est parallèle à elle-même.
A5	*Théorème.* Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.
B1a	*Théorème.* Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes internes égaux, alors elles sont parallèles.
B2a	*Théorème.* Si deux droites coupées par une sécante forment – deux angles alternes externes égaux – ou deux angles correspondants égaux – ou deux angles d'un même côté de la sécante (internes ou externes) supplémentaires alors elles sont parallèles.
B1b	*Théorème* (réciproque). Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles forment deux angles alternes internes égaux.
B2b	*Théorème* (réciproque). Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles forment – deux angles alternes externes égaux – ou deux angles correspondants égaux – ou deux angles d'un même côté de la sécante (internes ou externes) supplémentaires.
B3	*Corollaire.* Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
B4	*Corollaire.* Des droites perpendiculaires à une troisième sont perpendiculaires entre elles.
B5	*Corollaire.* Deux droites perpendiculaires à deux droites sécantes sont sécantes.
B6	Construction de deux droites parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre.
C2	*Définition.* On appelle **distance d'un point à une droite** le segment de perpendiculaire mené d'un point à une droite.
D1	*Définition.* On appelle **parallélogramme** un quadrilatère ayant les côtés deux à deux parallèles...*les parallélogrammes sont quadrilatères convexes.*
C3	*Définition.* [On appelle **bases** les deux côtés opposés d'un parallélogramme ABCD, soit [AB] et [CD] et] **hauteur** du parallélogramme leur distance [DH][32].
D2a	*Théorèmes*[33]. Dans tout parallélogramme : 1. les sommets se correspondent dans la symétrie de centre le point de concours des diagonales ; 2. les diagonales se coupent en leur milieu ; 3. les côtés opposés sont égaux[34] ; 4. les triangles dans lesquels il est partagé par chacune de ses diagonales sont égaux ; 5. les angles opposés sont égaux ; *6.* les angles adjacents à chaque côté sont supplémentaires.
D3a	*Théorème.* Tout parallélogramme est une figure symétrique par rapport au point de concours des diagonales.
D3b	*Théorème.* Si un quadrilatère a un centre de symétrie, alors il est un parallélogramme.

[32] Dans la figure qui accompagne cette définition, on voit bien qu'il faut considérer la *distance d'un point* (un sommet du parallélogramme) *à une droite* (côté opposé à ce sommet), la définition de *distance de deux droites parallèles* se trouvant plus loin.

[33] Ces théorèmes sont prouvés suivant deux procédures différentes : l'une en s'appuyant sur les *critères de congruence des triangles* et l'autre sur les *propriétés de la symétrie centrale.*

[34] Dans le sens *congruents.*

D2b	*Théorème.* Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme. *Théorème.* Un quadrilatère ayant les côtés deux à deux égaux est un parallélogramme. *Théorème.* Un quadrilatère ayant les angles opposés deux à deux égaux est un parallélogramme. *Théorème.* Un quadrilatère ayant deux côtés opposés égaux et parallèles est un parallélogramme.
E1a	*Théorème.* Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égal à sa moitié.
E2b	*Théorème* (réciproque). Si dans un triangle ABA' (figure) on même par le milieu M du côté [AB] la droite *r* parallèle à [BA], celle-ci coupe le côté [AA'] en son milieu O.
D4	(Construction de deux droites parallèles à l'aide de la règle et du compas).
F1	*Définitions*[35]. On appelle **faisceau de droites parallèles** l'ensemble de toutes les droites du plan qui sont parallèles à une droite donnée *a*. Deux droites r, r' qui croisent la droite a respectivement en les points A, A' croisent aussi toute autre droite du faisceau. Les droites r et r' sont dites **transversales**. Le faisceau de droites parallèles détermine une correspondance biunivoque entre les points des transversales r et r' : deux points, un sur r et l'autre sur r', sont correspondants s'ils appartiennent à une même droite parallèle à a (par exemple, dans la figure, les points A et A', B et B' se correspondent). De même, les *segments* [AB] et [A'B'] sont *correspondant.*
F2	*Théorème de Thalès.* Les deux classes de segments correspondants déterminés par une faisceau de droites parallèles sur deux transversales sont directement proportionnelles.
F3a	*Corollaire.* Une droite parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés, ou sur leurs prolongements, segments proportionnels.
F3b	*Théorème* (réciproque du corollaire). Une droite qui détermine sur deux côtés d'un triangle, ou sur leurs prolongements, segments proportionnels, est parallèle au troisième côté.
F4	(*Construction* : partager un segment donné en parties directement proportionnels à plusieurs segments donnés).
F5	(*Construction* : partager un segment donné en h parties égales).
F6	(*Construction* : étant donnés trois segments, construire le segment quatrième proportionnel).

[35] Cf. Figure 4.12, page 292

Tableau 4.14 – Autour de la configuration du triangle des milieux : le manuel MAT

A1	*Définition.* Deux droites sont dites *parallèles* lorsqu'elles sont confondues ou n'ont aucun point commun.
A2	*Axiome de la parallèle.* Pour toute droite r et pour tout point P du plan, *il existe une seule droite* passant par P et parallèle à r.
A3	La relation de parallélisme est une relation d'équivalence.
B1	Deux droites coupées par une sécante sont parallèles si et seulement si elles déterminent des angles alternes (internes ou externes) congruents.
B2	Deux droites coupées par une sécante sont parallèles si et seulement si elles déterminent des angles correspondants congruents.
B3	Deux droites coupées par une sécante sont parallèles si et seulement si elles déterminent des angles d'un même côté de la sécante supplémentaires.
D1	*Définition.* On appelle **parallélogramme** un quadrilatère ayant les côtés deux à deux parallèles.
D2	***Exercice guidé.*** Dans un parallélogramme : – chacune des deux diagonales détermine deux triangles congruents ; – les côtés parallèles (nommés *opposés*) sont congruents ; – les côtés non adjacents (nommés *opposés*) sont congruents ; – les côtés adjacents à chaque côté sont supplémentaires.
B4	*Théorème.* Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles entre elles.
C1	*Définition.* Dans un triangle, la *hauteur* est le segment de perpendiculaire mené d'un sommet au côté opposé.
C2	*Théorème.* Étant donnés une droites *r* et un point P ∉ *r*, le point de la droite ayant la plus courte distance de P est le point d'intersection de *r* et de la perpendiculaire à r menée de P.
C3	*Définition.* La *distance d'un point à une droite* est la longueur du segment de perpendiculaire mené du point à la droite.
F1	*Théorème.* Dans une projection parallèle, à des segments congruents correspondent des segments congruents. *Réciproquement*, si l'on établit une correspondance entre les points A, B, C ... e A', B', C' ... de deux droites telle que à des segments congruents sur l'une correspondent des segments congruents sur l'autre, si les droites qui joignent A et A', B et B' sont parallèles, alors toutes les droites qui joignent les extrémités de segments congruents sont parallèles (on établit une projection parallèle entre les deux droites).
F2	*Théorème.* Sur une droite *r*, si le segment AB est la somme de n segments consécutifs et congruents entre eux, alors en appelant A', B', C' les points correspondants de A, B, C dans une projection parallèle, A'B' est aussi la somme de n segments congruents entre eux.
F3	*Théorème.* Si un segment AB est multiple d'un segment CD, le segment correspondant A'B' dans une projection parallèle est multiple du segment correspondant C'D'.
F4	*Théorème.* Sur une droite, si la longueur d'un segment [AB] est supérieur à celle d'un segment [CD], alors, nommés [A'B'] et [C'D'] les segments correspondants sur une autre droite en projection parallèle, A'B' > C'D'.
F5	(*Construction* : partager un segment donné en n parties égales).
F6a	*Théorème de Thalès.* Un faisceau de droites parallèles détermine, sur deux droites interceptant le faisceau même, segments proportionnels.
F7	(*Construction* : étant donnés trois segments, construire le segment quatrième proportionnel).
F6b	*Théorème* (réciproque du théorème de Thalès). Étant données deux droites *r* et *r'* sécantes en un point P et deux autres droites *s* et *t* qui interceptent *r* respectivement en les points A et B et *r'* en les points A' et B', si PA/AB = PA'/A'B' alors *s* et *t* sont parallèles.

A. Définition de droites parallèles et propriétés éventuelles

La manière d'introduire ce groupe d'objets ainsi que les résultats visés diffèrent considérablement d'une institution à l'autre. Ici, nous avons résolu d'inclure des extraits des pages de quelques manuels, cela permettant de fournir des exemples concrets sur les différents styles utilisés pour exposer les contenus.

Dans la collection **HAT** (**Tableau 4.9**, page 260), conformément aux instructions officielles, l'initiation et l'apprentissage du raisonnement déductif se font progressivement. Dans cet esprit, c'est seulement dans le tome **HAT4**[e] qu'une véritable *définition de droites parallèles* (proposition A2 du Tableau 4.9[36]) apparaît en toutes lettres, accompagnée de l'*axiome d'Euclide* (A3).
Selon la structure de la collection, c'est à partir de ce tome que l'élève trouve, dans les pages de cours, *la boîte à outils*, un recueil de propositions utiles, entre autres, *pour faire des démonstrations*. C'est ainsi que, dans le premier chapitre consacré à la géométrie et portant explicitement sur la manière de rédiger une *preuve intellectuelle*, les auteurs proposent un rappel des propositions rencontrées antérieurement. Vraisemblablement, puisque dans ce contexte on commence à exiger de la rigueur, les auteurs ont cru opportun de présenter certains outils d'une manière plus précise.
Autrement, c'est dans le tome **HAT6**[e], dans le premier chapitre consacré à la géométrie, que l'élève *voit* pour la première fois des droites parallèles. Comme on peut le constater dans la Figure 4.3, on lui propose des activités qui amèneront à institutionnaliser les *propriétés* suivantes[37] :

(1a) Si deux droites d et d' sont perpendiculaires à une même troisième D, alors ces deux droites sont parallèles.
(1b) Si deux droites d et d' sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

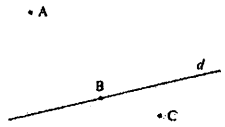
En s'appuyant sur la propriété (A1a), on apprend à l'élève les étapes nécessaires pour *tracer deux parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre* ; pourtant, dans les pages de cours, c'est la construction à l'aide de la règle et du compas qui sera institutionnalisée. En effet, dans le même chapitre, on fournit la *définition de parallélogramme* (D1) et on incite l'élève à découvrir la *propriété relative aux côtés opposés* de ce quadrilatère particulier (D2). Dans une activité spécifique (cf. Figure 4.4), on apprend alors à l'élève les étapes nécessaires pour *construire un parallélogramme* à l'aide de la règle et du compas (D3) et, par conséquent, on l'amène à envisager *une autre façon de construire des parallèles* (D4).

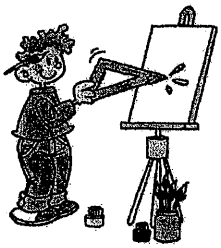
[36] Par la suite, nous ne signalons que le numéro correspondant à la proposition.
[37] En réalité, on voit se dégager aussi la propriété de transitivité du parallélisme (*Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles*) mais, dans les pages de cours, elle ne sera pas institutionnalisée alors qu'on la retrouvera dans des pages de rappel du tome de Cinquième.

ACTIVITÉS POUR S'INITIER

1 Perpendiculaires à l'équerre

a/ Tracer à l'équerre

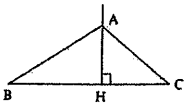




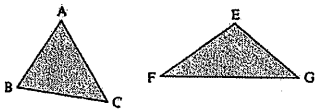
1. *Reproduire ce dessin.*
2. *Tracer la droite passant par le point* A *et perpendiculaire à la droite* d.
Tracer les droites passant par les points B *et* C *et perpendiculaires à la droite* d.
3. *Que peut-on dire de ces trois droites ?*

b/ Hauteurs d'un triangle

La droite (AH) est une **hauteur** du triangle ABC ;
elle est issue du sommet A.



1. *Écrire une définition de la hauteur du triangle* ABC *issue de* A.
2. *Combien un triangle a-t-il de hauteurs ?*
3. Voici deux dessins de triangles :

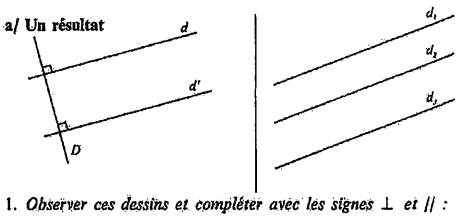


Dans chaque cas :
– *reproduire un triangle ayant la même forme,*
– *tracer les hauteurs du triangle.*

4. *Que constate-t-on ? Qu'appelle-t-on orthocentre d'un triangle ?*

2 Droites parallèles

a/ Un résultat

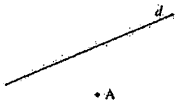


1. *Observer ces dessins et compléter avec les signes* ⊥ *et* // :

$\begin{cases} d \ldots D \\ d' \ldots D \\ d \ldots d' \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} d_2 \ldots d_1 \\ d_3 \ldots d_1 \\ d_2 \ldots d_3 \end{cases}$

2. *Compléter avec les mots perpendiculaire(s) et parallèle(s), en regardant le dessin :*

Deux droites ..... à une même troisième droite sont .....
Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite ..... à l'une est ..... à l'autre.



b/ Tracer deux parallèles

- *Placer un point* A *et tracer une droite* d *ne passant pas par* A.

Nous allons construire la droite parallèle à la droite *d* et qui passe par le point A. Pour cela, avec l'équerre :

- *Tracer une droite* D *perpendiculaire à la droite* d.
- *Tracer la droite passant par* A *et perpendiculaire à la droite* D.
- *Que peut-on dire de cette dernière droite ?*

c/ Glissement de l'équerre

- *Tracer une droite* d *et placer un point* B *extérieur à* d (fig. 1).

Nous allons construire la droite passant par B et parallèle à la droite *d*.

- *Placer l'équerre et la règle* (fig. 2).

Faire glisser l'équerre le long de la règle.

- *Tracer la droite perpendiculaire à la règle et passant par le point* B (fig. 3).
- *Pourquoi cette nouvelle droite est-elle parallèle à la droite* d *?*

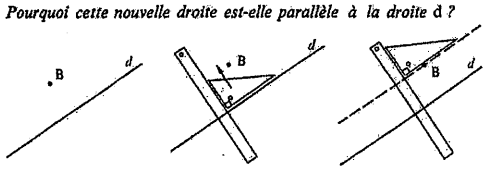


fig. 1 fig. 2 fig. 3

Figure 4.3 – DROITES PARALLELES (HAT6e, d'après les pages d'activités préparatoires)

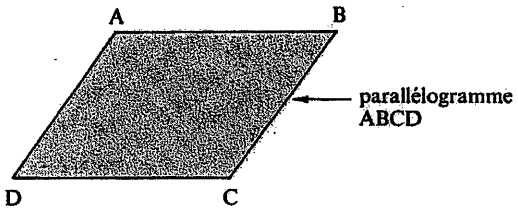
Dans les pages de cours, on rappelle les propriétés dégagées dans les pages précédentes ainsi que les constructions apprises, ces dernières étant présentées d'une manière ostensive comme on peut le constater dans la Figure 4.5.

Évidemment, les activités proposées par les auteurs ont plutôt un statut d'approfondissement car elles nécessitent une connaissance – déjà acquise naïvement dans les classes du primaire – des notions de *droites parallèles* et *perpendiculaires* ainsi que de l'usage d'une équerre pour tracer ces dernières. Le souci pédagogique est toujours présent – l'élève est constamment guidé et on lui *souffle* ce qu'il faut pointer en lui posant des questions précises – mais, ici, nous reconnaissons aussi une intention *intellectuelle*, outre celle d'aller plus loin et de dégager des résultats qui permettent d'enrichir l'*habitat* relatif aux objets en question. En effet, ces résultats permettent de justifier les constructions proposées : les diverses étapes d'une activité – dont les tâches correspondantes se présentent encore sous la forme de conjecture (*que dire de...*?) – devraient ainsi mettre l'élève dans la condition de

construire les premières véritables séquences déductives s'appuyant sur un nombre très restreint d'outils. Bien que la *perception* et l'*expérience* soient les moyens principaux pour aboutir – on incite souvent l'élève à constater sur les dessins, à agir matériellement –, la *déduction* trouve aussi sa place en tant que composante permettant d'organiser rationnellement les informations recueillies.

4 Parallélogrammes

Un **parallélogramme** est un **quadrilatère** qui a ses **côtés opposés parallèles.**



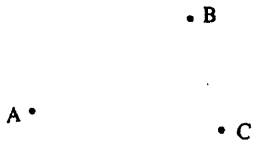
a/ Longueur des côtés opposés

• *Que peut-on dire des longueurs des* ***côtés opposés*** *d'un parallélogramme ?*

• *En considérant un parallélogramme* ABCD, *indiquer, dans la liste suivante, les égalités qui sont toujours vraies :*

ⓐ AB = DC ⓑ AC = BD ⓒ AB = BC
ⓓ DA = DC ⓔ AD = BC ⓕ DA = BC

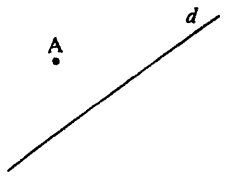
b/ Construire un parallélogramme



• *Placer trois points* A, B *et* C.
Au crayon de papier, marquer ***approximativement*** *le point* D *tel que* ABCD *soit un parallélogramme.*

• Les longueurs AB et CD doivent être égales. Donc D se trouve sur le cercle de centre C et de rayon AB.
Compléter la phrase suivante avec AD, A, BC *:*
Comme ... = ..., le point D se trouve aussi sur le cercle de centre ... et de rayon ... .
Avec un compas, construire précisément le point D.

c/ Une autre façon de construire des parallèles



• *Tracer une droite* d *et placer un point* A *extérieur à* d.
• *Placer deux points* B *et* C *sur la droite* d.
• *Construire le point* D *tel que* ABCD *soit un parallélogramme.*
• *Que dire de la droite* (AD) *?*

Figure 4.4 – PARALLELOGRAMMES (HAT6e, d'après les pages d'activités préparatoires)

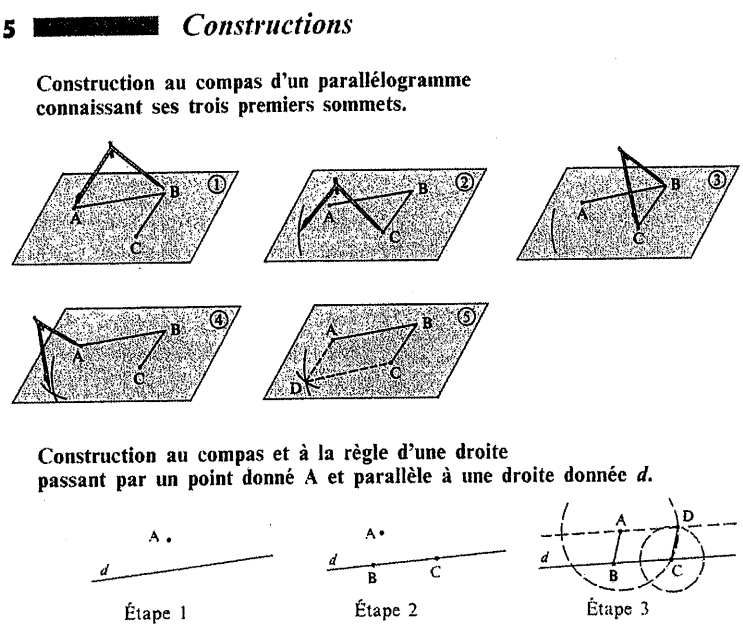


Figure 4.5 – CONSTRUCTIONS (HAT6e, d'après les pages de cours)

Remarquons enfin que, bien que l'existence de la droite parallèle à une droite donnée passant par un point soit assurée par la propriété A1a, aucune allusion n'est faite sur son unicité. Même lorsque l'axiome d'Euclide est présenté dans le tome de Quatrième, rien n'est dit sur la nécessité de son énonciation.

Dans le manuel **HAC6e (Tableau 4.10**, page 261), le premier chapitre consacré à la géométrie porte, entre autres, sur les droites perpendiculaires et parallèles. Les activités proposées ont explicitement un statut de rappel permettant de préciser *le vocabulaire sur des notions rencontrées à l'école élémentaire et d'apporter quelques compléments.*

Dans l'activité sur les droites perpendiculaires et parallèles (cf. Figure 4.6), on incite l'élève à analyser une situation fictive où des cas particuliers de figures apparaissent et dont l'un des trois cas proposés amène à la propriété suivante :

(A2a) Lorsqu'on trace deux droites perpendiculaires à une même droite, on obtient deux droites parallèles.

L'élève est incité à traduire d'abord des informations verbales en graphiques et puis l'inverse, cela dans l'intention de lui faire approfondir ses connaissances à propos de l'orthogonalité et du parallélisme. La situation mise en place se révèle intéressante aussi pour d'autres raisons : en effet, elle permet de mettre également l'accent sur le fait qu'à la description d'une figure peuvent correspondre plusieurs cas et que chaque terme d'un énoncé a son importance, une lecture superficielle pouvant amener à pervertir la tâche proposée. L'activité devrait non seulement permettre à l'élève de dégage de nouveaux résultats, mais aussi le mettre dans la condition d'adopter une attitude d'analyse et de réflexion. D'ailleurs, cet esprit de fond est présent tout au long de l'ouvrage ; nous retrouverons d'autres exemples

dans les paragraphes qui suivent.

2. «Des perpendiculaires aux parallèles»

1° Cas particulier

Un énoncé

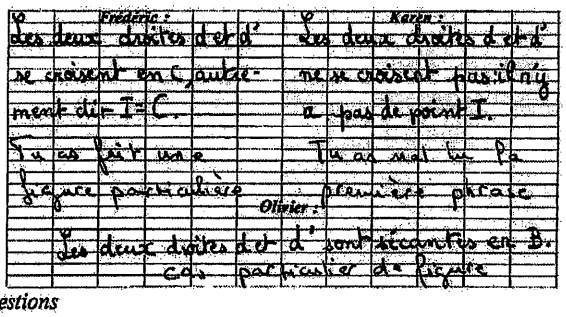
Marquer trois points A, B et C non alignés, puis tracer :

— la droite d perpendiculaire à la droite AB passant par le point B;

— la droite d' (lire «d prime») perpendiculaire à la droite AC passant par le point C.

On appellera I le point d'intersection des droites d et d'.

Trois réponses et les annotations du «prof»



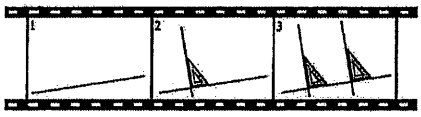
Les questions

Quelle est la particularité du dessin de Frédéric? de celui d'Olivier?
Quelle est l'erreur commise par Karen?

Conseil

Faire une figure personnelle sur papier non quadrillé.

Commentaire : **En choisissant à tort trois points alignés, Karen ne pouvait que «tomber» sur deux droites parallèles (voir film ci-dessous) :**

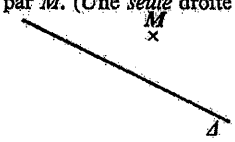


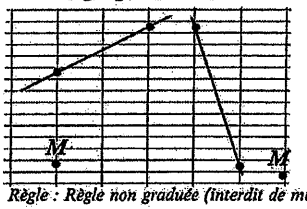
2° Impossible rencontre

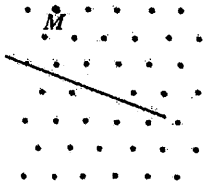
Dans chaque cas, on demande de reproduire le dessin, puis de trouver un moyen de tracer la parallèle à la droite Δ passant par M. (Une *seule* droite doit être dessinée.)

1° À la règle* et à l'équerre.
(On pourra s'inspirer du film ci-dessus.)

2° À la règle graduée seule.







* *Règle : Règle non graduée (interdit de mesurer).*

Figure 4.6 – DROITES PARALLELES (HAC6e, d'après les pages d'activités préparatoires)

C'est enfin dans la rubrique *Pour résoudre des problèmes* que l'on présente sous forme de bande dessinée la méthode pour *tracer la parallèle à une droite donnée passant par un point donné* (A3), cela aussi bien sur papier blanc à l'aide de la règle et de l'équerre que sur papier quadrillé (Figure 4.7) :

c'est donc à l'élève d'analyser les images fournies pour "en tirer la leçon".

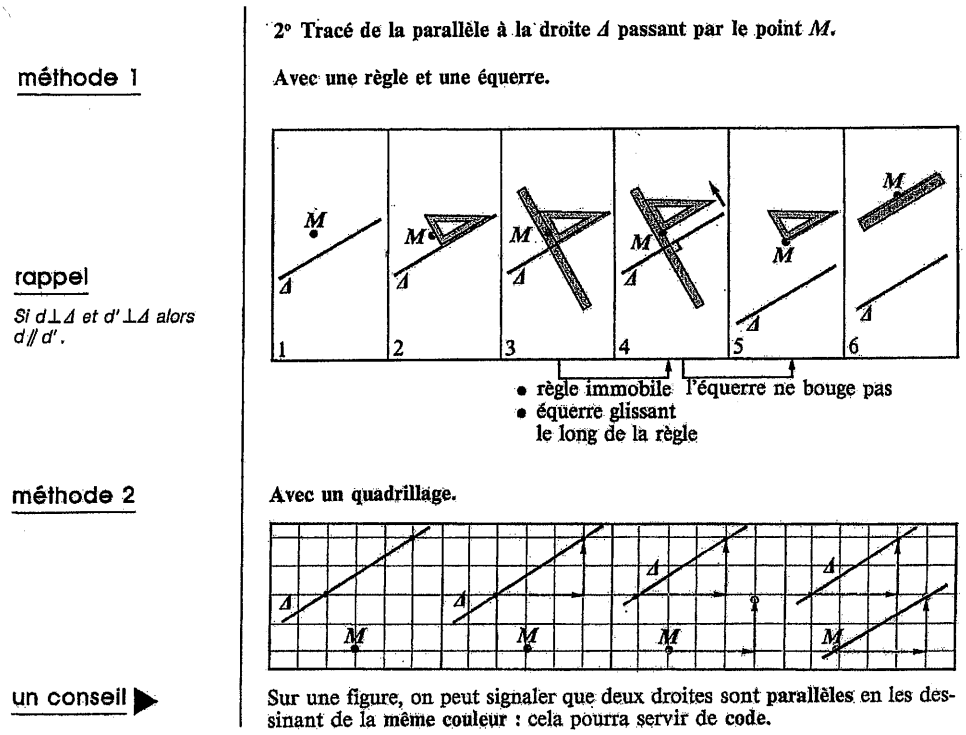


Figure 4.7 – CONSTRUCTIONS (HAC6^e, d'après la rubrique "Pour résoudre un problème")

Dans le manuel **MAR (Tableau 4.11**, page 262), l'organisation des contenus géométriques respecte assez fidèlement l'ordre proposé dans l'exposé d'un ouvrage classique. Le chapitre sur *les droites perpendiculaires et les droites parallèles* suit ceux qui traitent des éléments fondamentaux de la géométrie.

Après avoir fourni les définitions de droites perpendiculaires et de *droites parallèles* (A1), on expose la méthode pour *construire la perpendiculaire à une droite menée par un point qui appartient ou non à la droite* d'où l'on déduit l'unicité de la *droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné*. C'est ainsi que l'on consacre deux paragraphes aux droites parallèles et à leur construction (A2). Voici un extrait du premier paragraphe (cf. Figure 4.8) :

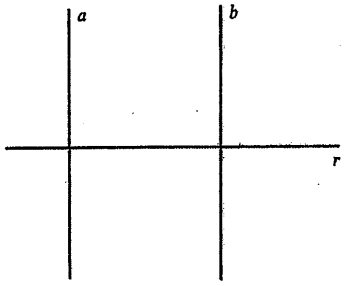
> "Représentons sur du papier blanc une droite *r* et, en utilisant la règle et l'équerre, deux droites *a* et *b* perpendiculaires à *r*. les deux droites a et b ne peuvent avoir de point commun, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas se couper en un point P. Si cela s'avérait, par le point P nous pourrions tracer deux droites distinctes *a* et *b*, toutes les deux perpendiculaires à la même droite *r*; cela n'est pas possible pour ce que l'on a vu précédemment, car par un point on ne peut mener qu'une seule droite perpendiculaire à une droite donnée. Si l'on tient compte de la définition énoncée dans le premier paragraphes du chapitre, nous pouvons affirmer que les deux droites *a* et *b* sont parallèles. En fait, elles appartiennent au même plan et n'ont aucun point commun..."

Non seulement le contenu est exposé d'une manière magistrale mais, en outre, le discours produit a un statut tout à fait *intellectuel*, s'appuyant sur un raisonnement par l'absurde ; remarquons que, toutefois, le résultat que l'on pourrait dégager (*Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles*

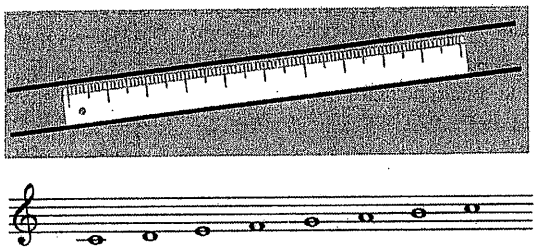
entre elles) n'est pas institutionnalisé. C'est seulement à la suite de ce discours que l'on fournit des exemples concrets[38] qui donnent l'idée de deux droites parallèles : les lignes d'une partition, les bords d'une règle, les rails d'un chemin de fer, etc.

Rette parallele

Rappresentiamo sul foglio da disegno una retta r e, servendoci della riga e della squadra, due rette a e b entrambe perpendicolari alla retta data r.
Le rette a e b non possono avere un punto in comune, cioè non possono incontrarsi in un punto P. Se ciò avvenisse, per il punto P potremmo tracciare due distinte rette a e b entrambe perpendicolari alla stessa retta r; ciò non è possibile per quanto abbiamo detto precedentemente, perché per un punto si può condurre una sola perpendicolare ad una retta data. Tenendo conto della definizione enunciata nel primo paragrafo del capitolo, possiamo affermare che le due rette a e b sono *parallele*. Infatti appartengono ad uno stesso piano e non hanno alcun punto in comune.



Nell'enunciare la definizione di rette parallele non dobbiamo dimenticare di dire che *appartengono ad uno stesso piano* e cioè che sono *complanari*: faremo in seguito la conoscenza di rette che non si incontrano e che non sono parallele.
L'idea di due rette parallele ci è suggerita in forma incompleta ed imperfetta da due righe di un quaderno o del pentagramma, dagli orli di una riga, dai binari delle strade ferrate in un tratto rettilineo, da due colonne di un tempio, dalle sbarre di un noto attrezzo usato per gli esercizi ginnici (parallele), ecc.



Esempi di rette parallele

Per indicare che due rette a e b sono parallele, possiamo scrivere:

$$a /\!/ b$$

(essendo $/\!/$ il simbolo di parallelismo) e leggiamo:

«*la retta* a *è parallela alla retta* b».

Figure 4.8 – DROITES PARALLELES (MAR, d'après les pages de cours)

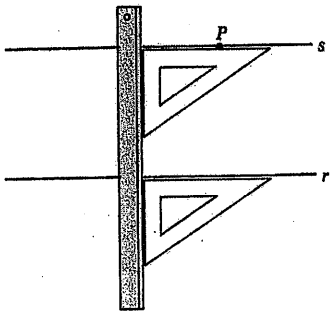
Dans un deuxième paragraphe, l'on expose *deux méthodes de construction de deux droites parallèles* (cf. Figure 4.9) : pour la première, les étapes sont fournies l'une après l'autre alors que, d'après l'auteur, la deuxième ne demande aucun éclaircissement. Aucune allusion explicite n'est faite à propos de ce que l'on vient d'exposer dans le paragraphe précédent ; d'ailleurs, la deuxième construction ne pourrait se justifier qu'à l'aide des propriétés angulaires du parallélisme, un objet qui se trouve plus loin ; en effet, dans un chapitre consacré exclusivement aux constructions géométriques, on retrouve la même

[38] Soulignons, au passage, que des exemples concrets sont rares tout au long de l'ouvrage et rare est aussi leur utilisation comme prétexte pour introduire un objet "théorique".

construction, cela en proposant une méthode qui se justifie à l'aide de la congruence d'angles alternes internes.

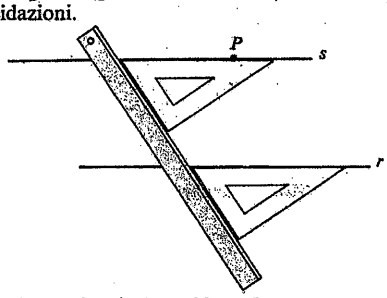
Parallela ad una retta data passante per un punto non appartenente ad essa

Vogliamo costruire con l'uso della riga e della squadra la retta parallela ad una retta data r che passi per un punto P non appartenente alla retta r.
Disponiamo la squadra sul foglio facendo coincidere uno dei suoi orli fra loro perpendicolari con la retta r e facendo combaciare la riga con l'altro orlo perpendicolare della squadra.



Facciamo, quindi, scorrere la squadra in modo che l'orlo che prima sfiorava la retta r passi per il punto P. Passando la punta della matita lungo tale orlo otteniamo la retta s parallela alla retta data r.

La costruzione si può eseguire anche nel modo indicato nell'altro disegno che non richiede ulteriori delucidazioni.



Dalle costruzioni eseguite risulta evidente la seguente notevole proprietà che viene detta **postulato di Euclide o postulato delle parallele**:

Per un punto non appartenente ad una retta si può condurre una sola parallela a tale retta.

Si dice **postulato** una proposizione che non si può dimostrare e che si chiede venga ammessa come vera.

Figure 4.9 – CONSTRUCTION (MAR, d'après les pages de cours)

Voici donc que l'on fournit non seulement des séquences déductives déjà bâties (où d'ailleurs on n'hésite pas à produire des raisonnements par l'absurde !) mais, lorsque l'explicitation de l'inférence serait nécessaire, on ne souligne pas le lien entre un résultat et l'autre. Il nous paraît que, dans l'esprit de l'auteur, l'apprenant est déjà censé avoir adopté une *attitude rationnelle*, nous ne reconnaissons nulle part une intention à l'initier progressivement au raisonnement déductif, comme si les règles de la logique mathématique étaient innées chez l'élève et qu'il n'était pas nécessaire de l'aider à se les approprier.

Mais un autre élément mérite d'être souligné. C'est à la suite de la construction proposée que l'auteur

justifie l'introduction d'un énoncé du *postulat d'Euclide*[39] (A3) : cette séquence déductive étant peut-être discutable, nous croyons que le postulat a été probablement introduit suivant un souci académique (garantir non seulement l'existence de la parallèle à une droite donnée mais aussi l'unicité) sans tenir pourtant compte d'aucune exigence pédagogique : l'élève peut-il saisir l'importance de cet énoncé ? C'est peut-être dans l'intention de justifier la présence de cette *propriété remarquable* que l'auteur consacre un bref paragraphe aux *géométries non euclidiennes* ! Ensuite, dans les pages d'activités pratiques, dans la rubrique *Pour comprendre*, on propose l'exercice suivant :

> "Étant donnée une droite *r*, combien de droites parallèles à celle-ci pouvez-vous mener ? Combien de droites parallèles à celles-ci et passant par un point qui ne lui appartient pas pouvez-vous mener ? Le postulat d'Euclide qu'est-ce qu'il affirme ? Qu'est-ce que c'est la géométrie euclidienne ? Qu'est-ce que c'est un postulat ? La géométrie euclidienne et les géométries non euclidiennes en quoi se différencient-elles ?"

L'exposition des contenus tels qu'ils sont proposés dans le manuel **BOV** (**Tableau 4.12**, page 263) ressemble au détail près à celle du manuel MAR. Dans le chapitre sur les *droites parallèles*, le même discours – où aucune question s'adressant à l'apprenant n'est jamais intercalée – est produit pour prouver que *deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles* (cf. figures 4.10). Ce résultat n'est pas explicitement institutionnalisé mais il est exploité pour reprendre la définition de *droites parallèles* (A1) – proposée d'une manière informelle au début du chapitre – et pour justifier *la méthode de construction de deux droites parallèles* (A2). Néanmoins, dans les pages d'activités pratiques, on retrouve un encadré sur la construction d'une parallèle menée par un point à une droite donnée où la même méthode qu'avant est justifiée à l'aide des *propriétés angulaires du parallélisme*[40]. De même ici, l'introduction du *Postulat d'Euclide* (A3) est justifiée par la construction.

Ici, il nous paraît intéressant de mettre en évidence un autre aspect. Pour ce faire, prenons le paragraphe sur les droites parallèles (cf. Figure 4.10) où les auteurs débutent ainsi :

> "Dessinez sur votre papier une droite r et, en utilisant l'équerre, construisez [*ici, un numéro renvoie au paragraphe où l'on expose la construction d'une droite perpendiculaire à une droite donnée*] deux droites a et b, toutes les deux perpendiculaires à r…".

Ici, nous reconnaissons une volonté d'inciter l'élève à agir mais cela apparaît plutôt comme une intention inachevée puisque, dans la suite du paragraphe, tout est dévoilé suivant un style magistral. Comme nous aurons l'occasion de le constater aussi plus loin, cette intention inachevée semble caractérisé la majeure partie du manuel en question.

---

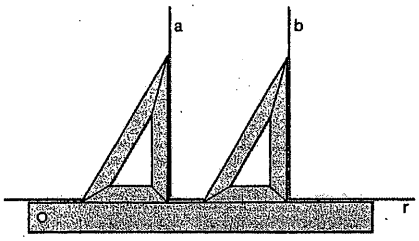
[39] L'auteur tient à préciser que, en réalité, Euclide *énonça le postulat des parallèles sous une forme différente mais substantiellement équivalente.*

[40] Cette propriété est en fait abordée dans le même chapitre.

58

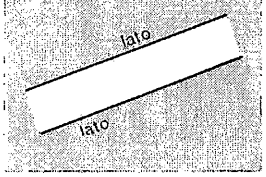
Definizione

Disegnate sul vostro foglio una retta r e, facendo uso della squadra, costruite (**52**) due rette a e b entrambe perpendicolari ad r.
Tali rette non possono avere un punto in comune, cioè non possono incontrarsi in un punto P.



Infatti, se tale punto esistesse per esso si potrebbero condurre due distinte perpendicolari, a e b alla retta r, il che non è possibile perché sapete (**53**) che da un punto si può condurre una sola perpendicolare ad una retta data.
Due rette come a e b, si dicono rette tra loro **parallele.** Cioè:

Due rette si dicono parallele se appartengono allo stesso piano e non hanno alcun punto in comune, oppure se coincidono.

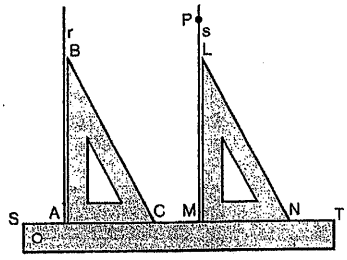


Gli orli di una riga, le righe di un quaderno, le rotaie di una ferrovia in un tratto rettilineo, sono immagini di rette parallele.
Si chiama **striscia,** la parte di piano limitata da due rette r ed s tra loro parallele; esse sono i lati della striscia.

59

Parallela per un punto ad una retta

Per costruire con la riga e la squadra la parallela ad una data retta r che passi per un punto P non appartenente ad essa, si procede nel modo seguente:



Si dispone la squadra sul foglio facendo coincidere uno dei suoi due orli perpendicolari, ad es. AB, con la retta r, e si pone a contatto con l'altro suo orlo AC una riga ST.
Si faccia poi strisciare la squadra lungo la riga finché l'orlo AB della squadra che prima sfiorava r, passi per P. Facendo scorrere la matita lungo tale orlo, si ottiene una retta, che è la parallela richiesta s.
Infatti r ed s, per la costruzione eseguita, sono entrambe perpendicolari all'orlo ST della riga e sono quindi parallele (**58**).
Dalla costruzione precedente risulta la seguente notevole proprietà che prende il nome di **postulato di Euclide,** o delle parallele:

Per un punto non appartenente ad una retta, si può condurre una ed una sola parallela ad essa.

Figures 4.10 – Droites parallèles (BOV, d'après les pages de cours)

Dans le manuel **CAT (Tableau 4.13**, page 264), les auteurs fournissent d'abord un énoncé du *postulat d'Euclide* (A1), la *définition de droites parallèles* (A2) ainsi que le *corollaire* du postulat permettant

d'établir l'unicité de la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné (A3). Ensuite, dans un chapitre consacré à la *caractérisation angulaire des droites parallèles*, ils fournissent les propriétés qui permettent d'établir que le parallélisme est une *relation d'équivalence*[41] (A4) ainsi que les propriétés caractéristiques relatives à la configuration des deux droites parallèles et une sécante. Remarquons que la propriété de transitivité ainsi que d'autres propriétés présentées ici sont validées à l'aide d'un *raisonnement par l'absurde*[42]. Nous verrons que la construction de deux droites parallèles (B6) est proposée d'une manière intuitive dans ce même chapitre : sa justification s'appuie donc sur la propriété B1b même si ce lien n'est pas mis en valeur ; on la retrouve plus loin, dans un paragraphe consacré exclusivement aux constructions géométriques à l'aide de la règle et du compas (D4). Dans ce dernier cas, la justification de la construction demeure liée aux propriétés caractéristiques du losange.

Dans la collection **MAT** (**Tableau 4.14**, page 266), l'objectif explicite des auteurs est *de fournir une description axiomatique du plan*. C'est ainsi que, dans le premier tome (**MAT1**), un chapitre est consacré aux *axiomes de la géométrie plane*[43] où, après les axiomes d'incidence et d'ordre, on retrouve la *définition de droites parallèles* (A1), l'*axiome des parallèles* (A2) et le théorème permettant d'établir que *le parallélisme est une relation d'équivalence* (A3), la transitivité étant prouvée à l'aide d'un *raisonnement par l'absurde*[44]. Aucune partie n'est consacrée aux constructions géométriques.

Mais quelles activités pratiques les divers auteurs proposent-ils au sujet ce chapitre de la géométrie ? Nous avons réussi à les répertorier par *genres de tâches* suivant les différents manuels.

En général, dans les **manuels français**, on trouve les genres de tâches suivants :

- Reconnaître une configuration de base dans une figure complexe donnée (registre graphique) ;
- Construire une figure suivant des conditions imposées ;
- Décrire une construction donnée (*programme de construction*) ;
- Faire des conjectures (*Que peut-on dire...*, *Que constate-t-on...*).

Notamment, dans le manuel **HAC6**[e], l'attitude demandée à l'élève se saisit clairement. Dans quelques exercices où l'on demande de faire une conjecture, on précise que tel résultat *sera prouvé* plus tard. Par ailleurs, dans un exercice résolu, on précise :

> "Face à une figure géométrique, il arrive souvent que l'on ait des **impressions** : parfois, il est très difficile (même **impossible**) en sixième de **savoir si elles sont bonnes ou mauvaises**. Aussi, à chaque fois que l'on ne sera pas capable d'apporter une preuve de ce que l'on voit (ou croit voir) on préférera dire : "*il semble que...*", "*on dirait que...*" ; cela s'appelle **faire une conjecture**".

---

[41] Cela est évidemment possible puisqu'ils acceptent la *définition de droites parallèles* suivantes : *On appelle **parallèles** deux droites r et s qui sont confondues ou bien qui n'ont aucun point commun.*

[42] Soulignons que, au début du chapitre en question, dans la rubrique *Notes de logiques*, les auteurs donnent une définition de *démonstrations directes* et de *démonstrations indirectes* (ou *par l'absurde*).

[43] Ce chapitre débute avec un paragraphe où les auteurs donnent les définitions d'*axiome*, de *théorème*, de *démonstration*. Signalons que, dans le même tome, un chapitre est consacré aux premiers éléments de la *logique formelle*.

[44] Ici, les auteurs donnent une définition de *démonstration par l'absurde*.

Dans les manuels italiens **CAT** et **MAT**, s'adressant aux élèves de l'ESS, on ne trouve pas d'activités spécifiques sur les objets en question. En revanche, dans le manuel **MAR**, on trouve surtout les genres de tâche suivants :

- Construire une figure suivant des conditions imposées ;
- *Vérifier* une propriété d'une figure décrite dans l'énoncé.

L'acception du terme *vérifier* demeure douteuse : comme nous le verrons plus loin, dans quelques exercices, on demande de *vérifier à l'aide d'un instrument de dessin ou d'un simple raisonnement*, cela montrant que l'auteur place au même niveau une preuve *pragmatique* et une preuve *intellectuelle*.

Dans le manuel **BOV**, on trouve les genres de tâche suivants :

- Construire suivant des conditions imposées ;
- *Préciser* la nature d'une figure fournie (registre verbal) ;
- *Vérifier* une propriété d'une figure décrite dans l'énoncé.

Ici, à propos des deux derniers genres de tâche, compte tenu des indications opérationnelles fournies en général dans d'autres exercices, on dirait que les auteurs s'attendent à ce que l'élève produise une preuve *intellectuelle*.

Si l'on analyse l'*habillage* des énoncés proposés dans les manuels français et des manuels italiens destinés aux élèves de l'ESI (cela pour faire une comparaison plus équitable), on constate que l'esprit de fond est très différent. L'exemple ci-dessous – tiré du manuel **HAC6^{e}** – nous paraît assez significatif pour expliquer cette divergence :

> **Cyril a un problème**
> *Un énoncé*
> Tracer une droite Δ, puis marquer trois points D, E et F extérieurs à Δ. Dessiner les parallèles à la droite Δ passant par D, E et F.
> *La réponse de Cyril* : Je ne peux pas tracer plusieurs parallèles : il y en a qu'une.
> *La question :* Qu'est-il arrivé à Cyril ?

Cet exercice se situe dans un contexte où les auteurs suggèrent à l'élève un *code de conduite de l'apprenti géomètre* en l'incitant, entre autres, à *éviter de faire des figures particulières* et *apprendre à douter*. En quelque sorte, ces aspects sont révélateurs d'une volonté de guider l'élève dans son développement d'une *attitude* à l'autre : il reste à voir si ces intentions suffisent pour que l'élève soit encouragé à s'investir afin de développer un véritable esprit d'analyse et de réflexion. Dans les manuels italiens, on ne trouve jamais de tels habillages, les énoncés étant très standard : il semblerait que la poursuite de moyens pour progresser vers l'*attitude rationnelle* est entièrement laissée à la charge de l'élève ou – encore pire ! – que cette transition d'une *attitude* à l'autre est supposée se réaliser d'une manière spontanée.

B. Caractérisation angulaire du parallélisme.

Dans les deux collections françaises et notamment dans les manuels de Cinquième, les propriétés caractéristiques liées à la *configuration des deux droites parallèles coupées par une sécante* font

l'objet d'un chapitre consacré aux *angles* et à la *symétrie centrale* alors que, dans les manuels italiens, elles complètent le chapitre relatif aux droites parallèles. Voici donc un exemple significatif de la différence d'approches dans les deux instituions, une différence qui manifeste aussi l'existence de *niches écologiques* dissemblables à propos d'objets communs.

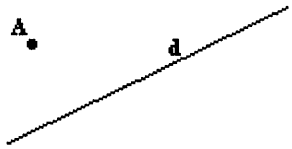
Dans le manuel **HAT5^{e}**, après avoir introduit le vocabulaire spécifique pour les angles formés par deux droites et une sécante, on propose une activité (*Angles et parallèles*) où, en s'appuyant sur les invariants de la *symétrie centrale*, on amène l'élève à découvrir les *propriétés caractéristiques du parallélisme* (B1a, B1b) qui seront ensuite institutionnalisées dans les pages de cours : suivant les prescriptions des textes officiels, les deux propriétés sont formulées à l'aide de deux énoncés. Remarquons que l'on parle exclusivement d'*angles alternes internes* et d'*angles correspondants* : voici un exemple significatif où les contenus sont réduits à l'essentiel et l'apprentissage de l'élève n'est pas alourdi avec des longues listes de nouveaux termes techniques.

Au-delà de quelques exercices de vocabulaire, on remarque un partage équitable entre les exercices à résoudre dans un cadre numérique et ceux qui sont à résoudre dans un cadre géométrique ; parmi ces derniers, un bon nombre rentre dans le genre de tâche *construire une figure suivant des conditions imposées*. Une progression au niveau des consignes est particulièrement remarquable : on commence à demander de justifier certaines conjectures (*Que peut-on dire de... ? Pourquoi ?* ou bien *Justifier...*), cela évidemment dans le respect des prescriptions officielles. Dans ce contexte, nous pouvons remarquer qu'il y a une utilisation du codage de la figure sous la forme de marques mais que celle-ci est tantôt utilisée dans le tracé fourni avec l'énoncé et tantôt elle est demandée parmi les tâches proposées. Cela semble prouver une volonté de la part des auteurs de familiariser l'élève avec un aspect méthodologique lié à la discipline en question. En effet, le codage s'avère utile lorsqu'un tracé acquiert un simple statut de support perceptif dans la résolution d'un problème géométrique ; d'après nous, face à l'apprenant, cela manifeste encore une volonté de lui fournir des moyens pour développer graduellement son *attitude rationnelle*.

Enfin, signalons que l'on retrouve ici deux problèmes qui portent sur la construction de deux droites parallèles :

Problème. Étant donnés une droite d et un point A non situé sur d, construire la parallèle d' à d, passant par A.
a) Résoudre le problème en faisant glisser une équerre le long d'une règle.
b) Justifier cette construction.
(L'activité s'intitule *Justification*, fait partie de la rubrique *Lire, comprendre et rédiger* et n'est accompagnée d'aucun dessin).

Construire une parallèle. On ne dispose que d'une règle et d'un rapporteur. Construire la parallèle à d passant par A.



(L'activité fait partie de la rubrique *Chercher*).

Voici donc que la construction d'une parallèle à une droite donnée revient sous la forme d'activité pratique où, cette fois-ci, elle demeure liée aux propriétés angulaires du parallélisme.

Tout à fait du même style est la présentation de cet objet (B) dans le manuel **HAC5**^{e}. De même ici, les activités sont surtout à résoudre dans un cadre numérique mais on trouve aussi le même problème de construction de deux droites parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre où, toutefois, un dessin est fourni. Ici, des tâches du genre "*Justifier...*" apparaissent d'une manière de plus en plus fréquente. En effet, dans les pages d'activités pratiques liées au premier chapitre consacré à des rappels des cours de Sixième, les auteurs insistent encore sur la signification de *conjecture* mais ils ajoutent aussi :

> "Avec une règle graduée (un rapporteur) il est **impossible** d'obtenir la **mesure exacte** d'une longueur (d'un angle). Mais **mesurer** est très utile pour **conjecturer** ; **contrôler** (vérifier) un résultat obtenu par un calcul, un raisonnement. **Attention !** On ne peut pas **prouver** en utilisant des instruments".

A ce propos, voici un exemple qui exprime la volonté des auteurs de mettre l'apprenant dans la condition de saisir la différence entre une *preuve pragmatique* et *intellectuelle*. Dans ce tome, suivant les prescriptions officielles, on aborde la *propriété de la somme des angles d'un triangle*. Dans l'activité préparatoire relative à cet objet, on amène l'élève à la découvrir à l'aide d'un rapporteur et puis à l'aide de pliages. Ensuite, parmi les activités pratiques liées au chapitre consacré à la caractérisation angulaire du parallélisme, on trouve l'exercice suivant :

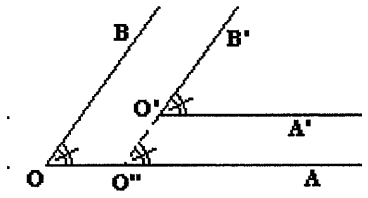
> **Une autre preuve.**
> Le but de cet exercice est de proposer une autre justification de la propriété : "*La somme des angles d'un triangle est égale à 180°*".
> **1°** Tracer un triangle ABC, puis la parallèle à (BC) passant par A.
> **2°** Marquer les angles égaux, puis conclure.

Remarquons que, ici encore, le codage est un aspect que les auteurs introduisent de manière que l'apprenant puisse utiliser son sens pour prouver une propriété. Dans la manière de formuler l'énoncé de cet exercice, nous reconnaissons une volonté de familiariser l'élève avec le raisonnement déductif et de lui apprendre ainsi une *conduite* qui devrait l'amener progressivement vers la *démonstration*. Évidemment, les outils à mobiliser sont *soufflés* (*trace la parallèle, ... marque les angles égaux*) : à long terme, cette tendance à proposer des problèmes par étapes engendrera-t-elle des effets contraires aux attentes ?

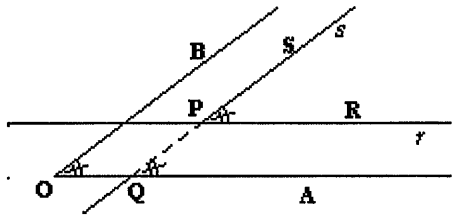
Dans les manuels **MAR** et **BOV**, les *propriétés caractéristiques du parallélisme* (B1a, B1b) sont fournies en incitant l'apprenant à vérifier éventuellement leur validité sur le dessin, *à l'aide d'un rapporteur*. Remarquons que les énoncés parlent d'*angles alternes internes* ou *externes*, *correspondants* mais aussi d'*angles du même côté de la sécante*, *internes* ou *externes*. En comparaison avec les manuels français, cela prouve en quelque sorte une volonté de la part des auteurs italiens de traiter un objet d'une manière assez exhaustive.

Dans les pages d'activités pratiques, on trouve des exercices à résoudre dans un cadre aussi bien numérique que géométrique. Pour ce dernier type d'exercices, il nous paraît que, à propos de la preuve à produire, si les auteurs de **MAR** laissent le choix entre une preuve *pragmatique* ou *intellectuelle*, les auteurs de **BOV** semblent attendre surtout une *preuve intellectuelle*, cela pouvant se saisir en lisant les indications opérationnelles fournies avec quelques énoncés. À ce propos, voici un exemple du même problème (au détail près) proposé dans les deux manuels :

(MAR) "Dessinez deux angles avec les côtés parallèles et de même sens et vérifiez avec le rapporteur ou démontrez à l'aide d'un raisonnement simple que les deux angles sont congruents (*A l'aide du raisonnement, observez que AÔB = AÔ"B' car ils sont correspondants par rapport aux parallèles (OB) et (O"B') interceptées par la sécante (AO) ; Aô"B = A'ô'B' car ils sont correspondants par rapport aux droites parallèles (OA) et (O'A') interceptées par la sécante (O"B') d'où...*).



(BOV) "Dessinez un angle AÔB. Par un point P situé à son intérieur, tracez les droites *r* et *s* parallèles respectivement aux deux côtés de l'angle AôB. Comment est l'angle formé par les droites *r* et *s* par rapport à l'angle AÔB ? (*Remarquez que RPS = AQP car ils sont correspondants formés par les parallèles... , AQP = AÔB car ils sont correspondants formés par les parallèles... ; donc RPS = AÔB*).



Signalons que, dans les deux manuels en question, aucune activité spécifique et explicite n'est prévue pour initier l'élève au raisonnement déductif. On dirait que les auteurs attribuent cet office aux indications fournies, comme si l'élève pouvait apprendre à produire une preuve par imitation. En outre, dans le manuel **MAR**, en plaçant sur le même niveau une preuve *pragmatique* (*vérifiez avec un rapporteur*) et une preuve *intellectuelle* (*démontrez à l'aide d'un raisonnement simple*), l'auteur ne semble pas se soucier que la production de cette dernière n'est nullement spontanée dans la démarche de l'apprenant.

Les exemples ci-dessus nous offrent aussi l'occasion de faire quelques réflexion sur le codage. Nous avons remarqué que, dans les manuels français, on propose à l'apprenant des activités spécifiques pour se familiariser avec son utilisation. En revanche, dans les manuels italiens, surtout ceux qui s'adressent aux élèves de l'ESI, le recours au codage est introduit sans mettre en évidence son importance lors de la résolution d'un problème géométrique. Voici donc un autre aspect qui demeure implicite : c'est encore l'apprenant qui devrait en saisir la portée.

Remarquons enfin que, dans ces deux manuels italiens, l'on retrouve sous la forme d'exercices les propriétés qui, dans les manuels français, sont proposées pour introduire la construction de deux droites parallèles (liaison orthogonalité et parallélisme).

Dans le manuel **CAT**, on prouve d'abord que, *si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes internes égaux, alors elles sont parallèles* (B1a). C'est en s'appuyant sur ce théorème que l'on prouve les autres cas (B2a), y compris le cas des *angles d'un même côté de la sécante*. De même, les réciproques sont prouvées en distinguant deux énoncés (B1b, B2b). Dans tous ces cas, il s'agit de *preuves intellectuelles*, les théorèmes B1a et B2b étant des *raisonnements par l'absurde*. A la suite de ces propriétés, on trouve deux corollaires (B3 et B4) : en effet, il s'agit des deux propriétés qui, dans les manuels français, sont exploités pour introduire la méthode de construction de deux droites parallèles. Ces corollaires sont évidemment prouvés à l'aide des propriétés caractéristiques du parallélisme. Remarquons que, dans ce paragraphe, est inclus un encadré concernant la construction de deux droites parallèles à l'aide de la règle et de l'équerre (B6) : les images devraient suggérer à l'élève l'outil permettant de justifier cette construction et de comprendre ainsi les raisons qui font que l'encadré se trouve dans ce chapitre. Toutes les activités pratiques proposées sont des véritables problèmes de démonstration à produire dans un cadre géométrique ; parmi ces problèmes, on retrouve aussi celui que nous venons de présenter plus haut. Signalons que, d'ailleurs, ce n'est pas le seul énoncé que l'on retrouve aussi bien dans des ouvrages s'adressant aux élèves de l'ESI que dans des ouvrages s'adressant aux élèves de l'ESS et dont l'habillage ne varie pas beaucoup en passant d'un niveau à l'autre.

Dans le manuel **MAT**, on distingue aussi le cas des *angles alternes internes* (B1) des autres (B2 et B3) mais le *théorème direct* et sa *réciproque* sont formulés dans un seul énoncé et prouvés à l'aide d'un raisonnement par l'absurde. Le cas des *angles alternes externes* est proposé sous la forme de problème (*Démontrer que...*) alors que les autres sont admis, leur validation étant *plutôt facile*. Ici aussi, les activités pratiques proposées sont de véritables problèmes de démonstration à produire dans un cadre géométrique.

C. Distance d'un point à une droite. Hauteur d'un triangle, hauteur d'un parallélogramme

Évanescents, ces objets ne sont jamais définis d'une manière précise dans les manuels français mais ils sont éventuellement introduits par ostention sur des dessins : peut-on attribuer à la seule perception la fonction d'apprendre à l'élève à discerner les propriétés de tels objets ?

Dans le manuel **HAT6^{e}**, à propos de la *hauteur* dans un triangle, lors d'une activité préparatoire (cf. Figure 4.3, page 268) concernant les droites perpendiculaires, on demande à l'élève d'écrire sa définition (C1). Néanmoins, cet objet ne sera pas institutionnalisé dans la partie du cours

correspondante. Dans le manuel **HAT5^e**, on retrouve la définition dans des pages de rappel. Le cas échéant, ces objets sont mobilisés en tant qu'outils dans des activités pratiques variées tout au long du programme développé dans les deux collections françaises.
Concernant la hauteur du parallélogramme, dans **HAC5^e**, dans un exercice résolu, on trouve juste la suggestion suivante : *imaginer une hauteur d'un parallélogramme comme la largeur d'une bande à bords parallèles* !

En général, dans les manuels italiens, la *définition de distance d'un point à une droite* est proposée en liaison avec les projections orthogonales. Dans **MAR** (C1) et **CAT** (C2), elle est définie comme *segment* alors que dans **BOV** (C1) et **MAT** (C3) comme *longueur de segment*. Finalement, par la suite, le terme est utilisé dans les deux acceptions dont la différence devrait être compréhensible par le contexte.

Les définitions de *hauteur d'un triangle* ou *d'un parallélogramme* apparaissent en général dans des chapitres ou des paragraphes consacrés respectivement et exclusivement aux deux polygones.
Concernant la hauteur d'un triangle, dans les manuels **MAR** et **BOV**, des tâches spécifiques sont proposées : par exemple, pour un certain nombre de triangles de nature différente, on demande de *tracer la hauteur associée à une base fixée*. Autrement, dans tous les manuels italiens, le cas échéant, ces objets sont à mobiliser en tant qu'outils dans des activités pratiques variées tout au long du programme.

D. Propriétés caractéristiques du parallélogramme.

Dans les collections françaises, le *parallélogramme* est présenté comme *un quadrilatère à symétrie centrale* – au programme de Cinquième – alors qu'en général, dans les manuels italiens, il est introduit comme l'*intersection de deux bandes parallèles*, la liaison avec la symétrie centrale se faisant dans la partie du manuel consacré aux transformations géométriques. Ici, on peut saisir, entre autres, le statut différent que les *constructions géométriques* acquièrent au sein des deux institutions. En fait, les deux manuels français les exploitent pour faire fonctionner les propriétés du parallélogramme alors que, en général, dans les manuels italiens elles sont éventuellement traitées dans un chapitre à part.

Comme on l'a déjà relevé, dans la collection **HAT**, le *parallélogramme* (D1 et D2) apparaît pour la première fois dans le tome **HAT6^e** où on l'introduit dans le dessein de proposer à l'élève *une autre façon de construire deux parallèles*. En revanche, dans le manuel **HAT5^e**, un chapitre entier lui est consacré (*Symétries centrales et parallélogrammes*).
Après un rappel sur la définition de parallélogramme (D1), deux activités préparatoires permettent de dégager les résultats suivants (D2a) :

– *propriétés des diagonales* et *des côtés opposés*, cela en relation avec la *symétrie centrale* ;
– *propriété des angles opposés*, cela à l'aide de la *caractérisation angulaire du parallélisme.*

Les auteurs exploitent donc une double vision du parallélogramme alors que l'égalité des angles pourrait aussi se dégager à partir des propriétés de la symétrie centrale. Nous reconnaissons ici une réticence à faire intervenir d'une manière nette les transformations géométriques dans l'analyse de la figure, ce qui conduit à ne pas distinguer pour cette analyse le cadre de la géométrie euclidienne classique et celui des transformations géométriques : en procédant de cette façon peut-on espérer qu'elles deviennent des outils disponibles chez l'élève ?

Pour dégager les conditions pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, on propose à l'élève une suite de constructions suivant des conditions imposées (D2b). Cette manière de proposer les propriétés caractéristiques d'un parallélogramme semble être un moyen pour éviter ce que nous interprétons comme un double obstacle : en effet, en faisant ainsi, les auteurs ne proposent pas de preuves intellectuelles pour valider les résultats en question (ils incitent plutôt à recourir à la perception), des preuves qui d'ailleurs devraient s'appuyer sur les transformations géométriques !

Constatons, en outre, que les auteurs ne précisent pas que le quadrilatère en question *doit être convexe*[45], ce qui fait que les propriétés réciproques demeurent approximatives[46].

Dans le manuel **HAT4^{e}**, l'apprentissage de la *démonstration* se fait d'une manière explicite. Un chapitre entier est consacré aux *Parallélogrammes* (*révisions et démonstrations*). Pour que l'élève apprenne à *démontrer,* on lui propose plusieurs problèmes dont la plupart sont à résoudre en mobilisant les propriétés du parallélogramme, acquises en Cinquième et qui sont rappelées dans le tome en question. En général, pour chaque problème, on propose une *liste de propriétés à mobiliser,* on demande de *préciser* les *hypothèses* et la *conclusion* et on fournit aussi un *schéma de démonstration*, un diagramme où les étapes sont données et il faut le compléter en choisissant convenablement les propriétés de la liste[47] (cf. Figure 4.1, page 221). C'est ainsi que l'on peut saisir *visiblement* ce que les auteurs attendent lorsqu'ils demandent de *démontrer*. Cette *atomisation* d'une démonstration sur des courtes séquences déductives peut-elle s'avérer une méthode efficace pour que, ensuite, l'élève soit capable de produire des textes de démonstration où les enchaînements se font plus longs et les problèmes ne sont plus en relation avec les objets du cours ?

Dans **HAC6^{e}**, dans une partie consacrée aux *triangles et quadrilatères*, on rencontre le *parallélogramme*, pour la première fois. Ici, les auteurs guident l'élève à *savoir s'y prendre avec les quadrilatères* et ils *rappellent*, entre autres, la *définition de parallélogramme* (D1) et sa *propriété relative à la longueur des côtés opposés* (D2). Dans les pages d'activités pratiques, un seul exercice

---

[45] Ou, au moins, *non croisé.*

[46] Cette propriété disparaît dans les manuels plus récents. Néanmoins, il faut signaler que cette ambiguïté est rattrapée dans le manuel de Troisième lorsque l'on aborde les propriétés caractéristiques du parallélogramme en termes vectoriels.

[47] Remarquons au passage que, dans les exemples proposés, on n'incite jamais l'élève à utiliser les isométries.

porte clairement sur cet objet : à l'aide d'une *preuve pragmatique*, ils proposent de vérifier *s'il existe un ou plusieurs pliages permettant à chaque sommet de «venir» à coïncider avec un autre sommet.* Rappelons que, au niveau scolaire concerné, l'élève a abordé la symétrie axiale, le but de l'exercice est sans doute d'amener l'élève à reconnaître que le parallélogramme n'a pas d'axes de symétrie.

Dans le manuel **HAC5**^{e}, un chapitre entier est consacré au parallélogramme, *en liaison avec les propriétés de la symétrie centrale.* Une activité d'introduction permet de préciser le vocabulaire autour des quadrilatères : ici, on montre la différence entre un *quadrilatère croisé* ou *non croisé.* C'est ainsi que l'on propose deux activités préparatoires permettant de dégager, à travers les invariants de la *symétrie centrale*, les propriétés caractéristiques du parallélogramme (D2a et D2b) en prenant garde de préciser – là où il faut – que le quadrilatère doit être *non croisé.* Les auteurs insistent aussi sur le fait qu'il ne faut pas confondre les énoncés directs avec les réciproques.

Dans la rubrique *Pour résoudre des problèmes*, on propose une activité sur la *construction d'un parallélogramme suivant des conditions imposées* (par exemple, on connaît les longueurs des diagonales, des côtés etc.) en mettant bien en évidence les propriétés qui permettent de *justifier la construction.* On remarque qu'ici, les auteurs offrent aussi des moyens pour aborder convenablement un problème de construction : ils précisent de faire d'abord un dessin à main levée. D'ailleurs, à ce propos, dans le chapitre de rappel sur les connaissances acquises en Sixième, ils fournissent des *conseils* :

> "**Important !** Dans un problème de construction, il est **interdit de tâtonner. Conseils** : faire une figure (un schéma) **à main levée** ; **coder**, au fur et à mesure, les informations contenues dans l'énoncé".

Dans une deuxième activité, intitulée *Savoir utiliser les propriétés d'un parallélogramme*, on voit bien que l'objectif des auteurs est de montrer l'enchaînement déductif qui permet de *justifier les réponses* aux questions posées dans les deux problèmes proposés. On suggère, entre autres, qu'*il faut s'habituer à voir des figures simples dans une figure complexe.* Ces éléments manifestent clairement une volonté d'aider l'apprenant à développer progressivement son *attitude rationnelle.*

Toute autre est l'approche des auteurs italiens pour introduire les objets en questions dans les divers manuels. Dans les manuels **MAR** (D1 à D4) et **BOV** (D1 à D4), les *propriétés du parallélogramme* sont introduites de la même façon :

> "Après avoir construit avec du carton la maquette d'un parallélogramme, découpons-le (découpez-le) suivant l'une des deux diagonales.... Nous obtenons (vous obtiendrez) deux triangles. En les superposant, nous constatons (vous constatez) qu'ils sont congruents..."

Suivant toujours un style magistral, c'est ainsi que les auteurs dévoilent la première propriété : *un parallélogramme est partagé par chacune de ses diagonales en deux triangles congruents.*

A partir de là, dans un même énoncé, l'auteur du manuel **MAR** fournit les autres propriétés (D3a) en proposant de les valider à travers une *preuve pragmatique* (*...nous pouvons facilement les vérifier à*

l'aide d'un rapporteur et d'une règle graduée...). En revanche, dans le manuel **BOV**, pour prouver l'*égalité des côtés* et des *angles opposés* (D3a), on exploite la *congruence des triangles* et la *caractérisation angulaire du parallélisme* alors que, pour prouver la *propriété des diagonales* (D3a), on recourt à nouveau à une preuve *pragmatique* (découpage) : voici à nouveau une situation ambiguë à propos de l'*attitude* que l'apprenant hypothétique est censé adopter dans son étude de la géométrie.

Dans les deux ouvrages, les propriétés réciproques sont admises. À ce propos, une précision est indispensable. Pour éluder la question de la *convexité* et faire en sorte que ces propriétés acquièrent du sens (au moins dans des cas particuliers de quadrilatères), dans un chapitre d'introduction aux polygones[48], les auteurs prennent une précaution : ils précisent que, par la suite, ils se limiteront *à considérer seulement des polygones convexes (sauf avis contraire)* et que donc le terme *polygone* désigne exclusivement un polygone convexe[49].

En ce qui concerne les *constructions géométriques*, dans le manuel **BOV**, rien d'explicite n'est dit sur la construction d'un parallélogramme ; en revanche, dans le manuel **MAR**, dans le chapitre consacré aux constructions, on fournit la méthode pour *construire un parallélogramme dont on connaît les longueurs des côtés et de la hauteur associée à l'un des deux côtés*. Dans les activités pratiques liées à ce chapitre, on propose de construire un parallélogramme dont on connaît les longueurs des côtés et d'une diagonale ; d'un côté et des deux diagonales[50]. Dans ce dernier cas, on suggère :

> "Considérez que les diagonales partagent le parallélogramme en deux triangles [sic] ayant comme côtés... Construisez un de ces deux triangles et puis...".

Voici donc que la construction est reliée à celle d'un triangle.

Signalons au passage que, dans le manuel **MAR**, aucun lien n'est fait avec la *symétrie centrale* alors que, dans le manuel **BOV**, dans un chapitre consacré aux *isométries*, un paragraphe succinct est consacré aux *éléments de symétrie des parallélogrammes*. Ici, les auteurs s'expriment ainsi :

> "le point de concours O des diagonales [AC] et [BD] d'un parallélogramme est un centre de symétrie pour le parallélogramme. En fait, si vous joignez O avec un point P quelconque situé sur l'un des ses côtés et désignez avec P' le point où telle droite intercepte le côté opposé, vous pouvez vérifier que OP = OP'".

Rien d'autre n'est dit et surtout aucune activité pratique n'est prévue pour mobiliser ces connaissances.

Dans le manuel **CAT**, les auteurs proposent deux types de techniques mathématiques pour valider les *propriétés du parallélogramme* (D2). Dans une note en bas de page s'adressant à l'enseignant, nous lisons :

---

[48] Dans les deux tomes, ce chapitre sur les polygones précède celui qui porte sur les quadrilatères particuliers.

[49] Dans **MAR**, l'auteur précise aussi : "*Nous exclurons aussi de notre étude les polygones **croisés**...*".

[50] Pour la première construction, on fournit des données numériques alors que, pour l'autre, on énonce simplement : *Construisez un parallélogramme dont on connaît un côté et les deux diagonales.*

"... nous reportons *deux démonstrations*: l'une, classique, qui exploite les critères d'égalité des triangles ; l'autre, plus moderne, qui exploite les propriétés des symétries centrales. La deuxième démonstration est plus difficile... Évidemment, le choix de la démonstration à présenter dépend des exigences pédagogiques que l'Enseignant peut juger... . Ajoutons que, en quelques occasions, il peut être utile de démontrer un même théorème de deux manières différentes (si le temps le permet !), cela pour faire comprendre que, dans la démonstration d'un théorème autant que dans la résolution d'un exercice, il n'y a pas en général *une seule* procédure correcte".

C'est ainsi que les auteurs confirment leur position à l'égard des *transformations géométriques*[51]. En effet, dans la préface de l'ouvrage, ils précisent, entre autres, qu'ils ne les considèrent pas comme *un concept fondamental dans l'investigation géométrique mais plutôt comme un outil qui, en quelques occasions, peut utilement rejoindre les outils classiques*.

Lorsque l'on passe aux propriétés réciproques, on remarque qu'aucune allusion n'est faite à propos de la *convexité*[52] : les démonstrations proposées pour les valider s'appuient sur le codage d'un dessin reproduisant un quadrilatère convexe, ce qui pourrait faire croire que cet élément demeure implicite dans l'acception de quadrilatère, comme dans les ouvrages précédents. Cette interprétation pourrait être confirmée par la présence d'un encadré où les auteurs précisent :

"Dans le paragraphe 3 du chapitre V, nous avons généralisé le deuxième critère d'égalité des triangles. Qu'est-ce signifie *généraliser* un théorème ? En mathématiques, on *généralise*, ou on *étend*, un théorème lorsque l'on prouve que l'on obtient la même thèse aussi dans des conditions plus générales que celles qui ont été prévues dans l'hypothèse.
Examinons les théorèmes ... [D3b et D2b suivant notre codage] ... Peut-on les généraliser en envisageant, au lieu d'un quadrilatère, une figure polygonale de quatre côtés (à savoir quatre segments, chacun consécutif aux deux autres) ? Autrement, étant donnée une figure polygonale fermée ABCD, est-il vrai que, si ABCD admet un centre de symétrie, alors il est un parallélogramme ?[53]... la réponse est *négative* dans les quatre cas. Pour s'en persuader, il suffit de construire un seul contre-exemple : la figure polygonale croisée de la fig. ... satisfait les hypothèses de tous les énoncés précédents mais n'est pas un parallélogramme (même pas un quadrilatère)".

Ce choix est pourtant surprenant surtout si l'on considère que, dans les éditions anciennes de cet ouvrage, le terme "quadrilatère convexe" apparaissait dans chacun des ces énoncés en question et des explications (contre-exemples) étaient fournies dans des notes en bas de pages pour souligner la nécessité de la convexité pour que les résultats en question soient exacts.

A propos des *constructions géométriques*, dans un paragraphe qui leur est consacré[54], rien n'est dit sur la construction d'un parallélogramme ; celle-ci n'est évidemment pas considérée comme une construction fondamentale mais pouvant se déduire des constructions de base. Dans les activités pratiques liées à ce paragraphe, on trouve seulement un exercice où l'on propose de construire *un parallélogramme ABCD dont on connaît le côté [AB] et les deux diagonales* ; les indications fournies incitent à relier la construction à celle du triangle.

---

[51] Signalons que, à plusieurs reprises, l'ouvrage présente des paragraphes concernant les transformations géométriques. Notamment, on les traite dans l'ordre suivant : symétries, translations, rotations, homothétie.

[52] Signalons que, dans un paragraphe précédent consacré aux *concepts d'introduction aux polygones*, les auteurs préfèrent ne pas fournir une définition rigoureuse de *polygone concave* ; en outre, on peut déduire qu'ils ne considèrent non plus les *polygones croisés* car ils précisent qu'*une figure polygonale croisée n'est pas le contour d'un polygone*.

[53] Ici, ils font la liste des propriétés réciproques.

[54] Ce paragraphe est inclut dans le chapitre aux *polygones inscrit et circonscrit*.

Dans le manuel **MAT1**, la preuve des *propriétés du parallélogramme* (D2) est proposée sous forme d'*exercice guidé* (à compléter) : les suggestions fournies amènent à mobiliser convenablement les *critères de congruence* et la *caractérisation angulaire du parallélisme*. Signalons au passage que, dans cet ouvrage, le premier chapitre sur la géométrie que l'on rencontre porte sur les transformations géométriques : ici, on trouve un exercice corrigé où l'on demande d'envisager les cas où *un quadrilatère peut être une figure à symétrie centrale*. Par la suite, aucune liaison n'est faite entre le parallélogramme et la symétrie centrale et, plus généralement, les auteurs ne proposent plus de se servir des transformations géométriques pour dégager quelques propriétés relatives à la géométrie *synthétique*, les transformations devenant toutefois un outil très efficace dans la partie consacrée à la géométrie *analytique*. Rien d'autre n'est dit explicitement sur le parallélogramme : plusieurs indices montrent que les auteurs considèrent beaucoup de propriétés comme acquises antérieurement et que l'approche choisie pour développer la géométrie vise plutôt une réorganisation d'un point de vue axiomatique.

Les activités pratiques proposées dans les manuels français sont assez variées. Un bon nombre de tâches intéressent la *construction d'un parallélogramme suivant des conditions imposées*, très peu d'exercices sont à résoudre dans un cadre numérique. Surtout, on constate que des exercices demandent de *prouver* ou bien de *préciser la nature d'une figure en justifiant la réponse* ou encore de *conjecturer* et puis de *justifier* : le passage de la preuve *pragmatique* vers la preuve *intellectuelle* semble donc se faire d'une manière progressive, ce qui devrait permettre à l'élève de développer graduellement le passage d'une *attitude* à l'autre. Notamment, dans le manuel **HAC5^{e}**, on perçoit clairement que les auteurs *préparent le terrain* à la *démonstration* en mettant en garde l'apprenant sur la *conduite à tenir en géométrie* :

> **"Ce qu'on dit peut être vrai ; mais, si on ne le prouve pas, qui nous dit que ce n'est pas faux ?"**
>
> **"Quand on doit tracer une figure, il faut éviter de faire un dessin trop particulier. Il fait dessiner une figure «quelconque»".**
>
> **"Quand on demande la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère, il faut chercher à être le plus précis possible (en justifiant bien sûr)".**

Cette volonté d'inculquer la *bonne conduite à tenir* se manifeste aussi à travers l'*habillage* des énoncés proposés. Dans plusieurs exercices, on fournit la résolution d'un problème produite par un élève fictif et la correction de son professeur ; on demande alors de les interpréter en produisant ensuite une résolution correcte. Dans d'autres exercices on propose de compléter des rédactions de résolution, cela dans le dessein explicite de familiariser l'apprenant avec la rédaction d'une preuve.

À propos de la *symétrie centrale*, nous constatons que les tâches proposées devraient inciter l'élève à la mobiliser en tant qu'outil. Notamment, et cela probablement dans le but de montrer comment s'y

prendre, dans un exercice, on propose de compléter un discours où on exploite cet outil pour aboutir. Néanmoins, cette incitation demeure assez discrète.

Dans le manuel **HAT4^e**, dans les pages d'activités pratiques, toutes les tâches sont du genre *Construire une figure suivant des conditions imposées et justifier la construction* ou bien *Démontrer une propriété donnée*. Notamment, sous la rubrique *Apprendre à démontrer*, on propose des problèmes sur les parallélogrammes : il s'agit, par exemple, de *retrouver un énoncé* dont on donne la rédaction de la démonstration et un tracé ; ou bien, on propose un *schéma de démonstration* qu'*il faut compléter* avec les propriétés qui conviennent par rapport à l'énoncé fourni et puis on demande de *rédiger la démonstration*. Sous la rubrique *Chercher*, on propose des énoncés qu'il faut *démontrer* mais, cette fois-ci c'est à l'élève d'organiser la résolution de manière à accomplir convenablement la tâche. Remarquons que le degré de difficulté est nettement supérieur aux problèmes proposés dans les autres rubriques du chapitre : les isométries s'avéreraient un outil efficace (mais loin d'être évident à mobiliser si l'on n'a pas l'habitude !) alors que les organigrammes proposés jusque là pour rédiger une démonstration deviendraient inefficaces (voire illisibles) car les enchaînements déductifs nécessaires pour aboutir sont plus complexes.

Dans les deux manuels italiens s'adressant aux élèves de l'ESI, on trouve des exercices à résoudre aussi bien dans un cadre numérique que géométrique. Signalons que, dans **MAR**, la signification à attribuer à la tâche "*Vérifier que...*" demeure encore ambiguë, les indications opérationnelles fournies semblant exiger une *preuve intellectuelle*. Dans **BOV**, la distinction entre la tâche "*Démontrez que...*" et "*Vérifier que...*" semble s'éclaircir : dans un exercice, lorsque l'on demande de vérifier telle ou telle propriété, on précise de produire une *preuve pragmatique* (découpage) alors que, dans les autres cas, les indications opérationnelles s'orientent vers la *preuve intellectuelle*. Cela montrerait que l'élève est incité tantôt à adopter une *attitude*, tantôt l'autre, le passage de l'une à l'autre n'étant pas facilement identifiable.

Dans le manuel **CAT**, les activités pratiques sont toujours des véritables problèmes de démonstration à produire dans un cadre géométrique alors que dans **MAT1**, on ne trouve pas d'activités spécifiques sur le parallélogramme.

E. Théorème des milieux et sa réciproque

Ce théorème est présent en relation avec le *parallélogramme* seulement dans les deux **collections françaises** – dans le tome de Quatrième – et dans le manuel **CAT**. Dans les autres manuels, il est proposé éventuellement comme cas particulier de la réciproque du *théorème de Thalès*.

Comme nous l'avons déjà signalé, le manuel **HAT4^e** ouvre formellement les portes à la *démonstration*.

C'est donc dans ce contexte que *les propriétés des milieux des côtés d'un triangle* (E1a et E1b) sont proposées sous la forme de problèmes à résoudre, dans les pages d'activités préparatoires d'un chapitre consacré aux *projections et milieux*. Après avoir fourni les deux énoncés, on dicte une suite de consignes accompagnées aussi d'une liste de propriétés (*mini boîte à outils*) utiles pour *démontrer* les propriétés de la figure ; évidemment, il s'agit de quelques unes des *propriétés caractéristiques du parallélogramme*. En effet, il faut préciser que dans un chapitre précédent, consacré à des rappels sur le parallélogramme, on trouve l'activité suivante :

> "**Triangle et parallélogramme.** Soit un triangle ABC, E le milieu de [AB] et I le milieu de [BC]. On construit le point A' symétrique de A par rapport à I. Soit D le milieu de [A'C]. Démontrer que BECD est un parallélogramme".

Évidemment, cette activité est propédeutique à l'introduction officielle du théorème en question mais – vu l'endroit où elle est située – sa fonction principale porte sur l'apprentissage de la démonstration.
Les activités pratiques proposées relative à la propriété des milieux sont des véritables problèmes de démonstration à produire dans un cadre purement géométrique ; ici, on retrouve, entre autres, une suite de problèmes concernant le *parallélogramme des milieux*. A ce propos, remarquons que certains de ces problèmes se retrouvent dans les manuels **MAR** et **BOV** mais, dans ces derniers, ils sont situés plutôt en liaison avec le chapitre sur le parallélogramme où le théorème des milieux n'apparaît pas encore.
En outre, nous constatons que le style de quelques énoncés commence à ressembler davantage à celui qui est adopté dans les ouvrages italiens, l'organisation en étapes demeure pourtant un élément caractéristique des manuels français.

Dans le manuel **HAC4^{e}**, on introduit cet objet (E1a et E1b) à travers une activité intitulée *Le circuit* : la situation proposée est assez originale (du moins par rapport aux autres ouvrages analysés ici). Voici l'extrait (le texte est accompagné de deux dessins) :

> " Soit un triangle ABC. On "part" d'un point M sur le côté [BC]. La parallèle en M à (AB) coupe [AC] en N. la parallèle en N à (BC) coupe [AB] en P. La parallèle en P à (AC) coupe [BC] en Q. On dira que *le circuit se ferme* si Q et M coïncident.
> **Acte I : "Attention on ferme !"**
> 1° Prouver que BM = CQ (*indications* : il y a des parallélogrammes dans la figure).
> 2° Faire des essais pour fermer le circuit. Formuler une conjecture.
> 3° a) Recopier et compléter :
> *On sait que le seul... de la... (BC) à... distance de B et de C est le milieu de...*
> Montrer que le circuit se ferme dans un seul cas : lorsque M est le milieu de [BC].
> **Acte II : "Attention au départ !"** [ici, le texte est accompagné d'un dessin reproduisant un petit triangle inscrit dans un grand triangle].
> 1° Montrer que I, J et K sont les milieux des côtés du triangle ABC.
> *Indication* : considérer que le circuit démarre successivement en I, puis en J et enfin en K, et utiliser le résultat du 3° b) acte 1.
> 2° Que peut-on dire des droites (IJ) et (AB) ?
> Comparer les longueurs IJ et AB.
> 3° Même consigne avec (IK) et (AC), puis avec (KJ) et (BC)".

De même ici, on relie les résultats en question aux *propriétés du parallélogramme*. A nouveau, les

auteurs proposent une activité qui, s'appuyant sur la perception, demande aussi une capacité d'analyse et de réflexion de la part de l'élève : notamment, il nous paraît qu'on lui demande d'adopter une *attitude de l'intuition rationnelle* où la déduction trouve aussi sa place en tant que moyen pour organiser rationnellement l'expérience. En effet, encore une fois, les auteurs soulignent l'importance de distinguer correctement les hypothèses de la thèse : au-delà des résultats à dégager, nous reconnaissons qu'ils veulent transmettre surtout des compétences sur la manière de raisonner lorsque l'*on fait des mathématiques* et non seulement des connaissances. Soulignons qu'ils reviennent sur cet aspect à plusieurs reprises tout au long de l'ouvrage.

Les activités pratiques proposées sont surtout des problèmes de construction et de démonstration à produire dans un cadre géométrique. Nous retrouvons, entre autres, l'un des problèmes de constructions envisagés dans notre partie expérimentale et, notamment, la construction A du problème 2A où, d'après les indications fournies, on voit bien que l'on incite l'élève à considérer que le point cherché est le quatrième sommet d'un parallélogramme construit sur trois points donnés.

Dans le manuel **CAT**, l'introduction de cet objet complète la partie consacrée au *parallélogramme*. Dans un paragraphe intitulé *Du parallélogramme au triangle*, on énonce les deux théorèmes (E1a et E1b) en les validant à l'aide d'une *preuve intellectuelle*. A propos de ces théorèmes, on ne trouve pas d'activités pratiques spécifiques mais ils peuvent bien être utiles dans des problèmes placés dans d'autres chapitres de l'ouvrage.

F. Théorème de Thalès et sa réciproque

Dans les divers manuels, les premières différences concernant cet objet portent sur le langage utilisé pour le transmettre, sur le choix de son énoncé et, par conséquent, sur les configurations qui lui sont rattachées. A partir des tableaux relatifs à chaque manuel, nous avons regroupé (**Tableaux 4.15 et 4.15bis**, pages 292–293) tous les résultats qui tournent *autour de Thalès*, cela permettant de mieux saisir ces différences.

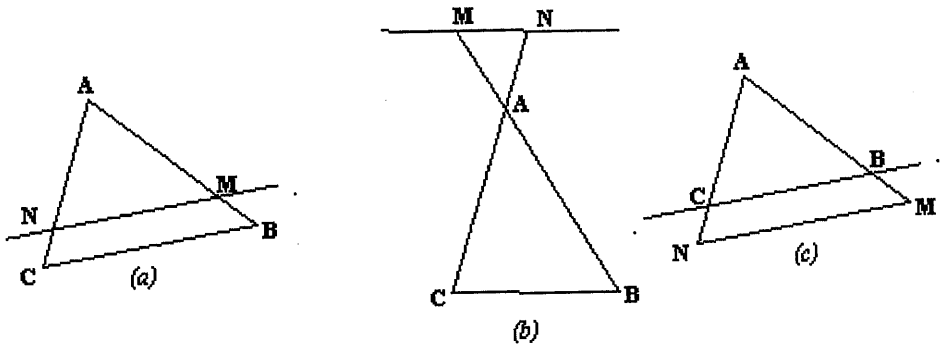


Figure 4.11 – La *configuration de Thalès* dans les manuels français

Dans les deux collections françaises, on ne considère que le *théorème de Thalès dans le triangle* (cf. Figure 4.11) alors que, dans les manuels italiens, normalement, on ne considère que le cas général où le nombre de droites parallèles est supérieur à trois (cf. Figure 4.12), le cas du triangle étant un corollaire de ce théorème et la réciproque du *théorème des milieux* n'étant éventuellement qu'un cas particulier de ce corollaire.

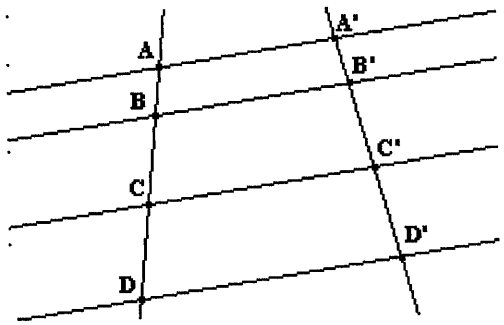


Figure 4.12 – La *configuration de Thalès* dans les manuels italiens

En général, cette différence caractérise les deux institutions, cela étant une tradition que l'on retrouve aussi dans d'autres manuels ; notamment, pour l'institution française, il s'agit de respecter les prescriptions des textes officiels.

Tableau 4.15 – Autour de *"Thalès"* dans les divers manuels

HAT3^{e}. *Propriété de Thalès* **(F1a)**. Soit un triangle ABC, un point M sur (AB) et un point N sur (AC) : les triangles ABC et AMN ont un "coin commun" en A, la position de M par rapport à A et B est la même que celle de N par rapport à A et C[55]. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$. Autrement dit : si les triangles ABC et AMN ont leurs troisièmes côtés parallèles, alors ils ont leurs trois côtés proportionnels. *Propriété réciproque* **(F1b)**. **Si** $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ **alors** les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

HAC3^{e}. *Définitions* **(F1a)**. La configuration des deux triangles[56]. Il s'agit de deux triangles déterminés par deux droites sécantes coupées par deux droites parallèles. Dans les deux cas : D ∈ (AB), E ∈ (AC) et (DE) // (BC). Les côtés de même support ou de supports parallèles sont appelés côtés *associés*.
L'énoncé de Thalès **(F1a)**. Dans la configuration des deux triangles, les côtés de l'un sont *proportionnels* aux côtés *associés* de l'autre.
Autre énoncé. Étant donné deux triangles ABC et ADE, tels que D ∈ (AB), E ∈ (AC) et (DE) // (BC), alors $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\left(ou\,\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}\right)$.
La "réciproque" de Thalès **(F1b)**. Étant donné deux triangles ABC et ADE tels que A, B et D d'une part, et A, C et E d'autre part, soient *alignés* dans le *même ordre*. Si $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, alors les droites (DE) et (BC) sont parallèles. On a, en outre, $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

[55] Ici, on considère trois cas de figure. Cf. la Figure 4.11, page 291.

[56] Ici, on considère deux cas de figure. Pour cela, cf. la Figure 4.11 (a) et (b) à la page 291 où, au lieu de M et N, on lira respectivement D et E.

Tableau 4.15bis – Autour de *"Thalès"* dans les divers manuels

MAR. *Définitions*[57] **(F1)**. Soit un faisceau de droites parallèles a, b, c, ... interceptées par deux transversales t et t'. les points A et A', B et B', C et C', ... sont dits **correspondants** s'ils sont interceptions d'une même droite du faisceau avec les deux transversales. De même, les segments AB et A'B', CD et C'D', AD et A'D', ... sont dits **correspondants** si leurs extrémités sont des points correspondants. *Théorème de Thalès* **(F2)**. Un faisceau de droites parallèles interceptées par deux transversales déterminent sur une transversale des segments directement proportionnels aux segments de l'autre transversale. *Conséquence du théorème de Thalès* **(F3)**. Toute droite parallèle à un même côté d'un triangle, qui intercepte les deux autres, partage les côtés interceptés en segments proportionnels. *Conséquence du théorème de Thalès* **(F4)**. La droite parallèle à un côté d'un triangle, menée par le milieu d'un autre côté, partage le troisième côté en deux segments congruents.
BOV. *Théorème de Thalès* **(F1)**. Un faisceau de droites parallèles détermine sur deux transversales des segments correspondants directement proportionnels.
CAT. *Définitions*[58] **(F1)**. On appelle **faisceau de droites parallèles** l'ensemble de toutes les droites du plan qui sont parallèles à une droite donnée *a*. Deux droites r, r' qui croisent la droite a respectivement en les points A, A' (figure) croisent aussi toute autre droite du faisceau. Les droites r et r' sont dites **transversales.** Le faisceau de droites parallèles détermine une correspondance biunivoque entre les points des transversales r et r' : deux points, un sur r et l'autre sur r', sont correspondants s'ils appartiennent à une même droite parallèle à a (par exemple, dans la figure, les points A et A', B et B' se correspondent). De même, les *segments* [AB] et [A'B'] sont *correspondants*. *Théorème de Thalès* **(F2)**. Les deux classes de segments correspondants déterminés par une faisceau de droites parallèles sur deux transversales sont directement proportionnelles. *Corollaire* **(F3a)**. Une droite parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés, ou sur leurs prolongements, des segments proportionnels. *Théorème* (réciproque du corollaire) **(F3b)**. Une droite qui détermine sur deux côtés d'un triangle, ou sur leurs prolongements, des segments proportionnels, est parallèle au troisième côté.
MAT. *Théorème* **(F1)**. Dans une projection parallèle, à des segments congruents correspondent des segments congruents. *Réciproquement*, si l'on établit une correspondance entre les points A, B, C … et A', B', C' … de deux droites telle que à des segments congruents sur l'une correspondent des segments congruents sur l'autre, si les droites qui joignent A et A', B et B' sont parallèles, alors toutes les droites qui joignent les extrémités de segments congruents sont parallèles (on établit une projection parallèle entre les deux droites). *Théorème* **(F2)**. Sur une droite *r*, si le segment AB est la somme de n segments consécutifs et congruents entre eux, alors en appelant A', B', C' les points correspondants de A, B, C dans une projection parallèle, A'B' est aussi la somme de n segments congruents entre eux. *Théorème* **(F3)**. Si un segment AB est multiple d'un segment CD, le segment correspondant A'B' dans une projection parallèle est multiple du segment correspondant C'D'. *Théorème* **(F4)**. Sur une droite, si la longueur d'un segment [AB] est supérieur à celle d'un segment [CD], alors, en nommant [A'B'] et [C'D'] les segments correspondants sur une autre droite en projection parallèle, A'B' > C'D'. *Théorème de Thalès (***(F6a)**. Un faisceau de droites parallèles détermine, sur deux droites interceptant ce faisceau, des segments proportionnels. *Théorème* (réciproque du théorème de Thalès) **(F6b)**. Étant données deux droites *r* et *r'* sécantes en un point P et deux autres droites *s* et *t* qui interceptent *r* respectivement en les points A et B et *r'* en les points A' et B', si PA/AB = PA'/A'B' alors *s* et *t* sont parallèles.

Les extraits des manuels **HAT3**[e] et **CAT** (cf. Figures 4.13 et 4.14) offrent un exemple très éloquent de la conception des auteurs, appartenant à deux institutions différentes, à propos d'un manuel scolaire ainsi que de la manière dont le savoir en question doit être transmis. Évidemment, la différence dans la *transposition* de cet objet – ainsi que d'autres objets dans les divers manuels – relève d'un souci qui

[57] Cf. Figure 4.12, page 292
[58] Cf. Figure 4.12, page 292

semble être a priori de nature différente. Conformément aux prescriptions officielles, les auteurs des manuels français donnent la priorité aux exigences pédagogiques, sans pourtant oublier de préserver une harmonie du point de vue mathématique. Pour les auteurs italiens, c'est exclusivement un souci académique qui semble les guidés dans l'organisation et la transmission des objets mathématiques.

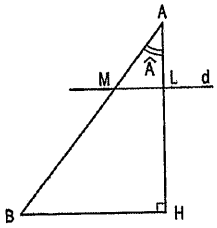
3 Démonstration de la propriété de Thalès

A Cas d'un triangle rectangle

Soit un triangle ABH rectangle en H.
Une droite *d*, parallèle à (BH), coupe [AH] en L et [AB] en M.

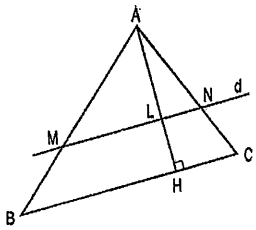
1 *Justifier que le triangle* AML *est rectangle en* L.

2 *Écrire* $\cos(\hat{A})$ *de deux façons.*
En déduire que : $\frac{AL}{AM} = \frac{AH}{AB}$
puis que $\frac{AL}{AH} = \frac{AM}{AB}$.



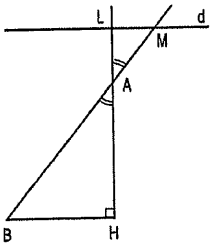
B Cas d'un triangle quelconque

Soit un triangle ABC quelconque. Une droite *d*, parallèle à (BC), coupe [AB] en M et [AC] en N.
La hauteur [AH] du triangle ABC coupe *d* en L.
En appliquant le résultat du **A** *démontrer que :*
$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.



C Autres cas

1 Soit un triangle ABH rectangle en H.
Une droite *d*, parallèle à (BH), coupe (AH) en L et (AB) en M.
Justifier que le triangle LAM *est rectangle en* L.
Démontrer que : $\frac{AL}{AH} = \frac{AM}{AB}$.



2 Soit un triangle ABC quelconque. Une droite *d*, parallèle à (BC), coupe (AB) en M et (AC) en N.
Tracer la hauteur (AH).
Démontrer que : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

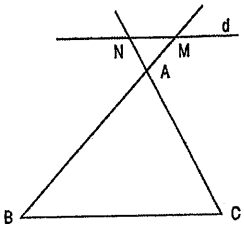
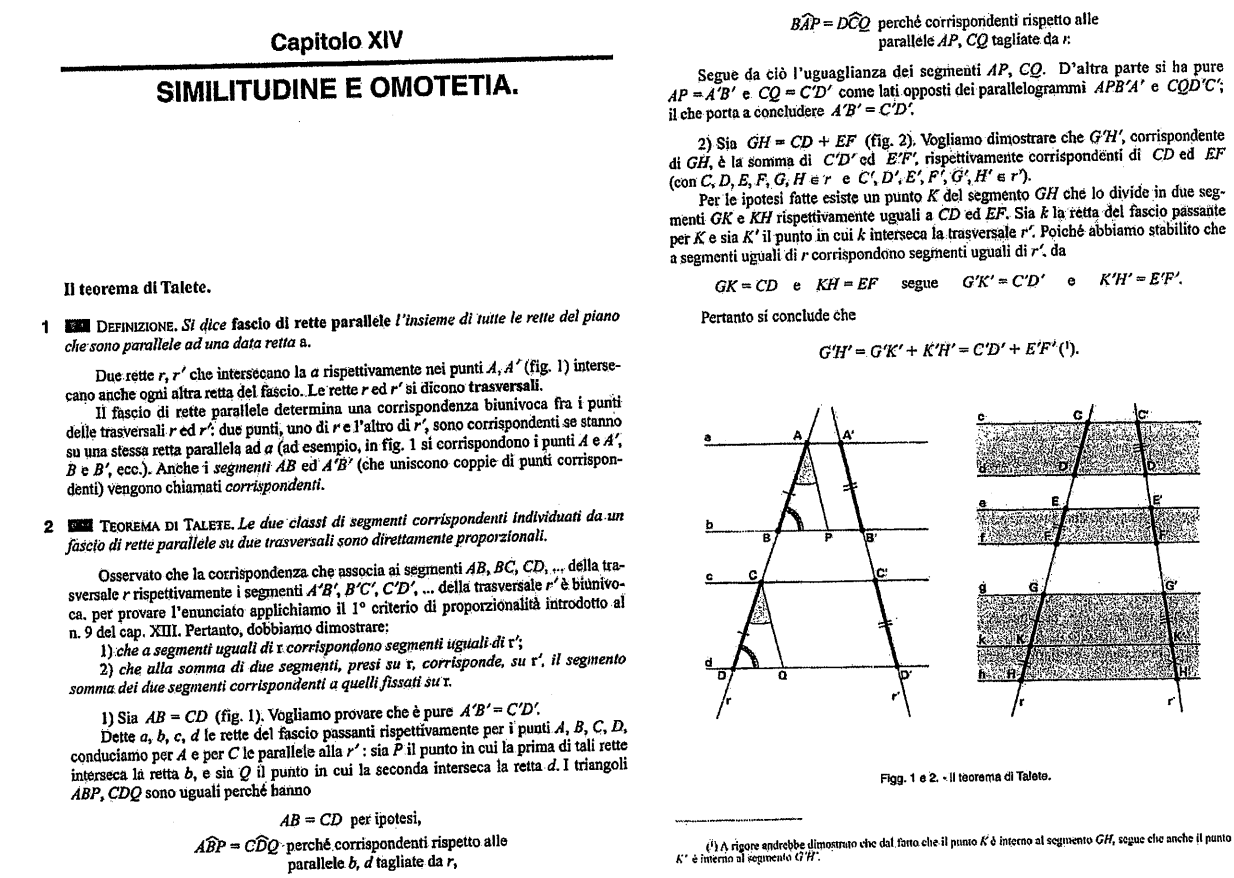


Figure 4.13 – LA *DEMONSTRATION* DU THEOREME DE THALES (HAT3e, d'après les pages d'activités préparatoires)



Capitolo XIV

SIMILITUDINE E OMOTETIA.

Il teorema di Talete.

1 DEFINIZIONE. *Si dice* **fascio di rette parallele** *l'insieme di tutte le rette del piano che sono parallele ad una data retta* a.

Due rette r, r' che intersecano la a rispettivamente nei punti A, A' (fig. 1) intersecano anche ogni altra retta del fascio. Le rette r ed r' si dicono **trasversali**.

Il fascio di rette parallele determina una corrispondenza biunivoca fra i punti delle trasversali r ed r': due punti, uno di r e l'altro di r', sono corrispondenti se stanno su una stessa retta parallela ad a (ad esempio, in fig. 1 si corrispondono i punti A e A', B e B', ecc.). Anche i *segmenti* AB ed $A'B'$ (che uniscono coppie di punti corrispondenti) vengono chiamati *corrispondenti*.

2 TEOREMA DI TALETE. *Le due classi di segmenti corrispondenti individuati da un fascio di rette parallele su due trasversali sono direttamente proporzionali.*

Osservato che la corrispondenza che associa ai segmenti AB, BC, CD, ... della trasversale r rispettivamente i segmenti $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, ... della trasversale r' è biunivoca, per provare l'enunciato applichiamo il 1° criterio di proporzionalità introdotto al n. 9 del cap. XIII. Pertanto, dobbiamo dimostrare:

1) *che a segmenti uguali di* r *corrispondono segmenti uguali di* r';

2) *che alla somma di due segmenti, presi su* r, *corrisponde, su* r', *il segmento somma dei due segmenti corrispondenti a quelli fissati su* r.

1) Sia $AB = CD$ (fig. 1). Vogliamo provare che è pure $A'B' = C'D'$.

Dette a, b, c, d le rette del fascio passanti rispettivamente per i punti A, B, C, D, conduciamo per A e per C le parallele alla r': sia P il punto in cui la prima di tali rette interseca la retta b, e sia Q il punto in cui la seconda interseca la retta d. I triangoli ABP, CDQ sono uguali perché hanno

$AB = CD$ per ipotesi,

$\widehat{ABP} = \widehat{CDQ}$ perché corrispondenti rispetto alle parallele b, d tagliate da r,

$\widehat{BAP} = \widehat{DCQ}$ perché corrispondenti rispetto alle parallele AP, CQ tagliate da r.

Segue da ciò l'uguaglianza dei segmenti AP, CQ. D'altra parte si ha pure $AP = A'B'$ e $CQ = C'D'$ come lati opposti dei parallelogrammi $APB'A'$ e $CQD'C'$; il che porta a concludere $A'B' = C'D'$.

2) Sia $GH = CD + EF$ (fig. 2). Vogliamo dimostrare che $G'H'$, corrispondente di GH, è la somma di $C'D'$ ed $E'F'$, rispettivamente corrispondenti di CD ed EF (con $C, D, E, F, G, H \in r$ e $C', D', E', F', G', H' \in r'$).

Per le ipotesi fatte esiste un punto K del segmento GH che lo divide in due segmenti GK e KH rispettivamente uguali a CD ed EF. Sia k la retta del fascio passante per K e sia K' il punto in cui k interseca la trasversale r'. Poiché abbiamo stabilito che a segmenti uguali di r corrispondono segmenti uguali di r', da

$GK = CD$ e $KH = EF$ segue $G'K' = C'D'$ e $K'H' = E'F'$.

Pertanto si conclude che

$G'H' = G'K' + K'H' = C'D' + E'F'$ (1).

Figg. 1 e 2. - Il teorema di Talete.

(1) A rigore andrebbe dimostrato che dal fatto che il punto K è interno al segmento GH, segue che anche il punto K' è interno al segmento $G'H'$.

Figure 4.14 – LE THEOREME DE THALES (CAT, d'après les pages de cours)

Suivant les manuels, ce théorème est prouvé ou non.

Dans le manuel **HAT3^e^** (F1a), on le prouve en distinguant quatre cas de figure (cf. Figure 4.13) et en s'appuyant sur la définition de *cosinus d'un angle aigu*[59]. Nous reconnaissons dans ce choix un moyen pour éviter une trop grande complexité, ce qui est dû sans doute à une volonté de mettre l'élève dans la condition de prouver lui-même un résultat important du programme de Troisième.

Dans le manuel **HAC 3e** (F1a), on le prouve à l'aide des *propriétés des projections parallèles* et en ne considérant que le cas de la Figure 4.11 (a), le cas de la Figure 4.11 (b) étant explicitement admis.

Dans les manuels **MAR** (F1 et F2) et **BOV** (F1), il est admis[60]. En particulier, dans **MAR**, à la suite de ce théorème, on trouve une application à un triangle (F3) ainsi que la *réciproque* du dit *théorème des milieux*[61] (F4). Remarquons que ce dernier résultat est prouvé à l'aide des *critères de similitude des triangles*.

[59] En principe, c'est la définition de *cosinus d'un angle aigu* qui résulte du *théorème de Thalès* !

[60] Dans **MAR**, en réalité, on affirme que "*en* ***mesurant*** *deux segments quelconques déterminés sur une transversale et les segments correspondants déterminés sur l'autre transversale...*". En quelque sorte, on incite à le valider à l'aide d'une *preuve pragmatique*.

[61] Ici, ce théorème ne porte pas d'appellation spécifique, cela étant plutôt une tradition française.

Dans le manuel **CAT**, on le valide à l'aide d'une *preuve intellectuelle* s'appuyant sur les règles de proportionnalité, la caractérisation du parallélisme et les critères de congruence (F1 et F2) ; on distingue deux étapes (cf. Figure 4.14) :

1. on prouve qu'à des segments congruents sur une sécante correspondent des segments congruents sur l'autre sécante ;
2. on prouve qu'à la somme des longueurs de deux segments choisis sur une sécante correspond, sur l'autre sécante, la longueur d'un segment qui est la somme des longueurs de deux segments correspondant à ceux que l'on a choisi sur la première sécante.

A la suite de ce théorème, on prouve un corollaire du théorème de Thalès appliqué à un triangle (F3a). Remarquons que, dans ces trois manuels italiens, on ne considère pas le point d'intersection des deux sécantes, cela ayant évidemment une influence sur le développement ultérieur de ce sujet.
Dans le manuel **MAT2**, les auteurs ont choisi de distinguer plusieurs résultats dont les premiers (F1 à F4) sont en fait des *lemmes* qui permettent ensuite de prouver le théorème (F6a).

Dans les deux **manuels français**, cet objet demeure strictement lié aux projections parallèles et aux notions d'agrandissement/réduction. Le choix de son énoncé apparaît donc comme un compromis entre plusieurs objets géométriques, le chapitre dans lequel il est présenté semble avoir le statut d'introduction naïve à la notion d'*homothétie*, un objet qui est au programme de la classe de Seconde. Remarquons que, dans **HAT3**^{e}, c'est la notion de *cosinus d'un angle aigu* qui permet d'introduire ce théorème.
Dans les quatre **manuels italiens**, on remarque une différence entre ceux qui s'adressent aux élèves de l'ESI et ceux qui s'adressent aux élèves de l'ESS. Dans les manuels **MAR** et **BOV**, il est présenté à la fin d'un chapitre consacré aux notions de *similitude* et d'*homothétie*[62]. Dans le manuel **CAT**, le théorème de Thalès se trouve au début d'un chapitre consacré à la *similitude* et à l'*homothétie*. Il est utilisé pour introduire la notion de *figures semblables* et, plus loin, la notion de *cosinus*. Dans ces trois manuels, la notion de projection demeure en quelque sorte implicite.
Dans le manuel **MAT2**, le théorème en question ouvre un chapitre consacré aux *segments proportionnels* et il demeure strictement et explicitement lié aux *projections parallèles*. Il est utilisé ensuite pour prouver quelques propriétés de l'*homothétie* qui, à son tour, permettra de justifier l'introduction de la notion de *similitude*[63].

Signalons, en outre, que, dans les divers manuels, les premières applications portent sur des constructions classiques : *partage d'un segment en n parties égales*, *construction de la quatrième proportionnelle*, etc.

---

[62] Signalons que, dans **MAR**, on traite l'homothétie comme cas particulier de similitude alors que, dans **BOV**, la similitude suit l'homothétie.

[63] La similitude est introduite, en fait, comme composition d'une *isométrie* avec une *homothétie*.

La présence de la *réciproque du théorème de Thalès* est strictement liée aux choix des configurations qui accompagnent ce théorème. Deux cas sont possibles pour que son énoncé soit vrai.

1) Parmi les rapports de longueurs, l'on considère aussi les longueurs des segments ayant une extrémité qui coïncide avec le point de concours des deux droites sécantes interceptées par le faisceau de droites.
2) Autrement, l'on ne considère pas les longueurs des segments ayant une extrémité qui coïncide avec le point de concours des deux droites sécantes interceptées par le faisceau de droites **mais** l'on précise qu'il y a deux droites du faisceau qui sont parallèles.

Dans les deux **manuels français HAT3^{e}** (F1b) et **HAC3^{e}** (F1b), puisque l'on considère le *théorème de Thalès dans le triangle*, on se retrouve dans le premier cas : sa *réciproque* peut être énoncée. Cependant, dans les deux ouvrages, elle est admise.

Dans les **manuels italiens MAR, BOV** et **CAT**, la configuration est celle qui est représentée dans la Figure 4.12 : en énonçant le théorème direct, on ne prend pas en compte le point de concours des *transversales*. Ici la réciproque n'est pas énoncée.
Toutefois, dans le manuel **CAT**, puisque l'on prouve le corollaire (F3a) correspondant au *théorème de Thalès dans un triangle*, on trouve la *réciproque* de ce corollaire (F3b), prouvé à l'aide d'un *raisonnement par l'absurde*.
Dans le manuel **MAT**, en énonçant le théorème direct, les auteurs s'appuient sur la configuration générale de la Figure 4.12. La *réciproque* (F6b) énoncée ensuite n'est rien d'autre que la *réciproque du théorème de Thalès dans un triangle*, même s'ils ne parlent pas explicitement de triangle. De même ici, ce résultat est prouvé à l'aide d'un *raisonnement par l'absurde*.

Dans les deux manuels français, les activités pratiques relatives à ces objets sont facilement identifiables. En effet, dans le chapitre qui leur est consacré, de nombreux exercices sont proposés. Il s'agit d'exercices à résoudre dans un cadre numérique (*Calculer la longueur...*) ou géométrique (*Prouver que...*) ; des exercices sur la construction de figures suivant des conditions imposées sont aussi proposés. Remarquons que, dans **HAT3^{e}**, deux exercices permettent de mettre en évidence le lien entre les *propriétés de Thalès* et *les propriétés des milieux*.

Concernant les manuels italiens, dans **MAR**, on propose des constructions à effectuer suivant des conditions imposées ou des exercices à résoudre dans un cadre numérique. Dans **MAT2**, on propose des problèmes de démonstration parmi lesquels on retrouve explicitement l'énoncé du *théorème de Thalès dans le triangle*. Dans le manuel **BOV** aucune activité spécifique n'est proposée ; dans le manuel **CAT**, quelques activités spécifiques sont proposées : il s'agit surtout de problèmes de construction et de démonstration ; les problèmes relatifs à ce chapitre portent surtout sur la similitude

et l'homothétie. A ce propos, nous croyons que, dans l'esprit des auteurs, cet objet est un moyen pour en introduire d'autres. En effet, à propos de la proportionnalité, les manuels italiens proposent un outil plus puissant que le théorème de Thalès, à savoir les *critères de similitude des triangles*.

Conclusions

L'analyse des divers manuels à travers les objets choisis dans cette deuxième partie, nous a permis d'approfondir les différences existant sur les contenus mais surtout sur la forme et les méthodes pédagogiques que les divers auteurs proposent pour transmettre le savoir géométrique.

Dans les manuels français, on retrouve des énoncés plus restreints autour du théorème de Thalès et du théorème des milieux alors que, dans les manuels italiens, on trouve des énoncés plus généraux et plus puissants. Cela nous ne paraît pas très étonnant car, au début de notre recherche, lorsque nous avons cherché à repérer une configuration de base qui revenait le plus souvent, tous manuels et tous niveaux confondus, nous l'avons reconnue dans la *configuration du triangle des milieux* : vu les résultats d'une analyse plus approfondie des manuels scolaires, nous sommes persuadée que ce choix a été fortement influencé par les contenus des manuels français.

La différence la plus flagrante réside dans le rapport institutionnel à l'objet *Théorème de Thalès*. Dans les manuels **italiens** pour l'ESS, cet objet semble être *au service* d'autres objets comme les similitudes. La nécessité constante de garder une cohérence académique influe sur le choix de son énoncé mais aussi sur sa place par rapport à l'ordre de présentation des divers contenus : en fait, il permet d'introduire et de justifier des objets tels que *les critères de similitude*, les *homothéties* et les premiers éléments de la *trigonométrie*.

Dans les manuels **français**, le *théorème de Thalès* acquiert une identité autonome et ce sont plutôt d'autres objets qui permettent de le dégager comme résultat important du programme de la classe de Troisième. Le choix de son énoncé semble être un compromis entre plusieurs objets qui n'apparaissent ou bien qui sont introduit naïvement dans les programmes : en effet, avec un tel énoncé, quelle nécessité d'avoir les critères de similitude ? D'autre part, il semble occulté l'objet *homothétie* qui, étant donné qu'il doit être introduit naïvement, ne peut pas devenir un outil puissant et efficace. En fait, l'énoncé du théorème de Thalès tel qu'il a été aménagé dans l'institution française semble être encore une fois le résultat d'un souci pédagogique : il permet d'éviter toute complexité et, par conséquent, d'offrir à l'élève des situations où il s'avère un outil très efficace et convenable.

Dans les manuels **italiens**, la *caractérisation angulaire du parallélisme* est présentée d'une manière exhaustive et acquiert beaucoup d'importance en relation avec les critères de congruence et de similitude des triangles. En revanche, dans les manuels **français**, cet objet est présenté d'une manière

restreinte et, en tant qu'outil, il ne semble pas exercer une fonction essentielle : en fait, il pourrait être mis en relation avec les transformations géométriques, des objets qui – il y a longtemps – avaient remplacé les *cas d'égalité*. Le fait que la caractérisation angulaire du parallélisme demeure un outil marginal peut-il être interprété comme un indice de plus pour croire que les transformations géométriques sont des outils mobilisés avec beaucoup de précaution ?

L'analyse menée ici nous permet d'ailleurs de saisir le rapport institutionnel à l'objet *transformations géométriques*. Bien que notre problématique porte aussi sur cet objet, nous avons choisi de ne pas l'analyser spécifiquement mais plutôt de voir si, de fait, il représente un thème transversal, s'il ressort en tant qu'outil pour développer les autres chapitres de la géométrie.

Dans les textes officiels **italiens** pour l'ESI, les rédacteurs semblent suggérer qu'il faut développer ce thème à partir d'activités concrètes et qu'il peut devenir un outil à l'aide duquel l'élève découvre les propriétés des figures et organise ses connaissances. Dans les deux manuels examinés, il paraît évident que l'objet *transformations géométriques* ne remplit à aucun moment cet office, il est plutôt traité indépendamment des autres objets abordés. Remarquons que, dans ce cas, il est introduit à travers un langage formalisé et c'est peut-être cela qui empêche les auteurs de l'exploiter autrement.

Dans les textes officiels pour l'ESS, les rédacteurs laissent entendre que, quoi qu'il en soit, cet objet doit être traité mais qu'éventuellement il ne deviendra pas outil de démonstration. L'option choisie par les auteurs du manuel CAT se manifeste très clairement : ils ne considèrent pas les transformations géométriques comme *un concept fondamental dans l'investigation géométrique mais plutôt comme un outil qui, **en quelques occasions**, peut utilement rejoindre les outils classiques*. Plus ambiguë demeure l'option des auteurs du manuel MAT : en effet, dans le développement des divers contenus, l'objet en question trouve sa place à plusieurs reprises mais, alors qu'il pourrait devenir un outil efficace pour développer ainsi qu'organiser certains objets, les auteurs montrent une sorte de réticence et il préfèrent adopter les outils de la géométrie classique. C'est le cas, par exemple, lorsqu'ils traitent les résultats relatifs à la caractérisation angulaire du parallélisme et au parallélogramme.

Suivant les prescriptions officielles, l'analyse prouve que, dans les manuels **français**, les transformations géométriques deviennent le fil conducteur à partir duquel on développe les autres parties du programme : c'est le cas, par exemple, lorsque les auteurs introduisent les propriétés du parallélogramme. Cependant, l'usage des transformations est réduit à l'essentiel et bien souvent il n'est même pas envisagé. On dirait que l'*interdiction* de l'introduire comme *application du plan sur lui-même* empêche les auteurs de le faire devenir un véritable outil. Son utilisation demeure toujours naïve et aucune méthode n'est proposée pour que l'élève puisse apprendre à passer de l'analyse de la figure à l'usage des transformations géométriques. Cela est d'autant plus étonnant dans une institution où la préoccupation majeure annoncée est la nécessité de fournir à l'élève des moyens de s'approprier du savoir-faire.

A propos des *constructions géométriques*, l'exemple examiné plus haut – *construction de deux droites parallèles* – nous a permis de constater qu'en effet elles acquièrent une signification différente dans les deux institutions.
En conformité avec les prescriptions officielles, les auteurs des manuels **français** leur attribuent deux fonctions : d'une part, elles servent pour apprendre à produire des dessins précis et soignés, d'autre part, elles représentent un moyen pour faire fonctionner des connaissances acquises ou à acquérir. Par exemple, il nous paraît que l'introduction de l'objet *cercle* depuis la classe de Sixième se justifie par le fait que l'élève va utiliser le compas mais nous pouvons y voir l'occasion de conduire l'élève à se détacher de l'action, de l'objet physique et du dessin pour se rapprocher de l'objet géométrique.
En revanche, dans les manuels **italiens**, elles occupent une place *marginale* dans les deux cycles. Les rédacteurs des textes officiels pour l'ESI prévoient l'enseignement des constructions géométriques à l'aide d'instruments de dessin et ils évoquent implicitement l'importance d'apprendre à utiliser ces instruments pour que la présentation des propriétés géométriques soit dynamique. Cependant, les auteurs des manuels semblent plutôt les introduire pour garder une cohérence d'ordre académique. Cette marginalité est encore plus évidente dans les manuels s'adressant aux élèves de l'ESS.

En ce qui concerne les méthodes pédagogiques qui surgissent dans les divers manuels, nous y revenons dans le paragraphe suivant où, entre autres, nous allons tirer des conclusions plus générales sur le rapport des divers auteurs au savoir géométrique et sur les objectifs qu'ils semblent viser dans le développement de ce savoir.

IV. Conclusions

Le manuel scolaire est un outil pédagogique qui participe au passage du savoir à enseigner au savoir enseigné mais il se fait aussi administrateur du savoir à acquérir. Les auteurs de manuel s'appuient sur leur expérience personnelle, mais ils sont en principe tenus de respecter les programmes officiels.

Au début de notre recherche nous avions remarqué que, dans l'institution italienne, il subsiste un écart important entre les intentions des programmes officiels et l'esprit des manuels scolaires. D'après les rédacteurs des textes officiels, le projet éducatif ne consiste plus à dispenser *magistralement* du savoir indépendamment du savoir-faire, les contenus et la pratique avançant du même pas.

L'influence des rédacteurs des programmes officiels sur le rapport à (l'enseignement de) la géométrie des auteurs des manuels scolaires français apparaît d'une manière plus évidente. Le savoir est minimisé au profit du savoir-faire : c'est à travers l'acquisition du savoir-faire que l'élève participe à la formation de son esprit scientifique lui permettant ensuite d'enrichir ses connaissances.

En nous interrogeant sur le rapport institutionnel et sur le rapport personnel à la géométrie de divers auteurs de manuels scolaires, nous avons mis en place des dispositifs d'analyse permettant de cerner ces rapports. Nous avons envisagé trois niveaux : l'analyse de la forme, l'analyse des contenus et l'analyse des méthodes pédagogiques sous-jacentes. Nous croyons qu'aucun de ces niveaux n'est prioritaire mais qu'ils ont une relation mutuelle, l'ensemble attestant la fonction du manuel.

Nous avons traité des différences de contenus dans les conclusions des parties précédentes. Nous allons maintenant reprendre les aspects plus généraux.

Au cours de cette phase de la recherche, plusieurs questions ont guidé notre analyse des manuels scolaires. Nous allons les reprendre ci-dessous, tout en considérant que, pour certaines d'entre elles, nous n'avons pas d'éléments objectifs pour y répondre.

Quelles sont les objectifs – implicites ou explicites – des auteurs lorsqu'ils ont conçu les manuels examinés ? Cette question nécessite une prise en compte des contenus transmis et des méthodes pédagogiques adoptées pour les transmettre, deux niveaux d'analyse qui – nous l'avons déjà précisé – instaurent une relation mutuelle. D'autre part, la réponse dépend strictement de la position que l'*usager* du manuel occupe au sein de l'institution concernée, ce qui conduit nécessairement à distinguer le cas de l'élève du cas du professeur.

L'analyse des contenus nous a amenée à évoquer la manière dont les objets sont proposés et leur lien avec l'aspect pratique de la discipline.
Dans les manuels italiens, la vision de fond est celle d'un savoir qui engendre un savoir-faire, ce dernier apparaît comme une application du premier : les pages de cours précèdent toujours les pages d'activités pratiques. En revanche, dans les manuels français, le savoir-faire apparaît comme primordial pour présenter un savoir qui, d'ailleurs, se réduit à l'essentiel : un chapitre est organisé de manière à avoir des activités préparatoires précédant les pages de cours et les activités pratiques proprement dites.

Plusieurs indices amènent à constater que, dans l'esprit des auteurs des divers manuels, l'élève est l'*usager* principal de leur ouvrage. En ce sens-là, le manuel est un outil, parmi d'autres, pour accéder à la culture mathématique, un outil de référence pour suivre et approfondir une leçon, une aide dans son travail individuel. Lors de l'analyse qui fait l'objet de ce chapitre, les questions suivantes ont guidé nos réflexions : **quelle sont les méthodes proposées dans les divers manuels pour apprendre le savoir en question ? Favorisent-elles la découverte et la participation de l'élève à une construction rationnelle progressive de ses connaissances ?**

Mais les manuels sont aussi des outils pédagogiques à l'usage de l'enseignant(e) : il est source d'informations sur les objets à enseigner et une aide pour organiser son cours : **quelles méthodes pédagogiques un manuel donné incite-t-il à pratiquer ? L'approche proposée favorise-t-elle un enseignement par les problèmes ?**

Dans les manuels examinés, l'organisation du savoir géométrique se fait selon des approches et des méthodes différentes. **Ces diverses organisations font-elles place à des situations qui favorisent une dialectique entre l'*attitude de l'intuition rationnelle* et l'*attitude rationnelle* ?** C'est ainsi qu'en essayant de répondre à cette question, nous avons pu repérer quelques éléments de réponse aux questions précédentes.

Dans la description globale des ouvrages, plusieurs indices conduisent à percevoir quelques ressemblances du manuel MAT avec les manuels français. Or, une analyse plus détaillée, nous a permis de constater que, dans le manuel MAT, le contenu est moins riche que celui des autres manuels de la même institution, le réseaux des aires étant, entre autres, un exemple visuel éloquent. Cependant, ce manuel se place dans la continuité des programmes du cycle inférieur, ce qui légitime – dans l'esprit des auteurs – une réorganisation formelle des acquis antérieurs. Cela nous amène à la réflexion suivante.

Les divers objets sont systématiquement repris en passant du cycle ESI au cycle ESS, le point de vue axiomatique étant plus explicite dans le cycle supérieur. Dans les manuels italiens pour le cycle supérieur, l'approche adoptée ne semble pas favoriser un passage adéquat d'une attitude à l'autre. Les auteurs paraissent généralement convaincus que, au cycle inférieur, les mêmes sujets ont été abordés suivant une approche qui demande à l'élève une *attitude de l'intuition rationnelle*. C'est par une *attitude formelle* qu'ils justifient la nécessité de développer une attitude rationnelle.
Dans les manuels pour l'ESI, les auteurs semblent ne pas se préoccuper de la mise en œuvre d'une dialectique entre les éléments *rationnels* et les éléments correspondant de l'*intuition rationnelle*. Nous avons constaté à plusieurs reprises qu'il subsiste une sorte d'ambiguïté sur l'attitude que l'élève devrait adopter pour apprendre la discipline en question. C'est le cas, par exemple, dans les genres de tâches proposés dans les pages d'activités pratiques ou bien dans les techniques utilisées pour exposer et valider certains résultats du cours : l'élève est incité tantôt à adopter tantôt une *attitude*, tantôt l'autre ; le passage de l'une à l'autre en termes de dialectique n'est pas facilement identifiable. En outre, des résultats du cours sont parfois validés à l'aide de preuves intellectuelles, les mêmes que celles qui sont proposées dans les manuels pour le cycle supérieur.
Finalement, l'entrée *officielle* dans l'organisation rationnelle se fait par les biais de l'attitude formelle. Dans ce contexte, peut-on parler de continuité entre les deux cycles ? Peut-on parler de négociation

dans le passage d'une attitude à l'autre ? A travers les manuels, nous percevons plutôt une rupture entre les deux cycles, une rupture qui n'est sans doute pas volontaire mais qui semble être occasionnée par un manque de communication entre les deux *sous-institutions*. D'ailleurs, cette séparation peut aussi se percevoir en termes de temps institutionnels : la réforme du cycle inférieur n'a pas encore été suivie par une véritable réforme du cycle supérieur…

Dans les manuels **français**, la présentation des contenus semble mieux favoriser la négociation d'un passage progressif d'une attitude à l'autre. À travers l'analyse des activités pratiques, nous avons pu constater que les genres de tâches proposées se dirigent progressivement vers l'attitude rationnelle et qu'elles offrent plus de possibilités à la mise en œuvre d'une dialectique entre les éléments rationnels et les éléments correspondant de l'intuition rationnelle.

Dans le chapitre 2, nous avions remarqué que les objectifs relatifs aux mathématiques présentent une grande analogie dans les textes officiels du Collège et de l'ESI. L'idée qu'une *approche par les problèmes* peut soutenir et motiver la généralisation et l'organisation théorique apparaît comme un aspect primordial pour les rédacteurs des deux institutions : c'est ainsi que l'élève devrait prendre conscience de la manière dont la discipline en question peut l'aider à développer et à organiser rationnellement ses intuitions et ses idées. Comment les auteurs des manuels analysés traduisent-ils ces demandes ?

Dans aucune des deux institutions, la référence à une culture géométrique quotidienne n'apparaît explicitement. Dans les manuels **italiens**, les auteurs semblent offrir une image de la géométrie en tant que théorie formelle et en tant que support propice pour développer des capacités d'organisation rationnelle de la pensée sans pourtant se soucier d'aider explicitement l'élève à développer une attitude rationnelle. Dans les manuels **français**, bien qu'ils soient *chatoyants de couleurs, de dessins, de schémas ingénieux*[64], les auteurs ne semblent pas s'éloigner de cette image : la différence réside plutôt dans l'idée que l'élève doit être aidé dans le passage d'une attitude à l'autre, ils semblent avoir conscience que cette transition ne s'accomplit pas spontanément.

Dans les manuels **italiens** pour l'ESI, la volonté de solliciter l'élève à agir apparaît plutôt comme une intention inachevée. L'exposition des contenus se fait toujours d'une manière magistrale ; lorsque l'on invite l'apprenant à observer, à examiner des situations, à manipuler du matériel, chaque conclusion est aussitôt fournie ; on ne trouve aucune question l'amenant à la réflexion et à l'analyse. Évidemment, la forme choisie pour développer les divers contenus influe sur la méthode d'apprentissage suggérée : la

[64] Krygowska, Z. (1969), *Le texte mathématique dans l'enseignement*, Educational Study in Mathematics, 2, p. 360-370, Reidel, Dordrecht - Holland

présentation *ostensive assumée*[65] du savoir ne permet pas à l'élève de se situer en "résolveur de problèmes" mais plutôt en "observateur", il doit d'abord apprendre l'objet et ensuite être capable de le transformer en outil, le sens du savoir ainsi que sa transformation en connaissance restent à sa charge. Dans les manuels **italiens** pour l'ESS, la position de l'élève en "observateur" est encore plus manifeste. Peut-être pouvons-nous reconnaître un faible effort de la part des auteurs du manuel MAT qui parfois, par exemple, proposent sous la forme d'exercice guidé des énoncés qui apparaissent dans les pages de cours dans les manuels de la même institution ; pourtant, nous avons déjà souligné que la résolution est donnée souvent d'une manière magistrale.

Dans les manuels **français**, des activités préparatoires au début d'un chapitre ont la fonction d'introduire l'objet visé qui sera *ensuite* institutionnalisé dans les pages de cours. Cette présentation du savoir semble être strictement liée à un souci pédagogique où la volonté de situer l'élève en "résolveur de problèmes" et de le mettre en condition de construire lui-même ses connaissances apparaît d'une manière flagrante. Dans ce cas, il s'agit alors le plus souvent d'*ostention déguisée*[66] : les objets visés ne sont pas explicitement présentés mais l'élève a l'illusion de les découvrir à travers des questions qui lui sont posées et qui devraient l'aider à organiser rationnellement les étapes nécessaires à cette découverte. Cette présentation devrait guider l'élève vers l'analyse et la réflexion en lui fournissant des moyens pour réutiliser l'objet en tant qu'outil.

Par contre, comme nous l'avons dit à plusieurs reprises, les auteurs des manuels **italiens** analysés tiennent très peu compte des questions pédagogiques qui – depuis les années cinquante – ont enclenché un débat sur les méthodes d'enseignement des mathématiques[67], l'exigence d'une cohérence académique dans la présentation du savoir à transmettre étant placée toujours au premier rang. Quelques modifications sont perceptibles dans les manuels pour l'ESI : par exemple, dans un paragraphe, l'objet visé n'est pas donné d'emblée mais il est introduit par un discours qui malheureusement ne laisse pas de place à l'analyse et à la réflexion. Le rôle de l'élève consiste encore à apprendre le cours et à l'appliquer dans des activités pratiques : le sens à attribuer aux objets exposés pour en faire des outils disponibles est à sa charge, c'est sa volonté d'investissement qui lui permettra éventuellement de saisir l'utilité de ce savoir et de le transformer en connaissance.
Dans le chapitre 2, nous avons conclu que, dans l'institution italienne, c'est le manuel qui permet de fixer un texte du savoir qui sert de référence pour l'enseignement des contenus et qu'une sorte de consensus sur la *tradition* fait obstacle aux changements souhaités. Bien que les instructions officielles suggèrent une image plus moderne de l'enseignement, les manuels n'offrent pas la même image. La

---

[65] cf. Salin M. H., Berthelot R. (1992), ouvrage déjà cité.
[66] cf. Salin M. H., Berthelot R. (1992), ouvrage déjà cité.

[67] cf. chapitre 1, § II, *Pourquoi une comparaison ?*

tradition euclidienne demeure un modèle de référence dans la présentation des contenus et détourne les auteurs de suggérer des méthodes d'enseignement moins traditionnelles.

En revanche, les auteurs des manuels **français** sont évidemment plus assujettis aux instructions officielles, l'aspect pédagogique étant toujours au premier rang. Or, il nous semble que la volonté de mettre l'élève en condition de participer à la construction de ses connaissances a influencé considérablement les choix des contenus et leur présentation. Cela semble limiter ces contenus, la préoccupation majeure étant de faire acquérir à l'élève surtout du savoir-faire. Cependant ce savoir-faire demeure lié à un contexte restreint, ce qui pourrait empêcher l'élève de le réutiliser ailleurs. La nécessité de permettre à l'élève de prendre conscience de ce qu'est une démarche scientifique, d'apprécier l'aspect technique de la discipline semble avoir *étouffé* l'aspect théorique ; des énoncés ont été créés *ad hoc* pour qu'ils soient les plus efficaces possibles ; les images ont pris la place de discours rigoureux et prolixes, dans le dessein de rendre le savoir plus accessible et maîtrisable. Derrière une image se cachent des concepts qui demandent à l'élève un esprit d'analyse dont il ne dispose pas encore : on lui souffle alors ce qu'il y a à voir à travers des questions mais nous croyons que cette méthode – qui s'adapte bien au niveau des premières classes du Collège – persiste trop longtemps pour que l'élève puisse développer une véritable autonomie dans la gestion de ses connaissances. Bien que nous reconnaissions une volonté de la part des auteurs à harmoniser les diverses attitudes mais surtout à favoriser une négociation dans le passage de l'attitude de l'intuition rationnelle à l'attitude rationnelle, nous croyons que la crainte de rendre les choses trop difficiles ne permet pas un développement sain et stable de l'attitude rationnelle.
L'ensemble des objets à institutionnaliser étant restreint, nous avons souvent remarqué que certaines activités pratiques permettraient d'élargir cet ensemble. Cet aspect devient appréciable si on le compare avec les manuels italiens où la majeure partie du savoir est donné dans les pages de cours. Cependant, compte tenu du fait que les instructions officielles fixent ce qui est exigible, nous nous demandons si cette *pression institutionnelle* ne diminue pas la possibilité d'approfondissement dans la réalité de l'enseignement.

Les diverses attitudes se caractérisent à travers les types d'activités qui les accompagnent et notamment par les types de preuves qu'on exhibe dans des situations d'enseignement et que l'on exige lors de la résolution d'un problème. C'est ainsi que nous nous sommes posé les questions suivantes : **quelles méthodes sont proposées dans les divers manuels scolaires pour favoriser la transition d'une preuve *pragmatique* à une preuve *intellectuelle* ?**

Dans la mise en place des dispositifs d'analyse des manuels scolaires, nous nous sommes donné les moyens pour fournir une réponse à cette question.

Lors de l'analyse des textes officiels **italiens** pour l'ESI, nous avons remarqué une sorte d'ambiguïté à propos de l'initiation de l'élève au raisonnement déductif, cet aspect n'est jamais pris en compte d'une manière explicite. D'après l'esprit des rédacteurs, la discipline en question doit contribuer au développement de capacités d'analyse critique et d'organisation rationnelle de la pensée à travers l'expérience : cela nous a amenée à croire que les résultats étudiés ainsi que les problèmes à résoudre doivent s'appuyer sur des preuves de type pragmatique. On n'envisage d'aborder systématiquement la démonstration qu'à partir de la première année de l'ESS. À ce niveau scolaire, nous avons constaté que, dans les intentions des rédacteurs, l'objectif primordial est que l'élève saisisse la manière dont le savoir géométrique a été construit, l'apprentissage des procédures démonstratives étant un aspect qui aide l'élève à saisir le processus constructif de cette discipline.
Les rédacteurs des textes officiels **français** sont, en revanche, plus précis à ce propos : l'initiation au raisonnement déductif doit commencer explicitement depuis les premières classes du Collège pour devenir, en Quatrième, un apprentissage systématique qui conduira l'année d'après à de véritables exercices de démonstration. En effet, ils incitent à ménager des séquences déductives motivantes, de plus en plus prolongées et de difficulté progressive, ce qui sous-entend la prise en compte d'un passage progressif des preuves pragmatiques vers les preuves intellectuelles.

Nous avons déjà analysé la manière dont les auteurs des manuels interprètent les intentions des textes officiels. À travers une analyse plus détaillée des contenus, nous avons pu mieux préciser cet aspect.

À l'égard de la place que la *démonstration* occupe dans l'enseignement de la géométrie (et, plus généralement, des mathématiques), nous distinguons deux statuts différents : c'est d'une part un instrument de validation des théorèmes du cours, c'est d'autre part un discours à produire lors de la résolution d'un problème. Dans ce deuxième cas, la démonstration est à considérer comme un véritable objet d'enseignement qui, comme tel, nécessite un apprentissage.
Cet apprentissage requiert du temps et des aller-retour entre l'attitude de l'intuition rationnelle et l'attitude rationnelle : l'élève doit être mis en condition de saisir la différence entre l'observation d'un dessin et l'analyse d'une figure, entre une justification et un simple constat, entre une explication formulée à l'aide des règles du langage naturel et un discours s'appuyant sur les règles de la logique formelle. La production d'un texte écrit de démonstration demande l'élaboration d'un raisonnement et cela ne se fait pas spontanément mais il nécessite une éducation au développement de capacités d'analyse critique et d'organisation rationnelle des connaissances. C'est ainsi que l'élève pourra reconnaître dans la démonstration (ou au moins dans une preuve intellectuelle) un instrument de validation des théorèmes du cours.

Il nous paraît évident que, dans les manuels **italiens**, la démonstration n'est pas envisagée comme un objet d'enseignement, cet objectif n'est nulle part pris en compte. Dans les manuels pour l'ESI, les

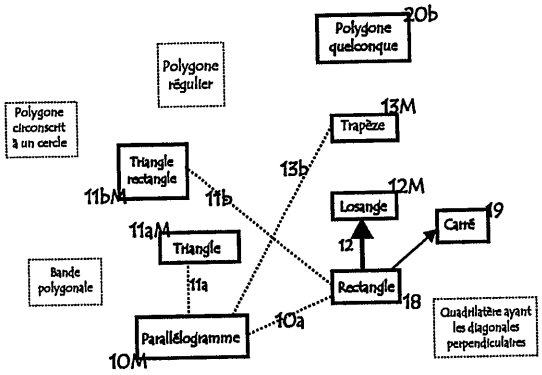
auteurs ne s'en préoccupent pas lorsqu'ils placent au même niveau divers types de preuves ; cela peut se percevoir dans les quelques indications opérationnelles qui accompagnent les problèmes proposés mais aussi dans les pages de cours où les résultats peuvent être accompagnés d'une preuve aussi bien pragmatique qu'intellectuelle. Dans les manuels pour l'ESS, la démonstration apparaît surtout comme instrument de validation des théorèmes du cours, par une nécessité d'ordre formel dû à l'approche axiomatique adoptée ; dans l'esprit des auteurs, le passage de l'élève de la logique naturelle à la logique formelle semble devoir s'accomplir spontanément si on lui fournit, à l'occasion et de manière décontextualisée, quelques éléments théoriques de logique.
C'est ainsi que l'élève qui se laisse entraîner dans le jeu apprendra à produire des textes "par imitation", sans prendre conscience de la nécessité de rigueur à travers le respect des règles logiques qui régissent une démonstration.

En revanche, dans les manuels **français**, la démonstration devient surtout un objet d'enseignement et d'apprentissage. Elle apparaît comme un moyen plus performant qu'un simple constat sur un dessin, un discours à produire pour convaincre et pour se convaincre. Dans les deux collections analysées, l'objectif semble être présent depuis le premier tome : il faut apprendre les règles du jeu et, pour ce faire, on sollicite l'élève avec une suite de questions qui devraient l'aider à développer un esprit d'analyse et de réflexion ainsi qu'à organiser rationnellement ses connaissances, les genres de tâches proposées vont se nuancer au fil des années. L'introduction de la démonstration semble alors se faire d'une manière sans doute plus progressive que dans les manuels italiens. Cependant, nous avons relevé des différences dans l'approche adoptée dans les deux collections.
Les auteurs de la collection HAT semblent adopter une méthode qui se veut progressive, cela à travers un discours, s'adressant directement à l'élève, qui commence en Sixième et se développe parallèlement aux contenus.
Les auteurs de la collection HAC proposent la démonstration plutôt en termes de ruptures : nous avons vu que dans le tome de Quatrième, ils introduisent des schémas (cf. Figure 4.1, page 221). Nous reconnaissons ici encore une tendance à privilégier le registre graphique au détriment du registre discursif : sans doute, dans l'esprit des auteurs, les schémas de démonstrations sont-ils destinés à aider l'élève à organiser les enchaînements déductifs et à bien distinguer la technique de résolution d'un problème du discours intellectuel qui permet de justifier cette technique. Nous constatons qu'il y a dans ces manuels français un effort dans la direction de l'élève, effort qui n'apparaît pas dans les manuels italiens. Cependant l'élève n'est jamais mis en face d'une véritable démonstration : en effet, pour qu'il participe à la construction de ses connaissances, les théorèmes du cours qu'il étudie à partir de la Quatrième sont toujours proposés à travers des activités préparatoires où il bâtit lui-même la preuve permettant de valider ces résultats.
Les instructions officielles **françaises** prescrivent de permettre à l'élève de progresser vers la construction d'enchaînements déductifs de plus en plus complexes, mais les restrictions de contenu,

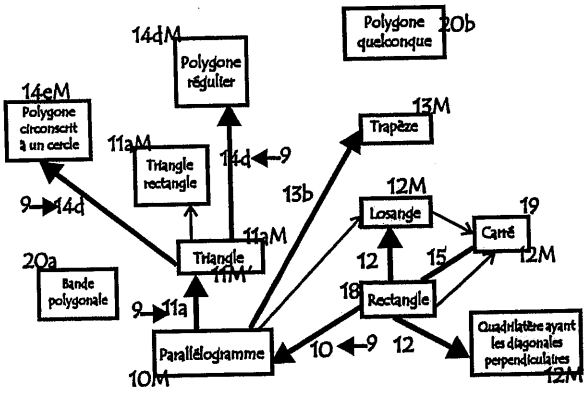
que ces instructions imposent par ailleurs, suscitent une réticence, repérable dans les manuels, qui va à l'encontre de la prise de conscience par les élèves de ce qu'est une véritable activité mathématique.

Les *réseaux conceptuels visualisés* relatifs aux divers ouvrages

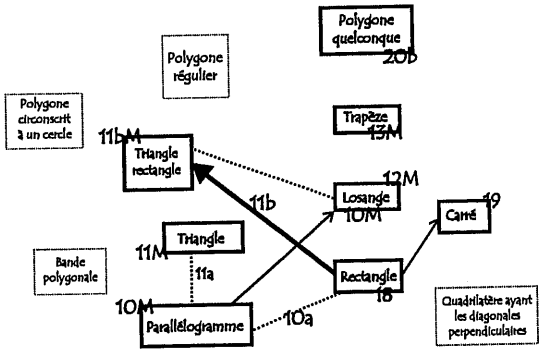
Le réseau conceptuel visualisé relatif à la collection française HAT



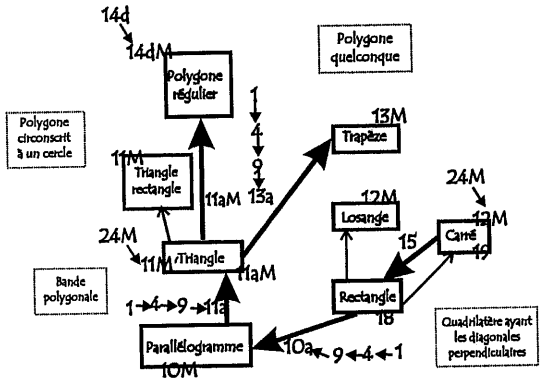
Le réseau conceptuel visualisé relatif au manuel italien BOV



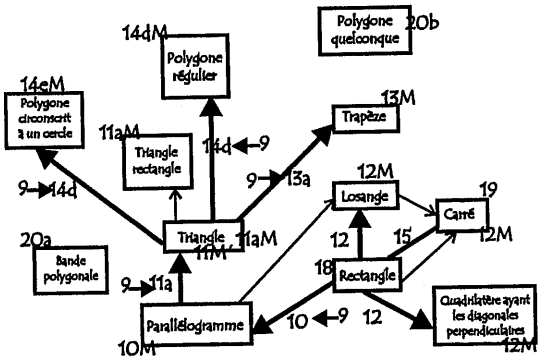
Le réseau conceptuel visualisé relatif à la collection française HAC



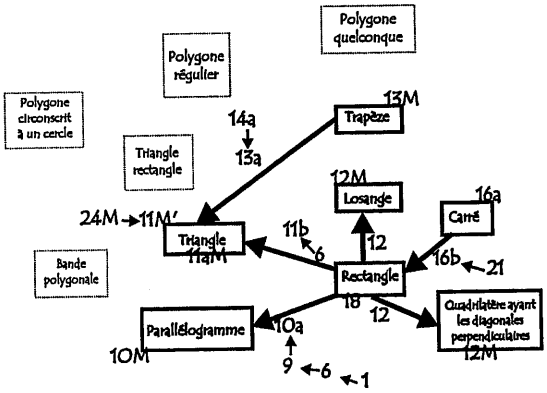
Le réseau conceptuel visualisé relatif au manuel italien CAT



Le réseau conceptuel visualisé relatif au manuel italien MAR



Le réseau conceptuel visualisé relatif à la collection italienne MAT



Chapitre 5

La partie pré-expérimentale : l'efficacité des problèmes proposés

PLAN DU CHAPITRE

I. LA PASSATION DES HUIT PROBLEMES

II. RETOUR SUR L'ANALYSE A PRIORI

II.1 La figure

II.2 Les divers genres de tâches. Les catégories de techniques et les technologies correspondantes

III. L'ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ELEVES

III.1 Généralités principales de l'analyse a posteriori

III.2 Les critères de l'analyse a posteriori

III.3 Les problèmes de la fiche A

III.4 Les problèmes de la fiche B

III.5 Les problèmes de la fiche C

III.6 Les problèmes de la fiche D

IV. CONCLUSIONS

IV.1 L'analyse des résultats par genre de tâche

IV.2 Quelques conclusions générales sur la phase pré-expérimentale

Comme nous l'avons déjà annoncé précédemment, la partie expérimentale de notre travail comporte deux phases :

- la *phase pré-expérimentale* pendant laquelle nous testons, auprès d'un petit groupe d'élèves français et italiens, les problèmes commentés dans le chapitre 3 ; d'après les résultats issus de l'analyse de cette première passation, notre objectif est de **réexaminer les problèmes pour leur donner éventuellement une nouvelle forme** : ici, nous portons un regard particulier sur l'efficacité des énoncés proposés par rapport aux objectifs de notre travail. Il s'agit d'un travail propédeutique aussi au niveau de l'organisation du dépouillement des productions écrites des élèves car, au cours de cette phase – bien que les critères de dépouillement suivis soient moins fins que ceux que nous adoptons dans la phase ultérieure – nous recueillons des éléments d'analyse qui méritent un approfondissement et qui paraissent utiles aux questionnements fondamentaux de notre travail.
- la *phase expérimentale* proprement dite où les problèmes revus sont définitivement proposés à un échantillon plus consistant d'élèves. Ici, notre intérêt porte principalement sur les élèves et leurs productions écrites.

Dans ce chapitre, nous commentons et analysons les résultats issus de la phase pré-expérimentale en fournissant les éléments essentiels qui ont influencé l'élaboration des énoncés exploités lors de la phase expérimentale. Bien que l'analyse exposée ci-après soit moins poussée, nous n'hésitons pas à mentionner quelques conclusions qui s'avèrent intéressantes au vu des objectifs de notre recherche.

I. *LA PASSATION DES HUIT PROBLEMES*

Cette première passation a lieu au début de l'année (civile) 1999 auprès d'élèves de Seconde en France et de la troisième année d'ESS en Italie. A cette époque de l'année scolaire, les élèves italiens de la deuxième année d'ESS n'ont pas encore terminé l'étude des chapitres de géométrie qui concernent notre recherche alors que, pour les élèves de la troisième année, il s'agit d'un volet du programme de lycée qu'ils sont censés avoir acquis et qu'ils réinvestissent, le cas échéant. En revanche, les élèves français de Seconde sont en train de consolider leurs connaissances géométriques. C'est pourquoi nous avons décidé de les faire passer auprès d'élèves français de Seconde et d'élèves italiens de la troisième année d'ESS.

Nous avons visité deux classes italiennes pour un total de TRENTE-QUATRE élèves (dix-neuf et quinze respectivement) et une classe française de TRENTE ET UN élèves. Nous leur avons proposé

les problèmes en leur laissant la liberté de choisir la procédure et de recourir ou non aux instruments de dessin ; ils ont eu une heure de temps pour remettre leur production écrite. A notre demande, chaque classe a été organisée en quatre groupes hétérogènes, sélectionnés selon le jugement de leur enseignante[1]. Suivant les fiches élaborées préalablement et dont nous reportons ci-après un tableau récapitulatif, chaque élève de chaque groupe a eu à résoudre individuellement soit deux soit trois problèmes sans contraintes sur l'ordre à suivre.

FICHE A	Problème 1A Problème 2A	Le triangle des milieux : un problème d'aire et de périmètre Le triangle des milieux : un problème de construction (version 1)
FICHE B	Problème 1B Problème 2B	Le triangle des milieux : un problème de centre de gravité Le triangle des milieux : un problème de construction (version 2)
FICHE C	Problème 1C Problème 2C Problème 3C	Du triangle au parallélogramme Le parallélogramme des milieux I Dans le triangle des milieux, quadrilatères de même aire
FICHE D	Problème 1D Problème 2D	Le parallélogramme des milieux II Le parallélogramme des milieux : un problème de construction

Les fiches complètes telles qu'elles ont été proposées aux élèves se trouvent en Annexe 6.

II. RETOUR SUR L'ANALYSE A PRIORI

Dans le chapitre 3, nous avons décrit la genèse des problèmes conçus pour être proposés aux élèves lors de la phase expérimentale de notre recherche. A partir d'un texte unique[2] (le "problème"), nous avons obtenu sept problèmes. En nous appuyant sur une analyse *a priori* – d'un point de vue strictement mathématique – nous avons exposé les raisons qui nous ont amenée à remanier les énoncés des problèmes qui ont été testés lors de la première phase expérimentale.

Dans ce chapitre, avant d'entreprendre l'analyse a posteriori, dont les résultats du dépouillement nous ont permis de réexaminer les problèmes pour leur donner éventuellement une nouvelle forme, nous

[1] Il s'agit, dans tous les cas, d'enseignantes qui ont des contacts avec des groupes de recherche en didactique des mathématiques. Le fait de n'avoir contacté que de professeurs femmes est tout à fait dû au hasard !
[2] cf. chapitre 3, § I, *Le « problème »*

effectuons un retour sur l'analyse *a priori* en pointant, cette fois-ci, notre regard sur les attitudes possibles des élèves face à ces problèmes. Dans le chapitre 3, nous n'avions envisagé que des solutions correctes d'un point de vue mathématique. Nous envisageons maintenant en particulier des solutions s'appuyant plus ou moins sur la perception de la figure.

Dans l'ensemble des énoncés, nous analysons deux volets principaux :

- la *figure* et ses *usages* possibles ;
- les divers *genres de tâches* et les *techniques* correspondantes.

II.1 La figure

Ce premier volet nous permet d'évaluer l'importance de la figure par rapport à l'énoncé. Les considérations qui suivent nous aident à organiser l'analyse a posteriori en prenant en compte des items spécifiques afin de localiser des attitudes courantes relatives à la figure lors de la rédaction de la résolution d'un problème de géométrie. Selon les énoncés proposés, nous distinguons quatre usages principaux de la figure.

1) *La figure n'est pas donnée. Il faut la produire dans un cas général* (1A, 1B, 3C). Ici, en traduisant les données verbales, c'est à l'élève de produire un tracé pour se construire une représentation de la situation qui est décrite dans l'énoncé mais c'est à lui aussi d'*agir* sur celle-ci pour mettre en place les procédures permettant de résoudre le problème.

L'élève pourrait tracer un polygone particulier (triangle isocèle, équilatéral, trapèze isocèle, etc.) en pervertissant ainsi la tâche. En outre, suivant la procédure envisagée, il sera amené à introduire, dans la figure de départ, des éléments supplémentaires qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé et cela pourrait représenter un obstacle à la réussite. Par exemple, dans le problème 1A, si l'on introduit les hauteurs des deux triangles, il faut alors établir la relation entre leurs longueurs et cela amène à utiliser une technique assez complexe au cas où l'on ne mobiliserait pas la notion de similitude (agrandissement/réduction).

2) *La figure n'est pas donnée. Il faut la produire et ensuite des conditions imposées amènent à envisager certains cas de figure* (1C, 1D). En traduisant les données écrites, c'est à l'élève de produire la figure pour se construire une représentation de la situation qui est décrite dans l'énoncé. Ensuite, en suivant les indications données, on lui demande d'*agir* sur la figure afin d'obtenir des cas particuliers, explicitement demandés. Quel rôle la figure joue-t-elle dans la résolution de ce problème ? Après avoir tracé la figure de départ, l'*expérience* en terme d'*action mentale* aide à résoudre le problème. Les

élèves devraient être aptes à fournir des réponses validées à l'aide de preuves *intellectuelles* ; néanmoins, ils pourraient se contenter de fournir une preuve *pragmatique* en gardant l'*attitude de l'intuition rationnelle.*

Dans l'énoncé 1D, la figure décrite amènerait à envisager trois figures générales différentes, un quadrilatère convexe, concave ou croisé : en principe, l'élève devrait reproduire les trois cas et prouver que le quadrilatère inscrit est toujours un rectangle ; ensuite, pour accomplir la tâche sur les aires, il devrait exclure le cas du quadrilatère croisé. Au niveau scolaire concerné, l'élève est-il capable d'analyser le problème de manière exhaustive ?

Évidemment, là encore l'élève peut prendre un cas particulier ou des cas de figure différents qui peuvent être plus ou moins faciles à traiter.

3) *La figure est amorcée* (2C). Ici, on demande de compléter une figure suivant une condition imposée et puis de fournir des réponses à des questions en les justifiant. Pour justifier la réponse à une des questions posées, l'élève doit considérer (et tracer) des éléments supplémentaires de la figure, cela en mobilisant convenablement ses connaissances. Néanmoins, il pourrait répondre aux questions par analogie avec des configurations particulières rencontrées ailleurs, l'évidence des faits ne lui permettant pas éventuellement de produire de preuves *intellectuelles*.

4) *Problème de construction dont la figure est à faire ou à compléter* (2A, 2B, 2D). Ici, c'est à l'élève de tracer ou de compléter une figure répondant à des conditions imposées et puis de décrire et valider cette construction. Nous avons conçu ces énoncés de manière que l'élève puisse éviter le recours à la méthode d'analyse et de synthèse, ce qui autrement pourrait représenter un obstacle de plus à la réussite. En effet, l'élève devrait être familiarisé avec la figure des énoncés 2A et 2B et ses propriétés ; en outre, chacun des trois problèmes est apparenté avec un problème qui le précède, de manière à ce que l'élève puisse tirer partie de la résolution de l'un pour amorcer l'autre.

Toutefois, ici, nous devons distinguer les cas suivants :

a) *La figure est à faire mais elle est accompagnée d'un début de programme* (Construction A, énoncés 2A et 2B). Ici, le risque est que l'élève fournisse une figure correcte alors qu'il complète un programme incorrectement. Notamment, il peut réitérer la procédure suggérée en continuant à choisir le point de départ au hasard.
b) *La figure est à compléter mais elle est accompagnée d'un début de programme* (Constructions B et C des énoncés 2A et 2B).
c) *La figure est à faire* (2D). De même ici, l'élève pourrait fournir une figure correcte et un programme de construction incorrect. C'est à lui de comprendre que la condition de l'angle droit permet de placer le point de départ.

Compte tenu de la nature de ces problèmes, nous les analysons davantage dans le volet suivant. En effet, ici, la figure n'est plus un support perceptif du problème mais elle fait partie de la résolution proposée par l'élève ; en conséquence, nous ne pouvons l'examiner qu'en relation avec les programmes de construction possibles.

La manière dont les problèmes ont été conçus est telle que la *configuration du triangle des milieux* apparaît ou peut apparaître dans chacun d'eux. Cet aspect mérite donc d'être analysé dans l'ensemble des situations proposées et au-delà des considérations avancées ci-dessus.
Dans les problèmes 1A, 2A et 2B, le *triangle des milieux* est explicitement mis en cause : pour l'élève, il représente une configuration de base rencontrée à plusieurs reprises dans son cursus scolaire. Suivant le degré de connaissance de ses propriétés, il peut en exploiter telle ou telle pour accomplir la tâche. Dans les autres problèmes, le triangle des milieux apparaît ou peut apparaître (en traçant convenablement des éléments supplémentaires) comme sous-figure de la figure qui vient se constituer au fil des étapes du problème : c'est donc à l'élève de le repérer pour en déduire des propriétés nécessaires à l'accomplissement de la tâche. C'est ici que nous pouvons évaluer la capacité de l'élève à examiner une figure géométrique pour en découvrir des sous-figures connues qui lui permettent d'avancer dans son raisonnement. En effet, il s'agit d'un aspect qui est censé être pris en compte lors d'un apprentissage visant la démonstration en géométrie. Compte tenu de l'intérêt particulier que nous portons sur cette configuration de base, nous considérons cet aspect à la fin de l'analyse a posteriori, en reprenant dans leur ensemble les résultats du dépouillement des productions des élèves.

II.2 Les divers genres de tâches. Les catégories de techniques et les technologies correspondantes

La notion de *praxéologie*, introduite par Y. Chevallard[3], est fondée sur les notions associées de *tâche* et *type* de tâches. Ces deux notions supposent un objet relativement précis. *Calculer l'aire d'un triangle de base et de hauteur données* est un *type* de tâche ; *calculer*, tout court, est ce que l'auteur appelle un *genre* de tâche, qui nécessite un déterminatif, il n'existe que sous la forme de différents *types* de tâches, dont le contenu est par contre strictement spécifié.
A une tâche donnée correspond une (ou plusieurs) *manière de l'accomplir, de la réaliser* : on attribue le nom de *technique* à cette "manière de faire". Une *technique* peut être *efficace* seulement sur une partie des tâches du type auquel elle est relative, elle échoue sur la partie complémentaire et, dans ce cas là, on peut dire qu'en général, il y a une inadéquation de la technique au type de tâches concerné.

En plus, parmi les *techniques efficaces*, l'une peut être *supérieure* à une autre du moins sur une certaine partie des tâches du type auquel elle est relative.

Suivant les problèmes proposés, la nature des questions change et, pour certains cas, dans le même problème, on peut avoir des questions de nature différente. La façon de répondre peut aussi varier. Pour faire une analyse des productions écrites des élèves observés en fonction des types de tâches et techniques correspondantes, il est nécessaire de découper tous les énoncés des problèmes selon les questions posées. En nous appuyant sur la notion de *praxéologie*, nous avons repéré – tous énoncés confondus – sept *genres de tâches* possibles et trois *catégories* principales de *techniques* envisageables pour accomplir les diverses tâches. Nous avons résolu de parler de *genre* de tâches car, bien que le contenu soit spécifié, il n'est pas strictement spécifié[4]. En outre, nous parlons en termes de *catégories* de *techniques* pour rattacher la technique utilisée par l'élève à un rapport à la géométrie sous-jacent à cette technique, à ce que nous avons appelé une attitude face à la résolution d'un problème de géométrie.

D'après la théorie praxéologique de Y. Chevallard, la *technologie* est un discours rationnel sur la *technique* : son objet premier est de justifier rationnellement la technique et ainsi de garantir l'aboutissement de la tâche correspondante. Cette définition demeure strictement liée à la notion de preuve telle qu'elle a été introduite par N. Balacheff et dont nous avons exposé les principes dans le chapitre 1. En effet, le style de rationalité mis en jeu pour formuler une technologie dépend de l'institution où le discours a lieu et, au sein de la même institution, il évolue au fil de l'histoire de l'institution même. Dans l'enseignement de la géométrie, l'élève est censé apprendre à faire évoluer son attitude face à la résolution d'un problème : il devra prendre graduellement de la distance par rapport à l'action, il sera de moins en moins autorisé à recourir à l'ostension mais il devra apprendre à valider ses techniques à l'aide d'un discours rationnel s'appuyant explicitement sur un ensemble de définitions et propriétés construites suivant des règles logiques et rigoureuses (*théorie*).

C'est ainsi que, lorsque nous considérons les technologies qui justifient les diverses techniques, nous parlerons en termes de preuves en utilisant la nomenclature de N. Balacheff.

Les trois catégories de techniques : définitions

Nous parlerons de *techniques mathématiques* lorsque, pour accomplir la tâche, l'élève s'appuie sur ses

---

[3] Chevallard Y. (1998), ouvrage déjà cité.

[4] En effet, nous devrions parler de *sous-genres* de tâches, une définition intermédiaire entre le *genre* et le *type* de tâches. Néanmoins, pour ne pas alourdir la lecture et pour souligner l'acception générale, nous gardons le terme moins spécifique.

connaissances mathématiques et produit une preuve *intellectuelle*, comparable à des détails près à celle que nous avons rédigée lors de l'analyse *a priori* : les procédures sont accompagnées d'un discours rationnel (*technologie*) permettant de justifier, rendre intelligible la technique adoptée. Cela montrerait que le passage à l'*attitude rationnelle* est bien atteint[5].

Nous parlerons de *techniques perceptives* lorsque, pour accomplir la tâche, l'élève s'appuie sur la *perception* et sur l'*expérience* (en termes d'*action mentale*) et produit une preuve *pragmatique* (évidence des faits). Même si, ici, la *déduction*[6] trouve aussi sa place puisque l'élève mobilise implicitement ses connaissances géométriques, le qualitatif que nous attribuons à ce genre de techniques est dû surtout au fait que l'élève ne ressent pas l'exigence d'expliquer ou de justifier ses affirmations : il confère à un tracé l'office de preuve ou bien il recourt au mesurage ou encore au codage de la figure pour déduire des propriétés et enfin fournir la réponse. Cela montrerait que le passage de l'attitude de l'intuition rationnelle vers l'attitude rationnelle n'est pas encore accompli.

Enfin, les *techniques liées à la reconnaissance d'une configuration* sont une catégorie qui se situe entre les deux autres. Pour amorcer la tâche, l'élève s'appuie sur une configuration de base qui lui est familière et dont il connaît les propriétés. A partir de là, deux cas sont possibles : cette reconnaissance suffit à l'élève pour l'assurer de l'exactitude de sa réponse et, par conséquent, il produit une preuve *pragmatique* ou bien, cela lui suggère les éléments clé pour recourir à une technique mathématique et, ainsi faisant, il produit une preuve *intellectuelle*.

On peut attendre, dans l'analyse des productions des élèves, des réponses intermédiaires entre ces différentes catégories. Nous choisirons, dans la mesure du possible, de les rattacher à l'une ou l'autre. Nos le préciserons le moment venu.

Lors de l'analyse a posteriori, une fois établi le répertoire des tâches et des catégories de techniques nous permettra d'identifier plus facilement les raisons éventuelles de réussite ou d'échec par rapport à nos attentes. Il sera utile aussi à la fin de l'analyse pour comparer les tâches du même genre en prenant en compte la modification de la situation suivant la formulation des énoncés, cela demeurant intéressant pour mieux évaluer l'attitude de l'élève face aux diverses situations, cette attitude pouvant varier d'un problème à un autre mais aussi – au sein du même problème – d'une tâche à l'autre.

---

[5] Dans l'analyse des genres de tâches, exposée dans le paragraphe suivant, nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 où nous avons analysé les problèmes en ne considérant que des techniques mathématiques pour les résoudre.

[6] Comme nous l'avons précisé dans le chapitre 1, ce terme est à entendre en tant que développement et organisation rationnels d'informations à partir de connaissances déjà acquises soit à travers le sens soit à travers des observations expérimentales. Autrement, suivant le vocabulaire précisé par Balacheff, nous considérons que, dans une technique perceptive, il y a toujours un **raisonnement**, à savoir une activité intellectuelle – la plupart du temps implicite – de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.

Les sept genres de tâches et les techniques possibles

Ci-après, nous détaillons les genres de tâches et les techniques que l'élève pourrait adopter pour les accomplir.

GENRE DE TACHE 1. Après avoir décrit la figure de départ, **on demande de préciser la nature de la figure décrite ou d'une de ses sous-figures**. Les éléments de réponse peuvent se percevoir sur le tracé : l'élève peut donc préférer le recours à une *technique perceptive* plutôt que *mathématique*. Ce genre de tâche concerne les questions $1C_1$, $1D_a$.

Problème 1C, question 1 ($1C_1$).

Les données fournies conduisent à envisager un quadrilatère : **on demande de préciser la nature de ce quadrilatère**.
Si l'on trace la figure décrite, on perçoit un parallélogramme. L'élève pourrait donc se contenter de répondre d'après ce qu'il voit sur son tracé (*technique perceptive*).
Autrement, à partir des termes *milieu* et *symétrique*, évoqués dans l'énoncé, il déduit les propriétés nécessaires pour fournir la réponse (*technique mathématique*[7]).

Problème 1D, question a ($1D_a$).

Les données fournies conduisent à envisager un petit quadrilatère inscrit dans un grand quadrilatère : **on demande de préciser la nature de ce petit quadrilatère**. Si l'on trace la figure décrite, suivant les positions des points sur les deux droites, le grand quadrilatère peut être convexe, concave ou bien croisé ; dans les trois cas, puisque les diagonales sont perpendiculaires, on perçoit un rectangle.
L'élève se contente de répondre d'après ce qu'il perçoit sur le tracé (*technique perceptive*).
Autrement, à partir des termes *milieu* et *perpendiculaires*, suggérés dans l'énoncé, l'élève déduit les propriétés nécessaires pour fournir la réponse (*technique mathématique*[8]). Ici, contrairement au problème $2C_a$, la technique mathématique est moins complexe car les données conduisent à tracer des éléments de la figure utiles pour aboutir.

GENRE DE TACHE 2. On pose une question corrélée à d'autres qui la précèdent. **On demande de chercher des conditions pour que la figure vérifie certaines propriétés supplémentaires.** L'expérience en termes d'action mentale joue un rôle essentiel : c'est une situation dynamique où l'on demande implicitement de transformer la figure de départ pour en obtenir une nouvelle. L'élève peut raisonner sur la figure déjà tracée et rajouter les propriétés en utilisant ce qu'il sait grâce aux réponses précédentes. Ce genre de tâche concerne les questions $1C_2$, $1C_3$, $1D_c$. Notons que, suivant l'interprétation qu'on fait de la question $2C_a$, elle peut se rattacher ou non à ce genre. Nous y reviendrons plus loin.

---

[7] cf. chapitre 3, § VIII, *Du triangle au parallélogramme*
[8] cf. chapitre 3, § IX, *Le parallélogramme des milieux II*

Problème 1C, question 2 ($1C_2$).

La question posée peut être interprétée ainsi : "**Si IEA était un triangle rectangle, quelle serait la nature du triangle CNM** (qui, au départ, était quelconque) **?** Quelle est alors la nature du quadrilatère CMNM' ?". La question est porteuse d'informations supplémentaires concernant la figure de départ : on veut que le petit triangle soit rectangle en I.
L'élève transforme mentalement la figure il se contente de répondre d'après ce qu'il perçoit dans son action mentale. Autrement, il reproduit graphiquement cette image mentale et il se contente de fournir ce tracé comme justification (*technique perceptive*).
L'élève transforme mentalement la figure et, à partir de ce qu'il a déjà prouvé et de la notion de *triangle rectangle*, dont le terme est évoqué dans la question, il déduit les propriétés nécessaires pour aboutir (*technique mathématique*[9]). Dans ce cas-là, la nouvelle figure demeure accessoire : l'élève peut ressentir l'exigence de la tracer ou non, cela n'étant pas nécessaire car, au niveau scolaire concerné, ce qui importe est une preuve intellectuelle.
Pour prouver que le triangle CNM est rectangle en M, on peut prouver que IEMA est un parallélogramme en recourant au *théorème des milieux* : l'élève pourrait bien reconnaître le triangle des milieux, comme sous-figure de la figure de départ, et utiliser ses propriétés pour parvenir à la réponse (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*).
On pourrait envisager que l'élève traite la question directement comme un nouveau problème. Néanmoins, dans ce cas, la tâche à accomplir devient plus complexe. Il faudrait retracer la figure à partir du triangle IEA, rectangle en I et, comme nous l'avons examiné dans le chapitre 3, cette construction n'est pas du tout évidente, il faut avoir une bonne connaissance de cette configuration pour y parvenir. En tout cas, si l'on considère que, quand l'élève aborde la nouvelle question, il a déjà tracé la figure de départ, il nous paraît plus naturel d'agir sur celle-ci que de traiter la question comme un nouveau problème.

Problème 1C, question 3 ($1C_3$).

La question posée peut être interprétée ainsi : "**Si CMNM' était un carré, quelle serait la nature du triangle CNM ?**". La question est porteuse d'informations supplémentaires concernant la figure de départ : on veut que le quadrilatère CMNM' soit un carré.
L'élève s'appuie sur ce qu'il a prouvé dans la question précédente : il répond à la question en recourant explicitement à la définition de carré, terme suggéré dans l'énoncé, et sur la définition de triangle rectangle isocèle (*technique mathématique*[10]). Autrement il se contente de fournir la réponse, accompagnée ou non d'un tracé (*technique perceptive*).
L'élève pourrait traiter la question directement comme un nouveau problème : il sait qu'un triangle rectangle isocèle est la "moitié" d'un carré. Il réitère (mentalement ou pratiquement) les étapes qui permettent de construire la figure de départ mais cela à partir d'un triangle CNM, isocèle et rectangle en M. Il se contente de répondre d'après ce qu'il sait (évidence des raisons), en fournissant un dessin ou non ou bien il prouve alors que le quadrilatère obtenu est un carré (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*).

Problème 1D, question c ($1D_c$).

La question posée peut être interprétée ainsi : "**Si IJKL était un carré, quelle serait la position du sommet D ?**". La question est porteuse d'informations supplémentaires concernant la figure de départ : on veut que le point D soit tel que le quadrilatère inscrit soit un carré.
Ici la perception peut être "trompeuse" et conduire à n'envisager qu'un cas particulier, à savoir un carré inscrit dans un carré. Néanmoins, par analogie avec ce cas particulier, l'élève pourrait trouver la bonne réponse en fournissant une figure éventuelle en tant que preuve ou bien en justifiant sa procédure (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*). Évidemment, si l'élève s'appuie sur une

---

[9] cf. chapitre 3, § VIII, *Du triangle au parallélogramme*
[10] cf. chapitre 3, § VIII, *Du triangle au parallélogramme*

configuration qui lui est plus familière, il devra utiliser convenablement les propriétés nécessaires (le quadrilatère inscrit est un carré car les diagonales de l'autre sont de même longueur et réciproquement !). En effet, si l'on envisage ce cas particulier, la symétrie de la figure peut induire à fournir une réponse particulière et donc incorrecte.
Autrement, à partir de la figure déjà tracée et du mot *carré*, suggéré dans l'énoncé, l'élève déduit les propriétés nécessaires pour fournir la réponse (*technique mathématique*[11]).

GENRE DE TACHE 3. Après avoir décrit la figure de départ, **on demande de comparer les aires et/ou les périmètres de deux sous-figures**. Ce genre de tâche concerne les questions 1A, $1B_d$, $2C_b$, $3C_a$, $1D_b$.

Problème 1A (1A).

Les données fournies conduisent à envisager un grand triangle circonscrit à un petit triangle (triangle des milieux) : **on demande de comparer leurs périmètres et ensuite leurs aires.**
La figure décrite dans l'énoncé fait partie des configurations de base auxquelles l'élève apprend à se familiariser pendant sa scolarité : elle se prête à être exploitée dans des situations riches et variées. C'est ainsi que la familiarité de l'élève avec cette figure peut atteindre des niveaux différents et, par conséquent, l'attitude de l'élève face à un problème qui la concerne peut être assez variée.
Pour comparer les périmètres des deux triangles, à partir du terme *milieu*, évoqué dans l'énoncé, l'élève prouve que les longueurs des côtés de l'un sont le double des longueurs des côtés de l'autre, cela en adoptant des procédures diverses selon les outils dont il dispose et la manière dont il perçoit la figure (*technique mathématique*[12]). Autrement, puisque la configuration lui est familière, plusieurs cas sont possibles (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*) :

- il sait que les côtés des deux triangles sont parallèles deux à deux ; il exploite implicitement cette propriété et il prouve la relation des longueurs des côtés pour parvenir enfin au résultat cherché ;
- il sait que les côtés des deux triangles sont parallèles deux à deux mais il connaît aussi la relation des longueurs, il parvient directement au résultat cherché ;
- il sait que le grand triangle est semblable au petit triangle (agrandissement/réduction), le rapport de similitude étant égal à 2, il parvient directement au résultat cherché.

L'élève, en persévérant dans l'attitude de l'intuition rationnelle, pourrait aussi recourir au mesurage.

Pour comparer les aires, deux grandes approches sont à envisager : l'élève perçoit la figure comme pavage de quatre triangles disjoints ou bien comme un petit triangle inscrit dans un grand triangle.
Dans le premier cas, un traitement géométrique de la figure suffit pour aboutir. L'élève prouve que ces petits triangles sont congruents entre eux et puis il parvient au résultat cherché (*technique mathématique*[13]) ; autrement, il affirme que les quatre petits triangles sont congruents entre eux et, sans le prouver (évidence des faits), il fournit la réponse (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*). Cependant, il pourrait se contenter de répondre d'après ce qu'il perçoit sur son tracé (*technique perceptive*).
Dans le deuxième cas, on peut aboutir par un traitement géométrique ou bien géométrico/algébrique.
L'élève prouve que les deux triangles sont semblables pour parvenir enfin au résultat cherché (*technique mathématique*). Comme pour la comparaison des périmètres, selon la familiarité de l'élève avec la figure en question, il peut fournir le résultat sans expliciter toutes les étapes qui lui ont permis d'aboutir (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*).
Le terme *aire*, évoqué dans l'énoncé, peut suggérer les *formules de calcul des aires*, cela nécessitant alors la prise en compte d'éléments supplémentaires dans la figure de départ : les hauteurs des deux

[11] cf. chapitre 3, § IX, *Le parallélogramme des milieux II*
[12] cf. chapitre 3, § III, *Le triangle des milieux : un problème d'aire et de périmètre*
[13] cf. chapitre 3, § III, *Le triangle des milieux : un problème d'aire et de périmètre*

triangles. L'élève prouve la relation de leurs longueurs et fournit la réponse en recourant au calcul algébrique (*technique mathématique*). Pour des questions de proportionnalité des longueurs des éléments homologues de deux figures semblables, l'élève sait que les longueurs des hauteurs sont l'une le double de l'autre, il utilise donc ce résultat sans le justifier (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*). Autrement, l'élève *devine* cette proportionnalité de longueurs ou bien il recourt au mesurage (*technique perceptive*).
Il faut aussi envisager une technique qui s'oppose à la perception et qui révèle des *conceptions erronées* : l'élève pourrait fournir une réponse incorrecte par *liaison périmètre/aire*.

Problème 1B, question d ($1B_d$).

L'élève doit percevoir le triangle des milieux comme sous-figure de la figure décrite dans l'énoncé : **on demande explicitement de comparer les aires des deux triangles**. Les étapes qui précèdent cette question ont déjà permis d'expliciter quelques propriétés de la figure de départ et suggèrent des pistes possibles pour répondre (propriétés de la similitude, de l'homothétie, etc.). On peut pourtant traiter la question comme un nouveau problème. En tout cas, les techniques possibles sont les mêmes que celles envisagées pour la résolution du Problème 1A[14].

Problème 2C, question b ($2C_b$).

Les données verbales et graphiques fournies ainsi que la question précédente conduisent à envisager **un quadrilatère circonscrit à un parallélogramme. On demande de comparer leurs aires.**
Pour aboutir, l'élève doit nécessairement considérer des éléments supplémentaires sur la figure de départ. Le terme *milieu*, évoqué dans l'énoncé, peut suggérer les éléments à tracer et donc la procédure à suivre pour parvenir au résultat cherché (*technique mathématique*[15]). Si le mot *aires* ne suggère que le recours aux *formules de calcul des aires*, la question demeure plus difficile que dans les tâches précédentes, ce qui pourrait décourager l'élève qui considère les questions d'aire seulement dans un cadre algébrique.
L'analogie avec des configurations connues[16] pourrait aider l'élève à trouver un moyen pour aboutir en justifiant sa procédure ; autrement, cette analogie le conduit à fournir une réponse sans qu'il soit capable de la justifier (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*).
Ici, la perception n'aide pas l'élève pour aboutir, elle peut lui permettre de *deviner* le résultat mais pas de le justifier.

Problème 3C, question a ($3C_a$).

Les données verbales conduisent à envisager **deux quadrilatères**, ayant deux côtés consécutifs en commun, comme sous-figures de la figure décrite dans l'énoncé. **On demande de comparer leurs aires.**
Le recours aux formules de calcul des aires n'est pas un moyen efficace pour aboutir : cela peut décourager l'élève qui ne considère les questions d'aires que dans un cadre algébrique.
Une action mentale (on fait "bouger" le sommet de l'un des deux quadrilatères...) peut suggérer la réponse. L'élève peut donc se contenter de fournir la réponse d'après ce qu'il perçoit dans cette action mentale (*technique perceptive*). La perception globale n'est pas facile sauf si X est assez proche de U. Il faut pratiquement voir les quadrilatères comme réunion de triangles disjoints dont un est commun. Remarquons pourtant qu'ici la perception est de peu de secours car elle doit s'appuyer sur une connaissance.
Autrement, cette expérience mentale ainsi que le mot *milieux*, évoqué dans l'énoncé, peut lui suggérer un moyen pour aboutir en justifiant sa procédure (*technique mathématique*[17]).

---

[14] Concernant les techniques mathématiques, cf. chapitre 3, § IV, *Le triangle des milieux : un problème de centre de gravité*
[15] cf. chapitre 3, § VI, *Le triangle des milieux : un problème de centre de gravité*
[16] Par exemple, un losange inscrit dans un rectangle est une configuration utilisée pour déduire la formule de calcul de l'aire d'un losange. Dans la vie courante, la forme d'une enveloppe dépliée pourrait aussi suggérer une réponse.
[17] cf. chapitre 3, § V, *Dans le triangle des milieux : quadrilatères de même aire*

Problème 1D, question b ($1D_b$).

Les données fournies et la première question conduisent à envisager **un quadrilatère circonscrit à un rectangle**. Il s'agit d'un cas particulier de la figure du problème $2C_b$, des éléments utiles pour justifier la réponse sont déjà tracés : cela peut rendre la tâche plus facile à accomplir. **On demande de comparer les aires**. Évidemment, la question a du sens seulement dans le cas où le quadrilatère ABCD est convexe ou concave.

Dans le premier cas, une action mentale (pliages) peut suggéré la réponse. L'élève peut donc se contenter de fournir la réponse d'après ce qu'il perçoit dans cette action figurée (*technique perceptive*). La même action mentale ainsi que le terme *milieu*, évoqué dans l'énoncé, peuvent suggéré les propriétés nécessaires pour aboutir (*technique mathématique*[18]). Ici, le recours aux *formules de calcul des aires* est un moyen très efficace pour aboutir, surtout si l'élève connaît la formule de calcul de l'aire d'un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires.

L'analogie avec des configurations connues pourrait aider l'élève à trouver un moyen pour aboutir en justifiant sa procédure ; autrement, cette analogie le conduit à fournir une réponse sans qu'il soit capable de la justifier (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*).

Dans le deuxième cas, seulement une *technique mathématique* permettrait de trouver une réponse et, notamment, le recours aux *formules de calcul des aires* : en considérant l'aire de ABCD comme la somme ou la différence des aires de deux triangles convenablement choisis, il s'agit de trouver la relation entre les longueurs des côtés du rectangle et celle des côtés des hauteurs des deux triangles.

GENRE DE TACHE 4. On demande explicitement de prouver une propriété de la figure décrite dans l'énoncé. Ce genre de tâche concerne les questions $1B_a$, $1B_b$, $1B_c$, $3C_b$.

Il s'agit de véritables problèmes de *démonstration* où la tâche est exprimée sous la forme "**prouve que...**", "**justifie cela...**". Contrairement aux genres de tâches précédentes, la propriété de la figure est donnée, il s'agit donc de la prouver. L'énoncé de ces problèmes est structuré de manière à ce que les questions soient enchaînées : les propriétés prouvées au cours d'une étape sont utiles pour prouver celles qui suivent. En réalisant un tracé soigneux, l'élève pourrait recourir à une *technique perceptive* mais, en réalité, ce genre de tâche requiert formellement une *technique mathématique*. Éventuellement, *la reconnaissance d'une sous-figure familière* à l'élève pourrait lui donner le droit de ne pas expliciter des passages qui lui apparaissent comme évidents.

Nous incluons la question $3C_b$ dans ce genre de tâche et non pas dans le genre précédent car ici la comparaison est "faite" (on fournit le coefficient de rapport des aires). En effet, la question peut être interprétée ainsi : "**Prouve que l'aire du triangle ... est le double de l'aire du quadrilatère ...**".

Dans ce type de problèmes, si l'élève oppose une sorte de résistance à l'adoption d'une *attitude rationnelle*, il pourrait facilement se décourager en ne réalisant aucune production.

GENRE DE TACHE 5. On demande explicitement de tracer ou de compléter une figure suivant des propriétés décrites dans l'énoncé. Ce genre de tâche concerne les questions 2A, 2B, 2D.

Il s'agit de problèmes de construction où le tracé n'est plus un élément subsidiaire mais il fait partie de

[18] cf. chapitre 3, § IX, *Le parallélogramme des milieux II*

la résolution fournie. Dans ces cas, certains items sont pris en compte lors de l'analyse de la figure (cf. volet précédent) mais d'autres demeurent strictement liés à l'analyse du programme de construction que l'élève rédige, cela étant primordial pour comprendre si le tracé est correct. Vu la nature du problème, la technique liée à la reconnaissance d'une configuration s'adapte convenablement pour l'accomplissement de la tâche.

Problèmes 2A et 2B, construction A.

Ici, c'est à l'élève de réaliser le tracé mais le début du programme de construction correspondant est donné. Même s'il produit une figure répondant aux conditions imposées, seule la conclusion du programme de construction pourra valider ou infirmer son exactitude. Il faut pratiquement une preuve pour choisir le point la deuxième fois. Nous ne nous attendons pas à ce que l'élève s'appuie sur la composition de symétries centrales, cela étant une technique de résolution qui présume une très bonne connaissance des transformations géométriques[19]. Néanmoins, nous croyons que la *reconnaissance d'une configuration* (le parallélogramme comme sous-figure du triangle des milieux) peut lui permettre de placer le point de départ à partir duquel on peut achever la construction. Si l'élève résout les problèmes de la fiche dans l'ordre proposé, la résolution des problèmes qui précèdent peut l'aider à amorcer la construction.

Problèmes 2A et 2B, construction B et C.

Ici, le tracé et le programme de construction sont amorcés. De même ici, c'est la conclusion du programme de construction qui permet de valider ou d'infirmer l'exactitude du tracé. La résolution des problèmes qui précèdent peut aider l'élève à achever la construction : il peut accomplir la tâche suivant la *propriété du triangle de milieux* qui lui convient le plus parmi celles disponibles.

Problème 2D.

Ici, tout est à l'initiative de l'élève. Si l'élève résout d'abord le problème 1D et qu'il répond correctement à la dernière question, cela peut l'aider à effectuer la construction. La condition de l'angle droit permet de placer le premier sommet du quadrilatère circonscrit au carré. Deux approches sont alors possibles.

D'après la consigne, l'élève trace le carré et ensuite il place le premier sommet du quadrilatère : il peut le placer sur le demi-cercle extérieur au carré et de diamètre égal à la longueur du côté du carré ou bien il peut tracer la droite passant par A et puis la perpendiculaire à celle-ci et passant par I ; pour que CLMR soit convexe, il faut que la droite passant par A ne coupe ni [EI] ni [EO] ou bien qu'elle forme avec [OA] un angle inférieur à 90° (*technique mathématique*) ; autrement, il place ce point d'une manière qui convient à l'œil (*technique perceptive*). A partir de là, nous supposons que l'élève préfère tracer le symétrique du sommet placé par rapport à l'un des sommets du carré etc. ; seul l'élève qui fait une analyse approfondie de la figure finale (et pour cela, la résolution du problème 1D peut l'aider) poursuivra la construction d'une manière différente (*technique liée à la reconnaissance d'une configuration*).

Autrement, en pervertissant la consigne, l'élève trace d'abord deux droites perpendiculaires et ensuite il construit un triangle rectangle dont l'hypoténuse sera le côté du carré (*technique mathématique*). A partir de là, les cas possibles pour achever la construction sont les mêmes que dans l'approche précédente.

GENRE DE TACHE 6. On demande de rédiger ou de compléter un programme de construction.

---

[19] cf. chapitre 3, § II, *Le triangle des milieux : un problème de construction*

Ce genre de tâche concerne les questions 2A, 2B, 2D.
Il s'agit d'expliquer comment la figure a été tracée : dans les problèmes 2A et 2B, ce programme est amorcé alors que, dans le problème 2D, c'est complètement à l'initiative de l'élève. Dans l'analyse, nous sommes intéressée à la signification que les élèves attribuent à ce genre de tâche et à classer les diverses productions suivant la technique adoptée pour rédiger ces programmes : les élèves décrivent naïvement les actions accomplies en se référant explicitement aux instruments de dessin ou bien aux tracés de construction, etc.

GENRE DE TACHE 7. On demande de prouver la validité d'un programme de construction. Ce genre de tâche concerne les questions 2A, 2B, 2D ; en quelque sorte, il se trouve apparenté au genre de tâche 4. Néanmoins, un élément essentiel les différencie : ici, les élèves prouvent des propriétés qui sont mobilisées par eux-mêmes lorsqu'ils ont rédigé (et effectué) le programme de construction correspondant. L'élève s'investisse pour fournir des preuves à propos d'assertions produites par lui-même : trouve-t-il que cette tâche est superflue ? Ici, nous pouvons examiner si les élèves distinguent aisément la rédaction d'un programme de construction de sa preuve. Ce genre de tâche est strictement lié au genre de tâche précédent car ils se complètent.

L'examen des énoncés des problèmes selon la nature des questions nous a amenée à définir les sept genres de tâches détaillées ci-dessus. Néanmoins, nous avons eu des difficultés à classer d'une manière claire la **question a** du **Problème 2C ($2C_a$)** où les données verbales et graphiques fournies conduisent à envisager un grand quadrilatère ABCD circonscrit à un petit quadrilatère SPQR. En fait, cette question se prête à plusieurs interprétations.

Si on l'interprète comme elle est posée (**R est sur [AD], je trace le quadrilatère SPQR, comment déplacer R pour que SPQR soit un parallélogramme ?**), la tâche appartient au **genre 2**, sauf qu'avant on n'a pas de questions préalables sur la figure générale. Une action mentale peut alors aider l'élève à trouver la réponse (*technique perceptive*).

Elle peut être interprétée ainsi : "**Si SPQR est un parallélogramme alors R est au milieu de [AD]**". Cela nous amènerait à définir un **GENRE de TACHE 4bis**, la tâche étant proche du genre 4, sauf que l'on ne dit pas tout ce qu'il y a à démontrer.

En explicitant davantage, on pourrait aussi considérer la question comme la suite de deux tâches appartenant respectivement aux **genres 5 et 1** : d'abord, **on construit le parallélogramme SPQR** et ensuite **on précise la position du sommet R sur [AD] en justifiant le choix**.

D'après la définition de parallélogramme ou grâce à l'une de ses propriétés, l'élève trace le quadrilatère SPQR : le point R semble être le milieu de [AD]. Il se contente de fournir une réponse d'après ce qu'il perçoit sur le tracé ou bien d'après un mesurage éventuel (*technique perceptive*).
Ou bien, en recourant à la définition de parallélogramme ou à l'une des ses propriétés, il place le point R. Il prouve ensuite que R est bien le milieu de [AD] (*technique mathématique*[20]).

Pour cette question, quelle que soit son interprétation, la difficulté de la preuve porte sur le fait qu'il faut envisager de tracer des éléments supplémentaires ; en outre, des questions d'incidence de droites et d'alignement de points se posent. Comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre 3, nous supposons que les réponses à ces questions demeureront implicites, ce qui est souvent le cas dans l'enseignement au niveau concerné.

Le Tableau 5.1 résume les usages de la figure et les genres de tâches concernant chacun des problèmes proposés et suivant les considérations que nous venons de détailler dans ce paragraphe. Ci-après, nous précisons les types de preuve que nous supposons de trouver dans les productions des élèves selon les genres de tâches.

Tableau 5.1

	Usages de la figure	**Genre de taches**
Problème 1A	(1) La figure n'est pas donnée. Il faut la reproduire dans un cas général.	3
Problème 2A	(4) Problème de construction	5, 6, 7
Problème 1B	(1) La figure n'est pas donnée. Il faut la reproduire dans un cas général.	4 ($1B_a$, $1B_b$, $1B_c$) 3 ($1B_d$)
Problème 2B	(4) Problème de construction	5, 6, 7
Problème 1C	(2) La figure n'est pas donnée. Il faut la reproduire et ensuite des conditions imposées amènent à envisager certains cas de figure	1 ($1C_1$) 2 ($1C_2$ et $1C_3$)
Problème 2C	(3) La figure est amorcée	? ($2C_a$) 3 ($2C_b$)
Problème 3C	(1) La figure n'est pas donnée. Il faut la reproduire dans un cas général.	3 ($3C_a$) 4 ($3C_b$)
Problème 1D	(2) La figure n'est pas donnée. Il faut la reproduire et ensuite des conditions imposées amènent à envisager certains cas de figure.	1 ($1D_a$) 3 ($1D_b$) 2 ($1D_c$)
Problème 2D	(4) Problème de construction	5, 6, 7

Les preuves

On pourrait attendre que les élèves observés dans notre travail ont acquis une *attitude rationnelle* leur

[20] Cf. chapitre 3, § VI, *Le parallélogramme des milieux I*

permettant de produire des preuves intellectuelles. Néanmoins, suivant les hypothèses avancées à propos des techniques que les élèves peuvent adopter dans les divers problèmes proposés, nous avançons des hypothèses sur les types de preuve qu'ils peuvent produire selon les concepts mis en jeu dans la situation et selon la nature de la tâche à accomplir.

En premier lieu, quelques considérations qui concernent tous les problèmes confondus. Les énoncés sont formulés de manière à traiter des propriétés *universelles* sur des cas particuliers dans leur désignation[21] : évidemment, la preuve de l'élève sera contextualisée, le tracé et son codage étant les moyens pour l'exprimer. Puisque, d'après la théorie développée par N. Balacheff, ce type de preuve relèvera de l'*exemple générique*[22], nous nous attendons très naturellement à en trouver dans les productions des élèves. Cela nous obligera à bien distinguer les productions où les outils mobilisés sont clairement explicités – et, dans ce cas-là, nous n'hésitons pas à les reconnaître en tant que *démonstrations* – de celles où ceux-ci demeurent implicites et alors nous estimerons le degré d'implicite.

Dans une position antithétique, si l'élève n'a pas encore développé une *attitude rationnelle*, nous envisageons de trouver des discours qui éclaircissent quelque peu la technique utilisée sans pourtant la justifier, ce que nous désignerons comme des *explications*.

Entre les deux extrêmes, nous envisageons aussi de trouver des discours inachevés où, en adoptant une attitude "heuristique", l'élève *sait* mais il *ne sait pas faire* : il fait montre de ses connaissances sans pourtant choisir celle qui convient le mieux pour aboutir. Considérons, par exemple, le problème suivant :

> "Soit ABC un triangle quelconque. On prolonge les côtés [AB] et [AC]. Sur les droites (AB) et (AC), du côté de A, on place deux points D et E tels que AD = AC et AE = AB. Soit F le point d'intersection de (DE) et (CB). Prouver que BEF est un triangle isocèle".

L'élève pourrait simplement fournir la définition de triangle isocèle et ses propriétés caractéristiques sans mettre en place une véritable procédure lui permettant d'accomplir la tâche.

Pour le **genre de tâche 1**, tout en considérant que les élèves observés devraient être aptes à produire des preuves intellectuelles, nous envisageons de trouver des preuves qui relèvent de l'*empirisme naïf* : l'évidence des faits ("on voit bien qu'il s'agit d'un parallélogramme", etc.) pourrait assurer l'élève sur l'exactitude de sa réponse.

---

[21] Par exemple, les propriétés à prouver dans le problème 1A valent pour n'importe quel couple de triangles, l'un ayant pour sommets les milieux des côtés de l'autre. L'utilisation du codage dans l'énoncé est un moyen pour faciliter la tâche. D'ailleurs, on peut retrouver cette exigence aussi dans l'histoire de la démonstration : rappelons-nous qu'une proposition euclidienne est constituée, entre autres, de deux parties (l'*ecthèse* et le *diorisme*) qui formulent l'énoncé à partir du tracé (*diagramme*) codé qui, à son tour, représente la figure générique décrite dans cet énoncé ; le tracé et son codage demeurent aussi utiles lorsque l'on rédige la preuve.

[22] cf. chapitre 1, § III.2, *La preuve*

Pour le **genre de tâche 2**, une action mentale pourrait suffire à l'élève pour fournir la réponse cherchée. Autrement, elle pourrait lui être utile pour organiser convenablement les outils nécessaires pour produire une preuve *intellectuelle*.

Pour le **genre de tâche 3**, nous envisageons de trouver non seulement des preuves qui relèvent de l'*empirisme naïf* mais aussi du *calcul sur les énoncés* lorsque l'élève, qui ne maîtrise pas encore correctement la distinction entre la notion de périmètre et celle d'aire, produit un discours révélant des conceptions erronées, plus particulièrement dans le problème 1A où les deux notions apparaissent conjointement.

Le **genre de tâche 4** atteste d'une manière assez évidente si l'élève présente des insuffisances non seulement dans la rédaction d'une preuve intellectuelle mais aussi dans l'articulation des outils à mobiliser. Nous craignons surtout que, si l'élève ne réussit à envisager aucune procédure de résolution, il se décourage plus facilement que dans les autres genres de tâche. Dans ce cas, on peut éventuellement s'attendre à trouver des discours inachevés.

Pour le **genre de tâche 7**, strictement lié aux **genres 5 et 6**, puisque c'est l'élève qui produit le discours dont il devrait en fournir une preuve, nous attendons de trouver surtout des *explications* ou des preuves qui relèvent de l'*empirisme naïf*, cela pouvant aussi attester de la difficulté de l'élève à distinguer un programme de construction de sa justification.

III. L'ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ELEVES

III.1 Généralités principales de l'analyse a posteriori

Un problème de méthodologie

Dans cette phase de la recherche, lorsque nous avons *feuilleté* le matériel recueilli dans l'intention d'établir des critères généraux d'analyse, nous avons constaté :

- d'une part que dans l'analyse a posteriori nous ne pouvons pas parler vraiment de *techniques* – le terme désignant une manière d'accomplir, de réaliser des tâches – puisque, dans la réalité observée, les discours de certains élèves sont fragmentaires et peu concluants ; c'est ainsi que, dans l'analyse a posteriori, nous avons décidé de parler de *procédures* en distinguant celles qui aboutissent de celles qui n'aboutissent pas ;
- d'autre part que la nomenclature de Balacheff présente des lacunes à l'égard des discours de quelques élèves, surtout italiens, pour lesquels la qualification d'*explication* ne serait pas adéquate mais celle de *preuve pragmatique* (relevant notamment de l'*empirisme naïf*) ne le serait non plus.

Pour expliquer nos perplexités, analysons de plus près des exemples.

Voici l'extrait des productions d'un élève italien et d'un élève français :

(CARLO. Problème 1C, question 1, genre de tâche 1) "M correspond à M' par rapport au point I ; C correspond à N par rapport au point I, donc [CM'] [23] et [MN] sont parallèles et de même longueur et aussi [M'N] et [CM] sont parallèles et de même longueur. Le quadrilatère est un parallélogramme car les côtés opposés sont parallèles et de même longueur".

(GREGORY. Problème 1C, question 1, genre de tâche 1) "CMNM' est un parallélogramme car I est le milieu de [MM'] et de [CN], les diagonales de ce quadrilatère. Elles se coupent donc en leur milieu donc CMNM' est un parallélogramme".

Dans l'énoncé proposé, on dit que I est le milieu de [CN] et on demande d'indiquer avec la lettre M' le symétrique de M (sommet du triangle donné). Carlo, faisant des *équivalences sémantiques*[24], a estimé que les données du problème amènent à considérer la symétrie de centre I. Les invariants de cette isométrie lui permettent de déduire le parallélisme et l'égalité des longueurs de segments et puis de fournir une réponse. Gregory, faisant des *équivalences sémantiques* (que l'on pourrait considérer comme les réciproques de celles de Carlo), a estimé que les données amènent à considérer que le point I est aussi le milieu de [MM'], ce qui lui permet de déduire la conclusion.
Dans les deux preuves, même si le degré d'implicite est très élevé, aucun recours à l'action effective n'apparaît ; éventuellement, il y a un recours à l'ostention dans le sens que l'élève renvoie à la figure et à son codage ; le raisonnement effectué ainsi que les propriétés auxquelles les deux élèves font allusion nous paraissent corrects. Faut-il classer la preuve de Carlo et de Gregory comme relevant de l'*empirisme naïf* car ils n'explicitent pas les conceptions sur lesquelles leur preuve est fondée ?

Voici un deuxième extrait de la production d'un élève italien où une partie des données est présentée sous la forme d'une proposition *sémantiquement équivalente* :

(SIMONE. Problème 1A, genre de tâche 3) "Les triangles AIK et ABC sont semblables : les angles KAI et CAB sont égaux, $\frac{AK}{AC}=\frac{AI}{AB}=\frac{1}{2}$. Même discours pour T_3 et T_4. Donc T_2, T_3, T_4 et T_5 sont congruents entre eux : P(IJK) = ½ AB + ½ BC + ½ AC = ½ P(ABC) "[25].

Simone traduit la définition de *milieu* – mot évoqué dans l'énoncé – en termes d'égalité de rapport en

---

[23] Dans l'institution italienne, on n'utilise pas de notations spécifiques pour désigner une droite, une demi-droite, un segment cela devant être compris d'après le contexte. Lorsque nous traduisons les extraits des copies des élèves italiens, nous utilisons la notation adoptée dans l'institution française où, par exemple, (CM) désigne la *droite*, [CM) la *demi-droite* d'origine C, [CM] le *segment* et CM la *longueur* du segment.

[24] "Pour celui qui rédige une démonstration, certaines propositions veulent dire exactement la même chose : par exemple "*ABC est un triangle rectangle en A*" et "*A est un angle droit*". Dans ce cas, le texte peut comporter un passage d'une formulation à l'autre sans aucun intermédiaire ; il n'y a pas de pas de démonstration sous-entendu mais simplement reformulation d'une idée... En résumé, dans l'analyse d'une copie, il faut, à chaque fois que cela est possible, interpréter l'absence de certains éléments comme une équivalence sémantique", Houdebine, J. (1998), dans Les Actes du Colloque *Produire et lire des textes de démonstration*, Rennes 23 et 24 janvier 1998, IRMAR.

[25] L'élève nomme respectivement T_3, T_4 et T_5 les triangles AKI, BIJ et CKJ ; il nomme T_2 le triangle IJK.

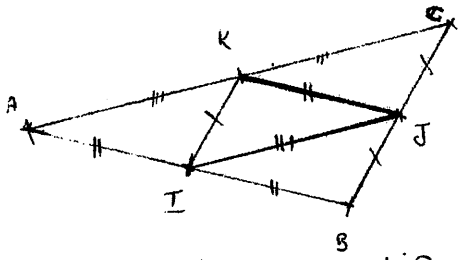
prouvant ainsi que les triangles cités sont semblables. Ensuite, il sous-entend des passages : du fait que les triangles T_3, T_4 et T_5 sont semblables à ABC, il déduit la congruence des quatre triangles qui constituent ABC et, par conséquent, la similitude de celui-ci avec IJK. Ici le degré d'implicite est encore plus élevé que dans les cas précédents et un détachement du pragmatique paraît moins évident même si – précisons-le – Simone n'utilise pas de marques pour coder les segments de même longueur, ce qui lui aurait éventuellement permis de *percevoir* la congruence des quatre triangles. Il y a, en quelque sorte, un abus d'*équivalences sémantiques*, ce qui est dû vraisemblablement à la familiarité de Simone avec la configuration en question. On pourrait accepter la dernière assertion comme l'annonce d'une étape à prouver (ce qui, chez Euclide, est désigné par *diorisme*) – le mot-clé *congruents* permettant d'estimer qu'il mobiliserait les *critères de congruence des triangles* – mais l'évidence lui suffit pour se convaincre de la validité de l'assertion dont l'analyse est fondée sur des connaissances qui ne s'explicitent pas mais qui, d'après nous, ont été analysées par l'élève ; l'explicitation des raisons exigeant un enchaînement d'informations complexe, Simone semble succomber à l'évidence.

Voici l'extrait de la production d'un élève français concernant le même problème (cf. Figure 5.1) :

> **(THOMAS. Problème 1A, tâche 3)** "I et K sont les milieux respectifs de [AC] et [AB]. Et d'après le théorème des milieux dans un triangle, ici ABC, lorsque l'on joint 2 milieux de 2 côtés d'un triangle, ce segment est parallèle au 3e côté et aussi égal à la moitié de ce côté. Je peux donc dire que [IK] // [BC] et [IK] = ½ [BC], soit [IK] = [BJ] = [JC]. Raisonnement analogue pour K et J : [KJ] // [AB] et [KJ] = [AI] = [IB] ainsi que I et J : [KJ] // [AC] donc [IJ] = [AK] = [KC]. Si on prend [IJ] = [KC] et [IK] = [JC] donc je peux affirmer que le triangle KCJ est égal au triangle IJK ([KJ] étant le segment commun entre ces deux triangles). Raisonnement analogue pour IJB : [IB] = [KJ], [BJ] = [IK] et [IJ] le segment commun, donc IJK = IJB ainsi que AKI : [AK] = [IJ] et [AI] = [KJ] et [IK] le segment commun : IJK = AKI. Je peux dire que IJK = AKI = CKJ = JBI..."

Les expressions que Thomas – élève français – utilise pour prouver la congruence des quatre triangles ressemblent fortement aux expressions que Carlo utiliserait s'il avait explicitement recours aux *critères de congruence* des triangles. Mais Thomas ne dispose pas de cet outil et surtout, dans son tracé, il code avec les mêmes marques les segments de même longueur. Faut-il reconnaître ici un recours à la perception, à une action mentale ? Faut-il considérer le discours de Thomas comme un *calcul sur les énoncés* où la propriété mise en jeu est fausse car elle n'est pas reconnue comme telle dans l'institution dont il fait partie ? Nous avons du mal à reconnaître, dans cette preuve, la marque de l'*expérience mentale* car Thomas dispose (mais probablement il n'est pas apte à les mobiliser !) des outils nécessaires pour que les opérations réalisées par la pensée aient un statut mathématique : il s'agirait, pour lui, de considérer que le parallélogramme est une figure symétrique par rapport au point de concours de ses diagonales, etc. Contrairement à Carlo, Thomas argumente ses assertions mais cette analyse, sur quelles connaissances se fonde-t-elle ? Aucun mot-clé ne nous permet d'estimer les outils mis en jeu.

Figure 5.1 – La copie de Thomas



I et K sont les milieux respectifs de [AC] et [AB]. Et d'après le théorème des milieux dans un triangle, ici ABC, lorsque l'on joigne 2 milieux de 2 cotés d'un triangle, ce segment est parallèle au 3e côté et aussi égale à la moitié de ce côté. Je peux donc dire que [IK] // [BC] et [IK] = $\frac{1}{2}$[BC] soit [IK] = [BJ] = [JC].
Raisonnement analogue pour K et J : [KJ] // [AB] et [KJ] = [AI] = [IB]
ainsi que I et J : [IJ] // [AC] donc [IJ] = [AK] = [KC].
Si on prend [IJ] = [KC] et [IK] = [JC] donc je peux affirmer que le triangle KCJ est egal au triangle IJK ([KJ] étant le segment commun entre ces 2 triangles). Raisonnement analogue pour IJB : [IB] = [KJ], [BJ] = [IK] et [IJ] : segment commun, donc IJK = IJB
ainsi que AKI : [AK] = [IJ] et [AI] = [KJ] et [IK] segment en commun = IJK = AKI. Je peux donc dire que IJK = AKI = CKJ = JBI.
Alors, $\mathcal{A}_{(ABC)} = 4 \times \mathcal{A}_{(IJK)}$ puisque IJK = AKI = CJK = JIB.
n = 4.
Et donc le périmètre étant le contour du triangle = 3 cotés = IJK et pour former le triangle ABC il en faut 6 de plus car il y a 3 triangles egaux autour de IJK qui forment ABC.
Alors $\mathcal{P}_{ABC} = 2 \times \mathcal{P}_{(IJK)}$.

Comme Thomas, Mauro – élève italien – recourt au *théorème des milieux* :

> **(MAURO. Problème 1A, genre de tâche 3)** "[KJ] // [AB], [KI] // [CB], [JI] // [AC]. En outre, AK = ½ AC, AI = ½ AB, CJ = ½ CB et, puisque AK = JI, AI = KJ et CJ = KI, ½ (JI + KJ + KI) = AB + AC + BC et, par conséquent, P(ABC) = 2 P(IJK)".

Vraisemblablement, Mauro estime que les données amènent au *théorème des milieux*, qu'il énonce sous une forme symbolique ([KJ] // [AB], ...). Ensuite, il affirme que IJ = AK, propriété qui, en revanche, dans la copie de Thomas est explicitement déduite. On dirait que l'élève italien considère l'énoncé du théorème sous une forme *sémantiquement équivalente* à celle employée d'habitude. Derrière ces considérations, peut-on classer la preuve de Mauro comme étant une *démonstration* ?

Pour faire front à nos nombreuses perplexités, dont nous avons fourni quelques exemples ci-dessus, nous avons finalement résolu de reconsidérer les catégories proposées par Balacheff en établissant d'une manière plus précise les types de preuves *intellectuelles* qui sont susceptibles d'être reconnus

dans les productions d'élèves concernant en particulier la résolution de problèmes de géométrie comme ceux que nous avons proposés aux élèves observés au cours de la phase expérimentale de notre travail.

Un retour sur les types de preuves

Nous appellerons *démonstration* toute preuve ayant les caractéristiques suivantes :

- elle respecte l'organisation propre d'un système hypothético-déductif, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain nombre de propositions considérées comme vraies (les hypothèses, les données du problème), les autres sont déduites de celles-ci suivant des règles logiques ;
- ainsi faisant, l'enchaînement des informations qui vient se déterminer est *explicitement* justifié en utilisant les résultats d'une *théorie*, ensemble de propriétés et définitions construites, à leur tour, suivant des règles logiques.

Cette définition est le fruit de nos réflexions par rapport aux deux institutions qui font l'objet de notre analyse. Dans l'institution française, c'est dans cette acception que la démonstration apparaît comme une exigence vis-à-vis de l'élève qui apprend à *démontrer* alors que, dans l'institution italienne, c'est tout à fait l'idée que l'on retrouve dans les manuels.

Dans les catégories de Balacheff, l'*exemple générique* est une preuve lorsqu'elle se déroule par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet particulier considéré en tant que représentant d'un ensemble d'objets. Cette preuve est intellectuelle si l'usage de l'exemple fournit au locuteur un moyen pour l'exprimer. Or, l'histoire semble nous enseigner que ce procédé est un autre héritage de l'œuvre euclidien[26] : *une proposition géométrique euclidienne est composée d'un texte et d'un diagramme pourvu de lettres, indissociablement liés l'un à l'autre, tous les deux indispensables à la réalisation de la preuve*[27].

Mais, d'autre part, un texte euclidien demande un véritable effort de mémoire de la part du lecteur : dans le texte grec originel, chaque passage de la preuve est *justifiable* à l'aide des principes ou des acquis antérieurs du traité mais aucune référence explicite n'est faite aux résultats établis précédemment et qui permettent d'avancer dans la preuve en question[28].

C'est pourquoi nous avons choisi d'appeler *exemple générique euclidien* toute preuve intellectuelle où – conformément à la définition de Balacheff – le renvoi au tracé et à son codage est un moyen pour exprimer la preuve elle-même et où – conformément au style euclidien – les outils mobilisés ne sont

---

[26] cf. chapitre 1, § III.2 (*La preuve*) ainsi que la note 21 dans ce chapitre.

[27] cf. G. Arsac (1999) et B. Vitrac (2000), ouvrages déjà cités. D'ailleurs, dans l'article d'Arsac, nous retrouvons les mêmes idées que nous discutons ici.

[28] En fait, pour aider le lecteur, beaucoup d'indications ont été introduites au fil du temps dans les marges des manuscrits grecs et dont certaines sont devenues des portions inauthentiques du texte lors des copies successives.

pas cités (ni mot à mot ni suivant l'appellation qui leur est attribuée dans le cours de géométrie) ou bien on ne cite que les plus importants ou encore ils sont évoqués en reproduisant partiellement la structure de leur énoncé et en les contextualisant à l'aide du codage introduit sur le tracé. Évidemment l'allusion à ces outils doit être dépourvue de toute ambiguïté. Voici un exemple tiré de la copie d'un élève français :

> **(NICOLAS, Problème 1D, question a, genre de tâche 1)** " I milieu de [AB] et L milieu de [AD]. Par le théorème de la droite des milieux dans le triangle ABD, donc (IL) // (BD). J milieu de [BC] et K milieu de [CD]. Par le théorème de la droite des milieux dans le triangle CBD, donc (JK) // (BD). Donc (IL) // (JK). Même démonstration dans les triangles ABC avec I et J milieux de [AB] et [BC], et ACD avec L et K milieux de [AD] et [CD], donc (IJ) // (LK) donc IJKL est un parallélogramme. (IJ) // (AC), (JK) // (BD), (AC) ⊥ (BD) donc (IJ) ⊥ (JK) donc IJKL est un rectangle".

Dans cette preuve, nous reconnaissons la marque de l'*exemple générique euclidien* tel que nous venons de le préciser. Dans la première partie, l'élève justifie ses passages en citant le *théorème de la droite des milieux*. Ensuite, ayant prouvé que "(IL) // (JK) et (IL) // (JK)", il déduit que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme en faisant clairement allusion à sa définition. Dans la conclusion, deux autres outils demeurent implicites, l'un qui lui permet de déduire la perpendicularité de (IJ) et (JK) et l'autre qui lui permet de conclure de IJKL est un rectangle[29].

La spécification sur ce type de preuve nous permet alors de reconnaître la marque de l'*exemple générique euclidien* aussi dans les productions de Carlo, Gregory et Mauro, dont nous avons examiné des extraits plus haut.

Suivant la définition de Balacheff, nous désignerons par *calcul sur les énoncés* toute preuve qui apparaît comme le résultat d'un raisonnement s'appuyant sur des propriétés pas toujours explicites mais surtout pas toujours vraies.

Balacheff appelle *expérience mentale* toute preuve intellectuelle où l'action est évoquée dans le discours, l'explication des raisons avancées pour valider un résultat repose sur l'analyse des propriétés – formulées dans leur généralité – de l'objet concerné ; les opérations réalisées par la pensée n'ont pas de statut mathématique et, par conséquent, elles ne peuvent pas être *explicitement* justifiées à l'aide d'une théorie formelle. Toutefois, conformément à la définition d'*expérience* que nous avons établie dans le chapitre 1[30], il nous paraît nécessaire de préciser que l'*action mentale* – où l'on imagine des pliages, des déplacements, etc. – peut assumer une double signification. Elle peut être une source d'idées ou un support pour produire une preuve *intellectuelle* mais, dans la démarche de l'élève, elle peut aussi être considérée comme un moyen satisfaisant pour assurer la validité de ses argumentations

---

[29] Il nous paraît évident que l'élève fait allusion aux deux résultats suivant : "*Si deux droites perpendiculaires entre elles sont respectivement parallèles à deux autres droites, alors ces dernières sont aussi perpendiculaires entre elles*" et "*Un parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle*".

[30] CF. chapitre 1, § III.1, *La géométrie*

et, dans ce cas, le discours produit est à considérer du côté des preuves *pragmatiques*.

Parmi les types de preuves qui relèvent de l'*empirisme naïf*, Balacheff distingue les trois cas suivants.
Les sources de la preuve relèvent de l'*évidence des faits*, l'observation ou la réalisation de mesures et de calculs suffisent pour en tirer des conclusions. Voici un exemple de discours que nous reconnaissons en tant que preuve relevant de l'*évidence des faits* :

> **(ELENA, problème 1D, question 1, genre de tâche 1)** "C'est un rectangle car il a les côtés opposés parallèles, tous les angles droits et les diagonales se coupent en leur milieu"[31].

Lorsque Elena reproduit la figure décrite dans l'énoncé, elle perçoit un rectangle : elle ne prouve pas son assertion mais elle se contente de lister les propriétés.
Les sources de la preuve relèvent de l'*évidence des raisons*. L'observation vient en aide à l'élève pour soutenir sa conviction en la validité de ses assertions qui sont éventuellement discutées mais dont l'analyse est fondée sur des connaissances qui ne sont pas explicitées car l'élève ne se donne pas de moyens pour les reconnaître, alors qu'elles sont disponibles. C'est ainsi que nous reconnaissons dans le discours de Thomas (cf. plus haut), une preuve qui relève de l'*évidence des raisons*.
Les sources de la preuve relèvent de l'*évidence* mais c'est l'évidence elle-même qui fonctionne en *obstacle* car elle occulte la nécessité même d'une démonstration qui serait sans doute à la portée de l'élève mais qui semble complexe et oiseuse :

> "... Il s'agit en fait de la conjugaison de deux circonstances : d'une part un lien étroit entre une conception et une assertion (ou une conjecture), apporte à cette dernière la force de l'évidence ; d'autre part l'incapacité à expliciter les conceptions en vigueur... Certes les fondements des solutions apportées sont essentiellement empiriques... Mais le lien très direct entre les conceptions et l'assertion peut être "compris" par les élèves, cependant que l'explicitation des raisons exigerait qu'ils entrent dans une procédure de définitions des objets d'une grande complexité[32]"

Dans le discours de Simone (cf. plus haut), nous reconnaissons alors que l'évidence fonctionne en obstacle.
Nous reconnaissons comme *pragmatiques* les preuves qui relèvent de l'*évidence des faits* alors que, d'après nous, les deux autres cas – l'*évidence des raisons* et l'*évidence comme obstacle* – sont à considérer plutôt du côté des preuves *intellectuelles*.

Nous résumons ci-dessous le vocabulaire réadapté et utilisé par la suite.

Empirisme naïf : évidence des faits	Ce type de preuve, dont les sources relèvent de l'*évidence des faits*, conduit à garantir la vérité d'un énoncé à travers l'observation ou la vérification sur quelques exemples.

[31] Cet exemple montre aussi un recours à ce que, plus haut, nous avons appelé attitude "heuristique" où l'élève *sait* mais il *ne sait pas faire* : il fait montre de ses connaissances sans pourtant choisir celle qui convient le mieux pour aboutir.
[32] cf. Balacheff N. (1987), ouvrage déjà cité.

Expérience mentale	Ici, l'action n'est plus effective mais intériorisée, évoquée dans le discours, se détachant de sa réalisation sur un cas particulier : l'explication des raisons avancée pour établir la vérité d'un énoncé, repose sur l'analyse des propriétés – formulées dans leur généralité – de l'objet concerné. Toutefois, conformément à la définition d'*expérience* que nous avons établie dans le chapitre 1, il nous paraît nécessaire de préciser que l'*action mentale* – où l'on imagine des pliages, des déplacements, etc. – peut assumer une double signification. Elle peut être une source d'idées ou un support pour produire une preuve *intellectuelle* mais elle peut aussi être considérée comme un moyen satisfaisant pour assurer la validité des argumentations et, dans ce cas, le discours produit est à considérer du côté des preuves *pragmatiques*.
Évidence comme obstacle	Les sources de la preuve relèvent de l'*évidence* mais c'est l'évidence elle-même qui fonctionne en *obstacle* car elle occulte la nécessité même d'une démonstration qui serait sans doute à la portée de l'élève mais qui semble complexe et oiseuse. Nous considérons que cette preuve demeure plutôt du côté des preuves *intellectuelles*.
Évidence des raisons	L'observation vient en aide pour soutenir sa propre conviction en la validité de ses assertions qui sont éventuellement discutées mais dont l'analyse est fondée sur des connaissances qui ne sont pas explicitées alors qu'elles sont disponibles. Nous considérons que les sources de cette preuve relèvent de l'*évidence des raisons* et qu'elle est plutôt du côté des preuves *intellectuelles*.
Exemple générique euclidien	Nous appellerons *exemple générique euclidien* toute preuve intellectuelle où – conformément à la définition de Balacheff – le renvoi au tracé et à son codage est un moyen pour exprimer la preuve elle-même et où – conformément au style euclidien – les outils mobilisés ne sont pas cités (ni mot à mot ni suivant l'appellation qui leur est attribuée dans le cours de géométrie) ou bien on ne cite que les plus importants ou encore ils sont évoqués en reproduisant partiellement la structure de leur énoncé et en les contextualisant à l'aide du codage introduit sur le tracé. Évidemment il faut que le lecteur puisse repérer ces outils sans ambiguïté.
Démonstration	Nous appellerons *démonstration* toute preuve ayant les caractéristiques suivantes : – elle respecte l'organisation propre d'un système hypothético-déductif, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain nombre de propositions considérées comme vraies (les hypothèses, les données du problème), les autres sont déduites de celles-ci suivant des règles logiques ; – l'enchaînement des énoncés est *explicitement* justifié en utilisant les résultats d'une *théorie*, ensemble de propriétés et définitions construites, à leur tour, suivant des règles logiques.
Calcul sur les énoncés	Il s'agit d'une preuve qui ne doit rien à l'expérience et qui apparaît comme le résultat d'un calcul inférentiel sur des énoncés. On ne peut pas la reconnaître en tant que démonstration : elle apparaît comme le résultat d'un raisonnement s'appuyant sur des propriétés pas toujours explicites mais surtout pas toujours vraies.

III.2 Les critères de l'analyse a posteriori

Comme quelques-uns des exemples exposés ci-dessus le montrent, au sein de la même tâche, l'élève peut varier sa technique de résolution et, par conséquent, produire une preuve qui relève à la fois de plusieurs catégories. D'une part, cela nous a persuadée davantage de ne pas parler de techniques mais de *procédures*, ce terme désignant soit des manières d'avancer sans pourtant aboutir, soit des manières d'avancer en adoptant différentes catégories de techniques (parmi les trois envisagées plus haut) ; d'autre part, cela ne nous permet pas de classer les élèves suivant le niveau de rationalité atteint : dans

l'analyse a posteriori, nous avons résolu de parler de *discours de l'élève*.

Nous répertorions les *procédures* en nous appuyant sur les solutions envisagées dans notre analyse *a priori* en ajoutant, le cas échéant, celles que nous n'avions pas prises en compte mais qui apparaissent dans quelques productions d'élèves. Quelle que soit la manière de rédiger la résolution (et, par conséquent, le type de preuve fournie), ici nous ne retenons que l'*esprit de fond* de celle-ci, même au cas où il n'aurait pas tout détaillé ou au cas où il évoquerait d'une manière imprécise un résultat géométrique du cours. Dans le cas où la tâche proposée prévoit une réponse, nous signalons les types de réponse fournis par les élèves.

Nous analysons les *discours* des élèves en suivant la classification des types de preuve dont, plus haut, nous avons précisé quelques définitions. Nous transcrivons les extraits qui s'avèrent les plus intéressants, les plus emblématiques par rapport à la situation et, éventuellement, les plus insolites par rapport à nos attentes.

Le *tracé* et l'*usage de la figure* étant des éléments qui nous paraissent essentiels lors de l'examen des procédures et des discours des élèves, nous leur consacrons une partie dans l'analyse a posteriori en distinguant, selon le problème, les usages possibles parmi ceux que nous avons détaillés au début de ce chapitre.
Ici, les items pris en compte (nature du tracé, codage, etc.) donnent, entre autres, une esquisse des connaissances que l'élève mobilise ou tente de mobiliser ainsi que des difficultés éventuelles dans la compréhension du texte, dans la traduction du registre verbal en registre visuel et réciproquement. Cela nous permet aussi de vérifier si les données sont suffisamment claires pour que l'élève puisse reproduire une figure correcte, pour évaluer s'il faut formuler différemment l'énoncé en précisant davantage quelques détails, conformément à nos attentes.

Notamment pour les problèmes de construction, nous prenons en compte le *tracé*, le *programme* ainsi que le discours relatif à la *justification* du programme fourni.

III.3 Les problèmes de la fiche A

Dans les deux énoncés, la figure exploitée est la même. Les propriétés de cette figure, explicitées pour résoudre le premier problème, peuvent être utiles pour résoudre l'autre.

III.3.1 *L'analyse du Problème 1A*

Il s'agit d'un problème dont la figure n'est pas donnée : il faut la tracer dans un cas général en traduisant les données verbales. La tâche proposée est du **genre 3** : on demande de comparer les périmètres et les aires de deux sous-figures. La nature de la tâche permet d'une manière plus ou moins évidente de relier le cadre géométrique au cadre algébrique.

Pour la question sur les périmètres (dimension 1), les élèves ne rencontrent aucune difficulté quelle que soit la manière dont ils perçoivent la figure de départ alors que, pour la question sur les aires (dimension 2), la difficulté majeure est celle des hauteurs des deux triangles. Généralement, les élèves qui ont remarqué que le grand triangle est la réunion disjointe de quatre triangles congruents, n'ont pas eu de difficulté à répondre à la question.

Les résultats s'avèrent intéressants car ils montrent un réseau assez varié d'outils mobilisés, l'apparition de conceptions erronées, celles-ci mises en évidence du fait que, dans le même énoncé, l'on propose des questions qui portent sur le périmètre et sur l'aire – deux notions qui souvent ne sont pas bien maîtrisées par les élèves. En outre, à propos de la question sur les aires, le recours aux formules demeure très significatif. Il nous paraît que, surtout pour les élèves français, cette notion suggère d'emblée le calcul alors qu'ils pourraient aussi la relier aux transformations géométriques et à leurs propriétés en réduisant ainsi la difficulté de la relation entre les longueurs des hauteurs. En conséquence, la mise en œuvre de cette liaison *forcée* avec le calcul fait apparaître des difficultés concernant le cadre algébrique.

Enfin, nous constatons que le style des preuves des élèves italiens est plus laconique que celui des élèves français, leur langage est souvent symbolique : le type de preuve relevant de l'*exemple générique euclidien* semble leur convenir. Les élèves français semblent expliciter les outils mobilisés surtout quand ils les maîtrisent suffisamment, ce qui fait qu'ils produisent des *démonstrations* par "bouts". Dans l'ensemble, la figure proposée semble être familière : si cela ne décourage pas certains élèves, en revanche cela sollicite le recours à des preuves qui portent la marque de l'*évidence.* Néanmoins, la notion d'aire demeure un obstacle assez important surtout pour la réussite des élèves français : on constate qu'un certain nombre d'entre eux produisent des véritables *démonstrations* pour établir la relation des périmètres alors qu'ils échouent dans la question sur les aires. Vraisemblablement, ils semblent ne pas avoir l'habitude de traiter de telles questions dans un contexte purement géométrique.

Nous avons récupéré QUATORZE copies d'élèves, SEPT italiens et SEPT français. Compte tenu de la structure de l'énoncé, lors de l'analyse des procédures des élèves, nous séparons les résultats qui concernent la question sur les périmètres de ceux qui concernent la question sur les aires.

Le tracé et l'usage de la figure

Dans ce problème, nous fondons l'analyse du tracé et de la figure sur trois items principaux.

NAT	Quelle est la nature du triangle tracé ? L'élève considère-t-il un cas *quelconque* ou *particulier* (triangle isocèle, équilatéral ou rectangle) ?	**TQ** Triangle quelconque **TP** Triangle particulier
COD	La figure a-t-elle été codée par rapport aux donnés ?	**L** Lettres **M** Marques **LM** Lettres et marques
AUTEL	L'élève considère-t-il d'autres éléments de la figure qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé mais qui sont utiles pour rédiger la solution ?	**N** Non **O** Oui

L'item **NAT** met en évidence la capacité de l'élève à la *décontextualisation* d'une situation donnée : est-ce qu'il altère (inconsciemment ou non) la tâche en envisageant des hypothèses subsidiaires ? Pour répondre à cette question, nous prenons en compte le tracé ainsi que certains détails significatifs de la production écrite qui l'accompagne car, quelque fois, c'est dans son discours que l'élève attribue une propriété supplémentaire aux données du problème.

Ici, le tracé est un élément auxiliaire du problème. La présence d'un codage du tracé exprime la capacité ainsi que la nécessité de rendre visibles les informations et les propriétés mises en jeu. L'item **COD** prend en compte tout ce qui peut être codé par rapport aux données du problème : ici, par exemple, le codage des sommets des triangles est explicitement suggéré dans l'énoncé tandis que l'utilisation de marques qui codent les égalités des segments demeure implicite.

Par la suite, on peut examiner la figure et se faire une idée de ses propriétés : on trie, parmi ces propriétés, celles qui permettent de répondre aux questions du problème. Autrement, ce sont les consignes qui suggèrent la manière d'examiner la figure. Selon la situation proposée, on peut adopter l'une ou l'autre approche mais, au sein de la même situation, si les diverses étapes du problème l'exigent, on peut aussi les adopter en alternance. En tout cas, les deux approches demeurent strictement liées aux connaissances dont on dispose et que l'on met en jeu. C'est grâce à l'item **AUTEL** que, pour combiner les résultats sur les tracés produits avec ceux sur les outils mobilisés et leur

enchaînement, nous évaluons si, au-delà des informations données dans l'énoncé, l'élève repère d'autres éléments – tracés ou non tracés, codés ou non codés – pour rédiger sa solution. Cette analyse sera affinée lors de la phase expérimentale.

Tableau 5.2 – Le tracé dans le problème 1A

Élèves italiens				*Élèves français*			
	NAT	**COD**	**AUTEL**		**NAT**	**COD**	**AUTEL**
1	TQ	L	O	**8**	TQ	LM	O
2	TQ	L	O	**9**	TQ	LM	N
3	TQ	L	O	**10**	TP (rectangle)	L	N
4	TQ	L	N	**11**	TQ	LM	O
5	TQ	L	N	**12**	TP (rectangle)	LM	O
6	TQ	LM	O	**13**	TQ	L	N
7	TQ	LM	N	**14**	TQ	LM	N

Seuls deux élèves (français) tracent un triangle rectangle (cf. Tableau 2) et, comme nous le verrons plus loin, cela influe sur leur procédure. Il nous semble que ce résultat montre que les élèves ont une bonne capacité de *décontextualisation*, voire l'habitude de considérer les figures dans un cas général.
D'après les données, tous les élèves confondus codent la figure avec des lettres, même les deux élèves (7 et 13) qui ne résolvent pas du tout le problème[33]. Ce sont surtout les élèves français qui codent aussi la figure avec des marques ; notamment, deux élèves italiens et cinq français codent les segments de même longueur, d'après la définition de milieu d'un segment. Néanmoins, tous les élèves exploitent cette propriété de la figure soit implicitement soit en la signalant lors de la rédaction de la solution. Voici un premier indice qui vraisemblablement mérite d'être approfondi dans la phase ultérieure : est-ce que le codage de la figure est toujours indispensable pour les élèves ?

Nous avons examiné comment l'élève peut agir sur la figure décrite dans l'énoncé. Nous avons répertorié tous les éléments que les élèves ont envisagés afin d'évaluer l'importance qu'ils attribuent à la figure en tant que support perceptif au problème à résoudre. Dans le Tableau 5.2, nous résumons les possibilités en indiquant aussi les élèves qui y ont eu recours.
Un élève italien (6), conformément à ce qu'il prouve, code les segments qui sont respectivement égaux aux segments codés précédemment ; il remarque que les quatre petits triangles sont congruents mais, par la suite, il n'exploite cette propriété que pour répondre à la question sur les périmètres. Un élève français (9) code aussi ces segments et, d'après nous, cela jouera beaucoup sur sa justification à la question sur les aires.

[33] Au passage, nous signalons que, pour tracer la figure, les élèves français utilisent aussi le compas tandis que les élèves italiens ne soignent pas trop les tracés. Par rapport aux bords de la feuille, presque toutes les figures sont tracées en position quelconque.

Tableau 5.3 – Le codage du tracé dans le problème 1A

		Élèves italiens	*Élèves français*
D'après les données	– Nommer les sommets du triangle ABC et les milieux respectifs de ses côtés	Tous les élèves	Tous les élèves
A la suite de quelques déductions et/ou pour mettre en place une procédure envisagée	– Marquer les segments de même longueur	6, 7	8, 9, 11, 12, 14
	– Marquer les nouveaux segments de même longueur suivant le codage déjà utilisé	6	9
	– Marquer ou nommer les angles égaux	1, 2, 3	Aucun élève
	– Tracer et nommer les hauteurs des triangles ABC et IJK ou seulement l'une des deux	2, 6	11,12

Remarquons que ce sont seulement des élèves italiens (1, 2 et 3) qui recourent au codage des angles égaux. En effet, ils peuvent exploiter ces égalités pour appliquer les cas de congruence et de similitude des triangles. Les élèves français auraient pu les exploiter, s'ils avaient utilisé convenablement les transformations géométriques. Cet élément semble alors être révélateur de certaines habitudes propres de chacune de deux institutions. En effet, il semblerait que, dans l'institution française, les propriétés angulaires du parallélisme ne soient pas suffisamment exploitées en tant qu'outil de démonstration, un outil qui, en revanche, dans l'institution italienne, s'associe efficacement aux critères de congruence et de similitude des triangles.

Si l'on veut utiliser les formules de calcul des aires pour répondre à la question sur les aires, on devra nécessairement prendre en compte les hauteurs des deux triangles. Un élève italien (2) trace les hauteurs et il cherche la relation entre leurs longueurs ; un autre élève (6) ne trace pas de hauteurs mais la médiane [CI] qu'il utilisera en tant que hauteur dans la formule : cela serait correct, si l'élève avait envisagé un triangle isocèle mais nous croyons que cette erreur provient plutôt d'une difficulté à distinguer les notions de hauteur et de médiane tout en considérant qu'ici le fait que des milieux soient déjà tracés peut faire hésiter l'élève au cas où ses connaissances ne seraient pas suffisamment consolidées. Un élève français (11) trace correctement des hauteurs mais il ne cherche pas la relation entre les longueurs des hauteurs[34] ; un deuxième élève (12), ayant tracé un triangle rectangle, trace la hauteur relative à l'hypoténuse du triangle IJK mais il ne l'utilisera pas par la suite ; en outre, il considère la médiane [CI] en tant que hauteur relative à l'hypoténuse du triangle ABC sans pourtant la tracer ; un troisième élève (8) ne trace pas de hauteurs mais, dans sa rédaction, attribue la même valeur (codée par la lettre *h*) aux hauteurs des deux triangles, ce qui le conduit à fournir une réponse

[34] D'ailleurs, dans l'analyse *a priori*, nous avons remarqué que cette preuve est assez coûteuse lorsqu'on n'utilise que les notions de parallélisme et d'orthogonalité (cf. Solution B_1, chapitre 3, § III.1, *L'analyse a priori du problème B*).

incorrecte lorsqu'il utilise les formules. Comme nous le verrons plus loin, les élèves qui recourent aux formules de calcul des aires fournissent généralement des réponses incorrectes, la nature des erreurs relevant du cadre géométrique ou bien algébrique.

Les réponses et les procédures des élèves

Lors de l'analyse *a priori*, nous avons répertorié les diverses solutions dans quatre grands groupes[35]. Même si les productions des élèves sont plutôt fragmentaires, en les situant par rapport à ces groupes, on constate qu'aucun élève ne se sert de transformations géométriques (3e groupe) ; aucune référence explicite aux parallélogrammes comme sous-figures de la figure donnée n'apparaît non plus. Les élèves italiens semblent surtout percevoir la figure comme pavage de quatre triangles disjoints – semblables au triangle ABC et congruents entre eux – car ils se servent de *critères de congruence et de similitude* (**2e** et **3e groupe**). Les élèves français semblent plutôt reconnaître un petit triangle inscrit dans un grand triangle en recourant donc aux *formules* (**1e groupe**). Or, les informations données portent sur les deux triangles : on dirait que l'élève qui perçoit le petit triangle dans le grand triangle, conserve une concordance entre l'énoncé et le raisonnement qu'il produit, ne réussissant pas à se détacher de l'image que les informations écrites données lui offrent.

Dans le Tableau 5.4, nous avons résumé les résultats relatifs aux réponses des élèves ainsi que l'usage de leurs procédures. On peut déjà saisir que, pour les élèves français, la tâche sur les aires demeure problématique : un seul élève français fournit une valeur correcte pour *n* alors que cela se lit sur le tracé !

Tableau 5.4 – Les réponses des élèves dans le problème 1A

Élèves italiens					*Élèves français*				
	Les réponses		**Usage de la procédure**			**Les réponses**		**Usage de la procédure**	
1	m = 2	n = 4	Complet correct	Complet correct	**8**	m = 2	n = 2	Complet correct	Incomplet incorrect
2	m = 2	n = 4	Complet correct	Complet correct	**9**	m = 2	n = 4	Incomplet part.ment correct	Complet correct
3	m = 2	n = 4	Incomplet correct	Complet correct	**10**	m = ?	n ≈ 3,9	-	Incorrect
4	m = 2	n = 2	Incomplet correct	Incomplet incorrect	**11**	m = 2	n = ?	Complet correct	Incomplet correct
5	m = 2	n = 4	Incomplet correct	Incomplet correct	**12**	m = 2	n = ?	Complet correct	Incomplet Incorrect
6	m = 2	n = 2	Incomplet correct	Complet part.ment correct	**13**	-	-	-	-
7	-	-	-	-	**14**	m = 2	n = 2	Incomplet correct	Incomplet incorrect

Concernant la valeur de *m* (comparaison des périmètres), parmi les douze élèves qui abordent le problème :

– six élèves (3, 4, 5, 6, 9, 14) fournissent une valeur exacte en recourant à un traitement de la figure ;
– cinq élèves (1, 2, 8, 11, 12) fournissent une valeur exacte en recourant à un traitement de la figure et aux formules de calcul des périmètres ;
– un élève (10) ne répond pas à cette question.

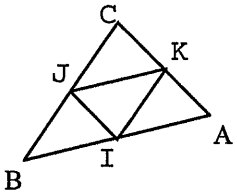
En reconnaissant **trois procédures principales**, nous constatons que les élèves italiens et français préfèrent exploiter respectivement les propriétés de la *similitude* et d'*agrandissement/réduction* alors que l'énoncé complet du *théorème des milieux* permettrait facilement de parvenir au résultat cherché.

La procédure de trois élèves (1, 8 et 12) est telle que la **Solution B_1** de notre analyse *a priori*.

(AB), (BC) et (CA) sont respectivement parallèles à (KI), (JI) et (JK)

AB = 2 JK, BC = 2 IK, CA= 2 IJ

⇓



Théorème des milieux

P (ABC) = AB + BC + CA = 2 (JK + IK + IJ) = **2 P (IJK)**

Formule de calcul du périmètre d'un triangle

Ces trois élèves déduisent donc la relation des périmètres en recourant simplement au *théorème des milieux*. L'élève italien (1) et l'un des élèves français (12) l'utilisent d'une manière contextualisée alors que l'autre élève français (8) le cite explicitement.

Un élève français (11), enchaîne deux passages de la manière suivante : à l'aide du *théorème des milieux*, il prouve d'abord le parallélisme des côtés des deux triangles ; ensuite, à l'aide du *théorème de Thalès* appliqué à la même figure, il prouve la relation des longueurs des côtés des deux triangles ; il conclut comme dans la **Solution B_1** (cf. Figure 5.2).

Dans les productions de trois élèves italiens (3, 4 et 5) et d'un élève français (14), le peu d'indices qui apparaissent nous font supposer que leurs explications éventuelles seraient proches de la **Solution B_6**[36] et que donc ils exploitent les notions de similitude et/ou d'agrandissement/réduction en les reliant à la proportionnalité. Nous ne pouvons pas indiquer les outils précis auxquels ces élèves auraient eu recours s'ils avaient détaillé leurs procédures.

Figure 5.2 – Un extrait de la copie de l'élève 11

[35] cf. chapitre 3, § III.1, *L'analyse a priori du problème B*
[36] cf. chapitre 3, § III.1, *L'analyse a priori du problème B*

Hypothèses

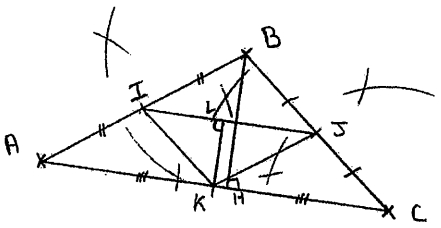
I milieu [AB]

J " [BC]

K " [AC]

P(ABC) = m P(IJK)

A(ABC) = n A(IJK)



• Dans un triangle, une droite passant par le milieu de deux côtés est obligatoirement parallèle au 3e côté.

• Triangles ABC et AIK :

on sait que (IK) // (BC) car I milieu de [AB] et K milieu [AC]

donc I ∈ [AB] et K ∈ [AC]

D'après Thalès dans ABC et AIK, on a : $\frac{AI}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{IK}{BC}$

or $AI = \frac{1}{2} AB$ donc $IK = \frac{1}{2} BC$

Même démonstration dans les triangles ABC et BIJ : $IJ = \frac{1}{2} AC$

et ABC et CJK : $JK = \frac{1}{2} AB$

Donc P (ABC) = AB + BC + AC

or $IJ = \frac{1}{2} AC$ donc AC = 2IJ

$IK = \frac{1}{2} AB$ " AB = 2IK

$JK = \frac{1}{2} AC$ " AC = 2JK

On a donc P (ABC) = 2IK + 2IJ + 2JK

= 2 (IK + IJ + JK)

= 2 P(IKJ)

La procédure d'un élève italien (2) est proche de la **Solution B_7**.

AB = 2AI, AC = 2AK

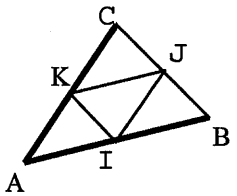
Définition de milieu d'un segment

∠CAB = ∠KAI

⇓

ABC et AIK sont semblables

⇓



Deux triangles sont semblables si les longueurs des deux côtés homologues sont proportionnelles et les angles formés par ces côtés sont égaux (critère de similitude des triangles)

De même, on prouve que ABC et BJI sont semblables ainsi que ABC et CJK.

A partir de là, il en déduit que les triangles IJK, CKJ, AIK et BIJ sont congruents (*critère de congruence des triangles*) et que donc IJK est aussi semblable à ABC (*critère de similitude des triangles*), d'où la conclusion que le périmètre de l'un est le double de l'autre, cela en recourant

explicitement à des calculs algébriques[37] (*formule de calculs du périmètre d'un triangle*).
Un élève italien (6) semble recourir au même enchaînement mais peut-être que, dans les premières étapes de son discours, l'abus d'*équivalences sémantiques* ainsi que de la perception ne nous permet pas de reconstituer avec cohérence tous les outils auxquels il fait allusion ; vraisemblablement, la figure en question lui est familière et il exploite les notions de *congruence* et de *similitude*, appliquées aux triangles.

Un élève français (9) exploite la figure comme pavage de quatre triangles disjoints, semblables à ABC et congruents entre eux. Après avoir utilisé le *théorème des milieux* en déduisant la relation des longueurs des côtés des deux triangles, il prouve l'*égalité* des quatre petits triangles[38] en utilisant vraisemblablement la propriété suivante : *deux triangles ayant deux côtés de même longueur et le troisième en commun sont égaux*[39]. A partir de là, il en déduit :

> "... le périmètre étant le contour du triangle = 3 côtés = IJK et pour former le triangle ABC il en faut 6 de plus car il y a 3 triangles égaux autour de IJK qui forment ABC. Alors P (ABC) = 2 P (IJK)".

Bien que la réponse soit correcte, elle n'est pas cohérente avec l'argumentation et semble purement perceptive. Remarquons que cet élève aborde le problème à partir de la question sur les aires : dans la justification de l'égalité relative aux périmètres des deux triangles, la difficulté à s'exprimer dans un langage formel semble dissimuler une conception erronée due à une persistance à *voir* en dimension 2 alors que la question porte sur la dimension 1.

Concernant la recherche de la valeur de *n* (comparaison des aires), parmi les douze élèves qui abordent le problème :

- quatre élèves (1, 3, 5, 9) fournissent une réponse correcte en recourant à un traitement géométrique de la figure ;
- un élève (2) fournit une réponse correcte en recourant à un traitement géométrique et puis aux formules de calcul des aires ;
- deux élèves (4, 14) fournissent une valeur incorrecte en recourant à un traitement géométrique ;
- un élève (6) fournit une réponse incorrecte en recourant à un traitement géométrique et puis aux formules de calcul des aires ;
- un élève (8) recourt aux formules de calcul des aires, il ne recourt à aucun traitement géométrique et donc il fournit une réponse incorrecte ;
- un élève (11) recourt aux formules de calcul des aires, il ne recourt à aucun traitement

---

[37] cf. l'extrait de la copie de Simone, § II.2, *Les preuves*
[38] cf. l'extrait de la copie de Thomas, § II.2, *Les preuves*
[39] On pourrait aussi envisager qu'il utilise la *propriété du parallélogramme d'être partagé par chacune de ses diagonales en deux triangles superposables*, mais aucune référence à cet outil n'est jamais faite alors qu'il devrait être facilement mobilisable chez un élève du niveau

géométrique et donc il n'aboutit pas ;

- un élève (10) recourt au mesurage et aux formules de calculs des aires et il fournit une valeur approchée ;
- un élève (12) altère la tâche et il n'aboutit pas ;

Nous constatons que ces sont surtout les élèves qui recourent aux *formules de calcul des aires* qui fournissent des réponses incorrectes ou bien ne réussissent pas à aboutir. A ce propos, il est intéressant de remarquer le contraste entre les élèves français et italiens lorsqu'ils se fixent l'objectif d'utiliser les formules. D'abord, analysons donc ces productions.

Deux élèves français (8 et 11) recourent correctement aux *formules* sans pourtant établir la relation entre les longueurs des hauteurs : l'un (8) nomme de la même manière les deux longueurs en fournissant ainsi une valeur incorrecte de n ; l'autre (11), pour contextualiser les formules, utilise le codage de son tracé[40] mais, évidemment, il n'aboutit pas. C'est ainsi que ces élèves ne mobilisent aucun autre outil, outre la notion de *hauteur dans un triangle* et la *formule de calcul de l'aire d'un triangle.*

Dans la copie d'un autre élève français (12), on voit bien que son intention est de comparer les valeurs des aires mais sa procédure montre plusieurs incohérences dans un cadre aussi bien géométrique qu'algébrique. En traçant un triangle rectangle, l'élève altère la tâche et élude l'obstacle de la preuve de la relation des deux hauteurs ; pour le triangle ABC (rectangle en C dans son tracé), il considère la médiane [CI] et non pas la hauteur relative à l'hypoténuse et, pour le triangle IJK, bien qu'au départ il écrive correctement la *formule* où il considère les côtés de l'angle droit, il transforme ensuite le signe de multiplication en signe d'addition et il ne réussit pas à conclure.

Un seul élève (10) recourt au *mesurage* et aux *formules* : il mesure les côtés du triangle ABC (rectangle en C dans son tracé) et il calcule les longueurs de [AI], [AK], [CJ] en considérant que I, J, K sont les milieux des côtés de ABC ; ensuite, en utilisant à trois reprises le théorème de Pythagore mais sans prouver que le triangle ABC est composé de quatre triangles rectangles, il calcule les longueurs des côtés de IJK (le rapport avec les longueurs des côtés de ABC étant proche de ½) ; enfin, il applique correctement les formules de calcul de l'aire où il considère les côtés de l'angle droit en obtenant une valeur approchée pour n.

Maintenant, voyons comment deux élèves italiens (2 et 6) s'y prennent pour prouver la relation entre les hauteurs des deux triangles.

Comme on le décrit dans la **Solution B_7** de l'analyse a priori, ils exploitent la *similitude* des deux

---

concerné.

[40] Dans son tracé, il montre et nomme les extrémités des hauteurs des deux triangles (cf. Tableau 5.2)

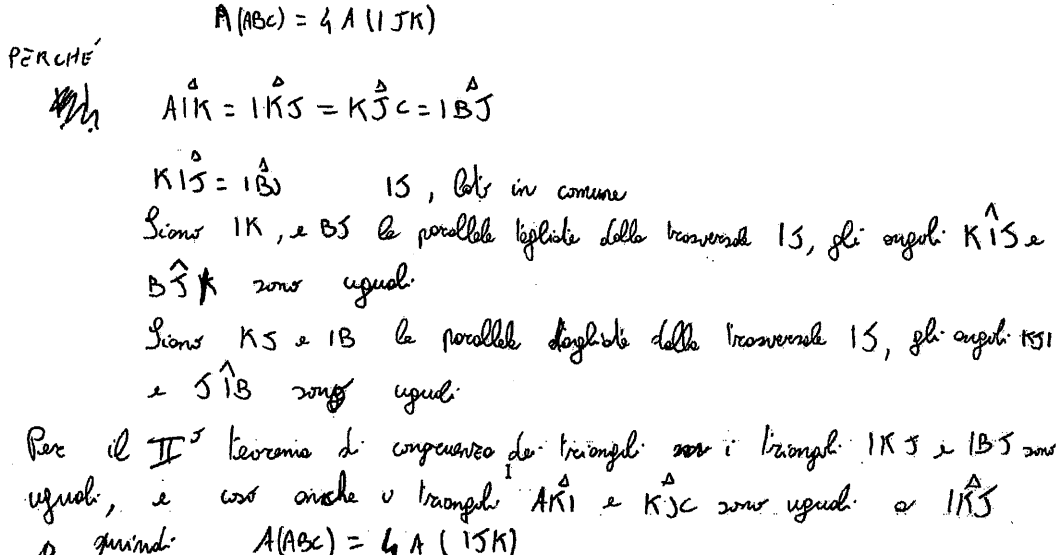
triangles. L'un (2) fournit une réponse correcte : ayant établi que les triangles IJK et ABC sont semblables[41], il recourt implicitement à la propriété suivante : *si deux triangles sont semblables, les longueurs des hauteurs sont proportionnelles aux longueurs des bases relatives.*

L'autre élève (6) établit que le triangle ABC est la réunion disjointe de quatre triangles congruents mais il n'exploite pas cette propriété. Il suit la même procédure que l'élève précédent mais il commet deux erreurs : il considère les médianes et non pas les hauteurs et puis il se trompe dans les calculs ; une confiance "aveugle" en ses calculs ne lui permet de comparer son résultat ni avec ce qu'il prouve ni avec ce qu'il pourrait *voir* sur la figure.

Ces résultats montrent déjà une première différence. Chez les élèves français, l'absence d'étapes intermédiaires avant l'utilisation effective des formules semble manifester une difficulté à manipuler cet outil dans un contexte purement géométrique ou, plutôt, à gérer des changements de cadre – du géométrique à l'algébrique –, ce qui n'a rien de surprenant compte tenu du fait que, dans l'institution française, le chapitre sur les aires demeure le plus souvent lié au cadre algébrico/numérique.

Dans les cas qui suivent, les élèves abordent la question des aires en restant dans un cadre géométrique.

Figure 5.3 – Un extrait de la copie de l'élève 3



Deux élèves italiens (1 et 3) recourent explicitement aux *critères de congruence des triangles*, comme on le décrit dans la **Solution B_3** de l'analyse *a priori*. Ils mobilisent implicitement les *propriétés des angles formés par deux droites parallèles et une sécante* ; pour le parallélisme, l'un (1) recourt au

[41] cf. l'extrait de la copie de Simone, § II.2, *Les preuves*

théorème des milieux d'une manière contextualisée alors que l'autre (3) l'utilise implicitement dans son discours où l'on peut croire que l'élève a une certaine familiarité avec la configuration en jeu (cf. Figure 5.3).

Un élève (5), en considérant que la figure tracée est la réunion disjointe de quatre triangles congruents, en déduit la valeur correcte de n : dans ce cas, il nous semble que la figure est tellement familière à l'élève qu'il ne ressent pas le besoin de dire de plus.
Un élève français (9), qui a codé les segments de même longueur après avoir appliqué le théorème des milieux, semble recourir implicitement à l'un des *critères de congruence des triangles*[42] :

> "...Si on prend [IJ] = [KC] et [IK] = [JC] donc je peux affirmer que le triangle KCJ est égal au triangle IJK ([KJ] étant le segment commun entre les deux triangles)..."

Vu que cet outil n'est pas disponible chez l'élève français, il faut peut-être admettre que son explication s'appuie sur les propriétés du *parallélogramme* et les invariants de la *symétrie centrale*, bien que l'élève n'y fasse aucune allusion. Nous croyons donc que, dans ce cas, le codage de la figure – et ce qu'il *voit* sur le tracé – lui suggère un moyen pour parvenir à la réponse cherchée.
Un élève italien (4) exploite incorrectement la propriété des aires de deux triangles semblables en fournissant la valeur $n = 2$: après avoir affirmé que les triangles ABC et IJK sont semblables, il déduit la même valeur pour m et pour n. La même conception erronée apparaît dans la copie d'un élève français (14). Comme le verrons plus loin, leurs discours présentent des ressemblances.
Dans ces deux derniers cas, ce que l'on *voit* sur la figure n'a aucune influence sur leur discours. La difficulté à distinguer la notion de périmètre de celle d'aire les amène à fournir une réponse erronée, la perception n'aide pas non plus ces élèves à corriger leur résultat, même si l'on *voit* bien sur le tracé que le triangle ABC est un pavage de quatre petits triangles ! Évidemment, cela relève d'une conception erronée à propos de la liaison périmètre-aire (passage de la dimension 1 à la dimension 2).

Dans les cas où les élèves recourent au traitement géométrique de la figure pour parvenir au résultat cherché, outre l'apparition de conceptions erronées, ce qui demeure intéressant est que le pourcentage de réussite est supérieur aux cas précédents et que le nombre d'élèves italiens qui aboutissent reste toujours plus élevé. Vraisemblablement, cet aspect est en relation avec les outils dont l'élève italien dispose par rapport à l'élève français, ces outils étant non seulement plus nombreux mais se révélant aussi plus efficaces : en effet, si l'on analyse les cas de réussite, on constate que les outils mobilisés concernent surtout les propriétés de la *congruence* et de la *similitude*. Cependant, nous ne négligeons pas un autre aspect : comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, les discours de ces quelques

[42] cf. l'extrait de la copie de Thomas, § II.2, *Les preuves*

élèves montrent une familiarité certaine avec la configuration du triangle des milieux. Or, les résultats semblent montrer que les élèves français en connaissent plutôt les propriétés liées à la dimension 1 alors que les élèves italiens exploitent cette configuration aussi en relation avec les propriétés liées à la dimension 2. Évidemment, cela prouverait à nouveau que, dans l'institution française, le chapitre sur les aires demeure faiblement important.

Les discours des élèves

D'après nos prévisions, la nature du discours d'un élève diffère suivant les étapes de la procédure envisagée. En général, les élèves évoquent explicitement seulement les propriétés plus importantes : pour les élèves italiens, il s'agit des critères de congruence des triangles alors que, pour les élèves français, il s'agit du théorème des milieux ou de Thalès.

C'est ainsi que les preuves produites portent surtout la marque de l'*exemple générique euclidien*, notamment pour les élèves italiens qui mobilisent les outils en les contextualisant ou bien en y faisant simplement allusion. On pourrait parler de véritables *démonstrations* seulement si l'on considérait les productions de quelques élèves par "bouts". En général, l'*évidence* joue un rôle important sous les différentes formes.

Nous présentons ci-après quelques exemples significatifs.

> **(2)** "Les triangles AIK et ABC sont semblables : les angles KAI et CAB sont égaux, $\frac{AK}{AC}=\frac{AI}{AB}=\frac{1}{2}$. Même discours pour T_3 et T_4. Donc T_2, T_3, T_4 et T_5 sont congruents entre eux : P(IJK) = ½ AB + ½ BC + ½ AC = ½ P(ABC), IJK est l'image de ABC dans l'homothétie de rapport k = ½, H_1I = ½ CH, (½ AB × ½ CH) × ½ = ½ (½ × AB × CH), n = 4"[43].

Dans ce discours, dont le style est très laconique, nous distinguons trois types de preuve. La première partie porte la marque de l'*exemple générique euclidien* : l'élève recourt à l'un des *critères de similitude des triangles* d'une manière contextualisée. C'est dans l'assertion "*T_2, T_3, T_4 et T_5 sont congruents entre eux*" que nous reconnaissons l'*évidence comme obstacle*, l'explicitation des raisons exigeant l'articulation, plus ou moins complexe, des outils qui permettraient de prouver cette congruence. Par contre, lorsque l'élève affirme que *IJK est l'image de ABC dans l'homothétie*[44] *de rapport k = ½,* nous considérons cela comme une *évidence des raisons*, une conséquence logique qui découle "transitivement" du fait que des triangles congruents à IJK sont semblables à ABC.

Voici un autre exemple :

> **(5)** "A partir des milieux du triangle ABC, quatre triangles se forment : AIK, BIJ, JCK, JKI congruents entre

---

[43] Nous avons déjà cité cet extrait. Rappelons que L'élève nomme respectivement T_3, T_4 et T_5 les triangles AKI, BIJ et CKJ ; il nomme T_2 le triangle IJK. CH et H_1I sont respectivement les hauteurs des deux triangles relatives aux côtés AB et JK.

[44] Nous supposons qu'ici l'élève utilise le terme *homothétie* comme synonyme de *similitude*, compte tenu qu'il n'explicite pas le centre éventuel de l'homothétie.

eux et semblables au triangle de départ. Les égalités entre les deux triangles sont donc : P(ABC) = 2 P(IJK), A(ABC) = 4 A(IJK)".

La configuration en question semble être familière à l'élève, ce qui l'amène à produire une preuve dont la source est l'*évidence des raisons* : l'observation contribue à la validation de son assertion où il utilise des termes – *semblable, congruents* – qui connotent des outils géométriques bien précis. Cela fait supposer qu'il dispose des connaissances nécessaires pour développer son discours alors qu'il ne les explicite pas.

Dans leurs discours, quelques élèves recourent à des locutions du genre *ABC est deux fois plus grand que IJK* :

(4) "P(ABC) = 2 P(IJK), A(ABC) = 2 A(IJK) : en traçant les milieux de chaque côté, j'obtiens un triangle semblable au triangle de départ. Naturellement, les côtés des deux triangles sont proportionnels et leur rapport est 1 : 2, à savoir que le triangle ABC est 2 fois plus grand que le triangle IJK".

(14) "On sait que I est le milieu de [AB] et que K est le milieu de [AC]ainsi que J milieu de [BC]. Donc par conséquent la mesure du périmètre est deux fois plus petite que celle du périmètre de ABC donc par conséquent P (ABC) = 2 P (IJK). Donc on peut déduire assez logiquement que A (ABC) = 2 A (IJK)".

L'élève italien (4) parle de *triangle semblable,* il caractérise le rapport de proportionnalité mais il déduit la valeur correcte de *m* et celle incorrecte de *n*. L'élève français (14) semble mobiliser implicitement le *théorème des milieux* et la notion d'*agrandissement/réduction* d'où il déduit correctement la relation des périmètres mais d'où il en tire une valeur incorrecte pour *n*.

A propos de la question sur les périmètres, plusieurs interprétations sont possibles. Aucun outil précis n'est explicitement mobilisé : d'une part, nous supposons que les deux élèves font allusion à des outils liés à la proportionnalité, cela pour établir le rapport des longueurs des côtés des deux triangles ; d'autre part, la manière de s'exprimer pourrait bien cacher une conception erronée :

"Puisque les sommets de IJK sont les milieux des côtés de ABC, alors les longueurs de ses côtés sont la moitié de celle des côtés de ABC".

En revanche, lorsque l'on passe à la partie sur les aires, nous reconnaissons sans doute que la source de la preuve relève du *calcul sur les énoncés*, les propriétés mobilisées étant respectivement les suivantes :

"*Dans deux figures semblables, dont le rapport de similitude est égal à k, les rapports des périmètres et des aires est aussi égal à k*" et "*Dans l'agrandissement ou la réduction d'une figure géométrique, si les longueurs sont multipliée par k, alors le périmètre et l'aire sont aussi multipliés par k*".

Un dernier exemple de preuve – dont nous avons déjà eu l'occasion de parler – mérite notre attention. Il s'agit du cas de Thomas[45], l'élève qui semble recourir aux *critères de congruence des triangles*. Nous

[45] cf. § II.2, *Les preuves*

sommes persuadée que les sources de sa preuve relèvent de l'*évidence des raisons* : l'observation et l'ostention[46] viennent à son aide ; ses assertions sont argumentées mais, dans son analyse, il ne se donne pas de moyen pour expliciter les outils dont il dispose, l'évidence suffisant à soutenir la validité de son discours.

III.3.2 *L'analyse du Problème 2A*

Il s'agit d'un problème de construction dont la figure est à faire ou à compléter. Les tâches sont du **genre 5, genre 6** et **genre 7** : dans l'énoncé, on présente trois propositions différentes pour commencer le programme de construction ; puis l'on demande d'exécuter ou compléter les trois constructions, de décrire le programme fourni et enfin d'en choisir une pour la justifier.

Au-delà des difficultés objectives relatives à ce problème, les résultats recueillis montrent que les élèves rencontrent des obstacles à distinguer le programme de construction de sa justification. Outre cela, nous constatons qu'en général les élèves italiens semblent ne pas aborder aisément ce type de problèmes.

Ce problème étant le deuxième proposé dans la fiche A, nous avons récupéré QUATORZE copies d'élèves, SEPT italiens et SEPT français. Dans le Tableau 5.5, nous avons résumé les résultats relatifs aux trois constructions afin d'avoir une idée d'ensemble des productions des élèves. Ici nous distinguons le *tracé*, le *programme de construction* et le *discours* en utilisant le codage suivant :

Le tracé	Est-ce que l'élève aborde la construction ?	**N** Non **TEN** L'élève tente d'aborder la construction **O** Oui
Le programme	Est-ce que l'élève rédige le programme de construction ?	**N** Non **TEN** L'élève tente de rédiger le programme **O** Oui
Le discours	Est-ce que l'élève produit un discours justifiant son programme de construction ?	**N** Non **EL** Quelques éléments de justification sont inclus dans le programme **O** Oui

Ce sont surtout les élèves français qui s'investissent dans la résolution de ce problème. Contrairement à ce qui est demandé dans la consigne, très peu d'élèves rédigent le programme des trois constructions

[46] Rappelons que l'élève code avec des marques les segments de même longueur (cf. Tableau 5.2)

proposées et encore moins d'élèves produisent un véritable discours visant la justification.

La construction B apparaît comme la plus abordable par rapport aux autres, nous constatons pourtant qu'aucun élève ne produit un programme correct et/ou complet. Dans ce cas, la confusion entre le programme et sa preuve est assez évidente : les élèves ont tendance à effectuer des constructions qui se justifient en elles-mêmes, cela conduisant souvent à produire des programmes qui ne sont pas logiquement corrects.

Tableau 5.5 - Récapitulatif du problème 2A[47]

	Construction A			**Construction B**			**Construction C**		
	Le tracé	***Le programme***	***Le discours***	***Le tracé***	***Le programme***	***Le discours***	***Tracé***	***Le programme***	***Le discours***
1				O	O (incomplet part correct)	N			
2	O	O (correct)	EL	O	O (incomplet correct)	EL	O	O (correct)	O
3				O	O (incomplet part correct)	EL	TEN	N	N
4				O	O (incomplet correct)	EL			
5				O	O (incomplet correct)	O			
6	N	TEN	N	O	O (incomplet correct)	O			
7				TEN	N	N			
8	O	O (incorrect)	N	O	O (incomplet correct)	N	O	O (correct)	N
9	O	O (correct)	N	O	O (incomplet part correct)	EL	O	O (correct)	N
10				O	O (incomplet part correct)	EL	O	O (correct)	O
11		TEN	N	O	O (incomplet correct)	EL	O	O (correct)	N
12	O	O (incorrect)	N	O	O (incomplet correct)	O	TEN	N	N
13				O	O (incomplet correct)	N	TEN	N	N
14				O	O (incomplet correct)	EL	O	O (correct)	

CONSTRUCTION A. Ici, il s'agit de placer convenablement le premier sommet du triangle. Le début de cette construction s'inspire de la **Solution A_7 (4ème groupe)** de l'analyse *a priori* où l'on exploite les propriétés de la composition de symétries centrales. Nous avons supposé que l'élève réussirait plutôt en considérant que le point de départ est le quatrième sommet d'un parallélogramme déterminé par les trois points donnés ; éventuellement, ils pourraient réussir en *devinant* que le milieu du segment joignant le premier point choisi au hasard et le point d'arrivée permet aussi d'aboutir.

Deux élèves (6 et 11) tentent d'aborder cette construction mais ils ne fournissent pas assez

[47] Si l'élève n'aborde aucune des trois tâches, les cases sont vides pour faciliter la lecture du tableau.

d'informations, verbales et graphiques, exploitables pour l'analyse. Par exemple, l'un de ces deux élèves (6) affirme simplement que *le point de départ appartient à la droite passant par L et parallèle à [TG]*, cela peut-être suggéré par les informations données dans la construction B.

Seulement quatre autres élèves, un italien et trois français, abordent la construction A en rédigeant un programme de construction. Deux élèves (8 et 12) fournissent un programme incorrect. L'un (8) réitère la procédure suggérée en affirmant qu'*il suffit choisir un autre point quelconque* ! Dans le tracé réalisé, on constate qu'il commence en dessinant le triangle AIO. De même, l'autre élève (12) ne respecte pas la consigne dans le bon ordre, son programme ne fonctionnerait pas si l'on plaçait différemment les points choisis au départ :

> "Je prends pour point de départ T milieu du segment [AI]. Je trace la parallèle à (AI) sur laquelle je place deux points L et G (de façon à ce que leur écart ne dépasse pas [AI]). Je prends au compas la distance [LA] et je trace un arc de cercle de l'autre côté de (LG), puis je trace un arc de cercle d 'écart [GI]. A l'intersection des deux arcs de cercle je trouve le point O".

Les deux autres élèves (2 et 9) comprennent que le point de départ est bien le quatrième sommet de l'un des parallélogrammes construits sur TGL : à partir de ce point, ils réitèrent la construction jusqu'à ce qu'ils se retrouvent au point de départ ; ils ne se questionnent pas sur la coïncidence de points de départ et d'arrivée, cet aspect semble plutôt les assurer de la validité de leur construction. L'un (9) parle explicitement de parallélogramme alors que l'autre (2) identifie ce point avec le point d'intersection de la droite parallèle à [LG] passant par T avec la droite parallèle à [TG] passant par L : leur programme de construction est correct mais ils ne le justifient pas. L'élève (2) conclut sa rédaction en affirmant que le triangle obtenu est l'image du triangle de départ dans une *homothétie* de rapport k = 2. Vu que cet élève ne cite même pas le centre de l'homothétie, nous supposons qu'il utilise ce terme comme synonyme de *similitude*, une notion à mobiliser plus spontanément dans le cas concerné[48]. Les traces laissées sur sa construction ainsi que cette dernière affirmation font bien croire que l'élève recourt aux propriétés de la figure mises en évidence pendant la résolution du problème 1A où il exploite la similitude ; renforcent cette hypothèse le peu d'informations fournies dans les deux autres constructions proposées.

Les résultats confirment nos suppositions : le degré de difficulté de cette construction demeure élevé. Néanmoins, nous ne croyons pas que les deux élèves qui rédigent le programme de construction n'aient pas choisi de le justifier à cause de sa difficulté car nous remarquons que, dans l'ensemble, les élèves rédigent le programme de construction sans le prouver : cette attitude semblerait attester que le genre de tâche 7 apparaît comme superflu dans la démarche de l'élève.

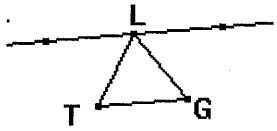
---

[48] Nous avons avancé la même hypothèse lors de l'analyse de la copie du même élève, concernant le problème 1A. D'ailleurs, il rappelle cette propriété aussi lorsqu'il rédige le programme relatif à la construction B.

CONSTRUCTION B. Suivant notre analyse a priori, nous avons conçu ce début de construction en nous inspirant des solutions du **3ème groupe** où l'on ne considère qu'une droite parallèle à l'un des côtés du triangle TGL et passant par L ; sur cette droite, on place deux points, soit A et O, tels que leur distance à L soit égale à TG.

Or, dans le tracé fourni, les points A et O sont déjà placés, il suffit de les nommer conformément aux informations de l'énoncé. C'est à la charge de l'élève de préciser que ces deux points sont tels que AL = LO = TG. A partir de là, pour achever la construction, deux procédures sont envisageables.

1) On trace le symétrique de A (O) par rapport à T (G), soit I ; il suffit alors de tracer le segment [OI] ([AI]) et de prouver que G (T) est le milieu de [OI] ([AI]). D'une manière équivalente, on trace la droite (AT) ((OG)) et sur celle-ci on place le point I tel que AT = TI (OG = GI), etc.



2) On trace les droites (AT) et (OG), elles se coupent en un point, soit I ; il suffit de prouver que T et G sont les milieux respectifs de [AI] et [OI].

En général, il y a d'autres procédures possibles qui n'auraient pas une même justification : on utilise certaines propriétés pour la construction et on prouve que les autres propriétés sont vérifiées. Dans tous les cas, nous avons constaté que les élèves en considérent un certain nombre comme évidentes.

Tous les élèves abordent cette construction, un seul élève renonce à la compléter. Un seul élève (1) se charge de préciser que la distance de A à O est bien définie mais il se trompe car il affirme que AL = TG et OL = TL. Il termine en suivant la première procédure, sans pourtant fournir de preuve. L'élève est peut-être amené à percevoir le triangle TGL comme isocèle de sommet T : pourtant, même si c'était le cas, sa procédure ne serait pas cohérente.

En outre, seulement deux élèves (français) ont recours à la deuxième procédure :

> **(8 et 13)** "*Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points* A et O *tels que* L soit le centre de symétrie de ces deux points (milieu de [AO]). Je trace ensuite les droites (AT) et (OG) : elles se coupent en I".

Ici, les élèves détournent habilement (et consciemment ?) la question d'incidence de points. C'est le seul cas où le programme ne présente pas de traces de justification : ils ne se préoccupent pas de savoir si la figure obtenue répond aux conditions imposées. L'absence d'une preuve n'est pas surprenante : pour justifier ce programme, il faut recourir au théorème de Thalès dans un triangle qui, si l'on ne

considère pas la condition AL = LO = TG, ne permettra pas de tirer les conclusions nécessaires.

On peut rattacher les constructions à deux grands groupes.

Dans un premier groupe, on trouve les productions de quatre élèves italiens (2, 4, 5, 6) et de deux élèves français (11, 14) qui fournissent des arguments tentant de justifier la construction[49] :

> **(2, 6, 11)** "*Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points* A et O *tels que* AL = LO (L milieu de [AO]). Je trace ensuite le symétrique de A par rapport à T et puis le symétrique de O par rapport à G".

> **(5)** "*Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points tels que* AL = LO. Je trace une droite passant par A et T et sur celle-ci je trace un le segment TI adjacent à AT tel que AT = TI. Je trace la droite qui part de O et passe par G et I de manière à avoir OG = GI".

> **(4, 14)** "*Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points tels que* AL = LO (L soit le milieu du segment formé par les deux points). Je trace ensuite le symétrique de A par rapport à T et puis le symétrique de O par rapport à G. I est l'intersection de ces deux points".

Ici, la coïncidence des points est vérifiée dans l'action, les instruments de dessin à la main. Si l'on examine les tracés, on s'aperçoit qu'après avoir placé le symétrique de A par rapport à T, lorsque les élèves cherchent le symétrique de O par rapport à G, ils constatent qu'ils obtiennent un triangle car ce dernier point coïncide avec le précédent. Vraisemblablement, dans la démarche de l'élève, cette dernière étape apparaît comme décisive pour la validation de leur programme : la construction fonctionne parce que les points sont donnés mais les élèves ne se posent pas de questions sur ce qui fait que cela fonctionne. En quelque sorte, on peut considérer que ces productions contiennent des justifications partielles avec pour le reste appui sur l'*évidence des faits* au niveau des propriétés d'incidence et en particulier des points confondus.

L'assertion "*I est l'intersection de ces deux points*" acquiert un sens dans la démarche des élèves 4 et 14 car, en effet, ils tracent successivement les demi-droites (AT) et (OG) : I est l'intersection de ces demi-droites mais nous supposons que ces élèves veulent plutôt exprimer le fait que les points obtenus par la symétrie coïncident et que, par conséquent, ils ont trouvé le troisième sommet de AIO.

Précisons enfin que seulement deux de ces élèves (5 et 6, italiens) prennent en compte la tâche concernant la justification du programme, cela peut-être suggéré par le raisonnement exploité lors de la résolution du problème précédent :

> **(5)** "Le segment [TG] est parallèle au côté [AO] du triangle AIO. Donc AIO est divisé en un triangle TGI, semblable au triangle de départ et le rapport TGI = ½ AOI. Donc GI = ½ OI, TI = ½ AI, TG = ½ AO. Donc T, G, L sont les milieux des côtés [AI], [OI], [AO]".

> **(6)** "...par le théorème de Thalès, AT = TI et OG = GI".

---

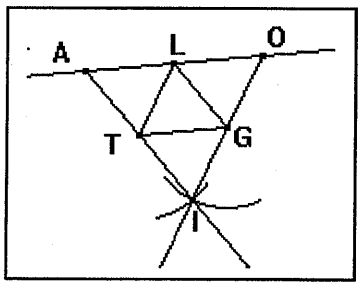
[49] Pour indiquer la position de A et O par rapport à L, les élèves utilisent trois expressions, sémantiquement équivalentes. Au passage, remarquons que ces sont surtout les élèves italiens qui s'expriment ainsi : "*...je place les points A et O tels que AL = LO*".

L'élève 5 ne s'exprime pas d'une manière rigoureuse mais on voit bien qu'il fait allusion à la notion de *similitude* et à ses propriétés. Néanmoins, cette preuve ne correspond pas à la justification de son programme car, dans ce cas-là, il faudrait prouver l'alignement de O, G et I et que OG = GI, ce qu'il vérifie probablement lors de la construction effective.

La preuve de l'élève 6 était valable seulement si l'élève avait fait l'hypothèse que, par construction, non seulement (AO) et (TG) sont parallèles mais aussi que AL = LO = TG. En outre, elle est incomplète car il devrait aussi prouver pourquoi les points obtenus par la symétrie coïncident mais cela, loin d'être évident à le justifier, est aussi vérifié par l'élève lors de la construction. Ici, nous retrouvons donc une justification partielle explicite avec appui sur l'*évidence des faits*, ce qui d'ailleurs nous avions supposé lors de l'analyse à priori à propos des questions d'alignement de points, d'incidence etc.

Un programme qui se place dans ce même groupe, tout en gardant son originalité, est le suivant :

(12) "*Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points* A et O (A du côté de T et O du côté de G) *tels que* AL = LO. Je pointe le compas sur T et je prends la distance [AT] que je reporte de l'autre côté de [TG] en traçant un arc de cercle. Je pointe le compas ensuite sur G et je prends la distance [GO] que je reporte de l'autre côté de [TG] en traçant un arc de cercle. L'intersection des 2 arc de cercle donne le point I".



Cet élève semble reproduire une construction des symétriques ou bien une "mauvaise" construction du parallélogramme. D'après sa procédure, il lui suffirait de prouver que le point trouvé est bien le troisième sommet de AIO mais pour il aurait besoin la congruence de triangles pour justifier sa construction. Néanmoins, l'élève fournit une preuve pragmatique s'appuyant sur l'*évidence des faits* : *si l'on mesure à quelle distance se trouvent T, G et L sur les côtés [AI], [IO], [AO] on s'aperçoit que ces points sont les milieux des côtés respectifs imposés*. Probablement, lorsque l'élève joint O, I et A, I, il constate que sa règle passe aussi par G et T, ce qui le rassure sur la validité de sa construction. En outre, remarquons que, même lorsqu'il décrit son programme, l'élève montre encore un attachement évident à l'action et au matériel dont il dispose (*je pointe le compas..., je prends la distance... que je reporte... en traçant*), ce qui contraste fortement avec l'originalité de sa procédure et son caractère quelque part "intellectuel".

Dans un deuxième groupe de productions, un élève italien et deux français (3, 9, 10) ne distinguent pas les contraintes au moment du tracé. Plus que dans les cas précédents, l'on dirait que l'instrument de dessin devient un moyen décisif pour convaincre l'élève de l'exactitude de sa construction, cela peut se repérer aux expressions utilisées dans leur programme, qui d'ailleurs n'est pas vraiment justifié.

(3) "*Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points tels que* leur distance de L soit égale, AL = LO. Je trace la parallèle à (LG) passant par T et sur celle-ci je trace

deux points tels que leur distance de T soit égale, AT = TI. Je trace la parallèle à (TL) passant par G et sur celle-ci je trace les points qui sont à la même distance de G, IG = GO".

(9) "*Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points tels que* leur distance de L soit égale. Je trace la parallèle à (LG) passant par A et T : je place un point I tel que AI = IT. De même, je trace une droite parallèle à (TL) passant par G et I : je place un point O tel que IG = GO".

(10) "*Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points tels que* leur distance de L soit égale, AL = LO. Je trace la parallèle à (TL) passant par O. Je place le point I de façon à ce que OG = GI ainsi G est bien le milieu de [OI]. Je trace la droite parallèle à (LG) passant par A, cette droite passe par T et I, le point I est donc bien placé puisque sur la figure AT = IT donc T est bien le milieu de [AI]".

Évidemment, ces élèves réitèrent les actions suggérées au début de programme donné, sans se soucier de la cohérence de leurs assertions : en effet, ils regroupent des aspects qui sont logiquement reliés mais l'un dépendant de l'autre : compte tenu de la nature de la figure à construire et des éléments déjà fournis dans le tracé, si l'on trace la parallèle à (LG) passant par T (A), elle passera aussi par A (T) et, réciproquement, si l'on trace la droite (AT), elle sera parallèle à (LG).
De même dans ces programmes, le souci majeur est de décrire une construction qui se justifie en elle-même. Et, puisqu'ils parviennent à construire un triangle répondant aux conditions imposées, le choix des actions est confirmé par la réussite de la construction.

Dans cette construction, nous constatons une difficulté à enchaîner logiquement les diverses étapes du programme, cela dû au fait que les élèves ne distinguent pas les tâches "produire un programme de construction" et "justifier ce programme". Ils ne se montrent pas capables de discerner les actions essentielles à décrire pour accomplir la première tâche de celles qui suivent et qui sont à justifier pour accomplir la deuxième tâche.

CONSTRUCTION C. Bien que cette construction rejoigne les solutions du **4ème groupe** de l'analyse à priori, nous avons supposé que l'élève réitère la procédure amorcée sans se soucier de justifier l'alignement des points.

En effet, parmi les six élèves (un italien et cinq français) qui effectuent cette construction, quatre d'entre eux réitèrent la procédure amorcée afin de tracer les deux autres sommets du triangle AIO ; aucun de ces élèves ne se pose la question de l'alignement des points. Deux de ces élèves produisent une sorte de justification.

(2) « Je trace les trois médianes [AG], [OL], [IT]. Puisqu'elles se croisent en un point, les points T, G, L sont bien les milieux respectifs de [AI], [AO] et [OI] ».

Évidemment, dans ce discours, il y a une *petitio principii* : l'élève recourt à la notion de médiane et, par conséquent à celle de milieu pour prouver que les points donnés sont bien les milieux du triangle obtenu. De tout autre genre la preuve suivante où l'élève fait recours à l'*évidence des faits* :

(10) « ... je trace le segment [AI] passant par T et j'obtiens [AT] = [TI] donc T est bien le milieu de [AI]... »

Suivant l'une des constructions envisagées lors de l'analyse *a priori*, après avoir tracé le point O, deux élèves (11 et 14) tracent le symétrique de O par rapport à L et ils le nomment A ; puis ils tracent le symétrique de A par rapport à T et ils le nomment I. Même si la preuve est tout à fait à leur portée (il s'agirait d'utiliser convenablement la *réciproque du théorème des milieux*), les deux élèves ne justifient pas leur programme de construction. Ici, contrairement aux résultats précédents, aucune trace de preuve n'est présente dans le texte fourni. Cela montre que les élèves ne ressentent pas le besoin de valider ce qu'ils ont fait. Ils ont peut-être vérifié que G est le milieu de [OI] à l'aide de la règle graduée ou du compas mais aucune trace ne nous confirme cette supposition.

Ici, le peu d'informations recueillies ne nous permet pas d'en tirer de conclusions précises. Comme dans les constructions précédentes, nous pouvons seulement constater que les élèves ne ressentent pas le besoin de distinguer le programme de sa validation.

III.3.3 *Conclusions sur les problèmes de la fiche A*

En général, les élèves (sauf un) ne semblent pas profiter des liens existant entre les deux problèmes de la fiche A.

Bien que la configuration soit la même, les deux énoncés sont constitués de types de tâches tout à fait différents. Nous avons remarqué que les élèves ne semblent pas ressentir le besoin de justifier un programme de construction : nous croyons que cela influe sur la possibilité d'exploiter convenablement les propriétés de la configuration en jeu dans cette fiche.

D'autre part, nous avons aussi constaté que les élèves ne considèrent pas le parallélogramme comme sous-figure contenue dans la configuration ici exploitée alors que ses propriétés permettraient de mettre en place des procédures efficaces pour la réussite. D'après nous, cet autre élément pourrait aussi expliquer les raisons qui font que les élèves ne relient pas les deux problèmes.

Cependant, dans l'ensemble, ces problèmes nous ont paru apporter des informations intéressantes. Nous verrons dans le chapitre suivant sous quelle forme nous les reprenons dans la partie expérimentale.

III.4 Les problèmes de la fiche B

Dans cette fiche, la relation entre les deux problèmes est moins évidente. Toutefois, la figure exploitée est encore la même. La solution du premier problème peut être une aide à compléter et justifier l'une des trois constructions proposées dans le deuxième problème.

III.4.1 *L'analyse du Problème 1B*

Il s'agit d'un problème dont la figure n'est pas donnée : il faut la reproduire dans un cas général en traduisant les données verbales. Une fois la figure entièrement complétée, l'élève devrait reconnaître le triangle des milieux comme sous-figure de la figure décrite dans l'énoncé. Les trois premières tâches proposées sont du **genre 4**, on demande de prouver certaines propriétés de la figure, alors que la dernière est du **genre 3**, il s'agit d'une comparaison d'aires.

Les tâches proposées s'avèrent problématiques, surtout pour les élèves italiens. Ici, la difficulté à coordonner convenablement les étapes nécessaires pour aboutir est très évidente. Les élèves ne semblent pas réussir à mettre en place de véritables procédures mathématiques, ce qui les amène à produire des discours s'appuyant surtout sur ce qu'ils perçoivent sur leur tracé.

Nous avons récupéré DIX-SEPT copies d'élèves, HUIT italiens et NEUF français. Pour analyser leurs productions, nous distinguons trois volets, la *figure*, les *procédures*, les *discours*.

Le tracé et l'usage de la figure

Ici, nous considérons les mêmes items définis lors de l'analyse du problème 1A :

NAT	Quelle est la nature du triangle tracé ? L'élève considère-t-il un cas *quelconque* ou *particulier* (trapèze isocèle ou rectangle) ?	**TQ** Trapèze quelconque **TP** Trapèze particulier
COD	La figure a-t-elle été codée par rapport aux donnés ?	**L** Lettres **M** Marques **LM** Lettres et marques
AUTEL	L'élève considère-t-il d'autres éléments de la figure qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé mais qui sont utiles pour rédiger la solution ?	**N** Non **O** Oui

Tous les élèves reproduisent et codent la figure décrite suivant les informations de l'énoncé mais, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, cinq élèves ne vont pas plus loin que cela.

Les élèves français montrent une légère capacité à la *décontextualisation*, seulement trois élèves tracent un trapèze isocèle : pour deux de ces élèves (24 et 28), cela n'influe que lorsqu'ils abordent l'étape sur les aires alors que l'autre (31) exploite cette condition supplémentaire aussi au cours des étapes précédentes.

Trois élèves italiens (17, 18 et 19) tracent un trapèze rectangle mais seulement un de ces élèves abordera le problème : il argumente la première étape, sa figure particulière influe sur son raisonnement. Deux élèves italiens (21 et 22) tracent un trapèze isocèle et, bien que cela faciliterait les tâches à accomplir, ils produisent des discours inexploitables au niveau de l'analyse.

Comme le montre le Tableau 5.6, on constate de nouveau que les élèves italiens utilisent plus de marques que les élèves français.

Tableau 5.6 – Le tracé dans le problème 1B

Élèves italiens				*Élèves français*			
	NAT	**COD**	**AUTEL**		**NAT**	**COD**	**AUTEL**
15	TQ	L	O	**23***	TQ	L	N
16*	TQ	L	N	**24**	TP	LM	O
17	TP	LM	O	**25***	TQ	L	N
18*	TP	L	N	**26**	TQ	L	N
19*	TP	L	N	**27**	TQ	L	N
20	TQ	LM	N	**28**	TP	L	O
21	TP	LM	O	**29**	TQ	LM	O
22	TP	LM	O	**30**	TQ	L	N
				31	TP	L	O

Comme dans l'analyse du problème 1A, nous avons examiné comment l'élève peut agir sur la figure décrite dans l'énoncé. Nous avons répertorié tous les éléments que les élèves ont envisagés afin d'évaluer l'importance qu'ils attribuent à la figure en tant que support perceptif du problème à résoudre. Dans le Tableau 5.7, nous résumons les possibilités en indiquant aussi les élèves qui y ont eu recours.

Au-delà du codage de la figure d'après les informations de l'énoncé, ce sont surtout les élèves italiens qui considèrent des éléments supplémentaires. Compte tenu de la dernière étape du problème (comparaison des aires de AOD et BCM), ce sont surtout les élèves qui l'abordent qui complètent la figure en traçant les côtés de BCM.

Trois élèves italiens (17, 21 et 22) reconnaissent *deux droites parallèles coupées par une sécante* et ils utilisent la propriété des angles liée à cette configuration : ils codent les angles égaux avec des marques. L'un (17) l'utilise correctement pour comparer les aires de AOD et BCM ; les deux autres (21 et 22) s'en servent lorsqu'ils abordent les trois premières étapes du problème mais leur procédure est fausse car ils ajoutent arbitrairement des hypothèses. Un élève français (24), qui trace un trapèze

isocèle, code l'angle droit que [OM] forme avec [AD] : il s'en sert pour la comparaison des aires pour établir que, dans AOD, [OM] est la hauteur relative à [AD].

Tableau 5.7 – Le codage du tracé dans le problème 1B

		Élèves italiens	*Élèves français*
D'après les données	– Nommer les divers points suivant les informations de l'énoncé	Tous les élèves	Tous les élèves
	– Tracer les segments [CM] et [BM], côté du triangle BCM	15, 16, 18, 20, 21, 22	23, 24, 27, 28, 29, 30, 31
A la suite de quelques déductions et/ou pour mettre en place une procédure envisagée	– Marquer des angles	17, 21, 22	24
	– Marquer les segments de même longueur	21, 22	24, 29
	– Nommer les points d'intersection des médianes de AOD et des côtés de BCM	15, 21, 22	24, 28
	– Considérer les hauteurs des quelques triangles	15, 21, 22	24, 28, 29

En examinant les productions des élèves qui marquent les segments congruents, nous constatons que toujours les mêmes élèves italiens (21 et 22) abusent de ce type de codage : non seulement ils ne prouvent pas correctement la congruence de quelques segments mais, à un moment donné, ils la considèrent encore comme une hypothèse.

A propos des points d'intersection des médianes de AOD et des côtés de BCM, trois élèves (15, 24 et 28) nomment le point d'intersection de [CB] et [OM] mais l'usage qu'ils en font est différent : l'un (15) considère ce point pour prouver la deuxième proposition du problème et puis pour exprimer quelques considérations concernant la question des aires : pour les deux autres (24 et 29), il représentera le pied de la hauteur issue de M, dans le triangle BCM. Les deux autres élèves (21 et 22) marquent les trois points d'intersection mais ils s'en servent d'une manière inefficace et souvent erronée.

Les hauteurs des triangles sont utiles pour la comparaison des aires. Deux élèves (15 et 29) ne les tracent pas mais ils s'en servent correctement dans leurs discours. Deux autres élèves (24 et 28), ayant tracé un trapèze isocèle, considèrent les médianes [OM] et [MF][50] en tant que hauteurs pour les utiliser dans les formules de calcul des aires : comme nous le verrons, l'un établit le rapport des longueurs alors que l'autre ne le considère pas et, par conséquent, il ne réussira à parvenir au résultat cherché. Les élèves 21 et 22 s'en servent encore d'une manière inefficace et incorrecte.

[50] F est le point d'intersection de [BC] et [OM] ou bien le milieu de [BC].

Les procédures des élèves

Dans la première partie de ce problème, l'objectif principal est de prouver que les triangles AOD et BCM ont le même centre de gravité. La figure décrite dans l'énoncé devrait évoquer la *configuration* de *Thalès* ou bien la configuration de base pour les *projections*, les *homothéties* et les *similitudes* et, par conséquent, permettre de mobiliser les outils correspondants[51]. Pour la question sur les aires, les procédures possibles sont celles envisagées pour le problème 1A ; néanmoins, ici des éléments supplémentaires significatifs sont mis en évidence dans les étapes précédentes, ce qui devrait conduire l'élève à privilégier les procédures liées à l'homothétie et à la similitude (agrandissement/réduction).

Nous analysons les procédures en distinguant quatre étapes principales :

- ÉTAPE A. *B est le milieu de [OA]* .
- ÉTAPE B. *(OH) coupe [AD] en son milieu M.*
- ÉTAPE C. *H est le centre de gravité de BCM.*
- ÉTAPE D. Comparaison des aires des triangles AOD et BCM.

Évidemment, les étapes intermédiaires nécessaires pour aboutir sont prises en compte cas par cas.

Tableau 5.8 – Récapitulatif du problème 1B

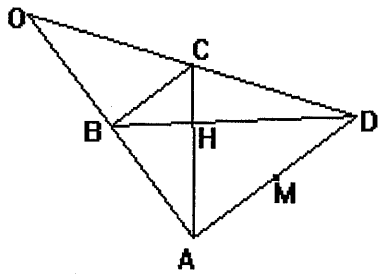
	Élèves italiens					*Élèves français*			
	Étape a	**Étape b**	**Étape c**	**Étape d**		**Étape a**	**Étape b**	**Étape c**	**Étape d**
15	Complet correct	Incomplet correct		Incomplet	**23**				
16					**24**	Complet correct	Incomplet ?	Incomplet	m = 4
17	Incomplet correct				**25**				
18					**26**	Incorrect	Incomplet correct	Incomplet	m = 2
19					**27**	Incorrect	Incomplet correct	Incomplet	m = 4
20				Incomplet	**28**	Complet correct	Incomplet correct	Incomplet	m= 2
21	inexploitable	inexploitable	inexploitable	m = 2	**29**	Incorrect	Incomplet correct	Incomplet	m = 4
22	inexploitable	inexploitable	inexploitable	m = 4	**30**	Incorrect	Incomplet correct	Incomplet	Incomplet
					31	Complet correct	Incomplet correct	Incomplet	m = 3

Le Tableau 5.8 montre clairement que très peu d'élèves italiens s'investissent dans la résolution de ce problème. En outre, il faut signaler que, dans les productions des élèves italiens 21 et 22, les procédures relatives aux trois premières étapes sont inexploitables : ils ajoutent arbitrairement des hypothèses, leurs discours présentent diverses incohérences, la plupart des outils auxquels ils font allusion sont mobilisés d'une manière inefficace et souvent incorrecte. Nous prendrons en compte ces copies seulement dans l'analyse de l'étape relative à la comparaison des aires.

[51] Cf. chapitre 3, § IV.2, *Le triangle des milieux : un problème de centre de gravité. Choix de l'énoncé pour la partie pré-expérimentale*

ÉTAPE A. Parmi les dix élèves qui abordent cette étape (en excluant les élèves 21 et 22), seulement quatre (15, 24, 28 et 31) produisent une procédure correcte. Un élève (15, italien) reconnaît la configuration de base de l'homothétie : il définit l'*homothétie* de centre O et rapport k = 2 d'où il déduit les rapports des longueurs des segments OB et OA (*invariants de l'homothétie, une homothétie conserve les rapports des longueurs*) et, par la définition de milieu, que OB = OA ; il mobilise les outils correctement mais toujours d'une manière contextualisée. Par contre, les trois autres élèves (24, 28 et 29) reconnaissent la configuration de Thalès : ils mentionnent le *théorème de Thalès* (*énoncé complété*) en le contextualisant selon le codage pour ensuite recourir implicitement à la définition de milieu.

La procédure d'un élève italien (17) pourrait être considérée incomplète mais correcte : ce n'est pas une procédure générale qu'il met en œuvre, il raisonne sur un trapèze rectangle en A et B (cf. tracé ci-après) en exploitant des propriétés sur ce cas particulier. Si l'élève avait prouvé d'abord que C est le milieu de [OD], le reste de la procédure serait acceptable au détail près : le point C est alors le centre du cercle de diamètre [OD] et CD = CA = CO d'où AOC est un triangle isocèle, [BC] est la hauteur du triangle AOC et que donc elle le partage en deux triangles congruents d'où OB = BA. Il est évident que tout ce qu'il ne prouve pas, il le perçoit sur son tracé car aucune allusion n'est faite à propos des étapes intermédiaires que nous avons reconstituées.



Les procédures des cinq autres élèves sont incorrectes et la nature des erreurs est assez variée.
D'après les discours de trois élèves (20, 29 et 30), il nous paraît qu'ils reconnaissent le triangle des milieux comme sous-figure et que cela influe sur les procédures adoptées. Les élèves 29 et 30 affirment recourir au *théorème (de la droite) des milieux* :

> **(29)** "Considérons le triangle ODA, nous avons [BC] // [AD] et 2BC = AD. Sachant que si B est le milieu de [OA] et C le milieu de [OD] alors [BC] = ½ [AD] d'après la propriété des milieux d'un triangle. Donc B est le milieu de [OA] dans le triangle ODA".

> **(30)** "D'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle, quand deux droites sont parallèles, ici (AD) et (BC), cela signifie que la droite (BC) coupe le triangle en son milieu. Donc B milieu de [OA]"

L'élève 29 confond les hypothèses avec la thèse, ce qui l'amène aussi à évoquer incorrectement l'outil qu'il veut mobiliser : il confond le théorème avec sa réciproque[52].

De même, l'élève 30 cite un théorème alors qu'il utilise (incorrectement !) sa réciproque. Ici, cet outil n'est pas efficace, d'après ce que l'élève affirme, il devrait éventuellement recourir au *théorème de Thalès* (*énoncé complété*) pour en déduire que $\frac{OB}{OA}=\frac{BC}{AD}$.

Les deux élèves semblent arranger un résultat du cours d'une manière qui s'adapte bien à ce qu'ils perçoivent sur leur tracé.

L'élève 20 utilise aussi d'une manière maladroite et erronée le *théorème des milieux* mais, dans son discours, le fait qu'il s'appuie sur ce qu'il voit sur le tracé pour en déduire des informations est beaucoup plus évident.

Deux autres élèves (26 et 27, français) produisent des discours révélant diverses confusions :

> **(26)** "Montrons que B est le milieu de [OA]. Pour cela, démontrons que la diagonale [DB] est la médiane de [AO] dans le triangle AOD. La droite (DB) passe par l'origine D du triangle AOD mais n'est pas perpendiculaire à la droite (AO) donc (DB) est une médiane elle coupe donc [OA] en son milieu"

> **(27)** "dans le triangle AOD, le segment [DB] est la ~~bissectrice~~ médiane de l'angle ADO. Et sachant qu'une bissectrice coupe le segment opposé (ici [AD]) en son milieu, on peut conclure que B est le milieu de [DA]"

L'élève 26 trace un triangle isocèle de sommet O, il ne semble pas envisager que, par un point donné, on peut tracer un nombre infini de droites : on dirait que, dans la démarche de cet élève, dans un triangle il n'y que les droites remarquables ! Cela peut bien être un effet de contrat : dans un triangle, à part les côtés, on considère des hauteurs, des médiatrices et des médianes ; comme la droite en question n'est pas perpendiculaire au côté opposé, ce n'est ni la hauteur, ni la médiatrice donc c'est la médiane.

L'élève 27 – qui par contre trace un triangle quelconque – confond les notions de médiane et de bissectrice, son assertion serait pourtant vraie si le triangle AOD était isocèle de sommet D.

Ces élèves reconnaissent des propriétés de la figure et ne respectent pas l'ordre de l'énoncé : ils devraient prouver que B est le milieu de [AO] pour ensuite en déduire que [DB] est la médiane de AOD issue de D. Au-delà de l'usage incorrect du vocabulaire et de la confusion de notions qu'ils manifestent, dans leurs procédures, on peut y voir une *petitio principii*.

ÉTAPE B. En excluant les élèves 21 et 22, les huit élèves – dont un seul italien – qui abordent cette étape (15, 24, 26, 27, 28, 29, 30 et 31) fournissent une procédure incomplète, le degré d'implicite étant différent.

---

[52] Rappelons que, dans l'institution française, l'"énoncé du *théorème des milieux* est le suivant : "*Le segment qui joint les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et a une longueur égale à la moitié de celle du troisième côté*" ; l'énoncé de sa *réciproque* est alors le suivant : "*Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un autre côté, elle passe par le milieu du troisième côté*".

L'élève 15, ayant défini l'*homothétie* de centre O et rapport K = 2, exploite les invariants de cette transformation géométrique : du fait que F (point d'intersection de [BC] et [OM]) est le milieu de [BC], il déduit que M est le milieu de [AD], pourtant il n'établit pas explicitement que F est le milieu de [BC]. Probablement, d'après quelques détails dans l'étape relative à la comparaison des aires, l'élève reconnaît que OCMB est un parallélogramme et que ses diagonales se coupent en leur milieu, soit F.

Les élèves 28, 29 et 30 n'explicitent pas le passage qui permet de déduire que C est le milieu de [OD] mais ils prouvent que [BD] et [AC] sont les médianes de AOD (*définition de médiane dans un triangle*) et, puisqu'elles passent par H, (OH) est aussi une médiane (*définition de centre de gravité d'un triangle*) et que donc elle coupe [AD] en son milieu, soit M (*définition de médiane*).

L'élève 31, ayant tracé un triangle isocèle de sommet O, affirme que *la hauteur issue de O est aussi médiane* et que donc elle coupe [AD] en son milieu, soit M. Bien que l'assertion soit exacte pour le cas particulier envisagé, il devrait prouver que [OH] est la hauteur de AOD relative à la base [AD], cela en remarquant que [OH] est l'axe de symétrie de ce triangle.

L'élève 27 affirme que *(OH) est une médiane de AOD qui coupe le côté opposé en son milieu, donc M est le milieu de [AD]*, pourtant il ne prouve pas que (OH) est une médiane.

L'élève 24 interprète mal l'étape c du problème : en effet, il prouve que C est le milieu de [OD] (*réciproque du théorème des milieux*) et que donc H est le centre de gravité de AOD (*définition de médiane* et de *centre de gravité*). Cela lui permettrait de conclure que M est le milieu de [AD] mais, vu le malentendu, il n'achève pas sa preuve.

L'élève 26 produit un discours incomplet : d'après lui, puisque [DB] passe par H, que [DB] est une médiane et que O est un sommet de AOD, alors [OH] est aussi une médiane et elle coupe [AD] en son milieu, soit M (*définition de médiane*). On pourrait supposer que cet élève a peut-être oublié de dire que H est l'intersection de deux médianes ; cependant, à nouveau, il nous semble que cet élève ne réussit pas à coordonner ce qu'il perçoit sur son tracé avec ce qu'il doit prouver, cela le conduisant à expliciter une procédure incomplète.

ÉTAPE C. Ici, aucun élève ne prouve que les médianes de AOD coupent respectivement les côtés de BCM en leurs milieux.

Quatre élèves (24, 25, 26 et 27) interprètent mal la consigne, ils prouvent que H est le centre de gravité de AOD car il est le point de concours des médianes ; notamment, l'élève 27 fait la liste des propriétés du centre de gravité d'un triangle mais il affirme de manière erronée qu'il est le centre du cercle passant par les sommets de AOD. Un élève (28) affirme que le point d'intersection de [BC] et [OH], soit F, est le milieu de [BC] sans pourtant le prouver ; il voudrait ensuite prouver que FH = 1/3 FM mais il ne réussit pas à aboutir. Remarquons que, pour ce faire, il aurait pu recourir à l'outil *homothétie*. Pour trois autres élèves (29, 30 et 31), il est évident que *les médianes de AOD coupent en*

leurs milieux les côtés du triangle BCM dont les sommets sont les milieux de AOD. L'élève 29 appelle *définition* cette proposition. Vraisemblablement, pour ces élèves, la propriété en question est un résultat institutionnalisé dans le cours de géométrie, remarquant que les médianes de l'un et les côtés de l'autre sont les diagonales des parallélogrammes qui apparaissent comme sous-figures de la configuration du triangle des milieux.

ÉTAPE D. A propos de la comparaison des aires de AOD et de BCM, parmi les onze élèves qui abordent cette étape.

- Deux élèves (22 et 27) fournissent une réponse correcte en recourant à un traitement géométrique de la figure ;
- un élève (24) ne recourt à aucun traitement géométrique, il recourt aux formules de calcul des aires et il fournit une réponse correcte ;
- un élève (29) fournit une réponse correcte en recourant à un traitement géométrique et puis aux formules de calcul des aires ;
- un élève (28) ne recourt à aucun traitement géométrique, il recourt aux formules de calcul des aires et il fournit une réponse incorrecte ;
- trois élèves (21, 26 et 31) fournissent une valeur incorrecte en recourant à un traitement géométrique ;
- trois élèves (15, 20 et 30) recourent à un traitement géométrique mais ils n'aboutissent pas.

Deux élèves (22 et 27) répondent d'après ce qu'ils perçoivent sur la figure : ils remarquent que *AOD est constitué de quatre triangles égaux.* Pour l'élève 27, l'appui sur la perception est évident car il affirme que l'*on peut observer...*

De même pour l'élève 24, qui trace un triangle isocèle, la perception joue un rôle essentiel pour sa réussite : il utilise correctement la formule de l'aire du triangle mais il ne prouve pas la relation des hauteurs de BCM et AOD. Nous pensons que l'élève arrange ses calculs pour qu'ils confirment ce qu'il perçoit sur son tracé, à savoir quatre triangles congruents[53].

L'élève 29 justifie la relation de hauteurs de AOD et BCM[54] ainsi :

> **(29)** "On sait que les côtés [BC], [CM] et [MB] du triangle BCM sont respectivement égaux à la moitié de [AD], [OA] et [OD]. Les côtés du triangle BCM étant deux fois moins longs que ceux du triangle AOD, il en est de même pour les hauteurs des deux triangles..."

Évidemment, l'élève exploite les propriétés relatives à la proportionnalité des longueurs dans le cas

[53] Remarquons que, après avoir écrit les deux expressions littérales, il n'effectue aucune simplification.

d'agrandissement/réduction mais il ne fait allusion à aucune transformation géométrique. À partir de là, il écrit correctement les formules, il simplifie les calculs pour enfin conclure *aisément que l'aire de AOD est 4 fois supérieure à celle de BCM.* Nous tenons à remarquer que, bien que la propriété mobilisée soit vraie, elle n'existe pas en tant que résultat du cours de géométrie. Pour cet élève français, ce serait plus aisé de conclure que, du fait que les longueurs des côtés des deux triangles sont proportionnelles de rapport $k = 2$, les aires sont proportionnelles de rapport $k^2 = 4$. D'une part, nous pouvons supposer que la propriété mobilisée a été l'objet d'une activité de classe qui a permis son institutionnalisation ; d'autre part, nous nous demandons s'il s'agit d'une déduction "personnelle" de l'élève qui ne serait pas capable d'articuler aisément les outils permettant de la valider.

L'élève 28, qui trace un triangle isocèle, ne se soucie pas de chercher la relation des hauteurs de deux triangles. Suivant le codage de son tracé, il écrit correctement les formules de calcul de l'aire pour les deux triangles et puis il affirme que l'*on peut voir que l'aire de BCM est égale à la moitié de l'aire de AOD.* A notre avis, la réponse incorrecte de l'élève n'est pas vraiment reliée à l'usage des formules mais plutôt au fait que, par hypothèse, il sait que AD = 2BC. En quelque sorte, cela relève d'une conception erronée à propos de la liaison périmètre-aire (passage de la dimension 1 à la dimension 2). Nous retrouvons la même conception erronée dans les discours de deux élèves (21 et 26) qui pourtant ne recourent pas aux formules. L'idée est que, *puisque AD = 2 BC, alors AOD = 2 BCM* : l'écriture incorrecte peut être un indice supplémentaire du fait que ces deux élèves ne discernent pas le passage de la dimension 1 à la dimension 2.

D'autres types d'erreurs apparaissent dans la copie de l'élève (31), qui trace un triangle isocèle :

> **(31)** "M est le milieu de AD donc AM = MD ; AO = 2 AB et DO = 2DC[55] donc le triangle AMB et le triangle MDC sont les mêmes donc avec les mêmes aires. Ainsi que le triangle BCO. Donc A(ABD) + A(MDC) + A(BCO) + A(BMC) = A(AOD). Donc on remarque que l'aire du triangle AOD est trois fois l'aire du triangle BCM : A(AOD) = 3A(BCM)".

Dans la première phrase de ce discours, un théorème-en-acte apparaît, une sorte de critère de congruence : *si deux triangles ont deux côtés respectifs de même longueur, alors ils sont congruents.* L'élève aurait pu prouver cette congruence à l'aide de la symétrie axiale, un outil qui ne lui vient peut-être pas à l'esprit. D'ailleurs, c'est probablement cette symétrie de la figure perçue sur le tracé qui amène l'élève à concevoir une propriété qui n'est admissible que dans le cas du triangle rectangle. Rien d'autre que la perception ne permet de justifier la deuxième phrase où l'élève affirme que BCO est aussi congruent aux deux autres triangles. Dans la conclusion, lorsque l'élève comptabilise les triangles qui constituent AOD, il ne tient pas compte de BCM : évidemment, dans sa démarche, pour

---

[54] Rappelons que cet élève ne trace pas de hauteurs (cf. Tableau 8 et commentaires relatifs).

[55] Rappelons que ces trois égalités ont été établies par l'élève dans les étapes précédentes.

obtenir AOD comme pavage de triangles congruents, il suffit de rajouter seulement trois triangles, outre BCM.

Trois cas différents se présentent dans les copies des trois élèves (15, 20 et 30) qui n'aboutissent pas. L'explication de l'élève 30 est proche de celle des élèves qui fournissent une réponse incorrecte :

> **(30)** "Le triangle BCM a une aire plus petite que l'aire du triangle AOD. La base du triangle BCM (BC = ½ AD) est inférieure à la base du triangle AOD (AD = 2 BC)"

Par contre, l'élève 20 fournit une procédure tout à fait correcte : il prouve que les angles adjacents au côté [BC] de BCM sont respectivement égaux aux angles adjacents au côté [AD] de AOD (*angles alternes internes et somme d'angles égaux*) et, puisque AD = 2BC, il déduit que les deux triangles sont semblables (*critère de similitude des triangles*). Néanmoins, il ne conclut pas, ce qu'il prouve lui semblant peut-être satisfaisant pour l'accomplissement de la tâche.
Enfin, l'élève 15 suit une procédure tortueuse. Au-delà de quelques outils qu'il mobilise correctement, il fait des considérations inexactes qui l'empêchent d'aboutir.

Les discours des élèves

Comme l'analyse des procédures l'atteste, les élèves n'utilisent pas toujours la même technique et, par conséquent, ils ne produisent pas le même type de preuve. L'attitude d'un même élève change d'une étape à l'autre mais elle change aussi au sein de la même étape : cet aspect nous empêche d'évaluer dans l'ensemble les preuves de chaque élève.

A propos de l'ÉTAPE A, seulement quatre élèves (15, 24, 28 et 31) produisent une preuve qui porte la marque de l'*exemple générique euclidien*. Notamment, pour les trois élèves français (24, 28 et 31), nous trouvons tout à fait naturel qu'ils utilisent le *théorème de Thalès* d'une manière contextualisée car, d'après ce que l'on trouve dans les manuels français, on peut bien supposer qu'ils ont appris l'énoncé en se référant toujours à une figure codée. Le fait qu'ils n'explicitent pas la définition de milieu est aussi justifiable : ils apprennent à se servir de cet outil depuis la première classe du Collège, son explicitation apparaissant comme inutile dans la mesure où son utilisation contextualisée n'empêche pas de comprendre à quoi ils se réfèrent. Pour les autres élèves, il s'agit surtout de *calculs sur les énoncés* : pour la majeure partie, il s'agit de propriétés évoquées incorrectement ; par contre, dans le cas de l'élève 26, il s'agit d'une propriété inventée du type "la fin justifie les moyens" :

> **(26)** "Montrons que B est le milieu de [OA]. Pour cela, démontrons que la diagonale [DB] est la médiane de [AO] dans le triangle AOD. La droite (DB) passe par l'origine D du triangle AOD mais n'est pas perpendiculaire à la droite (AO) donc (DB) est une médiane elle coupe donc [OA] en son milieu"

A propos de l'ÉTAPE B, nous avons constaté que beaucoup d'élèves fournissent des procédures incomplètes, ce qui nous empêche d'étiqueter précisément les preuves fournies ; on trouve encore des cas de *calculs sur les énoncés*. De même pour l'ÉTAPE C où, en plus, un bon nombre d'élèves interprètent mal la consigne.

A propos de l'ÉTAPE D, les preuves s'appuyant sur l'*évidence* ainsi que le *calcul sur les énoncés* l'emportent sur les autres types de preuves. Par exemple, dans le cas de l'élève 29, nous reconnaissons une *évidence des raisons* mais aussi une *évidence* qui fonctionne en *obstacle* :

> **(29)** "On sait que les côtés [BC], [CM] et [MB] du triangle BCM sont respectivement égaux à la moitié de [AD], [OA] et [OD]. Les côtés du triangle BCM étant deux fois moins longs que ceux du triangle AOD, il en est de même pour les hauteurs des deux triangles..."

A propos de la première assertion, il pourrait bien citer le *théorème des milieux* alors que l'explicitation des raisons qui l'amènent à produire la deuxième assertion exige une articulation plus ou moins complexe des outils qui lui permettraient de prouver la relation des longueurs des hauteurs des deux triangles.

III.4.2 *L'analyse du Problème 2B*

Il s'agit encore d'un problème de construction : l'énoncé a la même structure que dans le problème 2A mais, parmi les trois propositions suggérées, seule la première est identique alors que les deux autres peuvent être considérées comme les duales des constructions proposées dans le problème précédent.

Ce problème étant le deuxième proposé dans la fiche B, nous avons récupéré DIX-SEPT copies. Les résultats sont encore moins riches que dans le problème analogue, ce qui nous amène à croire que, entre autres, la manière dont nous avons apparié ces deux problèmes dans chacune des fiches influe sur la réussite.

CONSTRUCTION A. Aucun élève ne s'investit vraiment dans cette construction. Un élève (15) suggère qu'il faut choisir le point de départ sur l'une des trois médianes du triangle TGL. Aucun tracé n'accompagne sa suggestion qui peut-être s'inspire de ce qu'il voit sur la figure proposée dans la construction B. Remarquons que cet élève n'aborde pas les autres constructions. Un autre élève (24) fournit un programme incorrect car il choisit le premier point au hasard ; le tracé qu'il produit est aussi incorrect, on voit bien qu'il trace d'abord le triangle AIO. Dans d'autres copies, on trouve des traces qui prouvent que les élèves ont fait une tentative mais le peu d'informations – verbales et/ou graphiques – ne suffit pas pour une analyse plus approfondie.

Si l'on compare ces productions avec celles des élèves qui devaient résoudre les problèmes de la fiche A, on constate qu'ici l'échec est encore plus évident : le problème 1B a peut-être pris plus de temps et les élèves se sont désistés plus facilement.
En globalisant les résultats des deux fiches relatifs à la même construction, on peut conclure que, pour les élèves, ce type de tâche est très *problématique* : le fait qu'ils n'exploitent nullement le parallélogramme comme sous-figure contenue dans la figure à construire montre qu'ils n'ont pas encore développé une bonne capacité d'analyse qui puisse les aider à aborder ce type de tâche.

CONSTRUCTION B. Ce début de construction s'inspire de la Solution A_6 de l'analyse *a priori* où l'on exploite les propriétés du centre de gravité : cela pourrait conduire à mobiliser l'outil "homothétie". Cependant, si l'élève résout d'abord le problème 1B de la fiche, il pourrait en tirer parti pour compléter et justifier cette construction.

Un seul élève (30, français) rédige un programme de construction :

> **(30)** "J'ai tracé les droites passant par les points L, T et G, en arrêtant leurs droites aux droites qui sortaient du triangle et qui ont formé le point de concours".

Au-delà d'une difficulté à s'exprimer clairement, nous constatons aussi que la construction est inexacte car cet élève ne prend pas en compte la condition de parallélisme ni dans son discours ni dans son tracé.
Diversement, nous remarquons que certains élèves tracent des droites respectivement parallèles aux trois côtés du triangle TGL et passant par les sommets opposés, ce qui leur permettrait d'aboutir suivant des procédures assez variées ; mais, puisque aucun commentaire n'accompagne leur tracé, on pourrait conclure que ces élèves ne réussissent pas à mobiliser les outils indispensables pour en tirer des conclusions. Vraisemblablement, cette démarche est suggérée par la construction C.
Dans d'autres copies, des élèves – qui complètent ou non la construction – ajoutent des commentaires géométriquement incorrects ou trop peu développés pour permettre de comprendre leurs intentions effectives.

Deux élèves (23 et 27) effectuent la construction et, d'après les assertions qui l'accompagnent, on peut supposer qu'ils exploitent la propriété du centre de gravité d'un triangle et le fait que, dans les deux triangles envisagés dans l'énoncé, ce point caractéristique est le même, cela étant vraisemblablement suggéré par la situation abordée dans le problème 1B :

> **(23)** "*Je trace le triangle TGL et les trois médianes. Leur point de concours est tel qu'*il est à 2/3 de chaque sommet et à 1/3 de chaque base. Et comme les points L, G et T sont les milieux des segments AO, OI, IA. Donc le point de gravité des milieux est le même que celui des points AIO".

> **(27)** "*Je trace le triangle TGL et les trois médianes. Leur point de concours est tel qu'*il est le centre de gravité du

triangle TGL mais aussi celui du triangle AIO".

Vraisemblablement, l'élève 23 reporte des longueurs avec le compas mais le texte qu'il rédige ne permet pas de saisir les étapes de sa construction. En effet, ce texte semblerait plutôt une preuve où pourtant l'hypothèse est confondue avec la thèse. L'assertion de l'élève 27 n'a fonction ni de programme de construction ni de preuve : il se limite à annoncer une propriété qui ne suffit pas pour en déduire la manière dont elle a été exploitée pour accomplir la construction.

CONSTRUCTION C. Cette construction s'inspire des solutions du 1er et du 2ème groupe de l'analyse *a priori* où l'on exploite les propriétés du parallélogramme. Le problème demeure suffisamment ouvert car plusieurs possibilités permettent d'achever la construction (**Solutions de A_1 à A_5** de l'analyse *a priori*[56]). Cependant, compte tenu des suggestions incluses dans le début du programme, on peut plutôt attendre une troisième parallèle et une preuve par les parallélogrammes.

D'après nos prévisions, parmi les trois constructions proposées dans ce problème, celle-ci apparaît comme la plus abordable : treize élèves (quatre italiens et neuf français) la complètent en construisant la droite parallèle au côté [TG] du triangle TGL et passant par L ; seulement huit élèves décrivent le programme, pour les autres cela est vérifiable sur le tracé. Deux élèves (19 et 20, italiens) fournissent une preuve. Pour l'un (19), cette preuve relève de l'*évidence des faits* car l'élève marque les mesures des côtés des deux triangles. L'autre élève (20) produit une preuve qui ne correspond pas à la construction :

(20) "La parallèle IO est coupée par les droites AO et AI en formant un segment égal au double du segment qui lui est parallèle, soit TL. Le centre du segment IO correspond par construction au point G, par conséquent G est le milieu du côté [IO]. Les côtés AI et AO ont les mêmes caractéristiques que IO car eux aussi ils sont coupés par AO et OI, et par AI et IO".

Vraisemblablement, en rédigeant ce discours, l'élève utilise ce qu'il connaît depuis la construction – soit le parallélisme – ainsi que ce qu'il vérifie sur son tracé à l'aide d'instruments de dessin. C'est pourquoi nous reconnaissons aussi que cette preuve s'appuie sur l'*évidence des faits*.

Ces résultats montrent la difficulté des élèves (surtout italiens) à aborder un problème de construction et surtout à distinguer le programme de sa validation.

III.4.3 *Conclusions sur les problèmes de la fiche B*

Ces deux problèmes montrent d'une manière assez évidente que ce sont surtout les élèves italiens qui

---

[56] cf. chapitre 3, § II, *Le triangle des milieux : un problème de construction*

rencontrent des difficultés à s'investir dans la résolution d'un problème géométrique. Il semble qu'ils opposent une certaine résistance à l'adoption d'une *attitude rationnelle* ; d'ailleurs cette tendance à se désister facilement peut bien être un effet institutionnel où rien de précis n'est exigé de la part de l'élève lorsqu'on lui propose ce genre de tâches.
En revanche, compte tenu du fait que, dans l'institution française, la demande de la part de l'enseignant est plus forte, les élèves français s'investissent davantage même s'ils montrent une difficulté à discerner ce que l'intuition leur suggère de ce qu'ils doivent déduire rationnellement. A notre avis c'est cette difficulté qui les empêche d'exploiter convenablement les liens existant entre les deux problèmes : seulement deux élèves (23 et 27, français) ont vu les liens mais ils ne savent pas les exploiter correctement.

Les problèmes de la fiche B seront conservés dans la partie expérimentale, moyennant quelques modifications que nous verrons dans le chapitre 6. En effet, nous nous sommes persuadée que, pour obtenir plus d'informations sur l'attitude des élèves face à un problème de construction, il faut formuler différemment l'énoncé.

III.5 Les problèmes de la fiche C

Les trois problèmes de la fiche C sont jumelés par des dénominateurs communs qui pourraient s'expliciter au fur et à mesure lors de la résolution lorsque l'on complète les tracés avec des éléments supplémentaires. En tout cas, ce lien est moins évident que dans les fiches précédentes. Dans deux des trois problèmes, une question porte sur les aires, ici il ne s'agit pas seulement de triangles mais aussi de quadrilatères.

III.5.1 *L'analyse du Problème 1C*

Il s'agit d'un problème dont la figure n'est pas donnée : il faut la tracer et ensuite des conditions imposées amènent à envisager certains cas de figure. Les tâches proposées sont du **genre 1** et du **genre 2** : après avoir décrit la figure de départ, les éléments de réponse peuvent se percevoir sur le tracé ; les questions qui suivent sont corrélées et il faut chercher des propriétés pour que la figure vérifie des conditions supplémentaires. Vu la nature du problème, la perception peut jouer un rôle fondamental pour trouver les réponses.

Vraisemblablement, la formulation des questions incite les élèves – surtout italiens – à recourir à l'expérience et à fournir des réponses sans les justifier ou bien en les validant à l'aide de preuves pragmatiques.

Nous avons récupéré DIX-HUIT productions d'élèves, NEUF italiens et NEUF français. Pour analyser leurs productions, nous distinguons trois volets, la *figure*, les *procédures*, les *discours*.

Le tracé et l'usage de la figure

Dans l'ensemble, les élèves ont méticuleusement réalisé les figures mais, une foi encore, ce sont surtout les élèves français qui recourent aux instruments de dessin. Ici, nous ne considérons pas l'analyse du codage car presque tous les élèves recourent seulement au codage par les lettres, suivant les données de l'énoncé. Compte tenu du fait qu'ici l'usage de la figure diffère des cas précédents, nous prenons en compte les items suivants (cf. Tableau 5.9) :

Le tracé	Est-ce que l'élève effectue le tracé ?	**0** Pas de tracé **CR** Croquis **TS** Tracé soigneux (avec instruments) **TI** Tracé incomplet

Nous analysons ces items pour les trois figures principales du problème : le parallélogramme, le rectangle et le carré. Nous verrons ci-après que quelques élèves semblent utiliser le tracé comme moyen pour valider leurs réponses.

Seulement deux élèves italiens (36 et 37) considèrent un cas particulier de triangle, respectivement un triangle rectangle et un triangle isocèle, en altérant la tâche. Dans l'ensemble, les élèves montrent avoir une bonne capacité de *décontextualisation*, voire l'habitude de considérer les figures dans un cas général. Cependant, pour la deuxième partie de la deuxième question, quelques élèves considèrent un cas particulier, ce qui les conduit à ne pas la différencier de l'étape C.

La majeure partie des élèves italiens trace le rectangle et le carré alors que presque tous les élèves français ne tracent que le parallélogramme. Dans le paragraphe suivant, nous analysons ces deux attitudes différentes en relation avec les procédures identifiées.

Tableau 5.9 – Le tracé dans le problème 1C

		Le tracé		
		Parallélogramme	**Rectangle**	**Carré**
Élèves italiens	**32**	CR	0	CR
	33	CR	TS	TS
	34	0	CR	0
	35	TS	TS	TS
	36	TS (cas particulier)	0	0
	37	TS (cas particulier)	TS	TS
	38	TS	TS	TS
	39	TI	TI	0
	40	CR	0	0

		Le tracé		
		Parallélogramme	**Rectangle**	**Carré**
Élèves français	**41**	TS	0	0
	42	TS	0	0
	43	TS	0	0
	44	TI	CR	0
	45	TS	0	0
	46	TS	0	0
	47	CR	0	0
	48	TS	CR	0
	49	TS	TS	0

Les réponses et les procédures des élèves

Pour accomplir les diverses tâches, dans l'analyse *a priori*, nous avons prévu deux techniques mathématiques différentes. La première technique (**Solution G_1**) s'appuie sur les outils de la géométrie traditionnelle : définition de milieu d'un segment, propriétés caractéristiques des quadrilatères particuliers et similitude (ou agrandissement/réduction) ; ici, un recours naïf à la notion de symétrie centrale suffit. La deuxième technique (**Solution G_2 et ses variantes**) s'appuie sur les invariants de la symétrie centrale et sur les propriétés du parallélogramme en termes vectoriels.

Compte tenu de la structure de l'énoncé, nous considérons d'abord chacune des questions selon le schéma suivant :

- ÉTAPE A. Nature de CMNM' (*parallélogramme*)
- ÉTAPE B. Nature de CNM (*triangle rectangle*)
- ÉTAPE B'. Nature de CNMM' (*rectangle*)
- ÉTAPE C. Nature de CNM (*carré, triangle rectangle isocèle*)

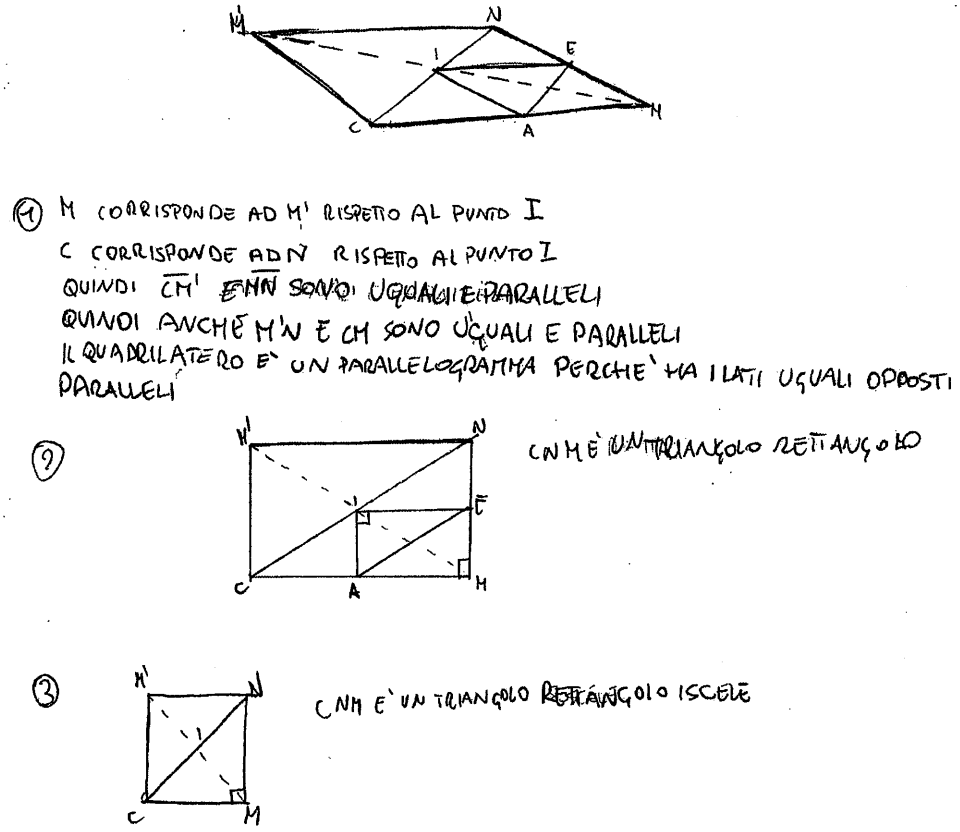
Pour les étapes A, B' et C, nous rappelons si l'élève effectue le tracé correspondant aux données et aux informations que l'on peut en déduire, cet item étant parfois significatif en termes de preuve ; nous précisons aussi l'usage qu'il fait de la procédure adoptée. Nous répertorions ces éléments selon les items suivants (cf. tableau 5.10) :

Le tracé	Est-ce que l'élève effectue le tracé ?	**N** Non **O** Oui
La réponse	Est-ce que l'élève répond à la question ?	**N** Non **O** Oui (dans ce cas nous précisons si la réponse est correcte ou non)
L'usage de la procédure	Est-ce que l'élève explicite une procédure ?	**N** Non **O** Oui (dans ce cas, nous précisons si la procédure est correcte, incomplète, etc.)

Les élèves répondent au moins à une question ; ce sont surtout les élèves italiens qui ne fournissent pas de réponse. Les résultats concernant ce problème révèlent clairement les raisons qui nous ont amenée à parler de *procédures* des élèves lors de l'analyse a posteriori. En fait, on constate que, chez un même élève, la technique peut changer d'une étape à l'autre : seuls deux élèves (35 et 43) recourent à la même technique tout au long de la résolution du problème en question.
Concernant les outils mobilisés, les élèves préfèrent ceux de la géométrie traditionnelle : les procédures des élèves sont surtout proches de la **Solution G_1** envisagée dans notre analyse *a priori*[57].

Nous avons constaté que la majeure partie des élèves français ne tracent ni le rectangle ni le carré alors que la majeure partie des élèves italiens tracent au moins deux des trois figures. Si l'on relie cet élément avec les catégories de techniques utilisées, nous remarquons que les élèves français argumentent leurs réponses alors que les élèves italiens donnent peu d'explications pour accompagner les figures. Ils semblent plutôt recourir à l'action mentale et à la perception. On dirait que, pour ces derniers, les tracés ultérieurs représentent un moyen pour "montrer" les réponses, l'élaboration des informations demeurant implicite (cf. Figure 5.4).

Figure 5.4 – La copie de l'élève 33



[57] Cf. chapitre 3, § VIII, *Du triangle au parallélogramme*

ÉTAPE A. Nature de CMNM'.

Les résultats montrent que les élèves sont plus à l'aise en utilisant les outils de la géométrie traditionnelle et qu'ils les mobilisent surtout en les contextualisant. D'une manière inattendue, nous constatons que ce sont seulement des élèves italiens qui mobilisent les propriétés des transformations géométriques.

Tableau 5.10 – Récapitulatif de l'étape A du problème 1C

		Le tracé	La réponse	L'usage de la procédure
Élèves italiens	**32**	O	O (correct)	Part correct
	33	O	O (correct)	Correct
	34	N	O (correct)	Correct
	35	O	O (correct)	Incorrect
	36	O (cas particulier)	O (incorrect)	Incorrect
	37	O (cas particulier)	O (incorrect)	Incorrect
	38	O	O (correct)	N
	39	O (incomplet)	N	N
	40	O	O (correct)	Correct

		Le tracé	La réponse	L'usage de la procédure
Élèves français	**41**	O	O (correct)	Correct
	42	O	O (correct)	Correct
	43	O	O (correct)	Correct
	44	O (incomplet)	N	N
	45	O	O (correct)	Correct
	46	O	O (correct)	Part correct
	47	O (incomplet)	O (correct)	Part correct
	48	O	O (correct)	Correct
	49	O	O (correct)	Correct

Deux élèves (39 et 44) ne fournissent pas de réponse. Les deux élèves (36 et 37) qui tracent des figures particulières, fournissent une réponse cohérente par rapport à leur choix et ils la justifient. Pour l'un (36), le degré d'implicite ne permet pas de saisir les outils mobilisés. Pour l'autre élève (37), la perception joue un rôle fondamental, même s'il mobilise l'un des *critères de congruence des triangles*, cet outil n'est pas pertinent pour valider ses assertions. Les quatorze autres élèves fournissent une réponse correcte et seulement un élève (38) ne la justifie pas.

Neuf élèves – un italien et huit français – suivent une procédure proche de celle envisagée dans la **Solution G_1** de l'analyse *a priori* :

I est le milieu de [MM']

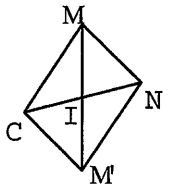
I est le milieu de [CN]

⇓

I est le point de concours des diagonales du quadrilatère CM'NM

⇓

CM'NM' est un parallélogramme



Propriété de l'image d'un point par une symétrie centrale

et

définition de milieu d'un segment

Un quadrilatère dont les diagonales se croisent en leur milieu est un parallélogramme

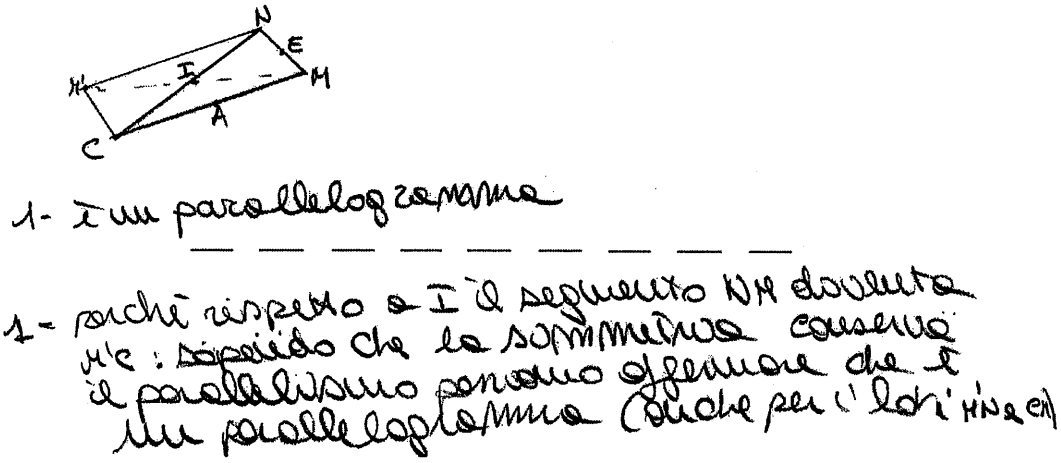
La propriété permettant de prouver que I est le milieu de [MM'], est mobilisée d'une manière *contextualisée* :

(41, 42, 45, 49) "I est le milieu de [MM'] (MI = ½ MM') car M' est le symétrique de M par rapport à I".

Deux élèves français (46 et 47) affirment que *M' est le projeté de M par rapport à I*. Évidemment, cela manifeste une confusion entre la notion de projection et celle de symétrie, le langage inadéquat pouvant ainsi cacher une conception erronée. Trois autres élèves (40, 43 et 48) utilisent implicitement cette propriété. Seulement un élève cite explicitement la propriété caractéristique du parallélogramme alors que les autres l'utilisent d'une manière contextualisée.

Au contraire, trois élèves italiens (32, 33 et 34), pour recourir aux *invariants de la symétrie centrale* et à *la définition de parallélogramme*, traduisent la définition de milieu d'un segment en termes de symétrie centrale (*les extrémités d'un segment sont l'image l'un de l'autre par rapport à son milieu*), (cf. **Solution G_2**). Les outils sont utilisés d'une manière contextualisée. Le seul élève (32) qui cite explicitement la propriété utilisée, fait appel à la *conservation du parallélisme par une symétrie centrale* alors qu'il faut considérer que l'*image d'une droite est encore une droite qui lui est parallèle* (cf. Figure 5.5). Dans l'enseignement, cette conception semble être assez typique et engendrée peut-être par une difficulté à donner du sens au vocabulaire utilisé en mathématiques et, par conséquent, à distinguer convenablement la signification d'une proposition d'une autre[58].

Figure 5.5 – Un extrait de la copie de l'élève 32



Un élève italien (35) argumente d'une manière incorrecte : il reconnaît que CM'NM est un

[58] Il faut aussi considérer que, dans quelques manuels italiens, cet invariant est énoncé ainsi : "*Une symétrie centrale conserve le parallélisme et la direction*", ce qui fait que l'élève qui ne distingue pas correctement la différence entre parallélisme et direction ne saisit pas clairement la signification de cette propriété.

parallélogramme d'où il déduit ses propriétés alors qu'il fallait procéder à l'inverse. Cette attitude pourrait révéler une difficulté de l'élève à rédiger correctement une preuve, ce qui l'empêche de bien distinguer les hypothèses de la thèse.

ÉTAPE B. Nature de CNM

Dans ce problème, ce sont les procédures adoptées pour répondre à la deuxième question[59] qui nous intéressent le plus : ici, il s'agit d'exploiter convenablement les propriétés du triangle des milieux ; l'articulation des outils à mobiliser est plus complexe – tout en demeurant accessible au niveau scolaire concerné – que dans les autres questions. La formulation de la question semble légitimer un recours à l'expérience ; nous estimons que pour les élèves celle-ci apparaît comme suffisante pour valider leur réponse. D'ailleurs, ceux qui produisent un discours, rencontrent des difficultés non négligeables.

Tableau 5.11 – Récapitulatif de l'étape B du problème 1C

		La réponse	L'usage de la figure
Élèves italiens	32	correcte	Incomplet
	33	correcte	N
	34	correcte	N
	35	correcte	N
	36	N	N
	37	correcte	N
	38	correcte	N
	39	correcte	Incomplet
	40	correcte	N

		La réponse	L'usage de la figure
Élèves français	41	correcte	N
	42	correcte	N
	43	correcte	Incomplet
	44	correcte	Incomplet
	45	correcte	N
	46	correcte	Incomplet
	47	correcte	N
	48	correcte	N
	49	correcte	N

Un seul élève (36, italien) ne fournit pas de réponse. On peut supposer que les treize élèves – sept italiens et six français – qui n'argumentent pas leur réponse, ont eu recours à l'expérience en termes d'*action mentale* mais que cela les a empêchés d'aller plus loin, de mobiliser les outils nécessaires pour justifier cette action qui d'ailleurs, n'ayant pas un statut mathématique précis, n'est pas facile à expliciter.

Cinq élèves (32, 39, 43 44 et 46), deux italiens et trois français, argumentent leur réponse. L'élève 44 produit des arguments non pertinents :

> **(44)** "Il faudrait que CNM soit rectangle en M pour que IEA soit rectangle en I. Parce que I, étant sur [CN], au milieu exactement, il faut que I soit en alignement avec M avec un angle droit en I pour que IEA soit rectangle en I..."

[59] "... Comment faudrait-il choisir le triangle CNM pour que le triangle IEA soit rectangle en I ?...".

Ce discours exprime d'une manière maladroite l'action mentale de l'élève. L'attachement évident au pragmatique rend difficile l'explication mais empêche aussi de recourir à une technique mathématique pour accomplir la tâche.

L'élève 46 n'explicite pas d'outils précis. Son discours semble aussi attaché à ce qu'il perçoit sur son tracé :

> **(46)** "Pour que IEA soit un triangle rectangle en I il faudrait que le triangle CNM soit lui aussi rectangle en M car dans ce cas CM'NM serait un rectangle et donc (EI) serait perpendiculaire à (MN)".

Vraisemblablement, la difficulté à coordonner ce qu'il sait avec ce qu'il voit l'empêche de mobiliser clairement les outils nécessaires pour valider sa réponse.

L'élève 39 reconnaît que *le triangle IEA se constitue en joignant les milieux des côtés du triangle CNM* : on dirait que la reconnaissance d'une configuration familière aide l'élève à trouver la réponse mais l'évidence l'empêche de l'argumenter davantage.

L'élève 32 semble reconnaître la configuration des triangles des milieux. Il affirme donc que AIEM est un parallélogramme et, à partir de là – en utilisant d'une manière contextualisée la *propriété des angles opposés d'un parallélogramme* – il déduit la réponse (cf. **Solution G_1** de l'analyse *a priori*).

Très sibylline, par contre, la procédure de l'élève 43 :

> "Il faudrait que CNM soit rectangle en M. Comme MC // IE et ME // AI car CM'NM parallélogramme si CNM rectangle en M, l'angle I le serait aussi".

L'absence de signes de ponctuation permet diverses interprétations du discours fourni. On pourrait croire que l'élève se trompe et que, au lieu de citer le parallélogramme AIEM, il cite CM'NM ; Ensuite, si l'on rajoute des points et des virgules, on lirait la phrase suivante :

> "Comme MC // IE et ME // AI, car (dans le sens "vu que") AIEM parallélogramme, si CNM rectangle en M, l'angle I le serait aussi"

C'est ainsi que la procédure rejoindrait celle de l'élève 32, tout en considérant qu'il fait une *équivalence sémantique* ("*l'angle I le serait aussi*" dans le sens "*IEA serait aussi un triangle rectangle en I*"). Autrement, après avoir utilisé implicitement le *théorème des milieux* ou bien après avoir perçu le parallélisme sur son tracé, l'élève mobilise – toujours implicitement – la propriété suivante :

> "d et d', r et r' étant deux couples de droites parallèles, si d est perpendiculaire à r, alors d' est perpendiculaire à r'".

Cette dernière interprétation est peut-être plus plausible par rapport à la précédente, la complexité de la propriété mobilisée lui empêchant de produire un discours clair et précis.

ÉTAPE B'. Nature de CMNM'.

Peu d'élèves argument leur réponse. Vraisemblablement, l'évidence n'incite pas les élèves à mobiliser les outils qui conviennent et, surtout pour les élèves italiens, le tracé semble être le moyen pour valider leurs conclusions.

Tableau 5.12 – Récapitulatif de l'étape B' du problème 1C

		Le tracé	La réponse	Le discours
Élèves italiens	32	N	Correcte	N
	33	O	Correcte	N
	34	(cas particulier)	Incorrecte	N
	35	O	Correcte	-
	36	N	N	N
	37	N	N	N
	38	O (inc)	Incorrecte	N
	39	N	N	N
	40	N	Correcte	N

		Le tracé	La réponse	Le discours
Élèves français	41	N	Correcte	Correct
	42	N	Correcte	Correct
	43	N	Correcte	Correct
	44	(cas particulier)	Incorrecte	Incorrect
	45	N	N	N
	46	N	Correcte	-
	47	N	Correcte	Correct
	48	O (inc)	Incorrecte	N
	49	N	O	-

Quatre élèves (36, 37, 39, 45) ne répondent pas. Quatre élèves (34, 38, 44, 48) fournissent une réponse incorrecte. Les élèves 34 et 44 envisagent un cas particulier de figure, ce qui les empêche de saisir la différence entre la question 2 et la question 3 ; l'élève 38 interprète de manière erronée les données. L'élève 48 représente son action mentale sur le tracé et tente de l'expliquer, son discours est pourtant incompréhensible. Encore une fois, cet élève montre un attachement évident au pragmatique, ce qui l'empêche non seulement d'aller plus loin mais aussi, n'ayant pas le moyen d'agir effectivement, d'expliciter clairement ses actions mentales.

Pour les élèves 32 et 40, la réponse est une conséquence logique du discours précédent où ils établissent que l'angle CMN est droit.

Quatre élèves (41, 42, 43, et 47), pour argumenter leur réponse, recourent à une procédure telle que celle envisagée dans la **Solution G_1** et donc, d'une manière contextualisée, à la *définition de rectangle* :

"Étant un parallélogramme avec un angle droit, CM'NM est un rectangle".

L'élève 46 recourt implicitement à cette définition.

Dans leur discours, les élèves 35 et 49 semblent s'appuyer sur ce qu'ils perçoivent sur leur tracé : on dirait que le contenu du discours est la conséquence de ce qu'ils perçoivent dans leur action mentale et non pas la cause de leurs argumentations.

ÉTAPE C. Nature de CNM.

Seulement neuf élèves, deux italiens et sept français, argumentent leur réponse en recourant aux outils nécessaires d'une manière contextualisée.

Tableau 5.13 – Récapitulatif de l'étape C du problème 1C

		Le tracé	La réponse	Usage de la procédure
Élèves italiens	32	O	Correcte	Correct
	33	O	Correcte	N
	34	N	Correcte	N
	35	O	Correcte	N
	36	N	N	N
	37	O	Correcte	N
	38	O	Incorrecte	N
	39	N	N	N
	40	N	Correcte	Correct

		Le tracé	La réponse	Usage de la procédure
Élèves français	41	N	Correcte	Correct
	42	N	Correcte	Correct
	43	N	Correcte	Correct
	44	N	N	N
	45	N	N	N
	46	N	Correcte	Correct
	47	N	Correcte	Correct
	48	N	Incorrecte	Incorrect
	49	O	Correcte	Correct

Six élèves justifient leur réponse comme dans la **Solution G_1** (*définition de carré et de triangle rectangle*) ; un élève français (41) exploite plutôt les propriétés de la symétrie centrale et un élève italien (32) recourt à l'homothétie, comme dans les variantes de la **Solution G_2**.

L'élève 48 produit un discours incompréhensible, ce qui est dû probablement à une action mentale incorrecte et, par conséquent, inefficace pour parvenir à la bonne réponse.

Les discours des élèves

Lors de l'analyse des productions d'élèves concernant ce problème, nous avons rencontré beaucoup de difficulté à distinguer les procédures des discours.

Beaucoup d'élèves recourent à des techniques perceptives et leurs discours demeurent souvent liés au pragmatique, ce qui conduit à conclure que le type de preuve produite relève surtout de l'*évidence des faits*. Il nous semble que la possibilité d'imaginer la métamorphose de la figure de départ amène un bon nombre d'élèves à s'appuyer sur ce qu'ils perçoivent pour valider leurs réponses. Probablement, la difficulté à traduire en termes mathématiques ces métamorphoses – alors qu'elles sont très faciles à imaginer – les empêchent de produire des discours (au moins) proches d'une *preuve intellectuelle* : dans ce cas, on dirait que l'*expérience mentale* est considérée comme un moyen satisfaisant pour assurer la validité de leurs réponses. D'autre part, si l'on considère qu'ici les élèves doivent mobiliser des outils qu'ils sont censés avoir acquis depuis les premières classes du secondaire, on pourrait bien croire que, dans quelques cas, c'est à cause de l'*évidence des raisons* qu'ils ne les explicitent pas.

Dans le quelques cas où les élèves produisent des *preuves intellectuelles*, il s'agit surtout de preuves qui portent la marque de l'*exemple générique euclidien*.

La variété de techniques que le même élève adopte en passant d'une étape à l'autre nous empêche d'établir une véritable hiérarchie des types de preuves que ces élèves produisent, celles-ci pouvant aussi varier au sein de la même étape.

III.5.2 *L'analyse du Problème 2C*

Il s'agit d'un problème où la figure est amorcée : on demande de la compléter suivant des conditions imposées et puis de répondre à des questions en les justifiant. Nous avons vu que la première question peut être rattachée à plusieurs genres de tâches suivant l'interprétation que l'élève en fait. La deuxième question est du **genre de tâche 3** : on demande de comparer l'aire de ce quadrilatère particulier avec celle du quadrilatère qui lui est circonscrit. Pour accomplir cette deuxième tâche, l'élève doit considérer des éléments supplémentaires de la figure, en mobilisant convenablement ses connaissances.

La première tâche proposée est considérée par les élèves surtout comme un problème de construction (troisième hypothèse de l'analyse *a priori*[60]) et, dans la plupart des cas, elle est incomplète. Dans les cas où les élèves abordent la question sur les aires, la difficulté à produire des preuves intellectuelles demeure assez importante. En général, remarquons encore que, bien que les méconnaissances des élèves français se manifestent d'une manière plus évidente, ils s'investissent toujours davantage. D'autre part, il faut constater que, pour aucun des élèves italiens, la question sur les aires n'est pas synonyme de formule.

Puisque ce problème est le deuxième de la fiche C, nous avons récupéré DIX-HUIT copies d'élèves, NEUF italiens et NEUF français. Compte tenu de la structure de l'énoncé, lors de l'analyse des procédures des élèves, nous analysons séparément les résultats qui concernent les deux tâches.

Le tracé et l'usage de la figure

Ici, pourvu que l'élève ait accompli la consigne préalable ("*Trace B, symétrique de A par rapport à S, etc.*"), nous nous intéressons aux items suivant (cf. Tableau 5.14) :

AUTEL1	L'élève considère-t-il d'autres éléments (outre le parallélogramme) qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé mais qui sont utiles pour tracer le point R ?	**N** Non **O** Oui
AUTEL2	L'élève considère-t-il d'autres éléments de la figure qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé mais qui sont utiles pour répondre à la deuxième question ?	**N** Non **O** Oui

L'item **AUTEL1** nous permet de relier les éléments supplémentaires avec les discours que les élèves

[60] cf. § II.2, *Les sept genres de tâches et les techniques possibles*

avancent pour argumenter la première réponse : selon la propriété qu'ils mobilisent, ces éléments devraient apparaître ou non.

Par la suite, comme pour le problème 1A, on peut examiner le tracé achevé et se faire une idée de ses propriétés : on trie, parmi ces propriétés, celles qui permettent de répondre à la deuxième question.

C'est grâce à l'item **AUTEL2** que, pour combiner les résultats sur les tracés produits avec ceux sur les outils mobilisés et leur enchaînement, nous évaluons si, au-delà des informations données dans l'énoncé, l'élève repère d'autres éléments – tracés ou non tracés, codés ou non codés – pour rédiger sa solution.

Tableau 5.14 – Le tracé dans le problème 2C

	Élèves italiens			*Élèves français*	
	AUTEL1	**AUTEL2**		**AUTEL1**	**AUTEL2**
32	O	N	**41**	N	N
33	N	N	**42**	N	N
34	N	N	**43**	N	N
35	O	N	**44**	N	O
36	O	N	**45**	N	N
37	N	N	**46**	O	N
38	N	N	**47**	O	N
39	N	N	**48**	N	N
40	O	N	**49**	N	N

Concernant l'item **AUTEL1**, cinq élèves (32, 35, 36, 40, 47) tracent les diagonales du parallélogramme SPQR ; cependant, nous verrons que cela ne signifie pas que tous ces élèves utilisent la propriété des diagonales du parallélogramme pour aboutir. Un élève (46) trace deux vecteurs, nous expliquerons plus loin l'usage qu'il en fait.

Concernant l'item **AUTEL2**, un seul élève (44) trace et nomme les hauteurs des quatre triangles qui, avec le parallélogramme SPQR, forment le quadrilatère ABCD : il s'en sert pour écrire la formule de calcul de l'aire de ces quatre triangles. A ce propos, signalons que d'autres élèves tentent d'utiliser les formules de calcul, notamment celle du parallélogramme ; néanmoins, ils ne tracent pas de hauteur, nous verrons ci-après qu'ils recourent à des formules incorrectes.

Au passage, remarquons que, dans l'ensemble, les élèves produisent un tracé soigneux mais que ce sont surtout les élèves français qui utilisent le compas pour tracer les points symétriques demandés.

Les réponses et les procédures des élèves

Lors de l'analyse *a priori*, à propos de la première question, nous avons prévu plusieurs solutions suivant l'ordre de construction et les propriétés du parallélogramme utilisées. Plus haut, nous avons remarqué que la question se prête à diverses interprétations. Les productions des élèves peuvent être

classées selon la manière dont ils ont "traduit" la tâche. Pour la question sur les aires, plusieurs procédures sont aussi envisageables ; néanmoins, le recours aux formules de calcul des aires s'avère inefficace.

Nous considérons séparément les réponses aux deux questions du problème. Ensuite, nous évaluons les résultats dans l'ensemble. Signalons que deux élèves (33 et 39, italiens) n'abordent pas le problème.

QUESTION A. Aucun élève n'interprète la tâche selon le genre 2.
La majeure partie des élèves l'interprète selon le **genre 5 et puis 1** : ils effectuent une construction et ils précisent la nature de la figure obtenue. En fait, le style de rédaction nous permet de reconnaître que ces élèves abordent le problème en termes de construction : on retrouve des expressions *gestuelles* du genre "*on reporte la longueur avec le compas...*", "*on pointe le compas sur...*", etc. Ils décrivent ensuite un programme qui justifie simultanément que le quadrilatère obtenu est bien un parallélogramme. Nous remarquons que les élèves français réussissent mieux que les élèves italiens.
D'autres élèves interprètent la tâche comme appartenant au **genre 4bis** : ils voient l'hypothèse à ajouter pour obtenir la propriété demandée mais ne démontrent pas qu'on l'obtient effectivement. En fait, ils précisent "où" il faut placer le point mais ils ne se préoccupent pas de prouver que le quadrilatère obtenu est bien un parallélogramme, l'évidence graphique les rassurant probablement de l'exactitude de leur réponse. Dans ce cas, les différences entre les élèves français et italiens sont insignifiantes.

Nous avons donc classé les procédures suivant les deux interprétations repérées.

Pour la première approche, nous distinguons quatre programmes de construction, suivant la propriété prédominante.

- *Un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles et de même longueur*

Un élève (49, français) définit le point R sur [AD] et vérifie ensuite qu'il obtient un parallélogramme. Il utilise implicitement la propriété concernée. Il décrit dans les détails sa procédure :

> "On prend la longueur SP avec un compas, on pointe le compas sur Q, on trace jusqu'à ce que la courbe coupe [[AD] en un point que l'on appelle R si la prochaine opération marche. Donc après on prend la longueur PQ avec le compas, puis on pointe sur S, on trace jusqu'à ce que la courbe coupe [AD] sur le point R trouvé dernièrement (vérifié, R est placé, voir schéma)".

Ici, il y a un attachement évident aux actions, celles-ci étant décrites telles qu'elles se suivent. Il est clair que, lorsque l'élève *pointe le compas sur S* et qu'*il trace jusqu'à ce que la courbe coupe [AD]*, il s'aperçoit que le dernier point localisé coïncide avec le précédent. Cela semble encore rassurer l'élève de l'exactitude de ses gestes. En fait, cet élève perçoit bien qu'il y a une condition mais il ne lui vient

pas l'idée de la prouver : il vérifie que cela fonctionne comme prévu.

Dans les trois autres cas, les élèves complètent un parallélogramme mais aucun d'entre eux ne vérifie que R est sur [AD].

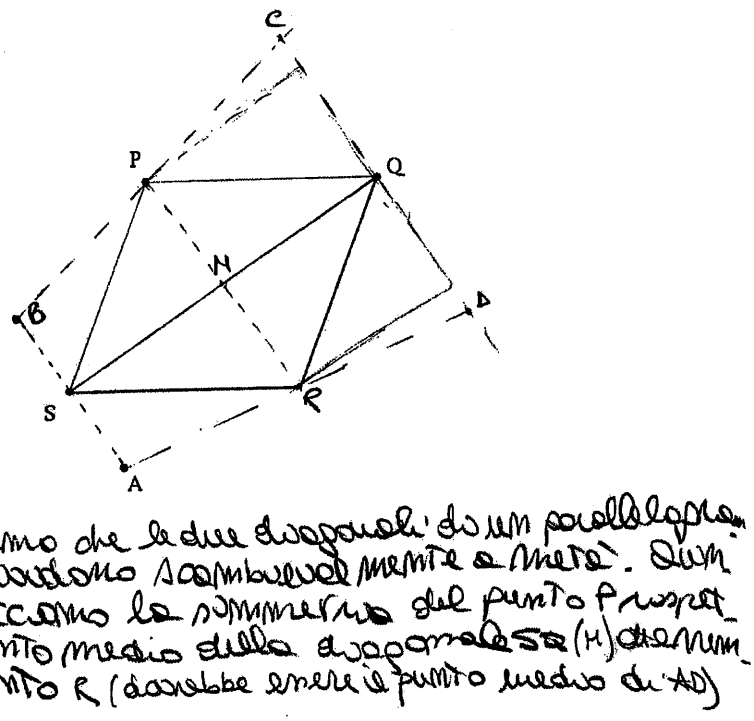
- *Le point de concours de diagonales est le centre de symétrie d'un parallélogramme.* Dans ce cas, dans la figure produite par les élèves, les diagonales apparaissent.

Un élève (32, italien) considère explicitement la *propriété des diagonales d'un parallélogramme* ; il traduit ensuite la notion de milieu en terme de *symétrie centrale* (cf. Figure 5.6) :

> **(32)** "On sait que les deux diagonales d'un parallélogramme se croisent en leur milieu. Donc, si l'on trace le symétrique du point P par rapport au milieu de la diagonale [SQ], on obtient le point R (il devrait être le milieu de [AD])".

Dans la démarche de cet élève, l'assertion entre parenthèses, qui pourtant est la réponse à la question posée, semble être une information supplémentaire ou bien il constate que c'est le milieu mais il sait qu'il ne l'a pas démontré.

Figure 5.6 – Un extrait de la copie de l'élève 32



Un autre élève (35, italien) considère explicitement que le milieu d'une diagonale est le centre de symétrie du parallélogramme, cela pour construire les symétriques respectifs de [SP] et [QP] :

> "En sachant que, dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux et que son centre est le milieu du segment qui joint les points opposés (OS = OQ), je trace le symétrique de P par rapport à O et je trouve le point R tel que QR = PS et SR = QP".

Dans ce discours, la *propriété de l'image d'un segment par une symétrie centrale* demeure implicite alors que la propriété *des côtés opposés d'un parallélogramme* est explicitée. Également pour cet élève, la tâche porte sur la construction de SPQR et non sur l'identification de la position exacte du point R.

Un troisième élève (40, italien) semble recourir à l'une de ces procédures ; il ne fait pas de conjectures sur la position de R mais, les outils mobilisés demeurant implicites, nous ne pouvons pas en tirer de conclusions précises.

- *Un quadrilatère ayant les côtés opposés deux à deux parallèles est un parallélogramme.*

Trois élèves (43, 45, 48, français) tracent les parallèles respectives à [SP] et [QP]. Ils citent explicitement la propriété concernée. De même ici, les élèves n'accomplissent pas la tâche, leur attention portant exclusivement sur la construction du parallélogramme.

- *Un quadrilatère non croisé ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.*

Un élève (44, français) cite explicitement cette propriété et il s'en sert lors de la construction qu'il décrit dans les détails :

> "Pour que SPQR soit un parallélogramme, il faut que (QP) // (SR) et que QP = SR et que SPQR soit non croisé. Donc on trace la parallèle à (QP) passant par S puis on prend la mesure QP avec le compas que l'on reporte sur la parallèle (du côté où SPQR ne sera pas croisé). Le point R est le point trouvé à l'intersection de la parallèle et de (AD)".

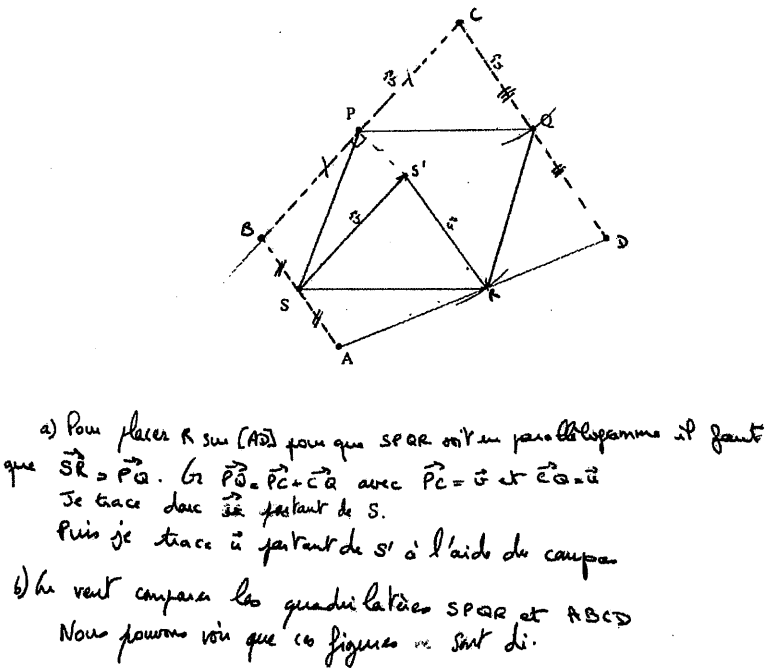
Remarquons que cet élève constate que R est sur [AD]. Les traces laissées lors de la construction semblent confirmer le programme décrit.

Un élève (46, français) recourt directement à la propriété du parallélogramme en termes vectoriels : *si* ***SR = PQ*** *alors SPQR est un parallélogramme.* En faisant ainsi, il règle la question de convexité en regardant sur la figure. L'outil mobilisé est correct et efficace, néanmoins l'élève complique la construction comme on peut le constater dans la figure ci-dessous.

Deux élèves (37 et 41), un italien et un français, affirment que les côtés [RQ] et [PS] sont parallèles et congruents ainsi que [SR] et [PQ]. Vraisemblablement, cela devrait correspondre aux actions qu'ils effectuent lors de la construction mais aucun élément supplémentaire ne nous permet d'en avoir la certitude.

Remarquons que, dans ce cas, les élèves n'achèvent pas non plus la tâche, la question de l'identification de la position de R n'étant pas prise en compte.

Figure 5.7 – Un extrait de la copie de l'élève 46



Pour la deuxième approche, cinq élèves (34, 36, 38, 42 et 47), trois italiens et deux français, affirment que R est le milieu de [AD]. Cette certitude n'est pas due à une reconnaissance d'une figure (ou d'une propriété) connue ; d'après les arguments qui accompagnent leur assertion, il est clair que, pour ces élèves, cela ne peut pas être autrement car *les autres sommets sont aussi les milieux* des côtés du quadrilatère circonscrit. D'autres éléments permettent de saisir que les élèves vérifient empiriquement que SPQR est un parallélogramme, en contrôlant que les côtés opposés sont de même longueur ou bien qu'ils sont parallèles. Signalons enfin qu'un élève (36) trace les diagonales du parallélogramme mais qu'il ne s'en sert pas.

QUESTION B. Les résultats prouvent que la tâche s'avère difficile. Cinq élèves italiens et deux français n'abordent pas la question sur les aires. Parmi les autres, aucun élève ne produit de solution conforme à ce qui était prévu dans notre analyse *a priori*. Le recours aux formules de calcul des aires se révélant inefficace, cette question a mis en évidence l'incapacité des élèves à mobiliser et articuler des outils plus adéquats. Quant aux élèves français, les résultats montrent aussi des lacunes importantes à propos des formules de calcul. Signalons aussi que, cette fois, un seul élève recourt au mesurage.

Trois élèves (36, 45 et 49), un italien et deux français, affirment que l'aire de ABCD est plus grande que celle de SPQR :

(45) "... le quadrilatère ABCD est circonscrit au quadrilatère SPQR".

(49) "... ABCD occupe une plus grande surface, et car SPQR se trouve dans ABCD et n'occupe pas toute la surface".

Les arguments qu'ils avancent portent la marque de l'évidence des faits mais ce moyen ne se révèle pas efficace pour aboutir. En particulier, dans l'assertion de l'élève 36 une *conception erronée* apparaît, à savoir que, *si le périmètre augmente, l'aire augmente aussi* :

(36) "... les côtés de ABCD sont le double des côtés de SPQR".

Cinq élèves (35, 40, 43, 47, 48), deux italiens et trois français, fournissent un résultat correct mais, dans le cas où ils argumentent leur réponse, leurs *explications* ne sont pas convaincantes et peuvent même être incorrectes.

En particulier, dans le discours de l'élève 48, une conception erronée apparaît, à savoir que, *puisque les sommets de SPQR sont les milieux respectifs des côtés de ABCD, alors l'aire est divisée par 2.*

D'après les traces trouvées dans son brouillon, l'élève 47 envisage un recours aux formules de calcul des aires du triangle et du parallélogramme ; peut-être parvient-il à la bonne réponse à l'aide de la perception. Au-delà de la difficulté à accomplir la tâche à travers ces outils, il nous paraît intéressant de souligner que cet élève manifeste des méconnaissances à propos des formules : en fait, il écrit *côté fois côté divisé par 2* aussi bien pour le triangle que pour le parallélogramme. Nous retrouvons le même genre de confusion dans la copie d'un autre élève français (43) qui recourt à la formule de calcul de l'aire d'un trapèze[61] et d'un parallélogramme de manière incorrecte, à savoir $AD \times \frac{(AB+CD)}{2}$ pour l'un et $SP \times PQ$ pour l'autre : en *mesurant les longueurs* de ces segments, il parvient à un résultat approché qui lui permet de conclure correctement. Or, à condition que ABCD soit un trapèze (et, dans ce cas, il aurait dû prouver ou au moins vérifier sur son tracé que AB et CD sont parallèles), la première formule serait correcte s'il était rectangle en D. Mais cet élève ne considère pas non plus la hauteur du parallélogramme. On peut donc reconnaître la même erreur, à savoir qu'il ne considère pas les hauteurs des deux quadrilatères. Ce genre de méconnaissance est présent aussi dans d'autres copies d'élèves français qui d'ailleurs sont les seuls qui ont recours aux formules de calcul des aires pour essayer de répondre à la deuxième question du problème.

L'élève 40 argumente sa réponse avec un discours qui pourrait être correct :

"L'aire de ABCD est le double de celle de SPQR puisque la somme des aires des triangles SBP, PCQ, QDR et RAS est égale à l'aire de SPQR".

---

[61] En effet, à l'œil ABCD semble un trapèze. Signalons cependant que, lors de la résolution du problème 3C, cet élève utilise encore la formule de calcul de l'aire d'un trapèze pour un quadrilatère quelconque. Cette confusion pourrait bien être interprétée comme un effet *institutionnel* : lors de l'analyse des manuels, nous avons en fait constaté que le trapèze est présenté comme un quadrilatère quelconque dont la formule de calcul de l'aire est à déduire par décomposition en triangles.

Remarquons que cet élève trace les diagonales du parallélogramme mais qu'il ne trace pas les diagonales du quadrilatère qui pourraient être utilisées pour aboutir. D'après nous, sa réponse relève de la perception : il semble que les quatre triangles qui composent SPQR sont respectivement congruents aux quatre triangles "extérieurs" au parallélogramme ; autrement, ce sont des pliages figurés qui pourraient "à peu près" le convaincre de l'exactitude de son raisonnement.

Enfin, trois élèves français (41, 42, 44) tentent d'accomplir la tâche en recourant aux formules de calcul des aires mais ils n'aboutissent pas. Pour l'élève 44, l'idée est de considérer le quadrilatère comme la réunion de polygones disjoints dont il sait calculer l'aire. Bien qu'il trace les hauteurs des quatre triangles "extérieurs" au parallélogramme et qu'il utilise correctement la formule de l'aire d'un triangle, il écrit que l'aire de SPQR est égale à $SP \times PQ$. Comme pour les élèves précédents, au-delà de la difficulté à réussir à l'aide de ces outils, l'élève en question manifeste aussi une méconnaissance à propos des formules. De même les deux autres élèves manifestent ces méconnaissances : pour calculer l'aire du parallélogramme, l'un écrit $SP \times PQ$ et l'autre $SP \times PQ \times 2$.

Les discours des élèves

Les résultats de ce problème nous prouvent encore une fois que l'attitude d'un même élève change d'une tâche à l'autre, en fonction de la difficulté rencontrée, mais elle peut aussi changer au sein de la même tâche. Par conséquent, cela rend difficile une hiérarchisation des types de preuve que les élèves produisent.

A propos de la première question, nous retrouvons quelques cas où la preuve porte au moins la marque de l'*exemple générique euclidien*, cela notamment dans les productions des élèves qui adoptent la première approche ; néanmoins, nous avons déjà observé que ces preuves s'avèrent incomplètes. C'est aussi dans ce cas que nous remarquons que la pratique (les gestes) est évoquée, le discours de l'élève restant proche de ce qu'il réalise.

Pour la question sur les aires, comme nous y avons déjà fait allusion, les discours des élèves sont plutôt des *explications* non persuasives ou bien ils s'appuient sur l'*évidence*. En outre, le recours à des propositions fausses amène aussi quelques élèves à produire des *calculs sur les énoncés*.

III.5.3 *L'analyse du Problème 3C*

Il s'agit d'un problème où la figure n'est pas donnée : il faut la tracer dans un cas général en traduisant les données verbales. Les tâches proposées sont du **genre 3** et du **genre 4** : on demande de comparer les aires de deux sous-figures de la figure de départ et, ensuite, on demande de prouver une égalité

donnée, cela concernant encore les aires.

Puisque ce problème est le troisième de la fiche C, nous avons récupéré DIX-HUIT copies d'élèves, NEUF italiens et NEUF français.

Lors de l'analyse *a priori*, nous avons précisé que, pour ce problème, il faut envisager de compléter la figure avec des éléments supplémentaires[62]. C'est l'articulation des propriétés liées à deux configurations de base – la *droite des milieux* et les *triangles ayant un côté commun et tels que la droite passant par le troisième sommet soit parallèle au côté commun* – qui permet d'aboutir.
Contrairement aux autres problèmes proposés, celui-ci offre une solution quasi obligée. En le proposant, nous désirons évaluer la capacité de l'élève a repérer des sous-figures et ainsi des outils particulièrement efficaces pour réussir.

Les résultats recueillis montrent que ce problème demeure difficile pour tous les élèves : sept élèves, six italiens et un français, n'abordent pas le problème ; parmi les autres, l'échec est général, un seul élève produit une preuve concernant la deuxième tâche. Beaucoup d'élèves n'aboutissent pas, d'autres fournissent des *explications* non persuasives et surtout dictées par l'évidence. Mais, un élément nous semble important à signaler : bien que les trois élèves italiens qui abordent le problème, n'aboutissent pas, ils n'envisagent pas le recours aux formules de calcul des aires alors que, parmi les huit élèves français qui l'abordent, pour la quasi-totalité les formules apparaissent comme le seul outil possible à mobiliser. C'est ainsi que, encore un fois, les méconnaissances des élèves français à propos des formules de calcul des aires se manifestent d'une manière évidente : par exemple, pour le calcul de l'aire du triangle, on retrouve souvent la formule *côté fois côté divisé par 2* ou bien *côté fois côté* ; pour le calcul de l'aire du parallélogramme, on trouve *côté fois côté* ou bien *côté fois côté multiplié par 2*, etc.

Ici, il ne nous paraît pas intéressant de détailler l'analyse, nous nous limitons à estimer les résultats dans la globalité en pointant les éléments essentiels qui pourraient justifier le degré élevé d'échec.
C'est à l'élève de relier convenablement les données graphiques et verbales pour considérer un élément supplémentaire qui n'apparaît pas : si l'on trace le segment [OE], diagonale commune aux quadrilatères ROUE et ROXE, on met en évidence la configuration du triangle des milieux ; ensuite il faut envisager une deuxième configuration, à savoir un couple de triangles ayant un côté en commun et le troisième sommet distinct appartenant à une droite parallèle à ce côté, cette configuration demeurant

[62] cf. chapitre 3, § V, *Dans le triangle des milieux : quadrilatères de même aire*

liée à la précédente. Du côté des outils nécessaires à mobiliser, il s'agit du *théorème des milieux* et de la propriété suivante : *étant données deux droites parallèles, tous les points appartenant à l'une sont à la même distance de l'autre*[63].

Évidemment, les résultats montrent que, pour les élèves, l'aptitude à compléter la figure avec des éléments supplémentaires n'est pas encore spontanée. Voici donc un premier obstacle à la réussite : peu d'élèves tracent le segment [OE]. Cette inaptitude dépend strictement d'une autre : les élèves semblent ne pas avoir l'habitude de compléter la figure de manière à faire apparaître les configurations de base qui leur permettraient d'aboutir. Un seul élève (39, italien) complète la figure avec des éléments supplémentaires, ce qui lui permet de répondre correctement à la deuxième question.

A notre avis c'est surtout cette inaptitude qui empêche les élèves italiens de réussir alors que, pour les élèves français, un autre obstacle s'ajoute : lorsqu'ils doivent résoudre un problème sur les aires, ils n'envisagent que le recours aux formules de calcul, un outil qui – d'après les résultats – n'a pas été acquis correctement. Or, si l'on examine les erreurs qui reviennent, on constate que ces élèves ne considèrent jamais les hauteurs des triangles ou des parallélogrammes. En reliant cela à la configuration qu'il faut reconnaître et, par conséquent, à la propriété qu'il faut utiliser pour aboutir, ces résultats prouvent que – dans l'institution française – le chapitre sur les aires n'est pas suffisamment approfondi pour que les élèves puissent apprendre à mobiliser la notion d'aire autrement qu'en relation avec les formules de calcul.

III.5.4 *Conclusions sur les problèmes de la fiche C*

À propos des problèmes de la fiche C, les liens possibles entre les différents problèmes n'apparaissent pas puisque la configuration commune n'est pas mise en évidence par les élèves.

Nous constatons que les élèves ne semblent pas encore avoir développé l'habitude de *travailler* une figure pour repérer des configurations de base utiles pour aboutir : cette incompétence les empêche donc de reconnaître le triangle des milieux et d'exploiter convenablement ses propriétés.

Ces aspects nous incitent à croire que les élèves observés n'ont pas encore acquis l'esprit d'analyse nécessaire pour s'investir d'une manière rentable dans la résolution d'un problème de géométrie. En effet, c'est l'appui sur la perception qui permet à la majeure partie d'entre eux de produire quelques discours qui ont un statut partiel de preuve intellectuelle.

Les résultats recueillis nous ont conduite à réfléchir sur la possibilité de ne plus prendre en compte les

---

[63] On peut aussi connaître directement l'**énoncé de la parallèle** : *deux triangles ayant un côté commun et tels que la droite passant par les troisièmes sommets soit parallèle à ce côté, ont la même aire.*

deux premiers problèmes de la fiche lors de la phase définitive de l'expérimentation. En revanche, compte tenu des objectifs visés dans cette phase de notre travail, il nous paraît intéressant de proposer à nouveau le dernier problème, cela pour recueillir plus d'informations sur l'attitude des élèves face à une difficulté.

III.6 Les problèmes de la fiche D

Dans les deux problèmes, la figure exploitée est la même. Les propriétés explicitées pour résoudre le premier problème, notamment celle relative à la dernière question, suggèrent une des procédures possibles pour construire le quadrilatère décrit dans le deuxième problème. De même ici, le premier énoncé comprend une question sur les aires.

III.6.1 *L'analyse du Problème 1D*

Il s'agit d'un problème dont la figure n'est pas donnée : c'est à l'élève de la produire dans un cas général en traduisant les données verbales. Les tâches proposées sont du **genre 1**, du **genre 2** et du **genre 3** : on demande de préciser la nature d'une sous-figure de la figure décrite dans l'énoncé, ensuite on demande de comparer les aires de deux sous-figures et enfin on demande de chercher des conditions pour que la figure vérifie une condition supplémentaire.

Encore une fois, les élèves ne semblent pas avoir atteint un niveau où l'attitude rationnelle les conduirait à adopter des techniques mathématiques et, par conséquent, à produire des preuves intellectuelles. La perception apparaît encore comme le moyen privilégié pour valider leurs réponses. Ce sont surtout les résultats relatifs à la dernière question qui nous font croire que les élèves manquent d'un esprit d'analyse qui leur permettrait de repérer les bons éléments de la figure, de choisir les outils le plus appropriés et de coordonner convenablement les étapes nécessaires pour aboutir.

Tous les SEIZE élèves – DIX italiens et SIX français – auxquels nous avons proposé ce problème, abordent au moins une question. Ici, nous distinguons trois volets, la *figure*, les *procédures*, les *discours*.

Le tracé et l'usage de la figure

Suivant la manière dont l'on place les points A, B, C et D, on peut obtenir un quadrilatère convexe, concave ou bien croisé. Dans les trois cas, le quadrilatère IJKL sera un rectangle mais dans le dernier

cas, la question sur les aires perdrait son sens. En principe, les élèves devraient considérer les trois cas et exclure celui qui n'a pas de signification lors de l'accomplissement de la deuxième tâche.
Seulement deux élèves (50 et 55, italiens) envisagent plus d'une possibilité : pour l'un (55), nous avons trouvé des traces dans son brouillon mais ensuite il propose le cas convexe ; l'autre élève (50) envisage le cas convexe et le cas croisé mais, pour ce dernier, il ne considère pas les bonnes diagonales, ce qui l'amène à fournir une réponse imprécise à la première question.
Parmi ceux qui ne prennent en compte qu'un seul cas, un seul élève trace un quadrilatère concave (52) mais symétrique par rapport à l'une des deux diagonales et un autre un polygone croisé (64) ; un seul élève (59) positionne les points de façon à obtenir un losange. D'après nous, le fait que les autres élèves tracent les points de manière à obtenir un quadrilatère convexe n'est pas un choix réfléchi, mais cela semble plutôt convenir à leur œil, comme s'ils s'appuyaient sur une règle qui prescrit d'*avoir le tracé le plus lisible possible.*
Cela prouverait que ces élèves n'ont pas encore développé suffisamment l'attitude à considérer une situation donnée dans son exhaustivité mais, compte tenu du fait que dans l'ensemble ils n'ont pas produit de cas particulier de figure, que cette attitude est à peine atteinte.

Nous constatons que les élèves français utilisent les instruments de dessin alors que les élèves italiens produisent plutôt des croquis. En outre, un seul élève trace des éléments supplémentaires qui lui sont utiles pour répondre à la question sur les aires ; toutefois, nous verrons que cet élève ne justifie pas sa réponse. Cela prouve encore que les élèves n'ont pas l'habitude de compléter la figure pour faire apparaître des sous-figures utiles pour aboutir.

Les réponses et les procédures des élèves

Compte tenu de la structure de l'énoncé, nous analysons séparément les résultats qui concernent les trois tâches :

- QUESTION A. Nature de IJKL
- QUESTION B. Comparaison des aires de ABCD et IJKL
- QUESTION C. Position du point D pour que IJKL soit un carré.

Pendant cette phase de l'analyse, nous précisons si l'élève répond à la question en explicitant ou non la procédure adoptée ; nous résumons ces éléments selon les items suivants :

La réponse	Est-ce que l'élève répond à la question ?	**N** Non **O** Oui (dans ce cas, nous signalons si la réponse est correcte ou non)
L'usage de la procédure	Est-ce que l'élève explicite une procédure ?	**N** Non **O** Oui (dans ce cas, nous signalons si la procédure est correcte, incomplète, etc.)

Tableau 5.15 – La question A dans le problème 1D

		La réponse	L'usage de la procédure
Élèves italiens	**50**	Correcte	Incomplet part correct
	51	Correcte	N
	52	Incorrecte	Incorrect
	53	Incorrecte	N
	54	Incorrecte	N
	55	Incorrecte	N
	56	Correcte	Incorrect
	57	Correcte	N
	58	Correcte	N
	59	Incorrecte	N

		La réponse	L'usage de la procédure
Élèves français	**60**	Correcte	Part correct
	61	Correcte	N
	62	N	N
	63	Correcte	Correct
	64	N	N
	65	Correcte	Correct

QUESTION A. Concernant la première question, deux élèves (62 et 64, français) ne fournissent pas de réponse. Ici, la perception semble jouer un rôle essentiel au point que quelques élèves, ayant confiance en leur tracé (croquis), fournissent une réponse incorrecte. D'autre part, on constate aussi que, en général, les élèves n'explicitent pas une procédure, cela étant un autre indice qui confirmerait qu'ils se contentent de *lire* sur le tracé.

Quatre élèves (51, 57, 58 et 61), trois italiens et un français, fournissent une réponse correcte dont la perception semble être un moyen de validation.

Trois élèves (53, 54 et 59, italiens) semblent interpréter incorrectement la consigne : deux élèves répondent qu'il s'agit d'un quadrilatère irrégulier alors que l'autre – ayant tracé les couples de points de manière à être symétriques par rapport au point de concours des droites perpendiculaires – répond qu'il s'agit d'un losange.

L'élève (52) qui trace un quadrilatère concave, répond qu'il s'agit d'un trapèze isocèle :

> **(52)** "La figure est un trapèze isocèle car la distance de I et de L , de J et de K de la droite r[64] est la même mais, en plaçant les points différemment, ce ne serait certainement pas un trapèze".

Son tracé est réalisé à main levée, une raison de plus pour qu'il mobilise convenablement les outils dont il est censé disposer, il fait montre d'un certain souci à propos de la disposition des points mais, évidemment, son *attitude rationnelle* n'étant pas encore suffisamment développée, il n'aboutit pas. Probablement, dans une situation de débat, un tel élève réussirait à faire évoluer ses conjectures.

Pour un autre élève (55), il s'agit d'un trapèze mais il n'argumente pas sa réponse.

Dans les copies restantes, les élèves fournissent des réponses correctes en les justifiant. Deux élèves

[64] Il nomme r et r' les deux droites perpendiculaires citées dans l'énoncé.

français (63 et 65) suivent la même procédure envisagée dans notre analyse *a priori*[65] (cf. **Solution E_1**) : ils mobilisent d'une manière contextualisée le *théorème des milieux* et ensuite les propriétés *des droites parallèles à une même droite* et *des droites respectivement parallèles à des droites perpendiculaires*.

Nous retrouvons la même idée de fond dans la production d'un élève italien (56) qui pourtant, au lieu de mobiliser l'énoncé direct du théorème de milieux, recourt d'une manière contextualisée à sa réciproque ; son discours est incomplet car il déduit que IJKL est un parallélogramme mais il ne prouve pas qu'il s'agit d'un rectangle. La confusion entre énoncé direct et réciproque est tout à fait typique au niveau scolaire concerné et, vraisemblablement, elle est induite par la perception, le parallélisme des côtés opposés pouvant se percevoir sur le tracé.

Un autre élève français (60) recourt à la réciproque du théorème de Thalès :

> "Le quadrilatère IJKL est un rectangle. Démontrons que [IJ] est // à [AC], dans le triangle BAC. On sait par hypothèse que I est sur [AB] à la même distance de A que de B, et que J est sur [BC] à égale distance de B que de C. Calculons les quotients $\frac{BI}{IA}$ séparément de $\frac{BJ}{JC}$ et comparons-les. $\frac{BI}{BA}=\frac{2,2}{4,5}\approx 0,48$ et $\frac{BJ}{BC}=\frac{1,6}{3,5}\approx 0,48$: ces quotients sont égaux, donc $\frac{BI}{IA}=\frac{BJ}{JC}$, alors [IJ] // [AC] d'après la réciproque du théorème de Thalès..."

Il poursuit de la même manière en prouvant que [LK] est parallèle à [AC] et que [JK] et [IL] sont parallèles à [BD]. Il conclut comme dans les cas précédents, en mobilisant encore d'une manière contextualisée les outils en question. Au-delà du fait que l'élève semble hésiter sur le choix des segments, on peut constater que les mesures sont imprécises et contradictoires : l'élève souligne que *I est sur [AB] à la même distance de A que de B* mais le fait que AI = 2,2 et AB = 4,5 ne semble pas le gêner ; en outre, les résultats sont faux[66] – $\frac{2,2}{4,5}=0,4888...$ et $\frac{1,6}{3,5}=0,457...$ – mais l'élève les arrange de façon à pouvoir utiliser *la réciproque du théorème de Thalès* car il voit sur son tracé que les droites sont parallèles. Il est bien entendu qu'ici le recours à l'intuition est tout à fait légitime pour repérer les outils nécessaires ; toutefois, nous croyons que cet élève a l'habitude d'utiliser l'outil en question seulement dans un cadre numérique, ce qui l'amène à aller aussi contre sa logique car – puisque *I est sur [AB] à la même distance de A que de B* – il pourrait déduire directement que le coefficient de proportionnalité est égal à ½. En outre, si l'élève avait une conception de la notion de *contraposée*, cela l'obligerait à remettre en question son raisonnement.

D'une nature tout à fait différente est la procédure d'un élève italien (50) qui effectue un changement de cadre en exploitant les droites perpendiculaires en tant qu'axes d'un repère orthogonal. L'idée de

---

[65] cf. la Solution E_1 (chapitre 3, § VI, *Le parallélogramme des milieux I*) où il faut ajouter l'étape qui permet de conclure que le parallélogramme est un rectangle.

fond est la suivante : il recourt d'une manière contextualisée à la formule permettant de calculer les coordonnés du milieu d'un segment pour prouver que I et J ainsi que L et K ont la même abscisse. C'est ainsi que l'élève pourrait conclure en organisant convenablement les propriétés qu'il vient de mettre en évidence. Toutefois, il nous semble que *l'évidence fait obstacle* et l'amène à produire un discours confus et incomplet :

> "Puisque les points ont les mêmes abscisses ou les mêmes ordonnées, on peut observer pendant la construction que les côtés opposés sont parallèles (en effet, ils ont le même coefficient directeur, 0 dans le cas des ordonnées et infini dans le cas des abscisses) et qu'elles [les droites] forment un parallélogramme".

L'élève ne pose aucun calcul : nous supposons qu'il voit sur le tracé que les droites sont parallèles aux axes et donc parallèles entre elles ; dans la démarche de l'élève, il est évident qu'une droite passant par deux points ayant une coordonnée égale, est parallèle à l'un des axes du repère et donc il ne réussit pas à expliciter cette propriété.

QUESTION B.

Tableau 5.16 – La question B du problème 1D

		La réponse	L'usage de la procédure
Élèves italiens	50	Correcte	Correct
	51	Correcte	N
	52	N	N
	53	N	N
	54	N	Incomplet
	55	Correcte	N
	56	Correcte	N
	57	Correcte	Correct
	58	N	N
	59	Correcte	N

		La réponse	L'usage de la procédure
	60	Correcte	Part. correct
Élèves français	61	N	N
	62	N	Incomplet correct
	63	Correcte	Part. correct
	64	N	Incomplet correct
	65	Correcte	N

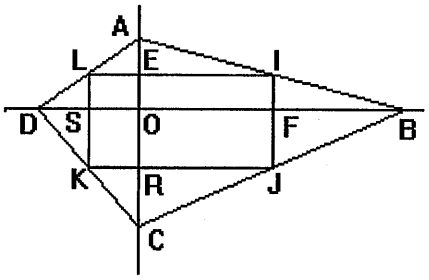
Concernant la question sur les aires, la perception apparaît comme le moyen privilégié des élèves pour valider leurs réponses. Les formules de calcul des aires sont moins exploitées mais les élèves français qui y recourent manifestent leurs méconnaissances.

Rappelons qu'un élève (52) trace un quadrilatère concave : il n'aborde pas la question sur les aires mais aucun indice ne permet de conclure si cela est l'effet d'une difficulté due à la nature de son tracé ou bien au genre de tâche en question ; un élève (59) trace un losange : il fournit une réponse correcte sans pourtant la justifier ; un élève (64) trace un quadrilatère croisé : il aborde cette question sans pourtant parvenir au résultat cherché. Tous les autres élèves tracent un quadrilatère convexe.

[66] Soulignons qu'aussi dans les autres calculs, les mesures utilisées sont imprécises et les résultats sont faux.

Quatre élèves (52, 53, 58 et 61) ne fournissent pas de réponse, l'un des quatre (58) affirmant qu'il n'existe pas de relation entre les aires des deux quadrilatères. L'élève (64) qui trace un polygone croisé ne considère pas que, dans ce cas-là, la question perd son sens mais il s'agit évidemment d'un effet de contrat car, au niveau scolaire concerné, rien n'est jamais dit à ce propos. En recourant au mesurage, l'élève calcule donc l'aire du rectangle et puis celle des deux triangles qui constituent le polygone mais il ne conclut pas ; même si la procédure n'est pas correcte, remarquons que les formules sont utilisées correctement. Deux élèves (54 et 62) ne concluent pas non plus : l'un (54) se limite à affirmer que *les aires sont proportionnelles par les critères de similitude des triangles* mais il n'argumente pas son assertion ; l'autre (62) démarre bien car il considère que, puisque (AC) est perpendiculaire à (BD), on peut calculer l'aire de ABCD *à l'aide des quatre triangles rectangles qui sont formés grâce aux perpendiculaire* et qui constituent le quadrilatère en question. Toutefois, comme il ne cherche pas de relation entre les longueurs des côtés de ces triangles et celles des côtés du rectangle, il conclut simplement en affirmant que *l'aire de ABCD est plus grande que celle de IJKL car IJKL est dans ABCD.* Remarquons qu'il utilise correctement les formules de calcul de l'aire du triangle alors que, pour le rectangle, il écrit 2(IL×LK).

Neuf élèves fournissent une réponse correcte. Quatre élèves italiens (51, 55, 56 et 59) n'argumentent pas leur réponse ; un élève français (65), celui qui trace les segments qui joignent les sommets de IJKL au point de concours de droites perpendiculaires, affirme que *IJKL donne l'impression d'avoir la moitié de l'aire de ABCD* : il est clair à travers l'ensemble de sa production que *l'évidence fait obstacle* et l'empêche de mobiliser les outils qui conviennent pour valider sa conjecture. De même pour un élève italien (50), l'évidence fonctionne en obstacle : en utilisant ce qu'il vient d'établir implicitement pour répondre à la question précédente, il déduit que FBI et AEI sont congruents (cf. tracé ci-après) et chacun est *la moitié du quadrilatère OEIF.* Il réitère la procédure pour les autres triangles et parvient au résultat cherché. Bien que la procédure soit correcte, l'élève ne mobilise explicitement aucun outil qui puisse la justifier ; remarquons que l'élève ne marque pas les segments de même longueur mais, comme pour la question précédente, l'évidence l'empêche d'argumenter davantage ses assertions.



Trois élèves recourent aux formules de calcul des aires. Deux élèves (57 et 60) y recourent après avoir mesuré les longueurs qui conviennent : l'un (57) utilise les formules de calcul de l'aire du rectangle et du quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires ; l'autre élève (60) utilise correctement la

formule pour le rectangle alors qu'il considère ABCD comme un trapèze en écrivant ainsi : $\frac{AB\times(BC+AD)}{2}$. Rappelons que nous avons rencontré le même type de "formule" lors de l'analyse du problème 2C, question B.

Outre une utilisation erronée de la formule de calcul de l'aire du quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires (AC×BD), dans la procédure d'un élève (63), nous avons repéré une erreur de calcul (1/2 AC×1/2BD = ½ (AC×BD)) : une erreur effaçant l'autre, l'élève obtient un résultat exact. A part cela, pour prouver que les longueurs des diagonales de ABCD sont proportionnelles aux longueurs des côtés de IJKL, cet élève recourt au *théorème de Thalès* dans les triangles ABD, BCD, ABC et ACD en exploitant le fait que IJKL est un rectangle.

QUESTION C. Concernant la dernière question, entre les élèves italiens et français, l'échec est partagé : aucun élève ne mobilise les outils qui conviennent. Sept élèves, cinq italiens et deux français, n'abordent pas la question. Parmi les autres, quelques élèves mobilisent un outil qui ne se révèle pas efficace : ils affirment qu'il faut que les côtés de IJKL soit de même longueur, cela en faisant allusion à la *définition de carré* comme rectangle particulier. Enfin, certains élèves fournissent des réponses inefficaces mais surtout reliées à l'action et au contexte. Par exemple, un élève affirme qu'*il faut placer le point D plus haut sur la droite.*

Les discours des élèves

Le changement de technique d'une question à l'autre influe évidemment sur les types de preuves produites : en effet, si l'on regarde le problème dans son ensemble, très peu d'élèves fournissent des preuves et encore moins d'élèves produisent des preuves intellectuelles.

Concernant la première question, seulement deux élèves français (63 et 65) produisent une preuve complète et correcte, portant la marque de l'*exemple générique euclidien*. Dans le discours de l'élève (50) qui introduit un repère orthogonal, nous reconnaissons une preuve où l'*évidence* fonctionne en *obstacle*, l'élève ne réussit pas à articuler convenablement ses connaissances pour produire une véritable preuve intellectuelle. Pour les autres élèves, l'*évidence des faits* est la source privilégiée pour valider leurs réponses.

Concernant la deuxième question, l'*évidence des faits* est encore la source privilégiée de validation. Pour l'élève 50, l'*évidence* fonctionne encore en *obstacle* : les outils mobilisés demeurent implicites et surtout il ne développe pas ses assertions qui sont pourtant correctes.

Les discours fournis pour répondre à la dernière question peuvent être étiquetés comme des *explications* dont la vérité est tout à fait discutable.

III.6.2 *L'analyse du Problème 2D*

Il s'agit d'un problème de construction dont la figure est à faire. Les tâches sont du **genre 5**, **genre 6** et **genre 7** : on demande de tracer une figure suivant des conditions imposées ; on demande ensuite de rédiger un programme de construction et de le justifier. Ici, contrairement au problème 2A, tout est à l'initiative de l'élève.

Lors de l'analyse *a priori*, nous avons considéré que, dans le programme de construction, il faut distinguer deux phases, l'une permettant de placer le premier sommet du quadrilatère cherché et l'autre de le construire suivant les conditions imposées. Pour la deuxième phase, plusieurs procédures sont possibles[67] et, pour les justifier, on peut recourir aussi bien aux outils traditionnels qu'à ceux de la géométrie des transformations.

Pour les élèves italiens, l'échec est général, ce qui prouverait – en associant ces résultats avec ceux des deux autres problèmes du même genre – qu'ils n'ont pas l'habitude de résoudre des problèmes de construction, de s'investir d'une manière constructive dans l'analyse de ce type de problèmes géométriques. En revanche, les élèves français s'investissent dans l'accomplissement de la tâche relative à la construction : ils font preuve de bonne capacité d'initiative, compte tenu de ce qui restait à leur charge. Cependant, ils montrent leur manque d'aisance lorsqu'ils doivent décrire et surtout justifier un programme de construction. Suivant nos prévisions, des éléments de construction demeurent souvent implicites, la perception jouant encore un rôle fondamental.

Ce problème étant le deuxième proposé dans la fiche D, nous avons récupéré SEIZE copies d'élèves, DIX italiens et SIX français.

Les résultats sont assez significatifs : aucun des élèves italiens n'accomplit correctement la tâche ni ne produit de véritable programme de construction et encore moins de preuve. Cinq élèves italiens (51, 53, 54, 55, 59) n'envisagent qu'un cas particulier de figure, à savoir un carré circonscrit au carré donné : leurs commentaires attestent que, d'après eux, ce cas-là est le seul possible pour respecter les conditions imposées. Trois élèves (52, 56, 58) produisent un tracé complet mais sans respecter pas la condition de l'angle droit : ils ne fournissent pas assez d'informations permettant de savoir comment ils choisissent le point de départ mais, évidemment, à partir de ce point, ils tracent successivement les symétriques par rapport aux sommets de AIEO ; ils ne se posent pas la question de l'incidence des

---

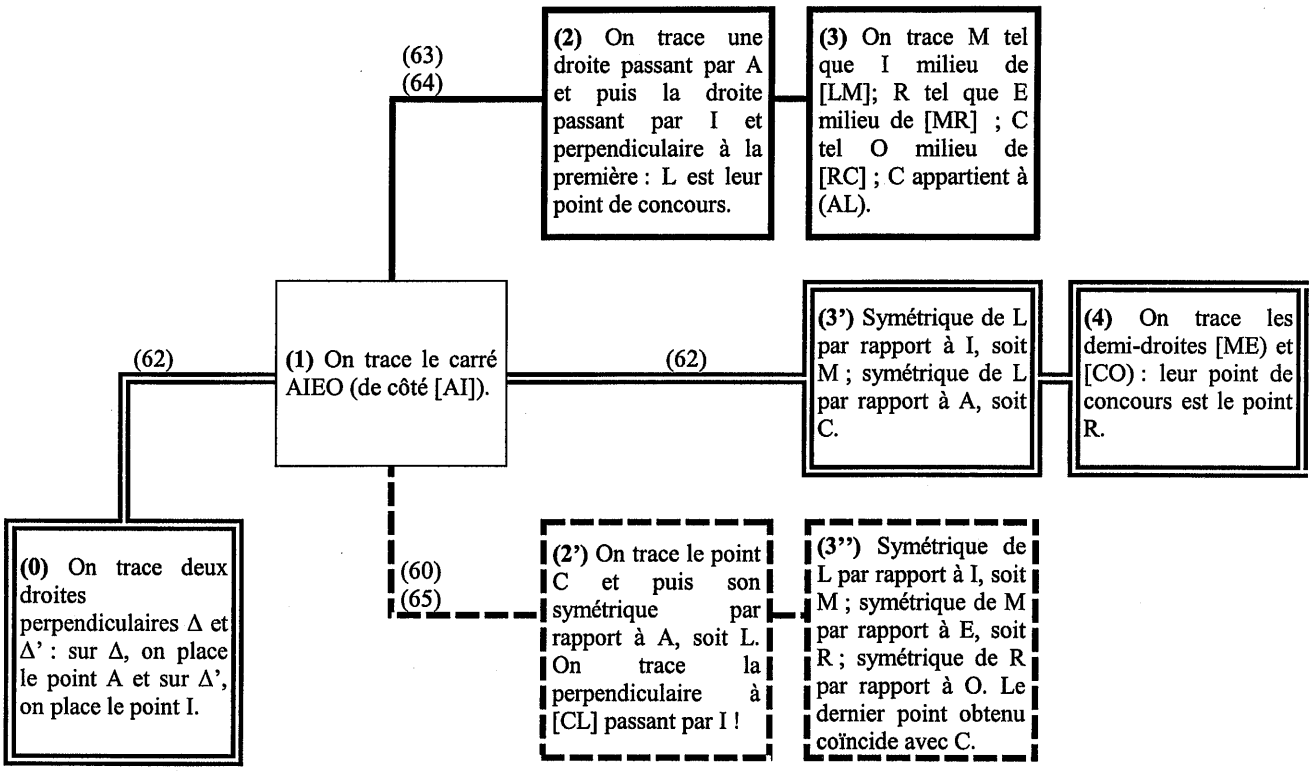
[67] Cf. chapitre 3, § VII, *Le parallélogramme des milieux : un problème de construction*

points. Nous pouvons supposer que le point de départ est choisi *à l'œil* pour que l'angle droit soit à l'intérieur du quadrilatère cherché[68] ; le fait que ce point coïncide avec le point final les rassure sur l'exactitude de leur construction. Enfin, un élève (57) interprète incorrectement la tâche – il trace deux carrés l'un à côté de l'autre et tels que CL = 2 OA, etc. – et un dernier (50) amorce la construction mais il se désiste.

Tout à fait différente est l'attitude des élèves français. Un seul élève (61) envisage un cas particulier :

> "On trace deux droites perpendiculaires. Le point d'intersection de ces deux droites est le centre du carré AIEO. Δ coupe [OA] et [EI] en leur milieu. Δ' coupe [AI] et [OE] en leur milieu. On trace un arc de cercle de longueur [AI] de part et d'autre du point d'intersection de Δ et Δ'. Ensuite, on relie LC, CR, RM, ML"

Bien que le programme soit incorrect, remarquons que c'est le seul élève – parmi ceux qui considèrent un *carré dans un carré* – qui décrit sa construction.



Dans les cinq copies restantes, nous avons reconstitué trois procédures différentes (cf. le schéma ci-dessus) : tous les tracés produits sont corrects mais ce sont les programmes de construction qui présentent des défauts plus ou moins importants : dans deux des procédures décrites, les élèves exploitent implicitement la convexité de la figure à tracer alors que dans l'autre, les élèves ne s'aperçoivent pas d'un surplus de conditions et, par conséquent, d'une contradiction possible dans le

[68] Rappelons que, dans ce cas, le quadrilatère est convexe.

discours fourni. Dans les trois procédures, nous constatons qu'en fait certains détails apparaissent comme évidents : dans un cas, ces détails demeurent implicites mais, dans l'autre cas, ils conduisent à l'erreur lors de la rédaction du programme effectué. En tout cas, ces résultats prouvent que les élèves français s'investissent davantage dans ces types de problèmes géométriques, ce qui est dû probablement au fait qu'ils font partie de leur apprentissage de la géométrie.

- Dans la procédure (1) (2) (3), pour que l'angle droit soit à l'intérieur du quadrilatère, il faut choisir la droite passant par A telle qu'elle ne coupe ni [IE] ni [EO] ou bien qu'elle forme avec [OA] un angle inférieur à 90°. Ce détail demeure implicite dans le programme de construction rédigé par les élèves 63, 64 qui recourent à cette procédure ; néanmoins, son absence peut être justifiée car, dans l'enseignement secondaire, les questions de convexité sont souvent négligées.

- Dans la procédure (1) (2') (3''), le point C n'est pas placé au hasard mais de façon que l'angle CLI obtenu soit droit. Nous considérons l'absence de ce détail comme une erreur car, au niveau concerné, les outils mobilisés pour le mettre en évidence sont connus par les élèves. Cette erreur porte donc sur le fait qu'ils construisent d'abord le segment [CL] "au hasard" et qu'ensuite ils prétendent tracer la droite perpendiculaire à ce segment et passant par les points L et I. Ainsi faisant, ils ont un surplus de conditions : ils obtiennent une figure où l'angle CLM est droit mais la perpendiculaire à [CL] ne passe pas par I ou bien ils obtiennent le contraire. Seulement ce n'est que si C est choisi convenablement que l'on pourra respecter à la fois les trois conditions (passage par les deux point et orthogonalité). Contrairement à ce que les deux élèves (60 et 65) affirment, puisqu'ils tracent une figure correcte, le point C n'est pas quelconque.

- Dans la procédure (0) (1) (3') (4), les défauts précédents sont esquivés car l'élève (62) trace d'abord l'angle droit et puis le carré AIEO. Évidemment, les deux premiers sommets du carré sont placés à l'*intérieur* de l'angle droit pour que le quadrilatère à tracer soit convexe : des traces effacées nous permettent de constater que l'élève fait attention de choisir les points A et I de manière à avoir AL≠LI. En quelque sorte, ici aussi la question de la convexité demeure implicite.

Admettons les défauts repérés dans les trois programmes de construction. Dans le premier programme ((1) (2) (3)), il suffit de prouver que C appartient à (AL) et A milieu de [CL] ; dans le deuxième ((1) (2') (3'')), il faut prouver que le dernier point coïncide avec le point de départ, ce qui revient au même ; dans le troisième ((0) (1) (3') (4)), il faut prouver que E et O sont les milieux respectifs de [MR] et [RC]. Évidemment, dans les deux premiers cas, la preuve est difficile (voire inhabituelle), compte tenu du niveau scolaire concerné, comme nous l'avons vu dans l'analyse *a priori*.

Pour les deux élèves 63 et 64, la preuve qu'ils produisent ne correspond pas au programme décrit. Il faudrait qu'ils prouvent que C appartient à (AL). En réalité, ces élèves lisent ce détail sur le tracé, cela suffisant à les rassurer sur l'exactitude de la construction effectuée, et prouvent des propriétés qui sont vraies par construction : l'un (63) recourt au mesurage pour vérifier que les sommets du carré sont bien les milieux des côtés du quadrilatère, l'autre recourt au mesurage pour ensuite appliquer la *réciproque du théorème de Pythagore* pour prouver que CLM est un angle droit.

L'élève 62 ne fournit pas de preuve. Remarquons qu'elle serait tout à fait faisable, en mobilisant la *réciproque du théorème des milieux* mais qu'il faudrait tracer la diagonales [LR] du quadrilatère : c'est peut-être à cause du fait qu'il faut envisager un élément supplémentaire que l'élève n'accomplit pas la tâche.

Les élèves 60 et 65 concluent que c'est par construction que la figure obtenue répond bien aux conditions imposées (*définition de milieu d'un segment*) mais ils ne se posent pas la question de la coïncidence de points : dans la démarche des élèves, ce détail se justifie sûrement de lui-même lors de la construction.

III.6.3 *Conclusions sur les problèmes de la fiche D*

Dans le deuxième problème de la fiche D, la figure à construire est un cas particulier de la figure décrite dans le premier problème où d'ailleurs la dernière question y fait directement appel en suggérant des éléments d'analyse éventuels pour la réalisation de la construction.
En ce sens, les élèves montrent ne pas avoir un esprit d'analyse suffisamment développé pour percevoir les liens existant entre les deux problèmes de la fiche. A cela s'ajoute probablement le fait que les élèves – surtout italiens – ont une difficulté à adopter l'attitude la plus convenable pour accomplir les tâches relatives à une construction géométrique, ce qui les empêche d'exploiter des éléments communs aux deux situations proposées.

IV. CONCLUSIONS

IV.1 L'analyse des résultats par genre de tâche

Une fois tous les problèmes analysés, nous avons repéré les éléments les plus significatifs permettant de comparer par genre de tâches les résultats recueillis. Cela qui nous a permis, entre autres, d'évaluer l'influence de l'*habillage* de l'énoncé par rapport à la réussite des élèves, certaines habitudes que l'élève acquiert au sein de l'institution à laquelle il appartient mais aussi des attitudes plus générales que l'on retrouve aussi bien chez les élèves italiens que chez les élèves français.

GENRE DE TACHE 1. Ce genre de tâche concerne les questions $1C_1$, $1D_a$.
En proposant ce genre de tâche, on peut évaluer si l'élève se contente encore de recourir à la perception et, par conséquent, s'il produit encore des preuves s'appuyant sur l'évidence.
D'après les résultats de nos analyses, nous constatons que les élèves réussissent au moins à fournir une réponse, celle-ci pouvant se lire sur le tracé ; toutefois, c'est l'absence d'une preuve intellectuelle justifiant la réponse qui nous permet d'établir que la plupart des élèves observés – surtout italiens – ont encore tendance à préférer des techniques perceptives et, par conséquent, à produire des preuves pragmatiques. Nous ne croyons pas que cette réticence à adopter une attitude rationnelle soit due à la complexité des tâches proposées car, dans les deux cas, les outils à mobiliser sont tout à fait à la portée d'élèves du niveau concerné.
Puisque, en général, ce sont les élèves italiens qui s'investissent le moins dans la production d'une preuve, nous estimons que cela est l'effet d'un enseignement où l'élève ne reçoit pas de prescriptions précises sur la manière de valider ses assertions et que, par conséquent, il privilégie les moyens les plus spontanés.

GENRE DE TACHE 2. Ce genre de tâche concerne les questions $1C_2$, $1C_3$, $1D_c$.
Suivant nos prévisions, l'expérience en termes d'action mentale joue un rôle essentiel pour que les élèves fournissent une réponse aux questions posées. Toutefois, dans la plupart des productions analysées, cette expérience semble empêcher les élèves d'aller plus loin et, par conséquent, d'expliciter clairement la technique adoptée et de produire des preuves de type intellectuel.
À propos des tâches incluses dans le problème 1C, les suggestions fournies sont plus prégnantes et surtout on demande à l'élève de travailler sur des quadrilatères qui lui sont familiers : il connaît la caractérisation de l'un par rapport à l'autre et cette connaissance lui permet de repérer dans la figure globale les éléments nécessaires pour justifier éventuellement sa réponse. En d'autres termes, nous croyons que, pour les tâches $1C_2$, $1C_3$, les élèves réussissent mieux car, d'une part la formulation de

l'énoncé suggère explicitement les éléments à prendre en compte pour les accomplir et, d'autre part, ces éléments sont suffisamment connus, ce qui pourrait conduire quelques élèves à ne pas vraiment s'investir dans la production d'une preuve intellectuelle, non parce que la tâche est complexe mais parce que une telle production leur apparaît comme inutile.

En revanche, la tâche $1D_c$ s'avère problématique non seulement parce que la perception n'est pas un moyen efficace pour aboutir mais aussi parce que l'on demande de caractériser la position d'un point alors que, pour répondre, il faut prendre en compte la propriété de segments. Ici, l'examen de la figure en jeu ainsi que des propriétés relatives sont tout à fait nécessaires, les techniques perceptive ou liées à la reconnaissance d'une configuration particulière pourraient aider l'élève à repérer les outils à mobiliser mais elles ne suffisent pas, se révélant infructueuses pour parvenir au résultat cherché. Finalement, avec cette tâche – telle qu'elle est formulée – nous pouvons évaluer si l'élève a effectivement atteint le niveau où l'attitude rationnelle lui permet de se détacher du pragmatique.

GENRE DE TACHE 3. Ce genre de tâche concerne les questions 1A, $1B_d$, $2C_b$, $3C_a$, $1D_b$.

Pour ce genre de tâche, il nous paraît légitime et évident de conclure que la réaction des élèves est strictement liée non seulement à la notion en jeu mais aussi à la nature de la figure sur laquelle ils doivent travailler.

Dans la démarche des élèves des deux institutions, la nécessité d'envisager des éléments supplémentaires sur la figure de départ n'est pas du tout spontanée. L'attitude à compléter ou à décomposer efficacement une figure donnée et à établir des relations entre des sous-figures qui n'apparaissent pas explicitement ne semble pas encore acquise, cet indice se reliant d'une manière plus générale au fait que les élèves ne semblent pas avoir développé l'esprit d'analyse nécessaire pour accomplir une tâche géométrique.

Pour le reste, nous croyons que d'autres considérations demeurent strictement liées à l'institution à laquelle l'élève appartient.

Les élèves français ne réussissent pas aisément à considérer les questions sur les aires avec d'autres outils que les formules de calcul : lorsqu'ils le font, nous avons remarqué qu'ils ne réussissent pas à justifier rationnellement leurs réponses ou bien ils se contentent de s'appuyer sur la perception sans compter que, dans certains cas, leur logique va contre ce qu'ils perçoivent sur le tracé.

En outre, puisque ces formules ne semblent pas être acquises toujours d'une manière correcte, leurs procédures présentent souvent des erreurs. L'attachement à ces outils semble les empêcher de voir la figure autrement : si on leur demande de comparer les aires de deux triangles donnés, ils n'examinent la figure qu'en ces termes et, évidemment, dans le cas de quadrilatères, cette attitude demeure infructueuse car elle ne les amène pas à considérer autrement la figure de départ, en mettant en évidence des sous-figures plus efficaces pour aboutir.

En revanche, les difficultés des élèves italiens semblent plutôt être la conséquence d'une incapacité à s'investir convenablement dans la résolution d'un problème géométrique. La familiarité avec une configuration de base – comme, par exemple, le triangle des milieux – ou bien la perception semble leur suffire pour répondre aux questions sans justifier les réponses ou bien pour ne pas expliciter tous les passages de la procédure mathématique adoptée. C'est ainsi que, même si nous constatons qu'ils ne recourent pas facilement aux formules de calcul des aires, dès que la situation se fait plus complexe, ils se désistent. Comme les élèves français, les tâches où les figures à considérer sont des quadrilatères sont problématiques pour eux aussi : à notre avis, l'inaptitude à envisager des éléments supplémentaires de la figure ne leur permet pas de rendre assez efficaces des outils tels que les critères de similitude et de congruence.

GENRE DE TACHE 4. Ce genre de tâche concerne les questions $1B_a$, $1B_b$, $1B_c$, $3C_b$.
Les résultats recueillis à propos de ce genre de tâches confirment notre opinion. Les élèves italiens ne semblent pas avoir l'habitude de traiter des problèmes de démonstration alors que l'attitude des élèves français apparaît comme un effet de contrat : la demande forte de la part de l'institution à rédiger des preuves, à justifier leurs assertions les amène à s'investir davantage. C'est ainsi que l'analyse de leurs productions nous permet de relever une difficulté à coordonner leurs intuitions ainsi qu'à enchaîner d'une manière correcte leurs déductions. En effet, lorsque la perception ne les aide pas à démarrer (voir le cas de la tâche $3C_b$), ils échouent. Évidemment, cette attitude est aussi à relier à l'incapacité de prendre en compte des éléments supplémentaires de la figure en jeu.

GENRES DE TACHE 5, 6 et 7. Ces genres de tâche concernent les problèmes 2A, 2B, 2D et elles acquièrent du sens seulement si on les analyse conjointement.
Au-delà du fait que la formulation des énoncés qui incluent ces genres de tâches a été l'une des causes de la non réussite des élèves, nous pensons que les élèves italiens ne semblent pas avoir beaucoup de familiarité avec les problèmes de construction alors que les élèves français rencontrent des difficultés à discerner la description d'une construction (tâche 6) de sa justification (tâche 7).

IV.2 Quelques conclusions générales sur la phase pré-expérimentale

Les objectifs visés pendant cette phase de la recherche étaient les suivants :

- réexaminer les problèmes proposés et leur donner éventuellement une forme nouvelle ;
- chercher des critères pertinents pour organiser le dépouillement de la phase expérimentale définitive ;

- recueillir des éléments d'analyse qui méritent un approfondissement ;
- repérer des piste pour quelques conclusions intéressantes au vu des objectifs de la recherche.

Nous renvoyons au chapitre suivant le développement des deux premiers points ci-dessus résumés. En revanche, ci-après nous discutons quelques aspects d'ordre général permettant d'avancer des hypothèses plus précises concernant le rapport au savoir des élèves des deux institutions. Ces hypothèses seront à confirmer dans la partie expérimentale.

En examinant le tracé dans les productions des élèves, nous avons repéré des éléments qui caractérisent en quelque sorte les élèves des deux institutions en question. En effet, en général, les élèves français reproduisent les figures décrites dans les divers énoncés avec précision et soin alors que les élèves italiens se contentent de réaliser des croquis à main levée. Cette attitude est sans doute un effet de contrat car, d'après les prescriptions des textes officiels, l'élève français est amené à recourir aux instruments de dessin depuis les premières classes du Collège alors que, dans l'institution italienne rien de précis n'est jamais dit à cet égard.
À propos du codage du tracé par des lettres et des marques, nous constatons que les élèves ne s'en servent pas beaucoup. Ce sont exclusivement les élèves italiens qui codent les angles, cela étant utile lorsqu'ils mobilisent les critères de congruence et de similitude des triangles.

Au-delà des éléments d'une figure mis en évidence dans l'énoncé d'un problème, nous avons souligné à plusieurs reprises que les élèves montrent ne pas avoir d'inclinaison à considérer des éléments supplémentaires qui permettraient d'exploiter des sous-figures utiles pour avancer dans la résolution du problème : nous rattachons cette inaptitude à un esprit d'analyse qui n'est pas encore suffisamment développé. D'autre part, nous constatons que, lorsque la figure proposée est riche d'éléments ou bien doit être inévitablement complétée, les élèves manifestent une difficulté à repérer convenablement les outils nécessaires pour accomplir la tâche et, par conséquent, à organiser une technique mathématique que, au niveau scolaire concerné, l'élève est censé adopter. En réalité, nombreux sont les cas où les élèves changent de catégorie de techniques au cours du même problème.

Nous avons souvent souligné que les élèves français s'investissent plus que les élèves italiens, ce qui justifie – dans certains cas – le nombre élevé de conceptions erronées qui apparaissent dans leurs copies. Cela nous paraît un effet de contrat, comme nous le précisons ci-dessous.

A propos du style de rédaction d'une preuve, nous avons aussi repéré des éléments qui caractérisent les élèves des deux institutions : les élèves italiens utilisent souvent un langage symbolique, ils adoptent un style très laconique et explicitent rarement les outils mobilisés. En revanche, les élèves français

utilisent beaucoup le langage naturel et évoquent explicitement les outils qui apparaissent comme les plus importants dans leurs cours de géométrie. Cette attitude à rédiger soigneusement leurs productions est aussi l'effet d'un contrat car, depuis les premières classes de Collège, ils sont poussés à de tels exercices : dans les manuels scolaires, on retrouve souvent des activités dont l'objectif principal est celui d'entraîner l'élève à cette activité. D'ailleurs, nous avons remarqué que les auteurs des manuels envisagent explicitement un apprentissage de la rédaction d'une démonstration.

En ce qui concerne les outils que les élèves mobilisent plus aisément, nous constatons que les élèves français comme les élèves italiens préfèrent recourir aux outils de la géométrie classique sans compter que, dans certains cas, ce sont plutôt les élèves italiens qui exploitent les propriétés des transformations géométriques.

La partie pré-expérimentale nous a permis une analyse approfondie des problèmes et nous a éclairée sur les productions que nous pouvions attendre des élèves. Cela nous a permis de sélectionner les questions les plus pertinentes relativement aux genres de tâches explorés pour les proposer à un nombre plus important d'élèves.

L'analyse détaillée de quelques exemples nous a amenée à préciser la partie théorique et à définir un cadre d'analyse pour la partie expérimentale qui sera présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 6
La partie expérimentale

I. LA PREPARATION DE LA PARTIE EXPERIMENTALE

I.1 Le choix des énoncés

I.2 Les critères de l'analyse a posteriori

II. L'ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ELEVES

II.1 Les problèmes de la fiche 1

II.1.1 L'analyse du problème A1

II.1.2 L'analyse du problème A2

II.2 Les problèmes de la fiche 2

II.2.1 L'analyse du problème B1

II.2.2 L'analyse du problème B2

II.3 Les problèmes de la fiche 3

II.3.1 L'analyse du problème C1

II.3.2 L'analyse du problème C2

III. REFLEXIONS SUR LES RESULATS DES ANALYSES DES PRODUCTIONS DES ELEVES

Les résultats recueillis au cours de la phase pré-expérimentale nous permettent, entre autres, de recentrer les textes sur les genres de tâches identifiés et de choisir ceux qui semblent apporter le plus d'informations à notre questionnement de départ, cela dans le dessein de les proposer à une population plus importante d'élèves. En particulier, certaines questions ont rencontré une forte abstention, notamment chez les élèves italiens. Il nous fallait donc revoir les formulations pour obtenir un meilleur engagement des élèves. Par ailleurs, pour que chaque problème soit traité par un nombre suffisant d'élèves, il fallait limiter le nombre des problèmes tout en faisant en sorte que chaque genre de tâche soit suffisamment représenté. A la lumière des différentes questions que nous voulons approfondir lors de l'expérimentation, nous examinons maintenant la manière dont elles ont été abordées dans les problèmes précédents pour éclairer nos choix pour l'expérimentation définitive.

Nous nous intéressons aux habitudes des élèves par rapport au tracé d'une figure et à l'importance qu'ils attribuent à ce tracé : **ont-ils atteint la phase où un cas particulier ou une constatation sur le dessin ne suffisent pas pour valider une assertion ?** Autrement dit, **ont-ils acquis une *attitude rationnelle* leur permettant de recourir à des techniques mathématiques et, par conséquent, de justifier les propriétés d'une figure donnée en produisant des *preuves intellectuelles*, notamment des *démonstrations* ?**

En général, les problèmes lors de la phase pré-expérimentale nous ont permis de recueillir des informations utiles pour répondre à ces questions. Toutefois, parmi les tâches identifiées, celles qui appartiennent aux genres 1 et 2 semblent encourager plus explicitement les élèves à adopter des techniques perceptives. Les problèmes 1C et 1D sont particulièrement concernés par ces genres de tâches. Nous avons alors décidé d'éliminer le *problème 1C* car les résultats issus de la phase pré-expérimentale ne nous offrent pas d'indices suffisamment intéressants pour mériter un approfondissement : les élèves réussissent au moins à fournir une réponse et c'est peut-être la familiarité avec les figures en jeu et l'efficacité d'un recours à l'expérience mentale qui empêchent un bon nombre d'entre eux de s'investir dans la production d'une preuve intellectuelle.
En revanche, le **problème 1D** nous paraît plus complet. Dans la première tâche proposée, la réponse peut se lire sur le tracé : cela nous permet donc d'examiner si les élèves ont acquis une attitude rationnelle ou bien si une simple constatation sur le tracé leur suffit pour justifier la réponse. La troisième tâche proposée nous paraît intéressante car, dans ce cas, la persévérance dans le recours à une technique perceptive conduit l'élève à l'échec : en effet, cette tâche s'avère problématique puisque l'on demande de caractériser un point alors que la réponse nécessite la prise en compte de segments. Nous croyons que la formulation

de cette question nous permet d'évaluer si le raisonnement de l'élève est désormais détaché du pragmatique.

Les élèves ont-ils atteint un niveau d'analyse les amenant à rechercher où à reproduire, dans une figure complexe, des sous-figures plus familières et utiles pour avancer et ainsi à relier des situations apparemment différentes ?

Cette question est abordée sous différents aspects à travers pratiquement tous les genres de tâches envisagés. Nous pouvons donc repérer des éléments de réponse dans chacun des problèmes proposés. Notamment, le **problème 3C** semble nous apporter des informations intéressantes à propos de la difficulté à compléter le tracé pour repérer une sous-figure particulièrement efficace pour avancer. Le **problème 1B** nous paraît aussi intéressant dans cette perspective, non seulement parce que l'élève doit être apte à repérer des sous-figures mais aussi parce qu'il peut montrer sa capacité à relier deux objectifs apparemment séparés : est-il capable d'exploiter les résultats permettant de prouver les premières étapes pour aborder la dernière ? En ce sens, le **problème 1D** peut aussi nous fournir des éléments de réponse.

Nous nous intéressons aussi à **l'aptitude des élèves à mobiliser les connaissances dont ils disposent pour produire des raisonnements, et en particulier des démonstrations. Nous voulons voir quelles initiatives ils sont capables de prendre dans une situation où des choix sont à faire**.

Nous pouvons trouver des éléments de réponse à cette question à travers le traitement du genre de tâche 4 présent dans les **problèmes 1B** et **3C** mais aussi à travers les justifications fournies dans les tâches de genre 1 et 2 et dans les constructions. Les genres de tâches concernant les aires semblent aussi nous apporter des informations intéressantes à ce propos.
Pour les élèves français, le traitement des aires s'avère problématique quel que soit l'habillage du problème et les polygones mis en jeu. En revanche, les élèves italiens semblent être plus à l'aise lorsqu'il s'agit de comparer les aires de triangles mais ils rencontrent de difficultés lorsqu'il s'agit de quadrilatères et alors leur attitude n'est pas vraiment différente des élèves français.
D'autre part, compte tenu des résultats recueillis lors de l'analyse des manuels scolaires à propos des aires, il nous a paru intéressant d'approfondir cet aspect : nous avons donc décidé de conserver le **problème 1A**. Les mêmes raisons nous ont encouragée davantage à conserver le **problème 1B** : les deux problèmes ont un but commun, cependant, la formulation est différente et un autre objectif est aussi poursuivi dans le problème 1B, ce qui peut nous permettre d'examiner des différences possibles dans l'investissement de

l'élève suivant sa capacité à repérer le but d'un problème à travers un enchaînement différent de questions. Nous avons choisi de conserver le **problème 1D** et d'éliminer le *problème 2C* qui portaient tous deux sur la configuration du parallélogramme des milieux pour plusieurs raisons. D'une part, le problème 2C donnait lieu à plusieurs interprétations, ce qui ne facilite pas les comparaisons. D'autre part, dans le problème 1D, la figure est un cas particulier de celle du problème 2C et elle devrait permettre aux élèves de repérer plus facilement les éléments nécessaires pour accomplir la tâche parce que les diagonales du grand quadrilatère sont tracées, les techniques sont ainsi plus à leur portée.

Enfin, les constructions géométriques ayant des places différentes dans les deux institutions, nous voulons examiner la familiarité des élèves avec elles : sont-elles surtout l'occasion de produire des tracés précis et soigneux ou bien de faire fonctionner des connaissances théoriques ?

A ce propos, **les problèmes 2A, 2B et 2D** nous ont permis de recueillir des informations qui méritent, d'après nous, un approfondissement. C'est pourquoi nous avons choisi de les conserver mais pour qu'ils puissent nous fournir des éléments d'analyse plus rentables, nous avons résolu de les formuler différemment, comme nous le montrerons plus loin. Les problèmes 2A et 2B sont en relation directe avec le problème 1A tandis que le problème 2D l'est avec le problème 1D, nous conserverons ces associations.

I. LA PREPARATION DE LA PARTIE EXPERIMENTALE

I.1 Le choix des énoncés

Grâce à l'analyse des productions écrites des élèves, recueillies pendant la phase pré-expérimentale, nous avons donc retravaillé les énoncés des problèmes sélectionnés : deux énoncés ont été éliminés tandis que d'autres ont été modifiés. Ci-dessous, nous reprenons les problèmes qui ont *survécu* à la dernière sélection en exposant d'une manière plus détaillée les raisons qui nous ont conduite à les conserver tels quels ou à modifier la formulation de leurs énoncés.

Problème A1[1]**. Le triangle des milieux : un problème d'aire et de périmètre.** Nous conservons ce

[1] Nous indiquons les énoncés suivant un nouveau codage qui sera utilisé tout au long de ce chapitre.

problème tel qu'il est. Les élèves ne montrent pas de difficultés dans la compréhension du texte. Ce problème nous offre un ensemble d'éléments riche et diversifié pour l'analyse des procédures adoptées, des discours produits ainsi que de l'usage de la figure. En le proposant sur un échantillon plus important, nous voudrions mieux observer les réactions différentes des élèves italiens et des élèves français face à une tâche concernant les aires ; notamment, nous nous intéressons à la présence de conceptions erronées à l'égard de la liaison périmètre-aire.

Soit trois points non alignés A, B, C. Trace I, J, K, milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC].

Dans les égalités suivantes :

$$\mathcal{P}(ABC) = m\,\mathcal{P}(IJK)$$
$$\mathcal{A}(ABC) = n\,\mathcal{A}(IJK)$$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$ désignent respectivement les mesures du périmètre et de l'aire des triangles, m et n des nombres.
Cherche les valeurs de ces nombres pour que les deux égalités soient vraies.
Justifie en explicitant les propriétés de la figure.

Comme dans la version précédente, la figure n'est pas donnée : en traduisant les données verbales, c'est à l'élève de la reproduire dans un cas général pour se construire une représentation de la situation qui est décrite dans l'énoncé.

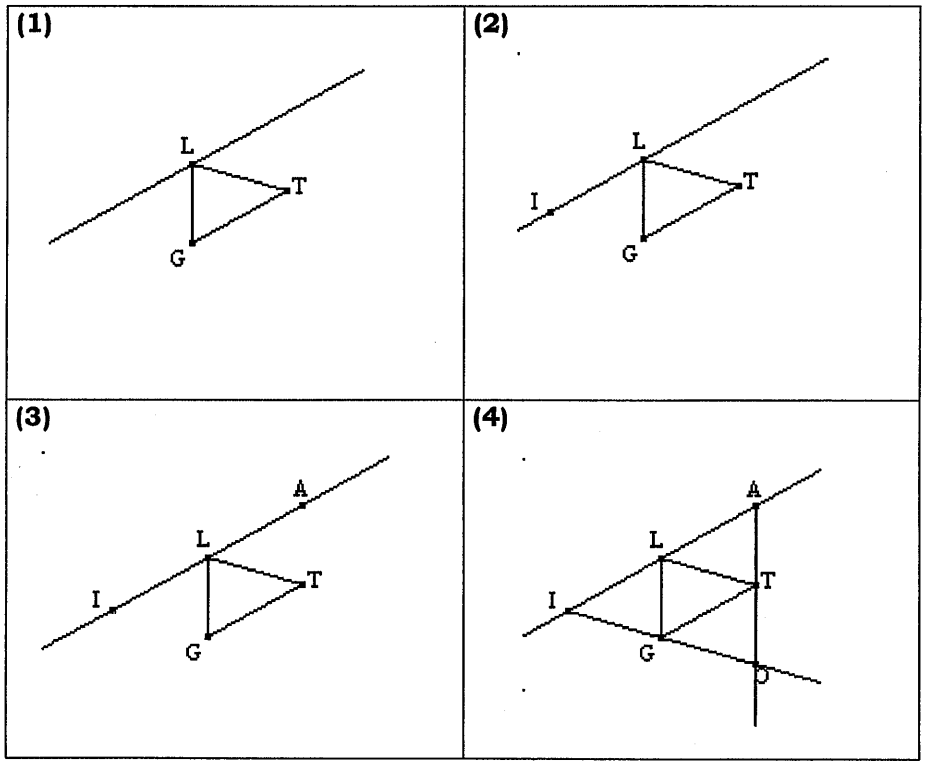
Les tâches proposées sont du **GENRE 3 : on demande de comparer les périmètres et les aires de deux sous-figures de la figure donnée**. A la suite des résultats issus de l'analyse de la phase pré-expérimentale, nous prévoyons de trouver toutes sortes de *techniques* sans oublier que ce genre de tâche se révèle *problématique*, surtout pour les élèves français.

D'un point de vue mathématique, l'analyse *a priori* faite auparavant est encore valable (**Solutions B_1 à B_8**). Dans ce cas, nous pensons trouver surtout des procédures mathématiques s'appuyant sur les formules de calcul des aires (**1e groupe** de l'analyse *a priori*), sur la congruence et sur la similitude (**3ème** et **4ème groupe**).

<u>Problème A2</u>. Le triangle des milieux : un problème de construction. Lors de la pré-expérimentation, dans les productions écrites relatives à ces deux problèmes, nous avons constaté que très peu d'élèves distinguent le programme de construction de la justification de ce programme : dans la plupart des copies, nous n'avons retrouvé que la description de la construction alors que, dans d'autres, cette description inclut des argumentations qui n'ont pas un vrai statut de preuve. D'ailleurs, nous croyons que non seulement la nature des tâches proposées mais aussi la structure de l'énoncé a eu de l'influence sur l'échec général constaté et c'est pourquoi nous avons envisagé une formulation différente.

Nous avons donc décidé de choisir une seule construction en la proposant par étapes graphiques (bande dessinée), les tâches proposées consistent alors à rédiger le programme de construction et à le justifier : nous avons voulu restreindre les tâches en imposant le procédé de construction, de manière à centrer l'activité des élèves sur l'écriture du programme de construction et sa justification. Parmi toutes les constructions possibles, à quelques changements près, nous avons retenu la construction du **3ème groupe** de notre analyse *a priori*[2] : ici, la question d'alignement de points ne se pose pas. Notamment, elle correspond à la **construction B du problème 2A**, celle qui a occasionné le moins de difficultés aux élèves observés et qui, au niveau des justifications possibles, demeure suffisamment ouverte.

Soit T,G, L trois points non alignés du plan. On veut construire le triangle AIO tel que T, G, L soient les milieux respectifs des côtés [AO], [OI], [IA].
Tu trouveras ci-dessous les quatre étapes d'une telle construction.



1) Rédige le programme de construction dont voici la première phrase :
"*Je trace le triangle TGL et puis la droite parallèle à (TG) passant par L...*".
2) Prouve que cette construction est bien la solution du problème.

Par rapport à la version précédente, l'usage de la figure change. Il s'agit d'interpréter les étapes graphiques

[2] cf. chapitre 3, § II, *Le triangle des milieux : un problème de construction*

d'une construction qui sont fournies dans l'énoncé du problème et qui permettent d'obtenir la figure répondant aux conditions imposées. Ici, la figure donnée représente donc un support perceptif, l'articulation entre les informations discursives et graphiques fournies dans l'énoncé demeure primordiale pour accomplir les tâches proposées.

Puisque l'un des deux genres de tâche change, nous avons établi la définition suivante :

GENRE DE TACHE 6bis. On demande de compléter un programme de construction d'une figure suivant des propriétés imposées et dont les étapes sont données dans un registre graphique.

Cette nouvelle tâche devrait nous permettre d'évaluer la capacité de l'élève à traduire des informations graphiques en discursives ; puisque la perception peut aider les élèves dans l'accomplissement de la tâche, nous nous demandons s'ils réussissent à bien discerner les éléments nécessaires à la construction de ceux qui peuvent être déduits et justifiés par la suite.

Notre intérêt porte encore sur le langage adopté pour rédiger le programme : les élèves décrivent-ils naïvement les actions accomplies en se référant explicitement aux instruments de dessin ou bien aux tracés de construction, etc.

L'autre genre de tâche proposé reste le même qu'avant : **on demande de prouver la validité d'un programme de construction (GENRE DE TÂCHE 7)**. En quelque sorte, ce genre de tâche se trouve apparenté au genre 4. Néanmoins, un élément essentiel le différencie : ici, les élèves prouvent des propriétés qui sont mobilisées par eux-mêmes lorsqu'ils ont rédigé le programme de construction correspondant. Les élèves s'investissent pour fournir des preuves à propos d'assertions produites par eux-mêmes : trouvent-ils que cette tâche est superflue ? Nous pouvons encore examiner si les élèves distinguent aisément la rédaction d'un programme de construction de sa preuve.

D'après nous, l'interprétation des données graphiques fournies amène à décrire principalement un programme possible :

Programme 1. On trace une droite parallèle au côté [TG] du triangle TGL et passant par L. Sur cette droite, on trace les points A et I tels que AL = IL = TG. On trace (AT) et (IG) : elles se coupent en O. Il s'agit de montrer que G et T sont les milieux respectifs de [IO] et [AO].

Mais, on peut aussi s'attendre au programme suivant :

Programme 2. On trace une droite parallèle au côté [TG] du triangle TGL et passant par L. Sur cette droite, on trace les points A et I tels que AL = IL = TG. On trace O, symétrique de A par rapport à T. Il s'agit de montrer que G est le milieu de [IO].

A notre avis, le **Programme 1** non seulement pourrait être produit plus spontanément que l'autre mais, en

outre, il serait plus facile à prouver[3]. Néanmoins, compte tenu du fait que les élèves observés lors de la phase pré-expérimentale ont eu du mal à discerner le programme de sa validation en produisant des discours où ils tentaient de décrire une construction qui se justifie en elle-même, la possibilité de trouver des productions où les élèves se servent du **Programme 2** n'est pas tout à fait à exclure.
Les justifications de ces constructions que nous avons envisagées lors de l'analyse *a priori* sont encore valables (**Solutions A_4** et **A_5, 3ème groupe**). Lors de l'analyse a posteriori, compte tenu de la formulation de cet énoncé, nous nous intéressons surtout au discours des élèves, tout en considérant que celui-ci est le résultat de l'articulation entre les registres graphique et discursif.

Problème B1. Le triangle des milieux : un problème de centre de gravité. D'après les résultats de la partie pré-expérimentale, ce problème s'avère intéressant pour plusieurs raisons qui relèvent conjointement des habitudes scolaires des élèves et de quelques difficultés objectives. C'est pourquoi nous l'avons gardé en modifiant quelque peu l'énoncé : nous avons détaillé davantage l'une des quatre étapes pour aider l'élève à organiser son raisonnement. Voici le nouvel énoncé :

Soit un trapèze ABCD avec (AD) parallèle à (BC) et AD = 2 BC. Les diagonales se coupent en H et les droites (AB) et (CD) en O.
a) Prouve que B est le milieu de [OA].
b) La droite (OH) coupe le segment [BC] en L et le segment [AD] en M. Montre les propriétés suivantes :
- **M est le milieu de [AD] ;**
- **L est le milieu de [BC] ;**
- **L est le milieu de [OM].**

c) Prouve que H est le centre de gravité du triangle BCM.
d) Compare les aires des triangles AOD et BCM.

Ici, il y a deux objectifs principaux : prouver que AOD et BCM ont le même centre de gravité et comparer leurs aires. Pour atteindre le premier objectif, nous avons proposé des étapes préalables pour suggérer à l'élève une manière convenable d'analyser la figure en question. Si l'élève montre que OBMC est un parallélogramme, il prouve conjointement les deux propriétés du point L ; autrement, s'il adopte d'autres techniques mathématiques, la procédure adoptée pour prouver que L est le milieu de [OM] pourrait éventuellement lui suggérer un moyen pour établir la relation des hauteurs de AOD et BCM lorsqu'il aborde la dernière étape en recourant aux formules de calcul des aires.
Les résultats de la partie pré-expérimentale montrent qu'aucun élève ne considère les points d'intersection des médianes de AOD avec les côtés de BCM. En mentionnant explicitement le point L, nous voudrions donc conduire l'élève à prendre en compte ces points d'intersection pour enfin déduire que H est le centre

[3] cf. chapitre 3, § II, *Le triangle des milieux : un problème de construction*

de gravité des deux triangles.

Comme dans la version précédente, la figure n'est pas donnée. En traduisant les données verbales, c'est à l'élève de la reproduire dans un cas général pour se construire une représentation de la situation qui est décrite dans l'énoncé : dans une figure complexe les élèves réussissent-ils à identifier des sous-figures utiles pour avancer ?

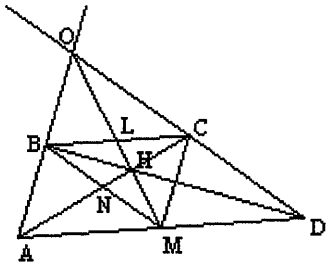
Les cinq premières tâches proposées sont du **GENRE 4 : on demande explicitement de prouver une propriété de la figure décrite dans l'énoncé**. La dernière tâche est du **GENRE 3 : on demande de comparer les aires de deux sous-figures.**
La structure de l'énoncé est telle que les questions sont enchaînées : les propriétés prouvées au cours d'une étape sont utiles pour prouver celles qui suivent : les élèves réussissent-ils à gérer convenablement cet enchaînement ? La présence d'une question sur les aires nous paraît intéressante pour plusieurs raisons. Elle nous permet d'examiner l'aptitude de l'élève à relier des situations apparemment indépendantes : les élèves réussissent-ils à réinvestir les résultats des étapes précédentes pour accomplir la tâche relative aux aires ? En outre, cela nous permet de comparer les réactions des élèves qui abordent ce problème avec ceux qui abordent le problème A1 où la même tâche est proposée sans que rien ne leur permette de travailler sur la figure pour atteindre d'autres objectifs.

Parmi les *techniques mathématiques* possibles, nous rappelons les trois groupes attendus suivant la manière de percevoir la figure décrite dans l'énoncé.

Solution C_5

Ici, on exploite la figure en tant que *configuration de Thalès*.

1. **On prouve que B est le milieu de [AO].** On y parvient en recourant à l'*énoncé complété du théorème de Thalès* et à la *définition de milieu d'un segment.*



2. **On prouve que M est le milieu de [AD]** en recourant aux *définitions de médiane dans un triangle* et *de*

centre de gravité dans un triangle.

3. On prouve que L est le milieu de [BC] et de [OM]. Grâce la *réciproque du théorème de Thalès* ou au *théorème des milieux*, on déduit que BOCM est un parallélogramme (*définition de parallélogramme*). Ensuite, par la *propriété des diagonales dans un parallélogramme*, on conclut que L est bien le milieu de [BC] et de [OM].

Variante. On peut recourir au *théorème de Thalès* dans les triangles AOM et BOL d'où l'on déduit seulement que OM = 2OL et que donc L est le milieu de [OM] (*définition de milieu d'un segment*).
En revanche, si l'on utilise l'*énoncé complété* du *théorème de Thalès* ou à la *réciproque du théorème des milieux*, on déduit que OM = 2OL et que AM = 2BL. A partir de là, deux procédures sont envisageables :

- En suivant la même procédure pour les triangles DOM et COL et on déduit que MD = 2LC ; puisque on sait que AM = MD, on conclut que BL = LC et que donc L est le milieu de [BC] (*définition de milieu d'un segment*). ;
- à l'aide du *théorème des milieux* dans ADO ou bien de la *réciproque du théorème de Thalès*, on prouve que [CM] et [AO] sont parallèles ; on peut ainsi conclure que ABCM est un parallélogramme (*définition de parallélogramme*) et que donc BC = AM ; puisque 2BL = AM = BC, on conclut que L est le milieu de [BC].

4. On prouve que H est le centre de gravité de BCM. On prouve que ABCM est un parallélogramme (*définition de parallélogramme*) et que, par conséquent [BM] et [AC] se coupent en leur milieu (*propriété des diagonales dans un parallélogramme*), soit N. On conclut en recourant aux définitions de *de médiane* et de *centre de gravité*.

Variante. En recourant à la même procédure que dans la variante de l'étape 3, on trace le segment [AC] et on nomme N le point de concours de ce segment et de [BM]. On prouve que N est le milieu de [BM], d'où on parvient à prouver que H est le centre de gravité de BCM.

5. On compare les aires de BCM et de AOD.
Pour ce faire, on peut recourir à l'une des solutions envisagées lors de l'analyse *a priori* pour le problème *Le triangle des milieux : une question d'aire et de périmètre*[4].

Solution C_6

Ici, on exploite la *similitude* de quelques couples de triangles.

1. On prouve que B est le milieu de [AO]. On prouve que les triangles AOD et BOC sont semblables (*critères de similitude des triangles*). Puisque, par hypothèse, AD = 2BC, on conclut que OA = 2OB et que OD = 2OC (*propriétés des triangles semblables*) d'où B et C sont les milieux respectifs de [AO] et [DO].

2. On prouve que M est le milieu de [AD]. Même procédure que dans la Solution C_5.

3. On prouve que L est le milieu de [BC] et [OM]. En recourant aux *critères de similitude* dans les triangles AOM et BOL et puis dans les triangles DOM et COL, on prouve que L est bien le milieu de [BC] et [OM].

4. On prouve que H est le centre de gravité de BCM. À l'aide de la *réciproque du théorème de Thalès ou théorème des milieux*), on prouve que N, point de concours de [AC] et [BM] est le milieu de [BM], cela en recourant encore aux *critères de similitude des triangles* et en suivant la même procédure que dans l'étape 3.

5. On compare les aires de BCM et AOD. On recourt à l'une des procédures envisagées lors de l'analyse *a priori* pour le problème *Le triangle des milieux : une question d'aire et de périmètre.*

---

[4] cf. chapitre 3, § III, *Le triangle des milieux : un problème de centre de gravité*

Solution C_7

Ici, on exploite la figure en termes d'*homothétie*.

1. **On prouve que B est le milieu de [AO].** Soit $H_{O,2}$ l'homothétie de centre O et rapport k = BC/AD = 2 : $H_{O,2}$ (B) = A et $H_{O,2}$ (C) = D d'où B et C sont les milieux respectifs de [AO] et [DO].

2. **On prouve que M est le milieu de [AD].** Même procédure que dans la Solution C_5. Autrement, on définit l'homothétie $H'_{O,½}$ et puis on considère que la composée de $H_{O,2}$ et de $H'_{O,½}$, etc.

3. **On prouve que L est le milieu de [BC] et [OM].** On définit l'homothétie $H''_{O,-1/2}$: $H'_{O,-1/2}$ (M) = L et $H''_{O,-1/2}$ ([OM]) = OL. Or, puisque l'homothétie conserve les rapports de longueurs, on conclut que L est le milieu de [BC] et de [OM].

4. **On prouve que H est le centre de gravité de BCM.** Même procédure que dans la Solution C_3 de l'analyse *a priori* détaillée dans le chapitre 3, § IV.

5. **On compare les aires de BCM et AOD.** Pour ce faire, on peut recourir à l'une des solutions envisagées lors de l'analyse *a priori* pour le problème *Le triangle des milieux : une question d'aire et de périmètre* et, notamment, la Solution B_5 de l'analyse *a priori* détaillée dans le chapitre 3, § III.

Problème B2. Dans le triangle des milieux, quadrilatères de même aire. Bien que les résultats de la phase pré-expérimentale nous montrent que la quasi-totalité des élèves n'abordent pas ce problème, nous avons résolu de le garder en reprenant la toute première formulation de l'une des deux questions[5]. En le proposant de nouveau, nous voudrions analyser davantage l'attitude des élèves face à une tâche *problématique* et notamment leur capacité à mobiliser des outils dans un cas où ils sont particulièrement efficaces pour aboutir (énoncé fermé). En outre, par rapport aux problèmes précédents, il nous paraît intéressant d'analyser les réactions des élèves face à une tâche sur les aires concernant des quadrilatères.

Voici le nouvel énoncé du problème :

Soit un triangle NMR et U, E, O les milieux respectifs des côtés [NM], [MR], [RN]. Soit X un point de la droite (NM), autre que U.
a) Montre que l'aire du quadrilatère ROXE ne dépend pas du point X choisi.
b) Justifie l'égalité suivante :

A (NMR) = 2 A (ROXE),

où A désigne la mesure de l'aire des polygones.

Dans la version précédente, il nous semble que les difficultés relèvent de l'incapacité de la part des élèves à envisager des éléments supplémentaires dans la figure initiale ainsi qu'à repérer des sous-figures utiles pour aboutir.

Peut-être que, dans la formulation nouvelle, les données poussent davantage à "faire bouger" le point X sur la droite (NM) pour prendre en compte des cas *limites* éventuels qui pourraient suggérer la solution du

---

[5] cf. chapitre 3, § V, *Dans le triangle des milieux, quadrilatères de même aire*

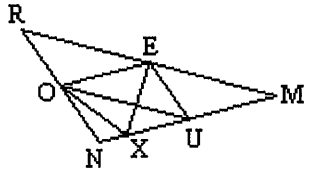
problème. Ainsi nous avons alors décidé de souligner davantage la nature variable du point X et de ne pas mettre en jeu le quadrilatère ROUE ; ici, c'est à l'élève de se questionner sur la fonction des milieux du triangle NMR par rapport à la situation proposée, ce qui devrait le conduire à tracer le triangle des milieux UEO et à se servir convenablement de quelques unes de ses propriétés.

Concernant l'usage de la figure, en traduisant les données verbales, c'est à l'élève de la reproduire dans un cas général pour se construire une représentation de la situation qui est décrite dans l'énoncé.
Puisqu'il s'agit de questions sur les aires, elles se rattachent au **genre de tâche 3**. Néanmoins, nous considérons que les tâches proposées sont du **GENRE 4** car **on demande explicitement de prouver des propriétés de la figure**.

D'un point de vue mathématique, l'analyse nous amène à envisager les procédures suivantes.

ROXE est la réunion des deux triangles disjoints ROE et XOE ayant un côté commun.

A(ROXE) = A(ROE)+A(XOE)



Propriété additive de l'aire

(OE) est parallèle à (NM)

Théorème des milieux (réciproque du théorème de Thalès)

Où que soit X sur (NM), sa distance de (OE) ne varie pas (*Étant données deux droites parallèles, tout point appartenant à l'une est à la même distance de l'autre*).
Puisque *des triangles ayant la même base et tel que les troisièmes sommets appartiennent à la droite parallèle à ce côté commun, ont même aire*, on conclut que l'aire de ROXE ne dépend pas de la position de X sur (NM).

Grâce à la propriété que l'on vient d'énoncer, on déduit que l'aire de A(XOE) = A(UOE) d'où A(ROXE) = A(ROUE). Cela amène à prouver que A(NMR) = 2A(ROUE). On prouve ensuite que NMR est la réunion de quatre triangles disjoints et congruents dont deux sont en commun avec ROUE. Pour ce faire, on peut adopter l'une des procédures envisagées pour résoudre le Problème B de l'analyse *a priori*.

Autrement, par le *théorème des milieux*, on déduit que (NM) est parallèle à (EO) et NM = 2EO. Or, par hypothèse, N, X, et M sont alignés d'où NX+XM = 2EO. Les triangles OXN, OXE et EXM ont les hauteurs de même longueur, soit h (*Étant données deux droites parallèles, tout point appartenant à l'une est à la même distance de l'autre*) :

$$A(OXN) = \tfrac{1}{2}\, XN \times h$$
$$A(EXM) = \tfrac{1}{2}\, XM \times h$$
$$A(OXE) = \tfrac{1}{2}\, EO \times h$$
$$\Downarrow$$
$$A(OXN) + A(EXM) = \tfrac{1}{2}\,(XN+XM) \times h$$
$$= \tfrac{1}{2}\, NM \times h = EO \times h = 2A(OXE)$$

Formule de l'aire d'un triangle

En suivant l'une des procédure envisagées pour résoudre le problème B, on prouve que la longueur de la hauteur de ORE est égale à la moitié de la longueur de la hauteur de NMR, d'où on déduit que la longueur de la hauteur de ORE est égale à h et que A(OXE) = A(ORE). En utilisant convenablement les égalités établies, on déduit que A(NMR) = A(OXN) + A(EXM) + A(OXE) + A(ORE) = 2A(OXE) + 2A(ORE) = 2A(ROXE).

Problème C1. Le parallélogramme des milieux II. Nous avons choisi de conserver ce problème en modifiant néanmoins quelque peu l'énoncé :

Soit deux droites perpendiculaires : sur la première on place deux points A et C, sur la deuxième deux points B et D. Trace le milieu I de [AB], le milieu J de [BC], le milieu K de [CD], le milieu L de [DA].

a) Fais une figure dans laquelle le quadrilatère ABCD est croisé.

On place maintenant les points de telle sorte que ABCD ne soit pas croisé.

b) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Justifie ta réponse en explicitant les propriétés de la figure.

c) Compare les aires de ABCD et IJKL.

d) Les points A, B, C étant déjà placés, comment disposer D pour que le quadrilatère IJKL soit un carré ? Justifie ta réponse.

Nous incluons la tâche a) pour éluder la difficulté rencontrée dans le cas du quadrilatère croisé pour lequel d'ailleurs la question sur les aires perdrait son sens ; nous espérons aussi recueillir des informations plus précises pour comprendre si, dans la version ancienne, les élèves ont tracé accidentellement la "bonne" figure. La tâche b) nous permet d'évaluer si l'élève adopte ou non une *attitude rationnelle* ou bien s'il s'appuie encore sur la perception pour valider ses réponses. La figure proposée ici devrait permettre à l'élève de repérer facilement les éléments nécessaires pour accomplir la tâche c) et, globalement, la situation devrait encore nous fournir des indices sur les difficultés éventuelles à aborder une question relative aux aires de quadrilatères. Enfin, il nous paraît intéressant de recueillir plus d'informations sur la capacité de l'élève à accomplir une tâche – la dernière – dont la question porte sur un point alors que la réponse nécessite la prise en compte de segments.

On peut rattache la première question au **GENRE DE TÂCHE 2** : en lisant le début de l'énoncé, l'élève peut déjà produire une figure convexe, la première question l'obligerait à considérer la figure suivant une condition supplémentaire. Autrement, elle peut être rattachée au **GENRE DE TÂCHE 5** (construction d'une figure suivant des conditions imposées).

Les trois autres tâches proposées restent les mêmes qu'auparavant. L'une d'elles est du **GENRE 1** (question b) : **on demande de préciser la nature d'une sous-figure de la figure décrite dans l'énoncé** : les éléments de réponse peuvent se percevoir sur le tracé. D'après les résultats de la phase pré-expérimentale, nous nous attendons à ce que les élèves adoptent l'*attitude de l'intuition rationnelle* en préférant le recours à des *techniques perceptives* plutôt que *mathématiques*. Une deuxième tâche est du

GENRE 3 (question c) : **on demande de comparer les aires de deux sous-figures**. Notamment, ici il s'agit de comparer les aires d'un rectangle et d'un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires. Une dernière tâche est du **GENRE 2** (question d) : on pose une question corrélée à la précédente : **on demande de chercher des conditions pour que la figure vérifie certaines propriétés supplémentaires**. C'est une situation dynamique où l'on demande implicitement de transformer la figure de départ pour en obtenir une nouvelle. L'expérience en termes d'*action mentale* devrait jouer un rôle essentiel. Les résultats de la phase pré-expérimentale nous conduisent à la considérer comme une tâche *problématique* dans le sens que les élèves s'opposent à l'adoption d'une *attitude rationnelle* en persistant à recourir à la perception.

Problème C2. Le parallélogramme des milieux : un problème de construction. Ce problème semble fournir des informations intéressantes pour l'analyse : plusieurs élèves ne considèrent qu'un cas particulier et, de même ici, ils ne discernent pas aisément la description de la justification. Nous avons décidé de le garder en modifiant tout à fait l'énoncé : nous l'avons proposé en incluant un programme de construction possible et en demandant de le réaliser et puis de le justifier. Parmi les programmes possibles, nous avons exclu ceux qui demandent de prouver l'alignement de points. Le carré n'est plus donné mais on le construit en même temps que le quadrilatère, ce qui permet de commencer par les diagonales :

On veut construire un quadrilatère quelconque CLMR tel que :
- **les points A, I E, O, milieux respectifs des côtés [CL], [LM], [MR], [RC], soient les sommets d'un carré ;**
- **l'angle CLM soit droit.**

a) Effectue la construction dont voici le programme :

Trace deux droites perpendiculaires **d_1** ***et*** **d_2** ***: soit*** **L** ***leur point commun.***
Choisis un point **A** ***sur*** **d_1** ***et un point*** **I** ***sur*** **d_2**, ***différents de*** **L.**
Trace le symétrique **C** ***de*** **L** ***par rapport à*** **A** ***et puis le symétrique*** **M** ***de*** **L** ***par rapport à*** **I.**
Trace la droite perpendiculaire à **(CM)** ***passant par*** **L** ***et sur celle-ci place un point*** **R** ***tel que*** **LR = CM.**
La droite parallèle à **(LR)** ***passant par*** **I** ***coupe*** **(MR)** ***en*** **E.**
La droite parallèle à **(LR)** ***passant par*** **A** ***coupe*** **(RC)** ***en*** **O.**

b) Prouve que la figure répond bien aux conditions imposées.

Remarquons que, comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, pour que l'angle CLM soit droit, il faut que le quadrilatère soit convexe. Cela demande de bien placer le point R. Cette question de convexité est difficile à prendre en compte par les élèves, c'est pourquoi nous analysons ce problème comme si nous avions demandé que les côtés [CL] et [LM] soient perpendiculaires et non que l'angle CLM soit droit. Avec cette interprétation le quadrilatère convexe et le quadrilatère concave sont tous les deux acceptables.

Il s'agit d'un problème de construction dont la figure est à faire suivant un programme fourni dans

l'énoncé. Le tracé n'est plus un simple support perceptif auxiliaire, la traduction du registre discursif en graphique met en évidence la capacité de l'élève à coordonner une situation complexe et à relier les *actions* qui se suivent pendant la construction avec les outils qui permettent de la valider.

Les modifications apportées à l'énoncé nous amènent à définir des nouveaux genres de tâche :

GENRE DE TACHE 5bis. On demande de réaliser la construction d'une figure suivant des propriétés imposées et dont le programme est donné dans un registre discursif. Le lien avec l'usage de la figure demeure essentiel. Ici, nous voulons évaluer la capacité de l'élève à traduire des informations discursives en graphiques et à les coordonner. En principe, au niveau scolaire concerné, il s'agit d'une tâche *routinière* : nous présumons que les élèves l'accompliront sans rencontrer trop de difficulté. Cependant, il faut souligner que le programme fourni conduit à deux cas de figure : suivant le choix de R sur (CM), on obtient un quadrilatère convexe ou concave. Ce dernier cas pourrait bien influencer la réussite de l'élève.

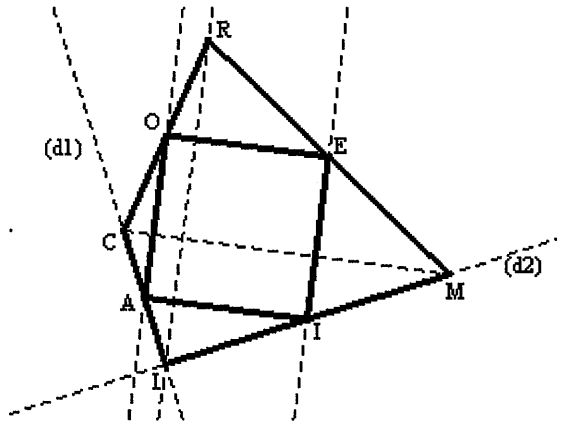
GENRE DE TACHE 7bis. On demande de prouver la validité d'un programme de construction donné. En quelque sorte, ce genre de tâche se trouve apparenté au genre 4. Néanmoins, un élément essentiel le différencie : ici, c'est à l'élève de bien examiner la situation pour repérer les propriétés à prouver pour valider le programme de construction proposé.

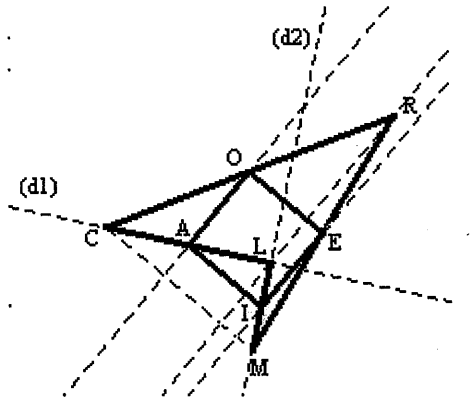
Dans la version précédente, le carré était donné alors que maintenant il se construit au fur et à mesure suivant la démarche imposée. Puisque cela change les procédures démonstratives, nous donnons ci-dessous les nouvelles solutions envisagées. Nous n'incluons pas les *techniques mathématiques* qui s'appuient sur les propriétés des *transformations géométriques* – notamment, compositions de symétries centrales et homothéties – car, en principe, les résultats de la partie pré-expérimentale montrent que les élèves préfèrent le recours aux outils de la géométrie traditionnelle. Les solutions suivantes sont à la portée des élèves observés, l'articulation des divers passages est la seule difficulté éventuelle.

Solution F_6

1) *Il faut prouver que* ***CLM est un angle droit.***

C appartient à d_1, étant le symétrique de L par rapport à A ; M appartient à d_2 étant le symétrique de L par rapport à I (*dans une symétrie centrale, l'image d'un point appartient à la droite qui joint ce point avec le centre de symétrie*).





Or puisque, par construction, d_1 et d_2 sont perpendiculaires, on conclut que CLM est un angle droit. Dans ce cas, l'élève pourra bien utiliser une *équivalence sémantique* sans ressentir le besoin de prouver cette étape.

2) *Il faut prouver que **A et I sont les milieux respectifs de [CL] et de [ML]**.*

A, L, C alignés et AL = AC, I, L, M alignés et IL = IM ⇓ A, I sont les milieux respectifs de [CL], [ML]	*Propriété de la symétrie centrale* *Définition de milieu d'un segment*

3) *Il faut prouver que **E et O sont les milieux respectifs de [RM] et de [CR]*** ;

On considère le triangle CLR : (AO) parallèle à (LR), par construction, et A est le milieu de [CL]. On considère aussi le triangle MLR : (EI) parallèle à (LR), par construction, et I est le milieu de [ML].

O est le milieu de [CR] (et LR = 2AO) E est le milieu de [MR] (et LR = 2EI)	*Réciproque du théorème des milieux*

On déduit aussi que AO = EI, utile par la suite. De même ici, l'élève peut utiliser une *équivalence sémantique*.

4) *Il faut prouver que **AIEO est un parallélogramme**.*

(IE) et (AO) sont parallèles à (LR) ⇓ (AO) est parallèle à (IE)	*Par construction* *Deux droites parallèles à une même droite, sont parallèles entre elles.*

Dans le triangle CLM, A et I sont les milieux respectifs de [CL] et [LM] ; dans le triangle RLM, O et E sont les milieux respectifs de [CR] et [MR].

(AI) est parallèle à (CM) (et CM = 2AI) (OE) est parallèle à (CM) (et CM = 2OE) ⇓ (AI) est parallèle à (OE) (et AI = OE)	*Théorème des milieux* *Deux droites parallèles à une même droite, sont parallèles entre elles.*

On déduit que AIEO est un parallélogramme (*propriété du parallélogramme*).
Puisque, par construction CM = LR, on déduit aussi que LR = 2AI = 2OE. Mais on sait que LR = 2AO, d'où l'on conclut que AO = AI.

5) *Il faut prouver que **AIEO est un carré.***

(CM) est perpendiculaire à (LR) (AI) est parallèle à (CM) (IE) est parallèle à (LR)	*Par construction*
⇓	
(AI) est perpendiculaire à (IE)	*Deux droites respectivement parallèles à deux droites perpendiculaires, sont perpendiculaire entre elles*

On déduit que AIEO est un carré (*définition de carré*).

Solution F_7. Pour prouver que ***E et O sont les milieux respectifs de [RM] et de [CR]***, on peut recourir au *théorème de Thalès* dans les triangles CLR et CLM.
Pour prouver que ***AIEO est un parallélogramme***, on peut recourir à la *réciproque du théorème de Thalès* dans les triangles CLM et RLM. Si l'on recourt à l'énoncé complet, on prouve aussi que AI = EO ; autrement, on exploite les propriétés des triangles semblables et puis on déduit cette égalité.
Pour prouver que (AO) est perpendiculaire à (OE), on peut considérer que les droites (AO) et (LR) sont parallèles ainsi que les droites (OE) et (CM) : elles forment un parallélogramme (*définition de parallélogramme*). Puisque, par construction, les droites (LR) et (CM) forment un angle droit, l'angle AOE – opposé à l'angle formé par ces deux droites – est aussi droit d'où l'on conclut que AIEO est un carré.
Pour le reste, on peut suivre la même procédure que dans la solution précédente.

Solution F_8. Pour prouver que ***E et O sont les milieux respectifs de [RM] et de [CR]***, on peut recourir aux propriétés des projections... On peut terminer en suivant les mêmes procédures que dans la **Solution F_6**.

Dans ce nouvel énoncé, nous voudrions examiner la capacité des élèves à traduire des informations verbales en graphiques mais surtout leur aptitude à valider rationnellement le programme de construction proposé. En incluant ce dernier, nous espérons mettre en évidence si, pour les élèves, la tâche relative à la validation du programme est vraiment superflue.

La deuxième passation a lieu au mois d'avril 1999 auprès de TROIS classes françaises de Seconde et de CINQ classes italiennes dont quatre à la seconde année d'ESS et une à la troisième année de ESS[6]. Suivant le même critère que dans la phase pré-expérimentale, nous avons proposé les problèmes aux élèves en leur laissant la liberté de choisir la procédure et de recourir ou non aux instruments de dessin ; ils ont eu une

[6] Il s'agit d'une classe de la filière littéraire dont le programme de mathématique (dit *fort*) correspondrait à un niveau de deuxième année de ESS dans une filière scientifique.

heure de temps pour remettre leur production écrite. A notre demande, chaque classe a été organisée en trois groupes hétérogènes amis de niveaux équivalents, sélectionnés selon le jugement de leur enseignante (ordinaire). Suivant les fiches re-élaborées, chaque élève de chaque groupe a eu à résoudre individuellement deux problèmes sans contraintes sur l'ordre à suivre.
Nous avons groupé les six énoncés de la manière suivante :

FICHE 1	Problème A1 Problème A2	Le triangle des milieux : un problème d'aire et de périmètre Le triangle des milieux : un problème de construction	Genre de tâche : 3 Genres de tâches : 6bis, 7
FICHE 2	Problème B1 Problème B2	Le triangle des milieux : un problème de centre de gravité Dans le triangle des milieux : quadrilatères de même aire.	Genres de tâches : 4, 3 Genre de tâche : 4 (lien avec 3)
FICHE 3	Problème C1 Problème C2	Le parallélogramme des milieux II Le parallélogramme des milieux : un problème de construction	Genres de tâches : 2 ou 5, 1, 3, 2 Genres de tâches : 5bis, 7bis

I.2 Les critères de l'analyse a posteriori

Les problèmes proposés aux élèves pendant cette phase peuvent être groupés en deux grandes catégories : d'un côté ceux où il y a à produire une figure et une preuve des propriétés de cette figure (**genre de tâche 1 à 4 : problèmes A1, B1, B2, C1**), de l'autre côté les problèmes de construction où il y a à produire une figure ou un programme vérifiant des conditions imposées et à prouver qu'on a bien exécuté la consigne (**genre de tâche 5bis à 7bis : problèmes A2, C2**). Nous traitons la **question $C1_a$** à part : ci-dessous, lorsque nous parlons du problème C1, c'est à parti de la question b.

La partie pré-expérimentale nous a permis de mieux préciser le cadre d'analyse. Nous traitions les questions suivant le genre de tâche mais, en général, lors du dépouillement des productions des élèves, nous distinguons les volets suivants : *le tracé et l'usage de la figure, les procédures des élèves, les discours des élèves.*

Le tracé et l'usage de la figure

Concernant la figure pour la première catégorie de problèmes, nous avons l'usage suivant :

– *La figure n'est pas donnée. Il faut la produire dans un cas général* (**A1, B1, B2, C1**).

Ici, le tracé représente un support perceptif auxiliaire : l'élève pourrait tracer un cas particulier de figure (triangle isocèle, ..., trapèze isocèle, ..., quadrilatère ayant un axe de symétrie, etc.) et pervertir ainsi la tâche en envisageant des hypothèses subsidiaires. En outre, selon la procédure envisagée, il sera amené à introduire, dans la figure de départ, des éléments supplémentaires qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé et cela pourrait représenter un obstacle à l'accomplissement des diverses tâches.

Lors de l'analyse des productions des élèves observés, ces aspects nous amènent à inspecter certains items permettant de répondre aux questions suivantes :

- quelle est la nature du polygone tracé ? L'élève considère-t-il un cas général ou particulier ? Cela met en évidence la capacité de l'élève à la *décontextualisation* d'une situation donnée. Pour répondre à ce type de question, il faudra prendre en compte le tracé produit ainsi que certains détails significatifs de la production écrite qui l'accompagne car, quelquefois, c'est dans son discours que l'élève attribue une propriété supplémentaire aux données du problème.
- le tracé a-t-il été codé par rapport aux données ? La présence d'un codage exprime la capacité ainsi que la nécessité de rendre visibles les informations et les propriétés mises en jeu dans l'énoncé.
- l'élève considère-t-il d'autres éléments (tracés ou non) utiles pour mettre en place sa procédure de résolution ? Cela manifeste une nécessité ou non de traduire des informations discursives en graphiques. Il demeure pourtant strictement lié à l'analyse de la part de l'élève des tâches proposées et aux outils géométriques dont il dispose pour les accomplir. De même ici, il faudra prendre en compte aussi certains détails significatifs de la production écrite car, par exemple, l'élève pourrait bien utiliser la hauteur d'un triangle sans pourtant la tracer.

Ces items nous permettent de recueillir des informations sur l'articulation entre le registre graphique et discursif, tout en considérant qu'ils nous informent aussi sur l'acquisition de la part de l'élève de certaines *routines* scolaires.

A propos de la **première question** du **problème C1** (**$C1_a$**), où l'on demande de tracer le quadrilatère décrit dans l'énoncé de manière à être croisé, nous nous limitons à signaler les élèves qui fournissent ou non un tracé répondant à la condition imposée, cela suffit pour comprendre s'ils saisissent correctement la tâche et s'ils maîtrisent le vocabulaire mis en jeu.

Concernant la figure dans la deuxième catégorie de problèmes, nous avons deux usages :

- *la construction de la figure est donnée par étapes graphiques* (**A2**) ;
- *la construction de la figure est à produire suivant un programme fourni* (**C2**).

Compte tenu de la formulation du **problème A2**, la manière dont les élèves interprètent les étapes

proposées se manifeste à travers le programme de construction qu'ils produisent. C'est pourquoi, dans ce cas, nous analysons directement les programmes produits d'où nous pourrons en déduire l'usage de la figure qui est fait.

A propos du **problème C2**, nous tentons de répondre aux questions suivantes :

- est-ce que les élèves traduisent correctement les informations verbales ? Reproduisent-ils une figure répondant aux conditions imposées ?
- est-ce que les élèves fournissent un cas particulier de construction ? Est-ce que cela influe sur le discours produit pour valider la construction ? Les élèves pourraient placer les premiers sommets du carré en une position particulière pour obtenir un cas particulier de figure. En effet, avant de lire le programme proposé, les élèves pourraient se faire une idée de la situation en n'envisageant qu'un cas particulier comme le seul possible à satisfaire les conditions imposées.

A propos de la construction, nous considérons donc les items suivants :

- **complète correcte** si le tracé est accompli de manière correcte ;
- **incomplète** si le tracé est amorcé ;
- **incorrect** si le tracé est accompli de manière incorrecte.

Conjointement, nous repérons les cas de figure : **convexe, concave, convexe particulière, concave particulière**.

Lors du dépouillement des résultats, d'autres aspects méritent une analyse particulière, à savoir *le recours aux instruments de dessin* pour reproduire la figure décrite dans l'énoncé. Leur utilisation exprime une nécessité d'ordre et de soin ainsi qu'une familiarité avec les techniques de constructions géométriques ; néanmoins, dans les problèmes proposés, un tracé approximatif est également licite car il représente une aide perceptive permettant de faire des conjectures qu'il faut prouver ; en principe, l'élève pourrait ne pas ressentir le besoin d'accompagner sa rédaction d'un élément graphique auxiliaire.

En outre, le fait de *tracer le dessin de manière à avoir un côté parallèle aux bords de la feuille* dépend de facteurs différents : une orientation particulière de la figure favorise sa lecture. Elle peut aussi prouver que, en recourant aux instruments de dessin, on met en œuvre les techniques de construction en utilisant les bords de la feuille comme repère.

Ces éléments fournissent surtout des indices sur les habitudes induites par l'enseignement reçu (le tracé de l'enseignant au tableau, les images dans les manuels, ...). Or, pendant le dépouillement des résultats de la partie pré-expérimentale, nous avons effleuré ces informations qualitatives en ne les citant qu'au passage : en effet, lors de cette phase, bien que l'échantillon d'élèves soit exigu, nous avons pu constater d'une manière assez évidente que les élèves italiens ont d'avantage que les élèves français l'idée que le tracé ne

représente qu'approximativement la situation décrite dans l'énoncé du problème. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous fournissons des résultats globaux sur ces aspects.

Les procédures des élèves

Concernant la première catégorie de problèmes, deux sous-catégories sont à envisager :

– les problèmes où les élèves doivent fournir une *réponse* et une *procédure de résolution* (**A1, $B1_d$, C1**) ;

– les problèmes où les élèves doivent fournir seulement une *procédure de résolution* (**$B1_a$, $B1_b$, $B1_c$, B2**).

Dans le premier cas (**A1, $B1_d$, C1**), en général, nous croisons les trois items suivants.

– LA RÉPONSE. La réponse fournie est **correcte, partiellement correcte, incorrecte, non-réponse**.

– LA PROCÉDURE. Suivant la structure de l'énoncé, nous le décomposons en plusieurs étapes et pour chacune nous signalons la *procédure de résolution*. S'il s'agit d'une *technique mathématique*, nous nous référons au codage des solutions envisagées lors de l'analyse *a priori* en ajoutant, le cas échéant, celles que nous n'avions pas prises en compte mais qui apparaissent dans quelques productions. Autrement, nous signalons s'il s'agit des techniques *perceptive* (TP) ou de *reconnaissance d'une configuration* (TRC) et, le cas échéant, s'il s'agit de techniques qui ne rentrent pas dans les catégories précédentes.

– L'USAGE DE LA PROCÉDURE. Concernant les *techniques mathématiques*, pour chacune des étapes repérées, nous signalons si la résolution est **complète correcte, complète partiellement correcte, complète incorrecte, incomplète correcte, incomplète partiellement correcte, incomplète incorrecte**.

Dans le deuxième cas (**$B1_a$, $B1_b$, $B1_c$, B2**), nous ne considérons que la procédure de résolution et son usage.

Lorsqu'il s'agit de *techniques mathématiques incomplètes*, nous tentons de donner des indications sur les étapes manquantes.

Pour la deuxième catégorie de problèmes, nous distinguons des items différents pour les deux problèmes.

Pour le **problème A2**, nous analysons le PROGRAMME DE CONSTRUCTION ainsi que son USAGE, à savoir si son exécution permet d'obtenir la figure attendue ; nous analysons la *procédure* adoptée pour justifier ce programme conjointement au *discours* que les élèves produisent pour l'expliciter.

Pour le **problème C2**, nous croisons les résultats relatifs à la CONSTRUCTION effectuée suivant le programme fourni avec la PROCEDURE et l'USAGE que les élèves en font pour justifier ce programme.

Les discours des élèves

Les *discours* des élèves sont répertoriés suivant la classification des *types de preuve* précédemment redéfinis. Le cas échéant, nous transcrivons les extraits qui s'avèrent les plus intéressants pour une analyse, les plus emblématiques par rapport à la situation et, éventuellement, les plus insolites par rapport à nos attentes, tout en considérant que souvent ces extraits apparaissent déjà lors de l'analyse des procédures.

Pour chaque fiche, nous relevons, le cas échéant, les interactions possibles. Ensuite, après avoir recueilli tous les résultats de chaque problème, nous comparerons les résultats du dépouillement en fonction des genres de tâches pour pointer les analogies éventuelles ou bien pour souligner les contradictions dues à un *habillage* différent du même genre de tâche. En analysant les résultats relatifs au tracé et à l'usage de la figure, tous problèmes confondus, nous reviendrons aussi sur la configuration du triangle des milieux qui apparaît d'une manière plus ou moins explicite dans chaque problème proposé. Parmi les outils possibles communs aux deux institutions, nous signalons, le cas échéant, les préférences des élèves en précisant les cas où ces préférences sont les mêmes pour les élèves italiens et français.

II. L'ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ELEVES

II.1 Les problèmes de la fiche 1

Dans les deux problèmes de la fiche 1, la figure en jeu est la même, le triangle des milieux. Cependant, puisque la nature des tâches proposées ainsi que les données fournies dans chacun sont tout à fait différentes, la manière de l'exploiter change : en fait, dans le problème A1, on sait que les sommets du petit triangle sont les milieux des côtés du grand triangle alors que, dans le problème A2, il faut construire le grand triangle tel que les sommets du petit triangle soient les milieux de ses côtés.

II.1.1 L'analyse du problème A1

Rappelons que la figure n'est pas donnée et que les tâches proposées sont du **GENRE 3** : on demande de comparer les périmètres et les aires de deux sous-figures de la figure donnée. Ici, l'intérêt porte surtout sur les outils que les élèves mobilisent pour aborder la question sur les aires.

Nous avons recueilli QUARANTE copies d'élèves **italiens** et QUARANTE copies d'élèves **français**. Suivant les indications générales fournies dans le paragraphe précédent, nous analysons les productions des élèves en distinguant trois volets : *le tracé et l'usage de la figure, les réponses et les procédures des élèves* et *les discours des élèves*.

Le tracé et l'usage de la figure

Les résultats relatifs à ce volet sont présentés dans le Tableau 6.1 où nous distinguons les items et utilisons le codage suivants :

NAT	**Quelle est la nature du triangle tracé ? L'élève, considère-t-il un cas *quelconque* ou *particulier*** (triangle isocèle, équilatéral ou rectangle) **?**	**N** L'élève ne produit pas de tracé **TP** Triangle particulier **TQ** Triangle quelconque
CODON	**L'élève code-t-il le tracé par rapport aux données ?** Ici, nous considérons le codage par des *lettres* (les sommets des triangles) suivant les données ainsi que le codage par des *marques* (définition de milieu d'un segment)	**L** Lettres **M** Marques **LM** Lettres et marques
AUTEL	**L'élève considère-t-il d'autres éléments (tracé ou non) qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé mais qui sont utiles pour mettre en place sa procédure de résolution ?** Il peut s'agir d'*angles*, de *hauteurs*, etc. Ici, nous ne prenons pas en compte les traces éventuelles de la construction du triangle. Cet item nous sert seulement pour repérer les élèves qui considèrent d'autres éléments dont la nature fait l'objet d'une analyse ultérieure.	**N** Non **O** Oui (dans ce cas, on signale la nature de l'élément)

Concernant l'*utilisation des instruments de dessin* pour reproduire la figure décrite dans l'énoncé, nous constatons qu'aucun élève **italien** n'utilise le compas, CINQ élèves réalisent un tracé à main levée, les autres utilisent la règle. En revanche, parmi les élèves **français**, seulement QUATRE élèves réalisent un tracé à main levée, VINGT-TROIS élèves utilisent la règle et ONZE élèves utilisent la règle et le compas. Le compas est utilisé surtout pour tracer les milieux des côtés de ABC. Remarquons que dans la copie de DEUX élèves **français**, qui rédigent une solution, aucun tracé n'apparaît (ils ont reproduit sans doute la figure sur un brouillon).

D'une part, ces résultats montrent que les techniques de tracé – dans l'enseignement de la géométrie – sont plus habituelles pour l'élève **français**, cela étant en accord avec les programmes qui prescrivent que les travaux géométriques doivent prendre appui sur l'usage des instruments de dessin. D'autre part, nous relions cette nécessité de précision aussi au fait que quelques élèves **français**, à partir de mesures effectuées sur le dessin, recourent aux formules de calcul du périmètre et de l'aire pour un triangle dans un

cadre numérique. L'idée que le tracé ne représente qu'approximativement la situation décrite dans l'énoncé du problème apparaît davantage pour les élèves **italiens**.

Seulement QUATRE élèves **italiens** et HUIT élèves **français** tracent la figure de manière à avoir *un côté parallèle au bord de la feuille*. Cela semblerait montrer que la majorité des élèves ne privilégient aucune orientation et que finalement cela rentrerait dans les habitudes scolaires. Vraisemblablement, les huit élèves **français** ont utilisé les bords de la feuille comme point de repère pour leur construction géométrique ; pour eux, la nécessité d'ordre et de soin apparaît davantage.

A propos de l'item **NAT**, voici ci-après les résultats détaillés.

Élèves italiens	UN élève ne produit aucun tracé et ne résout pas le problème ; TRENTE-CINQ élèves tracent un triangle quelconque ; DEUX élèves tracent un triangle quelconque ; dans le discours produit, ils confondent les médianes avec les hauteurs ; UN élève trace un triangle isocèle mais cela n'a pas d'influence sur sa réponse ; UN élève – qui n'aboutit pas – trace un triangle quelconque ; dans son discours, il ajoute explicitement aux hypothèses la propriété du triangle ABC d'être isocèle ;
Élèves français	DEUX élèves ne produisent aucun tracé mais résolvent le problème ; TRENTE élèves tracent un triangle quelconque ; DEUX élèves tracent un triangle isocèle mais cela n'a pas d'influence sur leurs discours ; QUATRE élèves tracent un triangle équilatéral mais cela n'a pas d'influence sur leurs discours ; UN élève trace un triangle quelconque ; dans le discours produit, il confond les médianes avec les hauteurs ; UN élève trace un triangle équilatéral, cela influe sur son discours.

Ces résultats montrent que, en général, la majorité des élèves ont une bonne capacité de *décontextualisation*. Pour les élèves **français**, le recours aux techniques de tracé joue encore un rôle important. Les SEPT élèves qui tracent un cas particulier de triangle ont utilisé les instruments de dessin : nous jugeons que c'est la nécessité de produire un dessin soigné qui les conduit à se faciliter cette tâche ou bien ils ont oublié de changer l'écartement du compas en traçant un triangle isocèle ou équilatéral puisque, pour SIX d'entre eux, cela n'influence pas leur discours.

Concernant les items **CODON** et **AUTEL**, avant de détailler les résultats, nous avons examiné comment les élèves peuvent agir sur la figure décrite dans l'énoncé. Pour ce faire, nous avons répertorié tous les éléments que les élèves ont envisagés. Dans le tableau 6.2, nous résumons les possibilités ainsi que les élèves qui y ont eu recours.

Tableau 6.1 – *Le tracé et l'usage de la figure dans le problème A1*[7]

	Élèves italiens				*Élèves français*		
	NAT	**CODON**	**AUTEL**		**NAT**	**CODON**	**AUTEL**
1	TQ	L	N	**41**	TQ	L	hauteurs
2	TQ	L	N	**42**	TQ	L	N
3	TQ	L	N	**43**	TQ	L	hauteur
4	TQ	L	N	**44**	TQ	L	hauteurs
5	TQ	L	N	**45**	TQ	L	hauteurs
6	TQ	L	N	**46**	TQ	LM	hauteurs
7	TQ	L	N	**47**	TP	L	N
8	TQ	L	N	**48**	TQ	L	N
9	TQ	L	angles	**49**	TQ	L	N
10	TQ	LM	angles, (hauteur)	**50**	TP	L	(hauteur)
11	TQ	LM	hauteurs	**51**	TQ	L	N
12	TQ	L	N	**52**	TQ	L	N
13	TQ	L	angles	**53**	TQ	L	N
14	TQ	L	N	**54**	TP	L	N
15	TQ	LM	N	**55**	TQ	LM	(hauteurs)
16	TQ	LM	N	**56**	TP	LM	(hauteurs)
17	TQ	LM	N	**57**	TQ	LM	(médianes)
18	TQ?	LM	angles, haut/méd	**58**	TQ	L	hauteurs, (médianes)
19	TQ	L	N	**59**	TQ?	LM	haut/méd
20	TQ	LM	N	**60**	TQ	LM	hauteurs
21	TQ	LM	angles	**61**	TQ	LM	N
22	TQ	L	angles, hauteur	**62**	TP	L	angles, bissectrice
23	TQ	L	N	**63**	TQ	LM	hauteurs
24	TQ	LM	N	**64**	TQ	LM	hauteur
25	TQ?	L	haut/méd	**65**	TQ	LM	(hauteur)
26	TP	L	N	**66**	TQ	L	N
27	TQ	L	N	**67**	TQ	L	hauteurs
28	TP	LM	N	**68**	TQ	LM	Autre
29	TQ	L	N	**69**	TQ	L	N
30	TQ	LM	angles	**70**	TQ	L	N
31	TQ	L	N	**71**	TP	L	N
32	N	N	N	**72**	TQ	LM	N
33	TQ	L	N	**73**	N	N	(hauteur)
34	TQ	L	angles	**74**	TQ	LM	N
35	TQ	L	N	**75**	TQ	L	N
36	TQ	L	N	**76**	N	N	N
37	TQ	LM	(hauteurs)	**77**	TQ	LM	hauteurs
38	TQ	L	N	**78**	TQ	LM	hauteur
39	TQ	L	N	**79**	TQ	LM	N
40	TQ	L	angles	**80**	TP	L	(médianes)

En général, les élèves ne ressentent pas trop le besoin de traduire les données discursives en graphiques ; néanmoins, pour les élèves **français**, cette nécessité apparaît davantage, cela correspondant probablement

[7] Lorsque l'élève trace un élément dont il ne s'en sert pas par la suite, nous le signalons entre parenthèses.

à une demande plus forte de l'enseignant ; nous remarquons, en effet, que certains élèves marquent même les points par une petite croix.

Concernant le codage des *segments de même longueur*, nous verrons plus loin que cela influe surtout sur les discours des élèves **français**. Remarquons que, bien qu'une bonne partie des élèves ne codent pas les segments de même longueur, ils considèrent cette propriété dans leurs discours.

Tableau 6.2 – *Le codage du tracé dans le problème A1*[8]

		Élèves italiens	*Élèves français*
D'après les données	– Nommer les **sommets** du triangle ABC et les milieux respectifs de ses côtés	Tous les élèves sauf 32	Tous les élèves sauf 73 et 76
	– Marquer les **segments** de même longueur (*définition de milieu*)	10, 11, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 37	46, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 63, 64, 65, 68, 72, 74, 77, 78, 79
A la suite de quelques déductions et/ou pour mettre en place une procédure envisagée	– Marquer les **segments** de même longueur suivant le codage déjà utilisé	11, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 28	55, 65, 74, 77
	– Marquer ou nommer les **angles** égaux	9, 10, 13, 18, 21, 22, 30, 34, 40	62
	– Tracer et/ou nommer les **hauteurs** des triangles ABC et IJK ou seulement l'une des deux	(10), 11, 18, 22, 25, (37)	41, 43, 44, 45, 46, (50), (55), (56), 58, 59, 60, 63, 64, (65), 67, (73), 77, 78

La prise en compte d'éléments supplémentaires de la figure est strictement liée à la procédure que l'élève envisage pour accomplir la tâche. Pour recueillir les informations relatives à l'item **AUTEL**, nous avons analysé conjointement le tracé et la production écrite de l'élève.

A propos des *angles égaux*, les résultats nous confirment que cela caractérise exclusivement les élèves **italiens** lorsqu'ils envisagent le recours aux *critères de congruence des triangles*, ce qui les amène à reconnaître la *configuration de deux droites parallèles et une sécante*. Un seul élève **français** code les angles car il a tracé un triangle équilatéral : plus loin, nous verrons qu'il s'en sert pour produire son discours, dans un cas particulier.

Encore plus importante est la considération des *hauteurs* dans la figure de départ. Voici, ci-dessous, les

[8] cf. note 7.

résultats détaillés.

Élèves italiens	UN élève (10) trace *correctement* les hauteurs de ABC et IJK mais *il ne s'en sert pas* par la suite. UN élève (11) trace *correctement* les hauteurs de ABC et IJK, il recourt aux formules de calcul des aires mais *il n'aboutit pas* car il ne cherche pas la relation entre leurs longueurs. UN élève (22) trace *correctement* les hauteurs de ABC et IJK, il recourt aux formules de calcul des aires mais il ne prouve pas explicitement la relation de leurs longueurs. DEUX élèves (18 et 25) tracent des triangles quelconques ; néanmoins, lorsqu'ils écrivent les formules de calcul des aires, ils considèrent les *médianes* des deux triangles en tant que hauteurs. UN élève (37) trace *incorrectement* les hauteurs des deux triangles et, en outre, *il ne s'en sert pas.*
Élèves français	QUATRE élèves (50, 55, 56 et 65) tracent *correctement* les hauteurs de ABC et IJK mais ils ne s'en servent pas par la suite. UN élève (60) trace *correctement* les hauteurs des deux triangles et, par la suite, il s'en sert *correctement.* QUATRE élèves tracent *correctement* au moins une hauteur et : – DEUX élèves (41 et 77) recourent ensuite au mesurage et aux formules de calcul des aires ; – UN élève (46) ne cherche pas la relation des longueurs ; – UN élève (58) utilise correctement la relation des longueurs sans pourtant la prouver explicitement ; il utilisera incorrectement les formules de calcul des aires ; DEUX élèves tracent seulement la hauteur de ABC relative à [AC] mais : – l'un (64) considère que IJK est rectangle en J (!?) ; il recourt ensuite au mesurage et aux formules de calcul des aires ; – l'autre (78) nomme [AH] cette hauteur et, dans les formules de calcul des aires, il considère la même longueur AH pour les deux triangles. CINQ élèves ne tracent pas de hauteurs, ils recourent aux formules de calcul des aires mais : – UN élève (67) recourt au mesurage ; – UN élève (43) ne cherche pas la relation des hauteurs ; – UN élève (63) utilise le même codage pour les deux hauteurs ; – DEUX élèves (44 et 45) fixent des bases mais ils ne considèrent pas correctement les hauteurs correspondantes ; UN élève (59), bien qu'il trace un triangle quelconque, le code comme si c'était un triangle isocèle (AB = BC) et considère les médianes au lieu des hauteurs. UN élève (73) écrit les formules de calcul des aires pour les deux triangles (pour indiquer les hauteurs, il utilise la même lettre !) mais il ne développe aucun discours.

Parmi d'autres éléments repérés, quelques élèves **français** tracent les médianes mais ils ne s'en servent pas par la suite. Un élève trace le symétrique de ABC par rapport à J et il s'en servira d'une manière sterile.

Ces résultats donnent déjà une idée des procédures adoptées par les élèves pour accomplir la tâche sur les aires. Nous trouvons significatif le fait que quelques élèves considèrent les hauteurs mais qu'ils ne s'en servent pas par la suite. Vraisemblablement, cela prouverait qu'ils ont envisagé des procédures différentes avant de choisir la procédure moins coûteuse ou bien abandonner.

C'est lors de l'analyse des procédures des élèves que ces résultats acquièrent une signification majeure surtout si nous considérons aussi le nombre d'élèves qui aboutissent ou non.

Les réponses et les procédures des élèves

Dans les tableaux 6.4 et 6.5, nous avons répertorié les réponses ainsi que l'usage des procédures adoptées par les élèves. Ci-dessous (Tableau 6.3), nous résumons les solutions repérées en reprenant le codage adopté lors de notre analyse *a priori* en rajoutant celles que nous n'avions pas envisagées. Nous signalons seulement les outils principaux mis en jeu dans chaque solution.

Tableau 6.3 – Les procédures repérées dans le problème A1

	Comparaison des périmètres	**Comparaison des aires**
B_1	Théorème des milieux (énoncé complet)	Propriétés des droites parallèles et perpendiculaires Réciproque du théorème des milieux Formule de calcul de l'aire d'un triangle
B_2	Théorème des milieux (énoncé complet)	Critères de congruence des triangles
B'_2	Réciproque du théorème de Thalès (énoncé général) Définition de parallélogramme Propriété du parallélogramme (un parallélogramme est partagé par chaque diagonale en deux triangles congruents) Propriété de triangles congruents (côtés correspondant de même longueur)	Propriété de triangles congruents (même aire)
B''_2	Réciproque du théorème de Thalès (énoncé général, parallélisme) Définition de parallélogramme Propriété du parallélogramme (côtés opposés de même longueur)	Critères de congruence des triangles
B'''_2	Réciproque du théorème de Thalès dans un triangle	Critères de congruence des triangles
B_3	Réciproque du théorème de Thalès (énoncé général, parallélisme) ou bien théorème des milieux (parallélisme) Propriétés des angles formés par deux droites parallèles et une sécante Critères de congruence des triangles	Critères de congruence des triangles
B_6	Théorème des milieux (énoncé complet) Critères de similitude des triangles Rapport des périmètres de deux figures semblables	Rapport des aires de deux figures semblables
B_7	Critères de similitude des triangles	Rapport des longueurs des hauteurs de deux triangles semblables Formule de calcul de l'aire d'un triangle
Autre	Théorème des milieux (parallélisme) Théorème de Thalès dans un triangle	Rapport des longueurs des hauteurs de deux triangles semblables Formule de calcul de l'aire d'un triangle
Mesurage	Formule de calcul du périmètre d'un triangle après mesurage des éléments du tracé	Formule de calcul de l'aire d'un triangle après mesurage des éléments du tracé
TRC	Technique de la reconnaissance d'une configuration	
TP	Technique perceptive : déduction des propriétés d'après ce que l'on perçoit sur le tracé	
TP*	Déduction de propriétés *fausses* obtenues en essayant de concilier les connaissances disponibles avec ce que l'on perçoit sur le tracé	
?	La procédure est confuse et imprécise. La production de l'élève est inexploitable.	

Tableau 6.4 – Les réponses et les procédures des élèves italiens dans le problème A1

	Élèves italiens					
	Les réponses		**Les procédures**		**Usage des procédures**	
1	m = 2	–	TRC, B''_2	–	*Incomplet* correct	–
2	m = 2	n = 4	TRC, B''_2		*Incomplet* correct	
3	m = 2	n = 4	B_6	B_2	Complet correct	Complet correct
4	m = 2	n = 4	B_6		Complet correct	
5	m = 2	n = 4	B_6	TP	Complet correct	–
6	–		–		–	
7	m = 2	n = 4	B_6	TP	Complet correct	–
8	m = 2	n = 4	B_6	TP	Complet correct	–
9	m = 2	n = 4	B_3		Complet correct	
10	m = 2	n = 4	B_3		Complet correct	
11	m = 2	–	TRC, B''_2	B_7	*Incomplet* correct	*Incomplet* correct
12	–		?		Incorrect	
13	m = 2	n = 4	?	...	Incorrect	
14	–		–		–	
15	–	–	B_1	–	*Incomplet* correct	–
16	m = 2	**n = 3**	TRC, B''_2		*Incomplet* correct	
17	m = 2	n = 4	B_2		Complet correct	
18	m = 2	n = 4	TRC, B_3	B_7	*Incomplet* correct	Complet part. correct
19	m = 2	n = 4	TRC, B_6		*Incomplet* correct	
20	m = 2	n = 4	TRC, B''_2	B_6	*Incomplet* correct	*Incomplet* correct
21	m = 2	n = 4	B_2		Complet correct	
22	m = 2	n = 4	B_7		*Incomplet* correct	
23	–		–		–	
24	m = 2	n = 4	B_2		Complet correct	
25	m = 2	n = 4	B_6	B_7	Complet correct	Complet part. correct
26	–		?	–	*Incomplet* incorrect	–
27	m = 2	**n = 2**	–	–	–	–
28	–	n = 4	–	TP	–	–
29	m = 2	**n = 3**	–		–	
30	–		B_1	–	*Incomplet* correct	–
31	–		–		–	
32	–		–		–	
33	–		–		–	
34	m = 2	n = 4	B_3		*Incomplet* part. correct	
35	m = 2	n = 4	–		–	
36	m = 2	n = 4	–		–	
37	m = 2	n = 4	B_2		Incomplet correct	
38	–		–		–	
39	m = 2	n = 4	(mesurage)	B_3	–	*Incomplet* correct
40	m = 2	n = 4	TRC, B_3		*Incomplet* correct	

Tableau 6.5 – Les réponses et les procédures des élèves français dans le problème A1

	Élèves français					
	Les réponses		**Les procédures**		**Usage des procédures**	
41	m = 2	**n = 0,26**	(mesurage)	(mesurage)	Correct	Correct
42	**m = 4**	n = 4	TP*	TP	–	–
43	m = 2	**n = 2**	B_6	B_7	Complet correct	Complet part. correct
44	–	**n = 5,3...**	–	(mesurage)	–	Incorrect
45	–	**n = 4,8**	–	(mesurage)	–	Incorrect
46	m = 2	n = 4	B_1	B_7, TP*	Complet correct	Complet incorrect
47	m = 2	**n = 2**	TP*	TP*	–	–
48	**m = 4**	n = 4	TP*	TP	–	–
49	–	–	–	–	–	–
50	m = 2	**n = 2**	TP*	TP*	–	–
51	m = 2	n = 4	B_6	TP	Correct	–
52	m = 2	n = 4	TP*	TP	–	–
53	m = 2	**n = 2**	B_6	–	Complet correct	–
54	**m = 1/2**	–	B_6	–	Complet correct	–
55	m = 2	n = 4	B_6	B'_2	Complet correct	*Incomplet* correct
56	m = 2	n = 4	B_6	B_6, TP*	Complet correct	Incorrect
57	m = 2	**n = 2**	TRC, B''_2	TP*	*Incomplet* correct	Incorrect
58	m = 2	n = 4	B_1	B_7	Complet correct	*Incomplet* correct
59	m = 2	**n = 2**	Autre	Autre	Complet correct	*Incomplet* incorrect
60	m = 2	n = 4	B_1		Complet correct	
61	m = 2	n = 4	B_2		Complet correct	
62	m = 2	n = 4	B_1	Autre	Complet correct	Incorrect
63	m = 2	**n = 2**	–	Autre 1	–	Incomplet part. correct
64	m = 2	n = 4	B_6	(mesurage)	Complet correct	Correct
65	m = 2	n = 4	B_2		Complet correct	
66	m = 2	n = 4	B_2		Complet correct	
67	m = 2	n = 4	(mesurage)	(mesurage)	Correct	Correct
68	m = 2	n = 4	B_2	–	*Incomplet* correct	–
69	**m = 4**	n = 4	TP*	TP	–	–
70	**m = 1/2**	**n = 1/2**	TP*	TP	–	–
71	m = 2	**n = 2**	TP*	TP*	–	–
72	–	–	–	–	–	–
73	m = 2	–	B_1	–	Correct	–
74	**m = 4**	n = 4	B'''_2, TP*		Complet part. correct	
75	**m = 4**	**n = 16**	TP*	B_6	–	Incorrect
76	m = 2	n = 4	B_2		Complet correct	
77	m = 2	**n = 0,249**	(mesurage)	(mesurage)	Correct	Correct
78	m = 2	**n = 1**	B_6	B_1	Complet correct	*Incomplet* incorrect
79	m = 2	–	B_1	–	Complet correct	–
80	–	–	–	–	–	–

Par rapport aux quatre grands groupes de solutions que nous avons distingués lors de l'analyse *a priori*,

nos prévisions sont confirmées car aucun élève ne suit de procédure s'appuyant sur les *transformations géométriques* (**3ème groupe** de l'analyse *a priori*).

Concernant les réponses, nous constatons que :

Élèves italiens	ONZE élèves **ne répondent à aucune des deux questions** ; DEUX élèves répondent **seulement** à la **question sur les périmètres** : leur réponse est ***correcte*** ; UN élève répond **seulement** à la **question sur les aires** : sa réponse est ***correcte*** ; TROIS élèves **répondent *correctement* à la question sur les périmètres** et ***incorrectement* à la question sur les aires** ; VINGT-TROIS élèves **répondent *correctement* aux deux questions.**
Élèves français	TROIS élèves **ne répondent à aucune des deux questions** ; QUATRE élèves répondent **seulement** à la **question sur les périmètres** dont : – TROIS élèves répondent ***correctement*** ; – UN élève répond ***incorrectement*** ; DEUX élèves répondent **seulement** à la **question sur les aires** : leur réponse est ***incorrecte*** ; DIX élèves **répondent *correctement* à la question sur les périmètres** et ***incorrectement* à la question sur les aires** ; QUATRE élèves **répondent *incorrectement* à la question sur les périmètres** et ***correctement* à la question sur les aires** ; QUINZE élèves **répondent *correctement* aux deux questions** ; DEUX élèves **répondent *incorrectement* aux deux questions.**

Comme le tableau 6.6 le montre, les élèves **français** s'investissent davantage dans l'accomplissement des tâches proposées alors que les élèves **italiens** sont plus nombreux à ne pas répondre ou ne pas aboutir, ce qui expliquerait partiellement la différence dans le nombre de réponses incorrectes car, en tout cas, VINGT-TROIS élèves **italiens** répondent correctement aux deux questions contre les QUINZE élèves **français**.

Tableau 6.6 – Les réponses dans le problème A1

	Pas de réponse		**Réponse correcte**		**Réponse incorrecte**	
	Élèves italiens	***Élèves français***	***Élèves italiens***	***Élèves français***	***Élèves italiens***	***Élèves français***
Périmètres	**12**	**5**	**28**	**28**	**0**	**7**
Aires	**13**	**6**	**24**	**20**	**3**	**14**

Nous constatons que les élèves **italiens** proposent des procédures plus variées. Néanmoins, ils en font souvent un usage incomplet : cela prouverait, d'une part, une familiarité avec la configuration en question et, d'autre part, une difficulté effective dans la rédaction de la résolution d'un problème de géométrie.

Par contre, dans les productions des élèves **français**, bien que le nombre de procédures complètes soit plus important, celles incorrectes sont plus nombreuses, cela attestant une difficulté dans l'acquisition des contenus géométriques. Notamment, chez les élèves **français**, nous retrouvons beaucoup plus souvent la même valeur pour m et n, le plus souvent 2 qui va contre la perception du partage du grand triangle en quatre petits.

Comparaisons des périmètres : la valeur de m.

Les résultats prouvent que, pour amorcer le problème, l'énoncé complet du *théorème des milieux* est l'outil le plus accessible aussi bien pour les élèves italiens que français. Toutefois, selon nos hypothèses, les élèves **italiens** proposent des procédures plus variées que les élèves **français**. Le recours au mesurage demeure faible mais l'apparition de conceptions erronées se révèle d'une manière importante exclusivement dans les copies des élèves **français** ; nous constatons, entre autres, qu'un certain nombre d'élèves **français** manifestent des difficultés dans la traduction du langage naturel en langage symbolique, notamment dans un cadre algébrique. Cependant, le nombre de procédures incomplètes demeure plus élevé chez les élèves **italiens**.

UN élève **italien** et CINQ élèves **français** proposent une procédure proche de la **Solution B_1** de notre analyse *a priori*.
En général, les élèves **français** évoquent explicitement le *théorème des milieux* et répondent correctement alors que l'élève **italien** l'utilise d'une manière *contextualisée* sans pourtant aboutir.

QUATRE élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** recourent aussi au *théorème des milieux*. Néanmoins, nous rattachons leur procédure à la **Solution B_2** de l'analyse *a priori* car, par la suite, ils exploitent les égalités de longueurs pour en conclure directement que ABC est constitué de quatre triangles congruents. De même ici, les élèves **français** évoquent explicitement cette congruence alors que les élèves **italiens** l'utilisent surtout d'une manière *contextualisée*.

Les procédures de CINQ élèves **italiens** et UN élève **français** pourraient être proches de la Solution **B''_2** de l'analyse *a priori* ; néanmoins, quelques passages demeurent implicites (usage correct de la procédure mais incomplet).
En effet, TROIS élèves **italiens** recourent d'une manière *contextualisée* à la *réciproque du théorème de Thalès* pour prouver que chaque côté de IJK est parallèle à chaque côté de ABC. A partir de là, peut-être reconnaissent-ils les parallélogrammes qui apparaissent comme sous-figures de la figure de départ et exploitent-ils les propriétés de ce quadrilatère pour établir la relation des longueurs des côtés des deux triangles

mais aucun indice ne nous permet d'identifier les outils qu'ils mobilisent implicitement pour parvenir au résultat cherché. Leurs réponses sont correctes.
En revanche, DEUX élèves **italiens** et UN élève **français** n'explicitent pas le point de départ de leur procédure mais ils exploitent les *propriétés du parallélogramme* pour prouver la relation des longueurs des côtés de ABC et de IJK. Aucun indice ne nous permet de déterminer si ces élèves reconnaissent dans la figure donnée une configuration de base qui leur est familière ou bien s'ils *lisent* sur le tracé le parallélisme des côtés des deux triangles et qu'ils reconnaissent les parallélogrammes qui apparaissent comme sous-figures. Ils fournissent une réponse correcte en mobilisant les outils nécessaires d'une manière *contextualisée.*

UN élève **français** recourt d'une manière contextualisée à la *réciproque du théorème de Thalès* (**Solution B'''$_2$**). Toutefois, il fournit une réponse incorrecte ($m = 4$) en s'appuyant sur une *propriété fausse.* En effet, après avoir prouvé que *les quatre triangles qui composent* ABC *sont égaux*, il explique que *le périmètre de ABC est égal à la somme des périmètres de ces quatre triangles.* Et encore, lorsque l'élève traduit dans un langage symbolique le fait que, par exemple, J est le milieu de BC, il écrit $CJ = 2\times BC$ et non pas le contraire. Cette erreur revient à plusieurs reprises, même lorsqu'il prouve la relation des côtés de ABC et de IJK : il écrit $JK = 2\times BA$ et $JK = AI = IB$. On dirait que cet élève traduit ainsi l 'expression "*...deux fois plus petit que...*".

CINQ élèves **italiens** fournissent une procédure proche de la **Solution B$_3$**. DEUX élèves détaillent tous les passages en évoquant explicitement le *théorème des milieux* et en mobilisant d'une manière *contextualisée* les autres outils nécessaires pour aboutir. DEUX élèves ne précisent pas les outils permettant d'établir le parallélisme des côtés des deux triangles et exploitent les autres d'une manière contextualisée : vraisemblablement ils reconnaissent une figure qui leur est familière. UN élève fournit un discours confus et imprécis, ce qui atteste une difficulté dans l'acquisition des ses connaissances ainsi qu'une difficulté dans la rédaction d'un problème de géométrie.

SEPT élèves **italiens** et HUIT élèves **français** proposent une procédure proche de la **Solution B$_6$**. Parmi les élèves **italiens**, SIX utilisent implicitement ou bien d'une manière *contextualisée* les outils nécessaires en fournissant des réponses *correctes* ; UN exploite explicitement les propriétés de la similitude pour déduire que le rapport des périmètres des deux triangles est égal au rapport des longueurs des côtés homologues mais, probablement, la figure donnée lui est familière car il n'explicite pas les outils qui lui permettent de déduire que ABC et IJK sont semblables.
Parmi les élèves **français**, CINQ évoquent explicitement le *théorème des milieux* alors que les autres l'utilisent d'une manière *contextualisée.* Tous les NEUF élèves recourent implicitement aux propriétés d'agrandissement/réduction.
Tous les élèves qui proposent cette procédure répondent correctement, sauf un. En effet, UN des élèves **français**

fournit une réponse *incorrecte* : en traduisant en termes symboliques que le périmètre de IJK est égal à la moitié de celui de ABC, il écrit P(ABC) = ½ P(IJK) en concluant que m = ½. De même ici, nous reconnaissons une difficulté à traduire le langage naturel en langage symbolique.

Seulement UN élève **italien** recourt à l'un des *critères de similitude des triangles* comme dans la **Solution B_7** de l'analyse *a priori*. Il mobilise les outils nécessaires d'une manière *contextualisée*.

UN élève **français** recourt au *théorème des milieux* pour garantir seulement le parallélisme des côtés des deux triangles. Pour prouver la relation des longueurs, il utilise ensuite le *théorème de Thalès*. Il mobilise ces outils d'une manière *contextualisée*.

UN élève **italien** et TROIS élèves **français** recourent au mesurage. En effet, ils reproduisent méticuleusement la figure décrite dans l'énoncé. L'un des élèves **français**, ayant reconnu la *configuration de Thalès*, écrit les hypothèses de la réciproque du théorème correspondant dans trois couples de triangles convenablement choisis mais il ne va pas plus loin en préférant le recours à une technique perceptive.

UN élève **italien** mobilise implicitement des outils mais il s'en sert d'une manière erronée, son discours est aussi confus et incomplet.

SEPT élèves **français** fournissent une réponse correcte mais ils suivent une procédure incorrecte.
QUATRE élèves suivent un raisonnement qui relève au détail près de la propriété suivante :

> "Étant I, J, K les milieux respectifs des côtés de ABC, ils **divisent** ces côtés **en deux** parties de même longueurs. Par conséquent, ils forment un triangle qui est la **moitié (deux fois plus petit)** du triangle de départ".

Peut-être font-ils allusion au *théorème des milieux* mais aucun indice ne nous permet d'en avoir la certitude. La difficulté à expliciter convenablement leur raisonnement semble dissimuler une acquisition impropre de l'outil en question. Nous estimons que ces productions sont erronées car, comme nous le verrons lors de l'analyse du problème 1C, cette conception apparaît encore alors que, dans ce cas-là, il s'agit de la comparaisons des aires de deux quadrilatères et pour lesquelles la valeur est correcte.
UN élève **français** recourt à la même propriété mais une autre difficulté s'ajoute : lorsque il traduit dans un langage symbolique le fait que *IJK est deux fois plus petit*, il écrit *P (ABC) = ½ P (IJK)*, ce qui le conduit à fournir une valeur inexacte de *m*. Là encore cette erreur relève d'une incapacité à traduire le langage naturel en langage symbolique.

TROIS élèves **français** fournissent une réponse incorrecte (m = 4) en suivant une procédure incorrecte. Leur raisonnement révèle la conception suivante :

"ABC est décomposé en **quatre** triangles égaux (ABC est **quatre fois plus grand** que IJK), donc le périmètre de ABC est égal à **quatre fois** le périmètre de IJK".

Cette erreur manifeste une acquisition impropre des notions de périmètre et d'aire ainsi qu'une difficulté de passage d'une dimension à l'autre.

Comme nous le verrons plus loin, cette conception erronée amènera l'un de ces élèves à fournir aussi une valeur incorrecte de n alors que sa procédure sera tout à fait correcte.

Comparaison des aires : la valeur de n.

Ici, la tâche est plus difficile que la précédente, surtout pour les élèves **français**. L'analyse des procédures montre que c'est surtout chez les élèves **français** que des *conceptions erronées* subsistent, ce qui confirmerait plutôt que, dans l'institution française, le chapitre sur les aires est traité d'une manière insuffisante.

De même ici, remarquons que le nombre d'élèves **italiens** qui ne fournissent pas de réponse demeure aussi plus important que celui des élèves **français**.

Les procédures proposées dans les productions des élèves permettent de les distribuer en cinq catégories.

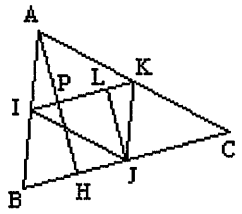
1) L'élève établit la relation des longueurs des hauteurs des deux triangles et puis recourt aux formules de calcul des aires (**Solutions B_1, B_7, Autre**). Dans ce groupe, nous avons comptabilisé les productions où, au lieu d'établir cette relation, l'élève recourt au **mesurage** et puis aux formules.
2) L'élève s'appuie sur la notion de congruence (**Solutions B_2, B'_2, B''_2, B'''_2, B_3**).
3) L'élève s'appuie sur la notion de similitude (agrandissement/réduction) (**Solution B_6,**).
4) L'élève recourt à une technique perceptive (**TP**).
5) L'élève recourt à une propriété fausse (**TP***).

Signalons que la majeure partie des élèves utilisent les résultats établis auparavant.

Relation des longueurs des hauteurs des deux triangles et recours aux formules de calcul des aires.

QUATRE élèves **italiens** et DOUZE élèves **français** peuvent être groupés dans cette catégorie. Dans ce cas, les élèves montrent avoir une vision de la figure comme celle d'un petit triangle inscrit dans un grand triangle ; en outre, ils rattachent spontanément la question des aires aux formules de calcul : dans beaucoup de cas, la procédure est incomplète ou bien incorrecte.

En s'appuyant sur la relation des longueurs des hauteurs des deux triangles, établie précédemment, UN élève **français** recourt à la formule de calcul de l'aire du triangle et propose une procédure proche de la **Solution B_1** de l'analyse *a priori*.



Il trace les hauteurs [AH] et [LJ], il prouve que PLJH est un parallélogramme et que donc PH = JL ; grâce à la *réciproque du théorème des milieux* dans ABH, il prouve que P est le milieu de [AH] d'où il déduit que AH = 2 JL. Le recours à la formule de calcul de l'aire d'un triangle lui permet d'établir la valeur correcte de n. Il explicite tous les outils qu'il utilise, sauf la *propriété de deux droites perpendiculaire à une même droite* qu'il exploite d'une manière *contextualisée*.

UN élève **français** ne cherche pas la relation des longueurs des hauteurs des deux triangles mais il recourt aux formules. Il considère le même codage pour les deux hauteurs mais, en plus, il considère aussi la même base : dans la formule relative à l'aire de ABC, il désigne la base par AC ; dans la formule relative à l'aire de IJK, il la désigne par 2AK. Contre toute évidence, cela le conduit à trouver la valeur incorrecte $n = 1$.

UN élève **français** trace un triangle quelconque mais il le traite comme si c'était un triangle isocèle. Il prouve que IBJK est un parallélogramme et que, par conséquent, les diagonales se coupent en leur milieu, soit O. Dans la formule relative à IJK, il considère alors que [KO] est la hauteur ; il n'écrit pas la formule relative à ABC et il conclut en fournissant la valeur incorrecte $n = 2$.

UN élève **italien** et DEUX élèves **français** exploitent explicitement la proportionnalité des longueurs des hauteurs de deux figures semblables. Néanmoins, l'élève **italien** considère les médianes au lieu des hauteurs mais il fournit une valeur correcte de n.

Ayant établi que ABC est un agrandissement de IJK, les deux élèves **français** utilisent correctement la propriété des hauteurs de deux triangles semblables. Cependant, dans la formule, l'un désigne ces hauteurs par la même lettre (h), ce qui le conduit à fournir la valeur incorrecte $n = 2$; bien que l'autre écrive la formule relative à ABC, du fait que la base et la hauteur sont multipliées par 2, il en déduit que l'aire aussi est multipliée par 2.

TROIS élèves **italiens** et UN élève **français** utilisent les formules de calcul des aires mais ils n'explicitent pas les propriétés qui leur permettent d'établir la relation des longueurs des hauteurs des deux triangles : il paraît évident qu'ils exploitent la proportionnalité des longueurs des hauteurs de deux figures semblables.

Parmi les élèves **italiens**, DEUX parviennent à une valeur correcte de n ; néanmoins, ayant tracé un triangle quelconque, l'un des deux utilise les médianes en tant que hauteurs. Remarquons que cet élève établit la congruence des triangles qui constituent ABC mais il ne s'en sert pas. L'autre élève italien pose correctement les calculs algébriques mais il n'aboutit pas.

L'élève **français** parvient à un résultat correct mais il utilise une formule de calcul incorrecte (a-t-il oublié ou bien simplifié le facteur ½ qui apparaît dans la formule de calcul de l'aire d'un triangle ?).

SIX élèves **français** recourent au mesurage et à la formule de calcul de l'aire d'un triangle. Non seulement ces élèves adoptent une technique perceptive mais, en outre, CINQ d'entre eux commettent des erreurs diverses.

UN élève utilise correctement les formules et fournit la valeur $n = 4$.

UN élève utilise correctement les formules mais il ajoute une hypothèse fausse lorsqu'il doit calculer l'aire de IJK. En effet, il affirme que, *par construction, le triangle IJK est rectangle en J* (!?) en recourant ainsi à la formule de calcul de l'aire d'un triangle rectangle (côté fois côté divisé par 2).

DEUX élèves utilisent correctement les formules mais fournissent une valeur (approchée) de l'inverse de n. Cette erreur relève encore d'une difficulté dans un cadre algébrique.

DEUX autres élèves fournissent une valeur incorrecte (même pas approchée) de n : en effet, ils ne considèrent pas les hauteurs qui conviennent par rapport aux bases choisies.

Congruence des quatre triangles qui constituent ABC. TREIZE élèves **italiens** et SEPT élèves **français** s'appuient sur la notion de congruence. Ici, les élèves ont sans doute une vision de la figure comme d'un pavage de quatre triangles disjoints et congruents.

Ayant déjà établi que IJ = AK = KC etc., ONZE élèves **italiens** recourent à l'un des *critères de congruence des triangles*. QUATRE élèves l'évoquent explicitement ; DEUX élèves l'évoquent d'une manière imprécise ; les autres CINQ l'utilisent d'une manière *contextualisée*. Tous ces élèves fournissent une valeur correcte de n sauf un qui ne comptabilise pas IJK parmi les quatre triangles congruents et qui fournit donc la valeur $n = 3$. DEUX élèves **italiens** parviennent aussi à la conclusion que ABC est constitué de quatre triangles congruents mais leur raisonnement est incomplet et confus.

Également, CINQ élèves **français** établissent que IJ = AK = AC etc. d'où ils concluent que ABC est constitué de quatre triangles égaux et que donc $n = 4$. Remarquons que TROIS de ces élèves codent les segments de même longueur et que donc leur réponse est due vraisemblablement à la perception.

UN élève **français** reconnaît le parallélogramme comme sous-figure contenue dans ABC : en exploitant le fait que une diagonale le coupe en deux triangles de même aire, il en déduit que $n = 4$.

Ayant tracé un triangle équilatéral, UN élève **français** établit que les quatre petits triangles sont équilatéraux en prouvant que leurs angles sont de 60° d'où il déduit qu'ils sont égaux. En réalité, les arguments de cet élève sont incorrects car, ainsi faisant, il ne prouve que la similitude de ces triangles.

Similitude de triangles. TROIS élèves **italiens** et DEUX élèves **français** s'appuient sur la notion de similitude (agrandissement/réduction).

Les élèves **italiens** fournissent une réponse correcte mais un seulement propose une procédure complète, ce qui prouverait que – pour les autres – la figure décrite dans l'énoncé leur est familière. En effet, à l'aide de la

réciproque du théorème de Thalès, ayant précédemment établi que le rapport des longueurs des côtés de ABC et de IJK est égal à 2, UN élève conclut que le rapport des aires des deux triangles est égal à 2^2. Il exploite d'une manière *contextualisée* les propriétés en question. UN élève affirme que ABC et IJK sont semblables (sans le prouver) ; d'après la *propriété des aires de deux figures semblables*, qu'il énonce explicitement, il déduit la valeur correcte de n. UN élève déduit implicitement que les deux triangles sont semblables, grâce au *théorème des milieux*.

Parmi les élèves **français,** l'un évoque correctement la propriété des aires de deux figures sous l'effet d'un agrandissement/réduction mais, puisqu'il a fourni la valeur incorrecte $m = 4$, il conclut que $n = 16$; l'autre élève fournit une valeur correcte mais il justifie sa réponse ainsi :

"Quand le périmètre est multiplié par x, l'aire est multipliée par 2x. Donc l'aire est multipliée par 2×2=4".

Évidemment, cet élève voudrait recourir à la propriété des aires de figures semblables mais il confond la notion de multiplication avec celle de puissance, cela induit aussi du fait que $2^2=2\times2$. Peut-être voit-il sur son tracé que ABC est partagé en quatre parties et qu'il arrange son raisonnement pour obtenir la bonne valeur de n.

Technique perceptive. De même ici, il y a une vision de la figure comme d'un pavage de triangles disjoints.

QUATRE élèves **italiens** et SIX élèves **français** affirment seulement que ABC est constitué de quatre triangles égaux, ce qui est dû sans doute à ce qu'ils perçoivent sur le tracé. Remarquons que, dans l'étape précédente, parmi les élèves italiens, TROIS ont eu recours au théorème des milieux alors que l'autre n'a pas abordé la question sur les périmètres ; parmi les élèves français, DEUX en déduisant la valeur incorrecte de $m = 4$, ce qui atteste une difficulté à distinguer les notions de grandeur et de mesure ainsi que le changement de dimension.

Propriétés fausses. SIX élèves **français** peuvent être groupés dans cette catégorie. Ici, les élèves vont contre toute évidence : ils semblent ne pas prendre en compte le tracé comme support perceptif utile pour aboutir. Cela cache évidemment une acquisition impropre de quelques notions géométriques fondamentales.

QUATRE élèves **français** s'appuient plus ou moins explicitement sur une propriété fausse qui pourtant demeure liée à la notion d'agrandissement/réduction et qui peut s'exprimer ainsi :

"Puisque les côtés de IJK sont divisés par 2, son aire est aussi divisée par 2. Donc $n = 2$"

Évidemment, pour ces élèves, il s'agit d'une acquisition erronée des propriétés des figures sous l'effet d'un agrandissement/réduction. Cela dépend peut-être du fait qu'ils ne savent pas distinguer les notions de grandeur et de mesure car, contre toute évidence, ils ne réussissent même pas à mettre en relation le résultat obtenu avec ce qu'ils peuvent percevoir sur leur tracé.

UN élève **français** recourt à la même propriété : il relie le périmètre à l'aire mais, puisqu'il a fourni la valeur $m = ½$, il confirme la même valeur pour n. Plus haut, nous avons attribué cette erreur à une difficulté de

traduction du langage naturel au langage symbolique. Évidemment, à cela s'ajoute l'incapacité à distinguer les notions de grandeur et de mesure.
Enfin, UN dernier élève **français** écrit la formule générale de calcul de l'aire d'un triangle mais il ne s'en sert pas. Il affirme que n = 2 : peut-être croit-il que, puisque les éléments de ABC sont multipliés par 2, l'aire est aussi multipliée par 2. Bien qu'aucun indice ne nous permette d'en avoir la certitude, nous relions aussi ce cas à une acquisition erronée des propriétés des figures sous l'effet d'un agrandissement/réduction.

Les discours des élèves

En général, nous avons constaté que le type de preuve produit dépend de la tâche proposée, de la procédure adoptée par les élèves et, par conséquent, il demeure strictement lié aux outils qu'ils mobilisent pour les valider.

Dans l'ensemble, aucun élève ne montre avoir atteint le niveau où il réussit à produire une véritable *démonstration*. Il est vrai que le recours implicite ou contextualisé aux outils mis en jeu est une caractéristique des élèves **italiens** mais, par ailleurs, nous constatons que les élèves **français** évoquent explicitement surtout le *théorème des milieux*. En revanche, lorsqu'il s'agit de la notion d'*agrandissement/réduction* ou bien de la notion d'*isométrie* (*congruence*), ils se comportent comme les élèves italiens. Prenons, par exemple, les élèves qui – pour établir la valeur de *n* – déduisent que le triangle ABC est constitué de quatre triangles égaux : soit ils s'appuient sur le tracé (*évidence des faits*), soit ils prouvent la congruence sans mobiliser explicitement aucun outil précis (*évidence des raisons*).
Dans beaucoup de cas, surtout chez les élèves **italiens**, nous constatons que l'*évidence* fait *obstacle* : il s'agit surtout des cas où les élèves recourent à des procédures où les outils à mobiliser sont nombreux, comme, par exemple, dans la Solution B'_2.
Le recours à une technique perceptive et, par conséquent, à la production d'une preuve qui relève de l'*évidence des faits* est surtout une prérogative des élèves **français** : un bon nombre d'entre eux recourent au mesurage ou se contentent de répondre aux questions en s'appuyant sur ce qu'ils perçoivent.
Encore, c'est surtout dans les productions des élèves **français** que l'on retrouve des preuves qui portent la marque du *calcul sur les énoncés*.
Finalement, nous retrouvons très peu de cas où les élèves produisent des preuves qui portent la marque de l'*exemple générique euclidien*. Il paraît que, dans la démarche de l'élève, l'*évidence* joue encore un rôle important, ce qui conduirait donc à conclure que, pour la majeure partie des élèves observés, la phase de l'*attitude rationnelle* n'est pas encore atteinte.

Conclusions

A propos du tracé et de l'usage de la figure, les élèves français sont plus méticuleux que les élèves italiens. Ces derniers se contentent surtout de tracer des croquis, ce qui semblerait plus conforme à une *attitude rationnelle* – où le dessin est désormais une simple aide subsidiaire – mais qui pourtant fait contraste avec les types de preuves produites car, dans ce cas, on est plutôt amené à confirmer le contraire.
Pour les élèves italiens, le codage acquiert une signification dans le sens qu'ils s'en servent pour rédiger la résolution du problème où ils s'expriment surtout à travers un langage symbolique. A ce propos, nous constatons que, en revanche, les élèves français s'expriment à l'aide du langage naturel : cela explique en partie le nombre élevé de discours qui dévoilent des conceptions erronées. D'ailleurs, à plusieurs reprises, nous avons remarqué la difficulté de quelques élèves français à traduire en langage symbolique ce qu'ils venaient d'écrire en toutes lettres.
En outre, nous constatons que le codage par les marques est surtout important pour les élèves italiens qui exploitent les égalités des angles : dans ce cas, nous considérons que le tracé devient souvent une partie intégrante de la résolution, cela étant encore un moyen symbolique pour s'exprimer. En fait, dans quelques copies, c'est ce codage qui nous a permis de saisir les intentions des élèves et de *combler des trous* qui apparaissaient dans le texte écrit.

Des réponses incorrectes apparaissent surtout à propos des aires. Les erreurs relèvent d'un usage incorrect des formules de calcul mais surtout de conceptions erronées relatives aux notions de grandeur et de mesure ainsi que du changement de dimension. Nous retrouvons ces difficultés surtout dans les productions des élèves français.

En général, un même élève change de catégorie de technique en passant d'une question à l'autre. Selon nos prévisions, les élèves italiens adoptent des techniques mathématiques plus variées ; néanmoins, la reconnaissance d'une configuration familière et la perception les empêchent souvent de fournir des procédures complètes. Les élèves français recourent davantage à la perception et, surtout pour accomplir la tâche relative aux aires, ils semblent aller contre la perception en fournissant des réponses incorrectes. Finalement, ces résultats confirment ceux qui sont issus de la phase pré-expérimentale.

II.1.2 L'analyse du problème A2

Il s'agit de compléter un programme de construction d'une figure suivant des propriétés imposées et dont

les étapes sont données dans un registre graphique (**GENRE de TÂCHE 6bis**). On demande ensuite de prouver la validité du programme produit (**GENRE de TÂCHE 7**). Contrairement à la version précédente, il n'y a pas de tracé à réaliser. En proposant ce problème, notre intérêt porte sur la capacité des élèves à distinguer les deux tâches et, par conséquent, à voir s'ils ressentent le besoin de valider leur programme.

Nous avons recueilli QUARANTE copies d'élèves **italiens** et QUARANTE copies d'élèves **français** : il s'agit des mêmes élèves qui ont eu à résoudre le problème précédent. Dans l'analyse de leurs productions, nous distinguons deux volets : *les programmes de construction* et *les procédures et les discours des élèves*.

Les programmes de construction

D'après les productions des élèves, nous avons réussi à repartir les programmes de construction produits en quatre grands groupes, les deux premiers correspondant à ceux que nous avons envisagés préalablement.

Programme 1	[a] *Je trace le triangle TGL et puis la droite parallèle à (TG) passant par L.* [b] *Sur cette droite, du côté de G, je place le point I tel que IL = TG.* [c] *Je place le symétrique de I par rapport à L, soit A (je place le point A tel que AL = LI).* [d] *Je trace les droites (IG) et (AT) : elles se coupent en O.* Il s'agit de prouver que (IG) et (AT) sont nécessairement sécantes et que G et T sont les milieux respectifs de [IO] et [AO]. D'après la construction, L est bien le milieu de [AI].
Programme 2	[a] *Je trace le triangle TGL et puis la droite parallèle à (TG) passant par L.* [b] *Sur cette droite, du côté de G, je place le point I tel que IL = TG.* [c] *Je place le symétrique de I par rapport à L, soit A (je place le point A tel que AL = LI).* [d] *Je place le symétrique de A (I) par rapport à T (G), soit O.* Il s'agit de prouver I, G, O sont alignés et IG = GO (A, O, T alignés et AT = TO). D'après la construction, L et T (G) sont bien les milieux de [AI] et [AO] ([IG]).
Programme 3	[a] *Je trace le triangle TGL et puis la droite parallèle à (TG) passant par L.* [b] *Sur cette droite, du côté de G, je place le point I tel que IL = TG.* [c] *Je place le symétrique de I par rapport à L, soit A (je place le point A tel que AL = LI).* [d] *Je place le symétrique X de I par rapport à G, puis le symétrique X' de A par rapport à T.* Il s'agit de prouver que ces deux derniers points coïncident. D'après la construction, T, G et L sont bien les milieux des côtés de ABC.

Programme 4	[a] *Je trace le triangle TGL et puis la droite parallèle à (TG) passant par L.* [b] *Sur cette droite, du côté de G, je place le point I tel que IL = TG.* [c] *Je place le symétrique de I par rapport à L, soit A (je place le point A tel que AL = LI).* [d] *Je trace la parallèle à (LG) passant par T (A) et puis la parallèle à (LT) passant par G (I) : elles se coupent en O et passent respectivement par A (T) et I (G).* Il s'agit de prouver que ces deux dernières sont nécessairement sécantes, passent respectivement par A (T) et I (G) et que G et T sont les milieux respectifs de[IO] et [AO]. D'après la construction, L est bien le milieu de [AI].

Le **Programme 1** décrit ce qui est le plus essentiel pour accomplir la construction. Les trois premières étapes contiennent les propriétés nécessaires pour pouvoir ensuite prouver que la figure obtenue répond aux conditions imposées.

Dans la dernière étape du **Programme 2**, en plus des propriétés utiles pour aboutir, une propriété supplémentaire apparaît et dont on peut attendre qu'elle soit admise lorsque l'on prouve la validité du programme. Ici, on reste encore à l'essentiel.

Dans la dernière étape du **Programme 3**, en plus des propriétés utiles pour aboutir, deux propriétés supplémentaires apparaissent et dont on peut attendre qu'elles soient admises lorsque l'on prouve la validité du programme. D'une part, dans la démarche de l'élève, ce programme semble correspondre à une vision de la figure comme pavage de quatre triangles disjoints et congruents ; d'autre part, il nous paraît que l'élève dirige son intérêt sur le fait que I, J et K doivent être les milieux respectifs des côtés de ABC.

Le **programme 4** contient plusieurs propriétés supplémentaires : il traduit une vision de la figure comme pavage de parallélogrammes "chevauchés". Dans la démarche de l'élève, il correspond donc à l'exigence de faire apparaître la condition de parallélisme qui permet d'exploiter les propriétés du parallélogramme pour valider la construction et peut-être aussi à la démarche réciproque du problème A1 où l'on obtient des parallèles à partir des milieux. En traçant des parallèles, on reconstitue la figure du problème précédent éventuellement sans tenir compte des points déjà placés.

Au niveau concerné, les élèves n'ont pas l'habitude de se poser systématiquement des questions sur l'alignement et l'incidence, ces éléments pouvant souvent se lire entre les lignes. C'est ainsi que nous croyons que, à l'égard de la construction proposée, dans la démarche de l'élève, ce qui est important à prouver est le fait que T, G et L sont bien les milieux respectifs des côtés de ABC et, plus précisément, des égalité de longueurs.

Une première analyse des programmes repérés nous encouragerait à croire que les élèves qui proposent le **Programme 3** se soucient de fournir des informations qui ensuite peuvent être validées par la construction elle-même tandis que, *a priori*, les élèves qui proposent le **Programme 4** semblent se soucier surtout de fournir des informations qui leur permettront ensuite de prouver que T, G et L sont bien les milieux respectifs des côtés de ABC. Toutefois, nous verrons ci-après qu'en réalité la majeure partie des élèves ne ressent pas le besoin de fournir une véritable preuve de validation de la construction. Nous pouvons reconnaître qu'ils fournissent clairement un programme : pour certains – et non seulement ceux qui proposent le **Programme 3** – c'est sans doute l'évidence qui les rassure sur sa validité, d'autres fournissent des commentaires et d'autres encore ne distinguent pas aisément les hypothèses de ce qui peut en découler. En général, nous ne retrouvons pas de cas où l'élève rédige un discours en réunissant explicitement les deux tâches. Comme nous l'avons dit, nous sommes plutôt persuadée que la plupart des élèves ne savent pas vraiment résoudre un problème de construction : il nous paraît que, d'après eux, le fait de décrire correspond conjointement à prouver.

Dans le tableau 6.7, nous résumons le type de programme proposé par chaque élève en précisant son usage, c'est-à-dire s'il est **complet correct**, **complet partiellement correct**, **complet incorrect**, **incomplet correct**, **incomplet partiellement correct**, **incomplet incorrect**. Précisons que nous considérons comme correct un programme dont l'exécution permet d'obtenir la figure attendue, même si on ne prouve pas les propriétés exploitées pour l'accomplir. Soulignons aussi que, lorsque le programme est incomplet, nous indiquons entre parenthèses l'étape manquante.

Le Programme 1.

SEIZE élèves **italiens** et VINGT-QUATRE élèves **français** produisent un programme de construction qui est proche (au détail près) du **Programme 1**. Les élèves qui proposent ce programme sont plus nombreux que les autres et, en particulier, ONZE **italiens** et VINGT **français** l'énoncent d'une manière complète.

Remarquons que DEUX élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** ne précisent pas que le point I est tel que IL = TG. DEUX élèves **italiens** ne précisent pas non plus que A est le symétrique de I par rapport à L. L'évidence de ce que ces élèves perçoivent sur les tracés fournis joue un rôle fondamental.

Tableau 6.7 – Le programme et son usage dans le problème A2

	Élèves italiens			*Élèves français*	
	Programme	**Usage du programme**		**Programme**	**Usage du programme**
1	4	Complet correct	41	1	Complet correct
2	1	Complet correct	42	1	Incomplet correct ([b])
3	1	Complet correct	43	2	Complet correct
4	1	Complet correct	44	2 (vecteur)	Complet correct
5	1	Complet correct	45	3 (parallélogramme)	Complet correct
6	4	Complet correct	46	1	Complet correct
7	4	Incomplet ([b]) correct	47	3 (O, intersection de cercles...)	Incomplet correct ([b], [c])
8	4	Complet correct	48	1	Complet correct
9	Rattaché à 4	Incomplet correct ?	49	1 (parallélogramme)	Complet correct
10	Rattaché à 4	Incomplet correct ?	50	3 (O, intersection de cercles...)	Incomplet correct ([b], [c])
11	AUTRE	–	51	1	Complet correct
12	Rattaché à 4	Incomplet correct ?	52	1 (vecteur)	Complet correct
13	3	Incomplet correct ([b])	53	3	Complet correct
14	–	–	54	1	Complet correct
15	3	Complet correct	55	AUTRE	–
16	–	Incomplet	56	2	Incomplet correct ([b])
17	1	Incomplet correct ([c])	57	1	Complet correct
18	1	Incomplet correct ([b], [c])	58	1 (vecteur)	Complet correct
19	1	Incomplet correct ([b])	59	2	Incomplet correct ([b])
20	1	Complet correct	60	1	Complet correct
21	1	Complet correct	61	1	Complet correct
22	1	Complet correct	62	1	Complet correct
23	Rattaché à 4	Incomplet correct ?	63	1	Incomplet correct ([b])
24	1	Complet correct	64	1	Incomplet correct ([b])
25	1	Complet correct	65	1	Incomplet correct ([b])
26	–	–	66	1	Complet correct
27	1	Complet correct	67	4	Complet part. correct ([d])
28	Rattaché à 3	Incomplet correct	68	1 (parallélogramme)	Complet correct
29	1	Incomplet correct ([b])	69	1	Complet correct
30	*Il pervertit la tâche : inexploitable*		70	3 (parallélogramme)	Complet correct
31	4	Incomplet ([b]) part. correct ([d])	71	Rattaché à 4	Incomplet correct ?
32	–	–	72	3	Incomplet correct ([b])
33	–	–	73	2	Complet correct
34	1	Incomplet correct ([b], [c])	74	1	Complet correct
35	Rattaché à 4	Incomplet correct ?	75	1 (médianes)	Complet correct
36	AUTRE	–	76	1 (parallélogramme)	Complet correct
37	AUTRE	–	77	2	Complet correct
38	1 (parallélogramme)	Complet correct	78	1	Complet correct
39	3	Incomplet correct ([b], [c])	79	2	Incomplet correct ([b])
40	*Inexploitable*		80	1 (parallélogramme)	Complet correct

En revanche, TROIS élèves **français** ne se contentent pas d'affirmer que I est tel que IL = TG mais ils fournissent plus de détails : l'idée de fond est que le point I est le quatrième sommet du parallélogramme

construit sur TGL, du côté de G. Notamment :

- UN élève évoque explicitement le parallélogramme ;
- UN élève précise qu'il faut que [LT] soit parallèle à [IG] et de même longueur et que, pour ce faire, il faut reporter, à partir de L, la longueur TG sur la droite parallèle à (TG) passant par L ;
- UN élève précise que le point I est tel qu'il soit l'image de G par la translation de vecteur **TL**.
- UN élève **italien** et QUATRE élèves **français** fournissent plus de détails aussi bien pour le choix du point I que du point A : l'idée de fond est que les points I et A sont respectivement les quatrièmes sommets des parallélogrammes construits sur TGL, l'un du côté de G et l'autre du côté de T, un détail qui pourrait l'apparenter en quelque sorte au **programme 4** aussi. Notamment :
- DEUX **élèves** français et un élève **italien** précisent que I est le point de concours des deux droites parallèles respectivement à (TG) et (TL) ; de même pour le point A, ces élèves précisent qu'il est le point de concours des droites parallèles respectivement à (TG) et (GL).
- UN élève **français** précise que I est le point de concours de la droite parallèle à (TG) et la médiane de TGL issue de T ; de même A est le point de concours de la droite parallèle à (TG) et la médiane de TGL issue de G[9].
- UN élève précise que le point I est tel qu'il soit l'image de G par la translation de vecteur **TL** et que A est tel qu'il soit l'image de T par la translation de vecteur **LG**.

Vraisemblablement, c'est le tracé complet (étape 4) qui influe sur les choix de ces élèves ; en outre, cela prouverait qu'ils ont une très bonne connaissance des propriétés liées au triangle des milieux, ils sont embarassés pour choisir parmi toutes les propriétés de cette figure.

Le Programme 2.

Ce sont seulement SEPT élèves **français** qui produisent un programme de construction tel que le **Programme 2** dont QUATRE l'énoncent d'une manière complète. Selon nos prévisions, nous verrons qu'aucun de ces élèves ne se pose la question de l'alignement des points. Toutefois, il s'avère qu'ils s'expriment dans un langage précis et correct, ce qui n'est pas toujours le cas pour les élèves qui proposent les autres programmes.

TROIS élèves ne précisent pas que le point I est tel que IL = TG. Parmi les autres, UN élève précise que le point I est tel les vecteurs **TL** et **GI** soient égaux.

Le Programme 3.

---

[9] En réalité, cet élève parle de *médiatrices* mais le croquis qu'il trace dans son brouillon permet de comprendre qu'il se réfère sans doute aux *médianes*. Cette erreur relèverait donc d'une acquisition erronée de vocabulaire ou simplement d'un lapsus.

TROIS élèves **italiens** et SIX élèves **français** produisent un programme de construction qui est proche (au détail près) du **Programme 3 ;** notamment, UN italien et TROIS français l'énoncent d'une manière complète. Aucun de ces élèves ne se pose la question de la coïncidence des points.

Dans ce cas, DEUX élèves français parlent en termes de symétrie ; UN élève italien et UN élève français parlent en termes de milieu d'un segment ; UN élève français affirme que I est tel que LTGI soit un parallélogramme alors que, pour A et les autres points, il parle en termes respectivement de symétrie et de milieu d'un segment. DEUX élèves italiens ne complètent pas le programme : l'un ne précise pas que IL = TG et l'autre ne précise pas comment placer ni I ni A. DEUX élèves français repèrent le point O comme intersection de deux cercles, l'un de centre G et rayon [IG] et l'autre de centre T et rayon [AT] : en effet, ils exploitent la construction d'un parallélogramme dont on connaît trois sommets ; néanmoins, ils ne précisent pas comment placer ni I ni A. Remarquons que l'un de ces deux élèves affirme, en outre, que TGL est l'image de LAT, GOT et GIL sans pourtant préciser qu'il s'agit de l'effet d'une symétrie dont les centres sont les milieux des côtés de TGL.

La production d'UN élève italien pourrait se placer dans ce groupe de programme. Après avoir placé correctement les points I et A et tracé les segments [IG] et [AT], l'élève envisage de compléter la figure en traçant le triangle TGO congruent à TGL. De cette manière, il détourne la question de l'incidence des points mais celle de l'alignement des points apparaît ; néanmoins, il ne l'aborde pas. Cet élève semble avoir une vision de la figure finale comme celle de quatre triangles accolés.

Le Programme 4.

CINQ élèves **italiens** et UN élève **français** produisent un programme de construction qui est proche (au détail près) du **Programme 4**. Seulement DEUX élèves **italiens** l'énoncent d'une manière complète.

DEUX élèves **italiens** ne précisent pas que IL = TG et l'un des deux affirme que le point I est choisi au hasard. Au-delà de ces observations, ici, une précision s'impose : compte tenu de la nature de la figure à construire et des éléments déjà fournis dans le tracé, si l'on trace la parallèle à (LG) passant par T (A), *il faudra prouver* qu'elle passe aussi par A (T) et, réciproquement, si l'on trace la droite (AT), *on pourra prouver* qu'elle est parallèle à (LG). La preuve qui permet de valider ce programme devient ainsi assez complexe pour un élève du niveau concerné.

A propos de l'étape [d] de ce programme, dans les productions de quelques élèves, nous distinguons les formulations suivantes :

"... Je trace la parallèle à (GL) passant par A et puis la parallèle à (LT) passant par I : elles se coupent en O".

"... Je trace la parallèle à (GL) passant par A : elle passe aussi par T. Je trace ensuite la parallèle à (LT) : elle passe aussi par G. Ces deux droites se coupent en O".

"... Je trace la parallèle à (GL) passant par A et T. Je trace la parallèle à (LT) passant par I et G. Elles se coupent en O".

D'une part, il semble que ces élèves connaissent quelques propriétés de la configuration en question : ils savent probablement que, pour que la construction soit bien la solution du problème proposé, les côtés de AOI doivent être parallèles aux côtés de TGL. D'autre part, ils semblent réutiliser par analogie les informations implicites de la première étape (droites parallèles, milieu) en essayant de les coordonner avec les informations graphiques fournies avec les quatre étapes ou bien suggérées par le problème A1.

DEUX élèves **italiens** adoptent la première formulation : ils sont conscients qu'il suffit d'un seul point pour tracer la parallèle à une droite mais ils laissent sous silence le fait que cette droite passe aussi par un autre point précédemment tracé. A notre avis, c'est la perception qui rassure ces élèves sur ce dernier passage.
DEUX élèves **italiens** adoptent la deuxième formulation : ils sont conscients qu'il suffit d'un seul point pour tracer la parallèle à une droite mais ils constatent explicitement que cette droite passe aussi par un autre point précédemment tracé.
UN élève **italien** et UN élève **français** adoptent la troisième formulation : pour que la condition de parallélisme soit respectée, ils ne se soucient pas du fait qu'il suffit un seul point pour tracer une droite parallèle à une droite donnée et qu'éventuellement il faut prouver qu'elle passe aussi par un point déjà tracé. Nous sommes amenée à croire que ces élèves réitèrent ce qui est suggéré au début du programme donné, sans se soucier de la cohérence de leurs assertions.

Le choix de ce programme pourrait confirmer l'incapacité de l'élève à distinguer les phases d'analyse et de synthèse, ce qui fait que les connaissances de ces élèves deviennent un moyen décisif pour qu'ils rédigent de telle manière le programme. Comme nous l'avions déjà remarqué lors de l'analyse de la partie pré-expérimentale, la difficulté de cette construction consiste en fait à organiser logiquement toutes les informations en discernant celles qui sont indispensables de celles qu'il faut en déduire.

Les productions de CINQ élèves **italiens** et d'UN élève **français** demeurent très liées au **Programme 4**. En quelque sorte, ces élèves pervertissent la tâche car ils ne se soucient pas des étapes 2 et 3 de la construction fournie dans l'énoncé : dans leur démarche, il suffit de tracer les droites parallèles à chaque côté de TGL passant par chacun des sommets opposés.
On pourrait croire qu'ils font appel à leurs connaissances sur les propriétés du triangle des milieux. Néanmoins, nous croyons plutôt qu'eux aussi, ils réutilisent les informations de la première étape sans se soucier d'organiser convenablement les diverses variables en jeu.

Autres programmes.

Les productions de TROIS élèves **italiens** et d'UN élève **français** ne peuvent pas être rattachées à un programme précis. Probablement, ces élèves réitèrent le peu d'informations fournies en essayant conjointement d'introduire celle concernant les milieux pour que toutes les conditions imposées soient respectées. De même ici, on pourrait croire qu'ils font appel à leurs connaissances sur les propriétés du triangle des milieux même s'il y a une difficulté évidente à organiser convenablement toutes les informations en discernant celles qui sont indispensables de celles qui peuvent en découler et qu'il faut ensuite prouver. Nous verrons que, comme les autres, ces quatre élèves ne se posent pas non plus de questions ni sur l'alignement ni sur l'incidence des points, le tracé fourni leur suffisant probablement pour s'en assurer implicitement.

En sachant (en percevant ?) que, dans la figure à construire, des parallélogrammes apparaissent comme sous-figures, UN élève **italien** réalise une production proche du **programme 1** :

"Je place I tel que (IL) soit parallèle à (TG) et IL = TG. De même, je place A tel que (AL) soit parallèle à (TG) et AL = TG. Je trace ensuite les deux demi-droites d'origine G et T. Elles se coupent en O, un point tel que (TO) soit parallèle à (LG) et TO = LG, (GO) soit parallèle à (LT) et GO = LT".

Ce programme contient qui pourraient être utilisés dans une preuve. Nous verrons plus loin que l'élève en fournit une.

Après avoir placé les points I et A, en précisant que le point I est choisi au hasard et que A est tel que AL = LI, DEUX élèves **italiens** produisent des programmes qui se situent entre le **Programme 3** et le **Programme 4** :

"... Je trace ensuite la droite parallèle à (TL) passant par G et I où je place un point O tel que G soit le milieu de [IO]. Je trace enfin une droite parallèle à (LG) passant par A et O".

"... Je trace la droite parallèle à (LG) passant par T où je place un point O tel que AT = TO. Je trace ensuite la droite parallèle à (TL) passant par G, les points I et O sont les points d'intersection respectifs de cette droite avec les droites (AL) et (AT)"

UN élève **français** formule ainsi son programme qui, en quelque sorte, contient les traces de chacun des programmes repérés :

"[*Je trace le triangle TGL et puis la droite parallèle à (TG) passant par L*]. Je sais que la droite passant par les milieux de 2 côtés d'un triangle est la moitié du troisième côté de ce triangle donc GT = IL = LA car L est le milieu du troisième côté de ce triangle. Je trace la droite parallèle à (LG) passant par T. Grâce à la même démonstration ci-dessus je peux en conclure que AT = TO, O et A appartenant à la parallèle à (LG) passant par T. Enfin, il me reste plus qu'à tracer (IO) dont son milieu est G".

C'est le seul programme où l'élève fait explicitement appel à des outils géométriques. Néanmoins, par la suite,

l'élève produit une preuve.

Les procédures et les discours des élèves

En gardant la répartition par type de programme proposé, nous analysons les discours que les élèves produisent pour justifier la construction et, conjointement, la procédure adoptée pour ce faire (cf. schéma ci-après).

Pour chacun des programmes repérés, des questions d'alignement de point et/ou d'incidence se posent. Nous avons examiné les discours des élèves sans tenir compte du fait que ces éléments demeurent implicites. Il faut donc considérer que, si l'élève fournit une preuve, il y aura toujours une partie qui relève de *l'évidence des faits*.

Finalement, QUATRE élèves **français** produisent une preuve qui relève de l'*exemple générique euclidien*, tous sur le **Programme 1**. DEUX élèves **italiens** produisent le même type de preuve, l'un sur le programme 4 et l'autre sur l'un des programmes qui ne se situe dans aucun des quatre autres.

Pour les QUATRE élèves **italiens** et les SIX élèves **français** élèves qui produisent le **Programme 3**, nous concluons que leur preuve s'appuie sur l'*évidence des raisons* ; ce type de preuve est aussi produit par DEUX élèves **italiens** qui produisent le **Programme 4** ainsi que par DEUX italiens et UN français qui produisent un programme qui ne se situe pas parmi les quatre autres.

L'*évidence* fonctionne en *obstacle* pour HUIT élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** qui produisent le programme 1 ainsi que pour UN **français** qui produit le **Programme 2**.

Programme 1	SEIZE élèves **italiens** produisent ce programme : – UN élève ne fournit **aucune preuve** ; – SIX élèves produisent des **commentaires** ; – HUIT élèves produisent une **preuve incomplète** (*évidence comme obstacle*) ; – UN élève produit une **preuve incorrecte** (*calcul sur les énoncés*). VINGT-QUATRE élèves **français** produisent ce programme : – CINQ élèves ne fournissent **aucune preuve** ; – SIX élèves produisent des **commentaires** ; – QUATRE élèves produisent une **preuve** (*exemple générique euclidien*) – QUATRE élèves produisent une **preuve incomplète** (*évidence comme obstacle*) ; – CINQ élèves produisent une **preuve incorrecte** (*calcul sur les énoncés*) ;
Programme 2	SEPT élèves **français** produisent ce programme : – UN élève ne fournit **aucune preuve** ; – CINQ élèves fournissent des **commentaires** ; – UN élève fournit une **preuve incomplète** (*évidence comme obstacle*).

Programme 3	QUATRE élèves **italiens** et SIX élèves **français** produisent ce programme. Ils fournissent des **commentaires**. Vu la nature du programme, on pourrait conclure qu'ils fournissent une preuve qui relève de l'*évidence des raisons*.
Programme 4	CINQ élèves **italiens** produisent ce programme : – DEUX élèves fournissent des **commentaires** ; – DEUX élèves fournissent une **preuve incomplète** (*évidence des raisons*) ; – UN élève fournit une **preuve** (*exemple générique euclidien*). UN élève **français** produit ce programme. Il ne fournit **aucune preuve**.
Autres programmes	TROIS élèves **italiens** produisent un programme qui ne se situe dans aucun des cas précédents : – DEUX élèves fournissent des commentaires ; vu la nature de leur programme, on pourrait conclure qu'ils fournissent une preuve qui relève de l'*évidence des raisons* ; – UN élève fournit une preuve (*exemple générique euclidien*) ; UN élève **français** produit un programme qui contient les traces de chacun des programmes précédents. Il fournit une preuve s'appuyant sur l'*évidence des raisons*.

Nous constatons donc que, bien que cela porte sur un nombre faible d'élèves, il y a un peu plus de français qui fournissent une preuve ; ce qui domine c'est surtout la similitude des commentaires ainsi que l'évidence comme obstacle à la preuve.

Voici ci-après nos analyses dans les détails.

A propos du Programme 1.

Parmi les programmes repérés, celui-ci est le plus exploité aussi bien par les élèves italiens que français et un bon nombre l'accompagne d'une justification. Ici, il s'agirait de prouver[10] que :

1) les droites (AT) et (IG) sont nécessairement sécantes ;
2) G et T sont les milieux respectifs de [IO] et [AO].

A propos de ce premier point, aucun élève ne ressent le besoin de le prouver. En effet, comme nous l'avions précisé lors de l'analyse *a priori*, le théorème permettant de justifier cela demeure souvent implicite dans l'enseignement scolaire au niveau concerné.

Pour SIX **élèves** italiens et SIX élèves **français**, il s'agit plutôt de commentaires qui mettent en évidence certaines propriétés relatives à la figure obtenue. Ces explications relèvent de ce que ces élèves perçoivent

[10] cf. chapitre 3, § II, *Le triangle des milieux : un problème de construction*, **Solution A_5** de l'analyse *a priori*

sur le tracé mais surtout de ce qu'ils connaissent à propos du triangle des milieux ou qu'ils ont mis en évidence lors de la résolution du problème A1. Dans la plupart des cas, on pourrait estimer qu'il s'agit d'informations qui attestent bien ce qu'il faudrait prouver pour valider le programme ; néanmoins, aucune des explications fournies n'a le statut de preuve.

Les discours de HUIT élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** portent aussi la marque de la *preuve intellectuelle* ; néanmoins, ces élèves ne détaillent pas tous les passages nécessaires. En mobilisant correctement certains outils (*propriétés du parallélogramme*, *congruence* et *similitude de triangles*, etc.), ces élèves semblent être familiarisés avec la figure donnée, ce qui les amènerait peut-être à recourir à des *équivalences sémantiques*. D'autre part, il semble qu'ils ne discernent pas ce qu'ils savent (les hypothèses) de ce qu'ils devraient par contre déduire et justifier et qu'ils lisent sur le tracé quelques informations supplémentaires.

Par exemple, UN élève **italien** recourt d'une manière *contextualisée* à la *définition de milieu* et puis au *théorème de Thalès*. Apparemment, il a dû appliquer cet outil trois fois de suite, chaque fois en considérant un couple différent de droites parallèles pour en déduire que IL : LA = AT : TO = IG : GO d'où, puisque IL = LA, il conclut que T et G sont les milieux respectifs de [AO] et [IO]. Dans ces productions, nous croyons que *l'évidence* fait *obstacle* à ce que les élèves analysent convenablement les diverses informations et précisent tous les passages permettant d'aboutir.

UN élève **français** vérifie la validité du programme *par d'autres exemples* : il effectue la construction à partir de trois triangles différents (quelconque, rectangle et équilatéral)... Il s'agit sans doute d'une *preuve pragmatique* qui, en quelque sorte, relève de l'*évidence des faits*.

QUATRE élèves **français** adoptent une procédure correcte et produisent une *preuve intellectuelle*.

DEUX élèves recourent implicitement à la définition de milieu pour prouver que L est le milieu de [IA] et mobilisent explicitement la *réciproque du théorème des milieux*[11] ;

DEUX élèves recourent d'une manière *contextualisée* à la définition de milieu et puis au *théorème de Thalès* dans un triangle.

Même si une partie de la preuve se fonde sur l'*évidence des faits* (l'incidence de droites !), nous sommes amenée à reconnaître une deuxième partie qui porte la marque de l'*exemple générique euclidien*.

---

[11] Rappelons que nous considérons que l'énoncé de la *réciproque du théorème des milieux* est le suivant : "*Dans un triangle, la droite parallèle à un côté et passant par le milieu d'un autre côté coupe le troisième côté en son milieu*".

UN élève **italien** et CINQ élèves **français** produisent des discours incorrects soit parce qu'ils mobilisent de manière erronée certains outils soit parce qu'ils s'appuient sur des propriétés fausses (*calcul sur les énoncés*).

Par exemple, parmi les élèves **français** :

– UN élève discerne correctement les hypothèses du problème permettant de conclure à l'aide du théorème de Thalès ; néanmoins, il justifie ses conclusions par l'*énoncé des milieux* (?!) ...

– UN élève affirme que, *dans un triangle, la droite parallèle à un côté coupe les deux autres en leur milieu* d'où il conclut que G et T sont les milieux respectifs de [IO] et [AO] ;

– UN élève affirme que, *si P(AIO) = 2 P(TGL) alors la construction est bien la solution du problème* ; évidemment, il a compris que le problème en question est en quelque sorte le réciproque du problème A1 et, par conséquent, il établit une propriété réciproque.

Les autres élèves produisent un discours confus, ce qui ne nous permet pas de comprendre leurs intentions.

A propos du Programme 2.

Dans ce cas, une question d'alignement de points se pose : il s'agirait de prouver[12] que G (T) est le milieu de [IO] ([AO]) (I, G, O sont alignés et IG = GO ou A, O, T alignés et AT = TO).

CINQ élèves **français** produisent des explications qui n'ont pas le statut de preuve. Seulement UN élève amorce une véritable preuve : il montre que ILTG est un parallélogramme (*propriété du parallélogramme*) d'où il déduit que LT = IG. Il annonce ensuite que, *si LT = ½ IO et LT = IG, alors G est le milieu de [IO]* : il ne justifie pas que LT = ½ IO, l'*évidence des raisons* l'empêchant probablement de mobiliser l'outil nécessaire pour aboutir. Par ailleurs, cet élève semble ne pas disposer de la *réciproque du théorème des milieux*, un outil qui en fait lui permettrait de prouver conjointement que T est le milieu de [AO] et de justifier son assertion.

A propos du Programme 3.

Dans ce cas, un problème d'incidence se pose : il s'agirait de prouver[13] que le symétrique de A par rapport à T et le symétrique de I par rapport à G coïncident.

Les discours que les QUATRE élèves **italiens** et les SIX élèves **français** produisent n'ont pas le statut de preuve, la manière de placer les points permettant déjà de montrer que la figure répond aux conditions imposées. Éventuellement, puisque le programme proposé se justifie de lui-même, on pourrait reconnaître

que c'est l'*évidence des faits* qui les amène à ne pas produire de preuve.

A propos du Programme 4.

Dans ce cas, Il s'agit de prouver que la parallèle à (LG) passant par T (A) et la parallèle à (LT) passant par G (I) sont sécantes et passent respectivement par A (T) et I (G) ; ensuite, il s'agirait de prouver que G et T sont les milieux respectifs de[IO] et [AO].

Comme nous l'avons constaté, parmi les SIX élèves qui proposent un programme proche du **Programme 4**, aucun ne propose le programme de manière vraiment exhaustive et précise.

Seulement les CINQ élèves **italiens** fournissent un discours : DEUX élèves fournissent des simples commentaires alors que les TROIS autres produisent une preuve. Notamment, UN élève évoque le *théorème de Thalès*, sans pourtant détailler la preuve : l'*évidence des raisons* l'empêche probablement d'expliciter l'enchaînement déductif qui permettrait d'aboutir. Les DEUX autres élèves valident leur programme en recourant à plusieurs reprises à la *définition* et à l'une des *propriétés du parallélogramme*. Ils mobilisent ces outils et la *définition de milieu* d'une manière *contextualisée* : leur preuve porte la marque de l'*exemple générique euclidien*.

Pour CINQ élèves **italiens** et UN élève **français** ne se souciant pas des étapes 2 et 3 de la construction fournie dans l'énoncé, il suffit de tracer les droites parallèles à chaque côté de TGL passant par chacun des sommets opposés : nous avons rattaché leurs productions au **Programme 4**. Les élèves italiens ne fournissent que des commentaires. Notamment, DEUX élèves reconnaissent que le problème est lié au précédent : ils affirment que c'est grâce à l'*inverse* du théorème[14] utilisé dans le problème A1 qu'ils peuvent valider leur construction ; en effet, ils reconnaissent seulement le fait que la situation proposée est inversée. Nous ne croyons pas qu'ils se réfèrent vraiment à la réciproque du théorème en question. En quelque sorte, il s'agit d'une "conception-en-acte", ces élèves n'ayant pas vraiment analysé la situation dans les détails. On dirait plutôt qu'ils reconnaissent la configuration et donc un moyen d'obtenir une figure satisfaisante.

L'élève **français** mobilise d'une manière *contextualisée* la *définition* et l'une des *propriétés du parallélogramme* et la *définition de milieu d'un segment*. Sa preuve porte la marque de l'*exemple générique euclidien*.

A propos des autres programmes.

TROIS élèves **italiens** et UN élève **français** décrivent un programme qui ne se situe pas parmi les quatre repérés.

---

[12] cf. chapitre 3, § II, *Le triangle des milieux : un problème de construction*, **Solution A_3** de l'analyse *a priori*

[13] cf. chapitre 3, § II, *Le triangle des milieux : un problème de construction*, **Solution A_4** de l'analyse *a priori*

[14] Dans la résolution du problème A1, ils recourent au *théorème des milieux*.

Parmi les élèves **italiens**, DEUX fournissent seulement des commentaires : dans leur démarche, le programme proposé aurait en fait l'office de preuve (*évidence des raisons*). L'autre élève produit une preuve qui porte la marque de l'*exemple générique euclidien*. Il mobilise d'une manière *contextualisée* la *définition* et l'une des *propriétés du parallélogramme* ainsi que la *définition de milieu d'un segment*. Si l'on analyse le programme proposé, on reconnaît que cet élève a repéré surtout les parallélogrammes qui apparaissent comme sous-figure de la figure réalisée : sans doute produit-il un programme lui permettant d'exploiter ces aspects.
Enfin, en exploitant le parallélisme dont il parle dans le programme, l'élève **français** mobilise implicitement la *définition* et l'une des *propriétés du parallélogramme* ainsi que la *définition de milieu d'un segment*. L'*évidence* fait sans doute *obstacle* à ce que l'élève précise tous les passages permettant d'aboutir.

Conclusions

En comparant ces résultats avec ceux de la partie pré-expérimentale, nous constatons que la nouvelle version se révèle plus efficace. En effet, ici, les élèves italiens s'investissent autant que les élèves français au moins dans la production d'un programme de construction. D'ailleurs, ce dernier semble faire aussi office de preuve dans le sens qu'ils ne ressentent pas le besoin de justifier que la figure obtenue répond bien aux conditions imposées, cela leur apparaissant sans doute comme évident.
Pour ceux qui fournissent une preuve, la difficulté majeure consiste à bien distinguer les hypothèses de ce qui en découle : l'*évidence* fait sans doute *obstacle* à ce qu'ils réussissent à développer un discours complet.
Suivant nos prévisions, un élément important à relever est qu'aucun des élèves observés ne se pose de questions d'alignement de points ou d'incidence de droites. Nous imputons cela au fait que, au niveau scolaire concerné, ces questions demeurent souvent implicites – à lire éventuellement sur le tracé – et que, par conséquent, les élèves ne sont pas suffisamment habitués à prouver de telles propriétés lorsqu'ils rédigent la résolution d'un problème de géométrie[15].

Conclusions sur les problèmes de la fiche 1

Au-delà des deux élèves italiens qui reconnaissent explicitement le lien entre les deux problèmes, nous pouvons seulement avancer des hypothèses sur l'influence d'un problème dans la résolution de l'autre.
Ce qui paraît intéressant à relever est le fait que, dans les procédures proposées pour résoudre le premier problème, le parallélogramme n'est pas assez exploité comme sous-figure utile à repérer pour aboutir et,

[15] Rappelons-nous que même Euclide, dans ces *Éléments*, débute avec un théorème où les raisons de l'incidence de deux cercles sont passés sous silence !

dans les quelques cas où il est exploité, c'est surtout le parallélisme qui est utilisé alors que la caractéristique de ce quadrilatère particulier d'avoir un centre de symétrie permettrait d'accomplir facilement la tâche relative aux aires.

Lorsque l'on passe à l'analyse du deuxième problème, nous supposons que la réalisation des quelques programmes s'inspire du problème qui le précède surtout pour les élèves qui prennent en compte la condition de parallélisme. En fait, c'est ici que les élèves exploitent un peu plus le parallélogramme. Cela nous semblerait donc confirmer que, pour la majeure partie des élèves, cette figure géométrique demeure strictement liée au parallélisme et donc à sa définition.

Cela influe probablement sur la capacité d'exploiter certains outils. En fait, si les élèves italiens peuvent bien exploiter la congruence pour prouver que les petits triangles ont la même aire, pour les élèves français, le fait que le parallélogramme est un quadrilatère à symétrie centrale pourrait être une propriété bien commode à mobiliser pour des questions d'aires. Vraisemblablement, les résultats prouvent que les élèves n'ont pas retenu cet aspect, ce qui d'ailleurs n'est pas étonnant vu que, dans les manuels français, nous avons constaté que le lien entre les transformations géométriques et les aires est presque passé sous silence.

II.2 Les problèmes de la fiche 2

Bien qu'ici, on exploite encore quelques unes des propriétés du triangle des milieux, la configuration n'est pas présentée de la même manière que dans les problèmes de la fiche précédente. Néanmoins, comme dans la fiche 1, les mêmes propriétés sont données dans un problème et à prouver dans l'autre : la propriété des sommets du triangle inscrit d'être les milieux des côtés du triangle circonscrit est une donnée fournie dans un problème et un résultat à prouver dans l'autre, ce qui nécessite donc une analyse différente de la configuration en question. Cela pourrait se présenter comme un obstacle dans la réussite des élèves lorsqu'ils repèrent des liens entre les deux problèmes.

Encore à propos de la figure exploitée ici, il nous paraît intéressant de remarquer que, dans le premier problème, les éléments graphiques fondamentaux pour aboutir apparaissent lorsque l'élève produit son tracé en suivant les indications fournies dans l'énoncé : ici, il s'agit donc de bien repérer des sous-figures utiles pour avancer ; en revanche, dans le deuxième problème, c'est à l'initiative de l'élève de compléter convenablement le tracé avec des éléments supplémentaires pour faire apparaître des configurations de base utiles pour aboutir. C'est en ces termes que le premier problème pourrait alors lui venir en aide.

Ce qui peut aussi apparenter les problèmes de la fiche 2 réside dans la nature des tâches proposées : on

demande explicitement de prouver quelques propriétés de la figure décrite dans l'énoncé ainsi que de comparer les aires de deux sous-figures. A propos de ce dernier genre de tâche, dans le premier problème, il s'agit de deux triangles alors que, dans le deuxième problème, il s'agit d'un triangle et d'un quadrilatère : la première situation peut en quelque sorte aider l'élève lorsqu'il aborde la deuxième situation, tout en lui demandant d'adapter les procédures d'une manière adéquate.

II.2.1 L'analyse du problème B1

Ici, la figure n'est pas donnée. On demande de prouver une propriété de la figure (**GENRE DE TÂCHE 4**) et la structure de l'énoncé est telle que les trois premières étapes sont enchaînées. On demande ensuite de comparer les aires de deux sous-figures (**GENRE DE TÂCHE 3**), les procédures adoptées pour accomplir les tâches précédentes peuvent être utiles pour cette dernière. En le proposant, nous sommes intéressée non seulement à l'attitude des élève face à un véritable problème de *démonstration* mais aussi à leur capacité à exploiter convenablement une figure en repérant des sous-configurations de base nécessaires pour aboutir.

Nous avons recueilli TRENTE-HUIT copies d'élèves **italiens** et QUARANTE-DEUX copies d'élèves **français**. Pour analyser ces copies, nous avons distingué trois volets principaux : *le tracé et l'usage de la figure, les procédures des élèves* – où, pour la dernière tâche, nous considérons simultanément *les réponses* fournies – et *les discours des élèves*.

Le tracé et l'usage de la figure

Voici les items que nous avons distingués lors de l'analyse de la figure et le codage correspondant et dont les résultats sont résumés dans le tableau 6.8.

NAT	**Quelle est la nature du trapèze tracé ?** Dans les cas où l'élève ne trace pas un trapèze particulier mais que, dans son discours, il n'envisage pas une figure générale, nous le signalons entre parenthèses.	– L'élève ne produit pas de tracé **TP** Trapèze particulier **TQ** Trapèze tel que AD = 2BC
CODON	**L'élève code-t-il le tracé par rapport aux données ?** Ici, nous considérons le codage par des *lettres* suivant les données ainsi que le codage par des *marques*.	– L'élève ne code pas le tracé **L** Lettres **M** Marques **LM** Lettres et marques

AUTEL	**L'élève considère-t-il d'autres éléments (tracés ou non) qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé mais qui sont utiles pour mettre en place sa procédure de résolution ?** Ici, nous ne prenons pas en compte les traces éventuelles de la construction du trapèze mais tout élément autre que le triangles AOD et BCM ainsi que les médianes.	– Non **O** Oui (dans ce cas, on signale la nature de l'élément)

Pour reproduire le trapèze ABCD, la seule condition imposée est que (AD) soit parallèle à (BC) et AD = 2BC. Toutefois, un bon nombre d'élèves ajoutent des conditions supplémentaires. Notamment :

Élèves italiens	UN élève ne reproduit **aucune figure** VINGT-HUIT élèves tracent un **trapèze vérifiant la condition AD = 2BC**. Cependant, parmi eux, SIX élèves traiteront AOD en tant que **triangle particulier** SEPT élèves tracent un **trapèze isocèle** DEUX élèves tracent un **trapèze rectangle**
Élèves français	UN élève ne reproduit **aucune figure** VINGT-NEUF élèves tracent un **trapèze vérifiant la condition AD = 2BC**. Cependant, parmi eux, QUATRE élèves traiteront AOD en tant que **triangle particulier** ONZE élèves tracent un **trapèze isocèle** UN élève trace un **trapèze rectangle**

Ici, des deux côtés, les élèves ne montrent pas une bonne capacité de *décontextualisation*, ce qui est dû peut-être au fait qu'ils sont plus familiarisés avec des trapèzes particuliers. C'est peut-être aussi dans la manière de construire la figure en respectant la condition AD = 2BC. Il faut partir de quelque part et il se peut que les élèves partent d'une perpendiculaire d'une extrémité ou au milieu du premier segment tracé par commodité. En général, il est difficile de comprendre de quelle manière les élèves s'y sont pris pour produire la figure en question.

Nous constatons, en outre, que quelques élèves tracent un cas général de figure mais, dans leur procédure de résolution, ils exploitent AOD en tant que triangle isocèle ou équilatéral : cela semble manifester une difficulté à analyser la figure dans un cas général et, en quelque sorte, un expédient pour éluder un obstacle.

Les données fournies amènent à coder le tracé en utilisant seulement des lettres. DEUX élèves **français** ne suivent pas exactement les instructions : ils nomment BC la grande base et AD la petite base, ce qui ôte le sens de quelques tâches. Cette erreur compromettra leur résolution car ils ne s'en aperçoivent pas. Cela se ramène à un type de difficulté rencontrée dans ce travail à plusieurs reprises, à savoir l'incapacité à interpréter correctement des informations écrites dans un langage symbolique.

Concernant l'*utilisation des instruments de dessin* pour reproduire la figure décrite dans l'énoncé, nous

constatons que TRENTE élèves **italiens** et TOUS les élèves **français** utilisent au moins la règle, ce qui est dû probablement à la condition des deux côtés parallèles du trapèze.

TOUS les élèves **italiens** et TRENTE-HUIT élèves **français** tracent la figure de manière à avoir *un côté parallèle au bord de la feuille.* Peut-être que cela dépend aussi de la nature de la figure et que donc les élèves utilisent un bord de la feuille pour tracer les deux côtés parallèles en exploitant les techniques de dessin.

Comme le tableau 6.8 le montre, peu d'élèves considèrent des éléments supplémentaires de la figure mais, dans ce cas, ce sont surtout les élèves italiens qui s'en servent. Notamment :

Élèves italiens	DIX-HUIT élèves ne **considèrent pas** d'autres éléments de la figure. TROIS élèves considèrent les **hauteurs** de quelques petits triangles ONZE élèves considèrent convenablement des **angles**. CINQ élèves tracent des **cercles**.
Élèves français	TRENTE-HUIT élèves ne **considèrent pas** d'autres éléments de la figure. DEUX élèves considèrent les **hauteurs** de quelques triangles UN élève marque des **angles droits** UN élève trace un **cercle**.

Ici, ce qui s'avère inattendu est le fait que quelques élèves tracent des cercles. En effet, ils recourent à une *technique perceptive* : à l'aide du compas les CINQ élèves **italiens** vérifient, par exemple, que B est bien le milieu de [AO] alors que l'élève **français** prétend prouver que H n'est pas le centre de gravité de BCM parce que le cercle de centre H et rayon [HM] ne passe pas par les autres sommets du triangle, ce qui révèle d'ailleurs une confusion entre la notion de centre de gravité et de centre du cercle circonscrit.

Le fait qu'un bon nombre d'élèves ne considèrent pas d'éléments supplémentaires n'est pas inattendu car la figure de départ présente déjà tous les éléments essentiels pour mettre en place de procédures de résolution. Toutefois, nous croyons que cela gêne d'une manière ou d'une autre la majeure partie des élèves qui ne réussissent pas à discerner des propriétés à prouver dans le bon ordre ou bien à les exploiter convenablement dans l'enchaînement déductif choisi. Cette attitude semble être la conséquence du fait que les élèves s'appuient encore sur la perception et que, par conséquent, l'*évidence* joue un rôle fondamental en empêchant la production de preuves intellectuelles ; ou alors ils reconnaissent une figure qui leur est familière mais dont ils savent exploiter certaines propriétés sans considérer que, suivant les consignes, ces propriétés sont à prouver.

Tableau 6.8 – Le tracé et l'usage de la figure dans le problème B1

	Élèves italiens				*Élèves français*		
	NAT	**CODON**	**AUTEL**		**NAT**	**CODON**	**AUTEL**
1	TQ	L	-	**41**	TP, isocèle	L	-
2	TQ	L	-	**42**	TP, isocèle	L	-
3	TP, isocèle	L	Hauteurs des petits triangles	**43**	TP, isocèle	LM	Hauteurs…
4	TP (triangle équilatéral)	L	-	**44**	TP, isocèle	L	-
5	TQ	L	Cercles	**45**	TP, isocèle	L	-
6	TQ (isocèle)	L	Angles	**46**	TQ	L	-
7	TP, isocèle	L	-	**47**	TQ (triangle isocèle)	LM	Angles droits
8	TQ	L	-	**48**	TQ	LM	-
9	TQ	L	Hauteurs…	**49**	TQ (triangle isocèle)	L	-
10	TQ	L	-	**50**	-	-	-
11	TP, rectangle	L	-	**51**	TQ	L	-
12	TQ	L	-	**52**	TQ	L	-
13	-	-	-	**53**	TP, isocèle	L	-
14	TQ	LM	angles	**54**	TP, isocèle	L	-
15	TQ (triangle isocèle)	LM	-	**55**	TP, rectangle	L	-
16	TQ	LM	Angles	**56**	TQ (triangle isocèle)	L	-
17	TQ	L	-	**57**	TQ (triangle isocèle)	LM	-
18	TQ	LM	Angles	**58**	TQ	L	-
19	TQ	LM	-	**59**	TQ	LM	-
20	TQ	LM	Angles	**60**	TQ	L	Hauteur de AOD associée à [AD]
21	TQ	L	-	**61**	TQ	L	-
22	TQ	LM	Angles	**62**	TP, isocèle	L	-
23	TQ (triangle isocèle)	LM	Angles	**63**	TQ	L	-
24	TQ	L	-	**64**	TP, isocèle	Codage incorrect	
25	TQ	L	-	**65**	TQ	L	-
26	TQ	LM	Angles	**66**	TQ	L	-
27	TP, rectangle	LM	Angles	**67**	TQ	LM	-
28	TP, isocèle	L	Hauteurs…	**68**	TQ	Codage incorrect	
29	TP, isocèle	LM	Angles	**69**	TQ	L	-
30	TQ	L	-	**70**	TQ (triangle isocèle)	L	-
31	TP, isocèle	L	-	**71**	TQ (triangle isocèle)	L	-
32	TQ	LM	Angles	**72**	TP, isocèle	L	-
33	TQ	L	Cercles	**73**	TQ	L	-
34	TP, isocèle	LM	-	**74**	TP, isocèle	L	-
35	TQ	L	-	**75**	TQ	L	-
36	TP, isocèle	L	Cercles	**76**	TQ (triangle isocèle)	L	-
37	TQ (triangle isocèle)	L	Cercles	**77**	TQ	L	-
38	TP, isocèle	L	Cercles	**78**	TQ	L	-
				79	TQ	L	-
				80	TQ	LM	-
				81	TQ	L	-
				82	TQ	L	-

Le codage des angles de la figure demeure encore une caractéristique des élèves italiens qui s'en servent pour prouver la similitude ou la congruence de quelques triangles. Évidemment, dans l'institution italienne, la *configuration des deux parallèles et une sécante* acquiert beaucoup de signification grâce à la présence des cas de congruence et de similitude.

Les procédures des élèves

En général, le problème s'avère difficile pour tous les élèves. Aucun élève n'achève pas vraiment le problème mais TOUS les élèves **français** abordent au moins une étape alors que NEUF élèves **italiens** se désistent depuis le début, l'un d'entre eux n'ayant même pas reproduit la figure décrite dans l'énoncé.
Cela a rendu plus laborieux le dépouillement des productions en demandant plus de réflexion sur la manière de répertorier les diverses procédures. Finalement, nous avons effectué des analyses locales et, compte tenu de la structure de l'énoncé, nous avons distingué les six étapes suivantes :

Étape 1. *Prouver que B est le milieu de [AO].*
Étape 2. *Prouver que M est le milieu de [AD].*
Étape 3. *Prouver que L est le milieu de [BC].*
Étape 4. *Prouver que L est le milieu de [OM].*
Étape 5. *Prouver que H est le centre de gravité de BCM.*
Étape 6. *Comparer les aires de AOD et BCM.*

Nous avons résumé les résultats de l'analyse des productions des élèves observés dans les tableaux 6.9 et 6.10. Nous donnons ci-dessous les détails relatifs au codage utilisé dans ces tableaux.

À propos des cinq premières étapes, lorsque l'élève adopte une *technique mathématique*, nous le signalons en recourant au codage utilisé lors de l'analyse à priori[16] : $\mathbf{C_5}$ (*configuration de Thalès*) et ses variantes $\mathbf{C_5V}$, $\mathbf{C_6}$ (*similitude*), $\mathbf{C_7}$ (*homothétie*) ; à propos de la dernière étape, nous avons retrouvé quelques unes des procédures envisagées lors de l'analyse *a priori* du problème B[17] et notamment les suivantes : $\mathbf{B_1}$ (rapport des hauteurs et formules), $\mathbf{B'_2}$ (parallélogrammes), $\mathbf{B_6}$ (similitude) et $\mathbf{B_7}$ (similitude et formules). Dans ce cas, nous indiquons si l'usage de la procédure est **complet correct (CC)**, **incomplet correct (IC)**, **incomplet partiellement correct (IPC)**, etc.

---

[16] cf. § I.1 de ce chapitre

[17] cf. chapitre. 3, § III, *Le triangle des milieux : un problème de périmètre et* d'aire, ou bien le Tableau 6.3 de ce chapitre où les solutions sont brièvement évoquées.

Dans ce problème, la difficulté majeure relève du fait que l'élève doit déduire des propriétés en ayant à sa disposition un nombre très restreint d'hypothèses. Nous avons constaté qu'un tracé précis ainsi que la familiarité avec la figure en jeu ont amené certains élèves à ne pas respecter l'ordre de l'énoncé et, par conséquent, à enchaîner des passages déductifs en recourant à des résultats qu'au contraire il fallait encore prouver. Par exemple, des élèves exploitent la congruence de quelques petits triangles ou bien d'autres s'appuient sur les propriétés des parallélogrammes, sous-figures contenues dans la figure de départ. Nous avons signalé ces procédures par le code **TMI** (*technique mathématique inadéquate*) en ajoutant, si possible, une indication permettant de saisir l'esprit de la procédure. Il nous paraît que, bien que ces élèves s'appuient sur la perception ou bien sur la reconnaissance d'une configuration connue en produisant une preuve en quelque sorte incorrecte (selon la logique de l'énoncé), ils montrent un progrès – éventuellement faible – vers l'*attitude rationnelle* : bien que leur attitude révèle une incapacité à se détacher du pragmatique, il nous paraît que ces élèves ont retenu quelques propriétés de la figure en jeu et qu'ils tentent de les exploiter pour produire une preuve qui se rapproche quelque peu d'un discours intellectuel.

En revanche, certains élèves déduisent des *propriétés fausses* obtenues en essayant de concilier les connaissances disponibles avec ce que qu'ils perçoivent sur leur tracé. Dans ce cas, nous signalons la procédure par le codage **TP***.

Dans le paragraphe précédent, nous avons signalé que quelques élèves tracent une figure particulière alors que d'autres, ayant tracé un cas général de figure, lui attribuent des propriétés particulières dans leur discours : si, dans le premier cas, la perception apparaît comme le moyen privilégié pour avancer, dans le deuxième cas, nous croyons qu'il s'agit plutôt d'une *échappatoire* de la part de l'élève afin de mobiliser des outils qui lui conviennent le mieux pour aboutir. C'est ainsi que nous avons résolu de distinguer ces procédures qui, dans les tableaux récapitulatifs, sont indiquées par les codes **Tr Is** ou **Tr Eq**.
Dans d'autres productions, des élèves semblent être tellement persuadés de la propriété perçue qu'ils utilisent un argument plausible, sans chercher à le vérifier. Dans ces cas, aucun indice ne nous permet de reconnaître une technique mathématique précise et, d'ailleurs, ils semblent plutôt s'appuyer sur la *perception*, la différence avec les procédures précédentes est qu'ils ne mentionnent pas les propriétés d'un cas particulier de figure. Nous indiquons donc ces procédures par le code **TP**.

Lorsque l'élève énonce une définition ou bien une propriété sans pourtant l'exploiter pour aboutir, nous avons utilisé le codage **déf** et/ou **propr**. Il s'agit surtout des étapes où les élèves doivent prouver qu'un point est le milieu d'un segment – et alors ils évoquent la propriété du milieu d'être le centre de la symétrie

qui transforme une extrémité du segment en l'autre – ou bien que H est le centre de gravité de BCM – et alors ils énoncent, par exemple, la définition de centre de gravité dans un triangle. Dans ces cas, nous indiquons si la définition ou la propriété ont été évoquées au moins d'une manière correcte ou non.

Nous avons constaté que quelques élèves ne saisissent pas correctement l'**étape 5** et qu'ils affirment que H est le centre de gravité de AOD. Dans ce cas, nous signalons le malentendu par le codage **AOD**.

À propos de l'**étape 6**, nous signalons les élèves qui répondent en s'appuyant sur la *perception* (**TP**) ou qui recourent au *mesurage* et aux *formules de calcul des aires* (**mesurage**) en indiquant aussi la valeur relative au rapport des aires des deux triangles, cela dans le cas où l'élève l'a fournie. Ici, il nous paraît difficile de classer certaines réponses comme étant le résultat de la *reconnaissance d'une configuration familière* car, même si quelques élèves ont eu recours à cette technique, aucun d'entre eux ne justifie vraiment la réponse.

Dans l'ensemble, les résultats montrent que les tâches proposées sont *problématiques* pour la majeure partie des élèves ; cependant, le nombre d'élèves français qui s'investissent est toujours plus élevé. À propos des techniques adoptées, nous constatons que les élèves ont une inclinaison à changer de catégorie de technique en passant d'une étape à l'autre ainsi qu'au sein de la même étape. Peu d'élèves adoptent une *technique mathématique* pour accomplir les diverses étapes mais aucun d'entre eux n'achève vraiment le problème, l'**étape 5** étant celle qui pose le plus de difficulté et qui est négligée par la majorité de ces élèves.

En effet, les résultats relatifs à l'**étape 5** semblent confirmer que les élèves n'ont pas saisi la logique des étapes précédentes dont l'objectif est en fait de leur suggérer un moyen pour analyser convenablement la figure en considérant l'un des points d'intersection des médianes de AOD avec l'un des côtés de BCM. Peut-être faut-il aussi reconnaître une inaptitude des élèves à exploiter la figure suivant une orientation différente.

Ci-après, nous détaillons nos analyses en suivant le découpage en six étapes précisé ci-dessus. Nous ne comptabilisons pas les copies des NEUF élèves **italiens** qui ne résolvent pas du tout le problème, d'UN élève **italien** qui produit un *discours infructueux* ainsi que les copies des DEUX élèves **français** qui codent le tracé d'une manière incorrecte : bien qu'ils tentent de produire un discours, leur erreur ne leur permet pas d'avancer d'une manière fructueuse. Par la suite, nous ne considérons donc que les productions

de VINGT-HUIT élèves **italiens** et de QUARANTE élèves **français**.

Tableau 6.9 – Les procédures des élèves italiens dans le problème B1

	Élèves italiens											
	Procédure						Usage de la procédure					
	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
1	TMI (par)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	C_7	TMI (hom)	C_5		-	TP (4)	CC	-	IC		-	-
3	-	Tr Is		TP	C_5	B'_2 (4)	-	-		-	IC	IC
4	Tr Eq			C_5 ?	-	TP (4)	-			-	-	-
5	TP (cercles)					TP (4)	-	-	-	-	-	-
6	TP*	Tr Is		TP	déf	B'_2	-	-		-	incorrect	II
7	TMI (cong)	Tr Is		C_5 ?	déf	TP (4)	-	-	-	-	correct	-
8	C_5	C_5	TP	C_5V	déf	TP (4)	IC	IC	-	IC	correct	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	C_6	-	-	-	-	-	IC	-	-	-	-	-
15	C_6	Tr Is		C_6	-	-	IC	-	-	IC	-	-
16	C_6	-	C_6		-	B_6 (4)	CC	-	CC		-	IC
17	C_6	-	C_5V		-	B_6 (4)	CC	-	IC		-	IC
18	C_6	-	-	-	-	-	CC	-	-	-	-	-
19	C_5	-	C_5V		-	-	CC	-	CC		-	-
20	C_6	TMI (cong)	-	-	-	-	CC	-	-	-	-	-
21	C_5		TP	C_5V	TP	B_6 (4)	CC		-	CC	-	IC
22	TMI (cong)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	TMI (cong)	Tr Eq					-	-			-	-
24	Discours infructueux : inexploitable !						-					
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	TMI (congruence)		C_5		-	-	-		IC		-	-
28	TP*	Tr Is		C_5 ?	déf	B_6	-	-		-	correct	IC
29	Discours infructueux : inexploitable !				déf	-	-				correct	-
30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
31	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
32	C_6	-	-	-	-	1/3	Incomplet	-	-	-	-	-
33	TP (cercles)				-	-	-				-	-
34	TP*	Tr Is			-	-	-	-			-	-
35	Discours infructueux : inexploitable !				déf	TP (plus grand que)	-				incorrect	-
36	TP (cercles)		-	-	Tr Eq	1/3	-		-	-	-	-
37	TP (cercles)				Tr Eq	1/3	-				-	
38	TP (cercles)		-	-	déf+prop	1/3	-		-	-	correct	-

Tableau 6.10 – Les procédures des élèves français dans le problème B1

	Élèves français											
	Procédure						Usage de la procédure					
	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
41	-	TP*		-	déf	TP (4)	-	-		-	correct	-
42	TP*	-	-	-	-	TP* (2)	-	-	-	-	-	-
43	TP*	Tr Is		-	-	TP (4)	-	-		-	-	-
44	-	-	-	C_5V	-	TP (4)	-	-	-	IC	-	-
45	propr	TP	TP	prop	déf	B_1	correct	-	-	correct	correct	IPC
46	C_5 + mesur	TP	-	-	-	-	CPC	-	-	-	-	-
47	C_5	Tr Is			déf	TP (4)	CC	-			incorrect	-
48	C_5 ou TP* ?	TP	TP	-	déf	TP (4)	II ?	-	-	-	incorrect	-
49	C_5	Tr Is		C_5	déf	B_1 (2)	CC	-		IPC	correct	II
50	TP	TP*		C_5V	TP	TP* (2)	-	-		CC	-	-
51	C_5	-	-	-	-	-	IC	-	-	-	-	-
52	TP*	C_5	-	C_5V	déf	-	-	CC	-	CC	correct	-
53	-	Tr Is		C_5 ?	-	B_1	-	-		-	-	IC
54	C_5		TP	TP	TP	B'_2/ B_6	CC		-	-	-	IPC
55	C_5	-	C_5V	C_5V	-	-	CC	-	IC	CC	-	-
56	C_5	TP	TP	C_5V	TP	TP (4)	CC	-	-	CC	-	-
57	C_5		-	C_5V	-	-	CC		-	CC	-	-
58	C_5		C_5V		AOD	TP* (2)	CC		CC		-	-
59	C_5		C_5V		C_5	B_1 (4)	CC		CC		CC	IPC
60	C_5	-	C_5V		AOD	-	CC		CC		-	-
61	C_5		C_5V		C_5	-	CC		CC		IPC	-
62	C_5	Tr Is		-	TP	TP* (3)	CC	-		-	-	-
63	C_5		C_7 ?	C_7	-	B'_2 (4)	CC		...	CC	-	IC
64	Codage du tracé incorrect : inexploitable !						-	-	-	-	-	-
65	C_5 ?	C_5	TP	C_5V	AOD	TP* (2)	...	CC	-	-	-	-
66	C_5	-	-	-	TP	TP* (2)	CC	-	-	-	-	-
67	C_5	-	-	-	C_5	-	CC	-	-	-	IC	-
68	Codage du tracé incorrect : inexploitable !						-	-	-	-	-	-
69	C_5		C_5V		-	-	CC		CC		-	-
70	C_5		C_5V		TP	B_1 (2)	CC		CC		-	IPC
71	C_5	Tr Is		C_5V	AOD	TP (4)	CC	-		CC	-	-
72	C_5	TP		C_5V	(cercle)	TP (4)	CC	-		CC	-	-
73	C_5	C_5	C_5V	C_5V	TP	-	CC	CPC	IPC	CC	-	-
74	C_5	Tr Is		C_5V	déf	Mesurage (4)	CC	-		CC	correct	CPC
75	C_5	-	-	C_7	-	TP* (2)	CC	-	-	IC	-	-
76	TMI (méd)	Tr Is		-	déf	TP (4)	-	-		-	correct	-
77	-	-	-	-	déf+propr	TP (4)	-	-	-	-	correct	-
78	C_5	-	-	-	-	-	CC	-	-	-	-	-
79	C_5	-	-	C_5V	-	-	CC	-	-	CC	-	-
80	propr	TP	TP	-	déf	TP* (2)	correct	-	-	-	correct	-
81	TP*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
82	-	-	-	-	TP	TP (plus grand que)	-	-	-	-	-	-

Étape 1. ***Prouver que B est le milieu de [AO].***

Avant de commenter les résultats, nous les résumons ci-après. Remarquons que les élèves **français** sont plus nombreux à adopter une *technique mathématique* et, même s'il y en a CINQ qui n'abordent pas cette étape, ils sont toujours plus nombreux à s'investir dans l'ensemble du problème.

Élèves italiens	UN élève n'aborde pas cette étape ; DEUX élèves fournissent un *discours infructueux* ; ONZE élèves recourent à une *technique mathématique* ; CINQ élèves recourent à une *technique mathématique inadéquate* ; TROIS élèves s'appuient sur une *propriété fausse* ; UN élève s'appuie sur un cas particulier de figure (**Tr Eq**) ; CINQ élèves s'appuient sur la *perception* (cercles !).
Élèves français	CINQ élèves n'abordent pas cette étape ; VINTG-SEPT élèves recourent à une *technique mathématique* dont UN recourt aussi au *calcul* et les arguments de DEUX autres sont douteux ; UN élève recourt à une *technique mathématique inadéquate* ; QUATRE élèves s'appuient sur une *propriété fausse* ; UN élève s'appuie sur la *perception* ; DEUX élèves énoncent une propriété (**prop**) sans la prouver.

Parmi les élèves qui adoptent une *technique mathématique*, seulement UN élève **italien** recourt explicitement à l'*homothétie* (**Solution C_7**) d'une manière complète, correcte et contextualisée. Autrement, les résultats montrent que les élèves **français** privilégient la *configuration de Thalès* (**Solution C_5**) alors que les élèves **italiens** mobilisent plus aisément les *critères de similitude des triangles* (**Solution C_6**).

TROIS élèves **italiens** et VINGT-CINQ élèves **français** recourent à l'énoncé complété du *théorème de Thalès* (**Solution C_5**)[18]. En général, ils l'évoquent mais ils écrivent aussi toutes les informations de l'énoncé d'une manière *contextualisée*, ce qui nous paraît spontané si l'on considère qu'ils apprennent l'énoncé en question toujours à l'aide d'une figure codée.

En revanche, douteuse est la source qui amène UN élève **français** à s'exprimer ainsi :

> "B est le milieu de [AO] car [BC] // [AD] et BC = ½ AD donc, dans le triangle AOD, B milieu de AO et C milieu de OD".

On pourrait croire que l'élève fait allusion au *théorème de Thalès* dans le triangle (**Solution C_5**) en oubliant de préciser tous les détails de l'énoncé. Toutefois, si l'on analyse sa production dans l'ensemble, on dirait qu'il reconnaît une configuration du cours sur laquelle il a travaillé en exploitant des outils différents : il semble saisir la proportionnalité des longueurs en jeu et que cela lui évoque la notion d'*agrandissement/réduction* mais on

[18] Puisque, en général, l'énoncé complété du théorème de Thalès n'apparaît pas dans les manuels italiens, nous devons croire qu'il s'agit d'un résultat du cours institutionnalisé par leur enseignant.

pourrait aussi croire qu'il tente de mobiliser l'outil *homothétie* (**Solution C_7**) sans pourtant réussir à expliciter tous les éléments nécessaires. Rappelons que cette transformation géométrique est au programme de Seconde et que, d'après les rédacteurs, elle doit être introduite en s'appuyant *sur des situations portant sur les agrandissements et les réductions*. L'attitude de l'élève pourrait être l'effet d'une acquisition en cours dont la liaison avec un outil ancien fonctionne en obstacle en l'empêchant de saisir convenablement les différences avec l'outil le plus récent.

Les arguments d'UN autre élève **français** sont aussi douteux. Il affirme :

"(BC) // (AD), AD = 2BC donc ½ AD = BC. On peut dire que (BC) est la droite des milieux du segment [AO] et [OD] donc B est le milieu de [AO] et C milieu de [OC]".

Deux interprétations sont possibles, l'une permettant de rapprocher la procédure de l'élève de la **Solution C_5** et l'autre de le comptabiliser parmi les techniques de la catégorie **TP***. On pourrait admettre que les arguments de l'élève sont corrects et que, dans ce cas, l'élève a utilisé une *équivalence sémantique* : puisque le rapport de proportionnalité est égal à ½, il est vrai que (BC) est *la droite des milieux*, l'élève mobilise le *théorème de Thalès* sans l'évoquer. Ou alors, l'élève adapte l'énoncé complet de la *réciproque du théorème des milieux* d'une manière impropre mais qui lui convient pour aboutir.

UN élève **français** évoque le *théorème de Thalès* et écrit l'énoncé d'une manière *contextualisée* mais ensuite, au lieu de déduire les conclusions nécessaires, il recourt au *mesurage* et au *calcul*. Sa procédure manifeste une *petitio principii* car, pour calculer la longueur de [AO], il mesure la longueur de [OB] pour ensuite la calculer en utilisant AO. Bien que cela soit un cas isolé, on pourrait croire qu'il s'agit de la conséquence du fait que souvent le théorème de Thalès est exploité dans un cadre numérique.

SEPT élèves **italiens** exploitent la *similitude* des triangles AOD et BCM (**Solution C_6**) : cela prouve que, par rapport au nombre d'élèves qui adoptent une technique mathématique, les *cas de similitudes* sont privilégiés. QUATRE élèves mobilisent d'une manière *contextualisée* tous les outils nécessaires pour aboutir. En revanche, les DEUX autres ne fournissent pas une procédure complète car ils admettent la similitude de ces triangles : vraisemblablement, dans leur démarche, l'évidence dissimule la nécessité d'une preuve qui leur apparaît comme superflue. UN élève amorce une procédure correcte – il établit la similitude des deux triangles en prouvant l'égalité des angles – mais il n'aboutit pas.

CINQ élèves **italiens** et UN élève **français** adoptent une *technique mathématique inadéquate* (**TMI**). UN élève **italien** exploite le parallélogramme comme sous-figure contenue dans la figure donnée alors que les QUATRE autres établissent ou bien admettent la congruence des triangles ABM et OBC. Les discours produits ont un statut de preuve intellectuelle mais la procédure est incorrecte car ils ne respectent pas l'ordre des consignes : il nous paraît que ces élèves manifestent une connaissance des propriétés de la figure en question mais qu'ils ne

sont pas capables de les exploiter dans le bon sens.
L'élève **français** affirme que [DB] est une médiane de AOD et que, par conséquent, B est le milieu de [AO]. Sans doute est-il difficile de comprendre si l'élève reconnaît une configuration qui lui est familière ou s'il s'appuie sur la perception ; en tout cas, l'élève adopte une attitude qui l'amène à modifier l'ordre de l'énoncé.

Ayant tracé un triangle isocèle en O, UN élève **italien** considère le triangle AOD comme étant isocèle en D (donc équilatéral) en concluant que *le segment de perpendiculaire partage le côté opposé AO en segments égaux*. Vraisemblablement, l'élève adapte des outils qui lui conviennent pour aboutir à sa perception.

TROIS élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** appuient leurs arguments sur des *propriétés fausses* (**TP***) : le tracé semble les favoriser dans la perception de la proportionnalité de la figure. Pour QUATRE élèves – UN **italien** et TROIS **français** – il s'agirait à peu près de la propriété suivante :

"Puisque AD = 2BC et que (OB) est le prolongement de (AB), alors B est le milieu de [OA]".

En outre, DEUX élèves **italiens** – qui tracent un trapèze isocèle – affirment que B est le milieu de [AO] car ce segment *est coupé par la diagonale [BD] de ABCD*.
On dirait que ces six élèves reconnaissent une figure rencontrée dans le cours mais qu'ils ne savent pas l'associer à un outil précis.
En revanche, UN élève **français** mobilise un outil du cours en l'adaptant à la situation. Il semble faire appel à l'*énoncé complet de la réciproque du théorème des milieux*, ce qui manifesterait une difficulté à distinguer correctement un théorème direct de sa réciproque. En fait, nous lisons :

"AD = 2BC. Par la propriété "si une droite coupe 2 côtés d'un triangle et est égale à la moitié de la longueur du troisième côté alors cette droite coupe les deux côtés en leur milieu et est parallèle au troisième côté"..."

Cet élève *invente* une "réciproque" qui pourrait fonctionner si l'angle en O est plus grand que l'un des angles ne C ou en D.

DEUX élèves **français** se limitent à considérer que *B est le centre de symétrie de [OA]* et que donc *B est le milieu de [AO]*. Vraisemblablement, ils s'appuient sur la perception mais il nous paraît qu'ils tentent de mobiliser un outil et de produire ainsi un discours intellectuel car c'est cela que l'on attend d'eux !

CINQ élèves **italiens** tracent un cercle de centre B et de rayon [AB] en constatant qu'il passe aussi par O. C'est ainsi qu'ils concluent que *B est bien le milieu de [AO]*. Bien qu'ils mobilisent une connaissance relative au cercle, nous considérons qu'il s'agit d'une *technique perceptive* qui, par conséquent, les amène à produire une preuve pragmatique.

Étape 2. *Prouver que M est le milieu de [AD].*

En général, à partir de cette étape, la majeure partie des élèves – surtout **italiens** – ont du mal à progresser

convenablement dans la résolution du problème. Voici un résumé des résultats relatifs recueillis :

Élèves italiens	HUIT élèves n'abordent pas cette étape ; parmi eux, TROIS élèves admettent la propriété en question dans les étapes qui suivent ; DEUX élèves fournissent un *discours infructueux* ; DEUX élèves adoptent une *technique mathématique* ; TROIS élèves recourent à une *technique mathématique inadéquate* ; HUIT élèves s'appuient sur un cas particulier de figure (**Tr Is** ou **Tr Eq**) ; CINQ élèves s'appuient sur la *perception* (cercles !).
Élèves français	TREIZE élèves n'abordent pas cette étape ; parmi eux, deux élèves admettent la propriété en question dans les étapes qui suivent ; ONZE élèves adoptent une *technique mathématique* ; DEUX élèves s'appuient sur une *propriété fausse* ; HUIT élèves s'appuient sur un cas particulier de figure (**Tr Is**) ; SIX élèves s'appuient sur la *perception*.

TOUS les élèves qui adoptent une *technique mathématique* – DEUX élèves **italiens** et ONZE élèves **français** – recourent à la **Solution C_5** en mobilisant d'une manière *contextualisée* les outils nécessaires pour aboutir. UN élève **français** utilise le terme *médiatrice* au lieu de *médiane* ; cela manifeste une acquisition incorrecte du vocabulaire ou bien c'est simplement un lapsus : nous retrouvons cette erreur aussi dans d'autres copies. UN élève **italien** ne précise pas que C est le milieu de [OD] : on peut croire qu'il s'agit d'un oubli, autrement cela manifesterait une conception erronée. En effet, il suffit de repérer deux médianes du triangle pour conclure que leur point de concours est son centre de gravité ; par conséquent, le segment passant par le troisième sommet et par le centre de gravité est aussi une médiane…

TROIS élèves **italiens** recourent à une *technique mathématique inadéquate.*

UN élève tente d'exploiter la notion d'*homothétie* (le même que dans 'étape précédente) mais sa procédure montre une *petitio principii* :

> "Si nous considérons A comme le centre de l'homothétie qui transforme [BM] en [OD], en sachant que AB = ½ AO, on aura aussi AM = ½ AD, donc M est le milieu de [AD]".

Vraisemblablement, cet élève réitère la procédure adoptée pour justifier l'étape précédente sans s'apercevoir qu'il utilise implicitement une condition de parallélisme qu'il faudrait pourtant prouver.

Les DEUX autres élèves prétendent déduire la propriété à prouver du fait que ABM et CMD sont congruents, l'un l'admettant et l'autre le prouvant. Nous croyons que ces élèves ont une certaine familiarité avec la figure en question et ses propriétés mais qu'ils ne savent pas les utiliser dans le bon sens.

DEUX élèves **français** s'appuient sur une *propriété fausse* (**TP***) : ils généralisent une propriété qui n'est vraie que dans un cas particulier et qui leur permet de prouver conjointement les étapes 2 et 3 :

> "En joignant le sommet d'un triangle, obtenu en prolongeant les côtés non parallèles d'un trapèze, avec le point de concours des diagonales de ce trapèze, on obtient une droite qui coupe les côtés parallèles du trapèze en leur milieu"

Évidemment, ces élèves tentent de concilier ce qu'ils perçoivent sur leur tracé avec leurs connaissances relatives à une configuration qui leur est en quelque sorte familière.

HUIT élèves **italiens** et HUIT élèves **français** déduisent la propriété en question du fait que, d'après eux, le triangle AOD est isocèle en O et que donc le segment [OM] est hauteur (bissectrice ou médiatrice) et donc médiane. Compte tenu du fait que seulement quelques-uns de ces élèves tracent un cas particulier de figure, il nous paraît que les autres adaptent leur perception à une situation où les outils sont plus accessibles.

SIX élèves **français** affirment que *M est le milieu de [AD] car [OM] est une médiane de AOD*. Aucun indice ne nous permet de savoir si ces élèves ont simplement oublié de préciser tous les passages nécessaires pour conclure ainsi. Dans le doute, nous pensons qu'ils s'appuient sur la perception (**TP**) car, bien qu'ils utilisent un argument plausible, ils ne cherchent pas à le vérifier ; par ailleurs, ils viennent de prouver que B et C sont les milieux respectifs de [AO] et [OD] et le tracé est assez éloquent pour que les élèves puissent conclure correctement sans enchaîner les déductions nécessaires.

Enfin, parmi ceux qui adoptent une *technique perceptive*, nous retrouvons encore les CINQ élèves **italiens** qui tracent un cercle de centre M et rayon [AM] pour vérifier qu'il passe aussi par D !

Étape 3. *Prouver que L est le milieu de [BC].*

Le nombre d'élèves qui adoptent une *technique mathématique* est toujours faible. Voici le résumé des résultats recueillis :

Élèves italiens	NEUF élèves n'abordent pas cette étape ; DEUX élèves fournissent un *discours infructueux* ; CINQ élèves adoptent une *technique mathématique* ; HUIT élèves s'appuient sur un cas particulier de figure (**Tr Is** ou **Tr Eq**) ; QUATRE élèves s'appuient sur la *perception* dont DEUX tracent des cercles.
Élèves français	QUATORZE élèves n'abordent pas cette étape ; NEUF élèves adoptent une *technique mathématique* ; HUIT élèves s'appuient sur un cas particulier de figure (**Tr Is**) ; DEUX élèves s'appuient sur une *propriété fausse* (cf. étape précédente) ; SEPT élèves s'appuient sur la *perception*.

Seulement DEUX élèves **italiens** recourent aux propriétés du parallélogramme (**Solution C_5**) pour prouver que L est le milieu de [BC] (et, par conséquent de [OM]). Toutefois, ils admettent la condition de parallélisme des côtés de OBMC, ce qui attesterait que ces élèves exploitent une configuration qui leur est familière ou, plus simplement, qu'ils s'appuient sur la perception. Remarquons que ces résultats confirmeraient ce que nous avons remarqué lors du dépouillement des problèmes de la fiche 1 : la majeure partie des élèves n'envisage pas

spontanément d'exploiter le parallélogramme comme sous-figure utile pour aboutir.

DEUX élèves **italiens** et HUIT élèves **français** recourent au *théorème complété de Thalès* dans les couples de triangles OBL et OAM, OCL et ODM (**Solution C_5V**). Ils l'évoquent mais ils écrivent aussi toutes les hypothèses d'une manière *contextualisée*.
Remarquons que QUATRE élèves – les DEUX **italiens** et DEUX **français** – exploitent implicitement la propriété de M d'être le milieu de [AD] ; en outre, l'un des deux élèves **italiens** ne complète pas sa procédure car il considère seulement le couple de triangles OBL et OAM.

En admettant que M est le milieu de [AD], un seul élève **italien** recourt à la *similitude* dans les triangles OBL et OAM, OCL et ODM (**Solution C_6**).

Après avoir prouvé correctement que M est le milieu de [AD], UN élève **français** s'exprime ainsi :

"... Comme AD // BC et M milieu de AD dans le triangle AOD et que O, L, M alignés, L est le milieu de BC".

On peut donc supposer que cet élève fait allusion à la propriété de l'*homothétie* de conserver les rapports de longueurs. Remarquons que, pour accomplir la première étape, il mobilise le *théorème de Thalès* et ensuite, pour prouver que L est le milieu de [OM], il définit explicitement l'*homothétie* de centre O et de rapport 2. Vraisemblablement, il perçoit la proportionnalité des longueurs en jeu et il voudrait l'exploiter pour mettre en place une procédure s'appuyant sur l'*homothétie*. On pourrait bien croire que pourtant la vision de la figure en termes d'*agrandissement/réduction* fait obstacle pour qu'il fasse fonctionner convenablement la transformation géométrique envisagée. La difficulté manifestée peut donc être due au fait que la configuration en jeu demeure liée à plusieurs outils dont les différences sont subtiles mais primordiales à saisir si l'on veut les mobiliser correctement. Son attitude nous incite à croire que la présentation de l'homothétie comme prolongement de la notion d'agrandissement/réduction (et donc reliée à la proportionnalité des longueurs) peut fonctionner en obstacle pour une acquisition correcte de cette transformation.

Après avoir considéré que AOD est un triangle isocèle et que [OM] en est hauteur (bissectrice ou médiatrice) et médiane, HUIT élèves **italiens** et HUIT élèves **français** font la même considération pour le triangle BCM. Vraisemblablement, la proportionnalité des longueurs et, par conséquent, la similitude des deux triangles les conduisent spontanément à reproduire la même procédure.

À part les DEUX élèves **italiens** qui tracent des cercles, DEUX autres élèves **italiens** et SEPT élèves **français** s'appuient sur la *perception*. Dans leurs copies, aucun indice ne nous permet de saisir les outils implicitement mobilisés : bien qu'ils utilisent un argument plausible, ils ne cherchent pas à le vérifier, ce qui nous amène à croire qu'ils lisent l'alignement des points O, L, M sur le tracé et que, puisque M est le milieu de [AD], L est le

milieu de [BC]. De même ici, nous croyons que la similitude des triangles les amène à des considérations semblables.

Étape 4. ***Prouver que L est le milieu de [OM].***

Bien que le nombre d'élèves qui s'investissent demeure toujours faible, les résultats relatifs à cette étape montrent que le *théorème de Thalès* est un outil assez accessible, surtout chez les élèves **français**. Voici un sommaire des résultats :

Élèves italiens	DIX élèves n'abordent pas cette étape ; DEUX élèves fournissent un *discours infructueux* ; DIX élèves adoptent une *technique mathématique* ; parmi eux, TROIS élèves adoptent une technique douteuse ; DEUX élèves s'appuient sur un cas particulier de figure (**Tr Is** ou **Tr Eq**) ; QUATRE élèves s'appuient sur la *perception* dont DEUX tracent des cercles.
Élèves français	QUINZE élèves n'abordent pas cette étape ; VINGT-DEUX élèves adoptent une *technique mathématique* ; parmi eux, UN élève adopte une technique douteuse ; UN élève s'appuie sur un cas particulier de figure (**Tr Is** ou **Tr Eq**) ; UN élève s'appuie sur la *perception* ; UN élève énonce une propriété (**prop**) sans la prouver.

Ayant considéré que OBMC est un parallélogramme (**Solution C_5**), DEUX élèves **italiens** parviennent à prouver conjointement les étapes 3 et 4. UN élève **français** affirme que *OBCM est un losange et que, par conséquent, ses diagonales se coupent en leur milieu, soit L.* Probablement, ayant tracé un cas particulier de figure et ne trouvant pas d'autre argument convaincant, cet élève s'appuie sur le tracé.

Bien que les procédures de TROIS élèves **italiens** et d'UN élève **français** soient assez fragmentaires, elles pourraient être rattachées à la **Solution C_5** car ils exploitent implicitement le fait que OBCM est un parallélogramme (notamment, un losange). Les élèves **italiens** s'expriment en termes de congruence des triangles BCM et OBC alors que l'élève **français** affirme que *pour que L soit milieu de [OM], il faut que OBCM soit un losange.* Évidemment, la perception joue un rôle non négligeable dans leur raisonnement et, en quelque sorte, la tendance à exploiter la figure comme cas particulier semble être encore présente.

TROIS élèves **italiens** et QUINZE élèves **français** recourent au *théorème de Thalès* (**Solution C_5V**) dans les triangles AOM et BOL : ils citent au moins le nom du théorème mais la majeure partie d'entre eux précisent toutes les informations de l'énoncé d'une manière *contextualisée.* En revanche, UN élève **italien** et TROIS élèves **français** préfèrent évoquer la *réciproque du théorème des milieux* pour parvenir aux mêmes conclusions.

DEUX élèves **italiens** recourent aux *critères de similitude des triangles* (**Solution C_6**) d'une manière

contextualisée sans pourtant préciser tous les détails de la procédure.

DEUX élèves **français** recourent aux propriétés de l'*homothétie* (**Solution C_7**). Ils définissent l'homothétie de centre O mais seulement l'un des deux établit le rapport de proportionnalité. Vraisemblablement, l'outil en question est en cours d'acquisition, ce qui empêche les deux élèves de l'exploiter d'une manière complète mais aussi dans les autres étapes du problème.

A part les DEUX élèves **italiens** qui recourent encore au compas, nous croyons que DEUX autres élèves **italiens** et UN élève **français** s'appuient sur la *perception*. Ils exploitent plus ou moins explicitement le rapport de proportionnalité existant entre les longueurs en jeu mais aucun indice ne nous permet de saisir les outils qui les conduisent à aboutir. Voici, par exemple, ce qui dit un des élèves italiens :

"B est le milieu de [AO], C est le milieu de [OD] et, puisque L est le milieu de [BC], L est aussi le milieu de [OM]".

S'il n'avait pas affirmé que "*et, puisque L est le milieu de [BC]*", on aurait pu supposer un recours implicite au théorème de Thalès mais, vu la manière de s'exprimer, il semble plutôt être persuadé que cela ne pourrait pas être autrement. De même pour l'élève français qui affirme :

"Puisque le triangle OBC est une réduction de moitié du triangle AOD (BO = ½ AO, CO = ½ DO, BC = ½ AD) ~~alors le point L situé au milieu du segment [BC]~~ alors OL = ½ OM d'où L milieu de [OM]".

On pourrait penser que cet élève recourt à l'homothétie mais au sens d'agrandissement/réduction (cf. page ..., plus haut).

DEUX élèves **italiens** affirment que *OBM est un triangle isocèle en B* d'où ils déduisent que *(BL) est une hauteur et que, par conséquent, elle coupe la base en son milieu, soit L*. Nous relevons encore une inclinaison à adapter leur perception à des outils plus accessibles.

Étape 5. *Prouver que H est le centre de gravité de BCM.*

Comme nous l'avons déjà annoncé, cette étape s'avère *problématique*, même pour les élèves qui ont adopté une *technique mathématique* pour aborder les autres étapes. Voici un sommaire des résultats :

Élèves italiens	SEIZE élèves n'abordent pas cette étape ; UN élève adopte une *technique mathématique* ; DEUX élèves s'appuient sur un cas particulier de figure (**Tr Is** ou **Tr Eq**) ; DEUX élèves s'appuient sur la *perception* dont UN trace des cercles ; SEPT élèves énoncent une définition ou une propriété sans l'exploiter.

Élèves français	QUATORZE élèves n'abordent pas cette étape ; TROIS élèves adoptent une *technique mathématique* ; NEUF élèves s'appuient sur la *perception* dont UN trace un cercle ; DIX élèves énoncent une définition ou une propriété sans l'exploiter ; QUATRE élèves ne saisissent pas correctement la tâche.

Seulement UN élève **italien** et TROIS élèves **français** recourent à une *technique mathématique* ($\mathbf{C_5}$) ; toutefois, seulement UN élève **français** produit un discours complet et correct alors que tous les autres ne précisent pas tous les passages permettant de prouver que, par exemple, BMDC est un parallélogramme ; notamment, l'élève **italien** admet ce résultat.

UN élève **français** affirme que *H n'est pas le centre de gravité de BCM* car le cercle de centre H et de rayon [MH] ne passe pas par B et C. Évidemment, cet élève manifeste une méconnaissance sur la notion en jeu.

En adaptant la perception à leurs connaissances, DEUX élèves **italiens** considèrent que BCM est un triangle équilatéral et que les segments [OM], [AC] et [BD] sont les hauteurs ainsi que les médianes de BCM et que donc H est son centre de gravité.

QUATRE élèves **français** ne saisissent pas correctement la tâche, ce qui les amène à affirmer que H est le centre de gravité de AOD car [OM], [AC] et [BD] sont ses médianes.

SEPT élèves **italiens** et QUINZE élèves **français** évoquent seulement la définition ou la propriété de centre de gravité : évidemment, ils montrent *savoir* mais ils ne *savent pas faire.*

Les résultats recueillis ici semblent prouver que les élèves n'ont pas saisi la logique des étapes précédentes. Par ailleurs, on pourrait attribuer l'échec à une inaptitude à envisager des sous-figures utile ainsi qu'à analyser la figure suivant une orientation différente. En effet, en excluant les élèves qui pervertissent les tâches en considérant un cas particulier de figure, très peu d'élèves exploitent le parallélogramme comme sous-figure contenue dans la figure de départ alors que cela les amènerait à suivre une procédure tout à fait à leur portée sans tenir compte du fait que, dans ce cas, vu qu'une bonne partie des élèves tracent les côtés [AD] et [BC] parallèlement aux bords de la feuille, l'autre parallélogramme serait facile à percevoir. D'autre part, puisque les élèves adoptent plutôt des procédures exploitant la *configuration de Thalès* ou bien la *similitude*, nous croyons qu'ils ont du mal à modifier leur regard sur le tracé.

Étape 6. ***Comparer les aires de AOD et BCM.***

Le nombre de réponses incorrectes et le recours à la perception sont plus élevés chez les élèves **français**, bien qu'il faille considérer que seulement SEIZE élèves **italiens** abordent cette étape contre les VINGT-SEPT élèves **français**. Voici un résumé des résultats :

Élèves italiens	DOUZE élèves n'abordent pas cette étape ; SIX élèves adoptent une *technique mathématique* : UN élève n'aboutit pas, CINQ élèves répondent correctement ; SIX élèves s'appuient sur la *perception*, dont UN fournit une réponse incomplète ; QUATRE élèves répondent incorrectement sans produire de justification ;
Élèves français	TREIZE élèves n'abordent pas cette étape ; HUIT élèves adoptent une *technique mathématique* : TROIS élèves n'aboutissent pas, UN répond correctement et DEUX répondent incorrectement, UN recourt au mesurage et répond correctement ; ONZE élèves s'appuient sur la *perception*, dont UN fournit une réponse incomplète ; HUIT élèves s'appuient sur une *propriété fausse* et fournissent une réponse incorrecte ;

On constate que ce sont exclusivement les élèves français qui mobilisent les formules de calcul des aires ; le recours au mesurage est presque inexistant (un seul élève français !). Par ailleurs, le recours à des techniques perceptives demeure encore important.

CINQ élèves **français** suivent une procédure proche de la **Solution B_1** (*formules de calcul des aires*) qui nécessite la recherche de la relation des hauteurs des deux triangles.

UN élève nomme respectivement x et y les hauteurs de AOD et BCM associées à [AD] et [BC] et admet que $2y = x$, cela probablement suggéré par le rapport de proportionnalité de longueurs des segments mis en jeu dans le problème. Toutefois, une erreur de nature algébrique, l'amène à fournir une réponse incorrecte (2).

Les QUATRE autres élèves considèrent les segments [OM] et [LM] comme hauteurs respectives des deux triangles même si seuls DEUX élèves tracent un cas particulier de figure depuis le début. Parmi eux, DEUX élèves n'aboutissent pas, UN élève répond correctement (4) et un autre fournit une réponse incorrecte, ce qui est dû probablement à une considération maladroite sur les données exploitées : en effet, cet élève écrit les formules de calcul des aires des deux triangles, puis il considère que BC = ½ AD et que LM = ½ OM en concluant que le rapport des mesures des aires est aussi égal à ½. On dirait que, bien que cet élève écrive les formules, il a déjà la conviction que la valeur du rapport est ½ car il ne pose aucun calcul algébrique.

UN élève **français** recourt au *mesurage* et puis à la *formule de calcul de l'aire d'un triangle*. Lui aussi, il considère les médianes des deux triangles et non pas les hauteurs. Il parvient à un résultat correct (4).

UN élève **italien** et UN élève **français** exploitent les propriétés des parallélogrammes (**Solution B'_2**) et ils fournissent une réponse correcte. L'élève **italien** admet la nature de ces quadrilatères : la figure en question lui

est probablement familière. L'élève **français** ne complète pas sa preuve car il utilise la propriété que deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur mais il ne prouve pas que (BM) et (CM) sont respectivement parallèles à (OD) et (OA), se contentant de le lire sur son tracé ou bien parce qu'il reconnaît une configuration qui lui est familière.

UN élève **italien** tente de mettre en place la même procédure mais il n'aboutit pas et surtout, bien qu'il ait tracé un cas général de figure, il affirme que les triangles BCM et OBC sont *symétriques par rapport à (BC)*. Vraisemblablement, cet élève essaie de concilier la perception – un moyen qu'il privilégie aussi au cours des autres étapes – avec une connaissance qui pourtant demeure encore imprécise.

QUATRE élèves **italiens** exploitent la similitude des deux triangles (**Solution B_6**) mais ils ne détaillent pas tous les passages qui permettent d'établir que les deux triangles sont semblables : quelques indices semblent prouver que la figure en question leur est familière. Parmi eux, un seul élève ne fournit pas de réponse.

La procédure d'UN élève **français** se place entre les deux cas précédents. Il écrit :

> "Puisque le quadrilatère OBMC est un losange et que le triangle BOC est une réduction de moitié du triangle AOD alors, puisque BOC et BCM ont la même aire, le triangle BCM est une réduction de moitié du triangle AOD. On a donc Aire du triangle BCM = ½ × Aire du triangle AOD".

Au-delà du fait que l'élève ne prouve pas la nature de OBCM, il nous paraît plus intéressant de remarquer que la condition des deux triangles d'être semblables avec un rapport de proportionnalité sur les longueurs égal à ½ le conduit à une conclusion fausse sur les aires, ce qui est dû – d'après nous – à un abus de langage : la locution "... *est une réduction de moitié...*" fait que, chez l'élève, une conception erronée s'installe et fonctionne en obstacle. Certainement, l'élève manifeste une difficulté à passer d'une dimension à l'autre, sa réponse allant contre toute évidence.

De même, la réponse fournie par SEPT élèves **français** va contre l'évidence. Ils affirment que la mesure de l'aire de BCM est égale à la moitié de celle de AOD (ou réciproquement) en s'appuyant sur une *propriété fausse* (**TP***), au détail près il s'agit de la même conception erronée trouvée dans les copies des élèves qui résolvent le problème A1:

> "Puisque les sommets de BCM sont les milieux des côtés de AOD (*ils se trouvent à la moitié des côtés de AOD*), alors...".

Remarquons que, parmi ces élèves, il y en a un qui manifeste aussi une incapacité à traduire le langage naturel en langage symbolique : en affirmant que *AOD est le double de BCM*, il écrit A(BCM) = 2 A(AOD). Rappelons que nous avons déjà rencontré cette erreur dans les productions des élèves – surtout français – qui résolvent le problème A1.

UN élève **français** s'appuie sur la même *propriété fausse* mais il affirme que $A_{AOD} = 3\ A_{BCM}$: faut-il croire qu'il associe ce résultat au fait qu'il y a trois milieux ou bien s'agit-il d'une erreur de décompte dans le pavage ? comme les élèves suivants.

Également, QUATRE élèves **italiens** fournissent la même réponse incorrecte (1/3) mais ils ne l'accompagnent d'aucun commentaire : ils s'appuient vraisemblablement sur la perception mais, en considérant les triangles qui constituent AOD, ils ne comptabilisent BCM.

Enfin, SIX élèves **italiens** et ONZE élèves **français** adoptent sans doute une *technique perceptive* : ils fournissent tous une réponse correcte, sauf UN **italien** et UN **français** qui se contentent de conclure que l'*aire de AOD est plus grande que l'aire de BCM.*

Les discours des élèves

Puisqu'aucun élève ne termine pas le problème, nous pouvons seulement reconnaître des *démonstrations* par "bouts", cela étant surtout le cas d'élèves français : néanmoins, constatons qu'ici le *Théorème de Thalès* s'avère être un outil efficace surtout pour eux. On dirait qu'ils ont une inclinaison et une facilité à évoquer explicitement tous les outils qui acquièrent un rôle important dans l'enseignement reçu (et c'est d'ailleurs le cas de l'outil en question). Pour le reste, ce sont surtout les élèves italiens qui, en recourant d'une manière contextualisé aux outils mobilisés, produisent des preuves qui relèvent de l'*exemple générique euclidien.*

Dans de nombreuses copies, la *perception* demeure encore un moyen privilégié pour accomplir les tâches proposées ; cependant, il nous paraît souvent difficile d'établir si c'est l'*évidence des faits* ou bien *des raisons* qui marque la preuve de certains élèves. Nous faisons allusion, par exemple, aux cas des élèves qui ne fournissent aucun indice sur les outils mobilisés mais qui produisent un discours qui "tient débout" (cf. procédures douteuses).

Enfin, remarquons que des preuves qui relèvent du *calcul sur les énoncés* demeurent une caractéristique des élèves français. A ce propos, nous insistons sur le fait que cela est à interpréter comme un effet de contrat : les élèves français sont *institutionnellement éduqués* à produire un discours lorsqu'on leur demande de résoudre un problème de géométrie. C'est ainsi que des conceptions erronées apparaissent davantage. Au contraire, les élèves italiens ne semblent pas être soumis à une demande forte de la part de l'enseignant à produire des preuves ; nous avons constaté qu'ils se désistent facilement et, derrière ces

désistements, il se peut que des discours erronés se cachent.

Conclusions

A propos de l'usage de la figure, les élèves montrent ici une capacité faible de décontextualisation surtout si l'on considère que quelques élèves tracent un cas général de figure mais que, par la suite, ils appuient leurs arguments sur les propriétés de cas particuliers de figures.

Le codage des angles est encore une caractéristique des élèves italiens, ce qui est dû sans doute au fait qu'ils disposent d'outils tels que les critères de similitude dont la mise en œuvre nécessite en fait le repérage d'angles égaux convenablement choisis.

C'est lors de l'analyse détaillée des procédures que nous interprétons la difficulté à terminer le problème en termes d'inaptitude à exploiter la figure suivant une orientation différente du tracé produit, au besoin en déplaçant la feuille, pour repérer plus facilement des sous-figures convenables pour mettre en place des procédures tout à fait à la portée du niveau concerné.

La perception ou la familiarité avec la figure en question semblent dérouter quelques élèves qui ne réussissent pas aisément à suivre la logique de l'énonce. Néanmoins, cette difficulté peut aussi révéler une incapacité à enchaîner des séquences de déduction *longues*, ce qui conduit les élèves à "choisir" les étapes qui leur apparaissent comme les plus faciles à prouver.

Ici encore, nous remarquons une tendance à combiner des catégories de techniques variées au sein de la même étape.

II.2.2 L'analyse du problème B2

Ici, la figure n'est pas donnée. On demande explicitement de prouver des propriétés de la figure (**GENRE DE TÂCHE 4**). Puisqu'il s'agit de questions sur les aires, lors de l'analyse par genre de tâche, nous considérerons ces résultats aussi en relation avec les tâches de **genre 3**.

En proposant ce problème, notre intérêt porte surtout sur la capacité des élèves à compléter le tracé avec des éléments supplémentaires qui ne sont pas suggérés dans l'énoncé et ainsi à mobiliser des outils qui se

révèlent particulièrement efficaces pour aboutir.

Nous avons recueilli TRENTE-HUIT copies d'élèves **italiens** et QUARANTE-DEUX copies d'élèves **français**, les mêmes qui ont eu à résoudre le problème précédent. Le taux d'échec est assez élevé :

Élèves italiens	SIX élèves n'abordent pas le problème ; TREIZE élèves tracent seulement la figure.
Élèves français	QUATRE élèves n'abordent pas le problème ; TREIZE élèves tracent seulement la figure.

Vraisemblablement la formulation de la première étape déroute et met en difficulté la plupart des élèves : en effet, on leur demande de mettre en relation une aire (dimension 2) et un point (dimension 0). C'est ainsi qu'ils ne réussissent pas non plus à accomplir la deuxième étape.

Le tracé et l'usage de la figure

Voici les items que nous distinguons lors de l'analyse de la figure et le codage correspondant.

NAT	**Quelle est la nature du triangle tracé ? L'élève, considère-t-il un cas *quelconque* ou *particulier*** (triangle isocèle, équilatéral ou rectangle) **?**	– L'élève ne produit pas de tracé **TP** Triangle particulier **TQ** Triangle quelconque
CODON	**L'élève code-t-il le tracé par rapport aux données ?** Ici, nous considérons le codage par des *lettres* (les sommets des triangles) suivant les données ainsi que le codage par des *marques* (définition de milieu d'un segment)	– L'élève ne code pas le tracé **L** Lettres **M** Marques **LM** Lettres et marques
AUTEL	**L'élève considère-t-il d'autres éléments (tracés ou non) qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé mais qui sont utiles pour mettre en place sa procédure de résolution ?** Ici, nous ne prenons pas en compte les traces éventuelles de la construction du triangle mais tout élément autre que le triangle NMR et les segments [XE] et [XO].	– Non **O** Oui (dans ce cas, on signale la nature de l'élément)

Dans le Tableau 6.11 ci-dessous, nous résumons les résultats recueillis.

Tableau 6.11 – Le tracé et l'usage de la figure dans le problème B2

	Élèves italiens				*Élèves français*		
	NAT	**CODON**	**AUTEL**		**NAT**	**CODON**	**AUTEL**
1	TQ	L	ROUE, ROX'E, [OE]	**41**	TQ	L	–
2	TQ	L	–	**42**	TQ	L	–
3	TQ	L	ROUE, [OE]	**43**	TQ	LM	[OE]
4	TQ	L	ROX'E	**44**	TQ	L	–
5	TQ	L	ROUE, ROX'E, [OE]	**45**	TQ	L	–
6	TQ	L	[OE]	**46**	TQ	L	–
7	TP (rect)	L	hauteurs	**47**	TQ	L	–
8	TQ	L	ROUE, ROX'E, [OE]	**48**	TQ	L	médianes
9	TQ	L	–	**49**	TQ	L	–
10	–	–	–	**50**	TQ	L	ROX'E
11	–	–	–	**51**	TQ	L	[OE], hauteurs
12	–	–	–	**52**	TQ	L	–
13	TQ	L	ROUE, [OE], hauteurs	**53**	–	–	–
14	TQ	L	–	**54**	TQ	LM	ROUE
15	–	–	–	**55**	TQ	L	–
16	TQ	LM	médianes	**56**	TQ	L	[OU]
17	TQ	L	ROUE, ROX'E, [OE]	**57**	–	–	–
18	TQ	L	ROX'E, [OE], angles, médianes	**58**	TQ	LM	–
19	TQ	L	ROUE, hauteurs	**59**	TQ	L	Hauteurs
20	TQ	L	hauteurs	**60**	TQ	L	[OU]
21	TQ	L	ROX'E, [OE], hauteurs	**61**	TQ	LM	[OE]
22	TQ	L	ROUE, [OE]	**62**	TQ	L	–
23	TQ	L	–	**63**	TQ	L	ROUE
24	TQ	L	–	**64**	TQ	LM	–
25	TQ	L	–	**65**	TQ	LM	–
26	TQ	LM	–	**66**	TQ	LM	–
27	TQ	L	Médianes	**67**	TQ	L	Hauteurs
28	TQ	L	–	**68**	TQ	LM	–
29	TQ	L	–	**69**	TQ	L	[OE]
30	TQ	L	ROUE, [OE]	**70**	–	–	–
31	TQ	L	ROX'E	**71**	TQ	L	[OE]
32	TQ	L	–	**72**	TQ	L	–
33	TQ	L	[OE]	**73**	TQ	L	[OE]
34	–	–	–	**74**	TQ	L	–
35	TQ	L	–	**75**	TQ	L	–
36	TP (isoc)	L	–	**76**	TQ	L	–
37	–	–	–	**77**	TQ	L	–
38	TP (équil)	L	|OE]	**78**	TQ	L	[OU]
				79	TQ	L	–
				80	TQ	L	–
				81	TQ	L	–
				82	–	–	–

Concernant l'*utilisation des instruments de dessin* pour reproduire la figure décrite dans l'énoncé, nous

constatons que les élèves utilisent surtout la règle.

Seulement SEPT élèves **français** utilisent le compas pour tracer le triangle et UN élève **français** construit les milieux des côtés du triangle à l'aide du compas. NEUF élèves **italiens** et CINQ élèves **français** produisent des croquis alors que tous les autres n'utilisent que la règle.

Ici, en général, on peut conclure que la différence d'attitude entre les élèves italiens et français est minime, bien qu'on constate encore que ces derniers recourent davantage au compas, cela est dû sans doute à une question de contrat.

VINGT-SIX élèves **italiens** et DIX-NEUF élèves **français** tracent la figure de manière à avoir *un côté parallèle au bord de la feuille.* Compte tenu du fait qu'un bon nombre d'élèves recourent à la règle, on peut bien croire qu'ils utilisent les bords de la feuille pour mettre en place les techniques courantes lors d'une construction.

En général, les élèves montrent une inclinaison à garder une figure 'close' car seulement TROIS élèves **français** placent le point X sur la droite (NM), à l'extérieur du segment [NM]. Vraisemblablement, cela influe sur la réussite car un seul de ces élèves accomplit la tâche alors que les autres n'aboutissent pas.

La quasi-totalité des élèves choisissent le point X sur le segment [NM] ; néanmoins, nous constatons qu'ils ont une bonne capacité de décontextualisation : seulement trois élèves **italiens** tracent un triangle particulier mais cela influe sur la procédure d'un seul des trois.

Comme nous le verrons ci-après, en général, les tâches se révèlent *problématiques* : le fait que très peu d'élèves utilisent des marques pour coder le tracé pourrait être le reflet d'une incapacité à examiner convenablement les situations proposées. De même, si l'on considère les éléments supplémentaires pris en compte, nous remarquons que la plupart des élèves ne parviennent pas à repérer la diagonale [OE] et, par conséquent, les configurations de base qui permettraient d'aboutir. Néanmoins, remarquons que les élèves italiens sont un peu plus nombreux à "travailler la figure en la complétant (item **AUTEL**).

Les procédures des élèves

Seulement DIX-HUIT élèves **italiens** et VINGT-QUATRE élèves **français** vont au-delà du tracé. Par rapport au nombre de copies recueillies, ces chiffres montrent donc que les élèves italiens qui s'investissent sont presque aussi nombreux que les élèves français. Ci-après, nous discutons les procédures

proposées par les élèves qui abordent au moins l'une des deux étapes proposées.

1e étape. ***L'aire du quadrilatère ROXE ne dépend pas du point X choisi.***

DEUX élèves **italiens** et TROIS élèves **français** n'abordent pas la première tâche. Parmi les autres, nous avons (cf. Tableau 6.12) :

Élèves italiens	QUATRE élèves produisent des *discours infructueux* **(DIN)** ; QUATRE élèves adoptent une *technique mathématique* **(AP)** ; DEUX élèves adoptent une *technique mathématique inadéquate* **(TMI)** ; UN élève adopte probablement une *technique perceptive* **(TP ?)** ; UN élèves recourt à une *expérience mentale* **(EM)** ; QUATRE élèves s'appuient sur une *propriété fausse* **(TP*)**.
Élèves français	HUIT élèves produisent des *discours infructueux* **(DIN)** ; SIX élèves adoptent une *technique mathématique* **(AP)** ; UN élève recourt à une *expérience mentale* **(EM)** ; SIX élèves s'appuient sur une *propriété fausse* **(TP*)**.

QUATRE élèves **italiens** et HUIT élèves **français** produisent des discours infructueux **(DIN)**, voire des *tautologies* surtout du genre "*l'aire de ROXE ne dépend pas de X car elle ne varie pas lorsque X se déplace sur [NM]*" : évidemment, cela pourrait dissimuler aussi bien des raisonnements corrects que des conceptions erronées mais aucun indice ne nous permet d'en tirer partie.

QUATRE élèves **italiens** et SIX élèves **français** adoptent une *technique mathématique* **complète** et **correcte**. Ils reproduisent au détail près la procédure envisagée lors de l'analyse *a priori*.

Remarquons qu'un élève **italien** recourt d'une manière *contextualisée* aux invariants de l'homothétie pour établir le parallélisme de (EO) et (NM) ; UN autre élève **italien** recourt explicitement à la *réciproque du théorème de Thalès* ; pour le reste, ces deux élèves recourent implicitement aux autres outils. Les autres élèves mobilisent implicitement tous les outils nécessaires pour aboutir.

DEUX élèves **italiens** adoptent une *technique mathématique inadéquate* en mobilisant **incorrectement** certains outils.

L'un parle de rotation ("*OEX est l'effet d'une rotation du triangle ROE autour de (EO)*") alors que l'autre prétend prouver qu'un couple de triangles a la même aire en recourant aux critères de congruence !

Tableau 6.12 – La procédure et son usage dans le problème B2

	Élèves italiens					Élèves français			
	Procédure		Usage de la procédure			Procédure		Usage de la procédure	
	1e tâche	2e tâche	1e tâche	2e tâche		1e tâche	2e tâche	1e tâche	2e tâche
1	**AP**	Pavage	**CC**	IC	41	–	–	–	–
2	–	–	–	–	42	TP*	TP*	–	–
3	*DIN*	Exp. ment.	–	Correct	43	–	–	–	–
4	–	TP*	–	–	44	–	–	–	–
5	*DIN*	TP*	–	–	45	–	–	–	–
6	TMI	Pavage	Incorrect	IPC	46	–	–	–	–
7	*DIN*	Exp. ment.	–	Correct	47	*DIN*	TP*	–	–
8	TP*	TP*	–	–	48	–	TP*	–	–
9	–	–	–	–	49	–	–	–	–
10	–	–	–	–	50	*DIN*	TP*	–	–
11	–	–	–	–	51	**AP**	–	**CC**	–
12	–	–	–	–	52	–	–	–	–
13	**AP**	Pavage	**CC**	CC	53	–	–	–	–
14	–	–	–	–	54	*DIN*		–	–
15	–	–	–	–	55	TP*	TP*	–	–
16	–	–	–	–	56	–	Pavage	–	IC
17	–	Pavage	–	CC	57	–	–	–	–
18	TMI	Pavage	Incorrect	IC	58	*DIN*	Pavage	–	IC
19	**AP**	–	**CC**	–	59	**AP**	Formules	**CC**	CC
20	–	Formules	–	IPC	60	EM	Pavage	–	IC
21	**AP**	Formules	**CC**	CC	61	**AP**	–	**CC**	–
22	–	–	–	–	62	TP*	TP*	–	–
23	–	–	–	–	63	**AP**	Exp. ment.	**CC**	Correct
24	TP*	TP*	–	–	64	–	–	–	–
25	–	–	–	–	65	*DIN*	Pavage	–	IC
26	–	–	–	–	66	*DIN*		–	–
27	–	–	–	–	67	**AP**	Formules	**CC**	CC
28	TP?	–	–	–	68	–	mesurage		CPC
29	EM	*DIN*	–	–	69	**AP**	–	**CC**	–
30	–	–	–	–	70	–	–	–	–
31	TP*	–	–	–	71	–	–	–	–
32	–	–	–	–	72	–	–	–	–
33	*DIN*	–	–	–	73	–	–	–	–
34	–	–	–	–	74	–	–	–	–
35	–	–	–	–	75	TP*	EM	–	Correct
36	–	–	–	–	76	TP*	–	–	–
37	–	–	–	–	77	*DIN*	–	–	–
38	TP*	–	–	–	78	–	–	–	–
					79	TP*	–	–	–
					80	–	–	–	–
					81	*DIN*	–	–	–
					82	–	–	–	–

UN élève **français** adopte une *technique perceptive*, notamment il recourt à l'*expérience mentale*.

Ayant établi que l'aire des triangles NOU et ORE ne varie pas, il considère que le parallélogramme OEMU[19] est constitué des triangles OUX, OXE et MEX :

"... si X varie sur [MU] alors l'augmentation de l'aire de MEX compensera la diminution de l'aire de OUX donc l'aire de OEX ne varie pas en fonction de X".

De même, un élève **italien** adopte une *technique perceptive* mais son discours est moins détaillé : l'idée de fond est la même que celle de l'élève français.

Le discours d'un élève **italien** se révèle ambigu. Il s'appuie peut-être sur la perception mais, en effet, aucun indice ne nous permet d'établir si le raisonnement en amont est correct.

Il écrit :

"L'aire du quadrilatère ne change pas car OR et RE ne changent pas et la distance de la droite (NM) ne change pas non plus".

Cet élève semble reprendre d'une manière assez sommaire l'idée que l'aire de ORE ne change pas et que la distance des droites (OE) et (NM) est toujours la même mais il l'applique sans doute à OXE directement.

QUATRE élèves **italiens** et SIX élèves **français** s'appuient sur une *propriété fausse*

Parmi eux, pour un élève **français**, *l'aire de ROXE ne dépend pas de X car celle-ci est égale à ER×OR*. Le discours révèle une méconnaissance à propos des formules de calcul des aires. Autrement, on peut croire que l'élève a *choisi* les côtés qui n'ont pas X comme extrémité.

En outre, DEUX élèves **italiens** et UN élève **français** produisent à peu près le discours suivant :

"... l'aire de ROXE ne dépend pas de X car, même si [OX] et [EX] varient suivant la position de ce point, lorsque la longueur de l'un diminue celle de l'autre augmente et viceversa".

Ce discours manifeste un recours à l'*expérience mentale* qui, toutefois, n'est pas appliquée au bons objets.

2e étape. *A(NMR) = 2 A(ROXE).*

CINQ élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** n'abordent pas la deuxième étape. Sur la totalité des copies recueillies, le nombre d'élèves qui s'investissent est à peu près le même des deux côtés.

DEUX élèves **français** et UN élève **italien** produisent des discours infructueux (**DIN**).

Notamment, l'élève italien affirme que l'*aire de ROXE est inférieure à celle de NMR car le quadrilatère est à l'intérieur du triangle.*

---

[19] Il ne dit pas explicitement que OEMU est un parallélogramme mais probablement il le sait !

Concernant les productions des autres élèves, nous avons pu définir quatre procédures différentes.

– On perçoit le triangle NMR comme **pavage** de triangles congruents ou de même aire (cf., dans ce chapitre, les solutions envisagées dans l'analyse *a priori*).

– On recourt aux **formules** de calcul des aires. Dans ce cas, il faut établir convenablement les relations des longueurs mises en jeu dans les formules ou bien on recourt au **mesurage** et puis aux formules.

– On recourt explicitement à l'expérience mentale **(EM)** pour faire apparaître une configuration de base. En déplaçant le point X pour qu'il coïncide avec le sommet M de NMR, ROXE se transforme en un triangle dont un côté coïncide avec l'une des médianes de NMR. On parvient au résultat cherché en considérant que, *dans un triangle, une médiane le partage en deux triangles de même aire.*

– On s'appuie sur une propriété fausse (**TP***).

CINQ élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** perçoivent le triangle NMR comme *pavage* de triangles congruents ou de même aire.

DEUX élèves **italiens** précisent tous les passages de la procédure : on voit bien qu'ils considèrent que EOU et EOX ont la même aire et puis, après avoir prouvé que NMR est un pavage de quatre triangles congruents, ils parviennent à la conclusion cherchée en mobilisant d'une manière *contextualisée* les outils nécessaires.

Dans la copie de TROIS élèves **italiens** et QUATRE élèves **français**, ayant placé X sur [NM], l'idée de fond est que A(XOE) = ½ [A(OXN)+A(EXM)], etc. Font-ils appel à l'expérience mentale ou bien à la perception ? On dirait qu'ils s'appuient plutôt sur ce qui leur convient à l'œil car ils n'explicitent aucun outil surtout si l'on considère que cette solution nécessite des calculs assez subtils.

DEUX élèves **italiens** et TROIS élèves **français** recourent aux *formules*.

Notamment, UN élève **italien** et DEUX élèves **français** fournissent une procédure **complète** et **correcte** : les outils nécessaires sont mobilisés d'une manière *contextualisée* ; UN élève **italien** ne complète pas sa procédure et surtout mobilise d'une manière erronée la formule pour calculer l'aire de ROXE (il ne le considère pas comme pavage de deux triangles mais comme un parallélogramme).

UN élève **français** recourt au **mesurage** et puis aux formules : il mobilise correctement la formule de calcul de l'aire d'un triangle mais il ne précise pas comment il calcule l'aire de ROXE : probablement, il considère la formule *côté fois côté*.

DEUX élèves **italiens** et DEUX élèves **français** recourent explicitement à l'*expérience mentale* ; ensuite ils mobilisent d'une manière *contextualisée* les outils nécessaires pour aboutir.

TROIS élèves **italiens** et SIX élèves **français** s'appuient sur la *propriété* suivante :

"Puisque RN = 2RO et ER = 2RM, alors l'aire de NMR est le double de l'aire de ROXE".

Cela pourrait manifester, d'une part, une liaison erronée périmètre-aire et, d'autre part, une acquisition erronée des formules de calcul des aires.

Enfin, UN élève **italien** produit le discours suivant :

"Si X coïncide avec U, A(NMR) = 3A(ROXE). Puisque X ne coïncide pas avec U et E et O sont les milieux des côtés [MR] et [NR], on conclut que A(NMR) = 2A(ROXE)".

Les discours des élèves

Les difficultés à aborder ce problème se manifeste aussi à travers les types de preuve produits. Globalement, aucun élève ne produit de *démonstration* et très peu d'élèves produisent des preuves qui portent la marque de l'*exemple générique euclidien*. En effet, la majeure partie produit des preuves où l'*évidence* est le moyen privilégié pour justifier les propriétés en question. Dans certains cas, cette *évidence* fait *obstacle* : c'est surtout le cas lorsque l'élève perçoit le triangle NMR comme pavage de triangles congruents ou de même aire. Vraisemblablement, la difficulté à bien distinguer aisément l'*équivalence* et la *congruence* des triangles ne permet pas aux élèves de bien s'exprimer.

Si l'on tient compte du petit nombre d'élèves qui s'investissent dans la résolution du problème, le nombre d'élèves qui produisent une preuve du type *calcul sur les énoncés* se révèle élevé des deux côtés.

Conclusions

L'analyse du tracé et de l'usage de la figure apportent déjà des indices sur le fait que l'exercice proposé est problématique aussi bien pour les élèves italiens que français. En général, il y a une inaptitude à analyser convenablement le tracé et à envisager des éléments supplémentaires utiles pour la mise en œuvre d'une procédure de résolution efficace.

On dirait donc que, face à une tâche problématique, l'attitude adoptée est la même car, en général, nous ne constatons pas de différences essentielles entre les élèves italiens et français. Pour les autres problèmes, les élèves italiens s'investissent moins que les élèves français : il nous paraît intéressant de remarquer qu'ici le nombre d'élèves qui résolvent – au moins en partie – le problème est presque le même des deux côtés. Au-delà des difficultés objectives, on pourrait faire l'hypothèse que cela dépend du fait que les tâches proposées concernent les aires et qu'ils abordent le problème plus aisément.

Conclusions sur les problèmes de la fiche 2

Ici, il nous paraît intéressant de remarquer que les élèves montrent ne pas avoir d'initiative à "travailler" le tracé et donc à exploiter la figure en jeu de manière efficace. Par ailleurs, aucun indice précis ne nous permet de saisir si les élèves ont repéré des liens entre les deux figures exploitées dans les deux problèmes. Au contraire, nous pouvons affirmer que quelques élèves n'y songent même pas : c'est le cas des élèves qui fournissent une valeur incorrecte – égale à 2 – lorsqu'ils comparent les aires de AOD et BCM.

Nous constatons que les élèves s'investissent un peu plus que dans la phase pré-expérimentale : on pourrait croire que cela dépend donc des modifications apportées. Néanmoins, compte tenu du fait que les deux problèmes proposent les mêmes genres de tâches, nous remarquons qu'elles s'avèrent problématiques : une persistance à recourir à la perception empêche un bon nombre d'élèves à fournir des discours cohérents. Les résultats semblent prouver que les élèves utilisent encore la perception comme moyen de validation et non pas pour analyser la figure et repérer convenablement les outils à mobiliser.

II.3 Les problèmes de la fiche 3

Dans les deux problèmes de la fiche 3, la figure est la même, à savoir le quadrilatère des milieux ; notamment, la figure de l'un est un cas particulier de l'autre. Néanmoins, puisque les tâches proposées ainsi que les données diffèrent, la manière de les exploiter change : dans le problème C1, on sait que les sommet du petit quadrilatère sont les milieux des sommets du grand quadrilatère alors que, dans le problème C2, il faut construire le grand quadrilatère de sorte que, entre autres, les sommets du petit quadrilatère (ici, un carré) soient les milieux de ses côtés.

L'élève attentif peut percevoir un autre lien important entre les deux problèmes. En fait, une information dans le programme de construction du problème C2 peut être très utile pour aborder la dernière question du problème C1. En tout cas, c'est à l'élève de justifier la réponse et, pour ce faire, il devra analyser convenablement son tracé.

II.3.1 L'analyse du problème C1

La figure n'est pas donnée. On demande de la reproduire dans un cas général suivant une condition imposée, pour que le quadrilatère ABCD soit d'abord croisé et puis non croisé. Ici, la configuration du

triangle des milieux apparaît d'une manière moins évidente que dans les problèmes précédents. C'est donc à l'élève de la repérer pour exploiter ses propriétés.

Les tâches proposées sont de quatre genres différents : on demande de tracer la figure vérifiant certaines propriétés, la dernière condition imposée pouvant amener à modifier les premiers choix (**GENRE 2 ou 5**) ; de préciser la nature d'une sous-figure de la figure décrite dans l'énoncé (**GENRE 1**) ; de comparer les aires de deux sous-figures (**GENRE 3**) ; de chercher des conditions pour que la figure de départ vérifie des conditions supplémentaires (**GENRE 2**).
La variété des tâches permet ainsi de recueillir diverses informations. Entre autres, nous pouvons évaluer la capacité des élèves à aborder des questions sur les aires lorsqu'il s'agit de quadrilatères.

Nous avons recueilli QUARANTE-DEUX copies d'élèves **italiens** et QUARANTE-TROIS copies d'élèves **français**. Seulement UN élève **italien** n'aborde pas le problème.

Le tracé et l'usage de la figure

Concernant la première tâche proposée (ABCD croisé), nous constatons que :
- DIX élèves **italiens** et DIX-HUIT élèves **français** accomplissent la tâche ;
- DEUX élèves **italiens** et CINQ élèves **français** accomplissent la tâche mais, par la suite, ils traitent les questions en ce cas de figure ;
- TROIS élèves **italiens** et CINQ élèves **français** tracent un quadrilatère concave (par la suite, ils traitent les questions en considérant un quadrilatère convexe) ;
- QUATRE élèves **français** se trompent dans l'interprétation des données car ils tracent les droites d_1 et d_2 parallèles et non pas perpendiculaires ; à partir de là, ils reproduisent un quadrilatère croisé ;
- VINGT-SEPT élèves **italiens** et ONZE élèves **français** n'accomplissent pas la tâche.

Ces résultats montrent que les élèves n'ont pas une connaissance précise à propos des termes en jeu, les élèves italiens encore moins que les français, si l'on considère qu'une non-réponse peut bien attester que l'élève ne connaît pas la signification de *quadrilatère croisé*. Ce résultat n'est pas inattendu vu que, dans les manuels italiens, il s'agit d'un cas de figure très peu mis en cause.

En ce qui concerne la figure à partir de laquelle on demande de traiter le problème (ABCD non croisé), voici les items que nous distinguons lors de l'analyse de la figure et le codage relatif.

NAT	**Quelle est la nature du quadrilatère tracé ?**	**N** L'élève ne produit pas de tracé **O** Oui (dans ce cas, on signale la nature du quadrilatère)
CODON	**L'élève code-t-il le tracé par rapport aux données ?** Ici, nous considérons le codage par des *lettres* (les sommets des quadrilatères) suivant les données ainsi que le codage par des *marques* (définition de milieu d'un segment)	**N** L'élève ne code pas le tracé **L** Lettres **M** Marques **LM** Lettres et marques
AUTEL	**L'élève considère-t-il d'autres éléments (tracés ou non) qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé mais qui sont utiles pour mettre en place sa procédure de résolution ?**	**N** Non **O** Oui (dans ce cas, on signale la nature de l'élément)

À propos de l'*utilisation des instruments de dessin* pour reproduire la figure décrite dans l'énoncé, parmi les élèves **italiens**, UN seul élève utilise le compas, CINQ élèves tracent la figure à main levée et tous les autres utilisent la règle et l'équerre. En revanche, parmi les élèves **français**, CINQ élèves utilisent le compas tandis que tous les autres utilisent la règle et l'équerre.

Seulement UN élève **italien** et SIX élèves **français** tracent la figure dans une position quelconque. Tous les autres de manière à avoir *un côté parallèle au bord de la feuille*. Probablement, cela se justifie par le fait que les premiers éléments à tracer sont deux droites perpendiculaires et que les élèves utilisent sans doute les bords de la feuille pour les construire.

A propos de ces deux items, nous constatons donc que les différences ne sont pas remarquables. Au contraire, il nous paraît que l'attitude est la même des deux côtés.

A propos de l'item **NAT**, nous constatons que les élèves ont une bonne capacité de *décontextualisation* : seulement UN élève **italien** et SIX élèves **français** tracent des quadrilatères particuliers.
Remarquons, en outre, que seulement DEUX élèves **italiens** et SIX élèves **français** considèrent un quadrilatère concave. Cela confirme les résultats issus de l'analyse de la partie pré-expérimentale où nous avions pensé qu'il ne s'agissait pas d'un choix réfléchi mais que cela semblait plutôt convenir à l'œil de l'élève. cela correspond aussi au fait de disposer A et C d'une part, B et D d'autre part de manière analogue : on a ainsi plus de chance d'obtenir un quadrilatère convexe.

En ce qui concerne l'item **CODON**, nous constatons que ce sont surtout les élèves français qui ressentent

l'exigence de coder la figure aussi avec des marques, ce qui est dû sans doute à une demande forte de la part de l'enseignant, puisque dans ces cas il s'agit spécialement du signe iconique de l'angle droit. En effet, seulement DIX élèves **français** marquent des segments de même longueur.

Tableau 6.13 – Le tracé et l'usage de la figure dans le problème C1

	Élèves italiens				*Élèves français*		
	NAT	**CODON**	**AUTEL**		**NAT**	**CODON**	**AUTEL**
1	Convexe	L	N	**51**	Convexe	LM	Diagonales IJKL
2	Convexe	L	N	**52**	Convexe	LM	Diagonales IJKL
3	Convexe	L	N	**53**	*Concave*	L	N
4	Convexe	L	N	**54**	**Croisé**	L	N
5	**Croisé**	L	N	**55**	**Carré**	L	Diagonales IJKL
6	Convexe	L	N	**56**	Convexe	LM	Angles droits
7	*Concave*	L	Point de concours des deux droites perpendiculaires	**57**	**Croisé**	L	N
8	Convexe	L	N	**58**	Convexe	LM	N
9	Convexe	L	N	**59**	**Carré**	LM	N
10	Convexe	L	N	**60**	Convexe	LM	Diagonales IJKL
11	Convexe	LM	N	**61**	**Rectangle**	L	N
12	Convexe	L	N	**62**	**Parallélogramme**	L	N
13	Convexe	L	N	**63**	Convexe	L	N
14	Convexe	L	IJKL carré	**64**	*Concave*	LM	Point de concours, angles droits
15	Convexe	L	IJKL carré	**65**	**Losange**	LM	N
16	Convexe	L	Point de concours	**66**	Convexe	LM	N
17	Convexe	LM	Point de concours	**67**	Convexe	L	N
18	Convexe	L	Point de concours, angles droits, IJKL carré	**68**	*Concave*	L	N
19	Convexe	L	Points de concours	**69**	Convexe	LM	N
20	Convexe	L	Point de concours, IJKL carré	**70**	**Croisé**	L	N
21	Convexe	L	Points de concours	**71**	Convexe	LM	Point de concours
22	Convexe	LM	Points de concours	**72**	Convexe	L	N
23	Convexe	L	IJKL carré	**73**	Convexe	L	Angles droits
24	*Concave*	L	N	**74**	Convexe (inc)	LM	Diagonales IJKL
25	Convexe	LM	?	**75**	**Croisé**	LM	Point de concours
26	Convexe	LM	IJKL carré	**76**	Convexe	LM	IJKL carré
27	Convexe	L	N	**77**	*Concave*	LM	Diagonales IJKL
28	Convexe	L	N	**78**	Convexe	L	N
29	N	N	N	**79**	Convexe	L	N
30	Convexe	L	N	**80**	*Concave*	LM	Médiatrices
31	Convexe	L	Point de concours	**81**	Convexe	LM	Point de concours
32	Convexe	L	Point de concours	**82**	Convexe	L	N
33	Convexe	L	N	**83**	Convexe	L	N
34	Convexe	LM	Point de concours, IJKL carré	**84**	Convexe (inc)	LM	Diagonales IJKL
35	**Carré**	L	N	**85**	Convexe	LM	N
36	Convexe	L	Point de concours, Médianes..., IJKL carré	**86**	Convexe	LM	N
37	Convexe	L	Point de concours, Rectangle circonscrit à ABCD	**87**	Convexe	LM	Diagonales IJKL, angles droits
38	Convexe	L	N	**88**	Convexe	LM	N
39	Convexe	L	N	**89**	Convexe	LM	N
40	Convexe	L	IJKL carré	**90**	**Carré**	LM	IJKL carré
41	Convexe	L	N	**91**	Convexe	L	N
42	**Croisé**	L	N	**92**	Convexe	L	N
				93	**Croisé**	LM	N

En ce qui concerne l'item **AUTEL**, nous avons repéré un certain nombre d'éléments qui apparaissent dans plusieurs copies. Notamment :

– ONZE élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** nomment O le point de concours des droites d_1 et d_2, cela étant sans doute une habitude inférée par l'utilisation de repères orthogonaux ; toutefois, un bon nombre d'élèves utilisent ce point lorsqu'ils répondent à la question sur le carré ;

– DEUX élèves **italiens** nomment aussi les points de concours des diagonales de ABCD avec les côtés de IJKL et ils s'en servent pour répondre à la question sur les aires ;

– HUIT élèves **français** tracent les diagonales de IJKL ;

– sur le tracé de départ, HUIT élèves **italiens** et DEUX élèves **français** tracent des éléments qui permettent de visualiser le tracé dans le cas où IJKL serait un carré ;

– UN élève **italien** et QUATRE élèves **français** marquent les angles de IJKL ;

– UN élève **italien** joint le point O avec chaque sommet de IJKL ;

UN élève **italien** trace le rectangle circonscrit à ABCD (les longueurs des côtés sont respectivement égales aux longueurs des diagonales de ABCD).

Les réponses et les procédures des élèves

L'énoncé du problème proprement dit compte trois questions (b, c, d). Pour résoudre ce problème, il faut prouver quatre propriétés. Les productions des élèves nous conduisent à distinguer les *quatre étapes* suivantes :

1) il faut prouver que *IJKL est un parallélogramme* ;
2) il faut prouver que *IJKL est un rectangle (parallélogramme ayant un angle droit)*[20] ;
3) il faut *comparer les aires des deux quadrilatères* ;
4) il faut *imposer la condition sur ABCD pour que IJKL soit un carré.*

Suivant ces quatre étapes, nous avons reconstitué les grandes lignes des *techniques mathématiques* proposées. Signalons que toutes ces techniques correspondent à des solutions envisagées dans notre analyse *a priori*.

1) *Il faut prouver que IJKL est un parallélogramme.*

(A) A l'aide du *théorème des milieux* ou bien de la *réciproque du théorème de Thalès*, on prouve que les côtés de IJKL sont deux à deux parallèles (*définition de parallélogramme*).

[20] En effet, aucun élève n'envisage explicitement de prouver que *IJKL est un quadrilatère ayant trois angles droits*, ce qui conduirait à ne considérer que *trois étapes*.

2) *Il faut prouver que IJKL est un rectangle (parallélogramme ayant un angle droit).*

(B) En considérant que "*deux droites respectivement parallèles à deux droites perpendiculaires, sont perpendiculaires entre elles*", on prouve que IJKL a un angle droit.

(C) En considérant que, *si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre* et en exploitant deux fois ces résultats, on parvient à la même conclusion.

(D) On recourt à la *propriété du parallélogramme d'avoir les angles opposés égaux.*

3) *Il faut comparer les aires des deux quadrilatères.*

(E) On recourt à la *formule de l'aire d'un rectangle* et à la *formule de l'aire d'un quadrilatère ayant les diagonales perpendiculaires.*

(F) On montre que ABCD est la réunion de seize triangles, quatre à quatre *congruents* entres eux. Huit de ces triangles composent le rectangle IJKL, d'où la conclusion que l'aire de ABCD est le double de celle de IJKL.

(G) On parvient au même résultat en exploitant la notion de *similitude* ou d'*homothétie.*

4) *Il faut imposer la condition sur ABCD pour que IJKL soit un carré.*

(H) On recourt à la *définition de carré* : pour que IJ soit égal à IL, il faut que AC = BD. A l'aide de l'énoncé complet du *théorème des milieux* ou bien de la *réciproque du théorème de Thalès* dans un triangle, on prouve que AC = 2IJ et que BD = 2IL, d'où l'on conclut que AC = BD.

Lors de l'analyse, nous avons distingué aussi les procédures suivantes :

- L'élève adopte une *technique perceptive* (**TP**) ;
- L'élève recourt au mesurage (**mes**)
- L'élève reconnaît une configuration qui lui est familière (**TRC**) ;
- L'élève s'appuie sur une propriété fausse (**TP***).

Concernant l'usage de la procédure, nous évaluons les items suivants :

- usage *complet correct* (**CC**) ;
- usage *complet partiellement correct* (**CPC**) ;
- usage incomplet *correct* (**IC**) ;
- usage *incomplet partiellement correct* (**IPC**) ;
- usage *incomplet incorrect* (**II**).

Dans les tableaux 6.14 et 6.15, nous avons répertorié les réponses ainsi que l'usage des procédures adoptées par les élèves. En général, l'attitude des élèves est la même des deux côtés, les différences étant minimes : très peu d'élèves abordent toutes les questions et, en outre, la perception apparaît comme le moyen privilégié pour valider les réponses.

Tableau 6.14 – Les réponses et les procédures des élèves italiens dans le problème C1

	Élèves italiens										
	Les réponses			**Les procédures**				**Usage des procédures**			
	1 et 2	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
1	Rectangle	Plus petit	D≡O	**TP***		TP	TP	–		–	–
2	Rectangle	–	DO=OB	TP		–	TP	–		–	–
3	*Parallélog*	2	AD=DC	TP	–	TP	TP	–	–	–	–
4	Rectangle	2	DO=OB…	TP		TP	TP	–		–	–
5	*Parallélog*	Plus petit	CK=KD	TP	–	TP	–	–	–	–	–
6											
7	Rectangle	Plus petit	AB=BC…	TP		mes	TP	–		IC	–
8											
9	*Quadril*	–	–	TP	–	–	–	–	–	–	–
10											
11	*Trapèze*	Plus petit	JK=IJ	TP	–	TP	TP	–	–	–	–
12	Rectangle	2	**AC=DB**	**A**	**B**	**E**	**H**	CC	CC	CC	CC
13											
14	Rectangle	–	AB=BC…	TP		–	TP	–		–	–
15	Rectangle	–	AB=BC…	TP		–	–	–		–	–
16	Rectangle	–	–	TP		–	–	–		–	–
17	Rectangle	2	AB=BC…	**A**	TP	TP	TP	CC	–	–	–
18	Rectangle	2	DO=OB	TP		TP	TP	–	–	–	–
19	Rectangle	–	–	**A**	**B**	–	–	CC	CC		
20	Rectangle	1	DO=OB	TP		TRC	–	–	–	–	–
21	Rectangle	–	D≡O	**TP***		**E**	TP	–		IC	–
22	Rectangle	1	–	**A**	TP	**F**	–	CC	–	CC	–
23	Rectangle	Plus petit	**AC=DB**	**A**	**B**	TP	TRC?	CC		–	–
24	–	–	D≡O	–	–	–	TP	–	–	–	–
25	*Carré*	2	ABCD los	TP		TP	TP	–		–	–
26	Rectangle	2	–	TP		**G**	–	–	–	IC	–
27	*Carré*	–	–	**TP***		–	–	–	–	–	–
28	Rectangle	–	AB=BC…	TP		**E**	TP	–		–	–
29											
30											
31	Rectangle	2	DO=OB	TP		TP	TP	–		–	–
32	Rectangle	–	–	TP		–	–	–		–	–
33											
34	–	2	–	–	–	TP	–	–		–	–
35											
36	Rectangle	2	AB=BC…	TP		**F**	TP	–		IC	–
37	Rectangle	2	**AC=DB**	TP		**E**	TRC?	–		IC	–
38	Rectangle	Plus petit	–	TP		TP	–	–		–	–
39	Rectangle	–	–	TP		–	–	–		–	–
40	Rectangle	2	JK=IJ	TP		TP	TP	–		–	–
41	Rectangle	Plus petit	–	TP		TP	–	–		–	–
42	*Carré*	Plus petit	–	TP		TP	–	–		–	–

Tableau 6. 15– Les réponses et les procédures des élèves français dans le problème C1

	Élèves français										
	Les réponses			**La procédure**				**Usage de la procédure**			
				1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
51	*Carré*	–	–	TP		–	–	–		–	–
52											
53	Rectangle	2	**AC=BD**	**A**	**C**	mes	TRC?	CC	CC	CC	–
54	*Parallélog*	–	–	TP	–	–	–	–	–	–	–
55	*Carré*	–	AB=BC…	TP		–	–	–		–	–
56	Rectangle	–	–	TP		–	–	–		–	–
57	Rectangle	Plus petit	**AC=BD**	TP		TP	TRC?	–		–	–
58	Rectangle	–	–	TP		–	–	–		–	–
59	*Carré*	2	–	TP		TP	–	–		–	–
60	*Quadrilat.*	2	–	TP	–	TP	–	–	–	–	–
61	Rectangle	2	ABCD rectangle	TP		mes	–	–		CC	–
62	*Paréllélog*	–	–	TP	–	–	–	–	–	–	–
63	Rectangle	Plus petit	D≡O	TP		TP	TP	–		–	–
64	Rectangle	Plus petit	IL=LK, OD=4OB	**A**	TP	**TP***	**?**	CC	–	–	–
65	Rectangle	Plus petit	(AD)//(BC), BC=1/2 AD ABCD los	TP		TP	?	–		–	?
66	*Paréllélog*	Plus petit	–	**A**	–	TP	–	CC	–	–	–
67	Rectangle	2	ABCD los	TP		TP	–	–		–	–
68	Rectangle	–	**BD=AC**	**A**	**B**	**E**	TRC?	CI	CC	II	–
69	*Parallélog*	Plus petit	AB=AD	**A**	–	TP	TP	CC	–	–	–
70	Rectangle	15	–	**A**	**B**	mes	–	CC	CC	II	–
71	Rectangle	–	–	**A**	**C**	**E**	–	CC	CC	IC	–
72	Rectangle	2	Losange	**A**	**B**	**TP***	TP	CC	CC	–	–
73	*Carré*	Plus petit	$D \in d_2$	TP		TP	TP	–		–	–
74	*Parallélog*	2,03	(AB)//(CD) angle DAB droit	TP	–	mes	TP	–	–	CPC	–
75	*Parallélog*	–	–	**A**	–	–	–	CC	–	–	–
76	Rectangle	–	IL=IJ	TP		–	TP			–	–
77	*Parallélog*	–	BO=OD	TP	–	–	TP	–	–	–	–
78	Rectangle	2	ABCD los	**A**	TP	mes	TP	CC	–	CC	–
79	Rectangle	–	–	TP		–	–	–		–	–
80	*Carré*	2		TP		–	–	–		–	–
81	Rectangle	2	ABCD los	**A**	**D**	**F**	–	CC	CC	CC	–
82	Rectangle	2	B sym D	TP		TP	–	–		–	–
83	Rectangle	2	**AC=BD**	**A**	**B**	TP	TRC	CC	CC	–	–
84											
85	Rectangle	Plus petit	–	TP		TP	–	–		–	–
86	Rectangle	–	–	TP		–	–	–		–	–
87	Rectangle	–	–	TP		mes	–	–		IPC	–
88											
89	Rectangle	2	–	**TP***		mes	–	–		CPC	–
90	*Carré*	2	–	**TP***		**TP***	–	–		–	–
91	Rectangle	2	AB=BC…	TP		TP	TP			–	–
92	Rectangle	2	**AC=BD**	**A**	TP	TP	TRC	CC	–	–	–
93	*Parallélog*	2	–	TP	–	TP	–	–	–	–	–

Première tâche (étapes 1 et 2). ***La nature du quadrilatère IJKL.***

Pour la première question proposée, nous avons les résultats suivants :

Élèves italiens	DIX élèves **n'abordent pas** la question ; VINGT-QUATRE élèves fournissent **une réponse correcte** (rectangle) dont : – TROIS élèves justifient la réponse en adoptant une *technique mathématique correcte* ; – DEUX élèves adoptent une *technique mathématique correcte* pour justifier qu'il s'agit d'un parallélogramme et puis une *technique perceptive* pour justifier qu'il s'agit d'un rectangle ; – DIX-SEPT élèves adoptent une *technique perceptive* ; – DEUX élèves s'appuient sur une *propriété fausse.* DEUX élèves fournissent une **réponse incomplète** (parallélogramme) en adoptant une *technique perceptive.* SIX élèves fournissent une **réponse non pertinente** (quadrilatère, trapèze, carré) dont UN justifie en s'appuyant sur une *propriété fausse.*
Élèves français	TROIS élèves **n'abordent pas** la question ; VINGT-CINQ élèves fournissent **une réponse correcte** (rectangle) dont : – SIX élèves justifient la réponse en adoptant une *technique mathématique correcte* ; – UN élève justifie la réponse en adoptant une *technique mathématique incorrecte* ; – TROIS élèves adoptent une *technique mathématique correcte* pour justifier qu'il s'agit d'un parallélogramme et puis une *technique perceptive* pour justifier qu'il s'agit d'un rectangle ; – QUATORZE élèves adoptent une *technique perceptive* ; – UN élève s'appuie sur une *propriété fausse.* HUIT élèves fournissent une **réponse incomplète** (parallélogramme) dont : – TROIS élèves justifient la réponse en adoptant une *technique mathématique correcte* ; – CINQ élèves adoptent une *technique perceptive.* SEPT élèves fournissent une **réponse non pertinente** (quadrilatère, carré) dont UN justifie en s'appuyant sur une *propriété fausse.*

Le nombre d'élèves **italiens** qui n'abordent pas la question est nettement supérieur au nombre d'élèves **français**. Pour les autres, il est évident que la *perception* est le moyen privilégié pour répondre à la question. On constate un peu plus de *techniques mathématiques* du côté français, surtout pour ceux qui prouvent que IJKL est un parallélogramme : en effet, on compte douze élèves français contre cinq italiens.

Les élèves qui adoptent une *technique mathématique* évoquent explicitement seulement le *théorème des milieux* ou la *réciproque du théorème de Thalès* alors que les outils nécessaires pour prouver que IJKL est un rectangle sont mobilisées d'une manière contextualisée : dans ce cas-là, nous ne remarquons pas de différences substantielles entre l'attitude des élèves italiens et celle des élèves français. UN seul élève **français** recourt à l'énoncé direct du *théorème de Thalès* au lieu de sa réciproque.

Un aspect se révèle intéressant : DIX élèves prouvent correctement que IJKL est un parallélogramme ; néanmoins, CINQ élèves se contentent de recourir à la perception pour compléter la tâche alors que les autres ne la complètent pas.

A propos des CINQ élèves qui s'appuient sur une *propriété fausse*, nous constatons que celles-ci apparaissent comme le résultat d'un *compromis* entre ce que les élèves savent et ce qu'ils perçoivent sur leur tracé.

Par exemple, dans la production d'un élève **français**, nous lisons :

"... on sait que quand on a un quadrilatère, si on prend les milieux respectifs des quatre côtés, on obtiendra des droites parallèles deux à deux et perpendiculaires".

Il semble que cet élève veut concilier le théorème des milieux avec le fait que les côtés de IJKL sont perpendiculaires aux diagonales de ABCD dont les milieux sont les sommets de ce rectangle.

Ou encore, dans la production d'un élève **italien**, nous lisons :

"Dans un quadrilatère quelconque, les droites qui joignent les milieux de ses côtés sont perpendiculaires entre elles".

L'idée de fond ressemble à celle de l'élève français ; signalons que cet élève fournit un dessin où il trace deux quadrilatères vérifiant la propriété énoncée, cela peut-être comme preuve confirmant sa validité.

Deuxième tâche (étape 3). ***Comparaison des aires.***

A propos de la comparaison des aires de ABCD et de IJKL, la *perception* est encore un moyen privilégié aussi bien par les élèves italiens que français. De même ici, les élèves **italiens** sont plus nombreux à ne pas répondre. En revanche, les élèves **français** sont plus nombreux à recourir au mesurage, à ne pas aboutir et à s'appuyer sur des propriétés fausses. Voici les résultats plus en détail :

Élèves italiens	DIX-HUIT élèves **n'abordent pas** la question. DOUZE élèves fournissent une **réponse correcte** dont : – QUATRE élèves justifient correctement leur réponse en adoptant une *technique mathématique* ; – HUIT élèves adoptent une *technique perceptive.* HUIT élèves fournissent une **réponse incomplète** (*l'aire de IJKL est plus petite que celle de ABCD*) dont : – SEPT élèves adoptent une *technique perceptive* ; – UN élève recourt au *mesurage.* DEUX élèves fournissent une **réponse incorrecte** dont : – UN élève justifie correctement sa réponse en adoptant une *technique mathématique* mais termine par une étourderie (!) ; – UN élève reconnaît une *configuration familière.* DEUX élèves **amorcent** une *technique mathématique* sans pourtant aboutir.
Élèves français	QUATORZE élèves **n'abordent pas** la question. SEIZE élèves fournissent une **réponse correcte** dont : – UN élève justifie correctement sa réponse en adoptant une *technique mathématique* ; – NEUF élèves adoptent une *technique perceptive* ; – QUATRE élèves recourent au *mesurage* ; – DEUX élèves s'appuient sur une *propriété fausse.* HUIT élèves fournissent une **réponse incomplète** dont : – SEPT élèves adoptent une *technique perceptive* ; – UN élève s'appuie sur une *propriété fausse.* – DEUX élèves fournissent une **réponse incorrecte** en recourant au *mesurage.* TROIS élèves **amorcent** une *technique mathématique* sans pourtant aboutir.

QUATRE élèves **italiens** et DEUX **français** recourent aux **formules** de calcul.

DEUX élèves italiens parviennent au résultat cherché mais seulement l'un des deux détaille la procédure. DEUX élèves italiens et UN élève français n'aboutissent pas car ils ne cherchent pas de relation entre les longueurs en jeu. UN élève français mobilise les formules d'une manière incorrecte.

DEUX élèves **italiens** et UN élève **français** exploitent convenablement la notion de congruence.

Remarquons que les élèves **italiens** parlent de *triangles congruents* et, même s'ils n'explicitent pas les outils mobilisés, cela permet de saisir leurs intentions ; en revanche, l'élève **français** détaille très bien sa procédure mais il ne cite nullement les outils qui lui permettent d'aboutir. Nous retrouvons le même cas que celui de Thomas, rencontré lors de la phase pré-expérimentale.

UN élève **italien** et TROIS élèves **français** recourent au **mesurage** et puis aux **formules** de calcul des aires.

Parmi eux, UN seul exploite correctement les formules en jeu alors que les DEUX autres calculent l'aire de ABCD en considérant deux côtés consécutifs (AB×BC).

L'élève **italien** utilise correctement les formules mais il n'aboutit pas.

DEUX élèves **italiens** fournissent une réponse incorrecte alors que leurs discours sont corrects.

En considérant que ABCD est la réunion de triangles quatre à quatre congruents, ils ne comptabilisent pas ceux qui sont communs au deux quadrilatères. L'un des deux ne détaille pas la procédure, ce qui est probablement dû à la reconnaissance de sous-figures qui lui sont familières.

TROIS élèves **français** s'appuient sur une *propriété fausse*.

DEUX élèves **français** fournissent une réponse correcte mais ils affirment :

"L'aire de IJKL est la moitié de l'aire de ABCD car I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés de ABCD"

On dirait que ces élèves considèrent implicitement (et inconsciemment) l'énoncé complet du théorème des milieux, mais alors, ils confondent les notions de périmètre et d'aire.

L'autre élève **français**, en observant que les longueurs des côtés de IJKL sont inférieures à celles des côtés de ABCD, conclut que l'aire de IJKL est aussi inférieure à celle de ABCD. Cela prouve aussi qu'il lie indûment les notions de périmètre et d'aire.

A propos des élèves qui ne justifient pas leur réponse correcte, deux considérations sont à faire. En l'absence de détails nous permettant de saisir la source de leur conclusion, nous les avons classés parmi ceux qui adoptent une technique perceptive : cela se justifierait en estimant qu'ils reconnaissent une configuration familière ou bien qu'ils recourent à une action mentale (pliages) et que cela leur suffit pour

parvenir à la valeur cherchée. D'autre part, on pourrait penser que cette valeur soit le résultat d'une conception erronée comme celle que nous venons de montrer. La même hypothèse pourrait être valable pour les élèves qui fournissent une réponse incomplète : aucun indice ne nous permet de savoir si celle-ci est le fruit d'une conception erronée.

Troisième tâche. ***La position du point D pour que IJKL soit un carré.***

A propos de la dernière tâche, seulement TROIS élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** répondent correctement.

UN élève **italien** justifie correctement la réponse alors que DEUX élèves **français** affirment explicitement reconnaître un lien entre les deux problèmes de la fiche. Les autres élèves ne justifient pas leur réponse : aucun indice ne nous permet de savoir s'ils reconnaissent ce lien ou bien si c'est l'*évidence des raisons* qui les amène à ne pas expliciter leur raisonnement. En fait, quelques uns de ces élèves établissent la relation des longueurs des diagonales de ABCD et des côtés de IJKL, cela pour répondre à la question sur les aires.

A propos des réponses des autres élèves, on voit bien qu'elles sont le résultat d'une expérience mentale liée souvent à l'idée que le seul cas possible serait celui d'un petit carré inscrit dans un grand carré ; en fait, dans plusieurs copies, l'exigence de voir apparaître une symétrie dans la figure semble convenir à l'œil des élèves.

Les discours des élèves

Les résultats de l'analyse des procédures montrent que ce que les élèves perçoivent sur leur tracé influe beaucoup sur la nature des réponses fournies. En général, les discours produits portent la marque de l'*évidence des faits*.

Très peu d'élèves adoptent une *technique mathématique* pour justifier au moins une partie de leurs réponses. Dans ce cas, la nature des discours produits est variable d'une tâche à l'autre et il nous paraît difficile d'établir une véritable hiérarchie.

A propos de la première tâche, par exemple, c'est sans doute l'évidence qui fait que quelques élèves ne mobilisent pas explicitement l'outil nécessaire pour prouver que IJKL est un rectangle : lorsqu'ils affirment que *les côtés de IJKL sont perpendiculaires car les diagonales de ABCD sont aussi perpendiculaires*, est-ce l'*évidence des faits* ou *des raisons* qui les assure de l'exactitude de leur assertion ? Ou bien, est-ce cette *évidence* qui fonctionne en *obstacle* et qui les empêche d'expliciter des raisons dont l'articulation se révèle complexe ? Dans très peu de cas et par "petits bouts", nous reconnaissons des véritables *démonstrations* ou bien des preuves qui portent la marque de l'*exemple générique euclidien*.

A propos de la comparaison des aires, nous avons déjà annoncé quelques doutes. Si c'est l'expérience mentale ou la reconnaissance d'une configuration qui amène les élèves à fournir une réponse exacte, nous constatons toutefois que ni l'une ni l'autre ne sont utilisées comme moyen pour *chercher* les outils qui permettraient de mettre en place une technique mathématique. C'est pourquoi, dans ce cas-là, nous rattachons plutôt cela à des *preuves pragmatiques*. D'autre part, nous considérons aussi que "répondre correctement" ne correspond pas forcément à "raisonner correctement" : si des élèves avaient argumenté davantage leur réponse, on aurait pu sans doute constater que leur raisonnement s'appuyait sur des *propriétés fausses*.

Dans la majorité des cas, les arguments avancés pour fournir la dernière réponse montrent clairement un recours à une expérience mentale ou à une reconnaissance qui pourtant n'encouragent guère les élèves à aller plus loin. Dans un seul cas, un élève produit une preuve qui porte la marque de l'*exemple générique euclidien*.

Conclusion

A propos du tracé, nous ne constatons pas de différences essentielles entre les élèves italiens et français. Finalement, ce que nous retenons ici est qu'en général pour les élèves observés la perception jouant encore un rôle primordial. Les élèves français proposent un peu plus de techniques mathématiques pour accomplir la première tâche alors que les élèves italiens le font pour accomplir la tâche sur les aires. La dernière question est *problématique* des deux côtés : comme nous l'avions prévu, le recours indu à la perception empêche les élèves d'analyser la figure et de convenablement des outils permettant de répondre correctement. Parmi les quelques élèves qui fournissent une réponse correcte à cette dernière question, un seul explicite sa procédure, ce qui nous amène a croire que les autres repèrent les liens avec l'autre problème de la fiche.

II.3.2 L'analyse du problème C2

Il s'agit d'un problème de construction où l'on demande de réaliser la construction d'une figure dont le programme est donné dans un registre discursif (**tâche 5bis**). On demande ensuite de prouver la validité de ce programme (**tâche 7bis**). Ici, la difficulté majeure consiste à repérer les propriétés nécessaires pour prouver que la figure obtenue répond bien aux conditions imposées. Notre intérêt porte encore sur la capacité des élèves à distinguer les deux tâches et surtout s'ils ressentent le besoin de justifier le

programme.

Puisqu'il s'agit du deuxième problème de la fiche 3, nous avons recueilli QUARANTE-DEUX copies d'élèves **italiens** et QUARANTE-TROIS copies d'élèves **français**. Seulement DEUX élèves **italiens** n'abordent pas le problème.

Nous résumons les informations recueillies concernant la construction et la procédure suivie pour la justifier. A propos de la construction, nous considérons les items suivants :

– construction **complète correcte** lorsque l'élève accomplit la tâche correctement : s'il s'agit d'un quadrilatère concave ou particulier, nous précisons la nature du tracé ;
– construction **incomplète** lorsque l'élève amorce la construction et qu'aucun indice ne nous permet de savoir s'il parviendrait à un tracé correct ou non ;
– construction **incorrecte** lorsque l'élève, n'ayant pas suivi le programme convenablement, ne fournit pas le bon tracé.

Pour justifier que la figure obtenue répond aux conditions imposées, il faut prouver cinq propriétés. Nous distinguons les *étapes* suivantes :

1) CLM est un angle droit ;
2) A et I sont les milieux respectifs de [CL] et de [ML] ;
3) E et O sont les milieux respectifs de [RM] et de [CR] ;
4) AIEO est un parallélogramme ;
5) AIEO est un carré (parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur).

Lors de l'analyse, nous distinguons les procédures suivantes :

– L'élève adopte une *technique mathématique* : dans ce cas, nous nous appuyons sur les solutions de l'analyse *a priori* (**F_6, F_7, F_8, F_9**) et, le cas échéant, nous prenons en compte celles qui nous n'avions pas envisagées (**Au**) ;
– L'élève adopte une *technique perceptive* (**TP**) ;
– L'élève reconnaît une configuration qui lui est familière (**TRC**) ;
– L'élève s'appuie sur une propriété fausse (**TP***).

Concernant l'usage de la procédure, nous évaluons les items suivants :

– usage *complet correct* (**CC**) ;
– usage *complet partiellement correct* (**CPC**) ;
– usage incomplet *correct* (**IC**) ;
– usage incorrect (**In**), etc.

Tableau 6.16 – Les constructions et les procédures des élèves italiens dans le problème C2

	Construction	Procédure					Usage de la procédure				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	Complète correcte	F_6					IC				
2	Complète correcte	F_6	F_6				IC	CC			
3	Complète correcte	F_6					IC				
4	Complète correcte (CLMR carré)						–				
5	Complète correcte	F_6				TP*	IC				
6	Complète correcte	F_6	F_6	F_6			IC	CC	CC		
7	Complète correcte					Au					II
8	Complète correcte (CLMR concave)						–				
9	Incomplète						–				
10	Incomplète						–				
11	Complète correcte						–				
12	Complète correcte		TP	TP	F_6	F_6				CC	CC
13	Incorrecte						–				
14	Incorrecte						–				
15	Incomplète						–				
16	Incomplète						–				
17	Complète correcte (CLMR concave)						–				
18	Complète correcte	F_6	TP	TP	F_6	F_6	IC	–	–	IC	IC
19	Complète correcte				F_6	F_6				IC	IC
20	Complète correcte	F_6				Au	IC				IC
21	–						–				
22	Complète correcte					F_6					IC
23	Incorrect	Incomplet, correct par rapport à son tracé									
24	Complète correcte	F_6				Au	IC				IC
25	Complète correcte (CLMR concave)						–				
26	Complète correcte						–				
27	Complète correcte						–				
28	Incorrecte						–				
29	Incorrecte	Incomplet, TP*									
30	Incorrecte						–				
31	Incomplète						–				
32	Incorrecte						–				
33	Incorrecte						–				
34	Incorrecte						–				
35	–						–				
36	Complète correcte	F_6				TP	IC				–
37	Complète correcte						Incorrect				
38	Complète correcte (CLMR concave)					TP					–
39	Incorrecte						–				
40	Complète correcte					TP					–
41	Complète correcte					TP					–
42	Incorrecte						–				

Tableau 6.17 – Les constructions et les procédures des élèves français dans le problème C2

	Construction	Procédure					Usage de la procédure				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
51	Incorrecte								–		
52	Complète correcte	F_6					CC				
53	Complète correcte								–		
54	Complète correcte (CLMR concave)	F_6	F_6	F_6			CC	CC	CC		
55	Incorrecte								–		
56	Complète correcte								–		
57	Incorrecte								–		
58	Complète correcte	F_6	F_6	TP*			IC	CC	–		
59	Complète correcte	F_6	TP	F_7			IC	–	CC		
60	Complète correcte (CLMR rectangle)	TP	TP	TP	F_7	F_7				IC	IC
61	Complète correcte (CLMR concave)	TP*	F_6	TP*	TP*	TP*		CC			
62	Complète correcte								–		
63	Complète correcte								–		
64	Complète correcte (CLMR concave)	F_6	F_6	F_8	–	TP	CC	CC	CC	–	–
65	Complète correcte	F_6	F_6	F_6			CC	CC	CC		
66	Complète correcte	F_6	F_6	F_6			CC	CC	CC		
67	Complète correcte	F_6	TP	TP		TP	CC	–	–		–
68	Complète correcte	F_6	TP	F_7	F_6	F_6	CC	–	CC	IC	IC
69	Complète correcte (CLMR concave, symétrique par rapport à (LR))	F_6	F_6	TP*			CC	CC			
70	Complète correcte								–		
71	Complète correcte	F_6	F_6	F_6	F_6	F_6	CC	CC	CC	CC	CC
72	Complète correcte	F_6	F_6	TP*			CC	CC	–		
73	Complète correcte								–		
74	Incorrecte	Incomplet, correct par rapport à son tracé									
75	Incorrecte	F_6					CC				
76	Complète correcte (CLMR concave)	F_6	F_6				CC	CC			
77	Complète correcte		F_6					CC			
78	Incorrecte								–		
79	Incorrecte								–		
80	Incorrecte								–		
81	Incomplète								–		
82	Complète correcte	F_6	?				IC	In			
83	Complète correcte	F_6				TRC	CC				
84	Incorrecte								–		
85	Incorrecte								–		
86	Incorrecte								–		
87	Incorrecte								–		
88	Complète correcte (CLMR concave)		F_7	F_7				CC	CC		
89	Incorrecte								–		
90	Incorrecte								–		
91	Incomplète								–		
92	Complète correcte	F_7	F_7	F_7	F_7	F_7	CC	CC	CC	CC	CC
93	Complète correcte (CLMR concave)	F_6	F_6				CC	CC			

La construction et les procédures des élèves

Comme les tableaux 6.16 et 6.17 le montrent, seulement deux élèves italiens n'abordent pas le problème. Toutefois, un bon nombre d'élèves n'abordent pas la tâche sur la justification de la construction.

Élèves italiens	DEUX élèves n'abordent pas le problème ; CINQ élèves produisent un tracé **incomplet** ; ONZE élèves produisent un tracé **incorrect** dont DEUX justifient au moins une des cinq étapes précisées ci-dessus ; VINGT-QUATRE élèves produisent un tracé **correct** dont DIX-SEPT justifient au moins une des cinq étapes.
Élèves français	DEUX élèves fournissent un tracé **incomplet** ; QUATORZE élèves fournissent un tracé **incorrect** dont DEUX justifient au moins une des cinq étapes ; VINGT-SEPT élèves fournissent un tracé **correct** dont DIX-HUIT justifient au moins une des cinq étapes.

Des deux côtés, le nombre d'élèves qui fournissent une construction incorrecte ou incomplète se compense. Néanmoins, en considérant que DEUX élèves **italiens** n'abordent pas du tout le problème, nous reconnaissons que les élèves français s'investissent toujours davantage : bien qu'il n'y ait pas tellement de différence pour la construction, il y en a une pour la validation du programme.

En général, les résultats recueillis prouvent qu'aussi bien les élèves italiens que français ne justifient pas complètement toutes les propriétés de la figure obtenue ; et ceci d'une manière assez variable : les élèves italiens dirigent leur intérêt surtout sur le carré alors que les élèves français le dirigent surtout sur les milieux.

Pour ceux qui adoptent une technique mathématique, les outils traditionnels sont les plus mobilisés : la *réciproque du théorème des milieux* est le plus exploité, peu d'élèves recourent au *théorème de Thalès*. Comme prévu, aucun élève ne mobilise les *transformations géométriques*, sauf pour prouver l'étape 2 où le recours aux propriétés de la symétrie centrale est suggéré dans le texte et est tout à fait à la portée des élèves observés. Le recours à l'évidence demeure un moyen privilégié ; le nombre de conceptions erronées est faible et même si ce sont surtout les élèves français qui s'appuient sur des propriétés fausses, nous remarquons qu'ils s'investissent davantage. En effet, du côté français, nous constatons plus d'élèves qui tentent d'expliciter la procédure adoptée, plus d'élèves qui adoptent des procédures correctes. En outre, les élèves français proposent des procédures plus variées (F_6, F_7) que les élèves italiens (F_6, TP).

Le tracé incomplet. CINQ élèves **italiens** et DEUX élèves **français** fournissent un tracé *incomplet* et, par conséquent, ils ne proposent aucune procédure permettant de justifier la construction.

On peut constater que presque tous ces élèves ne réussissent pas à aboutir à cause d'une interprétation erronée des données verbales. Les erreurs les plus fréquents sont les suivantes : ils ne placent pas correctement les points de départ (étape 2 du programme) ou bien ils ne considèrent pas correctement le centre de symétrie (étape 3) ou encore ils tracent la parallèle à (CM) passant par L et non pas la perpendiculaire (étape 4).

Le tracé incorrect. ONZE élèves **italiens** et QUATORZE élèves **français** fournissent un tracé *incorrect.* La différence avec la catégorie précédente réside dans le fait que ces élèves *achèvent le tracé* ; néanmoins, les erreurs sont à peu près de la même nature.

Dans ce cas, seulement DEUX élèves **italiens** et UN élève **français** fournissent une procédure permettant de justifier leur construction qui pourtant ne répond pas aux conditions imposées. Bien que les procédures d'un élève italien et de l'élève français soient correctes par rapport à leur tracé, elles sont incomplètes. Compte tenu de l'attitude de ces deux élèves, nous supposons que, s'ils avaient fourni une construction correcte, ils auraient réussi à accomplir la tâche. Ici, il nous semble plutôt que les erreurs relèvent d'une difficulté à interpréter et à organiser convenablement une suite assez riche d'informations verbales et une incapacité à garder en mémoire la cohérence des objectifs à poursuivre.

L'autre élève italien ne réussit pas à décontextualiser la situation proposée : il est évident qu'il n'envisage que des cas particuliers de figure car, sans suivre les informations données, il produit un rectangle circonscrit à un losange. En outre, il justifie sa construction en s'appuyant sur une *propriété fausse* :

"En joignant les milieux des côtés d'un rectangle, on obtient un carré".

Un tracé complet et correct (quadrilatère concave). QUATRE élèves **italiens** et SEPT élèves **français** tracent un quadrilatère *concave* ; UN des élèves **français** trace un quadrilatère symétrique par rapport à l'une de ses diagonales en exploitant par la suite cette hypothèse supplémentaire. Dans ce cas, la différence d'attitude entre les élèves italiens et français est assez évidente.

TROIS élèves **italiens** ne justifient pas la construction alors qu'UN élève **italien** recourt à la perception : il affirme qu'*il suffit de mesurer les côtés et les angles* pour conclure que la figure répond aux conditions imposées. Nous supposons que, compte tenu de la nature de la figure obtenue, ces élèves ne réussissent pas à l'exploiter convenablement.

En général, les élèves **français** justifient surtout les trois premières étapes (**Solution F_6**). DEUX élèves s'appuient sur des propriétés fausses : vraisemblablement, ils tentent de concilier ce qu'ils perçoivent sur le tracé avec leurs connaissances qui, évidemment, ne sont pas bien consolidées.

Un tracé complet et correct (quadrilatère convexe). VINGT élèves **italiens** et VINGT élèves **français** – tracent un quadrilatère *convexe* ; parmi eux, UN élève **italien** et UN élève **français** tracent respectivement un carré et un rectangle.

Dans ce cas, SEIZE élèves **italiens** et QUINZE élèves français justifient au moins une partie de la construction.

Parmi eux, TROIS élèves **italiens** recourent exclusivement à la perception. UN élève **italien** prouve que A et I sont les milieux respectifs de [CL] et de [LM] en s'appuyant sur la propriété de la *symétrie centrale*. Ensuite, il mesure des angles mais il n'aboutit pas. Aucun indice ne nous permet de déterminer ses intentions.

A propos des élèves qui adoptent des techniques autres que perceptives, bien que la majeure partie de celles-ci soient **correctes**, seulement DEUX sont **complètes correctes**.

Les informations recueillies montrent que ce sont encore les élèves français qui s'investissent davantage, ce qui justifierait la différence dans le nombre de procédures partiellement correctes.

Mais, ici, ce ne sont pas les erreurs repérées qui demeurent intéressantes mais plutôt les degrés d'achèvement des procédures. D'une part, il semble que les élèves ne réussissent pas facilement à distinguer les propriétés à prouver de celles qui se justifient par construction, ce qu'ils perçoivent sur le tracé influe encore sur leur attitude ; d'autre part, on dirait qu'ils s'intéressent plutôt aux aspects qui leur paraissent les plus faciles à traiter. Les élèves **italiens** s'occupent surtout des questions concernant les angles, *les deux droites parallèles et une sécante* étant la sous-figure privilégiée dans leurs discours. Par contre, bien que les résultats des élèves **français** se présentent de façon plus hétérogènes, ces élèves semblent reconnaître plus facilement la configuration du *triangle des milieux* (ou *de Thalès*).

Étape 1 : CLM est un angle droit.

NEUF élèves **italiens** et DOUZE élèves **français** prouvent cette propriété.

Les élèves **italiens** et TROIS élèves français mobilisent implicitement la *définition de droites perpendiculaires*. NEUF élèves **français** précisent aussi que les points C et M sont sur les droites d_1 et d_2 car, par construction, ils sont les symétriques respectifs de L par rapport à A et I qui appartiennent respectivement aux deux droites.

Étape 2 : A et I sont les milieux respectifs de [CL] et de [ML].

DEUX élèves **italiens** et QUATORZE élèves **français** prouvent cette propriété en mobilisant d'une manière *contextualisée* la *propriété de la symétrie centrale*. UN élève **français** utilise le terme *projeté* pour désigner l'image : nous avons repéré à plusieurs reprises ce type d'erreur lorsque l'élève doit mobiliser l'outil *symétrie centrale*. DEUX élèves **italiens** et QUATRE élèves **français** admettent ce résultat en l'utilisant par la suite.

Étape 3 : E et O sont les milieux respectifs de [MR] et de [CR].

Parmi les élèves **italiens**, UN seul prouve cette propriété en mobilisant implicitement la *réciproque du théorème des milieux*. DEUX autres élèves l'admettent en l'utilisant par la suite.

En revanche, parmi les élèves **français** :

- TROIS élèves recourent explicitement à la *réciproque du théorème des milieux* ;
- TROIS élèves recourent explicitement au *théorème de Thalès* ;
- DEUX élèves recourent à des propriétés fausses qui révèlent une acquisition erronée de la *réciproque du théorème des milieux* et du *théorème de Thalès* ;
- DEUX élèves l'admettent en l'utilisant par la suite.

Étapes 4 et 5 : AIEO est un carré.

Pour prouver que AIEO est un carré, il faut prouver qu'il s'agit d'un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs congruents et perpendiculaires. Seulement deux élèves **français** abordent la situation d'une manière exhaustive. TROIS élèves **italiens** et UN élève **français** adoptent une technique perceptive.

Autrement, parmi les élèves **italiens** :

- CINQ élèves admettent la congruence des côtés, probablement d'après ce qu'ils perçoivent sur le tracé, et se préoccupent exclusivement de prouver qu'ils sont perpendiculaires, cela en mobilisant d'une manière *contextualisée* les *propriétés caractéristiques des droites parallèles* ;
- UN élève se préoccupe de prouver aussi la congruence des côtés, cela en mobilisant implicitement le *théorème des milieux* ; cet élève n'abordant que cette question, il lit sans doute sur le tracé les informations nécessaires pour mobiliser cet outil ;
- UN élève s'appuie sur une propriété fausse, à savoir que *AIEO est un carré car ses sommets sont les milieux de segments qui forment donc des segments égaux*. Vraisemblablement, cette assertion maladroite est le résultat de ce que l'élève perçoit sur le tracé et des informations issues lors de la résolution du problème C1.

Parmi les élèves **français** :

- DEUX élèves fournissent une procédure correcte et complète, à savoir qu'ils prouvent que AIEO est un parallélogramme et que les côtés sont congruents et perpendiculaires ; la plupart des outils sont mobilisés d'une manière *contextualisée*.
- TROIS élèves ne prouvent pas que les côtés sont perpendiculaires ; les outils sont surtout mobilisés d'une manière implicite.
- UN élève reconnaît que la figure est la même que dans le problème C1 : il exploite le fait que (LR) et (CM) sont parallèles et que LR = CM pour en déduire que AIEO est bien un carré. Il ne justifie pas ses

assertions.

Les discours des élèves

L'analyse des procédures montre que les productions des élèves sont fragmentaires. C'est ainsi qu'un examen global des types des preuves fournies nous paraît plus pertinent qu'une analyse cas par cas.

A notre avis, les preuves des élèves aussi bien **italiens** que **français** sont fortement marquées par l'évidence qui, en quelque sorte, pourrait aussi justifier le grand nombre d'élèves qui ne prouvent pas toutes les propriétés de la figure obtenue.

Pour prouver que CLM est un angle droit, par exemple, nous reconnaissons l'*évidence des faits* lorsque l'élève ne précise pas que C et L appartiennent respectivement aux droites d_1 et d_2. Par contre, pour prouver que AIEO est un carré, nous croyons plutôt que l'*évidence* fonctionne en *obstacle* : elle occulte la nécessité de la preuve de quelques éléments qui serait sans doute à la portée des élèves mais dont l'enchaînement des outils est complexe.

Le recours contextualisé à tel ou tel autre outil demeure une caractéristique des élèves italiens : dans les quelques cas où les élèves prouvent au moins l'une des propriétés de la figure, ils se servent des outils nécessaires sans les évoquer explicitement. Toutefois, les élèves français évoquent seulement les théorèmes des milieux et de Thalès, les élèves italiens les utilisent toujours d'une manière contextualisée. Cela nous amène à reconnaître des preuves qui portent la marque de l'*exemple générique euclidien*.

Dans très peu de cas, nous reconnaissons des preuves qui relèvent du *calcul sur les énoncés*. D'une part, ce faible résultat peut conduire à croire que le problème est tout à fait à la portée des élèves concernés ; d'autre part, il faut le considérer par rapport au grand nombre d'élèves qui ne justifient pas la construction : la tâche proposée est sans doute *problématique* au moins par le fait que les élèves ne semblent pas repérer aisément les propriétés à prouver, ce qui d'ailleurs nous amène à croire que, dans les cas où les élèves fournissent des procédures incomplètes, c'est l'évidence qui joue un rôle fondamental.

Conclusions

Ici, il nous paraît intéressant de constater que la quasi-totalité des élèves s'investissent au moins dans l'accomplissement de la première tâche. Il n'y pas beaucoup de différences au niveau de la construction : le

nombre d'élèves qui fournissent des tracés incomplets ou incorrects est le même des deux côtés, de même donc pour ceux qui les fournissent correctement. Néanmoins, les élèves français sont plus nombreux que les élèves italiens à s'investir dans l'accomplissement de la deuxième tâche. Les élèves qui fournissent une preuve, semblent choisir ce qui est plus facile à prouver en fournissant souvent donc des discours incomplets. Cela nous amène à croire qu'ils ont une difficulté à organiser et à enchaîner convenablement des séquences déductives longues.

Conclusions sur les problèmes de la fiche 3

Les résultats de cette fiche prouvent clairement que la plupart des élèves n'ont pas repéré les liens existant entre les deux problèmes. En effet, peu d'élèves fournissent une réponse correcte à la dernière question du problème C1 alors qu'elle apparaît dans le programme proposé dans le problème C2. Cela manifesterait encore une fois l'inaptitude des élèves à analyse une figure ; et, dans ce sens, les élèves français et les élèves italiens ne semblent pas se différencier.

III. REFLEXIONS SUR LES RESULATS DES ANALYSES DES PRODUCTIONS DES ELEVES

L'analyse des problèmes exposée ci-dessus nous permet enfin de fournir certaines réponses à notre questionnement de départ.

Par rapport à la phase pré-expérimentale, nous avons constaté un meilleur investissement de la part des élèves, surtout en ce qui concerne les deux problèmes de construction. Cependant les nouveaux résultats nous confirment que les élèves français s'investissent toujours davantage dans la résolution des divers problèmes proposés. Les modifications apportées nous ont permis de mieux cerner quelques aspects.

Nous allons reprendre ci-dessous les points essentiels de notre analyse-; autant que possible nous mettrons ces résultats en relation avec les réflexions issues de l'analyse des manuels scolaires.

Le rôle du tracé et l'usage de la figure lors de la résolution des problèmes proposés

Grâce aux items considérés lors de l'analyse, nous avons recueilli des informations sur la capacité des élèves à articuler les registres graphique et discursif ainsi que sur certaines *routines* scolaires. Par rapport à

la phase précédente, le rôle de la figure est mieux identifié : il est évident qu'il demeure lié à la nature de la figure en jeu dans l'énoncé mais, dans certains cas, c'est le genre de tâche à accomplir qui semble avoir une influence prépondérante sur la manière d'utiliser le tracé réalisé.

En général, les productions examinées montrent que les élèves ont acquis une bonne capacité à aborder des problèmes de géométrie sur des cas généraux de figures. C'est seulement dans le **problème B1** que les résultats nous apportent des éléments qui divergent des autres. Nous avons constaté que quelques élèves, ayant tracé un cas général de figure, s'en servent en tant que cas particulier en exploitant les propriétés caractéristiques correspondantes : nous avons expliqué cette attitude en termes d'*échappatoire* de la part de l'élève qui peut ainsi recourir à des outils qu'il mobilise plus aisément. Une analyse globale des résultats nous conduit maintenant à associer cela aussi au genre de tâche en jeu. En effet, dans le problème **B1**, on demande de prouver des propriétés qui sont données (**genre de tâche 4**), il n'y a pas de questions auxquelles les élèves peuvent répondre en ayant l'illusion d'avoir rempli la consigne : le recours à une technique perceptive n'étant plus vraiment efficace, ces élèves semblent avoir adapté la situation à des cas plus simples où l'évidence peut les aider à avancer. Ce phénomène est restreint à un petit nombre d'élèves observés : on ne peut en tirer de conclusion générale, il nous a pourtant paru intéressant dans la mesure où nous ne l'avions pas prévu dans une analyse préalable.

En général, les élèves ne semblent pas attribuer beaucoup d'importance au codage du tracé par des *marques*. Nous constatons que les élèves français s'en servent surtout lorsqu'il est possible de traduire des informations directement données dans l'énoncé : c'est le cas, par exemple, dans les **problèmes A1 et C1** où les données amènent à considérer des milieux et, par conséquent, des segments de même longueur. Nous interprétons cela comme un effet de contrat : dans les manuels français, nous avons constaté que les auteurs tiennent souvent à souligner l'importance du codage d'un tracé en relation avec les données fournies dans l'énoncé d'un problème.

A propos de l'usage de la figure, il nous paraît intéressant de souligner que, dans certains cas, les élèves sont capables d'introduire des éléments supplémentaires ne figurant pas dans l'énoncé pour les utiliser dans leur procédure, en les codant ou non. Nous avons constaté à plusieurs reprises que les élèves italiens marquent souvent les *angles*, alors que les élèves français les prennent en compte seulement dans des cas particuliers (par exemple, s'il s'agit d'angles droits). D'ailleurs, cette habitude des élèves italiens nous a permis, dans certains cas, de mieux saisir leurs intentions en complétant l'étude de leur texte écrit par les informations supplémentaires qu'ils faisaient apparaître sur leur tracé. Cette aisance – et, parfois, abus car,

dans certains cas, des élèves ne s'en servent pas correctement – à coder les angles est liée aux techniques de résolution et, par conséquent, aux outils à mobiliser pour les mettre en place : le fait de disposer d'outils puissants tels que *les critères de congruence et de similitude des triangles* a donc permis aux élèves italiens d'acquérir plus de familiarité avec la caractérisation angulaire du parallélisme et sa configuration correspondante.

Du côté des élèves français, c'est surtout dans le **problème A1** que nous constatons cette introduction d'éléments supplémentaires dans la figure : il s'agit des *hauteurs* des triangles. Cela est en relation avec la technique de résolution envisagée, même si quelques élèves s'en servent d'une manière incorrecte : en effet, la majeure partie des élèves français relient les questions d'aires exclusivement aux formules, ce qui les conduit par conséquent à introduire les hauteurs.

D'autre part, nous avons souligné à plusieurs reprises que les élèves des deux institutions ont du mal à "travailler" le tracé pour exploiter d'une manière efficace les propriétés de la figure en jeu : à travers l'analyse de tous les problèmes et d'une manière plus ou moins évidente, nous avons constaté que les élèves n'ont pas encore atteint un niveau d'analyse les amenant à rechercher ou à reproduire des sous-configurations de base.

En ce sens, peut-être les élèves italiens (qui s'investissent) montrent-ils **parfois** plus d'esprit d'initiative que les élèves français ; cependant, ils ne parviennent pas à le diriger dans le bon sens. Ici nous pourrions y voir l'effet d'une habitude institutionnelle. Lors d'un travail personnel à l'aide du manuel scolaire, l'élève italien est amené à comprendre le texte d'une démonstration déjà bâtie. Peut-être éprouve-t-il alors un besoin de traduire dans un registre graphique ce qui lui est donné dans un registre discursif, ce qui est d'ailleurs suggéré dans le développement de la démonstration (il s'investit en "exécuteur" !). L'attitude contraire de l'élève français peut alors avoir cette interprétation : dans les manuels français, lors de l'apprentissage de la démonstration, on encourage l'élève à écrire des textes mais nous avons aussi constaté que le registre graphique est aussi fourni dans le manuel, ce qui empêche vraisemblablement l'élève de développer d'une manière adéquate l'articulation entre les deux registres ; en outre, nous avons souligné à plusieurs reprises qu'une formulation par étapes caractérise la majeure partie des problèmes proposés dans les manuels (on lui souffle souvent la manière de voir un tracé !). Le fait que l'élève français soit toujours *assisté* semble alors l'empêcher de s'habituer à revenir matériellement sur le tracé de départ (il ne s'investit vraiment ni en "exécuteur" ni en "initiateur" !). La question reste ouverte de savoir si les enseignants procèdent comme semblent l'indiquer les manuels. On peut cependant penser que les manuels induisent une certaine différence dans le traitement des problèmes de géométrie dans les deux institutions.

La configuration du triangle des milieux apparaît d'une manière plus ou moins explicite dans tous les problèmes. En général, les élèves montrent une incapacité à l'exploiter dans toutes ses potentialités déjà quand elle apparaît d'une manière évidente (comme dans les problèmes de la **fiche 1**) ; inévitablement, ils ont d'avantage de mal à la repérer dans des cas plus complexes (comme dans les problèmes des **autres fiches**).

Cette inaptitude des élèves des deux institutions à reconnaître une figure simple dans une figure complexe se révèle clairement dans le fait que, par exemple, le parallélogramme n'est pas assez exploité comme sous-figure utile à repérer pour aboutir ; dans les quelques cas où cette figure est repérée, c'est surtout le parallélisme qui est exploité alors que l'existence d'un centre de symétrie permettrait d'accomplir facilement des tâches telles que celles qui sont proposés dans les **problèmes A1 et B1**. Nous reviendrons sur ce point plus loin, à propos des tâches sur les aires.

D'une manière encore plus évidente, nous retrouvons cette inaptitude dans les copies des élèves qui ont eu à résoudre le **problème B2**. En le proposant, nous voulions tester leur capacité à mobiliser des outils particulièrement efficaces pour aboutir : sous des formes équivalentes, il s'agit substantiellement de considérer que *deux triangles ayant un côté commun et tels que la droite passant par les troisièmes sommets soit parallèle à ce côté commun ont même aire*. Très peu d'élèves résolvent ce problème et reconnaissent la configuration liée à cet outil. Cela nous conduit à conclure que non seulement les élèves observés n'ont pas encore développé un esprit d'analyse suffisamment adéquat pour aborder un problème de géométrie mais, en outre, ils semblent disposer de connaissances difficilement exportables dans un contexte où c'est à eux de prendre l'initiative et de faire des choix adaptés à ce nouveau contexte.

La difficulté à organiser un raisonnement intellectuel en utilisant convenablement la figure en jeu apparaît aussi dans les copies des élèves qui ont abordé le **problème B1**. Ici, nous avons constaté que la difficulté majeure consiste à bien discerner ce qu'ils connaissent de ce qu'ils doivent prouver : quelques indices nous ont permis de relever que quelques élèves reconnaissent une figure familière mais qu'ils ne savent pas exploiter et organiser convenablement leurs connaissances.

Finalement, il nous paraît légitime de conclure que ni les élèves italiens ni les élèves français observés n'ont atteint un niveau d'analyse leur permettant de faire jouer d'une manière rentable les registres graphiques et discursifs. Sans doute les raisons en amont sont-elles différentes. Les élèves français ne semblent pas avoir atteint ce niveau : est-ce à cause du fait qu'ils n'ont pas encore développé l'autonomie

nécessaire pour réinvestir leurs connaissances dans une situation autre que celles qui sont liées à un contexte précis où ce qu'il y a à voir est suggéré par le cours qu'ils sont en train d'apprendre ? En revanche, les élèves italiens (du moins ceux qui s'investissent) semblent ne pas avoir encore réussi à maîtriser leur esprit d'initiative et à l'utiliser à bon escient : est-ce à cause du fait qu'ils doivent gérer une trop grande autonomie, source d'incertitude ?

Les techniques adoptées et les preuves produites : l'attitude rationnelle est-elle atteinte ?

Évidemment, la réponse à cette question demeure étroitement liée à ce que nous venons de dire à propos de l'usage de la figure. Les résultats semblent nous prouver qu'aussi bien chez les élèves italiens que chez les élèves français, la dialectique entre l'*attitude de l'intuition rationnelle* et l'*attitude rationnelle* est encore en cours. Les élèves utilisent la perception d'avantage pour fournir directement des réponses que pour analyser la figure et ainsi choisir convenablement les outils de démonstration.

Bien que les élèves français s'investissent toujours plus que les élèves italiens et qu'ils adoptent plus aisément des techniques mathématiques, nous constatons qu'ils réussissent à le faire sur des séquences courtes, un appui sur la perception étant toujours plus ou moins présent dans leurs productions. Cependant, le recours à la perception plutôt qu'aux techniques mathématiques est à moduler suivant les genres de tâches.

La deuxième question (**genre de tâche 1**) proposée dans le **problème C1** entraîne l'élève à recourir à la perception pour fournir une réponse et, de ce fait, très peu d'élèves adoptent une attitude rationnelle ; les élèves français sont pourtant plus nombreux que les élèves italiens à adopter des techniques mathématiques. D'ailleurs, les résultats relatifs à la quatrième question (**genre de tâche 2**) proposée dans le même problème confirment nos analyses préalables : les élèves persistent dans l'adoption d'une technique perceptive alors que celle-ci s'avère inefficace pour fournir une réponse cohérente.

Dans les problèmes dont les tâches proposées sont du **genre 4 (fiche 2)**, cette dialectique entre les deux attitudes est encore plus présente : les élèves qui s'investissent – et ils ne sont pas si nombreux – n'hésitent pas à recourir à des catégories différentes de techniques non seulement en passant d'une étape à l'autre mais aussi au cours de la même étape. Cela atteste d'ailleurs d'une difficulté à enchaîner des séquences déductives longues et, par conséquent, à établir un ordre logique et cohérent dans cet enchaînement.

La difficulté à distinguer les hypothèses de ce qui en découle apparaît aussi d'une manière évidente dans

les **problèmes de construction A2** et **C2**. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant.

Les *attitudes* face à la géométrie se manifestent aussi à travers les types de preuves que l'on exhibe lors de la résolution d'un problème de géométrie. Évidemment, les types de preuves produits par les élèves observés nous confirment que la dialectique entre les deux attitudes est encore en cours.

Dans l'ensemble, très peu d'élèves montrent avoir atteint un niveau où ils réussissent à produire une véritable *démonstration*, Le recours implicite ou contextualisé des outils mobilisés caractérise surtout les productions des élèves italiens (qui s'investissent) ; d'autre part, nous avons constaté à plusieurs reprises que les élèves français montrent une facilité à évoquer explicitement les outils qui acquièrent un rôle important dans l'enseignement reçu : le *théorème des milieux* et le *théorème de Thalès*. C'est pourquoi, dans les quelques cas où les élèves adoptent des techniques mathématiques correctes, les preuves produites par les élèves italiens relèvent surtout de l'*exemple générique euclidien* tandis que les élèves français produisent plutôt des *démonstrations* par "bouts", ce qui s'explique aussi par le fait qu'ils manifestent une difficulté à enchaîner des séquences déductives longues. C'est le cas, par exemple, dans le **problème A1** où quelques élèves français *démontrent* la relations des périmètres alors qu'ils s'appuient sur la perception (ou qu'ils abandonnent) pour la deuxième partie du problème qui concerne la comparaison des aires. Évidemment, cette difficulté dépend aussi de la maîtrise que les élèves ont de la notion d'aire, nous y reviendrons plus loin.

Puisque la majeure partie des élèves adopte encore des techniques perceptives, les preuves correspondant montrent encore un attachement au pragmatique.

Dans le problème B1 (**genre de tâche 4**), bien qu'il s'agisse d'un *véritable* problème de *démonstration*, les élèves trouvent souvent le moyen de recourir à l'*évidence*. Il nous a paru difficile d'établir la source de cette évidence (*faits* ou *raisons* ?) surtout pour quelques élèves français qui rédigent un discours qui "tiendrait debout" mais dont les outils mobilisés demeurent implicites, les expressions utilisées se prêtant à diverses interprétations. En ce sens, on dirait qu'ils sont *convaincus* mais qu'ils ne se soucient pas de *convaincre*. D'ailleurs, dans ce même problème, l'évidence semble faire obstacle dans le sens que quelques élèves – italiens et français – montrent une connaissance des propriétés de la figure en jeu mais que la difficulté à harmoniser les registres graphique et discursif ainsi qu'à maîtriser des séquences déductives longues les empêchent d'avancer d'une manière cohérente.

D'ailleurs, surtout dans les **problèmes B2** et **C1**, nous avons constaté que la reconnaissance d'une figure familière ou bien le recours à l'expérience mentale ne sont pas utilisés comme des sources d'inspiration pour produire ensuite des discours intellectuels mais ~~ils~~ sont plutôt considérés comme des moyens satisfaisants pour assurer la validité des arguments avancés, ce qui d'ailleurs confirme ce que nous avons dit plus haut à propos d'un recours indu à la perception comme un moyen de validation et non pas comme moyen d'analyse de la figure.

Nous avons repéré à plusieurs reprises des preuves s'appuyant sur des propriétés fausses (*calcul sur les énoncés*) et cela surtout dans les textes produits par les élèves français. C'est surtout dans le cas où les tâches proposées concernent les *aires* ; cependant, on retrouve aussi des conceptions erronées qui manifestent une acquisition inadéquate du *théorème des milieux* ou, plus généralement, de la *proportionnalité* de longueurs

Les preuves ayant valeur de démonstration sont rares. Cependant, comme nous l'avons vu lors de l'analyse des manuels scolaires, la *démonstration* est présente dans les deux institutions, mais y acquiert des significations différentes. Dans les manuels italiens, elle apparaît surtout comme une exigence d'ordre formel, comme un moyen de validation des théorèmes du cours ; en revanche, dans les manuels français, elle devient un objet d'enseignement et d'apprentissage. Bien que nous ayons remarqué quelques différences dans l'approche adoptée dans les deux manuels français analysés, il nous paraît évident qu'en général, dans l'institution française l'on envisage la réalisation d'une démonstration en termes de production d'un texte écrit. Une pression institutionnelle encourage l'élève français à produire "à tout prix" alors qu'une absence institutionnelle laisse à l'élève italien le choix de s'investir ou non dans une telle production. C'est ainsi que nous mettons sur le même plan le nombre élevé de conceptions erronées qui apparaissent dans les copies des élèves français et le nombre élevé d'élèves italiens qui ne s'investissent pas dans la résolutions des problèmes proposés. C'est un *effet de contrat* qui nous a permis de repérer plus facilement les méconnaissances des élèves français. Néanmoins, c'est un *effet de non-contrat* qui nous a empêchée de bien identifier les méconnaissances des élèves italiens car, comme nous l'avons déjà dit, derrière les désistements faciles des ces élèves peuvent toujours se cacher des raisonnements erronés.

Les constructions géométriques : quelle signification pour les élèves observés ?

L'analyse des manuels scolaires nous a permis de constater que les *constructions géométriques* ont un statut différent dans les deux institutions. Dans l'institution française, elles sont fréquentes et servent pour apprendre à produire méticuleusement des dessins et pour faire fonctionner les connaissances acquises ou

à acquérir. En revanche, dans l'institution italienne, elles occupent une place marginale, les problèmes de constructions étant placés au même rang que les autres problèmes de géométrie. Néanmoins, en proposant les **problèmes A2** et **C2**, nous avons voulu tester et objectiver l'influence de ces différences institutionnelles sur le rapport personnel des élèves italiens et français à cet objet.

Les nouvelles versions des énoncés nous permettent d'objectiver les résultats recueillis auparavant. Les résultats de la phase expérimentale nous confirment en fait deux éléments essentiels : les élèves français abordent plus aisément ces types de problèmes, néanmoins la difficulté à discerner le programme de construction de sa justification apparaît aussi bien chez les élèves français que chez les élèves italiens.

Le choix de l'énoncé du **problème A2** nous a permis d'examiner la capacité des élèves à traduire des informations graphiques en discursives (**genre de tâche 6bis**) et puis de voir s'ils justifient un programme qu'ils produisent eux-mêmes. En général, les élèves ne sont pas encore capables d'articuler convenablement les deux activités ; la manière de rédiger un programme est encore floue ; la difficulté majeure réside dans le fait qu'ils ne distinguent pas les éléments qui permettent de réaliser la figure suivant les conditions imposées, des éléments qui doivent être prouvés.
La majeure partie des élèves attribuent au programme de construction une fonction de preuve et, dans les quelques cas où ils produisent une preuve – il s'agit surtout d'élèves français –, ils manifestent une difficulté à distinguer les hypothèses de ce qui en découle. La familiarité avec la figure et le dessin qu'ils ont sous les yeux les encourage peut-être à céder à l'évidence, lorsqu'ils doivent organiser convenablement une séquence. Les quelques élèves qui s'investissent dans la production d'une preuve intellectuelle n'arrivent pas à bien distinguer ce qu'ils savent de ce qu'il faut prouver.

Le **problème C2** nous a permis d'examiner la capacité des élèves à traduire des informations discursives en informations graphiques (**genre de tâche 5bis**) et, dans ce cas aussi, les élèves montrent une difficulté à articuler les deux registres, ce qui est dû peut-être à une incapacité à exécuter correctement une suite suffisamment riche d'instructions. D'autre part, cette incapacité se manifeste aussi lorsqu'ils doivent justifier le programme fourni. Comme dans le **problème B1**, les élèves semblent choisir ce qui leur paraît plus facile à prouver, ce qui nous a permis de repérer des préférences : en effet, nous avons constaté que les élèves italiens s'occupent surtout de questions d'angles et donc ils centrent leur attention sur le carré alors que les élèves français semblent reconnaître plus facilement la configuration du *triangle des milieux* en centrant leur attention sur les milieux des côtés du grand quadrilatère.

Finalement, une analyse globale nous permet de constater que les difficultés rencontrées dans l'accomplissement des tâches de construction sont les mêmes que dans les autres tâches. Les élèves se laissent emporter par la perception : aux yeux des élèves, cela est d'autant plus légitime que la tâche initiale est soit la réalisation d'un tracé (**problème C2**) soit l'observation et l'interprétation d'un tracé fourni (**problème A2**), et que la réussite à cette tâche est une justification en soi. Les problèmes de construction sont encore un exemple qui nous permet de conclure que la perception n'est pas utilisée à bon escient et que les élèves n'ont pas encore atteint un niveau d'analyse leur permettant d'articuler convenablement les registres graphiques et discursifs, cela se manifestant aussi bien lorsqu'ils rédigent un programme de construction que lorsqu'ils doivent le justifier.

Les tâches sur les aires : quelles différences entre les élèves français et les élèves italiens ?

Les tâches sur les aires apparaissent dans quatre des problèmes proposés. Globalement, les résultats recueillis montrent que l'habillage et un enchaînement de questions différents ont beaucoup d'influence sur l'investissement des élèves italiens ainsi que sur leur réussite. En revanche, pour les élèves français, les résultats recueillis reflètent davantage la manière dont les aires sont traitées dans les manuels scolaires (voire dans l'enseignement).

Dans les cas où les élèves italiens s'investissent, ils recourent à la perception ou bien ils adoptent des techniques mathématiques s'appuyant sur la congruence et la similitude : dans ce dernier cas, leurs preuves sont souvent incomplètes, ce qui est dû peut-être à une évidence des raisons. Nous avons constaté qu'ils s'appuient davantage sur la perception dans le problème **C1** dont la question concerne des quadrilatères : la complexité de la figure semble les empêcher d'en faire une analyse leur permettant de repérer des sous-figures utiles pour aboutir.

Les productions des élèves français s'avèrent intéressantes pour plusieurs raisons. Il paraît évident que pour eux l'aire ne se conçoit qu'à travers des formules : dans ce cas, le mesurage demeure encore un moyen efficace pour aboutir ; en outre, ils manifestent une méconnaissance de ces formules, qui est encore plus évidente lorsqu'il s'agit de quadrilatères.

Mais, un autre aspect les distingue des élèves italiens : en effet, c'est surtout pour ce genre de tâches que les élèves français valident leurs réponses en s'appuyant sur des propriétés fausses. Les conceptions erronées qu'ils manifestent sont relatives à une liaison indue entre le périmètre et l'aire et, plus

généralement, à une acquisition partielle ou erronée de la notion d'agrandissement/réduction (et donc de la proportionnalité).

Un autre phénomène que l'on retrouve dans les copies de quelques élèves français est un recours spontané à la notion de congruence : dans ce cas, les élèves produisent des discours très proches de ceux qui sont produits par les élèves italiens ; mais les élèves italiens disposent de l'outil *congruence des triangles*, alors que les élèves français n'en disposent pas. Nous avons reconnu dans leurs preuves un recours à l'*évidence des raisons* car les élèves français observés pourraient justifier leur technique à l'aide des propriétés du parallélogramme en utilisant l'invariance des aires par une symétrie centrale ; cependant ils ne sont pas capables de reconnaître cet outil alors qu'il est *théoriquement* disponible. Par ailleurs, cela confirme notre idée que les élèves n'exploitent pas l'existence d'un centre de symétrie dans ce quadrilatère particulier alors qu'il s'avérerait un outil efficace pour réussir.

Les transformations géométriques : où sont-elles ?

On trouve, surtout chez les élèves italiens, un recours naïf – et tout à fait à la portée des élèves observés – de la *symétrie centrale* comme équivalent sémantique de la notion de milieu ; l'*homothétie* fait une petite apparition dans les copies deux élèves français et de deux élèves italiens. Il nous paraît légitime de conclure qu'aussi bien les élèves italiens que français n'utilisent pas l'outil transformations et préfèrent le recours aux outils de la géométrie euclidienne classique.

En regroupant ces résultats avec ceux que nous avons recueillis dans la phase pré-expérimentale, nous pouvons conclure que ce sont plutôt les élèves italiens qui évoquent des transformations géométriques. Cela est d'autant plus paradoxal que l'enseignement français de la géométrie est fondé sur ces objets alors que, dans l'enseignement italien, le choix entre une approche traditionnelle et une approche par les transformations géométriques est laissé à la volonté de l'enseignant. Ces résultats débouchent sur d'autres questions que nous préciserons dans nos conclusions.

Conclusions

Quel est actuellement et quel peut être l'enseignement de la géométrie au niveau du second degré ? C'est à partir de cette question que notre recherche a débuté et s'est ensuite développée autour d'autres questions et d'hypothèses de travail plus précises : nous avons alors choisi de comparer deux systèmes scolaires, déjà à première vue, différents.

En nous appuyant sur des cadres théoriques tels que, entre autres, la *transposition didactique* et à travers la mise au point d'une méthodologie nous permettant d'effectuer une comparaison suffisamment parlante, nous nous sommes donné les moyens de répondre au moins partiellement à cette question.

Une réponse partielle car, parmi les divers acteurs qui peuplent une institution scolaire, nous avons pointé notre regard sur les **auteurs de manuels scolaires** (qui participent au développement du texte du savoir qui va vivre dans une institution donnée) et sur les **élèves** (qui reçoivent ce texte du savoir), tout en ayant conscience que l'**enseignant** remplit la fonction de *médiateur* entre les uns et les autres en apportant des éléments supplémentaires et sa propre interprétation du texte du savoir. Néanmoins, bien loin de vouloir être exhaustive dans nos réponses, nous étions persuadée depuis le début que pour explorer convenablement certaines pistes, il nous fallait d'abord une connaissance plus approfondie d'un point de vue purement *institutionnel*. En effet, le recours aux deux sources *institutionnelles* que sont les **textes officiels** et les **manuels scolaires** nous a paru primordial pour comparer les deux systèmes d'enseignement : elles représentent une **référence culturelle** propre à mettre en évidence certains aspects caractéristiques des deux institutions. D'autre part, nous avons voulu évaluer **les effets de l'enseignement reçu par les élèves** et voir dans quelle mesure les fonctionnements (ou dysfonctionnements !) des deux systèmes pouvaient influer sur leur formation.

Là aussi notre réponse est partielle car, en cours de route, quelques effets inattendus se sont produits qui ont fait que d'autres questions se posent.

Le passage de l'attitude de l'intuition rationnelle à l'attitude rationnelle[1]

Dans le premier chapitre, nous avons parlé de **tradition euclidienne** pour considérer que, grâce à Euclide, nous avons hérité non seulement d'un *savoir géométrique* mais aussi d'un exemple de *style* et de *méthode* pour que ce savoir soit transmis. Nous pensions que, dans l'enseignement secondaire, un attachement trop exclusif à la *tradition euclidienne* pourrait ne pas permettre de prendre en compte d'une manière constructive les aspects pédagogiques nécessaires dans la transmission du savoir en question. Nous avions alors avancé l'hypothèse 1 dont voici la première partie :

Hypothèse 1. Cette présentation de la géométrie d'une part ne favorise pas la négociation d'un passage progressif d'une *attitude* à l'autre ; ...

La méthodologie mise au point pour analyser quelques manuels scolaires, parmi les plus adoptés dans les deux institutions concernées, s'est révélée assez efficace pour confirmer la première partie de cette hypothèse au moins en ce qui concerne les contenus et les méthodes pédagogiques que les divers auteurs semblent indiquer à travers l'organisation choisie pour exposer ces contenus.

Dans les manuels italiens :

- pour l'ESI, le passage de l'attitude de l'intuition rationnelle à l'attitude rationnelle en termes de dialectique reste vague ;
- pour l'ESS, les auteurs introduisent et justifient les éléments rationnels par des raisons purement formelles.

La phase expérimentale de notre recherche nous a permis de conclure que, chez les élèves italiens, la dialectique entre les deux attitudes est encore en cours. Néanmoins, les résultats issus de cette phase nous ont interpellée sur plusieurs points qui nous conduisent aux réflexions suivantes.

Nous avons reconnu un *effet de non-contrat* dans le fait que les élèves italiens ne s'investissent pas autant que les élèves français dans la résolution des problèmes proposés. On peut sans doute l'attribuer à une organisation de l'enseignement dans la tradition euclidienne mais sans prise en compte explicite de l'apprentissage de la démonstration.

Nous avons pu mettre en évidence ce phénomène grâce à la comparaison qui fait l'objet de notre travail ; cependant, nous pensons qu'un **choix méthodologique différent** nous permettrait de mieux identifier les causes de l'abandon prématuré qui a caractérisé un bon nombre d'élèves italiens : par exemple, une sollicitation plus directe telle qu'un entretien individuel suivant un protocole qui guide l'élève pendant la

[1] cf. chapitre 1, § III.1, *Les attitudes face à la géométrie*

résolution du problème et qui permette aussi de faire émerger spontanément ses connaissances (ou bien ses méconnaissances). Cela pourrait alors être une piste à suivre si l'on veut approfondir ces aspects et mieux les objectiver.

Lors de l'analyse des productions des élèves observés, nous avons constaté que les élèves français produisent plus de démonstrations consistantes que les élèves italiens, au moins par "petits bouts". S'agit-il d'une question d'outils disponibles ? Pas vraiment : même si les élèves **français** disposent – avec le *théorème des milieux* et le *théorème de Thalès complété*[2] – d'outils plus faciles à utiliser que le *théorème de Thalès général*, les élèves **italiens** disposent – avec les *critères de congruence et de similitude* – d'outils aussi faciles à mobiliser, sinon plus ; et d'ailleurs ces outils s'avèrent efficaces aussi dans l'accomplissement de tâches qui concernent les aires alors que les élèves français sont plutôt démunis dans ce cas.

D'un autre côté, les résultats recueillis nous ont amenée à conclure que ni les élèves italiens ni les élèves français n'ont atteint un niveau d'analyse leur permettant de faire interagir efficacement les registres visuel et discursif lors de la résolution des problèmes proposés : évidemment, il s'agit d'une difficulté parmi les plus importantes de l'apprentissage de la démonstration. On constate en effet que les élèves des deux institutions ont les mêmes difficultés d'analyse de la figure, que ce soit pour considérer des éléments supplémentaires ou pour isoler des sous-figures utiles pour démontrer. Cependant nous avons vu que les élèves français rédigent davantage leurs "démonstrations".

Par ailleurs nous avons constaté – à travers les manuels – que l'apprentissage de la démonstration est passé sous silence dans l'institution italienne alors qu'il est pris explicitement en compte dans l'institution française : en y regardant de plus près, on peut observer qu'on insiste surtout sur l'apprentissage de la **rédaction** des démonstrations ; on donne moins d'importance à la phase heuristique s'appuyant sur un travail de la figure.

Nous croyons aussi que la manière dont l'institution **française** aborde les questions pédagogiques porte ses fruits mais que la réticence envers toute complexité et la restriction d'utilisation des contenus empêchent "d'aller au bout". Lors de l'analyse des manuels scolaires français, nous avons conclu que le souci pédagogique ne compense pas la trop grande simplicité des exercices pour permettre aux élèves de comprendre réellement ce qu'est une activité mathématique ; les résultats recueillis semblent attester des effets de quelques choix pédagogiques (et de contenu), les difficultés des élèves français à aborder des questions d'aires peuvent être un exemple très éloquent.

---

[2] cf. chapitre 5, § I, *La structure des énoncés*

Les aires

Les élèves italiens disposent des *critères de congruence* et *de similitude des triangles* et les utilisent d'une manière souvent efficace pour résoudre les problèmes d'aires. Les élèves français disposent de l'outil *transformations géométriques* (et en particulier de la *symétrie centrale*) mais ne l'utilisent pas et tentent même d'adopter des critères de congruence qui leur évitent de considérer en même temps plusieurs dimensions et des aller–retours entre elles, notamment entre les points et les droites.

Aucun élève n'utilise de manière claire l'invariance de l'aire d'un triangle quand un sommet parcourt une parallèle au côté opposé, même si quelques élèves italiens semblent y avoir recours, car ils montrent alors une confusion entre *équivalence* et *congruence*, malgré l'importance attribuée à la distinction de ces notions dans les manuels.

Mais leurs résultats sont bien meilleurs dans ce domaine que ceux des élèves français, qui ne semblent concevoir la notion d'aire qu'à travers des formules (qu'ils appliquent souvent d'une manière erronée).

Les angles

Apparemment, la pratique des *critères de congruence* et *de similitude* favorise chez les élèves italiens la manipulation des angles qui semblent ignorés des élèves français. Ces derniers utilisent beaucoup moins la caractérisation angulaire du parallélisme ; dans les manuels, on a vu aussi que la caractérisation du parallélogramme par les angles est peu mise en valeur. Bien que nos observations ne portent pas a priori sur ce point, la méthodologie mise en place nous a permis de saisir quelques effets : voici donc une autre ouverture possible car il nous paraît intéressant d'envisager des tests supplémentaires pour approfondir cette question.

Les transformations géométriques

À propos des *transformations géométriques*, la deuxième partie de notre hypothèse 1 et notre hypothèse 2 se trouvent confirmées. Rappelons ces hypothèses :

Hypothèse 1 ... d'autre part, dans l'institution <u>italienne</u>, la *tradition euclidienne* ne facilite pas non plus l'intégration de l'objet *transformations géométriques*, parmi les autres objets de la géométrie au sein du savoir enseigné, et encore moins comme outil de *démonstration*.

Hypothèse 2. Le rapport institutionnel à l'objet *transformations géométriques*, bien qu'il occupe une place considérable dans le texte du savoir qui vit dans l'institution <u>française</u>, n'évolue pas lors du

passage de l'*attitude de l'intuition rationnelle* à l'*attitude rationnelle.*

L'analyse des manuels italiens nous ont conduite à conclure que l'objet *transformations géométriques* s'intègre mal dans l'organisation des contenus telle qu'elle est proposée. Néanmoins, cet objet fait une timide apparition en tant qu'outil de démonstration dans les copies de quelques élèves. On pourrait interpréter cela comme l'effet d'une médiation de l'enseignant mais rien ne nous permet d'en tirer des conclusions.

Bien que les programmes scolaires français prévoient une utilisation des transformations géométriques en tant qu'outil permettant de développer les autres contenus, l'analyse des manuels scolaires nous a conduite à constater que les auteurs sont réticents à y recourir dans les démonstrations et que finalement son introduction demeure naïve et son utilisation est, par conséquent, limitée. Il est en effet paradoxal que, dans la phase expérimentale, les transformations géométriques ne fassent une petite apparition que dans les copies de deux élèves français ; cela peut être encore interprété comme l'effet d'un choix pédagogique qui conduit à une réticence envers toute complexité ainsi qu'à une restriction d'utilisation des contenus.

Il faudrait aussi étudier l'effet de la pratique prolongée de la proportionnalité (*agrandissement/réduction*) au Collège et voir si elle ne risque pas de se constituer en obstacle à la notion d'*homothétie*. Cependant, étant donné que l'homothétie a été reportée en classe de Première et que les *triangles semblables* ont fait leur réapparition dans les programmes de la classe de Seconde, l'étude est maintenant difficile à mener en France, les conditions dans cette institution ne seraient plus les mêmes que lors de nos observations.

Le rôle de l'enseignant

Il y a un grand absent dans ce travail : l'**enseignant**. Nous avons pu repérer son influence ici ou là mais nous ne nous sommes pas donné les moyens d'étudier les effets de son action.
Les quelques décalages entre l'analyse des manuels et les résultats aux tests nous conduisent à nous poser de nouvelles questions sur la réalité de la classe, en réintroduisant notre chaînon manquant.
De quelle manière l'*institution* influe-t-elle sur le rapport personnel de l'enseignant ? Comment interprète-t-il les textes officiels ? C'est ainsi qu'une autre piste s'ouvre : nous pourrions donc d'une manière plus directe nous intéresser au *rapport personnel* au savoir géométrique de l'enseignant et aussi à l'influence de l'*institution* sur ses pratiques d'enseignement, notamment en ce qui concerne le rapport à la figure, la recherche heuristique et l'approche de la démonstration.

En effet, lors de l'analyse des manuels scolaires, nous avons constaté à plusieurs reprises la volonté de la part des auteurs des manuels **français** d'envisager l'approche de la démonstration à travers une dialectique longue et progressive entre l'attitude de l'intuition rationnelle et l'attitude rationnelle : les enseignants perçoivent-ils cette volonté ? Plus particulièrement, ont-ils conscience de la nécessité de cette dialectique ? En cas de réponse affirmative, pensent-ils que les moyens fournis par les manuels sont suffisants pour harmoniser les deux attitudes d'une façon constructive et efficace, et pour que le passage à l'attitude rationnelle s'accomplisse d'une manière saine et stable ? Que font-ils à propos de l'analyse de la figure lors de l'enseignement des techniques démonstratives ?

Dans l'institution **italienne**, la nécessité d'un apprentissage de la démonstration est passée sous silence : les enseignants perçoivent-ils cette nécessité ? Si leur rapport personnel à (l'enseignement de) la géométrie est tel qu'ils prennent à leur charge cette nécessité, à travers quelles méthodes envisagent-ils un enseignement de la démonstration ? Cette dernière question nous paraît pertinente dans la mesure où, comme nous l'avons constaté, les manuels ne semblent pas leur venir en aide...

L'opposition entre les "critères de congruence et de similitude" et les "transformations"

Dans les nouveaux programmes en vigueur actuellement dans la classe de Seconde[3], on retrouve les *critères de congruence* et *de similitude* des triangles : après environ trente ans d'absence, leur réapparition atteste d'une reconnaissance de leur *utilité* de la part de l'institution qui proclame, en même temps, la perte d'importance des *transformations géométriques* dans l'enseignement secondaire français[4].

A ce propos, reprenons le problème dont nous avons parlé dans le chapitre 1[5] :

> "Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Soit M un point du segment [AB], distinct de A et B. La droite (OM) coupe [CD] en N. Démontrer que O est le milieu de [MN]".

En 2002, trois stagiaires PLC2[6] ont proposé ce problème dans leurs trois classes de Seconde. L'énoncé comportait deux parties : suivant une formulation par étapes très détaillées, on demandait aux élèves de le

---

[3] cf. chapitre 2, § VI, *Évolution des programmes scolaires français*

[4] Rappelons que l'objet *homothétie* disparaît des nouveaux programmes de la classe de Seconde.

[5] cf. chapitre 1, § II, *Pourquoi une comparaison ?*

[6] Il s'agit d'étudiants de 2ème année de formation en IUFM destinés à devenir Professeur de Lycées et Collèges, c'est-à-dire d'étudiants ayant réussi la partie théorique du concours de recrutement et stagiaires en année de formation professionnelle avec responsabilité dans un collège ou un lycée.

résoudre d'abord à l'aide des propriétés de la *symétrie centrale* et ensuite à l'aide des *triangles isométriques*. Les résultats recueillis ont prouvé que les élèves ont résolu le problème plus aisément en recourant aux cas d'égalité (qu'ils venaient d'apprendre dans l'année en cours) qu'aux propriétés de la symétrie centrale (qu'ils avaient étudiées et approfondies depuis quatre ans). A la fin du problème, on leur demandait quelle méthode ils préféraient et pourquoi : la majorité des élèves ont préféré les *triangles isométriques* et certains ont déclaré que la symétrie c'était plus difficile à cause de l'image des points.
Cela confirme nos hypothèses concernant la difficulté d'un changement de dimension dans le regard porté sur la figure[7].

La réintroduction des *critères de congruence et de similitude* dans les programmes français nous amène à quelques interrogations sur la cohérence interne des programmes eux-mêmes. Dans le chapitre 4, nous avons conclu que l'énoncé du *théorème de Thalès* – tel qu'il est proposé dans les manuels français – apparaît comme un *compromis* entre plusieurs objets qui *n'apparaissaient* pas ou bien qui sont introduits naïvement dans les programmes de géométrie. Par ailleurs, dans l'analyse des productions des élèves, nous avons pu remarquer que, lorsque les élèves français ont eu recours à ce théorème, les élèves italiens ont eu recours aux *critères de similitude des triangles*[8]. Ces réflexions nous amènent alors à nous poser la question suivante : quelle signification faut-il attribuer à ce *théorème de Thalès* dans les programmes français actuels ? Les élèves vont s'en servir pour démontrer en classe de Troisième en attendant l'arrivée des *critères de similitude*, peut-on répliquer. Nous croyons pourtant que les *critères de congruence et de similitude* arrivent trop tard dans les programmes pour que les objets anciens puissent se conformer d'une manière plus cohérente avec les objets nouveaux. Cela devrait donc amener à réfléchir sur un aménagement différent des contenus : une réintroduction des critères de congruence dès les premières classes de Collège est sans doute envisageable.

Une autre recherche serait nécessaire pour étudier l'articulation que les enseignants français font entre ces deux points de vue depuis les derniers changements des programmes scolaires. D'ailleurs, cela peut être encore envisagé en termes de comparaisons avec les quelques enseignants italiens de l'ESS qui prévoient les deux points de vue dans leur enseignement de la géométrie.

---

[7] Remarquons au passage que, dans leur rapport, les trois stagiaires constatent la difficulté de quelques élèves à utiliser correctement la caractérisation angulaire du parallélisme. En outre, les élèves observés semblent manier plus facilement le cas d'isométrie faisant appel aux trois côtés respectivement de même longueur. Ces résultats confirment la nécessité d'une réflexion sur la place de l'objet *angle* dans les programmes scolaires français, comme nous l'avons indiqué plus haut.

[8] Ce qui d'ailleurs nous paraît normal en considérant que, dans l'institution italienne, le *théorème de Thalès* est énoncé d'une manière générale.

Les *derniers changements* des programmes français semble faire écho au fait que, dans l'institution italienne, l'objet *transformations géométriques* n'a pas réussi à s'intégrer convenablement aux autres objets géométriques. Cette coïncidence relance le débat sur l'enseignement de la géométrie mais nous croyons qu'un souci pédagogique devrait animer davantage le débat de la noosphère italienne sur l'enseignement de la géométrie, comme un souci académique devrait animer celui de la noosphère française. D'ailleurs, nous avions remarqué que Speranza *insistait* sur la nécessité d'une réflexion pédagogique pour l'enseignement italien tandis que, de leur côté, Houdement et Kuzniak insistent davantage sur la réflexion épistémologique à propos de l'enseignement français.

Dans l'enseignement français la cohérence apparente des programmes à propos des transformations est remise en cause par l'absence de pratique de ces notions comme outils. Dans l'enseignement italien l'introduction des transformations apparaît comme un élément perturbateur du bel édifice euclidien.

Réflexions sur les outils théoriques adoptés

Ce travail porte sur l'enseignement de la géométrie dans le secondaire. Il nous a donc paru nécessaire de préciser les différentes approches de la géométrie à ce niveau scolaire.

En puisant dans la littérature spécialisée, il nous a paru pertinent de comparer les travaux de C. Houdement et A. Kuzniak en France et de F. Speranza en Italie. En prenant en compte leurs réflexions mais en y intégrant l'aspect « rapport institutionnel à la géométrie », nous avons identifié ce que nous avons appelé des « attitudes » face à la géométrie : *elles décrivent non seulement l'activité de l'élève mais aussi ce que l'on attend de lui.*

Nous avons donc créé des outils théoriques qui convenaient mieux à notre problématique. Toutefois, aujourd'hui, nous croyons qu'il faudrait les préciser mieux : le terme *attitude* évoque plutôt l'aspect cognitif alors qu'en le définissant, nous prenons aussi en compte l'aspect institutionnel. D'autre part, la signification que la perception, l'expérience et la déduction acquièrent en passant d'une attitude à l'autre est fondamentale : ce point mérite également d'être précisé.

De plus, nous n'avons retenu que les travaux en relation très étroite avec notre projet. Une confrontation plus large serait maintenant nécessaire. Il resterait notamment à confronter cette recherche avec d'autres travaux portant sur l'enseignement de la géométrie, au niveau des difficultés dans l'apprentissage de cette discipline.

Pour approfondir l'étude des difficultés repérées, il faudrait aussi adopter un point de vue cognitif, ce qui reste à faire. Le matériel rassemblé peut donner quelques pistes et servir de point de départ à de nouvelles recherches, en prenant en considération quelques phénomènes simplement signalés dans notre travail.

Les diverses « attitudes » se repèrent à travers les *types* de preuves utilisés ou sollicités. C'est pourquoi nous avons eu recours à la théorie de N. Balacheff à propos de la *preuve*. L'auteur a identifié des sous-types de preuves que l'on peut reconnaître dans la genèse cognitive de la *démonstration*.
Or, dans notre travail, nous avons été amenée à adapter les catégories proposées par Balacheff car nous avons constaté que sa nomenclature ne nous permettait pas de classer les discours de quelques élèves observés (surtout italiens) lors de la phase expérimentale.
D'ailleurs, les problèmes proposés aux élèves observés demandent la construction d'enchaînements déductifs assez longs et articulés, ce qui nous a souvent empêchée d'établir une hiérarchie rigoureuse des types de preuves qu'ils fournissent pour justifier leurs procédures de résolution. Cela nous amène à nous questionner encore sur la signification à attribuer à la *démonstration* dans l'enseignement secondaire. Comme Balacheff le précise, le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles se fonde sur l'interaction de trois *pôles* : le pôle des connaissances, le pôle langagier et le pôle de validation. Pour faire évoluer l'apprenant vers les preuves intellectuelles, comment prendre en compte simultanément ces trois pôles ? Quelles méthodes pédagogiques peut-on proposer pour que l'approche de la démonstration ne porte pas seulement sur la rédaction mais aussi sur la recherche heuristique dans la résolution d'un problème de géométrie ?
En didactique des mathématiques, il existe une littérature abondante à propos de l'approche de la démonstration. Ainsi un travail de synthèse serait-il actuellement nécessaire pour compléter notre travail et envisager quelques réponses possibles.

Pour ce qui est de la théorie de Chevallard, l'analyse praxéologique nous a posé quelques problèmes : la notion de *technique* est difficile à utiliser pour analyser les productions des élèves en géométrie dans la mesure où ces derniers mélangent le recours aux techniques perceptives et mathématiques et changent de technique y compris au cours de la réalisation d'une même tâche. C'est encore plus vrai quand les questions posées ne sont pas complètement fermées au niveau de la méthode et laissent un peu d'initiative aux élèves.

La notion même de *type* de tâche serait à préciser. Nous avons plutôt eu recours à celle de *genre* de tâche,

même si un verbe n'a pas suffi à les caractériser : une spécification liée au domaine était nécessaire. Nous avons été amenée à considérer dans l'expérimentation des spécifications de ces genres de tâches qui les rapprochent des types de tâches. Cependant, quand un énoncé est ouvert, une question ne peut se référer qu'à la notion de genre de tâche ; ce sera alors à l'élève de découper en différents types de tâches, leur articulation pouvant dépendre de la démarche de résolution adoptée.

Ces réflexions nous conduisent à nous poser de nouvelles questions.

- Un outil théorique peut-il avoir une validité universelle, ou ne dépend-il pas du cadre mathématique pour lequel il a été élaboré ? Peut-il être décontextualisé ?
- Dans une perspective internationale où les échanges entre didacticiens sont de plus en plus favorisés, une problématique didactique a-t-elle la même valeur pour tous ?
- Autrement dit, le développement d'une problématique et d'un cadre théorique demeure-t-il culturellement connoté ?

Ces questions que nous nous posons ici apparaissent déjà en filigrane dans notre travail, par les adaptations, que nous avons dû faire, des cadres théoriques utilisés. C'est l'étude du fonctionnement des deux systèmes d'enseignement qui a révélé la nécessité de ces adaptations.

Dans une dimension européenne (voire internationale) où les échanges entre les didacticiens des divers pays sont de plus en plus favorisés, nous pensons avoir apporté notre **modeste** contribution à ce débat. Au cours de ce travail, nous avons tenté d'ouvrir quelques pistes pour que ce débat soit de plus en plus constructif. En ce sens, la question de départ reste ouverte mais, cette fois, en dirigeant notre regard sur l'**enseignant** :

Quel peut être actuellement l'enseignement de la géométrie au niveau du second degré ?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ici, nous n'indiquons que les ouvrages cités explicitement dans le corps du manuscrit.

[1] Arsac G. (1999), *Variations et variables de la démonstration géométrique*, RDM, n.57, 19/3, La Pensée Sauvage Édition

[2] Arsac G. et alii (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presse Universitaire de Lyon, I.R.E.M.

[3] Balacheff N. (1987), *Processus de preuve et situations de validation*, Educational Studies en Mathematics, n.18

[4] Balacheff N. (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*, Thèse d'État, Université Joseph Fourier, Institut National Polytechnique, Grenoble

[5] Berthelot R. et Salin M. H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, thèse, Université de Bordeaux 1, 1992

[6] Bkouche R. (1997), *Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie*, REPERES-IREM, n.26, janvier 1997

[7] Bolletta R. (1988), *Preparazione matematica in Italia al termine della Scuola Media*. Rapporto dell'indagine VAMIO, I quaderni di Villa Falconieri, CEDE Frascati

[8] Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B., *Mathématiques Pythagore 2e*, Hatier 1994

[9] Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B., *Mathématiques Pythagore 3e*, Hatier 1993

[10] Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B., *Mathématiques Pythagore 4e*, Hatier 1992

[11] Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B., *Mathématiques Pythagore 5e*, Hatier 1991

[12] Bonnefond G., Daviaud D., Revranche B., *Mathématiques Pythagore 6e*, Hatier 1990

[13] Bovio E., Manzone Bertone L., Geometria Sperimentale, Lattes 1987

[14] Castelnuovo E. (1977), *L'enseignement des mathématiques*, Educational Studies in Mathematics, n.8

[15] Cateni L., Fortini R., Bernardi C., Il nuovo pensiero geometrico 1 per il biennio del liceo scientifico, Le Monnier 1997

[16] Celi, V. (1997), *Comment des élèves de Troisième utilisent-ils leurs connaissances pour justifier l'égalité des aires de polygones de forme différente ?* , Mémoire de D.E.A. en Didactique des Mathématiques, Université Paris 7

[17] Chevallard Y. (1989), *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel* (Séminaire de Didactique des Mathématique et de l'Informatique, LSD-IMAG, Institut Fourier, Equipe de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, Année 1988-1989, Grenoble)

[18] Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage

[19] Chevallard Y. (1992), *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, RDM, vol.12/1.

[20] Chevallard Y. (1998), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique*, dans Actes de l'Université d'été, 4-11 juillet 1998, La Rochelle – Charentes-Maritimes, édition coordonnée par Noirfalise R., Université Pascal Blaise, IREM de Clermont-Ferrand

[21] Choquet G. (1964), *L'enseignement* de la *Géométrie*, Hermann, Paris

[22] Cousin-Fauconnet A., (1995), *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin

[23] Crespina E., Menghini M., Percario L. (1995), *Geometria "tradizionale" e geometria "delle trasformazioni" : itinerari a confronto*, dans *Atti del 17° Convegno UMI-CIIM*, Latina 27-29 ottobre 1994, supplément à NUM, n. 8-9

[24] Delord R., Terracher P. H. Vinrich G., *Mathématiques 3e*, Hachette 1993

[25] Delord R., Terracher P. H. Vinrich G., *Mathématiques 4e*, Hachette 1992

[26] Delord R., Vinrich G., *Mathématiques 5e*, Hachette 1991

[27] Delord R., Vinrich G., *Mathématiques 6e*, Hachette 1990

[28] Dieudonné J. (1964), *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris

[29] Douady R. (1992), *Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement*, REPERES – IREM, n. 6, janvier 1992

[30] Galuzzi M. (1998), *On the evolution and underlying ideas of geometry textbooks in Italy*, dans Mammana C., Villani V. (coordonné par), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI study, Kluwer Academic Publishers

[31] Gonseth F. (1936), *Les Mathématiques et la Réalité*, Librairie Scientifique et technique Albert Blanchard

[32] *Grille d'analyse des manuels scolaires de mathématique*, 3e version, novembre 1977, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

[33] Houdement C., Kuzniak A. (1999), *Géométrie et paradigmes géométriques*, Petit x, n.51

[34] J. Houdebine (1998), dans Les Actes du Colloque *Produire et lire des textes de démonstration*, Rennes 23 et 24 janvier 1998, IRMAR

[35] Krygowska, Z. (1969), *Le texte mathématique dans l'enseignement*, Educational Study in Mathematics, 2, p. 360-370, Reidel, Dordrecht - Holland

[36] Malara N. A. (1992), *Il libro di testo per la matematica* dans « I libri di testo per la scuola media », a cura di Diega Orlando Cian, Gregoriana Libreria Editrice

[37] Mammana C. (1989), *Il ruolo della geometria*, dans L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate

[38] Mammana C., Villani V. (coordonné par) (1998), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI study, Kluwer Academic Publishers

[39] Maracchia S. (1975), *La matematica come sistema ipotetico-deduttivo, profilo storico*, Felice Le Monnier, Firenze

[40] Maraschini W., Palma M. (coordinato da), MANUMAT 1, Paravia 1994

[41] Maraschini W., Palma M. (coordinato da), MANUMAT 2, Paravia 1994

[42] Marchi M. (1995), *Intuizione e rigore in geometria*, Notiziario dell'Unione Matematica Italiana, supplément au n.8-9, août-septembre 1995

[43] Mariscotti M., Scienze Matematiche per la Scuola Media GEOMETRIA, Petrini Editore 1992

[44] *Mathématiques, classe de 6e, 5e, 4e, 3e*, Ministère de L'Éducation Nationale de l'Enseignement Supérieur de la Recherche, 1994.

[45] *Mathématiques, classe de Seconde...*, Ministère de L'Éducation Nationale de l'Enseignement Supérieur de la Recherche, 1998

[46] *Mathématiques, classes de collèges*, Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, CNDP 1996

[47] Merlo L. (1971), *La matematica moderna nella scuola di secondo grado*, dans Nuova Didattica della Matematica, Associazione Piemonte Italia, Torino 1971

[48] *Perspectives de l'enseignement de la géométrie au XXI siècle*, Document de travail pour une étude ICMI, REPERES- IREM, n. 18, janvier 1995

[49] *Piano di Studio della Scuola Secondaria Superiore e Programmi dei Primi Due Anni. Le proposte della Commissione Brocca*, Studi e Documenti degli Annali della Pubblica Istruzione, Roma 1991

[50] *Programmes des Lycées*, B.O. n° 5, 5 août 1999

[51] *Programmi, orari di insegnamento e prove di esame per la scuola media statale* (D. M. 9 febbraio 1979), Ministero della Pubblica Istruzione, Roma 1994

[52] Robert A. (1988), *Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels*, Cahier de didactique des mathématiques n. 51, Université Paris VII

[53] Robert A. (1995), *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques, I. Géométrie*, Ellipses

[54] Speranza F. (1988), *Salviamo la geometria*, La Matematica e la sua didattica, n.2

[55] Speranza F. (1989), *La razionalizzazione della geometria*, Periodico di Matematiche, n.1

[56] Terracher P. H., Ferachoglou R., *MATH Seconde,* Hachette 1994

[57] Vergnaud, G. (1990), *La théorie des champs conceptuels*, RDM, vol. 10, n. 213

[58] Villani V. (1993), *L'insegnamento della matematica nella scuola italiana oggi : dalle elementari ai bienni delle scuole secondarie superiori*, dans Scuola e Concorsi, marzo 1993

[59] Villani V. (1994), *L'insegnamento della geometria nei nuovi programmi della scuola italiana*, dans L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, n.6, novembre-dicembre 1994

[60] Vitrac B. (2000), *Trois exemples de démonstration*, Les Cahiers de Science et Vie, n. 55, février 2000

[61] Zan R. (1987), *Il libro di testo di matematica nell'opinione degli insegnanti di scuola media...*, Brochure n.195, Università degli Studi di Pisa, Dipartimento di Matematica

UNIVERSITE DE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

Ecole doctorale « Savoir scientifique : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »

Année 2001-2002

ANNEXES de la THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7

SPECIALITE : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée et soutenue publiquement par

Valentina CELI

le 16 décembre 2002

Comparaison de l'enseignement de la géométrie en France et en Italie pour des élèves de onze à seize ans. Effets sur leur formation

Directeurs de thèse : Marie Jeanne PERRIN, François COLMEZ

Jury

Mme Michèle ARTIGUE	Professeur des Universités, Paris 7	Présidente
M. François COLMEZ	Maître de Conférence, Paris 7	Directeur de Thèse
Mme Elisa GALLO	Professeur Associé, Université de Turin	Rapporteur
Mme Colette LABORDE	Professeur des Universités, IUFM Grenoble	Rapporteur
Mme Nicoletta LANCIANO	Professeur, Université de Rome	Examinateur
Mme Marie Jeanne PERRIN	Professeur des Universités, Artois	Directeur de Thèse

Annexes

Annexe 1

A. Le système scolaire italien actuel 5

B. Le système scolaire français actuel 6

Annexe 2

A. Un extrait des textes officiels italiens avant 1979 : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESI 9

B. Un extrait des textes officiels italiens avant le projet *Brocca* : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESS 10

Annexe 3

A. Un extrait des textes officiels italiens actuels : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESI 13

B. Un extrait des textes officiels italiens actuels (le projet *Brocca*) : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESS 15

Annexe 4

A. Un extrait des textes officiels français avant 1996 : les programmes scolaires de mathématiques pour le Collège 19

B. Un extrait des textes officiels français avant 2000 : les programmes scolaires de mathématiques pour la classe de Seconde 23

Annexe 5. Le questionnaire pour les enseignants italiens de l'ESI : un exemplaire rempli 25

Annexe 6. La genèse des énoncés des problèmes pour la partie expérimentale 33

Le « problème » 35

Les problèmes 36

La partie pré–expérimentale 37

La partie expérimentale 46

Annexe 1

A. Le système scolaire italien actuel

B. Le système scolaire français actuel

Le système scolaire italien actuel

ECOLE PRIMAIRE	Durée : Cinq ans Age : 6–11 ans

ECOLE SECONDAIRE INFERIEURE (ESI)	Durée : Trois ans Age : 11–14 ans

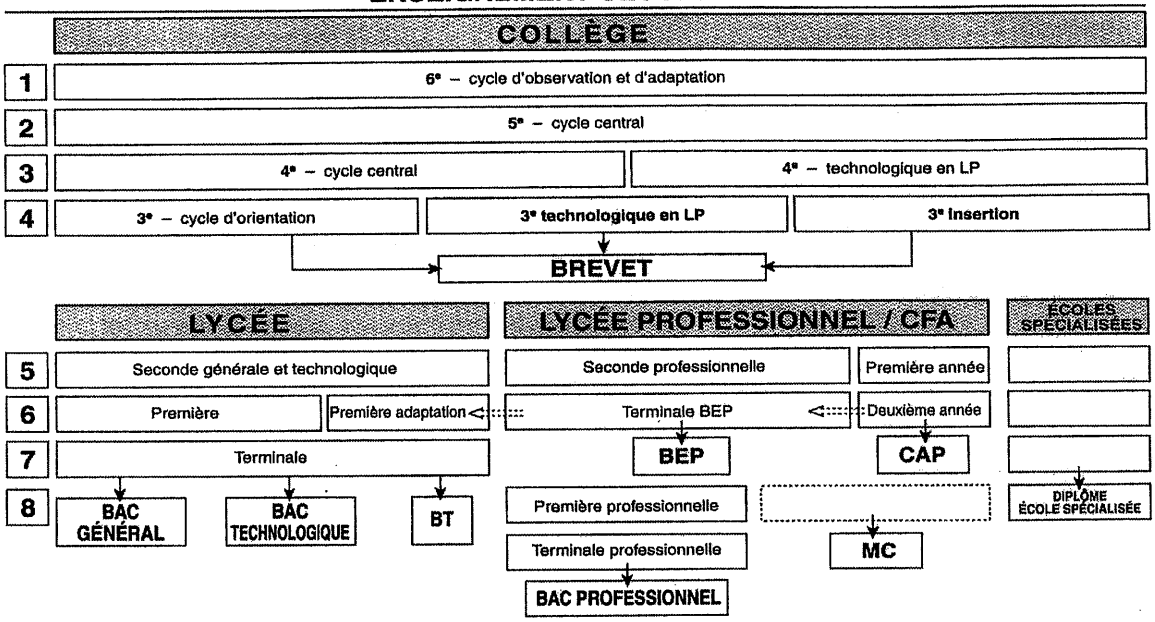
ECOLE SECONDAIRE SUPERIEURE (ESS)	
Lycée avec les filières : Littéraire Scientifique Moderne (Langues vivantes) ***Institut technique*** avec les filières : Commerce Informatique Électronique Mécanique, etc.	Durée : Cinq ans Age : 14–19 ans Accès à toutes les facultés universitaires
Instituts professionnels	Durée : Trois ans (minimum)
Lycée Artistique ***Institut « magistrale »*** (pour la formation des maîtres des écoles primaires)	Durée : Quatre ans Age : 14–19 ans Accès à toutes les facultés universitaires après une année complémentaire

UNIVERSITE

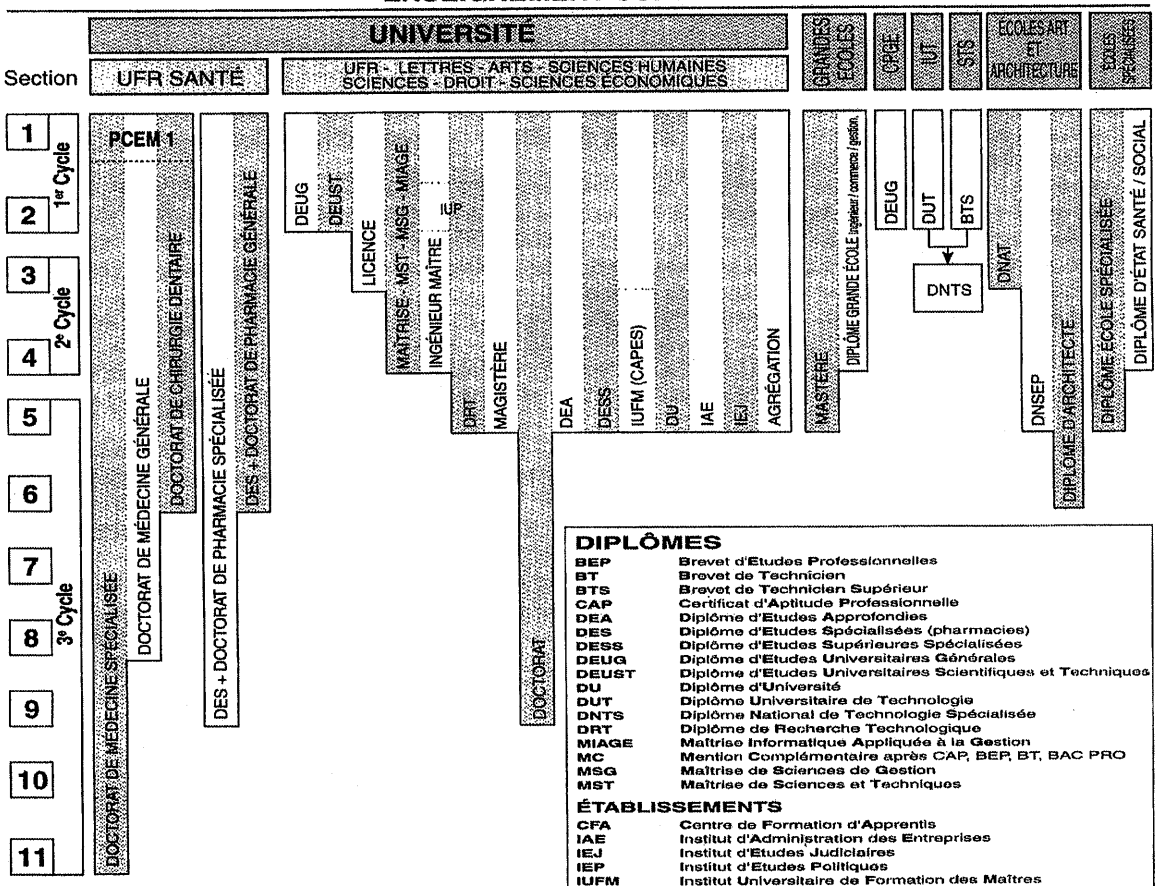
Le système scolaire français actuel

LES FILIÈRES DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE



ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR



DIPLÔMES

BEP	Brevet d'Etudes Professionnelles
BT	Brevet de Technicien
BTS	Brevet de Technicien Supérieur
CAP	Certificat d'Aptitude Professionnelle
DEA	Diplôme d'Etudes Approfondies
DES	Diplôme d'Etudes Spécialisées (pharmacies)
DESS	Diplôme d'Etudes Supérieures Spécialisées
DEUG	Diplôme d'Etudes Universitaires Générales
DEUST	Diplôme d'Etudes Universitaires Scientifiques et Techniques
DU	Diplôme d'Université
DUT	Diplôme Universitaire de Technologie
DNTS	Diplôme National de Technologie Spécialisée
DRT	Diplôme de Recherche Technologique
MIAGE	Maîtrise Informatique Appliquée à la Gestion
MC	Mention Complémentaire après CAP, BEP, BT, BAC PRO
MSG	Maîtrise de Sciences de Gestion
MST	Maîtrise de Sciences et Techniques

ÉTABLISSEMENTS

CFA	Centre de Formation d'Apprentis
IAE	Institut d'Administration des Entreprises
IEJ	Institut d'Etudes Judiciaires
IEP	Institut d'Etudes Politiques
IUFM	Institut Universitaire de Formation des Maîtres
IUP	Institut Universitaire Professionnalisé
IUT	Institut Universitaire Technologique

SECTIONS

CPGE	Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles
PCEM	Premier Cycle des Etudes Médicales
STS	Section de Techniciens Supérieurs
UFR	Unité de Formation et de Recherche

CALENDRIER ET MODALITÉS DES INSCRIPTIONS

Les inscriptions dans l'enseignement supérieur débutent le plus souvent dès le deuxième trimestre. Les dates de retrait des dossiers d'inscription et les procédures varient selon les filières.

NB : Il s'agit des modalités d'inscriptions pour l'entrée en première année. Par ailleurs, il faut noter qu'il existe des dispositions particulières selon les académies.

Annexe 2

A. Un extrait des textes officiels italiens avant 1979 : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESI

B. Un extrait des textes officiels italiens avant le projet *Brocca* : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESS

A. Un extrait des textes officiels italiens avant 1979 : les programmes de mathématiques

Classe I

I numeri naturali. Numerazione decimale e richiami sul sistema metrico decimale. Operazioni dirette e inverse e loro proprietà formali, con particolare riguardo ad esercizi di calcolo rapido e di calcolo mentale.

Le potenze e le loro principali proprietà; nozione di radice.

Uso delle tavole numeriche.

Divisibilità; numeri primi; massimo comune divisore e minimo comune multiplo.

Le frazioni.

Studio delle figure piane a partire da modelli materiali, con particolare riguardo ai triangoli e ai quadrangoli.

Uguaglianza di figure piane.

Angoli e loro misura.

Classe II

Calcolo di radici quadrate.

Numeri razionali.

Semplici esempi di corrispondenze e di funzioni, con particolare riguardo ai rapporti e alla proporzionalità diretta e inversa. Interesse e sconto.

Nozioni sulla equivalenza dei poligoni, verifiche sperimentali e formule per la determinazione delle aree. Teorema di Pitagora e sue applicazioni.

Concetto intuitivo di figure simili. Riduzioni in scala.

Classe III

Rappresentazione grafica di funzioni. Diagrammi.

Numeri relativi. Equazioni a coefficienti numerici di primo grado ad una incognita. Semplici problemi di primo grado risolvibili mediante una sola equazione.

Cerchio. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio.

Le figure geometriche nello spazio. Regole pratiche per la determinazione delle aree delle superfici e dei volumi dei solidi più noti, ricavate da considerazioni di carattere concreto.

B. Un extrait des textes officiels italiens avant le projet *Brocca* : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESS

MATEMATICA

Si leggano gli avvertimenti e suggerimenti generali premessi al programma di matematica del ginnasio superiore. Si tenga conto del particolare valore che deve avere l'insegnamento della matematica nel liceo scientifico.

Nella *I Classe*: Si svolgerà il programma di *algebra* e di *geometria* della IV e V ginnasiale ◉

Nella *II Classe*: Concetto di numero reale. Calcolo dei radicali, cenno sulle potenze con esponenti frazionarii.

Equazioni di 2° grado o ad esse riconducibili. Esempi di sistemi di equazioni di grado superiore al 1° risolubili con equazioni di 1° e 2° grado. Cenni sulle progressioni aritmetiche e geometriche.

Coordinate cartesiane ortogonali nel piano. Funzioni di una variabile e loro rappresentazione grafica; in particolare le funzioni $ax + b$; ax^2; $a : x$. — x.

Proporzioni tra grandezze, similitudini dei triangoli e dei poligoni, teoria della misura, area dei poligoni.

Nella *III Classe*: Equazioni esponenziali e logaritmi. Uso delle tavole logaritmiche ed applicazione al calcolo del valore di espressioni numeriche. Cenni sull'uso del regolo calcolatore.

Rettificazione della circonferenza e quadratura del cerchio.

Rette e piani nello spazio: ortogonalità e parallelismo. Diedri, angoloidi. Poliedri, in particolare prismi e piramidi. Cilindro, cono, sfera.

Nella *IV Classe*: Funzioni goniometriche. Curve dei seni e delle tangenti. Formule per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli argomenti. Qualche semplice equazione goniometrica. Risoluzione dei triangoli rettilinei. La nozione di limite di una funzione. Derivata di una funzione di una variabile e suo significato geometrico e fisico.

Derivate di x^n, di sen x, cos x, tg x. Esercizi di derivazione.

Nozione di equivalenza delle figure solide. Equivalenza di prismi e piramidi. Regole pratiche per la determinazione delle aree e dei volumi dei solidi studiati.

Nella *V Classe*: Massimi e minimi con il metodo delle derivate; applicazioni. Nozione di integrale con qualche applicazione. Disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici. Binomio di Newton.

Nelle ultime quattro classi: applicazioni dell'algebra alla geometria di 1° e 2° grado con relativa discussione.

◉ *IV classe*: ALGEBRA: i numeri razionali relativi e le quattro operazioni fondamentali su di essi. Potenze con esponenti interi relativi. Polinomi (razionali, interi); operazioni su di essi. Prodotti notevoli.

GEOMETRIA: rette, semirette, segmenti. Piani, semipiani, angoli. Triangoli e poligoni piani. Uguaglianza dei triangoli. Rette perpendicolari. Rette parallele. Somma degli angoli interni ed esterni di un poligono. Disuguaglianze tra elementi di un triangolo. Parallelogrammi; loro proprietà e casi particolari.

V classe - ALGEBRA: casi semplici di scomposizione di polinomi in fattori. Frazioni algebriche: calcolo con esse. Equazioni e problemi di primo grado a un'incognita.

GEOMETRIA: circonferenza e cerchio. Mutuo comportamento di rette e circonferenze; cenni sul mutuo comportamento di circonferenze complanari. Angoli nel cerchio (al centro o alla circonferenza). Poligoni regolari. Qualche problema grafico fondamentale. Poligoni equivalenti. Teorema di Pitagora.

Annexe 3

A. **Un extrait des textes officiels italiens actuels : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESI**

B. **Un extrait des textes officiels italiens actuels (le projet *Brocca*) : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESS**

A. Un extrait des textes officiels italiens actuels : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESI

TEMI	CONTENUTI RIFERITI AI TEMI
1) La geometria prima rappresentazione del mondo fisico.	*a)* Dagli oggetti ai concetti geometrici: studio delle figure del piano e dello spazio a partire da modelli materiali. *b)* Lunghezze, aree, volumi, angoli e loro misura. *c)* Semplici problemi di isoperimetria e di equiestensione. Il teorema di Pitagora. *d)* Costruzioni geometriche: uso di riga, squadra, compasso.
2) Insiemi numerici.	*a)* Numeri naturali. Successivi ampliamenti del concetto di numero: dai naturali agli interi relativi: dalle frazioni (come operatori) ai numeri razionali. Rapporti, percentuali. Proporzioni. Rappresentazioni dei numeri sulla retta orientata. *b)* scrittura decimale. Ordine di grandezza. *c)* operazioni dirette e inverse e loro proprietà nei diversi insiemi numerici. Potenza e radice. Multipli e divisori di un numero naturale e comuni a più numeri. Scomposizione in fattori primi. Esercizi di calcolo, esatto e approssimato. Approssimazioni successive come avvio ai numeri reali. Uso ragionato di strumenti di calcolo (ad es. tavole numeriche, calcolatori tascabili, ecc.).
3) Matematica del certo e matematica del probabile.	*a)* Affermazioni del tipo vero/falso e affermazioni di tipo probabilistico. Uso corretto dei connettivi logici (e, o, non): loro interpretazione come operazioni su insiemi e applicazioni ai circuiti elettrici. *b)* Rilevamenti statistici e loro rappresentazione grafica (istogrammi, aerogrammi...); frequenza; medie. *c)* Avvenimenti casuali; nozioni di probabilità e sue applicazioni.
4) Problemi ed equazioni.	*a)* Individuazione di dati e di variabili significative in un problema. Risoluzione mediante ricorso a procedimenti diversi (diagrammi di flusso, impostazione e calcolo di espressioni aritmetiche...). *b)* Lettura, scrittura, uso e trasformazioni di semplici formule. *c)* Semplici equazioni e disequazioni numeriche di primo grado.
5) Il metodo delle coordinate	*a)* Uso del metodo delle coordinate in situazioni concrete; lettura di carte topografiche e geografiche. *b)* Coordinata di un punto della retta: coordinate di un punto del piano. Rappresentazione e studio di semplici figure del piano, ad es. figure poligonali di cui siano assegnate le coordinate dei vertici. *c)* Semplici leggi matematiche ricavate anche dal mondo fisico, economico, ecc. e loro rappresentazione nel piano cartesiano; proporzionalità diretta e inversa, dipendenza quadratica, ecc.
6) Trasformazioni geometriche.	*a)* Isometrie (o congruenze) piane - traslazioni, rotazioni, simmetrie - a partire da esperienze fisiche (movimenti rigidi). Composizioni di isometrie. Figure piane direttamente o inversamente congruenti. *b)* Similitudini piane, in particolare omtetrie, a partire da ingrandimenti e impiccolimenti. Riduzioni in scala. *c)* Osservazione di altre trasformazioni geometriche: ombre prodotte da raggi solari o da altre sorgenti luminose, rappresentazioni prospettiche (fotografie, pittura ecc.), immagini deformate,...
7) Corrispondenze e analogie strutturali.	Richiami, confronti e sintesi dei concetti di relazione, corrispondenza, funzione, legge di composizione incontrati in ambiti diversi. Ricerca e scoperta di analogie di struttura.

Nello svolgimento del programma si terrà presente che una nozione può assumere più chiaro significato se messa a raffronto con altre ad essa parallele o antitetiche: così, per illustrare una proprietà si daranno anche esempi di situazioni in cui essa non vale: ad esempio la numerazione decimale potrà essere pienamente intesa se confrontata con altri sistemi di numerazione.

Il linguaggio degli insiemi potrà essere usato come strumento di chiarificazione, di visione unitaria e di valido aiuto per la formazione di concetti. Si eviterà comunque una trattazione teorica a sé stante, che sarebbe, a questo livello, inopportuna.

Analogamente, grafi e diagrammi di flusso potranno essere utilizzati come un linguaggio espressivo per la schematizzazione di situazioni e per la guida alla risoluzione di problemi.

Lo studio della geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure, che ne renda evidenti le proprietà nell'atto del loro modificarsi; sarà anche opportuno utilizzare materiale e ricorrere al disegno. La geometria dello spazio non sarà limitata a considerazioni su singole figure, ma dovrà altresì educare alla visione spaziale. È in questa concezione dinamica che va inteso anche in tema delle trasformazioni geometriche.

Il metodo delle coordinate con il rappresentare graficamente fenomeni e legami fra variabili, aiuterà a passare da un livello intuitivo ad uno più razionale. Alcune trasformazioni geometriche potranno essere considerate anche per questa via.

L'argomento "proporzioni" non deve essere appesantito imponendo, come nuove, regole che sono implicite nella proprietà delle operazioni aritmetiche, ma deve essere finalizzato alla scoperta delle leggi di proporzionalità ($y = kx$; $xy = k$).

Nella trattazione delle potenze verrà dato particolare risalto alle potenze di 10, per il ruolo che esse hanno nella scrittura decimale dei numeri e, quindi, nella nozione di ordine di grandezza, anche in relazione al sistema metrico decimale. Ove se ne ravvisi l'opportunità, si potrà accennare anche alla legge di accrescimento esponenziale.

Si terrà presente che "risolvere un problema" non significa soltanto applicare regole fisse a situazioni già schematizzate, ma vuol dire anche affrontare problemi allo stato grezzo per cui si chiede all'allievo di farsi carico completo della traduzione in termini matematici.

Nell'ambito di questo lavoro di traduzione si troverà, tra l'altro, una motivazione concreta per la costruzione delle espressioni aritmetiche e per le relative convenzioni di scrittura.

Anche le equazioni e le disequazioni troveranno una loro motivazione nella risoluzione di problemi appropriati. L'insegnante potrà, inoltre, presentare equazioni e disequazioni in forma unificata, utilizzando l'idea di "frase aperta" (enunciato con una o più variabili).

La riflessione sull'uso dei connettivi concorre alla chiarificazione del linguaggio e del pensiero logico.

L'introduzione degli elementi di statistica descrittiva e della nozione di probabilità ha lo scopo di fornire uno strumento fondamentale per l'attività di matematizzazione di notevole valore interdisciplinare. La nozione di probabilità scaturisce sia come naturale conclusione dagli argomenti di statistica sia da semplici esperimenti di estrazioni casuali.

L'insegnante, evitando di presentare una definizione formale di probabilità, avrà cura invece di mettere in guardia gli allievi dai più diffusi fraintendimenti riguardanti sia l'interpretazione dei dati statistici sia l'impiego della probabilità nella previsione degli eventi. Le applicazioni non dovranno oltrepassare il calcolo delle probabilità in situazioni molto semplici, legate a problemi concreti (ad esempio nella genetica, nell'economia, nei giochi).

Il tema "Corrispondenze e analogie strutturali" non darà luogo ad una trattazione a sé stante. Nel corso dei tre anni, tutte le volte che se ne presenti l'occasione, si faranno riconoscere analogie e differenze fra situazioni diverse, come approccio alle idee di relazione e struttura.

Va sconsigliata l'insistenza su aspetti puramente meccanici e mnemonici, e quindi di scarso valore formativo. Si eviterà l'imposizione di regole che potrebbero essere più naturalmente individuate in altri contesti più appropriati. Ad esempio, argomenti come la scomposizione in fattori primi, la ricerca del massimo comune divisore e del minimo comune multiplo, il calcolo di grosse espressioni aritmetiche, l'algoritmo per l'estrazione della radice quadrata, il calcolo letterale avulso da riferimenti concreti, non dovranno avere valore preponderante nell'insegnamento e tanto meno nella valutazione.

B. Un extrait des textes officiels italiens actuels (le projet Brocca) : les programmes scolaires de mathématiques pour l'ESS

tema 1
GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO

1.1. Piano euclideo e sue trasformazioni isometriche. Figure e loro proprietà. Poligoni equiscomponibili; teorema di Pitagora.
1.2. Omotetie e similitudini del piano. Teorema di Talete.
1.3. Piano cartesiano: retta, *parabola, iperbole equilatera.*
1.4. *Coseno e seno degli angoli convessi. Relazione fra lati ed angoli nei triangoli rettangoli.*
1.5. Esempi significativi di trasformazioni geometriche nello spazio. Individuazione di simmetrie in particolari solidi geometrici.

Commento ai singoli temi

tema 1: GEOMETRIA DEL PIANO E DELLO SPAZIO

Lo studio della geometria nel biennio ha la finalità principale di condurre progressivamente lo studente dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale e rappresenta come tale una guida privilegiata alla consapevolezza argomentativa. A ciò il docente può pervenire adottando un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive apprese dallo studente nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni; è tuttavia necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento.

Al docente compete poi l'impegno di avviare la fase euristica su processi di assiomatizzazione partendo da semplici situazioni assunte nei vari campi. Ciò nella prospettiva di familiarizzare gli studenti col metodo ipotetico-deduttivo e pervenire negli eventuali studi successivi alla costruzione di un sistema di assiomi per la geometria elementare. A tal fine è bene programmare, in un quadro di riferimento organico, una scelta delle proprietà (teoremi) delle figure piane da dimostrare, utilizzando la geometria delle trasformazioni oppure seguendo un percorso più tradizionale.

Un traguardo importante dello studio della geometria è il piano cartesiano, come modello del piano euclideo. Con la sua introduzione sono disponibili, per la risoluzione dei problemi geometrici, sia il metodo della geometria classica che quello della geometria analitica, e lo studente va stimolato ad usare l'uno o l'altro in relazione alla naturalezza, alla espressività e alla semplicità che essi offrono nel caso particolare in esame. *La rappresentazione della parabola e dell'iperbole equilatera va effettuata rispetto a sistemi di riferimento scelti opportunamente.*

Il coseno e il seno di un angolo sono introdotti, limitatamente agli angoli convessi, in relazione allo studio delle proprietà dei triangoli e per le necessità proprie delle altre scienze; lo studio delle funzioni circolari è rinviato al periodo successivo.

Gli elementi di geometria dello spazio hanno lo scopo di alimentare e sviluppare l'intuizione spaziale. E' in facoltà del docente presentare prima la geometria piana e poi quella dello spazio, oppure fondere, in relazione agli argomenti comuni, le due esposizioni.

Annexe 4

A. **Un extrait des textes officiels français avant 1996 : les programmes scolaires de mathématiques pour le Collège**

B. **Un extrait des textes officiels français avant 2000 : les programmes scolaires de mathématiques pour la classe de Seconde**

A. Un extrait des textes officiels français avant 1996 : les programmes scolaires de mathématiques pour le Collège

La classe de Sixième

EXPLICITATION DES CONNAISSANCES, DES MÉTHODES DES COMPÉTENCES EXIGIBLES DES ÉLÈVES

Il est rappelé que le professeur a toute liberté dans l'organisation de son enseignement à condition que soient atteints les objectifs visés par les programmes.

Remarque préliminaire

Les travaux mathématiques seront l'occasion de familiariser les élèves avec un nombre limité de notations courantes, telles que l'appartenance ou la non-appartenance d'un point M à une droite D ($M \in E$, $M \notin D$), la longueur $\underline{AB}$ d'un segment d'extrémités A et B, l'angle $\widehat{AOB}$, et éventuellement le segment [AB], la droite (AB).

Les symboles $\subset$, $\cap$, $\cup$ sont hors programme, ainsi que toute notion sur les ensembles et les relations.

1. TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES

De l'école élémentaire, les élèves apportent une expérience des figures les plus usuelles. *L'objectif fondamental en Sixième est encore la description et le tracé de figures simples.* Au terme d'un processus progressif, le champ des figures étudiées est enrichi, le vocabulaire est précisé et les connaissances sont réorganisées à l'aide de nouveaux outils, notamment *la symétrie orthogonale par rapport à une droite* (symétrie axiale).

Les travaux géométriques prennent appui sur *l'usage des instruments de dessin et de mesure* et sont conduits en liaison étroite avec l'étude des autres rubriques. Ils constituent en particulier le support d'activités numériques conjointes (grandeurs et mesures) ou de notions en cours d'acquisition (repérage, proportionnalité).

1.1. **Figures planes et aires planes**	**Compétences exigibles des élèves**
1.1.1. *Reproduction de figures planes simples*	
Il est conseillé l'usage du papier calque, du papier quadrillé, du papier «pointé» à réseau triangulaire.	
Il s'agit de développer les connaissances du cours moyen en vue de:	Sur papier blanc et sans méthode imposée: Reporter une longueur; Reproduire un angle, un arc de cercle de centre donné; Tracer, par un point donné, la perpendiculaire ou la parallèle à une droite donnée.
Compléter et consolider l'usage d'instruments de mesure ou de dessin (règle graduée ou non, compas, équerre, rapporteur); Tirer parti des travaux pour préciser le vocabulaire, en particulier celui concernant les figures planes; Reprendre les tracés fondamentaux (droites perpendiculaires, droites parallèles).	Utiliser correctement, dans une situation donnée, le vocabulaire suivant: Droite, cercle, disque, arc de cercle, angle, droites perpendiculaires, droites parallèles, demi-droite, segment, milieu.
Les travaux de reproduction porteront sur la réalisation: Soit d'une copie conforme d'un modèle concret ou d'un dessin; Soit d'un dessin à partir de données, et notamment de données numériques. On profitera de ces travaux pour introduire prudemment l'usage de lettres pour désigner les points d'une figure. Les travaux développeront les capacités à choisir les instruments adaptés à une situation donnée. Ils faciliteront aussi la mise en place de courtes séquences déductives s'appuyant, par exemple, sur la définition du cercle et les propriétés d'orthogonalité et de parallélisme. On prendra garde, à ce sujet, de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme des évidences.	Décrire, tracer et reproduire sur papier blanc les figures suivantes: triangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle, losange, rectangle, carré, cercle. Reconnaître ces figures dans un environnement plus complexe.
1.1.2. *Comparaison d'aires planes*	
Il s'agit de déterminer des aires à l'aide, soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements. Des travaux permettront de retenir, sous forme d'images mentales, le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme, et de mettre en place des calculs sur les aires à partir de l'aire du rectangle.	Evaluer, à partir du rectangle, l'aire d'un triangle rectangle.

1.2. **Parallélépipède rectangle**	
L'objectif est d'apprendre à voir dans l'espace. L'usage d'une perspective (cavalière) et la fabrication d'un patron sont complémentaires; à l'aide du patron, le lien sera établi avec le rectangle. Des travaux permettront de retenir, sous la forme d'images mentales, des situations d'orthogonalité et de parallélisme extraites du parallélépipède rectangle en tant qu'objet de l'espace.	Représenter un parallélépipède rectangle en perspective. Décrire, fabriquer un parallélépipède rectangle de dimensions données.

1.3. **Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite**	
1.3.1. *Construction d'images, mise en évidence de conservations*	
L'effort portera d'abord sur un travail expérimental (pliage, papier calque) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles se dégageront de façon progressive les propriétés conservées par la symétrie axiale, ces propriétés prenant alors naturellement le relais dans les programmes de constructions. La symétrie axiale n'a ainsi, à aucun moment, à être présentée comme une application du plan dans lui-même. Suivant les cas, elle apparaîtra sous la forme: De l'action d'une symétrie axiale donnée sur une figure; De la présence d'un axe de symétrie dans une figure, c'est-à-dire d'une symétrie axiale la conservant.	Construire le symétrique d'un point, d'une droite, d'un segment, d'une ligne polygonale, d'un cercle, que l'axe de la symétrie coupe ou non la figure. Tracer le ou les axes de symétrie des figures suivantes: triangle isocèle, triangle équilatéral, losange, rectangle, carré.
1.3.2. *Construction de figures symétriques élémentaires et énoncé de leurs propriétés*	
Ces constructions partent de notions acquises à l'école élémentaire et aboutissent à des définitions plus élaborées et plus efficaces: par exemple, on reconnaît qu'un triangle est isocèle à ce qu'il possède un axe de symétrie. Des travaux permettront, sous la direction du professeur, de mettre en œuvre de brèves séquences déductives: ici aussi, on prendra garde de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes.	Construire, par une méthode non imposée et sur papier blanc: la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle. Utiliser la symétrie axiale pour construire: un triangle isocèle, un losange, un rectangle, un carré. Relier les propriétés de la symétrie axiale à celles des figures du programme.

A travers les problèmes de construction d'une figure, les élèves seront initiés à quelques propriétés la caractérisant, mais ces propriétés ne sont pas exigibles. En outre, elles seront formulées à l'aide de deux énoncés séparés, par exemple: dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires et ont même milieu; si deux segments de même milieu sont perpendiculaires, ce sont les diagonales d'un losange. La locution «propriété caractéristique» n'a pas à être employée.

La classe de Cinquième

COMPLÉMENTS

EXPLICITATION DES CONNAISSANCES, DES MÉTHODES ET DES COMPÉTENCES EXIGIBLES DES ÉLÈVES

Remarques préliminaires

Les travaux mathématiques de la classe de Cinquième sont étroitement liés à ceux de la classe de Sixième. Les commentaires des programmes de ces deux classes sont indissociables.

Les notations utilisées sont celles signalées en Sixième, ainsi que les symboles de parallélisme et d'orthogonalité. Les symboles $\subset$, $\cap$, $\cup$ sont hors programme, ainsi que toute notion sur les ensembles et les relations.

1. TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES

L'objectif fondamental demeure *la description et la représentation d'objets géométriques usuels du plan et de l'espace.*

Dans le plan, l'étude des figures se poursuit. Les outils déjà utilisés en Sixième, notamment *la symétrie orthogonale*, sont mis en œuvre. De nouveaux outils, en particulier *la symétrie centrale*, enrichissent et réorganisent les connaissances.

Dans l'espace, les études expérimentales s'amplifient. Elles fournissent un terrain pour dégager quelques propriétés élémentaires du parallélisme et de l'orthogonalité.

	Compétences exigibles des élèves
1.1. Prismes droits et cylindre de révolution	
Parallélisme et orthogonalité	
Comme en Sixième, l'objectif est d'apprendre à voir dans l'espace et d'apprendre à calculer des aires, des volumes. L'usage d'une perspective (cavalière) et la fabrication d'un patron sont complémentaires. Des activités sur le parallélépipède rectangle ont permis de retenir, sous la forme d'images mentales, des situations de parallélisme et d'orthogonalité. Ce travail se poursuit grâce à l'étude de quelques autres prismes droits et du cylindre de révolution. L'expérience ainsi acquise permettra de dégager et de mettre en œuvre sur des exemples simples les propriétés du parallélisme et de l'orthogonalité dans l'espace, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible des élèves.	Représenter à main levée et décrire un prisme droit dont la base est un triangle ou un parallélogramme, un cylindre de révolution. Fabriquer un prisme droit triangulaire ou un cylindre de révolution de dimensions données.
1.2. Dans le plan, transformation de figures par symétrie centrale	
1.2.1. *Construction d'images. Mise en évidence de conservations, caractérisations angulaires du parallélisme. Parallélogramme*	
Comme en Sixième, l'effort portera sur un travail expérimental (demi-tour, pliages...) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles se dégageront de façon progressive les propriétés conservées par symétrie centrale, ces propriétés prenant alors le relais dans les programmes de construction.	Construire le symétrique: d'un point, d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment, d'une ligne polygonale, d'un cercle.
La symétrie centrale n'a à aucun moment à être présentée comme une application du plan dans lui-même. Suivant les cas, elle apparaîtra sous la forme: De l'action d'une symétrie centrale donnée sur une figure; De la présence d'un centre de symétrie dans une figure.	Reconnaître dans une figure simple un centre de symétrie, un axe de symétrie.
Les élèves doivent connaître les propriétés élémentaires de la symétrie centrale: Conservation des distances, de l'alignement, des angles; Parallélisme d'une droite et de son image. Ces propriétés sont à relier à la caractérisation du parallélogramme, aux caractérisations angulaires du parallélisme (angles formés par deux droites parallèles et une sécante); sur ces points aucune démonstration n'est exigible des élèves. Elles permettent aussi de relier l'aire du triangle et celle du parallélogramme. Pour les angles, on utilisera le vocabulaire suivant: Angles complémentaires, angles supplémentaires, angles adjacents, angles opposés par le sommet, angles alternes-internes, angles correspondants.	Relier les propriétés du parallélogramme à celles de la symétrie centrale. Utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux droites parallèles et une sécante. Évaluer à partir de l'aire du rectangle l'aire d'un parallélogramme, l'aire d'un triangle.
1.2.2 *Figures simples ayant centre(s) ou axe(s) de symétrie*	
Les problèmes de construction consolideront les connaissances relatives aux quadrilatères usuels. Ils permettront de mettre en œuvre droites et cercles et de revenir sur la symétrie axiale et les axes de symétrie. L'initiation à la caractérisation de figures se poursuit, mais une propriété caractéristique sera toujours formulée à l'aide de deux énoncés séparés (par exemple: si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu; si dans un quadrilatère les diagonales ont le même milieu, alors le quadrilatère est un parallélogramme).	Reproduire, sur papier quadrillé et sur papier blanc, un parallélogramme donné (et notamment les cas particuliers du rectangle, du losange, du carré) en utilisant les propriétés relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles. Utiliser les propriétés (côtés et diagonales, angles, éléments de symétrie): Du parallélogramme; Du rectangle; Du losange; Du carré.
1.3. Triangle	
Les activités se placeront dans le cadre des différentes rubriques du programme.	Utiliser, dans une situation donnée, la somme des angles d'un triangle, les angles d'un triangle équilatéral ou d'un triangle isocèle.
Elles permettront d'insister sur les notions d'angle et d'aire.	Tracer le cercle circonscrit à un triangle.
Le recours aux «cas d'égalité» des triangles pour l'étude des figures géométriques est exclu. Les diverses activités de géométrie plane habitueront les élèves à expérimenter et à conjecturer. Elles permettront la mise en œuvre de brèves séquences déductives mettant en jeu les outils mathématiques du programme. On prendra garde de ne pas demander aux élèves de prouver des propriétés perçues comme évidentes.	Tracer un triangle connaissant: Les longueurs des trois côtés; Les longueurs des deux côtés et l'angle compris entre ces côtés; La longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents.

La classe de Quatrième

COMPLÉMENTS

EXPLICITATION DES CONNAISSANCES DES MÉTHODES ET DES CAPACITÉS EXIGIBLES DES ÉLÈVES

Remarques préliminaires

Les travaux mathématiques de la classe de Quatrième prolongent ceux de Sixième et de Cinquième:

Ils mettent en œuvre et consolident, sans reconstruction systématique et à propos de situations nouvelles, les notions et outils mathématiques antérieurement étudiés;

Ils accentuent progressivement, sans rupture avec l'esprit des classes antérieures, l'entraînement au raisonnement déductif, tout en évitant les exigences prématurées de formulation; en particulier, les propriétés caractéristiques seront formulées à l'aide de deux énoncés séparés.

Les commentaires de ces trois classes sont indissociables; ils se réfèrent aux lignes directrices définies en avant-propos des programmes (Livre de poche des collèges, p. 77 à 82). Dans le cadre du programme, le professeur a toute liberté pour l'organisation de son enseignement. En particulier il lui revient de déterminer selon le niveau de sa classe les résultats qui seront démontrés et ceux qui seront admis.

Les notations utilisées sont celles signalées en Cinquième, auxquelles s'ajoutent la notation du cosinus d'un angle aigu, celle du vecteur, et le symbole ≈ pour désigner une approximation d'un nombre. Les symboles ⊂, ∪, ∩ sont hors programme, ainsi que toute notion sur les ensembles et les relations.

Les travaux numériques nécessitent l'emploi d'une calculatrice scientifique. L'utilisation de l'ordinateur pourra accompagner utilement les activités géométriques, numériques et graphiques.

Pour chacune des trois rubriques du programme:

Les objectifs figurent en bandeau;

Dans la colonne de gauche sont fixés les contenus et les limites du programme, ainsi que l'orientation des activités;

Dans la colonne de droite sont fixées les capacités exigibles des élèves.

1. Travaux géométriques

La *description* et la *représentation d'objets géométriques* usuels du plan et de l'espace, le *calcul de grandeurs* attachées à ces objets, demeurent des objectifs fondamentaux.

Dans le plan, les travaux font appel aux figures usuelles (triangle, cercle, quadrilatères particuliers, polygones réguliers). Les propriétés caractéristiques usuelles du losange, du rectangle, du carré et du parallélogramme sont exigibles. De nouveaux outils, notamment les projections, le théorème de Pythagore, les translations, viennent s'ajouter aux outils des classes antérieures; à ces enrichissements correspond un développement des capacités de découverte et de démonstration.

Dans l'espace, les travaux sur la *sphère* et sur les *solides étudiés en Sixième et Cinquième* exploitent largement les résultats de géométrie plane.

1. Dans le plan, projection sur une droite selon une direction

Conservation du milieu par projection; configurations triangulaires prenant appui sur cette propriété.

Projection orthogonale; cosinus d'un angle comme opérateur de projection orthogonale.

Les projections n'ont pas à être présentées comme des applications du plan sur une droite; elles n'interviennent qu'à partir de figures.

Des activités expérimentales permettront de dégager la propriété de conservation du milieu par projection, qui pourra être admise.

Construire le projeté d'un point, d'un segment.

Savoir utiliser dans une situation donnée:

La propriété de conservation du milieu par projection;

Les propriétés du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle.

Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment.

Quant à la proportionnalité des longueurs entre segments et projetés, elle sera expérimentée dans le seul cas de la projection orthogonale et conduira à la définition du cosinus d'un angle aigu comme coefficient de proportionnalité.

On n'évoquera pas d'autre unité d'angle que le degré décimal.

Savoir utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle et les longueurs des deux côtés adjacents.

Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée:

Du cosinus d'un angle aigu donné;
De l'angle aigu de cosinus donné.

2. Problèmes de plus courte distance: inégalité triangulaire; distance d'un point à une droite

Les activités se placeront dans le cadre des différentes rubriques du programme.

La pratique des tracés de figures mettant en jeu des triangles ou des cercles montrera l'intérêt de l'inégalité triangulaire et permettra de préciser dans quel cas on obtient l'égalité.

La distance d'un point à une droite sera utilisée en particulier dans des calculs d'aires planes. On étudiera l'ensemble des points situés à une distance imposée d'une droite donnée.

Connaître et utiliser la propriété pour chaque côté d'un triangle d'être inférieur à la somme des deux autres.

Connaître le régionnement du plan par la médiatrice.

Reconnaître la position relative d'une droite et d'un cercle. Connaître l'axe de symétrie de la figure formée par une droite et un cercle.

Tracer, reconnaître la tangente à un cercle en l'un de ses points.

3. Triangle: médianes et centre de gravité, hauteurs et orthocentre, bissectrices et cercle inscrit

On évitera de donner à ce paragraphe une place excessive.

Triangle rectangle: cercle circonscrit, propriété de Pythagore et sa réciproque.

Les relations métriques dans le triangle rectangle autres que celles mentionnées ci-contre ne sont pas au programme.

Tracer les bissectrices, les hauteurs, les médianes, les médiatrices d'un triangle et savoir qu'elles sont concourantes.

Caractériser le triangle rectangle par:

La médiane relative à l'hypoténuse;
La propriété de Pythagore.

Calculer, en faisant éventuellement usage de la touche ☑ de la calculatrice, un côté d'un triangle rectangle à partir de la donnée des deux autres côtés.

Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.

4. Sphère: section par un plan, aire et volume

Les travaux s'appuieront entre autres sur des activités relevant d'autres disciplines, en particulier la géographie (repérage sur la Terre par méridien et parallèle).

Ils mettront en œuvre les outils de géométrie plane et permettront de revenir sur des propriétés de parallélisme et d'orthogonalité dans l'espace.

Connaître la nature de la section d'une sphère par un plan et la position de son centre.

Savoir calculer l'aire et le volume de la sphère et des solides vus en Sixième et Cinquième.

5. Dans le plan, transformation de figures par translation ou rotation; translation et vecteur; polygones réguliers

Pour l'ensemble de cette rubrique, il s'agit d'un travail d'initiation; l'étude de ces notions sera poursuivie en Troisième.

a) Comme en Sixième et Cinquième, les activités porteront d'abord sur un travail expérimental permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures à partir desquelles se dégageront de façon progressive les propriétés conservées par translation ou rotation, propriétés qu'on exploitera dans des tracés.

La translation et la rotation n'ont à aucun moment à être présentées comme des applications du plan dans lui-même. Suivant les cas, elles apparaîtront dans leur action sur une figure, ou comme laissant invariante une figure.

La translation sera reliée au parallélogramme.

b) Les vecteurs sont introduits «naïvement» par direction, sens, longueur. A toute translation, on associe son vecteur. Si, dans une translation, A' est l'image de A et B' celle de B, on écrit: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

c) Les activités sur les polygones réguliers porteront sur le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone et éventuellement l'octogone. On décrira notamment les symétries et les rotations laissant invariant un triangle équilatéral, un carré.

Construire l'image, par une translation ou une rotation donnée:

D'un point, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle.

Construire un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier connaissant son centre et un de ses sommets.

La classe de Troisième

EXPLICITATION DES CONNAISSANCES, DES MÉTHODES ET DES CAPACITÉS EXIGIBLES DES ÉLÈVES

Remarques préliminaires

Les commentaires des quatre classes des collèges sont indissociables; ils se réfèrent aux lignes directrices définies en avant-propos des programmes *(cf. livre de poche des collèges, p. 77 à 82).*

Dans le cadre du programme, le professeur a toute liberté pour l'organisation de son enseignement. En particulier, il lui revient de déterminer selon le niveau de sa classe les résultats qui seront démontrés et ceux qui seront admis.

L'approfondissement des notions déjà acquises, l'entraînement au raisonnement déductif sont conduits dans l'esprit des classes antérieures, sans reconstruction systématique et à propos de situations nouvelles, de façon à développer les capacités de découverte et de conjecture autant que de démonstration. On entraînera les élèves à rédiger, mais on évitera les exigences prématurées de formulation; en particulier les propriétés caractéristiques seront encore exprimées à l'aide de deux énoncés séparés.

Les notations utilisées sont celles signalées en Quatrième, auxquelles s'ajoutent la notation du sinus et de la tangente d'un angle aigu. Les symboles $\subset$, $\cup$, $\cap$ sont hors programme, ainsi que toute la notion sur les ensembles et les relations. Sont également exclues la notation «o» des lois de composition, la notation de la valeur absolue et celles relatives aux intervalles de réels.

Les travaux numériques nécessitent l'emploi d'une calculatrice scientifique. L'usage de l'ordinateur pourra accompagner utilement les activités géométriques, numériques et graphiques.

Pour chacune des trois rubriques du programme:

Les objectifs figurent en bandeau;

Dans la colonne de droite sont fixées les capacités exigibles, c'est-à-dire les connaissances et les savoir-faire qu'on demande à l'élève d'avoir assimilés et d'être capable d'exploiter avec ce que cela comporte d'utilisation d'acquis des classes antérieures;

Dans la colonne de gauche sont fixés les contenus et les limites du programme, ainsi que l'orientation des activités; celles-ci ne sauraient se limiter aux seuls points évoqués dans la colonne de droite.

1. Travaux géométriques

La *description* et la *représentation d'objets géométriques* usuels du plan et de l'espace, le *calcul de grandeurs* attachées à ces objets demeurent des objectifs fondamentaux.

Dans le plan, les travaux font appel aux figures usuelles (cercle, triangle, quadrilatères particuliers, polygones réguliers) et à leur transformation par symétries, translation, rotation.

Avec les travaux sur les solides, les outils acquis, comme le théorème de Pythagore, ou nouveaux, comme le théorème de Thalès, sont mis en œuvre à la fois dans le plan et dans l'espace. La recherche de sections planes d'un solide doit se limiter à des exemples très simples.

1. *a) Enoncé de Thalès relatif au triangle, application à des problèmes de construction.*	
Des activités expérimentales, reliées à la pratique de la projection, permettront de dégager le théorème de Thalès relatif au triangle et sa réciproque: cette réciproque sera formulée en précisant dans l'énoncé les positions relatives des points. Des activités de construction sur droites graduées contribueront à éclairer la correspondance entre nombres et points, construire les $\frac{9}{7}$ d'un segment, placer sur une droite graduée le point d'abscisse $-\frac{2}{3}$...	Connaître et utiliser dans une situation donnée le théorème de Thalès relatif au triangle: $\left(\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}\right.$, B' est sur la droite (AB), C' est sur la droite (AC)$\left.\right)$ et sa réciproque. $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$ Savoir construire une quatrième proportionnelle.
Cependant: L'énoncé général du théorème de Thalès est hors programme; Toute intervention de mesures algébriques est exclue; La construction d'une moyenne géométrique n'est pas demandée.	
b) Pyramide et cône de révolution; volume. Section par un plan parallèle à la base.	
L'objectif est toujours d'apprendre à voir dans l'espace et de calculer des longueurs, des aires et des volumes, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et de la fabrication de patrons. L'observation et l'argumentation au cours de ces travaux font appel aux acquis de géométrie plane et à quelques énoncés courants concernant l'orthogonalité et le parallélisme. L'explication de ces énoncés n'est pas exigible des élèves. Les activités sur la pyramide exploiteront des situations limitées et simples, se prêtant bien aux opérations de fabrication: Pyramides dont une arête latérale est aussi la hauteur; Pyramides régulières à trois, quatre ou six faces latérales. (Une pyramide régulière est une pyramide admettant comme base un polygone régulier, l'axe de ce polygone contenant le sommet de la pyramide.)	Savoir, dans des situations simples et uniquement à propos de travaux sur les solides, utiliser le théorème de Pythagore pour des calculs de longueurs (diagonale d'un parallélépipède rectangle, rayon d'une section plane d'une sphère, hauteur d'une pyramide régulière...). Connaître et utiliser les formules de ce volume: $V = Bh$ pour les prismes droits et le cylindre de révolution. $V = \frac{1}{3}Bh$ pour les pyramides et le cône de révolution.
c) Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, aires et volumes.	
Les activités, notamment en classe de Cinquième, de dessin et de reproduction à une échelle donnée ont mis en œuvre le principe de la multiplication des longueurs initiales par un même coefficient. Des activités expérimentales dégageront l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires, les volumes.	Utiliser, dans l'agrandissement ou la réduction d'un objet géométrique du plan ou de l'espace, la propriété: si les longueurs sont multipliées par k, alors les aires sont multipliées par k^2, les volumes le sont par k^3, et les angles sont conservés. Connaître et utiliser la propriété, pour la section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base, d'être une réduction de la base.
2. *Angles. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle.*	
Angle inscrit dans un cercle et angle au centre.	
On n'évoquera pas d'autre unité d'angle que le degré décimal.	Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée: Du sinus ou de la tangente d'un angle aigu donné; De l'angle aigu de sinus ou de tangente donnés.
La définition du cosinus d'un angle aigu a été mise en place en Quatrième. Le sinus et la tangente d'un angle aigu seront présentés comme des rapports dans le triangle rectangle. Les formules $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ sont seules au programme.	Connaître et utiliser dans le triangle rectangle les relations entre le cosinus ou le sinus, ou la tangente, et les longueurs de deux côtés du triangle.
La comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre qui intercepte le même arc fera l'objet d'activités, mais aucune compétence n'est exigible sur ce point. Cette comparaison permet celle de deux angles inscrits interceptant le même arc, mais la recherche de l'ensemble des points du plan d'où l'on voit un segment sous un angle donné autre qu'un angle droit est hors programme.	
3. *Dans le plan, construction de transformées de figures par composition de deux translations, de deux symétries centrales, de deux symétries orthogonales par rapport à des droites parallèles ou perpendiculaires.*	
Les travaux entretiendront la compétence sur les transformations étudiées dans les classes précédentes. La composition de deux transformations n'apparaîtra que dans son action sur des figures et les activités s'organiseront autour de la réalisation de figures (frises, pavages...). Aucune compétence en la matière n'est exigible des élèves. On rappelle que la notation «o» est exclue.	Connaître et savoir utiliser la conservation de l'alignement, des distances, des angles dans la transformation d'une figure par une symétrie, une translation ou une rotation explicitement donnée.

B. Un extrait des textes officiels français avant 2000 : les programmes scolaires de mathématiques pour la classe de Seconde

V. Géométrie

En géométrie plane comme en géométrie dans l'espace, ***tout point de vue axiomatique est exclu.*** La pratique des figures doit tenir une place centrale, car elle joue un rôle décisif pour la maîtrise des notions mathématiques mises en jeu. De même, l'exploitation des écrans graphiques d'ordinateur peut aider efficacement les élèves à développer leur perception des objets du plan et de l'espace. Il est rappelé que toute reprise systématique des notions vues au collège est exclue.

Le programme comporte deux objectifs essentiels :

— Poursuivre ***conjointement*** l'étude, déjà engagée au collège, des ***configurations usuelles du plan et de l'espace.***

— Mettre en place et exploiter quelques éléments de ***calcul vectoriel dans le plan***, en relation avec l'étude des configurations et des transformations et avec l'enseignement de la physique.

1. Géométrie plane

Il s'agit d'entraîner les élèves à résoudre des ***problèmes concernant des configurations***: alignement, concours, parallélisme, orthogonalité, calculs de distances, d'angles, d'aires. A cet effet, on utilise les acquis du collège sur les ***configurations de base*** et ***leurs symétries*** (cf. capacités exigibles indiquées dans les textes de compléments) et on exploite de nouveaux outils, notamment le ***calcul vectoriel*** et, sur des exemples ***très*** simples, ***l'action des transformations.*** On pourra aussi étudier ***quelques*** exemples ***très*** simples de problèmes de lieux géométriques et de construction, mais l'étude systématique de tels problèmes est en dehors des objectifs du programme.

A. *Calcul vectoriel*

— Les ***vecteurs*** ont été introduits au collège (par direction, sens et longueur); on n'y reviendra pas et on conservera le même point de vue pour étudier les opérations sur les vecteurs (le programme de troisième ne comporte qu'une initiation à la somme).

— La ***mise en œuvre des vecteurs sur les configurations et les transformations*** joue un rôle essentiel, aussi bien pour la compréhension de la notion de vecteur que pour la résolution des problèmes de géométrie; le caclul vectoriel ne doit donc pas constituer un terrain d'activités purement algébriques. A travers quelques exemples issu de la ***mécanique*** et de la ***physique***, on soulignera le fait que l'intérêt de la notion de vecteur ne se limite pas à la géométrie.

— Le programme comporte la notion de ***repère*** (quelconque) du plan. Pour certaines questions (tracé de courbes, diagrammes...), il peut être commode d'utiliser des repères orthogonaux non nécessairement orthonormaux. Pour la résolution de problèmes de géométrie, on se limitera à l'emploi de repères orthonormaux; le recours à un tel repère n'est qu'un outil parmi d'autres, il relève de seules considérations de commodité et d'efficacité.

— En relation avec l'introduction des fonctions circulaires, le programme comporte une ***initiation à la mesure des angles orientés.*** On s'appuiera sur des observations concernant le ***cercle trigonométrique*** (mesure d'arcs, mouvement circulaire uniforme). Tout développement théorique est exclu et l'emploi des angles orientés en géométrie plane est hors programme.

a) Opérations sur les vecteurs	
— Représentation géométrique d'un vecteur $\vec{u}$; interprétation géométrique de l'égalité $\vec{u} = \vec{v}$. Norme d'un vecteur.	La notation $\vec{u}$ et le vecteur nul n'ont pas été introduits au collège.
— Addition des vecteurs, opposé d'un vecteur; relation de Chasles; représentation géométrique des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $-\vec{u}$ et $\vec{u} - \vec{v}$. Pour une translation, relation $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.	Les élèves doivent connaître et savoir utiliser les relations entre le parallélogramme, la translation, l'égalité et l'addition des vecteurs, entre l'opposé et la symétrie centrale. Le fait que la relation $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ caractérise les translations est hors programme. Les élèves doivent savoir utiliser la colinéarité pour caractériser le parallélisme de deux droites, l'alignement de trois points, l'appartenance à une droite définie par deux points ou par un point et un vecteur directeur.
— Multiplication d'un vecteur pour un nombre, représentation géométrique de $\lambda\,\vec{u}$. Vecteurs colinéaires.	
— Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, du centre de gravité d'un triangle.	La notion générale de barycentre est hors programme.
— Configuration de Thalès : si $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$. Réciproque dans le cas particulier où A' = A.	Dans le cas du triangle, on fera le lien avec l'énoncé vu en classe de troisième. Le lien avec les projections n'est pas un objectif du programme.
— Homothétie (définie par $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$); relation $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$, application au triangle.	Pour introduire l'homothétie, on s'appuiera sur des situations portant sur les agrandissements et les réductions, dont l'étude a été engagée en classe de troisième. L'étude de l'unicité du centre est hors programme. Il en est de même pour le fait que la relation $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$ caractérise les homothéties.
b) Bases, repères	
— Repères d'une droite du plan; abscisse d'un point, mesure algébrique.	La mesure algébrique $\overline{AB}$ d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une notation commode. En dehors de la relation de Chasles, aucun usage de cette notion n'est au programme.
— Bases, repères du plan; coordonnées d'un vecteur dans une base, d'un point dans un repère, coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $\lambda\,\vec{u}$. Condition de colinéarité de deux vecteurs.	On indiquera à ce propos l'effet d'une projection sur une égalité vectorielle : si A, B, C, D satisfont à la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors leurs images A', B', C', D' satisfont à la relation $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.
Un repère étant fixé, équation cartésienne $ux + vy + w = 0$ d'une droite.	On reliera la notion de coefficient directeur à celle de vecteur directeur; pour l'équation cartésienne d'une droite, on fera le lien avec les formes $y = ax + b$ et $x = b$ vues au collège. En vue de l'étude des inéquations à deux inconnues, les élèves doivent connaître le régionnement du plan défini par une droite.
c) Orthogonalité, mesure des angles orientés	
— Vecteurs orthogonaux. Bases orthonormales; repères orthonormaux (ou orthonormés).	Le produit scalaire est hors programme, ainsi que l'étude des propriétés de la norme.
Dans un repère orthonormal, expression de la distance et de la norme; condition d'orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites.	On fera le lien avec la condition d'orthogonalité de deux droites portant sur les coefficients directeurs, vue en troisième.
— Cercle trigonométrique; mesures de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires, mesure principale.	L'unité d'angle est le radian; la mesure principale appartient à $]-\pi, \pi]$. On fera le lien avec le degré décimal et les angles aigus non orientés, employés au collège.
— Définition du cosinus et du sinus, relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Définition de la tangente par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Valeurs remarquables du cosinus, du sinus et de la tangente.	On s'assurera que les élèves maîtrisent les relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Aucune connaissance sur les opérations sur les angles orientés (relation de Chasles,...) n'est exigible des élèves.

B. *Transformations et configurations*

— L'objectif est que les élèves connaissent de façon solide un ***petit nombre de propriétés essentielles*** et sachent les ***mettre en œuvre sur des configurations simples.*** L'étude des transformations ne doit donc pas être considérée comme une fin en soi. A travers les activités, on s'assurera que les élèves connaissent les symétries des configurations de base étudiées au collège (rectangle, losange, parallélogramme...); l'étude de quelques configurations liées au cercle enrichit les outils disponibles.

— Dans l'esprit des programmes de collège, on fera d'abord agir les transformations sur des figures, puis on dégagera l'idée essentielle qu'une transformation associe à tout point du plan un point du plan bien déterminé. La bijectivité des transformations, les notions de transformation composée et de transformation réciproque sont en dehors du programme.

a) Effet d'une réflexion, d'une rotation, d'une translation ou d'une homothétie sur le parallélisme, l'alignement, les distances, les angles et les aires.	On évitera des reprises systématiques se répétant sur chaque type de transformation. Pour les rotations, on se limitera aux quelques exemples abordés au collège (quart de tour...); l'étude générale des rotations est hors programme.
— Image d'une droite, d'un segment, d'un cercle. Image du milieu d'un segment, d'un parallélogramme.	
b) Symétries du cercle: tangentes à un cercle de direction donnée ou issues d'un point donné.	On s'assurera que les élèves connaissent et savent utiliser les propriétés de la configuration formée par une droite et un cercle.

— Axes de symétrie d'une bande. Ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite.	On reliera ces questions à la recherche des cercles tangents à deux droites parallèles, et des cercles tangents à deux droites sécantes.
— Axes de symétrie de la configuration formée par deux droites concourantes. Ensemble des points équidistants de deux droites concourantes.	

2. Géométrie dans l'espace

— Les objets usuels étudiés au collège (cubes, parallélépipèdes rectangles, prismes droits, pyramides, sphères, cylindres et cônes de révolution) constituent un terrain privilégié pour les activités.

— L'objectif est triple :

• A partir de l'étude de ces objets, dégager progressivement ***quelques énoncés concernant les droites et les plans de l'espace*** et mettre en valeur leur spécificité par rapport au cas de la géométrie plane.

• Apprendre aux élèves à ***combiner ces énoncés avec des théorèmes de géométrie plane*** pour établir des propriétés géométriques des configurations simples de l'espace ou effectuer des calculs portant sur ces configurations.

• Mettre en œuvre les outils ainsi construits pour renforcer et élargir l'étude d'objets usuels de l'espace.

— Dans une telle perspective, la géométrie dans l'espace est utilisée durant toute l'année comme terrain pour mobiliser des acquis d'algèbre, d'analyse et de géométrie plane.

— Les activités exploiteront conjointement des ***maquettes*** des objets étudiés et des ***représentations*** de ces objets effectuées, selon les problèmes posés, à main levée ou à l'aide des instruments de dessin. Dans l'espace, les notions de vecteur et de repère sont hors programme.

a) Propriétés usuelles (admises) du parallélisme de deux droites, de deux plans, d'une droite à un plan. Projection sur un plan selon une direction de droite.	C'est à travers l'étude des objets usuels de l'espace que ces propriétés doivent être mises en évidence et mises en œuvre. Elles ne doivent donc pas faire l'objet d'une étude en soi. Le théorème des trois perpendiculaires et la projection d'un angle droit sont hors programme.
b) Propriétés usuelles (admises) de l'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan. Plan médiateur. Projection orthogonale sur un plan.	

Travaux pratiques

Exemples d'étude de configurations planes à l'aide de différents outils (configurations de base, calcul vectoriel, outil numérique, transformations).	Pour ce qui est de l'emploi de transformations, on se limitera à des situations *très* simples, et, pour les travaux non encadrés par le professeur, la transformation utilisée sera indiquée.
Exemples d'étude d'un objet usuel de l'espace (parallélisme, alignement, orthogonalité...).	La recherche de sections planes de solides doit se limiter à des cas très simples.
Exemples de calculs de distances, d'aires et de volumes, dans les configurations usuelles du plan et de l'espace.	On mettra en œuvre les formules vues au collège concernant les objets usuels du plan et de l'espace. On prendra le plus souvent appui sur des situations concrètes (topographie, objets techniques...).
Exemples simples de mise en œuvre des propriétés d'une réflexion, d'une rotation, d'une translation ou d'une homothétie pour la construction d'images de configurations planes.	
Exemples de recherche et d'emploi de réflexions, de symétries centrales et de rotations laissant invariante une configuration plane simple (rectangle, carré, triangle équilatéral, cercle, configuration formée par deux cercles...).	Il n'y a pas lieu de soulever le problème de l'exhaustivité de la liste des transformations ainsi repérées.

Annexe 5. Le questionnaire pour les enseignants italiens de l'ESI : un exemplaire rempli

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA NELLA SCUOLA MEDIA

Gentile Professoressa, Gentile Professore,
da alcuni mesi, nell'ambito di un Dottorato in Didattica della Matematica presso l'Université Paris 7 "Denis Diderot" di Parigi, conduco una ricerca riguardante il *confronto dell'insegnamento della geometria in Francia e in Italia per allievi dagli 11 ai 16 anni.*
Poiché i programmi scolastici italiani relativi all'insegnamento della matematica non indicano esplicitamente i dettagli dei contenuti, mi si presenta la necessità di sapere come l'insegnante organizza il suo corso di geometria durante i tre anni della scuola media. Con questo obiettivo le propongo, dunque, di completare un questionario i cui dati raccolti mi permetteranno di sviluppare il mio lavoro attenendomi il più possibile alla realtà.
Il testo, benché lungo, è strutturato in maniera da risultare per lei di facile e rapida compilazione.
Nel rigraziarla anticipatamente, la prego cortesemente di inviare il questionario compilato ad uno dei seguenti indirizzi :

Mlle Valentina CELI
c/o IREM - Université Paris 7 "Denis Diderot"
Tour 56 couloir 56/55 Case 7018
2, place Jussieu F-75251 PARIS Cedex 05
via Tommaso Arcidiacono, 149/C I-00143 ROMA

(Se ne ha la possibilità, la pregherei di distribuire una copia di questo questionario ai suoi colleghi. Grazie)

QUESTIONARIO

1) Qual è la sua disciplina di formazione ?

☐ matematica
☐ fisica
☐ matematica e fisica
☐ scienze biologiche
☐ altro (*specificare*) scienze naturali

2) Da quanti anni insegna ?

32 anni

3) Quale (quali) manuale (manuali) adotta nelle sue classi ?
Specificare se i volumi sono ripartiti per anno (I, II, III media) o per tema (algebra, aritmetica, geometria.

i manuali adottati sono preferibilmente ripartiti per tema in quanto difficilmente si riesce a svolgere, specie nel 1° anno il programma ministeriale

4) Come organizza attualmente il programma di geometria durante un ciclo di tre anni ?
Per facilitare la risposta, nelle tabelle che seguono, troverà l'elenco degli argomenti principali. Sarà sufficiente indicare, nelle caselle corrispondenti, il tempo (in ore) che viene loro dedicato e cancellare quelli non trattati.

Esempio :

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
	I quadrimestre	II quadrimestre	I quadrimestre	II quadrimestre	I quadrimestre	II quadrimestre
Le terne pitagoriche				3 ore		
Il teorema di Pitagora ~~e suo inverso~~				5 ore		
Applicazioni				6 ore	2 ore	

A. Introduzione alle geometria.Gli enti geometrici fondamentali.

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Punti, linee, superfici...	una ora					
Retta, semiretta, segmento	" "					
Segmenti uguali somma e differenza di segmenti multipli e sottomultipli d'un segmento misura della lunghezza d'un segmento	due ore					
Punto medio d'un segmento	una ora					

B. Angoli

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Definizione di angolo	una ora					
Angoli concavi e convessi	" "					
Angoli particolari	" "					
Angoli contigui e adiacenti	" "					
(i) Somma, differenza, multipli e sottomultipli d'un angolo	tre ore					
Bisettrice di un angolo	un' ora					
Angoli acuti e ottusi	due ore					
Angoli complementari e supplementari	due ore					
Angoli opposti al vertice	un'ora					
(i) Misure di angoli	quattro ore					

calcoli collegati con l'aritmetica - Non sempre si può organizzare in modo da andare di pari passo -

C. Rette perpendicolari e rette parallele

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Rette nel piano	due ore					
Rette perpendicolari	due ore					
Proiezioni e distanze	~~due ore~~					

Asse di un segmento	un'ora					
Rette parallele	un'ora					
Angoli formati da due rette con una trasversale (1)	due ore					
Distanza fra due parallele	un'ora					
Divisione d'un segmento in un dato numero di segmenti congruenti	due ore					
Geometrie non euclidee	non mi sembra il caso di trattarle se non con brevissimi cenni					

(1) rette parallele tagliate da una trasversale due ore

D. Triangoli

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Definizione di triangolo (1)		un'ora				
Classificazione rispetto ai lati		" "				
Somma degli angoli interni di un triangolo		due ore (2)				
Classificazione rispetto agli angoli		un'ora				
Altezze, mediane, assi		due ore				
Punti notevoli d'un triangolo		due ore				
Criteri di congruenza	appena	accennati,	verranno	svolti meglio	al ciclo	superiore

(1) il concetto è molto noto ai discenti perché fatto sufficientemente nel ciclo precedente di studi
(2) con costruzione di modelli materiali

E. Poligoni

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Definizione di poligono			un'ora			
Diagonali di un poligono (2)			un'ora			
Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza (1)			un'ora		due ore	
Poligoni regolari			due ore			
Angoli interni ed esterni di un poligono. Somma			/		/	

(1) l'argomento sarà svolto meglio nel 3° anno quando si avranno nozioni prese su circonferenza e cerchio, ecco perché riprendo l'argomento al 3° anno

F. Quadrilateri

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Definizione di quadrilatero			un'ora			
Trapezi. Definizioni. Proprietà			due ore			
Parallelogrammi. Definizioni. Proprietà			due ore			
Il rettangolo			due ore			
Il rombo			due ore			

(2) richiamo l'attenzione sulle diagonali dei quadrilateri, è argomento di massima importanza al quale dedico anche tre ore

Il quadrato			due ore			

G. Trasformazioni geometriche

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Concetto di vettore.						
Traslazione						
Composizione di traslazioni						
Rotazione						
Composizione di rotazioni						
Ribaltamenti						
Composizione di ribaltamenti						
Simmetria centrale, assiale						
Composizione di simmetrie						
Isometrie dirette e inverse						
Trasformazioni topologiche						
Trasformazioni proiettive						
Trasformazioni affini						

non riesco mai a svolgere questa parte del programma

H. Circonferenza e cerchio

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Definizioni fondamentali			←	un'ora		
Corde e archi. Proprietà			←	due ore		
Posizione di una retta rispetto ad una circonferenza			←	un'ora		
Posizioni reciproche di due circonferenze			←	due/tre ore		
Corona circolare			←	un'ora		
Angoli al centro, angoli alla circonferenza. Definizioni e proprietà			←	due ore		
Settore e segmento circolare			←	un'ora		
(1) Lunghezza della circonferenza					due ore	
Lunghezza di un arco					un'ora	
Area del cerchio				—	due ore	
Area del settore circolare					un'ora	
Area del segmento circolare					un'ora	
Area della corona circolare					un'ora	

(1) di molta importanza allo studio del π.

I. Construzioni geometriche

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Definizione di costruzione						
Costruzione di rette perpendicolari di angoli di rette parallele di triangoli relative alla circonferenza di parallelogrammi di poligoni regolari	per lo svolgimento di queste parte del programma chiede sempre la stretta collaborazione del docente				di solito si tratta lo fine, anche se, purtroppo, programmi non consentono di farlo.	

J. Equivalenza di figure piane. Isoperimetria

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Equivalenza di superfici. Definizioni e proprietà			←	due ore		
Equiscomponibilità			←	un'ora		
Criteri d'equivalenza			←	un'ora		
Misura dell'area di una superficie			←	un'ora		
Area del rettangolo			←	due ore		
(1) Area del quadrato			←	un'ora		
(1) Area del parallelogramma			←	" "		
(1) Area del triangolo			←	" "		
Formula d'Erone			←	due ore		
Area del rombo. Applicazione al quadrato			←	un'ora		
Area di un quadrilatero avente diagonali perpendicolari			←	un'ora		
Area del trapezio			←	un'ora		
Area di poligoni regolari			←	due ore		
Area di poligoni circoscritti ad una circonferenza					due ore	
Area di superfici a contorno curvilineo					due ore	
Isoperimetria			←	due ore		

(1) Fatta bene l'area del rettangolo, gli alunni non hanno difficoltà ad apprendere le altre aree (anche perché già conoscono le formule dirette dalle scuole elementari)

K. Il teorema di Pitagora

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Le terne pitagoriche				tre ore		
Teorema di Pitagora e suo inverso (1)				quattro ore		
Applicazioni alle varie figure				tre ore		

(1) con varie costruzioni di modelli pratici a partire dallo spago diviso in 12 parti all'uso di listoncini colorati. Dedico anche un'ora e più ad illustrare la storia del teorema. I discenti ne sono sempre affascinati.

L. Similitudini e omotetie questa parte del programma non sempre si riesce a svolgere; se possibile io la svolgo come appunto

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Poligoni simili. Proprietà				un ora		
Criteri di similitudine				due ore		
Area e perimetro di figure simili				due ore		
Teorema di Euclide				due ore		
Applicazioni				tre ore		
Teoremi di Talete						
Conseguenze e applicazioni						
Omotetie						

se non riesco in seconda, svolgo qs. parte all'inizio della 3ª

M. Rette e piani nelle spazio

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Rette e piani nello spazio. Posizioni reciproche					due ore	
Angoli diedri					un'ora	

N. Poliedri : definizioni, proprietà, misure d'aree e di volumi

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Relazione di Eulero					/	
I parallelepipedi					due ore	
I prismi					due ore	
Il parallepipedo rettangolo					un'ora	
Il cubo					un'ora	
Il prisma retto (1)					due ore	
La piramide					due ore	
Il tronco di piramide					/	
Poliedri regolari (2)					/	

(1) prima mi dedico al prisma retto.
(2) solidi composti

due ore

P. Solidi di rotazione : definizioni, proprietà, misure d'aree e di volumi

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Rotazione nello spazio						due ore
Il cilindro						due ore
Il cono						due ore
Il tronco di cono						/
La sfera e le sue parti						cenni

6

Applicazioni alla geografia	Tutte le volte che se ne presenta la possibilità o collegamento					
Altri solidi di rotazione						tre ore

il programma con le altre discipline -

Q. Il metodo delle coordinate

	Primo anno		Secondo anno		Terzo anno	
Piano cartesiano						tre ore
Coordinate di un punto						due ore
Equazione di una retta						due ore
(1) Coefficiente direttore						
(1) parallelismo, perpendicolarità						
(1) Figure poligonali						

(1) questi argomenti si possono trattare solo se si ha una classe ed un certo livello, in considerazione del proseguimento degli studi -

4') Tratta altri argomenti che non appaiono nella lista proposta ?

☐ SI ☐ NO

Se SI, elencarli,specificando il tempo ed il periodo dedicati.

un numero di essere già accennato -

5) Esistono delle differenze importanti tra l'impostazione del ciclo descritto e quelle eventualmente adottate in passato ?

☐ SI ☐ NO

Se SI, descriverle brevemente.

le differenze importanti esistono, per un, solo in funzione del livello della classe con la quale si deve lavorare e a si deve adeguare -

- Commenti ed osservazioni.

Ho ringraziato per avermi sottoposto questo questionario e ho augurato buon lavoro.

Sono sempre a sua disposizione per eventuali altri chiarimenti, se necessari. Mi contatti pure tramite la Prof.ssa Solimini.

Cordiali saluti.

Carmela Gobbetti

La genèse des énoncés des problèmes pour la partie expérimentale

Le "problème"

Soient I, J, K trois points non alignés.

(a) Construire le triangle ABC tel que I, J, K soient respectivement les milieux des côtés [AB], [BC] et [AC].

(b) Montrer que ABC est décomposé en quatre triangles congruents.

(c) Montrer que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité G.

(d) Soit M un point variable de la droite (BC), autre que J. Prouver que l'aire du quadrilatère AIMK ne dépend pas de la position de M sur (BC).

(e) Soient S, P, Q, R les milieux des côtés du quadrilatère AIMK. Montrer que SPQR est un parallélogramme.

(f) Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles circonscrits aux triangles ABC et IJK. Montrer que la longueur du rayon de $\mathcal{C}'$ est égale à la moitié de celle du rayon de $\mathcal{C}$.

(g) Soit C' le symétrique du point C par rapport au milieu de [AB]. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ? Comment faudrait-il choisir les points I, J, K pour que ACBC' soit un rectangle ou un carré ? Dans ce dernier cas, quelle serait la position du point C' ? Et du cercle $\mathcal{C}'$?

Les "problèmes"

(A) Construire le triangle ABC tel que I, J, K soient respectivement les milieux des côtés [AB], [BC], [CA]. Décrire et justifier la construction.

(B) Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]. Compléter les égalités suivantes en remplaçant les petits points par les nombres qui conviennent :

$$\mathcal{P}(ABC) = \dots \mathcal{P}(IJK) ;$$
$$\mathcal{A}(ABC) = \dots \mathcal{A}(IJK).$$

Justifier.

(C) Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]. Prouver que les triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité G.

(D) Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC]. Soit M un point de la droite (BC), autre que J. Comparer les aires des quadrilatères AIMK et AIJK.

(E) Soient S, P, Q, R les milieux des côtés du quadrilatère AIMK. Prouver que SPQR est un parallélogramme.

(F) Soit AIEO un carré. Construire un quadrilatère CLMR tel que A, I, E, O soient respectivement les milieux de [CL], [LM], [MR], [RC] et que l'angle CLM soit droit.

(G) Soient A, B, C trois points non alignés. Tracer I, J, K, milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC].
(I) Soit C' le symétrique de C par rapport à I. Quelle est la nature du quadrilatère ACBC' ?
(II) Si les points A, B, C sont tels que IJK soit un triangle rectangle, quelle est la nature de ACBC' ?
Comment faudrait-il choisir le triangle ABC pour que ce quadrilatère soit un carré ? Justifier les réponses.

Nom..... Prénom.....

Problème 1A

Soit trois points non alignés A, B, C. Trace I, J, K, milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC].

Dans les égalités suivantes :

$$\mathcal{P}(ABC) = m\,\mathcal{P}(IJK)$$
$$\mathcal{A}(ABC) = n\,\mathcal{A}(IJK)$$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$ désignent respectivement les mesures du périmètre et de l'aire des triangles, m et n des nombres.

Cherche les valeurs de ces nombres pour que les deux égalités soient vraies.

Justifie en explicitant les propriétés de la figure.

Nom..... Prénom.....

Problème 2A

Soit T, G, L trois points non alignés du plan. Construis le triangle AIO tel que T, G, L soient les milieux respectifs des côtés [AI], [IO], [OA].

Tu trouveras ci-dessous trois propositions différentes pour entamer ton programme de construction.

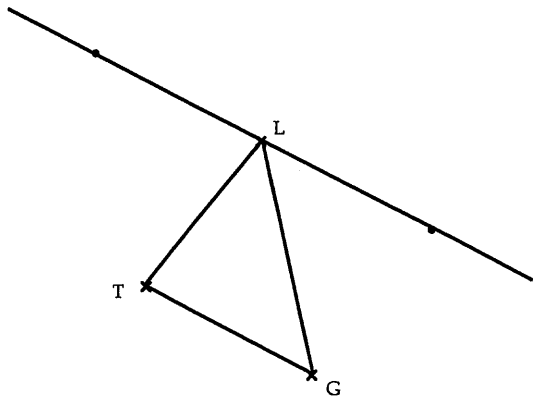
a) Complète chacune des constructions.
b) Choisis une des constructions pour prouver que la figure obtenue répond bien aux conditions imposées.

Construction A.
Je choisis un point quelconque du plan. Je trace le symétrique de ce point par rapport à T ; le symétrique de ce deuxième point par rapport à G ; le symétrique de ce troisième point par rapport à L. Si ce dernier point et le point de départ ne sont pas confondus, je n'ai pas de triangle.
Je recommence en prenant cette fois pour point de départ...

(*c'est à toi de faire la figure*)

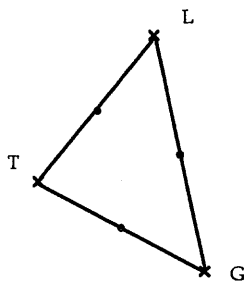
Construction B.
Je trace le segment [TG] et la droite parallèle à (TG) passant par L. Sur cette droite je place deux points tels que ...

(*la figure est commencée*)



Construction C.
Je trace le triangle TGL et les milieux de ses côtés. Je trace le symétrique de T par rapport à... La figure obtenue est un...

(*la figure est commencée*)



Nom..... Prénom.....

Problème 1B

Soit un trapèze ABCD avec (AD) parallèle à (BC) et AD = 2 BC. Les diagonales se coupent en H et les droites (AB) et (CD) en O.

a) Prouve que B est le milieu de [OA].
b) Prouve que (OH) coupe [AD] en son milieu M.
c) Prouve que H est le centre de gravité du triangle BCM.
d) Compare les aires des triangles AOD et BCM.

Nom..... Prénom.....

Problème 2B

Soit T, G, L trois points non alignés du plan. Construis le triangle AIO tel que T, G, L soient les milieux respectifs des côtés [AI], [IO], [OA].

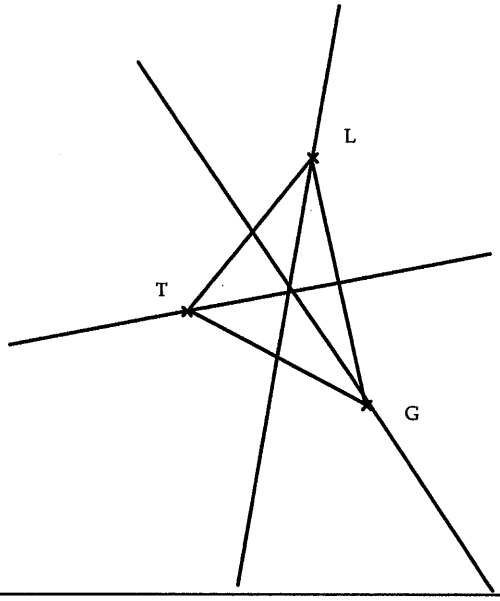
Tu trouveras ci-dessous trois propositions différentes pour entamer ton programme de construction.

a) Complète chacune des constructions.
b) Choisis une des constructions pour prouver que la figure obtenue répond bien aux conditions imposées.

Construction A.
Je choisis un point quelconque du plan. Je trace le symétrique de ce point par rapport à T ; le symétrique de ce deuxième point par rapport à G ; le symétrique de ce troisième point par rapport à L. Si ce dernier point et le point de départ ne sont pas confondus, je n'ai pas de triangle.
Je recommence en prenant cette fois pour point de départ...
(*c'est à toi de faire la figure*)

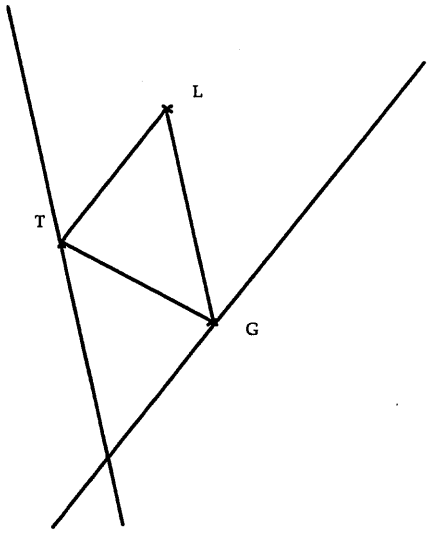
Construction B.
Je trace le triangle TGL et les trois médianes. Leur point de concours est tel que...

(*la figure est commencée*)



Construction C.
Par T je trace la droite parallèle au côté LG et par G je trace la droite parallèle au côtés TL...

(*la figure est commencée*)



Nom..... Prénom.....

Problème 1C

Soit un triangle CNM et I, E, A les milieux respectifs des côtés [CN], [NM], [MC].

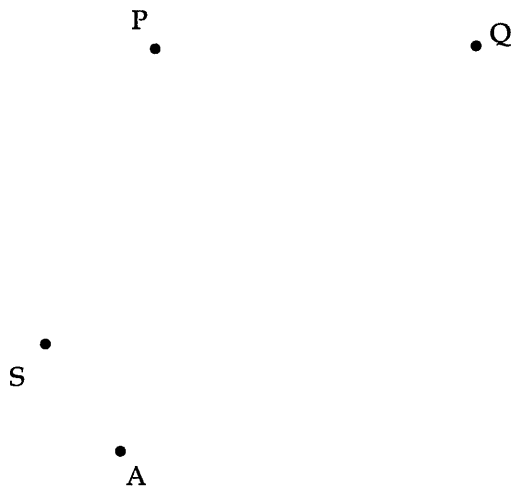
1. On appelle M' le symétrique de M par rapport à I. Quelle est la nature du quadrilatère CMNM' ?
2. Comment faudrait-il choisir le triangle CNM pour que le triangle IEA soit rectangle en I ? Quelle est alors la nature du quadrilatère CMNM' ?
3. Comment faudra-t-il choisir le triangle CNM pour que CMNM' soit un carré ?

Justifie les réponses.

Nom..... Prénom.....

Problème 2C

Soient A, S, P, Q quatre points du plan. Trace :
le point B, symétrique de A par rapport à S;
le point C, symétrique de B par rapport à P;
le point D, symétrique de C par rapport à Q.



a) Comment placer un point R sur [AD] pour que SPQR soit un parallélogramme ? Justifie la réponse.

b) Compare les aires des quadrilatères ABCD et SPQR.

Nom..... Prénom.....

Problème 3C

Soit un triangle NMR et U, E, O les milieux respectifs des côtés [NM], [MR], [RN]. Soit X un point de la droite (NM), autre que U.

a) Compare les aires des quadrilatères ROUE et ROXE.
b) Justifie l'égalité suivante :

$$\mathcal{A}\,(NMR) = 2\,\mathcal{A}\,(ROXE)$$

où $\mathcal{A}$ désigne la mesure de l'aire des polygones.

Nom..... Prénom.....

Problème 1D

Soit deux droites perpendiculaires : sur la première on place deux points A et C, sur la deuxième deux points B et D. Trace le milieu I de [AB], le milieu J de [BC], le milieu K de [CD], le milieu L de [DA].

a) Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Pourquoi ?

b) Compare les aires de ABCD et IJKL.

c) Les points A, B, C étant déjà placés, comment disposer D pour que le quadrilatère IJKL soit un carré ? Justifie la réponse en explicitant les propriétés de la figure.

Nom..... Prénom.....

Problème 2D

Soit un carré AIEO. Construis un quadrilatère quelconque CLMR tel que :
les points A, I, E O soient les milieux relatifs des côtés [CL], [LM], [MR], [RC] ;
l'angle CLM soit droit.

a) Rédige le programme de construction.
b) Prouve que la figure obtenue répond bien aux conditions imposées.

Nom..... Prénom.....

Problème A1

Soit trois points non alignés A, B, C. Trace I, J, K, milieux respectifs des segments [AB], [BC], [AC].

Dans les égalités suivantes :

$$\mathcal{P}(\text{ABC}) = m\ \mathcal{P}(\text{IJK})$$

$$\mathcal{A}(\text{ABC}) = n\ \mathcal{A}(\text{IJK})$$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$ désignent respectivement les mesures du périmètre et de l'aire des triangles, m et n deux nombres.

Cherche les valeurs de ces nombres pour que les égalités soient vraies.

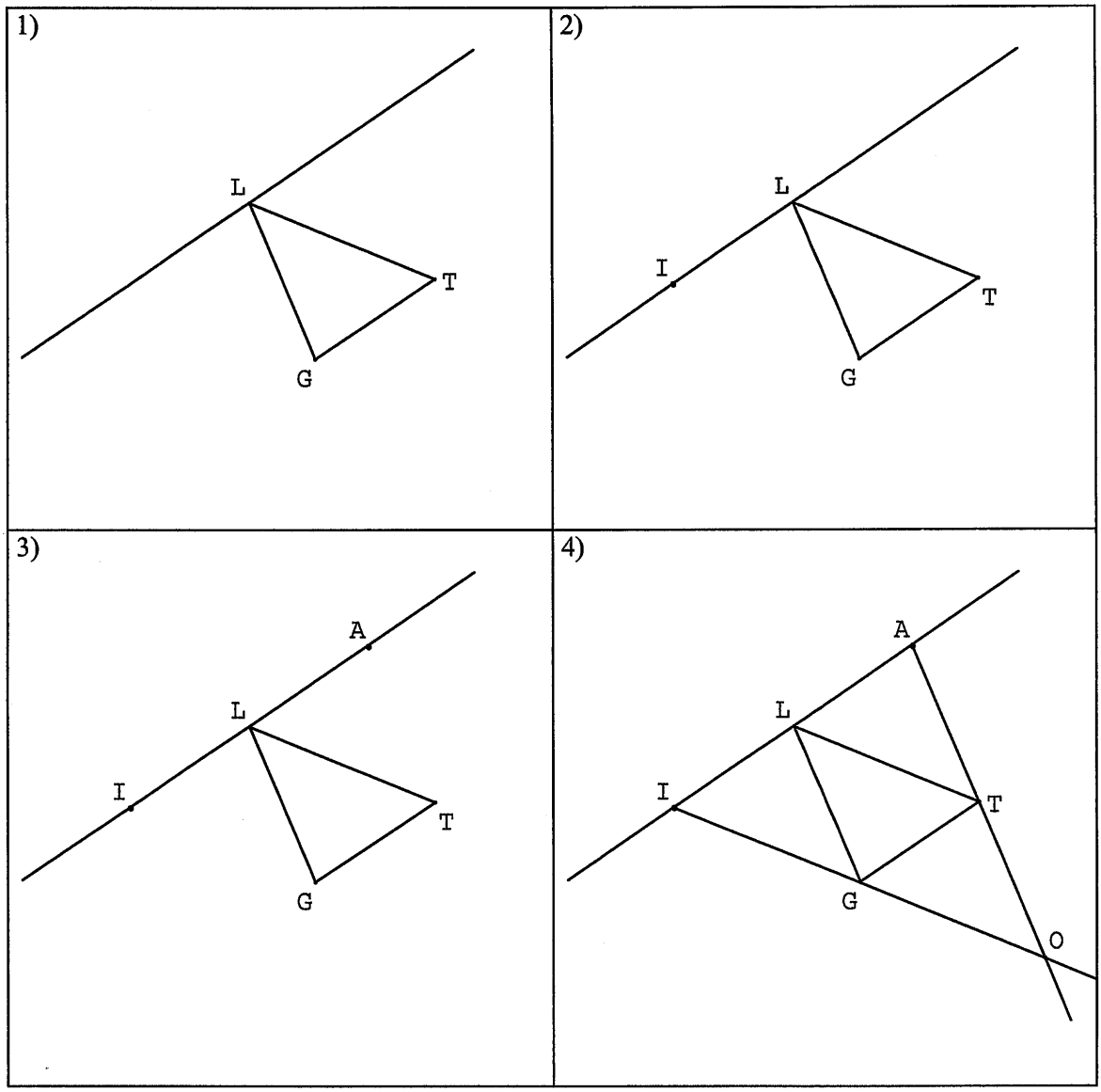
Justifie en explicitant les propriétés de la figure

Nom..... Prénom.....

Problème A2

Soit T,G, L trois points non alignés du plan. Construis le triangle AIO tel que T, G, L soient les milieux respectifs des côtés [AO], [OI], [IA].

Tu trouveras ci-dessous les quatre étapes de la construction.



1) Rédige le programme de construction dont voici la première phrase :
"*Je trace le triangle TGL et puis la droite parallèle à (TG) passant par L...*".

2) Prouve que cette construction soit bien la solution du problème.

Nom..... Prénom.....

Problème B1

Soit un trapèze ABCD avec (AD) parallèle à (BC) et AD = 2 BC. Les diagonales se coupent en H et les droites (AB) et (CD) en O.

a) Prouve que B est le milieu de [OA].

b) La droite (OH) coupe le segment [BC] en L et le segment [AD] en M. Montre les trois propriétés suivantes :

1) M est le milieu de [AD] ;
2) L est le milieu de [BC] ;
3) L est le milieu de [OM].

c) Prouve que H est le centre de gravité du triangle BCM.

d) Compare les aires des triangles AOD et BCM.

Nom..... Prénom.....

Problème B2

Soit un triangle NMR et U, E, O les milieux respectifs des côtés [NM], [MR], [RN]. Soit X un point de la droite (NM), autre que U.

a) Montre que l'aire du quadrilatère ROXE ne dépend pas du point X choisi.

b) Justifie l'égalité suivante :

$$\mathcal{A}(\text{NMR}) = 2\ \mathcal{A}(\text{ROXE})$$

où $\mathcal{A}$ désigne la mesure de l'aire des polygones.

Nom..... Prénom.....

Problème C1

Soit deux droites perpendiculaires : sur la première on place deux points A et C, sur la deuxième deux points B et D. Trace le milieu I de [AB], le milieu J de [BC], le milieu K de [CD], le milieu L de [DA].

a) Fais une figure dans laquelle le quadrilatère ABCD est croisé.

b) On place les points de telle sorte que ABCD ne soit pas croisé. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? Justifie ta réponse en explicitant les propriétés de la figure.

c) Compare les aires de ABCD et IJKL.

d) Les points A, B, C étant déjà placés, comment disposer D pour que le quadrilatère IJKL soit un carré ? Justifie ta réponse.

Nom..... Prénom.....

Problème C2

On veut construire un quadrilatère quelconque CLMR tel que :

- les points A, I, E, O, milieux respectifs des côtés [CL], [LM], [MR] et [RC], soient les sommets d'un carré ;
- l'angle CLM soit droit.

1) Effectue la construction dont voici le programme :

Trace deux droites perpendiculaires d_1 et d_2 : soit L leur point de concours.
Choisis un point A sur d_1 et un point I sur d_2.
Trace le symétrique C de L par rapport à A et puis le symétrique M de L par rapport à I.
Trace la droite perpendiculaire à (CM) passant par L et sur celle-ci place un point R tel que LR=CM.
La droite parallèle à (LR) passant par I coupe (MR) en E.
La droite parallèle à (LR) passant par A coupe (RC) en O.

2) Prouve que la figure obtenue répond bien aux conditions imposées.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 place Jussieu
75251 Paris cedex 05

RESUME

Pour étudier l'enseignement actuel de la géométrie dans le secondaire, nous avons réalisé une comparaison des systèmes scolaires français et italien. Les organisations des contenus et des méthodes pédagogiques perçus au premier abord nous ont persuadée que cette confrontation nous permettrait de mieux pointer certaines des problématiques qui apparaissent dans une institution et non dans l'autre et ainsi d'éclairer les choix faits dans chacune d'elles.

Une lecture analytique des textes officiels et de quelques manuels scolaires nous permet de saisir concrètement les objectifs d'enseignement dans les deux pays et de focaliser notre attention sur des contenus d'enseignement communs.

Ce qui nous a conduite à une analyse approfondie des contenus des manuels sur la notion d'*aire*, abordée différemment dans les deux institutions et sur le *triangle des milieux*, une figure-clé revenant avec divers traitements à plusieurs niveaux de chacun d'elles.

Les problèmes proposés à des élèves de seize ans des deux pays portent sur ces thèmes. L'analyse des productions écrites des élèves observés montre des difficultés communes, notamment concernant l'usage de la figure, mais aussi des différences qu'on peut relier aux différences d'enseignement repérées dans l'analyse des manuels.

MOTS CLES

Enseignement de la géométrie – Collège – manuels scolaires – transformations géométriques – aire – angles – critères de congruence et de similitude – théorème de Thalès – triangle des milieux – transposition didactique – preuve

Editeur : IREM Université PARIS 7 Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
iremp7@ufrp7.math.jussieu.fr
www.irem-paris7.fr.st
Dépôt légal : 2002
ISBN : 2-86612-239-9