



HAL
open science

Estimations paramétriques et non-paramétriques pour des modèles de diffusions périodiques

Khalil El Waled

► **To cite this version:**

Khalil El Waled. Estimations paramétriques et non-paramétriques pour des modèles de diffusions périodiques. Autre [cs.OH]. Université Rennes 2, 2015. Français. NNT: 2015REN20042 . tel-01266232

HAL Id: tel-01266232

<https://theses.hal.science/tel-01266232>

Submitted on 2 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE / Université Rennes 2
sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

pour obtenir le titre de :

DOCTEUR DE L'Université Rennes 2

Mention : *Mathématiques Appliquées* Option : *Statistique*

présentée par :

Khalil EL WALED

École doctorale : **MATISSE**

Laboratoire : **Institut de Recherche Mathématique
de Rennes, CNRS umr 6625**

Estimations paramétriques et non-paramétriques pour des modèles de diffusions périodiques

Thèse soutenue le (25/11/2015)

devant le jury composé de

Catherine LAREDO

DR INRA, Jouy en Josas & Université D. Diderot Paris 7 / rapporteur

Dasha LOUKIANOVA

MCF HDR, Université d'Évry / rapporteur

Brice FRANKE

PR, UBO, Brest / examinateur

Yury KUTOYANTS

PR, Université du Maine au Mans / président du jury

Valérie MONBET

PR, Université Rennes 1 / examinatrice

Dominique DEHAY

PR, Université Rennes 2 / directeur de thèse

Remerciements

Je voudrais d'abord adresser mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Je tiens à remercier, plus particulièrement, le Professeur Dominique DEHAY, mon directeur de thèse. Sans sa grande disponibilité, ses conseils et orientations, je n'aurais jamais amené ce travail à terme.

Je souhaiterais également exprimer ma profonde gratitude à Catherine LAREDO et à Dasha LOUKIANOVA pour l'honneur qu'elles m'ont fait en acceptant de rapporter sur le manuscrit de cette thèse. Leurs remarques et suggestions m'ont été très utiles pour améliorer mes résultats. Merci infiniment à elles. Je tiens aussi à remercier les Professeurs Brice FRANKE, Yury KUTOYANTS et Valérie MONBET d'avoir accepté de faire partie du jury. Je suis très honoré d'un tel jury.

Je suis également très reconnaissant à tous mes collègues et notamment ceux des départements MASS et AES.

Mes remerciements sont adressés aux personnels administratifs de l'Université Rennes 2, du laboratoire IRMAR et de l'école doctorale MATISSE pour leur gentillesse et leur grand professionnalisme.

Un grand merci à la région Bretagne qui a assuré le financement de ma thèse. Ce contrat doctoral a été conclu sous le numéro n°2010/14.

Je dois aussi remercier tous les enseignants et les personnels administratifs, dont une partie n'est plus de ce monde, que j'ai connus tout au long de mes études et que mon éducation et ma formation sont grâce à leurs efforts considérables.

Enfin, je remercie très chaleureusement ma famille et mes amis qui m'ont toujours soutenu dans ma vie.

Dédicaces

Je dédie ce travail à ma mère, ma femme, ma sœur, ma nièce et à mes neveux.

Je le dédie également à mes oncles, mes tantes ainsi qu'à tous les autres membres de ma chère famille.

Je le dédie enfin à tous mes amis.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Préliminaire, état de l'art	1
1.2	Plan et contenu de la thèse	5
2	Étude de propriétés du processus géométrique $\{\xi_t\}$	7
2.1	Introduction	7
2.2	Représentation de $\{\xi_t\}$	8
2.3	Propriété de martingale, propriété Markovienne	10
2.4	Comportement asymptotique de $\{\xi_t\}$	11
3	Estimation paramétrique en temps continu du drift d'un modèle de type <i>signal plus bruit</i>	15
3.1	Introduction	15
3.2	Étude du cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$	16
3.3	Convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_T$ dans le cas général	22
3.3.1	Contraste	23
3.3.2	Convergence en probabilité	24
3.3.3	Normalité asymptotique	27
3.4	Propriété LAN et efficacité asymptotique	33
3.4.1	Propriété LAN	33
3.4.2	Efficacité asymptotique	35
3.5	Simulation	39
3.5.1	Boxplots des valeurs de l'estimateur $\hat{\theta}_n$	40
3.5.2	Histogrammes des valeurs de $\bar{\theta}_n = \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$	44
4	Estimation paramétrique en temps discrétisé du drift d'un modèle de type <i>signal plus bruit</i>	47
4.1	Introduction	47
4.2	Étude du cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$	49
4.3	Convergence en probabilité de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ dans le cas général	52
4.4	Propriété LAN	58
4.5	Normalité asymptotique et efficacité asymptotique	60

5	Estimation non-paramétrique du drift d'un modèle de type <i>signal plus bruit</i>	67
5.1	Introduction	67
5.2	Construction de l'estimateur de $f(t)$	68
5.3	Convergence de l'estimateur	69
5.3.1	Convergence du biais	69
5.3.2	Convergence en moyenne quadratique et convergence de l'erreur quadratique moyenne intégrée	72
5.3.3	Normalité asymptotique	78
5.4	Consistance forte	80
5.5	Simulation	88
6	Estimation non-paramétrique du drift d'un modèle de type <i>Ornstein-Uhlenbeck</i>	93
6.1	Introduction	93
6.2	Propriétés de l'estimateur	95
6.2.1	Le biais de l'estimateur	95
6.2.2	Vitesse de convergence du biais	97
6.3	Convergence en moyenne quadratique	99
6.4	Étude de l'estimateur modifié $\hat{f}_n^*(t)$	102
6.4.1	Biais de l'estimateur et convergence en moyenne quadratique	103
6.4.2	Vitesse de convergence	107
6.4.3	Variance limite	109
6.5	Simulation	115
7	Annexes	121
7.1	Annexe au chapitre 4	121
7.2	Annexe au chapitre 5	122
7.3	Annexe au chapitre 6	126
	Bibliographie	131

Chapitre 1

Introduction

1.1 Préliminaire, état de l'art

La statistique des processus stochastiques a été l'objet de nombreux travaux. Voir par exemple [26, 38, 39]. Voir aussi [1, 45] pour l'inférence et la prédiction de ces processus.

Dans cette thèse nous nous intéressons aux processus périodiques satisfaisant une équation différentielle stochastique (EDS) du type

$$dX_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad X_0 = x$$

où $f(t, x) = f(t)$ et $f(t, x) = f(t).x$ et $f(\cdot, \cdot)$, $\sigma(\cdot)$ sont des fonctions continues, réelles et périodiques en t de même période P et $\{W_t\}$ est un mouvement Brownien.

Signalons que dans le cadre général nous pouvons parler de processus stochastiques périodiques sans qu'ils soient nécessairement des processus de diffusion. Dans cette perspective, tout processus stochastique qui contient dans sa structure une propriété de périodicité peut être considéré comme un processus stochastique périodique. Sans être exhaustif, citons les processus périodiquement corrélés. Introduits par Gladyshev en 1961, (voir [19]), ces processus se rencontrent dans différents domaines : en Ingénierie et en Physique (voir [14, 15, 43]) et récemment en Mécanique [4, 5] ou en Biologie [6, 22].

L'objectif du travail présenté dans cette thèse concerne des processus stochastiques périodiques qui ne sont pas nécessairement périodiquement corrélés. Plus précisément, nous étudions des processus solutions d'équations différentielles stochastiques ayant des coefficients de drift (ou dérive) et de diffusion périodiques en temps, et nous nous intéressons à l'estimation paramétrique et à celle non-paramétrique de ces coefficients dans les différents modèles que nous considérons.

Estimation paramétrique

Nous traitons d'abord le processus $\{\zeta_t\}$ du type *signal plus bruit* donné par

$$d\zeta_t = f(t, \theta)dt + \sigma(t)dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

où $\sigma(\cdot) > 0$ et en particulier le cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$, c'est-à-dire le modèle

$$d\zeta_t = \theta f(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

Bien que ce modèle puisse se ramener au modèle général bien connu

$$dX_\epsilon(t) = S_\epsilon(t, \theta)dt + dW_t \quad (1.3)$$

qui fut étudié, entre autres, par Ibragimov et Khas'minskii ([26], Chapitre II, section 7), nous préférons traiter le modèle $\{\zeta_t\}$ et nous intéresser aux propriétés spécifiques dues à la périodicité de $f(\cdot)$ et de $\sigma(\cdot)$ qui n'apparaît pas dans les travaux d'Ibragimov et Khas'minskii [26]. Cette périodicité nous permet dans le cas d'observations continues et dans le cas d'observations discrètes, de donner une expression explicite du rapport de vraisemblance, d'établir de bonnes propriétés pour l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ , de prouver sa convergence en probabilité, sa normalité et son efficacité asymptotique et de démontrer, de plus, sa convergence presque sûre dans le cas d'une observation continue du processus $\{\zeta_t\}$ pour le modèle (1.2).

Pour l'estimation des paramètres de processus périodiques de diffusion, Höpfner et Kutoyants [25] ont considéré une généralisation du modèle (1.3) dans un cadre périodique donnée par

$$d\xi_t^\theta = (S(t, \theta) + b(\xi_t^\theta))dt + \sigma(\xi_t^\theta)dW_t, \quad t \geq 0, \quad \xi_0^\theta = x_0, \quad (1.4)$$

où $t \mapsto S(t, \theta)$ est une fonction périodique dont la forme est connue et la période θ est le paramètre à estimer. Ils étudient le comportement asymptotique d'une suite de modèles locaux en θ correspondant à des observations du processus ξ . Sous une condition d'ergodicité, et en utilisant des segments de trajectoire du processus ξ , c'est-à-dire des suites de variables aléatoires à valeurs dans un espace fonctionnel, ils ont démontré que si le signal $S(\cdot, \cdot)$ est lisse, nous obtenons la normalité asymptotique locale dans le sens de Le Cam [37] avec une échelle d'ordre $T^{-\frac{3}{2}}$. En revanche, si le signal a un nombre fini de discontinuités et appartient à une classe de Hölder d'ordre $\frac{1}{2}$, nous avons un modèle asymptotique de type différent avec une échelle d'ordre T^{-2} .

Ils ont auparavant étudié en [24] le modèle (1.4), où $S(\cdot, \cdot)$ est discontinue aux points $kP + \theta$, $k \in \mathbb{N}$ où P est la période de la fonction : $t \mapsto S(t, \theta)$. Sous l'hypothèse que le processus $(\xi_{kP})_{k \in \mathbb{N}}$ est positif Harris récurrent et en utilisant la périodicité, ils prouvent la convergence d'un modèle local de voisinage de θ avec une vitesse T^{-1} .

Nous pouvons aussi citer les travaux de Mishra et Prakasa Rao [40] relatifs à la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour le drift d'un processus de diffusion non-homogène.

Concernant les problèmes d'estimation paramétrique à partir des observations discrétisées, nous citons, à titre d'exemples, les travaux suivants : Pour

l'estimation du drift d'un processus de diffusion, Le Breton [35] a montré que les estimateurs du maximum de vraisemblance basés sur une observation discrète ont asymptotiquement le même comportement que les estimateurs du maximum de vraisemblance basés sur une observation continue.

Kasonga [29] a utilisé la méthode des moindres carrés pour montrer la consistance d'un estimateur basé sur une observation discrétisée.

Le cas des modèles de diffusion ergodique est étudié dans Dacunha-Castelle et Florens-Zmirou [8], Florens-Zmirou [13], etc.

En utilisant la méthode du maximum de contraste, Genon-Catalot [16] a établi, sous des hypothèses classiques, des résultats asymptotiques pour l'estimation d'un paramètre du drift d'un processus de diffusion uni-dimensionnel avec *petit bruit*. Harison [21] a utilisé cette méthode pour estimer le paramètre du drift pour un modèle Gaussien uni-dimensionnel et non stationnaire du type *Ornstein-Uhlenbeck* avec un coefficient du drit dépendant du temps.

Estimation non-paramétrique

Quant à l'estimation non-paramétrique, plusieurs méthodes d'estimation existent. Parmi ces méthodes nous pouvons citer l'estimation à noyau et l'estimation par projection.

Pour l'estimation du signal déterministe d'un modèle du type *signal plus petit bruit* dont l'équation est

$$dX_t = f(t)dt + \epsilon dW_t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

Ibragimov et Khas'minskii (Chapitre VII, section 4 de [26]) ont proposé l'estimateur à noyau suivant

$$\hat{F}_1(t_0) := \frac{1}{\phi(\epsilon)} \int_0^1 g\left(\frac{t-t_0}{\phi(\epsilon)}\right) dX_t.$$

Pour $\epsilon = 1$, $0 \leq t \leq n$, c'est-à-dire le modèle

$$dX_t = f(t)dt + dW_t,$$

où $f(\cdot)$ est périodique de période 1, qui correspond exactement au modèle (1.2) que nous étudions, ils proposent

$$\hat{F}_2(t_0) = \frac{1}{n\psi(n)} \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} g\left(\frac{t-t_0-i}{\psi(n)}\right) dX_t,$$

où $\phi(\cdot)$ et $\psi(\cdot)$ tendent vers 0 respectivement quand ϵ tend vers 0 et n tend vers ∞ et $g(\cdot)$ est une fonction qui vérifie la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = 1.$$

Ces estimateurs sont uniformément asymptotiquement sans biais et convergent uniformément en moyenne quadratique. Cependant, ces auteurs rencontrent des

problèmes au bord de l'intervalle $[0, 1]$, raison pour laquelle ils supposent que $0 < t < 1$. Dans notre cadre, nous allons contourner ce problème en utilisant un noyau périodique et démontrer de plus que l'estimateur que nous construisons est asymptotiquement normal et converge presque sûrement, ce qui n'est pas prouvé par Ibragimov et Khas'minskii dans [26].

Kutoyants (Chapitre 4 section 4.2 de [33]) a étudié un estimateur à noyau pour le drift d'un modèle de type *Ornstein-Uhlenbeck* à *petit bruit*. Il a démontré que cet estimateur converge en moyenne quadratique et il a précisé la vitesse de cette convergence.

En ce qui concerne la méthode par projection, nous pouvons la retrouver dans plusieurs travaux (voir, par exemple, Chapitre 1, section 7 de [46]).

Delhing et al. [11] ont considéré le modèle semi paramétrique de type *Ornstein-Uhlenbeck* donné par

$$dX_t = (f(t) - \alpha X_t)dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0$$

où α et σ sont des constantes strictement positives et $f(\cdot)$ est une fonction périodique, inconnue qui s'écrit sous la forme suivante

$$f(t) = \sum_{i=1}^p \mu_i \phi_i(t),$$

les fonctions $\phi_1(t), \dots, \phi_p(t)$ étant connues et les paramètres μ_1, \dots, μ_p et p sont inconnus. En appliquant la méthode du maximum de vraisemblance et en se basant sur une observation continue en temps de $\{X_t\}$, ils donnent une expression explicite d'un estimateur de $f(\cdot)$ et ils démontrent ensuite sa convergence presque sûre ainsi que sa normalité asymptotique quand le temps d'observation tend vers l'infini. Le mécanisme essentiel de cette étude asymptotique consiste, comme dans les travaux cités ci-dessus de Höpfner et Kutoyants [25], à interpréter le processus stochastique comme des segments de trajectoire du processus $\{X_t\}$.

Castillo et al. [3] utilisent également la procédure de projection pour estimer la forme d'une fonction périodique de période θ inconnue, représentant le drift du modèle suivant

$$dX_t = f(t/\theta)dt + dW_t.$$

Dans ce cadre semi paramétrique et en se basant sur des estimateurs $\hat{\theta}_T$ du paramètre θ étudiés, entre autres par [2, 20], et en utilisant la méthode des blocs de Stein, ils définissent un estimateur de $f(\cdot)$ à partir de la projection de la trajectoire du processus observé sur l'espace des fonctions aléatoires qui à t associent $\exp(2i\pi kt/\hat{\theta}_T)$. Plus précisément, sous certaines conditions de régularité du type appartenance à un espace de Sobolev, ils démontrent que cet estimateur possède une propriété minimax (sharp minimax).

1.2 Plan et contenu de la thèse

Dans le chapitre 2 nous présentons d'abord une application du modèle (1.2), il s'agit du processus $\{\xi_t\}$ donné par $d\xi_t = \xi_t d\zeta_t$. Le processus $\{\xi_t\}$ est alors la solution de l'équation différentielle stochastique géométrique et linéaire

$$d\xi_t = \theta f(t)\xi_t dt + \sigma(t)\xi_t dW_t. \quad (1.5)$$

Les équations de ce type apparaissent dans des domaines aussi variés que la Finance ([28, 31], modèle de Black-Scholes-Merton), la Mécanique [27, 30] ou la Biologie [6, 22]. Pour mieux comprendre la structure de $\{\xi_t\}$, nous étudions certaines de ses propriétés : propriété de martingale, propriété Markovienne.

Le chapitre 3 est consacré à l'estimation paramétrique du drift du modèle (1.1). En supposant que nous observons une trajectoire continue du processus $\{\zeta_t\}$ sur l'intervalle $[0, T]$, nous déterminons la vraisemblance de ces observations.

Lorsque $f(t, \theta) = \theta f(t)$ (Section 3.2), l'expression de l'estimateur par la méthode du maximum de vraisemblance est connue explicitement. Nous prouvons de façon simple sa convergence en moyenne quadratique, sa convergence presque sûre et sa normalité asymptotique. Ensuite, nous rappelons la définition d'une famille localement asymptotiquement normale (LAN) ainsi que celle de l'efficacité asymptotique minimax et nous constatons que cet estimateur est asymptotiquement efficace au sens minimax.

Dans la Section 3.3 nous revenons au modèle général (1.1), et nous prouvons que sous des conditions de régularité des fonctions $f(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ et lorsque l'espace des paramètres est compact, l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ existe. De plus, en faisant appel aux résultats de Dacunha-Castelle et Duflo [7] sur les estimateurs du maximum de contraste, nous démontrons la convergence en probabilité (Corollaire 2) ainsi que la normalité asymptotique (Théorème 5) de l'estimateur de θ . Nous prouvons ensuite dans la Section 3.4 la propriété LAN et nous appliquons un résultat de Kutoyants [26] qui nous donne les conditions sous lesquelles nous avons l'efficacité asymptotique minimax.

Nous terminons ce chapitre par des simulations afin d'illustrer la convergence de ces estimateurs.

Au chapitre 4, nous considérons toujours le modèle (1.1). Néanmoins nous supposons maintenant que nous ne disposons que d'une observation discrétisée. C'est-à-dire que les instants d'observations sont $t_i := i\delta_n$, $i \in \{0, \dots, n\}$, où $\delta_n = \frac{T}{n}$.

Après avoir calculé la vraisemblance des observations discrétisées dans le cadre général, nous étudions dans la Section 4.2 le modèle (1.2), c'est-à-dire le cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$. Nous explicitons l'expression de l'estimateur du paramètre θ et nous prouvons qu'il est sans biais, converge en moyenne quadratique, asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace au sens minimax.

De même qu'au chapitre 3, en considérant le modèle général exprimé en (1.1) et sous certaines hypothèses de régularité et d'identifiabilité, nous démontrons l'existence d'un estimateur qui converge en probabilité (Corollaire 4). Nous prouvons par la suite dans la Section 4.4 la propriété LAN. En outre, en appliquant un résultat d'Ibragimov et Khas'minskii [26] et sous certaines conditions supplémentaires de régularité et une condition d'identifiabilité uniforme, nous établissons que cet estimateur est asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace au sens minimax (Corollaire 5). Une partie de ces deux chapitres 3 et 4 a servi comme contribution dans les actes [12].

Le chapitre 5 est consacré à l'estimation non-paramétrique de la fonction $f(\cdot)$ dans le modèle (1.2) en supposant que θ est connu, $\theta = 1$, et que nous observons une trajectoire continue du processus $\{\zeta_t\}$ sur l'intervalle $[0, T]$.

Dans la deuxième section et en utilisant un noyau périodique, nous construisons un estimateur à noyau pour la fonction $f(\cdot)$. Nous nous intéressons ensuite à la convergence de cet estimateur. Nous prouvons qu'il est asymptotiquement sans biais et nous précisons la vitesse de cette convergence qui est uniforme par rapport à t variant dans l'intervalle $[0, P]$. Nous démontrons également la convergence en moyenne quadratique (Théorème 11), la convergence de l'erreur quadratique moyenne intégrée, leurs vitesses de convergence ainsi que la normalité asymptotique (Théorème 13). La section 4 est dédiée à la convergence presque sûre.

Nous terminons ce chapitre par des simulations afin d'illustrer la consistance de cet estimateur. Ce chapitre a donné lieu à une publication [10].

Dans le chapitre 6 nous considérons un modèle de type *Ornstein-Uhlenbeck* solution de l'équation différentielle stochastique de type *Langevin* suivante

$$d\xi_t = f(t)\xi_t dt + dW_t, \quad t \in [0, T]. \quad (1.6)$$

Dans la deuxième section nous proposons un estimateur pour la fonction $f(\cdot)$ toujours en supposant que nous observons une trajectoire continue du processus $\{\xi_t\}$ sur l'intervalle $[0, T]$. Cet estimateur est construit à partir d'un noyau périodique. Nous étudions par la suite la convergence asymptotique du biais de cet estimateur ainsi que sa vitesse de convergence. Nous prouvons dans la section 3 la convergence en moyenne quadratique.

Pour améliorer ces convergences, nous étudions dans la section 4 une transformation de cet estimateur en considérant que nous observons une trajectoire du processus $\{\xi_t\}$ sur l'intervalle $[P, nP]$.

Des résultats de simulation sont donnés à la fin de ce chapitre.

Le dernier chapitre contient les preuves de quelques lemmes que nous utilisons dans le corps de cette thèse.

Pour la simulation nous utilisons le logiciel de Statistique **R**.

Chapitre 2

Étude de propriétés du processus géométrique $\{\xi_t\}$

2.1 Introduction

Le modèle *signal périodique plus bruit* étudié dans ce chapitre a pour équation

$$d\zeta_t = f(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad t \geq 0,$$

où $f(\cdot)$, $\sigma(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions, supposées connues, continues, non-identiquement nulles et périodiques de même période P , $\sigma(\cdot)$ est positive et $W := \{W_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard sur un espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{F}, P) .

Le but de ce chapitre est d'analyser le processus $\{\xi_t\}$ lié au processus $\{\zeta_t\}$ par la relation.

$$d\xi_t = \xi_t d\zeta_t.$$

Donc $\{\xi_t\}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire suivante

$$d\xi_t = f(t)\xi_t dt + \sigma(t)\xi_t dW_t \quad (2.1)$$

où ξ_0 est indépendant de $\{W_t\}$. D'après la continuité de $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ l'équation différentielle stochastique (2.1) admet une unique solution, et en utilisant la formule d'Itô (voir, par exemple, [42], p. 146) nous pouvons vérifier que :

$$\xi_t = \xi_0 \exp \left(\int_0^t \left(f(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s \right). \quad (2.2)$$

(Pour plus de détails voir [31]). Ainsi, sous l'hypothèse que

$$P[\xi_0 > 0] = 1 \quad P - \text{p.s.},$$

presque toutes les trajectoires du processus $\{\xi_t\}$ sont continues et strictement positives

$$P[\xi_t > 0, \forall t] = 1. \quad (2.3)$$

Signalons que d'après (2.2)

$$d \ln \xi_t = \left(f(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) dt + \sigma(t) dW_t = d\zeta_t - \frac{\sigma^2(t)}{2} dt.$$

D'où

$$\zeta_t - \zeta_0 \neq \ln(\xi_t) - \ln(\xi_0).$$

Dans la deuxième section nous nous intéressons à représenter et étudier la structure du processus $\{\xi_t, t > 0\}$. La troisième section sera dédiée aux propriétés de martingale, propriété Markovienne, etc. Dans la dernière section nous nous intéressons au comportement asymptotique de $\{\xi_t\}$.

Pour simplifier la présentation des résultats nous supposons par la suite que $\xi_0 = 1$.

2.2 Représentation de $\{\xi_t\}$

Notons désormais $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration engendrée par le mouvement Brownien $\{W_t, t \geq 0\}$, donc \mathcal{F}_t est la sous tribu complète de la tribu \mathcal{F} engendrée par $\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$. Nous avons également besoin des notations suivantes. Pour tout $t \geq 0$, soient

$$F(t) := \int_0^t f(s) ds, \quad G^{(2)}(t) := \int_0^t \sigma^2(s) ds.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$W^{(nP)} := \left\{ W_t^{(nP)}, t \in [0, P] \right\}$$

le mouvement Brownien sur $[0, P]$ défini par $W_t^{(nP)} := W_{nP+t} - W_{nP}$. Par ailleurs, définissons

$$\mathcal{E}_\sigma := \{ \mathcal{E}_\sigma(t), t \geq 0 \}$$

la martingale exponentielle (pour plus de détails voir [42])

$$\mathcal{E}_\sigma(t) := \exp \left(\int_0^t \sigma(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right),$$

associée à la martingale $\{M_t : t \geq 0\}$ définie par $M_t := \int_0^t \sigma(s) dW_s$. Lorsque $\sigma(\cdot) = 1$, $\mathcal{E}(t) = \exp(W_t - \frac{1}{2}t)$ est la martingale exponentielle associée au mouvement Brownien $\{W_t, t \geq 0\}$.

Soit

$$\mathcal{E}_\sigma^{(nP)} := \left\{ \mathcal{E}_\sigma^{(nP)}(t), t \in [0, P] \right\}$$

la martingale exponentielle associée à la martingale $\{M_t^{(nP)}, t \in [0, P]\}$, où

$$M_t^{(nP)} := \int_0^t \sigma(s) dW_s^{(nP)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2. Représentation de $\{\xi_t\}$

Remarquons que les mouvements Browniens $\{W_s^{(nP)}, s \in [0, P]\}$, $n \in \mathbb{N}$, sont indépendants. Par conséquent les martingales exponentielles $\mathcal{E}_\sigma^{(nP)}$, $n \in \mathbb{N}$ sont indépendantes et identiquement distribuées sur l'espace de Banach $\mathcal{C}[0, P]$ des fonctions réelles continues sur $[0, P]$, muni de la norme uniforme $\|\varphi\|_\infty := \sup_{t \in [0, P]} |\varphi(t)|$ pour $\varphi \in \mathcal{C}[0, P]$.

Avec les notations précédentes la solution de l'EDS (2.1) peut s'exprimer, d'une part en fonction du processus $\{\zeta_t\}$ comme suit

$$\xi_t = \exp(\zeta_t) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds\right),$$

car

$$\zeta_t = \int_0^t f(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s,$$

et d'autre part en fonction de $\mathcal{E}_\sigma(t)$

$$\xi_t = e^{F(t)} \mathcal{E}_\sigma(t).$$

En outre, la périodicité des fonctions $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ implique que

$$e^{F(nP+t)} = e^{nF(P)} e^{F(t)}, \quad e^{G^{(2)}(nP+t)} = e^{nG^{(2)}(P)} e^{G^{(2)}(t)},$$

et

$$M_{nP+t} = M_{nP} + M_t^{(nP)} = \sum_{k=0}^{n-1} M_P^{(kP)} + M_t^{(nP)}.$$

Donc

$$\xi_{nP+t} = e^{F(t)} \xi_{nP} \mathcal{E}_\sigma^{(nP)}(t) = e^{nF(P)+F(t)} \prod_{k=0}^{n-1} \mathcal{E}_\sigma^{(kP)}(P) \mathcal{E}_\sigma^{(nP)}(t). \quad (2.4)$$

Chaîne de Markov des P-segments

Posons

$$\xi_s^t := \exp\left(\int_s^t (f(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)) du + \int_s^t \sigma(u) dW_u\right).$$

Suivant [24], définissons la suite aléatoire dont l'espace d'état est $\mathcal{C}[0, P]$:

$$\mathbf{X}_n := \{\xi_{nP+t} : t \in [0, P]\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Donc nous obtenons

$$\mathbf{X}_n(t) = \xi_{nP+t} = \xi_{nP} \times \xi_{nP}^{nP+t} = \mathbf{X}_{n-1}(0) \times \xi_{nP}^{nP+t}.$$

Remarquons que les processus $\{\xi_{nP}^{nP+t}, t \in [0, P]\}$ $n \in \mathbb{N}$ sont i.i.d. de loi commune $\mathcal{L}(\mathbf{X}_0)$

$$\mathcal{L}\left(\xi_{nP}^{nP+t}, t \in [0, P]\right) = \mathcal{L}\left(\xi_0^t, t \in [0, P]\right) = \mathcal{L}\left(\xi_t, t \in [0, P]\right) = \mathcal{L}(\mathbf{X}_0).$$

Par conséquent la suite $(\mathbf{X}_n)_n$ est une suite de Markov homogène.

2.3 Propriété de martingale, propriété Markovienne

Proposition 1 *Si $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques, $\sigma(\cdot) > 0$ et $\xi_0 = 1$, le processus*

$$M_s := \ln \xi_s - \int_0^s (f(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u))du$$

est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_s\}$.

Preuve Comme $\xi_0 = 1$, alors $P[\xi_s > 0, \forall s] = 1$ et donc M_s est bien définie presque sûrement. La mesurabilité et l'intégrabilité de M_s découlent directement de sa définition. D'après (2.2)

$$\begin{aligned} E[M_{s+h}/\mathcal{F}_s] &= E\left[\int_0^{s+h} \sigma(u)dW_u/\mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[\int_0^s \sigma(u)dW_u + \int_s^{s+h} \sigma(u)dW_u/\mathcal{F}_s\right] \\ &= M_s, \end{aligned}$$

car $\int_0^s \sigma(u)dW_u$ est \mathcal{F}_s -mesurable, $\int_s^{s+h} \sigma(u)dW_u$ est indépendant de \mathcal{F}_s et $E[\int_s^{s+h} \sigma(u)dW_u] = 0$. Donc $\{M_s\}$ est une martingale. ■

Étant solution d'une équation différentielle linéaire, le processus $\{\xi_t\}$ est Markovien. Nous allons préciser ce résultat dans la proposition suivante.

Proposition 2 *Sous les hypothèses de la Proposition 1 et avec les notations du paragraphe précédent, le processus $\{\xi_t, t > 0\}$ est un processus de Markov non homogène.*

Preuve Pour $s, h, u \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, calculons $P[\xi_{s+h} \in A/\xi_u, u \leq s]$. D'abord

$$\begin{aligned} \xi_{s+h} &= \exp\left(\int_0^{s+h} (f(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u))du + \int_0^{s+h} \sigma(u)dW_u\right) \\ &= \xi_s \exp\left(\int_s^{s+h} (f(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u))du + \int_s^{s+h} \sigma(u)dW_u\right) \\ &= \xi_s \times \xi_s^{s+h}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où

$$\xi_s^{s+h} = \exp\left(\int_s^{s+h} (f(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u))du + \int_s^{s+h} \sigma(u)dW_u\right).$$

Puisque ξ_s^{s+h} est indépendant de $\{\xi_u, u \leq s\}$,

$$\begin{aligned} P[\xi_{s+h} \in A/\xi_u, u \leq s] &= P[\xi_s \xi_s^{s+h} \in A/\xi_u, u \leq s] \\ &= P[\xi_{s+h} \in A/\xi_s]. \end{aligned}$$

2.4. Comportement asymptotique de $\{\xi_t\}$

■

D'après (2.5) pour tout $0 \leq s < t$,

$$\xi_t = \xi_s \exp \left(\int_s^t \left(f(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u) \right) du + \int_s^t \sigma(u) dW_u \right) = \xi_s \times \xi_s^t$$

où ξ_s^t est une variable aléatoire indépendante de $\{\xi_u, u \leq s\}$ et de loi log-normale de paramètres $\int_s^t (f(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)) du$ et $\int_s^t \sigma^2(u) du$. Ainsi pour $x > 0$, la loi de ξ_t conditionnée par $\xi_s = x$ est la loi log-normale de paramètres $\ln x + \int_s^t (f(u) - \frac{1}{2} \sigma^2(u)) du$ et $\int_s^t \sigma^2(u) du$. D'après la périodicité des fonctions $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$, cette loi coïncide avec celle de ξ_{t+P} conditionnée par $\xi_{s+P} = x$. Par conséquent nous avons la propriété suivante :

Proposition 3 *Sous les conditions de la Proposition 1, le semigroupe des probabilités de transition du processus Markovien $\{\xi_t, t \geq 0\}$ est périodique en temps :*

$$P_{s+P, t+P}(x, A) = P_{s, t}(x, A)$$

pour tout $s < t$ et tout $x > 0, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Ici $P_{s, t}(x, A)$ est une version régulière de la probabilité conditionnelle de ξ_t sachant ξ_s , c'est-à-dire que

1. $x \mapsto P_{s, t}(x, A)$ est $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ mesurable pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$;
2. $A \mapsto P_{s, t}(x, A)$ est une mesure de probabilité pour P_{ξ_s} presque tout x ;
3. $P(\xi_s \in B, \xi_t \in A) = \int_B P_{s, t}(x, A) dP_{\xi_s}(x)$.

Une telle version existe et est unique P_{ξ_s} - p.s. (voir, par exemple Chapitre III, section 2 de [41]).

2.4 Comportement asymptotique de $\{\xi_t\}$

De l'expression (2.2), nous déduisons le comportement asymptotique du processus $\{\xi_t\}$.

Proposition 4 *Sous les conditions de la Proposition 1, le processus $\{\xi_t\}$ vérifie les égalités asymptotiques suivantes*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln(\xi_T) = \frac{1}{P} F(P) - \frac{1}{2P} G^{(2)}(P) \quad P - p.s \text{ et en } m.q. \quad (2.6)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left(\sqrt{T} \left(\frac{1}{T} \ln(\xi_T) - \frac{1}{P} F(P) + \frac{1}{2P} G^{(2)}(P) \right) \right) = \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{P} G^{(2)}(P) \right) \quad (2.7)$$

En outre,

— Si $F(P) - \frac{1}{2}G^{(2)}(P) < 0$, le processus Markovien $\{\xi_t, t \geq 0\}$ converge vers 0 :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \xi_T = 0 \quad \text{P - p.s.} \quad (2.8)$$

— Si $F(P) - \frac{1}{2}G^{(2)}(P) > 0$, le processus Markovien $\{\xi_t, t \geq 0\}$ explose à l'infini :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \xi_T = \infty \quad \text{P - p.s.} \quad (2.9)$$

— Si $F(P) - \frac{1}{2}G^{(2)}(P) = 0$, la relation (2.6) devient

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln(\xi_T) = 0. \quad \text{P - p.s et en m.q.}$$

De plus nous avons,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{P} \ln(\xi_T)}{\sqrt{2G^{(2)}(P)T \ln \ln T}} = -1 \quad \text{P - p.s.} \quad (2.10)$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{P} \ln(\xi_T)}{\sqrt{2G^{(2)}(P)T \ln \ln T}} = 1 \quad \text{P - p.s.} \quad (2.11)$$

Preuve D'après l'égalité (2.2) avec $\xi_0 = 1$, nous avons

$$\frac{1}{T} \ln(\xi_T) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(f(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds + \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(s) dW_s. \quad (2.12)$$

La périodicité de $f(\cdot)$ et de $\sigma(\cdot)$ impliquent que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(f(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds &= \frac{1}{P} \int_0^P \left(f(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{P} F(P) - \frac{1}{2P} G^{(2)}(P), \end{aligned}$$

et

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(s) ds = \frac{1}{P} \int_0^P \sigma^2(s) ds = \frac{1}{P} G^{(2)}(P). \quad (2.13)$$

Les Lois Forte et Faible des Grands Nombres pour l'intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien (voir, par exemple, Lemme 17.4 de [38]) entraînent que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(s) dW_s = 0 \quad \text{P - p.s et en m.q.} \quad (2.14)$$

Ainsi grâce à l'égalité (2.12) nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln(\xi_T) = \frac{1}{P} F(P) - \frac{1}{2P} G^{(2)}(P) \quad \text{P - p.s et en m.q.} \quad (2.15)$$

2.4. Comportement asymptotique de $\{\xi_t\}$

D'autre part, comme

$$\mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \sigma(s) dW_s \right) = \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(s) ds \right),$$

alors d'après (2.13) nous déduisons que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \sigma(s) dW_s \right) = \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{P} G^{(2)}(P) \right).$$

Ainsi la relation (2.7) est vérifiée. De là nous déduisons les limites (2.8) et (2.9).

Supposons maintenant que $F(P) - \frac{1}{2}G^{(2)}(P) = 0$. Donc d'après (2.15) nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln(\xi_T) = 0. \quad \text{P - p.s et en m.q.}$$

Nous pouvons approfondir ce résultat. En effet, en appliquant le Théorème de la loi du log itéré de Khinchin-Kolmogorov-Hartman-Witner (voir par exemple Théorème 2 du Chapitre 19, section 1 de [44]) aux variables Gaussiennes centrées indépendantes

$$\int_0^P \sigma(s) dW_s^{(kP)}, \quad k = 0 \dots n-1$$

de loi commune

$$\mathcal{L} \left(\int_0^P \sigma(s) dW_s^{(kP)} \right) = \mathcal{N} \left(0, \int_0^P \sigma^2(s) ds \right) = \mathcal{N} \left(0, G^{(2)}(P) \right),$$

nous obtenons

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\xi_{nP})}{\sqrt{2G^{(2)}(P)n \ln \ln n}} = -1 \quad \text{P - p.s.}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\xi_{nP})}{\sqrt{2G^{(2)}(P)n \ln \ln n}} = 1 \quad \text{P - p.s.}$$

Or tout réel $T > 0$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $T = nP + r$, où $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < P$, donc

$$\begin{aligned} \ln(\xi_T) &= \ln(\xi_{nP}) + \int_{nP}^{nP+r} \left(f(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) ds + \int_{nP}^{nP+r} \sigma(s) dW_s \\ &= \ln(\xi_{nP}) + \int_0^r \left(f(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) ds + \int_0^r \sigma(s) dW_s^{(nP)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

D'après cette décomposition et comme

$$(nP + r) \ln \ln(nP + r) \sim nP \ln \ln(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{pour } 0 \leq r \leq P,$$

nous déduisons les limites (2.10) et (2.11). ■

Chapitre 3

Estimation paramétrique en temps continu du drift d'un modèle de type *signal plus bruit*

3.1 Introduction

Supposant maintenant que nous observons une trajectoire continue du processus $\{\zeta_t\}$, $t \in [0, T]$ solution de l'équation

$$d\zeta_t = f(t, \theta)dt + \sigma(t)dW_t, \quad t \geq 0, \quad \zeta_0 = 0$$

où $f(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques en t de même période P indépendante de θ , $\sigma(\cdot) > 0$, et $f(\cdot, \theta)$ n'est pas identiquement nulle pour chaque θ . Le but est d'estimer le paramètre inconnu θ appartenant à un sous ensemble Θ de \mathbb{R} . Comme $\sigma(\cdot) > 0$, nous pouvons transformer ce modèle en posant

$$dZ_t := \frac{d\zeta_t}{\sigma(t)} = \rho(t, \theta)dt + dW_t, \quad (3.1)$$

où $\rho(t, \theta) := \frac{f(t, \theta)}{\sigma(t)}$. La fonction $\sigma(\cdot)$ étant connue, observer $\{\zeta_t\}$ revient à observer $\{Z_t\}$. Nous allons donc déterminer la vraisemblance des observations $\{Z_t, t \in [0, T]\}$.

Lorsque $f(t, \theta) = \theta f(t)$, l'estimateur par la méthode du maximum de vraisemblance est connu de façon explicite. Nous en déduisons directement sa consistance, sa normalité asymptotique ainsi que son efficacité asymptotique minimax.

En revenant au modèle général (3.1), et sous certaines conditions de régularité et d'identifiabilité nous démontrons l'existence et la convergence de l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ . De plus, nous prouvons sa normalité

asymptotique et son efficacité asymptotique minimax. Pour cela nous ferons appel aux résultats de Dacunha-Castelle et Duflo [7] ainsi qu'aux résultats de Kutoyants [32].

Pour déterminer la vraisemblance, nous pouvons appliquer la formule (10.59)¹ du Chapitre 10, section 6 de [31], aux deux processus suivants :

$$dZ_t^{\theta_0} = \rho(t, \theta_0)dt + dW_t, \quad dZ_t^\theta = \rho(t, \theta)dt + dW_t, \quad Z_0^{\theta_0} = Z_0^\theta = 0.$$

Ainsi $P_\theta^T \sim P_{\theta_0}^T$, où

$$P_\theta^T := \mathcal{L}(Z_t^\theta, 0 \leq t \leq T), \quad P_{\theta_0}^T := \mathcal{L}(Z_t^{\theta_0}, 0 \leq t \leq T), \quad T > 0,$$

et θ_0 est la vraie valeur du paramètre θ . En outre, en supposant que nous observons une trajectoire continue du processus $\{Z_t^{\theta_0}\}$ sur $[0, T]$, le rapport de vraisemblance est donné par

$$\begin{aligned} L_T(\theta) &:= \frac{dP_\theta^T}{dP_{\theta_0}^T}(Z^{\theta_0}) \\ &= \exp\left(\int_0^T (\rho(s, \theta) - \rho(s, \theta_0))dZ_s^{\theta_0} - \frac{1}{2} \int_0^T (\rho^2(s, \theta) - \rho^2(s, \theta_0))ds\right) P_{\theta_0} - \text{p.s.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dans la suite la notation $E_\theta[X]$ désigne l'espérance de la variable X lorsque la vraie valeur du paramètre est θ .

3.2 Étude du cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$

Nous commençons par étudier le cas $\rho(t, \theta) = \theta \rho(t) = \theta \frac{f(t)}{\sigma(t)}$, c'est-à-dire $f(t, \theta) = \theta f(t)$ avec $f(\cdot)$ non identiquement nulle et $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Le rapport de vraisemblance est donc donné par

$$L_T(\theta) = \exp\left((\theta - \theta_0) \int_0^T \rho(s)dZ_s^{\theta_0} - \frac{(\theta^2 - \theta_0^2)}{2} \int_0^T \rho^2(s)ds\right).$$

Maximisons en θ la fonction $L_T(\theta)$,

$$\ln L_T(\theta) = (\theta - \theta_0) \int_0^T \rho(s)dZ_s^{\theta_0} - \frac{(\theta^2 - \theta_0^2)}{2} \int_0^T \rho^2(s)ds.$$

Le score vaut

$$S(\theta) = \frac{\partial \ln L_T(\theta)}{\partial \theta} = \int_0^T \rho(s)dZ_s^{\theta_0} - \theta \int_0^T \rho^2(s)ds.$$

1. Pour un cadre général des processus de diffusion voir, entre autres, le Théorème 6.10 de [23]

3.2. Étude du cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$

Lorsque l'ensemble Θ des paramètres est ouvert, une statistique $\hat{\theta}_T$ qui maximise la vraisemblance vérifie $S(\hat{\theta}_T) = 0$. Ceci implique que

$$\hat{\theta}_T := \frac{\int_0^T \rho(s) dZ_s^{\theta_0}}{\int_0^T \rho^2(s) ds}.$$

Ainsi

$$\hat{\theta}_T = \theta_0 + \frac{\int_0^T \rho(s) dW_s}{\int_0^T \rho^2(s) ds}. \quad (3.3)$$

De même, supposons que nous observons une trajectoire continue sur $[0, T]$ du processus $\{\xi_t\}$ solution de (1.5). Alors l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ dans le modèle (1.5) coïncide avec l'estimateur du maximum de vraisemblance obtenu à partir du modèle (1.2)

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\xi_s^{\theta_0}} d\xi_s^{\theta_0}}{\int_0^T \rho^2(s) ds}.$$

En utilisant la décomposition (3.3), nous pouvons voir aisément que $\hat{\theta}_T$ est un estimateur sans biais de θ_0 . Étudions sa consistance.

Consistance de l'estimateur

Nous supposons dans un premier temps que $T = nP$.

Théorème 1 *Si $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques de même période P , $\sigma(\cdot) > 0$ et Θ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , alors l'estimateur normalisé défini par $\bar{\theta}_{nP} := \sqrt{nP}(\hat{\theta}_{nP} - \theta_0)$ est Gaussien centré,*

$$\mathcal{L}(\bar{\theta}_{nP}) = \mathcal{N}(0, I^{-1}),$$

où $I := \frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s) ds$ est l'information de Fisher. Donc, en particulier, $\hat{\theta}_{nP}$ converge en moyenne quadratique vers θ_0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Notons que la fonction $f(\cdot)$ n'étant pas identiquement nulle et continue, l'information de Fisher n'est pas nulle.

Preuve Puisque $\{W_s\}$ est un mouvement Brownien, la loi de $\sqrt{nP}(\hat{\theta}_{nP} - \theta_0)$ est Gaussienne centrée de variance

$$\frac{nP}{\left(\int_0^{nP} \rho^2(s) ds\right)^2} \int_0^{nP} \rho^2(s) ds = \frac{nP}{\int_0^{nP} \rho^2(s) ds}.$$

Comme la fonction $\rho(\cdot)$ est périodique de période P nous déduisons que cette variance vaut

$$\frac{P}{\int_0^P \rho^2(s) ds},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[|\hat{\theta}_{nP} - \theta_0|^2 \right] = 0.$$

■

Par ailleurs nous avons la convergence presque sûre.

Proposition 5 *Sous les conditions du Théorème 1, l'estimateur $\hat{\theta}_{nP}$ converge presque sûrement vers θ_0 quand $n \rightarrow \infty$.*

Preuve

$$\hat{\theta}_{nP} - \theta_0 = \frac{1}{\int_0^P \rho^2(s) ds} \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^P \rho(s) dW_s^{(kP)}.$$

Comme

$$\int_0^P \rho(s) dW_s^{(kP)}, \quad k = 0 \dots n-1$$

sont des variables aléatoires Gaussiennes i.i.d, d'après la Loi Forte des Grands Nombres

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^P \rho(s) dW_s^{(kP)} = \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\int_0^P \rho(s) dW_s^{(kP)} \right] = 0 \quad \mathbb{P}_{\theta_0} - \text{p.s.}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{nP} = \theta_0 \quad \mathbb{P}_{\theta_0} - \text{p.s.}$$

■

Notons maintenant que si $T = nP + r$, $r \in [0, P]$, nous pouvons utiliser directement l'égalité (2.14), et nous déduisons que

Corollaire 1 *Sous les conditions du Théorème 1, nous avons*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\theta}_T = \theta_0 \quad \mathbb{P}_{\theta_0} - \text{p.s.} \quad \text{et} \quad \text{en m.q.}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left(\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0) \right) = \mathcal{N} \left(0, \left(\frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s) ds \right)^{-1} \right).$$

Remarque 1 Preuve alternative de la convergence presque sûre.

3.2. Étude du cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$

Utilisons le fait que

$$\hat{\theta}_T = \theta_0 + \frac{\int_0^T \rho(s) dW_s}{\int_0^T \rho^2(s) ds} := \theta_0 + \frac{M_T}{[M]_T}$$

où $\{M_t\}$ est une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ engendrée par le mouvement Brownien. Cette martingale est de carré intégrable et $\{[M]_t\}$ est son processus de variation quadratique.

La loi forte des Grands Nombres pour les martingales (voir, par exemple, Lemme 17.4 de [38]) entraîne que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\theta}_T - \theta_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M_T}{[M]_T} = 0 \text{ P}_{\theta_0} - \text{p.s. sur } \{\omega, \lim_{T \rightarrow \infty} [M]_T = \infty\}.$$

Or ici, $[M]_T = \int_0^T \rho^2(s) ds$ est non-aléatoire et la périodicité de $\rho(\cdot)$ qui n'est pas identiquement nulle, implique que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [M]_T = \infty.$$

Donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\theta}_T = \theta_0 \text{ P}_{\theta_0} - \text{p.s.}$$

Efficacité asymptotique

Pour démontrer l'efficacité asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}_T$ nous ne pouvons pas utiliser directement la borne de Cramér-Rao (voir le contre-exemple de Hodges [17], Chapitre 2, section 1). Nous allons donc utiliser l'inégalité de Hájek-Le Cam (pour plus de détails voir [32, 36, 48]).

Pour ce faire nous rappelons les notions suivantes (voir Chapitre II, section 2 de [26] ou Chapitre 1, section 2 de [32]). Nous considérons : l'ensemble des paramètres Θ , un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant θ_0 , $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel est défini un processus $X_T^\theta = \{X^\theta(t), 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans un espace mesurable $(\mathbb{E}_T, \mathbb{B}_T)$. Nous notons $\mathbb{P}_\theta^{(T)}$ la loi du processus X_T^θ et nous supposons enfin que toutes les mesures $\{\mathbb{P}_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ sont équivalentes.

Définition 1 (Définition 1.2.1 de [32]) *La famille $\{\mathbb{P}_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ est dite localement asymptotiquement normale (LAN) au point θ_0 quand $T \rightarrow \infty$, s'il existe une fonction $\Phi_T(\theta_0) > 0$ telle que pour tout u vérifiant $\theta_0 + u\Phi_T(\theta_0) \in \Theta$, nous avons la représentation suivante*

$$Z_T^{(\theta_0)}(u) := \frac{d\mathbb{P}_{\theta_0 + \Phi_T(\theta_0)u}^T}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^T}(X_T) = \exp\left(u\Delta_T(\theta_0, X_T) - \frac{1}{2}u^2 + \psi(\theta_0, u, X_T)\right) \quad (3.4)$$

où

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{L} \{ \Delta_T(\theta_0, X_T) | P_{\theta_0} \} = \mathcal{N}(0, 1), \quad (3.5)$$

et

$$\lim_{T \rightarrow 0} \psi(\theta_0, u, X_T) = 0 \text{ en probabilité } P_{\theta_0}. \quad (3.6)$$

La famille $\{P_{\theta}^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ est LAN si elle est LAN pour tout $\theta \in \Theta$. Si les deux convergences (3.5) et (3.6) sont uniformes par rapport à θ variant dans tout compact de Θ et à $u \in \{v; \theta_0 + v\Phi_T(\theta_0) \in \Theta \text{ et } |v| < r\}$ pour tout $r > 0$, alors la famille $\{P_{\theta}^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ est dite uniformément LAN.

Soit $l(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de perte continue en 0 et symétrique telle que pour tout $c > 0$ l'ensemble $\{x : l(x) < c\}$ est convexe et que pour tout $h > 0$ la fonction $l(x)$ ne croît pas plus vite que $\exp(h|x|^2)$ quand $|x| \rightarrow \infty$. Alors nous avons le théorème suivant

Théorème 2 (*Théorème 1.2.2 de [32], Inégalité de Hájek Le Cam*) *Supposons que $\Phi_T(\theta_0)$ tend vers 0 quand T tend vers ∞ et $\{P_{\theta}^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ est une famille LAN au point θ_0 . Alors pour tout estimateur $\check{\theta}_T$ nous avons*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{T \rightarrow \infty} \sup_{|\theta - \theta_0| \leq \epsilon} E_{\theta_0} \left[l(\Phi_T^{-1}(\theta_0)(\check{\theta}_T - \theta)) \right] \geq E_{\theta_0} [l(X)] \quad (3.7)$$

où

$$\mathcal{L} \{ X \} = \mathcal{N}(0, 1).$$

Dans les problèmes réguliers d'estimation paramétrique nous avons

$$\Phi_T(\theta_0) = I_T^{-\frac{1}{2}}(\theta_0),$$

où $I_T(\theta_0)$ est l'information de Fisher du modèle en θ_0 , et pour la fonction de perte $l(\cdot)$ nous pouvons prendre l'erreur quadratique,

$$l(x) = |x|^2.$$

Dans ce cas nous avons l'inégalité asymptotique suivante

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{T \rightarrow 0} \sup_{|\theta - \theta_0| \leq \epsilon} E_{\theta} \left[I_T(\theta_0) |\check{\theta}_T - \theta|^2 \right] \geq 1. \quad (3.8)$$

pour tout estimateur $\check{\theta}_T$.

Définition 2 (*Définition 1.2.2 de [32]*) *Soit $\{P_{\theta}^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ une famille LAN telle que $\Phi_T(\theta)$ tend vers 0 quand T tend vers ∞ . Alors un estimateur $\check{\theta}_T$ est dit asymptotiquement efficace (au sens minimax) si l'égalité en (3.8) est satisfaite. C'est-à-dire si nous avons*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0} \sup_{|\theta - \theta_0| \leq \epsilon} E_{\theta} \left[I_T(\theta_0) |\check{\theta}_T - \theta|^2 \right] = 1. \quad (3.9)$$

3.2. Étude du cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$

Revenons à notre problème d'estimation.

Proposition 6 *Si $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques de même période P , $f(\cdot)$ n'est pas identiquement nulle, $\sigma(\cdot) > 0$ et Θ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , alors la famille $\{\mathbb{P}_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément localement asymptotiquement normale sur Θ .*

Preuve Posons

$$\Phi_T := I_T^{-\frac{1}{2}} := \left(\int_0^T \rho^2(s) ds \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Delta_T(\zeta^\theta) := I_T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \rho(s) dW_s \quad \text{et} \quad \psi(\theta_0, u, \zeta^\theta) := 0.$$

Φ_T est bien définie car $f(\cdot)$ n'est pas identiquement nulle et continue.

Rappelons l'expression du rapport de vraisemblance

$$L_T(\theta) = \exp \left((\theta - \theta_0) \int_0^T \rho(s) dZ_s^{\theta_0} - \frac{(\theta^2 - \theta_0^2)}{2} \int_0^T \rho^2(s) ds \right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Z_T^{(\theta_0)}(u) &:= \frac{d\mathbb{P}_{\theta_0 + \Phi_T u}^T}{d\mathbb{P}_{\theta_0}^T}(Z^{\theta_0}) = L_T(\theta_0 + \Phi_T u) \\ &= \exp \left(\Phi_T u \int_0^T \rho(s) dZ_s^{\theta_0} - \frac{(\theta_0 + \Phi_T u)^2 - \theta_0^2}{2} I_T \right) \\ &= \exp \left(\Phi_T u \int_0^T \rho(s) dZ_s^{\theta_0} - \frac{\Phi_T^2 u^2}{2} I_T - \theta_0 \Phi_T u I_T \right). \end{aligned}$$

Comme

$$dZ_t^{\theta_0} = \theta_0 \rho(t) dt + dW_t,$$

alors

$$\begin{aligned} Z_T^{(\theta_0)}(u) &= \exp \left(\theta_0 u I_T^{-\frac{1}{2}} I_T + u I_T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \rho(s) dW_s - \frac{1}{2} u^2 - \theta_0 u I_T^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \exp \left(u \Delta_T(\zeta^\theta) - \frac{1}{2} u^2 \right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Or

$$\mathcal{L} \left(\int_0^T \rho(s) dW_s \right) = \mathcal{N}(0, I_T),$$

donc

$$\mathcal{L} \left\{ \Delta_T(\zeta^\theta) | \mathbb{P}_{\theta_0} \right\} = \mathcal{N}(0, 1).$$

Ainsi d'après (3.10) la famille $\{\mathbb{P}_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ est LAN en θ_0 pour tout θ_0 . D'après la définition de $\Delta_T(\zeta^\theta)$ et $\psi(\theta_0, u, \zeta^\theta)$, la famille $\{\mathbb{P}_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément LAN sur Θ . ■

Théorème 3 *Sous les hypothèses de la Proposition 6, l'estimateur $\hat{\theta}_T$ est asymptotiquement efficace au sens minimax pour l'erreur quadratique.*

Preuve En effet, pour tout θ

$$\mathbb{E}_\theta \left[(\hat{\theta}_T - \theta)^2 \right] = \frac{1}{\int_0^T \rho^2(s) ds} = I_T^{-1}.$$

Donc

$$\mathbb{E}_\theta \left[I_T (\hat{\theta}_T - \theta)^2 \right] = 1$$

Ce qui implique l'efficacité asymptotique minimax. ■

3.3 Convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_T$ dans le cas général

Considérons maintenant le cas général donné en (3.1)

$$dZ_t = \rho(t, \theta) dt + dW_t, \quad Z_0 = 0,$$

où Θ est un intervalle compact de \mathbb{R} .

Nous avons vu dans la relation (3.2) que le rapport de la vraisemblance s'écrit

$$L_T(\theta) = \exp \left(\int_0^T (\rho(s, \theta) - \rho(s, \theta_0)) dZ_s^{\theta_0} - \frac{1}{2} \int_0^T (\rho^2(s, \theta) - \rho^2(s, \theta_0)) ds \right) \mathbb{P}_{\theta_0 - \text{p.s.}}$$

Trouver la valeur de θ qui maximise la fonction $L_T(\theta)$ en θ revient à maximiser la fonction $U_T(\theta)$ donnée par

$$U_T(\theta) := \frac{1}{T} \int_0^T \rho(s, \theta) dZ_s - \frac{1}{2T} \int_0^T \rho^2(s, \theta) ds \quad (3.11)$$

pour l'observation $\{Z_s, s \leq T\}$.

Grâce à la continuité de $\rho(\cdot, \cdot)$ ainsi qu'à la compacité de Θ , il existe $\hat{\theta}_T$ tel que

$$\hat{\theta}_T = \arg \sup_{\theta \in \Theta} L_T(\theta) = \arg \sup_{\theta \in \Theta} U_T(\theta).$$

Si plusieurs valeurs sont possibles pour $\hat{\theta}_T$ alors toute version adaptée par rapport à la filtration \mathcal{F}_T peut être choisie (voir Chapitre 2, section 2.1.2 de [34]).

3.3.1 Contraste

Ici nous n'avons pas d'expression explicite de $\hat{\theta}_T$. Aussi, pour étudier le comportement de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_T$, nous allons utiliser des résultats sur les estimateurs par la méthode du maximum de contraste. Pour ce faire, nous établissons que $U_T(\theta)$ est un contraste et nous démontrons ensuite que l'estimateur du maximum de contraste $\hat{\theta}_T$ converge en probabilité.

Rappelons donc la définition du contraste donnée par Dacunha-Castelle et Duflo [7].

Définition 3 (Définition 3.2.7 de [7]) *Considérons un modèle statistique $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$. Nous appelons fonction de contraste de ce modèle relative à $\theta_0 \in \Theta$ une fonction $\theta \mapsto K(\theta, \theta_0)$ de Θ dans \mathbb{R}_+ ayant un maximum strict pour $\theta = \theta_0$. Si les expériences sont décrites par une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{(t \in I)}$ ($I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{R}_+$), un contraste (ou processus de contraste) relatif à θ_0 et à $K(\cdot, \cdot)$ est une fonction U de $\Theta \times I \times \Omega$ dans \mathbb{R} , notée $(\theta, t, \omega) \mapsto U_t(\theta, \omega)$, qui satisfait les deux propriétés suivantes*

1. Pour tout $(\theta, t) \in \Theta \times I$, la variable aléatoire $U_t(\theta) : \omega \mapsto U_T(\theta)$ est \mathcal{F}_t -mesurable : $\{U_t(\theta), t \in I\}$ est un processus \mathcal{F} -adapté.
2. $U_t(\theta)$ tend vers $K(\theta, \theta_0)$ en probabilité P_{θ_0} , pour $t \rightarrow \infty$.

Enfin un estimateur du maximum de contraste associé à $U_t(\cdot)$ est un estimateur \mathcal{F} -adapté $(\hat{\theta}_t)_{t \in I}$ tel que, pour tout $t \in I$:

$$U_t(\hat{\theta}_t) = \sup\{U_t(\theta); \theta \in \Theta\}.$$

Dans la suite nous avons besoin de la condition d'identifiabilité suivante :

(I) Supposons que $f(\cdot, \cdot)$ est continue et que pour tout $\theta \neq \theta_0$ il existe s tel que $f(s, \theta) \neq f(s, \theta_0)$.

Lemme 1 *Sous la condition d'identifiabilité (I), la compacité de Θ , la continuité et la périodicité avec la même période P de $f(\cdot, \cdot)$ et de $\sigma(\cdot)$ et si $\sigma(\cdot) > 0$, alors $U_T(\theta)$ défini en (3.11) est un contraste au sens de Dacunha-Castelle et Duflo.*

Preuve La première condition est satisfaite d'après la définition de $U_T(\theta)$. Pour établir la deuxième condition, nous allons démontrer que $U_T(\theta)$ converge en probabilité P_{θ_0} lorsque $T \rightarrow \infty$ vers la fonction non-aléatoire $K(\theta, \theta_0)$ où

$$K(\theta, \theta_0) := \frac{1}{2P} \int_0^P \rho^2(s, \theta_0) ds - \frac{1}{2P} \int_0^P (\rho(s, \theta_0) - \rho(s, \theta))^2 ds. \quad (3.12)$$

Rappelons que lorsque θ_0 est la vraie valeur du paramètre θ

$$dZ_s = dZ_s^{\theta_0} = \rho(s, \theta_0) ds + dW_s.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} U_T(\theta) &= \frac{1}{T} \int_0^T \rho(s, \theta_0) \rho(s, \theta) ds - \frac{1}{2T} \int_0^T \rho^2(s, \theta) ds + \frac{1}{T} \int_0^T \rho(s, \theta) dW_s \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \rho^2(s, \theta_0) ds - \frac{1}{2T} \int_0^T (\rho(s, \theta_0) - \rho(s, \theta))^2 ds \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T \rho(s, \theta) dW_s. \end{aligned}$$

D'une part, comme $T = nP + r$, $0 \leq r \leq P$, d'après la périodicité de $\rho(\cdot, \cdot)$ nous avons,

$$\frac{1}{2T} \int_0^T \rho^2(s, \theta_0) ds = \frac{n}{2(nP + r)} \int_0^P \rho^2(s, \theta_0) ds + \frac{1}{2(nP + r)} \int_0^r \rho^2(s, \theta_0) ds$$

D'où,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \rho^2(s, \theta_0) ds - \frac{1}{2T} \int_0^T (\rho(s, \theta_0) - \rho(s, \theta))^2 ds = K(\theta, \theta_0).$$

D'autre part, nous avons vu en (2.14) que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(s) dW_s = 0 \quad \text{P - p.s et en m.q.}$$

Ainsi $U_T(\theta)$ converge \mathbb{P}_{θ_0} presque sûrement vers $K(\theta, \theta_0)$ quand $T \rightarrow \infty$, donc en particulier nous avons la convergence en probabilité \mathbb{P}_{θ_0} . ■

3.3.2 Convergence en probabilité

Nous pouvons maintenant établir la convergence en probabilité de l'estimateur du maximum du contraste. Pour ceci, nous utilisons le résultat suivant :

Théorème 4 (Théorème 3.2.8 de [7]) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ un espace de probabilité. Dans le cadre de la Définition 3, supposons que les deux conditions suivantes sont vérifiées

(i) Θ est un compact de \mathbb{R} , les fonctions $\theta \mapsto U_T(\theta)$, $\theta \mapsto K(\theta, \theta_0)$ sont continues ;

(ii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |U_T(\theta) - U_T(\theta')| > \epsilon \right) = 0.$$

Alors tout estimateur du maximum de contraste est consistant en θ_0 .

De là nous obtenons le corollaire suivant

3.3. Convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_T$ dans le cas général

Corollaire 2 *Supposons que les fonctions $(t, \theta) \mapsto f(t, \theta)$ et $t \mapsto \sigma(t)$ sont continues et périodiques en t de même période P , $\sigma(t) > 0$ et que la dérivée partielle de $f(\cdot, \cdot)$ par rapport à θ , $(t, \theta) \mapsto \partial_\theta f(t, \theta)$ est continue. Supposons de plus que Θ est un intervalle compact de \mathbb{R} et que la condition d'identifiabilité **(I)** est satisfaite. Alors $\hat{\theta}_T$ converge en probabilité \mathbb{P}_{θ_0} vers θ_0 .*

Preuve Pour prouver ce résultat nous allons vérifier que les deux conditions du Théorème 4 sont satisfaites. D'après les hypothèses, Θ est un compact de \mathbb{R} , les fonctions $\theta \mapsto U_T(\theta)$, $\theta \mapsto K(\theta, \theta_0)$ sont continues, donc la condition (i) du Théorème 4 est satisfaite. Il reste à montrer la condition (ii) : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |U_T(\theta) - U_T(\theta')| > \epsilon \right) = 0.$$

Rappelons que

$$U_T(\theta) = \frac{1}{T} \int_0^T \rho(s, \theta_0) \rho(s, \theta) ds - \frac{1}{2T} \int_0^T \rho^2(s, \theta) ds + \frac{1}{T} \int_0^T \rho(s, \theta) dW_s.$$

Donc

$$\begin{aligned} U_T(\theta) - U_T(\theta') &= \frac{1}{2T} \int_0^T (\rho(s, \theta) - \rho(s, \theta')) (2\rho(s, \theta_0) - \rho(s, \theta) - \rho(s, \theta')) ds \\ &\quad + \frac{1}{T} \int_0^T (\rho(s, \theta) - \rho(s, \theta')) dW_s \\ &:= A_1(\theta, \theta') + A_2(\theta, \theta') \end{aligned} \quad (3.13)$$

où $A_1(\theta, \theta')$ est la partie non-aléatoire du membre droit de cette égalité et $A_2(\theta, \theta')$ est celle aléatoire. Nous allons établir qu'il existe une constante positive C telle que

$$\sup_{|\theta - \theta'| \leq \eta} |A_1(\theta, \theta')| < C\eta,$$

et que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\sup_{|\theta - \theta'| \leq \eta} |A_2(\theta, \theta')| \right] = 0.$$

En effet, la fonction $\theta \mapsto \rho(s, \theta)$ étant continûment dérivable, le théorème des accroissements finis nous donne

$$\rho(s, \theta) - \rho(s, \theta') = (\theta - \theta') \partial_\theta \rho(s, \theta_1), \quad \theta_1 \in [\theta, \theta'],$$

La compacité de $\Theta \times [0, T]$ et la continuité de $(s, \theta) \mapsto \partial_\theta \rho(s, \theta)$ entraîne que

$$C_0 := \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{s \in [0, P]} |\partial_\theta \rho(s, \theta)| < \infty.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sup_{\theta, \theta' \in \Theta} \sup_{s \in [0, P]} |2\rho(s, \theta_0) - \rho(s, \theta) - \rho(s, \theta')| &= 2 \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{s \in [0, P]} |\rho(s, \theta_0) - \rho(s, \theta)| \\ &\leq 2C_0 \sup_{\theta \in \Theta} |\theta_0 - \theta| \\ &\leq C_1 \end{aligned}$$

où C_1 est une constante positive. D'où

$$\begin{aligned} \sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |A_1(\theta, \theta')| &\leq \sup_{|\theta - \theta'| < \eta} \frac{|\theta - \theta'|}{2T} \int_0^T C_0 C_1 ds \\ &= \frac{C_0 C_1}{2} \eta < \infty. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Montrons maintenant que $A_2(\theta, \theta')$ converge vers 0 en moyenne quand $T \rightarrow \infty$. La fonction $(s, \theta) \mapsto \partial_\theta \rho(s, \theta)$ étant continue sur le compact $[\theta, \theta'] \times [0, T]$, par changement de l'ordre d'intégration nous avons

$$A_2(\theta, \theta') = \frac{1}{T} \int_0^T (\rho(s, \theta) - \rho(s, \theta')) dW_s = \int_\theta^{\theta'} \frac{1}{T} \int_0^T \partial_\theta \rho(s, u) dW_s du.$$

En moyenne nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |A_2(\theta, \theta')| \right] &\leq \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} \int_\theta^{\theta'} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \partial_\theta \rho(s, u) dW_s \right| du \right] \\ &\leq \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\int_\Theta \left| \frac{1}{T} \int_0^T \partial_\theta \rho(s, u) dW_s \right| du \right] \\ &= \int_\Theta \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left| \frac{1}{T} \int_0^T \partial_\theta \rho(s, u) dW_s \right| \right] du \\ &\leq \int_\Theta \left(\mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left| \frac{1}{T} \int_0^T \partial_\theta \rho(s, u) dW_s \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= \int_\Theta \left(\frac{1}{T^2} \int_0^T (\partial_\theta \rho(s, u))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_\Theta \left(\frac{1}{T} \int_0^T (\partial_\theta \rho(s, u))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} du, \end{aligned}$$

l'échange entre l'intégrale et l'espérance dans la 3^{ème} relation est dû à la compacité de $\Theta \times [0, T]$ et à la continuité de $(s, \theta) \mapsto \partial_\theta \rho(s, \theta)$. Comme la fonction $(s, \theta) \mapsto \partial_\theta \rho(s, \theta)$ est continue et périodique en s de période P et Θ est compact,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\partial_\theta \rho(s, u))^2 ds = \frac{1}{P} \int_0^P (\partial_\theta \rho(s, u))^2 ds < C < \infty$$

3.3. Convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_T$ dans le cas général

où $C > 0$ est une constante ne dépend pas de $u \in \Theta$. Par conséquent,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |A_2(\theta, \theta')| \right] \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{\Theta} \left(\frac{1}{T} \int_0^T (\partial_{\theta} \rho(s, u))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} du = 0.$$

Maintenant nous pouvons terminer la démonstration du corollaire. D'après l'égalité (3.13) nous avons pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |U_T(\theta) - U_T(\theta')| > \epsilon \right) &= \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |A_1(\theta, \theta') + A_2(\theta, \theta')| > \epsilon \right) \\ &\leq \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |A_1(\theta, \theta')| > \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &\quad + \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |A_2(\theta, \theta')| > \frac{\epsilon}{2} \right) \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |A_2(\theta, \theta')| \right] = 0,$$

l'inégalité de Markov entraîne que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |A_2(\theta, \theta')| > \frac{\epsilon}{2} \right) = 0.$$

Grâce à l'inégalité (3.14) il suffit, pour tout $\epsilon > 0$, de prendre $\eta = \frac{\epsilon}{C_0 C_1}$ pour obtenir

$$\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |A_1(\theta, \theta')| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |U_T(\theta) - U_T(\theta')| > \epsilon \right) = 0.$$

Ainsi la seconde condition (ii) du Théorème 4 est satisfaite. Par conséquent l'estimateur $\hat{\theta}_T$ est consistant. ■

Grâce à la convergence en probabilité, nous allons maintenant démontrer la normalité asymptotique.

3.3.3 Normalité asymptotique

Théorème 5 *En plus des conditions du Corollaire 2, supposons que la fonction $(t, \theta) \mapsto \partial_t \partial_{\theta}^2 f(t, \theta)$ existe et est continue et que $t \mapsto \partial_{\theta} f(t, \theta)$ est non identiquement nulle pour chaque θ , c'est-à-dire*

$$\text{pour chaque } \theta \in \Theta, \text{ il existe } t \in [0, P] \text{ tel que } \partial_{\theta} f(t, \theta) \neq 0. \quad (3.15)$$

Supposons de plus que θ_0 est à l'intérieur de l'intervalle Θ , noté $\hat{\Theta}$. Alors un estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_T$ est asymptotiquement normal.

Preuve D'après l'expression du rapport de vraisemblance donné en (3.2), le score s'écrit

$$\begin{aligned} S_T(\theta) &= \int_0^T \partial_\theta \rho(t, \theta) dZ_t^{\theta_0} - \int_0^T \partial_\theta \rho(t, \theta) \rho(t, \theta) dt \\ &= \int_0^T \partial_\theta \rho(t, \theta) dW_t - \int_0^T \partial_\theta \rho(t, \theta) (\rho(t, \theta) - \rho(t, \theta_0)) dt \quad (3.16) \end{aligned}$$

Lorsqu'il appartient à l'intérieur de l'ensemble des paramètres Θ , l'estimateur du maximum de vraisemblance annule la fonction score .

Comme $\hat{\theta}_T$ est \mathcal{F}_T -mesurable, nous ne pouvons pas remplacer θ par $\hat{\theta}_T$ dans le membre droit de l'expression précédente (3.16) et calculer l'intégrale stochastique correspondante.

Donnons une autre expression de la fonction score sans intégrale stochastique. Pour cela, considérons une version du mouvement Brownien dont presque toutes les trajectoires sont continues. Alors la formule de l'intégration par parties d'une fonction déterministe par rapport au mouvement Brownien donne,

$$\begin{aligned} \int_0^T \partial_\theta \rho(t, \theta) dW_t &= \left[\partial_\theta \rho(t, \theta) W_t \right]_0^T - \int_0^T \partial_t \partial_\theta \rho(t, \theta) W_t dt \\ &= \partial_\theta \rho(T, \theta) W_T - \int_0^T \partial_t \partial_\theta \rho(t, \theta) W_t dt \quad \text{P - p.s.} \end{aligned}$$

Puisque la fonction $t \mapsto \partial_t \partial_\theta \rho(t, \theta)$ est continue, la dernière intégrale est une intégrale trajectorielle. La fonction score s'écrit

$$\begin{aligned} S_T(\theta) &= - \int_0^T \partial_\theta \rho(t, \theta) (\rho(t, \theta) - \rho(t, \theta_0)) dt \\ &\quad + \partial_\theta \rho(T, \theta) W_T - \int_0^T \partial_t \partial_\theta \rho(t, \theta) W_t dt \\ &:= B_1(\theta) + B_2(\theta), \end{aligned}$$

où $B_1(\theta)$ est la partie non-aléatoire de cette égalité et $B_2(\theta)$ est la partie aléatoire.

1) *Étude de $B_1(\hat{\theta}_T)$.* Puisque la fonction : $\theta \mapsto \rho(t, \theta)$ est 2 fois continûment dérivable au voisinage de θ_0 , nous avons

$$\begin{aligned} \rho(t, \hat{\theta}_T) - \rho(t, \theta_0) &= \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \partial_\theta \rho(t, \theta) d\theta \\ &= (\hat{\theta}_T - \theta_0) \partial_\theta \rho(t, \theta_0) + \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} (\partial_\theta \rho(t, \theta) - \partial_\theta \rho(t, \theta_0)) d\theta, \end{aligned}$$

3.3. Convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_T$ dans le cas général

et

$$\rho(t, \hat{\theta}_T) - \rho(t, \theta_0) = (\hat{\theta}_T - \theta_0) \partial_{\theta} \rho(t, \theta_0) + (\hat{\theta}_T - \theta_0)^2 \int_0^1 u \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta_0 + u(\hat{\theta}_T - \theta_0)) du.$$

Ainsi d'une part

$$\left| \rho(t, \hat{\theta}_T) - \rho(t, \theta_0) \right| \leq |\hat{\theta}_T - \theta_0| \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_{\theta} \rho(t, \theta)|$$

et

$$\left| \partial_{\theta} \rho(t, \hat{\theta}_T) - \partial_{\theta} \rho(t, \theta_0) \right| \leq |\hat{\theta}_T - \theta_0| \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta)|,$$

et d'autre part

$$\left| \rho(t, \hat{\theta}_T) - \rho(t, \theta_0) - (\hat{\theta}_T - \theta_0) \partial_{\theta} \rho(t, \theta_0) \right| \leq |\hat{\theta}_T - \theta_0|^2 \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta)|.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \partial_{\theta} \rho(t, \hat{\theta}_T) (\rho(t, \hat{\theta}_T) - \rho(t, \theta_0)) dt - (\hat{\theta}_T - \theta_0) \int_0^T (\partial_{\theta} \rho(t, \theta_0))^2 dt \right| \\ & \leq T (\hat{\theta}_T - \theta_0)^2 \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_{\theta} \rho(t, \theta)| \times \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta)|. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \partial_{\theta} \rho(t, \hat{\theta}_T) (\rho(t, \hat{\theta}_T) - \rho(t, \theta_0)) dt \\ & = (\hat{\theta}_T - \theta_0) \left(\frac{1}{T} \int_0^T (\partial_{\theta} \rho(t, \theta_0))^2 dt + (\hat{\theta}_T - \theta_0) O(1) \right), \quad (3.17) \end{aligned}$$

où $O(1)$ est uniforme par rapport à θ .

2) *Étude $B_2(\hat{\theta}_T)$.* $B_2(\hat{\theta}_T)$ se décompose sous la forme

$$\begin{aligned} B_2(\hat{\theta}_T) &= \partial_{\theta} \rho(T, \theta_0) W_T - \int_0^T \partial_t \partial_{\theta} \rho(t, \theta_0) W_t dt + (\partial_{\theta} \rho(T, \hat{\theta}_T) - \partial_{\theta} \rho(T, \theta_0)) W_T \\ &\quad - \int_0^T (\partial_t \partial_{\theta} \rho(t, \hat{\theta}_T) - \partial_t \partial_{\theta} \rho(t, \theta_0)) W_t dt. \end{aligned}$$

(i) Comme $t \mapsto \partial_t \partial_{\theta} \rho(t, \theta_0)$ est continue, la formule de l'intégration par parties, nous donne

$$T^{-1/2} \left(\partial_{\theta} \rho(T, \theta_0) W_T - \int_0^T \partial_t \partial_{\theta} \rho(t, \theta_0) W_t dt \right) = T^{-1/2} \int_0^T \partial_{\theta} \rho(t, \theta_0) dW_t \quad \text{P-p.s.}$$

dont la loi converge vers la loi gaussienne centrée de variance

$$\frac{1}{P} \int_0^P (\partial_{\theta} \rho(t, \theta_0))^2 dt$$

d'après la périodicité de la fonction $t \mapsto \partial_\theta \rho(t, \theta_0)$.

(ii) Nous savons que

$$\left| \partial_\theta \rho(T, \hat{\theta}_T) - \partial_\theta \rho(T, \theta_0) \right| \leq |\hat{\theta}_T - \theta_0| \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta^2 \rho(t, \theta)|.$$

Puisque $\hat{\theta}_T$ converge vers θ_0 en P_{θ_0} -probabilité et $T^{-1/2}W_T$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, nous obtenons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1/2} (\partial_\theta \rho(T, \hat{\theta}_T) - \partial_\theta \rho(T, \theta_0)) W_T = 0 \text{ en probabilité } P_{\theta_0}.$$

(iii) La continuité de la fonction $(t, \theta) \mapsto \partial_t \partial_\theta^2 \rho(t, \theta)$ entraîne les égalités suivantes pour les intégrales trajectorielles

$$\begin{aligned} \int_0^T (\partial_t \partial_\theta \rho(t, \hat{\theta}_T) - \partial_t \partial_\theta \rho(t, \theta_0)) W_t dt &= \int_0^T \left(\int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \partial_t \partial_\theta^2 \rho(t, \theta) d\theta \right) W_t dt \\ &= \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \left(\int_0^T \partial_t \partial_\theta^2 \rho(t, \theta) W_t dt \right) d\theta, \end{aligned}$$

et la formule de l'intégration par parties permet de nous ramener à l'intégrale stochastique

$$\int_0^T \partial_t \partial_\theta^2 \rho(t, \theta) W_t dt = \partial_\theta^2 \rho(T, \theta) W_T - \int_0^T \partial_\theta^2 \rho(t, \theta) dW_t \quad \text{P - p.s.}$$

D'où l'égalité presque sûre

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\partial_t \partial_\theta \rho(t, \hat{\theta}_T) - \partial_t \partial_\theta \rho(t, \theta_0)) W_t dt \\ &= \left(\int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \partial_\theta^2 \rho(T, \theta) d\theta \right) W_T - \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \left(\int_0^T \partial_\theta^2 \rho(t, \theta) dW_t \right) d\theta. \end{aligned}$$

a) La fonction $(t, \theta) \mapsto \partial_\theta^2 \rho(t, \theta)$ est bornée, donc $\sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta^2 \rho(t, \theta)| < \infty$. Ainsi

$$T^{-1/2} \left| \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \partial_\theta^2 \rho(T, \theta) d\theta \times W_T \right| \leq T^{-1/2} |\hat{\theta}_T - \theta_0| \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta^2 \rho(t, \theta)| \times |W_T|.$$

Comme la variable $T^{-1/2}W_T$ est gaussienne, centrée de variance 1 et $\hat{\theta}_T$ tends vers θ_0 en P_{θ_0} -probabilité nous déduisons que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1/2} \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \partial_\theta^2 \rho(T, \theta) d\theta \times W_T = 0 \quad \text{en } P_{\theta_0}\text{-probabilité.} \quad (3.18)$$

b) Il reste à prouver que

$$T^{-1/2} \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \left(\int_0^T \partial_\theta^2 \rho(t, \theta) dW_t \right) d\theta$$

3.3. Convergence de l'estimateur $\hat{\theta}_T$ dans le cas général

converge en probabilité vers 0, c'est-à dire que pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[T^{-1/2} \left| \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \left(\int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right) d\theta \right| > \epsilon \right] = 0. \quad (3.19)$$

Soit $\eta > 0$ fixé.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[T^{-1/2} \left| \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \left(\int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right) d\theta \right| > \epsilon \right] \\ &= \mathbb{P} \left[|\hat{\theta}_T - \theta_0| > \eta \quad \text{et} \quad T^{-1/2} \left| \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \left(\int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right) d\theta \right| > \epsilon \right] \\ &+ \mathbb{P} \left[|\hat{\theta}_T - \theta_0| \leq \eta \quad \text{et} \quad T^{-1/2} \left| \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \left(\int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right) d\theta \right| > \epsilon \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[|\hat{\theta}_T - \theta_0| > \eta \right] + \mathbb{P} \left[T^{-1/2} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \left| \int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right| d\theta > \epsilon \right]. \end{aligned}$$

Puisque $\hat{\theta}_T$ converge vers θ_0 en P_{θ_0} probabilité, le premier terme $\mathbb{P} \left[|\hat{\theta}_T - \theta_0| > \eta \right]$ converge vers 0. D'après l'inégalité de Markov et celle de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[T^{-1/2} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \left| \int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right| d\theta > \epsilon \right] \\ &\leq \frac{1}{T^{1/2} \epsilon} \mathbb{E} \left[\int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \left| \int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right| d\theta \right] \\ &\leq \frac{1}{T^{1/2} \epsilon} \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \left| \int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right| d\theta \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Comme

$$\left(\frac{1}{2\eta} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \left| \int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right| d\theta \right)^2 \leq \frac{1}{2\eta} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \left| \int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right|^2 d\theta$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{2\eta}{T^{\frac{1}{2}}\epsilon} \left(\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{2\eta} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \left| \int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right| d\theta \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{2\eta}{T^{\frac{1}{2}}\epsilon} \left(\mathbb{E} \left[\frac{1}{2\eta} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \left| \int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right|^2 d\theta \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \frac{2\eta}{T^{\frac{1}{2}}\epsilon} \left(\frac{1}{2\eta} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right)^2 \right] d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \frac{2\eta}{T^{\frac{1}{2}}\epsilon} \left(\frac{1}{2\eta} \int_{\theta_0-\eta}^{\theta_0+\eta} \int_0^T (\partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta))^2 dt d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{2\eta}{T^{\frac{1}{2}}\epsilon} T^{\frac{1}{2}} \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} (\partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta))^2 \\
& = \frac{2\eta}{\epsilon} \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} (\partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta))^2.
\end{aligned}$$

De là nous déduisons que pour tout $\eta > 0$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[T^{-1/2} \left| \int_{\theta_0}^{\hat{\theta}_T} \left(\int_0^T \partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta) dW_t \right) d\theta \right| > \epsilon \right] \leq \frac{2\eta}{\epsilon} \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} (\partial_{\theta}^2 \rho(t, \theta))^2$$

et par conséquent la limite (3.19) est vérifiée. Grâce aux deux convergences (3.18) et (3.19), nous obtenons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1/2} \int_0^T (\partial_t \partial_{\theta} \rho(t, \hat{\theta}_T) - \partial_t \partial_{\theta} \rho(t, \theta_0)) W_t dt = 0 \text{ en probabilité } P_{\theta_0}.$$

Ainsi (i), (ii) et (iii) nous donne la loi asymptotique de $B_2(\hat{\theta}_T)$

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \left(\partial_{\theta} \rho(T, \hat{\theta}_T) W_T - \int_0^T \partial_t \partial_{\theta} \rho(t, \hat{\theta}_T) W_t dt \right) \right) \\
& = \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{P} \int_0^P (\partial_{\theta} \rho(t, \theta_0))^2 dt \right). \tag{3.20}
\end{aligned}$$

3) *Conclusion.* Comme $S_T(\hat{\theta}_T) = 0$ lorsque $\hat{\theta}_T \in \mathring{\Theta}$, la relation (3.17) nous donne

$$\begin{aligned}
& \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0) \left(\frac{1}{T} \int_0^T (\partial_{\theta} \rho(t, \theta_0))^2 dt + (\hat{\theta}_T - \theta_0) O(1) \right) \mathbf{1}_{\{S_T(\hat{\theta}_T)=0\}} \\
& = \frac{1}{\sqrt{T}} \left(\partial_{\theta} \rho(T, \hat{\theta}_T) W_T - \int_0^T \partial_t \partial_{\theta} \rho(t, \hat{\theta}_T) W_t dt \right) \mathbf{1}_{\{S_T(\hat{\theta}_T)=0\}}.
\end{aligned}$$

3.4. Propriété LAN et efficacité asymptotique

Compte tenu de la périodicité de la fonction $t \mapsto \rho(t, \theta)$, nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\partial_\theta \rho(t, \theta_0))^2 dt = \frac{1}{P} \int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta_0))^2 dt.$$

De plus, $\hat{\theta}_T$ converge vers $\theta_0 \in \mathring{\Theta}$ en probabilité P_{θ_0} , donc $\hat{\theta}_T - \theta_0$ converge vers 0 en probabilité et $\mathbf{1}_{\{S_T(\hat{\theta}_T)=0\}}$ converge vers 1 en probabilité. De là et de la relation (3.20) nous déduisons que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left(\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta_0) \right) = \mathcal{N} \left(0, \left(\frac{1}{P} \int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta_0))^2 dt \right)^{-1} \right).$$

La variance limite est bien définie grâce à la condition (3.15).

Ceci termine la preuve de la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_T$. ■

Remarque 2 Pour prouver la normalité asymptotique au Théorème 5 nous avons utilisé le fait que le maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_T$ annule la fonction score sur $\{\hat{\theta}_T \in \mathring{\Theta}\}$. Par cette méthode nous sommes amenés à employer l'intégration par parties et à dériver la fonction $f(t, \theta)$ par rapport à t . Dans le Corollaire 3, Section 3.4.2 nous obtiendrons l'efficacité et la normalité asymptotique de $\hat{\theta}_T$ par une méthode différente basée sur une condition d'identifiabilité uniforme (IU1) qui n'impose pas la dérivabilité de $f(t, \theta)$ par rapport à t , mais qui est plus contraignante que la condition d'identifiabilité (I).

3.4 Propriété LAN et efficacité asymptotique

3.4.1 Propriété LAN

Théorème 6 *Supposons que les fonctions $(t, \theta) \mapsto f(t, \theta)$ et $t \mapsto \sigma(t)$ sont continues et périodiques en t de même période P , $\sigma(t) > 0$ et que la condition (3.15) est vérifiée. Supposons de plus que Θ est un intervalle compact de \mathbb{R} . Alors la famille $\{P_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément LAN.*

Preuve D'après la condition (3.15)

$$\int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta_0))^2 dt \neq 0, \quad \forall \theta_0 \in \Theta.$$

Ainsi grâce à la périodicité de $\rho(\cdot, \cdot)$, la fonction

$$\Phi_T(\theta_0) := \left(\int_0^T (\partial_\theta \rho(t, \theta_0))^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}}$$

est bien définie. Par ailleurs,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{\frac{1}{2}} \Phi_T(\theta_0) = \left(\frac{1}{P} \int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta_0))^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.21)$$

Soit u fixe tel que $\theta_0 + u\Phi_T(\theta_0) \in \Theta$. Alors d'après (3.2), le logarithme du rapport de vraisemblance se décompose comme suit

$$\begin{aligned} \ln Z_T^{(\theta_0)}(u) &= \int_0^T (\rho(t, \theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)) - \rho(t, \theta_0)) dZ_t^{\theta_0} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T (\rho^2(t, \theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)) - \rho^2(t, \theta_0)) dt \\ &= \int_0^T (\rho(t, \theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)) - \rho(t, \theta_0)) dW_t \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T (\rho(t, \theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)) - \rho(t, \theta_0))^2 dt. \end{aligned} \quad (3.22)$$

(i) Comme $(t, \theta) \mapsto \partial_\theta \rho(t, \theta)$ est continue dans $[0, T] \times \Theta$,

$$\begin{aligned} \rho(t, \theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)) - \rho(t, \theta_0) &= u\Phi_T(\theta_0) \partial_\theta \rho(t, \theta_0) \\ &\quad + \int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)} (\partial_\theta \rho(t, \theta) - \partial_\theta \rho(t, \theta_0)) d\theta. \end{aligned} \quad (3.23)$$

De plus, la périodicité en t implique

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)} (\partial_\theta \rho(t, \theta) - \partial_\theta \rho(t, \theta_0)) d\theta \right| \\ &\leq |u\Phi_T(\theta_0)| \sup_{t \in [0, P]} \sup_{|\theta - \theta_0| < |u\Phi_T(\theta_0)|} |\partial_\theta \rho(t, \theta) - \partial_\theta \rho(t, \theta_0)| \end{aligned} \quad (3.24)$$

qui converge vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$. Donc

$$\rho(t, \theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)) - \rho(t, \theta_0) = u\Phi_T(\theta_0) (\partial_\theta \rho(t, \theta_0) + o(1))$$

où $o(1)$ est uniforme par rapport à t et à θ_0 et à $|u| < r$. De là, utilisant le fait que $\Phi_T(\theta_0) = \left(\int_0^T (\partial_\theta \rho(t, \theta_0))^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}}$, nous obtenons que la partie non-aléatoire de l'égalité (3.22) vaut

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\rho(t, \theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)) - \rho(t, \theta_0))^2 dt \\ &= u^2 \Phi_T^2(\theta_0) \left(\int_0^T (\partial_\theta \rho(t, \theta_0))^2 dt + u^2 T o(1) \right) \end{aligned}$$

qui d'après l'égalité (3.21) converge vers u^2 .

3.4. Propriété LAN et efficacité asymptotique

(ii) La relation (3.23) entraîne que la partie aléatoire de l'égalité (3.22) se décompose sous la forme

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\rho(t, \theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)) - \rho(t, \theta_0)) dW_t \\ &= u\Phi_T(\theta_0) \int_0^T \partial_\theta \rho(t, \theta_0) dW_t \\ &+ \int_0^T \left(\int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)} (\partial_\theta \rho(t, \theta) - \partial_\theta \rho(t, \theta_0)) d\theta \right) dW_t. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la définition de $\Phi_T(\theta_0)$, la variable $\Delta_T(\theta_0)$, définie ci-dessous, est gaussienne centrée réduite

$$\Delta_T(\theta_0) := \Phi_T(\theta_0) \int_0^T \partial_\theta \rho(t, \theta_0) dW_t.$$

De plus,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left(\int_0^T \left(\int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)} (\partial_\theta \rho(t, \theta) - \partial_\theta \rho(t, \theta_0)) d\theta \right) dW_t \right)^2 \right] \\ &= \int_0^T \left(\int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\Phi_T(\theta_0)} (\partial_\theta \rho(t, \theta) - \partial_\theta \rho(t, \theta_0)) d\theta \right)^2 dt \\ &\leq u^2 \sup_{t \in [0, T]} \sup_{|\theta - \theta_0| < |u|\Phi_T(\theta_0)} |\partial_\theta \rho(t, \theta) - \partial_\theta \rho(t, \theta_0)|^2 \end{aligned}$$

qui converge vers 0 uniformément par rapport à θ_0 et à $|u| < r$ lorsque $T \rightarrow \infty$, d'après l'uniforme continuité de la fonction $(t, \theta) \mapsto \partial_\theta \rho(t, \theta)$ sur $\mathbb{R} \times \Theta$.

Donc en revenant à l'égalité (3.22), nous déduisons que la famille $\{P_\theta^{(T)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément LAN. ■

3.4.2 Efficacité asymptotique

Les résultats du Théorème 5 ne nous permettent d'obtenir l'efficacité asymptotique. Pour résoudre ce problème et comme nous supposons que les fonctions $f(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues, nous allons appliquer la Proposition 2.3.1 de [32] relative à des fonctions $L^2[0, T]$. Voir aussi Théorème 5.1 du Chapitre III de [26]. Constatons que lorsque $Z_0 = 0$, et en posant $S(t, \theta) := \rho(t, \theta)$, le modèle (3.1) est un cas particulier du modèle étudié par Kutoyants en [32], Exemple 2.3.1, Chapitre 2, section 2.3.2. Rappelons maintenant l'énoncé de la Proposition 2.3.1 dans [32],

Proposition 7 (*Proposition 2.3.1 de [32]*) *Supposons que les quatre conditions suivantes sont satisfaites*

1. *La fonction $\rho(t, \theta)$ est continûment dérivable par rapport à θ et appartient à l'ensemble de fonctions $L^2[0, T]$.*
2. *$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_T(\theta) = 0$, et il existe $C > 0$ tel que pour tous $\theta, \theta' \in \Theta$, $\Phi_T(\theta) < C\Phi_T(\theta')$.*
3. *Il existe un nombre réel $\delta \in]0, 1[$ tel que*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{|\theta - \theta'| < \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T(\theta) \|\partial_\theta \rho(\cdot, \theta) - \partial_\theta \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0, T]} = 0.$$

4. *Il existe un nombre réel $\mu > 0$ tel que*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta} \inf_{|\theta - \theta'| > \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T^\mu(\theta) \|\rho(\cdot, \theta) - \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0, T]} > 0.$$

Alors nous avons

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\theta}_T = \theta_0 \quad \text{en probabilité } \mathbb{P}_{\theta_0} \quad (3.25)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left\{ \Phi_T^{-1}(\theta) (\hat{\theta}_T - \theta_0) \mid \mathbb{P}_{\theta_0} \right\} = \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.26)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \Phi_T^{-1}(\theta) (\hat{\theta}_T - \theta_0) \right|^p \right] = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right), \quad (3.27)$$

où p est un nombre réel positif et $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Par ailleurs, $\hat{\theta}_T$ est asymptotiquement efficace au sens minimax.

Rappelons que dans notre cadre

$$\Phi_T(\theta) = \left(\int_0^T (\partial_\theta \rho(t, \theta))^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Corollaire 3 *Supposons que les fonctions $(t, \theta) \mapsto \partial_\theta^2 f(\cdot, \cdot)$, $t \mapsto \sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques en t de période P , $f(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition (3.15), $\sigma(\cdot) > 0$, Θ est un intervalle compact de \mathbb{R} et que $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$. Supposons de plus que nous avons la condition d'identifiabilité uniforme suivante : il existe une fonction $g(\cdot)$, $\delta \in]0, 1[$ et $\mu > 0$ telles que*

$$(IU1) \quad \left(\frac{1}{2P} \int_0^P (f(t, \theta) - f(t, \theta'))^2 \sigma^{-2}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \geq g(|\theta - \theta'|),$$

et

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta} \inf_{|\theta'| > \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T^\mu(\theta) g(\theta) > 0.$$

Alors les convergences (3.25), (3.26) et (3.27) sont vérifiées et l'estimateur $\hat{\theta}_T$ est asymptotiquement efficace au sens minimax.

3.4. Propriété LAN et efficacité asymptotique

Avant de démontrer le corollaire, nous donnons un exemple où les conditions (3.15) et **(IU1)** sont vérifiées.

Soit $\rho(t, \theta) = \theta\rho(t)$, c'est-à-dire $f(t, \theta) = \theta f(t)$. Donc $\partial_\theta f(t, \theta) = f(t)$, comme $f(\cdot)$ n'est pas identiquement nulle, il existe un t tel que $f(t) \neq 0$. Donc la condition (3.15) est vérifiée. D'autre part, puisque $T = nP + r$, $0 \leq r \leq P$, d'après la périodicité de $\rho(\cdot, \cdot)$ nous avons pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (\rho(t, \theta) - \rho(t, \theta'))^2 dt &= \frac{1}{nP+r} \int_0^{nP+r} (\rho(t, \theta) - \rho(t, \theta'))^2 dt \\ &\geq \frac{nP}{nP+r} \times \frac{1}{nP} \int_0^{nP} (\rho(t, \theta) - \rho(t, \theta'))^2 dt \\ &\geq \frac{1}{2} \times \frac{1}{P} \int_0^P (\rho(t, \theta) - \rho(t, \theta'))^2 dt. \end{aligned} \quad (3.28)$$

D'où

$$\|\rho(\cdot, \theta) - \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0, T]} \geq T^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2P} \int_0^P (\rho(t, \theta) - \rho(t, \theta'))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.29)$$

Ainsi pour $\rho(t, \theta) = \theta\rho(t)$

$$\|\rho(\cdot, \theta) - \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0, T]} \geq T^{\frac{1}{2}} |\theta - \theta'| \left(\frac{1}{2P} \int_0^P \rho^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posons

$$g(|\theta - \theta'|) := |\theta - \theta'| \left(\frac{1}{2P} \int_0^P \rho^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \inf_{|\theta - \theta'| > \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T^\mu(\theta) \|\rho(\cdot, \theta) - \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0, T]} &\geq \inf_{|\theta - \theta'| > \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T^\mu(\theta) T^{\frac{1}{2}} g(|\theta - \theta'|) \\ &\geq T^{\frac{1}{2}} (\Phi_T(\theta))^{\mu+\delta} \left(\frac{1}{2P} \int_0^P \rho^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= T^{\frac{1-\mu-\delta}{2}} (T^{\frac{1}{2}} \Phi_T(\theta))^{\mu+\delta} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2P} \int_0^P \rho^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'après la définition de $\Phi_T(\theta)$ et par la relation (3.21)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (T^{\frac{1}{2}} \Phi_T(\theta))^{\mu+\delta} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \rho^2(t) dt \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^{\mu+\delta} = \left(\frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(t) dt \right)^{\frac{-\mu-\delta}{2}}.$$

Donc en choisissant δ et μ tels que $1 - \mu - \delta = 0$, la condition **(IU1)** est vérifiée. En outre,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta} \inf_{|\theta - \theta'| > \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T^\mu(\theta) \|\rho(\cdot, \theta) - \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0, T]} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} > 0.$$

Démontrons maintenant le corollaire.

Preuve D'après les hypothèses du corollaire, la première condition de la Proposition 7 est satisfaite. Vérifions la deuxième condition. D'abord nous avons $\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_T(\theta) = 0$. De plus, la continuité en θ et la compacité de Θ entraînent la continuité uniforme par rapport à $\theta \in \Theta$. De là et avec la condition (3.15), ils existent $0 < C_1 < C_2 < \infty$ tels que

$$0 < C_1 < \int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta))^2 dt \leq C_2.$$

Grâce à la périodicité de $\rho(t, \theta)$ par rapport à t nous déduisons qu'il existe $C > 0$ tel que pour tous $\theta, \theta' \in \Theta$,

$$\left(\int_0^T (\partial_\theta \rho(t, \theta))^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}} < C \left(\int_0^T (\partial_\theta \rho(t, \theta'))^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi la deuxième condition est vérifiée. Pour la troisième condition, nous savons que

$$\begin{aligned} \|\partial_\theta \rho(\cdot, \theta) - \partial_\theta \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0, T]}^2 &= \int_0^T (\partial_\theta \rho(t, \theta) - \partial_\theta \rho(t, \theta'))^2 dt \\ &\leq |\theta - \theta'| \int_0^T (\|\partial_\theta^2 \rho\|_\infty)^2 dt \\ &= C^2 |\theta - \theta'|^2 T, \end{aligned} \quad (3.30)$$

où

$$C^2 := \|\partial_\theta^2 \rho\|_\infty = \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{t \in [0, P]} \partial_\theta^2 \rho(t, \theta).$$

L'inégalité (3.30) est due au théorème des accroissements finis. Ainsi,

$$\sup_{|\theta - \theta'| < \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T(\theta) \|\partial_\theta \rho(\cdot, \theta) - \partial_\theta \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0, T]} \leq CT^{\frac{1}{2}} \left(\Phi_T(\theta) \right)^{1+\delta}.$$

D'une manière analogue à l'inégalité (3.28)

$$\Phi_T(\theta) = T^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{T} \int_0^T (\partial_\theta \rho(t, \theta))^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{2P} \int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta))^2 dt \right)^{-\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}}.$$

3.5. Simulation

Donc

$$\begin{aligned} & \sup_{|\theta-\theta'| < \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T(\theta) \|\partial_\theta \rho(\cdot, \theta) - \partial_\theta \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0,T]} \\ & \leq C \left(\frac{1}{2P} \int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta))^2 dt \right)^{\frac{-1-\delta}{2}} T^{\frac{1}{2}} T^{\frac{-1-\delta}{2}} = \left(\frac{1}{2P} \int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta))^2 dt \right)^{\frac{-1-\delta}{2}} T^{\frac{-\delta}{2}}. \end{aligned}$$

Comme $\sup_{\theta \in \Theta} \left(\frac{1}{2P} \int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta))^2 dt \right)^{\frac{-1-\delta}{2}} < \infty$ alors pour tout $\delta \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} & \limsup_{T \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{|\theta-\theta'| < \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T(\theta) \|\partial_\theta \rho(\cdot, \theta) - \partial_\theta \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0,T]} \\ & \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} C \sup_{\theta \in \Theta} \left(\frac{1}{2P} \int_0^P (\partial_\theta \rho(t, \theta))^2 dt \right)^{\frac{-1-\delta}{2}} T^{\frac{-\delta}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne la troisième condition. Vérifions enfin la quatrième condition. D'après l'inégalité (3.29),

$$\|\rho(\cdot, \theta) - \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0,T]} \geq T^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2P} \int_0^P (\rho(t, \theta) - \rho(t, \theta'))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc en utilisant la condition **(IU1)**, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \liminf_{T \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta} \inf_{|\theta-\theta'| > \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T^\mu(\theta) \|\rho(\cdot, \theta) - \rho(\cdot, \theta')\|_{L^2[0,T]} \\ & \geq \liminf_{T \rightarrow \infty} \inf_{\theta \in \Theta} \inf_{|\theta-\theta'| > \Phi_T^\delta(\theta)} \Phi_T^\mu(\theta) g(\theta - \theta') > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, les quatre conditions de la Proposition 7 sont vérifiées. Ceci termine la démonstration du Corollaire 3. ■

3.5 Simulation

Nous illustrons numériquement l'estimateur $\hat{\theta}_T$ pour plusieurs valeurs de θ_0 . Pour ceci, nous travaillons avec le logiciel **R** et nous suivons la méthode d'Euler afin de simuler les processus.

Rappelons que le modèle (1.2) du type *signal plus bruit* est donné par

$$d\zeta_t = \theta f(t) dt + \sigma(t) dW_t.$$

Et que le modèle (1.5) du processus $\{\xi_t\}$ est donné par

$$d\xi_t = \theta f(t) \xi_t dt + \sigma(t) \xi_t dW_t.$$

Dans le cas de l'observation du processus $\{\zeta_t\}$ sur $[0, T]$ et lorsque θ_0 est la vraie valeur du paramètre θ , l'estimateur $\hat{\theta}_T$ est donné par

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T \frac{\rho(s)}{\sigma(s)} d\zeta_s^{\theta_0}}{\int_0^T \rho^2(s) ds} = \frac{\int_0^T \rho(s) dZ_s^{\theta_0}}{\int_0^T \rho^2(s) ds}.$$

Pour l'observation de $\{\xi_t\}$, $\hat{\theta}_T$ s'exprime ainsi

$$\hat{\theta}_T = \frac{\int_0^T \frac{\rho(s)}{\sigma(s)\xi_s^{\theta_0}} d\xi_s^{\theta_0}}{\int_0^T \rho^2(s) ds}.$$

Posons $T = nP$, $P = 1$, $n = 1000$ et $\delta = 10^{-3}$, où δ est le pas de discrétisation de l'intervalle $[0, n]$ en $N = \frac{n}{\delta}$ points.

3.5.1 Boxplots des valeurs de l'estimateur $\hat{\theta}_n$

Considérons dans un premier lieu le modèle $f(t) = \cos(2\pi t)$, $\sigma(\cdot)$ une fonction constante $\sigma(t) = 1$. Nous représentons d'abord le boxplot des valeurs de $\hat{\theta}_n$ issues du processus $\{\zeta_t\}$ du modèle (1.2) simulé 100 fois.

Pour $\theta_0 = 0$.

La Figure 3.1 montre que toutes les valeurs sont autour de 0 avec une étendue d'ordre 0.15 et la longueur de l'intervalle inter-quartile est inférieure à 0.05.

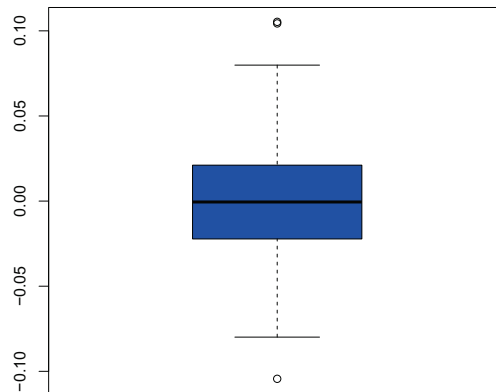


FIGURE 3.1 – Boxplot des valeurs de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ à partir de 100 répétitions

3.5. Simulation

Pour $\theta_0 = 1$, De même, la Figure 3.2 montre que le paramètre θ_0 est bien estimé. La médiane vaut 1, et comme le cas précédent, l'étendue est égale à 0.15 et la longueur de l'intervalle inter-quartile est inférieure à 0.05.

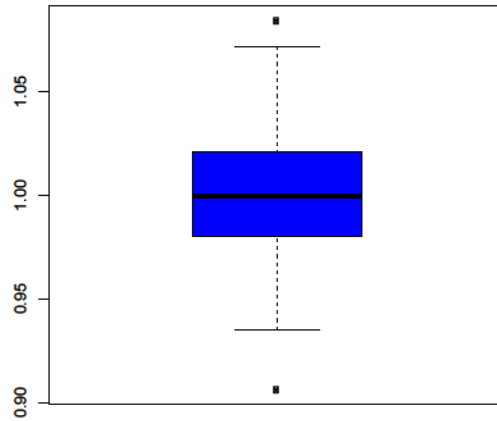


FIGURE 3.2 – Boxplot des valeurs de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ de 100 répétitions

Pour voir l'importance de la longueur de l'intervalle $[0, n]$ nous représentons dans la Figure 3.3 le Boxplot pour $n = 100$, $\theta_0 = 1$. Nous notons que même si la médiane vaut 1, l'étendue et la longueur de l'intervalle inter-quartile sont relativement élevées, elles valent respectivement 0.6 et 0.2.

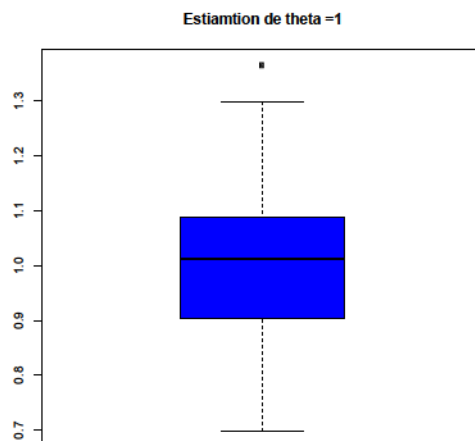


FIGURE 3.3 – Boxplot des valeurs de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ de 100 répétitions et $n=100$

Pour comparer les valeurs issues de deux modèles nous considérons maintenant le processus $\{\xi_t\}$ solution de l'équation (1.5). Ces valeurs sont également simulées à partir de 100 répétitions.

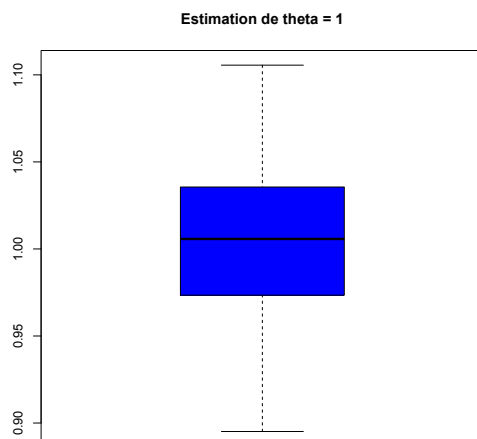


FIGURE 3.4 – Boxplot des valeurs de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ de 100 répétitions

Nous ne remarquons pas de grande différence entre la Figure 3.2 issue du modèle (1.2) et la Figure 3.4 issue du modèle (1.5). En effet, dans les deux cas la médiane est identique avec la valeur à estimer $\theta_0 = 1$, et la longueur de l'intervalle inter-quartile est égale à 0.05.

Maintenant nous illustrons cet estimateur avec un modèle dont la fonction $\sigma(\cdot)$ est non constante

$$\sigma(t) = 2 + \sin(2\pi t).$$

C'est-à-dire nous considérons le modèle

$$d\zeta_t = \theta \cos(2\pi t)dt + (2 + \sin(2\pi t))dW_t.$$

La valeur à estimer est $\theta_0 = -4$. Dans la Figure 3.5, la médiane vaut -4 , l'étendue est proche de 0.15 et la longueur de l'intervalle inter-quartile est inférieure à 0.05. Malgré que $\sigma(\cdot)$ n'est pas constante il n'y a pas de dégradation notable de l'estimateur dans la simulation.

3.5. Simulation

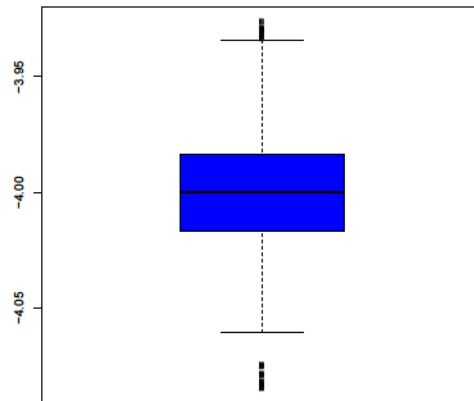


FIGURE 3.5 – Boxplot des valeurs de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ de 100 répétitions

Pour $f(t) = \sigma(t) = 1, \theta_0 = 1$, dans la Figure 3.6 et le tableau suivant, nous constatons que toutes les valeurs obtenues sont très proches de 1 et l'étendue vaut 0.0002. Ceci explique que les dégradations que nous avons pour les figures précédentes, même si elles ne sont pas très importantes, sont, peut être, dues à la variation de $f(t)$ et $\sigma(t)$.

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
0.9998	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

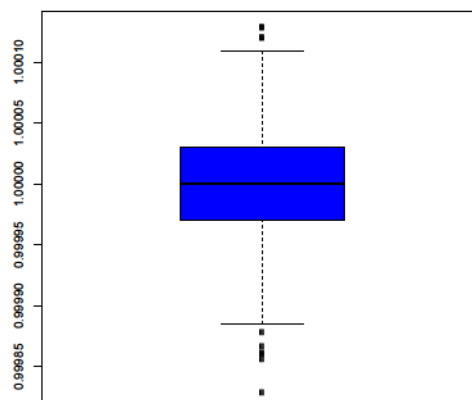


FIGURE 3.6 – Boxplot des valeurs de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ de 100 répétitions

3.5.2 Histogrammes des valeurs de $\bar{\theta}_n = \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$

Nous pouvons également illustrer la convergence en loi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\int_0^1 \rho^2(s) ds}\right).$$

Nous reprenons les données précédentes issues du modèle (1.2) avec $f(t) = \cos(2\pi t)$, $\sigma(t) = 1$.

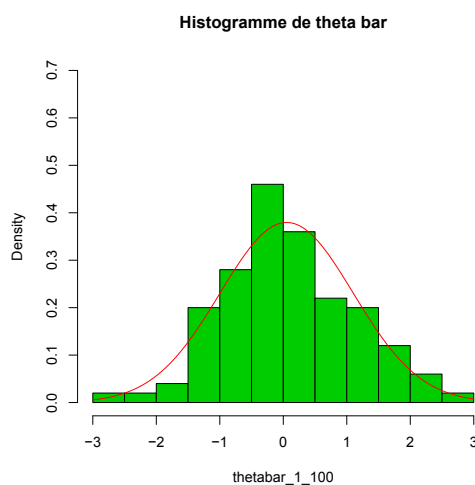


FIGURE 3.7 – Histogramme de $\bar{\theta}$, $\theta_0 = 1$ à partir de 100 répétitions

Nous constatons que les histogrammes des fréquences n'épousent pas vraiment la forme de la distribution Gaussienne.

Nous pouvons améliorer cette représentation en élevant le nombre de répétitions. Pour ceci, les histogrammes donnés dans les figures 3.8, 3.9 et 3.10 correspondant respectivement aux $\theta_0 = 1$, $\theta_0 = 0$ et $\theta_0 = -4$ sont représentés à partir de 1000 répétitions.

3.5. Simulation

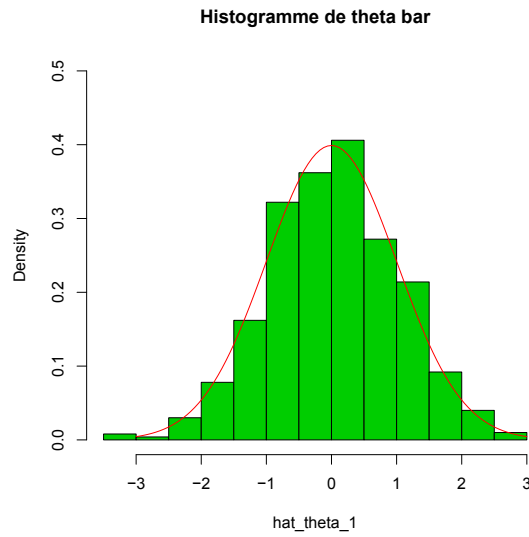


FIGURE 3.8 – Histogramme de $\bar{\theta}$, $\theta_0 = 1$ à partir de 1000 répétitions

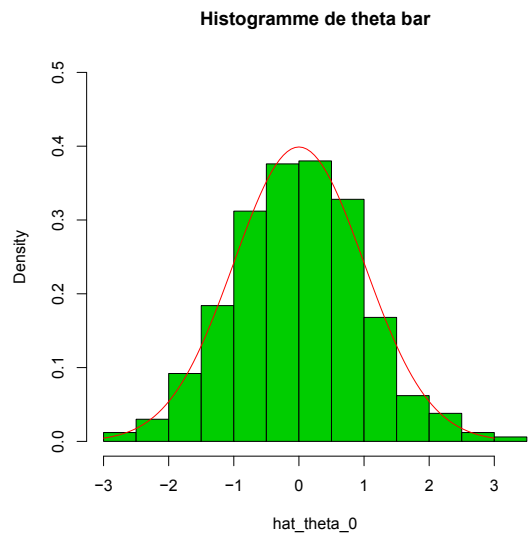


FIGURE 3.9 – Histogramme de $\bar{\theta}$, $\theta_0 = 0$ à partir de 1000 répétitions

Pour cette dernière figure nous considérons $\sigma(t) = 2 + \sin(2\pi t)$.

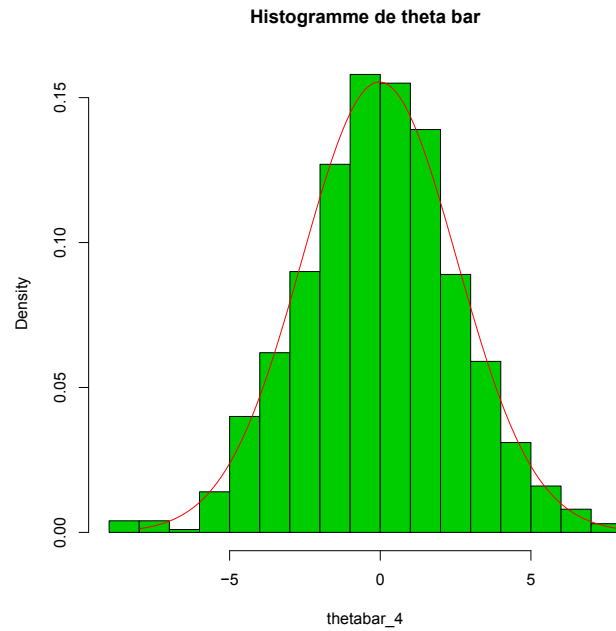


FIGURE 3.10 – Histogramme de $\bar{\theta}_n$, $\theta_0 = -4$ à partir 1000 répétitions

Chapitre 4

Estimation paramétrique en temps discrétisé du drift d'un modèle de type *signal plus bruit*

4.1 Introduction

Dans le chapitre 3 nous avons supposé que nous observions une trajectoire continue du processus $\{\zeta_t\}$ sur l'intervalle $[0, T]$. Cependant en pratique, l'observation est rarement continue mais a souvent lieu à des instants discrets. D'où la motivation de ce chapitre.

Considérons le modèle de type *signal plus bruit* donné par l'équation suivante

$$d\zeta_t = f(t, \theta)dt + \sigma(t)dW_t \quad t \in [0, T], \quad (4.1)$$

où $f(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \Theta \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue, périodique en t de période P , $P > 0$, non identiquement nulle, $\sigma(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement positive et périodique de même période P supposée indépendante du paramètre à estimer θ , θ appartient à Θ qui est un intervalle de \mathbb{R} . Nous supposons que la fonction $f(\cdot, \cdot)$ est dérivable par rapport à θ et sa dérivée partielle $\partial_\theta f(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \Theta$ et que la condition (3.15) est satisfaite, c'est-à-dire $t \mapsto \partial_\theta f(t, \theta)$ est non identiquement nulle pour chaque θ .

Le but de ce chapitre est l'estimation du paramètre θ lorsque les observations sur l'intervalle $[0, T]$ ont lieu aux instants $t_i := i\delta_n$, $i \in \{0, \dots, n\}$, où $\delta_n = \frac{T}{n}$.

Remarquons que l'observation de ζ_{t_i} , $i \in \{0, \dots, n\}$ ne correspond pas à l'observation de Z_{t_i} , $i \in \{0, \dots, n\}$ définie en (3.1). En effet, $Z_{t_i} = \int_0^{t_i} \frac{d\zeta_t}{\sigma(t)}$,

et nous n'observons pas $\{\zeta_t\}$ entre les points $t_i, i \in \{0, \dots, n\}$. Donc nous ne pouvons pas nous ramener directement au modèle $dZ_t = \rho(t, \theta)dt + dW_t$.

En outre, si nous considérons $\tilde{Z}_{t_i} = \frac{\zeta_{t_i}}{\sigma(t_i)}$ alors les variables $(\tilde{Z}_{t_{i+1}} - \tilde{Z}_{t_i})_i$ ne sont pas indépendantes. Par conséquent, nous étudions le modèle (4.1) avec les observations $\zeta_{t_i}, i \in \{0, \dots, n\}$.

Nous allons donc calculer la vraisemblance des observations $\zeta_{t_i}, i \in \{0, \dots, n\}$ suivant le modèle (4.1). Nous étudions dans un premier temps le cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$, c'est-à-dire nous considérons le modèle (1.2) donné par

$$d\zeta_t = \theta f(t)dt + \sigma(t)dW_t \quad t \in [0, T]. \quad (4.2)$$

En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, nous donnons l'expression de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ et établissons que cet estimateur a de bonnes propriétés. Nous prouvons qu'il est sans biais, converge en moyenne quadratique, est asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace.

Comme dans le chapitre 3, nous nous intéressons au modèle général donné en (4.1) et en utilisant les résultats de Dacunha-Castelle et Duflo [7] sur le maximum de contraste, et sous certaines conditions de régularité et d'identifiabilité, nous démontrons qu'il existe un estimateur de θ qui converge en probabilité. Nous établissons ensuite la propriété LAN et nous appliquons un résultat d'Ibragimov et Khas'minskii [26] afin de prouver la normalité asymptotique et l'efficacité asymptotique.

Posons

$$Y_i^{(\theta)} := \zeta_{t_{i+1}}^{(\theta)} - \zeta_{t_i}^{(\theta)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, \theta) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s,$$

$$F_i(\theta) := \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, \theta) ds \quad \text{et} \quad G_i := \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(s) ds \right)^{1/2}.$$

Nous supposons dans ce chapitre que $t_i = i\delta_n$ $i \in \{0, \dots, n\}$, $T = n\delta_n = N_n P$ et que $T \rightarrow \infty$ et $\delta_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Observer $\zeta_{t_i}, i \in \{0, \dots, n\}$, revient à observer $Y_i := \zeta_{t_{i+1}} - \zeta_{t_i}$ et ζ_0 . Or les variables $Y_i^{(\theta)}, i = 0, \dots, n-1$, sont indépendantes et de lois gaussiennes

$$\mathcal{L}(Y_i^{(\theta)}) = \mathcal{N}(F_i(\theta), G_i^2).$$

Ainsi lorsque la vraie valeur du paramètre est θ_0 , la vraisemblance des observations $\{Y_i = Y_i^{(\theta_0)}\}$ est donnée par

$$L_n(\theta) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi G_i^2}} \exp\left(\frac{-1}{2G_i^2} (Y_i - F_i(\theta))^2\right) \quad (4.3)$$

4.2. Étude du cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$

Le logarithme du rapport de vraisemblance a pour expression

$$\Lambda_n(\theta) = \frac{-n \ln(2\pi)}{2} - \sum_{i=0}^{n-1} \ln(G_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2G_i^2} (Y_i - F_i(\theta))^2, \quad (4.4)$$

et la fonction score

$$S_n(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (Y_i - F_i(\theta)) F_i'(\theta).$$

où

$$F_i'(\theta) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \partial_\theta f(s, \theta) ds.$$

4.2 Étude du cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$

Considérons maintenant le cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$ où $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont deux fonctions continues et périodiques de même période P , $f(\cdot)$ n'est pas identiquement nulle, $\sigma(\cdot) > 0$ et θ est le paramètre inconnu à estimer, Θ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Dans ce cas

$$F_i(\theta) = \theta F_i \text{ où } F_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s) ds \quad \text{et} \quad Y_i := Y_i^{(\theta)} = \theta F_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s.$$

Donc

$$F_i'(\theta) = F_i, \quad S_n(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (Y_i - \theta F_i) \times F_i$$

et l'estimateur $\hat{\theta}_n$ par la méthode du maximum de vraisemblance est donné par

$$\hat{\theta}_n := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_i F_i G_i^{-2}}{\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2}} = \theta_0 + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} F_i G_i^{-2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s}{\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2}}. \quad (4.5)$$

Puisque $f(\cdot)$ est continue et n'est pas identiquement nulle, pour $T = nP$ suffisamment grand, il existe au moins un i tel que $F_i \neq 0$. De plus comme $\sigma(\cdot) > 0$, nous avons $G_i > 0$. Ainsi l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est bien défini. En outre il est clair que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais et $(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ est Gaussien centré, où θ_0 est la vraie valeur du paramètre θ .

Convergence en moyenne quadratique et normalité asymptotique

Théorème 7 *Si $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques de même période P , $f(\cdot)$ n'est pas identiquement nulle, $\sigma(\cdot) > 0$, Θ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et si $n\delta_n \rightarrow \infty$ et $\delta_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors l'estimateur $\hat{\theta}_n$ converge en moyenne quadratique vers θ_0 , de plus nous avons la normalité asymptotique*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\delta_n \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right)^2 \right] = \left(\frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s) ds \right)^{-1},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L} \left(\sqrt{n\delta_n} \left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right) \right) = \mathcal{N} \left(0, \left(\frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s) ds \right)^{-1} \right).$$

Preuve Par l'expression (4.5) nous avons

$$\mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right)^2 \right] = \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} \right)^{-2} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i G_i^{-2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s \right)^2 \right].$$

D'après la propriété d'indépendance des accroissements du mouvement Brownien et par définition de G_i , nous obtenons

$$\mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right)^2 \right] = \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} \right)^{-2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-4} G_i^2 \right) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} \right)^{-1}. \quad (4.6)$$

Or d'après le Lemme 5 en annexe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} = \frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s) ds.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\delta_n \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left(\hat{\theta}_n - \theta_0 \right)^2 \right] = \left(\frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s) ds \right)^{-1}.$$

Comme la loi de $(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ est Gaussienne, le théorème est prouvé. ■

Efficacité asymptotique

Notons $\{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ la loi de $(Y_i^{(\theta)}, i = 0, \dots, n-1)$. Comme pour le cas continu nous démontrons d'abord que $\{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ est localement asymptotiquement normale (voir Définition 1).

4.2. Étude du cas $f(t, \theta) = \theta f(t)$

Proposition 8 *Sous les hypothèses du Théorème 7, la famille de lois $\{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément localement asymptotiquement normale sur Θ .*

Preuve D'après (4.3) nous avons

$$\begin{aligned} Z_n^{(\theta_0)}(u) &= \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}G_i} \exp\left(\frac{-1}{2G_i^2} (Y_i - F_i(\theta_0 + \Phi_n u))^2\right)}{\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}G_i} \exp\left(\frac{-1}{2G_i^2} (Y_i - F_i(\theta_0))^2\right)} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \exp\left(\frac{-1}{2G_i^2} (Y_i - F_i(\theta_0 + \Phi_n u))^2\right) \times \prod_{i=0}^{n-1} \exp\left(\frac{1}{2G_i^2} (Y_i - F_i(\theta_0))^2\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \ln Z_n^{(\theta_0)}(u) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2G_i^2} (F_i(\theta_0)^2 - F_i(\theta_0 + \Phi_n u)^2 + 2Y_i (F_i(\theta_0 + \Phi_n u) - F_i(\theta_0))). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Comme $Y_i = Y_i^{(\theta_0)} = F_i(\theta_0) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s$, alors

$$\begin{aligned} \ln Z_n^{(\theta_0)}(u) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2G_i^2} (F_i(\theta_0)^2 - F_i(\theta_0 + \Phi_n u)^2) \\ &\quad + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2G_i^2} \left(\left(F_i(\theta_0) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s \right) (F_i(\theta_0 + \Phi_n u) - F_i(\theta_0)) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2G_i^2} \left(- \left(F_i(\theta_0 + \Phi_n u) - F_i(\theta_0) \right)^2 \right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2G_i^2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s \cdot \left(F_i(\theta_0 + \Phi_n u) - F_i(\theta_0) \right) \right) \\ &= - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2G_i^2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(s, \theta_0 + \Phi_n u) - f(s, \theta_0)) ds \right)^2 + \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{G_i^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s \right) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(s, \theta_0 + \Phi_n u) - f(s, \theta_0)) ds \right). \end{aligned}$$

Puisque $f(t, \theta) = \theta f(t)$, nous avons $f(s, \theta_0 + \Phi_n u) - f(s, \theta_0) = \Phi_n u f(s)$ et

$$\ln Z_n^{(\theta_0)}(u) = \Phi_n u \sum_{i=0}^{n-1} F_i G_i^{-2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s - \frac{\Phi_n^2 u^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2}.$$

Prenons

$$\Phi_n := \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} \right)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \Delta_n(Y) := \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} \right)^{-1/2} \sum_{i=0}^n F_i G_i^{-2} \left(Y^{(\theta_0)} - \theta_0 F_i \right).$$

Donc $\ln Z_n^{(\theta_0)}(u)$ s'exprime sous la forme

$$\ln Z_n^{(\theta_0)}(u) = u \Delta_n(Y) - \frac{1}{2} u^2,$$

et $\Delta_n(Y)$ est une variable Gaussienne centrée de variance

$$\begin{aligned} \text{var}(\Delta_n(Y)) &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} \right)^{-1} \sum_{i=0}^n F_i^2 G_i^{-4} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(s) ds \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} \right)^{-1} \sum_{i=0}^n F_i^2 G_i^{-2} = 1. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L}(\Delta_n(Y)) = \mathcal{N}(0, 1).$$

Ceci prouve que la famille $\{\mathbb{P}_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ est localement asymptotiquement normale au point θ_0 pour tout θ_0 . ■

Théorème 8 *Sous les hypothèses du Théorème 7, l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement efficace au sens minimax pour l'erreur quadratique.*

Preuve L'égalité (4.6) nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left| \Phi_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \right|^2 \right] &= \Phi_n^{-2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} \right)^{-1} \\ &= \Phi_n^{-2} \Phi_n^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi d'après le Théorème 2 de Hájek-Le Cam, $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement efficace. ■

4.3 Convergence en probabilité de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ dans le cas général

Revenons maintenant au cadre général et supposons que Θ est un intervalle compact de \mathbb{R} contenant θ_0 . Nous allons définir un processus de contraste et démontrer l'existence et la convergence d'un estimateur qui le maximise.

4.3. Convergence en probabilité de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ dans le cas général

D'après la relation (4.4) le logarithme du rapport de vraisemblance est donné par

$$\Lambda_n(\theta) = \frac{-n \ln(2\pi)}{2} - \sum_{i=0}^{n-1} \ln(G_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2G_i^2} (Y_i - F_i(\theta))^2$$

La continuité de $f(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ et la compacité de Θ nous garantissent qu'il existe $\hat{\theta}_n$ tel que

$$\hat{\theta}_n = \arg \sup_{\theta \in \Theta} \Lambda_n(\theta).$$

En éliminant les termes inutiles pour déterminer l'argument du $\sup_{\theta \in \Theta} \Lambda_n(\theta)$, nous obtenons que

$$\hat{\theta}_n = \arg \sup_{\theta \in \Theta} U_n(\theta),$$

où

$$U_n(\theta) := \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Y_i F_i(\theta)}{G_i^2} - \frac{1}{2n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i^2(\theta)}{G_i^2}. \quad (4.8)$$

Comme dans le cas continu, pour établir la convergence en probabilité P_{θ_0} de $\hat{\theta}_n$ vers θ_0 nous vérifions d'abord que $U_n(\theta)$ est un processus de contraste, (voir Définition 3) et nous prouvons par la suite la consistance en appliquant le Théorème 4.

Proposition 9 *Si $f(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques de même période P ne dépendant pas de θ , $\sigma(\cdot) > 0$, la condition d'identifiabilité (I) est vérifiée et si $n\delta_n \rightarrow \infty$ et $\delta_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors $U_n(\theta)$ est un processus de contraste.*

Preuve Montrons que $U_n(\theta)$ converge en probabilité P_{θ_0} vers la même fonction de contraste $K(\theta, \theta_0)$ définie en (3.12) par

$$K(\theta, \theta_0) = \frac{1}{2P} \int_0^P \rho^2(s, \theta_0) ds - \frac{1}{2P} \int_0^P (\rho(s, \theta_0) - \rho(s, \theta))^2 ds.$$

Lorsque θ_0 est la vraie valeur du paramètre, remplaçons Y_i par sa valeur $Y_i^{(\theta_0)} = F_i(\theta_0) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s$. Donc nous obtenons

$$\begin{aligned} U_n(\theta) &= \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i(\theta_0) F_i(\theta)}{G_i^2} + \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i(\theta) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s}{G_i^2} - \frac{1}{2n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i^2(\theta)}{G_i^2} \\ &= \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F_i(\theta_0) - F_i(\theta))^2}{G_i^2} + \frac{1}{2n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i^2(\theta)}{G_i^2} \\ &\quad + \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i(\theta) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s}{G_i^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Or le Lemme 6 en annexe nous donne,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i^2(\theta)}{G_i^2} = \frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s, \theta) ds \quad (4.10)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F_i(\theta) - F_i(\theta_{\theta_0}))^2}{G_i^2} = \frac{1}{P} \int_0^P (\rho(s, \theta) - \rho(s, \theta_0))^2 ds.$$

Par conséquent la partie non-aléatoire de l'égalité (4.9) converge vers $K(\theta, \theta_0)$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrons que la partie aléatoire converge en moyenne quadratique vers 0. Puisque les variables $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s$, $i = 0 \dots n-1$ sont Gaussiennes indépendantes, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left| \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i(\theta) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s}{G_i^2} \right|^2 \right] &= \frac{1}{n^2 \delta_n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left| \frac{F_i(\theta) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s}{G_i^2} \right|^2 \right] \\ &= \frac{1}{n^2 \delta_n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i^2(\theta)}{G_i^2} \\ &= \frac{1}{n\delta_n} \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i^2(\theta)}{G_i^2}. \end{aligned}$$

Ainsi d'après la convergence (4.10) nous déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left| \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i(\theta) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s}{G_i^2} \right|^2 \right] = 0.$$

Donc le processus $U_n(\theta)$ converge en moyenne quadratique vers la fonction $K(\theta, \theta_0)$ qui a un maximum strict en $\theta = \theta_0$. Ainsi, $U_n(\theta)$ est un processus de contraste. ■

Corollaire 4 *En plus des conditions de la Proposition 9, supposons que la fonction $f(\cdot, \cdot)$ est dérivable par rapport à θ , sa dérivée partielle $\partial_\theta f(\cdot, \cdot)$ est continue et que Θ est un intervalle compact de \mathbb{R} , alors $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité \mathbb{P}_{θ_0} vers θ_0 .*

Preuve En premier lieu notons que la périodicité de $f(\cdot, \cdot)$ implique celle de ces fonctions dérivées. Pour établir la convergence en probabilité \mathbb{P}_{θ_0} , et comme dans le Corollaire 2 nous appliquons le Théorème 4. Par leurs définitions, $U_n(\theta)$

4.3. Convergence en probabilité de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ dans le cas général

et $K(\theta, \theta_0)$ vérifient la première condition de ce théorème. Pour établir la seconde condition, remarquons que

$$\begin{aligned}
 U_n(\theta) - U_n(\theta') &= \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{Y^{(\theta_0)}(F_i(\theta) - F_i(\theta'))}{G_i^2} - \frac{1}{2n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F_i^2(\theta) - F_i^2(\theta'))}{G_i^2} \\
 &= \frac{1}{2n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2F_i(\theta_0) - F_i(\theta) - F_i(\theta'))(F_i(\theta) - F_i(\theta'))}{G_i^2} \\
 &\quad + \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F_i(\theta) - F_i(\theta'))}{G_i^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s \\
 &:= B_1(\theta, \theta') + B_2(\theta, \theta'), \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

où $B_1(\theta, \theta')$ est la partie non-aléatoire et $B_2(\theta, \theta')$ est la partie aléatoire de cette égalité. Pour compléter la preuve nous démontrons que quelque soit $\eta > 0$

$$\sup_{|\theta - \theta'| \leq \eta} |B_1(\theta, \theta')| < C\eta, \text{ pour un } C > 0 \tag{4.12}$$

et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sup_{|\theta - \theta'| \leq \eta} |B_2(\theta, \theta')| \right] = 0.$$

Signalons que ce calcul est très proche de celui de la preuve du Corollaire 2 fait dans le cas d'une observation continue.

1) La fonction $\theta \mapsto f(s, \theta)$ étant continûment dérivable, le théorème des accroissements finis nous donne

$$f(s, \theta) - f(s, \theta') = (\theta - \theta') \partial_\theta f(s, \theta_s), \quad \theta_s \in [\theta, \theta'].$$

D'une part, la compacité de $\Theta \times [0, P]$ et la continuité et la périodicité de $(s, \theta) \mapsto \partial_\theta f(s, \theta)$ nous donnent

$$C_0 := \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{s \in [0, P]} |\partial_\theta f(s, \theta)| < \infty.$$

Ainsi

$$|F_i(\theta) - F_i(\theta')| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(s, \theta) - f(s, \theta')) ds \right| \leq (t_{i+1} - t_i) |\theta - \theta'| C_0 = |\theta - \theta'| C_0 \delta_n.$$

D'autre part, comme $\sigma(\cdot) > 0$ alors $0 < \inf_{s \in [0, P]} \sigma^2(s) := C_1 < \infty$ et

$$G_i^2 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(s) ds \geq \delta_n C_1,$$

d'où

$$\frac{1}{G_i^2} \leq \frac{1}{\delta_n C_1}.$$

Donc

$$\left| \frac{F_i(\theta) - F_i(\theta')}{G_i^2} \right| \leq \frac{|\theta - \theta'| C_0 \delta_n}{C_1 \delta_n} := C_2 |\theta - \theta'|.$$

De plus

$$\begin{aligned} |2F_i(\theta_0) - F_i(\theta) - F_i(\theta')| &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} (2|f(s, \theta_0)| + |f(s, \theta)| + |f(s, \theta')|) ds \\ &\leq 4\delta_n \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{s \in [0, P]} |f(s, \theta)| := C_3 \delta_n. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sup_{|\theta - \theta'| \leq \eta} |B_1(\theta, \theta')| &\leq \frac{1}{2n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} C_2 |\theta - \theta'| C_3 \delta_n \\ &\leq \frac{n\delta_n}{2n\delta_n} C_2 C_3 \eta := C\eta \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ce qui prouve l'inégalité (4.12).

2) Montrons maintenant que $B_2(\theta, \theta')$ converge vers 0 en moyenne quand $n \rightarrow \infty$. Par changement de l'ordre d'intégration nous avons

$$\begin{aligned} B_2(\theta, \theta') &= \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F_i(\theta) - F_i(\theta'))}{G_i^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s \\ &= \int_{\theta}^{\theta'} \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \partial_u f(s, u) ds \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s du. \end{aligned}$$

En posant $F'_i(u) := \int_{t_i}^{t_{i+1}} \partial_u f(s, u) ds$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |B_2(\theta, \theta')| \right] &\leq \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\int_{\Theta} \left| \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} F'_i(u) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s \right| du \right] \\ &\leq \int_{\Theta} \left(\mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left| \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} F'_i(u) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= \int_{\Theta} \left(\frac{1}{n^2 \delta_n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\left| \frac{1}{G_i^2} F'_i(u) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= \int_{\Theta} \left(\frac{1}{n^2 \delta_n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^4} (F'_i(u))^2 G_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\delta_n}} \int_{\Theta} \left(\frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F'_i(u))^2}{G_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} du, \end{aligned}$$

4.3. Convergence en probabilité de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ dans le cas général

la 2 ème et la 3 ème relations sont dues respectivement à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'indépendance des variables Gaussiennes centrées $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s$. Or Θ est compact, $(s, \theta) \mapsto \partial_\theta f(s, \theta)$ est continue donc

$$(F'_i(u))^2 = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \partial_u f(s, u) ds \right)^2 \leq \delta_n^2 \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{s \in [0, P]} |\partial_\theta f(s, \theta)|^2 < \infty,$$

et

$$\frac{(F'_i(u))^2}{G_i^2} \leq \frac{\delta_n \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{s \in [0, P]} |\partial_\theta f(s, \theta)|^2}{\inf_{s \in [0, P]} \sigma^2(s)}.$$

Ainsi

$$\int_{\Theta} \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F'_i(u))^2}{G_i^2} du \leq \frac{\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{s \in [0, P]} |\partial_\theta f(s, \theta)|^2}{\inf_{s \in [0, P]} \sigma^2(s)} \times \|\Theta\|,$$

où $\|\Theta\| = \int_{\Theta} du$ est la longueur de Θ . Comme Θ est compact, $\|\Theta\| < \infty$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |B_2(\theta, \theta')| \right] \leq \frac{\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{s \in [0, P]} |\partial_\theta f(s, \theta)|^2}{\inf_{s \in [0, P]} \sigma^2(s)} \|\Theta\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n\delta_n}} = 0.$$

3) Nous pouvons maintenant achever la démonstration du corollaire. D'après l'égalité (4.11) nous avons pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |U_n(\theta) - U_n(\theta')| > \epsilon \right) &= \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |B_1(\theta, \theta') + B_2(\theta, \theta')| > \epsilon \right) \\ &\leq \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |B_1(\theta, \theta')| + |B_2(\theta, \theta')| > \epsilon \right) \\ &\leq \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |B_1(\theta, \theta')| > \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &\quad + \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |B_2(\theta, \theta')| > \frac{\epsilon}{2} \right) \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\theta_0} \left[\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |B_2(\theta, \theta')| \right] = 0$$

alors d'après l'inégalité de Markov

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |B_2(\theta, \theta')| > \frac{\epsilon}{2} \right) = 0.$$

Grâce à l'inégalité (4.13) il suffit, pour tout $\epsilon > 0$, de prendre $\eta = \frac{\epsilon}{2C}$ pour avoir

$$\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |B_1(\theta, \theta')| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_0} \left(\sup_{|\theta - \theta'| < \eta} |U_n(\theta) - U_n(\theta')| > \epsilon \right) = 0.$$

Ainsi, la seconde condition du Théorème 4 est satisfaite. D'où l'estimateur $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité P_{θ_0} . ■

4.4 Propriété LAN

Considérons maintenant que Θ est un intervalle compact de \mathbb{R} contenant θ_0 , $\theta_0 \in \overset{\circ}{\Theta}$. Définissons les deux ensembles suivantes : $U_{\theta,n} := \{u : \theta + u\phi_n \in \Theta\}$, $U_{\theta,n,r} := \{u \in U_{\theta,n} : |u| \leq r\}$, $r > 0$ où $\phi_n := (n\delta_n)^{-1/2}$.

Théorème 9 *Supposons que les fonctions $f(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques en t de même période P ne dépendant pas de θ , la fonction $(t, \theta) \mapsto \partial_\theta^2 f(t, \theta)$ est continue bornée, $t \mapsto \partial_\theta f(t, \theta)$ est non identiquement nulle pour chaque θ , $\sigma(\cdot) > 0$, Θ est un intervalle compact de \mathbb{R} contenant θ_0 et que $\delta_n \rightarrow 0$ et $n\delta_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors la famille $\{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément LAN.*

Preuve D'après l'équation (4.7)

$$\ln Z_n^{(\theta_0)}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (F_i(\theta_0 + u\phi_n) - F_i(\theta_0)) Y_i + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2G_i^2} (F_i(\theta_0)^2 - F_i(\theta_0 + u\phi_n)^2).$$

Or $Y_i = Y_i^{(\theta_0)} = F_i(\theta_0) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(s) dW_s$, donc

$$\ln Z_n^{(\theta_0)}(u) = M_n^{(\theta_0)}(u) - \frac{1}{2} \mathbf{E}_{\theta_0} [(M_n^{(\theta_0)}(u))^2] \quad (4.14)$$

où

$$\begin{aligned} M_n^{(\theta_0)}(u) &:= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (F_i(\theta_0 + u\phi_n) - F_i(\theta_0)) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(t) dW_t \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(t, \theta_0 + u\phi_n) - f(t, \theta_0)) dt \right) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(t) dW_t \right). \end{aligned}$$

4.4. Propriété LAN

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_0} [(M_n^{(\theta_0)}(u))^2] &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (F_i(\theta_0 + u\phi_n) - F_i(\theta_0))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(t, \theta_0 + u\phi_n) - f(t, \theta_0)) dt \right)^2. \end{aligned}$$

Comme la fonction $(t, \theta) \mapsto \partial_\theta f(t, \theta)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \Theta$

$$\begin{aligned} &f(t, \theta_0 + u\phi_n) - f(t, \theta_0) \\ &= u\phi_n \partial_\theta f(t, \theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\phi_n} (\partial_\theta f(t, \theta) - \partial_\theta f(t, \theta_0)) d\theta, \quad (4.15) \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\phi_n} (\partial_\theta f(t, \theta) - \partial_\theta f(t, \theta_0)) d\theta \right| \\ &\leq |u|\phi_n \sup_{t \in [0, P]} \sup_{|\theta - \theta_0| \leq |u|\phi_n} |\partial_\theta f(t, \theta) - \partial_\theta f(t, \theta_0)|. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Or

$$\sup_{t \in [0, P]} \sup_{|\theta - \theta_0| \leq |u|\phi_n} |\partial_\theta f(t, \theta) - \partial_\theta f(t, \theta_0)|$$

converge vers 0 uniformément par rapport à $\theta_0 \in \Theta$ et à $u \in U_{\theta, n, r}$ lorsque $\phi_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ pour chaque $r > 0$. Donc

$$f(t, \theta_0 + u\phi_n) - f(t, \theta_0) = u\phi_n (\partial_\theta f(t, \theta_0) + o(1))$$

où $o(1)$ est uniforme par rapport à $t \in \mathbb{R}$, à θ_0 et à $u \in U_{\theta, n, r}$. De là

$$\mathbb{E}_{\theta_0} [(M_n^{(\theta_0)}(u))^2] = u^2 \phi_n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F_i'(\theta_0))^2}{G_i^2} + u^2 \phi_n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{G_i^2} \times o(1)$$

Par conséquent, utilisant le fait que $\phi_n = (n\delta_n)^{-1/2}$, le lemme 6 en annexe nous donne,

$$\mathbb{E}_{\theta_0} [(M_n^{(\theta_0)}(u))^2] = \frac{u^2}{P} \int_0^P (\partial_\theta f(t, \theta_0))^2 \sigma^{-2}(t) dt + u^2 o(1).$$

Par ailleurs, la relation (4.15) entraîne que

$$\begin{aligned} M_n^{(\theta_0)}(u) &= u\phi_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_i'(\theta_0)}{G_i^2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(t) dW_t \right) \\ &\quad + u\phi_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} \left(\int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\phi_n} (F_i'(\theta) - F_i'(\theta_0)) d\theta \right) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(t) dW_t \right). \end{aligned}$$

La variance de la variable gaussienne centrée

$$\phi_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F'_i(\theta_0)}{G_i^2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(t) dW_t \right)$$

est égale à

$$\phi_n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F'_i(\theta_0))^2}{G_i^2}$$

qui d'après le Lemme 6 converge uniformément par rapport à $\theta_0 \in \Theta$ vers

$$\frac{1}{P} \int_0^P \left(\frac{\partial_\theta f(t, \theta_0)}{\sigma(t)} \right)^2 dt.$$

La variance de la variable

$$\phi_n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} \left(\int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\phi_n} (F'_i(\theta) - F'_i(\theta_0)) d\theta \right) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(t) dW_t \right)$$

vaut

$$\begin{aligned} & \phi_n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} \left(\int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\phi_n} (F'_i(\theta) - F'_i(\theta_0)) d\theta \right)^2 \\ & \leq u^2 \phi_n^4 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{G_i^2} \sup_{t \in [0, P]} \sup_{|\theta - \theta_0| \leq |u|\phi_n} |\partial_\theta f(t, \theta) - \partial_\theta f(t, \theta_0)| \\ & = u^2 \phi_n^2 o(1) \end{aligned}$$

Donc en revenant à l'égalité (4.14) et d'après l'inégalité (4.16) et le Lemme 6, nous déduisons que la famille $\{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ est uniformément LAN. ■

4.5 Normalité asymptotique et efficacité asymptotique

Pour démontrer la normalité asymptotique ainsi que l'efficacité asymptotique, nous allons appliquer le Théorème 1.1 et le Corollaire 1.1 du Chapitre III, section 1 de [26]. Rappelons les conditions sous lesquelles ce théorème et ce corollaire sont vérifiés.

1. *Condition N1* : $Z_n^{(\theta_0)}$ s'écrit sous la forme suivante

$$Z_n^{(\theta_0)} = \exp \left(\Delta_n(\theta_0, u) - \frac{1}{2} u^2 + \psi(\theta_0, u) \right) \quad (4.17)$$

4.5. Normalité asymptotique et efficacité asymptotique

tels que les deux limites suivantes soient uniformes par rapport à θ_0 et par rapport à u , $|u| < r$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L} \{ \Delta_n(\theta_0, u) | P_{\theta_0} \} = \mathcal{N}(0, 1),$$

et

$$\lim_{n \rightarrow 0} \psi(\theta_0, u) = 0 \text{ en probabilité } P_{\theta_0}.$$

2. *Condition N2* :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \phi_n(\theta) = 0,$$

où $\phi_n(\cdot)$ est une fonction non identiquement nulle.

3. *Condition N3* : Il existe $\beta > 0$, $m > 0$, $B > 0$, $a \in \mathbb{R}$, tels que

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{|u| < R, |v| < R} |u-v|^{-\beta} \mathbb{E}_{\theta} \left[\left((Z_n^{(\theta)}(u))^{1/m} - (Z_n^{(\theta)}(v))^{1/m} \right)^m \right] < B(1+R^a). \quad (4.18)$$

4. *Condition N4* : Pour tout $N > 0$, il existe n_2 tel que

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{n > n_2} \sup_{u \in U_{\theta, n}} |u|^N \mathbb{E} \left[(Z_n^{(\theta)}(u))^{1/2} \right] < \infty. \quad (4.19)$$

Corollaire 5 *Supposons que les fonctions $f(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques en t de même période P ne dépendant pas de θ , la fonction $(t, \theta) \mapsto \partial_{\theta}^2 f(t, \theta)$ existe et est continue, $t \mapsto \partial_{\theta} f(t, \theta)$ n'est pas identiquement nulle pour chaque θ , $\sigma(\cdot) > 0$, Θ est un intervalle compact de \mathbb{R} contenant θ_0 et que $n\delta_n \rightarrow \infty$ et $\delta_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Supposons de plus que la condition d'identifiabilité uniforme suivante est vérifiée*

(IU2) *Pour tout $\nu > 0$,*

$$\inf_{|\theta - \theta'| \geq \nu} \int_0^P (f(t, \theta) - f(t, \theta'))^2 \sigma^{-2}(t) dt > 0.$$

Alors l'estimateur $\hat{\theta}_n$ converge en probabilité, est asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace au sens minimax.

Avant de commencer la démonstration, nous donnons un exemple où la condition **(IU2)** est satisfaite. Posons $f(t, \theta) = \theta f(t)$ où $f(\cdot)$ n'est pas identiquement nulle. Alors

$$\begin{aligned} \inf_{|\theta - \theta'| \geq \nu} \int_0^P (f(t, \theta) - f(t, \theta'))^2 \sigma^{-2}(t) dt &= \inf_{|\theta - \theta'| \geq \nu} (\theta - \theta')^2 \int_0^P \rho^2(t) dt \\ &\geq \nu^2 \int_0^P \rho^2(t) dt > 0 \end{aligned}$$

Donc la condition d'identifiabilité uniforme **(IU2)** est satisfaite.

Preuve Pour démontrer ce résultat, nous prouvons que dans notre cadre les conditions $N1 - N4$ sont satisfaites.

Nous avons vu précédemment que la famille $\{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$ est LAN uniformément par rapport à θ variant dans le compact Θ avec $\phi_n = (n\delta_n)^{-1/2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} \phi_n(\theta) = 0$$

pour tout compact $K \subset \Theta$. Par conséquent les *conditions N1 et N2* sont vérifiées. Il reste à prouver les *conditions N3 et N4*.

Condition N3. D'après la relation (4.14)

$$\begin{aligned} \ln Z_n^{(\theta)}(u) &= M_n^{(\theta)}(u) - \frac{1}{2} \mathbf{E}_\theta \left[\left(M_n^{(\theta)}(u) \right)^2 \right] \\ &= \int_0^{nP} H_n^{(\theta)}(t, u) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^{nP} \left(H_n^{(\theta)}(t, u) \right)^2 dt \end{aligned}$$

où pour $t > 0$,

$$H_n^{(\theta)}(t, u) := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (F_i(\theta + u\phi_n) - F_i(\theta)) \sigma(t) \mathbb{I}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (4.20)$$

et rappelons que

$$M_n^{(\theta)}(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(t, \theta + u\phi_n) - f(t, \theta)) dt \right) \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma(t) dW_t \right).$$

Pour établir que notre modèle vérifie la *condition N3*, nous majorons d'abord $\mathbf{E}_\theta \left[\left((Z_n^{(\theta)}(u))^{1/2} - (Z_n^{(\theta)}(v))^{1/2} \right)^2 \right]$. Or

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_\theta \left[\left((Z_n^{(\theta)}(u))^{1/2} - (Z_n^{(\theta)}(v))^{1/2} \right)^2 \right] \\ &= \mathbf{E} [Z_n^{(\theta)}(u)] + \mathbf{E}_{\theta_0} [Z_n^{(\theta)}(v)] - 2\mathbf{E}_\theta \left[\left(Z_n^{(\theta)}(u) \right)^{1/2} \left(Z_n^{(\theta)}(v) \right)^{1/2} \right] \\ &= 2 \left(1 - \mathbf{E}_\theta \left[\left(Z_n^{(\theta)}(u) \right)^{1/2} \left(Z_n^{(\theta)}(v) \right)^{1/2} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

car $\mathbf{E} [Z_n^{(\theta)}(u)] = \mathbf{E} [Z_n^{(\theta)}(v)] = 1$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \left[\left(Z_n^{(\theta)}(u) \right)^{1/2} \left(Z_n^{(\theta)}(v) \right)^{1/2} \right] &= \mathbf{E}_{\theta+u\phi_n} \left[\left(\frac{dP_{\theta+u\phi_n}^{(n)}}{dP_{\theta+v\phi_n}^{(n)}} \right)^{1/2} \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} M_n^{(\theta+u\phi_n)}(v-u) - \frac{1}{4} \mathbf{E}_\theta \left[\left(M_n^{(\theta+u\phi_n)}(v-u) \right)^2 \right] \right) \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{4} \mathbf{E}_\theta \left[\left(M_n^{(\theta+u\phi_n)}(v-u) \right)^2 \right] \right) \times \mathbf{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} M_n^{(\theta+u\phi_n)}(v-u) \right) \right] \end{aligned}$$

4.5. Normalité asymptotique et efficacité asymptotique

Comme la variable aléatoire $M_n^{(\theta+u\phi_n)}(v-u)$ est centrée gaussienne,

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} M_n^{(\theta+u\phi_n)}(v-u) \right) \right] = \exp \left(\frac{1}{8} \mathbb{E}_\theta \left[\left(M_n^{(\theta+u\phi_n)}(v-u) \right)^2 \right] \right).$$

Donc, utilisant l'inégalité $0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$ pour tout $x \geq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - \mathbb{E}_\theta \left[\left(Z_n^{(\theta)}(u) \right)^{1/2} \left(Z_n^{(\theta)}(v) \right)^{1/2} \right] \\ &= 1 - \exp \left(\frac{-1}{8} \mathbb{E}_\theta \left[\left(M_n^{(\theta+u\phi_n)}(v-u) \right)^2 \right] \right) \\ &\leq \frac{1}{8} \mathbb{E}_\theta \left[\left(M_n^{(\theta+u\phi_n)}(v-u) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{nP} \left(H_n^{(\theta+u\phi_n)}(t, v-u) \right)^2 dt. \end{aligned}$$

D'après la définition de $H_n^{(\theta)}(t, u)$ donnée par la relation (4.20),

$$H_n^{(\theta+u\phi_n)}(t, u-v) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (F_i(\theta+v\phi_n) - F_i(\theta+u\phi_n)) \sigma(t) \mathbb{I}_{]t_i, t_{i+1}]}(t).$$

La continuité de la fonction $(t, \alpha) \mapsto \partial_\alpha f(t, \alpha)$, donne

$$\begin{aligned} f(t, \theta+v\phi_n) - f(t, \theta+u\phi_n) \\ = (v-u)\phi_n \partial_\theta f(t, \theta) + \int_{\theta+u\phi_n}^{\theta+v\phi_n} (\partial_\theta f(t, \alpha) - \partial_\theta f(t, \theta)) d\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$|F_i(\theta+v\phi_n) - F_i(\theta+u\phi_n)| \leq |v-u|\phi_n \times 3(t_{i+1} - t_i) \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta f(t, \theta)|.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} &\left(H_n^{(\theta+u\phi_n)}(t, u-v) \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^4} (F_i(\theta+v\phi_n) - F_i(\theta+u\phi_n))^2 \sigma^2(t) \mathbb{I}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \\ &\leq 9|u-v|^2 \phi_n^2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{G_i^4} \sigma^2(t) \mathbb{I}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \right) \left(\sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta f(t, \theta)| \right)^2. \end{aligned}$$

Comme $\phi_n^2 = (n\delta_n)^{-1}$, le Lemme 6 implique que

$$\begin{aligned} &\int_0^{nP} \left(H_n^{(\theta+u\phi_n)}(t, u-v) \right)^2 dt \\ &\leq 9|u-v|^2 \phi_n^2 \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{G_i^2} \right) \left(\sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta f(t, \theta)| \right)^2 \\ &= |u-v|^2 \times \frac{3}{P} \int_0^P \sigma^{-2}(t) dt \times \left(\sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta f(t, \theta)| \right)^2 (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Par conséquent en revenant à l'égalité (4.21), la *condition N3* est satisfaite avec

$$k = 1, \quad \beta = m = 2, \quad a = 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{9}{P} \int_0^P \sigma^{-2}(t) dt \times \left(\sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta f(t, \theta)| \right)^2.$$

Condition N4. D'après la relation (4.14)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(Z_n^{(\theta)}(u))^{1/2} \right] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} M_n^{(\theta)}(u) - \frac{1}{4} \mathbb{E}_\theta \left[(M_n^{(\theta)}(u))^2 \right] \right) \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{4} \mathbb{E}_\theta \left[(M_n^{(\theta)}(u))^2 \right] \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} M_n^{(\theta)}(u) \right) \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{8} \mathbb{E}_\theta \left[(M_n^{(\theta)}(u))^2 \right] \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

La dernière égalité est due au fait que la variable $M_n^{(\theta)}(u)$ est centrée et gaussienne.

Pour minorer $\mathbb{E} \left[(Z_n^{(\theta)}(u))^{1/2} \right]$ uniformément par rapport à u , nous allons étudier séparément le cas où $|u|\phi_n$ est "petit" pour lequel nous utiliserons les développements de Taylor, et le cas où $|u|\phi_n$ est "grand" pour lequel nous ferons appel à la condition d'identifiabilité uniforme **(IU2)**.

(i) Si la fonction $(t, \theta) \mapsto \partial_\theta^2 f(t, \theta)$ est continue bornée, la formule de la moyenne et l'inégalité (4.16) impliquent que

$$\left| \int_{\theta_0}^{\theta_0 + u\phi_n} (\partial_\theta f(t, \theta) - \partial_\theta f(t, \theta_0)) d\theta \right| \leq u^2 \phi_n^2 \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta^2 f(t, \theta)|$$

et l'égalité (4.15) entraîne que

$$|f(t, \theta_0 + u\phi_n) - f(t, \theta_0) - u\phi_n \partial_\theta f(t, \theta_0)| \leq u^2 \phi_n^2 \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta^2 f(t, \theta)|,$$

d'où

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E}_\theta \left[(M_n^{(\theta)}(u))^2 \right] - u^2 \phi_n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F'_i(\theta))^2}{G_i^2} \right| \\ &\leq |u|^3 \phi_n^3 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{G_i^2} \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta^2 f(t, \theta)| \\ &\quad \times \left(2 \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta f(t, \theta)| + |u|\phi_n \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta^2 f(t, \theta)| \right). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 6

$$\phi_n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(F'_i(\theta))^2}{G_i^2} = \frac{1}{P} \int_0^P (\partial_\theta f(t, \theta))^2 \sigma^{-2}(t) dt (1 + o(1))$$

4.5. Normalité asymptotique et efficacité asymptotique

et

$$\phi_n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{G_i^2} = \frac{1}{P} \int_0^P \sigma^{-2}(t) dt (1 + o(1))$$

où les $o(1)$ sont uniformes par rapport à $u \in U_{n,\theta}$ et par rapport à $\theta \in \Theta$. Par conséquent il existe $n_0 > 0$ tel que pour tout $n < n_0$,

$$E_\theta \left[\left(M_n^{(\theta)}(u) \right)^2 \right] \geq \frac{u^2}{2P} \int_0^P (\partial_\theta f(t, \theta))^2 \sigma^{-2}(t) dt - \frac{2C|u|^3 \phi_n}{P} \int_0^P \sigma^{-2}(t) dt,$$

où

$$C = \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta^2 f(t, \theta)| \left(2 \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta f(t, \theta)| + |u| \phi_n \sup_{t \in [0, P]} \sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\theta^2 f(t, \theta)| \right).$$

La fonction $t \mapsto \partial_\theta f(t, \cdot)$ étant continue et non identiquement nulle, nous en déduisons qu'il existe $\nu > 0$ suffisamment petit et $n_\nu > n_0$ tel que pour $n > n_\nu$, pour tout $\theta \in \Theta$ et tout $u \in U_{\theta, n}$ vérifiant $|u| \phi_n \leq \nu$ nous avons

$$E_\theta \left[\left(M_n^{(\theta)}(u) \right)^2 \right] \geq \frac{u^2}{4P} \int_0^P (\partial_\theta f(t, \theta))^2 \sigma^{-2}(t) dt$$

ainsi d'après (4.22),

$$E \left[\left(Z_n^{(\theta)}(u) \right)^{1/2} \right] \leq \exp \left(\frac{-u^2}{32P} \int_0^P (\partial_\theta f(t, \theta))^2 \sigma^{-2}(t) dt \right). \quad (4.23)$$

(ii) Il nous reste à étudier $E_\theta \left[\left(M_n^{(\theta)}(u) \right)^2 \right]$ lorsque $|u| \phi_n > \nu$. Pour cela nous allons utiliser l'hypothèse d'identifiabilité uniforme **(IU2)**. D'après le Lemme 6 nous avons

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (F_i(\theta) - F_i(\theta'))^2 = \frac{n\delta_n}{P} \left(\int_0^P (f(t, \theta) - f(t, \theta'))^2 \sigma^{-2}(t) dt + o(1) \right)$$

uniformément par rapport à θ et $\theta' \in \Theta$. Comme $\phi_n = (n\delta_n)^{-1/2}$ la condition d'identifiabilité **(IU2)** implique pour $n > n_1$ suffisamment grand,

$$\inf_{|\theta - \theta'| \geq \nu} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (F_i(\theta) - F_i(\theta'))^2 \geq \frac{h(\nu)}{2P\phi_n^2} \geq \frac{h(\nu)}{2P\phi_n^2} \times \frac{|\theta - \theta'|^2}{|\Theta|^2},$$

où

$$|\Theta| = \sup\{|\theta - \theta'| : \theta, \theta' \in \Theta\} \text{ et } h(\nu) := \inf_{|\theta - \theta'| \geq \nu} \int_0^P (f(t, \theta) - f(t, \theta'))^2 \sigma^{-2}(t) dt > 0.$$

De là, pour tout $\theta \in \Theta$ et tout $u \in U_{\theta, n}$ tel que $|u| \phi_n > \nu$, nous obtenons

$$E_\theta \left[\left(M_n^{(\theta)}(u) \right)^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G_i^2} (F_i(\theta + u\phi_n) - F_i(\theta))^2 \geq \frac{h(\nu)}{2P\phi_n^2} \times \frac{u^2 \phi_n^2}{|\Theta|^2} = \frac{u^2 h(\nu)}{2P|\Theta|^2}.$$

Donc d'après (4.22),

$$\mathbb{E} \left[(Z_n^{(\theta)}(u))^{1/2} \right] \leq \exp \left(\frac{-u^2 h(\nu)}{2P|\Theta|^2} \right). \quad (4.24)$$

Posons

$$g(\nu) := \min \left\{ \frac{1}{32P} \int_0^P (\partial_\theta f(t, \theta))^2 \sigma^{-2}(t) dt, \frac{h(\nu)}{2P|\Theta|^2} \right\} > 0.$$

alors grâce aux deux inégalités (4.23) et (4.24), pour $n > n_2 := \max\{n_\nu, n_1\}$

$$\mathbb{E} \left[(Z_n^{(\theta)}(u))^{1/2} \right] \leq e^{-u^2 g(\nu)}.$$

Comme $g(\cdot)$ est positive nous déduisons que pour tout $N > 0$

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{n > n_2} \sup_{u \in U_{\theta, n}} |u|^N \mathbb{E} \left[(Z_n^{(\theta)}(u))^{1/2} \right] < \infty.$$

Ainsi la condition N4 est vérifiée. Ce qui termine la preuve du corollaire. ■

Chapitre 5

Estimation non-paramétrique du drift d'un modèle de type *signal plus bruit*

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons à nouveau le modèle (1.2) et nous supposons que $\theta = 1$ et $\sigma(\cdot)$ est connue

$$d\zeta_t = f(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad t \geq 0 \quad (5.1)$$

où les fonctions $f(\cdot), \sigma(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues périodiques de période P supposée connue, $\{W_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien et $f(\cdot)$ est inconnue.

Lorsque nous disposons d'une observation continue sur l'intervalle $[0, T]$ la fonction $\sigma^2(\cdot)$ peut être estimée sur tout intervalle $[t, t + \epsilon]$ en utilisant les propriétés du mouvement Brownien.

En effet, la variation quadratique $[\zeta]_t$ du processus $\{\zeta_t, t \geq 0\}$ vérifie $d[\zeta]_t = \sigma^2(t)dt$ (voir [31]). Considérons la partition de l'intervalle $[t, t + \epsilon]$ en n intervalles $\Delta_i^{(n)}, i = 1, \dots, n$ de même longueur et notons par $\Delta\zeta_i^{(n)}$ l'accroissement de $\{\zeta_t\}$ sur $\Delta_i^{(n)}$ alors nous avons (voir par exemple [18])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta\zeta_i^{(n)})^2 = \int_t^{t+\epsilon} \sigma^2(u) du, \quad \text{P - p.s.}$$

Nous nous intéressons donc à l'estimation de la fonction $f(\cdot)$ à partir de l'observation d'une trajectoire continue du processus $\{\zeta_t\}$ sur un intervalle $[0, T]$. Étant donné la périodicité de $f(\cdot)$, nous construisons un estimateur à noyau périodique et nous établissons qu'il possède de bonnes propriétés. Contrairement aux résultats d'Ibragimov et Khas'minskii (Chapitre VII, section 4 de [26]) pour le même modèle nous obtenons une convergence en moyenne quadratique uniforme sur toute l'intervalle $[0, P]$ de l'estimateur à noyau que nous

construisons. De plus nous établissons sa normalité asymptotique vectorielle et sa convergence presque sûre quand $T \rightarrow \infty$. Nous terminons ce chapitre avec des simulations.

5.2 Construction de l'estimateur de $f(t)$

Pour simplifier la présentation supposons que $T = nP$. Définissons le noyau périodique de l'estimateur que nous allons étudier.

Noyau périodique

Désormais nous considérons le noyau $K : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qui est une fonction continue, paire et de support compact contenu dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Nous supposons également que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(s)ds = 1.$$

Pour $h > 0$, nous définissons la fonction

$$K_h(t) := \frac{1}{h} \sum_{k \in \mathbb{Z}} K\left(\frac{t + kP}{h}\right).$$

Cette somme est finie car le nombre de termes non nuls est fini. Alors nous avons le lemme suivant

Lemme 2 *Pour tout $h \in [0, P]$, la fonction $K_h(\cdot)$ est périodique de période P . De plus*

1. $\text{supp}(K_h) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [kP - h/2, kP + h/2]$;
2. $\int_{-h/2}^{h/2} K_h(s)ds = 1$ et $\int_{-h/2}^{h/2} sK_h(s)ds = 0$,

où $\text{supp}(K_h)$ est le support de K_h .

Définition de l'estimateur

L'équation (5.1) donne la relation

$$f(t)dt = d\zeta_t - \sigma(t)dW_t.$$

Définissons l'estimateur suivant

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s)d\zeta_s$$

où $n \in \mathbb{N}$, la période P de $f(\cdot)$ est fixée et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive décroissante qui converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

5.3. Convergence de l'estimateur

Remarquons que si un processus $\{\xi_t\}$ vérifie

$$d\xi_t = f(t)\xi_t dt + \sigma(t)\xi_t dW_t, \quad \xi_0 = 1,$$

alors la transformation $d\zeta_s = \frac{d\xi_s}{\xi_s}$, nous donne le modèle (5.1) et dans ce cas l'estimateur $\hat{f}_n(\cdot)$ vérifie

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s) \frac{d\xi_s}{\xi_s}.$$

Cette expression est bien définie grâce à la relation (2.3), $P[\xi_t > 0, \forall t \in [0, T]] = 1$. La périodicité de $K_{h_n}(\cdot)$ implique celle de $\hat{f}_n(\cdot)$

$$\hat{f}_n(t+P) = \hat{f}_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } t \geq 0.$$

En outre, d'après la relation (5.1) nous pouvons décomposer $\hat{f}_n(t)$ de la façon suivante :

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s) f(s) ds + \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s) \sigma(s) dW_s.$$

Pour étudier $\hat{f}_n(t)$ posons

$$U_n(t) := E[\hat{f}_n(t)] = \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s) f(s) ds \quad (5.2)$$

et

$$V_n(t) := \hat{f}_n(t) - E[\hat{f}_n(t)] = \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s) \sigma(s) dW_s. \quad (5.3)$$

D'où

$$\text{Biais}(\hat{f}_n(t)) := E[\hat{f}_n(t)] - f(t) = U_n(t) - f(t).$$

Donc l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ est biaisé. Nous allons démontrer, cependant, qu'il est uniformément asymptotiquement sans biais.

5.3 Convergence de l'estimateur

5.3.1 Convergence du biais

Théorème 10 *Supposons que $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques de même période P , alors avec les notations ci-dessus nous avons*

1. $U_n(\cdot)$ est une fonction continue périodique de période P ;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| = 0$.

Preuve

1. La continuité et la périodicité de $U_n(\cdot)$ découlent directement de celles de $K_{h_n}(\cdot)$.
2. Pour prouver la seconde assertion, transformons d'abord l'expression de $U_n(t)$

$$\begin{aligned}
 U_n(t) &= \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s)f(s)ds \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kP}^{(k+1)P} K_{h_n}(t-s)f(s)ds \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^P K_{h_n}(t-s)f(s)ds \\
 &= \frac{1}{h_n} \int_0^P \sum_{k \in \mathbb{Z}} K\left(\frac{t-s+kP}{h_n}\right) f(s)ds.
 \end{aligned}$$

Posons $v = \frac{t-s+kP}{h_n}$ donc $s = t + kP - vh_n$. Comme la sommation a un nombre fini de termes non nuls, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 U_n(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{t-P+kP}{h_n}}^{\frac{t+kP}{h_n}} K(v)f(t+kP-vh_n)dv \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(v)f(t-vh_n)dv \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(v)f(t-vh_n)dv \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

la dernière égalité est due au fait $\text{supp}(K) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Puisque $f(\cdot)$ est une fonction continue périodique, elle est uniformément continue sur \mathbb{R} . De plus h_n converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_ϵ tel que pour tout $n > n_\epsilon$ nous avons

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |K(v)| \sup_{t \in [0, P]} |f(t-vh_n) - f(t)| dv \\
 &\leq \epsilon \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |K(v)| dv = C\epsilon,
 \end{aligned}$$

où $C := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |K(v)| dv$. Ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Vitesse de convergence du biais

Proposition 10 *En plus des conditions du Théorème 10, supposons que $f(\cdot)$ est deux fois continûment dérivable sur \mathbb{R} , alors nous avons*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h_n^{-2} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| < \infty. \tag{5.5}$$

5.3. Convergence de l'estimateur

En particulier pour $h_n = o(n^{-\frac{1}{5}})$ nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nh_n} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| = 0. \quad (5.6)$$

Preuve

Calculons $U_n(t) - f(t)$. En utilisant la formule de Taylor d'ordre 2 nous avons

$$\begin{aligned} U_n(t) - f(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(s) f(t - h_n s) ds - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(s) f(t) ds \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(s) \left(f(t) - h_n s f'(t) + \int_t^{t-h_n s} (t - h_n s - x) f''(x) dx \right) ds \\ &\quad - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(s) f(t) ds \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(s) \left(-h_n s f'(t) + \int_t^{t-h_n s} (t - h_n s - x) f''(x) dx \right) ds. \end{aligned}$$

La fonction $f(\cdot)$ est périodique et deux fois continûment dérivable sur \mathbb{R} donc sa dérivée seconde est périodique et continue. Donc $\|f''\|_\infty := \sup_{t \in [0, P]} |f''(t)| < \infty$. De là

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{t-h_n s} (t - h_n s - x) f''(x) dx \right| &\leq \|f''\|_\infty \int_t^{t-h_n s} (t - h_n s - x) dx \\ &= \|f''\|_\infty \frac{h_n^2 s^2}{2}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| &\leq h_n \|f'\|_\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |sK(s)| ds + \frac{h_n^2}{2} \|f''\|_\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u^2 du \\ &= h_n^2 \|f'\|_\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |sK(s)| ds + \frac{h_n^2}{12} \|f''\|_\infty \\ &= Ch_n^2, \end{aligned}$$

où $C := \|f'\|_\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |sK(s)| ds + \frac{1}{12} \|f''\|_\infty$. D'où

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h_n^{-2} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| \leq C < \infty. \quad (5.7)$$

En particulier, si $h_n = o(n^{-\frac{1}{5}})$ alors $nh_n^5 = o(1)$, donc $\frac{\sqrt{nh_n}}{h_n^2} = o(1)$, d'où $\sqrt{nh_n} = o(h_n^2)$. Ainsi d'après (5.7), nous déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nh_n} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| = 0.$$

■

5.3.2 Convergence en moyenne quadratique et convergence de l'erreur quadratique moyenne intégrée

Convergence en moyenne quadratique

Théorème 11 *Si $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques, l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ converge en moyenne quadratique vers $f(t)$. De plus,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] = 0.$$

Preuve Nous avons

$$\mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] = \text{var}(\hat{f}_n(t)) + \left(\mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) \right] - f(t) \right)^2.$$

Comme

$$\left| \mathbb{E}[\hat{f}_n(t)] - f(t) \right|^2 = |U_n(t) - f(t)|^2$$

et $U_n(t)$ converge vers $f(t)$. Il nous reste juste à montrer que $\text{var}(\hat{f}_n(t))$ converge vers 0. D'après la relation (5.3)

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{f}_n(t)) &= \text{var}(V_n(t)) \\ &= \text{var} \left(\frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s) \sigma(s) dW_s \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \int_0^{nP} K_{h_n}^2(t-s) \sigma^2(s) ds \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kP}^{(k+1)P} K_{h_n}^2(t-s) \sigma^2(s) ds \\ &= \frac{1}{n} \int_0^P K_{h_n}^2(t-s) \sigma^2(s) ds, \end{aligned}$$

car $K_{h_n}(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont périodiques. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{f}_n(t)) &= \frac{1}{nh_n^2} \int_0^P \sum_{k \in \mathbb{Z}} K^2 \left(\frac{t-s+kP}{h_n} \right) \sigma^2(s) ds \\ &= \frac{1}{nh_n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^P K^2 \left(\frac{t-s+kP}{h_n} \right) \sigma^2(s) ds. \end{aligned}$$

Posons $v = \frac{t-s+kP}{h_n}$ donc $s = t + kP - vh_n$, alors

5.3. Convergence de l'estimateur

$$\begin{aligned}
\text{var}(\hat{f}_n(t)) &= \frac{1}{nh_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\frac{t+(k-1)P}{h_n}}^{\frac{t+kP}{h_n}} K^2(v) \sigma^2(t - vh_n) dv \\
&= \frac{1}{nh_n} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(v) \sigma^2(t - vh_n) dv \\
&= \frac{1}{nh_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) \sigma^2(t - vh_n) dv, \tag{5.8}
\end{aligned}$$

car $K(\cdot)$ est une fonction qui s'annule en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. D'où

$$\mathbb{E} \left[|\hat{f}_n(t) - f(t)|^2 \right] = \frac{1}{nh_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) \sigma^2(t - vh_n) dv + |U_n(t) - f(t)|^2$$

Comme $\sigma(\cdot)$ est continue et périodique sur \mathbb{R} , elle est bornée sur \mathbb{R} . Posons $\|\sigma^2\|_\infty = \sup_{v \in [0, P]} \sigma^2(v)$. Donc

$$\mathbb{E} \left[|\hat{f}_n(t) - f(t)|^2 \right] \leq \frac{\|\sigma^2\|_\infty}{nh_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv + |U_n(t) - f(t)|^2. \tag{5.9}$$

Par conséquent, $\hat{f}_n(t)$ converge en moyenne quadratique vers $f(\cdot)$. De plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] = 0. \tag{5.10}$$

Ce qui termine la démonstration du Théorème 11. ■

Erreur quadratique moyenne intégrée

Théorème 12 *Sous les hypothèses du Théorème 11, l'erreur quadratique moyenne intégrée de $\hat{f}_n(t)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^P \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] dt = 0.$$

Preuve Ceci découle directement du théorème précédent. En effet,

$$\int_0^P \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] dt \leq P \sup_{t \in [0, P]} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right].$$

Donc d'après (5.10) nous obtenons le résultat désiré.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^P \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] dt = 0.$$

■

En utilisant l'équation (5.8) et le calcul précédent nous déduisons la convergence suivante.

Corollaire 6 *Si la fonction $f(\cdot)$ est deux fois continûment dérivable et la fonction $\sigma(\cdot)$ est continue alors pour $h_n = o(n^{-\frac{1}{5}})$ nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| nh_n \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] - \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0. \quad (5.11)$$

Donc dans ce cas, la vitesse de convergence de l'erreur quadratique moyenne intégrée est $\frac{1}{nh_n}$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n \int_0^P \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] dt = \left(\int_0^P \sigma^2(t) dt \right) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right).$$

Remarque 3 Si $h_n = n^{-\frac{1}{5}}$, d'après les relations (5.5) et (5.9) et comme $nh_n = n^{\frac{4}{5}}$, nous déduisons que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} n^{\frac{4}{5}} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] < \infty.$$

Preuve Rappelons que

$$\begin{aligned} nh_n \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] &= nh_n \text{var}(\hat{f}_n(t)) + nh_n \left(\mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) \right] - f(t) \right)^2 \\ &= nh_n \text{var}(\hat{f}_n(t)) + nh_n |U_n(t) - f(t)|^2 \end{aligned}$$

D'une part, d'après l'égalité (5.6) et pour $h_n = o(n^{-\frac{1}{5}})$ nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n |U_n(t) - f(t)|^2 = 0.$$

D'autre part, grâce à l'égalité (5.8)

$$nh_n \text{var}(\hat{f}_n(t)) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) \sigma^2(t - vh_n) dv.$$

Pour finir la démonstration montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) \sigma^2(t - vh_n) dv - \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0.$$

Nous savons que

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) \sigma^2(t - vh_n) dv - \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) (\sigma^2(t - vh_n) - \sigma^2(t)) dv. \end{aligned}$$

5.3. Convergence de l'estimateur

Comme $\sigma(\cdot)$ est une fonction continue et périodique, elle est alors uniformément continue sur \mathbb{R} . De plus nous savons que h_n tend vers 0 quand n tend vers ∞ . Donc nous avons

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : \forall n > n_\epsilon, \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], |\sigma^2(t - vh_n) - \sigma^2(t)| \leq \epsilon,$$

et

$$\sup_{t \in [0, P]} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) \sigma^2(t - vh_n) dv - \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| \leq \epsilon \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv.$$

Ainsi nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| nh_n \text{var}(\hat{f}_n(t)) \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0. \quad (5.12)$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| nh_n \text{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] - \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0.$$

■

Nous pouvons affiner les résultats précédents en réduisant l'hypothèse sur la fonction $f(\cdot)$ que nous supposons appartenir à une **classe de Hölder**. Pour ceci et suivant [46] nous rappelons d'abord les définitions suivantes (voir Chapitre 1 section 1.2 de [46] ou de [47]) :

Définition 4 (Définition 1.2 de [46]) Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soient $\beta > 0$. La classe de Hölder \mathcal{H}^β sur T est définie comme l'ensemble de toutes les fonctions $f : I \mapsto \mathbb{R}$ telles que la dérivée $f^{(l)}$, $l := \lfloor \beta \rfloor$, existe et vérifie

$$\left| f^{(l)}(x) - f^{(l)}(x') \right| \leq L |x - x'|^{\beta - l} \quad \forall x, x' \in I$$

où $\lfloor \beta \rfloor$ désigne le plus grand entier qui est strictement plus petit que le réel β et L est une constante positive.

Définition 5 (Définition 1.3 de [46]) Soit $l > 0$ un entier. Le noyau $K : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est dit un noyau d'ordre l si les fonctions $s \mapsto s^j K(s)$, $j = 0, 1, \dots, l$, sont intégrables et vérifient

$$\int_{\mathbb{R}} K(s) ds = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} s^j K(s) ds = 0, \quad j = 1, \dots, l.$$

Le résultat suivant généralise la Proposition 10. En effet, nous retrouvons cette proposition avec $\beta = 2$; c'est-à-dire $f(\cdot)$ est deux fois continûment dérivable.

Proposition 11 *Supposons que $f(\cdot)$ est un élément de la classe de Hölder \mathcal{H}^β sur \mathbb{R} , pour $\beta \geq 1$, $\sigma(\cdot)$ est continue et que $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont périodiques de même période P . Supposons de plus que $\hat{f}_n(t)$ est construit à partir d'un noyau d'ordre l . Alors nous avons*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h_n^{-\beta} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| < \infty.$$

En particulier pour $h_n = o(n^{-\frac{1}{2\beta+1}})$ nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nh_n} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| = 0.$$

Preuve

Nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$, $h_n > 0$:

$$f(t - vh_n) = f(t) - vh_n f'(t) + \dots + \frac{(-vh_n)^l}{(l-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{l-1} f^{(l)}(t - \tau vh_n) d\tau.$$

Or le noyau $K(\cdot)$ est d'ordre l , et d'après l'expression (5.4) nous obtenons

$$\begin{aligned} U_n(t) &= f(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(v) dv - h_n f'(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} v K(v) dv \\ &\quad + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(-vh_n)^l}{(l-1)!} K(v) \left(\int_0^1 (1-\tau)^{l-1} f^{(l)}(t - \tau vh_n) d\tau \right) dv \\ &= f(t) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(-vh_n)^l}{(l-1)!} K(v) \left(\int_0^1 (1-\tau)^{l-1} f^{(l)}(t - \tau vh_n) d\tau \right) dv. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$U_n(t) - f(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(-vh_n)^l}{(l-1)!} K(v) \left(\int_0^1 (1-\tau)^{l-1} f^{(l)}(t - \tau vh_n) d\tau \right) dv.$$

Puisque

$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(-vh_n)^l}{(l-1)!} K(v) \left(\int_0^1 (1-\tau)^{l-1} f^{(l)}(t) d\tau \right) dv \\ &= \int_0^1 (1-\tau)^{l-1} f^{(l)}(t) d\tau \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(-vh_n)^l}{(l-1)!} K(v) dv = 0, \end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$|U_n(t) - f(t)| = \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(-vh_n)^l}{(l-1)!} K(v) \left(\int_0^1 (1-\tau)^{l-1} (f^{(l)}(t - \tau vh_n) - f^{(l)}(t)) d\tau \right) dv \right|.$$

5.3. Convergence de l'estimateur

Le fait que $f(\cdot)$ est un élément de la classe de Hölder \mathcal{H}^β et $0 \leq v \leq 1$, nous donne

$$|f^{(l)}(t - \tau v h_n) - f^{(l)}(t)| \leq L |v h_n \tau|^{\beta-l} \leq L |v h_n|^{\beta-l},$$

où L est une constante positive. Donc nous avons

$$\begin{aligned} |U_n(t) - f(t)| &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{|v h_n|^l}{(l-1)!} |K(v)| \left(\int_0^1 L |v h_n|^{\beta-l} (1-\tau)^{l-1} d\tau \right) dv \\ &= \frac{L}{(l-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{l-1} d\tau \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |v h_n|^\beta |K(v)| dv \\ &= C h_n^\beta \end{aligned}$$

où

$$C = \frac{L}{l!} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |v|^\beta |K(v)| dv.$$

Ainsi

$$\text{Biais}(\hat{f}_n(t)) = O(h_n^\beta).$$

Donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h_n^{-\beta} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| < \infty.$$

En particulier si $h_n = n^{-\frac{1}{2\beta+1}}$ alors $nh_n = n^{\frac{2\beta}{2\beta+1}}$, donc $\sqrt{nh_n} = n^{\frac{\beta}{2\beta+1}} = h_n^{-\beta}$. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nh_n} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| = 0.$$

■

De la même manière nous pouvons aussi généraliser le Corollaire 6 pour tout $\beta \geq 1$.

Corollaire 7 *Sous les mêmes conditions de la Proposition 11 et avec $h_n = o(n^{-\frac{1}{2\beta+1}})$ nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| nh_n \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] - \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0,$$

et nous obtenons la même vitesse de convergence de l'erreur quadratique moyenne intégrée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n \int_0^P \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] dt = \left(\int_0^P \sigma^2(t) dt \right) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right).$$

En particulier nous pouvons prendre $h_n = n^{-a}$ avec $a > \frac{1}{2\beta+1}$. De plus, de même que la Remarque 3, si $h_n = n^{-\frac{1}{2\beta+1}}$ nous avons,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} n^{\frac{2\beta}{2\beta+1}} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] < \infty.$$

Signalons que cette vitesse de convergence coïncide avec celle donnée par Ibragimov et Khas'minskii (Théorème 4.1, Chapitre VII, section 4 de [26]), voir aussi (Corollaire 2.4, Chapitre 2, section 6 de [46]). De plus nous avons obtenu la convergence uniforme sur tout l'intervalle $[0, P]$.

5.3.3 Normalité asymptotique

Théorème 13 *Sous les hypothèses du Théorème 11, l'estimateur normalisé défini par $\bar{f}_n(t) := \sqrt{nh_n} (\hat{f}_n(t) - f(t))$ est Gaussien*

$$\mathcal{L}(\bar{f}_n(t)) = \mathcal{N}\left(\sqrt{nh_n}(U_n(t) - f(t)), \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(s)\sigma^2(t - sh_n)ds\right). \quad (5.13)$$

De plus, si $f(\cdot)$ est deux fois continûment dérivable et $h_n = o(n^{-\frac{1}{5}})$, $\bar{f}_n(t)$ est asymptotiquement normal centré

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\bar{f}_n(t)) = \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(s)ds\right). \quad (5.14)$$

Preuve D'après les définitions données respectivement en (5.2) et (5.3), $U_n(t)$ et $V_n(t)$ vérifient

$$\hat{f}_n(t) - f(t) = U_n(t) - f(t) + V_n(t).$$

D'où en utilisant l'égalité (5.8) nous trouvons facilement (5.13). Pour l'équation (5.14), d'une part grâce à la relation (5.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{nh_n} \sup_{t \in [0, P]} |U_n(t) - f(t)| = 0.$$

D'autre part, d'après (5.12)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}\left(\sqrt{nh_n}\hat{f}_n(t)\right) = \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(s)ds.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. ■

De même nous avons

Corollaire 8 *En plus des conditions du Théorème 11, supposons que $f(\cdot)$ est un élément de la classe de Hölder \mathcal{H}^β sur \mathbb{R} , pour $\beta \geq 1$ et $h_n = o(n^{-\frac{1}{2\beta+1}})$. Ainsi nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left(\sqrt{nh_n}(\hat{f}_n(t) - f(t))\right) = \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(s)ds\right).$$

5.3. Convergence de l'estimateur

En outre, nous avons également la normalité asymptotique vectorielle finie-dimensionnelle. Nous allons établir ce résultat dans le théorème suivant.

Théorème 14 *Sous les hypothèses du Corollaire 8, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $0 \leq t_1 < \dots < t_k < P$, le vecteur aléatoire $(\bar{f}_n(t_1), \dots, \bar{f}_n(t_k))$ est asymptotiquement normal*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\bar{f}_n(t_1), \dots, \bar{f}_n(t_k)) = \mathcal{N}_k(0, \Sigma_{t_1, \dots, t_k}) \text{ en loi,}$$

où $\mathcal{N}_k(0, \Sigma_{t_1, \dots, t_k})$ est la loi normale de dimension k et de moyenne nulle et de matrice de variance donnée par $\Sigma_{t_1, \dots, t_k} = \int_{-1}^1 K^2(s) ds \times \text{diag}(g^2(t_1), \dots, g^2(t_k))$.

Preuve Soit $k \geq 1$ et $0 \leq t_1 < \dots < t_k < P$, fixés. En utilisant la méthode de Cramèr, il suffit de démontrer pour tous $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ que $\sum_{i=1}^k a_i \bar{f}_n(t_i)$ est asymptotiquement normal quand $n \rightarrow \infty$. Avec les notations précédentes nous avons

$$\sum_{i=1}^k a_i \bar{f}_n(t_i) = \sqrt{nh_n} \sum_{i=1}^k a_i (U_n(t_i) - f(t_i)) + \sqrt{nh_n} \sum_{i=1}^k a_i V_n(t_i) \quad (5.15)$$

D'après la Proposition 10, le premier terme de cette égalité est non-aléatoire et converge vers 0. Le deuxième terme est égal à $\sqrt{nh_n} \sum_{i=1}^k a_i V_n(t_i)$, c'est donc une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance donnée par l'expression suivante

$$nh_n \text{var} \left[\sum_{i=1}^k a_i V_n(t_i) \right] = nh_n \sum_{i_1=1}^k \sum_{i_2=1}^k a_{i_1} a_{i_2} \text{cov} [V_n(t_{i_1}), V_n(t_{i_2})]$$

où

$$\text{cov} [V_n(t_{i_1}), V_n(t_{i_2})] = \frac{1}{nh_n^2} \int_0^P K \left(\frac{t_{i_1} - s}{h_n} \right) K \left(\frac{t_{i_2} - s}{h_n} \right) \sigma^2(s) ds.$$

Pour $i = i_1 = i_2$, nous avons vu et toujours dans la Proposition 10 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n \text{var} [V_n(t_i)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) g^2(t_i - h_n v) dv = g^2(t_i) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v).$$

Pour $i_1 < i_2$, $t_{i_1} < t_{i_2}$, ainsi $h_n < t_{i_2} - t_{i_1}$ pour n suffisamment grand. Puisque le support du noyau $K(\cdot)$ est contenu dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n \text{cov} [V_n(t_{i_1}), V_n(t_{i_2})] = 0.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Remarque 4 Comme conséquence du Théorème 14, nous remarquons que pour $0 \leq t_1 < \dots < t_k < P$, les estimateurs normalisés $\bar{f}_n(t_1), \dots, \bar{f}_n(t_k)$ sont asymptotiquement indépendants. Ainsi nous n'avons aucun espoir d'avoir la convergence en distribution dans $\mathcal{C}[0, P]$ pour l'estimateur normalisé $\bar{f}(\cdot) = \{\bar{f}(t), t \in [0, P]\}$.

5.4 Consistance forte

Pour démontrer la convergence presque sûre de l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ vers $f(t)$ nous avons besoin de considérer des noyaux particuliers. Pour simplifier le calcul nous restreignons notre attention au noyau triangulaire.

Théorème 15 *Supposons que $K(u) = 2(1 - 2|u|)$, pour $u \in [-1/2, 1/2]$ et $K(u) = 0$ ailleurs. Alors pour tout t nous avons*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(t) = f(t) \quad \text{P - p.s.}$$

Preuve Nous avons démontré que $U_n(t)$ qui est non-aléatoire et converge vers $f(t)$. Pour démontrer la convergence P-p.s, il nous reste à démontrer la convergence P-p.s de $V_n(t)$ vers 0.

Pour ceci nous allons utiliser le lemme de Borel Cantelli

$$\left\{ \forall \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} P(|V_n(t)| > \epsilon) < \infty \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t) = 0 \quad \text{P - p.s.}$$

Dans un premier temps majorons $P(|V_n(t)| > \epsilon)$. D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev nous avons :

$$P(|V_n(t)| > \epsilon) \leq \frac{\text{var}(V_n(t))}{\epsilon^2}.$$

D'après l'expression (5.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} P(|V_n(t)| \geq \epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \text{var} |V_n(t)| \\ &= \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nh_n \epsilon^2}, \end{aligned}$$

qui est une somme divergente. Pour surmonter cette difficulté nous allons suivre la méthode classique qui consiste à étudier la convergence d'une sous suite puis nous en déduire la convergence de la suite initiale.

Prenons $n_i := i^b$, $h_{n_i} = n_i^{-a}$, a et b choisis tels que $b(1 - a) > 1$. Donc

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n_i h_{n_i}} < \infty.$$

Lemme 3 *Sous les conditions ci-dessus sur n_i et h_{n_i} ainsi que la continuité et la périodicité de $f(\cdot)$ et de $\sigma(\cdot)$, la suite $(V_{n_i}(t))_i$ converge P - p.s vers 0 lorsque i tend vers l'infini pour tout t .*

Preuve D'après (5.12) nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|V_{n_i}(t)| \geq \epsilon) &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\text{var}(V_{n_i}(t))}{\epsilon^2} \\ &= \sigma^2(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n_i h_{n_i}} < \infty, \end{aligned} \quad (5.16)$$

ce qui implique la convergence presque sûre de $V_{n_i}(t)$ vers 0 lorsque i tend vers l'infini. ■

Pour montrer la convergence de $V_n(t)$ nous employons le résultat suivant
Si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V_{n_i}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} |V_n(t) - V_{n_i}(t)| = 0 \quad \text{P - p.s.}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(t) = 0 \quad \text{P - p.s.}$$

Il nous reste donc à prouver que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} |V_n(t) - V_{n_i}(t)| = 0 \quad \text{P - p.s.}$$

Nous le démontrons dans le lemme suivant

Lemme 4 Avec les notations précédentes nous avons

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} |V_n(t) - V_{n_i}(t)| = 0 \quad \text{P - p.s.}$$

Preuve Nous évaluons d'abord la différence entre $V_n(t)$ et $V_{n_i}(t)$

$$\begin{aligned} &V_n(t) - V_{n_i}(t) \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_i} \right) \int_0^{n_i P} K_{h_{n_i}}(t-s) \sigma(s) dW_s \\ &\quad + \frac{1}{n} \left(\int_0^{n P} K_{h_n}(t-s) \sigma(u) dW_u - \int_0^{n_i P} K_{h_{n_i}}(t-s) \sigma(u) dW_u \right) \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_i} \right) \int_0^{n_i P} K_{h_{n_i}}(t-s) \sigma(s) dW_s + \frac{1}{n} \int_{n_i P}^{n P} K_{h_{n_i}}(t-s) \sigma(s) dW_s \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_0^{n P} \left(K_{h_n}(t-s) - K_{h_{n_i}}(t-s) \right) \sigma(s) dW_s. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} |V_n(t) - V_{n_i}(t)| \\
& \leq \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n_i} \right| \left| \int_0^{n_i P} K_{h_{n_i}}(t-s) \sigma(s) dW_s \right| \\
& \quad + \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{n} \int_{n_i P}^{n P} K_{h_{n_i}}(t-u) \sigma(s) dW_s \right| \\
& \quad + \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{n} \int_0^{n P} (K_{h_n}(t-s) - K_{h_{n_i}}(t-s)) \sigma(s) dW_s \right| \\
& = V_i^{(1)}(t) + V_i^{(2)}(t) + V_i^{(3)}(t),
\end{aligned}$$

où $V_i^{(1)}(t)$, $V_i^{(2)}(t)$ et $V_i^{(3)}(t)$ sont les trois termes de cette décomposition. Nous allons établir la convergence de chacun des trois termes. Pour simplifier la présentation des calculs notons les successivement $V_i^{(1)}$, $V_i^{(2)}$ et $V_i^{(3)}$.

1. **Terme $V_i^{(1)}$.**

$$\begin{aligned}
V_i^{(1)} & = \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n_i} \right| \left| \int_0^{n_i P} K_{h_{n_i}}(t-s) \sigma(s) dW_s \right| \\
& \leq \left| \frac{1}{n_i} \int_0^{n_i P} K_{h_{n_i}}(t-s) \sigma(s) dW_s \right| \\
& \quad + \left| \frac{1}{n_i} \int_0^{n_i P} K_{h_{n_i}}(t-s) \sigma(s) dW_s \right| \\
& = 2V_{n_i}(t),
\end{aligned}$$

alors d'après (5.16), $V_i^{(1)}$ converge P - p.s vers 0 lorsque $i \rightarrow \infty$.

2. **Terme $V_i^{(2)}$.**

Nous utilisons à nouveau le lemme de Borel Cantelli. Soit $\epsilon > 0$, montrons que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(V_i^{(2)} > \epsilon) < \infty.$$

D'après l'inégalité de Markov nous avons

$$\begin{aligned}
P(V_i^{(2)} > \epsilon) & \leq \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{E}[V_i^{(2)}] \\
& = \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{E} \left(\sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{n} \int_{n_i P}^{n P} K_{h_{n_i}}(t-s) dW_s \right|^2 \right),
\end{aligned}$$

Comme

$$\left(\int_{n_i P}^{n P} K_{h_{n_i}}(t-u) dW_u \right)_{n \in [n_i, n_{i+1}]}$$

5.4. Consistance forte

est martingale en $n \in [n_i, n_{i+1}]$ pour chaque i , l'inégalité de Doob nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_i^{(2)}) &= \mathbb{E} \left(\sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{nh_n} \int_{n_i P}^{n P} K_{h_{n_i}}(t-s) \sigma(s) dW_s \right|^2 \right) \\ &\leq 4 \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{n_i} \int_{n_i P}^{n_{i+1} P} K_{h_{n_i}}(t-u) \sigma(s) dW_s \right|^2 \right) \\ &\leq \frac{4}{n_i^2} \left| \int_{n_i P}^{n_{i+1} P} K_{h_{n_i}}^2(t-s) \sigma^2(s) ds \right|, \end{aligned}$$

qui est donc le terme général d'une série convergente. Donc $V_i^{(2)}$ converge vers 0 P - p.s lorsque $i \rightarrow \infty$.

3. Enfin pour le terme $V_i^{(3)}$.

$$V_i^{(3)} = \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{nh_n} \int_0^{n P} (K_{h_n}(t-s) - K_{h_{n_i}}(t-s)) \sigma(s) dW_s \right|.$$

Dans ce qui suit nous allons considérer que le noyau $K(\cdot)$ est le noyau triangulaire de support $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$K(u) = 2(1 - 2|u|), \quad u \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

et pour simplifier le calcul nous pouvons supposer sans perte de généralité que $P = 1$.

Donc nous obtenons

$$\begin{aligned} V_i^{(3)} &= \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \frac{1}{n} \left| \int_0^n (K_{h_n}(t-s) - K_{h_{n_i}}(t-s)) \sigma(s) dW_s \right| \\ &= \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{nh_n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t+\frac{h_{n_i}}{2}} \left(K\left(\frac{t-s}{h_n}\right) - K\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right| \\ &\leq \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{nh_n} \left(\frac{1}{h_n} - \frac{1}{h_{n_i}} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} 4|t-s| \sigma(s) dW_s^{(k)} \right| \\ &\quad + \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{nh_n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_n}{2}} K\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right| \\ &\quad + \sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{nh_n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t+\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_{n_i}}{2}} K\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right| \\ &:= A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + A_i^{(3)}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

où $A_i^{(1)}, A_i^{(2)}$ et $A_i^{(3)}$ sont les trois termes définis de façon évidente.

Dans le Lemme 7 en annexe nous prouvons que pour chaque i , $((M_p^{(k)}))_{0 < p < n_{i+1} - n_i}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_p^{(i)})$ définie en (7.1) où

$$M_p^{(k)} := \int_{t-\varphi_p}^{t+\varphi_p} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)},$$

où $\varphi_p := \frac{h_{n_{i+1}-p}}{2}$. De même nous démontrons dans le Lemme 8 en annexe que $(M_n^{(k,1)})_n$ et $(M_n^{(k,2)})_n$ définies ci-dessous sont des martingales respectivement par rapport aux filtrations définies en (7.2) et (7.3),

$$M_n^{(k,1)} := \int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t-\frac{h_n}{2}} K\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) \sigma(s) dW_s^{(k)}, \quad M_n^{(k,2)} := \int_{t+\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} K\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) \sigma(s) dW_s^{(k)},$$

a) **Terme $A_i^{(1)}$.** Nous allons prouver que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i^{(1)} > \epsilon] < \infty$. Pour cela nous devons majorer $\mathbb{P}[A_i^{(1)} > \epsilon]$. Nous savons que $A_i^{(1)} > 0$ P- presque sûrement et l'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}[A_i^{(1)} > \epsilon] < \frac{\mathbb{E}[A_i^{(1)}]}{\epsilon}.$$

Comme nous n'avons pas pu obtenir directement la convergence de $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[A_i^{(1)}]$, nous allons utiliser l'inégalité de Bienayme Tchebychev et établir que $\sum_{i=1}^{\infty} \text{var}(A_i^{(1)}) < \infty$.

Nous démontrons dans le Lemme 9 en annexe que l'espérance de $A_i^{(1)}$ converge vers 0 lorsque i tend vers l'infini. Donc pour i suffisamment grand

$$\mathbb{E}[A_i^{(1)}] \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{d'où} \quad \epsilon - \mathbb{E}[A_i^{(1)}] \geq \frac{\epsilon}{2},$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i^{(1)} > \epsilon) &= \mathbb{P}\left(A_i^{(1)} - \mathbb{E}[A_i^{(1)}] > \epsilon - \mathbb{E}[A_i^{(1)}]\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left|A_i^{(1)} - \mathbb{E}[A_i^{(1)}]\right| > \epsilon - \mathbb{E}[A_i^{(1)}]\right) \\ &\leq \frac{\text{var}(A_i^{(1)})}{\left(\epsilon - \mathbb{E}[A_i^{(1)}]\right)^2} \\ &\leq \frac{4\text{var}(A_i^{(1)})}{\epsilon^2}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

la deuxième inégalité est due à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour terminer majorons la variance de $A_i^{(1)}$. Posons

$$c_i := \frac{1}{n_i h_{n_{i+1}}} \left| \frac{1}{h_{n_{i+1}}} - \frac{1}{h_{n_i}} \right|,$$

$$\begin{aligned}
 \text{var}(A_i^{(1)}) &\leq 4c_i^2 \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \text{var} \left[\sup \left\{ \left| M_p^{(k)} \right| : 0 < p \leq n_{i+1} - n_i \right\} \right] \\
 &\leq 4c_i^2 \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \text{var} \left[M_{(n_i - n_{i-1})}^{(k)} \right] \\
 &= 4c_i^2 \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \text{var} \left[\int_{t - \frac{h_{n_i}}{2}}^{t + \frac{h_{n_i}}{2}} 4|t - s| \sigma(s) dW_s^{(k)} \right] \\
 &\leq \frac{16n_{i+1}h_{n_i}^3}{3n_i^2h_{n_{i+1}}^2} \left| \frac{1}{h_{n_{i+1}}} - \frac{1}{h_{n_i}} \right|^2 \|\sigma^2\|_\infty.
 \end{aligned}$$

La première inégalité est due au fait que les processus $\{W_s^{(k)}, s \in [-1/2, 1/2]\}$, $k \in \mathbb{N}$ sont indépendants, et la seconde inégalité est une conséquence de l'inégalité de Doob pour les martingales. De plus nous avons

$$\frac{n_{i+1}h_{n_i}^3}{n_i^2h_{n_{i+1}}^2} \left| \frac{1}{h_{n_{i+1}}} - \frac{1}{h_{n_i}} \right|^2 = \left(\frac{i+1}{i} \right)^{b+2ab} \times i^{ab-b-2} \times (a^2b^2 + O(1)).$$

Par conséquent

$$\text{var}(A_i^{(1)}) \leq i^{ab-b-2} \times (a^2b^2 + O(1)) \|\sigma^2\|_\infty.$$

Ceci est le terme général d'une série convergente car $ab - b - 2 < -2$. Donc d'après (5.18)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{P} \left[A_i^{(1)} > \epsilon \right] < \infty.$$

D'où la convergence presque sûre du terme $A_i^{(1)}$ vers 0 lorsque i tend vers ∞ .

b) **Terme $A_i^{(2)}$.** Soit $\epsilon > 0$, montrons que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \text{P}(A_i^{(2)} > \epsilon) < \infty.$$

Or $A_i^{(2)} > 0$ presque sûrement et

$$\begin{aligned}
 \text{P}[A_i^{(2)} > \epsilon] &= \text{P} \left[\left(\sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \frac{1}{nh_n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t - \frac{h_{n_i}}{2}}^{t - \frac{h_n}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right)^2 > \epsilon^2 \right] \\
 &\leq \frac{1}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \text{E} \left[\left(\sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \int_{t - \frac{h_{n_i}}{2}}^{t - \frac{h_n}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right)^2 \right],
 \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov. Comme pour chaque i

$$M_n^{(k,1)} = \int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_n}{2}} K\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) \sigma(s) dW_s^{(k)}$$

est martingale en $n \in [n_i, n_{i+1}]$ (voir le Lemme 8 en annexe), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_i^{(2)} > \epsilon] &\leq \frac{1}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \mathbb{E} \left[\left(\int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_{n_{i+1}}}{2}} K\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{n_{i+1}}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \mathbb{E} \left[\left(\int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_{n_{i+1}}}{2}} K^2\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) \sigma^2(s) ds \right)^2 \right] \\ &= \frac{n_{i+1}}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_{n_{i+1}}}{2}} K^2\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) \sigma^2(s) ds. \end{aligned}$$

Posons $u = \frac{t-s}{h_{n_i}}$, et rappelons que $n_i := i^b$, $h_{n_i} = n_i^{-a}$, a et b choisis tels que $b(1-a) > 1$ donc nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_i^{(2)} > \epsilon] &\leq \frac{n_{i+1} \|\sigma^2\|_\infty}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_{n_{i+1}}}{2}} K^2\left(\frac{t-s}{h_{n_i}}\right) ds \\ &= \frac{n_{i+1} h_{n_i} \|\sigma^2\|_\infty}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \int_{\frac{h_{n_{i+1}}}{2h_{n_i}}}^{\frac{h_{n_i}}{2h_{n_i}}} K^2(u) du \\ &\leq \frac{n_{i+1} h_{n_i} \|\sigma^2\|_\infty}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(u) du \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c(i+1)^{b+2ab}}{\epsilon^2 i^{2b+ab}} \\ &\cong \frac{c}{\epsilon^2 i^{b(1-a)}} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{b+2ab} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\leq \frac{2^{b+2ab} c}{\epsilon^2 i^{b(1-a)}}. \quad (5.21)$$

L'inégalité (5.19) vient du fait que $0 < h_{n_{i+1}} \leq h_{n_i}$ et que $K^2(\cdot)$ est une fonction positive, $c := \|\sigma^2\|_\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(u) du$. Comme $b(1-a) > 1$ alors

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \mathbb{P}[A_i^{(2)} > \epsilon] \leq \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2^{b+2ab} c}{\epsilon^2 i^{b(1-a)}},$$

est une somme convergente. D'où la convergence de $A_i^{(2)}$.

c) **Terme $A_i^{(3)}$** . Soit $\epsilon > 0$, montrons que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i^{(3)} > \epsilon) < \infty.$$

5.4. Consistance forte

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_i^{(3)} > \epsilon] &= \mathbb{P} \left[\left(\sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \frac{1}{nh_n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t+\frac{hn}{2}}^{t+\frac{hn_i}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right| \right)^2 > \epsilon^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \mathbb{E} \left[\left(\sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t+\frac{hn}{2}}^{t+\frac{hn_i}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right| \right)^2 \right], \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov. Comme

$$M_n^{(k,2)} = \int_{t+\frac{hn}{2}}^{t+\frac{hn_i}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)}$$

est une martingale en n alors nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_i^{(3)} > \epsilon] &\leq \frac{1}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \mathbb{E} \left[\left(\int_{t+\frac{hn_{i+1}}{2}}^{t+\frac{hn_i}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{n_{i+1}}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \mathbb{E} \left[\left(\int_{t+\frac{hn_{i+1}}{2}}^{t+\frac{hn_i}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{n_{i+1} \|\sigma^2\|_\infty}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \int_{t+\frac{hn_{i+1}}{2}}^{t+\frac{hn_i}{2}} K^2 \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) ds. \end{aligned}$$

Nous faisons à nouveau le changement de variable précédent en posant $u = \frac{t-s}{h_{n_i}}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_i^{(3)} > \epsilon] &\leq \frac{n_{i+1} h_{n_i} \|\sigma^2\|_\infty}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \int_{-\frac{hn_{i+1}}{2h_{n_i}}}^{-\frac{hn_i}{2h_{n_i}}} K^2(u) du \\ &\leq \frac{n_{i+1} h_{n_i} \|\sigma^2\|_\infty}{\epsilon^2 n_i^2 h_{n_{i+1}}^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(u) du \quad (5.22) \\ &\leq \frac{2^{b+2ab} c}{\epsilon^2 i^{b(1-a)}}. \end{aligned}$$

L'inégalité (5.22) vient également du fait que $0 < h_{n_{i+1}} \leq h_{n_i}$ et que $K^2(\cdot)$ est une fonction positive. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \mathbb{P}[A_i^{(3)} > \epsilon] \leq \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2^{b+2ab} c}{\epsilon^2 i^{b(1-a)}} < \infty,$$

d'où la convergence presque sûre de $A_i^{(3)}$ vers 0. Donc nous avons pu établir la convergence P – p.s vers 0 de $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$ et $A_i^{(3)}$. Or

$$0 \leq V_i^{(3)} \leq A_i^{(1)} + A_i^{(2)} + A_i^{(3)},$$

Par conséquent nous avons la convergence P – p.s de $V_i^{(3)}$ vers 0. Et nous avons obtenu précédemment la convergence P – p.s de $V_i^{(1)}$ et $V_i^{(2)}$ vers 0. Comme

$$\sup_{n \in [n_i, n_{i+1}]} |V_n(t) - V_{n_i}(t)| \leq V_i^{(1)} + V_i^{(2)} + V_i^{(3)},$$

et $V_{n_i}(t)$ converge P – p.s vers 0 alors $V_n(t)$ converge P – p.s vers 0. Ainsi, le Lemme 4 est prouvé. ■

Comme $\hat{f}_n(t) = U_n(t) + V_n(t)$ nous venons de voir que $V_n(t)$ converge P – p.s vers 0, et nous avons déjà vu dans le Théorème 10 que $U_n(t)$ qui est non-aléatoire converge vers $f(t)$, alors $\hat{f}_n(t)$ converge P – p.s vers $f(t)$. ■

5.5 Simulation

Rappelons que dans le cas d'une observation continue du processus $\{\zeta_t\}$ sur l'intervalle $[0, nP]$, l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ est donné par

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s) d\zeta_s,$$

et dans le cas d'une observation continue du processus $\{\xi_t\}$ cet estimateur est donné ainsi :

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-s) \frac{d\xi_s}{\xi_s}.$$

Nous allons illustrer ces estimateurs en simulant les deux processus $\{\zeta_t\}$ et $\{\xi_t\}$ par la méthode d'Euler et nous considérons désormais les paramètres suivants

$$P = 1, T = nP = 1000, h_n = 10^{-2} \quad \delta = 10^{-3},$$

où P est la période, T est la taille de l'observation, h_n est la fenêtre de l'estimateur et δ est le pas de discrétisation.

1) Traitons d'abord le modèle

$$d\zeta_t = \sin(2\pi t)dt + dW_t.$$

Comme la fonction $\sin(2\pi t)$ est impaire et périodique de période 1, il suffit de l'étudier sur $[0, 0.5]$.

Dans la Figure 5.1 nous représentons des boîtes-à-moustaches pour l'estimation de la fonction $f(t)$. Ces boîtes-à-moustaches sont construites à partir de 10 répétitions du processus.

Nous constatons que la courbe de $\sin(2\pi t)$ passe à proximité de la médiane pour la plupart des 11 valeurs de t , $t = 0, 0.05, \dots, 0.5$. Cependant nous avons

5.5. Simulation

quelques dégradations pour certaines valeurs de t . Par exemple, pour $t = 0.25$ l'étendue est relativement élevée, il vaut 0.35. Ceci pourrait être due à la variance $\sigma^2(\cdot)$ qui vaut ici 1. Nous pouvons améliorer ces résultats en réduisant la valeur de $\sigma(\cdot)$, prenons $\sigma(t) = 0.1$

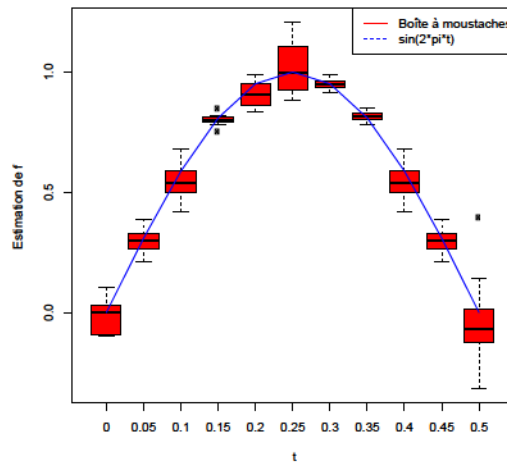


FIGURE 5.1 – $d\zeta_t = \sin(2\pi t)dt + dW_t$.

Dans la Figure 5.2, nous pouvons voir que les boîtes-à-moustaches sont plus petites et nous avons moins de variabilité puisque le coefficient de diffusion est petit.

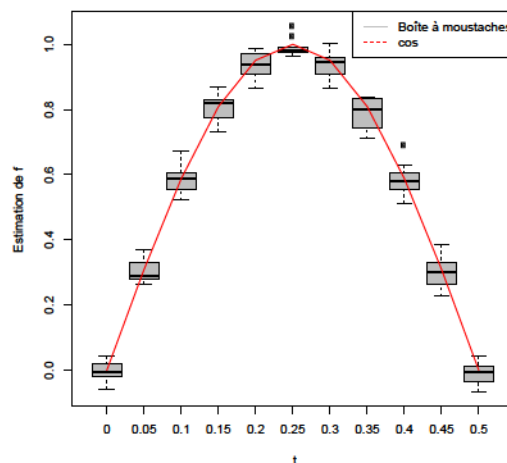


FIGURE 5.2 – $d\zeta_t = \sin(2\pi t)dt + 0.1dW_t$.

Nous représentons dans la Figure 5.3 la courbe de la fonction $\sin(2\pi t)$ ainsi que celle des valeurs centrales : la médiane et la moyenne. Ces simulations sont issues du modèle $d\zeta_t = \sin(2\pi t)dt + 0.1dW_t$. Nous remarquons que les trois courbes coïncident à peu près.

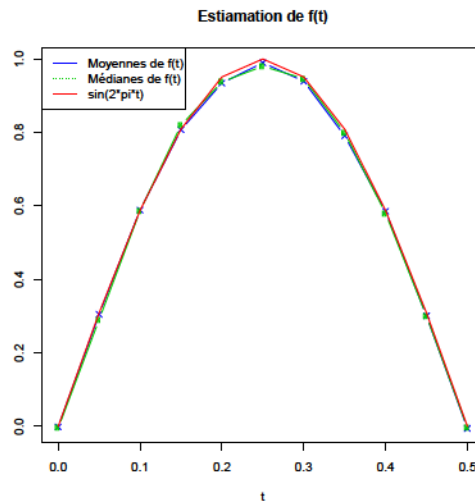


FIGURE 5.3 – $d\zeta_t = \sin(2\pi t)dt + 0.1dW_t$.

2) Nous illustrons maintenant l'estimateur modélisé à partir du processus géométrique linéaire ξ_t et nous considérons le modèle suivant

$$d\xi_t = \cos(2\pi t)\xi_t dt + \xi_t dW_t.$$

Comme pour le cas précédent et vu la périodicité et la parité de la fonction $\cos(2\pi t)$, nous la représentons sur $[0, 0.5]$.

La Figure 5.4 nous montre que la courbe de la fonction $\cos(2\pi t)$ passe à proximité des médianes des points $t = 0, 0.05, \dots, 0.5$. De plus, pour chaque t les valeurs de $\hat{f}_n(t)$ sont proches de celle $\cos(2\pi t)$.

5.5. Simulation

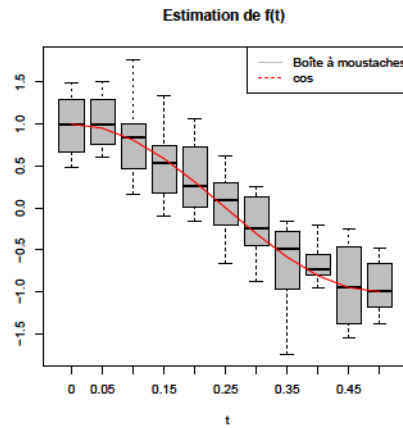


FIGURE 5.4 – $d\xi_t = \cos(2\pi t)\xi_t dt + \xi_t dW_t$.

Dans la figure ci-dessous nous traçons les courbes correspondant aux moyennes et médianes des 10 valeurs de $\hat{f}_n(t)$ ainsi que à la courbe de la fonction $\cos(2\pi t)$. Nous pouvons constater quelques légères dégradations, néanmoins les trois courbes ont la même allure.

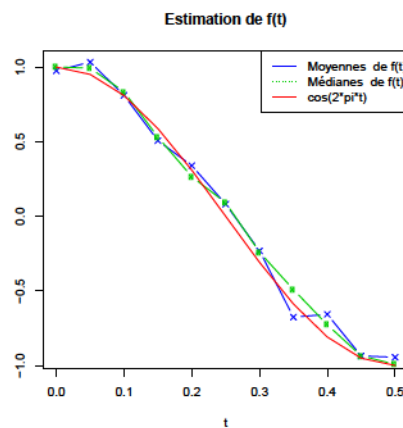


FIGURE 5.5 – $d\xi_t = \cos(2\pi t)\xi_t dt + \xi_t dW_t$.

Chapitre 6

Estimation non-paramétrique du drift d'un modèle de type *Ornstein-Uhlenbeck*

6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous supposons que nous observons une trajectoire continue sur $[0, nP]$ d'un processus solution de l'équation différentielle stochastique de type *Langevin* donnée par

$$d\xi_t = f(t)\xi_t dt + dW_t, \quad (6.1)$$

où $\{W_t\}$ est un mouvement Brownien indépendant de ξ_0 . Le but de ce chapitre est d'étudier par la méthode du noyau l'estimateur de la fonction $f(\cdot)$ en supposant qu'elle est continue et périodique de période $P > 0$.

Avant ceci, nous rappelons qu'une équation de type (6.1) admet la solution suivante

$$\xi_t = e^{F(t)} \left(\xi_0 + \int_0^t e^{-F(u)} dW_u \right),$$

où

$$F(t) := \int_0^t f(v)dv. \text{ Posons aussi, } G(t) := \int_0^t e^{-2F(v)} dv \text{ et } H^{-2}(t) := e^{2F(t)}G(t).$$

Un tel processus sera appelé un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* périodique (OU-P).

Comme dans le chapitre 2 et suivant [24], posons

$$\mathbf{X}_n := \{\xi_{nP+t} : t \in [0, P]\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $(\mathbf{X}_n)_n$ est une suite de Markov homogène dont l'espace d'états est $\mathcal{C}[0, P]$. De plus, le comportement de la suite $(\mathbf{X}_n)_n$ diffère selon le signe de $F(P)$, la

valeur de l'intégrale de $f(\cdot)$ sur une période P . D'où les trois différents cas qui apparaissent dans le comportement asymptotique de l'estimateur à noyau défini en (6.2).

Si $F(P) < 0$, la suite $(\mathbf{X}_n)_n$ est positive récurrente au sens de Harris. et la suite $(\xi_{nP+t})_n$ est positive récurrente pour chaque t .

Si $F(P) = 0$, la suite $(\mathbf{X}_n)_n$ a un comportement de type récurrent nul, en particulier la suite $(\xi_{nP+t})_n$ est récurrente nulle pour chaque t .

Si $F(P) > 0$, la suite $(\mathbf{X}_n)_n$ est transiente. (Voir section 2 de [9] pour plus de détail).

Par ailleurs, ces différents comportements selon le signe de $F(P)$ entraînent différentes vitesses de convergences de l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ étudié.

Dans ce travail nous supposons que $\xi_0 = 0$ donc pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}(\xi_t) = \mathcal{N}(0, H^{-2}(t)).$$

Pour estimer $f(\cdot)$ nous proposons l'estimateur à noyau suivant

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{d\xi_u}{\xi_u} \quad (6.2)$$

où $\epsilon_n > 0$. La présence de l'indicatrice $\mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}}$ se justifie par le fait que ξ_u peut appartenir à tout voisinage de 0 avec une probabilité non nulle. Nous allons démontrer que cet estimateur est asymptotiquement sans biais et qu'il converge en moyenne quadratique. Pour cela décomposons cet estimateur de la façon suivante

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(t) &= \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) f(u) du - \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}} f(u) du \\ &\quad + \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{dW_u}{\xi_u} \\ &= f_n(t) - U_n(t) + V_n(t), \end{aligned} \quad (6.3)$$

où

$$f_n(t) := \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) f(u) du,$$

$$U_n(t) := \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}} f(u) du$$

et

$$V_n(t) := \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{dW_u}{\xi_u}.$$

6.2 Propriétés de l'estimateur

6.2.1 Le biais de l'estimateur

Calculons d'abord l'espérance de $\hat{f}_n(t)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) \right] &= f_n(t) - \mathbb{E}[U_n(t)] + \mathbb{E}[V_n(t)] \\ &= f_n(t) - \mathbb{E}[U_n(t)]. \end{aligned}$$

la deuxième égalité est due aux propriétés du mouvement Brownien centré $\{W_u, u \geq 0\}$. Ainsi $\hat{f}_n(t)$ est un estimateur biaisé, néanmoins il est asymptotiquement sans biais.

Théorème 16 *Supposons que $f(\cdot)$ est continue et périodique, $\xi_0 = 0$ et que ϵ_n vérifie*

$$\epsilon_n = \begin{cases} o(1), & \text{si } F(P) < 0 \\ o(\sqrt{n}), & \text{si } F(P) = 0 \\ o(n), & \text{si } F(P) > 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Alors $\hat{f}_n(t)$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $f(t)$ uniformément en $t \in [0, P]$.

Preuve Le changement de variable $u = s - kP$, et la périodicité de $f(\cdot)$ et de $K(\cdot)$ nous donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) \right] &= \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) f(u) du - \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}} f(u) du \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) du \\ &\quad - \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^P K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n\}} f(u) du \right] \\ &= \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) du - \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n\}} \right] du \\ &= \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) du - \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P} \left[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n \right] du. \end{aligned}$$

Nous avons établi dans le Théorème 10 du chapitre 5 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) du - f(t) \right| = 0.$$

Il reste à prouver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U_n(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] \right) du = 0.$$

Pour ceci, majorons d'abord la somme

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] \quad \text{pour tout } u \in [0, P].$$

Nous savons que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[|\xi_{u+kP}| < \epsilon_n] &= \mathbb{P}[|\xi_u| \leq \epsilon_n] + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n]. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 10 en annexe

$$\mathbb{P}[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] \leq H(u+kP)\epsilon_n.$$

De plus, d'après le Lemme 11 en annexe,

$$H(u+kP) = \begin{cases} \mathcal{O}(1), & \text{si } F(P) < 0 \\ \mathcal{O}(k^{-1/2}), & \text{si } F(P) = 0 \\ \mathcal{O}(e^{-kF(P)}), & \text{si } F(P) > 0. \end{cases}$$

Ainsi en utilisant le fait que

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^{-1/2} \leq 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} e^{-kF(P)} = e^{-F(P)} \frac{1 - e^{-(n-1)F(P)}}{1 - e^{-F(P)}} \leq \frac{1}{e^{F(P)} - 1},$$

nous déduisons que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] \leq a_n, \tag{6.5}$$

où

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} + \mathcal{O}(\epsilon_n) & \text{si } F(P) < 0 \\ \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon_n}{\sqrt{n}}\right) & \text{si } F(P) = 0 \\ \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon_n}{n}\right) & \text{si } F(P) > 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

6.2. Propriétés de l'estimateur

Donc d'après la condition sur ϵ_n ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] = 0 \quad \text{uniformément en } u.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] du = 0 \quad \text{uniformément en } t.$$

Donc $\mathbb{E} [\hat{f}_n(t)]$ converge uniformément en t vers $f(t)$ lorsque n tend vers l'infini. ■

6.2.2 Vitesse de convergence du biais

Proposition 12 *Sous les hypothèses du Théorème 16, l'espérance de $\hat{f}_n(t)$ converge vers $f(t)$. Si de plus $f(\cdot)$ est un élément de la classe de Hölder \mathcal{H}^β nous avons*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n,\beta} \sup_{t \in [0,P]} \left| \mathbb{E} [\hat{f}_n(t)] - f(t) \right| < \infty,$$

où

$$\gamma_{n,\beta} := \begin{cases} \min \left\{ h_n^{-\beta}, n, \epsilon_n^{-1} \right\} & \text{si } F(P) < 0 \\ \min \left\{ h_n^{-\beta}, n, n^{\frac{1}{2}} \epsilon_n^{-1} \right\} & \text{si } F(P) = 0 \\ \min \left\{ h_n^{-\beta}, n, n \epsilon_n^{-1} \right\} & \text{si } F(P) > 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
 \left| \mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) \right] - f(t) \right| &\leq \left| \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) du - f(t) \right| \\
 &+ \left| \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] du \right| \\
 &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(u) f(t - uh_n) du - f(t) \right| \\
 &+ \left| \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] du \right| \\
 &\leq \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(u) f(t - uh_n) du - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(u) f(t) du \right| \\
 &+ \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(u) f(t - uh_n) a_n du \right| \\
 &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(u) (f(t - uh_n) - f(t)) du \right| \\
 &+ a_n \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(u) f(t - uh_n) du \right|.
 \end{aligned}$$

La première égalité est due à l'équation (5.4) et a_n est le terme défini en (6.6). D'après la Proposition 11 dans le chapitre précédent (chapitre 5), lorsque $f(\cdot)$ est un élément de classe de Hölder \mathcal{H}^β , nous avons

$$\left| \mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) \right] - f(t) \right| \leq Ch_n^\beta + a_n \|f\|_\infty \leq C'(h_n^\beta + a_n).$$

où

$$C = \frac{L}{l!} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |v|^\beta |K(v)| dv, \quad C' = C \max\{1, \|f\|_\infty\}.$$

Donc nous avons bien

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n,\beta} \sup_{t \in [0,P]} \left| \mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) \right] - f(t) \right| < \infty.$$

■

Exemples : Si $\beta = \frac{3}{2}$, $\epsilon_n = n^{-\frac{1}{4}}$ et $h_n = n^{-1}$, la vitesse de convergence du

6.3. Convergence en moyenne quadratique

biais est donnée par

$$\gamma_{n, \frac{3}{2}} = \begin{cases} \min \left\{ n^{\frac{3}{2}}, n, n^{\frac{1}{4}} \right\} = n^{\frac{1}{4}} & \text{si } F(P) < 0 \\ \min \left\{ n^{\frac{3}{2}}, n, n^{\frac{3}{4}} \right\} = n^{\frac{3}{4}} & \text{si } F(P) = 0 \\ \min \left\{ n^{\frac{3}{2}}, n, n^{\frac{5}{4}} \right\} = n & \text{si } F(P) > 0. \end{cases}$$

Si $\beta = 2$, c'est-à-dire $f(\cdot)$ est deux fois continûment dérivable, $\epsilon_n = h_n = n^{-\frac{1}{4}}$, cette vitesse devient,

$$\gamma_{n,2} := \begin{cases} \min \left\{ n^{\frac{1}{2}}, n, n^{\frac{1}{4}} \right\} = n^{\frac{1}{4}} & \text{si } F(P) < 0 \\ \min \left\{ n^{\frac{1}{2}}, n, n^{\frac{3}{4}} \right\} = n^{\frac{1}{2}} & \text{si } F(P) = 0 \\ \min \left\{ n^{\frac{1}{2}}, n, n^{\frac{5}{4}} \right\} = n^{\frac{1}{2}} & \text{si } F(P) > 0. \end{cases}$$

6.3 Convergence en moyenne quadratique

Théorème 17 *Supposons que $f(\cdot)$ est continue et périodique, ϵ_n satisfait la condition (6.4), a_n est donnée par la relation (6.6) et $n\epsilon_n^2 h_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ converge en moyenne quadratique vers $f(t)$. De plus, nous avons la convergence uniforme en $t \in [0, P]$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n(t) - f(t) \right|^2 \right] = 0.$$

Preuve Nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|\hat{f}_n(t) - f(t)|^2) \\ &= \left(\mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) - f(t) \right] \right)^2 + \text{var} \left(\hat{f}_n(t) \right) \\ &= \left(\mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) - f(t) \right] \right)^2 + \text{var} \left(f_n(t) + U_n(t) + V_n(t) \right) \\ &= \left(\mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) - f(t) \right] \right)^2 + \text{var} \left(U_n(t) \right) + \text{var} \left(V_n(t) \right) + 2\text{cov} \left(U_n(t), V_n(t) \right) \\ &\leq \left(\mathbb{E} \left[\hat{f}_n(t) - f(t) \right] \right)^2 + \text{var} \left(U_n(t) \right) + \text{var} \left(V_n(t) \right) \quad (6.8) \\ &\quad + 2 \left(\text{var} \left(U_n(t) \right) \text{var} \left(V_n(t) \right) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où les variables $f_n(t)$, $U_n(t)$, $V_n(t)$ sont définies en (6.3). La troisième égalité est due au fait que $\hat{f}_n(t)$ n'est pas aléatoire.

Nous avons étudié la convergence de l'espérance de $\hat{f}_n(t)$ vers $f(t)$. Nous allons maintenant montrer la convergence vers 0 des variances de $U_n(t)$ et de $V_n(t)$. Étudions d'abord la variance de $U_n(t)$

$$\begin{aligned}
 & \text{var}(U_n(t)) \\
 &= \text{var} \left(\frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}} f(u) du \right) \\
 &= \text{cov} \left(\frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}} f(u) du, \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-v) \mathbf{1}_{\{|\xi_v| \leq \epsilon_n\}} f(v) dv \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \int_0^{nP} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) K_{h_n}(t-v) f(u) f(v) \text{cov}(\mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}}, \mathbf{1}_{\{|\xi_v| \leq \epsilon_n\}}) dudv.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Majorons en premier lieu la covariance suivante

$$\begin{aligned}
 & \text{cov}(\mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}}, \mathbf{1}_{\{|\xi_v| \leq \epsilon_n\}}) \\
 &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}} \times \mathbf{1}_{\{|\xi_v| \leq \epsilon_n\}}] - \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}}] \times \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{|\xi_v| \leq \epsilon_n\}}] \\
 &\leq \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}}] - \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}}] \times \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{|\xi_v| \leq \epsilon_n\}}] \\
 &= \mathbf{P}(|\xi_u| \leq \epsilon_n) (1 - \mathbf{P}(|\xi_v| \leq \epsilon_n)) \\
 &\leq \mathbf{P}(|\xi_u| \leq \epsilon_n).
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \text{var}(U_n(t)) &\leq \frac{1}{n^2} \int_0^{nP} \int_0^{nP} |K_{h_n}(t-u) K_{h_n}(t-v)| |f(u) f(v)| \mathbf{P}(|\xi_u| \leq \epsilon_n) dudv \\
 &\leq \frac{1}{n^2} \int_0^P \int_0^P |K_{h_n}(t-u) K_{h_n}(t-v)| |f(u) f(v)| \\
 &\quad \times \sum_{k'=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n) dudv \\
 &\leq a_n \int_0^P \int_0^P |K_{h_n}(t-u) K_{h_n}(t-v)| |f(u) f(v)| dudv
 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est due à la relation (6.5) et a_n est défini en (6.6).

D'après l'équation (5.4) du chapitre 5 précédent nous déduisons que

$$\begin{aligned}
 \text{var}(U_n(t)) &\leq a_n \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |K(u) f(t - uh_n)| du \right)^2 \\
 &\leq \|f\|_\infty^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |K(u)| du \times a_n,
 \end{aligned}$$

6.3. Convergence en moyenne quadratique

Majorons maintenant la variance de $V_n(t)$.

$$\begin{aligned}
 \text{var}(V_n(t)) &= \text{var} \left(\frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{dW_u}{\xi_u} \right) \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{dW_u}{\xi_u} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \int_0^{nP} K_{h_n}^2(t-u) \mathbb{E} [\xi_u^{-2} \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}}] du \quad (6.10) \\
 &\leq \frac{1}{n^2 \epsilon_n^2} \int_0^{nP} K_{h_n}^2(t-u) du
 \end{aligned}$$

La deuxième égalité est due au fait que le mouvement Brownien est centré, et la dernière inégalité est due au fait que

$$\mathbb{E} [\xi_u^{-2} \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}}] \leq \frac{1}{\epsilon_n^2}. \quad (6.11)$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \text{var}(V_n(t)) &\leq \frac{1}{n^2 \epsilon_n^2} \int_0^{nP} K_{h_n}^2(t-u) du \\
 &= \frac{1}{n^2 \epsilon_n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kP}^{(k+1)P} K_{h_n}^2(t-u) du \\
 &= \frac{1}{n \epsilon_n^2 h_n} \int_0^P K_{h_n}^2(t-u) du \\
 &= \frac{1}{n \epsilon_n^2 h_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(u) du.
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous déduisons la convergence de $f_n(t)$ vers $f(t)$ ainsi que la convergence vers 0 de la variance des deux parties $U_n(t)$ et $V_n(t)$ lorsque $n \epsilon_n^2 h_n \rightarrow \infty$ et $a_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Ceci nous garantit la convergence en moyenne quadratique de $\hat{f}_n(t)$. ■

Remarque 5 À partir du calcul précédent nous déduisons les différentes vitesses de convergence suivantes : le terme $f_n(t)$ converge vers $f(t)$ avec la vitesse a_n . C'est aussi la même vitesse de convergence vers 0 de la variance des $U_n(t)$. Cependant, la variance de $V_n(t)$ converge vers 0 avec la vitesse $\frac{1}{n \epsilon_n^2 h_n}$.

Exemple, $\epsilon_n = n^{-\frac{1}{4}}$ et $h_n = n^{-\frac{1}{3}}$. Donc

$$\frac{1}{n \epsilon_n^2 h_n} = n^{-\frac{1}{6}},$$

et

$$a_n = \begin{cases} n^{-1} + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{1}{4}}\right) = \mathcal{O}\left(n^{-\frac{1}{4}}\right) & \text{si } F(P) < 0 \\ n^{-1} + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{3}{4}}\right) = \mathcal{O}\left(n^{-\frac{3}{4}}\right) & \text{si } F(P) = 0 \\ n^{-1} + \mathcal{O}\left(n^{-\frac{5}{4}}\right) = n^{-1}(1 + \mathcal{O}(1)) & \text{si } F(P) > 0. \end{cases}$$

Par conséquent $\epsilon_n \rightarrow 0$, $a_n \rightarrow 0$ et $n\epsilon_n^2 h_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

6.4 Étude de l'estimateur modifié $\hat{f}_n^*(t)$

Dans l'inégalité (6.11), nous avons majoré $E[\xi_u^{-2} \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}}]$ par $\frac{1}{\epsilon_n^2}$. Pour mieux contrôler ce terme (voir les Lemmes 10 et 11) et améliorer les vitesses de convergence de l'estimateur $\hat{f}_n(t)$, nous modifions cet estimateur en supposant que nous observons une trajectoire continue du processus $\{\xi_t\}$ sur $[P, nP]$. Définissons

$$\begin{aligned} \hat{f}_n^*(t) &:= \frac{1}{n} \int_P^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbb{I}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{d\xi_u}{\xi_u} \\ &= \frac{1}{n} \int_P^{nP} K_{h_n}(t-u) f(u) \mathbb{I}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} du + \frac{1}{n} \int_P^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbb{I}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{dW_u}{\xi_u}. \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^P K_{h_n}(t-u) \mathbb{I}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{d\xi_u}{\xi_u} + \hat{f}_n^*(t).$$

Nous décomposons $f_n^*(t)$ de la même façon que $\hat{f}_n(t)$ en posant

$$\hat{f}_n^*(t) = f_n^*(t) - U_n^*(t) + V_n^*(t), \quad (6.12)$$

où

$$\begin{aligned} f_n^*(t) &:= \frac{1}{n} \int_P^{nP} K_{h_n}(t-u) f(u) du \\ U_n^*(t) &:= \frac{1}{n} \int_P^{nP} K_{h_n}(t-u) f(u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}} du \\ V_n^*(t) &:= \frac{1}{n} \int_P^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{dW_u}{\xi_u}. \end{aligned}$$

Désormais c désigne une constante dont la valeur peut différer d'une expression à une autre.

6.4.1 Biais de l'estimateur et convergence en moyenne quadratique

Biais de l'estimateur

Nous démontrons dans le lemme suivant que l'estimateur $\hat{f}_n^*(t)$ est asymptotiquement sans biais.

Proposition 13 Avec les notations précédentes et sous les conditions que $n \rightarrow \infty$, $h_n = o(1)$ et que

1. $\epsilon_n = o(1)$ si $F(P) < 0$;
2. $\epsilon_n = o(\sqrt{n})$ si $F(P) = 0$;
3. $\epsilon_n = o(n)$ si $F(P) > 0$,

nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| \mathbb{E} \left[\hat{f}_n^*(t) \right] - f(t) \right| = 0.$$

Preuve Les calculs effectués ci-dessous sont semblables à ceux fait pour étudier $f_n(t)$ à l'exception que nous n'avons plus dans les sommations en k le terme $k = 0$. Nous savons que

$$\mathbb{E} \left[\hat{f}_n^*(t) \right] = f_n^*(t) - \mathbb{E}[U_n^*(t)] + \mathbb{E}[V_n^*(t)].$$

Le premier terme $f_n^*(t)$ est une fonction non-aléatoire et périodique,

$$f_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{kP}^{(k+1)P} K_{h_n}(t-u) f(u) du = \frac{n-1}{n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K(v) f(t-vh_n) dv.$$

Comme pour $f_n(t)$, $f_n^*(t)$ converge uniformément par rapport à t vers $f(t)$ quand $n \rightarrow \infty$. D'après l'indépendance des accroissements du mouvement Brownien, nous avons

$$\mathbb{E}[V_n^*(t)] = \frac{1}{n} \int_P^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{dW_u}{\xi_u} \right] = 0.$$

Il reste donc à étudier le terme $\mathbb{E}[U_n^*(t)]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_n^*(t)] &= \frac{1}{n} \int_P^{nP} K_{h_n}(t-u) f(u) \mathbb{P} [|\xi_u| \leq \epsilon_n] du \\ &= \int_0^P K_{h_n}(t-u) f(u) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] \right) du. \end{aligned}$$

D'après les Lemmes 10 et 11 en annexe et le fait que

$$\int_0^P |K_{h_n}(t-u)| |f(u)| du \leq \int_{-1/2}^{1/2} |K(u)| du \times \sup_{u \in [0, P]} |f(u)| < \infty, \quad (6.13)$$

nous pouvons faire les majorations suivantes

1. Si $F(P) < 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] \leq c(n-1) \epsilon_n$$

et

$$|\mathbb{E}[U_n^*(t)]| \leq c \epsilon_n \int_0^P |K_{h_n}(t-u)| |f(u)| du = \mathcal{O}(\epsilon_n). \quad (6.14)$$

2. Si $F(P) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] &\leq c \epsilon_n \sum_{k=1}^{n-1} k^{-\frac{1}{2}} \leq c(n-1) \epsilon_n \left(\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &\leq \frac{2c(n-1) \epsilon_n}{\sqrt{n}} \leq 2c\sqrt{n} \epsilon_n \end{aligned}$$

et

$$|\mathbb{E}[U_n^*(t)]| \leq \frac{2c \epsilon_n}{\sqrt{n}} \int_0^P |K_{h_n}(t-u)| |f(u)| du = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon_n}{\sqrt{n}}\right).$$

3. Si $F(P) > 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n] \leq c \epsilon_n \sum_{k=1}^{n-1} e^{-kF(P)} \leq \frac{c \epsilon_n}{e^{F(P)} - 1}$$

et

$$|\mathbb{E}[U_n^*(t)]| \leq \frac{c \epsilon_n}{n(e^{F(P)} - 1)} \int_0^P |K_{h_n}(t-u)| |f(u)| du = \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon_n}{n}\right).$$

Ceci termine la démonstration de la proposition. ■

Convergence en moyenne quadratique

Comme pour l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ nous obtenons la convergence en moyenne quadratique de $\hat{f}_n^*(t)$

Théorème 18 *Supposons que la fonction $f(\cdot)$ est périodique de période P connue. Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n^*(t) - f(t) \right|^2 \right] = 0,$$

sous les hypothèses que $h_n = o(1)$ et que

1. $\epsilon_n = o(1)$ et $nh_n \epsilon_n \rightarrow \infty$ si $F(P) < 0$;
2. $\epsilon_n = o(\sqrt{n})$ et $n^{\frac{3}{2}} h_n \epsilon_n \rightarrow \infty$ si $F(P) = 0$;
3. $\epsilon_n = o(n)$ et $n^2 h_n \epsilon_n \rightarrow \infty$ si $F(P) > 0$.

Preuve Puisque

$$\mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n^*(t) - f(t) \right|^2 \right] = \left| \mathbb{E} \left[\hat{f}_n^*(t) \right] - f(t) \right|^2 + \text{var} \left[\hat{f}_n^*(t) \right],$$

d'après le résultat de la Proposition 13, il reste juste à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \text{var} \left[\hat{f}_n^*(t) \right] = 0.$$

Grâce à la décomposition (6.12) nous avons

$$\begin{aligned} \text{var} \left[\hat{f}_n^*(t) \right] &= \text{var} \left[f_n^*(t) - U_n^*(t) + V_n^*(t) \right] = \text{var} \left[-U_n^*(t) + V_n^*(t) \right] \\ &= \text{var} \left[U_n^*(t) \right] + \text{var} \left[V_n^*(t) \right] - 2 \text{cov} \left[U_n^*(t), V_n^*(t) \right]. \end{aligned}$$

1) **Majoration de** $\text{var}[U_n^*(t)]$

$$\begin{aligned} &n^2 \text{var}[U_n^*(t)] \\ &= \int_P^P \int_P^P K_{h_n}(t-u) K_{h_n}(t-v) f(u) f(v) \text{cov} \left[\mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}}, \mathbf{1}_{\{|\xi_v| \leq \epsilon_n\}} \right] dudv \\ &\leq \left(\int_0^P |K_{h_n}(t-u)| |f(u)| \times \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\mathbb{P} \left[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n \right]} du \right)^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

car

$$\left| \text{cov} \left[\mathbf{1}_{\{|\xi_u| \leq \epsilon_n\}}, \mathbf{1}_{\{|\xi_v| \leq \epsilon_n\}} \right] \right| \leq \sqrt{\mathbb{P} \left[|\xi_u| \leq \epsilon_n \right]} \times \sqrt{\mathbb{P} \left[|\xi_v| \leq \epsilon_n \right]}.$$

D'après la périodicité de $f(\cdot)$ et $K_{h_n}(\cdot)$ nous avons

$$n^2 \text{var}[U_n^*(t)] \leq \left(\int_0^P |K_{h_n}(t-u)| |f(u)| \times \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\mathbb{P} \left[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n \right]} du \right)^2.$$

D'après les Lemmes 10 et 11 en annexe et l'inégalité (6.13) nous avons, selon les signes de $F(P)$, les majorations suivantes.

1. Si $F(P) < 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\mathbb{P} \left[|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n \right]} \leq c(n-1) \sqrt{\epsilon_n}$$

et

$$\text{var} \left[U_n^*(t) \right] \leq c \epsilon_n \left(\int_0^P |K_{h_n}(t-u)| |f(u)| du \right)^2 = \mathcal{O}(\epsilon_n). \quad (6.16)$$

2. Si $F(P) = 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n]} \leq c \sqrt{\epsilon_n} \sum_{k=1}^{n-1} k^{-\frac{1}{4}} \leq \frac{4}{3} c n^{\frac{3}{4}} \sqrt{\epsilon_n}$$

et

$$\text{var} [U_n^*(t)] \leq \frac{c \epsilon_n}{\sqrt{n}} \left(\int_0^P |K_{h_n}(t-u)| |f(u)| du \right)^2 = \mathcal{O} \left(\frac{\epsilon_n}{\sqrt{n}} \right). \quad (6.17)$$

3. Si $F(P) > 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\mathbb{P} [|\xi_{u+kP}| \leq \epsilon_n]} \leq c \sqrt{\epsilon_n} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-kF(P)/2} \leq \frac{c \sqrt{\epsilon_n}}{e^{F(P)/2} - 1}$$

et

$$\text{var} [U_n^*(t)] \leq \frac{c \epsilon_n}{n^2} \left(\int_0^P |K_{h_n}(t-u)| |f(u)| du \right)^2 = \mathcal{O} \left(\frac{\epsilon_n}{n^2} \right). \quad (6.18)$$

2) Majoration de $\text{var}[V_n^*(t)]$

D'après l'indépendance des accroissements du mouvement Brownien, nous avons

$$\begin{aligned} n^2 \text{var} [V_n^*(t)] &= \text{var} \left[\int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \xi_u^{-1} \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} dW_u \right] \\ &= \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u)^2 \mathbb{E} [\xi_u^{-2} \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}}] du \\ &= \int_0^P K_{h_n}(t-u)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} [\xi_{u+kP}^{-2} \mathbf{1}_{\{|\xi_{u+kP}| > \epsilon_n\}}] du. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Nous étudions maintenant $\text{var} [V_n^*(t)]$ selon les valeurs de $F(P)$.

D'après les Lemmes 10 et 11 et le fait que

$$\int_0^P K_{h_n}^2(t-u) du = \frac{1}{h_n} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv,$$

nous déduisons les estimations suivantes.

1. Si $F(P) < 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} [\xi_{u+kP}^{-2} \mathbb{I}_{\{|\xi_{u+kP}| > \epsilon_n\}}] \leq \frac{cn}{\epsilon_n} \quad (6.20)$$

et

$$\text{var} [V_n^*(t)] \leq \frac{c}{n \epsilon_n} \int_0^P K_{h_n}(t-u)^2 du = \mathcal{O} \left(\frac{1}{nh_n \epsilon_n} \right).$$

6.4. Étude de l'estimateur modifié $\hat{f}_n^*(t)$

2. Si $F(P) = 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} [\xi_{u+kP}^{-2} \mathbb{I}_{\{|\xi_{u+kP}| > \epsilon_n\}}] \leq \frac{c}{\epsilon_n} \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1/2} \leq \frac{2c\sqrt{n}}{\epsilon_n}$$

et

$$\text{var} [V_n^*(t)] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{3/2} h_n \epsilon_n} \right). \quad (6.21)$$

3. Si $F(P) > 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} [\xi_{u+kP}^{-2} \mathbb{I}_{\{|\xi_{u+kP}| > \epsilon_n\}}] \leq \frac{c}{\epsilon_n} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-kF(P)} \leq \frac{c}{\epsilon_n (e^{F(P)} - 1)}$$

et

$$\text{var} [V_n^*(t)] = \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2 h_n \epsilon_n} \right).$$

3) Majoration de $\text{cov} [U_n^*(t), V_n^*(t)]$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\text{cov} [U_n^*(t), V_n^*(t)]|^2 \leq \text{var} [U_n^*(t)] \times \text{var} [V_n^*(t)].$$

Ce qui achève la démonstration du Théorème 18. ■

6.4.2 Vitesse de convergence

Comme dans le chapitre précédent en supposant que $f(\cdot)$ appartient à une classe de Hölder \mathcal{H}^β , $\beta > 1$ et que $K(\cdot)$ est d'ordre l , ($l = \lfloor \beta \rfloor$ désigne le plus grand entier qui est strictement plus petit que le réel β), nous pouvons contrôler le développement de Taylor de la fonction $f(\cdot)$ et nous obtenons donc

$$|f_n^*(t) - f(t)| \leq C h_n^\beta, \quad \text{où} \quad C = \frac{L}{l!} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |v|^\beta |K(v)| dv,$$

et L est une constante positive dépendant de $f(\cdot)$. Ceci donne une vitesse de convergence d'ordre $O(h_n^\beta)$ pour le biais. De plus, nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h_n^{-\beta} \sup_{t \in [0, P]} |f_n^*(t) - f(t)| < \infty.$$

En particulier, pour $h_n = o \left(n^{-\frac{1}{2\beta+1}} \right)$, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\beta}{2\beta+1}} \sup_{t \in [0, P]} |f_n^*(t) - f(t)| = 0.$$

De plus nous savons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n^*(t) - f(t) \right|^2 \right] &= \left(\mathbb{E} \left[\hat{f}_n^*(t) \right] - f(t) \right)^2 + \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n^*(t) - \mathbb{E} \left[\hat{f}_n^*(t) \right] \right|^2 \right] \\ &= \left(f_n^*(t) - f(t) + \mathbb{E} [U_n^*(t)] \right)^2 + \text{var} [U_n^*(t)] + \text{var} [V_n^*(t)] \\ &\quad - 2\text{cov} [U_n^*(t), V_n^*(t)]. \end{aligned}$$

D'après les calculs précédents effectués dans la Proposition 13 et le Théorème 18 nous obtenons

Pour $F(P) < 0$,

$$\sup_{t \in [0, P]} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n^*(t) - f(t) \right|^2 \right] = \mathcal{O}(h_n^{2\beta}) + \mathcal{O}(\epsilon_n^2) + \mathcal{O}(\epsilon_n) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{nh_n\epsilon_n}\right);$$

Pour $F(P) = 0$,

$$\sup_{t \in [0, P]} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n^*(t) - f(t) \right|^2 \right] = \mathcal{O}(h_n^{2\beta}) + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon_n^2}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon_n}{\sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}h_n\epsilon_n}\right);$$

Pour $F(P) > 0$,

$$\sup_{t \in [0, P]} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n^*(t) - f(t) \right|^2 \right] = \mathcal{O}(h_n^{2\beta}) + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon_n^2}{n^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon_n}{n^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2h_n\epsilon_n}\right).$$

Dans le corollaire suivant nous cherchons à déterminer h_n et ϵ_n de manière à obtenir la convergence la plus rapide.

Corollaire 9 *Supposons que $f(\cdot)$ est périodique et appartient à \mathcal{H}^β , $\beta > 1$. Alors il existe une suite réelle $\{\lambda_{n,\beta}\}$ croissante vers ∞ telle que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,\beta}^2 \sup_{t \in [0, P]} \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n^*(t) - f(t) \right|^2 \right] < \infty$$

sous les hypothèses que quand $n \rightarrow \infty$

1. $h_n \sim n^{\frac{-1}{1+4\beta}}$, $\epsilon_n \sim n^{\frac{-2\beta}{1+4\beta}}$ et $\lambda_{n,\beta} := n^{\frac{\beta}{1+4\beta}}$, si $F(P) < 0$;
2. $h_n \sim n^{\frac{-2}{1+4\beta}}$, $\epsilon_n \sim n^{\frac{1-4\beta}{2(1+4\beta)}}$ et $\lambda_{n,\beta} := n^{\frac{2\beta}{1+4\beta}}$, si $F(P) = 0$;
3. $h_n \sim n^{\frac{-3}{1+3\beta}}$, $\epsilon_n \sim n^{\frac{1}{1+3\beta}}$ et $\lambda_{n,\beta} := n^{\frac{3\beta}{1+3\beta}}$, si $F(P) > 0$.

Par conséquent, la plus grande vitesse de convergence correspond à $F(P) > 0$, c'est-à-dire dans le cas du modèle transient. Tandis que la plus petite vitesse de convergence correspond à $F(P) < 0$, c'est-à-dire dans le cas du modèle périodique positif récurrent.

Preuve Pour obtenir la vitesse optimale de convergence nous devons, comme d'habitude, trouver un compromis entre le biais et la variance de l'estimateur.

6.4. Étude de l'estimateur modifié $\hat{f}_n^*(t)$

En effet, pour minimiser l'erreur quadratique, nous avons besoin de minimiser le biais et la variance. Cherchons donc h_n, ϵ_n et $(h_n \epsilon_n)^{-1}$ qui minimisent l'erreur quadratique.

1. Pour $F(P) < 0$, nous obtenons la plus grande vitesse de convergence quand $h_n^{2\beta} \sim \epsilon_n \sim (nh_n \epsilon_n)^{-1}$, ainsi $h_n \sim n^{\frac{-1}{1+4\beta}}$ et $\epsilon_n \sim n^{\frac{-2\beta}{1+4\beta}}$ quand $n \rightarrow \infty$.

2. Pour $F(P) = 0$, nous obtenons la plus grande vitesse de convergence quand $h_n^{2\beta} \sim n^{-\frac{1}{2}} \epsilon_n \sim (n^{3/2} h_n \epsilon_n)^{-1}$, ainsi $h_n \sim n^{\frac{-2}{1+4\beta}}$ et $\epsilon_n \sim n^{\frac{1-4\beta}{2(1+4\beta)}}$ quand $n \rightarrow \infty$.

3. Pour $F(P) > 0$ et $\epsilon_n \geq 1$, nous obtenons la plus grande vitesse de convergence quand $h_n^{2\beta} \sim n^{-2} \epsilon_n^2 \sim (n^2 h_n \epsilon_n)^{-1}$, ainsi $h_n \sim n^{\frac{-3}{1+3\beta}}$ et $\epsilon_n \sim n^{\frac{1}{1+3\beta}}$ quand $n \rightarrow \infty$.

4. Pour $F(P) > 0$ et $\epsilon_n = 1$, nous obtenons la plus grande vitesse de convergence quand $h_n^{2\beta} \sim (n^2 h_n)^{-1}$, ainsi $h_n \sim n^{\frac{-2}{1+2\beta}}$ quand $n \rightarrow \infty$.

5. Pour $F(P) > 0$, $\epsilon_n \leq 1$ et la suite $\{\epsilon_n\}$ est fixée, nous obtenons la plus grande vitesse de convergence quand $h_n^{2\beta} \sim (n^2 h_n \epsilon_n)^{-1}$, ainsi $h_n \sim (n^2 \epsilon_n)^{\frac{-1}{1+2\beta}} = n^{\frac{-2}{1+2\beta}} \epsilon_n^{\frac{-1}{1+2\beta}}$, quand $n \rightarrow \infty$.

6. Remarquons que pour $F(P) > 0$ et $\epsilon_n \leq 1$ n'est pas fixé, la plus grande vitesse de convergence serait atteinte lorsque $h_n^{2\beta} \sim n^{-2} \epsilon_n \sim (n^2 h_n \epsilon_n)^{-1}$, ainsi $h_n \sim n^{\frac{-4}{1+4\beta}}$ et $\epsilon_n \sim n^{\frac{2}{1+4\beta}}$ quand $n \rightarrow \infty$, ce qui est en contradiction avec la condition $\epsilon_n \leq 1$.

Par conséquent nous déduisons le corollaire. ■

6.4.3 Variance limite

Pour simplifier le calcul, nous supposons ici que $h_n = n^{-h}$, $\epsilon_n = n^{-\epsilon}$.

Théorème 19 Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique de période P , il existe une suite réelle $\{\gamma_n\}$ croissante vers ∞ et une fonction $H_f : [0, P] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| \gamma_n^2 \text{var} [\hat{f}_n^*] - H_f(t) \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(u) du \right| = 0. \quad (6.22)$$

sous les conditions que

1. Si $F(P) < 0$, $0 < h < 1$ et $\frac{1-h}{2} < \epsilon < 1-h$, alors $\gamma_n^2 := nh_n \epsilon_n = n^{1-h-\epsilon}$ et $H_f(\cdot)$ est définie par

$$H_f(t) := e^{-F(t)} \times \left(\frac{G(P)}{e^{-2F(P)} - 1} + G(t) \right)^{-\frac{1}{2}}; \quad (6.23)$$

2. Si $F(P) = 0$, $0 < h < 2$ et $\frac{1-h}{2} < \epsilon < \frac{3}{2} - h$, alors $\gamma_n^2 := n^{\frac{3}{2}} h_n \epsilon_n = n^{\frac{3}{2}-h-\epsilon}$ et $H_f(\cdot)$ est définie par

$$H_f(t) := e^{-F(t)} G(P)^{-\frac{1}{2}}; \quad (6.24)$$

3. Si $F(P) > 0$, $0 < h < 2$ et $0 \leq \epsilon < 2 - h$, $\gamma_n^2 := n^2 h_n \epsilon_n = n^{2-h-\epsilon}$ et
(i) pour $0 < \epsilon < 2 - h$, $H_f(\cdot)$ est une série convergente définie ainsi

$$H_f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} H(kP + t), \quad (6.25)$$

et la convergence est uniforme par rapport à $t \in [0, P]$;

(ii) pour $\epsilon = 0$, ($\epsilon_n = \text{constant}$) $H_f(\cdot)$ est définie comme étant la somme de la série convergente suivante

$$H_f(t) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} [\xi_{kP+t}^{-2} \mathbf{1}_{\{|\xi_{kP+t}| > \epsilon\}}]. \quad (6.26)$$

Remarquons que dans les cas $F(P) < 0$ et $F(P) = 0$, nous avons $H_f(P) = H_f(0)$.

Preuve Rappelons que

$$\text{var} [\hat{f}_n^*(t)] = \text{var}[U_n^*(t)] + \text{var}[V_n^*(t)] - 2\text{cov}[U_n^*(t), V_n^*(t)],$$

et que

$$\int_P^{nP} K_{h_n}^2(t-u)H(u)du = \int_0^P K_{h_n}^2(t-u) \sum_{k=1}^{n-1} H(u+kP) du. \quad (6.27)$$

Nous allons étudier le comportement asymptotique de $\text{var}[V_n^*(t)]$ et choisir ϵ_n qui rend $\text{var}[U_n^*(t)]$ négligeable. D'après le Lemme 12, pour $u > 0$ nous avons

$$\left| \mathbb{E} [\xi_u^{-2} \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}}] - \frac{2H(u)}{\sqrt{2\pi} \epsilon_n} \right| \leq H^2(u).$$

Ainsi grâce à l'expression de $n^2 \text{var}[V_n^*(t)]$ donnée en (6.19) nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left| n^2 \text{var}[V_n^*(t)] - \frac{2}{\sqrt{2\pi} \epsilon_n} \int_P^{nP} K_{h_n}^2(t-u)H(u) du \right| \\ & \leq \int_P^{nP} K_{h_n}^2(t-u)H^2(u) du \\ & = \int_0^P K_{h_n}^2(t-u) \sum_{k=1}^{n-1} H^2(u+kP) du. \end{aligned}$$

1) $F(P) < 0$

Les relations (7.7), (7.8) en annexe et (6.23) impliquent que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{u \in [0, P]} G(u+kP) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in [0, P]} |H(u+kP) - H_f(u)| = 0.$$

6.4. Étude de l'estimateur modifié $\hat{f}_n^*(t)$

Donc en appliquant le théorème de convergence dominée et sachant que $H_f(\cdot)$ est uniformément continue sur $[0, P]$ nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [0, P]} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |H(u + kP) - H_f(u)| = 0$$

et d'après la relation (6.27) nous obtenons facilement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| \frac{h_n}{n} \int_P^{nP} K_{h_n}^2(t - u) H(u) du - H_f(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0.$$

Comme $\epsilon_n = o(1)$, l'égalité (7.8) entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [0, P]} \frac{\epsilon_n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} H^2(u + kP) (|\ln \epsilon_n| + |\ln H(u + kP)| + 2) = 0.$$

Ainsi nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| n \epsilon_n h_n \text{var} [V^*(t)] - H_f(t) \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0$$

D'après la majoration de $U_n^*(t)$, relation (6.16)

$$n \epsilon_n h_n \sup_{t \in [0, P]} \text{var} [U^*(t)] = \mathcal{O}(n h_n \epsilon_n^2).$$

Ainsi lorsque $F(P) < 0$, il suffit pour avoir la convergence (6.22) pour

$$0 < h < 1 \text{ et } \frac{1-h}{2} < \epsilon < 1-h$$

de prendre $\gamma_n^2 := n h_n \epsilon_n = n^{1-h-\epsilon}$.

2) $F(P) = 0$

L'égalité (7.9) en annexe nous donne $0 < kG(P) \leq G(u + kP)$ pour $u \in [0, P]$ et $k \geq 1$, donc d'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [0, P]} \left| \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{-\xi_0^2}{2G(u + kP)} \right) \right] - 1 \right| = 0.$$

Les relations (7.10) en annexe et (6.24) entraînent que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in [0, P]} |\sqrt{k} H(u + kP) - 2H_f(u)| = 0.$$

Ainsi en utilisant le fait que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{n}}{2} (1 + o(1)),$$

nous déduisons à partir de l'égalité (6.27) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| \frac{h_n}{\sqrt{n}} \int_P^{nP} K_{h_n}^2(t-u) H(u) du - H_f(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0.$$

De plus, et en utilisant l'approximation suivante

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n),$$

l'égalité (7.10) en annexe implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [0, P]} \frac{\epsilon_n}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} H^2(u+kP) = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| n^{3/2} \epsilon_n h_n \text{var}[V^*(t)] - H_f(t) \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0.$$

D'autre part d'après (6.17) nous avons

$$n^{3/2} \epsilon_n h_n \sup_{t \in [0, P]} \text{var}[U^*(t)] = \mathcal{O}(nh_n \epsilon_n^2),$$

Par conséquent, lorsque $F(P) = 0$, il suffit, pour avoir la convergence (6.22) pour

$$0 < h < 2 \text{ et } \frac{1-h}{2} < \epsilon < \frac{3}{2} - h$$

de prendre $\gamma_n^2 := n^{\frac{3}{2}} h_n \epsilon_n = n^{\frac{3}{2}-h-\epsilon}$.

3) $F(P) > 0$

(i) Considérons d'abord le cas $\epsilon_n = o(1)$. D'après la définition de $G(\cdot)$ et $H(\cdot)$, nous avons

$$G(P) \leq G(u+kP) \leq \frac{G(P)}{1 - e^{-2F(P)}} \quad \text{and} \quad 0 \leq H(u+kP) \leq \frac{e^{-kF(P)+P\|f\|_\infty}}{\sqrt{G(P)}}.$$

Ainsi nous déduisons que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} H(u+kP) \mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{\xi_0^2}{2G(u+kP)} \right) \right]$$

converge uniformément par rapport à $u \in [0, P]$. Ceci justifie la définition (6.25) de $H_{f, \xi_0}(\cdot)$ lorsque $F(P) > 0$ et grâce à la relation (6.27), nous obtenons facilement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| h_n \int_P^{nP} K_{h_n}^2(t-u) H(u) du - H_{f, \xi_0}(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0.$$

6.4. Étude de l'estimateur modifié $\hat{f}_n^*(t)$

En outre, d'après l'égalité (7.11) en annexe et comme $\epsilon_n = o(1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [0, P]} \epsilon_n \sum_{k=1}^{n-1} H^2(u + kP) = 0.$$

D'où, comme $h_n = o(1)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| n^2 \epsilon_n h_n \text{var} [V^*(t)] - H_f(t) \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0.$$

Or la majoration (6.18) nous donne

$$n^2 \epsilon_n h_n \sup_{t \in [0, P]} \text{var} [U^*(t)] = h_n \epsilon_n^2 \mathcal{O}(1),$$

Ainsi pour avoir la convergence (6.22), il suffit, pour

$$0 < h < 2 \text{ et } 0 < \epsilon < 2 - h,$$

de prendre $\gamma_n^2 := n^2 h_n \epsilon_n = n^{2-h-\epsilon}$.

(ii) Considérons maintenant le cas $\epsilon_n = C > 0$. Comme $\mathcal{L}[\xi_u] = \mathcal{N}(0, H(u)^{-2})$, alors $\mathcal{L}[H(u)\xi_u] = \mathcal{N}(0, 1)$. Donc nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_u^{-2} \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon\}}] &= H^2(u) \mathbb{E} \left[(H(u)\xi_u)^{-2} \mathbf{1}_{\{|H(u)\xi_u| > H(u)\epsilon\}} \right] \\ &= \frac{2H(u)e^{-H(u)^2\epsilon}}{\sqrt{2\pi}\epsilon_n} - 2H(u)^2 (1 - \Phi(H(u)\epsilon)) \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E} [\xi_{u+kP}^{-2} \mathbf{1}_{\{|\xi_{u+kP}| > \epsilon\}}]$$

converge uniformément vers la fonction continue sur $[0, P]$ définie par $u \rightarrow \sqrt{2/\pi} H_f(u)$. Remarquons que cette fonction dépend de $\epsilon > 0$. Ainsi, d'après l'égalité (6.19),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, P]} \left| n^2 h_n \text{var} [V_n^*(t)] - H_{f,\epsilon}(t) \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv \right| = 0.$$

par ailleurs, d'après l'inégalité (6.15), nous avons

$$n^2 h_n \sup_{t \in [0, P]} \text{var} [U_n^*(t)] = h_n \mathcal{O}(1).$$

Ainsi pour avoir la convergence (6.22), il suffit, pour

$$\epsilon_n = C > 0 \text{ et } 0 < h < 2$$

de prendre $\gamma_n^2 := n^2 h_n \epsilon_n = n^{2-h}$.

■

En utilisant le Lemme 13 et le Théorème 19 nous déduisons le résultat suivant de la convergence de l'erreur quadratique.

Corollaire 10 *Supposons que*

1. $0 < h < 1$ et $\max \left\{ 1 - (2\beta + 1)h, \frac{1-h}{2} \right\} < \epsilon < 1 - h$ si $F(P) < 0$;
2. $0 < h < 2$ et $\max \left\{ \frac{3}{2} - (2\beta + 1)h, \frac{1-h}{2} \right\} < \epsilon < \frac{3}{2} - h$ si $F(P) = 0$;
3. $0 < h < 2$, $\max \left\{ 2 - (2\beta + 1)h, \frac{1-h}{3} \right\} < \epsilon < 2 - h$ et $\epsilon \geq 0$ si $F(P) > 0$.

Si $f(\cdot)$ est une fonction périodique de période P , de classe de Hölder \mathcal{H}^β , $\beta \geq 1$, et le noyau $K(\cdot)$ est d'ordre $l = \lfloor \beta \rfloor$ et $\epsilon > 0$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^2 \mathbb{E} \left[\left| \hat{f}_n^*(t) - f(t) \right|^2 \right] = H_f(t) \times \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K^2(v) dv$$

uniformément par rapport à $t \in [0, P]$

Preuve Nous avons étudié précédemment la variance, il reste à estimer le biais

$$\mathbb{E} \left[\hat{f}_n^*(t) \right] - f(t) = f_n^*(t) - f(t) + \mathbb{E} [U_n^*(t)]$$

D'après le sous section 6.4.2, nous obtenons les approximations suivantes

1. $F(P) < 0$,

$$nh_n \epsilon_n (f_n^*(t) - f(t) + \mathbb{E} [U_n^*(t)])^2 = \mathcal{O}(nh_n^{2\beta+1} \epsilon_n) + \mathcal{O}(nh_n \epsilon_n^3).$$

2. $F(P) = 0$

$$n^{3/2} h_n \epsilon_n (f_n^*(t) - f(t) + \mathbb{E} [U_n^*(t)])^2 = \mathcal{O}(n^{3/2} h_n^{2\beta+1} \epsilon_n) + \mathcal{O}(n^{1/2} h_n \epsilon_n^3).$$

3. $F(P) > 0$ et $\epsilon_n \rightarrow 0$,

$$n^2 h_n \epsilon_n (f_n^*(t) - f(t) + \mathbb{E} [U_n^*(t)])^2 = \mathcal{O}(n^2 h_n^{2\beta+1} \epsilon_n) + \mathcal{O}(nh_n \epsilon_n^3).$$

4. $F(P) > 0$ et $\epsilon_n = C > 0$

$$nh_n^2 (f_n^*(t) - f(t) + \mathbb{E} [U_n^*(t)])^2 = \mathcal{O}(n^2 h_n^{2\beta+1}) + \mathcal{O}(nh_n).$$

Ce qui permet de terminer facilement la démonstration. ■

6.5 Simulation

Ici, nous simulons également le processus $\{\xi_t\}$ avec la méthode d'Euler en utilisant le logiciel **R**.

Rappelons que

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \int_0^{nP} K_{h_n}(t-u) \mathbf{1}_{\{|\xi_u| > \epsilon_n\}} \frac{d\xi_u}{\xi_u}.$$

Nous allons, dans un premier temps, représenter des trajectoires du processus $\{\xi_t\}$. Pour ceci, nous considérons d'abord le processus $\{\xi_t\}$ solution de l'EDS suivante. $d\xi_t = (a + 2 \sin(2\pi t))\xi_t dt + dW_t$, et la période $P = 1$.

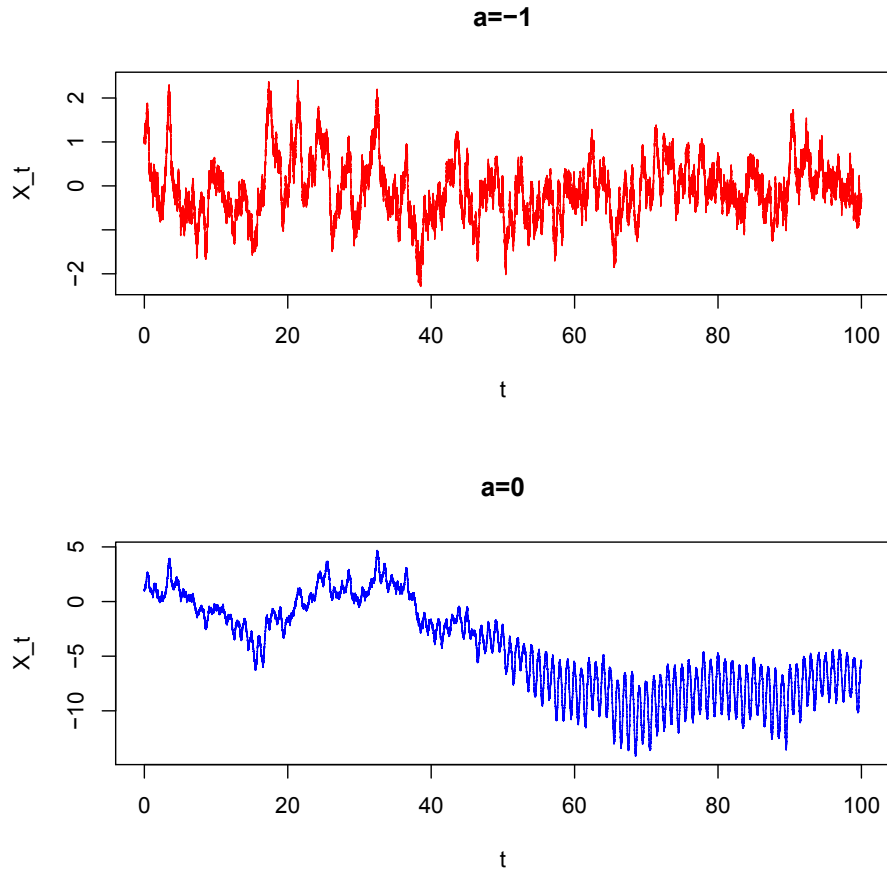


FIGURE 6.1 – $d\xi_t = (a + 2 \sin(2\pi t))\xi_t dt + dW_t$.

Pour $a = -1$, donc

$$F(P) = \int_0^1 (-1 + 2 \sin(2\pi t)) dt = -1 < 0,$$

le processus est récurrent positif. Pour $a = 0$, $F(P) = 0$, le processus est récurrent nul.

Regardons un cas où $F(P) > 0$. Pour ceci, considérant le modèle $d\xi_t = (a + 5 \sin(2\pi t))\xi_t dt + dW_t$. Il est clair que $F(P) = 1 > 0$. Nous constatons que, dans le premier graphe de la figure 6.2 ci-dessous, le processus $\{\xi_t\}$ est transient. Il explose quand $n \rightarrow \infty$.

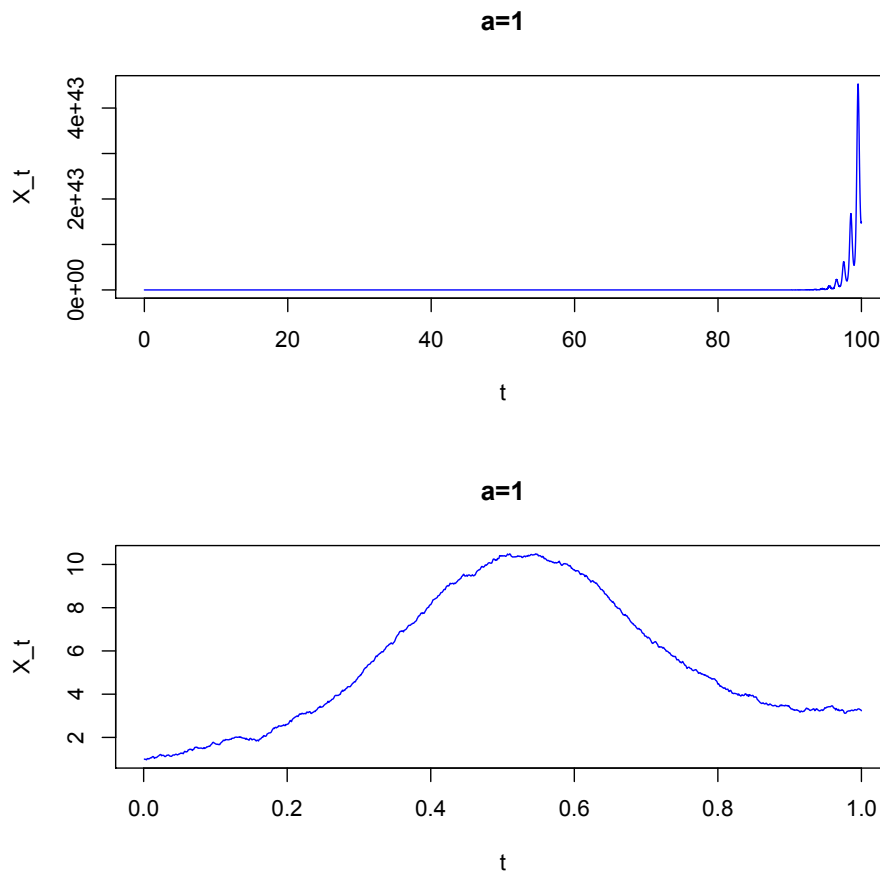


FIGURE 6.2 – $d\xi_t = (a + 5 \sin(2\pi t))\xi_t dt + dW_t$.

Dans le deuxième graphe de cette figure, nous avons représenté la trajectoire du processus sur une période. Ceci nous montre qu'en réalité, le processus n'est pas constant, mais plutôt, à partir de $t = 95$, ses valeurs augmentent très considérablement.

6.5. Simulation

Nous allons maintenant représenter des simulations de l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ pour $F(P) = 0$ et $F(P) > 0$. Posons $P = 1, \epsilon = 1, h_n = 10^{-2}$.

Pour $F(P) = 0, f(t) = 2 \sin(2\pi t)$.
Comme $f(\cdot)$ est périodique de période 1, il suffit de la représenter sur $[0, 1]$.

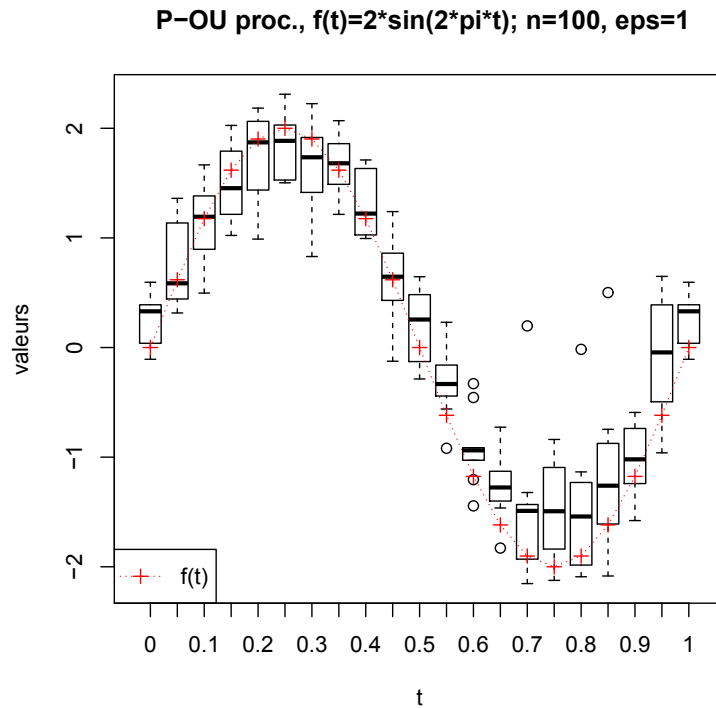


FIGURE 6.3 – $d\xi_t = 2 \sin(2\pi t)\xi_t dt + dW_t$.

Nous pouvons voir que, même si nous avons quelques valeurs aberrantes, la forme globale des boîtes-à-moustaches des valeurs de l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ a la même allure que la courbe de la fonction à estimer $f(t) = 2 \sin(2\pi t)$.

Pour $F(P) > 0$, $f(t) = 1 + 2 \sin(2\pi t)$

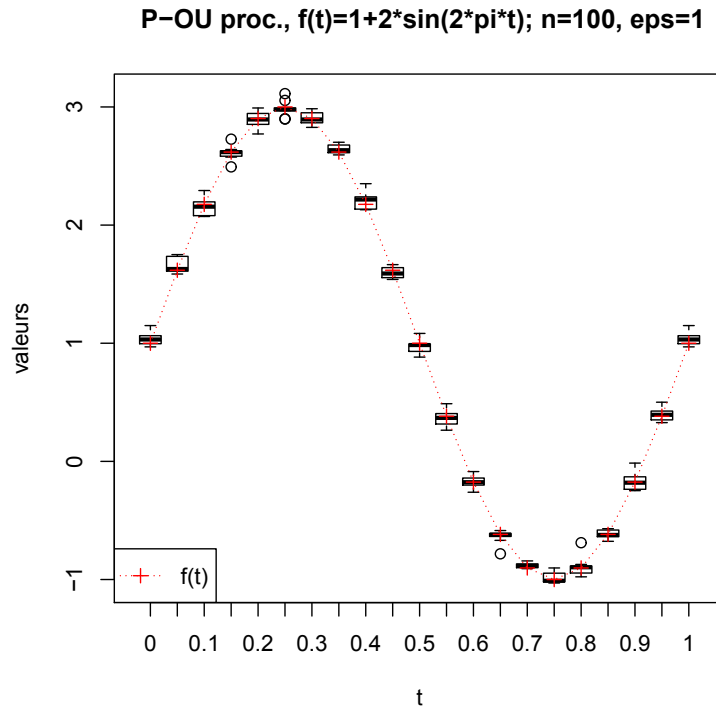


FIGURE 6.4 – $d\xi_t = (1 + 2 \sin(2\pi t))\xi_t dt + dW_t$.

Dans ce cas, la forme générale des boîtes-à-moustaches s'améliore nettement. En effet, la courbe de la fonction à estimer passe par la plupart des médianes des 21 points de 0 à 1. Par ailleurs, pour chaque point, toutes les valeurs sont bien centrées autour de leurs médianes.

Dans le cas où $F(P) < 0$, j'ai rencontré des problèmes de simulation qui sont vraisemblablement dues à la normalisation de l'estimateur $\hat{f}_n(t)$ par le coefficient $\frac{1}{n}$ ou au choix de la fonction indicatrice présente dans la définition de cet estimateur. Je vais essayer, en perspective de ma thèse, de modifier la normalisation et d'adapter la fonction indicatrice afin de surmonter ces problèmes.

Conclusion et perspective

Nous avons considéré dans l'équation (1.1) le modèle de type *signal plus bruit* donné par

$$d\zeta_t = f(t, \theta)dt + \sigma(t)dW_t, \quad t \in [0, T]$$

où $f(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont des fonctions continues, périodiques en t de même période P et supposées connues.

À partir d'une observation continue du processus $\{\zeta_t\}$ sur l'intervalle $[0, T]$, nous avons estimé le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Nous avons ensuite démontré que cet estimateur $\hat{\theta}_T$ converge en probabilité, asymptotiquement normal et asymptotiquement efficace au sens minimax. Lorsque $f(t, \theta) = \theta f(t)$ l'expression de $\hat{\theta}_T$ est explicite. De plus, nous avons établi sa convergence en moyenne quadratique ainsi que sa convergence presque sûre.

Lorsque nous observons seulement le processus $\{\zeta_t\}$ aux instants $t_i := i\delta_n$, $i \in \{0, \dots, n\}$, où $\delta_n = \frac{T}{n}$, nous avons proposé un estimateur $\hat{\theta}_n$ pour le paramètre θ . Par ailleurs, mise à part la convergence presque sûre dans le cas où $f(t, \theta) = \theta f(t)$, nous avons prouvé que $\hat{\theta}_n$ possède les mêmes propriétés que $\hat{\theta}_T$.

Nous nous sommes également intéressés à l'estimation non-paramétrique pour la fonction $f(\cdot)$ représentant le drift du modèle (1.2) qui a pour équation

$$d\zeta_t = f(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad t \in [0, T].$$

Après avoir construit un estimateur à l'aide d'un noyau périodique, nous avons démontré que cet estimateur est uniformément asymptotiquement sans biais sur l'intervalle $[0, P]$, qu'il converge uniformément en moyenne quadratique, asymptotiquement normal et qu'il converge presque sûrement.

Nous avons aussi étudié un estimateur à noyau pour le drift du modèle (1.6) de type *Ornstein-Uhlenbeck* donné par l'équation

$$d\xi_t = f(t)\xi_t dt + dW_t, \quad t \in [0, T].$$

Nous avons par la suite établi la convergence uniforme du biais et la convergence uniforme en moyenne quadratique.

En perspective, je souhaite affiner et améliorer ces résultats dans différentes directions.

Une première direction serait la généralisation de l'étude du modèle (1.1) au cas multidimensionnel : estimation des paramètres θ_i provenant des observations en temps continu ou en temps discrétisé du processus ζ_t suivant le modèle

$$d\zeta_t = (\theta_1 f_1(t) + \theta_2 f_2(t) + \cdots + \theta_n f_n(t)) dt + \sigma(t) dW_t,$$

où les fonctions $f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot)$ sont connues et périodiques, n étant fixé.

D'autre part, prolongeant ce travail et l'estimation non-paramétrique par la méthode de l'estimateur à noyau périodique, il serait intéressant de considérer l'estimation par projection pour les modèles

$$d\xi_t = f(t)dt + \sigma(t)dW_t \quad \text{et} \quad d\xi_t = f(t)\xi_t dt + dW_t.$$

Une autre piste consisterait à s'intéresser à d'autres modèles stochastiques dont les fonctions du drift et de diffusion ne sont pas nécessairement périodiques mais, par exemple presque périodiques.

Concernant l'estimation non-paramétrique, la convergence du biais et la convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau dans les deux modèles (1.2) et (1.6) devraient être valables uniformément sur certaines classes de fonctions et en particulier les fonctions dans certaines classe de Hölder. En outre, suivant [46], Chapitre 1 section 3, le choix optimal du noyau $K(\cdot)$ et de la fenêtre h nous permettrait d'améliorer les vitesses de convergence des estimateurs non-paramétriques.

Enfin, il serait bon d'accompagner ces résultats théoriques par des applications sur des données réelles. Je pense ici à des données qui peuvent provenir de la Finance, de la Biologie ou encore de la Mécanique où des phénomènes périodiques apparaissent.

Chapitre 7

Annexes

Dans ces annexes nous démontrons quelques résultats utilisés dans les preuves précédentes.

7.1 Annexe au chapitre 4

Les lemmes 5 et 6 ci-dessous sont utilisés dans le chapitre 4. Rappelons que nous utilisons dans ce chapitre les notations suivantes

$$F_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s)ds, \quad G_i^2 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(s)ds,$$
$$T = n\delta_n = N_n P \rightarrow \infty \text{ et } \delta_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Lemme 5 *Si $f(\cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues périodiques de même période P , $\sigma(\cdot) > 0$, $\delta_n \rightarrow 0$ et $n\delta_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, alors nous avons la limite suivante*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} = \frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s)ds,$$

où $\rho(s) = \frac{f(s)}{\sigma(s)}$.

Preuve

D'après le théorème de la moyenne, pour chaque i , il existe s_i et s'_i dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ tels que

$$F_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s)ds = (t_{i+1} - t_i) f(s_i) \quad \text{et} \quad G_i^2 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(s)ds = (t_{i+1} - t_i) \sigma^2(s'_i)$$

De plus comme $\sigma(\cdot) > 0$, nous obtenons que $\inf_t \sigma(t) > 0$ et que la fonction $(s, s') \mapsto f^2(s)\sigma^{-2}(s')$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^2 . Par conséquent pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < \delta_n = t_{i+1} - t_i < \eta$ alors

$$\left| \frac{1}{\delta_n} F_i^2 G_i^{-2} - f^2(t_i)\sigma^{-2}(t_i) \right| = |f^2(s_i)\sigma^{-2}(s'_i) - f^2(t_i)\sigma^{-2}(t_i)| \leq \epsilon$$

et

$$\left| f^2(t_i)\sigma^{-2}(t_i) - \frac{1}{\delta_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^2(s)\sigma^{-2}(s)ds \right| \leq \epsilon.$$

Ainsi, pour $\delta_n < \eta$, $t_i = i\delta_n$, $i = 0, \dots, n-1$

$$\left| \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} - \frac{1}{n\delta_n} \int_0^{n\delta_n} f^2(s)\sigma^{-2}(s)ds \right| \leq 2\epsilon.$$

La fonction $t \mapsto f^2(t)\sigma^{-2}(t)$ étant périodique de période $P > 0$, nous avons

$$\frac{1}{n\delta_n} \int_0^{n\delta_n} f^2(s)\sigma^{-2}(s)ds = \frac{1}{N_n P} \int_0^{N_n P} f^2(s)\sigma^{-2}(s)ds = \frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s)ds.$$

Nous déduisons que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n\delta_n = \infty$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} F_i^2 G_i^{-2} - \frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s)ds \right| \leq 2\epsilon,$$

pour tout $\epsilon > 0$. Le lemme est donc prouvé.

■

De ce lemme nous déduisons le résultat suivant. Posons $F_i(\theta) := \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, \theta)ds$, et rappelons que $\rho(s, \theta) = \frac{f(s, \theta)}{\sigma(s)}$.

Lemme 6 *Avec les notations et les hypothèses du Lemme 5, nous avons les deux limites suivantes*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} F_i^2(\theta) G_i^{-2} = \frac{1}{P} \int_0^P \rho^2(s, \theta)ds$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\delta_n} \sum_{i=0}^{n-1} (F_i(\theta) - F_i(\theta_{\theta_0}))^2 G_i^{-2} = \frac{1}{P} \int_0^P (\rho(s, \theta) - \rho(s, \theta_0))^2 ds$$

7.2 Annexe au chapitre 5

Les lemmes suivants 7, 8 et 9 sont utilisés pour la preuve de la convergence presque sûre du Théorème 15 au chapitre 5.

Utilisons les notations de ce théorème. Pour i fixé et pour $0 < p < n_{i+1} - n_i$, soient

$$\varphi_p := \frac{h_{n_{i+1}-p}}{2}, \quad M_p^{(k)} := \int_{t-\varphi_p}^{t+\varphi_p} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} = \int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)}.$$

7.2. Annexe au chapitre 5

Pour $n_i \leq n < n_{i+1}$ nous avons $h_{n_{i+1}} < h_n \leq h_{n_i}$, donc en considérant $n = n_{i+1} - p$, nous avons

$$\varphi_p = \frac{h_{n_{i+1}-p}}{2} \leq \frac{h_{n_{i+1}-p-1}}{2} = \varphi_{p+1}.$$

Ainsi, nous pouvons définir la filtration croissante suivante $(\mathcal{G}_p^{(i)})_{0 \leq p \leq n_{i+1}-n_i}$

$$\mathcal{G}_p^{(i)} := \sigma \left\{ W_s^{(k)} : t - \varphi_p \leq s \leq t + \varphi_p, 1 \leq k \leq n_{i+1} \right\} \quad (7.1)$$

Lemme 7 Pour chaque i et k fixés, le processus $(M_p^{(k)})_p$ défini ci-dessus est une martingale en p par rapport à la filtration $\left\{ \mathcal{G}_p^{(i)} \right\}_{0 \leq p \leq n_{i+1}-n_i}$.

Preuve

$$\begin{aligned} M_{p+1}^{(k)} &= \int_{t-\varphi_{p+1}}^{t+\varphi_{p+1}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \\ &= \int_{t-\varphi_{p+1}}^{t+\varphi_p} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} + M_p^{(k)} + \int_{t+\varphi_p}^{t+\varphi_{p+1}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \end{aligned}$$

Comme les variables

$$\int_{t-\varphi_{p+1}}^{t+\varphi_p} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \quad \text{et} \quad \int_{t+\varphi_p}^{t+\varphi_{p+1}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)}$$

sont indépendantes de $\mathcal{G}_p^{(i)}$, et $M_p^{(k)}$ est $\mathcal{G}_p^{(i)}$ -mesurable, nous obtenons

$$\mathbb{E} \left(M_{p+1}^{(k)} / \mathcal{G}_p^{(i)} \right) = M_p^{(k)}.$$

Ainsi, $(M_p^{(k)})_p$ est bien une martingale. ■

Lemme 8 Définissons

$$M_n^{(k,1)} := \int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_n}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)}, \quad M_n^{(k,2)} := \int_{t+\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_{n_i}}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)},$$

$$\mathcal{G}_n^1 := \sigma \left\{ W_s^{(k)} : t - \frac{h_{n_i}}{2} \leq s \leq t - \frac{h_n}{2} \right\}, \quad (7.2)$$

$$\mathcal{G}_n^2 := \sigma \left\{ W_s^{(k)} : t + \frac{h_n}{2} \leq s \leq t + \frac{h_{n_i}}{2} \right\}. \quad (7.3)$$

Alors, pour i fixé, les processus $(M_n^{(k,1)})_n$ (resp $(M_n^{(k,2)})_n$) sont des martingales par rapport aux filtrations $\{\mathcal{G}_n^1\}_n$ (resp $\{\mathcal{G}_n^2\}_n$).

Preuve Il est clair que pour $n \in [n_i : n_{i+1}]$ $\{\mathcal{G}_n^1\}_n, \{\mathcal{G}_n^2\}_n$ sont deux filtrations.

Pour $M_n^{(k,1)}$ nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[M_{n+1}^{(k,1)} / \mathcal{G}_n^1] &= \mathbb{E} \left[\int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_{n+1}}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} / \mathcal{G}_n^1 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_n}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} / \mathcal{G}_n^1 \right] \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[\int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t-\frac{h_{n+1}}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} / \mathcal{G}_n^1 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t-\frac{h_n}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right] \\
 &= M_n^{(k,1)},
 \end{aligned}$$

car la première partie de la deuxième égalité est \mathcal{G}_n^1 -mesurable et la deuxième partie est indépendante de \mathcal{G}_n^1 .

Pour $M_n^{(k,2)}$, nous faisons un calcul analogue

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[M_{n+1}^{(k,2)} / \mathcal{G}_n^2] &= \mathbb{E} \left[\int_{t+\frac{h_{n+1}}{2}}^{t+\frac{h_{n_i}}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} / \mathcal{G}_n^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_{t+\frac{h_{n+1}}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} / \mathcal{G}_n^2 \right] \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[\int_{t+\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_{n_i}}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} / \mathcal{G}_n^1 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_{t+\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_{n_i}}{2}} K \left(\frac{t-s}{h_{n_i}} \right) \sigma(s) dW_s^{(k)} \right] \\
 &= M_n^{(k,2)},
 \end{aligned}$$

puisque la première partie de la deuxième égalité est \mathcal{G}_n^2 -mesurable et la deuxième partie est indépendante de \mathcal{G}_n^2 .

Donc $M_n^{(k,1)}$ (res $M_n^{(k,2)}$) sont deux martingales en n par rapport aux filtrations \mathcal{G}_n^1 (res \mathcal{G}_n^2). ■

Lemme 9 *Nous avons*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[A_i^{(1)} \right] = 0,$$

où

$$A_i^{(1)} = \sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \left| \frac{1}{nh_n} \left(\frac{1}{h_n} - \frac{1}{h_{n_i}} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \right|.$$

Preuve Remarquons que

$$A_i^{(1)} \leq \frac{1}{n_i h_{n_{i+1}}} \left| \frac{1}{h_{n_{i+1}}} - \frac{1}{h_{n_i}} \right| \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \left| \int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \right|. \quad (7.4)$$

Pour simplifier, calculons d'abord l'espérance de la somme ci-dessus

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \left\{ \left| \int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \right| : n_i \leq n < n_{i+1} \right\} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \mathbb{E} \left[\sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \left\{ \left| \int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \right| : n_i \leq n < n_{i+1} \right\} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \left(\mathbb{E} \left[\sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \left\{ \left| \int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \right| : n_i \leq n < n_{i+1} \right\}^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est due à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Comme $(M_p^{(k)})_p$ est une martingale alors nous trouvons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \left\{ \left| \int_{t-\frac{h_n}{2}}^{t+\frac{h_n}{2}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \right| : n_i \leq n < n_{i+1} \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \left\{ |M_p^{(k)}| : 0 < p \leq n_{i+1} - n_i \right\} \right] \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \left(\mathbb{E} \left(\sup_{n \in [n_i; n_{i+1}]} \left\{ |M_p^{(k)}| : 0 < p \leq n_{i+1} - n_i \right\} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \left(\mathbb{E} \left(|M_{n_{i+1}-n_i}^{(k)}|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \left(\mathbb{E} \left[\left| \int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t+\frac{h_{n_i}}{2}} 4|t-s|\sigma(s) dW_s^{(k)} \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 4 \sum_{k=0}^{n_{i+1}-1} \left(\int_{t-\frac{h_{n_i}}{2}}^{t+\frac{h_{n_i}}{2}} |t-s|^2 \sigma^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} n_{i+1} h_{n_i}^3 (\|\sigma^2\|)^{1/2} \end{aligned}$$

où $\|\sigma^2\| = \sup_{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \sigma^2(t)$. En revenant à l'inégalité (7.4) nous avons

$$\mathbb{E} \left[A_i^{(1)} \right] \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{n_{i+1}}{n_i} \left| \frac{1}{h_{n_{i+1}}} - \frac{1}{h_{n_i}} \right| \frac{h_{n_i}^3}{h_{n_{i+1}}} (\|\sigma^2\|)^{1/2}.$$

Rappelons que $n_i = i^b$, $h_{n_i} = n_i^{-a} = i^{-ba}$.

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{(i+1)^b}{i^b}, \quad \frac{h_{n_i}^3}{h_{n_{i+1}}} = \frac{(i+1)^{3ba}}{i^{3ba}}.$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h_{n_{i+1}}} - \frac{1}{h_{n_i}} \right| &= (i+1)^{ba} - i^{ba} \\ &= i^{ba} \left(1 + \frac{1}{i} \right)^{ba} - i^{ba} \\ &= i^{ba} \left(\frac{ba}{i} + O\left(\frac{b^2 a^2}{i^2}\right) \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{h_{n_i}^3}{h_{n_{i+1}}} \left| \frac{1}{h_{n_{i+1}}} - \frac{1}{h_{n_i}} \right| &= \frac{(i+1)^{3ba}}{i^{3ba}} \left(i^{ba} \left(\frac{ba}{i} + O\left(\frac{b^2 a^2}{i^2}\right) \right) \right) \\ &= \frac{(i+1)^{3ba}}{i^{2ba}} \left(\frac{ba}{i} + O\left(\frac{b^2 a^2}{i^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(i+1)^b}{i^b} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{h_{n_i}^3}{h_{n_{i+1}}} \left| \frac{1}{h_{n_{i+1}}} - \frac{1}{h_{n_i}} \right| = 0.$$

Par conséquent

$$\mathbb{E} \left[A_i^{(1)} \right] \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{n_{i+1}}{n_i} \left| \frac{1}{h_{n_{i+1}}} - \frac{1}{h_{n_i}} \right| \frac{h_{n_i}^3}{h_{n_{i+1}}},$$

tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini, d'où la convergence vers 0 de $\mathbb{E} \left[A_i^{(1)} \right]$.

■

7.3 Annexe au chapitre 6

Les lemmes suivants sont utilisés dans le chapitre 6.

Lemme 10 Pour tout $\epsilon > 0$ et $u > 0$

$$\mathbb{P} \left[|\xi_u| \leq \epsilon \right] \leq \inf \{ 1, H(u)\epsilon \}. \quad (7.5)$$

et

$$\mathbb{E} \left[\xi_u^{-2} \mathbb{I}_{\{|\xi_u| > \epsilon\}} \right] \leq \inf \{ \epsilon^{-2}, H(u)\epsilon^{-1} \}. \quad (7.6)$$

7.3. Annexe au chapitre 6

Preuve Comme $\mathcal{L}[\xi_u] = \mathcal{N}(0, H^{-2}(u))$ pour tout $u > 0$. Ainsi,

$$\mathbb{P}[|\xi_u| \leq \epsilon] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}H^{-1}(u)} \int_0^\epsilon \exp\left(-\frac{x^2}{2H^{-2}(u)}\right) dx \leq H(u)\epsilon,$$

car $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} < 1$ et $\exp\left(-\frac{x^2}{2H^{-2}(u)}\right) \leq 1$. De plus

$$\mathbb{E}[\xi_u^{-2} \mathbb{I}_{\{|\xi_u| > \epsilon\}}] \leq \epsilon^{-2} \mathbb{P}[|\xi_u| \leq \epsilon] \leq H(u)\epsilon^{-1}.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Pour compléter l'estimation en ce Lemme 10, nous démontrons les minoration suivantes

Lemme 11

$$H(u + kP) = \begin{cases} \mathcal{O}(1), & \text{si } F(P) < 0 \\ \mathcal{O}(k^{-1/2}), & \text{si } F(P) = 0 \\ \mathcal{O}(e^{-kF(P)}), & \text{si } F(P) > 0 \end{cases}$$

uniformément par rapport à $u \in [0, P]$ quand $k \rightarrow \infty$.

Preuve Rappelons que

$$H^2(u+kP) = e^{-2F(u+kP)}G(u+kP)^{-1} \quad \text{et que} \quad F(u+kP) = kF(P)+F(u),$$

donc quelque soit la valeur de $F(P)$

$$e^{F(u+kP)} \geq \left(\inf_{u \in [0, P]} e^{F(u)} \right) e^{kF(P)} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } u \in [0, P].$$

Par ailleurs selon les signes de $F(P)$ nous obtenons

1. Si $F(P) < 0$

$$\begin{aligned} G(u+kP) &= \frac{e^{-2kF(P)} - 1}{e^{-2F(P)} - 1} G(P) + e^{-2kF(P)} G(u) \\ &= e^{-2kF(P)} \left(\frac{G(P)}{e^{-2F(P)} - 1} + G(u) \right) (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (7.7)$$

et

$$H^2(u+kP) = e^{-2F(u)} \left(\frac{G(P)}{e^{-2F(P)} - 1} + G(u) \right)^{-1} (1 + o(1)) \quad (7.8)$$

uniformément par rapport à $u \in [0, P]$ quand $k \rightarrow \infty$.

2. Si $F(P) = 0$

$$G(u + kP) = kG(P) + G(u) = kG(P)(1 + o(1)). \quad (7.9)$$

et

$$H^2(u + kP) = \frac{1}{ke^{2F(u)}G(P)}(1 + o(1)) = k^{-1}\mathcal{O}(1) \quad (7.10)$$

uniformément par rapport à $u \in [0, P]$ quand $k \rightarrow \infty$.

3. Si $F(P) > 0$

$$G(u + kP) = \frac{1 - e^{-2kF(P)}}{1 - e^{-2F(P)}}G(P) + e^{-2kF(P)}G(u) = \frac{G(P)}{1 - e^{-2F(P)}}(1 + o(1))$$

et

$$H^2(u + kP) = e^{-2kF(P)} \frac{1 - e^{-2F(P)}}{e^{2F(u)}G(P)}(1 + o(1)) = e^{-2kF(P)}\mathcal{O}(1) \quad (7.11)$$

uniformément par rapport à $u \in [0, P]$ quand $k \rightarrow \infty$.

Donc le lemme est prouvé. ■

Lemme 12 *Pour tout $\epsilon > 0$ et $u > 0$*

$$\left| \mathbb{E} [\xi_u^{-2} \mathbb{I}_{\{|\xi_u| > \epsilon\}}] - \frac{2H(u)}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \right| \leq H^2(u).$$

Preuve Rappelons que $\mathcal{L}[\xi_u] = \mathcal{N}(0, H^{-2}(u))$. Donc $\mathcal{L}[H(u)\xi_u] = \mathcal{N}(0, 1)$. En considérant la variable aléatoire Z centrée réduite $\mathcal{L}[Z] = \mathcal{N}(0, 1)$, pour prouver le lemme il suffit de démontrer que pour tout $a > 0$

$$\left| \mathbb{E} [Z^{-2} \mathbb{I}_{\{|Z| > a\}}] - \frac{2}{\sqrt{2\pi}a} \right| \leq 1. \quad (7.12)$$

L'intégration par parties $u'(z) = z^{-2}$ et $v(z) = e^{-z^2/2}$, nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z^{-2} \mathbb{I}_{\{|Z| > a\}}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{|z| > a\}} z^{-2} e^{-z^2/2} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}a} e^{-a^2/2} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-z^2/2} dz \end{aligned}$$

Or

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-z^2/2} dz < 1,$$

dons

$$\left| \mathbb{E} [Z^{-2} \mathbb{I}_{\{|Z|>a\}}] - \frac{2}{\sqrt{2\pi}a} e^{-a^2/2} \right| \leq 1.$$

Le théorème de la valeur moyenne entraîne que

$$\left| 1 - e^{-a^2/2} \right| \leq \sup_x |x| e^{-x^2/2} a \leq a.$$

ce qui nous donne l'inégalité (7.12). Ainsi nous obtenons le résultat voulu :

$$\left| \mathbb{E} [\xi_u^{-2} \mathbb{I}_{\{|\xi_u|>\epsilon\}}] - \frac{2H(u)}{\sqrt{2\pi} \epsilon} \right| \leq H^2(u).$$

■

Bibliographie

- [1] D. Bosq and D. Blanke. *Inference and Periodicity in Large Dimensions*. Wiley-Dunod, West Sussex, 2007.
- [2] I. Castillo. Semiparametric second-order efficient estimation of the period of a signal. *Bernoulli* 13 (4), pp. 910-932, 2007.
- [3] I. Castillo, C. Lévy-Leduc, and C. Matias. Exact adaptive estimation of the sharp of a periodic function with unknown period corrupted by white noise. *Mathematical Methods of Statistics* 15, pp. 1-29, 2006.
- [4] F. Chaari, J. Leskow, A. Napolitano, and A. Sanchez-Ramirez. *Cyclostationarity : Theory and Methods*. Springer, New York, 2014.
- [5] F. Chaari, J. Leskow, A. Napolitano, A. Sanchez-Ramirez, R. Zimroz, A. Wylomanska, and A. Dudek. *Cyclostationarity : Theory and Methods II*. Springer, New York, 2015.
- [6] P. Collet and S. Martinez. Asymptotic velocity of one dimensional diffusion with periodic drift. *J. Math. Biol.* 56, pp. 765-792, 2008.
- [7] D. Dacunha-Castelle and M. Duflo. *Probabilité et Statistique 2, Problèmes à Temps Mobile*. Masson, Paris, 1983.
- [8] D. Dacunha-Castelle and D. Florens-Zmirou. Estimation of the coefficients of a diffusion from discrete observations. *Stochastics* 19, pp. 263-284, 1986.
- [9] D. Dehay. Parameter maximum likelihood estimation for time-periodic modulated drift Ornstein Uhlenbeck process. *Statist. Inference Stoch. Process.* 18, pp. 69-98, 2015.
- [10] D. Dehay and K. El Waled. Nonparametric estimation problem for a time-periodic signal in a periodic noise. *Statistics and Probability Letters* 83, pp. 608-615, 2013.
- [11] D. Delhing, B. Franke, and T. Kott. Drift estimation for a periodic mean reversion process. *Stat Inference Stoch Process* 13, pp. 175-192, 2010.
- [12] K. El Waled. *Cyclostationarity : Theory and Methods - II*, chapter 2 Parametric Estimation Problem for a Time Periodic Signal in a Periodic Noise, pp. 19-41. Springer, Switzerland, 2015.
- [13] D. Florens-Zmirou. Approximate discrete-time schemes for statistics of diffusion processes. *Statistics* 20, pp. 547-575, 1989.

-
- [14] W.A. Gardner. *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*. IEEE Press, New York, 1994.
- [15] W.A. Gardner, A. Napolitano, and L. Paura. Cyclostationarity : half a century of research. *Signal process.* 86, pp. 639-697, 2006.
- [16] V. Genon-Catalot. Maximum contrast estimation for diffusion process from discrete observations. *Statistics* 21, pp. 99-116, 1990.
- [17] V. Genon-Catalot and D. Picard. *Élément de Statistique Asymptotique*. Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [18] I.I. Gikhman and A.V Skorokhod. *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1972.
- [19] E.G. Gladyshev. Periodically correlated stochastic processes. *Soviet Math.* pp. 385-388, 1961.
- [20] G.K. Golubev. Estimating the period of a signal of unknown sharp corrupted by white noise. *Problems Inform. Transmission* 24, pp. 288-299, 2006.
- [21] V. Harison. Drift estimation of a certain class of diffusion processes from discrete observations. *Computers Math. Applic.* 31 No. 6, pp. 121-133, 1996.
- [22] R. Höpfner. On a set of data for the membrane in a neuron. *Math. Biosci.* 207 pp. 275-301, 2007.
- [23] R. Höpfner. *Asymptotic Statistics*. De Gruyter, Berlin, 2014.
- [24] R. Höpfner and Yu. Kutoyants. Estimating discontinuous periodic signals in a time inhomogeneous diffusion. *Statist. Inference Stoch. Process.* 13, pp. 193-230, 2010.
- [25] R. Höpfner and Yu. Kutoyants. Estimating a periodicity parameter in the drift of a time inhomogeneous diffusion. *Mathematical Methods of Statistics*, pp. 58-74, 2011.
- [26] I.A. Ibragimov and R.Z. Khasminskii. *Statistical Estimation. Asymptotic Theory*. Springer, New York, 1981.
- [27] A. Jankunas and R.Z. Khas'minskii. Estimation of parameters of linear homogeneous stochastic differential equations. *Stochastic Process. Appl.* 72 pp. 205-219, 1997.
- [28] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [29] R.D. Kasonga. The consistency of a non-linear least squares estimator from diffusion processes. *Stoch. Processes and their Appl.* 30 pp. 263-275, 1988.
- [30] R.Z. Khas'minskii. Stochastic stability of differential equations. *Sijthoff & Noordhoff, Alphaen aan den Rijn (The Netherlands)*, 1980.

- [31] F.C. Klebaner. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. Imperial College Press, London, second edition, 2006.
- [32] Yu. Kutoyants. *Parameter Estimation for Stochastic Processes*. Heldermann, Berlin, 1984.
- [33] Yu. Kutoyants. *Identification of Dynamical Systems with Small Noise*. Kluwer Academic Publishers, London, 1994.
- [34] Yu. Kutoyants. *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*. Springer Series in Statistics, London, 2004.
- [35] A. Le Breton. On continuous and discrete sampling for parameter estimation in diffusion type processes. *Mathematical Programming Studies* 5, pp. 124-144, 1976.
- [36] L. Le Cam. Locally asymptotically normal families of distributions. *University of California Publications in Statistics* 3, pp. 37-98, 1960.
- [37] L. Le Cam. *Théorie Asymptotique de la Décision Statistique*. Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1969.
- [38] R.S. Liptser and A.N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes, I General Theory*. Springer, Berlin, second edition, 2001.
- [39] R.S. Liptser and A.N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes, II Applications*. Springer, Berlin, second edition, 2001.
- [40] M. N. Mishra and B. L. S. Prakasa Rao. Asymptotic study of the maximum likelihood estimator for non-homogeneous diffusion processes. *Statistics & Decisions* 3, pp. 193-203, 1985.
- [41] J. Neveu. *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, Paris, 1964.
- [42] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2001.
- [43] E. Serpedin, F. Pandura, I. Sari, and G.B. Giannakis. Bibliography on cyclostationarity. *Signal process.* 85, pp. 2233-2303, 2005.
- [44] G. Shorack and J.A. Wellner. *Empirical Processes with Applications to Statistics*. Wiley, New York, 1986.
- [45] J.H. Stapleton. *Models for Probability and Statistical Inference. Theory and Applications*. Wiley, New Jersey, 2008.
- [46] A. B. Tsybakov. *Introduction à l'Estimation Non-Paramétrique*. Springer, Berlin, second edition, 2004.
- [47] A. B. Tsybakov. *Introduction to Nonparametric Estimation*. Springer, New York, 2009.
- [48] A.W. van der Vaart. *Asymptotic Statistics*. Cambridge University Press, 1998.

Résumé : Cette thèse est consacrée au problème d'estimation de la fonction de dérive de certains modèles de processus stochastiques périodiques lorsque la durée d'observation tend vers l'infini. Aucune hypothèse de récurrence n'est posée a priori.

Dans un premier temps nous considérons le modèle du type *signal plus bruit*

$$d\zeta_t = f(t, \theta)dt + \sigma(t)dW_t,$$

et puis nous étudions l'estimation du paramètre θ à partir d'une observation continue et puis d'une observation discrète du processus $\{\zeta_t\}$ sur l'intervalle $[0, T]$. Les fonctions $f(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot)$ sont continues et périodiques en t de même période $P > 0$, $\sigma(\cdot) > 0$ et $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Nous établissons la convergence en probabilité d'un estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_T$, sa normalité asymptotique et son efficacité asymptotique minimax. Lorsque $f(t, \theta) = \theta f(t)$, l'expression de $\hat{\theta}_T$ est explicite et nous obtenons la convergence en moyenne quadratique aussi bien pour le cas d'une observation continue que pour le cas d'une observation discrète. De plus, nous déduisons la convergence presque sûre dans le cas d'une observation continue.

Dans la seconde partie nous traitons l'estimation non-paramétrique de la fonction $f(\cdot)$ pour les modèles périodiques du type *signal plus bruit* et du type *Ornstein-Uhlenbeck* donnés par

$$d\zeta_t = f(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad d\xi_t = f(t)\xi_t dt + dW_t.$$

Pour le premier modèle, un estimateur à noyau périodique est construit, la convergence en moyenne quadratique uniformément sur $[0, P]$ et presque sûre de cet estimateur est établie ainsi que sa normalité asymptotique. Dans le cas du modèle d'*Ornstein-Uhlenbeck*, la convergence du biais ainsi que la convergence en moyenne quadratique uniformément sur $[0, P]$ sont prouvées, et leurs vitesses de convergence sont étudiées.

Mots clés : Processus de diffusion, modèle d'*Ornstein-Uhlenbeck*, estimateur de maximum de vraisemblance, estimateur de maximum de contraste, estimateur à noyau, comportement asymptotique, fonction périodique.

Abstract : In this thesis, we consider a drift estimation problem of a certain class of stochastic periodic processes when the length of observation goes to infinity.

Firstly, we deal with the linear periodic *signal plus noise* model

$$d\zeta_t = f(t, \theta)dt + \sigma(t)dW_t,$$

and we study the parametric estimation from a continuous and discrete observation of the process $\{\zeta_t\}$ throughout the interval $[0, T]$. Using the maximum likelihood method we show the existence of an estimator $\hat{\theta}_T$ which is consistent, asymptotically normal and asymptotically efficient in the sens minimax. When $f(t, \theta) = \theta f(t)$, the expression of $\hat{\theta}_T$ is explicit and we obtain the mean square convergence in the both continuous and discrete observation cases. In addition, we deduce the strong consistency in the case of continuous observation.

Secondly, we consider the nonparametric estimation problem of the function $f(\cdot)$ for the next two periodic models of type *signal plus noise* and *Ornstein-Uhlenbeck*

$$d\zeta_t = f(t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad d\xi_t = f(t)\xi_t dt + dW_t.$$

For the *signal plus noise* model, we build a kernel estimator, the convergence in mean square uniformly over $[0, P]$ and almost sure convergence are established, as well as the asymptotic normality. For the *Ornstein-Uhlenbeck* model, we prove the convergence uniformly over $[0, P]$ of the bias and the mean square convergence. Moreover, we study the speed of these convergences.

Keywords : Diffusion processes, *Ornstein-Uhlenbeck* model, maximum likelihood estimator, maximum contrast estimator, kernel estimator, asymptotic behavior of estimators, periodic function.