HAL
open science

Optimisation du spectre du Laplacien avec conditions de Dirichlet et Neumann dans $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$

Amandine Berger

To cite this version:

Amandine Berger. Optimisation du spectre du Laplacien avec conditions de Dirichlet et Neumann dans R^2 et R^3. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Grenoble Alpes; Université de Neuchâtel (Neuchâtel, Suisse), 2015. Français. NNT : 2015GREAM036 . tel-01266486

HAL Id: tel-01266486

https://theses.hal.science/tel-01266486

Submitted on 2 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : le 6 janvier 2005 -7 août 2006

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

Spécialité : **Mathématiques**

préparée dans le cadre d'une cotutelle entre l'*Université de Grenoble* et l'*Université de Neuchâtel*

Présentée par

Amandine BERGER

Thèse dirigée par **Bruno COLBOIS** et **Édouard OUDET**

préparée au sein du **Laboratoire Jean Kuntzman de l'Université de Grenoble** et de l'**Institut de Mathématiques de l'Université de Neuchâtel**

dans **l'École Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique de Grenoble**

Optimisation du spectre du Laplacien avec conditions de Dirichlet et Neumann dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Thèse soutenue le **21 mai 2015**, devant le jury composé de :

M. Ahmad EL SOUFI
Professeur à l'Université François Rabelais de Tours (Rapporteur)

M. Pedro FREITAS
Professeur à l'Université de Lisbonne (Rapporteur)

M. Antoine HENROT
Professeur à l'Université de Lorraine (Rapporteur, Président du jury)

M. Olivier BESSON
Professeur honoraire à l'Université de Neuchâtel (Examinateur)

M. Bruno COLBOIS
Professeur à l'Université de Neuchâtel (Directeur de thèse)

M. Édouard OUDET
Professeur à l'Université de Grenoble (Directeur de thèse)

Université Joseph Fourier / Université Pierre Mendès France / Université Stendhal / Université de Savoie / Grenoble INP

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

Faculté des sciences
Secrétariat-décanat de Faculté
Rue Emile-Argand 11
2000 Neuchâtel - Suisse
Tél: + 41 (0)32 718 2100
E-mail: secretariat.sciences@unine.ch

IMPRIMATUR POUR THÈSE DE DOCTORAT

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel autorise l'impression de la présente thèse en cotutelle avec l'Université de Grenoble, F, soutenue par

Madame Amandine BERGER

Titre:

"Optimisation du spectre du Laplacien avec conditions de Dirichlet et Neumann dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$"

sur le rapport des membres du jury composé comme suit:

- Prof. Bruno Colbois, directeur de thèse, Université de Neuchâtel, Suisse
- Prof. Édouard Oudet, directeur de thèse, Université de Grenoble, France
- Prof. Ahmad El Soufi, Université F. Rabelais, Tours, France
- Prof. Pedro Freitas, Université de Lisbonne, Portugal
- Prof. Antoine Henrot, Université de Lorraine, Nancy, France
- Prof. Olivier Besson, Université de Neuchâtel, Suisse

Neuchâtel, le 25 juin 2015

Le Doyen, Prof. B. Colbois

Résumé

Le problème de l'optimisation des valeurs propres du Laplacien est ancien puisqu'à la fin du XIXème siècle Lord Rayleigh conjecturait que la première valeur propre avec condition de Dirichlet était minimisée par le disque. Depuis le problème a été beaucoup étudié. Et les possibilités de recherches sont multiples : diverses conditions, ajout de contraintes, existence, description des optima ...
Dans ce document on se limite aux conditions de Dirichlet et de Neumann, dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$. On procède dans un premier temps à un état de l'art.
On se focalise ensuite sur les disques et les boules. En effet, ils font partie des rares formes pour lesquelles il est possible de calculer explicitement et relativement facilement les valeurs propres. On verra malheureusement que ces formes ne sont la plupart du temps pas des minimiseurs.
Enfin on s'intéresse aux simulations numériques possibles. En effet, puisque peu de calculs théoriques peuvent être faits il est intéressant d'obtenir numériquement des candidats. Cela permet ensuite d'avoir des hypothèses de travail théorique. À cet effet nous donnerons des éléments de compréhension sur une méthode de simulation numérique ainsi que des résultats obtenus.

Mots clés : Laplacien - Condition de Dirichlet - Condition de Neumann - Valeurs propres - Optimisation spectrale - Optimisation de formes - Approximation numérique

Abstract

The optimization of Laplacian eigenvalues is a classical problem. In fact, at the end of the nineteenth century, Lord Rayleigh conjectured that the first eigenvalue with Dirichlet boundary condition is minimized by a disk. This problem received a lot of attention since this first study and research possibilities are numerous : various conditions, geometrical constraints added, existence, description of optimal shapes...
In this document we restrict us to Dirichlet and Neumann boundary conditions in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$. We begin with a state of the art.
Then we focus our study on disks and balls. Indeed, these are some of the only shapes for which it is possible to explicitly and relatively easily compute the eigenvalues. But we show in one of the main result of this document that they are not minimizers for most eigenvalues.
Finally we take an interest in the possible numerical experiments. Since we can do very few theoretical computations, it is interesting to get numerical candidates. Then we can deduce some theoretical working assumptions. With this in mind we give some keys to understand our numerical method and we also give some results obtained.

Key words : Laplacian - Dirichlet condition - Neumann condition - Eigenvalues - Spectral optimization - Shape optimization - Numerical approximation

Remerciements

Ce travail a été en partie financé par la requête 200020_149261 du Fonds National Suisse de la recherche scientifique.

Je tiens bien évidemment à remercier Édouard Oudet et Bruno Colbois sans qui cette thèse n'aurait pu avoir lieu. Ils m'ont accompagnée, guidée, encadrée durant ces quatre années. Ils m'ont donné des pistes de travail, ont parfois pointé mes erreurs.
C'est Bruno qui, le premier, m'a proposé cette thèse. Bien que le sujet ait fortement dévié et m'ait écarté quelque peu de son domaine, il s'est toujours montré intéressé par ce que je faisais, écoutant mes explications, posant des questions qui me poussaient à approfondir. Nos collaborations dans le cadre de l'enseignement se sont montrées riches et intéressantes pour moi. On a aussi passé beaucoup de temps à discuter de ma vie (et un peu de la sienne), de mes envies, de mes aspirations, de mon futur ... Il a écouté, sans jamais juger mais avec compréhension, mes doutes et mes hésitations. Je l'en remercie.
Au début, seule une collaboration avec Édouard était prévue. Finalement ce fut une cotutelle. Tout n'a pas été simple. Il a d'ailleurs été parfois difficile de trouver du temps pour se voir, surtout une fois devenu co-directeur de l'UFR. Mais on a fait au mieux. Je le remercie de m'avoir laissé accéder à ses codes, les modifier, me les avoir expliqués. Il a d'ailleurs passé beaucoup de temps à essayer de tout faire fonctionner sur mon ordinateur. On peut dire qu'on en a passé des heures à essayer de trouver d'où venaient les erreurs !

Je remercie ensuite Ahmad El Soufi, Pedro Freitas, Antoine Henrot et Olivier Besson d'avoir accepté de prendre part à mon jury de thèse. Ils ont lu mon manuscrit avec attention, ont posé de nombreuses questions intéressantes lors de la soutenance et fait des remarques pertinentes sur mon travail. Merci à Ahmad El Soufi qui m'a accueilli à Tours pour un exposé à la fin de ma thèse. Merci à Pedro Freitas qui a accepté de participer à cette aventure bien que la thèse soit rédigée en français et que la soutenance, qu'il a suivi à distance, était également en français. Merci à Antoine Henrot pour son aide et les discussions que nous avons eu tout au long de ma thèse, que ce soit par e-mail ou lors de nos rencontres. Merci enfin à Olivier Besson qui a accepté de sortir de sa retraite bien méritée pour moi.

Je souhaite également remercier Dorin Bucur, sans qui je n'aurais même jamais envisagé de faire une thèse. C'est en effet lui qui, après avoir encadré mon Travail d'Étude et de Recherche lors de ma première année de Master, m'a demandé si je voulais faire une thèse et qui m'a encouragé à le faire. Il a ensuite accepté d'encadrer avec Édouard Oudet mon stage de deuxième année de Master Recherche, ce qui m'a confortée dans l'idée de faire une thèse. Bien que notre projet de thèse n'ait pas abouti, c'est lui qui m'a mis en contact avec Bruno Colbois. Enfin, j'ai pendant de ma thèse eu le plaisir de suivre plusieurs cours qu'il a donné lors d'écoles d'été qui m'ont beaucoup appris.

Merci à tous ceux que j'ai rencontré lors des conférences, des écoles d'été et autres séminaires. Je pense notamment aux membres de l'ANR Optiform. J'ai beaucoup appris, mathématiquement bien sûr, mais aussi sur bien d'autres sujets.

Je remercie ensuite les membres passés ou présents de l'Institut de mathématiques de Neuchâtel. Même si j'ai passé moins de temps à l'Institut pendant les dernières années de ma thèse, j'ai vécu de bons moments. Merci à Bastien avec qui j'ai partagé mon bureau pendant un an et qui me rappelait toujours quand il était l'heure de manger ou l'heure de la pause (même si je n'ai pas fait toutes les pauses). Merci à Régis et Alexandre pour leur aide mathématique mais aussi simplement pour les discussions qu'on a pu avoir. Merci à Muriel, Pierre-Nicolas, Asma et tous les autres.
Je n'oublie surtout pas de remercier Christine, notre secrétaire, toujours de bonne humeur, qui nous évite bien des tracasseries administratives.

J'ai connu des moments plus difficiles durant cette thèse où mes recherches n'avançaient pas. Dans ces moments, l'assistanat (l'enseignement) a été à la fois une bénédiction et une malédiction. Cela me faisait du bien de faire autre chose, quelque chose qui avançait, sur lequel je ne peinais pas. Mais en même temps ça s'est avéré une très bonne excuse pour ne pas travailler sur mes recherches. J'en profite donc pour remercier les professeurs responsables des cours dont j'étais l'assistante (Bruno Colbois, Paul Jolissaint, Felix Schlenk, Michel Benaïm) mais aussi les étudiants.

Enfin je tiens à remercier ma famille. Sans leur soutien émotionnel et financier, sans leur écoute et leur amour, jamais je n'aurais pu en arriver là aujourd'hui. Mon seul regret est que certains ne soient plus là physiquement pour voir ce que j'ai réussi mais je sais qu'ils sont fiers de moi où qu'ils soient.

Table des matières

Résumé **i**

Abstract **iii**

Remerciements **v**

1 Introduction **1**

2 Définitions, notations et résultats connus **5**
2.1 Outils 5
2.1.1 Espaces de Sobolev 5
2.1.2 Capacité et quasi-ouverts 6
2.1.3 Réarrangement de Schwarz 7
2.2 Spectre du Laplacien avec condition de Dirichlet 8
2.2.1 Formulation variationnelle 8
2.2.2 Quelques propriétés 9
2.3 Minimisation du spectre du Laplacien avec condition de Dirichlet 9
2.3.1 Existence 10
2.3.2 Minimiseurs connus et propriétés 10
2.3.3 Candidats numériques 14
2.4 Spectre du Laplacien avec condition de Neumann 15
2.4.1 Formulation variationnelle 16
2.4.2 Quelques propriétés 16
2.5 Maximisation du spectre du Laplacien avec condition de Neumann 17

3 Calculs explicites et applications **19**
3.1 Quelques rappels sur les Polynômes de Legendre et les Fonctions de Bessel . 19
3.1.1 Polynômes associés de Legendre 19
3.1.2 Fonctions de Bessel 21
3.2 Valeurs propres et vecteurs propres du disque 24
3.3 Valeurs propres et vecteurs propres de la boule 27
3.4 Meilleures unions de boules 32
3.4.1 Condition de Dirichlet 32
3.4.2 Condition de Neumann 33
3.5 Rectangles 34

4 Dérivation des valeurs propres et conséquences **37**
4.1 Dérivation par rapport au domaine 37
4.2 Dérivée de forme de λ_k sur le disque 42
4.2.1 Valeurs propres simples 42
4.2.2 Valeurs propres de multiplicité 2 44
4.3 Dérivée de forme de λ_k sur la boule 45

4.3.1 Valeurs propres simples 45
4.3.2 Valeurs propres de multiplicité $2l+1$ $(l>0)$ 47

5 Les disques, presque jamais minimiseurs 53
5.1 Petites variations de la frontière du disque 53
5.1.1 Valeurs propres simples 56
5.1.2 Valeurs propres doubles 57
5.2 Le disque presque jamais minimiseur local 61
5.2.1 Valeurs propres simples du disque 62
5.2.2 Valeurs propres doubles du disque 63
5.2.3 Conclusion 66
5.3 Les unions de disques rarement minimiseurs 66
5.3.1 Minimisation globale 66
5.3.2 Minimisation locale 69

6 Simulations numériques 73
6.1 Algorithmes 73
6.1.1 Problème, notations et rappels sur les éléments finis 74
6.1.2 Optimisation globale avec optimisation des composantes connexes . . 76
6.1.2.1 Initialisation : processus stochastique 76
6.1.2.2 Réduction fondamentale de la complexité 77
6.1.3 Optimisation locale par variation frontière 78
6.1.3.1 Identification d'une direction de descente 78
6.1.3.2 Topologie admissible 79
6.1.4 Remarques et compléments 80
6.2 Résultats numériques 80
6.2.1 Condition de Dirichlet, dimension 2 81
6.2.2 Condition de Neumann, dimension 2 85
6.2.3 Condition de Dirichlet, dimension 3 87
6.2.4 Condition de Neumann, dimension 3 90

Bibliographie 109

Chapitre 1

Introduction

Présentation du contexte

Le Laplacien est un opérateur classique. Habituellement il est noté Δ et est défini dans $\mathbb{R}^N$ par

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

lorsque ça a un sens. Le Laplacien peut être étendu à un cas plus général, mais la définition est alors plus complexe. Pour le moment nous nous contenterons de cette définition.

L'opérateur Laplacien intervient dans de nombreux domaines, par exemple :

- ◇ en électromagnétisme : l'équation de Poisson est $\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ où V est le potentiel électrostatique, ρ la densité de charge et ε_0 la permitivité diélectrique du vide,
- ◇ en thermodynamique : l'équation de la chaleur est $\Delta T = 0$ avec T la température,
- ◇ en électromagnétisme/acoustique : l'équation d'onde est $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$.

Considérons l'exemple d'une corde vibrante fixée aux deux extrémités. Si on note u son déplacement vertical, alors u est solution de l'équation d'onde. Si on cherche maintenant une solution de la forme $u(x,t) = v(x)g(t)$ alors on obtient

$$\frac{v''}{v} = \frac{1}{c^2}\frac{g''}{g} = -k^2.$$

Ainsi v est solution de

$$v'' = -k^2 v.$$

Les conditions aux limites imposent alors à k de ne prendre que certaines valeurs. On appelle fréquences propres les valeurs $f = \frac{c}{2\pi}k$ pour ces k particuliers.
Cet exemple peut être généralisé en dimension supérieure.

Dans tout ce document, l'équation qui nous intéresse est l'équation

$$\Delta u = -\lambda u \quad \text{dans } \Omega \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Bien évidemment, pour en faire un problème bien posé il nous faut ajouter des conditions au(x) bord(s). La condition la plus classique est la condition de Dirichlet

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Le problème ainsi défini correspond alors au problème de la corde vibrante ou encore de la membrane vibrante (modélisation du tambourin). Une autre condition classique est la

condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Enfin on peut citer la condition de Robin

$$\alpha u + (1-\alpha)\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

avec $0 < \alpha < 1$.

La question de l'optimisation de la valeur propre λ en fonction du domaine Ω est classique. On peut citer par exemple Lord Rayleigh qui, dans son livre « Theory of Sound », déclarait dès 1877 « *If the area of a membrane be given, there must evidently be some form of boundary for which the pitch (of the principal tone) is the gravest possible, and this form can be no other than the circle* ». Remis dans notre contexte, cela signifie que le disque minimise la première valeur propre (classée par ordre croissant) du Laplacien avec condition de Dirichlet à aire fixée. Il fallut ensuite attendre les années 1920 avant d'obtenir une démonstration rigoureuse de ce fait.
Par la suite, beaucoup de mathématiciens se sont penchés sur ces problèmes. Mais ce qui au premier abord pouvait donner l'impression d'être un problème simple s'est finalement avéré être très compliqué. Qu'on étudie l'optimisation des valeurs propres avec les diverses conditions aux bords évoquées plus haut, l'optimisation de fonctions de ces diverses valeurs propres, qu'on ajoute des contraintes de connexité, de convexité, de mesure, de périmètre, qu'on se restreigne à une boîte ... très peu est connu et ce qui l'est est généralement partiel et récent.
Même le problème de l'existence est difficile. Quelques résultats partiels ont été démontrés à partir des années 90, mais il a fallu attendre 2013 pour qu'un résultat quasi complet soit connu pour la minimisation des valeurs propres du Laplacien-Dirichlet.
Pire, on n'a que très peu d'intuition sur ces optima et certaines hypothèses se sont avérées erronées. On pensait par exemple que le stade minimisait la deuxième valeur propre du Laplacien-Dirichlet en dimension 2 avec contrainte d'aire et de convexité ce qui s'est avéré faux. De même pour la boule qui était supposée minimiser la troisième valeur propre du Laplacien-Dirichlet en dimension 3 avec contrainte de volume.
À ce titre, le développement et la généralisation de l'outil informatique s'est avéré être une aubaine. Grâce au développement de techniques d'optimisation spectrale on a pu traiter numériquement ces problèmes. C'est ainsi que certaines hypothèses ont pu être réfutées alors que d'autres ont été formulées.

Problèmes traités dans ce document et principaux résultats

Dans cette thèse, je ne m'intéresse qu'à la minimisation des valeurs propres du Laplacien avec condition de Dirichlet et à la maximisation des valeurs propres du Laplacien avec condition de Neumann dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ avec une contrainte de mesure. Ce document est le fruit d'un travail alliant expériences numériques et démonstrations théoriques.

Du point de vue théorique, je me suis particulièrement intéressée aux disques et aux boules. En effet, comme je l'ai déjà évoqué, il est difficile de travailler sur ces problèmes de façon générale. De plus, il n'y a que très peu de domaines pour lesquels nous sommes capables de faire des calculs explicites exacts. Parmi ces domaines on trouve les disques, les boules, les rectangles ... Puisque les disques (et les boules) optimisent les premières valeurs propres, sont réguliers et ont des valeurs propres calculables, l'étude de leur optimalité ou non pour les autres valeurs propres présente donc un intérêt non négligeable.

Une première piste de travail est de se limiter à l'ensemble formé des boules et unions disjointes de boules de mesure totale fixée (disques en dimension 2). On verra qu'on peut relativement facilement calculer les optima des valeurs propres lorsqu'on se limite à cet ensemble par un processus itératif. On se rend ainsi compte que le nombre de boules semble rester petit pour l'optimum.

Une autre piste est de déterminer quelles valeurs propres peuvent être optimisées par les boules. Dans cette optique je me suis limitée à la condition de Dirichlet. Néanmoins, montrer qu'une boule est un optimum est très difficile, beaucoup plus que de montrer que ce n'est pas un optimum.
En dimension 2, je montre ainsi que le disque ne peut minimiser que la première et la troisième valeur propre (y compris localement). La seconde et la quatrième valeur propre ne peuvent être minimisées que par une union disjointe (connue) de deux disques. Enfin, à partir de la cinquième valeur propre, le disque et les unions disjointes de disques ne sont plus des minimiseurs.
En dimension 3, il faut distinguer les valeurs propres simples des valeurs propres multiples. Je montre que pour les valeurs propres simples les boules sont des formes critiques dans le sens où la valeur propre (en prenant en compte la contrainte de mesure) a une dérivée première (dans un sens qu'on verra dans le document) nulle. Pour les valeurs propres multiples je montre que la boule ne peut éventuellement minimiser que la dernière occurrence de celles-ci.
En conclusion, on va voir que contrairement à ce qu'on pourrait espérer, les disques et les boules ne sont que rarement des minimiseurs.

Du point de vue numérique, j'ai collaboré avec mon directeur de thèse Édouard Oudet. Celui-ci développe depuis plusieurs années un ensemble important d'algorithmes dédiés à l'optimisation spectrale. Mon travail a été de comprendre leur fonctionnement, apporter quelques modifications ou faire des ajouts lorsque nécessaire, mais surtout de les utiliser afin de proposer des candidats d'optima. Dans ce document je donne quelques éléments permettant de comprendre le fonctionnement de ces algorithmes (sans rentrer dans les détails puisqu'il ne s'agit pas d'un travail personnel) ainsi que les résultats obtenus.

Organisation du document

Pour commencer, le chapitre 2 est dédié à la définition des problèmes, à la mise en place des notations utilisées ainsi qu'à un rappel des faits, propriétés et théorèmes connus utiles pour la compréhension du sujet et utiles pour la suite. Certains théorèmes principaux sont accompagnés d'une démonstration plus ou moins détaillée.

Les chapitres 3, 4 et 5 sont ensuite essentiellement consacrés aux disques et boules.
Dans le chapitre 3 on s'intéresse aux valeurs propres calculables explicitement. Pour cela, je commence par rappeler des éléments sur les fonctions de Bessel et les polynômes de Legendre qui serviront dans la suite. Puis je donne des démonstrations complètes des formules donnant les valeurs et vecteurs propres des disques et des boules. Une fois ces formules établies, il est facile de donner les premières valeurs propres en utilisant un ordinateur. On donne ensuite une version restreinte aux ensembles ne contenant que des boules d'un théorème reliant les optima entre eux dans le cas d'unions disjointes. En l'appliquant avec les formules précédemment établies, on détermine par récurrence quelles unions de boules optimisent les premières valeurs propres. On termine ce chapitre en rappelant l'expression des valeurs et vecteurs propres du Laplacien sur les rectangles.
L'idée du chapitre 4 est ensuite de dériver les valeurs propres (en tenant compte de la contrainte) lorsqu'on modifie la forme, l'objectif étant de pouvoir en déduire l'optimalité ou

non des boules. Je commence donc le chapitre par rappeler le principe des dérivées de forme ainsi que les différentes formules utiles. J'en profite pour donner des éléments de preuve de la formule de dérivée de forme d'une valeur propre multiple. J'applique ensuite ces formules à la dérivée des valeurs propres du Laplacien-Dirichlet pour les disques en dimension 2 et les boules en dimension 3. On verra qu'en ce qui concerne les valeurs propres simples, les dérivées de formes sont nulles, que ce soit en dimension 2 ou 3. Cela signifie que les boules sont des points critiques et on ne peut rien en conclure sur l'optimalité. Pour les valeurs propres multiples, on déduit des valeurs des dérivées de forme qu'en dehors de la dernière occurrence, les boules et les disques ne peuvent être des minimiseurs. Pour pouvoir aller plus loin concernant les valeurs propres simples et la dernière occurrence des valeurs propres multiples il faudrait ensuite calculer la dérivée seconde.
C'est l'idée du chapitre 5 dans le cadre uniquement de la dimension 2. La formule de la dérivée seconde étant relativement complexe, on va utiliser une autre méthode. L'idée est de faire de petites perturbations (bien choisies) du disque. On regarde ensuite l'évolution des valeurs propres sous l'effet de ces perturbations. Si on trouve une perturbation qui fait diminuer la valeur propre, alors le disque ne peut être un minimiseur. Ce résultat est d'ailleurs un résultat local. On verra que de telles perturbations existent quasiment toujours. Les unions de disques ne pouvant être minimiseurs que sous certaines conditions bien précises impliquant la minimalité du disque, on en déduit quelles valeurs propres ne peuvent être minimisées par des unions de disques (à nouveau presque toutes). On donne ensuite une version locale de ce dernier résultat.

Enfin le chapitre 6 est dédié aux simulations numériques. Sans rentrer dans les détails, je commence par faire quelques rappels sur les éléments finis, puis des éléments d'explication sur les algorithmes développés par Édouard Oudet que j'ai utilisé. Je donne ensuite tous les résultats que j'ai obtenu et j'en déduit des candidats à l'optimalité. Enfin je termine par quelques remarques et observations.

Il est important de noter que tous ces chapitres sont fortement interconnectés.

Chapitre 2

Définitions, notations et résultats connus

L'objectif de ce chapitre est de définir les problèmes qui nous intéressent, définir les notations qu'on utilise et faire un point sur les résultats connus en lien avec nos problèmes et qui seront utiles par la suite. Le contenu de ce chapitre est classique et on peut en trouver une grande partie, y compris certaines démonstrations dans [18]. On se référera également à ce livre pour d'autres références même si certaines seront ajoutées au fil du chapitre.
On commence par quelques rappels sur des outils qui nous serviront par la suite. On détaillera ensuite le cas du Laplacien avec condition de Dirichlet. On terminera par le cas de la condition de Neumann, qu'on verra de façon plus succincte.

2.1 Outils

2.1.1 Espaces de Sobolev

On commence par quelques rappels rapides sur les espaces de Sobolev. Pour plus de détails on peut se référer par exemple à [30] ou [13].

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert borné.

$$\mathbf{L^2(\Omega)} = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ mesurable tq } \int_\Omega |u|^2 < +\infty \right\}. \tag{2.1}$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L^2(\Omega)}} = \int_\Omega u \cdot v \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}}_{\mathbf{L^2(\Omega)}} = (u, u)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.2}$$

On note $\mathbf{C^\infty_C(\Omega)}$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact à valeurs dans Ω. $C^\infty_C(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.
L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$\mathbf{H^1(\Omega)} = \left\{ u \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \forall i = 1, \dots, N \right\} \tag{2.3}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens des distributions, c'est-à-dire $\exists g_i \in L^2(\Omega)$ telle que $\forall \varphi \in C^\infty_C(\Omega)$, $\int_\Omega u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \varphi \cdot g_i$. $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H^1(\Omega)}} = \int_\Omega (u \cdot v) + \sum_{i=1}^N \left[\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right] \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}\|^{\mathbf{2}}_{\mathbf{H^1(\Omega)}} = (u, u)_{H^1(\Omega)}. \tag{2.4}$$

On note

$$\mathbf{H_0^1(\Omega)} = \overline{C_C^\infty(\Omega)} \tag{2.5}$$

fermeture dans $H^1(\Omega)$. Les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont « les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega$ ». $H_0^1(\Omega)$, sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, est également un espace de Hilbert séparable pour cette norme.

Théorème 2.1 (Rellich). *Soit Ω un ouvert borné.*
Alors le plongement $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact.
Si de plus $\partial\Omega$ est Lipschitz, alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est également compact.

Remarque 2.2. La dernière hypothèse sur $\partial\Omega$ peut être affaiblie mais très peu.

2.1.2 Capacité et quasi-ouverts

On peut se référer par exemple à [8] pour plus de détails sur la capacité et les quasi-ouverts.

Définition 2.3. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^N$. On définit

$$\mathcal{U}_E = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N);\ u \geq 1 \text{ presque partout dans un voisinage de } E\}$$

et on définit la **capacité** de E par

$$cap(E) = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |u|^2 \,\mathrm{d}x;\ u \in \mathcal{U}_E\right\}. \tag{2.6}$$

Définition 2.4. $A \subseteq \mathbb{R}^N$ est **quasi-ouvert** si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon$ ouvert avec $A \subseteq A_\varepsilon$ et tel que $cap(A_\varepsilon \Delta A) < \varepsilon$ où Δ est la différence symétrique. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des quasi-ouverts de $\mathbb{R}^N$.

Définition 2.5. Une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est **quasi-continue** si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists f_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continue telle que $cap(\{f \neq f_\varepsilon\}) < \varepsilon$.

Chaque fonction u de $H^1(\mathbb{R}^N)$ a un représentant quasi-continu qui est défini de façon unique à un ensemble de capacité 0 près. On identifie donc toujours u et son représentant quasi-continu.
Pour $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ sauf un ensemble de capacité 0 on a

$$\widetilde{u}(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\int_{B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}y}{|B_r(x)|} \tag{2.7}$$

où $\widetilde{u}$ est un représentant quasi-continu de u.

Théorème 2.6. *Supposons que $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Alors il y a équivalence entre*

(i) A est quasi-ouvert,

(ii) A est la réunion d'un ensemble finement ouvert et d'un ensemble de capacité 0,

(iii) $A = \{u > 0\}$ pour une fonction positive quasi-continue $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

2.1.3 Réarrangement de Schwarz

Pour aller plus loin sur les réarrangements de Schwarz, on peut se référer à [25] ou bien à [11] par exemple.

Pour tout $\omega \subset \mathbb{R}^N$ mesurable, on note ω^* la boule de même volume que ω. Si u est une fonction mesurable positive définie sur un ensemble mesurable Ω et s'annulant sur sa frontière $\partial\Omega$, on note par

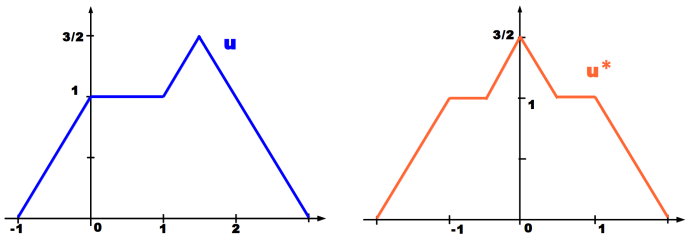
$$\Omega_t = \{x \in \Omega,\, u(x) \geq t\} \tag{2.8}$$

son ensemble de niveau. Le **réarrangement de Schwarz** (ou **réarrangement décroissant sphérique**) de u est la fonction u^* définie sur Ω^* par

$$u^*(x) = \sup\{t,\, x \in \Omega_t^*\}. \tag{2.9}$$

En d'autres mots, on construit u^* à partir de u en réarrangeant ses ensembles de niveau dans des boules de mêmes volumes.

Exemple 2.7. $u : (-1, 3) \to \mathbb{R}$



Proposition 2.8. *1. u^* est radialement symétrique, décroissante comme fonction de $|x|$.*

2. $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\Omega^*} u^*$.

3. u et u^* sont équimesurables (leurs ensembles de niveau ont la même mesure).

Théorème 2.9. *Soit Ω un ensemble mesurable, u une fonction mesurable positive définie sur Ω s'annulant sur $\partial\Omega$. Soit ψ une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$\int_\Omega \psi(u(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega^*} \psi(u^*(x))\,\mathrm{d}x. \tag{2.10}$$

Théorème 2.10 (Inégalité de Pólya)**.** *Soient Ω un ouvert et $u \in H_0^1$ une fonction positive. Alors $u^* \in H_0^1$ et*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^2, \tag{2.11}$$

autrement dit, $||\nabla u||_2 \geq ||\nabla u^*||_2$.

Théorème 2.11 (Hardy-Littlewood)**.** *Soient u et v deux fonctions positives mesurables définies sur Ω et u^* et v^* leurs réarrangements de Schwarz respectifs. Alors*

$$\int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\Omega^*} u^*(x)v^*(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

2.2 Spectre du Laplacien avec condition de Dirichlet

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

Remarque 2.12. La définition du Laplacien Δ n'est pas évidente. De façon usuelle on considère $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. On voudrait donc prendre $-\Delta : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$. Mais $C^2(\Omega)$ n'est pas un espace de Hilbert et l'espace de départ et d'arrivée sont différents. Il faut donc définir différemment cet opérateur.
On définit $R_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ par $R_\Omega(f) = u$ où u est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, ce problème a une unique solution faible. Alors $-\Delta = (R_\Omega)^{-1}$.
D'autre part R_Ω est un opérateur positif, auto-adjoint, compact. Par conséquent, comme de plus $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, le spectre de R_Ω (privé de 0) est une suite qui tend vers 0 et $L^2(\Omega)$ admet une base hilbertienne formée par les vecteurs propres de R_Ω.

Théorème 2.13. *1. Les valeurs propres de (2.13) forment une suite infinie de réels tels que*

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \cdots \to +\infty. \tag{2.14}$$

2. Chaque valeur propre est de multiplicité finie.

3. Les fonctions propres correspondantes forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.

Notation 2.14. On note $\sigma(\mathbf{\Omega}) = \{\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega), \ldots\}$.

2.2.1 Formulation variationnelle

Définition 2.15. Une **solution faible** ou **variationnelle** de (2.13) est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u \cdot v. \tag{2.15}$$

Définition 2.16. Pour $u \in H^1(\Omega)$, $u \neq 0$, on définit le **quotient de Rayleigh** de u par

$$R[u] = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x}. \tag{2.16}$$

Le numérateur est appelé l'**énergie de Dirichlet** de u.

Propriétés 2.17 (Principe du min-max)**.**

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} R[v], \tag{2.17}$$

le minimum étant atteint si et seulement si $v = \varphi_1$ la première fonction propre.

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0 \\ v \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}}} R[v] = \min_{\substack{E_k \subseteq H_0^1(\Omega) \\ \dim E_k = k}} \max_{\substack{v \in E_k \\ v \neq 0}} R[v]. \tag{2.18}$$

2.2.2 Quelques propriétés

Propriétés 2.18. *1.* ***(Homogénéité)*** *Pour* $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lambda_k(t\Omega) = t^{-2}\,\lambda_k(\Omega). \tag{2.19}$$

2. ***(Monotonie)*** *Si* $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ *alors*

$$\lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2). \tag{2.20}$$

3. ***(Réunion)*** *Si* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *avec* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *alors*

$$\sigma(\Omega) = \sigma(\Omega_1) \cup \sigma(\Omega_2). \tag{2.21}$$

Définition 2.19. Soit f une fonction sur un domaine Ω et

$$Z_f = \{x \in \Omega;\ f(x) = 0\}.$$

Z_f est appelé **ensemble nodal** de Ω.
Les composantes connexes de $\Omega \backslash Z_f$, c'est-à-dire les composantes connexes des ouverts

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega,\ f(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \Omega_- = \{x \in \Omega,\ f(x) < 0\}$$

sont appelés **domaines nodaux** de f.

Théorème 2.20 (Domaines nodaux - Courant)**.** *Soit* φ_n *la* n*-ième fonction propre (en prenant en compte les multiplicités) pour le problème de Dirichlet sur* $\Omega \in \mathbb{R}^2$*. Alors* φ_n *a au plus* n *domaines nodaux.*

Conséquence 2.21. *Pour un connexe,* λ_1 *est toujours simple.*

Théorème 2.22 (Loi de Weyl)**.** *Soit* $N(\lambda) = \sharp\{\lambda_k \leq \lambda\}$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}^+$*. Alors*

$$N(\lambda) = \frac{|\Omega|}{(2\pi)^N}|B_N|\lambda^{N/2} + o\left(\lambda^{N/2}\right) \tag{2.22}$$

où B_N *est la boule unité de* $\mathbb{R}^N$*.*

2.3 Minimisation du spectre du Laplacien avec condition de Dirichlet

On va maintenant s'intéresser au problème de la minimisation du spectre du Laplacien avec condition de Dirichlet. Pour cela, fixons-nous un $k \in \mathbb{N}^*$.
On cherche un ouvert $\mathbf{\Omega_k^*} \subseteq \mathbb{R}^N$ avec $|\Omega_k^*| = 1$ tel que

$$\lambda_k(\Omega_k^*) = \min\{\lambda_k(\Omega);\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \text{ ouvert},\ |\Omega| = 1\}. \tag{2.23}$$

On utilisera cette notation dans la suite ainsi que la notation $\lambda_\mathbf{k}^* = \lambda_k(\Omega_k^*)$. On dira également que Ω_k^* est un **minimiseur** de λ_k.

Remarque 2.23. On peut bien évidemment choisir la contrainte de volume souhaitée (cf. (2.19)). J'ai choisi ici la contrainte de volume 1 par simplicité, mais j'utiliserai par exemple une autre contrainte dans la partie 5.1.

En utilisant la propriété d'homogénéité (2.19) on obtient immédiatement qu'un problème équivalent est de chercher un ouvert $\Omega_k^* \subseteq \mathbb{R}^N$ tel que

$$|\Omega_k^*|^{2/N}\lambda_k(\Omega_k^*) = \min\{|\Omega|^{2/N}\lambda_k(\Omega);\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \text{ ouvert}\}. \tag{2.24}$$

2.3.1 Existence

Il n'existe pas à ce jour de résultat général d'existence. Néanmoins un résultat existe dans le cadre des quasi-ouverts.

Si Ω est quasi-ouvert, on définit le spectre du Laplacien comme l'inverse de l'opérateur résolvent où $H_0^1(\Omega) = \bigcap_{\varepsilon>0} H_0^1(\Omega \cup U_\varepsilon)$. En particulier $\lambda_1(\Omega)$ vérifie (2.17) avec $H_0^1(\Omega)$ définit comme ci-dessus et la fonction minimum est solution de (2.13) dans un sens faible.
En 1993, G. Buttazzo et G. Dal Maso ont donné dans [10] un premier résultat « général » d'existence dans le cadre des quasi-ouverts mais dans des « boîtes ». Plus récemment, en 2012, dans [7], D. Bucur a démontré le résultat suivant :

Théorème 2.24 (Bucur). *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ le problème*

$$\min\{\lambda_k(\Omega);\, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N,\, |\Omega| = 1\}$$

a au moins une solution dans la famille des quasi-ouverts. De plus chaque solution est bornée et a un périmètre fini.

Démonstration. La démonstration de ce théorème n'est pas simple, je vais donc seulement donner les idées essentielles de la démonstration.

- ◇ Si A est une solution du problème $\min\{\lambda_k(A) + |A|;\, A \subseteq \mathbb{R}^N$ quasi-ouvert$\}$ alors A est une sous-solution de forme locale d'un problème d'énergie.
- ◇ Si A est une sous-solution de forme locale de ce même problème d'énergie alors A est borné, a un périmètre fini et son intérieur (par rapport à la topologie fine) a la même mesure que A.
- ◇ Si un minimiseur borné existe pour le problème $\min\{\lambda_k;\, A \subseteq \mathbb{R}^N$ quasi-ouvert, $|A| = 1\}$ pour $k = 1, \ldots, m$ alors il existe au moins un minimiseur pour $k = m + 1$.
- ◇ Comme les résultats sont connus pour λ_1 et λ_2 (cf. §2.3.2), on conclut par récurrence.

□

Remarque 2.25. La première partie de ce théorème (existence) a également été démontrée par D. Mazzoleni et A. Pratelli dans [26]. Cette preuve est contemporaine à celle de D. Bucur mais utilise d'autres moyens (type chirurgie).

2.3.2 Minimiseurs connus et propriétés

Voyons maintenant les principaux résultats déjà connus.

Théorème 2.26 (Faber-Krahn). *$\Omega_1^* = B$, la boule de volume 1, c'est-à-dire*

$$\lambda_1(B) = \min\{\lambda_1(\Omega),\, \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ ouvert},\, |\Omega| = 1\}. \tag{2.25}$$

Remarque 2.27. La question de l'unicité du minimiseur de λ_1 est intéressante. Il se trouve que si on enlève à la boule un ensemble K de capacité 0 alors $B \backslash K$ est également un minimiseur de λ_1. Si on interdit de telles irrégularités alors il y a unicité.

Démonstration. Soit Ω un ouvert tel que $|\Omega| = 1$ et $\Omega^* = B$ la boule de même volume. Soient u_1 une fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1(\Omega)$ et u_1^* son réarrangement de Schwarz.
En remplaçant u par u_1 (resp. u^* par u_1^*) dans (2.10) et (2.11) avec $\psi(x) = x^2$ on obtient

$$\int_{\Omega^*} u_1^*(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u_1(x)^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{2.26}$$

D'autre part, comme $\lambda_1(\Omega) = \min\limits_{\substack{v\in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\\ v\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega v(x)^2\,\mathrm{d}x}$, on obtient

$$\lambda_1(\Omega^*) = \min_{\substack{v\in \mathrm{H}_0^1(\Omega^*)\\ v\neq 0}} \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla v(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_{\Omega^*} v(x)^2\,\mathrm{d}x} \leq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_{\Omega^*} u_1^*(x)^2\,\mathrm{d}x}. \tag{2.27}$$

En combinant ces équations, sans oublier que $\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega u_1(x)^2\,\mathrm{d}x}$, on obtient

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla u_1^*(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_{\Omega^*} u_1^*(x)^2\,\mathrm{d}x} \leq \frac{\int_\Omega |\nabla u_1(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega u_1(x)^2\,\mathrm{d}x} = \lambda_1(\Omega). \tag{2.28}$$

□

Remarque 2.28. D. Bucur et P. Freitas ont récemment proposé une autre démonstration dans [9] qui, bien que plus compliquée, est jolie. En voici ses principales étapes :

1. Le problème a une solution dans le cadre des quasi-ouverts. Ce point repose sur le principe de concentration-compacité de P. L. Lions.

2. L'ensemble optimal Ω^* est ouvert et connexe. La connexité est immédiate alors qu'il est difficile de montrer le caractère ouvert. Ce point repose sur un argument de perturbation local développé par H. Alt et L. Cafarelli dans le cadre des problèmes aux frontières libres.

3. Ω^* doit être symétrique radialement. Pour cela, on coupe par un hyperplan l'ensemble en deux ensembles de mêmes mesures. On construit ensuite un nouvel ensemble constitué de l'une de ces moitiés et de son symétrisé par rapport à l'hyperplan. Ce nouvel ensemble a une valeur propre inférieure à celle de l'ensemble de départ. On en conclut que Ω^* doit être symétrique par rapport à l'hyperplan, hyperplan ayant été choisi arbitrairement.

4. Par 2. et 3., Ω^* est un anneau qu'on peut écrire $K(0,t,r(t)) = \{x \in \mathbb{R}^N;\, t < |x| < r(t)\}$, $r(t)$ étant défini par le fait que $|K(0,t,r(t))| = 1$. On montre ensuite que la fonction $t \mapsto \lambda_1(K(0,t,r(t)))$ est croissante en étudiant sa dérivée (simplifié par le point 3). On en conclut que le minimum est atteint en $t = 0$, c'est-à-dire pour la boule.

Remarque 2.29. Il est possible d'ajouter des conditions à ce problème. Certaines possibilités ont été explorées. En dimension 2, on peut notamment citer :

- ◇ la restriction à des polygones. Si on se retreint à l'ensemble des polygones ayant au plus N sommets, le minimiseur existe et a exactement N sommets. Pólya a également montré que le triangle équilatéral a un λ_1 inférieur à celui de n'importe quel autre triangle de même aire et qu'il en est de même pour la carré par rapport aux rectangles ;
- ◇ la restriction à des domaines dans une boîte. Outre l'existence, on sait que si la boîte est suffisamment petite pour ne pas contenir de disque d'aire voulue, alors le minimiseur touche les bords de la boîte et les frontières du minimiseur ne les touchant pas sont analytiques et ne contiennent pas d'arc de cercle.

Théorème 2.30 (Krahn-Szegő). *Ω_2^* est l'union disjointe de deux boules identiques (chacune de mesure 1/2).*

Démonstration. Supposons pour commencer que Ω est un ouvert borné connexe et soient Ω_+ et Ω_- ses domaines nodaux.

On sait que

$$\lambda_2(\Omega) = \lambda_1(\Omega_+) = \lambda_1(\Omega_-). \tag{2.29}$$

On introduit Ω_+^* et Ω_-^* les boules de mêmes volumes que Ω_+ et Ω_- respectivement.
En appliquant l'inégalité de Faber-Krahn on a

$$\lambda_1(\Omega_+^*) \leq \lambda_1(\Omega_+) \quad \text{et} \quad \lambda_1(\Omega_-^*) \leq \lambda_1(\Omega_-). \tag{2.30}$$

Soit $\widetilde{\Omega} = \Omega_+^* \cup \Omega_-^*$. Puisque $\widetilde{\Omega}$ est discontinu, on obtient ses valeurs propres en regroupant et réordonnant les valeurs propres de Ω_+^* et Ω_-^*. Donc

$$\lambda_2(\widetilde{\Omega}) \leq \max\left(\lambda_1(\Omega_+^*), \lambda_1(\Omega_-^*)\right). \tag{2.31}$$

En utilisant (2.29) et (2.30) on en déduit

$$\lambda_2(\widetilde{\Omega}) \leq \max\left(\lambda_1(\Omega_+), \lambda_1(\Omega_-)\right) = \lambda_2(\Omega). \tag{2.32}$$

Si Ω n'est pas connexe, par exemple $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, la démonstration est la même, il suffit d'appliquer l'argument précédent à Ω_1 et Ω_2 au lieu de Ω_+ et Ω_-.
Cela montre que dans tous les cas le minimum de λ_2 est une union de boules. Mais si deux boules ont des rayons différents, on diminuerait la deuxième valeur propre en rétrécissant la plus grande boule et en agrandissant la plus petite (sans changer le volume total). Ainsi le minimum est atteint pour deux boules identiques. □

Remarque 2.31. Encore une fois, il est possible d'ajouter des conditions. Exemples :

- ◇ connexité : il a été montré que le problème $\inf\{\lambda_2(\Omega);\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ouvert connexe, $[\Omega| = c\}$ n'a pas de solution ;
- ◇ convexité : l'hypothèse logique est que le minimiseur est le stade, c'est-à-dire l'enveloppe convexe de deux disques. Néanmoins, A. Henrot et É. Oudet ont montré dans [20] que ce n'est pas le cas. En effet le minimiseur ne contient pas d'arc de cercle dans sa frontière mais a deux segments parallèles. Malgré tout, les expérimentations numériques donnent un résultat très proche du stade.

Il est conjecturé qu'en dimension 2, Ω_3^* est à nouveau le disque, mais aucune démonstration n'a été faite à ce jour. Dans [38], Wolf et Keller ont seulement montré que le disque est un minimiseur local de λ_3 en considérant des déformations radiales particulières (cf. chapitre 5). Dans ce même article on trouve le résultat très utile suivant :

Théorème 2.32 (Wolf-Keller). *Supposons que Ω_n^* est l'union d'au moins deux ensembles disjoints, chacun de mesure strictement positive. Alors*

$$(\lambda_n^*)^{N/2} = (\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2} = \min_{1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}} \left[(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}\right] \tag{2.33}$$

où i est une valeur de $1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}$ qui minimise la somme $(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}$. De plus,

$$\Omega_n^* = \left[\left(\frac{\lambda_i^*}{\lambda_n^*}\right)^{1/2} \Omega_i^*\right] \bigcup \left[\left(\frac{\lambda_{n-i}^*}{\lambda_n^*}\right)^{1/2} \Omega_{n-i}^*\right] \quad \textit{(union disjointe).} \tag{2.34}$$

Remarquons que ce résultat est généralisable au cas de l'union de plus de deux ensembles (voir par exemple [12]).

Démonstration. Soit $\Omega_n^* = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (union disjointe) avec $|\Omega_1| > 0$, $|\Omega_2| > 0$ et $|\Omega_1| + |\Omega_2| = 1$. Soit u_n^* une fonction propre du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur Ω_n^* associée à la valeur propre λ_n^*. Alors $u_n^* \neq 0$ sur l'une des composantes de Ω_n^*, par exemple sur Ω_1. En particulier, λ_n^* est une valeur propre sur Ω_1 : $\lambda_n^* = \lambda_i(\Omega_1)$, pour $i \leq n$ (le plus grand possible

satisfaisant ces deux conditions).
Si $i = n$ on peut diminuer λ_n^* en élargissant Ω_1, ce qui contredit la minimalité de λ_n^*. Donc $i \leq n-1$.
λ_n^* étant la n-ième valeur propre sur Ω_n^*, il y a au moins $n-i$ valeurs propres sur Ω_2 qui sont inférieures à λ_n^*. Donc $\lambda_{n-i}(\Omega_2) \leq \lambda_n^*$.
Si $\lambda_{n-i}(\Omega_2) < \lambda_n^*$, on peut diminuer $\lambda_n^* = \max\{\lambda_i(\Omega_1), \lambda_{n-i}(\Omega_2)\}$ en élargissant Ω_1 et en rétrécissant Ω_2 (tout en conservant le volume total). Il y a alors contradiction avec l'hypothèse de minimalité de λ_n^* d'où $\lambda_i(\Omega_1) = \lambda_{n-i}(\Omega_2) = \lambda_n^*$.
La minimalité est conservée pour λ_n^* en remplaçant Ω_1 par $|\Omega_1|^{1/N}\Omega_i^*$ (même volume, car $\left||\Omega_1|^{1/N}\Omega_i^*\right| = |\Omega_1||\Omega_i^*| = |\Omega_1|$, mais meilleur λ_i) et en remplaçant Ω_2 par $|\Omega_2|^{1/N}\Omega_{n-i}^*$.
Alors, en utilisant la propriété d'homogénéité ($\lambda_j(c\Omega) = c^{-2}\lambda_j(\Omega)$ pour $c > 0$),

$$\lambda_i(\Omega_1) = |\Omega_1|^{-2/N}\lambda_i^* = \lambda_n^* = |\Omega_2|^{-2/N}\lambda_{n-i}^* = \lambda_{n-i}(\Omega_2).$$

Comme $|\Omega_1| + |\Omega_2| = 1$,

$$(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2} = \left(\frac{\lambda_n^*}{|\Omega_1|^{-2/N}}\right)^{N/2} + \left(\frac{\lambda_n^*}{|\Omega_2|^{-2/N}}\right)^{N/2} = (\lambda_n^*)^{N/2}\left(|\Omega_1| + |\Omega_2|\right) = (\lambda_n^*)^{N/2}.$$

Enfin, pour $j = 1, .., n-1$ soit

$$\widetilde{\Omega}_j = \left[\left(\frac{(\lambda_j^*)^{N/2}}{(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}\right)^{1/N}\Omega_j^*\right] \bigcup \left[\left(\frac{(\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}{(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}\right)^{1/N}\Omega_{n-j}^*\right].$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\Omega}_j| &= \left|\left(\frac{(\lambda_j^*)^{N/2}}{(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}\right)^{1/N}\Omega_j^*\right| + \left|\left(\frac{(\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}{(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}\right)^{1/N}\Omega_{n-j}^*\right| \\
&= \frac{(\lambda_j^*)^{N/2}}{(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}\underbrace{\left|\Omega_j^*\right|}_{=1} + \frac{(\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}{(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}\underbrace{\left|\Omega_{n-j}^*\right|}_{=1}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $|\widetilde{\Omega}_j| = 1$. De plus

$$\begin{aligned}
\lambda_j\left(\left(\frac{(\lambda_j^*)^{N/2}}{(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}\right)^{1/N}\Omega_j^*\right) &= \left(\frac{(\lambda_j^*)^{N/2}}{(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}\right)^{-2/N}\lambda_j\left(\Omega_j^*\right) \\
&= \frac{\left((\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}\right)^{2/N}}{\lambda_j^*}\lambda_j^* \\
&= \left((\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}\right)^{2/N}
\end{aligned}$$

et de façon similaire

$$\lambda_{n-j}\left(\left(\frac{(\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}{(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}}\right)^{1/N}\Omega_{n-j}^*\right) = \left((\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}\right)^{2/N}$$

d'où $\lambda_n(\widetilde{\Omega}_j) = \left((\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}\right)^{2/N}$.
$\lambda_n^* \leq \lambda_n(\widetilde{\Omega}_j)$ et $\lambda_n^* = \lambda_n(\widetilde{\Omega}_i)$ pour un certain i d'où $\lambda_n^* = \min \lambda_n(\widetilde{\Omega}_j)$. De plus $\widetilde{\Omega}_i$ est optimal pour tout i qui réalise le minimum (2.33). $\square$

Conséquence 2.33. *En dimension 2 ou 3, Ω_3^* est connexe.*

Démonstration. Par ce qui précède, si Ω_3^* n'est pas connexe alors il s'agit forcément d'une union de 3 disques (resp. boules). Or on verra dans la partie 3.4 que λ_3 pour le disque (resp. la boule) est inférieure à λ_3 pour toute autre union de disques (resp. boules). □

Comme je l'ai déjà évoqué, il est possible d'ajouter des contraintes supplémentaires pour former de nouveaux problèmes. Il est également possible d'essayer d'optimiser des fonctions de plusieurs de ces valeurs propres (voir [18] par exemple). L'exemple le plus classique est illustré par le théorème d'Ashbaugh et Benguria qui dit que la boule maximise λ_2/λ_1 (voir [18] au paragraphe 6.2.1. pour des précisions ou d'autres références). Ces possibilités ne seront pas traitées dans la suite de ce document.

2.3.3 Candidats numériques

Comme on l'a vu précédemment, peu de résultats théoriques sont connus. Ce qui est connu ne nous permet d'ailleurs pas vraiment de faire des hypothèses sur les minimiseurs possibles. C'est pourquoi il est très intéressant de pouvoir procéder à des expérimentations numériques. Je citerai ici deux résultats différents.
En 2004, dans [32], É. Oudet a proposé des minimiseurs pour les 10 premières valeurs propres. Pour obtenir ces valeurs il a principalement utilisé une méthode alliant ensembles de niveaux et relaxation. Il a travaillé sur des éléments finis P1 et il a appliqué le théorème 2.32 afin de conclure.
En 2012, dans [2], P. Antunes et P. Freitas ont proposé une autre méthode d'optimisation numérique des valeurs propres du Laplacien. Cette méthode numérique est sans maillage MFS (Méthode des Solutions Fondamentales) et utilise une représentation, non pas par des ensembles de niveaux, mais par des séries de Fourier tronquées des frontières. Il est toutefois important de noter que cette méthode nécessite de se restreindre à des domaines en étoile. En particulier, des domaines non connexes ne peuvent être atteints par cette méthode. Mais ce problème est facile à pallier en appliquant a posteriori le théorème 2.32 et en gardant le meilleur résultat.
Les résultats obtenus dans ces deux articles sont présentés dans le tableau 2.1.
Bien évidemment il ne s'agit en aucun cas d'une preuve que ces domaines particuliers sont les minimiseurs. On peut toutefois affirmer qu'il s'agit de bons candidats. De plus, par construction, on sait que les valeurs obtenues pour ces formes sont supérieures aux valeurs réelles.
On peut remarquer une différence entre les candidats proposés par É. Oudet et par P. Antunes et P. Freitas pour λ_7. Néanmoins, É. Oudet avait trouvé la même forme que P. Antunes et P. Freitas avec sa méthode avant de montrer en utilisant le théorème 2.32 qu'un autre domaine donnait une valeur inférieure. Ceci est très certainement dû à des erreurs de précision dans les calculs. On peut ainsi voir que pour des « mêmes » formes, P. Antunes et P. Freitas ont des valeurs inférieures.
Néanmoins, le fait d'obtenir des résultats similaires avec des méthodes différentes donne une indication supplémentaire que les minimiseurs ont de grandes chances d'être très proches de ces résultats numériques.

Voici quelques remarques que l'on peut faire à partir de ces résultats.

- ◇ À partir de λ_5, les disques ne semblent plus être des minimiseurs.
- ◇ À partir de λ_5, les minimiseurs semblent être connexes.
- ◇ Les frontières semblent plutôt régulières. En tout cas il n'y a pas d'angles.
- ◇ En dehors de λ_{13} il semble y avoir des symétries.

	Oudet [32]		Antunes et Freitas [2]	
i	Ω_i^*	λ_i^*	Ω_i^*	λ_i^*
3		46.125		
4		64.293		
5		78.47		78.20
6		88.96		88.52
7		107.47		106.14
8		119.9		118.90
9		133.52		132.68

	Oudet [32]		Antunes et Freitas [2]	
i	Ω_i^*	λ_i^*	Ω_i^*	λ_i^*
10		143.45		142.72
11				159.39
12				172.85
13				186.97
14				198.96
15				209.63

TABLE 2.1 – Domaines obtenus numériquement proposés comme minimiseurs des valeurs propres du Laplacien avec condition de Dirichlet par É. Oudet dans [32] et par P. Antunes et P. Freitas dans [2].

- ◇ Certaines formes générales semblent apparaître à plusieurs reprises, même s'il ne s'agit pas exactement de la même (par exemple pour λ_6, λ_{10} et λ_{15} ou encore λ_7 et λ_{11} ou λ_8 et λ_{12}).

Toutes ces remarques et d'autres encore peuvent donner lieu à des conjectures qu'il s'agirait maintenant de démontrer. On verra d'ailleurs la preuve de la première remarque dans le chapitre 5.

2.4 Spectre du Laplacien avec condition de Neumann

Changeons maintenant de condition aux bords. Je donnerai moins de détails que pour la partie précédente.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.35}$$

où $\frac{\partial u}{\partial n}$ est la dérivée normale extérieure.

Théorème 2.34. *Supposons que $\partial\Omega$ est Lipschitz.*

1. *Les valeurs propres de (2.35) forment une suite infinie de réels tels que*

$$0 = \mu_1(\Omega) \leq \mu_2(\Omega) \leq \cdots \to +\infty. \tag{2.36}$$

2. *Chaque valeur propre est de multiplicité finie.*

3. *Les fonctions propres correspondantes forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.*

Remarque 2.35. Nous sommes obligé ici de demander de la régularité sur $\partial\Omega$ pour avoir la compacité du plongement $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Notation 2.36. On note $\sigma(\Omega) = \{\mu_1(\Omega), \mu_2(\Omega), \ldots\}$.

Remarque 2.37. Il est important de noter que la première valeur propre est nulle. L'une des conséquences est que μ_1 désigne parfois la première valeur propre non nulle (notre μ_2). Il est donc nécessaire de bien s'accorder sur les notations utilisées.

2.4.1 Formulation variationnelle

Définition 2.38. Une **solution faible** ou **variationnelle** de (2.35) est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega u \cdot v. \tag{2.37}$$

Propriétés 2.39 (Principe du min-max)**.** *Le quotient de Rayleigh étant défini comme précédemment, $\mu_1 = 0$ et la première fonction propre φ_1 est constante,*

$$\mu_2(\Omega) = \min_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v \neq 0 \\ \int_\Omega v = 0}} R[v], \tag{2.38}$$

$$\mu_k(\Omega) = \min_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v \neq 0 \\ v \perp \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}}} R[v] = \min_{\substack{E_k \subseteq H^1(\Omega) \\ \dim E_k = k}} \max_{\substack{v \in E_k \\ v \neq 0}} R[v]. \tag{2.39}$$

2.4.2 Quelques propriétés

Propriétés 2.40.

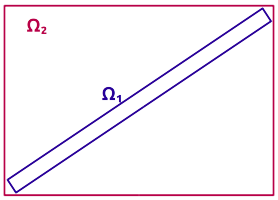
1. ***(Homogénéité)*** *Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\mu_k(t\Omega) = t^{-2}\, \mu_k(\Omega). \tag{2.40}$$

2. ***(Réunion)*** *Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ alors*

$$\sigma(\Omega) = \sigma(\Omega_1) \cup \sigma(\Omega_2). \tag{2.41}$$

Remarque 2.41. Il n'y a pas de monotonie dans ce cas. Un contre-exemple classique est le suivant :



$\Omega_1 \subset \Omega_2$ mais $\mu_2(\Omega_1) < \mu_2(\Omega_2)$.

On peut néanmoins noter que

$$\lambda_k(\Omega) \geq \mu_k(\Omega). \tag{2.42}$$

Le théorème des domaines nodaux reste également vrai.

Théorème 2.42 (Domaines nodaux - Courant)**.** *Soit φ_n la n-ième fonction propre (en prenant en compte les multiplicités) pour le problème de Neumann sur $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Alors φ_n a au plus n domaines nodaux.*

Théorème 2.43 (Loi de Weyl)**.** *Soit $N(\mu) = \sharp\{\mu_k \leq \mu\}$ pour $\mu \in \mathbb{R}^+$. Alors*

$$N(\mu) = \frac{|\Omega|}{(2\pi)^N} |B_N| \mu^{N/2} + o\left(\mu^{N/2}\right) \tag{2.43}$$

où B_N est la boule unité de $\mathbb{R}^N$.

2.5 Maximisation du spectre du Laplacien avec condition de Neumann

Le problème de la minimisation du spectre du Laplacien avec condition de Neumann ne présente aucun intérêt. En effet $\mu_n = 0$ pour tout ouvert composé d'au moins n composantes connexes.
Par contre, la maximisation du spectre du Laplacien avec condition de Neumann est intéressante. Toutefois, il y a moins de résultats que pour le problème précédent.

Pour la suite, fixons un $k \in \mathbb{N}^*$ (et même $k > 1$).
On cherche un ouvert $\mathbf{\Omega_k^*} \in \mathbb{R}^N$ avec $|\Omega_k^*| = 1$ tel que

$$\mu_k(\Omega_k^*) = \max\{\mu_k(\Omega);\, \Omega \in \mathbb{R}^N \text{ ouvert}, |\Omega| = 1\}. \tag{2.44}$$

On utilisera cette notation dans la suite ainsi que la notation $\mu_{\mathbf{k}}^* = \mu_k(\Omega_k^*)$. On dira également que Ω_k^* est un **maximiseur** de μ_k.

Il n'existe pas à ce jour de résultat général d'existence pour ce problème. Toutefois il existe des résultats partiels. Par exemple D. Bucur et G. Buttazzo dans [8] montrent en dimension 2 l'existence d'un maximiseur lorsqu'on se restreint à des ouverts contenus dans une boule ayant un nombre maximal fixé de composantes connexes et un périmètre maximal fixé.

Bien que l'existence d'un maximum ne soit pas encore démontrée, nous avons le résultat suivant (voir le paragraphe 7.1 de [18]) :

Théorème 2.44. *Soit $D \subseteq \mathbb{R}^N$ un domaine régulier et c une constante positive. Notons $\mathcal{A}_c(D)$ la classe des sous-ensembles ouverts et Lipschitz de D de volume c. Alors pour tout k*

$$\sup_{\Omega \in \mathcal{A}_c(D)} \mu_k(\Omega) < +\infty. \tag{2.45}$$

Il existe un résultat analogue au théorème 2.26 pour la première valeur propre de Neumann non nulle qui date des années 50. Il a d'abord été démontré par Szegő en dimension 2 avant d'être généralisé par Weinberger à toute dimension.

Théorème 2.45 (Szegő-Weinberger)**.** *La boule maximise μ_2 parmi les ouverts (Lipschitz) de volume donné. De plus c'est le seul maximiseur dans cette classe.*

La démonstration de ce théorème est calculatoire et repose fortement sur la formulation variationnelle (2.38) ainsi que sur la formule explicite des fonctions propres de la boule (cf. chapitre 3).

Récemment, A. Girouard, N. Nadirashvili et I. Polterovich ont montré dans [14] un résultat analogue au théorème 2.30 en dimension 2 :

Théorème 2.46 (Girouard-Nadirashvili-Polterovich)**.** *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier simplement connexe. Alors $\mu_3(\Omega) Aire(\Omega) \leq 2\mu_2(\mathbb{D})\pi$ où $\mathbb{D}$ est le disque unité. De plus, l'égalité est atteinte à la limite par une famille de domaines dégénérant vers l'union disjointe de deux disques identiques.*

Le théorème 2.32 a également un analogue dans le cas Neumann.

Théorème 2.47 (Wolf-Keller - Conditions de Neumann)**.** *Supposons que Ω_n^* est l'union d'au moins deux ensembles disjoints, chacun de mesure strictement positive. Alors*

$$(\mu_n^*)^{N/2} = (\mu_i^*)^{N/2} + (\mu_{n-i+1}^*)^{N/2} = \max_{1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}} \left[(\mu_j^*)^{N/2} + (\mu_{n-j+1}^*)^{N/2} \right] \tag{2.46}$$

où i est une valeur de $1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}$ qui maximise la somme $(\mu_j^*)^{N/2} + (\mu_{n-j+1}^*)^{N/2}$. De plus,

$$\Omega_n^* = \left[\left(\frac{\mu_i^*}{\mu_n^*}\right)^{1/2} \Omega_i^*\right] \bigcup \left[\left(\frac{\mu_{n-i+1}^*}{\mu_n^*}\right)^{1/2} \Omega_{n-i+1}^*\right] \quad \textit{(union disjointe).} \tag{2.47}$$

On peut le trouver par exemple dans [34] ou en version généralisée dans [12].
La démonstration de ce théorème est très fortement semblable à la démonstration dans le cas Dirichlet. Il faut toutefois faire très attention aux indices puisque la première valeur propre est nulle.

Il y a peu de résultats supplémentaires dans le cas général. Mais la restriction à des convexes a donné lieu à plusieurs théorèmes, de même que l'étude de l'optimisation de fonctions dépendant de plusieurs de ces valeurs propres.

Dans leur article [2], P. Antunes et P. Freitas ont également proposé des candidats numériques pour les maximiseurs du Laplacien-Neumann. Leurs résultats sont présentés dans le tableau 2.2.

i	Ω_i^*	μ_i^*
4		32.79
5		43.43
6		54.08

i	Ω_i^*	λ_i^*
7		67.04
8		77.68
9		89.22

i	Ω_i^*	λ_i^*
10		101.73
11		113.86

TABLE 2.2 – Domaines obtenus numériquement proposés comme maximiseurs des valeurs propres du Laplacien avec condition de Neumann par P. Antunes et P. Freitas dans [2].

Chapitre 3

Calculs explicites et applications

Il n'y a que très peu de formes pour lesquelles nous sommes en mesure de calculer explicitement les valeurs propres et les vecteurs propres. En dimension 2, les cas du rectangle et du disque sont connus. On peut également trouver des résultats sur les ellipses, mais tout se complique déjà pour les triangles. Lorsqu'on augmente la dimension, les calculs se complexifient et les résultats se raréfient.
L'objectif de ce chapitre est précisément de présenter des formules explicites de vecteurs et valeurs propres. Après quelques rappels techniques je détaille les formules pour le disque et la boule. J'en déduis les premières valeurs propres associées à ces formes. En utilisant une version restreinte du théorème 2.32 (et du théorème 2.47) j'en déduis la meilleure union de disques/boules pour chaque valeur propre. Je conclus ce chapitre en rappelant les formules pour le rectangle.
Les différentes formules peuvent être trouvées par exemple dans [18], sans détails sur l'obtention.

3.1 Quelques rappels sur les Polynômes de Legendre et les Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel, et dans une moindre mesure les polynômes de Legendre, jouent un rôle crucial dans le calcul des valeurs et vecteurs propres du Laplacien-Dirichlet sur la boule. C'est pourquoi, bien que rapide et technique, je commence par quelques rappels sur ces fonctions connues et classiques.

3.1.1 Polynômes associés de Legendre

Équation différentielle de Legendre :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + l(l+1)y = 0 \tag{3.1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + l(l+1)y = 0 \tag{3.2}$$

pour l un entier positif.

Les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme $aP_l(x) + bQ_l(x)$ où P_l et Q_l sont respectivement les **polynômes de Legendre** de première et de deuxième espèces de degré l (lorsque l est entier).

Polynômes de Legendre de première espèce

Les polynômes de Legendre de première espèce sont singuliers en $\pm\infty$ (en particulier ils sont réguliers en ± 1).

On a la **formule de Rodrigues**

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left[(x^2-1)^l\right]. \tag{3.3}$$

On peut en déduire les formules suivantes :

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\sum_{k=0}^{\lfloor l/2\rfloor}(-1)^k\binom{l}{k}\binom{2l-2k}{l}x^{l-2k} \tag{3.4}$$

ou encore

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}^2(x-1)^{l-k}(x+1)^k \tag{3.5}$$

ou bien

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\binom{-l-1}{k}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k. \tag{3.6}$$

Quelques propriétés :

1. $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$,
2. $(l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x) = (2l+1)xP_l(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$,
3. $\frac{dP_{l+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} = (2l+1)P_l(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$,
4. $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$.

Polynômes associés de Legendre

Les **polynômes associés de Legendre** sont définis par

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}\left[P_l(x)\right], \qquad 0 \le m \le l.$$

D'où

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}\left[(x^2-1)^l\right]. \tag{3.7}$$

et P_l^m est solution de

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0, \qquad -1 < x < 1. \tag{3.8}$$

Remarquons que les polynômes de Legendre de première espèce sont des cas particuliers de polynômes associés de Legendre ($m = 0$).

Quelques propriétés :

1. $P_l^l(x) = (-1)^l\frac{(2l)!}{2^l l!}(1-x^2)^{l/2}$,
2. $P_{l+1}^l(x) = x(2l+1)P_l^l(x)$,
3. $(l-m)P_l^m(x) = x(2l-1)P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x)$,

4. $\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'}$,

5. $\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_l^{m'}(x)\frac{dx}{1-x^2} = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!}\delta_{mm'}$.

Quelques polynômes associés de Legendre :

$$\begin{array}{lll} P_0^0(x) = 1, & & \\ P_1^0(x) = x, & P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2}, & \\ P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), & P_2^1(x) = -3x(1-x^2)^{1/2}, & P_2^2(x) = 3(1-x^2), \\ P_3^0(x) = \frac{1}{2}x(5x^2-3), & P_3^1(x) = \frac{3}{2}(1-5x^2)(1-x^2)^{1/2}, & P_3^2(x) = 15x(1-x^2), \\ & & P_3^3(x) = -15(1-x^2)^{3/2}. \end{array} \tag{3.9}$$

Polynômes de Legendre de deuxième espèce

Les polynômes de Legendre de deuxième espèce sont singuliers en ± 1 et en $\pm\infty$.

Quelques polynômes de Legendre de deuxième espèce :

$$\begin{array}{l} Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \\ Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1, \\ Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}. \end{array} \tag{3.10}$$

3.1.2 Fonctions de Bessel

Remarque 3.1. On se limite ici au cas réel.

Équation différentielle de Bessel :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-n^2)y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{3.11}$$

pour n un nombre réel ou complexe arbitraire.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Elle admet ainsi deux classes de solutions : les **fonctions de Bessel de première espèce**, notées $\mathbf{J_n}$, et les **fonctions de Bessel de seconde espèce**, parfois appelées **fonctions de Neumann** ou encore **fonctions de Weber**, notées $\mathbf{Y_n}$ ou parfois N_n.

Remarque 3.2. Dans le cas complexe, l'équation admet une troisième classe de solutions : les fonctions de Bessel de troisième espèce, ou encore fonctions de Hankel, notées H_n.

Une version transformée de l'équation différentielle de Bessel, donnée par Bowman, est :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (2p+1)x\frac{dy}{dx} + (\alpha^2x^{2r}+\beta^2)y = 0. \tag{3.12}$$

La solution est alors

$$y = x^{-p}\left[C_1 J_{\frac{q}{r}}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right) + C_2 Y_{\frac{q}{r}}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right)\right] \tag{3.13}$$

avec $q = \sqrt{p^2-\beta^2}$ et C_1 et C_2 des constantes.

En exprimant l'équation différentielle de Helmholtz en coordonnées sphériques, on obtient ce qu'on appelle l'**équation différentielle de Bessel sphérique** :

$$r^2\frac{d^2y}{dr^2} + 2r\frac{dy}{dr} + \left[k^2r^2 - n(n+1)\right]R = 0. \tag{3.14}$$

La solution générale de cette équation s'écrit

$$y(r) = Aj_n(kr) + By_n(kr) \tag{3.15}$$

où A et B sont des constantes et

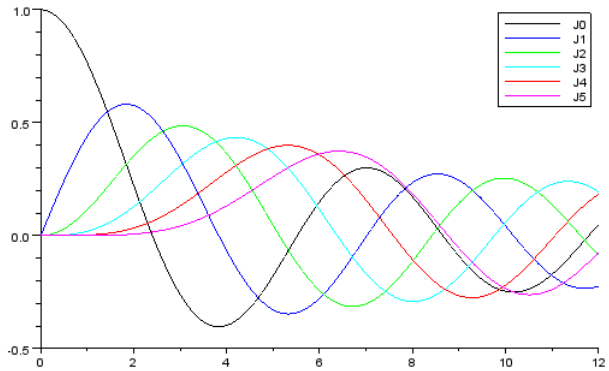
$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} \textbf{ fonction de Bessel sphérique de première espèce}, \tag{3.16}$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{Y_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} \textbf{ fonction de Bessel sphérique de deuxième espèce} \tag{3.17}$$

Fonctions de Bessel de première espèce J_n

Les fonctions de Bessel de première espèce sont des solutions de (3.11) qui sont régulières à l'origine.
Si n est un entier positif,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{3.18}$$



Lorsque n est un entier

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{3.19}$$

Pour n quelconque (non nécessairement entier),

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \tag{3.20}$$

où Γ est la fonction Gamma $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$.

Deux cas particuliers :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x), \qquad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x). \tag{3.21}$$

Quelques propriétés :

$$xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1}, \tag{3.22}$$

$$xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1}, \tag{3.23}$$

$$2J_n' = J_{n-1} - J_{n+1}, \tag{3.24}$$

$$\frac{2n}{x}J_n = J_{n-1} + J_{n+1}. \tag{3.25}$$

En utilisant cette dernière équation et (3.21), l'expression de $J_{k+\frac{1}{2}}$ peut être calculée lorsque k est un entier non nul. Par exemple

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)\right). \tag{3.26}$$

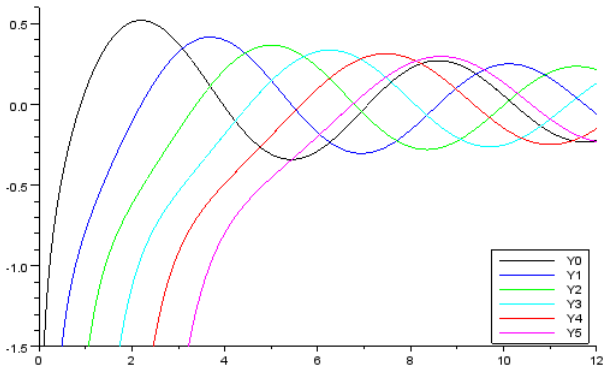
Comportement asymptotique :
Lorsque $x \to 0$ (réel), pour n fixé, $n \neq -1, -2, -3, \ldots$

$$J_n(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)}. \tag{3.27}$$

Fonctions de Bessel de deuxième espèce Y_n

Les fonctions de Bessel de deuxième espèce sont des solutions de (3.11) qui sont singulières à l'origine.
Y_n peut être définie par :

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}. \tag{3.28}$$



Comportement asymptotique :
Lorsque $x \to 0$ (réel), pour $n > 0$ fixé

$$Y_n(x) \sim -\frac{\Gamma(n)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n \quad \text{et} \quad Y_0(x) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)\ln(x). \tag{3.29}$$

Zéros de la fonction de Bessel J_n

Il est facile de calculer numériquement les premiers zéros des premières fonctions de Bessel $(j_{n,k})$.
Pour cela on utilise les fonctions de Matlab `fzero` et `besselj`. Voici les résultats

n\ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309	18.0711	21.2116	24.3525	27.4935
1	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706	19.6159	22.7601	25.9037	29.0468
2	5.1356	8.4172	11.6198	14.7960	21.1170	27.4206	30.5692	33.7165	40.0084
3	6.3802	9.7610	13.0152	16.2235	19.4094	22.5827	25.7482	28.9084	32.0649
4	7.5883	11.0647	14.3725	17.6160	20.8269	24.0190	27.1991	30.3710	33.5371
5	8.7715	12.3386	15.7002	18.9801	22.2178	25.4303	28.6266	31.8117	34.9888
6	9.9361	13.5893	17.0038	20.3208	23.5861	26.8202	30.0337	33.2330	36.4220
7	11.0864	14.8213	18.2876	21.6415	24.9349	28.1912	31.4228	34.6371	37.8387
8	12.2251	16.0378	19.5545	22.9452	26.2668	29.5457	32.7958	36.0256	39.2404
9	13.3543	17.2412	20.8070	24.2339	27.5837	30.8854	34.1544	37.4001	40.6286
10	14.4755	18.4335	22.0470	25.5095	28.8874	32.2119	35.4999	38.7618	42.0042

On peut ainsi classer par ordre croissant ces valeurs :

$$j_{0,1} < j_{1,1} < j_{2,1} < j_{0,2} < j_{3,1} < j_{1,2} < j_{4,1} < j_{2,2} < j_{0,3} < j_{5,1} < j_{3,2} < j_{6,1}$$
$$< j_{1,3} < j_{4,2} < j_{7,1} < j_{2,3} < j_{0,4} < j_{8,1} < j_{5,2} < j_{3,3} < j_{1,4} < j_{9,1} < j_{6,2} < j_{4,3} < j_{10,1}$$

On peut procéder de même pour $n = m/2$:

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1/2	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080	18.8496	21.9911	25.1327	28.2743
3/2	4.4934	7.7253	10.9041	14.0662	17.2208	20.3713	23.5195	26.6661	29.8116
5/2	5.7635	9.0950	12.3229	15.5146	18.6890	21.8539	25.0128	28.1678	31.3201
7/2	6.9879	10.4171	13.6980	16.9236	20.1218	23.3042	26.4768	29.6426	32.8037
9/2	8.1826	11.7049	15.0397	18.3013	21.5254	24.7276	27.9156	31.0939	34.2654

Une nouvelle fois on peut les classer par ordre croissant :

$$j_{1/2,1} < j_{3/2,1} < j_{5/2,1} < j_{1/2,2} < \cdots$$

Proposition 3.3. *Pour n non nécessairement entier*

$$j_{n,1} < j_{n+1,1} < j_{n,2} < j_{n+1,2} < j_{n,3} < \cdots$$

Zéros de la dérivée de la fonction de Bessel J'_n

Proposition 3.4. $j'_{0,1} = 0$ *et pour* $s = 2, 3, \ldots$ $j'_{0,s} = j_{1,s-1}$.

On calcule numériquement les premiers $j'_{n,k}$. Pour cela on utilise les mêmes fonctions Matlab que dans la partie précédente, ainsi que les relations de récurrence (3.22) (utilisée pour $n = 0$, auquel cas elle devient $J'_0 = -J_1$) et (3.24) (pour $n > 0$).
Voici les résultats

n\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706	19.6159	22.7601	25.9037
1	1.8412	5.3314	8.5363	11.7060	14.8636	18.0155	21.1644	24.3113	27.4571
2	3.0542	6.7061	9.9695	13.1704	16.3475	19.5129	22.6716	25.8260	28.9777
3	4.2012	8.0152	11.3459	14.5858	17.7887	20.9725	24.1449	27.3101	30.4703
4	5.3176	9.2824	12.6819	15.9641	19.1960	22.4010	25.5898	28.7678	31.9385
5	6.4156	10.5199	13.9872	17.3128	20.5755	23.8036	27.0103	30.2028	33.3854

Une nouvelle fois en les classant on voit que

$$j'_{0,1} < j'_{1,1} < j'_{2,1} < j'_{0,2} < j'_{3,1} < j'_{4,1} < j'_{1,2} < \cdots$$

3.2 Valeurs propres et vecteurs propres du disque

On considère ici les coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$. On introduit donc les paramètres (r, θ) satisfaisant

$$\begin{cases} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases}$$

avec $r \in [0, R[$, $R > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ (cf figure 3.1).

Pour toute fonction exprimée en coordonnées polaires $u(r, \theta)$

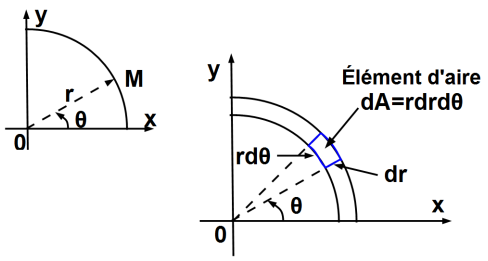


FIGURE 3.1 – Coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{3.30}$$

Soit $u(r,\theta)$ une fonction propre associée à la valeur propre λ du Laplacien, c'est-à-dire

$$0 = \Delta u + \lambda u. \tag{3.31}$$

En particulier u est solution de

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \lambda u. \tag{3.32}$$

On va chercher une solution de la forme

$$u(r,\theta) = v(r)w(\theta).$$

Alors (3.32) se réécrit

$$0 = v''w + \frac{1}{r}v'w + \frac{1}{r^2}vw'' + \lambda vw.$$

En divisant par vw (supposons pour le moment que vw est non nul) et en multipliant par r^2 on obtient

$$0 = \frac{r^2v'' + rv' + \lambda r^2 v}{v} + \frac{w''}{w}$$

On voit apparaître deux parties séparées dans cette équation, l'une ne dépendant que de r, l'autre ne dépendant que de θ. De plus leur somme est égale à zéro donc il existe une constante k telle que

$$\begin{aligned} \frac{w''}{w} &= -k \\ \frac{r^2v'' + rv' + \lambda r^2 v}{v} &= k \end{aligned}$$

ce qui nous amène à résoudre les équations différentielles ordinaires :

$$w''(\theta) + kw(\theta) = 0, \qquad w\ 2\pi\text{-périodique}, \tag{3.33}$$

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) + \left(\lambda - \frac{k}{r^2}\right)v(r) = 0. \tag{3.34}$$

Commençons par l'équation (3.33). Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants qu'on sait résoudre facilement. Ainsi, toute solution est de la forme $a\cos(\sqrt{k}\theta) + b\sin(\sqrt{k}\theta)$. La condition de périodicité implique que $k = n^2$ où n est un entier et donc

$$w(\theta) = a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta). \tag{3.35}$$

On remplace maintenant k par n^2 dans (3.34). On reconnaît alors l'équation différentielle de Bessel classique (après le changement de variable $x = \sqrt{\lambda} r$). Ainsi

$$v(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_n(\sqrt{\lambda} r).$$

Comme v doit être régulière, on a donc que $C_2 = 0$ et disons $C_1 = 1$ (v sera définie à constante près et il suffira de normaliser u à la fin). Ainsi $v(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r)$.

Il ne nous reste plus qu'à utiliser les conditions aux bords.
Commençons par la condition de Dirichlet. Celle-ci se traduit par $v(R) = 0$, c'est-à-dire $J_n(\sqrt{\lambda} R) = 0$. En notant $j_{n,k}$ les zéros de J_n on a donc $\sqrt{\lambda} R = j_{n,k}$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{j_{n,k}^2}{R^2}$.
Passons à la condition de Neumann. Celle -ci se traduit par $v'(R) = 0$, c'est-à-dire $\sqrt{\lambda} J_n'(\sqrt{\lambda} R) = 0$. En notant $j_{n,k}'$ les zéros de J_n' on a donc $\sqrt{\lambda} R = j_{n,k}'$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{j_{n,k}'^2}{R^2}$.

Reste les fonctions propres. Il nous faut trouver, pour chaque valeur propre λ une base de fonctions propres associée. Or nous avons l'expression de ces valeurs propres.

$$u_n(r,\theta) = J_n(\sqrt{\lambda} r)\left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right].$$

On remarque ensuite que les fonctions $J_n(\sqrt{\lambda} r)\cos(n\theta)$ et $J_n(\sqrt{\lambda} r)\sin(n\theta)$ forment une famille libre et génératrice des solutions de $\Delta u + \lambda u = 0$ pour $n > 0$ alors que pour $n = 0$, $J_0(\sqrt{\lambda} r)$ est l'unique fonction génératrice. Il ne nous reste donc plus qu'à les normaliser (en tenant compte de l'expression de λ selon la condition aux bords étudiée).

Ainsi,

Théorème 3.5. *Soit B_R le disque de rayon R. Alors ses valeurs propres et fonctions propres pour le Laplacien avec condition de Dirichlet sont*

$$\begin{aligned}
&\lambda_{0,k} = \frac{j_{0,k}^2}{R^2}, \quad k \geq 1,\\
&u_{0,k}(r,\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{R|J_0'(j_{0,k})|} J_0\left(\frac{j_{0,k} r}{R}\right), \quad k \geq 1,\\
&\lambda_{n,k} = \frac{j_{n,k}^2}{R^2}, \quad n,k \geq 1, \quad \textit{valeurs propres doubles}\\
&u_{n,k}(r,\theta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{R|J_n'(j_{n,k})|} J_n\left(\frac{j_{n,k} r}{R}\right)\cos(n\theta) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{R|J_n'(j_{n,k})|} J_n\left(\frac{j_{n,k} r}{R}\right)\sin(n\theta) \end{cases}, \quad n,k \geq 1,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

où $j_{n,k}$ est le k-ième zéro de la fonction de Bessel J_n.
Pour le Laplacien avec condition de Neumann, les valeurs propres et fonctions propres sur le disque de rayon R sont

$$\begin{aligned}
&\mu_{0,k} = \frac{j_{0,k}'^2}{R^2}, \quad k \geq 1,\\
&v_{0,k}(r,\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{1}{R|J_0(j_{0,k}')|} J_0\left(\frac{j_{0,k}' r}{R}\right), \quad k \geq 1,\\
&\mu_{n,k} = \frac{j_{n,k}'^2}{R^2}, \quad n,k \geq 1, \quad \textit{valeurs propres doubles}\\
&u_{n,k}(r,\theta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{j_{n,k}'}{R\sqrt{j_{n,k}'^2 - n^2}|J_n(j_{n,k}')|} J_n\left(\frac{j_{n,k}' r}{R}\right)\cos(n\theta) \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{j_{n,k}'}{R\sqrt{j_{n,k}'^2 - n^2}|J_n(j_{n,k}')|} J_n\left(\frac{j_{n,k}' r}{R}\right)\sin(n\theta) \end{cases}, \quad n,k \geq 1,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

où $j'_{n,k}$ est le k-ième zéro de J'_n.

Rappelons que $|B_R| = 1 \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Il est très facile d'écrire un programme Matlab qui permet de trouver des valeurs approchées des premières valeurs propres du disque de mesure 1 avec conditions de Dirichlet. Pour cela il suffit de calculer les $j_{n,k}$ pour suffisamment de n et de k puis de trier les valeurs obtenues. Ainsi les premières valeurs propres sont

n	1	2	3	4	5	6	7	8
λ_n	18.1684	46.1248	46.1248	82.8583	82.8583	95.7283	127.8831	127.8831
n	9	10	11	12	13	14	15	16
λ_n	154.6243	154.6243	180.9021	180.9021	222.5818	222.5818	235.2645	241.7108

On peut faire de même pour les conditions de Neumann :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
μ_n	0	10.6499	10.6499	29.3059	29.3059	46.1248	55.4491	55.4491
n	9	10	11	12	13	14	15	16
μ_n	88.8328	88.8328	89.2975	89.2975	129.3084	129.3084	141.2844	141.2844

3.3 Valeurs propres et vecteurs propres de la boule

On considère maintenant les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$. On introduit donc les paramètres (r, θ, ϕ) satisfaisant

$$\begin{cases} x &= r\sin(\theta)\cos(\phi), \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\phi), \\ z &= r\cos(\theta) \end{cases}$$

avec $r \in [0, R[$, $R > 0$, $\phi \in [-\pi, \pi[$, $\theta \in [0, \pi]$ (cf figure 3.2).

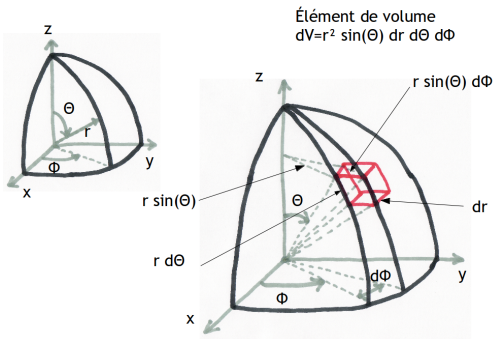


FIGURE 3.2 – Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$

Pour toute fonction $v(r, \theta, \phi)$ exprimée en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta\right)\right] \end{aligned} \tag{3.38}$$

Soit $v(r, \theta, \phi)$ une fonction propre associée à la valeur propre λ du Laplacien, c'est-à-dire

$$0 = \Delta v + \lambda v. \tag{3.39}$$

v est donc solution de

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\sin\theta\right)\right] + \lambda v. \tag{3.40}$$

On va chercher une solution de la forme

$$v(r,\theta,\phi) = f(r)g(\theta)h(\phi).$$

Alors (3.40) se réécrit

$$0 = f''gh + \frac{2}{r}f'gh + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}h''fg + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(g'\sin\theta\right)fh\right] + \lambda fgh.$$

En divisant par fgh (supposons pour le moment que fgh est non nul) et en multipliant par r^2 on obtient

$$0 = \frac{r^2 f'' + 2rf'}{f} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{h''}{h} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{g}\frac{d}{d\theta}\left(g'\sin\theta\right) + \lambda r^2.$$

On voit alors apparaître deux parties séparées dans cette équation, l'une ne dépendant que de r et l'autre ne dépendant que de θ et ϕ. De plus leur somme est égale à zéro donc il existe une constante A telle que

$$A = \frac{r^2 f'' + 2rf'}{f} + \lambda r^2, \tag{3.41}$$

$$-A = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{h''}{h} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{g}\frac{d}{d\theta}\left(g'\sin\theta\right). \tag{3.42}$$

Commençons par l'équation (3.42).
En multipliant par $\sin^2\theta$ on obtient

$$\frac{h''}{h} + \frac{\sin\theta}{g}\frac{d}{d\theta}\left(g'\sin\theta\right) + A\sin^2\theta = 0.$$

Une nouvelle fois l'équation contient deux parties indépendantes, chacune ne dépendant respectivement que de θ et ϕ. Leur somme valant zéro, il existe une constante B telle que

$$-B = \frac{h''}{h}, \tag{3.43}$$

$$B = \frac{\sin\theta}{g}\frac{d}{d\theta}\left(g'\sin\theta\right) + A\sin^2\theta. \tag{3.44}$$

(3.43) peut être réécrite

$$h'' + Bh = 0.$$

De plus h est 2π-périodique puisque $v(r,\theta,\phi+2\pi) = v(r,\theta,\phi)$. Il existe donc deux constantes α et β telles que

$$h(\phi) = \alpha\cos(m\phi) + \beta\sin(m\phi) \tag{3.45}$$

où $B = m^2$.
En divisant (3.44) par $\sin^2\theta$, en multipliant par g et en remplaçant B par m^2 on a

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(g'\sin\theta\right) + \left(A - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)g = 0.$$

Faisons le changement de variable $s = \cos(\theta)$ dans cette équation. On obtient

$$\frac{d}{ds}\left[(1-s^2)\frac{dg}{ds}\right] + \left(A - \frac{m^2}{1-s^2}\right) g = 0, \qquad -1 < s < 1. \tag{3.46}$$

On reconnaît une équation différentielle dont la solution est un polynôme associé de Legendre. Donc $g(s) = P_l^m(s)$ avec $A = l(l+1)$, d'où

$$g(\theta) = P_l^m(\cos\theta). \tag{3.47}$$

Remarque : $0 \leq m \leq l$.

Revenons à l'équation (3.41). Elle peut être réécrite

$$f'' + \frac{2}{r}f' + \left(\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) f = 0. \tag{3.48}$$

On reconnaît presque une équation différentielle de Bessel (le terme devant f' est $\frac{2}{r}$ et non $\frac{1}{r}$). Définissons $w(r) = \sqrt{r}f(r)$. Alors $f = \frac{1}{\sqrt{r}}w$, $f' = -\frac{1}{2}r^{-3/2}w + r^{-1/2}w'$ et $f'' = \frac{3}{4}r^{-5/2}w - r^{-3/2}w' + r^{-1/2}w''$. En remplaçant dans (3.48) on a

$$\frac{1}{\sqrt{r}}w'' - \frac{1}{\sqrt{r}^3}w' + \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{r}^5}w + \frac{2}{\sqrt{r}^3}w' - \frac{1}{\sqrt{r}^5}w + \left(\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\frac{1}{\sqrt{r}}w = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{r}}w'' + \frac{1}{\sqrt{r}^3} + \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\lambda - \left(\frac{l(l+1)+\frac{1}{4}}{\sqrt{r}^5}\right)\right) w = 0.$$

Multiplions par $\sqrt{r}$. Alors, comme $l(l+1) + \frac{1}{4} = \left(l + \frac{1}{2}\right)^2$,

$$w'' + \frac{1}{r}w' + \left(\lambda - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right) w = 0. \tag{3.49}$$

Pour $\lambda > 0$ on fait le changement de variable $t = \sqrt{\lambda}r$ et on reconnaît une équation différentielle de Bessel. Posons donc

$$w(r) = C_1 J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right) + C_2 Y_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right),$$

C_1 et C_2 étant des constantes à définir.
On a alors

$$f(r) = \frac{C_1 J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right) + C_2 Y_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}. \tag{3.50}$$

f devant être régulière en 0, $C_1 = 1$ (f est définie à constante près) et $C_2 = 0$. Ainsi

$$f(r) = \frac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}}. \tag{3.51}$$

Reste le cas $\lambda = 0$, pour lequel (3.49) devient

$$w'' + \frac{1}{r}w' - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}w = 0.$$

Alors

$$w(r) = C_1 \operatorname{ch}\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\ln(x)\right) + C_2 \operatorname{sh}\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\ln(x)\right) = \frac{C_1+C_2}{2}x^{l+\frac{1}{2}} + \frac{C_1-C_2}{2}x^{-(l+\frac{1}{2})}$$

d'où

$$f(r) = \frac{C_1 + C_2}{2} x^l + \frac{C_1 - C_2}{2} x^{-(l+1)}.$$

f devant être régulière en 0, on a forcément $C_1 = C_2$ et $l = 0$. Ainsi la seule fonction f associée à $\lambda = 0$ est $f =$ cste.

Pour terminer on va utiliser les conditions au bord.

Commençons par la condition de Dirichlet. Elle se traduit par $f(R) = 0$, c'est-à-dire $0 = \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}R)}{\sqrt{R}}$ d'où $J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right) = 0$, c'est-à-dire $\sqrt{\lambda}R$ est un zéro de $J_{l+\frac{1}{2}}$.

Notons $\mathbf{j_{l+\frac{1}{2},k}}$ les zéros de la fonction de Bessel $J_{l+\frac{1}{2}}$. Alors $\sqrt{\lambda}R = j_{l+\frac{1}{2},k}$ d'où $\lambda = \frac{j^2_{l+\frac{1}{2},k}}{R^2}$. Notons que dans ce cas, la solution f constante devient $f \equiv 0$ et ainsi $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre.

Considérons maintenant le cas de la condition de Neumann. Celle-ci se traduit par $f'(R) = 0$, c'est-à-dire $0 = \sqrt{\frac{\lambda}{R}} J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right) - \frac{1}{2\sqrt{R}^3} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right)$ ou encore $J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}R} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right)$. Malheureusement, dans ce cas il n'est pas possible d'exprimer facilement les valeurs propres. Tout ce qu'on peut dire c'est que λ est solution de l'une des équations suivantes :

$$0 = \sqrt{\lambda} J'_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right) - \frac{1}{2R} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right), \tag{3.52}$$

$$0 = \sqrt{\lambda} J_{l-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right) - \frac{l+1}{R} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right), \tag{3.53}$$

$$0 = \frac{l}{R} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right) - \sqrt{\lambda} J_{l+\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right), \tag{3.54}$$

$$0 = l J_{l-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right) - (l+1) J_{l+\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\lambda}R\right). \tag{3.55}$$

Enfin, dans ce cas, il n'y a pas de contradiction entre $f =$cste et $f'(R) = 0$. $\lambda = 0$ est donc une valeur propre.

Reste les fonctions propres. En reprenant ce qui précède, on a que les fonctions propres associées à la valeur propre $\lambda > 0$ ont la forme

$$v(r, \theta, \phi) = \frac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^m(\cos\theta) \left(\alpha \cos(m\phi) + \beta \sin(m\phi)\right),$$

avec $l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq m \leq l$. Remarquons qu'il est difficile, compte tenu de l'expression implicite de $P_l^m(\cos\theta)$, de donner une formule générale d'une base orthonormée de fonctions propres.

Toutefois, en reprenant les notations précédentes, on peut voir que $h(\phi)$ est engendré par 1 lorsque $m = 0$ et par $(\cos(\phi), \sin(\phi))$ lorsque $m > 0$, alors que f et g sont entièrement déterminées. Ainsi la multiplicité d'une valeur propre ne dépend que de l et plus précisémment, $\lambda_{l,k}$ est de multiplicité $2l + 1$.

Théorème 3.6. *Soit B_R la boule de rayon R. Alors ses valeurs propres et fonctions propres pour le Laplacien avec condition de Dirichlet sont données par*

$$\lambda_{l,k} = \frac{j^2_{l+\frac{1}{2},k}}{R^2}, \quad l \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ (\textit{de multiplicité } 2l+1),$$

$$v_{l,k}(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{j_{l+\frac{1}{2},k}}{R}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^0(\cos\theta), \\ \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{j_{l+\frac{1}{2},k}}{R}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^1(\cos\theta)\cos(\phi), \\ \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{j_{l+\frac{1}{2},k}}{R}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^1(\cos\theta)\sin(\phi), \qquad l \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}, \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{j_{l+\frac{1}{2},k}}{R}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^l(\cos\theta)\cos(l\phi), \\ \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{j_{l+\frac{1}{2},k}}{R}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^l(\cos\theta)\sin(l\phi), \end{cases} \tag{3.56}$$

ces fonctions propres devant ensuite être normées pour obtenir une base orthonormée.
Pour le Laplacien avec condition de Neumann, les valeurs propres et fonctions propres sur la boule B_R sont

$$\mu_0 = 0,$$
$$v_0(r,\theta,\phi) = 1,$$
$$\mu_{l,k} \textit{ solution de l'une des équations (3.52-3.55)},$$
$$l \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ (\textit{de multiplicité } 2l+1),$$

$$v_{l,k}(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\mu_{l,k}}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^0(\cos\theta), \\ \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\mu_{l,k}}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^1(\cos\theta)\cos(\phi), \\ \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\mu_{l,k}}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^1(\cos\theta)\sin(\phi), \qquad l \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}, \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\mu_{l,k}}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^l(\cos\theta)\cos(l\phi), \\ \dfrac{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\mu_{l,k}}r\right)}{\sqrt{r}} P_l^l(\cos\theta)\sin(l\phi), \end{cases} \tag{3.57}$$

Rappelons que $|B_R| = 1 \Leftrightarrow R = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}$.

Comme en dimension 2, en utilisant un programme Matlab, on peut trouver des valeurs approchées des premières valeurs propres de la boule de mesure 1 avec conditions de Dirichlet :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
λ_n	25.6463	52.4660	52.4660	52.4660	86.3162	86.3162	86.3162	86.3162
n	9	10	11	12	13	14	15	16
λ_n	86.3162	102.5854	126.8887	126.8887	126.8887	126.8887	126.8887	126.8887

On peut faire de même pour les conditions de Neumann :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
μ_n	0	11.2593	11.2593	11.2593	29.0244	29.0244	29.0244	29.0244
n	9	10	11	12	13	14	15	16
μ_n	29.0244	52.4660	52.9503	52.9503	52.9503	52.9503	52.9503	52.9503

3.4 Meilleures unions de boules

On se fixe maintenant une valeur propre. On cherche alors quelle est l'union disjointe de boules (éventuellement la boule) qui donne la plus petite valeur (la plus grande dans le cas Neumann) de la valeur propre. On espère évidemment que ces unions optimales soient composées de peu de boules.
Pour plus de simplicité, on va faire tout le raisonnement pour les conditions de Dirichlet. On traitera ensuite le cas des conditions de Neumann, en se basant sur ce qui aura été fait pour celles de Dirichlet.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble de toutes les unions disjointes de boules de $\mathbb{R}^N$. L'ensemble $\mathcal{B}$ est évidemment stable par union disjointe.

3.4.1 Condition de Dirichlet

On note $B_n^* = \operatorname{argmin}\{\lambda_n(B);\, B \in \mathcal{B},\, |B| = 1\}$ et $\lambda_n^* = \lambda_n(B_n^*) = \min\{\lambda_n(B);\, B \in \mathcal{B},\, |B| = 1\}$.

On peut facilement écrire un corollaire au théorème de Wolf-Keller 2.32 dans le cas d'une restriction à $\mathcal{B}$.

Théorème 3.7. *Supposons que B_n^* est l'union d'au moins deux unions de boules disjointes, chacune de mesure strictement positive. Alors*

$$(\lambda_n^*)^{N/2} = (\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2} = \min_{1\leq j\leq \frac{n-1}{2}} \left[(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}\right] \tag{3.58}$$

où i est une valeur de $1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}$ qui minimise la somme $(\lambda_j^*)^{N/2} + (\lambda_{n-j}^*)^{N/2}$. De plus,

$$B_n^* = \left[\left(\frac{\lambda_i^*}{\lambda_n^*}\right)^{1/2} B_i^*\right] \bigcup \left[\left(\frac{\lambda_{n-i}^*}{\lambda_n^*}\right)^{1/2} B_{n-i}^*\right] \quad \textit{(union disjointe).} \tag{3.59}$$

La démonstration de ce théorème est exactement la même que celle du théorème 2.32 grâce à la stabilité de $\mathcal{B}$ par réunion disjointe. Il suffit alors de remplacer $\mathbb{R}^N$ par $\mathcal{B}$ et Ω_n^* par B_n^*. Je ne la détaille donc pas ici.

Commençons par un exemple afin de mieux comprendre l'idée : cherchons la meilleure union de boule pour λ_5.
Décrivons les différents cas à prendre en compte (procédons de façon naïve) :

- ◇ Le minimum peut être atteint pour une boule. Dans ce cas $\lambda_5 = \lambda_5(B)$.
- ◇ Le minimum peut être atteint pour l'union de deux boules. Il faut alors considérer les différents cas où λ_5 est obtenu à partir des valeurs propres (λ_i, λ_j) où $i + j = 5$. Prenons par exemple le cas $i = 1$ et $j = 4$, et notons B_1 et B_2 les boules correspondant à ces valeurs propres respectives. Il nous faut imposer la condition $\lambda_1(B_1) = \lambda_4(B_2)$ (avec $|B_1 \cup B_2| = 1$, ce qui entraîne que B_1 et B_2 sont entièrement déterminées). Ainsi les valeurs propres de $B_1 \cup B_2$ sont $\lambda_1(B_2) \leq \lambda_2(B_2) \leq \lambda_3(B_2) \leq \lambda_4(B_2) = \lambda_1(B_1)$ et donc $\lambda_5(B_1 \cup B_2) = \lambda_1(B_1) = \lambda_4(B_2)$.
- ◇ Le minimum peut être atteint pour l'union de trois boules. Il faut alors considérer les différents cas où λ_5 est obtenu à partir des valeurs propres $(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)$ où $i+j+k = 5$. Il faut alors à nouveau imposer comme condition que $\lambda_i(B_1) = \lambda_j(B_2) = \lambda_k(B_3)$. Il est par contre beaucoup plus difficile dans ce cas de déterminer les trois boules B_1, B_2 et B_3.
- ◇ Le minimum peut être atteint pour l'union de quatre boules (on procède de façon similaire).

- ◇ Le minimum peut être atteint pour l'union de cinq boules (dans ce cas ce sont 5 boules identiques telles que leur union est de mesure 1, et on considère λ_1 pour chacune d'elle).

On remarque tout de suite qu'en utilisant cette technique naïve, faire la liste de toutes les possibilités devient très vite long et compliqué, et cette façon de faire est difficile à automatiser. On va donc utiliser une autre méthode, basée sur une récurrence, moins naïve mais plus productive.

Pour cela on va faire une récurrence sur le numéro de la valeur propre souhaitée.
Comme pour tout raisonnement par récurrence il faut commencer par une initialisation. Par le théorème de Faber-Krahn (théorème 2.26) on sait que la boule minimise λ_1 sur $\mathbb{R}^N$ donc en particulier sur $\mathcal{B}$. De même en appliquant le théorème de Krahn-Szegő (théorème 2.30) l'union disjointe de deux boules identiques minimise λ_2 sur $\mathcal{B}$.
Voyons maintenant le cœur de la récurrence. On cherche O_n^*, pour $n \geq 3$, tel que $\lambda_n^* = \lambda_n(O_n^*)$. Supposons $O_1^*, \ldots, O_{n-1}^*$ connus.
En utilisant le théorème 3.7, nous savons que les différentes possibilités pour O_n^* sont :

- ◇ B, auquel cas $\lambda_n^* = \lambda_n(B)$,
- ◇ $\left[\left(\frac{\lambda_i^*}{\lambda_n^*}\right)^{1/2} O_i^*\right] \bigcup \left[\left(\frac{\lambda_{n-i}^*}{\lambda_n^*}\right)^{1/2} O_{n-i}^*\right]$ avec $(\lambda_n^*)^{N/2} = (\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}$, pour $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$.

Reste alors à choisir le cas qui correspond au minimum du λ_n.

En procédant ainsi de proche en proche, il n'est plus nécessaire de prendre en compte l'union d'au moins trois O_k^* puisque dans ce cas l'union de deux (disons O_i^* et O_j^*) aurait déjà été prise en compte dans le calcul pour O_{i+j}^*.

Numériquement il s'agit d'une récurrence très simple. Les résultats sont présentés en figures 3.3 et 3.4.

3.4.2 Condition de Neumann

Le cas des conditions de Neumann est très similaire, mais il faut faire attention au fait qu'on cherche maintenant un maximum et non plus un minimum, mais aussi et surtout le fait qu'on a une valeur propre nulle.

On note $B_n^* = \operatorname{argmax}\{\mu_n(B);\, B \in \mathcal{B},\, |B| = 1\}$ et $\mu_n^* = \mu_n(B_n^*) = \max\{\mu_n(B);\, B \in \mathcal{B},\, |B| = 1\}$.
Attention, ici $\mu_1(\Omega) = 0$ pour tout Ω.

Théorème 3.8. *Supposons que B_n^* est l'union d'au moins deux ensembles disjoints, chacun de mesure strictement positive. Alors*

$$(\mu_n^*)^{N/2} = (\mu_i^*)^{N/2} + (\mu_{n-i+1}^*)^{N/2} = \max_{2 \leq j \leq \frac{n+1}{2}} \left[(\mu_j^*)^{N/2} + (\mu_{n-j+1}^*)^{N/2}\right] \tag{3.60}$$

où i est une valeur de $1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}$ qui maximise la somme $(\mu_j^*)^{N/2} + (\mu_{n-j+1}^*)^{N/2}$. De plus,

$$B_n^* = \left[\left(\frac{\mu_i^*}{\mu_n^*}\right)^{1/2} B_i^*\right] \bigcup \left[\left(\frac{\mu_{n-i+1}^*}{\mu_n^*}\right)^{1/2} B_{n-i+1}^*\right] \quad \textit{(union disjointe).} \tag{3.61}$$

À nouveau, la démonstration de ce théorème est identique au cas général et nécessite seulement de remplacer $\mathbb{R}^N$ par $\mathcal{B}$ et Ω_n^* par B_n^*.

Comme précédemment, on va faire une récurrence sur le numéro de la valeur propre souhaitée pour trouver l'union de boule qui permet d'obtenir la plus grande valeur propre.
Comme pour le cas Dirichlet, le théorème de Szegő-Weinberger (théorème 2.45) permet d'initialiser la récurrence (la boule maximise μ_2 sur $\mathcal{B}$).
Voyons maintenant le cœur de la récurrence. On cherche O_n^*, pour $n \geq 3$, tel que $\mu_n^* = \mu_n(O_n^*)$. Supposons $O_1^*, \ldots, O_{n-1}^*$ connus.
En utilisant le théorème 3.8, nous savons que les différentes possibilités pour O_n^* sont :

- ◇ B, auquel cas $\mu_n^* = \mu_n(B)$,
- ◇ $\left[\left(\frac{\mu_i^*}{\mu_n^*}\right)^{1/2} O_i^*\right] \bigcup \left[\left(\frac{\mu_{n-i+1}^*}{\mu_n^*}\right)^{1/2} O_{n-i+1}^*\right]$ avec $(\mu_n^*)^{N/2} = (\mu_i^*)^{N/2} + (\mu_{n-i+1}^*)^{N/2}$, pour $2 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$.

Reste alors à choisir le cas qui correspond au minimum du μ_n.

Les résultats sont présentés en figures 3.5 et 3.6.

3.5 Rectangles

Théorème 3.9. *Soit $\Omega = (0, L) \times (0, l)$ un rectangle du plan. Alors ses valeurs propres et vecteurs propres pour le Laplacien avec condition de Dirichlet sont*

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} &= \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{l^2}\right), \\ u_{m,n}(x,y) &= \frac{2}{\sqrt{Ll}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \end{aligned} \qquad m, n \geq 1. \tag{3.62}$$

D'autre part, ses valeurs propres et vecteurs propres pour le Laplacien avec condition de Neumann sont

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} &= \pi^2 \left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{l^2}\right), \\ u_{m,n}(x,y) &= \frac{2}{\sqrt{Ll}} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \end{aligned} \qquad m, n \geq 0. \tag{3.63}$$

Ce résultat est obtenu par séparation des variables. Il est par ailleurs immédiat de vérifier que les paires $(\lambda_{m,n}, u_{m,n})$ données ci-dessus sont bien valeurs propres et vecteurs du Laplacien. Le fait que ce sont les seules possibilités est un peu plus compliqué mais s'obtient en remarquant que les fonction $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$ forment un système orthogonal complet de $L^2(\Omega)$.

Bien que leurs valeurs propres soient très simples, les rectangles ne présentent que peu d'intérêt dans le problème général de l'optimisation des valeurs propres du Laplacien. On verra tout de même un exemple d'utilisation dans le prochain chapitre.
Néanmoins, une question intéressante est de se restreindre à l'ensemble des rectangles et de chercher lequel minimise une valeur propre donnée. La difficulté principale de cette question vient du fait qu'une valeur propre λ_k donnée ne correspond pas à un même couple (m, n) pour tous les rectangles, et ce dès les premières valeurs de k.
C'est ce qui a intéressé P. Antunes et P. Freitas dans [3]. Dans cet article, après avoir décrit les rectangles minimisant les 15 premières valeurs propres, ils montrent que le domaine optimal asymptotique est le carré.

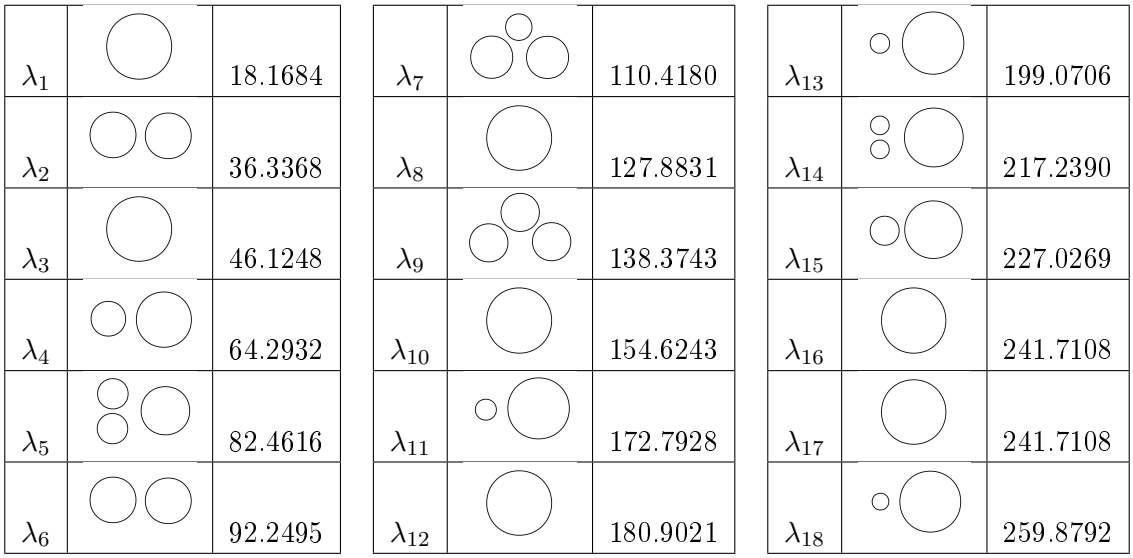


FIGURE 3.3 – Meilleures unions de disques pour le Laplacien avec conditions de Dirichlet en dimension 2.

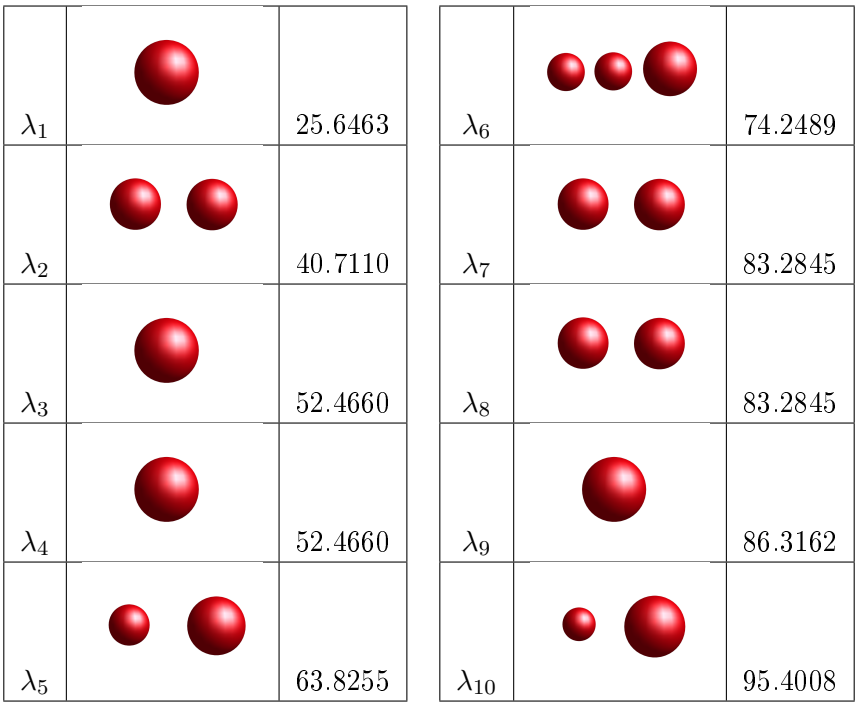


FIGURE 3.4 – Meilleures unions de boules pour le Laplacien avec conditions de Dirichlet en dimension 3.

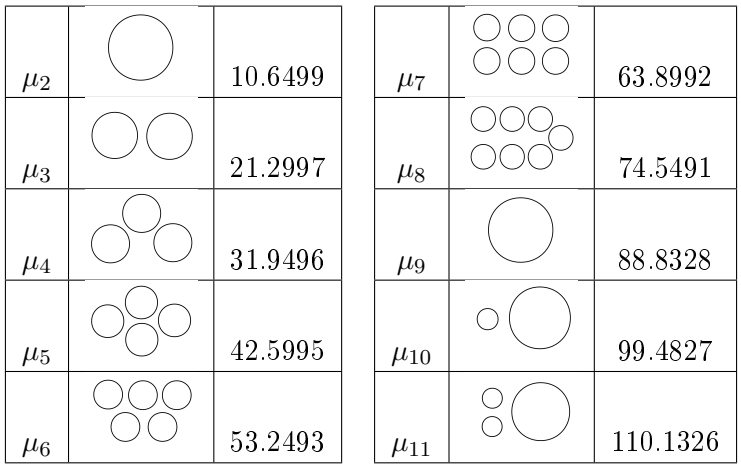


FIGURE 3.5 – Meilleures unions de disques pour le Laplacien avec conditions de Neumann en dimension 2.

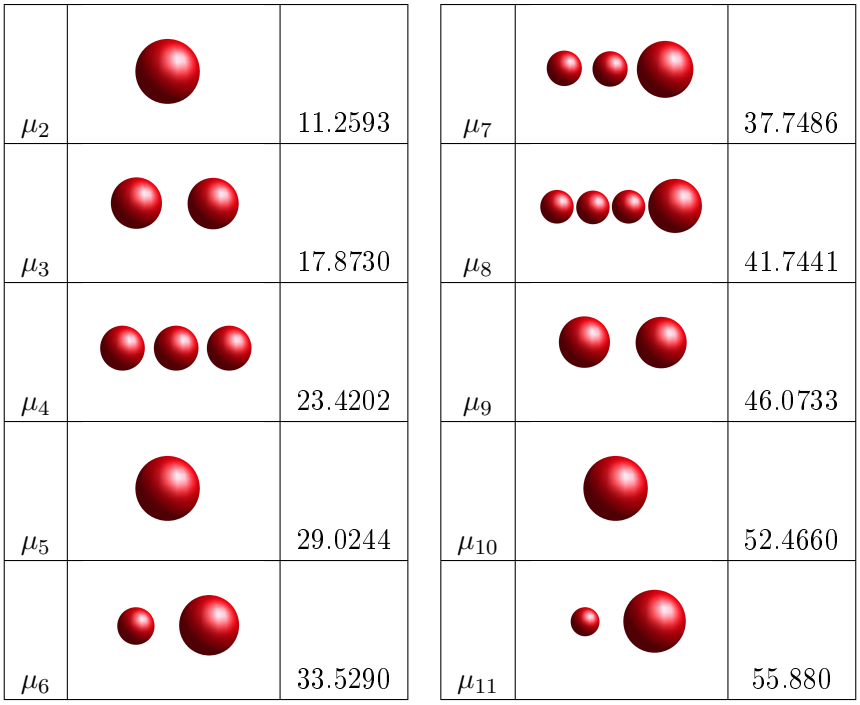


FIGURE 3.6 – Meilleures unions de boules pour le Laplacien avec conditions de Neumann en dimension 3.

Chapitre 4

Dérivation des valeurs propres et conséquences

L'idée maintenant est d'essayer de déterminer si les disques / boules peuvent être minimiseurs pour certaines valeurs propres du Laplacien-Dirichlet. De façon classique on souhaite donc calculer la dérivée des fonctions à minimiser. La bonne notion de dérivation ici est la dérivation de forme. On va donc commencer par expliquer ce que c'est et donner les diverses formules utiles. Ces formules peuvent par exemple être trouvées dans [18] ou [21]. On appliquera ensuite ces formules aux cas du disque et de la boule et on en tirera des conséquences sur la minimalité (ou non) de ces formes.

4.1 Dérivation par rapport au domaine

Soit Ω un ouvert et V est un champ de vecteurs. On considère Φ définie par $\Phi(t) = Id + tV$ $\forall t \in [0, T[$.
Notons $\Omega_t = \Phi(t)(\Omega)$ et $\lambda_k(t) = \lambda_k(\Omega_t)$ la k-ième valeur propre du Laplacien sur Ω_t avec condition de Dirichlet.

Définition 4.1. On dira que Ω_0 est un **minimiseur local** de $F(t) = F(\Omega_t)$ si $F'(0) > 0$ pour tout champ de vecteurs V.

Théorème 4.2 (Dérivation d'une valeur propre de Dirichlet simple)**.** *Soit Ω un ouvert borné. Supposons que $\lambda_k(\Omega)$ est simple et notons $u(\Omega)$ une fonction propre associée telle que $\|u(\Omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$.*
Alors les fonctions $t \mapsto \lambda_k(t)$, $t \mapsto u(t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ sont différentiables en $t = 0$ avec

$$\lambda_k'(0) = -\int_\Omega div(|\nabla u|^2 V)dx. \tag{4.1}$$

Si de plus Ω est de classe C^2 ou si Ω est convexe,alors

$$\lambda_k'(0) = -\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 V.n d\sigma \tag{4.2}$$

et la dérivée u' de u_t est solution de

$$\begin{cases} -\Delta u' = \lambda_k u' + \lambda_k' u & \text{dans } \Omega, \\ u' = -\frac{\partial u}{\partial n} V.n & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_\Omega u u' d\sigma = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Théorème 4.3 (Dérivée du volume). *Soit Ω un ouvert borné et $Vol(t) := |\Omega_t|$ le volume de Ω_t. Alors la fonction $t \mapsto Vol(t)$ est différentiable en $t = 0$ avec*

$$Vol'(0) = \int_\Omega div(V)dx. \tag{4.4}$$

De plus si Ω est Lipschitz,

$$Vol'(0) = \int_{\partial\Omega} V.nd\sigma. \tag{4.5}$$

Une valeur propre multiple n'est pas différentiable au sens classique. Deux stratégies sont alors possible :

- ◇ l'utilisation du sous-différentiel,
- ◇ l'utilisation de dérivées directionnelles.

Le résultat suivant est basé sur la seconde.

Théorème 4.4 (Dérivation d'une valeur propre de Dirichlet multiple). *Soit Ω un ouvert borné de classe C^2. Supposons que $\lambda_k(\Omega)$ est une valeur propre de multiplicité $p \geq 2$. Notons $u_{k_1}, u_{k_2}, \ldots, u_{k_p}$ une famille orthonormale (pour le produit scalaire de L^2) de valeurs propres associées à λ_k. Alors $t \mapsto \lambda_k(\Omega_t)$ possède une dérivée (directionnelle) en $t = 0$ qui est l'une des valeurs propres de la matrice $p \times p$ définie par*

$$\mathcal{M} = (m_{i,j}) \quad avec\ m_{i,j} = -\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_{k_i}}{\partial n} \frac{\partial u_{k_j}}{\partial n} \right) V.nd\sigma, \quad i, j = 1, \ldots, p, \tag{4.6}$$

où $\frac{\partial u_{k_i}}{\partial n}$ est la dérivée normale de la k_i-ième fonction propre u_{k_i} et $V.n$ est le déplacement normal de la frontière induit par le champ de déformation V.

Une première démonstration matricielle de ce théorème est présentée dans la thèse de doctorat d'Alexandre Munnier [28]. Une démonstration plus analytique et calculatoire est donnée par B. Rousselet dans [36]. Dans cet article, B. Rousselet étudie à la fois la réponse statique et les valeurs propres d'une membrane en fonction de sa forme. Bien que les résultats soient donnés dans les deux cas, seul le cas statique est détaillé, l'autre étant similaire. Je vais donc donner ici des éléments du cas des valeurs propres, tout en faisant références à l'article pour certaines parties. Il est à noter que ces deux démonstrations sont techniques et non triviales.

Démonstration. Afin de poser les notations, commençons par rappeler la formulation variationnelle associée au problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ a_\Omega(u, v) = \lambda b_\Omega(u, v) \end{cases} \tag{4.7}$$

où

$$a_\Omega(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega, \tag{4.8}$$

$$b_\Omega(u, v) = \int_\Omega uv \, d\Omega. \tag{4.9}$$

Afin de simplifier un peu les écritures, notons $\Phi = Id + F$. On a donc ici $F(t) = tV$. On notera également $\Omega_F = (I + F)(\Omega)$. Enfin, posons

$$\|F\| = \sup_{x \in \widetilde{\Omega}} \Big[|F(x)|_2 + |DF(x)|_2 \Big]$$

où $|F(x)|_2$ est la norme euclidienne de $F(x)$ et $|DF(x)|_2$ la norme associée de $DF(x)$.

Une fonction f définie sur Ω_F peut être écrite comme une fonction sur Ω avec

$$\widetilde{f}(x) = f\left(x + F(x)\right).$$

Puisque Φ est un homéomorphisme de Ω dans Ω_F, $f\left(\widetilde{x}\right) = \widetilde{f}\left(\Phi^{-1}\left(\widetilde{x}\right)\right)$.

Lemme 4.5. *Soient les formes bilinéaires définies sur $H_0^1(\Omega)$ suivantes :*

$$\widetilde{a}_{\Omega_F}(u,v) = \int_\Omega \left[(D\Phi^{-1})^t \nabla u \cdot (D\Phi^{-1})^t \nabla v\right] |D\Phi|\, d\Omega, \tag{4.10}$$

$$\widetilde{b}_{\Omega_F}(\widetilde{y},v) = \int_\Omega \widetilde{y} v |D\Phi|\, d\Omega, \tag{4.11}$$

où Φ et son inverse sont supposées $\mathcal{C}^1(\widetilde{\Omega})$, $D\Phi$ est la matrice Jacobienne de Φ et $|D\Phi|$ son déterminant (le Jacobien).
Alors les nombres réels $\lambda = \lambda(\Omega_F)$ tels qu'il existe $\widetilde{y} \in H_0^1(\Omega)$, $\widetilde{y} \neq 0$, satisfaisant

$$\widetilde{a}_{\Omega_F}(\widetilde{y},v) = \lambda \widetilde{b}_{\Omega_F}(\widetilde{y},v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{4.12}$$

sont les valeurs propres sur le domaine Ω_F et $y = \widetilde{y} \circ \Phi^{-1}$ sont les fonctions propres associées.

Preuve : Les solutions du problème de valeur propre sur Ω_F sont les solutions de l'équation variationnelle

$$a_{\Omega_F}(y,v) = \lambda b_{\Omega_F}(y,v), \quad y \in H_0^1(\Omega_F),\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in H_0^1(\Omega_F) \tag{4.13}$$

où a_{Ω_F} et b_{Ω_F} sont définies dans (4.8-4.9) avec $\Omega = \Omega_F$.
Passant de Ω_F à Ω et en notant que

$$D_{\widetilde{x}} v = D_x \widetilde{v}\left(D_{\widetilde{x}} \Phi^{-1}\right)$$

on obtient

$$\nabla_{\widetilde{x}} v = \left(D_{\widetilde{x}} \Phi^{-1}\right)^t \nabla_x \widetilde{v}.$$

Par conséquent

$$a_{\Omega_F}(y,v) = \int_{\Omega_F} (\nabla y \cdot \nabla v)\, d\Omega_F = \int_\Omega \left[(D\Phi^{-1})^t \nabla \widetilde{y} \cdot (D\Phi^{-1})^t \nabla \widetilde{v}\right] |D\Phi|\, d\Omega = \widetilde{a}_{\Omega_F}(\widetilde{y},\widetilde{v})$$

et

$$b_{\Omega_F}(y,v) = \int_{\Omega_F} yv\, d\Omega_F = \int_\Omega \widetilde{y}\widetilde{v} |D\Phi|\, d\Omega = \widetilde{b}_{\Omega_F}(\widetilde{y},\widetilde{v}).$$

Puisque Φ est un difféomorphisme, il existe une correspondance directe entre les fonctions dans $H_0^1(\Omega_F)$ et de $H_0^1(\Omega)$. Par conséquent il est équivalent que l'équation

$$\widetilde{a}_{\Omega_F}(\widetilde{y},\widetilde{v}) = \lambda \widetilde{b}_{\Omega_F}(\widetilde{y},\widetilde{v})$$

est vraie pour tout $v \in H_0^1(\Omega_F)$ ou tout $\widetilde{v} \in H_0^1(\Omega)$. Finalement, $\widetilde{v}$ étant arbitraire dans $H_0^1(\Omega)$, on peut la noter v. □

Remarque 4.6. Le changement de variables n'est pas uniquement vrai si Φ et son inverse sont $\mathcal{C}^1$ mais également si Φ et son inverse sont Lipschitziennes.

Suite de la démonstration du théorème 4.4 :
$\widetilde{a}_{\Omega_F}(\widetilde{y}_{\Omega_F}, v) = \widetilde{\lambda}_{\Omega_F}\widetilde{b}_{\Omega_F}(\widetilde{y}_{\Omega_F}, v)$ peut être écrite

$$\int_\Omega \left[((I+DF)^{-1})^t\nabla\widetilde{y}_{\Omega_F}\cdot((I+DF)^{-1})^t\nabla v\right]|\det(I+DF)|\,d\Omega = \widetilde{\lambda}_{\Omega_F}\int_\Omega \widetilde{y}_{\Omega_F}v|\det(I+DF)|\,d\Omega.$$

On va maintenant faire des développements au 1er ordre par rapport à F.
Notons $\widetilde{y}_{\Omega_F} = y_\Omega + \widetilde{y}'_{\Omega,F} + o(F)$ et $\widetilde{\lambda}_{\Omega_F} = \lambda_\Omega + \widetilde{\lambda}'_{\Omega,F} + o(F)$ où $\Omega = \Omega_F$ pour $F = 0$. On réfère à [36] pour plus de précisions sur ces différents éléments, notamment le sens de $o(F)$.
On a

$$\begin{aligned}
(I+DF)^{-1} &= I - DF + o(DF)\\
\det(I+DF) &= 1 + div(F) + F_{1,1}F_{2,2} - F_{1,2}F_{2,1} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2\\
\det(I+DF) &= 1 + div(F) + o(DF) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \text{ mais aussi dans } \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

et pour DF suffisamment petit

$$|\det(I+DF)| = 1 + div(F) + o(DF).$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[(I-DF+o(DF))^t\nabla(y_\Omega + \widetilde{y}'_{\Omega,F} + o(F))\cdot(I-DF+o(DF))^t\nabla v\right](1+div(F)+o(DF))\,d\Omega\\
&\qquad = (\lambda_\Omega + \widetilde{\lambda}'_{\Omega,F} + o(F))\int_\Omega (y_\Omega + \widetilde{y}'_{\Omega,F} + o(F))v(1+div(F)+o(DF))\,d\Omega
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla y_\Omega\cdot\nabla v\,d\Omega - \int_\Omega \left[(DF)^t + DF\right]\nabla y_\Omega\cdot\nabla v\,d\Omega + \int_\Omega \nabla y_\Omega\cdot\nabla v\,div(F)\,d\Omega + \int_\Omega \nabla\widetilde{y}'_{\Omega,F}\cdot\nabla v\,d\Omega\\
&= \lambda_\Omega\int_\Omega y_\Omega v\,d\Omega + \lambda_\Omega\int_\Omega y_\Omega v\,div(F)\,d\Omega + \lambda_\Omega\int_\Omega \widetilde{y}'_{\Omega,F}v\,d\Omega + \widetilde{\lambda}'_{\Omega,F}\int_\Omega y_\Omega v\,d\Omega + o(DF) + o(F).
\end{aligned}$$

Or

$$a_\Omega(y_\Omega, v) = \lambda_\Omega b_\Omega(y_\Omega, v) \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega \nabla y_\Omega\cdot\nabla v\,d\Omega = \lambda_\Omega\int_\Omega y_\Omega v\,d\Omega.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\widetilde{y}'_{\Omega,F}\cdot\nabla v\,d\Omega &= \int_\Omega \left[(DF)^t + DF\right]\nabla y_\Omega\cdot\nabla v\,d\Omega - \int_\Omega \nabla y_\Omega\cdot\nabla v\,div(F)\,d\Omega\\
&\quad + \lambda_\Omega\int_\Omega y_\Omega v\,div(F)\,d\Omega + \lambda_\Omega\int_\Omega \widetilde{y}'_{\Omega,F}v\,d\Omega + \widetilde{\lambda}'_{\Omega,F}\int_\Omega y_\Omega v\,d\Omega + o(DF) + o(F).
\end{aligned}$$

On pose

$$\widetilde{a}'_{\Omega,F}(y,v) = -\int_\Omega \left[(DF)^t + DF\right]\nabla y\cdot\nabla v\,d\Omega + \int_\Omega \nabla y\cdot\nabla v\,div(F)\,d\Omega, \tag{4.14}$$

$$\widetilde{b}'_{\Omega,F}(y,v) = \int_\Omega yv\,div(F)\,d\Omega. \tag{4.15}$$

On a alors

$$a_\Omega(\widetilde{y}'_{\Omega,F}, v) = -\widetilde{a}'_{\Omega,F}(y_\Omega, v) + \lambda_\Omega\widetilde{b}'_{\Omega,F}(y_\Omega, v) + \lambda_\Omega b_\Omega(\widetilde{y}'_{\Omega,F}, v) + \widetilde{\lambda}'_{\Omega,F}b(y_\Omega, v)$$

d'où

$$\widetilde{\lambda}'_{\Omega,F} = \widetilde{a}'_{\Omega,F}(y_\Omega, y_\Omega) - \lambda_\Omega\widetilde{b}'_{\Omega,F}(y_\Omega, y_\Omega)$$

où y_Ω est une fonction propre associée à λ_Ω normalisée par

$$b_\Omega(y_\Omega, y_\Omega) = 1.$$

On peut montrer que $\widetilde{a}'_{\Omega,F}$ et $\widetilde{b}'_{\Omega,F}$ sont toutes deux linéaires en F et qu'il existe des constantes $e_1 \geq 0$ et $e_2 \geq 0$ telles que

$$|\widetilde{a}'_{\Omega,F}(z,z)| \leq e_1 \|F\| a_\Omega(z,z), \quad |\widetilde{b}'_{\Omega,F}(y,v)| \leq e_2 \|y\|^2_{L^2(\Omega)} \|F\|,$$

comme montré aux Lemmes 3.2 et 3.6 de [36]. En montrant de plus certaines inégalités sur $\widetilde{a}_{\Omega_F} - a_\Omega - \widetilde{a}'_{\Omega,F}$ et $\widetilde{b}_{\Omega_F} - b_\Omega - \widetilde{b}'_{\Omega,F}$ pour $\|F\|$ petit, on démontre des propriétés de différentiabilité des valeurs propres multiples. Cette démonstration est similaire à celle du théorème 2 de [17] présentées en Annexe B. Elle est technique et fait intervenir une résolvante dans le plan complexe et la représentation intégrale de Dunford du projecteur spectral. Je ne la fait donc pas ici. Néanmoins on peut en déduire le résultat suivant :

Théorème 4.7. *Soit λ_{Ω_0} une valeur propre de multiplicité m associée à λ de l'équation (4.12). Dans chaque voisinage $\mathcal{V}(\lambda_{\Omega_0})$ de λ_{Ω_0} ne contenant aucune autre valeur propre, il y a exactement m valeurs propres $\lambda_{1,\Omega}, \ldots, \lambda_{m,\Omega}$ à condition que Ω soit suffisamment proche de Ω_0, dans le sens où il existe un champ de vecteurs $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tel que $\Omega = \Omega_F = (I+F)(\Omega_0)$.*
De plus, pour $\|F\|$ suffisamment petite, il y a exactement m valeurs propres $\lambda_{1,\Omega_F}, \ldots, \lambda_{m,\Omega_F}$ dans $\mathcal{V}(\lambda_{\Omega_0})$.

Si $m = 1$ (valeur propre simple), alors λ_{Ω_F} est Fréchet-différentiable et

$$\lambda'_{\Omega_0,F} = \widetilde{a}'_{\Omega_0,F}(y_{\Omega_0}, y_{\Omega_0}) - \lambda_{\Omega_0} \widetilde{b}'_{\Omega_0,F}(y_{\Omega_0}, y_{\Omega_0}),$$

où y_{Ω_0} est une fonction propre associée à λ_{Ω_0}, normalisée par $\widetilde{b}_{\Omega_0,F}(y_{\Omega_0}, y_{\Omega_0}) = 1$.
Si $m > 1$ (valeur propre multiple), alors λ_{i,Ω_F} est différentiable directionnellement, c'est-à-dire

$$\lambda'_{i,\Omega_0,F} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\lambda_{i,\Omega_{tF}} - \lambda_{\Omega_0}}{t}$$

existe, pour $i = 1, \ldots, m$, et $\lambda'_{i,\Omega_0,F}$ sont les valeurs propres de la matrice M de coefficients

$$M_{i,j} = \widetilde{a}'_{\Omega_0,F}(y_{i,\Omega_0}, y_{j,\Omega_0}) - \lambda_{\Omega_0} \widetilde{b}'_{\Omega_0,F}(y_{i,\Omega_0}, y_{j,\Omega_0}), \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, m,$$

où $\{y_{i,\Omega_0},\ i = 1, \ldots, m\}$ forme une base de l'espace propre associé avec

$$\widetilde{b}_{\Omega_0}(y_{i,\Omega_0}, y_{j,\Omega_0}) = \delta_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, m.$$

Maintenant,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \cdot \nabla z = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(F \cdot \nabla z) - F \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \nabla z, \qquad 1 \leq i \leq n$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left[(DF)^t + DF\right] \nabla z \cdot \nabla v &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(F \cdot \nabla z)\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \left[F \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \nabla z\right]\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(F \cdot \nabla v)\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) - \left[F \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \nabla v\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) \\
&= \nabla(F \cdot \nabla z) \cdot \nabla v + \nabla z \cdot \nabla(F \cdot \nabla v) - F \cdot \nabla(\nabla z \cdot \nabla v).
\end{aligned}$$

De plus

$$(\nabla z \cdot \nabla v)\, div(F) = div\left[(\nabla z \cdot \nabla v)\, F\right] - \nabla\left(\nabla z \cdot \nabla v\right) \cdot F.$$

En utilisant ces deux dernières égalités on a

$$\widetilde{a}'_{\Omega,F}(z,v) = -\int_\Omega \left[\nabla\left(F \cdot \nabla z\right) \cdot \nabla v + \nabla z \cdot \nabla\left(F \cdot \nabla v\right)\right] d\Omega + \int_\Omega div\left[(\nabla z \cdot \nabla v)\, F\right] d\Omega.$$

En utilisant une intégration par parties on trouve

$$\begin{aligned}\widetilde{a}'_{\Omega,F}(z,v) = &\int_\Omega \left[(F \cdot \nabla z)\, \Delta v + \Delta z\, (F \cdot \nabla v)\right] d\Omega \\ &- \int_{\partial\Omega} \left[(F \cdot \nabla z)\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)(F \cdot \nabla v)\right] d\sigma + \int_{\partial\Omega} (\nabla z \cdot \nabla v)\,(F \cdot n)\, d\sigma.\end{aligned}$$

Puisque $z \in H_0^1(\Omega)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$ on a $\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right) n$ et $\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) n$ sur $\partial\Omega$ d'où

$$\widetilde{a}'_{\Omega,F}(z,v) = \int_\Omega \left[(F \cdot \nabla z)\, \Delta v + \Delta z\, (F \cdot \nabla v)\right] d\Omega - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)(F \cdot n)\, d\sigma.$$

D'autre part

$$\widetilde{b}'_{\Omega_0,F}(y,v) = -\int_{\Omega_0} \left[(\nabla y \cdot F)v + y(\nabla v \cdot F)\right] d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} yv(F \cdot n)\, d\sigma.$$

Puisque $y = v = 0$ sur $\partial\Omega_0$,

$$\widetilde{b}'_{\Omega_0,F}(y,v) = -\int_{\Omega_0} \left[(\nabla y \cdot F)v + y(\nabla v \cdot F)\right] d\Omega_0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}M_{i,j} \;=\; &\int_{\Omega_0} \left[(F\nabla y_{i,\Omega_0})\Delta y_{j,\Omega_0} + \Delta y_{i,\Omega_0}(F\nabla y_{j,\Omega_0})\right] d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial y_{i,\Omega_0}}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial y_{j,\Omega_0}}{\partial n}\right)(F \cdot n)\, d\sigma \\ &+\lambda_{\Omega_0} \int_{\Omega_0} \left[(\nabla y_{i,\Omega_0} \cdot F)y_{j,\Omega_0} + y_{i,\Omega_0}(\nabla y_{j,\Omega_0} \cdot F)\right] d\Omega_0.\end{aligned}$$

Par définition des y_{k,Ω_0}, $\Delta y_{k,\Omega_0} + \lambda_{\Omega_0} y_{k,\Omega_0}$ sur Ω_0 d'où

$$M_{i,j} = -\int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial y_{i,\Omega_0}}{\partial n}\right)\left(\frac{\partial y_{j,\Omega_0}}{\partial n}\right)(F \cdot n)\, d\sigma$$

et pour une valeur propre simple, pour $\int_{\Omega_0} y_{\Omega_0}^2\, d\Omega_0 = 1$,

$$\lambda'_{\Omega_0,F} = -\int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial y_{\Omega_0}}{\partial n}\right)^2 (F \cdot n)\, d\sigma.$$

□

4.2 Dérivée des valeurs propres du Laplacien-Dirichlet sur le disque de rayon R en dimension 2 par rapport au domaine

4.2.1 Valeurs propres simples

Théorème 4.8. *Soit λ_i une valeur propre simple du Laplacien-Dirichlet sur le disque en dimension 2.*
Le disque d'aire 1 est un point critique pour $t \mapsto |\Omega_t|\lambda_i(\Omega_t)$.

Démonstration. Par le théorème 3.5 on sait que les valeurs propres pour le disque sont de la forme

$$\lambda_{0,k} = \frac{j_{0,k}^2}{R^2}$$

pour $k \geq 1$ et les fonctions propres normalisées correspondantes sont données par

$$u_{0,k}(r,\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{R|J_0'(j_{0,k})|} J_0\left(\frac{j_{0,k} r}{R}\right).$$

Puisque nous travaillons sur le disque avec des coordonnées polaires, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$ et

$$\frac{\partial u_{0,k}}{\partial r}(r,\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{j_{0,k}}{R^2|J_0'(j_{0,k})|} J_0'\left(\frac{j_{0,k} r}{R}\right).$$

∂B_R correspond au cas $r = R$, $\theta \in [0, 2\pi[$ donc

$$\left(\frac{\partial u_{0,k}}{\partial r}\right)^2 (R,\theta) = \frac{j_{0,k}^2}{\pi R^4 |J_0'(j_{0,k})|^2} \left(J_0'\left(j_{0,k}\right)\right)^2 = \frac{j_{0,k}^2}{\pi R^4}.$$

Si on note $V = (V_r, V_\theta)$ un champ de vecteur en coordonnées polaires, sur le disque $V \cdot n = V_r$. En se rappelant que $d\sigma = R\, d\theta$,

$$\lambda_{0,k}'(0) = -\int_{\partial B_R} \left(\frac{\partial u_{0,k}}{\partial r}\right)^2 V_r d\sigma = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u_{0,k}}{\partial r}\right)^2 (R,\theta) R V_r \, d\theta = -\frac{j_{0,k}^2}{\pi R^3} \int_0^{2\pi} V_r \, d\theta.$$

Définissons, avec les notations précédentes,

$$F(t) = |\Omega_t| \lambda_{0,k}(\Omega_t).$$

Alors

$$F'(0) = |B_R| \lambda_{0,k}'(0) + \lambda_{0,k}(B_R) \mathrm{Vol}'(0) = \pi R^2 \lambda_{0,k}'(0) + \frac{j_{0,k}^2}{R^2} \mathrm{Vol}'(0).$$

De plus, V étant suffisamment régulier,

$$\mathrm{Vol}'(0) = \int_{\partial B_R} V \cdot n d\sigma = R \int_0^{2\pi} V_r(R,\theta,\phi) d\theta.$$

Donc

$$F'(0) = \left[-\pi R^2 \frac{j_{0,k}^2}{\pi R^3} + \frac{j_{0,k}^2}{R^2} R\right] \int_0^{2\pi} V_r(R,\theta,\phi) d\theta = 0.$$

En conclusion, pour tout champ de vecteur V, $F'(0) = 0$, d'où le résultat. □

Remarque 4.9. De tels i existent. Par exemple

i	1	6	15	30
λ_i	18.1684	95.7283	235.2645	436.8079

4.2.2 Valeurs propres de multiplicité 2

Théorème 4.10. *Soit $i \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que*

$$\lambda_{i-1}(B_R) < \lambda_i(B_R) = \lambda_{i+1}(B_R) = \frac{j_{n,k}^2}{R^2} < \lambda_{i+2}(B_R).$$

Alors la i-ème valeur propre du Laplacien-Dirichlet n'est pas minimisée par le disque parmi les ouverts d'aire donnée en dimension 2.

Démonstration. Par le théorème 3.5 on sait que les valeurs propres de multiplicité 2 sont de la forme

$$\lambda_{n,k} = \frac{j_{n,k}^2}{R^2}$$

pour $n, k \geq 1$ et que les fonctions propres associées sont données par

$$u_{n,k}^1(r,\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{R|J_n'(j_{n,k})|} J_n\left(\frac{j_{n,k} r}{R}\right) \cos(n\theta), \tag{4.16}$$

$$u_{n,k}^2(r,\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{R|J_n'(j_{n,k})|} J_n\left(\frac{j_{n,k} r}{R}\right) \sin(n\theta), \tag{4.17}$$

avec $(u_{n,k}^1, u_{n,k}^2)$ une famille orthonormale (pour le produit scalaire de L^2).

On veut calculer $\mathcal{M}$ donnée par (4.6).

Puisque nous travaillons sur un disque, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$. L'application à nos fonctions propres donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{n,k}^1}{\partial r}(r,\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{j_{n,k}}{R^2|J_n'(j_{n,k})|} J_n'\left(\frac{j_{n,k} r}{R}\right) \cos(n\theta), \\
\frac{\partial u_{n,k}^2}{\partial r}(r,\theta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{j_{n,k}}{R^2|J_n'(j_{n,k})|} J_n'\left(\frac{j_{n,k} r}{R}\right) \sin(n\theta).
\end{aligned}$$

∂B_R correspond au cas $r = R$, $\theta \in [0, 2\pi[$ donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u_{n,k}^1}{\partial r}\right)^2 (R,\theta) &= \frac{2j_{n,k}^2}{\pi R^4 |J_n'(j_{n,k})|^2} J_n'\left(j_{n,k}\right)^2 \cos^2(n\theta) = \frac{2j_{n,k}^2}{\pi R^4} \cos^2(n\theta), \\
\left(\frac{\partial u_{n,k}^2}{\partial r}\right)^2 (R,\theta) &= \frac{2j_{n,k}^2}{\pi R^4 |J_n'(j_{n,k})|^2} J_n'\left(j_{n,k}\right)^2 \sin^2(n\theta) = \frac{2j_{n,k}^2}{\pi R^4} \sin^2(n\theta), \\
\left(\frac{\partial u_{n,k}^1}{\partial r}\frac{\partial u_{n,k}^2}{\partial r}\right)(R,\theta) &= \frac{2j_{n,k}^2}{\pi R^4 |J_n'(j_{n,k})|^2} J_n'\left(j_{n,k}\right)^2 \cos(n\theta)\sin(n\theta) = \frac{2j_{n,k}^2}{\pi R^4} \cos(n\theta)\sin(n\theta),
\end{aligned}$$

Puisque un champ de vecteur $V = (V_r, V_\theta)$ est sur le disque $V \cdot n = V_r$ et en se rappelant que $d\sigma = R\, d\theta$,

$$m_{1,1} = -\int_{\partial B_R} \left(\frac{\partial u_{n,k}^1}{\partial r}\right)^2 V_r \, d\sigma = -\frac{2j_{n,k}^2}{\pi R^3} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) V_r \, d\theta, \tag{4.18}$$

$$m_{2,2} = -\frac{2j_{n,k}^2}{\pi R^3} \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) V_r \, d\theta, \tag{4.19}$$

$$m_{1,2} = m_{2,1} = -\frac{2j_{n,k}^2}{\pi R^3} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta)\sin(n\theta) V_r \, d\theta, \tag{4.20}$$

Notons

$$\begin{aligned}\mu &= \sqrt{\left(\int_0^{2\pi}\sin^2(n\theta)V_r(\theta)\,d\theta-\int_0^{2\pi}\cos^2(n\theta)V_r(\theta)\,d\theta\right)^2+4\left(\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\sin(n\theta)V_r(\theta)\,d\theta\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(\int_0^{2\pi}\cos(2n\theta)V_r(\theta)\,d\theta\right)^2+\left(\int_0^{2\pi}\sin(2n\theta)V_r(\theta)\,d\theta\right)^2}.\end{aligned}$$

Alors les valeurs propres de $\mathcal{M}$ sont données par

$$-\frac{j_{n,k}^2}{\pi R^3}\mu-\frac{j_{n,k}^2}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}V_r(\theta)\,d\theta \quad \text{and} \quad \frac{j_{n,k}^2}{\pi R^3}\mu-\frac{j_{n,k}^2}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}V_r(\theta)\,d\theta.$$

Définissons, avec les notations précédentes,

$$F(t)=|\Omega_t|\lambda_{n,k}(\Omega_t). \tag{4.21}$$

Alors

$$F'(0)=|B_R|\lambda'_{n,k}(0)+\lambda_{n,k}(B_R)\mathrm{Vol}'(0)=\pi R^2\mathrm{eig}(\mathcal{M})+\frac{j_{n,k}^2}{R^2}\mathrm{Vol}'(0)$$

où $\mathrm{eig}(\mathcal{M})$ est une valeur propre de $\mathcal{M}$. Ainsi

$$F'(0)=\frac{j_{n,k}^2}{R}\left(\pm\mu-\int_0^{2\pi}V_r\right)+\frac{j_{n,k}^2}{R}\int_0^{2\pi}V_r=\pm\frac{j_{n,k}^2}{R}\mu.$$

En conclusion, pour tout champ de vecteurs V, $F'(0)\leq 0$ pour l'une des valeurs propres et $F'(0)\geq 0$ pour l'autre. De plus, il est possible de trouver un champ de vecteurs V tel que $F'(0)<0$ pour l'une des valeurs propres et $F'(0)>0$ pour l'autre. C'est-à-dire qu'il existe une déformation pour laquelle $\lambda_{n,k}$ diminue, donc $\lambda_{n,k}$ n'est pas minimisée par le disque parmi les ouverts d'aire donnée. Par contre ce n'est pas suffisant pour conclure pour λ_{i+1} puisque $F'(0)=0$ pour certains champs de vecteurs. Il nous faut donc étudier la dérivée seconde dans le cas $F'(0)=0$. □

Remarque 4.11. De tels i existent. Par exemple

i	2	4	7	9	11	13	16	18
λ_i	46.1248	82.8583	127.8831	154.6243	180.9021	222.5818	241.7108	299.3233

4.3 Dérivée des valeurs propres du Laplacien-Dirichlet sur la boule de rayon R en dimension 3 par rapport au domaine

4.3.1 Valeurs propres simples

Dans le théorème 3.6, les valeurs propres simples sont celles correspondant à $l=0$, $k\in\mathbb{N}^*$. Donc soit une valeur propre

$$\lambda_{0,k}(B_R)=\frac{j_{\frac{1}{2},k}^2}{R^2}$$

et l'une de ses fonctions propres

$$v_k(r,\theta,\phi)=\frac{J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{j_{\frac{1}{2},k}}{R}r\right)}{\sqrt{r}}P_0^0(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2R}{\pi j_{\frac{1}{2},k}}}\,\frac{1}{r}\sin\left(\frac{j_{\frac{1}{2},k}}{R}r\right).$$

Pour commencer, clarifions ce qu'est $j^2_{\frac{1}{2},k}$. Rappelons que $j^2_{\frac{1}{2},k}$ sont les zéros de la fonction $J_{\frac{1}{2}}$ et rappelons que $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x)$.

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \pi\mathbb{N}.$$

Donc $j_{\frac{1}{2},k} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda_{0,k}(B_R) = \left(\frac{k\pi}{R}\right)^2$. Ainsi

$$v_k(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2R}{k\pi^2}}\,\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right) = \sqrt{\frac{2R}{k}}\,\frac{1}{\pi r}\sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right).$$

Théorème 4.12. *Soit λ_i une valeur propre simple du Laplacien-Dirichlet sur la boule en dimension 3.*
La boule de mesure 1 est un point critique pour $t \mapsto |\Omega_t|^{2/3}\lambda_i(\Omega_t)$.

Démonstration. Afin d'appliquer le théorème 4.2, on veut normer v_k pour la norme L^2.

$$\begin{aligned}
\|v_k(r,\theta,\phi)\|^2_{L^2} &= \iiint_{B_R} v_k(r,\theta,\phi)^2 r^2\sin(\theta)drd\theta d\phi \\
&= \frac{2R}{k\pi^2}\underbrace{\int_{-\pi}^{pi} d\phi}_{=2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta}_{=2}\int_0^R \sin^2\left(\frac{k\pi}{R}r\right)dr \\
&= \frac{8R}{k\pi}\times R\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin(2k\pi)}{4k\pi}\right) = \frac{4R^2}{k\pi}.
\end{aligned}$$

Ainsi une fonction propre normée (pour la norme L^2) associée à $\lambda_{0,k}(B_R) = \left(\frac{k\pi}{R}\right)^2$ est

$$u_k(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{2R\pi}}\,\frac{1}{r}\sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right) \tag{4.22}$$

Puisque nous travaillons sur la boule, $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$. L'application à notre fonction propre donne :

$$\frac{\partial u_k}{\partial r}(r,\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{1}{2R\pi}}\left[\frac{k\pi\cos\left(\frac{k\pi}{R}r\right)}{rR} - \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{R}r\right)}{r^2}\right].$$

∂B_R correspond au cas $r = R$, $\theta \in [0,\pi]$, $\phi \in [-\pi,\pi[$. Donc calculons $\left(\frac{\partial u_k}{\partial r}\right)^2(R,\theta,\phi)$:

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial r}\right)^2(R,\theta,\phi) = \frac{1}{2R\pi}\left[\frac{k\pi\cos(k\pi)}{R^2} - \frac{\sin(k\pi)}{R^2}\right]^2 = \frac{k^2\pi^2}{2R^5\pi} = \frac{k^2\pi}{2R^5}.$$

Puisque un champ de vecteurs $V = (V_r, V_\theta, V_\phi)$ est sur la boule $V\cdot n = V_r$ et se rappelant $d\sigma = R^2\sin(\theta)\,d\phi\,d\theta$,

$$\begin{aligned}
\lambda'_{0,k}(0) &= -\int_{\partial B_R}\left(\frac{\partial u_k}{\partial r}\right)^2 V_r d\sigma \\
&= -\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial u_k}{\partial r}\right)^2(R,\theta,\phi)R^2\sin(\theta)V_r\,d\phi\,d\theta \\
&= -\frac{k^2\pi}{2R^3}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\theta)V_r(R,\theta,\phi)\,d\phi\,d\theta.
\end{aligned}$$

Définissons, avec les notations précédentes,

$$F(t) = |\Omega_t|^{2/3}\lambda_{0,k}(\Omega_t).$$

Alors

$$F'(0) = |B_R|^{2/3}\lambda'_{0,k}(0) + \frac{2\lambda_{0,k}(B_R)}{3|B_R|^{1/3}}\mathrm{Vol}'(0) = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{2/3} R^2\lambda'_{0,k}(0) + \left(\frac{2\pi^2}{9}\right)^{1/3}\frac{k^2\pi}{R^3}\mathrm{Vol}'(0).$$

De plus, pour V suffisamment régulier,

$$\mathrm{Vol}'(0) = \int_{\partial B_R} V\cdot n d\sigma = R^2\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi V_r(R,\theta,\phi)\sin(\theta)d\theta d\phi.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F'(0) &= \left[-\left(\frac{4}{3}\pi\right)^{2/3}\frac{k^2\pi}{2R} + \left(\frac{2\pi^2}{9}\right)^{1/3}\frac{k^2\pi}{R}\right]\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi V_r(R,\theta,\phi)\sin(\theta)d\theta d\phi \\ &= \left[-\left(\frac{2\pi^2}{9}\right)^{1/3}\frac{k^2\pi}{R} + \left(\frac{2\pi^2}{9}\right)^{1/3}\frac{k^2\pi}{R}\right]\int_0^\pi\int_{-\pi}^\pi V_r(R,\theta,\phi)\sin(\theta)d\theta d\phi \\ &= 0. \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout champ de vecteurs V, $F'(0) = 0$, d'où le résultat. □

Remarque 4.13. De tels i existent. Par exemple

i	1	10	46	99
λ_i	25.6463	102.5854	230.8171	410.3415

4.3.2 Valeurs propres de multiplicité $2l+1$ ($l > 0$)

Théorème 4.14. *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$ tels que $\lambda_{k-1}(B_R) < \lambda_k(B_R) = \lambda_{k+1}(B_R) = \cdots = \lambda_{k+2l}(B_R) < \lambda_{k+2l+1}(B_R)$ (c'est-à-dire $\lambda_k(B_R)$ est de multiplicité $2l+1$).*
Alors les valeurs propres λ_k, λ_{k+1}, ... λ_{k+2l-1} du Laplacien-Dirichlet ne sont pas minimisées par la boule parmi les ouverts de mesure donnée en dimension 3.

Remarque 4.15. En particulier, ce théorème prouve que λ_3 n'est pas minimisée par la boule en dimension 3, ce qui contredit le problème ouvert proposé par A. Henrot dans [18] en page 80.

Démonstration. Notons B la boule $\mathbb{R}^3$ centrée en 0 et de mesure 1.
Soit $u_1, \cdots u_{2l+1}$ une base de fonctions propres du Laplacien-Dirichlet sur la boule associées à la valeur propre $\lambda_k(B)$.

Soit (V^r) une suite de champs de vecteurs tels que $\forall\varphi \in \mathcal{C}^\infty$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B}\varphi V^r\cdot n d\sigma &= \int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi[}\varphi(R,\theta,\Phi)V_r^r(R,\theta,\Phi)R^2\sin(\theta)d\theta d\Phi \\ &\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi[}\varphi(R,\theta,\Phi)(-\delta_{(\theta=\frac{\pi}{2},\Phi=0)})R^2\sin(\theta)d\theta d\Phi = -R^2\varphi\left(R,\frac{\pi}{2},0\right). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Un exemple d'une telle suite est donnée à la fin de la démonstration.

Avec les notations précédentes, notons $F_r(t) = |\Omega_t^r|^{2/3}\lambda_k(\Omega_t^r)$ avec $\Omega_t^r = (\mathrm{Id}+tV^r)(B)$ (donc $\Omega_0^r = B$).
En utilisant les théorèmes 4.4 et 4.3, on obtient

$$F_r'(0) = |B|^{2/3}\mathrm{eig}(\mathcal{M}^r) + \frac{2}{3}\lambda_k(B)|B|^{-1/3}\int_{\partial B} V^r \cdot n d\sigma$$

où

$$\mathcal{M}_{i,j}^r = \int_{\partial B}\left(\frac{\partial u_i}{\partial n}\frac{\partial u_j}{\partial n}\right) V^r \cdot n d\sigma.$$

En utilisant 4.23, on a :

$$\int_{\partial B} V^r \cdot n d\sigma \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} -R^2,$$

$$\mathcal{M}_{i,j}^r \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} -R^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial n}\frac{\partial u_j}{\partial n}\right)\left(R, \frac{\pi}{2}, 0\right) = \mathcal{M}_{i,j}.$$

Avec $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{i,j})$, on a la convergence des polynômes caractéristiques $P_{\mathcal{M}^r} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} P_{\mathcal{M}}$ dans le sens suivant : soit $P_{\mathcal{M}^r}(X) = A_{2l+1}^r X^{2l+1} + A_{2l}^r X^{2l} + \cdots + A_1^r X + A_0^r$ et $P_{\mathcal{M}}(X) = A_{2l+1}X^{2l+1} + A_{2l}X^{2l} + \cdots + A_1 X + A_0$, $A_{2l+1}^r, A_{2l+1} \neq 0$. Alors $A_j^r \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} A_j$ puisque tous les coefficients sont des sommes et produits de coefficients des matrices.
Notons $T_1^r \leq T_2^r \leq \ldots \leq T_{2l+1}^r$ les valeurs propres de $P_{\mathcal{M}^r}$ et $T_1 \leq T_2 \leq \ldots \leq T_{2l+1}$ les valeurs propres de $P_{\mathcal{M}}$. Puisque ces polynômes ont le même degré $2l+1$ avec $2l+1$ racines réelles on a $T_j^r \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} T_j$ pour tout j.
Donc

$$F_r'(0) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} |B|^{2/3}\mathrm{eig}(\mathcal{M}) - \frac{2}{3}\lambda_k(B)|B|^{-1/3}R^2.$$

Notons le vecteur colonne N par

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial n} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_{2l+1}}{\partial n} \end{pmatrix}\left(R, \frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Alors la j-ième colonne de $\mathcal{M}$ est $-R^2 N \frac{\partial u_j}{\partial n}\left(R, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ donc tous les colonnes de $\mathcal{M}$ sont proportionnelles. Ainsi $\mathrm{rang}(\mathcal{M}) = 1$ et 0 est une valeur propre de $\mathcal{M}$ de multiplicité $2l$.
Donc $F_r'(0)$ converge vers l'une des valeurs suivantes : $-\frac{2}{3}\lambda_k(B)|B|^{-1/3}R^2 < 0$ $2l$-fois ou $|B|^{2/3}\mathrm{eig}(\mathcal{M}) - \frac{2}{3}\lambda_k(B)|B|^{-1/3}R^2$.

Maintenant, supposons que $\lambda_k(B_R), \lambda_{k+1}(B_R), \ldots, \lambda_{k+2l}(B_R)$ sont minimisées par B. Alors, pour tout champ de vecteurs V $F'(0) \geq 0$. En particulier, pour tout r $F_r'(0) \geq 0$. Mais la limite de $F_r'(0)$ est strictement négative $2l$ fois. Il y a donc une contradiction. Donc, comme les valeurs propres sont en ordre croissant, $\lambda_k(B_R)$ n'est pas minimisé par B.
Supposons alors que $\lambda_{k+1}(B_R), \ldots, \lambda_{k+2l}(B_R)$ sont minimisées par B mais pas $\lambda_k(B_R)$. Alors, pour tout champ de vecteurs V $F'(0) \geq 0$ $2l$ fois. En particulier, pour tout r $F_r'(0) \geq 0$ $2l$ fois. Mais la limite de $F_r'(0)$ est strictement négative $2l$ fois. Il y a donc une contradiction. Donc, puisque les valeurs propres sont en ordre croissant, $\lambda_k(B_R)$ et $\lambda_{k+1}(B_R)$ ne sont pas minimisées par B.
En répétant ce processus, on obtient le résultat. □

Afin de terminer cette démonstration donnons un exemple de suite de champs de vecteurs

(V^r) telle que $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty$, pour B la boule $\mathbb{R}^3$ centrée en 0 et de mesure 1,

$$\int_{\partial B} \varphi V^r \cdot n d\sigma = \int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi[} \varphi(R,\theta,\Phi) V_r^r(R,\theta,\Phi) R^2 \sin(\theta) d\theta d\Phi$$
$$\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi[} \varphi(R,\theta,\Phi)(-\delta_{(\theta=\frac{\pi}{2},\Phi=0)}) R^2 \sin(\theta) d\theta d\Phi = -R^2 \varphi\left(R, \frac{\pi}{2}, 0\right). \quad (4.24)$$

Soit

$$f_n(\theta,\Phi) = \frac{-n \exp\left(-n\left[\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2 + (\Phi - 0)^2\right]\right)}{\pi \mathrm{erf}\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{2}\right) \mathrm{erf}\left(\pi\sqrt{n}\right)}.$$

Remarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{erf}\left(\pi\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{erf}\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{2}\right) = 1$.

Alors

$$\int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} f_n(\theta,\Phi) d\theta d\Phi = 1$$

d'où $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty$

$$\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} f_n(\theta,\Phi)\varphi(\theta,\Phi) d\theta d\Phi\right|$$
$$= \left|\int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} f_n(\theta,\Phi)\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta,\Phi)\right) d\theta d\Phi\right|.$$

On a

$$\begin{aligned}
[0,\pi]\times[-\pi,\pi] \quad = \quad & \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[-\pi, -\frac{1}{n^{1/4}}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[-\frac{1}{n^{1/4}}, \frac{1}{n^{1/4}}\right] \\
& \cup \left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[\frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[-\pi, -\frac{1}{n^{1/4}}\right] \\
& \cup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[-\frac{1}{n^{1/4}}, \frac{1}{n^{1/4}}\right] \\
& \cup \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[\frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right] \times \left[-\pi, -\frac{1}{n^{1/4}}\right] \\
& \cup \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right] \times \left[-\frac{1}{n^{1/4}}, \frac{1}{n^{1/4}}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right] \times \left[\frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right].
\end{aligned}$$

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[-\pi, -\frac{1}{n^{1/4}}\right]$, $ne^{-\frac{5\pi^2}{4}n} \leq ne^{-n\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2 + (\Phi-0)^2\right]} \leq ne^{-2\sqrt{n}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[ne^{-n\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2 + (\Phi-0)^2\right]}\right] = 0$. De plus $\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta,\Phi)\right| \leq M$ pour $M \leq 0$ (fonction continue sur un compact). Donc

$$\int_{(\theta,\Phi)\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^{1/4}}\right]\times\left[-\pi,-\frac{1}{n^{1/4}}\right]} f_n(\theta,\Phi)\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta,\Phi)\right| d\theta d\Phi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour des raisons de symétrie c'est aussi le cas sur $\left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[\frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right]$, sur $\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right] \times \left[-\pi, -\frac{1}{n^{1/4}}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right] \times \left[\frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right]$.

Sur $\left[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[-\frac{1}{n^{1/4}}, \frac{1}{n^{1/4}}\right]$, $ne^{-\left(\frac{n\pi^2}{4}+\sqrt{n}\right)} \leq ne^{-n\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2+(\Phi-0)^2\right]} \leq ne^{-\sqrt{n}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[ne^{-n\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2+(\Phi-0)^2\right]}\right] = 0$. De plus $\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta, \Phi)\right| \leq M$ pour $M \leq 0$ fonction continue sur un compact). Donc

$$\int_{(\theta,\Phi)\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^{1/4}}\right]\times\left[-\frac{1}{n^{1/4}},\frac{1}{n^{1/4}}\right]} f_n(\theta, \Phi) \left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta, \Phi)\right| d\theta d\Phi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour des raisons de symétrie c'est aussi le cas sur $\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right] \times \left[-\frac{1}{n^{1/4}}, \frac{1}{n^{1/4}}\right]$.

On $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[-\pi, -\frac{1}{n^{1/4}}\right]$, $ne^{-(n\pi^2+\sqrt{n})} \leq ne^{-n\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2+(\Phi-0)^2\right]} \leq ne^{-\sqrt{n}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[ne^{-n\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^2+(\Phi-0)^2\right]}\right] = 0$. De plus $\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta, \Phi)\right| \leq M$ pour $M \leq 0$ fonction continue sur un compact). Donc

$$\int_{(\theta,\Phi)\in\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^{1/4}},\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n^{1/4}}\right]\times\left[-\pi,-\frac{1}{n^{1/4}}\right]} f_n(\theta, \Phi) \left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta, \Phi)\right| d\theta d\Phi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour des raisons de symétrie c'est aussi le cas sur $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}\right] \times \left[\frac{1}{n^{1/4}}, \pi\right]$.

$\lim\limits_{\substack{\theta\to\pi/2\\ \Phi\to 0}} \left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta, \Phi)\right| = 0$ d'où sur $\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^{1/4}}, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^{1/4}}\right]\times\left[-\frac{1}{n^{1/4}}, \frac{1}{n^{1/4}}\right]$, $\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta, \Phi)\right| \leq \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\begin{aligned}
&\int_{(\theta,\Phi)\in\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^{1/4}},\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n^{1/4}}\right]\times\left[-\frac{1}{n^{1/4}},\frac{1}{n^{1/4}}\right]} f_n(\theta, \Phi) \left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \varphi(\theta, \Phi)\right| d\theta d\Phi \\
&\qquad \leq \varepsilon_n \int_{(\theta,\Phi)\in\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^{1/4}},\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n^{1/4}}\right]\times\left[-\frac{1}{n^{1/4}},\frac{1}{n^{1/4}}\right]} f_n(\theta, \Phi) d\theta d\Phi \\
&\qquad\qquad \leq \varepsilon_n \int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} f_n(\theta, \Phi) d\theta d\Phi = \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} f_n(\theta, \Phi)\varphi(\theta, \Phi) d\theta d\Phi\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'est-à-dire

$$\int_{(\theta,\Phi)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} f_n(\theta, \Phi)\varphi(\theta, \Phi) d\theta d\Phi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

On peut également préciser le résultat utilisé suivant :

Lemme 4.16. *Soient* $P^j(x) = x^n + a^j_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a^j_1 x + a^j_0$ $\forall j \in \mathbb{N}$ *et* $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *avec* $a^j_k \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} a_k$ $\forall k = 0..n-1$.

Supposons que tous les polynômes ont n *racines réelles :* $\lambda^j_1 \leq \cdots \leq \lambda^j_n$ *pour* P^j *et* $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ *pour* P.
Alors $\lambda^j_k \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_k$ $\forall k = 1..n$.

Démonstration. Fixons k et notons $(\lambda^j) = (\lambda^j_k)$.
La suite (λ^j) est bornée. D'autre part, $\forall A > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $|\lambda^m| \geq A$. Alors $P^m(\lambda^m) = 0$

par définition de λ^m mais $P^m(\lambda^m) = (\lambda^m)^n + a^j_{n-1}(\lambda^m)^{n-1} + \cdots + a^j_1(\lambda^m) + a^j_0 > 0$.
Puisque (λ^j) est borné, il existe une sous-suite (notée aussi (λ^j)) qui converge. Notons $\lambda^j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Alors

$$|P(l)| = |P(l) - P^j(\lambda^j)| \leq \underbrace{|P(l) - P(\lambda^j)|}_{\substack{\to 0 \\ \text{car } \lambda^j \to l}} + \underbrace{|P(\lambda^j) - P^j(\lambda^j)|}_{\substack{\to 0 \\ \text{car } a^j_k \to a_k}}.$$

Donc l est une racine de P.
Puisque $\lambda^j_1 \leq \cdots \leq \lambda^j_n$ et pour tout $k = 1..n$ λ^j_k tend vers une racine de P, $\lambda^j_k \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_k$ $\forall k = 1..n$. □

Remarque 4.17. Exemples de valeurs propres de multiplicité 3 :

i	2	18	67	154
λ_i	52.4660	155.0783	308.9635	514.1371

Corollaire 4.18. *λ_2, λ_3, λ_{18}, λ_{19}, λ_{67}, λ_{68}, λ_{154} et λ_{155} ne sont pas minimisées par la boule parmi les ouverts de mesure donnée en dimension 3.*

Remarque 4.19. Exemples de valeurs propres de multiplicité 5 :

i	5	30	94
λ_i	86.3162	214.9474	394.5976

Corollaire 4.20. *λ_5, λ_6, λ_7, λ_8, λ_{30}, λ_{31}, λ_{32}, λ_{33}, λ_{94}, λ_{95}, λ_{96} et λ_{97} ne sont pas minimisées par la boule parmi les ouverts de mesure donnée en dimension 3.*

Remarque 4.21. L'argument concernant le rang de la matrice $\mathcal{M}$ ne dépendant ni de la forme considérée, ni de la dimension, je pense que le théorème 4.14 est généralisable à toute dimension et à toute forme satisfaisant les hypothèses du théorème 4.4.
Néanmoins, cette généralisation n'est pas immédiate et nécessiterait un véritable travail. Il faut en effet noter que l'écriture en coordonnées sphériques, ainsi que la forme particulière des fonctions propres qui sont radiales dans le cas de la boule simplifient énormément les calculs et permettent un choix de Dirac évident. Ces avantages se perdent en cas de généralisation. Il faudra ensuite également prouver que la convergence d'un champ de vecteurs bien choisi est possible et permet d'intervertir les intégrales et la matrice.

Remarque 4.22. Une formule de dérivation existe dans le cas Neumann, mais cette formule est plus complexe. C'est pourquoi seul le cas Dirichlet a été traité dans ce chapitre.

Chapitre 5

Les disques, presque jamais minimiseurs

On a vu dans le chapitre précédent que l'étude de la dérivée première des valeurs propres du Laplacien-Dirichlet sur le disque ne suffit pas pour conclure sur la minimalité ou non dans le cas général. L'idée est donc d'étudier la dérivée seconde. Cependant cette formule est complexe à mettre en œuvre.
Je vais dans ce chapitre utiliser la même méthode qu'ont utilisé Wolf et Keller dans [38] pour montrer que le disque est un minimiseur local de λ_3. Pour cela on va faire des petites perturbations (bien choisies) du disque et étudier l'effet de ces perturbations sur les valeurs propres. Si on parvient à trouver une perturbation qui diminue une valeur propre alors cette valeur propre ne peut être minimale pour le disque. C'est ce que je montrerai pour quasiment toutes les valeurs propres. En utilisant ensuite le théorème 2.32 j'en déduis la non-minimalité des unions de disques. Puisque le résultat sur les disques est un résultat local, en explicitant une version locale du théorème 2.32 je pourrai également obtenir une version locale de non-minimalité pour les unions de disques.

Remarque 5.1. Le contenu de ce chapitre fait l'objet d'un article paru [4].

5.1 Petites variations de la frontière du disque

Pour simplifier les calculs, nous allons dans cette partie, travailler avec des domaines d'aire π. L'idée est de faire des petites variations de la frontière du disque unité et de regarder comment évoluent les valeurs propres du Laplacien-Dirichlet.

On considère des domaines d'aire π obtenus à partir du disque unité de la façon suivante : soit $\varepsilon \geq 0$ un petit paramètre. Les points de la frontière du nouveau domaine Ω_ε sont donnés par la paramétrisation $(R(\theta,\varepsilon),\theta)$ où

$$R(\theta,\varepsilon) = 1 + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} + \varepsilon^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta} + O(\varepsilon^3) \quad (5.1)$$

avec $a_{-n} = \overline{a_n}$ et $b_{-n} = \overline{b_n}$ pour tout n.

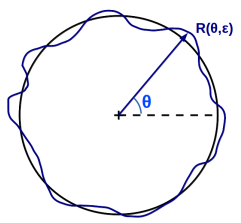


FIGURE 5.1 – Petites déformations du disque unité

Remarque 5.2. On suppose a priori que toutes les séries convergent (y compris dans la suite de cette section). On verra a posteriori que nous n'appliquerons ces résultats qu'avec des sommes finies.

On peut calculer l'aire de ce domaine :

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{R(\theta,\varepsilon)} r\,dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R(\theta,\varepsilon)^2}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\varepsilon\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} + 2\varepsilon^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta} + \varepsilon^2\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right)^2 + O(\varepsilon^3)\right) d\theta. \end{aligned}$$

Mais $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right)^2 = \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} a_l a_n e^{i(l+n)\theta}$, $a_n a_{-n} = |a_n|^2$ et $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = 0$ pour $n \neq 0$ d'où

$$A(\varepsilon) = \pi\left[1 + 2\varepsilon a_0 + \varepsilon^2\left(2b_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2\right)\right] + O(\varepsilon^3). \tag{5.2}$$

Nous allons traiter la contrainte d'aire de deux façons. Tout d'abord, imposons $A(\varepsilon) = \pi + O(\varepsilon^3)$. Nous obtenons ainsi les deux conditions

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad b_0 = -\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2. \tag{5.3}$$

Il ne nous restera alors plus qu'à minimiser $A\lambda$ et non simplement λ.

Une expression des valeurs propres et vecteurs propres du Laplacien-Dirichlet sur le nouveau domaine est donnée dans la partie VII.6.5 de [24], pages 423 à 426. Une autre version, plus détaillée mais moins générale, peut être trouvée dans les pages 155 à 160 de [27]. Des détails sur le théorème utilisé dans [27] peuvent être trouvés dans [29] ou [16].

Soit $\lambda(\Omega_0)$ une valeur propre du Laplacien-Dirichlet sur le disque. Par le théorème 3.5 on sait qu'il existe $m \geq 0$ et $p \geq 1$ tels que $\lambda(\Omega_0) = j_{m,p}^2$. On va donner une expression de cette valeur propre lorsqu'on fait varier le domaine.
Attention, si $m > 0$ $\lambda(\Omega_0)$ est une valeur propre double alors que $\lambda(\Omega_\varepsilon)$ pourra être simple. Ainsi, si $\lambda(\Omega_0)$ est la k-ème valeur propre, $\lambda(\Omega_\varepsilon)$ pourra être la $k-1$-ème, la k-ème ou la $k+1$-ème (les calculs permettront de déterminer laquelle).
Pour la suite, posons $\lambda(\Omega_\varepsilon) = \omega^2$ et notons $u(r,\theta,\varepsilon)$ une fonction propre associée à cette valeur propre. En particulier,$u(r,\theta,0)$ dépendra de(s) $u_{m,p}$ (cf. (3.36)). Les fonctions propres du disque données en (3.36) formant une base, et en tenant compte de (3.19), nous exprimons

$$u(r,\theta,\varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\varepsilon) J_n(\omega r) e^{in\theta}, \quad \text{with } A_{-n} = (-1)^n \overline{A_n} \tag{5.4}$$

avec

$$A_n(\varepsilon) = \delta_{|n|m}\alpha_n + \varepsilon\beta_n + \varepsilon^2\gamma_n + O(\varepsilon^3). \tag{5.5}$$

Comme $A_{-n} = (-1)^n\overline{A_n}$, nous avons également $\alpha_{-n} = (-1)^n\overline{\alpha_n}$, $\beta_{-n} = (-1)^n\overline{\beta_n}$, $\gamma_{-n} = (-1)^n\overline{\gamma_n}$ ...

Remarque 5.3. Notons que pour $m \neq 0$ $\alpha_m \neq 0$ et doit satisfaire

$$u(r,\theta,0) = \left(\alpha_m e^{im\theta} + \overline{\alpha_m e^{im\theta}}\right) J_m(\omega r) \tag{5.6}$$

$u(r,\theta,0)$ étant une fonction propre sur le disque associée à $\lambda(\Omega_0) = j_{m,p}^2$. Ainsi, si on choisit $\alpha_m = 1$, la fonctions propre associée à $j_{m,p}^2$ sera $u_{m,p} = 2J_m(j_{m,p}^2 r)\cos(m\theta)$ et $u_{m,p} = -2J_m(j_{m,p}^2 r)\sin(m\theta)$ si on choisit $\alpha_m = i$ (fonctions propres données au théorème 3.5).

Par [24] nous savons qu'on peut écrire

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + O(\varepsilon^3). \tag{5.7}$$

Puisque $\lambda(\Omega_\varepsilon) = \omega^2$ on obtient donc

$$\lambda(\Omega_\varepsilon) = \omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \varepsilon^2(2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2) + O(\varepsilon^3). \tag{5.8}$$

Notre objectif maintenant est d'exprimer ω_0, ω_1, ω_2 en fonction des suites (a_n), (b_n), (α_n), (β_n) ... Pour cela nous allons utiliser la condition de Dirichlet.
Compte tenu des notations précédemment introduites, la condition de Dirichlet devient

$$u\left(R(\theta,\varepsilon),\theta,\varepsilon\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\varepsilon) J_n\left(\omega R(\theta,\varepsilon)\right) e^{in\theta} = 0. \tag{5.9}$$

Remarquons que $\omega R = \omega_0 + (\omega - \omega_0) + \omega(R-1)$. En l'utilisant et en développant J_n en série de Taylor, (5.9) devient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\varepsilon)\Bigg[J_n(\omega_0) + J_n'(\omega_0)\left(\omega - \omega_0 + \omega(R-1)\right) + \frac{1}{2}J_n''(\omega_0)\left(\omega - \omega_0 + \omega(R-1)\right)^2 + O(\varepsilon^3)\Bigg]e^{in\theta} = 0. \tag{5.10}$$

En utilisant (5.1) pour R, (5.5) pour A_n et (5.7) pour ω dans (5.10)

$$\sum_n \left(\delta_{|n|m}\alpha_n + \varepsilon\beta_n + \varepsilon^2\gamma_n\right)\Bigg(J_n(\omega_0) + J_n'(\omega_0)\left[\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2)\left(\varepsilon\sum_l a_l e^{il\theta} + \varepsilon^2\sum_l b_l e^{il\theta}\right)\right] + \frac{1}{2}J_n''(\omega_0)\left[\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + (\omega_0 + \varepsilon\omega_1)\left(\varepsilon\sum_l a_l e^{il\theta} + \varepsilon^2\sum_l b_l e^{il\theta}\right)\right]^2\Bigg)e^{in\theta} + O(\varepsilon^3) = 0$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_n \delta_{|n|m}\alpha_n J_n(\omega_0)e^{in\theta} \\ & + \varepsilon\sum_n \left(\beta_n J_n(\omega_0) + \delta_{|n|m}\alpha_n J_n'(\omega_0)\left[\omega_1 + \omega_0\sum_l a_l e^{il\theta}\right]\right)e^{in\theta} \\ & + \varepsilon^2\sum_n \Bigg(\gamma_n J_n(\omega_0) + \beta_n J_n'(\omega_0)\left[\omega_1 + \omega_0\sum_l a_l e^{il\theta}\right] \\ & + \delta_{|n|m}\alpha_n\Bigg[J_n'(\omega_0)\left(\omega_2 + \omega_1\sum_l a_l e^{il\theta} + \omega_0\sum_l b_l e^{il\theta}\right) \\ & + \frac{1}{2}J_n''(\omega_0)\left(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1\sum_l a_l e^{il\theta} + \omega_0^2\left(\sum_l a_l e^{il\theta}\right)^2\right)\Bigg]\Bigg)e^{in\theta} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Cette équation est vraie si et seulement si les coefficients devant les ε^j, $j = 0, 1, 2...$ sont tous nuls.

Nous devons maintenant séparer le cas $m = 0$, c'est-à-dire valeurs propres du disque simples, du cas $m \geq 1$, c'est-à-dire valeurs propres du disque doubles.

5.1.1 Valeurs propres simples : cas $m = 0$

Lemme 5.4. *Avec les notations précédentes, si $\lambda(\Omega_0) = j_{0,p}^2$ alors*

$$A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) = \pi j_{0,p}^2 \left(1 + 4\varepsilon^2 \sum_{l>0} \left(1 + \frac{j_{0,p} J_l'(j_{0,p})}{J_l(j_{0,p})}\right) |a_l|^2\right) + O(\varepsilon^3) \tag{5.12}$$

(lorsque cela a un sens).

Démonstration. ***Terme en*** ε^0
$\alpha_0 J_0(\omega_0) = 0$. Mais $\alpha_0 \neq 0$ sinon $u(r, \theta, 0) = 0$. D'où $J_0(\omega_0) = 0$ c'est-à-dire $\omega_0 = j_{0,p}$.

Terme en ε^1
Comme $J_0(\omega_0) = 0$ et $a_0 = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 J_0'(\omega_0) \left(\omega_1 + \omega_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{il\theta}\right) + \sum_{n\neq 0} \beta_n J_n(\omega_0) e^{in\theta} \\ &= \alpha_0 \omega_1 J_0'(\omega_0) + \sum_{n\neq 0} \left[\alpha_0 J_0'(\omega_0)\omega_0 a_n + \beta_n J_n(\omega_0)\right] e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Pour $j \neq 0$

$$\beta_j = -\alpha_0 \omega_0 a_j \frac{J_0'(\omega_0)}{J_j(\omega_0)}. \tag{5.13}$$

Pour 0, $\alpha_0 \omega_1 J_0'(\omega_0) = 0$, mais $\alpha_0 \neq 0$ et $J_0'(\omega_0) \neq 0$ donc $\omega_1 = 0$.

Terme en ε^2
Puisque $\omega_1 = 0$ et $J_0(\omega_0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 = \sum_n &\left(\gamma_n J_n(\omega_0) + \beta_n J_n'(\omega_0)\omega_0 \sum_l a_l e^{il\theta}\right) e^{in\theta} \\ &+ \alpha_0 \left[J_0'(\omega_0)\left(\omega_2 + \omega_0 \sum_l b_l e^{il\theta}\right) + \frac{1}{2} J_0''(\omega_0)\omega_0^2 \sum_{n,l} a_l a_n e^{i(l+n)\theta}\right]. \end{aligned}$$

Pour 0

$$0 = \sum_{n\neq 0} \omega_0 \beta_n a_{-n} J_n'(\omega_0) + \alpha_0 \omega_2 J_0'(\omega_0) + \alpha_0 \omega_0 b_0 J_0'(\omega_0) + \frac{1}{2}\alpha_0 \omega_0^2 J_0''(\omega_0) \sum_{n\neq 0} a_l a_{-l}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_2 = -\omega_0 b_0 - \sum_{n\neq 0} \omega_0 \frac{\beta_n}{\alpha_0} a_{-n} \frac{J_n'(\omega_0)}{J_0'(\omega_0)} - \frac{1}{2}\omega_0^2 \frac{J_0''(\omega_0)}{J_0'(\omega_0)} \sum_{n\neq 0} |a_l|^2.$$

En utilisant (5.13) et $J_0''(\omega_0) = -\frac{1}{\omega_0} J_0'(\omega_0)$ (définition des fonctions de Bessel)

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{\omega_0}{2} \sum_{n\neq 0} |a_l|^2 + \sum_{n\neq 0} \omega_0^2 a_n a_{-n} \frac{J_0'(\omega_0)}{J_n(\omega_0)} \frac{J_n'(\omega_0)}{J_0'(\omega_0)} + \frac{1}{2}\omega_0 \sum_{n\neq 0} |a_l|^2 \\ &= \omega_0 \sum_{n\neq 0} \left(1 + \omega_0 \frac{J_n'(\omega_0)}{J_n(\omega_0)}\right) |a_n|^2. \end{aligned}$$

Puisque $J_{-n} = (-1)^n J_n$, et donc $J_{-n}' = (-1)^n J_n'$, et $|a_{-n}| = |\overline{a_n}| = |a_n|$

$$\omega_2 = 2\omega_0 \sum_{n>0} \left(1 + \omega_0 \frac{J_n'(\omega_0)}{J_n(\omega_0)}\right) |a_n|^2.$$

En conclusion, (5.8) devient

$$\lambda = \omega_0^2 + 4\varepsilon^2\omega_0^2 \sum_{l>0} \left(1 + \frac{\omega_0 J_l'(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}\right) |a_l|^2 + O(\varepsilon^3).$$

□

5.1.2 Valeurs propres doubles : cas $m > 0$

Lemme 5.5. *Avec les notations précédentes, si $\lambda(\Omega_0) = j_{m,p}^2$, $m > 0$ alors*

$$\begin{aligned} A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) = \pi j_{m,p}^2 \Bigg(& 1 - 2\varepsilon a_{2m} \frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m} \\ & + 2\varepsilon^2 \Bigg[2|a_{2m}|^2 + \sum_{|l|\neq m} \left(1 + j_{m,p} \frac{J_l'(j_{m,p})}{J_l(j_{m,p})}\right) |a_{m-l}|^2 + \left(\frac{\beta_m}{\overline{\alpha_m}} \overline{a_{2m}} - \frac{\overline{\beta_m}}{\alpha_m} a_{2m}\right) \\ & + \frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m} \left(- b_{2m} + \sum_{|l|\neq m} \left(\frac{1}{2} + j_{m,p} \frac{J_l'(j_{m,p})}{J_l(j_{m,p})}\right) a_{m+l} a_{m-l} \right) \Bigg] \Bigg) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \tag{5.14}$$

(lorsque cela a un sens).

Remarque 5.6. Comme on l'a déjà évoqué à la remarque 5.3, dans le cas d'une valeur propre double on peut choisir les α_m tels que l'une des valeurs propres devienne de la forme $j_{m,p}^2(1 - 2\varepsilon a_{2m}) + O(\varepsilon^2)$ et l'autre $j_{m,p}^2(1 + 2\varepsilon a_{2m}) + O(\varepsilon^2)$.

Démonstration. ***Terme en*** ε^0
Pour $m \neq 0$

$$\alpha_m J_m(\omega_0) e^{im\theta} + \alpha_{-m} J_{-m}(\omega_0) e^{-im\theta} = 0.$$

Mais $J_{-m} = (-1)^m J_m$ et $\alpha_{-m} = (-1)^m \overline{\alpha_m}$ donc

$$\left(\alpha_m e^{im\theta} + \overline{\alpha_m e^{im\theta}}\right) J_m(\omega_0) = 2\mathrm{Re}\left(\alpha_m e^{im\theta}\right) J_m(\omega_0) = 0 \qquad \forall\theta$$

donc $J_m(\omega_0) = 0$ c'est-à-dire $\omega_0 = j_{m,p}$.

Terme en ε^1
Comme $J_m(\omega_0) = 0$, $J_{-m} = (-1)^m J_m$ et $\alpha_{-m} = (-1)^m \overline{\alpha_m}$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{|n|\neq m} \beta_n J_n(\omega_0) e^{in\theta} + \left(\alpha_m J_m'(\omega_0) e^{im\theta} + \alpha_{-m} J_{-m}'(\omega_0) e^{-im\theta}\right) \left[\omega_1 + \omega_0 \sum_l a_l e^{il\theta}\right] \\ &= \sum_{|n|\neq m} \beta_n J_n(\omega_0) e^{in\theta} + J_m'(\omega_0) \left(\alpha_m e^{im\theta} + \overline{\alpha_m} e^{-im\theta}\right) \left[\omega_1 + \omega_0 \sum_l a_l e^{il\theta}\right] \\ &= \sum_{|n|\neq m} \beta_n J_n(\omega_0) e^{in\theta} + J_m'(\omega_0) \left(\alpha_m e^{im\theta} + \overline{\alpha_m} e^{-im\theta}\right) \omega_1 \\ &\qquad + \omega_0 J_m'(\omega_0) \Bigg(\alpha_m \underbrace{\sum_l a_l e^{i(l+m)\theta}}_{\sum_n a_{n-m} e^{in\theta}} + \overline{\alpha_m} \underbrace{\sum_l a_l e^{i(l-m)\theta}}_{\sum_n a_{n+m} e^{in\theta}} \Bigg) \end{aligned}$$

d'où

$$0 = \sum_{|n|\neq m} \Big[\beta_n J_n(\omega_0) + (\alpha_m a_{n-m} + \overline{\alpha_m} a_{n+m})\,\omega_0 J'_m(\omega_0)\Big] e^{in\theta}$$
$$+ (\alpha_m\omega_1 + \overline{\alpha_m}\omega_0 a_{2m}) J'_m(\omega_0) e^{im\theta} + (\overline{\alpha_m}\omega_1 + \alpha_m\omega_0 a_{-2m}) J'_m(\omega_0) e^{-im\theta}.$$

Pour $j \neq |m|$

$$\beta_j = -\omega_0\,(a_{j-m}\alpha_m + a_{j+m}\overline{\alpha_m})\,\frac{J'_m(\omega_0)}{J_j(\omega_0)}. \tag{5.15}$$

Pour m

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = -a_{2m}\frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m}$$

et pour $-m$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = -a_{-2m}\frac{\alpha_m}{\overline{\alpha_m}} = -\overline{a_{2m}}\frac{\alpha_m}{\overline{\alpha_m}} = -\overline{a_{2m}\frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m}}$$

d'où

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\overline{\omega_1}}{\omega_0} \quad\Rightarrow\quad \frac{\omega_1}{\omega_0} \in \mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \omega_1 \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, si $a_{2m} \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{2m}}{\overline{a_{2m}}} = \left(\frac{\alpha_m}{\overline{\alpha_m}}\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{2i\arg(a_{2m})} = e^{4i\arg(\alpha_m)} \quad\Leftrightarrow\quad \arg(\alpha_m) = \frac{1}{2}\arg(a_{2m}) + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\\
&\Rightarrow \quad \arg(\alpha_m) = \frac{1}{2}\arg(a_{2m}) \quad \text{ou} \quad \arg(\alpha_m) = \frac{1}{2}\arg(a_{2m}) + \frac{\pi}{2}\\
&\Rightarrow \quad \omega_1 = -\omega_0 a_{2m} e^{-2i\arg(\alpha_m)} = \pm\omega_0|a_{2m}|\\
&\Rightarrow \quad \omega_1^2 = \omega_0^2|a_{2m}|^2
\end{aligned}$$

Remarque : cette dernière égalité reste vraie si $a_{2m} = 0$.
En conclusion

$$\omega_1 = -a_{2m}\omega_0\frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m} \qquad \text{et} \qquad \omega_1^2 = \omega_0^2|a_{2m}|^2. \tag{5.16}$$

Terme en ε^2

$$\begin{aligned}
0 \;=\; &\sum_n \left(\gamma_n J_n(\omega_0) + \beta_n J'_n(\omega_0)\left[\omega_1 + \omega_0\sum_l a_l e^{il\theta}\right]\right) e^{in\theta}\\
&+\alpha_m\Bigg[J'_m(\omega_0)\left(\omega_2 + \omega_1\sum_l a_l e^{il\theta} + \omega_0\sum_l b_l e^{il\theta}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2}J''_m(\omega_0)\left(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1\sum_l a_l e^{il\theta} + \omega_0^2\left(\sum_l a_l e^{il\theta}\right)^2\right)\Bigg] e^{im\theta}\\
&+\alpha_{-m}\Bigg[J'_{-m}(\omega_0)\left(\omega_2 + \omega_1\sum_l a_l e^{il\theta} + \omega_0\sum_l b_l e^{il\theta}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2}J''_{-m}(\omega_0)\left(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1\sum_l a_l e^{il\theta} + \omega_0^2\left(\sum_l a_l e^{il\theta}\right)^2\right)\Bigg] e^{-im\theta}.
\end{aligned} \tag{5.17}$$

On sait que $J''_m(\omega_0) = -\frac{1}{\omega_0}J'_m(\omega_0)$ (définition des fonctions de Bessel) et $\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right)^2 =$

$\sum\limits_{n,l=-\infty}^{\infty} a_l a_n e^{i(l+n)\theta}$ donc

$$\begin{aligned}
&J'_m(\omega_0)\left(\omega_2+\omega_1\sum_l a_l e^{il\theta}+\omega_0\sum_l b_l e^{il\theta}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2}J''_m(\omega_0)\left(\omega_1^2+2\omega_0\omega_1\sum_l a_l e^{il\theta}+\omega_0^2\left(\sum_l a_l e^{il\theta}\right)^2\right)\\
&\qquad\qquad=J'_m(\omega_0)\left(\omega_2+\omega_0\sum_l b_l e^{il\theta}-\frac{\omega_1^2}{2\omega_0}-\frac{\omega_0}{2}\sum_{n,l} a_l a_n e^{i(l+n)\theta}\right).
\end{aligned}$$

D'où, avec $J_{-m}=(-1)^m J_m$ et $\alpha_{-m}=(-1)^m\overline{\alpha_m}$, (5.17) devient

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_n\left(\gamma_n J_n(\omega_0)+\beta_n J'_n(\omega_0)\left[\omega_1+\omega_0\sum_l a_l e^{il\theta}\right]\right)e^{in\theta}\\
&\quad+\alpha_m J'_m(\omega_0)\left(\omega_2-\frac{\omega_1^2}{2\omega_0}+\omega_0\sum_l b_l e^{il\theta}-\frac{\omega_0}{2}\sum_{n,l} a_l a_n e^{i(l+n)\theta}\right)e^{im\theta}\\
&\quad+\overline{\alpha_m} J'_m(\omega_0)\left(\omega_2-\frac{\omega_1^2}{2\omega_0}+\omega_0\sum_l b_l e^{il\theta}-\frac{\omega_0}{2}\sum_{n,l} a_l a_n e^{i(l+n)\theta}\right)e^{-im\theta}.
\end{aligned}$$

Pour m

$$\begin{aligned}
0 &= \beta_m\omega_1 J'_m(\omega_0)+\omega_0\sum_l \beta_l a_{m-l}J'_l(\omega_0)\\
&\quad+\alpha_m J'_m(\omega_0)\left(\omega_2-\frac{\omega_1^2}{2\omega_0}\right)+\alpha_m J'_m(\omega_0)\omega_0 b_0-\alpha_m J'_m(\omega_0)\frac{\omega_0}{2}\sum_l |a_l|^2\\
&\quad+\overline{\alpha_m} J'_m(\omega_0)\omega_0 b_{2m}-\overline{\alpha_m} J'_m(\omega_0)\frac{\omega_0}{2}\sum_l a_{m+l}a_{m-l}.
\end{aligned}$$

Comme $b_0=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2$ on obtient

$$\begin{aligned}
0=\beta_m\omega_1 J'_m(\omega_0)+\omega_0\sum_l \beta_l a_{m-l}J'_l(\omega_0)+\alpha_m J'_m(\omega_0)\left(\omega_2-\frac{\omega_1^2}{2\omega_0}-\omega_0\sum_l |a_l|^2\right)\\
+\overline{\alpha_m} J'_m(\omega_0)\omega_0\left(b_{2m}-\frac{1}{2}\sum_l a_{m+l}a_{m-l}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\omega_2=\frac{\omega_1^2}{2\omega_0}+\omega_0\sum_l |a_l|^2-\omega_0\frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m}\left(b_{2m}-\frac{1}{2}\sum_l a_{m+l}a_{m-l}\right)-\frac{\beta_m}{\alpha_m}\omega_1-\frac{\omega_0}{\alpha_m}\sum_l \beta_l a_{m-l}\frac{J'_l(\omega_0)}{J'_m(\omega_0)}.$$

En prenant en compte l'expression de β_j en (5.15), puis avec $\beta_{-m}=(-1)^m\beta_m$ et $J'_{-m}=$

$(-1)^m J'_m$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega_0}{\alpha_m}\sum_l \beta_l a_{m-l}\frac{J'_l(\omega_0)}{J'_m(\omega_0)}\\
&\quad= -\frac{\omega_0}{\alpha_m}\sum_{|l|\neq m}\left(\alpha_m a_{l-m}+\overline{\alpha_m}a_{l+m}\right)\omega_0\frac{J'_m(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}\frac{J'_l(\omega_0)}{J'_m(\omega_0)}a_{m-l}+\frac{\omega_0}{\alpha_m}\beta_{-m}\frac{J'_{-m}(\omega_0)}{J'_m(\omega_0)}a_{2m}\\
&\qquad= -\omega_0^2\sum_{|l|\neq m}a_{l-m}a_{m-l}\frac{J'_l(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}-\omega_0^2\frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m}\sum_{|l|\neq m}a_{l+m}a_{m-l}\frac{J'_l(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}+\omega_0\frac{\overline{\beta_m}}{\alpha_m}a_{2m}.
\end{aligned}$$

Avec cette expression et en prenant en compte les expressions de ω_1 données en (5.16) on en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_2}{\omega_0} &= \underbrace{\frac{|a_{2m}|^2}{2}+\sum_l|a_l|^2+\omega_0\sum_{|l|\neq m}|a_{m-l}|^2\frac{J'_l(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}}_{\Gamma}\\
&\quad+\underbrace{\underbrace{\left(\frac{\beta_m}{\overline{\alpha_m}}\overline{a_{2m}}-\frac{\overline{\beta_m}}{\alpha_m}a_{2m}\right)}_{\Upsilon_1}+\underbrace{\frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m}\left(-b_{2m}+\sum_{|l|\neq m}\left(\frac{1}{2}+\omega_0\frac{J'_l(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}\right)a_{m+l}a_{m-l}\right)}_{\Upsilon_2}}_{\Upsilon}.
\end{aligned}$$

Pour $-m$

$$\begin{aligned}
0 = \beta_{-m}\omega_1 J'_{-m}(\omega_0)+\omega_0\sum_l\beta_l a_{-m-l}J'_l(\omega_0)+\overline{\alpha_m}J'_m(\omega_0)\left(\omega_2-\frac{\omega_1^2}{2\omega_0}-\omega_0\sum_l|a_l|^2\right)\\
+\alpha_m J'_m(\omega_0)\omega_0\left(b_{-2m}-\frac{1}{2}\sum_l a_{-m+l}a_{-m-l}\right).
\end{aligned}$$

D'où

$$\omega_2=\frac{\omega_1^2}{2\omega_0}+\omega_0\sum_l|a_l|^2-\omega_0\frac{\alpha_m}{\overline{\alpha_m}}\left(\overline{b_{2m}}-\frac{1}{2}\sum_l\overline{a_{m+l}a_{m-l}}\right)-\frac{\overline{\beta_m}}{\overline{\alpha_m}}\omega_1-\frac{\omega_0}{\overline{\alpha_m}}\sum_l\beta_l\overline{a_{m+l}}\frac{J'_l(\omega_0)}{J'_m(\omega_0)}.$$

En remplaçant ω_1 et les β_j par leurs expressions respectives on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_2}{\omega_0} &= \frac{|a_{2m}|^2}{2}+\sum_l|a_l|^2-\frac{\alpha_m}{\overline{\alpha_m}}\left(\overline{b_{2m}}-\frac{1}{2}\sum_l\overline{a_{m+l}a_{m-l}}\right)+a_{2m}\frac{\overline{\beta_m}}{\alpha_m}\\
&\quad+\underbrace{\frac{1}{\overline{\alpha_m}}\sum_{|l|\neq m}\left(\alpha_m a_{l-m}+\overline{\alpha_m}a_{l+m}\right)\omega_0\frac{J'_m(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}\frac{J'_l(\omega_0)}{J'_m(\omega_0)}\overline{a_{m+l}}}_{\sum_{|l|\neq m}|a_{m+l}|^2\frac{J'_l(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}+\frac{\alpha_m}{\overline{\alpha_m}}\sum_{|l|\neq m}\overline{a_{m-l}a_{m+l}}\frac{J'_l(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}}-\frac{1}{\overline{\alpha_m}}\beta_m\overline{a_{2m}}.
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{|l|\neq m} |a_{m+l}|^2 \frac{J_l'(\omega_0)}{J_l(\omega_0)} = \sum_{|l|\neq m} |a_{m-l}|^2 \frac{J_{-l}'(\omega_0)}{J_{-l}(\omega_0)} = \sum_{|l|\neq m} |a_{m-l}|^2 \frac{J_l'(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}$ on obtient

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \underbrace{\frac{|a_{2m}|^2}{2} + \sum_l |a_l|^2 + \omega_0 \sum_{|l|\neq m} |a_{m-l}|^2 \frac{J_l'(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}}_{\Gamma}$$
$$+ \underbrace{\underbrace{\left(\frac{\overline{\beta_m}}{\alpha_m} a_{2m} - \frac{\beta_m}{\overline{\alpha_m}} \overline{a_{2m}}\right)}_{\overline{\Upsilon_1}} + \underbrace{\frac{\alpha_m}{\overline{\alpha_m}} \left(-\overline{b_{2m}} + \sum_{|l|\neq m} \left(\frac{1}{2} + \omega_0 \frac{J_l'(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}\right) \overline{a_{m+l} a_{m-l}}\right)}_{\overline{\Upsilon_2}}}_{\overline{\Upsilon}}.$$

Alors, puisque $\Gamma \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \Gamma + \Upsilon = \Gamma + \overline{\Upsilon} = \overline{\Gamma + \Upsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 \in \mathbb{R}.$$

On a également $\Upsilon \in \mathbb{R}$ d'où $\Upsilon = \pm|\Upsilon|$.
De plus, $\Upsilon_1 \in i\mathbb{R}$ (car de la forme $\varphi - \overline{\varphi}$) d'où $\Upsilon_1 = -Im(\Upsilon_2)$.

Comme $\sum_l |a_l|^2 = |a_{2m}|^2 + \sum_{|l|\neq m} |a_{m-l}|^2$ on a donc

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{3}{2}|a_{2m}|^2 + + \sum_{|l|\neq m} \left(1 + \omega_0 \frac{J_l'(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}\right) |a_{m-l}|^2$$
$$+ \left(\frac{\beta_m}{\overline{\alpha_m}} \overline{a_{2m}} - \frac{\overline{\beta_m}}{\alpha_m} a_{2m}\right) + \frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m} \left(-b_{2m} + \sum_{|l|\neq m} \left(\frac{1}{2} + \omega_0 \frac{J_l'(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}\right) a_{m+l} a_{m-l}\right).$$

Ainsi, en remplaçant ω_0, ω_1 et ω_2 par leurs formules dans (5.8) on obtient

$$\lambda = \omega_0^2 \Bigg(1 - 2\varepsilon a_{2m} \frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m} + 2\varepsilon^2 \Bigg[2|a_{2m}|^2 + \sum_{|l|\neq m} \left(1 + \omega_0 \frac{J_l'(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}\right) |a_{m-l}|^2$$
$$+ \left(\frac{\beta_m}{\overline{\alpha_m}} \overline{a_{2m}} - \frac{\overline{\beta_m}}{\alpha_m} a_{2m}\right) + \frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m} \left(- b_{2m} + \sum_{|l|\neq m} \left(\frac{1}{2} + \omega_0 \frac{J_l'(\omega_0)}{J_l(\omega_0)}\right) a_{m+l} a_{m-l}\right)\Bigg]\Bigg)$$
$$+ O(\varepsilon^3).$$

□

5.2 Le disque ne minimise presque jamais localement les valeurs propres du Laplacien-Dirichlet

Maintenant que nous avons ces développements pour les valeurs propres sur des domaines obtenus par de petites déformations du disque unité, si nous trouvons **UN** cas particulier de familles (a_n) et (b_n) telles que $A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) < \pi\lambda(\Omega_0) = \pi j_{m,p}^2$ pour m et p correspondants, alors le disque unité n'est pas un minimiseur local de cette valeur propre.
Au contraire, Wolf et Keller ont montré dans [38] que pour de telles déformations $\lambda_3 \geq j_{1,1}^2$.

5.2.1 Valeurs propres simples du disque

Théorème 5.7. *Soit λ_k une valeur propre du Laplacien-Dirichlet qui est simple pour le disque. Alors pour $k > 1$ λ_k n'est pas minimisée localement par le disque.*

On est dans le cas $m = 0$ vu à la section 5.1.1 et $A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon)$ est donc donné par (5.12). Ainsi, si on trouve un l tel que $1 + \frac{j_{0,p}J_l'(j_{0,p})}{J_l(j_{0,p})} < 0$ on pourra trouver des familles (a_n) et (b_n) respectant les conditions nécessaires et telles que $A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) < \pi\lambda(\Omega_0)$, ce qui prouvera le théorème 5.7.

Lemme 5.8.

$$1 + \frac{j_{0,1}J_3'(j_{0,1})}{J_3(j_{0,1})} > 0 \qquad et \qquad 1 + \frac{j_{0,p}J_3'(j_{0,p})}{J_3(j_{0,p})} < 0 \quad \forall p \geq 2.$$

Démonstration du Théorème 5.7. Compte tenu du lemme 5.8, si on choisit (a_n) donnée par $a_i = 0$ si $|i| \neq 3$, $a_3 \neq 0$ suffisamment petit et $a_{-3} = \overline{a_3}$, et (b_n) telle que $b_0 = -|a_3|^2$ et $b_n = 0$ pour $n \neq 0$ alors

$$A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) = \pi j_{0,p}^2 + 4\pi j_{0,p}^2 \varepsilon^2 \underbrace{\left(1 + \frac{j_{0,p}J_3'(j_{0,p})}{J_3(j_{0,p})}\right)}_{<0} |a_3|^2 + O(\varepsilon^3) \quad \forall p \geq 2.$$

Remarquons que cela correspond au cas

$$R(\theta, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon\left[\mathrm{Re}(a_3)\cos(3\theta) - \mathrm{Im}(a_3)\sin(3\theta)\right] - \varepsilon^2|a_3|^2 + O(\varepsilon^3).$$

Il existe donc des formes de mesure π obtenues en faisant de petites variations du disque unité telles que $A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) < \pi\lambda(\Omega_0)$, ce qui conclut cette preuve. □

Démonstration du Lemme 5.8. De (3.25) et $J_0(j_{0,p}) = 0$ on déduit que

$$\frac{2}{j_{0,p}}J_1(j_{0,p}) = J_0(j_{0,p}) + J_2(j_{0,p}) = J_2(j_{0,p}) \quad \Rightarrow \quad \frac{J_2(j_{0,p})}{J_1(j_{0,p})} = \frac{2}{j_{0,p}}. \tag{5.18}$$

De (3.22) et (5.18)

$$\frac{J_1'(j_{0,p})}{J_1(j_{0,p})} = \frac{1}{j_{0,p}} - \frac{J_2(j_{0,p})}{J_1(j_{0,p})} = -\frac{1}{j_{0,p}}.$$

Ainsi

$$1 + \frac{j_{0,p}J_1'(j_{0,p})}{J_1(j_{0,p})} = 1 + j_{0,p} \times \left(-\frac{1}{j_{0,p}}\right) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

De plus (5.18) donne

$$\frac{J_2(j_{0,p})}{J_1(j_{0,p})} = \frac{2}{j_{0,p}} \quad \Rightarrow \quad \frac{J_1(j_{0,p})}{J_2(j_{0,p})} = \frac{j_{0,p}}{2}.$$

Avec cette égalité et (3.23)

$$\frac{J_2'(j_{0,p})}{J_2(j_{0,p})} = -\frac{2}{j_{0,p}} + \frac{J_1(j_{0,p})}{J_2(j_{0,p})} = -\frac{2}{j_{0,p}} + \frac{j_{0,p}}{2} = \frac{j_{0,p}^2 - 4}{2j_{0,p}}.$$

Puisque $j_{0,p} \geq j_{0,1} > 2$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{J_2'(j_{0,p})}{J_2(j_{0,p})} > 0$ et

$$1 + \frac{j_{0,p}J_2'(j_{0,p})}{J_2(j_{0,p})} > 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Maintenant, (3.22) donne

$$\frac{J_2'(j_{0,p})}{J_2(j_{0,p})} = \frac{2}{j_{0,p}} - \frac{J_3(j_{0,p})}{J_2(j_{0,p})} = \frac{j_{0,p}^2 - 4}{2j_{0,p}} \quad \Rightarrow \quad \frac{J_2(j_{0,p})}{J_3(j_{0,p})} = \frac{2j_{0,p}}{8 - j_{0,p}^2}.$$

Ainsi avec cette égalité et (3.22)

$$\frac{J_3'(j_{0,p})}{J_3(j_{0,p})} = \frac{-3}{j_{0,p}} + \frac{J_2(j_{0,p})}{J_3(j_{0,p})} = \frac{-3}{j_{0,p}} + \frac{2j_{0,p}}{8 - j_{0,p}^2} = \frac{5j_{0,p}^2 - 24}{j_{0,p}(8 - j_{0,p}^2)}.$$

Définissons $f(x) = 1 + x\frac{5x^2-24}{x(8-x^2)} = 4\frac{x^2-4}{8-x^2}$.
Alors $f(x) > 0\ \forall x \in \left]2, 2\sqrt{2}\right[$ et $f(x) < 0\ \forall x \in \left]0, 2\right[\cup \left]2\sqrt{2}, +\infty\right[$.
Mais $j_{0,1} \in \left]2, 2\sqrt{2}\right[$ donc $f(j_{0,1}) > 0$ alors que $j_{0,k} \geq j_{0,2} > 2\sqrt{2}$ donc $f(j_{0,k}) < 0\ \forall k \geq 2$ donc

$$1 + \frac{j_{0,1}J_3'(j_{0,1})}{J_3(j_{0,1})} > 0 \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{j_{0,p}J_3'(j_{0,p})}{J_3(j_{0,p})} < 0 \quad \forall p \geq 2,$$

ce qui conclut cette démonstration. □

Remarque 5.9. On a vu au théorème 4.8 que le disque est un point critique de $t \mapsto |\Omega_t|\lambda_i(\Omega_t)$ pour les valeurs propres simples. Néanmoins on vient de montrer que pour $i \neq 1$, le disque n'est pas un minimiseur de cette fonction. Il s'agit donc de nombreux exemples de points critiques non minimaux.

5.2.2 Valeurs propres doubles du disque

Théorème 5.10. *Soit λ_k une valeur propre du Laplacien-Dirichlet qui est double pour le disque. Alors pour $k > 3$ λ_k n'est pas minimisée localement par le disque.*

On est dans le cas $m \neq 0$ vu à la section 5.1.2 et $A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon)$ est donc donné par (5.14). Pour simplifier la suite, on choisit $a_{2m} = 0$. Dans ce cas, (5.14) devient

$$\begin{aligned} A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) = \pi j_{m,p}^2 \Bigg(1 + 2\varepsilon^2 \Bigg[& \sum_{|l|\neq m} \left(1 + j_{m,p}\frac{J_l'(j_{m,p})}{J_l(j_{m,p})}\right) |a_{m-l}|^2 \\ & + \frac{\overline{\alpha_m}}{\alpha_m} \underbrace{\left(-b_{2m} + \sum_{|l|\neq m} \left(\frac{1}{2} + j_{m,p}\frac{J_l'(j_{m,p})}{J_l(j_{m,p})}\right) a_{m+l}a_{m-l} \right)}_{\Psi} \Bigg] \Bigg) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

On remarque ensuite qu'il est facile d'annuler Ψ (choix de b_{2m}). Il nous reste donc à considérer

$$A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) \quad = \quad \pi j_{m,p}^2 \left(1 \ + \ 2\varepsilon^2 \sum_{|l|\neq m} \left(1 + j_{m,p}\frac{J_l'(j_{m,p})}{J_l(j_{m,p})}\right) |a_{m-l}|^2 \right) \ + \ O(\varepsilon^3). \quad (5.19)$$

Ainsi, si on trouve un l tel que

$$\left(1 + \frac{j_{m,p}J_l'(j_{m,p})}{J_l(j_{m,p})}\right) + \left(1 + \frac{j_{m,p}J_{2m-l}'(j_{m,p})}{J_{2m-l}(j_{m,p})}\right) < 0$$

($|a_{m-l}| = |a_{l-m}|$) on pourra trouver des familles (a_n) et (b_n) respectant les conditions nécessaires et telles que $A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) < \pi\lambda(\Omega_0)$, ce qui prouvera le théorème 5.10.

Lemme 5.11.

$$\forall m > 1,\ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \left(1 + \frac{j_{m,p} J'_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+2}(j_{m,p})}\right) + \left(1 + \frac{j_{m,p} J'_{m-2}(j_{m,p})}{J_{m-2}(j_{m,p})}\right) < 0.$$

Lemme 5.12.

$$\left(1 + \frac{j_{1,1} J'_2(j_{1,1})}{J_2(j_{1,1})}\right) + \left(1 + j_{1,1} \frac{J'_4(j_{1,1})}{J_4(j_{1,1})}\right) > 0$$
$$et \quad \left(1 + \frac{j_{1,p} J'_2(j_{1,p})}{J_2(j_{1,p})}\right) + \left(1 + j_{1,p} \frac{J'_4(j_{1,p})}{J_4(j_{1,p})}\right) < 0 \quad \forall p \geq 2.$$

Démonstration du Théorème 5.10. Pour commencer, si $m > 1$, compte tenu du lemme 5.11, si on choisit (a_n) donnée par $a_i = 0$ si $i \neq 2$, $a_2 \neq 0$ suffisamment petit et $a_{-2} = \overline{a_2}$, et (b_n) telle que $b_0 = -|a_2|^2$ et $b_n = 0$ pour $n \neq 0$ alors

$$A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) = \pi j_{m,p}^2 + 2\varepsilon^2 \pi j_{m,p}^2 |a_2|^2 \times \underbrace{\left(\left(1 + \frac{j_{m,p} J'_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+2}(j_{m,p})}\right) + \left(1 + \frac{j_{m,p} J'_{m-2}(j_{m,p})}{J_{m-2}(j_{m,p})}\right)\right)}_{<0} + O(\varepsilon^3).$$

Remarquons que cela correspond au cas

$$R(\theta, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon \left[\mathrm{Re}(a_2)\cos(2\theta) - \mathrm{Im}(a_2)\sin(2\theta)\right] - \varepsilon^2 |a_2|^2 + O(\varepsilon^3).$$

Pour $m > 1$ il existe donc des formes de mesure π obtenues en faisant de petites variations du disque unité telles que $A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) < \pi\lambda(\Omega_0)$.

Maintenant, si $m = 1$ et $p > 1$, compte tenu du lemme 5.12, si on choisit (a_n) donnée par $a_i = 0$ si $i \neq 3$, $a_3 \neq 0$ suffisamment petit et $a_{-3} = \overline{a_3}$, et (b_n) telle que $b_0 = -|a_3|^2$ et $b_n = 0$ pour $n \neq 0$ alors $\forall p \geq 2$

$$A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) = \pi j_{1,p}^2 + 4\varepsilon^2 \pi j_{1,p}^2 |a_3|^2 \times \underbrace{\left(\left(1 + \frac{j_{1,p} J'_2(j_{1,p})}{J_2(j_{1,p})}\right) + \left(1 + \frac{j_{1,p} J'_4(j_{1,p})}{J_4(j_{1,p})}\right)\right)}_{<0} + O(\varepsilon^3).$$

Remarquons que cela correspond au cas

$$R(\theta, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon \left[\mathrm{Re}(a_3)\cos(3\theta) - \mathrm{Im}(a_3)\sin(3\theta)\right] - \varepsilon^2 |a_3|^2 + O(\varepsilon^3).$$

Pour $m = 1$ et $p > 1$ il existe donc des formes de mesure π obtenues en faisant de petites variations du disque unité telles que $A(\varepsilon)\lambda(\Omega_\varepsilon) < \pi\lambda(\Omega_0)$, ce qui conclut cette preuve. □

Démonstration du Lemme 5.11. Une nouvelle fois, on utilise (3.25) et $J_m(j_{m,p}) = 0$ d'où

$$\frac{2(m+1)}{j_{m,p}} J_{m+1}(j_{m,p}) = J_m(j_{m,p}) + J_{m+2}(j_{m,p}) = J_{m+2}(j_{m,p})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{J_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+1}(j_{m,p})} = \frac{2(m+1)}{j_{m,p}}. \tag{5.20}$$

(3.22) et (5.20) donnent

$$\frac{J'_{m+1}(j_{m,p})}{J_{m+1}(j_{m,p})} = \frac{m+1}{j_{m,p}} - \frac{J_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+1}(j_{m,p})} = -\frac{m+1}{j_{m,p}}. \tag{5.21}$$

Ainsi

$$1+\frac{j_{m,p}J'_{m+1}(j_{m,p})}{J_{m+1}(j_{m,p})}=1+j_{m,p}\times\left(-\frac{m+1}{j_{m,p}}\right)=-m<0,\quad \forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall m\geq 1.$$

On récrit alors (5.21)

$$\frac{J_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+1}(j_{m,p})}=\frac{2(m+1)}{j_{m,p}}\quad\Rightarrow\quad\frac{J_{m+1}(j_{m,p})}{J_{m+2}(j_{m,p})}=\frac{j_{m,p}}{2(m+1)}.$$

Avec cette équation et (3.23)

$$\begin{aligned}\frac{J'_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+2}(j_{m,p})}&=-\frac{m+2}{j_{m,p}}+\frac{J_{m+1}(j_{m,p})}{J_{m+2}(j_{m,p})}=-\frac{m+2}{j_{m,p}}+\frac{j_{m,p}}{2(m+1)}\\&=\frac{j_{m,p}^2-2(m+2)(m+1)}{2(m+1)j_{m,p}}.\end{aligned}\tag{5.22}$$

Donc

$$1+\frac{j_{m,p}J'_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+2}(j_{m,p})}=\frac{j_{m,p}^2-2(m+1)^2}{2(m+1)},\quad\forall p\in\mathbb{N}^*.\tag{5.23}$$

D'autre part, pour $m>1$, (3.25) donne

$$\frac{2(m-1)}{j_{m,p}}J_{m-1}(j_{m,p})=J_m(j_{m,p})+J_{m-2}(j_{m,p})=J_{m-2}(j_{m,p})$$

$$\Rightarrow\quad\frac{J_{m-1}(j_{m,p})}{J_{m-2}(j_{m,p})}=\frac{j_{m,p}}{2(m-1)}.$$

Avec cette équation et (3.22)

$$\begin{aligned}\frac{J'_{m-2}(j_{m,p})}{J_{m-2}(j_{m,p})}&=\frac{m-2}{j_{m,p}}-\frac{J_{m-1}(j_{m,p})}{J_{m-2}(j_{m,p})}=\frac{m-2}{j_{m,p}}-\frac{j_{m,p}}{2(m-1)}\\&=\frac{2(m-1)(m-2)-j_{m,p}^2}{2(m-1)j_{m,p}}.\end{aligned}\tag{5.24}$$

D'où

$$1+\frac{j_{m,p}J'_{m-2}(j_{m,p})}{J_{m-2}(j_{m,p})}=\frac{2(m-1)^2-j_{m,p}^2}{2(m-1)},\quad\forall p\in\mathbb{N}^*.$$

Ainsi pour $m>1$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$, de (5.23) et (5.24)

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{j_{m,p}J'_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+2}(j_{m,p})}\right)+\left(1+\frac{j_{m,p}J'_{m-2}(j_{m,p})}{J_{m-2}(j_{m,p})}\right)\\&\quad=\frac{j_{m,p}^2-2(m+1)^2}{2(m+1)}+\frac{2(m-1)^2-j_{m,p}^2}{2(m-1)}=-\frac{j_{m,p}^2+2(m+1)(m-1)}{(m+1)(m-1)}\\&\quad=-\left(\frac{j_{m,p}^2}{(m+1)(m-1)}+2\right)<0.\end{aligned}$$

□

Démonstration du Lemme 5.12. Maintenant, avec (5.22) et (3.22) on a

$$\frac{J'_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+2}(j_{m,p})}=\frac{m+2}{j_{m,p}}-\frac{J_{m+3}(j_{m,p})}{J_{m+2}(j_{m,p})}=\frac{j_{m,p}^2-2(m+1)(m+2)}{2(m+1)j_{m,p}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{J_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+3}(j_{m,p})} = \frac{2(m+1)j_{m,p}}{4(m+1)(m+2) - j_{m,p}^2}.$$

Ainsi avec cette équation et (3.23)

$$\begin{aligned} \frac{J'_{m+3}(j_{m,p})}{J_{m+3}(j_{m,p})} &= \frac{-(m+3)}{j_{m,p}} + \frac{J_{m+2}(j_{m,p})}{J_{m+3}(j_{m,p})} \\ &= \frac{-(m+3)}{j_{m,p}} + \frac{2(m+1)j_{m,p}}{4(m+1)(m+2) - j_{m,p}^2} \\ &= \frac{(3m+5)j_{m,p}^2 - 4(m+1)(m+2)(m+3)}{j_{m,p}\left[4(m+1)(m+2) - j_{m,p}^2\right]}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Dans le cas particulier $m = 1$, on obtient respectivement de (5.21) et (5.25)

$$1 + \frac{j_{1,p}J'_2(j_{1,p})}{J_2(j_{1,p})} = -1 \qquad \text{et} \qquad 1 + j_{1,p}\frac{J'_4(j_{1,p})}{J_4(j_{1,p})} = 1 + \frac{8j_{1,p}^2 - 96}{24 - j_{1,p}^2}$$

d'où

$$\left(1 + \frac{j_{1,p}J'_2(j_{1,p})}{J_2(j_{1,p})}\right) + \left(1 + j_{1,p}\frac{J'_4(j_{1,p})}{J_4(j_{1,p})}\right) = \frac{8j_{1,p}^2 - 96}{24 - j_{1,p}^2}.$$

Définissons $f(x) = \frac{8x^2-96}{24-x^2}$. Alors $f(x) > 0$ pour $x \in]2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}[$ et $f(x) < 0$ pour $x \in [0, 2\sqrt{3}[\cup]2\sqrt{6}, +\infty[$. Mais $j_{1,1} \in]2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}[$ donc $f(j_{1,1}) > 0$ alors que $j_{1,p} \geq j_{1,2} > 2\sqrt{6}$ donc $f(j_{1,p}) < 0$ $\forall p \geq 2$. □

5.2.3 Conclusion

Théorème 5.13. *Les valeurs propres du Laplacien-Dirichlet λ_k, $k > 3$, ne sont pas localement minimisées par le disque en dimension 2 parmi les domaines de mesure donnée.*

Remarque 5.14. Il est clair que si λ_k n'est pas un minimum local, alors ce n'est pas un minimum global.

Remarque 5.15. Compte tenu du théorème de Krahn-Szegő on peut aussi dire que λ_k, $k \neq 1, 3$, n'est pas globalement minimisée par le disque en dimension 2 parmi les domaines de mesure donnée.

Remarque 5.16. La technique utilisée dans ce chapitre ne s'applique pas en dimension supérieure. On peut toutefois espérer l'appliquer en dimension 2 pour la condition de Neumann. Dans ce cas, il faudra prendre en compte les faits suivants :

- ◇ il faut pour commencer s'assurer qu'un développement similaire à (5.4) est possible,
- ◇ la condition à remplir n'est plus (5.9) mais $\frac{\partial u}{\partial r}(R(\theta,\varepsilon),\theta,\varepsilon) = 0$ qui va donc être plus complexe,
- ◇ enfin n'oublions pas que dans le cas Neumann, ce sont les zéros des dérivées des fonctions de Bessel qui nous intéressent. Trouver les bonnes relations et les bons termes permettant d'accroître les valeurs propres (maximisation maintenant) sera peut-être plus compliqué.

5.3 Les unions de disques minimisent rarement les valeurs propres du Laplacien-Dirichlet

5.3.1 Minimisation globale

Théorème 5.17. ◇ *λ_3 est peut-être minimisée par le disque, mais aucune union disjointe de disques ne peut la minimiser,*

- ◇ *λ_4 et λ_6 ne sont pas minimisées par le disque ni par aucune union de disque, sauf peut-être par une union particulière de deux disques (rayons connus, pas la même union pour les deux valeurs propres),*
- ◇ *λ_7 et λ_9 ne sont pas minimisées par le disque ni par aucune union de disque, sauf peut-être par une union particulière de trois disques (rayons connus, pas la même union pour les deux valeurs propres),*
- ◇ *λ_5, λ_8 et les valeurs propres λ_k avec $k \geq 10$ ne sont pas minimisées par le disque ni par aucune une union de disque.*

Démonstration. Pour cette preuve, nous allons raisonner par récurrence sur le nombre de disques dans l'union. Ensuite, supposons que Ω_k^* est une union disjointe de $n > 1$ disques (le cas $n = 1$ a déjà été traité). Par le théorème de Wolf-Keller 3.7 (ou même 2.32) on déduit qu'il existe un $1 \leq i \leq k$ tel que Ω_i^* est une union disjointe d'un nombre $1 \leq m \leq n/2$ de disques et Ω_{n-i}^* une union disjointe de $n-m$ disques. Par récurrence on peut alors déterminer quels sont les i et $n-i$ possibles ce qui par suite permet de déduire les k impossibles. Pour finir, on compare les possibilités restantes avec les meilleures unions de disques trouvées en partie 3.4.1 et récapitulées en Fig. 3.3 ou éventuellement avec certains rectangles puisque les valeurs sont connues (cf. partie 3.5).

- ◇ Cas $n = 2$ (union de 2 disques) : Ω_i^* et Ω_{n-i}^* sont des disques. Par les résultats de la partie 5.2 on en déduit qu'au mieux $i \in \{1, 3\}$ et $n - i \in \{1, 3\}$. Donc si $k \notin \{2, 4, 6\}$ λ_k n'est pas minimisée par une union disjointe de deux disques.
- ◇ Cas $n = 3$: Ω_i^* est un disque et Ω_{n-i}^* est une union de 2 disques. Par récurrence on en déduit qu'au mieux $i \in \{1, 3\}$ et $n - i \in \{2, 4, 6\}$. Les seules possibilités sont donc $k = 3$, $k = 5$, $k = 7$ et $k = 9$.

  Mais $k = 3$ n'est pas possible puisque la valeur de λ_3 du disque est inférieure à la valeur de λ_3 pour n'importe quelle union disjointe de disques, comme montré en Fig. 3.3.

  D'autre part, il existe des rectangles pour lesquels la valeur de λ_5 est inférieure à la valeur de λ_5 pour la meilleure union de 3 disques (et même n'importe quelle union de disques). C'est le cas notamment du rectangle de longueur $(5/3)^{1/4}$ qui est, d'après l'article [3] de P. Antunes et P. Freitas, le rectangle donnant le λ_5 le plus faible (parmi les rectangles). La possibilité $k = 5$ est donc également à exclure.

  Finalement si $k \notin \{7, 9\}$ λ_k ne peut pas être minimisée par une union disjointe de 3 disques.
- ◇ Cas $n = 4$: il y a deux possibilités à considérer :
  - Ω_i^* est un disque et Ω_{n-i}^* est une union de 3 disques. Par récurrence on déduit que $i \in \{1, 3\}$ et $n - i \in \{7, 9\}$. Les seules possibilités sont alors $k = 8$, $k = 10$ et $k = 12$.
  - Ω_i^* et Ω_{n-i}^* sont tous les deux une union de 2 disques. Par récurrence on déduit que $i \in \{2, 4, 6\}$ et $n - i \in \{2, 4, 6\}$. Les seules possibilités sont alors $k = 4$, $k = 6$, $k = 8$, $k = 10$ et $k = 12$.

  Mais pour $k = 8$, $k = 10$ et $k = 12$, la valeur de λ_k est inférieure pour le disque à celle de n'importe quelle union disjointe de disques (cf. Fig. 3.3).

  D'autre part, pour $k = 4$ et $k = 6$, la valeur de λ_k pour une union de deux disques donnée (pas la même union) est inférieure à celle de n'importe quelle union disjointe de disques (cf. Fig. 3.3).

  En conclusion quelque soit k, λ_k n'est jamais minimisée par une union disjointe de 4 disques.
- ◇ Cas $n = 5$: il y a deux possibilités à considérer :
  - Ω_i^* est un disque et Ω_{n-i}^* est une union de 4 disques. Mais on vient de voir que ce n'est pas possible.

- Ω_i^* est une union de 2 disques et Ω_{n-i}^* est une union de 3 disques. Par récurrence on déduit que $i \in \{2,4,6\}$ et $n-i \in \{7,9\}$. Les seules possibilités sont alors $k=9$, $k=11$, $k=13$ et $k=15$.

Mais $k=9$ n'est pas possible puisque la valeur de λ_9 pour une union de 3 disques bien choisie (cf. Fig. 3.3) est inférieure à la valeur de λ_9 pour n'importe quelle union disjointe de disques.
De façon similaire, pour $k=11$, $k=13$ et $k=15$ il existe une union disjointe de 2 disques particulière (différentes pour ces 3 cas) pour laquelle la valeur de λ_k est inférieure à la valeur de λ_k pour n'importe quelle autre union disjointe de disques.
En conclusion quelque soit k, λ_k n'est jamais minimisée par une union disjointe de 5 disques.

◇ Cas $n=6$: il y a trois possibilités à considérer :

- Ω_i^* est un disque et Ω_{n-i}^* est une union de 5 disques. Mais on vient de voir que ce n'est pas possible.
- Ω_i^* est une union de 2 disques et Ω_{n-i}^* est une union de 4 disques. Mais on vient de voir que ce n'est pas possible.
- Ω_i^* et Ω_{n-i}^* sont tous les deux des unions de 3 disques. Par récurrence on déduit que $i \in \{7,9\}$ et $n-i \in \{7,9\}$. Les seules possibilités sont alors $k=14$, $k=16$ et $k=18$.

Mais la valeur de λ_{14} pour une union de 3 disques bien choisie est inférieure à la valeur de λ_{14} pour n'importe quelle autre union disjointe de disques (cf. Fig. 3.3).
La valeur de λ_{16} pour un disque est inférieure à la valeur de λ_{16} pour n'importe quelle union disjointe de disques (cf. Fig. 3.3).
La valeur de λ_{18} pour une union de 2 disques bien choisie est inférieure à la valeur de λ_{18} pour n'importe quelle union disjointe de disques (cf. Fig. 3.3).
En conclusion quelque soit k, λ_k n'est jamais minimisée par une union disjointe de 6 disques.

◇ Cas $n>6$: les différentes possibilités sont les suivantes :

- Ω_i^* est un disque et Ω_{n-i}^* est une union disjointe de $n-1>5$ disques, mais par récurrence ce n'est pas possible.
- Ω_i^* est une union de 2 disques et Ω_{n-i}^* est une union de $n-2>4$ disques, mais par récurrence ce n'est pas possible.
- Ω_i^* est une union de 3 disques et Ω_{n-i}^* est une union de $n-3>3$ disques, mais par récurrence ce n'est pas possible.
- tous les autres cas conduisent à une impossibilité.

En conclusion quelque soit k, λ_k n'est jamais minimisée par une union disjointe de plus de 6 disques.

Tous les cas ont été étudiés ce qui conclut cette démonstration. □

Il est possible d'améliorer le théorème 5.17 en utilisant deux estimations numériques pour λ_6 et λ_7. En effet, les outils utilisés dans [32] et dans [2] donnent de très bonnes bornes supérieures des candidats minimiseurs. En les utilisant on peut facilement obtenir le théorème suivant :

Théorème 5.18. ◇ *λ_3 est peut-être minimisée par le disque, mais aucune union disjointe de disques ne peut la minimiser,*

◇ *λ_4 n'est pas minimisée par le disque ni par aucune union de disque, sauf peut-être par une union particulière de deux disques (dont les rayons ont un rapport $\sqrt{j_{0,1}/j_{1,1}}$),*

◇ *les valeurs propres λ_k avec $k \geq 5$ ne sont pas minimisées par le disque ni par aucune une union de disque.*

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du théorème 5.17.

- ◇ Cas $n = 2$ (union de 2 disques) : on peut supprimer la possibilité $k = 6$ puisqu'il existe une forme pour laquelle λ_6 a une valeur inférieure à celle de n'importe quelle union de disques. Il reste alors $k \in \{2, 4\}$.
- ◇ Cas $n = 3$: on a maintenant $n - i \in \{2, 4\}$ et donc la possibilité $k = 9$ n'apparaît plus. On peut ensuite supprimer la possibilité $k = 7$ puisqu'il existe une forme pour laquelle λ_7 a une valeur inférieure à celle de n'importe quelle union de disques. Il n'y a donc plus de valeur propre pouvant être minimisée par une union disjointe de 3 disques.
- ◇ Cas $n = 4$: il y a deux possibilités à considérer :
  - le cas Ω_i^* est un disque et Ω_{n-i}^* est une union de 3 disques est donc impossible par ce qui précède
  - le cas Ω_i^* et Ω_{n-i}^* est simplifié puisque maintenant $i \in \{2, 4\}$ et $n - i \in \{2, 4\}$.

  Les mêmes arguments que dans la démonstration précédentes restant valable, aucune valeur propre n'est minimisée par une union disjointe de 4 disques.
- ◇ Cas $n > 4$: les différentes possibilités sont les suivantes :
  - Ω_i^* est un disque et Ω_{n-i}^* est une union disjointe de $n - 1 > 3$ disques, mais par récurrence ce n'est pas possible.
  - Ω_i^* est une union de 2 disques et Ω_{n-i}^* est une union de $n - 2 > 2$ disques, mais par récurrence ce n'est pas possible.
  - tous les autres cas conduisent à une impossibilité.

□

5.3.2 Minimisation locale

Commençons par donner une version locale du théorème de Wolf-Keller 2.32. Pour cela on notera λ_n^* un minimum local de λ_n et Ω_n^* un ouvert qui réalise ce minimum ($\lambda_n^* = \lambda_n(\Omega_n^*)$) (on travaille à mesure constante 1).

Théorème 5.19. *Soit λ_n^* un minimum local réalisé par Ω_n^* avec $|\Omega_n^*| = 1$. Supposons que $\Omega_n^* = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (disjoints) avec $|\Omega_1| > 0$ et $|\Omega_2| > 0$. Alors il existe $1 \leq i < n$ tel que*

1. *Ω_1 est un minimum local de λ_i (avec la bonne mesure) et Ω_2 est un minimum local de λ_{n-i} (avec la bonne mesure),*
2. *si $\lambda_i^* = |\Omega_1|^{2/N}\lambda_i(\Omega_1)$ et $\lambda_{n-i}^* = |\Omega_2|^{2/N}\lambda_{n-i}(\Omega_1)$ alors*
$$(\lambda_n^*)^{N/2} = (\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}, \tag{5.26}$$
3. *si $\Omega_i^* = \frac{\Omega_1}{|\Omega_1|^{1/N}}$ et $\Omega_{n-i}^* = \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|^{1/N}}$ alors*
$$\Omega_n^* = \left[\left(\frac{\lambda_i^*}{\lambda_n^*}\right)^{1/2}\Omega_i^*\right] \bigcup \left[\left(\frac{\lambda_{n-i}^*}{\lambda_n^*}\right)^{1/2}\Omega_{n-i}^*\right] \quad \textit{(union disjointe).} \tag{5.27}$$

La démonstration de ce théorème est basée sur la démonstration du théorème de Wolf-Keller 2.32. Certaines parties sont identiques, d'autres une adaptation.

Démonstration. Soit u_n^* une fonction propre du Laplacien avec conditions de Dirichlet sur Ω_n^* associée à la valeur propre λ_n^*. Alors $u_n^* \neq 0$ sur l'une des composantes de Ω_n^*, par exemple sur Ω_1. En particulier, λ_n^* est une valeur propre sur Ω_1 : $\lambda_n^* = \lambda_i(\Omega_1)$, pour $i \leq n$ (le plus grand possible satisfaisant ces deux conditions).
Si $i = n$ on peut diminuer λ_n^* en élargissant Ω_1 (modification locale), ce qui contredit la

minimalité locale de λ_n^*. Donc $i \leq n-1$.
λ_n^* étant la n-ième valeur propre sur Ω_n^*, il y a au moins $n-i$ valeurs propres sur Ω_2 qui sont inférieures à λ_n^*. Donc $\lambda_{n-i}(\Omega_2) \leq \lambda_n^*$.
Si $\lambda_{n-i}(\Omega_2) < \lambda_n^*$, on peut diminuer $\lambda_n^* = \max\{\lambda_i(\Omega_1), \lambda_{n-i}(\Omega_2)\}$ en élargissant Ω_1 et en rétrécissant Ω_2 (tout en conservant le volume total). Il y a alors contradiction avec l'hypothèse de minimalité locale de λ_n^* d'où

$$\lambda_i(\Omega_1) = \lambda_{n-i}(\Omega_2) = \lambda_n^*.$$

Supposons que $\lambda_i(\Omega_1)$ ne soit pas un minimum local de λ_i. Il existe donc un champ de vecteur V tq $\forall \varepsilon > 0$ $\lambda_i(\Omega_1) > \lambda_i(\Omega_1 + \varepsilon V)$ avec $|\Omega_1| = |\Omega_1 + \varepsilon V|$.
Soient maintenant $\eta > 0$ et $\Omega_1'' = (1-\eta)\Omega_1' = (1-\eta)(\Omega_1 + \varepsilon V)$. Pour η suffisamment petit, $\lambda_i(\Omega_1') < \lambda_i(\Omega_1'') < \lambda_{n-i}(\Omega_2)$. Posons $\Omega' = \Omega_1'' \cup \Omega_2'$ avec $\Omega_2' = \kappa\Omega_2$ tq $|\Omega_1''| + |\Omega_2'| = 1$. Alors $\lambda_{n-i}(\Omega_2) > \lambda_{n-i}(\Omega_2')$ et donc $\lambda_n(\Omega') = \max\{\lambda_{n-i}(\Omega_2'), \lambda_i(\Omega_1'')\} < \lambda_{n-i}(\Omega_2) = \lambda_n^*$, ce qui contredit l'hypothèse de minimalité locale de Ω_n^*.
Ainsi $\lambda_i(\Omega_1)$ est un minimum local de λ_i pour la mesure $|\Omega_1|$.
On montre de même que $\lambda_{n-i}(\Omega_2)$ est un minimum local de λ_{n-i} pour la mesure $|\Omega_2|$.
Si on note maintenant $\Omega_i^* = \frac{\Omega_1}{|\Omega_1|^{1/N}}$, $|\Omega_i^*| = \left|\frac{\Omega_1}{|\Omega_1|^{1/N}}\right| = \frac{|\Omega_1|}{|\Omega_1|} = 1$ et donc $\lambda_i(\Omega_i^*) = \lambda_i^* = |\Omega_1|^{2/N}\lambda_i(\Omega_1) = |\Omega_1|^{2/N}\lambda_n^*$.
De même, si on note $\Omega_{n-i}^* = \frac{\Omega_2}{|\Omega_2|^{1/N}}$, $|\Omega_{n-i}^*| = \left|\frac{\Omega_2}{|\Omega_2|^{1/N}}\right| = \frac{|\Omega_2|}{|\Omega_2|} = 1$ et donc $\lambda_{n-i}(\Omega_{n-i}^*) = \lambda_{n-i}^* = |\Omega_2|^{2/N}\lambda_{n-i}(\Omega_2) = |\Omega_2|^{2/N}\lambda_n^*$.
Comme $|\Omega_1| + |\Omega_2| = |\Omega_n^*| = 1$, $(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2} = (|\Omega_1| + |\Omega_2|)\,(\lambda_n^*)^{N/2} = (\lambda_n^*)^{N/2}$.
Enfin, soit

$$\widetilde{\Omega} = \left[\left(\frac{(\lambda_i^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}\right)^{1/N} \Omega_i^*\right] \bigcup \left[\left(\frac{(\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}\right)^{1/N} \Omega_{n-i}^*\right].$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\Omega}| &= \left|\left(\frac{(\lambda_i^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}\right)^{1/N} \Omega_i^*\right| + \left|\left(\frac{(\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}\right)^{1/N} \Omega_{n-i}^*\right| \\
&= \frac{(\lambda_i^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}} \underbrace{|\Omega_i^*|}_{=1} + \frac{(\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}} \underbrace{|\Omega_{n-i}^*|}_{=1}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $|\widetilde{\Omega}| = 1$. De plus

$$\begin{aligned}
\lambda_i\left(\left(\frac{(\lambda_i^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}\right)^{1/N} \Omega_i^*\right) &= \left(\frac{(\lambda_i^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}\right)^{-2/N} \lambda_i\left(\Omega_i^*\right) \\
&= \frac{\left((\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}\right)^{2/N}}{\lambda_i^*}\lambda_i^* \\
&= \left((\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}\right)^{2/N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{n-i}\left(\left(\frac{(\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}\right)^{1/N} \Omega_{n-i}^*\right) &= \left(\frac{(\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}{(\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}}\right)^{-2/N} \lambda_{n-i}\left(\Omega_{n-i}^*\right) \\
&= \frac{\left((\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}\right)^{2/N}}{\lambda_{n-i}^*}\lambda_{n-i}^* \\
&= \left((\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}\right)^{2/N}
\end{aligned}$$

d'où $\lambda_n(\widetilde{\Omega}) = \left((\lambda_i^*)^{N/2} + (\lambda_{n-i}^*)^{N/2}\right)^{2/N} = \lambda_n^*$. □

On peut maintenant procéder de façon similaire à la partie 5.3.1 et obtenir une version locale des théorèmes 5.17 et 5.18.

Théorème 5.20. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si une union disjointe de n disques minimise localement la valeur propre λ alors λ est forcément un λ_{n+2k} avec $k \in \{0, \ldots, n\}$.*

Remarque 5.21. Attention, on ne sait pas si ces λ_{n+2k} sont des minimiseurs locaux. On montre uniquement que ce sont les seuls candidats possibles.

Avant de donner la démonstration, explicitons ce résultat pour les premières valeurs de n.

Une union disjointe de	1	disques ne peut minimiser localement que	λ_1 et λ_3.
	2		λ_2, λ_4 et λ_6.
	3		λ_3, λ_5, λ_7 et λ_9.
	$\vdots$		$\vdots$

Démonstration. On va faire un raisonnement par récurrence. Par ce qui précède, le résultat est clairement vrai pour $n = 1$. Supposons maintenant que le théorème est vrai de 1 à $n-1$ et prouvons qu'il est vrai pour n. On cherche des k pour lesquels λ_k peut être localement minimisée par une union disjointe de n disques. Il existe donc un $1 \leq m \leq n$ tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec Ω_1 une union disjointe de m disques et Ω_2 une union disjointe de $n-m$ disques. D'après le théorème 5.19 Ω peut être un minimiseur local de λ_i seulement si $i = i_1 + i_2$ où Ω_1 est un minimiseur local de λ_{i_1} et Ω_2 est un minimiseur local de λ_{i_2}. Par l'hypothèse de récurrence on a

$$i_1 \in \{m + 2l_1;\, l_1 = 0, .., m\} \quad \text{et} \quad i_2 \in \{n - m + 2l_2;\, l_2 = 0, .., (n-m)\}.$$

Ainsi

$$i = i_1 + i_2 \in \{n + 2l;\, l = 0, .., n\} \quad \text{(indépendant de } m\text{)}$$

ce qui conclut la preuve. □

Chapitre 6

Simulations numériques

Depuis quelques années, Édouard Oudet développe une plate-forme logicielle destinée à l'optimisation de forme de problèmes spectraux. Les possibilités des algorithmes proposés sont nombreuses et s'étoffent avec le temps :

- ◇ fonctionnelles dépendant de valeurs propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet, Neumann, Robin ... ;
- ◇ contraintes de mesure, de périmètre, de boîtes (inclus dans ou contenant), convexité ... ;
- ◇ problèmes bi et tridimensionnels ;
- ◇ perspectives de développement vers l'élasticité et la mécanique des fluides.

Mon travail concernant ces algorithmes a d'abord été de comprendre leur fonctionnement. Cette tâche s'est révélée compliquée et je n'ai pas disposé de suffisamment de temps afin d'entrer dans tous les détails. J'explique néanmoins la méthodologie dans la première partie de ce chapitre.

Durant mes travaux j'ai eu l'occasion de faire fonctionner ces algorithmes, afin d'obtenir une description numérique des formes optimales générées par cet outil, mais aussi pour améliorer le processus de recherche globale d'identification des formes optimales. C'est ainsi que j'ai obtenu des résultats numériques pour les premières valeurs propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet et de Neumann à la fois en dimension 2 et en dimension 3. Rappelons qu'en dimension 2 nous avions des résultats auxquels nous confronter ([32] et [2]). Certains de ces résultats m'ont d'ailleurs poussée à modifier quelque peu les algorithmes, notamment en ajoutant des possibilités d'initialisation des formes.

Les résultats que j'ai obtenu ainsi que les informations qualitatives que j'ai pu en tirer sont présentées dans la deuxième partie de ce chapitre.

Remarque 6.1. Ce chapitre fait l'objet d'un article en cours de rédaction.

6.1 Algorithmes

Je ne décrirais pas dans tous ses détails le processus d'optimisation. Je me contenterais d'en expliquer, de façon générale, son fonctionnement.

La méthode que nous utilisons est décomposée en deux étapes : d'abord une phase d'optimisation globale puis une phase d'optimisation locale. Il est important tout au long de l'optimisation de porter une attention particulière à la complexité des opérations effectuées afin que l'approche reste effective aussi bien en dimension 2 qu'en dimension 3.

6.1.1 Problème, notations et rappels sur les éléments finis

Nous conservons les notations introduites dans les chapitres précédents.
On considère la classe de fonctions

$$G(\Omega) = F\left(|\Omega|, |\partial\Omega|, \lambda_1(\Omega), \ldots, \lambda_k(\Omega), \mu_1(\Omega), \ldots, \mu_l(\Omega)\right) \tag{6.1}$$

où F est une fonction $\mathcal{C}^1$ de dimension finie fixée.
Le problème qui nous intéresse est le problème d'optimisation

$$\min_{\Omega} G(\Omega). \tag{6.2}$$

En fonction du contexte, on pourra évidemment ajouter des contraintes géométriques supplémentaires.

Les algorithmes utilisant les éléments finis, nous terminons cette partie par quelques rappels rapides sur cette théorie.

Définition 6.2. Un **élément fini** est la donnée d'

1. un élément géométrique, noté K de $\mathbb{R}^n$,

2. un ensemble Σ de N degrés de liberté constitué de formes linéaires sur l'espace des fonctions scalaires ou vectorielles définies sur l'élément K,

3. un sous-espace vectoriel $\mathbb{P}$ de dimension N de l'espace des fonctions scalaires ou vectorielles (des polynômes en général),

4. la propriété d'unisolvance : $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, $\exists! p \in \mathbb{P}$ tel que $\sigma_i(p) = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, N$, $\forall \sigma_i \in \Sigma$.

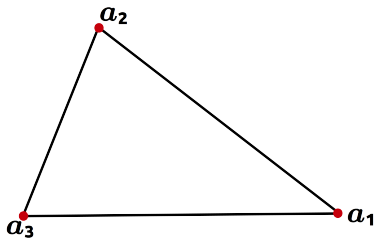
On appelle alors **fonctions de base** de l'élément fini les fonctions $p_1, \ldots, p_N$ de $\mathbb{P}$ telles que $\sigma_i(p_j) = \delta_{i,j}$ $\forall \sigma_i \in \Sigma$, $\forall 1 \leq i, j \leq N$.

Dimension 2

Définition 6.3. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine polyédrique. On appelle **triangulation** de Ω un recouvrement de ce domaine par des triangles (ou des rectangles) tels que l'intersection de deux de ces triangles est soit vide, soit réduite à un sommet, soit réduite à une arête commune.
À toute fonction ϕ assez régulière définie sur Ω, l'élément fini permet d'associer son **interpolée** $\pi_h\phi$ définie sur chaque triangle comme l'interpolée $\pi\phi$.

On note $\mathbb{P}_k$ l'espace des polynômes de degré k à deux variables ($\dim(\mathbb{P}_k) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$).
Les deux éléments les plus « classiques » sont les suivants :

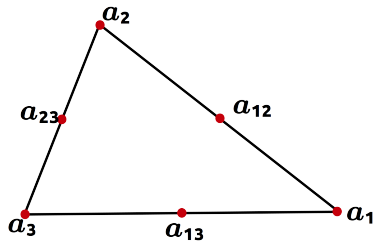
$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$
$\Sigma = \{\phi(a_1), \phi(a_2), \phi(a_3)\}$



Fonctions de base : coordonnées barycentriques λ_1, λ_2,λ_3

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) a_i, \\ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x) = 1. \end{cases}$$

$\mathbb{P} = \mathbb{P}_2$
$\Sigma = \{\phi(a_1), \phi(a_2), \phi(a_3),$
$\phi(a_{12}), \phi(a_{13}), \phi(a_{23})\}$



Fonctions de base exprimées à partir des coordonnées barycentriques :

$$\begin{cases} p_i(x) = \lambda_i(x)(2\lambda_i(x) - 1),\ i = 1, 2, 3, \\ p_{ij}(x) = 4\lambda_i(x)\lambda_j(x),\ i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j. \end{cases}$$

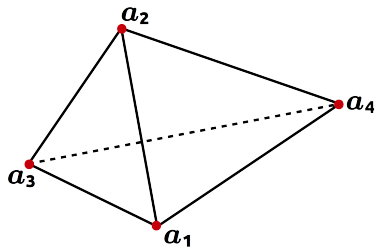
Pour ces deux éléments finis, l'interpolée de toute fonction continue est continue. On dit qu'ils sont de classe $\mathcal{C}^0$.

Dimension 3

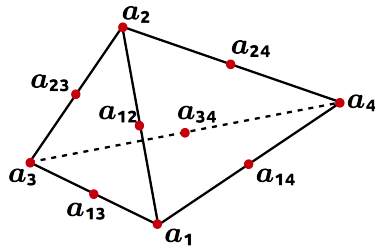
Définition 6.4. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine polyédrique. On appelle **triangulation** de Ω un recouvrement de ce domaine par des tétraèdres (ou des cubes ou des prismes) tels que leur intersection est soit vide, soit réduite à un sommet, à une arête ou à une face.

On note $\mathbb{P}_k$ l'espace des polynômes de degré k à trois variables ($\dim(\mathbb{P}_k) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$). On a une nouvelle fois :

$\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$



$\mathbb{P} = \mathbb{P}_2$



Σ et les fonctions de base sont définis de façon similaire à la dimension 2 (la seule différence étant le nombre de degrés de liberté symbolisés par des points supplémentaires). Une nouvelle fois ces deux éléments finis sont de classe $\mathcal{C}^0$.

Application au problème des valeurs propres du Laplacien

Appliquons ces éléments finis à notre problème. Supposons qu'une forme a été définie et un domaine polygonal associé. Dans nos travaux, les maillages ont été générés par des outils fiables et indépendants : Triangle en dimension 2 et CGAL en dimension 3. Ces outils sont accessibles librement sur Internet. Une fois le maillage défini, la détermination des matrices de masse et de rigidité est classique.
Dans nos algorithmes nous utilisons des éléments P_1 (en dimension 2 et 3). Si on note $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ les fonctions de base associées au maillage alors

$$K_h = \left(\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \right) \quad \text{et} \quad M_h = \left(\int_\Omega \varphi_i \cdot \varphi_j \right). \tag{6.3}$$

En se rappelant des formulations variationnelles (2.15) et (2.37), une approximation des premières valeurs propres est obtenue en résolvant le problème aux valeurs propres discret

$$K_h u = \lambda M_h u. \tag{6.4}$$

La différence entre les conditions de Neumann et de Dirichlet n'affecte que les fonctions de base. On ne différenciera donc plus dans la suite les valeurs propres associées à ces deux conditions.

6.1.2 Optimisation globale avec optimisation des composantes connexes

La solution optimale globale d'une fonction coût non convexe et parfois non $\mathcal{C}^1$ est la plupart du temps quasiment inaccessible. Pour diminuer la complexité de ce problème on introduit une réduction du nombre de paramètres qui permet toujours un calcul précis de la fonction coût. Plus précisément cette réduction de dimension se fait en deux temps.
Pour commencer, l'ensemble des formes est paramétré comme un ensemble de niveau d'une série de Fourier tronquée. Le nombre de degrés de liberté de la paramétrisation frontière habituelle est directement lié au nombre de points frontières du maillage. A contrario, dans notre paramétrisation le nombre de degrés de liberté correspond au nombre de termes de la série de Fourier. De cette manière il n'y a plus de lien entre la précision de l'approximation et le nombre de degrés de liberté qui paramètrent la forme.
Dans un deuxième temps, on explique comment diminuer la complexité du processus d'optimisation en remplaçant la fonction coût par un problème d'optimisation en petite dimension lié au nombre de composantes connexes.

6.1.2.1 Initialisation : processus stochastique

On se propose d'utiliser la librairie NLopt (logithèque free/open-source pour l'optimisation non linéaire développée par S. G. Johnson) contenant plusieurs processus d'optimisation stochastique. Afin de garantir l'efficacité de ces derniers nous devons réduire le nombre de paramètres à identifier ($m \leq 100$ par exemple).

Je ne présenterai ici notre discrétisation que dans le cas de la dimension 2 pour lequel les notations sont plus compréhensibles.

L'idée élémentaire de cette première phase consiste à tirer au sort des coefficients $a_{i,j}$ tels que $\sharp\{a_{i,j}\} = n$. Avec ces coefficients on construit ensuite la fonction

$$\Phi_{\{a_{i,j}\}}(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} \sin(\pi i x_1) \sin(\pi j x_2) + 1, \quad \text{où } x = (x_1, x_2) \in [0,1]^2. \tag{6.5}$$

Notons qu'on ajoute la constante 1 afin que la fonction soit toujours non nulle sur $\partial\Omega$.

On définit ensuite $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ par

$$\mathcal{F}(\{a_{i,j}\}) = \{x \in [0,1]^2,\ \Phi_{\{a_{i,j}\}}(x) \leq 0\}. \tag{6.6}$$

Enfin, on construit les ensembles

$$\Omega_{\{a_{i,j}\}} = \mathcal{F}(\{a_{i,j}\}). \tag{6.7}$$

Notons que le nombre de composantes connexes de $\Omega_{\{a_{i,j}\}}$ n'est pas imposé. Néanmoins dans nos expérimentations on a fixé (à peu près) le nombre de simplexes par évaluation afin d'obtenir des résultats comparables d'une forme à l'autre.

Dans la pratique, $B = [0,1]^2$ est maillé par une grille cartésienne. $\Phi_{\{a_{i,j}\}}$ est estimé en chaque point du maillage et on fait une interpolation linéaire afin d'approcher $\mathcal{F}(\{a_{i,j}\})$. Un polygone $\Omega^{\text{pol}}_{\{a_{i,j}\}}$ est associé à chaque $\Omega_{\{a_{i,j}\}}$. Une fois cette forme définie, on évalue le nouveau coût

$$G(\Omega^{\text{pol}}_{\{a_{i,j}\}}) \simeq G(\Omega_{\{a_{i,j}\}}) = G\left(\mathcal{F}(\{a_{i,j}\})\right).$$

On approche alors la fonction coût $G(\Omega^{\text{pol}}_{\{a_{i,j}\}})$ par une méthode éléments finis comme rappelé précédemment.

Remarque 6.5. Si l'ensemble doit satisfaire certaines contraintes géométriques, on peut adapter le processus de génération des fonctions $\Phi_{a_{i,j}}$.
Par exemple, si la forme doit contenir une boîte on va prendre la fonction donnée par $\Phi_{\{a_{i,j}\}} - c\Phi_{\text{box}}$, où c est un paramètre grand et Φ_{box} est la fonction caractéristique de la boîte. Au contraire si elle doit être contenue dans une boîte on pourra considérer la fonction $\Phi_{\{a_{i,j}\}} + c(1 - \Phi_{\text{box}})$.
Une autre possibilité est d'adapter la fonction à optimiser. Par exemple, dans le cas d'une contrainte sur la mesure de Ω ou de $\partial\Omega$, on optimise la fonction pénalisée

$$\widetilde{G}_{\text{stoch}} = G + \lambda_\alpha \left(|\Omega| - \alpha\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad \widetilde{G}_{\text{stoch}} = G + \lambda_\beta \left(|\partial\Omega| - \beta\right)^2 \tag{6.8}$$

où $\lambda_\alpha \gg 1$ ou $\lambda_\beta \gg 1$.

Notons que chaque évaluation nécessite de construire un nouveau maillage adapté au polygone $\Omega^{\text{pol}}_{\{a_{i,j}\}}$ et de résoudre le problème d'optimisation spectral discret associé. Ceci peut s'avérer très long, notamment en dimension 3. Pour pallier cette difficulté on se propose d'utiliser la propriété d'homogénéité afin de traiter des composantes homothétiques avec une seule évaluation du coût.

6.1.2.2 Réduction fondamentale de la complexité

Grâce aux propriétés d'homogénéité (2.19 et 2.40) et de réunion (2.21 et 2.41) on obtient que si $\Omega = \alpha_1\Omega_1 \cup \alpha_2\Omega_2$ (union disjointe) alors

$$\begin{aligned} G(\alpha_1\Omega_1 \cup \alpha_2\Omega_2) &= F\left(|\Omega|, |\partial\Omega|, \lambda_1^D(\Omega), \ldots, \lambda_k^D(\Omega), \lambda_1^N(\Omega), \ldots, \lambda_l^N(\Omega)\right) \\ &= F(\alpha_1^d|\Omega_1| + \alpha_2^d|\Omega_2|, \alpha_1^{d-1}|\partial\Omega_1| + \alpha_2^{d-1}|\partial\Omega_2|, \\ &\qquad \lambda_j^D(\alpha_1\Omega_1 \cup \alpha_2\Omega_2), \lambda_i^N(\alpha_1\Omega_1 \cup \alpha_2\Omega_2)) \end{aligned}$$

avec $1 \le j \le k$, $1 \le i \le l$.
Le point crucial est maintenant l'observation que le calcul de $\lambda_j^D(\alpha_1\Omega_1 \cup \alpha_2\Omega_2)$ est équivalent au tri de l'union des deux ensembles

$$\left\{\alpha_1^{-2}\lambda_j^D(\Omega_1);\, 1 \le j \le m < k\right\} \cup \left\{\alpha_2^{-2}\lambda_j^D(\Omega_2);\, 1 \le j \le k - m\right\}$$

et

$$\left\{\alpha_1^{-2}\lambda_j^N(\Omega_1);\, 1 \le j \le m' < l\right\} \cup \left\{\alpha_2^{-2}\lambda_j^N(\Omega_2);\, 1 \le j \le l - m'\right\}.$$

Définissons donc

$$G(\Omega^{\text{pol}}_{\{a_{i,j}\}}) = \min_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\ge 0} G\left(\alpha_1\Omega_1^{\text{pol}} \cup \cdots \cup \alpha_m\Omega_m^{\text{pol}}\right) \text{ où } \Omega^{\text{pol}}_{\{a_{i,j}\}} = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i^{\text{pol}}. \tag{6.9}$$

De par l'invariance par translation, on peut toujours supposer que toutes les composantes connexes sont disjointes. Par conséquent, un nouveau coût est associé à une configuration géométrique fixée avec m composantes connexes. Il suffit alors d'optimiser $G(\Omega^{\text{pol}}_{\{a_{i,j}\}})$ pour les « meilleurs coefficients » associés aux composantes connexes.

Le nombre de composantes connexes étant limité dans la pratique, le calcul des meilleurs coefficients est un problème d'optimisation en petite dimension (2, 3 ou 4 dans la pratique). Il existe plusieurs alternatives fiables pour l'optimisation globale en petite dimension. Dans notre contexte on utilise l'algorithme global lipschitzien Direct avec un nombre d'évaluation de coût fixe et borné pour chaque évaluation de G.

6.1.3 Optimisation locale par variation frontière

Le prix à payer pour les simplifications présentées ci-dessus est la réduction de l'ensemble des domaines atteignables. Pour obtenir une description précise des formes optimales il faut donc compléter cette première phase par une optimisation frontière standard.
On considère donc le maillage obtenu après la phase d'optimisation globale. De façon classique, l'idée maintenant est de modifier petit à petit la forme en bougeant les points de la frontière, chacun dans la direction de leur gradient associé. Bien entendu, après plusieurs itérations, il peut arriver que le maillage devienne singulier, nécessitant alors une étape de remaillage.
Ainsi on veut appliquer une méthode de Gradient aux degrés de liberté que sont les points de la frontière. Le principal problème est la définition des « gradients » puisque la fonction n'est plus différentiable pour les valeurs propres multiples.

6.1.3.1 Identification d'une direction de descente

Soit Ω_h le maillage de Ω^{pol}.
On veut appliquer une méthode de gradient. C'est-à-dire que si $V_{1,h}^t, \dots, V_{m,h}^t$ sont les sommets de la frontière de Ω_h au temps t et $(n_1^t, \dots, n_m^t)$ les normales extérieures en chaque point de la frontière, alors

$$(V_{1,h}^{t+1}, \dots, V_{m,h}^{t+1}) = (V_{1,h}^t, \dots, V_{m,h}^t) - \delta\Theta(V_{1,h}^t, \dots, V_{m,h}^t, G, \Omega_h)$$

pour une fonction Θ qui dépend des points et qui correspond à une certaine « dérivée » de G pour un paramètre δ à déterminer.
Définissons la fonction H par

$$H(V_{1,h}^t, \dots, V_{p,h}^t) := G(\Omega_{h/2}) \tag{6.10}$$

où $\Omega_{h/2}$ représente le maillage déduit par un raffinement régulier de Ω_h.
La distinction entre le nombre de degrés de liberté du bord (associé à h) et le nombre de degrés de liberté de l'approximation (associé à $h/2$) est un point crucial garant de stabilité. On peut voir cette idée comme une approche permettant d'éviter l'instabilité d'Hadamard (de petites erreurs d'arrondis ou l'augmentation de la précision de la méthode ont des conséquences importantes).
Une étape de la variation frontière est alors équivalente à la minimisation de

$$\widetilde{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) := H\left(V_{1,h}^t + \alpha_1 n_1^t, \dots, V_{m,h}^t + \alpha_m n_m^t\right) \tag{6.11}$$

pour tous les paramètres $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ qui ne modifient pas la topologie du maillage. Une fois qu'une direction de descente d est calculée, le nouveau point frontière est défini par

$$\delta^* = \operatorname*{argmin}_{\delta} H\left[(V_{1,h}^t, \dots, V_{m,h}^t) - \delta d\right] \tag{6.12}$$

et

$$(V_{1,h}^{t+1}, \dots, V_{m,h}^{t+1}) = (V_{1,h}^t, \dots, V_{m,h}^t) - \delta^* d. \tag{6.13}$$

La seule difficulté restante est le calcul de la direction de descente d.

Concentrons-nous pour commencer sur le cas différentiable. Dans ce cas, en utilisant les résultats sur la dérivation d'une fonction composée, le calcul est réduit au calcul de $\frac{d\lambda}{d\alpha_i}$ où λ est une valeur propre simple du problème de valeurs propres généralisé

$$K_{h/2}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right) u = \lambda M_{h/2}\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right) u \tag{6.14}$$

où u est un vecteur propre associé à λ. La formule suivante est immédiate :

$$\nabla\lambda(u, (\alpha_i)_i) = \left(\frac{d\lambda}{d\alpha_i}\right)_i = \frac{uK'_{h/2}u - \lambda u M'_{h/2}u}{uM'_{h/2}u} \tag{6.15}$$

où $K'_{h/2} = \frac{dK_{h/2}}{d\alpha_i}$ et $M'_{h/2} = \frac{dM_{h/2}}{d\alpha_i}$.
La modification de nos points frontière n'affecte que localement les matrices de masse et de rigidité. Ainsi les matrices creuses $K'_{h/2}$ et $M'_{h/2}$ peuvent être évaluées très précisément par un petit nombre de différences. Je ne détaille pas ici l'aspect technique de cette approximation et insiste plutôt sur le fait qu'une évaluation exacte de $K'_{h/2}$ et $M'_{h/2}$ peut être faite simplement et exactement.

Dans le cas de valeurs propres multiples, la fonctionnelle n'est plus différentiable. Pour identifier une direction de descente, on considère le sous-différentiel

$$\partial\widetilde{H} = \left\{\sum_{k=1}^{N_\lambda} \gamma_k \nabla\lambda(u_k, (\alpha_i)_i),\ \gamma_k \geq 0\right\} \tag{6.16}$$

où $(u_k)_{k=1,..,N_\lambda}$ est une base orthonormée de l'espace propre associé à la valeur propre λ. Pour identifier la plus forte direction de descente nous résolvons le problème d'optimisation

$$\min_{\|v\|_\infty \leq 1} \max_{w \in \partial\widetilde{H}} w \cdot v. \tag{6.17}$$

Dans la pratique on reformule ce problème convexe en la formulation linéaire

$$\min_{\substack{(t,v)\in\mathbb{R}\times[-1,1]^n \\ t \geq v\cdot w_k,\, k=1,\ldots,N_\lambda}} t. \tag{6.18}$$

Remarque 6.6. Il est important de noter que des valeurs propres parfaitement multiples n'apparaissent pas lorsqu'on travaille avec des nombres flottants. Il faut donc fixer un paramètre permettant de décider si deux valeurs propres doivent être considérées comme égales. Dans nos expérimentations on considère que deux valeurs propres consécutives λ et μ sont égales si et seulement si

$$\frac{|\lambda - \mu|}{|\mu|} \leq 5 \cdot 10^{-2}.$$

6.1.3.2 Topologie admissible

Notons qu'une fois le maillage choisi sa topologie est préservée durant la phase d'optimisation locale puisque seuls les points sont déplacés.
Un problème important concernant l'aspect long en temps est l'étude de cette contrainte de topologie. En fait, une fois qu'une direction de descente est choisie, on doit s'assurer que la topologie est toujours admissible. Plus précisément on ne veut pas d'auto-intersection ou de mauvaise orientation des simplexes.
On introduit ci-dessous un indicateur simple et efficace qui permet de vérifier la topologie du maillage déplacé. L'idée de cet indicateur est de calculer la mesure du domaine polygonal défini par le maillage de deux façons différentes et de comparer les résultats. Si τ représente

l'ensemble des simplexes et Υ l'ensemble des faces des simplexes qui sont sur la frontière alors on devrait avoir

$$|\Omega_\tau| = \sum_{T\in\tau} |T| = \frac{1}{d}\sum_{f\in\Upsilon} \int_f X\cdot n\, d\sigma = \frac{1}{d}\sum_{f\in\Upsilon} n_f \cdot |f| \sum_{V_i\in f} \frac{V_i}{d}.$$

Tout au long de la phase d'optimisation locale, cet indicateur nous permet de détecter si une étape de remaillage est requise ou non.

6.1.4 Remarques et compléments

Remarque 6.7. Insistons sur le fait qu'en pratique, le mouvement est « sous-échantillonné » par rapport au maillage. C'est-à-dire qu'on n'applique pas la variation frontière à tous les points de la frontière mais seulement à certains d'entre eux. Cette démarche nous permet d'éviter l'apparition de certaines irrégularités artificielles dues à la minimisation du terme d'erreur.

L'un des problèmes des algorithmes présentés précédemment est le risque de tomber sur des optima locaux. Pour pallier ce problème j'ai utilisé deux techniques différentes :

- ◇ tout d'abord, la première phase étant une phase stochastique, la répétition des processus d'optimisation permet d'obtenir des résultats potentiellement différents,
- ◇ ensuite, j'ai créé une fonction qui permet de court-circuiter le processus stochastique et de choisir moi-même la forme servant d'initialisation à la phase de variation frontière. J'ai ainsi dans mes expérimentations choisis des initialisations telles que des unions de disques, des ellipses, des carrés, des anneaux ... en dimension 2 et des formes similaires en dimension 3.

Enfin, afin de donner des résultats plus précis, nous avons décidé, une fois nos formes optimales trouvées, de recalculer les valeurs propres en utilisant des éléments finis $\mathbb{P}_2$. Pour cela j'ai utilisé des logithèques disponibles librement (Melina par exemple développée par D.Martin et E. Lunéville).

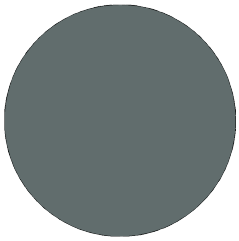
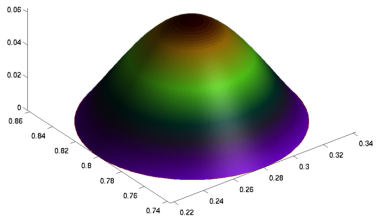
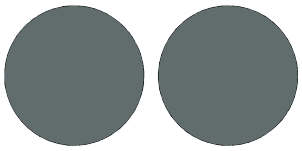
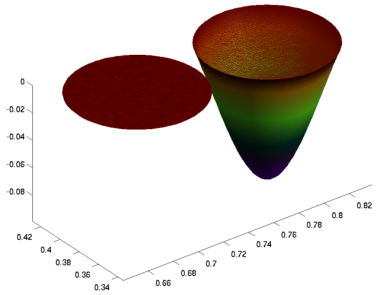
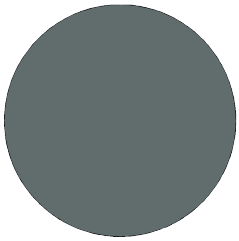
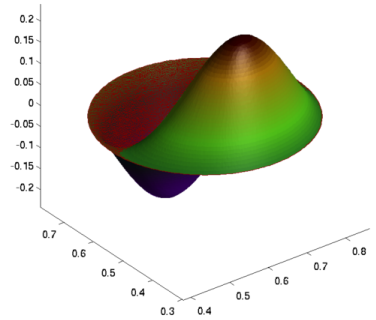
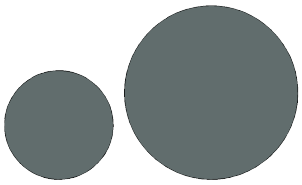
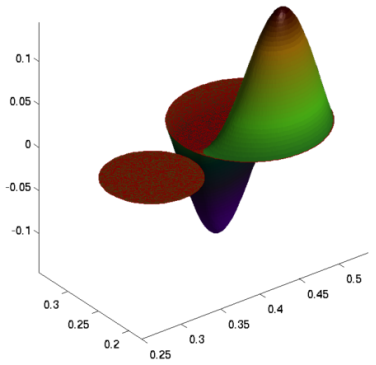
6.2 Résultats numériques

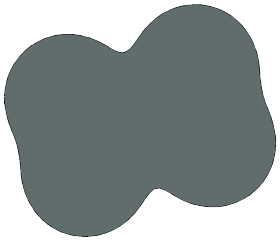
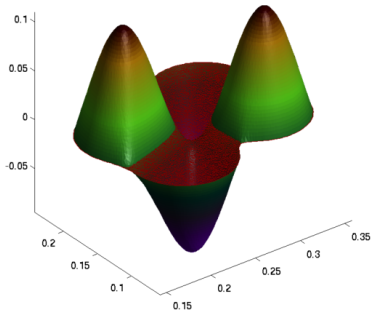
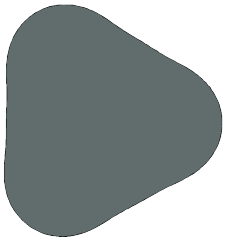
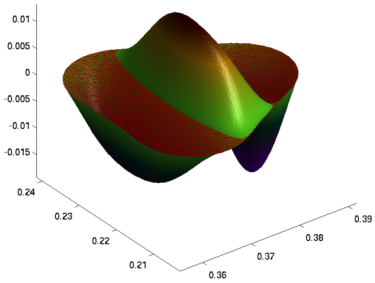
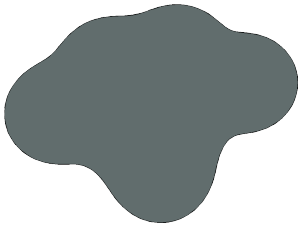
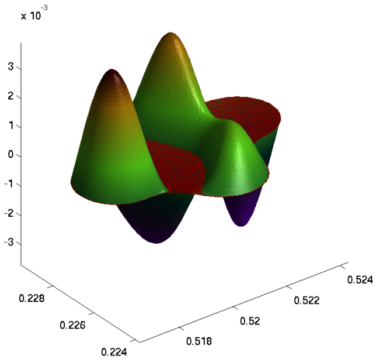
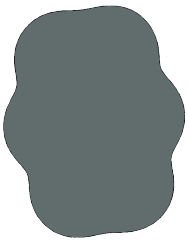
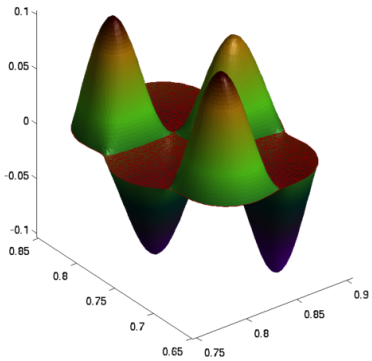
Présentons maintenant les résultats numériques obtenus. Pour chaque cas (Dirichlet/Neumann, 2D/3D) deux tableaux sont donnés.

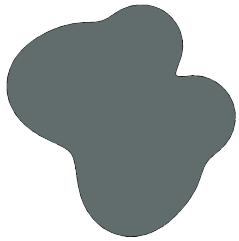
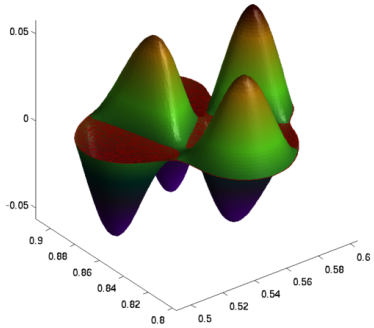
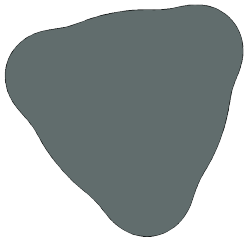
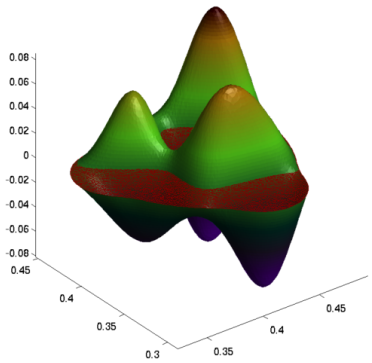
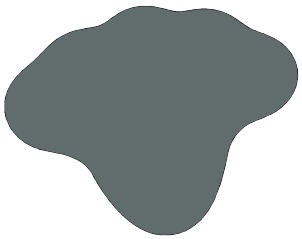
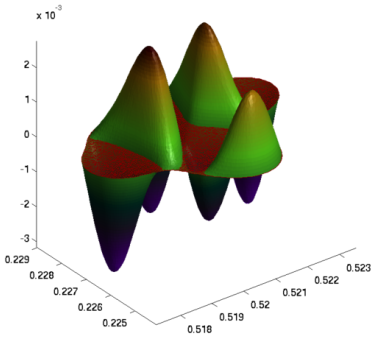
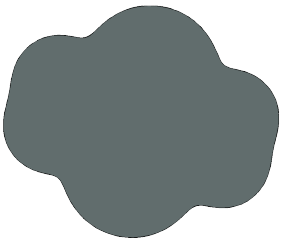
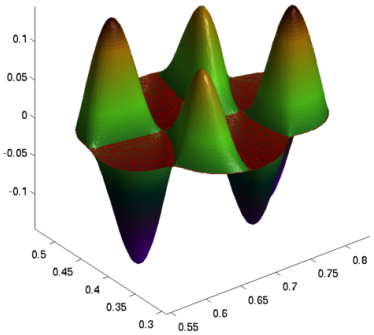
- ◇ L'un présente les résultats obtenus pour toutes les expérimentations faites (forme et valeur propre). Pour des raisons de lisibilité, ces tableaux sont regroupés en fin de chapitre.
- ◇ L'autre ne contient que les candidats à l'optimum. Dans ce tableau on donne la forme, une représentation de fonction propre et les premières valeurs propres de cette forme.

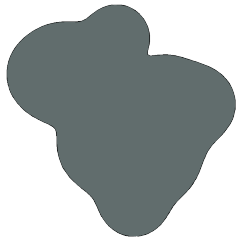
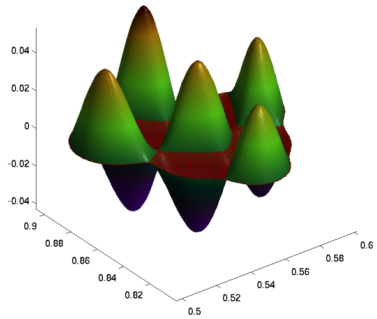
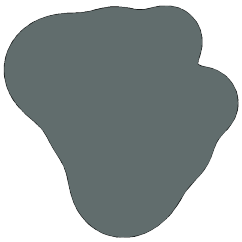
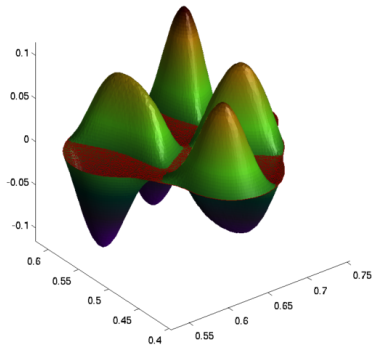
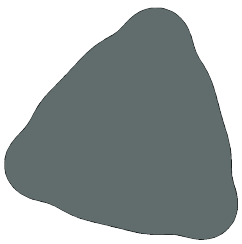
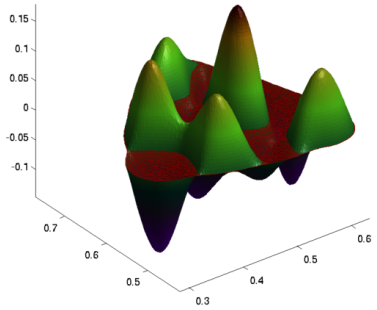
Remarque 6.8. Malgré les précautions détaillées précédemment afin de simplifier les algorithmes et rendre les temps de calcul moins longs, chaque expérimentation, notamment en dimension 3, prend beaucoup de temps si on souhaite obtenir des résultats relativement précis. Compte tenu de la multiplication des expériences faites, les résultats présentés ici sont le fruit de centaines d'heures de calculs.

6.2.1 Condition de Dirichlet, dimension 2

λ_1^*			$\lambda_{\mathbf{1}} = \mathbf{18.1695}$ $\lambda_2 = 46.0820$ $\lambda_3 = 46.1711$ $\lambda_4 = 82.6108$ $\lambda_5 = 83.1118$ $\lambda_6 = 95.7296$ $\lambda_7 = 127.8621$ $\lambda_8 = 127.9030$ $\lambda_9 = 154.4821$ $\lambda_{10} = 154.7793$ $\lambda_{11} = 180.9024$
λ_2^*			$\lambda_1 = 36.3368$ $\lambda_{\mathbf{2}} = \mathbf{36.3373}$ $\lambda_3 = 92.2444$ $\lambda_4 = 92.2482$ $\lambda_5 = 92.2526$ $\lambda_6 = 92.2540$ $\lambda_7 = 165.7148$ $\lambda_8 = 165.7168$ $\lambda_9 = 165.7169$ $\lambda_{10} = 165.7192$ $\lambda_{11} = 191.4555$
λ_3^*			$\lambda_1 = 18.1686$ $\lambda_2 = 46.1237$ $\lambda_{\mathbf{3}} = \mathbf{46.1262}$ $\lambda_4 = 82.8575$ $\lambda_5 = 82.8594$ $\lambda_6 = 95.7285$ $\lambda_7 = 127.8829$ $\lambda_8 = 127.8838$ $\lambda_9 = 154.6203$ $\lambda_{10} = 154.6288$ $\lambda_{11} = 180.9019$
λ_4^*			$\lambda_1 = 25.3289$ $\lambda_2 = 64.2694$ $\lambda_3 = 64.2999$ $\lambda_{\mathbf{4}} = \mathbf{64.3062}$ $\lambda_5 = 115.5033$ $\lambda_6 = 115.5236$ $\lambda_7 = 133.4556$ $\lambda_8 = 163.0019$ $\lambda_9 = 163.3235$ $\lambda_{10} = 178.2492$ $\lambda_{11} = 178.3165$

λ_5^*			$\lambda_1 = 22.8740$ $\lambda_2 = 40.6694$ $\lambda_3 = 67.3662$ $\lambda_4 = 78.1184$ $\boldsymbol{\lambda_5 = 78.1653}$ $\lambda_6 = 125.9645$ $\lambda_7 = 126.7618$ $\lambda_8 = 134.1913$ $\lambda_9 = 139.2842$ $\lambda_{10} = 170.5951$ $\lambda_{11} = 189.6499$
λ_6^*			$\lambda_1 = 19.7401$ $\lambda_2 = 47.5613$ $\lambda_3 = 47.5893$ $\lambda_4 = 88.4405$ $\lambda_5 = 88.4688$ $\boldsymbol{\lambda_6 = 88.5017}$ $\lambda_7 = 135.5358$ $\lambda_8 = 143.0720$ $\lambda_9 = 143.1455$ $\lambda_{10} = 146.1098$ $\lambda_{11} = 198.2053$
λ_7^*			$\lambda_1 = 21.4600$ $\lambda_2 = 46.0110$ $\lambda_3 = 56.9959$ $\lambda_4 = 74.2944$ $\lambda_5 = 105.8969$ $\lambda_6 = 106.1489$ $\boldsymbol{\lambda_7 = 106.2108}$ $\lambda_8 = 148.9793$ $\lambda_9 = 158.9764$ $\lambda_{10} = 171.5261$ $\lambda_{11} = 172.9423$
λ_8^*			$\lambda_1 = 19.7234$ $\lambda_2 = 41.4783$ $\lambda_3 = 58.1321$ $\lambda_4 = 72.8153$ $\lambda_5 = 88.1686$ $\lambda_6 = 118.5997$ $\lambda_7 = 118.8266$ $\boldsymbol{\lambda_8 = 118.9694}$ $\lambda_9 = 163.9344$ $\lambda_{10} = 167.5385$ $\lambda_{11} = 174.6953$

λ_9^*			$\lambda_1 = 21.9697$ $\lambda_2 = 43.0763$ $\lambda_3 = 61.8710$ $\lambda_4 = 79.4325$ $\lambda_5 = 82.9507$ $\lambda_6 = 122.9962$ $\lambda_7 = 131.4306$ $\lambda_8 = 132.3466$ $\boldsymbol{\lambda_9 = 132.4927}$ $\lambda_{10} = 189.9142$ $\lambda_{11} = 190.9172$
λ_{10}^*			$\lambda_1 = 19.9813$ $\lambda_2 = 48.3807$ $\lambda_3 = 48.3823$ $\lambda_4 = 88.9533$ $\lambda_5 = 88.9627$ $\lambda_6 = 89.1683$ $\lambda_7 = 142.3396$ $\lambda_8 = 142.6090$ $\lambda_9 = 142.7305$ $\boldsymbol{\lambda_{10} = 142.7460}$ $\lambda_{11} = 205.4378$
λ_{11}^*			$\lambda_1 = 21.3321$ $\lambda_2 = 47.4395$ $\lambda_3 = 53.1125$ $\lambda_4 = 79.1066$ $\lambda_5 = 98.3376$ $\lambda_6 = 101.3631$ $\lambda_7 = 118.0344$ $\lambda_8 = 158.4270$ $\lambda_9 = 159.0038$ $\lambda_{10} = 159.6601$ $\boldsymbol{\lambda_{11} = 159.8210}$
λ_{12}^*			$\lambda_1 = 19.8112$ $\lambda_2 = 44.3156$ $\lambda_3 = 54.5404$ $\lambda_4 = 72.9698$ $\lambda_5 = 98.0349$ $\lambda_6 = 105.7342$ $\lambda_7 = 116.0074$ $\lambda_8 = 130.4116$ $\lambda_9 = 171.9208$ $\lambda_{10} = 172.5534$ $\lambda_{11} = 172.9065$ $\boldsymbol{\lambda_{12} = 173.0351}$ $\lambda_{13} = 218.1410$ $\lambda_{14} = 235.4878$ $\lambda_{15} = 237.1442$

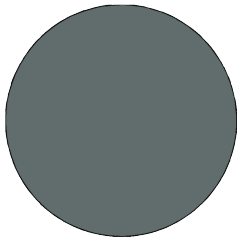
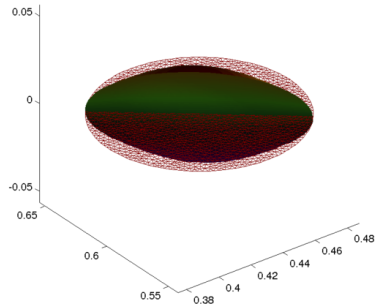
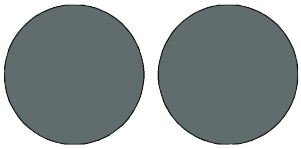
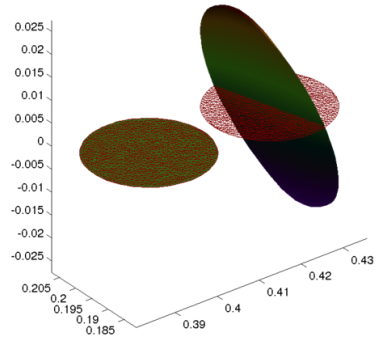
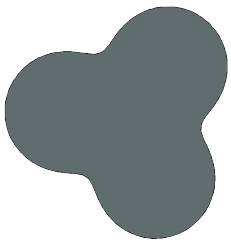
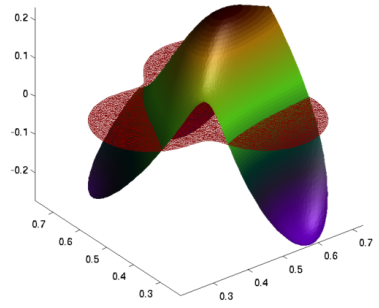
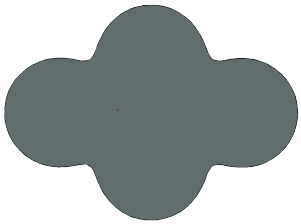
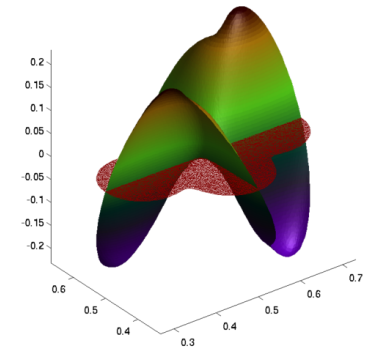
λ_{13}^*			$\lambda_1 = 21.9932$ $\lambda_2 = 43.7050$ $\lambda_3 = 60.0849$ $\lambda_4 = 78.7470$ $\lambda_5 = 89.9387$ $\lambda_6 = 114.1533$ $\lambda_7 = 124.8949$ $\lambda_8 = 127.9825$ $\lambda_9 = 165.9794$ $\lambda_{10} = 185.1583$ $\lambda_{11} = 186.4412$ $\lambda_{12} = 186.7462$ $\boldsymbol{\lambda_{13} = 186.9763}$ $\lambda_{14} = 251.1226$ $\lambda_{15} = 255.8356$
λ_{14}^*			$\lambda_1 = 20.2557$ $\lambda_2 = 44.5268$ $\lambda_3 = 54.4375$ $\lambda_4 = 82.0961$ $\lambda_5 = 84.0351$ $\lambda_6 = 108.3875$ $\lambda_7 = 133.0303$ $\lambda_8 = 134.5671$ $\lambda_9 = 135.3054$ $\lambda_{10} = 179.0030$ $\lambda_{11} = 197.7734$ $\lambda_{12} = 198.2907$ $\lambda_{13} = 199.1832$ $\boldsymbol{\lambda_{14} = 199.2859}$ $\lambda_{15} = 261.5000$
λ_{15}^*			$\lambda_1 = 20.0543$ $\lambda_2 = 48.6424$ $\lambda_3 = 48.6902$ $\lambda_4 = 89.3738$ $\lambda_5 = 89.5154$ $\lambda_6 = 90.1827$ $\lambda_7 = 142.0564$ $\lambda_8 = 143.2689$ $\lambda_9 = 143.3452$ $\lambda_{10} = 143.4803$ $\lambda_{11} = 208.1457$ $\lambda_{12} = 208.7363$ $\lambda_{13} = 209.4692$ $\lambda_{14} = 209.8968$ $\boldsymbol{\lambda_{15} = 209.9533}$

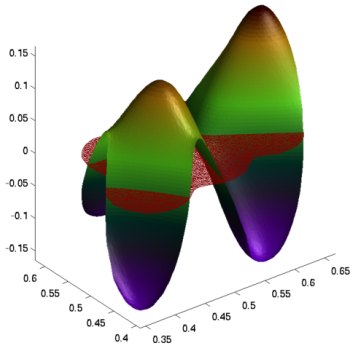
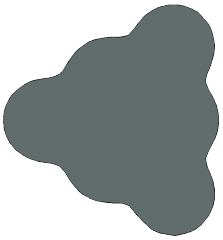
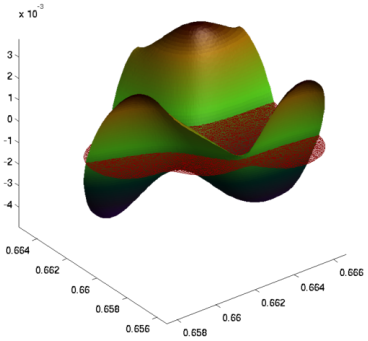
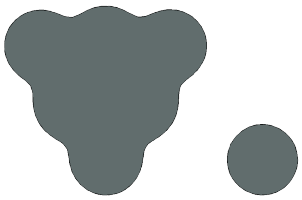
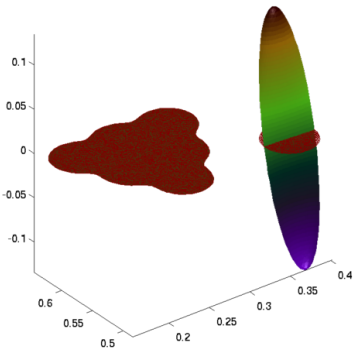
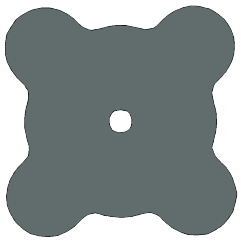
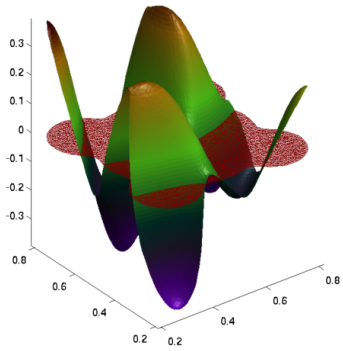
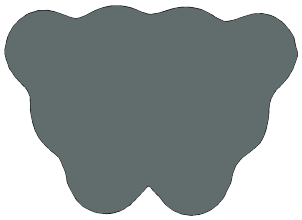
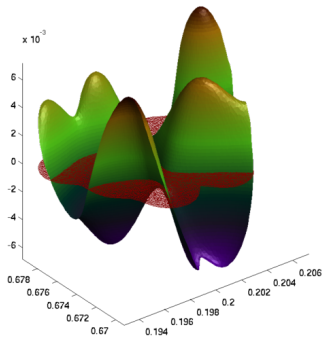
On constate que ces résultats sont cohérents avec les résultats théoriques présentés dans les chapitres précédents et les résultats numériques de P. Freitas et P. Antunes [2]. On remarque aussi qu'en dehors de la première valeurs propre, les valeurs propres optimales sont multiples et correspondent à la dernière occurrence.

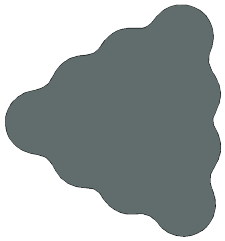
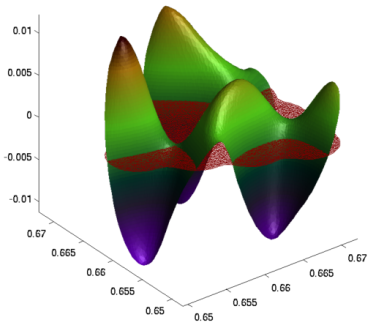
La flagrante asymétrie de Ω_{13}^*, déjà constatée dans [2], est surprenante et contraire au cas

des autres valeurs propres. Néanmoins, le fait d'obtenir ce résultat par deux techniques différentes semble indiquer que ce résultat est correct.

6.2.2 Condition de Neumann, dimension 2

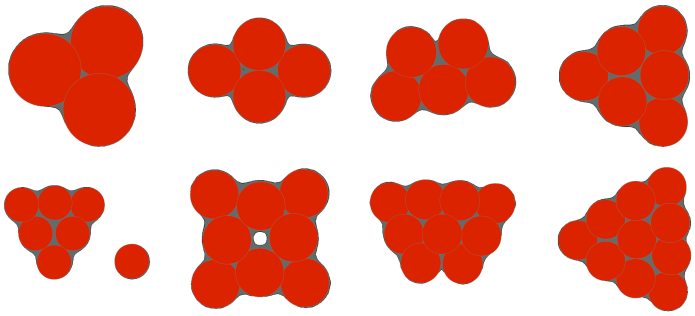
μ_2^*			$\mu_{\mathbf{2}} = \mathbf{10.6676}$ $\mu_3 = 10.6683$ $\mu_4 = 29.3219$ $\mu_5 = 29.3261$ $\mu_6 = 46.1429$ $\mu_7 = 55.4663$ $\mu_8 = 55.4680$ $\mu_9 = 88.8453$ $\mu_{10} = 88.8565$ $\mu_{11} = 89.3140$
μ_3^*			$\mu_2 = 0.0010712$ $\mu_{\mathbf{3}} = \mathbf{21.2887}$ $\mu_4 = 21.2975$ $\mu_5 = 21.3063$ $\mu_6 = 21.3100$ $\mu_7 = 58.5435$ $\mu_8 = 58.5854$ $\mu_9 = 58.6558$ $\mu_{10} = 58.6632$ $\mu_{11} = 92.2369$
μ_4^*			$\mu_2 = 8.2930$ $\mu_3 = 8.3070$ $\mu_{\mathbf{4}} = \mathbf{33.0844}$ $\mu_5 = 33.0908$ $\mu_6 = 33.0929$ $\mu_7 = 47.5310$ $\mu_8 = 64.5420$ $\mu_9 = 64.5794$ $\mu_{10} = 83.2867$ $\mu_{11} = 100.6814$
μ_5^*			$\mu_2 = 6.4002$ $\mu_3 = 13.0487$ $\mu_4 = 14.8592$ $\mu_{\mathbf{5}} = \mathbf{43.9480}$ $\mu_6 = 43.9672$ $\mu_7 = 43.9816$ $\mu_8 = 51.5782$ $\mu_9 = 71.1170$ $\mu_{10} = 81.3426$ $\mu_{11} = 87.0386$

μ_6^*			$\mu_2 = 5.9364$ $\mu_3 = 13.4247$ $\mu_4 = 19.1841$ $\mu_5 = 23.4571$ $\mu_6 = \mathbf{55.2264}$ $\mu_7 = 55.2357$ $\mu_8 = 55.2634$ $\mu_9 = 58.4873$ $\mu_{10} = 76.1799$ $\mu_{11} = 92.6145$
μ_7^*			$\mu_2 = 8.4749$ $\mu_3 = 8.4883$ $\mu_4 = 27.6613$ $\mu_5 = 29.8543$ $\mu_6 = 29.9832$ $\mu_7 = \mathbf{67.2876}$ $\mu_8 = 67.2906$ $\mu_9 = 67.3215$ $\mu_{10} = 67.4187$ $\mu_{11} = 92.7191$
μ_8^*			$\mu_2 = 0.020220$ $\mu_3 = 9.8752$ $\mu_4 = 9.8847$ $\mu_5 = 32.2402$ $\mu_6 = 34.7109$ $\mu_7 = 34.7276$ $\mu_8 = \mathbf{77.9825}$ $\mu_9 = 77.9907$ $\mu_{10} = 78.0039$ $\mu_{11} = 78.0042$
μ_9^*			$\mu_2 = 8.4516$ $\mu_3 = 8.4610$ $\mu_4 = 14.2635$ $\mu_5 = 32.5309$ $\mu_6 = 43.4101$ $\mu_7 = 43.4914$ $\mu_8 = 48.1274$ $\mu_9 = \mathbf{89.4973}$ $\mu_{10} = 89.5016$ $\mu_{11} = 89.5224$
μ_{10}^*			$\mu_2 = 7.2855$ $\mu_3 = 11.9861$ $\mu_4 = 22.5890$ $\mu_5 = 26.0221$ $\mu_6 = 43.8002$ $\mu_7 = 50.2381$ $\mu_8 = 54.8967$ $\mu_9 = 59.2480$ $\mu_{10} = \mathbf{101.5721}$ $\mu_{11} = 101.7338$

μ_{11}^*			$\mu_2 = 8.6434$ $\mu_3 = 8.6512$ $\mu_4 = 28.2419$ $\mu_5 = 29.9573$ $\mu_6 = 30.0329$ $\mu_7 = 60.0827$ $\mu_8 = 60.2807$ $\mu_9 = 62.6201$ $\mu_{10} = 67.1870$ $\mu_{11} = \mathbf{113.9835}$

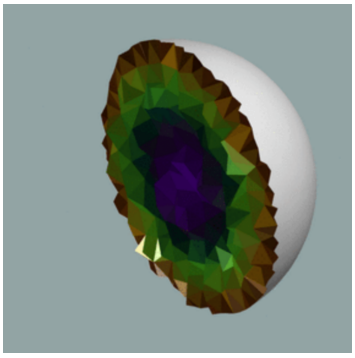
Faisons quelques remarques / constatations.

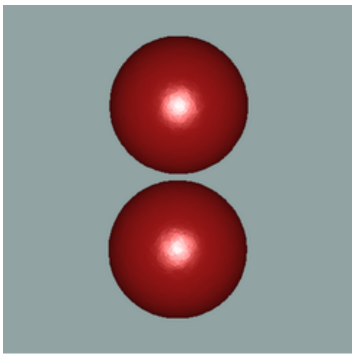
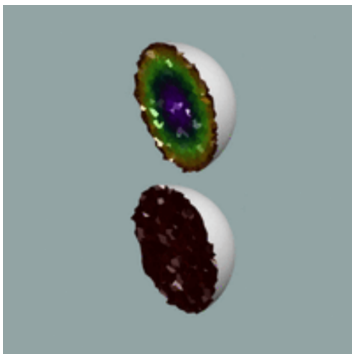
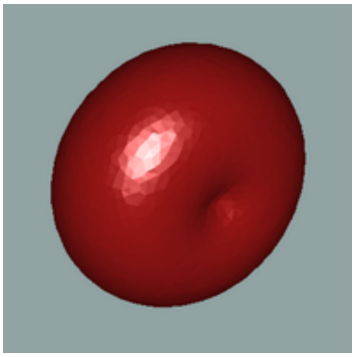
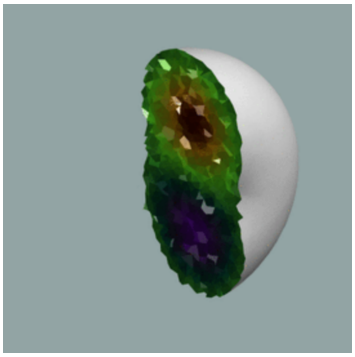
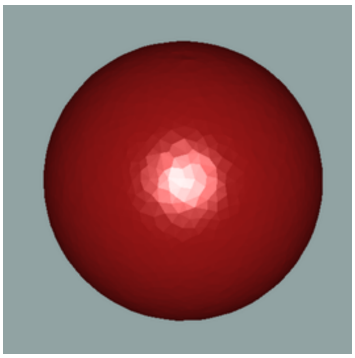
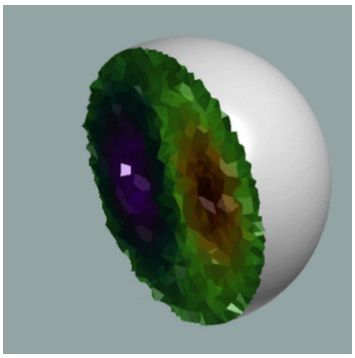
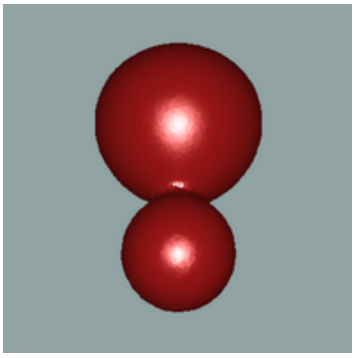
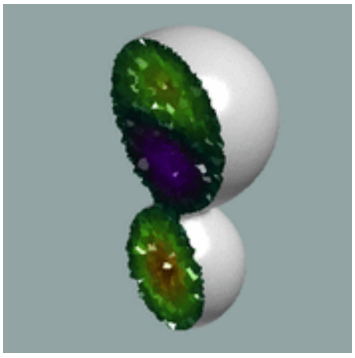
- ◇ Les résultats semblent de bonne qualité.
- ◇ Certaines de nos formes optimales correspondent à celles trouvées par P. Freitas et P. Antunes dans [2] mais pas toutes (λ_5, λ_6, λ_9). Néanmoins leurs formes optimales nous sont apparues lors de nos simulations. On a simplement obtenu des valeurs propres supérieures pour d'autres formes.
- ◇ La plus grande surprise vient de Ω_9^*. En effet on obtient une forme avec un trou. De par la technique qu'ils ont utilisé, P. Freitas et P. Antunes ne peuvent obtenir une telle forme.
- ◇ Les formes obtenues sont plutôt régulières et symétriques semble-t-il.
- ◇ On a l'impression de pouvoir dessiner n disques identiques dans la forme Ω_{n+1}^*.

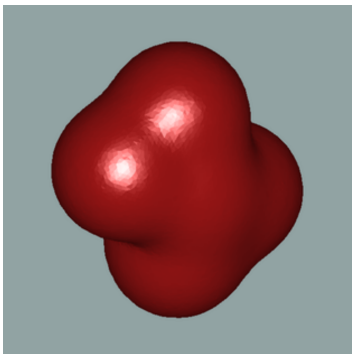
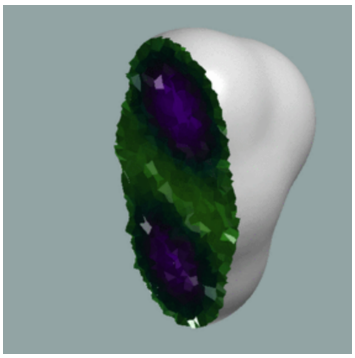
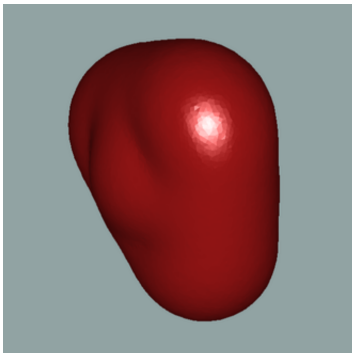
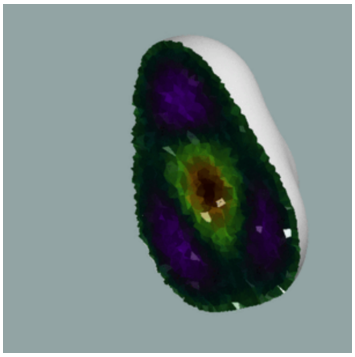
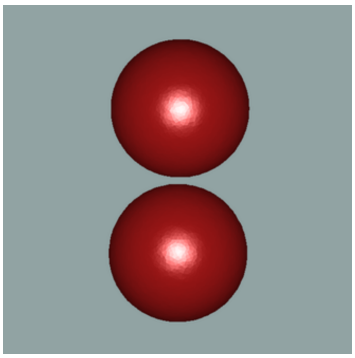
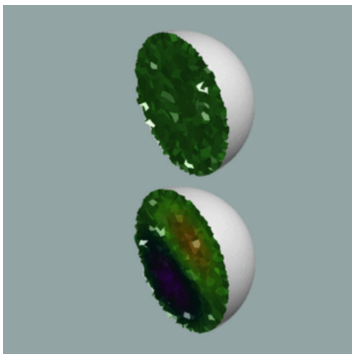
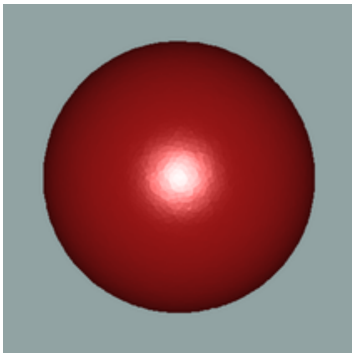
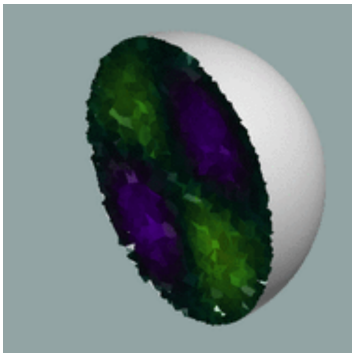


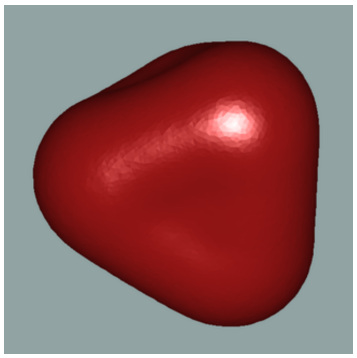
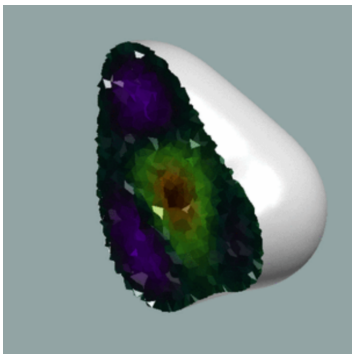
- ◇ De façon similaire au cas de Dirichlet, les valeurs propres optimales sont multiples mais correspondent maintenant à la première occurrence.

6.2.3 Condition de Dirichlet, dimension 3

λ_1^*			$\lambda_1 = \mathbf{25.6499}$ $\lambda_2 = 52.4629$ $\lambda_3 = 52.4737$ $\lambda_4 = 52.5059$ $\lambda_5 = 86.3330$ $\lambda_6 = 86.3400$ $\lambda_7 = 86.3766$ $\lambda_8 = 86.3900$ $\lambda_9 = 86.3981$ $\lambda_{10} = 102.6858$ $\lambda_{11} = 126.9690$

λ_2^*			$\lambda_1 = 40.7149$ $\boldsymbol{\lambda_2 = 40.7188}$ $\lambda_3 = 83.2573$ $\lambda_4 = 83.2869$ $\lambda_5 = 83.3140$ $\lambda_6 = 83.3194$ $\lambda_7 = 83.3304$ $\lambda_8 = 83.3424$ $\lambda_9 = 137.0166$ $\lambda_{10} = 137.0606$ $\lambda_{11} = 137.0666$
λ_3^*			$\lambda_1 = 29.0857$ $\lambda_2 = 49.1394$ $\boldsymbol{\lambda_3 = 49.1614}$ $\lambda_4 = 75.8713$ $\lambda_5 = 75.8911$ $\lambda_6 = 77.7568$ $\lambda_7 = 85.8090$ $\lambda_8 = 99.4297$ $\lambda_9 = 99.5101$ $\lambda_{10} = 108.1935$ $\lambda_{11} = 108.2173$
λ_4^*			$\lambda_1 = 25.6481$ $\lambda_2 = 52.4443$ $\lambda_3 = 52.4826$ $\boldsymbol{\lambda_4 = 52.4904}$ $\lambda_5 = 86.3009$ $\lambda_6 = 86.3129$ $\lambda_7 = 86.3245$ $\lambda_8 = 86.3661$ $\lambda_9 = 86.3838$ $\lambda_{10} = 102.6255$ $\lambda_{11} = 126.8830$
λ_5^*			$\lambda_1 = 31.2034$ $\lambda_2 = 63.2723$ $\lambda_3 = 63.8276$ $\lambda_4 = 63.9121$ $\boldsymbol{\lambda_5 = 64.0415}$ $\lambda_6 = 103.0261$ $\lambda_7 = 104.9041$ $\lambda_8 = 104.9360$ $\lambda_9 = 105.6626$ $\lambda_{10} = 105.7788$ $\lambda_{11} = 122.8895$

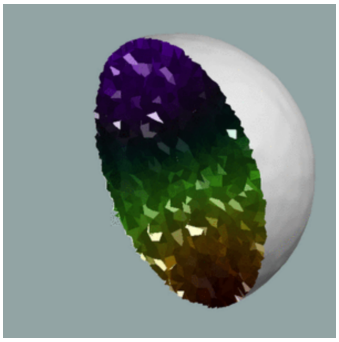
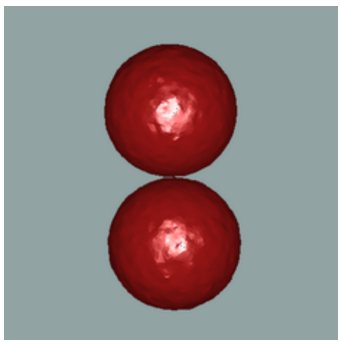
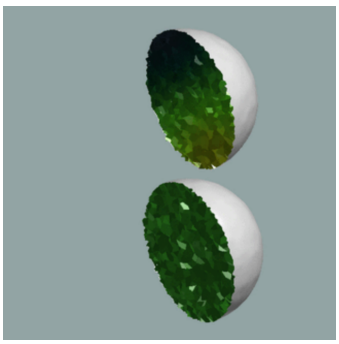
λ_6^*			$\lambda_1 = 29.7880$ $\lambda_2 = 46.2662$ $\lambda_3 = 60.6196$ $\lambda_4 = 72.6389$ $\lambda_5 = 72.6520$ $\boldsymbol{\lambda_6 = 73.0974}$ $\lambda_7 = 97.6878$ $\lambda_8 = 104.0761$ $\lambda_9 = 105.8726$ $\lambda_{10} = 107.1678$ $\lambda_{11} = 113.5366$
λ_7^*			$\lambda_1 = 29.8351$ $\lambda_2 = 51.2219$ $\lambda_3 = 51.2360$ $\lambda_4 = 77.6303$ $\lambda_5 = 77.9796$ $\lambda_6 = 78.0645$ $\boldsymbol{\lambda_7 = 78.3202}$ $\lambda_8 = 109.0733$ $\lambda_9 = 111.4685$ $\lambda_{10} = 111.5663$ $\lambda_{11} = 111.9353$
λ_8^*			$\lambda_1 = 40.7131$ $\lambda_2 = 40.7192$ $\lambda_3 = 83.2122$ $\lambda_4 = 83.2322$ $\lambda_5 = 83.2896$ $\lambda_6 = 83.3525$ $\lambda_7 = 83.3755$ $\boldsymbol{\lambda_8 = 83.3814}$ $\lambda_9 = 136.9572$ $\lambda_{10} = 136.9925$ $\lambda_{11} = 136.9966$
λ_9^*			$\lambda_1 = 25.6481$ $\lambda_2 = 52.4091$ $\lambda_3 = 52.4623$ $\lambda_4 = 52.5462$ $\lambda_5 = 86.2192$ $\lambda_6 = 86.2934$ $\lambda_7 = 86.3087$ $\lambda_8 = 86.3922$ $\boldsymbol{\lambda_9 = 86.4753}$ $\lambda_{10} = 102.6274$ $\lambda_{11} = 126.7938$

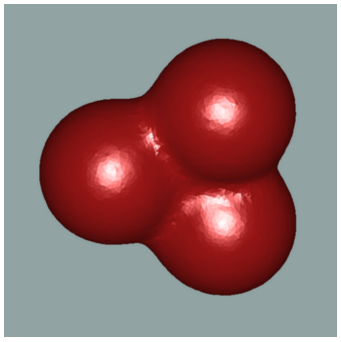
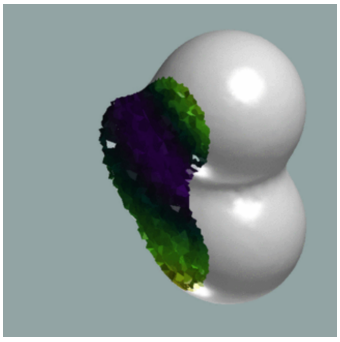
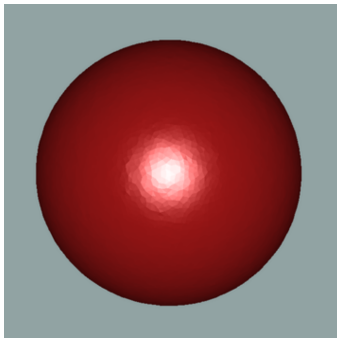
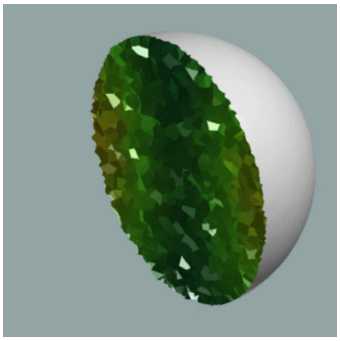
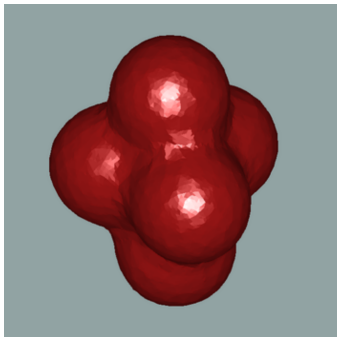
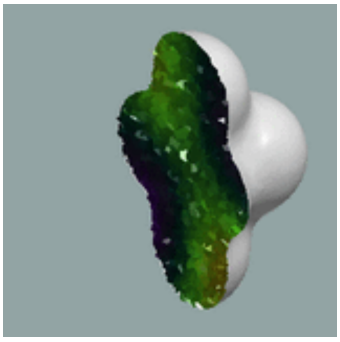
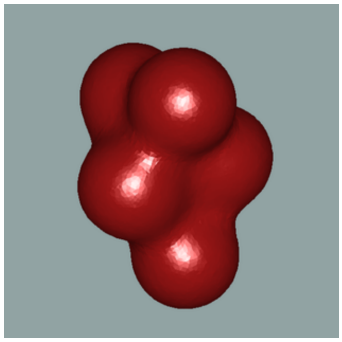
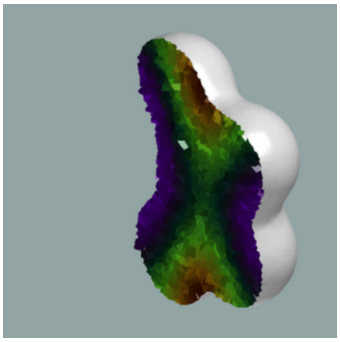
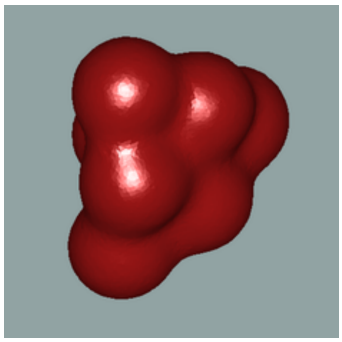
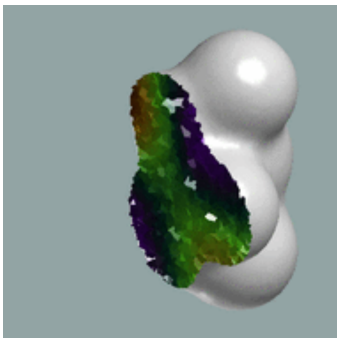
λ_{10}^*			$\lambda_1 = 28.9222$ $\lambda_2 = 55.2434$ $\lambda_3 = 55.3638$ $\lambda_4 = 55.3749$ $\lambda_5 = 91.4691$ $\lambda_6 = 91.4991$ $\lambda_7 = 91.5538$ $\lambda_8 = 91.8570$ $\lambda_9 = 92.1048$ $\boldsymbol{\lambda_{10} = 92.4767}$ $\lambda_{11} = 131.2225$

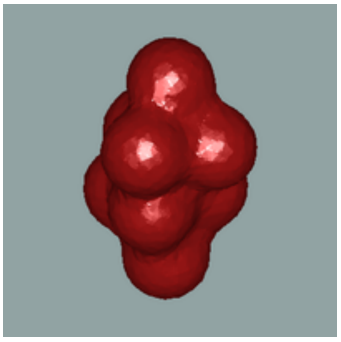
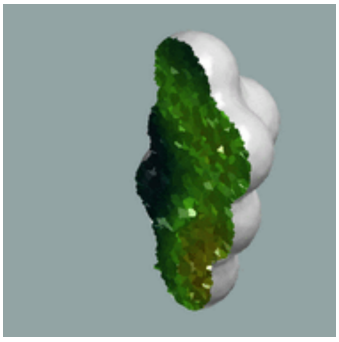
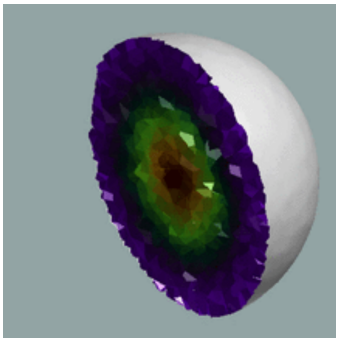
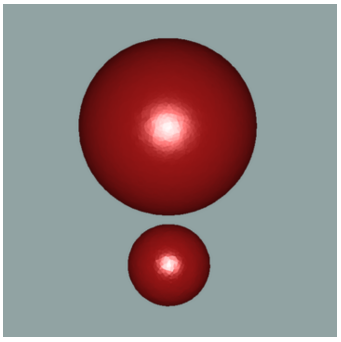
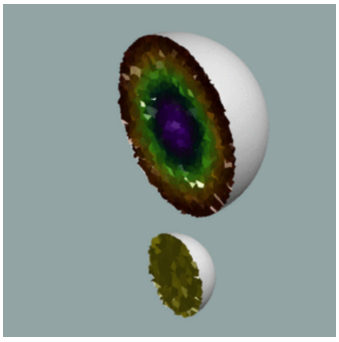
Faisons quelques remarques / constatations.

- ◇ La qualité des résultats obtenus est bonne.
- ◇ Les boules et unions de boules semblent jouer un rôle important. Néanmoins il est difficile d'en tirer une conclusion générale. Comme on l'a vu dans le cas de la dimension 2, le comportement des petites valeurs propres diffère de celui des autres valeurs propres. En dimension 3, les valeurs propres pouvant être considérées comme petites sont plus nombreuses et nous n'avons certainement pas poussé suffisamment les expériences pour en tirer une conclusion générale.
- ◇ Une nouvelle fois la plupart des valeurs propres optimales semblent multiples, correspondant à la dernière occurrence.
- ◇ Les formes obtenues semblent plutôt régulières et symétriques, mais ne comportent pas de trou.

6.2.4 Condition de Neumann, dimension 3

μ_2^*			$\boldsymbol{\mu_2 = 11.2290}$ $\mu_3 = 11.2502$ $\mu_4 = 11.2962$ $\mu_5 = 28.9196$ $\mu_6 = 28.9714$ $\mu_7 = 29.0421$ $\mu_8 = 29.0600$ $\mu_9 = 29.1751$ $\mu_{10} = 52.4300$ $\mu_{11} = 52.7398$
μ_3^*			$\mu_2 = 0$ $\boldsymbol{\mu_3 = 17.8665}$ $\mu_4 = 17.8668$ $\mu_5 = 17.8676$ $\mu_6 = 17.8677$ $\mu_7 = 17.8701$ $\mu_8 = 17.8843$ $\mu_9 = 46.0098$ $\mu_{10} = 46.0291$ $\mu_{11} = 46.0350$

μ_4^*			$\mu_2 = 4.7742$ $\mu_3 = 4.7831$ $\mu_4 = \mathbf{23.6720}$ $\mu_5 = 23.6813$ $\mu_6 = 23.6937$ $\mu_7 = 23.6947$ $\mu_8 = 27.2265$ $\mu_9 = 27.2530$ $\mu_{10} = 32.5624$ $\mu_{11} = 40.7029$
μ_5^*			$\mu_2 = 11.2579$ $\mu_3 = 11.2593$ $\mu_4 = 11.2597$ $\mu_5 = \mathbf{29.0223}$ $\mu_6 = 29.0232$ $\mu_7 = 29.0244$ $\mu_8 = 29.0264$ $\mu_9 = 29.0280$ $\mu_{10} = 52.3726$ $\mu_{11} = 52.9460$
μ_6^*			$\mu_2 = 6.0713$ $\mu_3 = 9.6743$ $\mu_4 = 9.7074$ $\mu_5 = 11.7144$ $\mu_6 = \mathbf{34.4619}$ $\mu_7 = 34.4702$ $\mu_8 = 34.4786$ $\mu_9 = 34.4830$ $\mu_{10} = 34.4883$ $\mu_{11} = 34.5357$
μ_7^*			$\mu_2 = 5.3542$ $\mu_3 = 9.0737$ $\mu_4 = 12.2134$ $\mu_5 = 13.5476$ $\mu_6 = 14.0102$ $\mu_7 = \mathbf{38.8149}$ $\mu_8 = 38.8217$ $\mu_9 = 38.8404$ $\mu_{10} = 38.8450$ $\mu_{11} = 38.8650$
μ_8^*			$\mu_2 = 5.9410$ $\mu_3 = 6.0125$ $\mu_4 = 12.5484$ $\mu_5 = 17.5534$ $\mu_6 = 17.6958$ $\mu_7 = 17.7862$ $\mu_8 = \mathbf{43.0391}$ $\mu_9 = 43.0431$ $\mu_{10} = 43.0485$ $\mu_{11} = 43.0839$

μ_9^*			$\mu_2 = 4.0600$ $\mu_3 = 11.7163$ $\mu_4 = 11.8494$ $\mu_5 = 12.7442$ $\mu_6 = 17.3930$ $\mu_7 = 19.0840$ $\mu_8 = 21.1682$ $\boldsymbol{\mu_9 = 47.1716}$ $\mu_{10} = 47.2229$ $\mu_{11} = 47.3605$
μ_{10}^*			$\mu_2 = 11.2479$ $\mu_3 = 11.2599$ $\mu_4 = 11.2675$ $\mu_5 = 28.9934$ $\mu_6 = 28.9979$ $\mu_7 = 29.0201$ $\mu_8 = 29.0450$ $\mu_9 = 29.0607$ $\boldsymbol{\mu_{10} = 52.4856}$ $\mu_{11} = 52.9129$
μ_{11}^*			$\mu_2 = 0$ $\mu_3 = 11.9819$ $\mu_4 = 11.9860$ $\mu_5 = 11.9972$ $\mu_6 = 30.8779$ $\mu_7 = 30.8975$ $\mu_8 = 30.9082$ $\mu_9 = 30.9147$ $\mu_{10} = 30.9242$ $\boldsymbol{\mu_{11} = 55.8672}$

Faisons quelques remarques / constatations.

- ◇ La qualité des résultats obtenus est peut-être plus sujette à discussion puisque peu de symétries apparaissent. Difficile dans ce cas de dire si nos résultats sont complètement fiables.
- ◇ À nouveau les boules et unions de boules semblent jouer un rôle important. Pour $6 \leq n \leq 9$, Ω_n^* semble être un « amas » de $n-1$ boules (similaire au cas de la dimension 2). Les différentes expériences menées donnent de nombreux résultats similaires mais avec différentes organisations de ces boules.
- ◇ À nouveau la plupart des valeurs optimales semblent multiples, correspondant à la première occurrence.
- ◇ Les formes obtenues semblent plutôt régulières et symétriques, mais ne comportent pas de trou.

Pour terminer, voici les tableaux récapitulant les expériences effectuées.

Conditions de Dirichlet, 2D

λ_1	**18.1694**									
λ_2	**36.3371**									
λ_3	**46.1261**									
λ_4	64.3321	64.3432	**64.3060**	64.3314	72.6895	64.3333	72.8041	64.4152	72.6785	64.3065
λ_5	78.1694	78.1722	**78.1651** 78.1927	82.5328	90.8704	82.5558	81.9718	78.1966	90.9130	78.1964
λ_6										

	88.5493		**88.5016**	92.2778	92.2889	92.2871	100.7813	92.3328	109.2326	88.5232	92.7486	109.1707
λ_7	106.7896	106.2629	**106.2106**	106.8180	106.8353	110.5645	127.4522	110.7497	120.4293	106.2806	120.3916	106.2564
λ_8	119.0183		**118.9692**	124.4045	124.4071	128.7011	137.2746	123.8275	145.6493	123.0285	145.7238	123.0645
λ_9	134.8126	134.9365	**132.4926**	134.7071	134.7675	138.4335	147.0225	134.8249	159.3926	136.8603	159.4098	132.6431
λ_{10}	**142.7458**		142.7734	156.5253	156.5307	156.7893	165.4264	149.7068	182.3697	142.7899	182.4023	149.7546
λ_{11}	161.3885	161.3894	161.3447	165.1958	165.2660	175.1771	175.1934	164.7991	198.5685	168.0064	198.6671	160.7900
		159.8208										
λ_{12}	**173.0350**		173.0851	177.3006	177.3270	184.7107	184.6944	177.2652	220.0660	176.6336	219.2744	201.9026
λ_{13}	191.3948	187.0378	186.9901	197.3867	197.4376	202.8054	203.2610	192.3277	236.4804	188.4317	236.4820	189.1680

	186.9762										
λ_{14}	**199.2858**	199.3636	207.7883	208.0185	221.1987	221.8749	206.4205	257.3615	207.4193	255.4433	200.6276
λ_{15}	**209.9532**	214.9428	221.2137	221.5763	221.5763	239.9189	220.5426	273.1629	219.2928	273.3545	221.3606

Conditions de Neumann, 2D

μ_2	**10.6677**										
μ_3	**21.2887**										
μ_4	32.8718		31.9441	31.9669	32.0022	**33.0845**	31.9751	32.9325	32.9626	32.7975	31.9242
μ_5	43.4748	43.5735	43.5609	43.5655	42.7078	43.3768	43.9239	43.1308	43.8897	**43.9481**	42.6353

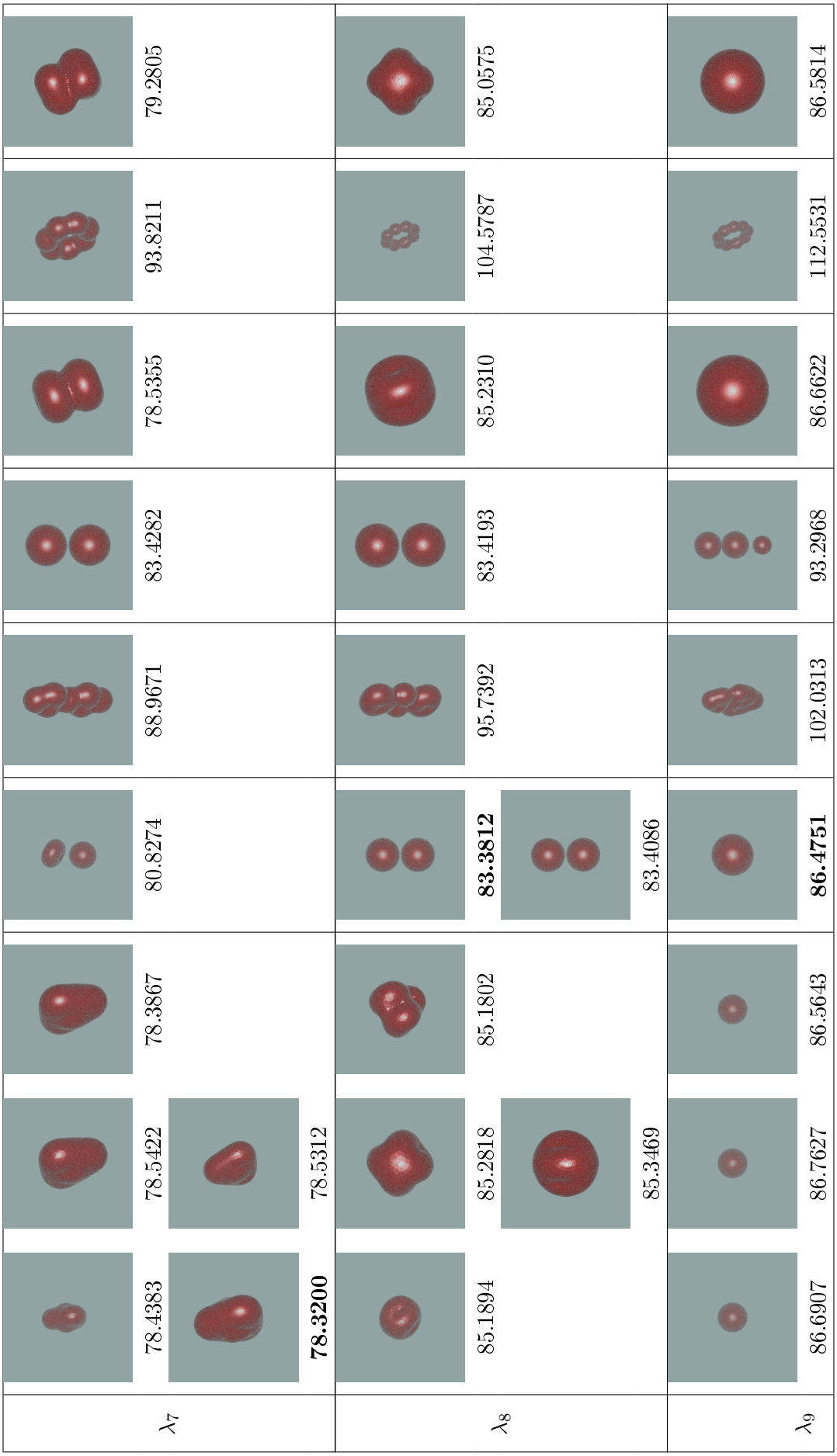
								43.9258 43.8770				
μ_6	 55.0966		 55.0938	 54.1168	 54.2088	 53.2769	 53.4544	 **55.2265** 55.2234	 54.8926	 53.2479	 54.4396	 54.9332
μ_7	 65.7337 65.7880 65.8252	 66.0742 65.7558 **67.2877**	 66.0087 65.8187	 65.7775	 65.7818	 63.8977	 64.0910	 66.2128 66.2215	 64.9286	 66.1397	 63.8679	 66.1004
μ_8	 75.0997 77.2843 77.4399	 77.6223 77.4282 77.4047	 77.6430 77.4594 77.2067	 76.4623	 76.4182	 75.7476	 74.6509	 77.1535 77.118 77.4259 	 76.0233	 77.4803	 77.2400	 77.4917

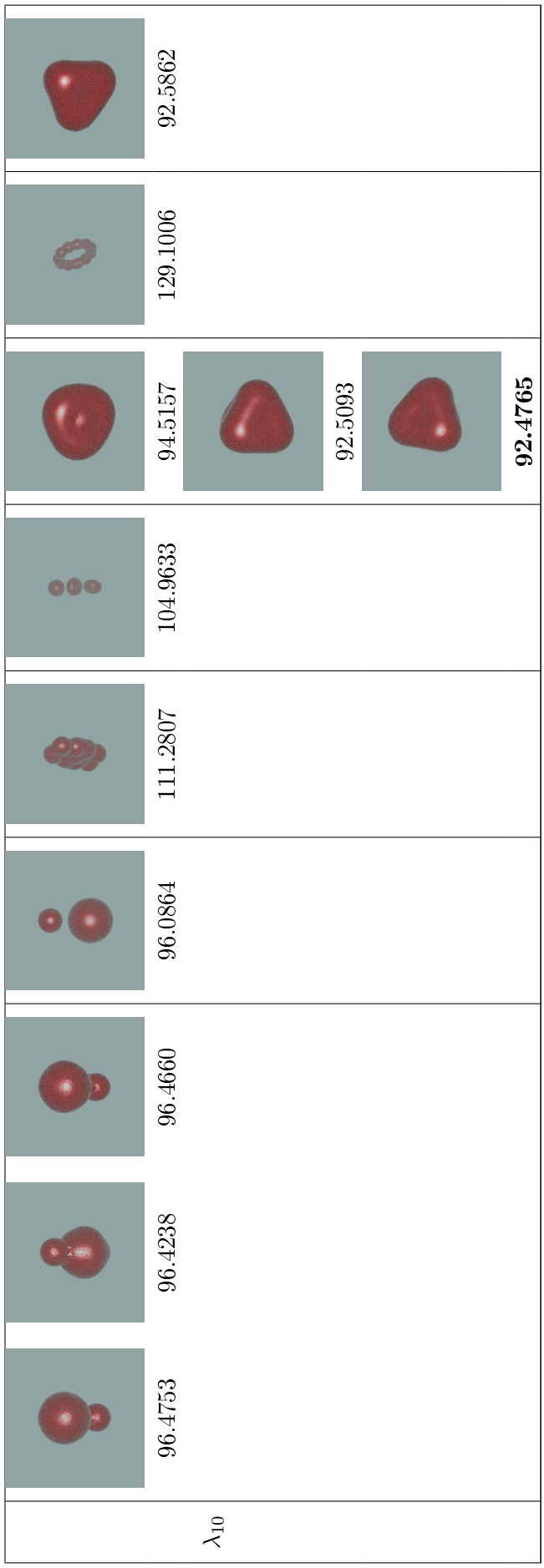
	77.4319	77.4401 **77.9826**	77.9436					77.3939 77.3874 77.3270				
μ_9	88.9752 89.0814 89.0201	89.0007 89.0607 89.0806	89.0472 89.0613	87.8433	87.9699	87.0662	89.4374 **89.4973** 89.4330	88.4636 66.2215	86.0242	89.1891	85.8371	85.1477
μ_{10}	99.4555 101.5301	99.6530 **101.5722**	99.6622 101.5289	100.1386	100.2072	98.0767	98.8122	100.6837 100.7419	97.1027	100.3955	96.6039	98.1583
μ_{11}	**113.9835**		111.9665	109.5621	109.5621	109.4872	111.1495	110.6930	108.5343	112.3582	106.4279	110.1493

Conditions de Dirichlet, 3D

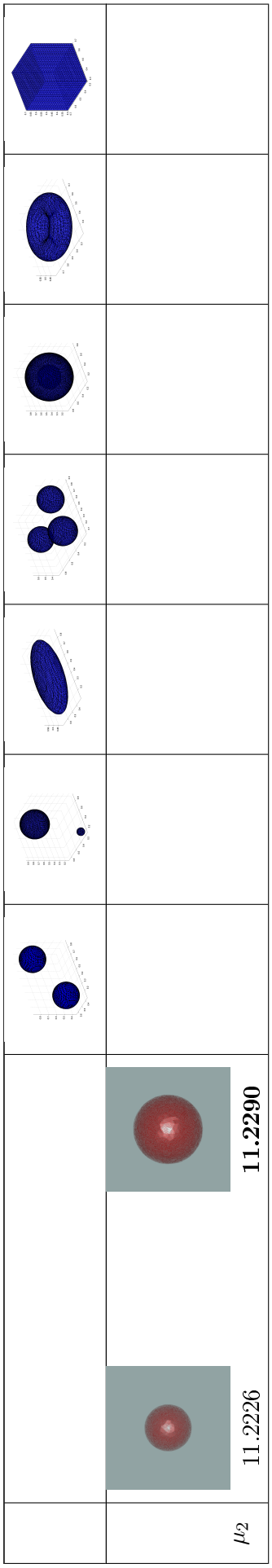
λ_1	**25.6497**							
λ_2	**40.7186**							
λ_3	**49.1612**							
λ_4	52.5625	52.5002	52.5015	61.7166	52.4989	52.5002	65.8259	**52.4902**

λ_5
64.8321
64.2077
64.1290
64.2305
71.9673
64.3222
74.2179
72.4464
64.6902
64.0413
64.1704
64.1509
64.2794
64.1253
λ_6
73.2251
73.2524
73.1539
78.2623
78.4497
74.7497
75.3654
93.6035
73.0972
75.5019

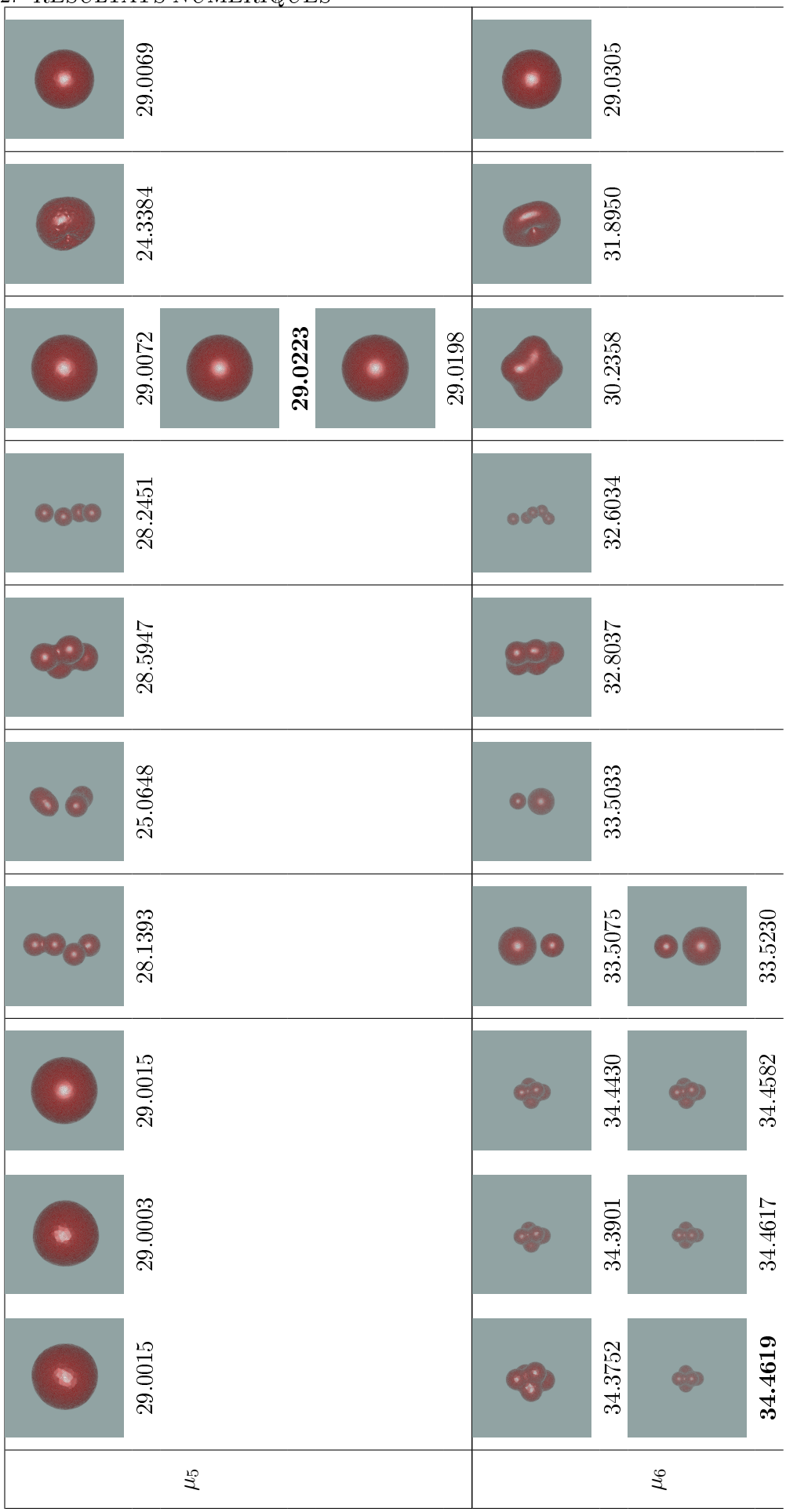

λ_7
78.4383
78.5422
78.3867
80.8274
88.9671
83.4282
78.5355
93.8211
79.2805
78.3200
78.5312
λ_8
85.1894
85.2818
85.1802
83.3812
95.7392
83.4193
85.2310
104.5787
85.0575
85.3469
83.4086
λ_9
86.6907
86.7627
86.5643
86.4751
102.0313
93.2968
86.6622
112.5531
86.5814

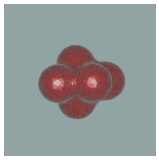
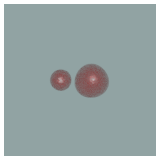
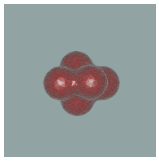
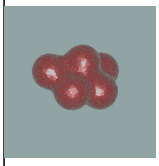
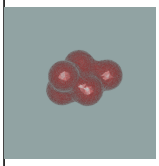
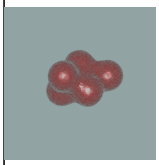
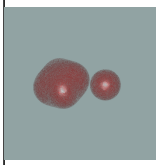
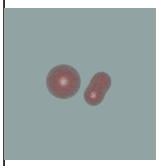
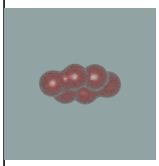
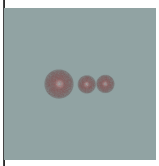
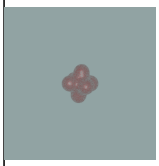
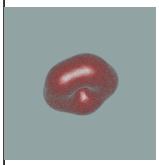
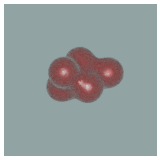
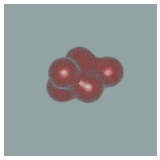
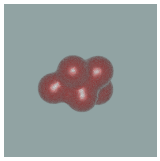
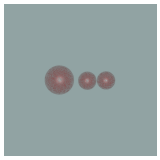
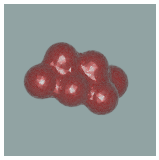
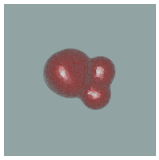
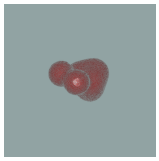
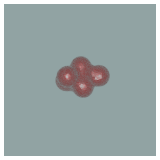
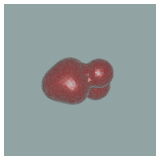
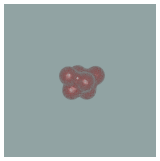


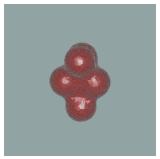
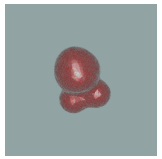
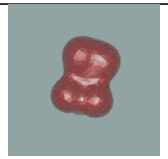
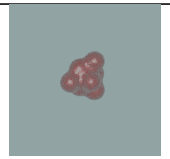
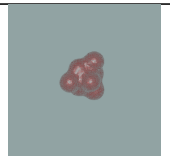
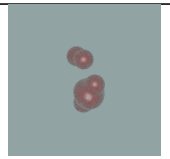
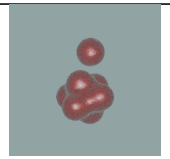
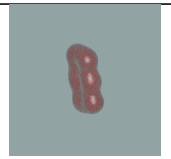
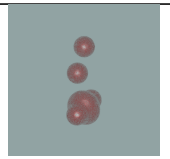
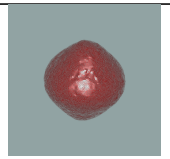
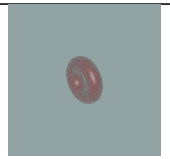
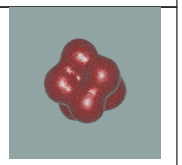
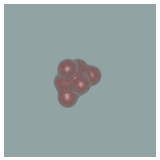
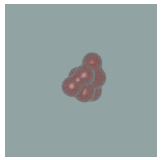
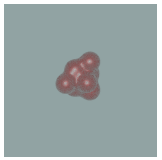
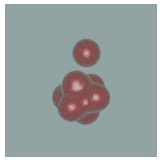
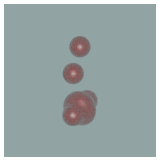
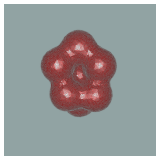
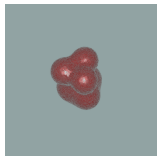
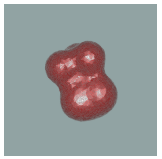
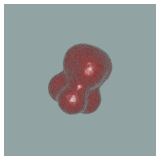
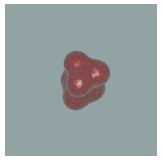
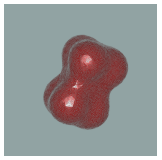
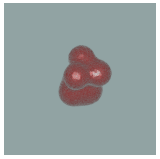
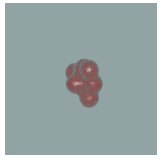
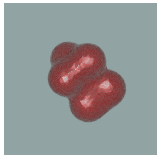
Conditions de Neumann, 3D

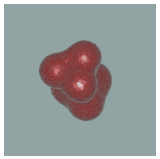
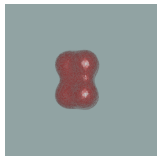
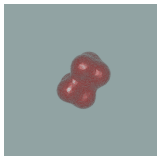
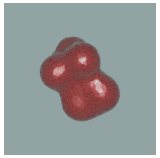
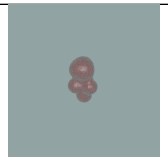
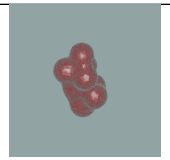
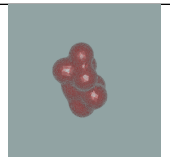
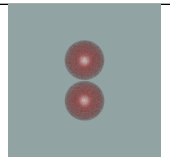
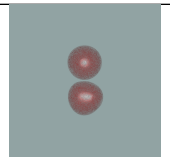
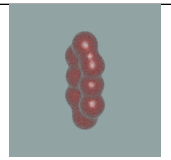
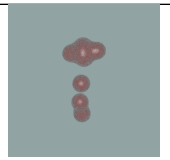
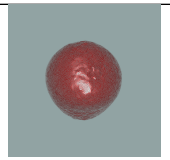
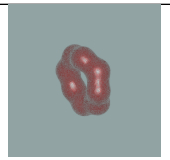
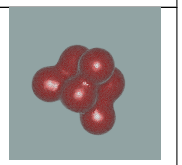
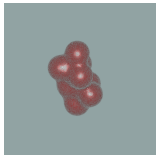
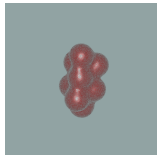
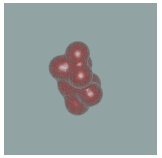
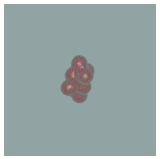
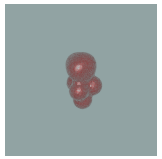
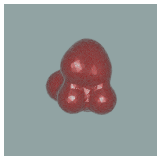


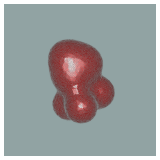
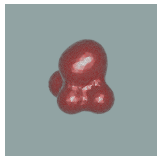
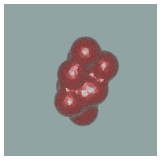
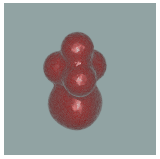
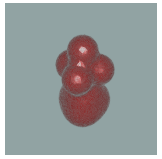
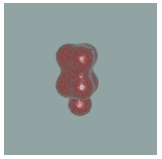
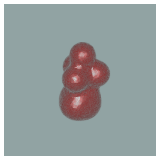
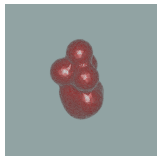
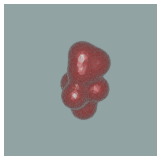
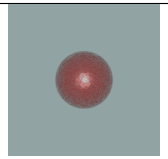
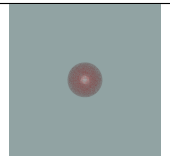
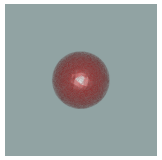
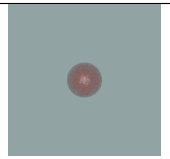
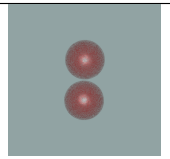
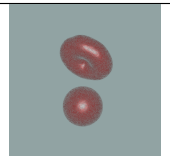
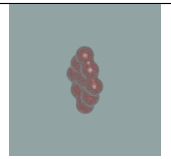
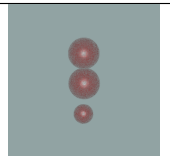
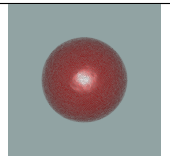
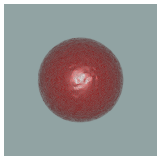
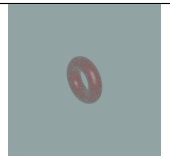
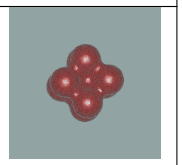
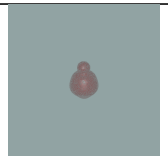
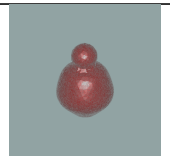
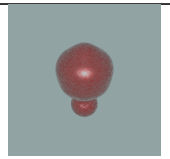
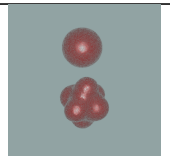
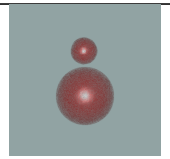
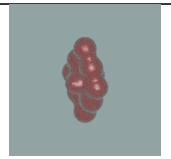
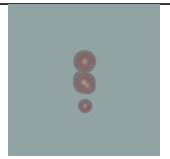
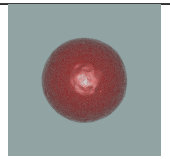
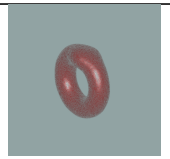
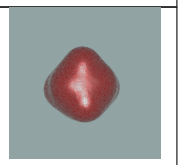
μ_3
17.8514
17.8534
17.8514
17.8648
17.8595
17.8177
17.8405
11.2696
8.6971
17.7396
17.8593
17.8665
17.8641
μ_4
23.6222
23.5887
23.6478
23.3487
23.2332
23.1826
23.4116
16.9074
21.3324
23.0623
23.6720

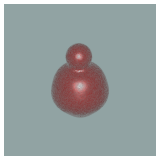
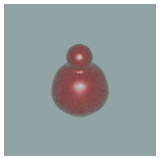
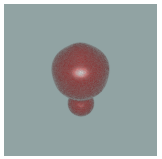
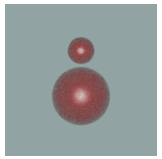
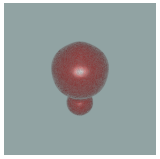
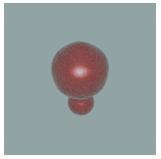
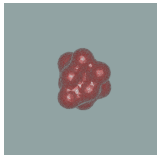
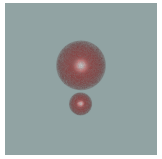

μ_5
29.0015
29.0003
29.0015
28.1393
25.0648
28.5947
28.2451
29.0072
29.0223
29.0198
24.3384
29.0069
μ_6
34.3752
34.3901
34.4430
33.5075
33.5033
32.8037
32.6034
30.2358
31.8950
29.0305
34.4619
34.4617
34.4582
33.5230

	 34.4038	 33.4907	 34.3864						
μ_7	 38.7536	 38.7794	 38.7787	 35.2008	 37.0807	 37.1637	 37.7201	 36.9973	 34.4531
	 38.7935	 38.7820	 **38.8149**			37.7363			38.2406
	 37.4534	 37.7958	 37.8043						
	 38.6163	 37.8118	 38.7610						

	 38.7410	 37.7375								
μ_8	 42.6451	 42.9295	 42.9295	 41.3896	 42.0024	 39.8748	 41.5712	 32.9302	 39.9121	 41.2412
	 43.0015	 43.0201	 **43.0391**		 42.4116		 41.6040			
	 42.6139	 42.7729	 42.7603							
	 42.7612	 42.7180	 42.6301							
										

	42.7724	42.8060	42.7135							
										
	42.7138	42.5798	42.5808							
										
	42.7368									
μ_9										
	46.6972	46.8670	46.8670	46.0513	46.0297	44.6876	45.0629	34.0267	43.4415	46.7509
										
	47.0770	47.1029	47.1145							
										
	47.1716	46.7394	47.0191							

	 46.9649	 46.9356	 46.8464							
	 46.7387	 46.7138	 46.3953							
	 46.7328	 46.6872	 46.6461							
μ_{10}	 52.4853	 52.4802  **52.4856**	 52.4681	 46.0583	 47.7885	 49.1360	 49.6815	 47.7015  47.7015	 46.9685	 49.2923
μ_{11}										

	55.5428 	55.5766 	55.6950 	53.4679	55.8244 	54.3475	50.9403	47.5770	49.3349	54.3753
	55.7425 	55.7650 	55.7613 		55.8671 					
	55.7991	55.7862	54.5630		**55.8672**					

Bibliographie

[1] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables.* Courier Dover Publications, 2012.

[2] Pedro RS Antunes and Pedro Freitas. Numerical optimization of low eigenvalues of the Dirichlet and Neumann Laplacians. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154(1) :235–257, 2012.

[3] Pedro RS Antunes and Pedro Freitas. Optimal spectral rectangles and lattice ellipses. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Science*, 469(2150), 2013.

[4] Amandine Berger. The eigenvalues of the Laplacian with Dirichlet boundary condition in $\mathbb{R}^2$ are almost never minimized by disks. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 47(3) :285–304, 2015.

[5] Dorin Bucur. How to prove existence in shape optimization. *Control and Cybernetics*, 34 :103–116, 2005.

[6] Dorin Bucur. Do optimal shapes exist ? *Milan Journal of Mathematics*, 75(1) :379–398, 2007.

[7] Dorin Bucur. Minimization of the k-th eigenvalue of the Dirichlet Laplacian. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 206(3) :1073–1083, 2012.

[8] Dorin Bucur and Giuseppe Buttazzo. *Variational Methods in Shape Optimization Problems.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhäuser Boston, 2006.

[9] Dorin Bucur and Pedro Freitas. A new proof of the Faber-Krahn inequality and the symmetry of optimal domains for higher eigenvalues. http ://www.lama.univ-savoie.fr/ bucur/20thvp9.pdf, 2012.

[10] Giuseppe Buttazzo and Gianni Dal Maso. An existence result for a class of shape optimization problems. *Archive for rational mechanics and analysis*, 122(2) :183–195, 1993.

[11] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian Geometry.* Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1984.

[12] Bruno Colbois and Ahmad El Soufi. Extremal eigenvalues of the Laplacian on Euclidean domains and closed surfaces. *Mathematische Zeitschrift*, 278(1-2) :529–546, 2014.

[13] Gilbert Demengel and Françoise Demengel. *Espaces fonctionnels - Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles : Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles.* Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2012.

[14] Alexandre Girouard, Nikolai Nadirashvili, and Iosif Polterovich. Maximization of the second positive Neumann eigenvalue for planar domains. *Journal of Differential Geometry*, 83(3) :637–662, 2009.

[15] Andrew Gray and George Ballard Mathews. *A Treatise on Bessel Functions and their Applications to Physics*. London, 1922.

[16] Karl Gustafson. The RKNG (Rellich, Kato, Sz-Nagy, Gustafson) perturbation theorem for linear-operators in Hilbert and Banach-space. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 45(1-4) :201–211, 1983.

[17] Edward J Haug and Bernard Rousselet. Design sensitivity analysis in structural mechanics. II. Eigenvalue variations. *Journal of Structural Mechanics*, 8(2) :161–186, 1980.

[18] Antoine Henrot. *Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2006.

[19] Antoine Henrot and Dorin Bucur. Minimization of the third eigenvalue of the Dirichlet Laplacian. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 456(1996) :985–996, 2000.

[20] Antoine Henrot and Édouard Oudet. Le stade ne minimise pas λ_2 parmi les ouverts convexes du plan. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 332 :417–422, 2001.

[21] Antoine Henrot and Michel Pierre. *Variation et optimisation de formes : Une analyse géométrique*. Mathématiques et Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[22] Tosio Kato. On the convergence of the perturbation method. I. *Progress of Theoretical Physics*, 4 :514–523, 1949.

[23] Tosio Kato. On the convergence of the perturbation method, ii. 1. *Progress of Theoretical Physics*, 5 :95–101, 1950.

[24] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*, volume 132. springer, 1995.

[25] Bernhard Kawohl. *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1985.

[26] Dario Mazzoleni and Aldo Pratelli. Existence of minimizers for spectral problems. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 100(3) :433–453, 2013.

[27] Anna Maria Micheletti. Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, in relazione ad una variazione del campo. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 26(1) :151–169, 1972.

[28] Alexandre Munnier. *Stabilité de liquides en apesanteur & régularité maximale de valeurs propres pour certaines classes d'opérateurs*. PhD thesis, ANRT [diff.], 2000.

[29] Béla de Sz Nagy. Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 19(1) :347–366, 1946.

[30] Jindřich Nečas, Christian G. Simader, Šárka Necasová, Gerard Tronel, and Alois Kufner. *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2011.

[31] Braxton Osting. Optimization of spectral functions of Dirichlet–Laplacian eigenvalues. *Journal of Computational Physics*, 229(22) :8578–8590, 2010.

[32] Édouard Oudet. Numerical minimization of eigenmodes of a membrane with respect to the domain. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 10(03) :315–330, 2004.

[33] Édouard Oudet. Shape optimization under width constraint. *Discrete & Computational Geometry*, 49(2) :411–428, 2013.

[34] Guillaume Poliquin and Guillaume Roy-Fortin. Wolf-Keller theorem for Neumann eigenvalues. *Annales mathématiques du Québec*, 36(1) :169–178, 2012.

[35] Michael J. D. Powell. The NEWUOA software for unconstrained optimization without derivatives. *Proc. 40th Workshop on Large Scale Nonlinear Optimization (Erice, Italy, 2004)*.

[36] Bernard Rousselet. Shape design sensitivity of a membrane. *Journal of optimization theory and applications*, 40(4) :595–623, 1983.

[37] George Neville Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge university press, 1995.

[38] Sven Andreas Wolf and Joseph B Keller. Range of the first two eigenvalues of the Laplacian. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 447(1930) :397–412, 1994.