HAL
open science

Modélisation et simulation des écoulements de contre-courant de l'hélium superfluide par la méthode Boltzmann sur réseau

Jonathan Bertolaccini

▶ **To cite this version:**

Jonathan Bertolaccini. Modélisation et simulation des écoulements de contre-courant de l'hélium superfluide par la méthode Boltzmann sur réseau. Physique Numérique [physics.comp-ph]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2015. Français. NNT : 2015ENSL1063 . tel-01267233

HAL Id: tel-01267233

https://theses.hal.science/tel-01267233

Submitted on 4 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lyon, délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon
Discipline : **Physique**

Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon
École doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon

Modélisation et simulation des écoulements de contre-courant de l'hélium superfluide par la méthode Boltzmann sur réseau

Présentée et soutenue publiquement le 17 décembre 2015 par
M. Jonathan Bertolaccini

Directeur de thèse : **Emmanuel Lévêque**
Co-directeur de thèse : **Philippe Roche**

Après avis de :

M-E.Brachet	**LPS, ENS**	**Rapporteur**
F.Kuznik	**CETHIL, INSA de Lyon**	**Rapporteur**

Devant la commission d'examen formée de :

F.Chilla	**ENS de Lyon**	**Présidente**
M-E.Brachet	**LPS, ENS**	**Rapporteur**
F.Kuznik	**CETHIL, INSA de Lyon**	**Rapporteur**
P.Sagaut	**M2P2, Université d'Aix Marseille**	**Examinateur**
H.Touil	**CS-SI**	**Examinateur**
R.Van Weelderen	**CERN**	**Examinateur**
E.Lévêque	**LMFA, Ecole Centrale Lyon**	**Directeur**
P-E.Roche	**Institut Néel, Grenoble**	**Co-directeur**

A ma tendre épouse, ma famille, mes proches.

Je remercie la région Rhône Alpes, qui part l'intermédiaire des Communautés de Recherche Académique (ARC 4-Energies) a soutenu et financé ce projet de recherche pendant trois années.

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 L'élément hélium . . . 1

1.2 Le modèle à deux fluides de l'hélium superfluide . . . 3

1.3 Les vortex quantiques . . . 8

1.4 Le modèle HVBK de couplage mutuel . . . 10

1.5 L'écoulement de contre-courant superfluide . . . 13

1.6 Nos motivations . . . 17

2 Aspects numériques **21**

2.1 La modélisation de l'expérience de contre-courant superfluide : principes généraux . . . 22

2.1.1 La géométrie des simulations . . . 22

2.1.2 La représentation des deux fluides . . . 23

2.1.3 Etablir le contre-courant . . . 24

2.1.4 Le couplage mutuel entre les deux fluides . . . 25

2.2 Les méthodes et techniques numériques . . . 25

2.2.1 Le schéma Boltzmann sur réseau dans l'approximation BGK . . . 25

2.2.2 Le modèle D2Q9 . . . 27

2.2.3 La condition d'incompressibilité . . . 29

2.2.4 Les conditions aux parois . . . 31

2.2.5 La règle d'échange de populations au niveau des thermostats . . . 32

2.2.6 Le couplage HVBK . . . 35

2.3 Le lien avec l'approche cinétique d'un mélange binaire . . . 37

2.4 Détermination des paramètres de la simulation . . . 39

2.5 La validation du code . . . 41

2.5.1 La conservation des grandeurs physiques élémentaires . . . 41

2.5.2 Le gradient de pression et les profils de vitesse . . . 41

2.5.3 Un cas test avec couplage HVBK simplifié . . . 42

3 Effets d'entrée en contre-courant **47**

3.1 L'effet d'entrée classique . . . 48

3.2 L'effet d'entrée superfluide . . . 49

3.3 Les résultats d'une simulation de contre-courant typique . . . 50

3.3.1 Le cas d'un contre-courant sans couplage . . . 50

3.3.2 Le cas d'un contre-courant avec couplage HVBK . . . 51

3.4 L'analyse quantitative des résultats . . . 55

3.4.1 L'effet d'entrée chaude . . . 55

3.4.2 L'effet d'entrée froide : un nouvel effet d'entrée . . . 57

3.4.3 L'influence des paramètres liés à la modélisation numérique . . . 59

3.5 Vers les plus hauts nombres de Reynolds . . . 61
3.5.1 L'influence de la température . . . 64
3.6 Conclusion et mise en perspective avec les expériences . . . 65

4 Ecoulement autour d'un cylindre en contre-courant 69
4.1 La configuration de nos calculs . . . 70
4.2 La validation du code pour un écoulement autour d'un cylindre . . . 72
4.3 Les différents régimes dynamiques observés . . . 74
4.4 L'influence de la viscosité artificielle et du blocage . . . 77
4.5 Un résumé schématique des régimes dynamiques observés en 2D . . . 78
4.6 Un nouvel éclairage sur les observations expérimentales . . . 78
4.7 Conclusion des simulations en 2D . . . 79
4.8 La persistence du phénomène en 3D : résultats préliminaires . . . 80

5 Conclusion 83

6 Annexe 85
6.1 Tableaux de paramètres des simulations . . . 85
6.1.1 Données physiques . . . 85
6.1.2 Simulations à 1,5 K sans la procédure de régularisation . . . 86
6.1.3 Simulations à 1,5 K : influence de la viscosité artificielle et de la force de Magnus 86
6.1.4 Simulations à 1,5 K avec la procédure de régularisation . . . 87
6.1.5 Influence de la température, avec la procédure de régularisation . . . 87
6.1.6 Simulations à 1,96 K : contre-courant avec obstacle . . . 88
6.2 Implémentation d'une force extérieure avec la méthode Boltzmann sur réseau . . . 88
6.2.1 Points clés de l'implémentation . . . 93
6.2.2 Analyse du terme d'interaction $J_\alpha^{\sigma,\upsilon}$ du mélange binaire . . . 94
6.3 Choix de la fonction de distribution à l'équilibre . . . 96

Table des figures 101

Bibliographie 105

Chapitre 1

Introduction

1.1 L'élément hélium 1
1.2 Le modèle à deux fluides de l'hélium superfluide 3
1.3 Les vortex quantiques 8
1.4 Le modèle HVBK de couplage mutuel 10
1.5 L'écoulement de contre-courant superfluide 13
1.6 Nos motivations 17

1.1 L'élément hélium

L'hélium est un élément léger avec une couche électronique pleine. Il possède plusieurs isotopes, mais seulement deux sont stables : l'^{3}He et l'^{4}He. La faible présence de l'^{3}He sur Terre fait de lui un isotope rare, alors que l'^{4}He est naturellement beaucoup plus abondant. Il est préférentiellement utilisé dans le domaine de la cryogénie (sciences et technologies de production d'environnement à basse température). Nous ne nous intéresserons dans cette thèse qu'à l'^{4}He. Afin de mieux appréhender les propriétés physiques de cet élément, nous allons présenter son diagramme de phases au fil de quelques découvertes historiques.
H.K. Onnes et ses collaborateurs sont les premiers a avoir liquéfié l'hélium en 1908 à Leiden (Kamerlingh Onnes (1908)). La transition de l'état gazeux à l'état liquide a lieu à environ 4,2 K sous une 1 atm. On appelle communément ce liquide hélium I (He-I) ; il s'agit d'un fluide classique. Quand on pompe la vapeur à la surface d'un liquide, on diminue sa pression de vapeur et donc sa température. Les liquides ordinaires ont une conductivité thermique généralement faible, si bien que leur surface libre possède une température plus faible que le fond, où des bulles se forment sur des sites de nucléation. Il se passe la même chose si on pompe la vapeur à la surface de l'hélium I, on abaisse progressivement sa température, il y a ébullition. Soudainement lorsque la température est inférieure à environ 2,17 K le phénomène d'ébullition s'arrête (Figure 1.1) : une transition de phase se produit.

Ce phénomène a été mis en évidence par John McLennan en 1932 à Toronto (McLennan, Smith, et Wilhelm (1932)) ; (Griffin (2005)). Bien que la nouvelle phase, appelée hélium II (He-II), soit toujours liquide, le comportement des deux fluides au dessus et en dessous de 2,17 K est très différent. Cinq années auparavant, à Leiden, M. Wolfke et W.H. Keesom - c'est à eux que l'on doit les appellations : He-I, He-II - avaient mesuré la chaleur spécifique de l'hélium en fonction de la température (Keesom et Wolfke (1928) ; Keesom et Keesom (1935)). Le graphique obtenu présente une singularité pour $T \backsimeq 2,17$ K qui s'apparente à la forme de la lettre grecque λ, Figure 1.2. On appelle ainsi cette

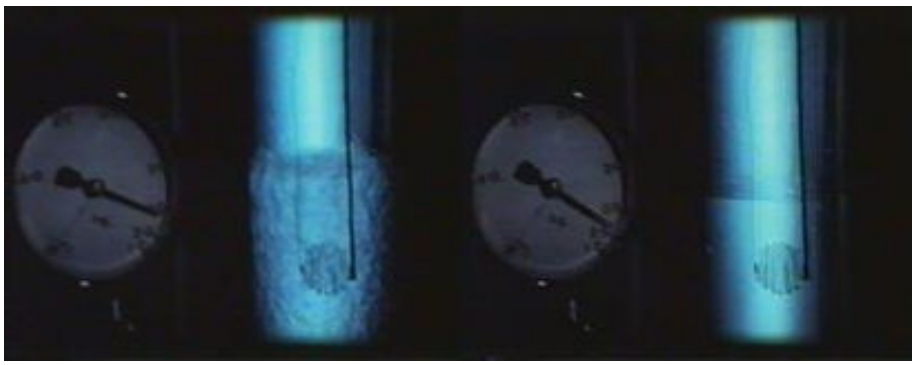


FIGURE 1.1: A gauche au dessus de la transition (T ≥2,17 K) et à droite en dessous de la transition (T ≤2,17 K), ces images proviennent du film de J.F. Allen et J.M.G. Armitage.

transition la transition lambda.

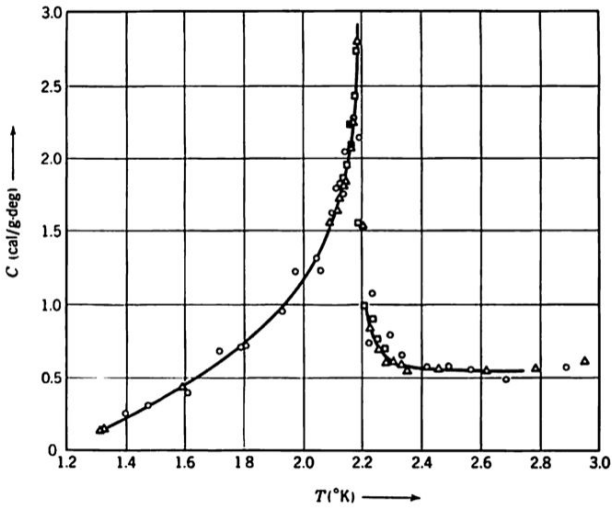


FIGURE 1.2: Mesure de la chaleur spécifique de l'^{4}He d'après les mesures de Keesom et Clusius (1932) et Keesom et Keesom (1935), graphique tiré de l'ouvrage de London (1961).

En 1935, à Toronton, A.D. Misener (Wilhelm, Misener, et Clark (1935)) alors étudiant, ainsi que deux techniciens : J.O. Whilhelm et A.R. Clarck (Balibar (2007)) ont essayé de déterminer la viscosité de l'hélium II, en mesurant l'amortissement des oscillations d'un cylindre immergé dans le liquide. Ils découvrent que la viscosité de l'hélium liquide s'effondre quand on passe sous la température de transition. En 1938, dans *Nature*, deux articles sont publiés côte à côte. Le premier de Kapitza (1938) (Moscou), intitulé *Viscosity of liquid helium below the lambda point* et le second, reçu une dizaine de jours après, de (Allen et Misener (1938)) (Cambridge) intitulé *Flow of liquid Helium II* . Dans son article P.L. Kapitza propose d'appeler l'hélium liquide en dessous de la transition lambda : superfluide, par analogie avec les superconducteurs. Quant à J.F. Allen et A.D. Misener, ils réalisent que les lois de l'hydrodynamique classique ne sont pas suffisantes pour donner un sens à leurs données expérimentales (Balibar (2007)).

Après avoir liquéfié l'hélium, il est naturel de se demander comment le solidifier. Il peut exister en phase liquide jusqu'au zéro absolu. D'un point de vue classique, au zéro absolu tous les mouvements des atomes sont fixés, mais ce n'est pas le cas du point de vue de la mécanique quantique. London (1938b) a montré que l'hélium II restait liquide même au zéro absolu parce que les forces inter-atomiques sont

bien plus faibles que l'énergie de point zéro, puisque la masse de l'atome d'hélium est faible. Pour solidifier l'hélium II il faut exercer des pressions supérieures à 25 atm. C'est en 1934 qu'est publié le premier diagramme de phases complet de l'^{4}He, par W.H. Keesom et son épouse A.P. Keesom (Keesom et Keesom (1934)).

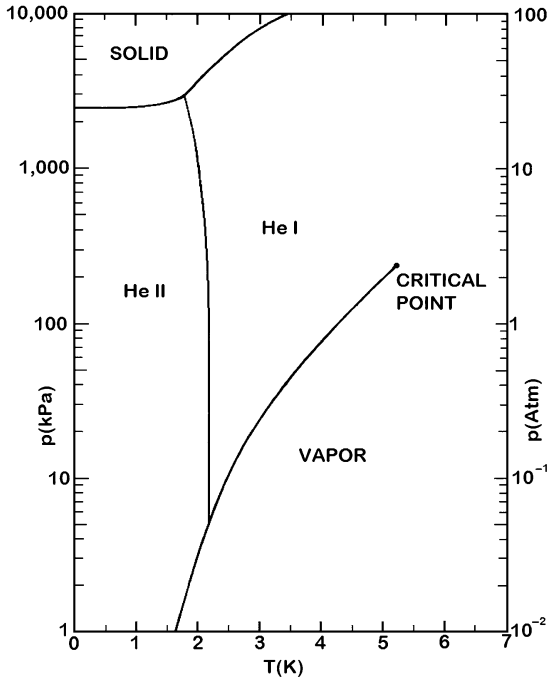


FIGURE 1.3: Diagramme des phases de l'^{4}He, figure issue d'un ouvrage de Van Sciver (2011).

1.2 Le modèle à deux fluides de l'hélium superfluide

F. London note, dans un article de 1936 (London (1936)), que l'hélium II est plus ordonné que l'hélium I. Dans deux autres articles de 1938 (London (1938a,b)), il va plus loin et propose pour l'hélium II un phénomène de condensation de Bose-Einstein (la plupart des atomes sont dans l'état de plus basse énergie) à la température T_λ. En considérant l'hélium liquide comme un gaz idéal de particules de Bose, il calcule une température de transition égale à 3,13 K, qui est assez proche de l'observation expérimentale $T_\lambda = 2,17$ K.

L. Tisza est très intéressé par la nouvelle idée de F. London (Balibar (2007)), il a l'intuition que s'il y a un phénomène de condensation de Bose-Einstein, alors il doit exister dans l'hélium liquide sous la température de transition deux champs de vitesse indépendants, un champ de vitesse pour l'état fondamental et un autre pour les atomes qui sont dans l'état excité. L'un relatif à une composante qui ne possède pas de viscosité et ne transporte pas d'entropie, et le second qui possède une viscosité et transporte l'entropie. La proportion de ces deux fluides est donnée par la température. Dans une courte note publiée dans *Nature* en 1938 (Tisza (1938)), il introduit pour la première fois ce qui est appelé maintenant le *modèle à deux fluides* et prédit que la chaleur peut se propager grâce à des ondes de température.
Un mois plus tard à Moscou, le physicien théoricien L.D. Landau, qui a déjà travaillé dans plusieurs pays d'Europe aux cotés des plus grands physiciens et qui a déjà fondé son école de physique théorique, est arrêté par la police du régime (Pitaevskii (1992)) ; (Gorelik (1997)) ; (Gavroglu (2005)), soupçonné

d'être l'auteur d'un pamphlet dénonçant le régime soviétique. Après un an d'emprisonnement, P.L. Kapitza écrit au chef du gouvernement de l'époque, V.M. Molotov, pour demander la libération de L.D. Landau, ce qui est accepté quelques semaines plus tard. Deux ans plus tard, en 1941, dans un article publié par *Physical Review* (Landau (1941)), L.D. Landau quantifie l'hydrodynamique des liquides quantiques. Il arrive à la conclusion que tous les états faiblement excités peuvent être considérés comme un agrégat d'excitations élémentaires nommées phonons et rotons. Six ans plus tard, il inclut le spectre des rotons dans celui des phonons, et introduit un modèle à deux fluides qui permet de calculer les propriétés de l'hélium II.

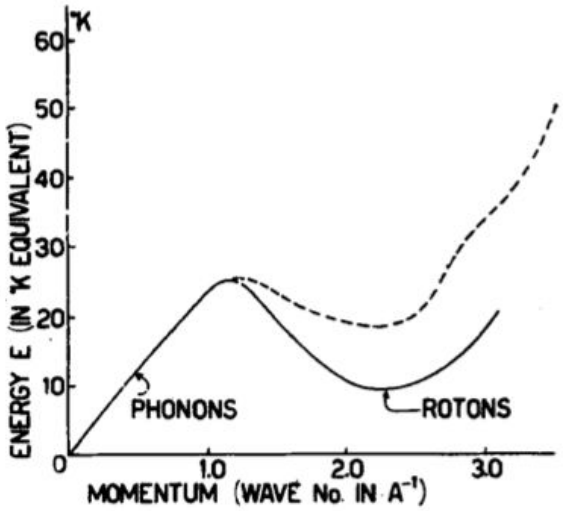


FIGURE 1.4: Spectre d'énergie des excitations (phonons et des rotons) en fonction de l'impulsion. Ligne continue : théorie de L.D. Landau, avec ajustement des paramètres en fonction des données expérimentales de la chaleur spécifique. Ligne en pointillé représente une approximation quantique. Graphique tiré de l'article de Feynman (1955).

Le modèle de L.D. Landau est composé d'un premier fluide, appelé "composante normale " constituée de phonons et rotons, qui est visqueux et transporte l'entropie. Le deuxième fluide, appelé "composante superfluide " ne possède ni viscosité ni entropie. Le rapport de densité des deux composantes dépend de la température : à température nulle toute la composante normale disparait et le fluide est uniquement donné par la composante superfluide, alors qu'à la température de transition T_λ c'est le contraire, la composante superfluide n'existe plus, il ne reste que la composante normale.

L.D. Landau évalue la température de transition à 2,3 K en accord avec les expériences. Enfin il prédit que la chaleur doit se propager sous forme d'onde, et non par phénomène de diffusion comme c'est le cas pour les fluides classiques. Il baptise ces ondes d'entropie ou de température : "second son". Elles seront observées par Peshkov (1946).
La différence principale entre les deux modèles, repose sur la nature du fluide normal. Pour L. Tisza le fluide normal est composé d'atomes non condensés, alors que pour L.D. Landau ce sont des quasi-particules ; un concept nouveau permettant de quantifier les excitations d'un liquide quantique. D'après L.D. Landau la vitesse du second son doit augmenter quand la température tend vers zéro, alors que pour L. Tisza la vitesse doit tendre vers zéro. En 1948, les résultats des expériences de Peshkov (1948) montrent que L.D. Landau avait raison.

Comme le propose Feynman (1954), les équations du modèle à deux fluides peuvent se retrouver de façon "intuitive".
Prenons un superfluide qui ne contient initialement aucune excitation, on note sa densité ρ_o et sa

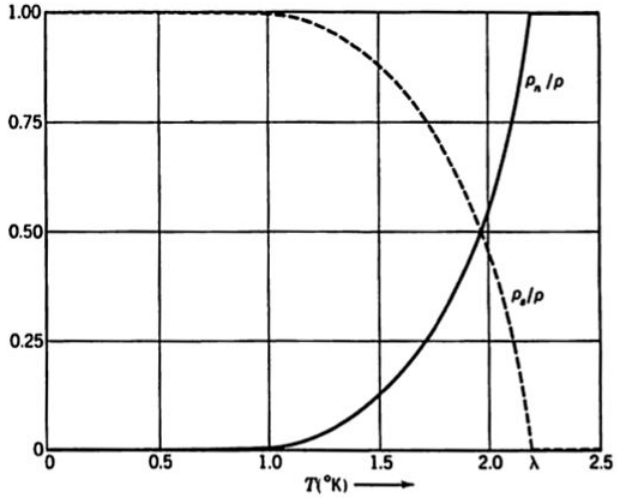


FIGURE 1.5: Proportion des composantes normale et superfluide dans l'hélium II en fonction de la température, graphique tiré de l'ouvrage de London (1961).

vitesse $\mathbf{v_s}$. Pour l'instant on considère que ce fluide est irrotationnel, c'est-à-dire que $\nabla \times \mathbf{v_s} = 0$. Le courant de densité de masse s'écrit $\rho_o \mathbf{v_s}$ et l'énergie cinétique par unité de volume $\frac{1}{2}\rho_o {\mathbf{v_s}}^2$. Maintenant on augmente localement sa température, on crée donc un certain nombre d'excitations. L.D. Landau a montré que l'énergie pour créer des excitations d'impulsion $\mathbf{p}$ dans un fluide en mouvement à la vitesse $\mathbf{v_s}$ est $E = E(\mathbf{p}) + \mathbf{p}.\mathbf{v_s}$, où $E(\mathbf{p})$ correspond à l'énergie nécessaire pour créer des phonons et rotons d'impulsion $\mathbf{p}$. Ce spectre d'énergie est tracé sur la figure 1.4. Le courant de densité de masse est égal à la densité d'impulsion puisque tous les atomes ont la même masse : $\mathbf{j} = \rho_o \mathbf{v_s} + < \mathbf{p} >$ où $< \mathbf{p} >$ est l'impulsion moyenne des excitations par unité de volume.
Maintenant on peut montrer qu'en moyenne les excitations ont tendance à s'opposer à $\mathbf{v_s}$ en utilisant l'effet Doppler : si les excitations se propagent dans le même sens que le superfluide, alors elles sont perçues avec une fréquence élevée pour le superfluide, comme l'énergie est proportionnelle à la fréquence (à un facteur $\hbar$ près, relation de Einstein-Planck), alors il faut une énergie élevée pour les créer. Si les excitations se propagent dans le sens opposé au superfluide, alors elles sont perçues avec une fréquence plus faible, donc une énergie plus faible et par conséquent elles sont plus nombreuses. A l'équilibre l'impulsion moyenne des excitations $< \mathbf{p} >$ est directement opposée à la vitesse du superfluide $\mathbf{v_s}$, et pour de faibles $\mathbf{v_s}$ elle est même proportionnelle à cette dernière. Appelons la constante de proportionnalité ρ_n alors $< \mathbf{p} >= -\rho_n \mathbf{v_s}$. On définit $\rho_s = \rho_o - \rho_n$, et le courant de densité de masse s'écrit : $\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v_s}$. Mais les excitations peuvent dériver, elles ne voyagent pas forcément à la vitesse $\mathbf{v_s}$, si elles voyagent à la vitesse $\mathbf{u}$ alors l'impulsion moyenne des excitations est $< \mathbf{p} >= -\rho_n(\mathbf{v_s} - \mathbf{u})$, et par conséquent $\mathbf{j} = \rho_o \mathbf{v_s} - \rho_n(\mathbf{v_s} - \mathbf{u})$. Maintenant si la vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{v_n}$, alors au final

$$\boxed{\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v_s} + \rho_n \mathbf{v_n} \quad \text{et} \quad \rho = \rho_s + \rho_n} \tag{1.2.1}$$

On peut interpréter macroscopiquement ces deux équations, en disant que le courant de masse se comporte comme le mélange de deux fluides, le premier de densité ρ_s se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v_s}$ qui ne possède pas de viscosité, appelé composante superfluide, et le second de densité ρ_n se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v_n}$, appelé composante normale. L'entropie du système correspond à l'entropie des excitations, c'est donc la composante normale qui la transporte. Les densités ρ_s et ρ_n sont bien sûr fonction de la température : quand la température tend vers zéro le fluide normal disparait il ne reste que le superfluide, et quand la température tend vers T_λ le superfluide n'existe plus si bien qu'il ne reste que du fluide normal.

En suivant l'élégante démonstration de Landau et Lifshitz (1987), nous allons retrouver les équations dynamiques de chacun des fluides : la densité ρ et le courant de densité de masse $\mathbf{j}$ doivent satisfaire l'équation de continuité, qui exprime la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\mathbf{j} = 0 \tag{1.2.2}$$

De plus la loi de conversation de l'impulsion s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla.\mathbf{\Pi} = 0 \tag{1.2.3}$$

Pour l'instant on ne tient pas compte des processus dissipatifs, l'écoulement est donc réversible et l'entropie du fluide est conservée. Puisque l'entropie est portée par le fluide normal, le flux d'entropie s'écrit $\rho s \mathbf{v_n}$ (avec s l'entropie par unité de masse) et la loi de conservation de l'entropie s'écrit

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla.(\rho s \mathbf{v_n}) = 0 \tag{1.2.4}$$

Il faut encore ajouter une équation d'évolution de la composante superfluide, qui on le rappelle doit correspondre à celle d'un écoulement irrotationnel ou potentiel à tout temps. Ici μ est un scalaire qui sera identifié comme le potentiel chimique par L.D. Landau.

$$\frac{\partial \mathbf{v_s}}{\partial t} + \nabla(\mu + \frac{1}{2}\mathbf{v_s}^2) = 0 \tag{1.2.5}$$

En utilisant le principe d'invariance Galiléenne, L.D. Landau parvient à déterminer le flux d'énergie et le flux d'impulsion (il s'agit de la généralisation à deux fluides du flux d'impulsion pour un fluide ordinaire $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik}$) :

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p\delta_{\mathbf{ik}} \tag{1.2.6}$$

Si l'on considère que le superfluide est incompressible, c'est à dire que la densité totale est constante, et que les densités partielles aussi, alors on montre que $\nabla.\mathbf{v_n} = \nabla.\mathbf{v_s} = 0$. Pour tenir compte de la dissipation visqueuse du fluide normal, on ajoute une contribution visqueuse au tenseur d'impulsion : $\mathbf{\Pi_{ik}^{vis}} = \eta\left(\frac{\partial \mathbf{v_{ni}}}{\partial \mathbf{x_k}} + \frac{\partial \mathbf{v_{nk}}}{\partial \mathbf{x_i}}\right)$. On obtient ainsi finalement l'équation

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v_s}}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial t} + \rho_s(\mathbf{v_s}.\nabla)\mathbf{v_s} + \rho_n(\mathbf{v_n}.\nabla)\mathbf{v_n} = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v_n} \tag{1.2.7}$$

Comme l'écoulement de la composante superfluide est potentiel on peut écrire $\mathbf{v_s} = \nabla\phi_s$. On introduit les pressions partielles "généralisées" p_s et p_n telles que $p = p_n + p_s$. On retrouve la relation de Bernoulli pour un fluide parfait, irrotationnel, et incompressible : $p_s = -\rho_s\frac{\partial\phi_s}{\partial t} - 0.5\rho_s\mathbf{v_s}^2$. Enfin les équations du modèle à deux fluides s'écrivent

$$\frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial t} + (\mathbf{v_n}.\nabla)\mathbf{v_n} = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p_n + \nu\Delta\mathbf{v_n} \tag{1.2.8}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v_s}}{\partial t} + (\mathbf{v_s}.\nabla)\mathbf{v_s} = -\frac{1}{\rho_s}\nabla p_s \tag{1.2.9}$$

Formellement l'équation du fluide normal est celle de Navier-Stokes pour un fluide de densité ρ_n et de viscosité dynamique $\eta_n \equiv \rho_n\nu$. Le problème de l'écoulement d'hélium II dans la limite incompressible, vu à travers le modèle à deux fluides, se réduit ainsi à deux problèmes de mécanique des fluides ordinaires, un écoulement parfait et un écoulement visqueux. Il faut bien insister sur le fait que l'hélium

II se "comporte comme" un mélange de deux fluides, il s'agit d'une modélisation macroscopique d'une dynamique à l'échelle microscopique, on peut même ajouter qu'il s'agit d'une modélisation classique d'un fluide quantique, ce qui laisse entrevoir les limites du modèle.

Il reste encore une expérience à décrire pour mieux comprendre la dynamique de ce modèle à deux fluides. Considérons un cylindre aux parois thermiquement isolées, qui contient de l'hélium superfluide à moitié de son volume, et perçons sa paroi d'un coté uniquement et proche de sa base, pour créer une fuite. On peut placer une fine poudre dans l'orifice ainsi créé dont le but est d'empêcher, par viscosité, le fluide normal de sortir du cylindre, alors que le superfluide peut s'échapper. Nous venons de construire une "superfuite" ou bien encore un *superleak*. Plaçons ce cylindre spécial dans une cuve ouverte contenant du superfluide afin que le trou soit immergé. Plaçons une résistance dans le cylindre, et chauffons le superfluide qu'il contient. Une différence de température existe maintenant entre le superfluide contenu dans le cylindre et celui contenu dans la cuve, qui donne naissance à un flux de masse de la composante superfluide de la cuve vers le cylindre ; il se crée alors une différence de pression entre le cylindre et la cuve. Si l'extrémité haute du cylindre est ouverte, la différence de pression peut être assez grande pour créer un débordement voire une petite fontaine. On appelle ce phénomène l'effet fontaine, ou l'effet thermo-mécanique, découvert par Allen et Jones (1938). Une différence de température donne lieu à flux de masse opposé entre les deux composantes, et cette différence de température est proportionnelle à une différente de pression. Pour tenir compte de cet effet il faut inclure dans gradient de pression partielle généralisée un terme $\rho_s s \nabla T$ dans l'équation d'évolution du fluide normal et son opposé dans l'équation du superfluide, avec s l'entropie par unité de masse. Ce qui est cohérent avec les équations (1.2.8) et (1.2.11) en considérant formellement que $\nabla p_n = \frac{\rho_n}{\rho}\nabla p + \rho_s s \nabla T$ et $\nabla p_s = \frac{\rho_s}{\rho}\nabla p - \rho_s s \nabla T$. Au final le modèle à deux fluides peut s'écrire

$$\frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial t} + (\mathbf{v_n}.\nabla)\mathbf{v_n} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\rho_s}{\rho_n} s \nabla T + \nu \Delta \mathbf{v_n} \tag{1.2.10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v_s}}{\partial t} + (\mathbf{v_s}.\nabla)\mathbf{v_s} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + s \nabla T \tag{1.2.11}$$

Comme il s'agit d'équations différentielles en temps et en espace, il est nécessaire de préciser quelles sont les conditions aux parois pour les deux fluides. Le fluide normal, qui on le rappelle possède une viscosité, adhère à la paroi. La composante superfluide, elle, glisse à la paroi, il existe donc une vitesse tangentielle non nulle.
Le modèle à deux fluides permet d'expliquer avec succès un certain nombre de faits expérimentaux. Il a permis de prédire l'existence d'ondes de température, appelées ondes de second son, et leur vitesse en fonction de la température du superfluide. En reprenant les équations ci-dessus et en effectuant un développement aux faibles vitesses, on montre qu'il peut se propager dans le liquide des ondes de densité, le premier son classique : $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p$, mais aussi des ondes d'entropie : $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (\rho_s s^2/\rho_n)\Delta T$.

En cherchant une solution sous la forme d'ondes planes, on montre que les vitesses de propagation du premier son : $u_1 = \sqrt{(\frac{\partial p}{\partial \rho})_s} \backsimeq 240$ m.s^{-1} et pour le second son : $u_2 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{c_p \rho_n}} \backsimeq 20$ m.s^{-1} pour une température comprise entre 1 K et 2 K.

Dans le modèle original, comme le rappelle L.D. Landau, il n'y a aucune friction entre les deux fluides, autrement dit aucune impulsion n'est transférée entre ces deux fluides malgré leur mouvement relatif. Nous verrons dans la partie suivante que ce n'est pas le cas.

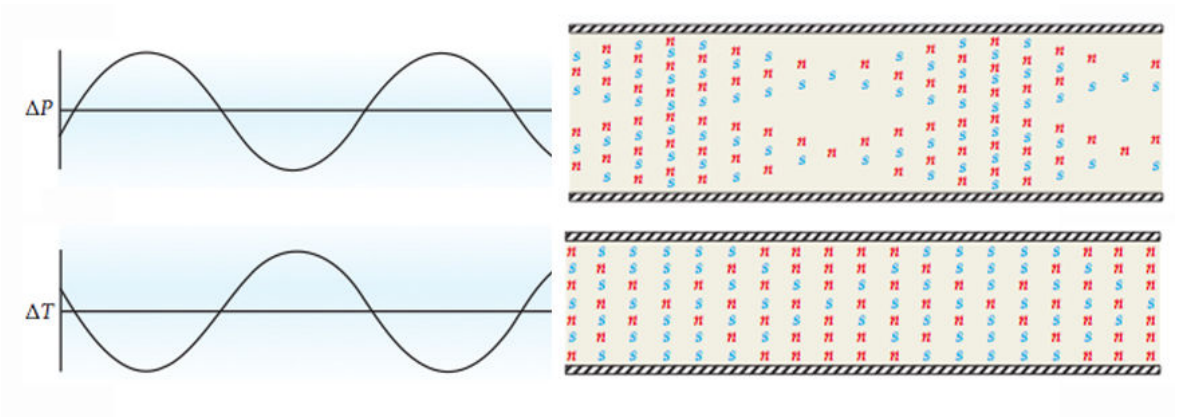


FIGURE 1.6: Représentation d'onde de densité (premier son) et d'onde de température (second son) ainsi que leur effet sur les densités respectives (Donnelly,*Physics Today* 2009).

1.3 Les vortex quantiques

La vision de la composante superfluide a considérablement changé depuis le modèle à deux fluides de L.D. Landau. En 1949 à Florence, L. Onsager le fameux chimiste qui a résolu tant de problèmes de la physique théorique (modèle d'Ising 2D, relations réciproques hors-équilibre, etc.) est présent à la conférence de Mécanique Statistique. Lui qui aime tant les effets d'annonce d'une découverte scientifique importante a pour habitude de rendre publique ses découvertes au détour de remarques suivants un exposé. Cette année là, après une intervention de C.J. Gorter sur le modèle à deux fluides, il annonce que "la bien connue circulation hydrodynamique est quantifiée, et que le quantum de circulation est h/m_{He} ..."(Donnelly (1991)). En 1955, R.P. Feynman redécouvre cette propriété en construisant une fonction d'onde macroscopique décrivant l'état de la composante superfluide, l'état de plus basse énergie. Comme la fonction d'onde correspond à une amplitude de probabilité de présence, elle doit obéir à certaines contraintes mathématiques, par exemple être de carré intégrable, mais surtout elle doit être mono-valuée. Elle peut avoir une phase qui peut être de la nature d'un angle azimutal, augmentant de 2π pour chaque tour autour d'un trou ou d'une absence de fluide, imposée par la géométrie de l'écoulement (par exemple un écoulement dans un tore). Mais comme la vitesse est donnée par le gradient de la phase, $v_s = \hbar m_{\mathrm{He}}^{-1}\nabla\Phi$, alors la circulation doit être un multiple entier de $\kappa \equiv 2\pi\hbar m_{\mathrm{He}}^{-1}$.

$$\int \mathbf{v_s}.\mathbf{dl} = 2\pi\frac{\hbar}{m}n = \kappa n \ , n \in \mathbb{N} \text{ avec } \kappa = 9,97.10^{-8} \text{ m}^2.\text{s}^{-1} \tag{1.3.1}$$

Pour pousser plus loin cette hypothèse, il propose une expérience de pensée, dans laquelle il y a une circulation du superfluide non nulle. Prenons de l'hélium superfluide initialement à température nulle, sous une pression telle qu'il est à l'état solide, en rotation dans une conduite cylindrique. Maintenant la contrainte de pression est relâchée si bien que l'hélium se liquéfie. Quel est l'état final de l'hélium ? Autrement dit, quel est l'état de plus basse énergie de l'hélium tel qu'il possède une impulsion angulaire macroscopiquement élevée ?
Feynman (1955) passe en revue tous les cas possibles. Pour une impulsion angulaire donnée l'énergie cinétique est moindre si la vitesse angulaire est constante dans tout le liquide, mais l'hélium est sous forme liquide, quelques zones peuvent tourner indépendamment de tout le fluide. Pour mettre en rotation toutes ces zones qui composent le fluide et qui possèdent un faible moment d'inertie, il faudrait une énergie élevée. On pourrait aussi penser que les excitations peuvent porter l'impulsion angulaire, même à température nulle, mais l'énergie pour maintenir le fluide normal doit tenir compte du fait que si moins de fluide normal est présent, pour une impulsion angulaire donnée, alors l'énergie cinétique devrait être plus grande. R.P. Feynman montre que cet état est 10^4 plus couteux en énergie que la

rotation solide.

FIGURE 1.7: Représentation schématique d'une ligne de vortex et de la circulation du superfluide autour d'elle.

Prenons un autre cas : s'il y a un trou ou un vortex au centre du liquide, comme c'est le cas pour l'écoulement de l'eau quand on vide une baignoire ; le liquide circule autour du trou avec une circulation constante. Dans ce cas, la vitesse varie inversement avec le rayon, et par l'action de la force centrifuge, la vitesse peut être si élevée au centre que le vortex est maintenu sans présence de liquide. Mais l'énergie est encore plus élevée que celle de la rotation solide, parce que la vitesse au lieu d'être distribuée proportionnellement au rayon, l'est inversement. Si l'on suppose qu'il n'y a pas un vortex dans le fluide, mais plusieurs, alignés le long d'un rayon (et répartis aussi de façon concentrique), entrainant le fluide dans le même sens de rotation, alors sur chaque section entre deux vortex, la vitesse est distribuée en $1/r$. Au final entre le centre de la conduite et le bord extérieur, le profil de vitesse commence à se rapprocher d'un profil linéaire en moyenne, donc moins couteux en énergie. La figure 1.8 représente trois cas possibles : 1 vortex central, 2 vortex, et plusieurs vortex. On peut encore augmenter le nombre de vortex, mais il existe une limite à cause de la quantification de la circulation, si bien que même le vortex le plus petit doit avoir une circulation $2\pi\hbar m_{\mathrm{He}}^{-1}$. L'énergie minimale que nous cherchions correspond à l'état dans lequel un grand nombre de vortex de circulation minimale sont alignés dans le fluide, et forment un réseau.

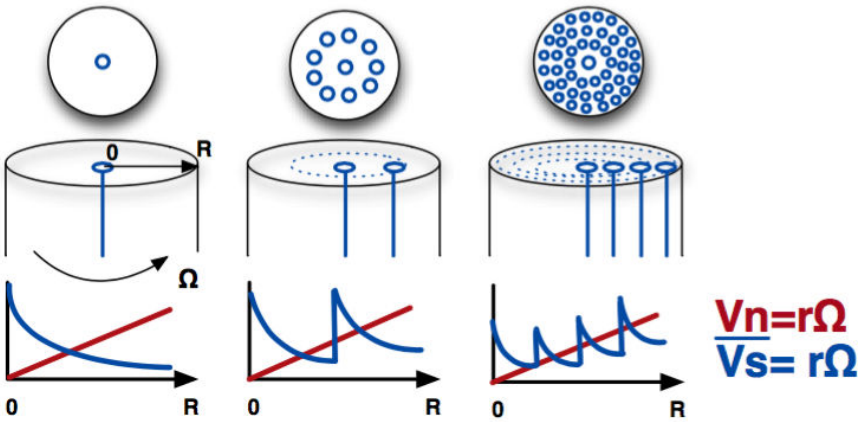


FIGURE 1.8: Schématisation de l'effet des lignes de vortex sur la distribution de vitesse superfluide dans un cylindre en rotation à la vitesse Ω.

La quantification des vortex a été mesurée expérimentalement par W.F. Vinen en 1961, plus tard en 1979, R.E. Packard et son équipe (Yarmchuk, Gordon, et Packard (1979)) réalisent une image des vortex quantifiés, sous l'action de la rotation de la conduite, Figure 1.9. On peut clairement apprécier l'arrangement de ces lignes de vortex, parallèles à l'axe de rotation du cylindre, on parle de polarisation. De plus la densité de lignes de vortex augmente avec la vitesse angulaire.

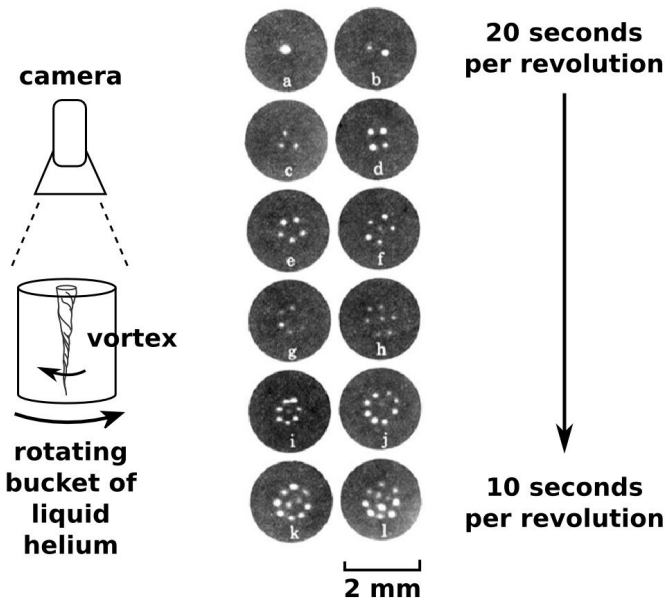


FIGURE 1.9: Photographie d'un réseau de vortex quantiques dans une expérience de rotation de superfluide par E.J. Yarmchuk, M-J.V. Gordon et R.E. Packard (Yarmchuk, Gordon, et Packard (1979))

1.4 Le modèle HVBK de couplage mutuel

En 1956, H.E. Hall et W.F. Vinen observent que les ondes de second son se propagent à des vitesses différentes parallèlement ou perpendiculairement à l'axe de rotation du cylindre contenant l'hélium, de plus elles sont atténuées dans la direction perpendiculaire. Pour une rotation à la vitesse angulaire $\Omega = 1$ rad.s^{-1}, une fois l'équilibre thermodynamique atteint, le champ de vitesse du fluide normal est $\mathbf{v_n} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$, alors que le superfluide, grâce à l'arrangement spatial des lignes de vortex qu'il contient, essaie de s'approcher de la rotation solide pour minimiser son énergie, avec une densité de ligne de vortex égale à $2\Omega/\kappa$. Ils élaborent alors une théorie de friction mutuelle. Par friction mutuelle on entend que les deux fluides peuvent échanger de l'impulsion, ce qui n'est pas le cas dans le modèle à deux fluides de L.D. Landau. Ce couplage entre les deux fluides a lieu à l'échelle microscopique, s'appuyant d'une part sur les excitations du modèle de L.D. Landau qui composent le fluide normal, et d'autre part sur les lignes de vortex introduites en détail par R.P. Feynman. L'idée est que les excitations représentées par les quasi-particules (phonons, rotons) peuvent collisionner avec les lignes de vortex. Ces collisions donnent lieu à des transferts d'impulsion entre les deux fluides et seront observées à l'échelle macroscopique comme une friction mutuelle.
Vinen (1957b) considèrent un petit élément de volume contenant un grand nombre de lignes de vortex. Cet élément de volume reste petit devant l'échelle caractéristique de l'écoulement, permettant ainsi de définir localement une vitesse macroscopique pour le fluide normal et le superfluide.

La longueur d'onde des ondes de second son est grande par rapport à la distance inter-vortex, si bien que dans cet élément de volume, le rapport des densités entre les deux fluides peut être considéré comme constant. Entre 1,2 K et la température de transition T_λ, le fluide normal est essentiellement composé de rotons, si de plus on considère que l'interaction phonon-ligne de vortex est bien plus faible que l'interaction roton-ligne de vortex, on peut alors ignorer le traitement des phonons et considérer que la friction mutuelle est entièrement décrite par la diffusion des rotons par la ligne de vortex. Par un calcul cinétique ils expriment la force de friction qui agit sur une unité de longueur de ligne de vortex (celle de circulation $2\pi\hbar m_{\mathrm{He}}^{-1}$) en fonction essentiellement de la vitesse relative entre un roton et une ligne de vortex ($\mathbf{v_R} - \mathbf{v_L}$). Afin d'exprimer la friction mutuelle comme une fonction de la vitesse

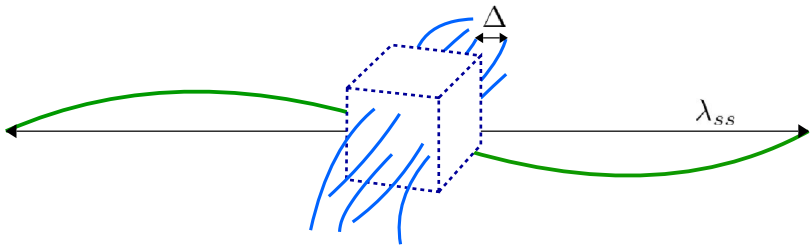


FIGURE 1.10: Volume élémentaire de fluide dans le modèle HVBK (en bleu, trait pointillé), traversé par un grand nombre de lignes de vortex polarisées (en bleu, trait continu). La distance moyenne inter-vortex est notée Δ. Une onde de second son de longueur d'onde λ_{ss} est schématisée, pour illustrer l'hypothèse $\Delta \ll \lambda_{ss}$.

relative entre le superfluide et le fluide normal $(\mathbf{v_s} - \mathbf{v_n})$ il est nécessaire de trouver une relation entre $(\mathbf{v_R} - \mathbf{v_L})$ et $(\mathbf{v_s} - \mathbf{v_n})$. La différence de vitesse entre un roton collisionnant, $\mathbf{v_R}$, et le fluide normal, $\mathbf{v_n}$, existe parce que la ligne de vortex tend à attirer le roton dans son voisinage. Cette action est possible parce que la distance inter-vortex est beaucoup plus grande que le libre parcours moyen des rotons (10^{-6} cm). En effet, on peut évaluer la distance inter-vortex. Il découle du théorème de Green l'égalité entre le rotationnel de la vitesse et la circulation par unité de surface. Dans le cas de l'hélium superfluide en rotation dans un cylindre à la vitesse Ω, le rotationnel de la vitesse est égal à 2Ω. Nous avons vu que le quantum de circulation est égal à $2\pi\hbar/m_{\mathrm{He}}$. Il existe donc $2m_{\mathrm{He}}\omega/(2\pi\hbar) = 2,1.10^3\Omega$ lignes de vortex par centimètre carré. Pour une vitesse de rotation d'un radian par seconde la distance inter-vortex est typiquement de 10^{-2} cm. Cette estimation est cohérente avec l'observation expérimentale de Yarmchuk, Gordon, et Packard (1979) (Figure 1.9) à 10 secondes par révolution.

En examinant le mouvement d'une ligne de vortex contenue dans la composante superfluide, on déduit une relation entre $\mathbf{v_L}$ et $\mathbf{v_s}$. On peut d'ailleurs retrouver cette relation par analogie. Prenons une ligne de vortex immergée dans la composante superfluide à la vitesse $\mathbf{v_s}$ orientée vers la droite. Autour de cette ligne de vortex, il existe une circulation de superfluide proportionnelle à $1/r$ où r est la distance par rapport au centre de la ligne de vortex. Pour simplifier la vision du problème, plaçons nous à deux dimensions et choisissons un sens de circulation anti-horaire autour de cette ligne de vortex, qui maintenant s'apparente à un disque - Figure 1.11. Au pôle sud de ce disque, la circulation et l'écoulement de superfluide sont dans le même sens, la vitesse apparente du superfluide est plus grande, et par la relation de Bernoulli, la pression est donc localement plus faible qu'ailleurs dans l'écoulement. Au pôle nord, la vitesse apparente du superfluide est plus faible, la pression est localement plus élevée. Il s'en suit pour équilibrer les pressions que ce disque, c'est-à-dire notre ligne de vortex, se déplace vers le bas. C'est l'effet Magnus appliqué à une ligne de vortex, effet qui ne dissipe pas d'énergie, il est proportionnel à $\rho_s(\mathbf{v_L} - \mathbf{v_s}) \times \kappa$.

A un niveau macroscopique, la force calculée par unité de longueur de ligne de vortex agissant sur le fluide normal peut se réécrire en fonction de $\mathbf{v_s} - \mathbf{v_n}$ (en éliminant $\mathbf{v_R}$ et $\mathbf{v_L}$) et par unité de volume, parce que la longueur totale de ligne de vortex par unité de volume est donnée par $2\omega_s/\kappa$ sachant que ω_s est la vitesse angulaire de rotation du superfluide, sa vorticité moyenne. Au final la force de friction mutuelle par unité de volume s'écrit

$$\mathbf{F_{ns}} = \frac{B}{2}\frac{\rho_s\rho_n}{\rho}\hat{\omega}_\mathbf{s} \times [\omega_\mathbf{s} \times (\mathbf{v_n} - \mathbf{v_s})] + \frac{B'}{2}\frac{\rho_s\rho_n}{\rho}\omega_\mathbf{s} \times (\mathbf{v_n} - \mathbf{v_s}) \tag{1.4.1}$$

et apparait dans les équations du modèle à deux fluides sous la forme

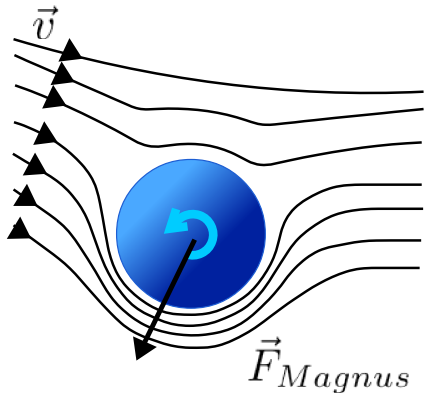


FIGURE 1.11: Représentation schématique de l'effet Magnus appliqué à un cylindre en rotation dans un écoulement fluide à la vitesse $\mathbf{v}$.

$$\frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial t} + (\mathbf{v_n}.\nabla)\mathbf{v_n} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\rho_s}{\rho_n} s\nabla T + \nu_n \Delta \mathbf{v_n} + \frac{1}{\rho_n}\mathbf{F_{ns}} \tag{1.4.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v_s}}{\partial t} + (\mathbf{v_s}.\nabla)\mathbf{v_s} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + s\nabla T - \frac{1}{\rho_s}\mathbf{F_{ns}} \tag{1.4.3}$$

Les coefficients de friction mutuelle B et B' sont sans dimension et dépendent de la température. Ils ont été mesurés avec précisions (Donnelly et Barenghi (1998)). Le premier terme de l'équation (1.4.1) est dissipatif, il est responsable de l'atténuation du second son, le second terme est non-dissipatif, il est responsable du décalage en fréquence du second son. Ce modèle sera enrichi quelques années plus tard par (Khalatnikov et Bekarevitch (1961)), on l'appelle communément le modèle HVBK, modèle continu qui complète le modèle à deux fluides dans le cas où la composante superfluide contient des lignes de vortex polarisés. Il faut insister sur le fait que ce modèle est valide à l'échelle caractéristique des variations spatiales de l'écoulement, lorsqu'il y a un nombre élevé de vortex quantiques, qui sont polarisés dans une direction, c'est-à-dire qu'il existe une vorticité macroscopique locale pour le superfluide (Figure 1.10).

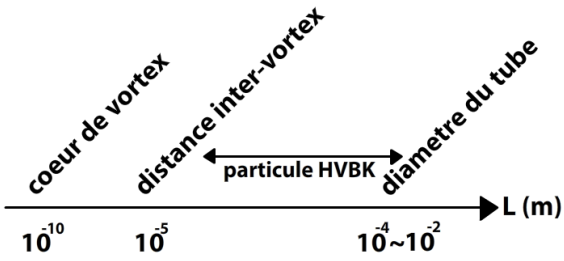


FIGURE 1.12: Distances caractéristiques du problème

En 1966, Andronikashvili et Mamaladze (1966) pour tenir compte de la déformation des lignes de vortex introduisent dans les équations du modèle HVBK la tension de ligne de vortex $\mathbf{T} \propto -\omega_\mathbf{s} \times (\nabla \times \hat{\omega}_s)$; terme qui ajoute une accélération au superfluide lorsque les lignes de vortex se courbent (Barenghi et Jones (1988)). En 1977, Hills et Roberts (1977) redérivent les équations du modèle HVBK dans le cadre de la mécanique classique des milieux continus.

$$\frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial t} + (\mathbf{v_n}.\nabla)\mathbf{v_n} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\rho_s}{\rho_n} s\nabla T + \nu_n \Delta \mathbf{v_n} + \frac{1}{\rho_n}\mathbf{F_{ns}} \tag{1.4.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v_s}}{\partial t} + (\mathbf{v_s}.\nabla)\mathbf{v_s} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + s\nabla T + \mathbf{T} - \frac{1}{\rho_s}\mathbf{F_{ns}} \tag{1.4.5}$$

$$\nabla.\mathbf{v_n} = 0 \tag{1.4.6}$$

$$\nabla.\mathbf{v_s} = 0 \tag{1.4.7}$$

$$\mathbf{T} = -\nu_s \omega_\mathbf{s} \times (\nabla \times \hat{\omega}_s) \tag{1.4.8}$$

$$\mathbf{F_{ns}} = \frac{B}{2}\frac{\rho_s \rho_n}{\rho}\hat{\omega}_\mathbf{s} \times (\omega_\mathbf{s} \times \mathbf{c}) + \frac{B'}{2}\frac{\rho_s \rho_n}{\rho}\omega_\mathbf{s} \times \mathbf{c} \tag{1.4.9}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{v_n} - \mathbf{v_s} - \nu_s \nabla \times \hat{\omega}_s \tag{1.4.10}$$

$$\nu_s = \frac{\kappa}{4\pi} log\left(\frac{\Delta}{a}\right)$$

Le paramètre de la tension de ligne de vortex ν_s dépend du quantum de circulation κ, de la distance inter-vortex Δ et du diamètre du coeur du vortex a, typiquement $a = 10^{-10}$m (Figure 1.12). Ce paramètre est homogène à la circulation, donc homogène à un coefficient de diffusion, c'est pour cela qu'on utilise la lettre ν pour le désigner.
Dans le cas de l'hélium en rotation, les lignes de vortex sont toutes parallèles à l'axe de rotation du cylindre, la tension de ligne de vortex est nulle. Dans le cas d'un écoulement Couette (écoulement entre deux cylindres co-axiaux en rotation) la vitesse critique qui caractérise l'instabilité Taylor-Couette fut prédite grâce à l'ajout de la tension de lignes de vortex (Barenghi et Jones (1988) ; Henderson, Barenghi, et Jones (1995)).
Il est important de comparer la force de tension de lignes de vortex avec la friction mutuelle, qui a pour effet de verrouiller ensemble les deux fluides aux grandes échelles. Si on note L la longueur caractéristique de l'écoulement alors typiquement la force de tension $T \propto \nu_s \omega_s / L$ et $F_{ns} \propto (\rho_s \rho_n / \rho)\omega_s (V_n - V_s - \nu_s / L)$. Le coefficient B est de l'orde de l'unité, excepté dans une région proche de la température de transition T_λ et le terme en B' est généralement négligeable devant celui en B. On note $\beta \equiv \nu_s / \nu_n$, terme de l'ordre de l'unité (Donnelly (1999)) et on définit un nombre de Reynolds $Re_{ns} \equiv V_{ns} L / \nu_n$. Nous verrons plus tard que dans le cas d'un écoulement de contre-courant le flux net de masse (à travers la conduite) est nul : $\rho_n V_n + \rho_s V_s = 0$. Il est alors judicieux de ré-exprimer ce nombre de Reynolds en fonction du nombre de Reynolds associé au fluide normal, noté $Re = V_n L / \nu_n = (\rho_s / \rho) Re_{ns}$. Le rapport entre la force de tension et de couplage mutuel s'écrit

$$\frac{\rho_s |\mathbf{T}|}{|\mathbf{F_{ns}}|} \propto \frac{\rho \beta}{\rho_n Re_{ns}} \propto \frac{\rho_s \beta}{\rho_n Re} \tag{1.4.11}$$

A température fixée, la tension de ligne de vortex devient rapidement négligeable devant la friction mutuelle. Dans la section consacrée à la modélisation de la force de friction 2.1.4, nous reviendrons sur ce résultat pour donner quelques ordres grandeurs.

1.5 L'écoulement de contre-courant superfluide

Il existe différents montages expérimentaux pour étudier la dynamique de l'hélium superfluide : on peut le mettre en rotation, le brasser en déplaçant une grille, ou bien encore le chauffer localement. Nous nous intéresserons uniquement au dernier cas. Prenons un tube aux parois thermiquement isolées, fermons l'une de ses extrémités par un petit volume, lui aussi thermiquement isolé, qui contient une résistance, plongeons ce système dans un bain d'hélium, et refroidissons le bain jusqu'à obtenir de l'hélium superfluide (par exemple par pompage). Des capteurs de pression et de température peuvent être

placés sur toute la longueur du tube, généralement ils sont placés aux deux extrémités : à l'extrémité ouverte du tube en contact avec le bain et dans le volume qui contient la résistance. La figure 1.13 présente une schématisation du principe de l'expérience.

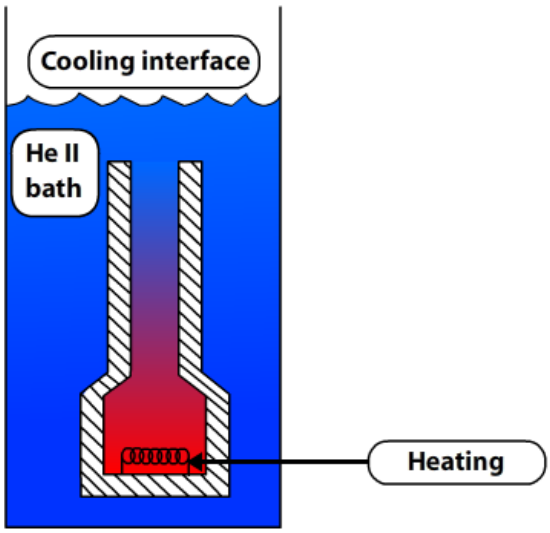


FIGURE 1.13: Schéma de principe d'une expérience de contre-courant

Comme nous l'avons vu à l'aide du modèle à deux fluides, la proportion des deux fluides qui composent l'hélium superfluide est fixée par la température. Le superfluide est au repos, dans le tube, comme dans le bain, qui est maintenu à température constante. Lorsqu'on active la résistance, on chauffe localement, en créant des excitations dans le superfluide. On augmente donc localement la proportion de fluide normal au détriment de celle de superfluide. La pression partielle de fluide normal augmente donc dans la cellule chaude. Il se met en place un courant de densité de masse $\rho_n \mathbf{v}_n$ dirigé vers la sortie de la conduite, pour équilibrer la pression partielle du fluide normal avec l'extrémité ouverte de la conduite. Puisque seul le fluide normal transporte l'entropie, on peut relier la puissance thermique apportée par la résistance au fluide $W = \dot{Q}/\mathcal{A}$ (où $\mathcal{A}$ est représente la section de la conduite) et la vitesse du fluide normal, de sorte que

$$V_n = W/\rho s T \tag{1.5.1}$$

avec s l'entropie par unité de masse (Landau et Lifshitz (1987)). Or le fluide est globalement au repos, il y a donc création dans la composante superfluide d'un courant de masse opposé $\rho_s \mathbf{v}_s$, si bien que sur une section $\rho_n V_n + \rho_s V_s = 0$. Il s'agit de la condition de contre-courant thermique. Les deux fluides voyagent donc avec des vitesses de signes opposés, on utilise souvent la vitesse $V_{ns} \equiv V_n - V_s$, nommée la vitesse de contre-courant, comme paramètre pour décrire l'état dynamique du superfluide. Avant de présenter les résultats expérimentaux il est nécessaire de relier les quantités mesurées à un modèle simple de contre-courant. Lorsqu'un régime stationnaire est atteint, c'est-à-dire qu'il n'y a plus de dépendance en temps, si on néglige la force de friction mutuelle $\mathbf{F_{ns}}$ et la tension de ligne de vortex $\mathbf{T}$, alors dans le cas laminaire l'écoulement est invariant par translation selon x, axe du cylindre (de section circulaire) : $\mathbf{v_n} = v_n(r)\hat{v}_x$ les équations (1.4.4) et (1.4.5) se réduisent à

$$\frac{\rho_n}{\rho}\nabla p = \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n - \rho_s s \nabla T \tag{1.5.2}$$

$$\nabla p = \rho s \nabla T \tag{1.5.3}$$

où l'on rappelle que p désigne la pression mesurée, somme des pressions partielles de chacun des fluides. En les combinant on obtient

$$\nabla p_{Poiseuille} = \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n \tag{1.5.4}$$

On reconnait l'équation de Poiseuille pour un fluide classique. On peut la résoudre en se plaçant dans une géométrie simple. Dans le cas d'un tube de section circulaire de rayon h et de longueur l, on obtient

$$\mathbf{v}_n(r) = \left(\frac{\Delta p}{4\eta_n l}\right)(h^2 - r^2)\hat{v}_x \tag{1.5.5}$$

où r est la distance radiale depuis l'axe du cylindre, dont l'axe est porté par z. Δp est la différence de pression entre la sortie et l'entrée de la conduite. Cette expression montre que la distribution de vitesses de la composante normale est parabolique sur la section du tube.

En intégrant sur la section on déduit la vitesse moyenne de la composante normale en fonction du gradient de pression

$$V_n \equiv \frac{1}{\mathcal{A}} \int \vec{v}_n . d\vec{A} = \frac{h^2 \Delta p}{8\eta_n l} \tag{1.5.6}$$

On peut ensuite relier la différence de pression et de température, aux extrémités du tube, avec le flux de chaleur :

$$\Delta p_{Poiseuille} = \frac{8\eta_n l W}{h^2 \rho S T} \tag{1.5.7}$$

En utilisant l'équation (1.5.3), appelée la loi de London, on peut exprimer la différence de température associée :

$$\Delta T_{London} = \frac{8\eta_n l W}{h^2 (\rho S)^2 T} \tag{1.5.8}$$

La différence de pression (ou perte de charge) et de température dans les équations (1.5.7) et (1.5.8) est liée à la dissipation visqueuse de l'écoulement laminaire du fluide normal.

Les expérimentateurs ont observé, dans les conduites circulaires, que lorsqu'on augmente la chaleur apportée au superfluide W, et qu'on dépasse une certaine valeur seuil W_{c1}, une première transition a lieu : on observe une perte de charge supérieure à celle prédite par les équations (1.5.7) et (1.5.8) avec une dépendance en W non-linéaire. La densité de lignes de vortex, mesurée par atténuation du second son, augmente soudainement. Ces phénomènes impliquent un excès de dissipation. Si l'on continue de chauffer, au delà de cette première transition, un nouveau seuil W_{c2} d'instabilité est observé conduisant à un régime dynamique fortement non-linéaire. Il sera vérifié que le gradient de température est proportionnel dans cette région à la vitesse de contre-courant à la puissance trois environ. Ces transitions ont été nommées par Tough (1982) : transitions T1 et T2.
En 1949, quelques années avant la redécouverte des lignes de vortex par R.P. Feynman et l'établissement du modèle HVBK, Gorter et Mellink (1949) proposent une force de friction mutuelle empirique entre les fluides, établie phénomènologiquement, permettant de retrouver la dépendance observée entre ∇T et W. Avec les résolutions expérimentales de l'époque il n'apparaissait qu'un seul régime de dissipation non-linéaire (T1 n'était pas distinguable de T2) caractérisé par $\nabla T \propto W^n$ avec $n \simeq 3$. En 1976, Childers et Tough (1976) montrent que la description du régime dynamique par l'ajout d'une friction mutuelle de type "Gorter et Mellink" n'est valide qu'entre T1 et T2. Cette force est traditionnellement écrite sous la forme

$$\mathbf{F}_{ns} = A_{GM} \rho_s \rho_n |\mathbf{v}_{ns} - \mathbf{v}_0|^2 \mathbf{v}_{ns} \quad \text{avec } \mathbf{v}_{ns} > \mathbf{v}_0 \tag{1.5.9}$$

Le coefficient A_{GM}, qui dépend de la température, est déterminé expérimentalement. Dans la théorie initiale $\mathbf{v}_0$ était choisie nulle, mais Childers et Tough (1976) suggèrent qu'il pourrait s'agir de la vitesse de contre-courant critique associée à W_{c1}.
Il est intéressant de comprendre les conséquences de l'ajout d'un terme de couplage mutuel entre les deux composantes. Cet ajout ne modifie pas l'équation (1.5.4), comme le remarquait Ladner et Tough (1979), puisqu'il s'agit d'une force interne au système des deux fluides qui n'intervient donc pas dans le bilan de quantité de mouvement totale. En effet les équations (1.5.2) et (1.5.3) obtenues avec les hypothèses de stationnarité, d'invariance par translation et d'écoulement laminaire s'écrivent alors

$$\frac{\rho_n}{\rho}\nabla p = \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n - \rho_s s \nabla T + \mathbf{F_{ns}} \tag{1.5.10}$$

$$\frac{\rho_s}{\rho}\nabla p = \rho_s s \nabla T - \mathbf{F_{ns}} \tag{1.5.11}$$

La somme de ces deux équations aboutie à nouveau à l'équation $\nabla p = \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n$, qu'on utilise conjointement avec la loi de London pour écrire au final (Tough (1982))

$$\Delta T = \Delta T_{London} + \Delta T' \text{ avec } \Delta T' \equiv \frac{F_{ns} L}{\rho_s s} \tag{1.5.12}$$

Cette équation permet d'attribuer l'excès de dissipation mesurée $\Delta T'$ à la force de couplage entre les deux fluides et de déterminer indirectement la densité de lignes de vortex (on utilise l'atténuation du second son comme mesure directe de la densité de lignes de vortex).
En remarquant que $\nabla T \propto F_{ns} \propto V_{ns}^3 \propto W^3$, puisque $V_n \propto W$ d'après l'équation (1.5.1). On retrouve ainsi la dépendance observée expérimentalement.
Après la transition T1, $\Delta T'$ est de l'ordre de ΔT_{London}. On retrouve à nouveau l'équation de Poiseuille pour un fluide classique malgré la présence du terme de couplage, ce résultat est appelé : la règle d'Allan et Reekie (J.F. Allen (1939)) ; (Allen et Reekie (1939)). Il a fallu attendre les années 60 et l'amélioration des capteurs de pression pour montrer que cette règle n'est pas strictement respectée et qu'il existe bien un excès de perte de charge mesurable, qui caractérise aussi la transition T1 (Ladner et Tough (1979)) ; (Tough (1982)). Initialement on a attribué de manière phénoménologique cet excès de perte de charge à une viscosité apparente pour la composante superfluide Brewer et Edwards (1961); da Haas et Van Beelen (1976); Childers et Tough (1974, 1976). En 1961, F.A. Staas K.W. Taconis et W.M. Van Alphen (Staas, Taconis, et Van Alphen (1961)) montrent par un principe de similarité que le terme d'accélération du fluide normal est non négligeable. Plus tard, d'autres auteurs feront des remarques similaires (Vicentini-Missoni et Cunsolo (1966)) ; (Arp (1970)). D'un point de vue général, l'ajout d'un terme de couplage mutuel quelconque non constant spatialement brise l'invariance par translation, il est donc nécessaire dans ce cas de ne pas négliger les termes d'accélération. Un nouvel équilibre s'établit alors entre les forces d'inertie, de viscosité (pour le fluide normal) et de friction mutuelle entre les deux fluides.

Ladner et Tough (1978), en particulier, ont fait varier la géométrie de la section du tube. Pour des tubes de rapport d'aspect 1 :1, donc carré, on retrouve le même comportement que pour les tubes circulaires. En revanche, pour les tubes de section rectangulaire, à fort rapport d'aspect, il n'existe qu'une seule transition, appelée T3.

Ces transitions T1, T2, T3 sont souvent caractérisées par les vitesses critiques des deux composantes. Il est généralement accepté que la transition T1 est causée lorsque le superfluide atteint une vitesse

critique $\mathbf{v_{sc2}}$, nécessaire pour créer des lignes de vortex quantiques (Van Sciver (2011)), qui prennent la forme d'un enchevêtrement de vortex (ou encore pelote de vortex), appelé *vortex tangle*, et caractérisé par une densité de ligne de vortex $\mathcal{L}$. La turbulence superfluide se manifeste lorsque cette pelote de vortex existe. Elle est à l'origine de l'atténuation du second son et d'une perte d'efficacité du transport de chaleur. Dans un grand nombre de mesures de densité de ligne de vortex, on a trouvé que $\mathcal{L} \propto v_{ns}^2$ entre T1 et T2, avec un coefficient dépendant de la température. La seconde transition T2, observée dans les conduites circulaires ou carrées, serait associée à un changement de nature de l'écoulement du fluide normal avec une densité de ligne de vortex beaucoup plus élevée.

1.6 Nos motivations

Beaucoup d'expériences de contre-courant thermique ont été réalisées entre 1950 et la fin des années 80. Tough (1982) rédige une "review" sur le sujet, les résultats expérimentaux les plus significatifs sont regroupés et analysés avec cohérence. Bien que l'analyse soit conséquente et regroupe différentes équipes, Tough (1982) concède que : "Although there certainly are some aspects of the dissipation common to these various flow conditions, a universal explanation is simply unrealistic". En 1985 Schwarz (1985), grâce à ses simulations sur la dynamique des vortex (reconnection, vortex miroir, etc.) à l'échelle microscopique, retrouve des résultats quantitatifs expérimentaux, en considérant la pelote de vortex comme homogène. On explique aussi les résultats expérimentaux grâce à la théorie de W.F. Vinen élaborée entre 1957 et 1958 (Vinen (1958)) ; (Vinen et Niemela (2002)), fondée sur des mécanismes de création/destruction phénoménologiques de densité de ligne de vortex, avec quelques paramètres ajustables, mais mesurables et dépendants de la géométrie de l'écoulement. En 1988, Schwarz (1988), propose une théorie basée uniquement sur la dynamique des vortex aux petites échelles, elle généralise la théorie de W.F. Vinen et donne une signification physique aux paramètres ajustables de la théorie qu'elle supplante. Bien que ces théories s'appliquent entre T1 et T2 (Childers et Tough (1976)), elles n'abordent pas le délicat problème de la nucléation des lignes de vortex, et ne permettent pas, par conséquent de prédire les conditions d'apparition de T1, T2 et T3.
Dans la première moitié des années 90, on observe une reprise des expériences de contre-courant, dans des géométries cette fois-ci à sections variables. Les résultats sont inattendus (Murphy, Tough, et Fiszdon (1992)), on introduit des longueurs d'accommodation pour la densité de ligne de vortex dans la théorie de W.F. Vinen. Lorsque des états métastables supplémentaires (Castiglione et Tough (1996)) de T1, caractérisés par des densités de lignes de vortex plus faibles sont détectés, la communauté ne parvient pas à trouver de consensus satisfaisant face à ces résultats.
Depuis le milieu des années 2000, on observe à nouveau un engouement pour les expériences de contre-courant, qui peut se comprendre ainsi :
- l'utilisation de caméras haute définition pour observer les trajectoires des particules dans les écoulements de contre-courant s'avère moins compliquée que pour les autres écoulements superfluides car les vitesses mises en jeux sont ici plus faibles, et que ce type d'écoulement thermique est simple à générer. Maintenant on arrive à visualiser des profils de vitesses (Samuels (1992)) ; (Guo, Cahn, Nikkel, Vinen, et McKinsey (2010)) ; (Murakami et Ichikawa (1989)) ; (Guo, La Mantia, Lathrop, et Van Sciver (2014)) ; (Murakami, Takakoshi, Maeda, Tsukahara, et Yokota (2009)) ou bien encore l'écoulement autour d'un obstacle. (Zhang et Van Sciver (2005b)) ; (Chagovets et Van Sciver (2013)).
- Il y a une dizaine d'années, les simulations de vortex dans des boites périodiques se limitaient à la modélisation d'une dizaine de vortex, alors que maintenant ce nombre a été multiplié par mille. Il existe différents types de simulations numériques pour décrire la dynamique de l'hélium II à l'échelle microscopique : en intégrant directement l'équation de Gross-Pitaevski (GP) pour la fonction d'onde, ou en résolvant la dynamique des vortex quantiques par une approche cinématique de type *Vortex Fi-*

lament Method (VFM) en *Full Biot-Savart* ou avec l'approximation *Local Induction Approximation* (LIA). Les simulations VFM peuvent tenir compte de la rétroaction de la composante normale sur la composante superfluide, mais ceci n'est que rarement implémenté dans les codes, parce qu'à cette échelle microscopique le traitement est complexe, alors que généralement, un profil de type Poiseuille pour le fluide normal est choisi et une pelote de vortex spécifiée. L'effet, par couplage, de la pelote de vortex sur le profil du fluide normal est étudié, mais pas le contraire. A l'échelle macroscopique avec un modèle continu de type HVBK, comme celui que nous utilisons, la rétroaction est naturellement prise en compte, mais au détriment de la dynamique des vortex individuels qui n'est pas résolue. A cette échelle, il existe des simulations directes des équations du modèle continu à deux fluides avec une force de couplage type Gorter-Mellink (Soulaine, Quintard, Allain, Baudouy, et Van Weelderen (2015)), à une dimension (Rao, Inaba, Noda, et Fukuda (1996)) ; (Zhang, Murakami, et Wang (2006)) ou multidimensionnel avec une hypothèse simplificatrice (Ramadan et Witt (1994)) ; (Suekane, Sekiguchi, Hirai, et Okamura (2003)) ; (Pietrowicz et Baudouy (2013)) ; (Kitamura, Shiramizu, Fujimoto, Rao, et Fukuda (1997)) ; (Tatsumoto, Fukuda, et Shiotsu (2002)) mais cette méthode est délicate à mettre en place et couteuse en temps de calcul, puisqu'il faut tenir compte aussi de la thermodynamique sous jacente.

Dans ce contexte, nous avons travaillé pour introduire, dans la communauté de recherche académique en turbulence superfluide mais aussi à moyen terme en vue des applications en ingénierie, un outil numérique orignal et efficace, permettant de simuler des écoulements superfluides de type contre-courant, i.e tels que $\rho_n V_n + \rho_s V_s = 0$. Notons que la généralisation de cet outil pour traiter des écoulements de type *superflow* pure ($V_n \equiv 0$) et de co-flow ($V_n = V_s$) est quasi-immédiate. Cet outil repose sur une modélisation physique originale des effets thermomécaniques liés à la superfluidité de l'hélium, et utilise l'algorithme de la méthode Boltzmann sur réseau pour représenter l'écoulement dans des configurations a priori quelconques. La méthode Boltzmann sur réseau est une méthode numérique récente (développée il y a une vingtaine d'années) en plein essor et qui est de plus en plus utilisée dans les applications industrielles.

A notre connaissance c'est la première fois que la méthode Boltzmann sur réseau est utilisée pour décrire des écoulements superfluides et a fortiori pour des écoulements de contre-courant. Nous avons surmonté un certain nombre de difficultés liées à la modélisation, ce qui nous a amené à développer de nouveaux algorithmes. Par exemple, pour exprimer les échanges de masse entre la composante normale et la composante superfluide dans les thermostats ou tenir compte de la force de couplage mutuel, qui apparait de manière implicite dans le calcul de la fonction de distribution à l'équilibre. La stabilité des calculs mis à mal par l'absence de viscosité de la composante superfluide, a également été un enjeu important. L'élaboration de cet outil de la première étape, celle de l'idée, à l'étape finale de validation a été ardue car nous nous aventurions sur des chemins qui n'étaient que partiellement balisés. Notre motivation première a été de montrer la pertinence de cette démarche en mettant en évidence ses atouts principaux :

- la modélisation à l'échelle mésoscopique. En effet, on peut représenter la dynamique de l'hélium II, comme la co-existence de familles couplées de particules associées respectivement à la composante normale et à la composante superfluide. Cette approche à l'échelle mésoscopique permet de modéliser finement les échanges de masse et de quantité de mouvement entre ces deux familles, ainsi que les interactions avec les parois spécifiques aux deux fluides. Une approximation de type Boussinesq, pertinente pour les écoulements de contre-courant d'hélium II, permet de s'affranchir de la résolution détaillée de la thermodynamique et ainsi de simplifier la représentation du problème.

- pour sa flexibilité face aux géométries les plus complexes. En effet la géométrie n'est pas traitée dans sa globalité, mais localement, on parle de frontière immergée ou *immersed boundary conditions*. Il est tout à fait possible, de construire des maillages bidimensionnels ou tridimensionnels avec un logiciel spécialisé, d'importer cette configuration spatiale dans le code (après quelques modifications) et de lancer directement une simulation.

- pour son adaptabilité aux calculs massivement parallèles. En effet l'algorithme de la méthode Boltzmann sur réseau, en deux actions, est séparable. Toutes nos simulations ont été déployées simultanément sur plusieurs coeurs de calcul, en utilisant des directives *Openmp*.

Chapitre 2

Aspects numériques

2.1 La modélisation de l'expérience de contre-courant superfluide : principes généraux . . . 22

2.1.1 La géométrie des simulations . . . 22

2.1.2 La représentation des deux fluides . . . 23

2.1.3 Etablir le contre-courant . . . 24

2.1.4 Le couplage mutuel entre les deux fluides . . . 25

2.2 Les méthodes et techniques numériques . . . 25

2.2.1 Le schéma Boltzmann sur réseau dans l'approximation BGK . . . 25

2.2.2 Le modèle D2Q9 . . . 27

2.2.3 La condition d'incompressibilité . . . 29

2.2.4 Les conditions aux parois . . . 31

2.2.5 La règle d'échange de populations au niveau des thermostats . . . 32

2.2.6 Le couplage HVBK . . . 35

2.3 Le lien avec l'approche cinétique d'un mélange binaire . . . 37

2.4 Détermination des paramètres de la simulation . . . 39

2.5 La validation du code . . . 41

2.5.1 La conservation des grandeurs physiques élémentaires . . . 41

2.5.2 Le gradient de pression et les profils de vitesse . . . 41

2.5.3 Un cas test avec couplage HVBK simplifié . . . 42

A notre connaissance, c'est la première fois que la méthode Boltzmann sur réseau est utilisée dans le contexte des écoulements superfluides, notre approche est donc en ce sens exploratoire. Pour nous concentrer sur la modélisation et l'étude des phénomènes rencontrés et non sur la méthode numérique à proprement parler, nous avons opté pour une formulation simple et éprouvée de la méthode Boltzmann sur réseau : modèle de collision BGK et règles de rebond pour les conditions aux parois. Le développement de notre code numérique permettant d'étudier la dynamique de l'hélium II s'est organisé en plusieurs étapes clés, que nous détaillerons dans ce chapitre : la modélisation de la géométrie typique d'une expérience de contre-courant, la modélisation de la dynamique couplée des deux composantes de l'hélium II et leurs comportements respectifs à la paroi, la modélisation du mécanisme d'échange de populations permettant la mise en place du contre-courant, et enfin la validation du code dans son intégralité.

L'outil numérique développé nous a permis de mettre en évidence un nouvel effet d'entrée superfluide en conduite, présenté au chapitre 3, et d'explorer la nature d'un écoulement de contre-courant superfluide autour d'un cylindre (chapitre 4). Ce deuxième sujet illustre ainsi l'adaptabilité et l'efficacité de notre approche numérique pour traiter des géométries plus complexes.

2.1 La modélisation de l'expérience de contre-courant superfluide : principes généraux

2.1.1 La géométrie des simulations

Nous avons modélisé l'expérience de contre-courant en incluant les deux extrémités, chauffée et refroidie de la conduite, reproduisant ainsi numériquement une configuration expérimentale typique. Le domaine contenant le fluide a été découpé en trois parties, comme indiqué sur la figure 2.1. La cellule chaude située à l'une des extrémités du tube, a été recréée. L'équivalent du bain d'hélium superfluide refroidi, a lui aussi été intégré à l'autre extrémité. Entre ces deux zones se situe la conduite à proprement parler dans laquelle l'écoulement a lieu. L'essentiel de notre étude a été faite en deux dimensions et quelques résultats ont été reproduits en trois dimensions.

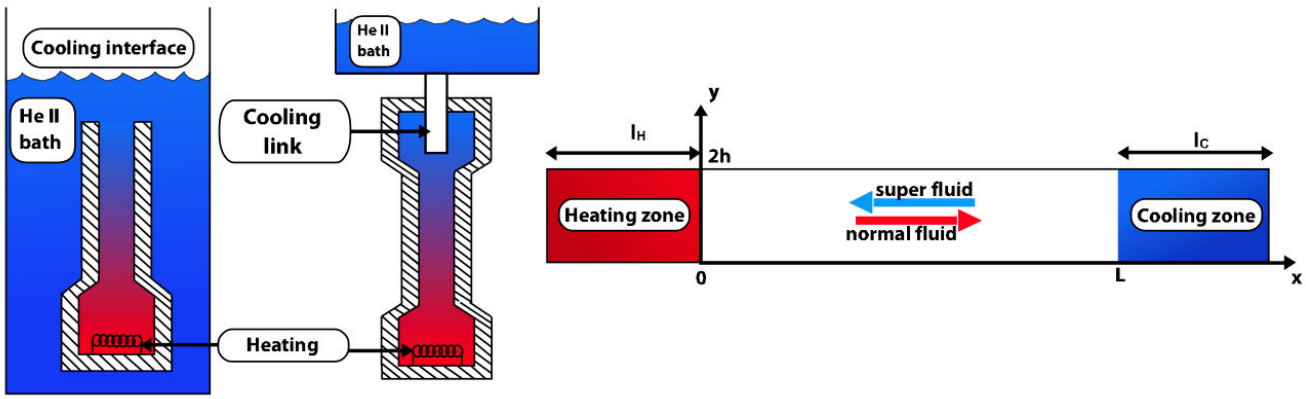


FIGURE 2.1: Schéma d'une expérience de contre-courant (à gauche) et sa modélisation numérique associée avec la méthode Boltzmann sur réseau (à droite). Les réservoirs chaud et froid situés aux deux extrémités de la conduite sont modélisés par des zones de chauffage et de refroidissement.

La méthode Boltzmann sur réseau nous permet de traiter des géométries simples ou complexes de manière unique, c'est-à-dire en appliquant les mêmes lois de rebond aux noeuds du maillage situés à la frontière entre le domaine fluide et les parois solides ; c'est un des principaux atouts de cette méthode. Même s'il ressort de certaines études expérimentales (par exemple de Gopal et Tirmizi (1964)) que les discontinuités ou irrégularités de la géométrie joueraient un rôle important dans l'instabilité des écoulements de contre-courant superfluides en conduite, nous nous sommes concentrés sur une géométrie régulière en considérant un tube fermé à section constante (Figure 2.1) ; l'idée étant de s'affranchir au maximum des détails de la géométrie pour mieux mettre en avant la mécanique "intrinsèque" de l'écoulement de l'hélium II. Nous pouvons signaler que notre outil nous a permis de tester sans difficulté supplémentaire quelques géométries originales (résultats non intégrés dans ce manuscrit) : canal à section variable, extrémités de tube coudées, rappelant certaines configurations expérimentales de contre-courant (Kafkalidis et Tough (1991)) ; (Castiglione et Tough (1996)) ; (Klinich III, Kafkalidis, et Tough (1997)). Quelques simulations en trois dimensions, dans des conduites de section circulaire, carré et rectangulaire, ont également été réalisées pour s'assurer que les phénomènes observés en deux dimensions persistaient.

2.1.2 La représentation des deux fluides

Il est naturel dans le langage Boltzmann sur réseau d'utiliser le terme *populations* (de particules) pour désigner un *fluide*. Les deux termes décrivent le même objet, mais à des échelles différentes. Quand on utilise le mot fluide, on se place à l'échelle macroscopique alors que lorsque l'on utilise le terme *populations*, on se place à l'échelle mésoscopique. Dans le formalisme de la méthode Boltzmann sur réseau, la dynamique du fluide à cette échelle est caractérisée par la dynamique de ses populations, qui voyagent de noeud en noeud et collisionnent sur les noeuds selon certaines règles. La première étape de la modélisation, simple et intuitive, consiste à dire que la dynamique d'un écoulement d'hélium II peut être représentée par deux familles de populations Boltzmann sur réseau associées respectivement aux deux composantes du fluide.

Dans les écoulements de contre-courant superfluide, les variations de température (entre les deux extrémités de la conduite) induites par le chauffage restent généralement très faibles devant la température moyenne du système imposée par le bain d'hélium. Par exemple, d'après les résultats expérimentaux de Childers et Tough (1976) les variations de température ΔT sont de l'ordre du millikelvin typiquement pour des températures moyennes de l'ordre du Kelvin, pour des conduites d'un diamètre de l'ordre de $0,1$mm, dans les régimes d'écoulement étudiés. Ainsi il parait légitime, dans notre modélisation, de considérer que l'hélium superfluide dans la conduite est en première approximation à une température constante T. Plus précisément il s'agit de négliger les variations de densité induites par les fluctuations de température. Par ailleurs, les fluctuations de pression sont reliées aux fluctuations de température par la loi de London (équation (1.5.3)) et sont également très faibles (par rapport à la pression de référence de l'écoulement). Il est donc également naturel de négliger les variations de densité induites par les fluctuations de pression, ce qui revient finalement à supposer que les deux composantes sont incompressibles et à une température constante T : $\rho_n(\mathbf{x},t) = \rho_n(T)$ et $\rho_s(\mathbf{x},t) = \rho_s(T)$. Comme mentionné dans l'introduction, l'hypothèse incompressible est faite dans le cadre du modèle à deux fluides HVBK.
Ces hypothèses de type Boussinesq interdisent de prendre en compte une loi d'état thermodynamique de la forme $p = p(\rho, T)$. Les phénomènes thermiques, comme la propagation d'onde de second son ne sont pas restitués fidèlement par ce modèle. Ici, les pressions partielles p_n et p_s de chaque composante deviennent des paramètres découplés de la thermodynamique. La suite de la modélisation consiste à déterminer les conditions imposées sur ces pressions partielles, permettant de simuler la mise en place du contre-courant (par effet thermo-mécanique). Ces conditions sont imposées au niveau des thermostats.

Les équations macroscopiques que nous simulons s'écrivent ainsi

$$\frac{\partial \mathbf{v_n}}{\partial t} + (\mathbf{v_n}.\nabla)\mathbf{v_n} = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p_n + \nu_n \Delta \mathbf{v_n} + \frac{1}{\rho_n}\mathbf{F_{ns}} \tag{2.1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v_s}}{\partial t} + (\mathbf{v_s}.\nabla)\mathbf{v_s} = -\frac{1}{\rho_s}\nabla p_s + \nu_s \Delta \mathbf{v_s} - \frac{1}{\rho_s}\mathbf{F_{ns}} \tag{2.1.2}$$

$$\text{avec } \mathbf{F_{ns}} = \frac{B}{2}\frac{\rho_s\rho_n}{\rho}\hat{\omega}_\mathbf{s} \times (\omega_\mathbf{s} \times (\mathbf{v_n} - \mathbf{v_s})) + \frac{B'}{2}\frac{\rho_s\rho_n}{\rho}\omega_\mathbf{s} \times (\mathbf{v_n} - \mathbf{v_s}) \tag{2.1.3}$$

$$\nabla.\mathbf{v_n} = 0 \tag{2.1.4}$$

$$\nabla.\mathbf{v_s} = 0 \tag{2.1.5}$$

Ce jeu d'équations est cohérent avec les équations dynamiques générales du modèle à deux fluides

présentées dans le chapitre d'introduction. En identifiant les gradients de pression (totale) et de température $(\nabla p, \nabla T)$ en fonction des gradients de pression partielles $(\nabla p_n, \nabla p_s)$:

$$\nabla p = \nabla p_n + \nabla p_s \tag{2.1.6}$$

$$\nabla T = \frac{1}{\rho\ s}\left(\nabla p_n - \frac{\rho_n}{\rho_s}\nabla p_s\right) \tag{2.1.7}$$

Cela signifie également que dans le cadre de notre approximation de type Boussinesq le forçage thermo-mécanique est encapsulé dans les pressions partielles "généralisées" de chaque composante : $\nabla p_n = \frac{\rho_n p}{\rho} - \rho_s s \nabla T$ et $\nabla p_s = \frac{\rho_s p}{\rho} + \rho_s s \nabla T$

Avec la méthode Boltzmann sur réseau il n'est pas possible de simuler la dynamique d'un fluide sans viscosité. De ce fait, nous avons attribué une viscosité cinématique artificielle à la composante superfluide, notée ν_s. Cette viscosité artificielle a été choisie suffisamment faible devant la viscosité du fluide normal pour ne pas avoir d'incidence notable sur l'écoulement. Dans la pratique, nous avons commencé nos études avec une viscosité superfluide cent fois plus faible que la viscosité du fluide normal : $\nu_s/\nu_n = 1/100$. Nous avons ensuite constaté que des résultats très similaires pouvaient être obtenus (dans la gamme de températures considérées) pour un rapport $\nu_s/\nu_n = 1/25$. L'influence de la viscosité artificielle de la composante superfluide sera examinée de manière systématique dans la présentation des résultats. Nous tenterons de justifier que cette viscosité artificielle ne doit pas être perçue comme une limitation de notre approche.

Les deux composantes de l'hélium II possèdent des comportements à la paroi différents. En effet, le fluide normal est un fluide visqueux, qui n'a pas de vitesse tangentielle à la paroi ; il obéit à une règle de vitesse nulle à la paroi. En revanche, la composante superfluide glisse sur les parois ou les obstacles, parce qu'elle ne porte pas de viscosité. Afin de retranscrire cette propriété à l'échelle mésoscopique nous avons autorisé la composante superfluide à glisser sur les parois, en utilisant un algorithme de réflexion spéculaire, qui conserve l'impulsion tangentielle. Le glissement total modélisé par la réflexion spéculaire correspond ici à une situation idéalisée. Dans la pratique, un glissement partiel dû à la présence de vortex rémanents dans la composante superfluide attachés à la paroi ne peut pas être exclu (Schwarz (1988)) ; (Castiglione et Tough (1996)). La question délicate de l'interaction paroi-superfluide fait encore l'objet de recherche. Nous avons utilisé l'hypothèse d'un glissement total (*free slip*) afin de ne pas introduire de paramètres supplémentaires (comme une longueur de glissement ou un mécanisme de *slip-stick*) dans la modélisation. L'effet d'une possible adhérence de la composante superfluide à la paroi n'est donc pas pris en compte ici.

2.1.3 Etablir le contre-courant

Une étape essentielle de la modélisation consiste à mettre en place le contre-courant des deux fluides à l'échelle mésoscopique, c'est-à-dire en manipulant les populations. Il existe différentes méthodes, utilisées par la communauté Boltzmann sur réseau, pour mettre en mouvement un fluide. L'une des plus utilisées, la méthode de Zou et He (1997), consiste à imposer une vitesse en entrée de canal, et une pression en sortie. Cette méthode ne conserve pas la masse du fluide mis en mouvement. Dans notre cas, nous souhaitions imposer la conservation du nombre de particules de façon exacte, sans paramètre ajustable, pour toute géométrie et pour chaque pas de temps, afin de satisfaire la condition de contre-courant $\rho_n V_n + \rho_s V_s = 0$ (débit massique net nul à travers chaque section de la conduite). La méthode de Zou et He était donc exclue. De ce fait nous avons préféré développer à l'échelle mésoscopique une

méthode originale d'échange de populations, cohérente avec les mécanismes physiques élémentaires mis en jeu dans l'hélium II, détaillée à la section 2.2.5. L'utilisation de la méthode Boltzmann sur réseau a pris tout son sens dans cette étape. Cette règle induit des différences inversées de pression partielle entre les deux thermostats qui conduisent à l'établissement d'un contre-courant.

Rappelons que lorsqu'on chauffe l'hélium II localement, on crée des excitations, c'est-à-dire que la proportion, ou ici la pression partielle, du fluide normal augmente, inversement la pression partielle de la composante superfluide diminue. Le phénomène d'échange contraire prend place au niveau du thermostat froid, imitant ainsi le rôle du bain d'hélium refroidi. Le mécanisme d'échange a été retranscrit dans le formalisme de la méthode Boltzmann sur réseau.

2.1.4 Le couplage mutuel entre les deux fluides

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, les équations HVBK complètes correspondent aux équations du modèle à deux fluides avec une force de friction mutuelle $\mathbf{F_{ns}}$ et un terme de tension de ligne de vortex $\mathbf{T}$ (appliqué à la composante superfluide uniquement). Dans notre étude de contre-courant nous avons négligé la force de tension de ligne de vortex devant la force de friction mutuelle. En effet, nous avions établi que $\rho_s|\mathbf{T}|/|\mathbf{F_{ns}}| \propto \frac{\rho_s \beta}{\rho_n Re}$. Le coefficient β est de l'ordre de l'unité et $Re = \frac{\rho_n V_n D_h}{\eta_n}$ est le nombre de Reynolds associé au contre-courant. Pour les températures que nous avons considérées, comprises entre 1,3 K et 1,96 K, le rapport ρ_s/ρ_n varie entre 21,2 et 1,02 respectivement. Les régimes dynamiques étudiés correspondent à des nombres de Reynolds compris entre 50 et 600 environ. Ainsi même aux températures les plus basses, le rapport $\rho_s|\mathbf{T}|/|\mathbf{F_{ns}}|$ peut être négligé, ce qui simplifiera l'analyse des phénomènes observés.

2.2 Les méthodes et techniques numériques

2.2.1 Le schéma Boltzmann sur réseau dans l'approximation BGK

Il est utile de rappeler rapidement l'origine de la méthode Boltzmann et ses fondements. La méthode découle de l'analyse cinétique des fluides faite par Boltzmann entre 1860 et 1870 et de sa célèbre équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \Omega(f) \tag{2.2.1}$$

qui traduit la conservation de la probabilité dans l'espace des phases. Les quantités $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ sont des fonctions de distribution, elles représentent des densités locales de population de particules advectées avec toutes les vitesses possibles $\mathbf{c}$. On retrouve les quantités macroscopiques, la densité, la quantité de mouvement et l'énergie totale du fluide en intégrant sur toutes les vitesses possibles

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} \tag{2.2.2}$$

$$\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)\mathbf{c} d\mathbf{c} \tag{2.2.3}$$

$$\rho(\mathbf{x}, t)\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2 = \frac{1}{2}\int f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)\mathbf{c}^2 d\mathbf{c} \tag{2.2.4}$$

où $\mathcal{E}$ est l'énergie interne.

Toute la physique des collisions entre ces particules est contenue dans le terme $\Omega(f)$, que l'on appelle opérateur de collision et qui, si l'on veut tenir compte du détail des collisions, est extrêmement compliqué. La première clé de la modélisation consiste à simplifier ce terme pour le rendre calculable

dans un certain nombre de cas concrets. En 1954, bien avant la création de la méthode Boltzmann sur réseau, Bhatnagar-Gross-Krook (Bhatnagar, Gross, et Krook (1954)) (BGK) proposent une forme simplifiée de l'opérateur de collision,

$$\Omega(f) = -\frac{f - f^{eq}}{\tau} \tag{2.2.5}$$

qui s'interprète en disant qu'il existe un temps caractéristique lié aux collisions, noté τ, pendant lequel les fonctions de distribution relaxent exponentiellement vers une fonction de distribution représentative de l'équilibre thermodynamique, nommée f^{eq} . Il s'agit de la distribution de Maxwell-Boltzmann donnée par

$$f^{eq}(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t) = \rho \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2k_B T}(\mathbf{c} - \mathbf{u})^2\right] \tag{2.2.6}$$

où $k_B = 1,38.10^{-23}$J K^{-1} est la constante de Boltzmann et T est la température.

La seconde clé consiste à montrer qu'il est possible de reconstruire à un certain ordre en nombre de Mach les grandeurs macroscopiques à partir des distributions pour un ensemble discret de vitesses $\{\mathbf{c}_\alpha\}$ (He, Shan, et Doolen (1998)). Cette discrétisation s'appuie sur la quadrature de Gauss qui permet d'approximer les intégrales par des sommes discrètes. Elle suppose par ailleurs l'indépendance des vitesses discrètes élémentaires (Ricot (2002)). Cette discrétisation des vitesses ne permet a priori que la construction de modèles isothermes (Marié (2008)) ce qui est compatible avec notre approche de type Boussinesq des équations HVBK. Pour cette raison on ne considérera pas l'équation (2.2.4) concernant l'énergie interne. Dans toute la suite on se place dans les conditions isothermes, l'énergie interne $\mathcal{E}$ est alors constante égale à $\frac{1}{2}rT$ par degré de liberté des particules. Il existe une relation d'état entre la pression notée p et la densité ρ : $p = rT\rho$ où r correspond formellement au rapport entre la constante des gaz parfaits R et la masse molaire du fluide. Une fois la géométrie du réseau imposée la constante rT sera identifiée à la vitesse de propagation du son sur le réseau : $c_s^2 = rT$ et $p = c_s^2\rho$.

Pour reconstruire les grandeurs macroscopiques à partir des fonctions de distribution, à un certain ordre, il n'est donc pas nécessaire d'intégrer sur toutes les vitesses possibles mais sur un nombre fini de vitesses. Les fonctions de distribution sont alors solutions de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes :

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{c}_\alpha . \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{f_\alpha - f_\alpha^{eq}}{\tau} \tag{2.2.7}$$

avec les moments

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha^{eq} \tag{2.2.8}$$

$$\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{c}_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha^{eq} \mathbf{c}_\alpha \tag{2.2.9}$$

La dernière clé pour obtenir le schéma numérique de la méthode Boltzmann sur réseau consiste à discrétiser l'équation (2.2.7) en espace et en temps. Cette étape est caractéristique de la méthode Boltzmann sur réseau et consiste à intégrer l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes sur un pas de temps Δ_t le long des vitesses élémentaires discrètes $\mathbf{c}_\alpha$. Ce chemin d'intégration est appelé *caractéristique*. Cette équation traduit le fait que chaque population voyage exactement jusqu'à un noeud voisin pendant un pas de temps noté Δ_t avant d'être partiellement redistribuée par collision ainsi

$$f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{c}_\alpha\Delta_t, t+\Delta_t) - f_\alpha(\mathbf{x},t) \tag{2.2.10}$$

$$= -\frac{1}{\tau}\int_0^{\Delta_t}[f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{c}_\alpha s, t+s) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}+\mathbf{c}_\alpha s, t+s)]ds \tag{2.2.11}$$

$$\backsimeq -\frac{\Delta_t}{2\tau}(f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{c}_\alpha\Delta_t, t+\Delta_t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}+\mathbf{c}_\alpha\Delta_t, t+\Delta_t) + f_\alpha(\mathbf{x},t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x},t)) \tag{2.2.12}$$

On a approximé l'intégrale par la règle des trapèzes précise à l'ordre 2. Mais l'équation (2.2.12) est implicite en temps. On introduit la distribution de probabilité $g_\alpha(\mathbf{x},t)$

$$g_\alpha(\mathbf{x},t) = f_\alpha(\mathbf{x},t) + \frac{\Delta_t}{2\tau}(f_\alpha(\mathbf{x},t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x},t)) \tag{2.2.13}$$

qui permet d'obtenir une équation explicite pour le calcul des $g_\alpha(\mathbf{x},t)$ à savoir

$$g_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{c}_\alpha\Delta_t, t+\Delta_t) = g_\alpha(\mathbf{x},t) - \frac{\Delta_t}{\tau_g}(g_\alpha(\mathbf{x},t) - g_\alpha^{eq}(\mathbf{x},t)) \tag{2.2.14}$$

où $\tau_g = \tau + \frac{\Delta_t}{2}$ est le temps de relaxation associé à la discrétisation.

Il faut noter que les solutions g_α ne sont pas exactement les distributions de probabilité solutions de l'équation de Boltzmann à vitesses discrètes (équation (2.2.7)), à cause du changement de variable. Les fonctions de distribution à l'équilibre g_α^{eq} et f_α^{eq} sont égales, mais les parties non-équilibres ne le sont pas $g_\alpha^{neq} \equiv g_\alpha - g_\alpha^{eq} = \frac{\tau_g}{\tau} f_\alpha^{neq}$.

L'équation (2.2.14) est à la base de l'algorithme fondamental de la méthode Boltzmann sur réseau. Il est caractérisé par deux processus, une étape d'advection des particules, qui voyagent maintenant de noeuds en noeuds sur un réseau, et une seconde étape de collision, qui s'effectue sur les noeuds du réseau. Par un développement multi-échelles (Chapman-Enskog), faisant intervenir les temps courts et les temps longs, on peut montrer que la méthode Boltzmann, à l'échelle mésoscopique, utilisée avec l'approximation BGK et une fonction de distribution à l'équilibre correctement choisie, redonne les équations de Navier-Stokes à l'échelle macroscopique. Suivant le même principe, nous construirons un nouveau schéma Boltzmann sur réseau permettant de retrouver les équations du modèle à deux fluides introduites précédemment.

Mentionnons qu'il existe d'autres schémas Boltzmann sur réseau (Succi (2001)) : Multiple Relaxation Time (MRT) et Entropic Lattice Boltzmann (ELBM), entre autres. Les modèles MRT sont une généralisation du modèle BGK avec plusieurs temps de relaxation. Dans les modèles entropiques les fonctions de distribution sont construites pour respecter une version discrétisée du théorème H de Boltzmann (Latt (2007)). Ces modèles s'avèrent en général numériquement plus stables que le modèle standard reposant sur l'approximation BGK du terme de collision. Cependant, ils introduisent de nouveaux paramètres ajustables dans la modélisation, pouvant introduire un biais (lié à une dissipation numérique supplémentaire) dans la solution physique (Latt (2007)). Dans notre étude, nous avons choisi une approche simple et éprouvée de l'algorithme Boltzmann sur réseau pour pouvoir nous concentrer sur les aspects de modélisation physique des écoulements de contre-courant superfluides.

2.2.2 Le modèle D2Q9

Pour retrouver les équations de Navier-Stokes en deux dimensions (D2), on peut montrer qu'il suffit de connaitre la dynamique de 9 populations sur un réseau à l'échelle mésoscopique (Q9). Ces

populations se déplacent d'un noeud à un noeud voisin du réseau pendant un pas de temps, selon les vitesses discrètes $\mathbf{c}_\alpha$ (Figure 2.2) définies par

$$\mathbf{c}_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ (\cos[(\alpha-1)\pi/4], \sin[(\alpha-1)\pi/4])c & \alpha = 1,2,3,4 \\ (\cos[(\alpha-1)\pi/4], \sin[(\alpha-1)\pi/4])\sqrt{2}c & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \tag{2.2.15}$$

où $c = \Delta_x/\Delta_t$ avec Δ_x le pas d'espace et Δ_t le pas de temps de la simulation.

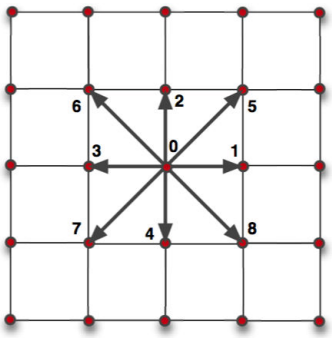


FIGURE 2.2: Représentation du schéma D2Q9. Les flèches indiquent les déplacements possibles pendant un pas de temps d'une particule initialement localisée au noeud 0.

Dans le schéma D2Q9, la fonction de distribution à l'équilibre s'écrit pour la direction α

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left(1 + 3\frac{\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right) \tag{2.2.16}$$

où

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 4/9 & \alpha = 0 \\ 1/9 & \alpha = 1,2,3,4 \\ 4/36 & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \tag{2.2.17}$$

ω_α représentent des poids associés aux différentes directions sur le réseau ($\sum_\alpha w_\alpha = 1$).

Les grandeurs macroscopiques sont reconstruites en effectuant des moyennes statistiques à partir des distributions de particules sur le réseau : la densité

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha \tag{2.2.18}$$

et la quantité de mouvement (ou l'impulsion)

$$\rho\mathbf{u} = \sum_\alpha f_\alpha \mathbf{c}_\alpha \tag{2.2.19}$$

La vitesse caractéristique de propagation des particules sur le réseau est définie par

$$\frac{\Delta_x}{\Delta_t} = c = c_s\sqrt{3} \tag{2.2.20}$$

Par construction la pression est donnée par l'équation d'état :

$$p = c_s^2\rho \text{ avec } rT = c_s^2 \tag{2.2.21}$$

2.2.3 La condition d'incompressibilité

Les équations dynamiques du modèle continu HVBK sont accompagnées de la condition d'incompressibilité pour les deux composantes de l'hélium II (Holm (2001)) ; (Donnelly (1999)) ; (Sonin (1987)). Or comme nous venons de le voir, la méthode Boltzmann sur réseau simule a priori les équations de Navier-Stokes compressibles, dans lesquelles les variations spatiales de la densité sont liées aux variations de pression par l'équation d'état (2.2.21) : $\delta p = c_s^2 \delta\rho$. Dans notre étude, nous nous plaçons dans la limite incompressible.

En prenant U_0, L et L/U_0 comme unité de vitesse, de longueur et de temps, l'équation de Navier-Stokes compressible peut s'écrire sous la forme adimensionnée :

$$\frac{1}{M}\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}'.\nabla')\mathbf{u}' = -\frac{1}{M^2\rho}\nabla'\rho + \frac{1}{Re}\nabla'^2\mathbf{u}' \tag{2.2.22}$$

avec M le nombre de Mach défini par $M \equiv U_o/c_s$. En considérant que le terme inertiel $(\mathbf{u}'.\nabla')\mathbf{u}'$ est comparable aux termes liés à la compressibilité, on obtient que les variations spatiales de densité sont d'ordre M^2 :

$$\frac{\nabla'\rho}{\rho} = O(M^2) \tag{2.2.23}$$

Pour se placer dans la limite incompressible, il faut s'assurer que le nombre de Mach est faible devant 1. Notons qu'à résolution spatiale fixée, le temps de calcul est d'autant plus long qu'on réduit le nombre de Mach parce que $M \propto \Delta_t$, en effet $M = U_o/c_s = U_o\Delta_t/(\Delta x\sqrt{3})$. La limite incompressible impose donc a priori de fortes contraintes sur le temps de calcul.

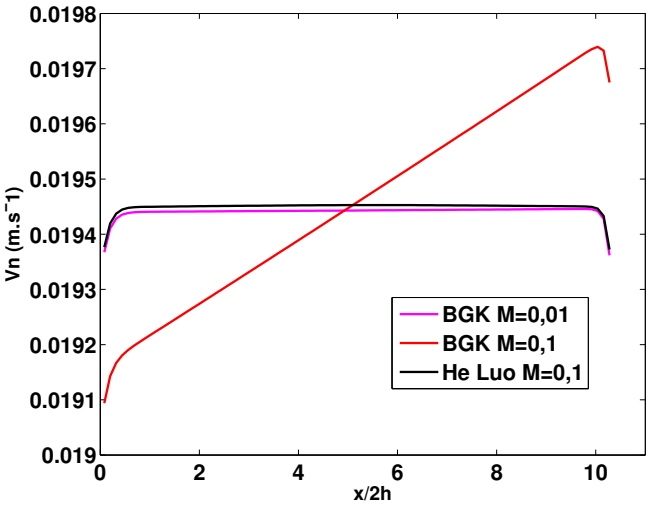


FIGURE 2.3: Vitesse maximale d'un fluide classique le long de l'axe de la conduite. Approche de la limite incompressible obtenue en diminuant le nombre de Mach. Pour deux simulations à $Re = 20$ utilisant le schéma BGK standard et le modèle incompressible de He et Luo (1997).

A titre d'illustration, la figure 2.3 montre l'approche de la limite incompressible. Nous avons représenté la vitesse sur l'axe d'une conduite en deux dimensions pour un fluide classique dans le cas d'un écoulement laminaire. Deux simulations utilisant le schéma BGK standard à nombre de Mach : $M = 0,1$ et $M = 0,01$ ont été exécutées. Dans le cas incompressible, on s'attend à obtenir un écoulement de type Poiseuille invariant par translation le long de la conduite (selon x). On observe sur la figure 2.3 que cela n'est pas le cas pour le modèle BGK à nombre de Mach $M = 0,1$ à cause des

effets de compressibilité. Il y a une accélération progressive du fluide dans la conduite causée par l'expansion (relative à la diminution de la pression le long de la conduite). Pour un nombre de Mach dix fois plus faible, cet effet est largement diminué et l'on se rapproche du cas incompressible avec une vitesse constante. On peut remarquer par ailleurs que cette limite est également bien représentée avec le modèle incompressible de He et Luo mais avec un " nombre de Mach " $U_0/c_s \backsimeq 0,1$, ce qui permet d'alléger le temps de calcul. C'est le modèle que nous allons maintenant présenter et qui sera utilisé dans tous nos travaux.

En 1997, He et Luo (1997a) proposent un modèle Boltzmann sur réseau pour simuler les équations incompressibles de Navier-Stokes. En remplaçant dans l'expression de la fonction d'équilibre f_α^{eq}

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \rho \left(1 + 3\frac{\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right) \tag{2.2.24}$$

la densité ρ par $\rho_0 + \delta\rho$ où ρ_0 est la densité de référence du fluide et en développant les produits, on fait apparaitre des termes qui s'expriment comme des puissances de $\mathbf{u}/c_s$; c'est-à-dire un développement en nombre de Mach. Nous avons vu que les variations relatives de densité sont d'ordre $O(M^2)$, alors les termes du type $\frac{\delta\rho}{\rho_0}\frac{|\mathbf{u}|}{c}$ et $\rho\frac{\delta|\mathbf{u}|^2}{c^2}$ sont respectivement d'ordre $O(M^3)$ et $O(M^4)$. En négligeant les termes d'ordre $O(M^3)$ ou supérieurs on obtient

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \left(\delta\rho + \rho_0 \left[3\frac{\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right]\right) \tag{2.2.25}$$

Par un développement de Chapman-Enskog on retrouve les équations macroscopiques

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_0\nabla.\mathbf{u} = 0 + O(M^2) \tag{2.2.26}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{c_s^2}\frac{\nabla\delta\rho}{\rho_0} + \nu\Delta\mathbf{u} + O(M^3) \tag{2.2.27}$$

On identifie la pression du fluide notée p à $c_s^2\delta\rho$ que l'on obtient à partir des distributions

$$p = c_s^2\delta\rho = c_s^2\sum_\alpha f_\alpha \tag{2.2.28}$$

D'une certaine manière, on peut interpreter qualitativement cette équation en considérant que les particules (caractérisées par leurs distributions f_α) portent chacune, non pas une masse, mais un quantum de pression. La somme totale de ces quanta de pression donne la pression (à l'échelle macroscopique).

La quantité de mouvement est donnée par

$$\rho_0\mathbf{u} = \sum_\alpha f_\alpha\mathbf{c}_\alpha \tag{2.2.29}$$

Si l'écoulement est stationnaire alors $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ et la condition d'incompressibilité $\nabla.\mathbf{u} = 0$ est satisfaite à l'ordre $O(M^2)$. Il est ainsi toujours nécessaire d'avoir M petit. Dans nos simulations le nombre de Mach ne dépassera jamais $M = 0,1$.

Lorsque l'écoulement n'est pas stationnaire, en définissant un temps hydrodynamique τ_o et une distance caractéristique de l'écoulement L, d'après l'équation (2.2.26) la limite incompressible est obtenue par la condition

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} \ll \rho_0\nabla.\mathbf{u} \tag{2.2.30}$$

ce qui revient à satisfaire $\tau_o \gg L/c_s$. La signification de cette contrainte est la suivante : le temps lié à la propagation des ondes acoustiques (L/c_s) doit être négligeable devant le temps caractéristique des instationnaritées de l'écoulement τ_o. On retrouve naturellement l'interprétation physique d'un nombre de Mach faible.

Mentionnons qu'il existe un second modèle Boltzmann sur réseau incompressible, proposé par Guo, Shi, et Wang (2000) qui ne requiert pas de spécifier une densité de référence contrairement au modèle proposé par He et Luo (1997a). Dans ce modèle, les effets de compressibilité sont ramenés à l'ordre $O(M^2)$ par le choix de la nouvelle fonction d'équilibre g_α^{eq} définie telle que :

$$g_\alpha^{eq} = \begin{cases} -4\sigma\frac{p}{c^2} + s_0^{eq}(\mathbf{u}) & \alpha = 0 \\ \lambda\frac{p}{c^2} + s_\alpha^{eq}(\mathbf{u}) & \alpha = 1,2,3,4 \\ \gamma\frac{p}{c^2} + s_\alpha^{eq}(\mathbf{u}) & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \tag{2.2.31}$$

avec

$$s_\alpha^{eq} = \omega_\alpha \left[3\frac{\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right] \tag{2.2.32}$$

Les paramètres σ, λ, γ vérifient

$$\lambda + \gamma = \sigma \quad \text{et} \quad \lambda + 2\gamma = \frac{1}{2} \tag{2.2.33}$$

Nous avons choisi le modèle proposé par He et Luo parce que son implémentation est plus directe et qu'il était naturel pour nous de spécifier les densités de chacun des fluides, qui sont des paramètres physiques de l'écoulement à une température donnée (en utilisant les tables de Donnelly et Barenghi (1998)). La comparaison entre les deux modèles incompressibles est faite par Guo, Shi, et Wang (2000) dans le cas d'un écoulement autour d'un cylindre en deux dimensions. L'erreur relative globale sur les composantes de la vitesse est inférieure à 2,2%.

2.2.4 Les conditions aux parois

Les conditions aux bords jouent un rôle clé dans la stabilité et la précision de la solution numérique du schéma Boltzmann sur réseau (Bao et Meskas (2011)).

La composante normale de part sa viscosité adhère à la paroi. Cela se traduit par une condition de non glissement ou de vitesse nulle à l'échelle macroscopique. La règle de *Bounce Back* (littéralement "rebond en arrière") des particules sur la paroi permet implicitement de tenir compte de cette condition de non glissement. Si la paroi est située à mi-distance entre un noeud fluide et un noeud solide, on obtient qu'au voisinage immédiat de la paroi, la vitesse moyenne (sur un pas de temps) est nulle. En effet les particules qui sortent du domaine fluide sont exactement renvoyées avec une direction opposée. Junk et Yang (2005a,b) ont montré par une analyse asymptotique que la règle de rebond *Halway Bounce Back* (rebond en arrière à mi-distance, voir figure 2.4) permettait d'assurer la précision du schéma Boltzmann sur réseau à l'ordre deux en espace et en temps sur l'ensemble du domaine fluide. Précisons que la condition de non glissement n'est pas toujours satisfaite exactement avec le rebond *HalfWay Bounce Back*, des études ont montré que la vitesse tangentielle peut sous certaines conditions peut ne pas être (strictement) nulle et être fonction du temps de relaxation (He, Zou, Luo, et Dembo (1997)) ; (Luo (1997)). Cependant ces erreurs restent négligeables dans nos configurations.

On suppose que la composante superfluide quant à elle glisse sur la paroi, c'est à dire qu'il existe une vitesse tangentielle non nulle du fluide à la paroi. Par ailleurs nous considérerons qu'il n'y a pas de transfert de quantité de mouvement pour la composante tangentielle (*free-slip*). Pour modéliser ce

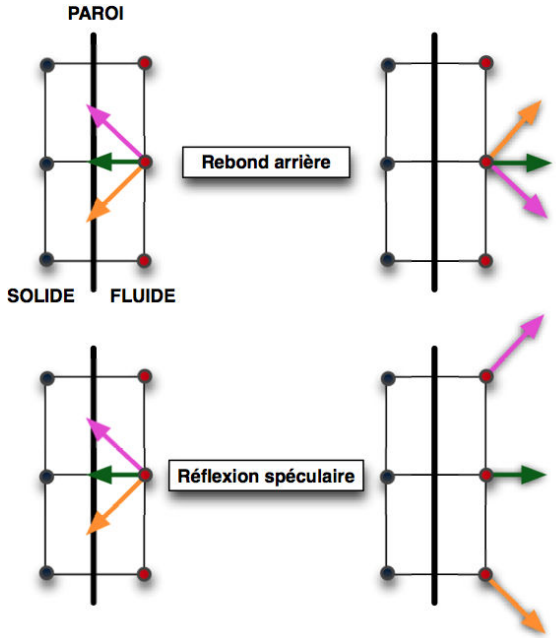


FIGURE 2.4: Schématisation de la règle de rebond de type *Halfway Bounce Back* (en haut) et et de type réflexion spéculaire (en bas). La paroi est représentée par la ligne noire située à demi-distance entre deux noeuds.

glissement avec la méthode Boltzmann nous avons construit un algorithme de réflexion spéculaire (schématisé sur la figure 2.4) qui est en quelque sorte complémentaire à la règle de rebond *Halway Bounce Back* pour le glissement total. Elle correspond à la situation physique idéalisée où la composante superfluide ne rencontre aucune résistance au voisinage immédiat de la paroi. A notre connaissance personne n'a quantifié expérimentalement les effets de glissement à la paroi d'un superfluide et l'impact sur les transitions. Déterminer la condition à la paroi d'un superfluide reste un problème ouvert au delà de nos objectifs.

Précisions qu'on peut également traiter les conditions aux bords par des schémas de reconstruction. Par reconstruction on entend que les populations entrantes sont calculées à partir de l'information des noeuds voisins et des contraintes macroscopiques. Généralement ces méthodes reposent sur des hypothèses supplémentaires ad-hoc pour reconstruire l'information manquante sur les populations entrantes. Latt, Chopard, Malaspinas, Deville, et Michler (2008) ont récemment (2008) passé en revue les différentes méthodes pour traiter les conditions aux bords, dans le cas où la paroi fictive est droite.

Nous avons préféré une implémentation directe des règles de rebond à la paroi pour les deux composantes de l'hélium II, qui ne repose sur aucune hypothèse arbitraire et qui est adaptée à des géométries relativement simples. Rappelons que nous souhaitons respecter la condition de contre-courant : débit massique net nul à travers la conduite. A cette fin, les deux algorithmes que nous avons choisi ont le mérite de conserver exactement le nombre de particules. Les méthodes de reconstruction pourraient toutefois s'avérer précieuses à l'avenir pour étudier l'incidence sur l'écoulement de modèles physiques de glissement superfluide.

2.2.5 La règle d'échange de populations au niveau des thermostats

Notre système est composé de deux fluides qui évoluent sur le même réseau avec la même vitesse de propagation c_s (à l'échelle mésoscopique). Autrement dit en chaque noeud du réseau, il y a coexistence

des populations des deux fluides, le "mélange intime" des deux fluides conceptualisé par Landau est ainsi bien retranscrit.

Nous allons maintenant présenter le mécanisme d'échange de populations permettant d'instaurer un contre-courant dans nos simulations. La conduite se termine à chaque extrémité par un "réservoir" ou "thermostat", où pour chaque noeud une fraction δ_α des populations d'une espèce est convertie en l'autre espèce, pendant un pas de temps. Pour l'instant nous raisonnons d'une manière générale sans différencier les deux thermostats. Cela se traduit analytiquement par la règle d'échange

$$f_\alpha^n(\mathbf{x}) \to f_\alpha^n(\mathbf{x}) + \delta_\alpha \tag{2.2.34}$$

$$f_\alpha^s(\mathbf{x}) \to f_\alpha^s(\mathbf{x}) - \delta_\alpha \tag{2.2.35}$$

où $\mathbf{x}$ est la position du noeud dans le réservoir, f^n et f^s sont les fonctions de distribution de l'espèce N et S respectivement et α les directions sur lesquelles la règle d'échange est appliquée (entre l'étape de propagation et de collision). Le nombre de particule, δ_α et la fraction de quantité de mouvement $\delta_\alpha \mathbf{c}_\alpha$ retirés localement à une espèce sont exactement transmises à l'autre espèce, il y a donc conservation localement du nombre de particules totales et de la quantité de mouvement *totale* en chaque noeud et chaque direction.

Pour le réservoir chaud, on introduit un coefficient d'échange uniforme $0 < \gamma_e < 1$ qui représente le taux de conversion de population entre deux pas de temps :

$$\delta_\alpha^s \equiv \gamma_e f_\alpha^s(\mathbf{x}) > 0 \tag{2.2.36}$$

Les deux populations sont chargées initialement par la fonction de distribution à l'équilibre avec des vitesses macroscopiques nulles. Autrement dit aux premiers pas de temps les distributions sont de la forme $f_\alpha = \rho\omega_\alpha$, où ω_α représente le poids de la direction α du schéma Boltzmann utilisé.

La règle d'échange dans le thermostat chaud a pour conséquence de diminuer le nombre de particules de l'espèce S (particules de superfluide) et donc de diminuer sa pression partielle locale p_s. Inversement elle augmente, de la même quantité, le nombre de particules de l'espèce N (particules de fluide normal), et augmente sa pression partielle locale p_n. Dans le cadre de notre approximation de type Boussinesq l'effet thermo-mécanique de mise en mouvement des deux composantes de l'hélium II prend la forme d'un forçage via les pressions partielles de deux familles de populations (isothermes). La mise en mouvement des fluides est naturelle et ne nécessite pas de vitesse initiale. Dans notre modélisation l'appellation réservoir "chaud" ou "froid" est un abus de langage, puisqu'aucun phénomène thermique n'est modélisé directement.

A l'autre extrémité de la conduite, on crée un réservoir froid, équivalent au bain d'hélium refroidi ou de la source froide utilisée. Afin de diminuer localement la pression partielle de l'espèce N et d'augmenter la pression partielle de l'espèce S, on applique une loi d'échange de populations contraire

$$f_\alpha^n(\mathbf{x}) \to f_\alpha^n(\mathbf{x}) - \delta_\alpha^n \tag{2.2.37}$$

$$f_\alpha^s(\mathbf{x}) \to f_\alpha^s(\mathbf{x}) + \delta_\alpha^n \tag{2.2.38}$$

avec le taux de conversion γ_f tel que $\delta_\alpha^n = \gamma_f f_\alpha^n(\mathbf{x}) > 0$.

Ces deux règles d'échange crées naturellement des différences de pression partielles opposées entre les deux réservoirs pour chaque composante, et il convient maintenant de se demander comment coupler les règles d'échange dans les deux thermostats afin de satisfaire la condition de contre-courant ?

Dans chaque thermostat, le nombre de particules total est conservé par les règles d'échange. Par ailleurs, on désire conserver le nombre total de particules pour chaque espèce pour établir un équilibre mécanique entre les deux flux de masse opposés de la composante normale et de la composante superfluide.
Cette contrainte fixe le taux de conversion γ_f. En effet, si on note $\Delta M = \sum_{\mathbf{x}\in\text{thc}} \sum_\alpha \delta_\alpha^s = \sum_{\mathbf{x}\in\text{thc}} \sum_\alpha \gamma_e f_\alpha^s$ le nombre de particules de S converties en N dans tout le thermostat chaud (abrégé par "thc") ce nombre de particule est perdu pour S et gagné pour N. On souhaite donc faire le contraire dans le thermostat froid (abrégé par "thf") par l'intermédiaire des populations. Cette fois-ci le nombre de particules ajoutées au superfluide, ΔW, s'écrit d'après notre loi d'échange $\Delta W = \sum_{\mathbf{x}\in\text{thf}} \sum_\alpha \delta_\alpha^n = \sum_{\mathbf{x}\in\text{thf}} \sum_\alpha \gamma_f f_\alpha^n(\mathbf{x})$. On impose $\Delta M = \Delta W$ d'où la valeur de γ_f pour tout le thermostat froid

$$\gamma_f = \frac{\gamma_e \sum_{\mathbf{x}\in\text{thc}} \sum_\alpha f_\alpha^s(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x}\in\text{thf}} \sum_\alpha f_\alpha^n(\mathbf{x})} \tag{2.2.39}$$

Au démarrage, les distributions initiales de particules sont fixées par $f^{n,s}(\mathbf{x}, t = 0) = \omega_\alpha \rho_{n,s}$ uniformément dans tout le domaine ; les vitesses macroscopiques des deux composantes sont nulles. Cette condition initiale permet d'activer naturellement le processus d'échange dans les thermostats. Un gradient de pression négatif pour l'espèce N et positif pour l'espèce S se met alors en place progressivement (comme illustré sur la figure 2.5) tout en conservant le nombre de particules et le rapport des densités des deux espèces. L'idée d'une association entre particule et quantum de pression permet d'interpréter la condition initiale comme un "chargement en pression" de chacune des composantes de l'hélium II en proportion de sa masse volumique. Notre mécanisme de chauffage dépend ainsi de deux paramètres $(\gamma_e; \rho_s/\rho_n)$. Le coefficient γ_f n'est pas fixé : sa valeur est calculée à chaque pas de temps selon l'équation (2.2.39) afin de conserver le nombre de particules de chaque composante et d'éviter ainsi une dérive en température de l'écoulement. Le choix des directions α selon lesquelles on applique les règles d'échange n'est pour l'instant pas fixé. Par simplicité nous avons choisi une seule direction dans chaque thermostat : la direction $\alpha = 3$ dans le thermostat chaud et $\alpha = 1$ dans le thermostat froid.

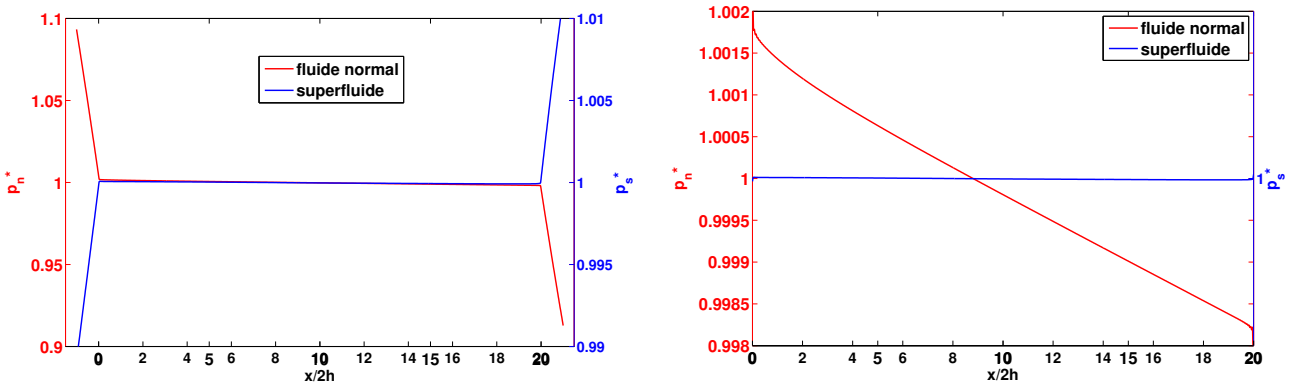


FIGURE 2.5: Profils de pression partielle normalisée (moyenné sur la section) établis à l'équilibre sur la longueur de la conduite, thermostats chaud et froid inclus (sur la figure de gauche) à 1,5 K, $Re = 200$ (sans couplage entre les deux composantes).

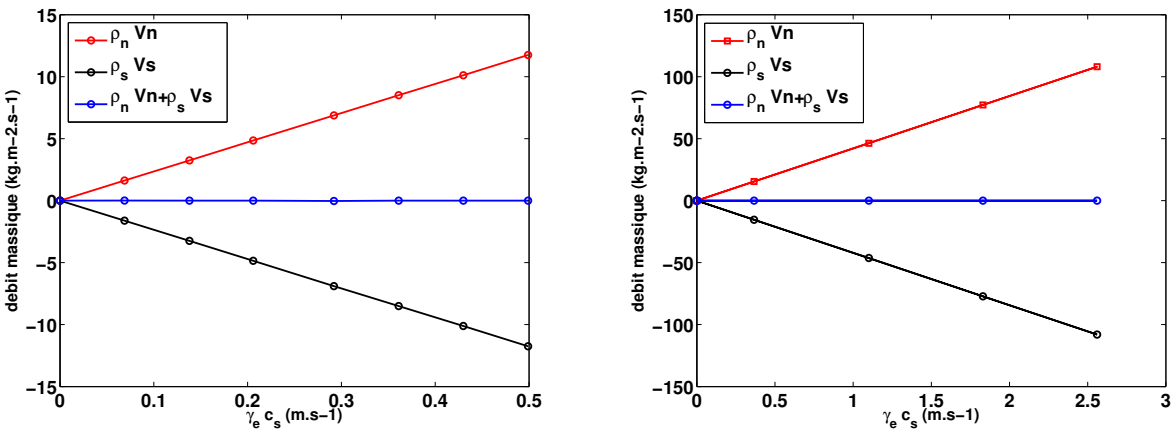


FIGURE 2.6: Débit massique au centre de la conduite pour le fluide normal et le superfluide, en fonction du paramètre de chauffage γ_e à 1,5 K ($\rho_s/\rho_n = 8,1$) et 1,96 K ($\rho_s/\rho_n = 1,02$). Les nombres de Reynolds correspondants à ces débits massiques sont représentés sur la figure 2.7. Compte tenu de notre définition de γ_e, il est judicieux de plutôt considérer $\gamma_e c_s$ pour caractériser le chauffage et obtenir une variation des débits massiques indépendante de la résolution de la simulation.

Pour illustrer la validation du mécanisme de mise en mouvement des deux composantes de l'hélium II, on représente sur la figure 2.6 le débit massique des deux fluides dans la conduite obtenu pour deux simulations effectuées à 1,5 K et 1,96 K : en rouge le débit massique associé au fluide normal, en bleu celui associé à la composante superfluide, et enfin en noir la somme des deux débits en fonction du paramètre de chauffage γ_e. On vérifie bien la mise en mouvement des deux fluides avec des flux de masses opposés et la condition de contre-courant : $\rho_n V_n + \rho_s V_s = 0$. L'erreur relative $(\rho_n V_n + \rho_s V_s)/\rho_n V_n$ est inférieure à 0,1%. Par ailleurs les débits massiques évoluent linéairement avec $\gamma_e c_s$. Précisons également que les mêmes résultats sont obtenus quand le couplage par friction mutuel est activé ou désactivé, ce qui indique que nos conditions de forçage respectent l'équilibre des flux de masse indépendamment de la force de friction mutuelle. Nous avons rappelé dans l'introduction, que la vitesse moyenne du fluide normal, V_n, est reliée au flux de chaleur W par la relation (1.5.1) : $V_n = W/\rho s T$. L'analogie entre le flux de chaleur apporté dans l'expérience de contre-courant et le coefficient d'échange γ_e est directe. Notre modélisation permet de reproduire le forçage induit par un chauffage W.

2.2.6 Le couplage HVBK

Comme nous le montrons en annexe (section 6.2.1) l'implémentation d'une force extérieure au schéma original de la méthode Boltzmann sur réseau est une opération délicate. Grâce au développement de Chapman-Enskog (développement multi-échelles) on montre que l'ajout d'une force au niveau mésoscopique peut engendrer des déviations macroscopiques aux équations de Navier-Stokes forcées si certaines précautions ne sont pas prises.

On rappelle que l'impulsion d'un fluide, dans la direction i, est obtenue en calculant le premier moment des vitesses élémentaires $c_{\alpha i}$: $\sum_\alpha f_\alpha c_{\alpha i} = \rho v_i$. Outre la connaissance des moments de la force ajoutée, nous montrerons qu'il faut effectuer une correction proportionnelle à la force sur l'impulsion du fluide :

$$\rho v_i = \sum_\alpha f_\alpha c_{\alpha i} + \frac{\Delta_t}{2} F_i \tag{2.2.40}$$

Dans notre cas, la force extérieure au schéma est la force HVBK qui dépend de la vitesse de chaque composante et des dérivées spatiales de la vitesse superfluide (à travers son rotationnel). Pour calculer

la vitesse macroscopique de chaque composante, nécessaire à l'évaluation de la fonction de distribution d'équilibre dans le terme de collision, il faut ainsi résoudre le système

$$\rho_n v_{n,i} = \sum_\alpha f_\alpha^n c_{\alpha i} + \frac{\Delta_t}{2} F_{ns,i} \tag{2.2.41}$$

$$\rho_s v_{s,i} = \sum_\alpha f_\alpha^s c_{\alpha i} - \frac{\Delta_t}{2} F_{ns,i} \tag{2.2.42}$$

$$\text{avec } F_{ns,i}(\mathbf{v_n}, \mathbf{v_s}, \omega_s)$$

Les équations (2.2.41) et (2.2.42) sont des équations implicites en ($\mathbf{v_n}$,$\mathbf{v_s}$) car la force dépend de la vitesse de chaque composante et de la dérivée de la vitesse du superfluide. Pour résoudre cette équation, nous avons utilisé un schéma itératif original de type prédiction-correction.

Dans le cadre de la friction mutuelle $\mathbf{F_{ns}}$ l'algorithme se décompose en deux étapes :

La prédiction de la vorticité ω_s^* par extrapolation de la vorticité superfluide aux deux pas de temps précédents : $\omega_s^*(t) = 2\omega_s(t - \Delta_t) - \omega_s(t - 2\Delta_t)$.
On en déduit un système linéaire de dimension 4 (en 2D) et 6 (en 3D)

$$\sum_\alpha f_\alpha^n c_{\alpha i} = \rho_n v_{n,i} - \frac{\Delta_t}{2} F_{ns,i}(\mathbf{v_n}, \mathbf{v_s}, \omega_s^*)$$

$$\sum_\alpha f_\alpha^s c_{\alpha i} = \rho_s v_{s,i} + \frac{\Delta_t}{2} F_{ns,i}(\mathbf{v_n}, \mathbf{v_s}, \omega_s^*) \tag{2.2.43}$$

dans lequel on cherche le couple $\mathbf{v_n}, \mathbf{v_s}$ solution en connaissant les quantités $\sum_\alpha f_\alpha^n c_{\alpha i}$ et $\sum_\alpha f_\alpha^s c_{\alpha i}$. On peut résoudre explicitement ce système pour obtenir ($\mathbf{v_n}$,$\mathbf{v_s}$). La connaissance $\mathbf{v_s}$ de permet enfin d'actualiser la valeur de la vorticité superfluide ω_s (par une méthode de différences finies).

La correction qui consiste à résoudre une nouvelle fois le système (2.2.43) en utilisant la dernière valeur trouvée pour ω_s et corriger $\mathbf{v_n}, \mathbf{v_s}$.

On peut a priori réitérer cette procédure en utilisant la vorticité superfluide prédite par le champ de vitesse superfluide qui vient d'être calculé. Cependant, nous avons constaté qu'effectuer plusieurs boucles ne modifiait pas de manière notable la solution. Nous nous sommes donc limités à deux itérations sans chercher à mieux approcher la solution du système (2.2.43). Mentionnons que la résolution "directe" de ce système conduit à inverser une matrice 2x2 en deux dimensions et 3x3 en trois dimensions, en mettant à profit la relation

$$\mathbf{u_s} = \frac{\sum_\alpha f_\alpha^n \mathbf{c}_\alpha + \sum_\alpha f_\alpha^s \mathbf{c}_\alpha}{\rho_s} - \frac{\rho_n}{\rho_s} \mathbf{u_n} \tag{2.2.44}$$

Cette relation permet d'écrire le système à résoudre uniquement en fonction de $\mathbf{u_n}$ et de la somme des moments. Une fois la vitesse du fluide normal déterminée par résolution du système, on détermine simplement la vitesse de la composante superfluide. Ceci est possible parce que la force de friction mutuelle est une force interne au système des deux fluides.

Le calcul de la vitesse macroscopique représente l'étape la plus couteuse en temps de calcul de notre schéma.

Pour être cohérent avec le schéma numérique d'ordre 2 sur l'ensemble des noeuds du domaine, les dérivées spatiales de la vitesse superfluide nécessaires à l'estimation de la vorticité superfluide sont calculées par différences finies d'ordre 2 centrées dans le volume et décentrées près des parois.

2.3 Le lien avec l'approche cinétique d'un mélange binaire

Dans de nombreux cas concrets, comme la dispersion d'un polluant, la combustion d'un mélange, certains processus chimiques, etc., plusieurs espèces sont mises en jeux. Il est difficile de simuler par des modèles continus ces mélanges, à cause de la géométrie ou bien d'un changement de phase. L'intérêt que suscite la méthode Boltzmann sur réseau pour ces mélanges de fluides est grandissant.

Il est admis que la méthode Boltzmann sur réseau est profondément connectée à la théorie cinétique des gaz, via l'équation de Boltzmann, et qu'elle n'est plus considérée simplement comme une évolution des algorithmes de gaz sur réseau (He et Luo (1997b)) ; (He et Luo (1997c)) ; (Shan et He (1998)). En 2002, Luo et Girimaji (2002, 2003) proposent un modèle Boltzmann sur réseau pour un mélange de deux fluides. L'originalité et la force de ce modèle est qu'il émerge à l'échelle microscopique grâce à la théorie cinétique et l'analyse faite par Sirovich (1962) des modélisations possibles des mélanges de gaz.

L'idée de base consiste à écrire une équation de Boltzmann donnant l'évolution de la fonction de distribution représentative de chacune des espèces considérées f^σ avec $\sigma = 1, 2$. Sirovich propose de décomposer l'opérateur de collision Q en deux termes. Un terme de collision de l'espèce avec elle-même, $Q^{\sigma\sigma}$, et un second terme d'interaction d'une espèce avec l'autre, $Q^{\sigma\upsilon}, (\sigma\upsilon = 1, 2)$. Ce qui aboutit aux équations formelles suivantes

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + \xi.\nabla f^1 = Q^{11} + Q^{12} \tag{2.3.1}$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial t} + \xi.\nabla f^2 = Q^{22} + Q^{21} \tag{2.3.2}$$

On peut comprendre intuitivement pourquoi une telle simplification est possible. Il faut s'intéresser aux différents processus que le système, ici composé de deux fluides, peut mettre en oeuvre pour atteindre son équilibre thermodynamique. L'approche de l'équilibre peut se séparer en deux étapes. Dans un premier temps, chaque espèce s'équilibre avec elle même, de telle façon que sa fonction de distribution approche une distribution locale de Maxwell. Ce processus d'équilibre individuel est aussi appelé Maxwellisation. Dans un second temps, c'est le système entier qui cherche son équilibre, phénomène décrit par le terme d'interaction entre les deux espèces, si bien que la différence de vitesse ou de température entre les deux fluides peut devenir nulle. A travers ces deux processus, il existe au moins deux échelles caractéristiques de temps. Pour mieux appréhender l'existence de ces processus, on peut imaginer deux espèces, de masses volumiques très différentes, la première est très faible par rapport à la seconde, mais la masse totale des deux espèces est identique, cela implique que l'espèce la moins dense possède beaucoup plus de particules que la seconde. La Maxwellisation de l'espèce légère sera essentiellement due aux collisions avec elle même, alors que pour l'espèce la plus dense, c'est le terme d'interaction entre les espèces qui permet d'atteindre l'équilibre thermodynamique.

Chacun des fluides est caractérisé par une densité ρ_σ ou ρ_υ et une vitesse macroscopique $\mathbf{u}^\sigma$ ou $\mathbf{u}^\upsilon$. Le mélange des deux fluides est caractérisé par la densité totale $\rho = \rho_\sigma + \rho_\upsilon$ et la vitesse barycentrique $\rho\mathbf{u}^{\mathbf{mix}} = \rho_\sigma \mathbf{u}^\sigma + \rho_\upsilon \mathbf{u}^\upsilon$. On linéarise les termes d'interaction $Q^{\sigma\sigma}$ et $Q^{\sigma\upsilon}$ grâce à l'approximation BGK, qui introduit donc deux temps de relaxation λ_σ et $\lambda_{\sigma\upsilon}$.

$$J^{\sigma\sigma} = -\frac{1}{\lambda_\sigma}[f^\sigma - f^{\sigma(0)}] \tag{2.3.3}$$

$$J^{\sigma\upsilon} = -\frac{1}{\lambda_{\sigma\zeta}}[f^\sigma - f^{\sigma\upsilon(0)}] \tag{2.3.4}$$

où $f^{\sigma(0)}$ et $f^{\sigma\upsilon(0)}$ sont des Maxwelliennes caractérisées par la vitesse macroscopique de l'espèce $\mathbf{u}^\sigma$ et la vitesse du mélange $\mathbf{u}^{\mathbf{mix}}$, respectivement. Après avoir développée la Maxwellienne $f^{\sigma\upsilon(0)}$ et imposée la condition isotherme pour chacun des fluides, le terme d'interaction entre les deux fluides est donné par

$$J_\alpha^{\sigma\upsilon} = -\frac{1}{\tau_D}\frac{\rho_\upsilon}{\rho}\frac{f_\alpha^{\sigma(eq)}}{c_s^2}(\mathbf{c}_\alpha - \mathbf{u}^{\mathbf{mix}}) \cdot (\mathbf{u}^\sigma - \mathbf{u}^\upsilon) \tag{2.3.5}$$

avec

$$f_\alpha^{\sigma(eq)} = \omega_\alpha \rho_\sigma \left[1 + \frac{(c_\alpha - \mathbf{u}^{\mathbf{mix}}) \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{mix}}}{c_s^2} + \frac{(c_\alpha \cdot \mathbf{u}^{\mathbf{mix}})^2}{2c_s^4}\right] \tag{2.3.6}$$

Ce terme d'interaction $J_\alpha^{\sigma\upsilon}$ est utilisé dans l'algorithme de la méthode de la façon suivante

$$f_\alpha^\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta_t, t + \Delta_t) - f_\alpha^\sigma(\mathbf{x}, t) = J_\alpha^{\sigma\sigma} + J_\alpha^{\sigma\upsilon} \tag{2.3.7}$$

Les équations de Navier-Stokes résultantes de ce mélange binaire sont

$$\rho_\sigma \frac{\partial \mathbf{u}^\sigma}{\partial t} + \rho_\sigma \mathbf{u}^\sigma . \nabla \mathbf{u}^\sigma = -\nabla p_\sigma + \rho_\sigma \nu^\sigma \nabla^2 \mathbf{u}^\sigma - \frac{\rho_\sigma \rho_\upsilon}{\tau_D \rho}(\mathbf{u}^\sigma - \mathbf{u}^\upsilon) \tag{2.3.8}$$

où p_σ est la pression partielle de l'espèce σ. L'indice υ désigne l'autre espèce.

Pour comprendre les conséquences hydrodynamiques de l'ajout d'un terme comme $J_\alpha^{\sigma\upsilon}$ dans l'opérateur de collision, on peut se placer dans un cadre plus général où tout terme ajouté dans l'opérateur de collision peut être considéré comme une force extérieure. Au niveau macroscopique cela engendre un terme de friction comparable à celui de la force de type HVBK quand on pose $B' = 0$ et que l'on identifie formellement : $\tau_D = 2/(B|\omega_s|)$. Il convient de noter que le coefficient τ_D est ici constant.

Il est intéressant de comparer l'élaboration du schéma Boltzmann sur réseau pour le mélange binaire à celui de notre modélisation. Pour le premier on raisonne avec la théorie cinétique pour établir un schéma de Boltzmann sur réseau à l'échelle mésoscopique ; on vérifie a posteriori que ce schéma redonne les équations macroscopiques d'un modèle à deux fluides avec couplage par friction. Dans notre modélisation, nous sommes partis a priori des équations du modèle à deux fluides avec couplage par friction à l'échelle macroscopique, et l'on a construit le schéma Boltzmann sur réseau correspondant à l'échelle mésoscopique. Notre approche est systématique et précise à l'ordre 2 par construction. Une analyse technique du terme d'interaction $J_\alpha^{\sigma\upsilon}$ (présentée en annexe) permet de mettre en évidence que le schéma du mélange binaire proposé par Luo et Girimaji (2002) n'est que d'ordre 1.

2.4 Détermination des paramètres de la simulation

L'adimensionnement est un point important de la modélisation qui permet d'optimiser le choix des paramètres de la simulation pour minimiser le temps de calcul et éviter les régimes instables de l'algorithme. Dans un premier temps nous présentons le principe d'adimensionnement, puis l'adimensionnement spécifique à notre code de simulation des écoulements de contre-courant. Pour que ce dernier soit possible, il fallait pouvoir prédire la vitesse moyenne de contre-courant résultante de nos paramètres de chauffage qui sont γ_e et ρ_s/ρ_n.

Nous connaissons un certain nombre de paramètres physiques qui caractérisent notre fluide, la géométrie de l'écoulement, les forces extérieures, etc. Nous pouvons déterminer des grandeurs sans dimension comme le nombre de Reynolds, et enfin nous pouvons dans certaines configurations simples prédire le champ de vitesse analytiquement. Nous avons donc toutes les clés pour déterminer nos paramètres de simulation qui sont : la résolution spatiale et temporelle, la vitesse de propagation sur le réseau, le temps de relaxation. Assez naturellement, Δ_x et Δ_t sont utilisés pour adimensionner la longueur et le temps. La difficulté réside alors dans le choix de ces derniers ou plus particulièrement de leur rapport $\Delta_x/\Delta_t = \sqrt{3}c_s$.

Soit Φ une grandeur physique, on écrit

$$\Phi = \hat{\Phi}_{LB} C_\Phi \tag{2.4.1}$$

où $\hat{\Phi}_{LB}$ est la grandeur physique adimensionnée et C_Φ le coefficient d'adimensionnement. Dans cette partie les grandeurs surmontées d'un chapeau sont les grandeurs adimensionnées.

Toute quantité physique Φ possède une dimension qui peut s'exprimer à l'aide d'une masse, d'une distance et d'un temps. Par analyse dimensionnelle on trouve la forme du coefficient C_Φ en fonction de C_ρ, C_L, C_t pour adimensionner cette quantité. Dans notre étude la masse n'est pas adimensionnée : $C_\rho = 1, C_L = \Delta_x, C_t = \Delta_t$.
Une méthode directe pour ne pas dépasser le nombre de Mach souhaité, par exemple $M_{max} = 0,1$, consiste à calculer la vitesse maximale (quand celle-ci est accessible pour le problème posé) adimensionnée

$$\hat{v}_{max} = \frac{v_{max}}{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta_t}\right)} = \frac{v_{max}}{\sqrt{3}c_s} = \frac{M_{max}}{\sqrt{3}} \tag{2.4.2}$$

en dessous de laquelle il faut rester. On en déduit la valeur de $c_s = M_{max}/v_{max}$.

La résolution spatiale du réseau Δ_x est choisie de sorte à représenter correctement la solution spatialement. Si Δ_x est fixée alors Δ_t est imposée par $\Delta_t = \Delta_x/\sqrt{3}c_s$. Dans la pratique on choisira donc Δ_x le plus grand possible pour maximiser le pas de temps d'intégration Δ_t.

Le mécanisme de contre-courant est engendré par la méthode d'échange de populations, pilotée par le facteur de conversion γ_e. Comme nous l'avons vu, on peut estimer à partir de γ_e et du rapport des densités des deux fluides, la vitesse de contre-courant asymptotique. C'est physiquement cette vitesse qui détermine le régime de l'écoulement. Dans nos simulations, après avoir fixé une résolution, nous choisissons une vitesse de contre-courant physique, qui fixe alors la valeur de c_s permettant de respecter la contrainte sur le nombre de Mach atteint dans l'écoulement.

A partir de la vitesse de contre-courant physique que nous souhaitons atteindre, et la condition de contre-courant, nous pouvons évaluer la vitesse moyenne physique du fluide normal. En contre-courant, le fluide normal se déplace (en moyenne) plus vite que le superfluide, tant que la proportion de fluide normal est inférieure à la proportion de superfluide, c'est-à-dire pour des températures inférieures à 1,96 K, nous resterons dans ce cas de figure dans la thèse. Nous ferons donc l'hypothèse que c'est la vitesse du fluide normal qui fixe la valeur de c_s.

Il est maintenant intéressant de pouvoir prédire la vitesse de contre-courant, à partir des paramètres du chauffage $(\gamma_e; \rho_s/\rho_n)$. Au premier pas de temps, la quantité δ_α^s dans le réservoir chaud est donnée par $\delta_\alpha^s = \gamma_e \rho_s \omega_\alpha$. L'impulsion initiale qui en résulte pour le fluide normal est donc en tout point du thermostat chaud

$$\rho_n v_{n,i} = \sum_\alpha \delta_\alpha^s c_{\alpha i} = \sum_\alpha \gamma_e f_\alpha^s c_{\alpha i} = \gamma_e \rho_s \sum_\alpha \omega_\alpha c_{\alpha i} \tag{2.4.3}$$

où $c_{\alpha i}$ représente la vitesse de propagation des particules dans la direction α. L'indice i représente les composantes spatiales par exemple (x, y) en deux dimensions.

Cette impulsion initiale est déterminée par le coefficient d'échange γ_e et la distribution initiale des particules $\{f_\alpha^s\}$. Dans la suite, nous allons considérer (sans pouvoir le justifier) que cette expression reste valable pour déterminer la vitesse asymptotique du fluide normal. Ainsi,

$$V_{n,i} \backsimeq \gamma_e \frac{\rho_s}{\rho_n} \sum_\alpha \omega_\alpha c_{\alpha i} \tag{2.4.4}$$

De la même manière on obtient pour la vitesse du superfluide

$$V_{s,i} \backsimeq -\sum_\alpha \delta_\alpha^s c_{\alpha i} = -\gamma_e \sum_\alpha \omega_\alpha c_{\alpha i} \tag{2.4.5}$$

Au final on prédit la vitesse de contre-courant

$$V_{ns,i} \equiv V_{n,i} - V_{s,i} \backsimeq \gamma_e (\frac{\rho_s}{\rho_n} + 1) \sum_\alpha \omega_\alpha c_{\alpha i} \tag{2.4.6}$$

Sur la figure 2.7 on représente le nombre de Reynolds de contre-courant en fonction de $\gamma_e c_s$, ainsi que le nombre de Reynolds prédit par l'équation (2.4.4), noté Re_{asymp}. L'erreur relative entre la prédiction et le nombre de Reynolds mesuré est constante sur la plage étudiée, inférieure à 2%.

La valeur estimée de la vitesse moyenne du fluide normal est

$$V_{n,\ i} = \gamma_e \frac{\rho_s}{\rho_n} \sum_\alpha c_{\alpha i} \omega_\alpha \tag{2.4.7}$$

On peut la relier à la vitesse maximale si l'on considère que l'écoulement est de type Poiseuille : $V_{max} = \frac{3}{2} V_{moy}$ pour un écoulement entre deux plans. La vitesse de propagation c_s est ainsi donnée en fonction du chauffage par

$$c_s = \frac{2}{3} \frac{M_{max}}{\gamma_e \frac{\rho_s}{\rho_n} \sum_\alpha c_{\alpha i} \omega_\alpha} \tag{2.4.8}$$

Tous les autres paramètres de la simulation se déduisent ensuite.

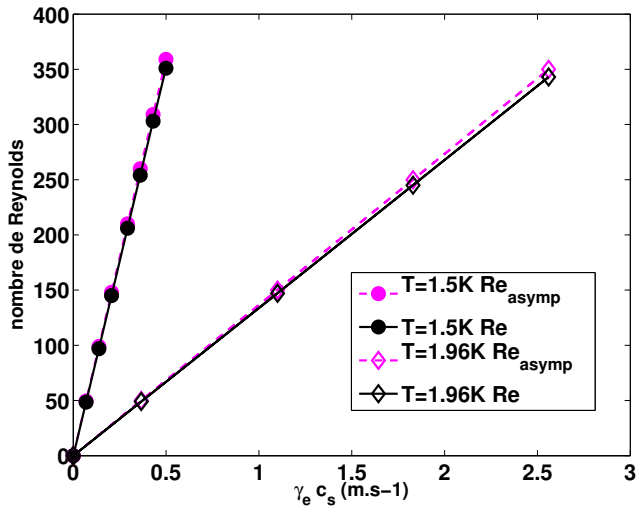


FIGURE 2.7: Comparaison entre la prédiction du nombre de Reynolds, Re_{asymp}, donnée par l'équation (2.4.4), et le nombre de Reynolds mesuré au centre de la conduite pour $\gamma_e = 0,968$ et ρ_s/ρ_n=8,1 à T=1,5 K et $\gamma_e = 0,968$ et ρ_s/ρ_n=1,02 à T=1,96 K.

2.5 La validation du code

2.5.1 La conservation des grandeurs physiques élémentaires

Notre règle d'échange de populations dans les thermostats (réservoirs) conserve l'impulsion, localement, puisqu'une fraction d'impulsion est retirée à une composante pour être rajoutée au même point à l'autre composante. L'algorithme mis en place pour déterminer le coefficient d'échange dans le réservoir froid, permet également de conserver le nombre de particules de chacun des fluides à la précision machine. Les conditions aux parois pour le fluide normal, non glissement, et pour le superfluide, glissement total, conservent elles aussi le nombre de particules. En utilisant le modèle BGK standard la masse de chaque composante est conservée par construction. Avec le modèle incompressible, c'est la pression de chaque espèce qui est conservée. En associant un quantum de pression à chaque particule d'une espèce, on parlera plus généralement de nombre de particules conservé.

2.5.2 Le gradient de pression et les profils de vitesse

Grâce à notre règle d'échange et l'algorithme établi pour conserver la masse des deux espèces, nous avons vérifié que les flux de masses du fluide normal et du superfluide respectent la condition de contre-courant $\rho_n V_n + \rho_s V_s = 0$, avec une erreur relative inférieure à 0,1%, voir la figure 2.6. En désactivant le couplage entre les deux fluides, l'écoulement, laminaire, du fluide normal est équivalent à un écoulement de Poiseuille (à faible nombre de Reynolds) puisque ce dernier est un fluide visqueux classique. Ce type d'écoulement est décrit analytiquement, on peut déterminer le profil de vitesse sur une section, en fonction de la différence de pression entre l'entrée et la sortie du canal. En deux dimensions, pour un écoulement entre deux plaques dans une conduite de longueur L le profil de vitesse analytique entre $y = 0$ et $y = 2h$ est donné par

$$v_{n,th}(y) = 4v_{max}\left(\frac{y}{2h} - \frac{y^2}{(2h)^2}\right) \text{ avec } v_{max} = -\frac{(2h)^2\Delta p}{8\nu_n\rho_n L} \tag{2.5.1}$$

Une des premières vérifications du code, sans couplage, fut de comparer le profil de vitesse au centre de la conduite en $x = L/2$ avec le profil analytique. L'état stationnaire est atteint après un

temps caractéristique lié à la diffusion qui est défini à partir du rayon de la conduite h, et de la viscosité cinématique du fluide normal

$$t_D = \frac{h^2}{\nu_n} \tag{2.5.2}$$

Nous présentons ici les résultats d'une simulation type à nombre de Reynolds modéré, $Re = 150$, et sans couplage. Cette simulation sera étudiée en détail dans le chapitre 3. A ce nombre de Reynolds, la longueur d'entrée hydrodynamique adimensionnée par le diamètre de la conduite est égale à 7,5 environ. Le rapport d'aspect de la conduite, L/D, environ égal à 16,9 a été choisi pour obtenir un écoulement pleinement développé sur une dizaine de diamètres. La longueur des réservoirs chaud et froid, est fixée arbitrairement égale à trois fois le diamètre environ. La température moyenne à laquelle la simulation a été faite est égale à 1,5 K. A cette température, la proportion de superfluide est environ 8,1 plus importante que la proportion de fluide normal. La viscosité cinématique artificielle attribuée à la composante superfluide est 25 fois plus faible que la viscosité du fluide normal. Compte tenu de la condition de glissement en paroi, on attend un profil de vitesse superfluide plat. Les paramètres géométriques, physiques, et de la méthode Boltzmann sont regroupés dans les tableaux 3.1, 3.2, 3.3 respectivement. Les champs de vitesses et de vorticité des deux fluides seront présentés dans la section 3.3.

Nous avons calculé l'erreur relative avec la norme L^2, équation (2.5.3) entre le profil de vitesse du fluide normal moyenné temporellement issu de la simulation en $x = L/2$, noté v_n, et le profil analytique reconstruit à partir de la mesure du gradient de pression total moyenné temporellement $v_{n,th}$. Nous obtenons $|\delta e| = 0,35\%$.

$$|\delta e|^2 = \frac{\sum_y |v_n(L/2, y) - v_{n,th}(y)|^2}{\sum_y |v_{n,th}(y)|^2} \tag{2.5.3}$$

En moyennant le profil de vitesse sur la section on peut aussi relier le débit à la perte de charge. A partir des paramètres physiques du fluide normal (densité, viscosité), qui sont spécifiés au début de la simulation, issus de la compilation bibliographique effectuée par Donnelly et Barenghi (1998), on peut déterminer le gradient de pression nécessaire pour atteindre le débit mesuré de fluide normal dans une géométrie donnée (ici entre deux plaques) :

$$\nabla p_{Poiseuille} = \frac{12\rho_n \nu_n v_n}{(2h)^2} \tag{2.5.4}$$

L'erreur relative sur la valeur de ce gradient de pression comparée à la prédiction théorique est de 0,13%. Rappelons que la résolution est de 59 noeuds sur le diamètre.

Sur la figure 2.8, nous avons représenté les profils de vitesse en $x = L/2$ utilisés ci-dessus pour valider la précision de la méthode. La notation * signifie qu'ils sont adimensionnés par la vitesse maximale du profil de Poiseuille théorique. Il est intéressant de remarquer que la condition de *Halfway Bounce Back* (HBB), dont nous avons parlé plus haut, est bien appliquée pour le fluide normal. Aux extrémités on remarque la vitesse v_n^* n'est pas nulle, puisqu'elle est située à une demi-maille de la paroi. De plus on constate que la condition de glissement pour le superfluide est appliquée et que le profil plat attendu est bien retrouvé. Les résultats obtenus sont en très bon accord avec la prédiction analytique.

2.5.3 Un cas test avec couplage HVBK simplifié

Il existe une autre façon de tester la robustesse de notre code, avec cette fois-ci un couplage effectif entre les deux fluides. Ce couplage n'est pas directement le couplage HVBK, à savoir une friction qui

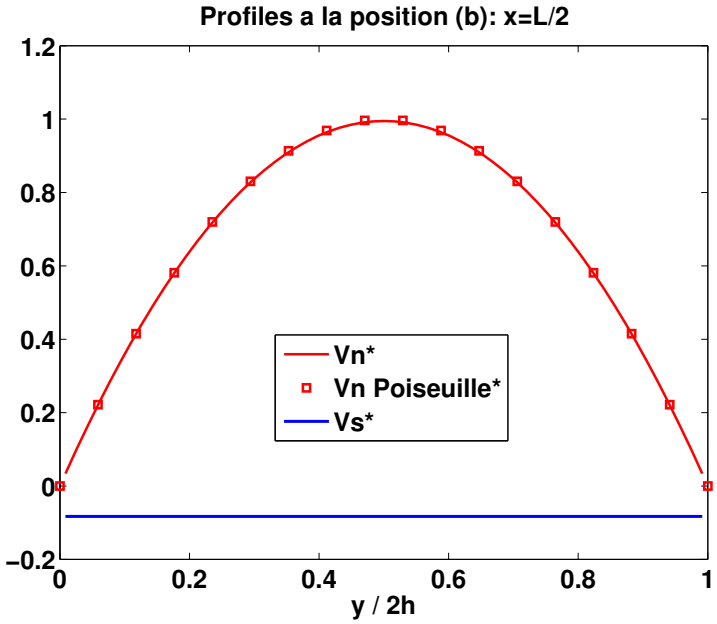


FIGURE 2.8: Comparaison entre les profils de vitesse du fluide normal mesuré et théorique prédit à la température de 1,5 K. Profil plat avec glissement à la paroi, observé pour le superfluide. La notation * signifie ici que les profils sont adimensionnés par la vitesse maximale du fluide normal. La hauteur de la conduite est représentée par 59 points.

fait intervenir la différence des vitesses entre les deux fluides et un coefficient donné par la valeur de la vorticité superfluide locale notée ω_s. Ici nous imposons un coefficient ω_s constant, de plus le coefficient B' de la force HVBK est fixé égal à zéro.

$$\mathbf{F_{ns,B}} = -\frac{B}{2}\frac{\rho_s\rho_n}{\rho}\omega_s(\mathbf{v_n} - \mathbf{v_s}) \tag{2.5.5}$$

Ceci nous permet de déterminer le profil analytique des champs de vitesse de la composante normale et de la composante superfluide pour les comparer avec nos résultats.

En sommant les équations dynamiques du fluide normal et du superfluide, la force de friction mutuelle s'élimine et l'on retrouve un profil de type Poiseuille (dans le cas laminaire) pour le fluide normal

$$v_{n,th}(y) = 4v_{max}\left(\frac{y}{2h} - \frac{y^2}{(2h)^2}\right) \text{ avec } v_{max} = -\frac{(2h)^2\Delta p}{8\nu_n\rho_n L} \tag{2.5.6}$$

Simplifions l'équation d'évolution du superfluide dans les équations HVBK, sous les hypothèses de stationnarité, d'invariance par translation selon x : $v_s(y)\mathbf{e_x}$ (dans le cas laminaire) :

$$-\frac{\nabla p_s}{\rho_s} + \frac{B}{2}\frac{\rho_n}{\rho}|\omega_s|(\mathbf{v_n} - \mathbf{v_s}) = 0 \tag{2.5.7}$$

On en déduit le profil analytique de la différence de vitesse entre la composante normale et la composante superfluide

$$v_{ns,th}(y) \equiv v_n(y) - v_s(y) = \frac{2\rho\nabla p_s}{\rho_n\rho_s B|\omega_s|} \tag{2.5.8}$$

Or le profil du fluide normal est de type parabolique et la différence de profils de vitesse entre les deux composantes est constante. On en déduit que le profil de la composante superfluide est aussi de type parabolique.

Nous avons mesuré avec une norme L^2, équation (2.5.9), à quelle précision notre code converge vers la solution analytique (2.5.8). Cette solution est établie sans tenir compte de la viscosité artificielle du superfluide, qui est cependant une contrainte de modélisation numérique. Nous avons lancé quatre simulations à 1,5 K avec couplage HVBK simplifié (ω_s constant), qui ne diffèrent que par le rapport des viscosités ν_s/ν_n. Dans nos simulations exécutées avec le couplage HVBK complet, l'ordre de grandeur de la vorticité superfluide en unités du réseau était de 10^{-3} à 10^{-2}. Pour cette raison nous avons choisi $\omega_s = 10^{-2}$ comme valeur caractéristique de ω_s.

$$|\delta e|^2 = \frac{\sum_y |v_n(L/2, y) - v_{ns,th}(y)|^2}{\sum_y |v_{ns,th}(y)|^2} \tag{2.5.9}$$

Le tableau 2.1 regroupe les résultats obtenus. Pour un rapport des viscosités ν_s/ν_n qui varie entre 40/100 et 1/100, l'erreur relative passe de 12% à moins de 1%. Comme attendue l'erreur relative diminue quand la viscosité artificielle du superfluide devient négligeable par rapport à la viscosité du fluide normal.

Influence de la viscosité artificielle pour un couplage HVBK simplifié $\omega_s = 10^{-2}$ (unités LBM)				
ν_s/ν_n	$\frac{40}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{1}{100}$
$\lvert\delta e\rvert(\%)$	$12,0$	$2,95$	$1,73$	$0,986$

TABLEAU 2.1: Calcul de l'erreur relative $|\delta e|^2$ (équation (2.5.9)) entre la différence de profils de vitesse $v_{ns} \equiv v_n - v_s$, et la solution analytique $v_{ns,th}$ établie à l'équation (2.5.8)

La figure 2.9 (à gauche) renseigne sur les profils de vitesse du fluide normal et de la composante superfluide séparément pour les trois rapports ν_s/ν_n les plus faibles. Elle permet d'interpréter l'erreur commise, qui est localisée à la paroi, par rapport à prédiction théorique. On constate que cette erreur est engendrée par le profil de vitesse de la composante superfluide qui subit une légère inflexion à la paroi, sur quelques noeuds au voisinage de la paroi. Nous interprétons ce comportement comme une "incompatibilité" entre la condition de glissement, pour laquelle il n'y a pas de transfert de quantité de mouvement dans la direction tangentielle à la paroi, et la viscosité artificielle qui engendre un transfert de quantité de mouvement tangentielle (cisaillement) : $\nu_s \frac{d\mathbf{v_s}}{dy}$. Le gradient de vitesse $\frac{d\mathbf{v_s}}{dy}$ tend donc naturellement à diminuer à l'approche de la paroi pour "raccorder" avec la condition de non transfert imposée par le glissement total (figure 2.9 (à droite)). Cette incompatibilité est mise en exergue par ce couplage HVBK simplifié pour lequel le profil superfluide est parabolique.

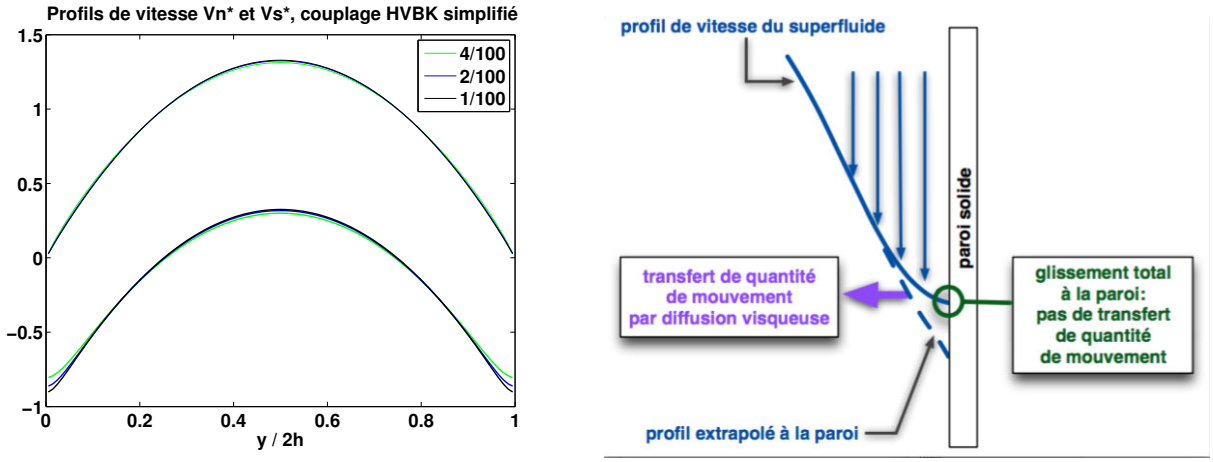


FIGURE 2.9: A gauche, les profils de vitesse du fluide normal (v_n^*) et de la composante superfluide (v_s^*) normalisés par $v_{ns,th}$, influence de la viscosité artificielle du superfluide localisée en proche paroi. A droite la schématisation de l'incompatibilité entre la viscosité artificielle et le glissement total à la paroi.

La figure 2.10 représente le profil de la différence de vitesse entre le fluide normal et la composante superfluide dans le cas du couplage HVBK simplifié avec $\omega_s = 10^{-2}$ (unités LBM). Tous les profils sont normalisés par la valeur théorique $v_{ns,th}$ afin de mettre en avant l'erreur commise à la paroi. Mis à part quand ν_s et ν_n sont du même ordre de grandeur, l'erreur commise reste essentiellement localisée à la paroi. On constate par ailleurs que lorsque le rapport des viscosités cinématiques ν_s/ν_n diminue le résultat numérique converge sur toute la hauteur de la conduite vers la solution analytique.

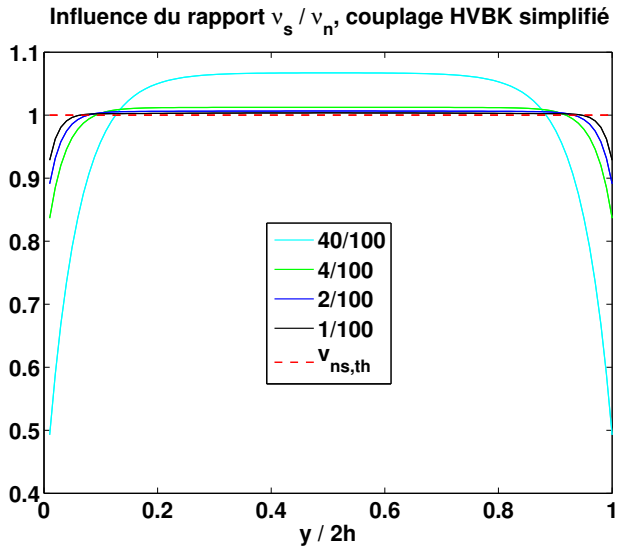


FIGURE 2.10: Profils de la différence de vitesses entre les deux composantes. Influence de la valeur relative de la viscosité artificielle du superfluide dans le cas d'un couplage HVBK simplifié, c'est-à-dire avec $\omega_s = constante$, sur le profil de v_{ns}.

On peut remarquer que quand le profil du superfluide est parabolique l'erreur causée par la viscosité artificielle du superfluide est maximale, parce que le gradient de vitesse est maximal à la paroi. Nous présentons donc ici les limites de la modélisation dans un cas particulièrement défavorable. L'erreur engendrée par la viscosité artificielle du superfluide est amplifiée, par rapport aux autres simulations présentées plus loin, qui sont établies avec le couplage HVBK complet, et où le profil du superfluide n'est jamais parabolique dans la conduite, mais plutôt plat.

Dans la suite de la thèse, nous avons fixé $\nu_s/\nu_n = 1/25$ dans le cadre de simulation avec couplage HVBK complet. Par ailleurs, nous vérifions systématiquement, en faisant décroitre la valeur du rapport ν_s/ν_n, que la solution numérique proposée reste consistante, et constitue a priori une bonne approximation de la solution dans la limite $\nu_s/\nu_n \to 0$.

Chapitre 3

Effets d'entrée en contre-courant

3.1 L'effet d'entrée classique **48**
3.2 L'effet d'entrée superfluide **49**
3.3 Les résultats d'une simulation de contre-courant typique **50**
3.3.1 Le cas d'un contre-courant sans couplage 50
3.3.2 Le cas d'un contre-courant avec couplage HVBK 51
3.4 L'analyse quantitative des résultats **55**
3.4.1 L'effet d'entrée chaude 55
3.4.2 L'effet d'entrée froide : un nouvel effet d'entrée 57
3.4.3 L'influence des paramètres liés à la modélisation numérique 59
3.5 Vers les plus hauts nombres de Reynolds **61**
3.5.1 L'influence de la température 64
3.6 Conclusion et mise en perspective avec les expériences **65**

Il est utile d'introduire dès à présent le diamètre hydraulique d'une conduite. En effet dans la définition du nombre de Reynolds, ou bien d'autres nombres sans dimension, intervient une distance caractéristique de la conduite. Pour des conduites circulaires, on choisit souvent le diamètre, ou le rayon. Pour des conduites de section carrée on choisit la longueur d'un coté. Mais pour des formes de sections plus générales, il est préférable d'utiliser le diamètre hydraulique D_h qui est défini par le rapport entre la surface de la section A_c et le périmètre mouillé P.

$$D_h = \frac{4A_c}{P} \tag{3.0.1}$$

Ce diamètre est construit de telle sorte qu'il se réduit au diamètre ordinaire pour les tubes de section circulaire. On rappelle que le nombre de Reynolds permet de comparer les effets inertiels aux effets visqueux. Il est établi que pour des conduites circulaires l'écoulement est laminaire tant que le $Re \leq 2300$ environ et complètement turbulent pour $Re > 4000$, entre ces deux valeurs il existe une zone de transition.

Dans toute la suite nous utiliserons comme définition du nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho_n V_n D_h}{\eta_n} \tag{3.0.2}$$

Il convient de noter qu'il s'agit du nombre de Reynolds d'un fluide classique obéissant aux équations de Navier-Stokes. Des formulations différentes du nombre de Reynolds ont été introduites au fil des années

pour caractériser les écoulements de contre-courant en conduite, sans qu'une définition particulière ne s'impose (Tough (1982)). Dans notre cas, nous avons adopté cette écriture pour pouvoir comparer facilement l'écoulement de la composante normale à celui d'un fluide classique.

3.1 L'effet d'entrée classique

L'entrée d'un fluide dans un canal est d'une manière générale un phénomène complexe. En effet, si on impose à un fluide visqueux une vitesse uniforme en entrée, à cause de la condition de non glissement sur les parois de la conduite, on force la couche de fluide la plus externe à adopter la vitesse de la paroi, donc à s'arrêter. Le profil de vitesse change avec la distance par rapport à l'entrée. Il se forme une couche limite résultant de la compétition entre effets inertiels et effets visqueux. Il existe une distance Le : la longueur d'entrée hydrodynamique, au delà de laquelle l'écoulement est dit pleinement développé, c'est-à-dire qu'il y a invariance par translation le long de la conduite. Dans le cas d'un écoulement laminaire, le profil devient parabolique dans la région pleinement développée du canal, caractéristique des écoulements (incompressibles) de Poiseuille. Ce profil parabolique est complètement déterminé par la condition de vitesse nulle à la paroi et la conservation du débit dans la conduite.

Dans la région proche de l'entrée, le gradient de vitesse se trouve confiné à la paroi. La viscosité du fluide a tendance à réduire ce gradient de vitesse en augmentant l'épaisseur de la couche limite, par diffusion. La vitesse du fluide étant nulle à la paroi, elle doit être maximale au centre de la conduite, pour conserver le débit. La région située entre les couches limites engendrées par les parois est irrotationnelle, parce que le profil de vitesse est plat et la vitesse radiale est donc essentiellement constante. L'épaisseur de la couche limite augmente dans la direction de l'écoulement, jusqu'à atteindre le centre de la conduite. La longueur située entre l'entrée de la conduite et le point au centre de la conduite où les couches limites se rejoignent est appelée : la longueur d'entrée hydrodynamique, notée ici Le (Figure 3.1). Il y a, dans la région d'entrée, compétition entre la diffusion de quantité de mouvement perpendiculaire à l'écoulement (e.g. sur un temps caractéristique $(D/2)^2/\nu$ pour une diffusion visqueuse) et l'avancement de l'écoulement. Dans le cas laminaire, le processus diffusif gagne ainsi le coeur de l'écoulement sur une longueur typique de $Le \propto V(D/2)^2/\nu$.

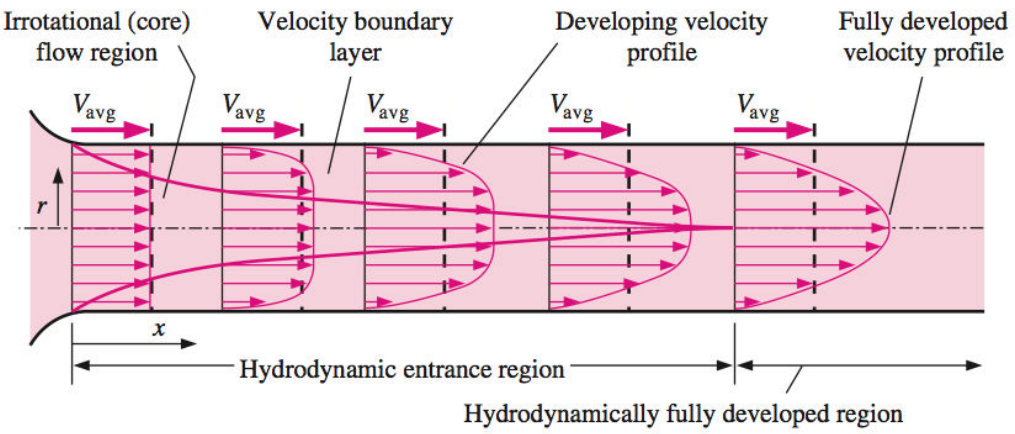


FIGURE 3.1: Phénomène d'entrée dans une conduite, figure issue de *Fluid mechanics*, par Yunus et Cimbala (2006)

La longueur d'entrée est souvent définie quantitativement comme la distance de l'entrée au point où le cisaillement à la paroi atteint, à 2% près, sa valeur asymptotique dans la région pleinement

développée (Yunus et Cimbala (2006)). Ou bien encore comme la distance au point où la vitesse au centre atteint 99% de sa valeur asymptotique (Schetz et Fuhs (1999)) ; (Mehrotra et Patience (1990)). On peut évaluer ces longueurs voisines en fonction du nombre de Reynolds. Il existe deux relations empiriques pour cela, à utiliser en fonction du régime dynamique de l'écoulement. Si l'écoulement est laminaire (dans une conduite circulaire) alors la longueur d'entrée Le est correctement approximée (Shah et Bhatti (1987)) ; (Kays (1993)) ; (Durst, Ray, Ünsal, et Bayoumi (2005)) par l'équation (3.1.1), qui est conforme à l'estimation présentée précédemment.

$$Le \backsimeq 0.05ReD \tag{3.1.1}$$

Au delà de ce régime laminaire, une nouvelle formule empirique doit être utilisée pour estimer la longueur d'entrée (Shah et Bhatti (1987)) ; (Kays (1993)) :

$$Le \propto Re^{1/4}D \tag{3.1.2}$$

Cette fois-ci la longueur n'augmente plus linéairement avec le nombre de Reynolds, mais en puissance un quart ou un sixième selon les références. Ceci traduit le fait que la longueur d'entrée est plus courte quand le fluide est turbulent, parce que le mélange est plus intense.

Dans la région d'entrée, le fluide accélère ou décélère selon la distance à la paroi pour atteindre un équilibre entre son inertie, les forces de pression et les forces visqueuses. Dans la zone pleinement développée, il n'y a plus d'effet inertiel, la friction à la paroi compense exactement les forces de pression. En appliquant un bilan de force à un disque de rayon R et d'épaisseur dx, dans la région pleinement développée, on peut relier la friction à la paroi notée w, $\tau_w = -\eta \frac{\partial u}{\partial r}|_w$ au gradient de pression $\frac{dP}{dx}$.

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} \tag{3.1.3}$$

Dans la zone d'entrée, la couche limite attachée à la paroi diffuse progressivement vers le centre de la conduite. Le gradient de vitesse à la paroi, et par conséquent la friction à la paroi, diminuent ainsi au fur et à mesure que l'on avance dans la conduite. En supposant que l'équation (3.1.3) reste approximativement valable dans la zone d'entrée, on peut déduire que le gradient de pression est plus élevé dans la zone d'entrée et décroit pour atteindre sa valeur constante dans la zone pleinement développée et maintenir ainsi le débit du fluide. La perte de charge totale est donc plus élevée si on tient compte de la zone d'entrée.

Comme nous venons de le voir, il existe une perte de charge supplémentaire due aux effets d'entrée. En revanche tous les raisonnements ci-dessus reposent sur une hypothèse concernant le comportement du fluide à la paroi : il s'agit de la condition de non glissement. Qu'en est-il lorsque le fluide en question glisse sur les parois, comme le fait la composante superfluide ? De plus, l'entrée du fluide est aussi caractérisée par un temps de diffusion visqueux, que se passe t-il si le fluide en question n'a pas de viscosité ?

3.2 L'effet d'entrée superfluide

Dans cette partie, nous allons dans un premier temps faire ressortir les grandes caractéristiques phénoménologiques de l'écoulement de contre-courant superfluide obtenu avec nos simulations. Nous présenterons les résultats d'une simulation typique dont plusieurs caractéristiques sont communes à toutes les simulations effectuées, sur une plage de températures qui varient entre 1,3 K et 1,96 K, et sur une plage de nombres de Reynolds entre 50 et 600 environ. Dans un second temps, nous analyserons

Géométrie (unités LBM)			
hauteur ($2h$)	longueur (L)	rapport d'aspect	longueur des thermostats
59	1000	16,9	200/200

TABLEAU 3.1: Résumé des paramètres géométriques utilisés dans la section 3.3

Paramètres physiques								
T (K)	B	B'	ρ (kg.m^{-3})	ρ_n/ρ	ρ_s/ρ	ρ_s/ρ_n	2h (mm)	Re
1,5	1,296	0,317	145,16	0,111	0,889	8,09	0,123	146,7

TABLEAU 3.2: Résumé des paramètres physiques utilisés dans la section 3.3

Paramètres du schéma Boltzmann sur réseau							
Δx	c_s (m.s^{-1})	Mach	τ_n	τ_s	ν_s/ν_n	$\gamma_e.c_s$ (m.s^{-1})	Régularisation
$2,08.10^{-6}$	$1,94$	0,1	0,535013	0,501387	1/25	$1,88$	non

TABLEAU 3.3: Résumé des paramètres du schéma de la Boltzmann sur réseau utilisés dans la section 3.3

quantitativement l'impact sur la perte de charge d'un nouvel effet d'entrée observé. Cette perte de charge d'un contre-courant sera comparée à la perte de charge équivalente d'un écoulement de Poiseuille à l'aide d'une méthode introduite préalablement. Ensuite, nous étendrons cette analyse aux grands nombres de Reynolds, qui pour ce faire requiert d'ajouter à l'algorithme standard Boltzmann sur réseau une procédure de régularisation (Latt (2007)) ; (Latt, Chopard, Malaspinas, Deville, et Michler (2008)) permettant de gagner en stabilité (en projetant la solution sur une base restreinte de fonctions). Enfin nous discuterons des conséquences générales que l'on pourra tirer de cette analyse sur l'interprétation des mesures expérimentales de perte de charge.

3.3 Les résultats d'une simulation de contre-courant typique

Dans cette sous-section, tous les graphiques présentés sont issus de la même simulation, en deux dimensions. Il s'agit d'un écoulement de contre-courant à une température de 1,5 K. Cette température a été choisie parce qu'il existe un grand nombre de mesures expérimentales, elle est intermédiaire entre 1 K et la température de transition T_λ. A cette température la proportion de superfluide est environ huit fois plus importante que celle de fluide normal. Toutes les données physiques de l'hélium introduites dans le code ont été tirées des abaques de Donnelly et Barenghi (1998) et sont résumées dans le tableau 3.2. Nous avons choisi un diamètre de conduite de $123\mu m$ et un rapport d'aspect de 16,9. La longueur des thermostats est choisie arbitrairement égale à environ 3,4 fois le diamètre, le thermostat chaud et le thermostat froid sont de même longueur. Les paramètres géométriques de la simulation sont résumés dans le tableau 3.1. Pour s'assurer de la convergence de la simulation, on définit un temps de diffusion, à partir du rayon de la conduite h, et de la viscosité cinématique tel que

$$t_D = \frac{h^2}{\nu_n} \tag{3.3.1}$$

Nous nous sommes assuré que les grandeurs moyennées temporellement ne variaient plus pour des temps 5 fois plus longs que ce temps caractéristique.

3.3.1 Le cas d'un contre-courant sans couplage

Dans cette sous-section, le couplage HVBK entre les deux fluides est désactivé, en fixant les deux coefficients de friction mutuelle $B = 0$ et $B' = 0$ dans l'équation (1.4.1). Les paramètres de la simula-

tion sont regroupés dans les tableaux 3.1, 3.2, et 6.3 (en annexe).

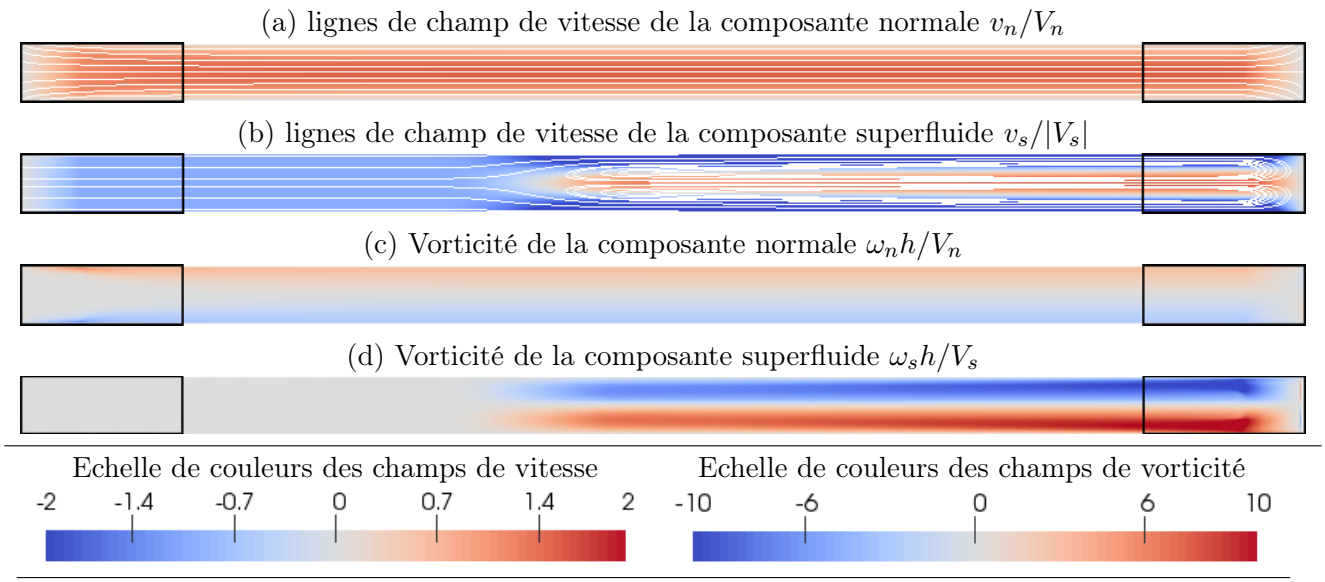


FIGURE 3.2: Lignes de champ de vitesse et champs de vorticité pour une simulation de contre-courant à 1,5 K sans couplage HVBK. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux 3.2, 6.2 et 6.3 (en annexe). Les contours noirs représentent les limites du thermostat chaud et du thermostat froid.

La figure 3.2-a présente l'écoulement du fluide normal à travers la conduite ainsi que la vorticité associée. Les contours noirs représentent les limites du thermostat chaud (à gauche) et du thermostat froid (à droite). Après une certaine distance au delà du thermostat chaud l'écoulement atteint un régime (stationnaire) dit *pleinement développé*. La figure 3.2-b présente le champ de vitesse de la composante superfluide. On remarque que le superfluide s'écoule plus rapidement sur les parois qu'au centre de l'écoulement. Il existe des mouvements de recirculation du superfluide dans le thermostat froid, alors que dans le thermostat chaud ce n'est pas le cas. Sur le champ de vorticité on distingue la présence de deux zones de forte vorticité, que nous appellerons "langues", issues du thermostat froid. Elles sont de signes opposés mais de même intensité, et s'atténuent après une certaine distance sous l'effet de la viscosité artificielle imposée au superfluide (ici $\nu_s/\nu_n = 1/25$), et le profil de vitesse du superfluide redevient plat. Quand on diminue la viscosité artificielle de la composante superfluide, on constate que ces langues de vorticité s'étendent davantage vers le thermostat chaud.

Ces premières simulations sans couplage suggèrent qu'une recirculation dans le thermostat froid peut avoir des effets à très longue portée, sous forme de langues de vorticité superfluide. Bien entendu, l'intensité de cette recirculation dépend de la géométrie du thermostat froid, mais si elle existe dans cette configuration très simple alors elle peut être aussi présente dans des réservoirs des montages expérimentaux.

3.3.2 Le cas d'un contre-courant avec couplage HVBK

Cette fois-ci le couplage entre les deux fluides est activé. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux 3.1, 3.2, et 3.3.
La figure 3.3-a, présente le champ de vitesse du fluide normal, on constate que le fluide normal est ralenti en paroi à l'approche du thermostat froid. L'écoulement du fluide normal proche du thermostat

froid est concentré au centre de la conduite, comme s'il passait dans un convergent. Pour faciliter la lecture graphique, l'échelle des couleurs est identique à celle de la simulation sans couplage. La figure 3.3-b, présente le champ de vitesse du superfluide. On constate à travers les lignes de champ que le superfluide recircule dans le thermostat froid, de plus il s'écoule plus rapidement sur les parois qu'au centre de la conduite. Plus on s'éloigne du thermostat froid plus les lignes de champ se répartissent de façon homogène sur le profil. Le champ de vorticité du superfluide (Figure 3.3-d) indique que les langues sont toujours présentes, elles sont concentrées sur les bords de la paroi, et s'atténuent sur une certaine distance, si bien que la vorticité superfluide devient négligeable au delà des langues et jusqu'au thermostat chaud. Maintenant, la longueur des langues n'est plus limitée par la viscosité artificielle du superfluide mais par le couplage mutuel entre le fluide normal et le superfluide. Ce point sera détaillé plus loin.

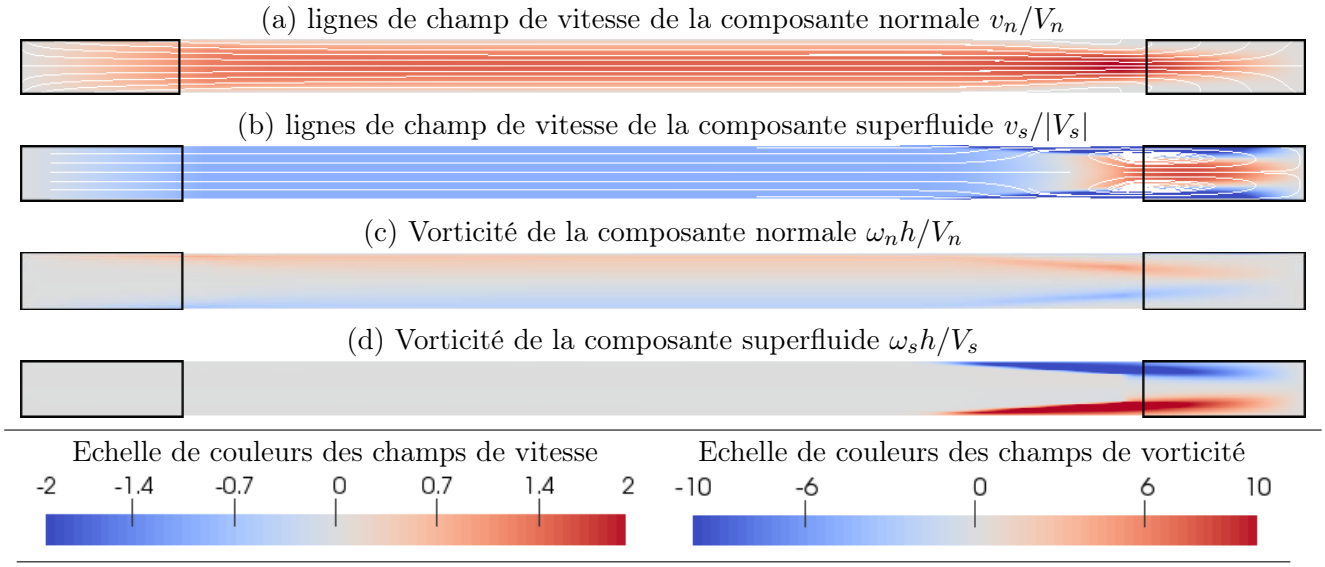


FIGURE 3.3: Lignes de champ de vitesse et champs de vorticité pour une simulation de contre-courant à 1,5 K avec couplage HVBK. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux 3.2, 3.3 et 6.2 (en annexe). Les contours noirs symbolisent les limites du thermostat chaud et du thermostat froid.

L'étude de l'écoulement de contre-courant dans la conduite peut être découpée en trois zones distinctes, comme nous le verrons à travers l'analyse du gradient de pression totale. On représente les profils de vitesse à la position $x/2h = 1$ (entrée chaude) en trait plein, et dans la zone développée des deux fluides en trait pointillé. Le profil plat du superfluide est inchangé. Le profil du fluide normal dans cette zone indique que l'écoulement est en développement. A la position $x/2h = 8,1$ (zone développée) le profil du fluide normal est pleinement développé et se superpose à celui de l'écoulement de Poiseuille assurant le même débit. A la position $x/2h = 15$ (entrée froide), le profil de vitesse du superfluide indique qu'il s'écoule plus rapidement le long des parois qu'au centre de l'écoulement. L'effet du couplage est visible sur le profil du fluide normal dont le gradient de vitesse à la paroi diminue, ce qui implique que la vitesse au centre de l'écoulement est plus élevée qu'en $x = L/2$.

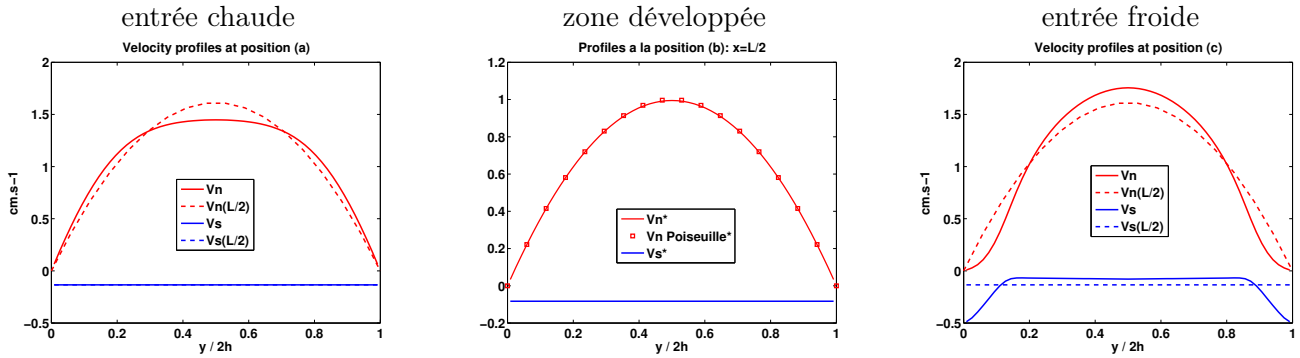


FIGURE 3.4: Profils de vitesse des deux composantes pour une simulation de contre-courant à 1,5 K avec couplage HVBK à $Re = 146,7$. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux, 3.2, 3.3 et 6.2 (en annexe).

On peut comprendre l'existence des langues de superfluide au niveau du thermostat froid à partir de notre règle d'échange d'impulsion entre les deux fluides. En effet, dans tout le thermostat froid une fraction de l'impulsion du fluide normal, alignée avec le sens de l'écoulement, est transmise à la composante superfluide. L'écoulement du superfluide est donc concentré au centre de la conduite, sa vitesse est même positive sur la première moitié du thermostat froid. Comme le superfluide a la possibilité de glisser sur les parois, il ressort du thermostat froid sur les bords de la conduite. Si bien que la vorticité est concentrée dans cette région. La norme de la vorticité superfluide intervient dans le terme de couplage HVBK, équation (1.4.1) : là où elle est non nulle, il y a de la friction entre les deux fluides. Cette friction tend à freiner le mouvement relatif des deux fluides. C'est pour cette raison que l'écoulement du fluide normal est ralenti au niveau de cette zone de friction, et qu'il se concentre vers le centre de la conduite. Réciproquement, le débit superfluide s'établit préférentiellement à l'extérieure de cette zone de friction, que l'on peut ainsi voir comme une paroi (poreuse) virtuelle.

Les effets du couplage sont aussi mesurables sur le gradient de pression totale (somme des pressions partielles). On représente le gradient de pression totale moyenné temporellement et sur la section, issu de la même simulation (Figure 3.5). Il est adimensionné par le gradient de pression de l'écoulement de Poiseuille associé au débit du fluide normal mesuré au centre de la conduite. Là encore, l'analyse en trois tronçons est possible. Les lettres "a","b","c" indiquent les positions des profils de vitesse présentés précédemment. Dans le premier tronçon, autour du point "a", on observe une perte de charge que nous montrerons égale à la perte de charge "classique" associée à l'effet d'entrée d'un fluide visqueux. Dans le second tronçon, autour du point "b", il existe un plateau, la valeur de ce plateau correspond, à 0,1% près à la valeur du gradient de pression associé à un profil de type Poiseuille pour le débit mesuré de fluide normal. Dans cette région le terme de friction mutuelle avec le superfluide est négligeable devant le terme de viscosité du fluide normal. Le troisième tronçon, autour du point "c", correspond à la perte de charge engendrée par l'entrée du superfluide dans la conduite. On remarque qu'elle est beaucoup plus importante que la perte de charge classique, observée à l'autre entrée.

De cette simulation typique à nombre de Reynolds modéré ($Re \simeq 150$) sont extraites toutes les caractéristiques notables de l'écoulement : recirculation superfluide, langues de vorticité superfluide, paroi virtuelle et excès de perte de charge. La mise en évidence de ce dernier effet est un résultat central de ce chapitre. Nous reviendrons sur le concept original de paroi virtuelle dans le chapitre suivant.

Au delà d'un nombre de Reynolds de l'ordre de 200, nos simulations montrent que les langues se déstabilisent en dehors du thermostat froid en s'éloignant de la source froide, mais s'atténuent sur une même distance, comme nous le verrons plus tard. La figure 3.6 établie à 1,5 K montre les langues de

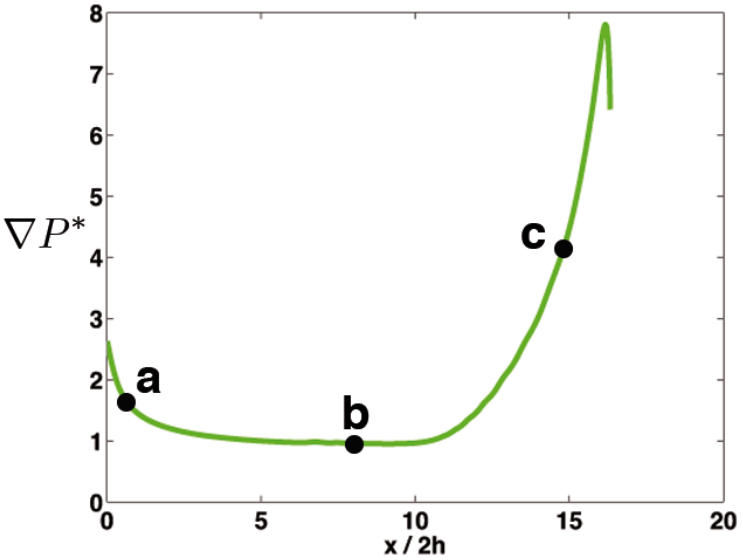


FIGURE 3.5: Gradient de pression totale, moyenné temporellement et sur la section, issu d'une simulation de contre-courant à 1,5 K avec couplage HVBK. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux 3.2, 3.3 et 6.2 (en annexe).

vorticité superfluide pour un nombre de Reynolds $Re = 300$.

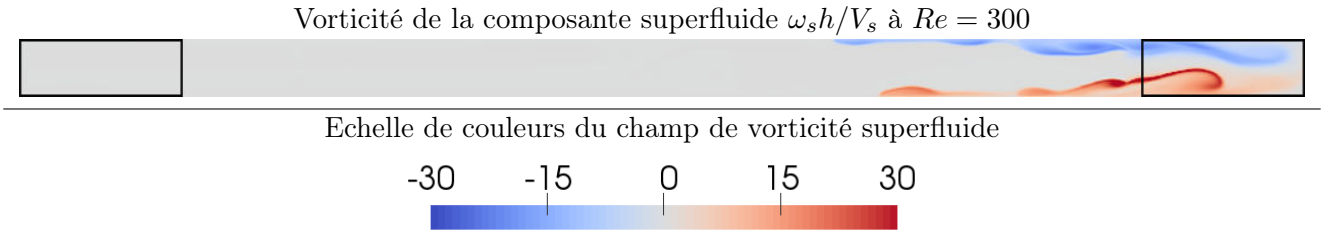


FIGURE 3.6: Champ de vorticité superfluide pour une simulation de contre-courant à 1,5 K avec couplage HVBK et nombre de Reynolds $Re = 300$. Les contours noirs symbolisent les limites du thermostat chaud et du thermostat froid.

La simulation particulière présentée au début de cette section (Figure 3.3) indique un effet d'entrée prononcé du côté de la source froide. Pour aller plus loin dans l'analyse, il faut choisir une définition de la longueur d'entrée adaptée au contre-courant. On serait tenté de mesurer l'étendue des langues pour quantifier leur impact, et donc quantifier la longueur d'entrée superfluide. Mais cette simple mesure directe, non intégrée, n'est pas aisée à mettre en place expérimentalement. De plus, elle ne permet pas une comparaison directe entre les deux effets d'entrée des bords chaud et froid. Par ailleurs, une comparaison avec l'effet d'entrée classique d'un fluide visqueux n'est plus possible. En revanche, une caractérisation commune et simple impliquant la perte de charge nous semble plus naturelle. Reliée à la dissipation, nous proposons une caractérisation "énergétique" qui ne repose pas sur un critère arbitraire, mais sur une comparaison entre la perte de charge liée au couplage mutuel des composantes normale et superfluide de l'écoulement, et la perte de charge liée à l'écoulement de Poiseuille associé au même débit (pour le fluide normal). Ce critère nous semble plus universel et comparable d'un montage expérimental à un autre. C'est la raison pour laquelle nous le présenterons et nous l'utiliserons dans toute la suite.

3.4 L'analyse quantitative des résultats

3.4.1 L'effet d'entrée chaude

L'analyse qualitative établie plus haut dans le cas d'un écoulement de contre-courant avec couplage suggère que les langues de vorticité du superfluide s'atténuent quand elles s'éloignent du thermostat froid. Cette atténuation est telle que les deux fluides ne sont plus couplés. Par ailleurs, il est nécessaire de prouver que la perte de charge en entrée chaude est associée à l'entrée d'un fluide visqueux dans une conduite.

On rappelle ici l'équation de la pression dynamique totale présentée dans la section 1.5, équation (1.5.4). Elle est obtenue avec les hypothèses suivantes : stationnarité de l'écoulement, invariance par translation, écoulement laminaire et couplage nul entre les deux fluides. Rigoureusement si le couplage n'est pas nul, l'invariance par translation n'est plus garantie dans toute la conduite.

$$\nabla p = \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n \tag{3.4.1}$$

La figure 3.5 présente le gradient de pression totale normalisé ∇p^* par le gradient de pression associé à un écoulement de Poiseuille $\nabla p^* \equiv \nabla p / \nabla p_{Pois.}$ en fonction de la position adimensionnée dans la conduite $x/2h$ et pour différents nombres de Reynolds. Si l'écoulement est pleinement développé, on s'attend à ce que $\nabla p* = 1$ (en négligeant la viscosité artificielle du superfluide). A une distance de quelques diamètres en aval de l'entrée chaude, on constate en effet que la perte de charge atteint à mieux que 10% la perte de charge d'un écoulement de Poiseuille développé. Nous avons vu qu'il existe une expression empirique pour déterminer la longueur d'entrée, équation (3.1.1), d'un fluide visqueux en fonction du diamètre de la conduite et du nombre de Reynolds. Il existe principalement deux définitions de la longueur d'entrée hydrodynamique. Une première, construite à partir de la contrainte de cisaillement à la paroi τ_w et une seconde basée sur le champ de vitesse. Ces deux définitions possèdent un caractère arbitraire, soit on définit cette longueur d'entrée comme la longueur à partir de laquelle la contrainte de cisaillement local à la paroi est proche de la valeur de la contrainte de cisaillement pour l'écoulement développé, à 2% près, soit lorsque la vitesse au centre de l'écoulement atteint 99% de la vitesse au centre de l'écoulement dans la zone pleinement développée (Mehrotra et Patience (1990)) ; (Schetz et Fuhs (1999)). Dans les corrélations de la longueur d'entrée le coefficient 0.05 de l'expression empirique (3.1.1) est parfois remplacé par $0,04$ (Gupta (2001)) 0.049 (Soto et Shah (1976)) 0.061 (Collins et Schowalter (1963)) 0.065 (Soto et Shah (1976)) sans pour autant toujours préciser les plages de nombres de Reynolds pour lesquelles ces corrélations ont été établies, voir le tableau 1 de Poole et Ridley (2007).

Pour montrer que l'entrée du fluide normal par l'entrée chaude coincide bien avec l'entrée d'un fluide visqueux dans une conduite, nous avons adopté la définition fondée sur la vitesse au centre de l'écoulement. Pour trois simulations à des nombres de Reynolds différents, dont les paramètres détaillés sont énumérés dans les tableaux : 6.2, 6.3, nous avons évalué la distance à laquelle la vitesse au centre de l'écoulement atteint 99% de sa valeur dans la zone pleinement développée, notée $V_{maxtheo}$, à partir du gradient de pression total mesuré au centre de la conduite. Puisque la vitesse moyenne du fluide normal augmente linéairement dans le thermostat chaud, nous avons défini deux longueurs, une minorante et une majorante, afin de réduire l'incertitude de la mesure. La première notée Le_0 a pour origine la sortie du thermostat chaud, position à laquelle nous avons placé notre repère pour tous les résultats présentés dans cette thèse (Figure 2.1), alors que la seconde, notée Le_{th}, a pour origine la paroi externe du thermostat chaud, placée à $-x_{th}$.

La figure 3.7 représente le développement de la vitesse du fluide normal sur la ligne centrale de la conduite, pour les nombres de Reynolds évalués en suivant la définition (3.0.2) : $Re = 93,08$, $Re = 124,2$ et $Re = 190,9$. La vitesse du fluide normal est adimensionnée par la vitesse maximale du profil dans la zone pleinement développée. On peut clairement voir que le fluide normal possède une vitesse nulle sur la paroi externe du thermostat chaud à la position adimensionnée par le diamètre $-x_{th}/2h$ qui pour les simulations à $Re = 93,08$ et $Re = 190,9$ vaut -3,39 environ, alors que pour la simulation à $Re = 124,2$ nous avons diminué la taille du thermostat à $x_{th}/2h = 0,1$. Les longueurs d'entrée obtenues sont regroupées dans le tableau 3.4.

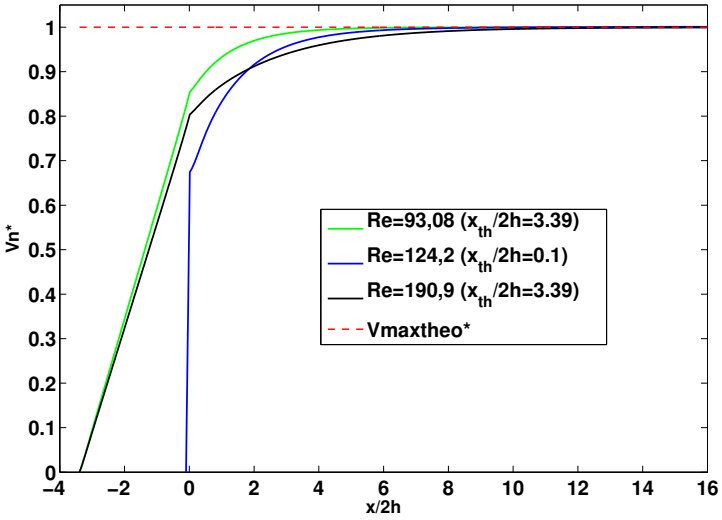


FIGURE 3.7: Développement de la vitesse sur la ligne centrale de la conduite, à $Re = 93,08$, $Re = 124,2$, et $Re = 190,9$ à 1,5 K. Deux tailles de thermostats sont utilisées :$x_{th}/2h = 3,39$ et $x_{th}/2h = 0,1$. Les paramètres des simulations sont regroupés en annexe dans les tableaux 6.2, et 6.3.

Effet d'entrée chaude, entrée classique				
nombre de Reynolds	Re	93,08	124,2	190,9
diamètre	$2h$ (LU)	59	59	59
longueur du thermostat	$x_{th}/2h$	3,4	0,1	3,4
longueur d'entrée	$Le_0/2h$	3,4	5,3	7,7
longueur d'entrée + longueur du thermostat	$Le_{th}/2h$	6,8	5,4	11,1
Longueur d'entrée hydrodynamique eq.(3.1.1)	$Le_{99}/2h$	4,6	6,2	9,5

TABLEAU 3.4: Evaluation de la longueur d'entrée adimensionnée d'un fluide visqueux. Calculée en tenant compte de la longueur du thermostat chaud ($Le_{th}/2h$) ou non ($Le_0/2h$). La comparaison des longueurs d'entrée est effectuée avec l'équation empirique (3.1.1). Trois nombres de Reynolds sont testés, ainsi que la longueur du thermostat chaud.

D'après le tableau 3.4, on peut clairement dire que quand le thermostat chaud présente une longueur de 3,4 diamètres on a clairement $Le_0 < Le_{99\%} < Le_{th}$. Quand le thermostat chaud est court devant le diamètre, l'écart est de 13% entre la longueur Le_{th} et $Le_{99\%}$. L'autre définition de la longueur d'entrée, utilisant le coefficient de friction, a aussi été utilisée en complément de la méthode utilisant la vitesse au centre. L'erreur relative entre les deux évaluations est de 3% pour $Re = 93,08$ et de 1% pour $Re = 190,09$. En effet, la longueur d'entrée hydrodynamique est définie avec pour condition initiale un profil plat en entrée de conduite. Dans notre cas à la position $x = 0$, c'est-à-dire en sortie

de thermostat chaud, le profil n'est plus plat, et en $-x_{th}$ la vitesse est nulle.

Il faut retenir que le fluide normal se comporte comme un fluide visqueux proche du thermostat chaud, parce que le couplage avec la composante superfluide n'est pas effectif dans cette zone. Comme nous l'avions remarqué dans la description qualitative, le couplage HVBK, pondéré par la vorticité superfluide n'existe que proche du thermostat froid, là où les langues de recirculation existent.

3.4.2 L'effet d'entrée froide : un nouvel effet d'entrée

Nous avons essayé de limiter le nombre de paramètres arbitraires pour quantifier l'impact de l'effet de la composante superfluide sur la perte de charge. Il nous fallait trouver une définition commune aux deux entrées, qui puisse s'exprimer à l'aide d'un scalaire uniquement. On compare la perte de charge locale causée par une entrée à la perte de charge linéaire d'un écoulement de Poiseuille. Par perte de charge locale, on sous-entend une différence de pression entre deux points séparés par une distance donnée. Il s'agit donc d'une densité linéique de perte de charge, quantifiée par le gradient local de pression.

La figure 3.8 schématise la construction des longueurs d'entrée associées à l'entrée chaude et à l'entrée froide, avec deux types de représentations. Celle utilisant la pression et celle utilisant le gradient de pression.

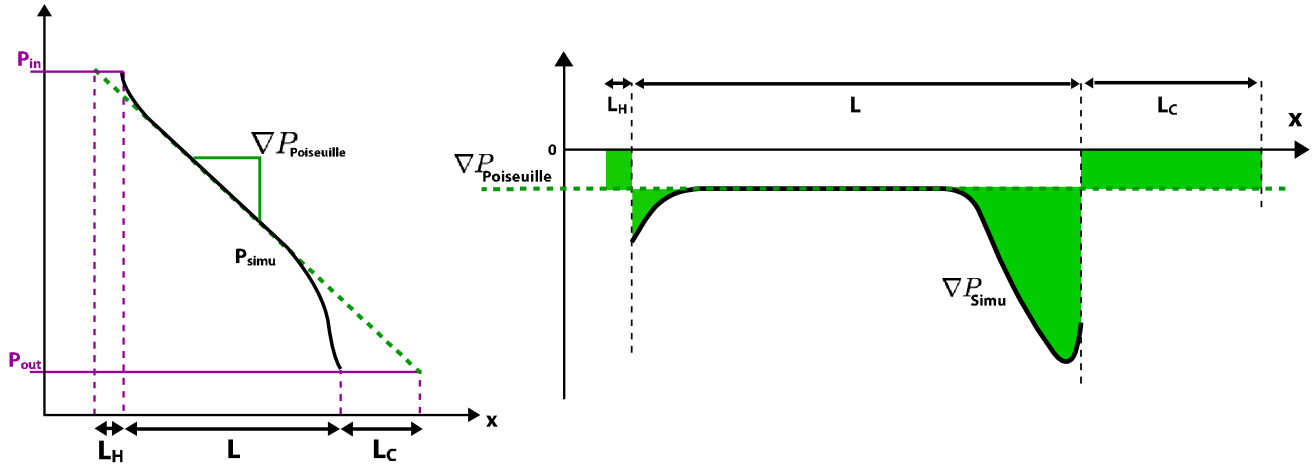


FIGURE 3.8: Schématisation de la méthode pour interpréter un excès de dissipation locale comme une longueur additionnelle par rapport à la longueur de la conduite. A gauche la représentation "pression", à droite la représentation "gradient de pression".

Nous procéderons ainsi pour créer une longueur associée à la perte de charge du coté du thermostat froid, notée L_C, et associée à la perte de charge du coté du thermostat chaud, notée L_H. On note ∇p le gradient de pression issu de la simulation et ∇p_{pois} le gradient de pression de type Poiseuille, on cherche L_C telle que

$$\int_a^L (\nabla p(x) - \nabla p_{pois})\, dx = \int_L^{L+L_C} \nabla p_{pois} dx \tag{3.4.2}$$

et L_H telle que

$$\int_0^a (\nabla p(x) - \nabla p_{pois})\, dx = \int_{-L_H}^0 \nabla p_{pois} dx \tag{3.4.3}$$

avec pour condition que la position a soit fixée là où $\nabla p = \nabla p_{pois}$.

Récapitulatif des résultats				
Re	$\nabla p_{moy}/\nabla p_{Pois}$	$L_C/2h$	$L_H/2h$	L_C/L_H
$47,74$	$1,00$	0,991	0,359	2,54
$93,08$	$1,12$	4,31	1,06	4,05
$146,7$	$1,45$	13,23	1,92	6,90
$190,9$	$1,70$	21,3	2,49	8,56

TABLEAU 3.5: Résumé des résultats obtenus à différents nombres de Reynolds, longueur d'entrée associée à une perte de charge locale par effet d'entrée. Impact sur la perte de charge totale à 1,5 K pour une conduite de rapport d'aspect 33,9.

Au final

$$L_C = \frac{1}{\nabla p_{pois}} \int_a^L (\nabla p(x) - \nabla p_{pois})\, dx \tag{3.4.4}$$

$$L_H = \frac{1}{\nabla p_{pois}} \int_0^a (\nabla p(x) - \nabla p_{pois})\, dx \tag{3.4.5}$$

Cette définition de la longueur d'entrée chaude (L_H) pour le thermostat chaud est différente de la longueur d'entrée hydrodynamique d'un fluide visqueux, parce qu'elle est repose sur des considérations énergétiques. Nous verrons qu'une comparaison reste néanmoins possible entre L_H et $Le_{99\%}$, avec approximativement $Le_{99\%} \backsimeq 4L_H$.

Pour éviter tout recouvrement des effets d'entrée chaude et froide, nous avons multiplié par deux le rapport d'aspect de la conduite par rapport aux simulations de la partie qualitative, il est donc égal à 33,9 environ. Le diamètre et la longueur des thermostats restent inchangés comme le rappelle le tableau 6.2. Les paramètres physiques de la simulation à 1,5 K sont résumés dans le tableau 3.2, mais cette fois-ci nous avons fait varier la vitesse de contre-courant, ce qui revient à une variation du nombre de Reynolds entre 0 et 200 environ. On rappelle que ce nombre de Reynolds est évalué à partir de la vitesse moyenne et de la densité du fluide normal, moyennés temporellement. Il s'agit donc du nombre de Reynolds classique d'un fluide obéissant aux équations de Navier-Stokes. Ces simulations sont réalisées sans procédure de régularisation. Les paramètres des simulations sont précisés dans le tableau 6.3 en annexe. Et enfin les résultats sont rassemblés dans le tableau 3.5. Dans ce dernier tableau nous présentons, entre autres, pour un nombre de Reynolds donné, le gradient de pression total moyen dans la conduite adimensionné par le gradient de pression de type Poiseuille, les longueurs d'entrée chaude et froide adimensionnées par le diamètre $2h$, et enfin le rapport entre les longueurs d'entrées froide et chaude. L'erreur relative entre le gradient de pression totale situé sur le plateau (zone b sur la figure 3.5) et le gradient de pression de type Poiseuille est inférieur à 3% pour les nombres de Re faibles, et inférieur à 2% pour les nombres de Reynolds plus élevés.

On constate que la perte de charge totale dévie de la perte de charge de type Poiseuille. Plus le nombre de Reynolds est grand plus l'excès de perte de charge est grand. La longueur de l'entrée froide L_C augmente significativement par rapport au diamètre de la conduite mais aussi par rapport à la longueur de l'entrée chaude. Il existe presque une décade entre les deux longueurs.

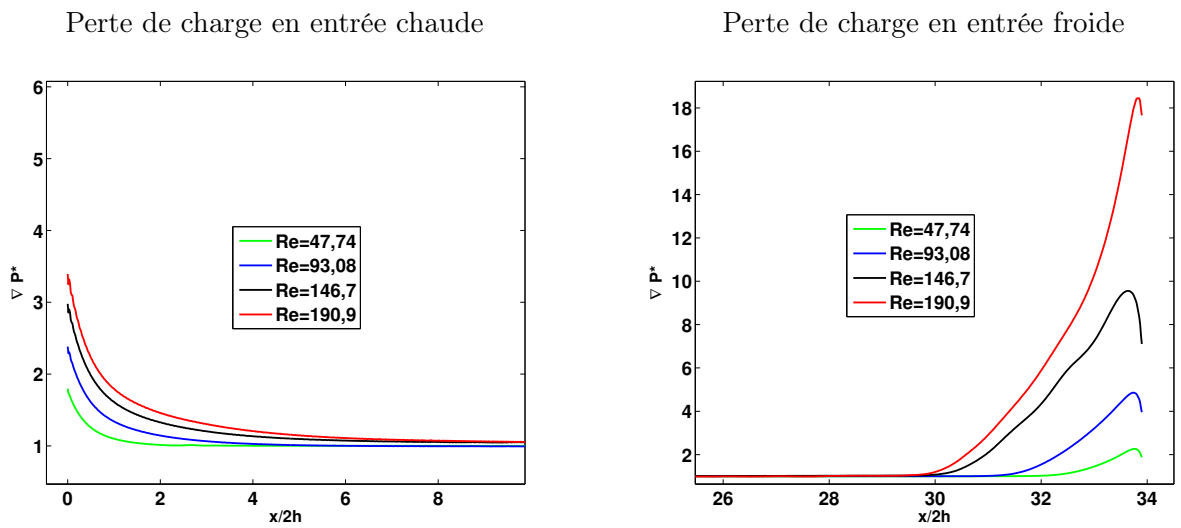


FIGURE 3.9: Perte de charge en entrée chaude, à gauche, et en entrée froide à droite, visualisée par le gradient de pression totale adimensionné par le gradient de pression de type Poiseuille pour une température de 1,5 K. Les paramètres des simulations sont regroupés dans les tableaux 3.2, 6.2, et 6.3 en annexe.

La figure 3.9 présente le gradient de pression totale adimensionné par le gradient de pression de type Poiseuille pour une température de 1,5 K. Les paramètres des simulations sont regroupés dans les tableaux 3.2, 6.2, 6.3 en annexe. A gauche on représente la perte de charge en entrée chaude et à droite en entrée froide. Les évolutions des pertes de charge au voisinage des thermostats chaud et froid ne sont pas identiques. Pour l'entrée chaude, on observe une convergence lente vers la perte de charge de type Poiseuille, caractérisée par le phénomène de diffusion, lié à la viscosité du fluide normal. Pour l'entrée froide, l'atténuation est beaucoup plus abrupte. Elle correspond à la longueur d'atténuation des langues de vorticité superfluide. L'importance relative des deux effets est clairement identifiable, et traduit graphiquement l'écart observé entre les longueurs L_C et L_H, associées respectivement au thermostat froid et au thermostat chaud. La figure 3.9 illustre la difficulté de définir une longueur d'entrée. En effet, un critère de convergence sur le gradient de pression (comme l'obtention de 110% ou 101% du gradient de Poiseuille) conduirait à des rapports L_C/L_H fortement dépendants du seuil de convergence choisi.

3.4.3 L'influence des paramètres liés à la modélisation numérique

Pour tester la robustesse de notre modélisation et vérifier que les résultats présentés ci-dessus sont stables, essentiellement causés par la friction entre les deux fluides et ne dépendent pas de la viscosité artificielle imposée par la méthode Boltzmann sur réseau, nous avons réalisé quelques mesures supplémentaires. Les autres paramètres physiques restent inchangés (tableau 3.2) et la température est égale à 1,5 K. Pour réduire le temps de calcul, nous avons divisé le rapport d'aspect de la conduite par 2, passant ainsi de 33,9 à 16,9. Parce qu'au nombre de Reynolds que nous avons choisi de présenter (Re=146,7) les deux effets d'entrée restent bien séparés. Les tableaux 6.4, 6.5 regroupent les paramètres géométriques ainsi que les paramètres Boltzmann sur réseau utilisés. Enfin le tableau 3.6 regroupe les résultats.

On constate d'abord que le rapport $L_H/2h$ est quasi constant entre toutes ces simulations, ce qui est cohérent avec le fait que l'entrée chaude correspond à l'entrée d'un fluide classique, en l'occurrence le fluide normal, dans une conduite. Ce rapport ne doit donc pas être influencé par le changement d'un paramètre autre que la viscosité du fluide normal. Les pertes de charge et le rapport L_C/L_H varient

Récapitulatif des résultats				
	$\nabla p_{moy}/\nabla p_{Pois}$	$L_C/2h$	$L_H/2h$	L_C/L_H
Réf.	$1,92$	13,67	1,872	7,30
No Magnus	$1,89$	13,21	1,872	7,06
$\nu_s/\nu_n = 1/2,5$	$1,50$	6,663	1,874	3,55
$\nu_s/\nu_n = 1/50$	$1,92$	13,68	1,876	7,29

TABLEAU 3.6: Influence de la viscosité artificielle et de la force de Magnus sur la longueur d'entrée superfluide associée à une perte de charge locale

peu sauf lorsque la viscosité artificielle du superfluide est trop importante. Quand on supprime la force de Magnus (terme $B' = 0$ dans l'équation (1.4.1)) dans la force de friction mutuelle, la perte de charge diminue de 1,5% et le rapport L_C/L_H diminue de 3% par rapport à la simulation de référence. Lorsqu'on divise par deux la valeur de la viscosité artificielle du superfluide on ne diminue le rapport L_C/L_H que de 0,1%. Le rapport $\nu_s/\nu_n = 1/25$ (simulation de référence) semble donc donner le comportement asymptotique de ce nouvel effet d'entrée. Pour des raisons de stabilité, nous n'avons pas pu réduire davantage la valeur de la viscosité artificielle, même en augmentant la resolution du diamètre par un facteur 3. On peut remarquer que la perte de charge totale est presque deux fois plus importante que la perte de charge de type Poiseuille, parce que le rapport d'aspect dans ce cas n'est que de 17 environ. La figure 3.10 permet de visualiser l'effet des modifications des paramètres concernés, sur le gradient de pression totale normalisé.

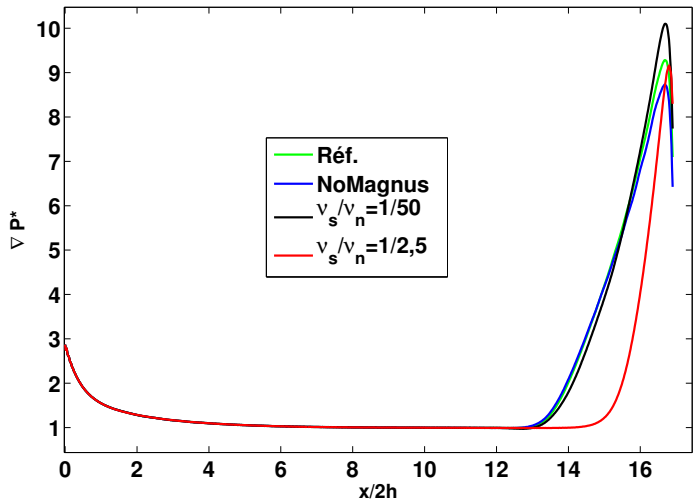


FIGURE 3.10: Influence de la viscosité artificielle du superfluide et de la force de Magnus sur la perte de charge en entrée superfluide. Le graphique présente le gradient de pression totale normalisé, moyenné temporellement et sur la section, issu d'une simulation de contre-courant à 1,5 K. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux 3.2, 6.4, et 6.5.

Nous avons aussi effectué des simulations avec une viscosité huit fois plus faible pour le fluide normal que dans les simulations présentés ci-dessus, le but étant de vérifier la robustesse du modèle. Il y a conservation des mécanismes et des ordres de grandeurs des résultats présentés plus haut.

3.5 Vers les plus hauts nombres de Reynolds

Dans cette section nous étudions le comportement de l'effet d'entrée superfluide à des grands nombres de Reynolds, excédant $Re = 200$. Dans le cadre de notre approche exploratoire des écoulements de contre-courant par la méthode Boltzmann sur réseau, nous avons décidé d'ajouter à notre code une procédure de régularisation proposée par Latt (2007). En effet, l'élaboration du code et sa validation ont occupé une grande partie du temps de ce travail de thèse. L'étude systématique de l'effet d'entrée superfluide implique des simulations dans des conduites avec un rapport d'aspect, typiquement $L/2h \simeq 30$. Comme la viscosité artificielle de la composante superfluide est très faible devant la viscosité du fluide normal, typiquement $\nu_s/\nu_n = 1/25$, le temps de relaxation associé au superfluide dans l'algorithme Boltzmann sur réseau est beaucoup plus proche de la valeur critique 1/2, ce qui est source d'instabilités numériques dans le schéma d'intégration. Pour palier à ces instabilités il s'offrait à nous deux solutions, augmenter le nombre de noeuds représentant le diamètre de la conduite, mais pour garder un rapport d'aspect fixe, il faut aussi augmenter le nombre de noeuds représentant la longueur de la conduite ; ou bien alors utiliser une procédure de régularisation.

Bien que nous ayons mis en place des directives de parallélisation relativement simples de type *Openmp*, les temps de calculs deviennent très vite colossaux, même s'ils sont exécutés sur les clusters du PSMN de l'ENS de Lyon (Pôle Scientifique de Modélisation Numérique) qui possèdent dans la plupart des cas 16 coeurs par machine. Une simple évaluation de l'ordre de grandeur du temps de calcul est possible, à partir des performances moyennes de notre code qui sont de 150.000 noeuds actualisés par seconde et par coeur. La baisse de performance de notre code par rapport à un code BGK standard, typiquement un facteur 6, vient de la procédure de prédiction/correction appliquée en chaque noeud pour corriger l'impulsion, parce que la force de couplage dépend de la vitesse et de ses dérivées. La viscosité cinématique du fluide normal est de l'ordre de $10^{-8}\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$ sur toute la plage de températures considérées. Le diamètre de la conduite est de l'ordre du dixième de millimètre. Le temps de diffusion associé à nos deux quantités, qui est pour nous le temps qui assure la convergence de notre écoulement est de l'ordre du dixième de seconde. Notre pas de temps est typiquement de 10^{-7}s. Pour atteindre la convergence il nous faut donc réitérer 10^6 fois l'algorithme collision/propagation. Les résultats de simulations présentées plus haut sont généralement établis dans des conduites (thermostats inclus) de dimensions 59x2400, ce qui représente environ $1,5.10^5$ noeuds. Sur un calculateur comportant 16 coeurs, il faut grossièrement une journée pour terminer la simulation. Avec la résolution mentionnée ci-dessus, le nombre de Reynolds maximal atteignable pour le fluide normal est de l'ordre de 200. Si l'on souhaite atteindre $Re = 300$ par exemple, il faut diviser le pas d'espace par 2, et donc multiplier par 4 le nombre de noeuds total, soit 4 jours pour terminer une simulation.

La méthode de régularisation que nous avons implémentée est une projection qui filtre les modes instables, d'où un gain de stabilité, mais qui en contrepartie induit un effet dissipatif sur les modes hydrodynamiques. Par exemple à $Re = 146,7$ l'erreur relative sur le gradient de pression totale, dans la zone sans couplage, par rapport à la prédiction analytique de type Poiseuille est de 5% environ, alors que sans procédure de régularisation cette erreur relative est de 0,1%. Malgré cette perte de précision, la procédure de régularisation permet d'obtenir un comportement aux grands nombres de Reynolds assez rapidement.

Dans un soucis de comparaison, effectuée uniquement à 1,5 K, entre le schéma standard BGK et le schéma standard BGK avec la procédure de régularisation, nous avons repris les mêmes dimensions de conduite et de thermostats (tableau 6.6) pour les nombres de Reynolds allant de 0 à 200, et nous avons augmenté la résolution par 2 pour les nombres de Reynolds de 200 à 500 (tableau 6.2). On sait que la régularisation peut entrainer un biais dans les résultats, c'est pour cette raison que la comparaison

avec le schéma sans régularisation est essentielle pour mesurer l'ampleur de ce biais, par un facteur numérique ou une différence de comportement. Nous avons gardé les mêmes paramètres physiques (rassemblés dans le tableau 3.2). Les paramètres de la méthode Boltzmann avec la procédure de régularisation sont regroupés dans le tableau 6.7 et sans la procédure dans les tableaux 6.3.

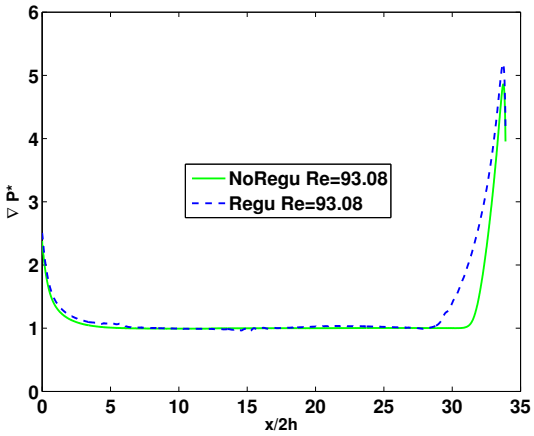
Comparons les résultats reproduits dans le tableau 3.7 avec ceux obtenus sans régularisation rassemblés dans le tableau 3.5. Au plus faible nombre de Reynolds, $Re = 43,07$, la procédure de régularisation surestime presque d'un facteur 2 le rapport entre les longueurs L_C et L_H. En revanche on peut remarquer une tendance commune entre les deux schémas quand le nombre de Reynolds augmente : l'écart entre les L_C/L_H atteint 13% environ à $Re = 190,9$. Au delà de $Re = 300$ le ratio L_C/L_H semble se stabiliser autour d'une valeur seuil : 7,5 environ, commune aux deux méthodes à 4% près. Une légère diminution est observée à $Re = 590,8$ parce qu'à ce nombre de Reynolds la longueur d'entrée hydrodynamique adimensionnée $Le/2h$ est proche de 30, or la conduite dans laquelle nous avons lancé ces simulations possède un rapport d'aspect de 33,9 : les effets d'entrées chaude et froide commencent à se superposer : L_H et L_C ne sont plus correctement définies.

Récapitulatif des résultats (unités LBM)			
Re	$L_C/2h$	$L_H/2h$	L_C/L_H
47,74	2,206	0,443	4,98
93,08	7,758	1,503	5,16
146,7	16,71	2,057	8,12
190,9	27,06	2,783	9,72
286,2	31,33	4,061	7,71
429,3	51,29	6,921	7,41
590,8	76,81	11,00	6,98

TABLEAU 3.7: Perte de charge moyenne normalisée, importance des longueurs L_C et L_H. Comparaison entre ces deux longueurs. Simulations à 1,5 K avec procédure de régularisation.

La figure 3.11 permet de comprendre visuellement les résultats décrits ci-dessus. On compare aux nombres de Reynolds faibles ($Re = 93,08$, figure de gauche) et modérés ($Re = 190,09$, figure de droite) la procédure de procédure de régularisation associée au schéma BGK avec le schéma BGK standard à l'aide du gradient de pression totale normalisé. On constate que l'intensité maximale du gradient de pression totale en entrée froide est similaire avec les deux méthodes, en revanche l'étendue des langues diffère. En effet, sans procédure de régularisation elles sont atténuées sur 4 diamètres, alors qu'avec la procédure de régularisation elles existent sur 2 diamètres de plus. A $Re = 190,9$, l'intensité maximale du gradient de pression totale est supérieure sans procédure de régularisation à celle établie avec la procédure de régularisation. Le même comportement d'atténuation des langues plus douce est observé avec la procédure de régularisation. Ces deux comportements tendent donc à réduire l'écart entre les pertes de charge observées à faible nombre de Reynolds. En entrée chaude l'effet de la procédure de régularisation est beaucoup moins marqué que du coté froid, voire quasi absent pour $Re = 190,9$.

Effet de la régularisation : faible nombre de Reynolds



nombre de Reynolds modéré

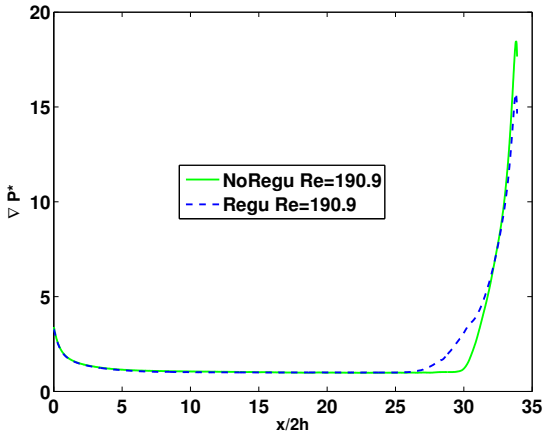


FIGURE 3.11: Simulations à T=1,5 K, en utilisant le schéma BGK standard (dénommée "NoRegu", trait plein) et en ajoutant la procédure de régularisation (dénommée "Regu", pointillé). Pour deux nombres de Reynolds différents, $Re = 93,08$ et $Re = 190,9$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 3.2, 6.6, et 6.7.

La figure 3.12 illustre clairement la comparaison entre le schéma BGK standard et le schéma BGK avec la procédure de régularisation à 1,5 K, et permet de dégager deux tendances communes aux deux méthodes. Pour les nombres de Reynolds entre $50 < Re < 250$ on observe une augmentation, presque linéaire, du rapport L_C/L_H entre 2,5 et 10 environ. Pour $300 < Re < 600$ le rapport L_C/L_H se stabilise autour d'une valeur moyenne de 7,5 environ. La différence relative entre les deux méthodes est très faible, de l'ordre de 3% et témoigne de l'intérêt d'utiliser la procédure de régularisation aux grands nombres de Reynolds. Qualitativement ces tendances sont associées à la dynamique de la vorticité superfluide. L'augmentation du rapport L_C/L_H correspond au développement des langues de vorticité vers le thermostat chaud, elles se déstabilisent, dans la conduite, pour un nombre de Reynolds $Re > 200$ à 1,5 K, et enfin la déstabilisation gagne le thermostat froid aussi et le rapport L_C/L_H diminue quelque peu et se stabilise.

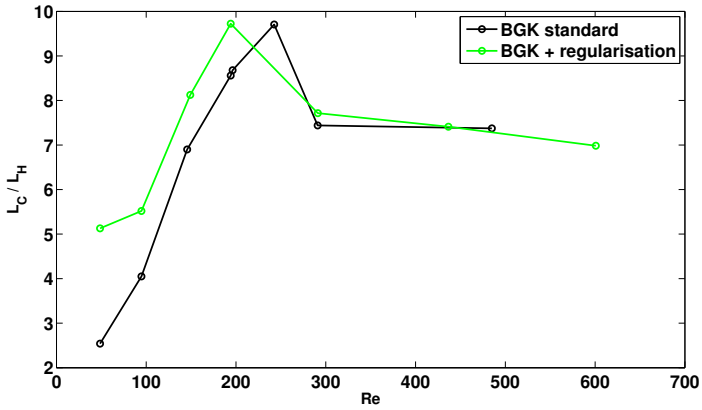


FIGURE 3.12: Comparaison entre le schéma BGK standard et le schéma BGK avec la procédure de régularisation à 1,5 K. Le graphique présente le rapport entre les deux longueurs L_H et L_C associées à chaque entrée. Les paramètres des simulations sont regroupés en annexe dans les tableaux 6.3, 6.7.

3.5.1 L'influence de la température

Nous avons étudié l'effet de la température sur le nouvel effet d'entrée. En effet la température change les proportions relatives des deux fluides, et faiblement la densité totale. La force de friction mutuelle est aussi proportionnelle au rapport des densités (1.4.1). Nous avons fait varier la température entre 1,3 K et 1,96 K, à ces températures les proportions relatives (en masse) de la composante superfluide par rapport à la composante normale varient de 21,2 à 1,02. Les paramètres physiques sont rassemblés dans le tableau 6.1. Les différents paramètres de la méthode Boltzmann sont regroupés dans le tableau 6.9. Une procédure de régularisation a été utilisée pour améliorer la stabilité de l'algorithme. Nous avons diminué le nombre de Mach maximal pour les températures supérieures à 1,5 K. En effet, quand la température se rapproche de T_λ, la proportion relative de la composante superfluide diminue, si bien que la vitesse de la composante superfluide augmente, pour un nombre de Reynolds fixé. Les résultats de l'ensemble des ces simulations sont regroupés dans le tableau 3.8.

Pour faciliter la lecture de ces résultats, la figure 3.13 présente le rapport L_C/L_H en fonction du nombre de Reynolds, pour les températures 1,3 K (en bleu), 1,5 K (en vert), 1,7 K (en magenta) et 1,96 K (rouge). Les résultats ont été obtenus par le schéma BGK et la procédure de régularisation. A titre de rappel, le trait noir reprend les résultats obtenus sans la procédure de régularisation à 1,5 K.

On constate sur la figure 3.13 que les deux tendances dégagées précédemment se retrouvent pour les températures simulées. Un résultat central de cette étude est que pour $Re > 300$ le rapport L_C/L_H semble se stabiliser (aux températures testées) autour de 7,5 à $\pm 1,5$.

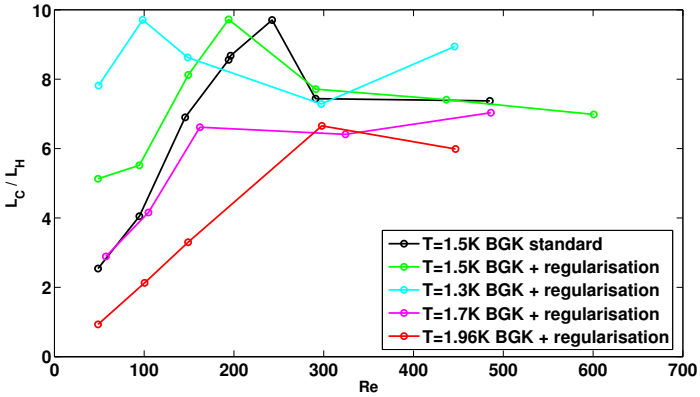


FIGURE 3.13: Influence de la température sur le nouvel effet d'entrée. Le graphique présente le rapport entre les deux longueurs L_C et L_H associées à chaque entrée. Les paramètres des simulations sont regroupés en annexe dans les tableaux 6.3, 6.7, 6.8, 6.1 et 6.9.

Récapitulatif des résultats (unités LBM)				
T (K)	Re	$L_C/2h$	$L_H/2h$	L_C/L_H
1,3	146,1	24,05	2,787	8,627
1,3	292,2	35,41	4,860	7,286
1,3	438,3	48,86	5,464	8,942
1,7	159,4	14,78	2,234	6,61
1,7	318,8	29,83	4,653	6,41
1,7	478,1	41,45	5,894	7,01
1,96	146,5	6,673	2,023	3,30
1,96	292,9	28,82	4,330	6,66
1,96	439,4	36,23	6,050	5,99

TABLEAU 3.8: Récapitulatifs des rapports entre les longueurs L_H et L_C caractérisant les effets d'entrée chaude et froide, en fonction de la température.

3.6 Conclusion et mise en perspective avec les expériences

Le modèle développé montre que les effets d'entrée d'un écoulement de contre-courant sont significativement plus prononcés que ceux d'un fluide classique, au moins dans le cas laminaire. Une conséquence pratique est que toute étude expérimentale du régime développé d'un contre-courant requiert une conduite présentant un rapport d'aspect significativement plus important que ceux habituellement utilisés en hydrodynamique classique. A défaut de prendre une telle précaution, les mesures risquent d'être entachées d'incertitude.

En introduction de cette thèse nous avons évoqué la grande dispersion des mesures du seuil de la transition T1. Notre modèle suggère que l'utilisation de conduites (ou canaux) trop courts pourrait être une cause de cette dispersion. Pour tester cette hypothèse, nous avons compilé un grand nombre d'études publiées depuis les années 60. La figure 3.14 (à gauche) présente les vitesses superfluides critiques d'apparition de la transition T1, après adimensionnement sous la forme d'un nombre de Reynolds. Entre 1960 et 1985, on constate plus d'une décade de dispersion des valeurs, une dispersion qui n'est pas réduite si l'on représente d'autres quantités telles que le flux de chaleur critique ou la vitesse de contre-courant critique. La figure de droite montre que la dispersion des points est significativement réduite si l'on ne considère que les mesures effectuées dans des conduites de rapport d'aspect excédant 500, tandis que les mesures effectuées pour des rapports d'aspect inférieurs à 100 diffèrent et sont plus dispersées. Ce résultat fort conforte donc notre étude. Malheureusement, les données expérimentales à des rapports d'aspect intermédiaires (entre 100 et 500) sont encore rares.

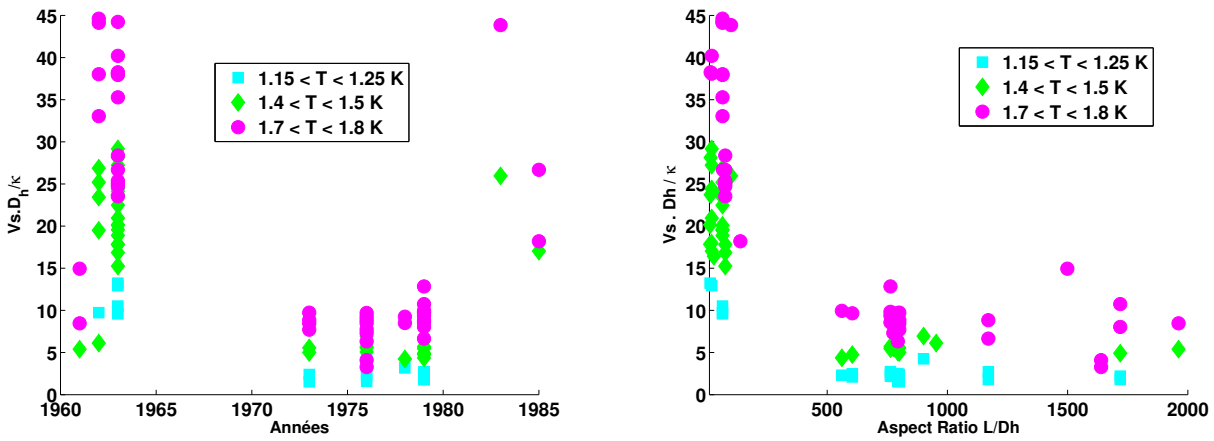


FIGURE 3.14: Représentations graphiques des disparités expérimentales dans l'évaluation de la vitesse critique superfluide à l'origine de la transition T1. A gauche en fonction des années et à droite en fonction du rapport d'aspect de la conduite.

Notre étude permet de proposer une seconde mise en garde concernant l'interprétation de mesures expérimentales. On sait que la perte de charge (ou chute de pression) aux extrémités d'un conduite est parfois utilisée pour détecter l'apparition de la transition T1. La figure 3.15 montre que l'excès de perte de charge dû à l'effet d'entrée superfluide (à gauche) peut-être confondue avec la signature de la transition T1 (Figure de droite, ici une mesure expérimentale de Tough (1982)). Notons toutefois que cet artefact conduit à sous-estimer la vitesse critique, alors que les mesures expérimentales à faible rapport d'aspect de la figure 3.14 (droite) correspondent plutôt à une surestimation. Ceci s'explique probablement par le fait que les mesures de perte de charge sont peu utilisées sur des conduites de fort diamètre, donc de faible rapport d'aspect. Pour finir, mentionnons que cet effet avait déjà été pressenti en 1957 par Vinen (1957a).

Impact de l'effet d'entrée superfluide

Transition T1 (Childers et Tough (1976))

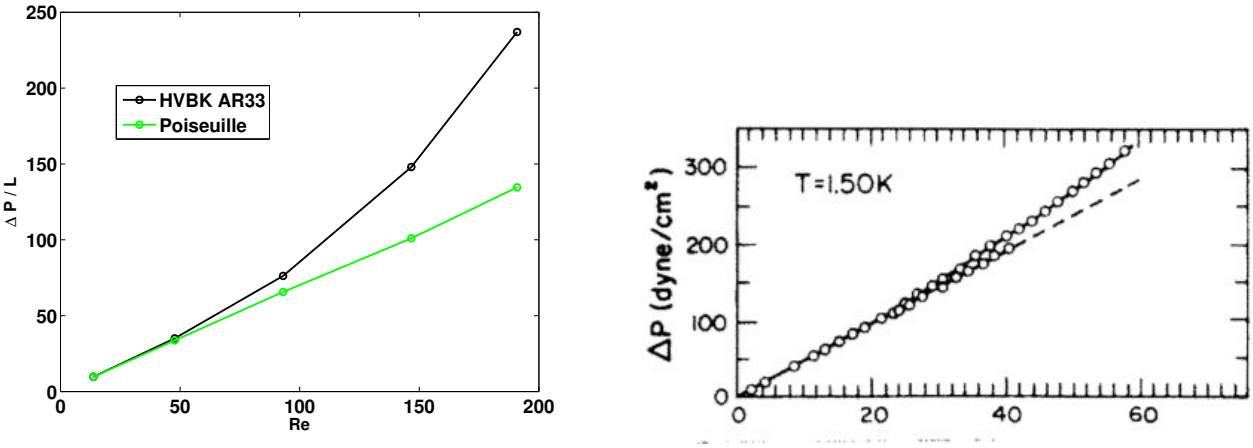


FIGURE 3.15: Mauvaise interprétation possible de la transition T1. A gauche nos simulations à T=1,5 K, en utilisant le schéma BGK standard dans une conduite de rapport d'aspect 33, en dessous de T1. A droite un résultat expérimental obtenu par Childers et Tough (1976) à 1,5 K, dans une conduite de rapport d'aspect 775 environ. La prédiction linéaire correspond à un écoulement de type Poiseuille pour les deux graphiques.

Pour conclure ce chapitre, rappelons que les conclusions de cette étude ne sont a priori pas transposables à la transition T2. Quelques premières simulations exploratoires suggèreraient que les longueurs

d'entrée soient réduites entre T1 et T2, ce qui rappelle la réduction bien connue en hydrodynamique classique pour les écoulements turbulents.

Chapitre 4

Ecoulement autour d'un cylindre en contre-courant

4.1 La configuration de nos calculs **70**
4.2 La validation du code pour un écoulement autour d'un cylindre **72**
4.3 Les différents régimes dynamiques observés **74**
4.4 L'influence de la viscosité artificielle et du blocage **77**
4.5 Un résumé schématique des régimes dynamiques observés en 2D **78**
4.6 Un nouvel éclairage sur les observations expérimentales **78**
4.7 Conclusion des simulations en 2D **79**
4.8 La persistence du phénomène en 3D : résultats préliminaires **80**

Les techniques expérimentales telles que la *Particle Image Velocimetry* (PIV) ou encore la *Particle Tracking Velocimetry* (PTV) rendent possible la visualisation des écoulements de contre-courant superfluide. Au début des années 2000, Van Sciver et Zhang visualisent l'écoulement de contre-courant superfluide autour d'un cylindre (Zhang et Van Sciver (2005b)) ; (Fuzier, Van Sciver, et Zhang (2006)). Il est ressorti un résultat fort de ces expériences : l'existence de tourbillons à la fois en amont et en aval du cylindre, par rapport au sens du flux de chaleur (de la gauche vers la droite, sur la figure 4.1).

Dans le cas classique ces tourbillons ne seraient présents qu'en aval du cylindre. Dans cette partie, nous utiliserons les termes "amont" et "aval" par rapport au sens de l'écoulement du fluide normal (sens du flux de chaleur). Les structures tourbillonaires, qui apparaissent en amont du cylindre à partir d'un certain nombre de Reynolds, sont stationnaires et paraissent être confinées près des parois du canal, de façon assez symétrique, alors que celles situées en aval sont attachées au cylindre à bas nombre de Reynolds puis se détachent lorsque le nombre de Reynolds augmente (Chagovets et Van Sciver (2013)). Zhang et Van Sciver (2005b) interprètent cette observation en précisant : "... the current results indicate that both components may be undergoing a kind of flow separation as they pass over the cylinder". Ils s'étonnent par ailleurs : "vortex structures present in these counterflow He(II) experiments show behaviour that is qualitatively similar to the steady wakes seen in classical flow over a cylinder at low Reynolds number, $Re_D < 50$". Alors que les nombres de Reynolds appliqués sont plutôt de l'ordre de 1000. D'autres expériences de visualisation ont été réalisées après ce travail de T. Zhang et S.W. Van Sciver (Fuzier, Van Sciver, et Zhang (2006)) ; (Chagovets et Van Sciver (2013)) ; (Duda, La Mantia, Rotter, et Skrbek (2014)) qui confirment l'apparition des tourbillons stationnaires en amont du cylindre. Une proposition d'explication qualitative de la position de ces structures a été proposée pour

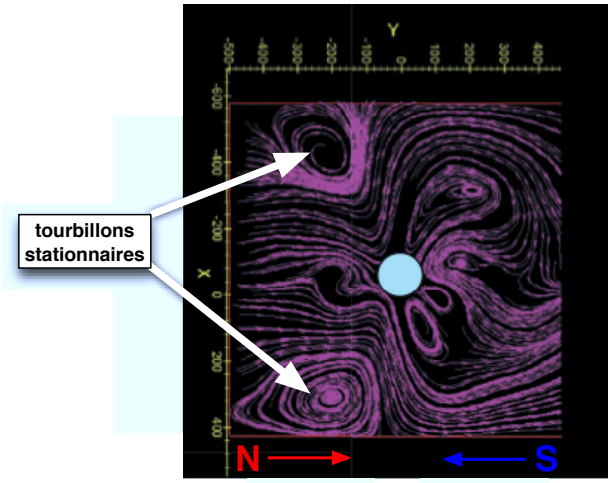


FIGURE 4.1: Visualisation expérimentale par PIV d'un écoulement de contre-courant superfluide autour d'un cylindre à T=2,03 K (Zhang et Van Sciver (2005b)). Le nombre de Reynolds construit avec la densité totale, le diamètre du cylindre, et la vitesse moyenne du fluide normal ($Re_\rho \equiv \frac{\rho V_n D}{\eta_n}$) est égal à 4185 soit $Re = 2520$ d'après l'équation (3.0.2). Le fluide normal s'écoule de la gauche vers la droite.

un fluide eulérien (Sergeev et Barenghi (2009)), cependant il est reconnu que le mécanisme responsable de l'apparition de ces tourbillons en amont n'est toujours pas élucidé (Chagovets et Van Sciver (2013)).

La visualisation expérimentale qui consiste à suivre le mouvement de particules infinitésimales (micro-bille polymère d'un diamètre de 1,7 μm et de densité 1100 kg.m^{-3}) transportées par l'écoulement ne permet pas de dissocier les dynamiques propres des deux composantes de l'hélium II (Zhang et Van Sciver (2005a)). Les particules ressentent la résultante des actions dynamiques des deux composantes. Il résulte souvent des techniques de visualisation PIV un unique champ de vitesse, on comprend dès lors la difficulté d'interprétation des résultats pour décrire le comportement des deux fluides. Dans ce contexte une simulation numérique de l'écoulement va permettre de séparer la dynamique propre des deux composantes de l'hélium II et de déterminer la nature de ces tourbillons.

Dans ce dernier chapitre, nous allons présenter nos simulations en 2D (principalement) et en 3D de contre-courant superfluide autour d'un cylindre placé au centre de la conduite. Dans un premier temps, le couplage mutuel entre les deux fluides sera ignoré. Dans un second temps, nous rétablirons la force de couplage de type HVBK. Enfin nous insisterons sur l'importance de la force de couplage entre les deux fluides pour comprendre l'apparition des tourbillons stationnaires (qui peuvent aussi être vus comme des zones de recirculation) en amont du cylindre.

Par l'approche numérique, notre objectif est de contribuer à la description qualificative de ce phénomène, en complément de l'approche expérimentale. Par ailleurs il s'agira de montrer la pertinence de notre modélisation numérique pour aborder les écoulements de contre-courant dans des géométries complexes, en particulier en vue d'applications industrielles.

4.1 La configuration de nos calculs

Comme nous l'avons expliqué dans la partie modélisation du chapitre 2, nous avons utilisé le schéma BGK conjointement avec la règle dite de *Halfway Bounce Back* pour le fluide normal et la règle de réflexion spéculaire pour la composante superfluide. Ceci implique que la surface de notre cylindre, ici

un cercle puisque nous sommes en deux dimensions, est approximée par la discrétisation du réseau. L'erreur est d'autant plus faible que la résolution est élevée. La résolution est choisie suffisamment élevée pour limiter les effets de discrétisation de la surface du cylindre, comme le schématise la figure 4.2. Le diamètre du cylindre notée D est représentée par 8 ou 12 noeuds typiquement ce qui peut paraitre faible, mais la hauteur de la conduite est 10 fois grande, pour un rapport d'aspect égal à 10. Avec une résolution deux fois plus élevée, nous n'avons pas observé de différence notable sur l'écoulement.
Pour améliorer la stabilité du schéma Boltzmann sur réseau à haut nombre de Reynolds nous avons utilisé une procédure de régularisation (Latt et Chopard (2006)) qui consiste à "a priori" éliminer (par projection) les modes non-physiques de la partie non-équilibre des distributions. Même si l'on ne peut pas exclure que la procédure de régularisation puisse engendrer un biais quantitatif sur les résultats (par rapport à la formulation originale du schéma BGK) nous pensons que cela ne remet pas en cause notre approche qualitative. L'efficacité numérique apportée par cette approche a été privilégiée pour cette première étude exploratoire.

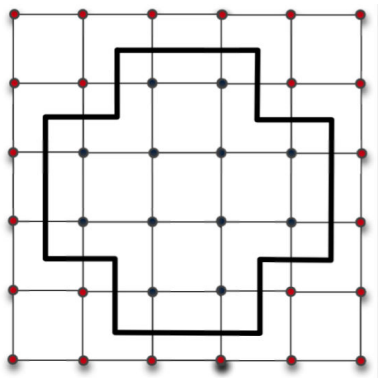


FIGURE 4.2: Discrétisation en escalier d'un disque sur le réseau D2Q9, en accord avec la loi de rebond *Halfway Bounce Back*. Les noeuds rouges sont des noeuds fluides et les noeuds noirs des noeuds solides.

Les simulations présentées ci-dessous sont réalisées à la température de T=1,96 K afin de pouvoir être comparées plus facilement aux résultats expérimentaux de T. Zhang et S.W. Van Sciver. A cette température, la proportion de fluide normal et la proportion de superfluide sont presque égales : $\rho_s/\rho_n \simeq 1,02$. D'après la condition de contre-courant, les vitesses du fluide normal et du superfluide sont très similaires : la comparaison entre les deux composantes est ainsi facilitée par ce choix de température. Les données physiques des deux fluides, et les coefficients de couplage B, B' ont été extraits des tables de valeurs de Donnelly et Barenghi (1998) et sont regroupées dans le tableau 6.1, en annexe. On rappelle l'expression du couplage HVBK entre les deux fluides (en ignorant la force de tension de lignes de vortex) :

$$\mathbf{F_{ns}} = \frac{B}{2}\frac{\rho_s\rho_n}{\rho}\hat{\omega}_\mathbf{s} \times [\omega_\mathbf{s} \times (\mathbf{v_n} - \mathbf{v_s})] + \frac{B'}{2}\frac{\rho_s\rho_n}{\rho}\omega_\mathbf{s} \times (\mathbf{v_n} - \mathbf{v_s}) \tag{4.1.1}$$

Pour cette température, nous avons choisi des thermostats de rapport d'aspect égal à 3 et un canal de rapport d'aspect égal à 10 pour que les effets d'entrée liés aux langues de vorticité issues du thermostat froid (étudiées au chapitre 3) n'atteignent pas le cylindre situé au centre de la conduite, pour les nombres de Reynolds considérés. Conjointement, une configuration périodique du code ne faisant plus intervenir de thermostats, et donc d'effets d'entrée, a été utilisée pour confirmer que les résultats présentés ci-dessous n'étaient pas un artéfact engendré par la présence des langues de vorticité, ou par un phénomène de recirculation dans les thermostats.

La source chaude de l'écoulement de contre-courant est toujours située à gauche du cylindre, de telle sorte que le fluide normal s'écoule de la gauche vers la droite sur les figures présentées. Les figures ne représentent pas la conduite dans son ensemble, mais seulement une fenêtre autour du cylindre, située typiquement au milieu de la conduite. Un paramètre supplémentaire sans dimension est nécessaire pour caractériser l'écoulement autour du cylindre, il s'agit du coefficient de "blocage" noté B_c, défini comme le rapport entre la diamètre du cylindre et la hauteur de la conduite. Dans notre cas, $B_c = 1/10$, identique à l'expérience de T. Zhang et S.W. Van Sciver. Comme dans le chapitre 3, le rapport des viscosités vaut $\nu_s/\nu_n = 1/25$. Le nombre de Reynolds est évalué en utilisant l'équation (3.0.2), en considérant le diamètre du cylindre (noté D) comme longueur caractéristique.

Géométrie (unités LBM)				
hauteur ($2h$)	longueur (L)	rapport d'aspect	blocage (B_c)	longueur des thermostats
80	800	10	1/10	240/240
120	1200	10	1/10	360/360

TABLEAU 4.1: Résumé des paramètres géométriques utilisés pour les simulations de contre-courant superfluide autour d'un cylindre à T=1,96 K.

4.2 La validation du code pour un écoulement autour d'un cylindre

Dans cette section nous avons désactivé le couplage entre les deux fluides. Notre objectif est de valider le code numérique dans le cas d'un écoulement autour d'un cylindre, en retrouvant le comportement d'un fluide classique pour le fluide normal, et d'appréhender l'effet du glissement total sur le cylindre pour la composante superfluide. La figure 4.3 présente les lignes de champs de vitesse pour deux nombres de Reynolds $Re = Re_n \equiv \frac{\rho_n V_n D}{\eta_n} = 19$ et $Re_n = 475$. Comme le rapport des viscosités cinématiques ν_s/ν_n est égal à 1/25 et qu'à T=1,96 K le rapport $\rho_s/\rho_n \backsimeq 1,02$ alors la condition de contre-courant fait en sorte que $V_n \backsimeq V_s$, ainsi le nombre de Reynolds pour la composante superfluide est donc égal approximativement à $Re_s = \frac{\rho_s V_s D}{\eta_s} = 475 \backsimeq 25 Re_n$ avec $Re_n = 19$. Pour mieux appréhender les différences entre la composante normale et la composante superfluide, nous avons effectué une simulation "symétrique" avec un nombre de Reynolds associé au fluide normal égal à $Re_n = 475$ et un nombre de Reynolds pour la composante superfluide égal à $Re_s = 19$.

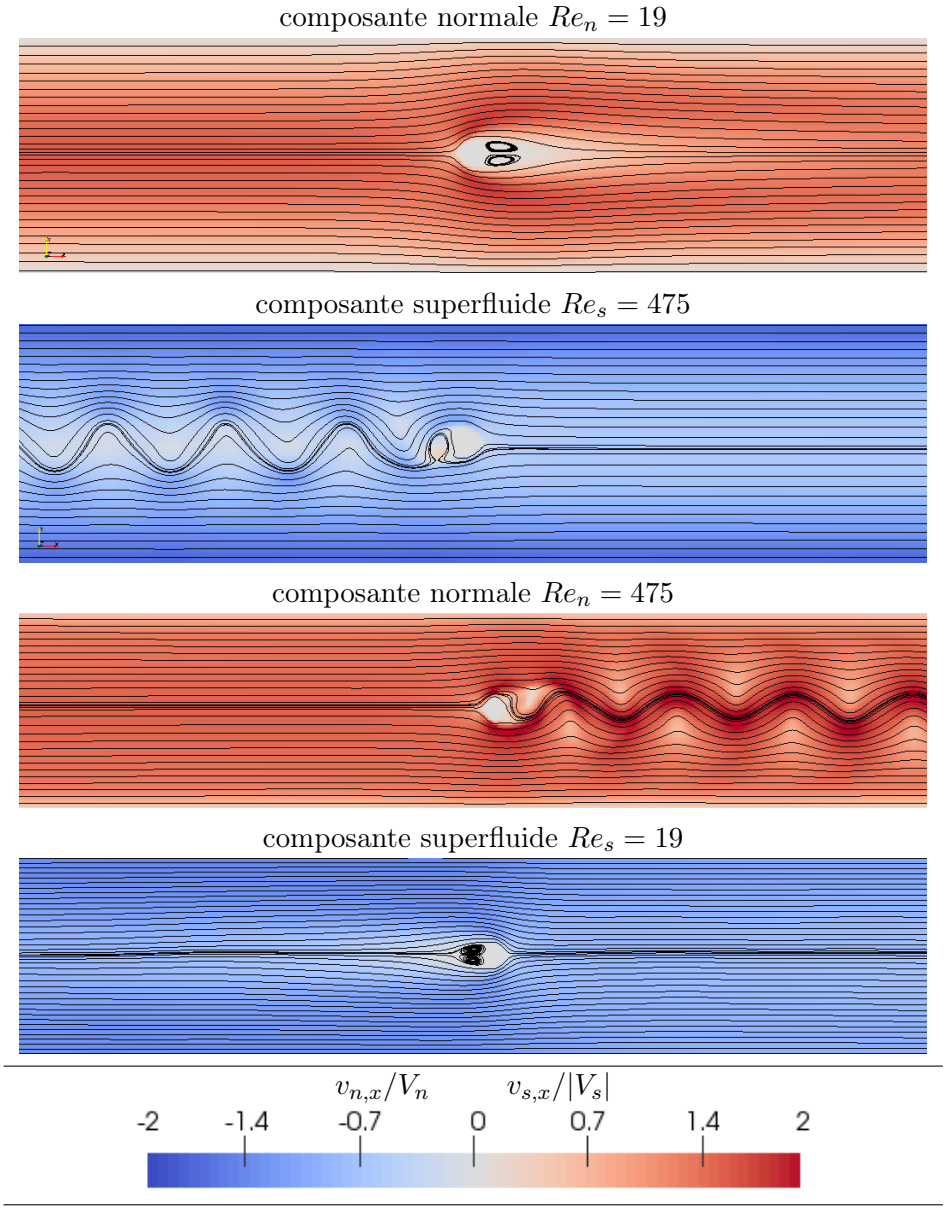


FIGURE 4.3: Lignes de champs de vitesse à T=1,96 K, sans couplage entre les deux fluides. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe.

A $Re_n = 19$ dans le sillage du cylindre, il se crée deux zones de recirculation symétriques ou tourbillons stationnaires de fluide normal attachés au cylindre, caractéristiques d'un écoulement d'un fluide classique autour d'un cylindre pour un nombre de Reynolds compris entre 10 et 40, par exemple (Arumuga, Kumar, et Dass (2014)). Un comportement similaire est observé pour la composante superfluide à $Re_s = 19$ malgré la condition de glissement.

A $Re_n = 475$ pour la composante normale comme pour la composante superfluide l'écoulement n'est plus stationnaire et on observe un sillage sinueux qui résulte du détachement alterné de tourbillons, dans le sillage de chacun des fluides. On retrouve donc un comportement pour la composante superfluide similaire à celui d'un fluide classique pour un nombre de Reynolds équivalent. La condition de glissement n'affecte pas qualitativement la nature du sillage.

4.3 Les différents régimes dynamiques observés

Nous ré-introduisons maintenant le couplage de type HVBK. Pour faciliter la lecture des graphiques, nous avons adimensionné les champs de vitesse par les vitesses moyennes respectives, représentés avec la même échelle de couleurs, et ceci pour tous les nombres de Reynolds considérés.

Aux plus faibles vitesses de contre-courant, ici $Re = Re_n = 2,0$, la figure 4.4 présente les champs de vitesse de la composante normale et de la composante superfluide dans un régime dynamique que nous appellerons "R1". Cet état persiste typiquement pour un nombre de Reynolds dans l'intervalle $0.5 < Re_n < 5$. Pour les deux composantes, les lignes de champ contournent le cylindre et restent régulières, on n'observe pas de différence notable. Ce qui peut paraitre étonnant étant données les différences de nombre de Reynolds entre les deux composantes. En revanche la représentation en couleur de l'intensité des champs de vitesse montre que les répartitions des vitesses maximales des deux composantes sont opposées. Pour la composante superfluide, il existe un "cône d'ombre" dans le sillage du cylindre à l'intérieur duquel la vitesse du superfluide est plus faible qu'à l'extérieur. En effet le superfluide s'échappe sur les parois de la conduite, après avoir contourné le cylindre. Ce phénomène est surprenant et l'on observe que c'est au voisinage de la paroi que la vitesse du superfluide est la plus importante. Cela n'est possible que parce que le superfluide peut glisser sur les parois de la conduite. Nous allons voir que ce phénomène s'amplifie lorsque le nombre de Reynolds augmente.

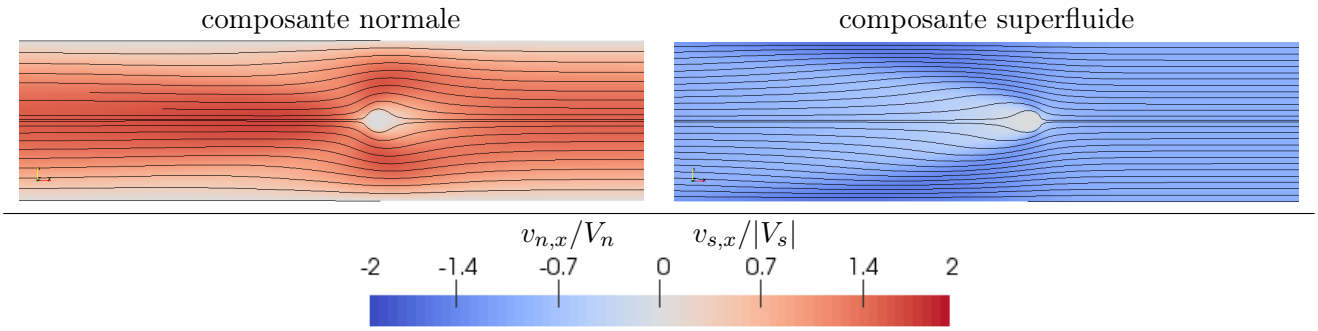


FIGURE 4.4: Régime R1 : ligne de champs de vitesse à T=1,96 K, contre-courant superfluide autour d'un cylindre. Aux nombres de Reynolds les plus faibles, ici $Re_n = 2,0$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe.

La figure 4.5 présente le régime que nous appellerons "R2", qui suit le régime dynamique "R1" quand on augmente la vitesse de contre-courant. Cet état persiste typiquement pour un nombre de Reynolds dans l'intervalle $5 < Re_n < 18,5$ (sur la figure : $Re_n = 10$). Une paire symétrique de tourbillons stationnaires apparait dans le sillage du cylindre pour la composante normale. Ces tourbillons restent attachés au cylindre. Il s'agit du comportement classique d'un fluide visqueux à faible nombre de Reynolds. Pour la composante superfluide on observe toujours le "cône d'ombre" avec plus de contraste, c'est-à-dire que la différence de vitesse superfluide entre l'intérieur du cône et à la paroi est plus importante. On voit qu'au contraire le fluide normal a une vitesse axiale plus importante à l'intérieur du "cône d'ombre" formé par le superfluide. Ce comportement était déjà visible à $Re_n = 2$ (sur la figure 4.4) mais moins marqué.

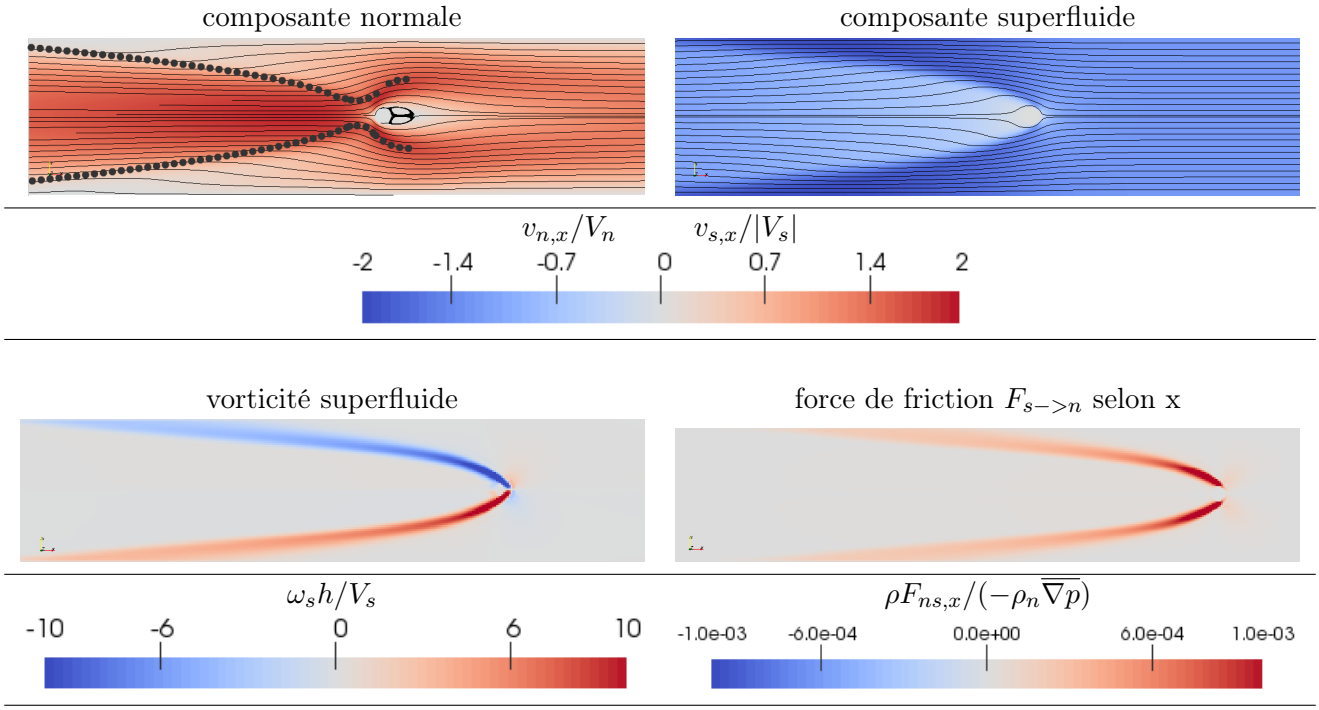


FIGURE 4.5: Régime R2 : ligne de champs de vitesse à T=1,96 K, contre-courant autour d'un cylindre. Aux nombres de Reynolds les plus faibles, ici $Re_n = 10$. Les pointillés noires matérialisent la "paroi virtuelle" qui se forme dans l'écoulement. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe.

On peut noter que la composante superfluide est toujours régulière et il n'y a pas de tourbillons bien que le nombre de Reynolds associé à la composante superfluide soit $Re_s = 250$. On s'attend donc à ce que la friction mutuelle joue directement un rôle prépondérant pour stabiliser l'écoulement superfluide. Pour mettre en évidence ce rôle nous avons réalisé la même simulation mais sans couplage. Il apparait que la nature de l'écoulement est totalement différente, comme en atteste la figure 4.6 sur laquelle on retrouve un écoulement sinueux dans le sillage du cylindre pour le superfluide.

On constate, sur la figure 4.5 que la vorticité superfluide dessine un sillage en forme "d'entonnoir" autour du cylindre. Il est formé par deux bandes s'échappant du cylindre et rejoignant la paroi de la conduite. Ces bandes correspondent également à l'intensité maximale de la force de friction entre les deux composantes, qui est presque partout ailleurs nulle. Sur cette zone, le couplage par friction entre les deux fluides ralentit la composante normale ainsi que la composante superfluide. L'écoulement produit donc des sortes de "parois virtuelles" (poreuses) représentées schématiquement sur la figure 4.5 à l'aide de pointillés, qui défléchissent les deux fluides. Par effet d'entonnoir, qui s'apparente à un effet de Venturi pour le fluide normal, la vitesse de ce dernier augmente au centre de cette zone. Réciproquement, cet entonnoir repousse vers les bords l'écoulement du superfluide.

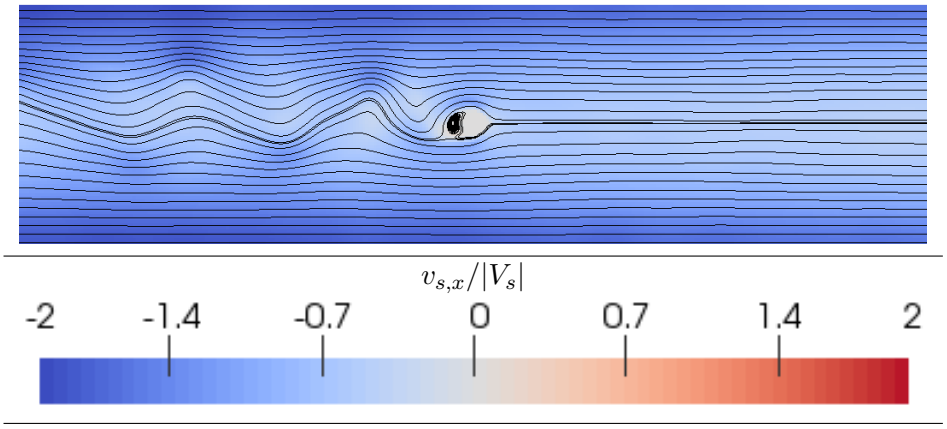


FIGURE 4.6: Lignes de champs de vitesse superfluide à T=1,96 K, sans couplage entre les deux fluides. Le nombre de Reynolds associé au superfluide est $Re_s = 250$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe.

Le régime appelé "R3" persiste pour un nombre de Reynolds Re_n compris entre 18,5 et 20,5, (Figure 4.7). En augmentant l'intensité du contre-courant, les effets décrits précédemment pour le regime R2 s'intensifient. Les bandes de friction sont plus intenses et le fluide normal ne parvient pas à les traverser. Il apparait alors une zone de recirculation du fluide normal entre la base du cône et les parois. Par ailleurs les tourbillons de sillage s'étirent mais restent attachés, pour les nombres de Reynolds Re_n compris dans le régime R3. La composante superfluide reste quand à elle stable et régulière bien que son nombre de Reynolds soit $Re_s = 475$. Cette stabilité est assurée par la friction mutuelle entre les deux composantes, comme en atteste la comparaison à même nombre de Reynolds établie sans couplage HVBK sur la figure 4.6. L'écoulement est stationnaire pour les deux composantes. Notons que l'apparition d'une paroi virtuelle abaisse le nombre de Reynolds superfluide local dans la zone d'ombre du cylindre, favorisant ainsi la stabilité de l'écoulement dans cette zone.

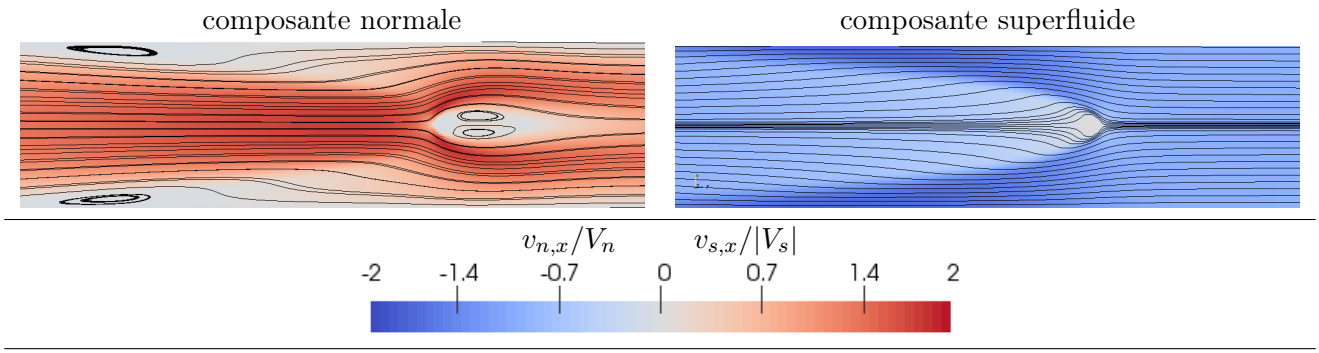


FIGURE 4.7: Régime R3 : lignes de champs de vitesse à T=1,96 K, contre-courant autour d'un cylindre pour $Re_n = 19$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe.

La figure 4.8 représente l'énergie dissipée par friction dans le régime R3 à $Re = Re_n = 19$. L'échelle de couleur n'est pas saturée, elle représente le minium et le maximum de la valeur de la puissance. On retrouve les parois virtuelles où la vorticité du superfluide est concentrée. L'intensité maximale de la dissipation par friction apparait au voisinage du cylindre, là où les deux fluides se croisent avec une vitesse relative maximale.

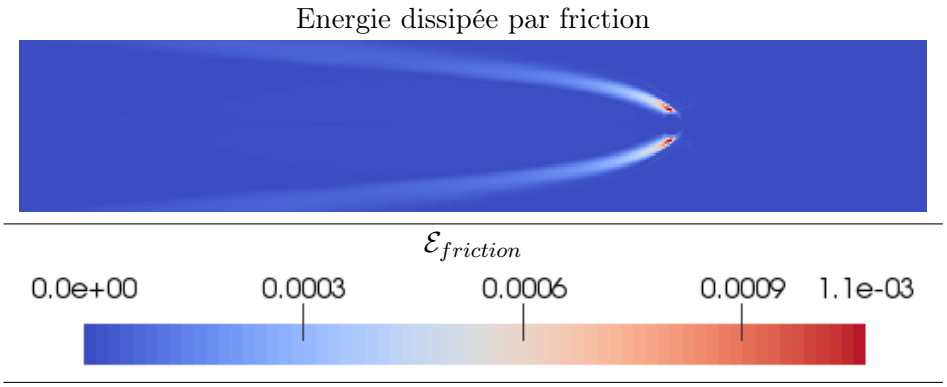


FIGURE 4.8: Energie dissipée par friction mutuelle entre les deux composantes à T=1,96 K et $Re_n = 19$ (dans le régime R3).

La figure 4.9 représente le régime baptisé "R4". Au delà de $Re = Re_n = 20,5$, les tourbillons du fluide normal en amont du cylindre sont toujours présents. Dans le sillage du cylindre, les tourbillons qui s'étiraient dans le régime R3 finissent par se détacher alternativement et forment une allée de tourbillons, l'écoulement du fluide normal devient instationnaire et sinueux (Arumuga, Kumar, et Dass (2014)). On retrouve le comportement d'un fluide classique en aval du cylindre. La composante superfluide reste quant à elle toujours stable et régulière. Bien que son nombre de Reynolds soit $Re_s = 512$ il ne se forme aucun tourbillon, témoignant de l'effet marquant du couplage par friction mutuelle et du rôle des parois virtuelles se formant dans l'écoulement.

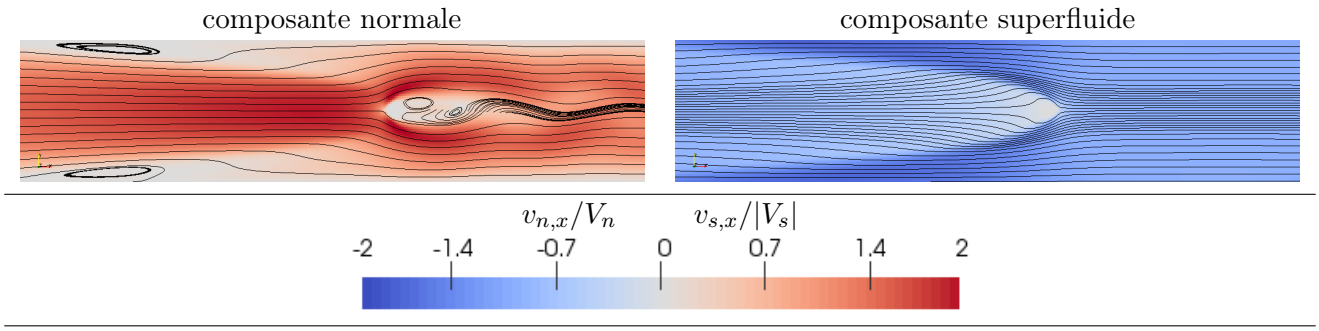


FIGURE 4.9: Régime R4 : ligne de champs de vitesse à T=1,96 K, contre-courant autour d'un cylindre. Ici $Re_n = 20,5$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe.

4.4 L'influence de la viscosité artificielle et du blocage

Nous avons évalué l'influence de la viscosité artificielle superfluide (qui est une contrainte de notre modélisation) sur l'établissement de ces différents régimes dynamiques. Nous avons comparé, à coefficient de blocage constant, les rapports de viscosités $\nu_s/\nu_n = 1/25$ et $\nu_s/\nu_n = 1/100$. D'un point de vue qualitatif les mêmes régimes sont obtenus sur des plages de nombres de Reynolds semblables. D'un point de vue quantitatif la position des tourbillons en amont du cylindre est faiblement modifiée. Typiquement à $Re_n = 19$ la distance du centre d'un tourbillon au centre du cylindre augmente de 10%. Nous avons également examiné l'effet du blocage : si le blocage augmente les deux tourbillons en amont se rapprochent du cylindre. Ce résultat est cohérent avec l'observation que les "bandes de friction" rejoignent plus rapidement les parois. Les résultats sont regroupés dans le tableau 4.2. On note $l_v/2h$ la distance adimensionnée des tourbillons en amont du cylindre.

En conclusion, nous n'avons pas relevé d'effet notable de la viscosité artificielle du superfluide sur la nature de l'écoulement. Les régimes dynamiques observés sont robustes, et apparaissent pour les 3 différentes valeurs du coefficient de blocage simulées : B_c =1/10, 2/10 et 4/10.

Position des tourbillons en amont à $Re_n = 19$				
Viscosité artificielle ν_s/ν_n	1/25	1/25	1/25	1/100
Blocage B_c	1/10	2/10	4/10	1/10
Positions des tourbillons $l_v/2h$	$1,87$	$1,64$	$1,50$	$2,07$

TABLEAU 4.2: Résultats de l'influence de la viscosité artificielle du superfluide : rapport ν_s/ν_n et du blocage B_c sur la position des tourbillons en amont du cylindre. Pour $Re_n = 19$ soit dans le régime R3.

4.5 Un résumé schématique des régimes dynamiques observés en 2D

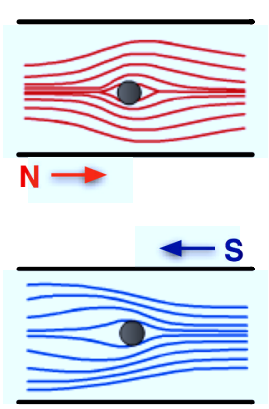
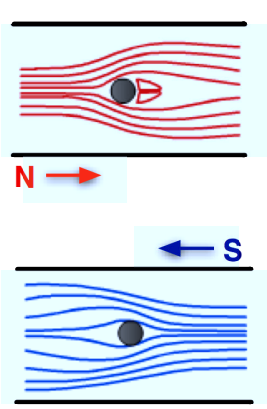
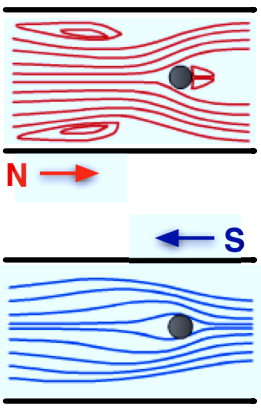
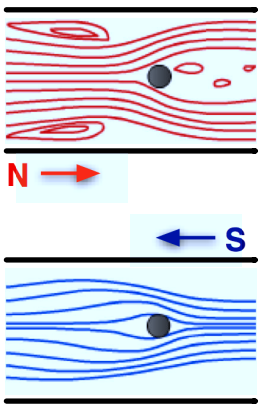
Régimes de contre-courant autour d'un cylindre dans une conduite 2D à T=1,96 K				
				
	$Re_n < 5,0$	$5,0 \leq Re_n < 18,5$	$18,5 \leq Re_n < 20,5$	$20,5 \leq Re_n$
N	régulier stationnaire	1 paire de tourbillons attachés au cylindre en aval stationnaire	1 paire de tourbillons fixes en amont 1 paire de tourbillons attachés au cylindre en aval stationnaire	1 paire de tourbillons fixes en amont 1 allée de tourbillons en aval instationnaire
S	régulier stationnaire	régulier stationnaire	régulier stationnaire	régulier stationnaire

TABLEAU 4.3: Les différents régimes dynamiques observés. A titre indicatif nous avons mentionné les plages de nombres de Reynolds associées.

4.6 Un nouvel éclairage sur les observations expérimentales

Il est intéressant de revenir aux observations de Zhang et Van Sciver (2005b) et de voir dans quelle mesure nos résultats permettent d'interpréter la figure 4.1.

Rappelons d'abord la configuration expérimentale de Fuzier, Van Sciver, et Zhang (2006). L'écoulement de contre-courant, à la température de T=2,03 K environ, prend place dans une conduite de section rectangulaire (19,5 mm par 38,9 mm) et de longueur 200 mm (rapport d'aspect 10 environ, comme dans notre configuration). Un cylindre de 40 mm de long et de diamètre 2 mm est placé à l'intérieur de la conduite, perpendiculairement à l'axe de l'écoulement ($B_c = 1/10$ comme dans notre configuration). Nous avons converti les nombres de Reynolds associés à la figure de l'article, notés Re_ρ, établis avec la densité totale, avec notre définition du nombre de Reynolds utilisant la densité du fluide normal, d'après l'équation (3.0.2). Ces tourbillons en amont sont observés à $Re_\rho = 4185$ soit $Re_n = 2520$.

La figure 4.1 présente des similarités avec notre régime R4. On retrouve les tourbillons quasi stationnaires en amont et des structures tourbillonnaires en aval de l'obstacle, qui se détachent. Pour autant, les nombres de Reynolds mis en jeu dans nos simulations 2D sont 2 ordres de grandeurs inférieurs à ceux de l'expérience. La comparaison entre un écoulement à deux dimensions et un écoulement à trois dimensions est délicate. Dans nos simulations les tourbillons en amont sont très éloignés du cylindre. D'un point de vue expérimental ils sont même peut être hors fenêtre de visualisation.

On ne peut pas exclure que la composante superfluide ne soit pas régulière dans les conditions expérimentales. Cependant nos simulations indiquent que l'existence de tourbillons en amont n'est pas nécessairement la signature d'un sillage tourbillonnaire de la composante superfluide, comme cela a été proposé. Un autre mécanisme permet d'expliquer l'apparition de recirculation de fluide normal : la concentration sur le cône de la vorticité superfluide conduit à la formation de parois virtuelles (poreuses) qui guident l'écoulement respectif de chacun des deux fluides.

4.7 Conclusion des simulations en 2D

Lorsqu'un cylindre est placé dans un écoulement de contre-courant superfluide modélisé par un couplage mutuel entre les deux fluides de type HVBK, on constate l'existence de 4 régimes hydrodynamiques distincts, notés $R1 - R4$. Ces régimes sont distinguables par le comportement de la composante normale uniquement, la composante superfluide reste quant à elle régulière et stationnaire (sur la plage de nombres de Reynolds testés) sous l'effet du couplage par friction. Dans la régime $R1$, à très faibles nombres de Reynolds, la composante normale est régulière. Quand on augmente le nombre de Reynolds, il se forme une paire de tourbillons attachés au cylindre en aval (régime $R2$). Puis dans la régime $R3$, il existe une paire de tourbillons symétriques et fixes en amont et une paire de tourbillons attachés au cylindre en aval. Au delà de ce régime les tourbillons en amont persistent et une allée de tourbillons se forme dans le sillage du cylindre (régime $R4$).

L'idée proposée dans l'article de T. Zhang et S.W. Van Sciver, à savoir que les tourbillons en amont seraient associés à la composante superfluide alors que les tourbillons en aval seraient relatifs à la composante normale, s'avère ne pas être l'unique interprétation possible des observations expérimentales. Dans nos simulations, nous avons vu que l'écoulement engendre des sortes de parois internes virtuelles, qui modifient la géométrie apparente de l'écoulement, contraignant la composante normale à s'écouler dans un entonnoir et la composante superfluide à le contourner. Ces effets non-triviaux et contre intuitifs engendrés par la force de friction mutuelle conduisent à la création de tourbillons de recirculation (stationnaires) en amont du cylindre. La description qualitative de l'écoulement par le nombre de Reynolds classique semble ne plus être adaptée à ce type d'écoulement. Il serait sans doute

intéressant d'introduire un nombre sans dimension supplémentaire pour comparer la force de friction aux forces visqueuses, et tenter ainsi de caractériser l'apparition des tourbillons en amont du cylindre en fonction de la valeur de ce paramètre (de façon indépendante de la température) ; on obtiendrait ainsi $Re_B = \frac{B\rho_n}{2\rho_s} Re_n$. Cependant, ces tentatives qui consistent à former un nombre scalaire pour caractériser l'écoulement observé peuvent s'avérer insuffisantes pour décrire la formation de ces parois virtuelles, formes macroscopiques multidimensionnelles, qui contraignent les deux fluides.

4.8 La persistence du phénomène en 3D : résultats préliminaires

Nos simulations en deux dimensions ont permis de mettre en évidence que la morphologie des écoulements de la composante normale et de la composante superfluide était fortement contrainte par l'effet de la friction mutuelle. Il est maintenant légitime d'étudier la persistence de ces mécanismes en trois dimensions. L'idée est également de se rapprocher des situations expérimentales du point de vue de la géométrie.

A titre préliminaire, nous avons effectué une simulation de contre-courant superfluide autour d'un cylindre en 3D dans une conduite de section carrée avec un coefficient de blocage $B_c = 1/9$ à la température de T=1,96 K. Les simulations présentées ci-dessous ont été réalisées à $Re_n = 30$. Nous nous sommes placés à un nombre de Reynolds suffisamment élevé pour espérer observer l'apparition de structures tourbillonnaires en amont du cylindre. Pour cette simulation unique nous avons repris l'algorithme original BGK.

Les résultats dans le plan central perpendiculaire à l'axe du cylindre sont présentés dans les figures 4.10, 4.11 et 4.12. Qualitativement on retrouve en trois dimensions les mêmes mécanismes liés à la friction mutuelle, même si dans le régime étudié ici l'écoulement de la composante superfluide n'est plus régulier mais devient fortement instationnaire dans le sillage du cylindre.

Sur les figures, on peut identifier les parois virtuelles (poreuses) qui contraignent l'écoulement du fluide normal dans un volume en forme d'entonnoir à l'approche du cylindre, alors que le superfluide est contraint de s'échapper sur les bords dans la direction opposée. Ces parois virtuelles sont de nouveau associées à une concentration de la vorticité superfluide après le passage du cylindre. L'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontal des parois virtuelles est proche de 45 degrés, ce qui a pour conséquence de rapprocher du cylindre (par rapport à la situation 2D) les tourbillons stationnaires de la composante normale situés en amont. On peut également remarquer que les tourbillons attachés au cylindre en aval sont écartés et élargis. Ces deux observations se retrouvent avec les résultats expérimentaux de T. Zhang et S.W. Van Sciver, visibles sur la figure 4.13.

Ces résultats sont encourageants et confirment le fait que les structures observées expérimentalement soient associées uniquement à la composante normale de l'hélium II. Par ailleurs la force de friction mutuelle conditionne complètement la morphologie des écoulements de la composante normale et de la composante superfluide ; la création de parois virtuelles semble robuste.

Un approfondissement et une étude plus systématique des mécanismes mis en jeu mériteraient d'être menés dans la continuité de ces premiers résultats. D'un point de vue mécanique on s'attend à ce que les forces exercées par ce type d'écoulement sur un obstacle soient très particulières, du fait de la présence de structures tourbillonnaires à la fois en amont et en aval de l'obstacle.

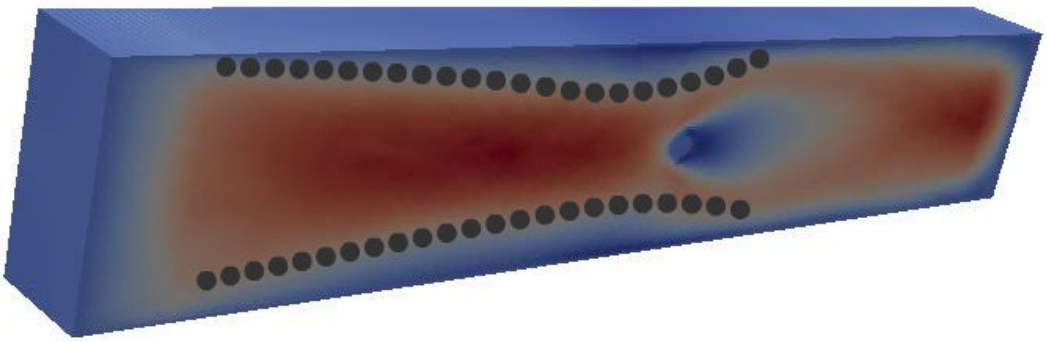


FIGURE 4.10: Résultat d'une simulation 3D : Coupe du champ de vitesse du fluide normal obtenu, dans une conduite de section carrée à la température de T=1,96 K pour un nombre de Reynolds $Re_n = 30$

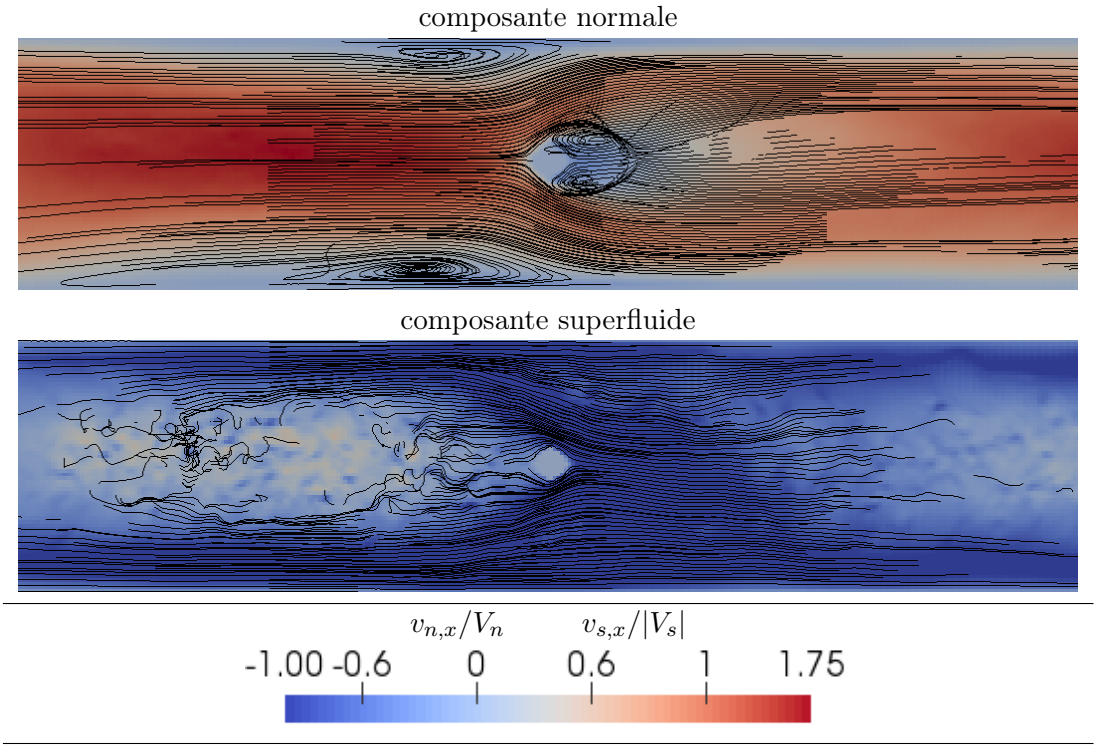


FIGURE 4.11: Résultat d'une simulation 3D : Coupe des champs de vitesse et lignes de champs de vitesse des deux composantes à T=1,96 K, à $Re_n = 30$.

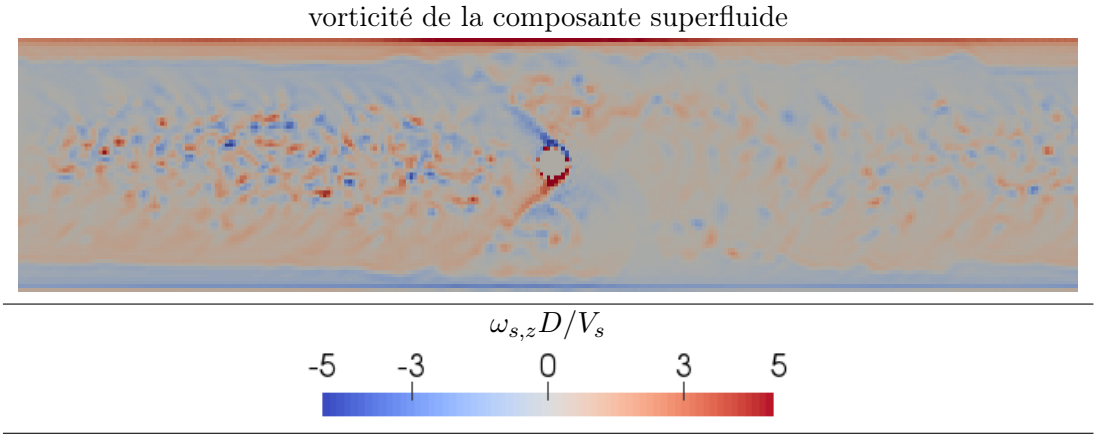


FIGURE 4.12: Résultat d'une simulation 3D : Coupe du champ de vorticité superfluide selon z, à T=1,96 K, à $Re_n = 30$.

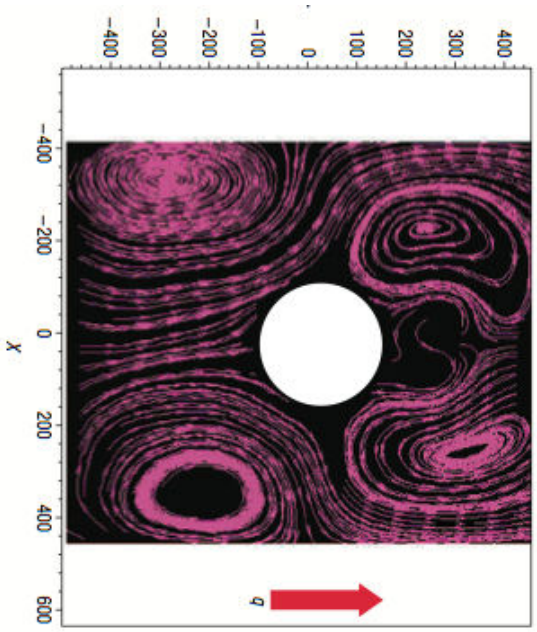


FIGURE 4.13: Visualisation expérimentale par PIV d'un écoulement de contre-courant superfluide autour d'un cylindre à T=2,03 K (Zhang et Van Sciver (2005b)). Le fluide normal s'écoule de la gauche vers la droite.

Chapitre 5

Conclusion

La thèse porte sur la modélisation et la simulation numérique des écoulements de contre-courant en conduite de l'hélium 4 superfluide (He-II). La motivation principale de la thèse est d'étudier numériquement le rôle des effets de bords et de la géométrie, tout en prenant en compte le couplage mutuel entre les deux composantes normale et superfluide de l'He-II, ce qui a rarement été fait dans les études numériques précédentes. Un objectif est de mieux comprendre la grande dispersion, et parfois le manque de consensus, des données expérimentales concernant les écoulements de contre-courant superfluide (instabilités, pertes de charge anormales, etc.).

Le travail réalisé pendant ces 3 années de thèse répond aux objectifs du plan de travail défini dans le cadre du programme Arc-Energies 4 de la région Rhône-Alpes.

Une approche de type Boltzmann sur réseau est développée afin de modéliser la dynamique de l'hélium superfluide à l'échelle mésoscopique ; il s'agit d'une approche complètement originale. Nous montrons que l'approche Boltzmann sur réseau est pertinente pour modéliser les échanges de masse et de quantité de mouvement entre les deux composantes du fluide. Un code parallélisé performant permettant de traiter les écoulements de contre-courant en conduite bidimensionnelle et tridimensionnelle a été développé et validé.

La première problématique physique abordée avec notre code de calcul est la grande dispersion des données expérimentales concernant le premier seuil d'instabilité de l'écoulement de contre-courant superfluide dans une conduite (transition T1). Les résultats numériques obtenus indiquent des effets d'entrée amplifiés pour la composante superfluide, qui engendrent des pertes de charge anormalement élevées. Le mécanisme responsable de ces effets d'entrée est étudié en détail. Dans le cas de conduites trop courtes, ces effets d'entrée peuvent fausser la détection du seuil de transition, ce qui contribue à expliquer la grande dispersion des données expérimentales. L'importance des effets d'entrée avait souvent été avancée dans la littérature pour expliquer certains résultats expérimentaux, mais sans véritable justification. Les résultats obtenus permettent de valider l'existence d'effets d'entrée et d'estimer leur importance.

Une seconde situation physique étudiée avec le code développé concerne les sillages produits par un obstacle cylindrique dans un écoulement de contre-courant. La présence de tourbillons des deux côtés de l'obstacle est confirmée numériquement. Ce phénomène contre-intuitif, déjà observé expérimentalement, reste largement inexpliqué. Les simulations numériques menées nous éclairent sur le mécanisme responsable de l'apparition des tourbillons en amont. En particulier, la friction mutuelle entre les deux composantes de l'He-II joue un rôle essentiel dans ce mécanisme. La notion de paroi virtuelle est introduite et rend compte des phénomènes d'évitement entre les deux courants.

Ce travail largement exploratoire conduit à un ensemble de résultats incluant une modélisation

nouvelle du problème dans le cadre de la méthode Boltzmann sur réseau, le développement d'un code de calcul fonctionnel, et des simulations de deux cas pratiques. Le chiffrage des effets d'entrée et l'introduction du concept du paroi virtuelle fournissent des explications à des observations expérimentales jusqu'ici incomprises.

L'outil numérique développé offre de multiples possibilités d'applications, en particulier vers des configurations industrielles plus complexes comme l'écoulement superfluide autour des bobinages supraconducteurs.

Parmi les perspectives pour prolonger cette étude, il pourrait être intéressant d'améliorer l'efficacité du traitement des conditions aux bords dans l'objectif de pouvoir traiter plus facilement des objets de forte courbure. Pour les calculs tridimensionnels sur des géométries plus complexes et à des nombres de Reynolds élevés, un code massivement parallèle serait nécessaire ; il pourrait éventuellement tirer profits d'accélérateurs de calcul GPU. En effet il existe, selon les modèles, plus de 4000 coeurs par carte graphique à mettre en comparaison avec les 16 coeurs par machine que nous avons pu utiliser simultanément au centre de calcul PSMN de l'ENS de Lyon.

Chapitre 6

Annexe

6.1 Tableaux de paramètres des simulations 85

6.1.1 Données physiques 85

6.1.2 Simulations à 1,5 K sans la procédure de régularisation 86

6.1.3 Simulations à 1,5 K : influence de la viscosité artificielle et de la force de Magnus 86

6.1.4 Simulations à 1,5 K avec la procédure de régularisation 87

6.1.5 Influence de la température, avec la procédure de régularisation 87

6.1.6 Simulations à 1,96 K : contre-courant avec obstacle 88

6.2 Implémentation d'une force extérieure avec la méthode Boltzmann sur réseau 88

6.2.1 Points clés de l'implémentation 93

6.2.2 Analyse du terme d'interaction $J_\alpha^{\sigma,\upsilon}$ du mélange binaire 94

6.3 Choix de la fonction de distribution à l'équilibre 96

6.1 Tableaux de paramètres des simulations

6.1.1 Données physiques

Paramètres physiques							
T (K)	B	B'	ρ (kg.m^{-3})	ρ_n/ρ	ρ_s/ρ	ρ_s/ρ_n	η_n(10^{-6}Pa.s)
1,3	1,526	0,616	145,12	0,045	0,955	21,2	1,528
1,5	1,296	0,317	145,16	0,111	0,889	8,09	1,346
1,7	1,100	0,107	145,27	0,229	0,771	3,37	1,290
1,96	1,296	0,317	145,55	0,4952	05048	1,02	1,409

TABLEAU 6.1: Résumé des paramètres physiques de l'hélium II en fonction de la température, utilisés dans les simulations.

6.1.2 Simulations à 1,5 K sans la procédure de régularisation

Géométrie (unités LBM)				
hauteur ($2h$)	longueur (L)	rapport d'aspect	longueur des thermostats	plage de Re
59	2000	33,9	200/200	[47,74 - 190,9]
118	2000	33,9	400/400	[200 - 500]

TABLEAU 6.2: Résumé des paramètres géométriques utilisés dans la section 3.4.2

Paramètres de la méthode Boltzmann								
Δx (m)	c_s (m.s^{-1})	Mach	τ_n	τ_s	ν_s/ν_n	$\gamma_e c_s$ (m.s^{-1})	Re	Régu.
$2,08.10^{-6}$	$0,646$	0,1	0.6076	0.5043	1/25	$0,626$	47,74	non
$2,08.10^{-6}$	$1,26$	0,1	0.5551	0.5022	1/25	$1,22$	93,08	non
$2,08.10^{-6}$	$1,94$	0,1	0.5350	0.5014	1/25	$1,88$	146,7	non
$2,08.10^{-6}$	$2,58$	0,1	0.5269	0.5011	1/25	$2,50$	190,9	non

TABLEAU 6.3: Résumé des paramètres de la méthode Boltzmann utilisés pour quantifier l'effet d'entrée superfluide à T=1,5 K

6.1.3 Simulations à 1,5 K : influence de la viscosité artificielle et de la force de Magnus

Géométrie (unités LBM)				
hauteur ($2h$)	longueur (L)	rapport d'aspect	longueur des thermostats	influence (nb.simu.)
59	1000	16,9	200/200	Référence (1)
59	1000	16,9	200/200	Magnus (1), ν_s/ν_n (2)

TABLEAU 6.4: Résumé des paramètres géométriques utilisés dans la section 3.4.3

Paramètres de la méthode Boltzmann sur réseau									
Δx (m)	c_s (m.s^{-1})	Mach	τ_n	τ_s	ν_s/ν_n	$\gamma_e c_s$ (m.s^{-1})	Re	Régu.	Note
$2,08.10^{-6}$	$1,94$	0,1	0,53501	0,50140	1/25	$1,88$	146,7	non	Réf.
$2,08.10^{-6}$	$1,94$	0,1	0,53501	0,50140	1/25	$1,88$	146,7	non	Magnus
$2,08.10^{-6}$	$1,94$	0,1	0,53501	0.5140	1/2,5	$1,88$	146,7	non	
$2,08.10^{-6}$	$1,94$	0,1	0.53501	0.5007	1/50	$1,88$	146,7	non	

TABLEAU 6.5: Résumé des paramètres de la méthode Boltzmann sur réseau utilisés pour quantifier l'effet d'entrée superfluide

6.1.4 Simulations à 1,5 K avec la procédure de régularisation

Géométrie (unités LBM)			
hauteur ($2h$)	longueur (L)	rapport d'aspect	longueur des thermostats
59	2000	33,9	200/200

TABLEAU 6.6: Résumé des paramètres géométriques utilisés dans la section 3.5

Paramètres lattice Boltzmann								
Δx (m)	c_s (m.s^{-1})	Mach	τ_n	τ_s	ν_s/ν_n	$\gamma_e c_s$ (m.s^{-1})	Re	Régu.
$2,08.10^{-6}$	$0,646$	0,1	0.605	0.504	1/25	$0,626$	47,74	oui
$2,08.10^{-6}$	$1,261$	0,1	0.535	0.5014	1/25	$1,22$	93,08	oui
$2,08.10^{-6}$	$1,94$	0,1	0.518	0.5007	1/25	$1,88$	146,7	oui
$2,08.10^{-6}$	$2,58$	0,1	0.512	0.5005	1/25	$2,50$	190,9	oui
$2,08.10^{-6}$	$3,88$	0,1	0.509	0.5004	1/25	$3,75$	286,2	oui
$2,08.10^{-6}$	$5,81$	0,1	0.512	0.5005	1/25	$5,63$	429,3	oui
$2,08.10^{-6}$	$8,00$	0,1	0.509	0.5004	1/25	$7,74$	590,8	oui

TABLEAU 6.7: Résumé des paramètres de la méthode Boltzmann sur réseau utilisés avec procédure de régularisation pour étudier le comportement de l'effet d'entrée superfluide à haut nombre de Reynolds

6.1.5 Influence de la température, avec la procédure de régularisation

Géométrie (unités LBM)			
hauteur ($2h$)	longueur (L)	rapport d'aspect	longueur des thermostats
59	2000	34,9	200/200

TABLEAU 6.8: Résumé des paramètres géométriques utilisés dans la section 3.5.1

Paramètres de la méthode Boltzmann sur réseau								
T (K)	Δx	c_s (m.s^{-1})	$\gamma_e.c_s$ (m.s^{-1})	Mach	τ_n	τ_s	ν_s/ν_n	Régu.
1,3	$2,08.10^{-6}$	$0,554$	$0,536$	0,1	0,53514	0,50141	1/25	oui
1,3	$2,08.10^{-6}$	$1,11$	$1,07$	0,1	0,51757	0,50070	1/25	oui
1,3	$2,08.10^{-6}$	$1,66$	$1,61$	0,1	0,51171	0,50047	1/25	oui
1,7	$2,08.10^{-6}$	$1,43$	$1,39$	0,07	0,52254	0,50090	1/25	oui
1,7	$2,08.10^{-6}$	$2,86$	$2,77$	0,07	0,51127	0,50045	1/25	oui
1,7	$2,08.10^{-6}$	$4,30$	$4,16$	0,07	0,50751	0,50030	1/25	oui
1,96	$2,08.10^{-6}$	$1,16$	$1,12$	0,04	0,51402	0,50056	1/25	oui
1,96	$2,08.10^{-6}$	$2,32$	$2,25$	0,04	0,50701	0,50028	1/25	oui
1,96	$2,08.10^{-6}$	$4,30$	$4,16$	0,04	0,50467	0,50019	1/25	oui

TABLEAU 6.9: Résumé des paramètres de la méthode Boltzmann sur réseau utilisés dans la section 3.5.1

6.1.6 Simulations à 1,96 K : contre-courant avec obstacle

Géométrie (unités LBM)				
hauteur ($2h$)	longueur (L)	rapport d'aspect	blocage (B_c)	longueur des thermostats
80	800	10	1/10	240/240
120	1200	10	1/10	360/360

TABLEAU 6.10: Résumé des paramètres géométriques utilisés pour les simulations de contre-courant superfluide autour d'un cylindre à T=1,96 K.

6.2 Implémentation d'une force extérieure avec la méthode Boltzmann sur réseau

Il existe de nombreux problèmes en mécanique des fluides impliquant des forces extérieures. Pour modéliser ces systèmes avec la méthode Boltzmann il faut traiter avec précaution l'ajout d'une force dans le schéma original.

$$f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{c}_\alpha\Delta_t, t+\Delta_t) = f_\alpha(\mathbf{x},t) - \frac{1}{\tau}[f_\alpha(\mathbf{x},t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x},\mathbf{t})] + F_\alpha(\mathbf{x},t)\Delta_t \tag{6.2.1}$$

La force peut s'écrire comme une série de puissance de la vitesse des particules :

$$F_\alpha = \omega_\alpha\left[A + \frac{B_i c_{\alpha i}}{c_s^2} + \frac{C_{ij}(c_{\alpha i}c_{\alpha j} - c_s^2\delta_{ij})}{2c_s^4}\right] \tag{6.2.2}$$

avec A, B_i et C_{ij} fonctions qui seront déterminées en imposant aux moments de la force $\mathbf{F}$ d'être consistants avec les équations hydrodynamiques.

On rappelle que $\sum_\alpha \omega_\alpha = 1$, $\sum_\alpha \omega_\alpha (c_\alpha)^{2n+1} = 0 \;\; \forall n \in \mathbf{N}$, et $\sum_\alpha \omega_\alpha c_{\alpha i} c_{\alpha j} = c_s^2\delta_{ij}$ on obtient

$$\sum_\alpha F_\alpha = A \tag{6.2.3}$$

$$\sum_\alpha F_\alpha c_{\alpha i} = B_i \tag{6.2.4}$$

$$\sum_\alpha F_\alpha c_{\alpha i} c_{\alpha j} = c_s^2 A\delta_{ij} + \frac{1}{2}[C_{ij} + C_{ji}] \tag{6.2.5}$$

Pour retrouver les équations macroscopiques résultant du schéma (6.2.1) on procède par une analyse multi-échelles (ou développement de Chapman-Enskog) utilisant comme paramètre le nombre de Knudsen ϵ, défini comme le rapport du pas sur le réseau par une distance macroscopique caractéristique de l'écoulement. On a $\epsilon = \frac{\delta x}{L} << 1$

On développe les variables spatiales et temporelles, comme des puissances de ϵ :

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\epsilon}\mathbf{x1} + \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{x2} \tag{6.2.6}$$

$$t = \frac{1}{\epsilon}t1 + \frac{1}{\epsilon^2}t2 \tag{6.2.7}$$

ou encore

$$\partial_i = \epsilon\partial_{i1} + \epsilon^2\partial_{i2} \tag{6.2.8}$$

$$\partial_t = \epsilon\partial_{t1} + \epsilon^2\partial_{t2} \tag{6.2.9}$$

Dans l'espace, seulement une échelle macroscopique est considérée parce que les processus comme l'advection ou la diffusion ne se distinguent que par leurs échelles de temps. Dans la suite nous utiliserons donc seulement ∂_{i1}.
On développe de la même façon la fonction de distribution à l'équilibre

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + \epsilon f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 f_\alpha^{(2)} \tag{6.2.10}$$

La force s'écrit $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha{}^{(0)} + \epsilon\mathbf{F}_\alpha^{(\mathbf{1})}$

On effectue un développement de Taylor à l'ordre 2, de la fonction de distribution $f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{c}_\alpha\Delta_t, t+\Delta_t)$ autour de $(\mathbf{x}, t)$

$$f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{c}_\alpha\Delta_t, t+\Delta_t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t)+\Delta_t[c_{i\alpha}\partial_i+\partial t]f_\alpha(\mathbf{x}, t)+\frac{\Delta_t^2}{2}[c_{i\alpha}c_{j\alpha}\partial_{ij}+\partial t^2+2c_{i\alpha}\partial_i\partial t]f_\alpha(\mathbf{x}, t) \tag{6.2.11}$$

On procède par identification entre les équations (6.2.1) et (6.2.11), et on commence l'analyse multi-échelles en regroupant les différentes puissances du nombre de Knudsen.

$$(\epsilon^0) \longrightarrow f_\alpha^{(0)} - f_\alpha^{eq} + F_\alpha^{(0)}\Delta_t = 0 \tag{6.2.12}$$

On impose $\forall\alpha \quad F_\alpha^{(0)} = 0$ d'où $f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{eq}$
On peut décomposer la force en utilisant les fonctions A, B_i, C_{ij}

$$A = A^{(0)} + \epsilon A^{(1)} \quad B_i = B_i^{(0)} + \epsilon B_i^{(1)} \quad C_{ij} = \epsilon C_{ij}^{(1)} \tag{6.2.13}$$

Le choix $\forall\alpha \quad F_\alpha^{(0)} = 0$ est équivalent à $\forall i \quad A^{(0)} + B_i^{(0)} = 0$. En prenant le premier moment de la vitesse sur l'équation d'ordre ϵ^0, on obtient : $\sum_\alpha F_\alpha^{(0)}c_{\alpha i} = \sum_\alpha(A^{(0)} + B_i^{(0)})c_{\alpha i} = 0$, or d'après le moment de F_α équation (6.2.4) on déduit $\forall i \quad B_i^{(0)} = 0$ et donc $A^{(0)} = 0$.

$$(\epsilon^1) \longrightarrow (c_{\alpha i}\partial_{i1} + \partial_{t1})f_\alpha^{(0)}\Delta_t = -\frac{1}{\tau}f_\alpha^{(1)} + F_\alpha^{(1)}\Delta_t \tag{6.2.14}$$

$$\sum_\alpha \longrightarrow \left(\partial_{i1}\sum_\alpha c_{\alpha i} + \partial_{t1}\sum_\alpha\right) f_\alpha^{(0)}\Delta_t = -\frac{1}{\tau}\sum_\alpha f_\alpha^{(1)} + \sum_\alpha F_\alpha^{(1)}\Delta_t \tag{6.2.15}$$

On a montré que $f_\alpha^{(0)} = f_\alpha^{eq}$. De plus $\sum_\alpha f_\alpha^{eq} = \rho$ et $\sum_\alpha c_{\alpha i}f_\alpha^{eq} = \rho u_i$

$$\partial_{i1}(\rho v_i) + \partial_{t1}\rho = -\frac{1}{\tau\Delta}\sum_\alpha f_\alpha^{(1)} + \sum_\alpha F_\alpha^{(1)} \tag{6.2.16}$$

On reconnait dans (6.2.16) l'équation de conversation de la masse. On impose que la force ne modifie pas la masse, elle ne modifie pas le nombre de particules : $\sum_\alpha F_\alpha^{(1)} = 0$. Or on sait que $\sum_\alpha F_\alpha = A = \epsilon A^{(1)}$ d'où $A^{(1)} = 0$

Pour avoir conservation de la masse il faut maintenant que $\sum_\alpha f_\alpha^{(1)} = 0$

Au final on obtient

$$\boxed{\partial_{t1}\rho + \partial_{i1}(\rho v_i) = 0} \tag{6.2.17}$$

$$\sum_\alpha c_{\alpha j} \longrightarrow \left(\partial_{i1}\sum_\alpha c_{\alpha i}c_{\alpha j} + \partial_{t1}\sum_\alpha c_{\alpha j}\right) f_\alpha^{(0)}\Delta_t = -\frac{1}{\tau}\sum_\alpha c_{\alpha j}f_\alpha^{(1)} + \sum_\alpha c_{\alpha j}F_\alpha^{(1)}\Delta_t \tag{6.2.18}$$

On note

$$\Pi_{ij}^{(0)} = \sum_{\alpha} c_{\alpha i} c_{\alpha j} f_{\alpha}^{eq} = c_s^2 \rho \delta_{ij} - \rho v_i u_j \tag{6.2.19}$$

$$\partial_{i1} \Pi_{ij}^{(0)} + \partial_{t1}(\rho u_j) = -\frac{1}{\tau \Delta_t} \sum_{\alpha} c_{\alpha j} f_{\alpha}^{(1)} + \sum_{\alpha} c_{\alpha j} F_{\alpha}^{(1)} \tag{6.2.20}$$

On reconnait l'équation de la conservation de l'impulsion. On souhaite que cette équation soit semblable à celle de Navier-Stokes avec un terme de forçage $\mathcal{F}_j$, qui représente la force macroscopique. Le membre de droite de l'équation (6.2.20) sera donc proportionnel à $\mathcal{F}_j$. On pose :

$$-\frac{1}{\tau \Delta_t} \sum_{\alpha} c_{\alpha j} f_{\alpha}^{(1)} \equiv -\frac{\Gamma}{\tau} \mathcal{F}_j \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} c_{\alpha j} F_{\alpha}^{(1)} \equiv \gamma \mathcal{F}_j \tag{6.2.21}$$

ainsi l'équation (6.2.20) devient

$$\boxed{\partial_{i1} \Pi_{ij}^{(0)} + \partial_{t1}(\rho u_j) = \left(-\tfrac{\Gamma}{\tau} + \gamma\right) \mathcal{F}_j} \tag{6.2.22}$$

avec la condition suivante :

$$-\frac{\Gamma}{\tau} + \gamma = 1 \tag{6.2.23}$$

Au passage en utilisant le premier moment de la force discrétisée (6.2.4) et le développement des fonctions A, B_i, C_{ij} (6.2.13) on trouve l'expression de la fonction $B_j^{(1)} = \sum_{\alpha} c_{\alpha j} F_{\alpha}^{(1)}$.

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha j} c_{\alpha k} \longrightarrow \left(\partial_{i1} \sum_{\alpha} c_{\alpha i} c_{\alpha j} c_{\alpha k} + \partial_{t1} \sum_{\alpha} c_{\alpha j} c_{\alpha k} \right) f_{\alpha}^{(0)} \Delta_t = -\frac{1}{\tau \Delta_t} \sum_{\alpha} c_{\alpha j} c_{\alpha k} f_{\alpha}^{(1)} + \sum_{\alpha} c_{\alpha j} c_{\alpha k} F_{\alpha}^{(1)} \tag{6.2.24}$$

On note Q_{ijk} le troisième moment de la fonction de distribution f_α

$$Q_{ijk} = \sum_{\alpha} c_{\alpha i} c_{\alpha j} c_{\alpha k} f_{\alpha}^{eq} \tag{6.2.25}$$

On obtient une équation de conservation pour le flux d'impulsion

$$\partial_{i1} Q_{ijk}^{(0)} + \partial_{t1} \Pi_{jk}^{(0)} = -\frac{1}{\tau \Delta_t} \Pi_{jk}^{(1)} + \sum_{\alpha} c_{\alpha j} c_{\alpha k} F_{\alpha}^{(1)} \tag{6.2.26}$$

Cherchons une expression pour $\Pi_{jk}^{(1)}$, à partir de l'expression (6.2.26).
Evaluons $\partial_{t1} \Pi_{ij}^{(0)}$

$$\begin{aligned}
\partial_{t1} \Pi_{ij}^{(0)} &= \partial_{t1}(c_s^2 \rho \delta_{ij} + \rho v_i u_j) \\
&= c_s^2 \partial_{t1} \rho \delta_{ij} + \partial_{t1}(\rho v_i) u_j + \partial_{t1}(\rho u_j) v_i - (\partial_{t1} \rho) v_i u_j \\
&= \partial_{t1} \rho (c_s^2 \delta_{ij} - v_i u_j) + (F_i^{(1)} - \partial_{\sigma 1} \Pi_{\sigma i}^{(0)}) u_j + (F_j^{(1)} - \partial_{\sigma 1} \Pi_{\sigma j}^{(0)}) v_i \\
&= F_i^{(1)} u_j + F_j^{(1)} v_i + \partial_{t1} \rho (c_s^2 \delta_{ij} - v_i u_j) - \partial_{\sigma 1} \Pi_{\sigma i}^{(0)} u_j - \partial_{\sigma 1} \Pi_{\sigma j}^{(0)} v_i
\end{aligned} \tag{6.2.27}$$

On pose $K_{ij} = \partial_{t1} \rho (c_s^2 \delta_{ij} - v_i u_j) - \partial_{\sigma 1} \Pi_{\sigma i}^{(0)} u_j - \partial_{\sigma 1} \Pi_{\sigma j}^{(0)} v_i$.

On a vu que $\partial_\sigma \Pi_{\sigma i} = \partial_\sigma (c_s^2 \rho \delta_{\sigma i}) + \partial_\sigma (\rho v_i) u_\sigma + \partial_\sigma (\rho u_\sigma) v_i - (\partial_\sigma \rho u_\sigma v_i)$.

On néglige les termes en (u^3) et supérieurs, d'où $\partial_\sigma \Pi_{\sigma i} u_j = c_s^2(\partial_\sigma \rho \delta_{\sigma i}) u_j + o(u^3)$

$$\begin{aligned} K_{ij} &= c_s^2[-\partial_{t1}\rho\delta_{ij} - (\partial_i\rho)u_j - (\partial_j\rho)v_i] + o(u^3) \\ &= c_s^2[-\partial_{t1}\rho\delta_{ij} - [\partial_i(\rho u_j) + \partial_j(\rho v_i)] + \rho(\partial_i u_j + \partial_j v_i)] + o(u^3) \\ &= c_s^2[-\partial_\sigma(\rho u_\sigma)\delta_{ij} - [\partial_i(\rho u_j) + \partial_j(\rho v_i)] + \rho(\partial_i u_j + \partial_j v_i)] + o(u^3) \\ &= \rho(\partial_i u_j + \partial_j v_i) + o(u^3) \end{aligned} \tag{6.2.28}$$

Au final

$$\partial_{t1}\Pi_{ij}^{(0)} = F_i^{(1)} u_j + F_j^{(1)} v_i + \rho(\partial_i u_j + \partial_j v_i) + o(u^3) \tag{6.2.29}$$

En utilisant (6.2.26) on peut écrire, en négligeant les termes en u^3

$$\Pi_{ij}^{(1)} = -\tau\Delta_t(\partial_{t1}\Pi_{ij}^{(0)} - \sum_\alpha c_{\alpha i} c_{\alpha j} F_\alpha^{(1)}) + o(u^3) \tag{6.2.30}$$

Or $\sum_\alpha c_{\alpha i} c_{\alpha j} F_\alpha^{(1)} = \frac{1}{2}[C_{ij}^{(1)} + C_{ji}^{(1)}]$.
On peut donc réécrire le flux d'impulsion sous la forme :

$$\Pi_{ij}^{(1)} = -\tau\Delta_t(F_i^{(1)} u_j + F_j^{(1)} v_i + \rho(\partial_i u_j + \partial_j v_i) - \frac{1}{2}[C_{ij}^{(1)} + C_{ji}^{(1)}]) + o(u^3) \tag{6.2.31}$$

Si l'on choisit $C_{ij}^{(1)} = 2v_i F_j^{(1)}$ ou $C_{ij}^{(1)} = v_i F_j^{(1)} + F_i^{(1)} u_j$ alors le flux d'impulsion se réduit à l'expression du tenseur des contraintes visqueuses c'est à dire $\Pi_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} = \nu(\nabla_i^{(1)} u_j + \nabla_j^{(1)} v_i)$ avec la viscosité cinématique ν donnée par $\nu = c_s^2 \tau \Delta_t$. Cette solution est valide pour l'équation de Boltzmann continue. En revanche ce n'est plus le cas pour l'équation de Boltzmann sur réseau, la viscosité et la force sont modifiées par les effets de discrétisation. Ces termes de corrections apparaissent pour les temps rapides, sur l'échelle $t_2 = \epsilon^2 t$.

$$(\epsilon^2) \longrightarrow [(c_{\alpha i}\partial_{i1} + \partial_{t1}) f_\alpha^{(1)} + \partial_{t2} f_\alpha^{(0)}]\Delta_t + [\partial_{i1}\partial_{j1} c_{\alpha i} c_{\alpha j} + \partial_{t1}^2 + 2\partial_{i1}\partial_{t1} c_{\alpha i}] f_\alpha^{(0)} \frac{\Delta_t^2}{2} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(2)} \tag{6.2.32}$$

$$\sum_\alpha \longrightarrow [(-\Delta_t \Gamma \partial_{i1} F_i^{(1)} + 0) + \partial_{t2}\rho]\Delta_t + [\partial_{i1}\partial_{j1}\Pi_{ij}^{(0)} + \partial_{t1}^2\rho + 2\partial_{i1}\partial_{t1}\rho v_i]\frac{\Delta_t^2}{2} = -\frac{1}{\tau}\sum_\alpha f_\alpha^{(2)} \tag{6.2.33}$$

On applique ∂_{t1} à l'équation de conversation de la masse (6.2.17)

$$\partial_{t1}^2 \rho = -\partial_{t1}\partial_{i1}(\rho v_i) \tag{6.2.34}$$

On applique ∂_j à l'équation de conversation de l'impulsion (6.2.22)

$$\partial_{i1}\partial_{j1}\Pi_{ij}^{(0)} = \partial_j F_j^{(1)} - \partial_{t1}\partial_{j1}(\rho v_i) \tag{6.2.35}$$

On simplifie (6.2.33)

$$\partial_{t2}\rho = \Delta_t(\Gamma - \frac{1}{2})\partial_{i1} F_i^{(1)} - \frac{1}{\tau}\sum_\alpha f_\alpha^{(2)} \tag{6.2.36}$$

On impose que $\sum_\alpha f_\alpha^{(2)} = 0$

Au final

$$\boxed{\partial_{t2}\rho = \Delta_t(\Gamma - \tfrac{1}{2})\partial_{i1}F_i^{(1)}} \tag{6.2.37}$$

Aux temps rapides, la divergence de la force contribue à modifier la densité du fluide. Cet effet n'est pas souhaité.

$$\sum_\alpha c_{\alpha k} \longrightarrow [(\partial_{i1}\Pi_{ik}^{(1)} - \Delta_t\Gamma\partial_{i1}F_i^{(1)}) + \partial_{t2}(\rho u_k)] + [\partial_{i1}\partial_{j1}Q_{ijk}^{(0)} + \partial_{t1}^2(\rho u_k) + 2\partial_{i1}\partial_{t1}\Pi_{ik}^{(0)}]\frac{\Delta_t^2}{2} = -\frac{1}{\tau}\sum_\alpha c_{\alpha k} f_\alpha^{(2)} \tag{6.2.38}$$

Cherchons une expression simplifiée pour $\partial_{i1}\partial_{t1}\Pi_{ik}^{(0)}$, on applique ∂_{t1} à l'équation (6.2.22) :

$$\partial_{t1}\partial_{i1}\Pi_{ik}^{(0)} = \partial_{t1}(\frac{\Gamma}{\tau} + \gamma)F_k^{(1)} - \partial_{t1}^2(\rho u_k) \tag{6.2.39}$$

Cherchons une expression simplifiée pour $\partial_{i1}\partial_{j1}Q_{ijk}^{(0)}$, on applique ∂_{j1} à l'équation (6.2.26) :

$$\partial_{i1}\partial_{j1}Q_{ijk}^{(0)} + \partial_{t1}\partial_{i1}\Pi_{jk}^{(0)} = -\frac{1}{\tau\Delta_t}\partial_{j1}\Pi_{jk}^{(1)} + \frac{1}{2}\partial_{j1}(C_{jk}^{(1)} + C_{kj}^{(1)}) \tag{6.2.40}$$

En utilisant (6.2.39) et (6.2.40), on obtient après simplification :

$$\partial_{t2}(\rho u_k) = \Delta_t(\Gamma - \frac{1}{2})\partial_{t1}F_k^{(1)} + (\frac{1}{2\tau} - 1)\partial_{j1}\Pi_{jk}^{(1)} - \frac{\Delta_t}{4}\partial_{j1}(C_{jk}^{(1)} + C_{kj}^{(1)}) \tag{6.2.41}$$

En introduisant

$$\sigma_{jk}^{(1)} = (\frac{1}{2\tau} - 1)\Pi_{jk}^{(1)} - \frac{\Delta_t}{4}(C_{jk}^{(1)} + C_{kj}^{(1)}) \tag{6.2.42}$$

On peut encore écrire

$$\boxed{\partial_{t2}(\rho u_k) = \Delta_t(\Gamma - \tfrac{1}{2})\partial_{t1}F_k^{(1)} + \partial_{j1}\sigma_{jk}^{(1)}} \tag{6.2.43}$$

Réécrivons $\sigma_{ij}^{(1)}$ en utilisant l'équation (6.2.31)

$$\sigma_{jk}^{(1)} = (\tau - \frac{1}{2})\Delta_t c_s^2\rho(\partial_j u_k - \partial_k u_j) + \Delta_t\left[(\tau - \frac{1}{2})(F_j^{(1)}u_k + F_k^{(1)}u_j) - \frac{\tau}{2}(C_{jk}^{(1)} + C_{kj}^{(1)})\right] \tag{6.2.44}$$

Dans le premier membre de droite, on remarque qu'il y a une contribution due à la discrétisation de l'espace sur le tenseur des contraintes visqueuses associé à l'équation de Navier-Stokes. On peut absorber cette contribution en redéfinissant la viscosité réelle du fluide avec les grandeurs propres à la méthode Boltzmann sur réseau sous l'approximation BGK : $\nu = (\tau - \frac{1}{2})c_s^2\Delta_t$.

Cherchons une expression pour $C_{jk}^{(1)}$ qui annule la contribution de la force dans le tenseur des contraintes, c'est à dire tel que $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{NS}$, il faut pour cela annuler le second membre dans l'équation (6.2.44). Il y a deux choix possibles, donnés par la symétrie de la matrice $(Fu)_{ij}$:

$$C_{jk}^{(1)} = 2(1 - \frac{1}{2\tau})F_j u_k \quad \text{ou} \quad C_{jk}^{(1)} = (1 - \frac{1}{2\tau})((uF)_{jk} + (Fu)_{jk}) \tag{6.2.45}$$

Les équations (6.2.43) ainsi que (6.2.44) indiquent clairement que les variations spatiales et temporelles de la force influencent les changements de densité et d'impulsion respectivement, à l'échelle $t2$.

Pour annuler ces déviations à l'échelle macroscopique il faut choisir $\Gamma = \frac{1}{2}$, ce qui implique $\gamma = 1 - \frac{1}{2\tau}$

(d'après la condition (6.2.23)).

Déterminons maintenant les grandeurs macroscopiques

$$\begin{aligned}\sum_\alpha f_\alpha = &= \sum_\alpha f_\alpha^{(0)} + \epsilon^1 \sum_\alpha f_\alpha^{(1)} + \epsilon^2 \sum_\alpha f_\alpha^{(2)} \\ &= \sum_\alpha f_\alpha^{(eq)} \\ &= \rho\end{aligned} \tag{6.2.46}$$

$$\begin{aligned}\sum_\alpha f_\alpha c_{\alpha i} = &= \sum_\alpha f_\alpha^{(0)} c_{\alpha i} + \epsilon^1 \sum_\alpha f_\alpha^{(1)} c_{\alpha i} + \epsilon^2 \sum_\alpha f_\alpha^{(2)} c_{\alpha i} \\ &= \rho v_i - \frac{\Delta_t}{2} F_i\end{aligned} \tag{6.2.47}$$

Pour conserver les équations de Navier-Stokes forcées, dans le cas où la force varie spatialement ou temporellement, il faut effectuer une correction sur l'impulsion, donnée par l'équation (6.2.47).

6.2.1 Points clés de l'implémentation

Il faut retenir de la démonstration présentée en annexe 6.2, que l'ajout d'une force extérieure dans le schéma de la méthode Boltzmann sur réseau n'est pas évident, et engendre naturellement des déviations à l'échelle macroscopique par rapport à l'équation de Navier-Stokes forcée. On rappelle brièvement les équations de conservation obtenues précédemment, cette fois-ci en faisant apparaitre clairement les moments de la force discrétisée.

Dans la méthode générale nous avons utilisé une décomposition possible pour la force extérieure : $F_\alpha = \omega_\alpha \left[A + \frac{B_i c_{\alpha i}}{c_s^2} + \frac{C_{ij}(c_{\alpha i} c_{\alpha j} - c_s^2 \delta_{ij})}{2c_s^4}\right]$.

Par construction, les moments de la force discrétisée sont donnés par

$$\begin{aligned}\sum_\alpha F_\alpha &= A \\ \sum_\alpha F_\alpha c_{\alpha i} &= B_i \\ \sum_\alpha F_\alpha c_{\alpha i} c_{\alpha j} &= c_s^2 A \delta_{ij} + \frac{1}{2}[C_{ij} + C_{ji}]\end{aligned} \tag{6.2.48}$$

$$\boxed{\partial_{t1}\rho + \partial_{i1}(\rho v_i) = 0} \tag{6.2.49}$$

$$\boxed{\partial_{i1}\Pi_{ij}^{(0)} + \partial_{t1}(\rho u_j) = \left(-\tfrac{\Gamma}{\tau} + \gamma\right)\mathcal{F}_j} \tag{6.2.50}$$

avec la condition suivante : $-\frac{\Gamma}{\tau} + \gamma = 1$

$$\boxed{\partial_{t2}\rho = \Delta_t(\Gamma - \tfrac{1}{2})\partial_{i1} B_i^{(1)}} \tag{6.2.51}$$

$$\boxed{\partial_{t2}(\rho u_k) = \Delta_t(\Gamma - \tfrac{1}{2})\partial_{t1}B_k^{(1)} + \partial_{j1}\sigma_{jk}^{(1)}} \tag{6.2.52}$$

avec

$$\sigma_{jk}^{(1)} = (\tau - \frac{1}{2})\Delta_t c_s^2 \rho(\partial_j u_k - \partial_k u_j) + \Delta_t \left[(\tau - \frac{1}{2})(B_j^{(1)} u_k + B_k^{(1)} u_j) - \frac{\tau}{2}(C_{jk}^{(1)} + C_{kj}^{(1)})\right] \tag{6.2.53}$$

L'analyse détaillée nous a permis d'écrire $B_i^{(1)} = B_i$, et $C_{ij}^{(1)} = C_{ij}$. Dans le cas d'une force qui ne modifie pas le nombre de particules, le moment d'ordre zéro en vitesse (c'est à dire A) n'intervient pas. On peut annuler ces déviations en choisissant correctement un unique paramètre Γ

6.2.2 Analyse du terme d'interaction $J_\alpha^{\sigma,\upsilon}$ du mélange binaire

Analysons le terme d'interaction entre deux espèces $J_\alpha^{\sigma,\upsilon}$ construit par Luo et Girimaji (2002) (présenté au chapitre 2) suite à une analyse à l'échelle microscopique avec la théorie cinétique.

$$J_\alpha^{\sigma\upsilon} = -\frac{1}{\tau_D}\frac{\rho_\upsilon}{\rho}\frac{f_\alpha^{\sigma(eq)}}{c_s^2}(\mathbf{c}_\alpha - \mathbf{u^{mix}}) \cdot (\mathbf{u}^\sigma - \mathbf{u}^\upsilon) \tag{6.2.54}$$

La prise en compte d'une force extérieure dans le schéma Boltzmann sur réseau résulte en l'ajout d'un terme de la forme $F_\alpha \Delta_t$ avec

$$F_\alpha = \omega_\alpha \left[A + \frac{B_i c_{\alpha i}}{c_s^2} + \frac{C_{ij}(c_{\alpha i}c_{\alpha j} - c_s^2\delta_{ij})}{2c_s^4}\right] \tag{6.2.55}$$

Nous allons réécrire le terme $J_\alpha^{\sigma,\upsilon}$ comme une force extérieure en calculant les différents moments des vitesses élémentaires $\mathbf{c}_\alpha$ afin d'identifier les coefficients A, B_i, C_{ij}.

Calculons maintenant les moments des vitesses élémentaires, qui correspondent à la projection du terme d'interaction sur la base des c_α.

$$\sum_\alpha J_\alpha^{\sigma\upsilon} = 0 \tag{6.2.56}$$

$$\sum_\alpha J_\alpha^{\sigma\upsilon} c_{\alpha i} = -\frac{1}{\tau_D}\frac{\rho_\sigma \rho_\upsilon}{\rho}(u_i^\sigma - u_i^\upsilon) \tag{6.2.57}$$

$$\sum_\alpha J_\alpha^{\sigma\upsilon} c_{\alpha i}c_{\alpha j} = -\frac{1}{\tau_D}\frac{\rho_\sigma \rho_\upsilon}{\rho}\left[u_i^{mix}(u_j^\sigma - u_j^\upsilon) + u_j^{mix}(u_i^\sigma - u_i^\upsilon) - \frac{1}{c_s^2}u_i^{mix}u_j^{mix}u_\zeta^{mix}(u_\zeta^\sigma - u_\zeta^\upsilon)\right] \tag{6.2.58}$$

On négligera les effets d'ordre 4 dans la vitesse.

Avant d'évaluer les conséquences sur les équations hydrodynamiques du terme $J_\alpha^{\sigma\upsilon}$ rappelons les moments de la vitesse de la force extérieure.

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha F_\alpha &= A \\
\sum_\alpha F_\alpha c_{\alpha i} &= B_i \\
\sum_\alpha F_\alpha c_{\alpha i}c_{\alpha j} &= c_s^2 A\delta_{ij} + \frac{1}{2}[C_{ij} + C_{ji}]
\end{aligned} \tag{6.2.59}$$

Par identification avec les moments de $J_\alpha^{\sigma\upsilon}$ on obtient :

$$A = 0 \ , \ B_i = -\frac{1}{\tau_D}\frac{\rho_\sigma \rho_\upsilon}{\rho}(u_i^\sigma - u_i^\upsilon) \ , \ \frac{1}{2}[C_{ij} + C_{ji}] = u_i^{mix} B_j + u_j^{mix} B_i \tag{6.2.60}$$

Il nous reste à déterminer les coefficients Γ,γ. Pour cela on écrit le premier moment de la vitesse avec la fonction de distribution issue du mélange binaire

$$\begin{aligned}\sum_\alpha f_\alpha^\sigma c_{\alpha i} &= \rho_\sigma v_i^\sigma \\ &= \sum_\alpha f_\alpha^{\sigma(0)} c_{\alpha i} + \sum_\alpha f_\alpha^{\sigma(1)} c_{\alpha i} + \cdots \\ &= \sum_\alpha f_\alpha^{\sigma(0)} c_{\alpha i} - \Gamma F_\alpha^{(1)}\end{aligned} \tag{6.2.61}$$

On en déduit que le modèle du mélange binaire introduit par Luo et Girimaji (2002) utilise implicitement $\Gamma = 0$ et en utilisant la condition (6.2.23) on trouve $\gamma = 1$.

Rappelons deux résultats généraux présentés plus haut :

$$\boxed{\partial_{t2}\rho = \Delta_t(\Gamma - \tfrac{1}{2})\partial_{i1} B_i^{(1)}} \tag{6.2.62}$$

Puisque $\Gamma = 0$ on déduit qu'aux temps rapides (nommés $t2$ dans notre développement de Chapman-Enskog) l'équation de continuité n'est plus vérifiée exactement. Il existe une déviation proportionnelle à $\Delta_t(\frac{1}{2})\partial_{i1} B_i^{(1)}$.

Aux temps rapides les variations temporelles d'impulsion sont aussi affectées lorsque $\Gamma = 0$

$$\boxed{\partial_{t2}(\rho u_k) = \Delta_t(\Gamma - \tfrac{1}{2})\partial_{t1} B_k^{(1)} + \partial_{j1}\sigma_{jk}^{(1)}} \tag{6.2.63}$$

avec

$$\sigma_{jk}^{(1)} = (\tau - \frac{1}{2})\Delta_t c_s^2 \rho(\partial_j u_k - \partial_k u_j) + \Delta_t \left[(\tau - \frac{1}{2})(B_j^{(1)} u_k + B_k^{(1)} u_j) - \frac{\tau}{2}(C_{jk}^{(1)} + C_{kj}^{(1)})\right] \tag{6.2.64}$$

Pour annuler la contribution de la force dans le tenseur des contraintes, c'est à dire tel que $\sigma_{ij}^{(1)} = (\tau - \frac{1}{2})\Delta_t c_s^2 \rho(\partial_j u_k - \partial_k u_j)$, il faut annuler le second membre dans l'équation (6.2.64). Il y a deux choix possibles, donnés par la symétrie de la matrice $(Fu)_{ij}$:

$$C_{jk}^{(1)} = 2(1 - \frac{1}{2\tau})F_j u_k \quad \text{ou} \quad C_{jk}^{(1)} = (1 - \frac{1}{2\tau})((uF)_{jk} + (Fu)_{jk}) \tag{6.2.65}$$

Or dans le modèle cinétique $\frac{1}{2}[C_{ij} + C_{ji}] = u_i^{mix} B_j + u_j^{mix} B_i$. La contribution du terme d'interaction dans le tenseur des contraintes n'est donc jamais nulle.

Ces déviations sont sources d'instabilités numériques. Lorsque que nous avons corrigé l'impulsion en utilisant le modèle du mélange binaire, c'est à dire que nous avons imposé $\Gamma = 1/2$, ces instabilités n'étaient plus observées pour le régime considéré. Malgré tout les déviations dans le tenseur des contraintes étaient toujours présentes. Les instabilités étaient donc liées aux déviations sur l'équation de continuité.
Sans modification du modèle proposé par Luo et Girimaji (2002) la friction entre les deux fluides établie à partir de la théorie cinétique n'est pas aussi bien retranscrite qu'avec un couplage par une force extérieure de type HVBK ($B' = 0$) implémentée avec une correction sur l'impulsion.

6.3 Choix de la fonction de distribution à l'équilibre

Nous allons déterminer explicitement la fonction de distribution à l'équilibre qui permet de retrouver les équations de Navier-Stokes après un développement de Chapman-Enskog. Pour ce faire, on choisira un réseau carré à deux dimensions et 9 vitesses élémentaires (D2Q9) présenté au chapitre 2.

Dans cette section, la notation est la suivante :
$\mathbf{c_{\sigma i}}$ représente la vitesse élémentaire sur le réseau. L'indice σ représente le groupe des vitesses et l'indice i correspond au numéro des vitesses contenues dans ce groupe. En deux dimensions, il existe 3 groupes de vitesses : $\sigma = 0$ pour les particules au repos (qui ne contient qu'une seule direction $i = 0$), $\sigma = 1$ pour les particules qui voyagent dans les 4 directions primaires ($i = 1, 2, 3, 4$) et $\sigma = 2$ pour les particules qui voyagent dans les 4 directions obliques ($i = 5, 6, 7, 8$). Les indices $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ représentent les directions spatiales (x, y).
Le réseau D2Q9 possède les propriétés d'orthogonalité suivantes

$$\sum_i c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta} = 2\mathbf{c_\sigma^2}\delta_{\alpha\beta} \tag{6.3.1}$$

Par définition des groupes σ définis plus haut $||\mathbf{c_1}|| = 1$ et $||\mathbf{c_2}|| = \sqrt{2}$.

$$\sum_i c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta} c_{\sigma i\gamma} c_{\sigma i\theta} = \begin{cases} 2\mathbf{c_\sigma^2}\delta_{\alpha\beta\gamma\theta} \text{ si } \sigma = 1 \\ 4\Delta_{\alpha\beta\gamma\theta} - 8\delta_{\alpha\beta\gamma\theta} \text{ si } \sigma = 2 \end{cases} \tag{6.3.2}$$

avec $\delta_{\alpha\beta\gamma\theta} = 1$ si $\alpha = \beta = \gamma = \theta$ et $\Delta_{\alpha\beta\gamma\theta} = \delta_{\alpha\beta}\delta\gamma\theta + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\theta} + \delta_{\alpha\theta}\delta_{\beta\gamma}$
On écrit l'équation de Boltzmann sur réseau sous l'approximation BGK

$$f_{\sigma i}(\mathbf{x} + \Delta_t \mathbf{c_{\sigma i}}, t + \Delta_t) - f_{\sigma i}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau}[f_{\sigma i}(\mathbf{x}, t) - f_{\sigma i}^{(0)}(\mathbf{x}, t)] \tag{6.3.3}$$

Choisissons une forme générale pour la fonction de distribution à l'équilibre

$$f_{\sigma i}^{(0)} = A_\sigma + B_\sigma(\mathbf{c_{\sigma i}}.\mathbf{u}) + C_\sigma(\mathbf{c_{\sigma i}}.\mathbf{u})^2 + D_\sigma \mathbf{u^2} \tag{6.3.4}$$

On écrit le développement de Taylor du membre de gauche de l'équation (6.3.3) à l'ordre $O(\Delta_t)$

$$\Delta_t[c_{\sigma i}\partial_{\sigma i} + \partial t]f_{\sigma i}(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta_t^2}{2}[c_{\sigma i}c_{\sigma j}\partial_{\sigma i}\partial_{\sigma j} + \partial t^2 + 2c_{\sigma i}\partial_{\sigma i}\partial t]f_{\sigma i}(\mathbf{x}, t) + O(\Delta_t^3) = -\frac{1}{\tau}[f_{\sigma i}(\mathbf{x}, t) - f_{\sigma i}^{(0)}(\mathbf{x}, t)] \tag{6.3.5}$$

Le développement asymptotique de Chapman-Enskog requiert d'utiliser un nombre de Knudsen petit devant 1. Puisque la vitesse de propagation est d'ordre 1 et que le temps de relaxation τ représente le temps caractéristique entre les collisions, $\tau\Delta_t c_s$ est du même ordre de grandeur que le libre parcours moyen en unité physique avec Δ_t le pas de temps, en unité physique. Si le temps de relaxation τ est d'ordre 1, alors Δ_t peut jouer le rôle du nombre de Knudsen (Hou, Zou, Chen, Doolen, et Cogley (1995)).
On développe $f_{\sigma i}$ en puissance de Δ_t

$$f_{\sigma i} = f_{\sigma i}^{(0)} + \Delta_t f_{\sigma i}^{(1)} + \Delta_t^2 f_{\sigma i}^{(2)} + O(\Delta_t^3) \tag{6.3.6}$$

avec les lois de conservation

$$\sum_\sigma \sum_i f_{\sigma i}^{(0)} = \rho \; et \; \sum_\sigma \sum_i f_{\sigma i}^{(0)} c_{\sigma i} = \rho \mathbf{u} \tag{6.3.7}$$

En utilisant la forme générale (6.3.4), déterminons une relation entre les coefficients $A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma, D_\sigma$ afin de satisfaire la conservation de la masse : $\sum_\sigma \sum_i f_{\sigma i}^{(0)} = \rho$

$$\begin{aligned}
\sum_\sigma \sum_i A_\sigma &= A_0 + 4A_1 + A_2 \\
\sum_\sigma \sum_i \sum_\alpha B_\sigma c_{\sigma i\alpha} u_\alpha &= 0 \\
\sum_\sigma \sum_i C_\sigma (c_{\sigma i\alpha} u_\alpha)(c_{\sigma i\beta} u_\beta) &= (2C_1 + 4C_2)u^2 \\
\sum_\sigma \sum_i D_\sigma u^2 &= (D_0 + 4D_1 + 4D_2)u^2
\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Par identification on déduit

$$\begin{cases} A_0 + 4A_1 + 4A_2 = \rho \\ 2C1 + 4C_2 + D_0 + 4D_1 + 4D_2 = 0 \end{cases} \tag{6.3.9}$$

Procédons de la même façon avec $\sum_\sigma \sum_i f_{\sigma i}^{(0)} c_{\sigma i\alpha} = \rho u_\alpha$

$$\begin{aligned}
\sum_\sigma \sum_i A_\sigma c_{\sigma i\alpha} &= 0 \\
\sum_\sigma \sum_i \sum_\alpha B_\sigma c_{\sigma i\alpha} u_\alpha c_{\sigma i\beta} &= (4B_1 + 4B_2)u_\alpha \\
\sum_\sigma \sum_i C_\sigma (c_{\sigma i\alpha} u_\alpha)(c_{\sigma i\beta} u_\beta) c_{\sigma i\zeta} &= 0 \\
\sum_\sigma \sum_i D_\sigma c_{\sigma i\alpha} u^2 &= 0
\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

Par identification on déduit

$$2B_1 + 4B_2 = \rho \tag{6.3.11}$$

Le développement de Chapman-Enskog nous permet d'obtenir de nouvelles équations qui vont donner de nouvelles contraintes sur les coefficients $A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma, D_\sigma$. Nous avons déjà effectué ce développement dans le cas d'une force extérieure. Reprenons les équations regroupées dans la section 6.2.1, et simplifions les dans le cas où il n'existe pas de force extérieure.

$$\boxed{\partial_{t1}\rho + \partial_{i1}(\rho v_i) = 0} \tag{6.3.12}$$

$$\boxed{\partial_{i1}\Pi_{ij}^{(0)} + \partial_{t1}(\rho u_j) = 0} \tag{6.3.13}$$

$$\boxed{\partial_{t2}\rho = 0} \tag{6.3.14}$$

$$\boxed{\partial_{t2}(\rho u_k) = (\tau - \tfrac{1}{2})\partial_{j1}\Pi_{jk}^{(1)}} \tag{6.3.15}$$

Déterminons explicitement $\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} \equiv \sum_{\sigma,i} f_{\sigma,i}^{(0)} c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta}$

$$\sum_\sigma \sum_i A_\sigma c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta} = 2A_1\delta_{\alpha\beta} + 4A_2\delta_{\alpha\beta}$$
$$\sum_\sigma \sum_i \sum_\alpha B_\sigma c_{\sigma i\alpha} u_\alpha c_{\sigma i\beta} = 0$$
$$\sum_\sigma \sum_i C_\sigma c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta} c_{\sigma i\gamma} c_{\sigma i\Gamma} u_\gamma u_\Gamma = 2C_1\delta_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta + C_2[4(\delta_{\alpha\beta}u^2 + u_\alpha u_\beta + \delta_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta) - 8(\delta_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta)]$$
$$\sum_\sigma \sum_i D_\sigma c_{\sigma i\alpha} u^2 = (2D_1 + 4D_2)u^2\delta_{\alpha\beta} \tag{6.3.16}$$

Au final

$$\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = (2A_1 + 4A_2 + (4C_2 + 2D_1 + 4D_2)u^2)\delta_{\alpha\beta} + 8C_2u_\alpha u_\beta + (2C_1 - 8C_2)\delta_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta \tag{6.3.17}$$

Le terme de pression est proportionnel à $\delta_{\alpha\beta}$. Afin d'obtenir une vitesse indépendante de la pression il faut que le coefficient devant u^2 dans le terme de pression soit nul. Ce qui revient à imposer

$$4C_2 + 2D_1 + 4D_2 = 0 \tag{6.3.18}$$

Pour satisfaire l'invariance Galiléenne, le terme non-isotropique $\delta_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta$ doit être éliminé. On impose

$$2C_1 - 8C_2 = 0 \tag{6.3.19}$$

Au final

$$\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = (2A_1 + 4A_2)\delta_{\alpha\beta} + 8C_2u_\alpha u_\beta \tag{6.3.20}$$

Par identification avec le tenseur $\Pi^{NS}_{\alpha\beta}$ des équations de Navier-Stokes on déduit

$$8C_2 = \rho \quad \text{et} \quad 2A_1 + 4A_2 = c_s^2\rho \tag{6.3.21}$$

avec c_s la vitesse de propagation sur le réseau.

L'expression finale de $\Pi^{(0)}$ est

$$\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = c_s^2\rho\delta_{\alpha\beta} + \rho u_\alpha u_\beta \tag{6.3.22}$$

L'équation (6.3.13) s'écrit

$$\partial_{t1}(\rho u_\alpha) + \partial_\beta(\rho u_\alpha u_\beta) = -\partial_\alpha(c_s^2\rho) \tag{6.3.23}$$

Pour être précis à l'ordre deux en temps, il est nécessaire d'écrire explicitement $\partial_{j1}\Pi^{(1)}_{jk}$ en fonction des coefficients $A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma, D_\sigma$. On ne connait pas l'expression de $f^{(1)}$. Mais en utilisant l'équation (6.3.3) et l'équation (6.3.5), on montre à l'ordre 1 en temps (comme nous l'avons fait dans l'analyse de la force extérieure) que

$$(\partial_{t1} + c_{\sigma i}\partial_{\sigma i})f^{(0)}_{\sigma i} = -\frac{1}{\tau}f^{(1)}_{\sigma i} \tag{6.3.24}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\Pi^{(1)}_{\alpha\beta} &= \sum_{\sigma i} f^{(1)}_{\sigma i} c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta} \\ &= -\tau \sum_{\sigma i} (\partial_{t1} + c_{\sigma i\gamma}\partial_{\sigma i\gamma}) c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta} f^{(0)}_{\sigma i} \\ &= -\tau(\partial_{t1}\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} + \sum_{\sigma i} c_{\sigma i\gamma}\partial_{\sigma i\gamma} c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta} f^{(0)}_{\sigma i})\end{aligned} \tag{6.3.25}$$

On peut alors déterminer en fonction des coefficients $A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma, D_\sigma$ le terme $\sum_{\sigma i} c_{\sigma j}\partial_{\sigma j} c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta} f^{(0)}_{\sigma i}$:

$$\sum_{\sigma i} \partial_{\sigma i\gamma} c_{\sigma i\gamma} c_{\sigma i\alpha} c_{\sigma i\beta} f^{(0)}_{\sigma i} = (\partial_{1\alpha} 2B_1 u_\beta - 8\partial_{2\alpha} B_2 u_\beta)\delta_{\alpha\beta} + 4\partial_{2\gamma} B_2 u_\gamma \delta_{\alpha\beta} + 4\partial_{2\alpha} B_2 u_\beta + 4\partial_{2\beta} B_2 u_\alpha \delta_{\alpha\beta} \tag{6.3.26}$$

Au final

$$\Pi^{(1)}_{\alpha\beta} = -\tau[-c_s^2\partial_\gamma(\rho u_\gamma)\delta_{\alpha\beta} + \partial_{t1}(\rho u_\alpha u_\beta) + \partial_\alpha(2B_1 - 8B_2)u_\beta\delta_{\alpha\beta} + 4\partial_\gamma(B_2 u_\gamma)\delta_{\alpha\beta} + 4\partial_{2\beta} B_2 u_\alpha + 4\partial_{2\alpha} B_2 u_\beta] \tag{6.3.27}$$

Pour maintenir l'isotropie on impose

$$2B_1 - 8B_2 = 0 \tag{6.3.28}$$

En utilisant l'équation (6.3.11) on détermine

$$\boxed{B_1 = \tfrac{\rho}{3} \quad B_2 = \tfrac{\rho}{12}} \tag{6.3.29}$$

Ecrivons $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta}$ avec la nouvelle valeur des coefficients B_1, B_2

$$\Pi^{(1)}_{\alpha\beta} = -\tau[-c_s^2\partial_\gamma(\rho u_\gamma)\delta_{\alpha\beta} + \partial_{t1}(\rho u_\alpha u_\beta) + \frac{1}{3}\partial_\gamma(\rho u_\gamma)\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\partial_{2\beta}(\rho u_\alpha) + \frac{1}{3}\partial_{2\alpha}(\rho u_\beta)] \tag{6.3.30}$$

Après quelques manipulations on montre que

$$\partial_{t1}(\rho u_\alpha u_\beta) = -\partial_\alpha(c_s^2\rho)u_\beta - \partial_\beta(c_s^2\rho)u_\alpha - \partial_\gamma(\rho u_\alpha u_\beta u_\gamma) \tag{6.3.31}$$

Le terme $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta}$ s'écrit alors

$$\Pi^{(1)}_{\alpha\beta} = -\tau[(\frac{1}{3} - c_s^2)\partial_\gamma(\rho u_\gamma)\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\partial_\beta(\rho u_\alpha) + \frac{1}{3}\partial_\alpha(\rho u_\beta) - \partial_\alpha(c_s^2\rho)u_\beta - \partial_\beta(c_s^2\rho)u_\alpha - \partial_\gamma(\rho u_\alpha u_\beta u_\gamma)] \tag{6.3.32}$$

En combinant les équations (6.3.12) et (6.3.14) on retrouve l'équation de continuité à l'ordre Δ_t^2. De la même façon, en combinant l'équation (6.3.23) et l'équation (6.3.15) avec l'expression explicite de $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta}$; on obtient ainsi l'équation de conservation de l'impulsion

$$\begin{aligned}\partial_{t1}(\rho u_\alpha) + \partial_\beta(\rho u_\alpha u_\beta) = &-\partial_j(c_s^2\rho) \\ &+ \Delta_t\{\partial_\alpha[(\tau - \frac{1}{2})(\frac{1}{3} - c_s^2)\partial_\gamma(\rho u_\gamma)] \\ &+ \partial_\beta(\tau - \frac{1}{2})\frac{1}{3}\rho(\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta) \\ &- (\frac{1}{3} - c_s^2)(u_\alpha\partial_\beta\rho + u_\beta\partial_\alpha\rho) \\ &- \partial_\gamma(\rho u_\alpha u_\beta u_\gamma)\} + O(\Delta_t^2)\end{aligned} \tag{6.3.33}$$

A ce stade on peut simplifier cette expression en déterminant la valeur de c_s^2, en utilisant les contraintes sur A_σ. De l'équation (6.3.9) on déduit

$$\boxed{A_0 = \tfrac{4}{9}\rho \quad A_1 = \tfrac{1}{9}\rho \quad A_2 = \tfrac{1}{36}\rho} \tag{6.3.34}$$

et de l'équation (6.3.21) on déduit la valeur c_s^2 la vitesse de propagation sur le réseau

$$\boxed{c_s^2 = \tfrac{1}{3}} \tag{6.3.35}$$

On peut maintenant simplifier l'équation (6.3.36).

$$\begin{aligned}\partial_{t1}(\rho u_\alpha) + \partial_\beta(\rho u_\alpha u_\beta) = &-\partial_j(c_s^2\rho)\\ &+ \partial_\beta(\tau - \frac{1}{2})\frac{1}{3}\rho\Delta_t(\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta)\\ &- \Delta_t\partial_\gamma(\rho u_\alpha u_\beta u_\gamma) + O(\Delta_t^2)\end{aligned} \tag{6.3.36}$$

On identifie alors la pression $p = c_s^2\rho$ ainsi que la viscosité cinématique $\nu = \frac{2\tau-1}{6}\Delta_t$ du fluide. Le terme en $\mathbf{u}^3$ est un effet de compressibilité.

On déduit de l'équation (6.3.21) et l'équation (6.3.19)

$$\boxed{C_1 = \tfrac{1}{2}\rho \quad C_2 = \tfrac{1}{8}\rho} \tag{6.3.37}$$

Il reste à déterminer les trois coefficients D_σ en utilisant l'équation (6.3.9) et l'équation (6.3.18), il existe donc un paramètre libre. Puisque pour les coefficients $A_\sigma, B_\sigma, C_\sigma$, la valeur du coefficient pour le groupe $\sigma = 2$ est quatre fois plus faible que pour le groupe $\sigma = 1$, on impose $4D_1 = D_2$ et on obtient

$$\boxed{D_0 = -\tfrac{2}{3}\rho \quad D_1 = -\tfrac{1}{6}\rho \quad D_2 = -\tfrac{1}{24}\rho} \tag{6.3.38}$$

Pour les populations au repos ($\sigma = 0$), on déduit de la forme générale de la fonction de distribution à l'équilibre que

$$\boxed{B_0 = C_0 = 0} \tag{6.3.39}$$

On peut finalement écrire la fonction de distribution à l'équilibre pour le modèle D2Q9 en introduisant les poids ω_σ des groupes de vitesses σ :

$$f_\alpha^{eq} = \omega_\alpha\rho\left(1 + 3\frac{\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(\mathbf{c}_\alpha.\mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right) \tag{6.3.40}$$

où

$$\omega_\alpha = \begin{cases} 4/9 & \alpha = 0\\ 1/9 & \alpha = 1,2,3,4\\ 4/36 & \alpha = 5,6,7,8\end{cases} \tag{6.3.41}$$

Table des figures

1.1 A gauche au dessus de la transition ($T \geq$2,17 K) et à droite en dessous de la transition ($T \leq$2,17 K), ces images proviennent du film de J.F. Allen et J.M.G. Armitage. 2

1.2 Mesure de la chaleur spécifique de l'^{4}He d'après les mesures de Keesom et Clusius (1932) et Keesom et Keesom (1935), graphique tiré de l'ouvrage de London (1961). 2

1.3 Diagramme des phases de l'^{4}He, figure issue d'un ouvrage de Van Sciver (2011). 3

1.4 Spectre d'énergie des excitations (phonons et des rotons) en fonction de l'impulsion. Ligne continue : théorie de L.D. Landau, avec ajustement des paramètres en fonction des données expérimentales de la chaleur spécifique. Ligne en pointillé représente une approximation quantique. Graphique tiré de l'article de Feynman (1955). 4

1.5 Proportion des composantes normale et superfluide dans l'hélium II en fonction de la température, graphique tiré de l'ouvrage de London (1961). 5

1.6 Représentation d'onde de densité (premier son) et d'onde de température (second son) ainsi que leur effet sur les densités respectives (Donnelly,*Physics Today* 2009). 8

1.7 Représentation schématique d'une ligne de vortex et de la circulation du superfluide autour d'elle. 9

1.8 Schématisation de l'effet des lignes de vortex sur la distribution de vitesse superfluide dans un cylindre en rotation à la vitesse Ω. 9

1.9 Photographie d'un réseau de vortex quantiques dans une expérience de rotation de superfluide par E.J. Yarmchuk, M-J.V. Gordon et R.E. Packard (Yarmchuk, Gordon, et Packard (1979)) 10

1.10 Volume élémentaire de fluide dans le modèle HVBK (en bleu, trait pointillé), traversé par un grand nombre de lignes de vortex polarisées (en bleu, trait continu). La distance moyenne inter-vortex est notée Δ. Une onde de second son de longueur d'onde λ_{ss} est schématisée, pour illustrer l'hypothèse $\Delta \ll \lambda_{ss}$. 11

1.11 Représentation schématique de l'effet Magnus appliqué à un cylindre en rotation dans un écoulement fluide à la vitesse $\mathbf{v}$. 12

1.12 Distances caractéristiques du problème 12

1.13 Schéma de principe d'une expérience de contre-courant 14

2.1 Schéma d'une expérience de contre-courant (à gauche) et sa modélisation numérique associée avec la méthode Boltzmann sur réseau (à droite). Les réservoirs chaud et froid situés aux deux extrémités de la conduite sont modélisés par des zones de chauffage et de refroidissement. 22

2.2 Représentation du schéma D2Q9. Les flèches indiquent les déplacements possibles pendant un pas de temps d'une particule initialement localisée au noeud 0. 28

2.3 Vitesse maximale d'un fluide classique le long de l'axe de la conduite. Approche de la limite incompressible obtenue en diminuant le nombre de Mach. Pour deux simulations à $Re = 20$ utilisant le schéma BGK standard et le modèle incompressible de He et Luo (1997). 29
2.4 Schématisation de la règle de rebond de type *Halfway Bounce Back* (en haut) et et de type réflexion spéculaire (en bas). La paroi est représentée par la ligne noire située à demi-distance entre deux noeuds. 32
2.5 Profils de pression partielle normalisée (moyenné sur la section) établis à l'équilibre sur la longueur de la conduite, thermostats chaud et froid inclus (sur la figure de gauche) à 1,5 K, $Re = 200$ (sans couplage entre les deux composantes). 34
2.6 Débit massique au centre de la conduite pour le fluide normal et le superfluide, en fonction du paramètre de chauffage γ_e à 1,5 K ($\rho_s/\rho_n = 8,1$) et 1,96 K ($\rho_s/\rho_n = 1,02$). Les nombres de Reynolds correspondants à ces débits massiques sont représentés sur la figure 2.7. Compte tenu de notre définition de γ_e, il est judicieux de plutôt considérer $\gamma_e c_s$ pour caractériser le chauffage et obtenir une variation des débits massiques indépendante de la résolution de la simulation. 35
2.7 Comparaison entre la prédiction du nombre de Reynolds, Re_{asymp}, donnée par l'équation (2.4.4), et le nombre de Reynolds mesuré au centre de la conduite pour $\gamma_e = 0,968$ et ρ_s/ρ_n=8,1 à T=1,5 K et $\gamma_e = 0,968$ et ρ_s/ρ_n=1,02 à T=1,96 K. 41
2.8 Comparaison entre les profils de vitesse du fluide normal mesuré et théorique prédit à la température de 1,5 K. Profil plat avec glissement à la paroi, observé pour le superfluide. La notation * signifie ici que les profils sont adimensionnés par la vitesse maximale du fluide normal. La hauteur de la conduite est représentée par 59 points. 43
2.9 A gauche, les profils de vitesse du fluide normal (v_n^*) et de la composante superfluide (v_s^*) normalisés par $v_{ns,th}$, influence de la viscosité artificielle du superfluide localisée en proche paroi. A droite la schématisation de l'incompatibilité entre la viscosité artificielle et le glissement total à la paroi. 45
2.10 Profils de la différence de vitesses entre les deux composantes. Influence de la valeur relative de la viscosité artificielle du superfluide dans le cas d'un couplage HVBK simplifié, c'est-à-dire avec $\omega_s = constante$, sur le profil de v_{ns}. 45

3.1 Phénomène d'entrée dans une conduite, figure issue de *Fluid mechanics*, par Yunus et Cimbala (2006) 48
3.2 Lignes de champ de vitesse et champs de vorticité pour une simulation de contre-courant à 1,5 K sans couplage HVBK. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux 3.2, 6.2 et 6.3 (en annexe). Les contours noirs représentent les limites du thermostat chaud et du thermostat froid. 51
3.3 Lignes de champ de vitesse et champs de vorticité pour une simulation de contre-courant à 1,5 K avec couplage HVBK. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux 3.2, 3.3 et 6.2 (en annexe). Les contours noirs symbolisent les limites du thermostat chaud et du thermostat froid. 52
3.4 Profils de vitesse des deux composantes pour une simulation de contre-courant à 1,5 K avec couplage HVBK à $Re = 146,7$. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux, 3.2, 3.3 et 6.2 (en annexe). 53
3.5 Gradient de pression totale, moyenné temporellement et sur la section, issu d'une simulation de contre-courant à 1,5 K avec couplage HVBK. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux 3.2, 3.3 et 6.2 (en annexe). 54

3.6 Champ de vorticité superfluide pour une simulation de contre-courant à 1,5 K avec couplage HVBK et nombre de Reynolds $Re = 300$. Les contours noirs symbolisent les limites du thermostat chaud et du thermostat froid. 54

3.7 Développement de la vitesse sur la ligne centrale de la conduite, à $Re = 93,08$, $Re = 124,2$, et $Re = 190,9$ à 1,5 K. Deux tailles de thermostats sont utilisées :$x_{th}/2h = 3,39$ et $x_{th}/2h = 0,1$. Les paramètres des simulations sont regroupés en annexe dans les tableaux 6.2, et 6.3. 56

3.8 Schématisation de la méthode pour interpréter un excès de dissipation locale comme une longueur additionnelle par rapport à la longueur de la conduite. A gauche la représentation "pression", à droite la représentation "gradient de pression". 57

3.9 Perte de charge en entrée chaude, à gauche, et en entrée froide à droite, visualisée par le gradient de pression totale adimensionné par le gradient de pression de type Poiseuille pour une température de 1,5 K. Les paramètres des simulations sont regroupés dans les tableaux 3.2, 6.2, et 6.3 en annexe. 59

3.10 Influence de la viscosité artificielle du superfluide et de la force de Magnus sur la perte de charge en entrée superfluide. Le graphique présente le gradient de pression totale normalisé, moyenné temporellement et sur la section, issu d'une simulation de contre-courant à 1,5 K. Les paramètres de la simulation sont regroupés dans les tableaux 3.2, 6.4, et 6.5. 60

3.11 Simulations à T=1,5 K, en utilisant le schéma BGK standard (dénommée "NoRegu", trait plein) et en ajoutant la procédure de régularisation (dénommée "Regu", pointillé). Pour deux nombres de Reynolds différents, $Re = 93,08$ et $Re = 190,9$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 3.2, 6.6, et 6.7. 63

3.12 Comparaison entre le schéma BGK standard et le schéma BGK avec la procédure de régularisation à 1,5 K. Le graphique présente le rapport entre les deux longueurs L_H et L_C associées à chaque entrée. Les paramètres des simulations sont regroupés en annexe dans les tableaux 6.3, 6.7. 63

3.13 Influence de la température sur le nouvel effet d'entrée. Le graphique présente le rapport entre les deux longueurs L_C et L_H associées à chaque entrée. Les paramètres des simulations sont regroupés en annexe dans les tableaux 6.3, 6.7, 6.8, 6.1 et 6.9. 64

3.14 Représentations graphiques des disparités expérimentales dans l'évaluation de la vitesse critique superfluide à l'origine de la transition T1. A gauche en fonction des années et à droite en fonction du rapport d'aspect de la conduite. 66

3.15 Mauvaise interprétation possible de la transition T1. A gauche nos simulations à T=1,5 K, en utilisant le schéma BGK standard dans une conduite de rapport d'aspect 33, en dessous de T1. A droite un résultat expérimental obtenu par Childers et Tough (1976) à 1,5 K, dans une conduite de rapport d'aspect 775 environ. La prédiction linéaire correspond à un écoulement de type Poiseuille pour les deux graphiques. 66

4.1 Visualisation expérimentale par PIV d'un écoulement de contre-courant superfluide autour d'un cylindre à T=2,03 K (Zhang et Van Sciver (2005b)). Le nombre de Reynolds construit avec la densité totale, le diamètre du cylindre, et la vitesse moyenne du fluide normal ($Re_\rho \equiv \frac{\rho V_n D}{\eta_n}$) est égal à 4185 soit $Re = 2520$ d'après l'équation (3.0.2). Le fluide normal s'écoule de la gauche vers la droite. 70

4.2 Discrétisation en escalier d'un disque sur le réseau D2Q9, en accord avec la loi de rebond *Halfway Bounce Back*. Les noeuds rouges sont des noeuds fluides et les noeuds noirs des noeuds solides. 71

4.3 Lignes de champs de vitesse à T=1,96 K, sans couplage entre les deux fluides. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe. 73
4.4 Régime R1 : ligne de champs de vitesse à T=1,96 K, contre-courant superfluide autour d'un cylindre. Aux nombres de Reynolds les plus faibles, ici $Re_n = 2,0$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe. . . . 74
4.5 Régime R2 : ligne de champs de vitesse à T=1,96 K, contre-courant autour d'un cylindre. Aux nombres de Reynolds les plus faibles, ici $Re_n = 10$. Les pointillés noires matérialisent la "paroi virtuelle" qui se forme dans l'écoulement. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe. 75
4.6 Lignes de champs de vitesse superfluide à T=1,96 K, sans couplage entre les deux fluides. Le nombre de Reynolds associé au superfluide est $Re_s = 250$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe. 76
4.7 Régime R3 : lignes de champs de vitesse à T=1,96 K, contre-courant autour d'un cylindre pour $Re_n = 19$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe. 76
4.8 Energie dissipée par friction mutuelle entre les deux composantes à T=1,96 K et $Re_n = 19$ (dans le régime R3). 77
4.9 Régime R4 : ligne de champs de vitesse à T=1,96 K, contre-courant autour d'un cylindre. Ici $Re_n = 20,5$. Les paramètres des simulations concernées sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 6.1 en annexe. 77
4.10 Résultat d'une simulation 3D : Coupe du champ de vitesse du fluide normal obtenu, dans une conduite de section carrée à la température de T=1,96 K pour un nombre de Reynolds $Re_n = 30$ 81
4.11 Résultat d'une simulation 3D : Coupe des champs de vitesse et lignes de champs de vitesse des deux composantes à T=1,96 K, à $Re_n = 30$. 81
4.12 Résultat d'une simulation 3D : Coupe du champ de vorticité superfluide selon z, à T=1,96 K, à $Re_n = 30$. 82
4.13 Visualisation expérimentale par PIV d'un écoulement de contre-courant superfluide autour d'un cylindre à T=2,03 K (Zhang et Van Sciver (2005b)). Le fluide normal s'écoule de la gauche vers la droite. 82

Bibliographie

JF Allen et H Jones. New phenomena connected with heat flow in helium ii. *Nature*, 141(3562) : 243–244, 1938.

JF Allen et AD Misener. Flow of liquid helium ii. *Nature*, 141(3558) :75, 1938.

JF Allen et J Reekie. Forces associated with heat flow in helium ii. *Nature*, 144 :475–476, 1939.

EL Andronikashvili et Yu G Mamaladze. Quantization of macroscopic motions and hydrodynamics of rotating helium ii. *Reviews of Modern Physics*, 38(4) :567, 1966.

V Arp. Heat transport through helium ii. *Cryogenics*, 10(2) :96–105, 1970.

Perumal Dharmaraj Arumuga, Gundavarapu VS Kumar, et Anoop K Dass. Lattice boltzmann simulation of flow over a circular cylinder at moderate reynolds numbers. *Thermal Science*, 18(4) : 1235–1246, 2014.

Sébastien Balibar. The discovery of superfluidity. *Journal of Low Temperature Physics*, 146(5-6) : 441–470, 2007.

Yuanxun Bill Bao et Justin Meskas. Lattice boltzmann method for fluid simulations. *Department of Mathematics, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University*, 2011.

CF Barenghi et CA Jones. The stability of the couette flow of helium ii. *Journal of Fluid Mechanics*, 197 :551–569, 1988.

Prabhu Lal Bhatnagar, Eugene P Gross, et Max Krook. A model for collision processes in gases. i. small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical review*, 94(3) : 511, 1954.

DF Brewer et DO Edwards. Heat conduction by liquid helium ii in capillary tubes ii. measurements of the pressure gradient. *Philosophical Magazine*, 6(69) :1173–1181, 1961.

J Castiglione et JT Tough. Multiple discrete ti states of superfluid turbulence. *Journal of low temperature physics*, 103(3-4) :139–157, 1996.

TV Chagovets et SW Van Sciver. Visualization of he ii counterflow around a cylinder. *Physics of Fluids (1994-present)*, 25(10) :105104, 2013.

RK Childers et JT Tough. Observation of multiple vinen states in he ii counterflow. *Journal of Low Temperature Physics*, 15(1-2) :53–62, 1974.

RK Childers et JT Tough. Helium ii thermal counterflow : Temperature-and pressure-difference data and analysis in terms of the vinen theory. *Physical Review B*, 13(3) :1040, 1976.

Morton Collins et WR Schowalter. Behavior of non-newtonian fluids in the entry region of a pipe. *AIChE journal*, 9(6) :804–809, 1963.

W da Haas et H Van Beelen. A synthesis of flow phenomena in helium ii. *Physica B+ C*, 83(2) : 129–146, 1976.

Russell J Donnelly. Quantized vortices in helium ii. 1991.

Russell J Donnelly. Cryogenic fluid dynamics. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 11(40) :7783, 1999.

Russell J Donnelly et Carlo F Barenghi. The observed properties of liquid helium at the saturated vapor pressure. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, 27(6) :1217–1274, 1998.

D Duda, M La Mantia, M Rotter, et L Skrbek. On the visualization of thermal counterflow of he ii past a circular cylinder. *Journal of Low Temperature Physics*, 175(1-2) :331–338, 2014.

F Durst, S Ray, B Ünsal, et OA Bayoumi. The development lengths of laminar pipe and channel flows. *Journal of fluids engineering*, 127(6) :1154–1160, 2005.

Richard P Feynman. Chapter ii application of quantum mechanics to liquid helium. *Progress in low temperature physics*, 1 :17–53, 1955.

RP Feynman. Atomic theory of the two-fluid model of liquid helium. *Physical Review*, 94(2) :262, 1954.

S Fuzier, SW Van Sciver, et T Zhang. Piv measurements of he ii counterflow around a cylinder. 850 : 203–204, 2006.

Kostas Gavroglu. Fritz london : A scientific biography. 2005.

ES Gopal et SMA Tirmizi. Growth of turbulence in the flow of liquid helium ii. *Cryogenics*, 4(6) : 378–386, 1964.

Gennady Gorelik. The top-secret life of lev landau. *Scientific American*, 277(2) :72–77, 1997.

CJ Gorter et JH Mellink. On the irreversible processes in liquid helium ii. *Physica*, 15(3) :285–304, 1949.

Allan Griffin. John c. mclennan and his pioneering research on superfluid helium. *Physics in Canada*, 61(1), 2005.

Wei Guo, Sidney B Cahn, James A Nikkel, William F Vinen, et Daniel N McKinsey. Visualization study of counterflow in superfluid he 4 using metastable helium molecules. *Physical review letters*, 105(4) :045301, 2010.

Wei Guo, Marco La Mantia, Daniel P Lathrop, et Steven W Van Sciver. Visualization of two-fluid flows of superfluid helium-4. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(Supplement 1) : 4653–4658, 2014.

Zhaoli Guo, Baochang Shi, et Nengchao Wang. Lattice bgk model for incompressible navier–stokes equation. *Journal of Computational Physics*, 165(1) :288–306, 2000.

Ramesh C Gupta. On developing laminar non-newtonian flow in pipes and channels. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 2(2) :171–193, 2001.

Xiaoyi He et Li-Shi Luo. Lattice boltzmann model for the incompressible navier–stokes equation. *Journal of statistical Physics*, 88(3-4) :927–944, 1997a.

Xiaoyi He et Li-Shi Luo. A priori derivation of the lattice boltzmann equation. *Physical Review E*, 55 (6) :R6333, 1997b.

Xiaoyi He et Li-Shi Luo. Theory of the lattice boltzmann method : From the boltzmann equation to the lattice boltzmann equation. *Physical Review E*, 56(6) :6811, 1997c.

Xiaoyi He, Xiaowen Shan, et Gary D Doolen. Discrete boltzmann equation model for nonideal gases. *Physical Review E*, 57(1) :R13, 1998.

Xiaoyi He, Qisu Zou, Li-Shi Luo, et Micah Dembo. Analytic solutions of simple flows and analysis of nonslip boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. *Journal of Statistical Physics*, 87 (1-2) :115–136, 1997.

Karen L Henderson, Carlo F Barenghi, et Chris A Jones. Nonlinear taylor–couette flow of helium ii. *Journal of Fluid Mechanics*, 283 :329–340, 1995.

RN Hills et PH Roberts. Healing and relaxation in flows of helium ii—i : Generalization of landau's equations. *International Journal of Engineering Science*, 15(5) :305–316, 1977.

Darryl D Holm. Introduction to hvbk dynamics. *Quantized vortex dynamics and superfluid turbulence*, pages 114–130, 2001.

Shuling Hou, Qisu Zou, Shiyi Chen, Gary Doolen, et Allen C Cogley. Simulation of cavity flow by the lattice boltzmann method. *Journal of computational physics*, 118(2) :329–347, 1995.

J. Reekie J.F. Allen. Momentum transfer and heat flow in liquid helium ii. *Proc. Cambridge Phil. Soc.,*, 35 :114, 1939.

Michael Junk et Zhaoxia Yang. Asymptotic analysis of lattice boltzmann boundary conditions. *Journal of statistical physics*, 121(1-2) :3–35, 2005a.

Michael Junk et Zhaoxia Yang. One-point boundary condition for the lattice boltzmann method. *Physical Review E*, 72(6) :066701, 2005b.

JF Kafkalidis et JT Tough. Thermal counterflow in a diverging channel : a study of radial heat transfer in he ii. *Cryogenics*, 31(8) :705–711, 1991.

H Kamerlingh Onnes. The liquefaction of helium. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 11 :168–185, 1908.

P Kapitza. Viscosity of liquid helium below the l-point. *Nature*, 141(3558) :74, 1938.

Crawford Kays. *Convective Heat and Mass Transfer.* McGraw-Hill, New York, 1993.

WH Keesom et K Clusius. Leiden commun. 219e. *Proc. Roy. Acad. Sci. Amsterdam*, 35 :307, 1932.

WH Keesom et AP Keesom. New measurements on the specific heat of liquid helium. *Physica*, 2(1) : 557–572, 1935.

WH Keesom et Miss AP Keesom Keesom. Thermodydamic diagrams of liquid helium. *Physica*, 1(1) : 128–133, 1934.

Wilhelmus Hendrikus Keesom et Mieczysław Wolfke. *Two different liquid states of helium.* N/A, 1928.

I Khalatnikov et Zh Bekarevitch. Eksperim. i teoret. *Fiz*, 40 :920, 1961.

T Kitamura, K Shiramizu, N Fujimoto, YF Rao, et K Fukuda. A numerical model on transient, two-dimensional flow and heat transfer in he ii. *Cryogenics*, 37(1) :1–9, 1997.

G Klinich III, JF Kafkalidis, et JT Tough. Superfluid turbulence in converging and diverging rectangular channels. *Journal of low temperature physics*, 107(3-4) :327–346, 1997.

DR Ladner et JT Tough. Helium ii thermal counterflow at large heat currents : Profound effects of geometry. *Physical Review B*, 17(3) :1455, 1978.

DR Ladner et JT Tough. Temperature and velocity dependence of superfluid turbulence. *Physical Review B*, 20(7) :2690, 1979.

L Landau. J. eksper. teor. fiz. ussr, 11 (1947). *Phys. Rev*, 60 :356, 1941.

LD Landau et EM Lifshitz. Fluid mechanics, vol. 6. *Course of Theoretical Physics*, pages 227–229, 1987.

Jonas Latt. *Hydrodynamic limit of lattice Boltzmann equations.* PhD thesis, University of Geneva, 2007.

Jonas Latt et Bastien Chopard. Lattice boltzmann method with regularized pre-collision distribution functions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 72(2) :165–168, 2006.

Jonas Latt, Bastien Chopard, Orestis Malaspinas, Michel Deville, et Andreas Michler. Straight velocity boundaries in the lattice boltzmann method. *Physical Review E*, 77(5) :056703, 2008.

F London. On condensed helium at absolute zero. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 153(880) :576–583, 1936.

Fritz London. On the bose-einstein condensation. *Physical Review*, 54(11) :947, 1938a.

Fritz London. The-phenomenon of liquid helium and the bose-einstein degeneracy. *Nature*, 141(3571) : 643–644, 1938b.

Fritz London. *Superfluids : Volume Ii : Macroscopic Theory of Superfluid Helium.* Dover Publications, 1961.

Li-Shi Luo. Analytic solutions of linearized lattice boltzmann equation for simple flows. *Journal of statistical physics*, 88(3-4) :913–926, 1997.

Li-Shi Luo et Sharath S Girimaji. Lattice boltzmann model for binary mixtures. *PHYSICAL REVIEW-SERIES E-*, 66(3 ; PART 2A) :035301–R, 2002.

Li-Shi Luo et Sharath S Girimaji. Theory of the lattice boltzmann method : two-fluid model for binary mixtures. *Physical Review E*, 67(3) :036302, 2003.

Simon Marié. *Etude de la méthode Boltzmann sur Réseau pour les simulations en aéroacoustique.* PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2008.

JC McLennan, HD Smith, et JO Wilhelm. Xiv. the scattering of light by liquid helium. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 14(89) :161–167, 1932.

Anil K Mehrotra et Graegory S Patience. Unified entry length for newtonian and power law fluids in laminar pipe flow. *Can. J. Chem. Eng*, 68 :529–533, 1990.

M Murakami et N Ichikawa. Flow visualization study of thermal counterflow jet in he ii. *Cryogenics*, 29(4) :438–443, 1989.

Masahide Murakami, Takeshi Takakoshi, Motoki Maeda, Ryou Tsukahara, et Naoya Yokota. Application of particle image velocimetry for measuring he ii thermal counterflow jets. *Cryogenics*, 49(10) : 543–548, 2009.

PJ Murphy, JT Tough, et W Fiszdon. The suppression of superfluid turbulence in helium ii. *Journal of low temperature physics*, 86(5-6) :423–431, 1992.

VP Peshkov. Detection of the second sound velocity in helium ii. *J. Exp. Theor. Phys*, 8(16) :1000–1010, 1946.

VP Peshkov. Propagation of second sound in helium ii. *Exp. Theor. Phys. USSR*, 18 :857–867, 1948.

S Pietrowicz et B Baudouy. Numerical study of the thermal behavior of an nb 3 sn high field magnet in he ii. *Cryogenics*, 53 :72–77, 2013.

LP Pitaevskii. 50 years of landau's theory on superfluidity. *Journal of Low Temperature Physics*, 87 (3) :127–135, 1992.

RJ Poole et BS Ridley. Development-length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non-newtonian liquids. *Journal of Fluids Engineering*, 129(10) :1281–1287, 2007.

NH Ramadan et RJ Witt. Natural convection in large he ii baths. *Cryogenics*, 34(7) :563–577, 1994.

Yan Fei Rao, Yoshitomo Inaba, Takafumi Noda, et K Fukuda. Transient characteristics of he ii forced flow heated at the center of a pipe line. *Cryogenics*, 36(3) :219–224, 1996.

Denis Ricot. *Simulation numérique d'un écoulement affleurant une cavité par la méthode Boltzmann sur réseau et application au toit ouvrant de véhicules automobiles.* PhD thesis, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2002.

David C Samuels. Velocity matching and poiseuille pipe flow of superfluid helium. *Physical Review B*, 46(18) :11714, 1992.

Joseph A Schetz et Allen E Fuhs. *Fundamentals of fluid mechanics.* John Wiley & Sons, 1999.

KW Schwarz. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid he 4 : Line-line and line-boundary interactions. *Physical Review B*, 31(9) :5782, 1985.

KW Schwarz. Three-dimensional vortex dynamics in superfluid he 4 : Homogeneous superfluid turbulence. *Physical Review B*, 38(4) :2398, 1988.

YA Sergeev et CF Barenghi. Normal fluid eddies in the thermal counterflow past a cylinder. *Journal of Low Temperature Physics*, 156(3-6) :268–278, 2009.

R K Shah et MS Bhatti. Laminar convective heat transfer in ducts. *Handbook of single-phase convective heat transfer*, 3, 1987.

Xiaowen Shan et Xiaoyi He. Discretization of the velocity space in the solution of the boltzmann equation. *Physical Review Letters*, 80(1) :65, 1998.

Lawrence Sirovich. Kinetic modeling of gas mixtures. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 5(8) :908–918, 1962.

EB 1 Sonin. Vortex oscillations and hydrodynamics of rotating superfluids. *Reviews of modern physics*, 59(1) :87, 1987.

RJ Soto et VL Shah. Entrance flow of a yield-power law fluid. *Applied Scientific Research*, 32(1) : 73–85, 1976.

Cyprien Soulaine, Michel Quintard, Hervé Allain, Bertrand Baudouy, et Rob Van Weelderen. A piso-like algorithm to simulate superfluid helium flow with the two-fluid model. *Computer Physics Communications*, 187 :20–28, 2015.

FA Staas, KW Taconis, et WM Van Alphen. Experiments on laminar and turbulent flow of he ii in wide capillaries. *Physica*, 27(10) :893–923, 1961.

Sauro Succi. *The lattice Boltzmann equation : for fluid dynamics and beyond*. Oxford university press, 2001.

T Suekane, M Sekiguchi, S Hirai, et T Okamura. Heat transfer and flow of he ii in narrow channels. *Cryogenics*, 43(2) :125–131, 2003.

H Tatsumoto, K Fukuda, et M Shiotsu. Numerical analysis for steady-state two-dimensional heat transfer from a flat plate at one side of a duct containing pressurized he ii. *Cryogenics*, 42(1) :9–17, 2002.

Lászlo Tisza. Transport phenomena in helium ii. *Nature*, 141 :913, 1938.

JT Tough. Superfluid turbulence. *Progress in low temperature physics*, 8 :133–219, 1982.

Steven W Van Sciver. *Helium cryogenics*. Springer Science & Business Media, 2011.

M Vicentini-Missoni et S Cunsolo. Heat currents in liquid helium ii. *Physical Review*, 144(1) :196, 1966.

WF Vinen. Mutual friction in a heat current in liquid helium ii. ii. experiments on transient effects. Dans *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 240, pages 128–143. The Royal Society, 1957a.

WF Vinen. Mutual friction in a heat current in liquid helium ii. iii. theory of the mutual friction. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 242 (1231) :493–515, 1957b.

WF Vinen. Mutual friction in a heat current in liquid helium ii. iv. critical heat currents in wide channels. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 243(1234) :400–413, 1958.

WF Vinen et JJ Niemela. Quantum turbulence. *Journal of Low Temperature Physics*, 128(5-6) : 167–231, 2002.

JO Wilhelm, AD Misener, et AR Clark. The viscosity of liquid helium. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 151(873) :342–347, 1935.

EJ Yarmchuk, MJV Gordon, et RE Packard. Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium. *Physical Review Letters*, 43(3) :214, 1979.

A Cengel Yunus et John M Cimbala. Fluid mechanics : fundamentals and applications. *International Edition, McGraw Hill Publication*, pages 185–201, 2006.

P Zhang, M Murakami, et RZ Wang. Study of the transient thermal wave heat transfer in a channel immersed in a bath of superfluid helium. *International journal of heat and mass transfer*, 49(7) : 1384–1394, 2006.

T Zhang et SW Van Sciver. The motion of micron-sized particles in he ii counterflow as observed by the piv technique. *Journal of low temperature physics*, 138(3-4) :865–870, 2005a.

Tao Zhang et Steven W Van Sciver. Large-scale turbulent flow around a cylinder in counterflow superfluid4he (he (ii)). *Nature Physics*, 1(1) :36–38, 2005b.

Qisu Zou et Xiaoyi He. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. *Physics of Fluids (1994-present)*, 9(6) :1591–1598, 1997.