



Modélisation de surfaces océaniques à l'aide de groupes de vagues

Zakaria Belemaalem

► To cite this version:

Zakaria Belemaalem. Modélisation de surfaces océaniques à l'aide de groupes de vagues. Complexité [cs.CC]. Université Européenne de Bretagne; Ecole Nationale d'Ingénieurs de Brest; Lab-STICC, 2011. Français. NNT : . tel-01260576

HAL Id: tel-01260576

<https://theses.hal.science/tel-01260576>

Submitted on 22 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

UNIVERSITÉ EUROPÉENNE DE BRETAGNE

— Mémoire de thèse —

Spécialité : Mathématiques appliquées

Modélisation de surfaces océaniques à l'aide de
groupes de vagues

ZAKARIA BELEMAALEM

Directeurs de thèse : Jacques TISSEAU & Marc PARENTHOËN

Soutenue publiquement le 22 Mars 2011 devant la commission d'examen :

Charles-Antoine	GUÉRIN	Rapporteur
Jean	TOURNADRE	Rapporteur
Olivier	KIMMOUN	Examineur
René	GARELLO	Examineur
Jacques	TISSEAU	Directeur de thèse
Marc	PARENTHOËN	Co-encadrant

Modélisation de surfaces océaniques à l'aide de groupes de vagues

Mémoire de thèse

ZAKARIA BELEMAALEM

Laboratoire d'Informatique des SYstèmes Complexes EA 3883 UBO-ENIB

ZAKARIA BELEMAALEM

e-mail : belemaalem@enib.fr

url : <http://www.cerv.fr/~belemaalem>

tel : +33 (0)2 98 05 89 77



École Nationale d'Ingénieurs de Brest (ENIB)

Technopôle Brest-Iroise
Parvis Blaise Pascal
C.S. 73862 F-29208 Brest Cedex
([http ://www.enib.fr](http://www.enib.fr))



Centre Européen de Réalité Virtuelle (CERV)

Technopôle Brest-Iroise
25, rue Claude Chappe
BP 38 F-29280 Plouzané
([http ://www.cerv.fr](http://www.cerv.fr))



Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement tout d'abord mon directeur de thèse, M. Jacques Tisseau, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de diriger cette thèse. Ses conseils, son expérience et ses qualités humaines m'ont beaucoup apporté tout le long de ces années.

Je remercie mon Co-encadrant M. Marc Parenthöen pour ses conseils et ses qualités humaines qui ont permis un très bon déroulement de ma thèse dans un climat amical.

Je voudrais également témoigner de ma reconnaissance à M. Pascal Redou. J'ai été particulièrement touché par sa gentillesse, l'intérêt qu'il a pu porter à mes travaux et ses blagues aussi "La Dawane hein!".

Je suis infiniment reconnaissant à l'excellente et très fructueuse collaboration avec M. Bertrand Chapron et pour toutes les discussions stimulantes et inspirantes que nous avons pu avoir ; elles ont guidé une bonne partie de mon travail tout en me laissant une entière liberté quant à sa réalisation. Ce travail n'aurait certainement pas pu être mené à son terme sans cette collaboration.

Je suis très reconnaissant à M. Charles-Antoine Guérin et M. Jean Tournadre d'avoir accepté le rôle de rapporteur. Je suis vraiment reconnaissant de l'attention que vous avez portée à ma thèse. Je vous remercie infiniment pour vos lectures et re-lectures critiques qui ont permis d'améliorer le manuscrit de thèse sur de nombreux points.

Je remercie très sincèrement M. René Garelo de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être le président de mon jury de thèse.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à M. Olivier Kimmoun d'avoir accepté de participer à ce jury.

Il me faut aussi revenir sur le financement de la thèse, et remercier La région Bretagne et la BMO (Brest Métropole Océane) qui ont financé cette thèse. J'aimerais

également adresser un remerciement spécial à tout mes amis : Maurice, Jeremy, Manuel, Cyrille, Goulven, Morgane et Sylvain. Un remerciement spécial aussi à mes chers collègues : Kristen, Fabrice, Girec et Goby ainsi que tout les membres du CERV.

Je me retourne enfin vers ma famille pour lui adresser un grand merci. Et le plus chaleureux des mercis à ma merveilleuse Margot qui m'a soutenu, supporter et réconforté ces dernières années.

L'emploi de "nous", dans la suite de ce document, permet de m'associer à toutes ces personnes qui ont contribué de près ou de loin aux résultats durant ces années de thèse. Je demande enfin à toutes les personnes sollicitées dans le cadre de ce travail de trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je conclurai par une dédicace à la mémoire de mon père qui nous à quitté il y'a plus de deux ans maintenant. Tu resteras à jamais dans mon cœur.

Table des matières

Remerciements	iii
Table des matières	v
Table des figures	vii
Introduction	1
1 Description de surfaces océaniques	5
1.1 Introduction	5
1.2 Description de la surface de la mer	5
1.2.1 Spectre de la mer	6
1.2.2 La distribution des pentes	7
1.3 Simulation de la surface océanique	11
1.3.1 Modèles basés sur la mécanique des fluides	11
1.3.2 Modélisation spectrale	13
1.3.3 Modèle “Choppy wave”	14
1.3.4 Modèle IPAS	16
1.3.5 Synthèse comparative	17
1.4 Problématiques et proposition	17
1.4.1 Choix de groupe de vagues	18
1.4.2 Choix de distribution	19
1.5 Conclusion	20
2 Outils mathématiques pour la génération de surfaces aléatoires	23
2.1 Introduction	23
2.2 Modélisation du champ aléatoire	23
2.3 Hauteurs	26
2.4 Spectre	28
2.5 Les pentes	31

2.6	Génération des surfaces sous contraintes	32
2.7	Conclusion	34
3	Modèle “Groupy Wave” (GWM)	37
3.1	Introduction	37
3.2	Groupes de vagues en polaire	38
3.2.1	Distribution déterministe	38
3.2.2	Distribution stochastique	43
3.3	Groupes de vagues en quadratures	49
3.3.1	Description statistique des surfaces 2D	50
3.3.2	Description statistique des surfaces 3D	53
3.4	Conclusion	58
4	Modèle “Groupy-Choppy Wave” (GCWM)	59
4.1	Introduction	59
4.2	Hauteurs	61
4.3	Pentes	63
4.4	Calcul du spectre habillé	65
4.5	Points de rebroussement	69
4.6	Simulation du GCWM	70
4.6.1	Surfaces figées	70
4.6.2	Évolution temporelle	72
4.7	Conclusion	72
	Conclusion	75
4.8	Conclusion	75
4.9	Perspectives	77
	Publications	79
	Références bibliographiques	119
A	Propriétés générales des processus aléatoires	123
A.1	Propriétés générales des processus Gaussiens	123
A.2	Propriétés générales des processus de Poisson	124
A.3	Espérance, Composition des fonctions génératrices	124
B	Spectre	127
B.1	Spectre habillé 2-D	127
B.2	Spectre habillé 3-D	129
C	Calculs et développements	133
C.1	PDF des pentes 3D	133

Table des figures

1.1	Spectre omnidirectionnel versus nombre d'onde pour différentes vitesses de vent selon le modèle du spectre d'Elfouhaily.	8
1.2	Courbure omnidirectionnelle versus nombre d'onde pour différentes vitesses de vent selon le modèle du spectre d'Elfouhaily.	8
1.3	Fonction d'étalement versus nombre d'onde pour différentes vitesses de vent selon le modèle du spectre d'Elfouhaily.	9
1.4	Simulation d'une surface océanique <i>via</i> une approche Lagrangienne [Enright et al. (2002b)]	13
1.5	Simulation d'une surface océanique <i>via</i> une approche Lagrangienne [Mihalef et al. (2004)]	13
1.6	Schéma classique de construction de la surface océanique $\eta(x, y)$ à partir d'un spectre $\Psi(k_x, k_y)$ où $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$ désigne un vecteur d'onde.	14
1.7	Simulation de la surface de l'océan par la méthode de Tessendorf (2001)	15
1.8	Plan d'eau hétérogène peuplé d'entité autonome en interaction (Parenthoën (2004))	16
1.9	Caractéristiques d'un groupe de vagues vu dans le plan vertical. Ici, son vecteur d'onde est $2\pi \text{ rad}/m$, sa position est $\mathbf{r}_n = 2.5m$, ce groupe contient 5 vagues.	17
1.10	Coupe longitudinale de l'ondelette de Morlet.	18
1.11	Coupe longitudinale des composantes réelles (Λ_1) et complexe (Λ_2) de l'ondelette de Morlet.	19
1.12	Coupe longitudinale d'une vague de Gerstner enveloppée	19
1.13	Organisation en nappes indépendantes	20
2.1	Construction de la surface océanique en superposant des nappes	26
2.2	À gauche ($a_n \sim \text{Rayleigh}(1)$, $b_n \sim \text{Gaussian}(0, 0.5)$). À droite ($a_n \sim \text{Rayleigh}(1)$, $b_n = 0$)	27
2.3	À gauche ($a_n \sim \text{Rayleigh}(0.5)$, $b_n \sim \text{Gaussian}(0, 1)$). À droite ($a_n \sim \text{Rayleigh}(0.1)$, $b_n \sim \text{Gaussian}(0, 1)$)	28

2.4	Spectre d'une nappe pour différentes valeurs de l'extension des groupes de vagues	29
2.5	Les densités de probabilités f_a et f_b . À gauche ($Sk_{obs} = 0; Kr_{obs} = 5$). À droite ($Sk_{obs} = 0; Kr_{obs} = 2.1$).	35
2.6	Les densités de probabilités f_a et f_b . À gauche ($Sk_{obs} = 0.2; Kr_{obs} = 5$). À droite ($Sk_{obs} = -0.2; Kr_{obs} = 5$).	35
3.1	Illustration des deux cas possibles de la construction d'une nappe. Avec chevauchement (en haut) et sans chevauchement (en bas)	38
3.2	Variance des pentes d'une nappe versus coefficient du chevauchement .	41
3.3	Distribution des hauteurs suivant des valeurs du chevauchement	42
3.4	Des nappes avec différentes structures mais un spectre identique	46
3.5	Comparaison entre le spectre unidirectionnel d'Elfouhaily en 500 mailles et le spectre du GWM avec $nv = 2$ (à gauche) et $nv = 5$ (à droite)	47
3.6	Comparaison entre le spectre unidirectionnel d'Elfouhaily en 200 mailles et le spectre du GWM avec $nv = 2$ (à gauche) et $nv = 3$ (à droite)	47
3.7	Évolution temporelle d'une coupe de la surface selon GWM (primitives polaires), $dt = 0.1s$	49
4.1	La nouvelle primitive "groupe de vagues"	60
4.2	Comparaison de la PDF des élévations du GCWM avec la distribution Gaussienne pour $U_{10} = 9m.s^{-1}$	63
4.3	Distribution des pentes du modèle Gaussien et du GCWM à un vent de $10 m.s^{-1}$ (Spectre d'Elfouhaily)	64
4.4	À gauche vague avec boucle et à droite vague transformée sans boucle	69
4.5	Comparaisons des structures des états de mer avec $\Omega = 3$	70
4.6	Comparaisons des structures des états de mer avec $\Omega = 2$	71
4.7	Comparaisons des structures des états de mer avec $\Omega = 1.5$	71
4.8	Comparaisons des structures des états de mer pleinement développés ($\Omega = 0.84$)	71
4.9	Comparaison de l'évolution temporelle d'une coupe de la surface générée par GCWM et GWM, $\delta t = 0.1s$	72

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet MODENA¹ [Garello (2008)]. Ce projet concerne le développement d'une plate-forme de modélisation de l'environnement marin observé par des radars aéroportés et satellitaires. Mon laboratoire d'accueil² participe à ce projet en fournissant les méthodes et outils informatiques permettant la simulation d'un tel environnement en réalité virtuelle [Fuchs et Tisseau (2006)].

La réalité virtuelle doit permettre pour simuler un système complexe incluant l'Homme dans la boucle de superposer différents modèles où chacun de ces modèles peut être formalisé de manière variée : équation différentielle, descriptions statistique... voire non formalisé comme l'opérateur humain. Le choix de modélisation adopté au CERV³ conduit à autonomiser des modèles [Tisseau et Harrouet (2003), De loor (2006)] : le modèle est vu comme une entité autonome.

Dans ce contexte, j'ai été en charge d'étudier la modélisation de phénomènes physiques compatibles avec les contraintes de la réalité virtuelle, formalisée soit par des équations différentielles pour la propagation des ondes, soit par des descriptions statistiques pour la surface de mer.

En ce qui concerne les phénomènes de propagation au sein d'un milieu complexe modélisés par des EDPs, l'autonomisation des modèles impose notamment un ordonnancement asynchrone pour les activités des modèles. Par asynchrone, nous considérons ici, que le cycle perception-décision-action d'un processus est une unité indivisible. Ainsi chaque processus perçoit et modifie l'état courant du système avant que le processus suivant ne soit appelé. Par opposition à l'ordonnancement synchrone, il y a une causalité entre les appels successifs même si le temps de la simulation n'a pas évolué. Il faut donc pouvoir proposer des schémas numériques asynchrones pour résoudre ces

¹ MODENA : Modélisation de l'Observation à Distance de l'ENvironnement mAritime

² LISyC : Laboratoire d'informatique des systèmes complexes

³ CERV : Centre Européen de Réalité Virtuelle accueillant diverses équipes du LISyC

EDPs. De tels schémas existent pour les EDO [Kerdélo et al. (2002); Redou et al. (2005)] et pour la diffusion [Redou et al. (2007)]. Nous avons proposé dans cette thèse des schémas asynchrones originaux pour les phénomènes de transport, diffusion et Schrödinger (étalement d'un paquet d'ondes). Je renvoie le lecteur pour plus de détails sur les résultats et l'apport de cette partie de ma thèse à l'article "Solving some Partial Differential Equations within Multi-Interaction Systems" figurant dans la partie "Publications".

La modélisation d'une surface océanique, quant à elle, s'inscrit dans un cadre qui consiste à modéliser une surface océanique et à mettre au point de nouveaux schémas de génération de surfaces aléatoires non seulement rapides mais surtout capables de reproduire les propriétés statistiques des vagues de mer qui sont importantes pour l'observation radar, à savoir : les distributions des hauteurs et des pentes ainsi que la fonction de corrélation des élévations de la surface.

La mer est considérée dans la plupart des modèles comme une surface Gaussienne. Elle est représentée par une superposition d'un grand nombre de vagues indépendantes. Sous cette hypothèse, le spectre (transformée de Fourier de la fonction de corrélation des élévations) définit complètement la statistique du profil de la surface. Cette description simplifiée permet de définir l'élévation en tout point et à tout instant comme une transformée de Fourier de la racine carrée du spectre spatio-temporel de la surface pondérée par une amplitude complexe aléatoire ($e^{i\theta}$ où θ est une phase aléatoire entre 0 et 2π). Cette hypothèse de Gaussianité est assez justifiée lorsque la mer est à l'équilibre (vieille), mais elle est prise en défaut pour les mers jeunes qui perdent ce caractère Gaussien des hauteurs ou des pentes. Ainsi, les statistiques du deuxième ordre (spectre) certes utiles, ne fournissent pour autant aucune information sur les asymétries et les aplatissements dans la distribution des hauteurs ou des pentes.

Ces modèles sont basés sur la superposition linéaire de nappes sinusoïdales. Ces nappes correspondent à la solution analytique d'Euler linéarisée au premier ordre avec une approche eulérienne. Ils sont explicites ($z = f(x, y)$), mais ne tiennent pas compte des mouvements des particules d'eau. Dans la plupart des modèles existants, ces mouvements sont représentés par des vagues trochoïdales établies par Gerstner [Gerstner (1809)] et Rankine [Rankine (1836)]. Ces vagues reposent sur la résolution des équations de Navier-Stokes [Lamb (1932)] linéarisées au premier ordre mais *via* une approche Lagrangienne. Nous parlons dans ce cas de modèles faiblement non-linéaires. Plus particulièrement, avec des hypothèses de faible amplitude, la superposition de ces vagues trochoïdales donne le modèle "*Choppy wave*". Le terme Choppy traduit l'aspect qui cambre les crêtes des vagues. Ces notions ont été initialement introduites par [Fournier et Reeves (1986)] dans le cadre de la simulation de la surface de l'océan en informatique graphique. Il existe de nombreux modèles des simulations des surfaces de la mer utilisant les vagues trochoïdales, citons [Hinsinger et al. (2002a); THON et al. (2000a), etc.]. Il faut attendre 2009, pour qu'une étude océanographique [Nouguier et al. (2009)] détermine les propriétés statistiques du modèle *choppy wave* CWM.

Récemment, un nouveau type de modèle de mer est apparu, issu de l'approche

énactique⁴ : le modèle IPAS (Interactive Phenomenological Animation of the Sea) développé par Marc Parenthoën [Parenthoën et al. (2004); Parenthoën (2004)] qui permet de décrire interactivement et de simuler un plan d'eau hétérogène de plusieurs kilomètres carrés. Cette approche est radicalement différente des approches classiques et n'exige pas d'échantillonner l'espace de calcul pour construire le milieu naturel. Chaque entité, par ses interactions, participe à la création et à la représentation des phénomènes physiques. Récemment Legal et al. (2007) ont participé à la validation du modèle IPAS en montrant expérimentalement sa capacité à simuler des états de mer associés à des spectres directionnels. Ce modèle a été appliqué aussi à l'étude du pilotage automatique des voiliers de compétitions [Guillou et Parenthoën (2007); Guillou (2010)]. C'est l'objet de cette thèse d'étudier les capacités d'IPAS à respecter des contraintes statistiques.

Nous avons donc à notre disposition un ensemble de méthodes pour la modélisation et la simulation des surfaces maritimes. Toutefois, comme nous le verrons dans l'état de l'art, aucune de ces méthodes ne permet de contrôler simultanément le spectre, la *skewness* et la *kurtosis* de la distribution des hauteurs **et** des pentes pour chaque échelle (en direction et en longueur), alors que c'est primordial pour un modèle de mer utilisé pour la rétrodiffusion radar. Ces statistiques peuvent nous informer par exemple si les crêtes ont tendance à être plus grandes que les creux (ou vice-versa). Une autre caractéristique importante qui n'est pas modélisée par des statistiques de second ordre est la taille de la traîne de la densité de probabilité. La présence de longues traînes décrit l'apparition de larges crêtes ou creux dans le champ spatial des élévations ou des pentes.

En alternative aux méthodes classiquement utilisées, nous allons proposer un modèle de peuplement des surfaces maritimes, où l'élévation de la surface océanique est modélisée en tant que superposition aléatoire de formes géométriques localisées : des groupes de vagues à l'instar d'IPAS. La difficulté à surmonter est de construire les élévations avec des contraintes statistiques sur la fonction caractéristique en 1 point (variance, les coefficients d'asymétrie *skewness* et d'aplatissement *kurtosis* des élévations), mais également en 2 points. Celle en 2 points conduit à l'estimation de la fonction de corrélation puis du spectre et des pentes (lorsque l'on fait tendre la distance entre les 2 points vers 0, on obtient alors la fonction caractéristique en 1 point de la pente).

Avant de concevoir un tel modèle, il est nécessaire de répondre aux questions suivantes :

- quelles sont ces formes géométriques ?
- comment les distribuer (en échelle et en espace) ?
- quels vont être les paramètres de ce modèle et surtout comment va-t-on les évaluer et les régler ?

⁴ La modélisation énéactique est une méthodologie constructive pour l'étude des systèmes complexes où le modélisateur est au même niveau que les modèles à travers un système de réalité virtuelle.

Ces questions feront l’objet de notre étude présentée dans ce manuscrit. Une attention particulière sera réservée aux ondelettes de Morlet (en s’inspirant des primitives du modèle IPAS). Les paramètres de ce modèle quant à eux dépendent surtout des contraintes que nous cherchons à respecter (PDF des élévations, PDF des pentes, spectre, *skewness* et *kurtosis*).

Ce mémoire de thèse s’articule ainsi sur cette méthode originale que nous avons développé pour une modélisation dynamique, hétérogène et réaliste de la mer en bonne adéquation aux modèles et observations océanographiques. Ce mémoire est composé en 4 chapitres :

- Nous décrivons dans le premier chapitre les principales méthodes usuelles de simulation des surfaces océaniques. À la fin de cette partie, nous présentons nos problématiques ainsi que la méthode de modélisation que nous défendons.
- Le second chapitre est dédié au calcul et développement de notre méthode de modélisation et simulation des environnements maritimes dans un cadre général.
- Au chapitre 3 nous proposons un modèle que nous appelons “Groupy Wave Model” (GWM) [Belemaalem et al. (2010)] où nous détaillons une étude complète des statistiques du processus des élévations, des pentes et le spectre des élévations. Nous montrons la capacité de notre modèle à générer une mer avec un large éventail de choix de simulations et peu de calculs tout en gardant les mêmes propriétés statistiques.
- Dans le quatrième chapitre, nous proposons un modèle que nous appelons “Groupy Choppy Wave Model” (GCWM). Ce dernier prend en compte les mouvements orbitaux des particules d’eau et est considéré comme un changement de coordonnées horizontales de la surface générée par le modèle “Groupy Wave”. Cette transformation habille le spectre des hauteurs et fait apparaître des points de rebroussement. Une étude complète des statistiques de premier et second ordre du processus des élévations et des pentes est donnée ainsi que celle du spectre “habillé”⁵, où nous présentons une méthode de “déshabillage” ainsi qu’une proposition tenant compte des points de rebroussement.

Avant d’introduire ce travail et de présenter les différents thèmes abordés, il me semble important d’attirer l’attention du lecteur sur une de ses caractéristiques importantes. En effet, notre approche se situe à l’intersection de l’informatique, des mathématiques et de l’océanographie et emprunte des caractéristiques propres à chacune de ces disciplines.

⁵ mot utilisé par les océanographes pour illustrer l’enrichissement du spectre initial par des hautes fréquences [Elfouhaily et al. (1999)]

Chapitre 1

Description de surfaces océaniques

1.1 Introduction

Avant d'entamer le vif du sujet, il me semble utile de rappeler quelques notions de base relatives à la description des surfaces océaniques ainsi que les principales définitions et notations que nous utiliserons dans la suite de ce document.

Ce chapitre est composé des points suivants :

- un rappel sur la description statistique de la surface océanique ;
- un rappel sur les méthodes de simulation ;
- une description de la problématique et la méthode que nous adoptons.

N.B Quelques définitions sont extraites des thèses de [Parenthoën (2004)] et [QUENTIN (2004)]

1.2 Description de la surface de la mer

La surface de la mer peut être étudiée d'une manière déterministe ou statistique. La première catégorie d'approche est utile pour la compréhension des phénomènes physiques, alors que l'approche statistique fournit les outils nécessaires à la théorie électromagnétique de la diffusion. La surface de la mer sera considérée dans ce manuscrit comme un processus aléatoire. On la décrira par des fonctions de densité de probabilité des hauteurs et des pentes et par le spectre des vagues. On centre la suite de cette section à la clarification des définitions de ces propriétés statistiques.

1.2.0 - A Fonction de densité de probabilité PDF

Soit X une variable aléatoire continue. La fonction de densité de probabilité (PDF : *probability density function*) $P(X)$ est définie par :

$P(x)dx$ = probabilité que la variable aléatoire X se trouve entre x et $x + dx$.

Mesure d'une variable aléatoire continue

Le moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de la variable X est défini par :

$$\langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n P(x) dx \quad (1.1)$$

le coefficient d'asymétrie (*skewness*) Sk est défini par :

$$Sk = \kappa_3 / \kappa_2^{3/2} \quad (1.2)$$

où $\kappa_n = \langle (X - \langle X \rangle)^n \rangle$ désigne le cumulants d'ordre n de la variable X .

Ce coefficient caractérise le degré d'asymétrie d'une distribution par rapport à sa moyenne. Il est positif lorsque la queue de la distribution s'étend vers la droite et négatif lorsqu'elle s'étend vers la gauche. La *skewness* d'une distribution gaussienne normale est nulle.

Le coefficient d'aplatissement (*kurtosis*) Kr est défini par :

$$Kr = \kappa_4 / \kappa_2^2 \quad (1.3)$$

Ce paramètre caractérise l'aplatissement de la distribution par rapport à une distribution normale. Une *kurtosis* négative signifie que la distribution est plus "aplatie" qu'une gaussienne normale. Une *kurtosis* positive signifie que la distribution est plus "pointue" qu'une gaussienne.

La *skewness* et la *kurtosis* sont des mesures fréquemment utilisées en océanographie. Un excès ou non de la *skewness* peut nous dire si oui ou non les crêtes ont tendance à être plus grande que les creux (ou vice versa).

1.2.1 Spectre de la mer

On définit le spectre de puissance bidimensionnel (en m^4) de la surface océanique comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation :

$$\Psi(\mathbf{k}) = TF[\rho_0(\mathbf{R})] \quad (1.4)$$

où

- $\rho_0(\mathbf{R}) = \langle \eta(\mathbf{r}).\eta(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \rangle$ où l'opérateur $\langle . \rangle$ désigne ici une moyenne spatiale ;
- $\eta(\mathbf{r})$ désigne l'élévation de la surface océanique par rapport à une surface de référence ;
- $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$ est le vecteur d'onde en $(rad.m^{-1})$.

Parmi les modèles spectraux populaires on trouve les modèles de Bjerkaas et Riedel [Bjerkaas et Riedel (1979)], Donelan and Pierson [Donelan et Pierson (1987)], Apel [Apel (1994)] et Elfouhaily et al. [Elfouhaily et al. (1997)]. Nous utilisons dans toute la suite le spectre proposé par Elfouhaily qui est basé sur de nombreux travaux, ceux de Pierson-Moskowitz [Pierson et Moskowitz (1964)] et l'expérience JONSWAP [Hasselmann et al. (1973)]. Ce spectre se met sous la forme suivante :

$$\Psi(k, \phi) = \frac{S(k)}{2\pi k^4} (1 + \Delta(k) \cos(2\phi)) \quad (1.5)$$

où :

- k est le nombre d'onde de la vague ;
- ϕ l'angle que fait le vecteur d'onde k avec le vecteur vent U ;
- $S(k)$ est appelé courbure omnidirectionnelle ;
- $\Delta(k)$ fonction d'étalement du spectre.

Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé à une introduction bien détaillé dans [Dinnat (2003)].

Les figures 1.1, 1.2 et 1.3 représentent respectivement le spectre omnidirectionnel $\frac{S(k)}{2\pi k^4}$, la fonction d'étalement et la courbure omnidirectionnelle $S(k)$ en fonction du nombre d'onde et pour différentes valeurs de la vitesse du vent pour un spectre pleinement développé (c'est à dire quand le spectre ne dépend que du vent).

Le spectre d'Elfouhaily à une dimension utilisé dans ce manuscrit est :

$$\Psi(k) = \Psi(-k) = \frac{1}{2} \frac{S(|k|)}{|k|^3} \quad (1.6)$$

1.2.2 La distribution des pentes

Le spectre de puissance Ψ contient les informations à la fois sur les hauteurs et les pentes de la surface. Ainsi, par construction, les variances des hauteurs et des pentes d'une surface océanique peuvent se calculer directement à partir du spectre de

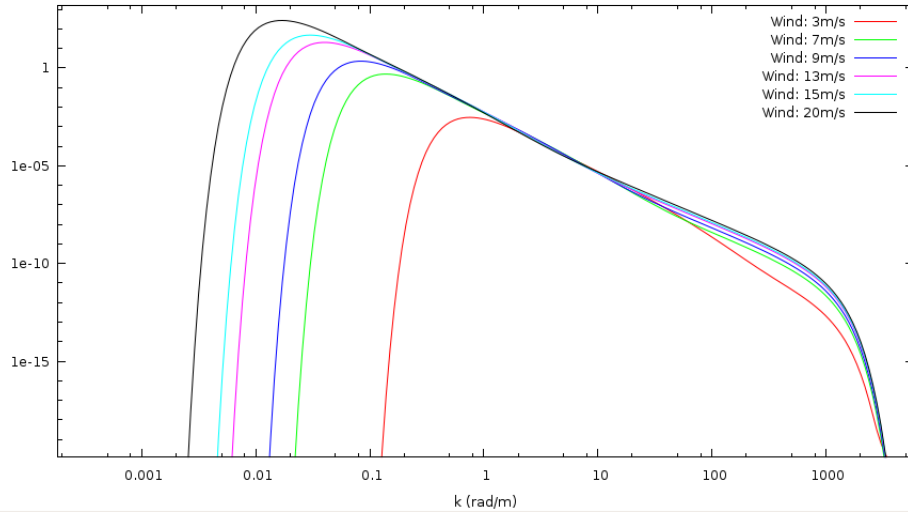


FIG. 1.1 – Spectre omnidirectionnel versus nombre d'onde pour différentes vitesses de vent selon le modèle du spectre d'Elfouhaily.

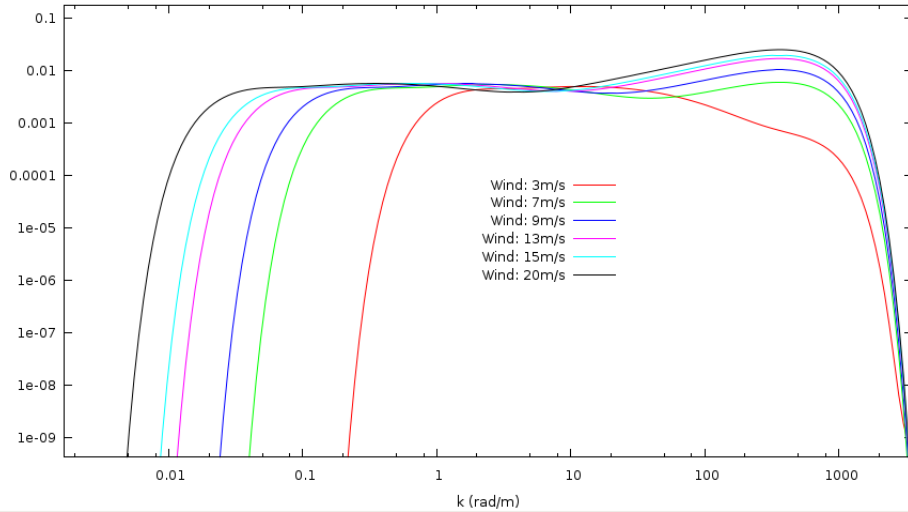


FIG. 1.2 – Courbure omnidirectionnelle versus nombre d'onde pour différentes vitesses de vent selon le modèle du spectre d'Elfouhaily.

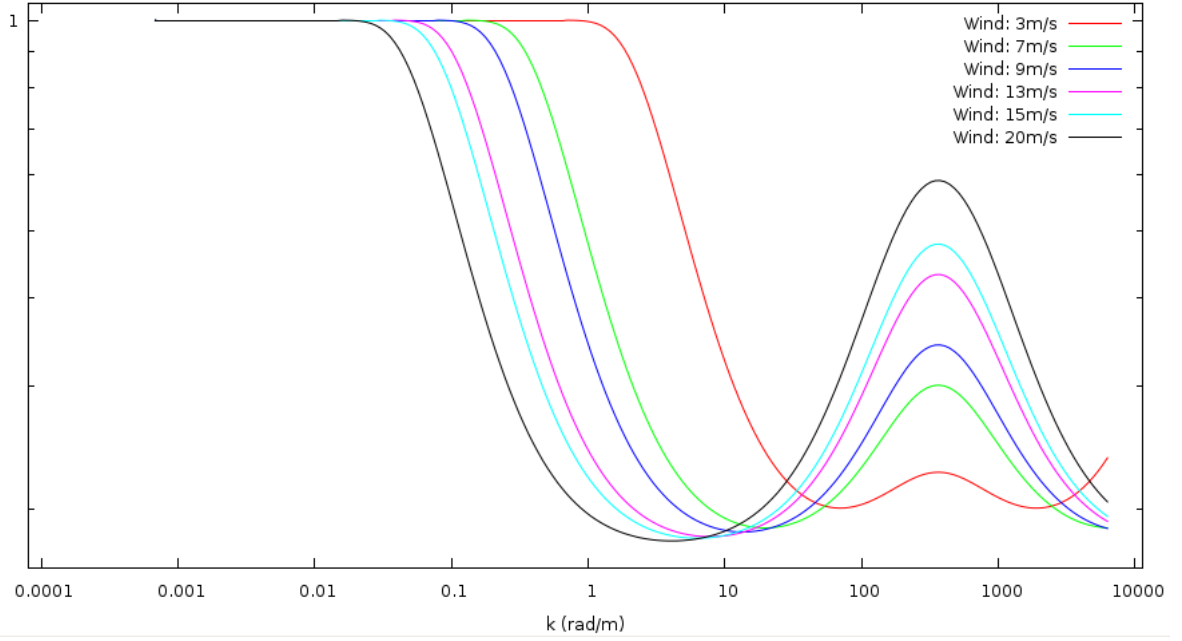


FIG. 1.3 – Fonction d'étalement versus nombre d'onde pour différentes vitesses de vent selon le modèle du spectre d'Elfouhaily.

la surface de la mer. D'une manière générale la variance d'une différentielle d'ordre n de la hauteur η peut se calculer par l'équation suivante :

$$\int \int \Psi(\mathbf{k}) \mathbf{k}_i^{2n} d\mathbf{k} = \langle (\partial^n \eta / \partial x_i)^2 \rangle \quad (1.7)$$

On en déduit pour $n = 0$ que la variance des hauteurs σ_0^2 est donnée par

$$\sigma_0^2 = \int \int \Psi(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (1.8)$$

et que la variance des pentes σ_2^2 (pour $n = 1$, la pente le long d'une direction x_i étant $\partial \eta / \partial x_i$) dans toutes les directions est donnée par

$$\sigma_2^2 = \int \int \Psi(\mathbf{k}) \mathbf{k}^2 d\mathbf{k} \quad (1.9)$$

Comme première approximation, on peut associer à la surface une PDF des pentes Gaussienne :

$$P_G(S_x, S_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{S_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{S_y}{\sigma_y} \right)^2 \right) \right] \quad (1.10)$$

où σ_x^2 et σ_y^2 sont les variances des pentes respectivement le long de $\mathbf{x}$ et de $\mathbf{y}$, c'est à dire

$$\sigma_x^2 = \left\langle \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\rangle_s \quad (1.11)$$

$$\sigma_y^2 = \left\langle \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right\rangle_s \quad (1.12)$$

Dans le cas général où la distribution ne suit pas une loi gaussienne, il est nécessaire d'examiner non seulement la variance (moment d'ordre 2) mais aussi les facteurs d'asymétrie *skewness* (moments centrés d'ordre 3), et d'aplatissement *kurtosis* (moments centrés d'ordre 4).

Selon les travaux de [Cox et Munk (1954)], la distribution bidimensionnelle des pentes s'écrit :

$$\begin{aligned} PDF(S_x, S_y) = P_G(S_x, S_y) \times \\ [1 \\ - \frac{1}{2}C_{21} \left(\left(\frac{S_x}{\sigma_x} \right)^2 - 1 \right) \frac{S_y}{\sigma_y} - \frac{1}{6}C_{03} \left(\left(\frac{S_x}{\sigma_x} \right)^3 - 3 \frac{S_x}{\sigma_x} \right) \\ + \frac{1}{24}C_{40} \left(\left(\frac{S_x}{\sigma_x} \right)^4 - 6 \left(\frac{S_x}{\sigma_x} \right)^2 + 3 \right) + \frac{1}{4}C_{22} \left(\left(\left(\frac{S_x}{\sigma_x} \right)^2 - 1 \right) \left(\left(\frac{S_y}{\sigma_y} \right)^2 - 1 \right) \right) \\ + \frac{1}{24}C_{04} \left(\left(\frac{S_y}{\sigma_y} \right)^4 - 6 \left(\frac{S_y}{\sigma_y} \right)^2 + 3 \right) + \dots] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Les facteurs d'asymétrie augmentent avec le vent selon les équations suivantes :

$$c_{21} = 0.01 - 0.0086U \pm 0.03$$

$$c_{03} = 0.04 - 0.0033U \pm 0.12$$

Les facteurs d'aplatissement sont :

$$c_{40} = 0.4 \pm 0.23$$

$$c_{22} = 0.12 \pm 0.06$$

$$c_{04} = 0.23 \pm 0.41$$

[Chapron et al. (2000)] et [Liu et al. (1997)] suggèrent que la non-linéarité des interactions entre les vagues de gravité et les vagues de capillarité-gravité sont responsables de l'apparition des facteurs d'aplatissements. Les petites vagues superposées aux grandes vagues sont une source d'irrégularité, (leur répartition n'est pas uniforme), et leur présence est plus importante sur la face avant que dans le creux. Pour Chapron comme pour Liu, il est nécessaire de proposer un modèle qui tient compte des deux échelles. La densité de probabilité proposé par Chapron a les propriétés statistiques d'une Gaussienne à grande échelle et est perturbée à petite échelle par une fluctuation δ . Cette distribution s'écrit :

$$pdf(\zeta) = \frac{\alpha_0}{\pi} (1 + \alpha_0 \Delta \zeta^2)^{-(1+\Delta)/\Delta} \quad (1.14)$$

où Δ définit la variance de la fluctuation δ et α_0 est l'inverse de la variance des pentes de la distribution Gaussienne.

1.3 Simulation de la surface océanique

Afin de mieux comprendre notre problématique, je présente d'abord quelques méthodes de représentation de la dynamique de l'océan :

- modèles basés sur les équations issues de la mécanique des fluides ;
- modélisation spectrale (modèle sinusoïdal) ;
- modèle “Choppy wave” ;
- modèle IPAS.

Ce tour bibliographique succinct n'entre pas dans les détails de chacun des modèles. Pour plus de précision, le lecteur est invité à consulter l'excellente synthèse de [Darles et al. (2011)] et [Emmanuelle (2008)] ainsi que les chapitres 2 et 3 du livre [Susbielles et Bratu (1981)] pour les deux premiers modèles, [Nouguier et al. (2009)] et [Parenthoën (2004)] pour les deux autres modèles.

1.3.1 Modèles basés sur la mécanique des fluides

Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes peuvent se présenter sous la forme d'un système de deux équations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} - \mu \frac{\nabla^2 \mathbf{v}}{\rho} = \mathbf{g} \quad (1.16)$$

Dans ces équations :

- t représente le temps (s) ;
- ρ désigne la masse volumique du fluide ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) ;
- $\mathbf{v} = (u, v, w)$ désigne la vitesse Eulérienne d'une particule fluide
- p désigne la pression ;
- $\mathbf{g}$ le vecteur gravitationnel $(0, g = 9.81, 0)$.

La première équation représente la conservation de la masse et la seconde la conservation du moment.

Pour résoudre ces équations, il existe deux approches principales : l'approche Eulérienne d'une part et l'approche Lagrangienne d'autre part. Il existe aussi des méthodes permettant une combinaison entre ces deux approches (approche hybride) [Losasso et al. (2008)].

Les figures suivantes sont tirées des travaux de [Enright et al. (2002b)] et [Mihalef et al. (2004)] représentant la surface dynamique *via* l'approche Eulérienne :

Remarque : Lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- on considère le fluide comme parfait (on néglige donc les frottements)
- on néglige les tensions de surface eau/air
- le fond est plat (pas de pente), et on néglige les frottements sur le fond
- hypothèse d'écoulement peu profond

On peut utiliser les équations de Saint Venant (1.17-1.19) proviennent des équations de Navier Stokes simplifiées.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(\eta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\eta v)}{\partial y} = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial(\eta u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta u^2 + \frac{1}{2} g \eta^2 \right) + \frac{\partial(\eta uv)}{\partial y} = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial(\eta v)}{\partial t} + \frac{\partial(\eta uv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta v^2 + \frac{1}{2} g \eta^2 \right) = 0 \quad (1.19)$$

Avantages et inconvénients

L'avantage majeur des approches basées sur la mécanique des fluides est leur capacité incontestable à produire une représentation fidèle de toute la complexité de la surface. Malgré des hypothèses supplémentaires permettant de simplifier ces équations non-linéaires, leur résolution numérique reste un problème complexe et extrêmement coûteux lorsqu'il s'agit de simuler une grande surface telle que celle correspondant à une empreinte radar (1 à 100 km^2), vu les immenses calculs.

Dans les deux points qui suivent, on parle des modèles fréquemment utilisés en océanographie tout en montrant leur avantages ainsi que leurs inconvénients.

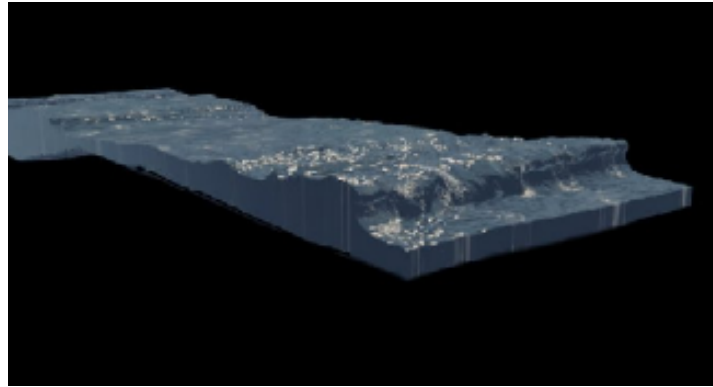


FIG. 1.4 – Simulation d’une surface océanique *via* une approche Lagrangienne [Enright et al. (2002b)]

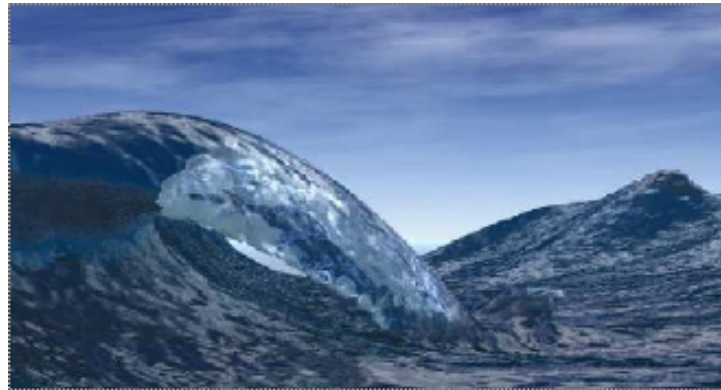


FIG. 1.5 – Simulation d’une surface océanique *via* une approche Lagrangienne [Mihalef et al. (2004)]

1.3.2 Modélisation spectrale

Ce type de représentation consiste à décrire la surface de l’océan à l’aide d’une distribution spectrale des vagues. Le passage au domaine spatial est effectué en utilisant une transformée de Fourier inverse qui permet d’obtenir une caractérisation géométrique de la surface (fig. 1.6).

Tout modèle de nature analogue se base sur la nature Gaussienne des élévations et des pentes de la surface et engendre un coût informatique très important. La théorie pourrait laisser penser que la surface océanique soit Gaussienne, mais expérimentalement, il semblerait que cette hypothèse de Gaussianité soit mise en défaut notamment dans le cas des mers jeunes et fortement stressées par le vent.

Avantages et inconvénients

Comme le montre la figure 1.7, cette méthode permet d’obtenir une surface

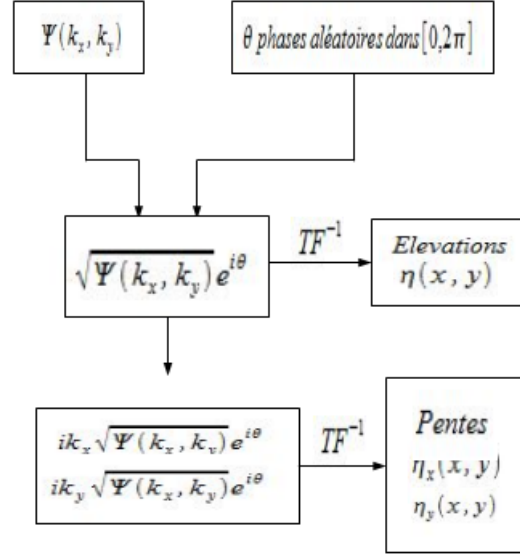


FIG. 1.6 – Schéma classique de construction de la surface océanique $\eta(x, y)$ à partir d'un spectre $\Psi(k_x, k_y)$ où $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$ désigne un vecteur d'onde.

proche de la réalité observée puisqu'elle s'appuie sur des données physiques. Cependant la surface obtenue nécessite d'utiliser une transformée de Fourier pour passer dans le domaine spatial, ce qui peut s'avérer couteux en temps de calcul. La surface est homogène (répartition d'énergie), Gaussienne et ne tiennent pas compte des mouvements orbitaux des particules d'eau.

1.3.3 Modèle “Choppy wave”

Ce modèle de surface non-linéaire décrit la surface comme une superposition de vagues de Gerstner associé à un spectre de vagues. Ces vagues proviennent de la résolution des équations d'Euler linéarisées *via* une approche Lagrangienne. L'équation de la surface est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0 + \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} h(\mathbf{k}) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t) \\ z(\mathbf{r}_0, t) = z_0 + \sum_{\mathbf{k}} h(\mathbf{k}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t) \end{cases} \quad (1.20)$$

où



FIG. 1.7 – Simulation de la surface de l’océan par la méthode de Tessendorf (2001)

- $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ et z_0 désignent la position horizontale et verticale initiale ;
- $\mathbf{k}$ est un vecteur d’onde ;
- $\omega(\mathbf{k})$ est la pulsation qui est liée au nombre d’onde $|\mathbf{k}|$ par la relation de dispersion : $\omega^2 = g|\mathbf{k}|$;
- $h(\mathbf{k})$ est une amplitude complexe égale à $\sqrt{\Psi(\mathbf{k}, \omega)} \exp(i\theta(\mathbf{k}))$ où $\theta(\mathbf{k})$ est une phase aléatoire uniformément répartie entre $[0, 2\pi[$.

Ce modèle a été introduit par [Fournier et Reeves (1986)] pour les simulations de la surface de l’océan en synthèse d’images réalistes et repris ensuite dans de nombreux travaux [Premoze et Ashikhmin (2001), Hinsinger et al. (2002a), Lee et al. (2007)...].

Il faudra attendre 2009 pour obtenir une étude statistique complète par les auteurs de l’article [Nouguier et al. (2009)]. Les propriétés statistiques de la surface obtenue ont été comparées aux données réelles et aux modèles perturbatifs existants et ont montré une très bonne concordance.

Avantages et inconvénients

Cette méthode permet d’obtenir une surface tenant compte des mouvements orbitaux des particules d’eau et permet de conserver le spectre (en injectant un spectre artificiel pour remédier à l’habillage du spectre). Cependant la surface obtenue nécessite d’utiliser trois transformées de Fourier pour passer dans le domaine spatial ce qui peut être couteux. La surface est homogène et la méthode ne permet pas de contrôler les coefficients *skewness* et *kurtosis*.

Dans ce qui suit, on parle d’un modèle récemment développé au CERV tout en montrant ses avantages et ses inconvénients.

1.3.4 Modèle IPAS

C'est un modèle de mer et accessoirement de vent appelé IPAS (Interactive Phenomenological Animation of the Sea) a été développé par Marc Parenthoën [Parenthoën et al. (2004); Parenthoën (2004)]. L'implémentation de ce modèle a été effectuée dans le langage ARÉVI (Atelier de Réalité Virtuelle) [Harrouet et al. (2002); Tisseau et al. (2006)] qui offre toutes les fonctionnalités pour faire de la simulation de systèmes multi-agents évoluant dans un environnement de réalité virtuelle. Au sein du modèle IPAS, la mer est vue comme un système peuplé par des entités autonomes en interaction entre elles (groupes de vagues, déferlements, vents synoptiques ...) (*cf.* fig. 1.8).

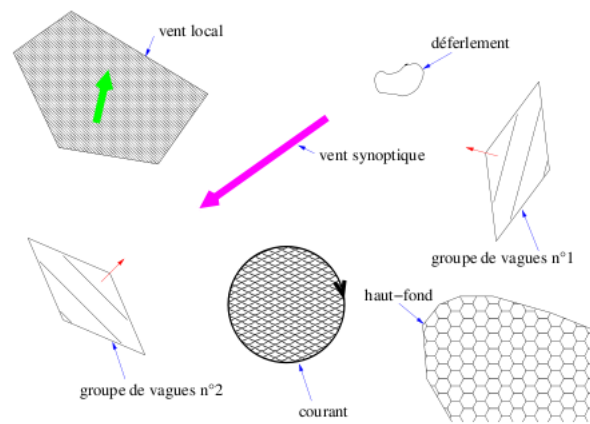


FIG. 1.8 – Plan d'eau hétérogène peuplé d'entité autonome en interaction (Parenthoën (2004))

Le groupe de vagues est la primitive principale pour l'animation géométrique et dynamique des points de la surface, en leur conférant (selon un modèle de Gerstner adapté aux groupes) : une position orbitale, une vitesse orbitale et une normale à la surface. La liste des groupes influants et la présence d'une crête sont des propriétés utilisées par les déferlements pour déterminer l'activité des vagues dans un front actif. Le groupe de vagues du modèle IPAS est une vague de Gerstner enveloppée et enrichie par une phase instantanée. Il s'agit notamment de :

- ▷ Avance de crête $\Phi_{crete} \in [0, \pi/2[$;
- ▷ Retard de creux $\Phi_{creux} \in [0, \pi/2[$.

La figure (1.9) illustre les caractéristiques de cette primitive.

Avantages et inconvénients

Cette méthode permet d'obtenir une surface tenant compte des mouvements orbitaux des particules d'eaux et permet d'assurer une hétérogénéité de la surface grâce

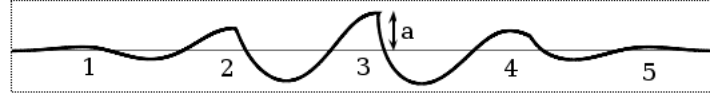


FIG. 1.9 – Caractéristiques d'un groupe de vagues vu dans le plan vertical. Ici, son vecteur d'onde est $2\pi \text{ rad}/m$, sa position est $r_n = 2.5m$, ce groupe contient 5 vagues.

au groupage des vagues. La capacité de ce modèle à générer des surfaces respectant un spectre directionnel a été montré expérimentalement par les auteurs de [Legal et al. (2007)]. Cependant, il n'existe pas encore d'étude mathématique montrant si oui ou non ce type de modélisation est capable d'affirmer sa capacité à respecter un spectre donné, une *skewness* et une *kurtosis* observées.

1.3.5 Synthèse comparative

Comme nous l'avons vu, nous avons donc à notre disposition un ensemble de méthodes pour la modélisation et la simulation des surfaces maritimes. Toutefois, aucune de ces méthodes ne peut répondre simultanément à nos objectifs, à savoir : le contrôle du spectre, la *skewness* et la *kurtosis* de la distribution des hauteurs et/ou des pentes.

Le tableau ci-dessous compare les modèles sinusoïdaux, choppy et IPAS sur leur possibilité de contrôler les spectres (Ψ_{target}) une *skewness* (Sk_{target}), une *kurtosis* (Kr_{target}) et sur l'hétérogénéité.

Modèle	Ψ_{target}	Sk_{target}	Kr_{target}	Hétérogène
Sinusoïdale	✓	×	×	×
Choppy	✓	×	×	×
IPAS	?	?	?	✓

1.4 Problématiques et proposition

Ainsi, le modèle IPAS nous offre la possibilité du contrôle de l'hétérogénéité. Les points d'interrogations dans le tableau ci-dessus sont les questions et les problématiques traitées dans ce manuscrit. Il s'agit ici de construire un modèle pour lequel la génération de la surface est effectuée à partir des groupes de vagues tout en étant capable de respecter des contraintes océanographiques données. Pour atteindre cet objectif, nous tâcherons de répondre aux questions suivantes :

- comment choisir nos groupes de vagues ;
- comment les distribuer (en échelle et spatialement) ;
- comment régler leurs paramètres afin de respecter les Ψ_{target} , sk_{target} et kr_{target} .

Dans toute la suite de ce chapitre, nous adoptons les notations suivantes :

- a et b : des amplitudes ;
- L et l : largeur et longueur du groupe de vagues ;
- k : vecteur d'onde ;
- θ phase aléatoire entre 0 et 2π ;
- $r_c = (x_c, y_c)$: le centre du groupe de vagues ;

1.4.1 Choix de groupe de vagues

Dans cette section, je décris les fonctions modélisant les groupes de vagues adoptées dans cette étude. Le choix s'est porté sur :

1. Groupe de vagues en polaire (voir la section 3.2.2)

Il s'agit de considérer une famille d'ondelettes (fig. 1.10) représentée par l'équation :

$$\Lambda(a, x, y, x_c, y_c, L, l, k) = a \exp \left(-\frac{(x - x_c)^2}{2L^2} - \frac{(y - y_c)^2}{2l^2} \right) \sin (k \cdot (r - r_c) + \theta) \quad (1.21)$$

où chacune d'elles ayant sa propre phase.



FIG. 1.10 – Coupe longitudinale de l'ondelette de Morlet.

2. Groupe de vagues en quadrature (voir la section 3.3.2)

Il s'agit de considérer ici le groupe de vague comme une combinaison linéaire des composantes réelles et complexe de l'ondelette de Morlet dans sa forme complexe (fig. 1.11).

La partie réelle (Λ_1) est pondérée par une amplitude a et la partie imaginaire (Λ_2) par une amplitude b . Ainsi, le groupe de vague est modélisé par :

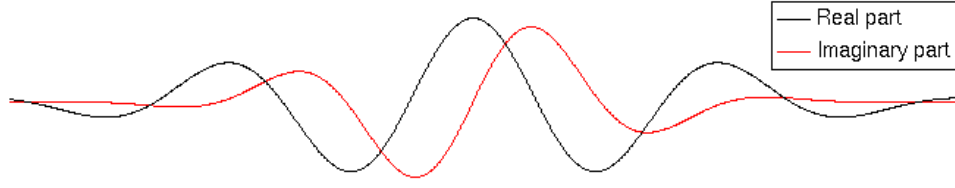


FIG. 1.11 – Coupe longitudinale des composantes réelles (Λ_1) et complexe (Λ_2) de l'ondelette de Morlet.

$$\begin{aligned} \Lambda(a, b, x, y, x_c, y_c, L, l, k) = & a \exp \left(-\frac{(x-x_c)^2}{2L^2} - \frac{(y-y_c)^2}{2l^2} \right) \cos(k \cdot (r - r_c)) \\ & + b \exp \left(-\frac{(x-x_n)^2}{2L^2} - \frac{(y-y_n)^2}{2l^2} \right) \sin(k \cdot (r - r_c)) \end{aligned} \quad (1.22)$$

3. Vagues de Gerstner enveloppées (voir section 4)

C'est un cas particulier des groupes de vagues du modèle IPAS (sans phase instantanée). Ce groupe de vague prend en compte le déplacement orbitale des particules d'eau. Ainsi un groupe de vague est décrit par l'ensemble des particules de surface définies par $(\mathbf{r}, \tilde{\Lambda}(\mathbf{r} + D_\Lambda(\mathbf{r})))$ avec :

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{r} + D_\Lambda(\mathbf{r})) = \Lambda(\mathbf{r}) \quad (1.23)$$

où

$$\begin{cases} \Lambda(\mathbf{r}) = a \exp \left(-\frac{(x-x_n)^2}{2L_n^2} - \frac{(y-y_n)^2}{2l_n^2} \right) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta_n) \\ D_\Lambda(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \exp \left(-\frac{(x-x_n)^2}{2L_n^2} - \frac{(y-y_n)^2}{2l_n^2} \right) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta_n) \end{cases} \quad (1.24)$$

représentent respectivement la primitive du modèle GWM (polaire, voir 3.2.2, page 43) et le déplacement horizontal des particules.

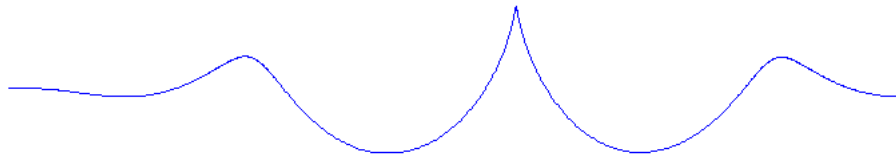


FIG. 1.12 – Coupe longitudinale d'une vague de Gerstner enveloppée

1.4.2 Choix de distribution

On distingue deux types de distribution : en multi-échelles (longueur et direction) et spatialement.

Multi-échelles : On a choisi une organisation en nappes **indépendantes** où chaque nappe est une superposition de groupes de vagues (fig 1.13). Chaque nappe est caractérisée par une direction moyenne et un nombre d'onde moyen.

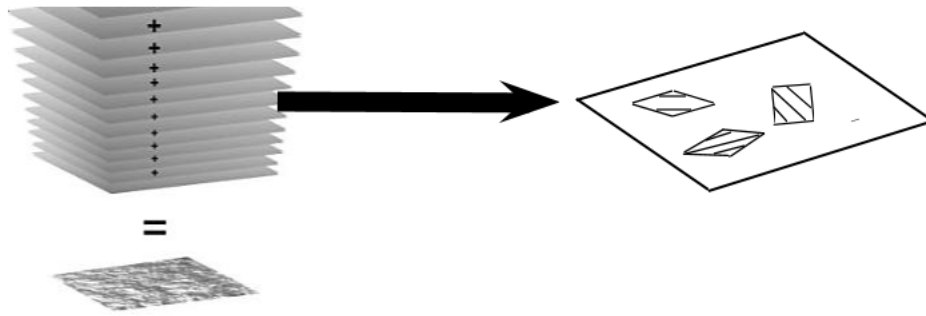


FIG. 1.13 – Organisation en nappes indépendantes

Spatiale : Au sein d'une nappe, les groupes de vagues seront distribués de deux manières :

- déterministe ;
- stochastique.

La distribution déterministe consiste à répartir des groupes de vagues en respectant un chevauchement ou non des groupes de vagues fixé par l'utilisateur. Comme nous le verrons dans la suite, ce choix nous impose une distribution monochromatique puisque la vitesse de propagation des groupes dépend du nombre d'onde, ce qui rend impossible de contrôler le pavage initial.

La distribution stochastique quant à elle, consiste à choisir le nombre des groupes par élément de surface comme étant une variable aléatoire (binomiale, Poisson ...) et de les répartir aléatoirement (uniforme ...) au sein d'une nappe. Ce type de distribution nous permettra d'avoir des nappes polychromatiques (voir section 3.2.2 - D, page 46).

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai présenté les notions de base et les définitions utilisées dans la suite du manuscrit. J'ai également présenté un tour d'horizon bibliographique concernant les méthodes de simulation des surfaces océaniques.

Nous avons vu que ces méthodes ne permettent pas de répondre simultanément à tous nos objectifs, à savoir : l'hétérogénéité de la surface, le contrôle du spectre, la *skewness* et la *kurtosis* de la distribution des hauteurs et des pentes. Nous avons ensuite introduit la méthode que nous défendons pour atteindre ces objectifs.

Le prochain chapitre est dédié au développement des calculs des propriétés statistiques nécessaires à la génération de la surface océanique.

Chapitre 2

Outils mathématiques pour la génération de surfaces aléatoires

2.1 Introduction

Comme mentionné dans le chapitre précédent et rappelé ici, notre approche est complètement différente par rapport aux approches classique. La surface de la mer est modélisée comme étant une superposition de **nappes indépendantes** où chacune d'elles est une superposition de **groupes de vagues**. À l'échelle d'une nappe, la distribution des groupes de vagues peut se faire *via* deux approches : déterministe ou stochastique.

Ce chapitre est centré autour de la distribution stochastique. La distribution déterministe quant à elle, sera détaillé ultérieurement (voir section 3.2.2).

Ainsi, dans ce chapitre, on détaille notre modélisation de la surface aléatoire suivie d'un calcul formel des moments des hauteurs et des pentes ainsi que le spectre. Nous finirons ce chapitre par le choix de la méthode de génération de surfaces que nous adoptons.

2.2 Modélisation du champ aléatoire

La surface de la mer est considérée comme un champ aléatoire. Pour comprendre à quoi correspond un champ aléatoire, plusieurs descriptions sont possibles :

1. soit par un ensemble de variables aléatoires indexées par la variable d'espace ;
2. soit par une superposition de fonctions spatiales aléatoires.

La première description (*i.e.* ensemble de variables aléatoires) ne permet pas de prendre en compte facilement le lien fort existant entre deux points voisins dans un milieu, car

il faut évaluer le degré de corrélation entre les variables représentatives du champ aléatoire.

La deuxième représentation permet de répondre plus facilement à cette contrainte. Dans cette description, un champ aléatoire peut être défini comme une fonction ou une superposition de fonctions aléatoires sur toute une région dans $S \subset \mathbb{R}^d$. Chaque événement élémentaire conduit à la réalisation de la fonction sur toute la région S .

Nous nous basons sur cette dernière définition pour modéliser l'élévation $\eta(\mathbf{r}, t)$ de la surface à la position $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et à l'instant t sous la forme suivante :

$$\eta(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{n=1}^{N_{\mathbf{k}}} f_1^{\mathbf{k}}(a_n^{\mathbf{k}}, t) \Lambda_1(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n^{\mathbf{k}}, g_1(L_n^{\mathbf{k}}, t), g_2(l_n^{\mathbf{k}}, t), t) + f_2^{\mathbf{k}}(b_n^{\mathbf{k}}, t) \Lambda_2(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n^{\mathbf{k}}, g_1(L_n^{\mathbf{k}}, t), g_2(l_n^{\mathbf{k}}, t), t) \quad (2.1)$$

Où

- ▷ $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$ représente un vecteur d'onde ($|\mathbf{k}|$: nombre d'onde et ϕ : la direction). Cette discrétisation en nombre d'onde et en direction permet de distinguer des caractéristiques statistiques différentes pour différentes échelles ;
- ▷ Λ_1 et Λ_2 formes géométriques générant la surface. Leurs formes sont déterminées ou à déterminer selon les contraintes ;
- ▷ $N_{\mathbf{k}}$ le nombre de primitives pour chaque $\mathbf{k}$ et que l'on suppose suivre la loi de Poisson de paramètre $\lambda_{\mathbf{k}}$;
- ▷ $a_n^{\mathbf{k}}$ et $b_n^{\mathbf{k}}$ amplitudes aléatoires de fonction de densités de probabilité respectives $f_a^{\mathbf{k}}$ et $f_b^{\mathbf{k}}$ à déterminer ;
- ▷ $f_1^{\mathbf{k}}$, $f_2^{\mathbf{k}}$, g_1 et g_2 sont des fonctions à déterminer traduisant les hypothèses de l'évolution temporelle telle qu'à l'instant initial ($t=0$) :
 - $f_1^{\mathbf{k}}(a_n^{\mathbf{k}}, 0) = a_n^{\mathbf{k}}$
 - $f_2^{\mathbf{k}}(b_n^{\mathbf{k}}, 0) = b_n^{\mathbf{k}}$
 - $g_1(L_n^{\mathbf{k}}, 0) = L_n^{\mathbf{k}}$
 - $g_2(l_n^{\mathbf{k}}, t) = l_n^{\mathbf{k}}$
- ▷ $\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ positions aléatoires ;
- ▷ $L_n^{\mathbf{k}}$ et $l_n^{\mathbf{k}}$ sont des variables aléatoires de densité de probabilité $\rho_L^{\mathbf{k}}$ et $\rho_l^{\mathbf{k}}$ et désignent les dimension des Λ_i respectivement suivant x et y .

Le but est de déterminer les paramètres de ce modèle sous la contrainte d'un spectre donné Ψ_{target} avec des contraintes supplémentaires sur les *skewness* et *kurtosis* des distributions des hauteurs et des pentes.

Pour cela, on commence par un maillage (logarithmique, régulier ...) du domaine spectral tel que :

$$|\mathbf{k}|_{min} = |\mathbf{k}|_0 < |\mathbf{k}|_1 < |\mathbf{k}|_2 < \dots < |\mathbf{k}|_i < \dots < |\mathbf{k}|_{max} \quad (2.2)$$

auquel il faut rajouter un maillage angulaire :

$$\phi_{min} = \phi_0 < \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_j < \dots < \phi_{max} \quad (2.3)$$

Ainsi la construction du champ $\eta(\mathbf{r}, t)$ revient à la construction des “nappes” map_{ij} de nombre d’onde $|\mathbf{k}| \in [|\mathbf{k}|_i, |\mathbf{k}|_{i+1}]$ et de direction $\phi \in [\phi_j, \phi_{j+1}]$:

$$\eta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{N_{\mathbf{k}}} f_1^{\mathbf{k}}(a_n^{\mathbf{k}}, t) \Lambda_1(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n^{\mathbf{k}}, g_1(L_n^{\mathbf{k}}, t), g_2(l_n^{\mathbf{k}}, t), t) + f_2^{\mathbf{k}}(b_n^{\mathbf{k}}, t) \Lambda_2(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n^{\mathbf{k}}, g_1(L_n^{\mathbf{k}}, t), g_2(l_n^{\mathbf{k}}, t), t) \quad (2.4)$$

L’un des avantages de ce type de modélisation, comme nous le verrons dans la suite, réside dans la possibilité de distinguer les propriétés statistiques pour chaque échelle.

Remarque 1 : Lorsqu’il s’agit d’une nappe de vecteur d’onde $\mathbf{k}$, et pour plus de simplicité des notations, nous omettons l’indice $\mathbf{k}$ des variables a_n , b_n , f_1 , f_2 , l_n et L_n .

Remarque 2 : Nous essayons de respecter au maximum les notations habituelles des océanographes. Ainsi, nous adoptons les notations suivantes dans toute la suite du manuscrit :

- ▷ $\sigma_{0_{\mathbf{k}_0}}^n$, $\sigma_{2_{\mathbf{k}_0}}^n$, $\Psi_{mod}^{\mathbf{k}_0}$ et $\Gamma_{mod}^{\mathbf{k}_0}$: propriétés statistiques de la nappe de vecteur d’onde moyen $\mathbf{k}_0$, elles désignent respectivement les moments d’élévation d’ordre n , moments des pentes d’ordre n , spectre spatial (en vecteur d’onde) et spectre temporel (en pulsation).
- ▷ σ_0^n , σ_2^n , Ψ_{mod} et Γ_{mod} : propriétés statistiques de la surface totale, elles désignent respectivement les moments d’élévation d’ordre n , moments des pentes d’ordre n , spectre spatiale (en vecteur d’onde) et spectre temporel (en pulsation).

Récapitulatif : Construire une surface aléatoire océanique sous contraintes revient à construire et maîtriser les nappes correspondantes (figure 2.1) :

Chaque nappe map_{ij} est une superposition de formes géométriques dont les nombres d’onde et les directions peuvent être également des variables aléatoires de valeurs respectives dans $[|\mathbf{k}|_i, |\mathbf{k}|_{i+1}]$ et $[\phi_j, \phi_{j+1}]$ (nappes polychromatiques).

Dans la suite, nous calculons d’abord les propriétés statistiques des hauteurs, pentes et le spectre de notre modèle pour chaque nappe avant de présenter une méthode de peuplement des surfaces aléatoires.

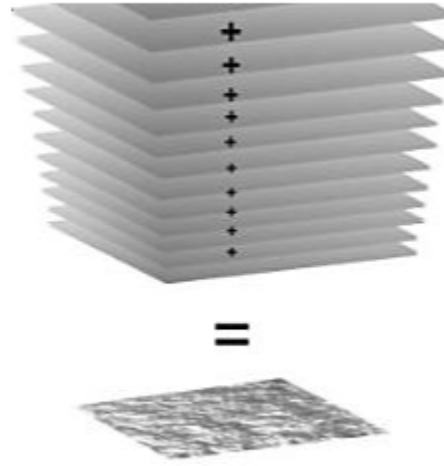


FIG. 2.1 – Construction de la surface océanique en superposant des nappes

2.3 Hauteurs

L'étude statistique des élévations d'une nappe de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ sera faite à l'aide de la fonction caractéristique $\Phi_{\mathbf{k}}$ à un point. Cette fonction s'écrit :

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\tau) = \langle \exp(i\tau\eta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})) \rangle \quad (2.5)$$

Où $\langle . \rangle$ ici et dans toute la suite du manuscrit désigne la moyenne d'ensemble du processus. On trouve aisément d'après les propriétés figurant dans l'annexe (A.2, page 124) :

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\tau) = \exp(\lambda \langle \exp(i\tau(f_1(a_n, t)\Lambda_1 + f_2(b_n, t)\Lambda_2)) \rangle - 1) \quad (2.6)$$

Après calcul, les moments d'ordre n sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{0\mathbf{k}_0}^n &= \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \Phi_{\mathbf{k}}(\tau)}{\partial \tau^n} \Big|_{\tau=0} \\ &= \lambda \langle (f_1(a_n, t)\Lambda_1 + f_2(b_n, t)\Lambda_2)^n \rangle + (\lambda \langle f_1(a_n, t)\Lambda_1 + f_2(b_n, t)\Lambda_2 \rangle)^n \end{aligned} \quad (2.7)$$

À l'instant $t=0$, et dans le cas où les amplitudes a_n et b_n sont indépendantes :

$$\sigma_{0\mathbf{k}_0}^n = \lambda \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} m_m^a m_{n-m}^b \langle \Lambda_1^m \Lambda_2^{n-m} \rangle + (\lambda \langle a_n \Lambda_1 + b_n \Lambda_2 \rangle)^n \quad (2.8)$$

où m_n^a et m_n^b désignent respectivement les moments d'ordre n des variables aléatoires a et b (les amplitudes).

Exemple : Soit une nappe bidimensionnelle de vecteur d'onde k à l'instant $t = 0$:

$$\eta_k(x) = \sum_{n=1}^{N_k} \exp\left(-\frac{(x - x_n)^2}{2L^2}\right) (a_n^k \cos(k(x - x_n)) + b_n^k \sin(k(x - x_n)))$$

Dans les figures (2.2 et 2.3), on détermine numériquement la densité de probabilité des élévations d'une nappe pdf_{model} pour différentes densité des amplitudes a_n et b_n .

Pour profiter de la non nullité du moment d'ordre 3 de la fonction :

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{(x - x_n)^2}{2L^2}\right) \cos(k(x - x_n))$$

il suffit que l'amplitude associée à cette fonction soit de moment d'ordre 3 non nul.

On considère dans cet exemple que $L \sim$ variable uniforme dans $[30, 40]$, $k = 0.5$ et $\lambda/S = 2$. La distribution Gaussienne est donnée pour référence. Le but de ces figures est de mettre en évidence l'asymétrie (positive ou négative) de la distribution des hauteurs de notre modèle suivant les densité des amplitudes f_a et f_b .

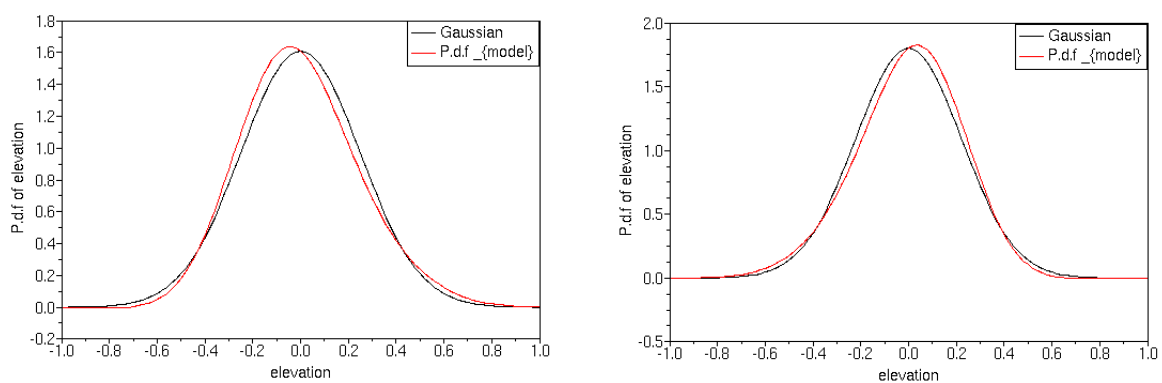


FIG. 2.2 – À gauche ($a_n \sim \text{Rayleigh}(1)$, $b_n \sim \text{Gaussian}(0, 0.5)$). À droite ($a_n \sim \text{Rayleigh}(1)$, $b_n = 0$)

Ainsi, nous constatons qu'avec un choix adéquat des amplitudes, nous pouvons illustrer l'asymétrie de la distribution des élévations.

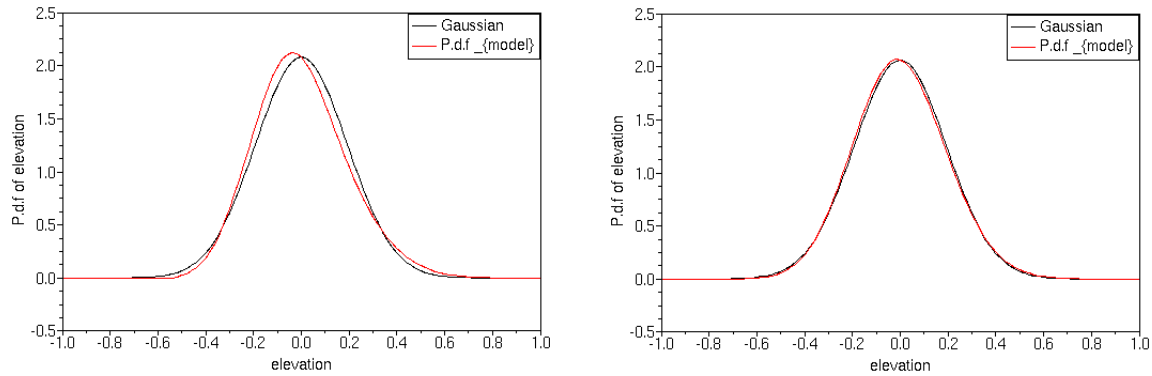


FIG. 2.3 – À gauche ($a_n \sim \text{Rayleigh}(0.5)$, $b_n \sim \text{Gaussian}(0,1)$). À droite ($a_n \sim \text{Rayleigh}(0.1)$, $b_n \sim \text{Gaussian}(0,1)$)

2.4 Spectre

Spectre en nombre d'onde : Le spectre en nombre d'onde est défini comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation d'une variable instantanée. Nous nous intéressons à la fonction caractéristique à deux points :

$$\Phi_k(u, v) = \langle \exp((iu\eta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - iv\eta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{s}))) \rangle \quad (2.9)$$

de même que dans le cas des hauteurs, on trouve :

$$\Phi_{\mathbf{k}}(u, v) = \exp(\lambda \langle \exp(iu(f_1\Lambda_1 + f_2\Lambda_2)(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n) - iv(f_1\Lambda_1 + f_2\Lambda_2)(\mathbf{k}, \mathbf{r} + \mathbf{s}, \mathbf{r}_n)) \rangle - 1) \quad (2.10)$$

or :

$$\frac{\partial^2 \Phi(u, v)}{\partial_u \partial_v} \Big|_{u,v=0} = \rho_0(\mathbf{s}) \quad (2.11)$$

où $\rho_0(\mathbf{s})$ désigne la fonction de corrélation :

$$\begin{aligned} \rho_0(\mathbf{s}) = & \lambda \langle (a_n\Lambda_1 + b_n\Lambda_2)(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \rangle \langle (a_n\Lambda_1 + b_n\Lambda_2)(\mathbf{k}, \mathbf{r} + \mathbf{s}, \mathbf{r}_n) \rangle \\ & + \lambda^2 \langle (a_n\Lambda_1 + b_n\Lambda_2)(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \rangle \langle (a_n\Lambda_1 + b_n\Lambda_2)(\mathbf{k}, \mathbf{r} + \mathbf{s}, \mathbf{r}_n) \rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

On obtient alors la densité d'énergie spectrale :

$$\begin{aligned} \Psi_{mod}^{k_0}(\mathbf{k}) = & \lambda(\mathbf{E} \left[a_n^2 \hat{\Lambda}_1(\mathbf{k}) \hat{\Lambda}_1(-\mathbf{k}) \right] + \mathbf{E} \left[a_n b_n \hat{\Lambda}_2(\mathbf{k}) \hat{\Lambda}_1(-\mathbf{k}) + a_n b_n \hat{\Lambda}_2(-\mathbf{k}) \hat{\Lambda}_1(\mathbf{k}) \right] \\ & + \mathbf{E} \left[b_n^2 \hat{\Lambda}_2(\mathbf{k}) \hat{\Lambda}_2(-\mathbf{k}) \right]) + \lambda^2 \mathbf{E} [a_n \Lambda_1 + b_n \Lambda_2] \mathbf{E} \left[\left(a_n \hat{\Lambda}_1(\mathbf{k}) + b_n \hat{\Lambda}_2(\mathbf{k}) \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Où $\hat{\Lambda}_i(k)$ désigne la transformée de Fourier de la primitive Λ_i .

Exemple

On reprend le même exemple que dans le cas des hauteurs. La figure (2.4) illustre le spectre d'une nappe pour différentes extension des groupes de vagues (L). On considère dans cet exemple que $k = 0.3$, $\lambda/S = 2$ et $\Psi_{target}^k = 1$.

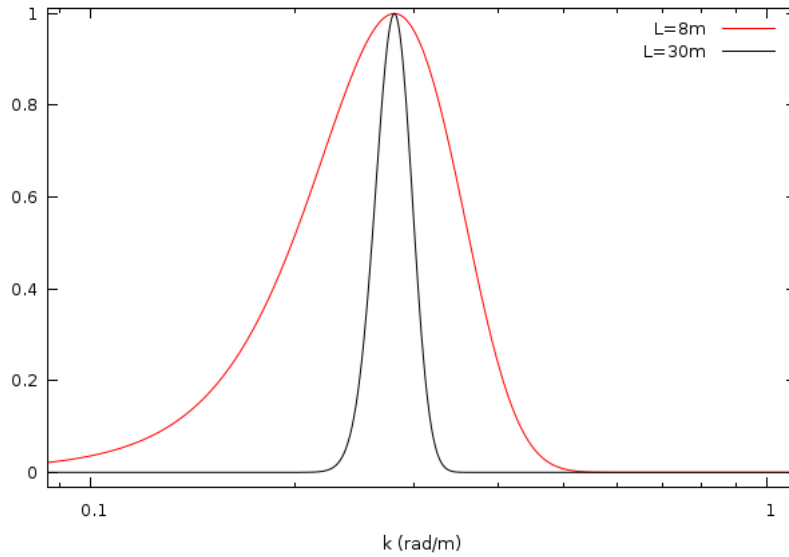


FIG. 2.4 – Spectre d'une nappe pour différentes valeurs de l'extension des groupes de vagues

Ces résultats nous suggèrent d'approcher le spectre à reproduire sous la forme d'une combinaison linéaire de fonction de base (ou test) connues F_n , pondérées par des coefficients inconnues ς_n :

$$\Psi_{target} = \sum_{n=1}^{Nb} \varsigma_n F_n \quad (2.14)$$

Où

- Nb représente le nombre de nappes ;
- F_n dans notre cas est une Gaussienne d'écart type e_n à déterminer ;

La détermination des paramètres ς_n et e_n peut se faire *via* la méthode des moments. Cette méthode est une procédure numérique qui transforme une fonctionnelle en un système d'équations linéaires. Elle permet d'exprimer la solution f de l'équation qu'on cherche à résoudre :

$$H(f) = g$$

(H est un opérateur linéaire) sous forme de série de fonctions de base pondérées par des coefficients qu'on cherche à déterminer

$$f = \sum_n \alpha_n f_n$$

On définit également un produit scalaire ($\langle . | . \rangle$) dans l'espace des fonctions ainsi que des fonction test w_m que l'on applique à l'équation précédente pour obtenir :

$$\sum_n \alpha_n \langle H(f_n) | w_m \rangle = \langle g | w_m \rangle$$

Il suffit ensuite de résoudre le système matriciel résultant par rapport aux coefficients inconnus de la série.

Dans notre cas, nous commençons par subdiviser le domaine spectrale telle que les fonctions de base (F_n) soient réparties sur le domaine et centrées sur les points du maillage. Nous définissons alors l'écart type e_n de chaque F_n qui est inversement proportionnel à la largeur de la maille spectrale.

Nous venons de définir complètement les fonctions de base. Il nous faut maintenant choisir des fonctions test ou fonction poids pour pouvoir ensuite appliquer une procédure de type Galerkin par exemple. Au vu du choix de nos fonctions de base (Gaussiennes), il semble pertinent de choisir de manière identique les fonctions test $w_n = F_n$.

Ceci revient à résoudre :

$$\sum_n \varsigma_n \langle w_i | F_n \rangle = \langle w_i | \Psi_{target} \rangle \quad (2.15)$$

La formulation peut alors s'écrire sous la forme :

$$M\varsigma = b \quad (2.16)$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} \langle w_1 | F_1 \rangle & \langle w_1 | F_2 \rangle & \cdots & \langle w_1 | F_{Nb} \rangle \\ \langle w_2 | F_1 \rangle & \langle w_2 | F_2 \rangle & \cdots & \langle w_2 | F_{Nb} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w_{Nb} | F_1 \rangle & \langle w_{Nb} | F_2 \rangle & \cdots & \langle w_{Nb} | F_{Nb} \rangle \end{bmatrix} \quad \varsigma = \begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \vdots \\ \varsigma_{Nb} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \langle w_1 | \Psi_{target} \rangle \\ \langle w_2 | \Psi_{target} \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N | \Psi_{target} \rangle \end{bmatrix}$$

On peut en déduire alors le vecteur des inconnues ς .

N.B Dans le cas où les extensions des groupes deviennent “assez grandes” (supérieurs à 40m), le spectre de la nappe tend vers une Dirac.

Spectre en fréquence : Le spectre en fréquence, $\Gamma(w)$, est défini comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation d’une variable en un endroit fixé.

À un endroit fixé, disons ($x=0$), après calcul (toujours en appliquant la propriété figurant dans l’annexe (A.2) :

$$\Gamma_{mod}^{k_0}(\omega) = \lambda(\mathbf{E}[\hat{f}_1(a_n, \omega)\hat{f}_1(a_n, -\omega) + \hat{f}_1(a_n, \omega)\hat{f}_1(b_n, -\omega) + \hat{f}_1(a_n, -\omega)\hat{f}_1(b_n, \omega) + \hat{f}_2(b_n, \omega)\hat{f}_2(b_n, -\omega)]) \exp(-(2L_n/c_x + 2l_n/c_y)(\omega - \omega_0)) \quad (2.17)$$

Ainsi, nous disposons des formules permettant d’exprimer analytiquement les spectres des nappes en fonction des paramètres de notre modèle. Nous complétons l’étude statistique de notre modèle par l’analyse des propriétés statistique des pentes :

2.5 Les pentes

De même que les hauteurs, la fonction caractéristique à un point pour la nappe map_{ij} :

$$\Phi_{\mathbf{r}}(\tau) = \exp(\lambda \langle \exp(i\tau f_1(a_n, t)\partial_{x_i}\Lambda_1 + f_2(b_n, t)\partial_{x_i}\Lambda_2) - 1 \rangle) \quad (2.18)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_i}\eta_{\mathbf{k}}^n \rangle &= \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n \Phi_{\mathbf{k}}(\tau)}{\partial \tau^n} \Big|_{\tau=0} \\ &= \lambda \langle (f_1(a_n, t)\partial_{x_i}\Lambda_1 + f_2(b_n, t)\partial_{x_i}\Lambda_2)^n \rangle + (\lambda \langle f_1(a_n, t)\partial_{x_i}\Lambda_1 + f_2(b_n, t)\partial_{x_i}\Lambda_2 \rangle)^n \end{aligned} \quad (2.19)$$

On calcul de même les moments croisés. Ainsi, le moment d’ordre n des pentes est :

$$\sigma_{2\mathbf{k}_0}^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \langle \partial_x \eta_{\mathbf{k}}^n \partial_y \eta_{\mathbf{k}}^{n-m} \rangle \quad (2.20)$$

De même que dans le cas des hauteurs, on dispose des formules analytiques permettant le calcul des densités des amplitudes sous contraintes.

2.6 Génération des surfaces sous contraintes

Objectif :

Générer une surface respectant un spectre donné (Ψ), une *skewness* et *kurtosis* des hauteurs et/ou des pentes ($Kr_{obs}(hauteurs)$, $Sk_{obs}(hauteurs)$, $Sk_{obs}(pentes)$, $Kr_{obs}(pentes)$).

Problématiques :

1- Le spectre d'une surface résultante d'une superposition de nappes indépendantes est la somme des spectres de ces nappes. Ainsi, les calculs établis dans le paragraphe 2.4 permettent le contrôle d'un spectre voulu.

2- La distribution des *skewness* et *kurtosis* à chaque échelle afin de conserver les *skewness* et *kurtosis* de la surface totale observée n'est pas trivial. En effet, dans le cas d'une superposition de nappes indépendantes et de moments d'ordre un nul, la *skewness* et la *kurtosis* des élévations et des pentes de la surface de la mer sont respectivement :

$$Sk(hauteurs) = \frac{\sum_{\mathbf{k}} \sigma_{0\mathbf{k}}^3}{(\sigma_0^2)^{3/2}} \quad (2.21)$$

$$Kr(hauteurs) = 3 + \frac{\sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^1 \sigma_{0\mathbf{k}}^4}{(\sigma_0^2)^2} \quad (2.22)$$

$$Sk(pentes) = \frac{\sum_{\mathbf{k}} \sigma_{2\mathbf{k}}^3}{(\sigma_2^2)^{3/2}} \quad (2.23)$$

$$Kr(pentes) = 3 + \frac{\sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}}^2 \sigma_{2\mathbf{k}}^4}{(\sigma_2^2)^2} \quad (2.24)$$

où $\epsilon_{\mathbf{k}}^1$ et $\epsilon_{\mathbf{k}}^2$ désignent l'excès de la *kurtosis* de la nappe de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ des hauteurs et des pentes (*ie.* $Kr_{\mathbf{k}}(hauteurs) = 3 + \epsilon_{\mathbf{k}}^1$ et $Kr_{\mathbf{k}}(pentes) = 3 + \epsilon_{\mathbf{k}}^2$).

Un choix possible : Une solution mathématique permettant de conserver les contraintes statistiques consiste à :

1. discrétiser le domaine spectral et angulaire en un certain nombre de vecteur d'onde $\mathbf{k}$;

2. construire chaque nappes avec des *skewness* et *kurtosis* des hauteurs et/ou des pentes identiques.

Proposition : Si chaque nappes a une *kurtosis* des hauteurs égale à :

$$Kr_k(\text{hauteurs}) = 3 + \epsilon_1 \quad (2.25)$$

où

$$\epsilon_1 = \frac{(Kr_{obs}(\text{hauteurs}) - 3)}{\sum_{\mathbf{k}} (\sigma_{0\mathbf{k}}^2)^2} (\sigma_0^2)^2 \quad (2.26)$$

alors la superposition des nappes conserve la *kurtosis* totale ($Kr_{obs}(\text{hauteurs})$)

Démonstration.

En tenant compte l'indépendance des nappes et que chacune d'entre elles a une moyenne nulle, le moment d'ordre 4 de la surface totale de notre modèle est :

$$\begin{aligned} \langle \eta^4 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}} \right)^4 \right\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \langle \eta_{\mathbf{k}}^4 \rangle + 6 \sum_{\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2} \langle (\eta_{\mathbf{k}_1} \eta_{\mathbf{k}_2})^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.27)$$

or

$$\langle \eta_k^4 \rangle = (3 + \epsilon_1) \langle \eta_k^2 \rangle^2 \quad (2.28)$$

donc

$$\begin{aligned} Kr_{model}(\text{hauteurs}) &= 3 + \epsilon_1 \frac{\left\langle \left(\sum_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}} \right)^2 \right\rangle^2}{\left\langle \left(\sum_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}} \right)^2 \right\rangle^2} \\ &= Kr_{obs}(\text{hauteurs}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

□

De même, on montre que pour conserver les *skewness* et *kurtosis* (hauteurs et/ou pentes), il suffit que chaque nappes à

$$Sk_k(\text{hauteurs}) = \epsilon_2 \quad (2.30)$$

et/ou

$$\begin{cases} Kr_k(pentes) = 3 + \epsilon_3 \\ Sk_k(pents) = \epsilon_4 \end{cases} \quad (2.31)$$

où

$$\epsilon_2 = \frac{(Sk_{obs}(hauteurs) - 3)(\sigma_0^2)^{3/2}}{\sum_{\mathbf{k}} (\sigma_{0\mathbf{k}}^{3/2})^2} \quad (2.32)$$

$$\epsilon_3 = \frac{(Kr_{obs}(hauteurs) - 3)(\sigma_2^2)^2}{\sum_{\mathbf{k}} (\sigma_{2\mathbf{k}}^2)^2} \quad (2.33)$$

$$\epsilon_4 = \frac{(Sk_{obs}(pentes) - 3)(\sigma_2^2)^{3/2}}{\sum_{\mathbf{k}} (\sigma_{2\mathbf{k}}^{3/2})^2} \quad (2.34)$$

Construction sous contraintes

On reprend le même exemple que dans le cas des hauteurs et le spectre pour construire pour une nappe donnée les PDF des amplitudes a_n et b_n à l'aide des exemples concrets.

La densité f_b peut être choisie comme une distribution Gaussienne centrée, puisque les moments d'ordre impaire de la fonction :

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{(x - x_n)^2}{2L^2}\right) \sin(k(x - x_n))$$

sont nuls. Les figures 2.5 et 2.6 tracent les PDF des amplitudes a_n (f_a) et b_n (f_b) pour différentes valeurs des *skewness* (Sk_{obs}) et *kurtosis* (Kr_{obs}) des élévations pour un nombre d'onde $k = 0.5$.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une modélisation originale de surfaces océaniques à l'aide de forme géométriques localisées. On a calculé également les moments des hauteurs et des pentes ainsi que le spectre.

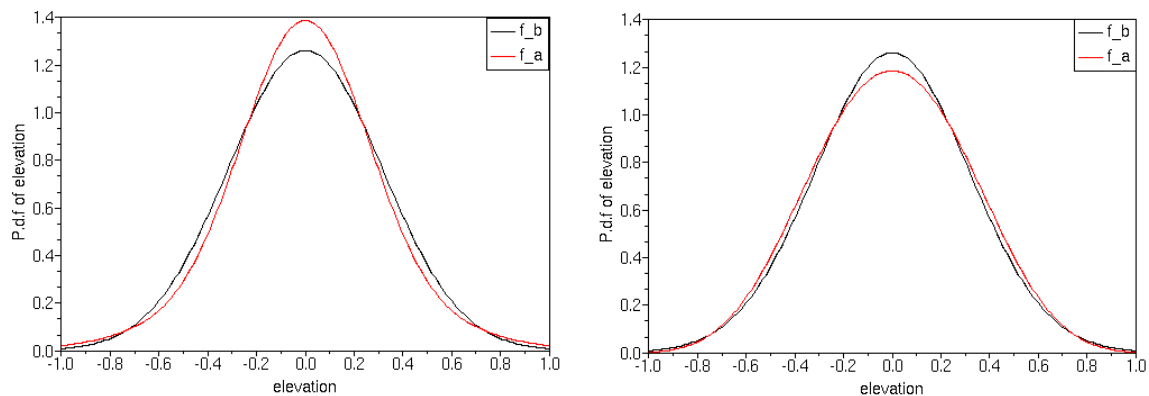


FIG. 2.5 – Les densités de probabilités f_a et f_b . À gauche ($Sk_{obs} = 0; Kr_{obs} = 5$). À droite ($Sk_{obs} = 0; Kr_{obs} = 2.1$).

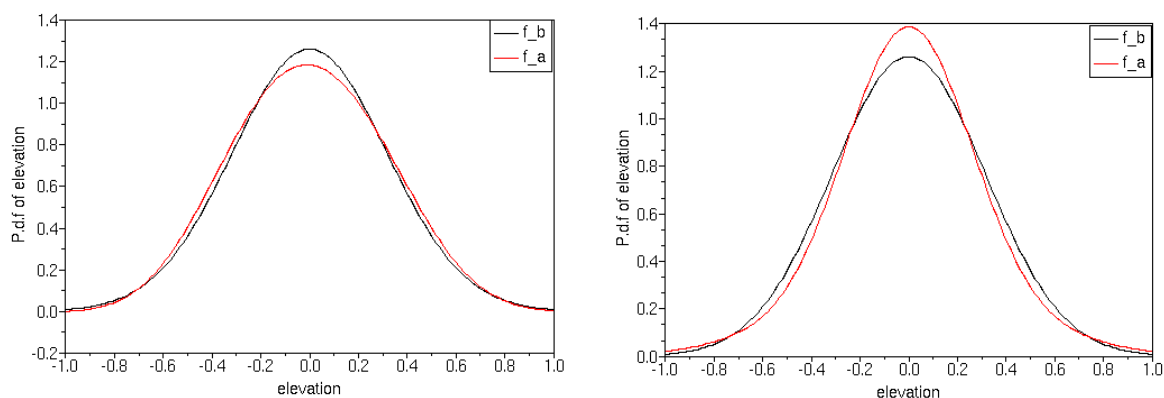


FIG. 2.6 – Les densités de probabilités f_a et f_b . À gauche ($Sk_{obs} = 0.2; Kr_{obs} = 5$). À droite ($Sk_{obs} = -0.2; Kr_{obs} = 5$).

L'étude menée dans ce chapitre a déterminé comment il est possible de peupler une surface océanique en respectant :

- un spectre ;
- une *skewness* et une *kurtosis* des hauteurs **et/ou** des pentes.

Dans le prochain chapitre, on étudiera plus en détail les effets sur le contrôle des statistiques des pentes sur celles des hauteurs et vice-versa.

Les deux prochains chapitres seront dédiés à l'application directe de cette modélisation à la simulation des états de mer. Le premier chapitre aboutira à la construction d'un modèle préliminaire qui servira de point de départ. Ce modèle sera nommé "Groupy Wave Model". Le second chapitre, quant à lui, aboutira à la construction d'un modèle qui sera nommé "Groupy Choppy Wave Model" qui tiendra compte des mouvement orbitaux des particules d'eau, et est vu comme un changement de coordonnées horizontales de la surface générée par "Groupy Wave Model".

Chapitre 3

Modèle “Groupy Wave” (GWM)

3.1 Introduction

Ce chapitre est une application directe de la modélisation de la surface océanique établie dans le chapitre précédent. La modélisation de la mer que nous développons ici s'appuie sur une formulation linéaire (surface explicite $z = f(x, y)$). À l'inverse des modèles de surfaces linéaires classiques, notre nappe est construite par des groupes de vagues où chaque groupe peut avoir sa propre phase. Ces derniers ont été étudiés dans de nombreux travaux [Mollo-Christensen et Ramamonjiarisoa (1978); Longuet-Higgins (1984); Ewing (1973).etc.]. Un autre intérêt réside dans la relation entre les groupes de vagues et l'apparition des déferlements [Donelan et al. (1972)].

Notre but est de construire une surface non seulement avec le spectre comme contrainte mais aussi une *kurtosis* et/ou une *skewness* observée(s). Ces données peuvent nous informer par exemple si les crêtes ont ou non tendance à être plus grandes que les creux (ou vice versa). Une autre caractéristique importante qui n'est pas modélisée par des statistiques de second ordre est la taille de la traîne de la densité de probabilité. La présence de longues traînes décrit l'apparition de larges crêtes ou creux dans le champ spatial des élévations ou des pentes.

Comme annoncé dans le paragraphe (1.4 page 17), on va étudier deux cas de groupes : groupes de vagues en polaire et en quadrature. La modélisation choisie dans le premier cas est facile au niveau des calculs mais permet le contrôle seulement de la *kurtosis* (hauteurs ou pentes) et du spectre. Le second cas quant à lui permet le contrôle de la *skewness* (hauteurs et pentes), de la *kurtosis* (hauteurs ou pentes) et du spectre.

Nous étudions l'effet du contrôle de la *kurtosis* des pentes sur celle des hauteurs et vice versa. Nous illustrons les possibilités offertes de réduire le nombre de nappes et par conséquent de réduire le coût de calcul. On commence chaque cas par une étude

sur les hauteurs, pentes et le spectre des nappes et nous le finirons par une méthode de génération.

N.B Nous gardons toutes les définitions et les notations du chapitre précédent.

3.2 Groupes de vagues en polaire

Pour la construction d’une nappe correspondant à un vecteur d’onde moyen $\mathbf{k}$, on considère deux distributions des ondelettes au sein de chaque nappe :

1. distribution déterministe ;
2. distribution stochastique.

3.2.1 Distribution déterministe

Dans le but de mieux faire comprendre notre démarche, j’ai choisi de commencer par ce cas simple où le but est de reproduire une surface figée (S) avec un spectre donné (Ψ_{target}).

Afin d’alléger les écritures, on considère qu’au sein d’une nappe de vecteur d’onde moyen $\mathbf{k}$, toutes les ondelettes ont les mêmes dimensions et que :

$$\text{longueur} = \text{largeur} = 2R(\mathbf{k}) = \frac{2n(\mathbf{k})\pi}{|\mathbf{k}|}$$

où $R(\mathbf{k})$ désigne le rayon du groupe et $n(\mathbf{k})$ désigne le nombre de vagues par groupe. La construction des nappes dépend fortement du chevauchement ou non des groupes de vagues. Nous désignons dans la suite de cette partie par $c(\mathbf{k})$ la distance de chevauchement entre deux groupes de vagues voisin au sein de la nappe de vecteur d’onde $\mathbf{k}$ (cf. la figure 3.1)

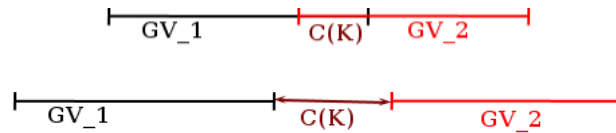


FIG. 3.1 – Illustration des deux cas possibles de la construction d’une nappe. Avec chevauchement (en haut) et sans chevauchement (en bas)

Plus précisément :

$$\begin{cases} c(\mathbf{k}) = 2R(\mathbf{k}) - d(r_{n+1}, r_n) & \text{si chevauchement} \\ c(\mathbf{k}) = -2R(\mathbf{k}) + d(r_{n+1}, r_n) & \text{sinon} \end{cases}$$

où r_n et r_{n+1} désignent les centres de deux ondelettes voisines et $d(r_{n+1}, r_n)$ désigne la distance entre les centres de ces deux ondelettes voisines. Ainsi, la formulation de la surface totale dans ce cas est :

$$\eta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_{min}}^{\mathbf{k}_{max}} \sum_{n=1}^{N_{\mathbf{k}}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\|^2}{2\varrho^2(\mathbf{k})}\right) \sin(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) + \theta_n) \quad (3.1)$$

où

- $N_{\mathbf{k}} = \left\lceil \frac{S}{(2R(\mathbf{k}) \pm c(\mathbf{k}))^2} \right\rceil$ ($\pm$: - si chevauchement et + sinon) où $[\cdot]$ désigne la partie entière ;
- $\varrho(\mathbf{k}) = 4\sqrt{2}R(\mathbf{k})$;
- θ_n désigne une phase aléatoire entre 0 et 2π .

Remarque : La différence entre la formulation 3.1 et 2.1 réside dans la nature de la distribution des groupes de vagues ainsi que leur nombre. Dans le cas 3.1, le nombre des groupes et leurs positions sont gouvernées par la distance de chevauchement donnée par l'utilisateur.

Nous gardons dans la suite de cette partie les mêmes notations. Ainsi, les paramètres d'entrée du modèle sont :

- nombre de vagues par groupe (ou le rayon de l'ondelette $R(\mathbf{k})$) ;
- chevauchement $c(\mathbf{k})$ des groupes. On parlera très souvent du coefficient de chevauchement $\frac{R(\mathbf{k})-c(\mathbf{k})}{R(\mathbf{k})}$ dans le cas où les groupes se chevauchent ;

La sortie du modèle est l'amplitude $a(\mathbf{k})$ des ondelettes au sein de la nappe de vecteur d'onde moyen $\mathbf{k}$.

Dans la suite, on calcul la variance des hauteurs, des pentes ainsi que le spectre. Ensuite, on présente une méthode de génération.

3.2.1 - A Hauteurs et pentes

Hauteurs

Ayant pour but une meilleure compréhension de notre modélisation de la surface océanique et pour ne pas alourdir cette partie par des calculs fastidieux (surtout lorsque les groupes de vagues se chevauchent), je me restreint au moment d'ordre 2.

Le calcul du moment d'ordre 2 ($\sigma_0^2(\mathbf{k})$) de la nappe de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est effectué sur une zone représentative de la nappe ; ensuite, on calcule la moyenne sur les phases des ondelettes constituant cette zone. on distingue deux cas :

1. pavage avec chevauchement ;

2. pavage sans chevauchement.

Dans le premier cas, on obtient après calcul :

$$\sigma_0^2(\mathbf{k}) = \frac{a(\mathbf{k})^2}{2(2R(\mathbf{k})-c(\mathbf{k}))(R(\mathbf{k})-c(\mathbf{k}))} \frac{\pi R^2}{8} [erf(x) + 2erf(x)(erf(\sqrt{2}) - erf(x))] \quad (3.2)$$

où $x = \frac{c(\mathbf{k})-R(\mathbf{k})}{R(\mathbf{k})}$ qu'on appellera (overlap coef).

Dans le second cas :

$$\sigma_0^2(\mathbf{k}) = \left(\frac{R(\mathbf{k})}{2R(\mathbf{k}) - c(\mathbf{k})} \right)^2 a(\mathbf{k})^2 \frac{\pi}{64} (erf(\sqrt{2}) - erf(-\sqrt{2}))^2 \quad (3.3)$$

Pentes

Le calcul formel de la variance des pentes donne :

$$\sigma_2^2(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2 \sigma_0^2(\mathbf{k}) \quad (3.4)$$

Les figures 3.2 représentent les courbes de la variance des pentes d'une nappe en fonction du coefficient du chevauchement (overlap coef) et pour différentes courbures (curve).

Ainsi, on remarque que la variance des pentes augmente lorsque le chevauchement devient important.

3.2.1 - B Spectre

Dans ce paragraphe, on calcule le spectre d'une nappe de surface S et de vecteur d'onde moyen $\mathbf{k}$ en fonction de ses paramètres.

D'après la définition du spectre, on trouve :

$$\Psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{S} \hat{\eta}(\mathbf{k}) \hat{\eta}(-\mathbf{k}) \quad (3.5)$$

où $\hat{\eta}(\mathbf{k})$ est la transformée de Fourier de la nappe. Après calcul :

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(\mathbf{k}) &= \sum_{m,n} \frac{\pi}{i} a \varrho^2 \exp(-2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_n^m + i\phi_{m,n}) (\exp(-2\pi^2 \varrho^2 \|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0\|_2^2) - \exp(-2\pi^2 \varrho^2 \|\mathbf{k} + \mathbf{k}_0\|_2^2)) \\ \hat{\eta}(-\mathbf{k}) &= - \sum_{m,n} \frac{\pi}{i} a \varrho^2 \exp(2i\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_n^m - i\phi_{m,n}) (\exp(-2\pi^2 \varrho^2 \|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0\|_2^2) - \exp(-2\pi^2 \varrho^2 \|\mathbf{k} + \mathbf{k}_0\|_2^2)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

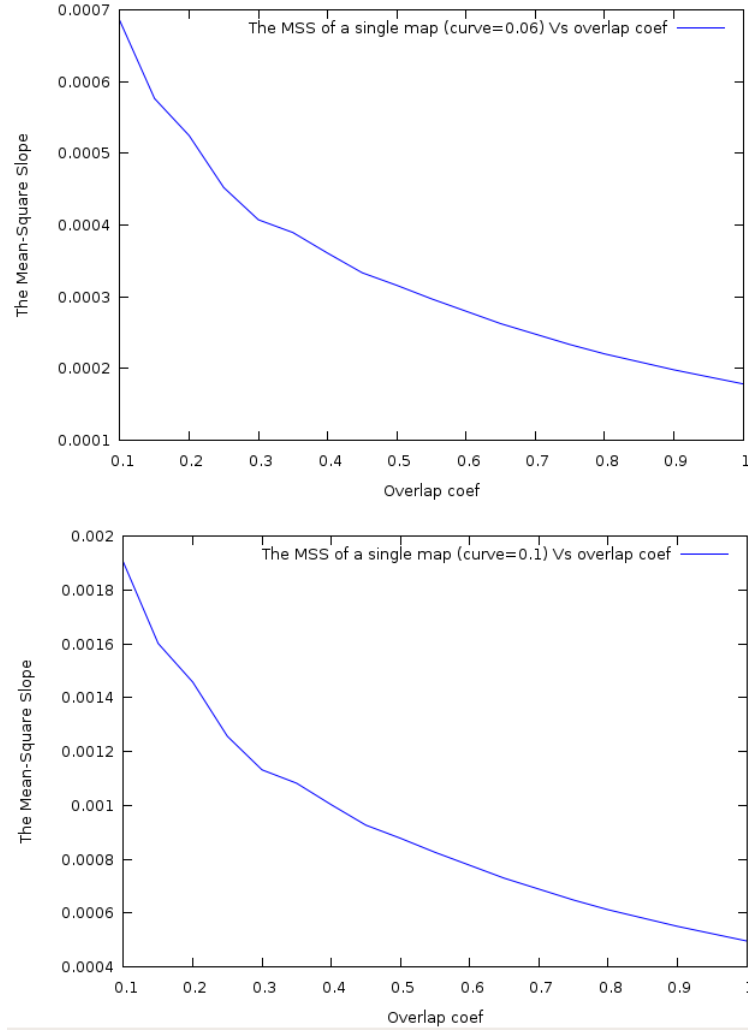


FIG. 3.2 – Variance des pentes d’une nappe versus coefficient du chevauchement

où, quitte à changer l’ordre de l’indexation $\mathbf{X}_n^m = \binom{md}{nd}$ avec $d = 2R(\mathbf{k}) \pm c(\mathbf{k})$ est la distance séparant les centres de deux ondelettes voisines et $\phi_{m,n}$ sont des phases aléatoires des ondelettes.

On trouve donc après calcul que :

$$\Psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2R(\mathbf{k}) \pm c(\mathbf{k}))^2} \frac{\pi^2 a^2 \varrho^4}{4} \left(\exp(-2\pi^2 \varrho^2 \|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0\|_2^2) - \exp(-2\pi^2 \varrho^2 \|\mathbf{k} + \mathbf{k}_0\|_2^2) \right)^2 \quad (3.7)$$

3.2.1 - C Génération de la surface

On commence naturellement par un maillage du domaine spectrale et ensuite la construction des nappes correspondantes, en prenant un intervalle fini $[\mathbf{k}_{max}, \mathbf{k}_{min}] \times [\phi_{max}, \phi_{min}]$ tel qu’il soit représentatif de l’énergie globale.

On propose une méthode simple de peuplement de surfaces océaniques ayant un spectre similaire. Pour cela on tient compte également de l’aspect Gaussien du spectre d’une nappe ($[|\mathbf{k}_i|, |\mathbf{k}_{i+1}|] \times [\phi_j, \phi_{j+1}]$) que l’on peut approcher à une Dirac dans le cas où l’extension moyenne des groupes multipliée par la largeur du domaine spectrale devient “assez grand” (supérieure à 4) (*ie.* $\exp(-2\pi^2 \varrho^2 ||\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_{i+1}||) \sim 0$).

Ainsi, pour chaque nappe, il s’agit de se donner :

1. rayon des ondelettes ($R(\mathbf{k})$);
2. chevauchement ($c(\mathbf{k})$).

La détermination de l’amplitude $a(\mathbf{k})$ se fait à partir de l’équation 3.7.

La figure 3.3 compare la distribution des hauteurs de notre surface et des surface classiques (sinusoïdale ou trochoïdale) à l’aide du spectre directionnel d’Elfouhaily.

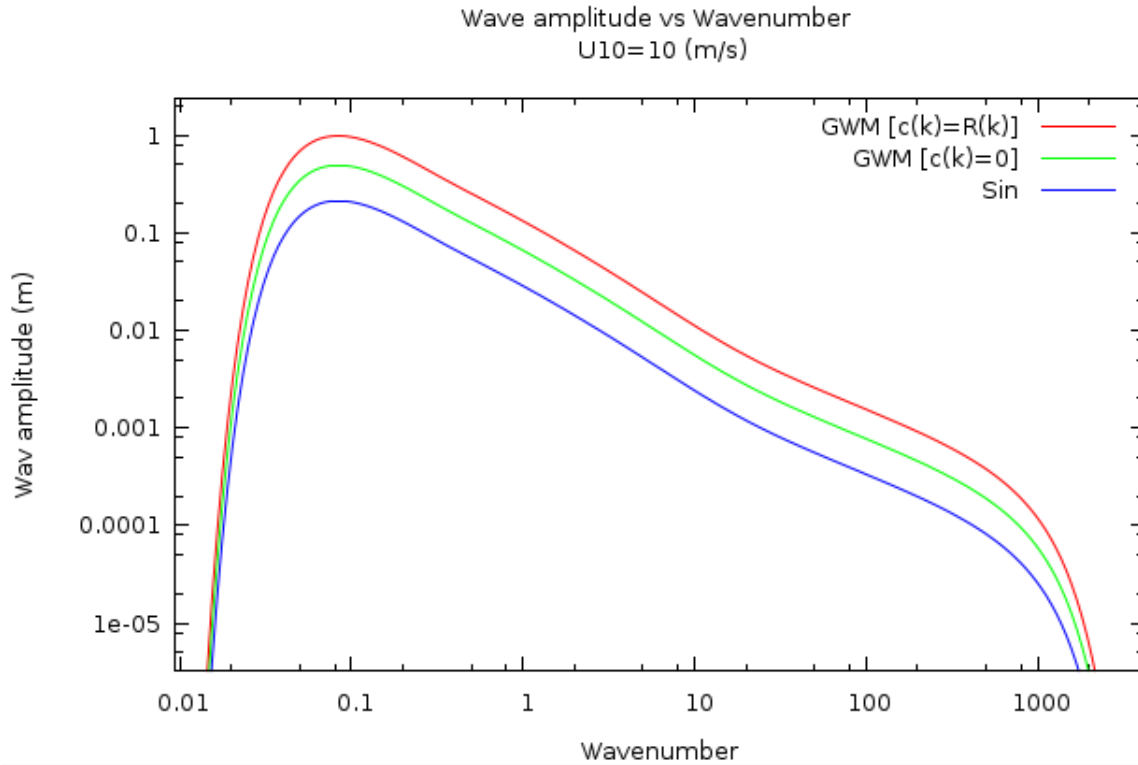


FIG. 3.3 – Distribution des hauteurs suivant des valeurs du chevauchement

Comme prévu, on remarque que les amplitudes dépendent de la valeur du chevauchement.

3.2.1 - D Bilan

Ainsi, on a présenté une méthode originale de génération de surfaces océaniques à l'aide de groupes de vagues représentés par une famille d'ondelettes (qu'on a nommé groupe de vagues en polaire). L'utilisateur de ce modèle peut intervenir en fournissant pour chaque échelle le chevauchement et le nombre de vagues par groupe. Cela fournira un large éventail d'états de mer tout en respectant le spectre voulu. Néanmoins, ce type de distribution des groupes de vagues (déterministe) nous impose un choix monochromatique des nappes puisque la vitesse des groupes dépend du nombre d'onde.

Le paragraphe suivant traite une distribution stochastique des groupes au sein d'une nappe et nous présentons les possibilités d'aller au-delà des statistiques du second ordre (spectre) ainsi que les possibilités offertes pour réduire le nombre de nappes.

3.2.2 Distribution stochastique

La modélisation de la surface proposée dans ce paragraphe est un cas particulier du GWM de la modélisation générale qu'on a proposé au chapitre précédent. Il s'agit de construire des nappes map_{ij} supposées être la somme d'une famille d'ondelettes de Morlet. Chacune d'entre elles a :

- sa propre phase θ_n uniformément répartie dans $[0, 2\pi[$;
- le nombre N_{ij} d'ondelettes par élément de surface suit la loi de Poisson de paramètre λ_{ij} ;
- son nombre d'onde et sa direction sont tirés aléatoirement respectivement dans $|\mathbf{k}| \in [|\mathbf{k}|_i, |\mathbf{k}|_{i+1}]$ et $\phi \in [\phi_j, \phi_{j+1}]$.

On présente une étude pour une surface figée. L'évolution temporelle quant à elle est gérée par l'équation de dispersion reliant la pulsation ω au nombre d'onde $\mathbf{k}$ du groupe (eq : 3.8) :

$$\omega^2 = gk \left(1 + \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\mathbf{k}_m} \right)^2 \right) \quad (3.8)$$

où $\mathbf{k}_m = \sqrt{\rho_e g / T_e}$ avec ρ_e la densité de l'eau de mer, g l'accélération de la pesanteur et T_e la tension superficielle. les vitesses de phases (v_p) et de groupe (v_g) se déduisent de l'équation (eq : 3.8) et s'expriment :

$$\begin{cases} v_p = \omega / \mathbf{k} \simeq \sqrt{g / \mathbf{k}} \\ v_g = \partial \omega / \partial \mathbf{k} \simeq 1/2 \sqrt{g / \mathbf{k}} \end{cases} \quad (3.9)$$

Plus précisément on écrit pour chaque nappe map_{ij} :

$$\eta_{\mathbf{k}}(r) = \sum_{n=1}^{N_{ij}} a_n \Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n, L, l, \theta_n) \quad (3.10)$$

où

- $\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n, L, l, \theta_n) = \exp\left(-\frac{(x-x_n)^2}{2L^2} - \frac{(y-y_n)^2}{2l^2}\right) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta_n)$
- $\mathbf{r}_n$: position aléatoire uniforme sur toute la surface ;
- a_n : amplitude aléatoire de densité f_a à déterminer ;
- L et l : largeur et longueur de groupes.

Notons que les variables aléatoires $\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n, L, l, \theta_n)$ sont de même loi et sont indépendantes (car fonction de variables indépendantes).

Comme le préconise notre méthode, nous allons établir des formules analytiques pour les hauteurs, les pentes et le spectre pour chaque nappe en fonction des paramètres de ce modèle.

3.2.2 - A Hauteurs et pentes

Afin de générer une surface S , il nous faut exprimer les moments et les spectres en fonction des paramètres de ce modèle *Groupy-wave* en polaire.

Hauteurs

Les moments d'élévation sont directement calculés en appliquant les résultats de la section 2.3, page 26. On trouve après calcul :

$$\begin{cases} \sigma_{0_{\mathbf{k}_0}}^n = 0 & \text{si } n = 2p + 1, \quad \forall p \in \mathbb{N} \\ \sigma_{0_{\mathbf{k}_0}}^n = \frac{\lambda \pi \langle a^n \rangle \binom{n}{p} Ll}{S 2^{n-1} n} & \text{si } n = 2p, \quad \forall p \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour assurer une distribution Gaussienne de cette nappe, il faut et il suffit que les paramètres internes des groupes de vagues (L, l) , leur nombre par unité de surface λ et les moments de l'amplitude vérifient la relation suivante :

$$\mathbb{E}(\eta_k^n) = (n-1)\mathbb{E}(\eta_k^2)\mathbb{E}(\eta_k^{n-2}) \quad (3.12)$$

on définira $\mathbb{E}(\eta_k^0) = 1$.

En pratique (pour des amplitudes faibles), pour assurer une distribution Gaussienne, il suffit de vérifier l'équation :

$$Kr(\eta) = \frac{3kr(a)}{4} \frac{S}{\pi \lambda Ll} = 3 \quad (3.13)$$

où $kr(a)$ désigne la *kurtosis* de la variable a_n . Une solution simple assurant la Gaussianité de la nappe consiste à considérer f_a comme une distribution Gaussienne et $\frac{4\pi\lambda Ll}{S} = 1$

Pentes

De la même manière que le calcul des moments d'élévation, on trouve :

$$\begin{cases} \partial_x \eta_{\mathbf{k}}^n = 0 & \text{si } n = 2p + 1, \quad \forall p \in \mathbb{N} \\ \partial_x \eta_{\mathbf{k}_0}^n = k_x^n \sigma_{0_{\mathbf{k}_0}}^n & \text{si } n = 2p, \quad \forall p \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.14)$$

Ainsi, on dispose des formules des moments des pentes permettant de contrôler les *kurtosis*. La *skewness* dans ce cas est nulle.

Remarque : D'après les formules des moments des hauteurs et des pentes, on déduit que la *kurtosis* des pentes égale à celle des hauteurs pour chaque nappe.

3.2.2 - B Spectre

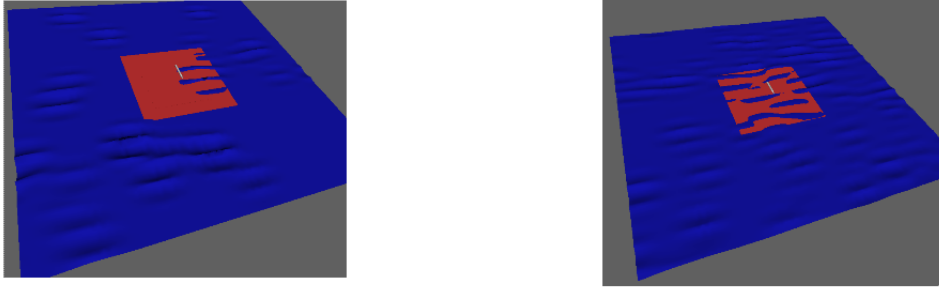
Le spectre d'une nappe de vecteur d'onde moyen $\mathbf{k}_0$ est calculé directement à partir de l'équation 3.37

$$\Psi_{mod}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi^2 \lambda m_2^a L^2 l^2}{S} [\exp(-2L^2 (k_x - k_{0x})^2 - 2l^2 (k_y - k_{0y})^2) - \exp(-2L^2 (k_x + k_{0x})^2 - 2l^2 (k_y + k_{0y})^2)]^2 \quad (3.15)$$

L'équation (3.15) montre que pour une nappe de nombre d'onde moyen donnée $\mathbf{k}_0$, d'extension du groupe moyenne L et l , tout produit $\lambda m_2^a = C^{te}$ donne le même spectre pour ces nappes. Si le nombre de groupes par unité de surface est faible ($\lambda/S < 1$), l'amplitude des groupes est élevée et la distribution de l'énergie pourrait être très hétérogène. Si la densité du groupe est élevée ($\lambda/S > 4$), l'amplitude des groupes est modérée et l'énergie est répartie de façon homogène sur toute la surface comme c'est illustré par la figure 3.4.

3.2.2 - C Réduction du coût de calcul

En élargissant le pas du maillage (en longueur et en direction), le nombre de nappes diminuera. Contrairement aux nappes sinusoïdales ou trochoïdales, nos nappes pourront être polychromatiques. Ainsi la surface totale obtenue sera représenté par plus de fréquences.



Deux nappes avec le même nombre d'onde moyen $k = 0.2 \text{ rad/m}$ et la même extension d'enveloppe $3\pi/k$. La surface du carré rouge S ($z = 0$) est telle que $\lambda/S = 1$ (à gauche) tandis que $\lambda/S = 4$ (à droite).

FIG. 3.4 – Des nappes avec différentes structures mais un spectre identique

Nous avons choisit un exemple bidimensionnel pour illustrer la possibilité offerte par notre modèle de générer une surface respectant un spectre avec une seule nappe. Ainsi, l'élévation de la surface est modélisée par :

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{\Psi(k_n)}S}{\pi\lambda L(k_n)^2} \Lambda(k_n, x, x_n, L(k_n), \theta_n) \quad (3.16)$$

Il s'agit de :

1. générer un nombre N (loi de Poisson de paramètre λ) ;
2. discrétiser (maillage logarithmique) le domaine spectrale en N maille ;

Les figures (3.5, 3.6) comparent le spectre d'entrée celui d'Elfouhaily (unidirectionnel) et le spectre de la surface de notre modèle GWM pour un inverse d'âge de vague $\Omega = 2$, une vitesse de vent $U_{10} = 10 \text{ m.s}^{-1}$ et pour différentes valeurs de nv (nombre de vagues par groupe) et de N (nombre de groupes).

Lorsque le nombre de points spectraux diminue, on obtient une meilleur approximation avec un nombre faible de vagues par groupe.

3.2.2 - D Simulation du GWM avec des primitives en polaires

Notre objectif est de simuler avec ce modèle de groupes en polaire une surface respectant un spectre donné Ψ_{target} et une *kurtosis* des pentes observée. On commence par la construction des nappes. Pour cela en outre la discrétisation des nombres d'ondes et les direction, nous avons besoin aussi de choisir pour chaque nappe (de vecteur d'onde $\mathbf{k}_i$) une densité de groupe par unité de surface λ/S et l'extension des enveloppe L et l (dépendant des hypothèse autour de l'hétérogénéité de la distribution de l'énergie en fonction de l'échelle).

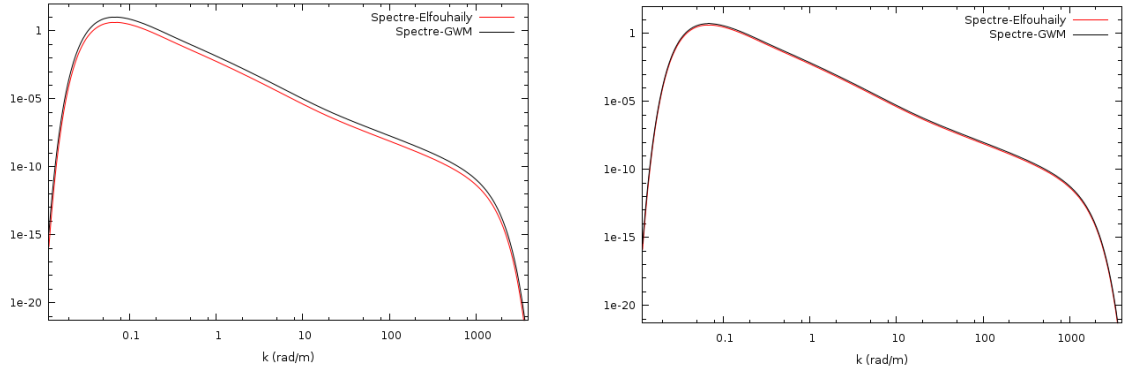


FIG. 3.5 – Comparaison entre le spectre unidirectionnel d’Elfouhaily en 500 mailles et le spectre du GWM avec $nv = 2$ (à gauche) et $nv = 5$ (à droite)

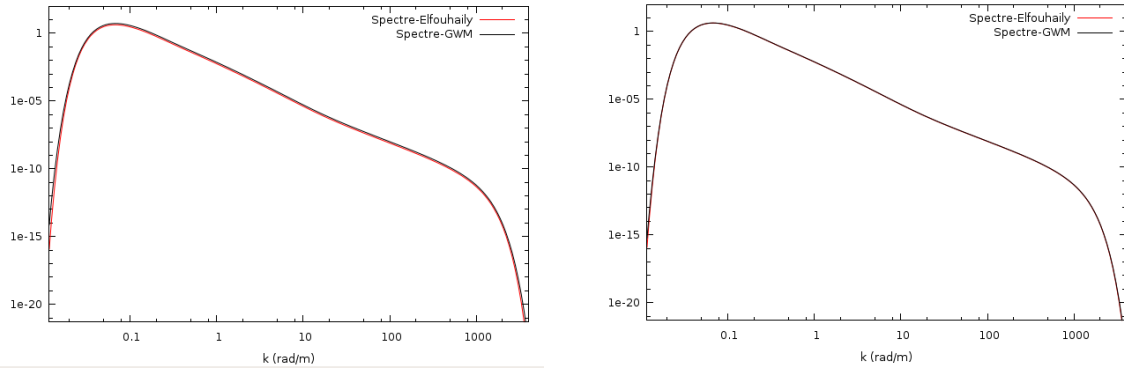


FIG. 3.6 – Comparaison entre le spectre unidirectionnel d’Elfouhaily en 200 mailles et le spectre du GWM avec $nv = 2$ (à gauche) et $nv = 3$ (à droite)

Comme mentionné dans le paragraphe (2.6) et rappelé ici : un choix possible de la distribution des *kurtosis* des pentes pour chaque nappe de vecteur d’onde moyen k se fait comme suit :

$$Kr_k(pentes) = 3 + \epsilon_3 \quad (3.17)$$

où

$$\epsilon_3 = \frac{(Kr_{obs}(pentes) - 3)}{\sum_{\mathbf{k}} (\sigma_{2\mathbf{k}}^2)^2} (\sigma_2^2)^2 \quad (3.18)$$

Le résumé de notre méthode est représenté dans l’algorithme suivant où il s’agit

de déterminer la densité de probabilité des amplitudes a_n en respectant le spectre (détermination du moment d'ordre 2) et la *kurtosis* (moment d'ordre 4) :

1. choisir un maillage du domaine du vecteur d'onde (*cf* (2.2), (2.3)) ;
2. *for* $|\mathbf{k}|_i = |\mathbf{k}|_{min} : |\mathbf{k}|_{max}$
 - (a) *for* $\phi_i = \phi_{min} : \phi_{max}$
 - i. résoudre $\Psi_{mod}^{\mathbf{k}_0} = \Psi_{target}$ pour déterminer le moment d'ordre 2 des amplitudes a_n (m_2^a)
 - ii. résoudre
$$Kr_{mod}^{\mathbf{k}_0} = 3 + \epsilon_3$$
pour déterminer le moment d'ordre 4 (m_4^a) où $Kr_{mod}^{\mathbf{k}_0}$ désigne la *kurtosis* de notre modèle pour une nappe de vecteur d'onde moyen $\mathbf{k}_0$.
 - iii. construire la densité f_a de moments d'ordre 2 et 4 respectivement égaux à m_2^a et m_4^a ;
 - iv. construire la nappe ;

Remarque : En tenant compte que pour chaque nappe la *kurtosis* des hauteurs est égale à celle des pentes et comme le montrent les formules des moments des hauteurs et des pentes, le respect de la *kurtosis* des pentes ($Kr_{obs}(pentes)$) donne automatiquement à celle des hauteurs une valeur majorée par $3 + \epsilon_3$.

3.2.2 - E Évolution temporelle

Le déplacement des primitives est géré par la relation de dispersion 3.8. Un ajout de $-\omega t$ à la phase originale permet de propager les vagues à la vitesse de phase au temps t . Notons que la vitesse de l'enveloppe est gérée par l'équation (3.9). La figure 3.7 est un exemple d'évolution de cette surfaces. La surface totale possède des fréquences comprises entre $k_{min} = 10^{-3} rad.m^{-1}$ et $k_{max} = 2.10^2 rad.m^{-1}$.

3.2.2 - F Bilan

L'étude menée dans ce cas particulier montre comment il est possible de peupler une surface aléatoire avec peu de calcul (section 3.2.2 - D) tout en respectant les mêmes contraintes (spectre + *kurtosis*) mais en assurant aussi l'hétérogénéité de la surface maritime. Je dresse ici un tableau illustrant la différence entre notre modèle et les surfaces sinusoïdales.

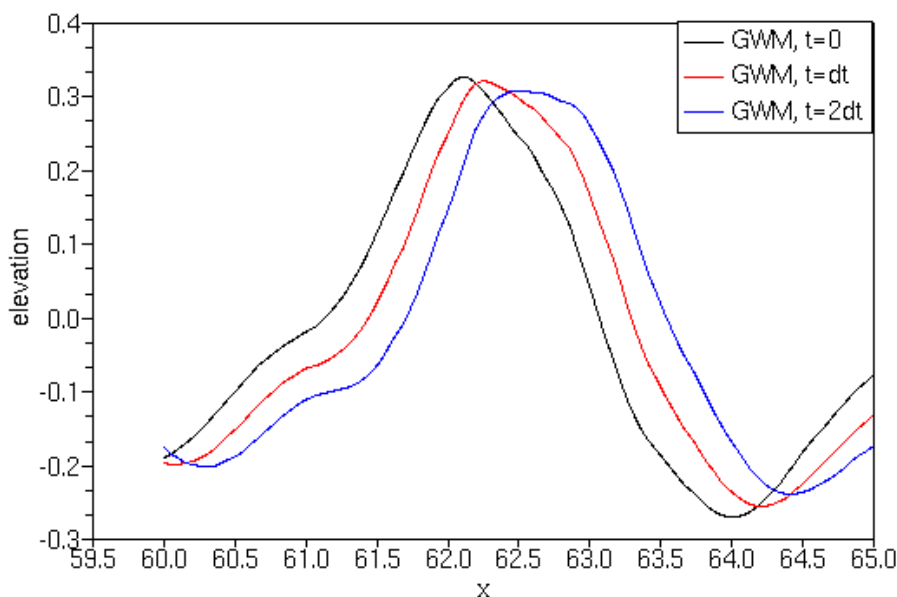


FIG. 3.7 – Évolution temporelle d'une coupe de la surface selon GWM (primitives polaires), $dt = 0.1s$

Caractéristiques	Approche classique	GWM
hétérogénéité	×	✓
Contrôle de la <i>skewness</i>	×	×
Contrôle de la <i>kurtosis</i> (hauteurs ou pentes)	×	✓
Surfaces Gaussiennes	✓	✓
surfaces non-Gaussiennes	×	✓

Notre étude a montré également que l'effet du contrôle de la *kurtosis* des pentes sur celle des hauteurs.

3.3 Groupes de vagues en quadratures

Pour fixer les idées, je commence notre étude par le cas bidimensionnel. Cette étude peut être intéressante dans le cas où les champs de vagues étudiés sont directs. Le spectre peut être ramené à un spectre unidirectionnel.

3.3.1 Description statistique des surfaces 2D

Avant de proposer la méthode de génération, il est nécessaire de calculer les premiers moments des hauteurs et des pentes ainsi que le spectre pour chaque nappe.

Pour la clarté et pour mieux comprendre la méthode proposée, j’ai choisit un cas simple où les amplitudes a_n et b_n sont de moments d’ordre 1 nul et que les fonction f_i et g_i (cf l’équation 2.1) sont constantes. Ainsi la nappe de vecteur d’onde moyen k est modélisée par :

$$\eta_k(x) = \sum_{n=1}^{N_k} \exp\left(-\frac{(x-x_n)^2}{2L^2}\right) (a_n^k \cos(k(x-x_n)) + b_n^k \sin(k(x-x_n))) \quad (3.19)$$

Dans cette section, on calcul les premiers moments des hauteurs, pentes ainsi que le spectre ensuite on présente un bilan.

3.3.1 - A Hauteurs

Après calcul :

Moment d’ordre 2

$$\sigma_{0k}^2 = \frac{\sqrt{\pi}\lambda}{2S} L \langle a_n^2 + b_n^2 \rangle \quad (3.20)$$

Moment d’ordre 3

$$\sigma_{0k}^3 = \frac{\sqrt{\pi}\lambda}{2\sqrt{6}S} \langle a_n^3 \rangle L \exp\left(-\frac{3}{2}k^2L^2\right) \left(3 \exp\left(\frac{4}{3}k^2L^2\right) + 1\right) \quad (3.21)$$

Moment d’ordre 4

$$\sigma_{0k}^4 = \frac{3\sqrt{\pi}\lambda}{8\sqrt{2}S} L \langle C_1 a_n^4 + C_2 b_n^4 + C_3 a_n^2 b_n^2 \rangle \quad (3.22)$$

où

$$C_1 = 1 + \frac{8}{6} \exp\left(-\frac{1}{2}k^2l^2\right) + \frac{2}{6} \exp(-2k^2l^2)$$

$$C_2 = 1 - \frac{8}{6} \exp\left(-\frac{1}{2}k^2l^2\right) + \frac{2}{6} \exp(-2k^2l^2)$$

$$C_3 = 2 - 2 \exp(-2k^2 l^2)$$

Or $k^2 l^2 \sim nv^2$ où nv désigne le nombre de vagues par groupe. On peut donc ramener les constante C_i à :

$$\begin{aligned} C_1 &\simeq 1 + \frac{8}{6} \exp\left(-\frac{1}{2}k^2 l^2\right) \\ C_2 &\simeq 1 - \frac{8}{6} \exp\left(-\frac{1}{2}k^2 l^2\right) \\ C_3 &\simeq 2 \end{aligned}$$

3.3.1 - B Spectre

D'après les formules du chapitre précédent, on en déduit facilement le spectre d'une nappe de vecteur d'onde moyen k_0 :

$$\Psi_{mod}(\mathbf{k}) = \frac{\lambda}{4S} \langle (a_n^2 + b_n^2) (L^2 \exp(-2L^2(k - k_0)^2)) \rangle \quad (3.23)$$

3.3.1 - C Pentas

Avec les mêmes approximations que dans le calcul des moments des hauteurs et en gardant les mêmes notations, on trouve :

Moment d'ordre 2

$$\sigma_{2\mathbf{k}}^2 \simeq k^2 \frac{\sqrt{\pi}\lambda}{2S} L \langle a_n^2 + b_n^2 \rangle \quad (3.24)$$

Moment d'ordre 3

$$\sigma_{2\mathbf{k}}^3 \simeq k^3 \frac{\sqrt{\pi}\lambda}{2\sqrt{6}S} \langle b_n^3 \rangle L \exp\left(-\frac{3}{2}k^2 L^2\right) \left(3 \exp\left(\frac{4}{3}k^2 L^2\right) + 1\right) \quad (3.25)$$

Moment d'ordre 4

$$\sigma_{2\mathbf{k}}^4 \simeq k^4 \frac{3\sqrt{\pi}\lambda}{8\sqrt{2}S} L \langle C_2 a_n^4 + C_1 b_n^4 + C_3 a_n^2 b_n^2 \rangle + C_4 \langle b_n^4 - a_n^4 \rangle \quad (3.26)$$

où

$$C_4 \simeq \left(\frac{\sqrt{2\pi} l k^4}{64} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} k^2 l^2 \right)$$

3.3.1 - D Bilan

Dans le cas où Lk devient grand (supérieur à 4 c'est à dire le nombre de vagues par groupe ≥ 5), on peut ramener les C_i à :

$$C_1 \simeq 1$$

$$C_2 \simeq 1$$

$$C_3 \simeq 2$$

Dans ce cas, le modèle GWM est en mesure de contrôler :

1. le spectre ;
2. la *skewness* des hauteurs et des pentes (a_n pour les hauteurs et b_n pour les pentes) ;
3. la *kurtosis* des hauteurs ou des pentes ;

D'après les formules des moments des hauteurs et des pentes, on trouve après simplification :

$$Kr_s(k) \simeq Kr_h(k) \tag{3.27}$$

où $Kr_h(k)$ et $Kr_s(k)$ désignent respectivement la *kurtosis* des hauteurs et des pentes pour une nappe de vecteur d'onde k . Ainsi, le contrôle de la *kurtosis* nous donnera automatiquement une valeur de la *kurtosis* des hauteurs identique à celle des pentes pour chaque nappe.

De même que le paragraphe précédent, le contrôle de la *kurtosis* des pentes de la surface totale de la mer donne automatiquement à celle des hauteurs une valeur majorée par $3 + \epsilon_3$.

où je rappelle que :

$$\epsilon_3 = \frac{(Kr_{obs}(pent\acute{e}s) - 3)}{\sum_{\mathbf{k}} (\sigma_{2\mathbf{k}}^2)^2} (\sigma_2^2)^2$$

3.3.2 Description statistique des surfaces 3D

On choisit pour une nappe de vecteur d'onde moyen $\mathbf{k}_0$, les primitives suivantes (cf 3.19, page 50) :

$$\Lambda_1(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n, L_n, l_n) = \exp \left(-\frac{(x - x_n - t\frac{c_x}{2})^2}{2g_1(L_n, t)^2} - \frac{(y - y_n - t\frac{c_y}{2})^2}{2g_2(l_n, t)^2} \right) \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) - \omega t) \quad (3.28)$$

et

$$\Lambda_2(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n, L_n, l_n) = \exp \left(-\frac{(x - x_n - t\frac{c_x}{2})^2}{2g_1(L_n, t)^2} - \frac{(y - y_n - t\frac{c_y}{2})^2}{2g_2(l_n, t)^2} \right) \sin(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) - \omega t) \quad (3.29)$$

où $\mathbf{c}(\frac{c_x}{c_y})$ désigne la vitesse de phase.

En résumé, la surface de la mer est une superposition de nappes indépendantes où chacune d'entre elles est également une superposition d'ondelettes. Chaque ondelette (à $t=0$) a sa propre amplitude $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ mais également sa propre phase $\arccos\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\right)$. Ce choix a pour objectif d'assurer la non nullité des moments d'ordre 3 et donc assurer une asymétrie (*skewness*) dans la distribution. On veut également enrichir nos groupes de vagues en rajoutant la contraction-décontraction-contraction des enveloppes des groupes de vagues (g_1 et g_2).

Le phénomène de la contraction d'enveloppe est tout simplement lié à l'augmentation de l'amplitude de l'ondelette ($\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$) et à la diminution des écarts types de l'enveloppe (*i.e.* nombre de vagues).

Mathématiquement, ce phénomène peut être modélisé par la définition suivante des fonction f_i et g_i sur l'intervalle $[0, t_{s1}]$ pour une ondelette de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ par :

$$\begin{cases} f_1(a_n, t) = a_n(1 + \nu t) \\ f_2(b_n, t) = b_n(1 + \nu t) \\ g_1(L_n, t) = L_{min} \exp(\vartheta(ts_1 - t)) \\ g_2(l_n, t) = l_{min} \exp(\vartheta(ts_1 - t)) \end{cases} \quad (3.30)$$

où

- ▷ L_{min} et l_{min} sont des valeurs minimales des écarts types des enveloppes (*i.e.* un nombre de vagues minimum que doit contenir une ondelette) ;
- ▷ ν et ϑ modélisent la vitesse de contraction et de décontraction de l'enveloppe ;

▷ t_{s_1} peut être défini en fonction d’une valeur maximale de la cambrure des vagues $\bigwedge_{max}$ tel que :

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}(1 + \nu t_{s_1})|\mathbf{k}| = \bigwedge_{max} \quad (3.31)$$

Ainsi l’ondelette arrête de se contracter dès qu’une valeur d’amplitude sera atteinte ($\sqrt{a_n^2 + b_n^2}(1 + \nu t_{s_1})$) à partir de laquelle il y aura un déferlement suivit d’une décontraction.

La décontraction quant à elle est liée à la diminution de l’amplitude et l’augmentation de l’écart type. Elle peut être modélisée par les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(a_n, t) = a_n(1 + \nu t_{s_1}) \exp(-\vartheta(t - ts)) \quad \text{si } t_{s_1} < t \leq t_{s_2} \quad \text{“décontraction”} \\ f_2(b_n, t) = b_n(1 + \nu t_{s_1}) \exp(-\vartheta(t - ts)) \\ g_1(L_n, t) = L_{min} \exp(ts - t) \\ g_2(l_n, t) = l_{min} \exp(ts - t) \end{array} \right. \quad (3.32)$$

où t_{s_2} peut être défini en fonction d’une valeur minimale de la cambrure des vagues $\bigwedge_{min}$

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}(1 + \nu t) \exp(-(t - ts)/\vartheta)|\mathbf{k}| = \bigwedge_{min}$$

Ainsi, on a défini les primitives, leurs amplitudes et les hypothèses de l’évolution temporelle du “groupy-wave” et de contraction, décontraction des enveloppes. Avant de nous intéresser à la génération des surfaces aléatoires et afin de mieux répondre aux contraintes imposées par des observations, il est nécessaire de faire une étude statistique complète des hauteurs, pentes et du spectre de chaque nappe pour ce choix de primitives. Rappelons que notre nappe est modélisée par :

$$\eta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{N_{\mathbf{k}}} f_1^{\mathbf{k}}(a_n^{\mathbf{k}}, t) \Lambda_1(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n^{\mathbf{k}}, g_1(L_n^{\mathbf{k}}, t), g_2(l_n^{\mathbf{k}}, t), t) + f_2^{\mathbf{k}}(b_n^{\mathbf{k}}, t) \Lambda_2(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n^{\mathbf{k}}, g_1(L_n^{\mathbf{k}}, t), g_2(l_n^{\mathbf{k}}, t), t)$$

3.3.2 - A Hauteurs

Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\chi = k_x^2 L_n^2 + k_y^2 l_n^2$$

$$\alpha_n = f_1(a_n, t) \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - f_2(b_n, t) \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

$$\beta_n = f_1(a_n, t) \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) + f_2(b_n, t) \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

Avec le même raisonnement que dans le cas 2D et après calcul :

Moment d'ordre 2

$$\sigma_{0\mathbf{k}_0}^2 \simeq \frac{\lambda\pi}{2S} \langle L_n l_n (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \rangle \quad (3.33)$$

Rappel : λ désigne le paramètre de la loi de Poisson et S désigne la surface de la nappe (surface de la mer à simuler).

Moment d'ordre 3

$$\sigma_{0\mathbf{k}_0}^3 = \frac{\lambda\pi}{S} \left\langle L_n l_n \exp\left(-\frac{3}{2}\chi\right) \alpha_n^3 A \right\rangle \quad (3.34)$$

où

$$\begin{cases} A = \frac{1}{24}[3T_1 + 1][3T_2 + 1] + \frac{3}{8}[T_1 - 1][T_2 - 1] \\ B = \frac{1}{24}[T_1 + T_2 - 2T_1 T_2] \\ T_1 = \exp\left(\frac{4}{3}k_x^2 L_n^2\right) \text{ et } T_2 = \exp\left(\frac{4}{3}k_y^2 l_n^2\right) \end{cases} \quad (3.35)$$

Moment d'ordre 4

$$\sigma_{0\mathbf{k}_0}^4 \simeq \frac{\lambda}{S} \left\langle \frac{9\pi}{128} L_n l_n [\alpha_n^4 + \beta_n^4] + \frac{9\pi}{32} \alpha_n^2 \beta_n^2 L_n l_n \right\rangle \quad (3.36)$$

Lorsque le nombre moyen de vagues par groupe devient grand, la surface tend vers une surface sinusoïdale et par conséquence, les moments d'ordre impair tendent vers 0.

3.3.2 - B Spectre

Spectre en nombre d'onde : Le calcul du spectre $\Psi_{mod}^{\mathbf{k}_0}$ pour une nappe de vecteur d'onde moyen $\mathbf{k}_0 = \begin{pmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \end{pmatrix}$ à l'aide de l'équation (2.13) dans le cas où les variables aléatoires a_n et b_n sont indépendantes :

$$\Psi_{mod}(\mathbf{k}) = \frac{\lambda}{4S} \langle (a_n^2 + b_n^2) (L_n^2 l_n^2 \exp(-2L_n^2 (k_x - k_{0x})^2 - 2l_n^2 (k_y - k_{0y})^2)) \rangle \quad (3.37)$$

Spectre en fréquence :

Le calcul du spectre $\Psi_{mod}^{\mathbf{k}_0}$ pour une nappe de vecteur d'onde moyen $\mathbf{k}_0 = \begin{pmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \end{pmatrix}$ à l'aide de l'équation (2.17) dans le cas où les variables aléatoires a_n et b_n sont indépendantes :

$$\Gamma_{mod}(\omega) = \lambda(\mathbf{E}[\hat{f}_1(a_n, \omega)\hat{f}_1(a_n, -\omega) + \hat{f}_1(a_n, \omega)\hat{f}_1(b_n, -\omega) + \hat{f}_1(a_n, -\omega)\hat{f}_1(b_n, \omega) + \hat{f}_2(b_n, \omega)\hat{f}_2(b_n, -\omega)]) \exp(-(2L_n/c_x + 2l_n/c_y)(\omega - \omega_0)) \quad (3.38)$$

3.3.2 - C Pentec

Notations :

$$\gamma_x = \partial\eta/\partial x$$

$$\gamma_y = \partial\eta/\partial y$$

$\mathbf{s} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$: une direction arbitraire (on y calcule la pente)

La pente totale dans la direction $\mathbf{s}$ est :

$$\gamma(\phi) = \gamma_x \cos(\phi) + \gamma_y \sin(\phi)$$

Le moment d'ordre n est

$$\langle [\gamma(\phi)]^n \rangle = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \langle \gamma_x^m \gamma_y^{n-m} \rangle \cos(\phi)^m \sin(\phi)^{n-m} \quad (3.39)$$

Avec les mêmes hypothèses de simplification que dans le cas 2D, on trouve après calcul :

Moment d'ordre 2

$$\langle [\gamma(\phi)]^2 \rangle \simeq |\mathbf{k}|^2 (\cos(\phi) + \sin(\phi))^2 \sigma_{0\mathbf{k}_0}^2 \quad (3.40)$$

Moment d'ordre 3

$$\langle \partial_x \eta_{\mathbf{k}}^3 \rangle = \frac{\pi\lambda}{S} \langle A_n + B_n + C_n + D_n \rangle \quad (3.41)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \left[\frac{l_n}{6L_n} k_x (k_x^2 L_n^2 - 1) \right] [(3\alpha_n^2 \beta_n - \beta_n^3) \exp(-3/2\chi) + (\beta_n^3 + \alpha_n \beta_n^2) \exp(-1/2\chi)] \\ B_n = \frac{2}{3} L_n l_n k_x^3 \left[\left(\frac{\beta_n^3}{4} - \frac{3\alpha_n^2 \beta_n}{4} \right) \exp(-3/2\chi) + \left(\frac{3\beta_n^3}{4} + \frac{3\alpha_n^2 \beta_n}{4} \right) \exp(-1/6\chi) \right] \\ C_n = \frac{l_n}{3L_n} k_x [(3k_x^2 L_n^2 - 1) (\alpha_n^3 - 3\alpha_n \beta_n^2) \exp(-3/2\chi) + \left(\frac{k_x^2 L_n^2}{3} - 1 \right) (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \alpha_n \exp(-1/6\chi)] \\ D_n = L_n l_n k_x^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \beta_n [\exp(-3/2\chi) + \frac{1}{3} \exp(-1/6\chi)] \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Moment d'ordre 4

$$\langle [\gamma(\phi)]^4 \rangle \simeq |\mathbf{k}|^4 (\cos(\phi) + \sin(\phi))^4 \sigma_{0\mathbf{k}_0}^4 \quad (3.43)$$

3.3.2 - D Résultats

D'après les formules des moments des hauteurs et des pentes, on trouve aussi :

$$Kr_s(k) \simeq Kr(k) \quad (3.44)$$

L'effet du contrôle de la *kurtosis* des pentes de la surface totale sur celle des hauteurs reste aussi valable dans le cas 3D.

Ainsi, nous avons calculé les premiers moments des hauteurs et des pentes afin de caractériser les principales propriétés statistiques utilisées en océanographie (en fonction des paramètres de notre modèle “Groupy Wave”).

3.3.2 - E Bilan

Ainsi, nous avons proposé un modèle de surfaces explicites ($z = f(x, y)$) de simulation des états de mer avec des groupes de vagues tout en contrôlant leurs phases. L'utilisateur de ce modèle a besoin de choisir ses propres hypothèses par rapport à la modulation des vagues en fonction de l'échelle et ses hypothèse d'évolution temporelle, à savoir le nombre moyen de groupes par unité de surface, le nombre moyen de vagues par groupe et les paramètres de contraction et décontraction des enveloppes. Ces paramètres offrent un large éventail de différentes structures de l'état de mer, tout en respectant les mêmes statistiques. Notons également que l'énergie des surfaces générées par notre modèle peut être également hétérogène contrairement aux surface classiques. Ces dernières sont majoritairement sinusoïdales (pour les surfaces explicites), leur simulation nécessite un échantillonnage du domaine spectral et directionnel assez fin puisque les nappes correspondantes sont monochromatiques contrairement à notre méthode où chaque nappe peut contenir plusieurs fréquences et dans plusieurs directions. Le tableau suivant illustre la différence entre notre modèle (polaire GWM-P et quadrature GWM-Q) et les surfaces sinusoïdales (S-S).

Caractéristiques	S-S	GWM-P	GWM-Q
hétérogénéité	×	✓	✓
contrôle de la <i>skewness</i> (hauteurs et pentes)	×	×	✓
contrôle de la <i>kurtosis</i> (hauteurs ou pentes)	×	✓	✓
surfaces Gaussiennes	✓	✓	✓
surfaces non-Gaussiennes	×	✓	✓

3.4 Conclusion

Le travail mené dans ce chapitre propose une alternative aux méthodes classiquement utilisées pour la simulation des surfaces océaniques. Nous avons modélisé l’élévation de la surface océanique en tant que superposition de groupes de vagues. Nous avons proposé une formulation de deux modèles. Le premier avec des primitives polaire avec une capacité de peupler ces surface sous les contraintes liés aux spectre et la *kurtosis* des hauteurs ou des pentes. Le second quant à lui, utilise les primitives en quadratures et assurant le contrôle du spectre, *skewness* des hauteurs et des pentes et la *kurtosis* des hauteurs ou des pentes tout en montrant l’effet du contrôle des pentes sur celle des hauteurs et vice-versa. Un autre résultat souligne un large éventail de différentes structures de l’état de mer, tout en respectant les mêmes contraintes statistiques.

Jusqu’à présent, nous avons utilisé un modèle de la surface comme la somme des processus aléatoires avec un unique déplacement vertical. Dans la réalité le mouvement des particules d’eau implique des mouvements orbitaux avec des déplacements horizontaux fortement corrélés aux mouvements verticaux.

Dans le prochain chapitre nous allons transformer notre primitive de groupe de vagues afin d’assurer un mouvement orbital des particules d’eau.

Chapitre 4

Modèle “Groupy-Choppy Wave” (GCWM)

4.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent une nouvelle manière de générer des surfaces aléatoires. Ces dernières sont explicites ($z = f(x, y)$) et ne tiennent pas en compte les mouvements des particules d’eau. Comme nous l’avons vu au chapitre 1 et rappelé ici : dans la plupart des modèles existants, les mouvements orbitaux sont représentés par des vagues trochoïdale établies par Gerstner [Gerstner (1809)] et Rankine [Rankine (1836)].

L’objectif de ce chapitre est de tenir compte des mouvements des particules d’eau en apportant un raffinement du modèle précédent (GWM) pour rendre les vagues plus réalistes. Nous nous inspirons des travaux des auteurs de l’article [Nouguier et al. (2009)] en introduisant une transformation géométrique de la surface explicite.

De même que le GWM applique un groupe sur des vagues sinusoïdales, nous allons dans ce chapitre grouper les CWM pour obtenir le “Groupy Choppy Wave model” (GCWM). Le calcul dans cette étude se base sur le fait que les vagues trochoïdales peuvent être vu comme un changement de coordonnées horizontales des vagues sinusoïdales. Par analogie, la prise en compte des déplacements horizontaux se fera *via* un changement de coordonnées des groupes de vagues générant la surface avec le modèle GWM.

Afin de comparer notre modèle avec CWM et pour une meilleur lisibilité, nous choisissons dans ce chapitre d’étudier l’effet de la transformation des surface Gaussiennes générées par le GWM (polaire).

Dans la suite de ce chapitre, le groupe de vague prend en compte le déplacement orbital des particules d’eau. Ainsi un groupe de vague est décrit par l’ensemble des

particules de surface définies par $(\mathbf{r}, \tilde{\Lambda}(\mathbf{r} + D_\Lambda(\mathbf{r})))$ avec :

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{r} + D_\Lambda(\mathbf{r})) = \Lambda(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

où

$$\begin{cases} \Lambda(\mathbf{r}) = \exp\left(-\frac{(x-x_n)^2}{2L_n^2} - \frac{(y-y_n)^2}{2l_n^2}\right) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta_n) \\ D_\Lambda(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \exp\left(-\frac{(x-x_n)^2}{2L_n^2} - \frac{(y-y_n)^2}{2l_n^2}\right) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \theta_n) \end{cases} \quad (4.2)$$

représentent respectivement le groupe de vagues du modèle GWM (polaire, voir 3.2.2, page 43) et le déplacement horizontal des particules.

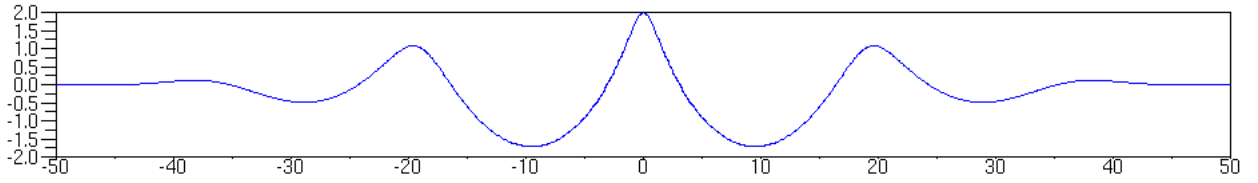


FIG. 4.1 – La nouvelle primitive “groupe de vagues”

N.B Cette primitive est une onde trochoïdale enveloppée. Elle a été introduite dans le modèle IPAS [Parenthoën (2004)].

Ainsi, la définition d’une nappe map_{ij} est l’ensemble des particules de surface définies par $(\mathbf{r}, \tilde{\eta}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + D_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})))$, où $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$, $|\mathbf{k}| \in [|\mathbf{k}|_i, |\mathbf{k}|_{i+1}]$, $\phi \in [\phi_j, \phi_{j+1}]$ et

$$\begin{cases} \tilde{\eta}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + D_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})) = \eta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\ \eta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_{\mathbf{k}}} a_n \Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \\ D_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_{\mathbf{k}}} a_n D_\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{r}_n) \end{cases} \quad (4.3)$$

On rappelle que $N_{\mathbf{k}}$ désigne le nombre de groupes que nous supposons suivra la loi de Poisson de paramètre λ (qui dépend de $\mathbf{k}$). L’élévation et le déplacement horizontal totaux de la surface est :

$$\begin{cases} \tilde{\eta}(\mathbf{r} + D(\mathbf{r})) = \eta(\mathbf{r}) \\ D = \sum_{\mathbf{k}} D_{\mathbf{k}} \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans la suite de ce manuscrit toutes les grandeurs munis du symbole $\sim$ (tilde) concerneront la surface générée par GCWM. Nous présentons une étude complète des élévations, pentes et le spectre habillé. Nous présentons une méthode pour déshabiller le spectre et tenir compte des points de rebroussements. Enfin nous présentons quelques résultats de simulations.

4.2 Hauteurs

Le but de cette section est de déterminer les propriétés statistiques des élévations pour la surface totale de la mer. On s'intéresse de nouveau à la fonction caractéristique des hauteurs

$$\tilde{\Phi}(v) = \langle e^{iv\tilde{\eta}} \rangle \quad (4.5)$$

Avec le changement de variable $(x, y) \rightarrow (x + D_x, y + D_y)$, où D_{x_i} désigne le déplacement suivant la variable x_i , on peut réécrire :

$$\tilde{\Phi}(v) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \langle e^{iv\eta(\mathbf{r})} |J(\mathbf{r})| \rangle \quad (4.6)$$

où $|J(\mathbf{r})|$ est le Jacobien de la transformation qui peut être mis sous la forme :

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 1 + \partial_x D_x(\mathbf{r}) & \partial_y D_x(\mathbf{r}) \\ \partial_x D_y(\mathbf{r}) & 1 + \partial_y D_y(\mathbf{r}) \end{vmatrix}$$

Nous avons vérifié numériquement la Gaussianité des vecteurs $(\partial_i D_j, \partial_k D_l)$. En tenant compte des propriétés de l'annexe A.1, page 123 on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(v) &= \langle ((1 + \partial_x D_x)(1 + \partial_y D_y) - \partial_x D_y \partial_y D_x) e^{iv\eta} \rangle \\ &= \langle (1 + \partial_x D_x)(1 + \partial_y D_y) e^{iv\eta} \rangle - \langle \partial_x D_y \partial_y D_x e^{iv\eta} \rangle \end{aligned} \quad (4.7)$$

d'après les propriétés 3 et 4 de l'annexe (A.1, page 123), on trouve :

$$\tilde{\Phi}(v) = \langle (1 + \partial_x D_x)(1 + \partial_y D_y) - \partial_x D_y \partial_y D_x \rangle e^{iv\eta} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(v) &= (1 + \langle \partial_x D_x \partial_y D_y \rangle + iv \langle \eta(\mathbf{r}) \text{div}(D(\mathbf{r})) \rangle - v^2 \langle \partial_x D_x \eta \rangle \langle \partial_y D_y \eta \rangle \\ &\quad - (\langle (\partial_x D_y)^2 \rangle) - v^2 \langle \partial_x D_y \eta \rangle^2) e^{-1/2v^2\sigma_0^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Avec le même type de calcul de l'annexe (C, page 133), on trouve :

$$\langle \partial_x D_x \partial_y D_y \rangle = \langle (\partial_x D_y)^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} |k_x|^2 |k_y|^2 |\mathbf{k}|^{-2} \Psi(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (4.10)$$

On en déduit après le même type de calcul que :

$$\tilde{\Phi}(v) = (1 + iv\gamma_1 - v^2\gamma_2) e^{-1/2v^2\sigma_0^2} \quad (4.11)$$

où $\gamma_1 = \langle \eta(\mathbf{r}) \operatorname{div}(D(\mathbf{r})) \rangle$ et $\gamma_2 = \langle \eta^2(\mathbf{r}) \partial_x D_x(\mathbf{r}) \partial_y D_y(\mathbf{r}) \rangle$.

Avec :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= - \int_{\mathbb{R}^2} |k| \Psi(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \\ \gamma_2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |k_x| |k_y| |\mathbf{k}|^{-1} \Psi(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right)^2 - \left(\int_{\mathbb{R}^2} |k_x|^2 |\mathbf{k}|^{-1} \Psi(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |k_y|^2 |\mathbf{k}|^{-1} \Psi(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Les moments d'élévations donnent :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\eta}^1 \rangle &= \gamma_1 \\ \langle \tilde{\eta}^2 \rangle &= \sigma_0^2 - 2\gamma_2 \\ \langle \tilde{\eta}^3 \rangle &= -3\gamma_1 \sigma_0^2 \\ \langle \tilde{\eta}^4 \rangle &= 3\sigma_0^4 \left(1 - 4 \frac{\gamma_1}{\sigma_0^2} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

où σ_0^i désigne le moments des élévation d'ordre i de la surface explicite du modèle GWM.

Une simple transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique (4.11) donne alors la fonction de densité de probabilité des élévations :

$$\tilde{P}_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(v) e^{-vz} dv = P_0(z) \left(1 + \frac{\gamma_2}{\sigma_0^2} - \frac{\gamma_1}{\sigma_0^2} z - \frac{\gamma_2}{\sigma_0^4} z^2 \right) \quad (4.14)$$

où $\sigma_0^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ désigne le moment des élévations d'ordre 2 de la surface et $P_0(z)$ désigne la densité de probabilité de la surface totale du modèle GWM :

$$P_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{\left(-\frac{z^2}{2\sigma_0^2}\right)} \quad (4.15)$$

est la loi normale centrée de variance σ_0^2 . Nous comparons dans la figure (4.2) la PDF du GCWM avec la distribution Gaussienne du modèle GWM.

On remarque une *skewness* négative et une très légère excès de *kurtosis*

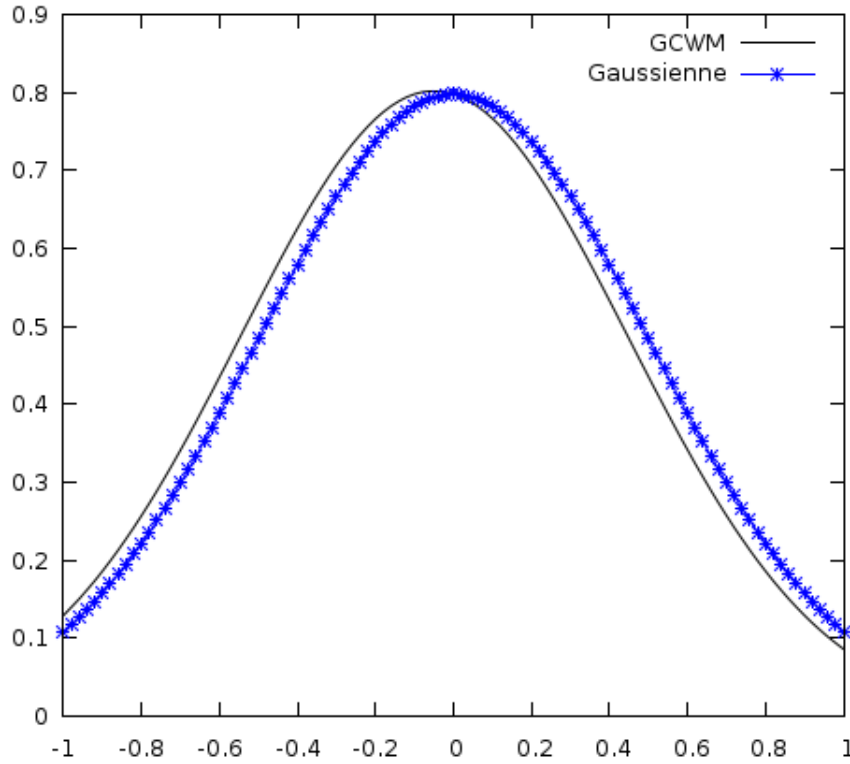


FIG. 4.2 – Comparaison de la PDF des élévations du GCWM avec la distribution Gaussienne pour $U_{10} = 9m.s^{-1}$

4.3 Pentes

Nous commençons par une étude numérique de la pdf des pentes dans le cas 2D (figure 4.3) : La comparaison est faite avec la loi Gaussienne. La queue de la distribution du GCWM est plus grande. La distribution de GCWM doit être tronquée à un seuil maximum que l'on peut estimer au seuil de déferlement.

Le calcul de la PDF dans le cas 3D est similaire à celui de l'article [Nouguier et al. (2009)]. Nous reprenons le même développement des calculs et on trouve également la PDF sous la forme suivante :

$$\tilde{P}_2(z) = \int_{\mathbb{R}^3} \text{sign}(|J(\mathbf{r})|) |J(\mathbf{r})|^2 P^1(X) P^2(J(\mathbf{r}), z) dX \quad (4.16)$$

où

$$\triangleright X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \text{ et } J(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 1 + X_1 & X_2 \\ X_2 & 1 + X_3 \end{pmatrix}$$

$\triangleright P^1$ et P^2 sont respectivement des densités de probabilités des vecteurs aléatoires

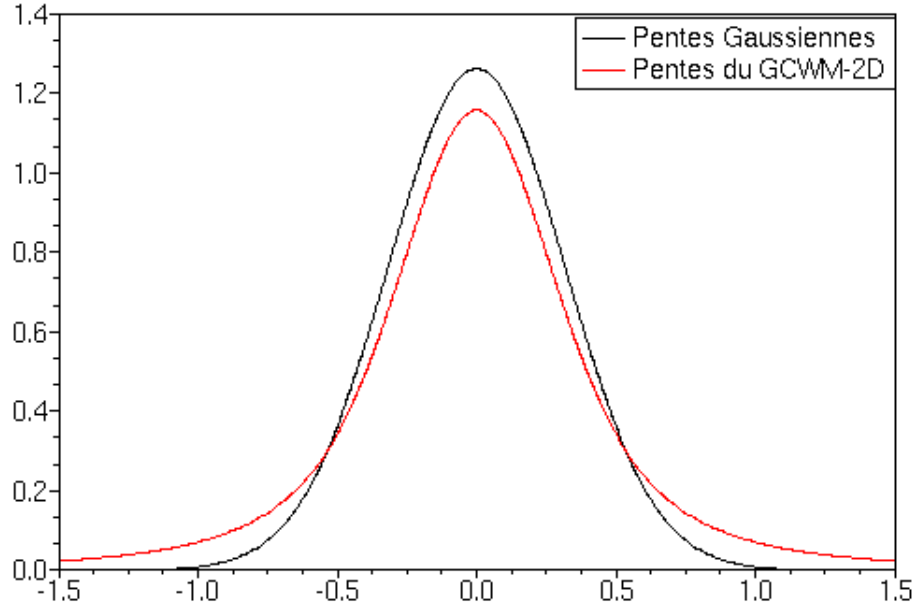


FIG. 4.3 – Distribution des pentes du modèle Gaussien et du GCWM à un vent de 10 m.s^{-1} (Spectre d’Elfouhaily)

$$D = \begin{pmatrix} \partial_x D_x \\ \partial_x D_y = \partial_y D_x \\ \partial_y D_y \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} \partial_x \eta \\ \partial_y \eta \end{pmatrix}$$

Les matrices de corrélation des vecteurs V_1 et V_2 sont respectivement données par :

$$C_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\text{et } C_2 = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Leur coefficients sont : (leurs calculs est détaillé dans l’annexe C, page 133) :

$$\begin{cases} d_{11} = \int_{\mathbb{R}^2} |k_x|^4 |k|^{-2} \Psi(k) dk, & d_{12} = \int_{\mathbb{R}^2} |k_x|^3 |k_y|^1 |k|^{-2} \Psi(k) dk \\ d_{13} = \int_{\mathbb{R}^2} |k_x|^2 |k_y|^2 |k|^{-2} \Psi(k) dk, & d_{22} = \int_{\mathbb{R}^2} |k_x|^2 |k_y|^2 |k|^{-2} \Psi(k) dk \\ d_{23} = \int_{\mathbb{R}^2} |k_x| |k_y|^3 |k|^{-2} \Psi(k) dk, & d_{33} = \int_{\mathbb{R}^2} |k_y|^4 |k|^{-2} \Psi(k) dk \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} \eta_{11} = \int_{\mathbb{R}^2} |k_x|^2 \Psi(k) dk, & \eta_{12} = \int_{\mathbb{R}^2} |k_x| |k_y| \Psi(k) dk \\ \eta_{22} = \int_{\mathbb{R}^2} |k_y|^2 \Psi(k) dk \end{cases} \quad (4.20)$$

Nous avons vérifié numériquement que les matrices C_1 et C_2 sont définies positives donc P^1 et P^2 sont des vecteurs Gaussiens de matrices de corrélation C_1 et C_2 . La PDF peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\tilde{P}_2(z) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{sign}(|J(\mathbf{r})|)|J(\mathbf{r})|^2}{(2\pi)^{5/2}\sqrt{|C_1||C_2|}} e^{(-1/2X^t C_1^{-1} X)} e^{-1/2(J(\mathbf{r}) \cdot z)^t C_2^{-1} (J(\mathbf{r}) \cdot z)} dX \quad (4.21)$$

Ainsi, on retrouve la même densité de probabilité que celle du modèle CWM [Nouguier (2009), Nouguier et al. (2009)]. D’après leur études, la distribution des pentes du CWM a été comparée aux modèles perturbatifs déjà existants et aux données expérimentales et a montré une très bonne concordance. Il en est de même pour notre modèle GCWM basé sur le GWM Gaussien.

4.4 Calcul du spectre habillé

La transformation horizontale (equation 4.3) habille le spectre initial dans les hautes fréquences, il est nécessaire de le déterminer pour que le spectre de la surface générée par GCWM possède un spectre de mer voulu. Nous utiliserons la terminologie déjà introduite par [Elfouhaily et al. (1997); Soriano et Saillard (2003); Nouguier (2009)]

Le spectre dit “déshabillé” (Ψ) est celui initialement introduit dans le modèle GWM et le spectre dit “habillé” ($\tilde{\Psi}$) est celui de la surface du modèle GCWM associé.

Dans cette section nous allons déterminer le spectre $\tilde{\Psi}$ d’une nappe de surface S du modèle GCWM constituée de groupes de vagues de vecteur d’onde moyen $\mathbf{k}_0$. On note $\tilde{\rho}_0$ la fonction de corrélation de cette nappe.

Après calcul de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation, on trouve :

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{S} \widehat{\tilde{\eta}_{\mathbf{k}_0}}(\mathbf{k}) \widehat{\tilde{\eta}_{\mathbf{k}_0}}(-\mathbf{k}) \quad (4.22)$$

où l’opérateur “ $\widehat{\cdot}$ ” désigne la transformée de Fourier.

Avec les changements de variable

1. $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r} + D_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r})$
2. $\mathbf{s} \mapsto \mathbf{s} + D_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{s} + \mathbf{r}) - D_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{s})$

Ces changements sont inversibles si : $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \quad \nabla \cdot D_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}) < 1$.

Sous cette hypothèse on obtient :

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{S} \int_S \eta_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}) J(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot (D_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}) + \mathbf{r})} d\mathbf{r} \int_S \eta_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{s}) J(\mathbf{s}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (D_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{s}) + \mathbf{s})} d\mathbf{s} \quad (4.23)$$

En développant le terme $e^{i\mathbf{k}.D_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r})}$

$$(e^{-i\mathbf{k}.D_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r})}) = \sum_{n=0}^p \frac{(-i\mathbf{k}.D_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}))^n}{n!}$$

nous pouvons mettre alors le spectre habillé sous la forme suivante :

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = \Psi(\mathbf{k}) + \delta\Psi(\mathbf{k}) \quad (4.24)$$

où $\delta\Psi(\mathbf{k})$ représente l’habillage sur les vecteurs d’onde $\{n\mathbf{k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que l’on peut mettre sous la forme :

$$\delta\Psi(\mathbf{k}) = \sum_n \alpha_n \Psi(n\mathbf{k}) \quad (4.25)$$

le calcul des α_n fera l’objet de la suite.

En absence de points de rebroussements on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) &= \frac{\lambda}{S} < \int_S \Lambda(\mathbf{r}) J(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}.(D_\Lambda(\mathbf{r})+\mathbf{r})} d\mathbf{r} \\ &\int_{\mathbb{R}^2} \Lambda(\mathbf{s}) J(\mathbf{s}) e^{-i\mathbf{k}.(D_\Lambda(\mathbf{s})+\mathbf{s})} d\mathbf{s} >_{a,c} \end{aligned} \quad (4.26)$$

En approchant $e^{-i\mathbf{k}.D_\Lambda(x,y)}$ par

$$(e^{-i\mathbf{k}.D_\Lambda(x,y)}) = \sum_{n=0}^p \frac{(-i\mathbf{k}.D_\Lambda(x,y))^n}{n!}$$

Soit (vois annexe B.2 page 129 pour plus de détails)

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) &= \Psi(\mathbf{k}) + \sum_{m \neq 0}^{2p+1} \lambda \Gamma m, m A_m B_m \\ \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) &= \Psi(\mathbf{k}) + \delta\Psi(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma m, n &= MoM_{m+n+2} \text{ si } m \leq p \text{ et } n \leq p \\ \Gamma m, n &= MoM_{m+n+4} \text{ si } m > p \text{ et } n > p \\ \Gamma m, n &= MoM_{m+n+3} \text{ sinon} \end{aligned} \quad (4.28)$$

où MoM_i désigne le moment d'ordre i de l'amplitude.

Pour la clarté et la lisibilité des formules, nous considérons que $L = l = \varrho$. Après calcul on trouve pour une nappe de vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$:

pour $n < p + 1$:

$$A_n = \frac{\pi \varrho^2}{(n+1)!} \left(\frac{-|\mathbf{k}|}{2} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \left(e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+1} \|\mathbf{k}+(n-2j+1)\mathbf{k}_0\|_2^2} + e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+1} \|\mathbf{k}+(n-2j-1)\mathbf{k}_0\|_2^2} \right) \quad (4.29)$$

et

$$B_n = \frac{\pi \varrho^2}{(n+1)!} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{2} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \left(e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+1} \|\mathbf{k}-(n-2j+1)\mathbf{k}_0\|_2^2} + e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+1} \|\mathbf{k}-(n-2j-1)\mathbf{k}_0\|_2^2} \right) \quad (4.30)$$

de même, pour $n > p$:

$$A_n = \frac{-2\pi|\mathbf{k}|}{(n+1)!} \left(\frac{-|\mathbf{k}|}{2} \right)^n \varrho^2 \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+2} \|\mathbf{k}+(n-2j)\mathbf{k}_0\|_2^2} + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^n +2 \binom{n+2}{j} (-1)^j e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+2} \|\mathbf{k}+(n-2j+2)\mathbf{k}_0\|_2^2} \right] \quad (4.31)$$

$$B_n = \frac{-2\pi|\mathbf{k}|}{(n+1)!} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{2} \right)^n \varrho^2 \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+2} \|\mathbf{k}-(n-2j)\mathbf{k}_0\|_2^2} + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^n +2 \binom{n+2}{j} (-1)^j e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+2} \|\mathbf{k}-(n-2j+2)\mathbf{k}_0\|_2^2} \right] \quad (4.32)$$

Ainsi nous avons déterminé comment la construction d'une nappe de vecteur d'onde moyen $\mathbf{k}_0$ *via* le modèle GCWM habille le spectre initiale dans les hautes fréquences.

Déshabillage du spectre

Pour que le spectre habillé de la surface du modèle GCWM corresponde au spectre déshabillé initial, il est nécessaire d’injecter dans les équations permettant la génération de la surface explicite du GWM (pour passer ensuite à la surface implicite du GCWM) un spectre déshabillé différent. Nous voulons introduire un spectre artificiel [Nouguier (2009)] afin que le spectre habillé possède les caractéristiques du spectre voulu. Pour cela nous procédons *via* une méthode itérative permettant de remonter au spectre déshabillé voulu Ψ_{target} .

Il s’agit de construire le spectre déshabillé Ψ^d au fur et à mesure des constructions des nappes tout en “nettoyant” les fréquences parasites. Autrement dit la mise à jour du spectre déshabillé correspond au nombre des nappes à construire. Il est nécessaire donc de commencer la construction des nappes suivant un ordre croissant des nombres d’onde. Nous résumons cette technique par le schéma suivant :

On commence naturellement par un maillage du domaine du vecteur d’onde et ensuite la construction des nappes correspondants. En prenant un domaine fini $[|\mathbf{k}|_{min}, |\mathbf{k}|_{max}] \times [\phi_{min}, \phi_{max}]$ tel qu’il soit représentatif de l’énergie globale.

initialisation : $\Psi^d = \Psi_{target}$

1. *itération (i) (i.e la construction des nappe de nombre d’onde $|\mathbf{k}_i|$)*;

(a) *for* $\phi_i = \phi_{min} : \phi_{max}$;

- i. se donner ϱ et λ (i.e : l’extension des groupes et le nombre d’occurrence des groupes par unité de surface);
- ii. détermination du moment d’ordre 2 des amplitudes a_n à partir de l’équation :

$$\Psi_{mod}(\mathbf{k}) = \Psi^d \quad (4.33)$$

où $\Psi_{mod}(\mathbf{k})$ est donné dans la formule 3.15, page 45 (GWM primitives polaires)

iii. construire la nappe;

iv. mise à jour du spectre

$$\Psi^{(d)} = \Psi^{(d)} - \delta\Psi^{(d)} \quad (4.34)$$

où $\delta\Psi^{(d)}$ est donné par l’équation (4.27). Notons que d’après les tableaux de mesures (?? page ??) sur le spectre d’Elfouhaily, la positivité du spectre déshabillé est assurée après chaque mise à jour.

4.5 Points de rebroussement

Nous pouvons calculer la probabilité d'apparition des points de rebroussement [Pierson (1961)] suivant la formule suivante :

$$\mathbb{P}_{\text{rebroussement}} = \text{Erfc} \left(\frac{1}{2\sigma_2^2} \right) \quad (4.35)$$

où σ_2^2 désigne la variance des pentes de la surface Gaussienne générée par le modèle GWM.

Nous proposons une technique afin d'enlever les boucles (*cf* la figure 4.5) tout en gardant au moins les moments d'ordre deux des élévations.

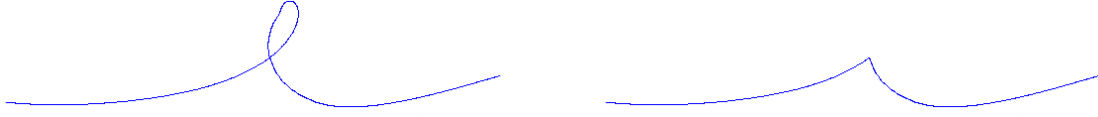


FIG. 4.4 – À gauche vague avec boucle et à droite vague transformée sans boucle

L'astuce est d'introduire une surface "fictive" de calcul afin de conserver les mêmes statistiques après avoir enlevé les boucles. Pour cela, nous discrétisons le domaine spectral et angulaire, nous faisons les calculs précédemment définis pour la génération des nappes de surface $S' = (1 - \mathbb{P}_{\text{rebroussement}}) S$, sauf pour la nappe contenant le maximum d'énergie.

Notre démarche consiste à :

1. localiser la maille $m_{ij} = [k_i, k_{i+1}] \times [\phi_j, \phi_{j+1}]$ qui contient le maximum d'énergie ;
2. générer des nappes de surface S' à l'aide des calculs précédemment définis sauf pour la maille m_{ij} .
3. remplacer la zone où $\sum_{p,q} D_{pq}(r) \geq 1$ par $(\eta_{ij}(x), D_{ij}(r))$

Cette technique conserve au moins la variance des élévations. En effet :

$$\sigma_0^2 = \sum_{p,q} \sigma_0^2(m_{pq}) \quad (4.36)$$

or

$$\begin{aligned} & \sigma_0^2(m_{pq})|_{S'} + \sigma_0^2(m_{pq})|_{S \setminus S'} \\ &= \int_{\Delta\theta_q} \int_{\Delta k} \Psi(k, \theta) + 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

donc :

$$\sigma_0^2 = \int \int \Psi(k, \theta) \quad (4.38)$$

4.6 Simulation du GCWM

La formulation du GCWM permet de générer très facilement des surfaces de différentes structures mais de même statistiques. Le modèle IPAS permet une simulation en temps réel. Cette section sera consacrée à la simulation de surfaces.

4.6.1 Surfaces figées

Un exemple de génération de de parcelles de $1000m \times 700m$ du modèle GCWM est représenté dans les figures (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8). Ces surfaces ont été générées à l’aide d’une superposition de 40 nappes et sur une base de 25000 points. Le spectre à été tronqué à $k_{max} = 1.27rad.m^{-1}$ correspondant à une longueur d’onde minimale de $50cm$.

Ces figures ont des caractéristiques communes suivantes :

- ▷ nombre de vagues moyen par groupe est 5 ;
- ▷ vitesse de vent est $20m/s$;
- ▷ angle de vue -38° sous l’horizontale (même position de caméra) ;

Chacune de ces figures correspond pour un âge de vagues ($1/\Omega$) donné (de mers jeunes à des mers en équilibres), différentes densités de groupes : 0.25 et 4 de gauche à droite.

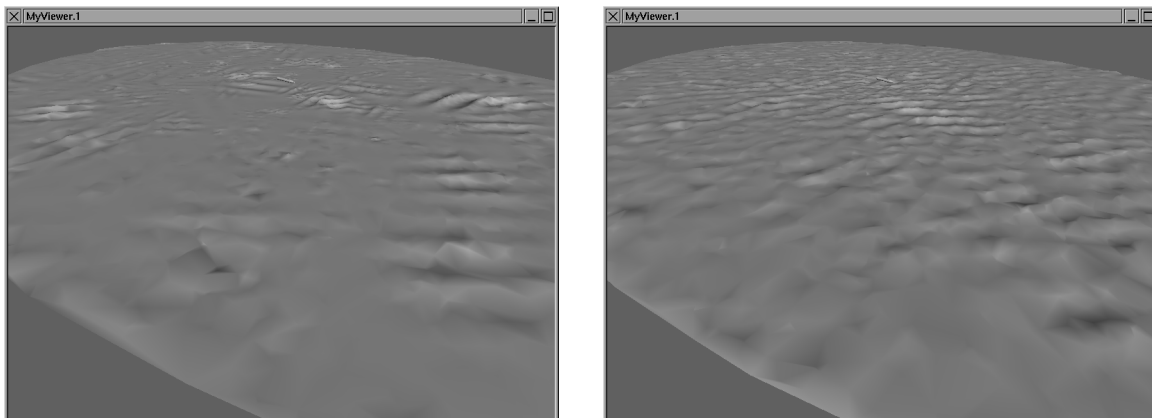


FIG. 4.5 – Comparaisons des structures des états de mer avec $\Omega = 3$

Ces figures illustrent un large éventail de différentes structures de l’état de mer, tout en respectant les mêmes statistiques.

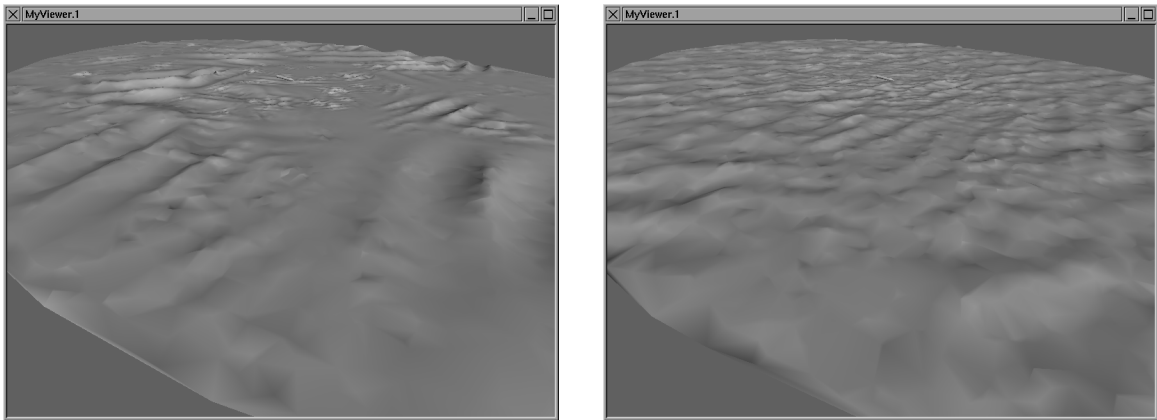


FIG. 4.6 – Comparaisons des structures des états de mer avec $\Omega = 2$

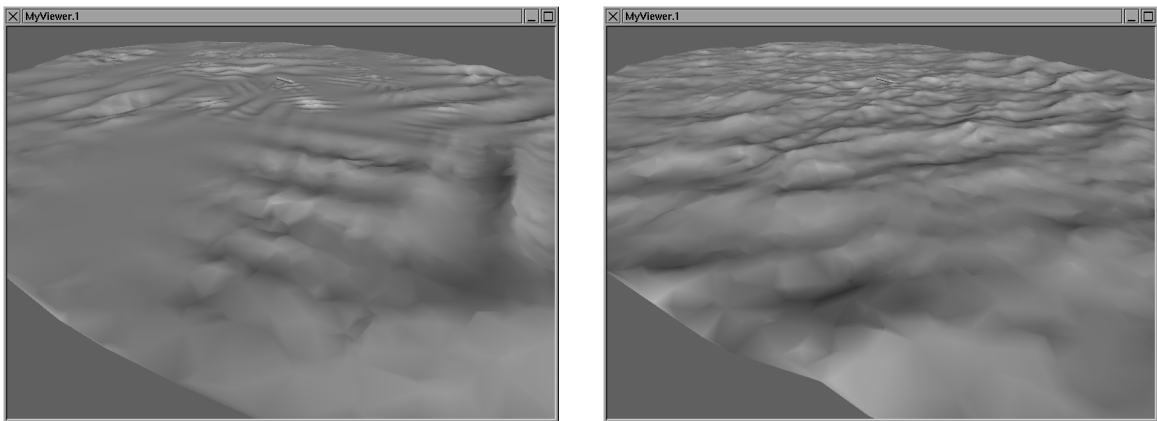


FIG. 4.7 – Comparaisons des structures des états de mer avec $\Omega = 1.5$

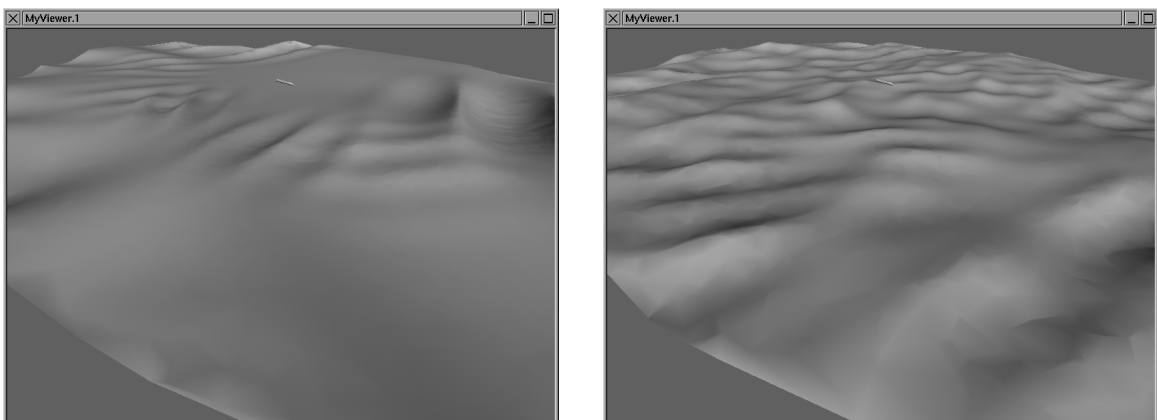


FIG. 4.8 – Comparaisons des structures des états de mer pleinement développés ($\Omega = 0.84$)

4.6.2 Évolution temporelle

Il suffit de laisser évoluer les groupes de vagues du modèle GWM comme expliqué dans le paragraphe (3.2.2 - E) et d’appliquer la transformation horizontale au même temps pour obtenir la nouvelle surface.

La figure 4.9 est un exemple d’évolution des surfaces générées par le modèle GCWM avec le spectre d’Elfouhaily pleinement développé pris à $U_{10} = 3m.s^{-1}$. La surface totale possède des fréquences comprises entre $k_{min} = 10^{-3}rad.m^{-1}$ et $k_{max} = 2.10^2rad.m^{-1}$.

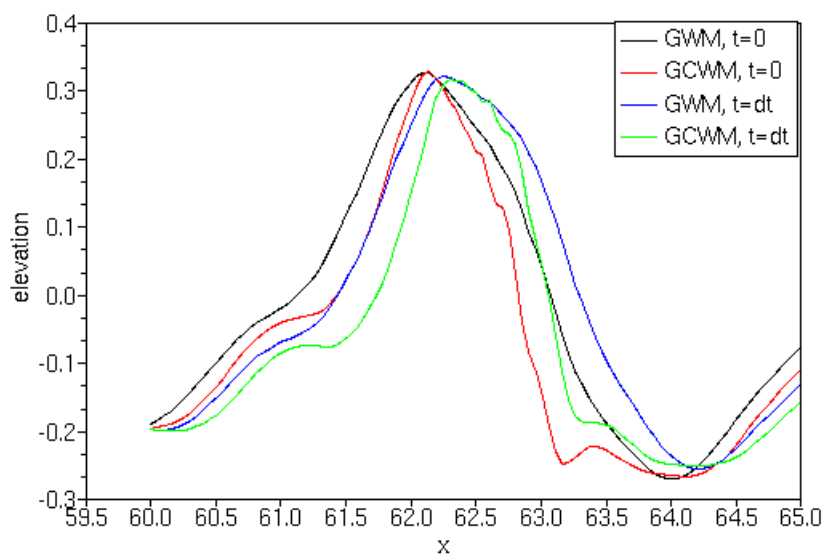


FIG. 4.9 – Comparaison de l’évolution temporelle d’une coupe de la surface générée par GCWM et GWM, $\delta t = 0.1s$

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle de surface implicite ($f(x, y, z) = 0$) “Groupy Choppy Wave Model” (GCWM) : Ce dernier prend en compte les mouvements orbitaux des particules d’eau. GCWM est vu comme un changement de coordonnées horizontales de la surface explicite du modèle GWM pour le peuplement d’une surface. Cette transformation habille le spectre des hauteurs et fait apparaître des points de rebroussement. Nous avons proposé une méthode permettant de “déshabiller” le spectre afin d’obtenir une surface avec un spectre voulu, ainsi qu’une proposition pour tenir compte des points de rebroussement. Dans le cas d’une surface explicite Gaussienne, nous obtenons pour GCWM des propriétés statistiques de premier et second ordre des

élévations et des pentes identiques à celle du modèle CWM. Ce dernier a été comparé aux modèles perturbatifs déjà existants et aux données expérimentales et a montré une très bonne concordance. Cependant la génération d'une surface maritime *via* la formulation du CWM se fait au prix de trois transformées de Fourier rapides en tout point de la surface. Un avantage de notre modèle est sa faible complexité algorithmique.

Conclusion

Au terme de ce travail, nous dressons un bilan des principaux résultats obtenus et les perspectives pouvant être poursuivi.

4.8 Conclusion

Ce mémoire a présenté les travaux effectués dans un cadre visant à proposer une représentation originale d'un champ de vagues aléatoire en s'appuyant sur le modèle IPAS à base de groupes de vague afin de respecter les contraintes statistiques sur la fonction caractéristique en 1 point (variance, coefficients d'asymétrie *skewness* et d'aplatissement *kurtosis*), mais également en 2 points. Celle en 2 points conduit à l'estimation de la fonction de corrélation (puis du spectre). Lorsque l'on fait tendre la distance entre les 2 points vers 0, on obtient alors la fonction caractéristique en 1 point de la pente.

Nous avons modélisé l'élévation de la surface océanique en tant que superposition de fonctions spatiales aléatoires d'extension finie : groupes de vague, et d'amplitudes aléatoires, organisés en un certain nombre de nappes en fonction du vecteur d'onde. Concrètement, nous avons proposé deux modèles : le GWM et le GCWM (surfaces explicites, surfaces implicites) :

1. Modèle de surface explicites ($z = f(x, y)$) "Groupy Wave Model" (GWM) : La modélisation de la mer que nous proposons ici, s'appuie sur une formulation linéaire. L'utilisateur de GWM a besoin de choisir des hypothèses par rapport à la modulation des vagues en fonction de l'échelle, à savoir le nombre moyen de groupes par unité de surface et le nombre moyen de vagues par groupe. Ces paramètres offrent un large éventail de différentes structures de l'état de mer, tout en respectant les mêmes statistiques. Notons également que l'énergie des

surfaces générées par notre modèle peut être également hétérogène contrairement aux modèles de surface classiques. Ces derniers sont majoritairement sinusoïdaux (pour les surfaces explicites), leur simulation nécessite un échantillonnage du domaine spectral et directionnel assez fin puisque les nappes correspondantes sont monochromatiques contrairement à notre méthode où chaque nappe peut contenir plusieurs fréquences dans plusieurs directions.

Concrètement, nous avons proposé une formulation de deux modèles. Le premier avec des primitives en polaire (section 3.2) avec une possibilité de peupler ces surface sous les contraintes liés aux :

- spectre ;
- *kurtosis* des hauteurs **ou** des pentes.

Dans ce modèle les *skewness* des hauteurs et des pentes sont nulles. Le calcul des moments des hauteurs et des pentes montre que le contrôle de la *kurtosis* des pentes de chaque nappe nous donnera automatiquement une valeur identique à la *kurtosis* des hauteurs et vice versa.

Le second modèle quant à lui, utilise les primitives en quadratures (section 3.3) et assurant le contrôle du :

- spectre ;
- *skewness* des hauteurs **et** des pentes simultanément et de manière indépendantes ;
- *kurtosis* des hauteurs **ou** des pentes.

De même que le cas précédent, on obtient la même conclusion concernant le contrôle de la *kurtosis*. Nous dressons ici un tableau illustrant la différence entre nos modèles (GWM en polaires (GWM-P), GWM en quadratures (GWM-Q)) et les surfaces sinusoïdales (SIN).

Caractéristiques	SIN	GWM-P	GWM-Q
hétérogénéité	×	✓	✓
contrôle de la <i>skewness</i>	×	×	✓
contrôle de la <i>kutrosis</i>	×	✓	✓
surfaces Gaussiennes	✓	✓	✓
surfaces non-Gaussiennes	×	✓	✓

2. Modèle de surface implicite ($f(x, y, z) = 0$) “Groupy Chopy Wave Model” (GCWM) : Ce dernier prend en compte les mouvements orbitaux des particules d’eau. Le GCWM est vu comme un changement de coordonnées horizontales de la surface explicite du modèle GWM pour le peuplement d’une surface. Cette transformation habille le spectre des hauteurs et fait apparaître des points de rebroussement. Nous avons proposé une méthode permettant de “déshabiller” le spectre afin d’obtenir une surface avec un spectre voulu, ainsi qu’une proposition pour tenir compte des points de rebroussement. Dans le cas d’une surface explicite Gaussienne du modèle GWM, nous obtenons pour le GCWM des propriétés statistiques de premier et second ordre des élévations et des pentes identiques à celle du modèle CWM¹. Comme le CWM a été comparé aux modèles perturbatifs déjà existants et aux données expérimentales et a montré une très bonne

concordance. Cependant la génération d'une surface maritime *via* la formulation du CWM se fait au prix de trois transformées de Fourier rapides en tout point de la surface.

4.9 Perspectives

Parmi les paramètres de notre modélisation de la surface océanique, nous avons utilisé pour le modèle GWM des groupes de vagues représentés par des ondelettes de Morlet comme forme reproductrice de la surface. Il serait judicieux de mener une étude sur d'autres fonctions géométriques telle que le chapeau mexicain en appliquant les formules établies dans le chapitre 2. Nous avons également choisi un échantillonnage discret et aléatoire (Poisson) pour la simplicité des calculs. Il serait utile de mener une étude sur un autre échantillonneur. Enfin, et comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, l'étude menée pour la construction du modèle GCWM repose sur des surfaces Gaussiennes du modèle GWM et les statistiques des hauteurs et des pentes sont identiques à celle du modèle CWM. Pourtant, il serait intéressant d'étudier l'effet de la non-Gaussianité du point de départ (GWM) afin de montrer si oui ou non le GCWM peut contrôler les *skewness* et les *kurtosis* observées.

D'autre part, cette nouvelle modélisation nous invite à l'utilisation de ce nouveau type d'état de mer dans les simulation des modèles de la rétrodiffusion radar en temps réel dans un environnement virtuel. Une solution envisagée consiste à développer une méthode multi-agents (agent = groupe de vagues) où chaque agent est capable de calculer sa contribution dans le signal rétrodiffusé lorsqu'il est éclairé.

Enfin, il serait intéressant d'étendre cette méthode de modélisation d'une surface aléatoire pour d'autres phénomènes que la mer tel que des calculs de débit incluant des processus aléatoires (radioactivité, émission spontanée de photons, expériences quantiques non déterministes).

¹ **Chopy Wave Model** : Il est basé sur la résolution des équations Lagrangiennes du mouvement et permet une formulation simple des non-linéarités

Publications

Cette section énumère les articles écrits pendant cette thèse.

Belemaalem, Z., Chapron, B., et Parenthoën, M. (2011a). Groupy wave model for gravity waves. *Journal of Geophysical Research* (*en cours de rédaction*)).

Belemaalem, Z., Chapron, B., Parenthoën, M., et Reul, N. (2010). The groupy wave model for dynamical sea state simulation. Dans *OCOSS'10 proceedings*.

Belemaalem, Z., Chapron, B., Parenthoën, M., et Reul, N. (2011b). Groupy choppy wave model for nonlinear gravity waves. *Journal of Geophysical Research* (*en cours de rédaction*)).

Belemaalem, Z., Redou, P., et Parenthoën, M. (2011c). Solving some partial differential equations within multi-interaction systems (soumis). *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, (3).

Parenthoën, M. et Belemaalem, Z. (2008). Autonomy based modeling for the simulation of ocean remote sensing. *proceedings of OCEANS'08. MTS/IEEE*.

Solving some Partial Differential Equations within Multi-Interaction Systems

Z. Belemaalem¹, P. Redou¹ and M. Parenthoën¹

Abstract: Within the framework of multi-interaction systems (MIS), we aim at proposing algorithms for solving some partial differential equations (PDE), that are ubiquitously used for modelling phenomena like transport or diffusion, as they often occur in a complex system involving natural phenomena. Unlike classical synchronous schemes, schemes for MIS have to be compatible with asynchronous iterations. The notion of asynchronous iteration expresses the fact that each activity modelling a phenomenon has its own lifetime and is processed one after the other : the “world” is changed after each activity for the following one.

We provide MIS-compatible schemes to simulate transport phenomena, thermal diffusion phenomena and the spreading phenomenon of a wave packet. Our schemes are based on interactions that represent sorts of Maxwell’s deamons : transfers of flows between several separate environments given by a spatial resolution grid.

We establish formal proofs of convergence for our transport methods. We experiment an efficient asynchronous diffusion scheme. We easily intricate both schemes for solving the advection-diffusion problem. We even illustrate a multi-interaction method for the spreading of a wave packet described by the Schrödinger’s equation. Results are compared to classical numerical methods and they show that our methods are as accurate as classical ones, whilst respecting MIS constraints.

Keywords: transport, diffusion, advection, Schrödinger, chaotic asynchronous scheduling, multi-interaction system (MIS), partial differential equation (PDE).

1 Introduction

The multi-interaction system framework (MIS) is a paradigm for complex system modelling [Desmeulles, Bonneaud, Redou, Rodin, and Tisseau (2009)]. It emanates from the multi-agent approach and proposes a shift of focus from individual-

¹ LISyC, ENIB, UEB : CERV, 25 rue Claude Chappe, F-29280 Plouzané, France

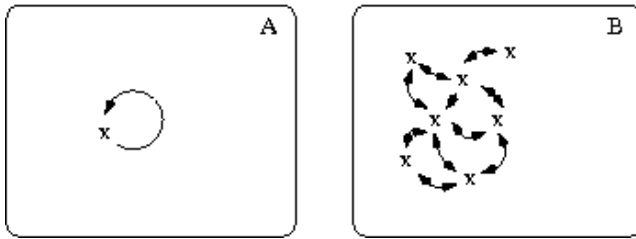
centred to interaction-centred for studying the living and virtual reality. The MIS structure depends on the reification of interactions, on chaotic asynchronous iterations and on an organisation in autonomous systems. More precisely, a MIS is a set of active autonomous objects modelling interactions between the passive structural elements named constituents. Interaction is therefore the autonomous elementary active unit of the MIS. Constituents are the medium by which the interactions are linked. The couples *interaction / set of associated constituents* form systems. These elementary systems are thus structurally coupled to one another whilst the interactions act on the same constituents. In a MIS, interactions are active processes scheduled by chaotic asynchronous iterations. The notion of asynchronous iteration expresses the fact that each activity¹ has its own lifetime and is processed one after the other : the constituents are changed after each interaction activity for the following one. The notion of chaotic iteration designs activities which are supposed to intervene at the same time : they occur one after the other (as for asynchronous iterations), but in a random order so that the effects of bias are offset during the successive iterations. This paradigm involving the reification of interaction and asynchronous scheduling leads to imagine original algorithms for solving partial differential equations (PDEs), as they can appear to model natural phenomena.

PDEs are ubiquitously used for modelling phenomena occurring in physical, chemical or biological systems. Their numerical resolution is an active field of applied mathematics. Numerical techniques for solving PDEs mainly rest on the finite difference method, the finite element method, the finite volume method, the spectral method, meshfree methods, domain decomposition methods and multigrid methods. More recently one can find, for example, the generalized finite difference method (GFDM) [Benito, Urena, Gavete, and Alonso (2008)], the indirect RBFN method [Nam (2004)] and the numerical meshfree technique [Sirajul and Arshed (2008); Bourantas, Skouras, and Nikiforidis (2009)]. All these methods are based on synchronous iterations, so might not be well adapted to complex systems simulation [Atlan (2003)].

Let us illustrate how phenomena modelled by PDEs can be included into a MIS : by using directly a classical synchronous schemes or by rewriting the schemes into asynchronous ones (figure 1).

1. A first idea could be to take a numerical scheme associated to the resolution of those PDEs as the interaction of that phenomenon acting from t to $t + \delta t$ on a single constituent : the whole mesh or the whole set of points. Since in that case there is a unique constituent and a unique phenomenon interacting with that constituent, only one interaction will be instantiated in the simu-

¹ An activity makes to map a date to the execution of a process.



Constituents and interactions in a MIS for a PDE resolution scheme. In (A), the single constituent is the whole mesh or set of points and the unique interaction instantiated by the PDE-based phenomenon acts according to the classical scheme. In (B), the constituents correspond to mesh elements or points and the PDE-based phenomenon instantiates as much interactions as interfaces between constituents. Each interaction acts locally as a sort of Maxwell demon associated to that phenomenon. The (B) formulation is much more compatible with MIS assumptions than the (A).

Figure 1: Two points of view for modelling PDE-based phenomena into MIS

lation. Its activity consists in computing each δt one step of the associated scheme to transform the single constituent from t to $t + \delta t$.

If another phenomenon acts on the same constituent, the corresponding interaction can only act before or after the previous one. If this last phenomenon is modelled by PDEs with its own numerical scheme, the resulting numerical resolution of both phenomena within asynchronous iterations can be viewed as a sort of stochastic splitting method applied to both schemes. Another way to solve this problem could be to write a new single scheme valid for the PDE system obtained by both phenomena ; this is not very accurate in terms of structural coupling, thus moves away from the MIS principles for complex system modelling. Anyway, if one of the phenomena involved in the complex system and acting on such a constituent is not modelled by PDEs, its intrication with PDE-based models won't be possible for time intervals lower than the time step δt used by PDE schemes.

2. the second idea, that we claim, consists in building asynchronous schemes for interactions at each interface between two constituents and acting as Maxwell-deamons to transfer flow between several separate environments, namely constituents, according to PDEs. The constituents are not the whole mesh or set of points but the elements of the mesh or the points themselves. Each phenomenon instantiates as much interactions as interfaces between constituents. When several PDE-based phenomena are involved, asynchronous scheduling of interaction activities can be viewed as a sort of

generalized stochastic splitting method at the level of interfaces. The resulting simulation respects MIS principles and intrication with no PDE-based models should be facilitated as a consequence of the structural coupling provided by MIS.

This paper aims at proposing asynchronous numerical schemes for solving transport and diffusion problems, according to the assumptions of MIS. In this context, our work applies to the simulation of transport phenomena such as heat transfer, mass transfer, fluid dynamics (momentum transfer), thermal or chemical diffusion phenomena and the averaging of a wave packet. Our interactions complete previous work based on autonomous interface-agents [Redou, Desmeulles, Abgrall, Rodin, and Tisseau (2007)] for reaction-diffusion problems. Furthermore, as we show in this paper, our approach provides numerical results which are as relevant as classical methods.

In the next section, we present the chaotic and asynchronous-chaotic multi-interaction model for the numerical computation of transport phenomena. In section 3, we describe a chaotic multi-interaction model for thermal diffusion phenomena. Then (section 4) we show how simple it is to intricate such autonomous models with an application to the phenomenon of transport-diffusion. Finally (section 5), we introduce a chaotic multi-interaction model for the averaging of a wave packet.

NB: we have programmed our methods by using the RÉISCOP meta-model which proposes an implementation for MIS [Desmeulles, Bonneaud, Redou, Rodin, and Tisseau (2009)].

2 Transport models for MIS

2.1 Principle

In physics, chemistry, biology and engineering, a transport phenomenon is any of various mechanisms by which particles or quantities move from one place to another. The laws which govern transport connect a flux with a "motive force". Three common examples of transport phenomena are diffusion, convection, and radiation. We consider these three examples to build our model, called *transport-agent* model.

Each transport-agent represents a flow of transport of particles or quantities from one place to another.

-*Perception* : measuring particles or quantities, and transport velocity inside each cell of its neighborhood given by a spatial resolution grid.

-*Decision* : computing the quantities or the particles passing from one cell to the other

-*Action* : modifying the quantities or the particles in each cell of its neighborhood

2.2 Illustration

Let us illustrate our views, and consider $c : (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \rightarrow c(x, t) \in \mathbb{R}$, $f : (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$ and $w : x \in [a, b] \rightarrow w(x) \in \mathbb{R}$ given functions. The transport problem that we consider here consists in seeking $u : (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ which satisfies:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t), & \forall x \in [a, b], \quad \forall t \in [0, T], \\ u(x, 0) = w(x), & \forall x \in [a, b] \\ u(a) = u(b) \end{cases} \quad (1)$$

In the following, we present our transport-agent model with various methods to approximate the solution u for problem (1) above. We establish formal proofs of convergence for our agent methods in the simple case where $c(x, t) = c = \text{constant} \geq 0$ and $f = 0$. We begin with a space discretization $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ of the system, and consider that in the middle of each interval $[x_i, x_{i+1}]$ is located a transport-agent, noted A_i in point $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ which has a "lifetime" δt_i , whose role will be, when it takes the hand, to update the values of the solution in cells C_i and C_{i+1} with the same length δx where $C_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. The values in other cells are unchanged. Suppose that the transport-agent intervenes at moment n : it considers the overall state of the system at this time, updates the values of the solution of two adjacent cells, and leaves the other values unchanged.

As in the finite volume method, and integrating into the control cell $C_i \times [t_n, t_{n+1}]$ we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta x} \left(\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx \right) = \\ - \frac{\delta t}{\delta x} \left(\frac{1}{\delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} cu(x_{i+1/2}, s) ds - \frac{1}{\delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} cu(x_{i-1/2}, s) ds \right) \end{aligned} \quad (2)$$

This writing suggests that:

i) An interesting description is given by: $u_i^n \simeq \frac{1}{\delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx$, average values of u in each cell of control. Another benefit of this description is that u can be undefined in one point, for example when the solution is discontinuous. However, the solutions are integrable, so that their average value is always defined.

ii) the stock of increase of u_i^n during a time step is given by

$$\frac{1}{\delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} cu(x_{i+1/2}, s) ds - \frac{1}{\delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} cu(x_{i-1/2}, s) ds$$

$\frac{1}{\delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} cu(x_{i+1/2}, s) ds$ is interpreted as the average flow on time of outgoing or incoming by interface of C_i located in $x_{i+1/2}$, and the manner of approaching this average flow determines the activity of transport-agent A_i .

2.3 Multi-Interaction chaotic model

2.3.1 Chaotic scheduling of activities

Definition: We name cycle of actions a succession of actions of transport-agents involving each of them only once.

In our model, the cycles of actions follow, but the sequence of actions within a cycle is not imposed, and changes from one cycle to another, randomly. Figure 1 illustrates this scheduling strategy.

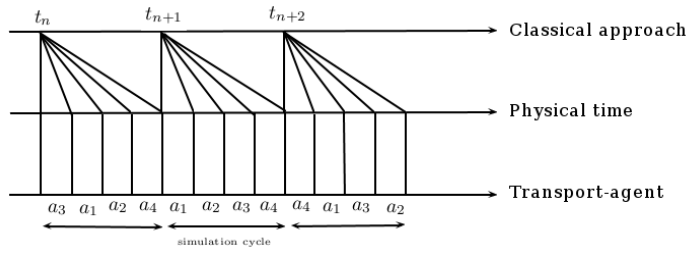


Fig. 1. Classical and transport-agent of view for transports scheduling. Case of 4 transport-agents $a_i, 1 \leq i \leq 4$

Note: Let $\sigma \in S_N$ (S_N permutation group). We define the following application, which describes a cycle of action.

$$\phi_\sigma = f_{\sigma(N)} \circ f_{\sigma(N-1)} \cdots f_{\sigma(1)}$$

where N is the number of transport-agents and f_i describes the action of A_i .

2.3.2 Formalization of actions of transport-agents

Let us see exactly how a transport-agent A_i is involved : at time t_n the order of its intervention is $\sigma^{-1}(i)$, and when A_i starts to operate, it perceives nearby cells separated by A_i and update the values of the solution in these cells according to which approximation we use for the average flows, in detail our approximations of the average flow on time are based on the following classical scheme : upwind and Lax-Wendroff scheme [Anderson, Tannehill, and Pletcher (1984)]

Approximation inspired by Upwind scheme

The action of A_i is described by :

$$\begin{cases} u_i^{n+\sigma^{-1}(i)/N} = u_i^{n+(\sigma^{-1}(i)-1)/N} - c \frac{\delta t}{\delta x} u_i^{n+(\sigma^{-1}(i)-1)/N} \\ u_{i+1}^{n+\sigma^{-1}(i)/N} = u_{i+1}^{n+(\sigma^{-1}(i)-1)/N} + c \frac{\delta t}{\delta x} u_i^{n+(\sigma^{-1}(i)-1)/N} \\ u_j^{n+\sigma^{-1}(i)/N} = u_j^{n+(\sigma^{-1}(i)-1)/N} \quad \forall j \notin \{i, i+1\} \end{cases} \quad (3)$$

and set A_0 and A_N respectively by :

$$\begin{cases} u_0^{n+\sigma^{-1}(0)/N} = u_0^{n+(\sigma^{-1}(0)-1)/N} \\ u_1^{n+\sigma^{-1}(0)/N} = u_1^{n+(\sigma^{-1}(0)-1)/N} + c \frac{\delta t}{\delta x} u_0^{n+(\sigma^{-1}(0)-1)/N} \\ u_j^{n+\sigma^{-1}(0)/N} = u_j^{n+(\sigma^{-1}(0)-1)/N} \quad \forall j \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{N-1}^{n+\sigma^{-1}(N)/N} = u_{N-1}^{n+(\sigma^{-1}(N)-1)/N} - c \frac{\delta t}{\delta x} u_{N-1}^{n+(\sigma^{-1}(N)-1)/N} \\ u_N^{n+\sigma^{-1}(N)/N} = u_N^{n+(\sigma^{-1}(N)-1)/N} + c \frac{\delta t}{\delta x} u_{N-1}^{n+(\sigma^{-1}(N)-1)/N} - c \frac{\delta t}{\delta x} u_N^{n+(\sigma^{-1}(N)-1)/N} \\ u_j^{n+\sigma^{-1}(N)/N} = u_j^{n+(\sigma^{-1}(N)-1)/N} \quad \forall j \notin \{N-1, N\} \end{cases}$$

when $u_i^{n+\sigma^{-1}(i)/N}$ is the new value of the solution in the cell C_i updating by A_i

Note: In the following of this section, we use the notation : $\omega = c \frac{\delta t}{\delta x}$.

We can describe the actions of A_i by a matrix:

$$f_i = (1 - \omega)E_{ii} + \omega E_{i+1,i} + \sum_{j \neq i} E_{jj}$$

where E_{ij} are elementary matrices.

Let us illustrate our view by two examples, and consider at first the following case: at moment n , a cycle begins, which we assume to be the cycle involving, in this order: $A_{N-1}, A_{N-2}, \dots, A_0$. Using the notations of the preceding paragraph, we arrive to the fact that at time $n+1$, the system state is given by

$$U^{n+1} = f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_{N-1}(U^n), \quad \text{where } U^n = (u_0^n, u_1^n, \dots, u_N^n)^t$$

Thus, in the choice of the precise sequence of actions in a cycle, we have for example

$$N = 4, \quad U^{n+1} = f_0 \circ f_1 \circ f_2 \circ f_3(U^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega & 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 1-\omega \end{pmatrix} U^n$$

Now consider the case where at time n , a cycle begins, which we assume to be the cycle involving, in this order, A_0, A_1, A_2 , and A_3 . Using the notations of the preceeding paragraph, we get the fact that at time $n+1$, the system state is given by

$$U^{n+1} = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_0(U^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega(1-\omega) & 1-\omega & 0 & 0 \\ \omega^2(1-\omega) & \omega(1-\omega) & 1-\omega & 0 \\ \omega^3(1-\omega) & \omega^2(1-\omega) & \omega(1-\omega) & 1-\omega \end{pmatrix} U^n$$

Note: If we develop the coefficients of the matrix of the second case above into sums of powers of ω , and if we keep only the terms of order 1, we obtain a similar Upwind scheme.

In the general case the idea is to determine the matrix that allows us to move from one moment to another by a determination column by column.

2.3.3 Proof of convergence

Lemma: The scheme is stable and consistent with order 1 in space and 1 in time if $|c|\delta t \leq \delta x^3$

After a simple calculation we find that

$$u_i^{n+1} = (1-\omega)u_i^n + \omega u_{i-1}^n + R_1 + R_2$$

$$\text{where} \quad R_1 = -\xi_1 \omega^2 u_{i-1}^n + \xi_2 \omega^2 u_{i-2}^n \quad \text{and} \quad R_2 = \sum_{k=0}^{i-2} p_k \cdot u_k^n$$

where ξ_i are equal to 1 or 0, and for all k , p_k is a polynomial and we note that in this scheme all the coefficients are positive or zero.

Stability:

We have

$$|u_i^{n+1}| \leq (1-\omega)|u_i^n| + \omega|u_{i-1}^n| + \xi_1 \omega^2 |u_{i-1}^n| + \xi_2 \omega^2 |u_{i-2}^n| + A$$

$$\text{with} \quad A = \sum_{k=0}^{i-2} p_k \cdot |u_k^n| \quad \text{thus} \quad \|u^{n+1}\|_\infty \leq (1 + \xi_1 \omega^2 + \xi_2 \omega^2 + \sum_{k=0}^{i-2} p_k) \|u^n\|_\infty$$

and in the conditions of this lemma, there are constants C_2 and C_3 such as

$$\xi_1 \omega^2 + \xi_2 \omega^2 \leq C_1 \delta t \delta x \quad \text{and} \quad \sum_{k=0}^{i-2} p_k \leq C_2 \delta t \delta x^2$$

In fact : for all k , p_k is a polynomial of degree equal or higher than 3 whose coefficients of the terms of degree lower than 3 are null or p_k is null. Thus $p_k = O(\delta t \delta x^3)$ and more specifically $\forall k \quad |p_k| \leq 2\omega^3 \leq 2\delta x^3 \delta t$ thus $\sum_{k=0}^{i-2} p_k \leq 2|\sum_{k=0}^{i-2} \delta x^3 \delta t| \leq 2\delta x^3 \delta t$ however $N\delta x \leq b-a$ thus $\sum_{k=0}^{i-2} p_k = O(\delta t \delta x^2)$ thus there is a constant (small enough) such that:

$$\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq (1 + \rho \delta t)^n \|u^0\|_{\infty}$$

so that $\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq e^{\rho \delta t} \|u^0\|_{\infty}$, or $n\delta t \leq T$, thus $\|u^{n+1}\|_{\infty} \leq e^{\rho T} \|u^0\|_{\infty}$.

Thus the scheme is stable for the norm $\|\cdot\|_{\infty}$.

Consistency and order of the scheme:

Let v be a regular solution of the continuous problem (1), we will estimate the quantity: $\xi = v(t + \delta t, x) - (1 - \omega)v(t, x) - \omega v(t, x - \delta x) + \xi_1 \omega^2 v(t, x - \delta x) + \xi_2 \omega_{i-2} \omega v(t, x - 2\delta x) - \sum_{k=0}^{i-2} p_k \cdot v(t, x - k\delta x)$ where $\xi_1, \xi_2, \dots$ are null or equal to 1. To reduce the writing we consider the following notations: $v(t, x) = v$,

$$v_{tt}(t, x) = v_{tt} \quad \text{and} \quad v_{xx}(t, x) = v_{xx}$$

After an order 2 limited development one obtains:

$$\xi = \delta t_{i-1}^2 v_{tt} - \omega \delta x^2 v_{xx} + \xi_1 \omega^2 v(t, x - \delta x) + \xi_2 \omega^2 v(t, x - 2\delta x) - \sum_{k=0}^{i-2} p_k \cdot v(t, x - k\delta x)$$

thus:

$$i) \delta t^2 v_{tt} = O(\delta t^2) \quad ii) \xi_1 \omega^2 v(t, x - \delta x) + \xi_2 \omega^2 v(t, x - 2\delta x) = O(\delta t \delta x)$$

$$iii) \omega \delta x^2 v_{xx} = O(\delta t \delta x) \quad v) \sum_{k=0}^{i-2} p_k \cdot v(t, x - k\delta x) = O(\delta t \delta x^2)$$

$$\text{thus} \quad \frac{\xi}{\delta t} = O(\delta x) + O(\delta t)$$

From these calculations one deduces that the scheme is stable, consisting with order 1 in space and time, and thus convergence according to the theorem of Lax², since this scheme is linear.

² The theorem of Lax provides that in a well-posed mathematical problem, and with a consistent discretization scheme, stability is a necessary and sufficient condition for convergence.

2.3.4 Numerical illustration

In Fig 2, we compare our approach Transport-Agent (T-A) to upwind scheme (UW) and the exact solution(EX), with $w(x) = e^{-x^2}$.

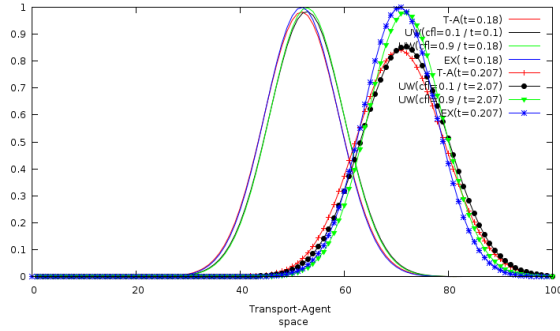


Fig. 2. Comparison between T-A ("lifetime" = $9 \cdot 10^{-4}$ and $\delta x = 0.1$), UW(cfl=0.1 and 0.9) and EX

We note that our approach is more accurate than the upwind scheme for the "small" iteration count (200 interventions of each agent, and still similar to upwind scheme (cfl=0.1) for "great" iteration count).

Approximation inspired by Lax-Wendroff scheme

Now one approaches flow leaving or returning by flow of the scheme of Lax-Wendroff [Anderson, Tannehill, and Pletcher (1984)], thus the orders of intervention of agents-transport A_i, A_0, A_N are respectively $\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(0)$ and $\sigma^{-1}(N)$ and their actions are defined respectively by:

$$\begin{cases} u_i^{n+\sigma^{-1}(i)} = u_i^{n+\frac{\sigma^{-1}(i)-1}{N}} - c \frac{\delta t}{\delta x} \left(u_i^{n+\frac{\sigma^{-1}(i)-1}{N}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta t}{\delta x} \right) \left(u_{i+1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(i)-1}{N}} - u_i^{n+\frac{\sigma^{-1}(i)-1}{N}} \right) \right) \\ u_{i+1}^{n+\sigma^{-1}(i)} = u_{i+1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(i)-1}{N}} + c \frac{\delta t}{\delta x} \left(u_i^{n+\frac{\sigma^{-1}(i)-1}{N}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta t}{\delta x} \right) \left(u_{i+1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(i)-1}{N}} - u_i^{n+\frac{\sigma^{-1}(i)-1}{N}} \right) \right) \\ u_j^{n+\sigma^{-1}(i)} = u_j^{n+\frac{\sigma^{-1}(i)-1}{N}} \quad \forall j \notin \{i, i+1\} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u_0^{n+\frac{\sigma^{-1}(0)}{N}} = u_0^{n+\frac{\sigma^{-1}(0)-1}{N}} \\ u_1^{n+\frac{\sigma^{-1}(0)}{N}} - u_1^{n+\frac{\sigma^{-1}(0)-1}{N}} = c \frac{\delta t}{\delta x} (u_i^{n+\frac{\sigma^{-1}(0)-1}{N}} + \frac{1}{2} (1 - \frac{\delta t}{\delta x}) (u_{i+1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(0)-1}{N}} - u_i^{n+\frac{\sigma^{-1}(0)-1}{N}})) \\ u_j^{n+\frac{\sigma^{-1}(0)}{N}} = u_j^{n+\frac{\sigma^{-1}(0)-1}{N}} \quad \forall j \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{N-1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)}{N}} = u_{N-1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)-1}{N}} - c \frac{\delta t}{\delta x} \left(u_{N-1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)-1}{N}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta t}{\delta x} \right) \left(u_N^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)-1}{N}} - u_{N-1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)-1}{N}} \right) \right) \\ u_N^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)}{N}} = u_N^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)-1}{N}} + c \frac{\delta t}{\delta x} \left(u_{N-1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)-1}{N}} + u_N^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)-1}{N}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\delta t}{\delta x} \right) u_{N-1}^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)-1}{N}} \right) \\ u_j^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)}{N}} = u_j^{n+\frac{\sigma^{-1}(N)-1}{N}} \quad \forall j \notin \{N-1, N\} \end{cases}$$

In Fig 3, we compare our Transport-Agent (T-A) approach to upwind scheme (UW) and the exact solution(Ex), with $w(x) = e^{-x^2}$.

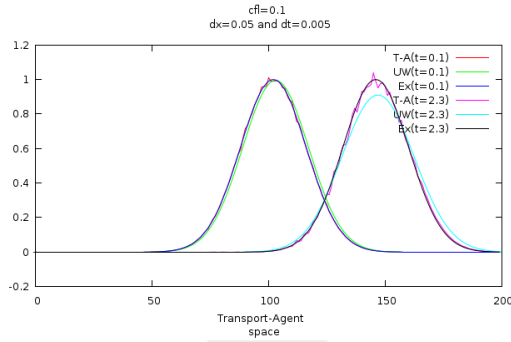


Fig. 3. Comparison between T-A("lifetime"=0.005 and $\delta x = 0.05$), UW ($cfl=0.1$) and EX

We note that our approach is more accurate than the upwind scheme for the "small" values of cfl, but for values of $cfl \geq 0.3$ accuracy decrease cfl figure(Fig 4.)

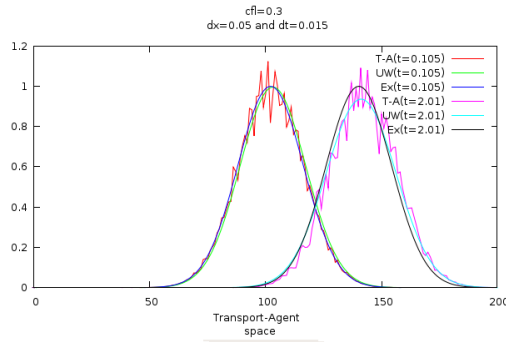


Fig. 4. Comparison between $T-A$ ("lifetime"=0.015 and $\delta x = 0.05$), UW ($cfl=0.3$) and EX

2.4 Multi-interactions asynchronous chaotic method

In this section, one preserves all the previous notations and one considers that the order of intervention of the transport-agents is carried out by temporal cycles, containing at least one intervention of each transport-agent (and thus at least two updates for each value in a given cell).

We thus consider a time step δt as the unit time for the transport-agents, and that each A_i operates p_i times, and has one "lifetime" $p_i \delta t = \delta t_i$, and we consider the relation $p \delta t \leq \delta x^3$, with $p = \max_i(p_i)$ and thus the step of time of our system is naturally $\Delta t = m \delta t$ where $m = \text{lcm}(p_1, \dots, p_{N-1})$, where lcm is the Least Common Multiple. Figure 5 illustrates this asynchronous scheduling strategy.

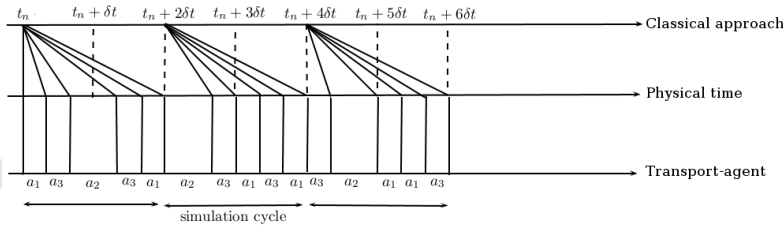


Fig. 5. Classical and transport-agent of view for transports asynchronous scheduling. Case of 3 transport-agents a_i , $1 \leq i \leq 3$, $\delta t_1 = \delta t_2 = \delta t$ and $\delta t_3 = 2\delta t$ thus $\Delta t = 2\delta t$

Note: Let $\sigma \in S_m$, (S_m permutation group) and $\rho : \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{A_N, A_{N-1}, \dots, A_0\}$, an application with : $\text{card}(\sigma^{-1}(A_i)) = \frac{m}{p_i}$, the number of times A_i operates during one cycle.

We define the following application, which describes a cycle of actions.

$$\phi_{\rho \circ \sigma} = g_{\sigma(\rho^{-1}(A_N))} \circ g_{\sigma(\rho^{-1}(A_{N-1}))} \cdots g_{\sigma(\rho^{-1}(A_1))}$$

where g is a function such that $g_{\sigma(\rho^{-1}(A_i))} = f_i^{\sigma(a)} \circ f_i^{\sigma(b)} \circ \cdots \circ f_i^{\sigma(e)}$ when $\rho^{-1}(A_N) = \{a, b, \dots, e\}$ and f_i^j describes the action of transport-agent A_i and order of intervention j .

2.4.1 Formalization of actions of transport-agents

By the same reasoning as in the previous paragraph one define the action of the transport-agents following Upwind and Lax-Wendroff scheme, and consider at time t_n the order of intervention of the agents A_i A_0 and A_N are respectively $j \in \sigma(\rho^{-1}(A_i))$, $k \in \sigma(\rho^{-1}(A_0))$ and $l \in \sigma(\rho^{-1}(A_N))$

Approximation inspired by Upwind scheme

$$\begin{cases} u_i^{n+j/m} = u_i^{n+(j-1)/m} - c \frac{\delta t_i}{\delta x} u_i^{n+(j-1)/m} \\ u_{i+1}^{n+j/m} = u_{i+1}^{n+(j-1)/m} + c \frac{\delta t_i}{\delta x} u_i^{n+(j-1)/m} \\ u_j^{n+j/m} = u_j^{n+(j-1)/m} \quad \forall j \notin \{i, i+1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0^{n+k/m} = u_0^{n+(k-1)/m} \\ u_1^{n+k/m} = u_1^{n+(k-1)/m} + c \frac{\delta t_0}{\delta x} u_0^{n+(k-1)/m} \\ u_j^{n+k/m} = u_j^{n+(k-1)/m} \quad \forall j \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{N-1}^{n+l/m} = u_{N-1}^{n+(l-1)/m} - c \frac{\delta t_{N-1}}{\delta x} u_{N-1}^{n+(l-1)/m} \\ u_N^{n+l/m} = u_N^{n+(l-1)/m} + c \frac{\delta t_{N-1}}{\delta x} u_{N-1}^{n+(l-1)/m} - \frac{\delta t_{N-1}}{\delta x} u_N^{n+(l-1)/m} \\ u_j^{n+l/m} = u_j^{n+(l-1)/m} \quad \forall j \notin \{N-1, N\} \end{cases}$$

To reduce the writings we adopt the notation: $\omega_i = a \frac{p_i \delta t}{\delta x}$, $\omega = a p \frac{\delta t}{\delta x}$ and each A_i is represented by the linear application f_i .

2.4.2 asynchronous-chaotic sequencing of transport-agents activities

Here again, the cycles of actions follow, but the sequence of actions within a cycle is not imposed, and changes from one cycle to another, randomly.

Consider at first the following case. At time n , a cycle begins, we assume to be the cycle involving, A_0 , A_1 2 times and A_2 within the same cycle, in this order: A_0 , A_1, A_2 and A_1 . Using the notations of the preceeding paragraph, we get the fact that at time $n + 1$, the state of the system is given by

$$U^{n+1} = f_0 \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1 U^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & (1 - \omega_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega_1 - (\omega_1)^2 - \omega_1\omega_2 & 1 - \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_1\omega_2 & \omega_2 & 1 - \omega_2 \end{pmatrix} U^n$$

2.4.3 Proof of convergence

As in the preceeding case the matrix making it possible to go from one moment to the other is lower triangular, so that to determine the form of the resulting numerical scheme it is enough to determine column by column the matrix by taking account of the fact that $f_i(e_i) = (1 - \omega_i)e_i + \omega_i e_{i+1}$ where $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ is the usual base of $\mathbb{R}^N$. In this case, the scheme is written in the following form:

$$u_i^{n+1} = \alpha u_i^n + \beta u_{i-1}^n + \gamma u_{i-2}^n + R_1 + R_2$$

After a simple calculation one finds $\alpha = 1 - m/p_i \omega_i$, $\beta = m/p_{i-1} \omega_{i-1}$, $|R_1| \leq C_1 \omega^2 (|u_i^n| + |u_{i-1}^n|)$ and $|R_2| \leq C_2 \omega^3 (\sum_{k=0}^i u_k^n)$ where C_1 and C_2 are constants. Knowing that $m/p_i \omega_i = m/p_{i-1} \omega_{i-1}$ and with the same type of calculation that the preceeding paragraph one proves the stability and the consistency of order 1 in time and space, and thus the convergence.

2.4.4 Numerical illustration

The figures (Fig. 6.) represent the results of this method (transport-agent asynchronous-chaotic method). We compare our Transport-Agent asynchronous-chaotic method (T-A) to upwind scheme (UW) and the exact solution(Ex), with $w(x) = e^{-x^2}$.

NB Each A_i has its own "lifetime" δt_i .

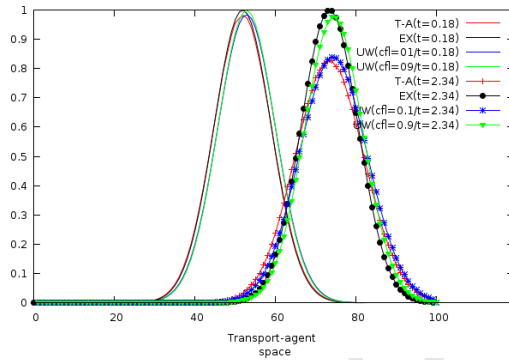


Fig. 6. Comparison between $(T-A)$ ($\delta_{t_{min}} = 2.10^{-4}$, $\delta_{t_{max}} = 9.10^{-4}$ and $\delta x = 0.05$), UW ($cfl=0.1$ and 0.9) and EX

as in the preceeding paragraph, we note that our approach is more accurate than the upwind scheme for the “small” iteration count (200 interventions of each transport-agent, and still similar to upwind scheme($cfl=0.1$) for “great” iteration count).

Approximation inspired by Lax-Wendroff scheme

Now we will illustrate (*cf* Fig. 7.) the results of this method (transport-agent asynchronous-chaotic method), whose the approximation of action of a transport-agent is inspired by the scheme of Lax-Wendroff. We compare our approach Transport-Agent asynchronous-chaotic method (T-A) to upwind scheme (UW) and the exact solution(Ex).

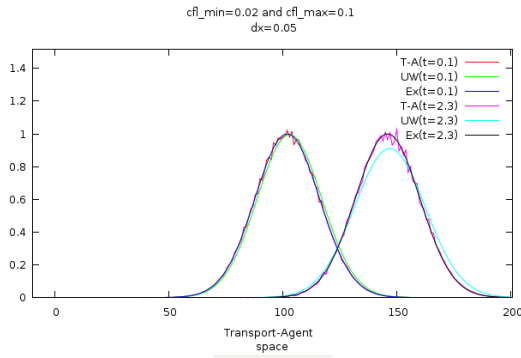


Fig. 7. convective transport of the function e^{-x^2} (Comparison between (T-A), UW and EX)

therefore the same as in the previous case we have a better accuracy than the upwind scheme for the values of cfl_{max} below 0.3, but beyond this value it loses accuracy (cf figure below).

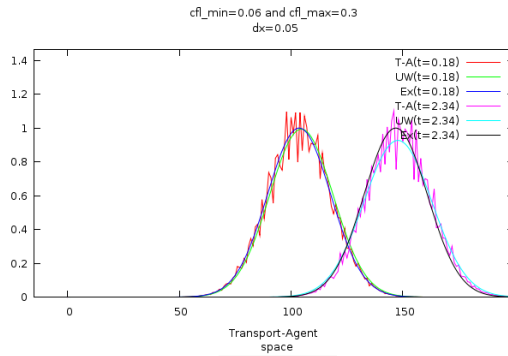


Fig. 8. convective transport of the function e^{-x^2} (Comparison between (T-A), UW and EX)

3 An efficient diffusion model for MIS

3.1 Principle

In this part, we present an alternative to the traditional approach, for the resolution of the phenomenon of the thermal transfer within a homogeneous environment. This approach is an extension of Redou [Redou, Desmeulles, Abgrall, Rodin, and Tisseau (2007)], it is based on the multi-interactions approach, whose principal role is the transfer of energy. Firstly each diffusion-agent perceives its environment. Then decides on what it must do, taking into account the laws of behavior, which are allocated to him. Finally the diffusion-agent acts by modifying its environment. We describe in the continuation of this section, the action of the diffusion-agents.

3.2 Illustration

The parabolic problem considered here consists in seeking $u : (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ the temperature of a metal bar :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad \forall x \in]a, b[, \quad \forall t > 0, \quad (5)$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad \forall t > 0, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = w(x), \quad \forall x \in]a, b[, \quad (7)$$

With $w : x \in [0, 1] \rightarrow w(x) \in \mathbb{R}$ is a given initial condition, k and f are respectively thermal conductivity and the power per unit of length provided to the bar, both of them are divided by the voluminal density and the mass specific heat. In the continuation, we present diffusion-agents model to approach the solution u above problem. We compare the numerical solutions with the Finite volume method within a simple framework where f are identically null (not heat source brought to the bar). Is necessary to note that the parabolic equations corresponding to the phenomena of diffusion admit analytical solutions good known [Reinhard (1995)], and can in the same way be solved numerically by various methods (DF, EFF, Monte Carlo [Lapeyre, Pardoux, and Sentis (2003)]).

3.3 Formalization and Principal Results

Multi-interaction chaotic model

Note 3.3.1 In the following of this section, we adopt the notation : $\lambda = k \frac{\delta t}{\delta x^2}$

Keeping the same ratings as before, we define the action of diffusion-agent A_i by :

$$\begin{cases} u_i^{n+j/n} = u_i^{n+(j-1)/N} + \lambda \left(u_{i+1}^{n+j/n} - u_i^{n+j/n} \right) \\ u_{i+1}^{n+j/n} = u_{i+1}^{n+(j-1)/N} - \lambda \left(u_{i+1}^{n+j/n} - u_i^{n+j/n} \right) \\ u_j^{n+j/n} = u_j^{n+(j-1)/N} \forall j \notin \{i, i+1\} \end{cases} \quad (8)$$

where j denotes the order of intervention of A_i inside the cycle starting at t_n

(Fig. 9.) Compare our approach Diffusion-Agent (D-A) to finite difference method(FDM).

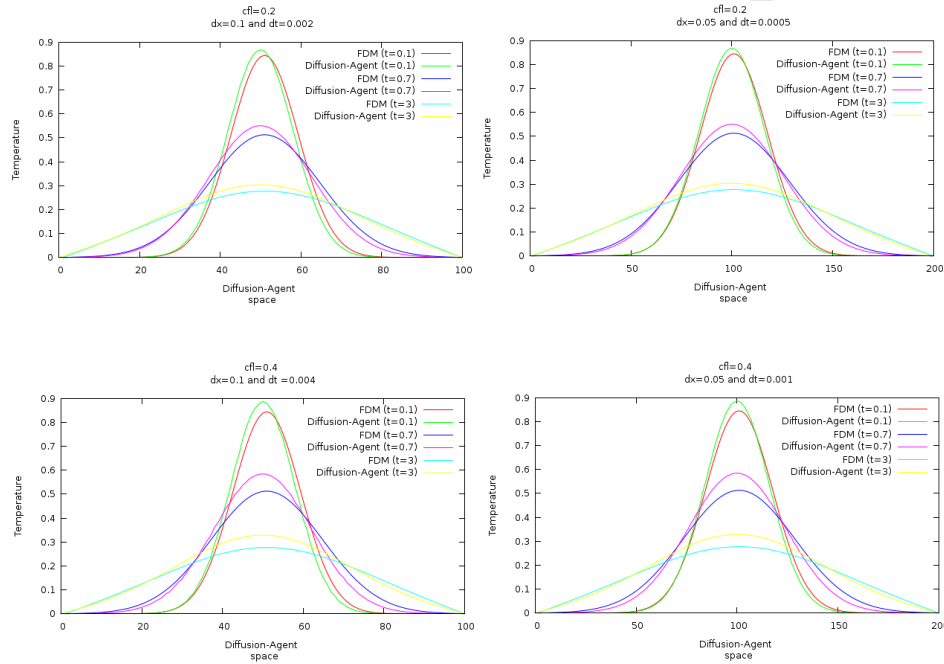


Fig. 9. Comparison between (D-A) and (FDM), according to the values of cfl and in several moments for $w(x) = e^{-x^2}$.

4 Intricating transport and diffusion models

We show here how can be intricated previous chaotic schemes for transport and diffusion into a new scheme for the mixed transport-diffusion problem :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

We provide A_i with two methods, transport and diffusion :

1. for the transport method, we use the scheme described by equation 4.
2. for the diffusion method, we take equation 8.

Each of these method is associated to an activity with the same frequency. Activities are scheduled by chaotic iterations.

By this way, we relocalise at the level of each transport-dissusion-agent the method of splitting [Ropp and Shadid (2009)].

For the splitting method, we consider the system as

$$\frac{du}{dt} = O_A(u) + O_D(u) \quad (9)$$

Where u is the solution vector and O_A and O_D are the advection and diffusion terms. We then split the terms, creating two systems of equations. Thus, a single step of a first-order splitting method advancing the solution from t^n to $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ amounts to an application of time discretizations applied to the system

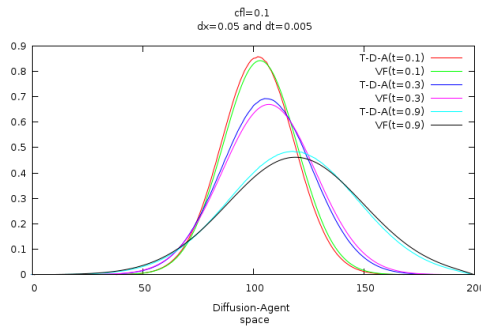
$$\frac{du^*}{dt} = O_A(u^*) \quad \text{on } [t^n, t^{n+1}], \quad u^*(t^n) = u^n, \quad (10)$$

$$\frac{du^{**}}{dt} = O_D(u^{**}) \quad \text{on } [t^n, t^{n+1}], \quad u^{**}(t^n) = u^*(t^{n+1}), \quad (11)$$

with $u^{n+1} = u^{**}(t^{n+1})$.

Using operator notation we denote the solution of a step as $u^* = S_X$, where $X = A$ or D to denote the different substep solution operators. Thus, the above method can be written as $u^{n+1} = S_A \circ S_D u^n$.

Our model goes further than the splitting method because transport and diffusion activities are fully mixed. Each transport-diffusion-agent is able to apply his role of transport-agent and/or diffusion-agent in random order exactly once per cycle. Figure 10 compares our approach Transport-Diffusion-Agent (T-D-A) to finite volume (VF). For both $cfl = 0.1, 0.2$, our T-D-A model seems to behave as good as the VF scheme.



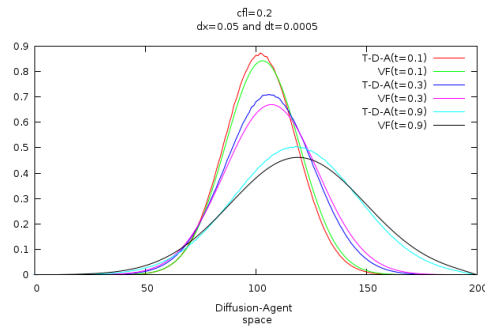


Fig. 10. Comparison between (T-D-A) and (VF), according to the values of cfl and in several moments.

5 The averaging of a wave packet

5.1 Principle

After having studied the problem of diffusion we want now to extend the work to the spreading phenomenon of a wave packet, we are interested in Schrödinger equation that describes the temporal evolution of the wave function ψ which characterizes a system whose squared module, assessed at position x and time t , $|\psi(x, t)|^2$, is interpreted as the probability density of occurrence of the position x and time t . Schrödinger equation is a partial differential equation in the form

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi$$

where H is the Hamiltonian operator of the system (the sum of operators of kinetic and potential energy)

$$H(t) = T + V(t)$$

The Hamiltonian operator depends on time if the potentials involved are explicitly dependent themselves on time, for example in such case of dealing with some problems in the semi-classical way [Yamanaka and Kino (2001); Melezhik and Baye (1999)] or when we study the effect on an atom or molecule of an external electric field variable [Dundas (2002)]. However when the operator H does not depend on time it is reduced to an Eigenvalue equation called stationary Schrödinger equation. From the properties of the Schrödinger equation we can show that there is an operator of evolution which applied to the state of a system at a given time, provides later system state [Baye, Goldstein, and Capel (2003)]. The resolution of the

Schrödinger equation is then reduced to the search for this operator which is itself solution of an evolution equation. But except for some rare cases, the Schrödinger equation, as many partial differential equations, has unknown analytical solutions. The numerical resolution of Schrödinger equation allows to circumvent this problem. Additionally, a numerical approach allows a concrete representation of the probability density which gives it an educational aspect.

There are several ways for this numerical resolution: the scheme due to Delfour, Fortin and Payre [Delfour, Fortin, and Payre (1981)], relaxation scheme [Besse (2004)], the variational method of Lagrange networks for solving the Schrödinger equation stationary [Hesse and Baye (1999)] and splitting scheme [Besse, Bédégay, and Descombes (2002)].

5.2 Illustration

The Schrödinger equation for a free particle ($V = 0$) in one dimension is:

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = -\hbar^2/2m\partial_{xx}\psi(x,t)$$

The general solution of this equation can be expressed by a linear combination of solutions which are defined by plane wave

$$\psi(x,t) = A \exp i(kx - \omega(k)t) \text{ where } \omega(k) = \hbar k^2/2m$$

Such a solution, called wave packet, takes the following form:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \exp i(kx - \omega(k)t)$$

where $g(k)$ is a complex function arbitrary square sommable. The wave packet is said Gaussian if $g(k)$ is a Gaussian centered around k_0 :

$$g(k) = \exp(-\alpha^2(k - k_0)^2)$$

The squared module of the wave function is:

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(x - vt)^2}{\alpha^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}}\right) \text{ where } v = \frac{\hbar k_0}{m}$$

Subsequently it is considered that the spreading-agents A_i have all the same "life-time" δt , and that their order of intervention is carried out by temporal cycles containing one intervention and only one of each spreading-agent (and thus two updates for each value in a given cell of control).

5.3 Formalization and Principal Results

Let us see precisely how a spreading-agent A_k intervenes : this spreading-agent separates two cells C_k and C_{k+1} .

We suppose that the spreading-agent intervenes at moment n , the update of ψ_k and ψ_{k+1} be carried out as follows:

Integrating on the cell of control $C_k \times [t_n, t_{n+1}]$, and choosing an implicit estimate of the term on the right, one obtains:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} i\psi(x, t_{n+1}) dx - \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} i\psi(x, t_n) dx = \\ - \frac{\delta t}{h} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\delta x^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_x \psi(x_{i+1/2}, s) ds - \frac{1}{\delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_x \psi(x_{i-1/2}, s) ds \right) \end{aligned} \quad (12)$$

We now follow the same reasoning for the construction of the model of the preceding part, and make of it an implicit approximation of the gradient of function ψ . The action of the spreading-agents is defined A_k , A_0 and A_N by

$$\begin{cases} \psi_k^{n+o_k/N} = \psi_k^{n+(o_k-1)/N} + i \frac{\delta t}{\delta x^2} (\psi_{k+1}^{n+o_k/N} - \psi_k^{n+o_k/N}) \\ \psi_{k+1}^{n+o_k/N} = \psi_{k+1}^{n+(o_k-1)/N} - i \frac{\delta t}{\delta x^2} (\psi_{k+1}^{n+o_k/N} - \psi_k^{n+o_k/N}) \\ \psi_d^{n+o_k/N} = \psi_d^{n+(o_k-1)/N} \forall d \notin \{k, k+1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_0^{n+o_0/N} = 0 \\ \psi_{k+1}^{n+o_0/N} = \psi_{k+1}^{n+(o_0-1)/N} - i \frac{\delta t}{\delta x^2} \psi_{k+1}^{n+o_0/N} \\ \psi_j^{n+o_0/N} = \psi_j^{n+(o_0-1)/N} \forall j \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_{N-1}^{n+o_N/N} = \psi_{N-1}^{n+(o_N-1)/N} - i \frac{\delta t}{\delta x^2} \psi_{N-1}^{n+o_N/N} \\ \psi_N^{n+o_N/N} = 0 \\ \psi_j^{n+o_N/N} = \psi_j^{n+(o_N-1)/N} \forall j \notin \{N-1, N\} \end{cases}$$

where o_i , o_0 and o_N denotes respectively the order of intervention of A_i , A_0 and A_N inside the cycle starting at t_n

Notation 5.3.1 Subsequently, we adopt the notation : $\kappa = i \frac{\delta t}{\delta x^2}$

We can describe this action by a matrix:

$f_k = \frac{1+\kappa}{1+2\kappa}(E_{kk} + E_{k+1,k+1}) + \frac{\kappa}{1+2\kappa}(E_{k,k+1} + E_{k+1,k}) + \sum_{j \neq k} E_{jj}$ where E_{ij} are elementary matrices. f_i , f_0 and f_N are explicitly given by:

$$f_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ & & & \frac{1+\kappa}{1+2\kappa} & \frac{\kappa}{1+2\kappa} \\ & & & \frac{\kappa}{1+2\kappa} & \frac{1+\kappa}{1+2\kappa} \\ & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\kappa} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \frac{1}{1+\kappa} & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multi-interactions chaotic model The figure below shows the evolution of Gaussian wave packet. This simulation was conducted in an interval $[-5, 5]$ with a step space discretization $\delta x = 0.1$ and the duration of each spreading-agent is $\delta t = 0.01$

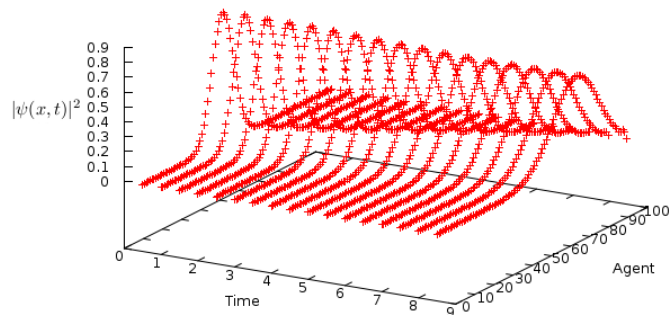


Fig. 11. evolution of Gaussian wave packet : $|\psi(x, t)|^2$ according to x for different values of t ($\hbar = m = 1, \alpha = 2, k_0 = 1$).

6 Conclusion and outlook

In the framework of the simulation of complex systems, we need numerical scheme for solving PDEs resting on asynchronous iterations. We have proposed multi-agent models adapted to such simulations for transport phenomena, thermal diffusion phenomena, transport-diffusion phenomena and the spreading phenomenon of a wave packet.

We have demonstrated convergence for the agent-transport when the action of the agent is inspired by the upwind scheme, using both an asynchronous and a chaotic-asynchronous multi-agents method. As we dispose of local conditions of stability, each agent chooses activities in a way compatible with these conditions. We have numerically illustrated the relevance of our method for diffusion phenomena. We have shown through the transport-diffusion problem that such asynchronous agent models can be coupled easily. Finally we achieved a numerical explanation of a wave packet spreading using a multi-agent model.

We plan to demonstrate the convergence property for our agent-diffusion method and transport-diffusion-agent method. Furthermore, we will add an agent within each *mesh* which role is to take into account the potential in the Schrödinger equation, and should propose a demonstration for the convergence of our scheme for Schrödinger equation.

References

Anderson, D. A.; Tannehill, J. C.; Pletcher, R. H. (1984): *Computational fluid mechanics and heat transfer*. New York, McGraw-Hill Book Co.

Atlan, H. (2003): The living cell as a paradigm for complex natural systems. ComPlexUs, 2003.

Baye, D.; Goldstein, G.; Capel, P. (2003): Fourth-order factorization of the evolution operator for time-dependent potentials. *Physics letters. A*, vol. 317, no5-6, pp. 337–342.

Benito, J.; Urena, F.; Gavete, L.; Alonso, B. (2008): Application of the generalized finite difference method to improve the approximated solution of pdes. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 38, pp. 39–58.

Besse, C. (2004): A relaxation scheme for nonlinear schrödinger equation. *SIAM J*, vol. 42, pp. 934–952.

Besse, C.; Bidégaray, B.; Descombes, S. (2002): Order estimates in time of splitting methods for the nonlinear schrödinger equation. *SIAM J*, vol. 40, no. 1, pp. 26–40.

Bourantas, G. C.; Skouras, E. D.; Nikiforidis, G. C. (2009): Adaptive support domain implementation on the moving least squares approximation for mfree methods applied on elliptic and parabolic pde problems using strong-form description. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 43, pp. 1–26.

Delfour, M.; Fortin, M.; Payre, G. (1981): Finite-difference solutions of a non-linear schrödinger equation. *Journal of Computational Physics*, vol. 44, pp. 277–288.

Desmeulles, G.; Bonneaud, S.; Redou, P.; Rodin, V.; Tisseau, J. (2009): In virtuo experiments based on the multi-interaction system framework: the RéISCOP meta-model. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 47, no. 3, pp. 299–329.

Dundas, D. (2002): Efficient grid treatment of the ionization dynamics of laser-driven $h2+$. *Phys. Rev. A*, vol. 65, no. 2, pp. 023408.

Hesse, M.; Baye, D. (1999): Lagrange-mesh calculations of three-body atoms and molecules. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 32, pp. 5605–5617.

Lapeyre, B.; Pardoux, E.; Sentis, R. (2003): *Introduction to Monte-Carlo Methods for Transport and Diffusion Equations*. Oxford University Press.

Melezhik, V. S.; Baye, D. (1999): Nonperturbative time-dependent approach to breakup of halo nuclei. *Phys. Rev. C*, vol. 59, no. 6, pp. 3232–3239.

Nam, M.-D. (2004): Indirect rbf method with scattered points for numerical solution of pdes. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 6.

Redou, P.; Desmeulles, G.; Abgrall, J.-f.; Rodin, V.; Tisseau, J. (2007): Formal validation of asynchronous interaction-agents algorithms for reaction-diffusion problems. In *PADS'07, 21st International Workshop on Principles of Advanced and Distributed Simulation*.

Reinhard, H. (1995): *Equations aux dérivées partielles*. Dunod.

Ropp, D. L.; Shadid, J. N. (2009): Stability of operator splitting methods for systems with indefinite operators: Advection-diffusion-reaction systems. *J. Comput. Phys.*, vol. 228, no. 9, pp. 3508–3516.

Sirajul, H.; Arshed, A. (2008): A numerical meshfree technique for the solution of the mew equation. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 38, pp. 1–24.

Yamanaka, N.; Kino, Y. (2001): Time-dependent coupled-channel calculations of positronium-formation cross sections in positron-hydrogen collisions. *Phys. Rev. A*, vol. 64, no. 4, pp. 042715.

Autonomy based modeling for the simulation of ocean remote sensing

Marc Parenthoen and Zakaria Belemaalem

Laboratory of Computer Science for Complex Systems (LISyC - EA 3883)

Brest National Engineer School (ENIB), European Centre for Virtual Reality (CERV)

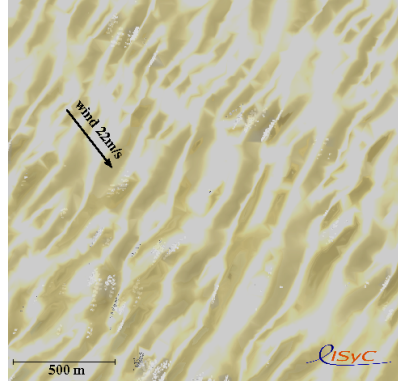
25, rue Claude Chappé, F-29280 Plouzané, France

Email: {parenthoen,belemaalem}@enib.fr

Abstract—This article presents the simulation structure for the MODENA project [1] and illustrates what should become an original dynamical model for the reflectivity map of the sea surface. From our point of view, MODENA challenges to find accurate models for simulating dynamically interaction between sea state, sonar, radar and ship, while keeping physical coherency during the whole observation scenario (several tens of minutes), including human participation in this virtual reality system. To deal with such a complexity, as it is impossible and inappropriate to compute dynamically hydrodynamic, electromagnetic and acoustic equations on an accurate grid of points or mesh, MODENA simulation structure aims to use an autonomy based approach: the model of each phenomenon (wave, breaking, group, ship, wind, stream, transmitter, receiver...) involved in the simulation is seen as an autonomous entity, including an autonomy of time, space and scale. These models are combined and animated using enaction-based multi-agents simulation. In such simulation, computer activity is optimised at places where and when interaction occurs within relevant scale, according to chosen models. Furthermore, to add new phenomena or to modify existing models do not make previous work obsolete, as one has only to characterise interactions of new phenomena with previously defined models. This modeling approach facilitates interaction between research teams involved in the MODENA project, as the whole simulation results from the set of autonomized models developed by each team in parallel. Such a virtual laboratory should help for example to better distinguish the signal of breaking from the signal of small boats, in the dynamical signature of sea-states.

I. INTRODUCTION

We present in this paper the simulation structure for the MODENA project [1] and illustrates what should become an original dynamical model for the reflectivity map of the sea surface. From our point of view, MODENA challenges to find accurate models for simulating dynamically interaction between sea state, sonar, radar and ship, while keeping physical coherency during the whole observation scenario (several tens of minutes), including human participation in such a virtual reality system [3]. In such a virtual laboratory, for example, one can easily compare a SAR “Omega-K” rebuilt image resulting from a lightning by a virtual X-band radar with a picture of the same virtual scene (Fig. 1). However most of classical simulations are based on a static sea surface description [4], thus can poorly deal with dynamical properties of the interacting localised phenomena involved, nor it can deal with unpredictable behaviour of human experimenters riding a boat or a plane in the scenario. Moreover, the computation



This picture shows 4km^2 of the sea surface from a 5km altitude specular point of view. For the realtime visualisation, a light spots the scene from that point of view, emissivities and diffusivities of different visualised entities (water, foam, boat) are set to constant values and an approximated geometrical optic model is computed thanks to the graphic processor unit (GPU). The sea state corresponds to the following situation : 5^{th} feb. 1998, 4:30 UTC, $58\text{N}, 2\text{E}$, half an hour after the cold front of a fast low pressure meteorological system. The sea state simulation involves one constant 22ms^{-1} NW synoptic wind, and three wave group generators: one narrow band WSW Johnswap swell ($P = 16\text{s} \pm 0.5\text{s}$, $H_{1/3} = 3\text{m}$, $\text{dir} = 245^\circ \pm 1^\circ$), and two windseas (W-WNW: $P = 13\text{s} \pm 1\text{s}$, $H_{1/3} = 7\text{m}$, $\text{dir} = 280^\circ \pm 7^\circ$ and NNW: $P = 8\text{s} \pm 2\text{s}$, $H_{1/3} = 2\text{m}$, $\text{dir} = 320^\circ \pm 10^\circ$). At this scale, only groups with wavelength greater than 50m are simulated and breaking front precision is 2m (smaller breaking front are not accurately simulated). Several breaking fronts (generated by groups and drawn with white cubes) exceed 100m long and produce several hundreds thousands m^3 of foam. In the middle of the picture, several pixels represent a 18m long sailing boat.

Fig. 1. A picture of a virtual stormy sea-state by IPAS [2]

of the acoustic or electromagnetic interaction with the sea surface classically occurs on a mesh with several millions of vertex, as for example it is the case with the reflectivity map for the electromagnetic sea surface classical model; although very precise this way of computing is very slow [5]. It is thus impossible and inappropriate to compute dynamically hydrodynamic, electromagnetic and acoustic equations on an accurate grid of points or mesh, including human activity while

the simulation occurs.

To deal with such a complexity, MODENA simulation structure aims to use an autonomy based approach: the model of each phenomenon (interaction between wave, breaking, group, ship, wind, stream, transmitter, receiver...) involved in the simulation is seen as an autonomous entity, including an autonomy of time, space and scale. In such simulation, computer activity is optimised at places where and when interaction occurs within relevant scale, according to chosen models. To be able to autonomize models for such "in virtuo" experiments, follows a methodology named *enactic* [6]. *Enactic* results from more than ten years of modeling complex systems in our multi-disciplinary research center¹. It has been successfully applied in biology [7]. Probably, the model used for sea state will be inspired from the IPAS model which is based on autonomized models for gravity wave group, breaking, wind, stream and depth interactions [2], because oceanography community is curious about it [8] and experiments have proved that it can statistically be as pertinent as other more classical models [9]. Capillarity and short gravity wave, small scale wind stress, micro-breaking, electromagnetic, acoustic and hydrodynamic models will be added. Only the electromagnetic added models are briefly detailed in this paper. This modeling approach facilitates interaction between research teams involved in the MODENA project, as the whole simulation results from the set of autonomized models developed by each team in parallel.

The next section (section II) presents the methodology principles for creating models and a general overview for the resulting simulation structure. Then section III shows how *enactic* could lead to an original dynamical model for the reflectivity map of the sea surface. We emphasize in the conclusion the risky aspect of this bet for modeling: lots of work has to be done for intricating every scale involved in remote sensing of the dynamic sea surface.

II. FROM OBJECTS TO PHENOMENA

We are interested, here, in defining pragmatically a constructive methodology for modeling complex systems, by using, instead of experiments, participative simulations of these models in a virtual reality system. A complex system is an open system composed of a heterogeneous set of atomic or composite entities, whose overall behavior is the result of the individual behavior of these entities and their various interactions in an active environment [10]. Because of the absence of any comprehensive behavior model for complex systems, modelisators distribute control between the components of the system and therefore *autonomize* the models of these components. The components could be objects (water, air, ship, radar...) or they could be interactions (hydrodynamic, aerodynamic, acoustic, electromagnetic...). Once models are created respecting the laws of the adequate fields relatively to computer abilities, virtual reality gives life to these models.

¹European Center for Virtual Reality (CERV <http://www.cerv.org>) combines researchers from computer science, mathematics, physics, biology and psychology. The manifesto [3] expounds the CERV's scientific orientations: <http://www.cerv.fr/en/page.pres.manifeste.php>

The computing instrumentation of such an abstract universe, where many models interact at many scales, allows to try out the models by making them live together and with human operators, i.e. to carry out experiments in virtual reality. This *in virtuo* experimentation can originate a modification of the system. Man is then in enaction² through the virtual reality system, which is created and made to evolve, through his modeling activity. Therefore, *enactic* [12] is a pragmatic example of methodology inspired from enaction principles giving a response to howto build such a universe of autonomized models. It emphasizes interaction modeling rather than object modeling.

Firstly, we introduce *enactic* for autonomy based modeling, then we give a rapid overview of the simulation structure for the MODENA project.

A. *Enactic: an autonomy based approach*

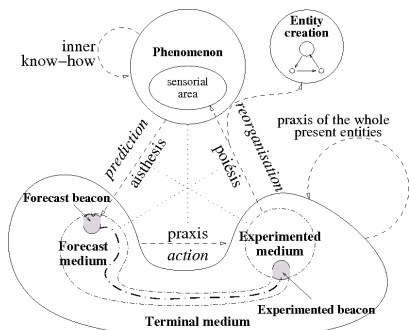
Enactic is a constructive method for studying complex systems involving multi-models and multi-scales interactions, lying on "in virtuo" simulations [12]. *Enactic* is based on only three assumptions and leaves a great freedom to modelisators:

- 1) modeling results from a human praxis (action with intention);
- 2) the model of a phenomenon is viewed as an autonomous entity;
- 3) interactions between models goes through a medium generated and made to evolve by mere models activities.

Firstly, phenomena are chosen by those who will use the virtual reality system, according to their intentions. Each modelisator will be able to try out his models interactively with those of other modelisators through the virtual reality system. Secondly, models are autonomized into autonomous entities. This assumption facilitates interaction between modelisators, as each model follows the same generic structure and thus can be developed independently. Thirdly, each phenomenon is associated to observables localised in time, space and scale. Observables are measurable properties at points of this time-space-scale by experiments. Associations of these topological points with the names of the experiments measuring properties form the experimental field for modeling the interaction medium. The experimentable properties are structures resulting from modeling action due to phenomena on their shared environment. Each model generates then dynamically the medium in function of its needs, in term of time, space and scale. Models resulting from these assumptions are rigorously formalised [13]; they are named *enactic models*.

Each *enactic model* has its own activity for acting, perceiving and reorganizing (Fig. 2). To act means for example to displace in the environment or to give localised properties. To perceive means to ask for some properties somewhere and sometimes. To reorganize means to adapt self-acting in

²Enaction: assumption according to which cognition, far from representing a given world, is the joint advent of a world and a mind starting with the history of the various actions a creature does in the world [11]. The world results from a structural coupling of the entities which create it and make it evolve, through their own activities.



Each model for a phenomenon is characterised by a triplet (prediction, action, reorganisation) of active objects (parameters, methods and activities):

- 1) The prediction active object structures the interaction medium by putting beacons, localized in time, space and scale and asking for some properties, according to the perceptive needs of the phenomenon model. We call aisthesis these functions of active perception which create interaction beacons.
- 2) The action active object on the one hand acts at the relevant scales on the medium thus created by the whole aisthesis to give it experimented properties. We call praxis these functions making the phenomenon model perceptible by others. On the other hand, action gives autonomy to the model by executing inner know-how.
- 3) The reorganisation active object informs the phenomenon model about experimental results carried out in the medium generated by its aisthesis or generates another autonomized model. We call poiesis these functions for effective measurement and generation.

Fig. 2. The generic structure of enactive models

function of measured properties and also means to create new entities in the simulation for example to take care of another type of phenomenon occurring here at a given scale. Therefore, interaction medium is a dynamical structure generated and made to evolve by mere models activities.

This autonomy of time is putted alive inside the computer by chaotic asynchronous iterations (each activity sets its own time interval). Their interactions go through a medium co-constructed by mere model activity; active perceptions structure the medium, actions set its properties and reorganisations read them. This medium gives spatial and scale autonomy to entities. In such simulation, computer activity is optimised at places where and when interaction occurs. Furthermore, to add new phenomena or to modify existing models do not make previous work obsolete, as one has only to characterise interactions of new phenomena with previously defined models.

On the one hand, computer activity is naturally optimised for interaction calculus; on the other hand any conceptual interaction mismatch between one model and other ones appears very soon in the modeling construction process. Once every body agree with the virtual experimental field, we bet that interoperability is an emergent property of such a constructivistic methodology for building autonomized models.

B. Simulation structure for MODENA

The MODENA project plans to use “in virtuo” experiments for studying the remote sensing of the maritime environment. A typical scenario is during several tens of minutes and could be the following:

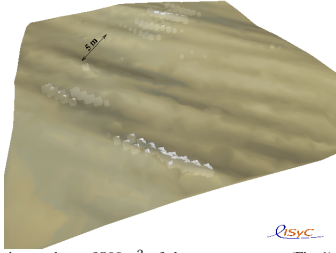
Some ships (including zodiacs and sailing boats) are evolving on a heterogeneous waterplane (wave groups, breakings, local winds, currents and underwater reliefs + clouds and rain), virtual and/or actual men ride them. Then a plane loading a particular radar (X-band with SAR technology, Omega-K algorithm) flies over this waterplane and modifies its trajectory according to how the “radio-man” interprets radar information.

To reach that goal, the academic part of the project involves seven workpackages already oriented for interaction purposes:

- 1) sea-state/electromagnetic
- 2) object/electromagnetic
- 3) sea-state/object
- 4) radar activity/simulation resolution scale
- 5) antenna/plane
- 6) sea-state/acoustic
- 7) complex system simulation

The rule of the last workpackage is to intricate models proposed by previous workpackage within a complex system allowing simulations in virtual reality. So that everybody knows each others, teams have presented their models during a one day workgroup, and we met some of them a second time. We argue everybody does agree that numerical joint resolution of Navier-Stokes, Maxwell and Helmholtz equations is not an operational solution for real time simulation of the maritime environment on several square kilometers sea-surface. Then, we propose to people the virtual scene by autonomised models resuming a small part of the theoretical and experimental knowledge that has been acquired from hundred years of oceanography, electromagnetism, naval architecture and acoustic. These specific models are not yet specified, this should be done during next year. But all of them will have to follow the formalisation for enactive models: an autonomy of time, space and scale. The choice of the appropriate scale-model in function of computer ability is one of the major difficulty. Then, results from *in virtuo* experiments will be compared with experimental data or more classical numerical simulations.

To date, more than hundred thousand lines of code in C++ have been written in our laboratory, making easier the implementation of enactive models in a virtual reality system thanks to the library ARéVi [14]. The ergonomics of this language has to be improved for no computer science specialists. ARéVi is a distributed virtual reality toolkit. It is both an active object-based programming language and an execution environment. Its kernel (a group of C++ classes) allows the creation of co-operative and distributed virtual reality applications by minimizing the programming effort. With ARéVi, a Multi-Agent System (MAS) is compounded of agents (basically active objects) in an environment containing objets, eventually situated in space (2D or 3D), scale and time. ARéVi offers an



This picture shows $2500m^2$ of the same sea state (Fig 1) from a $40m$ altitude point of view. At this scale, gravity-wave groups are simulated with every wavelength greater than $50cm$. Breaking front precision reaches $10cm$. Small breaking fronts with a length lower than $5m$ are mainly localised on crest of small waves which are themselves on the crest of bigger waves.

Fig. 3. A detailed view of the Fig. 1 sea-state

homogenous solution for interactions, implemented as method invocation or callback or message passing (point-to-point or broadcast, synchronous or asynchronous processing). ARéVi is stable and efficient. It has been used in many projects.

To start, the IPAS model for sea states could be used [2]: it respects enactic formal model and it's implemented with ARéVi. IPAS involves an oceanographical model for gravity wave groups with wavelength from several tens of centimeters to several hundreds of meters, an oceanographical models for passive and active breakings, with active fronts length from several centimeters to several hundreds of meters, an empirical model for wind stress over groups with dynamic Ventury effects at group scale, a descriptive model for hydrography (stream and depth fields), and a simple hydrodynamic model for ship from the zodiac to the cargo liner, including sailing boats with a decriptive model for wake and turbulence generation behind ship trajectory. Some of the whole interactions are modelled in IPAS: action towards wave groups from other groups, breakings, winds, bathymetry and currents, and action toward breakings from wave groups, winds and currents and indirectly from bathymetry through wave groups reorganisation. Interactions are computed in term of action or energy transfert, wave parameters, breaking activity, transport, refraction and creation. These enactic models assume the physical believiability of the virtual environment: action balance, wind stress, refraction and transport. Figure 1 illustrates IPAS ability to simulate a complex sea state covering $4km^2$ from a point of view distant of $5km$, while figure 3 shows the same sea state from several tens of meters and covering $2500m^2$. This smaller scale simulation illustrates the ability of IPAS to describe qualitatively a laboratory observation about wind stress response to interactions between long waves and short wind-generated waterwaves [15]. Furthermore, the IPAS model has some interesting ability for generating group distribution following any desired energy spectrum [9].

We have presented the autonomy based methodology, that we plan to use for modeling remote sensing of maritime

environment. Next section shows briefly how enactic could lead to an original dynamical model for the reflectivity map of the sea surface.

III. REFLECTIVITY MAP

To simulate dynamical aspects of microwave remote sensing for a maritime environment is a complementary approach to more conventionnal static simulations. With these last classical approaches, it takes hours and hours to simulate accurately the backscattering of the sea surface for one X-band SAR radar observation. If we want to achive dynamic simulation with human participation, you can imagine that we won't solve an Maxwell-based equation, even with an asymptotic method: we are not magicians. Nevertheless, we claim, that our method relies on the interaction between multiple simple physical models and is not only for video game or teaching purpose.

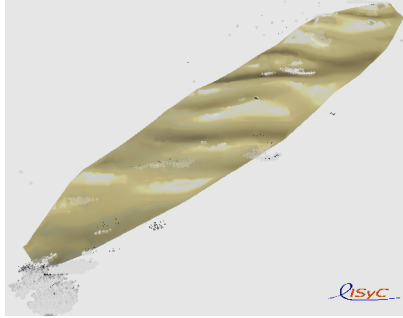
Enactic proposes to start with a review of expert knowledge about the domain of interest. Let's identify some major phenomena involved in the remote sensing of the sea surface. After that, we'll quickly expose first steps of an original model for a reflectivity map of the sea surface.

A. Multiscale interactions

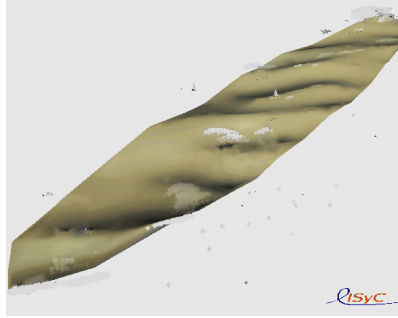
To model remote sensing for a maritime environment with an aim of designing radars involves sea-states phenomena for the geometrical description of the sea surface and the related foam distribution, hydrodynamic phenomena for objects floating on the sea, electromagnetic phenomena for radar activity. What is needed for "in virtuo" microwave remote sensing experiments is a phenomenological coherence during several minutes between the sea-state, floating objects, radar virtual observations.

Sea-states mainly results from the interaction between sea-waves (wind-waves, rain-ring-waves and wakes), breakings, foam, winds, currents, turbulences, shalow waters, sprays, boats, hydrocarbures, air and sea temperatures (from an oceanographic and hydrodynamic point of view). For its microwave remote sensing, one should add electromagnetic-waves, active transmitters like the sun or an active antenna, receivers like an antenna, each sea-state phenomenon and may be clouds, rain drops and fog (from an electromagnetic point of view). Each phenomenon is characterised by its time scale and its space scale:

- Time scale ranges from ten nanoseconds for the spike of an active antenna, few microseconds for boat spamming, few centiseconds for the backscatter of spikes or for boat movements, few seconds for image radar acquisition or for lifespan of breacking fronts, to few minutes for long gravity wave, boat and plane trajectories; *e.g.*: 10 magnitude orders.
- Space scale (expressed in 1D) ranges from few millimeters for small capillarity sea-waves, big drops and floating objects position, few centimeters for electromagnetic (microwave) wavelength, for large capillarity sea-waves or for micro-breakings, few meters for the



(a) Upwind lightening camera



(b) Downwind lightening camera

Two cameras took one picture of the same sea-state (described in Fig. 1). The size of the enlightened sea-surface is 2km from North to South and 600m from East to West. Each camera has its own light onboard, which is lightening only when it's taking the picture. The cameras are both with the same incidence angle, and they take the picture the one after the other. Their azimuth angles differ from 180° . The camera 4(a) is upwind, while the camera 4(b) is downwind. The high skewness of the two wind-seas (W-WNW and NNW) visually provides an obvious difference in the reflectivity of the sea-surface.

Fig. 4. IPAS ability for rendering the skewness of the sea slope distribution

radar resolution, for breaking, for gravity sea-waves or for floating objects length, few hectometers for longest gravity sea-waves, to few kilometers for biggest sea-wave groups, for the enlightened sea-surface side and for boat, plane and clouds trajectories; *e.g.* 6 magnitude orders, is 12 magnitude orders expressed in 2D.

Besides these phenomena, theoretical or empirical models have their own scales. The next example illustrates this problem for wind-sea and breaking models.

Wind-driven sea-waves are usually described by a spectrum, that gives the average height of waves mainly in function of its wavevector and wind. As the Elfouhaily directional spectrum [16] gives an accurate description for both long and short wind-driven waves, it is a good candidate for a wave generator. One should notice that, for example, the measurement of a sea spectrum by a bouy actually takes several hours for the convergence of the histogram, because of the spatial heterogeneity induce by the grouping mechanism. We'll need some oceanographic assumption about the distribution of groups. Moreover, a directional spectrum gives no information about the skewness of the sea slope distribution nor about sea-foam distribution, despite of their importance for scattering. To date, the sea-wave model in IPAS has some parameters for tuning the skewness in function of the wind stress over the group carrying that wave (Fig. 4), these parameters are also of major importance for the model of active breacking. A good study would be to compare IPAS abilities for generating skewness and breaking distributions according to the previous assumption about group distribution, with theoretical and empirical models for the skewness of the sea slope distribution [17], for the wind stress response to interactions between long waves and short wind-generated sea-waves [15], and for active and passive sea-foam distribution [18].

As we must localise sea-state phenomena in time and space because of the needs for simulation coherence, we have to superimpose different probalistic models – mainly generators for populating environnement – with lagrangian simulations (groups, breakings, boats) in which models are autonomized because of the absence of a global model for the whole complex system. It may then be necessary to provide a backpropagation from the lagrangian simulations to the different probalistic generators. This point will be studied carefully throughout the project as it is a key for multiscale interaction.

Anyway, at each spike with a ten nanosecond duration from an active antenna, an electromagnetic simulation occurs and whatever the sea-state or floating objects models, every receivers integrates the backscattering of the environment specified by its population (the set of intanciated models in the simulation) at the time of the spike.

B. Towards an enactic reflectivity map model

The transmitter covers the sea surface by a distribution of electromagnetic beacons in function of its radiation diagram: the higher is the radiation, the closer are beacons and the thinner is their scale, a beacon is also given to each final receiver (antenna). The total number of beacons is less than 10000 per square kilometer, the average spacing between beacons is then above 10 meters; on average, each beacon deals with more than 100m^2 area. The scale λ associated to the beacon is the rootsquare of the surface it covers. Each beacon has also a minimum of information about the transmittor : distance d , azimuth, incidence angle θ , electromagnetic wavelength λ_{em} , polarisation, spike description and resolution λ_{min} .

Every entity which is in the vicinity of the beacon, and which electromagnetic action scale is greater or equal to the

beacon scale λ will then participate to the backscatter calculus, depending on its type (wave, foam, boat, wave-generator, micro-breaking generator...). Each of them transforms the initial spike and, thanks to asynchrone iterations, transmits it after $\delta t = d/c$ to each final receiver which cumulates every spike with a simple sum over time. One can imagine that a few entities become themselves temporary transmitters when their emissivity exceeds a given threshold.

We suppose that floating objects and largest breakings are spare enough to be instantiated, with an electromagnetic model inspired for example from [19] for ship and from [18] for large breakings with an active front longer than the beacon scale λ .

For the rough surface of sea-states (including wakes and turbulences generated by floating objects), many microwave models exists [20], [21], from the most empirical to the most computer time consuming. Composite (two scale) models for rough surface scattering are the most used [5]. They compose the specular reflexion model (sea-wavelength λ_{sea} greater than $8\lambda_{em}$) with the Bragg resonance for $\lambda_{sea} = \lambda_{em}/(2 \sin \theta_i)$ at the first order, where θ_i is the local incidence angle due to sea-wavelength greater than $8\lambda_{em}$. Some assumptions on the probability of slope distribution gives average values for emissivity and simple formulas allow a fast calculus [22], but inappropriate alone with our scattered beacons for SAR resolution. We propose to use the specular model for sea-wavelengths $\lambda_{sea} \geq 2\lambda$, to compute an average emissivity according to probability models related to the properties of wave-generators, cutted for $\lambda_{sea} \geq 2\lambda$, then to modulate this average emissivity by empirical models for wave groups with $2\lambda > \lambda_{sea} > \lambda_{min}$ acting directly as a modulation of the spike to be transmitted, with no other emissivity calculus. These small gravity wave groups would just be animated (not simulated) to reach radar resolution for Bragg resonance and small breaking, as both phenomena can be phenomenologically attached to gravity wave crests.

For the many small breakings (actif front length is between beacon scale λ and radar resolution λ_{min}) and micro-breakings (actif front smaller than λ_{min}), we should use theoretical and empirical models for active and passive sea-foam emissivity [23].

For rain perturbation on sea surface scattering [24], we suppose that an homogeneous distribution of ring-waves [25] in function of drop size [26] could be added to the Bragg resonance forgetting capillarity wave interaction in a first approximation. Later, it may be usefull to take into account cloud and fog attenuation [27].

Thus, we have presented an outline of what could be an enactic reflectivity map model for a maritime multiscale environment. The phase computation emerges from asynchronous iterations and each entity uses a specific electromagnetic model to compute its contribution to a local emissivity. For the rough surface of sea-states a top-down mecanism onto scales allows to reach phenomenologically radar resolution while keeping coherency of wave dynamics.

IV. CONCLUSION

We have presented the autonomy based methodology named *enactic* lying on *in virtuo* experiments and a general overview for the resulting simulation structure for the MODENA projet. The model of each phenomenon (wave, breaking, group, ship, wind, stream, transmitter, receiver...) involved in the simulation is seen as an autonomous entity, including an autonomy of time, space and scale. This method prefers interaction modeling than object modeling. MODENA emphases the research of models for interaction between three major groups of phenomena : sea states and electromagnetic or acoustic waves, electromagnetic or acoustic waves and objects, objects and sea states. This modeling approach facilitates interaction between research teams involved in the MODENA project, as the whole simulation results from the set of autonomized models developed by each team in parallel. The *enactic* models are combined and animated using multi-agents multi-scale simulation. In such simulation, computer activity is optimised at places where and when interaction occurs within revelant scale, according to choosen models.

Then, we have outlined what could be an enactic reflectivity map model for a maritime multi-scale environment. The phase computation emerges from asynchronous iterations and each entity uses a specific electromagnetic model to compute its contribution to a local emissivity. For the rough surface of sea-states, a top-down mecanism onto scales allows phenomenologically to reach radar resolution while keeping the coherency of wave and foam dynamics.

Such a virtual laboratory should help for example to better distinguish the signal of breaking from the signal of small boats, in the dynamical signature of sea-states. But, lots of work has to be done for intrincating every scale involved in remote sensing of the dynamic sea surface. Even if IPAS is an implemented enactic model for sea-state simulation, the electromagnetic aspects of this proposal is not implemented yet, nor the top-down mecanism onto scale; then we don't really know if it tastes as good, as it looks like. Furthermore, if that works and it should work, since we are far from the usual use of a computer for physical simulation by numerical equation solving, then we'll have to prove the physical believiability of such a simulation.

ACKNOWLEDGMENT

Thanks to Région Bretagne's and Brest Métropole Océan's financing, the MODENA project allows our laboratory (LISyC, EA 3883) to increase with one PhD thesis student and 6 months engineering. This would not have been possible without the partners involved in the MODENA project: ARTAL-Technologies®, BOOST-Technologies®, ENIB, ENSIETA, IETR, IFREMER®, IREENA, MAREE®, SATIMO®, Telecom-Bretagne and THALES-AS®.

REFERENCES

- [1] R. Garello, "The MODENA project: Modeling and simulation of the maritime environment remotely sensed by radar," in *Ocean'08 proceedings*, Quebec City, Canada, 2008.

- [2] M. Parenthoën, T. Jourdan, and J. Tisseau, "IPAS: Interactive Phenomenological Animation of the Sea," in *International Offshore and Polar Engineering Conference proceedings (ISOPE)*, vol. 3, Toulon, France, 2004, pp. 125–132.
- [3] J. Tisseau, "Cerv's scientific manifesto," National Engineering School of Brest (ENIB), European Center for Virtual Reality (CERV), Brest, Tech. Rep., 2004.
- [4] J. Johnson, R. Shin, J. Kong, L. Tsang, and K. Pak, "A numerical study of the composite surface model for ocean backscattering," *IEEE Transactions On Geoscience And Remote Sensing*, vol. 36, no. 1, pp. 72–83, 1998.
- [5] D. Lemaire, P. Sobieski, C. Craeye, and A. Guissard, "Two-scale models for rough surface scattering: Comparison between the boundary perturbation method and the integral equation method," *Radio Science*, vol. 37, no. 1, pp. 10.1001–10.1029, 2002.
- [6] M. Parenthoën and J. Tisseau, "Enactive applied to sea state simulation," in *Enactive'06 proceedings*, 2006.
- [7] G. Desmeulles, G. Querrec, P. Redou, S. Kerdélo, L. Misery, V. Rodin, and J. Tisseau, "The virtual reality applied to biology understanding: the in virtuo experimentation," *Expert Systems with Applications*, vol. 30, no. 1, pp. 82–92, 2006.
- [8] M. Parenthoën, "Enactive modeling for natural phenomena — example of sea state simulations," in *Physical Oceanography Dissertation Symposium Abstract (PODS III)*, Hawaii, 2005, pp. 18–19.
- [9] C. Le Gal, M. Olagnon, M. Parenthoën, P.-A. Béal, and J. Tisseau, "Comparison of sea state statistics between a phenomenological model and field data," in *Ocean'07 proceedings*, 2007.
- [10] E. Morin, *Introduction à la pensée complexe*. Paris: ESF Editeur, 1990.
- [11] F. Varela, E. Thompson, and E. Rosch, *The embodied mind: cognitive science and human experience*. Cambridge: MIT Press, 1991.
- [12] M. Parenthoën and J. Tisseau, *Tutorial book of virtual concept*. Biarritz, France: ENSIAME-LAMIH/LIPSI-ESTIA, 2005, ch. Enactive modeling.
- [13] M. Parenthoën, "Animation phénoménologique de la mer — une approche éactive —," Ph.D. dissertation, Université de Brest (UBO), Lab. d'Informatique des Systèmes Complexes (LISyC - EA 3883), Centre Européen de Réalité Virtuelle (CERV), Brest, France, 2004.
- [14] F. Harrouet, E. Cazeaux, and T. Jourdan, *Le traité de la réalité virtuelle*, 3rd ed. Les Presses de l'Ecole des Mines de Paris, 2006, vol. 3: Outils et modèles informatiques des environnements virtuels, ch. ARéVi, pp. 369–392.
- [15] V. Makin, H. Branger, W. Peirson, and G. J-P, "Modelling of laboratory measurements of stress in the air flow over wind-generated and paddle waves," *Journal of Physical Oceanography*, vol. 37, no. 12, pp. 2824–2837, 2007.
- [16] T. Elfouhaily, B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandemark, "A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves," *Journal of Geophysical Research*, vol. 102, no. C7, pp. 15.781–15.796, 1997.
- [17] B. Chapron, D. Vandemark, and T. Elfouhaily, "On the skewness of the sea slope probability distribution," *Geophysical monograph*, vol. 127, pp. 59–63, 2002.
- [18] N. Reul and B. Chapron, "A model of sea-foam thickness distribution for passive microwave remote sensing applications," *Journal of Geophysical Research*, vol. 108, no. C10, pp. 19.1–19.14, 2003.
- [19] E. Shearman, "A review of propagation and scattering factors in remote-sensing and ship-tracking by HF (High Frequency) radar," in *AGARD Propagation Factors Affecting Remote Sensing by Radio Waves (SEE N84-15646 06-43)*, G. Millman, Ed., 1983, p. 13.
- [20] A. Fung, *Microwave Scattering and Emission Models and their Application*. Norwood, Mass.: Artech Hous, 1994.
- [21] A. Voronovitch, *Wave Scattering From Rough Surface*. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [22] Y. Liu, M.-Y. Su, X.-H. Yan, and W.-T. Liu, "The mean-square slope of ocean surface waves and its effects on radar backscatter," *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, vol. 17, pp. 1092–1105, 2000.
- [23] A. Camps, M. Vall-llossera, R. Villarino, N. Reul, B. Chapron, I. Cordella, N. Duffo, F. Torres, J. Miranda, R. Sabia, A. Moneris, and R. Rodríguez, "The emissivity of foam-covered water surface at L-band: theoretical modeling and experimental results from the Frog 2003 field experiment," *IEEE Transaction On Geoscience And Remote Sensing*, vol. 43, no. 5, pp. 925–937, 2005.
- [24] M. Bulatov, G. Bolotnikova, V. Etkin, and E. Skvortsov, "Investigation of microwave scattering and emission of sea surface perturbation by rain conducted with space "ALMAZ-1" SAR and shipborne radiometers," in *International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS'95). 'Quantitative Remote Sensing for Science and Applications'*. IEEE CNF, 1995, pp. 1078–1080.
- [25] D. Lemaire, L. Bliven, C. Craeye, and P. Sobieski, "Drop size effects on rain generated ring-waves with a view to remote sensing applications," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 23, no. 12, pp. 2345–2357, 2002.
- [26] Y. Furuhashi and T. Ihara, "Remote sensing of path-averaged rain-drop size distributions from microwave scattering measurements," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-29, pp. 275–281, 1981.
- [27] A. Berne and R. Uijlenhoet, "Quantitative analysis of X-band weather radar attenuation correction accuracy," *Natural Hazards and Earth System Sciences*, vol. 6, pp. 419–425, 2006.

The groupy wave model for simulating dynamical sea surface

Zakaria Belemaalem*, Bertrand Chapron†, Marc Parenthoen* and Nicolas Reul†

* LISyC, ENIB, UEB
CERV, Plouzané, France
Email : {belemaalem, parenthoen}@enib.fr

† LOS, IFREMER
Plouzané, France
Email : {chapron, reul}@ifremer.fr

Abstract—Simulated radar observations of the sea surface dynamics as used in the MODENA project, are based on an original methodology for sea states : the “groupy” wave model (GWM). Random wave fields can have very different modulations but nearly identical spectra. Nevertheless, the response of a floating object to waves depends strongly on the likelihood of large wave encounters. Sea surface fluxes also depend on wave breaking and air-flow separation, both being consequences of large-amplitude events. So wave group structure is one key description to simulate radar clutter under various environmental and instrumental configurations. The GWM builds on random distributions of wave groups and conditionally distributed breaking waves over these groups. Each wave group travels across the simulated area, and breaking waves appear dynamically on the wave crest at the rear of a group, propagating and disappearing at the front of this group. The generation of sea states follows a prescribed sea wave directional spectrum, and any breaking wave statistical distribution such as $\Lambda(\vec{c})d\vec{c}$ describing the total length of breaker per unit area and time with phase speed between $\vec{c}$ and $\vec{c} + d\vec{c}$. Accordingly, the group density per surface unit can lead to very different sea state structures, and the results will be discussed.

I. INTRODUCTION

Description of sea states rests on statistical distributions for waves and breakings. Wind waves for example are described by a spectrum associating to each sea wave vector an average energy. These descriptions are associated to observations of sea-states during almost 20 minutes [Longuet 84]. This observation period averages the modulations of the wave field.

Random wave fields can have very different modulations but nearly identical spectra. Furthermore, the response of a floating object to waves depends strongly on the likelihood of large wave encounters. Sea surface fluxes also depend on wave breaking and air-flow separation, both being consequences of large-amplitude events.

If one takes the sinusoidal map as a primitive for the simulation of waves, the energy will be homogeneously distributed over the simulation surface and we’ll have no explicit way to control the different modulations occurring in a wave field. Furthermore, to coherently distribute multiscale breaking events over such a wave description may not be so easy.

So wave group structure is one key description to simulate radar clutter under various environmental and instrumental configurations. Following previous work on group-based sea state simulations [Parenthoen 04], [LeGal 07], we propose an alternative to sinusoidal maps named “wave group maps”,

which does explicit the localisation of multiscale phenomena observed in sea-states : wave groups and breakers.

The Groupy Wave Model (GWM) builds on random distributions of wave groups and conditionally distributed breaking waves over these groups. Each wave group travels across the simulated area, and breaking waves appear dynamically on the wave crest at the rear of a group, propagating and disappearing at the front of this group.

The generation of sea states by the GWM can follow a prescribed sea wave directional spectrum, and any breaking wave statistical distribution such as $\Lambda(\vec{c})d\vec{c}$ describing the total length of breaker per unit area and time with phase speed between $\vec{c}$ and $\vec{c} + d\vec{c}$. Accordingly, the group density per surface unit can lead to very different sea state structures, and the results will be discussed.

II. THE GROUPY WAVE MODEL (GWM)

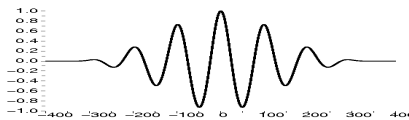
We present here the groupy wave model (GWM) for sea state simulation, based on a simple model for independent dynamical wave groups, which are distributed into wave group maps according to a prescribed directional spectrum.

A. Wave group model

Our wave group model is a reified Morlet wavelet, with its mean wave vector $\vec{k}$, its maximum amplitude a at its center $\vec{x}_0$ at $t = 0$, its phase θ_0 at this center at $t = 0$, its pulsation ω and its envelope extension ϱ . The pulsation ω also follows the open sea dispersion relationship :

$$\omega^2 = gk \left(1 + (k/k_m)^2 \right) \quad (1)$$

where $k_m = \sqrt{\rho_w g / T} \approx 370 \text{ rad.m}^{-1}$.



Surface elevation $[m]$ in the $(\vec{k}, \vec{z})$ plane function of position $[m]$ for a group with parameters $k = 0.01 * 2\pi \text{ rad.m}^{-1}$, $a = 1 \text{ m}$, $\varrho = 5 * \pi/k$ and θ such that the center $\vec{x}_c$ is a crest position.

Fig. 1. Our primitive for the groupy wave model

Such a single group acts on sea surface elevation $\eta(\vec{x}, t)$ as following :

$$\eta(\vec{x}, t) = a \cdot \exp\left(\frac{-(\vec{x} - \vec{x}_c(t))^2}{2\varrho^2}\right) \cdot \sin\left(\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \theta_0 - \omega t\right) \quad (2)$$

with its center $\vec{x}_c$ moving at group speed in open sea from $\vec{x}_0$ at $t = 0$:

$$\vec{x}_c = \vec{x}_0 + t \cdot \frac{\vec{c}}{2} \quad (3)$$

where $\vec{c} = \omega \vec{k} / k^2$, is its phase speed. Waves are travelling at phase speed from the backward to the forward of the group.

Finally, the envelope extension ϱ of the group is chosen greater than the wavelength $2\pi/k$ and is proportional to the number of waves $n_{waves} \geq 2$ actually expressed by the group :

$$\varrho = n_{waves} \frac{\pi}{k} \quad (4)$$

Figure 1 illustrates the shape of such a group on the surface.

We make the assumption that sea surface can be described by the linear superposition of such independant wave groups : when several groups act, the resulting elevation is the sum of elevations due to each group.

B. Wave group maps

We organize groups with the same wave vector $\vec{k}$ into what we call a wave group map. Our map for a given wave vector $\vec{k}$ at a given time t , is the sum of a Morlet wavelet family, each wavelet has its own phase θ_n uniformly distributed in $[0, 2\pi]$, its own amplitude a_n following a Rayleigh law with parameter σ , and its own position center $\vec{x}_n$ uniformly distributed on a surface S . The number N of wavelets on a given surface S follows a Poisson law with parameter λ . The surface elevation η due to this map at this fixed time is then :

$$\eta(\vec{x}) = \sum_{n=1}^N h_n(\vec{x}, a_n, \vec{x}_n, \theta_n) \quad (5)$$

where h_n is the contribution of the n^{th} group :

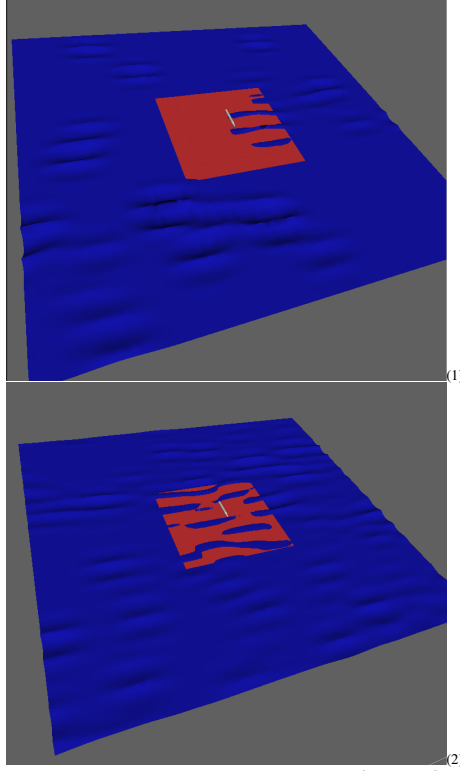
$$h_n(\vec{x}, a_n, \vec{x}_n, \theta_n, \varrho_n) = a_n \cdot \exp\left(\frac{-(\vec{x} - \vec{x}_n)^2}{2\varrho_n^2}\right) \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \theta_n\right) \quad (6)$$

with a constant envelope extension $\varrho_n = \varrho(\vec{k}) = \frac{\pi n_{waves}(\vec{k})}{k}$, that specifies the number of waves per group for this map.

We suppose that random variables h_n follow the same law and are independant as function of independant variables :

- amplitude : $a_n \sim Rayleigh(\sigma)$
- position : $\vec{x}_n \sim Uniform_S$
- phase : $\theta_n \sim Uniform_{[0, 2\pi]}$

Under these assumptions, to build a sea spectrum as a superposition of such maps rests on the simple summation of the spectra due to each map involved.



Two single wave group maps with the same wave number $k = 0.2 \text{ rad } m^{-1}$ and the same envelope extension $\varrho = 3 * \pi/k$. The surface S of the red squares (at level $z = 0$) is such that $\lambda_1/S = 1$ (up) while $\lambda_2/S = 4$ (down). The average steepnesses at the center of the groups of these maps are $\sigma_1 k = \pi \cdot 0.06$ and $\sigma_2 k = \pi \cdot 0.03$. Since $\lambda_1 \sigma_1^2 = \lambda_2 \sigma_2^2$, both blue sea-surfaces ($500 \text{ m} \times 500 \text{ m}$) present the same map spectrum.

Fig. 2. Maps with different wave structures but identical spectra

C. Wave group map spectrum

A group map on a surface S is fully determined by its wave vector $\vec{k}_0$, its Poisson parameter λ , its Rayleigh parameter σ and its envelope extension ϱ .

Lets start the computation of such a map spectrum by the two point characteristic function :

$$\Phi(u, v) = \langle \exp((iu\eta(\vec{r}) - iv\eta(\vec{r} + \vec{x}))) \rangle \quad (7)$$

where $\langle \cdot \rangle$ is the mean over the whole processus. For our map, this can be rewritten as :

$$\Phi(u, v) = \exp(\lambda \langle \exp(iu\eta(\vec{r}) - iv\eta(\vec{r} + \vec{x})) \rangle - 1) \quad (8)$$

and the mean is over $\vec{r}, a_n, \vec{x}_n, \theta_n$.

The autocorrelation function ρ_0 obeys :

$$\rho_0(\vec{x}) = \frac{\partial^2 \Phi(u, v)}{\partial_u \partial_v} \Big|_{u, v=0} \quad (9)$$

Then we obtain the energy spectral density Ψ for this group map as the Fourier Transform (FT) of the autocorrelation function :

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{k}) &= \int \rho_0(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \\ &= \frac{2\pi^2 \lambda \sigma^2 \varrho^4}{S} \left(e^{-2\pi^2 \varrho^2 \|\vec{k} - \vec{k}_0\|_2^2} - e^{-2\pi^2 \varrho^2 \|\vec{k} + \vec{k}_0\|_2^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

where $\vec{k}_0$ is the wave vector of the map, λ/S is the mean number of groups per surface unit (or the group density), σ is the mean amplitude at the center of these groups and ϱ is their envelope extension.

Equation (10) shows that for a given wave number $\vec{k}_0$ and group extension ϱ , any product $\lambda \cdot \sigma^2 = C^{te}$ for the map parameters gives the same spectrum for those maps. If the number of wave group per surface unit is low ($\lambda/S < 1$), the group amplitude is high and the energy distribution could be very heterogeneous, while if the group density is high ($\lambda/S > 4$), the group amplitude is moderated and the energy is more homogeneously distributed over the surface as it is illustrated by figure 2.

D. Directional spectrum simulation by the GWM

We aim at simulating a prescribed directional spectrum Ψ_{target} by our wave group model with wave numbers range from k_{min} to k_{max} , and directions range from $-\pi/2$ to $\pi/2$, as for example a Donelan and Pierson spectrum, an Elfouhaily spectrum or any experimental spectrum. Naturally, we use our wave group maps. To do so, we not only need to discretize wave numbers and directions, but we also need to choose for each wave vector a density of groups per surface unit $\lambda(\vec{k})/S$ and an envelope extension $\varrho(\vec{k})$ depending on hypothesis about the heterogeneity of energy distribution in function of scale.

For example, the envelope extension could be :

$$\varrho(\vec{k}) = \frac{\pi n_{waves}}{k} \quad (11)$$

with a constant $n_{waves} > 3$; the corresponding assumption is an invariant of scale for group shapes. And the Poisson law parameters could be :

$$\lambda(\vec{k})/S = \frac{\varrho^2(\vec{k}) d_{groups}}{S} \quad (12)$$

with a constant $d_{groups} > 0$; corresponding to an invariant of scale for group density per surface unit.

The given spectrum can approximatively be covered by wave group maps so that :

$$\forall \vec{k}, \Psi_{target}(\vec{k}) \approx \sum_j \Psi(\vec{k})_{\vec{k}_j, \lambda(\vec{k}_j), \sigma_j(\vec{k}_j), \varrho(\vec{k}_j)} \quad (13)$$

where $\Psi(\vec{k})_{\vec{k}_j, \lambda(\vec{k}_j), \sigma_j(\vec{k}_j), \varrho(\vec{k}_j)}$ given by the equation (10) is the spectral contribution of the j^{th} wave group map with its parameters $\vec{k}_j, \lambda(\vec{k}_j), \sigma_j(\vec{k}_j), \varrho(\vec{k}_j)$.

To numerically solve the previous equation with a given number n_{maps} of maps, we use the following algorithm :

Initialisation :

No wave group map exists yet : $j = 0$

We initialize the 0^{th} residual spectrum :

$$\Psi_0 = \Psi_{target}$$

While $j < n_{maps}$:

- 1) To find a $\vec{k}_j$ such that : $\Psi_j(\vec{k}_j) = \max(\Psi_j)$
- 2) To compute $\sigma_j = \sigma_j(\vec{k}_j)$ such that $\Psi(\vec{k}_j) = \max(\Psi_j)$ where $\Psi(\vec{k}_j)$ is given by equation (10), used with $\vec{k}_j$ instead of both $\vec{k}_0$ and $\vec{k}$, in function of group density λ_j/S_j and envelope extension ϱ_j parameters :

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{S_j \max(\Psi_j)}{2\lambda_j \pi^2 \varrho_j^4 (1 - e^{-8\pi^2 \varrho_j^2 k_j^2})}} \quad (14)$$

- 3) To update the j^{th} residual spectrum :

$$\Psi_{j+1} = \Psi_j - \Psi$$

where Ψ is the spectrum due to the j^{th} map given by replacing $\vec{k}_0, \frac{\lambda}{S}, \sigma, \varrho$ by $\vec{k}_j, \frac{\lambda_j}{S_j}, \sigma_j, \varrho_j$ in equation (10).

- 4) To increment j

End

where Ψ_j is the j^{th} residual spectrum, e.g : the difference between the target spectrum and the spectrum due to the j first maps.

With such a method, if n_{maps} is large enough, the last update $\Psi_{n_{maps}}$ of the residual spectrum should be nearly null. That is to say that the spectrum Ψ of the superposition of such n_{maps} maps equals approximatively Ψ_{target} .

Thus, we can obtain various sea-state multiscale structures with the same spectrum, as each map involved in the simulation can offer various wave structures at a given scale (the wave length of that map) with identical spectra.

III. BREAKING WAVE DISTRIBUTION OVER WAVE GROUPS

The sea surface is peopled by independant wave groups localising energy nearby their center. We'll see now how breaking events are added over these groups, respecting breaking statistics and offering some spatial coherency between breaking front and high wave crest positions.

A. Models for breaking statistics

Incremental breaking statistics $\Lambda(\vec{c}) [m^{-2}s]$ is the average length of breaking fronts per unit surface per unit speed interval [Phillips 85]. When a single breaking event starts, a turbulent foam patch is generally initiated at some point on the wave crest, and during the active breaking period, the patch spreads laterally along the direction of travel of the wave. At any instant, its lateral dimention can be represented by a main axis having the shape of an arc segment. The length of the breaking front Λ at that particular time is a mesure of the length of this arc segment. As the wind blows over the water surface, at any instant, the fronts of the breaking waves therefore define a distribution of isolated lines or arc

segments. The distribution $\Lambda(\vec{c})$ is such that $\Lambda(\vec{c})d\vec{c}$ represents the average total length per unit surface of breaking fronts that have velocities in the range $\vec{c}$ to $\vec{c} + d\vec{c}$.

The omni-directional distribution of breaking front length $\Lambda(c)$ is :

$$\Lambda(c) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c\Lambda(\vec{c})d\theta \quad (15)$$

Different models for incremental breaking statistics $\Lambda(\vec{c})$ or the omni-directional breaking statistics $\Lambda(c)$ are reviewed for example in [Reul 03] :

eq : a model for fully developed sea states [Phillips 85] :

$$\Lambda_{eq}(\vec{c}) = -4b'^{-1}mg^5c^{-14}u_*^2\Psi(\vec{k})\cos(\theta) \quad (16)$$

where $b' \approx 9.10^{-3}$ is the average value for unsteady breaker modified similarity factor, $m \approx 0.04 \pm 0.02$ is a parameter for wind induce wave growth rate, g is the acceleration due to gravity, u_* is the wind friction velocity, Ψ is the directional spectrum, and θ is the angle between $\vec{c}$ (or $\vec{k}$) and the wind vector.

emp : a model for the omnidirectional distribution of breaking front length based on experimental measure from an aircraft [Melville 02] :

$$\Lambda_{emp}(c) = (U_{10}/10)^3 \times 3.3 \times 10^{-4} e^{-0.64c} \quad (17)$$

where U_{10} is the wind speed at 10 meters above the sea surface. The validity of this formula is for U_{10} ranges 7 to 14 ms^{-1} , and well developed sea states (wind wave fetch ranges 100 to 150 km).

dom : a statistical model for a narrow band spectrum (wave number k ranges $k_{peak}/2$ to $2k_{peak}$) :

$$c\Lambda_{dom}(c) = \frac{k}{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon_T^2}{\varepsilon_s^2}\right) \quad (18)$$

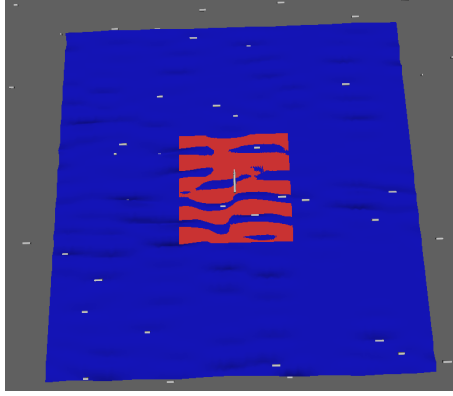
where $\varepsilon_T \approx 0.24$ is a tuning constant [Makin 02], $\varepsilon_s = 2k_m M_{00}^{1/2}$ is the dominant wave steepness, $k_m = \sqrt{M_{20}/M_{00}}$ defines the mean wavenumber and $M_{mn} = \int k_x^m k_y^n \Psi(\vec{k}) d\vec{k}$ are the spectral moments of order mn .

Thus, one can choose any appropriate model for incremental breaking statistics that we'll distribute over wave groups.

B. Conditional distribution of a breaking front length over a group map

We equip the wave groups of a wave group map with breaking fronts attached to wave crests. For that, we define a breaking area as a circle centred at the center $\vec{x}_c$ of the group with a radius $r_{breaking}$. Any crest belonging to this area is considered as a breaking wave (inside the breaking area) and its velocity $\vec{c}$ is then the phase speed of that group.

Lets call $l_{breaking}$ the mean breaking front length carried by such a group. Because for a given crest, its temporal mean length inside the breaking area during the crossing period is $\pi r_{breaking}^2 / (2r_{breaking}) = \pi r_{breaking} / 2$, and because the



A wave group map expresses breaking fronts (white patches) on wave group crests with a breaking front length per surface unit $L = 10^{-3} m^{-1}$. Wave group map parameters are $k = 0.2 rad m^{-1}$, $\varrho = 5 \times 2\pi/k$. The surface S of the red square (at level $z = 0$) is such that $\lambda/S = 4$. The group map steepnesses is $\sigma k = \pi.0.03$. The cumulated breaking length over the blue sea-surface ($25000 m^2$) is worth on average 25 m . Here, every groups are equipped with the same breaking area. This is a screenshot of a coherent dynamical simulation.

Fig. 3. Breaking fronts over the groups of a map

mean number of breaking crests is $2r_{breaking} \times k/2\pi$, we have :

$$r_{breaking} = \sqrt{\frac{2l_{breaking}}{k}} \quad (19)$$

where k is the wave number of the group.

If one wants now to distribute a breaking front length L_j per unit area over the crests of a wave group map $\vec{k}_j, d_j, \sigma_j, \varrho_j$ where $\vec{k}_j$ is the wave vector, $d_j = \lambda_j/S_j$ the group density per unit surface (λ_j is the Poisson law parameter, e.g : the average number of groups covering the surface S_j), σ_j the average amplitude at the group center which follows a Rayleigh law and ϱ_j their envelope extension, the appropriate radius $\bar{r}_{breaking_j}$ so that this map j expresses the given breaking length is :

$$\bar{r}_{breaking_j} = \sqrt{\frac{2L_j}{k_j d_j}} = \sqrt{\frac{2L_j S_j}{k_j \lambda_j}} \quad (20)$$

We also specify the breaker geometry using similarity laws [Bortkovskii 87]. Accordingly, the average whitcap thickness $\bar{\delta}_j$ for the breakers of the j^{th} map shall apply the following similarity law :

$$\bar{\delta}_j = b \cdot \frac{2\pi}{k_j} \quad (21)$$

where b is an empirical constant estimated to be $b \approx 0.03$ for quasi-steady breakers [Ducan 81].

Figure 3 illustrates the spatial coherency that can be easily obtained by our conditional distribution of breaking fronts over the wave crests of the group map.

If we want to take attention to the Rayleigh distribution of amplitudes for the wave groups of that map, one can choose to set the breaking radius r_{breaking_i} for a group which amplitude is a_i , with :

$$r_{\text{breaking}_i} = \frac{a_i}{\sigma_j} \bar{r}_{\text{breaking}_j} \quad (22)$$

this will increase the spatial coherency between breaking fronts and highest crests positions. Furthermore, we can decide that only groups with an amplitude greater than $\alpha_j \sigma_j$ express their breaking fronts ($\alpha_j > 0$) and the precedent formula becomes :

$$r_{\text{breaking}_i} = \frac{a_i}{\left\{ \overline{a_{(a > \alpha_j \sigma_j)}} \right\}} \cdot \bar{r}_{\text{breaking}_j} \quad (23)$$

where $\left\{ \overline{a_{(a > \alpha_j \sigma_j)}} \right\}$ is the mean value of a random variable a following a σ_j -Rayleigh law restricted by $a > \alpha_j \sigma_j$.

Thus, we know how to distribute a breaking front length L_j per surface unit over a group map by adding to each group i of the map j a breaking area specified by its breaking radius r_{breaking_i} using equations (20) and (22) or (23).

C. Conditional distribution of incremental breaking statistics $\Lambda(\vec{c})$ over group maps

We distribute now the average total length per unit surface of breaking fronts $\Lambda(\vec{c}) d\vec{c}$, that have velocities in the range $\vec{c}$, $\vec{c} + d\vec{c}$ over the groups of a map so that the phase speed of the group crests ranges in the same set. As we don't have a continuum for $\vec{c}$ because we have discretised wave vectors for covering the full spectrum with a finite number of wave group maps, we decide to distribute breaking front lengths so that the total length L_{tot} of breaking fronts per surface unit is preserved :

$$L_{\text{tot}} = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Lambda(\vec{c}) d\vec{c} \quad (24)$$

Each map j will then be associated to a breaking front length L_j per surface unit as following :

$$L_j = \frac{\Lambda(\vec{c}_j)}{\sum_j \Lambda(\vec{c}_j)} \cdot L_{\text{tot}} \quad (25)$$

where $\vec{c}_j$ is the phase speed for the j^{th} group map.

If we only have the omni-directional distribution of breaking front length $\Lambda(c)$ cumulating $\Lambda(\vec{c})$ for all directions with the same speed norm c , we use in the precedent formula an angular spreading function (c.f. : [Elfouhaily 97]) to distribute $\Lambda(c)$ over different directions.

The precedent section explains how each L_j can be distributed over the groups of the j^{th} wave group map, thanks to equations (20) and (22) or (23).

Thus any incremental breaking statistics can be conditionally distributed over the wave crests of the groups mapping the sea surface. The whole system of waves and breaking fronts evolves dynamically thank to the GWM, while respecting any given directional spectrum and keeping some spatial coherency between phenomena (wave groups and breaking fronts) involved in this sea-state.

IV. CONCLUSION AND DISCUSSION

The groupy wave model allows dynamical multiscale simulations of sea states involving simple models for wave groups and breakers. The GWM builds on random distributions of wave groups and conditionally distributed breaking waves over these groups. Each wave group travels across the simulated area, and each breaking wave appears dynamically on a wave crest at the rear of a group, propagating with crests and disappearing at the front of this group. We have shown how the GWM can build a multiscale sea state that follows any prescribed sea wave directional spectrum $\Psi(\vec{k})$ with any breaking wave statistical distribution $\Lambda(\vec{c})$.

In addition to these average statistics, the GWM user needs to choose his own hypothesis about wave field modulations in function of the scale ; namely the mean number of groups per surface unit and the mean number of waves per group. These parameters offer a wide range of different sea state structures, all of them offering the same average statistics. Futur work should study the impact of these parameters on the sea clutter.

Until now, we have used a model for the surface as the sum of random processes specifying vertical displacement. In fact water motion involves orbital movements with horizontal displacements highly correlated to vertical ones. We'll modify our wave group vertical primitive into an orbital primitive and spectral results obtained for the GWM will have to be dressed.

REFERENCES

- [Ducan 81] Ducan, J., An experimental investigation of breaking waves produced by a towed hydrofoil, *Proc. R. Soc. Lond. A* 377 :331–348, 1981.
- [Elfouhaily 97] Elfouhaily, T., Chapron, B. and Katsaros K., A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves, *J. Geophysical Research Oceans*, 102(C7) :781–796, 1997.
- [LeGal 07] Le Gal, C., Olagnon, M., Parenthoen, M., Béal, P.-A. and Tisseau, J., *Comparison of sea state statistics between a phenomenological model and field data*, in Ocean'07 proceedings, 2007.
- [Bortkovskii 87] Bortkovskii, R., *Air-sea exchange of heat and moisture during storms (Revised english version)*, Dordrecht : D. Reidel [Kluwer], 1987.
- [Longuet 84] Longuet-Higgins M.S., Statistical properties of wave groups in a random sea state, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A312 :219–250, 1984.
- [Makin 02] Makin, V.K. and Kudryavtsev, V.N., Impact of dominant waves on sea drag, *Bound Layer Meteorology*, 103 :83–99, 2002.
- [Melville 02] Melville, W.K. and Matusov, P., Distribution of breaking waves at the ocean surface, *Nature*, 417 :58–63, 2002.
- [Parenthoen 04] Parenthoen, M., Jourdan, T. and Tisseau, J., *IPAS : interactive phenomenological animation of the sea*, in ISOPE'04 proceedings, 3 :125–132, 2004.
- [Phillips 85] Phillips, O., Spectral and statistical properties of the equilibrium range in the wind generated gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 156 :505–531, 1985.
- [Reul 03] Reul, N. and Chapron, B., A model of sea-foam thickness distribution for passive microwave remote sensing applications, *J. Geophysical Research Oceans*, 108(C10) :19.1–19.14, 2003.

Références bibliographiques

- Apel, J. (1994). An improved model of the ocean surface wave vector spectrum and its effects on radar backscatter. *Geophys. Res.*, 99(C8) :16269–16291.
- Belemaalem, Z., Chapron, B., Parenthoën, M., et Reul, N. (2010). The groupy wave model for dynamical sea state simulation. Dans *OCOSS'10 proceedings*.
- Bjerkaas, A. W. et Riedel, F. W. (1979). Proposed model for the elevation spectrum of a wind-roughened sea surface. University tech. rep, JOHNS HOPKINS UNIV LAUREL MD APPLIED PHYSICS LAB.
- Chapron, B., Kerbaol, V., Vandermark, D., et Elfouhaily, T. (2000). Importance of peakedness in sea surface slope measurements and applications. *Journal of Geophysical Research*, 105 (C7) :17195–17202.
- Cox, C. et Munk, M. (1954). Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter. *J. Opt. Soc. Amer.*, 44 :838–850.
- Darles, E., Crespín, B., Ghazanfarpour, D., et Gonzato, J. (2011). A survey of ocean simulation and rendering techniques in computer graphics. *Computer Graphics Forum*, 30 :34–60.
- De loor, P. (2006). Autonomisation de modèles pour les simulations participatives. Rapport technique, LISyC.
- Dinnat, E. P. (Mars 2003). *De la détermination de la salinité de surface des océans à partir de mesures radiométriques hyperfréquences en bande L*. Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- Donelan, M., Longuet-Higgins, M., et Turner, J. (1972). Periodicity in whitecap. *Nature*, 239 :449–451.

- Donelan, M. A. et Pierson, W. J. P. (1987). Radar scattering and equilibrium ranges in wind-generated waves with applications to scatterometry. *Geophys. Res.*, 92 :4971–5029.
- Elfouhaily, T., Chapron, B., Katsaros, K., et Vandermark, D. (1997). A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves. *Journal of Geophysical Research*, 102(C7) :15,781–15,796.
- Elfouhaily, T., Thompson, D., Vandemark, D., et Chapron, B. (1999.). Weakly nonlinear theory and sea state bias estimation,. *J. Geophys. Res.*, 104 (C4) :7641–7647.
- Emmanuelle, D. (2008). *Représentation et rendu de l’océan en synthèse d’images réalistes*. Thèse de doctorat, Université de Limoges.
- Enright, D., Marschner, S., et Fedkiw, R. (2002b). Animation and rendering of complex water surfaces. *ACM Trans. Graph.*, 21 :736–744.
- Ewing, J. (1973). Mean length of runs of high waves. *Journal of Geophys. Res.*, 89 :3623–3634.
- Fournier, A. et Reeves, W. T. (1986). A simple model of ocean waves. *J-COMP-GRAPHICS*, 20(4) :75–84.
- Fuchs, P. et Tisseau, J. (2006). *Introduction à la réalité virtuelle*.
- Garello, R. (2008). The modena project : Modeling and simulation of the maritime environment remotely sensed by radar. *proceedings of OCEANS’08. MTS/IEEE*.
- Gerstner, F. (1809). Theorie der wellen. *Annalen der Physik*, 32.
- Guillou, G. (2010). *Architecture multi-agents pour le pilotage automatique des voiliers de compétition et extensions algébrique des réseaux de Petri*. Thèse de doctorat, Brest (UBO).
- Guillou, G. et Parenthoën, M. (2007). Modèle multi-agents pour le pilotage temps réel d’un voilier. Dans *6eme Colloque Francophone sur la Modélisation des Systèmes Réactifs - MSR 2007 - Hermes-Lavoisier*.
- Harrouet, F., Tisseau, J., Reignier, P., et Chevaillier, P. (2002). oris : un environnement de simulation interactive multi-agents. *Revue des Sciences et Technologies de l’Information, série Technique et Science Informatiques (RSTI-TSI)*.
- Hasselmann, K., Barnett, T. P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D. E., Enke, K., Ewing, J. A., Gienapp, H., Hasselmann, D. E., Kruseman, P., Meerburg, A., Muller, P., Olbers, D. J., Ritcher, K., Sell, W., et Walden, H. (1973). Measurements of wind-wave growth and swell decay during the joint north sea wave project (jonswap). *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, A8(12).

- Hinsinger, D., Neyret, F., et Cani, M.-P. (2002a). Interactive animation of ocean waves. Dans *Proceedings of the 2002 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*.
- Kerdélo, S., Abgrall, J.-f., Parenthoën, M., et Tisseau, J. (2002). Multi-agent systems : A useful tool for the modelization and simulation of the blood coagulation cascade. Dans *AAMAS 2002, Workshop Bioinformatics And Multi-Agent Systems (BIXMAS'02)*.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Dover Publications, Cambridge University Press, London. Lamb.
- Lee, N., Baek, N., et Ryu, K. (2007). Real-time simulation of surface gravity ocean waves based on the tma spectrum. Dans *In Proceedings of the International Conference on Computational Science (Beijing, China)*, pages 122–129.
- Legal, C., Parenthoën, M., Béal, P.-a., et Tisseau, J. (2007). Comparison of sea state statistics between a phenomenological model and field data. Dans *proc of OCEANS 2007*.
- Liu, Y., Yan, X.-H., Liu, W., et Hwang, P. (1997). The probability density function of ocean surface slopes and its effects on radar backscatter. *Journal of Physical Oceanography*, 27 :782–797.
- Longuet-Higgins, M. (1984). Statistical properties of wave groups in a random sea state. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, pages 219–250.
- Losasso, F., Talton, J., Kwatra, N., et Fedkiw, R. (2008). Two-way coupled sph and particle level set fluid simulation. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 14 :797–804.
- Mihalef, V., Metaxas, D., et Sussman, M. (2004). Animation and control of breaking waves. Dans *SCA '04 : Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 315–324.
- Mollo-Christensen, E. et Ramamonjiarisoa, A. (1978). Modeling the presence of wave groups in a random wave field. *Journal of Geophys. Res*, 83 :4117–4122.
- Nouguier, F. (18 Septembre 2009). *Diffraction électromagnétique par la surface océanique : influence des nonlinéarités et de l'écume*. Thèse de doctorat, nstitut Fresnel (UMR CNRS 6133) et Laboratoire d'Océanographie Spatiale - IFREMER.
- Nouguier, F., Guerin, C.-A., et Chapron, B. (2009). "choppy wave" model for nonlinear gravity waves. *Journal of Geophysical Research*, 114 :1–16.
- Parenthoën, M. (2004). *Animation phénoménologique de la mer : une approche éinactive*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale.

- Parenthoën, M., Jourdan, T., et Tisseau, J. (2004). Interactive phenomenological animation of the sea. Dans *Proceedings of the 14th International Offshore and Polar Engineering Conference (ISOPE)*.
- Pierson, W. J. (1961). Models of random sea based on the lagrangian equations of motion. Rapport technique, New York University.
- Pierson, W. J. et Moskowitz, L. (1964). A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of s.a. kitaigorodskii. *Journal of Geophysical Research*, 69 :5181.
- Poisson, S.-D. (1837). *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile : Précédées des règles générales du calcul des probabilités*. Imprimerie de bachelier.
- Premoze, S. et Ashikhmin, M. (2001). Rendering natural waters. *Comput. Graph. Forum*, 20(4) :189–199.
- QUENTIN, C. (2004). *Etude de la surface océanique, de sa signature radar et de ses interactions avec le flux turbulent de quantité de mouvement dans le cadre de l'expérience FETCH*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- Rankine, W. J. M. (1836). On the exact form of waves near the surface of deep water. Philosophical transactions of the Royal society of London.
- Redou, P., Desmeulles, G., Abgrall, J.-f., Rodin, V., et Tisseau, J. (2007). Formal validation of asynchronous interaction-agents algorithms for reaction-diffusion problems. Dans *PADS'07, 21st International Workshop on Principles of Advanced and Distributed Simulation*.
- Redou, P., Legal, C., Querrec, G., Rodin, V., Abgrall, J.-f., et Tisseau, J. (2005). Reaction agent : first mathematical validation of a multi-agent system for dynamical biochemical kinetics. *Lecture Notes in Computer Science*.
- Soriano, G. et Saillard, M. (2003). A two-scale model for the ocean surface bistatic scattering. Dans *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2003. IGARSS '03. Proceedings. 2003 IEEE International*, volume 7, pages 4147–4149 vol.7.
- Susbielles, G. et Bratu, C. (1981). *Vagues et ouvrages pétroliers en mer*.
- Tessendorf, J. (2001). Simulating ocean waters. Rapport technique, In SIGGRAPH course Notes (Course 47).
- THON, S., DISCHLER, J.-M., et GHAZANFARPOUR, D. (2000a). Ocean waves synthesis using a sea spectrum controlled turbulence. Dans *Computer Graphics International 2000 proceedings, CGI 00*, pages 65–72, Genève (Suisse).
- Tisseau, J. et Harrouet, F. (2003). *Autonomie des entités virtuelles*.
- Tisseau, J., Parenthoën, M., et Harrouet, F. (2006). *Modèles pour l'autonomie*.

Annexe A

Propriétés générales des processus aléatoires

A.1 Propriétés générales des processus Gaussiens

On présente dans cette partie le calcul de quelques propriétés utilisées dans ce document sur les moyennes d'ensemble de fonction de processus Gaussiens.

Propriétés :

1. La fonction caractéristique d'un vecteur Gaussien $Z = (X, Y)$ est

$$\phi_Z(z) = \exp \left(i \langle z, \langle Z \rangle \rangle - \frac{1}{2} (z^t \text{Cov}(Z) z) \right) \quad (\text{A.1})$$

- 2.

$$\langle X \exp(iY) \rangle = i \langle XY \rangle \exp(-\frac{1}{2} \langle Y^2 \rangle) \quad (\text{A.2})$$

3. Soit un vecteur Gaussien $H = (X, Y, Z)$ alors :

$$\langle XY \exp(iZ) \rangle = (\langle XY \rangle - \langle XZ \rangle \langle YZ \rangle) \exp(-\frac{1}{2} \langle Z^2 \rangle) \quad (\text{A.3})$$

4. On en déduit :

$$\langle (1 + X)(1 + Y) e^{iZ} \rangle = (\langle XY \rangle + (1 + i \langle XZ \rangle) + (1 + i \langle YZ \rangle)) e^{-1/2 \langle Z^2 \rangle} \quad (\text{A.4})$$

Démonstration

1. Il suffit de faire le changement de variable standard $Z \sim \sqrt{\text{Cov}(Z)} Z_0 + \langle Z \rangle$
où $Z_0 \sim \mathcal{N}(0, Id_2)$.

2. Z est un vecteur Gaussien alors

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad Y + \alpha X$ est une variable aléatoire Gaussienne

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \langle X e^{iY} \rangle &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \langle e^{i(Y + \alpha X)} \rangle \right\} \\ &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \left\langle e^{-1/2(\langle Y^2 \rangle + 2\alpha \langle XY \rangle + \alpha^2 \langle X^2 \rangle)} \right\rangle \right\} \Big|_{\alpha=0} \\ &= (i \langle XY \rangle) e^{-1/2 \langle Y^2 \rangle} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

3. De même on démontre les propriétés 3 et 4.

A.2 Propriétés générales des processus de Poisson

La loi de Poisson doit son existence à Siméon-Denis Poisson (1781–1840), en 1838 dans son ouvrage [Poisson (1837)]. Elle s'obtient en comptant des événements aléatoires indépendants : le processus d'arrivée des clients peut être décrite par un processus de Poisson, comptage de voitures sur une route, etc.. Dans toute la suite, N est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

A.3 Espérance, Composition des fonctions génératrices

Espérance : Pour deux suites S_N et S'_N constituées de variables aléatoires indépendantes h_n d'espérance nulle et de même loi tel que :

$$S_N = \sum_{n=1}^N h_n, \quad S'_N = \sum_{n=1}^N h'_n \quad (\text{A.6})$$

Alors $\mathbb{E}(S_N S'_N) = \lambda \mathbb{E}(h_n h'_n)$.

En effet :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(S_N S'_N) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N=k\}}\right) S_N S'_N\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{N=k\}} S_N S'_N\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{N=k\}} h_n h'_n\right) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m \neq n}^k \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{N=k\}} h_n h'_m\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{N = k\}) k \mathbb{E}(h_n h'_n) \\
 &= \lambda \mathbb{E}(h_n h'_n)
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Composition des fonctions génératrices : Pour une suite S_N constituée de variables aléatoires indépendantes h_n de même loi tel que :

$$S_N = \sum_{n=1}^N h_n \tag{A.8}$$

Alors $G_{S_N} = G_N \circ G_h$, où N est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

En effet :

$$\begin{aligned}
 G_{S_N}(z) &= \mathbb{E}[z^{S_N}] \\
 &= \mathbb{E}\left[z^{\sum_{n \geq 0} S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\sum_{n \geq 0} z^{S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\
 &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}\left[z^{S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\
 &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}\left[z^{S_n}\right] \times \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\
 &= \sum_{n \geq 0} G_{S_n}(z) \times \mathbb{P}(N = n) \\
 &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N = n) \times (G_h(z))^n \\
 &= G_N(G_h(z)).
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Comme la fonction génératrice pour la loi de poisson de paramètre λ est :

$$G_\lambda(t) = e^{\lambda(t-1)} \tag{A.10}$$

On en déduit alors que la fonction caractéristique de la suite S_N est

$$\Phi(u) = \exp(\lambda \langle \exp(iuh) \rangle - 1) \tag{A.11}$$

Annexe B

Spectre

Dans ce chapitre, nous déterminons le spectre des surface générées par le modèle GCWM.

B.1 Spectre habillé 2-D

On a

$$\tilde{\rho}_0(x) = \langle \tilde{\eta}(r) \cdot \tilde{\eta}(r+x) \rangle \quad (\text{B.1})$$

et

$$\tilde{\Psi}(k) = \int \tilde{\rho}_0(x) e^{-ikx} dx \quad (\text{B.2})$$

On montre facilement (avec des changement de variable simple) :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(k) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \eta(r) (1 + D'(r)) e^{ik(D(r)+r)} dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x) (1 + D'(x)) e^{-ik(D(x)+x)} dx \\ &= \lambda \frac{1}{2L} A.B \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où

$2L$ désigne la taille de la nappe

$$A = \int_{-L}^L \eta(r) (1 + D'(r)) e^{ik(D(r)+r)} dr$$

et

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x)(1 + D'(x))e^{-ik(D(x)+x)}dx$$

En approchant $e^{-ikD(x)}$ par :

$$(e^{-ikD(x)}) = \sum_{n=0}^p \frac{(-ikD(x))^n}{n!}$$

On obtient après quelque opérations simples :

$$\begin{aligned} B &= \frac{-i}{k} \left(\sum_{n=0}^{n=m} TF \left(\frac{(-ik)^n}{n!} h'(x) D^n(x) \right) \right) (k) \\ A &= \frac{i}{k} \left(\sum_{n=0}^{n=m} TF ((ik)^n h'(x) D^n(x)) \right) (-k) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(k) &= \Psi(k) + \lambda \frac{1}{2Lk^2} \\ &\left\langle \sum_{l=0, m=0/m+l \neq 0} \frac{(ik)^l (-ik)^m}{l!m!} TF(h' D^m(k)) TF(h' D^l(-k)) \right\rangle_{a,c} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

où TF désigne la transformée de Fourier

Après calcul on trouve pour une nappe de vecteur d'onde k_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(k) &= \Psi(k) + \lambda \frac{\pi \varrho^4}{2Lk^2} \\ &\sum_{m+l \neq 0} MoM_{l+m+2} \frac{k^{l+m+2}}{2^{m+l-2} l!m!.m!} A^m(k) A^l(-k) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

où MoM_k désigne le moment d'ordre k donné par :

$$MoM_k = \sigma^k 2^{k/2} \Gamma(1 + k/2)$$

et

$$A^m(k) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{m} (k - (m-2j)k_0)^2} \quad (\text{B.7})$$

B.2 Spectre habillé 3-D

nous montrons que :

$$\tilde{\Psi}(\vec{k}) = \frac{\lambda}{S} \left\langle \int \int \tilde{h}(r) \tilde{h}(x+r) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right\rangle_{a,c} \quad (\text{B.8})$$

Avec les changements de variable

1. $r \mapsto r + D(r)$
2. $x \mapsto x + D(x+r) - D(r)$

Ces changements sont inversibles si la fonction $r \mapsto D(r)$ est contractante *i.e* $\forall r \quad |D'(r)| < 1$

Sous cette hypothèse on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\vec{k}) &= \frac{\lambda}{S} < \int_S h(r) J(r) e^{ik(D(r)+r)} dr \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2} h(x) J(x) e^{-ik(D(x)+x)} dx >_{a,c} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

En négligeant les termes quadratiques en pente dans le jacobien, on peut réécrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\vec{k}) &= \lambda < \frac{1}{S} \int_S h(r) (1 + \nabla D(r)) e^{ik(D(r)+r)} dr \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^2} h(x) (1 + \nabla D(x)) e^{-ik(D(x)+x)} dx >_{a,c} \\ &= \lambda \frac{1}{S} \langle A_1 \cdot B_1 \rangle_{a,c} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Où

$$A_1 = \int_{\Omega} h(r) (1 + \nabla D(r)) e^{ik(D(r)+r)} dr$$

et

$$B_1 = \int_{\mathbb{R}^2} h(x) (1 + \nabla D(x)) e^{-ik(D(x)+x)} dx$$

En approchant $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{D}(x,y)}$ par :

$$(e^{-i\vec{k} \cdot \vec{D}(x,y)}) = \sum_{n=0}^p \frac{(-i\vec{k} \cdot \vec{D}(x,y))^n}{n!}$$

On trouve que

$$A_1 = A + R_A(k), \quad B_1 = B + R_B(k) \quad (\text{B.11})$$

où

$$\begin{aligned} B = & \sum_{n=0}^p \frac{(-i)^n}{n!} TF \left(h(x, y) \left(\vec{k} \cdot \vec{D}(x, y) \right)^n \right) (k) \\ & - |k| \sum_{n=0}^p \frac{(-i)^n}{n!} TF \left(h^2(x, y) \left(\vec{k} \cdot \vec{D}(x, y) \right)^n \right) (k) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

De même, nous approchons A par

$$\begin{aligned} A = & \sum_{n=0}^p \frac{(i)^n}{n!} TF \left(h(x, y) \left(\vec{k} \cdot \vec{D}(x, y) \right)^n \right) (-k) \\ & - |k| \sum_{n=0}^p \frac{(i)^n}{n!} TF \left(h^2(x, y) \left(\vec{k} \cdot \vec{D}(x, y) \right)^n \right) (-k) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Nous ne prenons pas en compte $R_A(k)$ et $R_B(k)$ car

$$\langle R_A(k) \cdot R_B(k) \rangle_{a,c} = \langle R_A(k) \cdot B \rangle_{a,c} = \langle R_B(k) \cdot A \rangle_{a,c} = 0 \quad (\text{B.14})$$

Nous numérotons les termes de A et B de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=0}^{2p+1} A_n \\ B &= \sum_{n=0}^{2p+1} B_n \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

où

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(i)^n}{n!} TF \left(h(x, y) \left(\vec{k} \cdot \vec{D}(x, y) \right)^n \right) (-k) \text{ si } n < p+1 \\ &= -|k| \frac{(i)^n}{n!} TF \left(h^2(x, y) \left(\vec{k} \cdot \vec{D}(x, y) \right)^n \right) (-k) \text{ si } n > p \\ &\text{et} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{(-i)^n}{n!} TF \left(h(x, y) \left(\vec{k} \cdot \vec{D}(x, y) \right)^n \right) (k) \text{ si } n < p+1 \\ &= -|k| \frac{(-i)^n}{n!} TF \left(h^2(x, y) \left(\vec{k} \cdot \vec{D}(x, y) \right)^n \right) (k) \text{ si } n > p \end{aligned}$$

avec ces notations on obtient alors :

$$\tilde{\Psi}(k) = \Psi(k) + \sum_{m+n \neq 0}^{2p+1} \lambda \Gamma m, n A_m B_n \quad (\text{B.17})$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma m, n &= MoM_{m+n+2} \text{ si } m \leq p \text{ et } n \leq p \\ \Gamma m, n &= MoM_{m+n+4} \text{ si } m > p \text{ et } n > p \\ \Gamma m, n &= MoM_{m+n+3} \text{ sinon} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Après calcul on trouve pour une nappe de vecteur d'onde k_0 :

pour $n < p + 1$:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\pi \varrho^2}{(n+1)!} \left(\frac{-|k|}{2} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \\ &\quad \left(e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+1} \|\vec{k} + (n-2j+1)\vec{k}_0\|_2^2} + e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+1} \|\vec{k} + (n-2j-1)\vec{k}_0\|_2^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

et

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{\pi \varrho^2}{(n+1)!} \left(\frac{|k|}{2} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \\ &\quad \left(e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+1} \|\vec{k} - (n-2j+1)\vec{k}_0\|_2^2} + e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+1} \|\vec{k} - (n-2j-1)\vec{k}_0\|_2^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

De même on peut montrer que pour $n > p$:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{-2\pi|k|}{(n+1)!} \left(\frac{-|k|}{2} \right)^n \varrho^2 \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \right. \\ &\quad \left. e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+2} \|\vec{k} + (n-2j)\vec{k}_0\|_2^2} + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^n +2 \binom{n+2}{j} (-1)^j \right. \\ &\quad \left. e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+2} \|\vec{k} + (n-2j+2)\vec{k}_0\|_2^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} B_n = & \frac{-2\pi|k|}{(n+1)!} \left(\frac{|k|}{2}\right)^n \varrho^2 \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \right. \\ & e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+2} \|\vec{k} - (n-2j)\vec{k}_0\|_2^2} + \frac{1}{4} \sum_{j=0}^n + 2 \binom{n+2}{j} (-1)^j \\ & \left. e^{-\pi^2 \frac{2\varrho^2}{n+2} \|\vec{k} - (n-2j+2)\vec{k}_0\|_2^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Annexe C

Calculs et développements

C.1 PDF des pentes 3D

Nous avons d'après les calculs de la section 4.3, page 63, le calcul de la pdf des pentes revient à calculer les coefficients des équations 4.17 et 4.18.

On a pour une nappe de vecteur d'onde k compris entre k_i et k_{i+1} :

$$\begin{cases} \eta(x) = a_n \exp\left(\frac{-(x-x_n)^2}{2\varrho_n^2}\right) \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \theta_n\right) \\ D(x) = \frac{\vec{k}}{|\mathbf{k}|} a_n \exp\left(\frac{-(x-x_n)^2}{2\varrho_n^2}\right) \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{x} + \theta_n\right) \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Le calcul de $\mathbb{E}[\partial_x D_x \cdot \partial_y D_x]$ revient au calcul de

$$\mathbb{E}[\partial_x D_x \cdot \partial_y D_x] = \frac{|k_x|^2 |k_y|^2}{|\mathbf{k}|^2} \left\langle a_n \exp\left(\frac{-\|r - r_n\|^2}{\varrho_n^2}\right) \sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} + \theta_n\right)^2 \right\rangle_{a_n, \theta_n, r_n, r} \quad (\text{C.2})$$

car la moyenne des autres termes résultants de la dérivation est nulle. En en déduit d'après l'équation 3.11, page 44 que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\partial_x D_{k_x} \cdot \partial_y D_{k_x}] &= \frac{|k_x|^2 |k_y|^2}{|\mathbf{k}|^2} \langle \eta_k^2 \rangle \\ &= \int_{k_i}^{k_{i+1}} \frac{|k_x|^2 |k_y|^2}{|\mathbf{k}|^2} \Psi(k) dk \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

En en déduit alors :

$$\mathbb{E}[\partial_x D_x \cdot \partial_y D_x] = \int \frac{|k_x|^2 |k_y|^2}{|\mathbf{k}|^2} \Psi(k) dk \quad (\text{C.4})$$

De la même manière, on détermine les autres coefficients.

— Résumé —

L'étude menée dans ce mémoire propose une représentation originale d'un champ de vague aléatoire afin de respecter les contraintes statistiques sur la fonction caractéristique en un point (variance, coefficients d'asymétrie *skewness* et d'aplatissement *kurtosis*), mais également en deux points (spectre, pente). La modélisation proposée considère l'élévation de la surface océanique comme une superposition de fonctions spatiales aléatoires, et d'amplitudes aléatoires, regroupées en un certain nombre de nappes en fonction du vecteur d'onde.

Cette démarche aboutit à la construction de deux modèles nommés “Groupy Wave Model” (GWM) et “Groupy Choppy Wave Model” (GCWM). Le premier permet le contrôle du spectre, *skewness* (des hauteurs et des pentes) et *kurtosis* (des hauteurs ou des pentes). Le dernier prend en compte les mouvements orbitaux des particules d'eau. Le modèle GCWM est vu comme un changement de coordonnées horizontales de la surface du modèle GWM pour le peuplement d'une surface. Cette transformation habille le spectre des hauteurs et fait apparaître des points de rebroussement. Une méthode permettant de “déshabiller” le spectre afin d'obtenir une surface avec un spectre voulu, ainsi qu'une proposition pour tenir compte des points de rebroussement sont aussi introduites. Les résultats obtenus soulignent un large éventail de différentes structures de l'état de mer, tout en respectant les mêmes contraintes statistiques.

Mots clefs Groupe de vagues, spectre déshabillé, modélisation hydrodynamique.

— Abstract —

The study in this thesis proposes an original representation of a random wave field. The main goal is to respect the statistical constraints on a one-point characteristic function (variance, *skewness* and *kurtosis*) and also, at a two-point characteristic function (spectrum and slope). The proposed model considers the elevation of the ocean surface as a superposition of random spatial functions with the random amplitudes, grouped into maps depending on the wave vector.

This approach leads to the construction of two models, so called “Groupy Wave Model” (GWM) and “Groupy Choppy Wave Model” (GCWM). The first allows the control of the spectrum, *skewness* (elevations and slopes) and *kurtosis* (elevations or slopes). The latter takes into account the orbital motions of water particles. The GCWM model is derived from horizontal coordinates of GWM surface. This transformation dresses the spectrum and shows cusps. A method of undressing the spectrum to obtain a surface with a target spectrum, which takes into account the cusps, is also introduced. The obtained results emphasize very different sea state structures, but with identical statistical properties.

Key words Wave groups, undressed spectrum, hydrodynamic modeling.