



HAL
open science

Opérations de proximité en orbite : évaluation du risque de collision et calcul de manoeuvres optimales pour l'évitement et le rendez-vous

Romain Serra

► **To cite this version:**

Romain Serra. Opérations de proximité en orbite : évaluation du risque de collision et calcul de manoeuvres optimales pour l'évitement et le rendez-vous. Automatique / Robotique. INSA de Toulouse, 2015. Français. NNT : 2015ISAT0035 . tel-01261497

HAL Id: tel-01261497

<https://theses.hal.science/tel-01261497>

Submitted on 25 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA de Toulouse)*

Présentée et soutenue le 10/12/2015 par :

ROMAIN SERRA

Opérations de proximité en orbite : évaluation du risque de collision et calcul de manœuvres optimales pour l'évitement et le rendez-vous

HASNAA ZIDANI
ARNAUD BOUTONNET
MIOARA JOLDES
BRUNO SALVY
ALEXANDRE FALCOZ

JURY
Professeur
Docteur
Chargé de recherche
Directeur de recherche
Docteur

Présidente du Jury
Membre du jury
Membre du jury
Membre du jury
Invité

École doctorale et spécialité :

EDSYS : Automatique 4200046

Unité de Recherche :

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (UPR 8001)

Directeur(s) de Thèse :

Denis ARZELIER et Aude RONDEPIERRE

Rapporteurs :

Joseph-Frédéric BONNANS et René HENRION

Remerciements

Pour commencer, je souhaiterais remercier mon directeur de thèse, Denis Arzelier, directeur de recherche au CNRS, qui m'a convaincu à raison de faire un doctorat. Je remercie aussi chaleureusement ma codirectrice Aude Rondepierre, maître de conférences à l'INSA de Toulouse. Si d'aucuns admirent la qualité rédactionnelle de ce manuscrit, je le dois notamment à leur ténacité face à mon goût pour la synthèse. J'exprime également ma gratitude envers Mioara Joldes, chargé de recherche au CNRS, qui m'a fourni une aide précieuse et sans qui le contenu de ce rapport ne serait pas ce qu'il est.

Concernant mon jury de thèse, je remercie Hasnaa Zidani, professeur à l'ENSTA, pour en avoir assuré la présidence. Je remercie aussi Joseph-Frédéric Bonnans, directeur de recherche à l'INRIA, et René Henrion, chercheur au Weierstrass-Institut de Berlin, qui ont assumé le rôle de rapporteurs de mon manuscrit. Je suis également reconnaissant envers mes examinateurs Bruno Salvy, directeur de recherche à l'INRIA, et Arnaud Boutonnet de l'ESA. Enfin, je remercie Alexandre Falcoz, qui a suivi mes travaux du côté d'Airbus Defence & Space.

Je tiens à remercier ce partenaire industriel et le CNRS pour le financement de ma thèse. Je remercie également les membres du groupe de mécanique spatiale à Airbus Defence & Space avec lesquelles j'ai pu interagir, en particulier Laurent Degorce-Dumas. Je citerai aussi Salvatore Alfano du CSSI pour son gros travail de relecture et de tests concernant notre article de journal pour l'AIAA. Merci également aux gens du CNES pour leur intérêt concernant mes travaux.

Mes remerciements vont à tous les membres du groupe MAC, passés et présents, permanents ou non, que j'ai côtoyé pendant mon passage au LAAS-CNRS. Ce laboratoire et plus particulièrement cette équipe constituent un environnement de travail très appréciable. Force est de constater que le JPL de Caltech l'est tout autant, si ce n'est plus, et je remercie Masahiro Ono pour m'avoir accueilli là-bas pendant trois mois grâce au soutien financier de l'EDSys et de l'EDT. Je salue aussi mes anciens collègues du département GMM à l'INSA, où j'ai eu la chance d'enseigner les mathématiques pendant la majeure partie de mon doctorat.

Mon amitié va également à tous les doctorants et autres étudiants rencontrés ça et là au hasard des formations, séminaires ou événements sociaux comme les fameuses sessions "réunions et rencontres" du LAAS. La place manque pour tous les citer, mais nulle doute qu'ils se reconnaîtront. Je salue en particulier ceux qui, parmi mes camarades de l'ISAE, me rejoindront bientôt dans le club des docteurs de l'université de Toulouse.

Enfin, je remercie ma famille, et plus particulièrement mes parents, pour m'avoir soutenu pendant tout mon parcours universitaire, de Lyon à Toulouse en passant par Ann Arbor et Pasadena.

Table des matières

Introduction générale	12
I Évaluation du risque de collision	17
Introduction	18
1 Définition et état de l'art du calcul de probabilités de collision	19
1.1 Modèle probabiliste général de collision	20
1.1.1 Définition du modèle de rencontre	21
1.1.2 Définition de la probabilité de collision	22
1.1.3 Méthodes générales de calcul du risque	23
1.2 Modèle de rapprochement rapide	24
1.2.1 Définition du modèle	24
1.2.2 Expressions de la probabilité de collision	25
1.2.3 Calcul de la probabilité de collision	29
1.3 Probabilité de collision instantanée	38
1.3.1 Modèle et formule intégrale	38
1.3.2 Calcul de la probabilité instantanée	39
2 Nouvelle méthode de calcul de la probabilité de collision	43
2.1 Principe de la méthode	44
2.2 Modèle de rapprochement rapide	45
2.2.1 Nouvelle formule analytique	46
2.2.2 Encadrement analytique de l'erreur de troncature	50
2.2.3 Bornes analytiques pour la probabilité	51
2.2.4 Calcul certifié de la probabilité de collision	51
2.2.5 Comparaison théorique avec la formule de Chan	53
2.2.6 Résultats numériques	53
2.3 Probabilité de collision instantanée	57
2.3.1 Nouvelle formule analytique	57
2.3.2 Encadrement analytique de l'erreur de troncature	61
2.3.3 Bornes analytiques pour la probabilité	63
2.3.4 Calcul certifié de la probabilité de collision	63
2.3.5 Résultats numériques	64
Conclusion	66
II Calculs de manœuvres d'évitement de collision	67
Introduction	68

3	Stratégies d'évitement de collision en rapprochement rapide	71
3.1	Formulation du problème	72
3.2	Résolution par approximation des distributions	74
3.3	Résolution à l'aide de l'approche par scénarios	75
3.3.1	L'approche par scénarios	75
3.3.2	Méthode de résolution	76
3.3.3	Calcul du gradient de la fonction contrainte	77
3.4	Résultats numériques	78
3.4.1	Exemple 1	79
3.4.2	Exemple 2	80
3.5	Conclusion	81
4	Stratégies d'évitement de collision en rapprochement lent	83
4.1	Modélisation de la rencontre	84
4.1.1	Dynamique relative	85
4.1.2	Incertitudes portant sur les positions et vitesses	85
4.2	Formulation du problème d'évitement de collision	86
4.2.1	Passage aux probabilités de collision instantanées	87
4.2.2	Recouvrement polyédral de la sphère combinée	88
4.3	Deux méthodes de résolution	89
4.3.1	Approche directe	89
4.3.2	Approche par sélection du risque	90
4.4	Résultats numériques	92
4.4.1	Exemple 1	93
4.4.2	Exemple 2	95
4.4.3	Exemple 3	98
4.5	Conclusion	100
	Conclusion	102
III Opérations de rendez-vous en temps fixé et consommation minimale		103
	Introduction	104
5	Le problème de rendez-vous impulsionnel linéarisé en temps fixé et consommation minimale	107
5.1	Introduction	108
5.2	Problème linéaire de rendez-vous impulsionnel en temps fixé et consommation optimale	109
5.2.1	Formulation comme un problème de Lagrange	109
5.2.2	Reformulation comme un problème de moments	109
5.2.3	Problème primal et solutions optimales	111
5.2.4	Conditions d'optimalité de Lawden	116
5.2.5	Application au mouvement hors du plan orbital	117
5.3	Illustration de la méthode indirecte pour le rendez-vous hors-plan dans le cas d'une orbite circulaire	118
5.3.1	Dynamique du vecteur efficacité	118
5.3.2	CNS d'optimalité	119
5.3.3	Solutions optimales en consommation	119
5.3.4	Preuve de l'optimalité	120
5.3.5	Exemples numériques	121
5.4	Conclusion	124

6	Résolution du problème de rendez-vous hors-plan elliptique	125
6.1	Introduction	126
6.2	Dynamique du vecteur efficacité	126
6.2.1	Multiplicateurs de Lagrange et extrema de $p_\lambda(\nu)$	126
6.2.2	Rapport des extrema	126
6.2.3	Extrema et multiplicateurs de Lagrange	127
6.3	Solutions optimales en consommation	128
6.3.1	Solutions optimales à deux impulsions intérieures	128
6.3.2	Solutions optimales à une impulsion intérieure	129
6.3.3	Solutions optimales à une impulsion intérieure et une impulsion initiale (ou finale)	130
6.3.4	Solutions optimales aux bords	133
6.4	Preuves de l'optimalité dans le cas où $\nu_f - \nu_0 \geq 2\pi$	139
6.4.1	Une impulsion par période	139
6.4.2	Deux impulsions par période	141
6.4.3	Résumé	142
6.5	Exemples numériques	144
6.5.1	Exemple 1	144
6.5.2	Exemple 2	146
6.6	Conclusion	150
	Conclusion	151
	Conclusion générale	153
	Annexes	155
A	Lois de probabilités usuelles	157
A.1	Lois normales	158
A.2	Lois du χ^2	158
A.3	Loi de Rice-Rayleigh	159
B	Quelques notions d'analyse complexe	161
B.1	Fonctions holonomes	162
B.2	Évaluation d'une série et méthode de préconditionnement	162
B.3	Application de la méthode GMR au calcul de la probabilité de collision	164
C	Orbites keplériennes elliptiques	167
C.1	Problème de Kepler	168
C.2	Nature des trajectoires	168
C.3	Anomalies angulaires	168
C.4	Solution du problème de Kepler	169
C.5	Coefficients f et g de Lagrange	170
D	Preuves de l'optimalité des solutions du rendez-vous hors-plan elliptique lorsque $\nu_f - \nu_0 < 2\pi$	171
D.1	Solution à deux impulsions internes	172
D.2	Solutions à une unique impulsion	173
D.3	Solutions à une impulsion interne et une ou deux impulsions extrêmes	177
D.4	Une impulsion initiale et une impulsion interne	179
D.5	Une impulsion finale et une impulsion interne	182
D.6	Deux impulsions initiale et finale, une impulsion interne	185
D.7	Solutions à 2 impulsions initiale et finale	187

Table des figures

1.1	Profil d'une rencontre entre deux objets.	22
1.2	Sphère combinée des deux objets.	22
1.3	Repère et plan de rencontre.	25
1.4	Tube de collision.	26
1.5	Représentation des paramètres de l'intégrale 3-D.	27
1.6	Passage de la dimension 3 à la dimension 2.	27
1.7	Représentation des paramètres de l'intégrale 2-D.	29
1.8	Interpolation polynomiale de degré 2 (tirets) d'une fonction intégrable f (trait plein) pour la méthode de Simpson.	31
1.9	Configuration géométrique adoptée par Patera.	32
1.10	Paramétrage lorsque l'origine est à l'extérieur de l'ellipse.	33
1.11	Paramétrage lorsque l'origine est à l'intérieur de l'ellipse.	34
1.12	Approximation de l'ellipse par un disque de même aire.	35
1.13	Configuration géométrique simplifiée de Chan.	36
1.14	Représentation des paramètres de la probabilité instantannée de collision.	39
2.1	Singularités de la fonction $\mathcal{L}\tilde{h}$ dans le plan complexe.	48
3.1	Tube de collision.	73
3.2	Configuration de la manœuvre d'évitement de collision.	78
3.3	Manœuvre d'éloignement radial.	79
3.4	Histogramme des distances de plus proche passage sans manœuvre (bleu) et avec la solution par scénarios (rouge) pour l'exemple 1.	80
3.5	Histogramme des distances de plus proche passage sans manœuvre (bleu) et avec la solution par scénarios (rouge) pour l'exemple 2.	81
4.1	Repère orbital local.	85
4.2	Exemple de cube contenant la sphère combinée des objets.	88
4.3	Sélection du risque pour un triangle.	91
4.4	Dynamique primaire moyenne et impulsions selon l'axe y en fonction du temps.	94
4.5	Trajectoires relatives moyennes contrôlées (trait plein) et libre (tirets).	94
4.6	Borne inférieure de la distance relative en fonction du temps pour un échantillon de trajectoires contrôlées (trait plein) et libres (tirets).	95
4.7	Dynamique primaire moyenne et impulsions selon l'axe x en fonction du temps.	96
4.8	Trajectoires relatives moyennes contrôlées (trait plein) et libre (tirets).	97
4.9	Borne inférieure de la distance relative en fonction du temps pour un échantillon de trajectoires contrôlées (trait plein) et libres (tirets).	97
4.10	Dynamique primaire moyenne et impulsions selon l'axe y en fonction du temps.	99
4.11	Trajectoires relatives moyennes contrôlées (trait plein) et libre (tirets) dans le plan orbital de référence.	99
4.12	Borne inférieure de la distance relative en fonction du temps pour un échantillon de trajectoires contrôlées (trait plein) et libres (tirets).	100
5.1	Illustration du problème de rendez-vous spatial.	108
5.2	Ensembles de contrôle et dualité des fonctions continues.	111

5.3	Relation entre les solutions optimales des problèmes primal et dual.	113
5.4	Vecteur efficacité optimal en fonction du temps.	114
5.5	Solution optimale en fonction du temps.	115
5.6	Fonction u_ε	115
5.7	Tracé du vecteur efficacité optimal.	122
5.8	Plan de phase pour la solution optimale 1.	122
5.9	Plan de phase pour la solution optimale 2.	123
5.10	Tracé du vecteur efficacité optimal.	124
5.11	Plan de phase pour la solution optimale.	124
6.1	Tracé du vecteur efficacité optimal pour le cas 1 de PROBA-3.	144
6.2	Plan de phase pour la solution optimale du cas 1 de l'exemple PROBA-3.	145
6.3	Vecteur efficacité optimal pour le cas 2 de l'exemple PROBA-3.	146
6.4	Plan de phase pour la solution de la Table 6.6.	146
6.5	Trajectoire optimale dans le plan de phase pour l'exemple 2 et ν_{f_1}	147
6.6	Tracé du vecteur efficacité optimal pour l'exemple 2 et ν_{f_1}	148
6.7	Trajectoire en position et vitesse relatives pour l'exemple 2 et ν_{f_1}	148
6.8	Trajectoire optimale dans le plan de phase pour l'exemple 2 et ν_{f_2}	149
6.10	Trajectoires en position et vitesse relatives pour l'exemple 2 et ν_{f_2}	149
6.9	Tracé du vecteur efficacité optimal pour l'exemple 2 et ν_{f_2}	150
B.1	Valeurs de $\left \frac{(-1)^n 15^n}{n!} \right $, $n = 0, \dots, 100$, à comparer à $\exp(-15) \simeq 3.06 \cdot 10^{-7}$	163
B.2	Indicatrice de f lorsque $0 \leq \tilde{p} \leq \tau_h/2$	166
B.3	Indicatrice de f lorsque $\tau_h/2 \leq \tilde{p} \leq \tau_h$	166
C.1	Anomalies angulaires.	169

Liste des tableaux

2.1	Paramètres d'entrée pour les cas tests.	54
2.2	Minorant l_0 et majorant u_0 de la probabilité de collision calculés à partir du Corollaire 1.	55
2.3	Comparaison des probabilités de collision pour les cas tests de Chan avec 4 chiffres significatifs.	56
2.4	Comparaison des probabilités de collision pour les cas réels avec 5 chiffres significatifs.	56
2.5	Comparaison des probabilités de collision pour les cas tests d'Alfano avec 5 chiffres significatifs.	56
2.6	Résultats numériques pour des cas isotropes centrés.	64
2.7	Résultats numériques pour des cas isotropes non centrés.	65
2.8	Résultats numériques pour des cas anisotropes non centrés.	65
3.1	Solutions pour l'exemple 1.	79
3.2	État moyen des objets au temps de référence.	80
3.3	Solutions pour l'exemple 2.	81
4.1	État moyen de l'objet secondaire à l'instant initial.	93
4.2	Caractéristiques des solutions.	93
4.3	Plans de manœuvres.	93
4.4	État moyen de l'objet secondaire à l'instant initial.	95
4.5	Caractéristiques des solutions.	96
4.6	Plans de manœuvres.	96
4.7	État moyen de l'objet secondaire à l'instant initial.	98
4.8	Caractéristiques des solutions.	98
4.9	Plans de manœuvres.	98
5.1	Paramètres du rendez-vous pour l'exemple 1.	121
5.2	Solutions optimales en une impulsion.	122
5.3	Paramètres du rendez-vous pour l'exemple 2.	123
5.4	Solution optimale.	123
6.1	Résumé des conditions/solutions en fonction de la durée du rendez-vous.	136
6.2	Résumé des solutions.	138
6.3	Paramètres du Rendez-vous PROBA-3.	144
6.4	Solution optimale pour le cas 1 de l'exemple PROBA-3.	144
6.5	Solution optimale pour le cas 1 de l'exemple PROBA-3.	145
6.6	Solution optimale en un nombre minimal d'impulsion pour le cas 2 de PROBA-3.	145
6.7	Paramètres du rendez-vous de l'exemple extrait de [130].	147
6.8	Solution optimale pour l'exemple 2 et ν_{f_1}	147
6.9	Solution optimale pour l'exemple 2 et ν_{f_2}	149

Table des symboles et notations

Mathématiques

- $\mathcal{L}h$: transformée de Laplace de la fonction h
- $\operatorname{Re}(z)$: partie réelle du nombre complexe z
- $\operatorname{Im}(z)$: partie imaginaire du nombre complexe z
- $|z|$: module du nombre complexe z
- $[x]$: partie entière par défaut de x
- $\lceil x \rceil$: partie entière par excès de x
- Γ : fonction Gamma
- erf : fonction d'erreur
- sgn : fonction signe
- \exp : fonction exponentielle
- \mathcal{I}_0 : fonction de Bessel modifiée de premier type et d'ordre 0
- $\mathbf{1}_{\mathcal{D}}$: fonction indicatrice du domaine \mathcal{D}
- $\mathcal{B}_n(M, \delta)$: boule euclidienne ouverte de centre M et de rayon δ dans \mathbb{R}^n
- $\bar{\mathcal{B}}_n(M, \delta)$: boule euclidienne fermée de centre M et de rayon δ dans \mathbb{R}^n
- $\mathcal{P}\{\cdot\}$: probabilité d'un évènement
- $\mathcal{N}_n(m, \Sigma)$: loi normale de dimension n d'espérance m et de matrice de covariance Σ
- χ^2 : loi de distribution du chi deux
- $\mu_X / \mathbb{E}(X)$: espérance du vecteur aléatoire X
- Σ_X : matrice de covariance du vecteur aléatoire X
- $a \bmod b$: a modulo b
- $L^1_q(I, \mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions de I dans \mathbb{R}^n dont la norme q est Lebesgue-intégrable
- $\mathcal{G}_2([a, b], \mathbb{R}^n)$: espace normé des fonctions à variations bornées (pour $\|\cdot\|_2$) de $[a, b]$ dans \mathbb{R}^n
- $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions continues du segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R}^n
- I_n : matrice identité de taille n
- 0_n : matrice carrée nulle de taille n
- C_n^k : combinaison de k parmi n
- J_F : matrice Jacobienne de la fonction F
- $\partial_j F$: matrice des dérivées partielles de la fonction F par rapport à sa j -ième entrée
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$: produit scalaire des vecteurs \vec{a} et \vec{b}
- \vee : connecteur de disjonction logique
- \wedge : connecteur de conjonction logique

Mécanique spatiale

- μ : constante de gravitation terrestre
- p : objet primaire
- s : objet secondaire
- $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}}$: probabilité de collision sur l'intervalle de temps $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$
- f, g : coefficients de Lagrange
- $\operatorname{Coord}(\vec{x}, \mathcal{R})$: coordonnées du vecteur \vec{x} dans le repère \mathcal{R}
- ν : anomalie vraie
- E : anomalie excentrique

- e : excentricité d'une orbite
- a : demi-grand axe d'une orbite elliptique
- n : mouvement moyen d'une orbite
- $\rho(\nu) = 1 + e \cos(\nu)$

Introduction générale

Le terme de débris spatiaux fait référence aux objets en orbite autour de la Terre, construits par l'homme, qui n'ont pas ou plus d'utilité opérationnelle [58]. Ils proviennent essentiellement de satellites et d'étages supérieurs de lanceurs, piégés dans le champ de gravitation terrestre. La prolifération des débris est apparue comme une problématique potentielle pour l'accès à l'espace une vingtaine d'années après le début de l'ère spatiale avec la mise en orbite de Spoutnik. En effet, en 1978, la notion de syndrome de Kessler [57] a vu le jour. Il s'agit de la prédiction d'une croissance exponentielle du nombre de débris, due à une réaction en chaîne de collisions entre eux. De fait, toute collision en orbite est problématique en soi par les nouveaux débris qu'elle génère. A l'heure actuelle, il apparaît que la population de débris croît déjà d'elle-même, uniquement par le jeu des collisions [58]. Il est notable que deux événements critiques ont conduit à des augmentations spectaculaires du nombre de débris : la destruction volontaire du vieux satellite chinois Fengyun 1-C en 2007 lors d'un test balistique [55] et la collision accidentelle entre Iridium 33 et Cosmos 2251 en 2009 [56]. On dénombre deux amas principaux dans la répartition des débris [58], qui correspondent tout simplement aux deux types d'orbites les plus utilisées pour les missions spatiales terrestres. D'un côté, l'orbite basse (altitude inférieure à 2000 km), où le frottement atmosphérique finit toujours par désintégrer ou faire retomber les objets, mais sur des échelles parfois supérieures à l'année ou la décennie. D'un autre côté, la ceinture géostationnaire, dont les 35000 kilomètres d'altitude rendent très stables la présence d'objets. Les débris sont détectés depuis le sol à l'aide de radars pour ceux qui sont en orbite basse et par des télescopes pour ceux qui évoluent à des altitudes plus importantes [58]. En tout et pour tout, selon la National Aeronautics and Space Administration (NASA), on dénombrait en 2012 [85] plus de 21000 objets de diamètre supérieur à 10 centimètres et environ 500000 objets de diamètre compris entre 1 et 10 centimètres, le nombre de corps de taille inférieure étant au moins d'un milliard.

Pour faire face à la gravité de la situation, de nombreuses mesures, effectives ou fictives, existent. On en donne ici une liste non exhaustive. A la fin d'une mission, on peut utiliser les dernières quantités de carburant du satellite pour soit le faire retomber sur Terre (s'il se trouve en orbite basse), soit le placer sur une orbite dite cimetière où il ne représentera plus une gêne (s'il se trouve à plus haute altitude). Il est également envisagé d'envoyer des robots pour effectuer du service en orbite et ainsi étendre la durée de vie des satellites. D'autre part, des missions de désorbitation forcée de débris sont à l'étude. La cible principale serait les plus gros débris existants, comme les étages de lanceurs, car ils sont responsables des collisions les plus dramatiques. Enfin, on citera le concept de lanceurs entièrement réutilisables, dont tous les étages atterrissent après le vol et ne restent ainsi pas en orbite.

Les débris spatiaux représentent un risque majeur de détérioration, voire de destruction, pour les engins spatiaux opérationnels [58]. En orbite basse particulièrement, des objets, même de taille minimale, peuvent causer des dégâts importants, du fait des vitesses considérables qui sont en jeu. Les collisions sérieuses impliquant des satellites en mission restent rares, grâce aux mesures préventives prises par leurs opérateurs. Une des plus anciennes jamais répertoriées remonte à 1996 [3]. Elle impliquait le satellite militaire français Cerise et un débris issu d'un étage supérieur de la fusée Ariane. La plus connue reste celle entre Iridium et Cosmos en 2009 [56]. Le premier était un satellite américain actif et le second une épave d'engin spatial russe. C'est en fait cet événement catastrophique qui a conduit à une prise de conscience massive du danger représenté par les débris spatiaux et à une communication moins restreinte sur le sujet [16].

La surveillance constante des débris permet de prévoir des collisions potentielles entre deux objets du catalogue des corps répertoriés. Pour cela, on propage dans le futur les orbites de chaque objet et on regarde s'il existe des rapprochements. Si une conjonction apparaît entre un engin actif et un débris, une alerte est émise. Dans un tel document, le satellite opérationnel est appelé objet primaire, par opposition au débris qui est l'objet secondaire. Il contient des informations sur chacun des objets, notamment une estimation de leur taille ainsi que de leur position et vitesses (valeurs moyennes et covariances). Parmi les organismes de surveillance des débris et de prévention de collision, on compte le Joint Space Operation Center (JSpOC), qui communique notamment avec Airbus Defence and Space (ADS), le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES) ou la European Space Agency (ESA). Depuis 2014, les alertes de cette institution militaire américaine portent le nom de Conjonction Data Message (CDM), en remplacement du format précédent, le Conjonction Summary Message (CSM) [16].

Une fois qu'une conjonction a été prédite, il convient d'estimer le risque de collision. Bien

entendu, l'opérateur est libre de compléter ou de mettre à jour les informations contenues dans une alerte avec ses propres ressources, notamment concernant l'objet primaire. Il existe plusieurs moyens d'évaluer le risque associé à une rencontre. Historiquement, la première méthode utilisée est un simple critère géométrique. Il consiste à regarder si la trajectoire moyenne du secondaire pénètre une zone de non-droit, généralement un ellipsoïde, centré sur le primaire. Plus tard est apparue une méthode plus élaborée, basée sur une métrique probabiliste. Il s'agit de calculer la probabilité de collision associée à la rencontre. On distingue essentiellement deux modèles, selon que le mouvement relatif est considéré comme rectiligne [10] ou non [89, 7, 33]. Généralement, chaque objet est modélisé par une sphère, résultant en un volume combiné sphérique, mais la probabilité de collision a été généralisée à d'autres formes [88, 28]. Ce critère de décision a été ensuite enrichi selon deux directions. Ainsi, on peut faire varier les incertitudes portant sur les objets [6, 28]. En effet, il est possible que des incertitudes trop grandes conduisent à une sous-estimation du risque : on parle de dilution du risque. D'autre part, dans le calcul de la probabilité, il a été proposé de remplacer le volume combiné des deux objets par un volume plus grand, dit de conflit, de forme ellipsoïdale [91, 92]. Cela permet de mesurer le risque d'une manière plus conservative.

Lorsque le risque de collision est avéré, une solution consiste à changer à l'avance la trajectoire de l'engin menacé. La Station Spatiale Internationale, comme la navette américaine avant elle, effectue régulièrement ce genre de manœuvres, à l'aide de ses modules de propulsion [58]. Pour les satellites, on utilise, selon l'énergie nécessaire, soit les tuyères principales, de mise à poste, soit les secondaires, de maintien à poste. Dans la pratique, l'opérateur peut avancer dans le temps une manœuvre de maintien à poste pour éviter la collision, néanmoins dans le cas général, cette démarche est insuffisante et il lui faut calculer un plan spécifique. Dans une volonté de réduire au maximum l'impact d'une telle mesure sur la durée de vie du satellite, on cherche à réaliser la correction de trajectoire la moins coûteuse possible en carburant. La conception d'une stratégie d'évitement est donc un problème d'optimisation dont les formulations varient selon la métrique utilisée. L'utilisation de probabilités de collision en fait un problème d'optimisation sous contraintes probabilistes [117, 96, 18, 48].

Le mémoire est organisé en trois volets. La Partie I concerne l'évaluation du risque de collision et est elle-même subdivisée en deux sous-parties. Le Chapitre 1 décrit le modèle probabiliste général adopté ainsi que les méthodes existantes de calcul de probabilités de collision. Il détaille en particulier les cas du modèle de rapprochement rapide et de la probabilité de collision instantanée. Le Chapitre 2 présente une nouvelle méthode, développée au cours de la thèse, applicable dans les deux cas cités précédemment. La Partie II est consacrée au calcul de plans de manœuvres d'évitement à consommation minimale. Après une introduction générale de ce problème d'optimisation, deux chapitres se concentrent sur des cas particuliers où des hypothèses spécifiques permettent d'obtenir des solutions. Le Chapitre 3 se place dans un cadre où le mouvement relatif peut être considéré comme rectiligne et le Chapitre 4 dans celui des rapprochements lents. Enfin, la Partie III ne traite pas directement de l'évitement de collision, mais plutôt d'opérations de rendez-vous en temps fixé et consommation minimale. En pratique, on s'intéresse à la dynamique linéarisée hors du plan d'une orbite képlérienne de référence. Une solution analytique de ce problème de commande optimale est proposée, obtenue par une méthode indirecte de résolution.

Première partie

Évaluation du risque de collision

Introduction

Dans cette première moitié du mémoire, on s'intéresse à l'évaluation du risque de collision entre deux véhicules spatiaux par un calcul de probabilité. Cette partie se concentre sur deux grandeurs en particulier : la probabilité de collision dans un contexte de vitesse relative élevée et la probabilité de collision instantanée, utilisée en particulier dans le modèle de rencontre lente [28]. La première donne une estimation conservatrice du risque pour une grande part des rencontres réelles, celles rentrant dans le cadre dit du rapprochement rapide [10, 2, 28, 33], tandis que la seconde fournit, dans un contexte plus général, une information ponctuelle dans le temps qui permet ensuite d'obtenir des bornes inférieures pour le risque de collision sur des intervalles temporels. Le calcul de probabilités de collision dans un contexte autre qui nécessiterait des hypothèses différentes sur le modèle, n'est pas abordé ici.

Pour commencer, le Chapitre 1 décrit donc le modèle probabiliste de collision adopté dans le cadre de la thèse. Des expressions intégrales classiques sont obtenues pour la probabilité de collision en rapprochement rapide et la probabilité de collision instantanée. Toutes deux s'expriment comme l'intégrale d'une fonction de densité gaussienne non centrée sur une boule euclidienne, de dimension respectivement 2 et 3. Le premier chapitre dresse également un état de l'art des méthodes de calcul, qui sont basées soit sur un schéma d'intégration numérique (Foster [42], Patera [88, 90], Alfano [4]), soit sur une formule analytique approchée (Chan [27, 28], Distribution Approchées [28]), soit sur un mélange des deux (Volumes Équivalents [28]).

Le Chapitre 2 présente une nouvelle méthode, développée pendant la thèse, qui a l'avantage d'être basée sur une formule analytique exacte, sous la forme d'une série convergente à termes positifs. Elle s'appuie sur les théories de la transformée de Laplace et des fonctions holonomes i.e. solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux. Pour chaque dimension, des exemples numériques sont donnés afin de démontrer l'efficacité des formules proposées. Le cas bidimensionnel est particulièrement intéressant car la preuve est fournie que la formule utilisée est la version exacte de la formule approchée de Chan [28]. D'autre part, des bornes analytiques sont obtenues pour la probabilité de collision. Elles représentent un outil mission significatif car l'évaluation de cet encadrement, presque immédiate, permet dans bien des cas réels de statuer sur l'importance du risque.

Chapitre 1

Définition et état de l'art du calcul de probabilités de collision

Introduction

Une alerte de collision entre deux objets spatiaux est le point de départ de l'évaluation du risque pour l'opérateur d'un satellite. En effet, un tel document contient des informations critiques sur la conjonction, qui incluent une estimation des position et vitesse de chaque objet à une date de référence. Dans le cas de l'alerte du JSpOC [16], dont le format répond désormais au nom de CDM, ce temps t_m est celui dit de plus proche passage, c'est-à-dire la date à laquelle la distance entre les trajectoires moyennes des deux objets est la plus petite. Cette valeur minimale, notée d_m , est appelée distance de plus proche passage ("miss distance" dans la littérature anglophone). L'estimation des vecteurs position-vitesse des objets comprend deux niveaux d'information : l'espérance et la matrice de covariance. La première est donnée dans un référentiel inertiel et la seconde dans un repère orbital local lié à l'objet. Enfin, une autre donnée importante contenue dans une alerte du JSpOC est la surface apparente des objets, à partir de laquelle on peut déduire un diamètre approximatif.

Historiquement, le premier critère d'évaluation du risque utilisé est de nature géométrique et reste peu documenté. Essentiellement, il consiste à regarder si la trajectoire relative moyenne pénètre ou non à l'intérieur d'une zone de non-droit, comme par exemple un parallélépipède rectangle [10] ou une ellipsoïde [34]. Les dimensions de cette dernière sont fixées arbitrairement ou bien calculées en sommant les rayons respectifs des objets et les écarts-types sur leur distance relative. A partir de 1992, avec la référence [42], un critère probabiliste s'est peu à peu imposé à l'ensemble des acteurs du domaine (opérateurs, propriétaires...). Au lieu de considérations purement géométriques, celui-ci exploite directement la nature incertaine des données et représente la probabilité pour que les deux objets rentrent en collision au cours du temps. Une hypothèse classique [2, 89, 7, 28, 33] consiste à modéliser les vecteurs aléatoires des positions et vitesse avec des lois multinormales construites à partir des données de l'alerte. Basées sur le calcul de probabilité, certaines procédures vont plus loin dans la quantification du risque. Ainsi, il est possible de s'intéresser aux variations de la probabilité de collision en fonction des paramètres caractérisant la distribution des vecteurs aléatoires [28]. Le but est d'éviter la zone dite de dilution [6], c'est-à-dire la plage où des valeurs élevées des incertitudes conduisent à une sous-estimation du risque. Toujours dans un souci de ne pas sous-estimer le risque de collision, la notion de probabilité de conflit [91] a vu le jour. En lieu et place des volumes réels estimés des objets, cette approche considère des ellipsoïdes de sécurité. Néanmoins, mathématiquement parlant, le calcul d'une telle probabilité n'est pas différent de celui d'une probabilité de collision classique [92], et les méthodes développées dans cette partie peuvent donc être appliquées.

Ce chapitre pose les bases mathématiques du problème d'évaluation du risque de collision selon une approche probabiliste, avant de se focaliser sur le calcul de la probabilité de collision en rapprochement rapide et de la probabilité de collision instantanée. La Section 1.1 introduit le modèle probabiliste général de collision, en s'inspirant notamment d'un article de Coppola [33]. Ensuite, la Section 1.2 présente le modèle classique de rapprochement rapide ainsi que la formule associée pour la probabilité de collision. Elle décrit les quatre principales méthodes de calcul existantes, nommées d'après leurs inventeurs Foster [42], Chan [27], Patera [88] et Alfano [4]. Enfin, la Section 1.3 traite de la probabilité de collision instantanée. Outre le modèle, elle détaille deux méthodes de calcul présentes dans le livre de Chan [28], à savoir les Volumes Équivalents et les Distributions Approchées.

1.1 Modèle probabiliste général de collision

Dans cette section, on s'intéresse à la conjonction des trajectoires de deux corps en orbite. Cette rencontre met donc en scène un satellite actif, l'objet primaire p , et un débris spatial, l'objet secondaire s . Dans la suite, on définit le cadre mathématique nécessaire à l'évaluation du risque de collision selon un critère probabiliste.

1.1.1 Définition du modèle de rencontre

Dynamique

Soient $\vec{x}_p = (\vec{r}_p, \vec{v}_p)$ et $\vec{x}_s = (\vec{r}_s, \vec{v}_s)$ les vecteurs position-vitesse des centres de gravité respectifs des deux objets dans le repère de référence $\hat{\mathcal{R}}$. Ce peut être un référentiel inertiel ou bien un repère local. On considère un intervalle de temps $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ au cours duquel les deux corps sont soumis à des dynamiques propres définies respectivement par les champs de vecteurs $\vec{f}_p, \vec{f}_s : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^3$. Ainsi, à tout instant $t \in \mathcal{J}$, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt}(t) = \vec{f}_p(t, \vec{x}_p), \quad (1.1)$$

$$\frac{d\vec{v}_s}{dt}(t) = \vec{f}_s(t, \vec{x}_s). \quad (1.2)$$

Ces dynamiques, supposées déterministes, tiennent compte de l'attraction gravitationnelle newtonienne. Elles peuvent aussi prendre en compte des perturbations orbitales diverses : non-sphéricité de la Terre, frottement atmosphérique, pression de radiation solaire, attraction de la Lune, etc. Quel que soit le modèle adopté, on suppose que, pour des conditions initiales données, les solutions aux problèmes de Cauchy des systèmes (1.1) et (1.2) sont uniques.

Afin de décrire la dynamique relative des objets, on introduit le vecteur $\vec{x} = (\vec{r}, \vec{v})$ défini par :

$$\vec{r} = \vec{r}_s - \vec{r}_p, \quad (1.3)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_s - \vec{v}_p. \quad (1.4)$$

Géométrie

Afin de définir le domaine de collision entre les objets, on a besoin de caractériser leur géométrie respective, ce qui est classiquement fait à l'aide de l'hypothèse suivante [2, 89, 7, 28, 33].

Hypothèse 1. *Géométrie sphérique.*

Les objets p et s sont modélisés par des sphères, de diamètres respectifs D_p et D_s .

La Figure 1.1 représente la configuration spatiale d'une rencontre entre deux objets modélisés par des sphères.

L'hypothèse de géométrie sphérique permet d'ignorer tous les aspects liés à l'orientation dans l'espace des deux corps, et notamment les éventuelles contraintes d'attitude de l'objet primaire. Elle permet aussi de modéliser de manière conservatrice l'objet secondaire, dont la géométrie est souvent mal connue.

Plusieurs auteurs [88, 7, 28] se sont intéressés à des géométries différentes, comme des polygones ou des assemblages de polygones. De tels modèles permettent de modéliser plus finement des structures complexes comme la Station Spatiale Internationale [28], mais ne sont pas nécessaires pour décrire des rencontres entre des satellites et des débris.

Incertitudes

Grâce à des mesures physiques, on connaît avec une certaine incertitude les positions et vitesses des deux objets à un temps de référence, pris comme origine des temps. Soient $\hat{X}_p^0 = \text{Coord}(\vec{x}_p^0, \hat{\mathcal{R}})$ et $\hat{X}_s^0 = \text{Coord}(\vec{x}_s^0, \hat{\mathcal{R}})$, c'est-à-dire les coordonnées cartésiennes des vecteurs position-vitesse des deux objets au temps $t = 0$ dans le repère $\hat{\mathcal{R}}$. Il s'agit de vecteurs aléatoires conjointement définis, complètement déterminés par leurs fonctions de densité respectives $\rho_{\hat{X}_p^0}, \rho_{\hat{X}_s^0} : \mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}^+$. On adopte ici une hypothèse classique [28] concernant la corrélation de la connaissance des deux objets.

Hypothèse 2. *Non corrélation des lois de probabilité.*

On suppose que les vecteurs aléatoires \hat{X}_p^0 et \hat{X}_s^0 sont décorrélés.

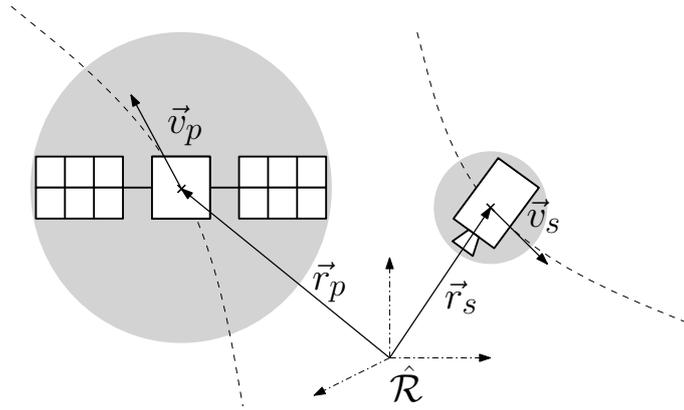


FIGURE 1.1 – Profil d'une rencontre entre deux objets.

Remarque 1. *En réalité, même dans le cas où les mesures sont indépendantes pour chaque objet (et il n'y a donc pas de biais commun), les états ne sont pas nécessairement complètement décorrélés. En effet, il peut y avoir dans les dynamiques des deux corps des incertitudes communes, par exemple sur le modèle de frottement atmosphérique considéré. Certains auteurs se sont intéressés à l'influence de la corrélation sur les probabilités de collision dans [35].*

1.1.2 Définition de la probabilité de collision

Grâce aux hypothèses précédentes, on peut désormais définir formellement l'évènement "collision".

Dans le cadre de la modélisation sphérique (Hypothèse 1), il y a collision sur un intervalle de temps $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ si et seulement si on a l'existence d'une date $t \in \mathcal{I}$ telle que :

$$\|\vec{r}(t)\|_2 \leq \frac{D_p + D_s}{2}, \quad (1.5)$$

En d'autres termes, du point de vue de la position relative, l'ensemble de collision à un instant t est assimilable à une sphère fictive de rayon $R = \frac{D_p + D_s}{2}$. On définit ainsi la sphère combinée, représentée sur la Figure 1.2.

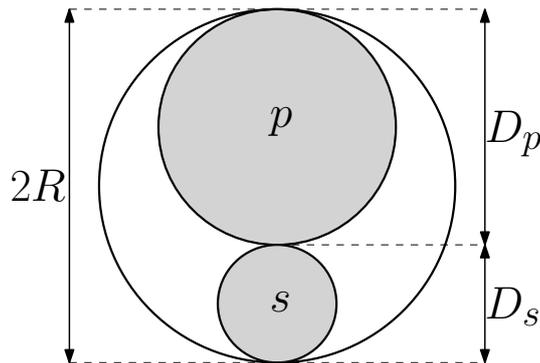


FIGURE 1.2 – Sphère combinée des deux objets.

On note $\mathcal{P}_c^{\mathcal{I}}$ la probabilité de collision sur un intervalle de temps $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. Il s'agit d'une probabilité portant sur le couple de vecteurs aléatoires $(\hat{X}_p^0, \hat{X}_s^0)$, qui représentent les coordonnées des vecteurs position-vitesse des objets au temps $t = 0$. Dans l'espace des conditions initiales, l'évènement "collision" est représenté par l'ensemble $V^0(\mathcal{I})$ des initialisations aboutissant à une collision sur l'intervalle \mathcal{I} :

$$\mathcal{D}(\mathcal{I}) = \{\text{Coord}((\vec{x}_p^0, \vec{x}_s^0), \hat{\mathcal{R}}) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 : \exists t \in \mathcal{I}, \|\vec{r}_p(t) - \vec{r}_s(t)\|_2 \leq R\}. \quad (1.6)$$

La probabilité de collision s'écrit comme l'intégrale sur le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ de la densité de probabilité jointe $\rho_{(\hat{X}_s^0, \hat{X}_s^0)}$:

$$\mathcal{P}_c^{\mathcal{I}} = \int \dots \int_{\mathcal{D}(\mathcal{I})} d\rho_{(\hat{X}_s^0, \hat{X}_s^0)}. \quad (1.7)$$

Dans l'idéal, on veut calculer $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}}$ c'est-à-dire la probabilité de collision sur tout l'horizon temporel.

Remarque 2. Si $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2$, on a $\mathcal{P}_c^{\mathcal{I}_1} \leq \mathcal{P}_c^{\mathcal{I}_2}$. De plus, lorsque l'intervalle de temps est réduit à un singleton, on regarde en réalité la probabilité pour qu'il y ait collision à une date fixée. On parle de probabilité de collision instantanée à l'instant t et on a la propriété $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}} \geq \sup_{t \in \mathcal{J}} \mathcal{P}_c^{\{t\}}$.

1.1.3 Méthodes générales de calcul du risque

Ce qui précède définit le cadre théorique général du calcul de la probabilité de collision entre deux objets spatiaux modélisés par des sphères avec des incertitudes sur les positions et vitesses initiales, représentées par des vecteurs aléatoires non corrélés. Le calcul analytique de cette probabilité est un problème très difficile. D'une part se pose la question de la détermination du domaine d'intégration qui dépend très fortement du modèle dynamique adopté. D'autre part, même dans le cas où ce domaine est connu analytiquement, il reste à intégrer la densité de probabilité sur cet ensemble, ce qui peut s'avérer également très complexe, même pour une distribution gaussienne [28].

Les seules méthodes de calcul qui s'appliquent dans le cadre le plus général possible, i.e. sans hypothèse particulière, sont celles de Monte-Carlo. Dans la littérature, on les trouve par exemple dans [9, 38]. Elles sont basées sur un échantillonnage aléatoire de N vecteurs dans l'espace des conditions initiales. Pour chacun d'entre eux, on simule la trajectoire selon le modèle dynamique adopté sur l'intervalle \mathcal{I} , que l'on discrétise. On compte 1 s'il y a collision, 0 sinon. Au final, la probabilité est donnée par la formule $\mathcal{P}_c^{\mathcal{I}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i$. Le nombre de tirages à effectuer dépend de la précision demandée ainsi que de la valeur de la probabilité : une valeur faible requiert beaucoup d'échantillons pour être correctement estimée. C'est là un des désavantages majeurs des méthodes de Monte-Carlo : on peut avoir besoin de beaucoup de tirages et les simulations peuvent s'avérer coûteuses en temps. Ces méthodes sont donc peu aptes à calculer des probabilités faibles, liées à des événements dits rares. Des méthodes spécifiques existent néanmoins pour essayer de réduire le nombre de tirages nécessaires [81].

Certains auteurs ont développé des techniques différentes de celles de Monte-Carlo, tout en essayant de rester dans un modèle assez général. Dans [33], Coppola présente une formule intégrale en dimension 3 pour calculer la probabilité de collision, dans un modèle d'incertitude de nature gaussienne à chaque instant. Le calcul est ensuite effectué à l'aide d'un schéma numérique d'intégration. Patera [89] puis Alfano [7] ont développé des méthodes de calcul où l'horizon temporel est subdivisé en segments sur lesquels la trajectoire est supposée rectiligne uniforme, sans incertitude sur la vitesse. Toutes ces méthodes nécessitent néanmoins des hypothèses supplémentaires par rapport au modèle adopté ici.

Dans la Section 1.2, on se place dans un cadre de travail particulier, pour lequel l'expression de la probabilité de collision peut être grandement simplifiée. Il s'agit du cas du rapprochement rapide entre les deux corps, qui englobe un nombre important de cas réels. Dans cette configuration spécifique, des hypothèses supplémentaires peuvent être faites sur le modèle, aboutissant à une nouvelle formule et à des méthodes pratiques de calcul pour la probabilité de collision. Enfin, dans la Section 1.3, on considère la probabilité de collision instantanée et plus particulièrement lorsque les incertitudes sont de type gaussien. Là encore, la formule intégrale qui en découle, fait l'objet d'une méthode de calcul dédiée fondée sur celle développée dans le cadre des rencontres rapides. En fait, la nouvelle méthode proposée dans cette thèse est très générique et généralise de manière indépendante une approche développée dans les années 1960 pour la caractérisation des distributions de probabilité d'une fonction quadratique de variables normalement distribuées [59], [60]. Cette dernière problématique de l'analyse du contenu probabiliste d'une ellipsoïde centrée ou non, sous une distribution normale a fait l'objet de nombreuses publications dans la communauté

des statisticiens dans les années 60 [104], [86], [116], [37], [108], [59], [60]. Une bonne synthèse de ces travaux peut être consultée dans la monographie [53]. On peut retrouver en partie ces références dans le livre de Chan [28], en particulier dans le Chapitre 14 dédié au calcul de la probabilité de collision instantanée, mais il est étonnant de constater la méconnaissance de la communauté spécialiste du calcul de probabilité issue du domaine spatial en la matière. Dans la suite du Chapitre 1 et lors du Chapitre 2, les différentes méthodes présentées seront mises en perspective vis-à-vis de ces résultats historiques.

1.2 Modèle de rapprochement rapide

Certaines rencontres se caractérisent par une vitesse relative moyenne élevée, de l'ordre du km/s. Cette configuration pousse à faire des hypothèses supplémentaires afin de définir le modèle dit des rencontres rapides ("short-term encounter" dans la littérature anglophone [28, 33]), pour lequel par ailleurs certains auteurs se sont intéressés aux limites de validité [32, 38, 28]. L'hypothèse fondamentale est celle du mouvement relatif rectiligne, réaliste en raison de la faible courbure de la trajectoire au plus proche de la conjonction. Il existe même chez certains auteurs [88, 5] une dénomination alternative du modèle sous la forme de rencontre linéaire. Dans un tel cadre, la probabilité de collision admet une expression simplifiée, sous la forme d'une intégrale 2-D. Les démonstrations de cette formule varient dans la littérature, où l'on distingue essentiellement deux formulations. D'un côté, il est possible d'obtenir d'abord une expression du taux de collision, puis de l'intégrer selon la variable temporelle [2, 33]. De l'autre, certains auteurs [10, 28] suivent un raisonnement similaire à ce qui est proposé ici, dans la continuité du cas général présenté dans la section précédente. Plus précisément, on considère le volume géométrique des coordonnées relatives initiales aboutissant à une collision, sur lequel on intègre ensuite la fonction de densité du vecteur aléatoire de position relative.

On s'intéresse dans la suite à la probabilité de collision sur un intervalle temporel centré autour du temps de référence $t = 0$, plus précisément sur $[t_1, t_2]$ avec $t_1 \leq 0 \leq t_2$.

1.2.1 Définition du modèle

L'hypothèse à la base du modèle de rencontre rapide concerne la nature géométrique des trajectoires.

Hypothèse 3. *Mouvement rectiligne uniforme.*

Le mouvement de chaque objet est considéré comme rectiligne uniforme pendant la rencontre. Ainsi, pour tout $t \in [t_1, t_2]$:

$$\vec{r}_p(t) = \vec{r}_p^0 + t\vec{v}_p^0, \quad (1.8)$$

$$\vec{r}_s(t) = \vec{r}_s^0 + t\vec{v}_s^0. \quad (1.9)$$

La rapidité de la rencontre incite également à négliger les écarts concernant les vitesses des deux objets, limitant ainsi l'incertitude à leurs seules positions.

Hypothèse 4. *Aucune incertitude sur les vitesses.*

Les vitesses respectives des objets sont considérées comme des quantités déterministes.

Hypothèse 5. *Vecteurs aléatoires gaussiens.*

On suppose que \hat{R}_p^0 et \hat{R}_s^0 suivent des lois de distribution multinormales conjointement définies :

$$\hat{R}_p^0 \sim \mathcal{N}_3(\mu_{\hat{R}_p^0}, \Sigma_{\hat{R}_p^0}), \quad \hat{R}_s^0 \sim \mathcal{N}_3(\mu_{\hat{R}_s^0}, \Sigma_{\hat{R}_s^0}). \quad (1.10)$$

Les Hypothèses 3 et 4 (mouvement rectiligne et vitesses déterministes) conduisent naturellement à introduire ce qu'on appelle le plan et le repère de la rencontre. La définition exacte de ce dernier varie dans la littérature [28, 89] mais, dans tous les cas, le repère est centré sur l'un des objets et un des axes est orienté selon la vitesse relative.

Définition 1. *Repère et plan de rencontre au temps t (voir Figure 1.3).*

A une date t , on définit le repère de rencontre $\tilde{\mathcal{R}}_t$ de la manière suivante :

- Origine : position moyenne du centre de gravité de l'objet primaire
 - Axe \tilde{z} : orienté selon la vitesse relative \vec{v}^0
- Les deux autres axes sont perpendiculaires à la vitesse relative. Le plan Π_t contenant l'origine et engendré par ces axes est appelé plan de rencontre.
- Axe \tilde{x} : dirigé vers la projection de la position moyenne du centre de gravité de l'objet secondaire dans le plan de rencontre
 - Axe \tilde{y} : complète le repère orthogonal direct

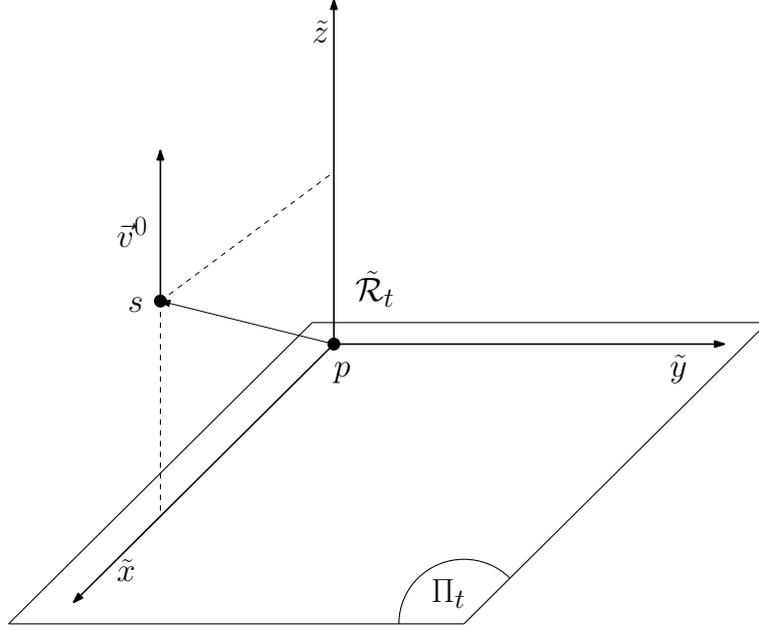


FIGURE 1.3 – Repère et plan de rencontre.

1.2.2 Expressions de la probabilité de collision

Dans la suite, on se place dans le repère de rencontre défini au temps de référence $t = 0$.

Formule 3-D

Soit \tilde{R}^0 les coordonnées de la position relative dans le repère $\tilde{\mathcal{R}}_0$. On va exprimer la probabilité de collision à l'aide de ce vecteur aléatoire. D'après l'Hypothèse 3, le mouvement relatif est rectiligne uniforme, à savoir que :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}^0 + t\vec{v}^0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (1.11)$$

Définissons l'ensemble $\mathcal{T}_c^{\mathcal{I}}$ des positions relatives à $t = 0$ conduisant à une collision sur l'intervalle \mathcal{I} :

$$\mathcal{T}_c^{\mathcal{I}} = \{\text{Coord}(\vec{r}^0, \tilde{\mathcal{R}}_0) \in \mathbb{R}^3 : \exists t \in \mathcal{I}, \|\vec{r}^0 + t\vec{v}^0\|_2 \leq R\}. \quad (1.12)$$

On a alors :

$$\mathcal{P}_c^{[t_1, t_2]} = \iiint_{\mathcal{T}_c^{[t_1, t_2]}} d\rho_{\tilde{\mathcal{R}}^0}. \quad (1.13)$$

Le volume d'intégration peut se réécrire sous la forme :

$$\mathcal{T}_c^{[t_1, t_2]} = \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} \bar{\mathcal{B}}_3(-t\vec{v}^0, R). \quad (1.14)$$

Il s'agit en fait d'un domaine tubulaire, appelé tube de collision [28] et représenté sur la Figure 1.4.

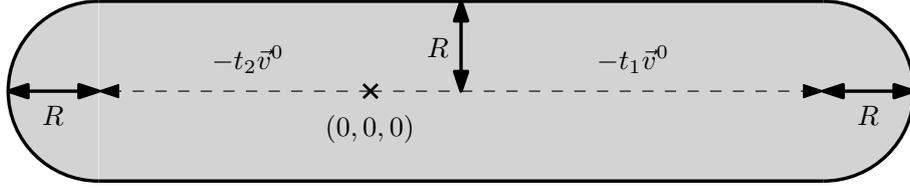


FIGURE 1.4 – Tube de collision.

Soient \tilde{R}_p^0 (respectivement \tilde{R}_s^0) les coordonnées de \tilde{r}_p^0 (respectivement \tilde{r}_s^0) dans le repère $\tilde{\mathcal{R}}_0$. La position relative à $t = 0$ est donnée par :

$$\tilde{R}^0 = \tilde{R}_s^0 - \tilde{R}_p^0 \quad (1.15)$$

D'après l'Hypothèse 5, \hat{R}_p^0 et \hat{R}_s^0 sont des vecteurs aléatoires gaussiens conjointement définis. Le passage du repère initial $\hat{\mathcal{R}}$ au repère de rencontre $\tilde{\mathcal{R}}_0$ s'effectue par une transformation linéaire à l'aide de la matrice de passage P qui conserve la nature gaussienne. En conséquence, on a :

$$\tilde{R}_p^0 \sim \mathcal{N}_3(\mu_{\tilde{R}_p^0}, \Sigma_{\tilde{R}_p^0}), \quad \tilde{R}_s^0 \sim \mathcal{N}_3(\mu_{\tilde{R}_s^0}, \Sigma_{\tilde{R}_s^0}). \quad (1.16)$$

Leurs deux premiers moments (espérance et covariance) les définissent complètement et s'obtiennent directement à l'aide de P , à savoir que :

$$\mu_{\tilde{R}_p^0} = P\mu_{\hat{R}_p^0}, \quad \mu_{\tilde{R}_s^0} = P\mu_{\hat{R}_s^0}, \quad (1.17)$$

$$\Sigma_{\tilde{R}_p^0} = P\Sigma_{\hat{R}_p^0}P^T, \quad \Sigma_{\tilde{R}_s^0} = P\Sigma_{\hat{R}_s^0}P^T. \quad (1.18)$$

La non corrélation est également conservée par ce changement de repère, puisque $\text{Cov}(\tilde{R}_p^0, \tilde{R}_s^0) = P\text{Cov}(\hat{R}_p^0, \hat{R}_s^0)P^T = 0$. On en déduit que le vecteur des coordonnées de position relative \tilde{R}^0 est également un vecteur aléatoire gaussien [87]. Ses caractéristiques sont données par :

$$\mu_{\tilde{R}^0} = \mu_{\tilde{R}_s^0} - \mu_{\tilde{R}_p^0}, \quad (1.19)$$

et

$$\Sigma_{\tilde{R}^0} = \Sigma_{\tilde{R}_p^0} + \Sigma_{\tilde{R}_s^0}. \quad (1.20)$$

Le calcul de la probabilité de collision se ramène donc à l'intégrale d'une loi multinormale de dimension 3 sur un domaine tubulaire. Formulée à l'aide de la fonction de densité, cela s'écrit :

$$\mathcal{P}_c^{[t_1, t_2]} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\det(\Sigma_{\tilde{R}^0})}} \int_{\mathcal{T}_c^{[t_1, t_2]}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{r} - \mu_{\tilde{R}^0})^T \Sigma_{\tilde{R}^0}^{-1} (\vec{r} - \mu_{\tilde{R}^0})\right) d\vec{r}. \quad (1.21)$$

La Figure 1.5 permet de visualiser les différents paramètres de cette intégrale. Sont représentés d'une part le domaine d'intégration, à savoir le tube de collision, et d'autre part ce que l'on appelle une n - σ ellipsoïde de la loi normale. Il s'agit d'une ligne de niveau particulière de la fonction de densité gaussienne : selon les valeurs de l'entier n , cette surface englobe un certain pourcentage des occurrences possibles de la variable aléatoire.

Formule 2-D

Une simplification classique consiste à étendre à l'infini le tube de collision. Cela revient à considérer que :

$$\iiint_{\mathcal{T}_c^{[t_1, t_2]}} d\rho_{\tilde{R}^0} \simeq \iiint_{\mathcal{T}_c^{\mathbb{R}}} d\rho_{\tilde{R}^0} \quad (1.22)$$

En faisant cette approximation, on néglige en fait l'apport de l'intégration sur la queue de la distribution gaussienne. Il s'agit d'une hypothèse conservatrice puisque l'on approche par valeur

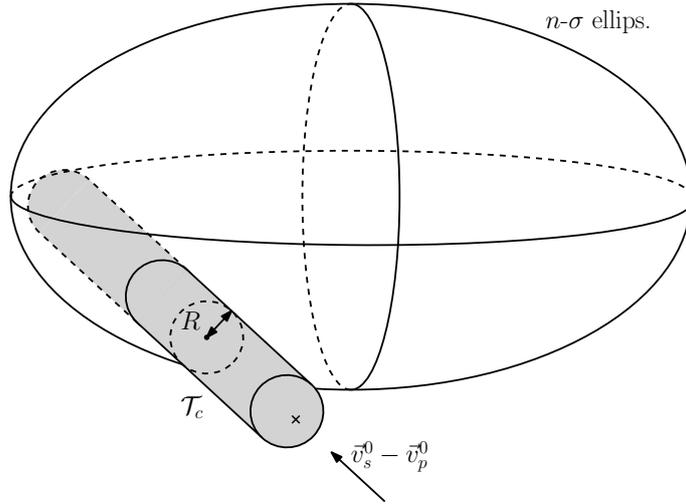


FIGURE 1.5 – Représentation des paramètres de l'intégrale 3-D.

supérieure l'intégrale initiale. Cette approximation permet de se ramener à un problème 2-D. En effet :

$$\mathcal{T}_c^{\mathbb{R}} = \bar{\mathcal{B}}_2(0, R) \times \mathbb{R}, \quad (1.23)$$

et donc $\mathcal{T}_c^{\mathbb{R}}$ est le cylindre circulaire droit de rayon R , d'axe \tilde{z} et de hauteur infinie. Dans sa définition, il ne fait pas intervenir la troisième coordonnée z . En conséquence, l'intégration sur ce volume se réduit à celle, sur un disque de rayon R centré à l'origine, de la densité de probabilité marginale sur les deux premières coordonnées de \tilde{R}^0 , notées (\tilde{X}, \tilde{Y}) . D'après les propriétés des lois normales [87], cette loi marginale est aussi une loi normale (cf. Figure 1.6). Le vecteur $\mu_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}$ s'obtient en prenant les deux premières coordonnées de $\mu_{\tilde{R}^0}$ et $\Sigma_{(\tilde{X}, \tilde{Y})}$ est la sous-matrice 2×2 obtenue par l'intersection des deux premières lignes et colonnes de $\Sigma_{\tilde{R}^0}$.

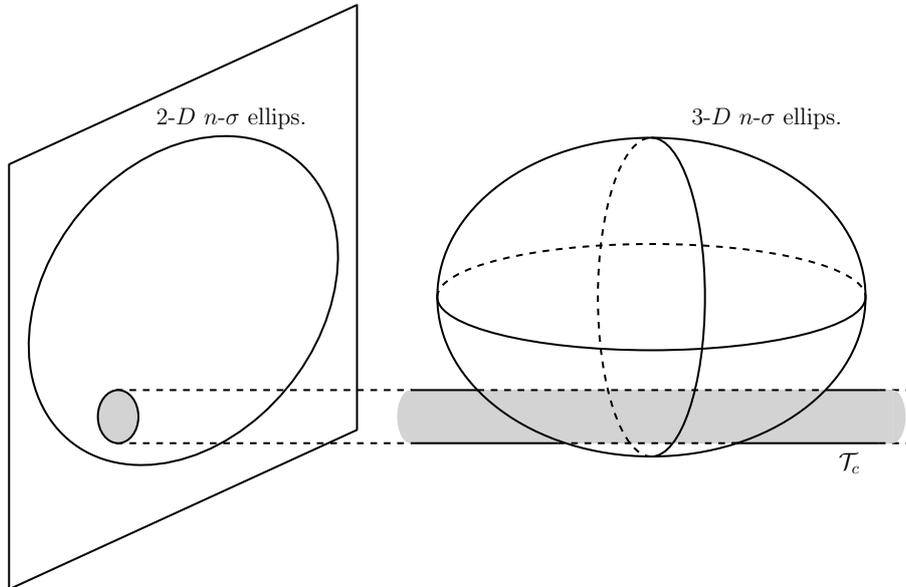


FIGURE 1.6 – Passage de la dimension 3 à la dimension 2.

En omettant la référence à l'intervalle de temps, qui de toute façon n'intervient plus dans le

calcul, on a :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma_{(\tilde{X},\tilde{Y})})}} \iint_{\tilde{\mathcal{B}}_2(0,R)} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{r} - \mu_{(\tilde{X},\tilde{Y})})^T \Sigma_{(\tilde{X},\tilde{Y})}^{-1} (\vec{r} - \mu_{(\tilde{X},\tilde{Y})})\right) d\tilde{x}d\tilde{y} \quad (1.24)$$

D'après les propriétés du repère de rencontre, on a $\mu_{(\tilde{X},\tilde{Y})} = (\tilde{x}_m, 0)$ où \tilde{x}_m est la distance de plus proche passage. Quant à $\Sigma_{(\tilde{X},\tilde{Y})}$, s'agissant d'une matrice de covariance, elle peut s'écrire sous la forme :

$$\Sigma_{(\tilde{X},\tilde{Y})} = \begin{bmatrix} \sigma_{\tilde{x}}^2 & r_{\tilde{x}\tilde{y}}\sigma_{\tilde{x}}\sigma_{\tilde{y}} \\ r_{\tilde{x}\tilde{y}}\sigma_{\tilde{x}}\sigma_{\tilde{y}} & \sigma_{\tilde{y}}^2 \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

où $\sigma_{\tilde{x}}, \sigma_{\tilde{y}} > 0$ représentent les écarts types selon x, y et $r_{\tilde{x}\tilde{y}} \in [-1, 1]$ le coefficient de corrélation linéaire.

La matrice $\Sigma_{(\tilde{X},\tilde{Y})}$ étant symétrique réelle, elle est toujours diagonalisable. Dans le but d'éliminer les termes croisés de la fonction gaussienne, on effectue un changement de variables vers la base propre de la matrice de covariance. On réalise pour ce faire une rotation permettant de s'aligner avec les axes principaux x et y (voir Figure 1.7). On choisit l'angle, noté $-\theta$, qui permet d'avoir $\sigma_x \leq \sigma_y$. Plus précisément, il s'agit de la transformation suivante :

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto (x, y) = (\tilde{x} \cos(\theta) + \tilde{y} \sin(\theta), -\tilde{x} \sin(\theta) + \tilde{y} \cos(\theta)), \quad (1.26)$$

avec :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sigma_{\tilde{y}}^2 - \sigma_{\tilde{x}}^2}{2\rho_{\tilde{x}\tilde{y}}\sigma_{\tilde{x}}\sigma_{\tilde{y}}} - \text{signe}(\rho_{\tilde{x}\tilde{y}})\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{\tilde{y}}^2 - \sigma_{\tilde{x}}^2}{2\rho_{\tilde{x}\tilde{y}}\sigma_{\tilde{x}}\sigma_{\tilde{y}}}\right)^2}\right). \quad (1.27)$$

Si $\rho_{\tilde{x}\tilde{y}} = 0$, la matrice $\Sigma_{(\tilde{X},\tilde{Y})}$ est en fait déjà diagonale et deux-sous cas sont possibles. Si $\sigma_{\tilde{x}} \leq \sigma_{\tilde{y}}$, il n'y a pas besoin de rotation et $\theta = 0$; si $\sigma_{\tilde{x}} > \sigma_{\tilde{y}}$, il est seulement nécessaire d'invertir les deux axes et donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. Cet alignement avec les axes propres de la matrice de covariance permet d'aboutir (après calculs) à la formule suivante pour la probabilité de collision :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_{\mathcal{B}_2(0,R)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-x_m)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-y_m)^2}{\sigma_y^2}\right)\right) dx dy, \quad (1.28)$$

où σ_x^2 et σ_y^2 sont les valeurs propres de $\Sigma_{(\tilde{X},\tilde{Y})}$, à savoir :

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_{\tilde{x}}^2 + \sigma_{\tilde{y}}^2}{2} - \text{sgn}(\sigma_{\tilde{x}}^2 - \sigma_{\tilde{y}}^2) \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\tilde{x}}^2 - \sigma_{\tilde{y}}^2}{2}\right)^2 + r_{\tilde{x}\tilde{y}}^2 \sigma_{\tilde{x}}^2 \sigma_{\tilde{y}}^2}, \quad (1.29)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_{\tilde{x}}^2 + \sigma_{\tilde{y}}^2}{2} + \text{sgn}(\sigma_{\tilde{x}}^2 - \sigma_{\tilde{y}}^2) \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\tilde{x}}^2 - \sigma_{\tilde{y}}^2}{2}\right)^2 + r_{\tilde{x}\tilde{y}}^2 \sigma_{\tilde{x}}^2 \sigma_{\tilde{y}}^2}. \quad (1.30)$$

Conformément à la rotation définie par (1.26), on a :

$$x_m = \cos(\theta)\tilde{x}_m, \quad (1.31)$$

et

$$y_m = -\sin(\theta)\tilde{x}_m. \quad (1.32)$$

Les différents paramètres de l'intégrale 2-D intervenant dans le calcul de \mathcal{P}_c sont représentés sur la Figure 1.7.

La formule (1.28) définit la formule classique [28] pour la probabilité de collision en rapprochement rapide. La suite de la section s'attache à la question du calcul de cette quantité.

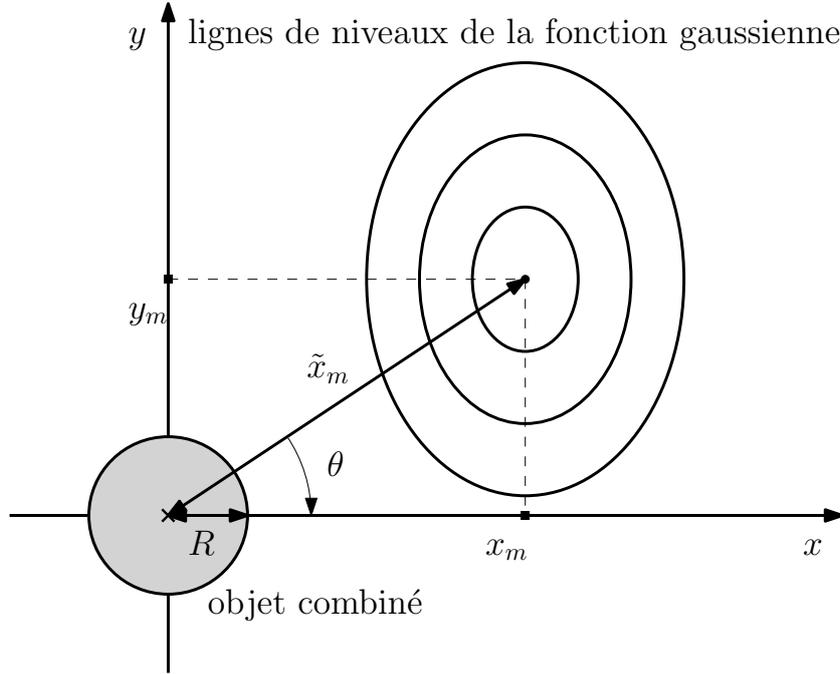


FIGURE 1.7 – Représentation des paramètres de l'intégrale 2-D.

1.2.3 Calcul de la probabilité de collision

Dans le cas spécifique des rapprochements rapides, plusieurs techniques de calcul de la probabilité de collision ont été élaborées. Les quatre principales méthodes de la littérature, dans l'ordre historique d'apparition, sont celles de Foster [42], Chan [27], Patera [88] et Alfano [4]. Elles ont déjà fait l'objet de plusieurs études comparatives [28, 8]. On peut les diviser en deux catégories. D'une part, les méthodes de Foster, Patera et Alfano sont construites sur un schéma d'intégration numérique adapté. En effet, les difficultés d'intégration numérique directe de l'intégrale de (1.28) sont mentionnées dans la référence [37]. D'autre part, celle de Chan se base sur une formule analytique pour la probabilité de collision, sous la forme d'une série à termes positifs. Toutefois, son obtention nécessite une hypothèse simplificatrice supplémentaire par rapport au modèle de rapprochement rapide ce qui en fait, dans le cas général, une méthode approchée.

Méthode de Foster

Historiquement, il s'agit de la première méthode de la littérature. Elle est exposée dans [42] et est utilisée par la NASA [28]. On dispose en conséquence de très peu de détails la concernant. Les quelques éléments donnés ci-après sont extraits du livre de Chan [28].

Foster utilise les coordonnées polaires (r, ψ) associées à (y, x) , à savoir les variables telles que :

$$(x, y) = (r \sin(\psi), r \cos(\psi)). \quad (1.33)$$

La formule (1.28) devient ainsi :

$$\mathcal{P}_c = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_m^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_m^2}{\sigma_y^2}\right)\right)}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_0^R r \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\left(\left(\frac{\sin(\psi)}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{\cos(\psi)}{\sigma_y}\right)^2\right) + r\left(\frac{\sin(\psi)x_m}{\sigma_x^2} + \frac{\cos(\psi)y_m}{\sigma_y^2}\right)\right) d\psi dr. \quad (1.34)$$

Cette intégrale est calculée numériquement à l'aide d'un schéma inconnu. D'après la référence [28], les pas d'intégration sont les suivants :

$$\Delta r = \frac{R}{12}, \quad (1.35)$$

$$\Delta\psi = 0.5 \text{ deg}. \quad (1.36)$$

Toujours selon la même source, puisqu'il s'agit d'un schéma numérique en dimension 2, la méthode, bien que précise, est assez coûteuse en temps de calcul.

Méthode d'Alfano

Alfano [5] propose une expression pour la probabilité de collision sous la forme d'une intégrale 1-D qu'il calcule ensuite à l'aide d'un schéma numérique classique, celui de Simpson.

De la formule (1.28), il vient directement :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-x_m)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-y_m)^2}{\sigma_y^2}\right)\right) dy dx. \quad (1.37)$$

Alfano introduit alors la fonction d'erreur erf, définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (1.38)$$

A l'aide de cette fonction d'erreur et du changement de variable $t = \frac{y-y_m}{\sqrt{2}\sigma_y}$, on peut réécrire \mathcal{P}_c comme une intégrale 1-D :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{\sqrt{8\pi}\sigma_x} \int_{-R}^R \exp\left(\frac{-(x-x_m)^2}{2\sigma_x^2}\right) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{y_m + \sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{2}\sigma_y}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{-y_m + \sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{2}\sigma_y}\right) \right) dx. \quad (1.39)$$

Remarque 3. La transformation de la double intégrale (1.37) en une intégrale simple faisant apparaître la fonction d'erreur, trouve son origine dans la référence [37] où cette transformation est proposée à l'aide d'un changement de variable légèrement différent de celui donné par Alfano. En effet, en intervertissant x et y et en posant $k = -y_m$ et $h = -x_m$, l'approche de [37] revient à utiliser le changement de variable $t = \sqrt{1 - \frac{y}{R}}$. Une étude numérique assez complète est également donnée dans [37] concernant la méthode de quadrature utilisée et la précision obtenue de l'implémentation informatique choisie.

Alfano propose de calculer cette intégrale par la méthode de Simpson. Pour rappel, ce schéma numérique consiste à approximer l'intégrande sur chaque segment de la subdivision par le polynôme de Lagrange de degré 2 qui l'interpole aux extrémités et au point milieu (voir Figure 1.8). En découplant le segment $[a, b]$ en $2M$ subdivisions (avec une discrétisation x_i , $i = 1, \dots, 2M$), cela revient à faire l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{6M} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^M f(x_{2i-1}) + f(x_{2M}) \right). \quad (1.40)$$

En regroupant les termes par parité, Alfano arrive à la formule :

$$\mathcal{P}_c = \frac{\Delta x}{3\sqrt{8\pi}\sigma_x} (m_0 + m_{\text{pair}} + m_{\text{impair}}), \quad (1.41)$$

avec :

$$m_0 = 2 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{-y_m + \sqrt{R^2-x_0^2}}{\sqrt{2}\sigma_y}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-y_m - \sqrt{R^2-x_0^2}}{\sqrt{2}\sigma_y}\right) \right) \left(\exp\left(\frac{-(x_0-x_m)^2}{2\sigma_x^2}\right) + \exp\left(\frac{-(x_0+x_m)^2}{2\sigma_x^2}\right) \right), \quad (1.42)$$

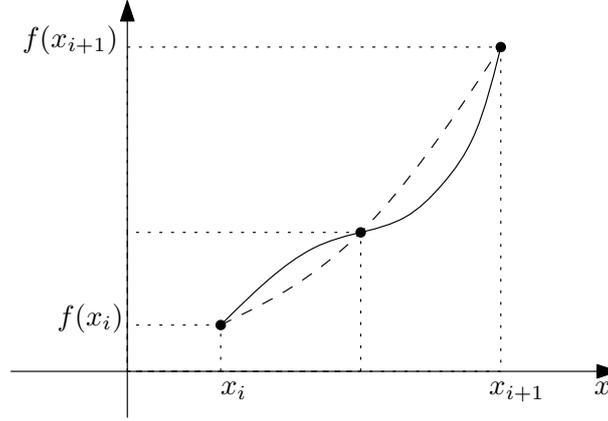


FIGURE 1.8 – Interpolation polynomiale de degré 2 (tirets) d’une fonction intégrable f (trait plein) pour la méthode de Simpson.

$$m_{\text{pair}} = 2 \sum_{i=1}^{M-1} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{-y_m + \sqrt{R^2 - x_{2i}^2}}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-y_m - \sqrt{R^2 - x_{2i}^2}}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \right) \left(\exp \left(\frac{-(x_{2i} - x_m)^2}{2\sigma_x^2} \right) + \exp \left(\frac{-(x_{2i} + x_m)^2}{2\sigma_x^2} \right) \right) + 2 \left(\exp \left(\frac{-x_m^2}{2\sigma_x^2} \right) \left(\operatorname{erf} \left(\frac{-y_m + R}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-y_m - R}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \right) \right), \quad (1.43)$$

$$m_{\text{impair}} = 4 \sum_{i=1}^M \left(\operatorname{erf} \left(\frac{-y_m + \sqrt{R^2 - x_{2i-1}^2}}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-y_m - \sqrt{R^2 - x_{2i-1}^2}}{\sqrt{2}\sigma_y} \right) \right) \left(\exp \left(\frac{-(x_{2i-1} - x_m)^2}{2\sigma_x^2} \right) + \exp \left(\frac{-(x_{2i-1} + x_m)^2}{2\sigma_x^2} \right) \right). \quad (1.44)$$

La subdivision de l’intervalle est définie par :

$$\Delta x = \frac{R}{2M}, \quad (1.45)$$

$$x_0 = 0.015\Delta x - R, \quad (1.46)$$

et

$$x_i = i\Delta x - R \quad \forall i = 1, \dots, 2M. \quad (1.47)$$

Alfano propose une formule empirique pour évaluer l’ordre M du développement nécessaire afin obtenir deux chiffres significatifs (pour une valeur de la probabilité de collision comprise entre 10^{-1} et 10^7) :

$$M = \left\lceil \frac{5R}{\min(\sigma_x, \sigma_y, \sqrt{x_m^2 + y_m^2})} \right\rceil, \quad (1.48)$$

tout en restant dans les limites $10 \leq M \leq 50$ [5].

Méthode de Patera

Patera se ramène à une intégrale 1-D, calculable ensuite à l’aide d’un schéma numérique d’intégration. A l’origine, dans la référence [88], il distingue deux expressions différentes pour l’intégrale, selon la configuration du problème. Plus tard, dans [90], il propose sans démonstration une formule unifiée (1.63), que l’on a reprise ici avec une preuve adaptée de [88].

Le point de vue de départ adopté est différent de celui présenté précédemment, bien que mathématiquement équivalent. En effet, Patera voit la probabilité de collision comme l’intégrale sur

une aire elliptique d'une fonction gaussienne isotrope i.e. dont les lignes de niveau sont des cercles. D'autre part, il place le pic de cette fonction au centre du repère et le domaine d'intégration se retrouve donc excentré. Pour obtenir cette formulation, il est nécessaire d'effectuer le changement de variables suivant :

$$(x', y') \mapsto \left(-x + x_m, \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (-y + y_m) \right). \quad (1.49)$$

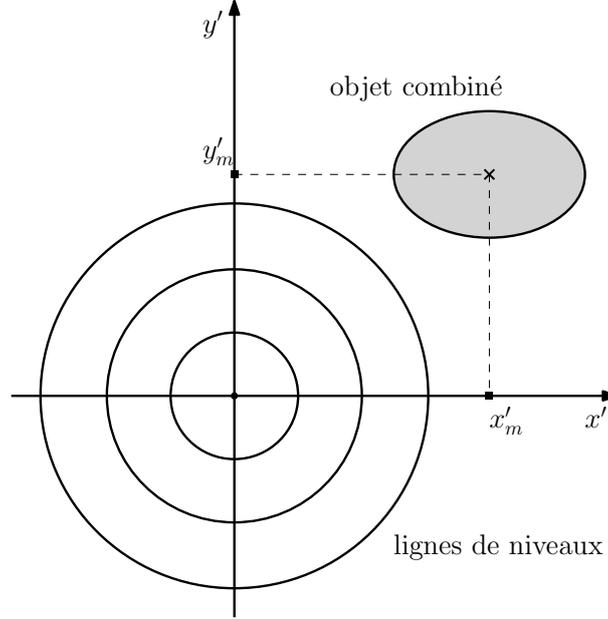


FIGURE 1.9 – Configuration géométrique adoptée par Patera.

La nouvelle expression de \mathcal{P}_c est :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \iint_{\mathcal{E}} \exp\left(-\frac{x'^2 + y'^2}{2\sigma_x^2}\right) dx' dy', \quad (1.50)$$

avec :

$$\mathcal{E} = \left\{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 / (x' - x_m)^2 + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} (y' - y_m)^2 \leq R^2 \right\}. \quad (1.51)$$

On passe alors en coordonnées polaires (r', ϕ') définies par :

$$(x', y') = (r' \cos(\phi'), r' \sin(\phi')). \quad (1.52)$$

D'où :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \iint_{\text{ellipse}} \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) r' dr' d\phi'. \quad (1.53)$$

Il faut alors distinguer deux cas. Première possibilité : l'origine est à l'extérieur de l'ellipse. Dans ce cas, on a d'après le paramétrage décrit sur la Figure 1.10 :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_{\phi'_1}^{\phi'_2} \int_{r'_1(\phi)}^{\bar{r}'(\phi)} \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) r' dr' d\phi'. \quad (1.54)$$

Dès lors, l'intégration selon la variable r' donne, avec K une constante quelconque :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi'_1}^{\phi'_2} \left[K - \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right]_{r'(\phi)}^{\bar{r}'(\phi)} d\phi', \quad (1.55)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\phi'_1}^{\phi'_2} \left(K - \exp\left(-\frac{\bar{r}'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right) d\phi' - \int_{\phi'_1}^{\phi'_2} \left(K - \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right) d\phi' \right). \quad (1.56)$$

Ce qui se réécrit en :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{s_2} \left(K - \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right) d\phi' - \int_{s_1} \left(K - \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right) d\phi' \right), \quad (1.57)$$

où s_1 et s_2 définissent le contour de l'ellipse (voir Figure 1.10). On retrouve là l'intégrale sur le contour de l'ellipse, d'où :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{ellipse}} \left(K - \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right) d\phi'. \quad (1.58)$$

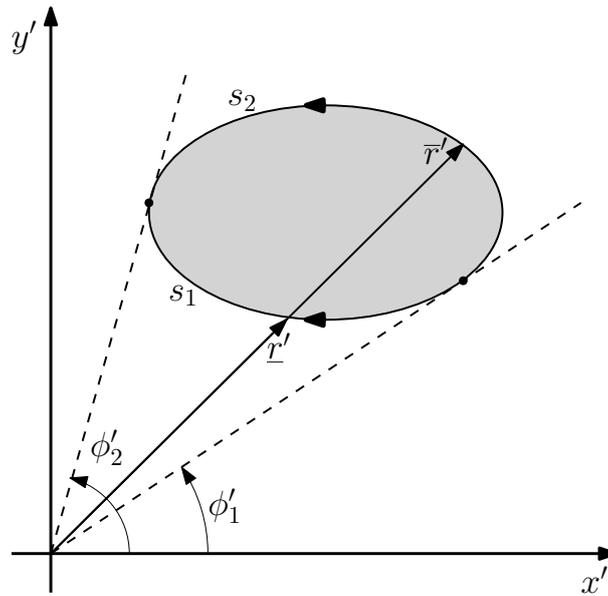


FIGURE 1.10 – Paramétrage lorsque l'origine est à l'extérieur de l'ellipse.

Lorsque l'origine est située à l'intérieur de l'ellipse, on a cette fois, avec le paramétrage de la

Figure 1.11 :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{r}'(\phi)} \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) r' dr' d\phi', \quad (1.59)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-\exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right]_0^{\bar{r}'(\phi)} d\phi', \quad (1.60)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{r}'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right) d\phi', \quad (1.61)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{ellipse}} \left(1 - \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right) d\phi'. \quad (1.62)$$

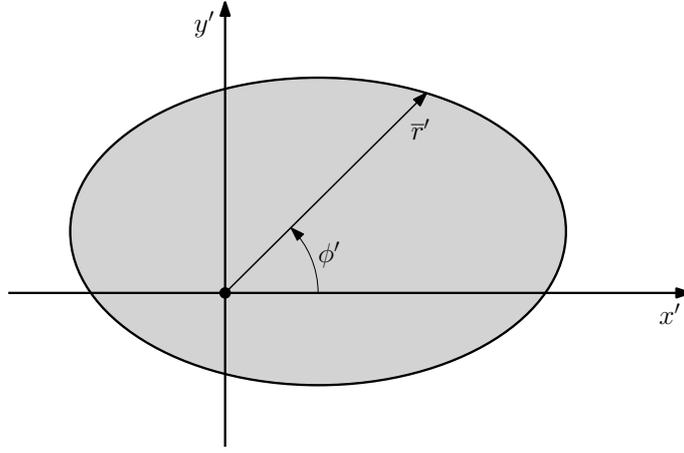


FIGURE 1.11 – Paramétrage lorsque l'origine est à l'intérieur de l'ellipse.

En choisissant $K = 1$ dans (1.58), on a une formule valable dans les deux cas, à savoir :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{ellipse}} \left(1 - \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right) d\phi'. \quad (1.63)$$

L'intégrale curviligne peut ensuite être calculée numériquement à l'aide d'un schéma d'intégration. La méthode proposée dans [88] est la suivante :

$$\oint_{\text{ellipse}} \left(1 - \exp\left(-\frac{r'^2}{2\sigma_x^2}\right) \right) d\phi' = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \exp\left(-\frac{\|\vec{y}_k + \vec{y}_{k+1}\|^2}{4\sigma_x^2}\right) \right) \Delta\phi'_k, \quad (1.64)$$

avec

$$\vec{y}_k = \begin{bmatrix} x'_m + R \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \\ y'_m + R \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \end{bmatrix} \quad \forall k = 0, \dots, N, \quad (1.65)$$

et

$$\Delta\phi'_k = \arcsin\left(\frac{\vec{y}_k \wedge \vec{y}_{k+1}}{\|\vec{y}_k\|_2 \|\vec{y}_{k+1}\|_2}\right) \quad \forall k = 0, \dots, N-1. \quad (1.66)$$

L'intérêt de cette méthode réside essentiellement dans sa relative rapidité d'exécution et dans son extension possible à des objets combinés de formes polygonales [88].

Méthode de Chan

Par rapport au modèle classique du rapprochement rapide décrit dans la Section 1.2.1, Chan [28] fait une hypothèse simplificatrice supplémentaire qui limite fortement le domaine de validité de son résultat, mais présente le mérite d'aboutir à une formule analytique. L'approximation réalisée consiste à remplacer une surface d'intégration par une autre, de même aire, d'où le nom choisi par l'auteur, de méthode des aires équivalentes.

Comme Patera, Chan adopte la formulation d'une intégrale sur un domaine elliptique, obtenue par dilatation d'une des coordonnées. Plus précisément, le changement de variables est le suivant :

$$(x, y) \mapsto (x'', y'') = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x} x, y \right). \quad (1.67)$$

La probabilité \mathcal{P}_c est donc ramenée à l'intégrale d'une fonction gaussienne isotrope sur l'intérieur d'une ellipse centrée à l'origine :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2} \iint_{\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}x''^2 + y''^2 \leq R^2} \exp\left(-\frac{(x'' - x''_m)^2 + (y'' - y''_m)^2}{2\sigma_y^2}\right) dx'' dy''. \quad (1.68)$$

L'approximation réalisée alors par Chan consiste à remplacer la surface d'intégration elliptique par un disque de même aire. Plus précisément, on remplace l'ellipse par le cercle de même centre et de rayon $\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} R$ (voir Figure 1.12).

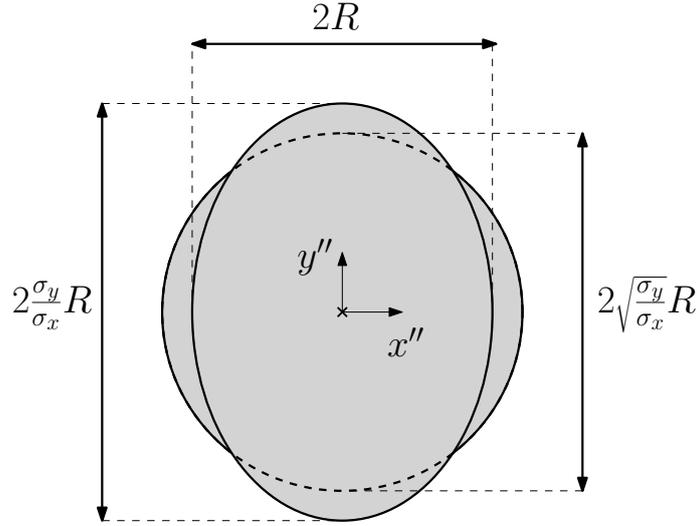


FIGURE 1.12 – Approximation de l'ellipse par un disque de même aire.

Cela donne :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2} \iint_{\mathcal{B}_2(0, \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} R)} \exp\left(-\frac{(x'' - x''_m)^2 + (y'' - y''_m)^2}{2\sigma_y^2}\right) dx'' dy''. \quad (1.69)$$

On est donc ramené à calculer l'intégrale sur un disque centré sur l'origine d'une fonction gaussienne isotrope (cf. Figure 1.13). Chan propose alors une formule analytique pour cette quantité, obtenue à l'aide d'une fonction modifiée de Bessel.

Pour continuer, on introduit les coordonnées polaires (r'', ϕ'') . A partir de celles-ci, on réalise le changement de variables suivant :

$$(x'', y'') = (r'' \cos(\phi'' - \phi''_m), r'' \sin(\phi'' - \phi''_m)). \quad (1.70)$$

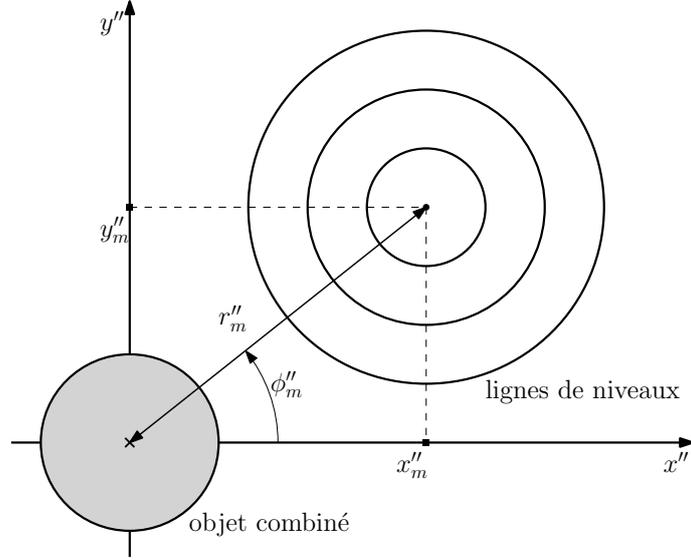


FIGURE 1.13 – Configuration géométrique simplifiée de Chan.

La formule (1.69) s'écrit alors :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2} \int_0^{\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}R} \int_0^{2\pi} r'' \exp\left(-\frac{r''^2 + r_m''^2 - 2r''r_m'' \cos(\phi'')}{2\sigma_y^2}\right) d\phi'' dr''. \quad (1.71)$$

Cela revient à placer le pic de la fonction gaussienne sur l'axe des abscisses. Cette expression peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c &= \frac{1}{2\pi\sigma_y^2} \int_0^{\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}R} \int_0^{2\pi} r'' \exp\left(-\frac{r''^2 + r_m''^2 - 2r''r_m'' \cos(\phi'')}{2\sigma_y^2}\right) d\phi'' dr'', \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_y^2} \int_0^{\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}R} r'' \exp\left(-\frac{r''^2 + r_m''^2}{2\sigma_y^2}\right) \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{r_m'' r'' \cos(\phi'')}{\sigma_y^2}\right) d\phi'' dr''. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Une partie de l'intégrande peut être exprimée à l'aide de la fonction modifiée de Bessel de type 1 d'ordre 0, que l'on notera \mathcal{I}_0 [1] :

$$\mathcal{I}_0(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(a \cos(\phi'')) d\phi''. \quad (1.73)$$

Notons que l'on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp(a \cos(\phi'')) d\phi'' &= \int_0^\pi \exp(a \cos(\phi'')) d\phi'' + \int_\pi^{2\pi} \exp(a \cos(\phi'')) d\phi'', \\ &= \pi \mathcal{I}_0(a) + \int_0^\pi \exp(a \cos(\phi^{(3)})) d\phi^{(3)}, \end{aligned} \quad (1.74)$$

$$= 2\pi \mathcal{I}_0(a). \quad (1.75)$$

En prenant $a = \frac{r_m'' r''}{\sigma_y^2}$, il vient :

$$\mathcal{P}_c = \int_0^{\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}R} \frac{r''}{\sigma_y^2} \exp\left(-\frac{r''^2 + r_m''^2}{2\sigma_y^2}\right) \mathcal{I}_0\left(\frac{r_m'' r''}{\sigma_y^2}\right) dr''. \quad (1.76)$$

L'intégrande dans l'équation précédente définit une distribution dite ricienne [82, 102]. Posons maintenant :

$$v = \frac{x_m^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_m^2}{\sigma_y^2}, \quad (1.77)$$

de sorte que :

$$\mathcal{P}_c = \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \int_0^{\sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}} R} \frac{r''}{\sigma_y^2} \exp\left(-\frac{r''^2}{2\sigma_y^2}\right) \mathcal{I}_0\left(\frac{r''_m r''}{\sigma_y^2}\right) dr''.$$

Dans l'intégrale, on effectue le changement de variables $r'' \mapsto \eta$ défini de la manière suivante :

$$\sqrt{\eta} = \frac{r''_m r''}{\sigma_y^2}. \quad (1.78)$$

permettant d'obtenir :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2v} \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \int_0^{uv} \exp\left(-\frac{\eta}{2v}\right) \mathcal{I}_0(\sqrt{\eta}) d\eta, \quad (1.79)$$

avec :

$$u = \frac{R^2}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (1.80)$$

Or, la fonction \mathcal{I}_0 peut être développée en série [123] comme :

$$\mathcal{I}_0(\sqrt{\eta}) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\eta^m}{4^m (m!)^2}, \quad (1.81)$$

d'où :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2v} \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \int_0^{uv} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\eta^m}{4^m (m!)^2} \exp\left(-\frac{\eta}{2v}\right) d\eta.$$

La série qui apparaît dans l'intégrale est absolument convergente. Ainsi, on peut inverser les symboles de la somme et de l'intégrale :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{2v} \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{4^m (m!)^2} \int_0^{uv} \eta^m \exp\left(-\frac{\eta}{2v}\right) d\eta.$$

Les intégrales $J_m = \int_0^{uv} \eta^m \exp\left(-\frac{\eta}{2v}\right) d\eta$ peuvent être calculées analytiquement. En effet, en intégrant par parties, il est possible d'établir la relation de récurrence suivante :

$$J_m = 2vmJ_{m-1} - 2v(uv)^m \exp\left(-\frac{u}{2}\right). \quad (1.82)$$

Puisque $J_0 = 2v(1 - \exp\left(-\frac{u}{2}\right))$, on aboutit à la formule générale :

$$J_m = m!(2v)^{m+1} \left(1 - \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \sum_{k=0}^m \frac{u^k}{2^k k!}\right). \quad (1.83)$$

On obtient alors la formule finale de Chan :

$$\mathcal{P}_c = \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{v^m}{2^m m!} \left(1 - \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \sum_{k=0}^m \frac{u^k}{2^k k!}\right). \quad (1.84)$$

Dans la pratique, on ne calcule qu'une somme partielle, ce que Chan propose de faire de manière récursive. Dans son livre [28], il préconise les valeurs suivantes pour le nombre M de termes :

$$M = 3 \quad \text{pour} \quad u \leq 0.01 \quad \text{ou} \quad v \leq 1,$$

$$\begin{aligned}
M &= 10 && \text{pour } 0.01 < u \leq 1 \quad \text{ou} \quad 1 < v \leq 9, \\
M &= 20 && \text{pour } 1 < u \leq 25 \quad \text{ou} \quad 9 < v \leq 25, \\
M &= 60 && \text{autrement.}
\end{aligned}$$

Les termes de la série étant positifs, toute troncature à l'ordre M permet d'obtenir une approximation par valeur inférieure de la série. De plus, on peut borner l'erreur commise T_M en majorant le reste. Les troncatures au premier ordre (1.85) et au deuxième ordre (1.87), données ci-dessous, sont particulièrement intéressantes car leurs expressions restent relativement simples.

Au premier ordre :

$$\mathcal{P}_c = \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\right) + T_1, \quad (1.85)$$

avec

$$T_1 < \frac{1}{8}u^2v \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \exp\left(\frac{uv}{4}\right). \quad (1.86)$$

Au second ordre :

$$\mathcal{P}_c = \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \left(\left(1 - \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\right) + \frac{v}{2} \left(1 - \left(1 + \frac{u}{2}\right) \exp\left(-\frac{u}{2}\right)\right)\right) + T_2, \quad (1.87)$$

avec

$$T_2 < \frac{1}{128}u^3v^2 \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \exp\left(\frac{uv}{4}\right). \quad (1.88)$$

Il faut toutefois garder à l'esprit qu'il ne s'agit là que de formules approchées de la véritable intégrale qui représente la probabilité de collision. La méthode de Chan n'est exacte que dans le cas où $\sigma_x = \sigma_y$ et aucune indication n'est donnée quant à la quantification de l'erreur commise lors de cette approximation.

1.3 Probabilité de collision instantanée

On s'intéresse dans cette section à la probabilité de collision instantanée à une date donnée, sachant que les incertitudes sur la position relative des deux objets sont supposées comme étant de nature gaussienne.

1.3.1 Modèle et formule intégrale

Pour $t \in \mathcal{J}$, on considère la position relative $\vec{r}(t)$ dans un repère de travail quelconque \mathcal{R}_t et on pose $R^t = \text{Coord}(\vec{r}(t), \mathcal{R}_t)$. La probabilité de collision s'écrit comme l'intégrale de la densité de probabilité ρ_{R^t} sur la boule de rayon R et de centre 0 :

$$\mathcal{P}_c^{\{t\}} = \iiint_{\mathcal{B}_3(0,R)} d\rho_{R^t}. \quad (1.89)$$

On fait l'hypothèse suivante sur la nature des incertitudes.

Hypothèse 6. *Incertitudes de type gaussien.*

On suppose que la variable aléatoire R^t suit une loi multinormale i.e. $\mathbb{R}^t \sim \mathcal{N}_3(\mu_{R^t}, \Sigma_{R^t})$.

Cette hypothèse est vérifiée par exemple lorsque les incertitudes à l'instant initial sont supposées de type gaussien et que les dynamiques respectives des deux objets sont linéaires en la variable d'état.

D'après l'Hypothèse 6, on peut écrire :

$$\mathcal{P}_c^{\{t\}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \det(\Sigma_{R^t})^{1/2}} \iiint_{\mathcal{B}_3(0,R)} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{r} - \mu_{R^t})^T \Sigma_{R^t}^{-1} (\vec{r} - \mu_{R^t})\right) d\vec{r}, \quad (1.90)$$

Dans la suite de la section, la dépendance en t de la probabilité de collision instantanée est omise. On notera simplement cette dernière \mathcal{P}_c , à ne pas confondre avec la quantité de la section précédente.

En effectuant une transformation vers les axes principaux de la matrice de covariance Σ_{R^t} , on peut se ramener à une formule du type :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \prod_{i=1}^3 \sigma_i} \iiint_{\mathcal{B}_3(0,R)} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (1.91)$$

De plus, quitte à ré-indexer les coordonnées, on peut toujours supposer que $\sigma_1 \leq \sigma_i$ pour $i = 2, 3$. Une représentation géométrique dans l'espace des paramètres de l'intégrale est donnée sur la Figure 1.14.

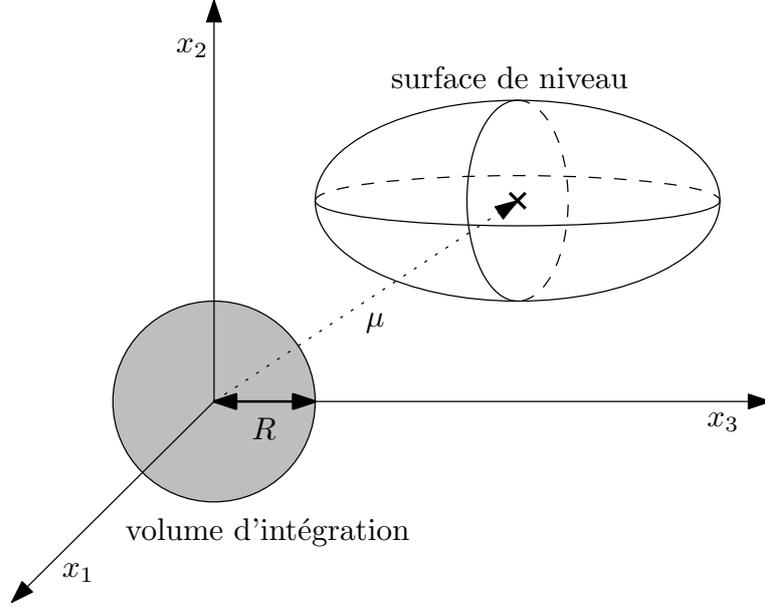


FIGURE 1.14 – Représentation des paramètres de la probabilité instantanée de collision.

Dans la suite, on présente les méthodes permettant le calcul de l'intégrale présente dans l'équation (1.91).

1.3.2 Calcul de la probabilité instantanée

Outre l'intégration numérique pure, Chan présente, dans son livre [28], deux méthodes dédiées au calcul de la probabilité de collision instantanée. Aucune d'entre elles n'est exacte dans le sens où elles reposent sur des formules approchées. La première, celle des Volumes Équivalents, couple une intégration numérique 1-D à la formule 2-D de Chan. La seconde utilise des distributions intermédiaires pour approximer la probabilité à l'aide de la fonction d'erreur, justifiant ainsi le nom de méthode des Distributions Approchées.

Méthode des Volumes Équivalents

Cette méthode est pseudo-analytique dans le sens où elle couple la méthode bidimensionnelle de Chan, basée sur une formule analytique [28], à une intégration numérique sur la troisième dimension. On suppose de plus sans perte de généralité que $\sigma_2 \leq \sigma_3$. Le point de départ consiste à voir la probabilité de collision comme l'intégrale d'une fonction gaussienne isotrope dans deux directions sur un ellipsoïde. Cette formulation s'obtient en effectuant le changement de variables suivant :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x''_1, x''_2, x''_3) = \begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} x_1, x_2, x_3. \quad (1.92)$$

On a alors :

$$\mathcal{P}_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_3} \int_{-R}^{+R} \exp\left(-\frac{(x_3'' - \mu_3)^2}{2\sigma_3^2}\right) \left[\frac{1}{2\pi\sigma_2^2} \iint_{\mathcal{E}(x_3'')} \exp\left(-\frac{(x_1'' - \mu_1)^2 + (x_2'' - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx_1'' dx_2'' \right] dx_3'', \quad (1.93)$$

avec

$$\mathcal{E}(x_3'') = \left\{ (x_1'', x_2'') \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} x_1''^2 + x_2''^2 \leq R^2 - x_3''^2 \right\}. \quad (1.94)$$

L'approximation réalisée alors par Chan consiste, comme en 2-D, à remplacer l'aire elliptique d'intégration en (x_1'', x_2'') par un disque de même aire et de même centre. En posant :

$$I(x_3'') = \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} \iint_{\mathcal{B}_2(0, \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(R^2 - x_3''^2)})} \exp\left(-\frac{(x_1'' - \mu_1)^2 + (x_2'' - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx_1'' dx_2'', \quad (1.95)$$

l'hypothèse de Chan permet d'écrire :

$$\mathcal{P}_c \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_3} \int_{-R}^{+R} \exp\left(-\frac{(x_3'' - \mu_3)^2}{2\sigma_3^2}\right) I(x_3'') dx_3''. \quad (1.96)$$

Dans \mathbb{R}^3 , cela revient à remplacer l'ellipsoïde d'intégration, à l'origine quelconque, par un ellipsoïde de même volume dont les coupes orthogonales selon l'axe x_3'' sont des cercles. Ceci est à l'origine du nom de la méthode.

La quantité I étant une intégrale d'une fonction gaussienne isotrope sur un disque, une expression analytique en a déjà été donnée dans la section précédente :

$$I(x_3'') = \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{v^m}{2^m m!} \left(1 - \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \sum_{k=0}^m \frac{u^k}{2^k k!} \right), \quad (1.97)$$

avec

$$u = \frac{R^2 - x_3''^2}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad (1.98)$$

et

$$v = \frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2}. \quad (1.99)$$

On peut donc calculer \mathcal{P}_c en intégrant numériquement en x_3'' et en évaluant $I(x_3'')$ avec un nombre fini de termes dans (1.97). Puisque le schéma numérique est mono-dimensionnel, cette méthode se révèle bien plus rapide que l'intégration numérique directe en 3-D. Néanmoins, son domaine de validité reste limité du fait de l'approximation géométrique sur laquelle elle repose.

Méthode des Distributions Approchées

Le but est de calculer la probabilité de collision de manière approchée à l'aide d'une série d'approximations successives transformant la loi de distribution de la norme euclidienne d'un vecteur aléatoire gaussien de dimension 3 en une loi normale centrée réduite. L'avantage est que, pour la fonction de répartition de cette dernière, on dispose d'une formule simple faisant intervenir la fonction d'erreur. Les approximations s'effectuent par l'intermédiaire de plusieurs lois de probabilité et l'on considère ainsi successivement les distributions suivantes :

1. Loi multinormale $\mathcal{N}_3((\mu_1, \mu_2, \mu_3), \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2))$;
2. Loi d'une forme quadratique de variables aléatoires gaussiennes ;
3. Loi du chi-deux centrée de degré n' ;
4. Loi normale $\mathcal{N}_1(0, 1)$.

Le passage de 1 à 2 est exact, mais les deux autres (2 vers 3 et 3 vers 4) ne le sont pas. Ces derniers s'obtiennent en égalant les deux ou trois premiers moments des distributions. On peut résumer la méthode de la manière suivante :

$$\mathcal{P}_c = \mathcal{P} \{ \|(X_1, X_2, X_3)\|_2^2 \leq R^2 \} = \mathcal{P} \{ \Psi^2 \leq R^2 \} \simeq \mathcal{P} \{ \Phi^2 \leq \phi^2 \} \simeq \mathcal{P} \{ T \leq \tau \}, \quad (1.100)$$

où $X_1, X_2, X_3, \Psi, \Phi, T$ sont des variables aléatoires et ϕ, τ des scalaires définis dans la suite. Un historique détaillé des développements techniques associés à cette approche est présenté dans le chapitre 14 du livre de Chan [28]. L'Annexe A contient un rappel des éléments de base associés aux distributions du χ^2 centrée et non centrée.

La première égalité dans l'équation (1.100) s'établit de manière relativement directe et ne nécessite pas d'approximation. En effet, on cherche à évaluer la probabilité pour que la distance $\|(X_1, X_2, X_3)\|_2$ au carré soit inférieure à R^2 , où les variables aléatoires $X_i \sim \mathcal{N}_1(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i = 1, 2, 3$) sont indépendantes. En notant $\Psi^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, on a directement $\mathcal{P}_c = \mathcal{P} \{ \Psi^2 \leq R^2 \}$. Ce changement de variables proposé dans l'annexe de la référence [94] est intéressant car l'on sait calculer la fonction caractéristique (et donc la fonction génératrice des moments) de Ψ^2 . Contrairement à ce qui est indiqué par Chan dans le chapitre 14 de son livre [28], cette dernière ne suit pas une loi du χ^2 non centrée, mais une loi plus générale, celle d'une norme euclidienne de variables de Gauss indépendantes. Caractériser cette distribution est un problème difficile et le chapitre 26 de la référence [53] lui est entièrement dédié en utilisant la fonction caractéristique. Ainsi, la fonction génératrice des moments de Ψ^2 est donnée par :

$$s \mapsto \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i^2 s}{1+2s\sigma_i^2}\right)}{\prod_{i=1}^3 \sqrt{1+2s\sigma_i^2}}, \quad (1.101)$$

permettant d'obtenir les trois premiers moments de Ψ^2 :

$$m_1 = \sum_{j=1}^3 (\sigma_j^2 + \mu_j^2), \quad (1.102)$$

$$m_2 = 2 \sum_{j=1}^3 (\sigma_j^4 + 2\sigma_j^2 \mu_j^2), \quad (1.103)$$

$$m_3 = 8 \sum_{j=1}^3 (\sigma_j^6 + 3\sigma_j^4 \mu_j^2). \quad (1.104)$$

L'étape suivante consiste à remplacer Ψ^2 par une variable aléatoire Φ^2 suivant une loi du chi-deux centrée. Le degré n' de cette dernière est choisi de manière à ce que les distributions soient les mêmes jusqu'à l'ordre 3. Plus précisément, on veut que l'égalité suivante :

$$\frac{\Psi^2 - m_1}{\sqrt{m_2}} = \frac{\Phi^2 - n'}{\sqrt{2n'}} \quad (1.105)$$

soit vérifiée en ce qui concerne les trois premiers moments. L'équation (1.105) étant centrée et normalisée, les deux premiers moments de chaque côté du signe égal sont automatiquement les mêmes (0 pour la moyenne et 1 pour la variance). En ce qui concerne le moment d'ordre 3, on obtient pour le membre de gauche $\frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$ et pour celui de droite $\frac{8n'}{\sqrt{8n'^3}} = \sqrt{\frac{8}{n'}}$. On en déduit le degré de Φ^2 :

$$n' = \frac{8m_3^3}{m_2^3}. \quad (1.106)$$

À l'issue de cette substitution, la probabilité de collision est donc approximée par $\mathcal{P} \{ \Phi^2 \leq \phi^2 \}$ où Φ^2 suit une loi du chi-deux centrée dont le degré n' est donné par l'équation (1.106). On récupère

la valeur de ϕ en injectant R dans (1.105) :

$$\phi^2 = n' + \sqrt{\frac{2n'}{m_2}}(R^2 - m_1). \quad (1.107)$$

La dernière étape consiste à substituer à la loi du chi-deux centrée de degré n' une loi normale centrée réduite. En d'autres termes, on considère que $\mathcal{P}\{\Phi^2 \leq \phi^2\} \simeq \mathcal{P}\{T \leq \tau\}$ avec $T \sim \mathcal{N}_1(0, 1)$. Cette approximation porte le nom de transformation de Wilson-Hilferty [126] et se base sur la formule approchée suivante :

$$T = \frac{\left(\frac{\Phi^2}{n'}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{2}{9n'}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9n'}}}. \quad (1.108)$$

La valeur de τ est obtenue en injectant ϕ dans (1.108) :

$$\tau = \frac{\left(\frac{\phi^2}{n'}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{2}{9n'}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9n'}}}. \quad (1.109)$$

Finalement, on a approché la probabilité de collision de la façon suivante :

$$\mathcal{P}_c \simeq \mathcal{P}\{T \leq \tau\}, \quad (1.110)$$

où $T \sim \mathcal{N}_1(0, 1)$ et τ est donné par l'équation (1.109). Cette nouvelle probabilité peut être calculée à l'aide de la fonction d'erreur, permettant ainsi d'obtenir la formule finale :

$$\mathcal{P}_c \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right). \quad (1.111)$$

Cette méthode s'avère très rapide, mais également peu précise du fait de la double approximation. Un autre avantage est le fait qu'elle peut se généraliser en dimension supérieure.

Conclusion

Outre la présentation générale du modèle probabiliste de collision, ce chapitre se focalise sur deux grandeurs en particulier. D'une part, la probabilité de collision en rapprochement rapide, et d'autre part, la probabilité de collision instantanée. Dans les deux cas, le risque peut s'écrire sous la forme d'une intégrale gaussienne sur une boule euclidienne, en dimension respectivement 2 et 3. Dans le cas 2-D, la littérature fait état de quatre méthodes spécifiques de calcul, classables en deux catégories : celles basées sur un schéma d'intégration numérique et celle basée sur une formule analytique faisant intervenir une série entière. Cette dernière, développée par Chan [27], est une approximation de la véritable intégrale. Elle peut être couplée à une intégration numérique 1-D pour traiter le cas tridimensionnel (cf. [28]). La nouvelle méthode de calcul, présentée dans le chapitre suivant, est elle aussi basée sur une formule analytique qui s'avère, dans le cas bidimensionnel, être une généralisation rigoureuse de celle de Chan.

Chapitre 2

Nouvelle méthode de calcul de la probabilité de collision

Introduction

Ce chapitre présente la méthode développée au cours de la thèse pour le calcul de la probabilité de collision dans deux cas spécifiques : probabilité de collision en rapprochement rapide et probabilité de collision instantanée. Ces deux quantités ne sont rien d'autre que des intégrales d'une fonction gaussienne sur une boule euclidienne en dimension respectivement 2 et 3. La nouvelle méthode proposée ici consiste à calculer cette intégrale à l'aide d'une série convergente à termes positifs. Elle se situe au croisement de deux théories. D'une part, la transformée de Laplace, qui permet d'obtenir des développements en série entière. D'autre part, les fonctions holonomes, qui représentent l'ensemble des séries entières dont les suites correspondantes vérifient une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en la variable entière [109]. La Section 2.1 introduit les idées et les outils nécessaires à la mise en place de la méthode. La Section 2.2 décrit en détail le cas 2-D dans un contexte de calcul certifié et fournit notamment un encadrement analytique du risque de collision, très utile d'un point de vue de l'analyse mission. De plus, la preuve est donnée que la formule à la base de la nouvelle méthode est la version exacte de celle approchée de Chan [28]. Enfin, la Section 2.3 étend la méthode à la dimension 3. Dans chaque cas, des exemples numériques viennent illustrer l'efficacité des algorithmes. La version 2-D de la méthode a déjà fait l'objet d'une publication [113] et la 3-D a été introduite dans [112].

2.1 Principe de la méthode

Le but est de calculer une probabilité de collision qui a la forme d'une intégrale gaussienne multivariée sur une boule euclidienne ((1.28) en dimension 2 pour les rencontres rapides et (1.91) en dimension 3 pour la probabilité instantanée). Comme indiqué dans le Chapitre 1, ces deux problèmes constituent des cas particuliers d'une thématique plus générale dans laquelle l'on s'intéresse à la caractérisation statistique de la distribution d'une fonction quadratique définie positive de N variables aléatoires conjointement normalement distribuées, centrées ou non centrées [59], [60]. Ce problème est équivalent à calculer la mesure probabiliste d'une sphère non centrée sous une distribution normale multivariée centrée et d'écart-types fixés [108]. Par exemple, avec les notations de cette dernière référence, calculer (1.28) revient à calculer $H_{2,A,b}(t)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\frac{x_m}{\sigma_x} \\ -\frac{y_m}{\sigma_y} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

L'idée de base de la méthode proposée dans ce chapitre consiste à calculer (1.28) ou (1.91) à l'aide d'une série entière. Cette idée n'est pas complètement nouvelle puisque nous l'avons retrouvée dans les références [104] et [86] (série entière alternée pour le cas où les variables aléatoires suivent une loi normale réduite), [116] pour le cas non centré, [108] pour le cas centré mais avec une forme quadratique non homogène et où la probabilité est calculée comme un développement de distributions χ^2 ou χ^2 non centrale, [59] et [60] enfin, qui synthétisent les résultats précédents dans le cas centré et non centré, tout en proposant une méthode générale de dérivation des représentations de la probabilité en diverses séries. La méthode développée indépendamment dans ce mémoire (nous avons pris connaissance de ces références lors de sa rédaction) est très semblable à l'approche générale développée par Kotz et ses co-auteurs et la généralise, tout en portant une attention particulière aux aspects de calcul numérique qui étaient un peu négligés par les références [59] et [60]. Elle a pour origine les travaux de [62] où est traité le calcul de plusieurs catégories d'intégrales gaussiennes définies sur un ensemble S (polyèdre convexe ou ellipsoïde) en dimension arbitraire. Nous résumons maintenant les principales phases et outils de la méthode générale proposée, avant de revenir sur les relations étroites avec la méthode de Kotz.

1. Vues comme des fonctions de répartition, les probabilités de collision données par les équations (1.28) ou (1.91) peuvent être reformulées comme des fonctions $h(\zeta)$ avec $\zeta = R^2$ pour lesquelles la transformée de Laplace $\mathcal{L}h(\lambda)$ peut être calculée analytiquement. Cette dernière fonction complexe est alors développée en série de Laurent.

3. L'inverse de la transformée de Laplace (aussi connue comme la transformée de Borel de la suite des coefficients de la série de $\mathcal{L}h(\lambda)$) est appliquée terme à terme. Cela est justifié rigoureusement par des résultats d'analyse complexe [125] ou [124, Chap. 2.14] et permet d'obtenir un développement en série entière de l'intégrale initiale.
4. Une forme simple des coefficients de la série est fournie en montrant qu'ils satisfont une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en la variable entière et en se fondant sur la théorie et les propriétés des fonctions D-finies (ou holonomes [129, 109], cf. Annexe B). Les fonctions D-finies sont des fonctions satisfaisant une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. Un exemple élémentaire est la fonction exponentielle sur \mathbb{C} , puisque $\exp'(z) = 1 \cdot \exp(z)$. De telles fonctions peuvent être développées en série entière dont les coefficients sont P-récursifs (satisfaisant une récurrence linéaire avec des termes polynomiaux [120]). Afin de manipuler les fonctions D-finies/séquences P-récursives, la boîte à outils Gfun de Maple (version 3.65, [110]) a été utilisée.
5. Du point de vue numérique, l'évaluation directe des termes de la série obtenue pour $h(\zeta)$ peut être difficile. En effet, bien que le développement en série entière de $h(\zeta)$ soit convergent, l'évaluation des sommes partielles en précision finie est affectée par le phénomène de compensation (cancellation phenomenon) [43, 29]. En effet, dans certains cas, la série est telle que des coefficients consécutifs de la série, de même ordre de grandeur, changent de signe et se compensent de telle sorte que leur somme, calculée en précision finie, ne contienne que peu de chiffres significatifs corrects. Un exemple très simple est le calcul de $\exp(-z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k!}$ pour $z > 0$ qui est développé dans l'Annexe B. Afin d'empêcher cela, on réalise ce que l'on appelle, selon le lexique des fonctions holonomes, un préconditionnement par une fonction ψ , elle-même D-finie. Au lieu de développer directement la fonction h en série entière, on travaille sur la fonction $\psi \cdot h$. En choisissant judicieusement la fonction de préconditionnement ψ , celle-ci et $\psi \cdot h$ peuvent être évaluées numériquement efficacement. Une méthode permettant un choix judicieux de la fonction de préconditionnement est présentée dans la suite et justifié dans l'Annexe B pour notre cas précis.

Finalement, la formule de la probabilité de collision dans le cas 2D aura la forme suivante :

$$\mathcal{P}_c = \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_x^2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} R^{2(k+1)}, \quad (2.2)$$

où $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite positive obtenue par une récurrence linéaire.

La méthode générale présentée dans [59] et [60] présente de nombreux ingrédients communs avec celle proposée dans ce mémoire : utilisation de la transformée de Laplace pour obtenir un développement en série (entière alternée, de Laguerre et de distributions χ^2 ou χ^2 non centrale), application d'un résultat de convergence absolue de la série dans le plan de Laplace afin de permettre une inversion terme à terme. Toutefois, contrairement à notre méthode, les auteurs imposent un choix *a priori* de la forme de la série conduisant à un calcul numérique de ses coefficients pouvant s'avérer problématique. L'utilisation de la théorie des fonction holonomes et des fonctions entières de type exponentiel permet d'obtenir une série entière à coefficients positifs dont l'évaluation numérique rigoureuse en précision finie sera garantie. De plus, des bornes inférieures et supérieures analytiques peuvent être aisément déduites en fonction de la précision souhaitée. Ces différents points sont maintenant développés dans le cadre des rencontres rapides (dimension 2) dans la Section 2.2 et du calcul de la probabilité de collision instantanée (dimension 3) dans la Section 2.3.

2.2 Modèle de rapprochement rapide

Dans cette section, une expression analytique pour l'intégrale 2-D est obtenue sous la forme d'un produit entre un terme exponentiel et une série entière à coefficients positifs (Théorème 1 et Proposition 1). Ces résultats aboutissent à la mise en œuvre de l'Algorithme 1 de calcul de la probabilité de collision. Le Corollaire 1 et la Proposition 4 permettent de calculer le rang à partir duquel on peut tronquer la série pour obtenir la précision recherchée. Enfin, la Proposition 6 donne la preuve que l'on retrouve la formule de Chan (1.84) dans le cas isotrope, qui est le seul où cette dernière est exacte.

On définit pour la suite les grandeurs suivantes :

$$p = \frac{1}{2\sigma_x^2}, \phi_y = 1 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}, \omega_x = \frac{x_m^2}{4\sigma_x^4}, \omega_y = \frac{y_m^2}{4\sigma_y^4}. \quad (2.3)$$

2.2.1 Nouvelle formule analytique

Le résultat principal de cette section, concernant la probabilité de collision en rapprochement rapide, permet d'exprimer cette dernière à l'aide d'une série convergente.

Théorème 1. *La probabilité de collision en rapprochement rapide s'écrit :*

$$\mathcal{P}_c = \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_x^2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} R^{2(k+1)}, \quad (2.4)$$

où la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la formule linéaire de récurrence d'ordre 4 suivante :

$$\begin{aligned} (k+4)\alpha_{k+4} &= \left(p(2\phi_y + 1)(k+3) + p\left(\frac{\phi_y}{2} + 1\right) + \omega_x + \omega_y\right) \alpha_{k+3} \\ &\quad - p\left(p\phi_y\left(\frac{\phi_y}{2} + 1\right)(2k+5) + \phi_y\left(2\omega_x + \frac{3p}{2}\right) + \omega_x + \omega_y\right) \alpha_{k+2} \\ &\quad + p^2\phi_y\left(p\phi_y\left(k + \frac{5}{2}\right) + 2\omega_x\left(\frac{\phi_y}{2} + 1\right)\right) \alpha_{k+1} - p^3\phi_y^2\omega_x\alpha_k, \end{aligned}$$

et dont les premiers termes sont :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_m^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_m^2}{\sigma_y^2}\right)\right), \\ \alpha_1 &= \alpha_0\left(p\left(\frac{\phi_y}{2} + 1\right) + \omega_x + \omega_y\right), \\ \alpha_2 &= \frac{\alpha_0}{2}\left(\left(p\left(\frac{\phi_y}{2} + 1\right) + \omega_x + \omega_y\right)^2 + p^2\left(\frac{\phi_y^2}{2} + 1\right) + 2p\phi_y\omega_y\right), \\ \alpha_3 &= \frac{\alpha_0}{6}\left(\left(p\left(\frac{\phi_y}{2} + 1\right) + \omega_x + \omega_y\right)^3 + 2\left(p^3\left(\frac{\phi_y^3}{2} + 1\right) + 3p^2\phi_y^2\omega_y\right)\right. \\ &\quad \left.+ 3\left(p\left(\frac{\phi_y}{2} + 1\right) + \omega_x + \omega_y\right)\left(p^2\left(\frac{\phi_y^2}{2} + 1\right) + 2p\phi_y\omega_y\right)\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Démonstration. On commence par introduire la fonction de répartition h de la variable aléatoire $X^2 + Y^2$ où X, Y sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes, respectivement de moyenne x_m, y_m et d'écart-type σ_x, σ_y . Ainsi, $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}\{X^2 + Y^2 \leq R^2\} = h(R^2)$. La probabilité de collision est donc vue comme une fonction de la variable R^2 .

La fonction h vérifie $h = 0$ sur \mathbb{R}^- et pour $\zeta > 0$:

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_{\mathbb{B}_2(0, \sqrt{\zeta})} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-x_m)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-y_m)^2}{\sigma_y^2}\right)\right) dx dy. \quad (2.6)$$

Dans la suite, il est préférable d'écrire h à l'aide de la fonction indicatrice $\mathbf{1}$:

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\mathbb{B}_2(0, \sqrt{\zeta})}(x, y) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-x_m)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-y_m)^2}{\sigma_y^2}\right)\right) dx dy. \quad (2.7)$$

Calculons maintenant la transformée de Laplace de h . Cette étape permettra ensuite de déduire la transformée de la fonction préconditionnée. Par définition, on a :

$$\mathcal{L}h(\lambda) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda\zeta) h(\zeta) d\zeta. \quad (2.8)$$

Par un argument de Fubini, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}h(\lambda) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\tilde{B}_2(0,\sqrt{\zeta})}(x,y) \exp\left(-\lambda\zeta - \frac{(x-x_m)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_m)^2}{2\sigma_y^2}\right) d\zeta dx dy, \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_{x^2+y^2}^{+\infty} \exp\left(-\lambda\zeta - \frac{(x-x_m)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_m)^2}{2\sigma_y^2}\right) d\zeta dx dy, \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{-\exp(-\lambda\zeta)}{\lambda}\right]_{x^2+y^2}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_m)^2}{2\sigma_y^2}\right) dx dy, \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\lambda} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\lambda x^2 - \frac{(x-x_m)^2}{2\sigma_x^2} - \lambda y^2 - \frac{(y-y_m)^2}{2\sigma_y^2}\right) dx dy. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Grâce aux propriétés de l'exponentielle, l'intégrale double est égale au produit de deux intégrales simples respectivement en x et y . Considérons maintenant uniquement la partie en x . On effectue le changement de variables suivant :

$$u = \sqrt{\lambda + \frac{1}{2\sigma_x^2}} \left(x - \frac{x_m}{2\lambda\sigma_x^2 + 1}\right), \tag{2.10}$$

Cela conduit à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(\lambda + \frac{1}{2\sigma_x^2}\right)x^2 + \frac{x_m}{\sigma_x^2}x - \frac{x_m^2}{2\sigma_x^2}\right) dx &= \frac{\exp\left(-\frac{\lambda x_m^2}{2\lambda\sigma_x^2 + 1}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_x \sqrt{\lambda + \frac{1}{2\sigma_x^2}}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-u^2) du, \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\lambda x_m^2}{2\lambda\sigma_x^2 + 1}\right)}{\sqrt{\pi} \sqrt{2\lambda\sigma_x^2 + 1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du, \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{\lambda x_m^2}{2\lambda\sigma_x^2 + 1}\right)}{\sqrt{2\lambda\sigma_x^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

L'intégrale en y donne un résultat similaire, d'où finalement :

$$\mathcal{L}h(\lambda) = \frac{\exp\left(-\lambda\left(\frac{x_m^2}{2\lambda\sigma_x^2 + 1} + \frac{y_m^2}{2\lambda\sigma_y^2 + 1}\right)\right)}{\lambda\sqrt{2\lambda\sigma_x^2 + 1}\sqrt{2\lambda\sigma_y^2 + 1}}. \tag{2.11}$$

On opère maintenant le préconditionnement à proprement parler. Au lieu de manipuler h , on définit par son intermédiaire la fonction \tilde{h} :

$$\tilde{h}(\zeta) = \exp(p\zeta) h(\zeta), \tag{2.12}$$

où p est donné dans l'équation (2.3). On a très simplement $\mathcal{P}_c = \exp(-pR^2)\tilde{h}(R^2)$. La transformée de Laplace de \tilde{h} peut être obtenue directement à partir de celle de h . En effet, par les propriétés de la transformée de Laplace, on a $\mathcal{L}\tilde{h}(\lambda) = \mathcal{L}h(\lambda - p)$. En utilisant les notations définies précédemment (équation (2.3)), il vient :

$$\mathcal{L}\tilde{h}(\lambda) = \frac{\alpha_0 \exp\left(\frac{\omega_x}{\lambda} + \frac{\omega_y}{\lambda - p\phi_y}\right)}{(\lambda - p)\sqrt{\lambda(\lambda - p\phi_y)}}. \tag{2.13}$$

La fonction $\mathcal{L}\tilde{h}$ est une fonction complexe analytique pour $|\lambda| > p$ (cf. Figure 2.1), avec trois singularités isolées : 1 pôle en p et deux singularités essentielles en 0 et $p\phi_y$.

La fonction $\mathcal{L}\tilde{h}$ peut donc être représentée par une série de Laurent en 0, convergente sur le domaine $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > p\}$. Pour obtenir celle-ci, du fait de l'analyticité de $\mathcal{L}\tilde{h}$ à l'infini, il est possible

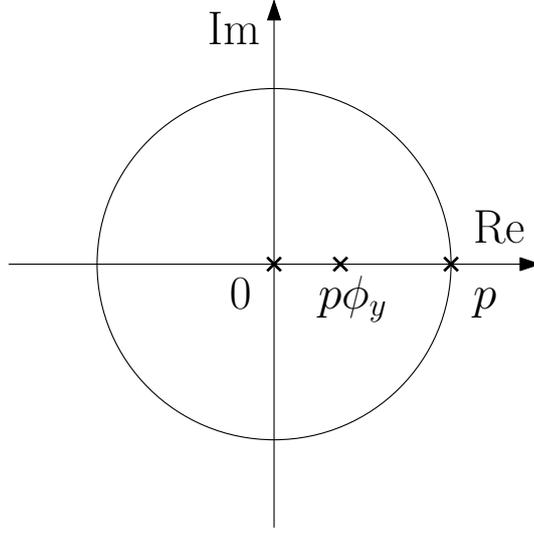


FIGURE 2.1 – Singularités de la fonction $\mathcal{L}\tilde{h}$ dans le plan complexe.

de calculer son développement de Taylor à l'infini. Pour cela, on considère le développement en série entière en 0 de :

$$\hat{\mathcal{L}}\tilde{h}(\lambda) = \lambda^{-2}\mathcal{L}\tilde{h}(\lambda^{-1}), \quad (2.14)$$

$$= \frac{\alpha_0 \exp\left(\omega_x \lambda - \frac{\omega_y}{p\phi_y} - \frac{\omega_y}{p\phi_y(p\phi_y\lambda-1)}\right)}{(1-p\lambda)\sqrt{1-p\phi_y\lambda}}. \quad (2.15)$$

La division par λ^2 est purement technique et vient du fait que les deux premiers termes de la série de Taylor de $\mathcal{L}\tilde{h}(\lambda^{-1})$ sont nuls.

Un calcul direct montre que $\hat{\mathcal{L}}\tilde{h}$ vérifie :

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}\tilde{h}}{d\lambda}(\lambda) = \varphi(\lambda)\hat{\mathcal{L}}\tilde{h}(\lambda), \quad \hat{\mathcal{L}}\tilde{h}(0) = \alpha_0, \quad (2.16)$$

où :

$$\varphi(\lambda) = \omega_x - \frac{p\phi_y}{2(p\phi_y\lambda-1)} - \frac{p}{p\lambda-1} + \frac{\omega_y}{(p\phi_y\lambda-1)^2}. \quad (2.17)$$

Ainsi, $\hat{\mathcal{L}}\tilde{h}(\lambda)$ est une fonction holonome et peut être développée en $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \lambda^k$, pour tout $\{\lambda : |\lambda| < \frac{1}{p}\}$. En conséquence, la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire dont la formule est obtenue à l'aide de Gfun.

$$\mathcal{L}\tilde{h}(\lambda) = \lambda^{-2}\hat{\mathcal{L}}\tilde{h}(\lambda^{-1}), \quad (2.18)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \lambda^{-(k+2)}. \quad (2.19)$$

On applique ensuite la transformée de Laplace inverse terme à terme sur la série (2.19) [125, Chap. 9], [124, Chap. 2.14]. Or, la transformée inverse de $\lambda \mapsto \lambda^{-(n+1)}$ est $\zeta \mapsto \frac{1}{n!}\zeta^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On obtient donc au final :

$$\tilde{h}(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} \zeta^{k+1}. \quad (2.20)$$

□

La proposition qui suit montre tout l'intérêt du preconditionnement choisi. En effet, sa conséquence immédiate est que la série entière intervenant dans la probabilité de collision est à termes positifs.

Proposition 1. La suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs i.e. :

$$\alpha_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Démonstration. Puisque $\varphi(\lambda)$ est une fraction rationnelle, on peut calculer son développement en série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k \lambda^k$ de manière analytique (à la main ou en utilisant par exemple ratpolytocoeff avec Gfun) :

$$\varphi_k = p^{k+1} \left(1 + \phi_y^k \left(\frac{(k+1)\omega_y}{p} + \frac{\phi_y}{2} \right) \right) + \begin{cases} \omega_x, & k = 0 \\ 0, & k > 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

On voit clairement que $\varphi_k > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En injectant les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k \lambda^k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \lambda^k$ dans l'équation différentielle (2.16) et en identifiant les coefficients devant λ^k un à un, on obtient :

$$(k+1)\alpha_{k+1} = \sum_{i=0}^k \varphi_i \alpha_{k-i}. \quad (2.23)$$

Puisque $\alpha_0 > 0$, on démontre, par une récurrence immédiate, que $\alpha_k > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. \square

Du Théorème 1 peut être déduit un algorithme permettant de calculer une approximation par valeur inférieure de la probabilité de collision. Il consiste à calculer par récurrence une somme partielle de la série entière puis à la diviser par le préconditionneur. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la somme partielle :

$$S_n = \exp(-pR^2) \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{(k+1)!} R^{2(k+1)}. \quad (2.24)$$

On pose également, pour $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \frac{\alpha_k}{(k+1)!} R^{2(k+1)}$, de sorte que $S_n = \exp(-pR^2) \sum_{k=0}^n c_k$.

Algorithme 1. Évaluation de la probabilité de collision avec n termes.

Entrées :

- $x_m, y_m, R \in \mathbb{R}$;
- $\sigma_x \leq \sigma_y \in \mathbb{R}_*^+$;
- $n \in \mathbb{N}$.

Sortie : $S_n = \exp(-pR^2) \sum_{k=0}^n c_k$.

$$p := \frac{1}{2\sigma_x^2} ; \phi_y := 1 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} ; \omega_x := \frac{x_m^2}{4\sigma_x^4} ; \omega_y := \frac{y_m^2}{4\sigma_y^4} ;$$

$$\alpha_0 := \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_m^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_m^2}{\sigma_y^2}\right)\right) ;$$

$$c_0 := \alpha_0 R^2 ; c_1 := \frac{\alpha_0 R^4}{2} \left(p \left(\frac{\phi_y}{2} + 1 \right) + \omega_x + \omega_y \right) ;$$

$$c_2 := \frac{\alpha_0 R^6}{12} \left(\left(p \left(\frac{\phi_y}{2} + 1 \right) + \omega_x + \omega_y \right)^2 + p^2 \left(\frac{\phi_y^2}{2} + 1 \right) + 2p\phi_y\omega_y \right) ;$$

$$c_3 := \frac{\alpha_0 R^8}{144} \left(\left(p \left(\frac{\phi_y}{2} + 1 \right) + \omega_x + \omega_y \right)^3 + 2 \left(p^3 \left(\frac{\phi_y^3}{2} + 1 \right) + 3p^2\phi_y^2\omega_y \right) \right. \\ \left. + 3 \left(p \left(\frac{\phi_y}{2} + 1 \right) + \omega_x + \omega_y \right) \left(p^2 \left(\frac{\phi_y^2}{2} + 1 \right) + 2p\phi_y\omega_y \right) \right) ;$$

Pour $k = 0$ à $n - 5$

$$c_{k+4} := \frac{R^2 \left(p(2\phi_y+1)(k+3) + p\left(\frac{\phi_y}{2}+1\right) + \omega_x + \omega_y \right)}{(k+4)(k+5)} c_{k+3} ; \\ - \frac{R^4 p \left(p\phi_y \left(\frac{\phi_y}{2} + 1 \right) (2k+5) + \phi_y (2\omega_x + \frac{3p}{2}) + \omega_x + \omega_y \right)}{(k+4)^2 (k+5)} c_{k+2} \\ + \frac{R^6 p^2 \phi_y \left(p\phi_y \left(k + \frac{5}{2} \right) + 2\omega_x \left(\frac{\phi_y}{2} + 1 \right) \right)}{(k+3)(k+4)^2 (k+5)} c_{k+1} - \frac{R^8 p^3 \phi_y^2 \omega_x}{(k+2)(k+3)(k+4)^2 (k+5)} c_k ;$$

$S_n := 0$;

Pour $k = 0$ à $n - 1$: $S_n \leftarrow S_n + c_k$;

$S_n \leftarrow \exp(-pR^2) S_n$;

2.2.2 Encadrement analytique de l'erreur de troncature

On s'intéresse maintenant à une évaluation certifiée de la probabilité de collision. Pour cela, définissons pour commencer l'erreur réalisée lorsqu'on utilise une somme partielle de la série pour l'évaluer. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$T_n = \exp(-pR^2) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} R^{2(k+1)}. \quad (2.25)$$

Afin de quantifier le reste, on cherche un encadrement de la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Puisque la série fait intervenir un factoriel au dénominateur, il est naturel de chercher à encadrer $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par des suites géométriques, de manière à obtenir des séries minorante et majorante exprimables à l'aide de la fonction exponentielle.

Proposition 2. *On a l'encadrement suivant pour le terme général de la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$:*

$$\underline{\alpha}_k \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k, \quad (2.26)$$

où $\underline{\alpha}_k = \alpha_0 p^k$ et $\bar{\alpha}_k = \alpha_0 p^k \left(1 + \frac{\phi_y}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)^k$.

Démonstration. La démonstration est faite par récurrence. Pour l'initialisation, on a $\underline{\alpha}_0 = \alpha_0 = \bar{\alpha}_0$ et :

$$\underline{\alpha}_1 = \alpha_0 p \leq \alpha_0 p \left(1 + \frac{\phi_y}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) = \alpha_1 = \bar{\alpha}_1. \quad (2.27)$$

Afin de prouver l'hérédité, on remarque d'abord que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\alpha_0 \varphi_i}{\underline{\alpha}_{i+1}} = 1 + \phi_y^i \left(\frac{\omega_y(i+1)}{p} + \frac{\phi_y}{2} \right) \geq 1. \quad (2.28)$$

D'autre part, toujours pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\alpha_0 \varphi_i}{\bar{\alpha}_{i+1}} = \frac{1 + \phi_y^i \left(\frac{\omega_y(i+1)}{p} + \frac{\phi_y}{2} \right)}{\left(1 + \frac{\phi_y}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right)^{i+1}}. \quad (2.29)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} 1 + \phi_y^i \left(\frac{\omega_y(i+1)}{p} + \frac{\phi_y}{2} \right) &\leq 1 + \frac{\omega_y(i+1)}{p} + \frac{\phi_y}{2} \\ &\leq 1 + \frac{(\omega_x + \omega_y)(i+1)}{p} + \frac{\phi_y}{2}(i+1) \\ &\leq \left(1 + \frac{(\omega_x + \omega_y)}{p} + \frac{\phi_y}{2}\right)^{i+1}. \end{aligned}$$

Il apparaît donc que :

$$\frac{\alpha_0 \varphi_i}{\bar{\alpha}_{i+1}} \leq 1. \quad (2.30)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \bar{\alpha}_i$ ($\forall i \leq k$), alors :

$$\sum_{i=0}^n \varphi_i \underline{\alpha}_{k-i} \leq \sum_{i=0}^k \varphi_i \alpha_{k-i} \leq \sum_{i=0}^k \varphi_i \bar{\alpha}_{k-i}. \quad (2.31)$$

Puisque $\underline{\alpha}_{k-i} = \frac{\alpha_0 \underline{\alpha}_{k+1}}{\underline{\alpha}_{i+1}}$ et $\bar{\alpha}_{k-i} = \frac{\alpha_0 \bar{\alpha}_{k+1}}{\bar{\alpha}_{i+1}}$, il vient que :

$$\underline{\alpha}_{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{\alpha_0 \varphi_i}{\underline{\alpha}_{i+1}} \leq \sum_{i=0}^k \varphi_i \alpha_{k-i} \leq \bar{\alpha}_{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{\alpha_0 \varphi_i}{\bar{\alpha}_{i+1}}. \quad (2.32)$$

Ainsi, on obtient :

$$(k+1)\underline{\alpha}_{k+1} \leq \sum_{i=0}^k \varphi_i \alpha_{k-i} \leq (k+1)\bar{\alpha}_{k+1}, \quad (2.33)$$

et la conclusion découle du fait que $(k+1)\alpha_{k+1} = \sum_{i=0}^k \varphi_i \alpha_{k-i} \leq (k+1)$. □

Remarque 4. En posant $\Omega = \frac{\phi_y}{2} + \frac{\omega_x + \omega_y}{p}$, on peut écrire plus simplement le majorant sous la forme $\bar{\alpha}_k = \alpha_0 p^k (1 + \Omega)^k$. L'expression de Ω en fonction des paramètres originaux de la probabilité de collision est :

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \right) + \frac{\sigma_x^2}{2} \left(\frac{x_m^4}{\sigma_x^4} + \frac{y_m^4}{\sigma_y^4} \right). \quad (2.34)$$

Proposition 3. Pour tout ordre $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement de l'erreur :

$$\frac{\alpha_0 \exp(-pR^2)}{p} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(pR^2)^{k+1}}{(k+1)!} \leq T_n \leq \frac{\alpha_0 \exp(-pR^2)}{p(1+\Omega)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(p(1+\Omega)R^2)^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (2.35)$$

Démonstration. En considérant les restes des séries $\sum_k \frac{(\cdot)_k R^{2(k+1)}}{(k+1)!}$ avec $(\cdot) = \underline{\alpha}, \alpha, \bar{\alpha}$, il vient, d'après (2.26) :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha_0 (pR^2)^{k+1}}{p(k+1)!} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha_k R^{2(k+1)}}{(k+1)!} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha_0 (p(1+\Omega)R^2)^{k+1}}{p(1+\Omega)(k+1)!} \quad (2.36)$$

On obtient ensuite le résultat en multipliant la dernière équation par $\exp(-pR^2)$. □

2.2.3 Bornes analytiques pour la probabilité

Le corollaire suivant (Proposition 3 pour $n = 0$) fournit un encadrement analytique de la probabilité.

Corollaire 1. La probabilité de collision satisfait :

$$l_0 \leq \mathcal{P}_c \leq u_0, \quad (2.37)$$

où

$$l_0 = \frac{\alpha_0 (1 - \exp(-pR^2))}{p}, \quad (2.38)$$

et

$$u_0 = \frac{\alpha_0 (\exp(p\Omega R^2) - \exp(-pR^2))}{p(1+\Omega)}. \quad (2.39)$$

2.2.4 Calcul certifié de la probabilité de collision

Le Corollaire 1 permet d'obtenir de manière immédiate un encadrement de la probabilité de collision. Dans le cas où celui-ci ne serait pas assez précis, on s'intéresse maintenant au problème du calcul garanti de \mathcal{P}_c . Plus précisément, on veut être capable d'évaluer cette dernière pour n'importe quelle précision donnée (en valeur absolue).

Proposition 4. Pour tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement de l'erreur :

$$l_n \leq T_n \leq u_n, \quad (2.40)$$

avec

$$l_n = \frac{\alpha_0 \exp(-pR^2) p^n R^{2(n+1)}}{(n+1)!}, \quad (2.41)$$

et

$$u_n = \frac{\alpha_0 \exp(p\Omega R^2) p^n (1+\Omega)^n R^{2(n+1)}}{(n+1)!}. \quad (2.42)$$

Démonstration. On commence par démontrer un résultat sur le reste de la série exponentielle. Soit $\gamma > 0$. Par positivité des termes, on a immédiatement :

$$\frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\gamma^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (2.43)$$

On obtient la borne l_n en combinant (2.35) avec (2.43) pour $\gamma = pR^2$.

D'autre part, en utilisant le développement de Taylor-Lagrange de l'exponentielle sur $[0, \gamma]$, on a l'existence de $c \in]0, \gamma[$ tel que :

$$\exp(\gamma) = \sum_{k=0}^n \frac{\gamma^k}{k!} + \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c), \quad (2.44)$$

qui se réécrit en :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\gamma^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c). \quad (2.45)$$

De là, il vient :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\gamma^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\gamma). \quad (2.46)$$

La borne u_n est obtenue en combinant (2.35) avec (2.46) pour $\gamma = p(1+\Omega)R^2$. \square

On a donc $\mathcal{P}_c \in [S_{n-1} + l_n, S_{n-1} + u_n]$. En rendant $u_n - l_n$ suffisamment petit, il est ainsi possible de connaître un encadrement aussi précis que l'on veut de la probabilité de collision. La proposition suivante donne un outil pratique pour calculer cet encadrement.

Proposition 5. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'implication :*

$$(n \geq \max(N_1, N_2(\varepsilon)) - 1) \implies (u_n - l_n < \varepsilon), \quad (2.47)$$

$$\text{où } N_1 = 2 \lceil epR^2(1+\Omega) \rceil \text{ et } N_2(\varepsilon) = \left\lceil \log_2 \left(\frac{\alpha_0 \exp(pR^2\Omega - 1/2)}{p^{3/2}\sqrt{4\pi}R(1+\Omega)^{3/2}} \right) \right\rceil.$$

Démonstration. Pour commencer, on remarque que :

$$\begin{aligned} u_n - l_n &= l_n (\exp(pR^2(1+\Omega)) (1+\Omega)^n - 1) \\ &< l_n \exp(pR^2(1+\Omega)) (1+\Omega)^n. \end{aligned} \quad (2.48)$$

D'après l'inégalité de Stirling, on a :

$$l_n \leq \frac{\alpha_0 \exp(-pR^2)(epR^2)^{n+1}}{p\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1}}, \quad (2.49)$$

d'où :

$$u_n - l_n < \left(\frac{epR^2(1+\Omega)}{n+1} \right)^{n+1} \frac{\alpha_0 \exp(pR^2\Omega)}{p\sqrt{2\pi(n+1)}(1+\Omega)}. \quad (2.50)$$

Lorsque $n+1 \geq N_1$, on a comme majoration :

$$u_n - l_n < \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \frac{\alpha_0 \exp(pR^2\Omega)}{p\sqrt{2\pi}N_1(1+\Omega)}, \quad (2.51)$$

$$< \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \frac{\alpha_0 \exp(pR^2\Omega - 1/2)}{p^{3/2}\sqrt{4\pi}R(1+\Omega)^{3/2}}. \quad (2.52)$$

D'autre part, par construction, on a :

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{N_2} \frac{\alpha_0 \exp(pR^2\Omega - 1/2)}{p^{3/2}\sqrt{4\pi}R(1+\Omega)^{3/2}} \leq \varepsilon, \quad (2.53)$$

d'où le résultat pour $n \geq \max(N_1, N_2) - 1$. \square

2.2.5 Comparaison théorique avec la formule de Chan

Un aspect théorique intéressant de la formule analytique (2.4) de la probabilité de collision est que, dans le cas isotrope i.e. $\sigma_x = \sigma_y$, on retrouve la formule de Chan (1.84), comme le montre la proposition suivante :

Proposition 6. *Lorsque $\sigma_x = \sigma_y$, la probabilité de collision vérifie :*

$$\mathcal{P}_c|_{\sigma_x=\sigma_y} = \exp\left(-\frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!} \left(1 - \exp(-pR^2) \sum_{k=0}^m \frac{(pR^2)^k}{k!}\right). \quad (2.54)$$

Démonstration. Si $\sigma_x = \sigma_y$, alors $\phi_y = 0$. Dès lors, la formule de récurrence vérifiée par la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ se simplifie en :

$$(k+2)\alpha_{k+2} = -p(\omega_x + \omega_y)\alpha_k + (p(k+2) + \omega_x + \omega_y)\alpha_{k+1}, \quad (2.55)$$

où α_0 est inchangé et $\alpha_1 = \alpha_0(p + \omega_x + \omega_y)$. La relation (2.55) se réécrit en :

$$(k+2)(\alpha_{k+2} - p\alpha_{k+1}) = (\omega_x + \omega_y)(\alpha_{k+1} - p\alpha_k). \quad (2.56)$$

Cela donne par récurrence immédiate $\alpha_{k+1} - p\alpha_k = \frac{\alpha_0(\omega_x + \omega_y)^{k+1}}{(k+1)!}$, et donc :

$$\alpha_k = \alpha_0 p^k \sum_{m=0}^k \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!}. \quad (2.57)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \exp(pR^2) \mathcal{P}_c|_{\sigma_x=\sigma_y} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k R^{2(k+1)}}{(k+1)!} \\ &= \exp\left(-\frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(pR^2)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{m=0}^k \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!} \\ &= \exp\left(-\frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(pR^2)^{k+1}}{(k+1)!}, \\ &= \exp\left(-\frac{\omega_x + \omega_y}{p}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\omega_x + \omega_y)^m}{p^m m!} \left(\exp(pR^2) - \sum_{k=0}^m \frac{(pR^2)^k}{k!}\right). \end{aligned}$$

Le résultat final s'obtient en multipliant par $\exp(-pR^2)$. □

2.2.6 Résultats numériques

La méthode décrite précédemment a été validée sur plusieurs séries de cas tests, issus de la littérature ou d'alertes réelles envoyées par le JSPoC au partenaire industriel Airbus DS. Les paramètres de chaque exemple sont compilés dans le Tableau 2.1. Les cas "Chan", tirés du chapitre 5 de [28], sont censés être représentatifs de rencontres rapides réalistes. Les CSM (Conjunction Summary Messages) et CDM (Conjunction Data Messages) sont des scénarios réels, issus d'alertes concernant cinq satellites différents. Enfin, "Alfano 3" et "Alfano 5" viennent de la référence [9]. Ces derniers sont des cas numériquement plus difficiles, dans le sens où ils ont été créés pour éprouver les méthodes de calcul.

Cas num.	Paramètres d'entrée (m)				
	σ_y	σ_x	R	y_m	x_m
Chan 1	50	25	5	10	0
Chan 2	50	25	5	0	10
Chan 3	75	25	5	10	0
Chan 4	75	25	5	0	10
Chan 5	3000	1000	10	1000	0
Chan 6	3000	1000	10	0	1000
Chan 7	3000	1000	10	10000	0
Chan 8	3000	1000	10	0	10000
Chan 9	10000	1000	10	10000	0
Chan 10	10000	1000	10	0	10000
Chan 11	3000	1000	50	5000	0
Chan 12	3000	1000	50	0	5000
CSM 1	152.8814468	57.918666	10.3	60.583685	84.875546
CSM 2	5,756.840725	15.988242	1.3	115.055899	-81.618369
CSM 3	643.409272	94.230921	5.3	693.405893	102.177247
CDM 1	6095.858688	445.859950	3.5	644.939441	-752.672701
CDM 2	562.027293	193.454603	13.2	4475.456261	-692.362272
Alfano 3	114.2585190	1.4101830	15	0.1591646	-3.8872073
Alfano 5	177.8109003	0.0373279	10	2.1230067	-1.2217895

TABLE 2.1 – Paramètres d'entrée pour les cas tests.

Dans un premier temps, l'analyse des résultats obtenus montre que l'encadrement analytique de la probabilité de collision permet pour la plupart des cas tests, y compris sur la totalité des alertes réelles, d'obtenir une estimation fine du risque associé à la rencontre. Les résultats numériques sont donnés dans la Table 2.2. Les chiffres soulignés (respectivement surlignés) représentent une sous-estimation (respectivement surestimation) du risque. Concernant les cas de Chan et les scénarios réels, on constate une précision allant de 1 à 5 chiffres significatifs. Pour ce qui est des cas d'Alfano, l'encadrement est très large et ne fournit pas d'information assez fine sur la probabilité de collision, d'où l'utilité de l'Algorithme 1 qui calcule la série tronquée avec autant de termes que l'utilisateur le souhaite.

Cas	l_0	u_0
Chan 1	9.704×10^{-3}	9.775×10^{-3}
Chan 2	9.139×10^{-3}	9.182×10^{-3}
Chan 3	6.542×10^{-3}	6.572×10^{-3}
Chan 4	6.09×10^{-3}	6.13×10^{-3}
Chan 5	1.576561×10^{-5}	1.576576×10^{-5}
Chan 6	1.010860×10^{-5}	1.010881×10^{-5}
Chan 7	6.44304×10^{-8}	6.44323×10^{-8}
Chan 8	3.2145×10^{-27}	3.2186×10^{-27}
Chan 9	3.03258×10^{-6}	3.03261×10^{-6}
Chan 10	9.643×10^{-28}	9.656×10^{-28}
Chan 11	1.03831×10^{-4}	1.03871×10^{-4}
Chan 12	1.518×10^{-9}	1.565×10^{-9}
CSM 1	1.878×10^{-3}	1.900×10^{-3}
CSM 2	2.0101×10^{-11}	2.0557×10^{-11}
CSM 3	7.194×10^{-5}	7.200×10^{-5}
CDM 1	5.3902×10^{-7}	5.3904×10^{-7}
CDM 2	2.2517×10^{-20}	2.2797×10^{-20}

TABLE 2.2 – Minorant l_0 et majorant u_0 de la probabilité de collision calculés à partir du Corollaire 1.

Dans un second temps, l’Algorithme 1 est comparé aux les autres méthodes de la littérature décrites dans la Table 2.2. Cette étude comparative est présentée dans trois tableaux distincts : Table 2.3 (cas tests de Chan), Table 2.4 (alertes réelles) et Table 2.5 (cas tests d’Alfano). Les chiffres en gras représentent les divergences entre les résultats de l’Algorithme 1, exacts pour les chiffres significatifs donnés grâce au calcul certifié, et les autres méthodes. L’ensemble des exemples illustre la Proposition 6 : la méthode de Chan est théoriquement moins précise que l’Algorithme 1, ce qui est flagrant pour les cas d’Alfano. Par rapport aux deux autres méthodes, l’Algorithme 1 s’avère également meilleur, dans une moindre mesure.

Cas de Chan	Probabilité de collision (-)			
	Alfano	Patera	Chan	Algorithme 1
1	9.742×10^{-3}	9.741×10^{-3}	9.754×10^{-3}	9.742×10^{-3}
2	9.181×10^{-3}	9.181×10^{-3}	9.189×10^{-3}	9.181×10^{-3}
3	6.571×10^{-3}	6.571×10^{-3}	6.586×10^{-3}	6.571×10^{-3}
4	6.125×10^{-3}	6.125×10^{-3}	6.135×10^{-3}	6.125×10^{-3}
5	1.577×10^{-5}	1.577×10^{-5}	1.577×10^{-5}	1.577×10^{-5}
6	1.011×10^{-5}	1.011×10^{-5}	1.011×10^{-5}	1.011×10^{-5}
7	6.443×10^{-8}	6.443×10^{-8}	6.443×10^{-8}	6.443×10^{-8}
8	0	3.219×10^{-27}	3.216×10^{-27}	3.219×10^{-27}
9	3.033×10^{-6}	3.033×10^{-6}	3.033×10^{-6}	3.033×10^{-6}
10	0	9.656×10^{-28}	9.645×10^{-28}	9.656×10^{-28}
11	1.039×10^{-4}	1.039×10^{-4}	1.039×10^{-4}	1.039×10^{-4}
12	1.564×10^{-9}	1.564×10^{-9}	1.556×10^{-9}	1.564×10^{-9}

TABLE 2.3 – Comparaison des probabilités de collision pour les cas tests de Chan avec 4 chiffres significatifs.

Cas	Probabilité de collision (-)			
	Alfano	Patera	Chan	Algorithme 1
CSM 1	1.9002×10^{-3}	1.9001×10^{-3}	1.8934×10^{-3}	1.9002×10^{-3}
CSM 2	2.0553×10^{-11}	2.0552×10^{-11}	2.0135×10^{-11}	2.0553×10^{-11}
CSM 3	7.2004×10^{-5}	7.2000×10^{-5}	7.2000×10^{-5}	7.2003×10^{-5}
CDM 1	5.3904×10^{-7}	5.3901×10^{-7}	5.3903×10^{-6}	5.3904×10^{-7}
CDM 2	2.2796×10^{-20}	2.2795×10^{-20}	2.2880×10^{-20}	2.2796×10^{-20}

TABLE 2.4 – Comparaison des probabilités de collision pour les cas réels avec 5 chiffres significatifs.

Cas d’Alfano	Probabilité de collision (-)			
	Alfano	Patera	Chan	Algorithme 1
3	1.0038×10^{-1}	1.0087×10^{-1}	3.1264×10^{-2}	1.0038×10^{-1}
5	4.4712×10^{-2}	4.4520×10^{-2}	1.6618×10^{-77}	4.4509×10^{-2}

TABLE 2.5 – Comparaison des probabilités de collision pour les cas tests d’Alfano avec 5 chiffres significatifs.

En ce qui concerne le nombre de termes n utilisé dans l’Algorithme 1, une analyse des cas réels et de Chan permet de dégager une tendance. Il apparait sur ces exemples, en calculant les valeurs de N_1 et N_2 définis dans la Proposition 5, que 30 termes sont toujours suffisants pour obtenir une erreur absolue sur la probabilité de collision de 10^{-10} et qu’une quinzaine est suffisante pour l’avoir à 10^{-5} . Le calcul de ces mêmes quantités pour les cas d’Alfano donne des entiers bien plus grands. Ainsi, afin d’obtenir les valeurs pour la probabilité de collision contenues dans la Table 2.5, on aurait respectivement besoin de 689 et 10^{13} termes pour les cas 3 et 5. Néanmoins, il faut se souvenir que le rang fourni dans la Proposition 5 est conservatif. En pratique, ici, 90 et

37000 termes suffisent en réalité pour obtenir la précision affichée. Cela montre cependant que le nombre de termes nécessaires à une évaluation acceptable du risque peut exploser dans certains cas. Cela s'explique par le fait que la vitesse de convergence de $\tilde{h}(R^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} R^{2(k+1)}$ est liée aux singularités dans le plan complexe de $\mathcal{L}\tilde{h}(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \lambda^{-(k+2)}$. Or, le rayon de convergence de cette série en $\frac{1}{\lambda}$ est $\frac{1}{p} = 2\sigma_x^2$. Ainsi, lorsque $2\sigma_x^2$ est petit par rapport à R^2 i.e. $R \gg \sigma_x$, la convergence de \tilde{h} est relativement lente.

2.3 Probabilité de collision instantanée

La méthode de calcul de l'intégrale d'une fonction gaussienne sur une boule euclidienne dans \mathbb{R}^2 , présentée dans la section précédente, se généralise à la dimension supérieure. Cela permet d'obtenir une expression de la probabilité de collision instantanée sous la forme d'une série entière préconditionnée par un terme exponentiel (Théorème 2). La suite associée, définie par une formule de récurrence d'ordre 6, est positive (Proposition 7). Les preuves sont très similaires au cas bidimensionnel et par conséquent, les détails en sont omis.

On définit pour la suite les grandeurs suivantes : $p = \frac{1}{2\sigma_1^2}$, $\phi_2 = 1 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, $\omega_1 = \frac{\mu_1^2}{4\sigma_1^4}$, $\omega_2 = \frac{\mu_2^2}{4\sigma_2^4}$.

2.3.1 Nouvelle formule analytique

Le théorème fondamental de cette section permet d'exprimer la probabilité de collision instantanée à l'aide d'une série convergente.

Théorème 2. *La probabilité de collision instantanée s'écrit :*

$$\mathcal{P}_c = \exp\left(-\frac{R^2}{2\sigma_1^2}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha'_k}{\Gamma(k+5/2)} R^{2k+3}, \quad (2.58)$$

où Γ est la fonction Gamma (voir Annexe A) et la suite $(\alpha'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie la formule de récurrence linéaire suivante :

$$\begin{aligned} 2(k+6)\alpha'_{k+6} = & -2\omega_1 p^5 \phi_3^2 \phi_2^2 \alpha'_k + (2\omega_1 p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 + 6p^5 \phi_3^2 \phi_2^2 + 4\omega_1 p^4 \phi_2^2 \phi_3 + 4\omega_1 p^4 \phi_3^2 \phi_2 + 2p^5 \phi_3^2 \phi_2^2 k) \alpha'_{k+1} \\ & + ((-4p^4 \phi_3^2 \phi_2 - 2p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 - 4p^4 \phi_2^2 \phi_3)k - 6p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 - 2\omega_1 p^3 \phi_2^2 - 4\omega_1 p^3 \phi_2^2 \phi_3 - 4\omega_1 p^3 \phi_3^2 \phi_2 \\ & - 15p^4 \phi_2^2 \phi_3 - 2\omega_1 p^3 \phi_3^2 - 2\omega_3 p^3 \phi_2^2 - 2\omega_2 p^3 \phi_3^2 - 15p^4 \phi_3^2 \phi_2 - 8\omega_1 p^3 \phi_3 \phi_2) \alpha'_{k+2} \\ & + ((8p^3 \phi_3 \phi_2 + 4p^3 \phi_2^2 \phi_3 + 4p^3 \phi_3^2 \phi_2 + 2p^3 \phi_2^2 + 2p^3 \phi_3^2)k + 9p^3 \phi_3^2 + 8\omega_1 p^2 \phi_3 \phi_2 \\ & + 2\omega_1 p^2 \phi_2^2 + 9p^3 \phi_2^2 + 2\omega_3 p^2 \phi_2^2 + 2\omega_2 p^2 \phi_3^2 + 4\omega_1 p^2 \phi_3 + 2\omega_1 p^2 \phi_3^2 + 36p^3 \phi_3 \phi_2 + 15p^3 \phi_3^2 \phi_2 \\ & + 4\omega_1 p^2 \phi_2 + 4\omega_3 p^2 \phi_2 + 4\omega_2 p^2 \phi_3 + 15p^3 \phi_2^2 \phi_3) \alpha'_{k+3} \\ & + ((-4p^2 \phi_3 - 8p^2 \phi_3 \phi_2 - 2p^2 \phi_2^2 - 2p^2 \phi_3^2 - 4p^2 \phi_2)k - 2\omega_2 p - 4\omega_1 p \phi_2 - 4\omega_1 p \phi_3 \\ & - 4\omega_3 p \phi_2 - 4\omega_2 p \phi_3 - 21p^2 \phi_3 - 21p^2 \phi_2 - 2\omega_1 p - 2\omega_3 p - 9p^2 \phi_3^2 - 36p^2 \phi_3 \phi_2 - 9p^2 \phi_2^2) \alpha'_{k+4} \\ & + ((2p + 4p\phi_2 + 4p\phi_3)k + 12p + 2\omega_1 + 2\omega_3 + 21p\phi_3 + 2\omega_2 + 21p\phi_2) \alpha'_{k+5}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

avec les conditions initiales :

$$\alpha'_0 = \frac{1}{\prod_{i=1}^3 \sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \frac{\mu_i^2}{\sigma_i^2}\right), \quad (2.60)$$

$$\alpha'_1 = \alpha'_0 p + \alpha'_0 \omega_1 + \alpha'_0 \omega_3 + 1/2 \alpha'_0 p \phi_3 + \alpha'_0 \omega_2 + 1/2 \alpha'_0 p \phi_2, \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \alpha'_2 = & 1/2 \alpha'_0 \omega_1 p \phi_2 + 1/2 \alpha'_0 \omega_1 p \phi_3 + 1/2 \alpha'_0 \omega_3 p \phi_2 + 1/2 \alpha'_0 \omega_2 p \phi_3 + 1/4 \alpha'_0 p^2 \phi_3 \phi_2 + 3/2 \omega_3 \alpha'_0 p \phi_3 \\ & + 3/2 \omega_2 \alpha'_0 p \phi_2 + \alpha'_0 p^2 + 1/2 \alpha'_0 \omega_1^2 + 1/2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 1/2 \alpha'_0 \omega_2^2 + \alpha'_0 \omega_1 p + \alpha'_0 \omega_2 p + 1/2 \alpha'_0 p^2 \phi_3 \\ & + 1/2 \alpha'_0 p^2 \phi_2 + \omega_1 \alpha'_0 \omega_3 + \alpha'_0 \omega_3 p + 3/8 \alpha'_0 p^2 \phi_3^2 + 3/8 \alpha'_0 p^2 \phi_2^2 + \omega_1 \alpha'_0 \omega_2 + \omega_3 \alpha'_0 \omega_2, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}
\alpha'_3 = & 1/4\alpha'_0\omega_1p^2\phi_3\phi_2 + 3/2\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 3/2\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/4\omega_3p^2\phi_2\alpha'_0\phi_3 + 3/2\omega_3p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 3/2\omega_2p\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 3/4\omega_2p^2\phi_3\alpha'_0\phi_2 \\
& + 3/8\alpha'_0\omega_1p^2\phi_2^2 + 3/8\alpha'_0\omega_3p^2\phi_2^2 + 3/8\alpha'_0\omega_2p^2\phi_3^2 + 1/2\alpha'_0\omega_1p^2\phi_3 \\
& + 3/8\alpha'_0\omega_1p^2\phi_3^2 + 1/4\alpha'_0p^3\phi_3\phi_2 + 3/16\alpha'_0p^3\phi_3^2\phi_2 + 1/2\alpha'_0\omega_1p^2\phi_2 + 1/2\alpha'_0\omega_3p^2\phi_2 \\
& + 1/2\alpha'_0\omega_2p^2\phi_3 + 3/16\alpha'_0p^3\phi_2^2\phi_3 + \omega_2p\alpha'_0\omega_1 + \omega_2p\alpha'_0\omega_3 + 3/2\omega_2p^2\alpha'_0\phi_2 + 1/4\omega_1^2p\phi_2\alpha'_0 \\
& + 1/4\omega_1^2p\phi_3\alpha'_0 + 1/4\omega_3^2p\phi_2\alpha'_0 + 1/4\omega_2^2p\phi_3\alpha'_0 + 3/2p^2\phi_3\alpha'_0\omega_3 + \omega_1p\alpha'_0\omega_3 + \frac{15}{8}p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_3 \\
& + \frac{15}{8}p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_2 + 3/8\alpha'_0p^3\phi_3^2 + 3/8\alpha'_0p^3\phi_2^2 + \omega_2p^2\alpha'_0 + 1/2\omega_2^2p\alpha'_0 + 1/2p^3\phi_3\alpha'_0 \\
& + 1/2p^3\phi_2\alpha'_0 + \omega_1p^2\alpha'_0 + 1/2\omega_1^2p\alpha'_0 + \omega_3p^2\alpha'_0 + 1/2\omega_3^2p\alpha'_0 + \frac{5}{16}p^3\phi_3^3\alpha'_0 \\
& + \frac{5}{16}p^3\phi_2^3\alpha'_0 + 1/2\omega_1\alpha'_0\omega_3^2 + 1/2\omega_1\alpha'_0\omega_2^2 + 1/2\omega_1^2\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1^2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 1/2\omega_3\alpha'_0\omega_2^2 + 1/2\omega_3^2\alpha'_0\omega_2 + 1/2\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_3 + \omega_1\omega_3\alpha'_0\omega_2 \\
& + 5/4\omega_3^2\alpha'_0p\phi_3 + 5/4\omega_2^2\alpha'_0p\phi_2 + \alpha'_0p^3 + 1/6\alpha'_0\omega_1^3 + 1/6\alpha'_0\omega_3^3 + 1/6\alpha'_0\omega_2^3, \tag{2.63}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'_4 = & \frac{5}{32}p^4\phi_3^2\phi_3\alpha'_0 + 3/4p^3\phi_3\phi_2\alpha'_0\omega_3 + \frac{15}{8}\omega_1p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_3 + \frac{9}{16}\omega_2p^3\phi_3^2\alpha'_0\phi_2 \\
& + 3/2\omega_1p^2\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1p^2\phi_3\alpha'_0\omega_2 + \frac{9}{16}\omega_3p^3\phi_2^2\alpha'_0\phi_3 + \frac{15}{8}\omega_3p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/8\omega_2p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_1 + \frac{15}{8}\omega_2p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_3 + 3/16\alpha'_0\omega_1p^3\phi_2^2\phi_3 + 3/16\alpha'_0\omega_1p^3\phi_3^2\phi_2 \\
& + 1/4\alpha'_0\omega_1p^3\phi_3\phi_2 + 1/8\omega_1^2p^2\phi_3\phi_2\alpha'_0 + 3/8\omega_1p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_3 + \frac{15}{8}\omega_1p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/8\alpha'_0\omega_1p^3\phi_2^2 + 3/16\alpha'_0p^4\phi_2^2\phi_3 + 3/8\alpha'_0\omega_1p^3\phi_3^2 + 3/8\alpha'_0\omega_3p^3\phi_2^2 + 3/8\alpha'_0\omega_2p^3\phi_3^2 \\
& + 3/16\alpha'_0p^4\phi_3^2\phi_2 + \frac{9}{64}\alpha'_0p^4\phi_3^2\phi_2^2 + \frac{15}{8}p^3\phi_3^2\alpha'_0\omega_3 + 3/16\omega_1^2p^2\phi_2^2\alpha'_0 + \frac{5}{16}\omega_1p^3\phi_2^3\alpha'_0 + \frac{15}{8}p^3\phi_2^2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/16\omega_3^2p^2\phi_2^2\alpha'_0 + \frac{5}{16}\omega_3p^3\phi_2^3\alpha'_0 + \frac{5}{16}\omega_2p^3\phi_3^3\alpha'_0 \\
& + 3/16\omega_2^2p^2\phi_3^2\alpha'_0 + 1/2\omega_1p^3\phi_3\alpha'_0 + 1/4\omega_1^2p^2\phi_3\alpha'_0 + 3/16\omega_1^2p^2\phi_3^2\alpha'_0 + \frac{5}{16}\omega_1p^3\phi_3^3\alpha'_0 \\
& + 1/4p^4\phi_3\phi_2\alpha'_0 + \frac{5}{32}p^4\phi_3^3\phi_2\alpha'_0 + 1/2\omega_1p^3\phi_2\alpha'_0 + 1/4\omega_1^2p^2\phi_2\alpha'_0 + 1/2\omega_3p^3\phi_2\alpha'_0 \\
& + 1/4\omega_3^2p^2\phi_2\alpha'_0 + 1/2\omega_2p^3\phi_3\alpha'_0 + 1/4\omega_2^2p^2\phi_3\alpha'_0 + 3/8p^4\phi_3^2\alpha'_0 + \frac{5}{16}p^4\phi_3^3\alpha'_0 \\
& + 3/8p^4\phi_2^2\alpha'_0 + \frac{5}{16}p^4\phi_2^3\alpha'_0 + \omega_2p^3\alpha'_0 + 1/6\omega_2^3p\alpha'_0 + 1/2\omega_2^2p^2\alpha'_0 + 1/2p^4\phi_3\alpha'_0 \\
& + 1/2p^4\phi_2\alpha'_0 + \omega_1p^3\alpha'_0 + 1/6\omega_1^3p\alpha'_0 + 1/2\omega_1^2p^2\alpha'_0 + \omega_3p^3\alpha'_0 + 1/6\omega_3^3p\alpha'_0 + 1/2\omega_3^2p^2\alpha'_0 \\
& + \frac{35}{128}p^4\phi_3^4\alpha'_0 + \frac{35}{128}p^4\phi_2^4\alpha'_0 + 3/4\omega_1p^2\phi_3\phi_2\alpha'_0\omega_3 + 3/4\omega_1p^2\phi_3\phi_2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/2\omega_1p\phi_2\omega_3\alpha'_0\omega_2 + 3/2\omega_1p\phi_3\omega_3\alpha'_0\omega_2 + 9/4\omega_3p^2\phi_2\alpha'_0\omega_2\phi_3 + 3/4p^3\phi_3\phi_2\alpha'_0\omega_2 \\
& + \frac{15}{16}p^3\phi_3^2\phi_2\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1p^2\phi_2\alpha'_0\omega_3 + 3/2\omega_1p^2\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 3/2\omega_3p^2\phi_2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 3/2\omega_2p^2\phi_3\alpha'_0\omega_3 + \frac{15}{16}p^3\phi_2^2\phi_3\alpha'_0\omega_2 + \omega_2p\omega_1\alpha'_0\omega_3 + 1/4\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_3^2 \\
& + 5/4\omega_1p\phi_2\alpha'_0\omega_2^2 + 1/4\omega_1^2p\phi_2\alpha'_0\omega_3 + 3/4\omega_1^2p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 5/4\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_3^2 \\
& + 1/4\omega_1p\phi_3\alpha'_0\omega_2^2 + 3/4\omega_1^2p\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 1/4\omega_1^2p\phi_3\alpha'_0\omega_2 + 5/8\omega_3^2p^2\phi_2\alpha'_0\phi_3 \\
& + 5/4\omega_3p\phi_2\alpha'_0\omega_2^2 + 3/4\omega_3^2p\phi_2\alpha'_0\omega_2 + 5/8\omega_2^2p^2\phi_3\alpha'_0\phi_2 + 5/4\omega_2p\phi_3\alpha'_0\omega_3^2 \\
& + 3/4\omega_2^2p\phi_3\omega_3\alpha'_0 + 5/4\omega_2^2p^2\alpha'_0\phi_2 + 1/2\omega_2p\alpha'_0\omega_1^2 + 1/2\omega_2p\alpha'_0\omega_3^2 + \omega_2p^2\alpha'_0\omega_1 \\
& + 3/2\omega_2p^3\alpha'_0\phi_2 + \omega_2p^2\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_2^2p\omega_1\alpha'_0 + 1/2\omega_2^2p\omega_3\alpha'_0 + 1/12\omega_1^3p\phi_2\alpha'_0 \\
& + 1/12\omega_1^3p\phi_3\alpha'_0 + 1/12\omega_3^3p\phi_2\alpha'_0 + 1/12\omega_2^3p\phi_3\alpha'_0 + 5/4p^2\phi_3\alpha'_0\omega_3^2 + 3/2p^3\phi_3\alpha'_0\omega_3 + 1/2\omega_1p\alpha'_0\omega_3^2 \\
& + 1/2\omega_1^2p\alpha'_0\omega_3 + \omega_1p^2\alpha'_0\omega_3 + \frac{35}{16}p^3\phi_3^3\omega_3\alpha'_0 + \frac{35}{16}p^2\phi_3^2\alpha'_0\omega_3^2 + \frac{35}{16}p^3\phi_2^3\omega_2\alpha'_0 \\
& + \frac{35}{16}p^2\phi_2^2\alpha'_0\omega_2^2 + \alpha'_0p^4 + 1/24\alpha'_0\omega_1^4 + 1/24\alpha'_0\omega_3^4 + 1/24\alpha'_0\omega_2^4 + 1/4\omega_1^2\alpha'_0\omega_3^2 + 1/4\omega_1^2\alpha'_0\omega_2^2 \\
& + 1/6\omega_1^3\alpha'_0\omega_3 + 1/6\omega_1^3\alpha'_0\omega_2 + 1/6\omega_1\alpha'_0\omega_3^3 + 1/6\omega_1\alpha'_0\omega_2^3 + 1/4\omega_3^2\alpha'_0\omega_2^2 \\
& + 1/6\omega_3^3\alpha'_0\omega_2 + 1/6\omega_3\alpha'_0\omega_2^3 + 1/2\omega_1\omega_3\alpha'_0\omega_2^2 + 1/2\omega_1\omega_3^2\alpha'_0\omega_2 \\
& + 1/2\omega_1^2\omega_3\alpha'_0\omega_2 + \frac{7}{12}\omega_3^3\alpha'_0p\phi_3 + \frac{7}{12}\omega_2^3\alpha'_0p\phi_2, \tag{2.64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'_5 = & 9/4\omega_1 p^2 \phi_3 \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{9}{64} \alpha'_0 \omega_1 p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 + 3/16 \alpha'_0 \omega_1 p^4 \phi_2^2 \phi_3 + 3/16 \alpha'_0 \omega_1 p^4 \phi_3^2 \phi_2 + \frac{9}{64} \alpha'_0 p^5 \phi_3^2 \phi_2^2 + 9/4 p^3 \phi_3 \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + 3/2 \omega_1 p^2 \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + 5/4 \omega_1 p \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 3/4 \omega_1 p \phi_2 \omega_3^2 \alpha'_0 \omega_2 + 3/4 \omega_1^2 p \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{9}{16} \omega_1 p^3 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + \frac{15}{16} \omega_1 p^3 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{16} \omega_1 p^3 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{9}{16} \omega_1 p^3 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 3/4 \omega_1 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + 3/4 \omega_1 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + 5/8 \omega_1 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 5/8 \omega_1 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 + 3/8 \omega_1^2 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + 3/8 \omega_1^2 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} \omega_1 p^2 \phi_2^2 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + \frac{45}{16} \omega_3 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 \phi_3 + \frac{45}{16} \omega_2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 \phi_2 + \frac{15}{8} \omega_2 p^2 \phi_3^2 \omega_1 \alpha'_0 \omega_3 + 3/2 \omega_1 p^2 \phi_3 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} p^4 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 \\
& + \frac{45}{64} p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{45}{64} p^4 \phi_3^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + 3/8 \omega_1 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{15}{8} \omega_1 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{3}{32} \omega_1^2 p^3 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 + \frac{5}{32} \omega_1 p^4 \phi_2^3 \phi_3 \alpha'_0 \\
& + \frac{3}{32} \omega_1^2 p^3 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{3}{32} \omega_1 p^4 \phi_3^3 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{9}{16} p^4 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{15}{16} p^4 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} \omega_1 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 \\
& + 3/8 \omega_1 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} \omega_3 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} \omega_2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{9}{16} \omega_2 p^4 \phi_3^2 \alpha'_0 \phi_2 + \frac{15}{16} p^4 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 \\
& + 1/4 \omega_1 p^4 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 + 1/8 \omega_1^2 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{15}{128} p^5 \phi_3^3 \phi_2^2 \alpha'_0 + \frac{15}{128} p^5 \phi_3^2 \phi_2^3 \alpha'_0 + 3/8 \omega_1 p^4 \phi_2^2 \alpha'_0 + 3/16 \omega_1^2 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \\
& + \frac{5}{16} \omega_1 p^4 \phi_2^3 \alpha'_0 + 3/16 p^5 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 + \frac{5}{32} p^5 \phi_2^3 \phi_3 \alpha'_0 + 3/8 \omega_1 p^4 \phi_3^2 \alpha'_0 + 3/16 \omega_1^2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{5}{16} \omega_1 p^4 \phi_3^3 \alpha'_0 + \\
& 3/8 \omega_3 p^4 \phi_2^2 \alpha'_0 + 3/16 \omega_3^2 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 + \frac{5}{16} \omega_3 p^4 \phi_2^3 \alpha'_0 + 3/8 \omega_2 p^4 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{5}{16} \omega_2 p^4 \phi_3^3 \alpha'_0 + 3/16 \omega_2^2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \\
& + 3/16 p^5 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{5}{32} p^5 \phi_3^3 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{35}{16} p^4 \phi_2^3 \omega_2 \alpha'_0 + \frac{35}{16} p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2^2 + \frac{15}{8} p^4 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{5}{32} \omega_1^2 p^3 \phi_3^3 \alpha'_0 \\
& + 1/16 \omega_1^3 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 + \frac{35}{128} \omega_1 p^4 \phi_2^4 \alpha'_0 + \frac{5}{32} \omega_3^2 p^3 \phi_2^3 \alpha'_0 + 1/16 \omega_3^3 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 + \frac{35}{128} \omega_3 p^4 \phi_2^4 \alpha'_0 + \frac{5}{32} \omega_2^2 p^3 \phi_3^3 \alpha'_0 \\
& + 1/16 \omega_2^3 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{35}{128} \omega_2 p^4 \phi_3^4 \alpha'_0 + 1/2 \omega_1 p^4 \phi_3 \alpha'_0 + 1/12 \omega_1^3 p^2 \phi_3 \alpha'_0 + 1/4 \omega_1^2 p^3 \phi_3 \alpha'_0 + \frac{5}{32} \omega_1^2 p^3 \phi_3^3 \alpha'_0 \\
& + 1/16 \omega_1^3 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{35}{128} \omega_1 p^4 \phi_3^4 \alpha'_0 + 1/4 p^5 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 + \frac{35}{256} p^5 \phi_3^4 \phi_2 \alpha'_0 + 1/2 \omega_1 p^4 \phi_2 \alpha'_0 + 1/12 \omega_1^3 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \\
& + 1/4 \omega_1^2 p^3 \phi_2 \alpha'_0 + 1/2 \omega_3 p^4 \phi_2 \alpha'_0 + 1/12 \omega_3^3 p^2 \phi_2 \alpha'_0 + 1/4 \omega_3^2 p^3 \phi_2 \alpha'_0 + 1/2 \omega_2 p^4 \phi_3 \alpha'_0 + 1/12 \omega_2^3 p^2 \phi_3 \alpha'_0 + 1/4 \omega_2^2 p^3 \phi_3 \alpha'_0 \\
& + \frac{35}{256} p^5 \phi_2^4 \phi_3 \alpha'_0 + \frac{35}{16} p^4 \phi_3^3 \omega_3 \alpha'_0 + \frac{35}{16} p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3^2 + \frac{1}{120} \alpha'_0 \omega_3^5 + \frac{1}{120} \alpha'_0 \omega_2^5 + \alpha'_0 p^5 + \frac{1}{120} \alpha'_0 \omega_1^5 + 1/24 \omega_1^3 p^2 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \\
& + \frac{5}{16} \omega_1 p^3 \phi_3^3 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{35}{16} \omega_1 p^3 \phi_3^2 \omega_2 \alpha'_0 + 3/16 \omega_1 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_3^2 + \frac{35}{16} \omega_1 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2^2 \\
& + 3/16 \omega_1^2 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{15}{16} \omega_1^2 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{32} \omega_3 p^4 \phi_2^3 \alpha'_0 \phi_3 + \frac{15}{32} \omega_3^2 p^3 \phi_2^2 \alpha'_0 \phi_3 + \frac{35}{16} \omega_3 p^3 \phi_2^3 \omega_2 \alpha'_0 \\
& + \frac{35}{16} \omega_3 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2^2 + \frac{15}{16} \omega_3^2 p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{5}{16} \omega_2 p^3 \phi_3^3 \alpha'_0 \omega_1 + \frac{15}{32} \omega_2 p^4 \phi_3^3 \alpha'_0 \phi_2 + \frac{35}{16} \omega_2 p^3 \phi_3^3 \omega_3 \alpha'_0 \\
& + \frac{15}{32} \omega_2^2 p^3 \phi_3^2 \alpha'_0 \phi_2 + 3/16 \omega_2 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_1^2 + \frac{35}{16} \omega_2 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 3/16 \omega_2^2 p^2 \phi_3^2 \omega_1 \alpha'_0 + \frac{15}{16} \omega_2^2 p^2 \phi_3^2 \omega_3 \alpha'_0 + 5/4 \omega_1 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3^2 \\
& + 1/4 \omega_1 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 1/2 \omega_1 p^3 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 + 3/4 \omega_1^2 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 + 3/2 \omega_1 p^3 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 \\
& + 1/4 \omega_1^2 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{35}{16} \omega_1 p^3 \phi_3^3 \omega_3 \alpha'_0 + \frac{35}{16} \omega_1 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3^2 + \frac{15}{16} \omega_1^2 p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3 + 5/8 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^2 \\
& + 5/8 p^3 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 + 3/4 p^4 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 3/4 p^4 \phi_3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{35}{32} p^4 \phi_3^3 \phi_2 \omega_3 \alpha'_0 + \frac{35}{32} p^3 \phi_3^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 1/4 \omega_1 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^2 \\
& + 5/4 \omega_1 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 + 3/2 \omega_1 p^3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 1/4 \omega_1^2 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + 1/2 \omega_1 p^3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + 3/4 \omega_1^2 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 5/4 \omega_3 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 \\
& + 3/2 \omega_3 p^3 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 3/4 \omega_3^2 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 5/4 \omega_2 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3^2 + 3/2 \omega_2 p^3 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 + 3/4 \omega_2^2 p^2 \phi_3 \omega_3 \alpha'_0 \\
& + \frac{35}{32} p^4 \phi_2^3 \phi_3 \omega_2 \alpha'_0 + \frac{35}{32} p^3 \phi_2^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 3/8 p^5 \phi_2^2 \alpha'_0 + \frac{5}{16} p^5 \phi_2^3 \alpha'_0 + \frac{35}{128} p^5 \phi_2^4 \alpha'_0 \\
& + 3/8 p^5 \phi_3^2 \alpha'_0 + \frac{5}{16} p^5 \phi_3^3 \alpha'_0 + \frac{35}{128} p^5 \phi_3^4 \alpha'_0 + 1/2 \omega_2^2 p^3 \alpha'_0 + 1/6 \omega_2^3 p^2 \alpha'_0 + \omega_2 p^4 \alpha'_0 \\
& + 1/24 \omega_2^4 p \alpha'_0 + 1/2 p^5 \phi_3 \alpha'_0 + 1/2 p^5 \phi_2 \alpha'_0 + 1/2 \omega_1^2 p^3 \alpha'_0 + 1/6 \omega_1^3 p^2 \alpha'_0 + \omega_1 p^4 \alpha'_0 + 1/24 \omega_1^4 p \alpha'_0 + 1/2 \omega_3^2 p^3 \alpha'_0 \\
& + 1/6 \omega_3^3 p^2 \alpha'_0 + \omega_3 p^4 \alpha'_0 + 1/24 \omega_3^4 p \alpha'_0 + \frac{63}{256} p^5 \phi_3^5 \alpha'_0 + \frac{63}{256} p^5 \phi_2^5 \alpha'_0 + 1/24 \omega_1 \alpha'_0 \omega_3^4 + 1/24 \omega_1 \alpha'_0 \omega_2^4 \\
& + 1/12 \omega_1^3 \alpha'_0 \omega_3^2 + 1/12 \omega_1^3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 1/24 \omega_1^4 \alpha'_0 \omega_3 + 1/24 \omega_1^4 \alpha'_0 \omega_2 \\
& + 1/12 \omega_1^2 \alpha'_0 \omega_3^3 + 1/12 \omega_1^2 \alpha'_0 \omega_2^3 + 1/24 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2^4 + 1/12 \omega_3^3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 1/24 \omega_3^4 \alpha'_0 \omega_2 + 1/12 \omega_3^2 \alpha'_0 \omega_2^3 \\
& + \frac{315}{128} p^4 \phi_3^4 \alpha'_0 \omega_3 + \frac{105}{32} p^3 \phi_3^3 \omega_3^2 \alpha'_0 + \frac{21}{16} p^2 \phi_3^2 \alpha'_0 \omega_3^3 + 1/2 \omega_1^2 p^2 \alpha'_0 \omega_3 + \omega_1 p^3 \omega_3 \alpha'_0 + 1/2 \omega_1 p^2 \omega_3^2 \alpha'_0 + 1/4 \omega_1^2 p \alpha'_0 \omega_3^2 \\
& + 1/6 \omega_1^3 p \alpha'_0 \omega_3 + 1/6 \omega_1 p \alpha'_0 \omega_3^3 + 1/2 \omega_2^2 p^2 \alpha'_0 \omega_1 + 1/2 \omega_2^2 p^2 \alpha'_0 \omega_3 + 5/4 \omega_2^2 p^3 \alpha'_0 \phi_2 + 3/2 \omega_2 p^4 \phi_2 \alpha'_0 + \omega_2 p^3 \omega_1 \alpha'_0 + 1/2 \omega_2 p^2 \omega_1^2 \alpha'_0 \\
& + \omega_2 p^3 \omega_3 \alpha'_0 + 1/2 \omega_2 p^2 \omega_3^2 \alpha'_0 + 1/6 \omega_2^3 p \omega_1 \alpha'_0 + 1/4 \omega_2^2 p \omega_1^2 \alpha'_0 + 1/6 \omega_2^3 p \omega_3 \alpha'_0 + 1/4 \omega_2^2 p \omega_3^2 \alpha'_0 + \frac{7}{12} \omega_2^3 p^2 \alpha'_0 \phi_2 + 1/6 \omega_2 p \alpha'_0 \omega_1^3 \\
& + 1/6 \omega_2 p \alpha'_0 \omega_3^3 + 1/48 \omega_1^4 p \phi_2 \alpha'_0 + 1/48 \omega_1^4 p \phi_3 \alpha'_0 + 1/48 \omega_3^4 p \phi_2 \alpha'_0 + 1/48 \omega_2^4 p \phi_3 \alpha'_0 + 3/2 p^4 \phi_3 \omega_3 \alpha'_0 + 5/4 p^3 \phi_3 \omega_3^2 \alpha'_0 + \\
& \frac{7}{12} p^2 \phi_3 \alpha'_0 \omega_3^3 + \omega_2 p^2 \omega_1 \alpha'_0 \omega_3 + 1/2 \omega_2 p \omega_1 \alpha'_0 \omega_3^2 + 1/2 \omega_2 p \omega_1^2 \alpha'_0 \omega_3 + 1/2 \omega_2^2 p \omega_1 \omega_3 \alpha'_0 + 1/8 \omega_1^2 p \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^2 + 5/8 \omega_1^2 p \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 \\
& + 1/12 \omega_1^3 p \phi_2 \alpha'_0 \omega_3 + 1/4 \omega_1^3 p \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + 1/12 \omega_1 p \phi_2 \alpha'_0 \omega_3^3 + \frac{7}{12} \omega_1 p \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^3 + 5/8 \omega_1^2 p \phi_3 \alpha'_0 \omega_3^2 + 1/8 \omega_1^2 p \phi_3 \alpha'_0 \omega_2^2 \\
& + 1/4 \omega_1^3 p \phi_3 \alpha'_0 \omega_3 + 1/12 \omega_1^3 p \phi_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{7}{12} \omega_1 p \phi_3 \alpha'_0 \omega_3^3 + 1/12 \omega_1 p \phi_3 \alpha'_0 \omega_2^3 + 5/8 \omega_3^2 p \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^2 + 1/4 \omega_3^3 p \phi_2 \alpha'_0 \omega_2 + \\
& \frac{7}{24} \omega_3^3 p^2 \phi_2 \alpha'_0 \phi_3 + \frac{7}{12} \omega_3 p \phi_2 \alpha'_0 \omega_2^3 + 1/4 \omega_2^3 p \phi_3 \omega_3 \alpha'_0 + 5/8 \omega_2^2 p \phi_3 \omega_3^2 \alpha'_0 + \frac{7}{24} \omega_2^3 p^2 \phi_3 \alpha'_0 \phi_2 \\
& + \frac{7}{12} \omega_2 p \phi_3 \alpha'_0 \omega_3^3 + 3/4 \omega_1 p \phi_3 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2^2 + 5/4 \omega_1 p \phi_3 \omega_3^2 \alpha'_0 \omega_2 + 3/4 \omega_1^2 p \phi_3 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{15}{8} \omega_3^2 p^2 \phi_2 \omega_2 \phi_3 \alpha'_0 \\
& + \frac{15}{8} \omega_3 p^2 \phi_2 \omega_2^2 \phi_3 \alpha'_0 + \frac{315}{128} p^4 \phi_2^4 \alpha'_0 \omega_2 + \frac{105}{32} p^3 \phi_2^3 \omega_2^2 \alpha'_0 + \frac{21}{16} p^2 \phi_2^2 \alpha'_0 \omega_2^3 + 1/4 \omega_1 \omega_3^2 \alpha'_0 \omega_2^2 + 1/6 \omega_1 \omega_3^3 \alpha'_0 \omega_2 + \\
& + 1/6 \omega_1 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2^3 + 1/4 \omega_1^2 \omega_3^2 \alpha'_0 \omega_2^2 + 1/4 \omega_1^2 \omega_3^2 \alpha'_0 \omega_2 + 1/6 \omega_1^3 \omega_3 \alpha'_0 \omega_2 + 3/16 \omega_3^4 \alpha'_0 p \phi_3 + 3/16 \omega_2^4 \alpha'_0 p \phi_2. \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Démonstration. On définit en premier lieu la fonction $h'(\zeta) = \mathcal{P}\{\sum_{i=1}^3 X_i^2 \leq \zeta\}$, avec $X_i \sim \mathcal{N}_1(\mu_i, \sigma_i^2)$ pour $i = 1, 2, 3$, de sorte que $\mathcal{P}_c = h'(R^2)$. On a $h' = 0$ sur \mathbb{R}^- et pour $\zeta > 0$:

$$h'(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \prod_{i=1}^3 \sigma_i} \iiint_{\mathcal{B}_3(0, \sqrt{\zeta})} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (2.66)$$

La transformée de Laplace de h' est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h'(\lambda) &= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda\zeta) h'(\zeta) d\zeta, \\ &= \frac{\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i^2}{2\lambda\sigma_i^2 + 1}\right)}{\lambda \prod_{i=1}^3 \sqrt{2\lambda\sigma_i^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

On réalise le préconditionnement de h par la fonction $\exp(p\zeta)$:

$$\tilde{h}'(\zeta) = \exp(p\zeta) h'(\zeta), \quad (2.68)$$

La transformée de la nouvelle fonction est déduite de celle de h' par translation :

$$\mathcal{L}\tilde{h}'(\lambda) = \frac{\alpha'_0 \exp\left(\frac{\omega_1}{\lambda} + \frac{\omega_2}{\lambda - p\phi_2} + \frac{\omega_3}{\lambda - p\phi_3}\right)}{(\lambda - p) \sqrt{\lambda(\lambda - p\phi_2)(\lambda - p\phi_3)}}. \quad (2.69)$$

On pose alors :

$$\hat{\mathcal{L}}\tilde{h}'(\lambda) = \lambda^{-5/2} \mathcal{L}\tilde{h}'(\lambda^{-1}), \quad (2.70)$$

$$= \frac{\alpha'_0 \exp\left(\omega_1 \lambda - \frac{\omega_2}{p\phi_2} - \frac{\omega_2}{p\phi_2(p\phi_2\lambda - 1)} - \frac{\omega_3}{p\phi_3} - \frac{\omega_3}{p\phi_3(p\phi_3\lambda - 1)}\right)}{(1 - p\lambda) \sqrt{1 - p\phi_2\lambda} \sqrt{1 - p\phi_3\lambda}}, \quad (2.71)$$

Cette fonction est bien holonome puisque :

$$\frac{d\hat{\mathcal{L}}\tilde{h}'}{d\lambda}(\lambda) = \varphi'(\lambda) \hat{\mathcal{L}}\tilde{h}'(\lambda), \quad \hat{\mathcal{L}}\tilde{h}'(0) = \alpha'_0, \quad (2.72)$$

où :

$$\varphi'(\lambda) = \omega_1 - \frac{p}{p\lambda - 1} - \frac{p\phi_2}{2(p\phi_2\lambda - 1)} - \frac{p\phi_3}{2(p\phi_3\lambda - 1)} + \frac{\omega_2}{(p\phi_2\lambda - 1)^2} + \frac{\omega_3}{(p\phi_3\lambda - 1)^2}. \quad (2.73)$$

On en déduit le développement en série de Laurent :

$$\mathcal{L}\tilde{h}'(\lambda) = \lambda^{-5/2} \hat{\mathcal{L}}\tilde{h}'(\lambda^{-1}), \quad (2.74)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha'_k \lambda^{-(k+5/2)}. \quad (2.75)$$

L'inverse pour la transformée de Laplace de $\lambda \mapsto \lambda^{-(n+3/2)}$ est $\zeta \mapsto \frac{1}{\Gamma(n+3/2)} \zeta^{n+1/2}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Par inversion terme à terme, il vient donc que :

$$\tilde{h}'(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha'_k}{\Gamma(k+5/2)} \zeta^{k+3/2}. \quad (2.76)$$

□

Le principal intérêt du Théorème 2 réside dans la positivité des termes de la série, qui découle directement de la proposition ci-dessous.

Proposition 7. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\alpha'_k > 0. \quad (2.77)$$

Démonstration. On effectue le développement en série entière de la fonction φ' définie par (2.73). Cela donne $\varphi'(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi'_k \lambda^k$, avec :

$$\varphi'_k = p^{k+1} \left(1 + \phi_2^k \left(\frac{(k+1)\omega_2}{p} + \frac{\phi_2}{2} \right) + \phi_3^k \left(\frac{(k+1)\omega_3}{p} + \frac{\phi_3}{2} \right) \right) + \begin{cases} \omega_1, & k = 0 \\ 0, & k > 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

Comme dans le cas 2-D, le résultat se démontre par récurrence en remarquant que $\varphi'_k > 0$ et :

$$(k+1)\alpha'_{k+1} = \sum_{i=0}^k \varphi'_i \alpha'_{k-i}. \quad (2.79)$$

□

2.3.2 Encadrement analytique de l'erreur de troncature

Afin d'estimer l'erreur commise sur la probabilité de collision lorsqu'on calcule une somme partielle de la série (2.58), on définit, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste T'_n d'ordre n :

$$T'_n = \exp(-pR^2) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha'_k}{\Gamma(k+5/2)} R^{2k+3}. \quad (2.80)$$

Afin de quantifier le reste, on commence par chercher un encadrement de la suite $(\alpha'_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Proposition 8. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement :*

$$\underline{\alpha}'_k \leq \alpha'_k \leq \bar{\alpha}'_k, \quad (2.81)$$

où $\underline{\alpha}'_k = \alpha'_0 p^k$ et $\bar{\alpha}'_k = \alpha'_0 p^k (1 + \Omega')^k$ avec $\Omega' = \frac{\phi_2 + \phi_3}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{p}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence. L'initialisation est immédiate puisque $\underline{\alpha}'_0 = \alpha'_0 = \bar{\alpha}'_0$ et $\underline{\alpha}'_1 = \alpha'_0 p \leq \alpha'_0 p \left(1 + \frac{\phi_2 + \phi_3}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{p} \right) = \alpha'_1 = \bar{\alpha}'_1$. Afin de prouver l'hérédité, on remarque d'abord que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\alpha'_0 \varphi'_i}{\alpha'_{i+1}} = 1 + \phi_2^i \left(\frac{\omega_2(i+1)}{p} + \frac{\phi_2}{2} \right) + \phi_3^i \left(\frac{\omega_3(i+1)}{p} + \frac{\phi_3}{2} \right) \geq 1. \quad (2.82)$$

D'autre part, toujours pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'_0 \varphi'_i}{\alpha'_{i+1}} &= \frac{1 + \phi_2^i \left(\frac{\omega_2(i+1)}{p} + \frac{\phi_2}{2} \right) + \phi_3^i \left(\frac{\omega_3(i+1)}{p} + \frac{\phi_3}{2} \right)}{\left(1 + \frac{\phi_2}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{p} \right)^{i+1}}, \\ &\leq \frac{1 + \frac{(i+1)\omega_2}{p} + \frac{\phi_2}{2} + \frac{(i+1)\omega_3}{p} + \frac{\phi_3}{2}}{\left(1 + \frac{\phi_2}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{p} \right)^{i+1}}, \\ &\leq \frac{1 + \frac{\omega_2(i+1)}{p} + \frac{\phi_2 + \phi_3}{2} + \frac{(i+1)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)}{p}}{\left(1 + \frac{\phi_2}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{p} \right)^{i+1}}, \\ &\leq 1. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\underline{\alpha}'_i \leq \alpha'_i \leq \bar{\alpha}'_i$ ($\forall i \leq k$), alors :

$$\sum_{i=0}^n \varphi'_i \underline{\alpha}'_{k-i} \leq \sum_{i=0}^k \varphi'_i \alpha'_{k-i} \leq \sum_{i=0}^k \varphi'_i \bar{\alpha}'_{k-i}. \quad (2.84)$$

Puisque $\underline{\alpha}'_{k-i} = \frac{\alpha'_0 \underline{\alpha}'_{k+1}}{\underline{\alpha}'_{i+1}}$ et $\bar{\alpha}'_{k-i} = \frac{\alpha'_0 \bar{\alpha}'_{k+1}}{\bar{\alpha}'_{i+1}}$, il vient que :

$$\underline{\alpha}'_{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{\alpha'_0 \varphi'_i}{\underline{\alpha}'_{i+1}} \leq \sum_{i=0}^k \varphi'_i \alpha'_{k-i} \leq \bar{\alpha}'_{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{\alpha'_0 \varphi_i}{\bar{\alpha}'_{i+1}}. \quad (2.85)$$

Ainsi, on obtient :

$$\underline{\alpha}'_{k+1}(k+1) \leq \sum_{i=0}^k \varphi'_i \alpha'_{k-i} \leq \bar{\alpha}'_{k+1}(k+1), \quad (2.86)$$

et la conclusion découle de (2.79). \square

Proposition 9. *Pour tout ordre $n \in \mathbb{N}$, l'erreur vérifie :*

$$\frac{2\alpha'_0 \exp(-pR^2)}{\sqrt{\pi}Rp^2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(pR^2)^{k+2}}{(k+2)!} \leq T'_n \leq \frac{2\alpha'_0 R \exp(-pR^2)}{\sqrt{\pi}p(1+\Omega')} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(p(1+\Omega')R^2)^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (2.87)$$

Démonstration. D'après la Proposition 8, il vient immédiatement que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha'_k}{\Gamma(k+5/2)} R^{2k+3} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha'_k}{\Gamma(k+5/2)} R^{2k+3} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\bar{\alpha}'_k}{\Gamma(k+5/2)} R^{2k+3}. \quad (2.88)$$

Intéressons-nous maintenant à la fonction Gamma, qui généralise la notion de factorielle aux non-entiers, à savoir que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Puisque $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(k+5/2) = \frac{\prod_{l=0}^{k+1} (2l+1)}{2^{k+2}} \sqrt{\pi}. \quad (2.89)$$

D'après l'encadrement suivant :

$$2^{k+1}(k+1)! = \prod_{l=0}^k (2l+2) < \prod_{l=0}^k (2l+3) < \prod_{l=0}^k (2l+4) = 2^{k+1}(k+2)!, \quad (2.90)$$

il apparaît que :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(k+1)! < \Gamma(k+5/2) < \frac{\sqrt{\pi}}{2}(k+2)!. \quad (2.91)$$

En injectant ce résultat dans (2.88), on obtient :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha'_k}{(k+2)!} R^{2k+3} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha'_k}{\Gamma(k+5/2)} R^{2k+3} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\bar{\alpha}'_k}{(k+1)!} R^{2k+3}, \quad (2.92)$$

que l'on peut réécrire en remplaçant $\underline{\alpha}'_k$ et $\bar{\alpha}'_k$ par leurs expressions respectives :

$$\frac{2\alpha'_0}{\sqrt{\pi}Rp^2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(pR^2)^{k+2}}{(k+2)!} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\alpha'_k}{\Gamma(k+5/2)} R^{2k+3} \leq \frac{2\alpha'_0 R}{\sqrt{\pi}p(1+\Omega')} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(p(1+\Omega')R^2)^{k+1}}{(k+1)!} \quad (2.93)$$

Le résultat final s'obtient en multipliant la dernière équation par $\exp(-pR^2)$. \square

2.3.3 Bornes analytiques pour la probabilité

Le corollaire suivant (Proposition 9 pour $n = 0$) fournit un encadrement analytique de la probabilité de collision.

Corollaire 2. *La probabilité de collision instantanée est telle que :*

$$l'_0 \leq \mathcal{P}_c \leq u'_0, \quad (2.94)$$

où

$$l'_0 = \frac{2\alpha'_0}{\sqrt{\pi}Rp^2} (1 - \exp(-pR^2)(1 + pR^2)), \quad (2.95)$$

et

$$u'_0 = \frac{2\alpha'_0 R}{\sqrt{\pi}p(1 + \Omega')} (\exp(\Omega' R^2) - \exp(-pR^2)). \quad (2.96)$$

2.3.4 Calcul certifié de la probabilité de collision

Le Corollaire 2 permet d'évaluer de manière immédiate un encadrement de la probabilité de collision. Dans le cas où celui-ci ne serait pas assez précis, on s'intéresse maintenant au calcul garanti de la probabilité i.e. avec une précision absolue certifiée.

Proposition 10. *A tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement :*

$$l'_n \leq T'_n \leq u'_n, \quad (2.97)$$

avec

$$l'_n = \frac{2\alpha'_0 p^n R^{2n+3}}{\sqrt{\pi}(n+2)!} \exp(-pR^2), \quad (2.98)$$

et

$$u'_n = \frac{2\alpha'_0 p^n R^{2n+3} (1 + \Omega')^{n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)!} \exp(\Omega' R^2). \quad (2.99)$$

Démonstration. D'après l'inégalité de gauche dans (2.87), on a :

$$\frac{2\alpha'_0 \exp(-pR^2)}{\sqrt{\pi}Rp^2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(pR^2)^{k+2}}{(k+2)!} \leq T'_n. \quad (2.100)$$

Par positivité des coefficients, on peut minorer la série par son premier terme, ce qui donne l'expression de l'_n . Pour obtenir l'autre borne, on part cette fois de l'inégalité de droite dans (2.87) :

$$T'_n \leq \frac{2\alpha'_0 R \exp(-pR^2)}{\sqrt{\pi}p(1 + \Omega')} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(p(1 + \Omega')R^2)^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (2.101)$$

On obtient alors u'_n en se servant du lemme $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\gamma^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\gamma)$ (déjà prouvé dans la Section 2.2) pour $\gamma = p(1 + \Omega')R^2$. \square

On a donc $\mathcal{P}_c \in [S_{n-1} + l'_n, S_{n-1} + u'_n]$. En rendant $u'_n - l'_n$ suffisamment petit, il est ainsi possible de connaître un encadrement aussi précis que l'on souhaite de la probabilité de collision instantanée. La proposition suivante donne un outil pratique pour calculer cet encadrement.

Proposition 11. *Pour tout $\varepsilon > 0$, l'implication suivante est vraie :*

$$(n \geq \max(N'_1, N'_2(\varepsilon)) - 1) \implies (u'_n - l'_n < \varepsilon), \quad (2.102)$$

où $N'_1 = \lceil 2epR^2(1 + \Omega') \rceil$ et $N'_2(\varepsilon) = \lceil \log_2 \frac{\alpha'_0 \exp(1/2 + pR^2\Omega')}{\sqrt{1 + \Omega'} p^{\frac{3}{2}} \pi \varepsilon} \rceil$.

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que :

$$\begin{aligned} u'_n - l'_n &= l'_n (\exp(pR^2(1+\Omega))(1+\Omega)^{n+1}(n+2) - 1) \\ &< l_n(n+2)(1+\Omega)^{n+1} \exp(pR^2(1+\Omega)). \end{aligned} \quad (2.103)$$

D'après l'inégalité de Stirling, on a :

$$l'_n \leq \frac{\sqrt{2}\alpha'_0 \exp(-pR^2)p^n R^{2n+3} e^{n+2}}{\pi \sqrt{(n+2)}(n+2)^{n+2}}. \quad (2.104)$$

D'où :

$$u'_n - l'_n < \left(\frac{epR^2(1+\Omega')}{n+2} \right)^{n+1} \frac{\sqrt{2}\alpha'_0 R \exp(1+pR^2\Omega')}{\sqrt{n+2}p\pi}. \quad (2.105)$$

Pour tout $n \geq N_1 - 2$, on a donc :

$$u'_n - l'_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \frac{\alpha'_0 \exp(1/2 + pR^2\Omega')}{\sqrt{1+\Omega'} p^{\frac{3}{2}} \pi}. \quad (2.106)$$

D'autre part, par définition :

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{N'_2} \frac{\alpha'_0 \exp(1/2 + pR^2\Omega')}{\sqrt{1+\Omega'} p^{\frac{3}{2}} \pi} \leq \varepsilon, \quad (2.107)$$

d'où le résultat. \square

2.3.5 Résultats numériques

Le Théorème 2 a été testé numériquement sur des cas tests issus du Chapitre 13 de Chan [28]. Les résultats sont répartis dans trois tableaux. Le Tableau 2.6 (respectivement 2.7) traite des cas d'une fonction gaussienne isotrope dont le pic est centré (respectivement non-centré) sur l'origine. Le Tableau 2.8 propose des exemples où la distribution gaussienne est anisotrope. Pour chaque exemple, on obtient une valeur égale à la référence donnée par l'auteur. Dans le premier tableau, il s'agit d'une formule analytique, tandis que dans les autres cas, cette valeur de référence est calculée par intégration numérique pure.

Dans certains cas, les bornes analytiques l'_0 et u'_0 sont du même ordre de grandeur que la probabilité de collision, ou bien d'un ordre de grandeur suffisamment proche pour donner une information qualitative intéressante sur celle-ci. Dans d'autres cas, l'encadrement est trop large pour être réellement utile. Cela s'explique par le fait que, dans le cas 3-D, les inégalités théoriques obtenues sont plus larges que dans le cas bidimensionnel. En effet, pour les obtenir, on a du encadrer la fonction Gamma à l'aide de factorielles, étape qui n'apparaissait pas dans la Section 2.2.

Paramètres (m)			Quantités (-)		
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	R	μ_1, μ_2, μ_3	l'_0	\mathcal{P}_c	u'_0
1,1,1	10	0,0,0	1.60×10^{-1}	1.00×10^0	7.98×10^0
1,1,1	5	0,0,0	3.19×10^{-1}	1.00×10^0	3.99×10^0
1,1,1	1	0,0,0	1.44×10^{-1}	1.99×10^{-1}	3.14×10^{-1}
1,1,1	0.5	0,0,0	2.30×10^{-2}	3.09×10^{-2}	4.69×10^{-2}
1,1,1	0.1	0,0,0	1.99×10^{-4}	2.65×10^{-4}	3.98×10^{-4}
1,1,1	0.05	0,0,0	2.49×10^{-5}	3.32×10^{-5}	4.98×10^{-5}
1,1,1	0.01	0,0,0	1.99×10^{-7}	2.66×10^{-7}	3.99×10^{-1}
1,1,1	0.005	0,0,0	2.49×10^{-8}	3.32×10^{-8}	4.98×10^{-8}
1,1,1	0.001	0,0,0	1.99×10^{-10}	2.66×10^{-10}	3.99×10^{-10}
1,1,1	0.0005	0,0,0	2.52×10^{-11}	3.32×10^{-11}	4.98×10^{-11}
1,1,1	0.0001	0,0,0	0	2.66×10^{-13}	3.99×10^{-13}

TABLE 2.6 – Résultats numériques pour des cas isotropes centrés.

Paramètres (m)			Quantités (-)		
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	R	μ_1, μ_2, μ_3	l'_0	\mathcal{P}_c	u'_0
1,1,1	0.5	0.5,0,0	2.03×10^{-2}	2.74×10^{-2}	4.17×10^{-2}
1,1,1	0.5	1,0,0	1.39×10^{-2}	1.92×10^{-2}	2.94×10^{-2}
1,1,1	1	0.5,0,0	1.27×10^{-1}	1.80×10^{-1}	2.87×10^{-1}
1,1,1	1	1,0,0	8.73×10^{-2}	1.32×10^{-1}	2.19×10^{-1}
1,1,1	2	1,0,0	2.88×10^{-1}	6.02×10^{-1}	1.67×10^0
1,1,1	1	2,0,0	1.95×10^{-2}	3.85×10^{-2}	7.60×10^{-2}
1,1,1	2	2,0,0	6.41×10^{-2}	3.01×10^{-1}	3.92×10^0
1,1,1	1	5,0,0	5.36×10^{-7}	4.91×10^{-6}	1.14×10^{-4}
1,1,1	1	10,0,0	2.78×10^{-23}	1.01×10^{-20}	2.17×10^{-13}

TABLE 2.7 – Résultats numériques pour des cas isotropes non centrés.

Paramètres (m)			Quantités (-)		
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	R	μ_1, μ_2, μ_3	l'_0	\mathcal{P}_c	u'_0
1,2,3	1	0,0,1	2.27×10^{-2}	3.68×10^{-2}	6.23×10^{-2}
1,2,3	1	0,0,10	9.27×10^{-5}	1.70×10^{-4}	3.05×10^{-4}
1,2,3	10	0,0,1	2.52×10^{-2}	9.98×10^{-1}	5.84×10^{17}
2,3,10	1	0,1,0	2.90×10^{-3}	4.05×10^{-3}	6.20×10^{-3}
2,3,10	1	0,10,0	1.18×10^{-5}	1.86×10^{-5}	2.99×10^{-2}
2,3,10	10	0,1,0	4.03×10^{-2}	6.41×10^{-1}	4.99×10^3

TABLE 2.8 – Résultats numériques pour des cas anisotropes non centrés.

En ce qui concerne le nombre de termes nécessaires à une bonne évaluation de la probabilité, il s'avère en général plus élevé qu'en 2-D, toujours parce que les encadrements du reste de la série ont été obtenus par des inégalités plus larges. Pour obtenir les valeurs affichées dans les tableaux précédents, la Proposition 11 préconise entre 1 et 496 termes selon les paramètres d'entrée. Comme dans le cas bidimensionnel, ce nombre augmente de manière drastique plus R est grand devant σ_1 .

Conclusion

Une nouvelle méthode de calcul de l'intégrale d'une fonction gaussienne sur une boule euclidienne a été présentée. La version 2-D trouve son application dans l'évaluation du risque pour les rapprochements rapides [2, 28] et la version 3-D dans le calcul de probabilités de collision instantanées [28]. Contrairement aux autres méthodes de la littérature, elle est basée sur une formule analytique exacte. Cette dernière a la forme d'une série entière préconditionnée par un terme exponentiel. Numériquement, elle se comporte favorablement, comme illustré par les nombreux exemples académiques et réels, notamment grâce à la positivité des termes de la série. Dans le cas bidimensionnel, la formule obtenue est particulièrement intéressante car la preuve a été faite qu'il s'agit de la version exacte de la formule approchée de Chan [28]. De plus, on dispose de bornes analytiques sur le risque de collision. Cet encadrement, évaluable presque instantanément, permet une estimation qui se révèle bien souvent être d'une finesse suffisante d'un point de vue de l'analyse mission, comme le montrent les cas tests réels.

Conclusion

Cette première partie de la thèse traite des méthodes de calcul de probabilités de collision. Plus particulièrement, elle est dédiée au modèle du rapprochement rapide [10, 2, 28, 33] et de la probabilité de collision instantanée sous incertitudes gaussiennes [28]. Le premier englobe une large part des rencontres réelles, pour lesquelles les vitesses relatives sont grandes, tandis que la seconde fournit une borne inférieure du risque dans un cadre plus général. Mathématiquement parlant, ces deux calculs de probabilités reviennent à évaluer l'intégrale d'une fonction gaussienne sur une boule euclidienne, respectivement en dimensions 2 et 3. La nouvelle méthode, détaillée dans le Chapitre 2, se démarque de celles de la littérature du domaine spatial, décrites dans le Chapitre 1, par le fait qu'elle n'est basée ni sur un schéma numérique d'intégration ni sur une formule analytique approchée, mais bien sur une formule analytique exacte. Cette dernière est obtenue à l'aide de deux outils principaux. D'une part, la transformée de Laplace, qui sert ici à développer en série la fonction intermédiaire au calcul de la probabilité. D'autre part, la technique de préconditionnement qui permet d'évaluer efficacement les fonctions holonomes i.e. développables en série entière dont les coefficients vérifient une formule de récurrence linéaire à coefficients polynomiaux. Un des avantages de la méthode repose sur le fait que l'intégrale est évaluée à l'aide des sommes partielles d'une série convergente à termes positifs, ce qui permet numériquement d'approcher par valeurs inférieures la probabilité de collision sans difficulté. On dispose même d'informations sur l'erreur de troncature, permettant ainsi de certifier la précision du calcul. De plus, des bornes analytiques sur la probabilité de collision elle-même sont données et constituent dans la plupart des cas un outil pratique d'une grande utilité pour estimer rapidement le risque associé à une rencontre.

Deuxième partie

Calculs de manœuvres d'évitement de collision

Introduction

Le second volet de la thèse est consacré à l'évitement du débris par l'objet primaire. Il s'agit de concevoir pour ce dernier une série de manœuvres à effecteur résultant en une probabilité de collision inférieure à un seuil de tolérance donné. Une telle stratégie est nécessaire dès que le risque associé à une alerte de collision dépasse cette valeur critique fixé par l'opérateur. On considère un type de propulsion chimique à poussée forte : en conséquence, les manœuvres sont classiquement [105] modélisées par des incréments de vitesse instantanés, appelés impulsions. La performance d'une stratégie d'évitement est évaluée par un critère de minimisation de la consommation de carburant, afin de réduire au maximum l'impact sur la durée de vie de la mission. Sous l'hypothèse des poussées instantanées, la consommation d'ergol s'écrit comme la somme des normes des impulsions réalisées [106, Chapitre 6]. D'autre part, le calcul de manœuvres est soumis à des contraintes d'origines diverses. En premier lieu, on cherche bien sûr à rendre la probabilité de collision sur l'intervalle de temps \mathcal{J} considéré, notée $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}}$, inférieure au seuil de tolérance. Il s'agit là d'une contrainte probabiliste. De plus, on peut avoir des conditions sur la trajectoire de l'objet primaire. Par exemple, il est envisageable de vouloir inclure dans le plan de manœuvres le retour, en temps voulu, sur l'orbite nominale. Dans cette introduction, on formule en toute généralité la question de la conception d'une stratégie d'évitement de collision comme un problème d'optimisation sous contrainte probabiliste ("chance-constrained optimization" dans la littérature anglophone [117, 96, 18, 48]). Les caractéristiques d'un plan de manœuvres, et donc les paramètres d'optimisation, sont :

- $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre de manœuvres,
- $t_1 < \dots < t_N \in \mathcal{J}$ leurs dates d'exécution,
- $\Delta V_1, \dots, \Delta V_N \in \mathbb{R}^3$ les impulsions.

Pour être exact, il faudrait considérer les dates et composantes des impulsions comme des variables non déterministes, du fait de l'incertitude liée à l'exécution d'une manœuvre. En effet, des imprécisions sur la réalisation d'une poussée (par exemple au niveau de la direction et de l'amplitude [77]) existent. Néanmoins, le problème est déjà complexe en négligeant ces aléas, et il est possible de compenser cette approximation en prenant des marges sur les solutions obtenues ainsi. Finalement, le problème d'optimisation s'écrit :

Problème 1.

$$\min_{N, t_i, \Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_q \text{ sous } \begin{cases} \mathcal{P}_c^{\mathcal{J}}(N, t_i, \Delta V_i) \leq \varepsilon \\ b(N, t_i, \Delta V_i) = 0 \end{cases}$$

où :

- $q = 1$ ou 2 selon la configuration des tuyères considérée ;
- $\varepsilon \in]0, 1[$ est le risque maximum autorisé, défini par l'utilisateur ;
- b représente des conditions sur la trajectoire moyenne de l'objet primaire.

En toute généralité, le Problème 1 est difficile, principalement à cause de la nature probabiliste de la contrainte. En effet, le simple calcul de la probabilité de collision elle-même peut se révéler ardu. Par exemple, dans la première partie (Sections 1.2.1 et 2.2), on a vu que l'on savait calculer la probabilité de collision en rapprochement rapide lorsque les incertitudes au temps de référence étaient de type gaussien. Malheureusement, dans le cas général, l'introduction de manœuvres, du fait de la non linéarité de la dynamique orbitale, modifie la nature des vecteurs aléatoires, qui ne sont donc gaussiens. En d'autres termes, bien qu'il soit possible de calculer $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}}(N, t_i, 0)$ i.e. le risque sans manœuvres, il est difficile d'évaluer $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}}(N, t_i, \Delta V_i)$. Lorsque l'on sort du cadre des rencontres

rapides, même le calcul de $\mathcal{P}_c^{\mathcal{J}}(N, t_i, 0)$ devient problématique (cf. par exemple le Chapitre 8 de [28]). Il apparaît donc nécessaire d'utiliser des hypothèses simplificatrices ou des relaxations pour obtenir une formulation du problème susceptible d'être résolue efficacement.

Dans le Chapitre 3, on se place dans un cadre où le mouvement relatif peut être considéré comme rectiligne et l'on s'autorise une unique manœuvre d'évitement, exécutée à une date fixée à l'avance. L'utilisation de la notion de tube de collision permet d'exprimer la condition de non-collision en fonction des paramètres du problème à l'aide d'une unique inégalité. On propose alors deux méthodes pour résoudre le problème : la première se base sur une approximation des lois de distribution pour calculer la probabilité de collision et la seconde utilise l'approche dite des scénarios [22, 23] pour produire des solutions admissibles de plus en plus optimales. Le Chapitre 4 considère le modèle des rapprochements lents [28], qui permet une linéarisation de la dynamique képlérienne des objets autour de l'orbite primaire de référence. La contrainte sur le risque global de collision est alors remplacé par des contraintes sur le risque instantané. A la suite d'une relaxation, à savoir un recouvrement polyédral de la sphère combinée, on arrive à un problème sous contraintes probabilistes linéaires jointes. Deux approches sont proposées pour le résoudre. La première est directe et se base sur un choix judicieux de polyèdres cubiques afin d'obtenir une expression analytique des contraintes. La seconde s'appuie sur le principe de sélection du risque [17]. Cette seconde relaxation permet d'obtenir un problème sous forme déterministe avec des contraintes disjonctives, que l'on peut résoudre dans le cadre de la programmation linéaire mixte en variables réelles et binaires.

Chapitre 3

Stratégies d'évitement de collision en rapprochement rapide

Ce chapitre est consacré à l'évitement de collision pour des rencontres rapides. L'hypothèse de mouvement rectiligne de ce modèle permet de travailler avec un ensemble géométrique de collision ayant la forme d'un cylindre circulaire droit de hauteur infinie. Comme dans la référence [93], les effets de la manœuvre sont calculés en supposant une dynamique képlérienne. En conséquence, la propagation des orbites peut être faite analytiquement, par exemple grâce aux coefficients de Lagrange [13, 36, 54]. On cherche un plan de manœuvres sous la forme d'une unique impulsion, réalisée à une date avant la conjonction fixée par l'opérateur. En pratique, une telle action est généralement suffisante pour réduire le risque de collision à un niveau acceptable [111]. De plus, les effets de la poussée d'évitement sur l'orbite de l'objet primaire sont en général faibles et les corrections inhérentes peuvent être intégrées aux manœuvres nominales de maintien à poste.

Dans la littérature, le processus d'optimisation est souvent subdivisé. Pour une date d'exécution donnée, Patera et Peterson [93] recherchent d'abord une direction de poussée, avant de se consacrer à son amplitude. De plus, certains auteurs considèrent un critère géométrique en lieu et place de la probabilité de collision pour contraindre l'impulsion. Dans la référence [111], la date et la direction de la manœuvre sont fixées à l'avance de manière heuristique, l'objectif étant de réaliser une distance de plus proche passage donnée. On citera également l'article [20], où une linéarisation des fonctions par rapport aux composantes de l'incrément de vitesse est effectuée. Cette approximation permet de calculer analytiquement une manœuvre maximisant la distance de plus proche passage ou bien minimisant la probabilité de collision, ce qui ne correspond pas véritablement à une contrainte probabiliste.

Deux méthodes sont proposées ici pour résoudre le problème d'optimisation sous contrainte probabiliste considéré. La première est basée sur une approximation des lois de distribution. On réalise des développements de Taylor en fonction du vecteur aléatoire pour calculer les effets de la manœuvre, permettant ainsi de conserver la nature gaussienne des incertitudes et de calculer la probabilité de collision à l'aide de la formule classique en rencontre rapide (cf. Section 1.2.1 du premier chapitre). Ceci est fait à l'aide de l'algorithme présenté dans la Section 2 du deuxième chapitre. La seconde méthode se base quant à elle sur l'approche dite des scénarios [22, 23]. Cette technique aléatoire offre une chance d'obtenir une solution admissible au problème probabiliste. Sous des hypothèses de convexité, il existe une garantie théorique sur cette quantité [23], bien que celles-ci ne soient pas vérifiées dans le cas présent. Néanmoins, itérer la résolution de problèmes de scénarios reste un moyen pratique efficace d'obtenir une solution admissible et peu coûteuse.

Le chapitre débute par la Section 3.1 qui présente le problème d'optimisation sous contrainte probabiliste. Ensuite, les deux méthodes de résolution sont décrites : par approximation des distributions (Section 3.2) et selon l'approche par scénarios (Section 3.3). Enfin, la Section 3.4 compare les méthodes sur deux cas tests.

3.1 Formulation du problème

Le contexte est celui d'une conjonction entre deux objets spatiaux de forme sphérique en rapprochement rapide [10, 2] : les incertitudes sur les vitesses sont négligées et la trajectoire relative est considérée comme rectiligne. Le risque de collision, calculé à partir des données fournies par une alerte selon les méthodes développées dans la Partie I, est supposé supérieur au seuil de tolérance ε , d'où la nécessité d'une stratégie d'évitement. On supposera dans la suite que la propulsion est chimique, ce qui nous permettra d'assimiler la poussée à un incrément de vitesse instantané.

Définissons maintenant les données fournies par l'alerte de collision à l'instant de référence $t = 0$. On note $\Xi = (\Xi_p, \Xi_s)$ le couple de vecteurs aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, décrivant les positions des objets primaire et secondaire à $t = 0$. On fait l'hypothèse qu'ils suivent des lois de distribution multinormale indépendantes :

$$\Xi_p \sim \mathcal{N}_3(\mu_{\Xi_p}, \Sigma_{\Xi_p}), \quad \Xi_s \sim \mathcal{N}_3(\mu_{\Xi_s}, \Sigma_{\Xi_s}).$$

Dans le cadre des rapprochements rapides, les vitesses sont considérées comme déterministes et notées respectivement \bar{v}_p^0 et \bar{v}_s^0 . Elles sont notées avec une barre pour ne pas les confondre avec les vitesses à $t = 0$ lorsqu'une manœuvre a été effectuée, et qui dépendent alors des incertitudes.

Dans ce chapitre, on s'autorise une unique impulsion ΔV , exécutée à une date $t = \tau$ fixée à l'avance et antérieure à la rencontre ($\tau < 0$). A noter que le choix de τ peut être heuristique ou

dicté par des contraintes opérationnelles. Il est également possible de faire varier cette date afin de comparer les solutions ainsi obtenues.

Le problème d'optimisation consiste alors à minimiser la consommation associée tout en ramenant la probabilité de collision sous un seuil acceptable. On considère ici le cas d'une unique tuyère orientable, ce qui nous permet de définir la consommation par la norme euclidienne de l'impulsion ΔV [106]. Pour lever la non-différentiabilité, le critère de minimisation peut être remplacé, sans changer les solutions, par son carré $\|\Delta V\|_2^2$.

Dans le cadre d'un mouvement rectiligne, nous avons vu au Chapitre 1 que l'ensemble de collision peut être assimilé à un cylindre droit infini, appelé tube de collision. Ceci nous permet d'exprimer, pour une occurrence $\xi = (\xi_p, \xi_s)$ du vecteur aléatoire Ξ , la condition de non-collision à l'aide d'une unique équation $c(\Delta V, \xi) \geq 0$, dont le calcul est détaillé ci-après. La contrainte probabiliste associée s'écrira alors sous la forme : $\mathcal{P}\{c(\Delta V, \Xi) < 0\} \leq \varepsilon$. Autrement dit, on réévalue la probabilité de collision à l'instant $t = 0$ après qu'une manœuvre ait été effectuée au temps $t = \tau$.

Le problème d'évitement s'écrit finalement :

Problème 2.

$$\min_{\Delta V} \|\Delta V\|_2^2 \text{ sous } \mathcal{P}\{c(\Delta V, \Xi) < 0\} \leq \varepsilon.$$

Remarque 5. Pour que l'hypothèse de mouvement rectiligne reste valable quelle que soit l'impulsion, il est nécessaire de limiter l'amplitude de cette dernière. En pratique, on utilisera dans les applications des contraintes de boîtes sur les composantes de ΔV .

Revenons maintenant à l'expression de la fonction de collision c . Étant donnée une occurrence ξ une occurrence des variables incertaines de position, on définit $(r_p^0(\Delta V, \xi_p), v_p^0(\Delta V, \xi_p))$ le vecteur position-vitesse de l'objet primaire à $t = 0$ lorsqu'une manœuvre ΔV a été réalisée à l'instant $t = \tau$.

Condition géométrique de non-collision

Rappelons que sous l'hypothèse de mouvement rectiligne, le domaine de collision à $t = 0$ peut être vu comme un ensemble tubulaire. Comme pour le calcul de la probabilité dans la Section 1.2, on étend ce tube de collision à l'infini, ce qui revient à considérer que l'intervalle de temps de la rencontre est \mathbb{R} . Ainsi l'ensemble de collision, dans l'espace des conditions initiales, est un cylindre infini de révolution, d'axe orienté selon la vitesse relative et de rayon R égal à celui de la sphère combinée (voir Figure 3.1).

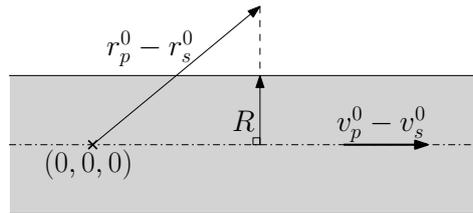


FIGURE 3.1 – Tube de collision.

La condition de collision s'exprime alors à l'aide d'une unique inégalité, fonction des grandeurs $r_p^0(\Delta V, \xi_p)$, $v_p^0(\Delta V, \xi_p)$, ξ_s et \bar{v}_s^0 . Elle traduit le fait que la norme de la projection de la position relative sur le plan orthogonal à la vitesse relative doit être inférieure au rayon combiné des objets R . Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\sqrt{\|r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s\|^2 - \left((r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s)^T \cdot \frac{v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0}{\|v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0\|} \right)^2} < R. \quad (3.1)$$

Cela est équivalent à la condition $c(\Delta V, \xi) < 0$, en posant :

$$c(\Delta V, \xi) = \|r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s\|^2 - \left((r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s)^T \cdot \frac{v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0}{\|v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0\|} \right)^2 - R^2. \quad (3.2)$$

Reste enfin à calculer l'état propagé $(r_p^0(\Delta V, \xi_p), v_p^0(\Delta V, \xi_p))$ lorsque une manœuvre a eu lieu. Observons que l'expression précédente est indépendante du modèle de propagation d'orbite.

Propagation des trajectoires

Comme dans [93], on considère que l'effet du ΔV peut être calculé sans prendre en compte les perturbations orbitales. Ainsi, on peut propager l'état de l'objet primaire à l'aide des coefficients f et g de Lagrange (voir Annexe C pour les détails sur ces fonctions). Le principe est le suivant : étant donné l'état initial (ξ_p, \bar{v}_p^0) ,

1. on le propage dans le passé pour obtenir les position et vitesse $(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p))$ de l'objet primaire à $t = \tau$ avant manœuvre :

$$r_p^\tau(\xi_p) = f(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) \xi_p + g(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) \bar{v}_p^0, \quad (3.3)$$

$$v_p^\tau(\xi_p) = \dot{f}(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) \xi_p + \dot{g}(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) \bar{v}_p^0. \quad (3.4)$$

2. On applique l'incrément de vitesse ΔV .
3. On propage dans le futur jusqu'à $t = 0$:

$$r_p^0(\Delta V, \xi_p) = f(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V, -\tau) r_p^\tau(\xi_p) + g(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V, -\tau) (v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V), \quad (3.5)$$

$$v_p^0(\Delta V, \xi_p) = \dot{f}(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V, -\tau) r_p^\tau(\xi_p) + \dot{g}(r_p^\tau(\xi_p), v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V, -\tau) (v_p^\tau(\xi_p) + \Delta V). \quad (3.6)$$

En injectant ces équations dans (3.2), on obtient ainsi une expression analytique pour c ne dépendant que de l'impulsion et des incertitudes. Néanmoins, malgré le caractère quadratique et convexe de la fonction coût, le Problème 2 reste difficile à résoudre du fait de la nature probabiliste de la contrainte. De plus, même pour un ξ donné, l'inégalité $c(\cdot, \xi) \geq 0$ ne présente pas de propriété de convexité.

3.2 Résolution par approximation des distributions

La première méthode utilise la formule classique de rencontre rapide pour calculer la probabilité de collision (cf. Section 1.2.1). La difficulté est que, dans le cas général, pour un ΔV non nul, le vecteur aléatoire de position de l'objet primaire à $t = 0$ n'est pas gaussien et sa vitesse n'est pas une fonction déterministe. Or, ces propriétés sont nécessaires pour l'utilisation de la dite formule. On va donc réaliser des approximations pour se ramener dans une configuration adéquate.

Le moyen le plus naturel pour conserver la nature gaussienne de la position consiste à linéariser ce vecteur par rapport au paramètre incertain, en écrivant :

$$r_p^0(\Delta V, \cdot) \simeq r_p^0(\Delta V, \mu_{\Xi_p}) + \partial_2 r_p^0(\Delta V, \mu_{\Xi_p})(\cdot - \mu_{\Xi_p}), \quad (3.7)$$

où la notation ∂_2 désigne la dérivée partielle par rapport à la seconde variable de la fonction considérée. D'autre part, la méthode la plus simple pour que le vecteur $v_p^0(\Delta V, \Xi)$ ne soit plus concerné par les incertitudes, consiste à faire l'approximation à l'ordre 0 suivante :

$$v_p^0(\Delta V, \cdot) \simeq v_p^0(\Delta V, \mu_{\Xi_p}). \quad (3.8)$$

Avec les simplifications précédentes, on est bien sous les hypothèses classiques de la rencontre rapide, même après application de la manœuvre ΔV . Il est donc possible de calculer la probabilité de collision $\mathcal{P}\{c(\Delta V, \Xi) < 0\}$ avec la formule de rencontre rapide selon la méthode détaillée dans la Section 2.2. Dans ces conditions, la contrainte probabiliste du Problème 2 devient facile à évaluer et la résolution de ce dernier est possible à l'aide d'outils classiques d'optimisation.

En pratique, pour utiliser la formule de rencontre rapide pour la probabilité de collision, on a besoin des deux premiers moments du vecteur position de l'objet primaire au temps $t = 0$. L'équation (3.7) permet d'obtenir l'espérance :

$$\mathbb{E}(r_p^0(\Delta V, \Xi_p)) = r_p^0(\Delta V, \mu_{\Xi_p}), \quad (3.9)$$

et la matrice de covariance :

$$\mathbb{E}((r_p^0(\Delta V, \Xi_p) - \mathbb{E}(r_p^0(\Delta V, \Xi_p)))(r_p^0(\Delta V, \Xi_p) - \mathbb{E}(r_p^0(\Delta V, \Xi_p)))^T) = \partial_2 r_p^0(\Delta V, \mu_{\Xi_p}) \Sigma_{\Xi_p} \partial_2 r_p^0(\Delta V, \mu_{\Xi_p})^T. \quad (3.10)$$

Cette dernière équation nécessite la connaissance de $\partial_2 r_p^0$. D'après (3.5), pour $\xi_p \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_2 r_p^0(\Delta V, \xi_p) &= f(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau) J_{r_p^\tau} + r_p^\tau (\partial_1 f(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau))^T J_{r_p^\tau} + \partial_2 f(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau)^T J_{v_p^\tau} \\ &\quad + v_p^\tau (\partial_1 g(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau))^T J_{r_p^\tau} + \partial_2 g(r_p^\tau, v_p^\tau + \Delta V, -\tau)^T J_{v_p^\tau}, \end{aligned}$$

où J désigne la matrice jacobienne des fonctions concernées. Or, d'après (3.3) et (3.4), on a :

$$\begin{aligned} J_{r_p^\tau}(\xi_p) &= \xi_p \partial_1 f(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau)^T + \xi_p \partial_1 g(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau)^T + f(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) I, \\ J_{v_p^\tau}(\xi_p) &= \xi_p \partial_1 \dot{f}(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau)^T + \bar{v}_p^0 \partial_1 \dot{g}(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau)^T + \dot{f}(\xi_p, \bar{v}_p^0, \tau) I. \end{aligned}$$

Étant donnée la double approximation des équations (3.7) et (3.8), il n'existe pas de garantie que la solution obtenue avec cette méthode soit admissible pour le Problème 2. Il est donc nécessaire de calculer *a posteriori* le risque réel associée à la solution. Ceci peut être fait, par exemple, avec une méthode de Monte Carlo.

3.3 Résolution à l'aide de l'approche par scénarios

La deuxième méthode proposée recherche la solution optimale en comparant des solutions admissibles produites par l'approche dite par scénarios. Cette dernière est présentée dans la Sous-section 3.3.1 tandis que la Sous-section 3.3.2 présente l'algorithme itératif de résolution du Problème 2. Enfin, la Sous-section 3.3.3 détaille le calcul du gradient de la fonction contrainte par rapport aux variables d'optimisation, dont la connaissance est préférable pour les performances de l'approche par scénarios.

3.3.1 L'approche par scénarios

L'approche par scénarios peut produire des solutions admissibles à un problème d'optimisation sous des incertitudes modélisées de manière probabiliste [22]. En lieu et place de contraintes probabilistes, on cherche à résoudre un problème min-max sur un grand nombre d'occurrences du paramètre incertain. Dans le cas présent, la fonction coût ne dépendant pas du vecteur aléatoire, le problème déterministe obtenu est une recherche de minimum.

Le problème de scénarios

L'approche par scénarios vise à résoudre ce que l'on appelle un problème de scénarios [22]. Tout d'abord, on tire aléatoirement n vecteurs ξ^1, \dots, ξ^n dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, représentant différentes positions pour les objets primaire et secondaire à $t = 0$. Le problème par scénarios associé au Problème 2 s'écrit :

Problème 3.

$$\min_{\Delta V} \|\Delta V\|_2^2 \text{ sous } c_j(\Delta V) \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

où $c_j : \Delta V \mapsto c(\Delta V, \xi^j)$.

A noter que la fonction coût apparaissant dans le Problème 3 est inchangée par rapport au problème d'origine, mais que la contrainte probabiliste a été remplacée par un nombre fini de conditions déterministes, bien plus faciles à évaluer. En général, des solutions locales au problème de scénarios peuvent être obtenues à l'aide d'outils classiques d'optimisation, et encore plus facilement si le gradient de c par rapport aux variables d'optimisation peut être calculé analytiquement.

Solutions du problème de scénarios

Définissons d'abord l'ensemble de faisabilité \mathcal{K}_ξ , pour ξ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{K}_\xi = \{\Delta V : c(\Delta V, \xi) \geq 0\}. \quad (3.11)$$

Pour une occurrence ξ du paramètre incertain, l'ensemble \mathcal{K}_ξ contient tous les vecteurs d'optimisation qui ne conduisent pas à une collision entre les objets. Lorsque ξ varie dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, (3.11) définit une famille d'ensembles réalisables pour le Problème 3. Si ces derniers vérifient une propriété de convexité, alors il existe un résultat fort reliant la solution au problème probabiliste (voir ci-dessous).

Théorème 3 (Problème convexe incertain [23] en dimension 3). *Si \mathcal{K}_ξ est convexe pour tout ξ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et si n est tel que :*

$$\sum_{i=0}^2 C_n^i \varepsilon^i (1 - \varepsilon)^{n-i} \leq \beta, \quad (3.12)$$

*alors il y a une probabilité $1 - \beta$, appelé **niveau de confiance**, pour que la solution ΔV^* du Problème 3 associé à ξ^1, \dots, ξ^n vérifie :*

$$\mathcal{P}\{c(\Delta V^*, \Xi) < 0\} \leq \varepsilon. \quad (3.13)$$

Ce théorème signifie que, sous une hypothèse de convexité des ensembles de faisabilité, il existe une garantie, en termes de probabilité, pour que la solution d'un problème de scénarios suffisamment grand soit admissible pour le problème probabiliste d'origine. Néanmoins, la solution ne sera que sous-optimale car elle ne représente un optimum que pour un nombre fini d'occurrences du paramètre incertain.

Dans le cas où des ensembles de faisabilité \mathcal{K}_ξ ne sont pas convexes pour certains ξ dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, il n'y a plus de garantie probabiliste théorique que la solution du problème de scénarios soit admissible. De plus, en général, la solution obtenue n'est qu'un optimum local du problème de scénarios. Dans le cas présent d'évitement de collision pour des trajectoires relatives rectilinéaires, il s'avère que la propriété de convexité n'est pas vérifiée. En conséquence, même pour des grandes valeurs de n , il n'y a pas de garantie sur l'admissibilité de la solution par scénarios pour le problème probabiliste. Ainsi, la validité d'une solution doit être systématiquement vérifiée *a posteriori* et son optimalité ne peut être évaluée que par comparaison avec d'autres méthodes disponibles.

3.3.2 Méthode de résolution

On propose maintenant un algorithme, basé sur une résolution itérative de problèmes à scénarios, pour obtenir une solution sous-optimale au Problème 2. Il s'agit une heuristique sans garantie de convergence, mais qui en pratique donne de bons résultats.

L'algorithme proposé est le suivant :

Algorithme 2. *Recherche itérative de résolution de problèmes de scénarios.*

Commencer avec $k = 0$ et $\Delta V^ = 0$.*

1. *Incrémenter k et générer aléatoirement n scénarios.*
2. *Résoudre le problème de scénarios correspondant.*
 - (a) *S'il n'y a pas de solution, retourner à l'étape 1.*
 - (b) *Sinon, soit ΔV^k la solution obtenue. Aller à l'étape 3.*
3. *Comparer le coût $\|\Delta V^k\|_2$ à la valeur stockée $\|\Delta V^*\|_2$.*
 - (a) *Si $\|\Delta V^k\|_2 < \|\Delta V^*\|_2$, aller à l'étape 4.*
 - (b) *Sinon, retourner à l'étape 1.*
4. *Vérifier l'admissibilité de ΔV^k pour le problème probabiliste d'origine via une méthode de Monte Carlo.*
 - (a) *Si $\mathcal{P}\{c(\Delta V^k, \Xi) < 0\} \leq \varepsilon$, faire $\Delta V^* = \Delta V^k$ et retourner à l'étape 1.*

(b) Sinon, retourner à l'étape 1.

La boucle s'arrête lorsque le nombre maximum d'itérations \bar{k} est atteint. A noter que le choix de la valeur de n est laissé à l'utilisateur. Dans l'étude numérique 3.4, on a fixé empiriquement $\bar{k} = 100$ et $n = 1000$.

3.3.3 Calcul du gradient de la fonction contrainte

Le Problème 3 peut être résolu à l'aide d'outils d'optimisation dédiés. Pour les utiliser, il est nécessaire de calculer les fonctions contraintes c_j ($j = 1, \dots, n$) et, si possible, leur gradient $\nabla c_j(\cdot) = \partial_1 c(\cdot, \xi^j)$. Dans le modèle considéré, le gradient de c par rapport à ΔV peut être calculé analytiquement, permettant ainsi une résolution plus efficace. Le but de cette sous-section est d'obtenir une expression de $\partial_1 c$.

On commence par introduire les matrices jacobiniennes $\partial_1 r_p^0$ et $\partial_1 v_p^0$ des vecteurs position et vitesse de l'objet primaire r_p^0 et v_p^0 par rapport à l'impulsion ΔV . Ces matrices peuvent être obtenues directement grâce aux équations (3.5) et (3.6) :

$$\partial_1 r_p^0(\Delta V, \xi_p) = \partial_2 f(r_p^T, v_p^T + \Delta V, -\tau) r_p^T + \partial_2 g(r_p^T, v_p^T + \Delta V, -\tau) v_p^T + g(r_p^T, v_p^T + \Delta V, -\tau) I \quad (3.14)$$

$$\partial_1 v_p^0(\Delta V, \xi_p) = \partial_2 \dot{f}(r_p^T, v_p^T + \Delta V, -\tau) r_p^T + \partial_2 \dot{g}(r_p^T, v_p^T + \Delta V, -\tau) v_p^T + \dot{g}(r_p^T, v_p^T + \Delta V, -\tau) I \quad (3.15)$$

Les dérivées partielles de f et g peuvent être obtenues à partir de leurs expressions analytiques. Définissons maintenant :

$$u^0(\Delta V, \xi_p) = \frac{v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0}{\|v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0\|_2}, \quad (3.16)$$

et réécrivons la contrainte c :

$$c(\Delta V, \xi) = c'(\Delta V, \xi) - c''(\Delta V, \xi)^2,$$

où les applications $c', c'' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} c'(\Delta V, \xi) &= \|r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s\|_2^2 - R^2, \\ c''(\Delta V, \xi) &= (r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s)^T u^0(\Delta V, \xi_p). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\partial_1 c(\Delta V, \xi) = \partial_1 c'(\Delta V, \xi) - 2c''(\Delta V, \xi) \partial_1 c''(\Delta V, \xi).$$

La fonction c' peut être vue comme une fonction composée, à savoir :

$$c' : (\Delta V, \xi) \mapsto r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s \mapsto \|r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s\|_2^2,$$

dont le gradient par rapport à ΔV est :

$$c'(\Delta V, \xi) = 2\partial_1 r_p^0(\Delta V)(r_p^0(\Delta V, \xi_p) - \xi_s).$$

Passons maintenant au calcul de $\partial_1 c''(\Delta V, \xi)$. Dans la suite, la dépendance en ΔV est omise pour ne pas trop alourdir les équations. La première étape consiste à calculer le gradient de c'' en fonction de la Jacobienne de u^0 . Un calcul direct donne :

$$\partial_1 c'' = \partial_1 r_p^{0T} u^0 + \partial_1 u^{0T} (r_p^0 - \xi_s).$$

La deuxième étape est le calcul de $\partial_1 u^0$ et se révèle plus technique. La fonction u^0 peut également être vue comme une composée de fonctions :

$$\begin{aligned} u^0 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 && \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^3 \\ (\Delta V, \xi_p) &\mapsto v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0 && \mapsto \frac{v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0}{\|v_p^0(\Delta V, \xi_p) - \bar{v}_s^0\|_2} \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $\psi : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{x}{\|x\|_2}$, il vient :

$$J_\psi(x) = \frac{1}{\|x\|_2} \left(I_3 - \frac{xx^T}{\|x\|_2^2} \right).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\partial_1 u^0 &= J_\psi(v_p^0 - \bar{v}_s^0) \partial_1 v_p^0, \\
&= \left(I_3 - \frac{(v_p^0 - \bar{v}_s^0)(v_p^0 - \bar{v}_s^0)^T}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2^2} \right) \frac{\partial_1 v_p^0}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2}, \\
&= \frac{1}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2} (I_3 - u^0 u^{0T}) \partial_1 v_p^0.
\end{aligned}$$

Le gradient de c'' est donné par :

$$\partial_1 c'' = \partial_1 r_p^{0T} u^0 + \frac{\partial_1 v_p^{0T}}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2} (I_3 - u^0 u^{0T})^T (r_p^0 - \xi_s).$$

Finalement, le gradient de c vaut :

$$\partial_1 c = 2 \left(\partial_1 r_p^0 - \frac{(r_p^0 - \xi_s)^T u^0}{\|v_p^0 - \bar{v}_s^0\|_2} \partial_1 v_p^0 \right)^T (I_3 - u^0 u^{0T}) (r_p^0 - \xi_s). \quad (3.17)$$

3.4 Résultats numériques

Dans tous les exemples proposés, la date de poussée τ est fixée à une demi-orbite avant le temps de référence. La période de l'objet primaire est calculée à partir de l'orbite moyenne. On peut justifier ce choix d'une durée relativement courte par deux raisons. Premièrement, il permet de valider l'hypothèse de mouvement képlérien entre la manœuvre et la rencontre. Deuxièmement, il laisse le temps de réévaluer le risque de collision plusieurs fois à la suite de nouvelles alertes, pour éventuellement reconsidérer le besoin d'un changement de trajectoire. D'autre part, le seuil du risque de collision est fixé à $\varepsilon = 10^{-4}$.

Le problème d'optimisation par approximation des distributions et les problèmes de scénarios de l'Algorithme 2 sont résolus sous Matlab© R2014a à l'aide de la fonction "fmincon" (méthode de point intérieur). La durée de la résolution du premier est de l'ordre de la seconde, ce qui est environ deux ordres de grandeur en dessous du temps moyen de résolution d'un problème de scénarios.

Les solutions sont exprimées dans le repère orbital local (x, y, z) représenté sur la Figure 3.2. Il est rattaché à l'état de l'objet primaire rétropropagé jusqu'à $t = \tau$ à partir de $(\mu_{\Xi_p}, \bar{v}_p^0)$. L'axe x est orienté selon la vitesse orbitale, l'axe z est opposé au moment angulaire et l'axe y complète le repère orthogonal direct.

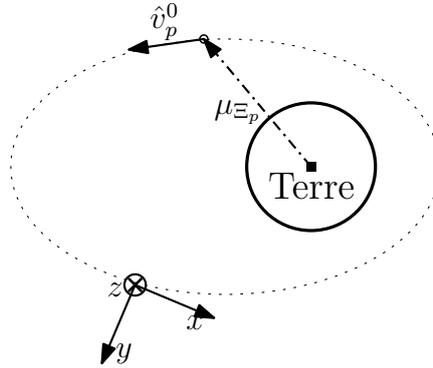


FIGURE 3.2 – Configuration de la manœuvre d'évitement de collision.

A des fins comparatives, une troisième méthode de résolution a été implémentée. La probabilité de collision y est calculée selon une méthode de Monte Carlo. La recherche d'optimalité est faite par dichotomie, dans la direction x . L'algorithme s'arrête dès que le risque est dans l'intervalle $[0.99\varepsilon, \varepsilon]$. Le choix de la direction se justifie par le fait que, pour une orbite circulaire, une manœuvre tangentielle maximise l'éloignement radial une demi-orbite plus loin et donc, intuitivement,

augmente significativement la distance de plus proche passage [111]. L'effet d'une telle poussée est représentée sur la Figure 3.3.

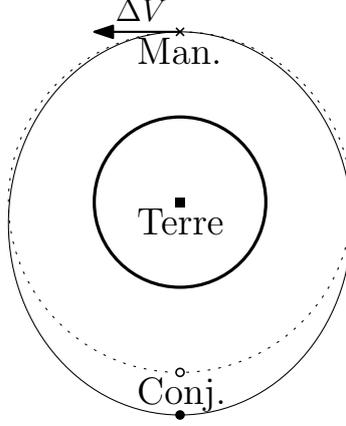


FIGURE 3.3 – Manœuvre d'éloignement radial.

Pour chaque solution ΔV^* produite par l'Algorithme 2, on présente un histogramme comptabilisant les distances (normalisées) de plus proche passage :

$$\sqrt{\frac{c(\Delta V^*, \hat{\xi}^i)}{R^2} + 1}, \quad (3.18)$$

pour un tirage aléatoire de 10^4 occurrences $\hat{\xi}^i$. Les grandeurs montrées étant logarithmiques, les collisions correspondent aux valeurs négatives. Les bâtonnets bleues correspondent au cas non contrôlé et les rouges à celui où la manœuvre est effectuée. Cela permet de visualiser l'effet de cette dernière sur les trajectoires relatives.

3.4.1 Exemple 1

Ce cas test est une alerte réelle, donnée sous la forme d'un Conjunction Summary Message (CSM), envoyée par le Joint Space Operation Center à EADS Astrium (maintenant Airbus Defence and Space). Elle concerne un satellite sur une orbite circulaire à basse altitude. Du fait de la nature des données contenues dans l'alerte, l'instant de référence est le temps de plus proche passage sans manœuvre. La probabilité de collision s'élève à 1.9×10^{-3} (voir CSM1 du Chapitre 2).

Les différentes solutions sont données dans le Tableau 3.1. Il est notable que les trois résultats, issus d'approches dissemblables, tendent à indiquer la même direction optimale, confirmant ainsi l'heuristique de la référence [111]. On remarque que, du fait de l'approximation réalisée dans le cadre de la première méthode, la solution proposée n'est clairement pas optimale par rapport aux autres. Elle reste néanmoins admissible, ce qui, pour rappel, n'est *a priori* pas garanti. D'autre part, le risque associé à la solution par scénarios n'est pas tout à fait saturé, laissant ainsi une petite marge d'amélioration possible. On voit, sur la Figure 3.4, comment la distribution des distances de plus proche passage est éloignée de la zone de collision par la manœuvre (décalage vers la droite).

Méthode	ΔV_x (mm/s)	ΔV_y (mm/s)	ΔV_z (mm/s)	$\ \Delta V\ _2$ (mm/s)	Risque (-)
Approximation	-24.417	0.551	-0.003	24.423	6.9×10^{-5}
Scénarios	-22.363	1.768	0.000	22.433	9.7×10^{-5}
Dichotomie	-22.344	0	0	22.344	1.0×10^{-4}

TABLE 3.1 – Solutions pour l'exemple 1.

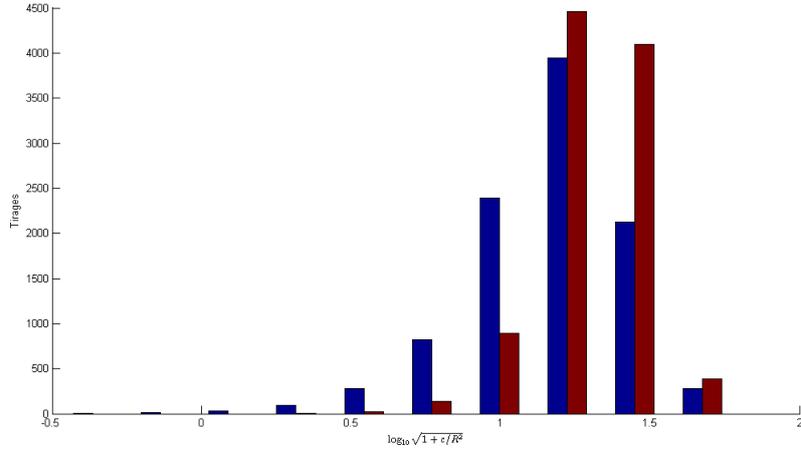


FIGURE 3.4 – Histogramme des distances de plus proche passage sans manœuvre (bleu) et avec la solution par scénarios (rouge) pour l'exemple 1.

3.4.2 Exemple 2

Cette rencontre met en scène un objet primaire sur une orbite fortement elliptique. Les données sont obtenues en modifiant un exemple de la littérature (cas 9 dans la référence [8]). Plus précisément, le signe d'une des composantes de la vitesse moyenne de l'objet secondaire a été changé, afin que le mouvement relatif soit approximativement une droite. Il est à noter que bien qu'Alfano fournisse des valeurs pour les incertitudes concernant les vitesses au temps de référence, celles-ci apparaissent comme négligeables et seront donc ignorées. Les valeurs moyennes sont fournies dans le Tableau 3.2 et les matrices de covariance pour les positions dans les équations (3.19) (objet primaire) et (3.20) (secondaire) :

$$\begin{pmatrix} 67.01430 & 14.5722 & 31.3632 \\ * & 3.2133 & 6.8234 \\ * & * & 14.7289 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\begin{pmatrix} 67.0146 & 14.5721 & 31.3630 \\ * & 3.2133 & 6.8234 \\ * & * & 14.7288 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Objet	Primaire	Secondaire
Position (km)	[-5532.700 20132.674 40010.549]	[-5532.694 20132.677 40010.554]
Vitesse (km/s)	[-1.450945 - 0.311609 - 0.671302]	[-1.450947 - 0.311608 0.671301]

TABLE 3.2 – État moyen des objets au temps de référence.

La probabilité de collision, sans manœuvre, s'élève à 3.24×10^{-1} . Une nouvelle fois, la solution générée par la première méthode est la plus coûteuse. Ceci se traduit par un risque associé très faible par rapport à la limite autorisée. Néanmoins, c'est de loin la plus rapide des trois méthodes. D'autre part, on constate que la solution obtenue par dichotomie est 16.7% plus coûteuse que celle obtenue avec l'Algorithme 2. Cela s'explique par le fait que, pour une orbite non circulaire, la manœuvre tangentielle ne possède pas d'avantage particulier. Ceci illustre l'efficacité de l'approche par scénarios qui permet de trouver des solutions peu coûteuses dans des cas où il est difficile de le faire de manière heuristique. La Figure 3.5 retranscrit visuellement l'effet bénéfique de l'impulsion sur l'éloignement des objets.

Méthode	ΔV_x (mm/s)	ΔV_y (mm/s)	ΔV_z (mm/s)	$\ \Delta V\ _2$ (mm/s)	Risque (-)
Approximation	-0.4779	-0.0825	-0.2357	0.5392	$\leq 1.00 \times 10^{-6}$
Scénarios	-0.2430	0.0094	-0.1469	0.2841	8.04×10^{-5}
Dichotomie	-0.3315	0	0	0.3315	1.00×10^{-4}

TABLE 3.3 – Solutions pour l'exemple 2.

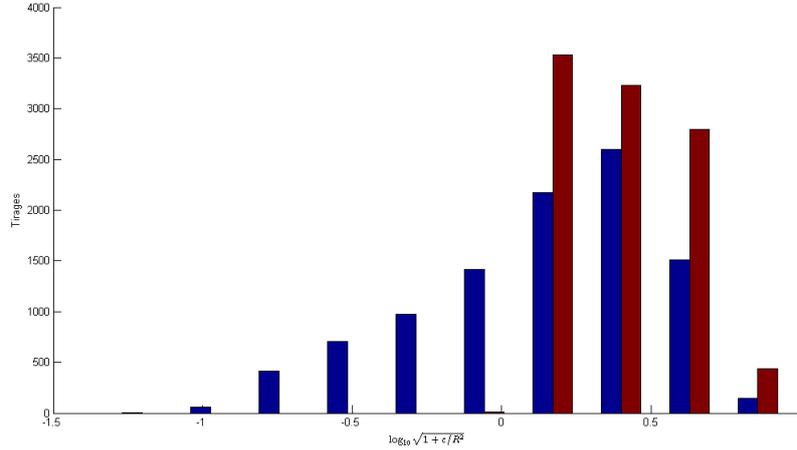


FIGURE 3.5 – Histogramme des distances de plus proche passage sans manœuvre (bleu) et avec la solution par scénarios (rouge) pour l'exemple 2.

3.5 Conclusion

Le chapitre traite du problème de l'évitement de collision lorsque les vitesses sont telles que le mouvement relatif peut être considéré comme rectiligne. Cette hypothèse permet d'exprimer à l'aide d'une unique équation la condition de non-collision en fonction des variables d'optimisation et des paramètres incertains. De plus, les effets de la manœuvre sont calculés sous l'hypothèse du mouvement képlérien, ce qui permet d'utiliser des formules analytiques. Deux méthodes de résolution du problème d'optimisation sont proposées. La première consiste à approximer les lois de distributions dans le but d'utiliser la formule classique pour la probabilité de collision en rapprochement rapide. Pour ce faire, on réalise des développements de Taylor par rapport au vecteur aléatoire : à l'ordre 1 pour la position de l'objet primaire et à l'ordre 0 pour sa vitesse. La résultante est un problème qui est certes approché par rapport à celui d'origine, mais qui est également très simple dans sa structure et dont la résolution est relativement rapide. La seconde méthode utilisée se base sur l'approche par scénarios, une technique aléatoire pouvant produire des solutions admissibles pour des problèmes d'optimisation sous contraintes probabilistes. L'avantage est qu'un problème de scénarios possède une structure déterministe et que sa résolution par des outils classiques d'optimisation peut tirer profit des informations de type gradient du système. L'itération proposée dans l'Algorithme 2 multiplie les possibilités de trouver des solutions admissibles, augmentant ainsi les chances de s'approcher d'un optimum global plutôt que d'un minimum seulement local.

Il est notable que l'approche par scénarios ne nécessite aucune hypothèse sur la nature des incertitudes, l'important étant de pouvoir effectuer des tirages des variables aléatoires : il n'est donc pas nécessaire de considérer des modélisations gaussiennes des paramètres incertains ou bien de négliger les incertitudes initiales portant sur les vitesses. Enfin, bien que la thèse se concentre sur des objets modélisés par des sphères, la méthode par scénarios développée dans ce chapitre peut être étendue à d'autres formes géométriques de l'ensemble de collision, comme des polytopes. En effet, l'essentiel est de pouvoir exprimer analytiquement avec un nombre fini d'équations la condition de collision en fonction des variables d'optimisation et des paramètres incertains.

Chapitre 4

Stratégies d'évitement de collision en rapprochement lent

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'évitement de collision en rapprochement lent. Ce modèle représente les conjonctions pour lesquelles les trajectoires des deux objets ne peuvent pas être approximées par des droites [28]. Selon la référence [38], cela arrive systématiquement dès que la vitesse relative est inférieure à 5 m/s. De telles situations ont typiquement lieu sur la ceinture géostationnaire, où les vitesses orbitales sont relativement faibles. Dans un tel cadre, il est envisageable de linéariser la dynamique des objets par rapport à une référence commune [28]. L'avantage de cette linéarisation est que les incertitudes restent de nature gaussienne au cours du temps et que l'on sait donc calculer efficacement la probabilité de collision instantanée à n'importe quelle date (voir Section 2.3). Ceci pousse à remplacer la condition de non-collision sur l'intervalle de temps de la rencontre, difficile à calculer, par des conditions de non-collision en un nombre fini d'instants. La difficulté reste que, du point de vue de l'optimisation, ces quantités ne présentent aucune propriété particulière par rapport à la commande qui faciliterait la résolution du problème d'évitement de collision.

L'approche proposée dans ce chapitre consiste à substituer à ce problème, par l'intermédiaire d'une relaxation, une nouvelle version, certes conservative, mais surtout plus facile à résoudre. Plus précisément, on remplace la sphère combinée des objets, qui représente l'espace de collision, par un polyèdre la contenant. Ceci conduit à des contraintes probabilistes linéaires jointes et donc à un problème convexe. Deux méthodes de résolution sont alors proposées. La première, directe, consiste à choisir judicieusement les polyèdres afin d'avoir une expression analytique des contraintes. La seconde se base sur une deuxième relaxation. Plus précisément, on utilise la méthode dite de "sélection du risque" [17], qui permet de se ramener à une disjonction de contraintes probabilistes linéaires individuelles. Les contraintes probabilistes scalaires de ce nouveau problème disposent d'une formulation équivalente sous forme déterministe, c'est-à-dire ne faisant plus intervenir directement de probabilité. Le problème s'écrit alors comme un programme linéaire mixte en variables continues et binaires, qui peut être résolu par la méthode classique du "big- M " [41].

Dans la littérature, on retrouve essentiellement le sujet de l'évitement de collision en rapprochement lent dans le cadre de vol en formation ou d'opérations de proximité. Dans ce contexte, certains auteurs [118] ne manipulent pas directement des probabilités. A la place, l'incrément de vitesse est conçu pour réaliser une certaine valeur de distance de plus proche passage, choisi par l'utilisateur. Dans le cadre de la mission PRISMA [61], des algorithmes sont proposés dans un cadre d'optimisation robuste plutôt que sous contrainte probabiliste. Cependant, l'objectif n'y est pas d'éviter la collision directement, mais de concevoir de manière conservative des manœuvres d'évasion d'une zone de non-droit.

Pour commencer, la Section 4.1 décrit en détails le modèle de rencontre (dynamique et incertitudes). Ensuite, la Section 4.2 s'intéresse à la formulation du problème d'évitement de collision, puis à ses reformulations successives pour arriver à un problème mieux adapté à la résolution. La Section 4.3 propose alors deux approches pour résoudre efficacement cette dernière formulation. Enfin, la Section 4.4 présente des résultats numériques obtenus sur trois cas tests artificiels issus de la référence [9].

4.1 Modélisation de la rencontre

Le problème de départ consiste à réduire la probabilité de collision entre l'objet primaire p et le secondaire s à un niveau acceptable. Pour ce faire, il s'agit de trouver une stratégie de poussées en consommation minimale. Comme paramètres d'entrée, on dispose des lois de distribution des positions et vitesses de chaque objet au début de la rencontre ($t = \underline{t}$). Afin de ne plus manipuler des variables de décision qui soient des fonctions continues du temps, on fixe *a priori* la grille de dates $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ auxquelles une manœuvre peut être exécutée. Son choix peut être heuristique ou bien découler de résultats numériques obtenus antérieurement. Par défaut, cela peut être une discrétisation uniforme de $[\underline{t}, \bar{t}]$. Plus N est grand, plus la grille est fine, mais plus on augmente le nombre de variables du problème. Dans tous les cas, les paramètres de décision se limitent aux composantes des incréments de vitesse instantanés ΔV_i , puisque l'on fait l'hypothèse d'une propulsion chimique.

4.1.1 Dynamique relative

On utilise des coordonnées relatives dans un repère orbital local, usuellement dénommé Local Vertical Local Horizontal (LVLH) [54]. Il est attaché à la trajectoire nominale de l'objet primaire. Plus précisément, il s'agit du repère $(O_p, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ (voir Figure 4.1). L'origine O_p est la position nominale du centre de gravité de l'objet primaire. Les vecteurs unitaires $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sont orientés selon les axes suivants :

- Axe z : direction radiale (nadir), orientée vers le centre de la Terre ;
- Axe y : perpendiculaire au plan orbital nominal de l'objet primaire, orienté à l'opposé du moment cinétique.
- Axe x : choisi tel que $\vec{u}_x = \vec{u}_y \times \vec{u}_z$.

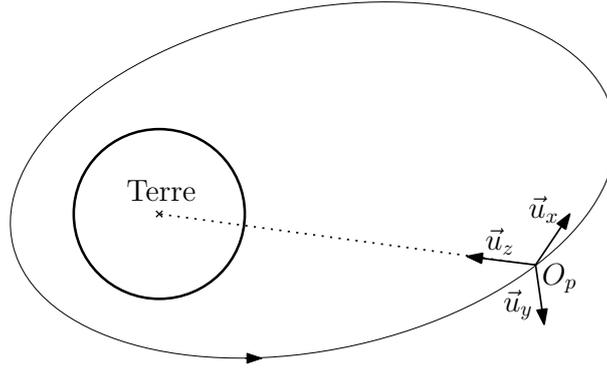


FIGURE 4.1 – Repère orbital local.

L'hypothèse de rapprochement lent signifie que le temps passé à proximité relative par les deux objets est significatif. On considère que, pendant la rencontre définie par l'intervalle de temps $[\underline{t}, \bar{t}]$, leurs distances respectives à la position de référence de l'objet primaire sont négligeables devant leurs distances respectives au centre de la Terre. Cette hypothèse permet de linéariser les équations du mouvement autour de cette orbite nominale. Dans une modélisation képlérienne des trajectoires, le système différentiel est celui de Tschauner-Hempel [121], dont les solutions peuvent être exprimées à l'aide de la matrice de transition de Yamanaka-Ankersen [128].

Notons $X_p = (R_p, V_p)$ et $X_s = (R_s, V_s)$ les coordonnées respectives des vecteurs position-vitesse des deux objets dans le repère de travail. De par la nature linéaire de la dynamique, la propagation de ces vecteurs d'état se fait linéairement selon les équations (4.1) et (4.2), pour $t \in [\underline{t}, \bar{t}]$:

$$X_p(t) = \Phi(t, \underline{t})X_p(\underline{t}) + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ t_i \leq t}} \Phi(t, t_i)B\Delta V_i \quad (4.1)$$

$$X_s(t) = \Phi(t, \underline{t})X_s(\underline{t}), \quad (4.2)$$

où Φ est la matrice de transition de Yamanaka-Ankersen et $B = [0_3 \quad I_3]^T$.

4.1.2 Incertitudes portant sur les positions et vitesses

On suppose que les incertitudes portant sur l'état des deux objets à l'instant initial de la rencontre ($t = \underline{t}$) sont de type gaussien. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$X_p(\underline{t}) \sim \mathcal{N}_6(\mu_{X_p(\underline{t})}, \Sigma_{X_p(\underline{t})}), \quad X_s(\underline{t}) \sim \mathcal{N}_6(\mu_{X_s(\underline{t})}, \Sigma_{X_s(\underline{t})}), \quad (4.3)$$

où les espérances et les matrices de covariance sont des paramètres d'entrée du problème. Du fait de la linéarité de la propagation de l'état, la nature gaussienne des incertitudes sur les vecteurs position-vitesse est conservée au cours du temps. En d'autres termes, à tout instant t , les vecteurs d'état des objets définissent un processus stochastique gaussien :

$$X_p(t) \sim \mathcal{N}_6(\mu_{X_p(t)}, \Sigma_{X_p(t)}), \quad X_s(t) \sim \mathcal{N}_6(\mu_{X_s(t)}, \Sigma_{X_s(t)}).$$

D'après les équations de la dynamique (4.1) et (4.2), l'espérance et la matrice de covariance des états de chaque objet sont données par :

$$\mu_{X_p(t)} = \Phi(t, \underline{t})\mu_{X_p(\underline{t})} + \sum_{i \in \{1, \dots, N\}_{t_i \leq t}} \Phi(t, t_i)B\Delta V_i, \quad \Sigma_{X_p(t)} = \Phi(t, \underline{t})\Sigma_{X_p(\underline{t})}\Phi(t, \underline{t})^T \quad (4.4)$$

$$\mu_{X_s(t)} = \Phi(t, \underline{t})\mu_{X_s(\underline{t})}, \quad \Sigma_{X_s(t)} = \Phi(t, \underline{t})\Sigma_{X_s(\underline{t})}\Phi(t, \underline{t})^T. \quad (4.5)$$

De plus, on suppose que les deux vecteurs aléatoires de Gauss $X_p(\underline{t})$ et $X_s(\underline{t})$ sont décorrélés i.e. de covariance nulle. Grâce à la linéarité des équations du mouvement, cette propriété est conservée au cours du temps. En conséquence, le vecteur position-vitesse relatives $X(t) = X_p(t) - X_s(t)$ suit lui aussi une loi multinormale :

$$X(t) \sim \mathcal{N}_6(\mu_{X(t)}, \Sigma_{X(t)}),$$

où :

$$\begin{aligned} \mu_{X(t)} &= \Phi(t, \underline{t})(\mu_{X_p(\underline{t})} - \mu_{X_s(\underline{t})}) + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ t_i \leq t}} \Phi(t, t_i)B\Delta V_i, \\ \Sigma_{X(t)} &= \Phi(t, \underline{t})(\Sigma_{X_p(\underline{t})} + \Sigma_{X_s(\underline{t})})\Phi(t, \underline{t})^T. \end{aligned}$$

Remarque 6. *Les distributions de probabilité des positions et vitesses des objets, en tant que lois marginales de vecteurs de Gauss, sont également de nature gaussienne. L'espérance s'obtient en tronquant celle du vecteur position-vitesse et la matrice de covariance est une sous-matrice 3×3 de la matrice 6×6 décrivant l'état complet.*

4.2 Formulation du problème d'évitement de collision

Pour rappel, le but de la stratégie d'évitement est de maintenir le risque de collision sous un certain seuil de tolérance, tout en minimisant la consommation de carburant associée. On fait l'hypothèse que les tuyères de l'objet primaire ont une orientation fixe sur chacun des axes du satellite. En conséquence, c'est la norme 1 qui permet d'évaluer le coût d'une impulsion [106].

En plus de la contrainte probabiliste de non-collision, on inclut dans le processus d'optimisation une condition finale sur le vecteur position-vitesse moyen de l'objet primaire, par exemple un retour sur la trajectoire de référence. Pour ce faire, on impose la condition $\mu_{X_p(\bar{t})} = X_f$, où X_f est une donnée du problème. Plus précisément, cela s'écrit :

$$\Phi(\bar{t}, \underline{t})\mu_{X_p(\underline{t})} + \sum_{i=1}^N \Phi(\bar{t}, t_i)B\Delta V_i = X_f. \quad (4.6)$$

Il s'agit là d'une contrainte linéaire par rapport aux paramètres de commande ΔV_i , $i = 1, \dots, N$.

Ainsi, le Problème d'évitement de collision s'écrit :

Problème 4.

$$\min_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_1 \text{ sous } \begin{cases} \mathcal{P}_c^{[t, \bar{t}]} \leq \varepsilon \\ \Phi(\bar{t}, \underline{t})\mu_{X_p(\underline{t})} + \sum_{i=1}^N \Phi(\bar{t}, t_i)B\Delta V_i = X_f. \end{cases}$$

La difficulté du Problème 4 réside dans l'évaluation de la contrainte probabiliste, et ce pour deux raisons. Premièrement, on ne sait pas calculer analytiquement l'ensemble des conditions initiales ($t = \underline{t}$) aboutissant à une collision sur $[t, \bar{t}]$, et deuxièmement, il faudrait pouvoir intégrer efficacement une fonction de densité gaussienne sur ce domaine. Une alternative consiste à employer une méthode de Monte Carlo, mais il s'agit là d'une technique coûteuse en temps de calcul. C'est pourquoi on préfère substituer au Problème 4 une version dont la structure est mieux adaptée à une résolution numérique efficace.

L'évolution vers un problème d'optimisation que l'on sait résoudre efficacement a lieu en deux étapes. Pour commencer, on remplace la probabilité de collision sur l'intervalle $[t, \bar{t}]$, que l'on ne sait

pas calculer de manière satisfaisante, par un nombre fini de probabilités de collision instantanées, faciles à évaluer, sur une grille temporelle uniforme. La difficulté reste que ces nouvelles contraintes probabilistes ne présentent aucune propriété intéressante vis-à-vis des variables d'optimisation. Dans un deuxième temps, la sphère combinée des deux objets est remplacée par un polyèdre qui l'englobe. L'ensemble de collision est alors décrit par un nombre fini d'équations linéaires en la commande.

4.2.1 Passage aux probabilités de collision instantanées

Comme il a été dit précédemment, le calcul de la probabilité de collision sur l'intervalle de temps de la rencontre est difficile. En revanche, les incertitudes étant de nature gaussienne pour tout $t \in]\underline{t}, \bar{t}[$, on sait calculer efficacement la probabilité de collision instantanée $\mathcal{P}_c^{\{\hat{t}\}}$ (cf. Chapitre 2, Section 2.3). Ce dernier point incite à modifier la contrainte probabiliste du Problème 4. Ainsi, on choisit de contraindre non plus le risque global, mais plutôt la probabilité de collision instantanée sur une grille temporelle uniforme $\hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \dots < \hat{t}_{N'}$ dans $]\underline{t}, \bar{t}[$. A noter que ce maillage est différent de celui utilisé pour les dates d'impulsions. D'autre part, on sait que la probabilité de collision instantanée est un minorant pour le risque global. Il faut donc lui imposer un majorant ε' plus petit que ε , celui qui contraint $\mathcal{P}_c^{\{\underline{t}, \bar{t}\}}$. En pratique, un choix heuristique consiste à prendre $\varepsilon' = \frac{T_0}{\bar{t} - \underline{t}} \varepsilon$ avec $T_0 = 1$ s [17]. Ce choix s'explique par le fait que l'on cherche, par l'intermédiaire du risque instantané à chaque date $t \in]\underline{t}, \bar{t}[$, à avoir un effet sur la probabilité de collision pour un intervalle de temps de longueur $\bar{t} - t$.

Au final, le problème de substitution au Problème 4 est le suivant :

Problème 5.

$$\min_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_1 \text{ sous } \begin{cases} \mathcal{P}_c^{\{\hat{t}_k\}} \leq \varepsilon' \quad \forall k = 1, \dots, N', \\ \Phi(\bar{t}, \underline{t}) \mu_{X_p(\underline{t})} + \sum_{i=1}^N \Phi(\bar{t}, t_i) B \Delta V_i = X_f. \end{cases}$$

On s'intéresse maintenant aux propriétés, du point de vue de l'optimisation, du Problème 5. Tout d'abord, en tant que somme de normes, la fonction coût est convexe. De plus, elle est différentiable partout sauf au niveau d'une impulsion de norme nulle. Regardons maintenant les contraintes probabilistes du problème. Pour $k \in \{1, \dots, N'\}$, la probabilité instantanée de collision en t_k est :

$$\mathcal{P}_c^{\{\hat{t}_k\}} = \mathcal{P}\{\|R(\hat{t}_k)\|_2^2 \leq R^2\}, \quad (4.7)$$

$$= \mathcal{P}\left\{ \|[I_3 \ 0_3] \Phi(\bar{t}, \underline{t}) X(\underline{t}) + [I_3 \ 0_3] \sum_{i: t_i \leq \hat{t}_k} \Phi(\bar{t}, t_i) B \Delta V_i\|_2^2 - R^2 \leq 0 \right\}. \quad (4.8)$$

Posons :

- $u_k = [I_3 \ 0_3] \sum_{i: t_i \leq \hat{t}_k} \Phi(\bar{t}, t_i) B \Delta V_i$, fonction déterministe linéaire par rapport aux variables de décision ΔV_i ,
- $\Xi_k = [I_3 \ 0_3] \Phi(\bar{t}, \underline{t}) X(\underline{t})$, vecteur aléatoire gaussien indépendant de la commande,
- $\alpha(u_k, \Xi_k) = \|u_k + \Xi_k\|_2^2 - R^2$, fonction traduisant la condition de collision.

On peut alors écrire la contrainte de non-collision à l'instant \hat{t}_k sous la forme :

$$\mathcal{P}\{\alpha(u_k, \Xi_k) \leq 0\} \leq \varepsilon', \quad (4.9)$$

Bien que l'on sache évaluer efficacement la contrainte probabiliste, la nature quadratique de la fonction α fait que le Problème 5 reste un problème difficile. L'idée est alors de faire une hypothèse conservative mais raisonnable permettant d'obtenir une fonction linéaire en u_k , dans le but d'avoir une contrainte probabiliste convexe dont on connaît une expression analytique du gradient.

4.2.2 Recouvrement polyédral de la sphère combinée

L'ensemble de collision d'origine, la sphère combinée $\mathcal{B}_3(0, R)$, est remplacé de manière conservative par un polyèdre convexe i.e. un ensemble de \mathbb{R}^3 défini par un nombre fini m d'équations affines, ou de manière équivalente, comme l'intersection de m demi-espaces.

Un exemple de polyèdre recouvrant la sphère est un cube dont les faces sont tangentes à celle-ci (voir Figure 4.2).

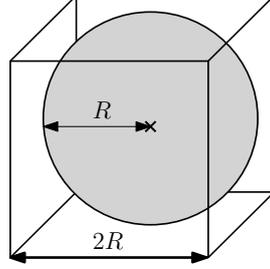


FIGURE 4.2 – Exemple de cube contenant la sphère combinée des objets.

Plus généralement, si l'on définit à chaque instant \hat{t}_k ($k = 1, \dots, N'$) un polyèdre qui contient le domaine de collision :

$$\{r \in \mathbb{R}^3 : \|r\|_2 \leq R\} \subset \left\{ r \in \mathbb{R}^3 : \bigcap_{j=1}^m (a_{jk}^T r \leq b_{jk}) \right\}, \quad (4.10)$$

où $a_{jk} \in \mathbb{R}^3$, $b_{jk} \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, m$), alors :

$$\mathcal{P} \{ \|R(\hat{t}_k)\|_2 \leq R \} \leq \mathcal{P} \left\{ \bigcap_{j=1}^m (a_{jk}^T R(\hat{t}_k) \leq b_{jk}) \right\}.$$

A l'aide de cette approximation polyédrale (4.10), le Problème 5 est remplacé de manière conservative par :

Problème 6.

$$\min_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_1 \text{ sous } \begin{cases} \mathcal{P} \left\{ \bigcap_{j=1}^m (a_{jk}^T R(\hat{t}_k) \leq b_{jk}) \right\} \leq \varepsilon' \quad \forall k = 1, \dots, N', \\ \Phi(\bar{t}, \underline{t}) \mu_{X_p(\underline{t})} + \sum_{i=1}^N \Phi(\bar{t}, t_i) B \Delta V_i = X_f. \end{cases}$$

Cette approximation est conservative dans le sens où une solution admissible pour le Problème 6 l'est aussi pour le Problème 5. Le degré de conservatisme est directement lié à la finesse de l'approximation polyédrale de la sphère combinée. Plus le nombre de faces du polytope est élevé, plus on s'approche de la sphère, mais plus la résolution numérique du problème d'optimisation est complexe. Il est possible de mesurer ce conservatisme en calculant *a posteriori*, pour une solution du Problème 6, les probabilités de collision instantanées sur la sphère combinée, afin d'estimer la marge que l'on a sur les contraintes du Problème 5.

Revenons aux propriétés des contraintes probabilistes, cette fois pour le Problème 6. En reprenant les notations introduites précédemment, on a maintenant une condition du type :

$$\mathcal{P} \left\{ \bigcap_{j=1}^m (\alpha_j(u_k, \Xi_k) \leq 0) \right\} \leq \varepsilon', \quad (4.11)$$

avec $\alpha_j(u_k, \Xi_k) = a_{jk}^T u_k + a_{jk}^T \Xi_k - b_{jk}$. Il s'agit là d'une contrainte linéaire séparable [48], qui présente l'avantage d'être convexe en la commande [96]. Ce genre de contrainte se distingue de

celles dites individuelles, du type $\bigwedge_{j=1}^m (\mathcal{P}\{\alpha_j \leq 0\} \leq \varepsilon')$, où le symbole \bigwedge désigne la conjonction. Des contraintes probabilistes individuelles sont également convexes et plus simples à manipuler qu'une contrainte jointe [48, 49]. Dans la suite, on propose deux méthodes de résolution du Problème 6 : la première traite directement les contraintes jointes tandis que la seconde se ramène, par une nouvelle relaxation, à des contraintes individuelles.

4.3 Deux méthodes de résolution

On propose maintenant deux approches pour résoudre efficacement le Problème 6. La première consiste à attaquer directement le problème en choisissant judicieusement le recouvrement polyédral de manière à avoir des contraintes linéaires jointes calculables analytiquement. La seconde technique se base sur une relaxation supplémentaire, appelée sélection du risque [17], pour substituer aux contraintes jointes des contraintes individuelles.

4.3.1 Approche directe

À un instant \hat{t}_k , un choix particulier est celui d'un polyèdre cubique dont les faces sont perpendiculaires aux axes principaux de la matrice de covariance de la position relative des deux objets. Cette dernière est donnée par la formule suivante :

$$\Sigma_{R(\hat{t}_k)} = [I_3 \ 0_3] \Phi(\hat{t}_k, \underline{t}) (\Sigma_{X_p(\underline{t})} + \Sigma_{X_s(\underline{t})}) \Phi(\hat{t}_k, \underline{t})^T [I_3 \ 0_3]^T, \quad (4.12)$$

et ne dépend pas des ΔV_i . Soient σ_l^2 ($l = 1, 2, 3$) les valeurs propres de $\Sigma_{R(\hat{t}_k)}$ et P_k la matrice de passage vers le repère propre associé. Ces quantités sont toutes indépendantes de la loi de commande. On pose alors $Y_k = P_k R(\hat{t}_k)$ et on remarque que $\mu_{Y_k} = P_k \mu_{R(\hat{t}_k)}$. Le problème d'optimisation s'écrit :

Problème 7.

$$\min_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_1 \text{ sous } \begin{cases} \mathcal{P}\{Y_k \in [-R, R]^3\} \leq \varepsilon' \quad \forall k = 1, \dots, N', \\ \Phi(\bar{t}, \underline{t}) \mu_{X_p(\underline{t})} + \sum_{i=1}^N \Phi(\bar{t}, t_i) B \Delta V_i = X_f. \end{cases}$$

L'avantage est que l'on peut calculer la probabilité de collision avec ce cube de manière analytique. En effet, en notant les coordonnées du vecteur μ_{Y_k} à l'aide du superscript (\cdot) , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{Y_k \in [-R, R]^3\} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \prod_{l=1}^3 \sigma_l} \int_{-R}^{+R} \int_{-R}^{+R} \int_{-R}^{+R} \exp\left(-\sum_{l=1}^3 \frac{(y_l - \mu_{Y_k}^{(l)})^2}{2\sigma_l^2}\right) dy_1 dy_2 dy_3, \\ &= \prod_{l=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} \int_{-R}^{+R} \exp\left(-\frac{(y_l - \mu_{Y_k}^{(l)})^2}{2\sigma_l^2}\right) dy_l, \\ &= \prod_{l=1}^3 \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\mu_{Y_k}^{(l)} - R}{\sqrt{2}\sigma_l}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu_{Y_k}^{(l)} + R}{\sqrt{2}\sigma_l}\right) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

où erf est la fonction d'erreur, définie pour rappel par $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$.

Ainsi, on dispose d'une expression analytique de la probabilité de collision à l'aide de la fonction d'erreur. Cela permet de calculer analytiquement son gradient par rapport à la commande $\frac{\partial}{\partial \Delta V_i} \mathcal{P}\{Y_k \in [-R, R]^3\} = \frac{\partial}{\partial \mu_{Y_k}} \mathcal{P}\{Y_k \in [-R, R]^3\} \cdot \frac{\partial}{\partial \Delta V_i} \mu_{Y_k}$. En effet, on a d'une part :

$$\frac{\partial}{\partial \Delta V_i} \mu_{Y_k} = \begin{cases} P_k [I_3 \ 0_3] \Phi(\hat{t}_k, t_i) B & \text{si } t_i \leq \hat{t}_k, \\ 0_3 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Et d'autre part, pour $l \in \{1, 2, 3\}$:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_{Y_k}^{(l)}} \mathcal{P} \{Y_k \in [-R, R]^3\} = \frac{\exp\left(-\left(\frac{\mu_{Y_k}^{(l)} - R}{\sqrt{2}\sigma_l}\right)^2\right) + \exp\left(-\left(\frac{\mu_{Y_k}^{(l)} + R}{\sqrt{2}\sigma_l}\right)^2\right)}{\sqrt{\pi}\sigma_l \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\mu_{Y_k}^{(l)} - R}{\sqrt{2}\sigma_l}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu_{Y_k}^{(l)} + R}{\sqrt{2}\sigma_l}\right)\right)} \sqrt{2} \mathcal{P} \{Y_k \in [-R, R]^3\}. \quad (4.15)$$

En conclusion, la résolution du Problème 7 est facilement traitable avec des outils classiques d'optimisation convexe [21].

4.3.2 Approche par sélection du risque

Cette seconde approche pour la résolution du Problème 6 est basée sur une nouvelle relaxation, appelée sélection du risque [19]. Cette dernière permet par la suite, grâce à la méthode du "big-M" [41], d'arriver à un problème d'optimisation linéaire mixte en variables continues et binaires que l'on sait résoudre efficacement avec des outils dédiés.

Relaxation par sélection du risque

La méthode de sélection du risque a été utilisée pour la première fois dans un cadre de planification probabiliste de trajectoire [17], bien que la dénomination actuelle ne soit apparue que plus tardivement dans la référence [19] par exemple. Cette technique permet de remplacer les contraintes probabilistes jointes du Problème 6 par des contraintes individuelles.

On considère désormais le même polyèdre à chaque pas de temps, de sorte que les coefficients a_{jk} et b_{jk} sont inchangés lorsque k varie. Cet indice sera donc omis dans toute la suite. On a :

$$\mathcal{P} \left\{ \bigcap_{j=1}^m (a_j^T R(\hat{t}_k) \leq b_j) \right\} \leq \mathcal{P} \{a_j^T R(\hat{t}_k) \leq b_j\} \quad \forall j = 1, \dots, m, \quad (4.16)$$

ce qui signifie que s'il existe j tel que $\mathcal{P}\{a_j^T R(\hat{t}_k) \leq b_j\} \leq \varepsilon'$ alors $\mathcal{P} \left\{ \bigcap_{j=1}^m (a_j^T R(\hat{t}_k) \leq b_j) \right\} \leq \varepsilon'$.

En utilisant la notation de disjonction \bigvee , cela se résume en :

$$\bigvee_{j=1}^m (\mathcal{P} \{a_j^T R(\hat{t}_k) \leq b_j\} \leq \varepsilon') \implies \mathcal{P} \left\{ \bigcap_{j=1}^m (a_j^T R(\hat{t}_k) \leq b_j) \right\} \leq \varepsilon'. \quad (4.17)$$

La contrainte probabiliste jointe peut donc être remplacée de manière conservative par un ensemble disjonctif de contraintes individuelles :

$$\bigvee_{j=1}^m (\mathcal{P} \{a_j^T R(\hat{t}_k) \leq b_j\} \leq \varepsilon'). \quad (4.18)$$

Cette approche est qualifiée de "sélection du risque" car, plutôt que de chercher directement une forte probabilité de non-collision, on impose au vecteur de position relative d'avoir une forte chance de se trouver dans au moins un des demi-espaces qui définissent le complémentaire du polyèdre. La sélection du demi-espace fait partie du processus d'optimisation. Ce découpage de l'ensemble de non-collision est illustrée en 2-D sur la Figure 4.3, où l'on voit que l'on peut définir trois demi-espaces, tous inclus dans le complémentaire du polytope \mathcal{O} , et dont l'union recouvre \mathbb{R}^2 .

A la suite de cette relaxation, le Problème 6 est reformulé de la manière suivante :

Problème 8.

$$\min_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_1 \text{ sous } \begin{cases} \bigvee_{j=1}^m (\mathcal{P} \{a_j^T R(\hat{t}_k) \leq b_j\} \leq \varepsilon') \quad \forall k = 1, \dots, N', \\ \Phi(\bar{t}, \underline{t}) \mu_{X_p(\underline{t})} + \sum_{i=1}^N \Phi(\bar{t}, t_i) B \Delta V_i = X_f. \end{cases}$$

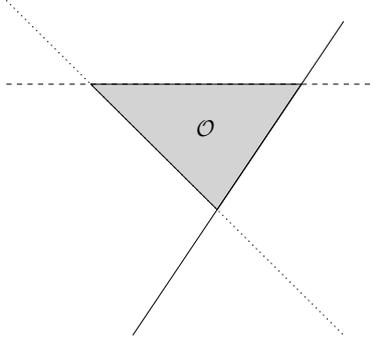


FIGURE 4.3 – Sélection du risque pour un triangle.

Réécriture déterministe

La nouvelle contrainte (4.18) est une contrainte probabiliste individuelle. On peut néanmoins la reformuler de manière équivalente sous forme déterministe [17]. Le principe est le suivant : soit Z une variable aléatoire de Gauss i.e. $Z \sim \mathcal{N}_1(\mu_Z, \sigma_Z^2)$. Une contrainte probabiliste portant sur Z peut être traduite par une condition portant sur l'espérance μ_Z et l'écart-type σ_Z (voir [17, Section III.C]) :

$$\mathcal{P}\{Z < 0\} \leq \varepsilon' \iff \mu_Z \geq \sqrt{2}\sigma_Z \text{erf}^{-1}(1 - 2\varepsilon'). \quad (4.19)$$

En appliquant (4.19) à :

$$Z = a_j^T R(\hat{t}_k) - b_j \sim \mathcal{N}_1(a_j^T \mu_{R(\hat{t}_k)} - b_j, a_j^T \Sigma_{R(\hat{t}_k)} a_j),$$

chaque contrainte probabiliste individuelle peut se réécrire en une condition déterministe linéaire en l'espérance :

$$\mathcal{P}\{a_j^T R(\hat{t}_k) \leq b_j\} \leq \varepsilon' \iff a_j^T \mu_{R(\hat{t}_k)} \geq b_j + c_{jk},$$

où : $c_{jk} = \sqrt{2a_j^T \Sigma_{R(\hat{t}_k)} a_j} \text{erf}^{-1}(1 - 2\varepsilon')$. En conclusion, le Problème 8 est reformulé de manière équivalente de la façon suivante :

Problème 9.

$$\min_{\Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_1 \text{ sous } \begin{cases} \bigvee_{j=1}^m (a_j^T \mu_{R(\hat{t}_k)} \geq b_j + c_{jk}) & \forall k = 1, \dots, N', \\ \Phi(\bar{t}, \underline{t}) \mu_{X_p(\underline{t})} + \sum_{i=1}^N \Phi(\bar{t}, t_i) B \Delta V_i = X_f. \end{cases}$$

Vers une formulation linéaire mixte

Dans ce qui précède, une forme déterministe (Problème 9) du Problème 8 a été établie, à l'aide de conditions disjonctives. Deux derniers ajustements permettent d'aboutir à un problème linéaire mixte, que l'on sait résoudre à l'aide des outils éprouvés du domaine.

Premièrement, on cherche à se défaire du caractère linéaire par morceaux de la fonction coût. Pour cela, on introduit des variables d'écart classiques [14] $\Delta V_i^-, \Delta V_i^+$ appartenant à l'orthant positif de \mathbb{R}^3 i.e. $\Delta V_i^\pm \geq 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, les substitutions suivantes sont effectuées :

$$\Delta V_i = \Delta V_i^+ - \Delta V_i^-. \quad (4.20)$$

L'indice de performance $\sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_1$, linéaire par morceaux, peut être remplacé de manière équivalente par la version linéaire suivante :

$$\sum_{i=1}^N (\|\Delta V_i^+\|_1 + \|\Delta V_i^-\|_1) = \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^3 (\Delta V_i^{+(l)} + \Delta V_i^{-(l)}),$$

puisque à l'optimum, $\Delta V_i^+ = 0$ ou $\Delta V_i^- = 0$ [14].

La disjonction est traitée à l'aide de la méthode classique dite du "big- M " [41]. Cette technique a déjà été utilisée pour l'évitement de collision sans incertitude [103]. On en rappelle ici brièvement le principe pour un cas mono-dimensionnel. Considérons la disjonction suivante de conditions linéaires en la variable scalaire y :

$$y \leq y_{\min} \quad \text{ou} \quad y \geq y_{\max}.$$

Si la variable M est choisie suffisamment grande i.e. plus grande que n'importe quelle autre quantité du problème, alors les conditions précédentes sont équivalentes aux suivantes :

$$y \leq y_{\min} + wM \quad \text{et} \quad -y \leq -y_{\max} + Mw' \quad \text{et} \quad w + w' \leq 1,$$

où w et w' sont des variables binaires : $w, w' \in \{0, 1\}$. Par extension, on peut exprimer une disjonction de contraintes dans \mathbb{R}^n à l'aide de nombres entiers à valeurs dans $\{0, 1\}$.

En appliquant cette méthode au Problème 9, on obtient un problème d'optimisation mixte avec $2 \times 3 \times N = 6N$ variables continues et $m \times N'$ variables binaires :

Problème 10.

$$\min_{\Delta V_i^\pm, w_k} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i^\pm\|_1 \quad \text{sous} \quad \begin{cases} \bigwedge_{j=1}^m \left(a_j^T \mu_{R(\hat{t}_k)} + Mw_k^{(j)} \geq b_j + c_{jk} \right) & \forall k = 1, \dots, N', \\ \|w_k\|_1 \leq m - 1 & \forall k = 1, \dots, N', \\ w_k \in \{0, 1\}^m & \forall k = 1, \dots, N', \\ \Delta V_i^\pm \geq 0 & \forall i = 1, \dots, N, \\ \Phi(\bar{t}, \underline{t}) \mu_{X_p(\underline{t})} + \sum_{i=1}^N \Phi(\bar{t}, t_i) B \Delta V_i = X_f. \end{cases}$$

4.4 Résultats numériques

Dans cette section, les deux méthodes de résolution proposées sont appliquées à trois exemples issus d'un article d'Alfano [9, cas 1, 4 et 9], dans lequel il compare plusieurs méthodes de calcul de probabilités de collision sans toutefois proposer de plan de manœuvres d'évitement. Ce ne sont pas des scénarios réels, mais ils sont sensés être réalistes. Le Problème 7 est résolu selon l'algorithme SQP de fmincon sous Matlab© R2014a, tandis que le Problème 10, équivalent au Problème 8, est résolu à l'aide de Gurobi 5.6.0 [46]. Dans les sorties graphiques, qui simulent la dynamique linéarisée, la solution du premier est représentée en bleu et celle du second en rouge. Dans le cas de la sélection du risque, la sphère combinée est approchée conservativement par le cube suivant :

$$\{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 : -r_i \leq R, r_i \leq R \quad \forall i = 1, 2, 3\}.$$

Ce polyèdre est un bon compromis entre le nombre de faces (qui multiplie par N' le nombre de variables binaires) et la distance à la sphère (qui mesure le conservatisme du changement de géométrie de l'ensemble de collision). De plus, ce cube en particulier, par ses symétries, ne privilégie aucune coordonnée du repère par rapport à une autre pour la direction des impulsions. Enfin, sa nature est similaire à celle des polyèdres du Problème 7, ce qui rend la comparaison entre les deux approches plus pertinentes.

L'origine des temps $t = 0$ est la date de plus proche passage lorsqu'aucune manœuvre n'est effectuée. C'est en général autour de cet instant que les distances relatives sont les plus faibles et que la probabilité de collision instantanée est la plus élevée. Pour cette raison, l'intervalle de rencontre $[\underline{t}, \bar{t}]$ est choisi tel que $\underline{t} < 0 < \bar{t}$. En pratique, on détermine les distributions multinormales des vecteurs aléatoires au temps \underline{t} en rétro-propageant l'état à $t = 0$ (fourni par Alfano [9]). D'autre part, on fixe le seuil de risque global ε à 10^{-4} , qui permet de déduire ε' en fonction de la durée de la rencontre.

Pour chacun des exemples, on suppose que l'objet primaire se trouve en moyenne sur sa trajectoire nominale à l'instant initial ($X_p(\underline{t}) = 0$) et on impose qu'il y soit au temps final ($X_p(\bar{t}) = 0$).

4.4.1 Exemple 1

Ce cas test décrit la conjonction de deux objets en orbite géostationnaire, pour laquelle la distance de plus proche passage est inférieure au rayon de la sphère combinée. L'orbite de référence de l'objet primaire admet un mouvement moyen $n = 7.4996 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ et une excentricité $e = 0.0119$. L'anomalie vraie (voir Annexe C) nominale à l'instant initial $\bar{t} = -50000 \text{ s}$ est $\nu_0 = -0.6258 \text{ rad}$ et le temps final est fixé à $\bar{t} = 50000 \text{ s}$. Le rayon combiné des objets est $R = 15 \text{ m}$ et le seuil de risque instantané $\varepsilon' = 10^{-9}$. Les conditions initiales dans le repère de référence sont données dans le Tableau 4.1 pour l'état secondaire moyen et dans l'équation (4.21) pour la matrice de covariance de l'état relatif :

$$\begin{pmatrix} 3107.4 & 0 & -1963.5 & 253.5378 \times 10^{-3} & 0 & -47.7226 \times 10^{-3} \\ * & 1.5 & 0 & 0 & 0.0828 \times 10^{-3} & 0 \\ * & * & 1469.2 & 189.5196 \times 10^{-3} & 0 & 35.7087 \times 10^{-3} \\ * & * & * & 24.4470 \times 10^{-6} & 0 & 4.6062 \times 10^{-6} \\ * & * & * & * & 0.0045 \times 10^{-6} & 0 \\ * & * & * & * & * & 0.8679 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$\mu_{R_s(\bar{t})}$ (m)	[-2295.60 - 3.99 388.17]
$\mu_{V_s(\bar{t})}$ (mm.s ⁻¹)	[50.35 - 0.21 21.55]

TABLE 4.1 – État moyen de l'objet secondaire à l'instant initial.

Lorsqu'aucune manœuvre n'est réalisée, le risque instantané maximum, déduit à partir d'un calcul sur l'horizon $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_{N'}$ avec $N' = 500$, s'élève à 9.74×10^{-2} (contre 9.76×10^{-2} dans la référence [9]). Les caractéristiques générales des solutions sont données dans la Table 4.2. De manière prévisible, la sélection du risque fait que la solution associée est plus coûteuse et moins risquée que dans l'approche directe. Après élimination des impulsions négligeables (ici inférieures en norme à 0.2 mm/s), on récupère les plans de manœuvres présentés dans le Tableau 4.3. Il est notable que dans les deux cas, toutes les impulsions obtenues ont lieu hors du plan orbital de référence. En conséquence, la dynamique moyenne de l'objet primaire, visible sur la Figure 4.4, varie uniquement selon l'axe y . Par ailleurs, on observe bien un retour sur l'orbite nominale dans le temps imparti. Les trajectoires relatives moyennes sont représentées sur la Figure 4.5. La trajectoire non contrôlée est confinée dans le plan orbital de référence et a une forme cycloïdale. Celles causées par la réalisation de manœuvres s'en démarquent par leur composante hors-plan.

Problème	N	Calcul (s)	Coût (mm/s)	Risque inst. max.
Approche dir.	20	152	3.682	1.31×10^{-11}
Sél. du risque	250	159	4.651	1.27×10^{-12}

TABLE 4.2 – Caractéristiques des solutions.

Instant (s)	Composantes (mm/s)					
	Solution par approche dir.			Solution par sél. du risque		
-19388	0	0	0	0	-1.540	0
-18421	0	-1.095	0	0	0	0
-13158	0	-0.437	0	0	0	0
9184	0	0	0	0	-1.553	0
23684	0	-0.991	0	0	0	0
28947	0	-0.558	0	0	0	0
37755	0	0	0	0	-1.558	0

TABLE 4.3 – Plans de manœuvres.

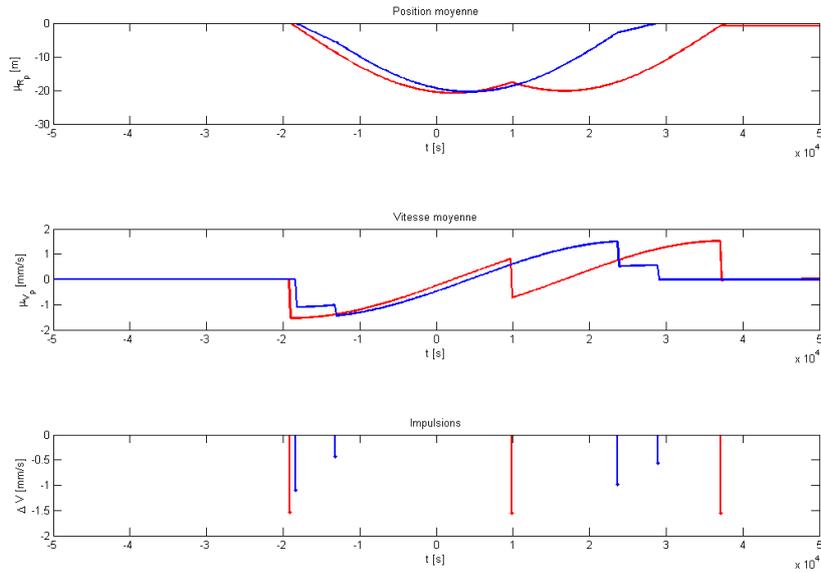


FIGURE 4.4 – Dynamique primaire moyenne et impulsions selon l’axe y en fonction du temps.

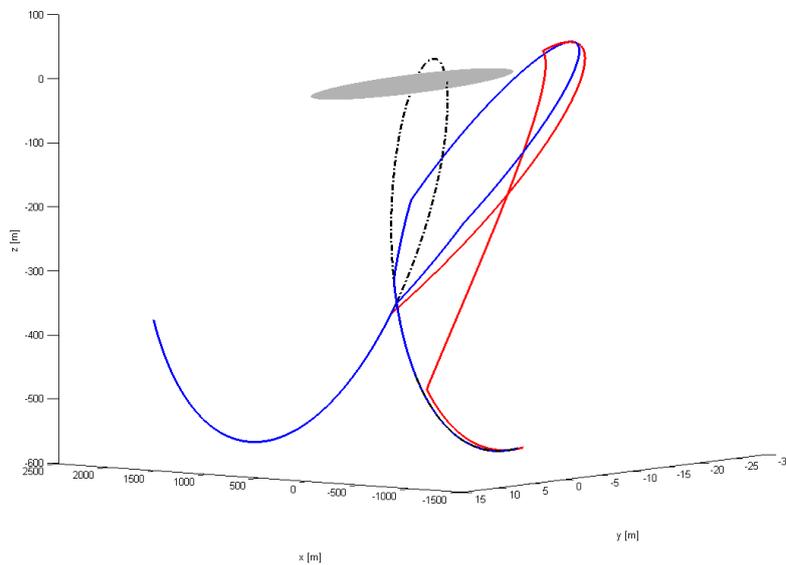


FIGURE 4.5 – Trajectoires relatives moyennes contrôlées (trait plein) et libre (tirets).

En ce qui concerne la probabilité de collision instantanée maximale, les valeurs obtenues s’avèrent largement inférieures à ε' pour les deux approches (cf. Tableau 4.2). Ceci est révélateur du conservatisme introduit par les relaxations effectuées. Dans un deuxième temps, il convient également de vérifier l’admissibilité des solutions pour le problème d’évitement de collision d’origine (Problème 4), à savoir regarder si la probabilité de collision sur tout l’intervalle ne dépasse pas $\varepsilon = 10^{-4}$. Un tirage de 10^5 occurrences des conditions initiales n’a abouti à aucune collision. Sur la Figure 4.6 est représentée en échelle logarithmique la limite inférieure de l’enveloppe des distances relatives normalisées pour cet échantillon i.e. la distance relative minimale sur toutes

les trajectoires simulées en fonction du temps. On observe une certaine marge par rapport à la distance de collision (0 sur l'échelle logarithmique).

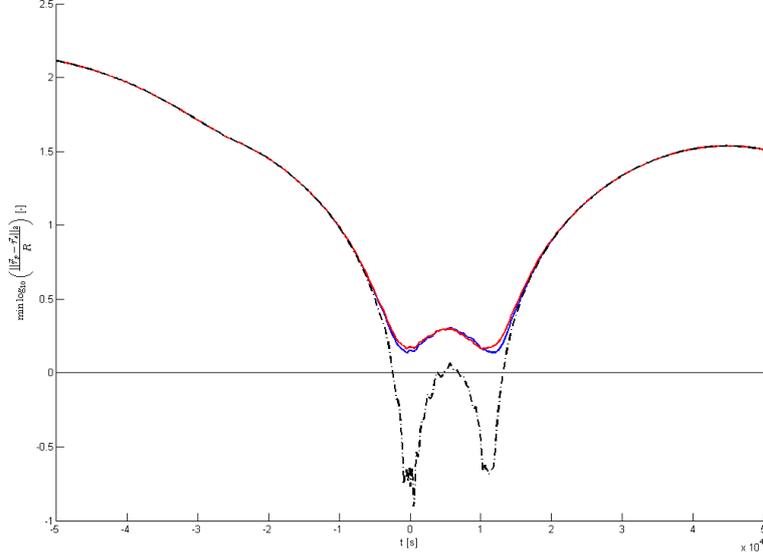


FIGURE 4.6 – Borne inférieure de la distance relative en fonction du temps pour un échantillon de trajectoires contrôlées (trait plein) et libres (tirets).

4.4.2 Exemple 2

Ce cas test décrit la conjonction de deux objets en orbite géostationnaire, pour laquelle la distance de plus proche passage est supérieure au rayon combiné. La position angulaire nominale à l'instant initial $\bar{t} = -60000$ s est $\nu_0 = -3.7326$ rad et la fin de la rencontre est fixée à $\bar{t} = 120000$ s. Le rayon combiné des objets est $R = 15$ m et le seuil de risque instantané $\varepsilon' = 5.56 \times 10^{-10}$. Les conditions initiales dans le repère de référence sont données dans le Tableau 4.4 pour l'état secondaire moyen et dans l'équation (4.22) pour la matrice de covariance de l'état relatif :

$$\begin{pmatrix} 15526.4 & 0 & -249.3 & -21.1138 \times 10^{-3} & 0 & -6.3890 \times 10^{-3} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0.0015 \times 10^{-3} & 0 \\ * & * & 5.8 & 0.5486 \times 10^{-3} & 0 & 0.1772 \times 10^{-3} \\ * & * & * & 0.0532 \times 10^{-6} & 0 & 0.0174 \times 10^{-6} \\ * & * & * & * & 0.0005 \times 10^{-6} & 0 \\ * & * & * & * & * & 0.0057 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$\mu_{R_s(t)}$ (m)	[2193.9 4.1 -157.9]
$\mu_{V_s(t)}$ (mm.s ⁻¹)	[-14.1 0.2 -13.3]

TABLE 4.4 – État moyen de l'objet secondaire à l'instant initial.

Lorsqu'aucune manœuvre n'est réalisée, le risque instantané maximum, pour une grille temporelle de $N' = 600$ dates, s'élève à 3.46×10^{-2} (contre 3.42×10^{-2} selon la référence [9]). Les deux approches proposent exclusivement des poussées selon l'axe x (cf. Tableau 4.6). La dynamique moyenne de l'objet primaire (Figure 4.7) est confinée dans le plan (x, z) . Les trajectoires relatives moyennes sont représentées sur la Figure 4.8 et sont presque confondues.

Problème	N	Calcul (s)	Coût (mm/s)	Risque inst. max.
Approche dir.	10	55	0.9800	2.84×10^{-11}
Sél. du risque	600	22	1.0668	1.55×10^{-32}

TABLE 4.5 – Caractéristiques des solutions.

Instant (s)	Composantes (mm/s)					
	Solution par approche dir.			Solution par sél. du risque		
-60000	0.1816	0	0	0.1990	0	0
-40000	-0.3258	0	0	0	0	0
-34157	0	0	0	-0.3619	0	0
40000	0.2110	0	0	0	0	0
51486	0	0	0	0.3343	0	0
60000	0.0979	0	0	0	0	0
100000	-0.1637	0	0	0	0	0
104074	0	0	0	-0.1714	0	0

TABLE 4.6 – Plans de manœuvres.

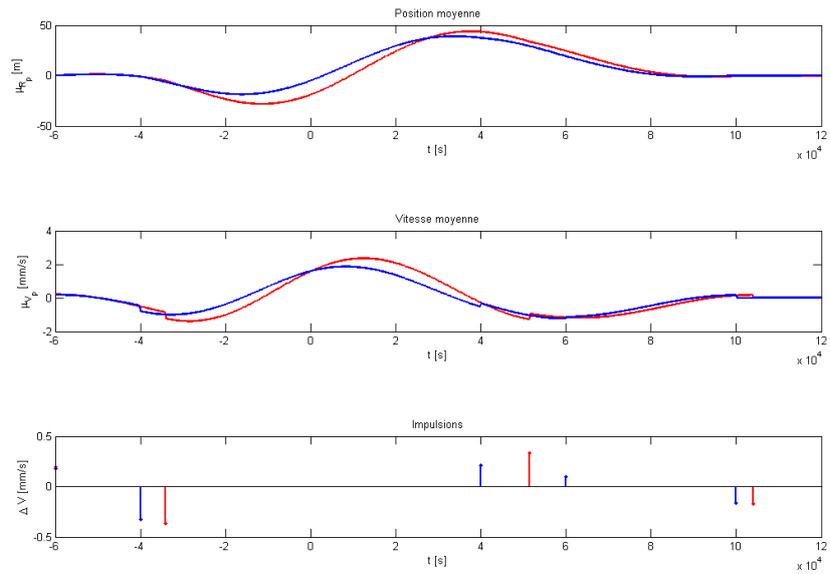


FIGURE 4.7 – Dynamique primaire moyenne et impulsions selon l'axe x en fonction du temps.

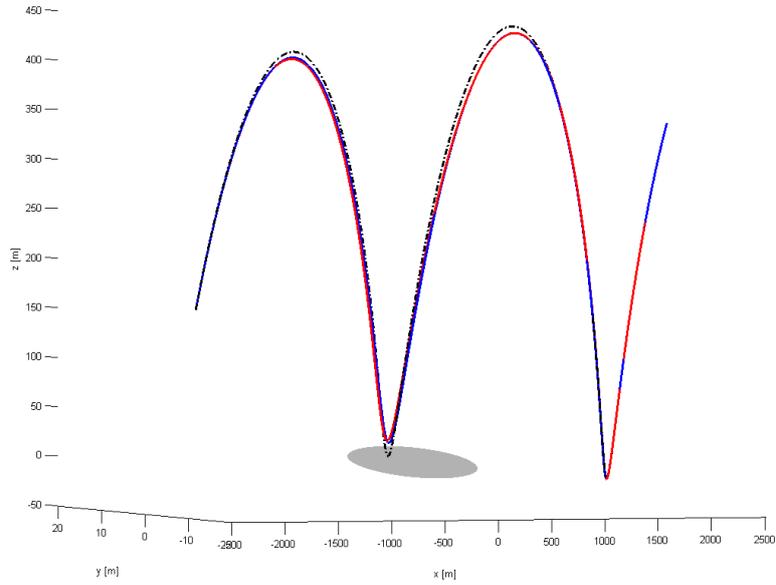


FIGURE 4.8 – Trajectoires relatives moyennes contrôlées (trait plein) et libre (tirets).

Dans un deuxième temps, il convient également de vérifier l'admissibilité des solutions pour le problème d'évitement de collision d'origine (Problème 4). On regarde donc si la probabilité de collision sur tout l'intervalle ne dépasse pas $\varepsilon = 10^{-4}$. Un tirage de 10^5 occurrences des conditions initiales n'a abouti à aucune collision pour la solution obtenue par sélection du risque, contrairement à celle, moins coûteuse, de l'approche directe. En effet, cette dernière en a produites 53, ce qui s'interprète comme une probabilité de collision d'environ 5×10^{-4} , et qui rend cette solution non admissible. Sur la Figure 4.9 est représentée en échelle logarithmique la limite inférieure de l'enveloppe des distances relatives normalisées pour cet échantillon.

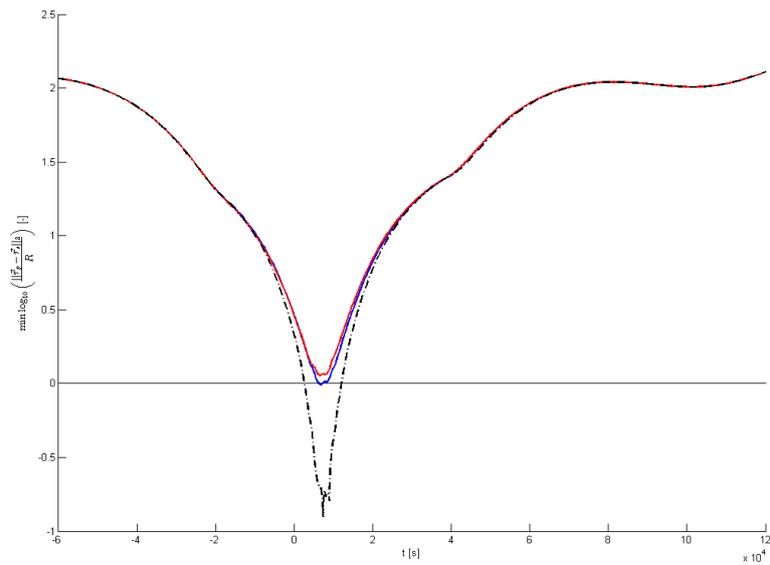


FIGURE 4.9 – Borne inférieure de la distance relative en fonction du temps pour un échantillon de trajectoires contrôlées (trait plein) et libres (tirets).

4.4.3 Exemple 3

Ce cas test simule la rencontre entre deux objets sur une orbite fortement elliptique, pour laquelle la distance de plus proche passage est supérieure au rayon de la sphère combinée. L'orbite de référence de l'objet primaire admet un mouvement moyen $n = 1.4591 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ et une excentricité $e = 0.741$. La position angulaire nominale à l'instant initial $\bar{t} = -60000 \text{ s}$ est $\nu_0 = -5.4638 \text{ rad}$ et le temps final de la rencontre est fixé à $\bar{t} = 25000 \text{ s}$. Le rayon combiné des deux objets est $R = 6 \text{ m}$ et le seuil de risque instantané $\varepsilon' = 1.43 \times 10^{-9}$. Les conditions initiales pour l'état relatif dans le repère de référence sont données dans le Tableau 4.7 pour l'état secondaire moyen et dans l'équation (4.23) pour la matrice de covariance de la position relative :

$$\begin{pmatrix} 17125.7 & 0 & -6917.1 & -8.0466 \times 10^{-3} & 0 & 6.1721 \times 10^{-3} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 2793.8 & 3.25 \times 10^{-3} & 0 & 2.4929 \times 10^{-3} \\ * & * & * & 3.7808 \times 10^{-6} & 0 & 2.9 \times 10^{-6} \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 2.2245 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$\mu_{R_s(\bar{t})} \text{ (m)}$	[279.4636	0.0002	-115.8673]
$\mu_{V_s(\bar{t})} \text{ (mm.s}^{-1}\text{)}$	[135.2128	0.0001	-96.7295]

TABLE 4.7 – État moyen de l'objet secondaire à l'instant initial.

La probabilité de collision instantanée atteint une valeur maximale de 2.81×10^{-1} (même valeur qu'Alfano [9]) pour $N' = 400$. Les solutions sont détaillées dans les Tableaux 4.8 et 4.9. La Figure 4.10 montre la dynamique moyenne de l'objet primaire selon l'axe y . Les deux approches donnent des résultats très similaires. Cela s'explique par le fait que les incertitudes selon l'axe y sont négligeables et qu'il est donc naturel d'utiliser un éloignement selon cette direction pour faire diminuer le risque instantané de collision. Les trajectoires relatives moyennes dans le plan orbital de référence sont représentées sur la Figure 4.11. Le mouvement libre est restreint au plan (x, z) , contrairement aux cas contrôlés pour lesquels la composante hors-plan est mise à profit pour éviter la collision.

Problème	N	Calcul (s)	Coût (mm/s)	Risque inst. max.
Approche dir.	20	68	65.077	0
Sél. du risque	50	36	65.732	6.34×10^{-228}

TABLE 4.8 – Caractéristiques des solutions.

Instant (s)	Composantes (mm/s)					
	Solution par approche dir.			Solution par sél. du risque		
-60000	0	28.560	0	0	28.557	0
-37614	0	2.943	0	0	0	0
-37449	0	0	0	0	4.913	0
-35714	0	0	0	0	1.357	0
2632	0	0.333	0	0	0	0
5919	0	0	0	0	0.9643	0
7105	0	3.825	0	0	0	0
25000	0	29.415	0	0	29.941	0

TABLE 4.9 – Plans de manœuvres.

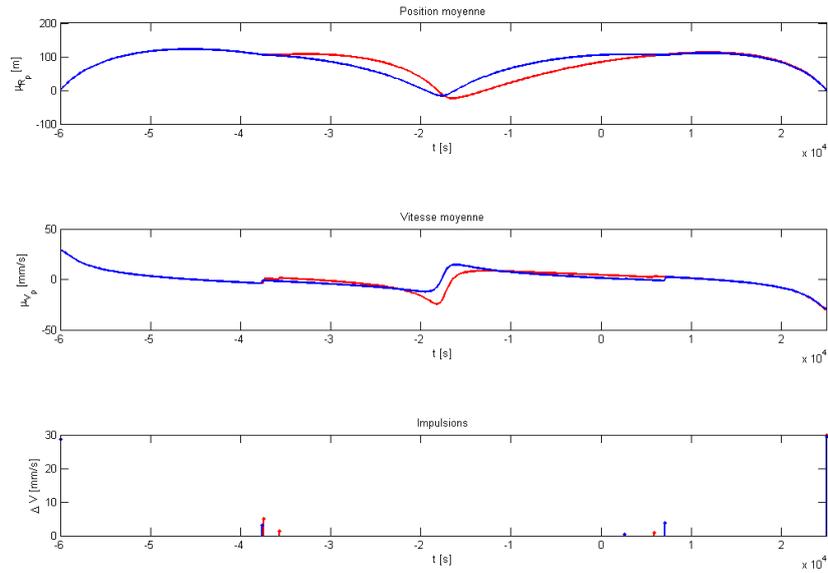


FIGURE 4.10 – Dynamique primaire moyenne et impulsions selon l’axe y en fonction du temps.

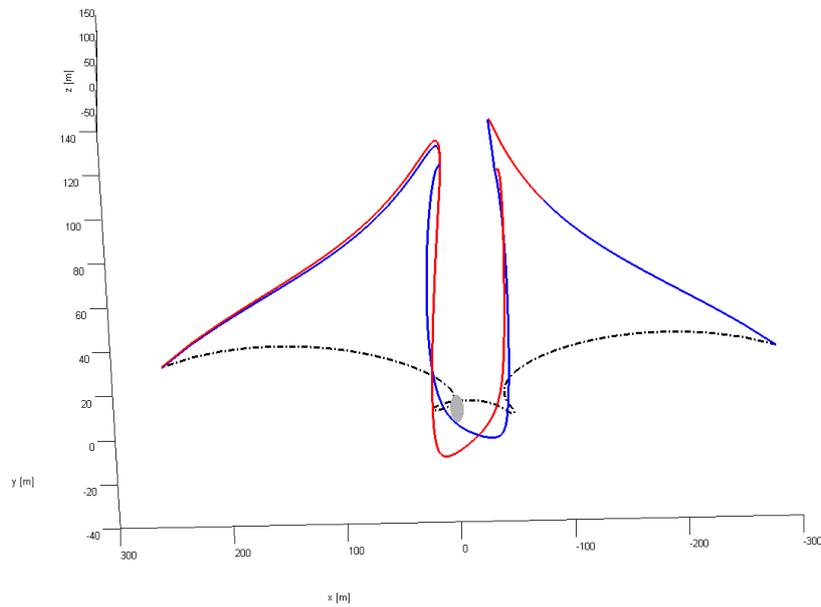


FIGURE 4.11 – Trajectoires relatives moyennes contrôlées (trait plein) et libre (tirets) dans le plan orbital de référence.

Dans un deuxième temps, il convient de vérifier l’admissibilité des solutions pour le problème d’origine, à savoir regarder si la probabilité de collision sur tout l’intervalle ne dépasse pas 10^{-4} . Un tirage de 10^5 occurrences des conditions initiales n’a abouti à aucune collision. Sur la Figure 4.12 est représentée en échelle logarithmique la limite inférieure de l’enveloppe des distances relatives normalisées pour cet échantillon.

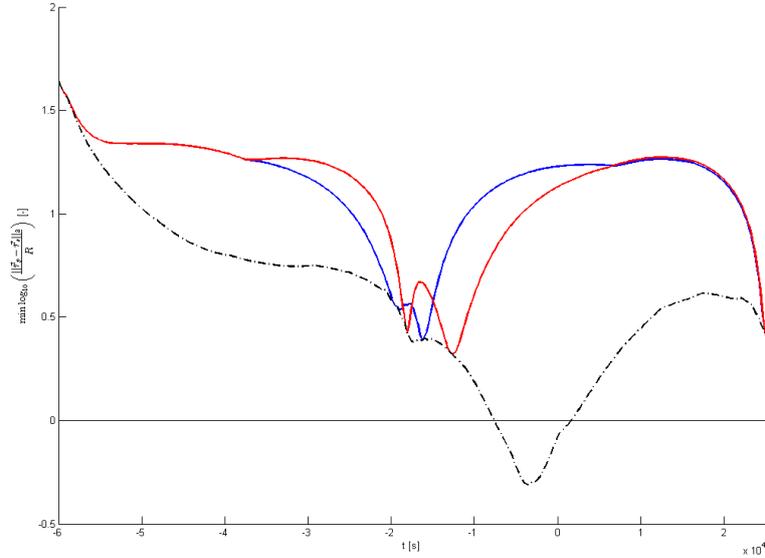


FIGURE 4.12 – Borne inférieure de la distance relative en fonction du temps pour un échantillon de trajectoires contrôlées (trait plein) et libres (tirets).

4.5 Conclusion

Ce chapitre propose une formulation du problème d'évitement de collision en rapprochement lent, pour laquelle deux méthodes de résolution sont proposées. Le point de départ dans le caractère linéaire de la dynamique, obtenu ici grâce à une linéarisation des équations du mouvement autour de la trajectoire primaire nominale et qui permet de conserver la nature gaussienne des incertitudes au cours du temps. Le problème d'optimisation considéré présente l'avantage d'être basé sur des contraintes probabilistes linéaires jointes. Pour l'obtenir, on commence par remplacer la probabilité de collision sur l'intervalle de temps de la rencontre par des probabilités instantanées sur un échantillon de dates, puis on approxime de manière conservative l'espace de collision, originellement sphérique, à l'aide de polyèdres. La première méthode de résolution exploite son caractère convexe grâce à une expression analytique des contraintes jointes, obtenue par un choix judicieux des polyèdres. La seconde approche s'inscrit, à l'issue d'une relaxation appelée sélection du risque [17], dans le domaine de la programmation linéaire mixte, pour laquelle des outils efficaces de résolution numérique existent. Du fait de son caractère moins conservatif, l'approche directe fournit des solutions moins coûteuses et plus risquées que la seconde méthode. Néanmoins, cette dernière a l'avantage d'être basée sur un problème d'optimisation linéaire mixte et permet de manipuler plus de variables de commande et des polyèdres non cubiques. A ce propos, une perspective pour l'approche directe consiste à considérer d'autres polyèdres que les cubes tangents à la sphère et alignés avec les ellipsoïdes d'incertitudes. Un tel choix nécessite l'utilisation d'une méthode numérique pour évaluer les contraintes, mais un code efficace existe [44]. De plus, il existe une formule intégrale pour le gradient de contraintes probabilistes jointes [50], également calculable selon ce schéma d'intégration.

D'autre part, et c'est là aussi un avantage de notre formulation, la structure du problème se prête aisément à l'ajout de certaines contraintes opérationnelles. En effet, la forme du problème est conservée lorsque l'on impose des manœuvres planaires (composantes nulles selon y pour les impulsions) ou des bornes supérieures sur les poussées (ajout de majorants pour les variables d'écart).

Enfin, on peut facilement envisager une extension de l'algorithme à un nombre supérieur d'objets. Par exemple, pour des questions de sécurité globale en orbite, on peut considérer plusieurs débris, qui représenteraient autant de corps supplémentaires à éviter. D'autre part, dans un contexte

de vol en formation, on peut avoir plusieurs satellites actifs. Dans tous les cas, l'algorithme est limité par le nombre de variables binaires, qui croît fortement avec l'ajout d'autres objets.

Conclusion

On s'est intéressé, dans cette deuxième partie de la thèse, au calcul de manœuvres d'évitement pour l'objet primaire, avec comme indice de performance la consommation de carburant. Sous l'hypothèse des poussées instantanées, la fonction coût s'écrit comme la somme des normes des impulsions. Du fait de la condition de non-collision, une des difficultés rencontrées consiste en la prise en compte de contraintes probabilistes. Néanmoins, certaines hypothèses, dans le cadre de modèles spécifiques, permettent de formuler des problèmes que l'on arrive à résoudre plus ou moins directement.

En ce qui concerne les rencontres pour lesquelles les trajectoires relatives peuvent être approximées par des droites, deux méthodes sont proposées dans le Chapitre 3. La première consiste à faire des hypothèses simplificatrices sur les lois de distribution des vecteurs aléatoires, afin de calculer la probabilité de collision à partir de la formule classique de rencontre rapide (cf. Section 1.2.1 du Chapitre 1). La seconde s'appuie sur l'approche par scénarios [22, 23]. Cette technique consiste à résoudre un problème déterministe en travaillant avec un large échantillon d'occurrences, appelées scénarios, du vecteur aléatoire. Elle s'adapte bien au cas du mouvement rectiligne car la condition de non-collision est exprimable à l'aide d'une unique équation, fonction des variables d'optimisation et des paramètres incertains. Malheureusement, cette dernière n'étant pas convexe, il n'existe pas de garantie théorique sur la probabilité pour que la solution d'un problème de scénarios vérifie la contrainte probabiliste. Il est donc nécessaire de vérifier systématiquement *a posteriori* l'admissibilité du résultat pour le problème d'origine. Néanmoins, la méthode itérative proposée augmente les chances d'obtenir une solution admissible peu coûteuse, et ce dans un cadre très général, comme par exemple avec une orbite non circulaire de l'objet primaire.

Pour les rencontres lentes, traitées dans le Chapitre 4, la démarche se base sur la linéarisation des équations du mouvement dans un repère orbital local de référence. La linéarité de la dynamique garantit la conservation du caractère gaussien des incertitudes au cours du temps : on peut donc utiliser la méthode développée au Chapitre 2 pour calculer le risque instantané de collision. D'où l'idée de remplacer la contrainte sur la probabilité de collision sur l'intervalle de temps de la rencontre, difficile à évaluer, par une contrainte sur un nombre fini de probabilités de collision instantanées. Cependant, d'un point de vue de l'optimisation, cette substitution n'est toujours pas suffisante pour obtenir une résolution efficace. On procède alors à une relaxation : l'espace de collision, à savoir la sphère combinée des objets, est remplacé conservativement par un polyèdre. A partir de là, deux méthodes de résolution sont proposées : une première directe et une seconde basée sur une relaxation supplémentaire. Cette dernière, appelée sélection du risque [19], permet d'aboutir à une formulation du problème avec des contraintes déterministes et disjonctives, que l'on peut alors traiter dans un cadre de programmation mixte grâce à la méthode du big-M [41].

Troisième partie

Opérations de rendez-vous en temps fixé et consommation minimale

Introduction

Cette dernière partie de la thèse est consacrée à un problème particulier de planification de trajectoires spatiales pour le rendez-vous entre deux engins spatiaux. Les opérations de rendez-vous constituent un type spécifique d'opérations de proximité en orbite. Schématiquement, une telle mission consiste à réaliser la jonction entre deux véhicules spatiaux définis au sens large (comprenant ainsi la station spatiale internationale) partant de conditions initiales fixées, sur un horizon de temps libre ou fixe pour aboutir à une rencontre déterminée par des conditions finales. Dans notre cas, nous considérons une mission de rendez-vous entre un véhicule cible ou de référence passif (il n'effectue aucune manœuvre) et un véhicule chasseur guidé et commandé. Pour des conditions initiales fixées, il s'agit alors de déterminer la loi de guidage optimale en consommation du chasseur lui permettant de rejoindre le véhicule de référence en un temps fixé et en des conditions finales en position et vitesse pré-assignées. Prise dans sa globalité, la mission de rendez-vous comprend les phases suivantes [40] :

- La phase de lancement correspondant à l'injection sur le plan orbital de la cible et l'obtention de conditions orbitales stables ;
- le phasage en navigation absolue télé-opérée permettant la réduction de l'angle de phase orbital entre la cible et le chasseur. Cette phase se termine quand le chasseur a acquis la cible, permettant ainsi une navigation relative ;
- **l'opération de rendez-vous proprement dite. Elle s'effectue en navigation relative et se termine quand le chasseur a atteint les conditions terminales fixées en position et vitesse en proximité de la cible ;**
- les opérations de proximité et l'opération de capture.

Dans le cadre de cette étude, seule la phase de rendez-vous en navigation relative sera abordée.

Concrétisée scientifiquement et techniquement dans les années 1960 pour le projet Gemini et dans le cadre de la mission lunaire Apollo [30] (dont le principe original fût proposé dans les années 1920 par Koudratyuk, cf. [47]), l'idée du rendez-vous entre deux véhicules spatiaux s'est construite à la fin du XIX^{ème} siècle autour du besoin supposé de disposer d'une station spatiale intermédiaire en orbite permettant le transfert interplanétaire au meilleur coût en termes de consommation [47]. Après avoir conquis le statut officiel et international de problème scientifiquement pertinent pour la conquête spatiale au deuxième congrès d'astronautique organisé à Londres en 1951 sous l'égide de la British Interplanetary Society (BIS) [119], le problème du rendez-vous a fait l'objet du développement de travaux scientifiques à la fin des années 1950 et dans les années 1960. De nombreuses références de cette époque peuvent être trouvées dans différents articles de synthèse [52, 39, 122, 51, 45]. Ces études ont abouti à la première démonstration en vol complètement réussie d'un rendez-vous pour la mission Gemini X, le 18 juillet 1967 (suivant les communautés, le premier rendez-vous est crédité au programme russe Vostok 2, le 12 août 1962 ou encore au programme Gemini VII, le 15 décembre 1965 [127]). La totalité des expériences de rendez-vous en vol de cette époque, peut se partager entre les programmes spatiaux russes (Vostok, Soyouz) et les programmes spatiaux américains (Gemini et Apollo) avec deux philosophies distinctes. Les programmes russes proposent des rendez-vous automatisés et partiellement autonomes alors que les programmes américains fonctionnent avec un opérateur humain pour réaliser la mission de rendez-vous [127]. Même si de nombreuses idées, techniques et procédures de cette époque sont encore d'actualité de nos jours, les motivations et les objectifs des missions de rendez-vous ont largement évolué ces dernières années conduisant à une ré-évaluation des méthodes traditionnelles. En particulier, le besoin de mener à bien des missions de rendez-vous autonomes sans opérateur humain et sans l'introduction de structures de communications complexes entre les deux véhicules

est une incitation forte pour la convergence des deux philosophies précédentes et le développement de nouveaux algorithmes de guidage.

Le problème de rendez-vous considéré est un problème de guidage ou de génération de trajectoires qui peut se reformuler comme un problème de commande optimale. En tant que tel, il peut donc être abordé par des méthodes directes (méthodes de transcription, méthodes de tir) ou par des méthodes indirectes (résolution de conditions nécessaires d'optimalité) [15, 31]. Dans ce dernier cas, les conditions d'optimalité s'expriment à l'aide du vecteur d'état adjoint du système dynamique. Le vecteur d'état adjoint à la vitesse, au centre des méthodes de résolution indirectes, est dénommé "primer vector" dans la littérature anglo-saxonne du domaine spatial. Ce terme, introduit par Lawden qui a formulé et étudié le problème original dans une série de communications à la fin des années 1950 [64, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 71, 74, 73, 75], peut être traduit en français par « vecteur efficacité » [80] puisque ce vecteur d'état adjoint à l'optimum indique là où la poussée sera la plus efficace en termes de consommation.

Si les méthodes indirectes offrent un cadre général de résolution du problème de commande optimale associé au problème de rendez-vous, la modélisation retenue tant du point de vue de la propulsion choisie pour le satellite actif (poussées faibles, instantanées...) que des dynamiques relatives considérées (linéaires/non linéaires, képlériennes/perturbées) va conditionner les approches et les solutions obtenues. Dans ce travail, nous nous focalisons sur le problème du rendez-vous orbital linéarisé képlérien et sous l'hypothèse que le chasseur est actionné de manière idéale par des impulsions équivalentes à des changements instantanés de vitesse relative. En considérant une dynamique linéarisée, il est connu, depuis les travaux de Neustadt [83] que la solution optimale est nécessairement de type impulsionnelle et que l'on dispose d'une borne supérieure sur le nombre optimal d'impulsions à réaliser. D'autre part, Prussing a également donné une démonstration alternative à la formulation de Neustadt, pour la suffisance des conditions nécessaires d'optimalité dans [99], pour le cas linéaire. Si de plus, la dynamique relative est supposée képlérienne (contenant uniquement le terme d'attraction central sans perturbations orbitales) alors elle peut être découplée en le mouvement relatif dans le plan orbital et le mouvement relatif hors-plan. Les contributions relatives au problème de rendez-vous coplanaire sont nombreuses et variées dans leur nature, en fonction de l'orbite de référence circulaire ou elliptique (par exemple approche géométrique [97, 100, 25], approche polynomiale [24, 26, 11, 12]). En ce qui concerne le mouvement hors-plan, une solution analytique complète est connue depuis les travaux de Prussing [98]. Le cas hors-plan elliptique, pour lequel aucune solution exacte n'existait jusqu'à présent, est étudié dans cette partie et complètement résolu analytiquement [115, 114]. Il est à noter que la problématique de l'évitement de collision étudiée dans les deux premières parties de la thèse n'est pas abordée ici quoiqu'elle ait été déjà abordée dans le cadre du rendez-vous dans [101].

Le Chapitre 5 commence par introduire le problème du rendez-vous linéaire en temps fixé et consommation minimale de manière formelle et générale. Il détaille ensuite la méthode indirecte de résolution basée sur les propriétés du vecteur efficacité. Dans un premier temps, le cadre théorique est développé dans le cas général d'une dynamique képlérienne linéarisée en utilisant le formalisme de Neustadt. Cela permet d'établir un certain nombre de résultats théoriques et généraux. Un lien est alors fait avec les conditions d'optimalité de la littérature portant sur le vecteur efficacité et qui sont principalement décrites dans les travaux de Carter (cf. la référence [26] par exemple). La solution du problème hors-plan au voisinage d'une orbite de référence circulaire illustre l'utilisation de ces conditions d'optimalité pour dériver la solution analytique du problème. Le Chapitre 6 propose une nouvelle contribution dans le domaine en donnant une solution analytique inédite dans le cas d'une excentricité non nulle, généralisant ainsi la solution du cas circulaire.

Chapitre 5

Le problème de rendez-vous impulsionnel linéarisé en temps fixé et consommation minimale

5.1 Introduction

Le problème de rendez-vous spatial consiste à trouver la trajectoire commandée d'un chasseur permettant de se rendre, en consommant un minimum de carburant, d'un état A à un état B relativement à une cible (fictive ou réelle). Dans le cas général, le temps imparti ainsi que l'état final peuvent être libres ou fixés, mais ici on s'intéresse au rendez-vous en temps fixé avec des conditions finales données. Avant tout, il s'agit donc de calculer une loi de poussées permettant au satellite actif d'atteindre une configuration par rapport à la cible souhaitée par l'utilisateur. Ce principe est illustré sur la Figure 5.1. Le fait de chercher un plan de manœuvres optimal en consommation d'ergols en fait en général un problème difficile.

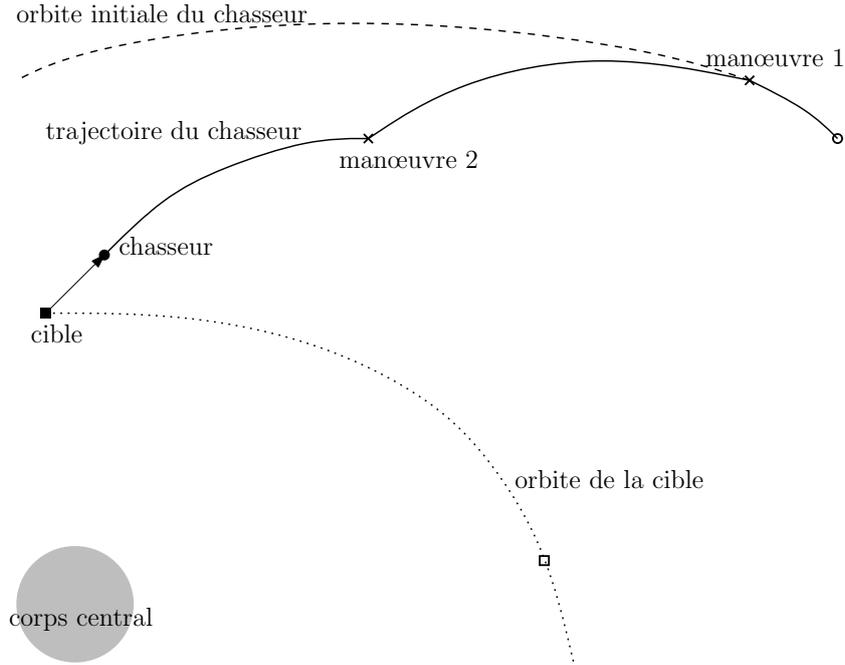


FIGURE 5.1 – Illustration du problème de rendez-vous spatial.

L'optimisation du rendez-vous correspond à un pur problème de commande optimale. En tant que telle, on peut envisager sa résolution avec une méthode indirecte, c'est-à-dire en considérant l'état adjoint du système et les conditions nécessaires d'optimalité associées. Dans la littérature francophone du domaine spatial, cet angle d'attaque porte le nom de théorie du vecteur efficacité [80]. Celle-ci fournit des conditions nécessaires d'optimalité [75, 84], qui sont en fait également suffisantes dans le cas d'une dynamique linéaire [83, 99, 26].

Pour commencer, la Section 5.2 introduit formellement le problème linéaire de rendez-vous spatial en temps fixé et consommation minimale comme un problème de commande optimale, avant d'en proposer une reformulation équivalente sous la forme d'un problème de moments. Des résultats, dûs à Neustadt [83], sont donnés sur la dualité de problème. Ceux-ci permettent l'obtention de conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, présentées dans la Section 5.2.4, qui sont à la base de la méthode indirecte de résolution du problème de rendez-vous. Enfin, la Section 5.3 illustre cette dernière dans le cas du mouvement situé hors du plan d'une orbite de référence circulaire i.e. d'excentricité nulle, le cas purement elliptique étant traité dans le chapitre suivant.

5.2 Problème linéaire de rendez-vous impulsif en temps fixé et consommation optimale

5.2.1 Formulation comme un problème de Lagrange

On considère un horizon temporel fixé $[t_0, t_f]$. Le vecteur d'état x du chasseur, de taille $2m$, est composé des vecteurs position r et vitesse v relatives à la cible, dans un repère orbital local attaché à cette dernière, de type LVLH [54]. La dynamique képlérienne est linéarisée autour de la trajectoire de référence, ce qui suppose que la distance du chasseur à la cible est négligeable devant leurs distances au centre du corps central. Les équations du mouvement correspondantes sont celles de Tschauner-Hempel [121]. Ainsi, en l'absence de commande, on a $\dot{x} = Ax$, où A est une matrice $2m \times 2m$ fonction du temps. A chaque instant t , l'accélération due à la poussée des moteurs est supposée proportionnelle à la commande $u(t) \in \mathbb{R}^m$. On a donc le système différentiel suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (5.1)$$

avec $B = [0_m \quad I_m]^T$. Le problème de rendez-vous en consommation minimale avec conditions aux bords fixées consiste à faire passer x de l'état initial x_0 à l'état final x_f . On impose donc :

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f. \quad (5.2)$$

Le coût de la loi de commande s'évalue à l'aide de sa norme intégrale :

$$\|u\|_{L_q^1} = \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_q dt = \int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_{j=1}^m |u_j(t)|^q \right)^{1/q} dt, \quad (5.3)$$

qui est proportionnelle à la masse de carburant consommée. Cela suppose que la norme q de u est intégrable au sens de Lebesgue i.e. $u \in L_q^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$. Le choix de $q \in \{1, 2\}$ dépend du type de propulsion considéré [106]. Ici, on choisit arbitrairement $q = 2$ puisqu'en pratique, pour le mouvement hors-plan de la dynamique képlérienne linéarisée, on aura $m = 1$ et donc $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$. On peut désormais formuler le problème de rendez-vous.

Problème 11. *Le problème de rendez-vous linéaire en temps fixé et consommation minimale s'écrit :*

$$\min_u \|u\|_{L_2^1} \quad \text{sous} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) & \forall t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f. \end{cases} \quad (5.4)$$

Il s'agit là d'un problème de commande optimale sous la forme de Lagrange car la fonction coût est sous forme intégrale. Dans la référence [83], Neustadt en propose une formulation équivalente, restituée ci-dessous, plus propice à l'établissement d'un certain nombre de résultats théoriques en vue d'une résolution efficace.

5.2.2 Reformulation comme un problème de moments

L'idée est d'exploiter la nature linéaire de l'équation d'état pour réécrire les contraintes à l'aide d'une unique équation intégrale. Introduisons la matrice fondamentale ϕ définie par :

$$\dot{\phi}(t) = A(t)\phi(t) \quad \forall t, \phi(0) = I_{2m}. \quad (5.5)$$

L'état final vérifie :

$$x(t_f) = \phi(t_f)\phi^{-1}(t_0)x(t_0) + \phi(t_f) \int_{t_0}^{t_f} \phi^{-1}(t)Bu(t)dt. \quad (5.6)$$

Posons $Y(\cdot) = \phi^{-1}(\cdot)B$. Il s'agit d'une matrice $2m \times m$. On suppose dans la suite que ses lignes, notées $y_1(\cdot), \dots, y_{2m}(\cdot)$, ne sont pas liées entre elles. On a :

$$\phi(t_f)^{-1}x(t_f) - \phi^{-1}(t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^{t_f} Y(t)u(t)dt. \quad (5.7)$$

En posant $c = \phi(t_f)^{-1}x_f - \phi^{-1}(t_0)x_0 \in \mathbb{R}^{2m}$, les contraintes sur le vecteur d'état s'écrivent alors :

$$\int_{t_0}^{t_f} Y(t)u(t)dt = c. \quad (5.8)$$

Ceci permet de reformuler le problème de rendez-vous linéaire comme un problème de moments.

Problème 12. *Le problème de rendez-vous linéaire est équivalent au problème de norme minimale sous une contrainte de moments :*

$$\min_u \|u\|_{L_2^1} \text{ sous } \int_{t_0}^{t_f} Y(t)u(t)dt = c. \quad (5.9)$$

Remarque 7. *On peut écrire la contrainte linéaire de moments comme :*

$$\int_{t_0}^{t_f} y_i(t)u(t)dt = c_i \quad \forall i = 1, \dots, 2m, \quad (5.10)$$

où les c_i sont les composantes de c . Cela permet de voir que le Problème 12 consiste à chercher la fonction intégrable u^* de norme minimale envoyant les fonctions $y_i^T \in \mathcal{C}([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ sur les c_i par l'intermédiaire de l'application linéaire $f \mapsto \int_{t_0}^{t_f} f^T(t)u^*(t)dt$.

Le Problème 12 est mal posé, dans le sens où la borne inférieure de la fonction coût n'est pas forcément atteinte dans $L_2^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ (voir Exemple 5.2.3) et n'est donc pas un minimum. Ceci s'explique par le fait que l'espace normé $L_2^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ n'est pas isomorphe au dual de l'ensemble des fonctions continues muni de la norme infinie ($\|f\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, t_f]} \|f(t)\|_2$). En effet, cet espace dual (ensemble des fonctionnelles linéaires), noté $\mathcal{C}([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)^*$, est égal, à une isométrie près, à l'ensemble des fonctions à variations bornées (Théorème 1, paragraphe 5.5 dans [78]). L'espace $L_2^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ ne peut donc représenter de manière exhaustive les solutions du Problème 12 et il est nécessaire de reformuler le problème dans l'espace normé des fonctions à variations bornées, dont la définition est donnée ci-dessous [83, 78].

Définition 2. *Une fonction $g : [t_0, t_f] \mapsto \mathbb{R}^m$ est dite à variations bornées si et seulement si :*

$$\sup_{t_0=t_1 < \dots < t_N=t_f} \sum_{i=1}^{N-1} \|g(t_{i+1}) - g(t_i)\|_2 < +\infty, \quad (5.11)$$

où la borne supérieure est calculée sur l'ensemble des partitions de $[t_0, t_f]$. La quantité précédente définit la variation de g .

Remarque 8. *Un sous-ensemble particulier de fonctions à variations bornées est celui des fonctions constantes par morceaux, également appelées fonctions en escalier.*

Il est possible, à partir des fonctions à variations bornées, de définir un espace normé :

Proposition 12. [78] *L'ensemble $\mathcal{G}_2([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ des fonctions à variations bornées nulles en t_0 et continues à droite sur $]t_0, t_f[$ est un espace vectoriel, sur lequel la variation définit une norme, notée $\|\cdot\|_{\mathcal{G}_2}$.*

Le lien entre fonctions intégrables et fonctions à variations bornées peut être fait grâce à l'application linéaire suivante :

$$\Psi : L_2^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^m) \longmapsto \mathcal{G}_2([t_0, t_f], \mathbb{R}^m) \quad (5.12)$$

$$u \longmapsto \Psi(u) : t \mapsto \int_{t_0}^t u(\tau)d\tau, \quad (5.13)$$

qui conserve la norme i.e. $\|\Psi(u)\|_{\mathcal{G}_2} = \|u\|_{L_2^1}$. En revanche, elle n'est pas surjective. En d'autres termes, l'espace des fonctions à variations bornées contient, à une isométrie près, les fonctions intégrables.

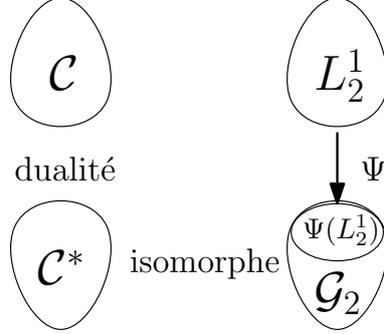


FIGURE 5.2 – Ensembles de contrôle et dualité des fonctions continues.

La Figure 5.2 montre de manière schématique les relations entre les différents espaces utilisés dans cette formulation du problème de commande optimale considéré. Dans ce nouveau cadre de travail, le problème initial de rendez-vous devient donc le suivant.

Problème 13. *La version bien posée du problème de moments, formulée dans l'espace des fonctions à variations bornées, est :*

$$\min_g \|g\|_{\mathcal{G}_2} \text{ sous } \int_{t_0}^{t_f} Y(t) dg(t) = c, \quad (5.14)$$

où l'intégrale est définie au sens de Stieljies, si bien que $\int_{t_0}^{t_f} Y(t) d\Psi(u)(t) = \int_{t_0}^{t_f} Y(t)u(t)dt$. En d'autres termes, la contrainte du Problème 13 est la même que celle du Problème 12 lorsque $g = \Psi(u)$.

Remarque 9. *Dans le cas particulier d'une fonction g en escalier, celle-ci est admissible pour le Problème 13 i.e. vérifie la contrainte des moments si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^N Y(t_i)(g(t_i^+) - g(t_i^-)) = c, \quad (5.15)$$

où les t_i ($i = 1, \dots, N$) sont les points de discontinuité de g sur $[t_0, t_f]$.

Comme il a été dit précédemment, l'intérêt majeur de définir le problème de rendez-vous dans l'espace des fonctions à variations bornées réside dans la relation de dualité avec l'espace des fonctions continues. Il est donc possible d'associer au Problème 13, posé dans l'espace représentatif de $\mathcal{C}([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)^*$, un problème équivalent défini dans l'espace primal $\mathcal{C}([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ (cf. Théorème 2, paragraphe 5.8 et Corollaire 1, paragraphe 5.9 dans [78]).

5.2.3 Problème primal et solutions optimales

Problème primal

Le Problème 13 consiste à trouver un élément de \mathcal{G}_2 de norme minimale et vérifiant un nombre fini ($2m$) de contraintes linéaires de type moment. En utilisant des résultats de dualité des espaces topologiques, puisque \mathcal{G}_2 est assimilable à $\mathcal{C}([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)^*$, il est possible de formuler un problème d'optimisation équivalent sur $\mathcal{C}([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ [78] dont l'expression est relativement simple.

Commençons par reformuler le Problème 13, toujours dans l'espace des fonctions à variations bornées. Soit $\bar{g} \in \mathcal{G}_2$ une fonction admissible i.e. telle que :

$$\int_{t_0}^{t_f} Y(t) d\bar{g}(t) = c. \quad (5.16)$$

En posant $\hat{g} = \bar{g} - g$, le Problème 13 est équivalent à :

$$\min_{\hat{g}} \|\bar{g} - \hat{g}\| \text{ sous } \int_{t_0}^{t_f} Y(t) d\hat{g}(t) = 0. \quad (5.17)$$

Cette reformulation immédiate de Problème 13 est équivalente (mêmes valeurs optimales), par dualité, au problème suivant, posé dans l'espace des fonctions continues (Théorème 2, paragraphe 5.8 dans [78]) :

$$\max_f \int_{t_0}^{t_f} f^T(t) d\bar{g}(t) \text{ sous } \sup_{t \in [t_0, t_f]} \|f(t)\|_2 = 1 \text{ et } f \in \text{Vect}(y_1, \dots, y_{2m}). \quad (5.18)$$

Puisque ce dernier est posé dans $\text{Vect}(y_1, \dots, y_{2m})$ qui est un espace vectoriel de dimension $2m$, on peut le réécrire en posant $f(\cdot) = Y^T(\cdot)\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^{2m}$ et en utilisant (5.16). À noter que cette formulation finale aurait pu être obtenue directement en utilisant le Corollaire 1 (paragraphe 5.9) de la référence [78].

Problème 14. *Le problème primal au rendez-vous se formule comme une recherche dans \mathbb{R}^{2m} de maximum sous une contrainte continue :*

$$\max_{\lambda} c^T \lambda \text{ sous } \sup_{t \in [t_0, t_f]} \|Y^T(t)\lambda\|_2 = 1. \quad (5.19)$$

Remarque 10. *La fonction $t \mapsto Y^T(t)\lambda$ définit en fait l'état adjoint associée à la vitesse relative v . En effet, historiquement, l'établissement par Lawden des conditions nécessaires d'optimalité, pour une dynamique non linéaire, découle de l'application du principe du maximum et de l'introduction du vecteur d'état adjoint dans la définition du Hamiltonien associé au système [75]. Cette fonction joue un rôle fondamental et Lawden l'a baptisée "primer vector" (vecteur efficacité en français [80]), comme justifié par la Remarque 11.*

Pour un vecteur λ donné, on a besoin pour la suite d'introduire un ensemble particulier.

Définition 3. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{2m}$, on définit le sous-ensemble de $[t_0, t_f]$ suivant :*

$$\Gamma_{\lambda} = \left\{ t \in [t_0, t_f] : \|Y^T(t)\lambda\|_2 = \sup_{t \in [t_0, t_f]} \|Y^T(t)\lambda\|_2 \right\}. \quad (5.20)$$

Cet ensemble contient toutes les dates auxquelles le vecteur efficacité atteint sa norme maximale (unitaire). Les coûts optimaux des Problèmes 13 et 14 sont égaux et les solutions optimales sont liées par des relations particulières, comme énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 13. [83, 78] *Soient λ^* et g^* des solutions optimales respectivement des Problèmes 14 et 13. On a :*

$$\|g^*\|_{\mathcal{G}_2} = \lambda^{*T} \int_{t_0}^{t_f} Y(t) dg^*(t) = c^T \lambda^*. \quad (5.21)$$

De plus, la fonction g^ est constante sur tout segment inclus dans $[t_0, t_f] - \Gamma_{\lambda^*}$. Et si \hat{t} est un point isolé de Γ_{λ^*} , alors on a :*

$$\|g^*(\hat{t}^+) - g^*(\hat{t}^-)\|_2 Y^T(\hat{t})\lambda^* = g^*(\hat{t}^+) - g^*(\hat{t}^-). \quad (5.22)$$

Remarque 11. L'équation (5.22) signifie que la direction du vecteur efficacité optimal, aux instants de norme unitaire, donne l'orientation de la variation d'une fonction minimale en consommation. C'est en fait de cette propriété que vient la notion d'efficacité.

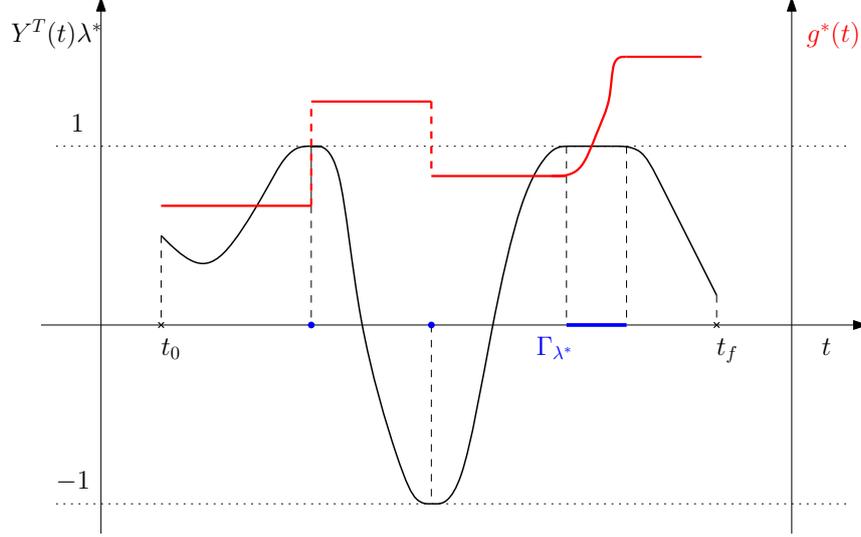


FIGURE 5.3 – Relation entre les solutions optimales des problèmes primal et dual.

Les liens entre les solutions optimales des Problèmes 14 et 13 sont représentés graphiquement en dimension 1 sur la Figure 5.3, en particulier le fait que les variations de g^* n'ont lieu que sur l'ensemble Γ_{λ^*} . De plus, la Proposition 13 fait émerger l'importance des fonctions en escalier, qui pour rappel sont des fonctions à variations bornées particulières.

Solutions optimales en escalier

De la Proposition 13 découle le résultat suivant :

Corollaire 3. Soit λ^* une solution optimale du Problème 14. Si l'ensemble Γ_{λ^*} est fini i.e. $\Gamma_{\lambda^*} = \{t_1, \dots, t_N\}$ avec $t_1 \leq \dots \leq t_N$, alors une fonction g est optimale pour le Problème 13 si et seulement si elle est en escalier, vérifie la contrainte des moments et que ses points de discontinuité, contenus dans Γ_{λ^*} , correspondent à des sauts tels que :

$$\|g(t_i^+) - g(t_i^-)\|_2 Y^T(t_i) \lambda^* = g(t_i^+) - g(t_i^-) \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (5.23)$$

Un cardinal fini pour Γ_{λ^*} impose donc une nature constante par morceaux pour la solution optimale du Problème 13, avec des sauts dont la direction est donnée par celle du vecteur efficacité optimal aux instants de norme unitaire. En réalité, il est toujours possible de trouver une solution optimale sous la forme d'une fonction en escalier, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 14. [83] Il existe g^* une solution optimale du Problème 13 sous la forme d'une fonction en escalier avec $N \leq 2m$ sauts. De plus, si λ^* est une solution optimale du Problème 14, alors les points de discontinuité t_i de g^* ($i = 1, \dots, N$) sont contenus dans Γ_{λ^*} et les sauts correspondants vérifient l'équation (5.23).

Remarque 12. Il est important de noter que l'on peut toujours se ramener à une solution en escalier avec au plus $2m$ sauts, m étant la taille du vecteur de la position relative. Ce résultat est fondamental dans le sens où il donne un majorant sur le nombre minimal de poussées nécessaires pour réaliser le rendez-vous.

Physiquement, une fonction g en escalier correspond à des poussées instantanées. Ce modèle particulier de loi de commande, qui représente une idéalisation raisonnable des poussées fortes en propulsion chimique [105] et qui a déjà été utilisé dans la Partie II, sera adopté pour toute la suite de cette partie. Explorons maintenant un exemple simple qui permet de comprendre les relations entre les Problèmes 13 et 14 ainsi que le caractère mal posé du Problème 12.

Exemple du double-intégrateur

Dans le but d'illustrer les résultats présentés sur la dualité du Problème 13 ainsi que le caractère mal posé du Problème 12, on propose d'étudier un exemple où $m = 1$, défini de la manière suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Physiquement, cela correspond à un champ de gravité inexistant, où le chasseur serait uniquement mû par la propulsion : $\ddot{x} = u$. Pour ce qui est des conditions aux deux bouts, on cherche à translater le chasseur entre deux états immobiles. Pour simplifier les expressions, on normalise les temps initial et final en $t_0 = 0$ et $t_f = 1$. La matrice fondamentale s'écrit :

$$\phi(t) = \exp(tA) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

d'où $\phi(t)^{-1} = \phi(-t)$ et :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Le problème sur l'espace des fonctions à variations bornées que l'on se propose de résoudre est donc :

$$\min_g \|g\|_{\mathcal{G}_2} \text{ sous } \int_0^1 \begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix} dg(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Ce dernier est équivalent au problème suivant :

$$\max_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2} \lambda_1 \text{ sous } \sup_{t \in [0,1]} |-t\lambda_1 + \lambda_2| = 1. \quad (5.28)$$

La dynamique du vecteur efficacité est très simple : il s'agit d'une fonction affine du temps, qui atteint donc ses extrema en norme aux deux bouts. En conséquence, la résolution du problème dual est élémentaire et fournit la solution optimale suivante :

$$(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = (2, 1), \quad (5.29)$$

dont le vecteur efficacité correspondant est représenté sur la Figure 5.4.

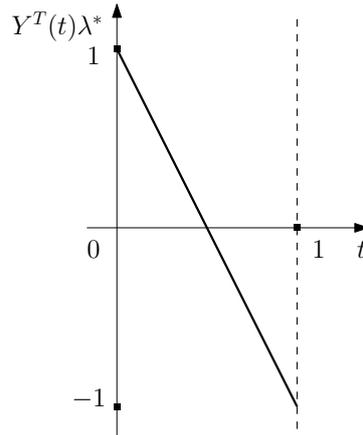


FIGURE 5.4 – Vecteur efficacité optimal en fonction du temps.

On a $\Gamma_{(2,1)} = \{0, 1\}$ i.e. un ensemble fini : la solution optimale du problème dans l'espace des fonctions à variations bornées est donc en escalier avec un saut initial et un saut final. Or, une fonction g en escalier avec deux sauts en 0 et 1 est admissible si et seulement si :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (g(0^+) - g(0)) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (g(1^-) - g(1)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

d'où l'unique solution optimale, de coût égal à 2, représentée sur la Figure 5.5.

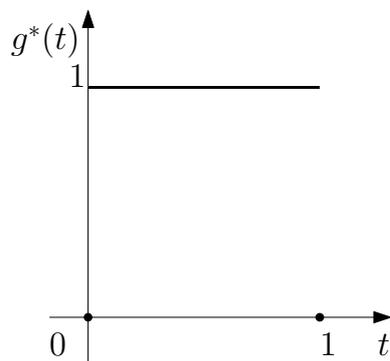


FIGURE 5.5 – Solution optimale en fonction du temps.

Revenons maintenant au Problème 12, défini dans l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue. Il est possible de construire des fonctions u_ε , admissibles pour ce problème d'origine, dont le coût tend vers l'optimum. En effet, pour $\varepsilon \in]0, 1[$, posons :

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} & \text{si } \varepsilon \in [0, \varepsilon[, \\ 0 & \text{si } \varepsilon \in [\varepsilon, 1-\varepsilon[, \\ -\frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} & \text{si } \varepsilon \in [1-\varepsilon, 1], \end{cases} \quad (5.31)$$

dont le graphe est donné sur la Figure 5.6.

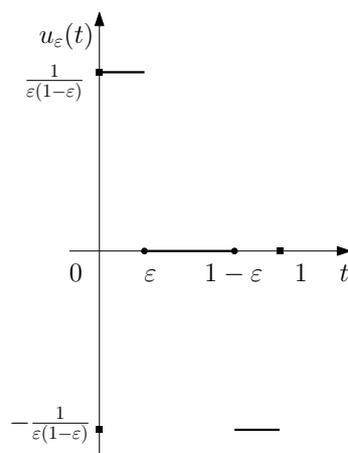


FIGURE 5.6 – Fonction u_ε .

Ces fonctions, paramétrées par ε , vérifient la contrainte des moments :

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix} u_\varepsilon(t) dt = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

D'autre part, on a :

$$\int_0^1 |u_\varepsilon(t)| dt = \frac{2}{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2. \quad (5.33)$$

Cela signifie que le coût des ces fonctions tend vers l'optimum calculé précédemment. Néanmoins, la limite de u_ε , lorsque ε tend vers 0, n'est pas définie, puisque :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(0) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(1) = +\infty. \quad (5.34)$$

En conclusion, la borne inférieure de la fonction coût n'est pas atteinte sur l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue, ce qui veut dire qu'ici, le Problème 12 est mal posé.

Dans cet exemple, on a d'abord résolu le problème dans l'espace des fonctions continues avant d'en déduire la solution du problème dans l'espace des fonctions à variations bornées. Si l'on se place dans un cadre purement impulsif, il est en fait possible d'obtenir la solution du premier problème et de celui de rendez-vous en même temps, en résolvant les conditions d'optimalité dites de Lawden [75].

5.2.4 Conditions d'optimalité de Lawden

On rappelle que, désormais, on se focalise sur une loi de poussées instantanées. Les variables d'optimisation sont :

- le nombre N de manœuvres,
- leurs dates d'exécution $t_i \in [t_0, t_f]$ ($i = 1, \dots, N$),
- les incréments de vitesse correspondants $\Delta V_i \in \mathbb{R}^m$ ($i = 1, \dots, N$).

Formulons maintenant le problème de rendez-vous impulsif.

Problème 15. *Le problème de rendez-vous linéaire impulsif, exprimé à l'aide de la variable temporelle, s'écrit :*

$$\min_{N, t_i, \Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_2 \text{ sous } \sum_{i=1}^N \phi(t_i) B \Delta V_i = c. \quad (5.35)$$

Pour simplifier l'expression des conditions d'optimalité, il est néanmoins préférable de substituer à la variable indépendante t un paramètre angulaire. Pour ce faire, on reprend dans la suite le formalisme introduit par Carter [26].

Changement de variable indépendante

L'idée est de considérer non pas le temps t comme variable indépendante, mais l'anomalie vraie ν (voir Annexe C). Commençons par poser :

$$\rho(\nu) = 1 + e \cos(\nu), \quad (5.36)$$

où e est l'excentricité de l'orbite de référence. On s'intéresse alors au vecteur d'état $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \frac{d\tilde{r}}{d\nu} \end{bmatrix}^T$ avec :

$$\tilde{r}(\nu) = \rho(\nu) r(\nu). \quad (5.37)$$

La relation linéaire suivante existe entre les deux états :

$$\tilde{x}(\nu) = \begin{bmatrix} \rho(\nu) I_3 & 0_3 \\ \frac{d\rho}{d\nu}(\nu) I_3 & \frac{(1-e^2)^{3/2}}{n\rho(\nu)} I_3 \end{bmatrix} x(\nu), \quad (5.38)$$

où n est le mouvement moyen de l'orbite de référence. Dans la suite, on notera P la matrice de passage entre les deux systèmes de coordonnées. Un incrément de vitesse correspond à une variation $\Delta \tilde{V}_i$ pour $\frac{d\tilde{r}}{d\nu}$ donnée par :

$$\Delta \tilde{V}_i = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{n\rho(\nu_i)} \Delta V_i. \quad (5.39)$$

Posons $\tilde{\phi}(\nu) = P^{-1}(\nu) \phi(t) P(\nu)$. La contrainte de rendez-vous s'écrit :

$$n(1-e^2)^{-3/2} (\tilde{\phi}^{-1}(\nu_f) \tilde{x}_f - \tilde{\phi}^{-1}(\nu_0) \tilde{x}_0) = \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{\phi}^{-1}(\nu_i) B}{\rho(\nu_i)} \Delta V_i. \quad (5.40)$$

Appelons z le membre de gauche et posons $R(\cdot) = \tilde{\phi}^{-1}(\cdot)B$. Le problème de rendez-vous impulsif en temps fixé et consommation minimale sous une dynamique képlérienne linéarisée peut donc s'écrire :

Problème 16. *Le problème de rendez-vous linéaire impulsif, exprimé à l'aide de l'anomalie vraie, s'écrit :*

$$\min_{N, \nu_i, \Delta V_i} \sum_{i=1}^N \|\Delta V_i\|_2 \text{ sous } \sum_{i=1}^N \frac{R(\nu_i)}{\rho(\nu_i)} \Delta V_i = z. \quad (5.41)$$

Intéressons-nous maintenant aux conditions d'optimalité, exprimées à l'aide du vecteur efficacité.

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Commençons par définir le vecteur efficacité en variable angulaire :

Définition 4. [26] *Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{2m}$, on définit :*

$$p_\lambda(\nu) = \frac{R(\nu)}{\rho(\nu)} \lambda. \quad (5.42)$$

Dans le cadre d'une dynamique non linéaire, il est possible d'exprimer, à l'aide du vecteur efficacité, des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème de rendez-vous [75, 84], qui deviennent suffisantes dans le cas linéaire. On en donne ici une version condensée par rapport à la référence [26].

Proposition 15. *Une solution $N, \nu_i, \Delta V_i$ ($i = 1, \dots, N$) est optimale si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{2m}$ tel que :*

$$\|\Delta V_i\|_2 p_\lambda(\nu_i) = -\Delta V_i \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (5.43)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{R(\nu_i)}{\rho(\nu_i)} \Delta V_i = z, \quad (5.44)$$

$$\sup_{\nu \in [\nu_0, \nu_f]} \|p_\lambda(\nu)\|_2 = 1. \quad (5.45)$$

Démonstration. Une preuve purement algébrique du caractère suffisant des conditions d'optimalité est donnée par exemple dans la référence [26], dans laquelle les composantes de λ sont vues comme des multiplicateurs de Lagrange. Celle de la nécessité s'obtient de manière directe grâce aux résultats de dualité présentés précédemment, en faisant juste attention de noter que le λ de Carter est en fait l'opposé de celui de Neustadt. \square

Remarque 13. *La seconde condition ne garantit en réalité que l'admissibilité de la solution pour le problème. A proprement parler, ce sont les deux autres conditions qui traduisent l'optimalité.*

5.2.5 Application au mouvement hors du plan orbital

Intéressons-nous maintenant à la partie du mouvement située hors du plan orbital de référence, pour laquelle $m = 1$. L'avantage est que celle-ci est découplée de la dynamique coplanaire [121] et peut donc être traitée indépendamment.

Dynamique hors-plan

L'équation différentielle vérifiée par la composante hors-plan est celle d'un oscillateur harmonique [128]. On a donc :

$$\tilde{\phi}(\nu) = \begin{bmatrix} \cos(\nu) & \sin(\nu) \\ -\sin(\nu) & \cos(\nu) \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

d'où $\tilde{\phi}^{-1}(\nu) = \tilde{\phi}(-\nu)$ et :

$$R(\nu) = \begin{bmatrix} -\sin(\nu) \\ \cos(\nu) \end{bmatrix}. \quad (5.47)$$

Ainsi, le problème de rendez-vous hors-plan s'écrit :

Problème 17.

$$\min_{N, \nu_i, \Delta V_i} \sum_{i=1}^N |\Delta V_i| \text{ sous } \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} -\sin(\nu_i) \\ \cos(\nu_i) \end{bmatrix} \frac{\Delta V_i}{1 + e \cos(\nu_i)} = z. \quad (5.48)$$

Intéressons-nous maintenant au vecteur efficacité.

Vecteur efficacité hors-plan

D'après l'expression de R , le vecteur efficacité s'écrit :

$$p_\lambda(\nu) = \frac{-\lambda_1 \sin(\nu) + \lambda_2 \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)}, \quad (5.49)$$

avec $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Il est désormais possible de formuler les conditions nécessaires et suffisantes (CNS) d'optimalité pour le rendez-vous hors-plan.

Conditions d'optimalité hors-plan

Un plan de $N \in \mathbb{N}$ manœuvres $\nu_i, \Delta V_i$ ($i = 1, \dots, N$) est optimal pour le problème de rendez-vous hors-plan si et seulement si on a l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^2$ tel que :

– CNS 1

$$|\Delta V_i| p_\lambda(\nu_i) = -\Delta V_i \quad \forall i = 1, \dots, N; \quad (5.50)$$

– CNS 2

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} -\sin(\nu_i) \\ \cos(\nu_i) \end{bmatrix} \frac{\Delta V_i}{1 + e \cos(\nu_i)} = z; \quad (5.51)$$

– CNS 3

$$\sup_{\nu \in [\nu_0, \nu_f]} |p_\lambda(\nu)| = 1. \quad (5.52)$$

Dans la suite de cette partie, on va résoudre analytiquement ces conditions d'optimalité afin d'obtenir toutes les solutions optimales du Problème 17. La section suivante considère le cas circulaire, lorsque $e = 0$, selon un traitement différent de celui de Prussing [98]. Le chapitre suivant, quant à lui, est dédié à la solution du cas elliptique ($e \in]0, 1[$) jusqu'alors non connue.

5.3 Illustration de la méthode indirecte pour le rendez-vous hors-plan dans le cas d'une orbite circulaire

Dans la suite du chapitre, on se concentre sur le cas d'une orbite de référence circulaire, c'est-à-dire pour laquelle $e = 0$. Il s'agit d'un problème classique résolu pour la première fois par Prussing [98]. Ces éléments servent à illustrer en pratique, sur un exemple relativement simple, la méthode de résolution indirecte à l'aide des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

5.3.1 Dynamique du vecteur efficacité

Avec $e = 0$, p_λ est une simple fonction harmonique :

$$p_\lambda(\nu) = -\lambda_1 \sin(\nu) + \lambda_2 \cos(\nu). \quad (5.53)$$

Il s'agit donc d'une fonction 2π -périodique qui change de signe tous les π . De plus, sur une période, p_λ admet deux extrema globaux, distants de π , de même norme et de signe opposé. Enfin, son amplitude est égale à la norme euclidienne de λ , si bien que :

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} |p_\lambda(\nu)| = \|\lambda\|_2. \quad (5.54)$$

Écrivons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité lorsque $e = 0$.

5.3.2 CNS d'optimalité

Un plan de $N \in \mathbb{N}$ manœuvres $\nu_i, \Delta V_i$ ($i = 1, \dots, N$) est optimal pour le problème de rendez-vous hors-plan circulaire si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$p_\lambda(\nu_i) = -\text{sgn}(\Delta V_i), \quad (5.55)$$

$$\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} -\sin(\nu_i) \\ \cos(\nu_i) \end{bmatrix} \Delta V_i = z, \quad (5.56)$$

$$\sup_{\nu \in [\nu_0, \nu_f]} |p_\lambda(\nu)| = 1. \quad (5.57)$$

Dans ce qui suit, la forme générale des solutions de ces conditions d'optimalité est présentée, avant de donner la démonstration de ces résultats.

5.3.3 Solutions optimales en consommation

Commençons par définir l'angle suivant :

$$\nu^* = \min \left\{ \nu \geq \nu_0 : \nu = \nu_z + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \right\}, \quad (5.58)$$

où ν_z est l'angle, défini modulo 2π , tel que :

$$\cos(\nu_z) = \frac{z_1}{\|z\|_2}, \quad \sin(\nu_z) = \frac{z_2}{\|z\|_2}. \quad (5.59)$$

La nature des solutions optimales dépend de l'appartenance de ν^* à l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$.

Cas où $\nu^* \leq \nu_f$

Posons :

$$N = \max \{ i \in \mathbb{N} : \nu^* + \pi i \leq \nu_f \} + 1. \quad (5.60)$$

Cet entier représente le nombre maximum d'impulsions non nulles d'une solution optimale. Une solution $\nu_i, \Delta V_i$ ($i = 1, \dots, N$) est optimale si et seulement si :

$$\nu_i = \nu^* + \pi(i-1) \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (5.61)$$

$$\text{sgn}(\Delta V_i) = (-1)^i \cos\left(\nu^* + \frac{\pi}{2} - \nu_z\right) \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (5.62)$$

$$\sum_{i=1}^N |\Delta V_i| = \|z\|_2. \quad (5.63)$$

Il est donc possible de répartir les impulsions comme on le souhaite tous les π , du moment que la consommation égale la norme euclidienne de z . Ce degré de liberté est illustré dans la suite sur le premier exemple numérique.

Le vecteur efficacité optimal est caractérisé de la manière suivante :

$$\lambda = -\frac{z}{\|z\|_2}. \quad (5.64)$$

Cas où $\nu^* > \nu_f$

L'unique solution optimale possible est celle des impulsions aux deux bouts. Celles-ci sont données par :

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\nu_f - \nu_0)} \begin{bmatrix} \cos(\nu_f - \nu_z) \\ -\cos(\nu_0 - \nu_z) \end{bmatrix}, \quad (5.65)$$

pour une consommation totale de :

$$|\Delta V_1| + |\Delta V_2| = \frac{|\cos(\nu_f - \nu_z) + \cos(\nu_0 - \nu_z)|}{\sin(\nu_f - \nu_0)}. \quad (5.66)$$

Les multiplicateurs de Lagrange optimaux sont donnés par :

$$\lambda = \frac{\varepsilon_f}{\sin(\nu_f - \nu_0)} \begin{bmatrix} \cos(\nu_f) + \cos(\nu_0) \\ \sin(\nu_f) + \sin(\nu_0) \end{bmatrix}, \quad (5.67)$$

avec :

$$\varepsilon_f = \text{sgn}(\cos(\nu_f - \nu_z)). \quad (5.68)$$

5.3.4 Preuve de l'optimalité

Démontrons les résultats reportés précédemment. En tout et pour tout, seules deux configurations permettent de satisfaire l'équation (5.57) : $\|\lambda\|_2 = 1$ ou $\|\lambda\|_2 > 1$. Traitons ces cas séparément.

Cas où $\|\lambda\|_2 = 1$

Soit ν_1 l'angle où la norme du vecteur efficacité atteint 1 pour la première fois sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$. Le vecteur efficacité est du type $p_\lambda = -\varepsilon \cos(\nu - \nu_1)$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. La norme ne vaut 1 qu'en ν_1 modulo π , ce qui signifie que les impulsions ν_i ne peuvent avoir lieu que toutes les demi-périodes. En posant $L = \max\{l \in \mathbb{N} : \nu_1 + l\pi \leq \nu_f\} + 1$, on a $\nu_i = \nu_1 + (i-1)\pi$ pour tout $i = 1, \dots, L$.

Si $\varepsilon = 1$, l'équation (5.55) donne $\text{sgn}(\Delta V_i) = (-1)^i$. Ainsi, l'équation (5.56) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^L \begin{bmatrix} -\sin(\nu_1 + (i-1)\pi) \\ \cos(\nu_1 + (i-1)\pi) \end{bmatrix} \text{sgn}(\Delta V_i) |\Delta V_i| = z, \quad (5.69)$$

qui se simplifie en :

$$\begin{bmatrix} -\sin(\nu_1) \\ \cos(\nu_1) \end{bmatrix} \sum_{i=1}^L |\Delta V_i| = z, \quad (5.70)$$

et qui est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \cos(\nu_1 + \pi/2) \\ \sin(\nu_1 + \pi/2) \end{bmatrix} \sum_{i=1}^L |\Delta V_i| = z. \quad (5.71)$$

On en déduit que $\sum_i |\Delta V_i| = \|u\|_2$ et $\nu_1 = \nu_z - \pi/2 \pmod{2\pi}$. Quant au vecteur efficacité, il s'écrit $p_\lambda(\nu) = -\cos(\nu + \pi/2 - \nu_z) = -\cos(\nu_z) \cos(\nu) - \sin(\nu_z) \sin(\nu)$, d'où $\lambda = -\frac{z}{\|z\|_2}$.

Dans le cas où $\varepsilon = -1$, on obtient cette fois :

$$-\begin{bmatrix} -\sin(\nu_1) \\ \cos(\nu_1) \end{bmatrix} \sum_{i=1}^L |\Delta V_i| = z, \quad (5.72)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{bmatrix} \cos(\nu_1 - \pi/2) \\ \sin(\nu_1 - \pi/2) \end{bmatrix} \sum_{i=1}^L |\Delta V_i| = z. \quad (5.73)$$

On en déduit toujours que $\sum_i |\Delta V_i| = \|u\|_2$, mais cette fois $\nu_1 = \nu_z + \pi/2 \pmod{2\pi}$. D'autre part, $p_\lambda(\nu) = \cos(\nu - \pi/2 - \nu_z) = -\cos(\nu_z) \cos(\nu) - \sin(\nu_z) \sin(\nu)$ d'où encore une fois $\lambda = -\frac{z}{\|z\|_2}$.

En résumé, pour $\varepsilon = \pm 1$, on a $\nu_1 = \nu^* \leq \nu_f$ et $L = N$. De plus, l'équation (5.62) est vérifiée.

Cas où $\|\lambda\|_2 > 1$

Dans cette configuration, le vecteur efficacité ne peut pas atteindre une de ses tangentes horizontales, sinon la condition de norme infinie égale à 1 ne serait pas respectée. En conséquence, $\nu_f - \nu_0 < \pi$ et le vecteur efficacité est monotone sur $[\nu_0, \nu_f]$. Les impulsions ne peuvent donc avoir lieu qu'aux deux bouts de l'intervalle et vérifient :

$$\begin{bmatrix} -\sin(\nu_0) & -\sin(\nu_f) \\ \cos(\nu_0) & \cos(\nu_f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} = z. \quad (5.74)$$

Le déterminant de la matrice de gauche est $\sin(\nu_f - \nu_0)$. Cette quantité est non nulle puisque $0 < \nu_f - \nu_0 < \pi$. Le système précédent est donc inversible et :

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\nu_f) & \sin(\nu_f) \\ -\cos(\nu_0) & -\sin(\nu_0) \end{bmatrix} \frac{z}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \quad (5.75)$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin(\nu_f - \nu_0)} \begin{bmatrix} \cos(\nu_f - \nu_z) \\ -\cos(\nu_0 - \nu_z) \end{bmatrix}. \quad (5.76)$$

D'autre part, le signe d'une impulsion est toujours opposé à celui du vecteur efficacité. Puisque ce dernier est monotone et atteint une norme unitaire aux deux bouts, on a $\text{sgn}(p_\lambda(\nu_f)) = -\text{sgn}(p_\lambda(\nu_0))$, donc $\text{sgn}(\Delta V_1) = -\text{sgn}(\Delta V_2)$. Ceci est équivalent à $\text{sgn}(\cos(\nu_f - \nu_z)) = \text{sgn}(\cos(\nu_0 - \nu_z))$. Étant donnée la taille de l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$, cela correspond à $\nu^* > \nu_f$.

Pour ce qui est des multiplicateurs de Lagrange, on a $p_\lambda(\nu_f) = -p_\lambda(\nu_0) = \text{sgn}(\Delta V_1) = \varepsilon_f$. Il vient donc que :

$$\begin{bmatrix} -\sin(\nu_0) & \cos(\nu_0) \\ -\sin(\nu_f) & \cos(\nu_f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \varepsilon_f \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

Cette matrice est la transposée de celle rencontrée précédemment. Ce système est donc inversible lui-aussi, d'où :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_f}{\sin(\nu_f - \nu_0)} \begin{bmatrix} \cos(\nu_f) & -\cos(\nu_0) \\ \sin(\nu_f) & -\sin(\nu_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (5.78)$$

5.3.5 Exemples numériques

Les cas exposés ci-après permettent de visualiser les deux grands types de solutions optimales pour une orbite de référence circulaire. Le premier exemple permet notamment de voir le cas de figure d'une infinité de possibilités pour les impulsions associées à un unique vecteur efficacité optimal.

Exemple 1

Dans cet exemple, l'orbite de référence est géostationnaire. Les éléments orbitaux ainsi que les conditions du rendez-vous hors-plan sont indiqués par la Table 5.1.

a [km]	e	ν_0 [rad]	x_0^T [m m/s]	ν_f [rad]	x_f^T [m m/s]
42241	0	0	[5000 -1]	5.0265	[20 -0.1]

TABLE 5.1 – Paramètres du rendez-vous pour l'exemple 1.

La résolution des conditions d'optimalité donne le vecteur efficacité représenté sur la Figure 5.7. Il possède une amplitude unitaire et sa norme atteint 1 en deux angles. Il existe une infinité de solutions optimales associées, puisque l'on peut répartir les impulsions entre ces deux anomalies vraies pour un coût total de 1.0707 m/s. Le Tableau 5.2 propose les deux seules solutions optimales en une unique impulsion non nulle. Les deux graphiques suivants sont des plans de phase, à savoir qu'ils représentent la vitesse en fonction de la position. Le premier (Figure 5.8) correspond à la solution 1 et le deuxième (Figure 5.9) à la solution 2. Dans les deux cas, l'état final visé est atteint et la consommation est la même.

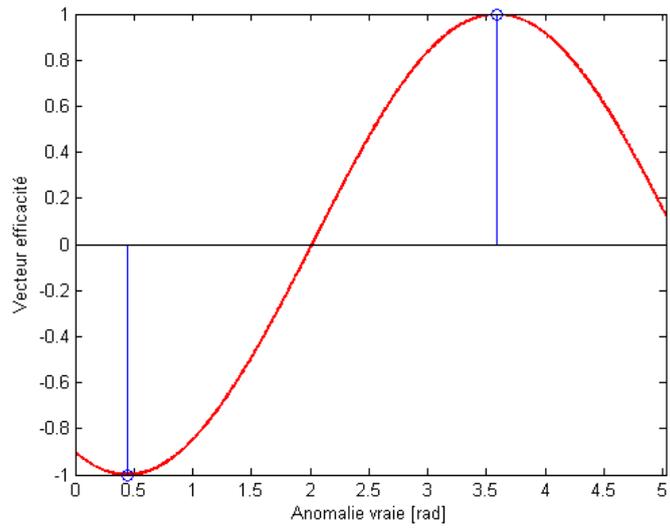


FIGURE 5.7 – Tracé du vecteur efficacité optimal.

ν [rad]	Sol. 1 [m/s]	Sol. 2 [m/s]
0.4423	1.0707	0
3.5839	0	-1.0707

TABLE 5.2 – Solutions optimales en une impulsion.

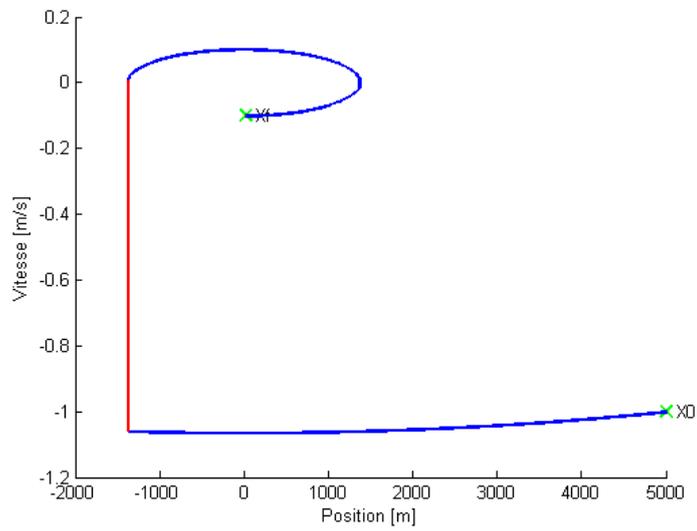


FIGURE 5.8 – Plan de phase pour la solution optimale 1.

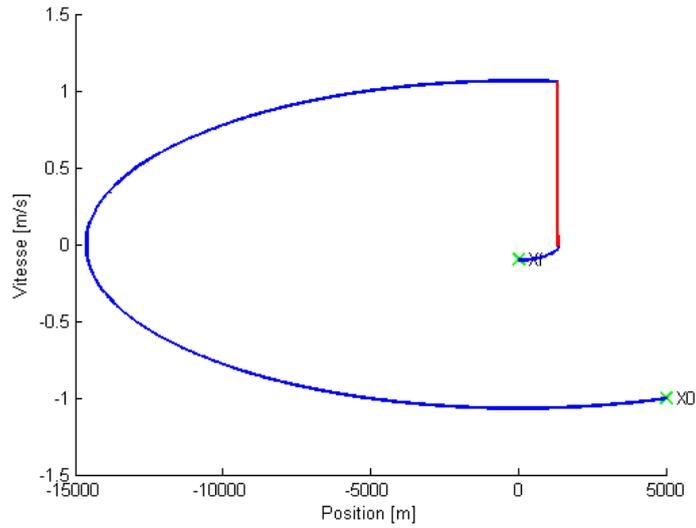


FIGURE 5.9 – Plan de phase pour la solution optimale 2.

Exemple 2

Dans cet exemple, la trajectoire de référence est une orbite basse. Les éléments orbitaux ainsi que les conditions du rendez-vous hors-plan sont indiqués par la Table 5.3.

a [km]	e	ν_0 [rad]	x_0^T [m m/s]	ν_f [rad]	x_f^T [m m/s]
8059	0	0	[-2000 -3]	2.5133	[-10 -0.05]

TABLE 5.3 – Paramètres du rendez-vous pour l'exemple 2.

La résolution des conditions d'optimalité aboutit à une unique possibilité pour la solution optimale : des impulsions aux deux bouts, données dans le Tableau 5.4. Le vecteur efficacité correspondant est représenté sur la Figure 5.10 et le plan de phase sur la Figure 5.10. L'impulsion initiale place le chasseur sur une trajectoire relative qui l'amène, au temps final, à la position requise. L'ultime impulsion sert alors à corriger la vitesse suivant la valeur demandée. On constate bien que les impulsions sont de signe opposé au vecteur efficacité.

ν [rad]	ΔV [m/s]
0	0.5829
2.5133	-3.0313
	3.6143

TABLE 5.4 – Solution optimale.

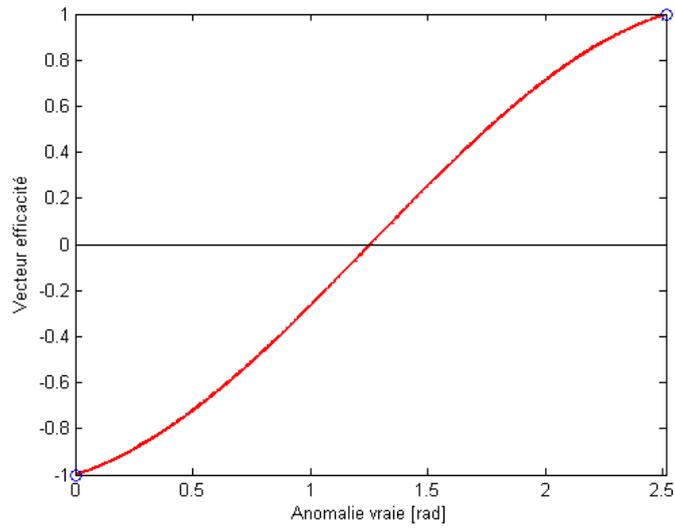


FIGURE 5.10 – Tracé du vecteur efficacité optimale.

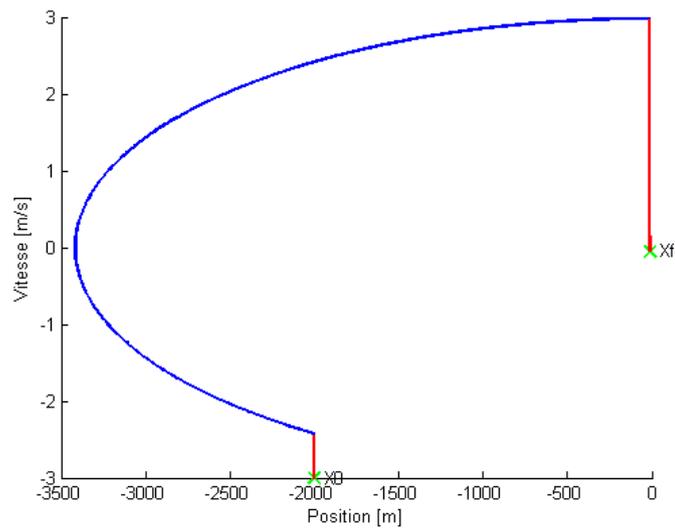


FIGURE 5.11 – Plan de phase pour la solution optimale.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre d'introduction sur le problème linéaire de rendez-vous en temps fixé été présentée la méthode indirecte de résolution, basée sur les notions de dualité. En effet, la solution optimale du problème dual est liée à celle du primal via le vecteur efficacité, introduit à l'origine dans le cadre d'une dynamique non linéaire par Lawden [75]. Les conditions d'optimalité déduites par ce dernier sont nécessaires et suffisantes dans le cas linéaire. En fin de chapitre, cette technique est mise en pratique à des fins illustratives pour résoudre analytiquement le problème classique de consommation minimale des trajectoires relatives situées hors du plan d'une orbite képlérienne circulaire. La généralisation au cas d'une excentricité non nulle est l'objet de la suite de cette troisième partie et en constitue la contribution majeure.

Chapitre 6

Résolution du problème de rendez-vous hors-plan elliptique

6.1 Introduction

Ce deuxième et dernier volet de la Partie III est consacré à la résolution du rendez-vous hors-plan sous une dynamique linéarisée autour de la trajectoire d'une cible sur une orbite fermée non circulaire. Cela correspond à une excentricité e comprise dans l'intervalle $]0, 1[$. Dans le chapitre précédent, on a présenté la méthode de résolution indirecte basée sur les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de Lawden, qui a déjà été utilisée pour trouver les solutions optimales lorsque $e = 0$ et que l'on va appliquer une nouvelle fois. Ces résultats, jusqu'alors inédits, ont été publiés dans [114], après parution dans une note interne au LAAS [115].

La Section 6.2 analyse la dynamique du vecteur efficacité lorsque $e \in]0, 1[$. Les solutions optimales sont détaillées dans la Section 6.3. Les démonstrations associées sont données en partie dans la Section 6.4, le reste des preuves étant reporté dans l'Annexe D. Pour finir, la Section 6.5 illustre ces résultats sur des exemples numériques.

6.2 Dynamique du vecteur efficacité

La fonction $p_\lambda(\nu)$ est clairement une fonction périodique de période 2π . C'est un oscillateur harmonique divisé par la fonction positive $r(\nu) = 1 + e \cos(\nu)$. On en déduit que son signe change tous les π . Sa dérivée est donnée par :

$$\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu) = -\frac{\lambda_1(e + \cos(\nu)) + \lambda_2 \sin(\nu)}{(1 + e \cos(\nu))^2}. \quad (6.1)$$

Comme $0 \leq e < 1$, on déduit que $p_\lambda(\nu)$ atteint deux extrema globaux, de signe opposé, en ν_{e_1} et ν_{e_2} sur la période de 2π .

Soient ν_{e_1} et ν_{e_2} les dates des deux extrema de p_λ sur une période donnée.

$$\left| \frac{p_\lambda(\nu_{e_2})}{p_\lambda(\nu_{e_1})} \right| = 2 \frac{e \cos(\nu_{e_1}) + 1}{1 - e^2} - 1.$$

On en déduit :

$$|p_\lambda(\nu_{e_2})| < |p_\lambda(\nu_{e_1})| \Leftrightarrow \cos(\nu_{e_1}) < -e. \quad (6.2)$$

6.2.1 Multiplicateurs de Lagrange et extrema de $p_\lambda(\nu)$

Si $p_\lambda(\nu)$ a un extremum $p_\lambda(\nu_e)$ en ν_e alors il est possible de déduire de (5.49) et (6.1) que :

$$\lambda_1 = -p_\lambda(\nu_e) \sin(\nu_e), \quad \lambda_2 = p_\lambda(\nu_e)(e + \cos(\nu_e)). \quad (6.3)$$

Un vecteur efficacité candidat à l'optimalité peut alors être réécrit comme suit :

$$p_\lambda(\nu) = p_\lambda(\nu_e) \frac{\cos(\nu - \nu_e) + e \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)}. \quad (6.4)$$

6.2.2 Rapport des extrema

A partir de (6.3), il vient :

$$\frac{|p_\lambda(\nu_{e_2})|}{|p_\lambda(\nu_{e_1})|} \sin(\nu_{e_2}) = -\sin(\nu_{e_1}), \quad (6.5)$$

$$\frac{|p_\lambda(\nu_{e_2})|}{|p_\lambda(\nu_{e_1})|} (e + \cos(\nu_{e_2})) = -(e + \cos(\nu_{e_1})). \quad (6.6)$$

En combinant les équations (6.5) et (6.6), une équation polynomiale du second ordre est obtenue. Le rapport des valeurs absolues du vecteur efficacité, évalué en ses extrema est une solution de :

$$X^2 - \frac{2e(e + \cos(\nu_{e_1}))}{1 - e^2} X - \frac{1 + 2e \cos(\nu_{e_1}) + e^2}{1 - e^2} = 0. \quad (6.7)$$

Seule la solution positive des deux racines $\{-1; \frac{1+2e \cos(\nu_{e_1})+e^2}{1-e^2}\}$ correspond au rapport des valeurs absolues. Ainsi :

$$\frac{|p_\lambda(\nu_{e_2})|}{|p_\lambda(\nu_{e_1})|} = \frac{1 + 2e \cos(\nu_{e_1}) + e^2}{1 - e^2}, \quad (6.8)$$

que l'on peut ré-arranger comme :

$$\frac{|p_\lambda(\nu_{e_2})|}{|p_\lambda(\nu_{e_1})|} - 1 = 2e \frac{e + \cos(\nu_{e_1})}{1 - e^2}. \quad (6.9)$$

Il est important, pour la suite, de noter que $|p_\lambda(\nu_{e_1})| \neq 0$ sinon $p_\lambda(\nu) \equiv 0$, du fait de (6.3).

A partir de (6.9), l'extremum de norme maximale est caractérisé par $\cos(\nu_e) \leq -e$ alors que l'extremum de norme minimale est tel que $\cos(\nu_e) \geq -e$. Ainsi, si l'on suppose que l'extremum de norme maximale est donné par ν_{e_2} alors ν_{e_1} est l'extremum de norme minimale et il peut être déduit de (6.9) que :

$$\frac{|p_\lambda(\nu_{e_2})|}{|p_\lambda(\nu_{e_1})|} - 1 = 2e \frac{e + \cos(\nu_{e_1})}{1 - e^2} \geq 0. \quad (6.10)$$

Ainsi, on obtient que $\cos(\nu_{e_1}) \geq -e$ pour l'extremum de norme minimale. La condition pour l'extremum de norme maximale est obtenue de la même façon en supposant que ν_{e_2} est l'extremum de norme minimale. Quand $|p_\lambda(\nu_{e_1})| = 1$, il vient que :

$$|p_\lambda(\nu_{e_2})| = \frac{1 + 2e \cos(\nu_{e_1}) + e^2}{1 - e^2}. \quad (6.11)$$

Alors, $|p_\lambda(\nu_{e_2})| > 1$ si et seulement si $\cos(\nu_{e_1}) > -e$.

6.2.3 Extrema et multiplicateurs de Lagrange

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^2$ donné tel que $\lambda_2 \neq 0$, l'anomalie vraie de l'extremum est définie par l'équation :

$$\frac{\sin(\nu_e)}{e + \cos(\nu_e)} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (6.12)$$

En définissant $Y = \cos(\nu_e)$ et $Q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, il s'ensuit, avec (6.12) au carré que :

$$(1 + Q^2)Y^2 + 2eQ^2Y + e^2Q^2 - 1 = 0. \quad (6.13)$$

Les racines de (6.13) sont :

$$\frac{\pm \sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} - eQ^2}{1 + Q^2}.$$

Ainsi :

$$\cos(\nu_e) = \frac{\pm \sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} - eQ^2}{1 + Q^2} \quad \text{et} \quad \sin(\nu_e) = -Q \frac{\pm \sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} + e}{1 + Q^2}. \quad (6.14)$$

En gardant à l'esprit les restrictions sur les extrema de norme maximale et minimale, le vecteur efficacité en ses extrema peut être exprimé en fonction de λ . En insérant les expressions $\cos(\nu_e)$ et $\sin(\nu_e)$ prises de (6.14) dans (5.49), l'expression suivante est obtenue en notant que $\lambda_1 = Q\lambda_2$:

$$p_\lambda(\nu_e) = \frac{\pm \lambda_2(1 + Q^2) \sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)}}{1 + (1 - e^2)Q^2 \pm e \sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)}}. \quad (6.15)$$

Par complétion des carrés :

$$\begin{aligned} 1 + (1 - e^2)Q^2 + e \sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} &= \sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)}(\sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} + e), \\ 1 + (1 - e^2)Q^2 - e \sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} &= \sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)}(\sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} - e), \end{aligned}$$

et en prenant la valeur absolue de (6.15), les expressions suivantes sont obtenues :

$$\max_{\nu \in \mathbb{R}} |p_\lambda(\nu)| = \frac{|\lambda_2|(1 + Q^2)}{\sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} - e}, \quad \min_{\nu \in \mathbb{R}} |p_\lambda(\nu)| = \frac{|\lambda_2|(1 + Q^2)}{\sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} + e}. \quad (6.16)$$

6.3 Solutions optimales en consommation

La méthode mise en œuvre afin de dériver la solution analytique de ce problème consiste principalement à exploiter les différentes caractéristiques du vecteur efficacité à l'optimalité et à discuter les différentes configurations possibles pour l'optimalité. La solution est fortement dépendante de la durée fixée pour le rendez-vous $d_\nu = \nu_f - \nu_0$, des anomalies initiale ν_0 et finale ν_f et du vecteur de conditions aux limites z .

- Quand la durée du rendez-vous est plus longue qu'une période (i.e. quand $d_\nu \geq 2\pi$), le vecteur efficacité $p_\lambda(\nu)$ atteint nécessairement ses extrema. Alors, il n'existe que deux possibilités pour $p_\lambda(\nu)$ pour être optimal, puisqu'il doit vérifier (5.52) : un extremum a une norme égale à 1 et l'autre a une norme strictement inférieure à 1 (une impulsion, au plus, par 2π), ou les deux extrema de $p_\lambda(\nu)$ ont une norme égale à 1 (deux impulsions, au plus, par 2π).
- Quand la durée du rendez-vous est plus courte qu'une période (i.e. quand $d_\nu < 2\pi$), cette dépendance peut être complexe puisqu'un extremum peut correspondre à un point frontière.

Dans la suite, les différentes solutions et leurs conditions associées sont présentées le plus synthétiquement possible sous forme de propositions. Pour chaque type de solutions optimales, les conditions associées s'appliquant à d_ν , ν_0 , ν_f et z sont données. Les multiplicateurs de Lagrange et le vecteur efficacité optimaux sont également présentés. Les développements analytiques permettant la déduction de tels résultats sont exposés dans la Section 6.4 et l'Annexe D. Nous utiliserons les notations suivantes dans la suite de ce chapitre :

$$\nu_\pm = \min\{\nu \geq \nu_0 / \cos(\nu) = -e, \sin(\nu) = \pm\sqrt{1-e^2}\}. \quad (6.17)$$

La notation ν_\pm définit deux localisations différentes ν_+ et ν_- appartenant à l'intervalle $[\nu_0, \nu_0 + 2\pi)$ et vérifiant $|p_\lambda(\nu_\pm)| = 1$ et $\frac{dp_\lambda(\nu_\pm)}{d\nu} = 0$. Elles sont caractérisées par un cosinus identique et par un sinus respectivement positif et négatif, i.e. $\cos(\nu_+) = \cos(\nu_-) = -e$, $\sin(\nu_+) = \sqrt{1-e^2}$ et $\sin(\nu_-) = -\sqrt{1-e^2}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \operatorname{sgn}(z_1), \quad \varepsilon_2 = \operatorname{sgn}(z_2), \\ \varepsilon_0 &= \operatorname{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2), \\ \varepsilon_f &= \operatorname{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Du fait de (6.17), quand $d_\nu < \pi$, la condition $(\nu_-, \nu_+) \in [\nu_0, \nu_f]^2$ est équivalente à :

$$\sin(\nu_0) \geq \sqrt{1-e^2} \text{ et } \sin(\nu_f) \leq -\sqrt{1-e^2}. \quad (6.19)$$

Quand $\pi \leq d_\nu < 2\pi$, la condition $(\nu_-, \nu_+) \in [\nu_0, \nu_f]^2$ est équivalente à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(\nu_0) \geq \sqrt{1-e^2}, \\ \text{ou} \\ \sin(\nu_0) \leq -\sqrt{1-e^2} \text{ et } \sin(\nu_f) \leq -\sqrt{1-e^2}, \\ \text{ou} \\ |\sin(\nu_0)| < \sqrt{1-e^2} \text{ et } (e + \cos(\nu_0))(e + \cos(\nu_f)) > 0. \end{array} \right. \quad (6.20)$$

6.3.1 Solutions optimales à deux impulsions intérieures

Dans cette section, le cas des solutions optimales à deux impulsions intérieures par période est étudié. Indépendamment de la durée du rendez-vous, le vecteur efficacité optimal atteindra ses deux extrema, et ces deux extrema ont une norme unitaire.

Proposition 16. *Une solution optimale pour le problème du rendez-vous impulsif hors-plan linéarisé est une trajectoire à 2 impulsions définies par les localisations optimales ν_\pm et les directions optimales de poussée données par :*

$$\Delta V(\nu_\pm) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e} (\mp \varepsilon z_1 - \sqrt{1-e^2} z_2), \quad (6.21)$$

si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$e\|z\| > |z_2| \text{ et } d_\nu \geq 2\pi, \quad (6.22)$$

ou

$$e\|z\| > |z_2| \text{ et } d_\nu < \pi \text{ et } \sin(\nu_0) \geq \sqrt{1-e^2} \text{ et } \sin(\nu_f) \leq -\sqrt{1-e^2}. \quad (6.23)$$

ou

$$\begin{cases} e\|z\| > |z_2| \text{ et } \pi \leq d_\nu < 2\pi, \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin(\nu_0) \geq \sqrt{1-e^2}, \\ \text{ou} \\ \sin(\nu_0) \leq -\sqrt{1-e^2} \text{ et } \sin(\nu_f) \leq -\sqrt{1-e^2}, \\ \text{ou} \\ |\sin(\nu_0)| < \sqrt{1-e^2} \text{ et } (e + \cos(\nu_0))(e + \cos(\nu_f)) > 0. \end{array} \right. \end{cases} \quad (6.24)$$

Les multiplicateurs de Lagrange et le vecteur efficacité optimaux sont :

$$\lambda_1 = -\varepsilon_1\sqrt{1-e^2}, \quad \lambda_2 = 0, \quad p_\lambda(\nu) = \frac{\varepsilon_1\sqrt{1-e^2}\sin(\nu)}{1+e\cos(\nu)}. \quad (6.25)$$

Remarque 14. Comme il est indiqué dans la preuve de la Proposition 16, donnée dans la section suivante, quand $d_\nu \geq 2\pi$, la solution optimale peut être étalée sur $N^* = N_- + N_+$ poussées vérifiant les conditions (6.86) et (6.87), en fonction de la durée du rendez-vous.

6.3.2 Solutions optimales à une impulsion intérieure

Nous considérons maintenant le cas des solutions optimales formées d'une seule impulsion intérieure sans impulsion sur la frontière. Dans ce cas, deux configurations géométriques du vecteur efficacité peuvent se produire. Quand le rendez-vous dure plus d'une période ($d_\nu \geq 2\pi$), le vecteur efficacité optimal associé atteint nécessairement un extremum de norme unitaire tandis que l'autre extremum a une norme strictement inférieure à 1. Quand le rendez-vous dure moins d'une période ($d_\nu < 2\pi$), il n'existe pas de condition sur la norme de l'autre extremum et des conditions supplémentaires seront nécessaires afin d'imposer $|p_\lambda(\nu)| \leq 1$, $\nu \in [\nu_0, \nu_f]$.

Proposition 17. Si $\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0$ et $\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0$, une solution optimale pour le problème du rendez-vous impulsif hors-plan linéarisé est une trajectoire à 1 impulsion définie par les localisations optimales ν_{ib} :

$$\cos(\nu_{ib}) = -\varepsilon_b \frac{z_2}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_{ib}) = \varepsilon_b \frac{z_1}{\|z\|}, \quad (6.26)$$

et les poussées optimales sont définies par :

$$\Delta V(\nu_{ib}) = -\varepsilon_b\|z\| + \varepsilon_b z_2, \quad (6.27)$$

avec $b = 0$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$d_\nu < 2\pi \text{ et } e\|z\| \leq \varepsilon_0 u_2 \text{ et } \varepsilon_f = -\varepsilon_0, \quad (6.28)$$

ou

$$d_\nu < 2\pi \text{ et } e\|z\| > \varepsilon_0 u_2 \text{ et } \varepsilon_f = -\varepsilon_0, \\ \text{et}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_0) + \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_0) > 0, \\ \text{et} \\ \varepsilon_0(e + \cos(\nu_0))z_1 + (\varepsilon_0 z_2 - e\|z\|) \sin(\nu_0) > 0, \\ \text{et} \\ \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_f) + \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_f) > 0, \\ \text{et} \\ \varepsilon_0(e + \cos(\nu_f))z_1 + (\varepsilon_0 z_2 - e\|z\|) \sin(\nu_f) < 0 \end{array} \right. \quad (6.29)$$

avec $b = 2$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$d_\nu \geq 2\pi \text{ et } |z_2| > e\|z\|, \quad (6.30)$$

ou

$$\pi \leq d_\nu < 2\pi \text{ et } e\|z\| \leq |z_2| \text{ et } \varepsilon_f = \varepsilon_0, \quad (6.31)$$

ou

$$\pi \leq d_\nu < 2\pi \text{ et } e\|z\| > |z_2| \text{ et } \varepsilon_f = \varepsilon_0, \\ \text{et}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_2 z_2) \cos(\nu_0) + \varepsilon_2 z_1 \sin(\nu_0) > 0, \\ \text{et} \\ \varepsilon_2 z_1 (e + \cos(\nu_0)) - (e\|z\| - \varepsilon_2 z_2) \sin(\nu_0) > 0, \\ \text{et} \\ \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_2 z_2) \cos(\nu_f) + \varepsilon_2 z_1 \sin(\nu_f) > 0, \\ \text{et} \\ -\varepsilon_2 z_1 (e + \cos(\nu_f)) + (e\|z\| - \varepsilon_2 z_2) \sin(\nu_f) > 0. \end{array} \right. \quad (6.32)$$

Les multiplicateurs de Lagrange et le vecteur efficacité optimaux sont :

$$\lambda_1 = -\frac{z_1}{\|z\|}, \quad \lambda_2 = \varepsilon_b e - \frac{z_2}{\|z\|}, \quad p_\lambda(\nu) = \frac{z_1 \sin(\nu) + (\varepsilon_b e\|z\| - u_2) \cos(\nu)}{(1 + e \cos(\nu))\|z\|}. \quad (6.33)$$

Remarque 15. Comme il est indiqué dans la preuve de la Proposition 17, donnée dans la section suivante, quand $d_\nu \geq 2\pi$, l'impulsion optimale peut être subdivisée en N^* en $\nu_{ib} \pmod{2\pi}$ en fonction de la durée du rendez-vous.

Quand le vecteur efficacité a un extremum de norme unitaire en ν_0 (respectivement en ν_f), nous obtenons un cas particulier de la proposition 17. Les résultats deviennent alors les suivants.

Corollaire 4. Quand $\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 = 0$ ou $\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 = 0$, la solution optimale devient une solution impulsionnelle à la frontière, pour laquelle il peut exister une infinité de multiplicateurs de Lagrange optimaux. Sans perte de généralité, le vecteur efficacité peut être choisi comme dans (6.33) où $\varepsilon_b = -\text{sgn}(-\sin(\nu_b)z_1 + \cos(\nu_b)z_2)$ et $b = 0$ ou $b = f$.

1. Si $\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 = 0$, alors la solution optimale est une solution optimale initiale et la poussée optimale associée est donnée par :

$$\Delta V(\nu_0) = (-\sin(\nu_0)z_1 + \cos(\nu_0)z_2)(1 + e \cos(\nu_0)).$$

2. Si $\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 = 0$, alors la solution optimale est une solution optimale finale et la poussée optimale associée est donnée par :

$$\Delta V(\nu_f) = (-\sin(\nu_f)z_1 + \cos(\nu_f)z_2)(1 + e \cos(\nu_f)).$$

6.3.3 Solutions optimales à une impulsion intérieure et une impulsion initiale (ou finale)

Nous nous concentrons maintenant sur les solutions optimales constituées par une impulsion intérieure et au moins une impulsion (initiale ou finale) à la frontière. Dans ce cas, un extremum du vecteur efficacité conduit à une norme égale à 1 tandis que l'autre conduit à une norme du vecteur efficacité supérieure à 1. Afin d'être le plus concis possible dans l'expression des solutions optimales, nous définissons les notations suivantes :

$$\nu_{i0}^+ = \nu_0 + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)), \quad (6.34)$$

$$\nu_{if}^- = \nu_f - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_f)), \quad (6.35)$$

$$\hat{\nu}_{i0}^+ = \nu_0 + 2\pi - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)), \quad (6.36)$$

$$\hat{\nu}_{if}^- = \nu_f - 2\pi + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_f)), \quad (6.37)$$

et

$$g^+(\nu_0) = e \sin(\nu_0) + \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0))}, \quad (6.38)$$

$$g^-(\nu_f) = -e \sin(\nu_f) + \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f))}. \quad (6.39)$$

La variable ν_{i_0} représente l'anomalie d'un extremum sur $[\nu_0, \nu_f]$ et ε la direction de l'impulsion localisée en ν_{i_0} :

$$\varepsilon = \frac{\Delta V(\nu_{i_0})}{|\Delta V(\nu_{i_0})|}. \quad (6.40)$$

Si la norme du vecteur efficacité atteint 1 en n'importe quelle autre anomalie dans l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$, cela ne peut être qu'en ν_0 ou ν_f et les directions des poussées optimales en ces localisations sont nécessairement dans le sens opposé de celui de l'impulsion intérieure :

$$\frac{\Delta V(\nu_0)}{|\Delta V(\nu_0)|} = \frac{\Delta V(\nu_f)}{|\Delta V(\nu_f)|} = -\varepsilon. \quad (6.41)$$

En utilisant le fait que le vecteur efficacité admet une tangente horizontale en ν_{i_0} , on montre que les multiplicateurs de Lagrange sont obtenus de manière unique :

$$\lambda_1 = \varepsilon \sin(\nu_{i_0}), \quad \lambda_2 = -\varepsilon(e + \cos(\nu_{i_0})), \quad (6.42)$$

et le vecteur efficacité est alors calculé comme :

$$p_\lambda(\nu) = -\varepsilon \frac{\cos(\nu - \nu_{i_0}) + e \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)}. \quad (6.43)$$

Du fait que les cas où les solutions optimales sont composées d'une impulsion intérieure et d'une impulsion de bord finale ou initiale sont très similaires, seule la dérivation des conditions pour les solutions optimales composées d'une impulsion intérieure et d'une impulsion initiale est détaillée dans cette section.

Il est donc nécessaire de déterminer la localisation optimale de l'impulsion intérieure. En utilisant la définition (6.43) du vecteur efficacité, supposer une impulsion en ν_0 conduit à :

$$1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_{i_0} - \nu_0) = 0. \quad (6.44)$$

Cette équation a une solution ν_{i_0} dans $]\nu_0, \nu_0 + 2\pi]$ si et seulement si :

$$\cos(\nu_0) \leq 0. \quad (6.45)$$

Si cette condition est satisfaite, les solutions sont :

$$\{\nu_0 + \arccos(-(1 + 2e \cos(\nu_0))); \nu_0 + 2\pi - \arccos(-(1 + 2e \cos(\nu_0)))\}. \quad (6.46)$$

Si $\nu_f - \nu_0 < \pi$, alors (6.44) a une unique solution dans $[\nu_0, \nu_0 + \pi]$, et a une solution dans $[\nu_0, \nu_f]$ si et seulement si la condition (6.47) est satisfaite :

$$1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0. \quad (6.47)$$

Sinon, quand $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$, alors l'équation (6.44) a une unique solution dans $[\nu_0, \nu_f]$ si et seulement si :

$$1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) < 0, \quad (6.48)$$

et deux solutions si la condition (6.48) n'est pas satisfaite. Dans la suite, deux cas sont analysés : $\nu_{i_0} = \nu_0 + \arccos(-(1 + 2e \cos(\nu_0)))$ et $\nu_{i_0} = \nu_0 + 2\pi - \arccos(-(1 + 2e \cos(\nu_0)))$.

Afin de rendre les résultats plus clairs au lecteur, il est important d'insister sur la notation particulière : + est associé avec $\# = 0$ (impulsion initiale) tandis que - est associé avec $\# = f$ (impulsion finale) comme les notations (6.34)-(6.37) l'indiquent.

Cas I

Dans le cas où $\nu_{i_0} = \nu_0 + \arccos(-(1+2e \cos(\nu_0)))$, les résultats sont résumés par la Proposition 18.

Proposition 18. *Une solution optimale pour le problème du rendez-vous impulsif hors-plan linéarisé est une trajectoire à 2 impulsions, définie par les localisations optimales $(\nu_{\sharp}, \nu_{i_{\sharp}}^{\pm})$ et les poussées optimales associées :*

$$\begin{aligned}\Delta V(\nu_{\sharp}) &= (1 + e \cos(\nu_{\sharp})) \frac{\cos(\nu_{i_{\sharp}}^{\pm})z_1 + \sin(\nu_{i_{\sharp}}^{\pm})z_2}{\sin(\nu_{i_{\sharp}}^{\pm} - \nu_{\sharp})}, \\ \Delta V(\nu_{i_{\sharp}}^{\pm}) &= -(1 + e \cos(\nu_{i_{\sharp}}^{\pm})) \frac{\cos(\nu_{\sharp})z_1 + \sin(\nu_{\sharp})z_2}{\sin(\nu_{i_{\sharp}}^{\pm} - \nu_{\sharp})}.\end{aligned}\tag{6.49}$$

si les conditions :

$$\begin{aligned}\sharp = 0 \text{ et } d_{\nu} < \pi \text{ et } \sin(\nu_0) < \sqrt{1 - e^2} \text{ et } 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0, \\ \text{et}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \varepsilon_f, \\ \text{ou} \\ \varepsilon_0 = -\varepsilon_f \text{ et } \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_0) + \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_0) \leq 0, \end{cases}\tag{6.50}$$

ou

$$\begin{aligned}\sharp = f \text{ et } d_{\nu} < \pi \text{ et } \sin(\nu_f) > -\sqrt{1 - e^2} \text{ et } 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0, \\ \text{et}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \varepsilon_f, \\ \text{ou} \\ \varepsilon_0 = -\varepsilon_f \text{ et } \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_0) + \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_0) \leq 0, \end{cases}\tag{6.51}$$

ou

$$\begin{aligned}\sharp = 0 \text{ et } \pi \leq d_{\nu} < 2\pi \text{ et } \sin(\nu_0) < \sqrt{1 - e^2} \text{ et } \cos(\nu_0) \leq 0, \\ \text{et}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) + 2 \sin(\nu_f - \nu_0) g^-(\nu_0) \geq 0, \\ \text{et} \\ \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_0) + \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_0) \leq 0, \\ \text{et} \\ \sin(\nu_f - \nu_0) + e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) + 2(\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_0)) g^-(\nu_0) \leq 0, \end{cases}\tag{6.52}$$

ou

$$\begin{aligned}\sharp = f \text{ et } \pi \leq d_{\nu} < 2\pi \text{ et } \sin(\nu_f) > -\sqrt{1 - e^2} \text{ et } \cos(\nu_f) \leq 0, \\ \text{et} \\ 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) + 2 \sin(\nu_f - \nu_0) g^+(\nu_f) \geq 0, \\ \text{et}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon_f z_2) \cos(\nu_f) - \varepsilon_f z_1 \sin(\nu_f) \leq 0, \\ \text{et} \\ \sin(\nu_f - \nu_0) + e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) + 2(\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_f)) g^+(\nu_f) \geq 0, \end{cases}\tag{6.53}$$

sont vérifiées. Les multiplicateurs de Lagrange optimaux sont donnés par :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \varepsilon_{\sharp} \left(\pm \sin(\nu_{\sharp})(1 + 2e \cos(\nu_{\sharp}) - 2 \cos(\nu_{\sharp}) \sqrt{-e \cos(\nu_{\sharp})(1 + e \cos(\nu_{\sharp}))}) \right), \\ \lambda_2 &= \varepsilon_{\sharp} \left(\pm e \mp \cos(\nu_{\sharp})(1 + e \cos(\nu_{\sharp}) - 2 \sin(\nu_{\sharp}) \sqrt{-e \cos(\nu_{\sharp})(1 + 2e \cos(\nu_{\sharp}))}) \right),\end{aligned}\tag{6.54}$$

alors que le vecteur efficacité optimal est :

$$p_{\lambda}(\nu) = p_{\lambda}(\nu_{i_{\sharp}}^{\pm}) \frac{\cos(\nu - \nu_{i_{\sharp}}^{\pm}) + e \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)}.\tag{6.55}$$

Cas II

Dans le cas où $\nu_{i_0} = \nu_0 + 2\pi - \arccos(-(1 + 2e \cos(\nu_0)))$, les résultats sont résumés par la Proposition 19.

Proposition 19. *Une solution optimale pour le problème du rendez-vous impulsif hors-plan linéarisé est une trajectoire à 2 impulsions, définie par les localisations optimales $(\nu_{\sharp}, \hat{\nu}_{i_{\sharp}}^{\pm})$ et les poussées optimales associées par (6.49), si les conditions :*

$$\begin{aligned} \sharp = 0 \text{ et } \pi \leq d_{\nu} < 2\pi \text{ et } \sin(\nu_0) < -\sqrt{1 - e^2} \text{ et } \cos(\nu_0) \leq 0, \\ \text{et} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) - 2 \sin(\nu_f - \nu_0) g^+(\nu_0) \geq 0, \\ \text{et} \\ 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \geq 0, \\ \text{et} \\ \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_0) - \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_0) \leq 0, \\ \text{et} \\ -\sin(\nu_f - \nu_0) - e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) + 2(\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_0)) g^+(\nu_0) \geq 0, \end{array} \right. \quad (6.56)$$

ou

$$\begin{aligned} \sharp = f \text{ et } \pi \leq d_{\nu} < 2\pi \text{ et } \sin(\nu_f) > \sqrt{1 - e^2} \text{ et } \cos(\nu_f) \leq 0, \\ \text{et} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) - 2 \sin(\nu_f - \nu_0) g^-(\nu_f) \geq 0, \\ \text{et} \\ 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) \geq 0, \\ \text{et} \\ \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_f z_2) \cos(\nu_f) + \varepsilon_f z_1 \sin(\nu_f) \leq 0, \\ \text{et} \\ -\sin(\nu_f - \nu_0) - e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) + 2(\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_f)) g^-(\nu_f) \geq 0, \end{array} \right. \quad (6.57)$$

sont vérifiées. Les multiplicateurs de Lagrange optimaux sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \varepsilon_{\sharp} \left(\mp \sin(\nu_{\sharp})(1 + 2e \cos(\nu_{\sharp})) - 2 \cos(\nu_{\sharp}) \sqrt{-e \cos(\nu_{\sharp})(1 + e \cos(\nu_{\sharp}))} \right), \\ \lambda_2 &= \varepsilon_{\sharp} \left(\mp e \pm \cos(\nu_{\sharp})(1 + e \cos(\nu_{\sharp})) - 2 \sin(\nu_{\sharp}) \sqrt{-e \cos(\nu_{\sharp})(1 + 2e \cos(\nu_{\sharp}))} \right), \end{aligned} \quad (6.58)$$

alors que le vecteur efficacité optimal est défini par :

$$p_{\lambda}(\nu) = p_{\lambda}(\hat{\nu}_{i_{\sharp}}^{\pm}) \frac{\cos(\nu - \hat{\nu}_{i_{\sharp}}^{\pm}) + e \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)}. \quad (6.59)$$

6.3.4 Solutions optimales aux bords

Dans cette section, le cas des solutions optimales sans impulsion intérieure est analysé. Ce cas est possible seulement si $\nu_f - \nu_0 < 2\pi$ et la norme du vecteur efficacité vaut 1 seulement en ν_0 and ν_f . L'équation définissant la fonction objectif, donnée par la condition CNS 2 conduit à faire la différence entre deux cas : $\nu_f - \nu_0 \neq \pi$ et $\nu_f - \nu_0 = \pi$.

Cas I : $\nu_f - \nu_0 \neq \pi$

Proposition 20. *Une solution optimale pour le problème du rendez-vous impulsif hors-plan linéarisé est une trajectoire à 2 impulsions, définie par les localisations optimales (ν_0, ν_f) et les poussées optimales associées :*

$$\begin{aligned} \Delta V(\nu_0) &= (1 + e \cos(\nu_0)) \frac{\cos(\nu_f) z_1 + \sin(\nu_f) z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \\ \Delta V(\nu_f) &= -(1 + e \cos(\nu_f)) \frac{\cos(\nu_0) z_1 + \sin(\nu_0) z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \end{aligned} \quad (6.60)$$

si les conditions

$$d_\nu < \pi \text{ et } ((\sin(\nu_0) < \sqrt{1-e^2}) \text{ ou } (\sin(\nu_f) > -\sqrt{1-e^2})),$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 = \varepsilon_f, \\ \text{et} \\ 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) \geq 0, \\ \text{et} \\ 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \geq 0, \\ \text{et} \\ \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0, \\ \text{et} \\ \cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0, \end{array} \right. \quad (6.61)$$

sont vérifiées. Les multiplicateurs de Lagrange optimaux sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\varepsilon_0 \frac{\cos(\nu_f) + \cos(\nu_0) + 2e \cos(\nu_0) \cos(\nu_f)}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \\ \lambda_2 &= -\varepsilon_0 \frac{\sin(\nu_f) + \sin(\nu_0) + e \sin(\nu_f + \nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \end{aligned} \quad (6.62)$$

alors que le vecteur efficacité optimal est défini par :

$$p_\lambda(\nu) = \varepsilon_0 \frac{(1 + e \cos(\nu_f)) \sin(\nu - \nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)(1 + e \cos(\nu))} - \varepsilon_0 \frac{\sin(\nu_f - \nu)(1 + e \cos(\nu_0))}{\sin(\nu_f - \nu_0)(1 + e \cos(\nu))}, \quad (6.63)$$

ou les conditions suivantes :

$$\pi < d_\nu < 2\pi \text{ et } \varepsilon_0 = -\varepsilon_f,$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0 \text{ et } \cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0, \\ \text{et} \\ \frac{|\lambda_2|(1 + Q^2)}{\sqrt{1 + Q^2(1 - e^2)} + e} < 1, \end{array} \right. \quad (6.64)$$

sont vérifiées. Les multiplicateurs de Lagrange optimaux sont donnés par :

$$\lambda_1 = \varepsilon_f \frac{\cos(\nu_f) - \cos(\nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \quad \lambda_2 = \varepsilon_f \left(\frac{\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)} + e \right), \quad (6.65)$$

alors que le vecteur efficacité optimal est défini par :

$$p_\lambda(\nu) = -\varepsilon_f \frac{\sin(\nu - \nu_0) + \sin(\nu_f - \nu) + e \cos(\nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)(1 + e \cos(\nu))}, \quad (6.66)$$

ou les conditions suivantes :

$$\pi < d_\nu < 2\pi \text{ et } \varepsilon_0 = \varepsilon_f,$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0, \\ \text{et} \\ 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0, \\ \text{et} \\ \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0 \text{ et } \cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0, \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{l} |\sin(\nu_0)| < \sqrt{1-e^2} \text{ et } (e + \cos(\nu_0))(e + \cos(\nu_f)) < 0, \\ \text{ou} \\ \sin(\nu_0) < -\sqrt{1-e^2} \text{ et } \sin(\nu_f) > -\sqrt{1-e^2}, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.67)$$

sont vérifiées avec les multiplicateurs de Lagrange optimaux donnés par :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \varepsilon_0 \frac{\cos(\nu_f) + \cos(\nu_0) + 2e \cos(\nu_0) \cos(\nu_f)}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \\ \lambda_2 &= \varepsilon_0 \frac{\sin(\nu_f) + \sin(\nu_0) + e \sin(\nu_f + \nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)},\end{aligned}\tag{6.68}$$

alors que le vecteur efficacité optimal est donné par :

$$p_\lambda(\nu) = -\varepsilon_0 \frac{(1 + e \cos(\nu_f)) \sin(\nu - \nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)(1 + e \cos(\nu))} + \varepsilon_0 \frac{\sin(\nu_f - \nu)(1 + e \cos(\nu_0))}{\sin(\nu_f - \nu_0)(1 + e \cos(\nu))}.\tag{6.69}$$

Cas II : $\nu_f - \nu_0 = \pi$

Corollaire 5. *Quand $d_\nu = \pi$ et $\nu_0 = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la solution optimale peut être concentrée en une impulsion au bord ou répartie sur deux impulsions au bord. Dans ce cas, il peut exister une infinité de multiplicateurs de Lagrange optimaux $(-\varepsilon_1, \lambda_2)$, $|\lambda_2| \leq e$, et les directions optimales et amplitudes optimales de poussée sont caractérisées par :*

$$\frac{\Delta V(\nu_0)}{|\Delta V(\nu_0)|} = \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta V(\nu_f)}{|\Delta V(\nu_f)|} = -\varepsilon_1.\tag{6.70}$$

La consommation optimale devient : $|\Delta V(\nu_0)| + |\Delta V(\nu_f)| = \|z\|$.

Résumé des solutions optimales et des conditions

Les solutions dérivées dans les sections précédentes sont assez complexes du fait de la combinatoire à prendre en compte. Elles sont résumées dans les deux Tables 6.1 et 6.2. La première récapitule les 8 solutions différentes et les conditions devant être vérifiées par chaque type de solutions optimales en fonction de la durée du rendez-vous alors que les ΔV optimaux associés et leur localisation sont résumés dans la seconde table. Dans les tables, n.d. est la notation pour non défini.

En pratique, il faut utiliser ce résumé ainsi : à partir de la durée (mesurée de manière angulaire), on identifie le type de solution optimale à l'aide du Tableau 6.1. Ensuite, on se reporte au Tableau 6.2 pour calculer les angles correspondants aux dates de poussées ainsi que les impulsions associées.

Solutions	$d_\nu < \pi$	$\pi < d_\nu < 2\pi$	$d_\nu \geq 2\pi$
A 2 imp. int.	$\sin(\nu_0) \geq \sqrt{1-e^2}$ et $\sin(\nu_f) \leq -\sqrt{1-e^2}$ et $e\ z\ > z_2 $	$e\ z\ > z_2 $ et (6.24)	$e\ z\ > z_2 $
B_1 1 imp. int.	$e\ z\ \leq \varepsilon_0 u_2$ et $\varepsilon_f = -\varepsilon_0$ ou $e\ z\ > \varepsilon_0 u_2$ et $\varepsilon_f = -\varepsilon_0$ et (6.29)	$e\ z\ \leq \varepsilon_0 u_2$ et $\varepsilon_f = -\varepsilon_0$ ou $e\ z\ > \varepsilon_0 u_2$ et $\varepsilon_f = \varepsilon_0$ et (6.29)	n.d.
B_2 1 imp. int.	n.d.	$e\ z\ > \varepsilon_0 u_2$ et $\varepsilon_f = \varepsilon_0$ et (6.32)	$e\ z\ < z_2 $
C_1 1 init. 1 imp. int.	$\sin(\nu_0) < \sqrt{1-e^2}$ et $1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0$ et (6.50)	$\sin(\nu_0) < \sqrt{1-e^2}$ et $\cos(\nu_0) \leq 0$ et (6.52)	n.d.
C_2 1 imp. int. 1 imp. fin.	$\sin(\nu_f) > -\sqrt{1-e^2}$ et $1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0$ et (6.51)	$\sin(\nu_f) > -\sqrt{1-e^2}$ et $\cos(\nu_f) \leq 0$ and (6.53)	n.d.
C_3 1 imp. init. 1 imp. int.	n.d.	$\sin(\nu_0) < -\sqrt{1-e^2}$ et $\cos(\nu_0) \leq 0$ et (6.56)	n.d.
C_4 1 imp. int. 1 imp. fin.	n.d.	$\sin(\nu_f) > \sqrt{1-e^2}$ et $\cos(\nu_f) \leq 0$ et (6.57)	n.d.
D 1 imp. init. 1 imp. fin.	$\sin(\nu_0) < \sqrt{1-e^2}$ et (6.61) ou $\sin(\nu_f) > -\sqrt{1-e^2}$ et (6.61)	$\varepsilon_0 = -\varepsilon_f$ et (6.64) ou $\varepsilon_0 = \varepsilon_f$ et (6.67)	n.d.

TABLE 6.1 – Résumé des conditions/solutions en fonction de la durée du rendez-vous.

Solutions	ΔV_i	ν_i
A 2 imp. int.	$\Delta V(\nu_+) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}(-e z_1 - \sqrt{1-e^2} z_2)$ $\Delta V(\nu_-) = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}(+e z_1 - \sqrt{1-e^2} z_2)$	$\nu_+ = \min\{\nu \geq \nu_0 / \frac{\cos(\nu)}{\sin(\nu)} = \frac{-e}{\sqrt{1-e^2}}\}$ $\nu_- = \min\{\nu \geq \nu_0 / \frac{\cos(\nu)}{\sin(\nu)} = \frac{-e}{-\sqrt{1-e^2}}\}$
B_1 1 imp. int.	$\Delta V(\nu_{i_0}) = -\varepsilon_0 \ z\ + e z_2$	$\cos(\nu_{i_0}) = -\varepsilon_0 \frac{z_2}{\ z\ }, \sin(\nu_{i_0}) = \varepsilon_0 \frac{z_1}{\ z\ }$
B_2 1 imp. int.	$\Delta V(\nu_{i_2}) = -\varepsilon_2 \ z\ + e z_2$	$\cos(\nu_{i_2}) = -\varepsilon_2 \frac{z_2}{\ z\ }, \sin(\nu_{i_2}) = \varepsilon_2 \frac{z_1}{\ z\ }$
C_1 1 imp. init. 1 imp. int.	$\Delta V(\nu_0) = (1 + e \cos(\nu_0)) \frac{\cos(\nu_{i_0}^+) z_1 + \sin(\nu_{i_0}^+) z_2}{\sin(\nu_{i_0}^+ - \nu_0)}$ $\Delta V(\nu_{i_0}^+) = -(1 + e \cos(\nu_{i_0}^+)) \frac{\cos(\nu_0) z_1 + \sin(\nu_0) z_2}{\sin(\nu_{i_0}^+ - \nu_0)}$	ν_0 $\nu_{i_0}^+ = \nu_0 + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0))$
C_2 1 imp. int. 1 imp. fn.	$\Delta V(\nu_f) = (1 + e \cos(\nu_f)) \frac{\cos(\nu_{i_f}^-) z_1 + \sin(\nu_{i_f}^-) z_2}{\sin(\nu_{i_f}^- - \nu_f)}$ $\Delta V(\nu_{i_f}^-) = -(1 + e \cos(\nu_{i_f}^-)) \frac{\cos(\nu_f) z_1 + \sin(\nu_f) z_2}{\sin(\nu_{i_f}^- - \nu_f)}$	$\nu_{i_f}^- = \nu_f - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_f))$ ν_f
C_3 1 imp. init. 1 imp. int.	$\Delta V(\nu_0) = (1 + e \cos(\nu_0)) \frac{\cos(\hat{\nu}_{i_0}^+) z_1 + \sin(\hat{\nu}_{i_0}^+) z_2}{\sin(\hat{\nu}_{i_0}^+ - \nu_0)}$ $\Delta V(\hat{\nu}_{i_0}^+) = -(1 + e \cos(\hat{\nu}_{i_0}^+)) \frac{\cos(\nu_0) z_1 + \sin(\nu_0) z_2}{\sin(\hat{\nu}_{i_0}^+ - \nu_0)}$	ν_0 $\hat{\nu}_{i_0}^+ = \nu_0 + 2\pi - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0))$
C_4 1 imp. int. 1 imp. fn.	$\Delta V(\nu_f) = (1 + e \cos(\nu_f)) \frac{\cos(\hat{\nu}_{i_f}^-) z_1 + \sin(\hat{\nu}_{i_f}^-) z_2}{\sin(\hat{\nu}_{i_f}^- - \nu_f)}$ $\Delta V(\hat{\nu}_{i_f}^-) = -(1 + e \cos(\hat{\nu}_{i_f}^-)) \frac{\cos(\nu_f) z_1 + \sin(\nu_f) z_2}{\sin(\hat{\nu}_{i_f}^- - \nu_f)}$	$\hat{\nu}_{i_f}^- = \nu_f - 2\pi + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_f))$ ν_f
D 1 imp. init. 1 imp. fn.	$\Delta V(\nu_0) = (1 + e \cos(\nu_0)) \frac{\cos(\nu_0) z_1 + \sin(\nu_0) z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}$ $\Delta V(\nu_f) = -(1 + e \cos(\nu_f)) \frac{\cos(\nu_0) z_1 + \sin(\nu_0) z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}$	ν_0 et ν_f

TABLE 6.2 – Résumé des solutions.

6.4 Preuves de l'optimalité dans le cas où $\nu_f - \nu_0 \geq 2\pi$

Dans cette section, on prouve les résultats énoncés précédemment, lorsque $\nu_f - \nu_0 \geq 2\pi$. Les idées sont très similaires au cas circulaire ($e = 0$) pour $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$. Lorsque $0 < e < 1$ et $\nu_f - \nu_0 < 2\pi$, les démonstrations sont bien plus complexes et ont été reportées dans l'Annexe D, dans un souci de concision et de clarté. La difficulté vient du fait que, lors d'un rendez-vous court, selon la dynamique du vecteur efficacité, il existe de nombreuses configurations possibles pour une solution optimale : impulsions internes uniquement, impulsions aux deux bouts seulement, ou bien un mélange des deux. En conséquence, l'analyse des CNS de Lawden est plus délicate.

La définition de la dynamique relative hors-plan a permis de montrer que le vecteur efficacité est une fonction périodique, de période 2π , admettant deux extrema de signes opposés par période. Dans tous les cas, on a donc au plus deux impulsions par période.

6.4.1 Une impulsion par période

Supposons que la solution optimale du problème hors-plan est une solution à une impulsion par période. On note $\nu_{i_0} \geq \nu_0$ la première date à laquelle le vecteur efficacité atteint un de ses extrema (de norme 1) :

$$\nu_{i_0} = \min\{\nu \in [\nu_0, \nu_f] : |p_\lambda(\nu)| = 1 \text{ et } \frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu) = 0\}.$$

Notons : $N = \max\{i \in \mathbb{N} : \nu_{i_0} + 2i\pi \leq \nu_f\} + 1$. La solution optimale à une impulsion par période admet donc au plus N impulsions et les dates possibles de ces impulsions sont :

$$\nu_i = \nu_{i_0} + 2(i-1)\pi, i = 1, \dots, N, \quad (6.71)$$

Remarque 16. Sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_0 + 2\pi[$, le vecteur efficacité admet nécessairement un second extremum à la date ν_e . La solution optimale étant supposée à une impulsion par période, nécessairement : $|p_\lambda(\nu_e)| < 1 = |p_\lambda(\nu_{i_0})|$, d'où d'après (6.10) :

$$\cos(\nu_{i_0}) < -e \quad (6.72)$$

Pour déterminer complètement la solution à une impulsion par période, il faut déterminer ν_{i_0} ainsi que les directions et amplitudes des impulsions.

Les directions des impulsions sont données par la CNS 1. Sachant que $\nu_i = \nu_{i_0} \pmod{2\pi}$, de façon équivalente, cette condition devient : pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\Delta V(\nu_i) = 0 \text{ ou } \text{sgn}(\Delta V(\nu_i)) = \text{sgn}(\Delta V(\nu_{i_0})) = -p_\lambda(\nu_{i_0}) \quad (6.73)$$

Les impulsions ont donc toutes même direction. Notons $\varepsilon = \text{sgn}(\Delta V(\nu_{i_0}))$. La CNS 1 s'écrit alors :

$$\text{sgn}(\Delta V(\nu_i)) = \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \dots, N, \quad (6.74)$$

et les impulsions sont donc de la forme :

$$\Delta V(\nu_i) = \varepsilon |\Delta V(\nu_i)| \text{ pour tout } i = 1, \dots, N. \quad (6.75)$$

En chaque impulsion, le fait qu'il y ait une tangente horizontale pour le vecteur efficacité s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sin(\nu_{i_0}) & -\cos(\nu_{i_0}) \\ e + \cos(\nu_{i_0}) & \sin(\nu_{i_0}) \end{bmatrix} \lambda = \begin{bmatrix} \varepsilon \rho(\nu_{i_0}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ce système étant toujours inversible, on obtient :

$$\lambda_1 = \varepsilon \sin(\nu_{i_0}), \quad \lambda_2 = -\varepsilon (e + \cos(\nu_{i_0})), \quad (6.76)$$

et on en déduit l'expression du vecteur efficacité :

$$p_\lambda(\nu) = -\varepsilon \frac{\cos(\nu - \nu_{i_0}) + e \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)}.$$

Considérons maintenant la CNS 2. En utilisant les relations (6.71) et (6.75), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{R(\nu_i)}{\rho(\nu_i)} \Delta V(\nu_i) = z &\iff \varepsilon \frac{R(\nu_{i_0})}{\rho(\nu_{i_0})} \sum_{i=1}^N |\Delta V(\nu_i)| = z \\ &\iff R(\nu_{i_0}) \sum_{i=1}^N |\Delta V(\nu_i)| = \varepsilon u(1 + e \cos(\nu_{i_0})) \end{aligned}$$

En multipliant à gauche par la matrice inversible $\begin{bmatrix} -\sin(\nu_{i_0}) & \cos(\nu_{i_0}) \\ \cos(\nu_{i_0}) & \sin(\nu_{i_0}) \end{bmatrix}$, la CNS 2 s'écrit de façon équivalente :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N |\Delta V(\nu_i)| = \varepsilon (-\sin(\nu_{i_0})z_1 + \cos(\nu_{i_0})z_2) (1 + e \cos(\nu_{i_0})) \\ \cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2 = 0 \end{cases} \quad (6.77)$$

La seconde équation du système (6.77) nous donne ainsi une caractérisation de ν_{i_0} en fonction de z comme unique solution du problème :

$$\begin{cases} \cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2 = 0, \\ \cos(\nu_{i_0}) < 0, \\ \nu_0 \leq \nu_{i_0} < \nu_0 + 2\pi. \end{cases} \quad (6.78)$$

Il restera à vérifier que la solution obtenue vérifie bien : $\cos(\nu_{i_0}) < -e$. Si la solution de (6.78) obtenue ne vérifie pas $\cos(\nu_{i_0}) < -e$, on en conclut qu'une solution avec une impulsion par période n'est pas possible.

Revenons au système (6.77). Sachant que : $1 + e \cos(\nu_{i_0}) \geq 0$, le système (6.77) conduit aux relations suivantes :

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(-\sin(\nu_{i_0})z_1 + \cos(\nu_{i_0})z_2) \quad \text{et} \quad \cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2 = 0.$$

Étant donné que $\cos(\nu_{i_0}) < -e < 0$, il s'ensuit :

$$z_1 = -\frac{\sin(\nu_{i_0})}{\cos(\nu_{i_0})} z_2, \quad \text{et} \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}\left(\frac{z_2}{\cos(\nu_{i_0})}\right) = -\operatorname{sgn}(z_2).$$

D'où l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \|z\| &= \sqrt{(z_1)^2 + (z_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sin(\nu_{i_0})}{\cos(\nu_{i_0})} z_2\right)^2 + (z_2)^2}, \\ &= \left| \frac{z_2}{\cos(\nu_{i_0})} \right| = \varepsilon \frac{z_2}{\cos(\nu_{i_0})}. \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$z_1 = -\varepsilon \|z\| \sin(\nu_{i_0}), \quad z_2 = \varepsilon \|z\| \cos(\nu_{i_0}), \quad (6.79)$$

puis la consommation totale :

$$\sum_{i=1}^N |\Delta V(\nu_i)| = \|z\| (1 + e \cos(\nu_{i_0})) = \|z\| - e|z_2| > 0. \quad (6.80)$$

On retrouve cette expression en injectant les valeurs de λ et z données par les relations (6.76) et (6.79) dans l'expression de la consommation.

Enfin, en reprenant les relations (6.79), on remarque que la condition $\cos(\nu_{i_0}) < -e$ peut être reformulée en fonction de z de la façon suivante :

$$e\|z\| < |z_2|. \quad (6.81)$$

6.4.2 Deux impulsions par période

Examinons maintenant le cas d'une solution optimale du problème hors-plan à deux impulsions par période. On note ν_+ et ν_- les dates des extrema du vecteur efficacité sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_0 + 2\pi[$ vérifiant :

$$|p_\lambda(\nu_\pm)| = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_\pm) = 0,$$

soit, d'après (6.10) :

$$\cos(\nu_\pm) = -e \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin(\nu_+) &= \sqrt{1 - e^2}, \\ \sin(\nu_-) &= -\sqrt{1 - e^2}. \end{cases} \quad (6.82)$$

Notons :

$$\begin{aligned} N_+ &= \max\{n \in \mathbb{N} : \nu_+ + 2n\pi \leq \nu_f\} + 1, \\ N_- &= \max\{n \in \mathbb{N} : \nu_- + 2n\pi \leq \nu_f\} + 1, \\ N &= N_+ + N_-. \end{aligned}$$

Toute solution optimale à deux impulsions par période admet donc au plus N impulsions aux dates :

$$\begin{aligned} \nu_i^+ &= \nu_+ + 2(i-1)\pi, & \text{pour } i = 1, \dots, N_+, \\ \nu_i^- &= \nu_- + 2(i-1)\pi, & \text{pour } i = 1, \dots, N_-. \end{aligned}$$

Dans la suite, on notera : $\{\nu_i : i = 1, \dots, N\} = \{\nu_i^+ : i = 1, \dots, N_+\} \cup \{\nu_i^- : i = 1, \dots, N_-\}$ l'ensemble des dates des impulsions possibles.

Avant de reprendre une à une les conditions d'optimalité, remarquons que la tangente horizontale du vecteur efficacité fournit un résultat préliminaire qui va simplifier la suite des calculs. En effet, cette condition s'écrit ici :

$$\begin{aligned} (e + \cos(\nu_\pm)) \lambda_1 + \sin(\nu_\pm) \lambda_2 = 0 &\iff \sqrt{1 - e^2} \lambda_2 = 0 \\ &\iff \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Les directions de poussée des impulsions sont caractérisées par la CNS 1. Connaissant la forme des dates d'impulsions, les directions $\text{sgn}(\Delta V(\nu_i))$ aux dates d'impulsions vérifient :

$$\Delta V_i = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sgn}(\Delta V(\nu_i)) = \begin{cases} \text{sgn}(\Delta V(\nu_+)) & \text{si } \nu_i \in \{\nu_i^+ : i = 1, \dots, N_+\}, \\ \text{sgn}(\Delta V(\nu_-)) & \text{si } \nu_i \in \{\nu_i^- : i = 1, \dots, N_-\}. \end{cases}$$

Posons : $\varepsilon = \text{sgn}(\Delta V(\nu_-))$ la direction des impulsions appliquées aux dates ν_i^- , $i \in \{1, \dots, N_-\}$. Du fait que $\lambda_2 = 0$ et d'après la définition (6.82) des dates ν_+ et ν_- , la CNS 1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\Delta V(\nu_-)) &= -\frac{R(\nu_-)^T \lambda}{\rho(\nu_-)} = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - e^2}}, \\ \text{sgn}(\Delta V(\nu_+)) &= -\frac{R(\nu_+)^T \lambda}{\rho(\nu_+)} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - e^2}}. \end{aligned}$$

D'où : $\text{sgn}(\Delta V(\nu_+)) = -\text{sgn}(\Delta V(\nu_-))$ et $\lambda_1 = -\text{sgn}(\Delta V(\nu_-))\sqrt{1 - e^2}$. D'où :

$$\text{sgn}(\Delta V(\nu_-)) = -\text{sgn}(\Delta V(\nu_+)) = \varepsilon, \quad (6.83)$$

$$\lambda_1 = -\varepsilon\sqrt{1 - e^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0. \quad (6.84)$$

On en déduit la forme du vecteur efficacité :

$$p_\lambda(\nu) = \varepsilon\sqrt{1 - e^2} \frac{\sin(\nu)}{1 + e \cos(\nu)},$$

ainsi que la direction des impulsions les unes par rapport aux autres :

$$\Delta V(\nu_i) = \begin{cases} -\varepsilon\Delta V_i^+ & \text{si } \nu_i \in \{\nu_i^+ : i = 1, \dots, N_+\}, \\ \varepsilon\Delta V_i^- & \text{si } \nu_i \in \{\nu_i^- : i = 1, \dots, N_-\}, \end{cases} \quad (6.85)$$

avec $\Delta V_i^\pm \geq 0$. Examinons maintenant la CNS 2, qui s'écrit ici de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^{N_+} \frac{R(\nu_i^+)}{\rho(\nu_i^+)} \Delta V(\nu_i^+) + \sum_{i=1}^{N_-} \frac{R(\nu_i^-)}{\rho(\nu_i^-)} \Delta V(\nu_i^-) = z,$$

soit :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-e^2} \\ e \end{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_+} \Delta V_i^+ + \begin{bmatrix} \sqrt{1-e^2} \\ -e \end{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_-} \Delta V_i^- = \varepsilon z (1 - e^2)$$

Ceci peut se réécrire de façon équivalente sous la forme d'un système linéaire en la consommation dont la matrice est inversible, et dont l'unique solution est :

$$\sum_{i=1}^{N_+} \Delta V_i^+ = \varepsilon \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e} \left(ez_1 + \sqrt{1-e^2} z_2 \right), \quad (6.86)$$

$$\sum_{i=1}^{N_-} \Delta V_i^- = \varepsilon \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e} \left(ez_1 - \sqrt{1-e^2} z_2 \right). \quad (6.87)$$

Chacune de ces deux sommes est positive ou nulle, soit :

$$\varepsilon(ez_1 + \sqrt{1-e^2} z_2) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(ez_1 - \sqrt{1-e^2} z_2) \geq 0.$$

On en déduit d'une part :

$$\varepsilon = \text{sgn}(z_1),$$

et d'autre part, que les quantités $(ez_1 + \sqrt{1-e^2} z_2)$ et $(ez_1 - \sqrt{1-e^2} z_2)$ sont de même signe, soit :

$$(ez_1 + \sqrt{1-e^2} z_2)(ez_1 - \sqrt{1-e^2} z_2) \geq 0,$$

ou de manière équivalente :

$$e\|z\| \geq |z_2|. \quad (6.88)$$

Remarquons que le cas $e\|z\| = |z_2|$ correspond au cas où :

$$\sum_{i=1}^{N_+} \Delta V_i^+ = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{N_-} \Delta V_i^- = 0.$$

La consommation totale calculée à partir de (6.86) et (6.87) a pour expression :

$$\sum_{i=1}^{N_+} \Delta V_i^+ + \sum_{i=1}^{N_-} \Delta V_i^- = |z_1| \sqrt{1-e^2}. \quad (6.89)$$

6.4.3 Résumé

En résumé, dans le cas où $\nu_f - \nu_0 \geq 2\pi$, il existe deux types de solutions optimales du problème hors-plan selon le signe de $e\|z\| - |z_2|$:

1. Si $e\|z\| < |z_2|$ alors la solution optimale est une solution à une impulsion par période.

Dans ce cas, on définit :

- ν_{i_0} (unique) solution du système :

$$\begin{cases} \cos(\nu_{i_0}) = -\frac{|z_2|}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_{i_0}) = \text{sgn}(z_2) \frac{z_1}{\|z\|} \\ \nu_0 \leq \nu_{i_0} < \nu_0 + 2\pi \end{cases}$$

- $N = \max\{i \in \mathbb{N} : \nu_{i_0} + 2i\pi \leq \nu_f\} + 1$ le nombre maximum d'impulsions possibles.

– $\varepsilon = -\text{sgn}(z_2)$ la direction des impulsions. Remarquons que si $z_2 = 0$, alors soit $z_1 = 0$ et le problème est trivialement résolu, soit $\cos(\nu_{i_0}) = 0$, ce qui impliquerait qu'il n'existe pas de solution optimale à une impulsion par période.

Les impulsions possibles sont espacées de 2π et sont de même direction ε . Les dates des impulsions sont : $\nu_k = \nu_{i_0} + 2(k-1)\pi$, $k = 1, \dots, N$. Les impulsions peuvent être réparties arbitrairement selon les dates ν_1, \dots, ν_N à condition de vérifier :

$$\sum_{i=1}^N |\Delta V_i| = \|z\| - e|z_2|.$$

De plus, le vecteur efficacité est alors défini par :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -\frac{z_1}{\|z\|}, \\ \lambda_2 &= \text{sgn}(z_2) \left(e - \frac{|z_2|}{\|z\|} \right). \end{cases}$$

2. Si $e\|z\| \geq |z_2|$ alors la solution optimale est une solution à deux impulsions possibles par période.

Dans ce cas, on définit :

– ν_+ et ν_- tels que :

$$\cos(\nu_{\pm}) = -e \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin(\nu_+) &= \sqrt{1-e^2}, \\ \sin(\nu_-) &= -\sqrt{1-e^2}. \end{cases}$$

– $\varepsilon = \text{sgn}(z_1)$. Remarquons qu'ici nécessairement $z_1 \neq 0$. En effet, si $z_1 = 0$ alors la condition $e\|z\| > |z_2|$ devient : $e > 1$ ce qui est impossible.

– $N_- = \max\{n \in \mathbb{N} : \nu_- + 2n\pi \leq \nu_f\} + 1$ le nombre maximum d'impulsions dans la direction ε .

– $N_+ = \max\{n \in \mathbb{N} : \nu_+ + 2n\pi \leq \nu_f\} + 1$ le nombre maximum d'impulsions dans la direction $-\varepsilon$.

Toute solution optimale à deux impulsions par période admet donc au plus N_- impulsions dans la direction ε et au plus N_+ impulsions dans la direction opposée. Les dates possibles de ces impulsions sont :

$$\begin{aligned} \nu_i^+ &= \nu_+ + 2(i-1)\pi, & \text{pour } i = 1, \dots, N_+, \\ \nu_i^- &= \nu_- + 2(i-1)\pi, & \text{pour } i = 1, \dots, N_-. \end{aligned}$$

Les impulsions peuvent être réparties arbitrairement selon les dates ν_i^+ et ν_i^- à condition de vérifier :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_+} \Delta V_i^+ &= \varepsilon \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e} \left(ez_1 + \sqrt{1-e^2} z_2 \right), \\ \sum_{i=1}^{N_-} \Delta V_i^- &= \varepsilon \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e} \left(ez_1 - \sqrt{1-e^2} z_2 \right). \end{aligned}$$

Remarquons que dans le cas : $e\|z\| = |z_2|$, alors

$$\sum_{i=1}^{N_+} \Delta V_i^+ = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{N_-} \Delta V_i^- = 0.$$

Cela signifie que les directions de poussée sont toutes choisies dans le même sens, réparties respectivement selon les dates ν_i^+ et ν_i^- . On retrouve ainsi la solution à une impulsion par période du cas précédent. De plus, le vecteur efficacité est alors défini par :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -\text{sgn}(z_1)\sqrt{1-e^2}, \\ \lambda_2 &= 0. \end{cases}$$

6.5 Exemples numériques

6.5.1 Exemple 1

Le premier exemple est fondé sur la mission PROBA-3 dont les objectifs principaux sont de démontrer les capacités des technologies nécessaires au vol en formation de deux véhicules en orbite elliptique [95]. Les éléments orbitaux ainsi que les conditions du rendez-vous hors-plan sont indiqués par la Table 6.3.

a [km]	e	ν_0 [rad]	$x_{0_1}^T$ [m m/s]	$x_{0_2}^T$ [m m/s]	ν_{f_1} [rad]	ν_{f_2} [rad]	x_f^T [m m/s]
7039.887	0.80621	2.042	[-5000 0.5]	[-5000 0]	3π	4π	[20 0.2]

TABLE 6.3 – Paramètres du Rendez-vous PROBA-3.

Cas 1 : $x_0 = x_{0_1}$ and $\nu_f = \nu_{f_1}$

Le vecteur efficacité optimal est représenté sur la Figure 6.1. Une solution optimale pour le rendez-vous impulsionnel hors-plan est présentée par la Table 6.4.

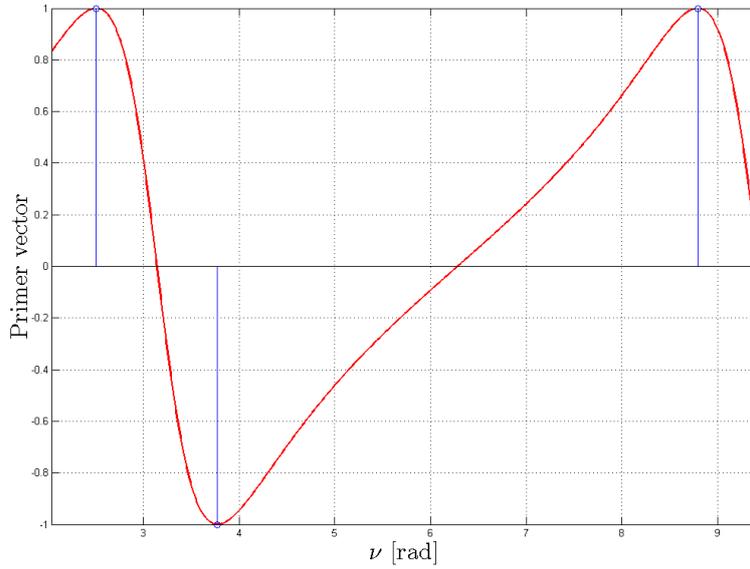


FIGURE 6.1 – Tracé du vecteur efficacité optimal pour le cas 1 de PROBA-3.

ν [rad]	ΔV [m/s]
2.5085	-0.34875
3.7747	0.1639
8.7917	-0.34875
	0.8614

TABLE 6.4 – Solution optimale pour le cas 1 de l'exemple PROBA-3.

La Figure 6.2 décrit la trajectoire hors-plan associée dans le plan de phase.

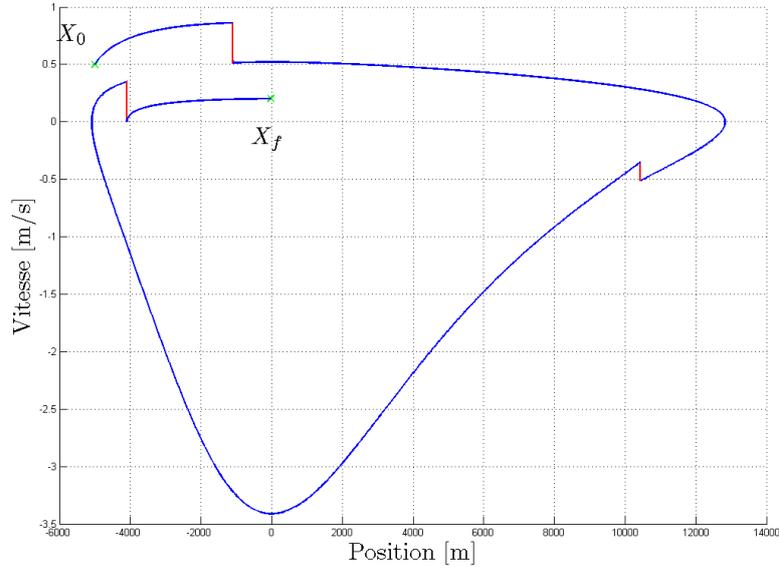


FIGURE 6.2 – Plan de phase pour la solution optimale du cas 1 de l'exemple PROBA-3.

Il est à noter que, puisque le vecteur efficacité atteint trois tangentes horizontales, il est toujours possible de choisir une solution optimale répartie sur le nombre maximal de manœuvres impulsives. Si l'on veut une solution optimale en un nombre minimal d'impulsions non nulles, il n'y a que deux possibilités, données dans le Tableau 6.5

ν [rad]	Sol. 1 [m/s]	Sol. 2 [m/s]
2.5085	-0.6975	0
3.7747	0.1639	0.1639
8.7917	0	-0.6975
	0.8614	0.8614

TABLE 6.5 – Solution optimale pour le cas 1 de l'exemple PROBA-3.

Cas 2 : $x_0 = x_{0_2}$ et $\nu_f = \nu_{f_2}$

Lorsque $x_0 = x_{0_2}$ and $\nu_f = \nu_{f_2}$, la durée du rendez-vous est toujours telle que $d_\theta > 2\pi$ mais cette fois $e|z_f| < |z_{f_2}|$. Cela correspond au cas B_2 dans la Table 6.1. Le vecteur efficacité optimal est représenté sur la Figure 6.3. Comme il atteint deux fois le même extremum, il existe une infinité de solutions optimales associées. On donne dans la Table 6.6 la solution en une unique impulsion réalisée le plus tôt possible. Le plan de phase associé est donné par la Figure 6.4.

ν [rad]	Sol. 1 [m/s]
2.777	-0.5322

TABLE 6.6 – Solution optimale en un nombre minimal d'impulsion pour le cas 2 de PROBA-3.

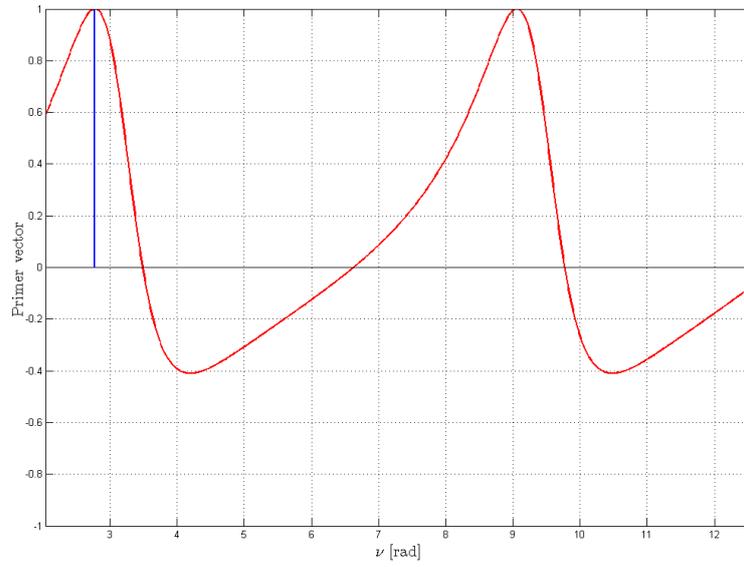


FIGURE 6.3 – Vecteur efficacité optimal pour le cas 2 de l'exemple PROBA-3.

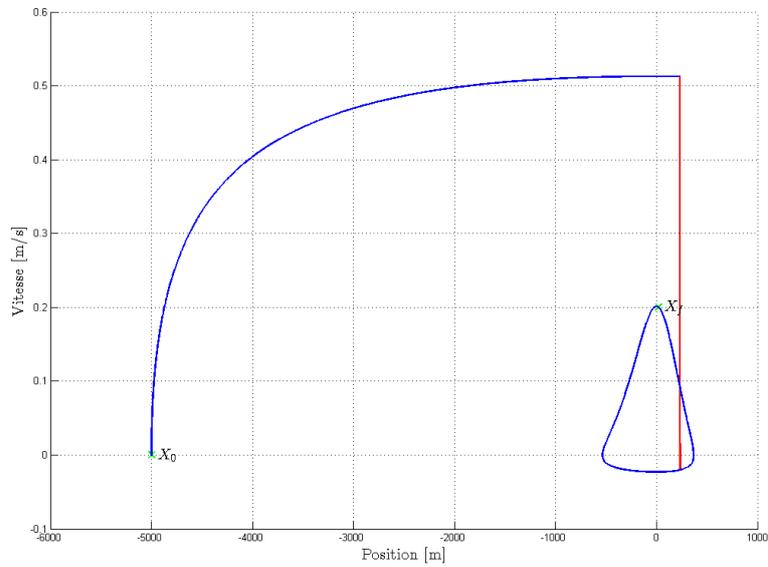


FIGURE 6.4 – Plan de phase pour la solution de la Table 6.6.

6.5.2 Exemple 2

On considère maintenant l'exemple numérique emprunté à la référence [130], pour lequel le véhicule cible est sur une orbite de transfert géostationnaire (GTO). Il s'agit d'une orbite terrestre fortement elliptique dont l'apogée est de 42164 km. Les caractéristiques du rendez-vous hors-plan sont résumés par la Table 6.7.

a [km]	e	ν_0 [rad]	x_0^T [m m/s]	ν_{f_1} [rad]	ν_{f_2} [rad]	x_f^T [m m/s]
24616	0.73074	0.1π	[10000 -3]	5.2	3	[0 0]

TABLE 6.7 – Paramètres du rendez-vous de l'exemple extrait de [130].

Deux durées différentes de rendez-vous sont étudiées. Le premier cas est directement extrait de la référence [130] avec $\pi < d_{\nu_1} < 2\pi$ alors que la durée du second rendez-vous a été raccourcie, $d_{\nu_2} < \pi$, avec des conditions initiales et finales inchangées.

Cas 1 : $\nu_f = 5.2$ rad.

Dans ce cas, la solution optimale est une trajectoire à 2 impulsions avec des périodes initiale et finale de coasting. Ici, le coasting final peut être considéré comme un coasting dégénéré puisque le chasseur a déjà atteint sa destination finale après la seconde manœuvre.

ν [rad]	ΔV [m/s]
2.3902	3.1060
3.8930	-3.1668
	6.2728

TABLE 6.8 – Solution optimale pour l'exemple 2 et ν_{f_1} .

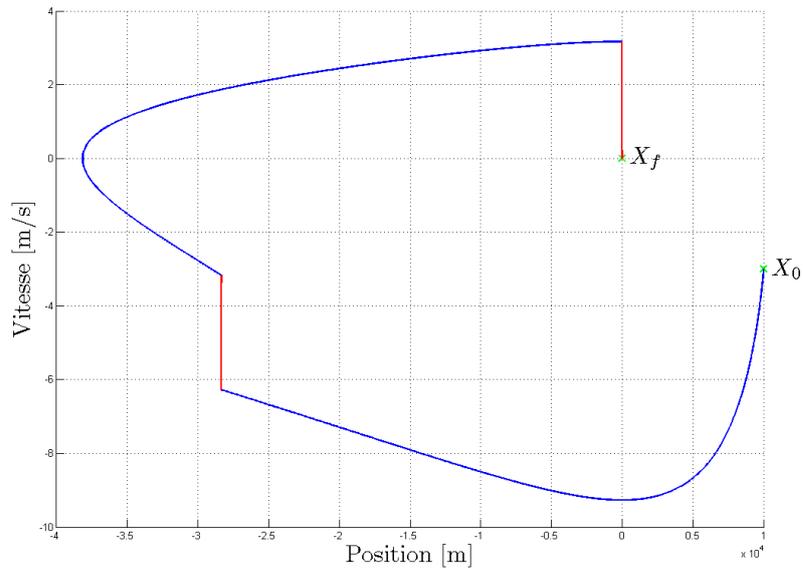


FIGURE 6.5 – Trajectoire optimale dans le plan de phase pour l'exemple 2 et ν_{f_1} .

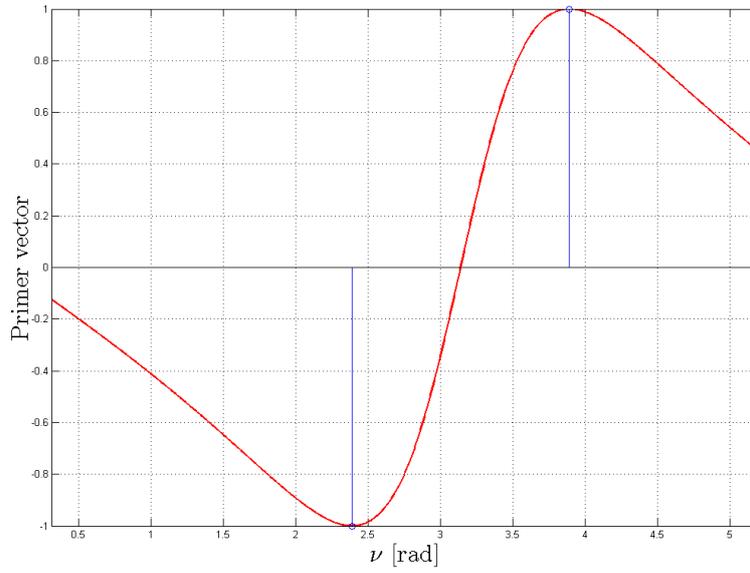


FIGURE 6.6 – Tracé du vecteur efficacité optimal pour l'exemple 2 et ν_{f_1} .

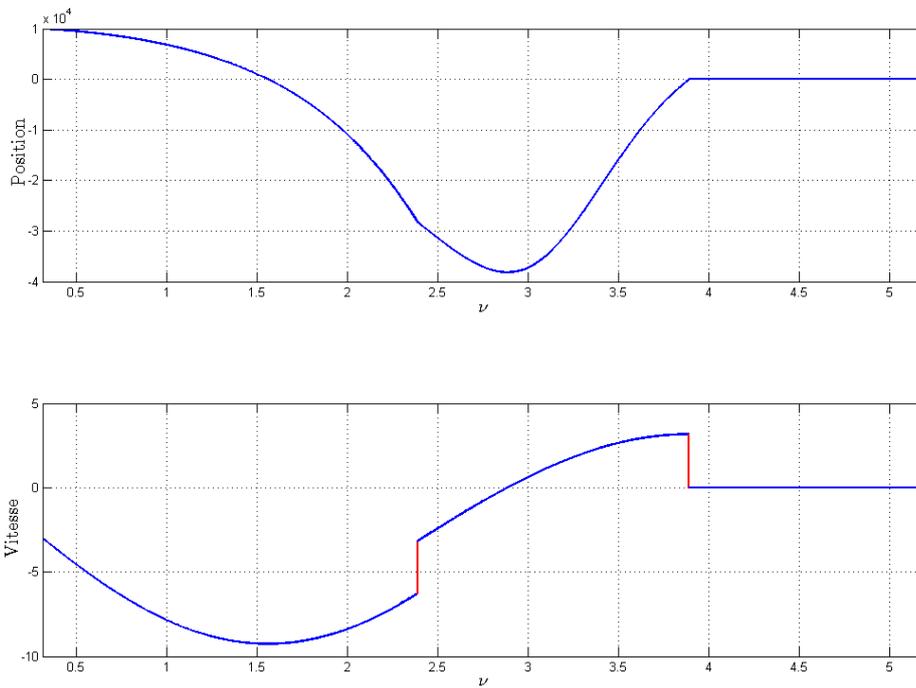


FIGURE 6.7 – Trajectoire en position et vitesse relatives pour l'exemple 2 et ν_{f_1} .

Cas 2 : $\nu_f = 3$ rad.

La nature particulière de la solution optimale précédente est illustrée en considérant le cas suivant pour lequel la durée du rendez-vous est raccourcie. Cette réduction résulte en une solution optimale à 2 impulsions avec une période de coasting initiale et une impulsion finale, pour une

augmentation de la consommation de presque 40 %.

ν [rad]	ΔV [m/s]
1.8924	7.8311
3	-0.9261
	8.7572

TABLE 6.9 – Solution optimale pour l'exemple 2 et ν_{f_2} .

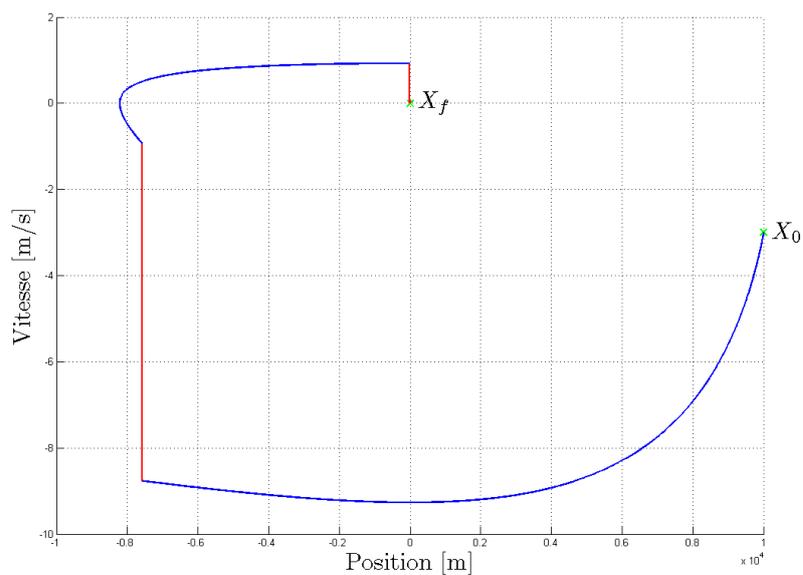


FIGURE 6.8 – Trajectoire optimale dans le plan de phase pour l'exemple 2 et ν_{f_2} .

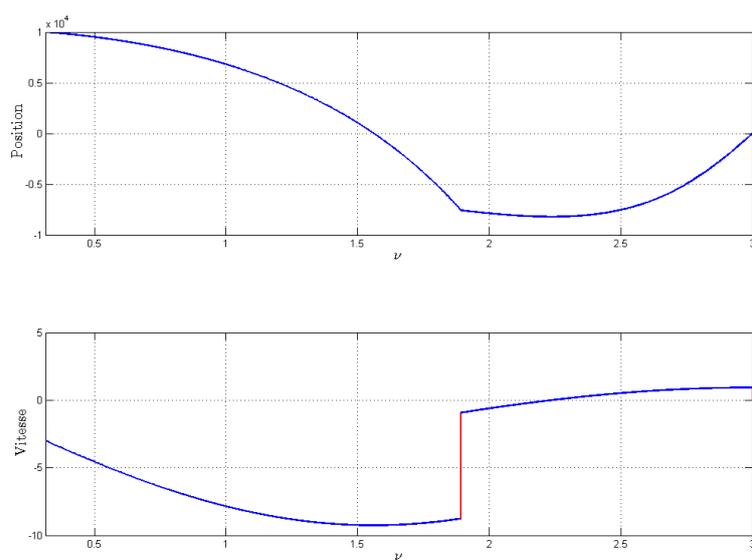


FIGURE 6.10 – Trajectoires en position et vitesse relatives pour l'exemple 2 et ν_{f_2} .

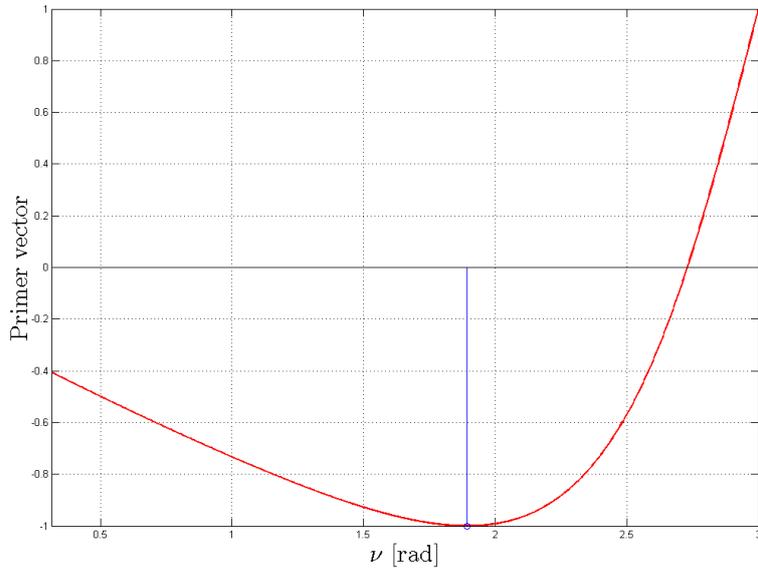


FIGURE 6.9 – Tracé du vecteur efficacité optimal pour l'exemple 2 et ν_{f_2} .

6.6 Conclusion

Ce chapitre expose la résolution inédite du problème de rendez-vous hors-plan en temps fixé au voisinage d'une orbite strictement elliptique. Les solutions, minimales en consommation de carburant, sont obtenues à l'aide de la méthode indirecte présentée dans le Chapitre 5. Plus précisément, on résout de manière analytique les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de Lawden. Cela est rendu possible par le fait que le vecteur efficacité est de dimension 1 et que l'on arrive à analyser sa dynamique. En résumé, les solutions optimales associées sont classables en trois grands types :

- impulsion(s) interne(s) uniquement ;
- une impulsion interne et une au bout (initial et/ou final) ;
- impulsions aux deux bouts.

Dans la première configuration, de manière similaire à ce que l'on peut observer dans le cas circulaire, il existe une infinité de solutions optimales lorsque la durée du rendez-vous est relativement longue. En effet, le vecteur efficacité est 2π -périodique et il est donc possible de subdiviser les impulsions. Ce phénomène est illustré sur certains des exemples numériques proposés, dont certains sont inspirés de missions spatiales réelles.

Conclusion

Dans cette partie, la solution optimale du problème de rendez-vous linéarisé hors-plan en temps fixé et consommation minimale a été présentée. La résolution est faite analytiquement et de manière indirecte grâce aux conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, exprimées à l'aide du vecteur efficacité. Historiquement, celui-ci a été introduit par Lawden [75] dans un contexte de dynamique orbitale non linéaire. Le cas linéarisé a été formalisé mathématiquement par Neustadt [83], puis appliqué au cas d'une dynamique képlérienne par Prussing [97] et Carter [26]. En pratique, dans cette étude, on se focalise sur la partie du mouvement située hors du plan de la trajectoire de référence. A la fin du Chapitre 5, dans le but d'illustrer la méthode de résolution indirecte, le cas classique d'une orbite circulaire est traité. Celui d'une orbite elliptique d'excentricité non nulle, bien plus complexe et jusqu'alors non résolu, est l'unique objet du Chapitre 6. Dans les deux cas de figure, les résultats sont illustrés sur des exemples, dont certains sont inspirés de missions réelles.

Pour le problème de rendez-vous coplanaire, il apparaît encore plus difficile de résoudre analytiquement les CNS d'optimalité. Il est d'ailleurs notable que pour cette partie de la dynamique, contrairement au hors-plan, l'expression des conditions d'optimalité dépendent de la norme considérée [83], car la dimension du vecteur vitesse n'est pas égale à 1. Dans le cas de la norme euclidienne, certains auteurs [100, 25] ont néanmoins donné des résultats partiels dans le cas circulaire, pour lequel le mouvement est cycloïdale. Parallèlement, il est toujours possible de tenter une résolution numérique itérative à l'aide d'algorithmes dédiés [26, 12]. Une approche alternative, actuellement étudiée au LAAS, consiste à résoudre numériquement le Problème 14 sans raisonner du tout sur le problème de rendez-vous. Ce n'est que dans un second temps, une fois les multiplicateurs de Lagrange optimaux calculés, que l'on déduit les impulsions optimales grâce aux conditions de Lawden.

Conclusion générale

Cette thèse traite d'opérations de proximité en orbite, et plus précisément des manœuvres, optimales en consommation, d'évitement de collision et de rendez-vous. Les deux problématiques concernent une paire d'objets spatiaux : un satellite opérationnel, actif, et un corps passif. Le sujet de la collision en orbite, en particulier, est traité à deux niveaux : l'évaluation selon un critère probabiliste du risque de collision associé à une rencontre et sa réduction par un plan de manœuvres propulsives.

Bilan

Le sujet de la Partie I est l'évaluation du risque de collision. Le premier chapitre présente les formules classiques des deux quantités que sont la probabilité de collision en rapprochement rapide [2] et la probabilité de collision instantanée [28]. Il s'agit d'intégrales d'une fonction gaussienne sur une boule euclidienne, en dimension respectivement 2 et 3. Les méthodes de calcul de ces grandeurs que l'on trouve dans la littérature du domaine spatial sont également présentées. Toutes se basent sur des schémas numériques d'intégration, à l'exception de celle de Chan [27, 28] qui se fonde sur une formule analytique, néanmoins issue d'une approximation. Le deuxième chapitre fournit une nouvelle méthode de calcul basée quant à elle sur une expression analytique et exacte de l'intégrale, sous la forme du produit d'un terme exponentiel avec une série convergente à termes positifs. Elle est obtenue à l'aide de la transformée de Laplace et de la technique d'évaluation des fonctions de la variable complexe dite de préconditionnement [43]. C'est d'ailleurs ce dernier point qui la distingue des autres formules analytiques de la littérature du domaine des probabilités [59]. De plus, on propose dans ce document des garanties sur la précision du calcul de la probabilité de collision, ainsi qu'un encadrement analytique de celle-ci. Ce dernier aspect constitue un outil très rapide et efficace d'estimation du risque.

La Partie II traite de l'évitement de collision à proprement parler, puisque l'objectif est de concevoir une stratégie de poussée visant à réduire le risque de collision sous un seuil de tolérance fixé par l'opérateur. Un tel plan d'action n'est nécessaire que si l'évaluation de la probabilité de collision sans manœuvre excède cette valeur critique. Dans la formulation du problème, on distingue deux modèles de conjonction, à savoir les rencontres rapides [2] et les rencontres lentes [28]. Dans chaque cas, le problème appartient au domaine de l'optimisation sous contraintes probabilistes [96, 48] et la difficulté réside dans l'évaluation et la dérivation des probabilités de collision en fonction des variables de commande. Dans le premier cas, en développant à l'ordre 0 ou 1 les vecteurs aléatoires en fonction des variables de commande, on peut estimer la contrainte probabiliste en se ramenant à la formule classique de probabilité de collision en rapprochement rapide. On propose également une autre méthode, cette fois sans aucune approximation. En effet, l'hypothèse de mouvement relatif rectiligne permet de formuler la condition de non collision à l'aide d'une unique inégalité, et cette structure simple permet de traiter le problème indirectement par l'approche dite des scénarios [22, 23]. Pour le deuxième cas, le cadre du rapprochement lent autorise une linéarisation de la dynamique orbitale au voisinage de la trajectoire de référence de l'objet primaire. L'avantage est que la linéarité du système entraîne la conservation de la nature gaussienne des incertitudes sur les positions et les vitesses au cours du temps. On sait donc évaluer efficacement la probabilité de collision instantanée, que l'on contraint sur un échantillon de dates pendant la rencontre. Deux méthodes de résolution sont proposées, toutes les deux basées sur un recouvrement polyédral du domaine de collision conduisant à des contraintes convexes. La première traite directement le problème en choisissant astucieusement des polyèdres cubiques résultant en une expression analytique et facilement différentiable des probabilités de collision. La seconde, valable pour n'importe quel polyèdre, fait appel au principe de sélection du risque [19], une relaxation supplémentaire qui permet au final d'aboutir à un problème d'optimisation mixte en variables binaires et continues.

Enfin, la Partie III est consacrée à l'optimisation en consommation de trajectoires en temps fixé à proximité d'une orbite képlérienne de référence. Bien qu'en marge de la problématique d'évitement de collision, il s'agit toutefois d'un sujet d'intérêt pour les opérations de proximité, par exemple la visite d'un débris ou le rendez-vous avec une station orbitale. Formellement, on étudie le problème de commande optimale dit de rendez-vous qui consiste à faire passer la position et la vitesse d'un chasseur actif d'un état initial vers un état final donnés, relativement à une cible passive qui peut être fictive ou réelle. Ces travaux se focalisent sur la partie du mouvement située

hors du plan orbital de référence. On commence par décrire de manière théorique la méthode indirecte de résolution du problème de rendez-vous spatial [83, 26], qui s'appuie sur les propriétés du vecteur efficacité [75, 79], avant de la mettre en pratique sur le cas classique d'une orbite circulaire i.e. d'excentricité nulle. La résolution du cas strictement elliptique, bien plus complexe et inédite dans la littérature, est traitée dans le second chapitre de cette partie. Ces résultats sont illustrés numériquement sur divers exemples incluant des cas réels de missions spatiales.

Perspectives

Concernant l'évaluation du risque de collision associé à une alerte, l'intérêt des opérateurs se porte désormais de plus en plus sur les variations de la probabilité de collision en fonction des paramètres caractérisant les incertitudes pour chaque objet, à savoir les espérances et écart-types de leurs coordonnées. En effet, ceux-ci sont parfois mal connus et il peut y avoir une sous-estimation du risque lorsque le niveau d'incertitude est trop élevé (phénomène dit de dilution [8]). Plutôt que d'effectuer une étude numérique de cette sensibilité comme c'est actuellement le cas, l'idée serait d'être plus rigoureux en essayant d'obtenir des expressions analytiques des dérivées partielles de la probabilité de collision. Dans son livre [28], Chan a calculé analytiquement les variations du premier terme de sa série, qui pour rappel n'est qu'une approximation de la véritable probabilité. On pourrait faire une étude similaire de la formule exacte proposée dans la thèse.

Pour ce qui est des algorithmes d'évitement de collision, plusieurs perspectives sont envisageables. Dans le cadre des rencontres rapides, l'approche par scénarios peut être étendue aux objets non sphériques, par exemple de forme polygonale avec une application pour les structures complexes comme les stations orbitales. L'essentiel est de pouvoir, pour une instance donnée des vecteurs aléatoires, évaluer la condition de non-collision à l'aide d'un nombre fini d'inégalités. D'autre part, les méthodes proposées pour l'évitement de collision en rapprochement lent peuvent être adaptées pour prendre en compte plus de deux objets. On peut ainsi imaginer des applications pour le vol en formation. Une autre perspective de travail consiste à travailler sans relaxation sur la géométrie de collision, ou bien avec des polyèdres autres que des cubes. Il existe par exemple un code efficace [44] pour calculer des intégrales gaussiennes sur des polyèdres quelconques, qui pourrait être utilisé dans le cadre de l'approche directe pour un ensemble de collision non cubique.

Quant au problème de rendez-vous, la perspective majeure d'amélioration réside dans l'obtention d'une forme analytique plus élégante des solutions optimales pour la partie hors-plan, par exemple à l'aide de l'anomalie excentrique. De plus, il est envisagé de s'intéresser au problème de rendez-vous hors-plan linéarisé au voisinage d'une orbite de référence non fermée, comme une parabole ou une hyperbole, pour laquelle l'excentricité est supérieure à 1 et la dynamique relative n'est pas périodique. Concernant la partie coplanaire, une nouvelle méthode numérique est à l'étude au LAAS. Elle consiste à résoudre dans un premier temps une série de relaxations du problème dans l'espace des fonctions continues, avec une garantie de convergence vers la solution des contraintes non relaxées. Le calcul de la solution optimale du rendez-vous n'intervient qu'ensuite. Pour cela, on résout les conditions nécessaires et suffisantes de Lawden avec les multiplicateurs de Lagrange obtenus précédemment de manière numérique.

Annexe A

Lois de probabilités usuelles

Sauf précision contraire, l'ensemble des éléments présents dans cette annexe a été extrait de la référence [53].

A.1 Lois normales

Loi unidimensionnelle

Définition 5. Soit U une variable aléatoire dans \mathbb{R} de moyenne μ et d'écart-type σ . On dit que U suit une loi normale (ou gaussienne) si et seulement si sa fonction de densité est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Elle est donc complètement déterminée par ses deux premiers moments et l'on note $\mathcal{N}_1(\mu, \sigma)$ sa distribution de probabilité.

Remarque 17. Variable gaussienne centrée réduite.

On appelle $\mathcal{N}_1(0, 1)$ la loi gaussienne centrée réduite, puisque sa moyenne est nulle et son écart-type unitaire. Sa fonction de répartition F est exprimable à l'aide de la fonction d'erreur de la manière suivante :

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right). \quad (\text{A.2})$$

Loi multidimensionnelle

Définition 6. Soit V un vecteur aléatoire dans \mathbb{R}^n de moyenne μ et de matrice de variance-covariance Σ . On dit que V suit une loi normale multivariée si et seulement si sa fonction de densité est :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

On note $\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ sa distribution de probabilité.

A.2 Lois du χ^2

Loi centrée

La loi du χ^2 centrée peut être définie de différentes manières [53]. On reprend ici la définition utilisée dans le cadre de la méthode des distributions approchées de Chan [28] pour le calcul de probabilités instantanées de collision.

Définition 7. Soient U_1, \dots, U_m des variables aléatoires indépendantes, suivant chacune une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}_1(0, 1)$. La variable $\sum_{i=1}^m U_i^2$ suit une loi de distribution dite du χ^2 centrée à m degrés de liberté. Elle est notée χ_m^2 . Sa densité de probabilité est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \frac{\exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où Γ est la fonction Gamma [1], définie par la formule $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Par extension, grâce à la formule (A.4), on définit la loi du chi-deux pour les valeurs non entières de m .

Loi non centrée

Cette distribution de probabilité a été obtenue par plusieurs approches différentes donnant lieu à des applications multiples ainsi qu'à des interprétations variées (voir chapitre 28 de [53]). La définition standard est la suivante :

Définition 8. Soient m variables aléatoires indépendantes U_1, \dots, U_m et autant de constantes scalaires $\delta_1, \dots, \delta_m$. La variable aléatoire $\sum_{i=1}^m (U_i + \delta_i)^2$ suit une loi de distribution dite du χ^2 non centrée à m degrés de liberté et de paramètre de non centralité $\lambda = \sum_{i=1}^m \delta_i^2$. Sa densité de probabilité est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \frac{\exp\left(-\frac{x+\lambda}{2}\right)}{2^{\frac{m}{2}}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j x^{\frac{m}{2}-1+j}}{j! 2^{2j} \Gamma\left(\frac{m}{2} + j\right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Remarque 18. Lorsque $\lambda = 0$, on retrouve une loi du χ^2 centrée.

Proposition 21. La fonction génératrice des moments se calcule comme :

$$\phi(t) = (1 - 2t)^{-\frac{m}{2}} \exp\left(\frac{\lambda t}{1 - 2t}\right). \quad (\text{A.6})$$

Les premiers moments sont donc :

$$\mu_1 = m + \lambda, \quad (\text{A.7})$$

$$\mu_2 = 2(m + 2\lambda), \quad (\text{A.8})$$

$$\mu_3 = 8(m + 3\lambda), \quad (\text{A.9})$$

$$\mu_4 = 48(m + 4\lambda) + 12(m + 2\lambda)^2. \quad (\text{A.10})$$

A.3 Loi de Rice-Rayleigh

Cette distribution a pour origine les travaux de S.O.Rice [102] en théorie de la communication et généralise la distribution de Rayleigh [87].

Définition 9. [82] Soient deux variables aléatoires indépendantes $X \sim \mathcal{N}_1(\mu_X, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}_1(\mu_Y, \sigma^2)$. La variable aléatoire $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ suit une loi de probabilité dite de Rice-Rayleigh, notée $R(\nu, \sigma)$, avec $\nu = \sqrt{\mu_X^2 + \mu_Y^2}$. Sa densité de probabilité est :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \mathcal{I}_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

où \mathcal{I}_0 est la fonction de Bessel modifiée de premier type et d'ordre 0, caractérisée par $\mathcal{I}_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x \cos(\theta)) d\theta$.

Remarque 19. Si une variable aléatoire R suit une loi de Rice-Rayleigh $R(\nu, 1)$, alors R^2 suit une loi du χ^2 non centrée à deux degrés de liberté et de paramètre de non centralité ν^2 .

Annexe B

Quelques notions d'analyse complexe

Cette annexe introduit quelques notions relatives aux fonctions holonomes et entières, dans le but d'expliquer le principe de la méthode de préconditionnement employée dans la Section 2.2 du Chapitre 2 pour évaluer la probabilité de collision en rapprochement rapide.

B.1 Fonctions holonomes

Ci-dessous, on énonce les définitions et propriétés fondamentales relatives aux fonctions D-finies (ou holonomes). Plus de détails peuvent être trouvés dans la référence [129].

Définition 10. *Une fonction $z \mapsto h(z)$ est dite holonome si et seulement si elle vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux en z .*

Un exemple élémentaire de fonction holonome est l'exponentielle, puisque $\exp'(z) = 1 \cdot \exp(z)$.

Proposition 22. [129] *L'ensemble des fonctions holonomes est stable pour les opérations suivantes : addition, soustraction, multiplication, intégration et dérivation.*

Définition 11. *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite P-réursive si et seulement si elle vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients polynomiaux en la variable entière k .*

Le théorème suivant fait le lien entre fonctions D-finies et suites P-récurives.

Théorème 4. [129] *Une fonction h est holonome si et seulement si elle est développable en z_0 en série entière $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z - z_0)^n$ et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est P-réursive.*

En pratique, on obtient la formule de récurrence en injectant le développement en série dans l'équation différentielle. Inversement, on peut déduire l'équation différentielle à partir de la série. Cela se fait de manière algorithmique à la main ou bien en utilisant le package Gfun [110] pour Maple qui en propose une implémentation. Pour revenir à l'exemple de l'exponentielle, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ et $\exp'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)u_{n+1}z^n$, d'où $(n+1)u_{n+1} = u_n$.

B.2 Évaluation d'une série et méthode de préconditionnement

Phénomène de compensation des termes

Considérons une série de Taylor sous la forme :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n, \quad (\text{B.1})$$

où u_n se comporte asymptotiquement à l'infini comme $(-1)^n \gamma \frac{\beta^n}{n!^\kappa}$ avec $\gamma, \beta, \kappa > 0$. Pour de large valeur de $|z|$, le calcul en précision arithmétique finie d'une telle série est sujet à une compensation des termes. Cela s'explique par le fait que les coefficients $|u_n z^n|$ croissent avant que la série ne commence à converger lorsque $n^\kappa \geq \beta z$. Lorsque $n^\kappa \simeq \beta z$, les quantités $|u_n z^n|$ deviennent généralement bien supérieures à $|h(z)|$. Ainsi, les contributions des termes s'annulent entre elles lorsque les bits d'ordre bas, qui contribuent aux premiers chiffres significatifs de h , sont perdus dans les erreurs de troncature. En conséquence, on va chercher à minimiser le ratio suivant :

$$d(z) = \log \frac{\max_n |u_n z^n|}{|h(z)|}. \quad (\text{B.2})$$

Un exemple classique de compensation des termes est $h(z) = \exp(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$. Les valeurs de $\left| \frac{(-1)^n}{n!} z^n \right|$ sont affichées sur la Figure B.1 pour $z = 15$. On observe que $d(z) \simeq 12$ (pour \log_{10}). En sommant les 101 premiers termes avec une précision de 10 digits sous Maple,

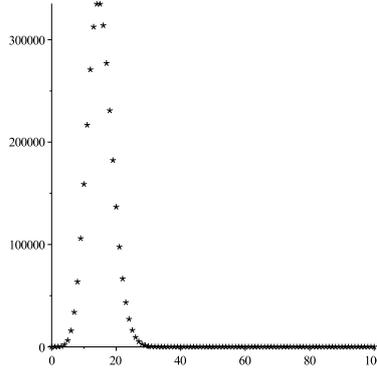


FIGURE B.1 – Valeurs de $\left| \frac{(-1)^n 15^n}{n!} \right|$, $n = 0, \dots, 100$, à comparer à $\exp(-15) \simeq 3.06 \cdot 10^{-7}$.

```
Digits:=10:
add((-15.)^n/n!, i=0..100);
```

on obtient $-0.4847810247 \cdot 10^{-4}$, alors que $\exp(-15) \simeq 3.06 \cdot 10^{-7}$.

Afin d'éviter ce problème de compensation pour cette fonction en particulier, on peut utiliser le développement en série de $\exp(x)$, dont tous les coefficients sont positifs, puis calculer $\frac{1}{\exp(x)}$. C'est un exemple élémentaire de la technique employée dans [43, 29], qui consiste à évaluer deux séries "bien conditionnées", notées f et ψ , telles que $h = \frac{f}{\psi}$. Dans l'exemple précédent, $\psi = \exp$ et $f = 1$.

Cette idée est développée dans la référence [43] par Gawronski, Müller et Reinhard, qui donnent une méthode (appelée GMR dans la suite) pour évaluer une fonction entière sur un certain domaine complexe en limitant les compensations de terme. En pratique, pour la probabilité de collision, nous utiliserons cette technique sur l'axe des réels. Avant d'expliquer plus en détails la méthode GMR, on énonce quelques notions classiques d'analyse complexe (cf. par exemple [76, Chap.1, 9]).

Principe de la méthode GMR de préconditionnement

Notions d'ordre, de type et de fonction indicatrice Soit $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ une fonction entière (i.e., analytique sur \mathbb{C} , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 0$).

– L'ordre (de croissance) ρ de h est $\rho = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$, où $M(r) := \max_{|z|=r} |h(z)|$. L'ordre est lié aux coefficients :

$$\rho = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \log n}{\log |u_n|^{-1}}. \quad (\text{B.3})$$

– Si $0 < \rho < +\infty$, le type τ est défini par :

$$\tau = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho}. \quad (\text{B.4})$$

On a la relation suivante entre ordre, type et coefficients :

$$\tau = \frac{1}{e\rho} \limsup_{n \rightarrow +\infty} n |u_n|^{\rho/n}. \quad (\text{B.5})$$

– La fonction indicatrice par rapport à ρ est \mathfrak{H} :

$$\mathfrak{H}(\theta) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log |h(re^{i\theta})|}{r^\rho}. \quad (\text{B.6})$$

Elle décrit la croissance de h le long d'une demi-droite issue de l'origine (rayon), $\{z : \arg z = \theta\}$. Il est connu que \mathfrak{H} est continue et que :

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \mathfrak{H}(\theta) = \tau. \quad (\text{B.7})$$

La première idée de la méthode GMR est que l'on peut dire, pour de grandes valeurs de r , que dans un certain sens $\log |h(re^{i\theta})|$ se comporte comme $\mathfrak{H}(\theta)r^\rho$. Ceci permet de quantifier la compensation des termes en fonction du type τ et de la fonction indicatrice.

Lien entre compensation des termes, type et fonction indicatrice. L'équation (B.2) indique que l'on souhaite minimiser le ratio :

$$d(re^{i\theta}) = \log \frac{\max_n |u_n| r^n}{|h(re^{i\theta})|}.$$

D'après [107, Théorème 10.1], on peut remplacer $M(r)$ par $\mu(r) := \max_n |u_n| r^n$ dans (B.4), puisque $\frac{\log \mu(r)}{\log M(r)} \rightarrow 1$, (lorsque $r \rightarrow +\infty$). Sous certaines hypothèses supplémentaires [43], et en utilisant (B.6), on peut considérer que $d(re^{i\theta})$ se comporte asymptotiquement comme $\sim r^\rho(\tau - \mathfrak{H}(\theta))$.

Cette équivalence est le point de départ pour essayer de trouver un moyen d'évaluer la série (B.1) sans compensation des termes. On doit faire en sorte que $\tau - \mathfrak{H}(\theta)$ soit aussi petit que possible lorsqu'on l'évalue le long d'un rayon d'argument θ .

En pratique, on a donc besoin de calculer la fonction indicatrice. Le théorème de Polya permet de le faire dans le cas qui nous intéresse.

Calcul de \mathfrak{H} à l'aide du théorème de Polya Soit $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ une fonction entière d'ordre 1 (également appelé de type exponentiel) et soit $\sum_{n=0}^{+\infty} n! u_n (\frac{1}{\lambda})^{n+1}$ sa transformée de Borel inverse. Cette série converge en dehors d'un disque $\{\lambda : |\lambda| \leq \tau\}$ et diverge à l'intérieur. Soit $K \subset \mathbb{C}$ le plus petit ensemble convexe compact contenant les singularités de h et k la fonction support de K , définie pour θ dans $[0, 2\pi]$ par :

$$k(\theta) = \sup_{z \in K} \{ \operatorname{Re}(z) \cos \theta + \operatorname{Im}(z) \sin \theta \} = \sup_{z \in K} \{ \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) \}. \quad (\text{B.8})$$

Le théorème suivant 5 relie la croissance le long d'un rayon d'une fonction entière de type exponentiel aux singularités de sa transformée de Borel inverse.

Théorème 5. *Polya [76, Chapitre 9]. Pour toute fonction entière de type exponentiel $h(z)$, on a la relation : $\mathfrak{H}(\theta) = k(-\theta)$.*

On a désormais tous les outils nécessaires au préconditionnement de la probabilité de collision.

B.3 Application de la méthode GMR au calcul de la probabilité de collision

Considérons maintenant le cas particulier où h est la fonction définie dans la Section 2.2 du Chapitre 2. Soit $\mathcal{L}h(\lambda)$ sa transformée de Laplace, que l'on développe en $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\frac{1}{\lambda})^{n+1}$ pour $\{\lambda : |\lambda| > \frac{1}{2\sigma_x^2}\}$. La série $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ est une fonction entière de type exponentielle. Ce résultat découle de la correspondance entre transformées de Borel et de Laplace, cf. par exemple [107, Prop. 11.5, Cor. 11.5 et Prop. 11.7].

Les singularités de h sont $S = \left\{ -\frac{1}{2\sigma_x^2}, -\frac{1}{2\sigma_y^2}, 0 \right\}$ et $K_h = \{ \lambda : |\lambda| \leq \frac{1}{2\sigma_x^2} \}$ car $\sigma_y \geq \sigma_x > 0$. Ainsi, la fonction indicatrice est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_h(\theta) &= \sup_{x \in \left[\frac{-1}{2\sigma_x^2}, 0 \right]} \{ x \cos(-\theta) \}, \theta \in [0, 2\pi] \\ &= \begin{cases} \frac{-\cos \theta}{2\sigma_x^2} & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \\ 0 & \text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

De plus, $\tau_h = \frac{1}{2\sigma_x^2}$. Ainsi, $\tau_h - \mathfrak{H}_h(0) = \frac{1}{2\sigma_x^2} \neq 0$, ce qui signifie que l'évaluation de h sur l'axe des réels (et donc le calcul de la probabilité de collision $h(R^2)$) est prompte à des compensations de termes.

Explication du choix de multiplier par $\exp(\tilde{p}z)$. La méthode GMR suggère de multiplier h par un préconditionneur ψ de sorte que les fonctions ψ et $f := \psi \cdot h$ soient bien conditionnées pour une évaluation sur l'axe des réels. Si ψ est entière d'ordre 1, on s'attend à ce que $f(re^{i\theta})$ se comporte asymptotiquement comme $\exp((\mathfrak{H}_h(\theta) + \mathfrak{H}_\psi(\theta))r)$. Un choix possible est $\psi(z) = \exp(\tilde{p}z)$ (avec $\tilde{p} > 0$), pour lequel $\mathfrak{H}_\psi(\theta) = \tilde{p} \cos(\theta)$.

La transformée de Laplace de f s'obtient directement à partir de celle de h , en la translatant par \tilde{p} . C'est notamment là l'intérêt du choix d'un préconditionneur exponentiel. On en déduit que les singularités de $\mathcal{L}f$ sont $\tilde{s}_0 = \tilde{p}$, $\tilde{s}_1 = \tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_y^2}$ et $\tilde{s}_2 = \tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_x^2}$, d'où :

$$\tau_f = \max \left\{ |\tilde{p}|, \left| \tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_x^2} \right| \right\}. \quad (\text{B.10})$$

A noter que $\left| \tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_y^2} \right|$ est toujours compris entre les deux autres valeurs, puisque $\sigma_y \geq \sigma_x > 0$. D'après le théorème de Polya :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_f(\theta) &= \sup_{x \in \left[\tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_x^2}, \tilde{p} \right]} \{ x \cos(-\theta) \}, \theta \in [0, 2\pi] \\ &= \begin{cases} \left(\tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_x^2} \right) \cos \theta & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \\ \tilde{p} \cos \theta & \text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

D'après (B.11), on a asymptotiquement :

$$\frac{d_f(re^{i\theta})}{r} = \begin{cases} \max \left\{ |\tilde{p}|, \left| \tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_x^2} \right| \right\} - \left(\tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_x^2} \right) \cos \theta & \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \\ \max \left\{ |\tilde{p}|, \left| \tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_x^2} \right| \right\} - \tilde{p} \cos \theta & \text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]. \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

Pour une évaluation sur l'axe des réels ($\theta = 0$), on a

$$\frac{d_f(r)}{r} = \max \left\{ |\tilde{p}|, \left| \tilde{p} - \frac{1}{2\sigma_x^2} \right| \right\} - \tilde{p},$$

qui est minimisé à 0 lorsque $\tilde{p} \geq \frac{1}{4\sigma_x^2}$.

Ainsi, d'après cette analyse basée sur la méthode GMR, la série est conditionnée de manière optimale pour une évaluation sur l'axe des réels lorsque $\tilde{p} \geq \frac{1}{4\sigma_x^2}$. L'effet du préconditionnement sur la fonction indicatrice de f peut être visualiser sur les Figures B.2 et B.3 pour différentes valeurs de \tilde{p} . Dans la Section 2.2, on a pris $\tilde{p} = \tau_h$, car il est alors possible de démontrer la positivité des coefficients du développement en série de f , mais d'autres choix sont bien sûr possibles. D'autre part, le choix d'un préconditionneur exponentiel n'est pas obligatoire, néanmoins il n'existe pas dans la littérature d'éléments pour choisir une fonction plutôt qu'une autre. A noter qu'ici, certains choix (comme la fonction sinus) apparaissent comme mauvais de manière immédiate, puisqu'alors $\tau_f - \mathfrak{H}_f(0) \neq 0$.

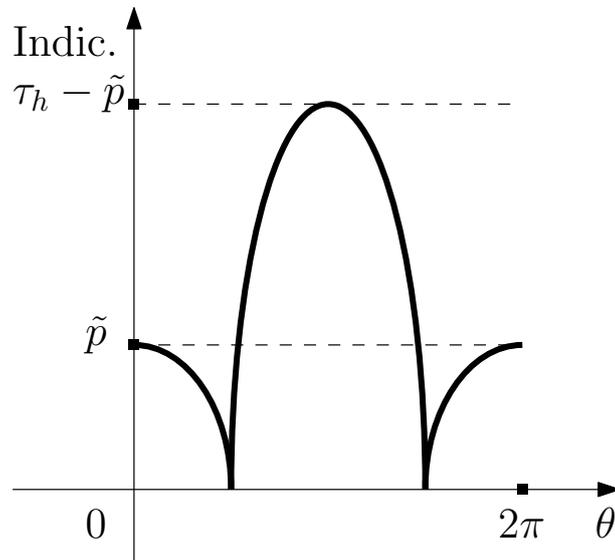


FIGURE B.2 – Indicatrice de f lorsque $0 \leq \tilde{p} \leq \tau_h/2$.

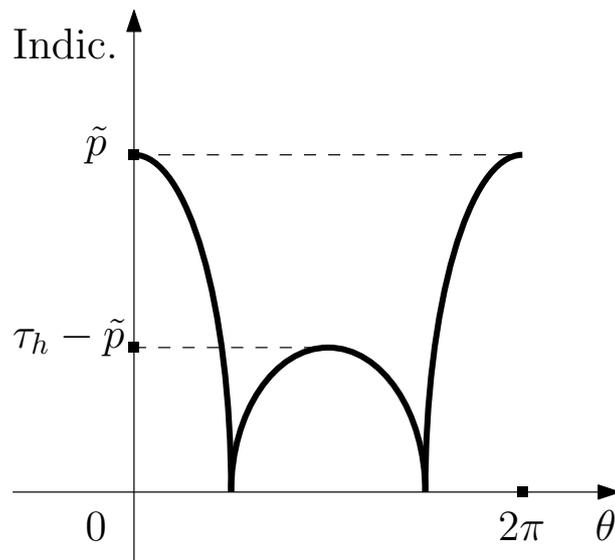


FIGURE B.3 – Indicatrice de f lorsque $\tau_h/2 \leq \tilde{p} \leq \tau_h$.

Annexe C

Orbites keplériennes elliptiques

Cette annexe traite du mouvement keplerien en général, et plus particulièrement des orbites elliptiques. Tous les résultats utilisés peuvent être trouvés avec leur preuve dans [13].

C.1 Problème de Kepler

Le problème dit de Kepler consiste à résoudre le système différentiel suivant :

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t), \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{\vec{v}}(t) = -\frac{\mu}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}(t), \quad (\text{C.2})$$

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0. \quad (\text{C.4})$$

où $\dot{(\)} = \frac{d(\)}{dt}$ et μ est la constante de gravitation du corps autour duquel orbite le mobile à la position \vec{r} dans un repère inertiel. Le vecteur \vec{v} est donc la vitesse.

Comme la force est dirigée selon le vecteur position, on parle de force centrale.

C.2 Nature des trajectoires

Les trois lois de Kepler, obtenues à l'origine empiriquement par ce dernier à l'aide des observations de Tycho Brahé, sont vérifiables analytiquement. La première loi stipule que les trajectoires sont planes : le mouvement a donc lieu dans le plan engendré par \vec{r}_0 et \vec{v}_0 . De plus, la loi précise que ces trajectoires sont des coniques.

Pour les orbites les moins énergétiques, il s'agit d'ellipses. Dans la suite, on supposera que l'on se trouve dans ce cas là et l'on notera a le demi-grand axe de l'ellipse et e son excentricité. Ces quantités dépendent des conditions initiales selon les formules suivantes :

$$a = \left(\frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu} \right)^{-1}, \quad (\text{C.5})$$

$$e = \frac{1}{\mu} \left\| \left(v_0^2 - \frac{\mu}{r_0} \right) \vec{r}_0 - (\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0) \vec{v}_0 \right\|. \quad (\text{C.6})$$

C.3 Anomalies angulaires

Dans la résolution du problème de Kepler, il est intéressant d'introduire deux angles : l'anomalie vraie ν et l'anomalie excentrique E . Ces paramètres angulaires apparaissent naturellement dans la géométrie du problème et sont représentés sur la Figure C.1).

On peut prouver géométriquement ou analytiquement que :

$$\|\vec{r}\| = a(1 - e \cos(E)). \quad (\text{C.7})$$

L'équation (C.7) fait le lien entre la norme du vecteur position et l'anomalie excentrique, le signe de E étant donné par celui de $\vec{r} \cdot \vec{v}$.

Il est également possible de prouver que :

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_p) = E - e \sin(E), \quad (\text{C.8})$$

où t_p est le dernier temps de passage au périapse (point de l'orbite le plus proche du corps central). L'équation (C.8), dite de Kepler, permet de relier l'anomalie excentrique à la variable temporelle. Elle donne immédiatement la seconde en fonction de la première, en revanche pour déduire la première de la seconde il faut résoudre cette équation transcendante. Dans la pratique, on peut le faire par une méthode de Newton-Raphson.

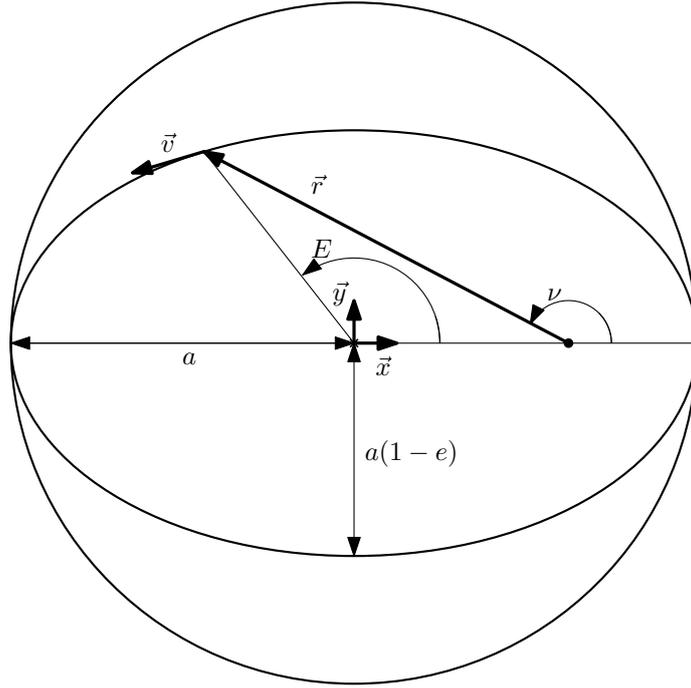


FIGURE C.1 – Anomalies angulaires.

En dérivant l'équation de Kepler par rapport au temps, on obtient immédiatement :

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1}{1 - e \cos(E)}. \quad (\text{C.9})$$

Une fois l'anomalie excentrique calculée, on peut passer à l'anomalie vraie en utilisant les relations suivantes :

$$\cos(\nu) = \frac{e - \cos(E)}{e \cos(E) - 1}, \quad (\text{C.10})$$

$$\sin(\nu) = \frac{a\sqrt{1 - e^2}}{\|\vec{r}\|} \sin(E). \quad (\text{C.11})$$

C.4 Solution du problème de Kepler

Dans le repère (\vec{x}, \vec{y}) représenté sur la Figure C.1, on a :

$$\vec{r} = X\vec{x} + Y\vec{y}, \quad (\text{C.12})$$

et

$$\vec{v} = \dot{X}\vec{x} + \dot{Y}\vec{y}. \quad (\text{C.13})$$

On peut prouver, géométriquement ou analytiquement, que :

$$X = a(\cos(E) - e), \quad (\text{C.14})$$

$$Y = a\sqrt{1 - e^2} \sin(E). \quad (\text{C.15})$$

En dérivant et en injectant (C.9), on obtient :

$$\dot{X} = -\sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{\sin(E)}{1 - e \cos(E)}, \quad (\text{C.16})$$

$$\dot{Y} = \sqrt{\frac{\mu(1 - e^2)}{a}} \frac{\cos(E)}{1 - e \cos(E)}. \quad (\text{C.17})$$

C.5 Coefficients f et g de Lagrange

Les coefficients f et g de Lagrange sont un moyen d'exprimer les solutions du problème de Kepler [13, 36, 54]. On sait que pour tout t , $(0, \vec{r}(t), \vec{v}(t))$ et $(0, \vec{r}(0), \vec{v}(0))$ engendrent le même plan. Ceci encourage à chercher une expression pour la position du type :

$$\vec{r}(t) = f\vec{r}_0 + g\vec{v}_0. \quad (\text{C.18})$$

où les coefficients f et g sont des scalaires dépendant de t , \vec{r}_0 et \vec{v}_0 . Par dérivation temporelle, on obtient immédiatement :

$$\vec{v}(t) = \dot{f}\vec{r}_0 + \dot{g}\vec{v}_0. \quad (\text{C.19})$$

Pour une force centrale, on a conservation du moment cinétique, d'où :

$$\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0. \quad (\text{C.20})$$

En injectant dans cette équation les coefficients de Lagrange, on obtient que :

$$1 = f\dot{g} - \dot{f}g. \quad (\text{C.21})$$

En regardant le produit vectoriel entre \vec{r} et \vec{v}_0 , il vient que :

$$f = \frac{X\dot{Y}_0 - \dot{X}_0Y}{\|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\|}. \quad (\text{C.22})$$

De même, en analysant $\vec{r}_0 \times \vec{r}$, on obtient :

$$g = \frac{X_0Y - XY_0}{\|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\|}. \quad (\text{C.23})$$

Par dérivation temporelle, il vient immédiatement que :

$$\dot{f} = \frac{\dot{X}\dot{Y}_0 - \dot{X}_0\dot{Y}}{\|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\|}, \quad (\text{C.24})$$

$$\dot{g} = \frac{X_0\dot{Y} - \dot{X}Y_0}{\|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\|}. \quad (\text{C.25})$$

En injectant dans ces expressions des coefficients de Lagrange les équations présentées dans la Section C.4, on a, tous calculs faits :

$$f = 1 - \frac{a}{r_0}(1 - \cos(\Delta E)), \quad (\text{C.26})$$

$$g = \Delta t - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(\Delta E - \sin(\Delta E)), \quad (\text{C.27})$$

$$\dot{f} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{\|\vec{r}\|\|\vec{r}_0\|} \sin(\Delta E), \quad (\text{C.28})$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{a}{\|\vec{r}_0\|}(1 - \cos(\Delta E)), \quad (\text{C.29})$$

avec $\Delta E = E - E_0$ et $\Delta t = t - t_0$.

Annexe D

Preuves de l'optimalité des solutions
du rendez-vous hors-plan elliptique
lorsque $\nu_f - \nu_0 < 2\pi$

Cette annexe expose les preuves des résultats énoncés dans la Section 6.3 du Chapitre 6 dans le cas où $\nu_f - \nu_0 < 2\pi$, le complémentaire ayant été traité dans le corps même de la thèse (Section 6.4, Chapitre 6). Cette démonstration est basée sur une analyse des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de Lawden.

D.1 Solution à deux impulsions internes

Examinons le cas d'une solution optimale à deux impulsions dans l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$: le vecteur efficacité étant une fonction 2π périodique à deux extrema par période, il n'est pas possible d'avoir des impulsions ailleurs qu'en un point d'extremum du vecteur efficacité. On retrouve donc exactement les résultats du Paragraphe 6.4.2. Si la condition suivante :

$$e\|z\| > |z_2|,$$

est vérifiée alors la solution décrite par les CNS d'optimalité est définie par :

$$\begin{aligned}\Delta V^+ &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e} \left(ez_1 + \sqrt{1-e^2}z_2 \right), \\ \Delta V^- &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e} \left(ez_1 - \sqrt{1-e^2}z_2 \right),\end{aligned}$$

où ν_+ et ν_- vérifient :

$$\cos(\nu_{\pm}) = -e \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sin(\nu_+) = \sqrt{1-e^2}, \\ \sin(\nu_-) = -\sqrt{1-e^2}. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Dans ce cas, le vecteur efficacité est déterminé par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\text{sgn}(z_1)\sqrt{1-e^2}, \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Pour que cette solution soit bien définie et optimale sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$, il faut (et il suffit) qu'il existe deux dates ν_+ et ν_- vérifiant (D.1) et appartenant bien à $[\nu_0, \nu_f]$.

Cas $\nu_f - \nu_0 < \pi$. Il existe $\nu_+, \nu_- \in [\nu_0, \nu_f]$ vérifiant (D.1) si et seulement si :

$$\sin(\nu_0) \geq \sqrt{1-e^2}, \quad \sin(\nu_f) \leq -\sqrt{1-e^2}. \quad (\text{D.2})$$

Réciproquement, la solution optimale à deux impulsions décrite dans ce paragraphe n'est pas possible si :

$$\sin(\nu_0) < \sqrt{1-e^2} \quad \text{ou} \quad \sin(\nu_f) > -\sqrt{1-e^2}. \quad (\text{D.3})$$

Cas $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$. Il existe $\nu_+, \nu_- \in [\nu_0, \nu_f]$ vérifiant (D.1) si et seulement si :

$$\begin{cases} \sin(\nu_0) \geq \sqrt{1-e^2}, \\ \text{ou} \\ \sin(\nu_0) \leq -\sqrt{1-e^2}, \quad \sin(\nu_f) \leq -\sqrt{1-e^2}, \\ \text{ou} \\ |\sin(\nu_0)| < \sqrt{1-e^2}, \quad (e + \cos(\nu_0))(e + \cos(\nu_f)) > 0. \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Réciproquement, la solution optimale à deux impulsions décrite dans ce paragraphe n'est pas possible si :

$$\begin{cases} |\sin(\nu_0)| < \sqrt{1-e^2}, \\ (e + \cos(\nu_0))(e + \cos(\nu_f)) \leq 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sin(\nu_0) \leq -\sqrt{1-e^2}, \\ \sin(\nu_f) > -\sqrt{1-e^2}. \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

D.2 Solutions à une unique impulsion

Dans ce paragraphe, on étudie les solutions à une unique impulsion interne ou extrême. Réécrivons les CNS d'optimalité :

CNS 1. $\text{sgn}(\Delta V(\nu_{i_0})) = -\frac{R(\nu_{i_0})^T \lambda}{\rho(\nu_{i_0})}$ On pose : $\varepsilon = \text{sgn}(\Delta V(\nu_{i_0}))$. On a donc : $\text{sgn}(\Delta V(\nu_{i_0})) = \varepsilon$, soit :

$$\sin(\nu_{i_0})\lambda_1 - \cos(\nu_{i_0})\lambda_2 = \varepsilon(1 + e \cos(\nu_{i_0})).$$

Dans le cas d'une impulsion interne (i.e. si ν_{i_0} est un point d'extremum de p_λ) alors la CNS 1 nous donne l'expression des multiplicateurs de Lagrange :

$$\lambda_1 = \varepsilon \sin(\nu_{i_0}), \quad \lambda_2 = -\varepsilon (e + \cos(\nu_{i_0})),$$

qui nous permettent de déterminer l'expression du vecteur efficacité en fonction de ν_{i_0} :

$$p_\lambda(\nu) = -\varepsilon \frac{\cos(\nu - \nu_{i_0}) + e \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)}. \quad (\text{D.6})$$

CNS 2. On a :

$$\frac{R(\nu_{i_0})}{\rho(\nu_{i_0})} \Delta V(\nu_{i_0}) = z,$$

d'où de façon équivalente :

$$\begin{cases} \Delta V(\nu_{i_0}) = (-\sin(\nu_{i_0})z_1 + \cos(\nu_{i_0})z_2)(1 + e \cos(\nu_{i_0})), \\ \cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2 = 0. \end{cases}$$

Pour décrire complètement la solution, il faut donc déterminer explicitement la date de l'impulsion comme solution du problème :

$$\begin{cases} \cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2 = 0, \\ \nu_0 \leq \nu_{i_0} \leq \nu_f, \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

et garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 pendant toute la durée du rendez-vous.

Intéressons nous tout d'abord à la résolution du problème (D.7). La fonction $\nu \mapsto \cos(\nu)z_1 + \sin(\nu)z_2$ s'annulant tous les π , ce problème admet au plus une solution sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$ si $\nu_f - \nu_0 < \pi$, au moins une solution et au plus deux si $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$. On en déduit :

1er cas : $\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0$ et $\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0$.

Notons :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \text{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2), \\ \varepsilon_f &= \text{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2). \end{aligned}$$

– Quelle que soit la durée du rendez-vous, le problème (D.7) admet une unique solution si et seulement si : $\varepsilon_0 = -\varepsilon_f$, et dans ce cas, la solution est définie par :

$$\cos(\nu_{i_0}) = -\varepsilon_0 \frac{z_2}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_{i_0}) = \varepsilon_0 \frac{z_1}{\|z\|},$$

– Si $\nu_f - \nu_0 < \pi$ et $\varepsilon_0 = \varepsilon_f$, alors le problème (D.7) n'a pas de solution.

– Si $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$ et $\varepsilon_0 = \varepsilon_f$ alors le problème (D.7) admet deux solutions ν_1 et ν_2 définies par :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_1) &= -\varepsilon_0 \frac{z_2}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_1) = \varepsilon_0 \frac{z_1}{\|z\|}, \\ \nu_2 &= \nu_1 + \pi. \end{aligned}$$

2ème cas : $\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 = 0$. Si $\nu_f - \nu_0 < \pi$ alors le problème (D.7) a pour unique solution ν_0 . Si $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$ alors le problème (D.7) admet exactement deux solutions ν_0 et $\nu_0 + \pi$.

3ème cas : $\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 = 0$. Si $\nu_f - \nu_0 < \pi$ alors le problème (D.7) a pour unique solution ν_f . Si $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$ alors le problème (D.7) admet exactement deux solutions ν_f et $\nu_f - \pi$.

Cas d'une unique impulsion interne

La démarche est similaire à celle effectuée pour la détermination de la solution à une impulsion par période présentée pour le cas où $\nu_f - \nu_0 \geq 2\pi$.

1er cas : supposons que le problème (D.7) admet alors une unique solution $\nu_{i_0} \in [\nu_0, \nu_f]$ i.e. :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0, \\ \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0 = -\varepsilon_f, \\ \text{ou} & \cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 = 0 \quad \text{et} \quad \nu_f - \nu_0 < \pi, \\ \text{ou} & \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 = 0 \quad \text{et} \quad \nu_f - \nu_0 < \pi. \end{aligned}$$

Dans chacune de ces trois configurations, la date de l'impulsion est donnée par :

$$\cos(\nu_{i_0}) = \varepsilon \frac{z_2}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_{i_0}) = -\varepsilon \frac{z_1}{\|z\|},$$

et l'impulsion en ν_{i_0} est donnée par :

$$\Delta V(\nu_{i_0}) = \varepsilon \|z\| + ez_2,$$

avec :

$$\varepsilon = \begin{cases} -\varepsilon_0 & \text{si } \cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0, \\ \varepsilon_f & \text{si } \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0, \end{cases}$$

et sachant que :

$$\nu_{i_0} = \begin{cases} \nu_0 & \text{si } \cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 = 0, \\ \nu_f & \text{si } \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 = 0. \end{cases}$$

La direction de l'impulsion étant donnée par $\text{sgn}(\Delta V(\nu_{i_0})) = \varepsilon$, le vecteur efficacité est alors défini par :

$$\lambda_1 = -\frac{z_1}{\|z\|}, \quad \lambda_2 = -\varepsilon e - \frac{z_2}{\|z\|}.$$

Remarque 20. Dans le cas $\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 = 0$, on s'intéresse aux solutions à une unique impulsion initiale. Il existe en fait deux situations possibles suivant que ν_0 est un point d'extremum du vecteur efficacité ou pas. Dans ce paragraphe, on considère que ν_0 est bien un point d'extremum de p_λ .

Il reste maintenant à garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 pendant toute la durée du rendez-vous.

1er sous-cas : $\cos(\nu_{i_0}) \leq -e$. Cette condition s'écrit également :

$$\cos(\nu_{i_0}) \leq -e \iff -\varepsilon z_2 \geq e\|z\|.$$

On en déduit la condition implicite : $\varepsilon = -\text{sgn}(z_2)$. Dans ce cas, d'après (6.10), le second extremum du vecteur efficacité est de norme inférieure ou égale à 1 : ainsi aucune condition supplémentaire n'est nécessaire pour garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$, et il n'y a pas d'autre impulsion possible qu'en ν_{i_0} .

2ème sous-cas : $\cos(\nu_{i_0}) > -e$ i.e. :

$$e\|z\| > -\varepsilon z_2.$$

Dans ce cas, le second extremum du vecteur efficacité est de norme strictement supérieure à 1. Il nous faudra donc des conditions supplémentaires pour ne pas avoir d'impulsion en ν_0 et ν_f , à savoir :

$$\begin{cases} |p_\lambda(\nu_0)| < 1, & \text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_0)\right) = \text{sgn}(p_\lambda(\nu_{i_0})) = -\varepsilon, \\ |p_\lambda(\nu_f)| < 1, & \text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_f)\right) = -\text{sgn}(p_\lambda(\nu_{i_0})) = \varepsilon. \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} \cos(\nu_{i_0} - \nu_0) + 2e \cos(\nu_0) + 1 > 0, \\ \sin(\nu_{i_0} - \nu_0) + e (\sin(\nu_{i_0}) - \sin(\nu_0)) \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \cos(\nu_{i_0} - \nu_f) + 2e \cos(\nu_f) + 1 > 0, \\ \sin(\nu_{i_0} - \nu_f) + e (\sin(\nu_{i_0}) - \sin(\nu_f)) \leq 0. \end{cases}$$

Soit, en se rappelant que la direction de l'impulsion est ε :

$$\begin{cases} \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon z_2) \cos(\nu_0) - \varepsilon z_1 \sin(\nu_0) > 0, \\ -\varepsilon z_1 (e + \cos(\nu_0)) - (\varepsilon z_2 + e\|z\|) \sin(\nu_0) \geq 0, \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

et

$$\begin{cases} \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon z_2) \cos(\nu_f) - \varepsilon z_1 \sin(\nu_f) > 0, \\ -\varepsilon z_1 (e + \cos(\nu_f)) - (\varepsilon z_2 + e\|z\|) \sin(\nu_f) \leq 0. \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

On remarque en particulier que dans le cas d'une impulsion initiale (respectivement finale), les conditions (D.8) (respectivement (D.9)) sont trivialement satisfaites.

2ème cas : supposons que : $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$ et

$$\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 = 0,$$

ou

$$\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 = 0,$$

ou

$$\begin{cases} \cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0, \\ \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0, \end{cases} \quad \text{et } \varepsilon_0 = \varepsilon_f.$$

Dans ce cas le problème (D.7) admet deux solutions ν_1 et ν_2 définies par :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_1) &= -\tilde{\varepsilon} \frac{z_2}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_1) = \tilde{\varepsilon} \frac{z_1}{\|z\|}, \\ \nu_2 &= \nu_1 + \pi, \end{aligned}$$

où :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{si } \cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0, \\ \varepsilon_f & \text{si } \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0. \end{cases}$$

La solution de consommation minimale est donnée par :

$$\Delta V(\nu_{i_0}) = -\text{sgn}(z_2)\|z\| + ez_2,$$

de direction $\varepsilon = -\text{sgn}(z_2)$, à la date $\nu_{i_0} \in [\nu_0, \nu_f]$ définie par :

$$\cos(\nu_{i_0}) = -\frac{|z_2|}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_{i_0}) = \text{sgn}(z_2) \frac{z_1}{\|z\|}.$$

Le vecteur efficacité est complètement déterminé par les coefficients de Lagrange :

$$\lambda_1 = -\frac{z_1}{\|z\|}, \quad \lambda_2 = \text{sgn}(z_2)e - \frac{z_2}{\|z\|}.$$

Il reste maintenant à garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 pendant toute la durée du rendez-vous.

1er sous-cas : si $e\|z\| \leq |z_2|$. Cela correspond au cas où :

$$\cos(\nu_1) = -\frac{|z_2|}{\|z\|} \leq -e \quad \text{ou} \quad \cos(\nu_2) = -\frac{|z_2|}{\|z\|} \leq -e.$$

et dans lequel on choisit pour la date ν_{i_0} de l'impulsion la solution ν_i de cosinus négatif. Dans ce cas, aucune condition supplémentaire n'est nécessaire pour garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure à 1 pendant toute la durée du rendez-vous.

2ème sous-cas : si $e\|z\| > |z_2|$. Cela correspond au cas où :

$$|\cos(\nu_1)| < e, \quad |\cos(\nu_2)| < e.$$

et l'on choisit à nouveau la solution de cosinus négatif correspondant à la solution de consommation minimale. Dans ce cas, en revanche, il faut ajouter les conditions (D.8) et (D.9) appliquées en $\varepsilon = -\text{sgn}(z_2)$ pour garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure à 1 sur $[\nu_0, \nu_f]$, soit ici :

$$\begin{cases} \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon z_2) \cos(\nu_0) - \varepsilon z_1 \sin(\nu_0) > 0, \\ -\varepsilon z_1(e + \cos(\nu_0)) - (e\|z\| + \varepsilon z_2) \sin(\nu_0) > 0, \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

et

$$\begin{cases} \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon z_2) \cos(\nu_f) - \varepsilon z_1 \sin(\nu_f) > 0, \\ -\varepsilon z_1(e + \cos(\nu_f)) - (e\|z\| + \varepsilon z_2) \sin(\nu_f) < 0. \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

Cas particulier d'une unique impulsion initiale

Reprenons le cas particulier des solutions à une unique impulsion pour lesquelles :

$$\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 = 0.$$

1er cas : $\nu_f - \nu_0 < \pi$. Dans ce cas, la seule date possible de l'impulsion est ν_0 et on a :

$$\cos(\nu_0) = \varepsilon_f \frac{z_2}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_0) = -\varepsilon_f \frac{z_1}{\|z\|}.$$

La CNS 1 nous donne :

$$\sin(\nu_0)\lambda_1 - \cos(\nu_0)\lambda_2 = \varepsilon_f(1 + e \cos(\nu_0)),$$

soit une infinité de multiplicateurs de Lagrange optimaux possibles.

Choisissons par exemple :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \varepsilon_f \sin(\nu_0) = -\frac{z_1}{\|z\|}, \\ \lambda_2 &= -\varepsilon_f(e + \cos(\nu_0)) = -\varepsilon_f e - \frac{z_2}{\|z\|}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, le vecteur efficacité admet un extremum de norme 1 en ν_0 et on se ramène ainsi aux résultats du cas précédent.

2ème cas : $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$. Dans ce cas, le problème (D.7) admet deux solutions : ν_0 et $\nu_0 + \pi$ avec :

$$\cos(\nu_0) = -\varepsilon_f \frac{z_2}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_0) = \varepsilon_f \frac{z_1}{\|z\|},$$

si $\nu_f - \nu_0 \neq \pi$. Comme précédemment, la solution de consommation minimale est obtenue pour une impulsion à la date de cosinus négatif, dans la direction $\varepsilon = -\text{sgn}(z_2)$.

1er sous-cas : si $\cos(\nu_0) > 0$. Alors l'impulsion a lieu à la date $\nu_0 + \pi$. Le vecteur efficacité est déterminé de façon unique via sa tangente horizontale :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{z_1}{\|z\|} \\ \lambda_2 &= -\varepsilon e - \frac{z_2}{\|z\|} \end{aligned}$$

et on retrouve exactement les résultats vus au paragraphe précédent à savoir :

- Si $e\|z\| \leq |z_2|$, alors la norme du vecteur efficacité est inférieure ou égale à 1 pendant toute la durée du rendez-vous sans condition supplémentaire.

- Si $e\|z\| > |z_2|$ alors on a besoin des conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon z_2) \cos(\nu_0) - \varepsilon z_1 \sin(\nu_0) > 0, \\ -\varepsilon z_1(e + \cos(\nu_0)) - (e\|z\| + \varepsilon z_2) \sin(\nu_0) > 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon z_2) \cos(\nu_f) - \varepsilon z_1 \sin(\nu_f) > 0, \\ -\varepsilon z_1(e + \cos(\nu_f)) - (e\|z\| + \varepsilon z_2) \sin(\nu_f) < 0. \end{cases}$$

2ème sous-cas : si $\cos(\nu_0) < 0$, alors l'impulsion a lieu à la date ν_0 et il existe une infinité de multiplicateurs de Lagrange optimaux vérifiant la CNS 1 :

$$\sin(\nu_0)\lambda_1 - \cos(\nu_0)\lambda_2 = \varepsilon(1 + e \cos(\nu_0)).$$

A nouveau, on peut choisir par exemple :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \varepsilon \sin(\nu_0) = -\frac{z_1}{\|z\|} \\ \lambda_2 &= -\varepsilon(e + \cos(\nu_0)) = -\varepsilon e - \frac{z_2}{\|z\|} \end{aligned}$$

de sorte que le vecteur efficacité admette un extremum de norme 1 en ν_0 et on retrouve les résultats obtenus au paragraphe précédent sachant que les conditions en ν_0 sont automatiquement satisfaites.

D.3 Solutions à une impulsion interne et une ou deux impulsions extrêmes

Étudions maintenant le cas des solutions optimales à une impulsion interne et une ou deux impulsions extrêmes : trois situations sont possibles :

1. Impulsions en ν_0 et en $\nu_{i_0} \in]\nu_0, \nu_f[$;
2. Impulsions en $\nu_{i_0} \in]\nu_0, \nu_f[$ et en ν_f ;
3. Impulsions en $\nu_0, \nu_{i_0} \in]\nu_0, \nu_f[$ et ν_f .

Analysons les CNS d'optimalité. On note ν_{i_0} la date de l'impulsion interne. Les directions des impulsions sont données par la CNS 1 :

$$\begin{aligned} \Delta V(\nu_0) = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) &= -\frac{R(\nu_0)^T \lambda}{\rho(\nu_0)}, \\ \Delta V(\nu_{i_0}) = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sgn}(\Delta V(\nu_{i_0})) &= -\frac{R(\nu_{i_0})^T \lambda}{\rho(\nu_{i_0})}, \\ \Delta V(\nu_f) = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sgn}(\Delta V(\nu_f)) &= -\frac{R(\nu_f)^T \lambda}{\rho(\nu_f)}. \end{aligned}$$

Notons : $\varepsilon = \text{sgn}(\Delta V(\nu_{i_0}))$ la direction de l'impulsion à la date ν_{i_0} . D'après la dynamique du vecteur efficacité et sachant que le vecteur efficacité atteint un de ces extrema en ν_{i_0} , les impulsions initiale et finale, si elles ont lieu, sont nécessairement de direction opposée à celle de l'impulsion appliquée en ν_{i_0} , soit :

$$\text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) = \text{sgn}(\Delta V(\nu_f)) = -\varepsilon.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \Delta V(\nu_0) = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) &= -\varepsilon, \\ \Delta V(\nu_f) = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sgn}(\Delta V(\nu_f)) &= -\varepsilon. \end{aligned}$$

On retrouve les relations (6.76) :

$$\lambda_1 = \varepsilon \sin(\nu_{i_0}), \quad \lambda_2 = -\varepsilon(e + \cos(\nu_{i_0})),$$

qui nous permettent de déterminer l'expression du vecteur efficacité en fonction de ν_{i_0} :

$$p_\lambda(\nu) = -\varepsilon \frac{\cos(\nu - \nu_{i_0}) + e \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)}. \quad (\text{D.12})$$

Considérons maintenant la CNS 2 :

$$\frac{R(\nu_0)}{\rho(\nu_0)} \Delta V(\nu_0) + \frac{R(\nu_{i_0})}{\rho(\nu_{i_0})} \Delta V(\nu_{i_0}) + \frac{R(\nu_f)}{\rho(\nu_f)} \Delta V(\nu_f) = z,$$

soit :

Il reste enfin à garantir que la norme du vecteur efficacité ne dépasse pas 1 sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$ (cf. CNS 3), i.e. ici :

$$\forall \nu \in [\nu_0, \nu_f], \left| \frac{\cos(\nu - \nu_{i_0}) + e \cos(\nu)}{1 + e \cos(\nu)} \right| \leq 1,$$

soit, de façon équivalente :

$$\forall \nu \in [\nu_0, \nu_f], \cos(\nu - \nu_{i_0}) + 2e \cos(\nu) + 1 \geq 0. \quad (\text{D.13})$$

Remarque 21. D'après la condition (D.13), on remarque que si $\cos(\nu) > 0$ alors nécessairement : $|p_\lambda(\nu)| < 1$ et il ne peut donc pas y avoir d'impulsion à la date ν .

La solution considérée admettant une impulsion à la date $\nu_{i_0} \in [\nu_0, \nu_f]$, deux situations se présentent :

- $\cos(\nu_{i_0}) \leq -e$. D'après les relations (6.10), le second extremum du vecteur efficacité est de norme inférieure ou égale à 1. Ainsi, il n'y a pas d'autre impulsion possible qu'en ν_{i_0} et aucune condition supplémentaire n'est donc nécessaire pour garantir que la CNS 3 est satisfaite. Remarquons que si $\cos(\nu_{i_0}) = -e$, suivant la position de ν_0 , la solution peut être à une ou deux impulsions, mais dans ce cas on retrouve la solution à 2 impulsions traitée précédemment.
- $\cos(\nu_{i_0}) > -e$. D'après les relations (6.10), le second extremum du vecteur efficacité est de norme strictement supérieure à 1. Dans ce cas, l'étude de la dynamique et de l'allure du vecteur efficacité nous permet de remplacer la CNS 3 par les conditions suivantes :
 - la norme du vecteur efficacité reste inférieure à 1 sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_{i_0}]$, soit :

$$|p_\lambda(\nu_0)| \leq 1 \text{ et } \text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_0)\right) = \text{sgn}(p_\lambda(\nu_{i_0})) = -\varepsilon,$$

soit :

$$\cos(\nu_0 - \nu_{i_0}) + 2e \cos(\nu_0) + 1 \geq 0, \quad (\text{D.14})$$

et

$$\begin{aligned} \text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_0)\right) = -\varepsilon &\iff \text{sgn}((e + \cos(\nu_0))\lambda_1 + \sin(\nu_0)\lambda_2) = \varepsilon, \\ &\iff (e + \cos(\nu_0)) \sin(\nu_{i_0}) - \sin(\nu_0)(e + \cos(\nu_{i_0})) > 0, \quad (\text{D.15}) \\ &\iff e(\sin(\nu_{i_0}) - \sin(\nu_0)) + \sin(\nu_{i_0} - \nu_0) > 0, \end{aligned}$$

- la norme du vecteur efficacité reste inférieure à 1 sur l'intervalle $[\nu_{i_0}, \nu_f]$, soit :

$$|p_\lambda(\nu_f)| \leq 1 \text{ et } \text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_f)\right) = -\text{sgn}(p_\lambda(\nu_{i_0})) = \varepsilon,$$

soit :

$$\cos(\nu_f - \nu_{i_0}) + 2e \cos(\nu_f) + 1 \geq 0, \quad (\text{D.16})$$

et

$$e(\sin(\nu_{i_0}) - \sin(\nu_f)) + \sin(\nu_{i_0} - \nu_f) < 0. \quad (\text{D.17})$$

D.4 Une impulsion initiale et une impulsion interne

Examinons maintenant la possibilité d'une solution à une impulsion interne et une impulsion initiale. Pour avoir une impulsion en ν_0 , la condition (D.14) est remplacée par :

$$|p_\lambda(\nu_0)| = 1, \text{ soit : } 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_{i_0} - \nu_0) = 0.$$

A condition que cette équation ait des solutions, i.e. à condition que :

$$\cos(\nu_0) \leq 0.$$

On en déduit : $\nu_{i_0} \in \{\nu_1, \nu_2\}$ où :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_0 + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)) && \in [\nu_0, \nu_0 + \pi], \\ \nu_2 &= \nu_0 - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)) + 2\pi && \in [\nu_0 + \pi, \nu_0 + 2\pi]. \end{aligned}$$

Si $\nu_f - \nu_0 < \pi$, alors la seule solution est : $\nu_{i_0} = \nu_1$ à condition que $\nu_1 \in [\nu_0, \nu_f]$ i.e. :

$$1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0. \quad (\text{D.18})$$

Si $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$ alors nécessairement $\nu_1 \in [\nu_0, \nu_f]$. Il y a donc éventuellement deux solutions pour ν_{i_0} si $\nu_2 \in [\nu_0, \nu_f]$, i.e. de façon équivalente, si :

$$1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \geq 0. \quad (\text{D.19})$$

Remarque 22. Si : $\cos(\nu_0) > 0$ ou $\begin{cases} \nu_f - \nu_0 < \pi, \\ 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) > 0. \end{cases}$ alors une impulsion initiale n'est pas possible.

1er cas : Supposons que la date de l'impulsion soit définie par :

$$\nu_{i_0} = \nu_0 + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)) \in [\nu_0, \nu_0 + \pi].$$

Cela correspond donc au cas :

$$\begin{cases} \cos(\nu_0) \leq 0 \\ 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0 \quad \text{si } \nu_f - \nu_0 < \pi. \end{cases}$$

On en déduit alors l'expression des coefficients de Lagrange :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\varepsilon \left(\sin(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) - 2 \cos(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} \right), \\ \lambda_2 &= -\varepsilon \left(e - \cos(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) - 2 \sin(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} \right), \end{aligned}$$

et le vecteur efficacité est ainsi complètement déterminé. La CNS 2 nous donne ensuite les impulsions :

$$\Delta V(\nu_0) = \frac{\cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2}{\sin(\nu_{i_0} - \nu_0)} (1 + e \cos(\nu_0)), \quad (\text{D.20})$$

$$(\text{D.21})$$

$$\Delta V(\nu_{i_0}) = -\frac{\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2}{\sin(\nu_{i_0} - \nu_0)} (1 + e \cos(\nu_{i_0})), \quad (\text{D.22})$$

$$(\text{D.23})$$

où :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_{i_0}) &= -\cos(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) - 2 \sin(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))}, \\ \sin(\nu_{i_0}) &= -\sin(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) + 2 \cos(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))}, \\ \sin(\nu_{i_0} - \nu_0) &= 2 \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))}. \end{aligned}$$

Les impulsions étant de signe opposé, on a nécessairement :

$$\operatorname{sgn}(\cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2) = \operatorname{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2) \quad (\text{D.24})$$

et par suite, puisque $\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) > 0$:

$$\varepsilon = -\operatorname{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2) = -\varepsilon_0. \quad (\text{D.25})$$

Explicitons la condition (D.24) : remarquons tout d'abord que si $\nu_f - \nu_0 < \pi$ et

$$\operatorname{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2) = \operatorname{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2),$$

alors la fonction $\nu \mapsto \operatorname{sgn}(\cos(\nu)z_1 + \sin(\nu)z_2)$ ne change pas de signe sur $[\nu_0, \nu_f]$. La condition (D.24) est donc automatiquement satisfaite.

A l'inverse, la fonction $\nu \mapsto \operatorname{sgn}(\cos(\nu)z_1 + \sin(\nu)z_2)$ peut s'annuler une ou deux fois sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$. Dans les deux cas, la plus petite anomalie, notée ν_1 , à laquelle cette fonction s'annule vérifie :

$$\cos(\nu_1) = -\varepsilon_0 \frac{z_2}{\|z\|}, \quad \sin(\nu_1) = \varepsilon_0 \frac{z_1}{\|z\|}, \quad \nu_1 \in [\nu_0, \nu_0 + \pi]$$

où $\varepsilon_0 = \operatorname{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2) = -\varepsilon$. Étant donné que $\nu_{i_0} - \nu_0 < \pi$ et la condition (D.24) est vérifiée, nécessairement : $\nu_0 + \pi \geq \nu_1 \geq \nu_{i_0} \geq \nu_0$, d'où : $\cos(\nu_1 - \nu_0) \leq \cos(\nu_{i_0} - \nu_0)$. Cette condition s'écrit :

$$\cos(\nu_1 - \nu_0) + 2e \cos(\nu_0) + 1 \leq 0,$$

ou encore :

$$\|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_0) + \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_0) \leq 0. \quad (\text{D.26})$$

De plus, comme $\varepsilon = -\varepsilon_0$, le vecteur efficacité est défini par :

$$\lambda_1 = \varepsilon_0 \left(\sin(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) - 2 \cos(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} \right), \quad (\text{D.27})$$

$$\lambda_2 = \varepsilon_0 \left(e - \cos(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) - 2 \sin(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} \right). \quad (\text{D.28})$$

Remarque 23. Pour qu'une impulsion initiale soit possible, il faut nécessairement que le second extremum du vecteur efficacité soit de norme supérieure ou égale à 1, soit : $e + \cos(\nu_{i_0}) \geq 0$. Or :

$$\begin{aligned} e + \cos(\nu_{i_0}) &= e - \cos(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) - \sin(\nu_0) \sin(\nu_{i_0} - \nu_0), \\ &= e - \cos(\nu_0) - 2e \cos^2(\nu_0) - \sin(\nu_0) \sin(\nu_{i_0} - \nu_0), \\ &= -e - \cos(\nu_0) - \sin(\nu_0) (\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) - 2e \sin(\nu_0)), \end{aligned}$$

avec $\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) = 2\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))}$, d'où :

$$e + \cos(\nu_0) + 2 \sin(\nu_0) \left(\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} - e \sin(\nu_0) \right) \leq 0.$$

Il reste donc à garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 sur toute la durée du rendez-vous. Pour cela, on impose la condition (D.15) en ν_0 et par les conditions suivantes en ν_f :

$$|p_\lambda(\nu_f)| < 1, \quad \operatorname{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_f)\right) = -\operatorname{sgn}(p_\lambda(\nu_{i_0})) = \varepsilon.$$

Connaissant $\sin(\nu_{i_0} - \nu_0)$, la condition de signe (D.15) s'écrit plus simplement de la façon suivante :

$$\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) - 2e \sin(\nu_0) > 0.$$

Cette condition est satisfaite si et seulement si $\sin(\nu_0) < 0$ ou si $\sin(\nu_0) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} \sin(\nu_{i_0} - \nu_0) - 2e \sin(\nu_0) > 0 &\iff \sqrt{-\cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} > \sqrt{e} \sin(\nu_0), \\ &\iff -\cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0)) > e \sin^2(\nu_0), \\ &\iff -\cos(\nu_0) > e \iff \cos(\nu_0) < -e. \end{aligned}$$

Sachant que $\cos(\nu_0) \leq 0$, la condition de signe est finalement équivalente à :

$$\sin(\nu_0) < \sqrt{1 - e^2}. \quad (\text{D.29})$$

Concernant les conditions en ν_f , en injectant les valeurs de λ calculées précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} |p_\lambda(\nu_f)| < 1 &\iff \cos(\nu_f - \nu_{i_0}) + 2e \cos(\nu_f) + 1 > 0, \\ &\iff \cos(\nu_f - \nu_0 - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0))) + 2e \cos(\nu_f) + 1 > 0, \\ &\iff \cos(\nu_f - \nu_0) - 2e \cos(\nu_0) \cos(\nu_f - \nu_0) + 2e \cos(\nu_f), \\ &\quad + \sin(\nu_f - \nu_0) \sin(\nu_{i_0} - \nu_0) > 0, \\ &\iff (\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) - 2e \sin(\nu_0)) \sin(\nu_f - \nu_0) + 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) > 0, \end{aligned}$$

d'où au final la condition :

$$2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} - e \sin(\nu_0) \right) \sin(\nu_f - \nu_0) + 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) > 0.$$

Remarquons que sous la condition : $\sin(\nu_0) < \sqrt{1 - e^2}$, on a :

$$\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) - 2e \sin(\nu_0) > 0.$$

Ainsi cette condition est automatiquement vérifiée dans le cas $\nu_f - \nu_0 < \pi$. De même :

$$\begin{aligned} \text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_f)\right) = \varepsilon &\iff (\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) - 2e \sin(\nu_0)) (\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_0)), \\ &\quad + \sin(\nu_f - \nu_0) + e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) < 0, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} - e \sin(\nu_0) \right) (\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_0)), \\ + \sin(\nu_f - \nu_0) + e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) < 0. \end{aligned}$$

2ème cas : Supposons que la date de l'impulsion soit définie par :

$$\nu_{i_0} = \nu_0 + 2\pi - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)),$$

ce qui correspond au cas :

$$\begin{cases} \nu_f - \nu_0 \geq \pi, \\ 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) \geq 0. \end{cases}$$

On en déduit alors l'expression des coefficients de Lagrange :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\varepsilon \left(\sin(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) + 2 \cos(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} \right), \\ \lambda_2 &= -\varepsilon \left(e - \cos(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) + 2 \sin(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} \right), \end{aligned}$$

et le vecteur efficacité est ainsi complètement déterminé. La CNS 2 nous donne ensuite les impulsions :

$$\Delta V(\nu_0) = \frac{\cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2}{\sin(\nu_{i_0} - \nu_0)} (1 + e \cos(\nu_0)), \quad (\text{D.30})$$

$$\Delta V(\nu_{i_0}) = -\frac{\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2}{\sin(\nu_{i_0} - \nu_0)} (1 + e \cos(\nu_{i_0})), \quad (\text{D.31})$$

où :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_{i_0}) &= -\cos(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) + 2 \sin(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))}, \\ \sin(\nu_{i_0}) &= -\sin(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) - 2 \cos(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))}, \\ \sin(\nu_{i_0} - \nu_0) &= -2 \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))}. \end{aligned}$$

Les impulsions étant de signe opposé, on a nécessairement :

$$\operatorname{sgn}(\cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2) = \operatorname{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2), \quad (\text{D.32})$$

et par suite, puisque $\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) < 0$:

$$\varepsilon = \operatorname{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2). \quad (\text{D.33})$$

On en déduit :

$$\lambda_1 = -\varepsilon_0 \left(\sin(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) + 2 \cos(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} \right), \quad (\text{D.34})$$

$$\lambda_2 = -\varepsilon_0 \left(e - \cos(\nu_0)(1 + 2e \cos(\nu_0)) + 2 \sin(\nu_0) \sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} \right). \quad (\text{D.35})$$

Explicitons la condition (D.32). Ici, puisque $\nu_f - \nu_0 \geq \pi$, elle s'écrit :

$$\|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_0) - \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_0) \leq 0. \quad (\text{D.36})$$

Il reste donc à garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 sur toute la durée du rendez-vous ce qui revient à imposer la condition (D.15) en ν_0 et les conditions suivantes en ν_f :

$$|p_\lambda(\nu_f)| < 1, \operatorname{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_f)\right) = -\operatorname{sgn}(p_\lambda(\nu_{i_0})) = \varepsilon.$$

Par un raisonnement similaire au précédent, la condition de signe (D.15) s'écrit :

$$\sin(\nu_0) < -\sqrt{1 - e^2}.$$

Concernant les conditions en ν_f , en injectant les valeurs de λ calculées précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} |p_\lambda(\nu_f)| < 1 &\iff \cos(\nu_f - \nu_{i_0}) + 2e \cos(\nu_f) + 1 > 0, \\ &\iff (\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) - 2e \sin(\nu_0)) \sin(\nu_f - \nu_0) + 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) > 0. \end{aligned}$$

Soit au final la condition :

$$\begin{aligned} 2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} + e \sin(\nu_0) \right) \sin(\nu_f - \nu_0) - 1 + \cos(\nu_f - \nu_0) < 0, \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_f)\right) = \varepsilon &\iff (\sin(\nu_{i_0} - \nu_0) - 2e \sin(\nu_0)) (\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_0)) \\ &\quad + \sin(\nu_f - \nu_0) + e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) < 0, \end{aligned}$$

équivalente à :

$$\begin{aligned} 2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} + e \sin(\nu_0) \right) (\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_0)), \\ - \sin(\nu_f - \nu_0) - e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) > 0. \end{aligned}$$

D.5 Une impulsion finale et une impulsion interne

Les résultats de ce paragraphe sont tout à fait similaires à ceux pour une solution à une impulsion initiale et une impulsion interne. Pour avoir une impulsion en ν_f , la condition (D.16) est remplacée par :

$$|p_\lambda(\nu_f)| = 1, \text{ soit : } 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_{i_0} - \nu_f) = 0.$$

Si :

$$\cos(\nu_f) > 0 \text{ ou } \begin{cases} \nu_f - \nu_0 < \pi \\ 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) > 0 \end{cases}$$

aucune impulsion finale n'est pas possible.

1er cas : supposons que la date de l'impulsion est donnée par :

$$\nu_{i_0} = \nu_f - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_f)) \in [\nu_f - \pi, \nu_f].$$

Cela correspond au cas où :

$$\begin{cases} \cos(\nu_f) \leq 0, \\ 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) \leq 0 \text{ si } \nu_f - \nu_0 < \pi. \end{cases}$$

On a alors : $\sin(\nu_{i_0} - \nu_f) = -2\sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))}$ puisque $\nu_{i_0} - \nu_f \in [-\pi, 0]$. On en déduit les coefficients de Lagrange :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\varepsilon \left(\sin(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) + 2 \cos(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} \right), \\ \lambda_2 = -\varepsilon \left(e - \cos(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) + 2 \sin(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} \right). \end{cases}$$

Le vecteur efficacité est donc complètement déterminé. Les impulsions sont complètement déterminées par la CNS 2 :

$$\Delta V(\nu_{i_0}) = \frac{\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_{i_0})} (1 + e \cos(\nu_{i_0})), \quad (\text{D.37})$$

$$\Delta V(\nu_f) = -\frac{\cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2}{\sin(\nu_f - \nu_{i_0})} (1 + e \cos(\nu_f)), \quad (\text{D.38})$$

où :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_{i_0}) &= -\cos(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) + 2 \sin(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))}, \\ \sin(\nu_{i_0}) &= -\sin(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) - 2 \cos(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))}, \\ \sin(\nu_f - \nu_{i_0}) &= 2\sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))}. \end{aligned}$$

Les impulsions étant de signe opposé, on a nécessairement :

$$\text{sgn}(\cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2) = \text{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2), \quad (\text{D.39})$$

et :

$$\varepsilon = \text{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2). \quad (\text{D.40})$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\varepsilon_f \left(\sin(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) + 2 \cos(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} \right), \\ \lambda_2 = -\varepsilon_f \left(e - \cos(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) + 2 \sin(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} \right). \end{cases}$$

Explicitons la condition (D.39). Par un raisonnement tout à fait analogue à celui fait pour la condition (D.24), on montre que que si $\nu_f - \nu_0 < \pi$ et

$$\text{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2) = \text{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2),$$

la condition (D.39) est donc automatiquement satisfaite. Sinon, on trouve la condition :

$$\|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon_f z_2) \cos(\nu_f) - \varepsilon_f z_1 \sin(\nu_f) \leq 0, \quad (\text{D.41})$$

avec $\varepsilon_f = \text{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2)$.

Il reste donc à garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 sur toute la durée du rendez-vous. Comme précédemment, on impose la condition suivante en ν_f :

$$\sin(\nu_f) > -\sqrt{1 - e^2},$$

et les conditions suivantes en ν_0 :

$$|p_\lambda(\nu_0)| < 1, \text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_0)\right) = \text{sgn}(p_\lambda(\nu_{i_0})) = -\varepsilon.$$

Au final, on obtient les conditions suivantes :

$$1 - \cos(\nu_f - \nu_0) + 2 \sin(\nu_f - \nu_0) \left(\sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} + e \sin(\nu_f) \right) \geq 0,$$

qui sont automatiquement vérifiées dans le cas où $\nu_f - \nu_0 < \pi$ et

$$2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} + e \sin(\nu_f) \right) (\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_f)), \\ + \sin(\nu_f - \nu_0) + e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) > 0.$$

2ème cas : supposons que la date de l'impulsion est définie par :

$$\nu_{i_0} = \nu_f + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_f)) - 2\pi \in [\nu_f - 2\pi, \nu_f - \pi].$$

Cela correspond au cas :

$$\cos(\nu_f) \leq 0 \text{ et } \begin{cases} \nu_f - \nu_0 \geq \pi \\ 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) \geq 0. \end{cases}$$

Alors les coefficients de Lagrange optimaux sont définis par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \varepsilon \left(-\sin(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) + 2 \cos(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} \right), \\ \lambda_2 = -\varepsilon \left(e - \cos(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) - 2 \sin(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} \right). \end{cases}$$

Les impulsions sont complètement déterminées par la CNS 2 :

$$\Delta V(\nu_{i_0}) = \frac{\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_{i_0})} (1 + e \cos(\nu_{i_0})), \quad (\text{D.42})$$

$$\Delta V(\nu_f) = -\frac{\cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2}{\sin(\nu_f - \nu_{i_0})} (1 + e \cos(\nu_f)), \quad (\text{D.43})$$

où :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_{i_0}) &= -\cos(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) - 2 \sin(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))}, \\ \sin(\nu_{i_0}) &= -\sin(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) + 2 \cos(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))}, \\ \sin(\nu_f - \nu_{i_0}) &= -2 \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))}. \end{aligned}$$

Les impulsions étant de signe opposé, on a nécessairement :

$$\text{sgn}(\cos(\nu_{i_0})z_1 + \sin(\nu_{i_0})z_2) = \text{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2), \quad (\text{D.44})$$

et :

$$\varepsilon = -\text{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2) = -\varepsilon_f. \quad (\text{D.45})$$

Le vecteur efficacité optimal est donc complètement déterminé par :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -\varepsilon_f \left(-\sin(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) + 2 \cos(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} \right), \\ \lambda_2 &= \varepsilon_f \left(e - \cos(\nu_f)(1 + 2e \cos(\nu_f)) - 2 \sin(\nu_f) \sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} \right). \end{cases}$$

Par un raisonnement tout à fait analogue à celui fait pour la condition (D.32), on montre que la condition (D.44) s'écrit :

$$\|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_f z_2) \cos(\nu_f) + \varepsilon_f z_1 \sin(\nu_f) \leq 0. \quad (\text{D.46})$$

Il reste donc à garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 sur toute la durée du rendez-vous. A nouveau, on impose la condition suivante en ν_f :

$$\sin(\nu_f) > \sqrt{1 - e^2},$$

et les conditions suivantes en ν_0 :

$$|p_\lambda(\nu_0)| \leq 1, \text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_0)\right) = \text{sgn}(p_\lambda(\nu_{i_0})) = -\varepsilon.$$

Au final, on obtient :

$$1 - \cos(\nu_f - \nu_0) - 2 \sin(\nu_f - \nu_0) \left(\sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} - e \sin(\nu_f) \right) \geq 0,$$

et

$$2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} - e \sin(\nu_f) \right) (\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_f)), \\ - \sin(\nu_f - \nu_0) - e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) > 0.$$

D.6 Deux impulsions initiale et finale, une impulsion interne

La CNS 1 impose dans ce cas les conditions :

$$\begin{cases} 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_{i_0} - \nu_f) = 0, \\ 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_{i_0} - \nu_0) = 0, \\ \nu_{i_0} \in [\nu_0, \nu_f]. \end{cases}$$

et on sait qu'une telle solution ν_{i_0} existe si et seulement si :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_0) &\leq 0, \quad \cos(\nu_f) \leq 0 \\ 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) &\leq 0, \\ 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) &\leq 0. \end{aligned}$$

On remarque en particulier que le cas $\nu_f - \nu_0 = \pi$ est exclu ici.

Il faut de plus que les deux équations soient compatibles entre elles. En particulier dans le cas $\nu_f - \nu_0 < \pi$, on doit avoir :

$$\nu_{i_0} = \nu_0 + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)) = \nu_f - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_f)).$$

Cela conduit à :

$$2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} - e \sin(\nu_0) \right) \sin(\nu_f - \nu_0) + 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) = 0.$$

Or d'après ce qui a été vu au Paragraphe D.4, on sait que chaque terme de cette somme est positif ou nul, donc nul, d'où $\sin(\nu_f - \nu_0) = 0$. Ceci est impossible lorsque $\nu_f - \nu_0 \in]0, \pi[$.

Reprenons les conditions vues aux paragraphes précédents. Une solution à 2 impulsions extrêmes et une impulsion interne est possible en combinant les conditions (Cd1) ou (Cd2) pour avoir une impulsion initiale et une impulsion interne avec $|p_\lambda(\nu_f)| = 1$ au lieu de $|p_\lambda(\nu_f)| < 1$ avec les conditions (Cd3) ou (Cd4) pour avoir une impulsion interne et une impulsion finale avec $|p_\lambda(\nu_0)| = 1$ au lieu de $|p_\lambda(\nu_0)| < 1$.

(Cd1) Date de l'impulsion interne : $\nu_{i_0} = \nu_0 + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)) \in [\nu_0, \nu_0 + \pi]$ à condition que :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_0) &\leq 0 \\ \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_0) + \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_0) &\leq 0, \\ \sin(\nu_0) &< \sqrt{1 - e^2}, \\ 2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} - e \sin(\nu_0) \right) \sin(\nu_f - \nu_0) + 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) &= 0. \end{aligned}$$

(Cd2) Date de l'impulsion interne : $\nu_{i_0} = \nu_0 - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)) + 2\pi \in [\nu_0 + \pi, \nu_0 + 2\pi]$ à condition que :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_0) &\leq 0 \\ 1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0) &\geq 0 \\ \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon_0 z_2) \cos(\nu_0) - \varepsilon_0 z_1 \sin(\nu_0) &\leq 0, \\ \sin(\nu_0) &< -\sqrt{1 - e^2}, \\ 2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} + e \sin(\nu_0) \right) \sin(\nu_f - \nu_0) - 1 + \cos(\nu_f - \nu_0) &= 0. \end{aligned}$$

(Cd3) Date de l'impulsion interne : $\nu_{i_0} = \nu_f - \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_f)) \in [\nu_f - \pi, \nu_f]$ à condition que :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_f) &\leq 0 \\ \|z\| + (2e\|z\| + \varepsilon_f z_2) \cos(\nu_f) - \varepsilon_f z_1 \sin(\nu_f) &\leq 0, \\ \sin(\nu_f) &> -\sqrt{1 - e^2}, \\ 2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} + e \sin(\nu_f) \right) \sin(\nu_f - \nu_0) + 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) &= 0. \end{aligned}$$

(Cd4) Date de l'impulsion interne : $\nu_{i_0} = \nu_f + \arccos(-1 - 2e \cos(\nu_0)) - 2\pi \in [\nu_f - 2\pi, \nu_f]$ à condition que :

$$\begin{aligned} \cos(\nu_f) &\leq 0 \\ 1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0) &\geq 0 \\ \|z\| + (2e\|z\| - \varepsilon_f z_2) \cos(\nu_f) + \varepsilon_f z_1 \sin(\nu_f) &\leq 0, \\ \sin(\nu_f) &> \sqrt{1 - e^2}, \\ 1 - \cos(\nu_f - \nu_0) - 2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_f))} - e \sin(\nu_f) \right) \sin(\nu_f - \nu_0) &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 24. *Un calcul simple montre que toutes les conditions de la forme :*

$$\begin{aligned} 2 \left(\sqrt{-e \cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_0))} - e \sin(\nu_0) \right) (\cos(\nu_f - \nu_0) + e \cos(\nu_0)) \\ + \sin(\nu_f - \nu_0) + e(\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)) < 0 \end{aligned}$$

sont automatiquement satisfaites lorsque la condition de compatibilité des solutions ν_{i_0} est satisfaite.

Les directions et amplitudes de poussée optimales sont déterminées via la CNS 2 par :

$$\frac{R(\nu_0)}{\rho(\nu_0)} \Delta V(\nu_0) + \frac{R(\nu_{i_0})}{\rho(\nu_{i_0})} \Delta V(\nu_{i_0}) + \frac{R(\nu_f)}{\rho(\nu_f)} \Delta V(\nu_f) = z.$$

D.7 Solutions à 2 impulsions initiale et finale

Dans ce paragraphe, on étudie maintenant le cas des solutions optimales sans impulsion interne. Les conditions d'optimalité s'écrivent alors de la façon suivante : les directions des impulsions sont données par la CNS 1 :

$$\begin{aligned}\Delta V(\nu_0) = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) &= -\frac{R(\nu_0)^T \lambda}{\rho(\nu_0)}, \\ \Delta V(\nu_f) = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sgn}(\Delta V(\nu_f)) &= -\frac{R(\nu_f)^T \lambda}{\rho(\nu_f)}.\end{aligned}$$

La CNS 2 s'écrit :

$$\frac{R(\nu_0)}{\rho(\nu_0)} \Delta V(\nu_0) + \frac{R(\nu_f)}{\rho(\nu_f)} \Delta V(\nu_f) = z.$$

Cas particulier : $\nu_f - \nu_0 = \pi$

D'après la CNS 1, on a donc :

$$\text{sgn}(\Delta V(\nu_f)) = -\frac{R(\nu_f)^T \lambda}{\rho(\nu_f)} = \frac{R(\nu_0)^T \lambda}{\rho(\nu_0 + \pi)}.$$

D'où $\text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) = -\text{sgn}(\Delta V(\nu_f))$ et

$$\cos(\nu_0) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(\nu_0) = \pm 1.$$

On pose $\varepsilon = \text{sgn}(\Delta V(\nu_0))$. Les CNS d'optimalité se simplifient donc de la façon suivante :

CNS 1. $\sin(\nu_0)\lambda_1 = \varepsilon$, soit :

$$\lambda_1 = \varepsilon \sin(\nu_0), \quad \lambda_2 \text{ quelconque.}$$

CNS 2.

$$\begin{aligned}|\Delta V(\nu_0)| + |\Delta V(\nu_f)| &= -\varepsilon \sin(\nu_0) z_1 \\ z_2 &= 0\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\varepsilon = -\text{sgn}(\sin(\nu_0)z_1)$ et :

$$\begin{aligned}\Delta V(\nu_0) &= -\text{sgn}(\sin(\nu_0)z_1) |\Delta V(\nu_0)|, \\ \Delta V(\nu_f) &= \text{sgn}(\sin(\nu_0)z_1) |\Delta V(\nu_f)|.\end{aligned}$$

avec :

$$|\Delta V(\nu_0)| + |\Delta V(\nu_f)| = \|z\|.$$

Il reste donc maintenant à garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 pendant toute la durée du rendez-vous. Les impulsions étant de directions opposées, le vecteur efficacité est nécessairement monotone sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$. Cela se traduit, compte tenu de la durée du rendez-vous, par des conditions de signe au bord :

$$\begin{aligned}\text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_0)\right) &= -\text{sgn}(p_\lambda(\nu_0)) = \varepsilon, \\ \text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_f)\right) &= \text{sgn}(p_\lambda(\nu_f)) = \varepsilon,\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\varepsilon(e\lambda_1 + \sin(\nu_0)\lambda_2) &\leq 0, \\ \varepsilon(e\lambda_1 - \sin(\nu_0)\lambda_2) &\leq 0.\end{aligned}$$

En réinjectant l'expression de λ_1 , les conditions précédentes s'écrivent :

$$\begin{aligned}e \sin(\nu_0) + \varepsilon \sin(\nu_0)\lambda_2 &\leq 0, \\ e \sin(\nu_0) - \varepsilon \sin(\nu_0)\lambda_2 &\leq 0.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sin(\nu_0) = -1 \quad \text{et} \quad |\lambda_2| \leq e,$$

et également :

$$\varepsilon = \text{sgn}(z_1).$$

En conclusion si $\nu_0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et si $\nu_f - \nu_0 = \pi$, alors la solution optimale est une solution à 2 impulsions initiale et finale définie par :

$$\begin{aligned} \Delta V(\nu_0) &= \text{sgn}(z_1)|\Delta V(\nu_0)|, \\ \Delta V(\nu_f) &= -\text{sgn}(z_1)|\Delta V(\nu_f)|. \end{aligned}$$

avec :

$$|\Delta V(\nu_0)| + |\Delta V(\nu_f)| = \|z\|.$$

Il existe en revanche une infinité de multiplicateurs de Lagrange définissant le vecteur efficacité optimal :

$$\lambda \in \{(-\text{sgn}(z_1), \lambda_2) ; \lambda_2 \in [-e, e]\}.$$

Cas général : $\nu_f - \nu_0 \neq \pi$

La CNS 2 est alors équivalente à :

$$\Delta V(\nu_0) = \frac{\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}(1 + e \cos(\nu_0)),$$

$$\Delta V(\nu_f) = -\frac{\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}(1 + e \cos(\nu_f)).$$

On en déduit alors que pour avoir une solution à deux impulsions initiale et finale, il faut nécessairement que :

$$\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2 \neq 0,$$

Dans le cas contraire, on retrouve des solutions à une impulsion initiale ou finale.

La CNS permet alors d'en déduire les directions des impulsions :

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) &= \text{sgn}\left(\frac{\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}\right), \\ \text{sgn}(\Delta V(\nu_f)) &= -\text{sgn}\left(\frac{\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}\right). \end{aligned}$$

L'expression des λ et du vecteur efficacité optimaux est donnée par :

$$\begin{cases} \lambda_1 &= -\frac{\cos(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_0))}{\sin(\nu_f - \nu_0)}\text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) + \frac{\cos(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_f))}{\sin(\nu_f - \nu_0)}\text{sgn}(\Delta V(\nu_f)), \\ \lambda_2 &= -\frac{\sin(\nu_f)(1 + e \cos(\nu_0))}{\sin(\nu_f - \nu_0)}\text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) + \frac{\sin(\nu_0)(1 + e \cos(\nu_f))}{\sin(\nu_f - \nu_0)}\text{sgn}(\Delta V(\nu_f)). \end{cases}$$

Il reste donc maintenant à garantir que la norme du vecteur efficacité soit inférieure ou égale à 1 pendant toute la durée du rendez-vous.

1er cas : Impulsions dans la même direction : $\text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) = \text{sgn}(\Delta V(\nu_f))$

On note : $\varepsilon = \text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) = \text{sgn}(\Delta V(\nu_f))$. Nécessairement, la condition suivante :

$$\text{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2) = -\text{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2),$$

est vérifiée. Les coefficients de Lagrange s'écrivent alors :

$$\lambda_1 = -\varepsilon \frac{\cos(\nu_f) - \cos(\nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \quad \lambda_2 = -\varepsilon \left(e + \frac{\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)} \right).$$

Il reste à garantir que la norme du vecteur efficacité soit inférieure ou égale à 1 pendant toute la durée du rendez-vous. Dans le cas de deux impulsions aux bords de même direction, le vecteur efficacité admet nécessairement un extremum de norme strictement inférieure à 1 dans l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$ et un extremum de norme supérieure à 1 en dehors de l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$ i.e. :

– Il existe $\nu_e \in [\nu_0, \nu_f]$ tel que : $\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_e) = 0$ et

$$|p_\lambda(\nu_e)| < 1. \quad (\text{D.47})$$

On a en particulier : $\cos(\nu_e) > -e$.

On impose également les conditions de signe suivantes :

$$\text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_0)\right) = -\text{sgn}(p_\lambda(\nu_0)) = \varepsilon,$$

$$\text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_f)\right) = \text{sgn}(p_\lambda(\nu_f)) = -\varepsilon.$$

Cela s'écrit aussi :

$$\text{sgn}((e + \cos(\nu_0))\lambda_1 + \sin(\nu_0)\lambda_2) = -\varepsilon \quad (\text{D.48})$$

$$\text{sgn}((e + \cos(\nu_f))\lambda_1 + \sin(\nu_f)\lambda_2) = \varepsilon. \quad (\text{D.49})$$

En réinjectant les expressions de λ dans les conditions (D.48) et (D.49), on trouve la condition suivante :

$$\frac{\cos(\nu_f - \nu_0) - 1}{\sin(\nu_f - \nu_0)} > 0,$$

soit au final : $\sin(\nu_f - \nu_0) < 0$, i.e. :

$$\nu_f - \nu_0 > \pi.$$

Considérons maintenant la condition (D.47) : la condition $\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_e) = 0$ s'écrit :

$$(e + \cos(\nu_e))\lambda_1 + \sin(\nu_e)\lambda_2 = 0.$$

Cela nous permet de réécrire la condition (D.47) sous la forme :

$$|\lambda_1| \leq |\sin(\nu_e)| \text{ ou encore : } |\lambda_2| \leq e + \cos(\nu_e).$$

En conclusion, à condition que $\nu_f - \nu_0 > \pi$, les impulsions optimales sont données par :

$$\Delta V(\nu_0) = \frac{\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)} (1 + e \cos(\nu_0)),$$

$$\Delta V(\nu_f) = -\frac{\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)} (1 + e \cos(\nu_f)),$$

de direction commune $\varepsilon = -\varepsilon_f = \varepsilon_0$, d'où : $\varepsilon_0 = -\varepsilon_f$. Les coefficients de Lagrange optimaux s'écrivent donc :

$$\lambda_1 = -\varepsilon_0 \frac{\cos(\nu_f) - \cos(\nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \quad \lambda_2 = -\varepsilon_0 \left(e + \frac{\sin(\nu_f) - \sin(\nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)} \right).$$

2ème cas : Impulsions dans des directions opposées : $\text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) = -\text{sgn}(\Delta V(\nu_f))$

On note $\varepsilon = \text{sgn}(\Delta V(\nu_0)) = -\text{sgn}(\Delta V(\nu_f))$. La condition suivante :

$$\text{sgn}(\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2) = \text{sgn}(\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2),$$

est nécessairement vérifiée. Les impulsions sont données par :

$$\Delta V(\nu_0) = \frac{\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}(1 + e \cos(\nu_0)),$$

$$\Delta V(\nu_f) = -\frac{\cos(\nu_0)z_1 + \sin(\nu_0)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)}(1 + e \cos(\nu_f)),$$

et sont de directions respectives : ε_f et $-\varepsilon_0$ si $\nu_f - \nu_0 < \pi$ et $-\varepsilon_f$ et ε_0 si $\nu_f - \nu_0 > \pi$. Les coefficients de Lagrange s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\varepsilon \frac{\cos(\nu_0) + \cos(\nu_f) + 2e \cos(\nu_0) \cos(\nu_f)}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \\ \lambda_2 = -\varepsilon \frac{\sin(\nu_0) + \sin(\nu_f) + e \sin(\nu_0 + \nu_f)}{\sin(\nu_f - \nu_0)}, \end{cases}$$

avec :

$$\varepsilon = \text{sgn} \left(\frac{\cos(\nu_f)z_1 + \sin(\nu_f)z_2}{\sin(\nu_f - \nu_0)} \right) = \begin{cases} \varepsilon_f = \varepsilon_0 & \text{si } \nu_f - \nu_0 < \pi, \\ -\varepsilon_f = -\varepsilon_0 & \text{si } \nu_f - \nu_0 > \pi. \end{cases}$$

Il faut encore garantir que la norme du vecteur efficacité reste inférieure ou égale à 1 pendant toute la durée du rendez-vous. Les impulsions étant aux bords, on est nécessairement dans la configuration où le vecteur efficacité admet deux extrema de norme supérieure à 1 à des dates n'appartenant pas à $[\nu_0, \nu_f]$. On en déduit en particulier que :

$$\nu_+ \notin [\nu_0, \nu_f] \text{ ou } \nu_- \notin [\nu_0, \nu_f].$$

Dans le cas contraire, la date de l'extremum de plus grande norme appartenant à l'intervalle $[\nu_+, \nu_-]$, serait également dans l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$.

De plus, les impulsions étant de directions opposées, le vecteur efficacité est nécessairement monotone sur l'intervalle $[\nu_0, \nu_f]$. Ceci se traduit, compte tenu de la durée du rendez-vous, par des conditions de signe au bord :

$$\text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_0)\right) = -\text{sgn}(p_\lambda(\nu_0)) = \varepsilon,$$

$$\text{sgn}\left(\frac{dp_\lambda}{d\nu}(\nu_f)\right) = \text{sgn}(p_\lambda(\nu_f)) = \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\text{sgn}((e + \cos(\nu_0))\lambda_1 + \sin(\nu_0)\lambda_2) = -\varepsilon, \quad (\text{D.50})$$

$$\text{sgn}((e + \cos(\nu_f))\lambda_1 + \sin(\nu_f)\lambda_2) = -\varepsilon. \quad (\text{D.51})$$

En réinjectant les expressions des coefficients de Lagrange, on montre que les conditions (D.50) et (D.51) sont respectivement équivalentes à :

$$\frac{1 + 2e \cos(\nu_f) + \cos(\nu_f - \nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)} > 0,$$

$$\frac{1 + 2e \cos(\nu_0) + \cos(\nu_f - \nu_0)}{\sin(\nu_f - \nu_0)} > 0.$$

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables. Number 55. Courier Corporation, 1964.
- [2] M.R. Akella and K. Alfriend. Probability of collision between space objects. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 23(5), September-October 2000.
- [3] F. Alby, E. Lansard, and T. Michal. Collision of cerise with space debris. In Second European Conference on Space Debris, volume 393, page 589, 1997.
- [4] S. Alfano. Aerospace support to space situation awareness. Applicationes Mathematicae, October 2002.
- [5] S. Alfano. A numerical implementation of spherical objet collision probability. Journal of Astronautical Sciences, 53(1), January-March 2005.
- [6] S. Alfano. Relating position uncertainty to maximum conjunction probability. Journal of Astronautical Sciences, 53(2), April-June 2005.
- [7] S. Alfano. Satellite collision probability enhancements. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 29(3), May-June 2006.
- [8] S. Alfano. Review of conjunction probability methods for short-term encounters. In Proceedings of AAS Specialist Conference, Sedonna, Arizona, USA, February 2007.
- [9] S. Alfano. Satellite conjunction monte carlo analysis. In Proceedings of AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, number AAS 09-233, Savannah, Georgia, USA, February 2009.
- [10] K.T. Alfriend, M.R. Akella, J. Frisbee, F.L. Foster, D-J Lee, and M. Wilkins. Probability of collision error analysis. Journal of Space Debris, 1(1), 1999.
- [11] D. Arzelier, M. Kara-Zaitri, C. Louembet, and A. Delibasi. Using polynomial optimization to solve the fuel-optimal linear impulsive rendezvous problem. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 34(5) :1567–1573, 2011.
- [12] D. Arzelier, C. Louembet, A. Rondepierre, and M. Kara-Zaitri. A new mixed iterative algorithm to solve the fuel-optimal linear impulsive rendezvous problem. Journal of Optimization Theory and Applications, 159(1) :210–230, octobre 2013.
- [13] R.R. Bate, D.D. Mueller, and J.E. White. Fundamentals of Astrodynamics. Dover. Cambridge University Press, New York, USA, 1971.
- [14] D. Bertsimas and J.N. Tsitsiklis. Introduction to linear optimization. AIAA. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1997.
- [15] J.T. Betts. Practical methods for optimal control using nonlinear programming. Advances in Design and Control. SIAM, Philadelphie, Pennsylvanie, USA, 2001.
- [16] D. Bird. Sharing space situational awareness data. Technical report, DTIC Document, 2010.
- [17] L. Blackmore, H. Li, and B. Williams. A probabilistic approach to optimal robust path planning with obstacles. In American Control Conference, Minneapolis, MA, June 2006.
- [18] L. Blackmore and M. Ono. Convex chance constrained predictive control without sampling. In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, pages 7–21, Chicago, Illinois, USA, 2009.

- [19] L. Blackmore, M. Ono, and B.C. Williams. Chance-constrained optimal path planning with obstacles. Robotics, IEEE Transactions on, 27(6) :1080–1094, 2011.
- [20] C. Bombardelli and J. Hernando-Ayuso. Optimal impulsive collision avoidance in low earth orbit. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 38(2) :217–225, 2015.
- [21] S. Boyd and L. Vandenberghe. Convex optimization. Cambridge university press, 2004.
- [22] G. Calafiore and M.C. Campi. Uncertain convex programs : randomized solutions and confidence levels. Mathematical Programming, 102(1) :25–46, 2005.
- [23] M.C. Campi and S. Garatti. The exact feasibility of randomized solutions of uncertain convex programs. SIAM Journal on Optimization, 19(3) :1211–1230, 2008.
- [24] T.E. Carter. Optimal impulsive space trajectories based on linear equations. Journal of Optimization Theory and Applications, 70(2), August 1991. doi : 10.1007/BF00940627.
- [25] T.E. Carter and S.A. Alvarez. Quadratic-based computation of four-impulse optimal rendezvous near circular orbit. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 23(1) :109–117, 2000. doi : 10.2514/2.4493.
- [26] T.E. Carter and J. Brient. Linearized impulsive rendezvous problem. Journal of Optimization Theory and Applications, 86(3), September 1995. doi : 10.1007/BF02192159.
- [27] F.K. Chan. Collision probability analyses for earth-orbiting satellites. Advances in the Astronautical Sciences, 96, 1997.
- [28] F.K. Chan. Spacecraft Collision Probability. AIAA. The Aerospace Press, 2008.
- [29] S. Chevillard and M. Mezzarobba. Multiple-Precision Evaluation of the Airy Ai Function with Reduced Cancellation. In A. Nannarelli, P.-M. Seidel, and P. T. P. Tang, editors, 21st IEEE SYMPOSIUM on Computer Arithmetic, pages 175–182, Los Alamitos, CA, Avril 2013. IEEE Computer Society.
- [30] D. Chiarappa. Analysis and design of space vehicle flight control systems. Note technique CR-827, NASA, juillet 1967.
- [31] B.A. Conway, editor. Spacecraft Trajectory Optimization. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2010.
- [32] V.T. Coppola. Evaluating the Short Encounter Assumption of the Probability of Collision Formula. In AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, number AAS 12-248, February 2012.
- [33] V.T. Coppola. Including Velocity Uncertainty in the Probability of Collision Between Space Objects. In AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, number AAS 12-247, February 2012.
- [34] V.T. Coppola and J. Woodburn. Determination of close approaches based on ellipsoidal threat volumes. Advances in the Astronomical Sciences : Spaceflight Mechanics, 102 :1013–1024, 1999.
- [35] V.T. Coppola, J. Woodburn, and R. Hujsak. Effects of cross correlated covariance on spacecraft collision probability. In AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, February 2004.
- [36] H.D. Curtis. Orbital Mechanics for Engineering Students. Dover. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2005.
- [37] A.R. DiDonato and M.P. Jarnagin. Integration of the general bivariate gaussian distribution over an offset circle. Mathematics of Computation, 15 :375–382, 1961.
- [38] J.C. Dolado, P. Legendre, R. Garmier, B. Revelin, and X. Pena. Satellite collision probability computation for long term encounters. Number AAS 11-419, Janvier 2012.
- [39] E.M. Dowlan and J. Seddon. Orbital rendezvous techniques. Journal of BIS, 19 :498–510, 1963.
- [40] W. Fehse, editor. Automated rendezvous and docking of spacecraft. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [41] C.A. Floudas. Nonlinear and mixed-integer optimization : fundamentals and applications. Oxford University Press, 1995.

- [42] J.L. Foster and H.S. Estes. A parametric analysis of orbital debris collision probability and maneuver rate for space debris. NASA/JSC-25898, August 1992.
- [43] W. Gawronski, J. Müller, and M. Reinhard. Reduced cancellation in the evaluation of entire functions and applications to the error function. SIAM Journal on Numerical Analysis, 45(6) :2564–2576, 2007. <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/060669589>.
- [44] A. Genz and F. Bretz. Computation of multivariate normal and t probabilities, volume 45. Springer, 2009.
- [45] F.W. Gobetz and J.R. Doll. A survey of impulsive trajectories. AIAA Journal, 7(5) :801–834, 1969.
- [46] Inc. Gurobi Optimization. Gurobi optimizer reference manual, 2014. <http://www.gurobi.com>.
- [47] B.C. Hacker. The idea of rendezvous : From space station to orbital operations in space-travel thought, 1895-1951. Technology and Culture, 15(3) :373–388, juillet 1974.
- [48] R. Henrion. Introduction to chance-constrained programming, 2004. <http://stprog.org/SPIntro/intro2ccp.php>.
- [49] R. Henrion. Structural properties of linear probabilistic constraints†. Optimization, 56(4) :425–440, 2007.
- [50] R. Henrion and A. Möller. A gradient formula for linear chance constraints under gaussian distribution. Mathematics of Operations Research, 37(3) :475–488, 2012.
- [51] G.P. Herring. Orbital transfer and rendezvous : A bibliography. Note technique HSM-N42-67, Chrysler Corporation, mai 1967.
- [52] J.C. Houbolt. Problems and potentialities of space rendezvous. Astronautica Acta, 7 :406–429, 1961.
- [53] N.L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan. Continuous univariate distributions, vol. 1-2, 1994.
- [54] J.L. Junkins and H. Schaub. Analytic Mechanics of Space Systems. AIAA Education Series. AIAA, Reston, Virginia, USA, 2003.
- [55] T.S. Kelso. Analysis of the 2007 chinese asat test and the impact of its debris on the space environment. In 8th Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference, Maui, HI, 2007.
- [56] T.S. Kelso. Analysis and implications of the iridium 33-cosmos 2251 collision. In Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference, volume 1, page 3, 2009.
- [57] D.J. Kessler and B.G. Cour-Palais. Collision frequency of artificial satellites : The creation of a debris belt. Journal of Geophysical Research : Space Physics (1978–2012), 83(A6) :2637–2646, 1978.
- [58] H. Klinkrad. Space Debris : Models and Risk Analysis. Springer Science & Business Media, 2006.
- [59] S. Kotz, N.L. Johnson, and D.W. Boyd. Series representation of the distribution of quadratic forms in normal variables i. central case. Ann. Math. Statist., 38 :823–837, 1967.
- [60] S. Kotz, N.L. Johnson, and D.W. Boyd. Series representation of the distribution of quadratic forms in normal variables ii. non-central case. Ann. Math. Statist., 38 :838–848, 1967.
- [61] R. Larsson, J. Mueller, S. Thomas, B. Jakobsson, and P. Bodin. Orbit constellation safety on the prisma in-orbit formation flying test bed. In 3rd Int. Symp. on Formation Flying, Missions and Technologies, Noordwijk, Pays-Bas, April 2008.
- [62] J.B. Lasserre and E.S. Zeron. Solving a class of multivariate integration problems via laplace techniques. Applicationes Mathematicae, 2001.
- [63] D.F. Lawden. The determination of minimal orbits. Journal of the British Interplanetary Society, 11(2) :216–224, 1952.
- [64] D.F. Lawden. Optimal transfer via tangential ellipses. Journal of the British Interplanetary Society, 11(6) :278–289, 1952.

- [65] D.F. Lawden. Escape to infinity from circular orbits. Journal of the British Interplanetary Society, 12(2) :68–71, 1953.
- [66] D.F. Lawden. Minimal rocket trajectories. American Rocket Society Journal, 23(6) :360–365, November-December 1953.
- [67] D.F. Lawden. Optimal transfer between circular orbits about two planets. Astronautica Acta, 1 :89–99, 1955.
- [68] D.F. Lawden. Transfer between circular orbits. Jet Propulsion, 26(7) :555–558, 1956.
- [69] D.F. Lawden. Optimal escape from a circular orbit. Astronautica Acta, 4 :218–233, 1958.
- [70] D.F. Lawden. Interplanetary rocket trajectories. In F.I. Ordway, editor, Advances in Space Sciences, volume 1, pages 1–53. Academic Press, New York, NY, USA, 1959.
- [71] D.F. Lawden. Optimal programme for corrective maneuvers. Astronautica Acta, 6(4) :195–205, 1960.
- [72] D.F. Lawden. The theory of correctional maneuvers in interplanetary space. Astronautica Acta, 6 :48–60, 1960.
- [73] D.F. Lawden. Impulsive transfer between elliptical orbits. In G. Leitmann, editor, Optimization techniques with applications to aerospace systems, pages 323–350. Academic Press, New York, NY, USA, 1962.
- [74] D.F. Lawden. Optimal intermediate thrust arcs in a gravitational field. Astronautica Acta, 8 :106–123, 1962.
- [75] D.F. Lawden. Optimal trajectories for space navigation. Butterworth, London, England, 1963.
- [76] B.Y. Levin. Lectures on Entire Functions. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Soc., 1996.
- [77] C. Louembet, D. Arzelier, and G. Deaconu. Robust rendezvous planning under maneuver execution errors. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 38(1) :76–93, 2014.
- [78] D. G. Luenberger. Optimization by vector space methods. John Wiley & Sons, 1969.
- [79] J.-P. Marec. Transferts infinitésimaux impulsions économiques entre orbites quasi-circulaires non-coplanaires. Note technique 115, ONERA, avril 1966.
- [80] J.-P. Marec. Trajectoires spatiales optimales. Support de cours SUPAERO, 1983.
- [81] J. Morio, J.C. Dolado Perez, and C. et al Vergé. Estimation of rare event probabilities in complex aerospace and other systems, chapter Estimation of collision probability between space debris and satellite. Elsevier-Woodhead Publishing. August 2015.
- [82] N.E. Myridis. Probability, random processes, and statistical analysis, by h. kobayashi, bl mark and w. turin : Scope : textbook. level : undergraduate students, researchers, teachers. Contemporary Physics, 53(6) :533–534, 2012.
- [83] L.W. Neustadt. Optimization, a moment problem, and nonlinear programming. SIAM Journal of Control, 2(1) :33–53, 1964.
- [84] L.W. Neustadt. A general theory of minimum-fuel space trajectories. SIAM Journal of Control, 3(2) :317–356, 1965.
- [85] NASA Orbital Debris Program Office. Orbital debris faq, 2012. [http ://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/faqs.html](http://orbitaldebris.jsc.nasa.gov/faqs.html).
- [86] J. Pachares. Note on the distribution of a definite quadratic form. Ann. Math. Statist., 26 :128–131, 1955.
- [87] A. Papoulis and S.U. Pillai. Probability, random variables, and stochastic processes. Tata McGraw-Hill Education, 2002.
- [88] R.P. Patera. General method for calculating satellite conjunction probability. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 24(4), July-August 2001.
- [89] R.P. Patera. Satellite collision probability for nonlinear relative motion. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 26(5), September-October 2003.

- [90] R.P. Patera. Calculating collision probability for arbitrary space vehicle shapes via numerical quadrature. Journal of guidance, control, and dynamics, 28(6) :1326–1328, 2005.
- [91] R.P. Patera. Space vehicle conflict-avoidance analysis. Journal of guidance, control, and dynamics, 30(2) :492–498, 2007.
- [92] R.P. Patera. Space vehicle conflict probability for ellipsoidal conflict volumes. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 30(6) :1819–1822, 2007.
- [93] R.P. Patera and G.E. Peterson. Space vehicle maneuver method to lower collision risk to an acceptable level. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 26(2), March-April 2003.
- [94] P.B. Patnaik. The non-central χ^2 -and f-distribution and their applications. Biometrika, pages 202–232, 1949.
- [95] J. Peyrard, D. Escorial, A. Agenjo, A. Kron, and A. Cropp. Design and prototyping of proba-3 formation flying system. In Proceedings of the 5th International Conference on Spacecraft Formation Flying Missions and Technologies (SFFMT), Munich, Germany, May 2013.
- [96] A. Prékopa. Stochastic programming. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1995.
- [97] J.E. Prussing. Optimal multiple-impulse orbital rendezvous. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, August 1967.
- [98] J.E. Prussing. Illustration of the primer vector in time-fixed orbit transfer. AIAA Journal, 7(6) :1167–1168, 1969.
- [99] J.E. Prussing. Optimal impulsive linear systems : Sufficient conditions and maximum number of impulses. Journal of the Astronautical Sciences, 43(2) :195–206, 1995.
- [100] J.E. Prussing and J.H. Chiu. Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits. Journal of Guidance, 9(1) :17–22, 1986.
- [101] J.E. Prussing and R.S. Clifton. Optimal multiple-impulse satellite avoidance maneuvers. In AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Paper No. AAS 87-543, Kalispell, Montana, USA, 1987.
- [102] S.O. Rice. Mathematical analysis of random noise. Bell System Technical Journal, The, 24(1) :46–156, 1945.
- [103] A.R. Richards, T. Schouwenaars, J.P. How, and E. Feron. Spacecraft trajectory planning with avoidance constraints using mixed-integer linear programming. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 25(4), August 2002.
- [104] H. Robbins. The distribution of a definite quadratic form. Ann. Math. Statist., 19 :266–270, 1948.
- [105] H.M. Robbins. Analytical study of the impulsive approximation. AIAA Journal, 4(8) :1417–1423, 1966.
- [106] I Ross. Modern Astrodynamics, chapter 6 Space trajectory optimization and L^1 -optimal control problems. Elsevier Astrodynamics Series. Gurfil, P., 2007.
- [107] L.A. Rubel and J.E. Colliander. Entire and meromorphic functions. Universitext. Springer, New York, 1996.
- [108] H. Ruben. Probability content of regions under spherical normal distributions iv : the distribution of homogeneous and non-homogeneous quadratic functions of normal variables. Ann. Math. Statist., 33 :542–570, 1962.
- [109] B. Salvy. D-finiteness : Algorithms and applications. In M. Kauers, editor, ISSAC 2005 : Proceedings of the 18th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Beijing, China, July 24-27, 2005, pages 2–3. ACM Press, 2005. Abstract for an invited talk.
- [110] B. Salvy and P. Zimmermann. Gfun : a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. ACM Transactions on Mathematical Software, 20(2) :163–177, 1994.
- [111] N. Sánchez-Ortiz, M. Belló-Mora, and H. Klinkrad. Collision avoidance manoeuvres during spacecraft mission lifetime : Risk reduction and required δv . Advances in Space Research, 38(9) :2107–2116, 2006.

- [112] R. Serra, D. Arzelier, M. Joldes, and A. Rondepierre. Probabilistic collision avoidance for long-term space encounters via risk selection. In Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control, pages 679–698. Springer, 2015.
- [113] R. Serra, D. Arzelier, J-B. Lasserre, M. Joldes, and A. Rondepierre. A new method to compute the probability of collision for short-term space encounters. In Proceedings of AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, San Diego, California, USA, August 2014.
- [114] R. Serra, D. Arzelier, A. Rondepierre, and J.-L. Calvet. Analytical optimal solutions of impulsive out-of-plane rendezvous around elliptic orbits. In IFAC World Congress, volume 19, pages 2231–2236, 2014.
- [115] R. Serra, D. Arzelier, A. Rondepierre, and J.L. Calvet. Analytical optimal solutions of impulsive out-of-plane rendezvous around elliptic orbits : Results and derivations. Technical Note submitted to Journal of Guidance, Control and Dynamics 13468, LAAS-CNRS, November 2013. <http://homepages.laas.fr/arzelier/publis/>.
- [116] B.K. Shah and C.G. Khatri. Distribution of a definite quadratic form for non-central normal variates. Ann. Math. Statist., 32 :883–887, 1961. Corrected–Ann. Math. Statist., 34 (1963),673.
- [117] A. Shapiro, D. Dentcheva, and A. Ruszczyński. Stochastic Programming : Modeling and Theory. MPS-SIAM series on Optimization. SIAM, 2009.
- [118] G.L. Slater, S.M. Byram, and T.W. Williams. Collision avoidance for satellites in formation flight. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 29(5) :1140–1146, 2006.
- [119] R.A. Smith. Establishing contact between orbiting vehicles. Journal of BIS, 10 :295–299, 1951.
- [120] R.P. Stanley. Differentiably finite power series. European Journal of Combinatorics, 1(2) :175–188, 1980.
- [121] J. Tschauner and P. Hempel. Optimale beschleunigungs-programme fur des rendezvous manover. Astronautica Acta, 5-6 :296–307, 1964.
- [122] A.W. Vogeley and R.F. Brissenden. Survey of rendezvous progress. Progress in Astronautics and Aeronautics, 13, 1964.
- [123] G.N. Watson. Bessel functions. Cambridge University Press, Cambridge, 19 :22, 1944.
- [124] D.V. Widder. The Laplace transform. Princeton mathematical series. Princeton university press, 1946.
- [125] D.V. Widder. An introduction to transform theory. Academic Press New York, 1971.
- [126] E.B. Wilson and M.M. Hilferty. The distribution of chi-square. proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 17(12) :684, 1931.
- [127] D.C. Woffinden and D.K. Geller. Navigating the Road to Autonomous Orbital Rendezvous. Journal of Spacecraft and Rockets, 44 :898–909, juillet 2007.
- [128] K. Yamanaka and F. Ankersen. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 25(1), january 2002.
- [129] D. Zeilberger. A holonomic systems approach to special functions identities. Journal of Computational and Applied Mathematics, 32(3) :321–368, 1990.
- [130] B. Zhou, Z. Lin, and G.R. Duan. Lyapunov differential equation approach to elliptical orbital rendezvous with constrained controls. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 34(2) :345–358, 2011.

Résumé

Cette thèse traite de l'évitement de collision entre un engin spatial opérationnel, appelé objet primaire, et un débris orbital, dit secondaire. Ces travaux concernent aussi bien la question de l'estimation du risque pour une paire d'objets sphériques que celle du calcul d'un plan de manœuvres d'évitement pour le primaire. Pour ce qui est du premier point, sous certaines hypothèses, la probabilité de collision s'exprime comme l'intégrale d'une fonction gaussienne sur une boule euclidienne, en dimension deux ou trois. On en propose ici une nouvelle méthode de calcul, basée sur les théories de la transformée de Laplace et des fonctions holonomes. En ce qui concerne le calcul de manœuvres de propulsion, différentes méthodes sont développées en fonction du modèle considéré. En toute généralité, le problème peut être formulé dans le cadre de l'optimisation sous contrainte probabiliste et s'avère difficile à résoudre. Dans le cas d'un mouvement considéré comme relatif rectiligne, l'approche par scénarios se prête bien au problème et permet d'obtenir des solutions admissibles. Concernant les rapprochements lents, une linéarisation de la dynamique des objets et un recouvrement polyédral de l'objet combiné sont à la base de la construction d'un problème de substitution. Deux approches sont proposées pour sa résolution : une première directe et une seconde par sélection du risque. Enfin, la question du calcul de manœuvres de proximité en consommation optimale et temps fixé, sans contrainte d'évitement, est abordée. Par l'intermédiaire de la théorie du vecteur efficacité, la solution analytique est obtenue pour la partie hors-plan de la dynamique képlérienne linéarisée.

Mots-clés : optimisation, contrainte probabiliste, approche scénarios, évitement de collision, probabilité de collision, développement en série, fonctions holonomes, collision en orbite, débris spatiaux, rendez-vous, commande optimale, vecteur efficacité

Abstract

This thesis is about collision avoidance for a pair of spherical orbiting objects. The primary object - the operational satellite - is active in the sense that it can use its thrusters to change its trajectory, while the secondary object is a space debris that cannot be controlled in any way. On-ground radars or other means allow to foresee a conjunction involving an operational spacecraft, leading in the production of a collision alert. The latter contains statistical data on the position and velocity of the two objects, enabling for the construction of a probabilistic collision model. The work is divided in two parts : the computation of collision probabilities and the design of maneuvers to lower the collision risk. In the first part, two kinds of probabilities - that can be written as integrals of a Gaussian distribution over an Euclidean ball in 2 and 3 dimensions - are expanded in convergent power series with positive terms. It is done using the theories of Laplace transform and D-finite functions. In the second part, the question of collision avoidance is formulated as a chance-constrained optimization problem. Depending on the collision model, namely short or long-term encounters, it is respectively tackled via the scenario approach or relaxed using polyhedral collision sets. For the latter, two methods are proposed. The first one directly tackles the joint chance constraints while the second uses another relaxation called risk selection to obtain a mixed-integer program. Additionally, the solution to the problem of fixed-time fuel-minimizing out-of-plane proximity maneuvers is derived. This optimal control problem is solved via the primer vector theory.

Keywords : optimization, chance constraint, scenario approach, collision avoidance, collision probability, series expansion, D-finite functions, orbital collision, space debris, rendezvous, optimal control, primer vector