



HAL
open science

Propagation acoustique non linéaire dans des chaînes granulaires magnétiques : ondes de rotation et effets phononiques

Jérémy Cabaret

► **To cite this version:**

Jérémy Cabaret. Propagation acoustique non linéaire dans des chaînes granulaires magnétiques : ondes de rotation et effets phononiques. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2014. Français. NNT : 2014LEMA1028 . tel-01259241

HAL Id: tel-01259241

<https://theses.hal.science/tel-01259241>

Submitted on 20 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Jérémy CABARET

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université du Maine
sous le label de L'Université Nantes Angers Le Mans

école doctorale : **SPIGA**

Discipline : **60**

Spécialité : **Acoustique**

Unité de recherche : **Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine — UMR CNRS 6613**

Soutenue le **4 juillet 2014**

Thèse N° :

PROPAGATION ACOUSTIQUE NON LINÉAIRE DANS DES CHAÎNES GRANULAIRES MAGNÉTIQUES

Ondes de rotation et effets phononiques

JURY

Rapporteurs : **Anne-Christine HLADKY**, Directeur de Recherche CNRS (IEMN), Dép. ISEN Lille
Régis MARCHIANO, Professeur, UPMC Paris

Examineurs : **Jean KERGOMARD**, Directeur de Recherche émérite CNRS, LMA Marseille
Vitalyi GUSEV, Professeur, LAUM Le Mans

Invité(s) : **Georgios THEOCHARIS**, Chargé de Recherche CNRS, LAUM Le Mans

Directeur de thèse : **Vincent TOURNAT**, Chargé de Recherche CNRS HDR, LAUM Le Mans

Co-encadrant de Thèse : **Philippe BÉQUIN**, Maître de conférence, LAUM Le Mans

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
1 Les milieux granulaires unidimensionnels : généralités et propriétés	5
1.1 Introduction	5
1.2 Comportement mécanique du contact	6
1.2.1 Théorie de Hertz-Mindlin	6
1.2.2 Phénomène de friction	10
1.2.3 Torsion	11
1.2.4 Moment de torsion oscillant	14
1.2.5 Approximations à plusieurs ordres de la relation moment de torsion - déformation angulaire approchée	16
1.2.6 Variation relative du module élastique	19
1.3 Ondes de rotation	21
1.4 Description des non-linéarités	22
1.5 Acoustique des milieux granulaires unidimensionnels : exemple des ondes longitudinales	24
1.5.1 Équation de la dynamique et relation de dispersion	25
1.5.2 Vitesses de phase et de groupe	27
1.6 Conclusion	28
2 Processus phononiques non linéaires dans une chaîne granulaire diatomique	29
2.1 Introduction	29
2.2 Développements analytiques	31
2.2.1 Équations du mouvement - comportements linéaire et non linéaire	31
2.2.2 Solutions du problème linéaire et relation de dispersion	33
2.2.3 Bandes permises et interdites à la propagation	33
2.2.4 Validation expérimentale de la relation de dispersion	35
2.2.5 Solutions du problème non linéaire limité à l'ordre 2	36
2.2.6 Comportement des solutions linéaires et non linéaires	37
2.3 Résultats expérimentaux et discussion	40
2.3.1 Représentation temps-fréquence	40
2.3.2 Génération du second harmonique dans la chaîne granulaire diatomique	42

2.4	Décalage non linéaire de la fréquence de résonance	44
2.5	Effets non linéaires d'auto-action aux limites de bandes	49
2.6	Conclusion	52
3	Ondes de rotation dans une chaîne de billes magnétiques	53
3.1	Introduction	53
3.2	Description de la structure granulaire - force de contact	53
3.2.1	Éstimation de la force magnétique en fonction de la position dans la chaîne	55
3.2.2	Force de contact	57
3.3	Célérité des ondes de rotation	58
3.4	Propagation linéaire des ondes de rotation	58
3.4.1	Description du système	59
3.4.2	Résolution du problème linéaire	60
3.4.3	Les fréquences de résonance de la chaîne de billes	63
3.4.4	Amplitude des oscillations de rotation	64
3.4.5	Influence de la gravité	67
3.5	Description du dispositif expérimental et de la chaîne granulaire	68
3.5.1	Structure granulaire	68
3.5.2	Dispositif expérimental	68
3.5.3	Préparation de la structure granulaire	72
3.6	Résultats expérimentaux et discussion	74
3.6.1	Célérité des ondes de torsion	74
3.6.2	Bandes permise et interdite à la propagation des ondes - fréquences de résonance	76
3.7	Conclusion	77
4	Résonances non linéaires d'ondes de rotation dans une chaîne granulaire magnétique monoatomique	79
4.1	Introduction	79
4.2	Méthode des résonances non linéaires	80
4.3	Modélisation des résonances non linéaires dans un système de deux billes en contact	81
4.3.1	Approche analytique et simulation	81
4.3.2	Résultats numériques	84
4.4	Résultats expérimentaux	87
4.4.1	Protocole expérimental	87
4.4.2	Milieu granulaire composé de deux billes en régime faiblement non linéaire	90
4.4.3	Milieu granulaire composé de trois billes en régime faiblement non linéaire	93
4.4.4	Milieu granulaire composé de 30 billes	96
4.5	Conclusion	98

5 Propagation hystérétique de paquets d'ondes de rotation dans une chaîne granulaire magnétique monoatomique	99
5.1 Introduction	99
5.2 Expériences	100
5.3 Modélisation et simulation numérique de l'évolution du profil de vitesse angulaire . . .	105
5.3.1 Approche théorique	105
5.3.2 Formalisme mathématique de l'espace de Preisach-Mayergoyz	107
5.3.3 Système d'équations différentielles adapté au signal d'excitation expérimental .	109
5.4 Résultats et discussion	111
5.5 Conclusion	113
Conclusion générale et perspectives	115
Bibliographie	120

Introduction

La propagation d'ondes dans les milieux complexes est un thème de recherche vaste développé depuis plusieurs décennies. Malgré des domaines d'applications très différents, des phénomènes similaires peuvent être observés impliquant les mêmes méthodes de traitement. Citons par exemple les recherches sur les cristaux photoniques dans le domaine de l'optique, dont les modèles physiques et les intérêts ont été transposés en grande partie au domaine de l'acoustique, donnant lieu à de nouvelles thématiques de recherche sur les cristaux phononiques. Les processus mis en jeu lors de la propagation d'une onde acoustique à travers un milieu complexe sont nombreux : non-linéarités, diffusion multiple, dispersion, dynamique lente, mémoire, dilatance, degré de liberté en rotation, En acoustique, les milieux granulaires non consolidés, assemblages de grains en contact, sont parmi les milieux de propagation les plus complexes et mal compris. Ils recèlent de nombreux processus acoustiques qui restent à comprendre et qui peuvent s'avérer intéressants pour des applications futures.

De par leur structure et comportements analogues au sol, et ceci à différentes échelles, les milieux granulaires présentent un grand intérêt en géophysique et géotechnique (glissements de terrain, séismes, comportement des ballastes, roches poreuses . . .) pour des études systématiques de laboratoire. De nombreux domaines industriels sont aussi potentiellement concernés (génie civil, industrie chimique et pharmaceutique, agro-alimentaire, . . .). Ces milieux présentent également l'intérêt de pouvoir prendre des formes diverses et d'être très sensibles aux conditions extérieures auxquelles ils sont soumis. En particulier, la pression statique appliquée sur le milieu et l'humidité ambiante jouent des rôles prépondérants sur leurs propriétés élastiques, à travers l'influence sur le comportement des contacts, parfois aux échelles microscopiques. Ainsi, de nombreux régimes différents peuvent être atteints selon les configurations (chaîne périodique de billes identiques, membrane bidimensionnelle, cristal hexagonal tridimensionnel, milieux granulaires désordonnés, poudres...).

Une première caractéristique particulièrement importante des milieux granulaires non consolidés est leurs non-linéarités acoustiques, qui ont fait l'objet de plusieurs études. Ces non-linéarités acoustiques proviennent notamment des comportements non linéaires des contacts seuls : non-linéarité de Hertz pour des contacts entre sphères parfaites et en interaction normale, non-linéarité de Hertz-Mindlin en interaction de cisaillement, clappement (singularité liée à l'ouverture et à la fermeture des contacts sous l'action de l'onde acoustique), adhésion-cohésion aux échelles de la rugosité des surfaces de billes, etc. De nombreuses zones d'ombres existent actuellement dans la compréhension des processus acoustiques en présence de ces non-linéarités riches et non classiques, pour les milieux granulaires mais aussi dans une classe plus large dite des milieux mésoscopiques (réunissant aussi les milieux fissurés, roches...). Une meilleure compréhension des processus non linéaires non classiques dans les milieux granulaires, même

dans des situations simplifiées, peut donc en principe être bénéfique à d'autres domaines, incluant par exemple le contrôle non destructif par ultrasons ou le contrôle santé des matériaux.

Une seconde caractéristique très spécifique des milieux granulaires est le degré de liberté en rotation des grains. Comment la possibilité de rotation des grains composant un milieu granulaire, désordonné ou ordonné, se traduit sur la propagation d'une onde acoustique ? Quelques éléments de réponse ont été récemment apportés par l'étude théorique et expérimentale d'un cristal hexagonal compact de billes identiques [43]. Des modes particuliers de propagation, qui n'existent que via le mouvement de rotation des billes (modes couplés rotation-cisaillement), ont été mis en évidence expérimentalement. D'autres études théoriques ont contribué à la compréhension de ces modes impliquant le degré de liberté de rotation (pures ou couplés avec d'autres degrés de liberté), dans des systèmes périodiques unidimensionnels ou des membranes granulaires bidimensionnelles [67, 57]. Ces études montrent entre autres, l'importance de prendre en compte le degré de liberté en rotation dans la description de la propagation d'ondes dans les systèmes granulaires périodiques. La question reste cependant très ouverte, notamment pour les milieux granulaires désordonnés.

L'idée à la base de ce travail de thèse est d'analyser, dans des configurations simplifiées (typiquement des chaînes uni-dimensionnelles de billes arrangées périodiquement), la propagation d'ondes élastiques non linéaires avec des effets phononiques ou de dispersion forte, en particulier pour des ondes impliquant la rotation des billes. Afin de s'affranchir de l'influence du couplage souvent non linéaire avec le support du milieu, des billes magnétiques sont utilisées, et seuls les contacts solides entre billes faisant partie intégrante du milieu sont mis en jeu dans la propagation : le milieu est maintenu verticalement dans l'air, uniquement par la bille du haut. Plusieurs types d'ondes et de configurations sont étudiés dans l'objectif de contribuer à une meilleure compréhension de la propagation non linéaire dans les milieux comportant une non-linéarité hystérétique, prépondérante dans le cas d'un contact entre billes sollicité en torsion pure. La démarche, à la fois expérimentale et théorique, a permis de mettre en évidence la propagation acoustique dans un milieu purement hystérétique. Il a en effet été démontré que dans le cas d'ondes de rotation pure, la non-linéarité hystérétique est dominante par rapport aux autres types de non-linéarités (de Hertz, ...). De plus, des expériences ainsi que des développements théoriques ont permis de modéliser le contact de torsion par un hystérésis quadratique. Enfin, une configuration expérimentale simple a mis en évidence la distorsion de signaux impulsionsnels due uniquement à la non-linéarité hystérétique, encore jamais observée jusqu'à aujourd'hui.

Ce mémoire de thèse est organisé en cinq chapitres. Le premier chapitre dresse un aperçu des modèles théoriques et lois de comportements mécaniques les plus pertinents dans les milieux granulaires unidimensionnels. Les principaux processus physiques susceptibles d'être mis en jeu dans les configurations de milieux étudiées dans les chapitres suivants sont synthétisés.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'effets phononiques conjointement avec des non-linéarités dans une chaîne granulaire diatomique. La génération du second harmonique de l'onde longitudinale est traitée théoriquement, numériquement et expérimentalement. Un des principaux résultats est la transmission d'une onde évanescence dans la bande interdite, forcée par les non-linéarités de l'onde fondamentale. D'autre part, des effets non linéaires d'auto-action ont mis en évidence de forts

effets d'atténuation ou de transparence aux fréquences proches des transitions entre les bandes permises et interdites. D'autres effets non linéaires sont également observés et discutés, en lien notamment avec le phénomène d'hystérésis. Ce chapitre est basé sur un article publié dans *Physical Review E* en 2012.

Dans le chapitre 3, la propagation acoustique d'ondes de rotation pure dans un milieu granulaire unidimensionnel est étudiée en régime linéaire. Un dispositif expérimental, spécifiquement conçu pour générer des ondes de rotation dans une chaîne granulaire est présenté. Cette configuration simple de milieu granulaire permet de modéliser certaines propriétés fondamentales encore peu étudiées. En l'occurrence la vitesse de propagation mesurée, d'environ 20 m/s pour la configuration choisie, est en bon accord avec la prédiction théorique, tout comme les propriétés phononiques (fréquences de résonance, bande interdite). Il est intéressant de noter que la vitesse des ondes de rotation est bien plus faible que celle des ondes longitudinales ou de cisaillement. Il en résulte donc une fréquence de coupure très basse.

Le quatrième chapitre est consacré à la propagation d'ondes de rotation dans une chaîne granulaire en régime faiblement non linéaire. Tout d'abord, une modélisation dans la configuration la plus simple, deux billes en contact, des résonances non linéaires est effectuée. Les résultats théoriques sont ensuite confrontés aux résultats expérimentaux. Cette étude a permis une meilleure compréhension du comportement du contact en torsion, jusqu'ici peu étudié. La principale contribution de ces résultats est le fait de pouvoir modéliser le contact en torsion par une non-linéarité hystérétique quadratique (en régime faiblement non linéaire). Des expériences complémentaires sont enfin effectuées pour des configurations de chaînes granulaires plus complexes.

Dans le dernier chapitre, la propagation de paquets d'ondes de rotation en régime faiblement non linéaire est étudiée. La distorsion de l'onde sur la distance, due à l'accumulation des effets non linéaires hystérétiques, est simulée grâce à un modèle analytique développé spécifiquement pour le signal d'excitation expérimental. Le développement de la modélisation théorique, basé sur le formalisme de Preisach-Mayergoyz, prend en compte la non-linéarité hystérétique quadratique. Les résultats expérimentaux, montrant pour la première fois la déformation de la forme d'onde uniquement due à une non-linéarité hystérétique, sont finalement confrontés à la modélisation et discutés.

Chapitre 1

Les milieux granulaires unidimensionnels : généralités et propriétés

1.1 Introduction

Les milieux granulaires sont présents dans un grand nombre de domaines tels que la physique, la géophysique, la mécanique, la chimie, la pharmaco chimie, l'agro-alimentaire, etc. Dans l'industrie, les principaux secteurs utilisant les matériaux granulaires relèvent entre autres :

- de l'activité minière (extraction de minerais, transport, broyage, ...),
- du bâtiment et du génie civil (béton, bitume, remblais, ...),
- de l'industrie chimique (combustibles et catalyseurs, ...),
- de l'industrie pharmaceutique (poudres médicamenteuses, ...),
- de l'agro-alimentaire (céréales, ...), etc.

En géophysique, plus particulièrement, les milieux granulaires sont omniprésents du fait de la composition même du sol. Citons par exemple :

- les dunes,
- les glissements de terrain,
- les avalanches de neige (la neige pouvant subir des changements de phase de ses constituants).

La description de ces événements et la prédiction de catastrophes comme les glissements de terrain ou les avalanches, pour ne citer que les phénomènes relevant de la géophysique, nécessitent une bonne compréhension des propriétés de ces milieux formés de particules.

L'étude fine du comportement des particules en contact dans les milieux granulaires est extrêmement difficile compte tenu de la grande variété et de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu. Afin de réduire cette diversité et d'abaisser le degré de complexité, il est d'usage de recourir à des structures granulaires simplifiées telles que les chaînes de billes. Toutefois, dans ces assemblages

unidimensionnels, de nombreux phénomènes complexes coexistent malgré tout, tels que les comportements non linéaires d'élasticité, de propagation, d'atténuation, de dispersion, d'hystérésis, Ils dépendent d'un grand nombre de paramètres liés aux propriétés locales des contacts entre les billes (état de surface et de dureté des matériaux) et aux propriétés globales de l'ensemble (nombre de billes, taille, forces extérieures appliquées, etc).

Ce premier chapitre a pour but de décrire, dans un premier temps, "la mécanique du contact" entre deux sphères. Une seconde partie est dédiée à la modélisation des ondes de rotation dans une chaîne granulaire. Dans les chapitres suivants, ces éléments théoriques seront utilisés dans la modélisation de la propagation des ondes de compression et de rotation dans des chaînes granulaires particulières.

1.2 Comportement mécanique du contact

Afin d'étudier la propagation acoustique dans une chaîne granulaire, il est indispensable de décrire précisément l'interaction mécanique entre deux sphères élastiques en contact. Une description microscopique de ce contact permet la compréhension de phénomènes à plus grande échelle et dans des milieux plus complexes (tridimensionnels, hétérogènes, . . .). En effet, le comportement macroscopique de la chaîne est dicté principalement par le comportement au niveau des contacts, notamment en ce qui concerne la non-linéarité.

À la fin du XIXème siècle, Hertz s'est intéressé à la déformation élastique du contact entre deux sphères élastiques identiques soumises à une contrainte axiale (axe passant par les centres des billes) [24]. Sa théorie a été construite en étudiant les franges d'interférences lumineuses entre deux lentilles de verres en fonction de la déformation élastique de la surface de contact [33]. Mindlin a ensuite étendu cette théorie à l'application d'une force tangentielle entre deux sphères dans les années 1940 [44].

1.2.1 Théorie de Hertz-Mindlin

La théorie de Hertz met en évidence le lien entre la déformation au niveau du contact et la contrainte normale appliquée. Bien qu'établie il y a plus d'un siècle, cette théorie a fait l'objet de plusieurs travaux expérimentaux sur sa validité et son application aux milieux granulaires [9, 14, 27]. Les relations et formules exposées par cette théorie sont valables sous certaines hypothèses [33] :

- la surface de contact est continue et petite devant la taille d'une bille,
- la contrainte appliquée est faible,
- chaque sphère est considérée comme un demi espace élastique,
- les surfaces sont supposées sans friction.

Ces hypothèses signifient tout d'abord que la zone de contact soit faible devant le rayon de la bille, et implique donc que la contrainte appliquée soit faible. Ensuite, chaque sphère est considérée comme un demi-espace élastique linéaire, contraint sur une petite région (elliptique dans le cas général) de sa surface plane. Grâce à cette hypothèse, le comportement mécanique dans la zone de contact est découplé des contraintes globales à l'intérieur d'une bille. Enfin la friction entre les surfaces est supposée nulle, et permet de négliger les efforts tangentiels. Un schéma du contact est représenté sur la figure 1.1.

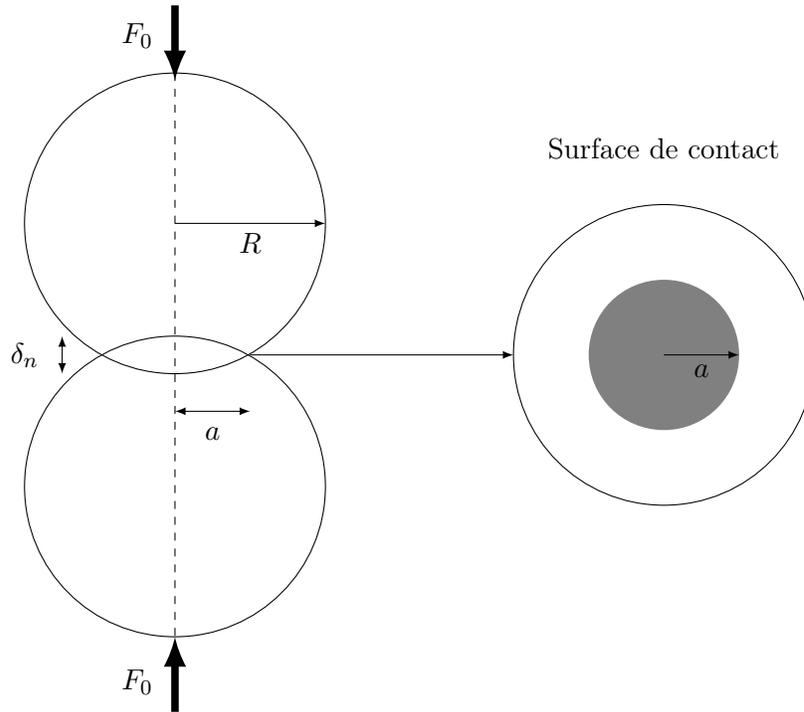


FIGURE 1.1 – Schéma du contact entre deux sphères élastiques de rayon R soumises à une force normale F_0 et variables associées au problème. Le déplacement axial relatif entre les centres des sphères est noté δ_n .

Dans un premier temps une force axiale F_0 , appliquée sur les deux sphères et passant par leur centre, est considérée. À cette force F_0 appliquée sont associés : une surface de contact de rayon a , une pression p_0 et un déplacement axial relatif entre les centres des sphères δ_n . À partir des hypothèses énoncées précédemment, la théorie de Hertz permet d'établir les relations suivantes [33] :

$$a = \left(\frac{3F_0 R}{4E^*} \right)^{1/3} \quad \text{avec} \quad E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (1.1)$$

où R est le rayon des sphères, a le rayon de la surface de contact, F_0 la force axiale appliquée sur les sphères, E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau constituant les sphères. Cette relation permet d'obtenir le rayon de la surface de contact en fonction de la force normale appliquée. Cette formule est fondamentalement non linéaire puisque $a \propto F_0^{1/3}$. La relation suivante lie la pression locale au centre de la surface de contact à la force appliquée [33] :

$$p_0 = \frac{3F_0}{2\pi a^2} = \left(\frac{6F_0 E^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}. \quad (1.2)$$

La relation entre la force normale appliquée et le déplacement axial relatif entre les milieux des sphères δ_n s'écrit

$$\delta_n = \left(\frac{9F_0^2}{16RE^{*2}} \right)^{1/3}. \quad (1.3)$$

Cette expression non linéaire, puisque $\delta_n \propto F_0^{2/3}$, provient seulement de la géométrie du contact. En effet, plus la force appliquée sera grande et plus la zone de déformation le sera aussi. Du point de vue de l'acoustique, il est possible de montrer que ce système est d'autant plus non linéaire que la force F_0 est faible. À titre d'exemple, pour les billes d'acier de 19 mm de diamètre utilisées par la suite, la force normale appliquée de 54 N induit un déplacement axial de 1,8 μm . De manière générale, on préfère utiliser les relations de type *force=f(déplacement)*. L'équation inverse de 1.3 est donc :

$$F_0 = \left(\frac{4R^{1/2}E^*}{3} \right) \delta_n^{3/2}. \quad (1.4)$$

Cette relation force-déplacement est à l'origine des effets non linéaires dans la propagation des ondes.

Mindlin a étendu ce problème en considérant, en plus de la force normale, une force tangentielle (figure 1.2). Grâce au frottement une force tangentielle peut être appliquée tout en gardant le contact entre les sphères. Les billes restent en contact sous la condition $T_0 \leq \mu_f F_0$, où μ_f est le coefficient de frottement. Au delà de cette limite il y a glissement et les déplacements de tous les points de la surface de contact ne sont pas les mêmes. L'hypothèse de surface de contact plane permet de dissocier les déplacements relatifs normaux et tangentiels. La distribution de contraintes tangentielles, imposant un déplacement tangential parallèle à la surface de contact, s'écrit [33, 44]

$$q(r) = \frac{T_0}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad (1.5)$$

où r est la distance radiale par rapport au centre de la surface de contact. La relation entre le déplacement relatif tangential δ_t et la force tangentielle T_0 s'écrit :

$$\delta_t = \frac{T_0}{4a} \left(\frac{2-\nu}{G} \right), \quad (1.6)$$

où G est le module d'élasticité en cisaillement ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$). Cette relation est linéaire contrairement à la relation contrainte déformation axiale.

La contrainte tangentielle est grande au voisinage de la périphérie de la surface de contact ($r \approx a$). Dans ce cas, il peut y avoir un glissement dans cette zone. La condition de glissement va dépendre directement de la force axiale appliquée (loi de Coulomb). En prenant en compte cet effet de glissement, le déplacement tangential entre les deux sphères s'écrit alors :

$$\delta_t = \frac{3\mu_f F_0}{8a} \left(\frac{2-\nu}{G} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{T_0}{\mu_f F_0} \right)^{2/3} \right]. \quad (1.7)$$

Cette relation montre que le déplacement tangentiel est une fonction non linéaire de la force axiale F_0 . Plus particulièrement, un comportement hystérétique a été observé théoriquement et expérimentalement [46, 45, 32]. Ce type de contact, faisant intervenir des efforts tangentiels et axiaux, peut donc être source de non-linéarités pour le milieu granulaire et en particulier de type hystérétique. Cet aspect est analysé plus en détails dans les sections suivantes.

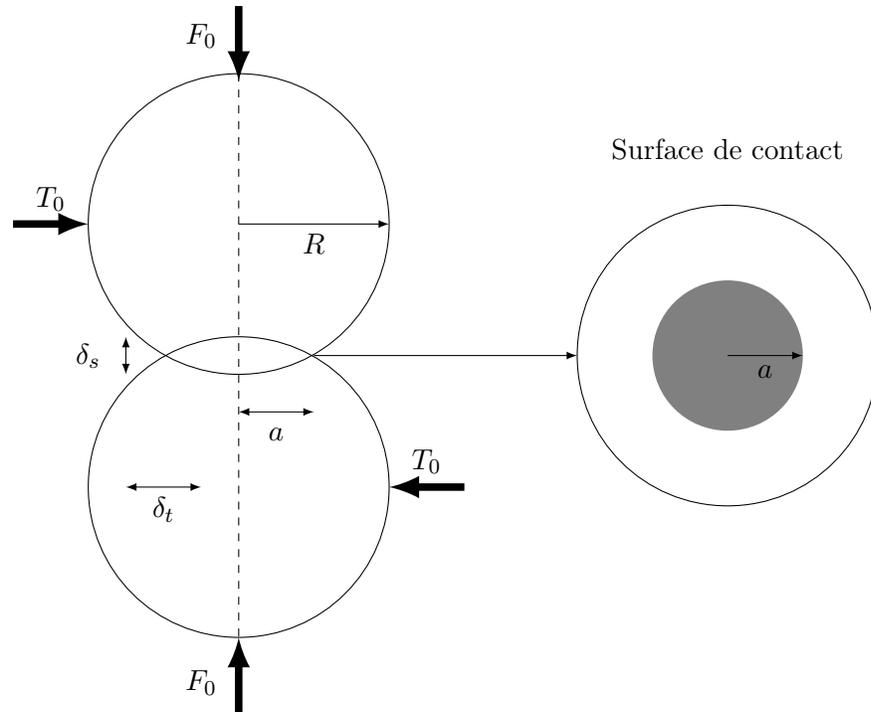


FIGURE 1.2 – Schéma du contact entre deux sphères élastiques de rayon R soumises à une force normale F_0 et à une force tangentielle T_0 et variables associées au problème.

La théorie de Hertz-Mindlin est généralement utilisée comme base pour toute étude de contacts dans les milieux granulaires. Cependant, la propagation d'ondes acoustiques dans un tel milieu peut engendrer d'autres phénomènes. Ces phénomènes ne satisfont pas tous les hypothèses de base de la théorie de Hertz-Mindlin et doivent par conséquent être étudiés séparément. On peut citer par exemple l'influence de la rugosité et autres aspérités au niveau du contact, les fortes déformations dynamiques, les pertes par friction et enfin l'effet de rotation des billes. C'est sur ce dernier point que sont axées les études présentées dans la suite du document.

1.2.2 Phénomène de friction

La description mécanique du contact entre deux sphères soumises à des efforts tangentiels exposée précédemment fait apparaître un phénomène de friction. Ce phénomène est à l'origine d'un comportement hystérétique au niveau du contact. De manière générale, la contrainte tangentielle est maximale en périphérie de la surface de contact. Il peut donc apparaître un phénomène d'adhésion/glisement dû à la friction.

Malgré l'importance de la friction dans tout problème de contact, il n'existe pas de théorie générale macroscopique de la friction qui pourrait prédire la force de friction entre deux corps. Des paramètres tels que la déformation plastique, la rugosité de surface et l'usure influencent fortement le comportement de la friction et leurs contributions relatives sont difficiles à contrôler et/ou à séparer.

1.2.2.1 Friction macroscopique

La friction à l'état macroscopique intervient entre des contacts secs ou entre deux surfaces lubrifiées. On s'intéresse ici à la friction sèche plus connue comme la friction de Coulomb. La friction sèche apparaît lorsque deux surfaces solides sont directement en contact comme c'est le cas entre deux billes élastiques. Dans ce cas le coefficient de friction (ou de frottement) statique μ_f est défini comme [59] :

$$T_f = \mu_f F_n, \quad (1.8)$$

où T_f est la force de friction statique et F_n la force normale. La force de friction est donc proportionnelle à la force normale et est indépendante de la surface de contact. Lorsque les surfaces en contact sont en mouvement l'une par rapport à l'autre, le coefficient de friction dynamique est inférieur ou égal au coefficient de friction statique, le phénomène de glissement peut alors apparaître. Il est à noter que les forces de friction statique et dynamique ne peuvent être considérées séparément. Lorsqu'une force tangentielle est appliquée (cf. section précédente) un glissement local apparaît même quand le glissement global (macroscopique) n'a pas encore eu lieu. Donc la différence entre la friction statique et dynamique est relative et la transition entre les deux est continue.

1.2.2.2 Paramètres influant sur la friction

Le phénomène de friction est sensible à un grand nombre de paramètres à différentes échelles. Le comportement mécanique d'un même contact peut donc varier de manière significative en fonction de l'évolution de ces paramètres [6, 59].

On peut tout d'abord citer les forces de van der Waals. Ces forces, agissant à l'échelle atomique, ont pour effet d'augmenter l'adhésion entre deux corps, augmentant également la friction. Dans les modèles, l'adhésion due aux forces de van der Waals est généralement additionnée à la force normale. Cependant, pour des objets macroscopiques ces forces sont souvent faibles comparées à la force normale et peuvent donc être négligées.

Le temps de contact a aussi un impact sur la friction. Coulomb a découvert que la force de friction statique augmente avec le temps de contact entre deux objets au repos. Il a notamment observé que la force de friction variait comme le logarithme du temps.

Ensuite, la rugosité joue également un rôle important sur la friction. L'influence de la rugosité sur la friction dépend de plusieurs facteurs tels que la présence d'impuretés ou de ponts capillaires au niveau du contact. Ces aspérités locales ont donc un impact sur le comportement du contact.

Enfin, la température peut également jouer un rôle [37]. À priori, le coefficient de friction ne dépend pas de la température tant que le contact ne dépasse pas certaines conditions (voir [59]). Mais en présence de couches minces sur la surface du matériau moins rigides, comme par exemple une fine couche d'alliage sur des billes d'acier, le coefficient de friction n'est sensiblement dépendant de la température qu'à partir d'un certain seuil (par exemple 200°C pour du cuivre) .

En conclusion, tous ces facteurs n'agissent pas indépendamment. Il est donc difficile de contrôler l'évolution de chaque facteur et de séparer très distinctement leurs effets sur le contact et donc sur la propagation des ondes mécaniques.

1.2.3 Torsion

Lorsque deux sphères élastiques en contact sont soumises à un effort tangentiel, le phénomène de friction au niveau du contact permet de transmettre cet effort. On considère désormais un moment de torsion autour de l'axe formé par les centres des sphères. D'un point de vue mécanique, un effort de torsion au niveau du contact est très proche des efforts tangentiels de la théorie de Hertz-Mindlin. La friction mise en jeu fait également apparaître un phénomène d'adhésion/glisserment en fonction de la force normale appliquée. La théorie de Hertz-Mindlin est donc valide pour l'étude de la torsion de sphères élastiques. Pour cela on considère deux sphères élastiques homogènes en contact comme précédemment. Les sphères sont soumises à une force normale F_0 et à un moment de torsion M_z autour de l'axe z formé par les centres des sphères. Les données du problème sont représentées sur la figure 1.3.

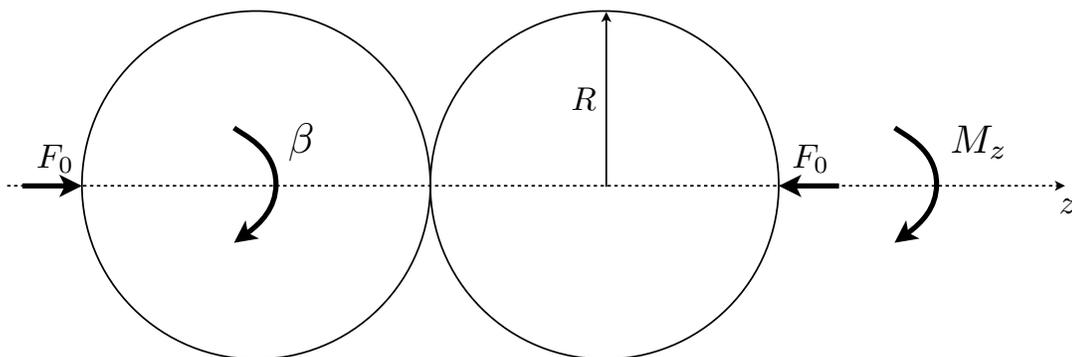


FIGURE 1.3 – Schéma de deux billes de rayon R soumises à un moment de torsion M_z autour de l'axe z créant un angle relatif β entre les billes.

La distribution de la pression normale sur la surface est donnée par la relation [40] :

$$p(r) = \frac{3F_0}{2\pi a^3} (a^2 - r^2)^{1/2}, \quad (1.9)$$

où r est la distance radiale ($r \in \{0, \dots, a\}$). Au centre de la surface de contact, en $r = 0$, on retrouve bien l'équation (1.2). Un moment de torsion M_z est ensuite appliqué autour de l'axe z . Lorsque le glissement à la surface de contact n'intervient pas, il peut être montré que les conditions limites en terme de déplacements et de contraintes sont

$$u_\theta = -\beta.r, \quad u_r = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad r \leq a, \quad z = 0, \quad (1.10a)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{z\theta} = \sigma_z = 0 \quad r > a, \quad z = 0, \quad (1.10b)$$

$$\lim_{\sqrt{r^2+z^2} \rightarrow \text{inf}} (u_r, u_\theta, u_z) = 0, \quad (1.10c)$$

où (u_r, u_θ, u_z) sont les déplacements en coordonnées cylindriques (r, θ, z) et $(\sigma_z, \tau_{zr}, \tau_{z\theta})$ les contraintes normale et tangentielles sur la surface de contact en $z = 0$ et β l'angle de rotation. La contrainte de cisaillement au niveau de la zone de contact devient infinie lorsque $r \rightarrow a$, un glissement peut donc apparaître sur une certaine zone en périphérie de la surface de contact. Cette zone de glissement (pour $a' < r < a$) est illustrée sur la figure 1.4.

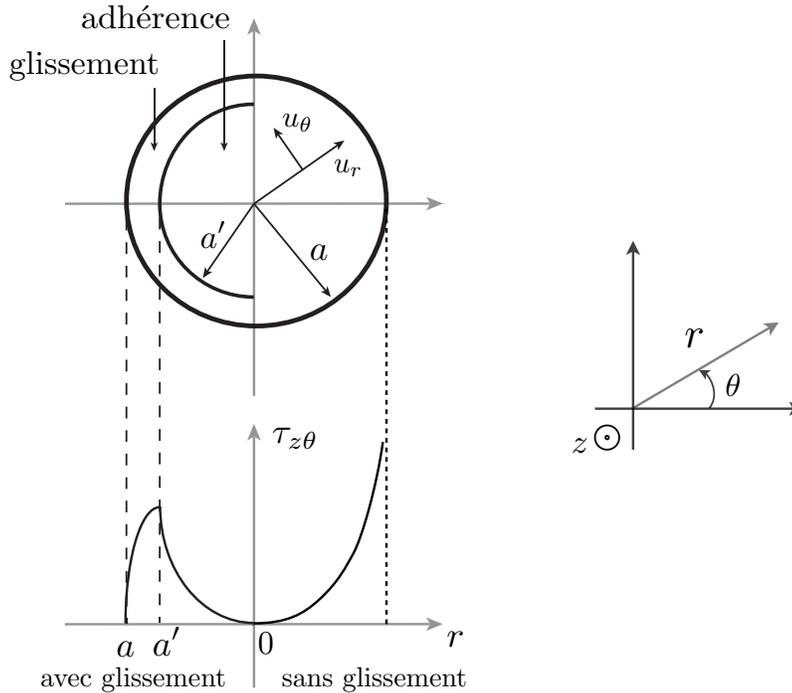


FIGURE 1.4 – Représentation des deux zones (adhérence et glissement) de la surface de contact de rayon a entre deux sphères élastiques et profil des contraintes tangentielles $\tau_{z\theta}$ associées.

Les conditions limites sont alors réécrites en tenant compte du glissement. Dans la zone de glissement la contrainte tangentielle s'écrit comme le produit de la pression normale, éq. (1.9), par le coefficient de frottement μ_f . L'expression de l'angle de rotation reste inchangée sur la zone d'adhésion ($r \leq a'$). Les conditions limites pour les déplacements et contraintes s'écrivent alors :

$$u_\theta = -\beta.r, \quad u_r = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad r \leq a', \quad z = 0, \quad (1.11a)$$

$$\tau_{z\theta} = p(r).\mu_f, \quad \tau_{zr} = \sigma_z = 0 \quad a' \leq r \leq a, \quad z = 0. \quad (1.11b)$$

La solution complète de ce problème implique de trouver des solutions pour les trois positions d'équilibre correspondant aux équations (1.10) et (1.11). Étant donnée la symétrie axiale du problème, on peut déjà conclure que les déplacements u_r et u_z sont nuls. Les solutions de la contrainte de cisaillement sont :

$$\tau_{z\theta}(r \leq a') = \frac{3\mu F_0}{\pi a^3} (a^2 - r^2)^{1/2} \left[\frac{\pi}{2} + k^2 \mathbf{D}F(k', \Theta) - \mathbf{K}E(k', \Theta) \right] : \quad \text{zone d'adhérence,} \quad (1.12a)$$

$$\tau_{z\theta}(a' \leq r \leq a) = \frac{3\mu F_0}{2\pi a^3} (a^2 - r^2)^{1/2} : \quad \text{zone de glissement,} \quad (1.12b)$$

où $k' = \frac{a'}{a}$ et $k = \sqrt{1 - k'^2}$. $F(k', \Theta)$ et $E(k', \Theta)$ sont respectivement des intégrales elliptiques de premier et second ordre de module k' et d'angle Θ . $\mathbf{D} = \frac{\mathbf{K} - \mathbf{E}}{k^2}$ où \mathbf{K} et \mathbf{E} sont les intégrales elliptiques complètes de premier et de second ordre de module k^2 et d'angle $\Theta = \frac{\pi}{2}$ [2]. L'angle de rotation est relié à \mathbf{D} par la relation :

$$\frac{Ga^2}{\mu F_0} \beta = \frac{3k^2}{4\pi} \mathbf{D}. \quad (1.13)$$

Le profil des contraintes tangentielles correspondant aux équations (1.12) est tracé sur la fig. 1.4. On peut noter que la valeur de la contrainte en $r = a'$, calculée à partir de l'équation (1.12a), est exactement égale à la contrainte calculée à partir de l'équation (1.12b). Ce qui signifie que la contrainte $\tau_{z\theta}$ est continue en $r = a'$.

Le moment de torsion appliqué M_z se déduit de la contrainte tangentielle par l'expression

$$M_z = 2\pi \int_0^a \tau_{z\theta}(r, z = 0) r^2 dr, \quad (1.14)$$

où τ_z est décrite par l'équation (1.12a) dans la zone de d'adhérence et par l'équation (1.12b) dans la zone de glissement. Après calculs, le moment de torsion s'écrit [40] :

$$\frac{M_z}{\mu F_0 a} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{3\pi}{4} + k'k^2 [6\mathbf{K} + (4k'^2 - 3)\mathbf{D}] - 3k\mathbf{K} \arcsin(k') \right. \\ \left. - 3k^2 \left[\mathbf{K} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(k' \sin \alpha)}{[1 - (k' \sin \alpha)^2]^{\frac{3}{2}}} d\alpha - \mathbf{D} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(k' \sin \alpha)}{\sqrt{1 - (k' \sin \alpha)^2}} d\alpha \right] \right\}, \quad (1.15)$$

où $\sin \alpha = \frac{r}{a'}$. Cette relation moment de torsion - déplacement angulaire est représentée sur la figure 1.5.

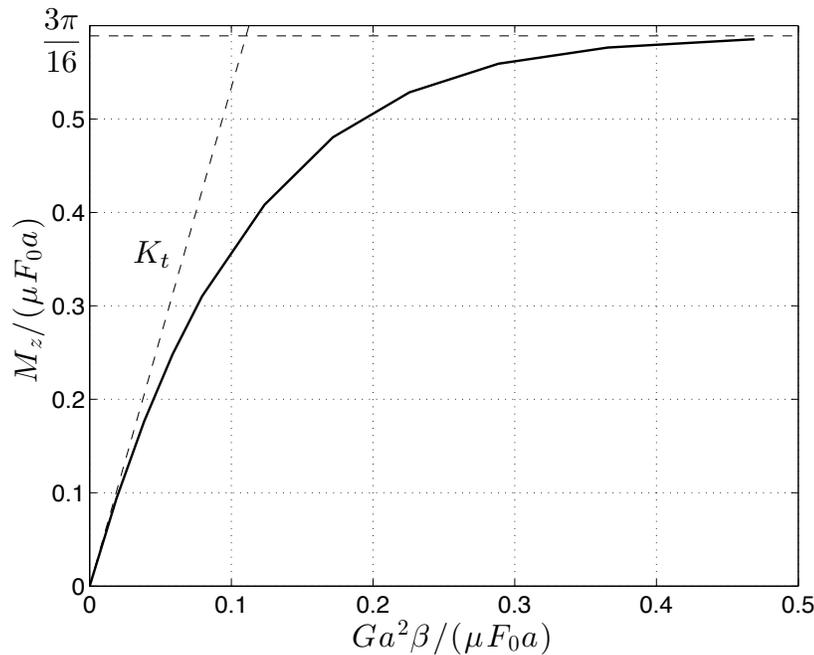


FIGURE 1.5 – Relation entre le moment de torsion et le déplacement angulaire tracée à partir de l'équation (1.15). La droite représente la raideur de torsion K_t .

L'analyse de cette courbe montre tout d'abord que la relation entre le moment de torsion et l'angle de torsion est non linéaire. Ensuite le moment de torsion croît jusqu'à une valeur limite déterminée par

$$M_z^{max} = \frac{3\pi}{16} \mu F_0 a. \quad (1.16)$$

Au delà de cette valeur, le glissement apparaît sur toute la surface de contact et la contrainte n'est plus transmise. Enfin, la tangente à l'origine détermine la raideur de torsion K_t (statique) définie par

$$K_t = \frac{dM_z}{d\beta} = \frac{16}{3} G a^3 = (2R)(1 - \nu) F_0. \quad (1.17)$$

Pour conclure, les relations développées dans cette section, relativement difficiles à manipuler, sont valides pour un moment de torsion monotone et croissant. Il est indispensable d'étendre ce modèle pour des moments de torsion non monotones afin de s'approcher au mieux des conditions expérimentales. En effet, les signaux d'excitation sont principalement des signaux sinusoïdaux (pour les mesures en mode stationnaire par exemple) ou impulsionnels (période de sinus, ...) et font donc intervenir des moments de torsion oscillants. La section suivante décrit le comportement du contact entre deux sphères soumis à un moment de torsion oscillant.

1.2.4 Moment de torsion oscillant

Deresiewicz ([13]) a étendu le modèle de Lubkin exposé précédemment en considérant un moment de torsion oscillant. Cette section présente les nouvelles relations obtenues ainsi que les conditions de

validité. L'hypothèse la plus importante concerne la valeur du moment de torsion appliqué. Ainsi le moment appliqué doit être faible, ce qui se traduit par la condition $\frac{M_z}{\mu F_0 a} \ll 1$. De plus, le moment appliqué étant faible devant sa valeur limite avant glissement totale ($\frac{M_z}{\mu F_0 a} \leq \frac{3\pi}{16}$), la surface de la zone de glissement est également très faible. Ce qui implique la condition $\frac{a'}{a} \approx 1$. À partir de ces conditions, des relations entre le moment de torsion M_z , l'angle de rotation β et le rayon de la zone d'adhérence a' sont obtenues. Ainsi,

$$\frac{M_z}{\mu F_0 a} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1 + 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2}{4} \right)^2 \right], \quad (1.18a)$$

$$\frac{a'}{a} = \left[\frac{4}{3} \sqrt{1 - \frac{3M_z}{2\mu F_0 a}} - \frac{1}{3} \right]^{1/2}, \quad (1.18b)$$

$$\frac{Ga^2}{\mu F_0} \beta = \frac{3}{128} \left[1 - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right] \left[11 - 3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \right]. \quad (1.18c)$$

On peut noter que l'écart entre les valeurs issues de l'expression exacte du moment (éq. (1.15)) et celles issues de l'expression approchée (éq. (1.18a)) est de l'ordre d'environ 0.2 % pour $\frac{a'}{a} = 0.8$. Cette erreur est donc très faible. À partir de ces trois équations approchées (1.18) la relation explicite entre le moment de torsion M_z et l'angle de torsion β prend la forme

$$\frac{Ga^2}{\mu F_0} \beta = \frac{1}{8} \left[1 - \left(1 - \frac{3M_z}{2\mu F_0 a} \right)^{1/2} \right] \left[3 - \left(1 - \frac{3M_z}{2\mu F_0 a} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.19)$$

Comme précédemment la rigidité de torsion, prenant en compte ici le moment appliqué, est déduit de l'équation (1.19). Elle s'écrit donc

$$K_t = \frac{dM_z}{d\beta} = \frac{16}{3} Ga^3 \left[2 \left(1 - \frac{3M_z}{2\mu F_0 a} \right)^{-1/2} - 1 \right]^{-1}. \quad (1.20)$$

Cette expression montre que plus le moment appliqué M_z est grand et plus la rigidité de torsion est faible. Contrairement à la raideur de torsion statique K_t de l'équation (1.17), cette raideur dynamique dépend de la force appliquée sur les sphères F_0 . On utilise également le terme de souplesse de torsion C_t qui est l'inverse de la rigidité ($C_t = \frac{1}{K_t} = \frac{d\beta}{dM_z}$). Ainsi, la compliance augmente avec le moment de torsion.

La relation moment de torsion - déformation angulaire, définie par l'équation (1.19) est désormais étudiée en considérant un moment de torsion M_z oscillant entre les amplitudes M_z^* et $-M_z^*$. Pour cela, le problème est séparé en deux parties. On considère tout d'abord la partie décroissante du moment (après avoir atteint une certaine amplitude maximum M_z^*), et ensuite la partie croissante du moment oscillant (de $-M_z^*$ à M_z^*). Les relations contraintes - déformations pour chaque partie prennent la forme suivante :

– pour un moment décroissant ($\frac{\partial M_z}{\partial t} < 0$) :

$$\frac{Ga^2}{\mu F_0} \beta_d = \left(1 - \frac{3(M_z^* - M_z)}{2 \cdot 2\mu F_0 a}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{3 M_z^*}{2 \mu F_0 a}\right)^{1/2}\right] - \frac{3}{16} \frac{M_z}{\mu F_0 a}, \quad (1.21)$$

– pour un moment croissant ($\frac{\partial M_z}{\partial t} > 0$)

$$\frac{Ga^2}{\mu F_0} \beta_c = - \left(1 - \frac{3(M_z^* + M_z)}{2 \cdot 2\mu F_0 a}\right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{3 M_z^*}{2 \mu F_0 a}\right)^{1/2}\right] - \frac{3}{16} \frac{M_z}{\mu F_0 a}, \quad (1.22)$$

où β_d et β_c sont respectivement les angles de torsion pour la partie décroissante ($'_d'$) et croissante ($'_c'$) du moment de torsion appliqué. Afin de simplifier les notations les grandeurs suivantes sont utilisées : $\overline{M}_z^* = \frac{M_z^*}{\mu F_0 a}$, $\overline{M} = \frac{M_z}{\mu F_0 a}$ et $\overline{\beta}_{d,c} = \frac{Ga^2}{\mu F_0} \beta_{d,c}$. Les équations précédentes deviennent donc

$$\overline{\beta}_d = \left(1 - \frac{3(\overline{M}^* - \overline{M})}{4}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{3\overline{M}^*}{2}\right)^{1/2}\right] - \frac{3}{16} \overline{M}, \quad (1.23a)$$

$$\overline{\beta}_c = -\overline{\beta}_d(-\overline{M}) = - \left(1 - \frac{3(\overline{M}^* + \overline{M})}{4}\right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{3\overline{M}^*}{2}\right)^{1/2}\right] - \frac{3}{16} \overline{M}. \quad (1.23b)$$

Ce couple d'équation (1.23) est représenté sur la figure 1.6 pour une faible valeur du moment de torsion. Il apparaît clairement un comportement hystérétique de la relation moment de torsion - déformation angulaire.

1.2.5 Approximations à plusieurs ordres de la relation moment de torsion - déformation angulaire approchée

Le couple d'équations (1.23) décrivant la relation moment de torsion - déformation de deux billes élastiques soumises à un moment de torsion est développé dans cette partie afin de pouvoir les manipuler plus aisément. Les équations (1.23) sont développées afin d'inverser plus aisément ces relations et obtenir le moment de torsion en fonction de l'angle de torsion. Tout d'abord, on suppose que le moment de torsion est faible devant 1 ce qui donne $(\overline{M}^* \pm \overline{M}) \ll 1$. À partir de cette hypothèse chaque équation peut être développée en utilisant la relation suivante (développement de Taylor de $(1+x)^\alpha$) :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(\prod_{j=0}^{i-1} (\alpha - j) \right) x^i. \quad (1.24)$$

1.2.5.1 Approximation au second ordre

On commence par développer les relations hystérétiques au deuxième ordre. Le développement de Taylor au deuxième ordre de $(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$. Après développement de l'équation (1.23a) on obtient

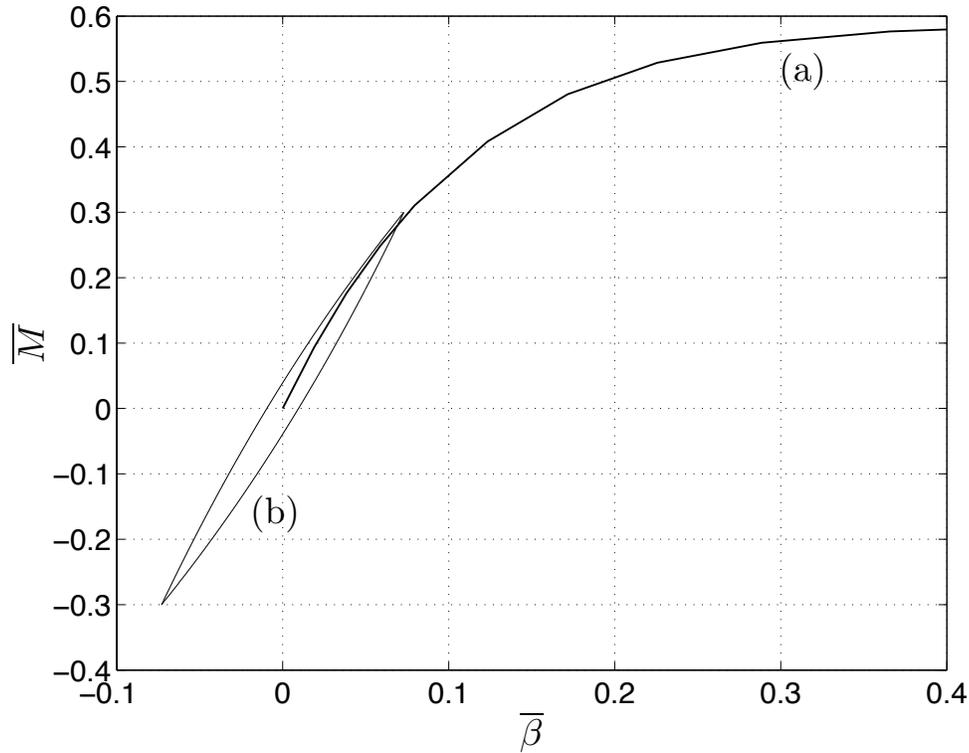


FIGURE 1.6 – (a) Relation moment de torsion - déformation angulaire exacte tracée à partir de l'équation (1.15). (b) Relation moment de torsion - déformation angulaire approchée tracée à partir du couple d'équations (1.23). L'amplitude d'excitation \bar{M}^* est de 0.3 soit $\frac{\bar{M}_{max}}{2}$.

$$\bar{\beta}_d \simeq \underbrace{\frac{3}{16}\bar{M}}_{\text{Partie linéaire}} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^2 [\bar{M}^2 - 2\bar{M}^*\bar{M} - \bar{M}^{*2}]}_{\text{Partie non linéaire}}. \quad (1.25)$$

Les mêmes développements peuvent être effectués pour la partie croissante, (1.23b), mais il est plus rapide d'utiliser la relation $\bar{\beta}_c = -\bar{\beta}_d(-\bar{M})$. Dans ce cas on obtient

$$\bar{\beta}_c \simeq \frac{3}{16}\bar{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^2 [\bar{M}^2 + 2\bar{M}^*\bar{M} - \bar{M}^{*2}]. \quad (1.26)$$

On peut réécrire ces deux équations en une seule expression décrivant l'angle de rotation $\bar{\beta}$ pour les deux états ($\bar{\beta}_c$ et $\bar{\beta}_d$) soit :

$$\bar{\beta} = \frac{3}{16}\bar{M} + \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) \left[\bar{M}^*\bar{M} - \frac{1}{2}(\bar{M}^{*2} - \bar{M}^2) \text{sign}\left(\frac{\partial \bar{M}}{\partial t}\right) \right]}_{\text{Forme "classique" de non-linéarité hystérétique quadratique}}. \quad (1.27)$$

Formellement, seul le troisième terme de l'équation (1.27) introduit de l'hystérésis (et les pertes hystérétiques correspondantes) qui est quasi-statique au sens où il dépend seulement du signe de

$\frac{\partial \bar{M}}{\partial t}$ et non pas de sa valeur. Le second terme décrit le "softening", assouplissement du matériau proportionnellement à l'amplitude de l'excitation périodique. Cette nouvelle relation est tracée sur la figure 1.7 et comparée aux relations exacte et approchée (équations (1.23) et (1.15)).

1.2.5.2 Approximation au troisième ordre

L'expression 1.24 est maintenant développée au troisième ordre, ce qui donne $(1-x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$. Ce développement est appliqué au couple d'équations (1.23) et après simplification on a :

$$\begin{aligned} \bar{\beta} = & \frac{3}{16}\bar{M} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) \left[\bar{M}^* \bar{M} - \frac{1}{2}(\bar{M}^{*2} - \bar{M}^2) \text{sign} \left(\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \right) \right] \\ & + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{16}\right) \left[\bar{M}^3 + 3\bar{M}^{*2} \bar{M} - 3(\bar{M}^{*3} - \bar{M}^* \bar{M}^2) \text{sign} \left(\frac{\partial \bar{M}}{\partial t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Cette équation contient une forme "classique" de non-linéarité quadratique plus un terme cubique. Cette relation est tracée sur la figure 1.7 et comparée à l'approximation précédente et aux deux relations (1.23) et (1.15).

La comparaison entre les différentes approximations de la relation moment de torsion - déformation angulaire approchée (éq. (1.23)) et la relation exacte (1.15) montrent tout d'abord que pour des faibles moments de torsion les approximations sont proches de la relation exacte. De plus, l'écart entre les différents ordres d'approximations du moment oscillant est relativement faible. On peut également noter que l'approximation au troisième ordre (courbe en rouge) est plus proche de la relation complète (courbe en noir) que l'approximation au second ordre.

De manière générale, l'hystérésis observé dans les milieux granulaires et dans les solides a pour effet de modifier l'élasticité du milieu suivant l'amplitude de la perturbation acoustique appliquée. Étudier la variation de l'élasticité d'un milieu est donc un bon moyen de caractériser qualitativement et quantitativement les non-linéarités d'un milieu. En particulier, la variation du module élastique est déterminée à partir de la variation de fréquence de résonance en fonction de l'amplitude d'excitation. En effet, l'élasticité du milieu impose la célérité des ondes dans le milieu, et donc la position des fréquences de résonance. La variation relative du module élastique est

$$\frac{E_\epsilon - E_0}{E_0} \simeq 2 \frac{f_\epsilon - f_0}{f_0}, \quad (1.29)$$

où E_0 est le module élastique à très faible amplitude, E_ϵ le module élastique à plus forte amplitude (de la perturbation ϵ), f_0 la fréquence de résonance à très faible amplitude et f_ϵ la fréquence de résonance à plus forte amplitude. Pour le cas d'ondes de rotation, le module élastique est déterminé par $\frac{\partial M}{\partial \beta}$. La section suivante expose les calculs de la variation de module élastique en fonction des degrés d'approximation de la relation moment de torsion - déformation angulaire. Le but est de déterminer comment évolue la fréquence de résonance d'un système en fonction de l'amplitude.

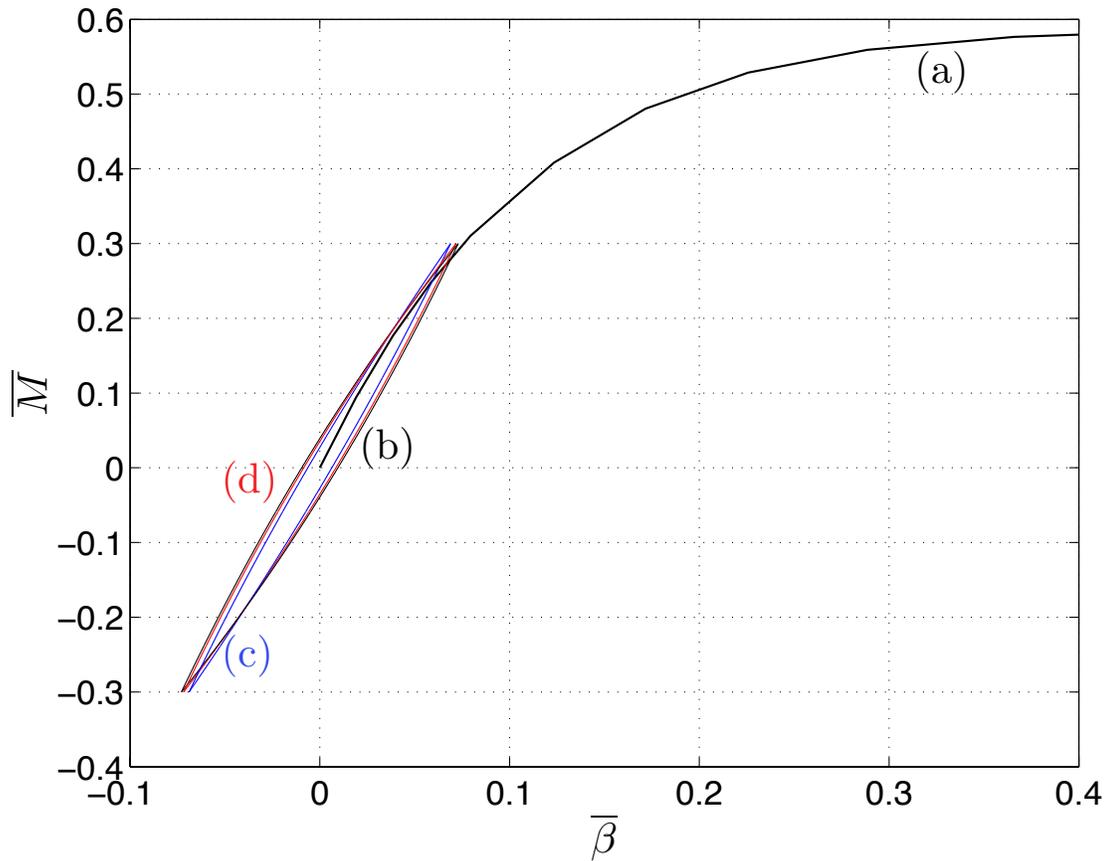


FIGURE 1.7 – (a) Relation moment de torsion - déformation angulaire exacte tracée à partir de l'équation (1.15). (b) Relation moment de torsion - déformation angulaire approchée tracée à partir du couple d'équations (1.23). (c) Approximation au second ordre de l'équation (1.23) correspondant à l'équation (1.27). (d) Approximation au troisième ordre de l'équation (1.23) correspondant à l'équation (1.28). L'amplitude d'excitation \bar{M}^* est de 0.3 soit $\frac{\bar{M}_{max}}{2}$.

1.2.6 Variation relative du module élastique

1.2.6.1 Avec termes hystérétiques jusqu'à l'ordre 2

Il est utile d'inverser la relation (1.27) pour avoir la relation moment - angle ($\bar{M} = f(\bar{\beta})$) au lieu de angle - moment ($\bar{\beta} = f(\bar{M})$). Il suffit de prendre en compte que $\bar{M} \ll 1$ et $\bar{M}^* \ll 1$ dans l'équation (1.27). En première approximation (linéaire) on a donc $\bar{\beta} \cong \frac{3}{16}\bar{M}$ donc $\bar{M} \cong \frac{16}{3}\bar{\beta}$. Cette dernière expression peut être utilisée dans les termes non linéaires (méthode des approximations successives). Dans ce cas on obtient

$$\bar{M} = \frac{16}{3} \left[\bar{\beta} - 4 \left(\bar{\beta}^* \bar{\beta} - \frac{1}{2} (\bar{\beta}^{*2} - \bar{\beta}^2) \text{sign} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} \right) \right) \right]. \quad (1.30)$$

On calcule ensuite la variation relative du module élastique dynamique définie par $\frac{\Delta E}{E_0}$ où $\Delta E = \frac{\partial \bar{M}}{\partial \beta} - E_0$:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = -4\bar{\beta}^* - 4\bar{\beta} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} \right) \quad (1.31)$$

En imposant une excitation sinusoïdale de la forme $\bar{\beta} = \bar{\beta}^* \sin \omega t$ et en moyennant sur une période T de 2π on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial \bar{M}}{\partial \beta} \right\rangle_T \simeq 2 \frac{\Delta f}{f} \simeq -4\beta^*, \quad (1.32)$$

où $\Delta f = f_\epsilon - f_0$. Cette équation (1.32) montre que le contact de type hystérétique en régime faiblement non linéaire impose un décalage de fréquence de résonance proportionnel à l'opposé de l'amplitude d'excitation ($\frac{\Delta f}{f} \propto -\beta^*$). Cette observation sera comparée aux résultats expérimentaux détaillés au chapitre 4. Le décalage fréquentiel, proportionnel à la variation du module élastique, varie donc linéairement avec l'amplitude d'excitation.

1.2.6.2 Avec termes hystérétiques jusqu'à l'ordre 3

La relation (1.28) est inversée afin de déterminer $\bar{M} = f(\bar{\beta})$ comme précédemment, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \bar{M} = \frac{16}{3} \left[\bar{\beta} - 4 \left(\bar{\beta}^* \bar{\beta} - \frac{1}{2} (\bar{\beta}^{*2} - \bar{\beta}^2) \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} \right) \right) \right] \\ + 5 \left(\frac{16}{3} \right)^2 \left[\beta^3 + 3\beta^{*2} \beta - 3(\beta^{*3} - \beta^* \beta^2) \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

On calcule ensuite la variation relative du module élastique dynamique définie par $\frac{\Delta E}{E_0}$ où $\Delta E = \frac{\partial \bar{M}}{\partial \beta} - E_0$:

$$\frac{\Delta E}{E_0} = -4\bar{\beta}^* - 4\bar{\beta} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} \right) + 5 \left(\frac{16}{3} \right) \left[3\beta^2 + 3\beta^{*2} + 6\beta^* \beta \operatorname{sign} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) \right] \quad (1.34)$$

En imposant une excitation sinusoïdale de la forme $\bar{\beta} = \bar{\beta}^* \sin \omega t$ et en moyennant sur une période T de 2π on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial \bar{M}}{\partial \beta} \right\rangle_T \simeq 2 \frac{\Delta f}{f} \simeq -4\beta^* + 120\beta^{*2}. \quad (1.35)$$

Cette équation (1.35) montre que le contact de type hystérétique en régime faiblement non linéaire impose un décalage de fréquence de résonance proportionnel à l'amplitude d'excitation au carré. La courbe associée est donc une parabole. Cette observation sera comparée aux résultats expérimentaux détaillés au chapitre 4.

1.3 Ondes de rotation

Dans cette section, il est proposé de mettre en évidence les ondes de rotation non linéaires dans une chaîne de billes. Malgré le fait que le mouvement des billes se transmette par contact de torsion au niveau de contact, le mouvement global hors de cette zone est un mouvement de rotation. Il est donc question d'ondes de rotation et non pas d'ondes de torsion. Le terme 'ondes de torsion' dans les barreaux est justifié par le fait que tout le volume du barreau est soumis à la torsion, contrairement à une chaîne granulaire formée de billes. L'angle de rotation absolu des billes de masse m est noté φ_n . L'axe de la chaîne est noté $z = 2Rn$ avec n le numéro de la bille et $2R$ la distance entre les billes. On note également $M_{n,n-1}$ le moment agissant au contact entre les billes n et $n-1$ comme représenté sur la figure 1.8.

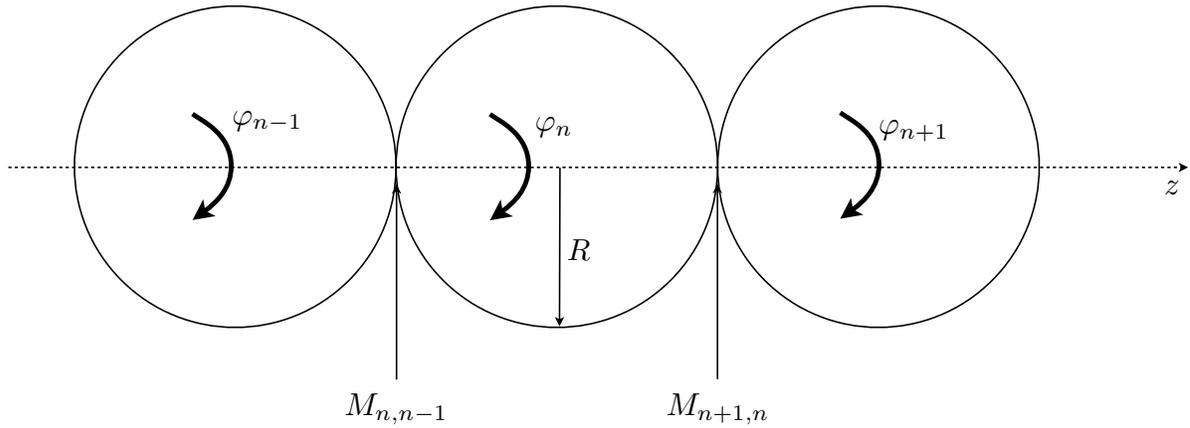


FIGURE 1.8 – Schéma d'ondes de rotation se propageant dans une chaîne de billes de rayon R autour de l'axe z . φ_n est l'angle de rotation absolu de la bille n et $M_{n,n-1}$ le moment de torsion au contact entre les billes n et $n-1$.

L'équation du mouvement est déterminée à partir du principe fondamental de la dynamique :

$$I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sum \vec{M}_n, \quad \text{soit} \quad (1.36)$$

$$I \ddot{\varphi} = M_{n+1,n} - M_{n,n-1}, \quad (1.37)$$

où I est le moment d'inertie. Pour une sphère le moment d'inertie $I = \frac{2}{5}mR^2$. Le moment de torsion $M_{n+1,n}$ est relié à l'angle de rotation (relatif) des billes par : $\beta_{n+1,n} = \varphi_{n+1} - \varphi_n$, par la relation (1.30). Les développements avec les coordonnées discrètes (en remplaçant β par φ et en déterminant $M_{n+1,n}$) peuvent être envisagés mais il est plus judicieux de passer aux approximations continues (basse fréquence : grande longueur d'onde). L'équation (1.37) est réécrite en utilisant la relation (développement de Taylor autour du point $z = 2R$)

$$X_{n\pm 1} \simeq X(z \pm 2R) = X \pm 2R \frac{\partial X}{\partial z} + \dots \quad (1.38)$$

Il vient $I\ddot{\varphi} \simeq 2R \frac{\partial M}{\partial z}$ et de la même manière $\beta \simeq 2R \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. L'équation de propagation devient donc (en ré-introduisant les variables) :

$$\frac{2}{5}mR^2\ddot{\varphi} \simeq (2R)^2 \frac{16}{3}Ga^3 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{4Ga^2}{\mu F_0} (2R) \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^{*2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) \text{sign} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \right) \right] \right\}. \quad (1.39)$$

À partir de cette équation la célérité des ondes de rotation peut être déterminée en fonction de la force F_0 , de R , ρ et ν .

$$\ddot{\varphi} - \underbrace{5 \frac{32}{3} \frac{Ga^3}{m}}_{c_t^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{5}{2mR^2} (2R)^2 \frac{16}{3} Ga^3 \frac{4Ga^2}{\mu F_0} (2R) \times \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^{*2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) \text{sign} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]. \quad (1.40)$$

Après calculs il vient :

$$c_t = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{15}{\pi} (1 - \nu) \frac{F_0}{\rho}}. \quad (1.41)$$

L'équation de propagation devient alors :

$$\ddot{\varphi} - c_t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = c_t^2 \frac{8Ga^2 R}{\mu F_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^{*2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) \text{sign} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]. \quad (1.42)$$

1.4 Description des non-linéarités

Les non-linéarités susceptibles d'apparaître dans les milieux granulaires sont de plusieurs types. Tout d'abord, la non-linéarité de Hertz (géométrique) induite par les contacts entre les billes. Ensuite, un autre type qui découle directement de la non-linéarité de Hertz et qui est souvent rencontré dans ces milieux est la non-linéarité quadratique. Il s'agit en effet du développement en série de la loi de Hertz (avec une perturbation acoustique). Lorsque l'expression de la loi contrainte - déformation est développée sous forme de puissances successives, il est possible de séparer les contributions de chaque ordre de non-linéarité ; quadratique pour l'ordre 2, cubique pour l'ordre 3, ... À chaque ordre de non-linéarité est associé un paramètre qui varie proportionnellement à l'inverse de la pression statique appliquée (dont l'exposant dépend de l'ordre). Donc moins le milieu est contraint et plus il a un comportement non linéaire. À titre d'exemple le paramètre de non-linéarité quadratique généralement noté Γ_2 est de l'ordre de $10^3 - 10^4$ dans un milieu granulaire homogène mésoscopique. Ces non-linéarités aboutissent généralement à la génération d'harmoniques au sein du milieu. Enfin, le type de non-linéarité qui va être décrit par la suite et étudié est la non-linéarité hystérétique. Il a été vu précédemment que lors de contraintes tangentielles (et de torsion), les contacts peuvent avoir un

comportement hystérétique (modèle de Hertz-Mindlin). Chaque contact est assimilé à un élément hystérétique de base et l'état du milieu est alors décrit son espace de Preisach-Mayergoyz ([26]) prenant en compte tous ces éléments hystérétiques. Il s'en suit un modèle phénoménologique ([22], [41]) permettant de décrire le comportement du milieu possédant ce type de non-linéarité. Le modèle de Preisach-Mayergoyz (PM) sera développé dans le dernier chapitre.

Les effets associés à la non-linéarité hystérétique pour les ondes de rotation sont recherchés. Pour cela l'équation de propagation (1.42) est modifiée en appliquant la méthode des échelles multiples (Multiple Scale technique [23, 60]). Pour cela il est supposé que

$$\varphi = \eta\varphi\left(\eta z, \tau = t - \frac{z}{c_t}\right), \quad (1.43)$$

où $\eta \ll 1$ est un petit paramètre. On pose également $X = \eta z$. En retenant uniquement les termes à l'ordre η^2 :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial \tau} = -\frac{4Ga^2 R}{\mu F_0} \left(-\frac{1}{c_t^2}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^* \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^{*2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2 \right) \text{sign} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \right) \right]. \quad (1.44)$$

En introduisant la notation $v = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ pour la vitesse angulaire des billes, il vient

$$\frac{\partial v}{\partial X} - \frac{4Ga^2 R}{\mu F_0 c_t^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[v^* v - \frac{1}{2} (v^{*2} - v^2) \text{sign} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \right] = 0. \quad (1.45)$$

Cette expression est une équation d'évolution non linéaire pour le profil de la vitesse angulaire. Il est intéressant de noter que v^* dépend de X mais pas du temps τ . Pour la suite on normalise $V = \frac{v}{v_0}$, où v_0 ($[s^{-1}]$) est l'amplitude de la vitesse angulaire de la première bille. Il est défini $\theta = \omega \tau$, où ω est la pulsation d'une excitation périodique, et $\xi = \frac{X}{X_{nl}}$ (X_{nl} étant la longueur non linéaire caractéristique). En remplaçant ces nouvelles variables l'équation (1.45) devient

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - \underbrace{\frac{4Ga^2 R}{\mu F_0 c_t^2} X_{nl} \omega v_0}_{=1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[V^* V - \frac{1}{2} (V^{*2} - V^2) \text{sign} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right] = 0. \quad (1.46)$$

La longueur non linéaire caractéristique X_{nl} (à partir de laquelle les effets non linéaires sont assez importants pour être visibles) est déterminée pour que le facteur du second terme du premier membre soit égal à 1, ce qui donne

$$X_{nl} = \frac{10 Q^{1/3} \mu F_0^{4/3}}{\pi \rho R^{11/3} v_0 \omega}. \quad (1.47)$$

L'équation (1.46) prend alors la forme

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[V^* V - \frac{1}{2} (V^{*2} - V^2) \text{sign} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right] = 0. \quad (1.48)$$

Le second terme est développé en prenant en compte que l'amplitude V^* dépend seulement de ξ . On obtient

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - V^* \frac{\partial V}{\partial \theta} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \text{sign} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (1.49)$$

En introduisant un nouveau paramètre de retard temporel dépendant de X

$$\theta^* = \theta + \int_0^\xi V^*(\xi') d\xi', \quad (1.50)$$

l'équation (1.49) est mise sous sa forme canonique :

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - V \frac{\partial V}{\partial \theta^*} \text{sign} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta^*} \right) = 0, \quad (1.51)$$

ou encore

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - V \left| \frac{\partial V}{\partial \theta^*} \right| = 0. \quad (1.52)$$

Cette équation d'évolution montre plusieurs choses. Premièrement, on a une génération instantanée des harmoniques impairs due à la fonction valeur absolue. Et deuxièmement la dynamique en amplitude (de ces harmoniques) est quadratique. La propagation de signaux impulsionnels et d'ondes de cisaillement dans les matériaux possédant une non-linéarité de type hystérétique est décrite dans [18], [19] et [15]. Les solutions de l'équation (1.51) peuvent être obtenues pour n'importe quel profil d'excitation périodique. Les solutions analytiques sont "simples" pour une excitation périodique possédant un maximum et un minimum par période (processus dit "simplex"). Les excitations plus complexes (processus dit "complex") peuvent être traitées numériquement [3].

1.5 Acoustique des milieux granulaires unidimensionnels : exemple des ondes longitudinales

Cette section aborde le cas particulier des ondes longitudinales dans une chaîne granulaire monoatomique déjà présent dans la littérature. L'équation de propagation, la relation de dispersion et les vitesses groupe et de phase sont détaillées et tracées. Ce cas est traité ici car son développement est similaire aux ondes de rotation dans le même milieu homogène. Dans le cas d'ondes de rotation, il faut remplacer le déplacement longitudinal u_n par le déplacement angulaire β_n et les grandeurs correspondantes (rigidité, ...). Ainsi la relation de dispersion, les vitesses de groupe et de phase (présentées sur les figures 1.10 et 1.11) ont des comportements similaires au cas des ondes de rotation.

La propagation d'ondes élastiques longitudinales dans une chaîne granulaire unidimensionnelle se fait au niveau du contact entre les billes. Les déformations statiques (dues au contact) et dynamiques (dues au passage de l'onde acoustique) subies par les billes sont situées dans une petite région autour du contact, de dimensions faibles devant le rayon des billes. Il est possible de modéliser la chaîne par un ensemble de masses ponctuelles reliées entre elles par des ressorts non linéaires suivant la loi de Hertz. Cette modélisation est représentée sur la figure 1.9 et reste valable tant que la longueur d'onde de l'onde

acoustique est grande devant le rayon des billes (modèle Basse Fréquence). Cette limite fréquentielle exclut donc l'apparition de modes supérieurs de billes ou d'éventuelles ondes de surfaces.

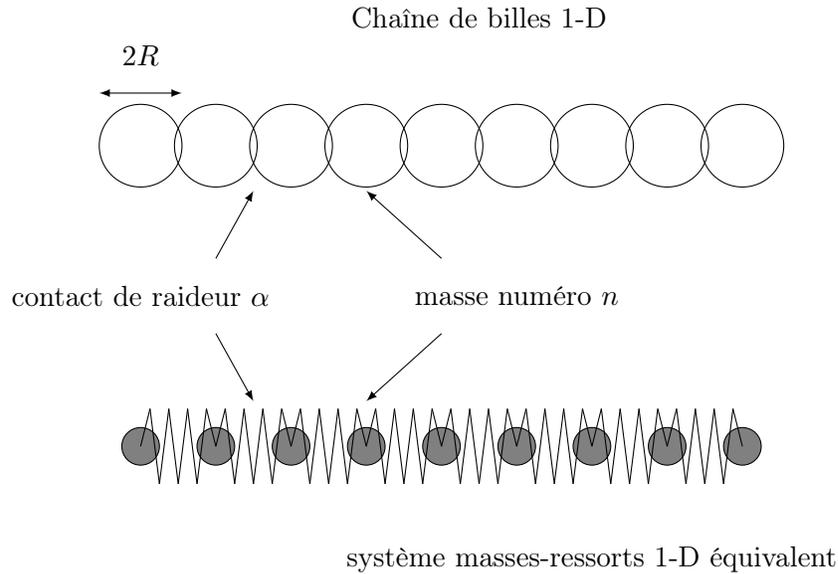


FIGURE 1.9 – Chaîne de billes 1-D et système masses-ressorts équivalent de raideur α .

1.5.1 Équation de la dynamique et relation de dispersion

Il est possible d'exprimer une équation différentielle décrivant le mouvement de chaque bille n considérant les hypothèses précédentes. Ainsi, l'équation de la dynamique s'écrit [8], [9] :

$$\ddot{u}_n = \frac{\sqrt{2RE}}{3m(1-\nu^2)} \{[\delta_0 - (u_n - u_{n-1})]^{3/2} - [\delta_0 - (u_{n+1} - u_n)]^{3/2}\} \quad (1.53)$$

où m est la masse d'une bille ($m = 4\pi\rho R^3/3$, ρ étant la masse volumique de la bille et R son rayon), u_n le déplacement de la bille n par rapport à sa position d'équilibre, \ddot{u}_n son accélération et δ_0 la distance au repos entre les centres de 2 billes adjacentes. Cette équation différentielle non linéaire peut être linéarisée sous l'hypothèse de petites déformations dynamiques $|\delta_d| = |u_n - u_{n-1}| \ll |\delta_0|$ et s'exprime sous la forme [66] :

$$m\ddot{u}_n - \alpha[u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}] = 0 \quad (1.54)$$

où α désigne la constante élastique linéaire du contact. Une constante de raideur pour les ressorts peut ainsi être déterminée par :

$$K = \left(\frac{\partial\delta_0}{\partial F_0}\right)^{-1} = \frac{3}{4}(RF_0)^{1/3} \left(\frac{4E}{3(1-\nu^2)}\right)^{2/3} \quad (1.55)$$

où F_0 est la force statique appliquée et δ_0 le déplacement statique associé. La relation de dispersion d'un milieu relie la pulsation ω au nombre d'onde k . Cette relation permet de décrire les vitesses de phase

et de groupe d'une onde acoustique en fonction de la fréquence. La relation de dispersion s'obtient en remplaçant le déplacement de la forme $u_n = Ae^{i(\omega t - k2Rn)}$ dans l'approximation linéaire de l'équation (1.53) :

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}}|\sin(kR)|. \quad (1.56)$$

Cette relation est représentée sur la figure 1.10.

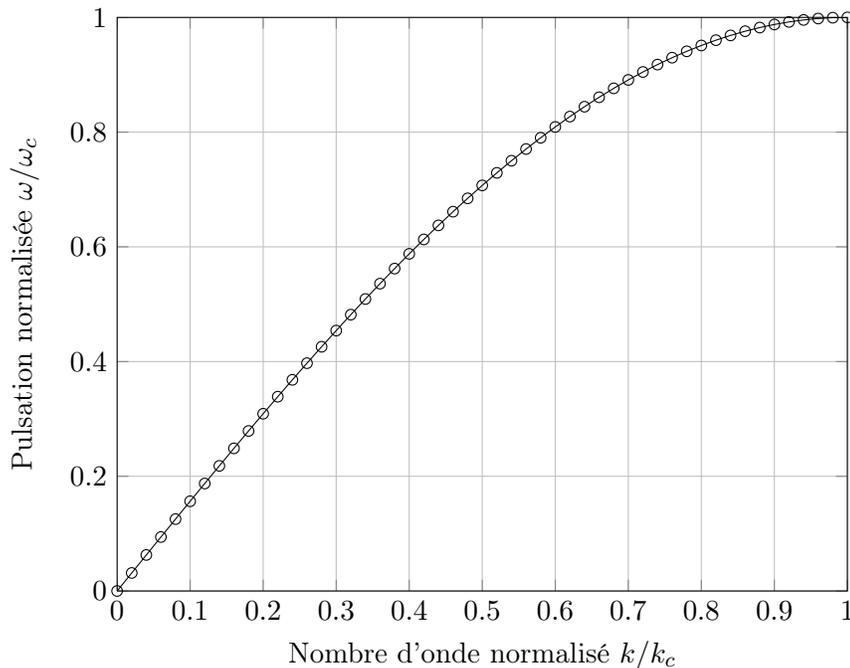


FIGURE 1.10 – Représentation de la relation de dispersion où $\omega_c = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$ et $k_c = \frac{\pi}{2R}$.

La pulsation de coupure est définie comme :

$$\omega_c = 2\sqrt{\frac{K}{m}}. \quad (1.57)$$

Au delà de cette pulsation les modes acoustiques longitudinaux considérés sont évanescents. La fréquence de coupure est déduite de la relation précédente et peut être exprimée en fonction de paramètres accessibles expérimentalement :

$$f_c = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{3F_0^{1/6}}{4\pi^{3/2}\rho^{1/2}R^{4/3}}\left(\frac{4E}{3(1-\nu^2)}\right)^{1/3}. \quad (1.58)$$

Le nombre d'onde de coupure vaut $k_c = \frac{\pi}{2R}$ à cette fréquence de coupure. Sur la figure 1.10 est représentée la dépendance de la pulsation sur le nombre d'onde.

1.5.2 Vitesses de phase et de groupe

La vitesse de phase c_ϕ est donnée par le rapport w/k et la vitesse de groupe c_g est donnée par $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ donc par la dérivée de la courbe de la figure 1.10. Ces vitesses sont représentées sur la figure 1.11.

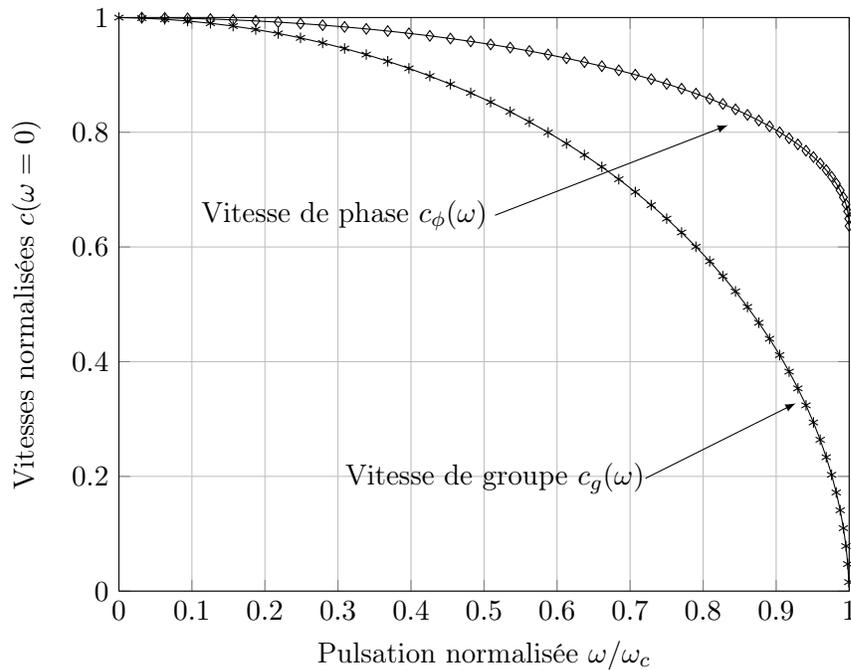


FIGURE 1.11 – Vitesses de phase et de groupe.

La vitesse de phase acoustique est beaucoup plus faible que la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans le matériau constituant les billes, en l'occurrence l'acier, du fait de la faible raideur des contacts par rapport à celle de l'acier. Cette vitesse de phase à fréquence nulle s'écrit :

$$c_{1D} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{w}{k} = 2R\sqrt{\frac{K}{m}} = R\omega_c = \frac{3F_0^{1/6}}{2\sqrt{\pi\rho}R^{1/3}} \left(\frac{4E}{3(1-\nu^2)} \right)^{1/3}. \quad (1.59)$$

En fonction de la fréquence la vitesse de phase de l'onde acoustique dans la chaîne s'écrit :

$$c_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_c}{k} |\sin(kR)|. \quad (1.60)$$

Elle peut aussi s'écrire :

$$c_\phi(\omega) = c_\phi(0) \frac{\omega/\omega_c}{\arcsin(\omega/\omega_c)}, \quad \text{où } c_\phi(0) = R\omega_c. \quad (1.61)$$

La vitesse de groupe s'écrit :

$$c_g(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_\phi(0) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \quad (1.62)$$

Lorsque ω tend vers 0, les vitesses de phase et de groupe sont égales. Lorsque ω tend vers ω_c la vitesse de groupe tend vers 0 et l'énergie ne se propage plus dans la chaîne.

1.6 Conclusion

Ce premier chapitre expose les modèles théoriques et comportements susceptibles de se produire dans un milieu granulaire unidimensionnel pour ces types d'ondes. En particulier le comportement hystérétique, peu étudié dans ces milieux, a été abordé et de nouveaux phénomènes ont été mis en évidence de manière analytique. Les principales observations cette étude théorique de la non-linéarité hystérétique sont les résonances non linéaires (décalage de fréquence en fonction de l'amplitude d'excitation), la dissipation non linéaire associée et la génération d'harmoniques impairs. D'où l'importance de comparer les prédictions théoriques aux résultats expérimentaux et ainsi valider, ou améliorer les modèles développés dans ce chapitre introductif.

Au chapitre suivant, l'étude de la propagation des ondes longitudinales dans une chaîne diatomique est abordée de manière théorique et expérimentale. Les effets observés associés aux propriétés dispersives d'un tel cristal ainsi que les non-linéarités sont comparés aux modèles développés.

Dans le chapitre 3, le dispositif expérimental permettant de générer des ondes de rotation est présenté et analysé. Des premières mesures sur les aspects phononiques du milieu en régime linéaire sont également détaillées.

Dans le chapitre 4, des expériences de résonances non linéaires sont menées sur un système de deux puis trois billes en fonction du niveau d'excitation. Les résultats sont également comparés aux prédictions théoriques et aux simulations.

Enfin, le dernier chapitre traite de la propagation acoustique hystérétique d'ondes de rotation impulsionnelles. Des expériences sont menées et comparées aux simulations numériques basées sur le modèle de Preisach - Mayergoyz.

Chapitre 2

Processus phononiques non linéaires dans une chaîne granulaire diatomique

2.1 Introduction

Au cours des dernières décennies, la propagation des ondes dans les chaînes granulaires a fait l'objet de nombreuses études tant théoriques qu'expérimentales [50, 63, 51, 61, 11, 12, 68, 25, 31, 65, 62, 58]. Le caractère discret et la périodicité de la structure granulaire associés à un comportement non linéaire des contacts entre les grains sont à l'origine de phénomènes physiques spécifiques tels que : la dispersion du milieu, la présence de bandes de fréquences permises et interdites à la propagation des ondes, la génération d'harmoniques, de phonons, de solitons, etc.

La réalisation de structures granulaires de configurations particulières, avec pour objectif la maîtrise des phénomènes physiques précités, peut conduire, par exemple, à la création de filtres mécaniques, de diodes acoustiques, de rectificateurs, d'actionneurs et d'amortisseurs pour ne citer que quelques applications potentielles [51, 61, 10, 52] .

L'objet de ce chapitre s'inscrit dans ce cadre, à savoir, la recherche d'une meilleure compréhension et d'une modélisation des phénomènes physiques associés à la propagation d'ondes acoustiques dans ces structures mécaniques. Cette étude aborde plus particulièrement la propagation non linéaire dans une chaîne granulaire diatomique. Une chaîne diatomique est composée de deux familles de particules de masses différentes se succédant alternativement. Cette structure plus complexe qu'une chaîne monoatomique ordinaire permet d'observer des phénomènes physiques supplémentaires tels qu'un nombre augmenté de bandes permises et interdites à la propagation des ondes et des effets non linéaires d'auto-action conduisant à une atténuation particulière pour les fréquences proches de celles associées au changement de bandes. Soulignons que des effets similaires d'auto-action ont été récemment prédits pour divers cristaux phononiques non linéaires, en faisant usage de simulations numériques [47].

Avant d'aborder les aspects analytiques puis expérimentaux de ce chapitre, il est utile de donner

quelques détails sur la chaîne granulaire au centre de cette étude. La structure granulaire unidimensionnelle utilisée est composée alternativement de 20 cubes magnétiques (de 5 mm de côté) et de 20 billes non magnétiques (de 4 mm de rayon) d’une longueur totale de 260 mm (figure 2.1). Les cubes et les billes sont constitués d’un matériau (magnétique ou non) présentant des caractéristiques mécaniques proches de celles des aciers (tableau 2.1). Afin de donner un caractère diatomique à la structure, la masse des billes est sensiblement égale à deux fois celle des cubes. La première bille est en contact avec un actionneur piézo-électrique attaché à une structure considérée indéformable. L’usage de cubes magnétiques permet d’assurer la cohésion de la structure granulaire sans avoir recours à un dispositif mécanique, supprimant ainsi les interactions indésirables habituelles : friction des particules sur le support, transmission des vibrations [30, 31, 58, 64, 4]. La force magnétique, estimée à environ 4 N (c’est la force nécessaire pour séparer un cube d’une bille), crée une compression statique entre les éléments en contact. Cette force est bien supérieure au poids total de la structure granulaire (0,6 N environ). En conséquence, les gradients de force liés à la verticalité de la chaîne (effet de la gravité) peuvent être négligés dans cette étude. Finalement, un accéléromètre est fixé à l’extrémité basse de la structure granulaire. Sa masse de 0,2 g est faible comparée à celle du dernier élément de la chaîne ce qui permet de considérer la présence de ce capteur comme faiblement intrusive.

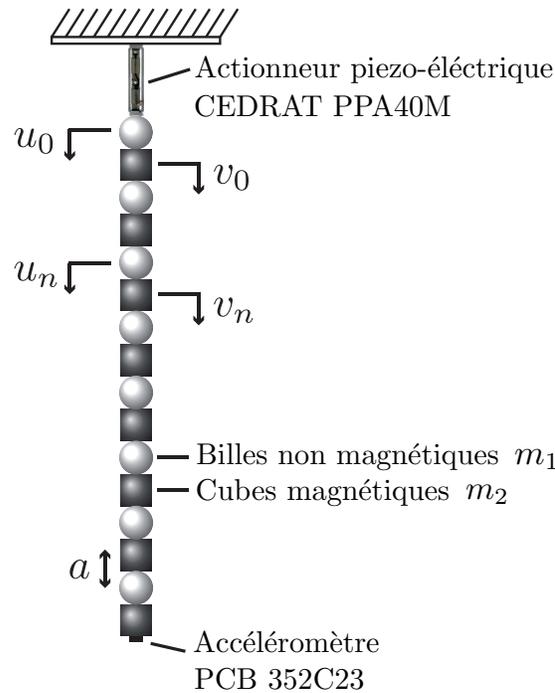


FIGURE 2.1 – La chaîne diatomique est composée alternativement de billes et de cubes magnétiques dont les caractéristiques sont données dans le tableau 2.1.

TABLEAU 2.1 – Caractéristiques des billes et des cubes de la chaîne granulaire

	bille	cube
Rayon (R_1) / longueur (R_2) [mm]	4	5
Masse volumique ρ [kg.m ⁻³]	7850	7850
Module d'Young E [GPa]	203	203
Coefficient de Poisson ν	0,3	0,3
Masse m [g]	2,1	1,0

2.2 Développements analytiques

2.2.1 Équations du mouvement - comportements linéaire et non linéaire

Dans cette étude, la chaîne granulaire diatomique est considérée semi infinie. Les fréquences considérées (< 100 kHz) sont inférieures aux fréquences des premiers modes de vibration des billes et des cubes (ces fréquences sont estimées à quelques centaines de kilohertz) et aucune onde n'est propagée à l'intérieur de ces éléments. Dans cette chaîne granulaire, les déformations élastiques sont concentrées dans la zone de contact entre les billes et les cubes. En dehors de cette zone, les éléments ne sont pas déformés et ils se comportent comme des masses rigides. En conséquence, la chaîne peut être représentée par un système simple de masses reliées par des ressorts. Le comportement élastique de ces derniers est modélisé au moyen de la théorie de Hertz [8, 9, 33].

Chaîne granulaire monoatomique équivalente

Le mouvement global d'une structure granulaire composée de N billes identiques de masse m est modélisé au moyen d'un système de N équations différentielles de la forme [51]

$$m \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \mathcal{A} [\delta_0 + u_{n-1} - u_n]^{3/2} - \mathcal{A} [\delta_0 + u_n - u_{n+1}]^{3/2}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

avec $\delta_0 = \left(\frac{F_0}{\mathcal{A}}\right)^{2/3}$ et $\mathcal{A} = \frac{2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2}\right)^{-1/2}$, (2.1)

où u_n est le déplacement de la bille n autour de sa position d'équilibre. δ_0 est le rapprochement des centres de deux billes adjacentes dû à la force statique F_0 . E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau. Notons que dans l'expression de la quantité \mathcal{A} , le coefficient multiplicatif 2 associé à la longueur R_2 prend en considération le demi coté du cube. Soulignons aussi que l'exposant 3/2 de l'équation est issu de la loi de Hertz [33] et que le contact entre deux billes et celui entre une bille et un cube sont de même nature, à savoir, les modèles décrivant leur comportement mécanique respectif sont identiques à un coefficient proportionnalité près (ils présentent une loi de puissance avec le même exposant 3/2).

La solution de cette équation différentielle dépend de l'amplitude de l'excitation mécanique. Pour des excitations de faibles amplitudes telles que $|u_n - u_{n-1}| \ll |\delta_0|$ [66], les termes du second membre de l'équation (2.1) sont développés en série de puissance [66, 65] conduisant à l'équation différentielle suivante dont le contenu est ici limité aux termes linéaires et à un terme non linéaire quadratique :

$$m \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \alpha [u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}] - \frac{\beta}{2} [u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}] [u_{n+1} - u_{n-1}],$$

avec $\alpha = \frac{3}{2} \mathcal{A} \delta_0^{1/2}$ et $\beta = \frac{3}{4} \mathcal{A} \delta_0^{-1/2}$

où α est la raideur linéaire des contacts pré-contraints et β le paramètre de non linéarité quadratique.

En introduisant dans l'équation non linéaire précédente le développement en perturbation du déplacement

$$u_n = u_n^{(0)} + \epsilon u_n^{(1)} + \epsilon^2 u_n^{(2)} + \dots$$

avec le petit paramètre $\epsilon \simeq \frac{u_n^{(0)}}{\delta_0} \ll 1$, il est obtenu, par approximations successives, une série d'équations linéaires. Les termes non linéaires initiaux apparaissent alors dans leur second membre et sont connus. À l'ordre 0 en ϵ , une équation de propagation classique est retrouvée, elle décrit le comportement du déplacement $u_n^{(0)}$ qui n'est pas affecté par les non linéarités. Le déplacement acoustique secondaire $u_n^{(1)}$ engendré par les effets non linéaires est une perturbation à l'ordre 1 en ϵ du déplacement acoustique linéaire $u_n^{(0)}$. Ce déplacement acoustique secondaire obéit à une équation de propagation dont le second membre est un terme source quadratique exprimé à l'aide de $u_n^{(0)}$. Ce déplacement secondaire est ensuite utilisé pour exprimer le terme source de l'équation de propagation associée à la contribution à l'ordre 2 du déplacement. Un raisonnement équivalent peut être mené pour les ordres supérieurs.

Chaîne granulaire diatomique

Le système d'équations non linéaires décrivant le comportement d'une chaîne diatomique de masses différentes est réduit aux équations suivantes, limitées aussi aux termes quadratiques [66] :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} &= \alpha [v_n - 2u_n + v_{n-1}] - \frac{\beta}{2} [v_n - 2u_n + v_{n-1}] [v_n - v_{n-1}], \\ m_2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} &= \alpha [u_{n+1} - 2v_n + u_n] - \frac{\beta}{2} [u_{n+1} - 2v_n + u_n] [u_{n+1} - u_n], \end{aligned} \tag{2.2}$$

avec $\alpha = \frac{3}{2} \mathcal{A} \delta_0^{1/2}$ et $\beta = \frac{3}{4} \mathcal{A} \delta_0^{-1/2}$

où u_n et v_n sont respectivement les déplacements des billes de masse m_1 et des cubes de masse m_2 .

La méthode des perturbations décrite succinctement auparavant est utilisée à nouveau afin de rechercher des solutions à ces nouvelles équations non linéaires [55, 23, 66].

2.2.2 Solutions du problème linéaire et relation de dispersion

Le problème devient linéaire en négligeant les termes quadratiques des équations différentielles précédentes (2.2). Considérant une onde monochromatique à la pulsation ω qui se propage dans la direction des n croissants, les solutions des équations associées aux déplacements des masses s'écrivent sous la forme (le terme $e^{i\omega t}$ est omis afin d'alléger le contenu des relations) :

$$\begin{aligned} u_n^l &= Ae^{-ikan}, \\ v_n^l &= Be^{-ikan}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où k est le nombre d'onde et $a = R_1 + R_2/2$ est la distance entre le centre d'une bille et celui d'un cube.

Ces solutions du problème linéaire permettent de déduire la relation de dispersion suivante :

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \omega_r \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{m_r^2}{m_1 m_2} [1 - \cos(ka)]}} \\ \text{avec } \omega_r &= \sqrt{\frac{\alpha}{m_r}} \quad \text{et} \quad m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

où α représente la raideur du contact entre les éléments et m_r la masse réduite de l'ensemble diatomique.

2.2.3 Bandes permises et interdites à la propagation

L'analyse de la relation de dispersion et de sa représentation graphique (figure 2.2) montre que deux modes de propagation (deux fréquences) sont associés à un nombre d'onde k donné. Pour l'étude de ces modes, une autre approche consiste à inverser cette relation permettant ainsi de distinguer quatre comportements fréquentiels particuliers de la chaîne diatomique. Les bandes de fréquences permises à la propagation des ondes pour lesquelles la partie imaginaire de k est nulle et les bandes interdites à la propagation pour lesquelles la partie imaginaire de k est non nulle.

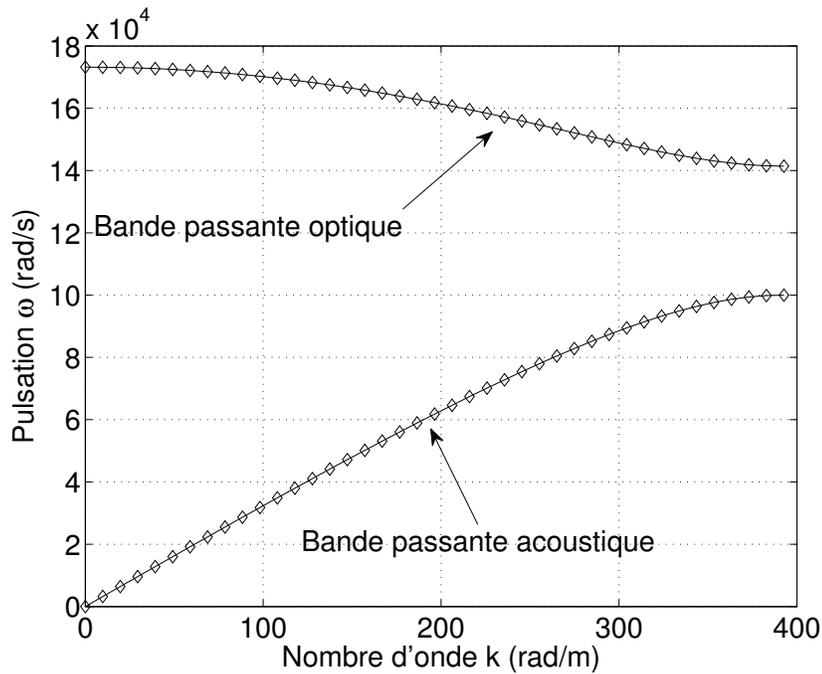


FIGURE 2.2 – Relation de dispersion donnant les pulsations en fonction du nombre d'onde k pour une chaîne diatomique (ég. (2.4)).

Par similarité avec la physique du solide [36], les deux bandes autorisant la propagation des ondes sont nommées 'acoustique' pour les basses fréquences et 'optique' pour les fréquences plus élevées. Les fréquences limites de ces bandes sont déterminées au moyen des valeurs particulières du nombre d'onde k (avec $m_1 > m_2 > m_r$) :

$$\begin{aligned}
 \omega_{1c} = \omega_-(k = 0) &= 0, \\
 \omega_{2c} = \omega_-(k = \frac{\pi}{a}) &= \sqrt{\frac{2\alpha}{m_1}}, \\
 \omega_{3c} = \omega_+(k = \frac{\pi}{a}) &= \sqrt{\frac{2\alpha}{m_2}}, \\
 \omega_{4c} = \omega_+(k = 0) &= \sqrt{\frac{2\alpha}{m_r}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Les expressions du nombre d'onde k dans ces bandes sont obtenues en inversant la relation de dispersion (2.4). Ainsi pour les bandes de propagation 'acoustique' ($0 \leq \omega < \omega_{2c}$) et 'optique' ($\omega_{3c} \leq \omega \leq \omega_{4c}$)

$$k(\omega) = \frac{1}{a} \arccos \left(1 - \frac{m_1 + m_2}{m_r} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^4 \right] \right).
 \tag{2.6}$$

Pour la première bande interdite ($\omega_{2c} \leq \omega < \omega_{3c}$)

$$k(\omega) = \frac{\pi}{a} + \frac{i}{a} \operatorname{arccosh} \left(-1 + \frac{m_1 + m_2}{m_r} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^4 \right] \right),
 \tag{2.7}$$

et pour la seconde bande interdite ($\omega > \omega_{3c}$)

$$k(\omega) = \frac{i}{a} \operatorname{arccosh} \left(1 - \frac{m_1 + m_2}{m_r} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^4 \right] \right). \quad (2.8)$$

2.2.4 Validation expérimentale de la relation de dispersion

La dépendance en fréquence de la vitesse de phase de l'onde dans la "bande acoustique" est obtenue de manière expérimentale en estimant la différence entre deux fréquences de résonance successives de la chaîne de billes. En effet, cette chaîne constituée d'éléments discrets étant de longueur finie L , elle peut être assimilée à un résonateur classique. La liaison avec l'actionneur qui impose le déplacement est considérée encadrée et l'autre extrémité de la chaîne est supposée libre de tout mouvement. Les fréquences de résonance de cet objet acoustique sont obtenues à l'aide de la relation simple

$$f_m = (2m + 1) \frac{c}{4L}, \quad \text{où } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

La détermination expérimentale de $\Delta f_m = f_m - f_{m-1}$ permet d'accéder à la vitesse de phase $c(f_m, f_{m-1})$ et finalement pour ces fréquences particulières d'estimer la courbe de dispersion $\omega(k)$ dans la bande passante acoustique. La figure 2.3 donne une comparaison entre les données expérimentales ainsi obtenues et les prédictions du modèle (équation (2.6)). Le relatif bon accord observé, compte tenu des limites du modèle et des incertitudes liées à la mesure, permet de valider la pertinence de la méthode utilisée.

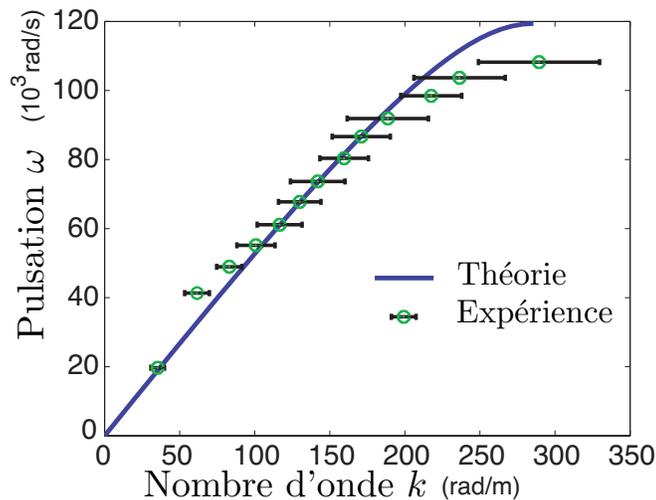


FIGURE 2.3 – Relations de dispersion dans la bande de propagation 'acoustique' : prédictions et données expérimentales.

Finalement, dans ce problème limité aux phénomènes linéaires, les déplacements associés à une vibration monochromatique de pulsation $\omega(k)$ sont déduits des expressions

$$\begin{aligned} u_n^l &= Ae^{-ik(\omega)an}, \\ v_n^l &= Be^{-ik(\omega)an} = 2A \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{2c}^2}}{1 + e^{ik(\omega)a}} e^{-ik(\omega)an}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

dans lesquelles la relation de dispersion $k(\omega)$ est donnée par les équations (2.6), (2.7) et (2.8).

Dans l'étude à venir concernant les effets non linéaires responsables de la génération d'harmoniques, ces solutions linéaires peuvent désormais être utilisées dans le calcul des termes quadratiques permettant, in fine, la détermination des déplacements acoustiques secondaires.

2.2.5 Solutions du problème non linéaire limité à l'ordre 2

Pour chacun des éléments (d'indice n) de la chaîne diatomique, le déplacement total qui est la solution du problème non linéaire limité ici à l'ordre 2 s'écrit comme la somme de la contribution linéaire (u_n^l, v_n^l) à la pulsation ω et d'une contribution secondaire de plus faible amplitude (u_n^{nl}, v_n^{nl}) à la pulsation 2ω due aux effets non linéaires. Cette contribution secondaire est obtenue en faisant usage de la méthode des perturbations évoquée précédemment. Elle consiste notamment à utiliser les solutions (u_n^l, v_n^l) du problème linéaire (équations (2.10)) pour exprimer les termes non linéaires d'ordre 2 des équations du mouvement du problème initial (équations (2.2)). Ainsi, les équations du mouvement des contributions secondaires associées à la pulsation 2ω s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} m_1 \frac{\partial^2 u_n^{nl}}{\partial t^2} - \alpha [v_n^{nl} - 2u_n^{nl} + v_{n-1}^{nl}] &= Q_{nl}^u(2\omega), \\ m_2 \frac{\partial^2 v_n^{nl}}{\partial t^2} - \alpha [u_{n+1}^{nl} - 2v_n^{nl} + u_n^{nl}] &= Q_{nl}^v(2\omega), \end{aligned} \quad (2.11)$$

où les termes sources sont exprimés à l'aide des déplacements primaires u_n^l, v_n^l à la pulsation ω

$$\begin{aligned} Q_{nl}^u(2\omega) &= -\frac{\beta}{2} [v_n^l - 2u_n^l + v_{n-1}^l] [v_n^l - v_{n-1}^l], \\ Q_{nl}^v(2\omega) &= -\frac{\beta}{2} [u_{n+1}^l - 2v_n^l + u_n^l] [u_{n+1}^l - u_n^l]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

La solution des équations différentielles (2.11) associées aux déplacements secondaires s'écrit comme la somme de la solution générale du système homogène à la pulsation 2ω et d'une solution particulière :

$$\begin{aligned} u_n^{nl}(2\omega) &= Ce^{-ik(2\omega)an} + De^{-2ik(\omega)an}, \\ v_n^{nl}(2\omega) &= Ee^{-ik(2\omega)an} + Fe^{-2ik(\omega)an}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

où C, D, E, F sont les constantes à déterminer. Les solutions du problème linéaire (équations (2.10)) donnent la relation entre les constantes E et C :

$$E = 2C \frac{1 - \frac{(2\omega)^2}{\omega_{2c}^2}}{1 + e^{ik(2\omega)a}}. \quad (2.14)$$

L'excitateur possède un comportement linéaire qui impose au premier élément de la chaîne un déplacement linéaire donc dépourvu de composante non linéaire, soit $u_n^{nl}(n=0) = 0$. Cette condition à la limite impose $D = -C$. Les solutions particulières du système d'équations associées aux déplacements secondaires (équations (2.11)) sont exprimées sous la forme :

$$\begin{aligned} u_n^{part}(2\omega) &= D e^{2i\omega t - 2ik(\omega)an}, \\ v_n^{part}(2\omega) &= F e^{2i\omega t - 2ik(\omega)an}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

La relation entre les constantes D et F est obtenue en remplaçant ces solutions dans les équations différentielles (2.11) associées aux déplacements secondaires, soit :

$$\begin{pmatrix} D \\ F \end{pmatrix} = \frac{1}{\det X} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix}$$

avec les déterminants

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{vmatrix} i\frac{\beta}{2\alpha} B [B e^{ika} \sin(ka) - 2A e^{ika/2} \sin(\frac{ka}{2})] & -\frac{1+e^{2ika}}{2} \\ i\frac{\beta}{2\alpha} A [A e^{-ika} \sin(ka) - 2B e^{-ika/2} \sin(\frac{ka}{2})] & 1 - \frac{(2\omega)^2}{\omega_{2c}^2} \end{vmatrix}, \\ \Psi &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{(2\omega)^2}{\omega_{1c}^2} & i\frac{\beta}{2\alpha} B [B e^{ika} \sin(ka) - 2A e^{ika/2} \sin(\frac{ka}{2})] \\ -\frac{1+e^{-2ika}}{2} & i\frac{\beta}{2\alpha} A [A e^{-ika} \sin(ka) - 2B e^{-ika/2} \sin(\frac{ka}{2})] \end{vmatrix}, \\ \text{et } \det X &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{(2\omega)^2}{\omega_{1c}^2} & -\frac{1+e^{2ika}}{2} \\ -\frac{1+e^{-2ika}}{2} & 1 - \frac{(2\omega)^2}{\omega_{2c}^2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, les déplacements secondaires des éléments de la chaîne diatomique associés aux contributions des effets non linéaires (limités à l'ordre 2) s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} [b]u_n^{nl}(2\omega) &= -D e^{-ik(2\omega)an} + D e^{-2ik(\omega)an}, \\ v_n^{nl}(2\omega) &= -2D \frac{1 - \frac{(2\omega)^2}{\omega_{2c}^2}}{1 + e^{ik(2\omega)a}} e^{-ik(2\omega)an} + F e^{-2ik(\omega)an}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ces solutions sont valables dans les bandes de fréquences pour lesquelles la propagation des ondes est permise et interdite.

2.2.6 Comportement des solutions linéaires et non linéaires

Les solutions (2.10) et (2.16) des équations différentielles décrivant les comportements des contributions linéaires et secondaires (dues aux effets non linéaires et limité à l'ordre 2) des déplacements des différents éléments de la chaîne diatomique sont tracées pour différentes fréquences (figure 2.4). Afin de prendre en considération la dissipation linéaire dans ces expressions, une partie imaginaire, de la forme $k'' = -i\gamma\omega$ où $\gamma = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s.m}^{-1}$, a été ajoutée au nombre d'onde k . Cette partie imaginaire de faible amplitude produit sur les contributions linéaires des déplacements une décroissance exponentielle qui

est en accord avec les observations expérimentales.

Cinq fréquences fondamentales particulières sont choisies afin de révéler les différents régimes de génération d'harmoniques. Ces fréquences sont exprimées en fonction de la première fréquence de coupure $\omega_{2c} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m_1}}$. Dans la suite du document, l'onde à la fréquence double ($2f$) de la fréquence fondamentale (f) est appelée second harmonique.

Premier régime

Lorsque $\omega/\omega_{2c} \simeq 0,36$ (figure 2.4(a)), l'onde à la fréquence fondamentale (f_0) est progressive ainsi que celle liée au second harmonique ($2f_0$). À ces fréquences, les deux vitesses de propagation sont proches et leur différence est peu élevée pour influencer de manière significative le comportement des effets non linéaires. Bien que l'amplitude de l'onde à la fréquence fondamentale présente une décroissance exponentielle sur la distance n , les effets non linéaires cumulés le long de la chaîne entraînent, dans un premier temps, un accroissement de l'amplitude de la composante harmonique. Au-delà d'une certaine distance, cette amplitude décroît en raison des effets de dissipation et d'une amplitude toujours décroissante de la composante fondamentale. Ces évolutions sont classiquement rencontrées en acoustique, elles correspondent à celles d'une onde se propageant de manière non linéaire (avec génération d'harmoniques supérieurs) dans un milieu dissipatif et non dispersif [55].

Second régime

Lorsque $\omega/\omega_{2c} \simeq 0,49$ (figure 2.4(b)), la fréquence de la composante harmonique est proche de la première fréquence de coupure, mais toujours dans la bande passante "acoustique". Dans ce cas, il existe une différence de vitesse importante entre les deux ondes. Les sources non linéaires créées par l'onde à la fréquence fondamentale le long de la chaîne sont alors successivement en phase et en opposition de phase avec l'onde à la fréquence harmonique. Ce phénomène se traduit par des oscillations d'amplitude de la composante harmonique le long de la chaîne.

Troisième régime

Lorsque $\omega/\omega_{2c} \simeq 0,61$ (figure 2.4(c)), l'onde à la fréquence fondamentale est progressive et celle liée au second harmonique est maintenant évanescence. Son amplitude croît rapidement au niveau des premiers éléments de la chaîne pour ensuite diminuer approximativement deux fois plus vite que la composante fondamentale. Dans ce cas, l'onde liée au second harmonique ne se propage pas et les processus non linéaires d'accumulation ne contribuent plus à élever son amplitude. Cette onde est forcée dans le milieu uniquement par l'action des sources non linéaires.

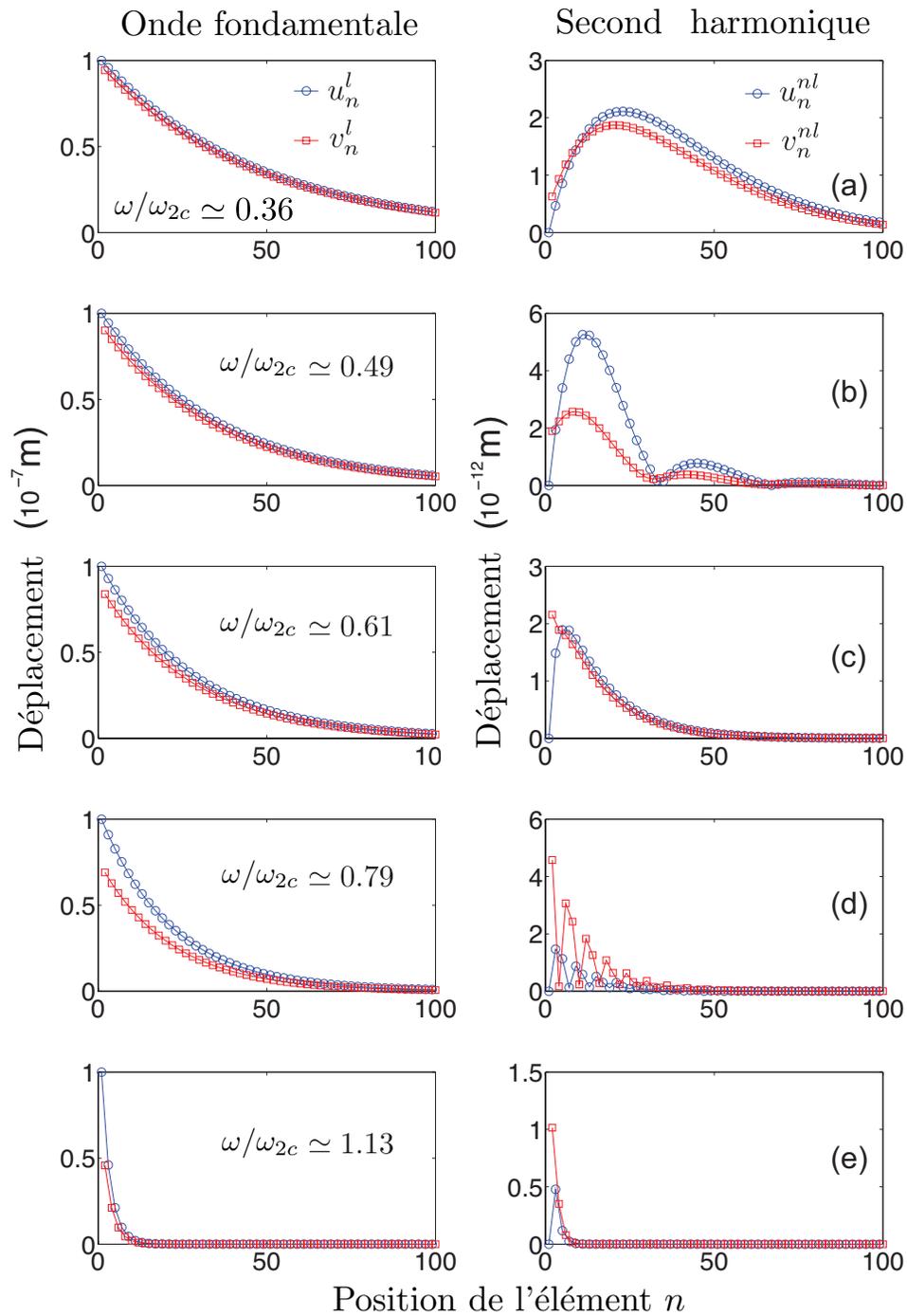


FIGURE 2.4 – Représentations des amplitudes des déplacements associés aux billes (u) et aux cubes (v) en fonction de leur position dans la chaîne (la distance en nombre de grains). La colonne de gauche donne les contributions linéaires à la pulsation fondamentale ω (u_n^l et v_n^l). La colonne de droite donne les contributions secondaires à l'harmonique 2ω (u_n^{nl} et v_n^{nl}).

Quatrième régime

Lorsque $\omega/\omega_{2c} \simeq 0,79$ (figure 2.4(d)), l'onde à la fréquence fondamentale et celle associée au second harmonique sont toutes deux progressives. Cependant dans ce cas, la fréquence fondamentale est liée à la branche acoustique alors que le second harmonique appartient à la branche optique. Rappelons que la présence de la branche optique est due au caractère diatomique de la chaîne granulaire. Aux fréquences associées à cette branche, les mouvements de deux éléments adjacents de la chaîne (une bille et un cube dans notre montage) sont en opposition de phase. Sur la figure 2.4(d) seule l'amplitude de l'onde est représentée ce qui ne permet pas d'observer directement le décalage de phase entre les contributions non linéaires de la bille u_n^{nl} et du cube v_n^{nl} . Toutefois cette opposition de phase entre les amplitudes peut être déduite de manière indirecte. En effet, il s'agit d'une conséquence des processus de génération non linéaire pour lesquels un mode acoustique (fréquence fondamentale) génère un mode optique (second harmonique).

Cinquième régime

Lorsque $\omega/\omega_{2c} \simeq 1,13$ (figure 2.4(e)), les deux ondes sont évanescentes. L'onde à la fréquence harmonique est créée malgré le caractère évanescent de l'onde à la fréquence fondamentale. Toutefois, leur amplitude décroît très rapidement sur une distance de quelques grains.

Les résultats expérimentaux présentés dans la prochaine section montrent la plupart des situations décrites précédemment, cela, lorsque la mesure des mouvements des particules est possible à l'aide du dispositif expérimental utilisé.

2.3 Résultats expérimentaux et discussion

La première partie de cette section est consacrée à l'analyse du contenu fréquentiel des signaux délivrés par l'accéléromètre placé à l'extrémité libre de la chaîne diatomique (figure 2.1). L'autre extrémité étant mise en mouvement au moyen d'un transducteur excité à l'aide d'un signal électrique de type "sinus glissant" (un signal sinusoïdal d'amplitude constante dont la fréquence croît continûment dans la gamme fréquentielle retenue). Les réponses en fréquence de la chaîne diatomique, à la fréquence d'excitation et au double de cette fréquence, sont comparées aux prédictions du modèle décrit précédemment.

2.3.1 Représentation temps-fréquence

La figure 2.5 donne les représentations temps-fréquence (spectrogrammes) du signal d'excitation appliqué au transducteur (graphe du haut) et du signal délivré par l'accéléromètre placé à l'extrémité de la chaîne (graphe du bas). Le signal électrique appliqué est un sinus glissant d'amplitude quasi constante sur la gamme de fréquence comprise entre 1 et 45 kHz , son évolution temporelle est exponentielle d'une durée de 5 secondes.

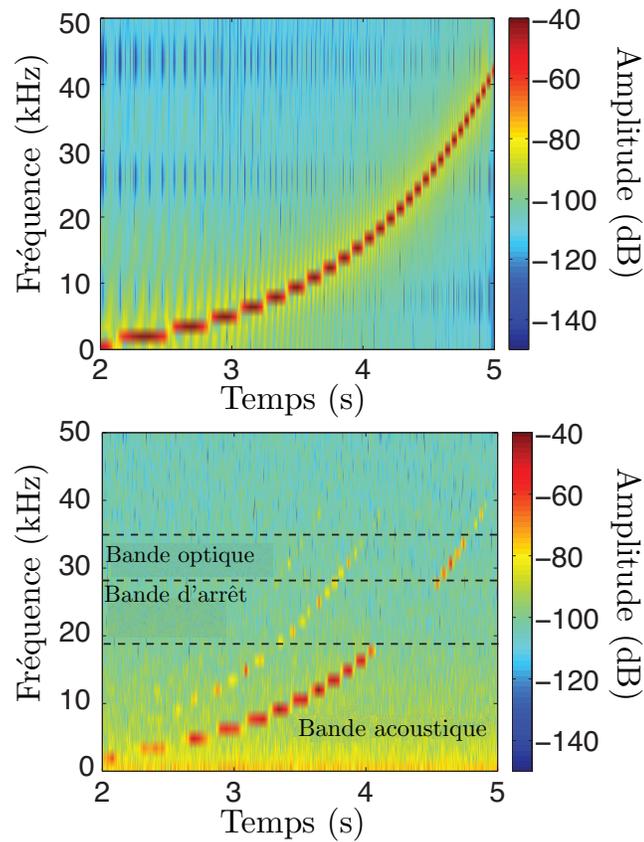


FIGURE 2.5 – Représentation temps-fréquence du signal d’excitation (graphe du haut) et du signal délivré par l’accéléromètre placé à l’extrémité de la chaîne granulaire diatomique (graphe de bas).

Ces représentations sont obtenues à l’aide d’une méthode de traitement du signal faisant usage de déconvolutions non linéaires. Pour des raisons de concision, la méthode n’est pas décrite de manière précise, le lecteur qui souhaite de plus amples détails peut consulter les publications [54] et [53]. Cette méthode particulière permet d’obtenir les fonctions de transfert entre un signal source de référence et un signal mesuré avec une très bonne précision en fréquence et en amplitude, cela à la fréquence d’excitation mais également et simultanément aux fréquences harmoniques. Rappelons qu’un analyseur de spectre classique permet seulement de mesurer une fonction de transfert à la fréquence d’excitation.

Le spectrogramme associé au capteur (2.5 graphe du bas) montre que le signal recueilli, après avoir traversé la chaîne granulaire, possède une composante fondamentale et des composantes aux fréquences harmoniques 2 et 3 dont les amplitudes dépendent de la fréquence. La composante fondamentale présente une amplitude très faible dans la bande fréquentielle 18 – 28 kHz puis au delà de 34 kHz , ces domaines correspondent aux bandes de fréquences interdites à la propagation des ondes. Par ailleurs, une analyse fine de cette composante dans les bandes passantes permet d’observer d’importantes fluctuations de couleurs du spectrogramme. Elles sont la traduction des variations de l’amplitude avec

la fréquence, elles mettent aussi en évidence la présence de fréquences de résonance. Ces comportements particuliers seront analysés par la suite.

2.3.2 Génération du second harmonique dans la chaîne granulaire diatomique

Cette partie propose d'étudier en détail les fonctions de transfert de la chaîne granulaire, plus particulièrement celles associées à la composante fondamentale (f_0) et au second harmonique ($2f_0$).

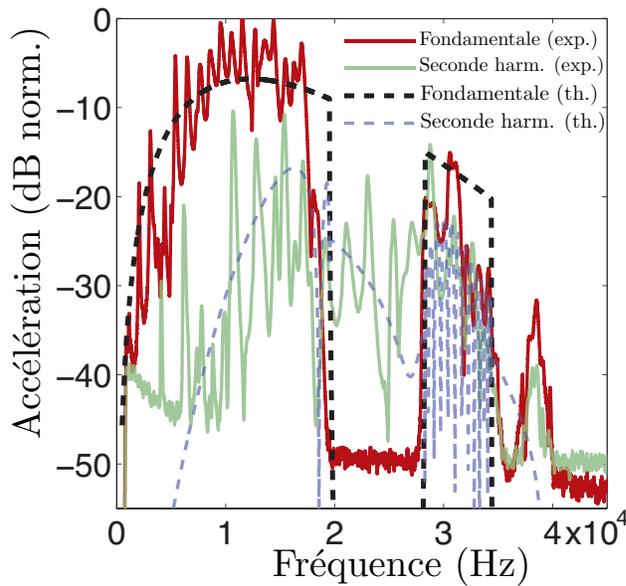


FIGURE 2.6 – Accélérations en fonction de la fréquence : composantes de la fréquence fondamentale et de l’harmonique 2. Les données expérimentales (traits continus) et les prédictions - équations (2.10) et (2.16) - pointillés) sont associées au dernier élément placé à l’extrémité basse de la chaîne diatomique. La référence de 0 *dB* correspond au niveau maximum du signal.

La grandeur déduite de la mesure est l’accélération, la grandeur utilisée dans les développements analytiques est le déplacement ; cette dernière est donc convertie en accélération afin de permettre des comparaisons prédictions / mesures plus aisées. La figure 2.6 donne les résultats associés à notre chaîne diatomique de 40 éléments soumise à une force statique $F_0 = 4 N$. Le niveau de bruit est à $-50 dB$ (le niveau de référence étant la valeur maximale du signal mesuré).

L’amplitude du déplacement appliqué sur l’extrémité haute de la structure granulaire est indépendante de la fréquence. À l’autre extrémité, aux basses fréquences, les accélérations issues de la mesure (composantes fondamentale et second harmonique) et les prédictions (équations 2.10 et 2.16) présentent un accroissement proportionnel à ω^2 qui résulte de la simple conversion entre les deux grandeurs (accélération/déplacement). Au-delà d’environ 10 *kHz*, l’amplitude des accélérations diminue pour des fréquences croissantes, ce comportement est lié à la présence des effets de dissipation au sein des contacts entre les éléments. Rappelons que le modèle analytique initial a été modifié et qu’une

faible partie imaginaire, de la forme $-i\gamma\omega$ avec ici $\gamma = 0,25 \cdot 10^{-3}$, a été ajoutée au nombre d'onde k afin de simuler les pertes de type visqueux.

Soulignons que les développements analytiques sont obtenus pour une chaîne de longueur semi infinie, en conséquence, ils ne prédisent aucune des résonances observées sur les signaux de mesure. Mis à part ce défaut de prédiction, il existe une bonne adéquation entre les données théoriques et celles obtenues de manière expérimentale ; notamment, en ce qui concerne les fréquences de coupure associées aux bandes permises et interdites à la propagation mais aussi l'amplitude croissante avec la fréquence des composantes de l'accélération associées au fondamental et au second harmonique.

Remarquons aussi, la mesure et la prédiction d'une importante chute d'amplitude de la composante du second harmonique à la fréquence de 18 kHz environ. Cet événement est associé au second régime (figure 2.4(b)) pour lequel il existe une importante différence de vitesse entre l'onde à la fréquence fondamentale et celle du second harmonique. Cette différence de vitesse conduit à des effets de battements du second harmonique soit en fonction de la fréquence pour une distance donnée soit en fonction de la distance pour une fréquence fixée.

Dans la première bande interdite à la propagation ($18 - 28 \text{ kHz}$), prédictions et mesures présentent une composante harmonique de plus grande amplitude comparée à celle de la composante fondamentale (bruit de fond $\simeq -50 \text{ dB}$). Ce cas correspond au troisième régime évoqué dans la partie théorique (figure 2.4(c)) pour lequel l'onde à la fréquence fondamentale est progressive et celle liée au second harmonique est évanescente. Cette dernière est forcée dans le milieu uniquement par l'action des sources non linéaires d'où sa présence dans la bande interdite. Ce phénomène particulier peut être assimilé à de la supra transmission non linéaire. Il n'apparaît pas lorsque le signal d'excitation est produit à une fréquence appartenant à la bande interdite (onde évanescente), le signal reçu à l'extrémité de la chaîne est trop faible pour émerger du bruit de fond.

Il est important de souligner deux différences majeures entre les prédictions du modèle et les mesures issues du dispositif expérimental. Tout d'abord, l'observation d'un signal avec une composante fondamentale et harmonique au-delà de la seconde bande passante aux fréquences de 37 à 40 kHz . Les raisons de cette présence ne sont pas clairement établies. Est-ce :

- l'existence d'un faible degré de désordre dans la chaîne granulaire qui pourrait altérer les caractéristiques des bandes permises et interdites de la structure granulaire considérée dans notre cas parfaite ?
- un montage expérimental et des appareils de mesure imparfaits avec la présence de résonances et de bruit ?
- ou encore, l'existence de modes de rotation [39] ?

Second défaut de prédiction : rappelons que l'amplitude relative entre la composante à la fréquence fondamentale et celle du second harmonique dépend de la valeur du paramètre de non-linéarité

quadratique β (équations (2.11) et (2.12)). Afin d'obtenir une bonne adéquation entre les prédictions et les valeurs mesurées, ce paramètre est ajusté à une valeur supérieure à celle déduite de la relation de Hertz qui associe contraintes et déformations. Exprimé autrement, au point d'excitation, l'amplitude du déplacement ajustée dans le modèle analytique est supérieure à celle estimée expérimentalement. Ce désaccord peut être attribué au comportement mécanique du contact qui diffère du modèle de Hertz retenu, notamment par la présence d'aspérités microscopiques par exemple. Un problème similaire a été observé dans les structures granulaires à 3 dimensions par les auteurs de la publication [71]. Ils démontrent que l'introduction de quelques contacts faiblement chargés permet d'expliquer l'amplitude relative entre les composantes du premier et du second harmonique. Dans notre chaîne granulaire, les aspérités des surfaces de contact entre les éléments sont responsables des variations de charge le long de la chaîne.

2.4 Décalage non linéaire de la fréquence de résonance

Dans la section précédente, la génération et la propagation du second harmonique dans une chaîne diatomique ont été analysées. Une autre façon de percevoir et de quantifier l'influence des effets non linéaires au sein d'une structure granulaire est d'étudier ses résonances à travers l'évolution de ses caractéristiques (fréquence et facteur de qualité) en fonction de l'amplitude de l'excitation.

Dans cette partie, l'étude se focalise sur une résonance particulière de la chaîne granulaire diatomique (observée sur la figure 2.6) pour laquelle les valeurs de sa fréquence appartiennent à la bande passante dite acoustique. La figure 2.7 montre que les fréquences et les facteurs de qualité de cette résonance diminuent pour des amplitudes d'excitation croissantes. Ce comportement particulier est fréquemment observé dans les roches, les matériaux fissurés ou les milieux granulaires désordonnés [21]. Cette évolution vers les basses fréquences peut être interprétée comme la conséquence d'une vitesse de propagation de l'onde dont l'amplitude (moyennée sur une période) dépend du niveau d'excitation ou encore comme un assouplissement du milieu - c'est-à-dire une diminution de son module d'élasticité longitudinale [35, 28, 65].

La variation relative du module d'élasticité, moyennée sur une période du signal (le symbole $\langle \rangle$ représente cette moyenne), s'écrit

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E_0} \right\rangle = \frac{\langle E - E_0 \rangle}{E_0}$$

où E_0 est le module d'élasticité associé à une faible amplitude d'excitation (régime linéaire) et E le module obtenu pour des amplitudes plus élevées [35, 28]. Par ailleurs, la variation relative de la fréquence de résonance s'écrit

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f - f_0}{f_0},$$

avec les fréquences f_0 et f associées respectivement à une faible et importante amplitude d'excitation.

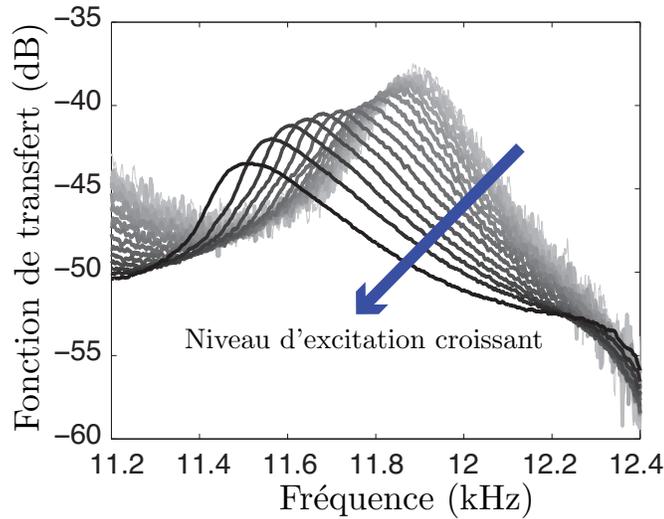


FIGURE 2.7 – Fonction de transfert mesurée à l’extrémité basse de la chaîne granulaire diatomique pour des fréquences autour d’une résonance située dans la bande passante acoustique.

Pour des faibles variations de fréquences telles que $\left| \frac{\Delta f}{f_0} \right| \ll 1$, les variations relatives du module d’élasticité peuvent être déduites de la relation approchée

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E_0} \right\rangle \simeq 2 \frac{\Delta f}{f_0}.$$

Cette condition est respectée dans notre étude expérimentale, en effet $\frac{\Delta f}{f_0} \simeq 0,03$ pour une excitation d’amplitude maximum (figure 2.7).

Le module d’élasticité de la structure granulaire $E = \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}}$ qui dépend de l’amplitude d’excitation est obtenu à partir d’une relation $\tilde{\sigma} = f(\tilde{\varepsilon})$ qui associe les grandeurs dynamiques (acoustiques) de contrainte $\tilde{\sigma}$ et de déformation $\tilde{\varepsilon}$. Pour un système de deux billes en contact ou encore d’une bille et d’un cube, la relation contrainte - déformation de Hertz s’écrit [33] :

$$\sigma = -C(-\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_0)^{3/2}, \quad (2.17)$$

où σ est la contrainte élastique totale, $\tilde{\varepsilon}$ et ε_0 la déformation acoustique et statique de la zone de contact. C est une constante qui dépend des caractéristiques mécaniques du matériau (module d’Young et coefficient de Poisson) et des caractéristiques géométriques des éléments (dimensions et formes). Rappelons qu’une déformation positive correspond à un allongement de la structure granulaire.

Dans la limite des faibles déformations acoustiques comparées à celles des déformations statiques

($|\tilde{\varepsilon}| \ll |\varepsilon_0|$) la relation (2.17) peut être développée en puissances successives du petit paramètre $\tilde{\varepsilon}$:

$$\sigma \simeq -C \left[(-\varepsilon_0)^{3/2} - \frac{3}{2}(-\varepsilon_0)^{1/2}\tilde{\varepsilon} \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{3}{8}(-\varepsilon_0)^{-1/2}\tilde{\varepsilon}^2 - \frac{1}{16}(-\varepsilon_0)^{-3/2}\tilde{\varepsilon}^3 + \dots \right].$$

La partie dynamique de la contrainte est déduite de cette dernière expression sous la forme :

$$\tilde{\sigma} \simeq \frac{3}{2}C(-\varepsilon_0)^{1/2}\tilde{\varepsilon} \left[1 - \frac{1}{4\varepsilon_0}\tilde{\varepsilon} + \frac{1}{24\varepsilon_0^2}\tilde{\varepsilon}^2 + \dots \right]. \quad (2.18)$$

En conséquence, pour un contact de Hertz, le module d'élasticité linéaire s'écrit

$$E_0 = \frac{3}{2}C(-\varepsilon_0)^{1/2}$$

et la variation relative du module élasticité

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} - E_0}{E_0} \simeq -\frac{1}{4\varepsilon_0}\tilde{\varepsilon} + \frac{1}{24\varepsilon_0^2}\tilde{\varepsilon}^2 + \dots \quad (2.19)$$

En supposant une excitation sinusoïdale de la forme $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_A \sin \omega t$ et en moyennant la variation relative du module élasticité sur une période, il vient au premier ordre en ε_A :

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E_0} \right\rangle \simeq 2 \frac{\Delta f}{f_0} \simeq \frac{1}{48\varepsilon_0^2} \varepsilon_A^2. \quad (2.20)$$

Cette équation (2.20) montre que le contact de Hertz, en régime faiblement non linéaire ($|\tilde{\varepsilon}| \ll |\varepsilon_0|$), présente une variation relative de la fréquence de la forme

$$\frac{\Delta f}{f_0} \propto \varepsilon_A^2 \quad \text{à l'ordre } \varepsilon_A^2,$$

qui est un résultat attendu. En effet, en régime faiblement non linéaire, la non-linéarité du contact de Hertz s'exprime en loi de puissance comme une non-linéarité classique qui est connue pour contribuer au décalage de fréquence de résonance à l'ordre 3 de la relation contrainte-déformation. Ainsi, une non linéarité cubique conduit à $\frac{\Delta f}{f_0} \propto \varepsilon_A^2$. Récemment, ce type de comportement a été prédit dans une chaîne granulaire en faisant usage de la méthode dite de l'équilibrage harmonique [47].

À partir des données (fréquence et facteur de qualité) de la figure 2.7, les figures 2.8(a) et 2.8(b) représentent respectivement, en fonction de l'amplitude de déformation à la résonance normalisée, les variations relatives de la fréquence de résonance et de l'inverse du facteur de qualité

$$\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0}$$

où Q_0 est le facteur de qualité associé à une faible amplitude d'excitation (régime linéaire) et Q celui obtenu pour des amplitudes plus élevées.

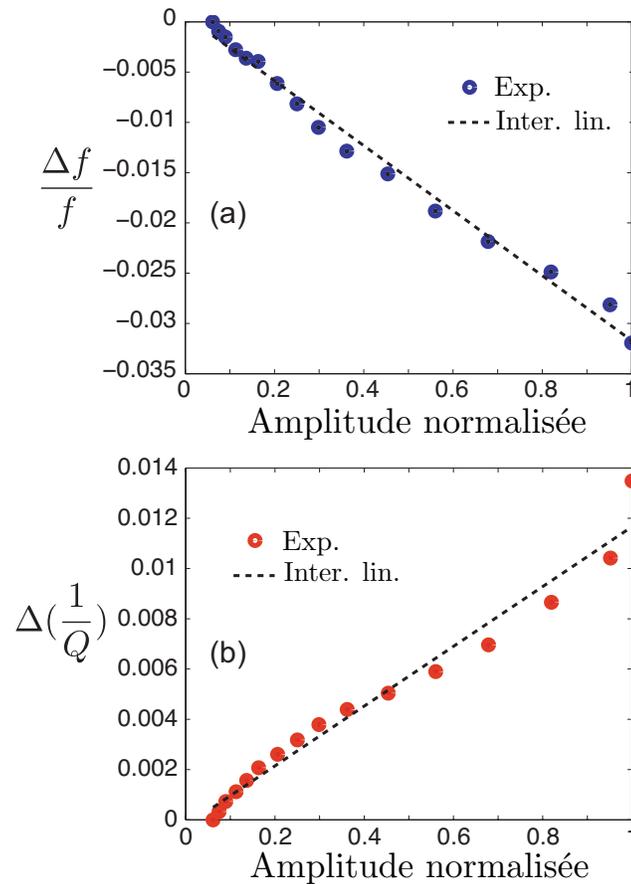


FIGURE 2.8 – (a) Décalage relatif de la fréquence de résonance en fonction de l’amplitude à la résonance (normalisée par le maximum). (b) Décalage relatif de l’inverse du facteur de qualité en fonction de l’amplitude à la résonance. Une interpolation linéaire est également tracée à partir des mesures.

Soulignons que les courbes de résonance (figure 2.7) possèdent une forme asymétrique qui ne permet pas de déterminer le facteur de qualité à l’aide la méthode classique ($\frac{f_0}{\Delta f}$ avec Δf estimée à la moitié de l’amplitude du signal mesurée à f_0). Pour la détermination de l’inverse du facteur de qualité, une autre méthode fait usage de l’amplitude de la déformation à la fréquence de résonance ε^r au lieu de la largeur de la courbe de résonance [72, 35] :

$$\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{1}{Q_0} \left(\frac{V \varepsilon_0^r}{V_0 \varepsilon^r} - 1 \right), \quad (2.21)$$

où V_0 et V sont les tensions électriques appliquées sur l’excitateur, V_0 étant la plus faible des valeurs. ε_0^r et ε^r sont les amplitudes des déformations estimées à la fréquence de résonance (définies ici comme étant les maximums des courbes de résonance) aux tensions V_0 et V respectivement. Le facteur de qualité Q_0 , associé au plus faible niveau d’excitation, est déterminé de manière classique comme le rapport entre la fréquence de résonance f_0 et la largeur fréquentielle estimée à la moitié de l’amplitude ε_0^r de la courbe de résonance.

Non-linéarités quadratiques et hystérétiques

La figure 2.8(a) montre que la variation relative de la fréquence $\frac{\Delta f}{f_0}$ évolue à peu près de manière linéaire avec l'amplitude de déformation ε_A , une observation en contradiction avec les prédictions du modèle proposé précédemment. Cette relation de dépendance est généralement observée en présence de non linéarités quadratiques et hystérétiques [17, 65]. À ce type de non linéarité est aussi associée une autre relation de proportionnalité entre l'inverse du facteur de qualité et l'amplitude de déformation

$$\Delta \left(\frac{1}{Q} \right) \propto \varepsilon_A$$

une propriété particulière du contact observée sur la figure 2.8(b).

En conséquence, la non linéarité dominante associée aux comportements des contacts de cette chaîne diatomique, n'est pas une non linéarité de Hertz (pour des contacts sollicités en compression) mais plus exactement une non linéarité quadratique et hystérétique. Dans le cas de deux sphères en contact soumises à des efforts de cisaillement, il a été montré que la non linéarité de ce contact dit de Hertz - Mindlin est, au premier ordre, quadratique et hystérétique [65]. Dans notre chaîne diatomique, les contacts sont sollicités uniquement par des ondes de compression pures. Toutefois, un mauvais alignement des éléments de la chaîne peut éventuellement conduire à l'émergence de déplacements associés à des contraintes de cisaillement. Cependant, l'amplitude de ces déplacements est estimée inférieure de trois ordres de grandeur à celle des déplacements longitudinaux.

Rappelons que le comportement hystérétique provient de la relation non linéaire entre la contrainte et la déformation de la zone de contact soumise à une excitation longitudinale dynamique (acoustique). Dans la littérature consacrée à la description des phénomènes physiques associés aux surfaces en contact soumises à des sollicitations longitudinales, l'hystérésis mécanique apparaît dans divers modèles analytiques comme ceux de Johnson-Kendall-Roberts, de Derjaguin-Muller-Toporov ou encore de Maugis [59]. Tous ces modèles mettent en jeu des processus d'adhésion qui produisent une asymétrie de comportement de la zone de contact entre les phases de traction et celles de compression [33, 59]. Ces processus d'adhésion peuvent être une combinaison complexe de diverses contributions provenant des forces magnétique, électrostatique, capillaire ou encore de Van der Waals [33, 59].

Considérant ces phénomènes, la relation entre la contrainte et la déformation peut donc conduire à des évolutions fortement non linéaires. En acoustique, et dans la limite des petites déformations, cette relation complexe peut être approchée au moyen d'une équation qui modélise uniquement le comportement d'une non linéarité quadratique et hystérétique [65]. Finalement et en conclusion, les effets observés sur les résonances de la chaîne diatomique peuvent être associés à des processus d'adhésion entre les contacts qui favorisent l'émergence d'une non linéarité quadratique et hystérétique au détriment de la non linéarité cubique associée au contact de Hertz classique.

Rappelons que la figure 2.8(b) présente les données expérimentales associées à l'inverse du facteur de qualité en fonction de l'amplitude de déformation normalisée ainsi que les prédictions du modèle

associé aux non linéarités quadratiques et hystérétiques. La comparaison fait apparaître une petite différence entre les prédictions et les mesures qui peut être attribuée à une contribution combinée de la dissipation classique et d'une non linéarité quadratique classique mais aussi à toute combinaison de processus physiques conduisant à une atténuation non linéaire [73].

Les effets faiblement non linéaires décrits dans cette partie sont responsables de l'évolution des résonances de la chaîne diatonique avec une évolution relative de la fréquence de 3% environ. Ces effets peuvent aussi donner naissance à d'importantes variations d'amplitude du déplacement aux fréquences proches des limites des diverses bandes permises et interdites à la propagation. L'étude de ces phénomènes particuliers est l'objet de la partie suivante.

2.5 Effets non linéaires d'auto-action aux limites de bandes

Au caractère diatomique de la structure granulaire est associée la présence de plusieurs bandes permises et interdites à la propagation des ondes. Comme le montre la figure 2.6, le passage d'une bande permise à une bande interdite (et inversement) s'effectue sur une gamme de fréquence de faible largeur. Lors de cette transition, la fonction de transfert présente des variations d'amplitude de plusieurs ordres de grandeurs. Ainsi, l'amplitude du déplacement (ou de l'accélération), associée à une fréquence de la structure granulaire très proche d'une transition, peut subir une très grande variation liée à une faible évolution de l'assouplissement du milieu, lui-même provoqué par une évolution de l'amplitude de l'excitation. Ces effets singuliers peuvent être aussi observés dans des situations similaires pour lesquelles de petites non linéarités apparaissent, par exemple, à une fréquence proche d'une antirésonance résultant de l'interaction de deux ondes [74], ou lorsque deux modes de propagation interfèrent dans un milieu propice aux ondes de Biot [38].

L'assouplissement de notre milieu granulaire résulte d'une décroissance de son module d'élasticité lorsque l'amplitude d'excitation augmente. À cette décroissance est associée une diminution de la vitesse moyenne et donc de la longueur d'onde. Les effets phononiques associés au caractère diatomique d'une chaîne, tels que les bandes permises ou interdites avec leurs fréquences de coupure, dépendent du rapport entre la longueur d'onde et la périodicité spatiale de la structure. Ainsi, à une fréquence d'excitation donnée, une diminution de cette longueur d'onde, due à une amplitude d'excitation augmentée, a pour effet de déplacer vers les basses fréquences l'ensemble des bandes et leurs fréquences de coupure. Issue de la mesure, la figure 2.9 présente l'évolution de trois fréquences de coupure de la chaîne diatomique en fonction de l'amplitude de l'excitation. La transition entre une bande permise et une bande interdite présentant une certaine largeur fréquentielle, les fréquences de coupures retenues sont celles associées à la demi valeur de la différence des niveaux entre la bande passante et la bande interdite (le niveau de bruit de fond est choisi pour cette dernière). Les trois fréquences de coupure diminuent avec l'amplitude croissante de l'excitation, une évolution qui est conforme à celle attendue d'un milieu présentant un assouplissement de plus en plus important.

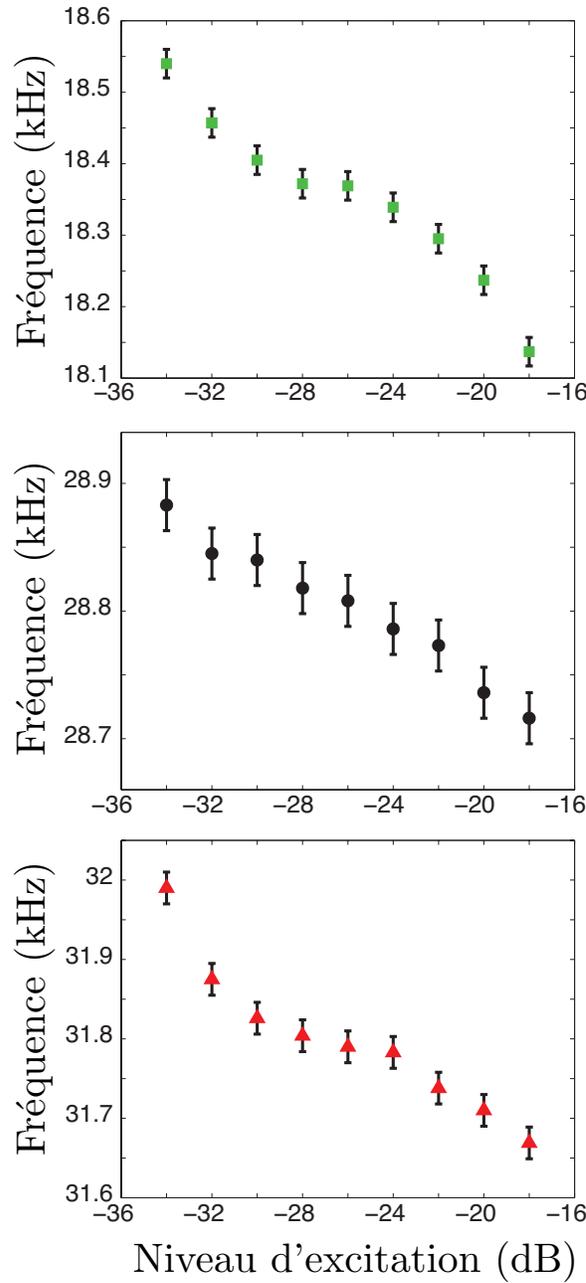


FIGURE 2.9 – Évolution des trois fréquences de coupure en fonction du niveau d’excitation.

Pour une chaîne diatomique, il existe deux bandes permises à la propagation, deux bandes interdites et trois fréquences de coupure. Le déplacement de ces bandes vers les basses fréquences conduit à des évolutions de l’amplitude moyenne autour de chacune des fréquences de coupure qui diffèrent suivant le côté de la bande. Afin d’illustrer ces phénomènes particuliers, considérons la moyenne des amplitudes, prises autour d’une fréquence de résonance sur une largeur de bande de 500 Hz , divisée par l’amplitude de l’excitation. Cette quantité adimensionnée, exprimée en décibel, est représentée sur la figure 2.10

en fonction du niveau de l'excitation pour les trois fréquences de coupure.

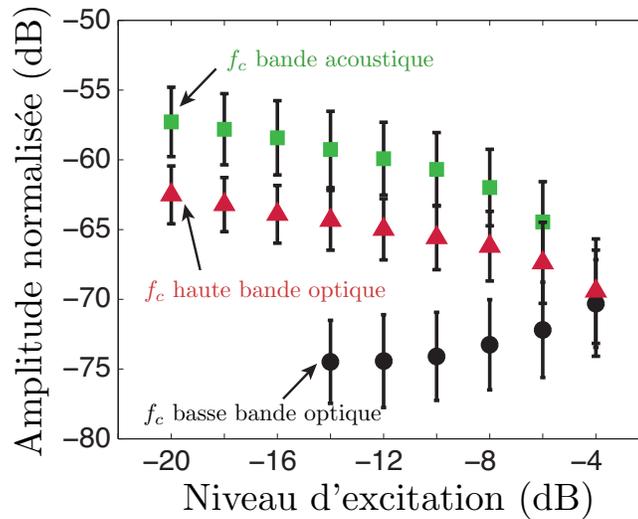


FIGURE 2.10 – Amplitudes mesurées de la fonction de transfert acoustique moyennée sur 500 Hz aux trois limites de bandes, pour des niveaux d'excitation croissants. L'amplitude détectée est normalisée par le niveau d'excitation.

Un comportement linéaire de la chaîne diatomique donnerait des lignes horizontales pour les trois fréquences. Pour les transitions associées à droite des bandes passantes (acoustique et optique), le niveau normalisé décroît de 13 dB pour un niveau d'excitation augmentant de 16 dB . Autrement dit, lorsque le niveau de l'excitation augmente de 16 dB , le niveau du signal mesuré à l'extrémité de la chaîne croît de 3 dB seulement. Par contre, pour la fréquence de coupure associée à la transition située à gauche de la bande optique, une augmentation du niveau d'excitation de 16 dB produit une augmentation de 21 dB du niveau mesuré.

En résumé, pour un niveau d'excitation croissant, deux effets distincts d'auto-action sont observés aux transitions entre les bandes passantes et permises lors de leur dérive vers les basses fréquences. Les niveaux des transitions situées à droite des bandes passantes (acoustique et optique) subissent une atténuation, alors que le niveau de la transition située à gauche de la bande optique est augmenté ; ce dernier phénomène est appelé aussi transparence auto-induite. Ces comportements singuliers sont dus à l'assouplissement du milieu résultant de la non linéarité hystérétique des zones de contact entre les éléments de la chaîne granulaire.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude de la propagation des ondes de compression dans une chaîne diatomique est abordée de manières théorique et expérimentale. Cette étude est focalisée sur les effets liés aux propriétés dispersives de la structure granulaire ainsi qu'à ceux associés aux comportements non linéaires des contacts entre les divers éléments. La première partie aborde la génération d'harmoniques au sein de ce milieu diatomique. Les prédictions du modèle qui prend en compte la propagation non linéaire, limité à l'ordre deux, dans une structure diatomique sont en accord avec les données expérimentales obtenues sur une chaîne diatomique constituée de 40 éléments (cubes magnétiques et billes en acier). Ces résultats mettent en évidence notamment la transmission d'une onde évanescence à l'harmonique deux (dont la fréquence se situe dans la bande interdite à la propagation) ; une onde qui est forcée dans le milieu par la présence de sources non linéaires dues à l'onde progressive à la fréquence fondamentale.

Par ailleurs, des effets non linéaires d'auto-action dépendant de la fréquence et du niveau d'excitation ont été observés puis analysés. Ces phénomènes sont de même nature que le décalage non linéaire de la fréquence de résonance observé dans les matériaux mésoscopiques (roches, matériaux endommagés, ...). Ils sont associés à l'assouplissement du milieu lorsque l'amplitude d'excitation augmente. Une structure granulaire (ou cristal phononique) possède un coefficient de transmission qui dépend fortement de la fréquence, en particulier aux transitions entre les bandes (permises et interdites). En conséquence, un faible décalage en fréquence de ces bandes, dû à un assouplissement du milieu, peut provoquer de forts effets d'auto-atténuation ou d'auto-transparence aux fréquences proches des transitions. Autrement dit, les fréquences caractéristiques de ce filtre mécanique (appelé aussi filtre phononique) changent en fonction de l'amplitude de l'onde. La non linéarité hystérétique des surfaces de contact est identifiée comme la cause de ces phénomènes particuliers.

Ces observations et interprétations participent à la recherche d'une meilleure compréhension des propriétés non linéaires des structures granulaires. Les effets d'atténuation ou de transparence, entre autres, mis en évidence dans cette étude peuvent être utilisés dans la conception de systèmes mécaniques en vue d'applications spécifiques liées au contrôle de la propagation des ondes par exemple.

Chapitre 3

Ondes de rotation dans une chaîne de billes magnétiques

3.1 Introduction

La propagation acoustique dans les structures granulaires unidimensionnelles a fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques et expérimentales au cours des dernières décennies [8, 9, 11, 12, 25, 27, 31, 50]. Dans leur grande majorité, les études portent sur les ondes de compression et de cisaillement. Après avoir étudié la propagation des ondes de compression dans les chaînes diatomiques, ce chapitre propose d'aborder la propagation des ondes de rotation dans une chaîne monoatomique, plus précisément, une chaîne verticale de billes aimantées.

Dans un premier temps, la structure granulaire support des ondes de rotation est décrite. Les effets magnétiques du matériau des billes associés à ceux de la gravité dus à la verticalité de la chaîne sont ensuite étudiés. Ils sont à l'origine d'une inhomogénéité de la force de contact entre les billes le long de la chaîne, et donc de la célérité des ondes. Une seconde partie est dédiée à l'étude analytique de la propagation linéaire des ondes de rotation dans une chaîne de billes de longueur finie. Les bandes permise et interdite à la propagation des ondes, les fréquences de résonance et la loi de dispersion sont modélisées. Un dispositif expérimental conçu et dédié à la génération et l'observation des ondes de rotation dans une chaîne granulaire verticale est présenté. Finalement, les résultats expérimentaux sont discutés et comparés aux prédictions théoriques.

3.2 Description de la structure granulaire - force de contact

L'étude des phénomènes physiques associés à la propagation des ondes dans un milieu périodique, unidimensionnel et idéalisé, telle qu'une chaîne de billes, impose l'utilisation d'un dispositif expérimental qui interagit le plus faiblement possible avec la structure granulaire, cela afin de réduire la transmission des vibrations et de limiter la friction des grains avec le support. Le dispositif expérimental peut être grandement simplifié lorsque la structure granulaire à l'étude est constituée d'éléments

magnétiques. Les interactions magnétiques assurent alors le maintien en contact des éléments - des billes aimantées dans notre cas - et ainsi la cohésion de la chaîne, cela sans avoir recours à des supports mécaniques. Par ailleurs, afin de disposer d'une structure granulaire avec une extrémité libre, la chaîne est suspendue verticalement (figure 3.1).

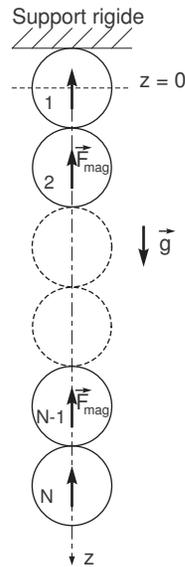


FIGURE 3.1 – Représentation simplifiée d'une chaîne verticale de N billes aimantées placées dans un champ de gravité g , les forces magnétiques F_{mag} maintiennent les billes en contact.

Dans une chaîne verticale, pour un contact donné entre deux billes aimantées, la force de contact est l'association de deux contributions de sens opposé :

- la force magnétique due à l'aimantation des billes,
- le poids de l'ensemble des billes situées en dessous du contact considéré.

La force magnétique qui assure le contact entre les premières billes au plus près du support doit avoir une amplitude supérieure au poids total de la chaîne. Une première conséquence, l'apparition d'un gradient de force le long de la chaîne lorsque la force magnétique et le poids total sont du même ordre de grandeur.

La force de contact entre chaque bille est une grandeur importante pour la propagation des ondes dans ce type de structure périodique. En effet, elle apparaît directement dans l'expression de la célérité et cela quel que soit le type d'onde (compression, cisaillement et rotation). Il est donc nécessaire de connaître l'amplitude de cette force tout le long de la chaîne de billes.

3.2.1 Éstimation de la force magnétique en fonction de la position dans la chaîne

L'énergie d'interaction magnétique de billes aimantées en contact a fait l'objet d'une première étude succincte [62]. Par contre et à notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature d'expression analytique de la force de contact entre deux billes aimantées en interaction magnétique avec leurs plus proches voisines. L'objectif de cette section est de rechercher une expression de cette force en fonction du nombre de billes et de sa position dans la chaîne.

Énergie potentielle d'interaction

Les billes aimantées sont assimilées à des dipôles magnétiques rigides (avec un pôle nord et un pôle sud) de moment magnétique m . Considérons deux aimants A_1 et A_2 , séparés d'une distance r_{12} , de moment magnétique m_1 et m_2 d'orientation quelconque (figure 3.2). Le champ magnétique produit par l'aimant A_1 et mesuré en A_2 s'écrit [56] :

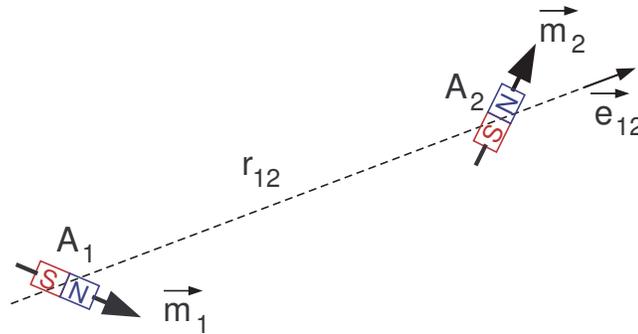


FIGURE 3.2 – Interaction de deux dipôles magnétiques de moments m_1 et m_2 séparés d'une distance r_{12} .

$$\vec{B}_1(A_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m}_1 \cdot \vec{e}_{12}) \cdot \vec{e}_{12} - \vec{m}_1}{r_{12}^3} \right] \quad \text{avec} \quad \vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ est la perméabilité magnétique du vide et \vec{e}_{12} le vecteur directeur unitaire de la droite reliant les centres des deux aimants.

L'énergie potentielle d'interaction associée aux deux aimants A_1 et A_2 s'écrit sous la forme :

$$U(r_{12}) = -\vec{B}_1(A_2) \cdot \vec{m}_2. \quad (3.1)$$

Cette expression et celle du champ magnétique $\vec{B}_1(A_2)$ sont valables pour des distances r_{12} grandes devant la taille des aimants ($r_{12} \gg d$, le diamètre des billes). Cette condition n'est pas toujours respectée dans le cas d'un alignement de billes magnétiques en contact. Cependant, cette relation de l'énergie d'interaction offre une première estimation utile à la détermination de la force d'interaction magnétique.

Considérons maintenant une chaîne de N billes aimantées identiques en interaction les unes avec les autres (figure 3.3). Elle est modélisée simplement par une chaîne de dipôles magnétiques élémentaires parfaitement alignés de moment magnétique m_d .

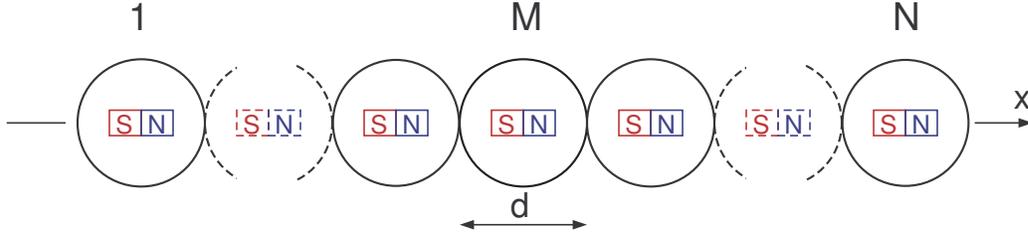


FIGURE 3.3 – Une chaîne de billes aimantées de diamètre d représentée par une chaîne de dipôles magnétiques parfaitement alignés de moment magnétique m_d .

Ainsi, d'après la relation (3.1), l'énergie potentielle d'interaction de la bille aimantée située à la position M avec une autre bille (en contact ou non) s'écrit

$$U(x) = -\frac{\mu_0 m_d^2}{2\pi x^3} \quad \text{avec} \quad x = n.d$$

Cette énergie potentielle dépend de la distance x entre les centres des deux billes en interaction, cette distance est exprimée en fonction de d le diamètre des billes. Finalement, l'énergie potentielle associée à la bille située à la position M et en interaction avec toutes les autres billes aimantées de la chaîne prend la forme :

$$U_T(M) = -\frac{\mu_0 m_d^2}{2\pi d^3} \left[\underbrace{\sum_{n=1}^{N-(M-1)} \left(\frac{1}{n}\right)^3}_{\text{billes à droite de } M} + \underbrace{\sum_{n=1}^M \left(\frac{1}{n}\right)^3}_{\text{billes à gauche de } M} \right].$$

Force d'interaction magnétique

La force d'interaction magnétique exercée par l'ensemble des billes aimantées sur la bille située à la position M se déduit de l'expression :

$$F_{mag}(M) = -\frac{\partial U_T}{\partial x} = -\frac{1}{d} \frac{\partial U_T}{\partial n},$$

soit

$$F_{mag}(M) = -\frac{3 \mu_0 m_d^2}{2\pi d^4} \left[\underbrace{\sum_{n=1}^{N-(M-1)} \left(\frac{1}{n}\right)^4}_{\text{billes à droite de } M} + \underbrace{\sum_{n=1}^M \left(\frac{1}{n}\right)^4}_{\text{billes à gauche de } M} \right], \quad (3.2)$$

rappelons que $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ représente la perméabilité magnétique du vide et m_d le moment magnétique des billes aimantées.

La figure 3.4 donne quelques exemples d'évolution de la force magnétique le long d'une chaîne de billes aimantées. Les profils tracés sont associés à des chaînes allant de 20 à 70 billes (diamètre $d = 19 \text{ mm}$). Quelle que soit la longueur de la chaîne de billes, la force magnétique est observée quasi constante sur la partie centrale de la structure granulaire. La chaîne étant de longueur finie, les contributions des divers champs magnétiques sont donc moindres aux extrémités de la chaîne. Malgré cela, les variations de la force magnétique restent relativement faibles aux extrémités ($< 2\%$).

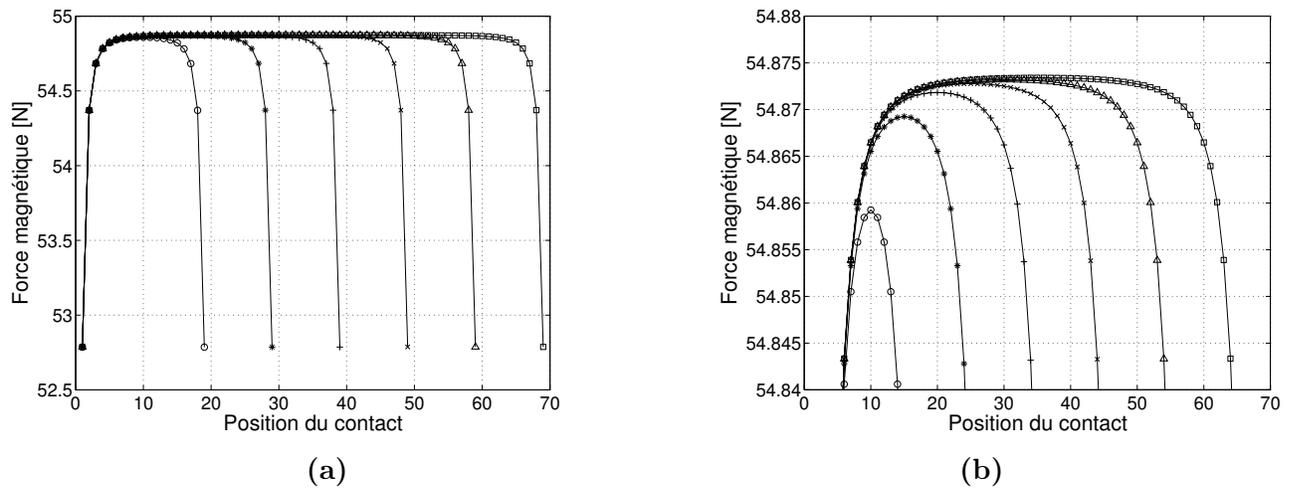


FIGURE 3.4 – (a) : Force magnétique F_{mag} en fonction de la position du contact dans la chaîne, pour des chaînes constituées de 20 à 70 billes de 19 mm de diamètre (équation (3.2) avec $m_d \simeq 2,35 \text{ A.m}^2$, la valeur du moment magnétique a été choisie afin d'obtenir des forces magnétiques proches de celles mesurées lors des expériences). (b) : un agrandissement des courbes centré sur la valeur maximale de la force magnétique.

3.2.2 Force de contact

Comme évoqué précédemment, pour un contact donné entre deux billes (figure 3.1), la force de contact est composée de la force magnétique F_{mag} due à l'aimantation des billes (éq. (3.2)) et du poids de l'ensemble des billes situées en dessous du contact considéré. Ainsi dans une chaîne verticale de N billes aimantées identiques et de masse m , la force de contact associée à la bille numérotée n se déduit de l'expression

$$F_T(n) = F_{mag}(n) - (N - n) m.g, \quad (3.3)$$

où g est l'accélération liée à la gravité.

La figure 3.5 donne les profils d'évolution de la force de contact associés à des chaînes allant de 20 à 70 billes (diamètre $d = 19 \text{ mm}$). La force de contact croît linéairement pour des billes s'éloignant de l'extrémité haute de la chaîne, exception faite pour les billes situées aux extrémités de la structure granulaire où les variations de la force magnétique apparaissent.

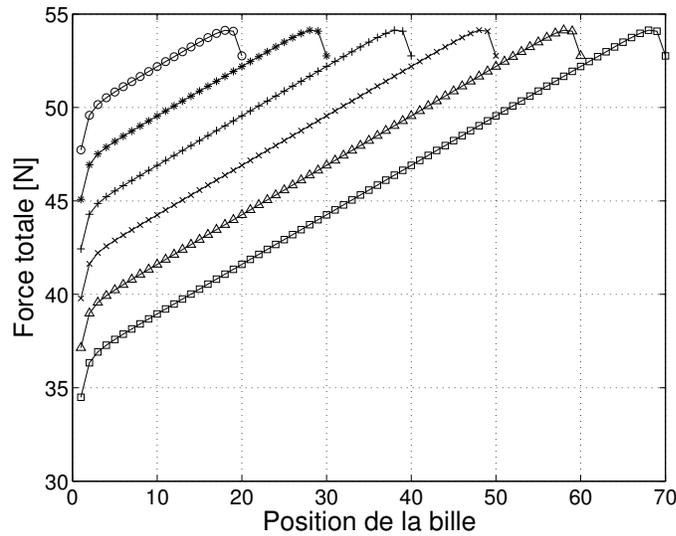


FIGURE 3.5 – Force de contact F_T en fonction de la position du contact dans la chaîne, pour des chaînes constituées de 20 à 70 billes de 19 mm de diamètre (équation (3.3)).

3.3 Célérité des ondes de rotation

L'expression de la célérité des ondes de rotation dans une chaîne de billes a été déterminée au premier chapitre. L'introduction de la force de contact F_T (éq. (3.3)) qui associe les forces magnétiques F_{mag} et de gravité $m.g$ permet de réécrire la célérité des ondes de rotation sous la forme :

$$c_t(n) = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{15}{\pi} \frac{1 - \nu}{\rho} F_T(n)}. \quad (3.4)$$

La célérité dépend de la position n le long de la chaîne de billes de diamètre d . ν est le coefficient de Poisson et ρ la masse volumique du matériau des billes.

Les courbes de célérité présentées sur la figure 3.6 montrent que la vitesse de l'onde de rotation augmente au fur et à mesure que celle-ci descend dans la chaîne de billes, cela du fait d'une force de contact croissante (excepté à l'extrémité basse de la structure). Quel que soit le nombre de billes et donc de la longueur de la chaîne, la vitesse atteint sa valeur maximale (ici $c_t \simeq 17 \text{ m.s}^{-1}$) à l'extrémité basse de la structure, là où la force magnétique est prépondérante. Les plus faibles valeurs de la vitesse de l'onde de rotation sont obtenues à l'extrémité haute de la chaîne de billes là où les forces de contact sont les plus faibles à cause du poids de la chaîne. Les valeurs minimales de la vitesse dépendent du poids de la structure granulaire et donc du nombre de billes.

3.4 Propagation linéaire des ondes de rotation

Cette partie aborde la propagation linéaire des ondes de rotation dans une chaîne granulaire monoatomique créée par une excitation sinusoïdale de faible amplitude.

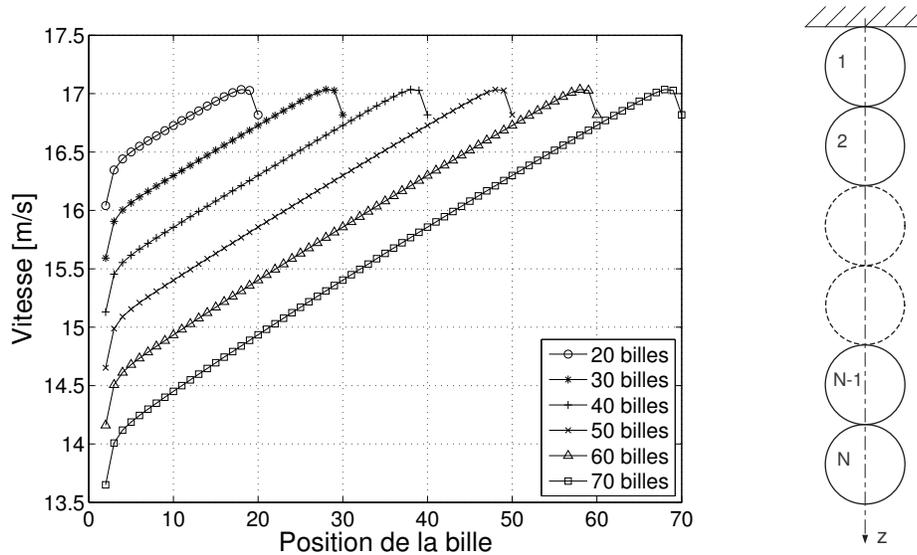


FIGURE 3.6 – Vitesse des ondes de rotation en fonction de la position du contact dans la chaîne, pour des chaînes constituées de 20 à 70 billes de 19 mm de diamètre (éq. (3.4) avec $\nu = 0,24$ et $\rho = 7500 \text{ kg.m}^{-3}$).

En physique du solide, la propagation des vibrations dans un cristal est modélisée simplement par un système formé d'une suite indéfinie de "masse-ressort" identiques couplés les uns aux autres. À l'aide de ce modèle simple à une dimension, des notions physiques fondamentales sont étudiées telles que : la dispersion du milieu, les bandes de fréquences permises et interdites à la propagation des ondes, les quanta d'énergie associés aux modes propres appelés communément phonons.

Une chaîne de billes aimantées parcourue par une onde de rotation est ici modélisée à l'aide d'une suite finie de "masse-ressort". Les notions fondamentales citées précédemment sont, pour partie, abordées dans ce cadre particulier. Une chaîne de billes est une représentation simplifiée et idéalisée d'un cristal, elle présente un certain nombre de comportements similaires d'où l'appellation de cristal phononique.

3.4.1 Description du système

La structure granulaire à l'étude est une chaîne verticale de billes aimantées suspendue ponctuellement à un support fixe indéformable (figure 3.7). La force de contact F_T entre les billes est considérée constante (la force magnétique est supposée constante le long de la chaîne et les effets de la gravité sont négligés). Un moment oscillant de faible amplitude est appliqué sur la première bille en contact avec le support. Ce moment provoque un mouvement de rotation des billes qui se propage de proche en proche suivant l'axe z de la chaîne.

Les déformations élastiques dues aux mouvements de rotation entre deux billes sont concentrées dans la zone de contact. En dehors de cette zone, les billes ne sont pas déformées et elles se comportent

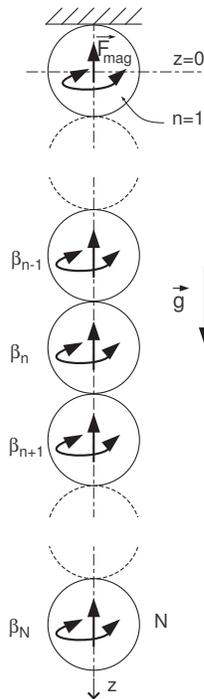


FIGURE 3.7 – Chaîne verticale de N billes aimantées soumise à un moment oscillant (autour de l'axe z). β_n représente la rotation de la bille n autour de l'axe z .

comme des masses rigides. En conséquence, la structure granulaire peut être représentée par un système simple de masses reliées par des ressorts. Par analogie avec les ondes de compression, la propagation des ondes de rotation au sein d'une chaîne composée de N billes identiques de masse m est modélisée par un système de N équations différentielles de la forme

$$I \frac{\partial^2 \beta_n}{\partial t^2} = K_t [\beta_{n+1} - 2\beta_n + \beta_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots, N$$

avec $I = \frac{2}{5}mR^2$, $K_t = \frac{16}{3}Ga^3 = (2R)(1 - \nu)E_T$ et $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$.

β_n représente la rotation de la bille n , de rayon R et de masse m et I son moment d'inertie. K_t est la rigidité (raideur) de torsion de la zone de contact de rayon a . E est le module d'élasticité longitudinale et ν le coefficient de Poisson.

3.4.2 Résolution du problème linéaire

Le comportement dynamique de la chaîne de billes de longueur finie est modélisé par un système d'équations différentielles, chacune associée au mouvement d'une bille. La source d'excitation, un moment oscillant d'amplitude contrôlée, est appliquée sur la première bille; la dernière bille de la chaîne est libre. En s'inspirant des développements mathématiques sur la propagation des ondes dans les milieux périodiques, de Brillouin et Parodi [5] d'une part et de Wol'fson [69] d'autre part, le

comportement global de la structure est décrit par l'ensemble des N équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} I \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} - K_t [\beta_2 - 2\beta_1] &= M_0 \cdot e^{j\omega t} \\ I \frac{d^2 \beta_n}{dt^2} - K_t [\beta_{n+1} - 2\beta_n + \beta_{n-1}] &= 0, \\ I \frac{d^2 \beta_N}{dt^2} - K_t [-\beta_N + \beta_{N-1}] &= 0, \end{aligned}$$

où M_0 est l'amplitude du moment d'excitation. Pour la dernière bille N , il existe un seul moment appliqué celui associé à la bille $N - 1$.

En exprimant les rotations sous la forme $\beta_n = A_n \cdot e^{j\omega t}$ où A_n est l'amplitude du mouvement de la bille n , le système s'écrit

$$\begin{aligned} -I\omega^2 A_1 - K_t [A_2 - 2A_1] &= M_0, \\ -I\omega^2 A_n - K_t [A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}] &= 0, \\ -I\omega^2 A_N - K_t [-A_N + A_{N-1}] &= 0. \end{aligned}$$

Posons $2L = \frac{I}{K_t} \omega^2 - 2$, le système d'équations linéaires prend alors la forme

$$\begin{aligned} 2L \cdot A_1 + A_2 &= -M_0, \\ A_{n-1} + 2L \cdot A_n + A_{n+1} &= 0, \\ A_{N-1} + (2L + 1) \cdot A_N &= 0. \end{aligned}$$

Ce système peut être exprimé sous la forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 2L & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2L & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les amplitudes A_n associées aux rotations des billes se calculent à partir de l'expression $A_n = \frac{D_n}{D_N}$, un rapport de déterminants où

$$D_N = \begin{vmatrix} 2L & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2L & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L + 1 \end{vmatrix}$$

est le déterminant de la matrice tridiagonale initiale. D_n est le déterminant de la matrice construite

en remplaçant dans la matrice initiale la $n^{\text{ième}}$ colonne par le vecteur source, il prend la forme

$$D_n = \begin{vmatrix} 2L & 1 & 0 & -M_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2L & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L+1 \end{vmatrix}.$$

Calculs des déterminants D_N et D_n

D'après les propriétés sur l'addition des déterminants associés aux matrices tridiagonales

$$D_N = \begin{vmatrix} 2L & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2L & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2L & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2L & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2L & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2L & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = G_N(L) + G_{N-1}(L).$$

Ainsi le déterminant D_N de la matrice initiale est la somme de deux polynômes de Gegenbauer $G_N(L)$ et $G_{N-1}(L)$ ¹. Le degré $N-1$ du polynôme $G_{N-1}(L)$ provient du fait que la dernière ligne et la dernière colonne du second terme du déterminant doivent être supprimées afin de retrouver une structure similaire au premier terme [2] [5] [69].

De même, le second déterminant D_n se décompose en deux parties :

$$D_n = (-1)^{1+n}(-M_0) \begin{vmatrix} 2L & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2L & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2L \end{vmatrix} + (-1)^{1+n}(-M_0) \begin{vmatrix} 2L & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2L & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le 1 de l'exposant $(1+n)$ de (-1) traduit le fait que la source d'excitation est placée sur la première bille et n est le numéro de la bille dont le mouvement est observé. En faisant usage des propriétés sur les déterminants, il vient

$$D_n = (-1)^n M_0 \left\{ G_{N-n}(L) + G_{N-(n+1)}(L) \right\}.$$

1. Les polynômes orthogonaux de Gegenbauer sont une extension des polynômes de Legendre, ils satisfont aussi à une relation de récurrence de la forme

$$G_{n-1}(L) - 2LG_n(L) + G_{n+1}(L) = 0 \quad \text{avec} \quad G_0(L) = 1 \quad \text{et} \quad G_1(L) = 2L$$

3.4.3 Les fréquences de résonance de la chaîne de billes

Les fréquences de résonance, conséquence de la longueur finie de la chaîne de billes, sont déduites de l'équation caractéristique qui s'écrit sous la forme du déterminant de la matrice initiale égale à zéro

$$D_N = G_N(L) + G_{N-1}(L) = 0.$$

En faisant usage des propriétés mathématiques des polynômes de Gegenbauer, pour $0 \leq |L| < 1$ et en posant $L = \cos \theta$, la forme générique du polynôme peut s'écrire sous la forme

$$G_n(\cos \theta) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}.$$

Ainsi le déterminant est nul pour $\sin[(N+1)\theta] + \sin(N\theta) = 0$, ou encore,

$$\sin \left[(2N+1) \frac{\theta}{2} \right] \times \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = 0.$$

Les zéros de l'expression précédente sont obtenus pour :

$$\frac{\theta}{2} = i\pi \quad \text{soit} \quad L = \cos(i.2\pi) = 1,$$

et

$$(2N+1) \frac{\theta}{2} = i\pi \quad \text{soit} \quad L = \cos \left(\frac{i.2\pi}{2N+1} \right) \quad \text{où} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Les fréquences de résonance de la structure granulaire se déduisent donc de l'expression

$$L = \cos \left(\frac{i.2\pi}{2N+1} \right) = \frac{I}{2K_t} \omega^2 - 1 \quad \text{où} \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

d'où

$$\frac{I}{2K_t} \omega^2 = 1 + \cos \left(\frac{i.2\pi}{2N+1} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{i.\pi}{2N+1} \right).$$

Finalement, les fréquences de résonance de la chaîne sont déterminées par la relation

$$f_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{K_t}{I}} \cos \left(\frac{i.\pi}{2N+1} \right) \quad \text{où} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.5)$$

La figure 3.8 donne les valeurs des 30 fréquences de résonance f_i d'une chaîne de $N = 30$ billes en fonction de la quantité $N - (i-1)$, appelé ici indice de résonance. Le tracé ainsi obtenu ($-\ominus-$), composé de 30 points, est la représentation discrétisée de la relation de dispersion d'une chaîne composée d'un nombre infini de grains. Pour comparaison, sur la même figure sont aussi représentées (\times) les fréquences de résonance d'une structure de même longueur, non périodique et non dispersive :

$$f_p = \frac{2}{4} \frac{p-1}{N} \sqrt{\frac{K_t}{I}} \quad \text{où} \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (3.6)$$

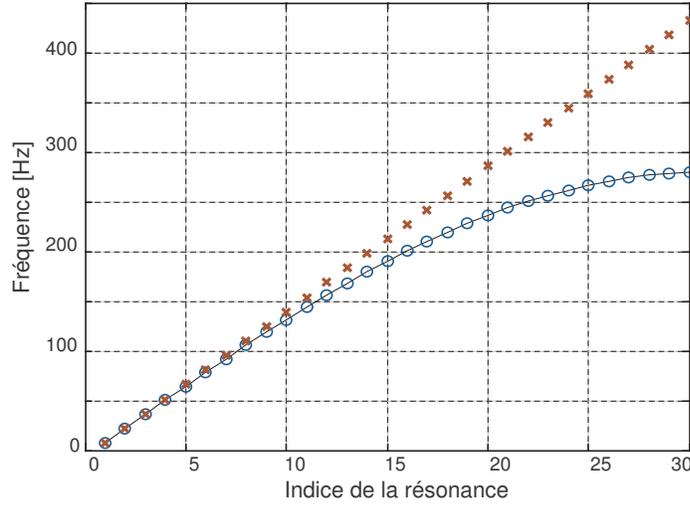


FIGURE 3.8 – Fréquences de résonance d'une chaîne de 30 billes de 19 mm de diamètre.

Milieu dispersif ($-\ominus-$) : éq. (3.5). Milieu non dispersif (\times) : éq. (3.6).

Les paramètres utilisés sont $\rho = 7500 \text{ kg.m}^{-3}$, $E = 160 \text{ GPa}$, $\nu = 0,24$, $R = 9,5 \text{ mm}$ et $F_0 = 54 \text{ N}$.

La fréquence de coupure (fréquence de Bragg) associée à la transition entre les bandes permise et interdite à la propagation des ondes de torsion s'écrit :

$$f_t = f_{i=0} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{K_t}{I}}.$$

Sa forme est similaire à l'expression de la fréquence de coupure des ondes de compression qui fait intervenir la masse des billes m et la rigidité de compression de la zone contact en lieu et place du moment d'inertie I et de la rigidité de torsion de la zone de contact.

3.4.4 Amplitude des oscillations de rotation

Le mouvement général des billes dans la chaîne est déterminé par les amplitudes de rotation A_n qui dépendent de la fréquence. Les polynômes de Gegenbauer peuvent prendre différentes formes selon la fréquence et donc selon la valeur de $L = \frac{I}{2K_t} \omega^2 - 2$. Trois cas sont traités :

- $0 \leq |L| < 1$: onde progressive dans la bande permise,
- $|L| = 1$: onde à la fréquence de coupure,
- $|L| > 1$: onde évanescence dans la bande interdite.

$0 \leq |L| < 1$: onde progressive et bande permise

Pour $0 \leq |L| < 1$, en posant $L = \cos \theta$, les polynômes prennent la forme générique :

$$G_n(\cos \theta) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}.$$

L'amplitude A_n de la rotation β_n de la bille n se déduit de :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{D_n}{D_N} = (-1)^n M_0 \frac{G_{N-n}(L) + G_{N-(n+1)}(L)}{G_N(L) + G_{N-1}(L)} \\ &= (-1)^n M_0 \frac{\sin[(N-n+1)\theta] + \sin[(N-n)\theta]}{\sin[(N+1)\theta] + \sin(N\theta)} \\ &= (-1)^n M_0 \frac{2 \sin[(N-n+\frac{1}{2})\theta] \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin[(N+\frac{1}{2})\theta] \cdot \cos \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement

$$A_n = (-1)^n M_0 \frac{\sin[(N-n+\frac{1}{2})\theta]}{\sin[(N+\frac{1}{2})\theta]}. \quad (3.7)$$

$|L| = 1$: la fréquence de coupure

Le cas particulier $|L| = 1$ correspond à la fréquence de coupure, soit $\theta = 0$ et l'expression précédente prend la forme

$$A_n = (-1)^n M_0 \left(1 - \frac{2n}{2N+1}\right).$$

$|L| > 1$: onde évanescente et bande interdite

En posant $L = \cosh \theta$, les polynômes prennent la forme générique :

$$G_n(\cosh \theta) = \frac{\sinh[(n+1)\theta]}{\sinh \theta}.$$

L'amplitude A_n de la rotation β_n se déduit de :

$$A_n = \frac{D_n}{D_N} = (-1)^n M_0 \frac{G_{N-n}(L) + G_{N-(n+1)}(L)}{G_N(L) + G_{N-1}(L)} = (-1)^n M_0 \frac{\sinh[(N-n+\frac{1}{2})\theta]}{\sinh[(N+\frac{1}{2})\theta]}. \quad (3.8)$$

Une première analyse de ces résultats montre que lorsque le nombre N de billes est élevé, l'amplitude A_n tend vers zéro dans le cas $|L| > 1$ - onde évanescente, alors que dans le premier cas $0 \leq |L| < 1$ elle ne tend pas à s'annuler - onde progressive. La figure 3.9 montre l'amplitude des oscillations des 30 billes de la chaîne granulaire, cela pour deux fréquences d'excitation situées dans la bande permise et pour une fréquence de la bande interdite.

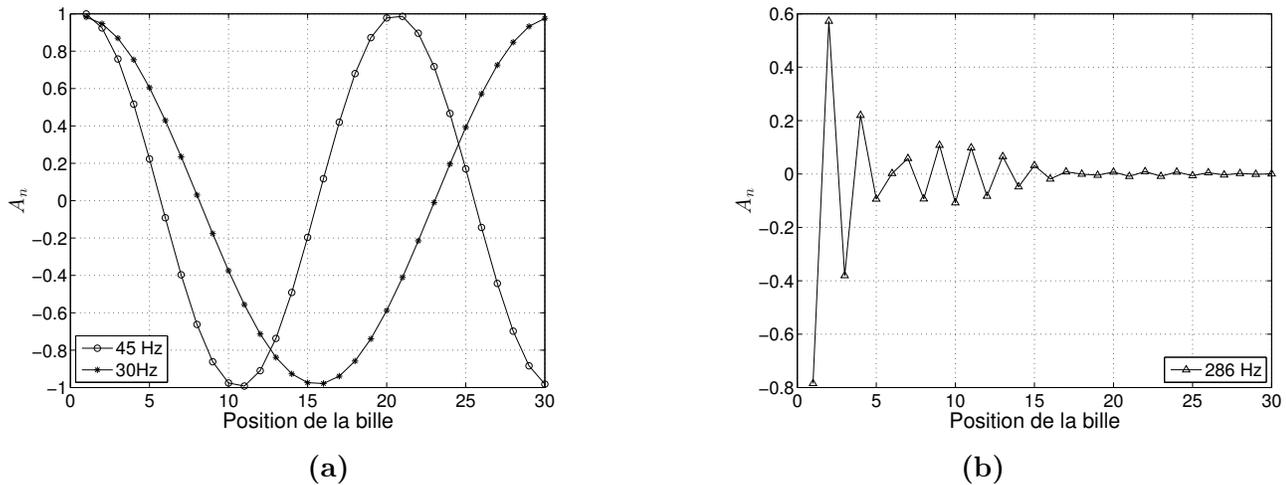


FIGURE 3.9 – Amplitude de rotation A_n des 30 billes de la chaîne granulaire. Amplitude du moment d'excitation $M_0 = 1 \text{ N.m}$.

(a) : pour deux fréquences d'excitation situées dans la bande permise (éq. (3.7))

(b) : pour une fréquence de la bande interdite (éq. (3.8)).

À partir des expressions des coefficients A_n calculés précédemment, il est possible de déterminer la réponse en fréquence de la structure granulaire. La figure 3.10 donne la réponse en fréquence d'une chaîne de 30 billes. Il est aisé de distinguer la bande des fréquences permises à la propagation des ondes de rotation avec ces fréquences de résonance et la bande interdite. La fréquence de coupure est estimée à environ 285 Hz , elle est très inférieure à la fréquence de coupure associée aux ondes de compression (de l'ordre du kHz et plus). Ce fait est dû à la faible valeur de la rigidité de torsion de la zone de contact comparée à sa rigidité de compression. Il en va de même de la vitesse de propagation des ondes de torsion comparée à la vitesse de propagation des ondes de compression.

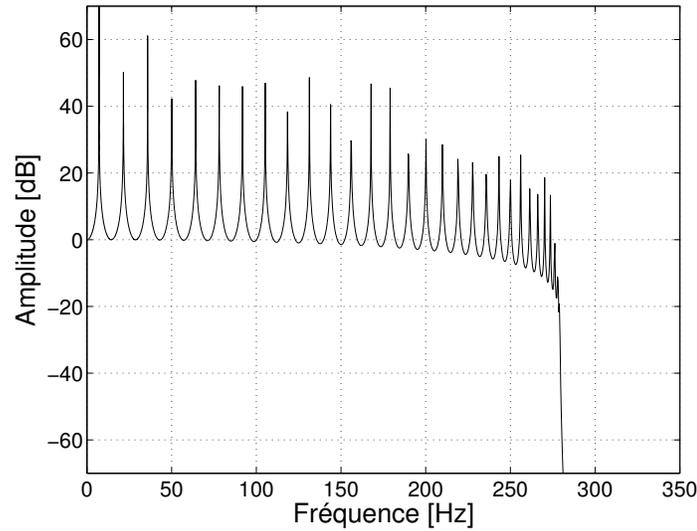


FIGURE 3.10 – Réponse en fréquence d'une chaîne de 30 billes de 19 mm de diamètre. Les paramètres utilisés sont $\rho = 7500 \text{ kg.m}^{-3}$, $E = 160 \text{ GPa}$, $\nu = 0,24$, $R = 9,5 \text{ mm}$ et $F_0 = 54 \text{ N}$.

3.4.5 Influence de la gravité

Lorsque la chaîne granulaire possède une longueur suffisante, l'influence de la gravité ne peut plus être négligée dans l'expression de la force de contact et donc de la raideur. La chaîne présente ainsi un gradient de propriétés dû à l'inhomogénéité de la force de contact le long de la structure granulaire. Cette inhomogénéité est introduite dans l'expression de la rigidité de torsion de la zone de contact sous la forme :

$$K_{ti}(n) = (2R)(1 - \nu)F_T(n) = (2R)(1 - \nu)[F_{mag} - (N - n) m.g]$$

où F_{mag} représente la force magnétique considérée constante le long de la chaîne de N billes, de rayon R et de masse m , soumise au champ de gravité g . ν est le coefficient de Poisson du matériau.

La rigidité de torsion inhomogène $K_{ti}(n)$ évolue donc avec la position n de la zone de contact le long de la structure granulaire :

$$K_{ti}(n) = K_t - K_N \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

avec $K_t = (2R)(1 - \nu)F_{mag}$ et $K_N = (2R)(1 - \nu) N m.g$

Elle est la somme de la rigidité de torsion K_t d'une chaîne sans gradient de propriété et d'un terme qui dépend du nombre de billes N et de la gravité.

Avec cette rigidité variable, la résolution du problème linéaire développé précédemment est mise en défaut puisque la diagonale des matrices n'est plus composée d'un élément $(2L)$ à valeur unique mais de valeurs qui évoluent avec "n" la position. La résolution de ce nouveau problème est plus complexe, il nécessite l'usage d'outils numériques et impose en conséquence un travail spécifique qui sort du cadre

de cette étude. Soulignons que cette structure granulaire avec un gradient de propriété peut être le siège de mode localisé en bout de chaîne, appelé gradon, lorsque la fréquence d'excitation est proche de la fréquence de coupure [70].

3.5 Description du dispositif expérimental et de la chaîne granulaire

Dans un premier temps, les caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure granulaire, support des ondes de rotation, sont précisées. Ensuite, le dispositif expérimental qui permet de générer et détecter des ondes de torsion est décrit. Des premières mesures sont présentées, elles permettent de déterminer le domaine d'utilisation de l'ensemble du dispositif. Finalement, quelques recommandations sont préconisées sur la préparation de la structure granulaire avant toute mesure.

3.5.1 Structure granulaire

Dans cette partie, les résultats expérimentaux proviennent d'une unique structure granulaire : une chaîne verticale constituée de 40 billes aimantées de 19 *mm* de diamètre. Les caractéristiques mécaniques des billes sont données dans le tableau 3.1. Les billes sont en Néodyme-Fer-Bore (NdFeB) un matériau magnétique, elles possèdent un revêtement composé d'un mélange de nickel, de chrome et de cuivre dont l'épaisseur est généralement de l'ordre de 15 à 30 μm . La force statique due principalement aux effets magnétiques est estimée à environ 54 *N*. Cette force varie légèrement suivant la position dans la chaîne notamment à cause de la gravité.

TABLEAU 3.1 – *Caractéristiques des billes aimantées utilisées lors des expériences.*

Rayon [mm]	9,5 (\pm 0,5)
Coefficient de Poisson	0,24
Module d'Young [GPa]	160
Masse volumique [$kg.m^{-3}$]	7500
Masse [g]	27,3
Force de contact [N]	54

3.5.2 Dispositif expérimental

Un dispositif expérimental a été conçu afin de générer et d'observer des ondes de rotation dans une structure granulaire unidimensionnelle (figure 3.11). Une grande variété de structures peuvent être testées en modifiant par exemple les paramètres géométriques des grains (forme et taille des billes), le matériau (masse volumique, matériau magnétique ou non), ou encore l'aimantation des grains (amplitude de la force magnétique). En outre, le dispositif permet d'observer le comportement des ondes stationnaires (avec une excitation sinusoïdale entretenue) et des ondes progressives (avec une excitation impulsionnelle). Grâce à ce montage expérimental modulable et à la multitude des combinaisons, il est possible d'observer un grand nombre de phénomènes physiques fondamentaux et

de réaliser leurs études paramétriques.

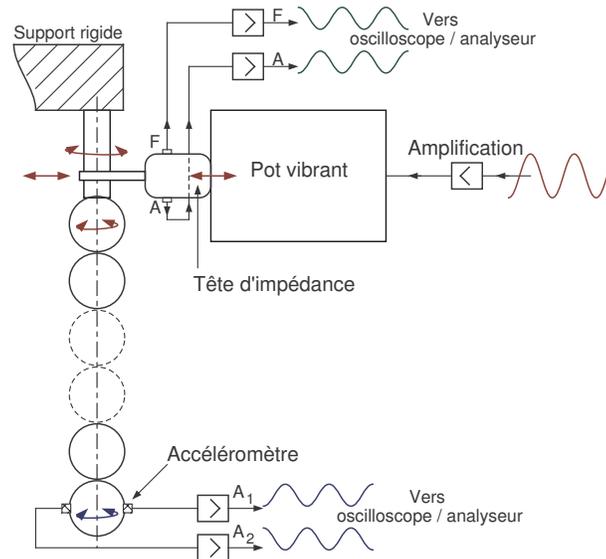


FIGURE 3.11 – Représentation schématique du dispositif expérimental. Le mouvement oscillant du pot vibrant (translation) est converti en rotation à l'aide d'une liaison pivot. Une tête d'impédance délivre les signaux électriques proportionnels à la force F et à l'accélération A . Deux accéléromètres sont placés sur la dernière bille de la chaîne.

La source d'excitation est un pot vibrant (B&K 4810) sur lequel est vissé une tête d'impédance (B&K 8001), elle délivre des tensions proportionnelles à la force et à l'accélération, des grandeurs mesurées au point de couplage (liaison pivot/système d'excitation). Fixée sur la tête d'impédance, une tige rigide associée à une liaison pivot transforme le mouvement de translation du pot vibrant en mouvement de rotation du premier élément de la chaîne. L'aimantation de cet élément assure sa fixation à l'ossature rigide du dispositif expérimental. Des accéléromètres (PCB 352C23) qui peuvent être collés sur n'importe quel élément de la chaîne permettent d'estimer l'accélération angulaire. Leur masse (environ $0,2\text{ g}$) est faible comparée à celle des billes utilisées (27 g), leur présence peut être alors considérée comme peu intrusive. Soulignons que d'autres capteurs ont également été testés mais leur masse comparable à celle des billes modifie grandement le comportement de la structure. En résumé, la structure granulaire étudiée est en contact avec le dispositif expérimental à travers trois surfaces uniquement. La surface de contact du premier élément avec le dispositif d'excitation et les deux surfaces de contact entre les accéléromètres et l'élément à l'étude.

Afin d'utiliser pleinement les capacités du dispositif expérimental, il est nécessaire de connaître les caractéristiques dynamiques des divers éléments ainsi que leurs limites. Le pot vibrant (B&K 4810) seul, sans charge, génère une accélération constante allant jusqu'à 100 m.s^{-2} dans une gamme fréquentielle de 20 Hz à 5 kHz . La sensibilité de l'accéléromètre de la tête d'impédance (B&K 8001) est de $3,32\text{ mV}/(\text{m.s}^{-2})$ sur une bande fréquentielle de 1 Hz à 10 kHz . Les accéléromètres (PCB 352C23)

présentent une sensibilité de $0,5 \text{ mV}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$ avec une faible non linéarité ($< 1\%$) dans une bande fréquentielle allant de 2 Hz à 10 kHz .

Les signaux d'excitation sont

- des sinus glissants, des signaux sinusoïdaux d'amplitude constante dont la fréquence croît continûment dans la gamme fréquentielle retenue, pour l'obtention des fonctions de transfert (réponse en fréquence),
- des signaux dits impulsionnels, une période de sinus ou un sinus modulé en amplitude par une enveloppe Gaussienne, pour l'observation des ondes progressives.

Ces signaux sont envoyés à un amplificateur de puissance puis au pot vibrant. Le gain de l'amplificateur est adapté aux expériences à mener. Les signaux délivrés par les accéléromètres sont généralement amplifiés avec un gain de 40 dB . Les réponses en fréquence sont réalisées grâce à un analyseur de spectres. Pour les analyses temporelles, les signaux sont reliés à un oscilloscope et ils sont moyennés généralement sur quelques centaines de réalisations. Le pilotage complet des divers dispositifs expérimentaux est assuré au moyen de programmes développés sous OCTAVE, un logiciel libre de droit. Les appareils utilisés lors des expériences sont répertoriés dans le tableau 3.2.

TABLEAU 3.2 – *Liste des divers éléments du dispositif expérimental.*

Appareil	Modèle
Générateur de fonction	HP 33120A
Oscilloscope	Lecroy LT 322
Pré-amplificateur	PCB 482A16
Filtre (2 voies)	Kemo benchmaster <i>VBF8</i>
Amplificateur	LM 3886
Voltmètres	Hameg <i>HM8011 – 3</i>
Analyseur de spectres	SRS <i>SR785</i>
Pot vibrant	B&K 4810
Tête d'impédance	B&K 8001
Accéléromètres	PCB <i>352C23</i>

Signatures temporelles du dispositif expérimental sans bille

Le fonctionnement du dispositif d'excitation sans charge, à savoir sans structure granulaire, est analysé afin d'observer d'éventuels comportements spécifiques du montage (figure 3.12). Les figures 3.13 donnent, après amplification, les signaux temporels délivrés par l'accéléromètre lorsque le pot vibrant est excité par un signal électrique présentant une unique période de sinus de 30 et 100 Hz . Ces mesures montrent que la réponse temporelle du dispositif expérimental est différente suivant la

fréquence considérée. De plus, le signal reçu par l'accéléromètre est plus long que le signal d'excitation. Ce fait est lié d'une part à la réponse temporelle du pot vibrant et d'autre part aux effets inertiels des différentes parties mécaniques du dispositif d'excitation.

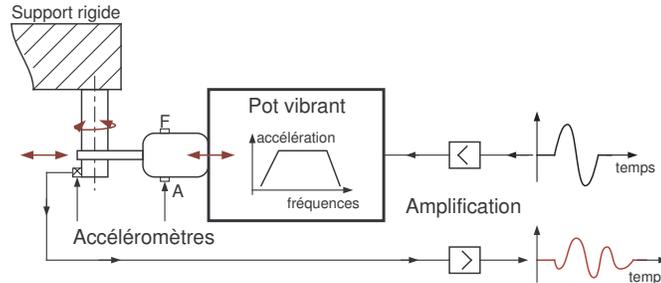


FIGURE 3.12 – Représentation schématique du dispositif expérimental utilisé pour la caractérisation temporelle du système d'excitation.

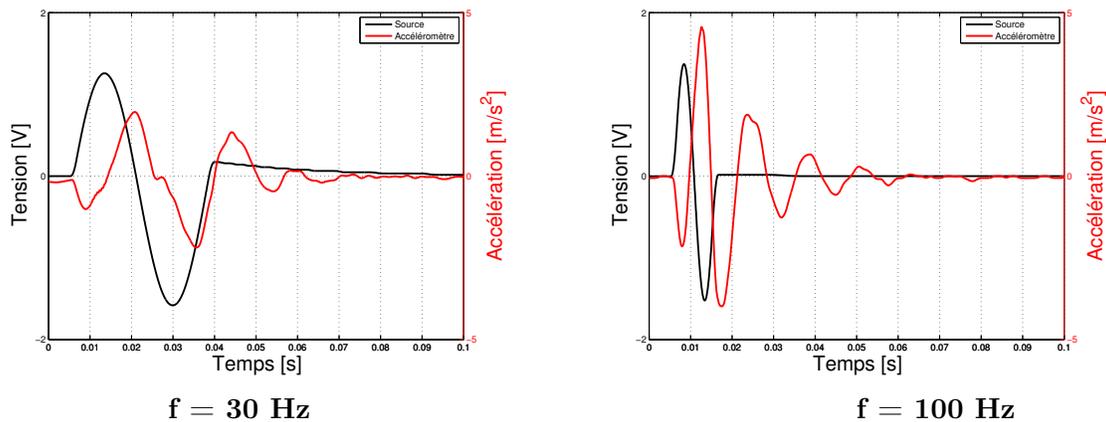


FIGURE 3.13 – Réponses temporelles du dispositif d'excitation pour une unique période de sinus à différentes fréquences. En noir est représenté le signal d'excitation appliqué sur le pot vibrant et en rouge le signal délivré par l'accéléromètre collé sur la liaison pivot.

Signatures fréquentielles du dispositif expérimental sans bille

Les figures 3.14 donnent les réponses en fréquence du dispositif sans bille (fonctions de transfert entre les tensions électriques issues de l'accéléromètre collé sur la liaison pivot de la structure et celles délivrées par l'accéléromètre de la tête d'impédance) pour différentes amplitudes d'un signal électrique sinusoïdal appliqué sur le pot vibrant. La figure 3.14 (a) donne les réponses pour des fréquences allant de 20 Hz à 5 kHz et la figure 3.14 (b) pour une bande fréquentielle plus restreinte allant de 20 à 200 Hz . Soulignons également que des signatures fréquentielles identiques ont été observées avec un montage chargé d'une chaîne de 40 billes de 19 mm de diamètre.

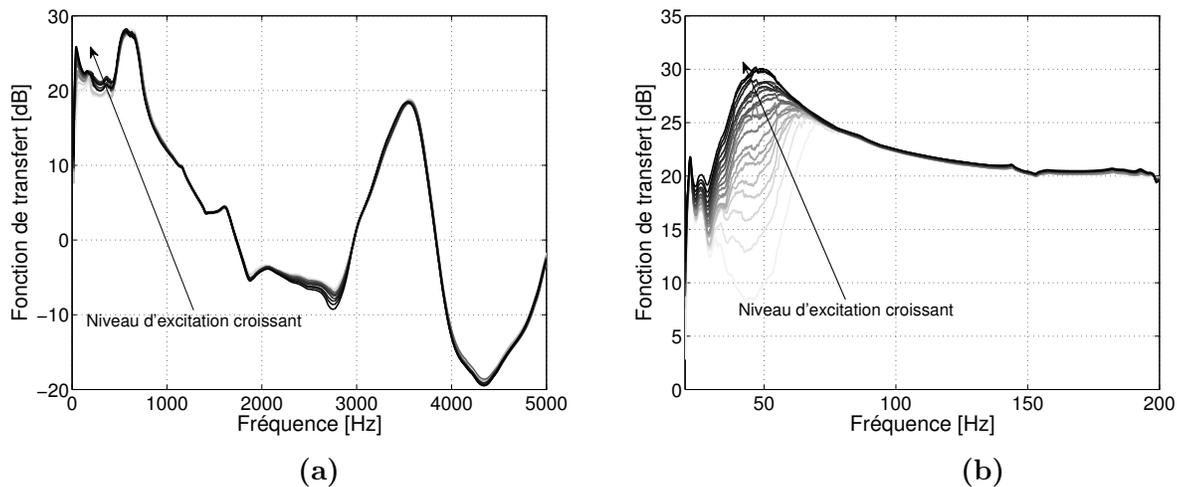


FIGURE 3.14 – Fonctions de transfert du dispositif expérimental (Accéléromètre collé sur la liaison pivot de la structure / Accéléromètre de la tête d'impédance) pour plusieurs niveaux d'excitation.

Ces figures 3.14 montrent un comportement non linéaire du système exciteur avec et sans charge en dessous de 70 Hz . Une caractéristique du système à considérer dans l'analyse des phénomènes physiques associés aux chaînes de billes, notamment celles de grande longueur pour lesquelles certaines fréquences de résonance se situent en dessous de 70 Hz . Au-delà de cette fréquence (figure 3.14 (b)), le système d'excitation présente un comportement linéaire jusqu'à 300 Hz environ. De plus, la réponse du système exciteur est relativement constante sur cette bande fréquentielle.

Rappelons que la fréquence de coupure, associée à la transition entre la bande permise à la propagation des ondes de rotation et la bande interdite d'une chaîne de billes de 19 mm (comme celle utilisée pour les expériences), est de l'ordre de 300 Hz (figure 3.10). Le dispositif expérimental est donc adapté à l'étude de cette structure granulaire.

3.5.3 Préparation de la structure granulaire

Lors des diverses campagnes de mesure, il a été observé que les chaînes de billes qui n'ont subi aucune sollicitation extérieure depuis leur assemblage possèdent des fréquences de résonance qui augmentent jusqu'à des valeurs limites stables au fur et à mesure des sollicitations acoustiques. Cette évolution vers une plus grande stabilité de la structure granulaire impose donc à l'expérimentateur une phase de préparation du milieu, un préalable avant toute campagne de mesure spécifique. L'étude de ce comportement singulier d'une structure qui évolue d'un état initial vers un état final plus stable est l'objet de ce paragraphe.

À l'issue de l'assemblage d'une chaîne de billes aimantées, l'énergie potentielle de la structure n'est pas minimale pour diverses raisons qui sont liées principalement à la nature des contacts entre les billes (figure 3.15) :

- un alignement imparfait des dipôles magnétiques,

- un défaut de sphéricité des billes (présence d’une surface plane aux pôles magnétiques),
- un mauvais état de surface avec une rugosité importante, entre autres.

Des sollicitations extérieures appropriées (des vibrations et des chocs de faibles amplitudes, par exemple) conduisent à la réduction de ces imperfections et amènent progressivement la structure vers un état stable avec une énergie potentielle minimale (figure 3.15 (a)).

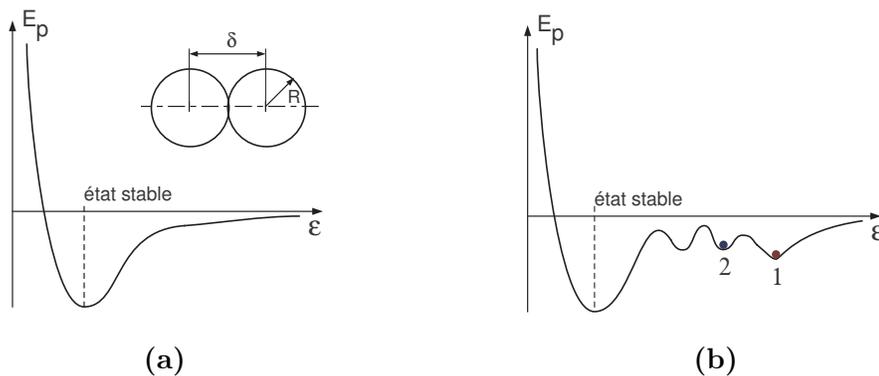


FIGURE 3.15 – Représentation schématique de l’énergie potentielle d’interaction de deux billes en contact en fonction de la déformation $\epsilon = \delta/2R$.

(a) : pour un contact parfait.

(b) : pour un contact présentant des imperfections de surface notamment. Le point 1 correspond à l’état initial de la structure juste après l’assemblage et le point 2 correspond à un état intermédiaire atteint suite à une perturbation mécanique, un état qualifié de métastable.

Comme le montre la représentation schématique de la figure 3.15 (b), l’énergie potentielle d’interaction pour un contact entre deux billes peut être dans un état initial représenté par le point 1 sur la figure. Des perturbations mécaniques de trop faibles amplitudes ne modifient pas (ou trop peu) la position d’équilibre de cette structure à deux billes. Par contre, pour des perturbations d’amplitude suffisante, les barrières de potentiel peuvent être passées et permettre à la structure d’atteindre une position d’équilibre présentant une énergie potentielle d’interaction minimale. Ce nouvel état est obtenu après une série plus ou moins importante d’états intermédiaires appelés états métastables (point 2 de la figure 3.15 (b)).

Afin de minimiser les défauts d’assemblage, les billes sont au préalable nettoyées à l’aide d’un solvant (acétone) afin d’éliminer les impuretés de surface. Ensuite, plusieurs techniques permettent de mener la structure granulaire vers un état stable :

- la génération d’un bruit large bande d’amplitude suffisante, pendant une certaine durée, permet de franchir les barrières entre les différents états métastables du système ;
- la génération de séquences alternant faible et forte perturbation mécanique. Pour chaque amplitude d’excitation la fréquence de résonance est estimée. Si la fréquence associée aux faibles excitations ne varie pas au cours du temps alors le système est considéré comme stable et préparé

pour la campagne de mesures à suivre.

3.6 Résultats expérimentaux et discussion

3.6.1 Célérité des ondes de torsion

Cette partie est dédiée à la mesure, à l'aide de la méthode du temps de vol, de la célérité des ondes de torsion dans une chaîne granulaire composée de 40 billes de 19 *mm* de diamètre.

Un signal électrique impulsionnel, une période de sinus ayant une fréquence de 70 *Hz*, est appliqué sur le pot vibrant. Cette fréquence appartient au domaine de validité du dispositif expérimental. Pour l'estimation de la vitesse, celle-ci est suffisamment basse pour négliger les effets de la dispersion au sein de la structure granulaire. Le profil temporel du signal électrique issu d'un accéléromètre déplacé de bille en bille est ensuite enregistré. Les mesures sont effectuées successivement sur les billes numérotées de 1 (au plus près de la source d'excitation) à 19. Au delà de cette bille, l'onde réfléchie sur l'extrémité libre de la chaîne perturbe de manière significative l'onde incidente. Comme le montre la figure 3.16, l'estimation du temps de propagation (le temps de vol) de l'onde de torsion Δt entre deux billes adjacentes est obtenue en estimant le décalage temporel de l'amplitude maximale du signal.

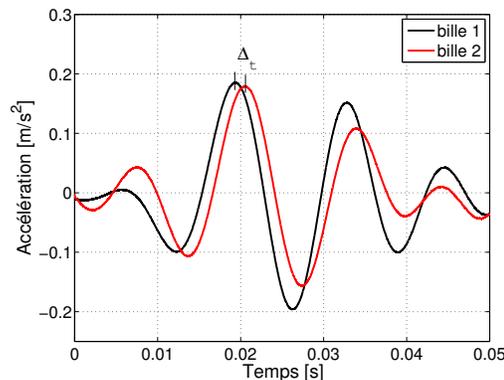


FIGURE 3.16 – Estimation du temps de propagation de l'onde de torsion entre deux billes adjacentes. Le décalage temporel (le temps de vol) est estimé à l'aide de l'amplitude maximale du signal. Le signal d'excitation est une période de sinus de fréquence 70 *Hz*.

La figure 3.17 (a) donne les temps de propagation successifs ($\Delta t_n = t_n - t_1$) mesurés entre la bille 1 et la bille n en fonction de la distance parcourue (n fois le diamètre d'une bille). En première approximation et compte tenu des incertitudes sur l'estimation des temps, une relation linéaire est observée entre le temps de propagation et la distance parcourue. En conséquence, la célérité des ondes de rotation peut être déduite des paramètres d'une droite de régression linéaire (une droite passant au plus près de chacun des points de mesure au sens des moindres carrés). A l'aide de cette méthode, la célérité des ondes de torsion est estimée égale à

$$c_t = 19,1 \pm 0,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Les prédictions du modèle (éq. (3.4)) donnent une célérité des ondes de rotation proche de $c_t = 17 \text{ m.s}^{-1}$. Cet écart, relativement faible, entre prédiction et mesure provient en grande partie des incertitudes sur les valeurs des paramètres mécaniques du matériau magnétique des billes tels que la masse volumique ρ et le coefficient de Poisson ν .

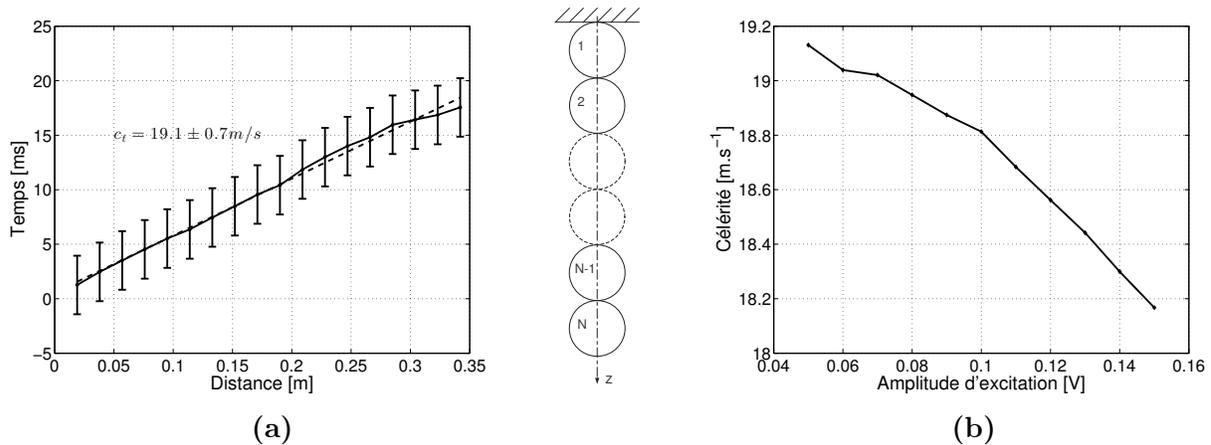


FIGURE 3.17 – (a) : temps de propagation $\Delta t_n = t_n - t_1$ en fonction de la distance $n \times 19 \text{ mm}$, n étant le numéro de la bille. L'amplitude du signal électrique d'excitation est fixé à $0,05 \text{ V}$.

(b) : influence de l'amplitude de l'excitation sur la célérité des ondes de torsion, pour une amplitude du signal électrique d'excitation variant de $0,05$ à $0,15 \text{ V}$.

Ces mesures associées à leurs incertitudes ne permettent pas d'observer les effets de la gravité sur la célérité des ondes de rotation. Comme le montrent les prédictions de la figure 3.6, la célérité augmente lorsque l'onde s'éloigne du point d'excitation grâce à une force de contact entre les billes toujours croissante. Dans la structure granulaire au cœur de cette étude, la force magnétique qui assure le contact entre les billes est estimée à 54 N environ, le poids total des 40 billes de $27,3 \text{ g}$ est $10,7 \text{ N}$. La relative faible valeur du poids de la chaîne comparée à la force magnétique n'autorise pas une variation suffisante de la célérité (9% environ) qui puisse être observable à l'aide de la méthode du temps de vol mise en œuvre dans le cadre cette étude.

La figure 3.17 (b) donne la célérité des ondes de rotation, estimée à l'aide de la méthode du temps de vol, en fonction de l'amplitude du signal d'excitation appliqué sur le pot vibrant. Pour une tension électrique croissante variant d'un rapport de 1 à 3, la célérité des ondes diminue de 5% . Cette évolution révèle le comportement non linéaire de la chaîne de billes. Son étude sort du cadre de ce chapitre consacré uniquement aux aspects linéaires de la propagation des ondes dans une structure granulaire.

3.6.2 Bandes permise et interdite à la propagation des ondes - fréquences de résonance

Cette section est consacrée au caractère phononique des chaînes de billes magnétiques. Une étude succincte des bandes permise et interdite à la propagation des ondes de rotation, des fréquences de résonance de la structure et de la relation de dispersion est abordée à travers une comparaison entre les prédictions de modèles développés dans les parties précédentes et les données expérimentales.

La chaîne granulaire est composée de 15 billes identiques de 19 mm de diamètre. Les signaux électriques appliqués sur le pot vibrant sont des sinus glissants (des signaux sinusoïdaux d'amplitude constante dont la fréquence croît continûment dans la gamme fréquentielle retenue). Une fonction de transfert est obtenue entre les tensions électriques issues des accéléromètres collés sur la première bille (au plus près de l'excitation) et la dernière bille.

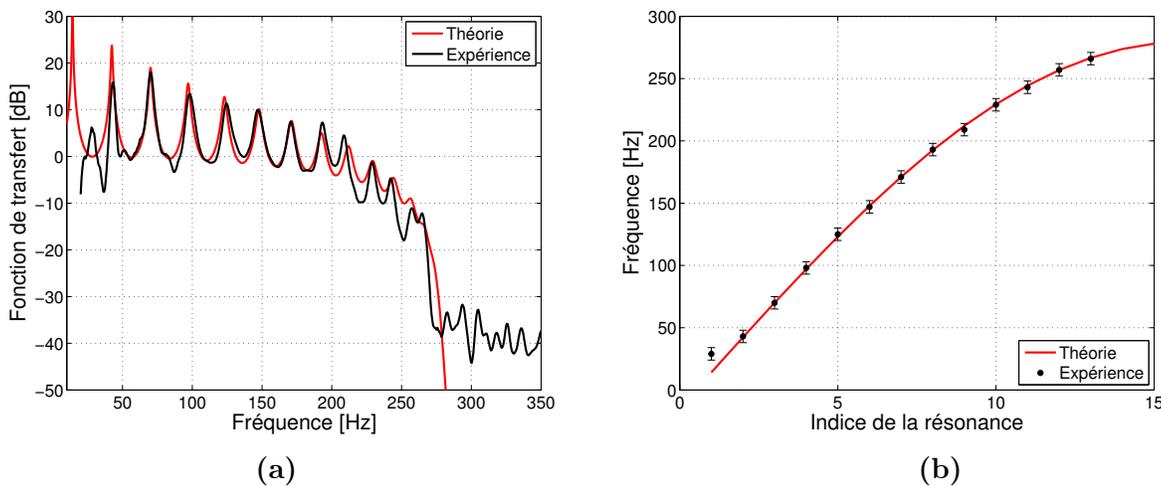


FIGURE 3.18 – (a) : Fonctions de transfert, mesures et prédictions issues des équations (3.7) et (3.8), d'une chaîne de 15 billes. Concernant les prédictions, un paramètre d'amortissement a été introduit dans les équations afin de s'approcher au mieux des données expérimentales.

(b) : Relation de dispersion, mesures et prédictions issues de la relation (3.5).

La figure 3.18 (a) présente la fonction de transfert mesurée et les prédictions issues des équations (3.7) et (3.8). Du fait de la périodicité de la structure granulaire, apparaît la présence des bandes permise et interdite à la propagation des ondes de rotation avec une fréquence de coupure (fréquence de Bragg) à environ 275 Hz. Par ailleurs, la longueur finie de la chaîne de billes entraîne l'apparition des fréquences de résonance.

Il est important de souligner que le modèle de propagation développé dans ce chapitre ne prend pas en considération les pertes. Afin d'obtenir une bonne adéquation entre les données expérimentales et les prédictions, l'introduction d'un amortissement viscoélastique est réalisée en ajoutant une partie

imaginaire à l'expression de la raideur de torsion telle que

$$K_{exp} = K_t(1 + j 0,027).$$

Concernant la fréquence de coupure de la chaîne de billes à environ 275 Hz , il existe un très bon accord entre la prédiction du modèle et la mesure. À noter que la présence d'un signal à -40 dB au delà de cette fréquence et dans la bande interdite est due au bruit de fond. Il existe aussi un très bon accord entre les fréquences de résonance théoriques (éq. (3.5)) et celles mesurées, à l'exception toutefois de la première fréquence qui se situe hors du domaine de mesure du dispositif expérimental et des deux dernières fortement atténuées et donc peu visibles.

À partir des fréquences de résonance de la fonction de transfert, la relation de dispersion est tracée sur la figure 3.18 (b). Elle est comparée à la courbe de dispersion théorique (éq. (3.5)). Le bon accord confirme la pertinence des prédictions du modèle proposé.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude de la propagation linéaire des ondes de rotation dans une chaîne verticale de billes magnétiques est abordée de manières théorique et expérimentale.

La première partie étudie la force de contact entre les billes et plus particulièrement de la compétition, due à la verticalité de la structure granulaire, entre la force magnétique et le poids des billes. Une seconde partie aborde la propagation linéaire des ondes de rotation dans une chaîne de billes de longueur finie et révèle les propriétés de cette structure : bandes permise et interdite, relation de dispersion et fréquences de résonance. Une troisième partie est consacrée au dispositif expérimental, il a été spécialement conçu pour la propagation d'ondes de rotation dans des structures granulaires de diverses géométries. Les caractéristiques physiques de ce dispositif ont été établies et elles ont permis de définir son domaine de validité. Une structure granulaire simple a été utilisée. Les bons accords entre les données expérimentales issues de ce dispositif de mesure et les prédictions ont permis de valider ces modèles linéaires, un préalable nécessaire avant d'aborder, dans les chapitres suivants, les aspects de la propagation non linéaires des ondes de rotation dans ces structures granulaires magnétiques et monoatomiques.

Chapitre 4

Résonances non linéaires d'ondes de rotation dans une chaîne granulaire magnétique monoatomique

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, la propagation acoustique d'ondes de rotation dans une chaîne 1D monoatomique a été étudiée en régime linéaire. Le dispositif expérimental, qui a été conçu spécialement pour les ondes de rotation, a été caractérisé et permet d'étudier différents régimes (propagatif, stationnaire, ...). Les mesures en régime linéaire ont montré un très bon accord avec les prédictions théoriques. Sur cette base, le régime faiblement non linéaire est étudié dans ce chapitre. En particulier la méthode des résonances non linéaires, souvent utilisée dans les milieux granulaires tridimensionnels et dans les milieux endommagés, est mise en œuvre ici dans une structure granulaire pour un mouvement de rotation des billes. L'objectif de ce chapitre est d'étudier dans un premier temps le comportement non linéaire à l'échelle d'un ou deux contacts, c'est-à-dire dans des structures comportant deux ou trois billes (des systèmes à un ou deux degrés de liberté) avant de traiter, dans le chapitre 5, le cas de la propagation non linéaire dans une chaîne granulaire.

Il a été montré au premier chapitre que le contact excité en torsion a un comportement non linéaire de type hystérétique. Par conséquent, sa raideur équivalente présente un effet de ramollissement lorsque l'amplitude d'excitation augmente, quantifiable par la diminution de la fréquence de résonance d'un système contact-bille. À cet effet est également associée la dissipation non linéaire, quantifiable par la variation du facteur de qualité d'une résonance. Ces deux grandeurs mesurables par la méthode des résonances non linéaires sont donc étudiées de manière théorique et expérimentale dans ce chapitre. Une première section expose de manière générale la méthode des résonances non linéaires. Ensuite, le cas le plus simple de deux billes en contact soumises à un moment de torsion est traité analytiquement. Les courbes de résonances sont tracées numériquement et les deux paramètres non linéaires caractéristiques (décalage de fréquence de résonance et changement de facteur de qualité) sont déduits. Ce cas simple de deux billes est étudié expérimentalement et comparé aux simulations. La même méthode expérimentale

est alors appliquée sur un système de trois billes. Enfin, le comportement d'une résonance particulière dans une chaîne de trente billes est abordé.

4.2 Méthode des résonances non linéaires

La méthode des résonances non linéaires a pour point de départ l'enregistrement de courbes de résonance à différents niveaux d'excitation acoustique. Si ces courbes sont normalisées par l'amplitude d'excitation, alors dans un système linéaire, différentes courbes obtenues à différentes amplitudes d'excitation acoustique sont confondues. Dans un système non linéaire ce n'est généralement pas le cas et les courbes de résonance obtenues à différentes amplitudes d'excitation acoustiques ont des formes différentes. Plusieurs grandeurs comme la fréquence de résonance et le facteur de qualité de ces courbes de résonance, peuvent alors être analysées en fonction de l'amplitude d'excitation, et renseignent sur les non-linéarités du système. Cette méthode a été initialement appliquée dans le sable et les sédiments [26]. Plus récemment, les résonances non linéaires ont été observées dans les roches et dans les solides endommagés (contenant des fissures, contact internes . . .) [35]. Cette méthode s'est également répandue dans le contrôle non destructif par ultrasons [1] et a été mise en oeuvre dans les milieux granulaires 3D faiblement contraints [28] ou sous contrainte plus forte [34].

Que ce soit dans les milieux granulaires ou d'autres solides hétérogènes, les observations sont sensiblement les mêmes. En effet, lorsque l'amplitude d'excitation augmente, la fréquence de résonance ainsi que le facteur de qualité diminuent. Ceci se traduit physiquement par une diminution du module élastique et une augmentation de l'atténuation acoustique lorsque l'amplitude d'excitation augmente. Les décalages relatifs de fréquence et du facteur de qualité Q sont généralement décrits par [35] :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f - f_0}{f_0} = \alpha_f \epsilon_A, \quad (4.1)$$

$$\Delta \left(\frac{1}{Q} \right) = \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \alpha_Q \epsilon_A, \quad (4.2)$$

où f_0 est la fréquence de résonance à très faible amplitude d'excitation, f est la fréquence de résonance à une amplitude d'excitation quelconque (finie), Q_0 est le facteur de qualité de la résonance en régime linéaire (à très faible amplitude d'excitation), Q est le facteur de qualité de la résonance à une amplitude d'excitation finie et ϵ_A est l'amplitude mesurée de la déformation acoustique à la résonance. α_f et α_Q sont des facteurs de proportionnalité et varient selon les milieux. Dans la plupart des observations, les deux quantités $\frac{\Delta f}{f_0}$ et $\Delta \left(\frac{1}{Q} \right)$ sont proportionnelles à la déformation ϵ_A , comme l'indiquent les équations (4.1) et (4.2). Cette dépendance est une caractéristique typique de la non-linéarité hystérétique quadratique. Les non-linéarités classiques, de type quadratique, cubique, ne peuvent pas expliquer le décalage de fréquence de résonance avec une telle dépendance linéaire. En effet, la non-linéarité quadratique classique ne peut pas induire de décalage de fréquence de résonance au premier ordre d'approximation. La non-linéarité cubique, elle, peut provoquer un décalage de fréquence de résonance, mais celui-ci est proportionnel au carré de la déformation acoustique ϵ_A . Il a été montré au premier chapitre que l'hystérésis quadratique, pour des contacts soumis à un moment de torsion, explique cette dépendance linéaire en amplitude acoustique du module élastique caractéristique du

milieu (ou de la fréquence de résonance), et de l'augmentation de l'absorption. Il existe également un paramètre qui quantifie le rapport des effets non linéaires dissipatifs sur les effets non linéaires élastiques. C'est le paramètre de Read défini par $r = \alpha_Q/\alpha_f$.

La méthode des résonances non linéaires est donc appropriée pour sonder la non-linéarité hystérétique du milieu. Les effets non linéaires décrits précédemment peuvent être quantifiés via les paramètres α_f et α_Q et la pertinence des approximations détaillées au chapitre 1 peut être discutée. Afin de limiter la complexité de l'approche analytique, il est d'abord considéré un système de deux billes en contact dont l'une est soumise à un moment de torsion selon l'axe des deux centres de billes. La modélisation de ce système de type masse - ressort fait donc uniquement intervenir un ressort non linéaire (un seul contact) entre les deux billes (fig. 4.1), une bille excitatrice et une bille avec un moment d'inertie (une seule masse en rotation).

4.3 Modélisation des résonances non linéaires dans un système de deux billes en contact

4.3.1 Approche analytique et simulation

Dans cette section, les résonances non linéaires d'un système de deux billes excité en torsion sont modélisées. L'équation du mouvement est résolue par la méthode de l'équilibrage harmonique. Les résonances sont ensuite tracées numériquement pour différentes amplitudes d'excitation. Les deux paramètres de non-linéarité hystérétique α_f et α_Q sont déduits des résultats des simulations numériques. Le système considéré est composé de deux billes suspendues, maintenues en contact grâce à une force d'attraction magnétique. La bille du haut (notée 0) est solidaire du support du système qui est libre de tourner selon l'axe vertical et est excité en rotation (figure 4.1).

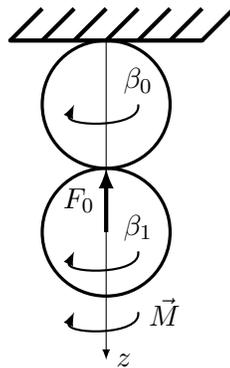


FIGURE 4.1 – *Système de deux billes soumises à un moment de torsion oscillant M créant un angle de rotation relatif $\psi = \beta_1 - \beta_0$ entre les billes.*

Le moment de torsion, appliqué directement sur la bille 0, a été calculé précédemment et l'expression contenant un terme hystérétique approximé au second ordre a été choisie (1.30). Les conditions limites, encastrée - libre, de ce système de deux billes imposent une seule résonance (système à un degré de liberté). L'équation du mouvement pour un tel système dans le cas général s'écrit (Principe

Fondamental de la Dynamique en rotation) (1.36) :

$$I \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} = -M(\beta_1 - \beta_0), \quad (4.3)$$

où I est le moment d'inertie des billes, et β_1 et β_0 sont respectivement les angles de rotation des billes 1 et 0. En introduisant la notation $\psi = \beta_1 - \beta_0$ où ψ est l'angle relatif entre les billes, l'équation précédente devient :

$$I\ddot{\psi} + M\psi = I\ddot{\beta}_0. \quad (4.4)$$

Le membre de droite est le terme source appliqué à la première bille, homogène à un moment de torsion [N.m]. Une excitation harmonique de la forme $F(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ est considérée. Pour rappel, la relation non linéaire entre le moment de torsion normalisé et l'angle relatif normalisé obtenue au chapitre 1 a pour expression :

$$\overline{M} = \frac{16}{3} Ga^3 \left[\overline{\beta} - \frac{4Ga^2}{\mu F_0} \left(\overline{\beta}^* \overline{\beta} - \frac{1}{2} (\overline{\beta}^{*2} - \overline{\beta}^2) \text{sign} \left(\frac{\partial \overline{\beta}}{\partial t} \right) \right) \right]. \quad (4.5)$$

où $K_1 = \frac{16}{3} Ga^3$ est la raideur de torsion linéaire et $K_2 = \frac{4Ga^2}{\mu F_0}$. K_1 est le coefficient de non-linéarité quadratique hystérétique, quantifiant l'importance de cette non-linéarité au regard du terme linéaire. Il est important de noter ici que l'angle de rotation, noté de manière générale β dans l'équation (1.30) et donc dans (4.5) est ici équivalent à ψ (l'angle relatif de rotation entre les deux sphères). L'équation précédente peut donc s'écrire aussi :

$$\overline{M} = K_1 \left[\overline{\psi} - K_2 \left(\overline{\psi}^* \overline{\psi} - \frac{1}{2} (\overline{\psi}^{*2} - \overline{\psi}^2) \text{sign} \left(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t} \right) \right) \right]. \quad (4.6)$$

Finalement, après substitution de la relation non linéaire moment - angle relatif, l'équation du mouvement prend la forme :

$$\ddot{\overline{\psi}} + \omega_0^2 \left[\overline{\psi} - K_2 \left(\overline{\psi}^* \overline{\psi} - \underbrace{\frac{1}{2} (\overline{\psi}^{*2} - \overline{\psi}^2) \text{sign} \left(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t} \right)}_{Q(\overline{\psi})} \right) \right] = F \cos(\omega t + \phi), \quad (4.7)$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1}{I}}$ est la pulsation propre du système linéaire et $F = \frac{A}{I}$. Le terme $\frac{1}{2} (\overline{\psi}^{*2} - \overline{\psi}^2) \text{sign} \left(\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t} \right)$ est noté par la suite $Q(\overline{\psi})$.

Cette équation non linéaire (4.7) est résolue par la méthode de l'équilibrage harmonique, une méthode usuelle d'étude et de résolution d'équations non linéaires [7]. Elle repose sur l'existence de solutions périodiques développées en série de Fourier dont on ne conserve qu'un nombre fini d'harmoniques [47, 7]. Dans le cas présent la contribution des harmoniques supérieurs est négligée (régime faiblement non linéaire), seule l'auto-action est considérée, et la série ne comporte qu'une seule fréquence. Ceci signifie que la solution cherchée est à la même fréquence que l'excitation. Du fait de la non-linéarité et de la dissipation, la solution est déphasée par rapport au terme source. Ce déphasage ϕ

est introduit dans le terme source. La solution pour le déplacement angulaire relatif $\bar{\psi}$ est de la forme $\bar{\psi} = \bar{\psi}^* \cos(\omega t)$. Cette forme de solution est insérée dans l'équation étudiée (4.7) et les coefficients des $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ sont identifiés terme à terme. Avant cette étape, le terme $Q(\bar{\psi})$ doit être développé en série de Fourier (où $\theta = \omega t$) :

$$Q(\bar{\psi}) = Q(\bar{\psi}^* \cos(\theta)) = a_1 \cos(\theta) + b_1 \sin(\theta), \quad \text{où} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\bar{\psi}^* \cos(\theta)) \cos(\theta) d\theta, \\ b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\bar{\psi}^* \cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta. \end{cases}$$

Après calculs, $a_1 = 0$ et $b_1 = -\frac{4\bar{\psi}^{*2}}{3\pi}$, donc $Q(\bar{\psi}) = -\frac{4\bar{\psi}^{*2}}{3\pi} \sin(\theta)$. En remplaçant $\bar{\psi}$ et $Q(\bar{\psi})$ par leurs expressions l'équation (4.7) devient

$$-\bar{\psi}^* \omega^2 \cos(\theta) + \omega_0^2 \left[\bar{\psi}^* \cos(\theta) - K_2 \left(\bar{\psi}^{*2} \cos(\theta) + \frac{4\bar{\psi}^{*2}}{3\pi} \sin(\theta) \right) \right] = F \cos(\theta + \phi). \quad (4.9)$$

En identifiant les composantes en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ du premier membre de l'équation précédente, il vient

$$\begin{cases} -\bar{\psi}^* \omega^2 + \omega_0^2 \bar{\psi}^* - K_2 \omega_0^2 \bar{\psi}^{*2} = F \cos(\phi) & \text{et} \\ \frac{4\bar{\psi}^{*2}}{3\pi} \omega_0^2 K_2 = F \sin(\phi). \end{cases}$$

En élevant au carré les deux équations précédentes et en les sommant, il vient,

$$F^2 = \bar{\psi}^{*2} \left[\left(\frac{4\bar{\psi}^*}{3\pi} \omega_0^2 K_2 \right)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2 + \omega_0^2 K_2 \bar{\psi}^*)^2 \right]. \quad (4.10)$$

En introduisant la fréquence normalisée $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ et en posant $\tilde{F} = \frac{F}{\omega_0^2}$ l'équation précédente devient :

$$\tilde{F}^2 = \bar{\psi}^{*2} \left[\left(\frac{4\bar{\psi}^*}{3\pi} K_2 \right)^2 + (\Omega^2 - 1 + K_2 \bar{\psi}^*)^2 \right]. \quad (4.11)$$

Cette équation (4.11) donne la relation entre l'amplitude du déplacement angulaire $\bar{\psi}^*$ pour K_1 et K_2 fixés, en fonction de la fréquence d'excitation normalisée Ω et de l'amplitude de la force d'excitation \tilde{F} . Le premier terme du second membre décrit la dissipation non linéaire, proportionnelle à l'amplitude de vibration $\bar{\psi}^*$. Le second terme du second membre décrit le décalage fréquentiel dû à la non-linéarité hystérétique. L'équation (4.11) est finalement inversée afin d'obtenir $\Omega = f(\tilde{F}, \bar{\psi}^*)$, soit

$$\Omega^2 = 1 - K_2 \bar{\psi}^* \pm \frac{\tilde{F}}{\bar{\psi}^*} \sqrt{1 - \frac{16K_2^2 \bar{\psi}^{*4}}{9\pi^2 \tilde{F}^2}}. \quad (4.12)$$

Les solutions Ω_1 et Ω_2 de l'équation précédente sont donc :

$$\Omega_1 = \left(1 - K_2 \bar{\psi}^* - \frac{\tilde{F}}{\bar{\psi}^*} \sqrt{1 - \frac{16K_2^2 \bar{\psi}^{*4}}{9\pi^2 \tilde{F}^2}} \right)^{1/2}, \quad (4.13a)$$

$$\Omega_2 = \left(1 - K_2 \bar{\psi}^* + \frac{\tilde{F}}{\bar{\psi}^*} \sqrt{1 - \frac{16K_2^2 \bar{\psi}^{*4}}{9\pi^2 \tilde{F}^2}} \right)^{1/2}. \quad (4.13b)$$

Ce couple d'équations (4.13) donne la fréquence en fonction de l'amplitude du déplacement angulaire $\bar{\psi}^*$. La fréquence de résonance est atteinte lorsque $\Omega_1 = \Omega_2 = 1 - K_2 \bar{\psi}^*$. Cette condition impose que le maximum de l'amplitude du déplacement angulaire notée $\bar{\psi}_m^*$ soit lié à \tilde{F} par la relation $\bar{\psi}_m^* = \left(\frac{3\pi\tilde{F}}{4K_2} \right)^{1/2}$. L'amplitude du déplacement à la résonance est donc proportionnelle à la racine carrée de l'amplitude de la force d'excitation. Aussi, lorsque l'amplitude d'excitation augmente la fréquence de résonance diminue. Afin d'illustrer ces effets, les courbes de résonances ainsi que les paramètres non linéaires associés sont tracés numériquement dans la section suivante.

4.3.2 Résultats numériques

4.3.2.1 Profils des résonances non linéaires

Sur la figure 4.2 sont tracés les rapports de l'amplitude du déplacement angulaire sur l'amplitude de la force d'excitation en fonction de la fréquence pour différentes amplitudes d'excitation. Cela correspond au couple d'équations (4.13). L'amplitude d'excitation \tilde{F} est tout d'abord calculée de manière à se situer dans des valeurs identiques aux conditions expérimentales. Pour chaque niveau d'excitation, l'amplitude maximale du déplacement $\bar{\psi}_m^*$ est calculée et varie de $\frac{\bar{\psi}_m^*}{10}$ à $\bar{\psi}_m^*$. Le couple 4.13 est ensuite calculé pour chaque niveau d'excitation. Ω_1 correspond à la partie gauche de la résonance et Ω_2 à la partie droite. Sur la figure 4.2, les courbes sont tracées pour 120 niveaux d'excitations avec un rapport de 30 entre le plus faible et le plus fort. La résonance en régime linéaire (pour $\Omega = 1$) est également tracée. Il est à noter que la dissipation linéaire n'a été prise en compte ici que pour la résonance en régime linéaire.

Comme prédit par le modèle analytique, la fréquence de résonance décroît lorsque l'amplitude d'excitation augmente. De plus, la forme des résonances devient asymétrique lorsque l'amplitude de la force d'excitation augmente. Il est utile de noter que l'amplitude de la résonance chute fortement, d'environ 45 dB pour la fonction de transfert tracée. Enfin le décalage fréquentiel allant pratiquement jusqu'à 20% est assez fort comparé aux observations reportées dans la littérature (de l'ordre de 1-2%).

4.3.2.2 Paramètres non linéaires élastiques et dissipatifs

En partant du modèle, les paramètres non linéaires élastiques et dissipatifs sont tracés de la même manière que pour les données expérimentales, dans le but de réaliser une comparaison quantitative. Ces deux manifestations des effets non linéaires sont présentées sur la figure 4.3. La première manifestation,

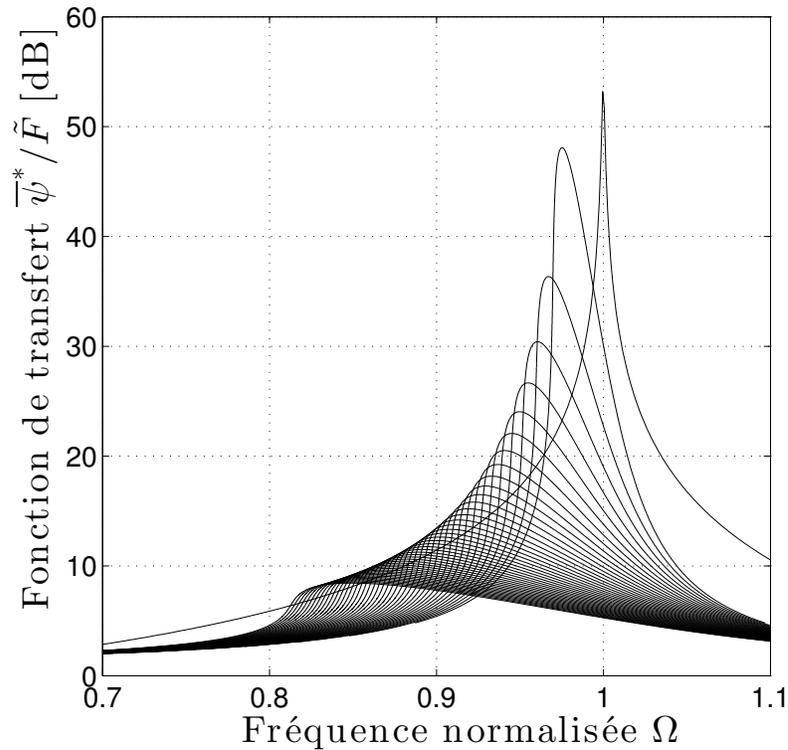


FIGURE 4.2 – Courbes de résonances non linéaires pour plusieurs niveaux d’excitation (120) obtenues par la méthode de l’équilibrage harmonique. Le rapport $\bar{\psi}^*/\tilde{F}$ est tracé en fonction de la fréquence normalisée. Le rapport entre la plus faible excitation et la plus forte est de 30. La fréquence de résonance normalisée en régime linéaire ($\Omega = 1$) est également tracée.

provenant des effets non linéaires élastiques et se traduisant par le décalage de la fréquence de résonance, est caractérisée par la quantité :

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f - f_0}{f_0}. \quad (4.14)$$

Cette quantité est tracée sur la figure 4.3(a) en fonction de l’amplitude du déplacement angulaire $\bar{\psi}_m^*$ (normalisée par son maximum). La courbe obtenue est également approximée par une droite. Ce résultat est compatible avec l’hystérésis quadratique qui mène bien à un décalage de fréquence de résonance proportionnel à l’amplitude $\bar{\psi}_m^*$. Le coefficient directeur détermine le paramètre associé aux effets non linéaires élastiques $\alpha_f = -0.15$.

Les effets non linéaires dissipatifs, sont caractérisés par la quantité :

$$\Delta \left(\frac{1}{Q} \right) = \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0}, \quad (4.15)$$

où Q_0 est le facteur de qualité linéaire (à infiniment faible amplitude), déterminé par la méthode des -3 dB ($Q_0 = f_0/\Delta f$ où Δf est la largeur de la résonance prise à une amplitude de -3 dB par rapport à l’amplitude à la résonance) et Q le facteur de qualité à plus fortes amplitudes d’excitation. Le fait que la résonance devienne asymétrique avec l’augmentation du niveau d’excitation ne permet pas de

calculer le facteur de qualité par la méthode classique des -3 dB. Une autre méthode est décrite dans [35] faisant intervenir la tension d'excitation et la déformation détectée. Cependant cette expression est valable pour des décalages de fréquence de résonance relativement faibles. L'hypothèse sous-jacente est que la déformation appliquée est proportionnelle à la force d'excitation, ce qui n'est pas le cas ici. Il est donc nécessaire de déterminer une expression du facteur de qualité des résonances asymétriques valable dans le cas présent et qui pourra être utilisée lors des expériences.

Expression du facteur de qualité pour des résonances asymétriques

À la résonance, l'expression générale de l'inverse du facteur de qualité est (dans le cas d'ondes de torsion) :

$$\frac{1}{Q(A^r)} = \frac{F_0}{A^r} \frac{1}{I\omega_r^2},$$

où F_0 est l'amplitude de la force d'excitation, I le moment d'inertie des billes, ω_r la pulsation à la résonance et A^r l'angle de rotation relatif où

$$\begin{aligned} F_0 &= I\omega_r^2\beta_0, \\ A^r &= \beta_1 - \beta_0. \end{aligned}$$

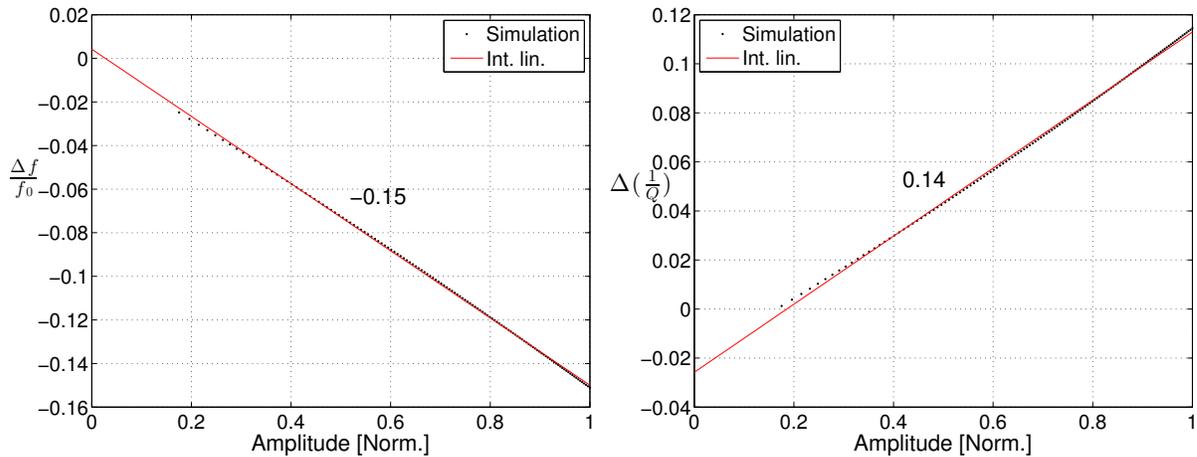
β_1 et β_0 sont respectivement les angles de rotation de la bille 1 et de la bille excitatrice. En remplaçant les expressions de F_0 et A^r il vient :

$$\frac{1}{Q(A^r)} = \frac{\beta_0}{\beta_1 - \beta_0} = \frac{1}{TF - 1}$$

où $TF = \frac{\beta_1}{\beta_0}$ est l'amplitude de la fonction de transfert mesurée. Le décalage relatif de l'inverse du facteur de qualité s'écrit donc :

$$\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{1}{Q(A^r)} - \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{TF - 1} - \frac{1}{Q_0}. \quad (4.16)$$

Cette dernière expression 4.16 est ainsi utilisée pour tracer le décalage relatif de l'inverse du facteur de qualité en fonction de l'amplitude $\bar{\psi}_m^*$ normalisée présenté sur la figure 4.3(b).



(a) Décalage relatif de fréquence de résonance en fonction de l'amplitude $\bar{\psi}_m^*$ normalisée pour les signaux simulés comme défini par l'équation (4.14) (b) Décalage relatif de l'inverse du facteur de qualité en fonction de l'amplitude $\bar{\psi}_m^*$ normalisée pour les signaux simulés comme défini par l'équation (4.16)

FIGURE 4.3 – Paramètres non linéaires élastiques (a) et dissipatifs (b) associés aux résonances non linéaires simulées de la figure 4.2

Ce résultat est également en accord avec les observations de la littérature [28, 35]. En effet, les effets dissipatifs sont proportionnels à l'amplitude $\bar{\psi}_m^*$.

Ces simulations ont montré tout d'abord que la non-linéarité de type hystérétique due au contact en torsion mène bien à un décalage de la fréquence de résonance. De plus, ce décalage négatif montre que la rigidité du milieu diminue avec l'augmentation de l'amplitude d'excitation. Enfin, les manifestations des effets non linéaires élastiques et dissipatifs sont proportionnelles à l'amplitude du déplacement angulaire. Cette particularité est généralement associée à l'hystérésis quadratique et est en accord avec les approximations détaillées au chapitre 1.

4.4 Résultats expérimentaux

4.4.1 Protocole expérimental

Le dispositif expérimental utilisé pour les mesures de résonances non linéaires est le même que celui utilisé pour l'étude en régime linéaire (fig. 4.4). Le milieu granulaire est composé uniquement de deux puis trois billes. Pour chaque configuration, deux accéléromètres sont placés sur les billes (bille 0 et 2 pour le milieu à trois billes) et des mesures de réponse en fréquence sont effectuées pour une séquence d'amplitudes d'excitation particulière. La fréquence de résonance ainsi que les deux paramètres non linéaires traduisant les effets élastiques et dissipatifs sont déterminés par post-traitement des courbes de résonance et présentés. L'amplitude à la résonance est également tracée.

Lors de certaines mesures de fonctions de transfert préliminaires il a été observé que, malgré le fait que le milieu ait été préparé avec soin et par un certain nombre d'excitations imposées, la fréquence de

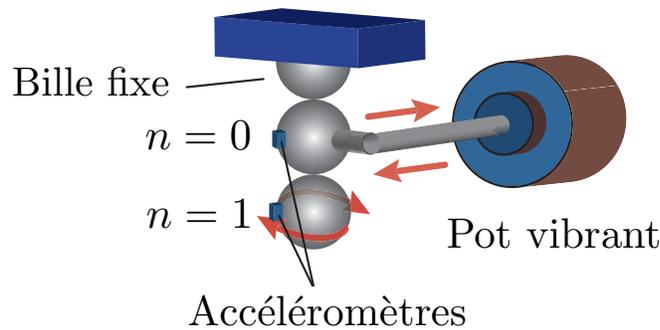


FIGURE 4.4 – Configuration des expériences de résonances non linéaires. Le milieu granulaire est composé de 2 billes, la première étant reliée directement à l'excitateur. La fonction de transfert entre le signal de l'accéléromètre placé sur la bille 1 et celui de l'accéléromètre placé sur la bille 0 est mesurée pour différents niveaux d'excitation.

résonance évoluait même à faible amplitude. Il a donc été proposé de modifier la séquence d'amplitudes d'excitation. La séquence d'amplitudes d'excitation, notée par la suite EAS, est représentée sur la figure 4.5. Il s'agit d'une même séquence de 60 mesures répétée trois fois. Pour chaque amplitude d'excitation de cette séquence, une fonction de transfert comprenant la résonance du système est mesurée. La séquence est composée de mesures à très faible amplitude d'excitation puis cette amplitude augmente linéairement et est alternée avec les très faibles amplitudes d'excitation. Le fait que les mesures à très faible amplitude soient alternées avec les plus fortes permet de sonder l'état du milieu et de constater s'il évolue ou non. De plus, pour les paramètres non linéaires, cela permet de comparer directement la réponse à forte amplitude avec la mesure à faible amplitude précédente, et ainsi de compenser une éventuelle évolution lente du milieu. Cette procédure permet donc une meilleure estimation des paramètres non linéaires en éliminant certains biais.

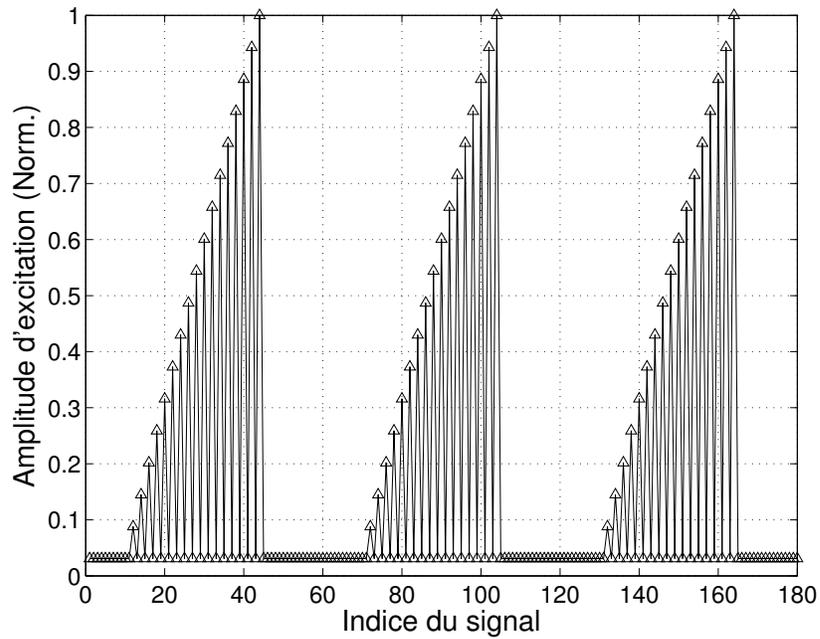


FIGURE 4.5 – Séquence d'amplitude d'excitation normalisée utilisée pour les expériences.

Les deux manifestations des effets non linéaires sont redéfinis en fonction de la séquence EAS et des données expérimentales. Ainsi, le décalage relatif de fréquence de résonance post-traité s'écrit :

$$\frac{\Delta f_{nl}}{f_{nl}} = \frac{f_n - f_{n-1}}{f_{n-1}}, \quad (4.17)$$

où f_n est la fréquence de résonance lorsque l'amplitude d'excitation augmente et f_{n-1} la fréquence de résonance à faible niveau (régime linéaire) de la mesure précédente. Ce décalage relatif de fréquence de résonance est tracé en fonction de l'amplitude absolue normalisée par le maximum. Également le décalage relatif de l'inverse du facteur de qualité est défini par :

$$\Delta \left(\frac{1}{Q} \right) = \frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_{0_{n-1}}} = \frac{1}{TF_n - 1} - \frac{1}{Q_{0_{n-1}}}, \quad (4.18)$$

où TF_n est l'amplitude de la résonance lorsque l'amplitude d'excitation augmente et $Q_{0_{n-1}}$ le facteur de qualité de la résonance en régime linéaire de la mesure précédente (obtenu par la méthode des -3db). Il est également utile de noter que la dynamique en amplitude de la séquence EAS est adaptée au régime considéré. En effet, l'amplitude d'excitation maximale de la séquence EAS est choisie de manière à ne pas dépasser le régime faiblement non linéaire.

4.4.2 Milieu granulaire composé de deux billes en régime faiblement non linéaire

Il est présenté dans cette section les mesures de résonances non linéaires dans un milieu granulaire composé de deux billes soumises à un moment de torsion dont l'amplitude d'excitation varie suivant la séquence EAS (fig. 4.4 et 4.5). Les effets non linéaires sont quantifiés et discutés.

Les billes utilisées pour ces expériences ont les mêmes caractéristiques que celles utilisées précédemment (voir le tableau 3.1). Pour ces mesures, la tension d'excitation varie de 0,04 à 1,3 V. Ces tensions correspondent à une accélération détectée en périphérie de la bille excitatrice de 0,13 à 4,3 m/s². La réponse en fréquence de ce système de billes est présenté sur la figure 4.6 pour plusieurs niveaux d'excitation. Sur cette figure sont représentées uniquement les mesures correspondant à la dernière partie de la séquence EAS, de la mesure numéro 130 à la mesure numéro 165.

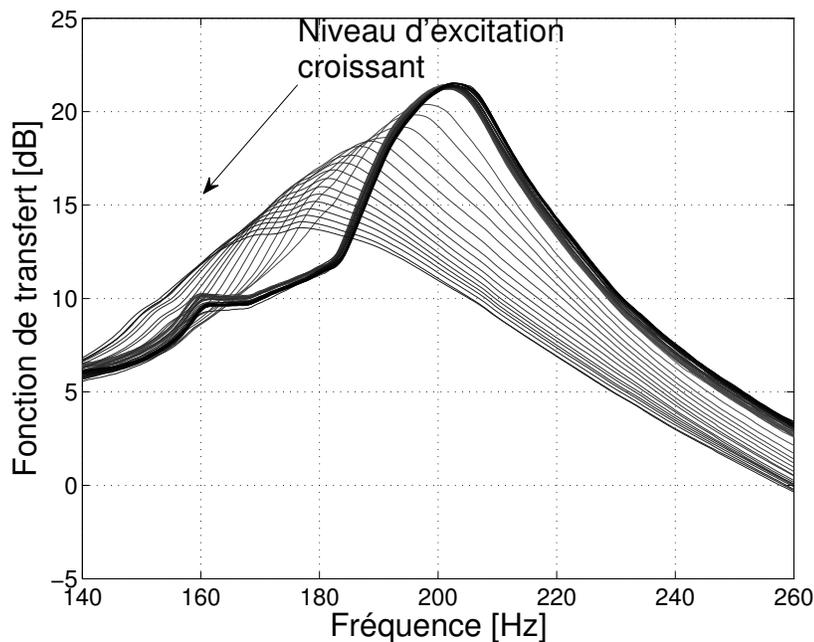
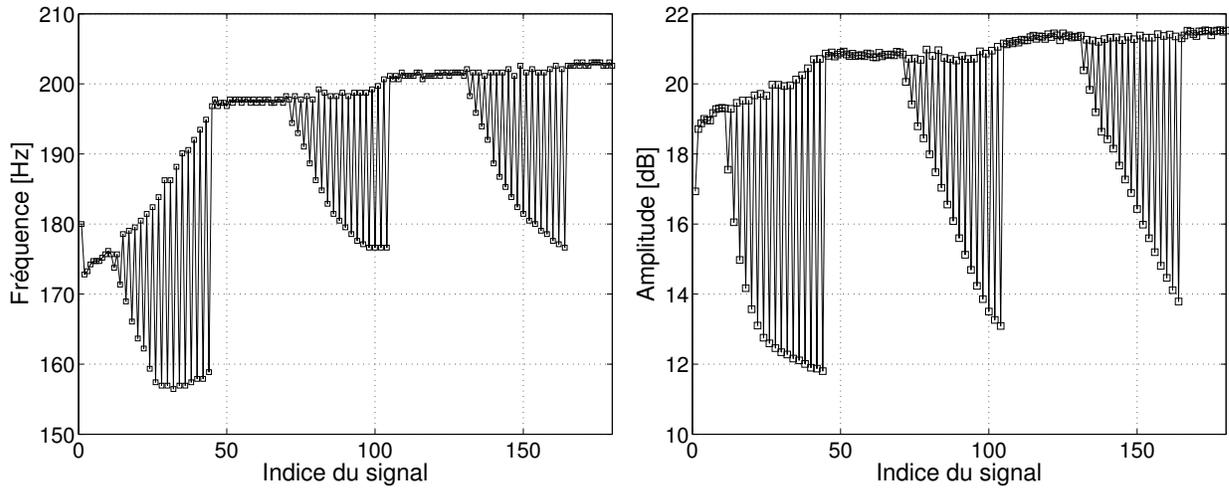
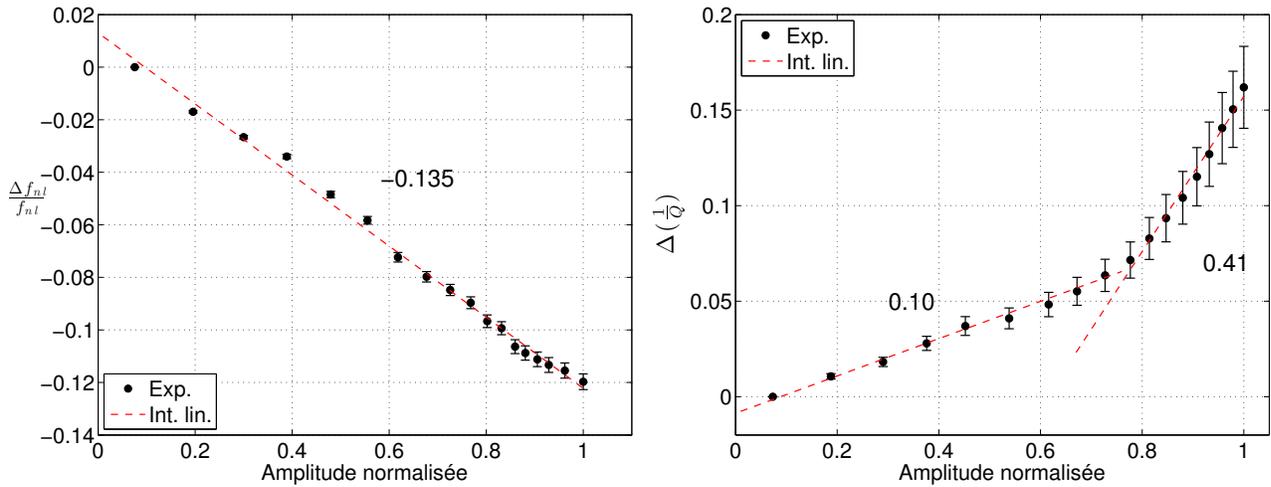


FIGURE 4.6 – *Fonction de transfert (rapport des accélérations) d'un système de 2 billes de 19 mm de diamètre autour de la fréquence de résonance.*

La principale observation est que la fréquence de résonance diminue lorsque l'amplitude d'excitation augmente. Ce résultat est attendu puisqu'il est caractéristique de l'hystérésis. Les paramètres non linéaires élastiques et dissipatifs sont calculés afin de quantifier la non-linéarité du contact en torsion. Plusieurs réalisations de mesures de résonances non linéaires ont été effectuées afin de vérifier la répétabilité des mesures. Ces mesures ont montré un comportement globalement similaire des effets non linéaires et sont présentés sur la figure 4.7.



(a) Évolution de la fréquence de résonance en fonction de la séquence d'amplitude d'excitation EAS. (b) Amplitude de la fonction de transfert à la fréquence de résonance en fonction de la séquence d'amplitude d'excitation EAS.



(c) Décalage relatif de fréquence de résonance pour un système de 2 billes comme défini par l'équation (4.17) en fonction de l'amplitude normalisée reçue sur la bille 1. (d) Décalage relatif de l'inverse du facteur de qualité pour un système de 2 billes comme défini par l'équation (4.18) en fonction de l'amplitude normalisée reçue sur la bille 1.

FIGURE 4.7 – Évolution de la fréquence de résonance et de l'amplitude de la fonction de transfert de 2 billes de 19 mm de diamètre en fonction de l'excitation (séquence EAS) et paramètres non linéaires associés.

Tout d'abord la fréquence de résonance en fonction des 180 mesures de la séquence EAS est présentée sur la figure 4.7(a). Cette fréquence est déterminée numériquement comme étant la fréquence à laquelle l'amplitude de la résonance est maximale. La première observation est que malgré la préparation préalable du milieu, la fréquence de résonance à très faible amplitude varie fortement pendant la première partie de la séquence (de plus de 20 Hz). Elle varie ensuite plus légèrement jusqu'à la fin des mesures. Ceci signifie que le milieu est dans un état quasi stable uniquement à partir de la deuxième partie de la séquence EAS, mais est instable au début de l'expérience.

L'amplitude maximale à la résonance est tracée sur la figure 4.7(b) en fonction de la séquence EAS. On peut également noter que l'amplitude à la résonance à faible amplitude devient quasiment constante à partir de la deuxième partie de la séquence EAS. Pendant la phase alternant faible et forte amplitude, l'amplitude de la résonance diminue lorsque l'amplitude d'excitation augmente. Il est utile de rappeler qu'il s'agit ici de l'amplitude de la fonction de transfert entre les deux accéléromètres.

Les paramètres non linéaires élastiques et dissipatifs sont respectivement présentés sur les figures 4.7(c) et 4.7(d) en fonction de l'amplitude à la résonance. Ces paramètres sont calculés pour la dernière partie de la séquence EAS, là où le milieu est le plus stable. Il est utile de mentionner que, pour le calcul de ces paramètres, l'amplitude à la résonance correspond à l'amplitude absolue de l'accélération détectée sur la bille n°1. Pour rappel ces paramètres sont calculés à partir de l'équation (4.17) pour le décalage relatif de fréquence de résonance et de l'équation (4.18) pour le décalage relatif de l'inverse du facteur de qualité. Des ajustements linéaires sont tracés et le coefficient directeur est calculé. Premièrement, le décalage relatif de fréquence de résonance, qui est négatif, est proportionnel à l'amplitude reçue en bout de chaîne. Le coefficient directeur peut donc être comparé à l'estimation numérique. Il est nécessaire de préciser que la modélisation fait usage du déplacement angulaire relatif entre les billes et non de l'amplitude à la seconde bille. L'accélération à la première bille est quasiment constante sur la bande fréquentielle considérée et est proportionnelle à la tension d'excitation. De ce fait, utiliser l'amplitude à la seconde bille ou la fonction de transfert est équivalent (à un facteur près). Expérimentalement, le paramètre $\alpha_{f_{exp}} = -0,135$ est comparable à la valeur théorique $\alpha_{f_{th}} = -0,15$. Pour le décalage relatif de l'inverse du facteur de qualité, la courbe montre deux comportements. Le premier, pour des amplitudes normalisées allant jusqu'à 0,7, a une pente de 0,1. Dans la deuxième partie, la pente est de 0,41. On observe donc une augmentation de la dissipation non linéaire à partir d'un certain niveau d'excitation. La valeur théorique pour ce paramètre est $\alpha_{Q_{th}} = 0,14$. Cette valeur est donc comparable à la première partie de la courbe expérimentale. Cette différence peut s'expliquer par le fait que lors de la simulation, la contribution des harmoniques supérieurs a été ignorée, seule la réponse à la fréquence d'excitation est calculée. Bien que le mode de mesure de la fonction de transfert ne prenne en compte que l'amplitude à la fréquence d'excitation, les harmoniques supérieurs peuvent contribuer via des effets de dissipation non linéaire comme déjà prédit pour des signaux "non simplex", c'est-à-dire comportant plusieurs extremums locaux dans une période (ou fortement multi-fréquentiel). Des expériences complémentaires ont montré que la rugosité de surface et l'usure progressive de la surface au cours des expériences pouvait mener à des effets similaires à celui observé ici de saturation du comportement proportionnel à l'amplitude des quantités tracées.

L'étude des résonances non linéaires dans un système de deux billes en régime faiblement non linéaire a montré un bon accord entre les prédictions théoriques et les expériences. Notamment, le

paramètre non linéaire élastique théorique α_f est comparable quantitativement aux expériences. Le paramètre non linéaire associé aux effets dissipatifs α_Q montre également un bon accord aux plus faibles amplitudes. Cependant, une différence de comportement de la dissipation non linéaire à plus forte amplitudes est observée et peut avoir des origines complexes à prendre en compte et caractériser. Finalement, ces mesures montrent que le comportement du contact en régime faiblement linéaire est globalement bien décrit par l'hystérésis quadratique dans une gamme où les amplitudes d'excitation restent relativement faibles.

4.4.3 Milieu granulaire composé de trois billes en régime faiblement non linéaire

Les mêmes conditions expérimentales ont été reproduites pour un milieu composé de trois billes en contact. La séquence EAS est identique à celle des mesures précédentes. Les accéléromètres sont placés sur la bille excitatrice et sur la dernière bille. Étant composé d'une masse et d'un ressort supplémentaires, ce milieu présente donc deux degrés de liberté et donc deux fréquences de résonance. Les résonances non linéaires sont étudiées pour ces deux fréquences de résonance. Les paramètres non linéaires de ces deux résonances peuvent donc être comparés et discutés.

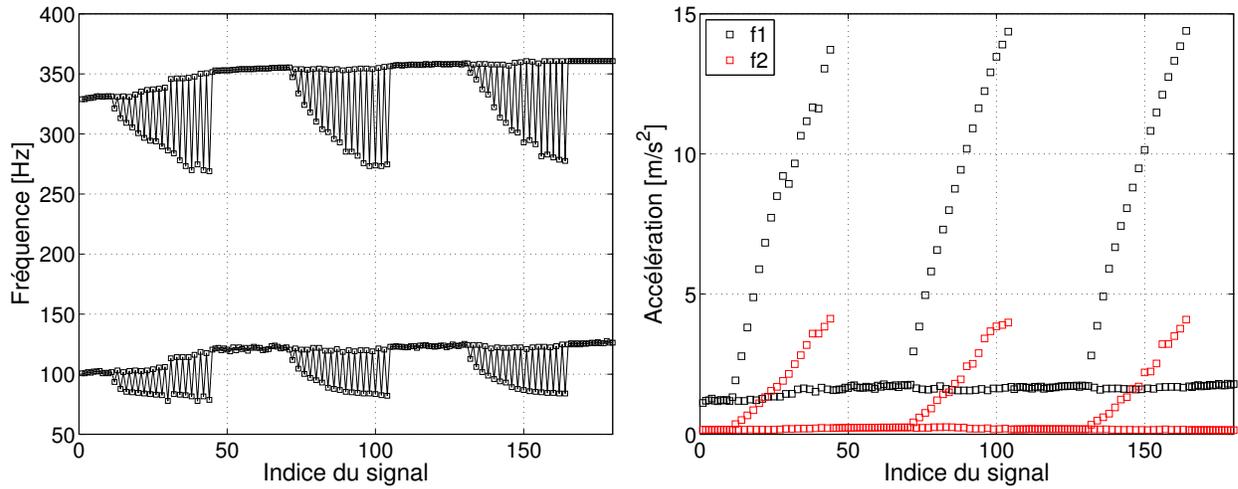
Tout d'abord l'évolution des deux fréquences de résonance est présentée sur la figure 4.8(a). Comme observé précédemment, la fréquence de résonance à faible amplitude est constante à partir de la deuxième partie de la séquence EAS. La première fréquence de résonance, à faible amplitude, est de l'ordre de 125 Hz. La seconde résonance est de l'ordre de 360 Hz soit presque le triple de la première résonance. On peut souligner que la seconde fréquence résonance est au dessus de la fréquence de coupure calculée au chapitre 3. Cette observation n'est pas contradictoire puisque le milieu, du fait de sa très faible longueur, n'est pas considéré comme un cristal périodique. De ce fait les phénomènes associés à la périodicité du milieu, comme la fréquence de coupure, ne sont pas pertinents.

Ensuite l'amplitude absolue reçue en bout de chaîne est présentée sur la figure 4.8(b) pour les deux fréquences de résonance. Contrairement à la figure 4.7(b), l'amplitude tracée est non pas l'amplitude de la fonction en transfert (en dB) mais l'amplitude absolue reçue par le deuxième accéléromètre (en bout de chaîne). Cela permet d'avoir un aperçu quantitatif des amplitudes absolues détectées. Tout d'abord, l'amplitude de la première résonance est en moyenne six fois supérieure à l'amplitude de la deuxième résonance pour les plus faibles excitations. Lors de l'augmentation de l'amplitude d'excitation, ce rapport chute jusqu'à environ 3.5. Il faut noter ici que les amplitudes reçues augmentent puisqu'elles ne sont pas normalisées par l'amplitude d'excitation.

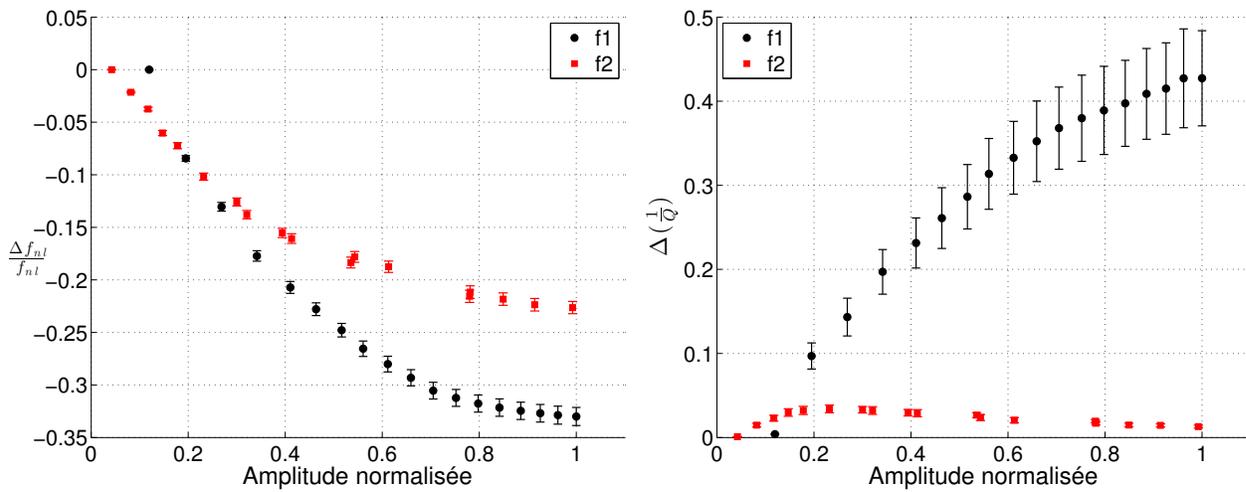
Le décalage relatif de fréquence de résonance et le décalage d'inverse de facteur de qualité, calculés à partir de la troisième phase de la séquence, sont présentés sur les figures 4.8(c) et 4.8(d). Pour le décalage de la fréquence de résonance, les courbes montrent une allure comparable pour les deux fréquences de résonance. Cependant, le décalage relatif de fréquence de résonance ne varie pas linéairement avec l'amplitude sur toute la plage d'amplitudes. Il est possible d'obtenir un ajustement avec l'expérience en utilisant un polynôme d'ordre 3. De plus, le décalage relatif de fréquence de résonance est supérieur pour la première résonance. Pour le décalage d'inverse de facteur de qualité, la courbe correspondant à la deuxième fréquence montre une allure particulière. Elle augmente jusqu'à une certaine amplitude puis diminue. En revanche pour la première résonance la dissipation non linéaire augmente sur toute

la plage d'amplitudes.

Les évolutions des deux quantités caractérisant les effets non linéaires ont donc un comportement différent du cas de deux billes. En particulier, les mesures montrent que l'approximation quadratique n'est pas valable pour le cas présenté en dehors d'une très petite zone de faibles amplitudes. Cela peut s'expliquer par le fait que la contribution des harmoniques supérieurs (impairs) est plus importante que dans le cas de deux billes. En effet, le rapport 1/3 entre les deux résonances favorise l'émergence de l'harmonique 3. Afin d'étudier cela, il serait utile de pousser l'approche théorique au cas des signaux non simplex pour un système de trois billes. La solution du problème par équilibrage harmonique pourrait faire intervenir la troisième harmonique (du type $\bar{\psi} = \bar{\psi}_1^* \cos(\omega t) + \bar{\psi}_2^* \cos(3\omega t)$). Il est important de signaler ici que la qualité de la surface des billes est déterminante. Il est possible que la rugosité de la surface, ainsi que son usure au fil des expériences mènent à des comportements qui s'éloignent du cas de la surface courbe parfaitement lisse menant à l'hystérésis quadratique pour le comportement du contact en torsion. Des expériences complémentaires menées avec des billes usées montrent des comportements similaires (saturation du décalage relatif de la fréquence de résonance) mais encore plus marqués. Dans ce cas, pour une description précise a posteriori du comportement hystérétique mesuré, il serait nécessaire de modéliser chaque contact par un nombre élevé d'hystérons et une distribution de Preisach particulière dans le contexte du modèle phénoménologique de Preisach-Mayergoyz.



(a) Évolution de la fréquence de résonance en fonction de l'amplitude d'excitation (EAS). (b) Amplitude absolue reçue en fin de chaîne à la résonance en fonction du numéro d'excitation (EAS).



(c) Décalage relatif de fréquence de résonance en fonction de l'amplitude détectée normalisée en bout de chaîne pour un système de 3 billes comme défini par l'équation (4.17). (d) Décalage relatif de l'inverse du facteur de qualité en fonction de l'amplitude détectée normalisée en bout de chaîne pour un système de 3 billes comme défini par l'équation (4.18).

FIGURE 4.8 – Évolution de la fréquence de résonance et de l'amplitude de la fonction de transfert de 3 billes de 19 mm de diamètre en fonction de l'excitation (séquence EAS) et paramètres non linéaires associés.

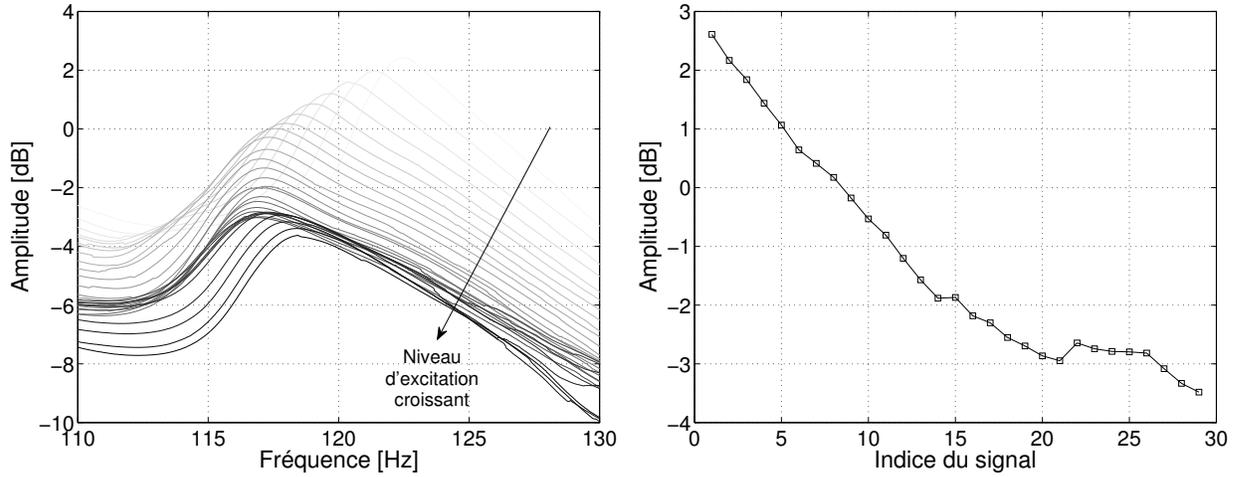
4.4.4 Milieu granulaire composé de 30 billes

Il est maintenant proposé d'étudier une dernière configuration. Il s'agit de s'intéresser au comportement non linéaire des résonances dans un milieu granulaire formé de trente billes en contact. L'étude se focalise ici sur une seule résonance des 29 résonances possibles de la chaîne, étudiée par la méthode des résonances non linéaires.

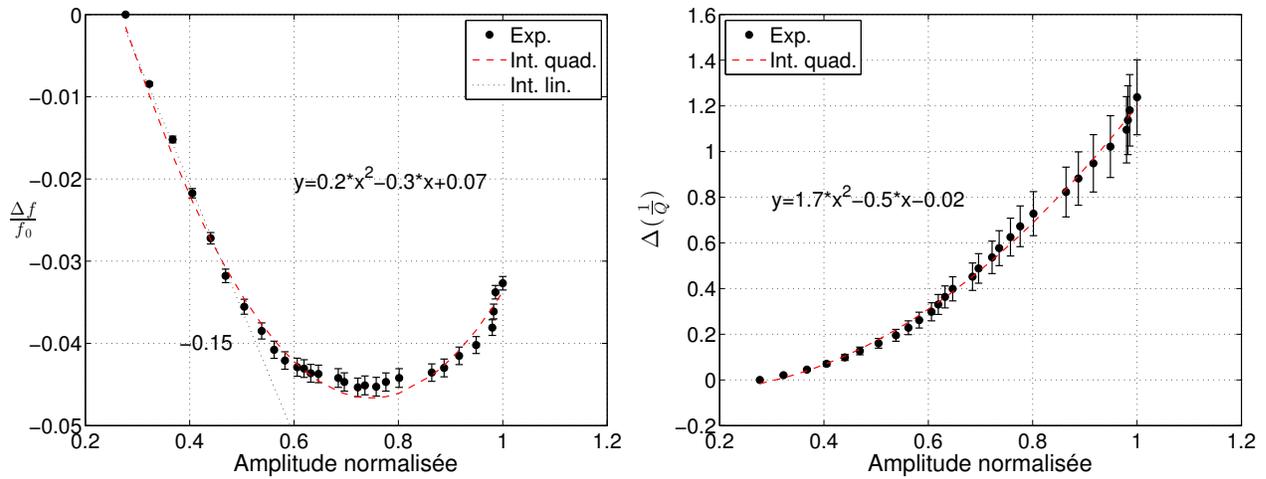
Les mesures sont effectuées dans un milieu de trente billes (les mêmes que précédemment) et pour des amplitudes d'excitation ayant des valeurs plus élevées que précédemment. Une des raisons est qu'il est nécessaire de compenser la dissipation linéaire du fait de la taille de la chaîne. De plus, cela permet de s'intéresser au comportement à plus fort régime. Pour ces mesures de résonances non linéaires, la tension d'excitation varie désormais de 0,4 à 3 V pour 30 niveaux (contre 0,04 à 1,3 V pour 18 niveaux lors des précédentes mesures). La dynamique en amplitude est également diminuée afin de rester dans un régime faiblement non linéaire. Pour ces mesures, la séquence EAS comme présentée précédemment n'est pas utilisée. Une fois le milieu préparé, l'amplitude d'excitation est augmentée de 0,4 à 3 V sans alternance avec de faibles amplitudes d'excitation.

Les mesures de fonctions de transfert donnent un comportement similaire, du moins qualitativement, de l'évolution des fréquences de résonance. La neuvième résonance a été choisie, à la fréquence de 120 Hz. L'évolution de cette fréquence de résonance est présentée sur la figure 4.9(a). Contrairement aux observations classiques, la fréquence de résonance diminue puis augmente à partir d'un certain niveau d'excitation. Cette observation est intéressante puisqu'elle signifie que l'élasticité du milieu diminue dans un premier temps (ou intervalle d'amplitudes) puis augmente à partir d'une certaine amplitude d'excitation. L'amplitude à la résonance est également tracée sur la figure 4.9(b).

Le décalage relatif de fréquence de résonance est tracé sur la figure 4.9(c). Cette quantité est calculée à partir de l'expression initiale (4.14). L'ajustement déterminé à partir des mesures donne une courbe de type parabolique. Un ajustement linéaire est également tracé à partir des points à faibles amplitudes (correspondant au régime étudié précédemment). La pente de cette droite est de -0,15. Cette observation est intéressante puisqu'elle correspond aux valeurs théorique et expérimentale trouvées dans le cas de deux billes avec l'approximation quadratique pour l'hystérésis. Au chapitre 1, la variation relative du module élastique a été calculée pour plusieurs approximations. Pour l'approximation à l'ordre 2, correspondant à l'hystérésis quadratique, la variation du module élastique est linéaire avec l'amplitude de déformation. Pour l'approximation à l'ordre 3, cette variation est un polynôme d'ordre 2 (éq. (1.35)). Ceci peut signifier qu'à partir d'une certaine amplitude d'excitation, le terme supplémentaire issu de l'approximation à l'ordre 3 peut ne plus être négligeable par rapport au terme quadratique. À plus forte amplitude, l'approximation quadratique du contact n'est donc peut-être plus valable. Le décalage de l'inverse du facteur de qualité, sur la figure 4.9(d), est également bien ajusté par un polynôme d'ordre deux. Cette courbe montre une dissipation non linéaire plus faible que les résultats précédents.



(a) Fonction de transfert accélérométrique d'un système de 30 billes autour de la neuvième fréquence de résonance. (b) Amplitude de la fonction de transfert à la fréquence de résonance en fonction du numéro d'excitation.



(c) Décalage relatif de la fréquence de résonance en fonction de l'amplitude détectée pour un milieu de 30 billes comme défini par l'équation (4.14). (d) Décalage relatif de l'inverse du facteur de qualité en fonction de l'amplitude détectée pour un milieu de 30 billes comme défini par l'équation (4.15).

FIGURE 4.9 – Évolution de la fréquence de résonance et de l'amplitude de la fonction de transfert de 30 billes de 19 mm de diamètre en fonction de l'excitation et paramètres non linéaires associés.

L'étude d'une résonance particulière d'une chaîne de 30 billes en régime faiblement non linéaire a permis de faire plusieurs observations. En premier lieu, un résultat qui a été observé mais qui n'est pas détaillé ici, toutes les résonances de la chaîne ont sensiblement le même comportement d'un point de vue qualitatif. Ensuite, le décalage relatif de fréquence de résonance a montré une diminution puis une augmentation de la rigidité du milieu en fonction de l'amplitude. Ce résultat ne peut pas être expliqué par l'hystérésis quadratique seul. C'est pourquoi la non-linéarité hystérétique a été approximée à l'ordre supérieur (3) et le calcul de la variation du module élastique est en accord qualitatif avec l'expérience.

4.5 Conclusion

Les résonances non linéaires de structures granulaires uni-dimensionnelles excitées en rotation pure ont été étudiées de manières analytique, numérique et expérimentale dans ce chapitre. Plusieurs configurations de milieu ont été traitées, d'un cas simple (système de deux billes) utile à la compréhension des phénomènes se produisant à l'échelle d'un seul contact, au cas plus complexe de la chaîne de trente billes. L'approche analytique a été uniquement développée dans la configuration simple à deux billes, un système à un degré de liberté. Les résultats expérimentaux ont montré un très bon accord qualitatif et quantitatif avec les simulations numériques dans cette configuration la plus simple. Ils ont en particulier montré qu'en régime faiblement non linéaire (aux plus faibles amplitudes), le contact de torsion est bien décrit par l'hystérésis quadratique. Les manifestations de l'hystérésis quadratique sur les résonances non linéaires sont des décalages relatifs de fréquence de résonance et d'inverse de facteur de qualité proportionnels à l'amplitude détectée. Les deux autres configurations de milieu ont montré des comportements différents. En particulier dans la configuration de trente billes et pour des niveaux acoustiques plus élevés, les expériences ont mené à des résultats qui ne peuvent plus être décrits par le modèle d'hystérésis quadratique. Plusieurs raisons peuvent expliquer ces comportements différents, notamment la nécessité de prendre en compte les ordres supérieurs d'approximation de l'hystérésis (via un terme d'hystérésis cubique dans un premier temps).

Les différences entre les mesures et la théorie impliquant l'hystérésis quadratique peuvent s'expliquer par plusieurs phénomènes possibles ou caractéristiques du milieu non prises en compte : influence de la rugosité de surface et de l'usure des contacts, nécessité de prendre en compte des termes d'ordre supérieur dans l'approximation de l'hystérésis, influence des harmoniques supérieurs ... Il faudrait une étude théorique plus approfondie conjointement à des expériences pour isoler les processus les plus importants dans notre cas, et selon les configurations.

Dans le chapitre suivant, il est proposé d'étudier la propagation de paquets d'ondes de rotation dans une longue chaîne granulaire monoatomique. Des expériences sont menées ainsi que la simulation de la propagation. Pour les calculs analytiques, l'hypothèse de l'approximation quadratique de l'hystérésis du contact a été choisie, car vérifiée dans ce chapitre dans une gamme d'amplitudes faibles. De plus, la propagation simulée est développée spécifiquement pour les signaux d'excitation expérimentaux et la résolution est effectuée numériquement.

Chapitre 5

Propagation hystérétique de paquets d'ondes de rotation dans une chaîne granulaire magnétique monoatomique

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent il a été montré qu'en régime faiblement non linéaire, le contact entre deux sphères subissant un moment de torsion oscillant est globalement bien décrit par la non-linéarité quadratique hystérétique. Cette non-linéarité quadratique hystérétique est le point de départ de ce dernier chapitre qui concerne la propagation de paquets d'ondes de rotation dans une chaîne granulaire monoatomique.

L'hystérésis dynamique non linéaire est impliqué dans de nombreux effets non linéaires récemment observés dans les solides complexes [28, 21, 48]. Il est souvent montré que l'origine de cet hystérésis est liée au clappement ou aux phénomènes de friction induits par les perturbations acoustiques au niveau des contacts internes de milieux comme les solides endommagés, les milieux géologiques ou encore les milieux granulaires [21, 42, 29, 28]. Contrairement aux effets non linéaires "classiques" attribués aux termes quadratiques et cubiques de la relation contrainte-déformation, les effets dus à l'hystérésis sont particuliers. On peut citer par exemple une modification en moyenne des paramètres élastiques du milieu, une atténuation non linéaire ou des effets de mémoire [49, 42].

L'une des premières observations de l'hystérésis mécanique est le couplage en cisaillement entre deux sphères en contact [33], qui est présenté au chapitre 1. En acoustique, les effets non linéaires associés à l'hystérésis sont de plus en plus étudiés depuis quelques années du fait de leurs applications potentielles au contrôle non destructif et des nouveaux processus d'onde possibles. Cependant, jusqu'à maintenant, les milieux de propagation étudiés comportent, en plus des non-linéarités de type hystérétiques, d'autres types de non-linéarités classiques et une forte dissipation. Par conséquent, bien que des modèles aient été proposés [15], il n'a pas été possible d'observer certains effets prédits relatifs à l'hystérésis pur, tels que la distorsion de signaux impulsifs, souvent fortement influencée par la non-linéarité quadratique classique. De plus, les manifestations de la non-linéarité hystérétique ont été observées

lors d'expériences sur une bande fréquentielle étroite (décalage de fréquence de résonance [49, 21]), pour des quantités moyennées, ou encore pour la génération préférentielle du troisième harmonique (dynamique quadratique en amplitude [48]), mais jamais lors de propagation de signaux impulsionnels.

Dans ce dernier chapitre, la propagation de paquets d'ondes de rotation dans une chaîne granulaire monoatomique est étudiée. En effet, il a été montré lors des chapitres précédents que le contact en torsion est bien décrit par l'hystérésis quadratique. Ce milieu est donc propice à la manifestation des effets relatifs à l'hystérésis pur. En particulier, la distorsion de l'onde impulsionnelle en fonction de l'amplitude est décrite par un modèle, est étudiée expérimentalement et discutée.

L'intérêt d'utiliser des signaux de type impulsionnel est d'une part, de pouvoir séparer l'onde incidente de l'onde réfléchie due à la condition limite en bout de chaîne, et d'autre part de suivre l'évolution du signal en fonction de la distance ou de l'amplitude d'excitation (ce qui est équivalent en coordonnées normalisées, dans le cadre du modèle sans dissipation linéaire). Dans une première partie le dispositif expérimental et les mesures réalisées sont présentées. Dans une seconde partie, le modèle de propagation acoustique de signaux impulsionnels est présenté succinctement et appliqué aux ondes de rotation et au signal d'excitation expérimental. Les solutions de ce modèle, qui prédisent l'évolution du profil du signal de vitesse en fonction de l'excitation, sont calculées en faisant usage du modèle phénoménologique de Preisach-Mayergoyz. Enfin, les résultats issus du modèle sont comparés aux résultats expérimentaux et l'ensemble est discuté.

5.2 Expériences

La propagation d'un signal impulsionnel basse fréquence de type Gaussien dans une chaîne granulaire monoatomique est considérée. La chaîne est composée de 70 billes de 19 mm de diamètre soit une longueur totale $L = 1,33$ m. Le dispositif expérimental, présenté à la figure 5.1, est le même que pour les expériences précédentes. La chaîne est suspendue ponctuellement à la structure au niveau de la première bille qui est également la source de l'excitation des ondes de rotation. L'autre extrémité de la chaîne est libre. Du fait de la longueur de la chaîne, la gravité n'est plus négligeable. Un gradient de propriété est donc présent le long de la chaîne. Cependant, les mesures étant réalisées au premier quart de la chaîne, le gradient de propriété sur cette zone est assez faible et ne modifie que faiblement le comportement du milieu. Ce gradient de propriété est donc négligé dans l'approche théorique.

Pour cette expérience la chaîne doit être assez longue pour pouvoir séparer l'onde incidente de l'onde réfléchie à l'extrémité de la chaîne. De plus, le signal Gaussien centré sur 100 Hz (voir figure 5.2) doit être assez basse fréquence pour minimiser les effets dus à la dispersion. Le signal d'excitation (à plusieurs amplitudes) est généré en haut de la chaîne (à la première bille) et se propage le long de la chaîne. L'onde transmise est détectée à la 1^{ère} bille (référence) et à la 18^{ème} bille ($\simeq L/4$). La tension d'excitation varie de 0,6 à 2,4 V sur 20 niveaux. Il est à noter que ces valeurs sont supérieures à la tension d'excitation pour les mesures de résonance non linéaire. Cela s'explique par le fait qu'en régime propagatif, la sensibilité du dispositif expérimental est inférieure à la sensibilité en régime stationnaire. La tension d'excitation est donc adaptée pour rester en régime faiblement non linéaire tout en ayant des signaux exploitables. Les signaux temporels détectés sont présentés sur la figure 5.3(a) pour les signaux de référence et sur la figure 5.3(b) pour les signaux propagés au quart de la chaîne.

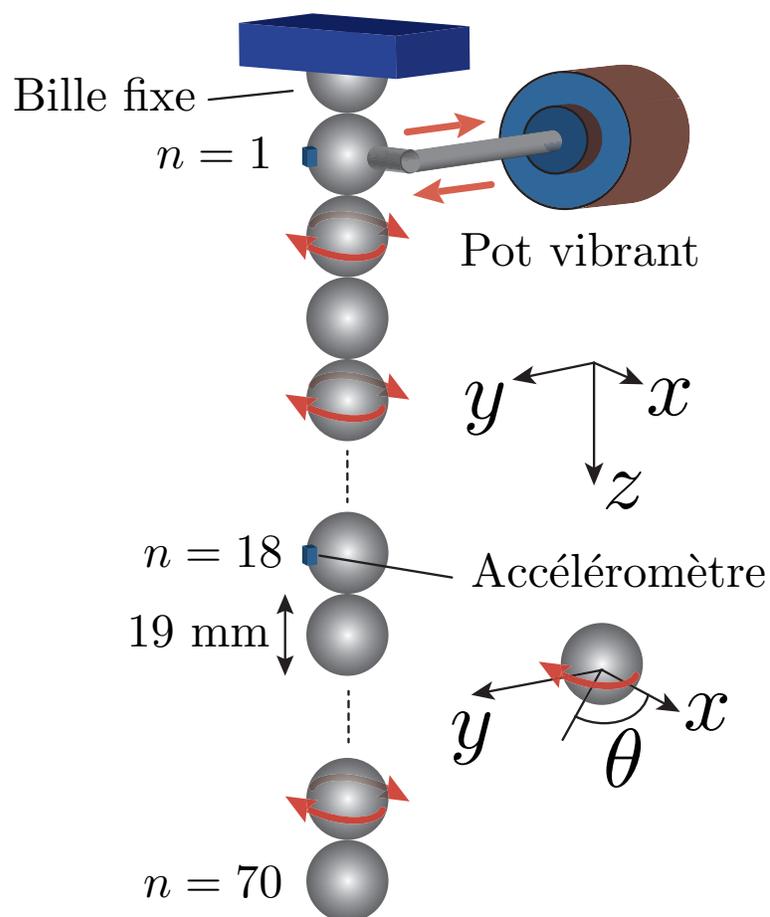


FIGURE 5.1 – *Dispositif expérimental utilisé pour les mesures de paquets d’ondes de rotation en régime propagatif. La chaîne est composée de 70 billes de 19 mm de diamètre et deux accéléromètres sont placés respectivement sur la 1^{ère} et la 18^{ème} bille.*

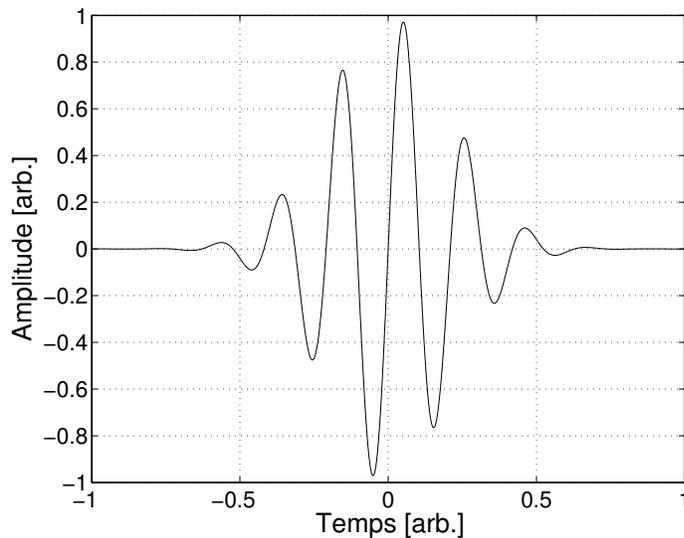
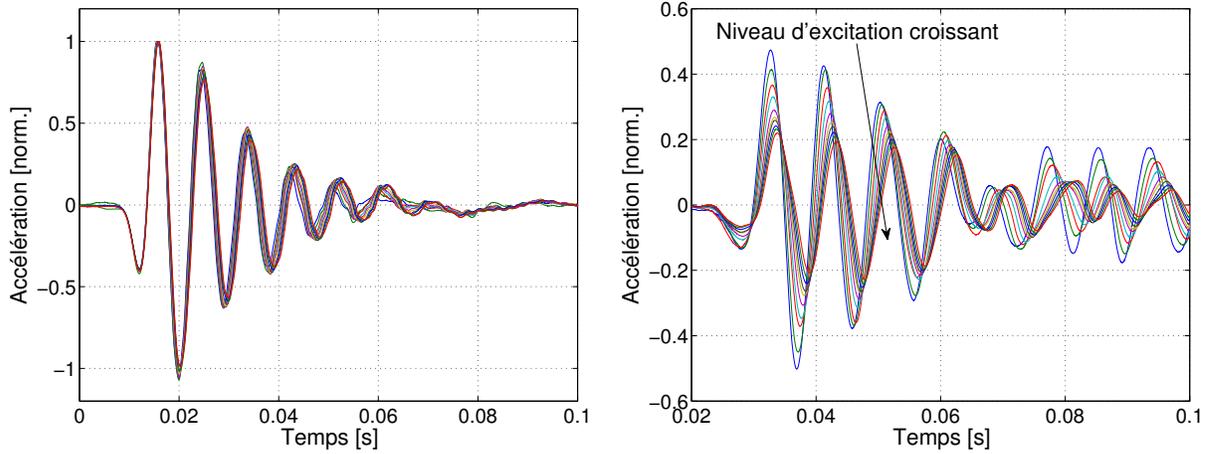


FIGURE 5.2 – *Signal source électrique de type sinus modulé par une Gaussienne.*

Les signaux d'accélération de référence (détectés par l'accéléromètre positionné sur la première bille) sont présentés sur la figure 5.3(a) et il est possible de constater qu'ils sont différents du signal source électrique. Cette différence s'explique par la réponse impulsionnelle du dispositif expérimental et la quantité mesurée. On remarque également qu'à partir du quatrième extremum, les signaux (normalisés par l'amplitude électrique d'excitation) ne sont plus parfaitement superposés pour différentes amplitudes d'excitation. Cette observation est liée à la non-linéarité intrinsèque du dispositif d'excitation et certainement plus particulièrement au couplage entre le pot-vibrant et la bille 1. Les signaux détectés après propagation ne sont donc analysés que sur leurs premiers extremums et il est constaté de plus que le décalage temporel dû à la propagation est bien supérieur au décalage induit par la non-linéarité du dispositif d'excitation. La non-linéarité du dispositif expérimental d'excitation est donc négligée dans ce qui suit. Les signaux d'accélération détectés à la 18ème bille de la chaîne, c'est-à-dire à une distance égale au quart de sa longueur (figure 5.3(b)) montrent une forte dépendance au niveau d'excitation. En effet lorsque l'amplitude d'excitation augmente, les signaux sont retardés et l'amplitude est globalement fortement diminuée. Ces observations sont en accord qualitatif avec les manifestations de la non-linéarité hystérétique et cohérents avec les mesures de résonances non linéaires. Le retard temporel est dû à l'assouplissement du milieu (diminution de la vitesse de propagation) et la diminution de l'amplitude détectée des signaux normalisés lorsque l'amplitude d'excitation augmente est la conséquence de la dissipation non linéaire.



(a) Signal d'accélération détecté sur la 1^{ère} bille pour plusieurs niveaux d'excitation. Les amplitudes sont normalisées par le maximum positif. (b) Signal d'accélération détecté à la 18^{ème} bille pour plusieurs niveaux d'excitation. Les amplitudes sont normalisées par l'amplitude maximale positive détectée à la 1^{ère} bille.

FIGURE 5.3 – (a) Signal d'accélération détecté sur la 1^{ère} bille pour plusieurs niveaux d'excitation. Les amplitudes sont normalisées par l'amplitude maximale positive. Il a été vérifié au préalable que le signal reçu à la première bille est linéaire en fonction de l'excitation. De ce fait, normaliser les signaux par l'amplitude d'excitation ou par l'amplitude maximale positive est équivalent. (b) Signal d'accélération détecté à la 18^{ème} bille pour plusieurs niveaux d'excitation. Les amplitudes sont normalisées par le maximum détecté à la 1^{ère} bille. Chaîne granulaire monoatomique de 70 billes de 19 mm de diamètre.

De manière générale, les modèles de propagation non linéaire de signaux impulsionnels dans les milieux possédant une non-linéarité hystérétique décrivent l'évolution des profils de vitesse ou de déformation acoustique [3, 15]. Les accélérations détectées doivent donc être intégrées numériquement afin de pouvoir être comparées aux modèles et simulations numériques. Ces vitesses de rotation (vitesse tangentielle mesurée à la surface des billes) sont présentées sur la figure 5.4.

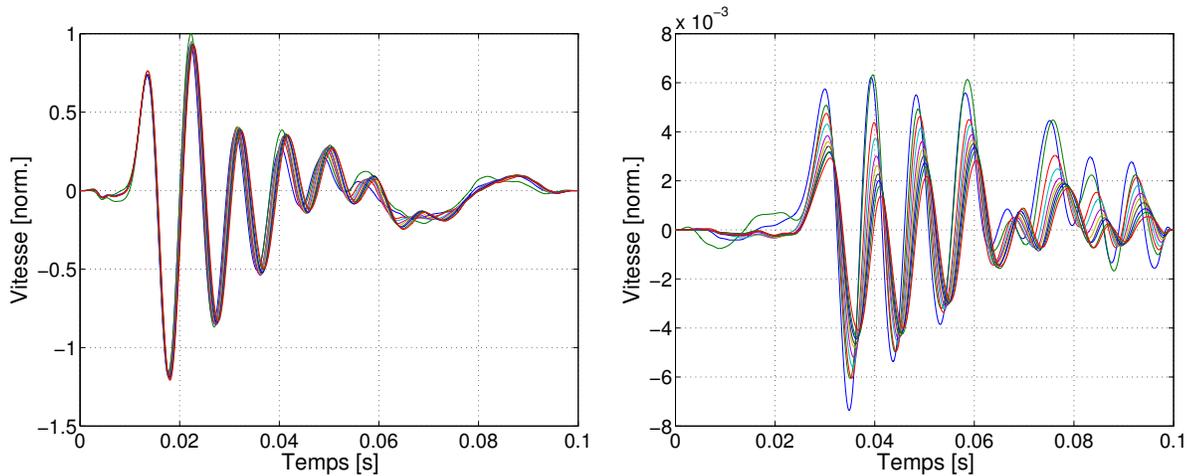


FIGURE 5.4 – Vitesses de rotation obtenues par intégration des signaux d'accélération de la figure 5.3. (a) Signal de vitesse de rotation à la 1^{ère} bille. (b) Signal de vitesse de rotation à la 18^{ème} bille.

Le signal de vitesse à la plus faible amplitude d'excitation présenté sur la figure 5.4(a) est utilisé pour définir le profil initial du signal lors des simulations. Les signaux simulés et mesurés sont proportionnels aux signaux de vitesse angulaire de rotation des billes. Pour illustration, quelques signaux de vitesse de rotation sont présentés sur la figure 5.5 et l'analyse est ciblée sur les six premières phases du signal. Une normalisation supplémentaire en amplitude et en temps est également effectuée. Pour le signal à très faible amplitude d'excitation, le premier maximum de vitesse angulaire de rotation est normalisé à 1 et la durée de la première phase (temps entre les deux premiers zéros) également. Il est fait usage de ce type de normalisation dans la suite, pour le signal d'excitation de référence. Outre l'atténuation non linéaire (l'amplitude des signaux normalisés décroît lorsque l'amplitude d'excitation augmente), il est aussi observé que la durée des phases varie en fonction de l'amplitude d'excitation. Ces effets et plus généralement la distorsion de ces signaux par la non-linéarité hystérétique sont étudiés grâce au modèle et simulations présentés dans la section suivante.

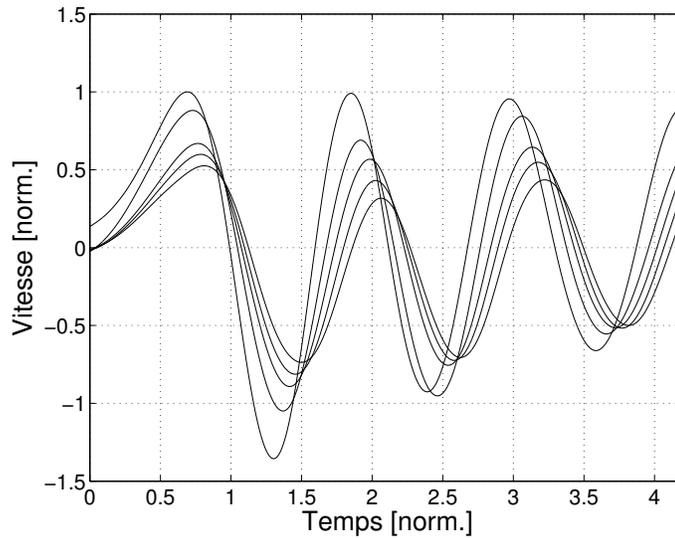


FIGURE 5.5 – Signaux normalisés de vitesse de rotation de la bille 18 pour différentes amplitudes d'excitation.

5.3 Modélisation et simulation numérique de l'évolution du profil de vitesse angulaire

5.3.1 Approche théorique

Comme mentionné précédemment, la propagation dans un milieu possédant une non-linéarité hystérétique a fait l'objet de plusieurs études théoriques et numériques [15, 3]. Il a été montré que le type de signal d'excitation (paquet d'onde, signal périodique, ...) joue un rôle sur les effets observés, en raison des effets de mémoire. Par exemple, le profil d'un signal continu initialement sinusoïdal, est distordu d'une certaine manière en fonction de la distance [18], en raison de la génération d'harmoniques impairs notamment. Pour des signaux impulsionnels, monopolaire ou bipolaire, la distorsion du signal initial est observée sous la forme d'un étirement au cours de sa propagation [15]. En l'occurrence pour un signal bipolaire, lorsque la première phase a une amplitude supérieure à la deuxième (en valeur absolue) alors le signal initial tend à se transformer en signal monopolaire. Dans le cas de signaux d'excitation plus complexes ("non simple"), possédant plusieurs extrema par période, il devient difficile de déterminer une expression théorique de l'évolution du profil. Dans ce cas, il est nécessaire de passer à une évaluation numérique de la distorsion des profils. De manière générale, la non-linéarité hystérétique est modélisée grâce au formalisme de Preisach-Mayergoyz [41]. Il s'agit d'un modèle phénoménologique initialement élaboré pour l'hystérésis magnétique. Les grandes lignes de ce modèle sont présentées dans le contexte de l'hystérésis en contrainte-déformation dans la section suivante.

L'équation du mouvement unidimensionnelle peut s'écrire pour un solide de la manière suivante, en négligeant la non-linéarité géométrique :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad (5.1)$$

où ρ_0 est la masse volumique du solide, v la vitesse particulière et σ la contrainte associée à l'onde acoustique. Cette équation du mouvement est de forme identique pour les ondes longitudinales et les ondes de cisaillement. Dans la suite, la théorie présentée est valable pour ces deux types d'ondes. Il est montré plus tard que les expressions analytiques finales normalisées sont de même forme pour les ondes de rotation dans la chaîne granulaire à grande longueur d'onde. Dans le contexte de cette thèse, la contrainte σ comprend un terme linéaire et un terme de non-linéarité hystérétique. Les non-linéarités "classiques" ou plus généralement non hystériques ne sont pas considérées ici.

En utilisant la méthode de variation lente du profil, déjà présentée au chapitre 1 et décrite dans [60], l'équation d'évolution du profil de déformation $s = \partial u / \partial z$ suivant la direction z s'écrit

$$\frac{\partial s}{\partial z} + v(z, \tau) \frac{\partial s}{\partial \tau} = 0, \quad (5.2)$$

où $\tau = t - z/c_0$ est le temps retardé et

$$v(z, \tau) = -\frac{1}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial \sigma_h}{\partial s}, \quad (5.3)$$

avec σ_h la partie hystérétique de la contrainte (dans notre cas, tout ce qui n'est pas linéaire). Le module élastique $E = \rho_0 c_0^2$. En normalisant plusieurs grandeurs de l'équation précédente, elle peut se réécrire,

$$\frac{\partial S}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\sigma}_h}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \tau_0} = 0, \quad (5.4)$$

où $S = s/s_0$, avec s_0 l'amplitude de déformation de la première phase du signal. $\xi = z/z_{nl}$, où z_{nl} est une distance caractéristique non linéaire analogue à la distance de formation de choc pour une non-linéarité classique quadratique ($z_{nl} = 2c_0 t_0 / (hS_0)$) où t_0 est la durée de la première phase, $\bar{\sigma}_h = \sigma_h / E$ et $\tau_0 = \tau / t_0$. Cette équation est valable pour n'importe quel type de signal d'excitation dans un milieu 1D où la dissipation linéaire est négligée. L'équation 5.4 peut être résolue en utilisant le formalisme de Preisach-Mayergoyz (PM). En l'occurrence, le modèle de PM permet de calculer le terme $\frac{\partial \bar{\sigma}_h}{\partial S}$, traduisant le comportement hystérétique. Dans le cas d'ondes de rotation, cette équation est aussi valable. Il est possible de réécrire cette expression en faisant intervenir des grandeurs plus appropriées aux ondes de rotation. La déformation est remplacée par la vitesse angulaire, les deux grandeurs étant proportionnelles ($v = -c_0 s$) lorsque la dispersion de vitesse est négligée.

L'équation d'évolution valable pour les ondes de rotation s'écrit donc,

$$\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{M}_h}{\partial \bar{\theta}_v} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \tau_0} = 0, \quad (5.5)$$

où $\bar{\theta}_v = v/v_0$ est la vitesse angulaire particulière normalisée (v_0 est l'amplitude de la vitesse de la première phase émise), $\xi = z/z_{nl}$ est la distance normalisée, $z_{nl} = 2c_0 t_0 / (hS_0)$ et \bar{M}_h est la partie hystérétique du moment normalisé, de la relation constitutive moment-angle de rotation. Ici $\tau_0 = (t - z/c_0) / t_0$ où t_0 est la durée de la première phase du signal émis. Généralement, cette équation aux dérivées partielles est mise sous une forme équivalente afin de simplifier la résolution. L'équation

(5.4) peut être réécrite sous la forme d'un système d'équations différentielles équivalent :

$$\frac{dS}{d\xi} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\partial S}{\partial t} > 0, \quad (5.6a)$$

$$\frac{d\tau_0}{d\xi} = -\frac{\partial \bar{\sigma}_h}{\partial S}. \quad (5.6b)$$

Ce système définit les règles d'évolution de la forme d'un signal dans le système de coordonnées normalisées (S, τ) lorsque des incréments $d\xi$ sont effectués, c'est-à-dire lorsque la distance est augmentée ou lorsque l'amplitude d'excitation est augmentée. Par exemple, le décalage horizontal suivant τ est déterminé par $d\tau = -\frac{\partial \bar{\sigma}_h}{\partial S} d\xi$ et $dS = 0$. La valeur à chaque incrément de $\frac{\partial \bar{\sigma}_h}{\partial S}$ est déterminée par le modèle de Preisach-Mayergoyz qui est synthétisé dans la section suivante.

5.3.2 Formalisme mathématique de l'espace de Preisach-Mayergoyz

Le modèle phénoménologique de Preisach-Mayergoyz (noté par la suite PM) a été initialement établi dans le but d'étudier les phénomènes hystérétiques en magnétisme. Ce formalisme part du principe que la contribution non linéaire de la contrainte est la somme de contraintes σ_M d'éléments individuels mécaniques hystérétiques (appelés hystérons) localisés à une position x .

$$\sigma_h(\epsilon(x, \tau)) = \sum_{M \in x} \sigma_M. \quad (5.7)$$

Ici ϵ représente la déformation (notée s précédemment). Ces éléments individuels sont appelés des hystérons et la représentation dans le plan contrainte-déformation d'un hystéron est tracée sur la figure 5.6(a). Le comportement d'un hystéron montre que suivant la valeur de la déformation subie par l'hystéron, son état de contrainte peut prendre deux valeurs différentes. Prenons l'exemple de la situation où le système est dans un état de contrainte initiale σ_1 . Tant que la déformation $\epsilon < \epsilon_2$, l'hystéron reste dans son état initial. Lorsque $\epsilon > \epsilon_2$ l'hystéron évolue instantanément vers l'état de contrainte σ_2 . L'hystéron reste dans cet état σ_2 tant que $\epsilon > \epsilon_1$. Lorsque la déformation diminue et devient inférieure à ϵ_1 , l'état de contrainte passe instantanément à l'état σ_1 . Il est également supposé qu'au point x (localisation d'un volume élémentaire), se trouvent un grand nombre d'hystérons (de dimension supérieure à la distance inter-atomique). La distribution des hystérons généralement notée Ψ se représente dans l'espace PM (ϵ_1, ϵ_2) (figure 5.6(b)). Elle désigne la taille et la position de chaque hystéron dans le plan (ϵ_1, ϵ_2) mais également la préparation du plan PM en terme de contrainte σ_1 et σ_2 pour chaque hystéron. La préparation du milieu est souvent considérée comme symétrique dans le plan PM, c'est-à-dire que le plan est séparé par la diagonale $\epsilon_1 = -\epsilon_2$, avec d'un côté des hystérons tous dans l'état σ_1 et de l'autre tous dans l'état σ_2 . En réalité, cette ligne n'est pas droite mais en forme de marches d'escalier à petite échelle. Ce type de préparation du plan PM est expérimentalement obtenu lorsqu'une onde, initialement de forte amplitude, se propage dans le système avec une diminution d'amplitude lente et continue, jusqu'à extinction. C'est le cas d'une chaîne granulaire de taille finie dans laquelle une impulsion fait des allers-retours nombreux et finit par s'atténuer complètement.

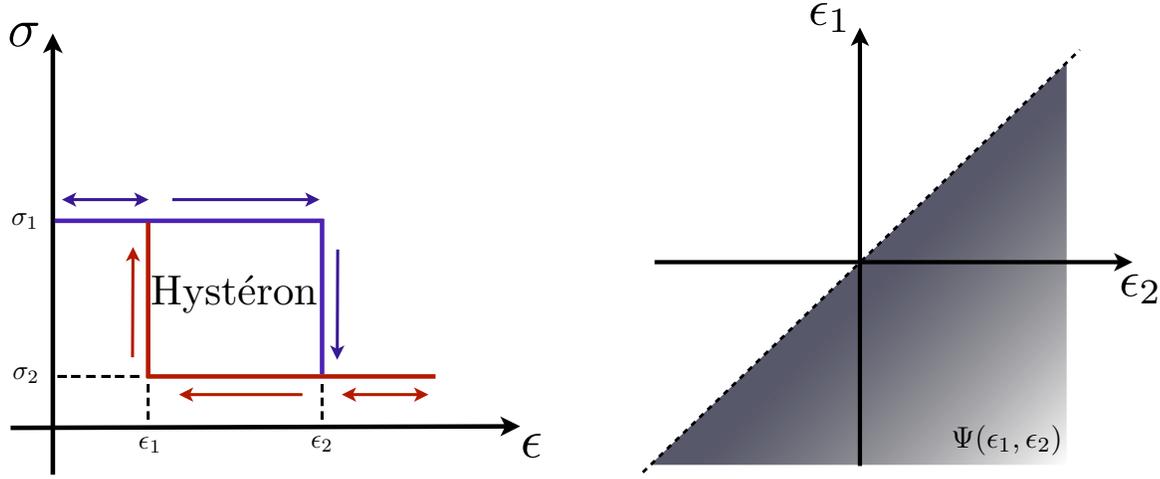


FIGURE 5.6 – (a) Caractéristique hystérétique d'un élément individuel (hystéron). Cet élément est paramétré par les valeurs ϵ_1 , ϵ_2 et $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$. (b) Exemple d'une distribution d'hystérons $\Psi(\epsilon_1, \epsilon_2)$ dans le plan PM. Dans ce cas, plus on s'éloigne de la diagonale $\epsilon_2 = \epsilon_1$ plus la quantité d'hystéron est faible.

La contribution des hystérons et de leur distribution à la contrainte totale s'écrit comme la somme pondérée dans le demi-plan PM des contributions de chaque élément :

$$\sigma_T = \int_{-\infty}^{\epsilon_2} d\epsilon_1 \int_{\epsilon_1}^{+\infty} \sigma_M(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon) \Psi(\epsilon_1, \epsilon_2) d\epsilon_2. \quad (5.8)$$

Cette relation est équivalente à une relation contrainte-déformation hystérétique. Plus la densité d'hystérons dans le plan PM est importante plus la courbe hystérétique contraintes-déformations obtenue est lisse. Le cas où la distribution d'hystérons Ψ est homogène dans le plan PM est particulièrement intéressant puisqu'il mène à l'hystérésis quadratique (pour lequel une formulation mathématique existe pour la courbe hystérétique formée de deux branches de paraboles). Dans ce cas, le calcul de la contrainte totale σ_T permet, en la dérivant par rapport à ϵ , de déterminer la valeur $\frac{\partial\sigma}{\partial S}$ en fonction de la déformation. Dans le cas présent où la distribution d'hystérons est considérée comme homogène, le module non linéaire hystérétique $\frac{\partial\sigma_h}{\partial S} = -\frac{1}{2}(\epsilon_A \pm \epsilon)$ (\pm selon la valeur de $\frac{\partial\epsilon}{\partial t}$) est toujours négatif. Ce qui signifie que $d\tau_0 > 0$ et correspond à l'étirement de l'onde acoustique lorsque la distance (ou l'amplitude d'excitation) augmente.

Le modèle d'hystérésis de PM permet donc de déterminer la relation contrainte-déformation, et donc le module élastique équivalent, qui peut être substitué dans l'équation d'évolution 5.4. Cette méthode d'obtention du module élastique non linéaire hystérétique est valable pour n'importe quel type de signal d'excitation. Ce modèle peut donc décrire l'évolution d'un signal quelconque en fonction de la distance. Le profil initial expérimental est approximé d'une certaine manière tel que décrit dans la section suivante et le modèle de Preisach-Mayergoyz est appliqué au signal approximé afin de décrire son évolution. La non-linéarité hystérétique quadratique est considérée (distribution Ψ homogène) puisque le chapitre précédent a montré que le contact est bien décrit par cet hystérésis quadratique.

5.3.3 Système d'équations différentielles adapté au signal d'excitation expérimental

Cette section expose le système d'équations différentielles adapté au signal d'excitation expérimental et décrivant sa distorsion en fonction de ξ . Ce système décrit concrètement l'évolution du signal en fonction de la distance ou de l'amplitude (équivalent en coordonnées normalisées). Il est ensuite résolu numériquement et comparé aux résultats expérimentaux.

Le signal d'excitation expérimental est tout d'abord approximé afin de simplifier le modèle et son implémentation numérique, mais il faut noter que la simulation du signal réel est en principe réalisable. Chaque portion du signal expérimental est évaluée par des segments reliant les passages par zéro et les extremums du signal de vitesse de rotation. Cette approximation est présentée sur la figure 5.7. La vitesse angulaire particulière θ_v à la première bille est représentée en fonction du temps normalisé τ . Les grandeurs T_n représentent les positions des points 0 de la phase n , S_n sont les amplitudes de chaque extremum de la phase n , et τ_n sont les abscisses des extremums n . Ces valeurs sont normalisées afin que la durée de la première phase et l'amplitude du premier maximum soit égales à 1, soit $T_1 = 1$ et $S_1 = 1$. L'équation d'évolution de ce profil, déjà présentée précédemment, prend la forme :

$$\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{M}_h}{\partial \bar{\theta}_v} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial \tau_0} = 0. \quad (5.9)$$

Cette équation aux dérivées partielles est modifiée, comme précédemment, en un système d'équations différentielles adapté au signal approximé (fig. 5.7), mais suffisamment général pour être capable de traiter n'importe quel signal composé de segments reliant zéros et extremums. Le terme $\frac{\partial \bar{M}_h}{\partial \bar{\theta}_v}$ incluant la non-linéarité hystérétique quadratique est déterminé analytiquement par le modèle de Preisach-Mayergoyz. Il a été montré précédemment que l'hystérésis quadratique, justifiée par les observations de contact en torsion, correspond à une distribution homogène des hystérons. C'est la première hypothèse importante utilisée. La deuxième hypothèse est la préparation symétrique du plan PM, qui est supposée être produite expérimentalement par l'excitation impulsionnelle menant à une onde faisant des allers-retours dans la chaîne, et dont l'amplitude décroît lentement jusqu'à extinction.

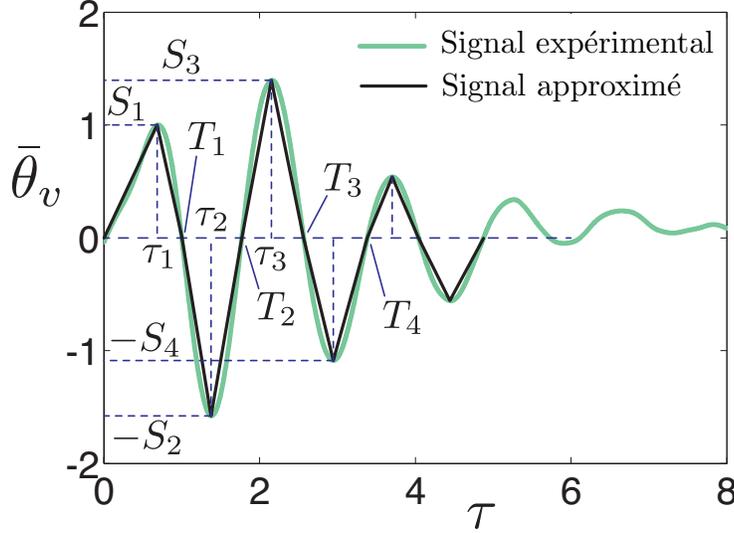


FIGURE 5.7 – Vitesse angulaire expérimentale $\theta_v = v/v_0$ à la première bille pour une très faible amplitude d'excitation et son approximation par segments. v_0 est la valeur de vitesse du premier maximum. T_n sont les positions des zéros en temps (τ), normalisé par $t_0 = 5,77$ ms pour que $T_1 = 1$. τ_n sont les abscisses des extremums et S_n sont les amplitudes des extremums normalisées.

Afin de déterminer le système d'équations différentielles équivalent à 5.9, chaque segment permet d'estimer grâce à l'analyse dans le plan PM (non détaillé ici), le mouvement des points S , T et τ en fonction de l'incrément du paramètre $d\xi$. Le système peut être mis sous la forme générale :

$$dT_n = \frac{S_n}{2} d\xi, \quad (5.10a)$$

$$d\tau_n = \frac{T_n - \tau_n}{T_n - T_{n-1}} A_n d\xi, \quad (5.10b)$$

$$dS_n = -\frac{A_n S_n}{T_n - T_{n-1}} d\xi, \quad (5.10c)$$

où $A_n = S_n$ si $S_n > S_{n-1}$ et $A_n = (S_n + S_{n-1})/2$ si $S_n < S_{n-1}$. Ce système 5.10 décrit respectivement les petits décalages des positions temporelles des zéros du signal (dT_n) et des extremums ($d\tau_n$) lors d'un faible changement $d\xi$ (soit par un changement d'amplitude d'excitation soit par un changement de distance). En augmentant pas à pas l'amplitude ξ , ce système permet de décrire la distorsion par la non-linéarité hystérétique du signal approximé par des segments. Il est intéressant de noter que l'évolution des paramètres de la phase n du signal dépend en général uniquement des phases n et $n - 1$ mais pas des phases précédentes ni suivantes. La modulation de l'amplitude du paquet d'onde a pour effet une modulation de la durée des phases. Un autre point intéressant est que l'atténuation non linéaire d'une phase du signal ne dépend pas seulement de l'amplitude de cette phase ou de la précédente mais également de la durée de la phase.

5.4 Résultats et discussion

Sur la figure 5.8 sont présentés les résultats des simulations et des résultats expérimentaux. Sur la figure 5.8(a) les vitesses angulaires expérimentales à la 1^{ère} bille ($\xi = 0$) et à la 18^{ème} bille pour plusieurs amplitudes d'excitations (et donc pour différentes valeurs de ξ) sont tracées. D'un point de vue qualitatif, les effets d'assouplissement non linéaire du milieu et l'atténuation non linéaire, prédits et déjà observés dans le chapitre précédent, sont également visibles ici. L'étirement temporel du signal montre une diminution de la célérité des ondes de torsion et donc des paramètres élastiques effectifs du milieu. La diminution de l'amplitude du signal normalisé lorsque le niveau d'excitation augmente est due à la dissipation non linéaire. De plus, il est intéressant de noter que toutes les parties du signal ne sont pas atténuées de la même façon. Par exemple, les deuxième et troisième extremums sont beaucoup plus atténués comparativement au premier. Toutes ces observations sont identiques dans la simulation tracée sur la figure 5.8(b) et sont liées à la différence d'amplitude et de durée des différentes phases. En particulier, la durée de la troisième phase décroît en fonction de ξ tandis que la durée de la première phase augmente. Enfin, d'un point de vue qualitatif les durées théoriques et expérimentales des trois premières phases en fonction de ξ présentées sur la figure 5.8(c) sont en bon accord. A ce stade, l'accord quantitatif n'a pas été vérifié, le paramètre de non-linéarité utilisé pour la simulation ayant été ajusté pour obtenir un bon accord qualitatif. Il serait également intéressant de calculer les valeurs du paramètre non linéaire hystérétique théorique et expérimental afin d'avoir une comparaison quantitative pertinente. Une comparaison avec le paramètre hystérétique obtenu via l'expérience en résonance pour un seul contact serait intéressante.

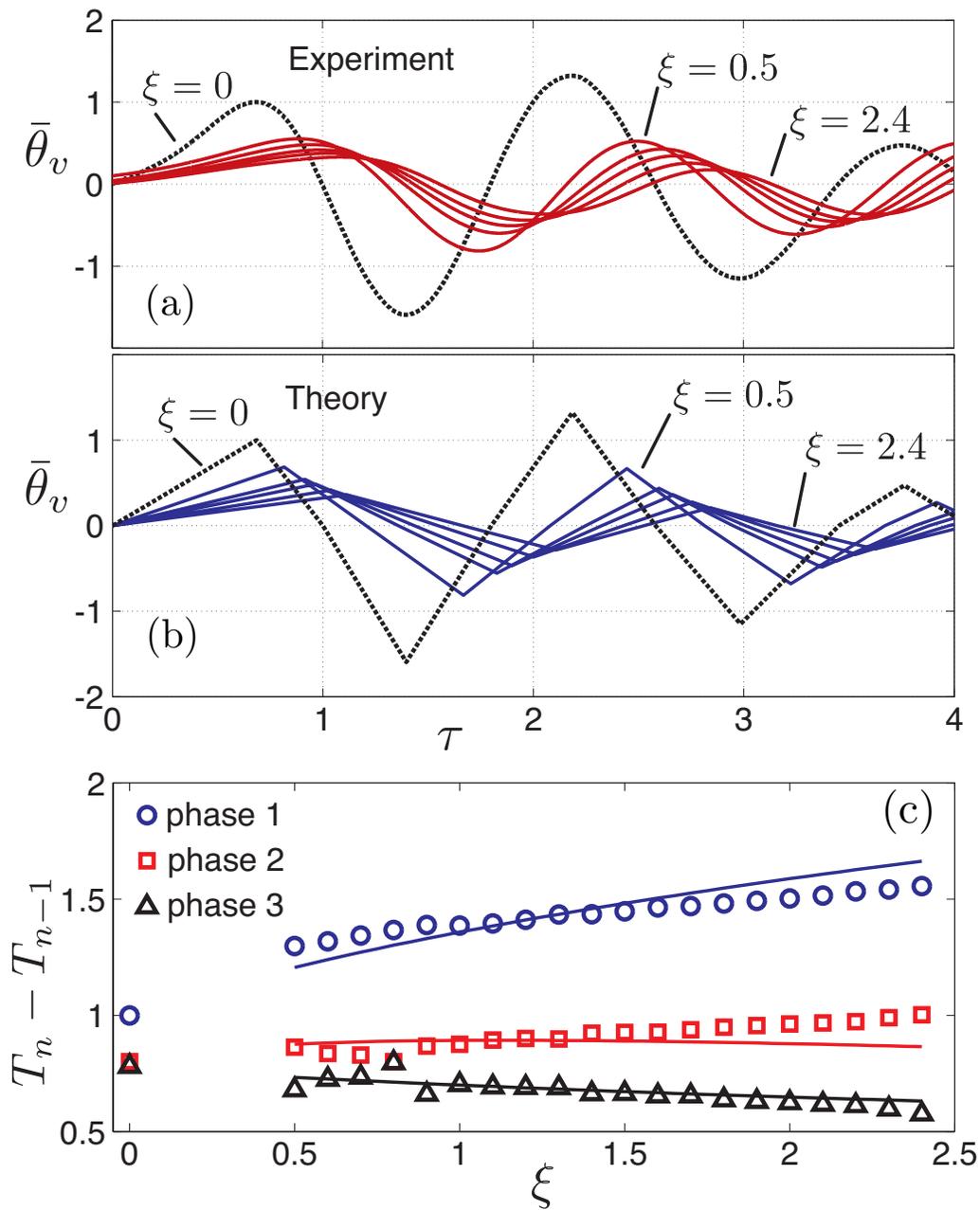


FIGURE 5.8 – (a) Signaux expérimentaux de vitesse angulaire pour différentes valeurs de ξ : à la 1^{ère} bille ($\xi = 0$ en pointillé) et à la 18^{ème} bille pour différentes amplitudes d'excitation ($\xi = 0, 0,5; 1,3; 1,8$ et $2,4$). (b) Signaux théoriques de vitesse angulaire correspondants. (c) Durée des trois premières phases expérimentales (symboles) et théoriques (lignes) en fonction de ξ .

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la propagation acoustique d'ondes de rotation impulsionnelles dans une chaîne granulaire 1D monoatomique a été étudiée expérimentalement et modélisée. Plusieurs manifestations de la non-linéarité hystérétique ont été observées dans différentes configurations, du contact simple à la propagation dans de grandes chaînes. Le contact de torsion considéré dans la cadre de l'étude, en régime faiblement non linéaire, est bien décrit par l'hystérésis quadratique. Pour la première fois, la propagation non linéaire et la distorsion associée à un signal impulsionnel dans un milieu purement hystérétique sont observées. La configuration choisie permet en effet de s'affranchir en première approximation d'autres types de non-linéarités, présentes en général, et masquant les effets de distorsion associés à la non-linéarité hystérétique seule. Les effets observés expérimentalement, associés à la non-linéarité hystérétique pure, sont en accord avec les observations qualitatives du chapitre précédent. En particulier, l'assouplissement du milieu a pour conséquence d'étirer temporellement le signal et la dissipation non linéaire se traduit par l'atténuation de l'amplitude du signal en fonction de la distance (ou de l'amplitude d'excitation).

L'approche théorique, basée sur le formalisme de Preisach-Mayergoyz, a permis de simuler numériquement l'évolution du signal impulsionnel en fonction de la distance (ou de l'amplitude d'excitation). Il est intéressant de constater que l'atténuation non linéaire d'une phase dépend seulement des caractéristiques (amplitude, durée) de cette phase ou de la phase précédente, selon le rapport des extremums de ces deux phases. Il s'agit donc d'un effet mémoire à court terme. Afin de comparer quantitativement les résultats expérimentaux et théoriques, il serait utile de calculer les valeurs du paramètre non linéaire hystérétique dans les deux cas. Cette étape nécessite un ajustement quantitatif des résultats expérimentaux et théoriques qui n'a pas été réalisé à ce jour.

Conclusion générale et perspectives

Ces travaux s'inscrivent dans la continuité des recherches dédiées à la propagation des ondes dans les milieux complexes et plus particulièrement des milieux granulaires unidimensionnels. L'originalité par rapport aux études existantes vient du type d'ondes propagées, il s'agit en l'occurrence d'ondes de rotation principalement. La mécanique du contact entre deux sphères et la propagation (linéaire et non linéaire) des ondes dans une chaîne de billes sont étudiées. Tous les aspects sont abordés : théorique, numérique et expérimental. Concernant ce dernier point, un dispositif expérimental spécifique à l'étude des ondes de rotation dans les structures granulaires a été conçu et développé. Dans un premier temps, le régime linéaire est étudié et les principales propriétés des ondes de rotation sont examinées théoriquement et expérimentalement. La vitesse de propagation de ce type d'onde dans le milieu granulaire considéré, d'environ 20 m/s, ainsi que la fréquence de coupure mesurées montrent un bon accord avec les modèles. Dans un second temps, le régime faiblement non linéaire est traité en se focalisant sur le comportement non linéaire du contact entre deux billes. Il est montré que le comportement du contact de torsion entre deux billes peut être modélisé par une non-linéarité hystérétique quadratique. Finalement, des expériences dans une longue chaîne granulaire sont effectuées permettant ainsi de générer des paquets d'ondes propagatives et de suivre leur évolution. La distorsion de la forme d'onde est étudiée théoriquement et numériquement suivant le modèle phénoménologique de Preisach-Mayergoyz. Ce modèle, prenant en compte la non-linéarité hystérétique quadratique, est confronté aux résultats expérimentaux et montre de bons accords qualitatifs. Ces derniers résultats montrent clairement l'effet de la non-linéarité hystérétique sur l'évolution du signal temporel, qui n'a jamais été observé jusqu'à aujourd'hui (du moins sans la contribution d'autres types de non-linéarité).

Le premier chapitre est consacré d'une part à la description de la mécanique du contact entre deux sphères élastiques et d'autre part à la propagation des ondes de rotation dans une chaînes de sphères identiques. Les relations de type contrainte - déformation et les théories associées qui décrivent le comportement élastique du contact entre deux sphères lorsqu'elles sont sollicitées par des combinaisons de forces et de moments sont rappelées. Une étude théorique plus approfondie a été réalisée sur le comportement mécanique de deux sphères identiques en contact sous l'action d'une force normale et soumises à un moment de torsion oscillant. Elle a permis de mettre en évidence un comportement non linéaire et hystérétique du contact dû à la présence de phénomènes de frottements et de glissement. Une autre théorie est dédiée à la propagation des ondes de rotation dans une chaîne de sphères identiques. Des forces axiales maintiennent les sphères en contact et un moment oscillant de faible amplitude est appliqué sur l'une d'elles. Ce moment provoque un mouvement de rotation des sphères qui se propage

de proche en proche suivant l'axe de la chaîne, cela grâce à la torsion des surfaces de contact entre les sphères. En faisant usage des considérations précédentes sur la mécanique du contact, une équation de propagation non linéaire des ondes de rotation est déduite. Elle prend en considération le comportement non linéaire et hystérétique du contact jusqu'alors ignoré dans la littérature.

Au chapitre 2, l'étude de la propagation des ondes longitudinales dans une chaîne diatomique est abordée de manières théorique et expérimentale. Les effets observés associés aux propriétés dispersives particulières d'un tel cristal ainsi que les non-linéarités sont en bon accord avec modèles développés. Ces résultats expérimentaux sont la preuve de la transmission d'une onde évanescence au second harmonique (dont la fréquence se situe dans la bande interdite du cristal) lorsque celle-ci est forcée par la propagation des sources non linéaires de l'onde fondamentale. Par ailleurs, des effets non linéaires d'auto-action dépendant de la fréquence et du niveau d'excitation ont été observés puis analysés. Ces effets sont de même nature que le décalage fréquentiel non linéaire observé dans les matériaux mésoscopiques (roches, matériaux endommagés, ...). Ils sont associés à l'assouplissement du milieu lorsque l'amplitude d'excitation augmente. Pour un cristal phononique, possédant un coefficient de transmission qui dépend fortement de la fréquence (en particulier aux limites de bandes), un faible décalage fréquentiel (assouplissement) peut mener à de forts effets d'auto-atténuation ou auto-transparence à une fréquence donnée. Autrement dit, les fréquences caractéristiques du filtre phononique changent en fonction de l'amplitude de l'onde. La non-linéarité hystérétique des interactions au contact est la cause de ces effets.

Les trois derniers chapitres sont consacrés à l'étude des ondes de rotation dans une chaîne granulaire composée de billes identiques. Dans un premier temps, un dispositif expérimental a été conçu afin de générer des ondes de rotation pures dans un milieu granulaire unidimensionnel. Des premiers modèles théoriques sur les aspects phononiques ont été développés et ont mis en évidence certaines propriétés des ondes de torsion jusqu'alors inexistantes dans la littérature. En particulier, pour la configuration expérimentale utilisée, il a été observé une célérité des ondes de rotation d'environ 20 m/s et une fréquence de coupure d'environ 300 Hz. Il est intéressant de noter que ces valeurs sont très inférieures à celles observées dans le cas d'ondes longitudinales ou de cisaillement. Les résultats expérimentaux en régime linéaire ont montré un très bon accord avec les modèles théoriques et ont permis de valider la pertinence des modèles. Ces modèles servent donc de base pour aborder des études plus complexes en régime non linéaire.

Pour les premières études en régime non linéaire, une configuration simple de deux billes en contact est utilisée en se focalisant sur les effets hystériques. Pour cela, la méthode des résonances non linéaires est utilisée de manière expérimentale et analytique. Les résultats expérimentaux ont montré un très bon accord qualitatif et quantitatif avec les simulations numériques dans cette configuration de deux billes. Ils ont montré qu'en régime faiblement non linéaire le contact de torsion est bien décrit par l'hystérésis quadratique. Les manifestations de l'hystérésis quadratique sur les résonances non linéaires sont des décalages relatifs de fréquence de résonance et d'inverse de facteur de qualité proportionnels à l'amplitude détectée. Les configurations plus complexes, de trois et trente billes, ont montré des comportements différents. En particulier dans la configuration de trente billes et pour des niveaux acoustiques plus élevés, les expériences ont mené à des résultats qui ne peuvent plus être décrits par le modèle d'hystérésis quadratique. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre en compte les

ordres supérieurs d'approximation de l'hystérésis. De plus, les différences entre les mesures et la théorie impliquant l'hystérésis quadratique peuvent s'expliquer par plusieurs facteurs : influence de la rugosité de surface et l'usure des contacts, nécessité de prendre en compte les termes d'ordre supérieur dans l'approximation de l'hystérésis, influence des harmoniques supérieurs, . . .

Enfin, la propagation d'ondes de rotation impulsionnelles dans une longue chaîne a été étudiée expérimentalement et modélisée. En particulier, la propagation non linéaire et la distorsion associée d'un signal impulsionnel dans un milieu purement hystérétique sont observées expérimentalement. En effet, la configuration choisie (longue chaîne) associée au régime faiblement non linéaire permettent de s'affranchir des autres types de non-linéarité. Les effets observés sont en accord avec les observations qualitatives de l'étude précédente prenant en compte un seul contact. À savoir un assouplissement du milieu, dont les conséquences sont un étirement du signal temporel et la dissipation non linéaire, qui se manifeste par l'atténuation de l'amplitude du signal en fonction de l'amplitude d'excitation (ou de la distance). L'approche théorique, basée sur le formalisme de Preisach-Mayergoyz, a permis de simuler l'évolution du signal impulsionnel en fonction de l'amplitude d'excitation. Il est utile de noter que cette simulation, modélisant l'hystérésis quadratique, a été développée spécifiquement pour le signal d'excitation expérimental. Cela a permis de confronter directement les courbes expérimentales et simulées. Il est également intéressant de noter que l'atténuation non linéaire d'une phase du signal dépend seulement des caractéristiques (amplitude, durée) de cette phase ou de la phase précédente, selon le rapport des extremums de ces deux phases. Il s'agit donc d'un effet mémoire à court terme. De bons accords qualitatifs entre expériences et simulation ont été observés. Cependant une comparaison quantitative, en calculant les valeurs du paramètre non linéaire hystérétique, serait utile mais n'a pas été réalisée à ce jour.

Les résultats en régime linéaire et faiblement non linéaire sont un premier pas vers l'étude de configurations et de phénomènes plus complexes. Pour cela, une amélioration du dispositif expérimental est indispensable. En effet, la configuration actuelle ne permet pas de générer des moments de torsion d'amplitude suffisamment élevée pour étudier le régime fortement non linéaire. Ce dispositif doit être totalement repensé et permettre une utilisation plus efficace.

Ce futur dispositif permettra dans un premier temps de compléter l'étude du comportement mécanique d'un seul contact entre deux billes. En effet, il a été montré qu'un le comportement d'un contact seul en torsion peut être approximé par l'hystérésis quadratique. Les manifestations de cet hystérésis quadratique sont les résonances non linéaires, la dissipation non linéaire et la génération d'harmoniques impaires ayant une dynamique en amplitude quadratique. Le dispositif actuel, du fait de sa réponse fréquentielle limitée et sa non-linéarité propre, ne permet pas d'étudier la génération d'harmoniques. Il serait donc intéressant d'étudier la génération d'harmoniques dans le cas d'un unique contact afin de valider la pertinence du modèle proposé.

Concernant les mesures de résonances non linéaires, il serait intéressant de faire ces mêmes mesures dans des chaînes de plus grande longueur et étudier la dispersion de la non-linéarité hystérétique [19, 20]. En effet il a été observé des différences de comportement des paramètres non linéaires entre les différentes fréquences de résonance. De plus, la présence de bandes interdites (dispersion forte) joue

un rôle sur les effets non linéaires et inversement.

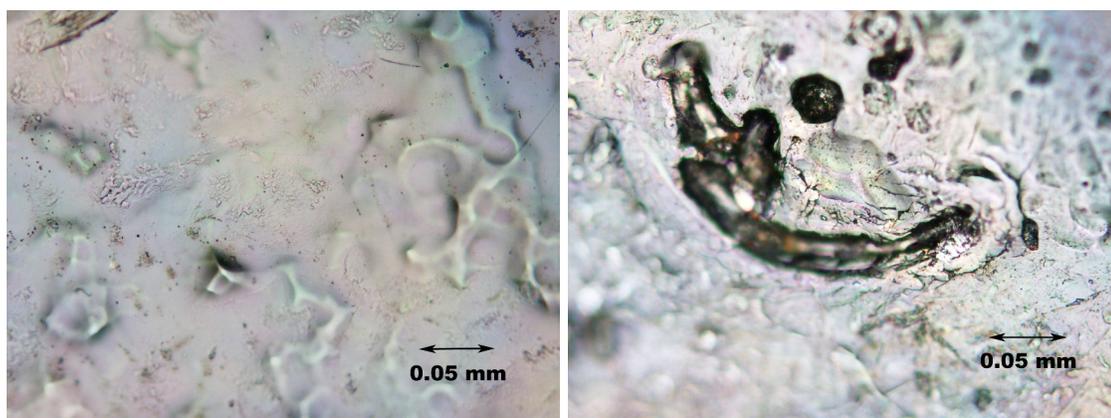
Dans un second temps, il serait utile d'étudier plus précisément la transition entre le régime faiblement et fortement non linéaire. Il a tout d'abord été montré au chapitre 4 que l'hystérésis quadratique permet d'expliquer le comportement en régime faiblement non linéaire. Les dernières mesures de ce chapitre, effectuées pour des niveaux d'excitation plus élevés, montrent une divergence du modèle d'hystérésis quadratique. En particulier, le décalage de fréquence de résonance (linéaire dans le cas d'un hystérésis quadratique) a un comportement quadratique dans le cas de fortes amplitudes d'excitation. Le modèle d'hystérésis quadratique n'est donc plus valable et il est nécessaire d'étendre ce modèle à des degrés supérieurs et ainsi pouvoir le comparer aux expériences.

Le régime propagatif, étudié dans des chaînes granulaires suffisamment longues, permet une grande diversité de configurations et de phénomènes observables. La propagation de paquets d'ondes impulsionnels abordée au chapitre 5 dans une chaîne monoatomique en est un exemple. Le type de signal d'excitation permet également de considérer différents régimes, en adaptant par exemple la distance non linéaire. D'un point de vue théorique, il serait intéressant d'étudier l'influence de la préparation du plan de Preisach-Mayergoyz sur la propagation de signaux impulsionnels [16].

Enfin, toutes les mesures effectuées ont supposé une préparation préalable afin que le milieu soit dans un état stable. En l'occurrence au chapitre 3, l'évolution de la fréquence de résonance pour un système de 2 billes montre que le milieu, et donc le contact, varie jusqu'à un état quasi-stable. La transition entre l'état initial du contact et l'état stable doit être approfondie. Selon nos hypothèses, les facteurs responsables de ce changement d'état sont

- une réorganisation des contacts due au réarrangement des dipôles magnétiques,
- l'influence de la rugosité de surface (aspérités, ponts capillaires, ...),
- l'usure du matériau constituant la couche périphérique des billes.

Une illustration de cette dernière hypothèse est présentée à la figure 5.9. Ces images montrent clairement la présence d'aspérités supplémentaires dues au frottement. De fines particules sont arrachées du fait de la contrainte de cisaillement d'amplitude importante dans la zone d'adhérence. Lors d'expériences avec des billes usées, il a été noté une divergence du modèle hystérétique quadratique proposé. Dans ce cas, le décalage de fréquence n'était plus linéaire mais parabolique. L'usure des billes tend donc à ajouter des non-linéarités supplémentaires. Connaître l'état d'usure de la surface des billes est donc essentiel pour l'analyse des effets non linéaires.



(a) Avant expérience

(b) Après expérience

FIGURE 5.9 – Images de la surface de contact d'une bille avant expérience (a) et après expérience (b). Le rayon de la surface de contact est estimé à environ 0,13 mm.

Bibliographie

- [1] K. Abeele and F. Windels. Characterization and imaging of microdamage using nonlinear resonance ultrasound spectroscopy (nrus) : An analytical model. In PierPaolo Delsanto, editor, *Universality of Nonclassical Nonlinearity*, pages 369–388. Springer New York, 2006.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York, ninth dover printing, tenth gpo printing edition, 1964.
- [3] V. Aleshin, V. Gusev, and V. Y. Zaitsev. Propagation of acoustics waves of nonsimplex form in a material with hysteretic quadratic nonlinearity : analysis and numerical simulations. *Journal of Computational Acoustics*, 12(3) :319 – 354, 2004.
- [4] N. Boechler, G. Theocharis, S. Job, P. G. Kevrekidis, M. A. Porter, and C. Daraio. Discrete breathers in one-dimensional diatomic granular crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 104(24) :244302, Jun 2010.
- [5] L. Brillouin and M. Parodi. *Propagation des ondes acoustiques dans les milieux périodiques*. Masson, 1956.
- [6] H.-J. Butt and M. Kappl. *Surface and interfacial forces*. Wiley-VCH, 2010.
- [7] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [8] C. Coste, E. Falcon, and S. Fauve. Solitary waves in a chain of beads under hertz contact. *Phys. Rev. E*, 56(5) :6104–6117, Nov 1997.
- [9] C. Coste and B. Gilles. On the validity of hertz contact law for granular material acoustics. *Eur. Phys. J. B*, 7 :155–168, 1999.
- [10] C. Daraio, V. F. Nesterenko, E. B. Herbold, and S. Jin. Energy trapping and shock disintegration in a composite granular medium. *Phys. Rev. Lett.*, 96(5) :058002, Feb 2006.
- [11] M. de Billy. Experimental study of sound propagation in a chain of spherical beads. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 108(4) :1486–1495, 2000.
- [12] M. de Billy. Frequency analysis of the acoustic signal transmitted through a one-dimensional chain of metallic spheres. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(2) :710–716, 2001.
- [13] H. Deresiewicz. Contact of elastic spheres under an oscillating torsional couple. *J. of Appl. Mech.*, 21 :52–56, 1954.
- [14] E. Dintwa, E. Tijskens, and H. Ramon. On the accuracy of the hertz model to describe the normal contact of soft elastic spheres. *Granular Matter*, 10 :209–221, 2008. 10.1007/s10035-007-0078-7.

- [15] V. Gusev. Propagation of acoustic pulses in material with hysteretic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(6) :3047–3058, 2000.
- [16] V. Gusev. Propagation of acoustic pulses in a medium with hysteretic nonlinearity prepared by preloading. *Acta Acustica United with Acustica*, 89(3) :445–450, 2003.
- [17] V. Gusev. On the interaction of the counter-propagating acoustic waves in resonant rods composed of material with hysteretic quadratic nonlinearity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117 :1850–1857, 2005.
- [18] V. Gusev, C. Glorieux, W. Lauriks, and J. Thoen. Nonlinear bulk and surface shear acoustic waves in materials with hysteresis and end-point memory. *Physics Letters A*, 232(1-2) :77 – 86, 1997.
- [19] V. Gusev, W. Lauriks, and J. Thoen. Dispersion of nonlinearity, nonlinear dispersion, and absorption of sound in micro-inhomogeneous materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 103(6) :3216–3226, 1998.
- [20] V. Gusev and V. Tournat. Amplitude and frequency-dependent nonlinearities in the presence of thermally-induced transitions in the preisach model of acoustic hysteresis. *Phys. Rev. B*, 72 :054104, Aug 2005.
- [21] R. A. Guyer and P. Johnson. Nonlinear mesoscopic elasticity : Evidence for a new class of materials. *Phys. Today*, 52 :30–36, 1999.
- [22] R. A. Guyer, K. R. McCall, and G. N. Boitnott. Hysteresis, discrete memory and nonlinear wave propagation in rock : a new paradigm. *Phys. Rev. Lett.*, 74(17) :3491–3494, 1995.
- [23] M. F. Hamilton and D. T. Blackstock. *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, 1998.
- [24] H. Hertz. On the contact of rigid elastic solids and on hardness. *J. Reine Angew. Math.*, 92, 1882.
- [25] A.-C. Hladky-Hennion and M. de Billy. Experimental validation of band gaps and localization in a one-dimensional diatomic phononic crystal. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122 :2594, 2007.
- [26] D. J. Holcomb. Memory, relaxation, and microfracturing in dilatant rock. *J. Geophys. Res.*, 86(B7) :6235–6248, 1981.
- [27] J. Hong, J.-Y. Ji, and H. Kim. Power laws in nonlinear granular chain under gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 82(15) :3058–3061, Apr 1999.
- [28] C. Inserra, V. Tournat, and V. Gusev. Characterization of granular compaction by nonlinear acoustic resonance method. *App. Phys Lett*, 92, 2008.
- [29] X. Jia, T. Brunet, and J. Laurent. Elastic weakening of a dense granular pack by acoustic fluidization : Slipping, compaction, and aging. *Phys. Rev. E*, 84 :020301, Aug 2011.
- [30] S. Job, F. Melo, A. Sokolow, and S. Sen. How hertzian solitary waves interact with boundaries in a 1d granular medium. *Phys. Rev. Lett.*, 94(17) :178002, May 2005.
- [31] S. Job, F. Santibanez, F. Tapia, and F. Melo. Nonlinear waves in dry and wet hertzian granular chains. *Ultrasonics*, 48(6-7) :506–514, 2008.
- [32] K. L. Johnson. Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 230(1183) :531–548, 1955.

- [33] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [34] P. Johnson and X. Jia. Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering. *Nature*, 437 :871 – 874, 2005.
- [35] P. Johnson and A. Sutin. Slow dynamics and anomalous nonlinear fast dynamics in diverse solids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(1) :124–130, 2005.
- [36] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley, 2005.
- [37] S. Y. Krylov, K. B. Jinesh, H. Valk, M. Dienwiebel, and J. W. M. Frenken. Thermally induced suppression of friction at the atomic scale. *Phys. Rev. E*, 71 :065101, Jun 2005.
- [38] J. B. Legland, V. Tournat, O. Dazel, A. Novak, and V. Gusev. Linear and nonlinear biot waves in a noncohesive granular medium slab : transfer function, self-action, second harmonic generation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(6) :4292–4303, 2012.
- [39] B. Liang, X. S. Guo, J. Tu, D. Zhang, and J. C. Cheng. An acoustic rectifier. *Natural Mat.*, pages 1–4, 2010.
- [40] J. L. Lubkin. The torsion of elastic spheres in contact. *J. of Appl. Mech.*, 18 :183–187, 1951.
- [41] I. D. Mayergoyz. Mathematical models of hysteresis. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :1518–1521, Apr 1986.
- [42] K. R. McCall and R. A. Guyer. Equation of state and wave propagation in hysteretic nonlinear elastic materials. *J. Geophys. Res.*, 99 :23887–23897, 1994.
- [43] A. Merkel, V. Tournat, and V. Gusev. Experimental evidence of rotational elastic waves in granular phononic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 107(22) :225502, 2011.
- [44] R. D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *J. of Appl. Mech.*, 71 :259–268, 1949.
- [45] R. D. Mindlin and H. Deresiewicz. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. of Appl. Mech.*, 20 :327–344, Sep 1953.
- [46] R. D. Mindlin, W. P. Mason, J. F. Osmer, and H. Deresiewicz. Effects of an oscillating tangential force on the contact surfaces of elastic spheres. *Proceedings of the 1st US National Congress of Applied Mechanics*, page 203, 1952.
- [47] R. K. Narisetti, M. Ruzzene, and M. J. Leamy. Study of wave propagation in strongly nonlinear periodic lattices using a harmonic balance approach. *Wave Motion*, 49(2) :394 – 410, 2012.
- [48] V. Nazarov. Nonlinear acoustic effects in annealed copper. *English transl. : Sov. Phys Acoust.*, 37 :75–78, 1991.
- [49] V. Nazarov, L. Ostrovsky, I. Soustova, and A. M. Sutin. Nonlinear acoustics of microinhomogeneous media. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 50 :65–73, 1988.
- [50] V. F. Nesterenko. Propagation of nonlinear compression pulses in granular media. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 5(733), 1984.
- [51] V. F. Nesterenko. *Dynamics of Heterogeneous Materials*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [52] V. F. Nesterenko, C. Daraio, E. B. Herbold, and S. Jin. Anomalous wave reflection at the interface of two strongly nonlinear granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 95(15) :158702, Oct 2005.

- [53] A. Novak, M. Bentahar, V. Tournat, R. El Guerjouma, and L. Simon. Nonlinear acoustic characterization of micro-damaged materials through higher harmonic resonance analysis. *NDT&E International*, 45 :1–8, 2012.
- [54] A. Novak, L. Simon, F. Kadlec, and P. Lotton. Nonlinear system identification using exponential swept-sine signal. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 59(8) :2220–2229, 2010.
- [55] B. K. Novikov, O. V. Rudenko, and V. I. Timochenko. *Nonlinear underwater acoustics*. ASA, New York, 1987.
- [56] J.-P. Pérez, R. Carles, and R. Fleckinger. *Electromagnétisme : Fondements et applications*. Dunod, 4ème edition, 2002.
- [57] H. Pichard, A. Duclos, J-P. Groby, V. Tournat, and V. Gusev. Two-dimensional discrete granular phononic crystal for shear wave control. *Phys. Rev. B*, 86 :134307, Oct 2012.
- [58] L. Ponsou, N. Boechler, Y. M. Lai, M. A. Porter, P. G. Kevrekidis, and C. Daraio. Nonlinear waves in disordered diatomic granular chains. *Phys. Rev. E*, 82(2) :021301, Aug 2010.
- [59] V. L. Popov. *Contact Mechanics and friction*. Springer, 2010.
- [60] O. V. Rudenko and S. I. Soluyan. *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*. Consultants Bureau, New York, 1977.
- [61] S. Sen, M. Manciu, R. S. Sinkovits, and R. S. Hurd. Nonlinear acoustics in granular assemblies. *Granular Matter*, 3(1) :33–39, 2001.
- [62] F. J. Sierra-Valdez, F. Pacheco-Vázquez, O. Carvente, F. Malloggi, J. Cruz-Damas, R. Rechtman, and J. C. Ruiz-Suárez. Acoustic gaps in a chain of magnetic spheres. *Phys. Rev. E*, 81(1) :011301, Jan 2010.
- [63] R. S. Sinkovits and S. Sen. Nonlinear dynamics in granular columns. *Phys. Rev. Lett.*, 74(14) :2686–2689, Apr 1995.
- [64] G. Theocharis, N. Boechler, P. G. Kevrekidis, S. Job, M. A. Porter, and C. Daraio. Intrinsic energy localization through discrete gap breathers in one-dimensional diatomic granular crystals. *Phys. Rev. E*, 82(5) :056604, Nov 2010.
- [65] V. Tournat and V. Gusev. Acoustics of unconsolidated "model" granular media : An overview of recent results and several open problems. *Acta Acustica United with Acustica*, 96 :208–224, 2010.
- [66] V. Tournat, V. Gusev, and B. Castagnède. Self-demodulation of elastic waves in a one-dimensional granular chain. *Phys. Rev. E*, 70(5) :056603, Nov 2004.
- [67] V. Tournat, I. Pérez-Arjona, A. Merkel, V. Sanchez-Morcillo, and V. Gusev. Elastic waves in phononic monolayer granular membranes. *New J. Phys.*, 13(073042), 2011.
- [68] V. Tournat, V. Yu. Zaitsev, V. Gusev, V. Nazarov, P. Béquin, and B. Castagnède. Probing weak forces in granular media through nonlinear dynamic dilatancy : clapping contacts and polarization anisotropy. *Phys. Rev. Lett.*, 92(085502), 2004.
- [69] B. P. Wolfson. A vibration problem of engineering structures with periodic structure. *International Applied Mechanics*, 6 :632–638, 1970.

-
- [70] J. J. Xiao, K. Yakubo, and K. W. Yu. Harmonic vibrational excitations in graded elastic networks : Transition from phonons to gradons. *Phys. Rev. B*, 73 :054201, Feb 2006.
- [71] V. Y. Zaitsev. Nonideally packed granular media : Numerical modeling of elastic nonlinear properties. *Acoustical Physics*, 40(3) :385–391, 1995.
- [72] V. Y. Zaitsev, V. Gusev, and B. Castagnède. Thermoelastic mechanism for logarithmic slow dynamics and memory in elastic wave interaction with individual cracks. *Phys. Rev. Lett.*, 90(7) :075501, 2003.
- [73] V. Y. Zaitsev and L. A. Matveev. Giant strain-sensitivity of acoustic energy dissipation in solids containing dry and saturated cracks with wavy interfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, 131(1) :1–12, 2012.
- [74] V. Y. Zaitsev and P. Sas. Nonlinear response of a weakly damaged metal sample : a dissipative mechanism of vibro-acoustic interaction. *J. Vib. Control*, 6 :803–822, 2000.

THÈSE DE DOCTORAT

Jérémy Cabaret

Propagation acoustique non linéaire dans des chaînes granulaires magnétiques
Ondes de rotation et effets phononiques

Nonlinear acoustic propagation in magnetic granular chains
Torsional waves and phononic processes

Résumé

Ce travail de recherche est une contribution à l'étude de la propagation d'ondes élastiques dans les milieux granulaires. L'objectif principal est d'analyser deux aspects particuliers qui influencent la propagation, d'une part le degré de liberté en rotation des grains et d'autre part les non-linéarités de contact. Dans le cadre de ce travail, des structures granulaires périodiques et unidimensionnelles sont étudiées.

L'apport principal de ce travail est la mise en évidence expérimentale et la modélisation d'ondes de rotation pures dans une chaîne granulaire composée de billes magnétiques. Le point de départ de la modélisation est la description du contact en torsion entre deux sphères jusqu'au premier ordre de non-linéarité. Pour un moment de torsion oscillant, il est montré un comportement de type purement hystérétique quadratique. Généralement, cette non-linéarité coexiste avec d'autres types de non-linéarités (quadratique, clappement, ...) et certains de ses effets n'ont jamais été observés. Pour la première fois, la distorsion d'ondes impulsives par une non-linéarité hystérétique est mise en évidence et modélisée.

D'autres effets liés à la dispersion et aux non-linéarités de contact dans une chaîne diatomique sont étudiés théoriquement et expérimentalement. En particulier, la génération de l'harmonique 2 des ondes de compression présente une richesse intéressante selon leur caractère propagatif, fortement dispersif ou évanescent.

Outre les apports fondamentaux, les résultats obtenus peuvent trouver des applications dans le domaine du contrôle des ondes : filtres acoustiques dépendant de l'amplitude, convertisseurs de fréquences, rectificateurs et diodes acoustiques, ...

Mots clés

Acoustique non linéaire, milieu granulaire, ondes de rotation, cristal phononique

Abstract

This research is a contribution to the study of the propagation of elastic waves in granular media. The main purpose is to analyze two particular aspects that influence the propagation, first the rotation motion of grain and other nonlinearities of contact. As part of this work, the periodic one-dimensional granular structure is studied.

The main contribution of this work is the experimental demonstration and modeling purely rotational wave in a granular chain composed of magnetic beads. The starting point of modeling is the description of the pure shear coupling at the contact between two spheres excited in torsion up to the first order of nonlinearity. For an oscillating torque, pure nonlinear quadratic hysteretic behaviour is shown. Generally, this nonlinearity coexists with other types of nonlinearities (quadratic, clapping, ...) and some of its effects have not been observed. For the first time, the transformation of pulse profile in a medium with pure hysteretic quadratic nonlinearity, essentially different from the distortion by classical nonlinearities, is reported.

Other effects related to the dispersion and nonlinearity of contact in a diatomic chain are studied theoretically and experimentally. In particular, the generation of the 2nd harmonic wave compression presents an interesting behaviour according to their propagating nature, highly dispersive or evanescent.

Apart from the fundamental interests, the results may find applications in the field of wave control : amplitude dependent filtering devices, rectifiers, actuating devices, acoustic diodes, ...

Key Words

Nonlinear acoustics, granular media, rotational wave, phononic crystal