



HAL
open science

Contributions des fluctuations turbulentes au champ magnétique induit dans une expérience en sodium liquide

Simon Cabanes

► **To cite this version:**

Simon Cabanes. Contributions des fluctuations turbulentes au champ magnétique induit dans une expérience en sodium liquide. Géophysique [physics.geo-ph]. Université de Grenoble, 2014. Français. NNT : 2014GRENU038 . tel-01266196

HAL Id: tel-01266196

<https://theses.hal.science/tel-01266196>

Submitted on 2 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Physique des planètes**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Simon Cabanes

Thèse dirigée par **Henri-Claude Nataf**

et codirigée par **Nathanaël Schaeffer**

préparée au sein **Institut des sciences de la Terre (ISTerre)**

et de **Terre, univers, environnement**

Contributions des fluctuations turbulentes au champ magnétique induit dans une expérience en sodium liquide

Thèse soutenue publiquement le **13 Novembre 2014**,
devant le jury composé de :

M, Alexandre Fournier

Pr. Institut de Physique du Globe de Paris, Rapporteur

M, Nicolas Plihon

CR. Ecole Normale Supérieure de Lyon, Rapporteur

M, Frank Stefani

Pr. Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf, Examineur

M, Jean Virieux

Pr. Université Joseph Fourier, Examineur

M, Henri-Claude Nataf

DR CNRS. Université Joseph Fourier, Directeur de thèse

M, Nathanaël Schaeffer

CR. Université Joseph Fourier, Co-Directeur de thèse



Rapport soumis aux rapporteurs, dans le but de sanctionner le
dossier pour l'obtention du grade de
Docteur en Sciences de la Terre et de l'Univers
de
l'Université de Grenoble - Grenoble - France

**CONTRIBUTIONS DES FLUCTUATIONS
TURBULENTES AU CHAMP MAGNÉTIQUE
INDUIT DANS UNE EXPÉRIENCE EN
SODIUM LIQUIDE.**

Simon Cabanes, le 18 Septembre 2014

La Thèse sera soutenue publiquement devant le jury composé de :

M. ALEXANDRE FOURNIER	Institut de Physique du Globe de Paris	(Rapporteur)
M. NICOLAS PLIHON	Ecole Normale Supérieure de Lyon	(Rapporteur)
M. FRANK STEFANI	Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf	(Examineur)
M. JEAN VIRIEUX	UJF (Grenoble)	(Examineur)
M. HENRI-CLAUDE NATAF	UJF (CNRS Grenoble)	(Directeur de thèse)
M. NATHANAËL SCHAEFFER	UJF (CNRS Grenoble)	(Directeur de thèse)

Cette hypothèse fit rêver Pécuchet. Il prit dans sa bibliothèque le Guide du magnétiseur par Montacabère, le relut attentivement, et initia Bouvard à la théorie.

Tous les corps animés reçoivent et communiquent l'influence des astres, propriété analogue à la vertu de l'aimant. En dirigeant cette force on peut guérir les malades, voilà le principe. La science, depuis Mesmer, s'est développée. Mais il importe toujours de verser le fluide et de faire des passes qui, premièrement, doivent endormir.

— « Eh bien, endors-moi » dit Bouvard.

— « Impossible » répliqua Pécuchet. « Pour subir l'action magnétique et pour la transmettre la foi est indispensable. » Puis considérant Bouvard : —

« Ah ! quel dommage ! »

Gustave Flaubert dans Bouvard et Pécuchet

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont à l'ensemble de l'équipe Géodynamo, parmi lesquels Patrick La Rizza, Jean-Paul Masson et Adeline Richard. Tous les trois m'ont épaulé lors de mes premières confrontations avec l'expérience DTS. Je souhaite remercier David Cébron, Dominique Jault, Nicolas Gillet, Franck Plunian, Philippe Cardin et Claire Bouligand avec qui j'ai eu l'occasion de partager d'intéressantes discussions. Chacun fut également compagnon de voyage à Leeds en Angleterre, à Mérida au Mexique ou encore aux Fontenelles dans le Jura. Je les retrouverai donc avec grand plaisir lors de futurs déplacements. Merci à mes deux acolytes François Labbé et Gabrielle Hellio pour avoir commencé une thèse la même année sur des sujets tout aussi tordus. Les galères partagées sont toujours plus aisées. Enfin je tiens à remercier tout particulièrement Henri-Claude Nataf et Nathanaël Schaeffer qui furent tous deux mes encadrants, mes co-auteurs et d'agréables compagnons de recherche. Ils ont eu la patience de m'enseigner les ficelles du métier et je leur en suis très reconnaissant.

Je tiens aussi à saluer le travail réalisé par mes deux rapporteurs, Alexandre Fournier et Nicolas Plihon. Je remercie Frank Stefani, d'abord pour avoir fait le déplacement depuis l'Allemagne et ensuite pour avoir pris le temps de lire attentivement mon manuscrit en français. Enfin, merci à Jean Virieux d'avoir présidé ce jury.

Ces remerciements sont également destinés à l'ensemble des membres du laboratoire, habitant du 1er au 3^{ème} étage sans distinction d'appartenance disciplinaire. Merci aux doctorants de ma promotion pour m'avoir soutenu pendant ces trois années, merci à ceux qui m'ont précédé pour m'avoir montré qu'il ne fallait jamais se décourager et merci à ceux qui m'ont succédé, auprès desquels, fort de mon expérience, j'ai pu feindre de l'assurance et ainsi me rassurer.

Mes amis, sont eux aussi dignes d'élogieux remerciements, ceux qui ont suivi mes débuts à l'accordéon, ceux avec qui j'ai passé des week-ends entiers sur un praticable de danse et ceux qui m'ont accompagné lors d'interminables cafés où chacun s'efforçait, sans s'en flatter, de repousser le moment où nous devions nous remettre à travailler. Merci à Rachel pour toutes les soirées organisées, merci à Cécile pour sa patience et ses moqueries, merci à Mélody mon éternel duo, merci à Yves pour ses cours de danse, à Jonhy Jonh pour ses sarcasmes (c'était un vrai plaisir), à Gabie et Gwen pour les bons moments passés ensemble, à François pour le chocolat, à Margaux, Julie, Jeannot et tous les Pierrots (Bottelin, Boué, Labreuche..). Merci à toute ma petite famille, de mes parents à mon petit frère en passant par mes oncles, tantes, cousins et cousines qui m'ont fortement soutenu. Merci à mes grands-parents paternels et maternels, je suis ravi d'apporter une publication supplémentaire au nom de Cabanes. Merci à mes amis Alti-Ligériens, Florent, Gaspard, Jo, Alexandre, David, Audrey, Bebert, Julie, Margot, Laetitia, Marie. Un merci à Clément, Adri, Romain, Marie et Paulette qui m'ont accompagné tout au long de mon cursus universitaire.

Enfin, j'attribue un dernier merci à Bapt', né roturier sous le nom de Baptiste Bedessem Porte à Strasbourg le 12 avril 1988 ; je passe ici la liste exhaustive de ses contributions lors de ces trois dernières années et je lui offre par les présents remerciements le grade de meilleur pote d'un docteur de l'université de Grenoble.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	vii
I Introduction	1
1 Introduction générale	3
1.1 L'hypothèse dynamo	3
1.1.1 L'origine de cette hypothèse	3
1.1.2 L'approche cinématique	4
1.2 Les mécanismes d'une dynamo cinématique	6
1.2.1 l'équation d'induction	6
1.2.2 Les théorèmes anti-dynamo	8
1.3 Les premières expériences dynamos	9
1.4 L'apport des fluctuations turbulentes	11
1.4.1 Les expériences de seconde génération	11
1.4.2 La complexité des systèmes turbulents	12
1.4.3 Théorie du champ moyen	13
1.5 Les questions posées aux études MHD	14
2 L'expérience DTS	19
2.1 Le dispositif expérimental	19
2.2 Equation du mouvement	21
2.2.1 L'équilibre géostrophique ($\Lambda \ll 1$).	22
2.2.2 Loi d'isorotation ($\Lambda \gg 1$)	23
2.2.3 L'expérience DTS et la Terre	24
2.3 Le système d'acquisition	24

II Détermination du champ de vitesse moyen et étude des mécanismes d'induction dans une expérience à haut R_m	27
Introduction	29
3 Champ magnétique induit par l'écoulement moyen : équations détaillées	32
1 Décomposition poloïdale/toroïdale	33
2 Formulation axisymétrique des quantités moyennées	34
3 Théorème de Cowling et la démonstration de Braginskii	35
4 L'effet Ω	37
4 Evolution d'un champ magnétique non-axisymétrique : solutions analytiques	39
1 Champ magnétique non-axisymétrique imposé au bord	39
2 Modèle statique d'un champ magnétique non-axisymétrique	40
3 Modèle d'effet de peau d'un champ magnétique non-axisymétrique	41
4 Indépendance des modes non-axisymétriques du champ magnétique	43
5 Reconstruction de l'écoulement moyen et du champ magnétique induit de l'expérience DTS	45
1 Article : Magnetic induction and diffusion mechanisms in a liquid sodium spherical Couette experiment	46
1.1 abstract	46
1.2 Introduction	47
1.3 The DTS experiment	50
1.4 Non-axisymmetric signal	53
1.5 Direct modelling of magnetic induction	55
1.6 Inversion	60
1.7 Discussion	75
Conclusion et discussion sur l'induction magnétique par l'écoulement moyen	80
III Le rôle de la turbulence : quelles sont les contributions des effets α et β dans l'expérience DTS ?	83
Introduction	85

6	Mise en équation d'un modèle turbulent	87
1	Théorie du champ moyen	87
2	L'induction $\alpha\Omega$	90
3	L'expression de la force électromotrice	92
3.1	Description des fluctuations turbulentes	92
3.2	La turbulence non-homogène de l'expérience DTS	94
3.3	Description radiale de la <i>fem</i>	96
7	Détermination des profils radiaux des contributions turbulentes	98
1	Article : Turbulence reduces magnetic diffusivity in a liquid sodium experiment	98
1.1	Abstract	99
1.2	Introduction	99
1.3	Set-up, data and inversion	101
1.4	Experimental results	105
1.5	Discussion	107
2	Contributions des effets α et β au champ moyen axisymétrique	109
3	Graphique détaillé des modes non-axisymétriques	111
4	Résolution du modèle	114
4.1	Estimation des erreurs <i>a posteriori</i>	114
4.2	La <i>matrice de résolution</i>	118
4.3	Détail des données contraignant nos inversions	122
8	Résultats détaillés à haut Rm	124
1	Evolution du champ moyen	124
2	Evolution radiale du champ magnétique non-axisymétrique avec la fréquence de rotation	129
3	Fem comparées des <i>dns</i> et des inversions	133
	Conclusion et discussion	137
IV	Conclusion et discussion	139
	Bibliographie	150

A	Annexes	157
1	Nombres sans dimension caractéristiques de l'expérience DTS	158
2	Décomposition spectrale sur une sphère	160
2.1	propriétés des harmoniques sphériques	160
3	Ligne de courant du champ de vitesse méridien	161
4	Adimensionalization	161
5	inversion of the magnetic potential of the magnet	162
6	Finite difference formulation for conductivity jumps	164
7	Matrice de résolution	166
8	Détail des données pour chaque inversion	170
8.1	Inversion à $Rm = 28$ (-9 Hz)	170
8.2	Inversion à $Rm = 47$ (-15 Hz)	173
8.3	Inversion à $Rm = 72$ (-23 Hz)	176
8.4	Inversion à $Rm = 94$ (-30 Hz)	179
	Table des figures	182

Première partie

Introduction

INTRODUCTION GÉNÉRALE



1.1 L'hypothèse dynamo

1.1.1 L'origine de cette hypothèse

On a longtemps imaginé que le champ magnétique terrestre résultait d'une attraction exercée par l'étoile polaire et qu'une aiguille aimantée et libre de pivoter s'orienterait d'elle même vers le Nord. C'est en 1600 que William Gilbert, physicien et médecin anglais de la reine Elizabeth I^{re}, annonçait dans sa publication *De Magnete* que la Terre était assimilable à un gigantesque aimant. Quatre siècles plus tard, cette vision que nous avons tous d'un immense aimant dipolaire logé au centre de la Terre a quelque peu vieilli, même si l'image reste somme toute assez bonne.

Des observations précises et régulières du champ magnétique terrestre nous ont appris que celui-ci n'était pas figé, qu'il se déformait et évoluait à longues et courtes échelles de temps et d'espace. Une analyse minutieuse d'enregistrements magnétiques fossiles nous apprend que l'activité magnétique de la Terre a connu de nombreuses inversions, périodes durant lesquelles la polarité nord sud du champ magnétique s'inversait brusquement avant de se stabiliser à nouveau pour une durée indéterminée. Ce qui va définitivement compromettre l'idée d'une aimantation en profondeur comme source du champ magnétique terrestre est la loi de Curie. Celle-ci rend impossible la présence de quelque roche aimantée que ce soit à des températures aussi élevées que celles du centre de la Terre. Fort de toutes ces connaissances, il devenait inenvisageable que le champ magnétique terrestre soit le fruit d'un aimant permanent diffusant son dipôle magnétique depuis le cœur de notre planète. Il fallait donc mettre au point une nouvelle théorie, probable-

ment plus complexe, susceptible de produire un champ dipolaire, spatialement et temporellement variable tel que nous l'observons depuis la surface de la Terre.

L'hypothèse qui fut faite et celle qui tient encore aujourd'hui est connue sous le nom d'hypothèse dynamo et fut proposée par Sir Joseph Larmor en 1919. Elle repose sur l'existence de mouvements fluides dans le noyau liquide de la Terre. Elle postule que si ces mouvements sont suffisamment vigoureux et cohérents ils engendreront alors des courants électriques de grande échelle. Comme tous circuits électriques, ces courants vont générer un champ magnétique par phénomène d'induction qui vont à leur tour renforcer les courants électriques qui leur ont donné naissance. Voici ce que l'on nomme couramment l'effet dynamo "auto-excitée", où champs magnétiques et courants électriques s'entretiennent mutuellement, à partir d'un mouvement fluide. Si cette théorie tire son origine dans l'explication que les physiciens de l'époque voulaient donner au champ magnétique de la Terre et du soleil, elle est aujourd'hui largement appliquée aux étoiles, galaxies et autres planètes ayant une activité magnétique.

1.1.2 L'approche cinématique

On décline parfois la théorie dynamo sous deux formes. Les dynamos magnétohydrodynamiques (souvent abrégé MHD) et une version qui lui est souvent préférée mais incomplète, les dynamos cinématiques. Cette dernière s'intéresse seulement au problème électrodynamique et cherche à imposer un écoulement fluide, que l'on appellera \mathbf{U} , capable de produire un champ magnétique \mathbf{B} perpétuellement entretenu par les mouvements du fluide (On notera en gras les champs de vecteur). Elle est incomplète puisque nous négligeons la force magnétique ou force de Lorentz qui agit sur les mouvements du fluide. L'écoulement est donc fixé et n'est jamais perturbé par le champ magnétique dans lequel il est baigné. Initialement cette approximation est valable dans des systèmes où le champ magnétique résultant de l'induction fluide est de faible intensité. Au contraire, la version MHD s'applique à résoudre le système complet, hydrodynamique et électrodynamique. Le régime dynamo est atteint lorsque le système fait naître un champ magnétique d'intensité significativement non nulle. Ce champ magnétique va alors croître jus-

qu'à agir sur l'écoulement fluide (force de Lorentz) et s'opposer à son mouvement. Le système tend alors vers un état stable où force magnétique freinant l'action du fluide et force d'induction sont à l'équilibre.

Ces deux approches du problème dynamo sont tout à fait pertinentes. Elles permettent notamment des démarches théoriques différentes lorsqu'il s'agit de problème complexe tel que les dynamos turbulentes. L'étude des systèmes turbulents va constituer une étape clef pour notre compréhension des dynamos naturelles et fera l'objet de plus long développement au cours de ce manuscrit. C'est en effet dans le cadre des dynamos cinématiques qu'une théorie des dynamos turbulentes, aussi appelée "théorie du champ moyen" a vu le jour. On ne traite alors plus, comme dans le cas MHD complet, les mouvements turbulents de l'écoulement comme des déplacements du fluide connus en chaque point de l'espace et du temps. On se contente de déterminer les propriétés statistiques du champ de vitesse turbulent et d'en déduire l'évolution du champ magnétique qui en résulte. On peut ainsi s'affranchir de résoudre le système turbulent complet ce qui est impossible analytiquement et très coûteux pour les simulations numériques (on est notamment limité par les puissances de calcul et les capacités de mémoire numérique). Nous reviendrons sur ces points dans la suite de l'introduction.

Avant d'aller plus loin, on est en droit de se demander pourquoi nous consacrons un manuscrit complet et bien d'autres qui l'ont précédé au problème dynamo quand l'on sait qu'une simple bicyclette peut s'équiper à moindre frais d'une *dynamo électrique*. En effet, ce type de dynamo est aujourd'hui bien compris, puisqu'il s'agit d'un système dit multiplement connexe où les courants électriques sont spatialement contraints par les fils gainés d'une bobine. En revanche, le cas des systèmes simplement connexes est autrement plus complexe. Ces systèmes se caractérisent par une géométrie simple, que l'on doit comprendre comme étant d'un "seul tenant" ou "non compartimentée, sans trou ni poignée", tel que le volume sphérique du noyau terrestre. Les courants électriques qui y circulent ne sont alors contraints à aucune direction préférentielle et l'effet dynamo y est facilement court-circuité. Ainsi, la question fondamentale qui est aujourd'hui adressée aux physiciens est de savoir si une géométrie simple (sous-entendu simplement connexe) telle qu'une

coquille sphérique remplie d'un fluide conducteur en mouvement peut donner naissance à un effet dynamo. D'un point de vue cinématique, on peut se demander s'il est possible de mettre en place, dans de telles géométries, un écoulement capable de soutenir l'induction d'un champ magnétique de grande échelle.

1.2 Les mécanismes d'une dynamo cinématique

1.2.1 L'équation d'induction

Dans une géométrie simple telle que celle présentée précédemment, il est théoriquement possible d'atteindre un régime dynamo si le système satisfait les conditions que nous allons maintenant exposer. Il est confortable pour développer les bases théoriques d'un tel phénomène de se placer dans le cadre des dynamos cinématiques. On s'affranchit ainsi de l'équation du mouvement (le champ de vitesse \mathbf{U} est fixé) et le système est gouverné par la seule *équation d'induction*, qui s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (1.1)$$

où η est la diffusivité magnétique moléculaire du fluide et \mathbf{B} est le champ magnétique. Les deux champs, \mathbf{U} et \mathbf{B} , sont à divergence nulle, ce qui nous permet d'écrire

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.2b)$$

Il s'agit de la condition d'incompressibilité du fluide et de l'absence de monopole magnétique pour le champ \mathbf{B} . Intéressons nous dans un premier temps au champ magnétique et au champ de vitesse de grande échelle où l'on notera $\langle \mathbf{U} \rangle$ et $\langle \mathbf{B} \rangle$ les quantités moyennées de ces deux champs. On fait parfois référence au champ de grande échelle lorsque l'on s'intéresse à une moyenne spatiale du champ concerné, de même on parlera de champ moyen si l'on procède à une moyenne temporelle. Dans les deux cas il s'agit de grandes structures caractéristiques du champ étudié. La propagation d'onde et les fluctuations turbulentes sont donc exclues de ce système. On peut alors réécrire l'équation d'induction du champ moyen sur laquelle

on s'appuiera pour la première partie de notre étude

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \underbrace{\nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle)}_{\text{Induction}} + \underbrace{\eta \Delta \langle \mathbf{B} \rangle}_{\text{dissipation}}. \quad (1.3)$$

Ceci revient à faire l'hypothèse que la dynamique de notre système est dominée par des mouvements de grandes échelles capables de soutenir un champ magnétique de grande échelle (le dipôle terrestre par exemple) sans tenir compte des variations à petites échelles. Notons que dans cette équation, la diffusivité magnétique est supposée uniforme.

La question qui se pose maintenant est de savoir s'il existe, dans une géométrie simplement connexe, un champ de vitesse $\langle \mathbf{U} \rangle$ capable d'entretenir un champ magnétique $\langle \mathbf{B} \rangle$ solution de l'équation (1.3). Le premier terme à droite de l'équation (1.3) rend compte du pouvoir d'induction du champ de vitesse et constitue un terme source pour le champ $\langle \mathbf{B} \rangle$. Le second terme (avec l'opérateur laplacien Δ) dépend des propriétés moléculaires du fluide et est responsable de la dissipation Ohmique des courants électriques qui soutiennent le champ magnétique. Cela nous mène à la première condition nécessaire à l'apparition d'une dynamo qui est que l'induction l'emporte sur la dissipation. On peut évaluer l'importance relative de ces deux termes par le nombre de Reynolds magnétique $Rm = \langle \mathbf{U} \rangle L / \eta$, où L est une longueur caractéristique sur laquelle le champ $\langle \mathbf{B} \rangle$ varie significativement. On peut donc espérer voir apparaître une dynamo pour une dynamique remplissant la condition $Rm > 1$. Seulement dans les faits, la quantité L n'est jamais facile à évaluer et une longueur caractéristique du système lui est souvent préférée (rayon du dispositif expérimental ou du noyau terrestre...). Il est par conséquent impossible de déterminer le nombre de Reynolds magnétique d'un dispositif expérimental ou d'un objet astrophysique de manière univoque. De plus le Reynolds magnétique critique, c'est à dire menant à un régime dynamo, requiert une connaissance exacte de l'écoulement, ce qui est difficilement réalisable. On ne peut donc pas avoir d'idée *a priori* du caractère dynamogène d'un dispositif expérimental ou d'un objet astrophysique sans déterminer avec précision son écoulement.

Ainsi, en l'absence de critère fiable prédisant l'apparition systématique d'une dynamo pour un Reynolds magnétique donné, il est tout naturel de tester divers

écoulements fluides à haut nombre de Reynolds magnétique, en espérant atteindre un seuil critique menant à la génération d'un champ magnétique croissant. Nous verrons plus loin le rôle joué par les expériences en laboratoire dans cette quête d'un régime dynamo.

1.2.2 Les théorèmes anti-dynamo

Les choses se compliquent encore en 1933 avec la publication du théorème anti-dynamo de TG. Cowling (Cowling 1933) et sa généralisation trente ans plus tard par Braginskii (Braginskii 1964). Ce théorème ne fut que le premier d'une longue série de théorèmes qui jetèrent le doute sur la plausibilité de l'hypothèse dynamo. Ainsi, forcer une dynamique à haut Rm reste un ingrédient nécessaire à l'effet dynamo mais n'est malheureusement pas une condition suffisante.

La seconde condition à l'effet dynamo apportée par TG. Cowling repose sur les points suivants :

Comme nous l'avons évoqué précédemment, la majorité des objets astrophysiques tels que les étoiles ou les planètes sont souvent modélisés par une géométrie sphérique simple. On suppose en général pour chacun de ces objet certaines règles de symétries concernant la distribution de la conductivité électrique et les mouvements du fluide (Rädler 2007). On décrira toujours ces systèmes sphériques par un plan équatorial défini perpendiculaire à un axe de rotation autour duquel s'organise l'écoulement fluide. Ainsi, on parlera d'écoulements axisymétriques lorsqu'ils sont symétriques autour de l'axe de rotation ou de symétrie équatoriale s'ils sont symétriques par rapport au plan de l'équateur. En conséquence on considère que l'écoulement moyen $\langle \mathbf{U} \rangle$ et le champ magnétique $\langle \mathbf{B} \rangle$ moyen sont tout deux axisymétriques. Notons que l'écoulement moyen est également dominé par sa symétrie équatoriale.

Or le théorème anti-dynamo de TG. Cowling exclut la possibilité qu'un écoulement axisymétrique seul puisse initier un champ magnétique axisymétrique capable de s'auto-entretenir par la seule action du fluide (cf démonstration partie II). Il faut donc invoquer une dynamique plus complexe pour rompre avec ce système de symétries trop simplificateur et non dynamogène. Si au premier ordre, un mo-

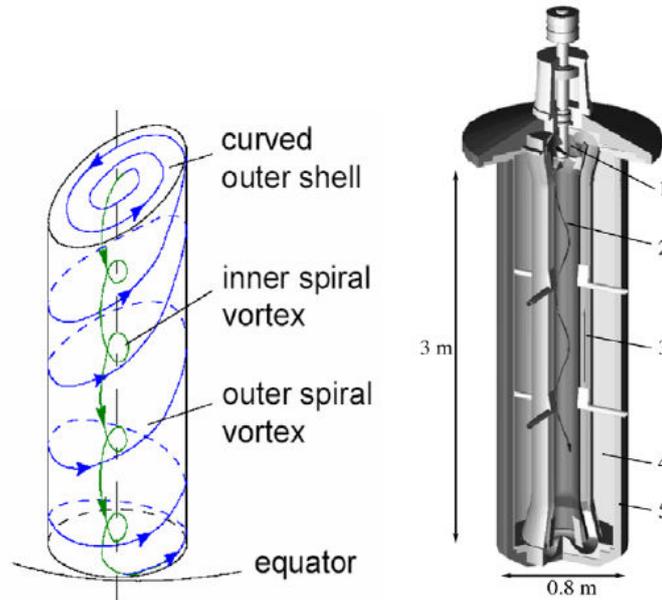


FIGURE 1.1 – Dispositif expérimental de Riga : cette expérience reproduit l'écoulement de type Ponomarenko, c'est à dire un écoulement hélicoïdal théoriquement infiniment long. Elle est composée de trois cylindres concentriques d'une hauteur d'environ 3m. Le sodium liquide emprisonné dans le cylindre central est entraîné par une hélice (turbine) et recircule dans le second cylindre. Le cylindre extérieur contient du sodium au repos ce qui permet d'abaisser le seuil dynamo. La circulation en hélice dans le cylindre central est bien illustrée par le schéma de gauche. Schéma extrait de [Kenjereš et Hanjalić \(2007\)](#).

dèle d'écoulement axisymétrique permet une bonne description des mouvements fluides dans les noyaux planétaires, TG. Cowling nous apprend que l'on ne peut se contenter d'un tel modèle pour expliquer les dynamos naturelles. Face à ces difficultés, les physiciens se voient une nouvelle fois dans l'impossibilité de proposer une base théorique solide à l'hypothèse dynamo.

1.3 Les premières expériences dynamos

C'est d'abord [G.O Roberts. \(1972\)](#) puis [Ponomarenko \(1973\)](#) qui vont imaginer les premières dynamos cinématiques en proposant deux modèles analytiques d'écoulements, capables de générer un champ magnétique croissant au delà du seuil dynamo. Ces deux écoulements sont conçus pour être fortement hélicitaires, c'est à dire ayant une composante de vitesse à la fois zonale (autour d'un axe de rotation) et verticale (il en résulte une circulation en hélice). Le champ de vitesse est donc fortement non-axisymétrique et il procure aux écoulements fluides l'ingrédient nécessaire pour remplir la seconde condition qui mènera à l'effet dynamo,

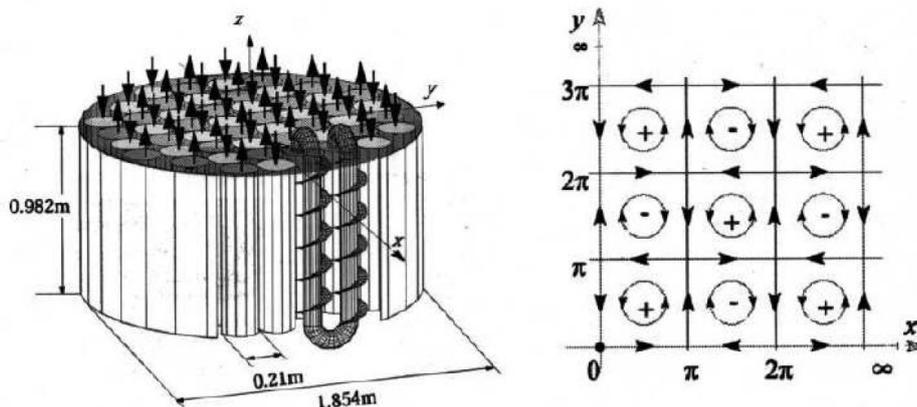


FIGURE 1.2 – L'expérience de Karlsruhe est inspirée de l'écoulement périodique de G.O Roberts. Il s'agit d'un écoulement constitué de 52 vortex juxtaposés contrarotatifs ayant une vitesse axiale de signe opposée (comme indiqué par les flèches). (Stieglitz et Müller 2001)

c'est à dire pour contourner le théorème de Cowling. Ces deux modèles de champ de vitesse sont connus pour avoir inspiré les deux premières dynamos expérimentales en sodium liquide. Celle de Riga (Gailitis *et al.* 2001) que l'on trouve illustrée figure 1.1 et l'expérience de Karlsruhe représentée figure 1.2, (Stieglitz et Müller 2001). Elles ont toutes deux atteint un seuil d'instabilité dynamo observé pour des Rm critiques proches des prédictions théoriques. Ces deux expériences représentent cependant des cas particuliers où le champ de vitesse du fluide est fortement contraint par le dispositif expérimental avec pour objectif clair de contourner le théorème de Cowling et de démontrer qu'une dynamo fluide est réalisable. De plus l'écoulement $\langle \mathbf{U} \rangle$ étant bien connu par avance, le modèle cinématique décrit par l'équation d'induction (1.3) offre des prédictions conformes aux observations expérimentales. Un problème demeure cependant puisque ce type de dispositif expérimental, où des parois métalliques guident la circulation fluide en lui imposant une forte hélicité, a une géométrie peu réaliste d'un point de vue géophysique.

Une étape a donc bien été franchie avec ces deux expériences dites de première génération (ou expérience cinématique, contraignant fortement la géométrie du fluide) en nous montrant expérimentalement qu'il est possible de générer une dynamo à partir du mouvement d'un fluide conducteur. Il reste maintenant à comprendre comment ce même phénomène peut avoir lieu dans des géométries proches de celles des noyaux planétaires où les contraintes hydrodynamiques sont relâchées. Ceci est l'objet des expériences de seconde génération.

1.4 L'apport des fluctuations turbulentes

1.4.1 Les expériences de seconde génération

Les écoulements de Ponomarenko et de Roberts offrent la possibilité au champ magnétique de se régénérer grâce au mouvement spiralé du fluide. L'écoulement de Ponomarenko est axisymétrique et produit une dynamo non-axisymétrique. Celui de Roberts en revanche est non-axisymétrique, ingrédient nécessaire pour briser le théorème de Cowling, et produit une dynamo axisymétrique. Ce mécanisme d'induction non-axisymétrique est imposé à l'écoulement par forçage mécanique à travers une géométrie cylindrique. Même si la convection thermique du noyau terrestre peut développer des structures colonnaires assez proches de ces écoulements hélicitaires on ne peut accepter que ces expériences de première génération constituent un modèle de dynamo planétaire satisfaisant. On va ainsi construire une nouvelle gamme d'expériences ayant une géométrie plus pertinente d'un point de vue géophysique.

Il a donc été conçu des expériences sodium à géométrie sphérique de taille moyenne, comme l'expérience de Madison (Wisconsin USA, [Spence et al. \(2006\)](#)) ou Derviche Tourneur Sodium (DTS, ISTERre France, [Brito et al. \(2011\)](#)) puis de plus grande envergure comme BigSister (Maryland USA, [Zimmerman et al. \(2014\)](#)). Quoique moins pertinentes d'un point de vue géophysique, des expériences à géométrie cylindrique, comme Von Kármán Sodium (VKS, Cadarache France, [Monchaux et al. \(2007\)](#)), et torique, Perm Torus experiment (Perm, Russie, [Frick et al. \(2010\)](#)), ont également vu le jour. Parmi celles-ci, seule VKS a enregistré l'induction spontanée d'un champ magnétique pour des régimes supérieurs à $Rm = 32$, voir figure 1.3. Seulement la nature très turbulente de l'écoulement de cette expérience et la présence requise de disques ferromagnétiques rend la compréhension des mécanismes à l'origine de l'effet dynamo beaucoup plus complexe. Il devient impossible de réduire le système à son écoulement moyen comme nous le faisons pour les expériences de première génération et la compréhension du processus dynamo passe par une étude approfondie des systèmes turbulents. L'étude des systèmes turbulents occupe aujourd'hui une part importante des recherches sur l'effet dynamo.

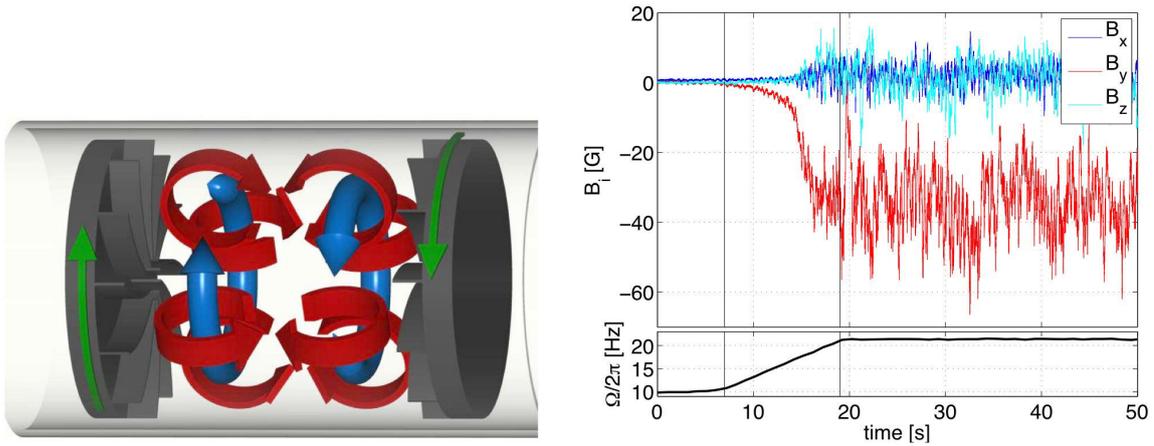


FIGURE 1.3 – A gauche : Écoulement moyen de l'expérience VKS représenté par les flèches bleues et rouges. Les flèches vertes indiquent le sens de rotation des disques entraînant le sodium liquide enfermé par les parois cylindrique de l'expérience. A droite, graphique supérieur : champ magnétique induit à la surface de l'écoulement en fonction du temps. Ce champ magnétique atteint 5 mT quelques secondes après la bifurcation (lorsque le champ magnétique devient non nul). Le graphique du bas : donne la fréquence de rotation des disques en fonction du temps. (Monchaux et al. 2007)

1.4.2 La complexité des systèmes turbulents

La caractéristique principale des écoulements turbulents est qu'ils présentent des fluctuations aléatoires de l'écoulement que l'on ne peut pas modéliser par une approche déterministe classique. Pour cette raison on lui préfère souvent une approche statistique comme dans le cas de particules de gaz en mouvement. Il n'est alors plus possible, comme nous le faisons précédemment, de connaître le champ de vitesse \mathbf{U} en tous points de l'espace et du temps. On traitera séparément l'écoulement moyen et les fluctuations turbulentes qui seront définies comme des propriétés statistiques du fluide (ceci sera l'objet du chapitre sur la *théorie du champ moyen*). Nous devons par conséquent trouver une loi de séparation d'échelles qui nous permette de séparer les fluctuations de petites échelles des structures de grandes échelles. Ainsi nous décomposerons le champ de vitesse et le champ magnétique en des valeurs moyennes, que nous avons notées précédemment entre parenthèses ($\langle \cdot \rangle$), et des fluctuations turbulentes de moyenne nulle notées $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\mathbf{b}}$. On écrira le champ total $\mathbf{U} = \langle \mathbf{U} \rangle + \tilde{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \tilde{\mathbf{b}}$ avec $\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle = 0$ et $\langle \tilde{\mathbf{b}} \rangle = 0$.

On peut alors réécrire l'équation (1.1) avec cette nouvelle expression du champ

de vitesse et du champ magnétique sous la forme

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \underbrace{\langle \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{b}} \rangle}_{\text{fluctuations}} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle). \quad (1.4)$$

On note $\mathcal{E} = \langle \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{b}} \rangle$ la force électromotrice (*fem*) associée à la moyenne du produit vectoriel de ces fluctuations qui produira un champ $\langle \mathbf{B} \rangle$ de grande échelle. On remarque que si les interactions des vitesses $\tilde{\mathbf{u}}$ avec un champ magnétique de grande échelle $\langle \mathbf{B} \rangle$ (qui peut être initialement d'origine externe) sont à l'origine des fluctuations $\tilde{\mathbf{b}}$, à travers l'équation des fluctuations pour $\tilde{\mathbf{b}} \ll \langle \mathbf{B} \rangle$ soit $\partial \tilde{\mathbf{b}} / \partial t = \nabla \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{U} \rangle \times \tilde{\mathbf{b}}) + \eta \Delta \tilde{\mathbf{b}}$, alors les corrélations entre $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\mathbf{b}}$ seront probablement maximisées et la *fem*, résultante du produit vectoriel des fluctuations, aura une forte contribution au champ magnétique moyen $\langle \mathbf{B} \rangle$.

A l'heure d'aujourd'hui il demeure très difficile de réaliser une mesure expérimentale exacte de cette *fem*. Dans un cas idéal, une telle mesure implique de pouvoir enregistrer, au sein d'un fluide conducteur en mouvement, les trois composantes des fluctuations ($\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\mathbf{b}}$) en un même point de coordonnée spatiale. De plus, toutes ces mesures doivent être synchronisées en temps afin d'évaluer leurs corrélations temporelles. Cette mesure serait plus aisée dans une étude numérique qui simulerait l'équation du mouvement pour le fluide et l'équation d'induction, mais on est malheureusement limité à des dynamiques peu turbulentes pour des raisons de puissance de calcul.

1.4.3 Théorie du champ moyen

Une partie des recherches actuelles en turbulence MHD se consacre à l'importance des petites échelles turbulentes dans l'induction d'un champ magnétique de grande échelle. Ainsi chacun s'applique, au sein d'une configuration qui est propre à son dispositif expérimental ou numérique, à déterminer la force électromotrice associée au système turbulent qu'il étudie et cherche à comprendre comment et pourquoi certains paramètres favorisent ou au contraire handicapent les contributions turbulentes à l'équation d'induction. C'est dans le cadre de la turbulence homogène isotrope que fut introduit pour la première fois la *théorie du champ moyen* [Moffatt \(1978\)](#). Dans ce modèle théorique, on traite la séparation d'échelle, entre

contribution turbulente et contribution du champ moyen, en exprimant la fem à l'aide de quantités moyennées du champ magnétique. Cette approche sera utilisée dans le cadre du dispositif expérimental de DTS et sera détaillée partie III.

Sur la base de cette théorie on réduit souvent les fluctuations turbulentes à deux quantités scalaires connues sous le nom d'effet α et d'effet β qui reflètent les propriétés turbulentes du fluide et qui nous proposent une expression simplifiée de la fem . α et β dépendent, dans le cas idéal d'une turbulence homogène isotrope (indépendante de l'espace et sans orientation préférentielle), uniquement des propriétés statistiques de l'écoulement. Seulement ce cas idéal est bien loin de rendre compte de la diversité des écoulements astrophysiques et est généralement peu réaliste de ce point de vue. Les fluide en rotation, la turbulence sous champ magnétique fort, la géométrie des parois, le mécanisme d'entraînement du fluide, sont autant d'ingrédients qui perturbent le système et nous amènent à complexifier l'expression que l'on donne à α et β afin de trouver un modèle qui retranscrive au mieux les propriétés turbulentes du fluide.

1.5 Les questions posées aux études MHD

La compétition entre processus d'induction liés aux mouvements de petites échelles et de grandes échelles anime depuis longtemps la communauté géodynamicienne. De nombreux progrès ont été réalisés grâce aux nouvelles capacités numériques et à la mise en place de plusieurs expériences en laboratoire. On ne saurait cependant se prononcer clairement sur le caractère anti-dynamo ou au contraire dynamogène des mécanismes d'induction turbulent.

L'équipe travaillant sur l'expérience VKS rapporte qu'un mécanisme purement turbulent aidé de disques ferromagnétiques entraînant le fluide pourrait être à l'origine de l'effet dynamo qu'ils observent [Ravelet et al. \(2012\)](#). Ils corroborent leurs résultats par des simulations numériques qui semblent être compatibles avec leurs données d'observations expérimentales. Par ailleurs, dans le dispositif expérimental de Madison, [Spence et al. \(2006\)](#) observent une réduction du dipôle magnétique qui ne peut selon eux être le résultat du champ de vitesse moyen. Dans un article plus récent [Tobias et Cattaneo \(2013\)](#) prend le contre pied en montrant numéri-

quement que les fluctuations de petites échelles doivent être organisée par un cisaillement fluide de grande échelle pour reproduire les structures observables de la dynamo solaire.

La diversité de ces résultats donne la mesure de la complexité que représente les systèmes turbulents. Comme nous l'évoquions dans la section précédente, la diversité des géométries rencontrées, le mode d'entraînement du fluide, la forme et l'intensité du champ magnétique imposé ; sont autant de paramètres qui peuvent s'avérer cruciaux et qui altèrent notre compréhension des phénomènes turbulents.

Nous tenterons, dans l'étude expérimentale et numérique qui va suivre, d'apporter des éléments de réponse aux grandes questions que nous venons d'introduire. Ces questions seront soumises au dispositif expérimental de DTS (ISTerre Grenoble). Il est important de noter que l'expérience DTS n'a pas vocation à générer un effet dynamo. Cependant le régime magnétostrophique qui la caractérise en fait un objet d'étude intéressant comme nous le détaillerons bientôt.

Comme le suggère cette introduction, nous commencerons par évaluer les contributions de l'écoulement moyen à l'induction magnétique en cherchant $\langle \mathbf{U} \rangle$ comme solution du problème direct correspondant à l'équation 1.3. Puis nous chercherons à quantifier les contributions turbulentes \mathcal{E} en résolvant le problème direct décrit par l'équation 1.4. Dans les deux cas nous chercherons à connaître les quantités $\langle \mathbf{U} \rangle$ et la *fem* \mathcal{E} par méthode inverse à partir de mesures réalisées sur le dispositif expérimental de DTS. Nous pourrions synthétiser les grandes questions auxquelles ce manuscrit va tenter de répondre comme suit :

- Peut-on modéliser l'induction d'un champ magnétique de grande échelle à partir de l'écoulement moyen ?
- Un second questionnement sur l'aspect dynamogène ou au contraire anti-dynamo des fluctuations turbulentes. Peut-on induire un champ magnétique de grande échelle à partir des fluctuations de petites échelles ? Comment ces contributions turbulentes peuvent-elles nous permettre de contourner le théorème anti-dynamo de Cowling ?
- Enfin une question liée aux propriétés turbulentes des fluides en rotation

soumis à un champ magnétique de forte intensité. Quelle forme prendra la *fem* dans la configuration de l'expérience DTS ?

Nous faisons remarquer que si nous répondons positivement à la première question, les questions suivantes s'annulent automatiquement. Les réponses que nous ferons se rapporteront au cas particulier de l'expérience DTS que nous tenterons autant que possible de comparer à d'autres dispositifs expérimentaux et au noyau terrestre. Il s'agit d'une expérience sodium où un écoulement en Couette sphérique est soumis à un fort champ magnétique principalement dipolaire. [Nataf \(2013\)](#) et [Brito et al. \(2011\)](#) ont déjà réalisé une étude approfondie du champ de vitesse et du champ magnétique moyen. On sait également grâce aux simulations numériques réalisées par [Figueroa et al. \(2013\)](#) que d'importantes instabilités turbulentes se développent sur les parois de l'expérience. En revanche les contributions de ses fluctuations au champ magnétique induit moyen sont peu connues.

Afin de répondre aux questions introduites dans cette première partie, la suite du manuscrit sera organisée de la façon suivante : le prochain chapitre va présenter l'expérience Derviche Tourneur Sodium (DTS) et son dispositif d'acquisition de données. Une seconde partie sera consacrée à la caractérisation de l'écoulement moyen de l'expérience DTS et ses contributions au champ magnétique moyen. Pour cela nous introduirons une expression détaillée de l'équation d'induction dans le cadre de l'approximation axisymétrique du champ de vitesse. Nous développerons dans un second temps une méthode d'inversion permettant d'accéder au champ de vitesse moyen $\langle \mathbf{U} \rangle$ solution de l'équation d'induction (1.3). Pour la première fois cette méthode d'inversion assimilera des données magnétiques issues des composantes non-axisymétriques du champ magnétique imposé. Il s'agit d'irrégularités de l'aimant permanent qui, une fois en rotation solide avec la sphère interne de l'expérience, vont imposer un signal magnétique alternatif au volume fluide. L'évolution radiale de ce signal magnétique, auquel nous avons accès expérimentalement, nous permet de retracer la dynamique du fluide avec laquelle il interagit. Une approche similaire développée par [Frick et al. \(2010\)](#) pour accéder à la diffusivité turbulente de leur expérience sodium (*Torus experiment*, Perm) nous a inspiré cette méthode. Nous ferons une introduction détaillée de ce nouvel outil et nous ex-

pliquerons comment nous l'avons intégré au processus d'inversion. Une troisième partie sera consacrée à la caractérisation de la *fem* dans le volume fluide de l'expérience. Réutilisant le dispositif d'inversion mis en place lors de la seconde partie, nous étendrons le modèle direct en ajoutant une *fem* à l'équation d'induction. Le modèle direct prendra alors la forme de l'équation (1.4). A l'aide de la théorie du champ moyen, que nous prendrons le temps d'introduire, nous évaluerons les quantités α et β nécessaires à la modélisation du champ magnétique moyen mesuré depuis le dispositif expérimental de DTS. Nous couvrirons enfin une large gamme de solutions obtenues par inversion et par simulation numérique directe pour des Rm allant de 10 à 100.

2.1 Le dispositif expérimental

L'objectif de l'expérience DTS est d'élaborer un dispositif expérimental ayant une configuration proche du noyau terrestre et des propriétés fluides de ce dernier. Pour ces raisons, une géométrie sphérique a été adoptée dans laquelle deux coquilles sphériques concentriques représentent la graine du noyau terrestre et la limite noyau-manteau. L'enveloppe fluide du noyau externe est modélisée par le volume de sodium liquide emprisonnée entre les deux sphères de l'expérience. La sphère interne ("graine solide") est une coquille de cuivre de rayon $r_i = 74$ mm et d'épaisseur 15 mm et la coquille externe est en acier inoxydable d'épaisseur 5 mm et de rayon interne $r_o = 210$ mm (voir figure 2.1).

La figure 2.1 illustre le dispositif expérimental ainsi que le système de coordonnées utilisé dans ce manuscrit. Les deux sphères concentriques peuvent tourner autour d'un axe vertical jusqu'à $f = \Omega/2\pi = \pm 30$ Hz pour la sphère interne et $f_o = 15$ Hz pour la sphère externe. L'étude qui va suivre maintiendra la sphère externe au repos ($f_o = 0$). Un aimant permanent est enfermé dans la sphère interne imposant un champ magnétique principalement dipolaire (les lignes de champ sont représentées en rouge) d'intensité 8 mT (référence notée B_o en $r = r_o$) à l'équateur de la sphère externe et 175 mT à l'équateur de la sphère interne (noté B_i en $r = r_i$). Les irrégularités de l'aimant permanent introduisent de légères déformations ou hétérogénéités du champ magnétique dont nous nous servirons au cours cette étude.

On travaillera dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) tout au long de ce manuscrit. Ainsi, on parlera pour la composante notée φ de composante azimutale ou zonale de l'écoulement et du champ magnétique. De même on parlera

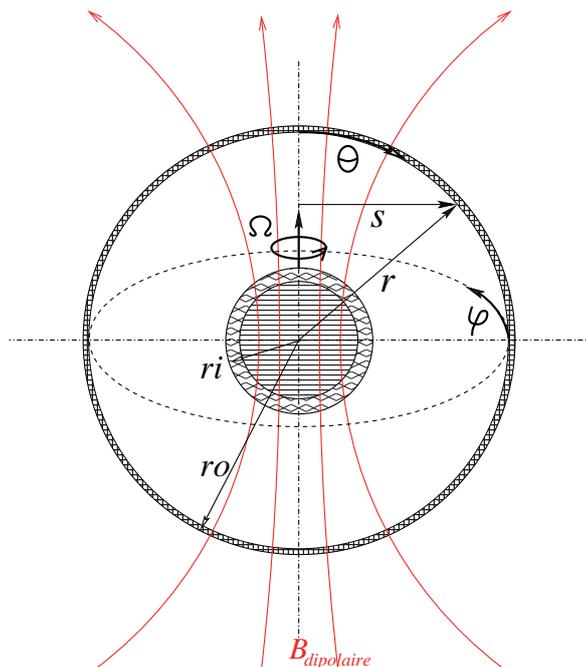


FIGURE 2.1 – Schéma du dispositif expérimental de l'expérience DTS. Il est également représenté le système de coordonnées sphériques utilisé pour décrire les différentes composantes de l'écoulement et du champ magnétique de l'expérience. Les rayons interne r_i de la coquille de cuivre et externe r_o de la coquille en acier inoxydable sont également reportés. Entre les deux sphères concentriques sont emprisonnés 50L de sodium liquide.

d'écoulement ou de champ magnétique méridional dans le plan méridien r et θ , s étant la rayon cylindrique.

On peut évaluer le nombre de Reynolds magnétique de l'expérience en choisissant la vitesse angulaire de la sphère interne, le rayon externe r_o et la diffusivité magnétique du sodium η définie tableau 2.1, comme des quantités caractéristiques de l'expérience. On obtient :

$$Rm = \frac{2\pi r_o^2 f}{\eta} \quad (2.1)$$

où $Rm = 94$ pour $f = 30$ Hz. Ce choix pour la vitesse caractéristique est motivé par l'efficacité du couplage magnétique entre le dipôle magnétique, enfermé dans la sphère interne, et le fluide. Il est maintenant judicieux pour mieux comprendre la dynamique fluide de l'expérience DTS et notamment le régime magnétostrophique qui la caractérise de détailler l'équation du mouvement qui constitue, avec l'équation d'induction, les équations de la magnétohydrodynamique (MHD).

Sodium 120°C			
Masse volumique	ρ	930	$kg.m^{-3}$
Conductivité électrique	σ	9×10^6	$\Omega^{-1} . m^{-1}$
Viscosité cinématique	ν	6.5×10^{-7}	$m^2.s^{-1}$
Diffusivité magnétique	η	8.7×10^{-2}	$m^2.s^{-1}$
Permittivité magnétique	μ_0	1.257×10^{-6}	$\Omega.s.m^{-1}$
Rayon sphère externe	r_o	0.210	m
Rayon sphère interne	r_i	0.074	m
Champ mag équateur externe	B_o	8	mT
Champ mag équateur interne	B_i	175	mT
Rotation sphère interne	f	de 3 à 30	Hz
Rotation sphère interne	Ω	de $3 \times 2\pi$ à $30 \times 2\pi$	$rad.s^{-1}$

TABLE 2.1 – Un certain nombre de propriétés physiques du système expérimental sont reportés dans ce tableau. On trouve notamment la densité, la conductivité électrique, la viscosité cinématique, la diffusivité magnétique et la permittivité magnétique du sodium. On note également les dimensions de la sphère et l'intensité du champ magnétique imposé à l'équateur des deux sphères.

2.2 Equation du mouvement

Notons avant toute chose que dans l'étude qui va suivre, l'équation du mouvement décrivant la dynamique de l'écoulement sera résolue par l'expérience elle-même et ne sera pas résolue numériquement (exception faite des résultats de simulation numérique directe réalisée dans la partie III). Nous cherchons dans cette section uniquement à comprendre quelles sont les forces dominantes dans l'expérience DTS qui contraignent l'écoulement du fluide.

Nous pouvons écrire l'équation du mouvement, correspondant à l'équation de Navier-Stokes (pour la partie hydrodynamique) à laquelle on ajoute une force magnétique (on trouvera plus de détail à ce sujet dans le livre de [Dormy et Soward \(2007\)](#)),

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} \right) = -\nabla p + \rho \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

où p est la pression, Ω la vitesse angulaire de rotation de la sphère, ρ est la densité du fluide, ν la viscosité cinématique et \mathbf{U} , \mathbf{B} et \mathbf{J} sont respectivement le champ de vitesse, le champ magnétique et la densité de courants électriques.

Le fort champ magnétique dans lequel baigne un fluide en rotation est l'une des particularités de l'expérience DTS qui a été conçue spécialement pour explorer le régime magnétostrophique au sein duquel force magnétique et force de Coriolis sont à l'équilibre (Cardin *et al.* 2002). Le rapport de ces deux forces est à l'origine du nombre d'Elsasser Λ qui est de l'ordre de l'unité dans l'expérience. On peut écrire le nombre d'Elsasser comme suit :

$$\Lambda = \sigma B_0^2 / \rho \Omega \quad [\text{Lorentz/Coriolis}] \quad (2.3)$$

avec σ la conductivité électrique et ρ la densité du sodium, chaque quantité est définie dans le tableau 2.1 des propriétés de l'expérience.

Suivant l'importance relative des différents termes de l'équation (2.2), divers équilibres de forces peuvent être établis. Ainsi, le régime magnétostrophique se caractérise par l'équilibre des forces de Lorentz et de Coriolis, soit $\Lambda = 1$. Pour mieux comprendre l'action de ces deux forces, regardons séparément le cas où la force de Coriolis domine, soit $\Lambda \ll 1$, et le cas où la force de Lorentz domine, soit $\Lambda \gg 1$.

2.2.1 L'équilibre géostrophique ($\Lambda \ll 1$).

L'équilibre géostrophique donne lieu au théorème de Proudman-Taylor pour lequel on considère un écoulement hydrodynamique stationnaire en rotation. On néglige alors les effets inertiels et visqueux devant la force de Coriolis dans l'équation 2.2. On obtient l'équilibre,

$$2\rho\Omega \times \mathbf{U} = -\nabla p. \quad (2.4)$$

En prenant le rotationnel de cette expression il en résulte,

$$\nabla \times (\Omega \times \mathbf{U}) = \Omega(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \mathbf{U}(\nabla \cdot \Omega) + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\Omega - (\Omega \cdot \nabla)\mathbf{U}. \quad (2.5)$$

La rotation de la sphère étant constante on peut écrire $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$ et $(\mathbf{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} = 0$ et en vertu de la condition d'incompressibilité, on peut réduire l'expression 2.5 à

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{U} = 0. \quad (2.6)$$

En notant l'axe de rotation aligné avec le vecteur unité vertical \mathbf{e}_z , soit $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ on trouve

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = 0. \quad (2.7)$$

Le théorème de Proudman-Taylor nous montre que l'écoulement est invariant suivant l'axe de rotation lorsque la force de Coriolis domine la dynamique de l'écoulement. Ce phénomène sera observé dans les cartes de champ de vitesse que nous discuterons par la suite. Nous ferons référence à l'équilibre géostrophique dans ce manuscrit.

2.2.2 Loi d'isorotation ($\Lambda \gg 1$)

Plaçons nous maintenant dans le cas où l'écoulement est stationnaire et la dissipation magnétique négligeable (soit $Rm \gg 1$). D'après l'équation d'induction 1.1 on peut écrire

$$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.8)$$

En vertu des expressions 1.2 on obtient,

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{B} = 0. \quad (2.9)$$

Pour un écoulement zonal (autour de l'axe de rotation donc $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_\varphi$), ce qui est le cas de l'expérience DTS comme nous le verrons prochainement, et axisymétrique ($\partial/\partial\varphi = 0$), on peut simplifier l'expression précédente sous la forme

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{U} = 0. \quad (2.10)$$

On constate ici que le système va chercher à minimiser les interactions entre le champ de vitesse et le champ magnétique. L'écoulement sera invariant le long des lignes de champ (isorotation). On peut également observer ce phénomène lorsque l'on regarde la dynamique de l'écoulement sur des temps courts, c'est à dire des temps fortement inférieurs au temps de diffusion magnétique. La diffusivité est

donc négligeable à cette échelle de temps et l'on parlera de dynamique de *flux gelé* pour lequel le champ de vitesse est piégé par les lignes de champ magnétique (Roberts et Scott 1965).

On observe ce comportement d'isorotation du fluide proche de la sphère interne de l'expérience qui correspond à une zone de forte intensité magnétique.

2.2.3 L'expérience DTS et la Terre

L'écoulement en rotation de l'expérience DTS a la particularité d'être soumis à un champ magnétique fortement inhomogène (qui décroît avec le rayon). Cette configuration est à l'origine des deux dynamiques détaillées précédemment où le nombre d'Elsasser est respectivement supérieur et inférieur à un dans la partie interne et externe du volume fluide de l'expérience. Ainsi, à la frontière entre écoulement géostrophique et zone d'isorotation les forces de Lorentz et de Coriolis sont à l'équilibre. Cet équilibre fait de l'expérience DTS une expérience très originale et pertinente d'un point de vue géophysique.

En effet, des études récentes menées par Gillet *et al.* (2010) ont montré qu'il était possible, à partir de l'observation d'ondes de torsion à la surface de la Terre et grâce à l'hypothèse quasi-géostrophique, d'accéder à l'intensité moyenne du champ magnétique dans le noyau terrestre. Ils en déduisent une intensité de l'ordre de 3 mT, ce qui situerait la dynamique fluide du noyau externe dans une configuration proche de l'équilibre magnétostrophique. Il devient alors particulièrement intéressant, pour en connaître un peu plus sur la dynamique du noyau terrestre, de savoir quels mécanismes dominent l'induction magnétique de DTS et si des fluctuations turbulentes peuvent s'y développer.

2.3 Le système d'acquisition

Afin de mieux comprendre les enjeux d'un tel régime nous avons installé divers appareillages de mesure dont l'objectif est d'acquérir le maximum d'information sur la dynamique de l'expérience. Comme pour toutes les expériences en métal

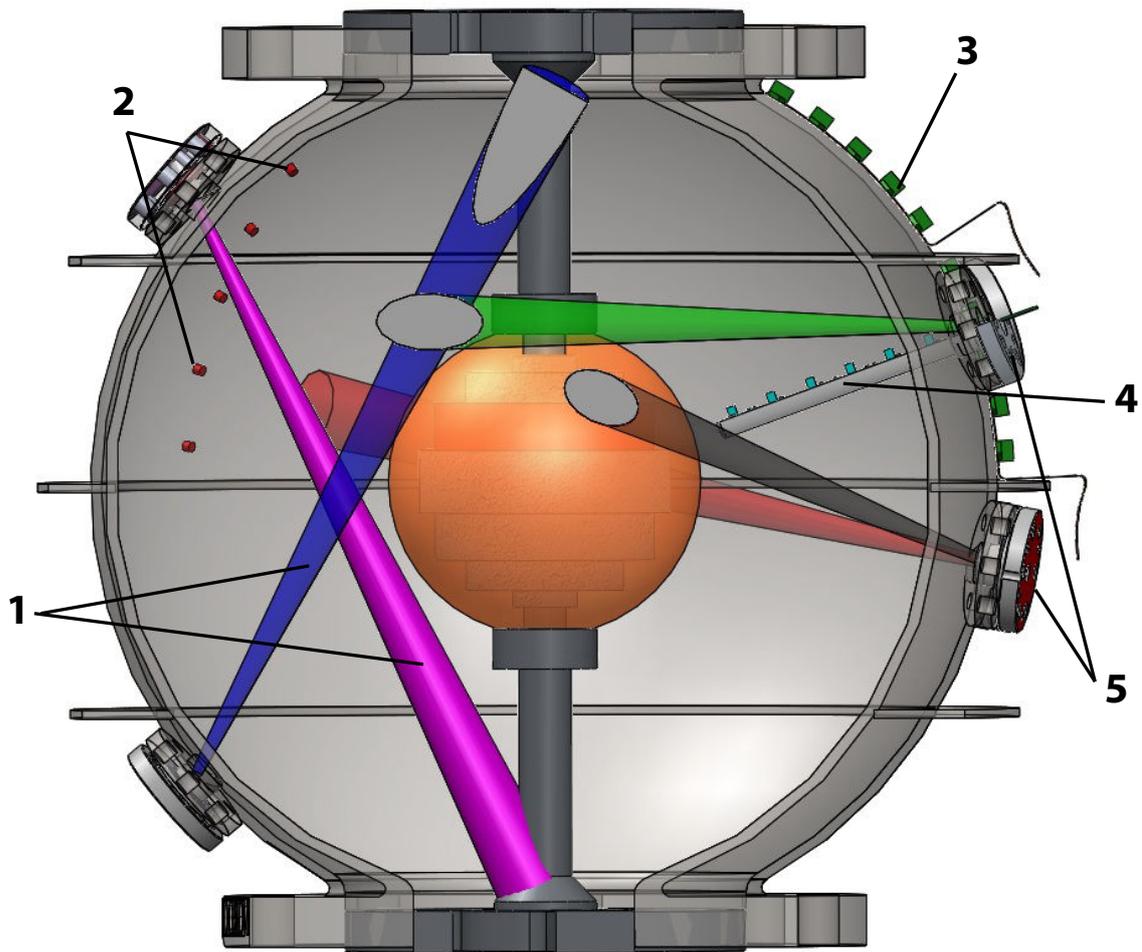


FIGURE 2.2 – Vue 3D des deux sphères de l'expériences DTS ainsi que l'ensemble de l'appareillage de mesure. On peut trouver (1). Des mesures directes de la vitesse du fluide par des tirs Doppler ultrason. Ils sont représentés en couleur le long de leur trajet dans le volume fluide. (2). On peut mesurer le potentiel électrique à la surface de la sphère externe en 5 points de latitude. (3). Magnétomètres GMR (magnétorésistance géante) permettant de mesurer les trois composantes du champ magnétique. (4). Doigt de gant et ses 10 capteurs magnétiques à effet Hall. (5). Bouchons étanches pouvant accueillir indifféremment des sondes Doppler ultrasonores ou le doigt de gant.

liquide, l'opacité du fluide restreint nos possibilités d'observation du champ de vitesse.

On présente figure 2.2 l'ensemble du dispositif de mesure utilisé pour notre étude. (1) Les faisceaux de Doppler ultrasonore sont représentés par des cônes de couleur matérialisant leur trajet dans le volume fluide. Il s'agit des seules mesures directes que nous ayons de la vitesse du fluide. De plus, ceux-ci ne fonctionnent que pour de faibles vitesses de rotation de la sphère interne ($f \leq 15$ Hz). (2) Les points rouges à la surface de la sphère externe représentent l'emplacement des mesures de potentiels électriques. (3 et 4) On trouve également une série de magnétomètres

GMR sur les nappes en surface de la sphère externe et à *effets Hall* dans le doigt de gant. Les trois composantes du champ magnétique peuvent y être mesurées. (5) On notera que le doigt de gant peut être déplacé à quatre latitudes différentes en utilisant les six bouchons présents à la surface de la sphère externe. Il est intéressant de remarquer la bonne couverture spatiale qu'apporte notre système d'acquisition à l'exception des hautes latitudes (les latitudes comprises entre $\pm 40^\circ$ sont couvertes). Un tableau des nombres sans dimension de l'expérience est disponible dans l'annexe 1.

Deuxième partie

**Détermination du champ de vitesse
moyen et étude des mécanismes
d'induction dans une expérience à
haut Rm**

INTRODUCTION

Les motivations de cette partie sont d'investiguer le rôle des mécanismes d'induction et de dissipation magnétique joué par l'écoulement moyen dans le régime magnétostrophique de l'expérience DTS. Nous rappelons que cette expérience n'a pas vocation à mettre en évidence la possibilité d'une dynamo fluide dans une configuration similaire à celle de la Terre. On s'appliquera dans cette première partie à décrire la dynamique de l'expérience en modélisant les interactions entre l'écoulement et le champ magnétique à partir du modèle cinématique écrit sous la forme de l'équation 1.3 (équation d'induction sans les fluctuations). Nous déterminerons, par inversion, des cartes de l'écoulement moyen solution de l'équation d'induction. Aucun mécanisme d'induction associé au champ de vitesse moyen ne sera négligé et chacun fera l'objet d'une discussion approfondie. Nous tenterons alors de répondre à la première question formulée en introduction : Peut-on modéliser l'induction d'un champ magnétique de grande échelle à partir de l'écoulement moyen ?

Plusieurs campagnes d'étude de l'expérience DTS ont précédé ce manuscrit et nous apportent de nombreuses connaissances sur la dynamique du champ magnétique et du champ de vitesse à grande échelle. Nous savons depuis les travaux de Brito *et al.* (2011) que la sphère interne en rotation entraîne le fluide dans la direction azimutale par action du champ magnétique sur le sodium liquide. Cette étude nous apprend que l'écoulement qui en résulte est responsable d'une forte induction magnétique dans la direction azimutale. Plus récemment, Nataf (2013) a inversé simultanément pour des données de champ de vitesse et de champ magnétique afin d'évaluer par différence la proportion du champ magnétique qui n'était pas induite par l'écoulement moyen. Son inversion repose sur l'approximation d'un champ de vitesse méridionale négligeable devant la vitesse azimutale pour $Rm \approx 10$. Les résultats qu'il apporte sont assez séduisants mais ne permettent

pas d'expliquer toutes les données expérimentales. Il évalue alors l'importance des termes de couplage entre circulation méridienne et champ magnétique azimutal qu'il avait négligés dans un premier temps. Il termine son étude en concluant que ces termes de couplage sont de bons candidats pour expliquer l'écart des prédictions de son modèle aux données. Il soutient en revanche que les contributions des fluctuations turbulentes au champ magnétique moyen sont, comparativement aux termes de couplage, négligeables. Nous tenterons d'éclaircir ce point au cours de l'étude à venir et donc d'améliorer les prédictions du modèle proposé par [Nataf \(2013\)](#)

Nous cherchons en effet à prolonger l'approche de [Nataf \(2013\)](#) en inversant pour de plus hautes fréquences de rotation de la sphère interne et en résolvant l'équation d'induction cinématique complète pour trouver l'écoulement moyen (1.3). A haut R_m , le produit croisé du champ de vitesse et du champ magnétique induit nous pousse à adopter une méthode d'inversion non-linéaire et nous permet d'ajouter les termes négligés par [Nataf \(2013\)](#), comme notamment les termes de couplages évoqués précédemment. Nous améliorons également l'approche de [Nataf \(2013\)](#) en augmentant considérablement le nombre de données disponibles pour l'inversion. En effet, inspiré par les travaux de [Frick et al. \(2010\)](#), nous utilisons la réponse d'un signal alternatif du champ magnétique à l'écoulement moyen comme un traceur de la dynamique du fluide. Ce signal magnétique est directement imposé par les hétérogénéités azimutales de l'aimant permanent. Nous retraçons l'évolution radiale de cette réponse dans le volume fluide grâce aux capteurs magnétiques positionnés dans le doigt de gant. Ainsi, nous inversons simultanément les données de champ magnétique alternatif à travers la coquille de fluide, des mesures du champ de vitesse obtenues par velocimétrie Doppler, des données du champ magnétique moyen (par opposition au champ magnétique alternatif) en surface et dans le volume de l'expérience ainsi que des mesures du potentiel électrique à l'interface du fluide et de la sphère externe (voir chapitre 2). Nous résoudreons l'équation d'induction (modèle direct de l'inversion) en partant du code utilisé par [Figueroa et al. \(2013\)](#) que nous étendrons au cas d'un champ magné-

tique non-homogène (incluant les hétérogénéités du champ imposé) pour résoudre le modèle direct.

L'organisation de cette partie va se dérouler comme suit : nous introduirons dans le chapitre 3 le formalisme mathématique nécessaire à la description du champ de vitesse et du champ magnétique dans une géométrie sphérique. Nous ferons dans un premier temps l'hypothèse d'un système axisymétrique, ce qui permettra d'introduire la formulation de Braginskii pour le modèle d'induction cinématique. Une telle expression de l'équation d'induction est particulièrement adaptée à la description des mécanismes d'induction et de dissipation magnétique mis en jeu dans l'expérience. L'équation ainsi développée constituera un bagage théorique nécessaire à la compréhension des chapitres suivants. Nous intégrerons au chapitre 4 les hétérogénéités de l'aimant permanent à l'équation d'induction. On parlera alors de champ magnétique non-axisymétrique en référence aux hétérogénéités azimutales du champ magnétique. Viendra ensuite une analyse complète des interactions entre un champ magnétique non-axisymétrique et le milieu conducteur environnant dans une géométrie sphérique. Nous traiterons dans un premier temps deux cas simples, un modèle de diffusion statique et un modèle de diffusion en rotation solide où le champ magnétique imposé tournera à la vitesse de la sphère interne. Le modèle complet d'induction cinématique sera l'objet du chapitre 5. Nous reprendrons alors le modèle direct avec les conditions limites de l'expérience et nous détaillerons le processus d'inversion cinématique non-linéaire nous permettant d'accéder au champ de vitesse de l'expérience. Pour finir, les résultats obtenus par inversion à $Rm = 28$, soit une fréquence de rotation de la sphère interne de -9 Hz, seront exposés et discutés.

3 CHAMP MAGNÉTIQUE INDUIT PAR L'ÉCOULEMENT MOYEN : ÉQUATIONS DÉTAILLÉES

Comme nous l'avons vu précédemment, la majorité des objets astrophysiques, ainsi que l'expérience DTS, sont à géométrie sphérique ce qui permet un certain nombre de suppositions simplificatrices couramment utilisées. Dans l'expérience DTS, le fluide est majoritairement entraîné dans la direction azimutale (autour de l'axe de rotation) par un champ magnétique principalement dipolaire aligné avec l'axe de rotation. Il est donc naturel de considérer au premier ordre que l'écoulement ainsi que le champ magnétique soient axisymétriques (symétrique autour de son axe de rotation) et de symétrie équatoriale (symétrique par rapport à l'équateur pour le champ de vitesse et antisymétrique pour le champ magnétique).

Après avoir introduit le formalisme mathématique utile à la description d'un champ vectoriel dans une géométrie sphérique, nous développerons dans ce chapitre une version détaillée de l'équation d'induction en faisant l'hypothèse d'un écoulement et d'un champ magnétique axisymétrique. Cette approximation est celle que fit Braginskii dans le but de généraliser le théorème de Cowling ([Braginskii 1964](#)). Nous reprendrons cette démonstration qui nous permettra de mieux appréhender la place centrale de ce théorème pour la théorie dynamo et qui a le second avantage de faciliter notre compréhension des différents mécanismes d'induction et de dissipation mis en jeu dans l'expérience. Nous discuterons cer-

tains des termes comme le processus d'induction de grande échelle nommé effet Ω .

1 Décomposition poloïdale/toroïdale

Introduisons maintenant la décomposition poloïdale et toroïdale qui sera utilisée pour la description spatiale du champ magnétique et du champ de vitesse de l'expérience. En effet, une approche classique des expériences à géométrie sphérique est la décomposition des quantités vectorielles en deux potentiels scalaires. Tout champ de vecteur solénoïdal¹ peut s'écrire comme la somme de deux composantes toroïdales et poloïdales $\mathbf{S} = \mathbf{S}_T + \mathbf{S}_P$, tel que

$$\mathbf{S} = \underbrace{\nabla \times (S_T \mathbf{r})}_{\text{composante toroïdale}} + \underbrace{\nabla \times \nabla \times (S_P \mathbf{r})}_{\text{composante poloïdale}}, \quad (3.1)$$

où S_T est le scalaire toroïdal et S_P le scalaire poloïdal. \mathbf{r} est le vecteur rayon en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Ainsi au lieu des trois composantes d'un champ vectoriel noté \mathbf{S} , nous n'avons plus que les deux scalaires poloïdaux et toroïdaux. On peut écrire explicitement les deux composantes poloïdales et toroïdales

$$\mathbf{S}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial S_T}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial S_T}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} L_2(S_P) \\ \partial_\theta \left(\frac{1}{r} \partial_r (r S_P) \right) \\ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \left(\frac{1}{r} \partial_r (r S_P) \right) \end{pmatrix}, \quad (3.2a)$$

où L_2 est l'opérateur Laplacien angulaire, voir annexe 2. Il est avantageux d'utiliser cette décomposition pour le champ magnétique \mathbf{B} et le champ de vitesse \mathbf{U} qui sont tous les deux solénoïdaux.

Pour résoudre l'équation d'induction (1.3), on se place dans un repère sphérique dont les vecteurs s'expriment dans la base locale $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$. Tout champ scalaire peut être décomposé sur un ensemble de fonctions complexes $Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ appelées harmoniques sphériques. On peut écrire

$$S_T = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l a_l^m(r, t) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (3.3a)$$

$$S_P = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l c_l^m(r, t) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (3.3b)$$

1. i.e. à divergence nulle

où $i^2 = -1$. a_l^m et c_l^m sont respectivement les coefficients de Fourier toroïdaux et poloïdaux du champ \mathbf{S} et sont fonctions du rayon et du temps. P_l^m est le polynôme de Legendre associé de degré l et d'ordre m défini en annexe (2). La base d'harmoniques sphériques est tronquée au degré $l = l_{max}$ et à l'ordre $m = m_{max}$. La description radiale peut être soit discrétisée sur une grille radiale comportant Nr points, soit décomposée sur une base polynômiale comme nous le discuterons plus tard.

2 Formulation axisymétrique des quantités moyennées

Le champ magnétique de DTS est largement dominé par un champ dipolaire aligné avec l'axe de rotation. Une première approximation est donc de considérer la quantité moyennée $\langle \mathbf{B} \rangle$ comme étant axisymétrique, ne dépendant pas de la composante azimutale φ . On néglige dans un premier temps les variations non-axisymétriques du champ magnétique (associées au champ non-homogène évoqué précédemment) pour des raisons de simplicité. Celles-ci seront réintroduites au chapitre suivant. Le fluide est fortement entraîné dans la direction azimutale par le dipôle magnétique ce qui lui confère une vitesse proche de la vitesse de rotation de la graine. L'écoulement moyen $\langle \mathbf{U} \rangle$ est également considéré axisymétrique. Nous savons que ces approximations sont valides au premier ordre grâce aux travaux de [Nataf \(2013\)](#) et [Brito et al. \(2011\)](#). Nous concluerons à la fin de cette partie en discutant la validité d'une telle hypothèse.

Ainsi utilisant la décomposition poloïdale/ toroïdale pour le champ de vitesse et le champ magnétique, on peut écrire

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P, \quad (3.4a)$$

$$\langle \mathbf{U} \rangle = \mathbf{u}_T + \mathbf{u}_P, \quad (3.4b)$$

où \mathbf{B}_T et \mathbf{B}_P sont les vecteurs toroïdal et poloïdal du champ magnétique et \mathbf{u}_T et \mathbf{u}_P les vecteurs poloïdal et toroïdal du champ de vitesse. La partie toroïdale du champ magnétique \mathbf{B}_T est nulle dans la partie isolante (au delà de la coquille externe

de DTS) alors que la partie poloïdale \mathbf{B}_P décroît vers zéro à l'infini. Les champs de vitesse poloïdaux et toroïdaux sont nuls au bord externe, soit $\mathbf{u}_T(r_o, \theta, \varphi) = \mathbf{u}_P(r_o, \theta, \varphi) = \mathbf{0}$. La vitesse poloïdale est nulle au bord interne, $\mathbf{u}_P(r_i, \theta, \varphi) = \mathbf{0}$, et la vitesse toroïdale est égale à la vitesse de rotation de la sphère interne, $\mathbf{u}_T(r_i, \theta, \varphi) = 2\pi r_i f$.

En utilisant l'hypothèse d'un écoulement et d'un champ magnétique axisymétriques, les expressions (3.4) se simplifient tel que,

$$\langle \mathbf{B} \rangle = b_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \nabla \times A \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.5a)$$

$$\langle \mathbf{U} \rangle = u_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \nabla \times \chi \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.5b)$$

où A et χ sont les potentiels poloïdaux du champ magnétique et du champ de vitesse. On remarque que les champs poloïdaux n'ont pas de composante azimutale et que les deux champs b_φ et u_φ sont purement azimutaux (pour la composante toroïdale). Le champ magnétique et le champ de vitesse sont à divergence nulle ce qui nous a permis d'écrire $\mathbf{B}_P = \nabla \times A \mathbf{e}_\varphi$ et $\mathbf{u}_P = \nabla \times \chi \mathbf{e}_\varphi$ vérifiant $\nabla \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0$ et $\nabla \cdot \langle \mathbf{U} \rangle = 0$.

3 Théorème de Cowling et la démonstration de Braginskii

L'approximation axisymétrique du champ de vitesse et du champ magnétique est à l'origine du théorème anti-dynamo de Cowling. Dans l'état stationnaire ($\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle = 0$ dans l'expression (1.3)) proposé par Cowling, le théorème excluait la possibilité qu'un champ magnétique axisymétrique puisse être entretenu par effet dynamo depuis un écoulement purement axisymétrique. Les arguments qu'avancait Cowling en 1933 s'appliquaient aux fluides compressibles et incompressibles mais les preuves étaient incomplètes comme l'a démontré plus tard Roberts (1967). C'est Braginskii (1964) qui formula plus clairement la démonstration dans un cas non nécessairement stationnaire mais pour un fluide incompressible seulement. Vingt ans plus tard Ivers et James (1984) étendront la démonstration au cas compressible.

La formulation de [Braginskii \(1964\)](#) s'obtient depuis l'équation d'induction (1.3) d'où l'on extrait un système d'équation séparant l'évolution du champ magnétique axisymétrique toroïdal $b_\varphi(s, \theta, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$ et poloïdal $A(s, \theta, \varphi)$ avec s le rayon cylindrique. On obtient

$$\partial_t b_\varphi + s\mathbf{u}_P \cdot \nabla \left(\frac{b_\varphi}{s} \right) = s\mathbf{B}_P \cdot \nabla \omega + \eta \Delta_1 b_\varphi, \quad (3.6a)$$

$$\partial_t A + \frac{\mathbf{u}_P}{s} \cdot \nabla (sA) = \eta \Delta_1 A, \quad (3.6b)$$

avec le laplacien $\Delta_1 = \Delta - s^{-2}$ et ω la vitesse angulaire u_φ/s . Les deux termes de gauche des expressions (3.6) sont les dérivées Lagrangiennes du champ magnétique poloïdal et toroïdal. Ils contiennent les variations temporelles du champ magnétique (dérivée partielle en temps) et un terme de transport advectif exercé par la vitesse poloïdale aussi appelée vitesse méridionale (se déplaçant dans le plan méridien (r, θ)). Ces termes d'advection ne participent pas à la création ou à la disparition d'énergie magnétique mais seulement à leur transport dans le plan méridien. On parlera cependant d'induction par advection méridionale dans la suite du manuscrit. Le rôle joué par la circulation méridienne dans l'expérience DTS sera commenté et discuté au chapitre 5. De même les termes en laplacien Δ_1 sont des termes dissipatifs qui ne permettent pas la création d'énergie magnétique.

Si l'on cherche à produire de l'énergie magnétique à partir d'un mouvement fluide, l'on doit s'intéresser aux termes de droite des équations (3.6). Le terme $s\mathbf{B}_P \cdot \nabla \omega$ dans (3.6a) représente un terme source qui transforme le champ magnétique poloïdal \mathbf{B}_P en champ toroïdal b_φ par cisaillement fluide (gradient de vitesse angulaire, $\nabla \omega$). Ce phénomène d'induction est connu sous le nom d'effet Ω comme nous le détaillerons plus loin. Une telle création de champ magnétique est très importante puisqu'elle permet, s'il existe déjà un champ magnétique poloïdal, de compenser la dissipation magnétique du champ toroïdal associée au terme de diffusion $\Delta_1 b_\varphi$. Ce phénomène d'induction occupe une place majeure dans l'expérience DTS comme nous le verrons par la suite. On constate l'absence de terme source dans l'équation (3.6b) ce qui par conséquent amène le champ magnétique poloïdal $\mathbf{B}_P = \nabla \times A\mathbf{e}_\varphi$ à décroître vers zéro sous l'action de la dissipation magnétique exercée par la diffusion $\Delta_1 A$. L'évolution du champ magnétique poloïdal est donc totalement découplée de l'évolution du champ toroïdal.

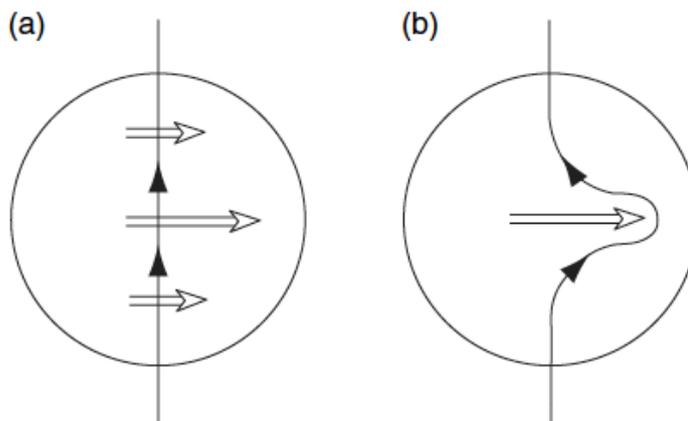


FIGURE 3.1 – L'effet ω . (a) une ligne de champ poloïdal, représentée le long d'un méridien (simple flèche), est cisailée par un champ de vitesse azimutal (double flèche); (b) la conséquence de ce cisaillement est la production d'un champ magnétique toroïdal de composante azimutale non nulle. Schéma tiré de [Roberts et King \(2013\)](#)

Voici le coeur de la démonstration de Braginskii qui est de démontrer qu'un champ A va irrémédiablement tendre vers zéro quand $t \rightarrow \infty$. La disparition du champ poloïdal conduit à l'absence de source pour le champ toroïdal. Par conséquent, le champ toroïdal sera à son tour amené à décroître vers zéro. L'intérêt principal de la formulation de Braginskii est de mettre en évidence que l'équation qui gouverne le champ poloïdal a besoin d'un terme source pour maintenir un champ magnétique axisymétrique. Ainsi on ne peut entretenir un champ magnétique axisymétrique en faisant l'hypothèse d'un écoulement axisymétrique comme le prévoyait TG. Cowling. La partie III ajoutera une composante non-axisymétrique à l'écoulement afin de fournir le terme source manquant au champ poloïdal.

4 L'effet Ω

On appelle traditionnellement l'induction d'un champ magnétique toroïdal par un fort cisaillement fluide, l'effet Ω . Ce mécanisme d'induction est habituellement étudié dans le cadre de géométries axisymétriques et résulte d'un cisaillement des lignes de champ poloïdales associé à un gradient de vitesse toroïdal. Ce phénomène est illustré dans la figure 3.1.

Dans le contexte hydrodynamique, une ligne reliant deux particules fluides initialement orthogonale au cisaillement est étirée par l'écoulement dans la direction parallèle au cisaillement. On peut montrer grâce au théorème d'Alfvén ([Alfvén](#)

1950) qu'il en sera de même pour le champ magnétique. Ainsi une ligne de champ poloïdal (simple flèche figure 3.1) qui est orthogonale au cisaillement va être étirée dans la direction toroïdale, c'est dire parallèle au cisaillement (double flèche figure 3.1). On crée ainsi un champ magnétique toroïdal à partir d'un champ initialement poloïdal.

Notons que dans l'expérience DTS un champ magnétique poloïdal permanent est imposé depuis la sphère interne. La vitesse azimutale de l'écoulement ne tirera donc jamais de produire un champ induit toroïdal. L'effet d'induction Ω a déjà été observé dans l'expérience DTS (Brito *et al.* 2011) et nous y reviendrons dans le chapitre 5.

Nous avons dans ce chapitre introduit les mécanismes d'induction majeurs que l'on rencontrera tout au long de ce manuscrit. L'équation d'induction nous a permis de relier les interactions entre l'écoulement du fluide et l'évolution du champ magnétique. Ainsi à l'image de certains travaux qui utilisent des données magnétiques collectées à la surface de la Terre comme une signature des mouvements du fluide dans le noyau terrestre (Gillet *et al.* 2010), nous chercherons à reconstruire par inversion l'écoulement de DTS à partir de nombreuses mesures expérimentales. L'équation d'induction que nous venons de présenter constituera le modèle direct des inversions qui viendront au chapitre 5. Avant de chercher une solution au champ de vitesse moyen de l'expérience DTS, nous souhaiterions traiter un cas plus réaliste du point de vue de l'expérience pour lequel le champ magnétique imposé est légèrement non-axisymétrique.

EVOLUTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE NON-AXISYMETRIQUE : SOLUTIONS ANALYTIQUES

Le champ magnétique imposé depuis la sphère interne de DTS, même s'il est largement dominé par sa composante dipolaire, est légèrement déformé dans les directions latitudinales et azimutales. Notons que ce sont les déformations (ou hétérogénéités) azimutales qui introduisent la non-axisymétrie du champ magnétique. Ainsi lorsque l'on fait tourner la sphère interne de l'expérience, ce champ magnétique non-axisymétrique provenant de l'aimant permanent impose la diffusion d'un signal magnétique alternatif dans la coquille conductrice de sodium liquide.

Nous allons voir dans un premier temps quelle description spatiale nous pouvons faire de ce champ magnétique non-axisymétrique. Nous étudierons ensuite le comportement des réponses magnétiques dans le cadre de deux modèles d'induction simples, le premier réduira l'équation d'induction à un cas statique et purement diffusif et le second sera un cas diffusif et non-stationnaire. Le cas du modèle cinématique correspondant à l'équation d'induction complète sera traité au chapitre suivant. L'objectif de ce chapitre est de comprendre quelques mécanismes simples associés à un champ magnétique non-axisymétrique diffusant dans une coquille de sodium au repos.

1 Champ magnétique non-axisymétrique imposé au bord

Nous travaillons dans le repère sphérique de l'expérience DTS. Le champ magnétique est imposé depuis une sphère isolante et diffuse dans un volume D semi-

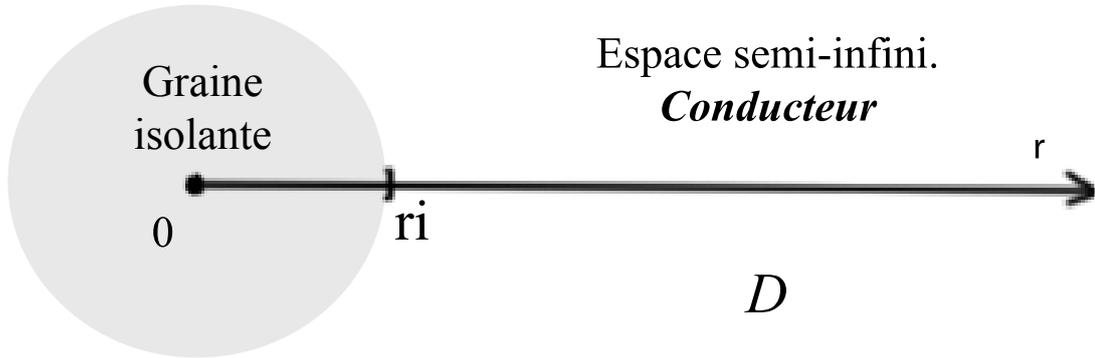


FIGURE 4.1 – Schéma de la sphère interne de l'expérience DTS emprisonnée dans un espace semi-infini de fluide conducteur. La sphère interne est choisie isolante pour le modèle simple présenté dans le texte.

infini ayant la conductivité du sodium, figure 4.1 (DTS avec une limite externe placée à l'infini). Le champ magnétique imposé en $r = r_i$ est un champ purement poloïdal et peut s'écrire sous la forme $\langle \mathbf{B} \rangle = \nabla \times \nabla \times (P\mathbf{r})$ d'après l'expression (5.11). Le scalaire poloïdal P du champ magnétique peut être décomposé sur la base d'harmoniques sphériques suivant (3.3b).

On peut écrire

$$P = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \Phi_l^m(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{(-im\Omega t)}. \quad (4.1)$$

Lors de la rotation de la sphère interne, $\Omega \neq 0$, les hétérogénéités azimutales ou modes azimutaux, résultat d'un champ non-axisymétrique, sont décrits par l'ordre harmonique m et vont osciller dans le référentiel du laboratoire à la fréquence $f = m\Omega/2\pi$. La présence d'un champ oscillant dans un fluide conducteur va être à l'origine de courants électriques et par conséquent d'un champ induit. L'évolution radiale du champ magnétique $\Phi_l^m(r)$ sera solution de l'équation d'induction 1.3. Le champ magnétique est connu à la surface de la sphère interne, en $r = r_i$, et décroît à zéro à l'infini.

2 Modèle statique d'un champ magnétique non-axisymétrique

Avant de traiter le cas en rotation, commençons avec le cas simple où $\Omega = 0$ et donc $\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle = 0$, le sodium est également au repos, $\langle \mathbf{U} \rangle = 0$. L'équation (1.3) prend

alors la forme simple

$$\Delta P = 0. \quad (4.2)$$

On reconnaît ici l'équation de Poisson qui décrit la diffusion d'un champ poloïdal dans une coquille de sodium au repos. La solution de cette équation est bien connue et l'on obtient une expression pour $\Phi_l^m(r)$ que l'on peut écrire

$$\Phi_l^m(r) = C_l^m \left(\frac{r}{r_o}\right)^l + D_l^m \left(\frac{r}{r_o}\right)^{-(l+1)}, \quad (4.3)$$

où la constante $D_l^m = 0$ (respectivement $C_l^m = 0$) s'il n'y a pas de source interne (externe) de champ magnétique. Dans le cas présent, le champ est d'origine interne et on obtient pour P ,

$$P = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l D_l^m \left(\frac{r}{r_o}\right)^{-(l+1)} Y_l^m(\theta, \phi), \quad (4.4)$$

où chaque point de rayon r est normalisé par r_o . Les coefficients de Fourier D_l^m sont déterminés par inversion depuis des mesures expérimentales du potentiel magnétique dans l'expérience DTS (annexe 5). Ce modèle nous enseigne que lorsque seule la diffusion magnétique est mise en jeu, alors le champ magnétique décroît en $\left(\frac{r}{r_o}\right)^{-(l+1)}$. On remarque que les hauts degrés d'harmonique l décroissent sur de plus petites distances que les bas degrés et que la diffusivité magnétique η n'intervient pas dans cette solution. Nous ferons référence à ce modèle par la suite sous le nom de *modèle statique* (ou *static model* en anglais).

3 Modèle d'effet de peau d'un champ magnétique non-axisymétrique

Nous cherchons maintenant la solution d'un champ magnétique non-axisymétrique en rotation solide ($\Omega \neq 0$ et $\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle \neq 0$) diffusant dans un volume infini D de sodium au repos ($\langle \mathbf{U} \rangle = 0$). L'équation d'induction du scalaire poloïdal s'écrit alors

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \eta \Delta P. \quad (4.5)$$

En injectant (4.1) dans cette équation différentielle et en utilisant la propriété du laplacien angulaire (annexe 2.1) on obtient

$$-im\Omega \Phi_l^m(r) = \eta \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} \Phi_l^m(r) + \partial_r^2 \Phi_l^m(r) \right], \quad (4.6)$$

où $i^2 = -1$. La solution analytique de cette équation est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel complexes de type I, notée J_n , de type II, notée Y_n et de degré n .

$$\Phi_l^m(r) = \sum_n C_l^m \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{\gamma_m}\right) + B_l^m \sqrt{r} Y_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{\gamma_m}\right) \quad (4.7)$$

On note $\delta_m = \sqrt{\frac{\eta}{m\Omega}}$ l'épaisseur de peau et $\gamma_m = \frac{-\delta_m}{\sqrt{i}}$. δ_m représente la longueur caractéristique de diffusion des modes azimutaux. Les modes m d'ordre élevé auront donc une longueur caractéristique de pénétration plus petite que les modes m d'ordre plus faible. On remarque que cette longueur dépend fortement de la période des modes, soit de la vitesse de rotation de la sphère interne Ω . Ce phénomène est connu sous le nom d'effet de peau.

Le terme à gauche de l'équation (4.6) indique que le déphasage augmente avec la fréquence de rotation ainsi qu'avec l'ordre des modes azimutaux. Pour le champ magnétique axisymétrique ($m = 0$) on retrouve le cas statique décrit dans la section précédente où la rotation n'a aucun effet sur l'évolution radiale du champ magnétique. On pourra trouver figure 8.3 une représentation détaillée de l'évolution radiale pour les modes $m = 1, 3$ et 4 du modèle d'effet de peau.

On fera dans la suite de ce manuscrit référence au *modèle d'effet de peau* (ou *skin effect model* en anglais). Il s'agit d'un modèle simple où le terme d'induction magnétique lié aux mouvements du fluide est nul. L'équation d'induction complète dans un espace conducteur fermé par la sphère externe en $r = r_o$ sera résolue numériquement dans le chapitre 5.

Les travaux qui vont suivre reposent en partie sur les mécanismes d'induction et de diffusion des modes non-axisymétriques dans l'écoulement de l'expérience. L'évolution de ces modes sera alors résolue par l'équation d'induction complète (1.3) avec $\langle \mathbf{U} \rangle \neq 0$. Nous voudrions une nouvelle fois attirer l'attention du lecteur sur les deux modèles simples, *modèle statique* (fluide et sphère interne au repos) et *modèle d'effet de peau* (fluide au repos et sphère interne en rotation), que nous venons de présenter. Ils seront réutilisés à plusieurs reprises dans ce manuscrit comme deux modèles caractéristiques de deux processus physiques clairement identifiés et faciliteront notre compréhension du modèle cinématique.

4 Indépendance des modes non-axisymétriques du champ magnétique

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit une formulation de l'équation d'induction proposée par Braginskii (1964) dans le cadre d'une approximation axisymétrique du champ de vitesse et du champ magnétique. Or nous venons de voir que le champ magnétique, imposé par l'aimant permanent de l'expérience DTS, rompt avec l'approximation axisymétrique. Nous voulons montrer dans cette section que la formulation de Braginskii reste valide pour un champ imposé non-axisymétrique puisque chaque mode évolue indépendamment à condition que l'écoulement reste axisymétrique. De même, dans ces conditions, le théorème de Cowling reste vrai.

En effet un mode magnétique noté m_1 reste indépendant d'un mode magnétique noté m_2 à condition que le champ de vitesse avec lequel il interagit reste axisymétrique ($m = 0$).

S'il devait y avoir un couplage entre les différents modes magnétiques, celui-ci interviendrait à travers le produit vectoriel $\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle$ d'induction magnétique lors de la résolution du modèle cinématique (1.3). La partie non-axisymétrique des champs $\langle \mathbf{U} \rangle$ et $\langle \mathbf{B} \rangle$ s'exprimerait alors sous la forme d'une décomposition de Fourier en $e^{im\varphi}$. Considérons un mode magnétique non-axisymétrique m_1 interagissant avec un champ de vitesse m_2 , l'induction magnétique résultante du produit vectoriel des deux modes prendra la forme suivante,

$$\left(e^{im_1\varphi} + \overline{e^{im_1\varphi}} \right) \times \left(e^{im_2\varphi} + \overline{e^{im_2\varphi}} \right) = 2Re \left(e^{im_3\varphi} \right) \quad \text{où} \quad m_3 = m_1 \pm m_2 \quad (4.8)$$

et $\overline{e^{im_1\varphi}} = e^{-im_1\varphi}$. Ainsi, si le champ de vitesse a un mode azimutal m_2 non nul, alors il résultera du couplage des modes m_1 et m_2 un mode magnétique m_3 différent du mode initial m_1 . En revanche si m_2 est nul (mode azimutal de l'écoulement) alors on a l'égalité $m_3 = m_1$ et le mode magnétique initial est découplé des autres modes magnétiques. Seule son amplitude et sa phase évolueront en interagissant avec le champ de vitesse $m = 0$. Dans l'étude qui va suivre, nous allons résoudre l'équation d'induction pour un champ de vitesse fixé axisymétrique. Les

modes non-axisymétrique du champ magnétique resteront donc indépendants et l'équation d'induction telle que nous l'avons formulée chapitre 3 restera valide.

Pour conclure, nous venons de poser les bases théoriques nécessaires au problème inverse que nous allons traiter dans le chapitre suivant. Nous avons formulé l'hypothèse axisymétrique du champ de vitesse et du champ magnétique et nous avons introduit une version simplifiée de l'équation d'induction. On sait d'après les travaux de Brito *et al.* (2011) et Nataf (2013) que l'hypothèse axisymétrique est valable au premier ordre pour l'expérience DTS. Cependant nous avons souhaité ajouter les composantes non-axisymétriques du champ magnétique afin de modéliser leur évolution à travers l'écoulement fluide. Des mesures expérimentales ont été réalisées en parallèle depuis le doigt de gant et vont nous permettre d'utiliser chaque mode magnétique comme un traceur de l'écoulement. La méthode d'inversion mise en œuvre pour intégrer ces données magnétiques est détaillée dans l'article qui suit.

RECONSTRUCTION DE L'ÉCOULEMENT MOYEN ET DU CHAMP MAGNÉTIQUE INDUIT DE L'EXPÉRIENCE DTS

Nous réaliserons dans ce chapitre une inversion non-linéaire par la méthode des moindres carrés afin de reconstruire l'écoulement moyen de l'expérience DTS, solution de l'équation d'induction 3.6. Pour contraindre cette solution de vitesse, des mesures de l'écoulement moyen, du champ magnétique axisymétrique et non-axisymétrique, dans le volume de l'expérience et à la surface de la sphère externe et des mesures de potentiels électriques en surface ainsi que le couple magnétique du moteur de l'expérience ont été réalisées (voir figure 2.2).

Après une brève introduction des objectifs de l'article, nous présenterons l'ensemble des données utilisées pour mener à bien notre inversion. Nous porterons tout particulièrement l'attention du lecteur sur les données de champ magnétique non-axisymétrique qui constituent une des nouveautés importantes de cette étude. Nous détaillerons la méthode de résolution du modèle direct, incluant la discrétisation du champ de vitesse et du champ magnétique ainsi que les conditions aux limites imposées. Le formalisme d'inversion moindre carré sera exposé avec les choix concernant les paramètres du modèle de vitesse ainsi que le modèle et les erreurs *a priori*. Nous terminerons en commentant les résultats obtenus comprenant les cartes des champs de vitesse poloïdal et toroïdal et les comparaisons entre les prédictions de notre modèle et les données expérimentales. Nous discuterons enfin le rôle des différentes composantes de l'écoulement et leurs contribution à

l'énergie magnétique induite.

1 Article : Magnetic induction and diffusion mechanisms in a liquid sodium spherical Couette experiment

Article (Simon Cabanes, Nathanaël Schaeffer & Henri-Claude Nataf) publié dans Physical Review E (PRE).

1.1 abstract

We present a reconstruction of the mean axisymmetric azimuthal and meridional flows in the DTS liquid sodium experiment. The experimental device sets a spherical Couette flow enclosed between two concentric spherical shells where the inner sphere holds a strong dipolar magnet, which acts as a magnetic propeller when rotated. Measurements of the mean velocity, mean induced magnetic field and mean electric potentials have been acquired inside and outside the fluid for an inner sphere rotation rate of 9 Hz ($Rm \simeq 28$). Using the induction equation to relate all measured quantities to the mean flow, we develop a nonlinear least square inversion procedure to reconstruct a fully coherent solution of the mean velocity field. We also include in our inversion the response of the fluid layer to the non-axisymmetric time-dependent magnetic field that results from deviations of the imposed magnetic field from an axial dipole. The mean azimuthal velocity field we obtain shows super-rotation in an inner region close to the inner sphere where the Lorentz force dominates, which contrasts with an outer geostrophic region governed by the Coriolis force, but where the magnetic torque remains the driver. The meridional circulation is strongly hindered by the presence of both the Lorentz and the Coriolis forces. Nevertheless, it contributes to a significant part of the induced magnetic energy. Our approach sets the scene for evaluating the contribution of velocity and magnetic fluctuations to the mean magnetic field, a key question for dynamo mechanisms.

1.2 Introduction

The magnetic field of most planets and stars is generated by the dynamo effect, which converts kinetic energy into magnetic energy. The apparition of a magnetic field is governed by the magnetic induction equation. Solving this equation for a given velocity field is called the kinematic dynamo problem. For a given velocity field of typical amplitude U and characteristic length scale L , the magnetic field B can grow only if the induction term is much larger than the diffusion term due to Ohmic dissipation. This is measured by the magnetic Reynolds number $Rm = UL/\eta$, where η is the magnetic diffusivity of the fluid. Dynamo action requires a large enough magnetic Reynolds number. However, it was soon recognized that this is not enough and that the velocity field must also satisfy particular topological properties. For example, Cowling's theorem (Cowling 1933) states that a purely axisymmetric magnetic field will always decay. Flows with a substantial helicity are usually more dynamo-prone, and the first experimental efforts concentrated on examples of such flows, for which the kinematic dynamo problem had been solved. The team of Professor Gailitis built in Riga an experiment producing a swirling flow close to that of the Ponomarenko dynamo (Ponomarenko 1973). It used sodium (the best electric conductor known in the liquid state) as a working fluid. In 2000, dynamo action was indeed observed (Gailitis *et al.* 2001), above a critical magnetic Reynolds number in agreement with the theoretical prediction.

In the mean time, the quest for a mechanism to produce a large-scale nearly axisymmetric magnetic field, such as observed on the Earth and other planets, led to the concept of $\alpha - \omega$ dynamos (see e.g. Charbonneau (2005)). In these models, a strong azimuthal flow around the rotation axis of the planet produces an ω effect, which shears any pre-existing poloidal magnetic field (such as a dipolar field), creating a strong azimuthal magnetic field. In order to get around Cowling's theorem, non-axisymmetric flow structures are then required to convert some of this azimuthal field into a poloidal field and close the loop. The small-scale non-axisymmetric flow structures that collectively produce a large-scale magnetic field can be viewed as one type of α effect. This term has been introduced in the context of homogeneous isotropic hydrodynamic turbulence (Steenbeck *et al.* 1966). Fluctuations also

enhance the effective magnetic diffusivity, yielding a β term that adds to η . This approach of small scale non-axisymmetric contributions to the mean magnetic field originates from the expansion of a mean electromotive force, $\mathcal{E} = \langle \tilde{u} \times \tilde{b} \rangle$, in terms of the large-scale magnetic field B , such as $\mathcal{E} = \alpha : B + \beta : \nabla \times B$, (Krause et Rädler 1980). Components of the α and β tensors, which depend upon the turbulent characteristics of the flow, have been evaluated from nonlinear numerical simulations (Rüdiger et Brandenburg 2014) and in liquid metal experiments. In the latter case α and β , have been assumed to be scalars (Frick et al. 2010, Rahbarnia et al. 2012).

Experimental evidence for some sort of α effect was nicely demonstrated by the Karlsruhe dynamo (Stieglitz et Müller 2001). An array of 52 helicoidal flows of liquid sodium in pipes did produce a large-scale magnetic field above a critical value of the magnetic Reynolds number, as predicted by the theoretical analysis of G.O. Roberts (G.O Roberts. 1972). A large ω effect has been clearly observed in the liquid sodium experiment in New Mexico where a high toroidal field induction has been measured from a rotational shear in stable Couette flow (Colgate et al. 2011). Same has been observed in the DTS magnetized spherical Couette experiment (Brito et al. 2011), in which an imposed dipolar magnetic field is sheared by differential rotation of a liquid sodium layer (40 liters) between two concentric shells. The complete $\alpha - \omega$ dynamo mechanism still awaits an experimental demonstration, but hints of such dynamo bursts have recently been observed in the 3m-facility of Dan Lathrop at the University of Maryland (Zimmerman et al. 2014). This facility has the same geometry as the DTS experiment, but contains 12 m³ of liquid sodium.

Indeed, after the success of the Riga and Karlsruhe experimental dynamos, several teams have set up experiments to observe the dynamo mechanism in less constrained flows (O'Connell et al. 2001, Lathrop et al. 2001, Marié et al. 2002). A key element is that for the magnetic Reynolds number to be large enough for dynamo action, the kinetic Reynolds number $Re = UL/\nu$ has to be much larger, since the magnetic Prandtl number $Pm = \nu/\eta$ is of the order of 10^{-5} for liquid metals (ν is the kinematic viscosity). None of these experiments has achieved self-excitation yet (except when ferromagnetic parts are present (Monchaux et al. 2007, Berhanu et al. 2007)), and the main outcome of these studies is that turbulent fluctuations

do indeed contribute to a large-scale magnetic field, but in a way that counters the action the mean large-scale flow alone would have (Spence *et al.* 2006).

It is thus of particular interest to investigate what are the actual contributions of turbulent small-scale fluctuations to magnetic induction and diffusion in various experimental conditions. Spence *et al.* (2006) were the first to document a global negative α effect in the Madison facility. Fluctuations were responsible for a $\sim 30\%$ reduction of the applied field for $Rm \simeq 130$. Frick *et al.* (2010) investigated the effective magnetic diffusion in their torus experiment in Perm. In this set-up, a torus filled with liquid sodium is spun to solid-body rotation and stopped abruptly. The authors applied a time-varying azimuthal magnetic field to the torus, and examined the magnetic response of the very turbulent flow that sets in just after the stop. They report that turbulence increases the magnetic diffusivity by up to $\sim 30\%$ for $Rm \simeq 30$. Rahbarnia *et al.* (2012) have recently performed a direct local measurement of the $\tilde{u} \times \tilde{b}$ term responsible for the α and β effects (the $\tilde{\cdot}$ denotes time-fluctuations). They observe that the β effect dominates and increases the effective diffusivity by $\sim 30\%$ for $Rm \simeq 160$. Their results can be modeled as $\beta \simeq Rm_{rms}^*$, where $Rm_{rms}^* = u_{rms}\ell/\eta$ is a magnetic Reynolds number built on the length- and velocity- scales of the fluctuations. Nataf (2013) points out that the β effect found by Frick *et al.* (2010) is almost ten times larger than that of Rahbarnia *et al.* (2012), for a given Rm_{rms}^* . At this stage, we don't know if this is due to differences in the flow properties or to differences in the measurement methods.

In an effort to evaluate the contributions of turbulent fluctuations to the mean large-scale magnetic field in the DTS experiment, Nataf (2013) inverted simultaneously mean velocity and magnetic data in order to evaluate by difference the part of the mean magnetic field that is not induced by the mean velocity field. He also evaluated an upper bound for the contribution of the fluctuations to the mean field by mapping the amplitude of magnetic and velocity fluctuations. He found that this contribution was too small to be resolved, but compatible with the results of Rahbarnia *et al.* (2012). Because his approach has the unique potential to provide maps of the small-scale contributions to the induction equation, we pursue our quest in this direction.

However, we improve the approach of [Nataf \(2013\)](#) in a number of ways. In particular, inspired by the method of [Frick *et al.* \(2010\)](#), we analyse the response of the sodium layer to an imposed time-varying magnetic field. This field simply results from small deviations of the spinning central magnet from axisymmetry. We also extend the analysis to larger rotation rates (and hence larger magnetic Reynolds numbers). This leads us to solve the full time-dependent kinematic induction equation. Modifying and extending the code used by [Figueroa *et al.* \(2013\)](#), we implement both the direct model (the induction equation) and the non-linear inverse problem.

The organization of this article is as follows : we first recall the main characteristics of the DTS experiment. We then present the non-axisymmetric magnetic signals, which constitute one of the main ingredients of our study. We state the direct problem, with special care concerning the time-varying magnetic field, and describe the numerical computation of the kinematic non-linear problem. Realistic conductivities and boundary conditions are considered. We then perform a non-linear inversion of the experimental data at $Rm \simeq 28$ to recover the best axisymmetric azimuthal and meridional velocity fields. The non-axisymmetric signals reveal a rich physics, which we unravel. We finally discuss the results and the perspectives for the evaluation of the contribution of fluctuations to the mean magnetic field.

1.3 The DTS experiment

The DTS device

The DTS experiment is a spherical Couette flow experiment, with forty liters of liquid sodium enclosed between two concentric spherical shells of respective radius $r_i^* = 74$ mm and $r_o^* = 210$ mm (the superscript * refers to the dimensional quantities, and is dropped after adimensionalization by r_o^* as given in [Appendix 4](#)). The inner sphere consists of a $\simeq 15$ mm-thick copper shell, which encloses a strong permanent magnet. The stainless steel outer shell is 5 mm thick. The magnet produces a mainly dipolar field, pointing upward along the vertical rotation axis. Its intensity ranges from $B_i \simeq 175$ mT at the equator of the inner sphere, down to

$B_o = 7.1$ mT at the equator of the outer sphere (B_o is used for adimensionalization in Appendix 4).

We observe non-axisymmetric deviations of the imposed magnetic field, which reach a peak-to-peak amplitude of 16 mT at the surface of the inner sphere, down to 0.1 mT at the outer shell. We will use these deviations as a novel tool to probe induction and diffusion in the sodium layer. A reconstruction of the complete scalar magnetic potential of the magnet is presented in Appendix 5.

The inner sphere can spin at rotation rates $f = \Omega/2\pi$ up to 30 Hz, although we focus on measurements obtained for $f = 9$ Hz in this article. The outer sphere can also rotate independently but we keep it at rest in the present case. More details about the DTS device can be found in [Nataf et al. \(2006\)](#) and [Brito et al. \(2011\)](#).

Dimensionless numbers

This paper focuses on a kinematic model, which involves the induction equation alone. Our system is hence governed by a single dimensionless number, the magnetic Reynolds number Rm . Results presented in this article are for $Rm = 28$.

However the DTS experiment involves other dimensionless numbers related to the equation of motion. We give in table 5.1 the expressions and values of selected dimensionless numbers for two rotation rates of the inner sphere $f = 9$ Hz and 30 Hz. The Elsasser number Λ is classically used when a rotating flow interacts with a magnetic field. It is a measure of the ratio of the Lorentz force over the Coriolis force. In the DTS experiment, [Brito et al. \(2011\)](#) show that the transition between a Lorentz-dominated region near the inner sphere to a geostrophic outer region occurs at a cylindrical radius s where the local Elsasser number (defined using $B(s)$ instead of B_o) is about 1.

The Hartmann number is larger than 180 everywhere in the sodium layer, indicating that magnetic forces dominate over viscous forces. Since the magnetic Prandtl number Pm is very small, a large value of the Reynolds number Re is achieved for $Rm = 28$. We note that it is too large for present-day numerical simulations. For this reason, a kinematic approach is of great interest as the equation of motion is solved by the experiment. We also give the value of the Lundquist num-

TABLE 5.1

f	Rm	Λ	Ha	Pm	Lu	Re
$\Omega/2\pi$	$\Omega(r_o^*)^2/\eta$	$\sigma B_o^2/\rho\Omega$	$r_o^* B_o/\sqrt{\rho\mu\eta\nu}$	ν/η	$r_o^* B_o/\sqrt{\rho\mu\eta^2}$	$\Omega(r_o^*)^2/\nu$
9 Hz	28	$8.6 \cdot 10^{-3}$	180	$7.4 \cdot 10^{-6}$	0.5	$3.8 \cdot 10^6$
30 Hz	94	$2.6 \cdot 10^{-3}$				$1.3 \cdot 10^7$

ber Lu, which shows that Alfvén waves are severely damped by magnetic diffusion in our experiment.

Axisymmetric data acquisition and processing

At small magnetic Reynolds number and with an imposed magnetic field, one can obtain constraints on the fluid flow from the electrical currents and magnetic field it produces, as demonstrated by [Stefani et Gerbeth \(2000\)](#). In the kinematic approach we follow, we use as many observational constraints as possible on the mean velocity field and on its electric and magnetic signatures. We always assume that the mean flow is axisymmetric ($m = 0$) and symmetric with respect to the equator. We further assume that f and $-f$ rotation rates yield the same meridional circulation and the opposite azimuthal flow.

The $m = 0$ data and data errors are acquired and processed as described by [Nataf \(2013\)](#). The main difference is that we focus here on data for a rotation rate $f = \pm 9$ Hz, instead of ± 3 Hz in ([Nataf 2013](#)). They include velocity profiles obtained by ultrasound Doppler velocimetry, B_r , B_θ , and B_φ measurements of the induced magnetic field inside the fluid shell, using Hall magnetometers arranged inside a sleeve that can be positioned at four different latitudes (10° , -20° , and $\pm 40^\circ$), and electric potential differences at the surface of the outer sphere at four different latitudes (10° , 20° , 30° , and 40°). The resulting data coverage is displayed in Figure 5.1 in a meridional cross-section. We also use the measured torque on the inner sphere, which can be related to the $l = 2$ coefficient of the induced azimuthal magnetic field at the surface of the inner sphere, assuming the torque is essentially magnetic there ([Nataf 2013](#)). For the axisymmetric data, we make use of the $f \rightarrow -f$ symmetry. We can thus obtain constraints on both the azimuthal flow and

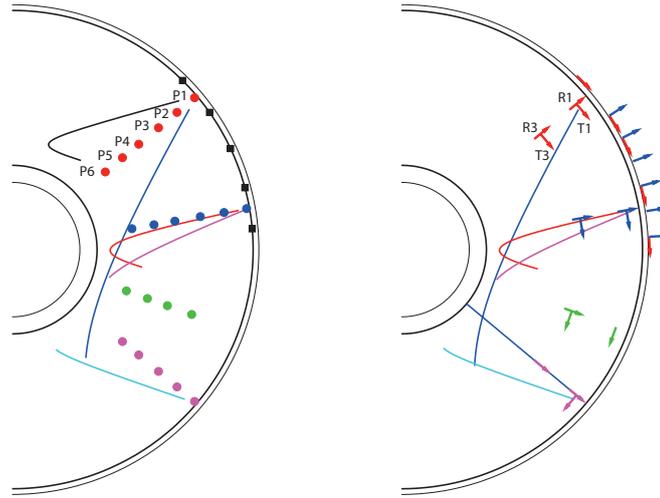


FIGURE 5.1 – Meridional maps of data coverage. Black lines displaying four spherical shells, mark successively the copper, the fluid and the stainless steel shells.(left : azimuthal data) The colored lines (crossing fluid shell) are the projections in the meridional plane of the ultrasound beams from which Doppler angular velocity profiles are obtained. Colored (gray) dots mark the position of the magnetic probes measuring the azimuthal component of the magnetic field (B_ϕ). Electric potentials are measured in the outer shell at positions displayed by the black squares. (right : meridional data) The colored lines (crossing fluid shell) are the projections in the meridional plane of the ultrasound beams from which Doppler meridional velocity profiles are obtained. Colored (gray) arrows indicate the position of the magnetic probes measuring the radial and orthoradial components of the magnetic field inside and outside the fluid. The magnetic probes provide both the mean and the time-dependent signals used in this study.

the meridional circulation from the sum and difference of Doppler velocity profiles shot along chords, which record a mixed projection.

1.4 Non-axisymmetric signal

Frequency power spectra of the magnetic field measurements are dominated by sharp peaks at the rotation frequency of the inner sphere and its multiple, especially in the sleeve close to the inner sphere. These peaks are the signature of the small deviations of the imposed magnetic field from axisymmetry. They record the response of the sodium layer to these deviations, which vary in time in the reference frame of the outer sphere since the non-axisymmetric components rotate with the inner sphere. This opens the way to probing the effective magnetic diffusivity of the sodium layer, as pioneered by the group in Perm ([Frick et al. 2010](#)).

Motifs and Fourier coefficients

These entirely new data are obtained in two steps. For each magnetometer, we first construct a 2π longitudinal motif for each one-turn rotation of the inner sphere from the time series of the magnetic field recordings. The records are chopped into N one-turn-motifs, using a longitude marker (a small magnet glued on the pulley that entrains the inner sphere, which passes in front of a GMR magnetometer in the Lab reference frame). N is typically between 500 for the lowest rotation rate up to 5000 for the highest. We assume that the angular velocity of the inner sphere is constant over one turn. Figure 5.2 displays the mean motifs recorded by a given magnetometer at increasing rotation rates of the inner sphere. One clearly sees the change in phase and amplitude that results from the response of the sodium layer.

The second step consists in performing a discrete Fourier transform of each of the N motifs up to order 6. We then compute the mean and the root mean square *rms* of the real and imaginary parts of each Fourier coefficient. The mean and its standard deviation (estimated as rms/\sqrt{N}) are the data we use in the forthcoming inversion. Note that a systematic error has been added to the standard deviation to account for a possible misalignment of probes up to 5° .

Non-axisymmetric data processing

Our data consists of the real and imaginary parts of the Fourier coefficients of the azimuthal motifs presented previously, with their associated standard deviations. They are obtained from measurements of the induced magnetic field at various radii inside the sleeve, positioned at four different latitudes (40° , 10° , -20° , and -40°), one at a time, as shown in Figure 5.1. Note that the data at 40° and -40° are now treated separately since the non-axisymmetric part of the magnetic potential of the inner sphere's magnet is not symmetric with respect to the equator. Similarly, we no longer use the $f \rightarrow -f$ symmetry, because the response of the fluid shell to the non-axisymmetric imposed magnetic field is not the same in these two cases, even though the velocity field keeps this symmetry. The data and numerical modeling are therefore both retrieved for $f = -9$ Hz.

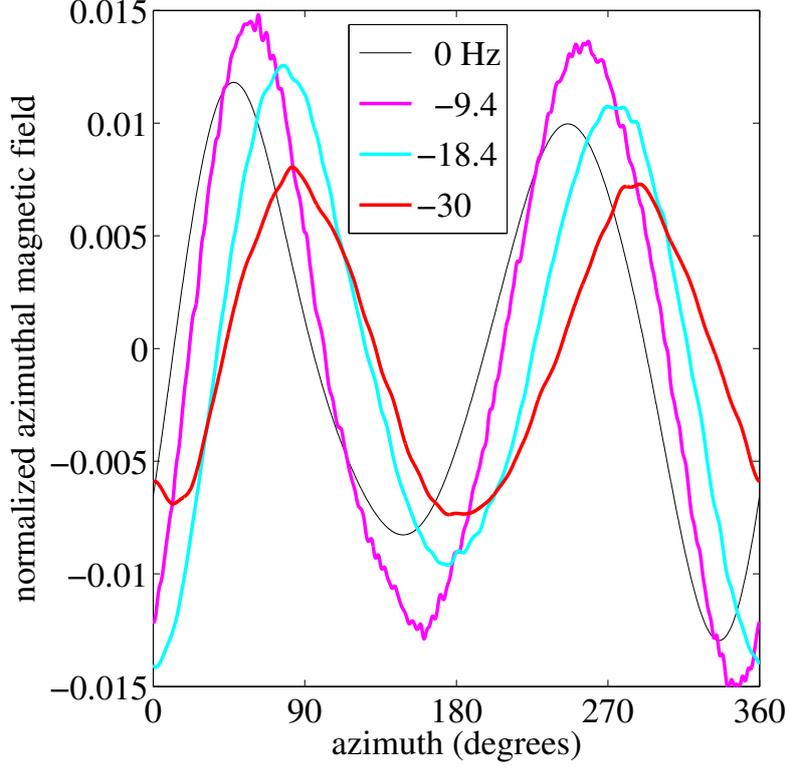


FIGURE 5.2 – 2π -longitudinal motifs of the non-axisymmetric magnetic field recorded by a Hall magnetometer measuring B_φ for $r = 0.79$ at a latitude of -20° , for increasing rotation rates of the inner sphere $f = -9.4, -18.4$ and -30 Hz. The magnetic field is normalized by B_0 as indicated in table A.2. The motif for $f = 0$ is computed from the scalar magnetic potential of the magnet.

1.5 Direct modelling of magnetic induction

Numerical model

In a fluid of magnetic diffusivity η , the magnetic field evolution is related to an imposed flow \mathbf{U}_0 by the induction equation :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (5.1)$$

with

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{U}_0 = 0. \quad (5.2)$$

We will solve this equation in the whole conducting domain, that is a spherical shell defined by $r_i - \delta_{Cu} < r < r_o + \delta_{ss}$, where r_i and r_o are the inner and outer radius of the shell filled with liquid sodium; δ_{Cu} is the depth of the copper inner shell in contact with the sodium and which encloses the permanent magnet; δ_{ss} is the depth of the stainless steel outer shell (see section 1.3). We use a direct

numerical simulation code of the induction equation, derived from the one used by [Figueroa *et al.* \(2013\)](#). The fields are expanded in spherical harmonics ([Schaeffer 2013](#)), and the equations are solved by finite differences in the radial direction. The code has been improved to take into account sharp conductivity jumps (see appendix 6) and time-dependent externally applied magnetic fields. The magnetic field $\mathbf{B}(t)$ is evolved in time subject to diffusion, advection from a stationary and incompressible flow \mathbf{U}_0 , and the rotating magnetic field boundary condition due to the magnet. The real electric conductivities of the different shells are used. A steady solution for the magnetic field is obtained after a few magnetic diffusion times, and we always wait 10 diffusion times before we compare to time averaged magnetic field and electric potential data collected on DTS.

We want to stress that the direct model solves for the full induction equation : there is no separation of applied and induced magnetic fields, and we do not assume any ordering between poloidal and toroidal fields. Thus no large-scale induction terms are neglected and a complex non-linear dynamics can arise from interactions of the azimuthal and meridional components of both magnetic and velocity fields. Taking into account all large-scale induction terms, we set the stage to quantify and map the part of the large-scale magnetic field that cannot be explained this way, and which could be produced by non-axisymmetric turbulent fluctuations.

Field decomposition

The velocity and magnetic fields are both divergence-free and can be decomposed into their poloidal and toroidal components.

Velocity field : One can write for the velocity field, made dimensionless using time scale Ω^{-1} and length scale r_o (see Appendix 4) :

$$\mathbf{U}_0 = \nabla \times (U_T \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (U_P \mathbf{r}) \quad (5.3)$$

where U_T and U_P stand for toroidal and poloidal velocity scalar potential. Since we only consider an axisymmetric mean velocity field, which does not depend

upon the azimuthal component, and using the spherical coordinates (r, θ, φ) one simplifies (5.3) such that

$$\mathbf{U}_0 = \frac{1}{r} L_2(U_P) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \partial_r (r U_P) \vec{e}_\theta - \partial_\theta U_T \vec{e}_\varphi \quad (5.4)$$

where L_2 is the angular laplacian. The two scalar fields U_T and U_P are expanded in spherical harmonics, leading to :

$$U_T(r, \theta) = \sum_{\text{odd } l}^{l_{\max}} u_l^T(r) Y_l^0(\theta) \quad (5.5)$$

$$U_P(r, \theta) = \sum_{\text{even } l}^{l_{\max}} u_l^P(r) Y_l^0(\theta) \quad (5.6)$$

with $0 < l \leq l_{\max}$ the spherical harmonic degree. We assume that the mean velocity field is symmetric with respect to the equator, so that only odd (respectively even) degree l are considered for the toroidal (respectively poloidal) components.

To reduce the number of degrees of freedom of the inversion, the radial dependence of the flow is described using Tchebychev polynomials of the first kind T_n of degree n . Expressions (5.5) and (5.6) of toroidal and poloidal flow description become :

$$U_T(r, \theta) = \sum_{\text{odd } l}^{l_{\max}} \sum_{n=0}^{n_{\max}} u_{ln}^T T_n(r) Y_l^0(\theta) \quad (5.7a)$$

$$U_P(r, \theta) = \sum_{\text{even } l}^{l_{\max}} \sum_{n=0}^{n_{\max}} u_{ln}^P T_n(r) Y_l^0(\theta) \quad (5.7b)$$

We choose $l_{\max} = 8$, and $n_{\max} = 11$ so that $(n_{\max} + 1) \times l_{\max} = 96$ free parameters describe the velocity field.

No-penetration of the fluid at the solid boundaries implies $U_P(r_i, \theta) = U_P(r_o, \theta) = 0$ (which we will impose in the inversion). In addition, realistic no-slip boundary conditions must be satisfied by the velocity field, leading to thin boundary layers, which cannot be resolved by our data and must be added to the previous radial description in order to run the forward model. The velocity field has to be continuous on its outer boundary where the sphere is at rest :

$$U_T(r_o, \theta) = 0$$

$$\partial_r U_P(r_o, \theta) = U_P(r_o, \theta) = 0$$

and on its inner boundary where the azimuthal velocity matches that of the inner sphere $r_i \Omega \sin \theta$. In order to satisfy these boundary conditions, we smooth the toroidal velocity profiles over a layer of thickness δ at the inner boundary as follows, for $l = 1$:

$$u_{1n}^{T*}(r) = \left(u_{1n}^T(r_i) - u_{l=1}^T(r) \right) e^{-x_i} + u_{1n}^T(r) \quad (5.8)$$

with $x_i = (r - r_i)/\delta$. Similarly for $l > 1$ at both boundaries, we write :

$$u_{ln}^{T*}(r) = u_{ln}^T(r) (1 - e^{-x_o} - e^{-x_i}) \quad (5.9)$$

with $x_o = (r_o - r)/\delta$. We need both the poloidal component and its radial derivative to be smooth for all degrees l while they both reach zero at the boundaries. For this, we use :

$$r < r_i + \delta \quad u_{ln}^{P*}(r) = u_{ln}^P(r) x_i^3 (10 - 15x_i + 6x_i^2), \quad (5.10a)$$

$$r > r_o - \delta \quad u_{ln}^{P*}(r) = u_{ln}^P(r) x_o^3 (10 - 15x_o + 6x_o^2), \quad (5.10b)$$

$$r_i + \delta \leq r \leq r_o - \delta \quad u_{ln}^{P*}(r) = u_{ln}^P(r). \quad (5.10c)$$

Each 1mm-thick boundary layer contains 20 radial grid points. Expressions (5.8) to (5.10) are evaluated on a non equispaced radial grid of a total of $N_r = 300$ points and fed to the induction equation. We have checked that the results of our inversions are almost independent of the size δ of the boundary layer.

Magnetic field : The same decomposition is used for the magnetic field :

$$\mathbf{B} = \nabla \times (T \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (P \mathbf{r}) \quad (5.11)$$

Where T and P stand for toroidal and poloidal magnetic scalar potentials. They are again projected on spherical harmonics :

$$P = \sum_{m=0}^M \sum_{l=m}^L b_{lm}^P(r, t) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (5.12a)$$

$$T = \sum_{m=0}^M \sum_{l=m}^L b_{lm}^T(r, t) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (5.12b)$$

Contrarily to the velocity field, we do not assume any symmetry for the magnetic field and retain all orders m , because we specifically want to include measured

deviations from the mostly dipolar field carried by DTS's permanent magnet. The radial discretization including $r_i - \delta_{Cu} < r < r_o + \delta_{ss}$ is obtained on a non regular radial grid consisting of the same grid as the velocity field (300 points) extended in both solid shells with 50 more points.

We choose $L = 11$ and $M = 6$ here, which includes all of the experimental measurements. We checked that doubling L did not change our results.

Magnetic boundary condition

In an insulator, where there is no electrical current ($\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$), the magnetic toroidal component vanishes ($T = 0$) and its poloidal component is a solution of $\Delta P = 0$. Using the spherical harmonic decomposition (5.12)b, the solutions are of the form :

$$b_{lm}^P = C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-(l+1)} \quad (5.13)$$

For the solution to remain finite, C_{lm} and D_{lm} are zero if there is no current or magnet for $r > r_o + \delta_{ss}$ or $r < r_i - \delta_{Cu}$, respectively.

Considering the outer interface between our conducting domain and the surrounding air ($\hat{r}_o = r_o + \delta_{ss}$), the magnetic field is continuous and so are P and $\partial_r P$. Indeed, on the outer interface, there is no externally imposed magnetic field, hence C_{lm} vanishes, and by taking the derivative of expression (5.13), we find :

$$\partial_r b_{lm}^P \Big|_{\hat{r}_o} = -\frac{l+1}{\hat{r}_o} b_{lm}^P. \quad (5.14)$$

Similarly, at the inner boundary ($\hat{r}_i = r_i - \delta_{Cu}$), the poloidal magnetic field P and its derivative $\partial_r P$ are still continuous. However, one must now take into account the magnetic field produced by the magnet, so that the resulting magnetic field at the interface is both fed by an inner and an outer magnetic source. Hence, both C_{lm} and D_{lm} are non zero in expression (5.13). Since we know that the magnetic field imposed by our magnet is defined by $b_{0lm}^P(r, t) = D_{lm}(t) r^{-(l+1)}$, we can rewrite the radial derivative of equation (5.13) at the inner boundary as :

$$\partial_r b_{lm}^P \Big|_{\hat{r}_i} = \frac{l}{\hat{r}_i} b_{lm}^P - \frac{2l+1}{\hat{r}_i} b_{0lm}^P(t) \quad (5.15)$$

where the time dependent boundary condition is related to the inner sphere angu-

lar velocity Ω by

$$b_{0lm}^P(t) = b_{0lm}^P(0) e^{im\Omega t}.$$

The imposed magnetic field at the inner boundary is thus fully described by the complex spherical harmonic coefficients $b_{0lm}^P(0)$ computed from the measured scalar magnetic potential of the magnet presented in Appendix 5.

1.6 Inversion

Non linear inversion formalism

The data acquisition procedure, detailed in sections 1.3 and 1.4, provides a heterogeneous data set, which comprises both axisymmetric and non-axisymmetric data. Let's call d the vector collecting these N data points measured at the positions displayed in Figure 5.1. For a given velocity field, the kinematic approach described in section 1.5 solves the induction equation (5.1), and provides predictions of the data. We call m the model vector, which collects the 96 coefficients u_{ln}^T and u_{ln}^P of the velocity field according to the decomposition (5.7). In order to carry out the inversion and find the best velocity model, one wants to minimize a cost function consisting of the difference between data vector d and prediction vector $g(m)$ weighted with the error, plus the deviation from an *a priori* model (with weight detailed in the covariance matrix below).

We note that even if the direct model $g(m)$ is linear for a given velocity field, such is not necessarily the case for the inverse problem. Indeed, at moderate Rm value, a non linearity arises from the cross-product of the velocity solution and an induced magnetic field, which also depends on the velocity field. Under such conditions, the inverse problem has to be considered non linear and the best fitting model is obtained using the classical generalized nonlinear least square inverse method (Tarantola et Valette 1982) :

$$m_k = \left(G_{k-1}^T C_{dd}^{-1} G_{k-1} + C_{pp}^{-1} \right)^{-1} \left\{ G_{k-1}^T C_{dd} \{ d - g(m_{k-1}) \} - C_{pp}^{-1} (m_{k-1} - m_0) \right\} \quad (5.16)$$

where C_{dd} is the covariance matrix of the data and C_{pp} the *a priori* covariance matrix of the model parameters, which we describe below. The matrix G collects the

Fréchet derivatives of $g(m)$ and is detailed below. We index by k the iterative process which leads from the initial model $k = 1$ to the final model, for which the cost function is minimal. At each step k , the normalized misfit χ_k is defined as :

$$\chi_k = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_n \left(\frac{d - g(m_k)}{\sigma_d} \right)^2} \quad (5.17)$$

where σ_d account for the experimental error of each data d .

At each step k , the element of matrix G_k for data point i and parameter j is given by,

$$G_k(i, j) = \frac{\partial g_i(m_k)}{\partial m_j} \simeq \frac{g_i(m_k(j) + \delta m_j) - g_i(m_k(j))}{\delta m_j}, \quad (5.18)$$

where δm_j is a small step in parameters space chosen as $\delta m_j = 5\% \times m_k(j)$.

The covariance matrix of the data C_{dd} is taken diagonal. The diagonal terms are the square of the standard deviations presented in the data processing sections 1.3 and 1.4. We use the *a priori* covariance matrix of the model in order to smooth the model in the radial and latitudinal directions. This smoothness is controlled by the truncation degrees l_{max} and n_{max} of the *Legendre* and *Tchebychev* expansions, but also by the covariance matrix in which the highest spectral degrees are damped, using :

$$C_{pp} = \frac{c}{l^a + n^a} I, \quad (5.19)$$

where I is the identity matrix. We choose $a = 4$ and $c = 0.05$ to avoid undesired radial and latitudinal oscillations of the solution.

Inverted model for $f = -9$ Hz

Inversion convergence : We present the results of a simultaneous inversion of the poloidal and toroidal mean velocity fields for an inner sphere rotation rate $f = -9$ Hz. The data we invert for includes ultrasound Doppler velocity profiles, the induced magnetic field in the sleeve with both its mean axisymmetric ($m = 0$) and time-dependent non-axisymmetric ($1 \leq m \leq 5$) components, the electric potential differences at the surface and the torque on the inner sphere. Details of the data coverage are presented in section 1.3.

TABLE 5.2 – Normalized misfits obtained from expression (5.17) and computed at each iteration k of our inversion process. We detail the misfit of the axisymmetric and non-axisymmetric data described in sections 1.3 and 1.4 as well as ultrasound Doppler velocity profiles. χ_k represents the global normalized misfit.

k	Non-axisymmetric magnetic field	Doppler profiles		m=0 magnetic field		Γ_M	χ_k
		azim	merid	azim	merid		
1	4.08	10.62	1.53	3.87	0.99	24.09	8.74
2	3.18	1.47	0.72	3.63	1.54	0.63	1.67
3	3.18	1.47	0.65	3.74	1.26	1.19	1.66
4	3.15	1.48	0.67	3.67	1.15	0.26	1.65
5	3.16	1.48	0.70	3.65	2.35	0.81	1.68
6	3.17	1.47	0.66	3.64	1.06	0.52	1.65

We perform the non-linear iterative process described in section 1.6 and we summarize in table 5.2 the global normalized misfit χ_k at each step k , as well as the detailed misfit for each data type. We note that the minimum is reached after six iterations and that the misfit decreases strongly at the first iteration. Some non linearity is present since the misfit of some data go through successive minimum and maximum. Magnetic torque Γ_M is an example of such a behavior as it successively reaches two local minima.

Note that we used as an initial solution a velocity field obtained from a previous inversion at $f = -3$ Hz, from Nataf (2013), rescaled to the present rotation rate. We thus converge more rapidly to the best fit. Moreover, it should be realized that the phase of the non-axisymmetric magnetic data is defined *modulo* 2π . Thus, non linearity can also emerge from solutions with a large azimuthal shear, which can stretch magnetic heterogeneities in such a way that the phase gets an extra $\pm 2\pi$. The use of a good initial guess is our way to handle that sort of non linearity.

Radial profiles : We show in Figure 5.3 the radial profiles of the toroidal and poloidal velocity modes, $u_l^T(r)$ and $u_l^P(r)$ (top profiles), and of the axisymmetric magnetic modes, $b_{lm=0}^T(r)$ and $b_{lm=0}^P(r)$ (bottom profiles), obtained by our inversion.

We note that the toroidal (or azimuthal) degree $l = 1$ largely dominates the velocity field. The poloidal (or meridional) velocity, which is two orders of magnitude lower than the toroidal velocity, is distributed on latitudinal degrees $l = 2, 4, 6$. Note that the poloidal velocity profiles are less smooth than the toroidal ones. Concer-

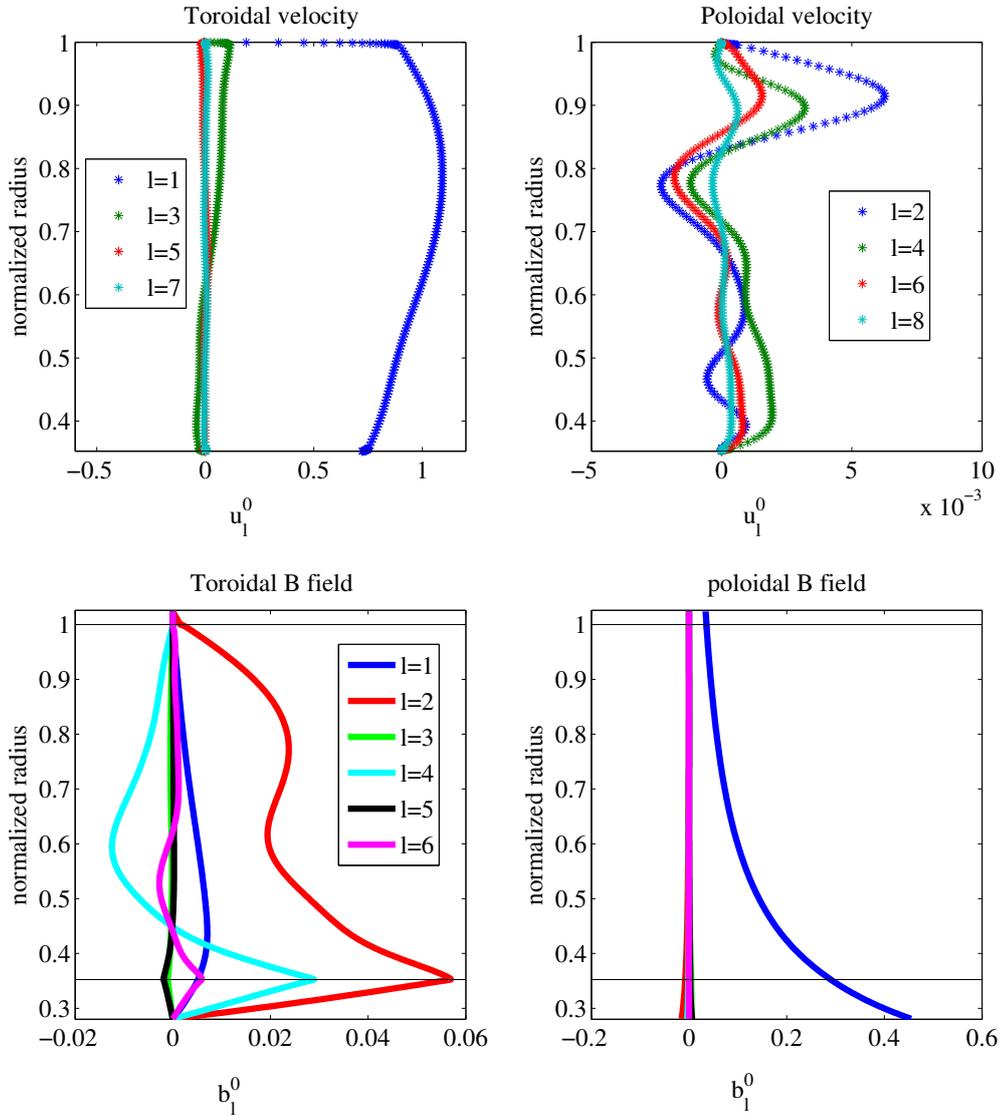


FIGURE 5.3 – Radial profiles of velocity and magnetic modes for all harmonic degrees. Upper plots from left to right : toroidal $u_1^T(r)$ and poloidal $u_1^P(r)$ velocity modes. Bottom plots from left to right : axisymmetric toroidal $b_{l,m=0}^T(r)$ and poloidal $b_{l,m=0}^P(r)$ magnetic field modes. All fields are normalized as given in Appendix 4. The radius axis of the magnetic plots extends from $r_i - \delta_{Cu}$ to $r_o + \delta_{ss}$ and horizontal lines indicate the fluid/solid interfaces at r_i and r_o .

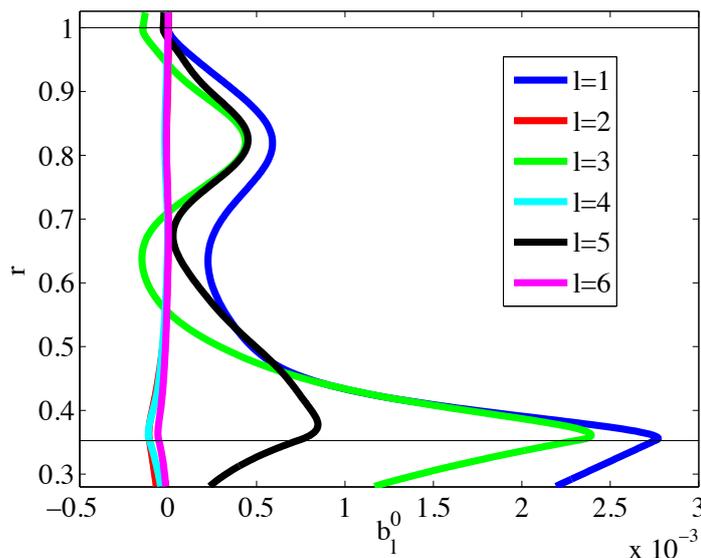


FIGURE 5.4 – Radial profiles of the induced axisymmetric poloidal magnetic modes for all harmonic degrees. Each latitudinal degree from $l = 1$ to $l = 6$ is represented using color lines (grayscale) depicted in the legend. The field is made dimensionless as given in Appendix 4. The radius axis extends from $r_i - \delta_{Cu}$ to $r_o + \delta_{ss}$, and horizontal lines indicate the fluid/solid interfaces at r_i and r_o .

ning the magnetic field, Figure 5.3 shows an important toroidal induction close to the inner sphere, which is dominated by modes $l = 2$ and 4. This magnetic induction is the signature of the strong azimuthal shear of the magnetic field lines known as the Ω -effect. The induced toroidal magnetic field rapidly drops to zero as it diffuses in the solid copper shell where no induction occurs. The bottom right plot of Figure 5.3 shows that the poloidal magnetic field is largely dominated by the axisymmetric dipole ($l = 1, m = 0$) imposed by the permanent magnet. We access the axisymmetric induction of the poloidal magnetic field on Figure 5.4 by subtracting the imposed field. We observe that poloidal induction is especially strong near the inner sphere for odd degrees, including the dipole ($l = 1$) and degrees $l = 3$ and 5 while the even degrees are negligible (close to zero value). In the absence of non-linear poloidal-to-toroidal coupling in the induction term, all odd degrees would vanish for the toroidal magnetic field, and all even degrees for the poloidal magnetic field. It is finally interesting to note that the induced axisymmetric dipole vanishes at the outer boundary (Figure 5.4), in agreement with Spence *et al.* (2006) who demonstrated that no dipole moment can be induced in a simply connected axisymmetric system.

Meridional maps : Figure 5.5 shows maps of the velocity and magnetic fields in a meridional (r, θ) section. Figure 5.5a is a contour map of the fluid angular velocity ω , while figure 5.5b displays the streamlines of the meridional circulation (recall that both are assumed axisymmetric). The lower maps are the magnetic field maps at longitude $\varphi = 0$. Figure 5.5c is a contour map of B_φ , and figure 5.5d shows the field lines of the induced poloidal magnetic field. All quantities are dimensionless, as given in Appendix 4.

Most of the features depicted by the angular velocity map (figure 5.5a) have already been discussed by Brito *et al.* (2011), and by Nataf (2013) for a lower rotation rate $f = \pm 3$ Hz of the inner sphere. We confirm that the fluid is entrained very efficiently by the magnetic inner sphere. Super-rotation ($\omega > 1$) is observed in the equatorial region close to the inner sphere, where the flow obey Ferraro's law of isorotation (Ferraro 1937). Further away from the inner sphere, the magnetic stress is reduced and the Coriolis force dominates. The flow is then geostrophic and the angular velocity shows little variation along the rotation axis. We observe that super-rotation only reaches 10% for $f = -9$ Hz, as compared to more than 20% for $f = \pm 3$ Hz (Brito *et al.* 2011, Nataf 2013). Together with the shift of that zone closer to the inner sphere, this indicates that the geostrophic region extends further inwards at larger rotation rates, in agreement with the observations of Brito *et al.* (2011). We remark that the polar region is poorly constrained by the data for technical reasons reported in section 1.3, and hence the flow near the axis should not be trusted.

The meridional circulation we obtain at $f = -9$ Hz (figure 5.5b) differs more strongly from that derived by Nataf (2013) at $f = \pm 3$ Hz. We still get a cell that drives fluid toward the equator along the inner sphere, but strong counter-rotating cells are active both beneath the outer surface and at high latitudes on the inner sphere. Overall, our (normalized) meridional velocities are one order of magnitude larger than the ones obtained by Nataf (2013) at lower rotation rate ($f = 3$ Hz).

The associated induced magnetic field is dominated by azimuthal induction (figure 5.5c), which mainly occurs in two distinct regions : one located at the inner sphere surface and the other one in the geostrophic shear region. Note that the in-

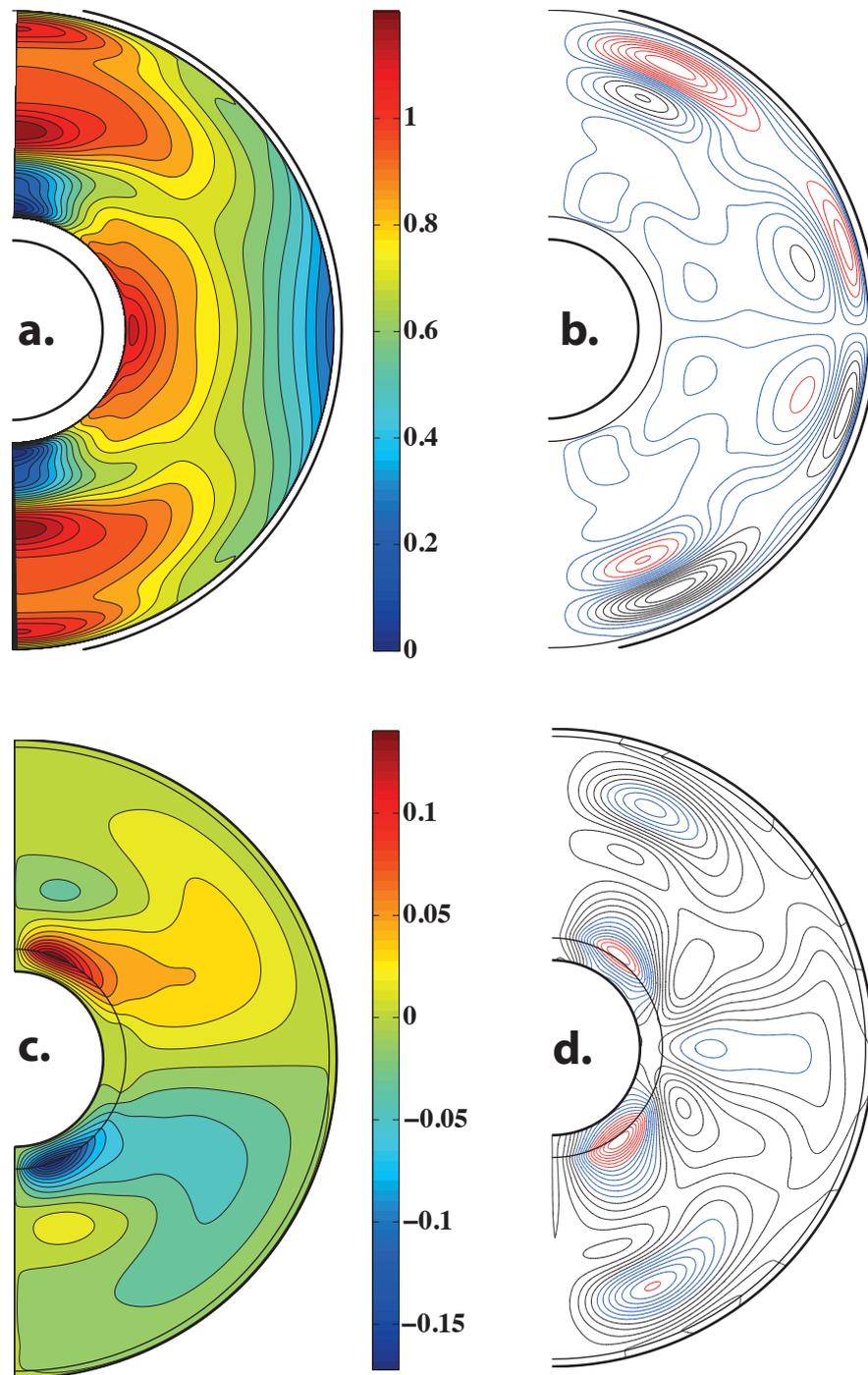


FIGURE 5.5 – Maps of the velocity and magnetic fields in a meridional (r, θ) section. Black spherical lines mark successively the copper, the fluid and the stainless steel shells. **a.** Contour map of the angular velocity. **b.** Stream lines of the meridional flow. The flow is centrifugal along the equator, and values of the stream function range from $-4 \cdot 10^{-4}$ to $4 \cdot 10^{-4}$. **c.** contour map of the azimuthal magnetic field (B_φ) at longitude $\varphi = 0$. **d.** Field lines of the induced meridional magnetic field at $\varphi = 0$.

TABLE 5.3 – Energies of the imposed dipolar field, the induced toroidal and poloidal magnetic fields, and of the toroidal and poloidal flows. We report energies for two models at different Reynolds numbers. Model (a) corresponds to the kinematic model of the present paper at $Rm = 28$ and (b) is a model at $Rm = 9.4$ from Nataf (2013). All energies are dimensionless, as given in Appendix 4. We also report the poloidal to toroidal ratio of the kinetic and magnetic energies.

Model	E_M^{dipole}	E_M^{Tor}	E_M^{Pol}	E_K^{Tor}	E_K^{Pol}	E_M^{Pol} / E_M^{Tor}	E_K^{Pol} / E_K^{Tor}
(a) Our model	$23/Rm^2$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	0.33	0.017	0.35	0.051
(b) Nataf (2013)	$23/Rm^2$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	0.45	$4 \cdot 10^{-4}$	0.11	0.001

duced magnetic field maps are not perfectly symmetric with respect to the equator, as our model includes the measured heterogeneities of the imposed magnetic field.

Energies : In order to better quantify the evolution of the flow and induced magnetic field with the Reynolds number, we compare in table 5.3 the various energies computed from our model at $Rm = 28$ with those of Nataf (2013) for $Rm = 9.4$. Energies are obtained by integration of the magnetic and velocity solutions over the fluid shell. All quantities are scaled using $\rho\eta^2r_o^*Rm^2$. We note that the magnetic energy of the system is largely dominated by the imposed magnetic dipole E_M^{dipole} , which is in fact independent of the spin rate of the inner sphere.

We observe that the azimuthal kinetic energy decreases from $E_K^{Tor} = 0.45$ at $Rm = 9.4$ to $E_K^{Tor} = 0.33$ at $Rm = 28$. It corresponds to the reduction of the super-rotation zone described in the previous section 1.6. The geostrophic shear thus extends further into the strong magnetic field region and hence increases the azimuthal magnetic energy to $E_M^{Tor} = 3.3 \cdot 10^{-4}$ instead of $E_M^{Tor} = 1.7 \cdot 10^{-4}$ at lower Rm .

Recent numerical simulations of the non-magnetized spherical Couette flow in our geometry (Wicht 2014) yield a poloidal to toroidal kinetic energy ratio of about 18%. Our model only yields 5%, while it barely reached $\approx 0.1\%$ in Nataf's model (Nataf 2013). However, this relatively sluggish meridional flow induces a strong meridional magnetic field, yielding a poloidal to toroidal magnetic energy ratio of 0.35.

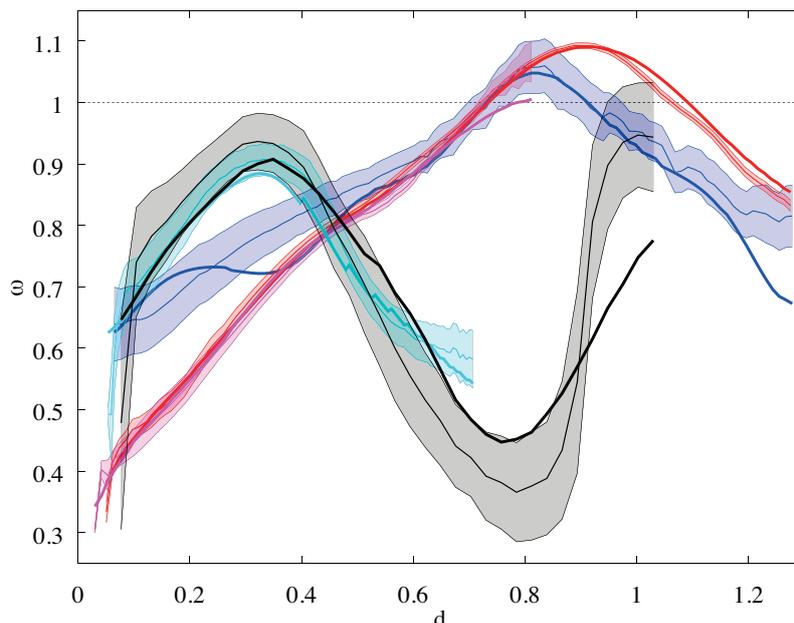


FIGURE 5.6 – Fits of the angular velocity predictions to ultrasound velocimetry doppler profiles. Measured data are thin lines presented with their error bars. Thick lines are predictions. All profiles are function of the distance d along the ray of the ultrasound beam. Colors (grayscale) refer to ultrasound beam path at different latitudes as displayed on data coverage map Figure 5.1. All data are dimensionless as given in Appendix 4.

Axisymmetric data predictions

We now confront the predictions of the full induction equation model, involving cooperative effects of the meridional and azimuthal flows, with the experimental measurements used for inversion.

We compare our model's predictions to the ultrasound Doppler profiles of the angular velocity on Figure 5.6 and of the meridional and radial velocity on Figure 5.7. The four ultrasound Doppler profiles describing the angular velocity are rather well explained by the model. Except the blue (lightest gray) profile near the outer sphere and around $d = 0.4$ and the black profile close to the inner sphere, all other velocity predictions are within the error bars. We consequently obtain a normalized misfit which reaches a value slightly greater than one ($\chi = 1.47$). The meridional and radial velocity predictions fall perfectly in error bars giving a normalized misfit of 0.65. We note that despite the large error bars carried by the radial profile, model predictions fall very close to the mean value.

Let's now see on Figure 5.8 how well the kinematic model predicts the induced

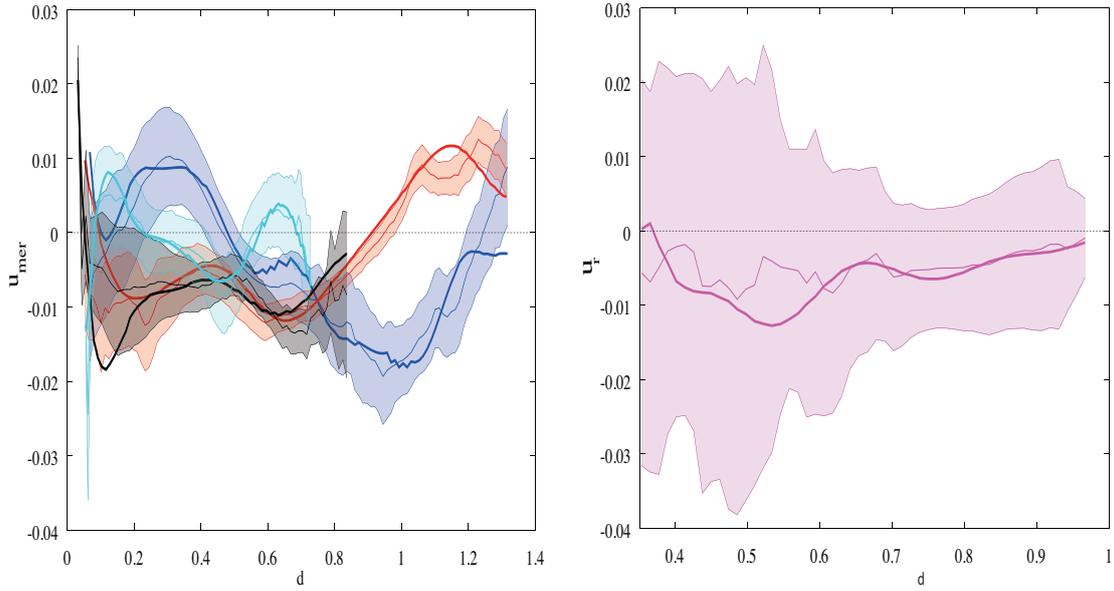


FIGURE 5.7 – Fits of velocity predictions to ultrasound velocimetry doppler profiles. These plots compare the measured data with their error bars to our kinematic model predictions of the meridional (left) and radial velocity (right). Both profiles are function of the distance d along the ray of the ultrasound beam. All data are dimensionless as given in Appendix 4.

azimuthal ($m = 0$) magnetic field inside the sodium shell and the electric potential differences measured at the outer sphere surface. Figure 5.8 shows reasonable agreements between azimuthal magnetic field (which is mainly induced by the azimuthal velocity) predictions and observations, leading to the conclusion that induction from the mean flow do an important part of the job. The high latitudes measurements are not well explained (red (bottom) curve of Fig. 5.8) especially between $r = 0.6$ and $r = 0.9$. A plausible explanation could be the contribution from turbulent fluctuations to our mean field. In addition, the innermost measurements (for $r < 0.6$) often show significant discrepancy. The misfit for the azimuthal magnetic field is 3.64. Dashed lines on Figure 5.8 display the induced azimuthal magnetic field by the azimuthal flow only. It shows that the induced field increases when no meridional flow is involved. We note that this meridional advection effect increases with the latitude and shows a deviation of the induced azimuthal magnetic field of about 10% at latitude 40° .

Electric potential at the surface has the correct trend with latitude, but shows a systematic deviation and fails to lie within the error bars. Finally, the magnetic

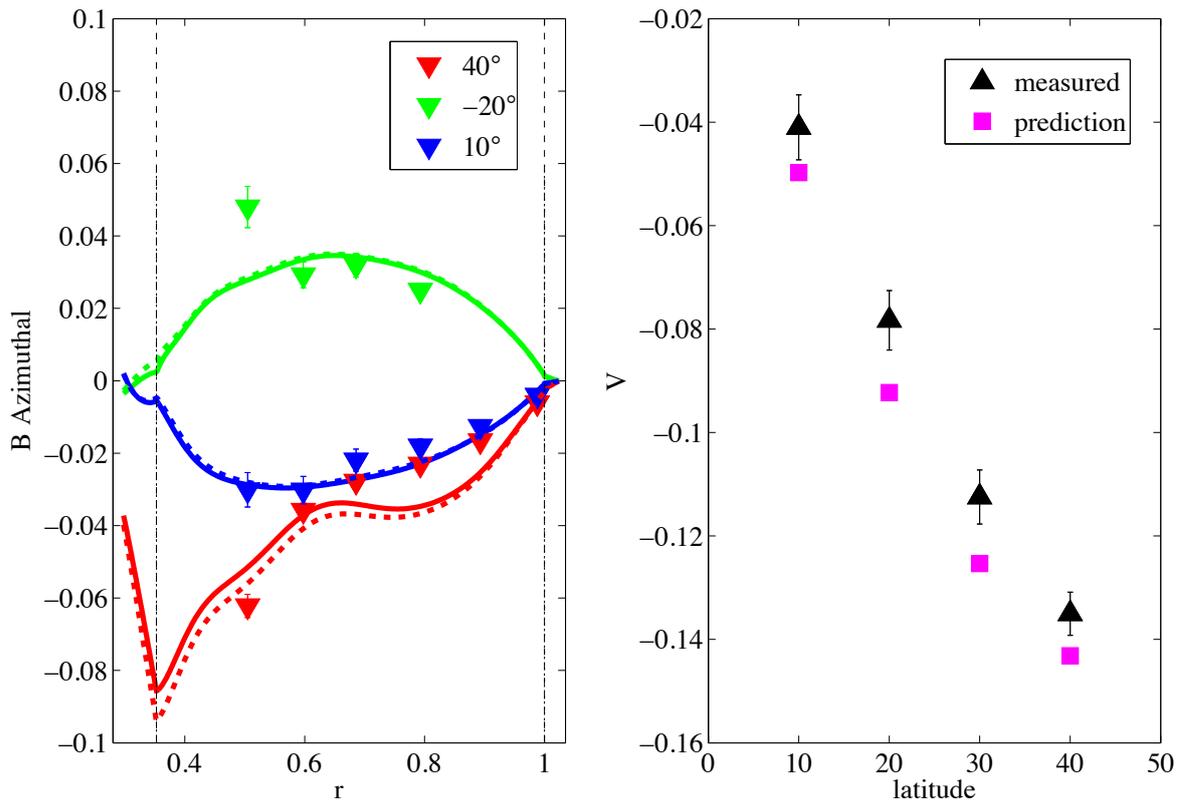


FIGURE 5.8 – Azimuthal predictions and measurements : (left : azimuthal magnetic field) azimuthal magnetic field predictions inside the fluid with the measured data and their error bars. The triangles with error bars are our measurements at three latitudes : 40° (bottom red markers), 10° (middle blue markers) and -20° (upper green markers). The solid lines are our model predictions at the same latitudes. The velocity model contains both the azimuthal and the meridional flows. The dashed lines are the predictions for the same flow without meridional circulation. The radius axis extends from $r_i - \delta_{cu}$ and $r_o + \delta_{ss}$ and vertical dash-dot lines indicate the fluid/solid interfaces at r_i and r_o . (right : surface electric potential) the black triangles with error bars are the differences in electric potential between electrodes 10 degrees apart that we measure at the surface of the outer shell. The red squares are our model predictions. All fields are dimensionless as given in Appendix 4.

torque obtained from the model, $\Gamma_M = -0.549$, is the data which best predict the observed value $\Gamma_M = -0.553 \pm 0.014$. Its misfit goes down to $\chi = 0.52$.

Figure 5.9 gives the fit to the radial and latitudinal components of the axisymmetric magnetic field, which is mainly due to the meridional circulation. The model predicts reasonable amplitudes for both components. Induced magnetic field inside the fluid shows radial oscillations, which are the direct consequence of the oscillations of the meridional velocity profiles (see Fig. 5.3). This is especially true at high latitude where poloidal velocity is larger. It is also remarkable that magnetic field on the surface is rather well predicted by our mean field kinematic model. Finally, the global misfit of the whole data set, $\chi = 1.65$, constitutes a satisfactory result if

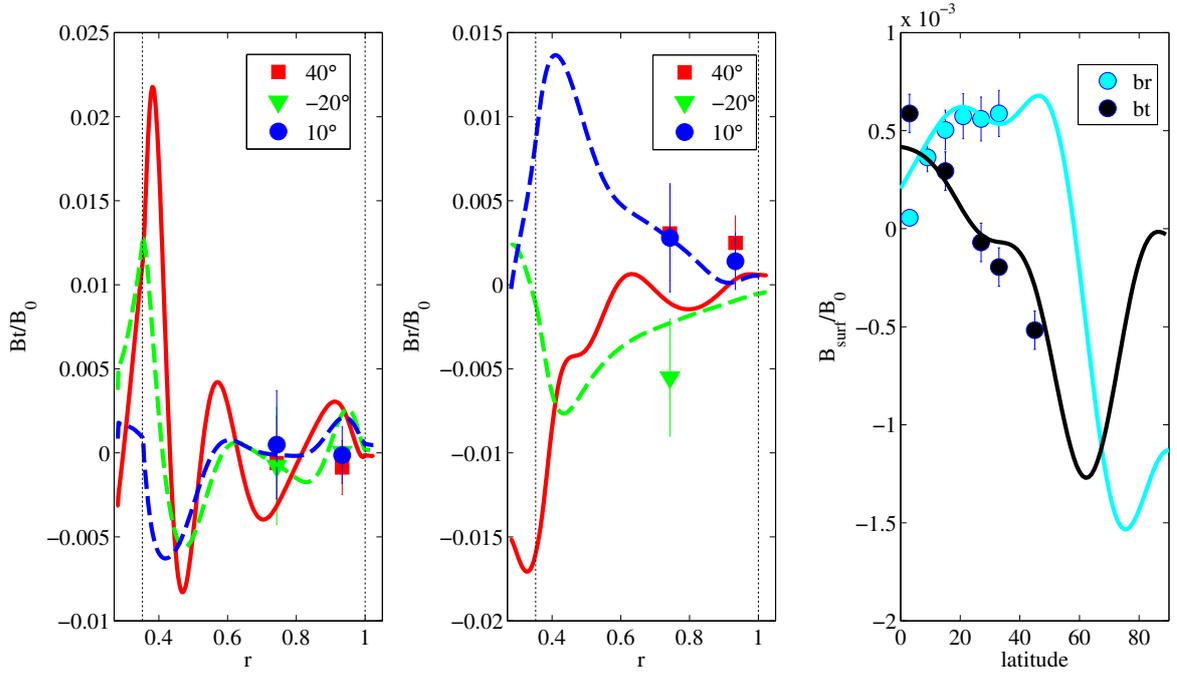


FIGURE 5.9 – Meridional predictions and measurements : these plots represent the measured data using marker symbols with their error bars and numerical predictions from our kinematic model using solid lines. The radial description of the magnetic field at three different latitudes (40° (squares and solid lines), 10° (triangles and light gray dashed lines) and -20° (triangles and dark gray dashed lines)) is shown : the orthonormal component (left) and the radial component (center). Radial (light gray) and orthonormal components (dark gray) of the induced magnetic field measured at the surface of the outer shell is also shown (right). Radius ranges from $r_i - \delta_{Cu}$ to $r_o + \delta_{ss}$ and the vertical dotted lines indicate the fluid/solid interfaces at r_i and r_o . All fields are dimensionless (see Appendix 4).

we take into account that only the mean axisymmetric flow is used here. Nevertheless, as it is slightly over unity, we argue that the effect of turbulent fluctuations could be considered to better fit magnetic induction.

Non-axisymmetric data predictions

We now comment how our model predicts the radial evolution of the non-axisymmetric magnetic field data, $\mathbf{B}(r, \theta)^m$ for each component and $m \neq 0$, when inner rotation rate is $f = -9$ Hz. These data are computed as Fourier decomposition of $\mathbf{B}(r, \theta, \phi)$ and are comparable with Fourier coefficients presented in section 1.4.

Let's first focus on Figure 5.10 representing the azimuthal component (ϕ) of non-axisymmetric mode $m = 2$ at latitude 10° . This graphic displays the radial description of the real and imaginary part of $B_\phi^m(r, \theta)$ plotted in a complex plane.

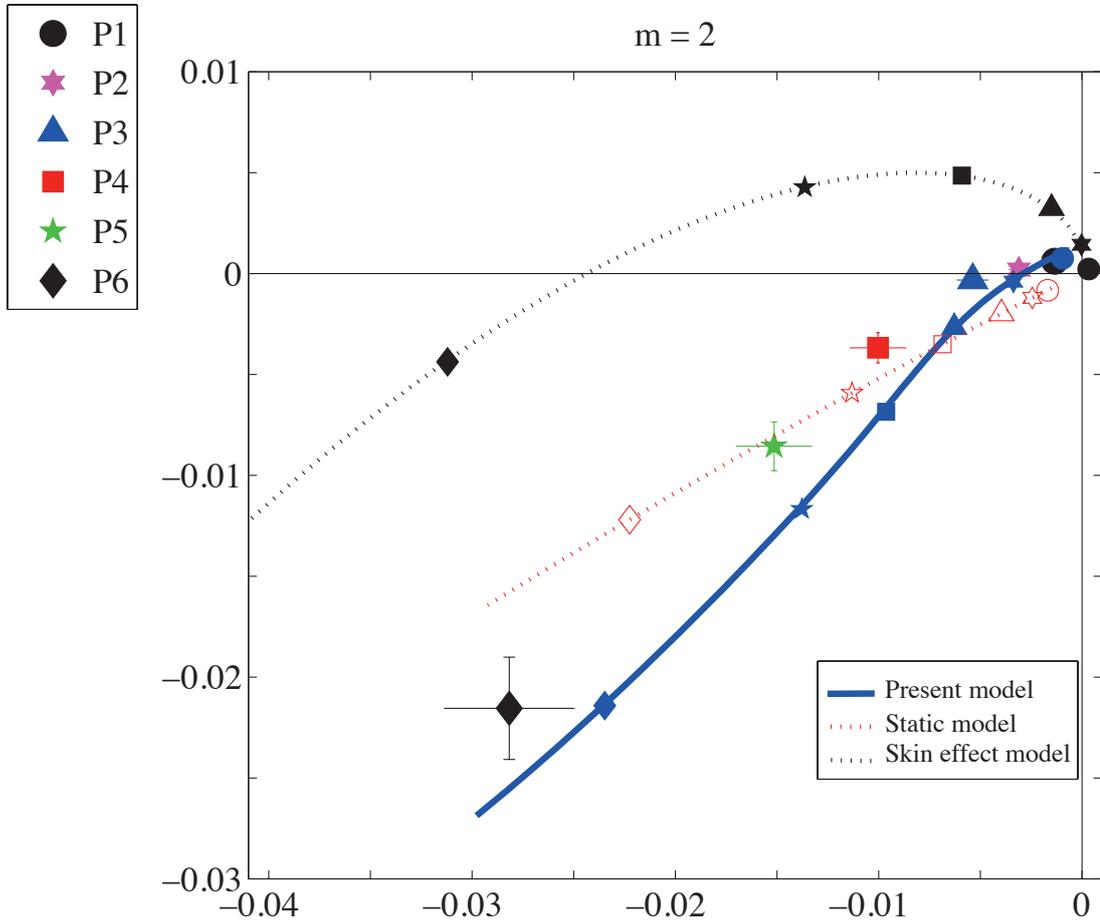


FIGURE 5.10 – Plot of the radial evolution of the non-axisymmetric magnetic data for experimental measurements and predictions at latitude -10° . For experimental data, we plot the imaginary (vertical axis) and real part (horizontal axis) of the Fourier coefficients of the azimuthal motifs presented in section 1.4. Predictions display a full radial description, for three different models, presenting the real and imaginary part of $B_\phi^m(r, \theta)$. We present on this graphic the azimuthal mode $m = 2$ as an example. Lines represent the radial evolution of B_ϕ^m from the inner boundary to the outer sphere surface (where the magnetic field is numerically solved). The thick solid blue (dark gray) line account for our kinematic model predictions, the red dotted (bottom) line shows the static case, and the black dotted (upper) line is the skin effect case (see text sec. 1.6 for details). Colored (grayscaled) markers labeled in the legend account for experimental data collected in DTS from magnetic probes in the sleeve. Markers radially increase from P6 to P1 (see Figure 5.1). Non-axisymmetric data are all dimensionless (see Appendix 4).

Colored (grayscaled) markers, depicted in the caption, denote experimental observations at probes positions in the sleeve from the outermost probe $P1$ to the innermost $P6$. They are reported in the complex plane with their real and imaginary error bars.

To improve our understanding of the physical processes involved in magnetic mode evolution, we show on Figure 5.10 the result of three different models. (i) Our *kinematic* model predictions (as described in sec. 1.6) corresponds to the thick solid blue (dark gray) line where radial probe positions is reported using the same markers (colored in blue (dark gray)) as the one used for observations. (ii) The *static* case, where both inner and outer sphere are kept at rest, and the velocity field is zero everywhere, is represented by a red dashed (bottom) line. In this model, each magnetic mode obeys the $r^{-(l+1)}$ law for a potential field, with a constant value imposed at the inner boundary ($r = r_i - \delta_{Cu}$). Similarly, red (empty) markers indicate the static model predictions at radial probe positions. (iii) The *skin effect* case, where the non-axisymmetric boundary condition of the magnetic field $\mathbf{B}(t)$ is rotating and diffusing in a solid sodium shell (zero velocity field), is represented by the black dashed (upper) line. Note that the copper layer has been replaced by an insulator (to prevent the shearing of magnetic field at the copper-sodium interface). This simple *skin effect* case, where no flow advection occurs, correspond to a purely diffusing model with a time-dependent external magnetic field, where equation (5.1) is solved with $\mathbf{U}_0 = 0$. Black (dark filled) markers also denote probe positions.

For all three models, we give in Fig. 5.10 the radial evolution of the $m = 2$ azimuthal magnetic mode from the inner boundary, near probe $P6$, to the outer surface close to probe $P1$. Note that a straight line going through the origin means constant phase. Radial amplitude variations are observed using marker locations and their distance to the complex plane origin. It is also important to have in mind that probes from $P6$ to $P1$ are almost regularly spaced and that consequently constant marker spacing means linear amplitude variation. Each model displays a radial evolution reflecting the physical processes involved, from a high amplitude value at the inner boundary (negative real and imaginary part in this case) to a low amplitude value at the outer boundary where magnetic mode amplitude get close to

zero. It is interesting to note that the different models give different magnetic field amplitude at the inner boundary. This is a direct consequence of expression (5.13) as the magnetic field at the inner boundary results from an inner source (imposed magnetic field) and an outer magnetic source (induced magnetic field). More details concerning boundary conditions are presented in section 1.5.

Let's now describe the physical meaning of each model using the representation in a complex plane. The *static* case (bottom red dashed line) displays no phase shift all along its radial description. Its amplitude is rapidly decreasing from its innermost value (near probe $P6$) to probe $P1$. This corresponds to the expected radial decrease proportional to $r^{-(l+1)}$ for $l = 2$ to 11 at $m = 2$. The time dependent *skin effect* case (black dotted line) displays large phase variations, increasing radially and ending with a phase shift nearly equal to $\pi/2$ at the outer sphere. This phase variation is due to electrical currents induced from the diffusion term of equation 5.1. Both the phase and the amplitude reflect this skin-depth effect.

Our velocity field model (thick solid line) provides a better fit to observations than the *skin effect* and *static* models. We expected complex dynamics but surprisingly our model displays similarities with the two simple cases. Indeed, the behavior of our kinematic model between probes $P6$ and $P4$ is very similar that of the static model : the phase is almost constant (straight line toward the complex plane origin) and the amplitude rapidly decrease with increasing radius. This behavior is also observed experimentally for the same radius range (using markers positions). An explanation is that in its inner region, DTS's flow is close to solid body rotation at the inner sphere spinning velocity (see section 1.6 for spatial velocity description). Magnetic field modes then behave as for the static case in the inner sphere rotating frame. The flow dynamics is very different in the outer region. Velocity is decreasing and largely deviates from solid rotation. We observe phase variations as for the *skin effect* case from probe $P4$ to probe $P1$ and the very last probe $P1$ ends near the *skin effect* model predictions. Observations display a similar trend and our model's predictions are not far from the measurements, although further away than permitted by the error bars.

Figure 5.11 shows the radial (r) and azimuthal components (φ) of all the modes ($m = 1$ to $m = 5$) at two different latitudes (-20° and 10°). One can observe that the azimuthal component of high order modes ($m = 4$ and 5) follow the trend of the *static* case. Our explanation is that high order modes are fed by high harmonic degrees which rapidly decrease in the fluid and reach a nearly zero amplitude in the outer flow region. This translates in the complex plane into the important spacing between probes $P6$ and $P5$ and to the outermost probes $P4$, $P3$, $P2$ and $P1$ gathering near the origin. Lower order modes ($m = 2$ and 3) display a different behavior which deviates from the *static* case as already discussed for $m = 2$ in Figure 5.10. Mode $m = 1$ is closer to the *skin effect* case, displaying no similarity with the *static* case. However, there are strong differences with the *skin effect* case : the magnetic field is stretched to high amplitude values near the inner sphere. The measurements are not well fit.

Radial component of the non-axisymmetric data lies at half way between *skin effect* and *static* cases. We note however that high order modes get closer to the *skin effect* model, while low order modes tend to recover a behavior closer to the *static* case.

All those results show that low m modes sound DTS's flow in its outer region while high m modes collect information in the inner region. It is of great interest that non-axisymmetric data are consistent with the predictions obtained from our velocity maps (Figure 5.5). It is likely that these data provide strong constraints in our inversion process and thus constitute a key ingredient for further investigations of turbulent fluctuations, as their misfit remains far from unity ($\chi = 3.2$).

1.7 Discussion

We presented in this article a non linear inversion method to reconstruct the mean azimuthal and meridional velocity fields in a spherical liquid sodium device from measurements of the induced magnetic field, the electric potential and ultrasound Doppler velocity profiles. To perform this inversion, we numerically compute the kinematic direct model solving the full induction equation for an axisymmetric flow and a time-dependent non-axisymmetric magnetic field. Somehow

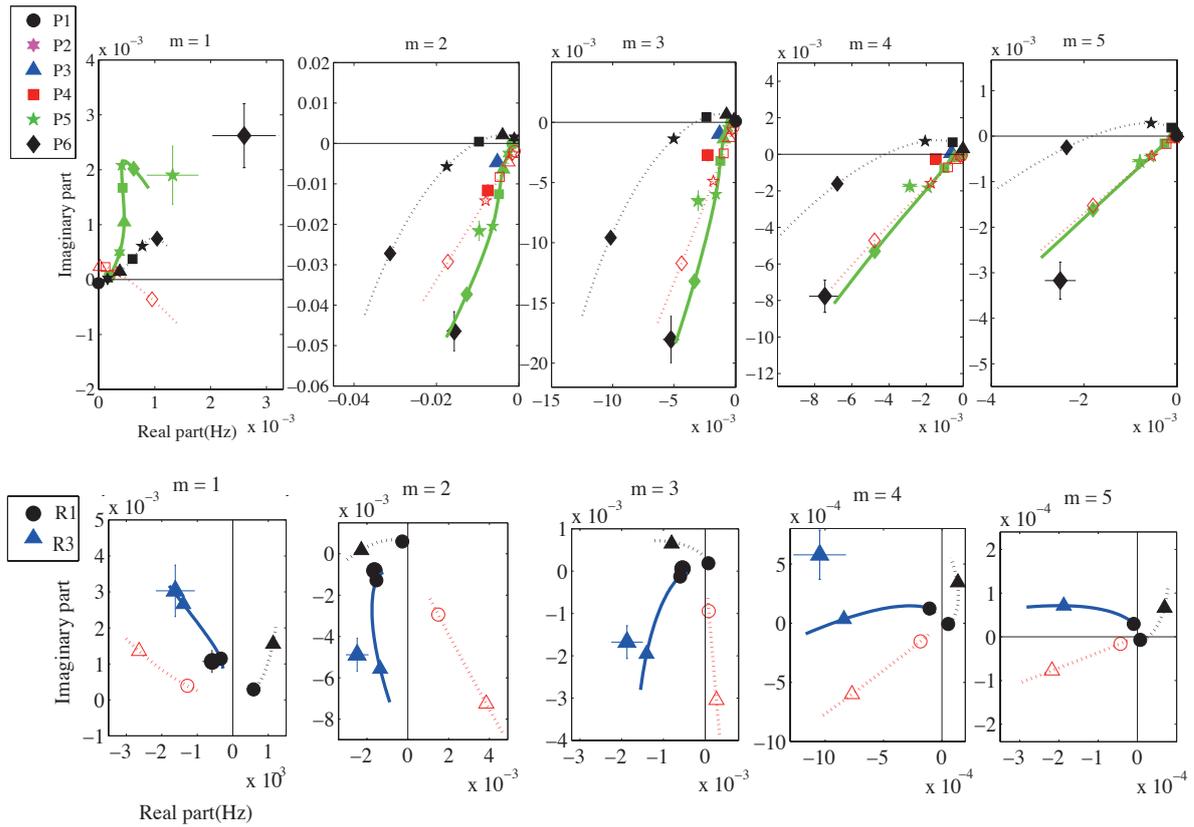


FIGURE 5.11 – Plot of non-axisymmetric magnetic data of five azimuthal modes from $m = 1$ to 5, for two magnetic components at two different latitudes. The azimuthal component $B_\phi^m(r, \theta)$ is presented on the upper five graphics for latitude -20° . The radial component $B_r^m(r, \theta)$ is presented on the bottom five graphics for latitude 10° . Colored (grayscaled) symbols labeled in the legend mark experimental data collected in DTS from magnetic probes in the sleeve. The radial position of the probes increases from P6 to P1 for the azimuthal component and from R3 to R1 for the radial component (see Figure 5.1). Non axisymmetric data are dimensionless as given in Appendix 4. See caption of Figure 5.10 for more details.

the equation of motion is solved by the experiment and we compute a kinematic system governed by a single dimensionless number, the magnetic Reynolds number, which achieves the experimental value of $Rm = 28$.

To solve this non linear kinematic system we used the code of [Figueroa et al. \(2013\)](#). We also had to take in consideration sharp conductivity jumps at the solid/fluid interfaces and realistic velocity boundary conditions. We achieve remarkable predictions from a rather simple mean velocity model. The best velocity field we obtain provides a full coherent solution for the mean velocity, the electric potential and the induced magnetic field inside and outside the fluid. Indeed, it fits rather well the observations with a global normalized misfit of 1.65.

Based on Nataf's previous investigation of DTS mean velocity field ([Nataf 2013](#)), we extend the analysis to a higher Rm value (28 instead of 9). The new velocity model displays a super-rotation zone, as the one described by [Nataf \(2013\)](#) and [Brito et al. \(2011\)](#) at lower rotation rate, which confirms that super-rotation is confined to the innermost fluid region and that its relative strength slightly decreases when rotation rate increases. On the contrary, the geostrophic shear region invades a large part of the fluid shell leading to an important toroidal induction by ω -effect. We expect this phenomenon to develop on a larger extent at even higher Rm , in such a way that the Coriolis force would increasingly dominate the dynamics.

The magnetostrophic regime also largely impacts the meridional flow behavior. Recent results from [Wicht \(2014\)](#) show that when no magnetic field is imposed, the poloidal to toroidal kinetic energy ratio is about 18%. We now know from this study and the previous one ([Nataf 2013](#)) that we are far from a purely hydrodynamic system, as our strong imposed magnetic field largely damps the meridional flow. In fact, the poloidal flow experiences a large Lorentz force by interacting with the magnetic field lines of the imposed dipole, which on the contrary acts as a propeller for the toroidal component. As a consequence, the poloidal to toroidal kinetic energy ratio gets down to about 5% in the present model and to about 0.1% in Nataf's model. We partially attribute this difference between the two models to non-axisymmetric data, which require a larger meridional velocity. We note that the previous model ([Nataf 2013](#)) at $Rm = 9.4$ does not include such data.

Despite its limited strength, the meridional circulation contributes to a significant part of the induced magnetic field. In the mean field approach, the meridional flow is the only way to feed the poloidal magnetic field and a slight meridional circulation interacting with a strong imposed magnetic field has an important induction effect. In fact, poloidal to toroidal magnetic energy ratio jumps from 0.11 in the previous model at $Rm = 9.4$ (Nataf 2013) to 0.35 in our model at $Rm = 28$. Meridional advection effects are also observed on the azimuthal magnetic field (see Figure 5.8). Estimating second order induction terms at $Rm = 9.4$, Nataf (2013) came out with an amplitude deviation of the azimuthal induced magnetic field, due to meridional flow, to about 3% if we consider an induced magnetic field proportional to Rm at first order. The present reconstruction at $Rm = 28$, involving larger poloidal kinetic energy, shows an increased local deviation of the azimuthal induction to about 5 – 10%.

Compared to previous work of Nataf (2013), we have introduced non-axisymmetric magnetic observations to obtain information on the mean axisymmetric flow. Inspired by Frick *et al.* (2010), we have developed a method to solve a time-varying magnetic field imposed from inner boundary and diffusing into a spherical Couette flow. Prediction results and observations of the non-axisymmetric part of the magnetic field are compared using a complex plane representation describing the radial evolution of each non-axisymmetric magnetic mode. By comparison with two reference cases (*static* and *skin effect*, see sec. 1.6) we evidence two dominant dynamics that split the DTS flow in a solid body rotation part near the inner-core and a shearing zone near the outer shell. This picture is coherent with the flow structure observed on velocity maps. The next step is to make use of our new inversion procedure to investigate the effect of turbulent fluctuations at larger magnetic Reynolds number.

We used a realistic induction model which takes into account both meridional and azimuthal velocity fields, and invert for the mean velocity field that best explains our measurements in a magnetostrophic regime. We thus bridged the gap to investigate non-axisymmetric fluctuations which are thought to play a major role in the generation of a large scale magnetic field in dynamo theory. A vast literature

exists on mean magnetic field generation by a mean electromotive force $\mathcal{E} = \langle \tilde{u} \times \tilde{b} \rangle$ induced by fluctuating non-axisymmetric flow \tilde{u} and magnetic field \tilde{b} , acting as an additional source term in the induction equation (5.1). A usual approach is to make use of the mean electromotive force expansion in terms of the large-scale magnetic field and the α and β tensors, such as presented, section 1.2.

[Cabanes *et al.* \(2014b\)](#) follow this strategy and invert for both the mean velocity field and radial profiles of α and β (assumed to be scalar).

CONCLUSION ET DISCUSSION SUR L'INDUCTION MAGNÉTIQUE PAR L'ÉCOULEMENT MOYEN

La méthode d'inversion que nous venons de détailler nous permet d'obtenir une description complète du champ de vitesse moyen comme solution de l'équation d'induction (3.6) introduite chapitre 3. Le choix d'une approximation axisymétrique du champ de vitesse nous a permis une compréhension approfondie des principaux mécanismes de grandes échelles responsables de l'induction magnétique dans l'expérience DTS.

Ainsi chaque terme des équations d'induction toroïdale et poloïdale formulées par Braginskii a pu être clairement identifié et sa contribution au champ induit a pu être précisément quantifiée. On note la forte induction toroïdale associée à l'effet Ω en raison du fort gradient de vitesse azimutale noté $\nabla\omega$. La figure 5.4 met en évidence l'importance de l'advection méridienne du champ magnétique poloïdal que l'on retrouve dans l'équation d'induction 3.6b sous la forme $\frac{u_p}{s} \cdot \nabla(sA)$. On note que si la circulation méridienne est nulle ($u_p = 0$) alors l'équation d'induction poloïdale 3.6b se réduit au modèle simple d'effet de peau. De plus le dipôle magnétique, étant axisymétrique ($m = 0$), suit une décroissance statique sans être perturbé. Le rôle de cette circulation méridienne s'exprimera d'autant plus lorsqu'elle sera couplée aux effets turbulents et plus particulièrement à l'effet β comme nous le verrons prochainement. Enfin le terme d'advection méridienne du champ toroïdal, ou terme de couplage comme mentionné en introduction, que l'on trouve sous la forme $s\mathbf{u}_p \cdot \nabla\left(\frac{b_\varphi}{s}\right)$ dans l'expression 3.6a, apporte une légère déviation du champ toroïdal induit (figure 5.8) mais ne parvient pas totalement à réconcilier les données expérimentales et leurs prédictions.

Nous atteignons probablement les limites de l'approximation d'un écoulement

moyen axisymétrique comme modèle de prédiction du champ magnétique moyen dans l'expérience DTS. Les termes résultants du produit croisé du champ magnétique induit et du champ de vitesse, initialement négligés par [Nataf \(2013\)](#) et intégrés à notre étude, ne permettent pas non plus une bonne prédiction de toutes les observations expérimentales. Les travaux précédents de [Figueroa et al. \(2013\)](#) et [Schmitt et al. \(2008\)](#) nous apprennent l'existence d'importantes perturbations du champ de vitesse sous la forme d'ondes Magnéto-Coriolis et d'instabilités turbulentes que l'on pourrait intégrer à l'équation d'induction. Cette étude fut en partie menée par [Nataf \(2013\)](#) qui prédit des contributions turbulentes trop faibles pour qu'elles soient résolues par le modèle direct. Cependant ces résultats sont inspirés d'une inversion à $Rm \approx 10$ et rien n'indique que l'on puisse faire une extrapolation linéaire de cette solution pour une dynamique à plus haut nombre de Reynolds magnétique. Nous allons donc améliorer notre modèle d'induction cinématique en nous inspirant de l'équation d'induction (1.4) où les contributions non-axisymétriques de toutes origines s'exprimeront sous la forme d'une force électromotrice \mathcal{E} . Notons ici que l'on doit comprendre par contributions non-axisymétriques les fluctuations turbulentes capable de contourner le théorème de Cowling. Il s'agit de fluctuations corrélées du champ magnétique et du champ de vitesse qui sont responsables de l'induction du champ magnétique moyen, à ne pas confondre avec le champ magnétique non-axisymétrique imposé par l'aimant permanent qui impose un signal magnétique alternatif.

Troisième partie

Le rôle de la turbulence : quelles sont les contributions des effets α et β dans l'expérience DTS ?

INTRODUCTION

Les connaissances que nous avons au préalable du champ de vitesse moyen de l'expérience DTS nous ont amené à négliger dans un premier temps les contributions non-axisymétriques de l'écoulement (fluctuations). Nous avons donc exploré un modèle d'induction pour un écoulement moyen axisymétrique afin de décrire les interactions entre le champ de vitesse et le champ magnétique induit. Les prédictions de ce modèle sont plutôt satisfaisantes mais ne permettent pas de retrouver toutes les mesures expérimentales.

Nous allons donc prolonger le modèle direct utilisé pour l'inversion du champ moyen en intégrant les contributions des petites échelles au champ magnétique de grande échelle à travers une force électromotrice. Les objectifs de cette partie sont de résoudre les écarts des données aux prédictions restés sans réponse dans la partie précédente et d'étendre nos connaissances du régime magnétostrophique en évaluant les contributions des fluctuations turbulentes au champ magnétique moyen. On tentera de répondre aux grandes questions évoquées dans l'introduction principale ; les fluctuations turbulentes favorisent-elles ou inhibent-elles l'effet dynamo ? Comment s'organisent les fluctuations turbulentes et leurs contributions au champ magnétique moyen dans la configuration d'un fluide en rotation soumis à un fort champ magnétique ?

Nous introduirons dans un premier temps la théorie du champ moyen qui permet d'exprimer la *fem* en terme des quantités moyennées de l'expérience et des effets turbulents α et β . Nous reprendrons la formulation de Braginskii en y ajoutant les contributions d'un écoulement turbulent et nous discuterons les conditions à remplir pour que les effets α et β permettent de contourner le théorème de Cowling. La *fem* étant fortement dépendante de la dynamique à grande échelle, nous expliquerons et justifierons, à partir des connaissances que nous avons des fluctuations turbulentes, les hypothèses qui seront faites concernant la description spatiale

des effets α et β . Il s'agit en d'autres termes de définir un modèle *a priori* de la force électromotrice qui pourra être intégrée au modèle direct. Des inversions simultanées du champ de vitesse moyen et de la fem \mathcal{E} seront réalisées pour $Rm = 28, 47, 72$ et 94. Nous réaliserons en parallèle une simulation numérique directe afin de la comparer avec nos solutions d'inversions. Nous commenterons enfin les résultats obtenus et notamment l'influence séparée des effets α et β sur le champ magnétique axismétrique et non-axisymétrique (modes azimutaux) ainsi que sur les mesures de potentiels électriques. Un dernier chapitre portera sur l'évolution de nos solutions d'inversions avec la valeur de Rm .

MISE EN ÉQUATION D'UN MODÈLE TURBULENT

La théorie du champ moyen nous permet d'exprimer la force électromotrice d'un système turbulent sans connaître la solution de vitesse du fluide en tous point de l'espace et du temps. L'approche cinématique choisie précédemment reste toujours valable et l'on traitera séparément l'écoulement moyen et les propriétés turbulentes du fluide (comme dans l'équation 1.4). L'équation d'induction générale comportera donc deux termes d'induction traduisant séparément la production de champ magnétique de grande échelle induit par les fluctuations et par l'écoulement moyen. Les contributions des petites échelles seront discutées grâce à la formulation de l'équation d'induction de Braginskii que l'on va étendre au cas turbulent. Nous détaillerons les propriétés turbulentes de l'expérience DTS avant d'appliquer notre méthode d'inversion à la détermination d'une *fem*.

1 Théorie du champ moyen

Comme l'a démontré Braginskii en reformulant le théorème anti-dynamo de Cowling (chapitre 3), un champ magnétique poloïdal axisymétrique peut être entretenu si et seulement si un terme source est ajouté à la composante méridienne de l'équation d'induction axisymétrique (3.6). Nous avons évoqué en introduction (partie I) l'existence de mécanismes turbulents non-axisymétriques où les fluctuations de l'écoulement et du champ magnétique peuvent agir collaborativement pour produire un champ magnétique de grande échelle. La force électromotrice (*fem*) qui en résulte prend la forme d'un produit vectoriel $\mathcal{E} = \langle \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{b}} \rangle$ où $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\mathbf{b}}$ décrivent les fluctuations de petites échelles des champs \mathbf{U} et \mathbf{B} respectivement.

Seulement, il est expérimentalement difficile de réaliser une mesure directe de cette *fem*. On utilise alors la connaissance que nous avons du champ magnétique moyen $\langle \mathbf{B} \rangle$ pour exprimer le produit $\langle \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{b}} \rangle$. Cette approche est connue sous le nom de théorie du champ moyen où la *fem* notée \mathcal{E} s'écrit,

$$\mathcal{E} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle + \beta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle + \dots \quad (6.1)$$

Ici α et β sont deux scalaires. α représente les propriétés hélicitaires de l'écoulement et est à l'origine de courants électriques le long des lignes de champ magnétique. La quantité scalaire β est directement reliée aux courants électriques et peut être interprétée comme une diffusivité turbulente où la diffusivité magnétique effective devient $\eta_{eff} = \eta + \beta$. On peut alors réécrire l'équation d'induction (1.4) en utilisant l'expression (6.1) de la *fem*,

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\alpha \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle - \eta_{eff} \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle). \quad (6.2)$$

Afin de mettre en évidence le rôle majeur joué par les effets α et β dans le processus dynamo, nous pouvons réécrire les équations du champ moyen axisymétrique (3.6) proposées par Braginskii en ajoutant les contributions turbulentes non-axisymétriques (Roberts et King 2013). On obtient

$$\partial_t b_\varphi + s \mathbf{u}_P \cdot \nabla \left(\frac{b_\varphi}{s} \right) = s \mathbf{B}_P \cdot \nabla \omega + L_\eta b_\varphi - (\alpha \Delta_1 A + s^{-1} \nabla \alpha \cdot \nabla (sA)), \quad (6.3a)$$

$$\partial_t A + \frac{\mathbf{u}_P}{s} \cdot \nabla (sA) = L_\eta A + \alpha b_\varphi, \quad (6.3b)$$

où $L_\eta = (\nabla \eta_{eff} \times \nabla \times \cdot) + \eta_{eff} \Delta_1 \cdot$ est l'opérateur de diffusion pour une diffusivité magnétique non-homogène. On retrouve dans l'équation (6.3b) le terme source manquant au processus dynamo apporté par l'effet α qui en convertissant le champ magnétique toroïdal en champ poloïdal nous permet de contourner le théorème anti-dynamo de Cowling. Remarquons que contrairement à l'effet α , l'effet β ne permet pas de coupler les équations (6.3b) et (6.3a) puisqu'il agit seulement sur la diffusion du champ magnétique et ne pourra jamais être une source d'énergie magnétique pour le système. Par conséquent, l'effet β seul ne permet pas de contourner le théorème de Cowling, il peut seulement favoriser le régime dynamo en réduisant la dissipation magnétique si $\beta < 0$. α est le seul à pouvoir convertir

un champ magnétique poloïdal en champ toroïdal et inversement. Notons qu'il est envisageable mathématiquement que l'effet β soit à l'origine d'une dynamo dans le cas exceptionnel où η_{eff} deviendrait lui même négatif. Dans ce cas amusant, il y aurait auto-crédation de champ poloïdal à partir d'un champ poloïdal (même chose pour le champ toroïdal). Aucun résultat expérimental ni numérique ne rapporte de telle valeur de diffusivité.

Prenons maintenant un cas où l'écoulement moyen est négligeable, alors $\omega = 0$ (pas d'effet Ω) dans l'équation (6.3a) et l'effet α sera également nécessaire pour soutenir l'induction du champ azimutal b_φ . Il est possible, lors de régime fortement turbulent, d'avoir une dynamo auto-entretenu par effet α . On peut alors définir un nombre de Reynolds magnétique turbulent $Rm_{turb} = \bar{\mathbf{u}}L/\eta$ pour caractériser une telle dynamique. Si $Rm_{turb} \gg Rm_\omega$ (avec $Rm_\omega = \omega L^2/\eta$) alors le terme d'induction impliquant ω peut être ignoré et le régime dynamo sera de type α^2 où les termes d'induction magnétique impliquant α entretiendront les deux composantes du champ magnétique. Si au contraire $Rm_\omega \gg Rm_{turb}$ alors le terme source nécessitant α dans l'équation (6.3a) est négligé et la dynamo est dite $\alpha\Omega$. On appellera une dynamo $\alpha^2\Omega$, une dynamo où chaque terme source contribuera dans des proportions équivalentes.

Contrairement à l'effet α , il est rare de considérer l'effet β comme favorable à l'effet dynamo. Il est souvent admis que la turbulence rehausse significativement la diffusivité magnétique du fluide. L'effet β est alors pensé comme un phénomène anti-dynamo agissant directement sur les courants électriques $\langle \mathbf{J} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle$ en augmentant la capacité du milieu conducteur à dissiper le champ induit. Si cela est vrai dans le cas d'une turbulence homogène isotrope, rien ne contraint l'effet β à être positif (soit à augmenter la valeur de η et donc à inhiber la dynamo) si la turbulence s'écarte de ce cas idéal. Il est alors envisageable que l'effet β abaisse les effets dissipatifs du fluide favorisant ainsi l'induction magnétique. Comme nous l'avons fait remarquer précédemment, si la circulation méridienne et l'effet α sont nuls ($\mathbf{u}_p = 0$ et $\alpha = 0$) alors l'équation d'induction poloïdale 6.3b se réduit au modèle simple d'effet de peau. De plus, le champ magnétique axisymétrique ($m = 0$), dont fait partie le dipôle, suit une décroissance statique (étant invariant

autour de l'axe de rotation) qui ne dépend pas de la diffusivité magnétique η_{eff} . Pour résumer, il est important de noter que si l'effet α et la circulation méridienne sont absents du système alors le dipôle magnétique n'est pas influencé par l'effet β .

L'expérience DTS, qui ne cherche pas à atteindre de régime dynamo, se trouve plutôt dans la configuration d'induction $\alpha\Omega$ où $Rm = Rm_\omega \gg Rm_{turb}$. La majorité du champ magnétique induit peut être expliqué par le champ de vitesse moyen et principalement par le fort écoulement toroïdal à l'origine de l'effet Ω comme nous l'avons vu partie II. Il n'est pas exclu cependant qu'une proportion non négligeable du champ magnétique moyen soit liée aux contributions turbulentes. Il est d'ailleurs difficile de savoir *a priori* si les contributions turbulentes dans DTS auront la forme d'effets α ou β . Ceci sera l'objet du chapitre suivant.

Notons que nous avons dans cette section fait référence aux contributions turbulentes non-axisymétriques du champ magnétique et du champ de vitesse par contraste avec l'hypothèse de champ axisymétrique nécessaire au théorème anti-dynamo de Cowling. Nous parlerons par la suite seulement de contributions des *fluctuations turbulentes* ou des *fluctuations de petites échelles*. Le terme non-axisymétrique fera seulement référence aux modes magnétiques azimutaux relatifs aux hétérogénéités du champ magnétique imposé (introduit partie II).

2 L'induction $\alpha\Omega$

L'action couplée des mouvements de grande échelle (effet Ω) et des mouvements hélicitaires (effet α) est un ingrédient fortement dynamogène qui a été mis en évidence par Parker (1955). On comprend ici par mouvement hélicitaire, un écoulement pour lequel $\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\zeta} \neq 0$ avec $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{U}$ la vorticité.

Comme nous l'évoquions précedemment, le terme $\alpha\langle\mathbf{B}\rangle$ dans l'équation (6.1) est un terme nécessaire à la production de champ magnétique poloïdal. Lorsque l'effet α agit conjointement avec un cisaillement fluide de grande échelle capable de produire un champ magnétique toroïdal nous faisons référence au mécanisme d'induction $\alpha\Omega$. Ainsi, chaque composante du champ magnétique est alimentée énergétiquement et le système est auto-entretenu.

Nous schématisons le mécanisme d'induction α dans la figure 6.1. (a). Un champ magnétique initial \mathbf{B} (qui peut avoir été produit par effet Ω) est étiré par un champ de vitesse \mathbf{u} pour former une boucle de champ induit en forme de Ω . (b) le mouvement hélicitaire du fluide $\mathbf{u} + \boldsymbol{\zeta}$ distord la boucle de champ qui sort alors du plan du papier. Proche du point noté R , un fort gradient de champ magnétique est créé. (c) On invoque ensuite la diffusion pour refermer la spirale et former ainsi un nouvel anneau de champ magnétique auquel est associé un courant \mathbf{J} parallèle au champ B initial. On obtient finalement deux composantes de champ magnétique, orthogonales l'une par rapport à l'autre. Si le champ magnétique présent initialement (B) est un champ toroïdal créé par effet Ω alors le mécanisme d'induction $\alpha\Omega$ permet bien d'entretenir un champ magnétique toroïdal et poloïdal à partir de l'action couplée des effets α et Ω .

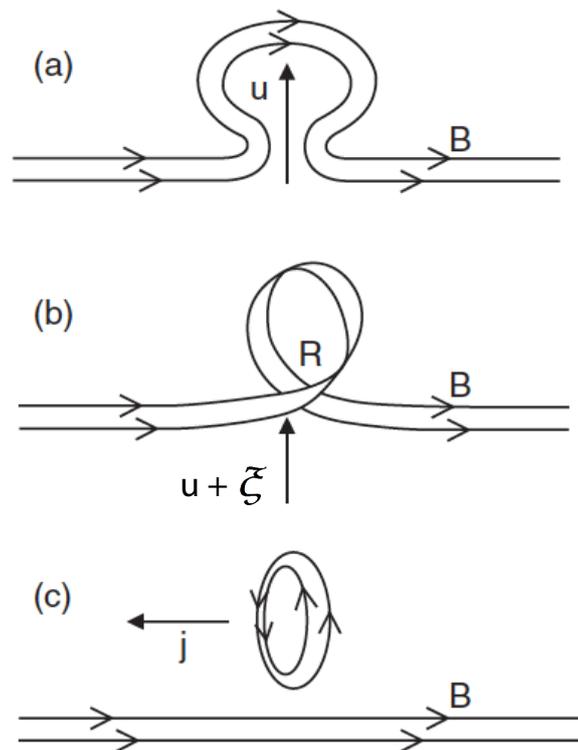


FIGURE 6.1 – Mécanisme d'induction de Parker combinant l'action couplée d'un champ vitesse u et de sa vorticité ζ . Ce mécanisme représente le mécanisme d'induction α discuté dans le texte. Schéma Roberts et King (2013)

3 L'expression de la force électromotrice

Revenons sur l'expression de la *fem* définie dans le cadre de la turbulence homogène isotrope. On entend par turbulence homogène isotrope un écoulement turbulent pour lequel les fluctuations de vitesse sont invariantes spatialement et sans orientation préférentielle. α et β sont alors deux scalaires indépendants des coordonnées spatiales. Ce scénario représente un cas idéal qui est peu probable dans la configuration de l'expérience DTS. Nous détaillerons dans cette section pourquoi DTS s'écarte du cas de turbulence homogène isotrope. α et β ne pourront alors plus être considérés comme de simples scalaires qui synthétiseraient l'ensemble des propriétés turbulentes du fluide. Nous devons chercher des arguments théoriques ou empiriques afin de projeter α et β sur un modèle qualitatif (autre que deux scalaires constants) qui soit en mesure d'offrir une description réaliste des propriétés turbulentes de l'expérience. L'évaluation quantitative des termes α et β se fera par inversion au chapitre suivant.

3.1 Description des fluctuations turbulentes

Prenons dans un premier temps le cas de turbulence homogène isotrope où un écoulement turbulent est baigné dans un champ magnétique de faible intensité. Il est alors possible d'écrire l'équation pour les fluctuations du champ magnétique $\tilde{\mathbf{b}}$ en remplaçant dans l'équation d'induction (1.3) l'écoulement moyen par le champ $\tilde{\mathbf{u}}$ de ses fluctuations. Il en résulte des fluctuations $\tilde{\mathbf{b}}$ dépendantes linéairement des fluctuations $\tilde{\mathbf{u}}$ et du champ magnétique $\langle \mathbf{B} \rangle$ avec lequel ces dernières interagissent, à condition que $\tilde{b} \ll \langle \mathbf{B} \rangle$. On en déduit que la force électromotrice \mathcal{E} , associée au produit des fluctuations $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\tilde{\mathbf{b}}$, dépend également des quantités $\tilde{\mathbf{u}}$ et $\langle \mathbf{B} \rangle$ du système turbulent. Ceci transparaît dans l'expression (6.1) où les termes α et β reflètent directement les propriétés turbulentes du champ de vitesse et dépendent de $\tilde{\mathbf{u}}$ tout en restant indépendants du champ magnétique $\langle \mathbf{B} \rangle$. La *fem* \mathcal{E} est une fonction linéaire de α , β et de $\langle \mathbf{B} \rangle$, c'est-à-dire le produit des propriétés turbulentes du fluide (indépendamment de $\langle \mathbf{B} \rangle$) et du champ magnétique moyen. Ainsi si l'on réussit à évaluer les propriétés turbulentes du fluide et que l'on a accès à la distribution

spatiale du champ magnétique moyen on peut aisément reconstruire la *fem* en tout point de l'espace à condition que la turbulence soit homogène.

Sortons maintenant de ce cas simple et considérons la configuration de DTS dans laquelle un écoulement en Couette sphérique baigne dans un champ magnétique de forte intensité et spatialement non homogène. Il est probable que dans de telles circonstances, α et β ne dépendent plus seulement de la connaissance que nous avons de $\bar{\mathbf{u}}$ en un point de l'espace mais bien plutôt des quantités moyennées qui caractérisent la dynamique du système. Il faut alors comprendre comment s'organisent les quantités turbulentes α et β en fonction des structures de grandes échelles $\langle \mathbf{U} \rangle$ et $\langle \mathbf{B} \rangle$. Seulement il n'existe pas ou peu de base théorique à ce problème qui permettrait d'obtenir un modèle fiable traduisant directement la dépendance de α et β aux grandes structures du champ de vitesse et du champ magnétique.

Il est connu dans la littérature sur le sujet que la contrainte exercée par un écoulement en rotation (type Couette) rend la turbulence fortement anisotrope, le fluide en s'organisant autour de l'axe de rotation donne une orientation préférentielle aux mouvements turbulents, et non homogène, les couches limites sont souvent le lieu d'instabilités qui créent un gradient de fluctuations près des bords. Des simulations numériques nous montrent que la *fem* d'un écoulement Couette en régime turbulent peut être modélisée par un tenseur $\bar{\bar{\alpha}}$ d'ordre deux (Rüdiger et Brandenburg 2014). L'influence d'un champ de forte intensité imposé à un régime turbulent est également connue et porte le nom de " α ou β quenching". Il se traduit en général par une atténuation de l'amplitude des fluctuations de vitesse proportionnellement à l'intensité du champ imposé. Des observations expérimentales et numériques de ces phénomènes sont rapportés dans divers articles (Spence *et al.* (2006), Charbonneau (2005)). Une des difficultés de notre étude est que l'expérience DTS est soumise à l'action couplée de la rotation fluide et d'un champ magnétique de forte intensité.

Nous allons donc chercher une connaissance empirique du comportement turbulent de l'expérience.

3.2 La turbulence non-homogène de l'expérience DTS

Des simulations numériques directes (*dns*), résolvant l'équation du mouvement et l'équation d'induction, nous ont permis d'en savoir plus sur la dynamique turbulente de DTS. La figure 6.2 présente une simulation numérique réalisée par Figueroa *et al.* (2013). On peut identifier, sur la coupe méridionale du champ de vitesse azimutale (u_φ/s), des zones fortement turbulentes près de la sphère externe alors que la région interne, soumise à un champ magnétique de forte intensité, montre peu de fluctuations de vitesse. La région interne correspond à la zone de rotation solide où la force de Lorentz contraint fortement l'écoulement réduisant du même coup les perturbations turbulentes. Il s'agit du phénomène de "quenching" évoqué précédemment. Des instabilités viennent naître dans la couche limite externe où se forment des jets radiaux qui sont ensuite entraînés dans le volume fluide. Ces perturbations turbulentes viennent briser l'équilibre géostrophique mis en place par la force de Coriolis. En analysant une série temporelle de ces cartes méridionales on observe un important transport advectif depuis l'équateur vers les pôles de chacun des jets turbulents. Cette simulation numérique nous permet d'ores et déjà de conclure sur le caractère fortement non-homogène de la turbulence dans l'expérience DTS.

Le second plan méridional (figure 6.2) représente une carte de la densité d'énergie cinétique $\delta E_k = \rho \langle \tilde{\mathbf{u}}^2 \rangle / 2$ moyennée en temps et dans la direction azimutale. Les fluctuations $\tilde{\mathbf{u}}$ sont calculées numériquement par différence avec le champ de vitesse moyen (moyenné en temps). On remarque que l'énergie des fluctuations turbulentes est maximum dans la région externe de l'expérience, comme le suggérait déjà la carte du champ de vitesse azimutale, et décroît vers des intensités proches de zéro dans la partie interne. Ceci reste vrai indépendamment du nombre de Reynolds des simulations réalisées par Figueroa *et al.* (2013). Il est important de noter les faibles variations latitudinales de l'énergie cinétique par contraste avec leur forte évolution radiale. Cette description spatiale des fluctuations turbulentes est une information déterminante qui nous permettra d'établir le modèle *a priori* de la *fem* dans l'inversion qui va suivre.

Des résultats similaires sont obtenus expérimentalement. La figure 6.3 nous

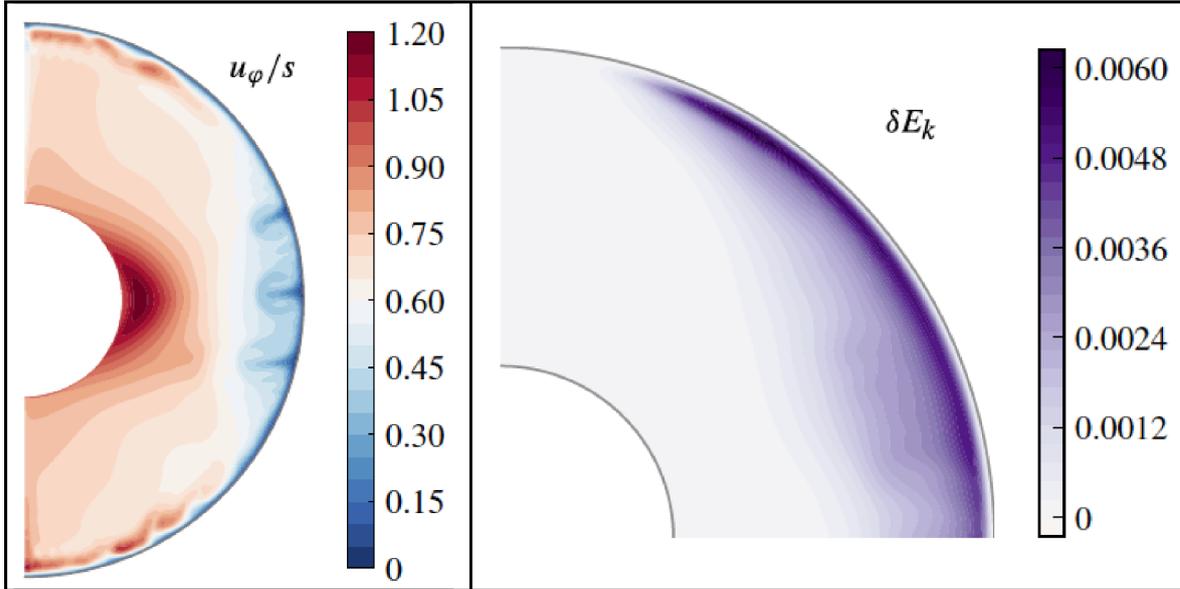


FIGURE 6.2 – Résultat de simulations numériques directes (dns) obtenues par [Figuera et al. \(2013\)](#), à gauche : Coupe sur un plan méridien (r, θ) de la vitesse angulaire $\omega = u_\phi/s$ après 675 tours de la sphère interne. Droite : demi plan méridional de la densité d'énergie cinétique δE_k moyennée en temps et dans la direction azimutale. L'énergie des fluctuations moyennée est symétrique par rapport au plan de l'équateur. Les valeurs sont normalisées comme dans le tableau [A.2](#). Simulation numérique réalisée à $Pm = 10^{-3}$, $Re = 2611$ et $\Lambda = 3.4 \times 10^{-2}$.

montre trois profils radiaux, en bleu les fluctuations du champ de vitesse, en rouge les fluctuations du champ magnétique et en vert le produit des deux qui nous donne une estimation approximative de la *fem*. Les fluctuations de vitesse sont une valeur moyenne des *rms* obtenues à partir de plusieurs tirs Doppler ultrasonores pour une fréquence de rotation de la sphère interne de 9 Hz. Les fluctuations du champ magnétique sont également des valeurs *rms* mesurées depuis les magnétomètres du doigt de gant. Le produit des fluctuations donne une estimation approchée de la *fem* en mV/m. Si l'amplitude de ces profils est probablement discutable, ils apportent néanmoins une description spatiale des fluctuations de vitesse cohérente avec les résultats numériques.

Il n'est donc pas envisageable compte tenu ces résultats de considérer α et β comme deux scalaires uniques caractéristiques de la dynamique turbulente de l'expérience. Nous devons donc utiliser les connaissances que nous avons du champ magnétique $\langle \mathbf{B} \rangle$ et maintenant de $\tilde{\mathbf{u}}$ pour déterminer la forme de la *fem* \mathcal{E} dans l'expérience DTS.

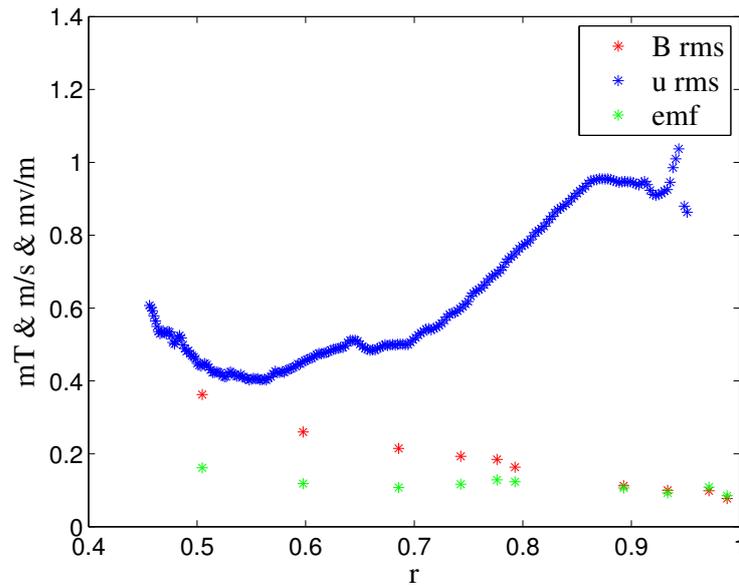


FIGURE 6.3 – Estimation expérimentale des fluctuations dans l'expérience DTS. (en bleu) On évalue une valeur rms des fluctuations de vitesse en fonction du rayon à partir de tirs doppler ultrason dans la direction radiale de l'écoulement. (en rouge) Les magnétomètres à effets Hall nous donnent accès à l'amplitude des fluctuations (valeur rms) du champ magnétique. Chaque mesure est faite pour une fréquence de rotation de la graine de 9 Hz. (en vert) on fait le produit des fluctuations de vitesse et du champ magnétique pour obtenir une valeur approchée de la fem. Les fluctuations de vitesse sont en m/s, celles du champ magnétique en mT et la fem en mV/m.

3.3 Description radiale de la fem

S'il nous est difficile expérimentalement de traiter le problème d'anisotropie de la turbulence en cherchant à résoudre les termes turbulents sous forme tensorielle, il nous est possible de chercher une solution non homogène sous la forme $\alpha = f(r)$ et $\beta = g(r)$. Comme nous l'enseigne la figure 6.2, nous pouvons négliger dans un premier temps les variations latitudinales (dépendance en θ) et azimutales (dépendance en φ) des fluctuations. En suivant le cas simple décrit plus haut où α et β dépendent uniquement des fluctuations $\tilde{\mathbf{u}}$, nous pourrions chercher une solution telle que $\alpha(r)$ et $\beta(r) \propto \delta E_k(r) \propto \left(\frac{r}{r_0}\right)^6$. Cette description radiale est un assez bon modèle des variations spatiales de l'énergie cinétique des fluctuations qui ont une évolution radiale en r^6 ($\delta E_k(r)$ figure 6.2). De plus il se trouve que ce modèle est inversement proportionnel à l'évolution radiale de l'énergie magnétique imposée (dipôle magnétique), $\langle \mathbf{B} \rangle^2(r) \propto \left(\frac{r}{r_0}\right)^6$, et serait cohérent avec le concept de "turbulent quenching". Nous avons donc cherché à inverser, suivant une méthode que nous détaillerons au chapitre suivant, pour les constantes α' et α'' tel

que $\alpha(r) = \alpha' \left(\frac{r}{r_0}\right)^6 + \alpha''$. Un tel modèle ne s'est pas avéré concluant puisqu'il n'a permis aucune amélioration de nos prédictions vis à vis des données d'observation (la même chose a été faite avec β). Les résultats de ce modèle ne seront pas repris dans la suite de ce manuscrit.

Nous en concluons qu'une relation de proportionnalité entre les scalaires α et β et l'énergie cinétique des fluctuations $\delta E_k(r)$ n'est pas un modèle satisfaisant puisqu'il n'est pas capable de rendre compte des propriétés turbulentes de l'expérience DTS. Le modèle le plus approprié que nous ayons essayé est la projection de la dépendance radiale de α et β sur les polynômes de Tchebychev $T_n(r)$ allant jusqu'au degré harmonique $n_{max} = 5$. Ce modèle est utilisé et détaillé dans le chapitre suivant. Nous chercherons à déterminer les $n_{max} + 1$ coefficients de Tchebychev qui offriront la meilleure description radiale des scalaires α et β , c'est-à-dire ceux qui apporteront les meilleures prédictions des mesures expérimentales.

7 DÉTERMINATION DES PROFILS RADIAUX DES CONTRIBUTIONS TURBULENTES

Maintenant que nous avons introduit l'intérêt des deux effets turbulents α et β pour la théorie dynamo ; il devient capital de savoir si ces derniers jouent un rôle dans l'expérience DTS et par conséquent dans le régime magnétostrophique. Nous avons préalablement pris soin d'acquérir un certain nombre de connaissances concernant les propriétés turbulentes de l'expérience. Cette étude préliminaire nous a amené à considérer une dépendance radiale, décrite par 12 coefficients de Tchebychev, des contributions des petites échelles vers le champ magnétique de grande échelle. Ce modèle constituera un modèle *a priori* pour la force électromotrice \mathcal{E} que nous déterminerons en suivant la même méthode d'inversion que pour le champ moyen. Le modèle direct aura alors la forme de l'équation 6.2.

Après une rapide introduction nous détaillerons les données expérimentales utilisées pour l'inversion. Nous exposerons les profils radiaux des effets α et β obtenus pour des inversions à $Rm = 28$ et 74 . Nous montrerons d'abord succinctement (dans l'article) comment cette *fem* permet d'améliorer nos prédictions du champ magnétique non-axisymétrique puis plus en détail dans une section complémentaire. Une carte de la *fem* obtenue par simulation numérique directe sera également commentée et comparée aux résultats obtenus par inversion. Nous discuterons enfin l'impact des effets α et β sur le champ magnétique axisymétrique.

1 Article : Turbulence reduces magnetic diffusivity in a liquid sodium experiment

Article (Simon Cabanes, Nathanaël Schaeffer & Henri-Claude Nataf) publié dans Physical Review Letter (PRL).

1.1 Abstract

The contribution of small scale turbulent fluctuations to the induction of mean magnetic field is investigated in our liquid sodium spherical Couette experiment with an imposed magnetic field. An inversion technique is applied to a large number of measurements at $Rm \approx 100$ to obtain radial profiles of the α and β effects and maps of the mean flow. It appears that the small scale turbulent fluctuations can be modeled as a strong contribution to the magnetic diffusivity that is negative in the interior region and positive close to the outer shell. Direct numerical simulations of our experiment support these results. The lowering of the effective magnetic diffusivity by small scale fluctuations implies that turbulence can actually help to achieve self-generation of large scale magnetic fields.

1.2 Introduction

The Earth, the Sun and many other astrophysical bodies produce their own magnetic field by dynamo action, where the induction of a magnetic field by fluid motion overcomes the Joule dissipation. In all astrophysical bodies, the conducting fluid undergoes turbulent motions, which can also significantly affect the induction of a large-scale magnetic field by either enhancing it or weakening it. It is therefore of primary interest to quantify the role of these fluctuations in the dynamo problem.

The induction equation for the mean magnetic field $\langle \mathbf{B} \rangle$ reads :

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{U} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E}) + \eta \Delta \langle \mathbf{B} \rangle \quad (7.1)$$

where $\langle U \rangle$ is the mean velocity field, $\eta = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ is the magnetic diffusivity (involving the magnetic permeability μ_0 and the conductivity of the fluid σ), and $\mathcal{E} = \langle \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{b}} \rangle$ is the mean electromotive force (emf) due to small scale fluctuating magnetic $\tilde{\mathbf{b}}$ and velocity $\tilde{\mathbf{u}}$ fields. The relative strength between the inductive and dissipative effects is given by the magnetic Reynolds number $Rm = UL/\eta$ (U and L are characteristic velocity and the characteristic length-scale). When there is a scale separation between the turbulent fluctuations and the mean flow, we can follow the mean-field theory and expand the emf in terms of mean magnetic quantities : $\mathcal{E} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \beta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle$. For homogeneous isotropic turbulence, α and β are scalar

quantities. α is related to the flow helicity and results in an electrical current aligned with the mean magnetic field, whereas β can be interpreted as a turbulent diffusivity effectively increasing ($\beta > 0$) or decreasing ($\beta < 0$) electrical currents. The effective magnetic diffusivity $\eta_{eff} = \eta + \beta$ can have tremendous effects on energy dissipation and on dynamo action by reducing or increasing the effective magnetic Reynolds number $Rm_{eff} = UL/\eta_{eff}$.

However, direct determination of these small-scale contributions remains a challenging issue for experimental studies and numerical simulations.

The first generation of dynamo experiments were designed to show that turbulent flows with strong geometrically-imposed helicity could self-generate their own magnetic fields. Since the success of Riga (Gailitis *et al.* 2001) and Karlsruhe (Stieglitz *et Müller* 2001) dynamos, several other liquid metal experiments have sought to overcome the effects of magnetohydrodynamic turbulence in less constrained, more geophysically relevant flow geometries. Unfortunately, dynamo action remains elusive, and the effective contribution of small-scale motions to large-scale magnetic fields remains poorly understood, though the small-scale motions seem to work against dynamo action Spence *et al.* (2006), Frick *et al.* (2010).

In the Perm torus-shaped liquid sodium experiment, the effective magnetic diffusivity was inferred from phase shift measurements of an alternating magnetic signal, indicating turbulent increases in magnetic diffusivity of up to $\approx 30\%$ Frick *et al.* (2010). The Madison experiment, a sphere containing two counter-rotating helical vortices, found that an externally applied magnetic field was weakened by about 20% at $Rm = 130$, which they interpreted as a negative global α -effect Spence *et al.* (2006). The installation of an equatorial baffle was found to reduce the amplitude of the largest-scale turbulent eddies and hence the α -effect Kaplan *et al.* (2011). In the same set-up, Rahbarnia *et al.* (2012) measured the local emf directly, finding contributions from both α and β , but with a dominant β -effect. They reported an increase in magnetic diffusivity of about 30%. The Von Karman Sodium experiment, a cylinder containing another two-vortex liquid sodium flow, reported a magnetic diffusivity increase of about 100% Ravelet *et al.* (2012).

1.3 Set-up, data and inversion

We analyze data from the Derviche Tourneur Sodium experiment (DTS), a magnetized spherical Couette flow experiment sketched in Figure 7.1. Forty liters of liquid sodium are enclosed between an inner sphere (radius $r_i = 74\text{mm}$) and a concentric outer stainless steel shell (inner radius $r_o = 210\text{mm}$). The inner sphere can rotate around the vertical axis at rates up to $f = 30\text{Hz}$, yielding a maximal value of 94 for the magnetic Reynolds number defined as $Rm = 2\pi f r_o^2 / \eta$. The inner sphere consists of a copper shell containing a strong permanent magnet, which produces a, mostly dipolar, magnetic field pointing upwards along the rotation axis. The intensity of the magnetic field decreases from $B_i \simeq 180\text{mT}$ at the equator of the inner sphere to $B_o \simeq 7.1\text{mT}$ at the equator of the outer shell. More details are given in Brito *et al.* (2011).

In a recent study (Cabanes *et al.* 2014a), we developed a new strategy to determine the mean velocity and induced magnetic fields. Following earlier works Brito *et al.* (2011), Nataf (2013), we collect ultrasound Doppler velocity profiles, electric potential measurements, global torque data, and measurements of the induced magnetic field inside the sodium layer, to reconstruct meridional maps of the mean flow and magnetic field at a given Rm , taking into account the link established by the induction equation. But we further constrain these fields by analyzing the response of the fluid shell to a time-periodic magnetic field, as in Frick *et al.* (2010). In our case, the time-periodic signal simply results from the rotation of our central magnet, whose small deviations from axisymmetry produce a field varying at the rotation frequency and its harmonics. We have expanded the complete magnetic potential of the magnet in spherical harmonics up to degree 11 and order 6, which we then use to compute the solution of the time-dependent induction equation. The predictions for a given mean velocity field are compared to actual magnetic measurements inside the sodium shell at 4 latitudes and at 6 radii, as depicted in Figure 7.1. We construct a non-linear inversion scheme of the induction equation to retrieve the mean axisymmetric (and equatorially-symmetric) toroidal and poloidal velocity fields that minimize the difference between the predictions and all

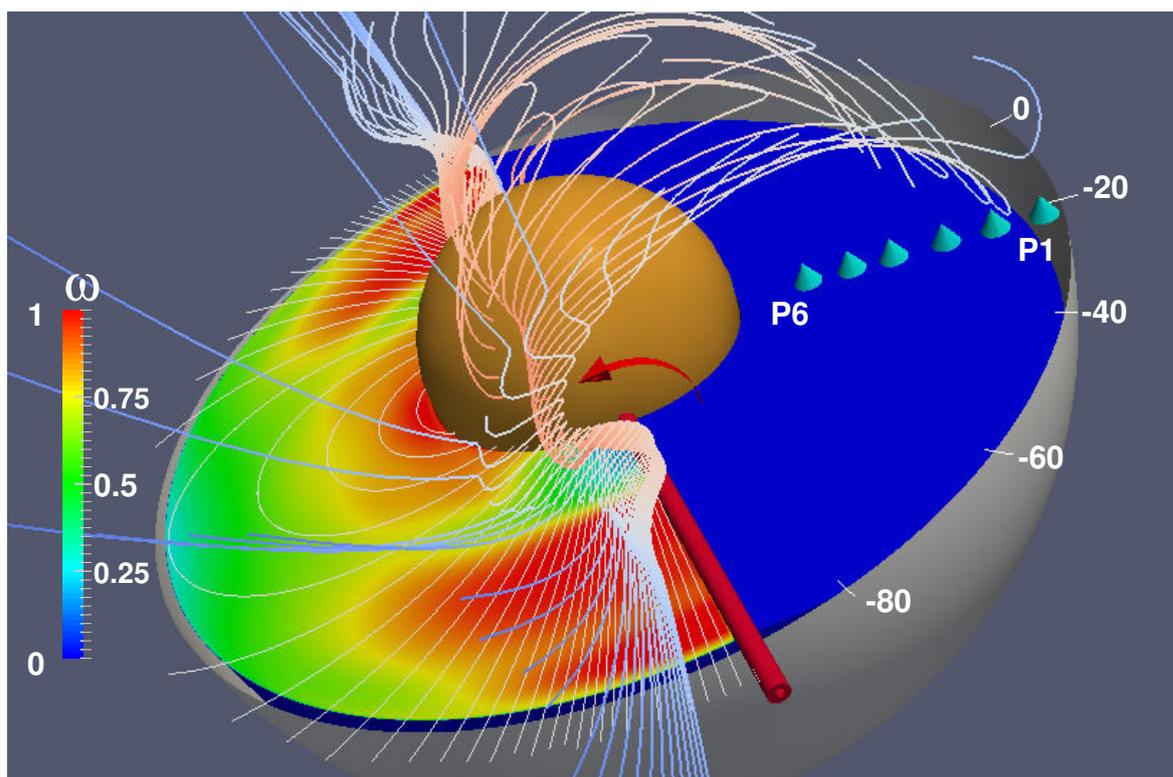


FIGURE 7.1 – Sketch of the DTS experiment with its liquid sodium contained between an outer stainless steel shell (grey, with latitude labels in degrees) and an inner copper sphere (orange), which spins as indicated by the red arrow around the vertical rotation axis (here tilted for clarity). left half of the sphere : the field lines of the dipolar magnetic field imposed by the central magnet are drawn on top of the contour map of the fluid angular velocity ω (normalized by that of the inner sphere) inverted from data measured for $Rm = 94$. right half of the sphere : field lines of the total reconstructed magnetic field. The field lines are strongly distorted by the flow (ω -effect). The blue cones mark the radial positions of the 6 magnetometers P1 ($r = \text{radius}/r_o = 0.99$) to P6 ($r = 0.50$), which measure the azimuthal magnetic field. They can be placed at 4 different latitudes (here -20°).

measurements at a given rotation rate f of the inner sphere. [Cabanes *et al.* \(2014a\)](#) discuss in detail the solutions and fits for $Rm = 28$.

In the present study, we extend the analysis to the largest available $Rm = 47$, 72 and 94 (see [Table 7.1](#) for details). [Figure 7.1](#) displays a meridional map of the angular velocity inverted for $Rm = 94$, and the field lines of the predicted magnetic field. They confirm that, near the equator of the inner sphere where the magnetic field is strong, the angular velocity stays nearly constant along magnetic field lines (Ferraro law [Ferraro \(1937\)](#)). That region displays super-rotation, while the flow becomes more geostrophic further away from the inner sphere.

f (Hz)	Rm	Np	Nd	χ
-9	28	108 (96)	1130	1.5 (1.8)
-15	47	108 (96)	440	2.5 (3.3)
-23	72	60 (48)	230	2.5 (4.9)
-30	94	60 (48)	230	2.9 (5.9)

TABLE 7.1 – For each inner sphere rotation rate f , we list the corresponding Rm , the total number Np of free parameters we invert for, the total number Nd of data points including mean measurements and time-varying magnetic data, and the associated global normalized misfit χ (the error-weighted rms difference between observations and predictions). The number of data points is much smaller at high Rm as ultrasound Doppler velocimetry is not operational. Values in brackets are the numbers obtained when we do not invert for α and β .

However, the mean velocity field alone does not fully account for the measured mean magnetic field. [Figueroa *et al.* \(2013\)](#) point out that velocity fluctuations invade the interior of the shell in DTS as the rotation rate f increases, and that magnetic fluctuations always get larger towards the inner sphere because of the strong imposed magnetic field there. We therefore extend our previous approach ([Cabanes *et al.* 2014a](#)) to take into account the contribution of turbulent fluctuations to the mean magnetic field. Following earlier attempts ([Spence *et al.* 2006](#), [Frick *et al.* 2010](#), [Rahbarnia *et al.* 2012](#)), we choose to invert for α and β , but since we expect that fluctuations will strongly depend upon the intensity of the mean magnetic field, we allow them to vary with radius. Note that time-varying magnetic signals are particularly sensitive to the effective magnetic diffusivity, hence to β ([Frick *et al.* 2010](#), [Tobias *et al.* 2013](#)).

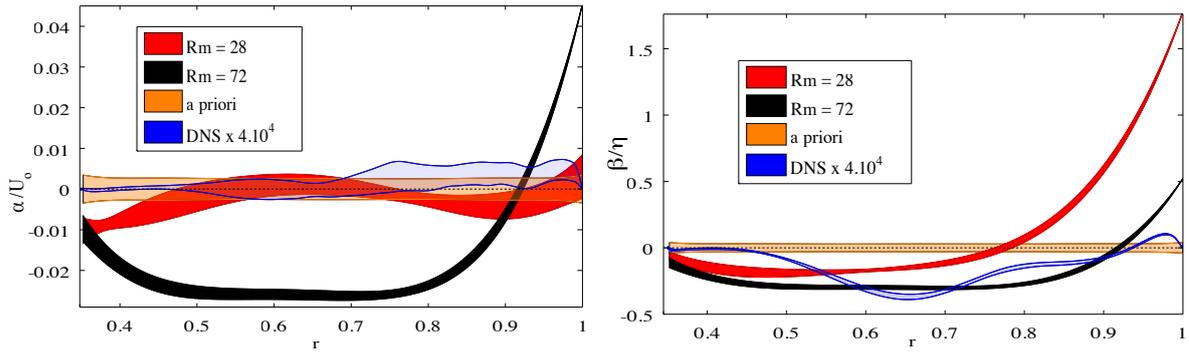


FIGURE 7.2 – Radial profiles of the α -effect (a) and β -effect (b) with their error bars, obtained by the inversion of DTS data for two magnetic Reynolds number : $Rm = 28$ and 72 . The *a priori* null profile, along with its error bar, is also drawn. The blue curve shows the $\alpha(r)$ and $\beta(r)$ profiles retrieved from a numerical simulation of the DTS experiment at $Rm = 29$ and $Re = 2.9 \times 10^4$, blown up by a factor 4×10^4 .

We thus simultaneously invert for the mean axisymmetric toroidal velocity field $U_T(r, \theta)$ and for radial profiles $\alpha(r)$ and $\beta(r)$. U_T is decomposed in spherical harmonics up to $l_{max} = 8$ ($m=0$) and in Chebychev polynomials in radius up to $n_{max} = 11$. $\alpha(r)$ and $\beta(r)$ are projected on Chebychev polynomials up to $k_{max} = 5$, leading to :

$$\mathcal{E}(r) = \sum_{k=0}^5 T_k(r) (\alpha_k \langle \mathbf{B} \rangle - \beta_k \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle), \quad (7.2)$$

where T_k is the degree k Chebychev polynomial of the first kind and $\langle \mathbf{B} \rangle$ is the total mean magnetic field, solution of equation (7.1). Since the inversion is slightly non-linear, we use the linearized least-square Bayesian method of Tarantola et Valette (1982), taking the *a posteriori* velocity model from a lower Rm , upscaled to the new Rm , as the *a priori* velocity model. We choose a zero value as the *a priori* model for all α_k and β_k . The poloidal velocity field is at least one order of magnitude smaller than the toroidal one. We do not invert for it at $Rm = 72$ and 94 but we include in the direct model a meridional flow up-scaled from the solution obtained at $Rm = 47$ (Cabanes et al. 2014a). We find that solving for the emf, which adds only 12 degrees of freedom, reduces the global normalized misfit significantly (see Table 7.1).

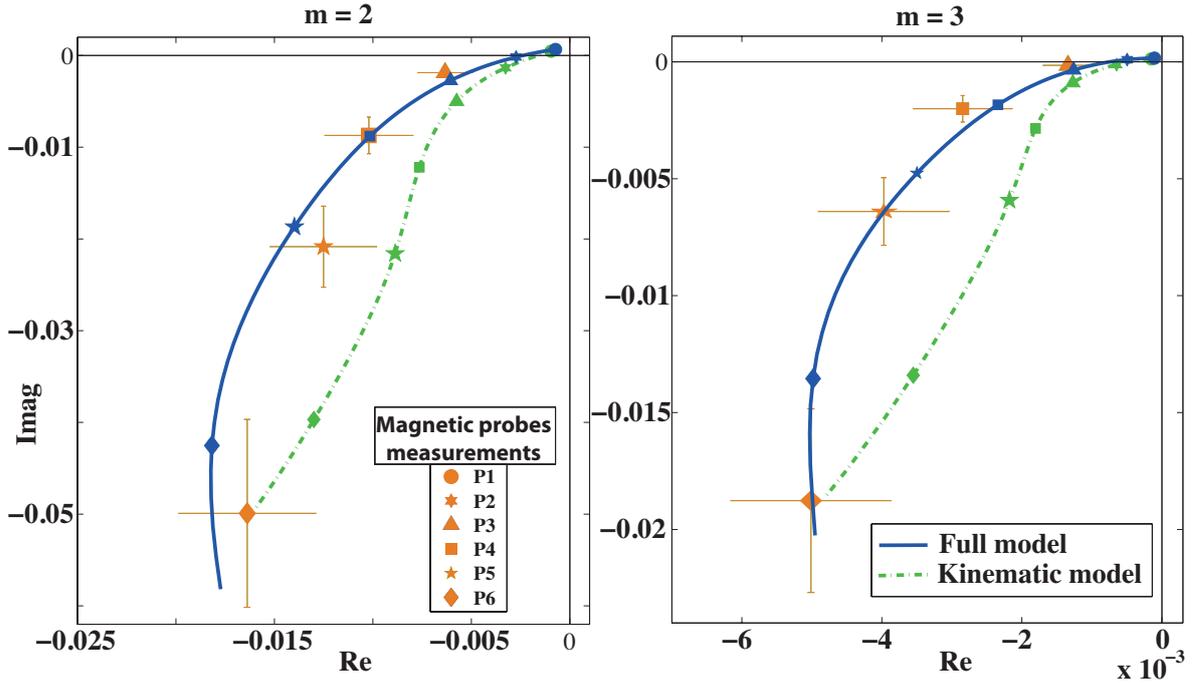


FIGURE 7.3 – Measurements and model fits for an example of time-varying magnetic signals measured at $2f$ ($m=2$) and $3f$ ($m=3$) frequencies, for a rotation rate of the inner sphere $f = -23\text{Hz}$ ($Rm = 72$). See text for explanations.

1.4 Experimental results

Figure 7.2 shows the radial profiles of α and β (with their *a posteriori* model errors) produced by the inversion of data at $Rm = 28$ and 72 . The profiles for $Rm = 94$ (not shown) are almost the same as for $Rm = 72$. α is normalized by $U_0 = 2\pi f r_o$, and β by η . For the lower Rm value, we observe practically no α -effect, while the $\beta(r)$ profile indicates that the β -effect increases strongly when going from the Lorentz-force-dominated inner region to the Coriolis-force-dominated outer region. It reaches values of 1.7η near the outer boundary, where velocity fluctuations are strongest (Figuroa *et al.* 2013). For the higher Rm , some α -effect is required to match the data over most of the fluid domain. The $\beta(r)$ profile displays strongly negative values (down to -0.3η) over almost the complete fluid shell, but rises sharply to positive values near the outer boundary.

The introduction of the α - and β -effects clearly improves the fit to the measurements. We illustrate this in Figure 7.3, which compares the prediction of our model, with and without the α and β terms, to the measurements of the time-varying signals for $f = -23\text{Hz}$ ($Rm = 72$), at a given latitude (-20°). There, a sleeve intrudes

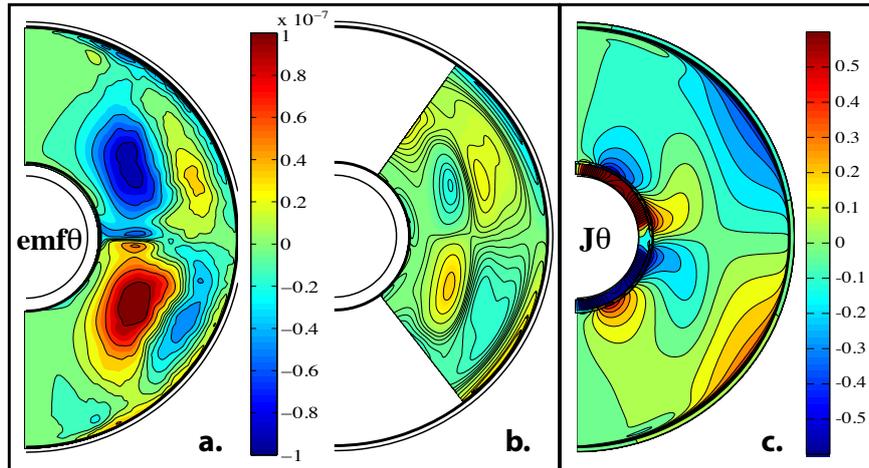


FIGURE 7.4 – Meridional cross section contour maps showing orthoradial component (θ) of emf \mathcal{E} and of electrical current $\langle \mathbf{J} \rangle$. (a) Averaged emf \mathcal{E}_t obtained from DNS. (b) Reconstructed emf $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ from inverted α and β profiles. High latitudes (white area) are excluded from the least-square fit. (c) Mean electrical current from DNS.

into the sodium volume and records the azimuthal component of the magnetic field at 6 different radii labeled P1 to P6 (as drawn in Figure 7.1). When the inner sphere spins, small deviations of its magnetic field from axisymmetry produce a magnetic signal that oscillates at the rotation frequency f and its overtones. Here we focus on the $2f$ and $3f$ overtones caused by the $m = 2$ and $m = 3$ heterogeneities of the magnet. We measure the phase and amplitude of the time-varying magnetic signals at all 6 radii and plot them (with their error bars) in the complex plane, normalized by B_0 (the intensity of the imposed magnetic field at the equator of the outer shell). When the inner sphere is at rest, we record only the magnet's potential field weakening with increasing distance. Advection and diffusion completely distort this pattern when the inner sphere spins. The blue solid line displays the prediction from our full model of these magnetic signals from the largest values at the inner sphere boundary ($r = r_i$) to small values at the outer sphere ($r = r_o$). Symbols mark the radial positions of the P6 to P1 magnetometers. The green dashed line is the trajectory predicted by our model when we remove the α and β terms. This altered model fails to produce the observations, indicating that the β -effect that we retrieve contributes significantly to the measured signals.

In addition to the inversion of experimental measurements, we perform direct numerical simulations (DNS) of the experiment. Our code, based on spherical harmonic expansion Schaeffer (2013) and finite differences in radius, has al-

ready been used to simulate the experiment. We restarted the most turbulent computation of [Figuerao *et al.* \(2013\)](#) with a new imposed magnetic field containing the additional non-axisymmetric and non-dipolar terms. This simulation reaches $Re = 2\pi fr_0^2/\nu = 2.9 \times 10^4$ (ν is the kinematic viscosity), $Rm = 29$ and a magnetostrophic regime close to that of the experiment [Brito *et al.* \(2011\)](#). Turbulence is generated by the destabilization of the outer boundary layer, yielding plumes that penetrate inward to regions of stronger magnetic fields. There, the velocity fluctuations are damped, but the associated magnetic fluctuations are stronger [Figuerao *et al.* \(2013\)](#). Six snapshots of the fields are saved every five turns. After we have reached a statistically steady regime, we average the fields over 162 turns of the inner sphere to obtain $\langle \mathbf{B} \rangle$ and $\langle \mathbf{U} \rangle$. It is then straightforward to compute the mean emf $\mathcal{E} = \langle \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{b}} \rangle$ where fluctuating fields are obtained from the difference between a snapshot and the time- and longitude-averaged field.

Meridional maps of the mean emf \mathcal{E}_t are obtained and the latitudinal component is displayed in [Figure 7.4a](#). The α and β profiles that best explain this mean emf (least-square solution of [equation 7.2](#) excluding high latitudes) are shown in [Figure 7.2](#). We estimate the error bar on the profiles as the standard deviation of emfs computed from 5 subsamples of 40 snapshots. One component of the emf $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ computed with these α and β profiles is shown in [Fig. 7.4b](#), and can be compared to the actual emf \mathcal{E}_t ([Fig. 7.4a](#)). Although the α and β profiles do not explain all of the mean emf, most features are recovered. Other components exhibit a similar behavior (not shown).

1.5 Discussion

The parity (symmetry with respect to the equatorial plane) of the emf and of $\langle \mathbf{J} \rangle$ are clearly even ([Fig. 7.4c](#)), while $\langle \mathbf{B} \rangle$ is odd. This is in line with the fact that the DNS, just like the experiments at the lowest Rm , predicts no α -effect (see [Fig. 7.2a](#)). This might seem surprising given that the mean flow displays helicity. However, if we split the velocity fluctuations into even ($\tilde{\mathbf{u}}^+$) and odd ($\tilde{\mathbf{u}}^-$) parity, we see that their interaction with the mean odd magnetic field generates odd ($\tilde{\mathbf{b}}^-$) and even ($\tilde{\mathbf{b}}^+$) magnetic fluctuations, respectively. The resulting emf $\mathcal{E} = \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{b}}$ is therefore

always even, if the odd and even velocity fluctuations are uncorrelated. This is likely true in the low Rm regime. The fact that the higher Rm -experiments require a non-zero α -effect (Fig. 7.2a) reveals that the velocity fluctuations are interacting with an already-distorted larger-scale magnetic field, or that correlations between the two parities become non-zero.

The dipolar component of the induced magnetic field predicted by our full model is small but non-zero at the surface of the outer shell, even when the α -effect is negligible. Spence *et al.* (2006) have shown that an axisymmetric flow interacting with an axisymmetric magnetic field cannot produce an external dipole. This remains true if fluctuations only result in a homogeneous β -effect. Even with a radially-varying β -effect as we obtain here, an external dipole can be produced only if a meridional flow is present.

The most striking feature of the $\beta(r)$ profiles we retrieve is the strong negative values (down to -0.3η) that span a large portion of the liquid sodium shell, especially at large Rm (see Fig. 7.2). The DNS supports this result, showing that it is not an artifact of considering only a radial dependence for α and β . The much lower amplitude of β in the DNS is due to a Reynolds number 300 times smaller than that in the experiment, suggesting that β may scale with Re^2 . Although negative β values, and hence reduced magnetic diffusivity, are not unexpected (Zheligovsky *et al.* 2003, Brandenburg *et al.* 2008, Giesecke *et al.* 2014), it is the first time that they are observed in experiment. Our DTS experiment combines a strong imposed magnetic field and strong rotation. These could be the ingredients that lead to this behavior. Were β become even more negative, it might promote dynamo action.

acknowledgments : This work was supported by the National Program of Planetology of CNRS-INSU under contract number AO2013-799128, and by the University of Grenoble. Most computations were performed on the Froggy platform of CIMENT (<https://ciment.ujf-grenoble.fr>), supported by the Rhône-Alpes region (CPER07_13 CIRA), OSUG@2020 LabEx (ANR10 LABX56) and Equip@Meso (ANR10 EQPX-29-01). We thank two anonymous referees and Elliot Kaplan for useful suggestions. We are grateful to Johann Herault and Frank Stefani

for pointing out a misprint in the version of this paper published in PRL (wrong sign appearing in front of β in two equations).

2 Contributions des effets α et β au champ moyen axisymétrique

Nous n'avons pas présenté dans l'article qui précède, l'influence des effets turbulents α et β sur le champ magnétique moyen axisymétrique et sur les mesures de potentiels électriques en surface (*ddp*). Ces données ont été présentées partie II figure 5.8 et sont également utilisées pour contraindre les inversions dont résulte la *fem*.

On représente sur la figure 7.5 le champ magnétique induit azimuthal (B_ϕ) en fonction du rayon normalisé de l'expérience pour la latitude -20° et pour $Rm = 74$. Les triangles représentent les mesures réalisées depuis le doigt de gant et les courbes reportent les prédictions de différents modèles. Chaque modèle est issu de la même inversion (à $Rm = 74$), seulement on simule séparément les contributions associées à l'écoulement moyen et aux effets α et β . Ainsi, la courbe rouge donne les prédictions du modèle complet incluant le champ de vitesse moyen et la *fem*. Les courbes en pointillées sont les prédictions du champ de vitesse moyen seul coloré en magenta, le champ de vitesse plus l'effet β en bleu et le champ de vitesse accompagné de l'effet α en vert.

La description radiale des prédictions obtenues depuis le modèle de champ moyen seul à $Rm = 74$ est assez similaire à celle représentée figure 5.8 pour un $Rm = 28$. On constate donc que le nouveau modèle incluant la *fem* permet une nette diminution de l'écart entre nos prédictions et les mesures expérimentales.

On peut également discuter les contributions séparées des effets α et β . L'effet α dans un premier temps a tendance à réduire l'amplitude du champ induit dans la partie interne de l'expérience ($r < 0.7$) alors qu'il est presque inopérant dans la partie externe ($r > 0.7$). A l'inverse, l'effet β amplifie le champ magnétique à des valeurs fortement négatives dans la partie interne et le ramène vers zéro dans la partie externe. On ne peut comparer directement les zones de $\beta < 0$ ou > 0 (figure 7.2) avec l'augmentation ou la réduction du champ magnétique azimuthal qui est le

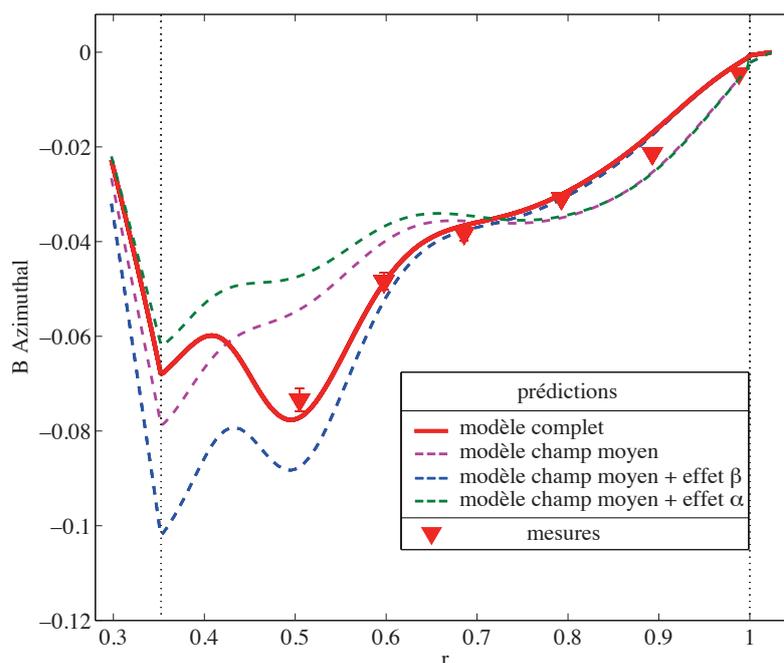


FIGURE 7.5 – Profils radiaux du champ magnétique azimuthal induit B_ϕ , résultat de la même inversion à $Rm = 74$. Prédications représentées à la latitude -20° . Les triangles correspondent aux mesures expérimentales et les courbes représentent les prédictions pour quatre modèles différents comme détaillé dans le cartouche. Chaque modèle est le résultat d'une simulation directe montrant les différents effets du modèle complet obtenu par inversion. Les valeurs sont adimensionnalisées comme détaillé dans le tableau A.2.

résultat de l'action couplée des termes d'induction magnétique α et Ω , du transport poloïdal et de la dissipation Ohmique de l'équation 6.3a. Contrairement à l'effet β , l'effet α agit indépendamment des autres termes de l'équation puisqu'il transforme directement le champ poloïdal en champ toroïdal.

Ces contributions des petites échelles vers les grandes échelles sont aussi observables sur les différences de potentiel électrique (ddp) mesurées depuis la sphère externe. On représente sur la figure 7.6 les mêmes modèles que ceux présentés dans la figure 7.5. Nous rappelons que chacun de ces modèles est issu de la même inversion. Les prédictions du modèle complet sont parfaitement superposées avec les mesures expérimentales. La *fem* nous permet donc d'expliquer ce que l'écoulement moyen seul ne parvenait pas à modéliser auparavant. Comme pour le cas du champ magnétique azimuthal, l'effet α abaisse considérablement les valeurs de ddp . A l'inverse, l'effet β s'oppose aux contributions de l'effet α et rehausse l'amplitude des prédictions.

En suivant la loi de Maxwell-Ampère, il est possible d'écrire l'expression des

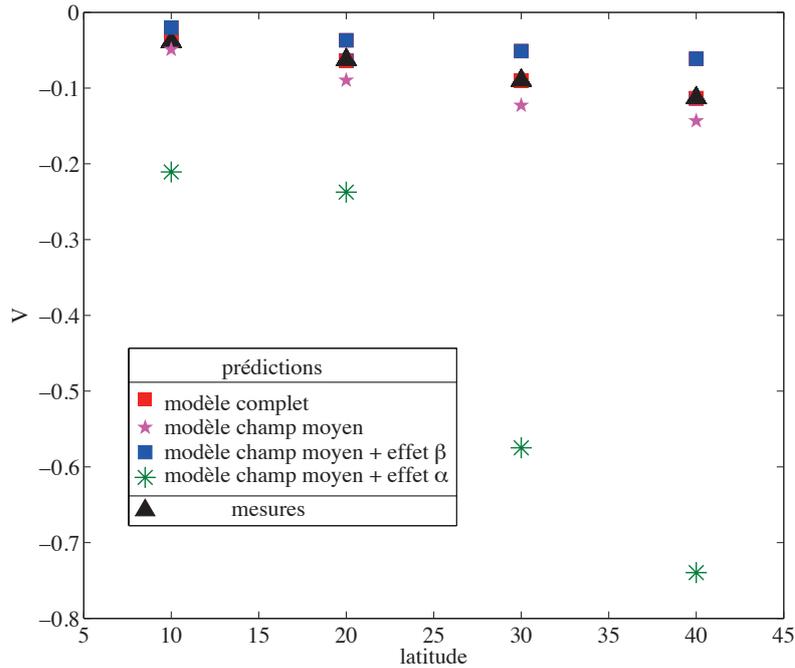


FIGURE 7.6 – Valeur de différences de potentiel prises à la surface de la sphère externe. Mesures faites le long d’un méridien aux latitudes 10° , 20° , 30° et 40° . On représente les prédictions pour quatre modèles différents issus de la même solution d’inversion (voir le cartouche). Les valeurs sont adimensionnées comme détaillé dans le tableau A.2.

courants électriques dans la direction orthoradiale, donc directement reliée à la différence de potentiel, en fonction du champ magnétique moyen. On obtient à partir de $\langle \mathbf{J} \rangle \propto \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle$ l’expression $j_\theta \propto \partial B_\phi / \partial r$ dans l’approximation axisymétrique. Ainsi, les courants électriques le long d’un méridien dépendent directement de la variation radiale du champ magnétique azimuthal. On remarque sur la figure 7.5 que l’effet β réduit significativement la dérivée radiale de B_ϕ au bord (en $r = 1$) ce que semblent aussi indiquer les données. Cette modification de la dérivée se répercute par une réduction des ddp en surface comme le montre le modèle champ moyen + effet β figure 7.6.

3 Graphique détaillé des modes non-axisymétriques

Il est satisfaisant d’observer que pour le champ magnétique axisymétrique comme pour le champ non-axisymétrique, la *fem* aide à améliorer nettement nos prédictions au regard des mesures expérimentales. Les inversions sont contraintes par de nombreuses données de champ magnétique non-axisymétrique pouvant aller des modes $m = 1$ à $m = 6$, pour 4 latitudes et jusqu’à 6 rayons différents ainsi

que pour les trois composantes du champ magnétique ($B_r^m, B_\theta^m, B_\varphi^m$). On pourrait donc reporter dans ce manuscrit un nombre important de graphiques concernant le champ non-axisymétrique, ce que nous ne ferons évidemment pas.

Contentons nous de présenter figure 7.7 une version plus détaillée que celle proposée figure 7.3 et pour une latitude différente. On représente donc l'évolution radiale du champ B_φ^m pour les modes $m = 2, 3$ et 4, pris à la latitude $+10^\circ$. L'évolution radiale suit quatre modèles différents, le *modèle statique* (pointillés rouges), le *modèle d'effet de peau* (pointillés noirs), le modèle cinématique incluant le champ moyen seul (pointillé vert) et enfin le modèle cinématique complet comprenant le champ de vitesse et la *fem* (ligne pleine bleue). Les trois derniers modèles sont obtenus pour une fréquence de rotation $f = -23$ Hz. Comme dans la section précédente, les deux modèles cinématiques sont issus de la même inversion, on cherche simplement à distinguer les contributions du champ de vitesse et de la *fem* par simulation directe. Les mesures expérimentales avec leurs barres d'erreur sont représentées par les symboles orange, ces mêmes symboles sont reportés sur chaque modèle afin de permettre la comparaison avec les données.

Les mécanismes d'induction et de diffusion identifiés dans la section 1.6 partie II sont assez similaires à ceux observés pour les modes présentés ici. Proche de la sphère interne où le champ de vitesse est en rotation solide, les modes magnétiques diffusent selon le *modèle statique*, c'est-à-dire avec un déphasage très faible. Cependant à $f = -23$ Hz soit $Rm = 74$, la zone de super-rotation devient presque inexistante et les modes magnétiques acquièrent rapidement un fort déphasage sans jamais diffuser selon le modèle statique. Ainsi le champ de vitesse est fortement cisailant dans l'ensemble du volume fluide ce qui provoque un fort déphasage du signal magnétique dont l'évolution se rapproche du *modèle d'effet de peau*. On remarque que le cisaillement de vitesse, qui devient particulièrement intense dans la partie géostrophique de l'écoulement, perturbe significativement l'amplitude des modes leur conférant une amplitude plus élevée que pour le *modèle d'effet de peau* (les symboles matérialisant les capteurs témoignent de cette variation d'amplitude).

Ce qui n'apparaît pas ou mal dans les figures précédentes est l'évolution des modes azimutaux dans les régions les plus externes du volume fluide. Pour cette

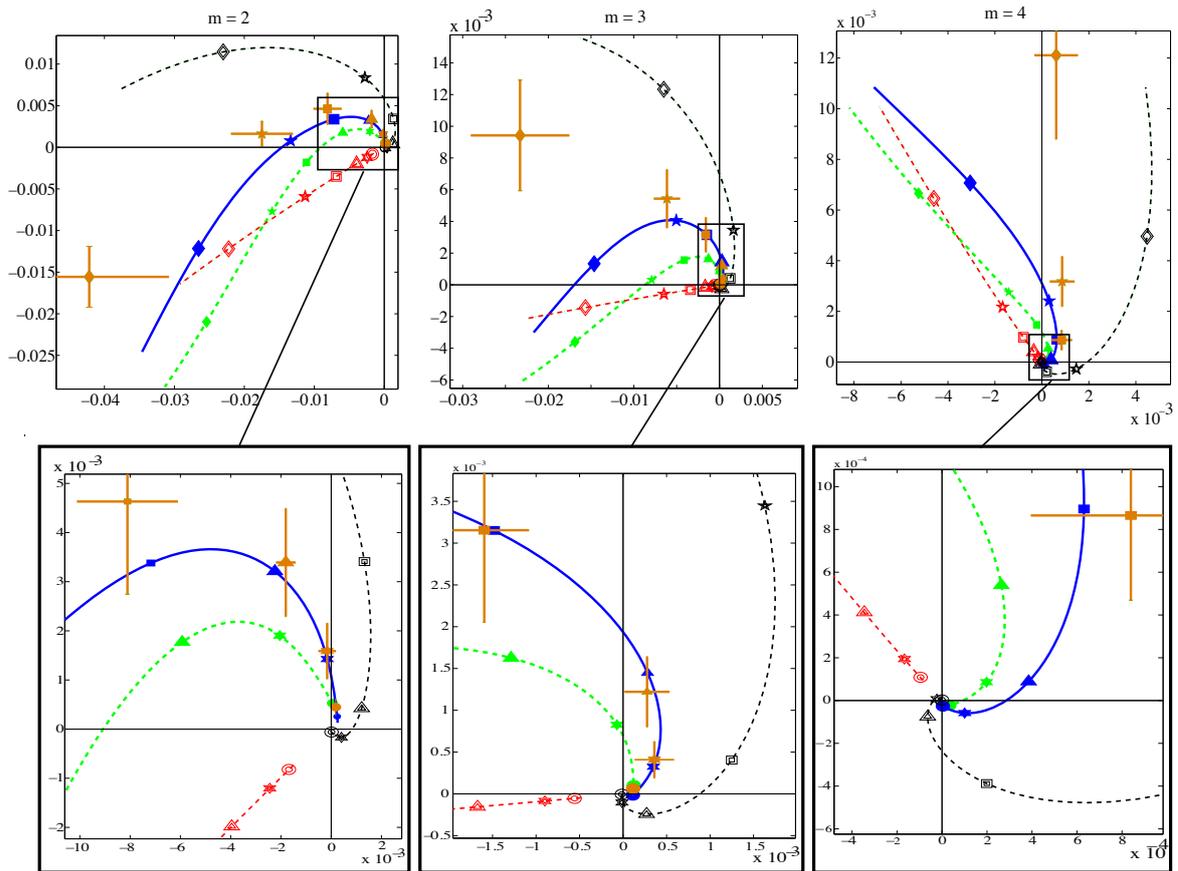


FIGURE 7.7 – Modes magnétiques azimutaux, B_{φ}^m , pour $m = 2, 3$ et 4 pris à la latitude $+10^{\circ}$. On représente en pointillés rouges le modèle statique, en pointillés noirs le modèle d'effet de peau, en pointillés verts le modèle cinématique comprenant le champ de vitesse moyen seul et le trait plein bleu représente le modèle cinématique complet incluant le champ de vitesse moyen et la fem. Les symboles marquent la position des capteurs magnétique allant de P1 à P6, P1 étant le capteur le plus externe. La série de graphiques placée en haut reporte l'évolution radiale complète pour chaque mode. En bas : on reporte un agrandissement de la zone encadrée en noir dans les graphiques placés au-dessus. Le champ magnétique est adimensionné par B_0 .

raison nous représentons figure 7.7 un agrandissement délimité par un carré noir, proche de l'origine du plan complexe. Cette zone du plan correspond aux rayons externes de la coquille de fluide comprenant les capteurs P₁, P₂, P₃ et P₄ (se reporter à la figure 7.1 pour leur positionnement spatial). A l'exception du *modèle statique*, les autres modèles décrivent de larges spirales qui viennent s'enrouler autour de l'origine. Le cas le plus extrême est le *modèle d'effet de peau* où un fort déphasage est enregistré. C'est aussi le cas ayant la plus forte différence de vitesse entre le sodium et la sphère interne en rotation.

On peut se réjouir que notre modèle cinématique complet fournisse des prédictions en accord avec les mesures expérimentales pour chaque capteur magnétique, même lorsque l'amplitude des modes chute proche de zéro. On remarque une fois de plus l'amélioration des prédictions associées au modèle incluant la *fem*.

4 Résolution du modèle

Il est important de pouvoir estimer *a posteriori* la validité des modèles que nous avons obtenus par inversion. Si le résultat de cette estimation n'est jamais binaire, modèle "valide" ou "non valide", il existe un certain nombre d'outils qui nous permettent de juger *a posteriori* de l'amélioration apportée par les données d'observations au modèle *a priori*. On cherche donc à savoir si les 108 paramètres de notre modèle (dans le cas de notre modèle cinématique complet) ont été convenablement contraints par nos données d'observation.

4.1 Estimation des erreurs *a posteriori*

La méthode d'inversion des moindres carrés linéaire suppose que chaque donnée du problème suit une loi de probabilité Gaussienne. Ainsi la connaissance que nous avons *a priori* des paramètres du modèle m (les inconnues du problème) suit une densité de probabilité Gaussienne où m_0 sont les paramètres du modèle *a priori* et C_{pp} la matrice de covariance associée. La densité de probabilité du modèle *a priori* dans l'espace des modèles M est donc

$$\rho(m) = \text{const} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2}(m - m_0)^T C_{pp}^{-1}(m - m_0) \right). \quad (7.3)$$

Cette densité de probabilité est dite *a priori* puisqu'elle ne dépend pas des données d'observation d . Comme nous l'avons déjà mentionné partie II, les données d'observations sont reliées aux paramètres du modèle par la relation $d = g(m)$ où $g(m)$ est le modèle direct.

Les données d'observation d suivent également une densité de probabilité Gaussienne centrée sur les données observées d_{obs} dont la matrice de covariance est notée C_{dd} et

$$\rho(d) = const \cdot \exp \left(-\frac{1}{2}(d - d_{obs})^T C_{dd}^{-1} (d - d_{obs}) \right). \quad (7.4)$$

Ainsi à partir de nos connaissances *a priori* du système étudié, on cherche, par la méthode des moindres carrés, à minimiser une fonction coût pondérée par les matrices de covariance *a priori*,

$$J(m) = (g(m) - d_{obs})^T C_{dd}^{-1} (g(m) - d_{obs}) + (m - m_0)^T C_{pp}^{-1} (m - m_0). \quad (7.5)$$

On note \tilde{m} un point dans l'espace des modèles correspondant au minimum de la fonction $J(m)$. Dans le cas d'une inversion linéaire $J(m)$ est une fonction quadratique en m et la densité de probabilité du modèle *a posteriori* est également une loi Gaussienne. Il doit alors exister un point \tilde{m} dans M ayant une matrice de covariance \tilde{C}_{pp} telle que la densité de probabilité *a posteriori* du modèle puisse s'écrire

$$\rho(m) = const \cdot \exp \left(-\frac{1}{2}(m - \tilde{m})^T \tilde{C}_{pp}^{-1} (m - \tilde{m}) \right). \quad (7.6)$$

Cependant, les inversions réalisées lors de cette étude sont non-linéaires et la fonction coût $J(m)$ n'est plus exactement une fonction quadratique. Il se peut notamment qu'il existe plusieurs minima à cette fonction. De même, plus le problème inverse est non-linéaire plus la densité de probabilité $\rho(m)$ s'éloigne d'une loi Gaussienne.

Nous avons donc utilisé une méthode d'inversion non-linéaire qui est une méthode itérative dans l'espace des modèles (voir chapitre 5). La non-linéarité augmente pour les inversions à haut Rm , nous partons donc d'un modèle initial (mo-

dèle à bas Rm mis à l'échelle) qui oriente notre inversion dans l'espace des modèles. Ainsi on trouve un minimum optimum \tilde{m} à la fonction $J(m)$. On peut alors considérer que le problème inverse est quasi-linéaire autour de ce minimum \tilde{m} et que la fonction $J(m)$ est quadratique en ce point de l'espace des modèles. Cette linéarisation de $g(m)$ proche du point \tilde{m} nous permet de chercher une densité de probabilité *a posteriori* du modèle qui soit, comme dans le cas linéaires, une densité de probabilité Gaussienne $\rho(m)$ que l'on puisse écrire sous la forme de l'expression 7.6.

Le modèle \tilde{m} et donc obtenu en minimisant la fonction coût par la méthode des moindres carrés non-linéaire (expression 5.16). \tilde{m} est le meilleur modèle dans le sens où il est en même temps le plus proche possible du modèle *a priori* (m_0) et que les prédictions $g(m)$ sont les plus proches possible des données d'observation d_{obs} . Ce modèle est également le centre de la Gaussienne *a posteriori* 7.6 et sa matrice de covariance peut être obtenue par l'expression

$$\tilde{C}_{pp} = \left(G^T C_{dd}^{-1} G + C_{pp}^{-1} \right)^{-1}. \quad (7.7)$$

Une démonstration détaillée se trouve dans le livre de Tarantola (2005) section 3.3.1. On rappelle que la matrice G est la matrice aux dérivées partielles du modèle.

On peut s'intéresser dans un premier temps à la racine carrée de la trace de la matrice \tilde{C}_{pp} (la variance) qui permet d'obtenir les barres d'erreur du modèle *a posteriori*. Ces barres d'erreur sont représentées sur nos deux modèles des effets α et β figures 7.2. En reportant également l'erreur *a priori* du modèle (sur la figure 7.2) nous avons constaté une réduction de l'erreur *a posteriori* par rapport à l'erreur *a priori*. On améliore donc la résolution de notre nouveau modèle, dit modèle *a posteriori*, en contraignant par les données d'observation le modèle *a priori*. Nous définirons plus précisément la résolution du modèle dans la section suivante.

Revenons à la matrice de covariance et notamment aux termes non-diagonaux qui sont plus difficiles à interpréter. On introduira la matrice des corrélations qui correspond à la matrice de covariance normalisée par ses termes diagonaux,

$$\rho^{ij} = \frac{C^{ij}}{\sqrt{C^{ii}}\sqrt{C^{jj}}}, \quad -1 \leq \rho^{ij} \leq +1. \quad (7.8)$$

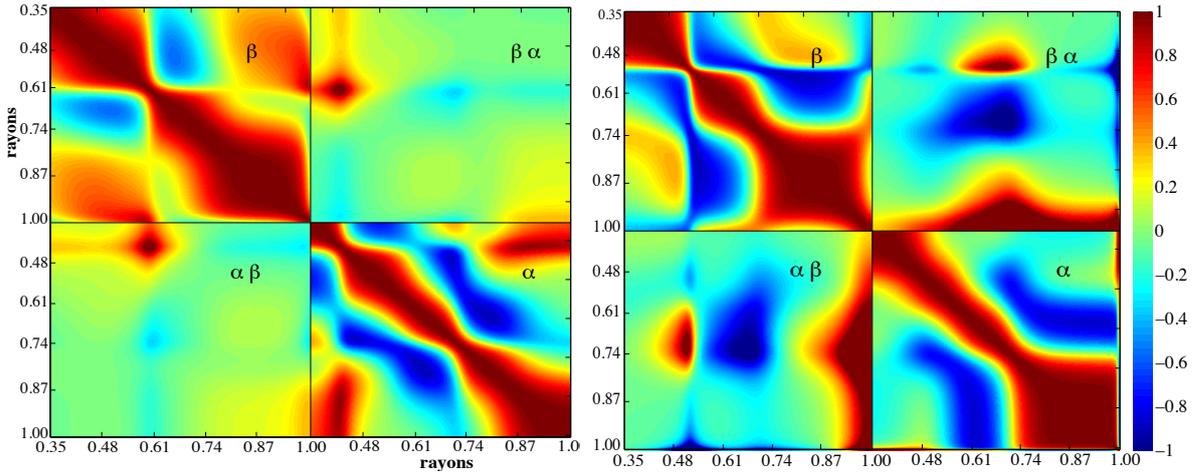


FIGURE 7.8 – Matrices des covariances *a posteriori* du modèle \tilde{C}_{pp}^g normalisée selon l'expression 7.8. Ces matrices sont obtenues pour les inversions à $Rm = 28$ (gauche) et $Rm = 72$ (droite) pour les modèles des effets α et β . Le cadrans notés α et β sont les corrélations des points de grilles (rayons) pour les modèles α et β pris séparément. Ceux notés $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ sont les corrélations entre ces deux effets pour chaque point de grille.

Ainsi, si la corrélation *a posteriori* entre deux paramètres m^i et m^j est proche de zéro alors l'erreur *a posteriori* n'est pas corrélée entre ces deux paramètres du modèle. En revanche si la corrélation est proche de l'unité, ces deux paramètres sont fortement corrélés (ou anti-corrélés si la corrélation est négative) et l'erreur associée est importante.

On représente figure 7.8 les matrices des covariances *a posteriori* du modèle, normalisées selon l'expression 7.8, pour les paramètres de description radiale des effets α et β . Ces matrices de corrélations sont obtenues pour les inversions à $Rm = 28$ et $Rm = 72$. Plutôt que de comparer les corrélations des 12 coefficients de Tchebychev α_k et β_k (7.2), on se projette dans le domaine spatial (annoté g) depuis le domaine spectral (annoté s) par la matrice de passage \mathbf{T} . On peut écrire les paramètres du modèle spatial en fonction du modèle spectral,

$$m^g = \mathbf{T}m^s, \quad (7.9)$$

où \mathbf{T} est une matrice comprenant chaque degré des polynômes de Tchebychev jusqu'au degré k_{max} . On obtiendra la matrice des covariances *a posteriori* dans le domaine spatial \tilde{C}_{pp}^g en posant $C_{pp}^g = \mathbf{T}C_{pp}^s\mathbf{T}^T$ et $G^s = \mathbf{T}G^g$.

On représente figure 7.8 la matrice \tilde{C}_{pp}^g normalisée. On remarque que cette ma-

trice est symétrique. Les cadrans supérieurs gauche et inférieurs droit sont respectivement les corrélations entre les points de grilles du modèle pour les profils $\beta(r)$ et $\alpha(r)$ pris séparément. Par définition la diagonale est parfaitement corrélée. Les cadrans notés $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ sont les corrélations entre les effets α et β pour chaque point de grille.

S'il n'est pas facile d'obtenir une information claire depuis ces matrices, on peut cependant remarquer que pour l'inversion à $Rm = 28$ les effets α et β sont assez peu corrélés dans l'ensemble du volume à l'exception des rayons proches de $r \approx 0.6$ qui sont corrélés aux rayons $r \approx 0.4$. Il n'y a donc aucune raison pour que l'effet β obtenu lors de l'inversion à $Rm = 28$ puisse être indifféremment un effet α ou β . En revanche pour l'inversion à $Rm = 72$ l'effet β dans la région externe ($r \approx 1$) est fortement corrélé avec l'effet α dans tout le volume. Ce résultat rend incertain la couche limite externe d'effet $\beta > 0$ (figure 7.2) obtenu pour l'inversion à $Rm = 72$. Le modèle aurait pu obtenir des prédictions proches à celle présentées précédemment en accommodant l'effet α dans différentes régions du fluide. Il demeure cependant que le modèle présenté dans cette étude est celui offrant la meilleure satisfaction vis-à-vis des données d'observation. L'augmentation des corrélations pour cette inversion peut s'expliquer par le nombre restreint de données d'observation disponible à haut Rm . En effet, le nombre de paramètres du modèle est le même pour les deux inversions à $Rm = 28$ et 72 alors que le nombre de données est divisé par cinq (absence de certains profils Doppler ultrasonores de vitesse à haut Rm).

4.2 La matrice de résolution

A partir des connaissances que nous avons des matrices de covariance *a priori* C_{pp} et *a posteriori* \tilde{C}_{pp} on peut écrire l'opérateur de résolution ou matrice de résolution du modèle. On trouve dans le livre de Tarantola (2005) l'expression,

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \tilde{C}_{pp}C_{pp}^{-1}. \quad (7.10)$$

Cette expression suggère que si la matrice de résolution est égale à la matrice

identité \mathbf{I} alors le problème est parfaitement résolu (pour plus de détails voir le livre de Tarantola (2005) section 3.3.2).

Nous supposons précédemment que l'on obtenait un modèle \tilde{m} à partir d'un modèle *a priori* m_0 et des données d'observations d_{obs} . Supposons maintenant que ce modèle soit obtenu non pas à partir d'observations incertaines d_{obs} mais depuis des données *exactes* d_{exacte} , parfaitement connues (d'erreur nulle), générées par un modèle *exact* m_{exact} . Alors le modèle \tilde{m} obtenu par inversion moindres carré satisfait

$$\tilde{m} - m_0 = \mathbf{R}(m_{exact} - m_0). \quad (7.11)$$

Comme précédemment, si la *matrice de résolution* est égale à la matrice identité on retrouve le modèle *exact* et le problème est parfaitement résolu ($\tilde{m} = m_{exact}$). Les écarts de la *matrice de résolution* à la matrice identité sont le résultat de corrélations entre les différents paramètres du modèle (à travers le rapport $\tilde{C}_{pp}C_{pp}^{-1}$ expression 7.10) et traduisent le fait que les données d'observation ne contraignent pas parfaitement le modèle. Chaque ligne de la *matrice de résolution* peut être vue comme un "filtre" tel que le $n^{\text{ième}}$ élément du modèle *exact* (m_{exact}) est différent du modèle obtenu par inversion (\tilde{m}) parce qu'il est filtré par la $n^{\text{ième}}$ ligne de la matrice \mathbf{R} avec laquelle il est multiplié (Jackson 1978). On ne peut donc pas accéder au monde *exact* puisque celui-ci est vu à travers le filtre de la *matrice de résolution* si celle-ci n'est pas égale à la matrice identité.

On représente figure 7.9 les *matrices de résolution* obtenues pour les inversions à $Rm = 28, 47$ et 72 . Il s'agit des *matrices de résolution* pour les paramètres du modèle décrivant le champ de vitesse. Comme pour les matrices d'erreur *a posteriori* on projette les matrices de résolution du domaine spectral au domaine spatial. Ainsi les paramètres du modèle sont l'ensemble des points de grille décrivant l'écoulement dans le plan méridien (r, θ) . On pointe dans la matrice \mathbf{R} (figure 7.9), trois positions de coordonnées spatiales représentées par une croix blanche correspondant à trois points de grille du plan méridien, pour chaque inversion (à $Rm = 28, 47$ et 72). L'échelle de couleur nous donne l'amplitude de la résolution. Une résolution parfaite du modèle par les données ($\mathbf{R} = \mathbf{I}$) correspondrait à un maximum d'am-

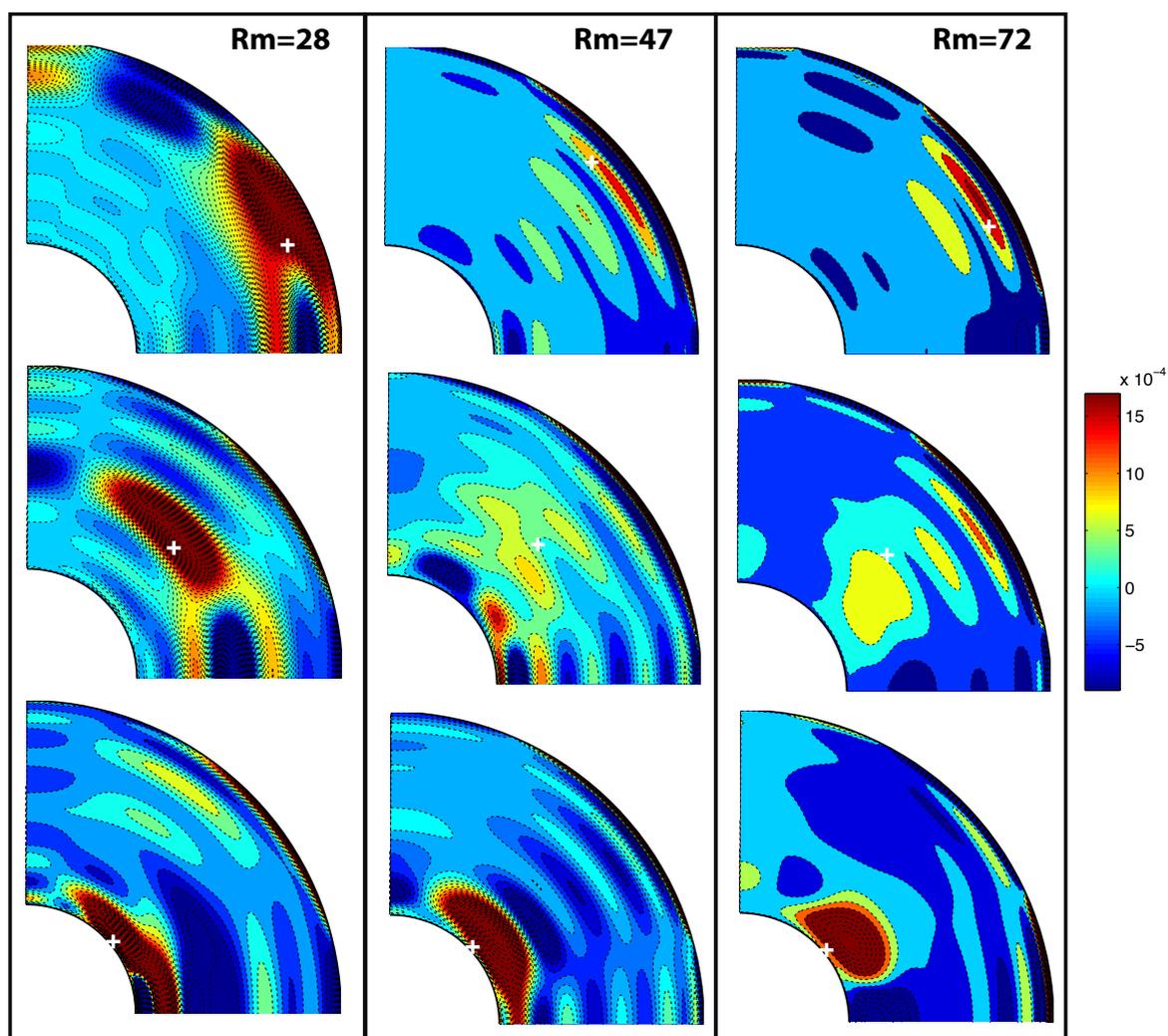


FIGURE 7.9 – Matrice de résolution pointée sur différents paramètres du modèle de vitesse (croix blanche) pour trois inversions différentes à $Rm = 28, 47$ et 72 . L'échelle de couleur est la même pour chacune des cartes et représente l'amplitude des résolutions.

plitude centré sur la croix blanche et des valeurs nulles pour les autres points de grille.

L'inversion à $Rm = 28$ semble bien résolue même si des cellules de résolution successivement positives et négatives apparaissent pour différents points de rayon et de latitude. Cette dépendance des paramètres du modèle aux différentes régions du plan méridien est probablement la conséquence des polynômes de Tchebychev (pour la résolution en rayon) et des polynômes associés de Legendre (pour la résolution en latitude) utilisés pour la description spatiale de l'écoulement. L'inversion à $Rm = 47$ est moins bien résolue et une forte dépendance apparaît entre le paramètre du modèle que l'on pointe (croix blanche) et les autres points de grille en rayon. On remarque également que les hautes latitudes sont particulièrement mal résolues, probablement en raison du manque de données disponibles dans ces régions de l'expérience. La perte de résolution avec l'augmentation du Rm est due à la diminution importante du nombre de données récoltées pour chacune des inversions alors que le nombre de paramètres du modèle, pour lesquels on inverse, reste fixe. Nous disposons de 1130 données pour $Rm = 28$ contre seulement 440 données pour $Rm = 47$. Ce constat est encore plus dramatique pour l'inversion à $Rm = 72$ où le nombre de données est réduit à 230 (cependant, le nombre de paramètres du modèle est également réduit puisque nous n'inversons pas pour la vitesse méridienne \mathbf{u}_p). Ce dernier modèle est nettement moins bien résolu que les deux précédents. On remarque que les régions où l'amplitude de la matrice de résolution est nulle se font beaucoup plus rares, ce qui signifie que chaque paramètre est fortement corrélé ou anti-corrélé avec les autres régions du modèle. L'inversion à $Rm = 72$ souffre également de l'absence de données Doppler, c'est-à-dire de mesures directes de l'écoulement. De manière générale, l'information principale que nous apporte la figure 7.9 est la perte de résolution du modèle avec la diminution du nombre de données d'observation disponibles. Pour cette raison, nous détaillons dans la section suivante l'ensemble des données utilisées pour chacune des inversions. Notons que l'on trouvera en annexe 7 d'autres cartes de résolution pour chacune des inversions présentées ici.

4.3 Détail des données contraignant nos inversions

Afin que le lecteur puisse juger par lui-même de l'étendu des données disponibles pour chacune de nos inversions, nous détaillons en annexe 8 l'ensemble des données utilisées. Nous résumons succinctement l'annexe 8 dans cette section. Ainsi pour chaque inversion il existe des données de champ magnétique non-axisymétrique, de champ magnétique axisymétrique, de différence de potentiel, de couple magnétique et parfois des données de vélocimétrie doppler. On note pour chaque type de donnée la fréquence exacte de rotation de la sphère interne lors de l'acquisition.

Les données de champ magnétique non-axisymétrique sont traitées comme détaillé section 1.3. Lorsque la fréquence d'acquisition ne correspond pas exactement à la fréquence pour laquelle nous inversons, nous réalisons alors une interpolation entre deux fréquences d'acquisition proches de la valeur recherchée. Nous rappelons que l'erreur de mesure attribuée à chaque mode magnétique utilisé pour l'inversion est la déviation standard des motifs magnétiques définie comme rms/\sqrt{N} (voir section 1.3). Une erreur systématique associée aux variations de température lors des différentes campagnes d'acquisition augmente de 10% la déviation standard définie précédemment.

Les données de champ magnétique axisymétrique, les mesures de potentiels électriques et le couple magnétique sont toutes mises à l'échelle suivant la normalisation décrite dans l'annexe 4. La fréquence de rotation de la sphère interne lors de l'acquisition de chacune des données utilisées dans les diverses inversions est reportée dans les tableau en annexe 8. La valeur de champ magnétique est une moyenne en temps sur un temps T correspondant à environ 300 tours de la sphère interne pour une fréquence f donnée. L'erreur attribuée à chacune des mesures est la déviation standard définie comme rms/\sqrt{Tf} où Tf est une estimation du nombre d'échantillons statistiquement indépendants (voir Nataf (2013) pour plus de détail).

Lorsque celles-ci sont disponibles, nous introduisons également des données de vélocimétrie doppler. Notre étude se focalise uniquement sur des mesures de l'écoulement moyen obtenues pour un temps T d'acquisition comme définit précé-

demment. La déviation standard de ces mesures est évaluée comme détaillé pour le champ magnétique axisymétrique.

On trouvera dans l'annexe 8 le détail des données pour les inversions à $Rm = 28, 47, 72$ et 94 résumé dans le tableau 7.2. On remarque que le nombre de données est décroissant pour des nombres de Reynolds magnétique croissants. Aucun profil de vélocimétrie doppler n'est disponible à $Rm = 72$ et 94. Seul le nombre de données associées aux modes non-axisymétriques du champ magnétique, aux potentiels électriques et au couple magnétique reste constant pour chaque inversion.

Inversions		Nombre de données					Total
f (Hz)	Rm	Modes magnétiques	Champ B moyen	Potentiels électriques	Couple magnétique	Vélocimétrie doppler	
-9	28	200	44	5	1	880	1130
-15	47	204	23	5	1	207	440
-23	72	204	20	5	1	0	230
-30	94	150	20	5	1	0	176

TABLE 7.2 – Pour chaque inversion à $Rm = 28, 47, 72$ et 94 nous détaillons le nombre de données utilisées associées aux modes magnétiques non-axisymétriques, au champ magnétique moyen considéré axisymétrique, aux potentiels électriques, au couple magnétique et aux mesures de vélocimétrie doppler.

8 RÉSULTATS DÉTAILLÉS À HAUT Rm

Nous souhaiterions dans ce chapitre revenir sur nos résultats d'inversion et sur leur évolution avec le Reynolds magnétique de l'expérience. Nous passerons en revue les cartes du champ de vitesse et du champ magnétique induit pour chacune des inversions réalisées et nous ferons une analyse détaillée de l'évolution des modes magnétiques avec la fréquence de rotation de la sphère interne. Enfin nous terminerons avec une comparaison entre *fem* obtenues par inversion et par *dns*.

1 Evolution du champ moyen

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent nous inversons simultanément pour le champ de vitesse moyen poloïdal et toroïdal ainsi que pour les profils radiaux des effets α et β . Nous détaillons dans la figure 8.1 les cartes du champ de vitesse moyen poloïdal et toroïdal et du champ magnétique moyen poloïdal et toroïdal sur leur section méridionales (r, θ) . Chaque carte est représentée pour les $Rm = 28, 47, 72$ et 94 . On note que l'échelle de couleur est unique pour chaque quantité représentée. Les valeurs sont adimensionnées comme détaillé dans le tableau A.2.

Les premières cartes (au sommet de la figure 8.1) représentent la vitesse angulaire axisymétrique u_φ/s . On retrouve pour chaque valeur de Rm les deux grandes caractéristiques du régime magnétostrophique, à savoir une zone interne d'isoration le long des lignes de champ (section 2.2.2), proche de la rotation solide, et une région géostrophique proche de la sphère externe. La zone de super rotation ($u_\varphi/s > 1$), bien visible pour $Rm = 28$, diminue progressivement pour enfin disparaître à $Rm = 94$. Si l'extension de la région géostrophique, avec l'augmentation

de la vitesse de rotation, n'est pas clairement observable on peut cependant remarquer la diminution des fortes vitesses angulaires avec les Rm croissants dans la zone d'isrotation (les rouges et orange foncés disparaissent progressivement des cartes de vitesse).

La deuxième série de cartes représente le champ magnétique azimuthal axisymétrique induit B_φ (moyenné en φ). Ce dernier respecte bien la symétrie équatoriale imposée par l'écoulement et les dissymétries dues aux hétérogénéités du champ imposé ne sont que très légèrement visibles pour les faibles fréquences de rotation avant de s'accroître à plus haut Rm . On remarque une augmentation de l'intensité du champ magnétique induit avec le Rm ainsi qu'une extension importante des fortes valeurs de champ loin de la sphère interne. Ceci va de pair avec une expansion des fluctuations turbulentes à l'ensemble du volume (Figuroa *et al.* (2013)). En effet, l'apparition de valeur fortement négative de l'effet β limite la diffusion du champ magnétique (produit par effet Ω) et augmente progressivement son intensité. Il est également possible que la réduction spatiale de la zone d'isrotation le long des lignes de champ soit responsable d'une augmentation du cisaillement de vitesse proche de la sphère interne. La forte intensité du champ magnétique dans ces régions accompagnées d'un fort cisaillement agit comme une source supplémentaire d'énergie magnétique. Ainsi, la carte à $Rm = 94$ montre de fortes valeurs de champ induit dans une large part du volume fluide et ce jusque dans des régions proches de la sphère externe.

La troisième série de cartes représente les lignes de courant du champ de vitesse poloïdale. Seuls des résultats pour $Rm = 28$ et 47 sont disponibles. Il est en effet difficile de contraindre la solution de vitesse poloïdale dans l'inversion pour des dynamiques à fort Rm . Une des raisons principales est la mauvaise qualité des données Doppler pour de tels régimes. Afin de ne pas négliger les contributions de la circulation méridionale au champ magnétique induit, nous imposons dans le modèle direct une solution de vitesse méridienne, obtenue pour $Rm = 47$, mise à l'échelle pour les inversions à $Rm = 72$ et 94 . Le champ de vitesse est extrapolé linéairement en Rm (Figuroa *et al.* 2013). On observe que la solution de vitesse poloïdale à $Rm = 47$ se caractérise par des cellules de circulation mieux définies

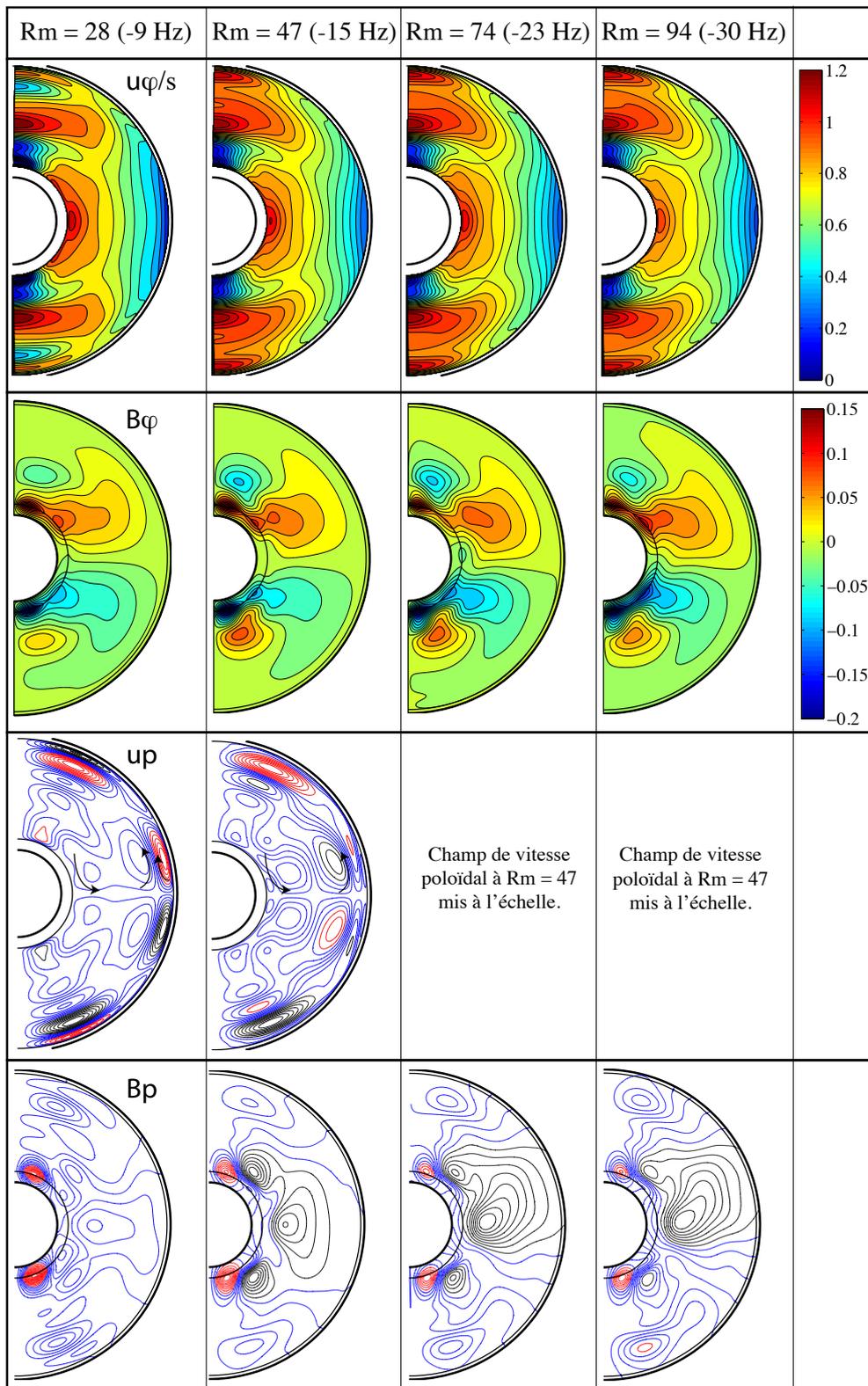


FIGURE 8.1 – Cartes méridionales du champ de vitesse et du champ magnétique induit pour quatre valeurs de Reynolds magnétique $Rm = 28, 47, 72$ et 94 en lisant de gauche à droite. En partant du sommet de la figure ; première série : correspond au champ de vitesse angulaire. L'échelle de couleur est valable pour l'ensemble des quatre cartes. Deuxième série : champ magnétique azimutal axisymétrique induit correspondant à l'écoulement représenté directement au-dessus. Troisième série : ce sont les lignes de courant du champ de vitesse poloïdale. L'écoulement est centrifuge le long de l'équateur, comme l'indique les flèches noirs, et les lignes de courant vont de -4.10^{-4} à 4.10^{-4} . On trouvera en annexe 3 une définition détaillée. Pour $Rm = 72$ et 94 il n'y a pas de solution de vitesse poloïdale résultant de l'inversion, cette dernière est imposée comme indiqué dans le texte. Quatrième série : lignes de champ du champ magnétique poloïdal axisymétrique induit.

et plus isolées les unes des autres que pour la solution à plus bas Rm . La symétrie reste cependant relativement identique dans chacune des solutions.

La quatrième série, représente les lignes de champ magnétique poloïdal induit. On observe quelques structures de grande ampleur qui se développent progressivement avec l'augmentation du Rm . Il est plus facile pour comprendre ces cartes de se référer à la figure 8.2 qui détaille les profils radiaux du champ poloïdal axisymétrique induit pour chaque degré d'harmonique allant du dipôle $l = 1$ au degré $l_{max} = 6$. Ces profils du champ induit correspondent à la solution de vitesse $Rm = 72$. Le premier graphique montre l'induction poloïdale lié à la circulation méridienne par advection des lignes de champ. Comme c'était déjà le cas figure 5.4 à $Rm = 28$, on observe une augmentation du champ magnétique principalement pour les degrés impairs $l = 1, 3$ et 5 . Le second graphique représente l'induction poloïdale résultant du champ de vitesse moyen et de l'effet β , l'effet α étant négligeable dans le cas présent. Le dipôle $l = 1$ et le degré $l = 2$ sont marqués par une forte induction négative associée aux fluctuations turbulentes. Cette réduction du dipôle imposé est d'environ 6% et se manifeste sur les cartes du champ poloïdal par la tache noire que nous décrivions précédemment. Des résultats très similaires existent pour les autres valeurs de Rm mais ne sont pas reportés dans ce manuscrit.

Comme nous l'avions évoqué section 1.5 le moment dipolaire à la surface de la sphère externe devient non nul lorsque la fem intervient dans l'induction du champ poloïdal $l = 1$. Spence *et al.* (2006) ont montré qu'un écoulement axisymétrique en interaction avec un champ magnétique axisymétrique ne pouvait produire de champ dipolaire à l'extérieur du volume fluide. Il demeure cependant qu'un effet β qui ne serait pas accompagné de mouvements méridionaux resterait lui aussi inefficace dans l'induction du champ magnétique poloïdal (voir chapitre 6). Ces deux mécanismes sont donc dépendants l'un de l'autre pour produire un dipôle induit loin des régions conductrices. L'effet α n'est quant à lui pas soumis à une telle dépendance mais se trouve négligeable dans le cas présent. Il serait sans doute souhaitable d'approfondir notre connaissance des interactions entre l'effet β et la circulation méridienne. Une question reste en suspens, pourquoi un effet $\beta < 0$ induit-t-il, dans une telle configuration, une réduction du dipôle magnétique ?

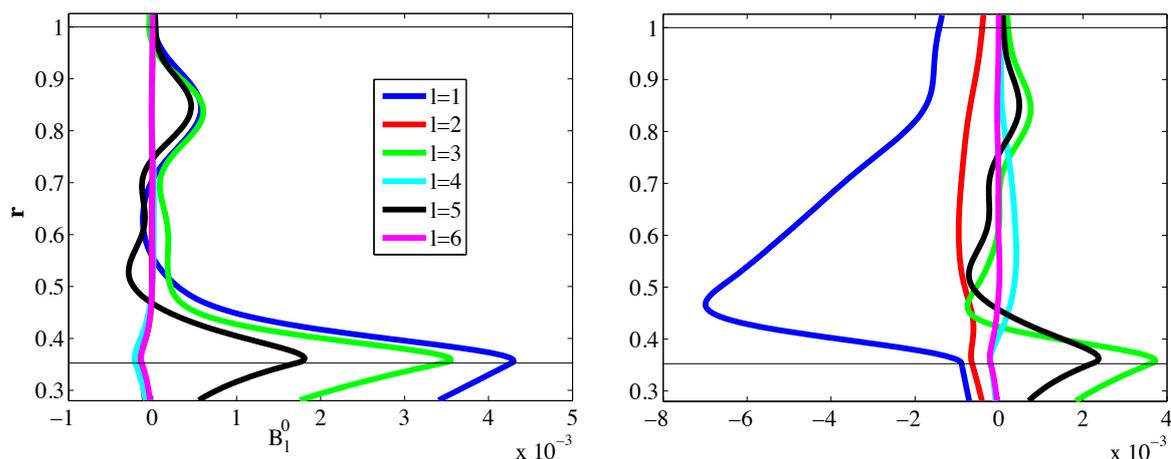


FIGURE 8.2 – Profils radiaux du champ magnétique poloïdal axisymétrique induit. Chaque degré d'harmonique est représenté par une couleur depuis $l = 1$ (le dipôle) jusqu'à $l = 6$. Le graphique de gauche est l'induction poloïdale associée au champ de vitesse axisymétrique seul et le graphique de droite représente le champ induit par l'action conjuguée du champ de vitesse et de la *fem*.

Pour compléter les cartes de l'écoulement et du champ magnétique, le tableau 8.1 compare les rapports entre les composantes poloïdales et toroïdales des énergies cinétique et magnétique. Les énergies sont calculées en intégrant sur tout le volume fluide les solutions de vitesse et du champ magnétique obtenues pour le modèle cinématique complet (champ de vitesse plus *fem*) à $Rm = 28, 47, 72$ et 94 . Pour l'énergie magnétique il s'agit du champ magnétique induit uniquement. Comme nous l'avons déjà évoqué chapitre 5 tableau 5.3, la vitesse toroïdale domine largement la dynamique. Rappelons que la solution de vitesse poloïdale pour les inversions à $Rm = 72$ et 94 correspond à une mise à l'échelle de la solution obtenue à $Rm = 47$. Par conséquent, seule la vitesse toroïdale évolue pour les deux dernières inversions. On observe une diminution de la vitesse poloïdale entre $Rm = 28$ et $Rm = 47$, ce qui signifie que l'on surestime probablement la circulation méridienne pour les inversions à $Rm = 72$ et 94 . Les énergies magnétiques poloïdales et toroïdales sont à peu près équilibrées pour $Rm = 28$ et 94 alors que l'énergie magnétique poloïdale induite domine pour $Rm = 47$ et 72 . Notons que lorsque nous inversions uniquement pour l'écoulement au chapitre 5 (sans la *fem*) nous obtenions un rapport $E_M^{Pol}/E_M^{Tor} < 1$. Les fluctuations sont donc responsables d'une importante induction du champ magnétique poloïdal, à l'image du rapport E_M^{Pol}/E_M^{Tor} pour $Rm = 28$ qui est de 0.35 sans les fluctuations et augmente à 1.21 avec la *fem*.

Avant de conclure ce manuscrit nous souhaiterions revenir sur l'une des méthodes phares mise en œuvre dans ce rapport de thèse. Il s'agit de l'utilisation du champ magnétique non-axisymétrique comme traceur de la dynamique de l'expérience. Nous nous attarderons tout particulièrement sur son évolution avec la fréquence de rotation.

Model	$Rm = 28$	$Rm = 47$	$Rm = 72$	$Rm = 94$
E_K^{Pol} / E_K^{Tor}	0.071	0.037	0.038	0.04
E_M^{Pol} / E_M^{Tor}	1.21	3.6	1.7	1.25

TABLE 8.1 – Rappports entre les énergies cinétiques des composantes de vitesse poloïdales et toroïdales E_K^{Pol} / E_K^{Tor} et entre les énergies magnétique du champ induit des composantes Poloïdales et toroïdales E_M^{Pol} / E_M^{Tor} . On détail ces rapports pour chacun de nos modèles d'inversion.

2 Evolution radiale du champ magnétique non-axisymétrique avec la fréquence de rotation

L'écart à l'axisymétrie du champ magnétique imposé est à l'origine d'un signal magnétique alternatif qui diffuse dans le volume sphérique de sodium conducteur lorsque la sphère interne est en mouvement. Ce signal magnétique peut être décomposé en modes de Fourier dans la direction azimutale et donne lieu à plusieurs modes azimutaux d'ordre m . L'évolution radiale de chacun de ces modes nous permet de retracer la dynamique du fluide avec laquelle ils interagissent. L'idée d'un signal magnétique alternatif pour accéder à la diffusivité turbulente n'est pas complètement nouvelle, [Frick et al. \(2010\)](#) l'avaient déjà appliquée à leur dispositif expérimental, *Torus experiment*, à Perm et [Tobias et Cattaneo \(2013\)](#) l'ont également utilisée pour évaluer l'effet β dans des simulations numériques. Nous avons pour la première fois intégré cette méthode à un processus d'inversion qui permet d'accéder simultanément au champ de vitesse moyen et aux profils radiaux des effets α et β dans une expérience en sodium liquide. Afin d'exposer dans le détail l'évolution radiale de ces modes magnétiques nous avons choisi une représentation dans un plan complexe, exemples figures [5.10](#), [7.3](#). En espérant que cette méthode puisse un jour être réutilisée, nous souhaiterions exposer au lecteur une vue plus détaillée des trois modèles évoqués précédemment, le *modèle statique*, *modèle d'effet de peau* et le modèle cinématique complet, pour chaque valeur de Rm .

Nous rappelons rapidement que le *modèle statique* est la solution de l'équation de Poisson (pour un champ imposé statique) où le champ magnétique décroît radialement en $r^{-(l+1)}$, voir chapitre 4 section 2. le *modèle d'effet de peau* est solution de l'équation d'induction pour $\langle \mathbf{U} \rangle = 0$ (et pour une graine isolante), voir chapitre 4 section 3 et le modèle cinématique complet est la solution de l'équation d'induction 7.1 obtenue par inversion avec $\langle \mathbf{U} \rangle$ correspondant aux différents écoulements et \mathcal{E} la *fem*. Le champ de vitesse du fluide étant nul pour les deux premiers modèles nous n'utiliserons pas dans cette section le Reynolds magnétique pour caractériser la dynamique mais la fréquence de rotation de la sphère interne f .

La figure 8.3 représente dans un plan complexe l'évolution radiale pour les trois composantes du champ magnétique non-axisymétrique, B_r^m , B_θ^m et B_ϕ^m , pour les modes $m = 1, 4$ et 2 respectivement. Sur chaque graphique est représenté un mode évoluant selon le *modèle d'effet de peau*, dépendant de la fréquence de rotation f et le *modèle statique* (pointillés rouges). Lorsque la sphère interne est au repos (*modèle statique*) le champ magnétique a une évolution presque rectiligne depuis l'aimant (correspondant au maximum d'amplitude magnétique) vers la sphère externe. Il est intéressant de remarquer qu'un léger déphasage est présent pour le *modèle statique*. Celui-ci s'explique par les hétérogénéités latitudinales de degrés l . Un même ordre m contient plusieurs degrés l ayant une dépendance radiale différente ce qui occasionne un léger déphasage lorsque l'on regarde l'évolution avec le rayon. Quand la sphère interne est en rotation, l'induction magnétique qui en résulte crée cette fois un déphasage important qui s'amplifie avec la fréquence de rotation et l'ordre m du mode. Pour l'ordre le plus élevé, $m = 4$, le déphasage entre le *modèle statique* et le *modèle d'effet de peau* peut atteindre environ $3\pi/2$ à $f = -30$ Hz. Il est seulement de π pour $m = 1$. Ce phénomène est formulé mathématiquement dans la section 3.

On remarque également une nette diminution pour chaque mode de l'amplitude magnétique avec la fréquence f . Cette décroissance de l'intensité magnétique avec la fréquence de rotation est appelée l'effet de peau et se caractérise par la longueur de pénétration $\delta_m = \sqrt{\frac{\eta}{m\Omega}}$ d'un champ oscillant à la fréquence $f = m\Omega/2\pi$. Cette longueur diminue avec l'ordre et la fréquence d'un mode. Les modes $m = 1$

et $m = 4$ oscillent respectivement aux fréquences f et $4f$. Ainsi pour $f = -30$ Hz, contrairement au mode $m = 1$, le mode $m = 4$ n'atteint pratiquement pas la sphère externe (son amplitude est négligeable en $r = r_o$). Cette diminution de l'intensité magnétique est aussi valable proche du bord interne où le champ magnétique est imposé par l'aimant. En effet, la condition limite en $r = r_i$ impose que le champ magnétique au bord reçoive l'influence d'une source interne, l'aimant, et une source externe, le champ induit dans le volume conducteur (voir section 2). Ainsi, l'amplitude d'un mode magnétique à la surface de la sphère interne est le résultat de l'effet de peau intégré dans tout le volume de sodium.

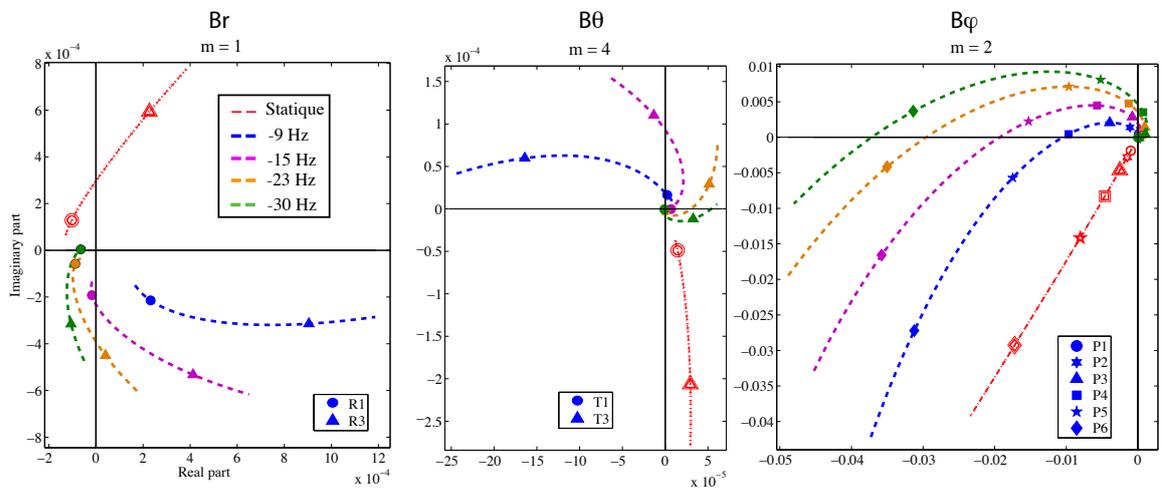


FIGURE 8.3 – Modes magnétiques azimutaux $m = 1, 4$ et 2 évoluant en fonction du rayon le long des courbes en pointillées selon le **modèle d'effet de peau** et le **modèle statique** (courbe rouge). Les modes sont représentés à la latitude -20° . On représente de gauche à droite la composante radiale, orthoradiale et azimutale du champ magnétique. La couleur des courbes correspond à différentes fréquences de rotation de la sphère interne f , voir cartouche dans le premier graphique. Les marqueurs représentent les capteurs magnétiques dans le doigt de gant de l'expérience DTS. Chaque marqueur est à équidistance du suivant en rayon. Le champ magnétique est adimensionné par B_o .

Nous utilisons figure 8.4 la même représentation pour le modèle cinématique complet. Notons que le graphique pour le champ $B_\phi^{m=2}$ représente le même mode que dans la figure 5.10. Nous ne reprendrons donc pas tous les points de comparaison entre les trois modèles, *statique*, *effet de peau* et *cinématique*, mais nous nous attarderons plutôt sur la tendance générale d'évolution des modes avec la fréquence de rotation. Le *modèle statique* peut éventuellement servir de point de repère pour comparer avec le *modèle d'effet de peau* commenté dans la figure précédente.

De manière générale, le modèle cinématique complet suit une évolution avec

la fréquence assez similaire au *modèle d'effet de peau*. On remarque cependant que le déphasage est souvent atténué par la vitesse non nulle de l'écoulement et la diminution drastique de l'amplitude, que l'on observe pour le *modèle d'effet de peau*, est compensée par la délocalisation du cisaillement qui est réparti dans tout le volume fluide (par opposition au cisaillement à la sphère interne dans le *modèle d'effet de peau*). Ceci est vrai quels que soient la composante et le mode observés. A $f = -23$ Hz, $Re(B_\varphi^2)$ passe de -0.02 à -0.06 entre le *modèle d'effet de peau* et le modèle cinématique. Certains modes affichent cependant une évolution plus complexe à l'image de $B_\theta^{m=4}$ dont la phase est légèrement chahutée dans la partie externe.

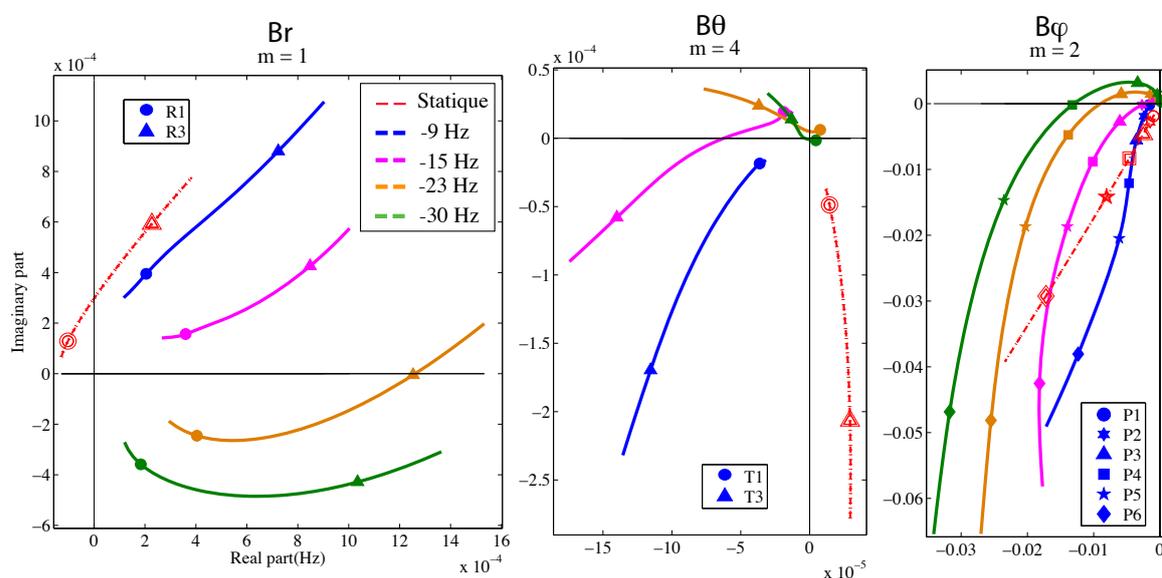


FIGURE 8.4 – Modes magnétiques azimutaux $m = 1, 4$ et 2 évoluant en fonction du rayon le long de chaque courbe selon le **modèle cinématique complet** et le **modèle statique** (courbe rouge). Les modes sont représentés à la latitude -20° . On représente de gauche à droite la composante radiale, orthoradiale et azimutale du champ magnétique. La couleur des courbes correspond à différentes fréquences de rotation de la sphère interne f , voir cartouche dans le premier graphique. Les marqueurs représentent les capteurs magnétiques dans le doigt de gant de l'expérience DTS. Chaque marqueur est à équidistance du suivant en rayon. Le champ magnétique est adimensionné par B_0 .

Nous sommes revenus à plusieurs reprises dans ce manuscrit sur les interactions entre un fluide conducteur et un signal magnétique alternatif. Le choix que nous avons fait est de représenter l'évolution spatiale de ce signal magnétique dans le plan complexe, de détailler chaque mode un à un et de les comparer à d'autres modèles simples afin de déconvoluer la physique qui s'y cachait. Cette forme de représentation s'avère particulièrement efficace et nous espérons qu'elle puisse être réutilisée.

3 Fem comparées des *dns* et des inversions

Il est un point important dans ce manuscrit, c'est la cohérence des résultats obtenus par inversion et ceux obtenus par simulation numérique directe (*dns*). Nous avons dans l'article présenté chapitre 7 déjà fait une comparaison entre les effets turbulents α et β des inversions et de la *dns*, il serait souhaitable de le faire également pour la force électromotrice.

Il est en effet possible à partir des résultats d'inversion de reconstituer des cartes de la force électromotrice pour les différentes valeurs de Rm . Connaissant le champ électrique $\langle \mathbf{J} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle$, le champ moyen $\langle \mathbf{B} \rangle$, les expressions de $\alpha(r)$ et $\beta(r)$ obtenus par inversion et en utilisant l'expression (6.1) nous pouvons reconstituer la *fem* \mathcal{E}_{inv} .

Nous comparons dans la figure 8.5 la *fem* obtenue par simulation numérique directe ($Rm = 10$) telle qu'elle est définie au chapitre 7 section 1.4 et notée \mathcal{E}_t avec la *fem* obtenue par inversion, notée \mathcal{E}_{inv} , pour $Rm = 28$ et 72 . On représente dans cette figure seulement la composante radiale de la *fem* (emf_r) et des courants électriques (J_r). Les hautes latitudes au delà de 55° , n'étant pas impliquées dans l'inversion, ne sont pas représentées sur les cartes figure 8.5.

Comme nous l'avons remarqué à partir de la figure 7.4, la force électromotrice et les courants électriques sont tous deux dominés par une symétrie équatoriale (leur composante orthoradiale est cependant anti-symétrique). Ceci est le résultat d'une dynamique turbulente dominée par l'effet β . Pour cette raison le champ magnétique n'est pas reporté ici.

Il est intéressant d'observer la ressemblance des courants électriques obtenus par simulation numérique et ceux obtenus par inversion. Les courants J_r sont symétriques par rapport au plan de l'équateur. Ils circulent depuis les pôles vers l'équateur pour boucler à la sphère interne où ils coupent perpendiculairement les lignes de champ magnétique. Le fort produit vectoriel $\langle \mathbf{J} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle$ qui en résulte crée une importante force de Lorentz et engendre la super-rotation du fluide. On notera pour $Rm = 72$ que les courants électriques perdent partiellement la symétrie que l'on observe à plus bas Rm .

La ressemblance entre les *fem* obtenues par simulation numérique et par inver-

sion est probablement moins évidente. On retrouve cependant, dans les trois cas représentés, une alternance négative positive de la fem dans la région équatoriale (alternance d'une tache bleue puis rouge en allant de la sphère interne vers la sphère externe). De même la zone interne à moyenne latitude est positive sur chacune des cartes de la fem . On fait remarquer que la fem est de signe opposée aux courants électriques dans la zone proche de la graine ce qui explique la valeur négative de β . On retrouve également le facteur d'échelle $Re^2 \approx 10^4$ entre l'amplitude de la fem issue de la dns et celles des inversions. Comme pour la composante orthoradiale présentée figure 7.4 les variations avec la latitude de la fem et des courants électriques sont proches. Il n'est donc pas nécessaire que ces variations apparaissent dans les scalaires α et β . Il est par conséquent justifié au premier ordre de faire dépendre α et β uniquement du rayon de la sphère.

Comme pour la composante radiale, nous présentons figure 8.6 la composante orthoradiale des courants électriques (J_θ) et de la fem (emf_θ). Pour la simulation numérique, il s'agit des mêmes cartes que celles présentées figure 7.4.

Comme c'était déjà le cas pour la composante radiale, l'amplitude normalisée des courants électriques est équivalente pour les inversions et pour la dns . L'inversion à $Rm = 72$ montre également que la symétrie des courants électriques se brise à haut Rm , ceci reste vrai à $Rm = 94$ mais n'est pas reporté ici.

On retrouve dans la composante orthoradiale la signature d'un effet β négatif. Il est intéressant de noter que l'on retrouve une fem de signe opposé aux courants électriques dans tout le volume fluide à l'exception d'une fine couche au bord, près de la sphère externe. Dans cette région externe, la fem emf_θ est de même signe que les courants J_θ et l'effet β est par conséquent positif. Nous retrouvons ce résultat sur les profils radiaux figure 7.2. Il est important de noter que l'on obtient ce résultat indépendamment dans la simulation numérique et dans chacune des inversions.

Pour conclure, il est satisfaisant de constater que les forces électromotrices obtenues par simulation numérique directe (\mathcal{E}_t) et par inversion (\mathcal{E}_{inv}) respectent les mêmes symétries et les mêmes parités. Il est également intéressant de remarquer

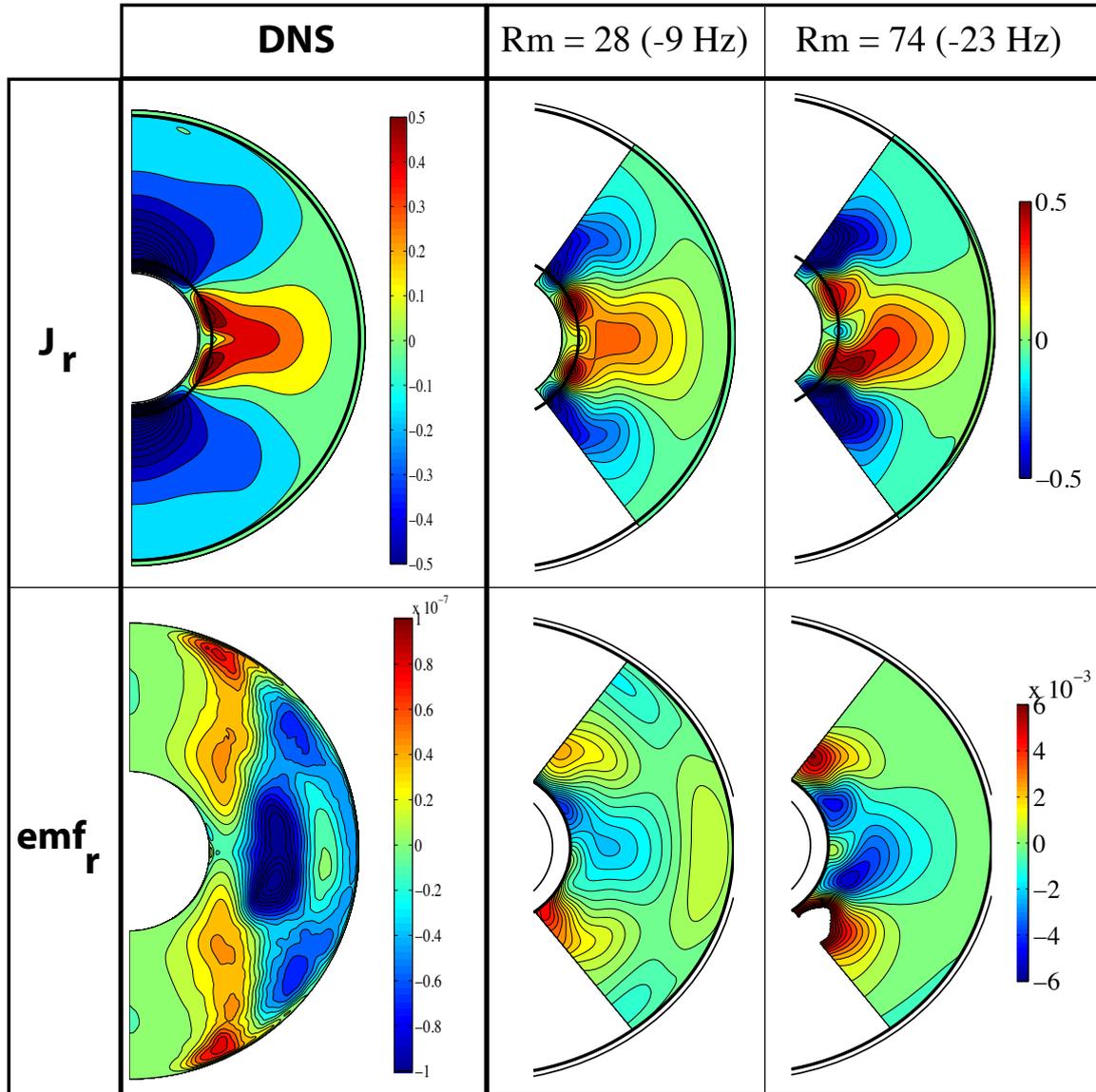


FIGURE 8.5 – Sections méridionales des courants électriques sur leur composante radiale J_r (cartes du haut) et de la force électromotrice emf_r (cartes du bas). Encadrés de gauche : résultats obtenus à partir de la même *dns* que celle présentée dans la section 1.4 où $Re = 2.9 \times 10^4$. La *fem* présentée est \mathcal{E}_t . Centre : résultats de l'inversion à $Rm = 28$. Droite : résultats de l'inversion à $Rm = 72$, \mathcal{E}_{inv} . Pour les résultats d'inversion la même échelle de couleur est utilisée. Chaque quantité est adimensionnée comme détaillé dans le tableau A.2.

que la *fem* obtenue à partir de la *dns* pour $Rm = 10$ est très proche de la solution à bas Rm des inversions. Par conséquent les inversions nous apportent une gamme de solutions à haut Rm qui nous seraient inaccessibles numériquement ($Rm = 47, 72$ et 94).

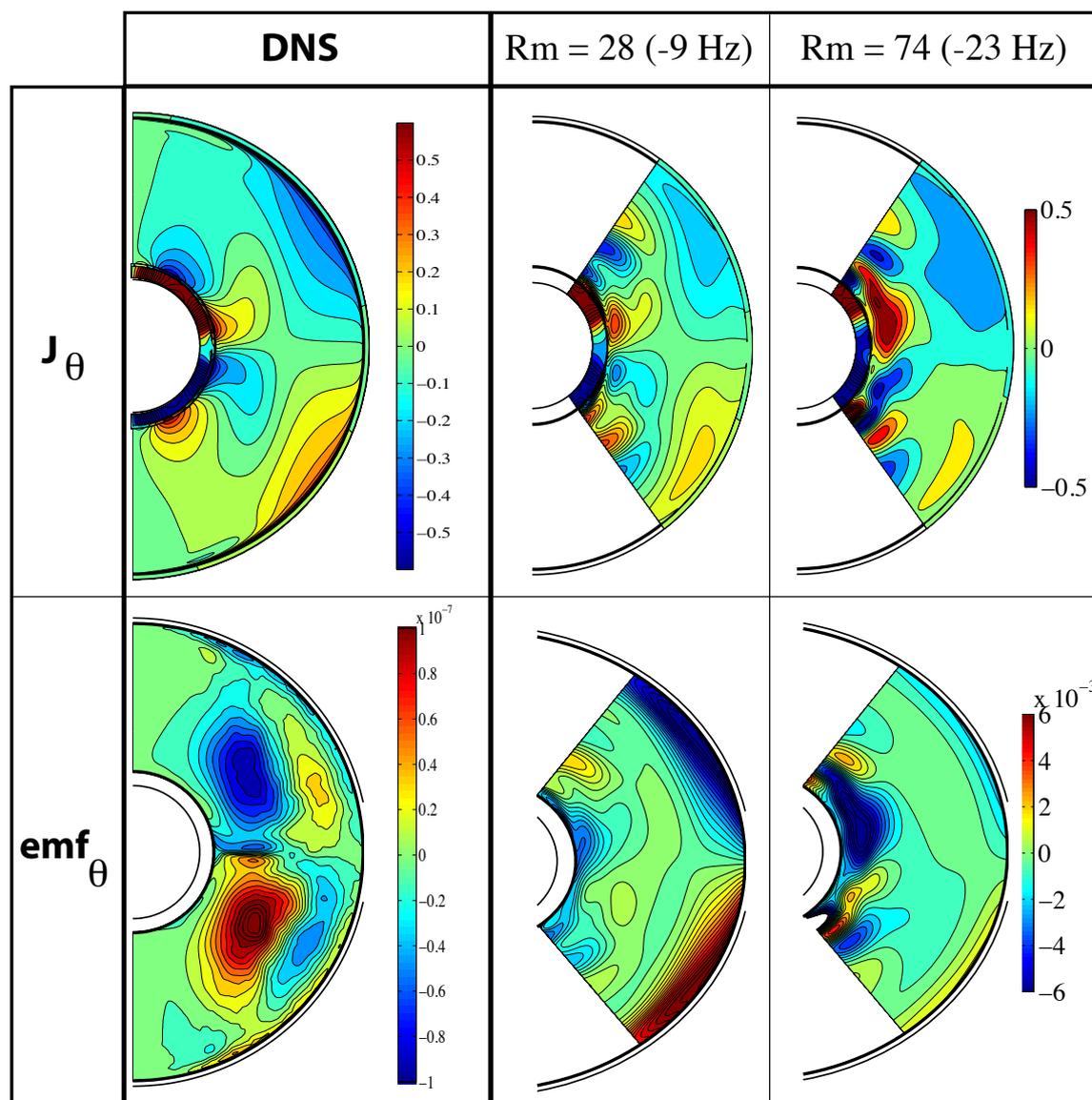


FIGURE 8.6 – Sections méridionales des courants électriques sur leur composantes radiale J_θ (cartes du haut) et de la force électromotrice emf_θ (cartes du bas). Encadrés de gauche : ces cartes sont les mêmes que celles présentées dans la section 1.4 issues de la dns $Re = 2.9 \times 10^4$. La fem présentée est \mathcal{E}_t . Centre : résultats de l'inversion à $Rm = 28$. Droite : résultats de l'inversion à $Rm = 74$, \mathcal{E}_{inv} . Pour les résultats d'inversion la même échelle de couleur est utilisée. Chaque quantité est adimensionnée comme détaillé dans le tableau A.2.

CONCLUSION ET DISCUSSION

Nous avons au cours de cette partie mis au point une extension du modèle axisymétrique présenté partie II en ajoutant les contributions fluctuantes du champ de vitesse. Celles-ci s'écrivent sous la forme d'une force électromotrice qui repose sur les propriétés turbulentes de l'écoulement. On appelle effet α l'induction liée aux mouvements hélicitaires du fluide et effet β la diffusivité magnétique turbulente de l'écoulement. Ces deux effets turbulents sont obtenus simultanément avec le champ de vitesse moyen en résolvant le problème inverse. Chaque inversion repose sur l'hypothèse d'axisymétrie du champ de vitesse et de la dépendance radiale des effets turbulents pour $Rm = 28, 47, 74$ et 94 . En contraignant les 108 coefficients de notre modèle *a priori* (décrivant le champ de vitesse et les fluctuations turbulentes) par 1130 à 230 points de mesures expérimentales du champ de vitesse, du champ magnétique et des potentiels électriques en surface, on constate qu'il est possible de modéliser l'effet turbulent des petites échelles par une forte réduction de la diffusivité magnétique dans la partie interne et une augmentation de celle-ci dans la partie externe. S'il n'est pas nul, l'effet α a un rôle mineur dans l'induction magnétique observée, bien qu'il ait un effet non négligeable sur les ddp et le champ magnétique $B_\varphi^{m=0}$. Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus par simulation numérique directe.

Pour répondre aux questions évoquées en introduction, nous pourrions conclure que les résultats d'inversion soutiennent l'idée que les fluctuations turbulentes favorisent l'amplification d'un champ magnétique dans le cadre de l'expérience DTS mais qu'un régime dynamo ne peut être atteint sans effet α de plus forte intensité. Nous apportons la première observation expérimentale d'un effet turbulent interprété comme une réduction de la diffusivité magnétique du fluide. Un tel résultat est néanmoins fortement dépendant de la configuration de l'expérience. Ainsi contrairement à ce que nous avons évoqué au chapitre 6,

l'expérience DTS est plus proche d'une dynamique $\beta\Omega$, c'est à dire couplant l'effet β et l'effet Ω , que d'une dynamique $\alpha\Omega$.

Le caractère fortement non-homogène de la turbulence dans l'expérience DTS est le résultat de contraintes fortes du régime magnétostrophique sur les mouvements du fluide. Ce régime nous a amené à considérer une description spatiale des effets α et β . On obtient des profils radiaux de ces effets turbulents qui constituent un modèle pertinent du point de vue de l'inversion, puisqu'ils permettent une nette amélioration de nos prédictions vis-à-vis des données d'observations, et semblent être cohérents avec nos connaissances empiriques des fluctuations. On remarque cependant que l'amplitude de la *fem* obtenue par simulation numérique directe n'est que partiellement modélisée par une description uniquement radiale des effets α et β . Une carte complète des effets turbulents serait probablement plus adéquate pour retranscrire la complexité des contributions fluctuantes dans le régime de l'expérience. Nous ne traitons pas non plus dans cette étude des effets d'anisotropie de la turbulence que peut engendrer un fluide en rotation. Une méthode numérique classique pour déterminer les composantes anisotropes des effets α et β est d'imposer différentes sources de champ magnétique au système turbulent (Rheinhardt et Brandenburg 2010). Cette méthode est appelée *Test field method* et n'est pas applicable expérimentalement.

Quatrième partie

Conclusion et discussion

Le noyau terrestre est une immense cavité sphérique au sein de laquelle un fluide conducteur est entraîné par des mouvements convectifs de grande ampleur. En donnant naissance à la dynamo terrestre, les mouvements du fluide vont générer un champ magnétique croissant avant d'atteindre un état d'équilibre où force de Lorentz et force de Coriolis sont en compétition. Ce régime, connu sous le nom de régime magnétostrophique, entretient un dipôle magnétique de grande échelle par l'action conjuguée des mouvements de petites échelles et du champ de vitesse de grande échelle. Ces mécanismes d'induction, à l'origine des dynamos planétaires, font aujourd'hui l'objet de nombreuses recherches en MHD expérimentales et numériques par lesquelles on tente de mettre en évidence le rôle séparé des fluctuations turbulentes (petites échelles) et de l'écoulement moyen (grandes échelles) dans la production d'un champ magnétique à grande échelle. Ce manuscrit en est un exemple et ses contributions aux recherches actuelles vont être résumées dans cette conclusion.

En reproduisant l'équilibre magnétostrophique, l'expérience DTS se positionne comme un dispositif expérimental de choix pour explorer la dynamique du noyau terrestre. Nous utilisons, dans l'étude que nous venons de présenter, l'équation d'induction pour modéliser les interactions entre l'écoulement de l'expérience et le champ magnétique qu'elle impose. L'objectif que nous nous sommes fixé est de dégager les principaux mécanismes d'induction responsables du champ magnétique observé expérimentalement.

En choisissant une approche expérimentale, on s'affranchit de l'équation du mouvement (en n'ayant pas à la résoudre numériquement) ce qui permet de réduire le problème direct à un modèle d'induction cinématique gouverné par un seul nombre sans dimension, le nombre de Reynolds magnétique. On peut ainsi contourner les difficultés que rencontrent habituellement les études numériques qui résolvent le système d'équation complet et sont par conséquent forcées de se limiter à des régimes peu turbulents. Ceci constitue un des intérêts majeurs des expériences en laboratoire que nous avons cherché à valoriser dans ce manuscrit.

Nous avons fait le choix dans cette thèse de résoudre le problème inverse

non-linéaire, par la méthode des moindres carrés, dans l'objectif de reconstruire le champ de vitesse moyen et la force électromotrice de l'expérience DTS tous deux solutions de l'équation d'induction. Afin de contraindre nos solutions d'inversions, nous avons réalisé des mesures de l'écoulement moyen, du champ magnétique, des mesures du potentiel électrique en surface ainsi que du couple magnétique. Inspirés par les travaux antérieurs de [Frick *et al.* \(2010\)](#) nous avons utilisé un signal magnétique alternatif, imposé par l'aimant permanent de l'expérience, comme un traceur de la dynamique de l'écoulement. Grâce à des mesures magnétiques dans le doigt de gant nous pouvons retracer expérimentalement l'évolution radiale de ce signal et donc intégrer ces données à l'inversion. Nous avons mis en avant tout au long de cette étude l'apport considérable de ce signal magnétique aux résultats d'inversion et notamment pour les solutions à haut nombre de Reynolds magnétique.

On peut ainsi retrouver par méthode inverse les grandes structures de l'écoulement moyen déjà discutées par [Brito *et al.* \(2011\)](#) et [Nataf \(2013\)](#). On confirme notamment l'existence d'une zone de super-rotation proche de la sphère interne et de l'équilibre géostrophique dans les régions externes. Notre première inversion à $Rm=28$ nous a montré que l'évolution radiale des modes magnétiques non-axisymétriques (signal magnétique alternatif) était cohérente avec cette dynamique de grande échelle (super-rotation, géostrophique). Nous avons également pu observer l'induction majeure du champ magnétique toroïdal par effet Ω . La circulation méridienne apparaît alors comme un mécanisme d'induction secondaire pour le champ magnétique toroïdal mais non négligeable pour le champ magnétique poloïdal. Même si elle est de faible amplitude, cette circulation méridienne permet d'équilibrer le rapport énergétique entre champ magnétique induit poloïdal et toroïdal autour de 0.35. Ces résultats très prometteurs, obtenus pour l'inversion à $Rm = 28$, nous ont poussé à étendre notre méthode d'inversion à l'étude des contributions turbulentes du champ de vitesse et à explorer des régimes à plus haut Rm .

Pour chaque dynamique étudiée, $Rm = 28,47,72$ et 94 , le champ magnétique induit est principalement produit par l'écoulement moyen de l'expérience. Cependant, au vu des premiers résultats d'inversion et des observations des fluctuations turbulentes de l'expérience, on ne pouvait se contenter de réduire le système à un modèle d'induction n'incluant que l'écoulement moyen. Nos travaux montrent en effet que les contributions turbulentes du champ de vitesse ne peuvent être négligées pour expliquer nos observations expérimentales. On invoque notamment un fort effet β réduisant la diffusivité magnétique de -0.3η dans le volume interne du fluide et augmentant celle-ci jusqu'à 1.7η dans les régions externes. Cet effet β se traduit sur les modes magnétiques non-axisymétriques par un important déphasage du signal magnétique ainsi qu'une légère augmentation de son amplitude. L'action couplée de l'effet β et de l'effet α (qui témoigne de l'hélicité de l'écoulement) a également une influence majeure sur l'induction du champ magnétique toroïdal et sur le potentiel électrique à la surface. En effet, les valeurs de ddp sont réduites d'environ 400% par l'effet α et rehaussés d'environ 50% par l'effet β (figure 7.6). Les instabilités de vitesse dans la couche limite externe de l'expérience, décrites numériquement par [Figueroa et al. \(2013\)](#), sont probablement à l'origine de cette dynamique complexe impliquant de forts effets turbulents. De même, la matrice de covariance pour $Rm = 72$ met en avant de fortes corrélations entre les effets α et β dans la région externe de l'expérience (matrice de corrélation exposée section 4). On constate en revanche que l'effet α n'a presque aucune influence sur les données de champ magnétique non-axisymétrique qui constituent à l'inverse une contrainte déterminante pour la diffusivité turbulente (l'effet β) comme le suggéraient déjà les travaux de [Tobias et Cattaneo \(2013\)](#) et [Frick et al. \(2010\)](#). Enfin, la réduction du dipôle magnétique associée à l'action couplée de la circulation méridienne et de l'effet β reste énigmatique et mériterait des recherches plus poussées afin d'éclaircir l'inter-dépendance de ces deux mécanismes.

Pour la première fois nous mettons en évidence expérimentalement une réduction de la diffusivité magnétique par effet turbulent β . Le modèle radial des effets α et β que nous proposons permet de bien retranscrire la répartition non-homogène

des effets turbulents forcés par la rotation du fluide et le fort champ magnétique imposé. Comme nous l'avions évoqué précédemment, nous pourrions considérer une description spatiale incluant les variations latitudinales des fluctuations. Une telle cartographie des effets α et β serait probablement plus appropriée mais donnerait également plus de degrés de liberté à l'inversion. De même il serait envisageable de libérer la contrainte de symétrie équatoriale de l'écoulement moyen, à l'image des courants électriques, figures 8.5 et 8.6, qui perdent eux-même leur symétrie équatoriale à haut nombre de Reynolds magnétique. Seulement, cela reviendrait à augmenter le nombre de degrés de liberté de l'inversion (c'est-à-dire, augmenter le nombre de paramètres pour lesquels on inverse), ce qui doit aller de paire avec une augmentation des contraintes, sur le modèle, par les données d'observation. Nous avons pu constater à ce sujet chapitre 7 section 4, que la résolution du modèle diminue drastiquement lorsque l'on réduit le nombre de données d'observation tout en fixant le nombre de paramètres du modèle. Une cartographie complète des effets turbulents et la brisure de la symétrie équatoriale de l'écoulement moyen feront l'objet d'une extension future de notre méthode d'inversion.

L'approximation d'une turbulence isotrope est également une des hypothèse forte de notre modèle. [Rüdiger et Brandenburg \(2014\)](#) ont mené une étude numérique dans laquelle ils modélisent les effets turbulents α et β d'un fluide en rotation par un tenseur d'ordre deux et rapportent l'existence de termes non-diagonaux (les résultats de cette étude montrent cependant que les termes diagonaux sont dominants) qui traduisent les effets d'anisotropie de la turbulence. Notons qu'il n'est pas possible dans l'état actuel du dispositif expérimental d'investiguer une telle forme de la turbulence mais ceci pourrait faire l'objet d'un futur projet. Cependant il est peu probable que notre hypothèse d'une turbulence isotrope puisse remettre en question les effets de $\beta < 0$ que nous rapportons dans ce manuscrit. Un argument de poids vient des simulations numériques que nous détaillons en parallèle de nos inversions. Ces deux études, totalement indépendantes, nous montrent que les résultats obtenus pour la *fem* sont, dans les deux cas, de signes opposés aux courants électriques mais partagent leur symétrie. Une telle *fem* doit donc s'écrire en terme d'effet β négatif. Pour conclure, nous ne sommes pas pour l'instant ca-

pables d'explorer les effets d'une turbulence anisotrope comme le suggèrent divers travaux. Cependant, ceci ne doit pas mettre en doute le résultat majeur de cette étude, à savoir la réduction de la diffusivité magnétique par les effets turbulents.

Nous avons pris soin dans ce manuscrit de détailler l'équation d'induction telle que l'a formulé Braginskii pour le champ de vitesse axisymétrique ainsi que son extension pour les contributions turbulentes. On a également introduit le théorème anti-dynamo de Cowling et la théorie du champ moyen qui nous ont permis de mettre en avant le rôle phare des fluctuations turbulentes dans le processus d'induction menant à l'effet dynamo. Ces discussions nous ont permis de formuler explicitement les grandes questions qui ont stimulé ce projet de thèse ; 1) Peut-on modéliser l'induction du champ magnétique de grande échelle à partir de l'écoulement moyen ? 2) Peut-on induire un champ magnétique de grande échelle à partir des fluctuations de petites échelles ? Comment ces contributions turbulentes peuvent-elles nous permettre de contourner le théorème anti-dynamo de Cowling ? 3) Enfin, quelle forme prendra la *fem* dans la configuration de l'expérience DTS ? Ces questions ont été investiguées dans le cadre du régime magnétostrophique de l'expérience DTS et l'étude que nous venons de présenter y répond partiellement et de manière originale.

Dans un premier temps il semble évident que nous avons répondu négativement à la première question. Pour cette raison nous avons cherché à intégrer les propriétés turbulentes du fluide à l'équation d'induction. Nous répondrons à la seconde question en disant qu'il est possible de produire un champ magnétique de grande échelle à partir des fluctuations de petites échelles. L'induction du champ magnétique toroïdal et poloïdal associée aux effets turbulents α et β en est un exemple. L'effet β n'est cependant pas un ingrédient turbulent capable de contourner le théorème de Cowling et ne donnera pas naissance à un effet dynamo en générant un champ magnétique poloïdal. Nous ajoutons que les variations spatiales (en l'occurrence radiales dans le cas présent) de la diffusivité magnétique causées par les fluctuations turbulentes n'auront d'impact sur le champ magnétique poloïdal que si elles sont associées à une autre forme d'induction magnétique

tels que l'effet α ou la circulation méridienne. S'il ne permet pas de contourner le théorème de Cowling, l'effet β peut fortement favoriser une dynamo si celui-ci réduit la diffusivité magnétique du milieu conducteur. Contrairement à l'effet β , l'effet α est un terme dynamogène de l'équation d'induction puisqu'il permet la création d'un champ magnétique poloïdal à partir d'un champ magnétique toroïdal et inversement. On constate cependant les faibles contributions de cet effet sur le dipôle magnétique dans la configuration magnétostrophique de l'expérience. Enfin pour répondre à la troisième question nous affirmons que nous avons de bonnes raisons de penser qu'une description spatiale, radiale dans le cas présent, de la turbulence est un modèle satisfaisant pour décrire la dynamique des fluctuations de l'expérience DTS. Il n'est cependant pas exclu que des contributions associées aux composantes anisotropes de la turbulence soient l'ingrédient manquant à notre modèle pour réaliser une description complète des propriétés turbulentes de l'écoulement. Ceci devra faire l'objet de nouvelles investigations.

	DTS (Grenoble)	Madison (US)	Torus exp (Perm)	VKS (Cadarache)
Rm	≈ 94	≈ 160	≈ 30	≈ 50
Rm_{turb}	≤ 7.8	≤ 12	≤ 1.5	≤ 8
Rm_{turb}^*	≤ 2.6	≤ 1.2	≤ 0.28	≤ 3.7
b_1^0/B_1^0	-6%	-30%	\times	\times
β/η	-30% to $+170\%$	$\approx 30\%$	$\approx 50\%$	100%
$\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$	$\approx 2 \cdot 10^{-4}$	$0.6 \cdot 10^{-4}$	\times	\times

TABLE 8.2 – Nombres sans dimension évalués pour quatre expériences en sodium liquide, l'expérience DTS, de Madison, Le Torus experiment à Perm et l'expérience VKS. On évalue pour chacun de ces dispositifs, le Reynolds magnétique Rm et les Reynolds magnétique turbulents Rm_{turb} et Rm_{turb}^* comme définis dans le texte. On compare également les rapports entre le dipôle magnétique induit b_1^0 et le dipôle imposé B_1^0 . β/η est le rapport entre la diffusivité magnétique turbulente et la diffusivité moléculaire. $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ est la fem normalisée.

Pour clôturer ce manuscrit nous souhaiterions apporter quelques éléments de comparaison entre nos travaux et ceux réalisés dans trois autres expériences en sodium liquide. Une des difficultés principales de cet exercice est de s'affranchir de la

géométrie du dispositif expérimental en évaluant des quantités comparables d'une expérience à l'autre. Il est possible de comparer la dynamique à grande échelle en évaluant le Reynolds magnétique $Rm = 2\pi RfH/\eta$ de chaque expérience. On choisira une fréquence de rotation f qui correspond à la vitesse de rotation du forçage mécanique. On note R et H deux grandeurs caractéristiques de l'expérience. Pour appréhender la dynamique des petites échelles turbulentes on pourra évaluer deux nombres sans dimension, le Reynolds magnétique turbulent $Rm_{turb} = \tilde{u}H/\eta$ et un Reynolds magnétique turbulent basé sur la longueur de corrélation des fluctuations l_{corr} , tel que $Rm_{turb}^* = \tilde{u}l_{corr}/\eta$. En générale, la longueur de corrélation est calculée à partir d'un temps de corrélation des fluctuations où $l_{corr} = \tau_{corr}U$ et $U \approx 2\pi Rf$ une valeur moyenne de l'écoulement. On peut d'ores et déjà remarquer que chacune des expériences présentée dans le tableau 8.2 a une forte dynamique turbulente et que $Rm_{turb} \gg 1$ et $Rm_{turb}^* > 1$.

Afin de comparer l'impact des fluctuations turbulentes sur l'induction magnétique de grande échelle, nous avons reporté (lorsque les données sont disponibles) le rapport entre dipôle magnétique induit b_1^0 et le dipôle imposé B_1^0 . On comparera également le rapport β/η avec β la diffusivité magnétique turbulente. Lorsque des mesures de la *fem* (\mathcal{E}) sont disponibles, on évalue le rapport sans dimension $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$, où $\mathcal{E}_0 = \eta B_0 Rm^2$ est une *fem* calculée à partir des dimensions caractéristiques de l'expérience.

$Rm = 160$ est le Reynolds magnétique maximum atteint dans l'expérience de Madison, il est basé sur la vitesse d'entraînement du fluide proche des pâles mécaniques. [Rahbarnia et al. \(2012\)](#) accèdent expérimentalement à la longueur de corrélation $l_{corr} = \tilde{u}\tau_{corr}$ (notons qu'ils utilisent \tilde{u} au lieu de U dans leurs travaux) et à l'amplitude des fluctuations en faisant une mesure directe du champ de vitesse au sein de l'écoulement. Le Rm_{turb}^* qu'ils obtiennent est un ordre de grandeur inférieur à celui obtenu à partir de l'échelle intégrale H . Ils rapportent une augmentation de la diffusivité magnétique d'environ 30% et une réduction du dipôle magnétique par les fluctuations d'environ 10% ([Kaplan et al. 2011](#)). Notons que ces résultats sont obtenus lorsqu'ils ajoutent des anneaux équatoriaux qui réduisent les fluctuations turbulentes. Sans ce dispositif, ils observent une réduction du dipôle

magnétique de 30% (Spence *et al.* 2006). Rahbarnia *et al.* (2012) réalisent également une mesure expérimentale de la fem que nous avons normalisée dans le tableau 8.2 par \mathcal{E}_0 avec $B_0 = 5$ mT (un champ magnétique uniforme imposé), $R = 0.5$ m (le rayon de l'expérience) et $f = 30$ Hz (correspondant au $Rm = 160$).

Pour des valeurs de Rm et Rm_{turb} beaucoup plus faibles que dans l'expérience de Madison, Noskov *et al.* (2012) rapportent une augmentation de la diffusivité magnétique moléculaire d'environ 50% dans leur *Torus experiment* au moment où le régime est le plus turbulent. On peut calculer le Reynolds magnétique turbulent Rm_{turb}^* en choisissant une longueur de corrélation qui correspond au maximum d'énergie des fluctuations (spectre d'énergie obtenu expérimentalement par Noskov *et al.* (2012)). La valeur pour Rm_{turb}^* reste nettement inférieure à celle rapportée par Rahbarnia *et al.* (2012) mais l'effet des fluctuations sur la diffusivité magnétique est supérieur.

Les résultats de l'expérience VKS sont rapportés pour une fréquence de rotation de l'un des disques à $f = 16$ Hz ($Rm = 50$). Pour une telle vitesse d'entraînement on observe une vitesse maximale de l'écoulement moyen de l'ordre de $U = 2\pi Rf$ (R est le rayon du disque) et des fluctuations de vitesse de l'ordre de $U/2$ (Verhille *et al.* 2012). Une modulation de l'écoulement moyen d'une période $1/8f$ (période qui est étroitement liée à la configuration des disques, moteur de l'entraînement fluide) permet d'accéder au temps de corrélation nécessaire à l'évaluation de l_{corr} . On obtient tableau 8.2 des valeurs de Reynolds magnétique turbulents de l'ordre de ceux obtenus dans l'expérience de Madison. Pour cette dynamique fortement turbulente, Ravelet *et al.* (2012) rapportent une forte augmentation de la diffusivité turbulente de 100%.

On choisit pour l'expérience DTS la dynamique ayant le Reynolds magnétique le plus élevé $Rm = 94$. Le Rm est évalué depuis les quantités caractéristiques $R = H = r_o$ (le rayon de la sphère externe). Ce choix surévalue légèrement les nombres sans dimension reportés tableau 8.2. On accède à l'amplitude des fluctuations de vitesse depuis les valeurs reportées figure 6.3 pour $Rm = 28$; on a choisi $\tilde{u} \approx 0.8$ m.s⁻¹. Cette valeur est extrapolée linéairement en Rm (comme le suggère Figueroa *et al.* (2013)) pour obtenir \tilde{u} à $Rm = 94$. On prend une période

de modulation $1/3f$, correspondant au mode azimutal $m = 3$, pour calculer la longueur de corrélation nécessaire à l'évaluation de Rm_{turb}^* (valeur obtenue depuis les spectres d'énergie des fluctuations réalisés par [Schmitt et al. \(2013\)](#)). Les valeurs de Reynolds magnétique turbulent obtenus dans DTS sont proches de ceux mesurés dans l'expérience de Madison et VKS. Nos profils d'effet β encadrent l'ensemble des valeurs obtenues dans les autres dispositifs expérimentaux et vont même bien au-delà. Il faut noter que l'effet β dans l'expérience Madison est une valeur locale alors qu'il s'agit d'une valeur intégrale dans le *Torus experiment* à Perm. Enfin nous obtenons une fem normalisée (par $\mathcal{E}_0 = \eta B_i R m^2$) dans l'expérience DTS, calculée à partir des effets α et β déterminés par inversion, qui est trois fois supérieure à celle obtenue dans l'expérience Madison par mesure directe des fluctuations.

Cet exercice, qui consiste à comparer des résultats obtenus dans différentes expériences en sodium liquide, est un travail rendu difficile par la diversité des dispositifs expérimentaux. Il faut donc prendre avec précaution les résultats que nous proposons tableau 8.2 qui nécessiteraient probablement une étude plus approfondie de chaque expérience. Cette dernière discussion constitue néanmoins les prémices d'un travail à poursuivre afin de synthétiser les résultats expérimentaux en turbulence MHD.

BIBLIOGRAPHIE

- Hannes ALFVÉN : Discussion of the origin of the terrestrial and solar magnetic fields. *Tellus*, 2(2):74–82, 1950. (Cité page 37.)
- M. BERHANU, R. MONCHAUX, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, L. MARIÉ, F. RAVELET, M. BOURGOIN, P. ODIER, J.-F. PINTON et R. VOLK : Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo. *Europhys. Lett.*, 77:59001, mars 2007. (Cité page 48.)
- SI BRAGINSKII : Theory of the hydromagnetic dynamo. *Sov. Phys. JETP*, 20:1462–71, 1964. (Cité pages 8, 32, 35, 36 et 43.)
- A BRANDENBURG, K-H RÄDLER et M SCHRINNER : Scale dependence of alpha effect and turbulent diffusivity. *Astronomy and Astrophysics*, 482:739–746, 2008. (Cité page 108.)
- Daniel BRITO, Thierry ALBOUSSIÈRE, Philippe CARDIN, Nadège GAGNIÈRE, Dominique JAULT, Patrick LA RIZZA, J-P MASSON, H-C NATAF et Denys SCHMITT : Zonal shear and super-rotation in a magnetized spherical couette-flow experiment. *Phys. Rev. E*, 83(6):066310, 2011. (Cité pages 11, 16, 29, 34, 38, 44, 48, 51, 65, 77, 101, 107 et 142.)
- Simon CABANES, Nathanaël SCHAEFFER et Henri-Claude NATAF : Magnetic induction and diffusion mechanisms in a liquid sodium spherical couette experiment. *Phys. Rev. E*, in review, 2014a. URL <http://arxiv.org/abs/1407.2703>. (Cité pages 101, 103 et 104.)
- Simon CABANES, Nathanaël SCHAEFFER et Henri-Claude NATAF : Turbulence reduces magnetic diffusivity in a liquid sodium experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 113:184501, Oct 2014b. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.184501>. (Cité page 79.)

- Emmanuel CANDÈS et Justin ROMBERG : l_1 -magic : Recovery of sparse signals via convex programming. URL : www.acm.caltech.edu/l1magic/downloads/l1magic.pdf, 4, 2005. (Cité page 162.)
- P. CARDIN, D. BRITO, D. JAULT, H.-C. NATAF et J-P MASSON : Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics*, 38:177–189, 2002. (Cité page 22.)
- P. CHARBONNEAU : Dynamo Models of the Solar Cycle. *Living Rev. Solar Phys.*, 2:[online article] : cited [october 2, 2012] <http://www.livingreviews.org/lrsp-2005-2>, 2005. (Cité pages 47 et 93.)
- Stirling A COLGATE, Howard BECKLEY, Jiahe SI, Joe MARTINIC, David WESTFAHL, James SLUTZ, Sebastian WESTROM, Brianna KLEIN, Paul SCHENDEL, Cletus SCHARLE *et al.* : High magnetic shear gain in a liquid sodium stable couette flow experiment : A prelude to an α - ω dynamo. *Phys. Rev. Lett.*, 106(17):175003, 2011. (Cité page 48.)
- TG COWLING : The magnetic field of sunspots. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 94:39–48, 1933. (Cité pages 8 et 47.)
- E. DORMY et A. M. SOWARD : *Mathematical aspects of natural dynamos*. CRC Press/Taylor Francis, 2007. (Cité page 21.)
- V.C.A. FERRARO : The non-uniform rotation of the sun and its magnetic field. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 97:458–472, 1937. (Cité pages 65 et 103.)
- Aldo FIGUEROA, Nathanaël SCHAEFFER, H-C NATAF et Denys SCHMITT : Modes and instabilities in magnetized spherical couette flow. *J. Fluid Mech.*, 716:445–469, 2013. (Cité pages 16, 30, 50, 56, 77, 81, 94, 95, 103, 105, 107, 125, 143, 148 et 183.)
- Peter FRICK, Vitaliy NOSKOV, Sergey DENISOV et Rodion STEPANOV : Direct measurement of effective magnetic diffusivity in turbulent flow of liquid sodium. *Phys. Rev. Lett.*, 105(18):184502, 2010. (Cité pages 11, 16, 30, 48, 49, 50, 53, 78, 100, 101, 103, 129, 142 et 143.)

- A. GAILITIS, O. LIELAUSIS, E. PLATACIS, S. DEMENT'EV, A. CIFERSONS, G. GERBETH, T. GUNDRUM, F. STEFANI, M. CHRISTEN et G. WILL : Magnetic Field Saturation in the Riga Dynamo Experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3024–3027, 2001. (Cité pages 10, 47 et 100.)
- A GIESECKE, F STEFANI et G GERBETH : Magnetic material in mean-field dynamos driven by small scale helical flows. *New Journal of Physics*, 16(7):073034, 2014. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/16/i=7/a=073034>. (Cité page 108.)
- Nicolas GILLET, Dominique JAULT, Elisabeth CANET et Alexandre FOURNIER : *Nature*, 465(7294):74–77, 2010. (Cité pages 24 et 38.)
- G.O ROBERTS. : Dynamo Action of Fluid Motions with Two-Dimensional Periodicity. *Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 271:411–454, 1972. (Cité pages 9 et 48.)
- DJ IVERS et RW JAMES : Axisymmetric antidynamo theorems in compressible non-uniform conducting fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 312(1520):179–218, 1984. (Cité page 35.)
- David D. JACKSON : *The use of a priori data to resolve non-uniqueness in linear inversion*. Cambridge University, Madingley Rise, Madingley Road, Cambridge CB3 0EZ, 1978. (Cité page 119.)
- E. J. KAPLAN, M. M. CLARK, M. D. NORBERG, K. RAHBARNIA, A. M. RASMUS, N. Z. TAYLOR, C. B. FOREST et E. J. SPENCE : Reducing Global Turbulent Resistivity by Eliminating Large Eddies in a Spherical Liquid-Sodium Experiment. *Phys. Rev. E*, 106(25), JUN 21 2011. ISSN 0031-9007. (Cité pages 100 et 147.)
- Saša KENJEREŠ et Kemal HANJALIĆ : Numerical insights into magnetic dynamo action in a turbulent regime. *New Journal of Physics*, 9(8):306, 2007. (Cité page 9.)
- Fritz KRAUSE et Karl-Heinz RÄDLER : *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Pergamon Press Oxford, 1980. (Cité page 48.)

- Daniel P LATHROP, Woodrow L SHEW et Daniel R SISAN : Laboratory experiments on the transition to mhd dynamos. *Plasma Physics and controlled fusion*, 43(12A): A151, 2001. (Cité page 48.)
- L MARIÉ, François PETRELIS, M BOURGOIN, J BURGUETE, A CHIFFAUDEL, F DAVIAUD, S FAUVE, Philippe ODIER et JF PINTON : Open questions about homogeneous fluid dynamos : the vks experiments. *Magnetohydrodynamics*, 38(1-2):163–176, 2002. (Cité page 48.)
- Henry K MOFFATT : *Field Generation in Electrically Conducting Fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1978. (Cité page 13.)
- R. MONCHAUX, M. BERHANU, M. BOURGOIN, M. MOULIN, P. ODIER, J.-F. PINTON, R. VOLK, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, C. GASQUET, L. MARIÉ et F. RAVELET : Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium. *Phys. Rev. Lett.*, 98(4):044502, 2007. (Cité pages 11, 12 et 48.)
- H.-C. NATAF, T. ALBOUSSIÈRE, D. BRITO, P. CARDIN, N. GAGNIÈRE, D. JAULT, J.-P. MASSON et D. SCHMITT : Experimental study of super-rotation in a magnetostrophic spherical Couette flow. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 100:281–298, 2006. (Cité page 51.)
- Henri-Claude NATAF : Magnetic induction maps in a magnetized spherical couette flow experiment. *Comptes Rendus Physique*, 14(2):248–267, 2013. (Cité pages 16, 29, 30, 34, 44, 49, 50, 52, 62, 65, 67, 77, 78, 81, 101, 122 et 142.)
- Vitaliy NOSKOV, Sergey DENISOV, Rodion STEPANOV et Peter FRICK : Turbulent viscosity and turbulent magnetic diffusivity in a decaying spin-down flow of liquid sodium. *Phys. Rev. E*, 85(1):016303, 2012. (Cité page 148.)
- R O'CONNELL, Roch KENDRICK, Mark NORNBERG, Erik SPENCE, Adam BAYLISS et CB FOREST : On the possibility of an homogeneous mhd dynamo in the laboratory. In *Dynamo and Dynamics, a Mathematical Challenge*, pages 59–66. Springer, 2001. (Cité page 48.)

- EN PARKER : Hydromagnetic dynamo models. *Astrophys. J.*, 122:293–314, 1955. (Cité page 90.)
- Yu.B. PONOMARENKO : On the theory of hydromagnetic dynamo. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 14:775–778, 1973. (Cité pages 9 et 47.)
- Karl-Heinz RÄDLER : Mean-field dynamos. *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Springer, pages 192–199, 2007. (Cité page 8.)
- Kian RAHBARNIA, Benjamin P. BROWN, Mike M. CLARK, Elliot J. KAPLAN, Mark D. NORBERG, Alex M. RASMUS, Nicholas ZANE TAYLOR, Cary B. FOREST, Frank JENKO, Angelo LIMONE, Jean-Francois PINTON, Nicolas PLIHON et Gautier VERHILLE : Direct observation of the turbulent emf and transport of magnetic field in a liquid sodium experiment. *Astrophys. J.*, 759:80–85, 2012. (Cité pages 48, 49, 100, 103, 147 et 148.)
- F. RAVELET, B. DUBRULLE, F. DAVIAUD et P-A. RATIE : Kinematic alpha Tensors and Dynamo Mechanisms in a von Karman Swirling Flow. *Phys. Rev. Lett.*, 109(2):024503, 2012. ISSN 0031-9007. (Cité pages 14, 100 et 148.)
- M. RHEINHARDT et A. BRANDENBURG : Test-field method for mean-field coefficients with MHD background. *ASTRONOMY & ASTROPHYSICS*, 520, SEP-OCT 2010. ISSN 0004-6361. (Cité page 138.)
- Paul H ROBERTS et Eric M KING : On the genesis of the earth's magnetism. *Reports on Progress in Physics*, 76(9):096801, 2013. URL <http://stacks.iop.org/0034-4885/76/i=9/a=096801>. (Cité pages 37, 88, 91 et 183.)
- Paul Harry ROBERTS : An introduction to magnetohydrodynamics. *An Introduction to Magnetohydrodynamics, by PH Roberts*. Textbook published by Longmans, Green and Co ltd, London, 1967, 1, 1967. (Cité page 35.)
- PH ROBERTS et S SCOTT : On analyses of the geomagnetic secular variation. *J. Geomagn. Geoelectr. Kyoto*, 17:137–151, 1965. (Cité page 24.)
- G RÜDIGER et Axel BRANDENBURG : α effect in a turbulent liquid-metal plane couette flow. *Phys. Rev. E*, 89(3):033009, 2014. (Cité pages 48, 93 et 144.)

- Nathanaël SCHAEFFER : Efficient spherical harmonic transforms aimed at pseudospectral numerical simulations. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 14(3): 751–758, 2013. ISSN 1525-2027. URL <http://dx.doi.org/10.1002/ggge.20071>. (Cité pages 56 et 106.)
- D. SCHMITT, T. ALBOUSSIÈRE, D. BRITO, P. CARDIN, N. GAGNIÈRE, D. JAULT et H.-C. NATAF : Rotating spherical Couette flow in a dipolar magnetic field : Experimental study of magneto-inertial waves. *J. Fluid Mech.*, 604:175–197, 2008. (Cité page 81.)
- D. SCHMITT, P. CARDIN, P. LA RIZZA et H.-C. NATAF : Magneto-Coriolis waves in a spherical Couette flow experiment. *European J. Mech. B/Fluids*, 37(<http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechflu.2012.09.001>):10–22, 2013. (Cité page 149.)
- E.J. SPENCE, M.D. NORNBORG, C.M. JACOBSON, R.D. KENDRICK et C.B. FOREST : Observation of a turbulence-induced large scale magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 96(5):055002, 2006. ISSN 0031-9007. (Cité pages 11, 14, 49, 64, 93, 100, 103, 108, 127 et 148.)
- M STEENBECK, F KRAUSE et KH RÄDLER : A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces. *Z. Naturforsch*, 1966. (Cité page 47.)
- F STEFANI et G GERBETH : On the uniqueness of velocity reconstruction in conducting fluids from measurements of induced electromagnetic fields. *Inverse Problems*, 16(1):1, 2000. (Cité page 52.)
- R. STIEGLITZ et U. MÜLLER : Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids*, 13:561–564, 2001. (Cité pages 10, 48 et 100.)
- Albert TARANTOLA : *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. siam, 2005. (Cité pages 116, 118 et 119.)
- Albert TARANTOLA et Bernard VALETTE : Generalized nonlinear inverse problems

solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics*, 20(2):219–232, 1982. (Cité pages 60 et 104.)

Steve M. TOBIAS et Fausto CATTANEO : On the measurement of the turbulent div-
sivity of a large-scale magnetic field. *J. Fluid Mech.*, 717:347–360, 2013. (Cité
pages 14, 103, 129 et 143.)

Gautier VERHILLE, Ruslan KHALILOV, Nicolas PLIHON, Peter FRICK et Jean-Francois
PINTON : Transition from hydrodynamic turbulence to magnetohydrodynamic
turbulence in von Karman flows. *J. Fluid Mech.*, 693:243–260, 2012. ISSN 0022-
1120. (Cité page 148.)

Johannes WICHT : Flow instabilities in the wide-gap spherical couette system. *J.*
Fluid Mech., 738:184–221, 2014. (Cité pages 67 et 77.)

VA ZHELIGOVSKY et OM PODVIGINA : Generation of multiscale magnetic field by
parity-invariant time-periodic flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 97(3):225–
248, JUN 2003. (Cité page 108.)

Daniel S. ZIMMERMAN, Santiago Andres TRIANA, Henri-Claude NATAF et Daniel P.
LATHROP : A turbulent, high magnetic reynolds number experimental model of
earth’s core. *J. Geophys. Res.-Solid Earth*, in press, 2014. (Cité pages 11 et 48.)

ANNEXES

A

1 Nombres sans dimension caractéristiques de l'expérience DTS

DTS		3Hz	30Hz	
Reynolds mag	Rm	$\Omega r_0^2 / \eta$	94	[inertiel/diffusion]
Reynolds	Re	$\Omega r_0^2 / \nu$	1.3×10^7	[inertiel/visqueux]
Elsasser	Λ	$\sigma B_0^2 / \rho \Omega$	3×10^{-2}	[Lorentz/Coriolis]
Prandtl	Pm	ν / η	7.4×10^{-6}	[diffusion visqueuse/diffusion magnétique]
Hartman	Ha	$r_0 B_0 / \sqrt{\rho \nu \eta \bar{\mu}}$	200	[Lorentz/visqueux] ^{1/2}
Lunquist	Lu	$r_0 B_{i 0} / \sqrt{\rho \eta^2 \bar{\mu}}$	$12.2(\text{pour } B_i) - 0.56(\text{pour } B_0)$	[vitesse Alfvén/vitesse diffusion]
Lehnert	λ	$B_{1 0} / r_0 \sqrt{\rho \bar{\mu}} \Omega$	$1.2 - 0.06$	[temps Coriolis/temps Alfvén]
Ekman	E	$\nu / \Omega r_0^2$	8×10^{-7}	[Visqueux/Coriolis]
Rossby	Ro	$\Delta \Omega / \Omega$	1	[inertiel/Coriolis]

TABLE A.1 – Nous proposons un tableau de tous les nombres sans dimension de l'expérience DTS pour les fréquences de rotation de la sphère interne $f = 3$ Hz et $f = 30$ Hz. Ceci correspond aux Reynolds magnétique maximum et minimum de l'expérience, soit $Rm = 9.4$ et $Rm = 94$. Les quantités utilisées pour évaluer ces nombres sans dimension sont reportées tableau 2.1.

2 Décomposition spectrale sur une sphère

2.1 propriétés des harmoniques sphériques

Les harmoniques sphériques sont un ensemble de fonctions complexes $Y_l^m(\theta, \varphi)$ définies sur la sphère. Elles sont définies pour $l = 0, 1, 2, \dots, +\infty$ et $m = -l, \dots, 0, \dots, l$. Elles s'écrivent

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = C_l^m P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad \text{pour } \begin{cases} l = 0, 1, 2, \dots, l \\ m = -l, \dots, 0, 1, \dots, l \end{cases} \quad (\text{A.1a})$$

où C_l^m est la constante de normalisation du polynôme de Legendre associé P_l^m .

Les harmoniques sphériques ainsi définies sont orthogonales deux à deux. On cherche généralement, lors de calculs numériques, une constante de normalisation C_l^m de manière à ce qu'elles soient également orthonormées ("fully normalized"). Cette relation d'orthonormalisation définit C_l^m tel que,

$$C_l^m = (-1)^m \sqrt{\frac{(l + \frac{1}{2})(l - m)!}{(l + m)!}}. \quad (\text{A.2})$$

La fonction de Legendre associée est définie pour $|x| \leq 1$ et $m \geq 0$ par,

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (\text{A.3})$$

Cette expression n'est valable que pour les m positifs. La relation suivante donne accès aux ordres négatifs

$$P_l^m = (-1)^m \frac{(l - m)!}{(l + m)!} P_l^{-m}. \quad (\text{A.4})$$

Nous rappelons ci-dessous les expressions des premières harmoniques sphériques,

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad (\text{A.5a})$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi}, \quad (\text{A.5b})$$

$$Y_1^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta, \quad (\text{A.5c})$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}. \quad (\text{A.5d})$$

Une propriété intéressante des harmoniques sphériques est qu'elles sont les fonctions propres de l'opérateur L_2 , Laplacien angulaire. Elles vérifient la propriété

$$L_2(Y_l^m(\theta, \varphi)) = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial^2\varphi}, \quad (\text{A.6a})$$

$$= l(l+1)Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{A.6b})$$

Ceci est particulièrement intéressant pour exprimer le Laplacien d'une fonction s'écrivant sous la forme $F(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$, tel que,

$$\Delta (F(r)Y_l^m(\theta, \varphi)) = Y_l^m(\theta, \varphi) \frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} (r^2 F'(r)) - l(l+1)F(r) \right]. \quad (\text{A.7})$$

On simplifie ainsi l'expression pour $S\hat{r}$ de des expressions (5.11) et (3.3b) par

$$S_P = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \frac{c_l^m}{r} l(l+1) f(r, t) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{A.8})$$

3 Ligne de courant du champ de vitesse méridien

On peut écrire le champ de vitesse poloïdal axisymétrique à partir des expressions (5.11) de la manière suivante :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{r\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta (U_P)) \\ \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_\theta (U_P)) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

En posant

$$U = -r\sin\theta \frac{\partial U_P}{\partial\theta}, \quad (\text{A.10})$$

on obtient les iso-valeurs de U_P , qui sont les lignes de champ de la vitesse méridienne et U est le tracé tangentiel au gradient de vitesse, soit

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{r\sin\theta} \vec{e}_\varphi \wedge \nabla U = \frac{1}{r\sin\theta} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \partial_\theta U \\ -\partial_r U \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

4 Adimensionalization

See table A.2.

TABLE A.2 – Scales used in this paper for adimensionalization. Ω is the imposed angular velocity of the inner sphere and r_o^* is the dimensional inner radius of the outer shell. B_o is the intensity of the dipolar magnetic field at the equator of the outer shell at radius $r = r_o$. Rm is the magnetic Reynolds number defined in table 5.1. We call η the magnetic diffusivity, ρ the density, and μ the magnetic permittivity of liquid sodium.

Quantities	scale
time	Ω^{-1}
length	r_o^*
velocity	$r_o^*\Omega$
imposed and non-axisymmetric magnetic field	B_o
scalar magnetic potential	$r_o^*B_o$
induced axisymmetric magnetic field	RmB_o
electric potential	$Rm\eta B_o$
magnetic torque	$Rm(r_o^*)^3 B_o^2 / \mu$
energy	$\rho\Omega^2(r_o^*)^5 = \rho\eta^2 r_o^* Rm^2$

5 inversion of the magnetic potential of the magnet

We determine the magnetic potential of the magnet of the inner sphere at rest and in the absence of the sodium layer, by inverting measurements of components of the magnetic field taken in the gap between the inner sphere and the outer sphere and at the surface of the latter.

We measure B_r , B_θ and B_φ and their standard deviation, using a Hirst GM05 magnetometer (100 micro Tesla resolution). Figure A.1 shows the location of the measurements in a meridional plane. The measurements are repeated every 5° or 10° in longitude, yielding a total of 1296 data points. We then invert for the magnetic scalar potential $A(r, \theta, \varphi)$ at the surface of the inner sphere, using :

$$\mathbf{B} = -\nabla A. \quad (\text{A.12})$$

The scalar potential is projected on spherical harmonics :

$$A(r, \theta, \varphi) = r_i \sum_{l=1}^L \left(\frac{r_i}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^{\min(l,M)} [g_l^m \cos m\varphi + h_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos \theta), \quad (\text{A.13})$$

and we invert for the spherical harmonics coefficients up to degree $L = 11$ and order $M = 6$. For this over-constrained inversion, we use the `l1qc_logbarrier` l1-norm algorithm of Candes et Romberg (2005) in order to minimize the number of non-zero coefficients and avoid the blow-up of the potential at high latitudes. Figure A.2 displays contour maps of the non-axisymmetric part ($m \neq 0$) and axisymmetric

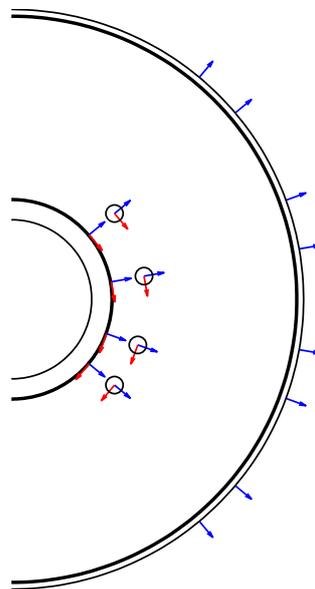


FIGURE A.1 – Location of the magnetic measurements used to infer the scalar magnetic potential of the inner sphere's magnet. In this meridional cross-section, the arrows indicate which component (B_r in blue, B_θ in red) is measured, the small black circles corresponding to B_ϕ data. The measurements are repeated every 5° or 10° in longitude. Black spherical lines mark successively the copper, the fluid and the stainless steel shells.

part ($m = 0$) of our preferred model of scalar magnetic potential at the surface of the inner sphere. For this model, the normalized misfit of the non-axisymmetric components is 0.69. The motif shown in Figure 5.2 for $f = 0$ is computed from this potential.

6 Finite difference formulation for conductivity jumps

For discontinuous conductivities (a solid boundary with a different conductivity), the magnetic field \mathbf{B} is continuous across the interface, which translates into the poloidal-toroidal formalism into continuous B_P , $\partial_r B_P$ and B_T . In addition, The second jump condition is due to the continuity of the tangential electric field, leading to $(\mathbf{j} \times \mathbf{n})/\sigma$ continuous across the interface, from which we have the continuity of $\eta \partial_r(rB_T)$ and $\eta \Delta B_P$ (if magnetic permeability μ_0 is the same everywhere).

Since η is constant everywhere but at the discontinuity, the governing equation is

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \eta \Delta \mathbf{b} \quad (\text{A.14})$$

In order to derive the finite difference approximation, we write the Taylor expansions left and right of the discontinuity located at r_0 :

$$f_{\pm} = f_{0\pm} \pm dr(\partial_r f)_{0\pm} + \frac{dr^2}{2}(\partial_{rr} f)_{0\pm} \quad (\text{A.15})$$

where $f_{\pm} = f(r_0 \pm dr)$, and $f_{0\pm}$ is the limit $f(r_0 \pm \varepsilon)$ when $\varepsilon \rightarrow 0^+$. This is the start for a finite difference formulation, with equidistant points around the discontinuity.

We can isolate $\partial_{rr} f$

$$2\frac{f_{\pm} - f_{0\pm}}{dr^2} \mp \frac{2}{dr}(\partial_r f)_{0\pm} = (\partial_{rr} f)_{0\pm} \quad (\text{A.16})$$

and add the angular part to have an evaluation of $\Delta(f/r)$ at each side of the discontinuity :

$$2\frac{f_{\pm} - f_{0\pm}}{dr^2} \mp \frac{2}{dr}(\partial_r f)_{0\pm} - \frac{\ell(\ell+1)}{r_0^2} f_{0\pm} = (r\Delta(f/r))_{0\pm} \quad (\text{A.17})$$

Poloidal part Here, we take $f = rP$ in the previous finite difference formulation. In this case, f_0 and $(\partial_r f)_0$ are uniquely defined (by continuity). Multiplying

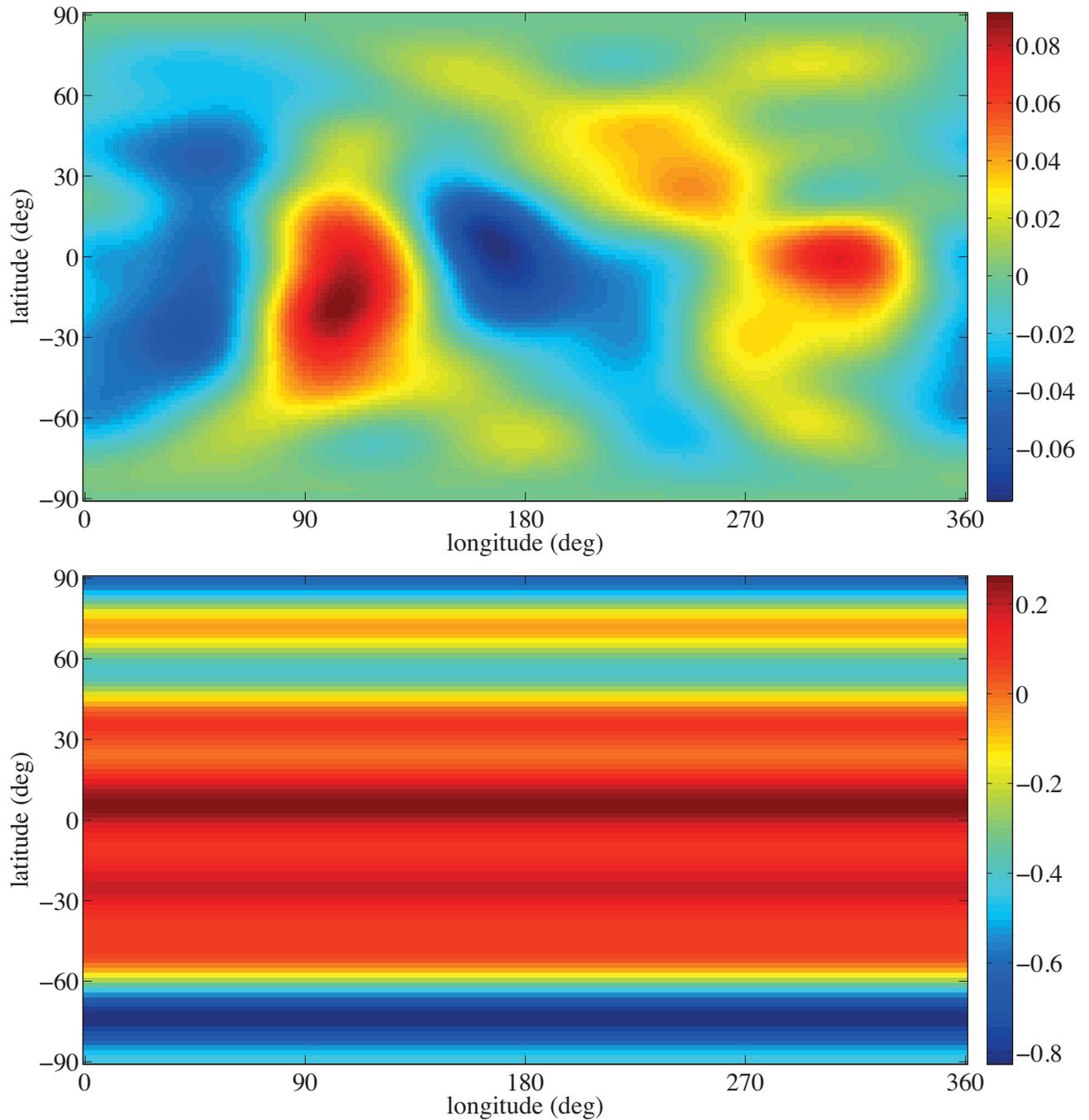


FIGURE A.2 – Contour map of the scalar magnetic potential of the magnet reconstructed at the surface of the inner sphere. The potential is normalized by $r_o^* B_o$ as indicated in table A.2. Top : non-axisymmetric part. Bottom : non-dipole axisymmetric part.

equation A.17 by $\eta_+\eta_-$ gives :

$$2\eta_+\eta_- \left(\frac{f_{\pm} - f_0}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{2r_0^2} f_0 \right) = \pm\eta_+\eta_- \frac{2}{dr} (\partial_r f)_{0\pm} + \eta_+\eta_- (r\Delta P)_{0\pm} \quad (\text{A.18})$$

By taking the sum of these equations, we eliminate $(\partial_r f)_0$:

$$2\eta_+\eta_- \left(\frac{f_+ + f_- - 2f_0}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r_0^2} f_0 \right) = (\eta_+ + \eta_-) r_0 K \quad (\text{A.19})$$

with $K = \eta_+(\Delta P)_+ = \eta_-(\Delta P)_-$. We finally obtain the finite difference approximation of $\eta\Delta P$:

$$(\eta\Delta P)_0 = \frac{2\eta_+\eta_-}{\eta_+ + \eta_-} \left(\frac{r_+P_+ + r_-P_- - 2r_0P_0}{r_0 dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r_0^2} \right) \quad (\text{A.20})$$

Meaning that, for the finite difference formulation, η must simply be replaced by its harmonic mean at the interface. Or equivalently σ be replaced by its mean.

Toroidal part Here, we take $f = rT$ in the finite difference formulation of equations A.15. In this case, f_0 is uniquely defined (by continuity) and $\eta_+(\partial_r f)_{0+} = \eta_-(\partial_r f)_{0-}$. Multiplying equation A.17 by η_{\pm} gives :

$$2\eta_{\pm} \left(\frac{f_{\pm} - f_0}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{2r_0^2} f_0 \right) = \pm\eta_{\pm} \frac{2}{dr} (\partial_r f)_{0\pm} + \eta_{\pm} (r\Delta T)_{0\pm} \quad (\text{A.21})$$

By taking the sum of these equations, we eliminate $\eta_{\pm}(\partial_r f)_{0\pm}$:

$$2 \frac{\eta_+ f_+ + \eta_- f_- - (\eta_+ + \eta_-) f_0}{dr^2} - (\eta_+ + \eta_-) \frac{\ell(\ell+1)}{r_0^2} f_0 = 2r_0 K \quad (\text{A.22})$$

with $K = \eta_+(\Delta T)_+ = \eta_-(\Delta T)_-$. We finally obtain the finite difference approximation of $\eta\Delta T$:

$$(\eta\Delta T)_0 = \frac{\eta_+ r_+ T_+ + \eta_- r_- T_- - (\eta_+ + \eta_-) r_0 T_0}{r_0 dr^2} - \frac{\eta_+ + \eta_-}{2} \frac{\ell(\ell+1)}{r_0^2} T_0 \quad (\text{A.23})$$

7 Matrice de résolution

Matrices de résolution représentées figures A.3, A.4 et A.5 pour respectivement les inversions à $Rm = 28, 47$ et 72 . Il s'agit des *matrices de résolution* pour les paramètres du modèle décrivant le champ de vitesse.

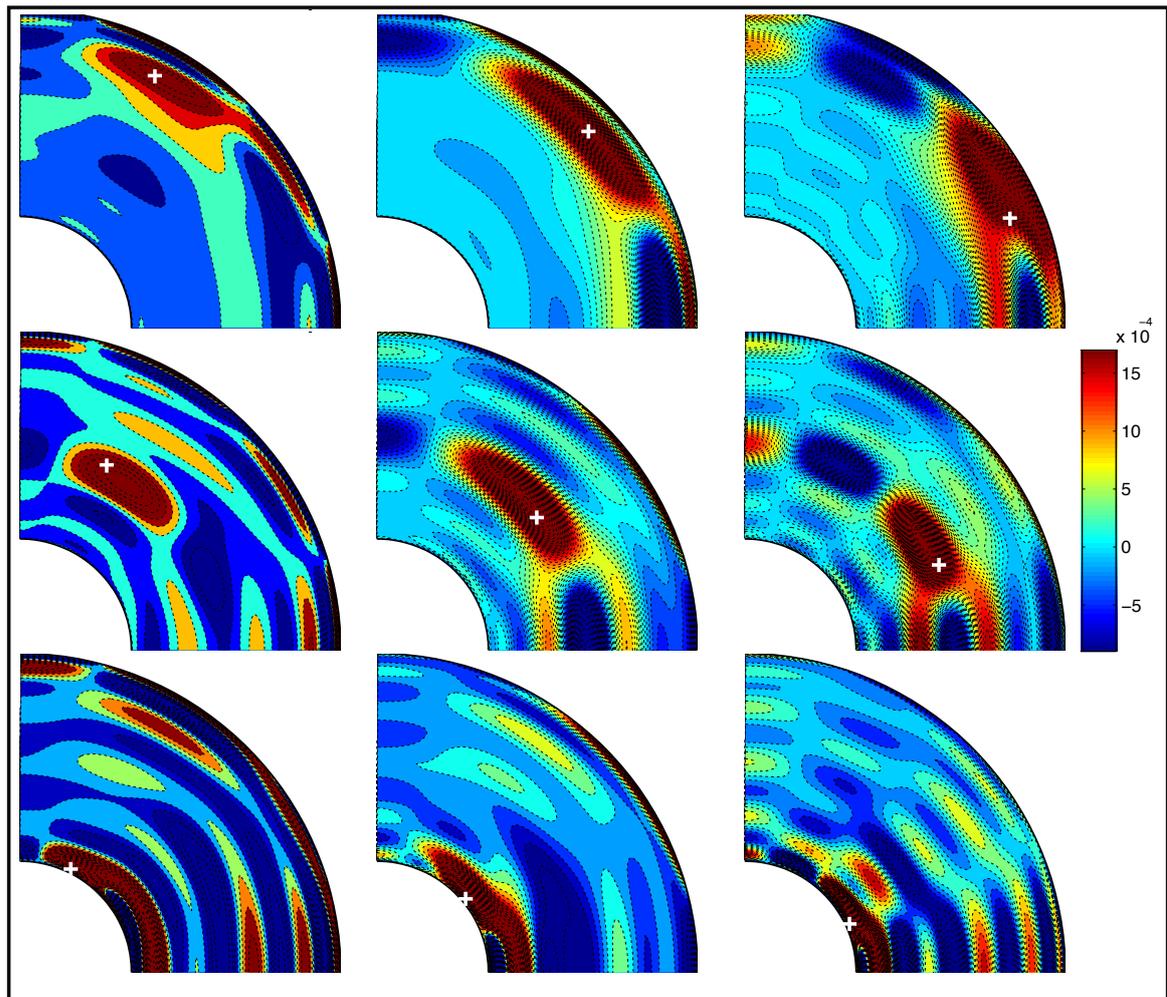


FIGURE A.3 – Matrice de résolution pointée sur différents paramètres du modèle de vitesse (croix blanche) pour l'inversion à $Rm = 28$. L'échelle de couleur est la même pour chacune des cartes et représente l'amplitude des résolutions.

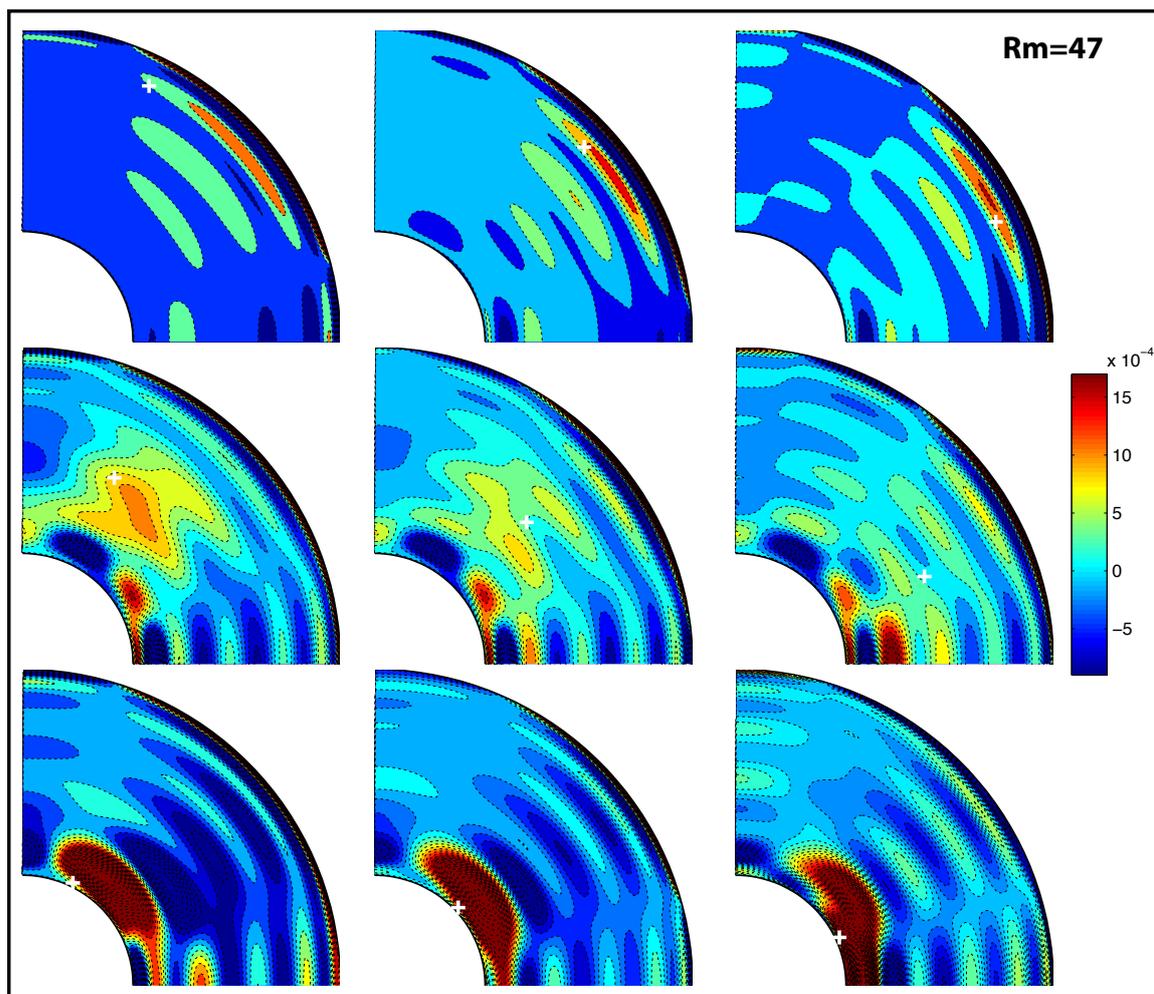


FIGURE A.4 – Matrice de résolution pointée sur différents paramètres du modèle de vitesse (croix blanche) pour l'inversion à $Rm = 47$. L'échelle de couleur est la même pour chacune des cartes et représente l'amplitude des résolutions.

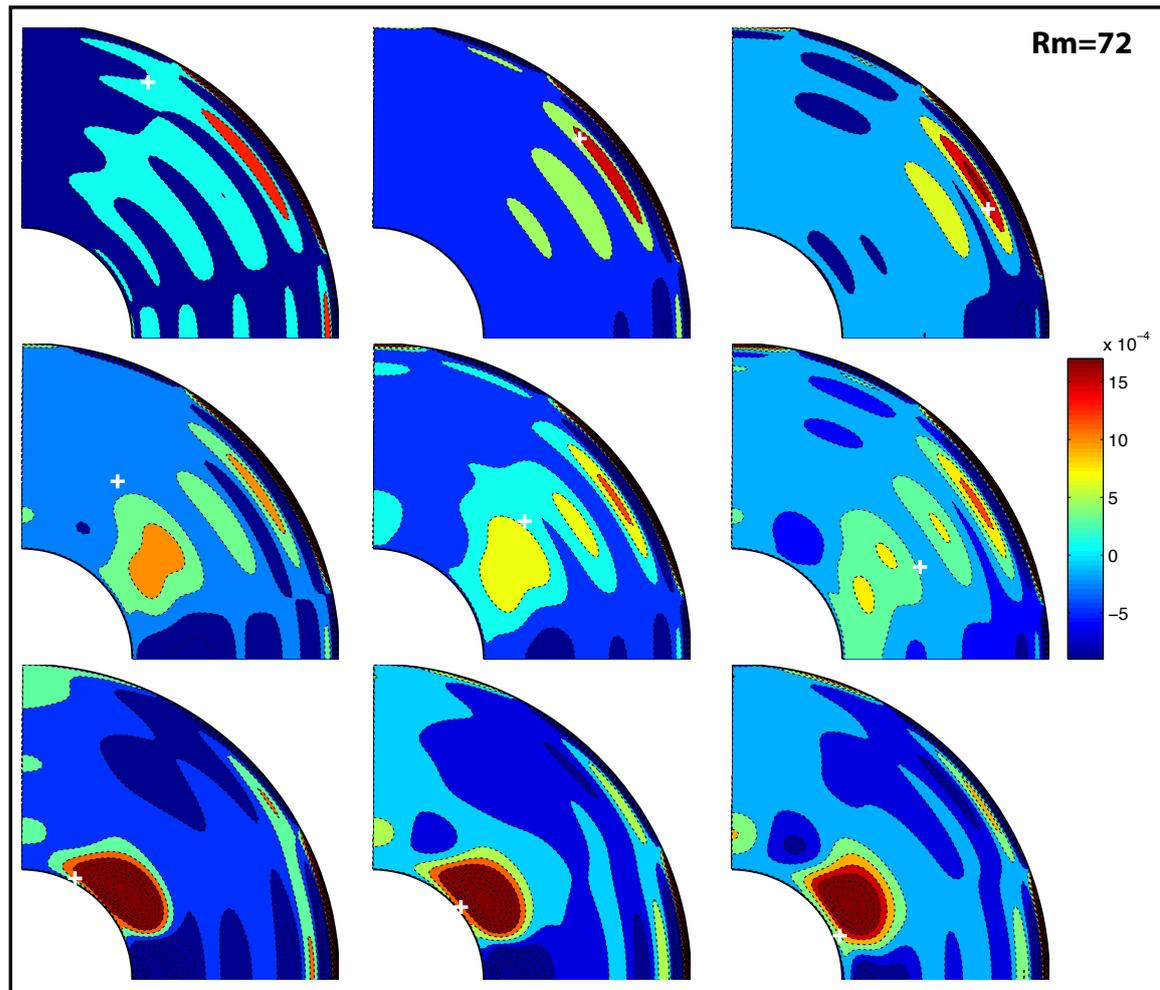


FIGURE A.5 – Matrice de résolution pointée sur différents paramètres du modèle de vitesse (croix blanche) pour l'inversion à $Rm = 47$. L'échelle de couleur est la même pour chacune des cartes et représente l'amplitude des résolutions.

8 Détail des données pour chaque inversion

Nous détaillons dans cet annexe chacune des inversions avec l'ensemble des données disponibles.

8.1 Inversion à $Rm = 28$ (-9 Hz)

Données du champ magnétique non-axisymétrique

Lat = 10° , $f = -8.8$ Hz						Lat = -20° , $f = -9.3$ Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
P1	×	×	×							
P2	×	×	×							
P3	×	×	×				×	×	×	
P4	×	×	×	×	×		×	×	×	
P5	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
P6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Lat = 40° , $f = 8$ Hz						Lat = -40° , $f = -4$ et -14.8 Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
P1	×	×					×			
P2	×	×					×			
P3	×	×	×				×	×		
P4	×	×	×	×			×	×		
P5	×	×	×	×		×	×	×	×	×
P6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

TABLE A.3 – Détail des données de champ magnétique non-axisymétrique pour la composante azimutale B_ϕ^m pour les différentes latitudes d'emplacement du doigt de gant et pour les différents capteurs positionnés en 6 points de rayon. Les modes d'ordre m marqués d'une croix rouge sont ceux qui ont pu être détectés par le capteur magnétique concerné. Notons que chaque mode comprend une partie réelle et une partie imaginaire, doublant ainsi le nombre de données. Pour le position des différents capteurs se reporter à la figure 5.1

Lat = 10°, $f = -8.8$ Hz						Lat = -20°, $f = -9.3$ Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
R ₁	×	×	×							
R ₃	×	×	×	×			×	×	×	
T ₁	×	×				×	×			
T ₃	×	×				×	×			

Lat = 40°, $f = 8.1$ Hz						Lat = -40°, $f = -4$ et -14.8 Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
R ₁						×	×			
R ₃	×	×	×			×	×			
T ₁						×	×			
T ₃		×	×							

TABLE A.4 – Détail des données de champ magnétique non-axisymétrique pour la composante radiale B_r^m et orthoradiale B_θ^m pour les différentes latitudes d'emplacement du doigt de gant et pour les différents capteurs positionnés en 2 points de rayon. Les capteurs magnétiques de la composante radiale et orthoradiale sont notés respectivement R et T. Les modes d'ordre m marqués d'une croix rouge sont ceux qui ont pu être détectés par le capteur magnétique concerné. Notons que chaque mode comprend une partie réelle et une partie imaginaire, doublant ainsi le nombre de données.

Données axisymétriques

Latitude = 10° , $f = 8.8$ Hz							Latitude = -20° , $f = 9.3$ Hz					
B	capteurs						capteurs					
B_φ	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
B_r	R1	R3					R1	R3				
B_θ	T1	T3					T1	T3				
Latitude = 40° , $f = 8.6$ Hz							Latitude = -40° , $f = x$ Hz					
B	capteurs						capteurs					
B_φ	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
B_r	R1	R3					R1	R3				
B_θ	T1	T3					T1	T3				
+ des mesures B_r en surface, lat = $3^\circ, 9^\circ, 15^\circ, 21^\circ, 27^\circ, 33^\circ$.												
+ des mesures B_θ en surface, lat = $3^\circ, 15^\circ, 27^\circ, 33^\circ, 45^\circ$.												
+ 5 ddp + 1 couple magnétique, acquisition à -9.1 Hz												

TABLE A.5 – Détail des données pour les trois composantes du champ magnétique moyen considéré axisymétrique, mesuré à 4 positions en latitude du doigt de gant. Les capteurs notés en rouge sont les capteurs disponibles pour une mesure magnétique à la fréquence de rotation f indiquée dans le quadrant supérieur. On ajoute également les données magnétique de surface dont les latitudes des points de mesures sont notés en rouge. Enfin il existe pour chaque inversion 5 données de potentiels électriques mesurés en surface et une valeur de couple magnétique.

Données doppler ultrasonore

Les profils doppler ultrasonore utilisés pour contraindre l'écoulement méridien et azimutal sont reportés figure A.6.

TABLE A.6 – *Détail des données de champ magnétique non-axisymétrique pour la composante azimutale B_{ϕ}^m pour les différentes latitudes d'emplacement du doigt de gant et pour les différents capteurs positionnés en 6 points de rayon. Les modes d'ordre m marqués d'une croix rouge sont ceux qui ont pu être détectés par le capteur magnétique concerné. Notons que chaque mode comprend une partie réelle et une partie imaginaire, doublant ainsi le nombre de données. Pour le position des différents capteurs se reporter à la figure 5.1*

Lat = 10°, $f = -15.4$ Hz						Lat = -20°, $f = -13$ et -17 Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
R ₁	×	×	×							
R ₃	×	×	×	×			×	×	×	
T ₁	×	×				×				
T ₃	×	×				×	×	×		

Lat = 40°, $f = -14.8$ Hz						Lat = -40°, $f = -14.8$ Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
R ₁	×					×	×			
R ₃	×	×	×			×	×			
T ₁						×	×			
T ₃		×	×							

TABLE A.7 – *Détail des données de champ magnétique non-axisymétrique pour la composante radiale B_r^m et orthoradiale B_{θ}^m pour les différentes latitudes d'emplacement du doigt de gant et pour les différents capteurs positionnés en 2 points de rayon. Les capteurs magnétiques de la composante radiale et orthoradiale sont notés respectivement R et T. Les modes d'ordre m marqués d'une croix rouge sont ceux qui ont pu être détectés par le capteur magnétique concerné. Notons que chaque mode comprend une partie réelle et une partie imaginaire, doublant ainsi le nombre de données.*

Données axisymétriques

Latitude = 10° , $f = -13.19$ Hz							Latitude = -20° , $f = 15$ Hz					
B	capteurs						capteurs					
B_φ	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
B_r	R1	R3					R1	R3				
B_θ	T1	T3					T1	T3				
Latitude = 40° , $f = -14.8$ Hz							Latitude = -40° , $f = x$ Hz					
B	capteurs						capteurs					
B_φ	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
B_r	R1	R3					R1	R3				
B_θ	T1	T3					T1	T3				
+ des mesures B_r en surface, lat = $3^\circ, 9^\circ, 15^\circ, 21^\circ, 27^\circ, 33^\circ$.												
+ des mesures B_θ en surface, lat = $3^\circ, 15^\circ, 27^\circ, 33^\circ, 45^\circ$.												
+ 5 ddp + 1 couple magnétique, acquisition à 15.22 Hz												

TABLE A.8 – Détail des données pour les trois composantes du champ magnétique moyen considéré axisymétrique, mesuré à 4 positions en latitude du doigt de gant. Les capteurs notés en rouge sont les capteurs disponibles pour une mesure magnétique à la fréquence de rotation f indiquée dans le quadrant supérieur. On ajoute également les données magnétique de surface dont les latitudes des points de mesures sont notés en rouge. Enfin il existe pour chaque inversion 5 données de potentiels électriques mesurés en surface et une valeur de couple magnétique.

Données doppler ultrasonore

Les profils doppler ultrasonore utilisés pour contraindre l'écoulement méridien et azimutal sont reportés figure A.7.

TABLE A.9 – Détail des données de champ magnétique non-axisymétrique pour la composante azimutale B_{ϕ}^m pour les différentes latitudes d'emplacement du doigt de gant et pour les différents capteurs positionnés en 6 points de rayon. Les modes d'ordre m marqués d'une croix rouge sont ceux qui ont pu être détectés par le capteur magnétique concerné. Notons que chaque mode comprend une partie réelle et une partie imaginaire, doublant ainsi le nombre de données. Pour le position des différents capteurs se reporter à la figure 5.1

Lat = 10°, $f = -17.5$ et -25.9 Hz						Lat = -20°, $f = -18.4$ et -24.3 Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
R ₁	×	×	×							
R ₃	×	×	×	×			×	×	×	
T ₁	×	×				×				
T ₃	×	×				×	×	×		
Lat = 40°, $f = -23.3$ Hz						Lat = -40°, $f = -21.9$ et -28.8 Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
R ₁	×					×	×			
R ₃	×	×	×			×	×			
T ₁						×	×			
T ₃		×	×							

TABLE A.10 – Détail des données de champ magnétique non-axisymétrique pour la composante radiale B_r^m et orthoradiale B_{θ}^m pour les différentes latitudes d'emplacement du doigt de gant et pour les différents capteurs positionnés en 2 points de rayon. Les capteurs magnétiques de la composante radiale et orthoradiale sont notés respectivement R et T. Les modes d'ordre m marqués d'une croix rouge sont ceux qui ont pu être détectés par le capteur magnétique concerné. Notons que chaque mode comprend une partie réelle et une partie imaginaire, doublant ainsi le nombre de données.

Données axisymétriques

Latitude = 10° , $f = -25.9$ Hz							Latitude = -20° , $f = -24.2$ Hz					
B	capteurs						capteurs					
B_φ	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
B_r	R ₁	R ₃					R ₁	R ₃				
B_θ	T ₁	T ₃					T ₁	T ₃				
Latitude = 40° , $f = -23.3$ Hz							Latitude = -40° , $f = x$ Hz					
B	capteurs						capteurs					
B_φ	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆
B_r	R ₁	R ₃					R ₁	R ₃				
B_θ	T ₁	T ₃					T ₁	T ₃				
+ des mesures B_r en surface, lat = $3^\circ, 9^\circ, 15^\circ, 21^\circ, 27^\circ, 33^\circ$.												
+ des mesures B_θ en surface, lat = $3^\circ, 15^\circ, 27^\circ, 33^\circ, 45^\circ$.												
+ 5 ddp + 1 couple magnétique, acquisition à -21.9 Hz												

TABLE A.11 – Détail des données pour les trois composantes du champ magnétique moyen considéré axisymétrique, mesuré à 4 positions en latitude du doigt de gant. Les capteurs notés en rouge sont les capteurs disponibles pour une mesure magnétique à la fréquence de rotation f indiquée dans le quadrant supérieur. On ajoute également les données magnétique de surface dont les latitudes des points de mesures sont notés en rouge. Enfin il existe pour chaque inversion 5 données de potentiels électriques mesurés en surface et une valeur de couple magnétique.

8.4 Inversion à $Rm = 94$ (-30 Hz)

Données du champ magnétique non-axisymétrique

Lat = 10° , $f = -17.5$ et -25.9 Hz						Lat = -20° , $f = -30.1$ Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
P1	×	×	×							
P2	×	×	×							
P3	×	×	×				×	×	×	
P4	×	×	×	×	×		×	×	×	
P5	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
P6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

Lat = 40° , $f = x$ Hz						Lat = -40° , $f = -30.1$ Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
P1							×			
P2							×			
P3							×	×		
P4							×	×		
P5						×	×	×	×	×
P6						×	×	×	×	×

TABLE A.12 – Détail des données de champ magnétique non-axisymétrique pour la composante azimutale B_ϕ^m pour les différentes latitudes d'emplacement du doigt de gant et pour les différents capteurs positionnés en 6 points de rayon. Les modes d'ordre m marqués d'une croix rouge sont ceux qui ont pu être détectés par le capteur magnétique concerné. Notons que chaque mode comprend une partie réelle et une partie imaginaire, doublant ainsi le nombre de données. Pour le position des différents capteurs se reporter à la figure 5.1

Lat = 10°, $f = -17.5$ et -25.9 Hz						Lat = -20°, $f = -30.1$ Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
R ₁	×	×	×							
R ₃	×	×	×	×			×	×	×	
T ₁	×	×				×				
T ₃	×	×				×	×	×		
Lat = 40°, $f = x$ Hz						Lat = -40°, $f = -30.1$ Hz				
Capteurs	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
R ₁	×					×	×			
R ₃	×	×	×			×	×			
T ₁						×	×			
T ₃		×	×							

TABLE A.13 – Détail des données de champ magnétique non-axisymétrique pour la composante radiale B_r^m et orthoradiale B_θ^m pour les différentes latitudes d'emplacement du doigt de gant et pour les différents capteurs positionnés en 2 points de rayon. Les capteurs magnétiques de la composante radiale et orthoradiale sont notés respectivement R et T. Les modes d'ordre m marqués d'une croix rouge sont ceux qui ont pu être détectés par le capteur magnétique concerné. Notons que chaque mode comprend une partie réelle et une partie imaginaire, doublant ainsi le nombre de données.

Données axisymétriques

Latitude = 10° , $f = -25.9$ Hz							Latitude = -20° , $f = -27.2$ Hz					
B	capteurs						capteurs					
B_φ	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
B_r	R1	R3					R1	R3				
B_θ	T1	T3					T1	T3				
Latitude = 40° , $f = -28.8$ Hz							Latitude = -40° , $f = x$ Hz					
B	capteurs						capteurs					
B_φ	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P1	P2	P3	P4	P5	P6
B_r	R1	R3					R1	R3				
B_θ	T1	T3					T1	T3				
+ des mesures B_r en surface, lat = $3^\circ, 9^\circ, 15^\circ, 21^\circ, 27^\circ, 33^\circ$.												
+ des mesures B_θ en surface, lat = $3^\circ, 15^\circ, 27^\circ, 33^\circ, 45^\circ$.												
+ 5 ddp + 1 couple magnétique, acquisition à -28.8 Hz												

TABLE A.14 – Détail des données pour les trois composantes du champ magnétique moyen considéré axisymétrique, mesuré à 4 positions en latitude du doigt de gant. Les capteurs notés en rouge sont les capteurs disponibles pour une mesure magnétique à la fréquence de rotation f indiquée dans le quadrant supérieur. On ajoute également les données magnétique de surface dont les latitudes des points de mesures sont notés en rouge. Enfin il existe pour chaque inversion 5 données de potentiels électriques mesurés en surface et une valeur de couple magnétique.

TABLE DES FIGURES

1.1	Dispositif expérimental de la dynamo de Riga.	9
1.2	Dispositif expérimental de Karlsruhe, une dynamo cinématique. . .	10
1.3	Dispositif expérimental de l'expérience VKS, Cadarache. Une dynamo de seconde génération.	12
2.1	Schéma du dispositif expérimental de l'expérience DTS.	20
2.2	Dispositif expérimental de l'expérience DTS. Etude du régime ma- gnétostrophique.	25
3.1	Illustration de l'effet d'induction Ω . Induction magnétique associée à l'écoulement de grande échelle.	37
4.1	Illustration schématique du problème de diffusion associé au <i>modèle</i> <i>statique</i> et au <i>modèle d'effet de peau</i>	40
5.1	Meridional maps of data coverage for the azimuthal and meridional component.	53
5.2	2π -longitudinal motifs of the non-axisymmetric magnetic field recor- ded by a Hall magnetometer measuring B_φ for $r = 0.79$ at a latitude of -20°	55
5.3	Radial profiles of velocity and magnetic modes for all harmonic de- grees.	63
5.4	Radial profiles of the induced axisymmetric poloidal magnetic modes for all harmonic degrees.	64
5.5	Maps of the velocity and magnetic fields in a meridional (r, θ) sec- tion. Black spherical lines mark successively the copper, the fluid and the stainless steel shells.	66

5.6	Fits of the angular velocity predictions to ultrasound velocimetry doppler profiles.	68
5.7	Fits of velocity predictions to ultrasound velocimetry doppler profiles. These plots compare the measured data with their error bars to our kinematic model predictions of the meridional and radial velocity.	69
5.8	Azimuthal predictions and measurements : (<i>left : azimuthal magnetic field</i>) azimuthal magnetic field predictions inside the fluid with the measured data and their error bars.	70
5.9	Meridional predictions and measurements.	71
5.10	Plot of the radial evolution of the non-axisymmetric magnetic data for experimental measurements and predictions at latitude -10° . For experimental data, we plot the imaginary (vertical axis) and real part (horizontal axis) of the Fourier coefficients of the azimuthal motifs presented in section 1.4.	72
5.11	Plot of non-axisymmetric magnetic data of five azimuthal modes from $m = 1$ to 5, for two magnetic components at two different latitudes.	76
6.1	Mécanisme d'induction de Parker combinant l'action couplée d'un champ vitesse u et son hélicité ζ . Ce mécanisme représente l'induction $\alpha\Omega$ discuté dans le texte. Schéma Roberts et King (2013)	91
6.2	Résultat de simulations numériques directes (<i>dns</i>) obtenues par Figueroa <i>et al.</i> (2013). Cartes méridionales du champ de vitesse azimutale et de l'énergie des fluctuations.	95
6.3	Estimation expérimentale des fluctuations de vitesse et du champ magnétique dans l'expérience DTS. Evaluation expérimentale de la <i>fem</i>	96

- 7.1 Sketch of the DTS experiment with its liquid sodium contained between an outer stainless steel shell (grey, with latitude labels in degrees) and an inner copper sphere (orange), which spins as indicated by the red arrow around the vertical rotation axis (here tilted for clarity). *left half of the sphere* : the field lines of the dipolar magnetic field imposed by the central magnet are drawn on top of the contour map of the fluid angular velocity ω (normalized by that of the inner sphere) inverted from data measured for $Rm = 94$. *right half of the sphere* : field lines of the total reconstructed magnetic field. The field lines are strongly distorted by the flow (ω -effect). The blue cones mark the radial positions of the 6 magnetometers $P1$ ($r = radius/r_o = 0.99$) to $P6$ ($r = 0.50$), which measure the azimuthal magnetic field. They can be placed at 4 different latitudes (here -20°). 102
- 7.2 Radial profiles of the α -effect (a) and β -effect (b) with their error bars, obtained by the inversion of DTS data for two magnetic Reynolds number : $Rm = 28$ and 72 . The *a priori* null profile, along with its error bar, is also drawn. The blue curve shows the $\alpha(r)$ and $\beta(r)$ profiles retrieved from a numerical simulation of the DTS experiment at $Rm = 29$ and $Re = 2.9 \times 10^4$, blown up by a factor 4×10^4 104
- 7.3 Measurements and model fits for an example of time-varying magnetic signals measured at $2f$ ($m=2$) and $3f$ ($m=3$) frequencies, for a rotation rate of the inner sphere $f = -23\text{Hz}$ ($Rm = 72$). See text for explanations. 105
- 7.4 Meridional cross section contour maps showing orthoradial component (θ) of emf \mathcal{E} and of electrical current $\langle \mathbf{J} \rangle$. (a) Averaged emf \mathcal{E}_t obtained from DNS. (b) Reconstructed emf $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ from inverted α and β profiles. High latitudes (white area) are excluded from the least-square fit. (c) Mean electrical current from DNS. 106

7.5	Profils radiaux du champ magnétique azimuthal induit B_φ , résultat de la même inversion à $Rm = 74$. Prédications représentées à la latitude -20°	110
7.6	Valeur de différences de potentiel prises à la surface de la sphère externe. Mesures faites le long d'un méridien aux latitudes 10° , 20° , 30° et 40°	111
7.7	Modes magnétiques azimuthaux, B_φ^m , pour $m = 2, 3$ et 4 pris à la latitude $+10^\circ$. Evolution radiale pour le <i>modèle statique</i> , le <i>modèle d'effet de peau</i> , le modèle cinématique et le modèle cinématique complet (incluant la <i>fem</i>).	113
7.8	Matrices des corrélations a posteriori pour le modèle radial α et β	117
7.9	Matrice de résolution pointée sur différents paramètres du modèle de vitesse pour trois inversions différentes à $Rm = 28, 47$ et 72	120
8.1	Cartes méridionales du champ de vitesse et du champ magnétique induit pour quatre valeurs de Reynolds magnétique $Rm = 28, 47, 72$ et 97	126
8.2	Profils radiaux du champ magnétique poloïdal axisymétrique induit par l'écoulement moyen seul et l'écoulement moyen plus la <i>fem</i> . On représente les degrés harmonique du champ magnétique depuis $l = 1$ (le dipôle) à $l = 6$	128
8.3	Modes magnétiques azimuthaux $m = 1, 4$ et 2 évoluant en fonction du rayon le long des courbes en pointillées selon le <i>modèle d'effet de peau</i> et le <i>modèle statique</i>	131
8.4	Modes magnétiques azimuthaux $m = 1, 4$ et 2 évoluant en fonction du rayon le long de chaque courbe selon le modèle cinématique complet et le <i>modèle statique</i>	132
8.5	Sections méridionales des courants électriques sur leur composantes radiale J_r et la force électromotrice emf_r . Résultats obtenus par simulation numérique directe et pour les inversions à $Rm = 28$ et 72	135

8.6	Sections méridionales des courants électriques sur leur composantes radiale J_θ (cartes du haut) et la force électromotrice emf_θ . Résultats obtenus par simulation numérique directe et pour les inversions à $Rm = 28$ et 74	136
A.1	Location of the magnetic measurements used to infer the scalar magnetic potential of the inner sphere's magnet. In this meridional cross-section, the arrows indicate which component (B_r in blue, B_θ in red) is measured, the small black circles corresponding to B_ϕ data.	163
A.2	Contour map of the scalar magnetic potential of the magnet reconstructed at the surface of the inner sphere.	165
A.3	Matrice de résolution pointée sur différents paramètres du modèle de vitesse pour l'inversion à $Rm = 28$	167
A.4	Matrice de résolution pointée sur différents paramètres du modèle de vitesse pour l'inversion à $Rm = 47$	168
A.5	Matrice de résolution pointée sur différents paramètres du modèle de vitesse pour l'inversion à $Rm = 47$	169
A.6	Profils de vélocimétrie doppler contraignants l'écoulement moyen azimutal (à gauche) et l'écoulement moyen méridional (à droite). L'ensemble fournit un jeu de 875 données pour cette inversion.	173
A.7	Profils de vélocimétrie doppler contraignants l'écoulement moyen azimutal (à gauche) et l'écoulement moyen méridional (à droite). L'ensemble fournit un jeu de 207 données pour cette inversion.	176

Contributions des fluctuations turbulentes au champ magnétique induit dans une expérience en sodium liquide.

La plupart des objets astrophysiques, comme les planètes ou les étoiles, produisent leur propre champ magnétique à partir d'une forte agitation d'un fluide conducteur d'électricité comme un métal en fusion ou un plasma ionique. Un champ magnétique de grande échelle est alors créé lorsque les mouvements de ce fluide génèrent des courants induits suffisamment intenses pour compenser la dissipation Ohmique du système. Ceci est vrai pour des dynamiques à haut nombre de Reynolds magnétique $Rm = UL/\eta$ (U et L sont la vitesse et la longueur caractéristique du système et η la diffusivité magnétique). Il est connu, que l'écoulement moyen d'un fluide en rotation peut produire un champ magnétique de grande échelle en cisillant les lignes d'un champ magnétique déjà présent dans le système. Il s'agit de l'effet Omega. Cependant, un tel processus d'induction ne permet pas d'obtenir une dynamo qui s'auto-entretienne, celle-ci a donc besoin d'un mécanisme d'induction supplémentaire pour exister. Ainsi, on fait souvent appel aux mouvements turbulents de petites échelles pour fournir l'ingrédient manquant à l'effet dynamo.

Les contributions des fluctuations turbulentes au champ magnétique moyen font l'objet d'une étude approfondie dans notre expérience de Couette sphérique soumise à un fort champ magnétique. Notre dispositif expérimental, appelé Derviche Tourneur Sodium (DTS), est une expérience en sodium liquide conçue pour explorer le régime magnétostrophique du noyau terrestre où les forces de Coriolis et de Lorentz sont à l'équilibre.

De nombreuses mesures sont réalisées au sein de notre expérience et nous obtenons par méthode inverse des profils radiaux de la force électromotrice moyenne, exprimée en terme d'effets alpha et beta, et des cartes de l'écoulement moyen pour des Reynolds magnétique allant $Rm = 30$ à 100 . Il résulte de ces inversions que les fluctuations turbulentes de l'écoulement peuvent être modélisées par une forte contribution à la diffusivité magnétique, négative dans la région interne et positive près de la sphère externe. Une simulation numérique directe de l'expérience appuie également ce résultat. La réduction de la diffusivité magnétique effective par les mouvements de petites échelles implique que la turbulence peut aider à l'auto-génération d'un champ magnétique de grande échelle. De ce point de vue la turbulence est un ingrédient favorisant l'effet dynamo.

Mots-clés: *Turbulence, effet β , champ magnétique*

Turbulent contributions to the induced magnetic field in a liquid sodium experiment

Earth, Sun and many other astrophysical bodies produce their own magnetic field by dynamo action, where induction of magnetic field by fluid motion overcomes the Joule dissipation when the magnetic Reynolds number $Rm = UL/\eta$ is large enough (U and L are characteristic velocity and length-scale and η the magnetic diffusivity). Large scale motion of a conducting medium shearing pre-existing magnetic field lines is a well known process to produce large scale magnetic field by omega-effect. However, such a process cannot sustain a self-excited dynamo and small-scale turbulent motions are usually invoked as the appropriate mechanism to dynamo action.

The contribution of turbulent fluctuations to the induction of mean magnetic field is investigated in our liquid sodium spherical Couette experiment, with an imposed magnetic field. Our experimental device, named Derviche Tourneur Sodium (DTS), has been designed to explore the magnetostrophic regime of the Earth outer core where Coriolis and Lorentz forces are in balance.

Many measurements are used through an inversion technique to obtain radial profiles of the mean electromotive force, expanded in terms of alpha and beta effects, together with the mean flow at magnetic Reynolds number $Rm = 30$ up to 100 . It appears that the small scale turbulent fluctuations can be modeled as a strong contribution to the magnetic diffusivity which is negative in the interior region and positive close to the outer shell. Direct numerical simulations of our experiment support these results. The lowering of the effective magnetic diffusivity by small scale fluctuations implies that turbulence can actually help to achieve self-generation of large scale magnetic fields.

Keywords: *Turbulence, β -effect, magnetic field*