



**HAL**  
open science

# Contrôlabilité de quelques systèmes gouvernés par des équations paraboliques

Michel Duprez

► **To cite this version:**

Michel Duprez. Contrôlabilité de quelques systèmes gouvernés par des équations paraboliques. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Franche-Comté, 2015. Français. NNT : 2015BESA2038 . tel-01273789v2

**HAL Id: tel-01273789**

**<https://theses.hal.science/tel-01273789v2>**

Submitted on 13 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Thèse de Doctorat de l'université de Franche Comté

Spécialité  
**Mathématiques appliquées**

présentée par  
**Michel Duprez**

pour obtenir le grade de  
Docteur en Mathématiques de l'Université de Franche-Comté

---

## Contrôlabilité de quelques systèmes gouvernés par des équations paraboliques

---

Thèse soutenue le 26 novembre 2015, devant le jury composé de :

Farid AMMAR KHODJA	Directeur de thèse
Assia BENABDALLAH	Examinatrice et Présidente du jury
Franck BOYER	Rapporteur
Franz CHOULY	Directeur de thèse
Enrique FERNÁNDEZ-CARA	Rapporteur
Manuel GONZÁLEZ-BURGOS	Examineur
Pierre LISSY	Invité
Arnand MÜNCH	Examineur
Emmanuel TRÉLAT	Rapporteur



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Farid Ammar Khodja, Boris Andreianov et Franz Chouly pour leur encadrement. Je n'oublierai jamais ces trois années durant lesquelles ils m'ont fait découvrir le monde de la recherche et transmis leur passion pour la recherche. Ils se sont montrés disponibles et patients et m'ont encouragé tout au long de cette thèse.

Je remercie Assia Benabdallah, Franck Boyer, Enrique Fernández-Cara, Manuel González-Burgos, Pierre Lissy, Arnand Münch et Emmanuel Trélat d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. C'est pour moi un grand honneur et un plaisir de partager mon travail avec eux. Plus particulièrement, merci à Frank, Enrique et Emmanuel pour leur travail de rapporteur.

Une partie de cette thèse a été réalisée en collaboration avec Pierre Lissy. A nouveau, je le remercie pour son investissement dans ce travail. J'espère que nous aurons l'occasion de collaborer durant encore de nombreuses années.

J'ai eu l'opportunité d'effectuer des séjours à Marseille, Séville et Paris. Je remercie donc les différentes équipes pour leur accueil, en particulier Pierre, Julien, Assia, Franck, Florence, Michel, Manolo et Enrique. Ces échanges furent très fructueux. Merci également à Fatiha pour ses conseils et son aide.

Plusieurs conférences furent l'occasion de nombreuses rencontres. Je remercie mes différents compagnons biologistes, contrôleurs et numériciens - Ivan, Ludovic, Morgan, Sylvain, Thibault, Sylvain, Olivier, Guillaume, Virgile, Thibault et tant d'autres - pour tous ces bons moments que nous avons partagés.

De retour de Conférence à Benasque en août 2015, mon avion n'a pas décollé. Merci à la compagnie Vueling pour ces 24 heures de retard et cette nuit en hôtel durant laquelle j'ai pu écrire les dernières lignes de ce manuscrit, et à Romain qui m'a supporté tout au long de ce périple !

J'adresse toute ma reconnaissance aux membres de l'équipe enseignante et des équipes EDP et ANCS qui m'ont rapidement considéré comme un collègue et avec lesquels il est possible de prendre du temps pour discuter de pédagogie ou de recherche. Je remercie tout particulièrement Pauline, Nabile, Cédric et Ulrich qui ont dû subir mes questions. Merci également à Romain, Richard, Pascaline et les Catherines pour leur disponibilité. Merci à Julien pour avoir gardé son calme lorsque je surchargeais le serveur de calcul. Merci aux Bibliothécaires, Émilie et Odile, d'avoir attendu la fin de ma thèse pour que je régularise mes différents retards.

Merci au groupe des doctorants du LMB au sein duquel règne une ambiance très agréable. Je garderai un excellent souvenir de tous ces moments avec mes co-bureaux, Emi-  
lie, Céline, Cyrille, Xiao, Clément, Marine, Pammella, Colin. Un grand merci également à  
mes deux compagnon(ne)s de route, Aude et Charlotte, avec qui j'ai traversé les différentes  
épreuves durant ces cinq années, de la prépa agrég à la soutenance, et qui ont su rappeler  
à l'étourdi que je suis les démarches importantes.

Lors de ma troisième année, nous avons accueilli en post-doc Gaspard dans l'équipe  
ANCS. Je le remercie pour tous ses conseils en html, python et fenics : j'en ferai très bon  
usage.

Merci également aux vélocampussiens (Thibault, Etienne, Clément, Olivier, Ai, Adrien,  
Thomas, Claire, Dimitri,...), aux musiciens (Jean-Luc, Etienne, Floppy, Bruno, Anaïs, Clé-  
ment, Gaby,...), aux cafistes (Seb, Jean-Luc, Maria, Nico, Vaness, Vainvain, Cloé, Olivier,...)  
pour m'avoir changé les idées quand j'en avais besoin.

Je remercie ma famille pour leur soutien constant, en particulier mes parents et mes  
grand-parents pour leur innombrables relectures. Cette thèse n'aurait pas été la même sans  
eux.

Pour finir, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Amélie pour son soutien sans  
faille durant les moments difficiles, même lorsque ce n'était pas simple pour elle.

Michel

*À ma famille...*



# Notations

## Ensembles et éléments

- $T$  : réel positif.
- $\Omega$  : ouvert non vide de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ .
- $Q_T$  : produit cartésien de  $\Omega$  par  $(0, T)$ .
- $\Sigma_T$  : produit cartésien de  $\partial\Omega$  par  $(0, T)$ .
- $\nu$  : vecteur unitaire normal extérieur au domaine  $\Omega$ .
- $f^{(l)}$  : fonction dérivée  $l^{\text{ème}}$  de la fonction  $f$ .
- $\delta_{kl}$  : le symbole de Kronecker est une fonction de deux variables qui est égale à 1 si celles-ci sont égales, et 0 sinon.
- $\overline{A}$  : fermeture de l'ensemble  $A$ .
- $\overset{\circ}{A}$  : intérieur de l'ensemble  $A$ .
- Supp : Supp( $f$ ) désigne le support de la fonction  $f$ .
- $C$  : constante indépendante des paramètres du système étudié.

## Espace de fonctions

- $L^2(0, T; H)$  : espace de classes de fonctions de carré intégrable (au sens de Bochner) de  $[0, T]$  dans un espace de Hilbert  $H$ .
- $W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  : ensemble des classes de fonctions  $y$  de  $L^2(0, T; \mathcal{V})$  dont  $\partial_t y$  appartient à  $L^2(0, T; \mathcal{V}')$ , où  $\mathcal{V}$  est un espace de Hilbert.
- $W(0, T)$  : ensemble des classes de fonctions  $y$  de  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  dont  $\partial_t y$  appartient à  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ .
- $W_2^{2d, d}(Q_T)$  : ensemble des classes de fonctions  $y$  de  $L^2(0, T; H^{2d}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$  dont  $\partial_t^d y$  appartient à  $L^2(Q_T)$ .
- $L_\rho^2(Q_T)$  : ensemble des classes de fonctions  $f$  de  $L^2(Q_T)$  telles que  $\rho^{1/2} f$  appartient à  $L^2(Q_T)$ .
- $C_c^\infty(A)$  : ensemble des fonctions réelles de classe  $C^\infty$  définies sur  $A$  et à support compact.

## Espace d'applications linéaires

- $\mathcal{L}(E, F)$  : ensemble des applications linéaires continues définies sur un espace vectoriel  $E$  et à valeurs dans un autre espace vectoriel  $F$ .
- $\mathcal{L}(E)$  : ensemble des applications linéaires continues définies de  $E$  vers lui-même.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  : ensemble des matrices carrées de taille  $n$ .
- $\mathcal{M}_{n, m}(\mathbb{R})$  : ensemble des matrices réelles à  $n$  lignes et  $m$  colonnes.





---

# Table des matières

<b>I. Introduction</b>	<b>1</b>
1 Généralités . . . . .	1
2 Quelques outils pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes paraboliques . . . . .	11
3 État de l'art . . . . .	33
4 Description des principaux résultats du manuscrit. . . . .	50
5 Problèmes ouverts et perspectives. . . . .	57
Références . . . . .	60
<b>II. Indirect controllability of some linear parabolic systems of <math>m</math> equations with <math>m - 1</math> controls involving coupling terms of zero or first order</b>	<b>65</b>
<b>III. Controllability of a <math>2 \times 2</math> parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one.</b>	<b>97</b>
<b>A. Partial null controllability of parabolic linear systems</b>	<b>129</b>
<b>B. Schémas numériques pour la contrôlabilité partielle</b>	<b>165</b>
<b>Bibliographie générale</b>	<b>197</b>



# Liste des publications

- [1] **Partial null Controllability of parabolic Linear systems**  
Farid Ammar Khodja, Franz Chouly, Michel Duprez  
à paraître dans *Mathematical Control and Related Fields (MCRF) - AIMS*  
HAL [hal:01174812](#)
  
- [2] **Indirect controllability of some linear parabolic systems of  $m$  equations with  $m - 1$  controls involving coupling terms of zero or first order**  
Michel Duprez, Pierre Lissy  
*Soumis*  
HAL [hal:1312.2568](#)
  
- [3] **Controllability of a 2X2 parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one**  
Michel Duprez  
*Soumis*  
HAL [hal:1403.5042](#)



# Plan du manuscrit

Dans une partie introductive, nous nous donnerons pour objectif principal d'expliquer les différentes techniques utilisées dans ce manuscrit sur des exemples simples, de présenter les résultats existants et de montrer en quoi ceux des chapitres qui suivront en sont le prolongement. Nous commencerons par introduire différentes notions de contrôlabilité (partielle ou non) des systèmes paraboliques dans un cadre général et expliquerons quelles relations existent entre ces concepts à l'aide de certaines propriétés du système dit adjoint. Nous présenterons ensuite certaines techniques permettant d'étudier la contrôlabilité à zéro des systèmes paraboliques en les appliquant à des problèmes de contrôlabilité déjà résolus ou non. Dans un premier temps, nous utiliserons les inégalités de Carleman établies par A.V. Fursikov et O.Y. Imanuvilov dans [FI96], la méthode des moments introduite par H.O. Fattorini et D.L. Russell dans [FR71 ; FR74] ainsi qu'une méthode permettant de montrer des résultats de non contrôlabilité que l'on peut trouver dans l'article [GI13] de S. Guerrero. Nous expliquerons ensuite comment il est possible de contrôler l'équation de la chaleur par un contrôle de classe  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) l'aide de deux techniques différentes, l'une élaborée par V. Barbu dans [Bar00] où l'auteur obtient des contrôles  $L^\infty$  grâce à la méthode de dualité développée par A.V. Fursikov et O.Y. Imanuvilov dans [FI96] et l'autre utilisée dans une suite d'articles [BGBPG04b ; BGBPG04c ; BGBPG04a ; GBPG06] écrits par O. Bodart, M. González-Burgos et R. Pérez-García où les auteurs souhaitent également obtenir des contrôles  $L^\infty$  afin d'étudier la contrôlabilité d'un système non linéaire. Après cela, nous montrerons comment, en combinant la méthode par contrôle fictif avec une technique d'inversion locale d'opérateurs différentiels à l'aide de combinaisons algébriques (Cf [Gro86, Section 2.3.8] de M. Gromov), il est possible d'obtenir des résultats de contrôlabilité. Nous dresserons ensuite un état de l'art concernant les problèmes de contrôle étudiés dans les trois premiers chapitres et détaillerons trois résultats en particulier afin de mieux comprendre quelles sont les contributions que nous apportons. Après cela, nous donnerons les principaux résultats de ce manuscrit et évoquerons les perspectives qui pourraient en découler.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de la contrôlabilité à zéro et approchée des systèmes définis sur un domaine non vide borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) de  $m$  équations paraboliques ( $m \geq 2$ ) contrôlées par  $m - 1$  forces localisées sur un sous-ensemble ouvert non vide et couplées par des matrices d'ordre zéro et un. Lorsque les coefficients de couplage sont constants, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité à zéro et approchée en tout temps. Dans le cas de deux équations et un domaine de dimension un, nous prouverons la contrôlabilité approchée et à zéro en tout temps sous une condition générale suffisante pour des coefficients généraux dépendants des variables d'espace et de temps lorsque les supports des termes de couplage intersectent le domaine de contrôle. Les résultats sont obtenus à l'aide de la méthode de contrôle fictif combinée avec une méthode algébrique et des estimations appropriées de Carleman. Ce chapitre reprend en grande partie l'article « *Indirect controllability of some linear parabolic systems of  $m$  equations with  $m - 1$  controls involving coupling terms of zero or first order* » (Cf [DL15]), écrit en collaboration avec

P. Lissy et soumis pour publication.

Dans un deuxième chapitre, nous étudierons la contrôlabilité à zéro et approchée d'une classe de systèmes linéaires de deux équations paraboliques contrôlées par une force avec un terme de couplage d'ordre un et dépendant de l'espace. Nous nous placerons sur un intervalle borné réel, et le contrôle agira dans un sous-intervalle ou sur la frontière. Nous commencerons par prouver la contrôlabilité à zéro en tout temps lorsque l'intersection des domaines de contrôle et de couplage est non vide. Dans le cas contraire, nous fournirons un temps minimal de contrôlabilité à zéro. Ce résultat viendra compléter ceux du chapitre précédent. Finalement, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité approchée. Nous obtiendrons principalement ces résultats grâce à la méthode des moments. Ce chapitre reprend en grande partie l'article « *Controllability of a  $2 \times 2$  parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one* » (Cf [Dup15]) soumis pour publication.

Nous consacrerons le troisième chapitre à l'étude de la contrôlabilité partielle des systèmes linéaires paraboliques de  $n$  équations. Nous nous placerons sur un domaine borné donné et étudierons l'effet de  $m$  contrôles ( $m \leq n$ ) localisés dans un sous-ensemble ouvert non vide contrôlant seulement  $p$  composantes de la solution avec  $p \leq n$ . Le premier résultat de ce chapitre sera une condition nécessaire et suffisante lorsque les matrices de couplage et de contrôle sont constantes. Puis nous donnerons une condition suffisante de contrôlabilité partielle à zéro pour des matrices de couplage et de contrôle dépendant seulement du temps. Nous terminerons par des résultats positifs et négatifs de contrôlabilité partielle à zéro d'un système parabolique  $2 \times 2$  avec un coefficient de couplage dépendant de l'espace et qui est toujours partiellement approximativement contrôlable. Ce chapitre reprend l'article « *Partial null controllability of parabolic linear systems* » (Cf [AKCD15]), écrit en collaboration avec F. Ammar Khodja et F. Chouly et qui est à paraître dans *Mathematical Control and Related Fields*.

Dans le dernier chapitre, nous illustrerons numériquement des problèmes de contrôlabilité partielle que nous aurons étudiés dans le chapitre précédent. Nous nous attacherons à distinguer numériquement la contrôlabilité approchée de la contrôlabilité à zéro sur un système parabolique donné. Pour cela, nous utiliserons la HUM méthode initialement introduite R. Glowinski, J.-L. Lions et J. He dans [GLH08 ; Lio68] en suivant la méthodologie de F. Boyer donnée dans [Boy13]. Nous nous placerons dans un cadre général que l'on peut retrouver dans [Boy13 ; BHLR10a ; BHLR10b ; BHLR11 ; BLR14 ; LT06]. Nous commencerons par transformer le problème par pénalisation et par dualité. Après avoir discrétisé le système parabolique étudié à l'aide d'un  $\theta$ -schéma général, nous montrerons comment il est possible de se ramener à un cadre général dans le cas des éléments finis et des différences finies. L'algorithme sera implémenté en *Python* à l'aide principalement des bibliothèques *NumPy*, *SciPy*, *Dolfin* et *FeNICS* (Cf [JOP+01 ; LW10]). Nous terminerons par quelques observations et commentaires.

# Introduction

## 1 Généralités

Dans cette section, nous présenterons quelques aspects de la contrôlabilité. Nous rappellerons entre autres certains résultats connus concernant les systèmes paraboliques linéaires et les systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires. Pour une introduction plus générale à la théorie du contrôle, nous renvoyons à [Cor07 ; TW09 ; Zab92].

### 1.1 Motivation

La contrôlabilité des systèmes paraboliques est utilisée dans l'étude de réactions chimiques (Cf [ÉT89 ; BH03]) et une large variété de situations biologiques et physiques (Cf [HP09 ; SKT79 ; LAK82]). Nous allons présenter un modèle en particulier qui peut être trouvé dans [CH09], provenant d'une description mathématique d'une croissance des tumeurs cérébrales.

Soit  $\Omega$  un domaine non vide borné de  $\mathbb{R}^3$  de bord  $\partial\Omega$  de classe  $C^1$  et  $T > 0$ . Notons  $Q_T := \Omega \times (0, T)$  et  $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$ . Considérons le système suivant de trois équations de la chaleur semi-linéaires

$$\begin{aligned} & \text{Pour } y^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, u : Q_T \rightarrow \mathbb{R} \\ & \text{Trouver } y := (y_1, y_2, y_3) : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tel que} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y_1 = d_1 \Delta y_1 + a_1 g_1(y_1) y_1 - (\alpha_{1,2} y_2 + \kappa_{1,3} y_3) y_1 & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 = d_2 \Delta y_2 + a_2 g_2(y_2) y_2 - (\alpha_{2,1} y_1 + \kappa_{2,3} y_3) y_2 & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_3 = d_3 \Delta y_3 + a_3 g_3(y_3) y_3 + u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_\nu y_i := \nabla y_i \cdot \nu = 0, \quad 1 \leq i \leq 3 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.1) \end{aligned}$$

où  $\nu$  est le vecteur normal extérieur unitaire à la frontière  $\partial\Omega$ ,  $g_1, g_2, g_3$  sont trois fonctions et les coefficients  $d_1, d_2, d_3, a_1, a_2, a_3, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}, \kappa_{1,3}, \kappa_{2,3}$  sont des constantes strictement positives. Ici  $y_1$  représente la densité de cellules tumorales,  $y_2$  la densité de cellules saines et  $y_3$  la concentration de médicament en tout vecteur position  $x$  et tout temps  $t$ . Dans la première équation, le taux de croissance des cellules tumorales  $g_1(y_1)$  peut être exponentiel (égale à 1), logistique (égale à  $(1 - y_1/k_1)$ ) ou Gompertz (égale à  $\ln(k_1/y_1)$ ), où  $k_1$  est la capacité



d'accueil de cellules tumorales. Ici  $a_1$  représente le taux de croissance intrinsèque de cellules tumorales. Le terme  $\alpha_{12}$  correspond au taux de mortalité des cellules tumorales dû à la compétition de ressources et de place avec les cellules saines et le terme  $\kappa_{13}$  correspond au taux de mortalité des cellules tumorales dû au médicament. La densité de cellules saines est décrite suivant le même principe. Dans la troisième équation,

$$g_3(y_3) := -1,$$

appelée fonction de réabsorption, modélise la réaction chimique du médicament avec les tissus sains. Finalement,  $u$ , représentant la quantité de médicament injecté chez l'individu, sera le contrôle.

Afin de mieux connaître la dynamique des cellules tumorales, nous pouvons utiliser et étudier ce genre de modèles pour répondre aux questions :

- Est-il possible de trouver un contrôle  $u$  qui permette d'amener la densité de cellules tumorales et la concentration de médicament proche de zéro sans que la densité de cellules saines soit nulle à l'instant  $T$  ?
- Sachant que l'on a pu amener la densité de cellules tumorales et la concentration de médicament d'un patient à un état stable et opérable avec une certaine injection, est-il possible pour un autre patient de trouver l'injection qui puisse l'emmener au même état stable ?

Le système (1.1) est un exemple de modèle où apparaissent des problèmes de contrôlabilité similaires à ceux traités tout au long de ce manuscrit bien que nous nous concentrons sur les systèmes linéaires. Ce modèle-ci motivera tout particulièrement l'introduction de la notion de contrôlabilité partielle qui sera étudiée en détails dans les chapitres III et IV.

## 1.2 Notion de contrôlabilité

Dans cette section, nous introduirons de manière générale les notions de contrôlabilité approchée, à zéro, exacte et aux trajectoires pour des systèmes paraboliques. Nous expliquerons quelles relations existent entre ces différents concepts pour de tels systèmes.

Soit  $\mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{W}$  et  $\mathcal{U}$  quatre espaces de Hilbert réels séparables. Nous identifions  $\mathcal{H}, \mathcal{W}$  et  $\mathcal{U}$  à leurs espaces duaux. Nous supposons que  $\mathcal{V}$  est dense dans  $\mathcal{H}$  et que les inclusions suivantes sont vérifiées

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}', \tag{1.2}$$

où l'inclusion de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{H}$  est continue. Considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t y = \mathcal{A}(t)y + \mathcal{B}(t)u, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \tag{1.3}$$

où  $y^0 \in \mathcal{H}$  est la donnée initiale et où  $u \in \mathcal{U}$  est le contrôle.

Nous supposons que  $\mathcal{A} : L^2(0, T; \mathcal{V}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{V}')$  et

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{V}, \quad t \rightarrow \langle \mathcal{A}(t)\phi, \psi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \text{ est mesurable.}$$

Par ailleurs, il existe des constantes  $\alpha, \beta > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  telles que pour tout  $t \in (0, T)$  et tout  $\phi, \psi \in \mathcal{V}$

$$|\langle \mathcal{A}(t)\phi, \psi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}}| \leq \beta \|\phi\|_{\mathcal{V}} \|\psi\|_{\mathcal{V}}$$

$$\langle \mathcal{A}(t)\phi, \phi \rangle_{\mathcal{V}, \mathcal{V}} + \lambda \|\phi\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \alpha \|\phi\|_{\mathcal{V}}^2.$$

L'opérateur  $\mathcal{B}$  sera un élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{U}, L^2(0, T; \mathcal{V}'))$ . Nous ferons également l'hypothèse que l'adjoint  $\mathcal{A}^*$  de l'opérateur  $\mathcal{A}$  satisfait la propriété rétrograde : la solution  $\varphi$  du système

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \mathcal{A}(t)^* \varphi, \\ \varphi(T) = \varphi^0 \end{cases}$$

vérifie

$$(\exists t_0 \in (0, T) \text{ t.q. } \varphi(t_0) = 0) \Rightarrow (\varphi = 0 \text{ sur } (0, T)). \quad (1.4)$$

Dans ce cadre, le système (1.3) est bien posé :

**THÉORÈME 1.1** (Cf [Lio68], p. 102). *Pour toute donnée initiale  $y^0 \in \mathcal{H}$  et toute fonction  $u \in \mathcal{U}$ , le système (1.3) admet une unique solution  $y$  dans l'espace*

$$W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}') := \{y \in L^2(0, T; \mathcal{V}) : \partial_t y \in L^2(0, T; \mathcal{V}')\}.$$

De plus, nous avons l'estimation

$$\|y\|_{W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')} \leq e^{C(1+T)} (\|y^0\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{B}u\|_{L^2(0, T; \mathcal{V}')}),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $T$ ,  $y^0$  et  $u$ .

Tout au long du manuscrit, nous utiliserons la propriété suivante de l'espace, que nous venons d'introduire,  $W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  :

**Propriété 1.1** (Cf [DL88] p. 570). *L'injection*

$$W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}') \hookrightarrow C^0([0, T]; \mathcal{H})$$

est continue.

*Remarque 1.1.* Le théorème 1.1 est démontré à l'aide de la méthode de Galerkin. Si les opérateurs  $\mathcal{A}(t)$  et  $\mathcal{B}(t)$  sont indépendants du temps, il est possible d'utiliser la théorie des semi-groupes (Cf A. Pazy [Paz83]) pour étudier le caractère bien posé du système (1.3).

Dans les chapitres IV et V, nous étudierons la *contrôlabilité partielle* des systèmes paraboliques qui consiste à ne contrôler que certaines composantes de la solution. Afin de définir cette notion de manière générale, considérons un opérateur linéaire et continu  $\mathcal{P}$  donné par

$$\mathcal{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{W}.$$

De plus, pour toute donnée initiale  $y_0 \in \mathcal{H}$ , tout contrôle  $u \in \mathcal{U}$  et tout temps  $t \in [0, T]$ , nous noterons  $y(t; y_0, u)$  la solution du système (1.3) à l'instant  $t$ .

**DÉFINITION 1.1.** Le système (1.3) est dit être

- **$\mathcal{P}$ -approximativement contrôlable** au temps  $T$ , si pour tout nombre réel  $\varepsilon > 0$ , tout  $y^0 \in \mathcal{H}$  et tout  $y^T \in \mathcal{W}$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{U}$  tel que

$$\|\mathcal{P}y(T; y^0, u) - y^T\|_{\mathcal{W}} \leq \varepsilon.$$

- **$\mathcal{P}$ -contrôlable à zéro** au temps  $T$ , si pour toutes données initiales  $y^0 \in \mathcal{H}$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{U}$  tel que

$$\mathcal{P}y(T; y^0, u) = 0.$$

- **$\mathcal{P}$ -contrôlable aux trajectoires** au temps  $T$ , si pour toute donnée initiale  $y^0, \tilde{y}^0 \in \mathcal{H}$  et tout  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{U}$  tel que

$$\mathcal{P}y(T; y^0, u) = \mathcal{P}y(T; \tilde{y}^0, \tilde{u}).$$

- **$\mathcal{P}$ -exactement contrôlable** au temps  $T$ , si pour tout  $y^0 \in \mathcal{H}$  et tout  $y^T \in \mathcal{W}$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{U}$  tel que

$$\mathcal{P}y(T; y^0, u) = y^T.$$

Les systèmes paraboliques n'étant pas exactement contrôlables dans les cadres que nous considérerons, nous n'étudierons pas cette notion dans ce manuscrit. En effet, par exemple, si l'opérateur  $\mathcal{A}$  est indépendant du temps et auto-adjoint sur  $\mathcal{H}$ , si l'espace de contrôle est  $\mathcal{U} := \mathcal{H}$  et si l'opérateur de contrôle  $\mathcal{B}$  est l'identité de  $\mathcal{H}$ , alors le système (1.3), qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t y = \mathcal{A}y + u, \\ y(0) = y^0, \end{cases}$$

n'est pas exactement contrôlable et cela quelque soit le temps  $T$  et la condition initiale  $y^0$  considérés. On peut trouver ce résultat dans le livre de J. Zabczyk [Zab92].

*Remarque 1.2.* Les notions de  $\mathcal{P}$ -contrôlabilité à zéro et aux trajectoires du système (1.3) sont équivalente, nous n'étudierons donc pas non plus la contrôlabilité aux trajectoires. Plus précisément, soit  $y^0, \tilde{y}^0 \in \mathcal{H}$  et  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ . Notons  $\tilde{y}$  la solution du système (1.3) pour la donnée initiale  $\tilde{y}^0$  et le contrôle  $\tilde{u}$ . Par linéarité du système (1.3), contrôler aux trajectoires le système (1.3) revient à contrôler à zéro le système vérifié par  $w := y - \tilde{y}$ . La remarque que nous venons de faire est valable pour les systèmes linéaires, mais ne l'est plus pour les systèmes non linéaires.

Quelles relations existe-t-il entre ces différents concepts de contrôlabilité ? Il est évident que la contrôlabilité exacte d'un système implique les contrôlabilités approchée, à zéro et aux trajectoires de celui-ci. Nous verrons dans la Remarque 1.3 que si un système linéaire vérifiant l'hypothèse d'unicité rétrograde (1.4) est contrôlable à zéro, alors il est approximativement contrôlable. Enfin, d'après la Remarque 1.2, lorsqu'un système est linéaire, les notions de contrôlabilité aux trajectoires et à zéro sont équivalentes. Voici ci-dessous un diagramme résumant ces différentes remarques.

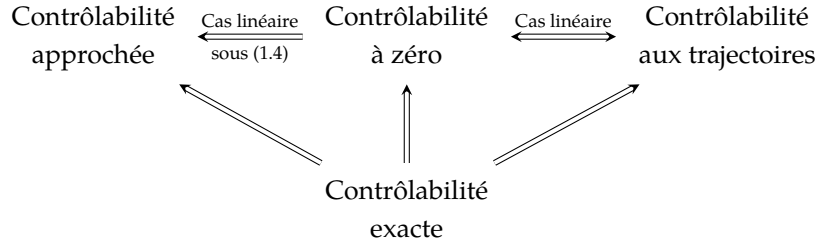


FIGURE I.1: Relation entre les différentes notions de contrôlabilité pour ces systèmes.

### 1.3 Contrôlabilité et observabilité

Les différentes notions de contrôlabilité admettent chacune une formulation duale équivalente. Plus précisément, étudier la contrôlabilité d'un système peut se ramener à étudier certaines propriétés d'un système dit adjoint. En reprenant le cadre général utilisé dans la section 1.2, nous pouvons caractériser la contrôlabilité à zéro par une *inégalité d'observabilité* et la contrôlabilité approchée par une *propriété de continuation unique*. Ceci est un résultat classique en contrôlabilité et a été observé par S. Dolecki et D.L. Russell dans [DR77].

**PROPOSITION 1.1.** 1. Le système (1.3) est  $\mathcal{P}$ -contrôlable à zéro au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_{obs} > 0$  telle que pour tout  $\varphi^0 \in \mathcal{W}$  la solution  $\varphi \in W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  du système adjoint

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \mathcal{A}^* \varphi \\ \varphi(T) = \mathcal{P}^* \varphi^0 \end{cases} \quad (1.5)$$

satisfait l'inégalité d'observabilité

$$\|\varphi(0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{obs} \|\mathcal{B}^* \varphi\|_{\mathcal{U}}^2. \quad (1.6)$$

2. Le système (1.3) est  $\mathcal{P}$ -approximativement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si, pour tout  $\varphi^0 \in \mathcal{W}$  la solution  $\varphi$  du système (1.5) satisfait

$$\mathcal{B}^* \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

*Démonstration.* Pour tout  $y^0 \in \mathcal{H}$  et  $u \in \mathcal{U}$ , nous noterons  $y(t; y^0, u)$  la solution du système (1.3) au temps  $t \in [0, T]$ . Pour tout  $t \in [0, T]$ , considérons les opérateurs  $S_t$  et  $L_t$  définis comme suit :

$$\begin{aligned} S_t : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} & L_t : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{H} \\ y^0 &\mapsto y(t; y^0, 0) & u &\mapsto y(t; 0, u). \end{aligned} \quad (1.7)$$

1. Le système (1.3) est  $\mathcal{P}$ -contrôlable à zéro au temps  $T$  si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \forall y^0 \in \mathcal{H}, \exists u \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\ \mathcal{P}S_T y^0 = -\mathcal{P}L_T u. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le problème (1.8) admet une solution si, et seulement si,

$$\text{Im } \mathcal{P}S_T \subseteq \text{Im } \mathcal{P}L_T. \quad (1.9)$$

L'inclusion (1.9) est équivalente à (Cf J.-M. Coron [Cor07], Lemme 2.48 p. 58)

$$\begin{aligned} \exists C > 0 \text{ tel que } \forall \varphi^0 \in \mathcal{W}', \\ \|S_T^* \mathcal{P}^* \varphi^0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|L_T^* \mathcal{P}^* \varphi^0\|_{\mathcal{U}}^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Calculons l'expression des opérateurs adjoints  $(\mathcal{P}S_T)^*$  et  $(\mathcal{P}L_T)^*$  associés à  $\mathcal{P}S_T$  et  $\mathcal{P}L_T$ . Soit  $y^0 \in \mathcal{H}$ ,  $u \in \mathcal{U}$  et  $\varphi^0 \in \mathcal{W}$ . En considérant  $y$  et  $\varphi$  les solutions des systèmes (1.3) et (1.5), on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}S_T y^0, \varphi^0 \rangle_{\mathcal{W}} &= \langle y(T; y^0, 0), \varphi(T) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \int_0^T \langle \partial_t y(s; y^0, 0), \varphi(s) \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} ds \\ &\quad + \int_0^T \langle \partial_t \varphi(s), y(s; y^0, 0) \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} ds + \langle y^0, \varphi(0) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle y^0, \varphi(0) \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}L_T u, \varphi^0 \rangle_{\mathcal{W}} &= \langle y(T; 0, u), \varphi(T) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \int_0^T \langle \partial_t y(s; 0, u), \varphi(s) \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} ds + \int_0^T \langle \partial_t \varphi(s), y(s; 0, u) \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} ds \\ &= \langle \mathcal{B}u, \varphi \rangle_{L^2(0, T; \mathcal{V}'), L^2(0, T; \mathcal{V})} = \langle u, \mathcal{B}^* \varphi \rangle_{\mathcal{U}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}S_T)^* : \mathcal{W} &\rightarrow \mathcal{H} & (\mathcal{P}L_T)^* : \mathcal{W} &\rightarrow \mathcal{U}, \\ \varphi^0 &\mapsto \varphi(0) & \varphi^0 &\mapsto \mathcal{B}^* \varphi \end{aligned} \quad \text{et}$$

où  $\varphi \in W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  est la solution du système (1.5). Nous concluons en injectant ces expressions de  $(\mathcal{P}S_T)^*$  et  $(\mathcal{P}L_T)^*$  dans (1.10).

2. A l'aide de la définition (1.7) de  $S_T$  et  $L_T$ , le système (1.3) est  $\mathcal{P}$ -approximativement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \forall y^0 \in \mathcal{H}, y^T \in \mathcal{W}, \varepsilon > 0, \exists u \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\ \|\mathcal{P}L_T u + \mathcal{P}S_T y^0 - y^T\|_{\mathcal{W}} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \forall z^T \in \mathcal{W}, \exists u \in \mathcal{U} \text{ tel que} \\ \|\mathcal{P}L_T u - z^T\|_{\mathcal{W}} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\overline{\mathcal{P}L_T(\mathcal{U})} = \mathcal{W}.$$

En d'autres termes

$$\ker(L_T^* \mathcal{P}^*) = \{0\}. \quad (1.11)$$

Ainsi le système (1.3) est  $\mathcal{P}$ -approximativement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si, pour tout  $\varphi^0 \in \mathcal{W}$

$$L_T^* \mathcal{P}^* \varphi^0 = \mathcal{B}^* \varphi \equiv 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0.$$

□

*Remarque 1.3.* À l'aide de cette proposition, nous remarquons grâce à la propriété rétrograde (1.4) de l'opérateur  $\mathcal{A}^*$  que la contrôlabilité à zéro d'un système parabolique linéaire implique la contrôlabilité approchée de celui-ci. Par contre, en ce qui concerne les systèmes paraboliques linéaires, la réciproque n'est pas toujours vraie (Cf [AK+14 ; AK+15 ; AKCD15 ; Dup15]). Comme nous le verrons dans la section 3, cette question n'est pas évidente et est restée ouverte un certain temps.

Lorsque l'inégalité d'observabilité (1.6) est vérifiée, le système (1.3) est contrôlable, et il est possible de trouver un contrôle estimé à l'aide de la constante d'observabilité  $C_{obs}$  et de la donnée initiale. Plus précisément, nous avons le corollaire ci-dessous qui est un résultat classique en contrôlabilité.

**Corollaire 1.1.** *Supposons que pour tout  $\varphi^0 \in \mathcal{W}$ , la solution  $\varphi$  du système adjoint (1.5) satisfasse l'inégalité d'observabilité (1.6). Alors pour toute condition initiale  $y^0 \in \mathcal{H}$ , il existe un contrôle  $u \in L^2(0, T; \mathcal{U})$  tel que la solution  $y$  du système (1.3) vérifie  $\mathcal{P}y(T) = 0$ . De plus, nous avons l'estimation suivante*

$$\|u\|_{\mathcal{U}}^2 \leq C_{obs} \|y^0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (1.12)$$

*Preuve.* Nous utiliserons une méthode développée par E. Fernández-Cara et E. Zuazua dans [FCZ00]. Soit  $y^0 \in \mathcal{H}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et considérons le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \text{minimiser } J_k(u_k) := \frac{1}{2} \|u_k\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{k}{2} \|\mathcal{P}y_k(T)\|_{\mathcal{W}}^2, \\ u_k \in \mathcal{U}, \end{cases} \quad (1.13)$$

où  $y_k$  est la solution dans  $W(0, T; \mathcal{V}, \mathcal{V}')$  de

$$\begin{cases} \partial_t y_k = \mathcal{A}y_k + \mathcal{B}u_k, \\ y_k(0) = y^0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Il existe une unique solution au problème de contrôle (1.13) (Cf J.-L. Lions [Lio68], p. 128). De plus, le minimum  $u_k$  de  $J_k$  est caractérisé par la solution du système (1.14), la solution du système adjoint

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi_k = \mathcal{A}^* \varphi_k, \\ \varphi_k(T) = k \mathcal{P}^* \mathcal{P}y_k(T) \end{cases} \quad (1.15)$$

et

$$\begin{cases} u_k = -\mathcal{B}^* \varphi_k, \\ u_k \in \mathcal{U}. \end{cases} \quad (1.16)$$

Premièrement, d'après (1.14), (1.15) et (1.16)

$$\begin{aligned} J_k(u_k) &= -\frac{1}{2} \langle \mathcal{B}^* \varphi_k, u_k \rangle_{\mathcal{U}} + \frac{k}{2} \langle \mathcal{P}y_k(T), \mathcal{P}y_k(T) \rangle_{\mathcal{W}}, \\ &= -\frac{1}{2} \langle \mathcal{B}^* \varphi_k, u_k \rangle_{\mathcal{U}} + \frac{k}{2} \langle \mathcal{P}^* \mathcal{P}y_k(T), y_k(T) \rangle_{\mathcal{H}}, \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \langle \mathcal{B}u_k, \varphi_k \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} + \frac{1}{2} \langle y^0, \varphi_k(0) \rangle_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} \int_0^T \{ \langle \partial_t \varphi_k, y_k \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} + \langle \partial_t y_k, \varphi_k \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \}, \\ &= \frac{1}{2} \langle y^0, \varphi_k(0) \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

D'où, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$J_k(u_k) \leq \frac{\varepsilon}{4} \|\varphi_k(0)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|y^0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (1.17)$$

De plus, d'après l'inégalité d'observabilité (1.6) et la définition de  $J_k$ ,

$$\|\varphi_k(0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{obs} \|\mathcal{B}^* \varphi_k\|_{\mathcal{U}}^2 \leq 2C_{obs} J_k(u_k). \quad (1.18)$$

Ainsi, en combinant (1.17) et (1.18),

$$J_k(u_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} C_{obs} J_k(u_k) + \frac{1}{4\varepsilon} \|y^0\|_{\mathcal{H}}^2.$$

On en déduit que, pour  $\varepsilon = C_{obs}^{-1}$ ,

$$J_k(u_k) \leq \frac{C_{obs}}{2} \|y^0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (1.19)$$

Alors, d'après le Théorème 1.1, (1.19) et (1.13)

$$\begin{aligned} \|y_k\|_{W(0,T;\mathcal{V},\mathcal{V}')} &\leq e^{C(1+T)} (\|y^0\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{B}u_k\|_{L^2(0,T;\mathcal{V}')}), \\ &\leq e^{C(1+T)} (C_{obs}^{1/2} \|\mathcal{B}\| + 1) \|y^0\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

où  $C$  ne dépend pas de  $y^0$  et de  $k$ . Ainsi, d'après (1.19) et (1.20), nous en déduisons qu'il existe des sous-suites, que nous noterons encore  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ , telles que l'on ait les convergences faibles suivantes

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{dans } \mathcal{U}, \\ y_k \rightharpoonup y & \text{dans } W(0,T;\mathcal{V},\mathcal{V}') \end{cases}$$

et la convergence forte

$$\mathcal{P}y_k(T) \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathcal{W}.$$

Comme  $y_k$  est solution du système (1.14), En passant à la limite selon  $k$ ,  $y$  est solution du système (1.14). D'après la Propriété 1.1, l'inclusion

$$W(0,T;\mathcal{V},\mathcal{V}') \hookrightarrow C([0,T];\mathcal{H})$$

est continue, d'où  $\mathcal{P}y_k(T)$  converge faiblement dans  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{P}y(T)$ , et par unicité de la limite  $\mathcal{P}y(T) = 0$ . Ainsi  $u$  est solution dans  $\mathcal{U}$  de notre problème de contrôle et nous obtenons l'inégalité (1.12) grâce à (1.19).  $\square$

*Remarque 1.4.* Nous verrons dans le dernier chapitre que le contrôle  $u$  que l'on trouve dans la preuve du Corollaire 1.1 est en réalité le contrôle de norme  $L^2$  minimale. Nous regarderons également comment il est possible d'utiliser cette preuve afin de construire un schéma numérique permettant d'approcher ce contrôle de norme minimale à l'aide de la méthodologie développée par F. Boyer dans [Boy13].

### 1.4 Contrôlabilité des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires

Dans cette section, nous mettrons tout d'abord en évidence le fait que les différentes notions de contrôlabilité sont équivalentes en dimension finie, plus précisément dans le cas des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires. Nous donnerons ensuite une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité de ces systèmes.

Soit  $n, m \in \mathbb{N}^*$  et considérons le système d'équations différentielles linéaires ordinaires

$$\begin{cases} \partial_t y = Ay + Bu & \text{dans } (0, T), \\ y(0) = y^0, \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $y^0 \in \mathbb{R}^n$  est la donnée initiale,  $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$  est le contrôle,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ .

Nous étudierons ici la  $\Pi_p$ -contrôlabilité où l'opérateur de projection  $\Pi_p$  est défini par  $\Pi_p := (I_p \ 0_{p,n-p})$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Pi_p : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} &\rightarrow \mathbb{R}^p, \\ (y_1, y_2) &\mapsto y_1 \end{aligned}$$

Autrement dit, à un vecteur de  $n$  composantes,  $\Pi_p$  associe les  $p$  premières.

Nous commencerons par le lemme suivant qui montre que les différentes notions de contrôlabilité sont équivalentes pour le système (1.21). Dans la suite, nous noterons  $y(t; y^0, u)$  la solution au temps  $t$  du système (1.21) pour une condition initiale  $y^0$  et un contrôle  $u$ .

**Lemme 1.1.** *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *Le système (1.21) est  $\Pi_p$ -exactement contrôlable au temps  $T$ , i.e. pour tout  $y^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $y^T \in \mathbb{R}^p$  il existe  $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$  tel que*

$$\Pi_p y(T; y^0, u) = y^T.$$

(ii) *Le système (1.21) est  $\Pi_p$ -contrôlable aux trajectoires au temps  $T$ , i.e. pour tout  $y^0, \bar{y}^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $\bar{u} \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$  il existe  $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$  tel que*

$$\Pi_p y(T; y^0, u) = \Pi_p y(T; \bar{y}^0, \bar{u}).$$

(iii) *Le système (1.21) est  $\Pi_p$ -contrôlable à zéro au temps  $T$ , i.e. pour tout  $y^0 \in \mathbb{R}^n$  il existe  $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$  tel que*

$$\Pi_p y(T; y^0, u) = 0.$$

(vi) *Le système (1.21) est  $\Pi_p$ -approximativement contrôlable au temps  $T$ , i.e. pour tout nombre réel  $\varepsilon > 0$ ,  $y^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $y^T \in \mathbb{R}^p$  il existe un contrôle  $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$  tel que*

$$\|\Pi_p y(T; y^0, u) - y^T\|_{\mathbb{R}^p} \leq \varepsilon.$$

(v) *Pour tout  $\varphi^0 \in \mathbb{R}^p$ , la solution  $\varphi$  du système*

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = A^* \varphi & \text{dans } (0, T), \\ \varphi(T) = \Pi_p^* \varphi^0 \end{cases} \quad (1.22)$$

*satisfait*

$$B^* \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0. \quad (1.23)$$



*Preuve.* En utilisant le même raisonnement que dans la preuve de la Proposition 1.1, la  $\Pi_p$ -contrôlabilité approchée (1.21) est caractérisée par (1.23). De plus, en utilisant le diagramme I.1, il suffit de montrer que la  $\Pi_p$ -contrôlabilité approchée implique la  $\Pi_p$ -contrôlabilité exacte. Pour tout  $t \in [0, T]$ , considérons les opérateurs  $S_t$  et  $L_t$  définis par

$$\begin{aligned} S_t : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n & L_t : L^2([0, T]; \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathbb{R}^n. \\ y^0 &\mapsto y(t; y^0, 0) & u &\mapsto y(t; 0, u) \end{aligned} \quad \text{et}$$

Si nous appliquons le même argument que dans la Proposition 1.1, nous concluons en remarquant que la  $\Pi_p$ -contrôlabilité approchée est équivalente à

$$\overline{\text{Im } \Pi_p L_T} = \text{Im } \Pi_p L_T = \mathbb{R}^p \quad (1.24)$$

et la  $\Pi_p$ -contrôlabilité exacte est quant à elle équivalente à la surjectivité de l'opérateur  $\Pi_p L_T$ .  $\square$

Pour les systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires, nous ne parlerons plus que de  $\Pi_p$ -contrôlabilité. Donnons maintenant une caractérisation de la contrôlabilité à l'aide de la condition dite de Kalman (Cf [KFA69]).

**THÉORÈME 1.2.** *Le système (1.21) est  $\Pi_p$ -contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si,*

$$\text{Ker } (K^* \Pi_p^*) = \{0\}, \quad (1.25)$$

où la matrice  $K$  est donnée par  $K = (B|AB|\dots|A^{n-1}B)$ .

La matrice  $K$  est appelée *matrice de Kalman*.

*Preuve du Théorème 1.2.* Soient  $\varphi^0 \in \mathbb{R}^p$  et  $\varphi$  la solution dans  $C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$  du système adjoint (1.22). Remarquons premièrement, en utilisant (1.22), que  $\varphi \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$  avec

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], \frac{d^j \varphi}{dt^j}(t) = (-A^*)^j \varphi(t) = ((-A)^j)^* \varphi(t).$$

Ainsi, en appliquant  $B^*$  de chaque côté de la dernière égalité,  $B^* \varphi$  est également une fonction de classe  $C^\infty$  avec

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], \frac{d^j (B^* \varphi)}{dt^j}(t) = B^* (-A^*)^j \varphi(t) = B^* (-A^*)^j e^{(T-t)A^*} \Pi_p^* \varphi^0. \quad (1.26)$$

D'après le Lemme 1.1, la  $\Pi_p$ -contrôlabilité du système (1.21) est équivalente à la propriété de continuation unique (1.23).

$\Leftarrow$  Supposons que la condition (1.25) soit vérifiée et que  $B^* \varphi = 0$  sur  $[0, T]$  pour une donnée initiale  $\varphi^0 \in \mathbb{R}^p$ . D'où, d'après (1.26) pour tout  $t \in [0, T]$  et  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$B^* (A^*)^j e^{(T-t)A^*} \Pi_p^* \varphi^0 = 0.$$

Plus particulièrement, à l'instant  $t = T$ ,

$$\begin{pmatrix} B^* \\ B^* A^* \\ \vdots \\ B^* (A^*)^{n-1} \end{pmatrix} \Pi_p^* \varphi^0 = K^* \Pi_p^* \varphi^0 = 0.$$

Ainsi, d'après (1.25),  $\varphi^0 = 0$  et on en déduit que  $\varphi = 0$  sur  $[0, T]$ .

⇒ Supposons maintenant que le système (1.21) est  $\Pi_p$ -contrôlable au temps  $T$ . Montrons que  $\ker(K^*\Pi_p^*) = \{0\}$ . Soit  $\varphi^0 \in \mathbb{R}^p$  telle que

$$K^*\Pi_p^*\varphi^0 = 0. \quad (1.27)$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , la solution du système (1.22) est donnée par

$$\varphi(t) = e^{(T-t)A^*}\Pi_p^*\varphi^0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{(T-t)^i}{i!} (A^*)^i \Pi_p^*\varphi^0.$$

D'où

$$B^*\varphi(t) = B^*e^{(T-t)A^*}\Pi_p^*\varphi^0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{(T-t)^i}{i!} B^*(A^*)^i \Pi_p^*\varphi^0. \quad (1.28)$$

D'après le Théorème de Cayley-Hamilton,

$$(A^*)^n \in \text{Vect}\{I, A^*, \dots, (A^*)^{n-1}\},$$

ainsi par récurrence, pour tout  $k \geq n$ ,

$$B^*(A^*)^k \Pi_p^* \in \text{Vect}\{B^*\Pi_p^*, B^*A^*\Pi_p^*, \dots, B^*(A^*)^{n-1}\Pi_p^*\}. \quad (1.29)$$

Par conséquent, en utilisant (1.27) et (1.29), l'expression (1.28) donne  $B^*\varphi = 0$  sur  $[0, T]$  et d'après (1.23),  $\varphi = 0$  dans  $[0, T]$ . En particulier,  $\varphi^0 = 0$ . □

## 2 Quelques outils pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes paraboliques

Dans cette partie, nous présentons certaines techniques permettant d'étudier la contrôlabilité à zéro des systèmes paraboliques. Afin de comprendre comment et dans quelles situations les utiliser, nous les appliquerons à des problèmes de contrôlabilité déjà résolus ou non résolus.

### 2.1 Inégalités de Carleman

Dans cette section, nous donnerons les inégalités de Carleman et les utiliserons afin d'obtenir un résultat bien connu de contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec terme source. Plus précisément, cette dernière est contrôlable à zéro si le terme source admet une décroissance exponentielle en temps de sa norme à l'instant  $T$ . Nous verrons dans la section 2.3 que cette condition n'est pas nécessaire.

Avant de présenter les inégalités de Carleman, nous introduirons tout d'abord quelques notations. Soit un domaine non vide borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) avec une frontière  $\partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $T > 0$ . Nous noterons  $Q_T := \Omega \times (0, T)$  et  $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$ . Pour  $s, \lambda > 0$ ,  $p \in \mathbb{R}$  et  $u \in L^2(Q_T)$ , nous définissons les fonctionnelles suivantes :

$$I_1(p, u) := s^p \lambda^{p+1} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^p u^2 + s^{p-2} \lambda^{p-1} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^{p-2} |\nabla u|^2 \quad (2.1)$$

et

$$I_2(p, u) := s^p \lambda^{p+1} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^p u^2 + s^{p-2} \lambda^{p-1} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^{p-2} |\nabla u|^2 + s^{p-4} \lambda^{p-3} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^{p-4} \{|\Delta u|^2 + |\partial_t u|^2\}, \quad (2.2)$$

où, pour tout  $(x, t) \in Q_T$ ,

$$\alpha(t, x) := \frac{\exp(\frac{k(m+1)}{m} \lambda \|\eta^0\|_\infty) - \exp[\lambda(k \|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^m (T-t)^m} \quad (2.3)$$

et

$$\xi(t, x) := \frac{\exp[\lambda(k \|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^m (T-t)^m}, \quad (2.4)$$

avec  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $k > m$  et  $\eta^0 \in C^2(\bar{\Omega})$  une fonction satisfaisant pour  $\kappa > 0$  et  $\mathcal{B}$  un ouvert non vide de  $\Omega$

$$|\nabla \eta^0| \geq \kappa \text{ dans } \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}, \quad \eta^0 > 0 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad \eta^0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

La démonstration de l'existence d'une telle fonction  $\eta^0$  peut être trouvée dans [FI96, Lemme 1.1, Chap. 1] (Cf également [Cor07, Lemme 2.68, Chap. 2]).

**Lemme 2.1** (Inégalités de Carleman, [FI96]). *Soit  $u^0 \in L^2(\Omega)$  et  $f \in L^2(Q_T)$ . Alors il existe une constante  $C_0$  dépendant uniquement de  $\Omega$  et  $\mathcal{B}$  telle que la solution du système*

$$\begin{cases} -\partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(\cdot, T) = u^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

satisfasse

$$I_2(p, u) \leq C_0 \left( s^p \lambda^{p+1} \iint_{\mathcal{B} \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \xi^p |u|^2 + s^{p-3} \lambda^{p-3} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^{p-3} |f|^2 \right), \quad (2.5)$$

pour tout  $\lambda \geq C$  et  $s \geq s_0 := C(T^{2m} + T^{2m-1})$ .

On peut trouver le Lemme 2.1 dans [FI96], bien que la démonstration soit faite pour  $m = 1$ . Une légère modification de la preuve permet d'obtenir le résultat énoncé. Dans cette section, nous utiliserons ces inégalités de Carleman pour  $m = 1$  et  $\lambda$  constant, nous aurons tout de même besoin de la forme générale dans la section 3.2 et le premier chapitre.

Montrons maintenant comment déduire des résultats de contrôlabilité à l'aide des inégalités de Carleman ci-dessus. Soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ ,  $\gamma$  un ensemble non vide relativement ouvert dans  $\partial\Omega$  et

$$\rho := e^{2s_0\alpha}. \quad (2.6)$$

Considérons les équations de la chaleur avec terme source

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \mathbf{1}_\omega u + g & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.7)$$

et

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + g & \text{dans } Q_T, \\ z = \mathbb{1}_\gamma v & \text{sur } \Sigma_T, \\ z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega)$  et  $z^0 \in H^{-1}(\Omega)$  sont les données initiales,  $u \in L^2(Q_T)$  et  $v \in L^2(\Sigma_T)$  sont les contrôles et  $g \in L^2_\rho(Q_T)$  (voir notations au début du manuscrit) est le terme source. D'après le Théorème 1.1 et la Propriété 1.1, le système (2.7) admet une unique solution dans  $L^2(0, T; H^1_0(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$  et par transposition (Cf [FCGBT10; TW09]), le système (2.8) admet également une unique solution dans  $L^2(Q_T) \cap C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ . Pour une fonction  $g \in L^2_\rho(\Omega)$ , nous dirons que le système (2.7) (resp. (2.8)) est *contrôlable à zéro*, si pour tout  $y^0 \in L^2(\Omega)$  (resp.  $z^0 \in H^{-1}(\Omega)$ ), il est possible de trouver une contrôle  $u \in L^2(Q_T)$  (resp.  $v \in L^2(\Sigma_T)$ ) tel que la solution  $y$  du système (2.7) (resp. (2.8)) satisfait  $y(T) \equiv 0$  (resp.  $z(T) \equiv 0$ ) sur  $\Omega$ . Pour tout  $t \in [0, T]$ , on notera  $y(t; y^0, g, u)$  la solution de (2.7) pour la donnée initiale  $y^0$ , le terme source  $g$  et le contrôle  $u$ . De façon similaire, nous utiliserons la notation  $z(t; z^0, g, v)$ .

Nous commencerons par donner une caractérisation de la contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec des termes sources appartenant à l'espace  $L^2_\rho(Q_T)$ .

**PROPOSITION 2.1.** 1. *Le système (2.7) est contrôlable à zéro pour tout terme source de  $L^2_\rho(Q_T)$  au temps  $T$  si, et seulement si, il existe une constante  $C_{obs} > 0$  telle que pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$  la solution  $\varphi \in W(0, T)$  du système adjoint*

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \Delta \varphi & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi(\cdot, T) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

*satisfait l'inégalité d'observabilité*

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \iint_{Q_T} \rho^{-1} \varphi^2 \leq C_{obs} \int_0^T \|\mathbb{1}_\omega \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.10)$$

où  $\rho$  est donné par (2.6).

2. *Le système (2.7) est approximativement contrôlable pour tout terme source de  $L^2_\rho(Q_T)$  au temps  $T$  si, et seulement si, pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$  la solution  $\varphi$  du système (2.9) satisfait*

$$\mathbb{1}_\omega \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

*Preuve.* Pour démontrer cette proposition, il suffit de suivre les arguments de la preuve de la Proposition 1.1 pour les opérateurs  $S_t$  et  $L_t$  définis comme suit pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} S_t : L^2(\Omega) \times L^2_\rho(Q_T) &\rightarrow L^2(\Omega) & \text{et} & \quad L_t : L^2(Q_T) \rightarrow L^2(\Omega) \\ (y^0, g) &\mapsto y(t; y^0, g, 0) & & \quad u \mapsto y(t; 0, 0, u). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Calculons les opérateurs adjoints à  $S_T$  et  $L_T$ . Soit  $y^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2_\rho(Q_T)$ ,  $u \in L^2(Q_T)$  et  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ . En considérant  $y$  et  $\varphi$  les solutions des systèmes (2.7) et (2.9), on obtient

$$\begin{aligned} \langle S_T(y^0, g), \varphi^0 \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle y(T; y^0, g, 0), \varphi(T) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_0^T \langle \partial_t y(s; y^0, g, 0), \varphi(s) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} \, ds \\ &\quad + \int_0^T \langle \partial_t \varphi(s), y(s; y^0, g, 0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1_0(\Omega)} \, ds + \langle y^0, \varphi(0) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle y^0, \varphi(0) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g, \varphi(s) \rangle_{L^2_\rho(Q_T), L^2_{\rho^{-1}}(Q_T)} \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\langle L_T u, \varphi^0 \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, \mathbb{1}_\omega \varphi \rangle_{L^2(Q_T)}.$$

Ainsi  $S_T^*$  et  $L_T^*$  sont définis par

$$\begin{array}{ccc} S_T^* : L^2(\Omega) & \rightarrow & L^2(\Omega) \times L^2_{\rho^{-1}}(Q_T) \\ \varphi^0 & \mapsto & (\varphi(0), \varphi) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} L_T^* : L^2(\Omega) & \rightarrow & L^2(Q_T), \\ \varphi^0 & \mapsto & \mathbb{1}_\omega \varphi \end{array}$$

où  $\varphi \in W(0, T)$  est la solution du système (2.9). Nous concluons en adaptant le raisonnement de la preuve de la proposition 1.1 et en remplaçant dans (1.10) et (1.11) les expressions de  $S_T^*$  et  $L_T^*$ .  $\square$

*Remarque 2.1.* La caractérisation par inégalité d'observabilité de la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur est différente selon que le terme source est nul ou non. Par contre, on remarque que la caractérisation par la propriété de continuation unique de la contrôlabilité approchée est identique. On observe donc une différence entre ces deux concepts.

Une fois qu'une inégalité de Carleman associée au système est établie, il ne reste plus qu'à en déduire l'inégalité d'observabilité pour ainsi montrer la contrôlabilité à zéro du système (2.7). Cette étape est classique et donc la plupart du temps omise. Nous allons montrer comment procéder en reprenant les arguments que l'on peut trouver par exemple dans [Dou+02].

**PROPOSITION 2.2.** *Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$  la solution correspondante  $\varphi$  de (2.9) satisfait*

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \iint_{Q_T} \rho^{-1} \varphi^2 \leq e^{C(1+1/T)} \iint_{q_T} \phi^2,$$

où  $q_T := \omega \times (0, T)$  et  $\rho$  est donné par (2.6).

*Preuve.* Soit  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$  et  $\varphi$  la solution correspondante du système adjoint (2.9). En multipliant (2.9) par  $\varphi$  et en intégrant sur  $\Omega$ , nous obtenons

$$-\frac{d}{dt} \int_\Omega \varphi^2 \leq 0.$$

Nous en déduisons que pour tout  $t_1, t_2 \in [0, T]$  tels que  $t_1 \leq t_2$ ,

$$\|\varphi(\cdot, t_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\varphi(\cdot, t_2)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.12)$$

Ainsi pour tout  $t \in [T/4, 3T/4]$

$$\|\varphi(\cdot, T/4)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ce qui donne en intégrant sur  $[T/4, 3T/4]$

$$\|\varphi(\cdot, T/4)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{T} \int_{T/4}^{3T/4} \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (2.13)$$

En combinant (2.12) pour  $t_1 = 0$  et  $t_2 = T/4$  et l'inégalité (2.13), on obtient

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{T} \int_{T/4}^{3T/4} \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (2.14)$$

Nous remarquons qu'il existe deux constantes  $C_1, C_2$  qui dépendent de  $\omega$  et  $\Omega$  mais pas de  $T$  telles que

$$e^{-2s\alpha} \geq C_1 e^{-C_2 s/T^2}.$$

On en déduit à l'aide du Lemme 2.1 pour  $p := 0$  et  $\mathcal{B} := \omega$  que

$$\begin{aligned} \int_{T/4}^{3T/4} \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 dt &\leq C_1 e^{C_2 s/T^2} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 \\ &\leq C_1 e^{C_2 s/T^2} \iint_{q_T} e^{-2s\alpha} |\varphi|^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Comme  $e^{-2s\alpha} \leq 1$ , les inégalités (2.14) et (2.15) donnent

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 + \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 \leq C_1 e^{C_3(\frac{1}{T} + \frac{s}{T^2})} \iint_{q_T} |\varphi|^2,$$

où  $C_3$  est une constante strictement positive. On conclut en prenant  $s := s_1$  où  $s_1$  est donné dans le Lemme 2.1.  $\square$

D'après la Proposition 2.1, on déduit de l'inégalité d'observabilité obtenue dans la Proposition 2.2 que le système (2.7) est contrôlable à zéro pour toute donnée initiale et tout terme source dans  $L^2_\rho(Q_T)$ . En utilisant les mêmes arguments que dans le Corollaire 1.1, on obtient une estimation du contrôle en fonction du terme source et de la donnée initiale.

**THÉORÈME 2.1.** *Le système (2.7) est contrôlable à zéro pour tout terme source dans  $L^2_\rho(Q_T)$ , i.e. pour toute donnée initiale  $y^0 \in L^2(\Omega)$  et tout terme source  $g \in L^2_\rho(Q_T)$  il existe un contrôle  $u \in L^2(Q_T)$  tel que la solution du système (2.7) soit nulle à l'instant  $T$ . De plus, nous avons l'estimation*

$$\|u\|_{L^2(Q_T)} \leq e^{C(1+1/T)} (\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2_\rho(Q_T)}).$$

A l'aide du Théorème 2.1, on peut en déduire un résultat de contrôlabilité sur le système (2.8).

**Corollaire 2.1.** *Le système (2.8) est contrôlable à zéro pour tout terme source dans  $L^2_\rho(Q_T)$ , i.e. pour toute donnée initiale  $z^0 \in H^{-1}(\Omega)$  et tout terme source  $g \in L^2_\rho(Q_T)$  il existe un contrôle  $v \in L^2(\Sigma_T)$  tel que la solution du système (2.8) soit nulle à l'instant  $T$ .*

*Preuve.* Soit  $z^0 \in H^{-1}(\Omega)$  et  $\bar{z}$  la solution du système (2.8) sur  $(0, T)$  pour un contrôle nul. Nous pouvons nous ramener tout d'abord à une donnée initiale suffisamment régulière. En effet, comme  $\bar{z} \in W_2^{2,1}(\Omega \times (0, T/2))$  (Cf [Bre83, p. 205]), à l'aide de la Propriété 1.1, nous avons  $\bar{z}(T/2) \in H_0^1(\Omega)$ .

Nous utilisons maintenant des idées que l'on peut trouver dans [AK+11a ; BGBPG04b ; GBPG06]. Considérons  $\tilde{\Omega}$  un ouvert non vide de frontière  $\partial\tilde{\Omega}$  de classe  $C^2$  tel que  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ ,  $\partial\Omega \setminus \partial\tilde{\Omega} \subset \gamma$  et  $\Omega_0 := \tilde{\Omega} \setminus \Omega \neq \emptyset$ . Soit  $\omega$  un ouvert non vide strictement inclus dans  $\Omega_0$  (Cf Figure I.2),  $\bar{g}$  la fonction de  $L^2(\tilde{\Omega} \times (0, T))$  nulle sur  $\Omega_0 \times (T/2, T)$  et égale à  $g$  sur  $\Omega \times (T/2, T)$  et  $\tilde{y}^0$  la fonction de  $L^2(\tilde{\Omega})$  nulle sur  $\Omega_0$  et égale à  $\bar{z}(T/2)$  sur  $\Omega$ . D'après le Théorème 2.1, le système

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{y} = \Delta \tilde{y} + \mathbf{1}_\omega u + \bar{g} & \text{dans } \tilde{\Omega} \times (T/2, T), \\ \tilde{y} = 0 & \text{sur } \partial\tilde{\Omega} \times (T/2, T), \\ \tilde{y}(\cdot, T/2) = \bar{z}(\cdot, T/2) & \text{dans } \tilde{\Omega} \end{cases} \quad (2.16)$$

est contrôlable à zéro sur l'intervalle de temps  $(T/2, T)$ , plus précisément il existe un contrôle  $u \in L^2(\tilde{\Omega} \times (T/2, T))$  telle que la solution  $\tilde{y}$  soit nulle à l'instant  $T$ . Puisque  $\tilde{y} \in W_2^{2,1}(Q_T)$ , alors  $\tilde{y}|_{\Sigma_T}$  appartient à  $L^2(\Sigma_T)$  (Cf H. Brezis [Bre83]). Ainsi les fonctions

$$z := \begin{cases} \bar{z} & \text{dans } \Omega \times (0, T/2), \\ \tilde{y} & \text{dans } \Omega \times (T/2, T) \end{cases} \quad \text{et } v := \begin{cases} 0 & \text{sur } \gamma \times (0, T/2) \\ \tilde{y} & \text{sur } \gamma \times (T/2, T) \end{cases}$$

sont solutions du système (2.8) et de plus  $z(T) = 0$  dans  $\Omega$ .

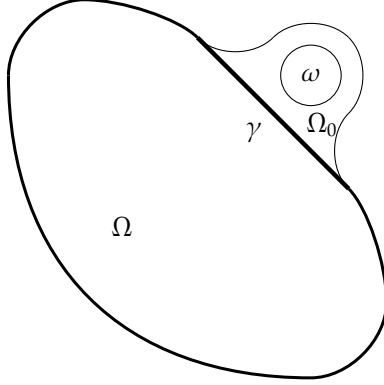


FIGURE I.2: Méthode d'extension

□

## 2.2 Méthode des moments

Pour étudier la contrôlabilité à zéro interne et par le bord de l'équation de la chaleur avec un terme source, en dimension un d'espace, nous reprenons dans cette section les arguments de H.O. Fattorini et D.L. Russell développés dans [FR71 ; FR74].

Soit  $T, \Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$  et  $\omega := (a_0, b_0)$  avec  $a_0, b_0 \in [a, b]$  et  $\{a_0, b_0\} \neq \{a, b\}$ . On notera  $Q_T := (a, b) \times (0, T)$  et  $q_T := (a_0, b_0) \times (0, T)$ . Considérons les équations de la chaleur non

homogènes avec contrôle interne

$$\begin{cases} \partial_t y = \partial_{xx} y + g + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } (a, b) \times (0, T), \\ y(a, \cdot) = y(b, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } (a, b) \end{cases} \quad (2.17)$$

et contrôle par le bord

$$\begin{cases} \partial_t z = \partial_{xx} z + g & \text{dans } (a, b) \times (0, T), \\ z(a, \cdot) = v, z(b, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } (a, b), \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega)$  et  $z^0 \in H^{-1}(\Omega)$  sont les conditions initiales,  $u \in L^2(Q_T)$  et  $v \in L^2(0, T)$  les contrôles et  $g \in L^2(\Omega)$  le terme source. Avec les mêmes arguments que dans la section précédente, les systèmes (2.17) et (2.18) sont bien posés.

Nous utiliserons ici une caractérisation de la contrôlabilité à zéro autre que celle par inégalité d'observabilité. Constatons tout d'abord que pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$

$$\langle y(\cdot, T), \varphi^0 \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle y^0, \varphi(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} = \iint_{Q_T} g \varphi + \iint_{q_T} \varphi u, \quad (2.19)$$

où  $\varphi$  est la solution du système adjoint suivant :

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \partial_{xx} \varphi & \text{dans } (a, b) \times (0, T), \\ \varphi(a, \cdot) = \varphi(b, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ \varphi(\cdot, T) = \varphi^0 & \text{dans } (a, b). \end{cases} \quad (2.20)$$

Nous remarquons que le système (2.17) est contrôlable à zéro si, et seulement si, pour toute donnée initiale  $y^0 \in L^2(\Omega)$  il existe  $u \in L^2(Q_T)$  tel que

$$-\langle y^0, \varphi(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)} = \iint_{Q_T} g \varphi + \iint_{q_T} \varphi u, \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega). \quad (2.21)$$

En effet, d'après (2.19), l'égalité (2.21) est équivalente à  $\langle y(\cdot, T), \varphi^0 \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$  pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ , et donc que  $y(\cdot, T) = 0$  sur  $\Omega$ .

Cette formulation a pour avantage de pouvoir étudier la contrôlabilité du système (2.17) pour chaque donnée initiale  $y^0$  séparément, ce que nous utiliserons également pour le résultat négatif de contrôlabilité donné dans le Théorème 2.3 de la section suivante.

**THÉORÈME 2.2.** Soit  $g := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} g_k w_k \in L^2(a, b)$ . S'il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > b - a$  telles que

$$|g_k| \leq C_1 e^{-C_2 k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad (2.22)$$

alors le système (2.17) est contrôlable à zéro au temps  $T$ .

Soit  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  les valeurs propres et les fonctions propres normalisées associées à l'opérateur  $-\partial_{xx}$  avec les conditions aux bords de Dirichlet homogène sur  $\partial\Omega$ . La famille  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  forme une base orthonormale de  $L^2(\Omega)$ . La preuve du Théorème 2.2 repose essentiellement sur le lemme suivant :



**Lemme 2.2** (Cf [FR71]). *Il existe une suite  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subseteq L^2(0, T)$  biorthogonale à la famille  $(e^{-\mu_k t})_{k \in \mathbb{N}^*}$ , c'est-à-dire*

$$\langle q_k, e^{-\mu_l t} \rangle_{L^2(0, T)} = \delta_{kl}$$

pour tout  $k, l \in \mathbb{N}^*$ . De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_\varepsilon = C_\varepsilon(T)$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\|q_k\|_{L^2(0, T)} \leq C_\varepsilon e^{(b-a+\varepsilon)k}.$$

Nous aurons également besoin du lemme ci-dessous.

**Lemme 2.3** (Cf [AK+15]). *Il existe une fonction  $f \in L^2(a, b)$  telle que  $\text{Supp}(f) \subset \omega$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  on a pour une constante  $\beta$*

$$\inf_{k \geq 1} f_k k^3 = \beta > 0,$$

où, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_k := \int_a^b f w_k$ .

*Preuve du Théorème 2.2.* Afin de simplifier les notations, nous supposons que  $a = 0$  et  $b = \pi$ . Dans ce cas,  $\mu_k = k^2$  et  $w_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ . Soit  $y^0, g \in L^2(0, \pi)$  avec  $y^0 := \sum_{k=1}^{\infty} y_k^0 w_k$  et  $g := \sum_{k=1}^{\infty} g_k w_k$  satisfaisant (2.22). Nous chercherons un contrôle de la forme  $u(x, t) = \gamma(t)f(x)$  où  $\gamma \in L^2(0, T)$  et  $f$  est définie dans le Lemme 2.3. Ainsi, en prenant  $\varphi^0 := w_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  dans (2.21), le système (2.17) est contrôlable à zéro s'il existe une fonction  $\gamma \in L^2(0, T)$  satisfaisant

$$\int_0^T e^{-k^2 t} \gamma(T-t) dt = M_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (2.23)$$

où

$$M_k := \frac{-1}{f_k} \left( y_k^0 e^{-k^2 T} + \int_0^T g_k e^{-k^2 t} \right).$$

Le problème (2.23) porte le nom de *problème des moments*. En utilisant la suite  $(q_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  du Lemme 2.2, la fonction définie par  $\gamma(t) := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} M_k q_k(T-t)$  est une solution de ce problème des moments. Il reste à démontrer que  $\gamma \in L^2(0, T)$ . Nous avons

$$|M_k|^2 \leq 2(|y_k^0|^2 e^{-2k^2 T} + |g_k|^2)/f_k^2,$$

Nous en déduisons à l'aide de (2.22) l'inégalité

$$|M_k|^2 \leq C \beta^{-2} k^6 e^{-2C_2 k} (C_1^2 + \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Puisque  $C_2 > \pi$ , nous obtenons à l'aide du Lemme 2.2 pour  $\varepsilon$  suffisamment petit

$$\|v\|_{L^2(0, T)}^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^*} C \beta^{-2} k^6 C_\varepsilon^2 e^{2(\pi+\varepsilon-C_2)k} (C_1^2 + \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2) < \infty.$$

□

*Remarque 2.2.* Le Théorème 2.2 peut être démontré également dans le cas d'un terme source dépendant du temps et de l'espace. Plus précisément, pour tout élément  $g$  de  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  donné par  $g(x, t) := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} g_k(t) w_k(x)$  satisfaisant

$$\|g_k\|_{L^\infty(0, T)} \leq C_1 e^{-C_2 k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*,$$

avec  $C_1 > 0$  et  $C_2 > b - a$ , le système (2.17) est contrôlable à zéro au temps  $T$ .

## 2. Quelques outils pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes paraboliques

*Remarque 2.3.* Nous pouvons remarquer que ces résultats sont sensiblement différents de ceux de la section précédente obtenus à l'aide des inégalités de Carleman. Par exemple, la condition (2.22) est satisfaite pour le second membre  $g$  donné par  $g(x, t) = \sin(x)$  pour tout  $(x, t) \in Q_T$  qui ne vérifie pas  $e^{C/(T-t)}g \in L^2(Q_T)$ .

Le Théorème 2.2 permet de déduire un résultat de contrôlabilité par le bord.

**Corollaire 2.2.** Soit  $g := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} g_k w_k \in L^2(a, b)$ . S'il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > b - a$  telles que

$$|g_k| \leq C_1 e^{-C_2 k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad (2.24)$$

alors le système (2.18) est contrôlable à zéro au temps  $T$ .

*Preuve.* Sans perte de généralité, nous démontrerons le Corollaire 2.2 pour  $a := 0$  et  $b := \pi$ . Soit  $z^0 \in H^{-1}(0, \pi)$  et  $g \in L^2(0, \pi)$  avec  $g$  satisfaisant (2.24). Quitte à ne contrôler qu'à partir de  $t = T/2$ , nous pouvons supposer que  $z^0 \in L^2(0, \pi)$ . Ces deux fonctions  $z_0$  et  $g$  peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$z^0(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} z_k^0 w_k(x) \text{ et } g(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} g_k w_k(x) \text{ pour tout } x \in (0, \pi),$$

où  $(z_k^0)_{k \in \mathbb{N}^*}, (g_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in \ell^2$  et  $w_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ . Nous souhaitons trouver un contrôle  $v \in L^2(0, T)$  tel que la solution du système

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + g & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ z(0, \cdot) = v, z(\pi, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } (0, \pi), \end{cases} \quad (2.25)$$

soit nulle à l'instant  $T$ . Considérons les fonctions  $\bar{z}^0, \bar{g} \in L^2(-\pi, \pi)$  définies par

$$\bar{z}^0(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} z_k^0 w_k(x) \text{ et } \bar{g}(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} g_k w_k(x) \text{ pour tout } x \in (-\pi, \pi).$$

Soit  $\omega \subset (-\pi, 0)$ . D'après le Théorème 2.2, il existe un contrôle  $u \in L^2((-\pi, \pi) \times (0, T))$  tel que la solution du système

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \bar{g} + \mathbf{1}_\omega u & \text{dans } (-\pi, \pi) \times (0, T), \\ y(-\pi, \cdot) = y(\pi, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ y(\cdot, 0) = \bar{z}^0 & \text{dans } (-\pi, \pi), \end{cases}$$

soit nulle à l'instant  $T$ . Comme  $y \in W(0, T)$ , alors d'après la Propriété 1.1  $y(\cdot, 0) \in L^2(0, \pi)$ .

Nous remarquons par conséquent que le couple  $(z, v)$  donné par  $(z, v) := (y|_{(0, \pi) \times (0, T)}, y|_{\{0\} \times (0, T)})$  est solution du système (2.25) dans  $W(0, T) \times L^2(0, T)$ . De plus  $z(T) = y(T)|_{(0, \pi)} = 0$  dans  $(0, \pi)$ .

□

### 2.3 Une méthode pour montrer la non contrôlabilité

Une façon de montrer qu'un système n'est pas contrôlable est de nier l'inégalité d'observabilité associée ou l'égalité (2.21). Nous présenterons dans cette section une méthode que l'on peut trouver dans [GI13] où les auteurs étudient la contrôlabilité d'une équation de la chaleur avec un terme de mémoire. Nous l'emploierons ici pour démontrer de nouveaux résultats de contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur avec second membre. Nous utiliserons ensuite cette technique dans le chapitre III.

Nous reprenons les notations de la section précédente.

**THÉORÈME 2.3.** *Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$  et  $C_1, C_2 > 0$  il existe une fonction  $g \in L^\infty(a, b)$  définie par*

$$g := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sigma_k C_1 e^{-C_2 k^{1-\varepsilon}} w_k,$$

où  $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$  telle que le système (2.18) ne soit contrôlable à zéro au temps  $T$  pour aucune donnée initiale  $z^0 \in L^2(a, b)$ .

*Preuve.* Nous supposons également dans cette preuve que  $a := 0$  et  $b := \pi$  afin de simplifier les calculs. À l'aide des mêmes arguments qu'en (2.21), on montre que le système (2.18) est contrôlable à zéro si, et seulement si, pour toute donnée initiale  $z^0 \in H^{-1}(0, \pi)$ , il existe un contrôle  $v \in L^2(0, T)$  tel que pour tout  $\varphi^0 \in H_0^1(0, \pi)$

$$-\langle z^0, \varphi(\cdot, 0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \iint_{Q_T} g \varphi + \int_0^T v(t) \partial_x \varphi(0, t) dt, \quad (2.26)$$

où  $\varphi$  est la solution du système (2.20). Soit  $z^0 \in L^2(0, \pi)$ . Nous remarquons que, dans ce cas, nous avons

$$\langle z^0, \varphi(\cdot, 0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_0^\pi \varphi(\cdot, 0) z^0.$$

L'idée est de montrer qu'il existe des constantes  $\gamma_A, \beta_A, \gamma_B, \beta_B, \gamma_C, \beta_C$ , une suite de données initiales  $(\varphi^{0,M})_{M \in \mathbb{N}^*}$  et une fonction  $g \in L^2(0, \pi)$  telles que, si l'on note  $\varphi^M$  est la solution du système (2.20) pour les données initiales  $\varphi^{0,M}$ , on ait dans (2.26)

$$A := \left| \int_0^T \partial_x \varphi^M(0, t)^2 dt \right| \leq \gamma_A e^{-\beta_A M^{1-\varepsilon/2}}, \quad (2.27)$$

$$B := \left| \iint_{Q_T} g \varphi^M \right| \geq \gamma_B e^{-\beta_B M^{1-3\varepsilon/4}} \quad \text{et} \quad C := \left| \int_0^\pi \varphi^M(\cdot, 0) z^0 \right| \leq \gamma_C e^{-\beta_C M^2}. \quad (2.28)$$

Ainsi, lorsque  $M$  tend vers l'infini, l'égalité (2.26) ne peut plus être vraie.

**Construction de la suite de données initiales  $(\varphi^{0,M})_{M \in \mathbb{N}^*}$  :**

Soit  $M \in \mathbb{N}^*$ . Nous chercherons cette suite de données initiales sous la forme

$$\varphi^{0,M} = \sum_{k=M+1}^{M+m} \varphi_k^{0,M} w_k,$$

## 2. Quelques outils pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes paraboliques

où  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi_{M+k}^{0,M} \in \mathbb{R}$  pour tout  $k \in \{M+1, \dots, M+m\}$  et  $\max_k |\varphi_k^{0,M}| = 1$ . L'objectif est de trouver  $\varphi^{0,M}$  tel que, pour cette donnée initiale, la solution du système (2.20) satisfasse (2.27). Remarquons tout d'abord que l'intégrale  $A$  est donnée par

$$A := \int_0^T \left| \sum_{k=M+1}^{M+m} k e^{-k^2 t} \varphi_k^{0,M} \right|^2 dt. \quad (2.29)$$

Pour tout  $k \geq 1$ , nous pouvons écrire  $A$  comme suit:

$$A = \int_0^T \left| \sum_{k=1}^m (M+k) e^{-(M^2+2Mk+k^2)t} \varphi_{M+k}^{0,M} \right|^2 dt = \int_0^T e^{-2M^2 t} h_M(t) dt, \quad (2.30)$$

où, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $h_M(t) := f_M(t)^2$  avec

$$f_M(t) := \sum_{k=1}^m (M+k) e^{-(2Mk+k^2)t} \varphi_{M+k}^{0,M}.$$

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . Après  $2d+1$  intégrations par parties, en utilisant (2.30), nous obtenons

$$\begin{aligned} A &= \frac{h_M(T)e^{-2M^2 T} - h_M(0)}{-2M^2} + \int_0^T \frac{e^{-2M^2 t}}{2M^2} h_M^{(1)}(t) dt, \\ &= \sum_{l=0}^{2d} \frac{h_M^{(l)}(T)e^{-2M^2 T} - h_M^{(l)}(0)}{-(2M^2)^{l+1}} + \int_0^T \frac{e^{-2M^2 t}}{(2M^2)^{2d+1}} h_M^{(2d+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Regardons comment imposer les  $2d+1$  conditions suivantes :

$$h_M^{(l)}(0) = 0, \text{ pour tout } l \in \{0, \dots, 2d\}.$$

En utilisant la formule de Leibniz

$$h_M^{(l)} = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} f^{(k)} f^{(l-k)},$$

ces dernières conditions sont satisfaites si

$$f_M^{(l)}(0) = 0 \text{ pour tout } l \in \{0, \dots, d\}.$$

Ce qui signifie

$$\sum_{k=1}^m (M+k) (-2Mk - k^2)^l \varphi_{M+k}^{0,M} = 0 \text{ pour tout } l \in \{0, \dots, d\}. \quad (2.31)$$

Nous avons ci-dessus un système de  $d+1$  équations avec  $m$  inconnues. Choissant  $d := m-2$ , l'ensemble des solutions non triviales est non vide. Comme (2.31) est un système linéaire homogène, nous pouvons choisir  $\varphi_{M+1}^{0,M}, \dots, \varphi_{M+m}^{0,M}$  de sorte que

$$\max_k |\varphi_k^{0,M}| = 1. \quad (2.32)$$

Soit  $(\varphi_{M+1}^{0,M}, \varphi_{M+2}^{0,M}, \dots, \varphi_{M+m}^{0,M})$  une de ces solutions et définissons

$$\varphi^{0,M} := \sum_{k=1}^m \varphi_{M+k}^{0,M} w_k.$$

Ainsi, puisque  $h_M^{(l)}(0) = 0$ , pour tout  $l \in \{0, \dots, 2m - 4\}$ ,

$$A = \sum_{l=0}^{2m-4} \frac{h_M^{(l)}(T)e^{-2M^2T}}{-(2M^2)^{l+1}} + \int_0^T \frac{e^{-2M^2t}}{(2M^2)^{2m-3}} h_M^{(2m-3)}(t) dt.$$

En utilisant la définition de  $h_M$  et de  $f_M$ , pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $l \in \{0, \dots, 2m - 4\}$ ,

$$\begin{aligned} h_M^{(l)}(t) &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} f^{(k)}(t) f^{(l-k)}(t), \\ &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left[ \sum_{j=1}^m (M+j)(-2Mj-j^2)^k e^{-(2Mj+j^2)t} \varphi_{M+j}^{0,M} \right] \\ &\quad \cdot \left[ \sum_{j=1}^m (M+j)(-2Mj-j^2)^{l-k} e^{-(2Mj+j^2)t} \varphi_{M+j}^{0,M} \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|h_M^{(l)}\|_\infty &\leq \sum_{i,j=1}^m (M+i)(M+j) \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (2Mi+i^2)^k (2Mj+j^2)^{l-k} \\ &\leq m^2(M+m)^2(4Mm+2m^2)^l. \end{aligned}$$

D'où, puisque  $\max_k |\varphi_k^{0,M}| = 1$ , choisissant

$$m := M^{1-\varepsilon/2},$$

(nous pouvons supposer que  $m \in \mathbb{N}$ ) nous avons

$$\begin{aligned} A &\leq e^{-2M^2T} \sum_{l=0}^{2m-4} \frac{m^2(M+m)^2(4Mm+2m^2)^l}{(2M^2)^{l+1}} \\ &\quad + \frac{m^2(M+m)^2(4Mm+2m^2)^{2m-3}}{(2M^2)^{2m-3}}, \\ &\leq e^{-2M^2T} \sum_{l=0}^{2m-4} \frac{(M^{1-\varepsilon/2})^2 4M^2 (M^{1-\varepsilon/2})^l (8M)^l}{(2M^2)^{l+1}} \\ &\quad + \frac{(M^{1-\varepsilon/2})^2 4M^2 (M^{1-\varepsilon/2})^{2m-3} (8M)^{2m-3}}{(2M^2)^{2m-3}}, \\ &\leq e^{-2M^2T} \sum_{l=0}^{2m-4} \frac{2^{2l+1}}{M^{\varepsilon l/2 - 2 + \varepsilon}} + \frac{2^{4m-4}}{M^{\varepsilon(m+1) - 3\varepsilon/2 - 4}}, \\ &\leq Ce^{-M^2T} + Ce^{4M^{1-\varepsilon/2} \ln 2 - \varepsilon M^{1-\varepsilon/2} \ln M}, \end{aligned}$$

où  $C$  est indépendant de  $M$ . Ainsi, il existe des constantes  $\gamma_A, \beta_A > 0$  telles que, pour  $M$  assez grand, nous avons l'estimation

$$A \leq \gamma_A e^{-\beta_A M^{1-\varepsilon/2}}, \quad (2.33)$$

où  $\gamma_A, \beta_A$  ne dépendent pas de  $M$ .

### Construction du terme source $g$

Considérons  $\theta := (\theta_1, \theta_2, \dots) \in \ell^\infty$  de sorte que pour tout  $s \in \mathbb{N}^*$

$$(0, \dots, 0, \theta_{2^s}, \dots, \theta_{2^{s-1}-1}, 0, \dots) := (\varphi_k^{0,2^s})_{k \in \mathbb{N}^*}.$$

Soit  $g = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} g_k w_k$  une fonction de  $L^2(0, \pi)$  où pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$g_k := C_1 \text{sign}(\theta_k) e^{-C_2 k^{1-\varepsilon}}.$$

Soit  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $M := 2^s$ . D'après (2.32), on a

$$B = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1 - e^{-k^2 T}}{k^2} g_k \varphi_k^{0, M} \geq \gamma_B e^{-\beta_B M^{1-3\varepsilon/4}}, \quad (2.34)$$

où  $\gamma_B, \beta_B$  sont indépendantes de  $M$ . On remarque également que

$$C = \left| \sum_{k=1}^m e^{-2(M+k)^2 T} z_{M+k}^0 \varphi_{M+k}^{0, M} \right| \leq M e^{-2M^2 T} \|z^0\|_{L^2(0, \pi)} \leq \gamma_C e^{-\beta_C M^2} \|z^0\|_{L^2(0, \pi)}, \quad (2.35)$$

pour deux constantes positives  $\gamma_C, \beta_C$  indépendantes de  $M$ . En combinant (2.33), (2.34) et (2.35), nous obtenons une contradiction avec (2.26) pour  $M$  assez grand.  $\square$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Corollaire 2.2, on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 2.3.** *Soit  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Il existe une fonction  $g$  définie par*

$$g := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \sigma_k C_1 e^{-C_2 k^{1-\varepsilon}} w_k,$$

où  $C_1, C_2 > 0$ ,  $\sigma_{2k} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$  et  $\sigma_{2k+1} = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , telle que le système (2.17) ne soit contrôlable à zéro au temps  $T$  pour aucune donnée initiale  $y^0 \in L^2(a, b)$ .

*Remarque 2.4.* Ces différents résultats ont des conséquences directes quant à la contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur. Plus précisément, en considérant  $y^0 \in L^2(\Omega)$  et  $y^T \in H^2(\Omega)$  (avec les notations du début de la section 2), chercher un contrôle  $u \in L^2(Q_T)$  tel que la solution du système

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.36)$$

soit égale à  $y^T$  à l'instant  $T$  revient à chercher un contrôle  $u \in L^2(Q_T)$  de sorte que  $w := y - y^T$  qui est solution du système

$$\begin{cases} \partial_t w = \Delta w + \mathbb{1}_\omega u + \Delta y^T & \text{dans } Q_T, \\ w = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ w(\cdot, 0) = y^0 - y^T & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.37)$$

soit nulle à l'instant  $T$ . Nous obtenons donc des exemples de cibles en dimension un qui sont atteignables ou non atteignables. Nous remarquons de plus que ces cibles non atteignables obtenues dans cette section le sont pour toute donnée initiale de  $L^2(\Omega)$ .

## 2.4 Construction de contrôles réguliers

Cette section développe deux méthodes de construction de contrôles réguliers pour l'équation de la chaleur. Nous détaillerons dans un premier temps une technique élaborée par V. Barbu dans [Bar00] où l'auteur obtient des contrôles  $L^\infty$  grâce à la méthode de dualité développée par A. V. Fursikov et O. Y. Imanuvilov dans [FI96]. Nous réutiliserons cette méthode dans la section 2.5, ainsi que dans le chapitre suivant. Dans un deuxième temps, nous donnerons une technique élaborée et utilisée dans une suite d'articles [BGBPG04b; BGBPG04c; BGBPG04a; GBPG06] où les auteurs souhaitent avoir des contrôles  $L^\infty$  afin d'étudier la contrôlabilité d'un système non linéaire. Nous montrerons comment ces outils permettent de contrôler l'équation de la chaleur avec un contrôle de classe  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Soit un domaine non vide borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) avec une frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ ,  $T > 0$  et un ouvert non vide  $\omega$  de  $\Omega$ . Nous noterons  $Q_T := \Omega \times (0, T)$  et  $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$ .

### Utilisation des inégalités de Carleman : la méthode de V. Barbu

Nous étudierons dans cette section le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \theta_0 u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.38)$$

où la frontière  $\partial\Omega$  sera supposé de classe  $C^\infty$  et  $\theta_0$  est une fonction appartenant à  $C^\infty(\Omega)$  vérifiant pour un ouvert non vide  $\omega_0$  strictement inclus dans  $\omega$

$$\begin{cases} \theta_0 = 1 & \text{sur } \omega_0, \\ \text{Supp}(\theta_0) \subset \omega, \\ 0 \leq \theta_0 \leq 1. \end{cases} \quad (2.39)$$

Rappelons tout d'abord le système adjoint associé à (2.38)

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \Delta \varphi & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi(\cdot, T) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.40)$$

En utilisant les arguments développés dans la preuve de la Proposition 2.2, on peut montrer l'inégalité suivante :

**Lemme 2.4.** *Pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ , la solution correspondante  $\varphi$  de (2.40) satisfait*

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C_{\text{obs}} \iint_{Q_T} e^{-2s_0\alpha} \theta_0^2 \varphi^2,$$

où  $C_{\text{obs}} := e^{C(1+1/T)}$  avec  $C$  une constante indépendante de  $\varphi^0$ ,  $\alpha$  donnée en (2.3) et  $s_0$  défini dans le Lemme 2.1.

La solution de (2.40) est assez régulière si la donnée initiale l'est également. Plus précisément :

**Lemme 2.5.** (Cf L. C. Evans [Eva10, Th. 6, p. 365]) Soit  $u^0 \in H_0^1(\Omega)$  et  $f \in L^2(Q_T)$ . Considérons la solution  $u$  dans  $W_2^{2,1}(Q_T)$  du système

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + f & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(\cdot, 0) = u^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Soit  $d \in \mathbb{N}$  et supposons que  $u^0 \in H^{2d+1}(\Omega)$ ,  $f \in W_2^{2d,d}(Q_T)$  et qu'ils satisfassent les conditions de compatibilité :

$$\begin{cases} g_0 := u^0 \in H_0^1(\Omega), \\ g_1 := f(\cdot, 0) + \Delta g_0 \in H_0^1(\Omega), \\ \dots \\ g_d := \partial_t^{d-1} f(\cdot, 0) + \Delta g_{d-1} \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.41)$$

Alors  $u \in W_2^{2d+2,d+1}(Q_T)$  et nous avons l'estimation

$$\|u\|_{W_2^{2d+2,d+1}(Q_T)} \leq C(\|f\|_{W_2^{2d,d}(Q_T)} + \|u^0\|_{H^{2d+1}(\Omega)}).$$

Le dernier ingrédient qui nous permettra de construire des contrôles réguliers est le suivant :

**Lemme 2.6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$  la solution correspondante  $\varphi$  de (2.40) satisfasse

$$\iint_{Q_T} e^{-2s_0\alpha} \sum_{r=0}^n (s_0\xi)^{-4r} |\partial_t^r \varphi|^2 + \iint_{Q_T} e^{-2s_0\alpha} \sum_{r=0}^{2n} (s_0\xi)^{-2r} |\nabla^r \varphi|^2 \leq C \iint_{Q_T} e^{-2s_0\alpha} \theta_0^2 \varphi^2, \quad (2.42)$$

où  $\alpha$  et  $\xi$  sont donnés en (2.3) et (2.4) et  $s_0$  est défini dans le Lemme 2.1.

*Preuve.* Soit  $\varphi^0 \in C_c^\infty(\Omega)$ . Comme  $\varphi^0$  vérifie les conditions de compatibilité (2.41), d'après le Lemme 2.5, la solution  $\varphi$  du système (2.40) appartient à  $W_2^{2n,n}(Q_T)$ . On obtient l'estimation (2.42) par récurrence en dérivant le système (2.40) selon les différentes dérivées en temps et en espace et en appliquant les inégalités de Carleman du lemme 2.1 du chapitre II. L'estimation (2.42) reste vraie pour toute fonction  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$  par un argument de densité.  $\square$

**PROPOSITION 2.3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le système (2.38) est contrôlable à zéro en tout temps  $T$ , i.e. pour tout  $y^0 \in L^2(\Omega)$ , il existe un contrôle  $u \in L^2(Q_T)$  tel que la solution  $y$  du système (2.38) est nulle au temps  $T$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $e^{s_0\alpha^*/2}u \in W_2^{2n,n}(Q_T)$  et nous avons l'estimation

$$\|e^{s_0\alpha^*/2}u\|_{W_2^{2n,n}(Q_T)} \leq e^{C(1+1/T)} \|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.43)$$

où  $\alpha^*(t) = \min_{\Omega} \alpha(\cdot, t)$  pour tout  $t \in (0, T)$ .

*Preuve.* Soit  $y^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\rho := e^{2s_0\alpha}$ . Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \text{minimiser } J_k(u) := \frac{1}{2} \int_{Q_T} \rho |u|^2 + \frac{k}{2} \int_{\Omega} |y(T)|^2 dx, \\ u \in L^2_\rho(Q_T), \end{cases} \quad (2.44)$$



où  $y$  est la solution dans  $W(0, T)$  du système (2.38). La fonctionnelle  $J_k$  est différentiable, coercive et strictement convexe sur  $L^2_\rho(Q_T)$  et est à valeur dans  $\mathbb{R}^+$ . Elle admet donc un unique minimum (Cf [Lio68, p. 128]) et la solution  $u_k \in L^2_\rho(Q_T)$  du problème (2.44) est caractérisée par la solution  $y_k$  du système

$$\begin{cases} \partial_t y_k = \Delta y_k + \theta_0 u_k & \text{dans } Q_T, \\ y_k = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y_k(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.45)$$

la solution  $\varphi_k$  du système adjoint

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi_k = \Delta \varphi_k & \text{dans } Q_T, \\ \varphi_k = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi_k(\cdot, T) = k y_k(\cdot, T) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

et l'égalité

$$u_k = -\rho^{-1} \theta_0 \varphi_k \text{ dans } Q_T. \quad (2.46)$$

Le reste de la preuve est divisé en deux étapes. Dans une première étape, nous montrerons que la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge dans  $L^2_\rho(Q_T)$  vers un contrôle  $u$  dont la solution associée au système (2.38) est nulle à l'instant  $T$ . Dans une deuxième étape, nous vérifierons l'estimation (2.43).

### Étape 1:

Cette étape reprend les arguments de la preuve du Corollaire 1.1. Par intégration par parties, on montre que

$$J_k(u_k) = \frac{1}{2} \langle y^0, \varphi_k(\cdot, 0) \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$J_k(u_k) \leq \frac{\varepsilon}{4} \|\varphi_k(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.47)$$

Le Lemme 2.4 appliqué à  $\varphi_k$  donne

$$\|\varphi_k(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{obs} \iint_{Q_T} \rho^{-1} \theta_0^2 \varphi_k^2. \quad (2.48)$$

D'après la définition de  $J_k$  et l'égalité (2.46), on remarque que

$$\iint_{Q_T} \rho^{-1} \theta_0^2 \varphi_k^2 = \iint_{Q_T} \rho u_k^2 \leq 2J_k(u_k). \quad (2.49)$$

Ainsi en combinant les inégalités (2.47), (2.48) et (2.49)

$$J_k(u_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} C_{obs} J_k(u_k) + \frac{1}{4\varepsilon} \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Pour  $\varepsilon := C_{obs}^{-1}$ , nous obtenons donc

$$J_k(u_k) \leq \frac{C_{obs}}{2} \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.50)$$

## 2. Quelques outils pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes paraboliques

La suite  $(y_k(T)/k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  étant uniformément bornée, on en déduit que  $(y_k(T))_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge fortement vers 0. De plus, la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  étant également uniformément bornée dans  $L^2_\rho(Q_T)$ , on peut en extraire une sous-suite que l'on notera encore  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  qui converge faiblement vers un contrôle  $u \in L^2_\rho(Q_T)$ . D'après le Théorème 1.1, la solution du système (2.45) vérifie l'estimation (Cf J.-L. Lions [Lio68])

$$\|y_k\|_{W(0,T)} \leq e^{C(1+T)} (\|\theta_0 u_k\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)}), \quad (2.51)$$

où  $C$  est indépendant de  $y^0$ ,  $T$  et  $k$ . Les inégalités (2.50) et (2.51) donnent

$$\|y_k\|_{W(0,T)} \leq e^{C(1+T)} (1 + C_{obs}) \|y^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il existe donc une sous-suite de  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  que l'on notera toujours  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  qui converge faiblement vers une fonction  $y \in W(0, T)$ . Par passage à la limite des suites  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  dans le système (2.45),  $y$  est solution du système (2.45) pour le contrôle  $u$ . Puisque  $y_k \in W(0, T)$ , alors d'après la Propriété 1.1  $y_k \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ . Ainsi  $y_k(T)$  converge faiblement vers  $y(T)$  dans  $L^2(\Omega)$ , et par unicité de la limite  $y(T) = 0$  dans  $\Omega$ . En utilisant (2.50), on a

$$\|u_k\|_{L^2_\rho(Q_T)}^2 \leq C_{obs} \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.52)$$

D'où,

$$\|e^{s_0 \alpha^*/2} u_k\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq e^{C(1+1/T)} \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.53)$$

**Étape 2:** A l'aide des définitions de  $\alpha$  et  $\xi$  données en (2.3) et (2.4), pour tout  $l \in \mathbb{N}$  et  $r \in \mathbb{R}$  il existe une constante  $C_{r,l}$  telle que

$$|\nabla^l((s_0 \xi)^r e^{-2s_0 \alpha})| \leq C_{r,l} (s_0 \xi)^{r+l} e^{-2s_0 \alpha} \quad \text{et} \quad |\partial_t^l((s_0 \xi)^r e^{-2s_0 \alpha})| \leq C_{r,l} T^l (s_0 \xi)^{r+2l} e^{-2s_0 \alpha}.$$

On en déduit que pour tout  $\eta \in \{1, \dots, 2n\}$  et  $\nu \in \{1, \dots, n\}$

$$\|\nabla^\eta(e^{s_0 \alpha^*/2} u_k)\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C \iint_{Q_T} e^{-4s_0 \alpha + s_0 \alpha^*} \sum_{r=0}^{\eta} (s_0 \xi)^r |\nabla^{\eta-r} \varphi_k|^2 \quad (2.54)$$

et

$$\|\partial_t^\nu(e^{s_0 \alpha^*/2} u_k)\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C(1 + T^\nu) \iint_{Q_T} e^{-4s_0 \alpha + s_0 \alpha^*} \sum_{r=0}^{\nu} (s_0 \xi)^{2r} |\partial_t^{\nu-r} \varphi_k|^2. \quad (2.55)$$

De plus, pour tout  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C_{r_1, r_2}$  telle que

$$|(s_0 \xi)^{r_1} e^{-4s_0 \alpha + s_0 \alpha^*}| \leq C_{r_1, r_2} (s_0 \xi)^{r_2} e^{-2s_0 \alpha}. \quad (2.56)$$

En combinant (2.54), (2.55) et (2.56), on obtient

$$\begin{aligned} & \|e^{s_0 \alpha^*/2} u_k\|_{W_2^{2n, n}(Q_T)}^2 \\ & \leq e^{C(1+T)} \iint_{Q_T} e^{-2s_0 \alpha} \sum_{r=0}^n (s_0 \xi)^{-4r} |\partial_t^r \varphi|^2 + \iint_{Q_T} e^{-2s_0 \alpha} \sum_{r=0}^{2n} (s_0 \xi)^{-2r} |\nabla^r \varphi|^2. \end{aligned}$$

A l'aide du Lemme 2.6 et du fait que  $u_k = -e^{-2s_0 \alpha} \theta_0 \varphi_k$ , on a

$$\|e^{s_0 \alpha^*/2} u_k\|_{W_2^{2n, n}(Q_T)}^2 \leq e^{C(1+T)} \|u_k\|_{L^2_\rho(Q_T)}^2.$$

L'inégalité ci-dessus avec (2.52) donne

$$\|e^{s_0\alpha^*/2}u_k\|_{W_2^{2n,n}(Q_T)} \leq e^{C(1+T+1/T)}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

On conclut en faisant tendre  $k$  vers l'infini dans la dernière inégalité.  $\square$

### Régularisation à l'aide de la méthode par contrôle fictif

Dans cette section, nous présenterons une méthode totalement différente de la précédente qui elle permet de construire un contrôle régulier à partir d'un contrôle moins régulier. Cette technique a été élaborée et utilisée dans une suite d'articles [BGBPG04b ; BGBPG04c ; BGBPG04a ; GBPG06] écrits par O. Bodart, M. González-Burgos et R. Pérez-Garcia afin d'avoir des contrôles  $L^\infty$  et d'étudier la contrôlabilité de systèmes de deux équations paraboliques non linéaires avec une non linéarité sur-linéaire et un seul contrôle. A l'aide de cette méthode, nous expliquerons comment contrôler l'équation de la chaleur avec un contrôle de classe  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

**THÉORÈME 2.4.** *Soit  $y^0 \in L^2(\Omega)$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe un contrôle  $u \in W_2^{2n,n}(Q_T)$  dont le support est strictement inclus dans  $\omega \times (0, T)$  tel que la solution du système*

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.57)$$

soit nulle à l'instant  $T$ . De plus, nous avons l'estimation

$$\|u\|_{W_2^{2n,n}(Q_T)} \leq C_T \|y^0\|_{L^2(\Omega)},$$

où  $C_T$  est une constante ne dépendant pas de  $y^0$ .

*Preuve.* Soit  $y^0 \in L^2(\Omega)$  et considérons la solution  $\bar{y}$  du système libre sans contrôle

$$\begin{cases} \partial_t \bar{y} = \Delta \bar{y} & \text{dans } Q_T, \\ \bar{y} = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \bar{y}(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.58)$$

Soit  $\hat{\omega}$  un ouvert non vide strictement inclus dans  $\omega$ . Comme le système (2.57) est contrôlable en tout temps, il existe une fonction  $\hat{u} \in L^2(\Omega \times (T/2, T))$  telle que la solution  $\hat{y}$  du système

$$\begin{cases} \partial_t \hat{y} = \Delta \hat{y} + \mathbb{1}_{\hat{\omega}} \hat{u} & \text{dans } \Omega \times (T/2, T), \\ \hat{y} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (T/2, T), \\ \hat{y}(\cdot, 0) = \bar{y}(\cdot, T/2) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.59)$$

soit nulle à l'instant  $T$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que le contrôle est nul sur  $(T/2, 2T/3)$  et  $(5T/6, T)$ . A l'aide la régularité des équations paraboliques (Cf [Bre83, p. 205]), on a

$$\bar{y} \in W_2^{2n+2, n+1}(\Omega \times (T/2, T)), \quad (2.60)$$

et d'autre part (Cf [LSU68, p. 176])

$$\hat{y} \in W_2^{2n+2, n+1}(\Omega \setminus \tilde{\omega} \times (T/2, T))$$

pour un ouvert non vide  $\tilde{\omega}$  vérifiant  $\overline{\tilde{\omega}} \subset \tilde{\omega}$  et  $\overline{\tilde{\omega}} \subset \omega$ . Soit  $\tilde{\omega}_0$  un ouvert non vide de  $\Omega$  tel que  $\overline{\tilde{\omega}} \subset \tilde{\omega}_0$  et  $\overline{\tilde{\omega}_0} \subset \omega$ . Soit  $\eta \in C^\infty(0, T)$  et  $\theta \in C^\infty(\Omega)$  des fonctions telles que

$$\begin{cases} \eta = 1 & \text{sur } [0, 4T/6], \\ \eta = 0 & \text{sur } [5T/6, T], \\ 0 \leq \eta \leq 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = 1 & \text{sur } \tilde{\omega}, \\ \text{Supp}(\theta) \subset \tilde{\omega}_0, \\ 0 \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

Considérons

$$q := (1 - \theta)\hat{y} + \eta\theta\bar{y}|_{[T/2, T]}.$$

La fonction  $q$  est solution du système

$$\begin{cases} \partial_t q = \Delta q + \mathbf{1}_\omega v & \text{dans } \Omega \times (T/2, T), \\ q = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (T/2, T), \\ q(\cdot, 0) = \bar{y}(\cdot, T/2) & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec  $v := \Delta\theta\hat{y} + 2\nabla\theta \cdot \nabla\hat{y} + \partial_t\eta\theta\bar{y} - \eta\Delta\theta\bar{y} - 2\eta\nabla\theta \cdot \nabla\bar{y}$  sur  $\Omega \times (T/2, T)$ . Le contrôle  $v$  appartient à  $W_2^{2n, n}(\Omega \times (T/2, T))$  et est à support dans  $\tilde{\omega}_0$ . Le couple  $(y, u)$  donné par

$$(y, u) := \begin{cases} (\bar{y}, 0) & \text{dans } \Omega \times (0, T/2), \\ (q, v) & \text{dans } \Omega \times (T/2, T) \end{cases}$$

est solution du système (2.57). Puisque  $\hat{u} = 0$  sur  $\Omega \times (T/2, 2T/3)$ , on en déduit que  $u$  est en réalité nulle sur  $\Omega \times (0, 2T/3)$ . On en conclut que  $u \in W_2^{2n, n}(Q_T)$ .  $\square$

## 2.5 Contrôle fictif et inversion locale d'opérateurs différentiels

La méthode par contrôle fictif de la section précédente a également été combinée avec une technique permettant d'inverser localement des opérateurs différentiels à l'aide de combinaisons algébriques (Cf M. Gromov [Gro86, Section 2.3.8]) dans [CL14; DL15; ABCO15]. Cette technique consiste à contrôler un système par autant de contrôles que d'équations, puis à diminuer le nombre de contrôles à l'aide de combinaisons algébriques. Dans cette partie, nous donnerons un exemple simple de cette méthode d'inversion d'opérateurs différentiels et nous utiliserons ensuite cette technique pour démontrer la contrôlabilité des systèmes d'équations de la chaleur avec des matrices de couplage et de contrôle constantes.

### Exemple d'inversion d'opérateurs différentiels

Afin de mieux comprendre comment inverser localement un opérateur différentiel à l'aide de combinaisons algébriques, nous allons donner un exemple simple que l'on peut trouver dans le livre de M. Gromov [Gro86, Section 2.3.8] et dans la thèse de P. Lissy [Lis13, Ex. 1, Sec. 1.3]. Soit une fonction  $f \in C_c^\infty([0, 1])$ , des réels  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  et considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } (w_1, w_2) \in C_c^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^2) \text{ tel que :} \\ a_1 w_1 - a_2 \partial_x w_1 + a_3 \partial_{xx} w_1 + b_1 w_2 - b_2 \partial_x w_2 + b_3 \partial_{xx} w_2 = f. \end{cases} \quad (2.61)$$

Le problème (2.61) peut être écrit de la façon suivante :

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = f,$$

où l'opérateur  $\mathcal{L}$  est donné par

$$\mathcal{L} := (a_1 - a_2\partial_x + a_3\partial_{xx}, b_1 - b_2\partial_x + b_3\partial_{xx}).$$

S'il existe un opérateur différentiel  $\mathcal{M} := \sum_{i=0}^M m_i \partial_x^i$  avec  $m_0, \dots, m_M \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{N}$  tel que

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = Id, \quad (2.62)$$

alors pour résoudre le problème (2.61), il suffit de prendre  $(w_1, w_2) := \mathcal{M}f$  qui sera bien à support compact. Nous remarquons que l'égalité (2.62) est équivalente formellement à

$$\mathcal{M}^* \circ \mathcal{L}^* = Id, \quad (2.63)$$

avec

$$\mathcal{L}^* = \begin{pmatrix} a_1 + a_2\partial_x + a_3\partial_{xx} \\ b_1 + b_2\partial_x + b_3\partial_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* \\ \mathcal{L}_2^* \end{pmatrix}.$$

Considérons l'opérateur suivant défini pour tout  $\varphi \in C_c^\infty([0, 1])$  par

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* \\ \mathcal{L}_2^* \\ \partial_x \circ \mathcal{L}_1^* \\ \partial_x \circ \mathcal{L}_2^* \end{pmatrix} \varphi := \begin{pmatrix} a_1 + a_2\partial_x + a_3\partial_{xx} \\ b_1 + b_2\partial_x + b_3\partial_{xx} \\ a_1\partial_x + a_2\partial_{xx} + a_3\partial_{xxx} \\ b_1\partial_x + b_2\partial_{xx} + b_3\partial_{xxx} \end{pmatrix} \varphi = C \begin{pmatrix} \varphi \\ \partial_x \varphi \\ \partial_{xx} \varphi \\ \partial_{xxx} \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

où la matrice  $C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  est donnée par

$$C := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Supposons que  $C$  soit une matrice inversible et notons

$$C^{-1} := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}.$$

Alors l'égalité (2.64) donne

$$C^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* \\ \mathcal{L}_2^* \\ \partial_x \circ \mathcal{L}_1^* \\ \partial_x \circ \mathcal{L}_2^* \end{pmatrix} \varphi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \partial_x \varphi \\ \partial_{xx} \varphi \\ \partial_{xxx} \varphi \end{pmatrix},$$

où la première ligne est donnée par

$$c_{11}\mathcal{L}_1^* \varphi + c_{12}\mathcal{L}_2^* \varphi + c_{13}\partial_x \circ \mathcal{L}_1^* \varphi + c_{14}\partial_x \circ \mathcal{L}_2^* \varphi = \varphi.$$

Ainsi le problème (2.63) est résolu si nous définissons  $\mathcal{M}^*$  pour tout  $(\psi_1, \psi_2) \in C_c^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^2)$  par

$$\mathcal{M}^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} := c_{11}\psi_1 + c_{12}\psi_2 + c_{13}\partial_x\psi_1 + c_{14}\partial_x\psi_2.$$

### Application à la contrôlabilité

Soit un domaine non vide borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) avec une frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ ,  $T > 0$  et  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ . Nous noterons  $Q_T := \Omega \times (0, T)$  et  $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$ . Considérons le système de  $n$  équations paraboliques linéaires contrôlé par  $m$  contrôles

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B\mathbf{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.65)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  et  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ .

Le résultat ci-dessous a été démontré dans [AK+09a] et [AK+09b] par F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix et M. González-Burgos. Nous proposons de retrouver la condition suffisante de ce résultat en combinant la méthode par contrôle fictif et la technique d'inversion d'opérateurs différentiels par combinaisons algébriques. Plus précisément, on a :

**THÉORÈME 2.5.** *Le système (2.65) est contrôlable à zéro au temps  $T$ , i.e. pour toute donnée initiale  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  il existe un contrôle  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  de sorte que la solution  $y$  du système (2.65) soit nulle à l'instant  $T$ , si*

$$\text{Rang}[A|B] = n,$$

où la matrice  $[A|B]$  est donnée par  $[A|B] := (B|AB|\dots|A^{n-1}B)$ .

*Preuve.* La preuve se décompose en deux parties que l'on appellera respectivement *résolution du problème analytique* et *résolution du problème algébrique*. Le problème analytique consiste à contrôler le système par  $n$  forces, et à l'aide de la solution ainsi obtenue, le problème algébrique revient à effectuer des combinaisons algébriques bien choisies afin de trouver une solution au problème initial.

#### Problème analytique:

Pour ce problème de contrôle, le problème analytique est le suivant : trouver  $(z, v) \in W(0, T)^n \times W_2^{2n-2, n-1}(Q_T)^n$  solution de

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + Az + \theta v & \text{dans } Q_T, \\ z = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ z(\cdot, 0) = y^0, z(\cdot, T) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.66)$$

où  $\theta \in C_c^\infty(\omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon))$  pour  $\varepsilon < T$ . En utilisant les techniques décrites dans la section 2.4, on a le résultat suivant :

**THÉORÈME 2.6.** *Le système (2.66) est contrôlable à zéro, i.e. pour toute donnée initiale il existe un contrôle  $v \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^n)$  tel que la solution du système (2.66) soit nulle à l'instant  $T$ . De plus, nous avons l'estimation*

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q_T; \mathbb{R}^n)} \leq e^{CH_T} \|y^0\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)}.$$

où

$$H_T = 1 + \frac{1}{T} + T.$$

**Problème algébrique:**

Pour  $f := \theta v \in C_c^\infty(\omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon))$ , nous souhaitons trouver un couple  $(\hat{z}, \hat{v}) \in W(0, T)^n \times L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  dont le support est inclus dans  $\omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$  et solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t \hat{z} = \Delta \hat{z} + A \hat{z} + B \hat{v} + f & \text{dans } Q_T, \\ \hat{z} = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \hat{z}(\cdot, 0) = \hat{z}(\cdot, T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.67)$$

Nous remarquons que les conditions de bords et les conditions initiales et finales sont automatiquement vérifiées puisque  $\hat{z}$  et  $\hat{v}$  sont à support compact dans  $\omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon)$ . Nous allons résoudre ce problème en utilisant la notion d'inversion d'opérateurs différentiels par opérations algébriques, introduite précédemment. Considérons l'opérateur  $\mathcal{L}$  défini pour tout  $(\hat{z}, \hat{v}) \in C_c^\infty(\omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon), \mathbb{R}^{n+m})$  par

$$\mathcal{L}(\hat{z}, \hat{v}) := \partial_t \hat{z} - \Delta \hat{z} - A \hat{z} - B \hat{v}. \quad (2.68)$$

Le problème (2.67) peut donc se réécrire sous la forme

$$\mathcal{L}(\hat{z}, \hat{v}) = f.$$

Cherchons un opérateur différentiel  $\mathcal{M}$  défini sur  $C_c^\infty(\omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon), \mathbb{R}^n)$  et à valeurs dans  $C_c^\infty(\omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon), \mathbb{R}^{n+m})$  tel que

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = Id. \quad (2.69)$$

Ainsi  $(\hat{z}, \hat{v}) := \mathcal{M}f$  sera solution du problème (2.67). L'égalité (2.69) est formellement équivalente à

$$\mathcal{M}^* \circ \mathcal{L}^* = Id, \quad (2.70)$$

où l'adjoint  $\mathcal{L}^*$  de l'opérateur  $\mathcal{L}$  est donné pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon), \mathbb{R}^n)$  par

$$\mathcal{L}^* \varphi = \begin{pmatrix} -\partial_t \varphi - \Delta \varphi - A^* \varphi \\ -B^* \varphi \end{pmatrix}.$$

Considérons l'opérateur  $\mathcal{N} := (\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)$  donné pour tout  $(x_1, x_2) \in C_c^\infty(\omega \times (\varepsilon, T - \varepsilon); \mathbb{R}^{n+m})$  par

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1(x_1, x_2) := -x_2, \\ \mathcal{N}_2(x_1, x_2) := (\partial_t + \Delta)x_2 - B^* x_1, \\ \mathcal{N}_k(x_1, x_2) := (\partial_t + \Delta)\mathcal{N}_{k-1}(x_1, x_2) - B^*(A^*)^{k-2}x_1, \quad \forall k \in \{3, \dots, n\}. \end{cases}$$

De cette façon,

$$\mathcal{N} \circ \mathcal{L}^* \varphi = \begin{pmatrix} B^* \varphi \\ \vdots \\ B^*(A^*)^{n-1} \varphi \end{pmatrix}.$$

Ainsi, puisque la matrice  $K := (B|AB|\dots|A^{n-1}B)$  est de rang  $n$ , il existe une matrice  $R \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  telle que  $RK^* = I_n$ . L'opérateur  $\mathcal{M} := \mathcal{N}^*R^*$  d'ordre 2 en espace et 1 en temps est solution de (2.69).

**Conclusion:**

Les problèmes analytique et algébrique étant résolus, il est ensuite immédiat que  $(y, u) := (z - \hat{z}, -\hat{v})$  est solution du système (2.65) dans  $W(0, T)^n \times L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  satisfaisant  $y(T) \equiv 0$  sur  $\Omega$ . □

Pour d'autres explications de cette méthode nous renvoyons à l'article de J.-M. Coron et P. Lissy [CL14, Prop. 1] ou aux sections 2.4 et 3.3 de [DL15].

*Remarque 2.5.* Pour le moment, cette technique n'a permis de montrer la contrôlabilité que dans le cas où l'intersection des domaines de contrôle et de couplage est non vide. La raison est que l'inversion d'opérateurs différentiels telle que décrite ci-dessus s'effectue dans la zone de contrôle.

*Remarque 2.6.* Nous remarquons que le problème analytique consiste à contrôler le système avec  $n$  contrôles au lieu de  $m$  avec en général  $m < n$  et nous résolvons le problème algébrique en appliquant un opérateur différentielle au contrôle trouvé. Numériquement, il est a priori moins coûteux de contrôler le système avec  $n$  forces. Nous pouvons nous demander si il possible de construire un schéma numérique utilisant la méthode de résolution algébrique qui serait plus rapide qu'un schéma standard.

### 3 État de l'art

#### 3.1 Contrôlabilité des systèmes paraboliques

Dans cette partie, nous donnerons une liste non exhaustive de résultats de contrôlabilité à zéro de systèmes paraboliques linéaires. Soit  $T > 0$ ,  $\Omega$  un domaine non vide borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  et  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ . Nous noterons  $Q_T := \Omega \times (0, T)$ ,  $q_T := \omega \times (0, T)$  et  $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$ . Un des premiers résultats de contrôlabilité à zéro des équations paraboliques a été établi dans les années 70' par H.O. Fattorini et D. L. Russell dans [FR71 ; FR74] et concerne la contrôlabilité de la chaleur en dimension un

$$\begin{cases} \partial_t z = \partial_{xx} z + f(x)u(t) & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ z(0, \cdot) = v, z(\pi, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } (0, \pi), \end{cases}$$

où  $z^0 \in H^{-1}(0, \pi)$ ,  $f \in L^2(0, \pi)$  et  $u, v \in L^2(0, T)$  sont les contrôles. Les auteurs ont utilisé la méthode des moments que nous avons présentée dans la section 2.2. Il fallut attendre 1995 pour que la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur soit démontrée en dimension quelconque et avec un contrôle interne

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \mathbf{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$



où  $y^0 \in L^2(\Omega)$  et  $u \in L^2(Q_T)$  est le contrôle. Ce résultat a été obtenu parallèlement par G. Lebeau et L. Robbiano dans [LR95] à l'aide d'une inégalité spectrale déduite des inégalités de Carleman elliptiques et par A.V. Fursikov et O.Y. Imanuvilov dans [FI96] grâce aux inégalités de Carleman paraboliques décrites dans la section 2.1.

Soit  $n, m \in \mathbb{N}^*$  et considérons le système de  $n$  équations paraboliques linéaires contrôlées par  $m$  contrôles localisés

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + G \cdot \nabla y + Ay + B \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,  $G \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{nN}, \mathbb{R}^n))$ ,  $A \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ ,  $B \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$  et  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ .

Deux des premiers travaux concernant la contrôlabilité à zéro des systèmes paraboliques linéaires sont les articles [AK+05; AKBD06b] de F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaix et I. Kostin (Cf également [AK+03]), où les auteurs obtiennent la contrôlabilité à zéro du système (3.1) avec deux équations, un contrôle et sans termes d'ordre un ( $G = 0$ ). Ce résultat a été ensuite généralisé par M. González-Burgos et L. de Teresa pour les systèmes avec  $n$  équations et une structure dite en cascade dans [GBT10]. Plus précisément, les auteurs prouvent la contrôlabilité à zéro du système (3.1) pour  $B := e_1$  (premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ) et les matrices  $G$  et  $A$  de la forme

$$G := \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

et

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

où les coefficients de  $A$  satisfont pour une constante positive  $C$  et un ouvert non vide  $\omega_0$  de  $\omega$

$$a_{(i+1)i} > C \text{ dans } \omega_0 \times (0, T) \quad \text{ou} \quad a_{(i+1)i} < -C \text{ dans } \omega_0 \times (0, T), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (3.4)$$

Un résultat similaire peut être trouvé dans l'article de F. Alabau-Boussouira [AB13]. Comme nous allons le voir dans la section 3.2, les structures données en (3.2) et (3.3) peuvent n'avoir lieu que dans  $\omega_0 \times (0, T)$ . De plus, il est possible de remplacer  $-\Delta$  par un opérateur du second ordre elliptique et dépendant du temps  $L(t)$  de la forme

$$L(t)y(x, t) = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_{ij}(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_j}(x, t) \right) + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x, t) + c(x, t)y(x, t), \quad (3.5)$$

avec les coefficients  $\alpha_{i,j}$ ,  $b_i$ ,  $c$  satisfaisant

$$\begin{cases} \alpha_{ij} \in W_\infty^1(Q_T), b_i, c \in L^\infty(Q_T) \quad 1 \leq i, j \leq N, \\ \alpha_{ij}(x, t) = \alpha_{ji}(x, t) \quad \forall (x, t) \in Q_T, \quad 1 \leq i, j \leq N \end{cases}$$

et la condition d'ellipticité uniforme : il existe une constante  $a_0 > 0$  telle que

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2, \quad \forall (x, t) \in Q_T, \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (3.6)$$

Considérons le système de deux équations paraboliques contrôlées par un contrôle localisé en espace et couplé par un opérateur d'ordre un, ce qui correspond au cadre des chapitres I et II,

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \operatorname{div}(d_1 \nabla y_1) + g_{11} \cdot \nabla y_1 + g_{12} \cdot \nabla y_2 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 = \operatorname{div}(d_2 \nabla y_2) + g_{21} \cdot \nabla y_1 + g_{22} \cdot \nabla y_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ,  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $g_{ij} \in L^\infty(Q_T; \mathbb{R}^N)$ ,  $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$  pour tout  $i, j \in \{1, 2\}$  et pour  $l \in \{1, 2\}$ , l'opérateur elliptique du second ordre auto-adjoint  $\operatorname{div}(d_l \nabla)$  est donné par

$$\operatorname{div}(d_l \nabla) = \sum_{i,j=1}^N \partial_i (d_l^{ij} \partial_j), \quad (3.8)$$

avec

$$\begin{cases} d_l^{ij} \in W_\infty^1(Q_T), \\ d_l^{ij} = d_l^{ji} \quad \text{dans } Q_T, \end{cases}$$

où les coefficients  $d_l^{ij}$  satisfont la condition elliptique uniforme (3.6). Concernant la contrôlabilité à zéro du système (3.7), les seuls résultats connus seront ceux détaillés dans la section 3.2. Rappelons-les brièvement :

Le premier d'entre eux est un cas particulier de celui dont nous avons parlé plus haut, i.e. [GBT10]. Plus précisément, le système (3.7) est contrôlable à zéro au temps  $T$  sous les conditions (3.2)-(3.4), i.e.

$$\begin{aligned} g_{21} &\equiv 0 \quad \text{dans } \omega_0 \times (0, T) \\ &\text{et} \\ (a_{21} > a_0 \quad \text{dans } \omega_0 \times (0, T) \quad \text{ou} \quad a_{21} < -a_0 \quad \text{dans } \omega_0 \times (0, T)), \end{aligned} \quad (3.9)$$

pour une constante  $a_0 > 0$  et un ouvert non vide  $\omega_0$  de  $\omega$ .

Le deuxième d'entre eux est celui de S. Guerrero [Gue07b], où l'auteur suppose que  $N = 1$ , que les coefficients  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $a_{11}$ ,  $g_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $g_{22}$  sont constants et que l'opérateur de couplage d'ordre un  $g_{21} \cdot \nabla + a_{21}$  peut s'écrire sous la forme

$$g_{21} \cdot \nabla + a_{21} = P_1 \circ \theta \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.10)$$

où  $\theta \in C^2(\overline{\Omega})$  satisfait  $|\theta| > C$  dans un ouvert non vide  $\omega_0$  de  $\omega$  pour une constante strictement positive  $C$  et  $P_1$  est donné pour un vecteur  $m_0 \in \mathbb{R}^N$  et une constante  $m_1 \in \mathbb{R}$  par

$$P_1 := m_0 \cdot \nabla + m_1.$$

Sous ces conditions, l'auteur prouve la contrôlabilité à zéro du système (3.7) au temps  $T$  en dimension un.

Le dernier résultat concernant les systèmes avec un couplage d'ordre un est le travail récent [Ben+14] de A. Benabdallah, M Cristofol, P. Gaitan et L. De Teresa, où le cas de systèmes  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$  avec une force est étudié sous une hypothèse technique. Plus précisément, dans le cas  $2 \times 2$ , les auteurs supposent que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un ouvert non vide } \gamma \text{ de } \partial\omega \cap \partial\Omega, \\ \exists x_0 \in \gamma \text{ t.q. } g_{21}(t, x_0) \cdot \nu(x_0) \neq 0 \text{ pour tout } t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (3.11)$$

où  $\nu$  représente le vecteur normal unitaire extérieur à la frontière  $\partial\Omega$ . Sous ces restrictions sur le domaine de contrôle et le terme de couplage, le système (3.7) est contrôlable à zéro au temps  $T > 0$ .

Considérons le système simplifié en dimension un suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y_1 = \partial_{xx} y_1 + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ \partial_t y_2 = \partial_{xx} y_2 + q(x) y_1 & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ y(0, \cdot) = y(\pi, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } (0, \pi), \end{array} \right. \quad (3.12)$$

où  $y_0 \in L^2((0, \pi); \mathbb{R}^2)$ ,  $u \in L^2((0, \pi) \times (0, T))$ ,  $q \in L^\infty(0, \pi)$  et  $\omega := (a, b) \subset (0, \pi)$ . En dimension supérieure, dans le cas où les domaines de contrôle et de couplage ne s'intersectent pas, peu de résultats sont connus et sont en général valables sous des restrictions géométriques (Cf [AB13; ABL13b]). Ces restrictions viennent de l'utilisation de la *méthode par transmutation* (Cf [Mil06]) qui requiert un résultat de contrôlabilité sur un système hyperbolique. Il a été démontré par F. Boyer et G. Olive dans [BO14] à l'aide du *test d'Hautus* (Cf [Fat66, Cor. 3.3]) que le système (3.12) est approximativement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si,

$$\text{Supp}(q) \cap \omega \neq \emptyset \quad (3.13)$$

ou

$$|I_k(q)| + |I_{a,k}(q)| \neq 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad (3.14)$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  les quantités  $I_k(q)$  et  $I_{a,k}(q)$  sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{a,k}(q) := \int_0^a q \varphi_k^2, \\ I_k(q) := \int_0^\pi q \varphi_k^2, \end{array} \right. \quad (3.15)$$

avec  $\varphi_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ .

Dans l'article de O. Kavian et L. De Teresa [KT10], les auteurs prouvent la contrôlabilité approchée au temps  $T$  du système (3.12) lorsque  $q \equiv \mathbb{1}_{\omega_0}$  avec  $\omega_0$  un ouvert non vide de  $(0, \pi)$ , ce qui implique la condition (3.14). Soit  $T_0(q)$  donné par

$$T_0(q) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\min(-\log |I_k(q)|, -\log |I_{a,k}(q)|)}{k^2}. \quad (3.16)$$

Lorsque les domaines de contrôle et de couplage ne s'intersectent pas et sous la condition (3.14), F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, M. González-Burgos et L. de Teresa obtiennent dans [AK+15] :

1. Si  $T > T_0(q)$ , alors le système (3.12) est contrôlable à zéro au temps  $T$ .
2. Si  $T < T_0(q)$ , alors le système (3.12) n'est pas contrôlable à zéro au temps  $T$ .

Ces deux résultats sont obtenus grâce à la méthode des moments décrite dans la section 2.2.

Concernant la contrôlabilité approchée, dans [Oli14, Th. 3.3], G. Olive prouve en utilisant le Test de Hautus que le système

$$\begin{cases} \partial_t z_1 = \partial_{xx} z_1 & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ \partial_t z_2 = \partial_{xx} z_2 + p(x) \partial_x z_1 + q(x) z_1 & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ z(0, \cdot) = v, z(\pi, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } (0, \pi), \end{cases} \quad (3.17)$$

où  $z^0 \in H^{-1}((0, \pi); \mathbb{R}^2)$  et  $v \in L^2(0, T)$  est approximativement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si,

$$I_k(p, q) \neq 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*. \quad (3.18)$$

Considérons maintenant le système (3.1) avec  $n$  équations paraboliques linéaires contrôlées par  $m$  forces sans terme de couplage d'ordre un

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,  $A \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ ,  $B \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$  et  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ .

Supposons que les matrices  $A$  et  $B$  soient constantes en temps et en espace, i.e.  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  et  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , et définissons la matrice dite *matrice de Kalman* par

$$[A|B] := (B|AB|\dots|A^{n-1}B). \quad (3.20)$$

Dans [AK+09b], F. Ammar Khodja, A. Benabdallah, C. Dupaux et M. González-Burgos montrent que le système (3.19) est contrôlable à zéro au temps  $T$  si, et seulement si,

$$\text{rang } [A|B] = n. \quad (3.21)$$

Cette dernière condition est également équivalente à la contrôlabilité approchée. Nous remarquons donc que pour ces systèmes, contrôlabilité à zéro et contrôlabilité approchée sont des propriétés équivalentes. Ce résultat est sans doute la première généralisation de

la condition de Kalman (condition (3.21), cf. section 1.4 et [KFA69]) à un système d'équations aux dérivées partielles. Concernant la contrôlabilité à zéro du système (3.19) avec des coefficients de couplage constants et des domaines de contrôle différents d'une équation à l'autre, nous renvoyons à l'article de G. Olive [Oli12].

Supposons maintenant que  $A \in C^{n-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  et  $B \in C^n([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$ . Dans ce cas, la matrice de Kalman est définie comme suit :

$$\begin{cases} B_0(t) := B(t), \\ B_i(t) := A(t)B_{i-1}(t) - \partial_t B_{i-1}(t) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

et notons  $[A|B](\cdot) \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{nm}; \mathbb{R}^n))$  la matrice donnée par

$$[A|B](\cdot) := (B_0(\cdot)|B_1(\cdot)|\dots|B_{n-1}(\cdot)). \quad (3.22)$$

Dans [AK+09a], les auteurs ont étendu les conditions de contrôlabilité des systèmes différentiels linéaires non autonomes de Silverman-Meadows (Cf [SM67]) au cas des systèmes paraboliques. Ils prouvent que s'il existe  $t_0 \in [0, T]$  tel que

$$\text{rang } [A|B](t_0) = n, \quad (3.23)$$

alors le système (3.19) est contrôlable à zéro au temps  $T$  et, par ailleurs, le système (3.19) est contrôlable à zéro sur tout intervalle  $(T_0, T_1)$  où  $0 \leq T_0 < T_1 \leq T$  si, et seulement si, il existe un sous-ensemble dense  $E$  de  $(0, T)$  tel que

$$\text{rang } [A|B](t) = n \text{ pour tout } t \in E. \quad (3.24)$$

Les auteurs de [AK+09a] effectuent un changement de variable à l'aide de la matrice de Kalman afin de se ramener à un système de la forme (3.19) où la matrice de couplage  $A$  a une structure similaire à (3.3).

### 3.2 Détails de trois résultats connus concernant les systèmes d'équations paraboliques couplées par un opérateur d'ordre un

Soit  $T > 0$ ,  $\Omega$  un domaine non vide borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) de bord  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  et  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ . Nous noterons  $Q_T := \Omega \times (0, T)$ ,  $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$  et  $q_T := \omega \times (0, T)$ . Considérons le système parabolique de deux équations avec un contrôle interne sur la première équation et un opérateur de couplage d'ordre un dans la deuxième équation

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \text{div}(d_1 \nabla y_1) + g_{11} \cdot \nabla y_1 + g_{12} \cdot \nabla y_2 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 = \text{div}(d_2 \nabla y_2) + g_{21} \cdot \nabla y_1 + g_{22} \cdot \nabla y_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.25)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ,  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$ ,  $g_{ij} \in L^\infty(Q_T; \mathbb{R}^N)$  pour tout  $i, j \in \{1, 2\}$  et pour  $l \in \{1, 2\}$ , l'opérateur elliptique du second ordre auto-adjoint  $\text{div}(d_l \nabla)$  est donné par (3.8).

Dans cette partie, nous exposerons les quelques résultats déjà connus et les difficultés que l'on peut rencontrer pour résoudre de tels problèmes. En reprenant la preuve faite par

M. González-Burgos et L. de Teresa dans [GBT10], nous étudierons un système avec un opérateur de couplage d'ordre zéro sur un sous-domaine du domaine de contrôle. Nous regarderons ensuite les résultats obtenus par S. Guerrero dans [Gue07b] où l'opérateur doit vérifier une certaine inégalité. Enfin, lorsque le domaine de contrôle touche  $\partial\Omega$ , nous présenterons les techniques utilisées par A. Benabdallah, M. Cristofol, P. Gaitan et L. De Teresa dans [Ben+14]. Nous dégagerons les idées essentielles de ces différents travaux, et montrerons ainsi comment les résultats des chapitres I et II viennent compléter ces études.

### Système avec une structure cascade

Le premier résultat que nous détaillerons est celui établi par M. González-Burgos et L. de Teresa dans [GBT10]. Pour le système (3.25), les auteurs obtiennent le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.1** (Cf [GBT10]). *Supposons que  $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$ ,  $g_{ij} \in L^\infty(Q_T; \mathbb{R}^N)$  et  $d_{ij} \in W_\infty^1(Q_T)$  pour tout  $i, j \in \{1, 2\}$  et qu'il existe un ouvert non vide  $\omega_0$  de  $\omega$  tel que*

$$\begin{aligned} g_{21} &\equiv 0 \quad \text{dans } \omega_0 \times (0, T) \\ &\text{et} \\ (a_{21} > C \text{ dans } \omega_0 \times (0, T) \text{ ou } a_{21} < -C \text{ dans } \omega_0 \times (0, T)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Alors le système (3.25) est contrôlable à zéro en tout temps. De plus, le contrôle  $u$  peut être choisi de sorte que

$$\|u\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq e^{C(1+T+1/T)} \|y^0\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)}^2.$$

Afin de simplifier les calculs et de mieux comprendre les techniques utilisées, nous étudierons le système

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \Delta y_1 + \mathbf{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 = \Delta y_2 + p \cdot \nabla y_1 + q y_1 & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.27)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ,  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $q \in L^\infty(Q_T)$  et  $p \in L^\infty(Q_T; \mathbb{R}^N)$ . Dans ce cas, la condition (3.26) s'écrit

$$\begin{aligned} p &\equiv 0 \quad \text{dans } \omega_0 \times (0, T) \\ &\text{et} \\ (q > C \text{ dans } \omega_0 \times (0, T) \text{ ou } q < -C \text{ dans } \omega_0 \times (0, T)). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Considérons le système adjoint associé à (3.27)

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi_1 = \Delta \varphi_1 - \operatorname{div}(p \varphi_2) + q \varphi_2 & \text{dans } Q_T, \\ -\partial_t \varphi_2 = \Delta \varphi_2 & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi(\cdot, T) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.29)$$

avec  $\varphi^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ .

En utilisant les mêmes arguments que dans la section 2.1, la démonstration du Théorème 3.1 revient à prouver les inégalités de Carleman suivantes :

**Lemme 3.1** (Cf [GBT10]). *Soit  $r \in \mathbb{R}$ . Il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $c_1 > 0$  (dépendant seulement de  $\Omega$  et  $\omega_0$ ) telles que pour tout  $\varphi^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ , la solution  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  de (3.29) satisfasse*

$$\iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} (s\xi)^r |\varphi|^2 \leq C_1 \iint_{\omega_0 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} |\varphi_1|^2 \quad (3.30)$$

pour tout  $s \geq s_1$ , où

$$s_1 = c_1 (T + T^2).$$

*Preuve.* Nous verrons que sans perte de généralité nous pouvons supposer que  $p \equiv 0$  et  $q > C$  sur  $\omega_0$  pour une constante  $C > 0$ . Soit  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux ouverts non vides de  $\Omega$  tels que

$$\omega_2 \subset\subset \omega_1 \subset\subset \omega_0$$

et considérons deux fonctions de troncature  $\theta_0, \theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$  satisfaisant  $0 \leq \theta_0, \theta_1 \leq 1$  sur  $\Omega$ ,  $\theta_0 \equiv 1$  dans  $\omega_1$ ,  $\theta_1 \equiv 1$  dans  $\omega_2$ ,  $\text{supp}(\theta_0) \subseteq \omega_0$ ,  $\text{supp}(\theta_1) \subseteq \omega_1$  et

$$\frac{\nabla \theta_0}{\theta_0^{1/2}}, \frac{\nabla \theta_1}{\theta_1^{1/2}} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N). \quad (3.31)$$

Pour obtenir des fonctions de troncature vérifiant (3.31), il suffit de prendre le carré de n'importe quelles fonctions de troncature  $\theta_0, \theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$  satisfaisant  $0 \leq \theta_0, \theta_1 \leq 1$  sur  $\Omega$ ,  $\theta_0 \equiv 1$  dans  $\omega_1$  et  $\theta_1 \equiv 1$  dans  $\omega_2$ .  $\text{supp}(\theta_0) \subseteq \omega_0$ ,  $\text{supp}(\theta_1) \subseteq \omega_1$ . Soit  $\varphi^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  et  $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2)$  la solution du système (3.29). En multipliant l'équation vérifiée par  $\varphi_1$  par  $\theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \varphi_2$ , nous obtenons en intégrant sur  $Q_T$

$$\iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^r q \varphi_2^2 = - \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \varphi_2 \partial_t \varphi_1 - \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \varphi_2 \Delta \varphi_1.$$

En utilisant l'équation vérifiée par  $\varphi_2$  et par intégration par parties, nous en déduisons que

$$\iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^r q \varphi_2^2 = J_1 + J_2 + J_3, \quad (3.32)$$

où

$$\begin{aligned} J_1 &:= \iint_{Q_T} \theta_1 \partial_t (e^{-2s\alpha} (s\xi)^r) \varphi_2 \varphi_1, & J_2 &:= 2 \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_1, \\ J_3 &:= \iint_{Q_T} \{ \theta_1 \nabla (e^{-2s\alpha} (s\xi)^r) + e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \nabla \theta_1 \} \cdot \{ \varphi_2 \nabla \varphi_1 + \varphi_1 \nabla \varphi_2 \}. \end{aligned}$$

Rappelons que pour tout  $\eta \in \mathbb{R}$  nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{cases} |\nabla (e^{-2s\alpha} (s\xi)^\eta)| \leq C e^{-2s\alpha} (s\xi)^{\eta+1}, \\ |\Delta (e^{-2s\alpha} (s\xi)^\eta)| \leq C e^{-2s\alpha} (s\xi)^{\eta+2}, \\ |\partial_t (e^{-2s\alpha} (s\xi)^\eta)| \leq C T e^{-2s\alpha} (s\xi)^{\eta+2}, \end{cases} \quad (3.33)$$

pour une constante  $C$  dépendant de  $\eta$ . La troisième inégalité de (3.33) ainsi que l'inégalité de Young donne pour  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \varepsilon \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \varphi_2^2 + \frac{CT^2}{\varepsilon} \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} \varphi_1^2 \\ &\leq \varepsilon I_1(r, \varphi_2) + \frac{CT^2}{\varepsilon} \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} \varphi_1^2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

où pour une fonction  $z$  la quantité  $I_1(r, z)$  est définie dans (2.1). La propriété (3.31) de  $\theta_1$  et l'inégalité de Young implique

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \varepsilon \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r-2} |\nabla \varphi_2|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} |\nabla \varphi_1|^2 \\ &\leq \varepsilon I_1(r, \varphi_2) + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} |\nabla \varphi_1|^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

et

$$J_3 \leq \varepsilon I_1(r, \varphi_2) + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} |\nabla \varphi_1|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} \varphi_1^2. \quad (3.36)$$

En combinant (3.32) et (3.34)-(3.36), on a

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \theta_1 e^{-2s\alpha} (s\xi)^r q \varphi_2^2 &\leq 3\varepsilon I_1(r, \varphi_2) + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{Q_T} \theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} |\nabla \varphi_1|^2 \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} (1 + T^2) \iint_{\omega_1 \times (0, T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} \varphi_1^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Multiplions cette fois-ci par  $\theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} \varphi_1$  l'équation vérifiée par  $\varphi_1$ . Nous obtenons maintenant en intégrant sur  $Q_T$

$$- \iint_{Q_T} \theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} \varphi_1 \partial_t \varphi_1 = \iint_{Q_T} \theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} \Delta \varphi_1 \varphi_1 + \iint_{Q_T} \theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} \varphi_1 q \varphi_2.$$

Par intégration par parties, nous en déduisons

$$\iint_{Q_T} \theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} |\nabla \varphi_1|^2 = K_1 + K_2 + K_3, \quad (3.38)$$

avec

$$\begin{aligned} K_1 &:= -\frac{1}{2} \iint_{Q_T} \theta_0 \partial_t (e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2}) \varphi_1^2, & K_2 &:= - \iint_{Q_T} \varphi_1 \nabla (\theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2}) \cdot \nabla \varphi_1, \\ K_3 &:= \iint_{Q_T} \theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} \varphi_1 q \varphi_2. \end{aligned}$$



La propriété (3.31) de  $\theta_0$  et l'inégalité de Young donnent pour une constante strictement positive  $C_\varepsilon$

$$K_1 \leq CT^2 \iint_{Q_T} \theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} \varphi_1^2, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} K_2 &\leq \iint_{Q_T} \{\theta_0 |\nabla(e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2})| + e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} |\nabla\theta_0|\} |\varphi_1| |\nabla\varphi_1| \\ &\leq \varepsilon \iint_{Q_T} \theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+2} |\nabla\varphi_1|^2 + \frac{C}{\varepsilon} \iint_{\omega_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} \varphi_1^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

et

$$K_3 \leq \varepsilon^2 I_1(r, \varphi_2) + \frac{C}{\varepsilon^2} \iint_{Q_T} \theta_0 e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} \varphi_1^2. \quad (3.41)$$

Ainsi, en combinant (3.37)-(3.41), nous obtenons

$$\iint_{\omega_2 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^r q \varphi_2^2 \leq \varepsilon I_2(r, \varphi_2) + C_\varepsilon (1 + T^2) \iint_{\omega_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} \varphi_1^2,$$

où, ici et après,  $C_\varepsilon$  ne dépend pas de  $T$ . Puisque le coefficient de couplage  $q$  est minoré sur  $\omega_2$ , il existe une constante  $C$  telle que

$$\iint_{\omega_2 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \varphi_2^2 \leq C \iint_{\omega_2 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^r q \varphi_2^2, \quad (3.42)$$

on en déduit

$$\iint_{\omega_2 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \varphi_2^2 \leq \varepsilon I_2(r, \varphi_2) + C_\varepsilon (1 + T^2) \iint_{\omega_0 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r+4} \varphi_1^2. \quad (3.43)$$

### Conclusion

En appliquant le Lemme 2.1 respectivement à la première et à la deuxième équation du système (3.29) pour  $\mathcal{B} := \omega_2$ , nous avons

$$I_1(r, \varphi_1) \leq C_0 \left( \iint_{\omega_2 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \varphi_1^2 + \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{r-3} \{\varphi_2^2 + |\nabla\varphi_2|^2\} \right) \quad (3.44)$$

et

$$I_1(r, \varphi_2) \leq C_0 \iint_{\omega_2 \times (0,T)} e^{-2s\alpha} (s\xi)^r \varphi_2^2. \quad (3.45)$$

Nous concluons en combinant (3.43)-(3.45) à l'aide de (3.33).  $\square$

*Remarque 3.1.* Le fait que la fonction  $q$  soit minorée sur  $\omega_0$  intervient dans l'inégalité (3.42). Si l'on veut utiliser les mêmes arguments lorsque  $q$  est un opérateur différentiel, il est nécessaire que cette inégalité soit satisfaite, ce qui peut constituer une première difficulté.

### Condition d'équivalence de norme

Étudions maintenant un des résultats établis par S. Guerrero dans [Gue07b], où l'auteur suppose que la norme induite par l'opérateur de couplage est équivalente à la norme  $H^1$ . Plus précisément, il suppose que les coefficients  $d_1, d_2, a_{11}, g_{11}, a_{22}, g_{22}$  sont constants en temps et en espace et que l'opérateur  $g_{21} \cdot \nabla + a_{21}$  peut s'écrire sous la forme

$$g_{21} \cdot \nabla + a_{21} := P_1 \circ \theta \text{ dans } Q_T, \quad (3.46)$$

où  $\theta \in C^2(\overline{\Omega})$  satisfait  $|\theta| > C$  dans un ouvert non vide  $\omega_0$  de  $\omega$  pour une constante positive  $C$  et  $P_1$  est donné par

$$P_1 := m_0 \cdot \nabla + m_1, \quad (3.47)$$

pour des constantes  $m_0, m_1 \in \mathbb{R}$ . De plus, il fait l'hypothèse que l'opérateur  $P_1$  vérifie l'inégalité

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|P_1^* u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (3.48)$$

**THÉORÈME 3.2** (Cf [Gue07b]). *Soit  $N = 1$ . Supposons que  $d_1, d_2, a_{11}, g_{11}, a_{22}, g_{22}$  soient constants en temps et en espace et que les conditions (3.46)-(3.48) soient satisfaites. Alors le système (3.25) est contrôlable à zéro en tout temps.*

Ce résultat est démontré dans [Gue07b] pour  $d_1 = d_2 = 1$ , mais la preuve est identique pour des coefficients de diffusion  $d_1$  et  $d_2$  différents.

De nouveau, les arguments principaux permettant d'aboutir au Théorème 3.2 se retrouvent tous dans le cadre simplifié suivant :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \Delta y_1 + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 = \Delta y_2 + P_1(\theta y_1) & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  et  $u \in L^2(Q_T)$ . Le système adjoint associé au système (3.49) est le suivant :

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi_1 = \Delta \varphi_1 + \theta P_1^*(\varphi_2) & \text{dans } Q_T, \\ -\partial_t \varphi_2 = \Delta \varphi_2 & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi(\cdot, T) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.50)$$

où  $\varphi^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ . Le résultat de contrôlabilité [Gue07b] est obtenu à l'aide d'inégalités de Carleman pour une équation de la chaleur avec des conditions de bords de Neumann non homogènes.

**Lemme 3.2** (Cf [FC+06]). *Soit  $m > 3, u^0 \in L^2(\Omega), f_1 \in L^2(Q_T), f_2 \in L^2(\Sigma_T)$  et  $\omega_2$  un ouvert non vide de  $\Omega$ . Alors il existe une constante  $C := C(\Omega, \omega_2) > 0$  telle que la solution du système*

$$\begin{cases} -\partial_t u - \Delta u = f_1 & \text{sur } Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f_2 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(T, \cdot) = u^0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

satisfasse

$$I_1(3, u) \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |u|^2 + \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} |f_1|^2 + s\lambda \iint_{\Sigma_T} e^{-2s\alpha^*} \xi^* |f_2|^2 \right),$$

pour tout  $\lambda \geq C$  et  $s \geq C(T^{2m} + T^{2m-1})$  où  $\alpha^*(t) := \max_{x \in \bar{\Omega}} \alpha(t, x)$  et  $\xi^*(t) := \min_{x \in \bar{\Omega}} \xi(t, x)$  pour tout  $t \in (0, T)$ .

La preuve du Lemme 3.2 peut être trouvée dans [FC+06], bien que dans cet article les poids soient un peu différents ( $t(T-t)$  au lieu de  $t^m(T-t)^m$ ) mais la preuve a seulement besoin d'être légèrement modifiée pour obtenir le lemme précédent.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant que l'on peut trouver dans le livre [LSU68] de O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov et N. N. Uralceva. (On peut également suivre la démonstration du Lemme 6 de [Gue07a])

**Lemme 3.3** (Cf [LSU68]). *Soit  $f \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ . La solution du système*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

*appartient à  $L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ . De plus, nous avons l'estimation*

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|f\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}).$$

De la même manière que dans les sections 2.1 et 3.2, la démonstration du Théorème 3.2 revient à démontrer des inégalités de Carleman appropriées.

**Lemme 3.4** (Cf [Gue07b]). *Il existe une constante  $C$  qui dépend de  $\Omega$  et de  $\omega_1$  telle que*

$$I_1(3, P_1^* \varphi_2) + \lambda I_2(6, \varphi_1) \leq C(1 + T^2) s^8 \lambda^9 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \xi^8 |\varphi_1|^2 \quad (3.51)$$

pour tout  $\lambda \geq C$  et  $s \geq C(T^m + T^{2m})$ .

*Preuve.* Considérons l'équation satisfaite par  $P_1^* \varphi_2$

$$-\partial_t(P_1^* \varphi_2) = \Delta(P_1^* \varphi_2) \text{ sur } Q_T. \quad (3.52)$$

Soit  $\omega_1$  un ouvert non vide strictement inclus dans  $\omega_0$ . En appliquant le Lemme 3.2 à (3.52), on obtient

$$I_1(3, P_1^* \varphi_2) \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \xi^3 |P_1^* \varphi_2|^2 + s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \left\| \frac{\partial(P_1^* \varphi_2)}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 dt \right). \quad (3.53)$$

La preuve est décomposée en deux parties:

- Dans une première étape, nous estimerons le terme de bord dans (3.53).
- Dans une seconde nous montrerons que le premier terme à droite de l'inégalité (3.53) est majoré par le terme de droite de (3.51).

### Étape 1:

Soit une fonction  $\theta_1 \in C^2(\bar{\Omega})$  vérifiant

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial n} = \theta_1 = 1 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Une intégration par parties sur le terme de bord donne

$$\begin{aligned} & s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \left\| \frac{\partial(P_1^* \varphi_2)}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 dt \\ &= s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial(P_1^* \varphi_2)}{\partial n} \right| |\nabla(P_1^* \varphi_2) \cdot \nabla \theta_1| d\sigma dt \\ &= s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \int_{\Omega} \Delta \varphi_2 \nabla(P_1^* \varphi_2) \cdot \nabla \theta_1 d\sigma dt \\ &\quad + s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \int_{\Omega} \nabla(\nabla \theta_1 \cdot \nabla(P_1^* \varphi_2)) \cdot \nabla(P_1^* \varphi_2) d\sigma dt \\ &\quad + \frac{s\lambda}{2} \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \int_{\Omega} \nabla |\nabla(P_1^* \varphi_2)|^2 \cdot \nabla \theta_1 d\sigma dt. \end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young, nous en déduisons

$$\begin{aligned} & s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \left\| \frac{\partial(P_1^* \varphi_2)}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 dt \\ &\leq C\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \|(s\xi^*)^{1+1/3m} P_1^* \varphi_2\|_{H^1(\Omega)} \|(s\xi^*)^{-1/3m} P_1^* \varphi_2\|_{H^2(\Omega)} dt \\ &\leq C\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{2+2/3m} \|P_1^* \varphi_2\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + C\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{-2/3m} \|P_1^* \varphi_2\|_{H^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Estimons un par un les deux termes de droite de l'inégalité ci-dessus. Premièrement, en utilisant l'inégalité d'interpolation (Cf [Bre83, p. 194]),

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^2(\Omega)}^{1/2} \text{ pour tout } u \in H^2(\Omega),$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{2+2/3m} \|P_1^* \varphi_2\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{2+4/3m} \|P_1^* \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{-2/3m} \|P_1^* \varphi_2\|_{H^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Deuxièmement, remarquons que

$$\int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{-2/3m} \|P_1^* \varphi_2\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{-2/3m} \|\varphi_2\|_{H^3(\Omega)}^2 dt. \tag{3.56}$$

Soit  $\hat{\psi} := \rho\varphi_2$  avec  $\rho := (s\xi^*)^{-1/3m}e^{-s\alpha^*}$ . Alors  $\hat{\psi}$  est solution du système

$$\begin{cases} -\partial_t \hat{\psi} = \Delta \hat{\psi} - \rho_t \varphi_2 & \text{dans } Q_T, \\ \hat{\psi} = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \hat{\psi}(\cdot, T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

D'après le Lemme 3.3,  $\hat{\psi}$  appartient à  $L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$  et

$$\|\hat{\psi}\|_{L^2(0, T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))} + \|\hat{\psi}\|_{H^1(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C(\|\rho\varphi_2\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|\rho_t\varphi_2\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}).$$

En utilisant les définitions de  $\xi^*$  et  $\alpha^*$  données dans le Lemme 3.2, nous avons

$$|\partial_t \rho| \leq CT(s\xi^*)^{1+2/3m}e^{-s\alpha^*}.$$

Ainsi, à l'aide de l'estimation de  $\hat{\psi}$  donnée ci-dessus et de (3.48),

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{-2/3m} \|\varphi_2\|_{H^3(\Omega)}^2 dt &\leq C(1+T) \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{2+4/3m} \|\varphi_2\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \\ &\leq C(1+T) \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{2+4/3m} \|P_1^* \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (3.57)$$

En combinant (3.54)-(3.57), nous obtenons

$$s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \left\| \frac{\partial(P_1^* \varphi_2)}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 dt \leq C(1+T)\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{2+4/3m} \|P_1^* \varphi_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \quad (3.58)$$

Comme  $m \geq 2$ , les estimations (3.53) et (3.58) donnent donc

$$I_1(3, P_1^* \varphi_2) \leq C(1+T)s^3 \lambda^4 \iint_{(0, T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \xi^3 |P_1^* \varphi_2|^2. \quad (3.59)$$

### Étape 2:

En appliquant le Lemme 2.1 à la première équation du système (3.50), on a

$$\lambda I_2(6, \varphi_1) \leq C \left( s^6 \lambda^8 \iint_{(0, T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \xi^6 |\varphi_1|^2 + s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^3 |P_1^* \varphi_2|^2 \right), \quad (3.60)$$

pour tout  $\lambda \geq C$  et tout  $s \geq C(T^{2m} + T^{2m-1})$ . On déduit de (3.59) et (3.60)

$$\begin{aligned} &I_1(3, P_1^* \varphi_2) + \lambda I_2(6, \varphi_1) \\ &\leq C \left( s^6 \lambda^8 \iint_{(0, T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \xi^6 |\varphi_1|^2 + s^3 \lambda^4 \iint_{(0, T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \xi^3 |P_1^* \varphi_2|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Soit  $\theta_2 \in C^\infty(\Omega)$  une fonction de troncature qui vaut 1 sur  $\omega_1$ , à support sur  $\omega_0$ , à valeurs dans  $(0, 1)$  et vérifiant

$$\frac{\nabla \theta_2}{\theta_2^{1/2}} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

En multipliant la première équation du système (3.50) par  $s^3 \lambda^4 \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^3 P_1^* \varphi_2$  et en intégrant sur  $Q_T$ , on a

$$s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^3 |P_1^* \varphi_2|^2 = K_1 + K_2. \quad (3.62)$$

où

$$K_1 := -s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^3 \partial_t \varphi_1 P_1^* \varphi_2 \quad \text{et} \quad K_2 := -s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^3 \Delta \varphi_1 P_1^* \varphi_2.$$

Après une intégration par parties en temps et en utilisant l'équation vérifiée par  $\varphi_2$ , on a

$$K_1 = s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \theta_2 \partial_t (e^{-2s\alpha} \xi^3) \varphi_1 P_1^* \varphi_2 - s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^3 \varphi_1 P_1^* \Delta \varphi_2.$$

Ce qui donne, en intégrant par parties en espace, pour  $\varepsilon > 0$

$$|K_1| \leq \varepsilon I_1(3, P_1^* \varphi_2) + \frac{C(1+T^2)}{\varepsilon} s^7 \lambda^8 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^7 |\varphi_1|^2 + \frac{C}{\varepsilon} s^5 \lambda^6 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^5 |\nabla \varphi_1|^2. \quad (3.63)$$

De la même manière, on obtient

$$|K_2| \leq \varepsilon I_1(3, P_1^* \varphi_2) + \frac{C}{\varepsilon} s^5 \lambda^6 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^5 |\nabla \varphi_1|^2 \quad (3.64)$$

et

$$s^5 \lambda^6 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^5 |\nabla \varphi_1|^2 \leq \varepsilon^2 I_2(6, \varphi_1) + \frac{C}{\varepsilon^2} s^8 \lambda^9 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^8 |\varphi_1|^2. \quad (3.65)$$

En combinant (3.62)-(3.65), on en déduit que

$$s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^3 |P_1^* \varphi_2|^2 \leq \varepsilon I_2(6, \varphi_1) + \varepsilon I_1(3, P_1^* \varphi_2) + \frac{C(1+T^2)}{\varepsilon^2} s^8 \lambda^9 \iint_{Q_T} \theta_2 e^{-2s\alpha} \xi^8 |\varphi_1|^2. \quad (3.66)$$

On conclut à l'aide de (3.61) et (3.66).  $\square$

*Remarque 3.2.* Il peut paraître, à la lecture de cette démonstration, que l'hypothèse  $N = 1$  n'a pas été utilisée. En fait, l'inégalité (3.48) ne peut être vérifiée pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$  qu'en dimension un. En effet, soit  $N \geq 2$ . L'opérateur  $P_1^*$  s'écrit sous la forme  $P_1^* u = \tilde{m}_0 \cdot \nabla u + \tilde{m}_1 u$  pour  $\tilde{m}_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $\tilde{m}_1 \in \mathbb{R}$  et tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Quitte à effectuer un changement de bases de  $\mathbb{R}^N$ , nous pouvons supposer que  $\tilde{m}_0 = \lambda e_1$  ( $e_1$  étant le premier élément de la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ ) pour une constante  $\lambda > 0$ . Puis, nous ferons l'hypothèse que  $\Omega$  contient l'ensemble  $(0, \pi)^N$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , considérons la fonction  $u_k$  de  $H_0^1(\Omega)$  définie par

$$u_k(x) := \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{N/2} \sin(x_1) \sin(kx_2) \prod_{i=3}^N \sin(x_i) & \text{si } x \in (0, \pi)^N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Après calcul, nous obtenons

$$\|\tilde{m}_0 \cdot \nabla u_k + \tilde{m}_1 u_k\|_{L^2(\Omega)} = \|\lambda \partial_{x_1} u_k + \tilde{m}_1 u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda + \tilde{m}_1$$

et

$$\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \geq \|\partial_{x_2} u_k\|_{L^2(\Omega)} = k.$$

Ainsi, si  $N \geq 2$ ,  $k$  et  $\lambda$  étant arbitraires, l'inégalité (3.48) ne peut être vraie pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

*Remarque 3.3.* On peut remarquer que  $P_1^* \varphi_2$  satisfait le système (3.52), car les opérateurs  $P_1^*$  et  $\partial_t + \Delta$  commutent. Ceci est possible seulement lorsque les coefficients du système (3.49), à l'exception de  $\theta$ , sont constants. Lorsque les coefficients dépendent du temps et de l'espace, il ne sera plus possible d'appliquer cette technique directement.

### Condition de bord

Contrairement aux deux autres résultats des sections précédentes, celui que nous détaillons ici, i.e. celui de A. Benabdallah, M. Cristofol, P. Gaitan et L. De Teresa [Ben+14], a besoin que  $\partial\omega \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ . Plus précisément,  $g_{21}$  et  $\omega$  doivent vérifier la propriété suivante :

**DÉFINITION 3.1.** Soit  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$  et  $g_{21} \in C^3(\overline{Q_T})^N$ . Le couple  $(\omega, g_{21})$  satisfait la propriété  $\mathcal{G}$  si :

- $\omega$  est de classe  $C^1$  et  $\partial\omega \cap \partial\Omega$  contient un ouvert  $\gamma \neq \emptyset$ ,
- il existe  $x_0 \in \gamma$  tel que  $g_{21}(x_0, t) \cdot \nu(x_0) \neq 0$ , pour tout  $t \in [0, T]$ ,

où  $\nu$  représente la normale extérieure unitaire au bord  $\partial\Omega$ .

Sous cette condition, les auteurs obtiennent le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.3** ([Ben+14], Theorem 2.1). *Supposons que  $a_{ij} \in C^4(\overline{Q_T})$ ,  $g_{ij} \in C^3(\overline{Q_T})^N$  pour tout  $i, j \in \{1, 2\}$  et que  $(\omega, g_{21})$  satisfasse la propriété  $\mathcal{G}$  donnée dans la Définition 3.1. Alors le système (3.25) est contrôlable à zéro en tout temps.*

Le système adjoint associé à (3.25) est le suivant :

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi_1 = \operatorname{div}(d_1 \nabla \varphi_1) + \bar{g}_{11} \cdot \nabla \varphi_1 + \bar{g}_{21} \cdot \nabla \varphi_2 + \bar{a}_{11} \varphi_1 + \bar{a}_{21} \varphi_2 & \text{dans } Q_T, \\ -\partial_t \varphi_2 = \operatorname{div}(d_2 \nabla \varphi_2) + \bar{g}_{12} \cdot \nabla \varphi_1 + \bar{g}_{22} \cdot \nabla \varphi_2 + \bar{a}_{12} \varphi_1 + \bar{a}_{22} \varphi_2 & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi(\cdot, T) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.67)$$

où  $\bar{g}_{ij} := -g_{ij}$  et  $\bar{a}_{ij} := a_{ij} - \operatorname{div}(g_{ij})$  pour tout  $i, j \in \{1, 2\}$ . La première équation du système peut s'écrire

$$L\varphi_2 = -\partial_t \varphi_1 - \operatorname{div}(d_1 \nabla \varphi_1) - \bar{g}_{11} \cdot \nabla \varphi_1 - \bar{g}_{21} \cdot \nabla \varphi_2 - \bar{a}_{11} \varphi_1 - \bar{a}_{21} \varphi_2, \quad (3.68)$$

où l'opérateur  $L$  est défini par

$$L\varphi_2 := \bar{g}_{21} \cdot \nabla \varphi_2 + \bar{a}_{21} \varphi_2.$$

A l'aide d'un  $C^3$ -difféomorphisme sur  $\Omega$ , les auteurs se ramènent au cas

$$\bar{g}_{21}(x, t) = e_1,$$

où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ .

Nous adopterons la notation suivante : pour tout ouvert  $\mathcal{O}$ , on notera  $\mathcal{O}_T := \mathcal{O} \times (0, T)$ .

**Lemme 3.5** ([Ben+14], Lemma 2.6). *Pour un couple  $(\omega, \bar{g}_{21})$  satisfaisant la propriété  $\mathcal{G}$ , il existe un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $\Lambda$  un  $C^3$ -difféomorphisme défini sur  $(0, \varepsilon) \times U_T$  à valeurs dans  $q_T$  avec  $\Lambda(\{0\} \times U_T) \subset \gamma \times (0, T)$  et qui est invariant en temps.*

*De plus, si nous notons  $\tilde{\varphi}_1 := \varphi_1 \circ \Lambda$ ,  $\tilde{\varphi}_2 := \varphi_2 \circ \Lambda$ ,  $\tilde{a}_{21} := \bar{a}_{21} \circ \Lambda$ , alors il existe une matrice  $H := (h_{ij}) \in C^2((0, \varepsilon) \times U_T)^{N^2}$ , un vecteur  $E := (E_i) \in C^2((0, \varepsilon) \times U_T)^N$  et un scalaire  $e \in C^3((0, \varepsilon) \times U_T)$  tels que (3.68) est localement transformée en*

$$\tilde{L}\tilde{\varphi}_1 := -\partial_t \tilde{\varphi}_1 - \operatorname{div}(H\nabla \tilde{\varphi}_1) - E \cdot \nabla \tilde{\varphi}_1 - e\tilde{\varphi}_1 \text{ dans } (0, \varepsilon) \times U_T, \quad \tilde{\varphi}_1 \in D(\tilde{L}), \quad (3.69)$$

avec

$$\tilde{L}\tilde{\varphi}_2 := \partial_s \tilde{\varphi}_2 + \tilde{a}_{21}\tilde{\varphi}_2, \quad D(\tilde{L}) = \{\tilde{\varphi}_2 \in H^1((0, \varepsilon) \times U_T); \tilde{\varphi}_2(0, y) = 0, y \in U_T\} \quad (3.70)$$

et  $\tilde{\varphi}_1(0, y) = 0$  pour tout  $y \in U_T$ .

*Remarque 3.4.* Il est possible d'effectuer ce changement de variable sans la condition de bord donnée par la propriété  $\mathcal{G}$ . En effet, s'il existe  $i \in \{1, \dots, N\}$  tel que  $|g_{21}^i| \neq 0$  dans un ouvert non vide  $\omega_0$  de  $\omega$ , il suffit de considérer une frontière artificielle  $\gamma$  à l'intérieur de  $\omega_0$  vérifiant la propriété  $\mathcal{G}$  et d'appliquer le même raisonnement.

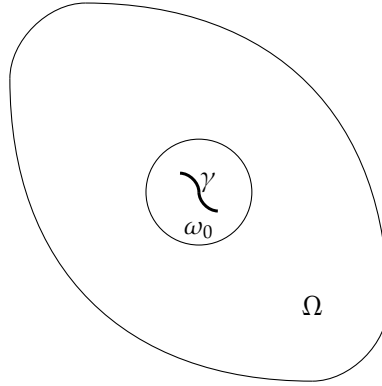


FIGURE I.3: Frontière artificielle

Grâce au changement de variable du Lemme 3.5, l'opérateur de couplage  $L$  devient  $\tilde{L}$  donné dans (3.70). Ainsi, à l'aide de cette forme particulière et de la condition de bord, il devient possible d'inverser  $\tilde{L}$ .

**Lemme 3.6** (Cf [Ben+14], Lemme 2.7). *L'opérateur  $(\tilde{L}, D(\tilde{L}))$  défini en (3.70) est inversible sur  $L^2((0, \varepsilon) \times U_T)$ . Son inverse est l'opérateur borné donné par*

$$\tilde{L}^{-1}(w)(x, t) = e^{-\int_0^{x_1} \tilde{g}_{21}(y_1, x', t) dy_1} \int_0^{x_1} e^{\int_0^{y_1} \tilde{g}_{21}(x_1, x', t) dx_1} w(y_1, x', t) dy_1.$$



Pour tout  $p, q \in L^\infty(q_T)$ , définissons

$$K(p, q)w(x, t) = p(x, t) \int_0^{x_1} q(y_1, x', t)w(y_1, x', t)dy_1.$$

En appliquant  $\tilde{L}^{-1}$  à l'équation (3.69) il existe des coefficients

$$\begin{cases} (p_{ij}, q_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in L^\infty((0, \varepsilon) \times U_T; \mathbb{R}^{2(N-1)^2}), \\ (p_i, q_i)_{1 \leq i \leq N} \in L^\infty((0, \varepsilon) \times U_T; \mathbb{R}^{2N}), \\ k \in L^\infty((0, \varepsilon) \times U_T), \\ (E_i)_{1 \leq i, j \leq N} \in L^\infty((0, \varepsilon) \times U_T; \mathbb{R}^N) \end{cases}$$

tels que  $\tilde{\varphi}_2$  s'écrive

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_2(x, t) &= -\partial_t(K(p_1, q_1)\tilde{\varphi}_1)(x, t) + \sum_{i,j=2}^N \partial_{i,j}^2(K(p_{ij}, q_{ij})\tilde{\varphi}_1)(x, t) + \sum_{i=2}^N \partial_i(K(p_i, q_i)\tilde{\varphi}_1)(x, t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \partial_i(E_i\tilde{\varphi}_1)(x, t) + K(p, eq)\tilde{\varphi}_1(x, t) + k(x, t)\tilde{\varphi}_1(x, t) \\ &\quad - p(x, t)q(0, x', t)h_{11}^1(0, x', t)\partial_1\tilde{\varphi}_1(0, x', t) \end{aligned} \tag{3.71}$$

pour tout  $(x, t) \in q_T$ .

Une fois cette expression de  $\tilde{\varphi}_2$  établie, il va être possible d'obtenir l'inégalité d'observabilité désirée en estimant chacun des termes de (3.71).

## 4 Description des principaux résultats du manuscrit

### 4.1 Chapitre I : Contrôlabilité indirecte de quelques systèmes paraboliques avec un terme de couplage d'ordre un

Soit  $T > 0$ ,  $\Omega$  un domaine non vide borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) de bords  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$  et  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$ . Nous noterons  $Q_T := \Omega \times (0, T)$ ,  $q_T := \omega \times (0, T)$  et  $\Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T)$ . Considérons le système de deux équations paraboliques contrôlées par un contrôle localisé en espace et couplé par un opérateur d'ordre un, ce qui correspond au cadre des chapitres I et II,

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \operatorname{div}(d_1 \nabla y_1) + g_{11} \cdot \nabla y_1 + g_{12} \cdot \nabla y_2 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \mathbf{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 = \operatorname{div}(d_2 \nabla y_2) + g_{21} \cdot \nabla y_1 + g_{22} \cdot \nabla y_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ ,  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $g_{ij} \in L^\infty(Q_T; \mathbb{R}^N)$ ,  $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$  pour tout  $i, j \in \{1, 2\}$  et pour  $l \in \{1, 2\}$ , l'opérateur elliptique du second ordre auto-adjoint  $\operatorname{div}(d_l \nabla)$  est donné par (3.8).

Afin de compléter les études qui ont été faites dans [GBT10 ; Gue07b ; Ben+14], que nous avons détaillées dans la section précédente, nous donnons une condition nécessaire et suffisante dans le cas de coefficients constants en temps et en espace.

**THÉORÈME 4.1.** *Supposons que les coefficients  $d_i, g_{ij}$  et  $a_{ij}$  soient constants en temps et en espace pour tout  $i, j \in \{1, 2\}$ . Alors le système (4.1) est contrôlable à zéro (resp. approximativement contrôlable) au temps  $T$  si, et seulement si,*

$$g_{21} \neq 0 \text{ ou } a_{21} \neq 0.$$

Ce théorème est obtenu à l'aide des techniques décrites dans les sections 2.4 et 2.5, c'est-à-dire la construction de contrôles réguliers, la méthode par contrôle fictif et l'inversion locale d'opérateurs différentiels par combinaisons algébriques.

*Remarque 4.1.* D'une part, nous nous plaçons en dimension quelconque, alors que le résultat donné par S. Guerrero dans [Gue07b] n'est valable qu'en dimension un (Cf Remarque 3.2). De plus, nous n'avons aucune condition de bord telle que celle donnée en (3.11).

Dans le chapitre I, nous démontrons également le théorème suivant :

**THÉORÈME 4.2.** *Supposons que  $N = 1$  et  $\Omega := (0, L)$  avec  $L > 0$ . Alors le système (3.7) est contrôlable à zéro au temps  $T$  s'il existe un ouvert non vide  $(a, b) \times \mathcal{O}$  de  $q_T$  (inclusion stricte) tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

(i) *Les coefficients du système (3.7) satisfont  $d_i, g_{ij}, a_{ij} \in C^1((a, b), C^2(\mathcal{O}))$  pour  $i, j = 1, 2$  et*

$$\begin{cases} g_{21} = 0 \text{ et } a_{21} \neq 0 & \text{dans } (a, b) \times \mathcal{O}, \\ 1/a_{21} \in L^\infty(\mathcal{O}) & \text{dans } (a, b). \end{cases} \quad (4.2)$$

(ii) *Les coefficients du système (3.7) satisfont  $d_i, g_{ij}, a_{ij} \in C^3((a, b), C^7(\mathcal{O}))$  pour  $i = 1, 2$  et*

$$|\det(H(t, x))| > C \text{ pour tout } (t, x) \in (a, b) \times \mathcal{O}, \quad (4.3)$$

où

$$H := \begin{pmatrix} -a_{21} + \partial_x g_{21} & g_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_x a_{21} + \partial_{xx} g_{21} & -a_{21} + 2\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 & 0 \\ -\partial_t a_{21} + \partial_{tx} g_{21} & \partial_t g_{21} & -a_{21} + \partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 \\ -\partial_{xx} a_{21} + \partial_{xxx} g_{21} & -2\partial_x a_{21} + 3\partial_{xx} g_{21} & 0 & -a_{21} + 3\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} \\ -a_{22} + \partial_x g_{22} & g_{22} - \partial_x d_2 & -1 & -d_2 & 0 & 0 \\ -\partial_x a_{22} + \partial_{xx} g_{22} & -a_{22} + 2\partial_x g_{22} - \partial_{xx} d_2 & 0 & g_{22} - 2\partial_x d_2 & -1 & -d_2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Ce théorème est également obtenu grâce aux techniques décrites dans les sections 2.4 et 2.5.

*Remarque 4.2.* (a) Nous remarquons que la condition (4.3) implique en particulier que

$$g_{21} \neq 0 \text{ dans } (a, b) \times \mathcal{O}. \quad (4.5)$$

Lorsque les domaines de couplage et de contrôle s'intersectent, nous pouvons donc émettre la conjecture suivante : si la première ligne de (4.2) ou (4.5) est vérifiée alors le système (4.1) est contrôlable à zéro au temps  $T$ .

(b) La condition (4.3) peut être simplifiée bien qu'elle semble compliquée. Par exemple, le système (3.7) est contrôlable à zéro au temps  $T$  s'il existe un ouvert  $(a, b) \times \mathcal{O} \subseteq q_T$  tel que

$$\begin{cases} g_{21} \equiv \kappa \in \mathbb{R}^* & \text{dans } (a, b) \times \mathcal{O}, \\ a_{21} \equiv 0 & \text{dans } (a, b) \times \mathcal{O}, \\ \partial_x a_{22} \neq \partial_{xx} g_{22} & \text{dans } (a, b) \times \mathcal{O}. \end{cases}$$

Nous pouvons aussi nous restreindre au cas de coefficients indépendants de l'espace. Dans cette situation, la condition (4.3) revient à vérifier qu'il existe un intervalle ouvert  $(a, b)$  de  $(0, T)$  tel que

$$g_{21}(t)\partial_t a_{21}(t) \neq a_{21}(t)\partial_t g_{21}(t) \quad \text{pour tout } t \in (a, b).$$

- (c) Dans le second item du Théorème 4.2, nous nous plaçons en dimension un, mais la technique utilisée permet également de travailler en dimension supérieure. Par contre, les conditions de couplage que nous obtenons sont plus compliquées.

## 4.2 Chapitre II : Contrôlabilité d'un système parabolique $2 \times 2$ par une force avec un terme de couplage dépendant de l'espace et d'ordre un

Dans le chapitre II, nous étudions, en dimension un, une variante particulière du système (4.1) :

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \partial_{xx} y_1 + \mathbf{1}_\omega u & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ \partial_t y_2 = \partial_{xx} y_2 + p(x)\partial_x y_1 + q(x)y_1 & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ y(0, \cdot) = y(\pi, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } (0, \pi), \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $y^0 \in L^2((0, \pi); \mathbb{R}^2)$ ,  $u \in L^2((0, \pi) \times (0, T))$ ,  $p \in W_\infty^1(0, \pi)$ ,  $q \in L^\infty(0, \pi)$  et  $\omega := (a, b) \subset (0, \pi)$ . Nous obtenons le résultat suivant :

**THÉORÈME 4.3.** *Supposons que  $p \in W_\infty^1(0, \pi) \cap W_\infty^2(\omega)$ ,  $q \in L^\infty(0, \pi) \cap W_\infty^1(\omega)$  et*

$$(\text{Supp}(p) \cup \text{Supp}(q)) \cap \omega \neq \emptyset.$$

*Alors le système (4.6) est contrôlable à zéro au temps  $T$ .*

La démonstration de ce théorème utilise la méthode des moments présentée dans la section 2.2.

*Remarque 4.3.* Nous pouvons remarquer que dans le cadre du système (4.6), nous obtenons la contrôlabilité à zéro lorsque les supports des domaines de contrôle et de couplage s'intersectent mais sans condition de bord du type (3.11) et sans la condition d'annulation du terme de couplage d'ordre un (3.9). De plus, bien que le système (4.6) ait une structure simplifiée, l'opérateur de couplage n'a besoin ni d'être de la forme (3.10), ni d'être à coefficients constants.

Dans le cas où les domaines de contrôle et de couplage ne s'intersectent pas, peu de résultats sont connus et sont en général valables sous des restrictions géométriques (Cf [AB13 ; ABL13b ; RT11a] pour plus de détails). Lorsque les supports de contrôle et de couplage du système (4.6) sont disjoints, nous montrons à l'aide du *test de Hautus* (Cf [Fat66, Cor. 3.3]) la caractérisation suivante de la contrôlabilité approchée du système (4.6) :

**THÉORÈME 4.4.** *Supposons que  $p \in W_\infty^1(0, \pi) \cap W_\infty^2(\omega)$  et  $q \in L^\infty(0, \pi) \cap W_\infty^1(\omega)$ . Le système (4.6) est approximativement contrôlable au temps  $T$  si, et seulement si,*

$$(\text{Supp}(p) \cup \text{Supp}(q)) \cap \omega \neq \emptyset$$

ou

$$|I_k(p, q)| + |I_{a,k}(p, q)| \neq 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad (4.7)$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  les quantités  $I_k(p, q)$  et  $I_{a,k}(p, q)$  sont données par

$$\begin{cases} I_{a,k}(p, q) := \int_0^a (q - \frac{1}{2}\partial_x p) \varphi_k^2, \\ I_k(p, q) := \int_0^\pi (q - \frac{1}{2}\partial_x p) \varphi_k^2, \end{cases} \quad (4.8)$$

avec  $\varphi_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ .

Ce dernier résultat recouvre le cas  $p \equiv 0$  dans  $(0, \pi)$  étudié dans F. Boyer et G. Olive [BO14] lorsque  $\text{Supp}(q) \cap \omega = \emptyset$ . Lorsque les domaines de contrôle et de couplage ne s'intersectent pas, nous obtenons également un temps minimal de contrôlabilité à zéro.

**THÉORÈME 4.5.** Soit  $p \in W_\infty^1(0, \pi)$  et  $q \in L^\infty(0, \pi)$ . Supposons que la condition (4.7) soit satisfaite et

$$(\text{Supp}(p) \cup \text{Supp}(q)) \cap \omega = \emptyset. \quad (4.9)$$

Soit  $T_0(p, q)$  donné par

$$T_0(p, q) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\min(-\log |I_k(p, q)|, -\log |I_{a,k}(p, q)|)}{k^2}. \quad (4.10)$$

Alors :

1. Si  $T > T_0(p, q)$ , le système (4.6) est contrôlable à zéro au temps  $T$ .
2. Si  $T < T_0(p, q)$ , le système (4.6) n'est pas contrôlable à zéro au temps  $T$ .

Ce résultat est une généralisation de [AK+15] où les auteurs étudient la contrôlabilité à zéro du système (4.6) dans le cas  $p = 0$  sur  $(0, \pi)$ . Dans le même article, les auteurs donnent pour tout  $\tau_0 > 0$  un couplage  $q$  tel que le temps minimal de contrôlabilité à zéro du système soit égal à  $T_0 = \tau_0$ . Nous utilisons comme eux la méthode des moments décrite dans la section 2.2.

Par ailleurs, nous obtenons un temps minimal de contrôlabilité à zéro du système

$$\begin{cases} \partial_t z_1 = \partial_{xx} z_1 & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ \partial_t z_2 = \partial_{xx} z_2 + p(x)\partial_x z_1 + q(x)z_1 & \text{dans } (0, \pi) \times (0, T), \\ z(0, \cdot) = v, z(\pi, \cdot) = 0 & \text{sur } (0, T), \\ z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } (0, \pi), \end{cases} \quad (4.11)$$

**THÉORÈME 4.6.** Soit  $p \in W_\infty^1(0, \pi)$ ,  $q \in L^\infty(0, \pi)$  et supposons que la condition (3.18) soit satisfaite. Définissons

$$T_1(p, q) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{-\log |I_k|}{k^2}. \quad (4.12)$$

Alors

1. Si  $T > T_1(p, q)$ , le système (4.11) est contrôlable à zéro au temps  $T$ .

2. Si  $T < T_1(p, q)$ , le système (4.11) n'est pas contrôlable à zéro au temps  $T$ .

*Remarque 4.4.* Nous remarquons premièrement que les suites  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $(I_{a,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  sont convergentes. En effet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (q - \frac{1}{2} \partial_x p) \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} I_{a,k}(p, q) = \frac{1}{\pi} \int_0^a (q - \frac{1}{2} \partial_x p).$$

Ainsi  $T_0(p, q) = T_1(p, q) = 0$  dès lors que

$$q > \partial_x p \text{ dans } (0, \pi) \text{ ou } q < \partial_x p \text{ dans } (0, \pi).$$

Deuxièmement, sous la condition

$$\int_0^\pi q \neq \int_0^\pi \partial_x p,$$

le système (4.6) (resp. (4.11)) est contrôlable à zéro au temps  $T$  si, et seulement si, il est approximativement contrôlable au temps  $T$ .

En dimension supérieure, même pour ce type de systèmes simplifiés, la contrôlabilité interne ou par le bord restent des problèmes ouverts. Le cas  $T = T_0$  du Théorème 4.5 et  $T = T_1$  du Théorème 4.6 sont également ouverts.

### 4.3 Chapitre III : Contrôlabilité partielle des systèmes paraboliques

Considérons maintenant le système de  $n$  équations paraboliques linéaires contrôlées par  $m$  forces

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B \mathbf{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,  $A \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ ,  $B \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$  et  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ .

Soit  $p \in \{1, \dots, n\}$  et  $\Pi_p$  la matrice de projection définie par  $\Pi_p := (I_p O_{p, n-p})$ , i.e.

$$\begin{aligned} \Pi_p : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} &\rightarrow \mathbb{R}^p, \\ (y_1, y_2) &\mapsto y_1 \end{aligned}$$

Nous montrons le résultat suivant (Cf [AKCD15]) :

**THÉORÈME 4.7.** Soit  $A \in C^{n-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  et  $B \in C^n([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$ . Le système (4.13) est  $\Pi_p$ -contrôlable à zéro (resp.  $\Pi_p$ -approximativement contrôlable) au temps  $T$  si

$$\text{Rang}(\Pi_p[A|B](T)) = p. \quad (4.14)$$

Dans le cas de matrices  $A$  et  $B$  constantes, nous prouvons de la même manière que la condition (4.14) est nécessaire et suffisante pour la  $\Pi_p$ -contrôlabilité à zéro du système (4.13)

:

**THÉORÈME 4.8.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ . Le système (4.13) est  $\Pi_p$ -contrôlable à zéro (resp.  $\Pi_p$ -approximativement contrôlable) au temps  $T$  si, et seulement si,

$$\text{rang}(\Pi_p[A|B]) = p. \quad (4.15)$$

Les résultats des Théorèmes 4.7 et 4.8 restent vrais si l'on remplace  $-\Delta$  par un opérateur du second ordre elliptique et dépendant du temps  $L(t)$  de la forme (3.5). D'autre part, le Théorème 4.8 est une généralisation à un système d'équations aux dérivées partielles des résultats de contrôlabilité partielle de systèmes différentiels linéaires (Cf section 1.4 de ce manuscrit).

*Remarque 4.5.* 1. Lorsque les coefficients des matrices  $A$  et  $B$  sont analytiques en temps, la condition (3.23) est nécessaire pour la contrôlabilité à zéro du système (3.19) (Cf Th. 1.3, [AK+09a]). Sous la même hypothèse, la preuve de ce résultat peut être adaptée pour montrer que la condition

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } t_0 \in [0, T] \text{ tel que :} \\ \text{rang } \Pi_p[A|B](t_0) = p, \end{array} \right.$$

est nécessaire pour la  $\Pi_p$ -contrôlabilité à zéro du système (4.13).

2. Comme dit précédemment, sous la condition (3.23), le système (3.19) est contrôlable à zéro. Mais contrairement au cas où toutes les composantes sont contrôlées, la  $\Pi_p$ -contrôlabilité à zéro au temps  $t_0$  plus petit que  $T$  n'implique pas cette propriété au temps  $T$  tout entier. Ceci explique la condition (4.14). De plus, cette condition ne peut pas être nécessaire sous les conditions du Théorème 4.7 (pour un contre-exemple, nous renvoyons le lecteur à [AK+09a]).

Concernant la  $\Pi_p$ -contrôlabilité à zéro des systèmes paraboliques avec un couplage dépendant de l'espace, nous étudions également la  $\Pi_1$ -contrôlabilité du système de deux équations paraboliques

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t y = \Delta y + \alpha z + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t z = \Delta z & \text{dans } Q_T, \\ y = z = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0, z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (4.16)$$

pour des données initiales  $y^0, z^0 \in L^2(\Omega)$ , un contrôle  $u \in L^2(Q_T)$  et où le coefficient  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ . On notera  $(\varphi_k)_{k \geq 1}$  les valeurs propres  $L^2$ -normalisées de  $-\Delta$  dans  $\Omega$  avec conditions homogènes de Dirichlet aux bord et pour tout  $k, l \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha_{kl} := \int_{\Omega} \alpha(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx.$$

Nous obtenons les résultats suivants :

**THÉORÈME 4.9.** 1. Supposons que  $\alpha \in C^1([0, T])$ . Alors le système (4.16) est  $\Pi_1$ -contrôlable à zéro pour tout ensemble ouvert non vide  $\omega$  de  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), c'est-à-dire que pour toute donnée initiale  $y^0, z^0 \in L^2(\Omega)$ , il existe un contrôle  $u \in L^2(Q_T)$  tel que la solution  $(y, z)$  du système (4.16) satisfasse  $y(T) \equiv 0$  dans  $\Omega$ .

2. Supposons que  $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) et que  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  satisfasse pour deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > b - a$

$$|\alpha_{kl}| \leq C_1 e^{-C_2|k-l|} \text{ pour tout } k, l \in \mathbb{N}^*. \quad (4.17)$$

Alors le système (4.16) est  $\Pi_1$ -contrôlable à zéro pour tout ouvert non vide  $\omega$  de  $\Omega$ .

3. Supposons que  $\Omega := (0, 2\pi)$  et  $\omega \subset (\pi, 2\pi)$ . Considérons  $\alpha \in L^\infty(0, 2\pi)$  définie par

$$\alpha(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos(15jx) \text{ pour tout } x \in (0, 2\pi).$$

Alors le système (4.16) n'est pas  $\Pi_1$ -contrôlable à zéro au temps  $T$ . Plus précisément, il existe  $k_1 \in \{1, \dots, 7\}$  tel que pour la donnée initiale  $(y_0, z_0) = (0, \sin(k_1x))$  et tout contrôle  $u \in L^2(Q_T)$  la solution  $y$  du système (4.16) ne soit pas identiquement nulle au temps  $T$ .

Quelques commentaires :

- Le premier item est une simple conséquence du Théorème 4.7.
- Concernant le second item, la condition (4.17) peut être formulée de la façon équivalente suivante : soit  $\Omega := (0, \pi)$  et considérons  $\alpha \in L^\infty(0, \pi)$  et la suite réelle  $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $x \in (0, \pi)$

$$\alpha(x) := \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \cos(px).$$

La condition (4.17) revient à trouver deux constantes  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > \pi$  telles que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$|\alpha_p| \leq C_1 e^{-C_2 p}.$$

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il est possible d'adapter la preuve du troisième item du Théorème 4.9 afin de montrer la non  $\Pi_1$ -contrôlabilité à zéro du système (4.16) pour la fonction de couplage  $\alpha \in H^k(0, 2\pi)$  donnée par

$$\alpha(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{k+1}} \cos((2k+13)jx) \text{ pour tout } x \in (0, 2\pi). \quad (4.18)$$

Ces fonctions  $\alpha$  appartiennent à  $H^k(0, \pi)$  mais pas à  $D((-\Delta)^{k/2})$  pour des raisons qui semblent techniques.

- Les résultats du Théorème 4.9 ont des conséquences quant à la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur avec terme source. En effet, considérons l'équation de la chaleur avec terme source contrôlée par un contrôle interne

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + f + \mathbf{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.19)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega)$  est la donnée initiale et  $f, u \in L^2(Q_T)$  sont respectivement le terme source et le contrôle. Comme nous l'avons vu dans la section 2.1 lors de la démonstration du Corollaire 2.1, en utilisant les inégalités de Carleman, il est possible de montrer la contrôlabilité du système (4.19) pour tout terme source  $f$  vérifiant

$$e^{\frac{C}{T-t}} f \in L^2(Q_T), \quad (4.20)$$

pour une constante  $C > 0$ . Pour des seconds membres plus généraux, la question reste ouverte. Nous remarquons que les deuxième et troisième item du Théorème

4.9 donnent des résultats positifs et négatifs de contrôlabilité à zéro pour le système (4.19) avec des termes source  $f$  qui ne satisfont pas la condition (4.20). Nous donnons d'ailleurs d'autres résultats similaires dans les sections 2.2 et 2.3.

- La moyenne du couplage  $\alpha$  n'influe pas sur la  $\Pi_1$ -contrôlabilité à zéro du système (4.16). En effet, pour un couplage donné, en y ajoutant une constante, nous ne changeons pas la  $\Pi_1$ -contrôlabilité à zéro du système, puisque celui-ci est linéaire et qu'il est  $\Pi_1$ -contrôlable à zéro dès que  $\alpha$  est indépendant de l'espace. Il existe des systèmes paraboliques couplés pour lesquels l'annulation ou non de la moyenne du terme de couplage joue un rôle dans l'étude la contrôlabilité. Par exemple, nous avons vu dans la section précédente que le système (4.6) avec  $p = 0$  sur  $\Omega$  et  $q$  de moyenne non-nulle est contrôlable à zéro au temps  $T$  si, et seulement si, il est approximativement contrôlable au temps  $T$ . Par contre, si le système est approximativement contrôlable et si la moyenne de  $q$  est nulle, alors il peut exister un temps minimal de contrôlabilité à zéro.
- Il est intéressant de remarquer que si  $\alpha$  dépend de l'espace, les notions de  $\Pi_1$ -contrôlabilité à zéro et approchée du système (4.16) ne sont pas équivalentes. Plus précisément, dans le Théorème 4.9, nous avons des exemples de couplage  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  pour lesquels le système (4.16) est  $\Pi_1$ -contrôlable à zéro ou non, alors que la  $\Pi_1$ -contrôlabilité approchée du système (4.16) a lieu quel que soit  $\alpha \in L^\infty(Q_T)$  :

**THÉORÈME 4.10.** *Soit  $\alpha \in L^\infty(Q_T)$ . Alors le système (4.16) est  $\Pi_1$ -approximativement contrôlable pour tout ouvert non vide  $\omega$  de  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), i.e pour tout  $y^0, y^T, z^0 \in L^2(\Omega)$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un contrôle  $u \in L^2(Q_T)$  tel que la solution  $(y, z)$  du système (4.16) satisfasse*

$$\|y(T) - y^T\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Dans le dernier chapitre, en suivant la méthodologie de F. Boyer dans [Boy13], nous construirons un schéma numérique permettant de contrôler partiellement un système parabolique. Après s'être placé dans un cadre général, nous implémenterons l'algorithme avec des différences finies en temps et des éléments finis et des différences finies en espace. Quelques simulations numériques nous donnerons l'occasion d'émettre des conjectures concernant les problèmes encore ouverts en contrôlabilité partielle.

## 5 Problèmes ouverts et perspectives

La contrôlabilité des systèmes de deux équations paraboliques linéaires par une force avec un terme de couplage d'ordre un pour des systèmes généraux, sans condition sur la dimension, la zone de contrôle ou la régularité des coefficients est une question qui reste encore ouverte, à l'exception de quelques cas particuliers. Plus précisément, la contrôlabilité à zéro des systèmes d'équations paraboliques linéaires de la forme

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \operatorname{div}(d_1 y_1) + g_{11} \cdot \nabla y_1 + g_{12} \cdot \nabla y_2 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t y_2 = \operatorname{div}(d_2 y_2) + g_{21} \cdot \nabla y_1 + g_{22} \cdot \nabla y_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$



où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  et  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $g_{ij} \in L^\infty(Q_T; \mathbb{R}^N)$ ,  $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$  pour tout  $i, j \in \{1, 2\}$  et  $d_1, d_2$  sont donnés par (3.8). Lorsque les supports de contrôle et de couplage s'intersectent, la combinaison des méthodes utilisées dans les chapitres I et II, c'est-à-dire la méthode de perturbation du système dans la zone de contrôle avec les méthodes par contrôle fictif et d'inversion locale d'opérateurs différentiels par combinaisons algébriques, peut peut-être permettre d'aboutir à de nouveaux résultats.

Concernant les systèmes de  $n$  équations paraboliques contrôlées par  $m$  contrôles

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + G \cdot \nabla y + Ay + B \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ , même pour des matrices  $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^N)$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$  constantes, il n'existe pas de résultat général. Si l'on note  $G_k := (g_{ij}^k)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  où  $g_{ij}^k$  est la  $k^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $g_{ij}$ , nous avons vu que, dans le cas de deux équations avec des matrices constantes, ce système est contrôlable à zéro au temps  $T$  si, et seulement si, l'une des matrices de Kalman  $[A|B]$  et  $[G_k|B]$  est de rang 2. Nous pourrions nous demander s'il en est de même pour un système de  $n$  équations.

La question de la contrôlabilité par le bord des systèmes de  $n$  équations paraboliques contrôlées par  $m$  contrôles

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + G \cdot \nabla z + Az & \text{dans } Q_T, \\ z = B \mathbb{1}_\gamma v & \text{sur } \Sigma_T, \\ z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $z^0 \in H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et  $v \in L^2(\Sigma_T; \mathbb{R}^m)$  reste ouverte. Des conditions de Kalman ont été donné dans [FCGBT10; AK+11b] pour  $G$  nulle et des matrices  $A$  et  $B$  constantes. Pour plus de deux équations avec une matrice  $G$  non nulle, les conditions de contrôlabilité sont encore à déterminer.

Nous avons donné des résultats positifs et négatifs de contrôlabilité partielle à zéro du système de deux équations paraboliques

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \alpha z + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t z = \Delta z & \text{dans } Q_T, \\ y = z = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0, z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  et  $u \in L^2(Q_T)$ , mais nous sommes encore loin d'avoir une condition nécessaire et suffisante.

Numériquement, nous pourrions regarder si il possible d'utiliser les méthodes par contrôle fictif et d'inversion algébrique d'opérateurs différentiels décrites dans la section 2.5 pour construire un schéma numérique. Le problème dit analytique consiste à contrôler le système considéré par autant de forces que d'équations, ce qui numériquement demande a priori moins de temps et calcul. On en déduit une solution du problème dit algébrique en appliquant directement un opérateur différentiel au contrôle trouvé, ce qui numériquement est immédiat. Par contre, nous demandons au contrôle du problème analytique d'être très

réguliers et localiser en temps et en espace. Est-ce que ces contraintes peuvent nous faire perdre le temps que nous gagnons en contrôlant par plus de forces ?

**Références**

- [AB13] F. ALABAU-BOUSSOUIRA. “A hierarchic multi-level energy method for the control of bidiagonal and mixed  $n$ -coupled cascade systems of PDE’s by a reduced number of controls”. In : *Adv. Differential Equations* 18.11-12 (2013), p. 1005–1072 (cf. p. 34, 36, 52, 70, 131).
- [ABCO15] F. ALABAU-BOUSSOUIRA, J.-M. CORON et G. OLIVE. “Internal controllability of first order quasilinear hyperbolic systems with a reduced number of controls”. In : *Submitted* (2015) (cf. p. 29, 72, 73).
- [ABL13b] F. ALABAU-BOUSSOUIRA et M. LÉAUTAUD. “Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications”. In : *J. Math. Pures Appl.* 99 (2013), 544—576 (cf. p. 36, 52, 99).
- [AK+03] F. AMMAR KHODJA et al. “Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force”. In : *SIAM J. Control Optim.* 42.5 (2003), p. 1661–1680 (cf. p. 34).
- [AK+05] F. AMMAR KHODJA et al. “Null-controllability of some systems of parabolic type by one control force”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 11.3 (2005), 426–448 (electronic) (cf. p. 34, 99).
- [AK+09a] F. AMMAR KHODJA et al. “A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems”. In : *Differ. Equ. Appl.* 1.3 (2009), p. 427–457 (cf. p. 31, 38, 55, 70, 99, 131, 132, 136, 145).
- [AK+09b] F. AMMAR-KHODJA et al. “A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems”. In : *J. Evol. Equ.* 9.2 (2009), p. 267–291 (cf. p. 31, 37, 70, 99, 131).
- [AK+11a] F. AMMAR-KHODJA et al. “Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey”. In : *Math. Control Relat. Fields* 1.3 (2011), p. 267–306 (cf. p. 16, 70, 99, 105, 130, 135, 136).
- [AK+11b] F. AMMAR-KHODJA et al. “The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials”. In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 96.6 (2011), p. 555–590 (cf. p. 58).
- [AK+14] F. AMMAR KHODJA et al. “Minimal time of controllability of two parabolic equations with disjoint control and coupling domains”. In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 352.5 (2014), p. 391–396 (cf. p. 7, 70, 99, 135).
- [AK+15] F. AMMAR-KHODJA et al. “New phenomena for the null controllability of parabolic systems: Minimal time and geometrical dependence”. In : *Submitted* (2015) (cf. p. 7, 18, 37, 53, 99, 101, 105, 110, 111, 117, 120–124, 135, 152).
- [AKBD06b] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH et C. DUPAIX. “Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force”. In : *J. Math. Anal. Appl.* 320.2 (2006), p. 928–943 (cf. p. 34).

- [AKCD15] F. AMMAR KHODJA, F. CHOULY et M. DUPREZ. "Partial null controllability of parabolic linear systems by  $m$  forces". In : *submitted* (2015) (cf. p. xii, 7, 54, 165, 187, 191).
- [Bar00] V. BARBU. "Exact controllability of the superlinear heat equation". In : *Appl. Math. Optim.* 42.1 (2000), p. 73–89 (cf. p. xi, 24, 84).
- [Ben+14] A. BENABDALLAH et al. "Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force". In : *Math. Control Relat. Fields* 4.1 (2014), p. 17–44 (cf. p. 36, 39, 48–50, 71, 100, 125, 131).
- [BGBPG04a] O. BODART, M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. "A local result on insensitizing controls for a semilinear heat equation with nonlinear boundary Fourier conditions". In : *SIAM J. Control Optim.* 43.3 (2004), 955–969 (electronic) (cf. p. xi, 24, 28).
- [BGBPG04b] O. BODART, M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. "Existence of insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity". In : *Comm. Partial Differential Equations* 29.7-8 (2004), p. 1017–1050 (cf. p. xi, 16, 24, 28, 193).
- [BGBPG04c] O. BODART, M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. "Insensitizing controls for a heat equation with a nonlinear term involving the state and the gradient". In : *Nonlinear Anal.* 57.5-6 (2004), p. 687–711 (cf. p. xi, 24, 28, 193).
- [BH03] D. BOTHE et D. HILHORST. "A reaction-diffusion system with fast reversible reaction". In : *J. Math. Anal. Appl.* 286.1 (2003), p. 125–135 (cf. p. 1).
- [BO14] F. BOYER et G. OLIVE. "Approximate controllability conditions for some linear 1D parabolic systems with space-dependent coefficients". In : *Math. Control Relat. Fields* 4.3 (2014), p. 263–287 (cf. p. 36, 53, 101, 122, 135).
- [Boy13] F. BOYER. "On the penalised HUM approach and its applications to the numerical approximation of null-controls for parabolic problems". In : *CANUM 2012, 41e Congrès National d'Analyse Numérique*. T. 41. ESAIM Proc. EDP Sci., Les Ulis, 2013, p. 15–58 (cf. p. xii, 8, 57, 158, 159, 161, 165, 167, 168, 175, 176, 189).
- [Bre83] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Théorie et applications. [Theory and applications]. Paris : Masson, 1983 (cf. p. 16, 28, 45, 170).
- [CH09] S. CHAKRABARTY et F. B. HANSON. "Distributed parameters deterministic model for treatment of brain tumors using Galerkin finite element method". In : *Math. biosci.* 219.2 (2009), p. 129–141 (cf. p. 1, 130).
- [CL14] J.-M. CORON et P. LISSY. "Local null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes system with a distributed control having two vanishing components". In : *Invent. Math.* 198.3 (2014), p. 833–880 (cf. p. 29, 33, 72–74, 90, 91).

- [Cor07] J.-M. CORON. *Control and nonlinearity*. T. 136. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, 2007, p. xiv+426 (cf. p. 1, 6, 12, 73, 76, 105, 137).
- [DL15] M. DUPREZ et P. LISSY. "Indirect controllability of some linear parabolic systems of  $m$  equations with  $m - 1$  controls involving coupling terms of zero or first order." In : *Submitted* (2015) (cf. p. xi, 29, 33, 100, 125).
- [DL88] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Vol. 8. INSTN: Collection Enseignement. [INSTN: Teaching Collection]. Évolution: semi-groupe, variationnel. [Evolution: semigroups, variational methods], Reprint of the 1985 edition. Paris : Masson, 1988, i–xliv, 345–854 and i–xix (cf. p. 3, 170).
- [Dou+02] A. DOUBOVA et al. "On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient". In : *SIAM J. Control Optim.* 41.3 (2002), p. 798–819 (cf. p. 14).
- [DR77] S. DOLECKI et D. L. RUSSELL. "A general theory of observation and control". In : *SIAM J. Control Optimization* 15.2 (1977), p. 185–220 (cf. p. 5).
- [Dup15] M. DUPREZ. "Controllability of a  $2 \times 2$  parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one." In : *submitted* (2015) (cf. p. xii, 7).
- [Eva10] L. C. EVANS. *Partial differential equations*. Second. T. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010 (cf. p. 25, 66, 67, 78).
- [Fat66] H. O. FATTORINI. "Some remarks on complete controllability". In : *SIAM J. Control* 4 (1966), p. 686–694 (cf. p. 36, 52, 100, 122).
- [FC+06] E. FERNÁNDEZ-CARA et al. "Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions: the linear case". In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 12.3 (2006), 442–465 (electronic) (cf. p. 43, 44, 77, 92).
- [FCGBT10] E. FERNÁNDEZ-CARA, M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. "Boundary controllability of parabolic coupled equations". In : *J. Funct. Anal.* 259.7 (2010), p. 1720–1758 (cf. p. 13, 58, 98, 99, 107, 154).
- [FCZ00] E. FERNÁNDEZ-CARA et E. ZUAZUA. "The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case". In : *Adv. Differential Equations* 5.4-6 (2000), p. 465–514 (cf. p. 7, 138).
- [FI96] A. V. FURSIKOV et O. Y. IMANUVILOV. *Controllability of evolution equations*. 34. Seoul National University, 1996 (cf. p. xi, 12, 24, 34, 76, 84, 134, 136, 177).
- [FR71] H. O. FATTORINI et D. L. RUSSELL. "Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension". In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 43 (1971), p. 272–292 (cf. p. xi, 16, 18, 33, 151, 152).
- [FR74] H. O. FATTORINI et D. L. RUSSELL. "Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations". In : *Quart. Appl. Math.* 32 (1974/75), p. 45–69 (cf. p. xi, 16, 33).

- [GBPG06] M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. “Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force”. In : *Asymptot. Anal.* 46.2 (2006), p. 123–162 (cf. p. xi, 16, 24, 28, 68, 72, 193).
- [GBT10] M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. “Controllability results for cascade systems of  $m$  coupled parabolic PDEs by one control force”. In : *Port. Math.* 67.1 (2010), p. 91–113 (cf. p. 34, 35, 39, 40, 50, 68, 70, 99, 108, 131, 132, 136, 148).
- [GI13] S. GUERRERO et O. Y. IMANUVILOV. “Remarks on non controllability of the heat equation with memory”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 19.1 (2013), p. 288–300 (cf. p. xi, 20, 154).
- [Gro86] M. GROMOV. *Partial differential relations*. T. 9. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Berlin : Springer-Verlag, 1986, p. x+363 (cf. p. xi, 29, 73).
- [Gue07a] S. GUERRERO. “Controllability of systems of Stokes equations with one control force: existence of insensitizing controls”. In : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 24.6 (2007), p. 1029–1054 (cf. p. 44).
- [Gue07b] S. GUERRERO. “Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force”. In : *SIAM J. Control Optim.* 46.2 (2007), p. 379–394 (cf. p. 35, 39, 43, 44, 50, 51, 70, 99, 100, 125).
- [HP09] T. HILLEN et K. J. PAINTER. “A user’s guide to PDE models for chemotaxis”. In : *J. Math. Biol.* 58.1-2 (2009), p. 183–217 (cf. p. 1).
- [KFA69] R. E. KALMAN, P. L. FALB et M. A. ARBIB. *Topics in mathematical system theory*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1969, p. xiv+358 (cf. p. 10, 38).
- [KT10] O. KAVIAN et L. de TERESA. “Unique continuation principle for systems of parabolic equations”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 16.2 (2010), p. 247–274 (cf. p. 37, 101).
- [LAK82] D LAUFFENBURGER, R ARIS et K KELLER. “Effects of cell motility and chemotaxis on microbial population growth.” In : *Biophysical journal* 40.3 (1982), p. 209 (cf. p. 1).
- [Lio68] J.-L. LIONS. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Paris : Dunod, 1968, p. xiii+426 (cf. p. xii, 3, 7, 26, 27, 85, 86, 98, 165, 166, 170, 173).
- [Lis13] P. LISSY. *Sur la contrôlabilité et son coût pour quelques équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2013 (cf. p. 29, 67).
- [LR95] G. LEBEAU et L. ROBBIANO. “Contrôle exact de l’équation de la chaleur”. In : *Comm. Partial Differential Equations* 20.1-2 (1995), p. 335–356 (cf. p. 34).
- [LSU68] O. A. LADYZENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV et N. N. URALCCEVA. “Linear and quasilinear equations of parabolic type”. In : Translated from the Russian by S. Smith. *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 23 (1968), p. xi+648 (cf. p. 29, 44).
- [Mil06] L. MILLER. “The control transmutation method and the cost of fast controls”. In : *SIAM J. Control Optim.* 45.2 (2006), 762–772 (electronic) (cf. p. 36, 99).

- [Oli12] G. OLIVE. “Null-controllability for some linear parabolic systems with controls acting on different parts of the domain and its boundary”. In : *Math. Control Signals Systems* 23.4 (2012), p. 257–280 (cf. p. 38, 131).
- [Oli14] G. OLIVE. “Boundary approximate controllability of some linear parabolic systems”. In : *Evol. Equ. Control Theory* 3.1 (2014), p. 167–189 (cf. p. 37, 101).
- [Paz83] A. PAZY. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. T. 44. Applied Mathematical Sciences. New York : Springer-Verlag, 1983, p. viii+279 (cf. p. 3, 167).
- [RT11a] L. ROSIER et L. de TERESA. “Exact controllability of a cascade system of conservative equations”. In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 349.5-6 (2011), p. 291–296 (cf. p. 52, 99).
- [SKT79] N. SHIGESADA, K. KAWASAKI et E. TERAMOTO. “Spatial segregation of interacting species”. In : *Journal of Theoretical Biology* 79.1 (1979), p. 83–99 (cf. p. 1).
- [SM67] L. M. SILVERMAN et H. E. MEADOWS. “Controllability and observability in time-variable linear systems”. In : *SIAM J. Control* 5 (1967), p. 64–73 (cf. p. 38).
- [TW09] M. TUCSNAK et G. WEISS. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, p. xii+483 (cf. p. 1, 13).
- [Zab92] J. ZABCZYK. *Mathematical control theory: an introduction*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992 (cf. p. 1, 4).
- [ÉT89] P. ÉRDI et J. TÓTH. *Mathematical models of chemical reactions*. Nonlinear Science: Theory and Applications. Theory and applications of deterministic and stochastic models. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989, p. xxiv+259 (cf. p. 1).

# Indirect controllability of some linear parabolic systems of $m$ equations with $m - 1$ controls involving coupling terms of zero or first order

Ce chapitre reprend en grande partie l'article « *Indirect controllability of some linear parabolic systems of  $m$  equations with  $m - 1$  controls involving coupling terms of zero or first order* », écrit en collaboration avec Pierre Lissy<sup>1</sup>.

## Résumé

Ce chapitre est consacré à l'étude de la contrôlabilité à zéro et approchée de certaines classes de systèmes linéaires couplés avec moins de contrôles que d'équations. Plus précisément, pour un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), nous considérons un système de  $m$  équations linéaires paraboliques ( $m \geq 2$ ) avec des termes de couplage d'ordre un et zéro, et  $m - 1$  contrôles localisés sur un sous-ensemble ouvert non-vide  $\omega$  de  $\Omega$ . Dans le cas de coefficients de couplage constants, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour obtenir la contrôlabilité à zéro et approchée sur un intervalle de temps arbitrairement petit. Dans le cas  $m = 2$  et  $N = 1$ , nous donnons également une condition générique suffisante pour la contrôlabilité à zéro et approchée sur un intervalle de temps arbitrairement petit et pour des coefficients généraux dépendants des variables d'espace et de temps lorsque les supports des termes de couplage intersectent le domaine de contrôle  $\omega$ . Les résultats sont obtenus à l'aide de la méthode de contrôle fictif combinée avec une méthode algébrique et des estimations appropriées de Carleman.

## Structure

1	Introduction . . . . .	66
2	Proof of Theorem 1.1 . . . . .	74
3	Proof of Theorem 1.2 . . . . .	88
	References. . . . .	94

<sup>1</sup>. CEREMADE, UMR 7534, Université Paris-Dauphine



## 1 Introduction

### 1.1 Presentation of the problem and main results

Let  $T > 0$ , let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) supposed to be regular enough (for example of class  $C^\infty$ ), and let  $\omega$  be an arbitrary nonempty open subset of  $\Omega$ . Let  $Q_T := (0, T) \times \Omega$ ,  $q_T := (0, T) \times \omega$ ,  $\Sigma_T := (0, T) \times \partial\Omega$  and  $m \geq 2$ . We consider the following system of  $m$  parabolic linear equations, where the  $m - 1$  first equations are controlled:

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \operatorname{div}(d_1 \nabla y_1) + \sum_{i=1}^m g_{1i} \cdot \nabla y_i + \sum_{i=1}^m a_{1i} y_i + \mathbb{1}_\omega u_1 & \text{in } Q_T, \\ \partial_t y_2 = \operatorname{div}(d_2 \nabla y_2) + \sum_{i=1}^m g_{2i} \cdot \nabla y_i + \sum_{i=1}^m a_{2i} y_i + \mathbb{1}_\omega u_2 & \text{in } Q_T, \\ \vdots \\ \partial_t y_{m-1} = \operatorname{div}(d_{m-1} \nabla y_{m-1}) + \sum_{i=1}^m g_{(m-1)i} \cdot \nabla y_i + \sum_{i=1}^m a_{(m-1)i} y_i + \mathbb{1}_\omega u_{m-1} & \text{in } Q_T, \\ \partial_t y_m = \operatorname{div}(d_m \nabla y_m) + \sum_{i=1}^m g_{mi} \cdot \nabla y_i + \sum_{i=1}^m a_{mi} y_i & \text{in } Q_T, \\ y_1 = \dots = y_m = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y_1(0, \cdot) = y_1^0, \dots, y_m(0, \cdot) = y_m^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

where  $y^0 := (y_1^0, \dots, y_m^0) \in L^2(\Omega)^m$  is the initial condition and  $u := (u_1, \dots, u_{m-1}) \in L^2(Q_T)^{m-1}$  is the control. The zero and first order coupling terms  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  and  $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  are assumed to be respectively in  $L^\infty(Q_T)$  and in  $L^\infty(0, T; W_\infty^1(\Omega)^N)$ . Given some  $l \in \{1, \dots, m\}$ , the second order elliptic self-adjoint operator  $\operatorname{div}(d_l \nabla)$  is given by

$$\operatorname{div}(d_l \nabla) = \sum_{i, j=1}^N \partial_i (d_l^{ij} \partial_j),$$

with

$$\begin{cases} d_l^{ij} \in W_\infty^1(Q_T), \\ d_l^{ij} = d_l^{ji} \text{ in } Q_T, \end{cases}$$

where the coefficients  $d_l^{ij}$  satisfy the uniform ellipticity condition

$$\sum_{i, j=1}^N d_l^{ij} \xi_i \xi_j \geq d_0 |\xi|^2 \text{ in } Q_T, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

for a constant  $d_0 > 0$ .

In order to simplify the notation, from now on, we will denote by

$$\begin{aligned} D &:= \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m), \quad G := (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^N), \\ A &:= (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad B := \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(1, \dots, 1) \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m, m-1}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

so that we can write System (1.1) as

$$\begin{cases} \partial_t y = \operatorname{div}(D \nabla y) + G \cdot \nabla y + A y + \mathbb{1}_\omega B u & \text{in } Q_T, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

It is well-known (see for instance [Eva10, Th. 3 & 4, p. 356-358]) that for any initial data  $y^0 \in L^2(\Omega)^m$  and  $u \in L^2(Q_T)^{m-1}$ , System (1.2) admits a unique solution  $y$  in  $W(0, T)^m$ , where

$$W(0, T) := L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (1.3)$$

Moreover, one can prove (see for instance [Eva10, Th. 5, p. 360]) that if  $y^0 \in H_0^1(\Omega)^m$  and  $u \in L^2(Q_T)^{m-1}$ , then the solution  $y$  is in  $W_2^{2,1}(Q_T)^m$ , where

$$W_2^{2,1}(Q_T) := L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)). \quad (1.4)$$

The main goal of this article is to analyse the null controllability and approximate controllability of System (1.1). Let us recall the definition of these notions. It will be said that

- System (1.1) is *null controllable* at time  $T$  if for every initial condition  $y^0 \in L^2(\Omega)^m$ , there exists a control  $u \in L^2(Q_T)^{m-1}$  such that the solution  $y$  in  $W(0, T)^m$  to System (1.1) satisfies

$$y(T) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

- System (1.1) is *approximately controllable* at time  $T$  if for every  $\varepsilon > 0$ , every initial condition  $y^0 \in L^2(\Omega)^m$  and every  $y_T \in L^2(\Omega)^m$ , there exists a control  $u \in L^2(Q_T)^{m-1}$  such that the solution  $y$  in  $W(0, T)^m$  to System (1.1) satisfies

$$\|y(T) - y_T\|_{L^2(\Omega)^m}^2 \leq \varepsilon.$$

Let us remark that if System (1.1) is null controllable on the time interval  $(0, T)$ , then it is also approximately controllable on the time interval  $(0, T)$  (this is an easy consequence of usual results of backward uniqueness concerning parabolic equations as given for example in [BT73]).

Our first result gives a necessary and sufficient condition for null (or approximate) controllability of System (1.1) in the case of constant coefficients.

**THEOREM 1.1.** *Let us assume that  $D, G$  and  $A$  are **constant in space and time**. Then System (1.1) is null (resp. approximately) controllable at time  $T > 0$  if and only if there exists  $i_0 \in \{1, \dots, m-1\}$  such that*

$$g_{mi_0} \neq 0 \text{ or } a_{mi_0} \neq 0. \quad (1.5)$$

This condition is the natural one that can be expected, since it means that the last equation is coupled with at least one of the others, and is clearly a necessary condition (otherwise one cannot act on the last component  $y_n$  which evolves freely).

Our second result concerns the case of general coefficients depending on space and time variables, in the particular case of two equations (i.e.  $m = 2$ ), and gives a controllability result under some technical conditions on the coefficients (see (1.7) and (1.8)) coming from the algebraic solvability (see Section 3.1). To understand why this kind of condition appears here, we refer to the simple example given in [Lis13, Ex. 1, Sec. 1.3]. Let us emphasize that the second point is only valid for  $N = 1$  and under Condition (1.8), which is clearly technical since it does not even cover the case of constant coefficients. However, Condition (1.8) is *generic* as soon as we restrict to the coupling coefficients verifying  $g_{21} \neq 0$  on  $(0, T) \times \omega$ , in the following sense: it only requires some regularity on the coefficients and a given determinant, involving some coefficients and their derivatives, to be non-zero. Since this condition may seem a little bit intricate, we will give in Remark 1.1 some particular examples that clarify the scope of Theorem 2.

**THEOREM 1.2.** Consider the following system:

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \operatorname{div}(d_1 \nabla y_1) + g_{11} \cdot \nabla y_1 + g_{12} \cdot \nabla y_2 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \mathbf{1}_\omega u & \text{in } Q_T, \\ \partial_t y_2 = \operatorname{div}(d_2 \nabla y_2) + g_{21} \cdot \nabla y_1 + g_{22} \cdot \nabla y_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 & \text{in } Q_T, \\ y_1 = y_2 = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y_1(0, \cdot) = y_1^0, y_2(0, \cdot) = y_2^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

where  $y^0 = (y_1^0, y_2^0) \in L^2(\Omega)^2$  is the initial condition.

Then System (1.1) is null (resp. approximately) controllable at time  $T$  if there exists an open subset  $(a, b) \times \mathcal{O} \subseteq Q_T$  where one of the following conditions is verified:

- (i) Coefficients of System (1.6) satisfy  $d_i \in C^1((a, b), C^2(\mathcal{O})^{N^2})$ ,  $g_{ij} \in C^1((a, b), C^2(\mathcal{O})^N)$ ,  $a_{ij} \in C^1((a, b), C^2(\mathcal{O}))$  for  $i, j = 1, 2$  and

$$g_{21} = 0 \text{ and } a_{21} \neq 0 \quad \text{in } (a, b) \times \mathcal{O}. \quad (1.7)$$

- (ii)  $N = 1$  and coefficients of System (1.6) satisfy  $d_i, g_{ij}, a_{ij} \in C^3((a, b), C^7(\mathcal{O}))$  for  $i = 1, 2$  and

$$|\det(H(t, x))| > C \text{ for every } (t, x) \in (a, b) \times \mathcal{O}, \quad (1.8)$$

where

$$H := \begin{pmatrix} -a_{21} + \partial_x g_{21} & g_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial_x a_{21} + \partial_{xx} g_{21} & -a_{21} + 2\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 & 0 \\ -\partial_t a_{21} + \partial_{tx} g_{21} & \partial_t g_{21} & -a_{21} + \partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 \\ -\partial_{xx} a_{21} + \partial_{xxx} g_{21} & -2\partial_x a_{21} + 3\partial_{xx} g_{21} & 0 & -a_{21} + 3\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} \\ -a_{22} + \partial_x g_{22} & g_{22} - \partial_x d_2 & -1 & -d_2 & 0 & 0 \\ -\partial_x a_{22} + \partial_{xx} g_{22} & -a_{22} + 2\partial_x g_{22} - \partial_{xx} d_2 & 0 & g_{22} - 2\partial_x d_2 & -1 & -d_2 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

**Remark 1.1.** (a) The first part of Theorem 1.2 has already been proved in [GBT10] and [GBPG06] (see the point 4. of Section 9 in [GBPG06]) with less regularity on the coefficients, and is not a new result.

- (b) We will see during the proof of Theorem 1.2 that, in Item (ii) of Theorem 1.2, taking into account the derivatives of the appearing in (1.9), (3.5) and (3.10) and the regularity needed for the control in Proposition 3.4, we only need the following regularity for the coefficients:

$$d_i \in C^1((a, b), C^2(\mathcal{O})), g_{ij} \in C^0((a, b), C^2(\mathcal{O})), a_{ij} \in C^0((a, b), C^1(\mathcal{O})) \quad (1.10)$$

for all  $i, j \in \{1, 2\}$  in the first case (i) and

$$\begin{cases} d_1 \in C^1((a, b), C^4(\mathcal{O})) \cap C^2((a, b), C^1(\mathcal{O})), \\ g_{11}, g_{12} \in C^0((a, b), C^4(\mathcal{O})) \cap C^1((a, b), C^1(\mathcal{O})), \\ a_{11}, a_{12} \in C^0((a, b), C^3(\mathcal{O})) \cap C^1((a, b), C^0(\mathcal{O})), \\ g_{21} \in C^0((a, b), C^7(\mathcal{O})) \cap C^3((a, b), C^1(\mathcal{O})), \\ d_2, g_{22} \in C^0((a, b), C^6(\mathcal{O})) \cap C^2((a, b), C^2(\mathcal{O})), \\ a_{22} \in C^0((a, b), C^5(\mathcal{O})) \cap C^2((a, b), C^1(\mathcal{O})), \\ a_{21} \in C^0((a, b), C^6(\mathcal{O})) \cap C^3((a, b), C^0(\mathcal{O})), \end{cases} \quad (1.11)$$

in the second case (ii).

(c) One can easily compute explicitly the determinant of matrix  $H$  appearing in (1.8):

$$\begin{aligned} \det(H) = & 2 \frac{\partial a_{21}}{\partial x} \frac{\partial d_2}{\partial x} g_{21}^2 - 4 \frac{\partial a_{21}}{\partial x} d_2 \frac{\partial g_{21}}{\partial x} g_{21} + \frac{\partial^2 a_{21}}{\partial x^2} d_2^2 g_{21}^2 + 2a_{21} \frac{\partial a_{21}}{\partial x} d_2 g_{21} - \frac{\partial a_{21}}{\partial x} g_{21}^2 g_{22} + \frac{\partial a_{21}}{\partial t} g_{21}^2 \\ & - 4a_{21} \frac{\partial d_2}{\partial x} \frac{\partial g_{21}}{\partial x} g_{21} + a_{21} \frac{\partial^2 d_2}{\partial x^2} g_{21}^2 + a_{21}^2 \frac{\partial d_2}{\partial x} g_{21} - 3a_{21} d_2 \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^2} g_{21} + 6a_{21} d_2 \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial x} \right)^2 - 2a_{21}^2 d_2 \frac{\partial g_{21}}{\partial x} + a_{21} \frac{\partial g_{21}}{\partial x} g_{21} g_{22} \\ & - a_{21} \frac{\partial g_{21}}{\partial t} g_{21} - a_{21} g_{21}^2 \frac{\partial g_{22}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x} g_{21}^3 - \frac{\partial^2 d_2}{\partial x^2} \frac{\partial g_{21}}{\partial x} g_{21}^2 - 2 \frac{\partial d_2}{\partial x} \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^2} g_{21}^2 + 3 \frac{\partial d_2}{\partial x} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial x} \right)^2 g_{21} - d_2 \frac{\partial^3 g_{21}}{\partial x^3} g_{21}^2 \\ & + 5d_2 \frac{\partial g_{21}}{\partial x} \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^2} g_{21} - 4d_2 \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial x} \right)^3 + \frac{\partial g_{21}}{\partial x} g_{21}^2 \frac{\partial g_{22}}{\partial x} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} g_{21}^2 g_{22} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x} g_{21}^2 g_{22} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x} g_{21}^2 g_{22} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x} g_{21}^2 g_{22} \\ & - g_{21}^3 \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

(d) We remark that Condition (1.8) implies in particular that

$$g_{21} \neq 0 \text{ in } (a, b) \times \mathcal{O}. \quad (1.12)$$

Our conjecture is that, as in the case of constant coefficients, either the first line of (1.7) or (1.12) is sufficient as soon as we restrict to the class of coupling terms that intersect the control region, since it is the minimal conditions one can expect (as in the case of constant coefficients, this only means that the last equation is coupled with one of the others).

(e) Even though Condition (1.8) seems complicated, it can be simplified in some cases. Indeed, for example, System (1.6) is null controllable at time  $T$  if there exists an open subset  $(a, b) \times \mathcal{O} \subseteq q_T$  such that

$$\begin{cases} g_{21} \equiv \kappa \in \mathbb{R}^* & \text{in } (a, b) \times \mathcal{O}, \\ a_{21} \equiv 0 & \text{in } (a, b) \times \mathcal{O}, \\ \partial_x a_{22} \neq \partial_{xx} g_{22} & \text{in } (a, b) \times \mathcal{O}. \end{cases}$$

In the case  $\partial_x a_{22} = \partial_{xx} g_{22}$ , we do not know if the controllability holds and we are not able to prove it using the same techniques as in this paper.

Another simple situation is the case where the coefficients depend only on the time variable. In this case, it is easy to check that Condition (1.8) becomes simply: there exists an open interval  $(a, b)$  of  $(0, T)$  such that

$$g_{21}(t) \partial_t a_{21}(t) \neq a_{21}(t) \partial_t g_{21}(t) \quad \text{in } (a, b).$$

(f) In fact, it is likely that one could obtain a far more general result than the one obtained in Theorem 1.2. By using the same reasoning, one would be able to obtain a result of controllability for arbitrary  $m$  and  $N$ , however the generic Condition (1.8) would be far more complicated and in general impossible to write down explicitly. That is the reason why we chose to treat only the case  $m = 2$  and  $N = 1$ .

This paper is organized as follows. In Section 1.2, we recall some previous results and explain precisely the scope of the present contribution. In Section 1.3, we give some natural perspectives of this work. In Section 1.4 we present the main method used here, that is to say the fictitious control method together with some algebraic method. Section 2 is devoted to the proof of Theorem 1.1. We finish with the proof of Theorem 1.2 in Section 3.

## 1.2 State of the art

The study of what is called the *indirect* controllability for linear or non-linear parabolic coupled systems has been an intensive subject of interest these last years. The main issue

is to try to control many equations with less controls than equations (and ideally only one control if possible), with the hope that one can act *indirectly* on the equations that are not directly controlled thanks to the coupling terms. For a recent survey concerning this kind of control problems, we refer to [AK+11a]. Here, we will mainly present the results related to this work, that is to say the case of the null or approximate controllability of linear parabolic systems with distributed controls.

First of all, in the case of zero order coupling terms, a necessary and sufficient algebraic condition is proved in [AK+09a] for the controllability of parabolic systems, for constant coefficients and diffusion coefficients  $d_i$  that are equal. This condition is similar to the usual algebraic *Kalman rank condition* for finite-dimensional systems. These results were then extended in [AK+09b], where a necessary and sufficient condition is given for constant coefficients but different diffusion coefficients  $d_i$  (the Laplace operator  $\Delta$  can also be replaced by some general time-independent elliptic operator). Moreover, in [AK+09a], some results are obtained in the case of time-dependent coefficients under a sharp sufficient condition which is similar to the sharp *Silverman-Meadows Theorem* in the finite-dimensional case.

Concerning the case of space-varying coefficients, there is currently no general theory. In the case where the support of the coupling terms intersect the control domain, the most general result is proved in [GBT10] for parabolic systems in cascade form with one control force (and possibly one order coupling terms). We also mention [AKBD06a], where a result of null controllability is proved in the case of a system of two equations with one control force, with an application to the controllability of a non-linear system of transport-diffusion equations. In the case where the coupling regions do not intersect the control domain, only few results are known and in general there are some technical and geometrical restrictions (see for example [AB13], [ABL13a] or [RT11b]). These restrictions come from the use of the *transmutation method* that requires a controllability result on some related hyperbolic system. Let us also mention [AK+14], where the authors consider a system of two equations in one space dimension and obtain a minimal time for null controllability, when the supports of the coupling terms do not intersect the control domain.

Concerning the case of first order coupling terms, there are also only few results. The first one is [Gue07b], where the author studies notably the case of  $N + 1$  coupled heat equations with  $N$  control forces (we recall that  $N$  is the dimension of  $\Omega$ ) and obtains the null controllability of System (1.1) at any time when the following estimate holds:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|(g_{21} \cdot \nabla + a_{21})^* u\|_{L^2(\Omega)^N}, \quad (1.13)$$

for all  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Let us emphasize that inequality (1.13) is very restrictive, because it notably implies that  $g_{21}$  has to be non-zero on each of its components (due to the  $H^1$ -norm appearing in the left-hand side). Moreover, in the case of two equations, the result given in [Gue07b] is true only in the dimension one. Another case is the null controllability at any time  $T > 0$  of  $m$  equations with one control force, which is studied in [GBT10], under many assumptions: the coupling matrix  $G$  has to be upper triangular (except on the controlled equation) and many coefficients of  $A$  have to be non identically equal to zero on  $\omega$ , notably,

in the  $2 \times 2$  case, we should have

$$\begin{aligned} g_{21} &\equiv 0 \text{ in } q_T \\ &\text{and} \\ (a_{21} > a_0 \text{ in } q_T \text{ or } a_{21} < -a_0 \text{ in } q_T), \end{aligned} \tag{1.14}$$

for a constant  $a_0 > 0$ . The last result concerning first order coupling terms is the recent work [Ben+14], where the case of  $2 \times 2$  and  $3 \times 3$  systems with one control force is studied under some technical assumptions. Notably, in the  $2 \times 2$  case, the authors assume that

$$\begin{cases} \text{there exists a nonempty open subset } \gamma \text{ of } \partial\omega \cap \partial\Omega, \\ \exists x_0 \in \gamma \text{ s.t. } g_{21}(t, x_0) \cdot \nu(x_0) \neq 0 \text{ for all } t \in [0, T], \end{cases} \tag{1.15}$$

where  $\nu$  represents the exterior normal unit vector to the boundary  $\partial\Omega$ . Under these technical restrictions on the control domain and the coupling terms, System (1.1) is null controllable at any time  $T > 0$ .

Here we detail how our results differ from the existing ones:

1. In the case of constant coefficients, we are able to obtain a necessary and sufficient condition in the case of  $m$  equations,  $m - 1$  controls and coupling terms of order 0 or 1, which is the main new result. Moreover, the diffusion coefficients can be different, we are able to treat the case of as many equations as wanted and we use an inequality similar to Condition (1.13) but with the  $L^2$ -norm in the left-hand side (see Lemma 2.4). To finish, we do not need the control domain to extend up to the boundary as in Condition (1.15). The main restriction is that all the coefficients of System (1.1) must be constant.
2. In the case  $N = 1$  and  $m = 2$ , we are able to obtain the controllability in arbitrary small time under some generic condition which is purely technical. In Theorem 2, the geometric condition (1.15) is not necessary, which is satisfying.

### 1.3 Related open problems and perspectives

Let us describe briefly some related open problems and the difficulties that prevent us to go further in the present paper:

- As explained in Remark 1, we believe that the condition involving the determinant of  $H$  is purely technical, which means that either the first line of (1.7) or (1.12) is sufficient as soon as we restrict to the class of coupling terms that intersect the control region. This conjecture includes the particular cases mentioned in item (e) of Remark 1 (for instance the condition appearing in the case of time-dependent coefficients should not be necessary). However, we were not able to treat the general case because it is **crucial** in the proof of Theorem 1 that the coefficients are **constant**, at least at two levels:
  1. Lemma 2.4 is not true anymore for variable coefficients (maybe in the case of time-varying coefficients only this can be adapted though).
  2. During the proof of the Carleman estimate (2.15), it is crucial that the operator  $\mathcal{N}$  introduced in (2.2) has constant coefficients, so that it commutes with all the terms

of the equation. This enables us to obtain an equation like (2.17), hence we apply directly Lemma (2.2), which would not be possible in the case of non-constant coefficients (there will be some remaining terms that cannot be absorbed).

- Another important limitation of our study is that we are restricted to the case of  $m - 1$  controls. One natural extension would then be to try to remove more controls. However, even in the case of  $m$  equations and  $m - 2$  controls ( $m \geq 3$ ) and constant coefficients, the situation is much more intricate because we do not have any idea on what would be a “natural condition” similar to the one of Theorem 1 that will be enough to ensure the null controllability. Moreover, using the fictitious control method is not totally straightforward, because it is likely that the operator  $\mathcal{N}$  needed in (2.2) has to be of order 2 in space, which would lead to important technical issues since it would require to prove a Carleman estimate similar to (2.15) with a local term involving derivatives of order 2.
- To prove the *algebraic solvability* of system (1.6) (see (1.21) for the definition of this notion), we introduce a differential operator  $Q$  in (3.7) which is a key issue of the proof of the second item in Theorem 1.2. The matrix  $H$  given in (1.9) is then deduced from  $Q$ . The operator  $Q$  has been found with the help of formal calculations. The authors have not been able to find simpler expressions. It could be interesting to improve it and notably to investigate if looking at higher derivatives would give some different (and simpler) conditions.

#### 1.4 Strategy

The method described in this section is sometimes called *fictitious control method* and has already been used for instance in [GBPG06], [CL14] and [ABCO15]. One important limitation of this method is that it will never be useful to treat the case where the support of the coupling terms do not intersect the control region, because, in what we call the algebraic resolution, we have to work locally on the control region.

Roughly, the method is the following: we first control the equations with  $m$  controls (one on each equation) and we try to eliminate the control on the last equation thanks to algebraic manipulations. Let us be more precise and decompose the problem into two different steps:

##### Analytic problem:

Find a solution  $(z, v)$  in an appropriate space to the control problem by  $m$  controls which are regular enough and are in the range of a differential operator. More precisely, solve

$$\begin{cases} \partial_t z = \operatorname{div}(D\nabla z) + G \cdot \nabla z + Az + \mathcal{N}(\mathbb{1}_{\tilde{\omega}} v) & \text{in } Q_T, \\ z = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ z(0, \cdot) = y^0, z(T, \cdot) = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.16)$$

where  $\mathcal{N}$  is some differential operator to be chosen later and  $\tilde{\omega}$  is strongly included in  $\omega$ . Solving Problem (1.16) is easier than solving the null controllability at time  $T$  of System (1.1), because we control System (1.16) with a control on each equation. The important points (and somehow different from the usual methods) are that:

1. The control has to be of a special form (it has to be in the range of a differential operator  $\mathcal{N}$ ),

2. The control has to be regular enough, so that it can be differentiated a certain amount of times with respect to the space and/or time variables (see the next section about the algebraic resolution).

If we look for a control  $v$  in the weighted Sobolev space  $L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m$  for some weight  $\rho$ , it is well known (see, e.g. [Cor07, Th. 2.44, p. 56–57]) that the null controllability at time  $T$  of System (1.16) is equivalent to the following *observability inequality*:

$$\int_{\Omega} |\psi(0, x)|^2 dx \leq C_{obs} \iint_{q_T} \rho |\mathcal{N}^* \psi(t, x)|^2 dx dt, \quad (1.17)$$

where  $\psi$  is the solution to the dual system

$$\begin{cases} -\partial_t \psi = \operatorname{div}(D\nabla \psi) - G^* \cdot \nabla \psi + A^* \psi & \text{in } Q_T, \\ \psi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \psi(T, \cdot) = \psi^0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Inequalities like (1.17) can be proved thanks to some appropriate *Carleman estimates*. The weight  $\rho$  can be chosen to be exponentially decreasing at times  $t = 0$  and  $t = T$ , which will be useful later. In fact, we will have to adapt the usual HUM duality method to ensure that one can find such controls.

**Algebraic problem:**

For  $f := \mathbb{1}_{\omega} v$ , find a pair  $(\hat{z}, \hat{v})$  (where  $\hat{v}$  now acts only on the first  $m - 1$  equations) in an appropriate space satisfying the following control problem:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{z} = \operatorname{div}(D\nabla \hat{z}) + G \cdot \nabla \hat{z} + A\hat{z} + B\hat{v} + \mathcal{N}f & \text{in } Q_T, \\ \hat{z} = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \hat{z}(0, \cdot) = \hat{z}(T, \cdot) = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.18)$$

and such that the spatial support of  $\hat{v}$  is strongly included in  $\omega$ . We will solve this problem using the notion of *algebraic solvability* of differential systems, which is based on ideas coming from [Gro86, Section 2.3.8] and was already widely used in [CL14] and [ABCO15]. The idea is to write System (1.18) as an *underdetermined* system in the variables  $\hat{z}$  and  $\hat{v}$  and to see  $\mathcal{N}f$  as a source term, so that we can write Problem (1.18) under the abstract form

$$\mathcal{L}(\hat{z}, \hat{v}) = \mathcal{N}f, \quad (1.19)$$

where

$$\mathcal{L}(\hat{z}, \hat{v}) := \partial_t \hat{z} - \operatorname{div}(D\nabla \hat{z}) - G \cdot \nabla \hat{z} - A\hat{z} - B\hat{v}. \quad (1.20)$$

The goal will be then to find a partial differential operator  $\mathcal{M}$  satisfying

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \mathcal{N}. \quad (1.21)$$

When (1.21) is satisfied, we say that System (1.18) is *algebraically solvable*. This exactly means that one can find a solution  $(\hat{z}, \hat{v})$  to System (1.18) which can be written as a linear combination of some derivatives of the source term  $\mathcal{N}f$ . The main advantage of this method is that one can only work *locally* on  $q_T$ , because the solution depends locally on the source term



and then has the same support as the source term (to obtain a solution which is defined everywhere on  $Q_T$ , one just extends it by 0). This part will be explained in more details in Sections 2.1 and 3.1.

**Conclusion:**

If we can solve the analytic and algebraic problems, then it is easy to check that  $(y, u) := (z - \hat{z}, -\hat{v})$  will be a solution to System (1.1) in an appropriate space and will satisfy  $y(T) \equiv 0$  in  $\Omega$  (for more explanations, see [CL14, Prop. 1] or Sections 2.4 and 3.3 of the present paper).

## 2 Proof of Theorem 1.1

Let us remind that in this case,  $D$ ,  $G$  and  $A$  are constant. In Section 2.1, 2.2 and 2.3, we will always consider some  $i_0 \in \{1, \dots, m - 1\}$  such that

$$g_{mi_0} \neq 0 \text{ or } a_{mi_0} \neq 0. \quad (2.1)$$

We will follow the strategy described in Section 1.4, and we first begin with finding some appropriate operator  $\mathcal{N}$ .

### 2.1 Algebraic resolution

We will here explain how to choose the differential operator  $\mathcal{N}$  used in the next section. We will assume from now on that all differential operators of this section are defined in  $C^\infty(Q_T)^m$ . The appropriate spaces will be specified in Section 2.4. We consider  $\mathcal{N}$  as the operator defined for all  $f := (f_1, \dots, f_m)$  by

$$\mathcal{N}(f) := \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1 f \\ \mathcal{N}_2 f \\ \dots \\ \mathcal{N}_m f \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (-g_{mi_0} \cdot \nabla - a_{mi_0}) f_1 \\ (-g_{mi_0} \cdot \nabla - a_{mi_0}) f_2 \\ \dots \\ (-g_{mi_0} \cdot \nabla - a_{mi_0}) f_m \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Let us recall that the definition of  $\mathcal{L}$  is given in (1.20).

As explained in Section 1.4, we want find a differential operator  $\mathcal{M}$  such that

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \mathcal{N}. \quad (2.3)$$

We have the following proposition:

**PROPOSITION 2.1.** *Let  $\mathcal{N}$  be defined as in (2.2). Then there exists a differential operator  $\mathcal{M}$  of order 1 in time and 2 in space, with constant coefficients, such that (2.3) is verified.*

**Proof of Proposition 2.1.** We can remark that equality (2.3) is equivalent to

$$\mathcal{M}^* \circ \mathcal{L}^* = \mathcal{N}^*. \quad (2.4)$$

The adjoint  $\mathcal{L}^*$  of the operator  $\mathcal{L}$  is given for all  $\varphi \in C^\infty(Q_T)^m$  by

$$\mathcal{L}^* \varphi := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* \varphi \\ \dots \\ \mathcal{L}_{2m-1}^* \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_t \varphi_1 - \operatorname{div}(d_1 \nabla \varphi_1) + \sum_{j=1}^m \{g_{j1} \cdot \nabla \varphi_j - a_{j1} \varphi_j\} \\ \dots \\ -\partial_t \varphi_m - \operatorname{div}(d_m \nabla \varphi_m) + \sum_{j=1}^m \{g_{jm} \cdot \nabla \varphi_j - a_{jm} \varphi_j\} \\ \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_{m-1} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

the  $m-1$  last lines coming from the particular form of our control operator  $B$ . Now we apply  $g_{mi_0} \cdot \nabla - a_{mi_0}$  to the  $(m+i)^{th}$  line for  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  and we add  $(\partial_t + \operatorname{div}(d_{i_0} \nabla)) \mathcal{L}_{m+i_0}^* \varphi + \sum_{j=1}^{m-1} (-g_{ji_0} \cdot \nabla + a_{ji_0}) \mathcal{L}_{m+j}^* \varphi$  to the  $(i_0)^{th}$  line. Hence, remarking that  $\mathcal{L}_{m+i}^* \varphi = \varphi_i$  ( $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ), we obtain

$$\begin{pmatrix} (g_{mi_0} \cdot \nabla - a_{mi_0}) \mathcal{L}_{m+1}^* \varphi \\ \dots \\ (g_{mi_0} \cdot \nabla - a_{mi_0}) \mathcal{L}_{2m-1}^* \varphi \\ \mathcal{L}_{i_0}^* \varphi + (\partial_t + \operatorname{div}(d_{i_0} \nabla)) \mathcal{L}_{m+i_0}^* \varphi + \sum_{j=1}^{m-1} (-g_{ji_0} \cdot \nabla + a_{ji_0}) \mathcal{L}_{m+j}^* \varphi \end{pmatrix} = \mathcal{N}^* \varphi.$$

Thus if we define  $\mathcal{M}^*$  for  $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_{2m-1}) \in C^\infty(Q_T)^{2m-1}$  by

$$\mathcal{M}^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \dots \\ \psi_{2m-1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (g_{mi_0} \nabla - a_{mi_0}) \psi_{m+1} \\ \dots \\ (g_{mi_0} \nabla - a_{mi_0}) \psi_{2m-1} \\ \psi_{i_0} + (\partial_t + \operatorname{div}(d_{i_0} \nabla)) \psi_{m+i_0} + \sum_{j=1}^{m-1} (-g_{ji_0} \cdot \nabla + a_{ji_0}) \psi_{m+j} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

then equality (2.4) is satisfied and hence equality (2.3) also. Moreover, the coefficients of  $\mathcal{M}^*$  are constant, hence it is also the case for the coefficients of  $\mathcal{M}$ .  $\blacksquare$

*Remark 2.1.* Looking carefully at the proof of Proposition 2.1, we remark that one could also have constructed some differential operator  $\tilde{\mathcal{M}}$  such that  $\mathcal{L} \circ \tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{N}}$  with  $\tilde{\mathcal{N}}_1 = \dots = \tilde{\mathcal{N}}_{m-1} = Id$  and  $\tilde{\mathcal{N}}_m = -g_{mi_0} \cdot \nabla - a_{mi_0}$ . However, it is more convenient for the proof of (2.15) to work with a differential operator of same order on each line of  $\mathcal{N}$  and that is the reason why we copied  $-g_{mi_0} \cdot \nabla - a_{mi_0}$  on each line.

## 2.2 An appropriate Carleman estimate

Let us consider the following dual system associated to System (1.16)

$$\begin{cases} -\partial_t \psi = \operatorname{div}(D \nabla \psi) - G^* \cdot \nabla \psi + A^* \psi & \text{in } Q_T, \\ \psi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \psi(T, \cdot) = \psi^0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

The two main results of this section are Propositions 2.2 and 2.3, which are respectively some Carleman estimate and observability inequality. The particularity of these inequalities is that the observation will not be directly the  $L^2$ -norm of the solution  $\psi$  to System (2.7)

on the subset  $\omega$ , but it will be the  $L^2$ -norm of some linear combination of  $\psi$  and its derivatives of first order on the subset  $\omega$ . This particular form will be used in the next section to construct a solution to the analytic control Problem (1.16).

Let  $\omega_0, \omega_1$  and  $\omega_2$  be three nonempty open subsets included in  $\omega$  satisfying

$$\overline{\omega_2} \subset \omega_1, \overline{\omega_1} \subset \omega_0 \text{ and } \overline{\omega_0} \subset \omega.$$

Before stating the Carleman estimate, let us introduce some notations. For  $s, \lambda > 0$ , let us define

$$I(s, \lambda; u) := s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^3 |u|^2 dxdt + s \lambda^2 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi |\nabla u|^2 dxdt, \quad (2.8)$$

where

$$\alpha(t, x) := \frac{\exp(12\lambda \|\eta^0\|_\infty) - \exp[\lambda(10\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^5(T-t)^5} \text{ and } \xi(t, x) := \frac{\exp[\lambda(10\|\eta^0\|_\infty + \eta^0(x))]}{t^5(T-t)^5}. \quad (2.9)$$

Here,  $\eta^0 \in C^2(\overline{\Omega})$  is a function satisfying

$$|\nabla \eta^0| \geq \kappa \text{ in } \Omega \setminus \omega_2, \quad \eta^0 > 0 \text{ in } \Omega \text{ and } \eta^0 = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

with  $\kappa > 0$ . The proof of the existence of such a function  $\eta^0$  can be found in [FI96, Lemma 1.1, Chap. 1] (see also [Cor07, Lemma 2.68, Chap. 2]). We will use the two notations

$$\alpha^*(t) := \max_{x \in \Omega} \alpha(t, x) \text{ and } \xi^*(t) := \min_{x \in \Omega} \xi(t, x), \quad (2.10)$$

for all  $t \in (0, T)$ .

### Some auxiliary results

Let us now give some useful auxiliary results that we will need in our proofs. The first one is a Carleman estimate which holds for solutions of the heat equation with non-homogeneous Neumann boundary conditions:

**Lemma 2.1.** *Let us assume that  $d > 0$ ,  $u^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f_1 \in L^2(Q_T)$  and  $f_2 \in L^2(\Sigma_T)$ . Then there exists a constant  $C := C(\Omega, \omega_2) > 0$  such that the solution to the system*

$$\begin{cases} -\partial_t u - \operatorname{div}(d\nabla u) = f_1 & \text{in } Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f_2 & \text{on } \Sigma_T, \\ u(T, \cdot) = u^0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

satisfies

$$I(s, \lambda; u) \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |u|^2 dxdt + \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} |f_1|^2 dxdt + s \lambda \iint_{\Sigma_T} e^{-2s\alpha^*} \xi^* |f_2|^2 d\sigma dt \right),$$

for all  $\lambda \geq C$  and  $s \geq C(T^5 + T^{10})$ .

The proof of Lemma 2.1 can essentially be found in [FC+06]. In fact, in this article, the weights are a little bit different ( $t(T-t)$  instead of  $t^5(T-t)^5$ ), but the proof just needs to be slightly adapted to obtain the present result.

From Lemma 2.1, one can deduce the following result:

**Lemma 2.2.** *Let  $h \in L^2(\Sigma_T)^m$ . Then there exists a constant  $C := C(\Omega, \omega_2) > 0$  such that for every  $\varphi^0 \in L^2(\Omega)^m$ , the solution  $\varphi$  to the system*

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \operatorname{div}(D\nabla\varphi) - G^* \cdot \nabla\varphi + A^* \varphi & \text{in } Q_T, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = h & \text{on } \Sigma_T, \\ \varphi(T, \cdot) = \varphi^0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

satisfies

$$I(s, \lambda; \varphi) \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\varphi|^2 dxdt + s\lambda \iint_{\Sigma_T} e^{-2s\alpha} \xi^* |h|^2 d\sigma dt \right),$$

for every  $\lambda \geq C$  and  $s \geq s_0 = C(T^5 + T^{10})$ .

The proof of Lemma 2.2 is standard and is left to the reader (one just have to apply Lemma 2.1 separately to all equations of System (2.11), sum of all the Carleman estimates and absorb the remaining lower-order terms thanks to the left-hand side).

In this section, we will use also the following estimate.

**Lemma 2.3.** *Let  $r \in \mathbb{R}$ . Then there exists  $C := C(r, \omega_2, \Omega) > 0$  such that, for every  $T > 0$  and every  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ,*

$$s^{r+2} \lambda^{r+2} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^{r+2} |u|^2 dxdt \leq C \left( s^r \lambda^r \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^r |\nabla u|^2 dxdt + s^{r+2} \lambda^{r+2} \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^{r+2} |u|^2 dxdt \right),$$

for every  $\lambda \geq C$  and  $s \geq C(T^5 + T^{10})$ .

The proof of this lemma can be found for example in [CG09, Lemma 3]. Our next Lemma is some Poincaré-type inequality involving the differential operator  $\mathcal{N}^*$ .

**Lemma 2.4.** *There exists a constant  $C := C(\Omega) > 0$  such that for every  $u \in H_0^1(\Omega)$ , the following estimate holds:*

$$\int_{\Omega} u^2 \leq C \int_{\Omega} |\mathcal{N}^* u|^2, \quad (2.12)$$

where  $\mathcal{N}^* := g_{mi_0} \cdot \nabla - a_{mi_0}$ .

Lemma 2.4 is obvious if  $g_{mi_0} = 0$ . If  $a_{mi_0} = 0$ , this is exactly the usual Poincaré inequality. The case  $a_{mi_0} \neq 0$  and  $g_{mi_0} \neq 0$  can be reduced to the previous case by considering

$$u(x) \exp \left( -\frac{a_{mi_0}}{\|g_{mi_0}\|^2} (g_{mi_0} \cdot x) \right).$$

In order to deal with more regular solutions, one needs the following lemma:

**Lemma 2.5.** *Let  $z_0 \in H_0^1(\Omega)^m$  and  $f \in L^2(Q_T)^m$ . Let us denote by  $\mathcal{R} := -\operatorname{div}(D\nabla \cdot) - G \cdot \nabla - A$  and consider  $z$  the solution in  $W_2^{2,1}(Q_T)^m$  to the system*

$$\begin{cases} \partial_t z = \operatorname{div}(D\nabla z) + G \cdot \nabla z + Az + f & \text{in } Q_T, \\ z = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ z(0, \cdot) = z_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

Let  $d \in \mathbb{N}$ . Let us assume that  $z_0 \in H^{2d+1}(\Omega)^m$ ,  $f \in L^2(0, T; H^{2d}(\Omega)^m) \cap H^d(0, T; L^2(\Omega)^m)$  and satisfy the following compatibility conditions:

$$\begin{cases} g_0 := z_0 \in H_0^1(\Omega)^m, \\ g_1 := f(0, \cdot) - \mathcal{R}g_0 \in H_0^1(\Omega)^m, \\ \dots \\ g_d := \partial_t^{d-1} f(0, \cdot) - \mathcal{R}g_{d-1} \in H_0^1(\Omega)^m. \end{cases}$$

Then  $z \in L^2(0, T; H^{2d+2}(\Omega)^m) \cap H^{d+1}(0, T; L^2(\Omega)^m)$  and we have the estimate

$$\|z\|_{L^2(0, T; H^{2d+2}(\Omega)^m) \cap H^{d+1}(0, T; L^2(\Omega)^m)} \leq C(\|f\|_{L^2(0, T; H^{2d}(\Omega)^m) \cap H^d(0, T; L^2(\Omega)^m)} + \|z_0\|_{H^{2d+1}(\Omega)^m}). \quad (2.14)$$

It is a classical result that can be easily deduced for example from [Eva10, Th. 6, p. 365].

### Carleman inequality

We are now able to prove the following inequality:

**PROPOSITION 2.2.** *There exists a constant  $C := C(\omega_0, \Omega) > 0$  such that for every  $\psi^0 \in L^2(\Omega)^m$ , the corresponding solution  $\psi$  to System (2.7) satisfies*

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \{s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s \lambda^2 \xi |\nabla \nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2\} dx dt \\ \leq C s^7 \lambda^8 \iint_{(0, T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.15)$$

for every  $\lambda \geq C$  and  $s \geq s_0 = C(T^5 + T^{10})$ .

*Remark 2.2.* It may be quite surprising that one can put so much derivatives at the left-hand-side of equality (2.15), because the initial condition  $\psi^0$  is only supposed to be  $L^2$ , hence  $\psi$  is only assumed to be in  $W(0, T)$  (see (1.3)). However, because of the fact that the exponential weight  $e^{-2s\alpha}$  is strong enough to absorb the singularity that only exists at initial time  $t = 0$ , it is quite easy to prove that all the integrals appearing in the left-hand side of (2.15) exist (this can notably be deduced for example from inequalities like (2.26), (2.27) or (2.28)).

### Proof of Proposition 2.2.

The proof is inspired by [CG09]. The main difference here is that we keep  $\mathcal{N}^* \psi$  at the right-hand side, which complicates a little bit the proof. Let us denote by

$$\mathcal{R} := -\operatorname{div}(D\nabla) + G^* \cdot \nabla - A^*. \quad (2.16)$$

We can assume without loss of generality that

$$\psi^0 \in H^5(\Omega) \text{ and } \psi^0, \mathcal{R}\psi^0, \mathcal{R}^2\psi^0 \in H_0^1(\Omega)^m$$

(The general case follows from a density argument). Thus, using Lemma 2.5, the solution  $\psi$  to System (2.7) is an element of  $L^2(0, T; H^6(\Omega)^m) \cap H^3(0, T; L^2(\Omega)^m)$ . First of all, let us apply the differential operator

$$\nabla\nabla\mathcal{N}^* = \nabla\nabla(-a_{mi_0} + g_{mi_0} \cdot \nabla)$$

to System (2.7) satisfied by  $\psi$ . Thus, if we call  $\phi := (\phi_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  with  $\phi_{ij} := \partial_i \partial_j \mathcal{N}^* \psi$ , then one observes that  $\phi$  is a solution of the following system:

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_{ij} = \operatorname{div}(D\nabla\phi_{ij}) - G^* \cdot \nabla\phi_{ij} + A^* \phi_{ij} & \text{in } Q_T, \\ \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial n} = \frac{\partial(\partial_i \partial_j \mathcal{N}^* \psi_{ij})}{\partial n} & \text{on } \Sigma_T, \\ \phi_{ij}(T, \cdot) = \partial_i \partial_j \mathcal{N}^* \psi_{ij}^0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

By applying Lemma 2.2 to  $\phi$ , we have

$$I(s, \lambda, \phi) \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{(0, T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 dx dt + s\lambda \iint_{\Sigma_T} e^{-2s\alpha^*} \xi^* \left| \frac{\partial(\nabla\nabla\mathcal{N}^*\psi)}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \right), \quad (2.18)$$

for every  $\lambda \geq C$  and  $s \geq C(T^5 + T^{10})$ .

The proof will be divided into three steps :

- In the first step, we will estimate the boundary term in the right-hand side of inequality (2.18) with some global interior term involving  $\psi$  that will be absorbed later.
- In the second step, we will compare  $I(s, \lambda, \phi)$  with the left-hand side of inequality (2.15).
- Finally, in the last step, we will estimate the local term of high order appearing in inequality (2.18) thanks to some local terms that will be absorbed in the left-hand side of inequality (2.18) and also thanks to the local term of the right-hand side of inequality (2.15).

**Step 1:** Let us consider a function  $\theta \in C^2(\overline{\Omega})$  such that

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \theta = 1 \text{ on } \partial\Omega.$$

After an integration by parts of the boundary term, we obtain

$$\begin{aligned} & s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt \\ &= s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} \nabla \phi \cdot \nabla \theta d\sigma dt \\ &= s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \int_{\Omega} \Delta \phi \nabla \phi \cdot \nabla \theta dx dt + s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \int_{\Omega} \nabla(\nabla \theta \cdot \nabla \phi) \cdot \nabla \phi dx dt. \end{aligned}$$

Using successively Cauchy-Schwarz inequality and Young's inequality, we deduce that

$$\begin{aligned} s\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \xi^* \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|^2 d\sigma dt &\leq C\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} \|(s\xi^*)^{4/5} \psi\|_{H^4(\Omega)^m} \|(s\xi^*)^{1/5} \psi\|_{H^5(\Omega)^m} dt \\ &\leq C\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{8/5} \|\psi\|_{H^4(\Omega)^m}^2 dt \\ &\quad + C\lambda \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{2/5} \|\psi\|_{H^5(\Omega)^m}^2 dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Let us introduce  $\hat{\psi} := \rho\psi$  with  $\rho \in C^\infty([0, T])$  defined by

$$\rho := (s\xi^*)^a e^{-s\alpha^*},$$

for some  $a \in \mathbb{R}$  to be chosen later.

One remark that  $\rho$  verifies  $\partial_t^i \rho(0) = 0$  for all  $i \in \mathbb{N}$ . Then  $\hat{\psi}$  is solution to the system

$$\begin{cases} -\partial_t \hat{\psi} = \operatorname{div}(D\nabla \hat{\psi}) - G^* \cdot \nabla \hat{\psi} + A^* \hat{\psi} - \rho_t \psi & \text{in } Q_T, \\ \hat{\psi} = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \hat{\psi}(T, \cdot) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.20)$$

Lemma 2.5 gives for  $\hat{\psi}$  the estimate

$$\|\hat{\psi}\|_{L^2(0, T; H^{2d+2}(\Omega)^m) \cap H^{d+1}(0, T; L^2(\Omega)^m)} \leq C \|\rho_t \psi\|_{L^2(0, T; H^{2d}(\Omega)^m) \cap H^d(0, T; L^2(\Omega)^m)}, \quad (2.21)$$

for  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Using the definitions of  $\xi^*$  and  $\alpha^*$  given in (2.10) and the particular form of  $\rho$  chosen, we have

$$|\partial_t \rho| \leq CT (s\xi^*)^{a+6/5} e^{-s\alpha^*}, \quad (2.22)$$

$$|\partial_{tt} \rho| \leq CT^2 (s\xi^*)^{a+12/5} e^{-s\alpha^*} \quad (2.23)$$

and

$$|\partial_{ttt} \rho| \leq CT^3 (s\xi^*)^{a+18/5} e^{-s\alpha^*}. \quad (2.24)$$

Using inequality (2.21) with  $\rho := e^{-s\alpha^*} (s\xi^*)^{4/5}$  and  $d = 1$ , we obtain

$$\begin{aligned} &\int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{8/5} \|\psi\|_{H^4(\Omega)^m}^2 dt \\ &\leq C \left( \int_0^T \|\partial_t (e^{-s\alpha^*} (s\xi^*)^{4/5}) \psi\|_{H^2(\Omega)^m}^2 dt + \int_0^T \|\partial_t (\partial_t (e^{-s\alpha^*} (s\xi^*)^{4/5}) \psi)\|_{L^2(\Omega)^m}^2 dt \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Applying now inequality (2.21) with  $\rho := \partial_t (e^{-s\alpha^*} (s\xi^*)^{4/5})$  and  $d = 0$ , we get

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|\partial_t (e^{-s\alpha^*} (s\xi^*)^{4/5}) \psi\|_{H^2(\Omega)^m}^2 dt + \int_0^T \|\partial_t (\partial_t (e^{-s\alpha^*} (s\xi^*)^{4/5}) \psi)\|_{L^2(\Omega)^m}^2 dt \\ &\leq C \int_0^T \|\partial_{tt} (e^{-s\alpha^*} (s\xi^*)^{4/5}) \psi\|_{L^2(\Omega)^m}^2 dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Using (2.23) with  $a = 4/5$  together with (2.26) and (2.25), we deduce

$$\int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{8/5} \|\psi\|_{H^4(\Omega)^m}^2 dt \leq CT^2 \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{32/5} \|\psi\|_{L^2(\Omega)^m}^2 dt. \quad (2.27)$$

Using exactly the same proof and taking into account (2.24), one can also prove that

$$\int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{-4/5} \|\psi\|_{H^6(\Omega)^m}^2 dt \leq CT^3 \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{32/5} \|\psi\|_{L^2(\Omega)^m}^2 dt. \quad (2.28)$$

Using inequalities (2.27) and (2.28), the interpolation inequality

$$\|u\|_{H^5(\Omega)^m} \leq C \|u\|_{H^4(\Omega)^m}^{1/2} \|u\|_{H^6(\Omega)^m}^{1/2} \text{ for every } u \in H^6(\Omega)^m,$$

and the Cauchy-Schwarz inequality, we deduce that

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{2/5} \|\psi\|_{H^5(\Omega)^m}^2 dt &\leq C \int_0^T \|e^{-s\alpha^*} (s\xi^*)^{-2/5} \psi\|_{H^6(\Omega)^m} \|e^{-s\alpha^*} (s\xi^*)^{4/5} \psi\|_{H^4(\Omega)^m} dt \\ &\leq CT^{5/2} \int_0^T e^{-2s\alpha^*} (s\xi^*)^{32/5} \|\psi\|_{L^2(\Omega)^m}^2 dt. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Thus inequalities (2.18), (2.19), (2.27) and (2.29) lead to

$$\begin{aligned} I(s, \lambda; \phi) &\leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 dxdt \right. \\ &\quad \left. + \lambda s^{32/5} (T^2 + T^{5/2}) \int_{Q_T} e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^{32/5} |\psi|^2 dxdt \right), \end{aligned}$$

for every  $s \geq C(T^5 + T^{10})$  and  $\lambda \geq C$ . Hence, since

$$T^2 + T^{5/2} \leq Cs^{2/5},$$

we have

$$I(s, \lambda; \phi) \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\phi|^2 dxdt + \lambda s^{34/5} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^{34/5} |\psi|^2 dxdt \right), \quad (2.30)$$

for every  $s \geq C(T^5 + T^{10})$  and  $\lambda \geq C$ .

**Step 2:** We apply Lemma 2.3 successively to  $\mathcal{N}^* \psi$  with  $r = 5$ , then to  $\nabla \mathcal{N}^* \psi$  with  $r = 3$ , and we obtain

$$\begin{aligned} s^7 \lambda^8 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt &\leq C \left( s^5 \lambda^6 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt \right. \\ &\quad \left. + s^7 \lambda^8 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

and

$$\begin{aligned} s^5 \lambda^6 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt &\leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt \right. \\ &\quad \left. + s^5 \lambda^6 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$



for every  $\lambda \geq C$  and  $s \geq C(T^5 + T^{10})$ . A combination of inequalities (2.30)-(2.32) gives

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \{s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s \lambda^2 \xi |\nabla \nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2\} dxdt \\ & \leq C \left( \lambda s^{34/5} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} (\xi^*)^{34/5} |\psi|^2 dxdt \right. \\ & \quad \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \{s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2\} dxdt \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

**Step 3:** Let us consider  $\theta_1 \in C^2(\bar{\Omega})$  such that

$$\begin{cases} \text{Supp}(\theta_1) \subseteq \omega_1, \\ \theta_1 \equiv 1 & \text{in } \omega_2, \\ 0 \leq \theta_1 \leq 1 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Then, after an integration by parts,

$$\begin{aligned} & s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt \\ & \leq s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_1} \theta_1 e^{-2s\alpha} \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt \\ & = -s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_1} \sum_{i,j=1}^N \{ \partial_i (\theta_1 e^{-2s\alpha} \xi^3) \partial_i \partial_j \mathcal{N}^* \psi + \theta_1 e^{-2s\alpha} \xi^3 \partial_i^2 \partial_j \mathcal{N}^* \psi \} \partial_j (\mathcal{N}^* \psi) dxdt \\ & \leq C s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_1} \{ |\nabla (\theta_1 e^{-2s\alpha} \xi^3)| |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi| |\nabla \mathcal{N}^* \psi| + \theta_1 e^{-2s\alpha} \xi^3 |\nabla \nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi| |\nabla \mathcal{N}^* \psi| \} dxdt. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Using the definition of  $\xi$  and  $\alpha$  given in (2.9), we deduce that

$$|\nabla (\theta_1 e^{-2s\alpha} \xi^3)| \leq C s \lambda e^{-2s\alpha} \xi^4, \quad (2.35)$$

which, combined with Young's inequality, leads, for every  $\varepsilon > 0$ , to

$$\begin{aligned} & s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dxdt \\ & \leq C \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \{ \varepsilon s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + \varepsilon s \lambda^2 \xi |\nabla \nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + C_\varepsilon s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 \} dxdt, \end{aligned} \quad (2.36)$$

where  $C_\varepsilon$  depends only on  $\varepsilon$ . Thus, thanks to inequalities (2.33) and (2.34), one can absorb (by taking  $\varepsilon$  small enough) the local terms involving  $|\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2$  and  $|\nabla \nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2$  into the

right-hand side of inequality (2.36) and obtain

$$\begin{aligned}
 & \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \{s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s \lambda^2 \xi |\nabla \nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2\} dx dt \\
 & \leq C \left( \lambda s^{34/5} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^{34/5} |\psi|^2 dx dt \right. \\
 & \quad \left. + \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \{s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2\} dx dt \right).
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Using exactly the same reasoning we just performed for the term

$$s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dx dt,$$

one can also absorb the term  $s^5 \lambda^6 \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 dx dt$  in the right-hand side of (2.37) and we obtain

$$\begin{aligned}
 & \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \{s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s \lambda^2 \xi |\nabla \nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2\} dx dt \\
 & \leq C \left( \lambda s^{34/5} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^{34/5} |\psi|^2 dx dt + s^7 \lambda^8 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 dx dt \right).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Applying now Lemma 2.4, and using the definitions of  $\alpha^*$  and  $\xi^*$  given in (2.10), we obtain the following inequalities:

$$\begin{aligned}
 s^7 \lambda^8 \iint_{Q_T} (\xi^*)^7 e^{-2s\alpha^*} |\psi|^2 dx dt & \leq C s^7 \lambda^8 \iint_{Q_T} (\xi^*)^7 e^{-2s\alpha^*} |\mathcal{N}^* \psi|^2 dx dt \\
 & \leq C s^7 \lambda^8 \iint_{Q_T} \xi^7 e^{-2s\alpha} |\mathcal{N}^* \psi|^2 dx dt.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

The two last inequalities (2.38) and (2.39) give

$$\begin{aligned}
 & s^7 \lambda^8 \iint_{Q_T} (\xi^*)^7 e^{-2s\alpha^*} |\psi|^2 dx dt \\
 & + \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \{s^7 \lambda^8 \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2 + s \lambda^2 \xi |\nabla \nabla \nabla \mathcal{N}^* \psi|^2\} dx dt \\
 & \leq C \left( \lambda s^{34/5} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha^*} (\xi^*)^{34/5} |\psi|^2 dx dt + s^7 \lambda^8 \iint_{(0,T) \times \omega_0} e^{-2s\alpha} \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 dx dt \right).
 \end{aligned}$$

Hence, since  $34/5 < 7$ , one can absorb the global term of the right-hand side by taking  $s$  large enough and obtain inequality (2.15). ■

Thanks to our Carleman inequality, we can deduce the following observability inequality:

**PROPOSITION 2.3.** *Then for every  $\psi^0 \in L^2(\Omega)^m$ , the solution  $\psi$  in  $W(0, T)^m$  to System (2.7) satisfies*

$$\int_{\Omega} |\psi(0, x)|^2 dx \leq C_{obs} \iint_{(0, T) \times \omega_0} e^{-2s_0 \alpha} \xi^7 |\mathcal{N}^* \psi|^2 dx dt, \quad (2.40)$$

where  $C_{obs} := Ce^{C(1+T+1/T^5)}$ .

The proof of Proposition 2.3 is very classical and is mainly based on dissipation estimates and the fact that the weights are bounded from below by some positive constant as soon as we are far from 0 and  $T$  (for example on  $(T/4, 3T/4)$ , together with the fact that Lemma 2.4 leads to the inequality

$$\iint_{(T/4, 3T/4) \times \Omega} |\psi|^2 dx dt \leq C \iint_{(T/4, 3T/4) \times \Omega} |\mathcal{N}^* \psi|^2 dx dt.$$

### 2.3 Analytic resolution

This section is devoted to constructing a solution to the analytic control problem (1.16), with a control regular enough belonging to the range of the differential operator  $\mathcal{N}$ . We recall that the definition of  $\mathcal{N}$  is given in (2.2). Let us consider  $\theta \in C^2(\bar{\Omega})$  such that

$$\begin{cases} \text{Supp}(\theta) \subseteq \omega, \\ \theta \equiv 1 & \text{in } \omega_0, \\ 0 \leq \theta \leq 1 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.41)$$

**PROPOSITION 2.4.** *Let us assume that Condition (2.1) holds. Consider the system*

$$\begin{cases} \partial_t z = \text{div}(D\nabla z) + G \cdot \nabla z + Az + \mathcal{N}(\theta v) & \text{in } Q_T, \\ z = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ z(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (2.42)$$

Then System (2.42) is null controllable at time  $T$ , i.e. for every  $y^0 \in L^2(\Omega)^m$ , there exists a control  $v \in L^2(Q_T)^m$  such that the solution  $z$  to System (2.42) satisfies  $z(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Moreover, for every  $K \in (0, 1)$ , we have  $e^{Ks_0 \alpha^*} v \in W_2^{2,1}(Q_T)^m$  (the definition of  $W_2^{2,1}(Q_T)$  is given in (1.4)) and

$$\|e^{Ks_0 \alpha^*} v\|_{W_2^{2,1}(Q_T)^m} \leq e^{C(1+T+1/T^5)} \|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}. \quad (2.43)$$

#### Proof of Proposition 2.4.

We will use the usual duality method developed by Fursikov and Imanuvilov in [FI96] in the spirit of what was done in [Bar00] to obtain more regular controls. Let  $y^0 \in L^2(\Omega)^m$  and  $\rho$  be the weight defined by

$$\rho := \xi^7 e^{-2s_0 \alpha}.$$

Let  $k \in \mathbb{N}^*$  and let us consider the following optimal control problem

$$\begin{cases} \text{minimize } J_k(v) := \frac{1}{2} \int_{Q_T} \rho^{-1} |v|^2 dx dt + \frac{k}{2} \int_{\Omega} |z(T)|^2 dx, \\ v \in L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m, \end{cases} \quad (2.44)$$

where  $z$  is the solution in  $W(0, T)^m$  to System (2.42).

The functional  $J_k : L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m \rightarrow \mathbb{R}^+$  is differentiable, coercive and strictly convex on the space  $L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m$ . Therefore there exists a unique solution to the control optimal problem (2.44) (see [Lio68, p. 128]) and the optimal control  $v_k$  is characterized thanks to the solution  $z_k$  of the primal system

$$\begin{cases} \partial_t z_k = \operatorname{div}(D\nabla z)_k + G \cdot \nabla z_k + Az_k + \mathcal{N}(\theta v_k) & \text{in } Q_T, \\ z_k = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ z_k(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (2.45)$$

the solution  $\varphi_k$  to the dual system

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi_k = \operatorname{div}(D\nabla \varphi)_k - G^* \cdot \nabla \varphi_k + A^* \varphi_k & \text{in } Q_T, \\ \varphi_k = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \varphi_k(T, \cdot) = kz_k(T, \cdot) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (2.46)$$

and the relation

$$\begin{cases} v_k = -\rho \theta \mathcal{N}^* \varphi_k & \text{in } Q_T, \\ v_k \in L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m. \end{cases} \quad (2.47)$$

The rest of the proof is divided into two steps. In the first step, we will prove that the sequence  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converges to a control  $v \in L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m$  with an associated solution  $z$  to System (2.42) satisfying  $z(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Then, in the second step, we will establish (2.43).

### Step 1:

Firstly, the characterization (2.45), (2.46) and (2.47) of the minimizer  $v_k$  of  $J_k$  in  $L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m$  leads to the following computations

$$\begin{aligned} J_k(v_k) &= -\frac{1}{2} \int_0^T \langle \theta \mathcal{N}^* \varphi_k, v_k \rangle_{L^2(\Omega)^m} dt + \frac{1}{2} \langle z_k(T), \varphi_k(T) \rangle_{L^2(\Omega)^m} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \langle \varphi_k, \mathcal{N}(\theta v_k) \rangle_{L^2(\Omega)^m} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \{ \langle z_k, \partial_t \varphi_k \rangle_{L^2(\Omega)^m} + \langle \partial_t z_k, \varphi_k \rangle_{L^2(\Omega)^m} \} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle y^0, \varphi_k(0, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega)^m} \\ &= \frac{1}{2} \langle y^0, \varphi_k(0, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega)^m}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Moreover, using the definition of  $J_k$ , the definition of  $\theta$ , our observability inequality (2.40), the expression (2.48) and the Cauchy-Schwarz inequality, we infer

$$\begin{aligned} \|\varphi_k(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^m}^2 &\leq C_{obs} \iint_{Q_T} \rho \theta^2 |\mathcal{N}^* \varphi_k|^2 dx dt = C_{obs} \iint_{Q_T} \rho^{-1} |v_k|^2 dx dt \\ &\leq 2C_{obs} J_k(v_k) \leq 2C_{obs} \|\varphi_k(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^m} \|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}, \end{aligned}$$

from which we deduce

$$\|\varphi_k(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)^m} \leq 2C_{obs} \|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}. \quad (2.49)$$

Then, using (2.48) and (2.49), we deduce

$$J_k(v_k) \leq C_{obs} \|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}^2. \quad (2.50)$$

Furthermore, we have (see [Lio68])

$$\begin{aligned} \|z_k\|_{W(0,T)^m} &\leq C (\|\mathcal{N}(\theta v_k)\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))^m} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}), \\ &\leq C (\|v_k\|_{L^2(Q_T)} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}), \\ &\leq C(1 + C_{obs})\|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

where  $C$  does not depend on  $y^0$  and  $k$ . Then, using inequalities (2.50) and (2.51), we deduce that there exist subsequences, which are still denoted  $v_k, z_k$ , such that the following weak convergences hold:

$$\begin{cases} v_k \rightharpoonup v & \text{in } L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m, \\ z_k \rightharpoonup z & \text{in } W(0, T)^m, \\ z_k(T) \rightharpoonup 0 & \text{in } L^2(\Omega)^m. \end{cases}$$

Passing to the limit in  $k$ ,  $z$  is solution to System (2.42). Moreover, using the expression of  $J_k$  given in (2.44) and inequality (2.50), we deduce by letting  $k$  going to  $\infty$  that  $z(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Thus the solution  $z$  to System (2.42) with control  $v \in L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m$  satisfies  $z(T) \equiv 0$  in  $\Omega$  and using (2.50), we obtain the inequality

$$\|v\|_{L^2(Q_T, \rho^{-1/2})^m}^2 \leq C_{obs} \|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}^2. \quad (2.52)$$

**Step 2:** One remarks that for every  $K \in (0, 1)$ , there exists a constant  $C > 0$  such that

$$e^{2Ks_0\alpha^*} \leq C \xi^{-7} e^{2s_0\alpha}.$$

This inequality and estimate (2.50) imply that

$$\|e^{Ks_0\alpha^*} v_k\|_{L^2(Q_T)^m}^2 \leq C \int_{Q_T} \xi^{-7} e^{2s_0\alpha} |v_k|^2 dxdt \leq J_k(v_k) \leq e^{C(1+T+1/T^5)} \|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}^2. \quad (2.53)$$

We recall that  $v_k$  is defined in (2.47), moreover, thanks to the definitions of  $\xi$  and  $\alpha$  given in (2.9), one has, for every  $\eta \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |\nabla(\xi^\eta e^{-2s_0\alpha})| &\leq C \xi^{\eta+1} e^{-2s_0\alpha}, \\ |\Delta(\xi^\eta e^{-2s_0\alpha})| &\leq C \xi^{\eta+2} e^{-2s_0\alpha}, \\ |\partial_t(\xi^\eta e^{-2s_0\alpha})| &\leq CT \xi^{\eta+6/5} e^{-2s_0\alpha}. \end{aligned}$$

These above inequalities, for  $\eta := 7$ , lead to the fact that

$$\|e^{Ks_0\alpha^*} \nabla v_k\|_{L^2(Q_T)^m}^2 \leq C \iint_{Q_T} e^{-4s_0\alpha+2Ks_0\alpha^*} \{\xi^{14} |\nabla \mathcal{N}^* \varphi_k|^2 + \xi^{16} |\mathcal{N}^* \varphi_k|^2\} dxdt, \quad (2.54)$$

$$\|e^{Ks_0\alpha^*} \Delta v_k\|_{L^2(Q_T)^m}^2 \leq C \iint_{Q_T} e^{-4s_0\alpha+2Ks_0\alpha^*} \{\xi^{14} |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \varphi_k|^2 + \xi^{16} |\nabla \mathcal{N}^* \varphi_k|^2 + \xi^{18} |\mathcal{N}^* \varphi_k|^2\} dxdt \quad (2.55)$$

and

$$\begin{aligned} \|\partial_t(e^{Ks_0\alpha^*} v_k)\|_{L^2(Q_T)^m}^2 &\leq CT \iint_{Q_T} e^{-4s_0\alpha+2Ks_0\alpha^*} \{\xi^{14} |\mathcal{N}^* \partial_t \varphi_k|^2 + \xi^{82/5} |\mathcal{N}^* \varphi_k|^2\} dxdt \\ &\leq CT \iint_{Q_T} e^{-4s_0\alpha+2Ks_0\alpha^*} \{\xi^{14} (|\mathcal{N}^* \varphi_k|^2 + |\Delta \mathcal{N}^* \varphi_k|^2 + |\nabla \mathcal{N}^* \varphi_k|^2) + \xi^{82/5} |\mathcal{N}^* \varphi_k|^2\} dxdt. \end{aligned} \quad (2.56)$$

For every  $\eta, \nu > 0$  there exists a constant  $C_{\eta, \nu}$  such that

$$|\xi \eta e^{-4s\alpha + 2Ks_0\alpha^*}| \leq C_{\eta, \nu} \xi^\nu e^{-2s\alpha}.$$

Combining the last inequality with (2.53)-(2.56), we deduce that

$$\begin{aligned} & \|e^{Ks_0\alpha^*} v_k\|_{W_2^{2,1}(Q_T)^m}^2 \\ & \leq e^{C(1+T+1/T^5)} \iint_{Q_T} e^{-2s_0\alpha} \{ \xi^7 |\mathcal{N}^* \varphi_k|^2 + \xi^5 |\nabla \mathcal{N}^* \varphi_k|^2 + \xi^3 |\nabla \nabla \mathcal{N}^* \varphi_k|^2 \} dx dt. \end{aligned}$$

Using (2.15), we obtain that  $e^{Ks_0\alpha^*} \nabla v_k, e^{Ks_0\alpha^*} \Delta v_k, \partial_t(e^{Ks_0\alpha^*} v_k) \in L^2(Q_T)^m$ , and that

$$\|e^{Ks_0\alpha^*} v_k\|_{W_2^{2,1}(Q_T)^m}^2 \leq e^{C(1+T+1/T^5)} \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \xi^7 |\theta \mathcal{N}^* \varphi_k|^2 dx dt = e^{C(1+T+1/T^5)} \|v_k\|_{L^2(Q_T)^m}^2.$$

The estimate (2.50) of  $v_k$  gives

$$\|e^{Ks_0\alpha^*} v_k\|_{W_2^{2,1}(Q_T)^m} \leq e^{C(1+T+1/T^5)} \|y^0\|_{L^2(\Omega)^m}.$$

We conclude by letting  $k \rightarrow +\infty$  (after extracting an adequate subsequence) in the inequalities above. ■

## 2.4 End of the proof of Theorem 1.1

Let us assume that Condition 1.5 holds. We will prove first the null controllability at time  $T$  of System (1.1). Let  $y^0 \in L^2(\Omega)^m$ . We follow the method explained in Section 1.4. Let us remind that  $\theta$  is defined in (2.41). Using Proposition 2.4, the following system:

$$\begin{cases} \partial_t z = \operatorname{div}(D\nabla z) + G \cdot \nabla z + Az + \mathcal{N}(\theta v) & \text{in } Q_T, \\ z = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ z(0, \cdot) = y^0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (2.57)$$

is null controllable at time  $T$ , thus there exists a control  $v \in L^2(Q_T)^m$  such that the solution  $z$  in  $W(0, T)^m$  to System (2.57) satisfies

$$z(T) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

Moreover

$$e^{Ks_0\alpha^*} v \in W_2^{2,1}(Q_T)^m. \quad (2.58)$$

Taking into account Proposition 2.1 and the definition of  $\mathcal{M}^*$  given in (2.6), one has (2.3) with the operator

$$\begin{aligned} \mathcal{M}: W_2^{2,1}(Q_T)^m & \rightarrow L^2(Q_T)^m \times L^2(Q_T)^{m-1} \\ f & \mapsto \mathcal{M}f, \end{aligned}$$

defined by

$$\mathcal{M}f = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_m \quad (i_0^{\text{th}} \text{ line}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -(g_{mi_0} \cdot \nabla + a_{mi_0})f_1 + (g_{1i_0} \cdot \nabla + a_{1i_0})f_m \\ \vdots \\ -(g_{mi_0} \cdot \nabla + a_{mi_0})f_{i_0-1} + (g_{(i_0-1)i_0} \cdot \nabla + a_{(i_0-1)i_0})f_m \\ (-\partial_t + \operatorname{div}(d_{i_0} \nabla f_m) - (g_{mi_0} \cdot \nabla + a_{mi_0})f_{i_0} + (g_{i_0i_0} \cdot \nabla + a_{i_0i_0})f_m \\ -(g_{mi_0} \cdot \nabla + a_{mi_0})f_{i_0+1} + (g_{(i_0+1)i_0} \cdot \nabla + a_{(i_0+1)i_0})f_m \\ \vdots \\ -(g_{mi_0} \cdot \nabla + a_{mi_0})f_{m-1} + (g_{(m-1)i_0} \cdot \nabla + a_{(m-1)i_0})f_m \end{pmatrix}.$$

Let  $(\hat{z}, \hat{v})$  be defined by

$$\begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{v} \end{pmatrix} := \mathcal{M}(\theta v).$$

Using (2.58) and the fact that  $\mathcal{M}$  is a differential operator of order 1 in time and 2 in space (see Proposition 2.1) with bounded coefficients, we obtain that  $(\hat{z}, \hat{v}) \in L^2(Q_T)^m \times L^2(Q_T)^{m-1}$ . Moreover, using (2.58), we have  $\hat{z}(0, \cdot) = \hat{z}(T, \cdot) = 0$  in  $\Omega$  and we remark that  $(\hat{z}, \hat{v})$  is a solution to the control problem

$$\begin{cases} \partial_t \hat{z} = \operatorname{div}(D\nabla \hat{z}) + G \cdot \nabla \hat{z} + A\hat{z} + B\hat{v} + \mathcal{N}(\theta v) & \text{in } Q_T, \\ \hat{z} = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \hat{z}(0, \cdot) = \hat{z}(T, \cdot) = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (2.59)$$

in particular  $\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = \mathcal{N}$ . Finally,  $(\hat{z}, \hat{v}) \in W(0, T)^m \times L^2(Q_T)^{m-1}$  thanks to the usual parabolic regularity. Thus the pair  $(y, u) := (z - \hat{z}, -\hat{v})$  is a solution to System (1.1) in  $W(0, T)^m \times L^2(Q_T)^{m-1}$  and satisfies

$$y(T, \cdot) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

### 3 Proof of Theorem 1.2

Let us remind that in this case, we have only 2 equations.

#### 3.1 Algebraic resolution

We will assume in this section that all differential operators are defined in  $C^\infty(Q_T)^2$ . We recall that  $\mathcal{N}$  is simply the identity operator and  $\mathcal{L}$  is given in (1.20). We want to find a differential operator  $\mathcal{M}$  satisfying

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{M} = Id. \quad (3.1)$$

Let us emphasize that when coefficients are depending on time and space, we prove equality (1.21) with the identity operator in the right-hand side (and not  $\mathcal{N}$  as defined in (2.2)), that is equality (3.1), because Proposition 2.4 holds only for constant coefficients and does not seem to be adapted to the case of non-constant coefficients. We have the following proposition:

**PROPOSITION 3.1.** *One has*

- (i) *Under Conditions (1.7) and (1.10), there exists a differential operator  $\mathcal{M}$  of order at most 1 in time and 2 in space, with bounded coefficients on  $(a, b) \times \mathcal{O}$ , such that equality (3.1) holds.*
- (ii) *If  $N = 1$  and under Condition (1.8) and (1.11), there exists a differential operator  $\mathcal{M}$  of order at most 2 in time, 4 in space, and 1 – 2 respectively in crossed space-time, with bounded coefficients on  $(a, b) \times \mathcal{O}$ , such that equality (3.1) holds.*

**Proof of Proposition 3.1.**

Equality (3.1) is equivalent to

$$\mathcal{M}^* \circ \mathcal{L}^* = Id. \quad (3.2)$$

Taking into account the definition of  $\mathcal{L}$  given in (1.20), the adjoint  $\mathcal{L}^*$  of the operator  $\mathcal{L}$  is given by

$$\mathcal{L}^* \varphi := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1^* \varphi \\ \mathcal{L}_2^* \varphi \\ \mathcal{L}_3^* \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_t \varphi_1 - \operatorname{div}(d_1 \nabla \varphi_1) + \operatorname{div}(g_{11} \varphi_1) + \operatorname{div}(g_{21} \varphi_2) - a_{11} \varphi_1 - a_{21} \varphi_2 \\ -\partial_t \varphi_2 - \operatorname{div}(d_2 \nabla \varphi_2) + \operatorname{div}(g_{12} \varphi_1) + \operatorname{div}(g_{22} \varphi_2) - a_{12} \varphi_1 - a_{22} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

We remark first that

$$\mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \operatorname{div}(d_1 \nabla \cdot) - \operatorname{div}(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi = \operatorname{div}(g_{21} \varphi_2) - a_{21} \varphi_2. \quad (3.4)$$

- (i) Let us consider some open subset  $\tilde{\mathcal{O}}$  included in  $\mathcal{O}$  on which we have  $|a_{21}| \geq C > 0$  (such an open subset exists thanks to (1.7)). Since  $g_{21} = 0$  in  $(a, b) \times \mathcal{O}$ , one can just consider  $\mathcal{M}^*$  defined for every  $\psi := (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in C^\infty(Q_T)^3$ , locally on  $(a, b) \times \tilde{\mathcal{O}}$ , by

$$\mathcal{M}^* \psi := \begin{pmatrix} \psi_3 \\ -\frac{\psi_1 + \{\partial_t + \operatorname{div}(d_1 \nabla \cdot) - \operatorname{div}(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \psi_3}{a_{21}} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

so that equality (3.2) is satisfied. Moreover, the coefficients of  $\mathcal{M}^*$  (and hence of  $\mathcal{M}$ ) are bounded.

- (ii) If  $N = 1$  and under Condition (1.8), one can proceed as follows: we consider the operator

$$\mathcal{Q}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_3^* \varphi \\ \mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \partial_x(d_1 \partial_x \cdot) - \partial_x(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi \\ \partial_x(\mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \partial_x(d_1 \partial_x \cdot) - \partial_x(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi) \\ \partial_t(\mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \partial_x(d_1 \partial_x \cdot) - \partial_x(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi) \\ \partial_{xx}(\mathcal{L}_1^* \varphi + \{\partial_t + \partial_x(d_1 \partial_x \cdot) - \partial_x(g_{11} \cdot) + a_{11}\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi) \\ \mathcal{L}_2^* \varphi + \{a_{12} - \partial_x(g_{12} \cdot)\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi, \\ \partial_x(\mathcal{L}_2^* \varphi + \{a_{12} - \partial_x(g_{12} \cdot)\} \circ \mathcal{L}_3^* \varphi) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$



i.e.

$$\mathbf{Q}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ (-a_{21} + \partial_x g_{21})\varphi_2 + g_{21}\partial_x \varphi_2 \\ (-\partial_x a_{21} + \partial_{xx} g_{21})\varphi_2 + (-a_{21} + 2\partial_x g_{21})\partial_x \varphi_2 + g_{21}\partial_{xx} \varphi_2 \\ (-\partial_t a_{21} + \partial_{tx} g_{21})\varphi_2 + \partial_t g_{21}\partial_x \varphi_2 + (-a_{21} + \partial_x g_{21})\partial_t \varphi_2 + g_{21}\partial_{xt} \varphi_2 \\ (-\partial_{xx} a_{21} + \partial_{xxx} g_{21})\varphi_2 + (-2\partial_x a_{21} + 3\partial_{xx} g_{21})\partial_x \varphi_2 + (-a_{21} + 3\partial_x g_{21})\partial_{xx} \varphi_2 + g_{21}\partial_{xxx} \varphi_2 \\ (-a_{22} + \partial_x g_{22})\varphi_2 + (-\partial_x d_2 + g_{22})\partial_x \varphi_2 - \partial_t \varphi_2 - d_2 \partial_{xx} \varphi_2 \\ (-\partial_x a_{22} + \partial_{xx} g_{22})\varphi_2 + (-\partial_{xx} d_2 - a_{22} + 2\partial_x g_{22})\partial_x \varphi_2 + (-2\partial_x d_2 + g_{22})\partial_{xx} \varphi_2 - \partial_{tx} \varphi_2 - d_2 \partial_{xxx} \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

It is easy to see that there are only 7 different derivatives of  $\varphi$  appearing in (3.6), which are the following ones:

$$\varphi_1, \varphi_2, \partial_x \varphi_2, \partial_t \varphi_2, \partial_{xx} \varphi_2, \partial_{xt} \varphi_2, \partial_{xxx} \varphi_2.$$

Hence, we can see the operator  $\mathbf{Q}$  as a matrix  $M$  acting on these derivatives (see [CL14, Sec. 3.2]), so that  $M$  is a square matrix of size  $7 \times 7$ . More precisely, one has

$$\mathbf{Q}(\varphi) = M(\varphi_1, \varphi_2, \partial_x \varphi_2, \partial_t \varphi_2, \partial_{xx} \varphi_2, \partial_{xt} \varphi_2, \partial_{xxx} \varphi_2), \quad (3.8)$$

with

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{21} + \partial_x g_{21} & g_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_x a_{21} + \partial_{xx} g_{21} & -a_{21} + 2\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_t a_{21} + \partial_{tx} g_{21} & \partial_t g_{21} & -a_{21} + \partial_x g_{21} & 0 & g_{21} & 0 \\ 0 & -\partial_{xx} a_{21} + \partial_{xxx} g_{21} & -2\partial_x a_{21} + 3\partial_{xx} g_{21} & 0 & -a_{21} + 3\partial_x g_{21} & 0 & g_{21} \\ 0 & -a_{22} + \partial_x g_{22} & -\partial_x d_2 + g_{22} & -1 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_x a_{22} + \partial_{xx} g_{22} & -\partial_{xx} d_2 - a_{22} + 2\partial_x g_{22} & 0 & -2\partial_x d_2 + g_{22} & -1 & -d_2 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Matrix  $M$  is invertible since Condition (1.8) is verified. Let us call  $P$  the projection on the two first components

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (x_1, x_2).$$

Then, by definition of the inverse, we have

$$PM^{-1}M(\varphi_1, \dots, \partial_{xxx} \varphi_2) = \varphi.$$

The expression of  $\mathbf{Q}$  given in (3.8) leads to

$$PM^{-1}\mathbf{Q}(\varphi) = \varphi.$$

If we denote by  $\mathcal{R}_1 := \partial_t + \partial_x(d_1 \partial_x \cdot) - \partial_x(g_{11} \cdot) + a_{11}$  and  $\mathcal{R}_2 := a_{12} - \partial_x(g_{12} \cdot)$ , using (3.6), we remark that the previous equality can be rewritten as

$$PM^{-1}\mathcal{S} \circ \mathcal{L}^* \varphi = \varphi,$$

where

$$\mathcal{S} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \mathcal{R}_1 \\ \partial_x & 0 & \partial_x \circ \mathcal{R}_1 \\ \partial_t & 0 & \partial_t \circ \mathcal{R}_1 \\ \partial_{xx} & 0 & \partial_{xx} \circ \mathcal{R}_1 \\ 0 & 1 & \mathcal{R}_2 \\ 0 & \partial_x & \partial_x \circ \mathcal{R}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Hence equality (3.2) is satisfied for

$$\mathcal{M}^* := PM^{-1}\mathcal{S}. \quad (3.11)$$

Moreover, thanks to Conditions (1.8), the coefficients of  $\mathcal{M}^*$  (and hence of  $\mathcal{M}$ ) are bounded. ■

*Remark 3.1.* The most important point in the construction of  $Q$  is to differentiate enough time the equations as in (3.6) in order to obtain the same number equations than “unknowns”, the unknowns being  $\varphi$  and its derivatives seen as independent algebraic variables (see notably [CL14, Section 3.2.2] for further explanations). One can check that this cannot be performed by differentiating the equations less times.

### 3.2 Analytic resolution

Let  $\omega_1$  be a nonempty open subsets included in  $\omega$  satisfying

$$\overline{\omega_1} \subset \omega_0.$$

Let us consider  $\theta \in C^2(\overline{\Omega})$  such that

$$\begin{cases} \text{Supp}(\theta) \subseteq \omega_0, \\ \theta \equiv 1 & \text{in } \omega_1, \\ 0 \leq \theta \leq 1 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (3.12)$$

We are going to explain what are the main differences with Subsection 2.2 in order to obtain a Carleman inequality. First of all, we need to find an equivalent to Lemma 2.1, which is the following:

**Lemma 3.1.** *Let us assume that  $u^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $f_1 \in L^2(Q_T)$  and  $d \in W^1_\infty(Q_T)$  such that  $d > C > 0$  in  $Q_T$ . Then there exists a constant  $C := C(\Omega, \omega_2) > 0$  such that the solution to the system*

$$\begin{cases} -\partial_t u - \text{div}(d\nabla u) = f_1 & \text{in } Q_T, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f_2 & \text{on } \Sigma_T, \\ u(T, \cdot) = u^0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

satisfies

$$I(s, \lambda; u) \leq C \left( s^3 \lambda^4 \iint_{(0,T) \times \omega_2} e^{-2s\alpha} \xi^3 |u|^2 dx dt + \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} |f_1|^2 dx dt + s\lambda \iint_{\Sigma_T} e^{-2s\alpha^*} \xi^* |f_2|^2 d\sigma dt \right),$$

for all  $\lambda \geq C$  and  $s \geq C(T^5 + T^{10})$ .

The proof of Lemma 3.1 can be easily obtained by using the method of [FC+06] together with the Carleman estimate proved in [IY03]. Let us consider the backward system

$$\begin{cases} -\partial_t \psi_1 = \operatorname{div}(d_1 \nabla \psi_1) - \operatorname{div}(g_{11} \psi_1) - \operatorname{div}(g_{21} \psi_2) + a_{11} \psi_1 + a_{21} \psi_2 & \text{in } Q_T, \\ -\partial_t \psi_2 = \operatorname{div}(d_2 \nabla \psi_2) - \operatorname{div}(g_{12} \psi_1) - \operatorname{div}(g_{22} \psi_2) + a_{12} \psi_1 + a_{22} \psi_2 & \text{in } Q_T, \\ \psi_1 = \psi_2 = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \psi_1(T, \cdot) = \psi_1^0, \psi_2(T, \cdot) = \psi_2^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (3.13)$$

where  $\psi^0 := (\psi_1^0, \psi_2^0) \in L^2(\Omega)^2$ . From the last Lemma, one can deduce:

**PROPOSITION 3.2.** *One has*

- (i) *Under Condition (1.7) and (1.10), there exists a constant  $C := C(\omega_1, \Omega) > 0$  such that for every  $\psi^0 := (\psi_1^0, \psi_2^0) \in L^2(\Omega)^2$ , the corresponding solution  $\psi := (\psi_1, \psi_2)$  of the backward problem (3.13) satisfies*

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \{s^5 \lambda^6 \xi^5 |\psi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \psi|^2 + s \lambda^2 \xi |\nabla \nabla \psi|^2\} dx dt \\ & \leq C s^5 \lambda^6 \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \xi^5 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

- (ii) *If  $N = 1$  and under Condition (1.8) and (1.11), we obtain the same conclusion as in item (i) by replacing estimate (3.2) by*

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} e^{-2s\alpha} \{s^9 \lambda^{10} \xi^9 |\psi|^2 + s^7 \lambda^8 \xi^7 |\nabla \psi|^2 + s^5 \lambda^6 \xi^5 |\nabla \nabla \psi|^2 \\ & \quad + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\nabla \nabla \nabla \psi|^2 + s \lambda^2 \xi |\nabla \nabla \nabla \nabla \psi|^2\} dx dt \\ & \leq C s^9 \lambda^{10} \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s\alpha} \xi^9 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

The proof is very similar to the proof of Proposition 2.2, the only difference is the beginning of the proof, we apply the operator  $\nabla$  to the equation (3.13) in the case (1.7) and the operators  $\nabla \nabla \nabla$  in the case (1.8). After that we exactly follow the steps 1,2, and 3 of the proof of Proposition 2.2.

As a consequence, we also can derive the following observability inequality, whose proof is very classical (see also Proposition 2.3):

**PROPOSITION 3.3.** *Under assumptions (1.7) and (1.10) or under assumptions (1.8) and (1.11), for every  $\psi^0 \in L^2(\Omega)^2$ , the solution to System (3.13) satisfies*

$$\int_{\Omega} |\psi(0, x)|^2 dx \leq C_{obs} \iint_{(0,T) \times \omega_1} e^{-2s_0 \alpha} \xi^9 |\psi|^2 dx dt, \quad (3.15)$$

where  $s_0 := C(T^5 + T^{10})$  and  $C_{obs} := e^{C(1+T+1/T^5)}$ .

To conclude, one can obtain the following controllability result:

**PROPOSITION 3.4.** *Consider the following system:*

$$\begin{cases} \partial_t z_1 = \operatorname{div}(d_1 \nabla z_1) + g_{11} \cdot \nabla z_1 + g_{12} \cdot \nabla z_2 + a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \theta v_1 & \text{in } Q_T, \\ \partial_t z_2 = \operatorname{div}(d_2 \nabla z_2) + g_{21} \cdot \nabla z_1 + g_{22} \cdot \nabla z_2 + a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \theta v_2 & \text{in } Q_T, \\ z_1 = z_2 = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ z_1(0, \cdot) = y_1^0, z_2(0, \cdot) = y_2^0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (3.16)$$

Under Conditions (1.7) and (1.10) or if  $N = 1$  and under Condition (1.8) and (1.11), System (3.16) is null controllable at time  $T$ , that is for every  $y^0 \in L^2(\Omega)^2$  there exists a control  $v := (v_1, v_2) \in L^2(Q_T)^2$  such that the solution  $z$  to System (3.16) satisfies  $z(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Moreover for every  $K \in (0, 1)$ , we have  $e^{Ks_0\alpha^*} v \in \mathcal{X}^2$  where:

(i) Under Conditions (1.7) and (1.11),  $\mathcal{X}$  is defined by

$$\mathcal{X} := L^2(0, T; H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.17)$$

(ii) If  $N = 1$  and under Conditions (1.8) and (1.11),  $\mathcal{X}$  is defined by

$$\mathcal{X} := L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.18)$$

Moreover in the both cases, we have the estimate

$$\|e^{Ks_0\alpha^*} v\|_{\mathcal{X}^2} \leq e^{C(1+T+1/T^5)} \|y^0\|_{L^2(\Omega)^2}. \quad (3.19)$$

One more time, the proof is very similar to the proof of Proposition 2.3, notably and one can recover easily estimates on the derivatives of order 1 and 2 in time of the control by using equation (3.13) verified by  $\varphi$  and estimates similar to (2.56).

### 3.3 Proof of Theorem 1.2

The proof is totally similar to the one of Theorem 1.1. Let us assume that one of the two Conditions (1.7) or (1.8) holds, and let us prove that System (1.6) is null controllable at time  $T$  (which will imply the approximate controllability at time  $T$ ). Let  $y^0 \in L^2(\Omega)^2$ . Using Proposition 3.4, System (3.16) is null controllable at time  $T$ , more precisely there exists a control  $v \in L^2(Q_T)^2$  such that the solution  $z$  in  $W(0, T)^2$  to System (3.16) satisfies

$$z(T) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

Moreover

$$e^{Ks_0\alpha^*} v \in \mathcal{X}^2. \quad (3.20)$$

Let us remind that  $\theta$  was defined in (3.12). Let  $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{v})$  be defined by

$$\begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{v} \end{pmatrix} := \mathcal{M} \begin{pmatrix} \theta v_1 \\ \theta v_2 \end{pmatrix},$$

with  $\mathcal{M} : \mathcal{X}^2 \rightarrow L^2(Q_T)^2 \times L^2(Q_T)$  given as the adjoint of  $\mathcal{M}^*$  defined in (3.5) and (3.11). Thanks to the definition of  $\theta$  given in (3.12), the fact the coefficients of  $\mathcal{M}$  are necessarily at least in  $L^\infty((a, b) \times \omega_0)$ , the definition of  $\mathcal{X}$  given in (3.17)-(3.18) and the fact that  $\mathcal{M}$  is of

order 1 in time and 2 in space under Condition (1.7) and is of order 2 in time, 4 in space and  $1 - 2$  in crossed time-space (which is an interpolation space between  $L^2((0, T), H^4(\Omega))$  and  $H^2((0, T), L^2(\Omega))$ ) thanks to [LM68, 13.2, P. 96]) under Condition (1.8), we obtain  $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{v}) \in L^2(Q_T)^2 \times L^2(Q_T)$ . Moreover, using (3.20), we remark that  $(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{v})$  is a solution to the control problem

$$\begin{cases} \partial_t \hat{z} = \operatorname{div}(D\nabla \hat{z}) + G \cdot \nabla \hat{z} + A\hat{z} + B\hat{v} + \theta v & \text{in } Q_T, \\ \hat{z} = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \hat{z}(0, \cdot) = \hat{z}(T, \cdot) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (3.21)$$

Finally,  $\hat{z} \in W(0, T)^2$  thanks to the usual parabolic regularity. Thus the pair  $(y, u) := (z - \hat{z}, -\hat{v})$  is a solution to System (1.6) in  $W(0, T)^2 \times L^2(Q_T)$  and satisfies

$$y(T) \equiv 0 \text{ in } \Omega,$$

which concludes the proof of Theorem 1.2.

## References

- [AB13] F. ALABAU-BOUSSOUIRA. "A hierarchic multi-level energy method for the control of bidiagonal and mixed  $n$ -coupled cascade systems of PDE's by a reduced number of controls". In : *Adv. Differential Equations* 18.11-12 (2013), p. 1005–1072 (cf. p. 34, 36, 52, 70, 131).
- [ABCO15] F. ALABAU-BOUSSOUIRA, J.-M. CORON et G. OLIVE. "Internal controllability of first order quasilinear hyperbolic systems with a reduced number of controls". In : *Submitted* (2015) (cf. p. 29, 72, 73).
- [ABL13a] F. ALABAU-BOUSSOUIRA et M. LÉAUTAUD. "Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications". In : *J. Math. Pures Appl.* (9) 99.5 (2013), p. 544–576 (cf. p. 70).
- [AK+09a] F. AMMAR KHODJA et al. "A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems". In : *Differ. Equ. Appl.* 1.3 (2009), p. 427–457 (cf. p. 31, 38, 55, 70, 99, 131, 132, 136, 145).
- [AK+09b] F. AMMAR-KHODJA et al. "A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems". In : *J. Evol. Equ.* 9.2 (2009), p. 267–291 (cf. p. 31, 37, 70, 99, 131).
- [AK+11a] F. AMMAR-KHODJA et al. "Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey". In : *Math. Control Relat. Fields* 1.3 (2011), p. 267–306 (cf. p. 16, 70, 99, 105, 130, 135, 136).
- [AK+14] F. AMMAR KHODJA et al. "Minimal time of controllability of two parabolic equations with disjoint control and coupling domains". In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 352.5 (2014), p. 391–396 (cf. p. 7, 70, 99, 135).
- [AKBD06a] F. AMMAR-KHODJA, A. BENABDALLAH et C. DUPAIX. "Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force". In : *J. Math. Anal. Appl.* 320.2 (2006), p. 928–943 (cf. p. 70).

- [Bar00] V. BARBU. “Exact controllability of the superlinear heat equation”. In : *Appl. Math. Optim.* 42.1 (2000), p. 73–89 (cf. p. xi, 24, 84).
- [Ben+14] A. BENABDALLAH et al. “Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force”. In : *Math. Control Relat. Fields* 4.1 (2014), p. 17–44 (cf. p. 36, 39, 48–50, 71, 100, 125, 131).
- [BT73] C. BARDOS et L. TARTAR. “Sur l’unicité rétrograde des équations paraboliques et quelques questions voisines”. In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 50 (1973), p. 10–25 (cf. p. 67).
- [CG09] J.-M. CORON et S. GUERRERO. “Null controllability of the  $N$ -dimensional Stokes system with  $N - 1$  scalar controls”. In : *J. Differential Equations* 246.7 (2009), p. 2908–2921 (cf. p. 77, 78).
- [CL14] J.-M. CORON et P. LISSY. “Local null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes system with a distributed control having two vanishing components”. In : *Invent. Math.* 198.3 (2014), p. 833–880 (cf. p. 29, 33, 72–74, 90, 91).
- [Cor07] J.-M. CORON. *Control and nonlinearity*. T. 136. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, 2007, p. xiv+426 (cf. p. 1, 6, 12, 73, 76, 105, 137).
- [Eva10] L. C. EVANS. *Partial differential equations*. Second. T. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010 (cf. p. 25, 66, 67, 78).
- [FC+06] E. FERNÁNDEZ-CARA et al. “Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions: the linear case”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 12.3 (2006), 442–465 (electronic) (cf. p. 43, 44, 77, 92).
- [FI96] A. V. FURSIKOV et O. Y. IMANUVILOV. *Controllability of evolution equations*. 34. Seoul National University, 1996 (cf. p. xi, 12, 24, 34, 76, 84, 134, 136, 177).
- [GBPG06] M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. “Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force”. In : *Asymptot. Anal.* 46.2 (2006), p. 123–162 (cf. p. xi, 16, 24, 28, 68, 72, 193).
- [GBT10] M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. “Controllability results for cascade systems of  $m$  coupled parabolic PDEs by one control force”. In : *Port. Math.* 67.1 (2010), p. 91–113 (cf. p. 34, 35, 39, 40, 50, 68, 70, 99, 108, 131, 132, 136, 148).
- [Gro86] M. GROMOV. *Partial differential relations*. T. 9. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Berlin : Springer-Verlag, 1986, p. x+363 (cf. p. xi, 29, 73).
- [Gue07b] S. GUERRERO. “Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force”. In : *SIAM J. Control Optim.* 46.2 (2007), p. 379–394 (cf. p. 35, 39, 43, 44, 50, 51, 70, 99, 100, 125).

- [IY03] O. Y. IMANUVILOV et M. YAMAMOTO. "Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semi-linear parabolic equations". In : *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 39.2 (2003), p. 227–274 (cf. p. 92).
- [Lio68] J.-L. LIONS. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Paris : Dunod, 1968, p. xiii+426 (cf. p. xii, 3, 7, 26, 27, 85, 86, 98, 165, 166, 170, 173).
- [Lis13] P. LISSY. *Sur la contrôlabilité et son coût pour quelques équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2013 (cf. p. 29, 67).
- [LM68] J.-L. LIONS et E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 2*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 18. Paris : Dunod, 1968, p. xvi+251 (cf. p. 94, 130).
- [RT11b] L. ROSIER et L. de TERESA. "Exact controllability of a cascade system of conservative equations". In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 349.5-6 (2011), p. 291–296 (cf. p. 70).

# Controllability of a 2 X 2 parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one.

Ce chapitre reprend en grande partie l'article « *Contrôlabilité of a  $2 \times 2$  parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one* ».

## Résumé

Ce chapitre est consacré à la contrôlabilité des systèmes linéaires de deux équations paraboliques lorsque le couplage est un terme d'ordre un dépendant de l'espace. Ce système est considéré sur un intervalle borné  $I \subset \subset \mathbb{R}$ , et la première équation est contrôlée par une force à support dans un sous-intervalle de  $I$  ou sur la frontière. Dans le cas où l'intersection des domaines de contrôle et de couplage est non-vide, nous prouvons la contrôlabilité à zéro en tout temps. Dans le cas contraire, nous fournissons un temps minimal de contrôlabilité à zéro. Finalement, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité approchée. L'outil principal permettant d'obtenir ces résultats est la méthode des moments.

## Structure

1	Introduction and main results. . . . .	98
2	Preliminary results . . . . .	102
3	Proof of Theorem 1.1 . . . . .	106
4	Proof of Theorem 1.3 . . . . .	119
5	Approximate controllability of system (1.1) . . . . .	122
6	Null controllability of System (1.2) . . . . .	123
7	Comments and open problems . . . . .	124
1	Proof of Lemma 3.4 . . . . .	125
	References. . . . .	126



## 1 Introduction and main results

Let  $T > 0$ ,  $\omega := (a, b) \subseteq (0, \pi)$  and  $Q_T := (0, \pi) \times (0, T)$ . We consider in the present paper the following distributed control system

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \partial_{xx} y_1 = \mathbb{1}_\omega v & \text{in } Q_T, \\ \partial_t y_2 - \partial_{xx} y_2 + p(x) \partial_x y_1 + q(x) y_1 = 0 & \text{in } Q_T, \\ y_1(0, \cdot) = y_1(\pi, \cdot) = y_2(0, \cdot) = y_2(\pi, \cdot) = 0 & \text{on } (0, T), \\ y_1(\cdot, 0) = y_1^0, y_2(\cdot, 0) = y_2^0 & \text{in } (0, \pi) \end{cases} \quad (1.1)$$

and boundary control system

$$\begin{cases} \partial_t z_1 - \partial_{xx} z_1 = 0 & \text{in } Q_T, \\ \partial_t z_2 - \partial_{xx} z_2 + p(x) \partial_x z_1 + q(x) z_1 = 0 & \text{in } Q_T, \\ z_1(0, \cdot) = u, z_1(\pi, \cdot) = z_2(0, \cdot) = z_2(\pi, \cdot) = 0 & \text{on } (0, T), \\ z_1(\cdot, 0) = z_1^0, z_2(\cdot, 0) = z_2^0 & \text{in } (0, \pi), \end{cases} \quad (1.2)$$

where  $y^0 := (y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, \pi)^2$  and  $z^0 := (z_1^0, z_2^0) \in H^{-1}(0, \pi)^2$  are the initial conditions,  $v \in L^2(Q_T)$  and  $u \in L^2(0, T)$  are the controls,  $p \in W_\infty^1(0, \pi)$ ,  $q \in L^\infty(0, \pi)$ .

It is known (see [Lio68] (resp. [FCGBT10])) that for given initial data  $y^0 \in L^2(0, \pi)^2$  (resp.  $z^0 \in H^{-1}(0, \pi)^2$ ) and a control  $v \in L^2(Q_T)$  (resp.  $u \in L^2(0, T)$ ) System (1.1) (resp. (1.2)) has a unique solution  $y = (y_1, y_2)$  (resp.  $z = (z_1, z_2)$ ) in

$$\begin{aligned} & L^2(0, T; H_0^1(0, \pi)^2) \cap C([0, T]; L^2(0, \pi)^2) \\ & (\text{resp. } L^2(Q_T)^2 \cap C([0, T]; H^{-1}(0, \pi)^2)), \end{aligned}$$

which depends continuously on the initial data and the control, that is

$$\begin{aligned} & \|y\|_{L^2(0, T; H_0^1(0, \pi)^2)} + \|y\|_{C([0, T]; L^2(0, \pi)^2)} \leq C_T (\|y_0\|_{L^2(0, \pi)^2} + \|v\|_{L^2(Q_T)}) \\ & (\text{resp. } \|z\|_{L^2(Q_T)^2} + \|z\|_{C([0, T]; H^{-1}(0, \pi)^2)} \leq C_T (\|z_0\|_{H^{-1}(0, \pi)^2} + \|u\|_{L^2(0, T)})). \end{aligned}$$

Let us introduce the notion of null and approximate controllability for this kind of systems.

- System (1.1) (resp. System (1.2)) is *null controllable* at time  $T$  if for every initial condition  $y^0 \in L^2(0, \pi)^2$  (resp.  $z^0 \in H^{-1}(0, \pi)^2$ ) there exists a control  $v \in L^2(Q_T)$  (resp.  $u \in L^2(0, T)$ ) such that the solution to System (1.1) (resp. System (1.2)) satisfies

$$y(T) \equiv 0 \quad (\text{resp. } z(T) \equiv 0) \quad \text{in } (0, \pi).$$

- System (1.1) (resp. System (1.2)) is *approximately controllable* at time  $T$  if for all  $\varepsilon > 0$  and all  $y^0, y^T \in L^2(0, \pi)^2$  (resp.  $z^0, z^T \in H^{-1}(0, \pi)^2$ ) there exists a control  $v \in L^2(Q_T)$  (resp.  $u \in L^2(0, T)$ ) such that the solution to System (1.1) (resp. System (1.2)) satisfies

$$\|y(T) - y^T\|_{L^2(0, \pi)^2} \leq \varepsilon \quad (\text{resp. } \|z(T) - z^T\|_{H^{-1}(0, \pi)^2} \leq \varepsilon).$$

The main goal of this article is to provide a complete answer to the null and approximate controllability issues for System (1.1) and (1.2). For a survey and some applications in physics, chemistry or biology concerning the controllability of this kind of systems, we refer to

[AK+11a]. In the last decade, many papers studied this problem, however most of them are relating to some parabolic systems with zero order coupling terms. Without first order coupling terms, some Kalman coupling conditions are made explicit in [AK+09a], [AK+09b] and [FCGBT10] for distributed null controllability of systems of more than two equations with constant matrices and in higher space dimension and in the case of time dependent matrices, some Silverman-Meadows coupling conditions are given in [AK+09a].

Concerning the null and approximate controllability of Systems (1.1) and (1.2) in the case  $p \equiv 0$  and  $q \neq 0$  in  $(0, \pi)$ , a partial answer is given in [ABL11 ; ABL13b ; DL14 ; RT11a] under the sign condition

$$q \leq 0 \text{ or } q \geq 0 \text{ in } (0, \pi).$$

These results are obtained as a consequence of controllability results of a hyperbolic system using the transmutation method (see [Mil06]). One can find a necessary and sufficient condition in [AK+12] when

$$\int_0^\pi q(x)dx \neq 0.$$

Finally in a recent work [AK+14 ; AK+15], a complete study for any  $q \in L^\infty(0, \pi)$  is given.

Let us now remind known results concerning null controllability for systems of the following more general form. Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) of class  $C^2$  and  $\omega_0$  an arbitrary nonempty subset of  $\Omega$ . We denote by  $\partial\Omega$  the boundary of  $\Omega$ . Consider the system of two coupled linear parabolic equations

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \Delta y_1 + g_{11} \cdot \nabla y_1 + g_{12} \cdot \nabla y_2 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \mathbb{1}_{\omega_0} v & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t y_2 = \Delta y_2 + g_{21} \cdot \nabla y_1 + g_{22} \cdot \nabla y_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

where  $y^0 \in L^2(\Omega)^2$ ,  $g_{ij} \in L^\infty(\Omega \times (0, T))^N$  and  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$  for all  $i, j \in \{1, 2\}$ .

As a particular case of the result in [GBT10] (see also [AK+05]), System (1.3) is null controllable whenever

$$g_{21} \equiv 0 \text{ and } (a_{21} > C \text{ or } a_{21} < -C) \text{ in } \omega_1 \subseteq \omega_0, \quad (1.4)$$

for a positive constant  $C$ .

In [Gue07b], the author supposes that  $a_{11}$ ,  $g_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $g_{22}$  are constant and the first order coupling operator  $g_{21} \cdot \nabla + a_{21}$  can be written as

$$g_{21} \cdot \nabla + a_{21} = P_1 \circ \theta \text{ in } \Omega \times (0, T), \quad (1.5)$$

where  $\theta \in C^2(\overline{\Omega})$  satisfies  $|\theta| > C$  in  $\omega_1 \subseteq \omega_0$  for a positive constant  $C$  and  $P_1$  is given by

$$P_1 := m_0 \cdot \nabla + m_1,$$

for some  $m_0, m_1 \in \mathbb{R}$ . Moreover the operator  $P_1$  satisfies

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|P_1^* u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Under these assumptions, the author proves the null controllability of System (1.3) at any time.

In [Ben+14], the authors prove that the same property holds true for System (1.3) if we assume that  $a_{ij} \in C^4(\overline{\Omega \times (0, T)})$ ,  $g_{ij} \in C^1(\overline{\Omega \times (0, T)})^N$  for all  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $g_{21} \in C^3(\overline{\Omega \times (0, T)})$  and the geometrical condition

$$\begin{cases} \partial\omega \cap \partial\Omega \text{ contains a nonempty open subset } \gamma \text{ s.t. } \dot{\gamma} \neq \emptyset, \\ \exists x_0 \in \gamma \text{ s.t. } g_{21}(t, x_0) \cdot \nu(x_0) \neq 0 \text{ for all } t \in [0, T], \end{cases} \quad (1.6)$$

where  $\nu$  represents the exterior normal unit vector to the boundary  $\partial\Omega$ .

Lastly, for constant coefficients, it is proved in [DL15] that System (1.3) is null/approximately controllable at any time  $T$  if and only if

$$g_{21} \neq 0 \quad \text{or} \quad a_{21} \neq 0.$$

In [DL15], the authors give also a condition of null/approximate controllability in dimension one which can be written for system (1.1) as:  $p \in C^2(\omega_0)$ ,  $q \in C^3(\omega_0)$  and

$$\begin{aligned} -4\partial_x(q)\partial_x(p)p + \partial_{xx}(q)p^2 + 2q\partial_x(q)p - 3pq\partial_{xx}p + 6q(\partial_x p)^2 - 2q^2\partial_x p \\ - \partial_{xxx}(p)p^2 + 5\partial_x(p)\partial_{xx}(p)p - 4(\partial_x p)^3 \neq 0 \text{ in } \omega_0 \end{aligned}$$

for a subinterval  $\omega_0$  of  $\omega$ .

Now let us go back to Systems (1.1) and (1.2) for which we will provide a complete description of the null and approximate controllability. Our first and main result is the following

**THEOREM 1.1.** *Let us suppose that  $p \in W_\infty^1(0, \pi) \cap W_\infty^2(\omega)$ ,  $q \in L^\infty(0, \pi) \cap W_\infty^1(\omega)$  and*

$$(\text{Supp}(p) \cup \text{Supp}(q)) \cap \omega \neq \emptyset. \quad (1.7)$$

*Then System (1.1) is null controllable at any time  $T$ .*

Let us compare this result with the previously described results to highlight our main contribution:

1. Even though System (1.1) is considered in one space dimension, we remark first that our coupling operator has a more general form than the one in (1.5) assumed by Guerrero [Gue07b]. Moreover unlike [DL15], its coefficients are non-constant with respect to the space variable.
2. We do not have the geometrical restriction (1.6) assumed in [Ben+14] by A. Benabdallah and al. More precisely we do not require the control support to be a neighbourhood of a part of the boundary.

For all  $k \in \mathbb{N}^*$ , we denote by  $\varphi_k : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$  the eigenvector of the Laplacian operator, with Dirichlet boundary condition, and consider the two following quantities

$$\begin{cases} I_{a,k}(p, q) := \int_0^a (q - \frac{1}{2}\partial_x p) \varphi_k^2, \\ I_k(p, q) := \int_0^\pi (q - \frac{1}{2}\partial_x p) \varphi_k^2, \end{cases} \quad (1.8)$$

for all  $k \in \mathbb{N}^*$ . Combined with the Hautus test ([Fat66, Cor. 3.3] or Th. 5.1 in the present paper), Theorem 1.1 leads to the following characterization:

**THEOREM 1.2.** *Let us suppose that  $p \in W_\infty^1(0, \pi) \cap W_\infty^2(\omega)$  and  $q \in L^\infty(0, \pi) \cap W_\infty^1(\omega)$ . System (1.1) is approximately controllable at time  $T$  if and only if*

$$(\text{Supp}(p) \cup \text{Supp}(q)) \cap \omega \neq \emptyset \quad (1.9)$$

or

$$|I_k(p, q)| + |I_{a,k}(p, q)| \neq 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.10)$$

This last result recovers the case  $p \equiv 0$  studied in [BO14] for  $\text{Supp}(q) \cap \omega = \emptyset$ , where the authors use also the Hautus test. In [KT10], the authors prove the approximate controllability at any time  $T$  of System (1.1) under the condition  $p \equiv 0$  and  $q \equiv \mathbf{1}_{\omega_0}$  with  $\omega_0$  a nonempty open subset of  $(0, \pi)$ , which implies (1.10).

*Remark 1.1.* We will see in the prove of Theorems 1.1 and 1.2 that only the following regularity are needed for  $p$  and  $q$

$$\begin{cases} p \in W_\infty^1(0, \pi) \cap W_\infty^2(\tilde{\omega}), \\ q \in L^\infty(0, \pi) \cap W_\infty^1(\tilde{\omega}), \end{cases}$$

for an open subinterval  $\tilde{\omega}$  of  $\omega$ . These hypotheses are used in Definition (1.8) of  $I_k(p, q)$  and  $I_{a,k}(p, q)$  and the change of unknown described in Section 3.2. For more general coupling terms, these control problems are open.

When the supports of the control and the coupling terms are disjoint in System (1.1), following the ideas in [AK+15] where the authors studied the case  $p \equiv 0$ , we obtain a minimal time of null controllability:

**THEOREM 1.3.** *Let  $p \in W_\infty^1(0, \pi)$ ,  $q \in L^\infty(0, \pi)$ . Suppose that Condition (1.10) holds and*

$$(\text{Supp}(p) \cup \text{Supp}(q)) \cap \omega = \emptyset. \quad (1.11)$$

Let  $T_0(p, q)$  be given by

$$T_0(p, q) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\min(-\log |I_k(p, q)|, -\log |I_{a,k}(p, q)|)}{k^2}. \quad (1.12)$$

One has

1. If  $T > T_0(p, q)$ , then System (1.1) is null controllable at time  $T$ .
2. If  $T < T_0(p, q)$ , then System (1.1) is not null controllable at time  $T$ .

Concerning the boundary controllability, in [Oli14, Th. 3.3], using the Hautus test, the author proves that System (1.2) is approximately controllable at time  $T$  if and only if

$$I_k(p, q) \neq 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.13)$$

About null controllability of System (1.2), we can again generalize the results given in [AK+15] to obtain a minimal time:

**THEOREM 1.4.** *Let  $p \in W_\infty^1(0, \pi)$ ,  $q \in L^\infty(0, \pi)$  and suppose that Condition (1.13) is satisfied. Let us define*

$$T_1(p, q) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{-\log |I_k(p, q)|}{k^2}. \quad (1.14)$$

One has

1. If  $T > T_1(p, q)$ , then System (1.2) is null controllable at time  $T$ .
2. If  $T < T_1(p, q)$ , then System (1.2) is not null controllable at time  $T$ .

*Remark 1.2.* A simple computation leads to the convergence of the tow sequences  $(I_k(p, q))_{k \in \mathbb{N}^*}$  and  $(I_{a,k}(p, q))_{k \in \mathbb{N}^*}$ , more precisely

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k(p, q) = I(p, q) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (q - \frac{1}{2} \partial_x p) \text{ and } \lim_{k \rightarrow \infty} I_{a,k}(p, q) = I_a(p, q) := \frac{1}{\pi} \int_0^a (q - \frac{1}{2} \partial_x p).$$

Thus, we remark that  $T_0(p, q) = T_1(p, q) = 0$  when

$$\int_0^\pi q \neq \frac{1}{2} \int_0^\pi \partial_x p$$

and in particular under the condition

$$q > \frac{1}{2} \partial_x p \text{ in } (0, \pi) \text{ or } q < \frac{1}{2} \partial_x p \text{ in } (0, \pi).$$

This article is organized as follows. In the first section we present some preliminary results useful to reduce the null controllability issues to the moment problem. In the second and third sections we study the null controllability issue of System (1.1) in the two cases when the intersection of the coupling and control supports is empty or not. Then we give the proof of Theorems 1.2 and 1.4 in Section 4 and 5. We finish with some comments and open problem in Section 6.

## 2 Preliminary results

Consider the differential operator

$$\begin{aligned} L : D(L) \subset L^2(0, \pi)^2 &\rightarrow L^2(0, \pi)^2 \\ f &\mapsto -\partial_{xx} f + A_0(p \partial_x f + qf), \end{aligned}$$

where the matrix  $A_0$  is given by

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

the domain of  $L$  and its adjoint  $L^*$  is given by  $D(L) = D(L^*) = H^2(0, \pi)^2 \cap H_0^1(0, \pi)^2$ . In section 2.1, we will first establish some properties of the operator  $L$  that will be useful for the moment method and, in section 2.2, we will recall some characterizations of the approximate and null controllability of system (1.1).

### 2.1 Biorthogonal basis

Let us first analyze the spectrum of the operators  $L$  and  $L^*$ .

**PROPOSITION 2.1.** *For all  $k \in \mathbb{N}^*$  consider the two vectors*

$$\Phi_{1,k}^* := \begin{pmatrix} \psi_k^* \\ \varphi_k \end{pmatrix}, \Phi_{2,k}^* := \begin{pmatrix} \varphi_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

where  $\psi_k^*$  is defined for all  $x \in (0, \pi)$  by

$$\begin{cases} \psi_k^*(x) = \alpha_k^* \varphi_k(x) - \frac{1}{k} \int_0^x \sin(k(x-\xi)) [I_k(p, q) \varphi_k(\xi) + \partial_x(p(\xi) \varphi_k(\xi)) - q(\xi) \varphi_k(\xi)] d\xi, \\ \alpha_k^* = \frac{1}{k} \int_0^\pi \int_0^x \sin(k(x-\xi)) [I_k(p, q) \varphi_k(\xi) + \partial_x(p(\xi) \varphi_k(\xi)) - q(\xi) \varphi_k(\xi)] \varphi_k(x) d\xi dx. \end{cases}$$

One has

1. The spectrum of  $L^*$  is given by  $\sigma(L^*) = \{k^2 : k \in \mathbb{N}^*\}$ .
2. For  $k \geq 1$ , the eigenvalue  $k^2$  of  $L^*$  is simple if and only if  $I_k(p, q) \neq 0$ . In this case,  $\Phi_{2,k}^*$  and  $\Phi_{1,k}^*$  are respectively an eigenfunction and a generalized eigenfunction of the operator  $L^*$  associated with the eigenvalue  $k^2$ , more precisely

$$\begin{cases} (L^* - k^2 Id) \Phi_{1,k}^* = I_k \Phi_{2,k}^*, \\ (L^* - k^2 Id) \Phi_{2,k}^* = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

3. For  $k \geq 1$ , the eigenvalue  $k^2$  of  $L^*$  is double if and only if  $I_k(p, q) = 0$ . In this case,  $\Phi_{1,k}^*$  and  $\Phi_{2,k}^*$  are two eigenfunctions of the operator  $L^*$  associated with the eigenvalue  $k^2$ , that is for  $i = 1, 2$

$$(L^* - k^2 Id) \Phi_{i,k}^* = 0.$$

*Démonstration.* The adjoint operator  $L^*$  of  $L$  is given by

$$\begin{aligned} L^* : D(L) \subset L^2(0, \pi)^2 &\rightarrow L^2(0, \pi)^2 \\ f &\mapsto -\partial_{xx} f + A_0(-\partial_x(pf) + qf). \end{aligned}$$

We can remark first that the inverse of  $L^*$  is compact. Thus the spectrum of  $L^*$  reduces to its point spectrum. The eigenvalue problem associated with the operator  $L^*$  is

$$\begin{cases} -\partial_{xx} \psi - \partial_x(p(x) \varphi) + q(x) \varphi = \lambda \psi & \text{in } (0, \pi), \\ -\partial_{xx} \varphi = \lambda \varphi & \text{in } (0, \pi), \\ \varphi(0) = \psi(0) = \varphi(\pi) = \psi(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

where  $(\psi, \varphi) \in D(L^*)$  and  $\lambda \in \mathbb{C}$ . For  $\varphi \equiv 0$  in  $(0, \pi)$  and  $\psi = \varphi_k$  in  $(0, \pi)$ ,  $\lambda = k^2$  is an eigenvalue of  $L^*$  and the vector  $\Phi_{2,k}^* := (\varphi_k, 0)$  is an associated eigenfunction. If now  $\varphi \neq 0$  in  $(0, \pi)$ , then  $\lambda = k^2$  is an eigenvalue and  $\varphi = \kappa \varphi_k$  with  $\kappa \in \mathbb{R}^*$ . We remark that System (2.2) has a solution if and only if  $I_k(p, q) = 0$ . If  $I_k(p, q) = 0$ ,  $\Phi_{1,k}^* := (\psi_k^*, \varphi_k)$  is a second eigenfunction of  $L^*$  linearly independent of  $\Phi_{2,k}^*$ , where, applying the Fredholm alternative,  $\psi_k^*$  is the unique solution to the non-homogeneous Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} -\partial_{xx} \psi - k^2 \psi = f & \text{in } (0, \pi), \\ \psi(0) = \psi(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

with

$$f := \partial_x(p(x) \varphi_k) - q(x) \varphi_k$$

and is such that

$$\int_0^\pi \psi(x) \varphi_k(x) dx = 0. \quad (2.4)$$

A solution to System (2.3) can be written for all  $x \in (0, \pi)$  as

$$\psi(x) = \alpha \varphi_k(x) - \frac{1}{k} \int_0^x \sin(k(x - \xi)) f(\xi) d\xi,$$

with  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Under Condition (2.4), we obtain the expression of  $\psi_k^*$  given in Proposition 2.1. Thus, in the case  $I_k(p, q) = 0$ ,  $\lambda = k^2$  is a double eigenvalue of  $L^*$ . Items 1 and 3 are now proved.

Let us now suppose that  $I_k(p, q) \neq 0$ . The eigenvalue  $\lambda = k^2$  is simple,  $\Phi_{2,k}^* := (\varphi_k, 0)$  is an eigenfunction and a solution  $\Phi_{1,k}^* := (\psi, \varphi)$  to  $(L^* - k^2 Id)\Phi_{1,k}^* = I_k(p, q)\Phi_{2,k}^*$ , that is

$$\begin{cases} -\partial_{xx}\psi - \partial_x(p(x)\varphi) + q(x)\varphi = k^2\psi + I_k(p, q)\varphi_k & \text{in } (0, \pi), \\ -\partial_{xx}\varphi = k^2\varphi & \text{in } (0, \pi), \\ \varphi(0) = \psi(0) = \varphi(\pi) = \psi(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

is a generalized eigenfunction of  $L^*$ . We deduce that  $\varphi = \kappa \varphi_k$  in  $(0, \pi)$  for a constant  $\kappa \in \mathbb{R}^*$ . Again System (2.5) has a solution if and only if  $\kappa = 1$ . Then  $\psi$  is solution to the Sturm-Liouville problem (2.3) with

$$f = I_k(p, q)\varphi_k + \partial_x(p(x)\varphi_k) - q(x)\varphi_k$$

and satisfying (2.4). Again, using (2.4), we obtain the expression of  $\psi_k^*$  given in Proposition 2.1.  $\square$

The function  $\psi_k^*$  given in Proposition 2.1 will play an important role in this paper and we will need the following straightforward property

**Lemma 2.1.** *There exists a positive constant  $C$  such that*

$$|\alpha_k^*| \leq \frac{C}{k}, \quad \|\psi_k^*\|_{L^\infty(0, \pi)} \leq \frac{C}{k}, \quad \|\partial_x \psi_k^*\|_{L^\infty(0, \pi)} \leq C, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (2.6)$$

Since the eigenvalues of the operator  $L^*$  are real, we deduce that  $L$  and  $L^*$  have the same spectrum and the associated eigenspaces have the same dimension. The eigenfunctions and the generalized eigenfunctions of  $L$  can be found as previously.

**PROPOSITION 2.2.** *For all  $k \in \mathbb{N}^*$  consider the two vectors*

$$\Phi_{1,k} := \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2,k} := \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{pmatrix},$$

where  $\psi_k$  is defined for all  $x \in (0, \pi)$  by

$$\begin{cases} \psi_k(x) := \alpha_k \varphi_k(x) - \frac{1}{k} \int_0^x \sin(k(x - \xi)) [I_k(p, q)\varphi_k(\xi) - p(\xi)\partial_x(\varphi_k(\xi)) - q(\xi)\varphi_k(\xi)] d\xi, \\ \alpha_k := \frac{1}{k} \int_0^\pi \int_0^x \sin(k(x - \xi)) [I_k(p, q)\varphi_k(\xi) - p(\xi)\partial_x(\varphi_k(\xi)) - q(\xi)\varphi_k(\xi)] \varphi_k(x) d\xi dx, \end{cases}$$

One has

1. The spectrum of  $L$  is given by  $\sigma(L) = \sigma(L^*) = \{k^2 : k \in \mathbb{N}^*\}$ .

2. For  $k \geq 1$ , the eigenvalue  $k^2$  of  $L$  is simple if and only if  $I_k(p, q) \neq 0$ . In this case,  $\Phi_{1,k}$  and  $\Phi_{2,k}$  are an eigenfunction and a generalized eigenfunction of the operator  $L$  associated with the eigenvalue  $k^2$ , more precisely

$$\begin{cases} (L - k^2 Id)\Phi_{1,k} = 0, \\ (L - k^2 Id)\Phi_{2,k} = I_k \Phi_{1,k}. \end{cases} \quad (2.7)$$

3. For  $k \geq 1$ , the eigenvalue  $k^2$  of  $L$  is double if and only if  $I_k(p, q) = 0$ . In this case,  $\Phi_{1,k}$  and  $\Phi_{2,k}$  are two eigenfunctions of the operator  $L$  associated with the eigenvalue  $k^2$ , that is for  $i = 1, 2$

$$(L - k^2 Id)\Phi_{i,k} = 0.$$

Lemma 2.3 and Corollary 2.6 in [AK+15] can be adapted easily to prove the following property.

**Property 2.1.** Consider the families

$$\mathcal{B} := \{\Phi_{1,k}, \Phi_{2,k} : k \in \mathbb{N}^*\} \quad \text{and} \quad \mathcal{B}^* := \{\Phi_{1,k}^*, \Phi_{2,k}^* : k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Then

1. The sequences  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{B}^*$  are biorthogonal Riesz bases of  $L^2(0, \pi)^2$ .
2. The sequence  $\mathcal{B}^*$  is a Schauder basis of  $H_0^1(0, \pi)^2$  and  $\mathcal{B}$  is its biorthogonal basis in  $H^{-1}(0, \pi)$ .

## 2.2 Duality

As it is well known, the controllability has a dual concept called *observability* (see for instance [AK+11a], [Cor07, Th. 2.44, p. 56–57]). Consider the dual system associated with System (1.1)

$$\begin{cases} -\partial_t \theta - \partial_{xx} \theta + A_0^*(-\partial_x(p(x)\theta) + q(x)\theta) = 0 & \text{in } Q_T, \\ \theta(0, \cdot) = \theta(\pi, \cdot) = 0 & \text{on } (0, T), \\ \theta(\cdot, T) = \theta^0 & \text{in } (0, \pi), \end{cases} \quad (2.8)$$

where  $\theta^0 \in L^2(0, \pi)^2$ . Let  $B$  the matrix given by

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The approximate controllability is equivalent to a *unique continuation property*:

**PROPOSITION 2.3.** 1. System (1.1) is approximately controllable at time  $T$  if and only if for all initial condition  $\theta^0 \in L^2(0, \pi)^2$  the solution to System (2.8) satisfies the unique continuation property

$$\mathbb{1}_\omega B^* \theta \equiv 0 \text{ in } Q_T \Rightarrow \theta \equiv 0 \text{ in } Q_T. \quad (2.9)$$

2. System (1.2) is approximately controllable at time  $T$  if and only if for all initial condition  $\theta^0 \in H_0^1(0, \pi)^2$  the solution to System (2.8) satisfies the unique continuation property

$$B^* \partial_x \theta(0, t) \equiv 0 \text{ in } (0, T) \Rightarrow \theta \equiv 0 \text{ in } Q_T. \quad (2.10)$$



The null controllability is characterized by an *observability inequality*:

**PROPOSITION 2.4.** 1. System (1.1) is null controllable at time  $T$  if and only if there exists a constant  $C_{obs}$  such that for all initial condition  $\theta^0 \in L^2(0, \pi)^2$  the solution to System (2.8) satisfies the observability inequality

$$\|\theta(0)\|_{L^2(0,\pi)^2}^2 \leq C_{obs} \iint_{Q_T} |\mathbb{1}_\omega B^* \theta|^2 dx dt. \quad (2.11)$$

2. System (1.1) is null controllable at time  $T$  if and only if there exists a constant  $C_{obs}$  such that for all initial condition  $\theta^0 \in H_0^1(0, \pi)^2$  the solution to System (2.8) satisfies the observability inequality

$$\|\theta(0)\|_{H_0^1(0,\pi)^2}^2 \leq C_{obs} \int_0^T |B^* \partial_x \theta(0, t)|^2 dt. \quad (2.12)$$

### 3 Proof of Theorem 1.1

In this section, we first establish the moment problem related to the null controllability for System (1.1) and then we will solve it in section 3.2. The strategy involves finding an equivalent system (see Definition 3.1) to System (1.1), which has a associated quantity  $I_k$  satisfying "some good properties".

#### 3.1 The moment problem

Let  $y^0 := (y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, \pi)^2$ . For  $i \in \{1, 2\}$  and  $k \in \mathbb{N}^*$ , if we consider  $\theta^0 := \Phi_{i,k}^*$  in the dual System (2.8), we get after an integration by part

$$\iint_{Q_T} v(x, t) \mathbb{1}_\omega B^* \theta(x, t) dx dt = \langle y(T), \Phi_{i,k}^* \rangle_{L^2(0,\pi)^2} - \langle y^0, \theta(0) \rangle_{L^2(0,\pi)^2}.$$

Since  $\mathcal{B}^*$  is a Riesz basis of  $L^2(0, \pi)^2$ , System (1.1) is null controllable if and only if for all  $y^0 \in L^2(0, \pi)^2$ , there exists a control  $v \in L^2(Q_T)$  such that for all  $k \in \mathbb{N}^*$  and  $i \in \{1, 2\}$  the solution  $y$  to System (1.1) satisfies the following equality

$$\iint_{Q_T} v(x, t) \mathbb{1}_\omega B^* \theta_{i,k}(x, t) dx dt = -\langle y^0, \theta_{i,k}(0) \rangle_{L^2(0,\pi)^2}, \quad (3.1)$$

where  $\theta_{i,k}$  is the solution to the dual system (2.8) with the initial condition  $\theta^0 := \Phi_{i,k}^*$ .

In the moment problem (3.1), we will look for a control  $v$  of the form

$$v(x, t) := f^{(1)}(x)v^{(1)}(T-t) + f^{(2)}(x)v^{(2)}(T-t) \text{ for all } (x, t) \in Q_T, \quad (3.2)$$

with  $v^{(1)}, v^{(2)} \in L^2(0, T)$  and  $f^{(1)}, f^{(2)} \in L^2(0, \pi)$  satisfying

$$\text{Supp}(f^{(1)}), \text{Supp}(f^{(2)}) \subseteq \omega.$$

The solutions  $\theta_{1,k}$  and  $\theta_{2,k}$  to the dual System (2.8) with the initial condition  $\Phi_{1,k}^*$  and  $\Phi_{2,k}^*$  are given for all  $(x, t) \in Q_T$  by

$$\begin{cases} \theta_{1,k}(x, t) = e^{-k^2(T-t)} \left( \Phi_{1,k}^*(x) - (T-t)I_k(p, q)\Phi_{2,k}^*(x) \right), \\ \theta_{2,k}(x, t) = e^{-k^2(T-t)} \Phi_{2,k}^*(x). \end{cases} \quad (3.3)$$

Plugging (3.2) and (3.3) in the moment problem (3.1), we get for all  $k \geq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}_k^{(1)} \int_0^T v^{(1)}(t) e^{-k^2 t} dt + \tilde{f}_k^{(2)} \int_0^T v^{(2)}(t) e^{-k^2 t} dt \\ \quad - I_k(p, q) f_k^{(1)} \int_0^T v^{(1)}(t) t e^{-k^2 t} dt - I_k(p, q) f_k^{(2)} \int_0^T v^{(2)}(t) t e^{-k^2 t} dt \\ \quad \quad \quad = -e^{-k^2 T} \left\{ y_{1,k}^0 - T I_k(p, q) y_{2,k}^0 \right\}, \\ f_k^{(1)} \int_0^T v^{(1)}(t) e^{-k^2 t} dt + f_k^{(2)} \int_0^T v^{(2)}(t) e^{-k^2 t} dt = -e^{-k^2 T} y_{2,k}^0, \end{array} \right.$$

where  $f_k^{(i)}, \tilde{f}_k^{(i)}$  and  $y_{i,k}^0$  are given for all  $i \in \{1, 2\}$  and  $k \in \mathbb{N}^*$  by

$$f_k^{(i)} := \int_0^\pi f^{(i)}(x) \varphi_k(x) dx, \quad \tilde{f}_k^{(i)} := \int_0^\pi f^{(i)}(x) \psi_k^*(x) dx, \quad (3.4)$$

and

$$y_{i,k}^0 := \langle y^0, \Phi_{i,k}^* \rangle_{L^2(0, \pi)}. \quad (3.5)$$

In [FCGBT10], the authors prove that the family  $\left\{ e_{1,k} := e^{-k^2 t}, e_{2,k} := t e^{-k^2 t} \right\}_{k \geq 1}$  admits a biorthogonal family  $\{q_{1,k}, q_{2,k}\}_{k \geq 1}$  in the space  $L^2(0, T)$ , i.e. a family satisfying

$$\int_0^T e_{i,k} q_{j,l}(t) dt = \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad \forall k, l \geq 1, \quad 1 \leq i, j \leq 2. \quad (3.6)$$

Moreover for all  $\varepsilon > 0$  there exists a constant  $C_{\varepsilon, T} > 0$  such that

$$\|q_{i,k}\|_{L^2(0, T)} \leq C_{\varepsilon, T} e^{\varepsilon k^2}, \quad \forall k \geq 1, \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

We will look for  $v^{(1)}$  and  $v^{(2)}$  of the form

$$v^{(i)}(t) = \sum_{k \geq 1} \{v_{1,k}^{(i)} q_{1,k}(t) + v_{2,k}^{(i)} q_{2,k}(t)\}, \quad i = 1, 2. \quad (3.8)$$

Thus the moment problem (3.1) can be written as

$$A_{1,k} V_{1,k} + A_{2,k} V_{2,k} = F_k, \quad \text{for all } k \geq 1, \quad (3.9)$$

with for all  $k \in \mathbb{N}^*$

$$A_{1,k} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_k^{(1)} & \tilde{f}_k^{(2)} \\ f_k^{(1)} & f_k^{(2)} \end{pmatrix}, \quad A_{2,k} = \begin{pmatrix} -I_k(p, q) f_k^{(1)} & -I_k(p, q) f_k^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$V_{1,k} := \begin{pmatrix} v_{1,k}^{(1)} \\ v_{1,k}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad V_{2,k} := \begin{pmatrix} v_{2,k}^{(1)} \\ v_{2,k}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

and

$$F_k = \begin{pmatrix} -e^{-k^2 T} \left( y_{1,k}^0 - T I_k(p, q) y_{2,k}^0 \right) \\ -e^{-k^2 T} y_{2,k}^0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

The next sections will be devoted to solving problem (3.9) and prove that the corresponding solution  $v^{(1)}, v^{(2)}$  belongs to  $L^2(0, T)$ .

### 3.2 Resolution of the moment problem

In this section, we will prove the null controllability of System (1.1) at any time  $T$  when the supports of  $p$  or  $q$  intersects the control domain  $\omega$ . In [GBT10], the authors obtain the null controllability of System (1.1) at any time under Condition (1.4), so we will not consider this case and we will always suppose that  $|p| > C$  in  $\tilde{\omega}$  for a positive constant  $C$  and an open subinterval  $\tilde{\omega}$  of  $\omega$ .

Let us first introduce the following notion of equivalent systems.

**DEFINITION 3.1.** Let  $p_1, p_2 \in W_{\infty}^1(0, \pi)$  and  $q_1, q_2 \in L^{\infty}(0, \pi)$ . Consider the systems given for  $i \in \{1, 2\}$  by

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{For given } y^0 \in L^2(0, \pi)^2, v \in L^2(Q_T), \\ \text{Find } y := (y_1, y_2) \in W(0, T)^2 \text{ such that :} \\ \partial_t y_1 - \partial_{xx} y_1 = \mathbb{1}_{\omega} v & \text{in } Q_T, \\ \partial_t y_2 - \partial_{xx} y_2 + p_i(x) \partial_x y_1 + q_i(x) y_1 = 0 & \text{in } Q_T, \\ y(0, \cdot) = y(\pi, \cdot) = 0 & \text{on } (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } (0, \pi). \end{array} \right. \quad (\mathcal{S}_i)$$

We say that System  $(\mathcal{S}_1)$  is *equivalent* to System  $(\mathcal{S}_2)$  if System  $(\mathcal{S}_1)$  is null controllable at time  $T$  if and only if System  $(\mathcal{S}_2)$  is null controllable at time  $T$ .

Let us present the main technique used all along this section. Suppose that System (1.1) is null controllable at time  $T$ . Let  $v$  a control such that the solution  $y$  to System (1.1) verifies  $y(T) = 0$  in  $(0, \pi)$  and  $\omega_0 := (\alpha, \beta)$  a subinterval of  $\omega = (a, b)$ . Consider a function  $\theta \in W_{\infty}^2(0, \pi)$  satisfying

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta \equiv \kappa_1 & \text{in } (0, \alpha), \\ \theta \equiv \kappa_2 & \text{in } (\beta, \pi), \\ |\theta| > \kappa_3 & \text{in } (0, \pi), \end{array} \right. \quad (3.13)$$

with  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}_+^*$ . Thus if we consider the change of unknown

$$\hat{y} := (\hat{y}_1, y_2) \text{ with } \hat{y}_1 := \theta^{-1} y_1, \quad (3.14)$$

then  $\hat{y}$  is solution in  $L^2(0, T; H_0^1(0, \pi)^2) \cap C([0, T]; L^2(0, \pi)^2)$  to the system

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \hat{y}_1 - \partial_{xx} \hat{y}_1 = \mathbb{1}_{\omega} \hat{v} & \text{in } Q_T, \\ \partial_t y_2 - \partial_{xx} y_2 + \hat{p} \partial_x \hat{y}_1 + \hat{q} \hat{y}_1 = 0 & \text{in } Q_T, \\ \hat{y}(0, \cdot) = \hat{y}(\pi, \cdot) = 0 & \text{on } (0, T), \\ \hat{y}(\cdot, 0) = \hat{y}_0 & \text{in } (0, \pi), \end{array} \right. \quad (3.15)$$

where the initial condition is  $\hat{y}_0 := (\theta^{-1} y_1^0, y_2^0) \in L^2(0, \pi)^2$ , the control is  $\hat{v} := -\partial_{xx}(\theta^{-1}) y_1 - 2\partial_x(\theta^{-1}) \partial_x y_1 + \theta^{-1} v \in L^2(Q_T)$  and the coupling terms are given by

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p} := p\theta, \\ \hat{q} := p\partial_x \theta + q\theta. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Since  $\theta$  is constant in  $(0, \pi) \setminus \omega_0$ , we have

$$\text{Supp } \hat{v} \subseteq \omega \times (0, T).$$

Since  $y$  is controlled, then  $\hat{y}$  also. The converse is clearly true: starting from the controlled System (3.15) the same process leads to the construction of a controlled solution of System (1.1). Thus through the change of unknown (3.14), following Definition 3.1, Systems (1.1) and (3.15) are equivalent.

The next main result of this section is Proposition 3.1 that will be introduced after some lemmas. The first of them is the following.

**Lemma 3.1.** *Let  $p \in W_\infty^1(0, \pi) \cap W_\infty^2(\omega)$  and  $q \in L^\infty(0, \pi) \cap W_\infty^1(\omega)$  with  $|p| > C$  in an open subinterval  $\tilde{\omega}$  of  $\omega$  for a positive constant  $C$ . There exists a subinterval  $\omega_0 := (\alpha, \beta) \subset \tilde{\omega}$  and a function  $\theta \in W_\infty^2(0, \pi)$  satisfying (3.13) such that System (1.1) is equivalent to System (3.15) with  $\hat{q} \equiv 0$  in  $\omega_0$ . Moreover for all  $\varepsilon > 0$  the interval  $\omega_0$  can be chosen in order to have for all  $k \in \mathbb{N}^*$*

$$|I(p, q) - I(\hat{p}, \hat{q})| \leq \varepsilon \quad \text{and} \quad |I_k(p, q) - I_k(\hat{p}, \hat{q})| \leq \varepsilon. \quad (3.17)$$

*Démonstration.* Let  $\omega_0 := (\alpha, \beta)$  be an interval strictly included in  $\tilde{\omega} := (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  and  $\theta \in W_\infty^2(0, \pi)$  satisfying

$$\begin{cases} p\partial_x\theta + q\theta = 0 & \text{in } \omega_0, \\ \theta \equiv 1 & \text{in } (0, \pi) \setminus \tilde{\omega}, \\ |\theta| > C & \text{in } (0, \pi), \end{cases} \quad (3.18)$$

for a positive constant  $C$ . In the intervals  $(\tilde{\alpha}, \alpha]$  and  $[\beta, \tilde{\beta})$ , we can take  $\theta$  of class  $C^\infty$  in order to have  $\theta \in W_\infty^2(0, \pi)$ . Thus the function  $\theta$  verifies (3.13) and, following the change of unknown described in (3.14), System (1.1) is equivalent to System (3.15) with  $\hat{q} \equiv 0$  in  $\omega_0$  (see (3.16)). The estimates in (3.17) are obtained taking the interval  $\omega_0$  small enough.  $\square$

Let us first study System (1.1) in a particular case.

**Lemma 3.2.** *Consider  $p \in W_\infty^1(0, \pi) \cap W_\infty^2(\omega)$  and  $q \in L^\infty(0, \pi) \cap W_\infty^1(\omega)$ . Let us suppose that  $p \equiv C \in \mathbb{R}^*$  and  $q \equiv 0$  in an open subinterval  $\tilde{\omega}$  of  $\omega$ . Then System (1.1) is equivalent to a system of the form (3.15) with coupling terms  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$  satisfying*

$$|I_k(\hat{p}, \hat{q})| > C/k^6, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

To prove this result we will need this lemma:

**Lemma 3.3.** *Let  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  be a real sequence. Then there exists  $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$  such that for all  $k \in \mathbb{N}^*$*

$$|u_k + \kappa| \geq 1/k^2.$$

*Proof of Lemma 3.3.* By contradiction let us suppose that for all  $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$  there exists  $k \in \mathbb{N}^*$  such that for all  $k \in \mathbb{N}^*$

$$|u_k + \kappa| < 1/k^2.$$

Then

$$\mathbb{R}_+^* \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (u_k - 1/k^2, u_k + 1/k^2). \quad (3.19)$$

The convergence of the series  $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} 1/k^2$  implies that the measure of the set in the right hand-side in (3.19) is finite and leads to the conclusion.  $\square$

III. CONTROLLABILITY OF A 2 X 2 PARABOLIC SYSTEM BY ONE FORCE WITH SPACE-DEPENDENT COUPLING TERM OF ORDER ONE.

*Proof of Lemma 3.2.* Let  $(\alpha, \beta)$  an open subinterval of  $\tilde{\omega}$  with  $\alpha$  and  $\beta$  to be determined later,  $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$  and  $\theta \in W_\infty^2(0, \pi)$  satisfying

$$\begin{cases} \theta \equiv 1 & \text{in } (0, \pi) \setminus (\alpha, \beta), \\ \theta \equiv 1 + \kappa \xi & \text{in } (\alpha, \beta), \end{cases} \quad (3.20)$$

where

$$\xi = \sin^2 \left( \frac{\pi(x - \alpha)}{\beta - \alpha} \right) \text{ in } (\alpha, \beta).$$

In particular, we have  $\theta \geq 1$  in  $(0, \pi)$ . Let  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\hat{y}_1 := \theta^{-1}y_1$  and  $\hat{y} := (\hat{y}_1, y_2)$  the solution to System (3.15). For System (3.15) the quantity  $I_k$  defined in the introduction is given by

$$\begin{aligned} I_k(\hat{p}, \hat{q}) &= \int_0^\pi \left\{ \hat{q} - \frac{1}{2} \partial_x \hat{p} \right\} \varphi_k^2 \\ &= I_k(p, q) + \kappa J_k, \end{aligned}$$

with  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$  given in (3.16) and  $J_k$  defined by

$$J_k := \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \partial_x(\xi) \varphi_k^2.$$

Then, after a simple calculation, we obtain

$$J_k = \frac{\frac{2\pi}{(\beta-\alpha)^2}}{(2k + \frac{2\pi}{\beta-\alpha})(2k - \frac{2\pi}{\beta-\alpha})} \sin(k(\beta + \alpha)) \sin(k(\beta - \alpha)). \quad (3.21)$$

Let  $n \in \mathbb{N}^*$  and  $\ell$  an algebraic number of order two satisfying

$$\frac{a}{n} < \ell < \frac{b}{n+1} \text{ and } \ell \neq \frac{\pi}{j} \text{ for all } j \in \mathbb{N}^*.$$

Let us take  $\alpha := n\ell$  and  $\beta := (n+1)\ell$ . Thus  $\alpha, \beta \in (a, b)$  and

$$k(\beta + \alpha) = k(2n+1)\ell \text{ and } k(\beta - \alpha) = k\ell. \quad (3.22)$$

Moreover

$$\left| 2k + \frac{2\pi}{\beta - \alpha} \right| \times \left| 2k - \frac{2\pi}{\beta - \alpha} \right| < Rk^2,$$

with  $R > 0$ . Since  $\ell$  is an algebraic number of order two, using diophantine approximations it can be proved that

$$\inf_{j \geq 1} (j |\sin(j\ell)|) \geq \gamma, \quad (3.23)$$

for a positive constant  $\gamma$  (see [AK+15]). The expressions (3.21)-(3.23) give

$$|J_k| \geq \frac{2\pi}{(\beta - \alpha)^2} \frac{\gamma^2}{R(2n+1)k^4}. \quad (3.24)$$

Using Lemma 3.3, there exists  $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$  satisfying

$$\left| \frac{I_k(p, q)}{J_k} + \kappa \right| \geq 1/k^2.$$

Combining the last inequality with Estimate (3.24),

$$|I_k(\hat{p}, \hat{q})| = |I_k(p, q) + \kappa J_k| \geq J_k/k^2 \geq C/k^6.$$

□

The next lemma is proved in [AK+15] but, for the sake of completeness, we will include the proof in the appendix A.

**Lemma 3.4.** *There exist functions  $f^{(1)}, f^{(2)} \in L^2(0, \pi)$  satisfying*

$$\text{Supp} \left( f^{(1)} \right), \text{Supp} \left( f^{(2)} \right) \subseteq \omega$$

and such that for all  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} \min\{|f_k^{(1)}|, |f_k^{(2)}|\} \geq \frac{C}{k^3}, \\ |B_k| := |\hat{f}_k^{(1)} f_k^{(2)} - \hat{f}_k^{(2)} f_k^{(1)}| \geq \frac{C}{k^5}, \end{cases} \quad (3.25)$$

where for  $i \in \{1, 2\}$  the terms  $f_k^{(i)}$  and  $\hat{f}_k^{(i)}$  are given by

$$f_k^{(i)} := \int_0^\pi f^{(i)}(x) \varphi_k(x) dx \quad \text{and} \quad \hat{f}_k^{(i)} := \int_0^\pi f^{(i)}(x) \cos(kx) dx. \quad (3.26)$$

With the help of Lemma 3.4, we deduce the following proposition:

**PROPOSITION 3.1.** *Consider  $p \in W_\infty^1(0, \pi) \cap W_\infty^2(\omega)$  and  $q \in L^\infty(0, \pi) \cap W_\infty^1(\omega)$ . Let us suppose that  $|p| > C$  in an open subinterval  $\tilde{\omega}$  of  $\omega$  for a positive constant  $C$ . Then System (1.1) is equivalent to a system of the form (3.15) with coupling terms  $\hat{p}, \hat{q}$  satisfying Condition (1.10),  $T_0(\hat{p}, \hat{q}) = 0$  and*

$$|\det A_{1,k}| \geq \frac{C_1}{k^7} |I_{a,k}(\hat{p}, \hat{q})| - \frac{C_2}{k} |I_k(\hat{p}, \hat{q})| \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (3.27)$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are two positive constants independent on  $k$  (the notion of equivalent systems is defined at the beginning of Section 3.2).

*Démonstration.* Using Lemma 3.1, without loss of generality, we can suppose that  $q \equiv 0$  and  $|p| > C$  in a subinterval  $\hat{\omega}$  of  $\tilde{\omega}$  for a positive constant  $C$ . If  $\partial_x p \equiv 0$  in  $\hat{\omega}$ , Lemma 3.2 leads to

$$|I_k(p, q)| \geq C/k^6, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

which implies that Condition (1.10) is satisfied and the right hand-side of inequality (3.27) is negative for some appropriate constants  $C_1$  and  $C_2$ . Otherwise, let  $(\alpha, \beta) \subseteq \hat{\omega}$  such that  $\partial_x p > C$  in  $(\alpha, \beta)$  or  $\partial_x p < -C$  in  $(\alpha, \beta)$  for a positive constant  $C$ .

The rest of the proof is divided into three steps:

- (i) In a first step we will see that System (1.1) is equivalent to a system with coupling terms  $p, q$  satisfying

$$I(p, q) := \int_0^\pi \left\{ q - \frac{1}{2} \partial_x p \right\} \neq 0.$$

- (ii) We will show in a second step that we can suppose that System (1.1) is equivalent to a system with coupling terms  $p, q$  such that for a positive constant  $C$

$$|I_k(p, q)| > C \text{ for all } k \in \mathbb{N}^* \text{ satisfying } p\varphi_k \text{ non-constant.}$$

- (iii) Finally, in a third step, we will prove that System (1.1) is equivalent to a system which fulfills the three conditions described in (3.27).

**Step 1:** Assume that  $I(p, q) = 0$  and consider  $\theta \in W_\infty^2(0, \pi)$  defined in (3.20), with  $\kappa := 1$ . We remark that  $|\theta| \geq 1$ . If we consider the change of unknown described in (3.14), then for all  $k \in \mathbb{N}^*$ , using the definition of  $I_k$ , we obtain

$$\begin{aligned} I_k(\hat{p}, \hat{q}) &= I_k(p, q) + \int_\alpha^\beta \left\{ \frac{1}{2} \partial_x(\xi) p - \frac{1}{2} \xi \partial_x(p) \right\} \varphi_k^2 dx \\ &= I_k(p, q) + J_k(p, q), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} J_k(p, q) &= \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \{ \partial_x(\xi) p - \xi \partial_x(p) \} \{ 1 - \cos(2kx) \} dx \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \{ \partial_x(\xi) p - \xi \partial_x(p) \} dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \xi \partial_x(p) dx =: J(p, q). \end{aligned}$$

Using the definition of  $\xi$ , we get

$$\begin{aligned} |J(p, q)| &\geq \frac{1}{\pi} \inf_{(\alpha, \beta)} |\partial_x p| \int_\alpha^\beta \sin^2 \left( \frac{\pi(x - \alpha)}{\beta - \alpha} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \inf_{(\alpha, \beta)} |\partial_x p| \int_\alpha^\beta \left\{ 1 - \cos \left( \frac{2\pi(x - \alpha)}{\beta - \alpha} \right) \right\} dx \\ &= \frac{(\beta - \alpha)}{2\pi} \inf_{(\alpha, \beta)} |\partial_x p| \neq 0. \end{aligned}$$

We recall that  $I_k(p, q) \rightarrow I(p, q) = 0$ . Thus we obtain  $I_k(\hat{p}, \hat{q}) \rightarrow I(\hat{p}, \hat{q}) \neq 0$ .

**Step 2:** Let us now assume that  $I(p, q) \neq 0$ . Using Lemma 3.1, up to the change of unknown (3.14) we can also suppose that  $q \equiv 0$  in an open subinterval  $\hat{\omega}$  of  $\tilde{\omega}$ . Moreover, by (3.17), the function  $\theta$  and  $\hat{\omega}$  can be chosen in order to keep the quantity  $I$  different of zero. Let  $(\alpha, \beta) \subseteq \hat{\omega}$  such that  $|p| > C > 0$  in  $(\alpha, \beta)$ . Since  $I(p, q) \neq 0$  and  $I_k(p, q) \rightarrow I(p, q)$ , there exists  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  such that  $|I_k(p, q)| > C$  for a constant  $C > 0$  and all  $k \geq k_0$ . Let us define the set

$$S_0 := \{k \in \mathbb{N}^* : I_k(p, q) = 0 \text{ and } p\varphi_k \text{ non-constant in } (\alpha, \beta)\}$$

and  $M := \#S_0 < \infty$ . Let  $\theta \in W_\infty^2(0, \pi)$  satisfying

$$\begin{cases} \theta = 1 + \sum_{m=1}^M \xi_m, \\ \xi_m \in W_\infty^2(0, \pi), & \text{for all } m \in \{1, \dots, M\}, \\ \text{Supp}(\xi_m) \subseteq (\alpha, \beta), & \text{for all } m \in \{1, \dots, M\}, \\ |\theta| > C > 0, \end{cases}$$

where  $\xi_1, \dots, \xi_M$  are to be determined. Again, if we consider the change of unknown (3.14), then for all  $k \in \mathbb{N}^*$ , using the definition of  $I_k$ , we obtain

$$\begin{aligned} I_k(\hat{p}, \hat{q}) &= I_k(p, q) + \sum_{m=1}^M \int_\alpha^\beta \left\{ \frac{1}{2} \partial_x(\xi_m) p - \frac{1}{2} \xi_m \partial_x(p) \right\} \varphi_k^2 dx \\ &=: I_k(p, q) + \sum_{m=1}^M J_{m,k}(p, q). \end{aligned}$$

The goal is to choose the functions  $\xi_1, \dots, \xi_M$  such that for a constant  $C > 0$  we have  $|I_k(\hat{p}, \hat{q})| > C$  for all  $k \in \mathbb{N}^*$  satisfying  $p\varphi_k$  non-constant in  $(\alpha, \beta)$ . We will construct  $\xi_1, \dots, \xi_M$  from  $\xi_1$  until  $\xi_M$ .

Let  $k \in S_0$  and consider  $(f_1, \xi_1) \in W_\infty^1(\alpha, \beta) \times W_\infty^2(\alpha, \beta)$  a solution to

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\partial_x(\xi_1)p - \frac{1}{2}\xi_1\partial_x(p) = f_1 & \text{in } (\alpha, \beta), \\ \xi_1(\alpha) = \xi_1(\beta) = \partial_x\xi_1(\alpha) = \partial_x\xi_1(\beta) = 0. \end{cases}$$

This system is equivalent to

$$\begin{cases} \xi_1(x) = p(x) \int_\alpha^x \frac{2f_1(s)}{p^2(s)} ds, & \text{for all } x \in (\alpha, \beta), \\ \int_\alpha^\beta \frac{2f_1(s)}{p^2(s)} ds = 0, \\ f_1(\alpha) = f_1(\beta) = 0. \end{cases}$$

We remark that we need that  $p \in W_\infty^2(\alpha, \beta)$ . Finding a function  $f_1$  satisfying

$$f_1(\alpha) = f_1(\beta) = 0, \int_\alpha^\beta \frac{2f_1(s)}{p^2(s)} ds = 0 \text{ and } I_{1,k}(p, q) = \int_\alpha^\beta f_1(s)\varphi_k^2(s) ds \neq 0, \quad (3.28)$$

is equivalent to finding a function  $g := 2f_1/p^2$  satisfying

$$g_1(\alpha) = g_1(\beta) = 0, \int_\alpha^\beta g_1(s) ds = 0 \text{ and } \int_\alpha^\beta g_1(s)p^2(s)\varphi_k^2(s) ds \neq 0.$$

Let  $\kappa_1 \in \mathbb{R}$  and define for all  $j \in \mathbb{N}^*$  and all  $x \in (\alpha, \beta)$

$$g_{1,j}(x) := \kappa_1 \sin\left(\frac{2\pi j(x - \alpha)}{\beta - \alpha}\right).$$

Using the fact that  $p\varphi_k$  is non-constant in  $(\alpha, \beta)$ , without loss of generality, we can suppose that

$$\varphi_k\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{4}\right)p\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{4}\right) \neq \varphi_k\left(\alpha + \frac{3(\beta - \alpha)}{4}\right)p\left(\alpha + \frac{3(\beta - \alpha)}{4}\right),$$

otherwise we adapt the interval  $(\alpha, \beta)$  at the beginning of Step 2. We deduce that the function  $h_k$  of  $L^2(\alpha, \alpha + (\beta - \alpha)/2)$  defined by

$$\begin{aligned} h_k : (\alpha, \alpha + (\beta - \alpha)/2) &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto p^2(s)\varphi_k^2(s) - p^2(\beta + \alpha - s)\varphi_k^2(\beta + \alpha - s) \end{aligned}$$

is not equal to zero in  $(\alpha, \alpha + (\beta - \alpha)/2)$ . Since  $(g_{1,j})_{j \in \mathbb{N}^*}$  is a Riesz basis of  $L^2(\alpha, \alpha + (\beta - \alpha)/2)$ , there exists  $j_1 \in \mathbb{N}^*$  such that

$$\int_\alpha^{\alpha + (\beta - \alpha)/2} g_{1,j_1}(s) [p^2(s)\varphi_k^2(s) - p^2(\beta + \alpha - s)\varphi_k^2(\beta + \alpha - s)] ds \neq 0.$$

Moreover, using the fact that

$$g_{1,j_1}(s) = g_{1,j_1}(\beta + \alpha - s) \quad \forall s \in (\alpha, \alpha + (\beta - \alpha)/2),$$



we have

$$\int_{\alpha}^{\alpha+(\beta-\alpha)/2} g_{1,j_1}(s)p^2(s)\varphi_k^2(s)ds \neq - \int_{\alpha+(\beta-\alpha)/2}^{\beta} g_{1,j_1}(s)p^2(s)\varphi_k^2(s)ds.$$

Thus

$$\int_{\alpha}^{\beta} g_{1,j_1}(s)p^2(s)\varphi_k^2(s)ds \neq 0.$$

Plugging  $g_1 := g_{1,j_1}$  and  $f_1 := \frac{g_{1,j_1}p^2}{2}$  in (3.28), we obtain

$$J_{1,k}(p, q) = \frac{\kappa_1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \sin\left(\frac{2\pi j_1(s-\alpha)}{\beta-\alpha}\right) p(s)^2 \varphi_k(s)^2 ds \neq 0.$$

We have also for all  $j \in \mathbb{N}^*$

$$J_{1,j}(p, q) = \frac{\kappa_1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \sin\left(\frac{2\pi j_1(s-\alpha)}{\beta-\alpha}\right) p(s)^2 \varphi_j(s)^2 ds.$$

We fix  $\kappa_1$  in order to have

$$\sup_{i \in \mathbb{N}^*} |J_{1,i}(p, q)| \leq \frac{1}{2} \inf_{i \in \mathbb{N}^* \setminus S_0} |I_i(p, q)|.$$

Let  $m \in \{2, \dots, M\}$  and let us assume that  $\xi_1, \dots, \xi_{m-1}$  are already constructed. Consider the set

$$S_{m-1} := \{k \in \mathbb{N}^* : I_k(p, q) + \sum_{j=1}^{m-1} J_{j,k}(p, q) = 0 \text{ and } p\varphi_k \text{ non-constant in } (\alpha, \beta)\}.$$

If  $S_{m-1} = \emptyset$ , then we take  $\xi_m = 0$  in  $(0, \pi)$ . Otherwise, let  $k \in S_{m-1}$  and consider  $(f_m, \xi_m) \in W_{\infty}^1(\alpha, \beta) \times W_{\infty}^2(\alpha, \beta)$  a solution to

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \partial_x(\xi_m)p - \frac{1}{2} \xi_m \partial_x(p) = f_m & \text{in } (\alpha, \beta), \\ \xi_m(\alpha) = \xi_m(\beta) = \partial_x \xi_m(\alpha) = \partial_x \xi_m(\beta) = 0. \end{cases}$$

This system is equivalent to

$$\begin{cases} \xi_m(x) = p(x) \int_{\alpha}^x \frac{2f_m(s)}{p^2(s)} ds, & \text{for all } x \in (\alpha, \beta), \\ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2f_m(s)}{p^2(s)} ds = 0, \\ f_m(\alpha) = f_m(\beta) = 0. \end{cases}$$

Let  $\kappa_m > 0$ . Again, there exists  $j_m \in \mathbb{N}^*$  such that the function  $f_m$  given for all  $x \in (\alpha, \beta)$  by

$$f_m(x) := \frac{\kappa_m}{2} \sin\left(\frac{2\pi j_m(x-\alpha)}{\beta-\alpha}\right) p(x)^2$$

is solution to this system. Then, we obtain

$$J_{m,j}(p, q) = \frac{\kappa_m}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \sin\left(\frac{2\pi j_m(s-\alpha)}{\beta-\alpha}\right) p(s)^2 \varphi_j(s)^2 ds.$$

The last quantity is different of zero for  $j = k$ . Let us fix  $\kappa_m$  in order to have

$$\sup_{i \in \mathbb{N}^*} |J_{m,i}(p, q)| \leq \frac{1}{2} \inf_{i \in \mathbb{N}^* \setminus S_{m-1}} \left| I_i(p, q) + \sum_{j=1}^{m-1} J_{ji}(p, q) \right|.$$

Thus, after constructing the functions  $\xi_1, \dots, \xi_M$ , the obtained functions  $\hat{p}$  and  $\hat{q}$  are such that

$$|I_k(\hat{p}, \hat{q})| > C \text{ for all } k \in \mathbb{N}^* \text{ satisfying } p\varphi_k \text{ non-constant in } (\alpha, \beta),$$

where  $C$  is a positive constant which does not depend on  $k$ . If  $|I_k(\hat{p}, \hat{q})| > C$  for all  $k \in \mathbb{N}^*$  and a positive constant  $C$ , then Condition (1.10) is satisfied and the right hand-side of inequality (3.27) is negative for some appropriate constants  $C_1$  and  $C_2$ .

**Step 3:** Assume that there exists  $m \in \mathbb{N}^*$  such that

$$\begin{cases} |I_k(p, q)| > C > 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}^* \setminus \{m\}, \\ I_m(p, q) = 0, \\ p\varphi_m \text{ constant in } (\alpha, \beta). \end{cases} \quad (3.29)$$

Again, using Lemma 3.1, up to the change of unknown (3.14) described at the beginning of the section we can also suppose that  $q \equiv 0$  in a subinterval  $(\alpha, \beta)$  of  $\tilde{\omega}$ . Moreover, using (3.17), this change of unknown can be chosen in order to keep the property:  $|I_k(p, q)| > C > 0$  for all  $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{m\}$ . Let  $m \in \mathbb{N}^*$  such that  $I_m(p, q) = 0$  and  $p\varphi_m$  is constant in  $(\alpha, \beta)$ , otherwise we argue as in Step 2. Let  $\theta \in W_{\infty}^2(0, \pi)$  satisfying

$$\begin{cases} \theta = 1 + \xi & \text{in } (0, \pi), \\ \xi \in W_{\infty}^2(0, \pi), \\ \xi \equiv \xi_{\alpha} \in \mathbb{R}_+^* & \text{in } (0, \alpha), \\ \xi \equiv 0 & \text{in } (\beta, \pi), \\ |\theta| > C > 0. \end{cases}$$

Again, if we consider the change of unknown described in (3.14), then for all  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} I_k(\hat{p}, \hat{q}) &= I_k(p, q) + \int_0^{\beta} \left\{ \frac{1}{2} \partial_x(\xi) p + \xi q - \frac{1}{2} \xi \partial_x(p) \right\} \varphi_k^2 dx \\ &=: I_k(p, q) + J_k(p, q). \end{aligned}$$

We will distinguish the cases  $I_{\alpha, m}(p, q) = 0$  and  $I_{\alpha, m}(p, q) \neq 0$  (see (1.8) for the definition of this quantity) for the new control domain  $\omega := (\alpha, \beta)$ .

Case 1: Assume that  $I_{\alpha, m}(p, q) = 0$ . Let  $(\xi, h) \in W_{\infty}^2(\alpha, \beta) \times W_{\infty}^1(\alpha, \beta)$  be a solution to the system

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \partial_x(\xi) p - \frac{1}{2} \xi \partial_x(p) = h & \text{in } (\alpha, \beta), \\ \xi(\beta) = \partial_x \xi(\alpha) = \partial_x \xi(\beta) = 0, \\ \xi(\alpha) = \xi_{\alpha} \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

This system is equivalent to

$$\begin{cases} \xi(x) = -p(x) \int_x^\beta \frac{2h(s)}{p^2(s)} ds, & \text{for all } x \in (\alpha, \beta), \\ \int_\alpha^\beta \frac{2h(s)}{p^2(s)} ds = \frac{-\xi_\alpha}{p(\alpha)}, \\ h(\alpha) = \frac{-\xi_\alpha \partial_x p(\alpha)}{2}, \\ h(\beta) = 0. \end{cases}$$

Taking into account that  $I_{\alpha,m}(p, q) = 0, q \equiv 0$  in  $(\alpha, \beta)$  and  $p\varphi_m \equiv \gamma$  in  $(\alpha, \beta)$  for a  $\gamma \in \mathbb{R}^*$ , one gets

$$J_m(p, q) = \xi_\alpha \int_0^\alpha (q - \frac{1}{2} \partial_x(p)) \varphi_m^2 dx + \frac{\gamma^2}{2} \int_\alpha^\beta \partial_x \left( \frac{\xi}{p} \right) dx = -\frac{\gamma^2 \xi_\alpha}{2p(\alpha)} \neq 0.$$

Let  $\xi_\alpha$  and  $h$  be such that

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} |J_k(p, q)| \leq \frac{1}{2} \inf_{k \in \mathbb{N}^* \setminus \{m\}} |I_k(p, q)|.$$

Then  $|I_k(\hat{p}, \hat{q})| > C$  for all  $k \in \mathbb{N}^*$  and a positive constant  $C$ . Thus Condition (1.10) is satisfied and the right hand-side of inequality (3.27) is negative for some appropriate constants  $C_1$  and  $C_2$ .

Case 2: Let us now assume that  $I_{\alpha,m}(p, q) \neq 0$ . Then Condition (1.10) is verified. In this case, we recall that, in the moment problem described in the last section, we have

$$\det A_{1,m} := \tilde{f}_m^{(1)} f_m^{(2)} - \tilde{f}_m^{(2)} f_m^{(1)},$$

where  $f_m^{(1)}, f_m^{(2)}, \tilde{f}_m^{(1)}$  and  $\tilde{f}_m^{(2)}$  are given in (3.4). Since  $p\varphi_m$  is constant in  $(\alpha, \beta)$ , the function  $\psi_m^*$  of Proposition 2.1 reads for all  $x \in (\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} \psi_m^*(x) &= \alpha_m^* \varphi_m - \frac{1}{m} \int_0^\alpha \sin(m(x - \xi)) [\partial_x(p(\xi)\varphi_m(\xi)) - q(\xi)\varphi_m(\xi)] d\xi \\ &= \tau_m \varphi_m(x) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{m} I_{\alpha,m}(p, q) \cos(mx), \end{aligned}$$

with

$$\tau_m := \alpha_m^* - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{m} \int_0^\alpha \cos(m\xi) [\partial_x(p(\xi)\varphi_m(\xi)) - q(\xi)\varphi_m(\xi)] d\xi.$$

We deduce that

$$\det A_{1,m} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{m} I_{\alpha,m}(p, q) (\tilde{f}_m^{(1)} f_m^{(2)} - \tilde{f}_m^{(2)} f_m^{(1)}),$$

where  $\tilde{f}_m^{(1)}$  and  $\tilde{f}_m^{(2)}$  are given in Lemma 3.4. Using Lemma 3.4, we obtain  $\det A_{1,m} \neq 0$ . Thus, for  $C_1$  small enough (3.27) is true for  $k = m$  and, for all  $k \neq m$ , the right hand-side of (3.27) is negative for  $C_2$  be enough.

We conclude this proof remarking that, in each case, there exists  $C > 0$  and  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  such that, for all  $k \geq k_0$ , we have

$$|I_k(\hat{p}, \hat{q})| \geq C/k^6,$$

which implies that  $T_0(\hat{p}, \hat{q}) = 0$ . □

We recall that  $T_0(p, q)$  is given by

$$T_0(p, q) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\min(-\log |I_k(p, q)|, -\log |I_{a,k}(p, q)|)}{k^2}. \quad (3.30)$$

Before to prove Theorem 1.1, we will establish the following proposition which is true not necessary in the case where the coupling region intersects the control domain.

**PROPOSITION 3.2.** *Assume that Condition (1.10) holds,  $T > T_0(p, q)$  and, for positive constants  $C_1$  and  $C_2$ ,*

$$|\det A_{1,k}| \geq \frac{C_1}{k^7} |I_{a,k}(p, q)| - \frac{C_2}{k} |I_k(p, q)|, \quad (3.31)$$

Then System (1.1) is null controllable at time  $T$ .

*Démonstration.* We will use the same strategy than [AK+15]. Let  $\varepsilon > 0$ . Using the definition of the minimal time  $T_0(p, q)$  in (3.30), there exists a positive integer  $k_\varepsilon$  for which

$$\min \left\{ \log |I_{a,k}(p, q)|^{-1}, \log |I_k(p, q)|^{-1} \right\} < k^2(T_0(p, q) + \varepsilon), \quad \forall k > k_\varepsilon. \quad (3.32)$$

The goal is to solve the moment problem described in Section 3.1. We recall that we look for a control  $v$  of the form (3.2) and (3.8) with  $f^{(1)}$  and  $f^{(2)}$  defined in Lemma 3.4. We will solve the moment problem (3.9) depending on whether  $k$  belongs to  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  or  $\Lambda_3$ , where

$$\begin{cases} \Lambda_1 & := \{k \in \mathbb{N}^* : I_k(p, q) \neq 0, I_{a,k}(p, q) \neq 0\}, \\ \Lambda_2 & := \{k \in \mathbb{N}^* : I_k(p, q) \neq 0, I_{a,k}(p, q) = 0\}, \\ \Lambda_3 & := \{k \in \mathbb{N}^* : I_k(p, q) = 0, I_{a,k}(p, q) \neq 0\}. \end{cases}$$

**Case 1 :** Consider the case  $k \in \Lambda_1$  with  $k \leq k_\varepsilon$ .

Let us take

$$v_{1,k}^{(2)} = v_{2,k}^{(2)} = 0.$$

The moment problem (3.9) becomes

$$\begin{cases} \tilde{f}_k^{(1)} v_{1,k}^{(1)} - I_k(p, q) f_k^{(1)} v_{2,k}^{(1)} = -e^{-k^2 T} \left( y_{1,k}^0 - T I_k(p, q) y_{2,k}^0 \right), \\ f_k^{(1)} v_{1,k}^{(1)} = -e^{-k^2 T} y_{2,k}^0. \end{cases}$$

Since  $I_k(p, q) \neq 0$  and using the estimate of  $f_k^{(1)}$  and  $f_k^{(2)}$  in Lemma 3.4, the last system has a unique solution

$$\begin{cases} v_{1,k}^{(1)} = -e^{-k^2 T} \frac{y_{2,k}^0}{f_k^{(1)}}, \\ v_{2,k}^{(1)} = \frac{e^{-k^2 T}}{I_k(p, q) f_k^{(1)}} \left( y_{1,k}^0 - T I_k(p, q) y_{2,k}^0 - \tilde{f}_k^{(1)} \frac{y_{2,k}^0}{f_k^{(1)}} \right). \end{cases} \quad (3.33)$$

Moreover, since the set of the  $k$  considered in this case is finite, we get the inequality

$$\left| v_{j,k}^{(i)} \right| \leq C_\varepsilon e^{-k^2 T} \|y^0\|_{L^2(0, \pi)^2}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.34)$$

**Case 2:** Let  $k \in \Lambda_1$  such that  $k > k_\varepsilon$  and  $|I_k(p, q)|^{-1} \leq e^{k^2(T_0(p, q) + 2\varepsilon)}$ .

As in the previous case, we take  $v_{1,k}^{(2)} = v_{2,k}^{(2)} = 0$  and the moment problem (3.9) has a unique

solution, given by (3.33). Thanks to the property of  $\psi_k^*$  (see (2.6)) and Lemma 3.4, we get for  $i = 1, 2$  the following estimates

$$|f_k^{(1)}| \geq C/k^3, \quad |\tilde{f}_k^{(i)}| \leq \frac{C}{k}, \quad |y_{i,k}^0| \leq C \|y^0\|_{L^2(0,\pi)^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (3.35)$$

Thus, using the assumptions on  $k$ , we obtain

$$\begin{cases} |v_{1,k}^{(1)}| \leq Ck^3 e^{-k^2 T} \|y^0\|_{L^2(0,\pi)^2} \leq C_\varepsilon e^{-(T-\varepsilon)k^2} \|y^0\|_{L^2(0,\pi)^2}, \\ |v_{1,k}^{(2)}| \leq \frac{C_\varepsilon e^{-(T-\varepsilon)k^2}}{I_k(p,q)} \|y^0\|_{L^2(0,\pi)^2} \leq C_\varepsilon e^{-(T-T_0-3\varepsilon)k^2} \|y^0\|_{L^2(0,\pi)^2}, \end{cases}$$

where  $C_\varepsilon$  is a constant which is independent on  $k$  and  $y^0$ .

**Case 3:** Consider now  $k \in \Lambda_1$  such that  $k > k_\varepsilon$  and  $|I_k(p,q)|^{-1} > e^{k^2(T_0(p,q)+2\varepsilon)}$ .

This implies with (3.32) that

$$|I_{a,k}(p,q)|^{-1} < e^{k^2(T_0(p,q)+\varepsilon)}. \quad (3.36)$$

The two last inequality lead to

$$|I_k(p,q)| < e^{-\varepsilon k^2} |I_{a,k}(p,q)|.$$

Combined with inequality (3.31), taking  $k_\varepsilon$  large enough, we get

$$|\det A_{1,k}| > C_\varepsilon e^{-\varepsilon k^2} |I_{a,k}(p,q)|, \quad (3.37)$$

with  $C_\varepsilon$  independent on  $k$ . To solve the moment problem (3.9), we take here

$$v_{2,k}^{(1)} = v_{2,k}^{(2)} = 0.$$

Then the moment problem (3.9) reads  $A_{1,k} V_{1,k} = F_k$ . Since  $\det A_{1,k} \neq 0$ , the inverse of  $A_{1,k}$  is given by

$$(A_{1,k})^{-1} = (\det A_{1,k})^{-1} \begin{pmatrix} f_k^{(2)} & -\tilde{f}_k^{(2)} \\ -f_k^{(1)} & \tilde{f}_k^{(1)} \end{pmatrix}.$$

We deduce that the solution to the moment problem (3.9) is

$$\begin{cases} v_{1,k}^{(1)} = \frac{e^{-k^2 T}}{\det A_{1,k}} \{-f_k^{(2)} y_{1,k}^0 + (T I_k(p,q) f_k^{(2)} + \tilde{f}_k^{(2)}) y_{2,k}^0\}, \\ v_{1,k}^{(2)} = \frac{e^{-k^2 T}}{\det A_{1,k}} \{f_k^{(1)} y_{1,k}^0 - (T I_k(p,q) f_k^{(1)} + \tilde{f}_k^{(1)}) y_{2,k}^0\}. \end{cases}$$

The last expression together with (3.36) and (3.37) gives

$$|v_{1,k}^{(i)}| \leq C_\varepsilon e^{-(T-T_0-2\varepsilon)k^2} \|y^0\|_{L^2(0,\pi)^2}, \quad i = 1, 2. \quad (3.38)$$

**Case 4:** Let us consider  $k \in \Lambda_2$ .

If  $k \leq k_\varepsilon$ , we can argue as in Case 1. Let us suppose that  $k > k_\varepsilon$ . In this case,  $I_{a,k}(p,q) = 0$ ,  $I_k(p,q) \neq 0$  and inequality (3.32) reads  $|I_k(p,q)|^{-1} < e^{k^2(T_0(p,q)+\varepsilon)}$ . We take here

$$v_{1,k}^{(2)} = v_{2,k}^{(2)} = 0$$

and the solution of moment problem (3.9) is given by (3.33). We get

$$\left|v_{j,k}^{(i)}\right| \leq C_{\varepsilon} e^{-k^2(T-T_0(p,q)-2\varepsilon)} \|y^0\|_{L^2(0,\pi)^2}, \quad i, j = 1, 2.$$

**Case 5:** Let us now deal with the case  $k \in \Lambda_3$ .

We recall that  $I_k(p, q) = 0$ ,  $I_{1,k}(p, q) \neq 0$  and inequality (3.32) reads

$$|I_{a,k}(p, q)|^{-1} < e^{k^2(T_0(p,q)+\varepsilon)}. \quad (3.39)$$

The moment problem (3.9) is now  $A_{1,k}V_{1,k} = F_k$  with  $A_{1,k}$  and  $F_k$  given in (3.10) and (3.12), respectively. From (3.31), the matrix  $A_{1,k}$  is invertible and

$$\begin{cases} v_{1,k}^{(1)} = \frac{e^{-k^2T}}{\det A_{1,k}} \{-f_k^{(2)} y_{1,k}^0 + \tilde{f}_k^{(2)} y_{2,k}^0\}, \\ v_{1,k}^{(2)} = \frac{e^{-k^2T}}{\det A_{1,k}} \{f_k^{(1)} y_{1,k}^0 - \tilde{f}_k^{(1)} y_{2,k}^0\}. \end{cases}$$

Using inequalities (3.31) and (3.39), we obtain estimate (3.38).

**Conclusion:**

We have constructed a control  $v$  of the form (3.2) and (3.8), which satisfies

$$\left|v_{j,k}^{(i)}\right| \leq C_{\varepsilon} \sum_{k \geq 1} e^{-k^2(T-T_0(p,q)-3\varepsilon)} \|y^0\|_{L^2(0,\pi)^2}, \quad i, j = 1, 2, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

The last inequality, the estimate (3.7) of  $q_{i,k}$  and the expression (3.8) of  $v^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) lead to

$$\left\|v^{(i)}\right\|_{L^2(0,T)} \leq C_{\varepsilon,T} e^{-k^2(T-T_0(p,q)-4\varepsilon)}, \quad i = 1, 2.$$

Thus, taking

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{T - T_0(p, q)}{4}\right),$$

we have the absolute convergence of the series defining  $v^{(1)}$  and  $v^{(2)}$  in  $L^2(0, T)$ . This ends the proof. □

*Proof of Theorem 1.1.* Using Proposition 3.1, System (1.1) is equivalent to a system with coupling terms  $\hat{p}$  and  $\hat{q}$  satisfying Condition (1.10) and (3.31). Proposition 3.2 leads to the null controllability of System (1.1) when  $T > T_0(\hat{p}, \hat{q})$ . We end the proof of Theorems 1.1 remarking that  $T_0(\hat{p}, \hat{q}) = 0$ . □

## 4 Proof of Theorem 1.3

### 4.1 Positive null controllability result

Before studying the case where the intersection of the coupling and control domains is empty, we will first rewrite the function  $\psi_k^*$  given in Proposition 2.1.

**Lemma 4.1.** *Let  $k \in \mathbb{N}^*$ . Consider the function  $\psi_k^*$  defined in Proposition 2.1. If we suppose that Condition (1.11) holds, then for all  $x \in \omega$*

$$\psi_k^*(x) = \tau_k \varphi_k(x) + g_k(x) \text{ for all } x \in \omega,$$

where

$$\tau_k := \alpha_k^* - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} \int_0^a \cos(k\xi) [\partial_x(p(\xi)\varphi_k(\xi)) - q(\xi)\varphi_k(\xi)] d\xi$$

and

$$g_k(x) := -\frac{I_k(p, q)}{k} \int_0^x \sin(k(x - \xi)) \varphi_k(\xi) d\xi - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} I_{a, k}(p, q) \cos(kx).$$

*Démonstration.* Since  $p = q \equiv 0$  in  $\omega$ , we get for all  $x \in \omega$ ,

$$\begin{aligned} \psi_k^*(x) &= \alpha_k^* \varphi_k(x) - \frac{I_k(p, q)}{k} \int_0^x \sin(k(x - \xi)) \varphi_k(\xi) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{k} \int_0^a \sin(k(x - \xi)) [\partial_x(p(\xi)\varphi_k(\xi)) - q(\xi)\varphi_k(\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

□

*Proof of Theorem 1.3.* We will follow the strategy of [AK+15]. Assume that Conditions (1.10) and (1.11) hold. Consider the functions  $f^{(1)}$  and  $f^{(2)}$  defined in Lemma 3.4 and the matrix  $A_{1, k}$  given in (3.10). Let  $k \in \mathbb{N}^*$ . We recall that, in this case, we have

$$\det A_{1, k} := \tilde{f}_k^{(1)} f_k^{(2)} - \tilde{f}_k^{(2)} f_k^{(1)},$$

where, for  $i = 1, 2$ ,  $f_k^{(i)}$  and  $\tilde{f}_k^{(i)}$  are defined in (3.4). Since  $\text{Supp}(f^{(i)}) \subseteq \omega$ , using the expression of  $\psi_k^*$  given in Lemma 4.1, we obtain

$$\tilde{f}_k^{(i)} = \tau_k f_k^{(i)} + \int_0^\pi f^{(i)}(x) g_k(x) dx,$$

where for all  $x \in \omega$

$$g_k(x) = -\frac{I_k(p, q)}{k} \int_0^x \sin(k(x - \xi)) \varphi_k(\xi) d\xi - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} I_{a, k}(p, q) \cos(kx).$$

We deduce that

$$\begin{aligned} \det A_{1, k} &= f_k^{(2)} \int_0^\pi f^{(1)}(x) g_k(x) dx - f_k^{(1)} \int_0^\pi f^{(2)}(x) g_k(x) dx \\ &= -\frac{I_k(p, q)}{k} \left( f_k^{(2)} \int_0^\pi \int_0^x f^{(1)}(x) \sin(k(x - \xi)) \varphi_k(\xi) d\xi dx \right. \\ &\quad \left. - f_k^{(1)} \int_0^\pi \int_0^x f^{(2)}(x) \sin(k(x - \xi)) \varphi_k(\xi) d\xi dx \right) \\ &\quad - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} I_{a, k}(p, q) \left( \tilde{f}_k^{(1)} f_k^{(2)} - \tilde{f}_k^{(2)} f_k^{(1)} \right), \end{aligned}$$

where  $\tilde{f}_k^{(i)}$  are defined in (3.26). Since the integrals

$$\int_0^\pi \int_0^x f^{(i)}(x) \sin(k(x - \xi)) \varphi_k(\xi) d\xi dx$$

are uniformly bounded with respect to  $k$  and  $i$ , we conclude with the help of Lemma 3.4.

We deduce that Condition (3.31) holds. Thus, using Proposition 3.2, System (1.1) is null controllable at time  $T$ .

□

## 4.2 Negative null controllability result

Let us now prove the negative part of Theorem 1.3 with the strategy used in [AK+15]. Suppose that  $T < T_0(p, q)$  and System (1.1) is null controllable at time  $T$ . Using Proposition 2.4, there exists a constant  $C_{obs} > 0$  such that for all  $\theta^0 \in L^2(0, \pi)^2$ , the solution to System (2.8) satisfies the observability inequality

$$\|\theta(0)\|_{L^2(0, \pi)^2}^2 \leq C_{obs} \iint_{Q_T} |\mathbb{1}_\omega B^* \theta|^2 dx dt. \quad (4.1)$$

Using the Definition of  $T_0(p, q)$  (see (1.12)) there exists a sequence  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{N}$  satisfying:

$$T_0(p, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\min(\log |I_{a, k_n}(p, q)^{-1}|, \log |I_{k_n}(p, q)^{-1}|)}{k_n^2}. \quad (4.2)$$

Let us fix  $n \geq 1$  and  $\theta^{0n} := a_n \Phi_{1, k_n}^* + b_n \Phi_{2, k_n}^*$  with  $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$  to be determined later and  $\Phi_{2, k_n}^*, \Phi_{1, k_n}^*$  the eigenfunction and generalized eigenfunction associated with  $k_n^2$  given in Proposition 2.1. If we denote by  $\theta^n$  the solution to the dual System (2.8) for initial data  $\theta^{0n}$ , then

$$\theta^n(x, t) = e^{-k_n^2(T-t)} \{a_n \Phi_{1, k_n}^* + (b_n - (T-t)I_{k_n}(p, q)a_n) \Phi_{2, k_n}^*\},$$

thus we have

$$A_{1, n} := \|\theta^n(0)\|_{L^2(0, \pi)^2}^2 = e^{-2k_n^2 T} \left\{ |a_n|^2 |\psi_{k_n}|^2 + |a_n|^2 + (b_n - TI_{k_n}(p, q)a_n)^2 \right\}$$

and

$$A_{2, n} := \iint_{Q_T} |\mathbb{1}_\omega B^* \theta^n|^2 dx dt = \int_0^T \int_\omega e^{-2k_n^2 t} |a_n \psi_{k_n}(x) + (b_n - tI_{k_n}(p, q)a_n) \varphi_{k_n}(x)|^2 dx dt.$$

The observability inequality (4.1) reads

$$A_{1, n} \leq C_{obs} A_{2, n}. \quad (4.3)$$

By choosing  $a_n := 1$  and  $b_n := -\tau_{k_n}$ , we get

$$A_{1, n} \geq e^{-2k_n^2 T} \quad (4.4)$$

and the expression of  $\psi_{k_n}^*(x)$  given in Lemma 4.1 leads to

$$\begin{aligned} A_{2, n} &= \int_0^T \int_\omega e^{-2k_n^2 t} \left| -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k_n} I_{a, k_n}(p, q) \cos(k_n x) \right. \\ &\quad \left. - I_{k_n}(p, q) \frac{1}{k_n} \int_0^x \sin(k_n(x - \xi)) \varphi_{k_n}(\xi) d\xi - tI_{k_n}(p, q) \varphi_{k_n}(x) \right|^2 dx dt \\ &\leq C(I_{a, k_n}(p, q)^2 + I_{k_n}(p, q)^2). \end{aligned}$$

Let  $\varepsilon > 0$ . Equality (4.2) implies that there is  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  such that for all  $k_n \geq k_\varepsilon$

$$\max(|I_{a, k_n}(p, q)|^2, |I_{k_n}(p, q)|^2) \leq e^{-2k_n^2(T_0(p, q) - \varepsilon)}.$$

We deduce that for  $\varepsilon := (T_0(p, q) - T)/2$ , we get

$$A_{2, n} \leq C e^{-2k_n^2(T + \varepsilon)}. \quad (4.5)$$

Thus estimates (4.4) and (4.5) are in contradiction with inequality (4.3) for  $n$  large enough.



## 5 Approximate controllability of system (1.1)

Theorem 1.2 can be proved with the same argument as in [AK+15], but we propose to use here the Hautus test given below, as in [BO14] for example.

**THEOREM 5.1** (see [Fat66], Cor. 3.3). *System (1.1) is approximately controllable at time  $T$  if and only if for any  $s \in \mathbb{C}$  and for any  $u \in \mathcal{D}(L^*)$  we have*

$$\left. \begin{array}{l} L^*u = su \text{ in } (0, \pi) \\ B^*u = 0 \text{ in } \omega \end{array} \right\} \Rightarrow u = 0.$$

*Proof of Theorem 1.2.*

**Necessary condition:** Let us suppose that Conditions (1.9)-(1.10) do not hold *i.e.* there exists  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  such that

$$I_{k_0}(p, q) = I_{a, k_0}(p, q) = 0$$

and

$$(\text{Supp}(p) \cup \text{Supp}(q)) \cap \omega = \emptyset.$$

Then the function  $\psi_{k_0}^*$  of Lemma 4.1 is given by  $\psi_{k_0}^* = \tau_{k_0} \varphi_{k_0}$ . Moreover

$$\Phi_{1, k_0}^* - \tau_{k_0} \Phi_{2, k_0}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_k \end{pmatrix}$$

is an eigenfunction associated with the eigenvalue  $k_0^2$  of the operator  $L^*$  and satisfies

$$B^*(\Phi_{1, k_0}^* - \tau_{k_0} \Phi_{2, k_0}^*) \equiv 0 \text{ in } \omega.$$

Thus, using Theorem 5.1 System (1.1) is not approximately controllable at time  $T$ .

**Sufficient condition:** Let us suppose that Conditions (1.9)-(1.10) hold. If  $(\text{Supp}(p) \cup \text{Supp}(q)) \cap \omega \neq \emptyset$  we conclude using Theorem 1.1. Let us now suppose that

$$|I_k(p, q)| + |I_{a, k}(p, q)| \neq 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}^*$$

and

$$(\text{Supp}(p) \cup \text{Supp}(q)) \cap \omega = \emptyset.$$

If  $I_k(p, q) \neq 0$ , the set of the eigenvectors associated with the eigenvalue  $k^2$  of  $L^*$  is generated by  $\Phi_{2, k}^*$  (see Proposition 2.1). In this case, we remark that for all  $k \in \mathbb{N}^*$

$$B^* \Phi_{2, k}^* = \varphi_k \neq 0 \text{ in } \omega. \tag{5.1}$$

If  $I_k(p, q) = 0$ , the eigenvectors associated with the eigenvalue  $k^2$  of  $L^*$  are linear combinations of  $\Phi_{1, k}^*$  and  $\Phi_{2, k}^*$ . Let  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  and  $\Phi^* := \alpha \Phi_{1, k}^* + \beta \Phi_{2, k}^*$  satisfying

$$B^* \Phi^* \equiv 0 \text{ in } \omega. \tag{5.2}$$

Using Lemma 4.1, it is equivalent to

$$(\alpha + \beta \tau_k) \varphi_k(x) - \beta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} I_{a, k}(p, q) \cos(kx) = 0 \text{ for all } x \in \omega.$$

Since  $I_{a, k}(p, q) \neq 0$ , we deduce that  $\beta = 0$ . Then  $\alpha = 0$ . We conclude using Theorem 5.1.  $\square$

## 6 Null controllability of System (1.2)

As in Section 3.1, System (1.2) is null controllable at time  $T$  if and only if for all  $y^0 \in H^{-1}(0, \pi)^2$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  and  $i \in \{1, 2\}$  the solution  $\theta_{i,k}$  to the dual System (2.8) for the initial data  $\Phi_{i,k}^*$  satisfies

$$\int_0^T u(t) B^* \partial_x \theta_{i,k}(0, t) dt = -\langle y^0, \theta_{i,k}(\cdot, 0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \quad (6.1)$$

We recall that, for all  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\theta_{1,k}$  and  $\theta_{2,k}$  are given for all  $(x, t) \in Q_T$  by

$$\begin{cases} \theta_{1,k}(x, t) = e^{-k^2(T-t)} \left( \Phi_{1,k}^*(x) - (T-t) I_k(p, q) \Phi_{2,k}^*(x) \right), \\ \theta_{2,k}(x, t) = e^{-k^2(T-t)} \Phi_{2,k}^*(x). \end{cases}$$

*Proof of Theorem 1.4.* Again, we will follow the strategy used in [AK+15]. Assume that  $T > T_1$  and  $I_k(p, q) \neq 0$  for all  $k \in \mathbb{N}^*$ . We will look for the control  $u$  under the form

$$u(t) := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \{u_{1,k} q_{1,k}(T-t) + u_{2,k} q_{2,k}(T-t)\}, \quad (6.2)$$

for all  $t \in (0, T)$ , where  $q_{1,k}$  and  $q_{2,k}$  are defined in Section 3.1. Plugging the expressions of  $u$ ,  $\theta_{1,k}$  and  $\theta_{2,k}$  in Equality (6.1), we obtain the *moment problem*

$$\begin{cases} u_{1,k} = -e^{-k^2 T} \frac{\langle y_1^0, \varphi_k \rangle_{H^{-1}, H_0^1}}{\partial_x \varphi_k(0)}, \\ u_{2,k} = \frac{e^{-k^2 T}}{I_k \partial_x \varphi_k(0)} \{ \langle y_1^0, \psi_k \rangle_{H^{-1}, H_0^1} + \langle y_2^0, \varphi_k \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \left( I_k T + \frac{\partial_x \psi_k(0)}{\partial_x \varphi_k(0)} \right) \langle y_1^0, \varphi_k \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \}. \end{cases}$$

Let  $\varepsilon > 0$ . Using the definition of  $T_1$  (see (1.14)), we have  $I_k(p, q) > C_\varepsilon e^{-k^2(T_1+\varepsilon)}$  for all  $k \in \mathbb{N}^*$ . Then, using the estimates (2.6) and (3.35), we get

$$|u_{1,k}| + |u_{2,k}| \leq C e^{-k^2(T-T_1-2\varepsilon)} \|y^0\|_{H^{-1}(0, \pi)^2}.$$

Thus for  $\varepsilon < (T - T_1)/2$ , the control  $u$  defined in (6.2) is an element of  $L^2(0, T)$ .

Assume now that  $T < T_1$  and  $I_k(p, q) \neq 0$  for all  $k \in \mathbb{N}^*$ . By contradiction let us suppose that there exists a constant  $C_{obs}$  such that for all  $\theta^0 \in H_0^1(0, \pi)^2$  the solution to the dual System (2.8) satisfies

$$\|\theta(0)\|_{H_0^1(0, \pi)^2}^2 \leq C_{obs} \int_0^T |B^* \partial_x \theta(0, t)|^2 dt. \quad (6.3)$$

Let  $\varepsilon = (T_1 - T)/2$ . Using the definition of  $T_1$ , there exists a sequence  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  such that

$$I_{k_n}(p, q) < e^{-k_n^2(T+\varepsilon)}. \quad (6.4)$$

Let  $\theta_n^0 := a_n \Phi_{1, k_n}^* + b_n \Phi_{2, k_n}^*$  with  $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ . We recall that

$$\theta^n(x, t) = e^{-k_n^2(T-t)} \{ a_n \Phi_{1, k_n}^* + (b_n - (T-t) I_{k_n}(p, q) a_n) \Phi_{2, k_n}^* \}.$$

Then, after calculation, we get

$$\|\theta(0)\|_{H_0^1(0, \pi)^2}^2 = e^{-2k_n^2 T} (a_n^2 \|\psi_{k_n}\|_{H_0^1}^2 + a_n^2 k_n^2 + (b_n - T I_{k_n}(p, q) a_n)^2 k_n^2)$$

and

$$\int_0^T |B^* \partial_x \theta(0, t)|^2 dt = \int_0^T e^{-2k_n^2(T-t)} |a_n \partial_x \psi_{k_n}(0) + (b_n - (T-t)I_{k_n}(p, q)a_n)k_n|^2 dt.$$

For  $a_n := 1$  and  $b_n := -\partial_x \psi_{k_n}(0)/k_n$ , taking into account inequality (6.4) and using the estimate (2.6), we obtain

$$\|\theta(0)\|_{H_0^1(0, \pi)^2}^2 \geq k_n^2 e^{-2k_n^2 T} \quad \text{and} \quad \int_0^T |B^* \partial_x \theta(0, t)|^2 dt \leq C k_n^2 e^{-2k_n^2(T+\epsilon)}.$$

Thus for  $n$  large enough we get a contradiction with observability inequality (6.3).  $\square$

## 7 Comments and open problems

When the control domain and the support of the coupling coefficients  $p$  and  $q$  is disjoint in the system

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \partial_{xx} y_1 = \mathbf{1}_\omega v & \text{in } Q_T, \\ \partial_t y_2 - \partial_{xx} y_2 + p(x) \partial_x y_1 + q(x) y_1 = 0 & \text{in } Q_T, \\ y_1(0, \cdot) = y_1(\pi, \cdot) = y_2(0, \cdot) = y_2(\pi, \cdot) = 0 & \text{on } (0, T), \\ y_1(\cdot, 0) = y_1^0, y_2(\cdot, 0) = y_2^0 & \text{in } (0, \pi) \end{cases} \quad (7.1)$$

(resp. system (1.2)), it is legitimate to ask if the minimal time  $T_1$  (resp.  $T_0$ ) given in Theorem 1.3 (resp. Theorem 1.4) can be different of zero and finite. For  $p \equiv 0$  in  $(0, \pi)$ , it is proved in [AK+15] that for any  $\tau_0 \in [0, \infty]$  there exists a function  $q \in L^\infty(0, \pi)$  such that the minimal time of null controllability  $T_0(p, q)$  associated with System (1.1) is given by

$$T_0(p, q) = \tau_0.$$

The authors give explicit functions and one can easily adapt them to the case  $p \neq 0$  in  $(0, \pi)$ . In the other hand, the null controllability in the cases  $T = T_0$  in Theorem 1.3 and  $T = T_1$  in Theorem 1.4 are open problems.

In higher space dimension, even for this simplified system (7.1) (resp. system (1.2)), distributed and boundary controllability are also open problems. Considering the different results described in the introduction of the present paper, we can conjecture that the system of two coupled linear parabolic equations

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \Delta y_1 + g_{11} \cdot \nabla y_1 + g_{12} \cdot \nabla y_2 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \mathbf{1}_\omega v & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t y_2 = \Delta y_2 + g_{21} \cdot \nabla y_1 + g_{22} \cdot \nabla y_2 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (7.2)$$

is null controllable at time  $T > 0$  if there exists an open nonempty subset  $\omega_0$  of  $\omega$  such that

$$|a_{21}| > C \text{ in } \omega_0 \times (0, T) \text{ or } |g_{21}^k| > C \text{ in } \omega_0 \times (0, T), \quad (7.3)$$

for a  $k \in \{1, \dots, N\}$ .

It seems that the main difficulty is to prove a Carleman estimate for the adjoint problem of system (7.2) under condition (7.3) when the coupling term is a differential operator (see for instance [Ben+14; Gue07b] and also [DL15] for a different approach). In the one-dimensional case, we were not able to adapt the strategy developed in this paper in this general setting.

### 1 Proof of Lemma 3.4

*Proof of Lemma 3.4.* Let  $k \in \mathbb{N}^*$ . Consider  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \omega$  to be determined later with  $a_i < b_i$  for  $i \in \{1, 2\}$  and define the functions

$$\begin{cases} f^{(1)} := \mathbb{1}_{(a_1, b_1)}, \\ f^{(2)} := \mathbb{1}_{(a_2, b_2)}. \end{cases}$$

Thus, for  $i = 1, 2$ , we obtain

$$f_k^{(i)} = \int_0^\pi f^{(i)}(x) \varphi_k(x) dx = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(k \frac{a_i + b_i}{2}\right) \sin\left(k \frac{b_i - a_i}{2}\right)$$

and

$$\widehat{f}_k^{(i)} = \int_0^\pi f^{(i)}(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{k} \cos\left(k \frac{a_i + b_i}{2}\right) \sin\left(k \frac{b_i - a_i}{2}\right).$$

A simple computation leads to

$$|B_k| = \frac{4}{k^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \sin\left(k \frac{b_1 - a_1}{2}\right) \sin\left(k \frac{b_2 - a_2}{2}\right) \sin\left(k \frac{a_2 + b_2 - a_1 - b_1}{2}\right) \right|. \quad (1.1)$$

Let  $n \in \mathbb{N}^*$  and  $\ell$  an algebraic number of order two satisfying

$$a/2n < \ell < b/(2n + 3).$$

Let us take  $a_1 := 2n\ell$ ,  $b_1 := a_1 + 2\ell$ ,  $a_2 := a_1 + \ell$  and  $b_2 := a_2 + 2\ell$ . Thus  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \omega$  and  $a_i < b_i$  for  $i = 1, 2$ . Furthermore

$$\begin{cases} b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = a_2 + b_2 - a_1 - b_1 = 2\ell, \\ a_1 + b_1 = (4n + 2)\ell, \\ a_2 + b_2 = (4n + 4)\ell. \end{cases} \quad (1.2)$$

Since  $\ell$  is an algebraic number of order 2, as said in the proof of Proposition 3.2, using diophantine approximations, there exists a constant  $\gamma > 0$  such that

$$\inf_{j \geq 1} (j |\sin(j\ell)|) \geq \gamma. \quad (1.3)$$

Combining (1.1)-(1.3), we deduce that

$$|B_k| \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4\gamma^3}{k^5}, \quad |f_k^{(1)}| \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2\gamma^2}{(2n+1)k^3} \quad \text{and} \quad |f_k^{(2)}| \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\gamma^2}{(n+1)k^3},$$

for all  $k \in \mathbb{N}^*$ . □

*Acknowledgements.* The author thanks Assia Benabdallah, Manuel González-Burgos and Farid Ammar Khodja for their interesting comments and suggestions. He thanks as well the referee for his remarks that helped to improve the paper.

## References

- [ABL11] F. ALABAU-BOUSSOIRA et M. LÉAUTAUD. “Indirect controllability of locally coupled systems under geometric conditions”. In : *Comptes Rendus Mathématique* 349.7 (2011), p. 395–400 (cf. p. 99).
- [ABL13b] F. ALABAU-BOUSSOIRA et M. LÉAUTAUD. “Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications”. In : *J. Math. Pures Appl.* 99 (2013), 544—576 (cf. p. 36, 52, 99).
- [AK+05] F. AMMAR KHODJA et al. “Null-controllability of some systems of parabolic type by one control force”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 11.3 (2005), 426–448 (electronic) (cf. p. 34, 99).
- [AK+09a] F. AMMAR KHODJA et al. “A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems”. In : *Differ. Equ. Appl.* 1.3 (2009), p. 427–457 (cf. p. 31, 38, 55, 70, 99, 131, 132, 136, 145).
- [AK+09b] F. AMMAR-KHODJA et al. “A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems”. In : *J. Evol. Equ.* 9.2 (2009), p. 267–291 (cf. p. 31, 37, 70, 99, 131).
- [AK+11a] F. AMMAR-KHODJA et al. “Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey”. In : *Math. Control Relat. Fields* 1.3 (2011), p. 267–306 (cf. p. 16, 70, 99, 105, 130, 135, 136).
- [AK+12] F. AMMAR KHODJA et al. “Controllability of some system of parabolic equations”. In : *Proceedings of the II Encuentro RSME-SMM.* 2012 (cf. p. 99).
- [AK+14] F. AMMAR KHODJA et al. “Minimal time of controllability of two parabolic equations with disjoint control and coupling domains”. In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 352.5 (2014), p. 391–396 (cf. p. 7, 70, 99, 135).
- [AK+15] F. AMMAR-KHODJA et al. “New phenomena for the null controllability of parabolic systems: Minimal time and geometrical dependence”. In : *Submitted* (2015) (cf. p. 7, 18, 37, 53, 99, 101, 105, 110, 111, 117, 120–124, 135, 152).
- [Ben+14] A. BENABDALLAH et al. “Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force”. In : *Math. Control Relat. Fields* 4.1 (2014), p. 17–44 (cf. p. 36, 39, 48–50, 71, 100, 125, 131).
- [BO14] F. BOYER et G. OLIVE. “Approximate controllability conditions for some linear 1D parabolic systems with space-dependent coefficients”. In : *Math. Control Relat. Fields* 4.3 (2014), p. 263–287 (cf. p. 36, 53, 101, 122, 135).
- [Cor07] J.-M. CORON. *Control and nonlinearity*. T. 136. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, 2007, p. xiv+426 (cf. p. 1, 6, 12, 73, 76, 105, 137).
- [DL14] B. DEHMAN et M. LÉAUTAUD. “Controllability of two coupled wave equations on a compact manifold”. In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 211 (2014), p. 113–187 (cf. p. 99).

- 
- [DL15] M. DUPREZ et P. LISSY. "Indirect controllability of some linear parabolic systems of  $m$  equations with  $m - 1$  controls involving coupling terms of zero or first order." In : *Submitted* (2015) (cf. p. xi, 29, 33, 100, 125).
- [Fat66] H. O. FATTORINI. "Some remarks on complete controllability". In : *SIAM J. Control* 4 (1966), p. 686–694 (cf. p. 36, 52, 100, 122).
- [FCGBT10] E. FERNÁNDEZ-CARA, M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. "Boundary controllability of parabolic coupled equations". In : *J. Funct. Anal.* 259.7 (2010), p. 1720–1758 (cf. p. 13, 58, 98, 99, 107, 154).
- [GBT10] M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. "Controllability results for cascade systems of  $m$  coupled parabolic PDEs by one control force". In : *Port. Math.* 67.1 (2010), p. 91–113 (cf. p. 34, 35, 39, 40, 50, 68, 70, 99, 108, 131, 132, 136, 148).
- [Gue07b] S. GUERRERO. "Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force". In : *SIAM J. Control Optim.* 46.2 (2007), p. 379–394 (cf. p. 35, 39, 43, 44, 50, 51, 70, 99, 100, 125).
- [KT10] O. KAVIAN et L. de TERESA. "Unique continuation principle for systems of parabolic equations". In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 16.2 (2010), p. 247–274 (cf. p. 37, 101).
- [Lio68] J.-L. LIONS. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Paris : Dunod, 1968, p. xiii+426 (cf. p. xii, 3, 7, 26, 27, 85, 86, 98, 165, 166, 170, 173).
- [Mil06] L. MILLER. "The control transmutation method and the cost of fast controls". In : *SIAM J. Control Optim.* 45.2 (2006), 762–772 (electronic) (cf. p. 36, 99).
- [Oli14] G. OLIVE. "Boundary approximate controllability of some linear parabolic systems". In : *Evol. Equ. Control Theory* 3.1 (2014), p. 167–189 (cf. p. 37, 101).
- [RT11a] L. ROSIER et L. de TERESA. "Exact controllability of a cascade system of conservative equations". In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 349.5-6 (2011), p. 291–296 (cf. p. 52, 99).



# Partial null controllability of parabolic linear systems

Ce chapitre reprend en grande partie l'article « *Partial null controllability of parabolic linear systems* », écrit en collaboration avec Farid AMMAR KHODJA<sup>1</sup> et Franz CHOULY<sup>1</sup>.

## Résumé

Ce chapitre est consacré à la contrôlabilité partielle à zéro des systèmes linéaires paraboliques de  $n$  équations. Pour un domaine borné donné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), nous étudions l'effet de  $m$  contrôles localisés dans un sous-ensemble ouvert non-vide  $\omega$  contrôlant seulement  $p$  composantes de la solution ( $p, m \leq n$ ). Le premier résultat de ce chapitre est une condition nécessaire et suffisante lorsque les matrices de couplage et de contrôle sont constantes. Le second résultat fournit, dans un premier temps, une condition suffisante de contrôlabilité partielle à zéro lorsque les matrices dépendent seulement du temps. Dans un second temps, à travers un exemple de système parabolique  $2 \times 2$  partiellement contrôlé, nous donnerons des résultats positifs et négatifs de contrôlabilité partielle à zéro quand les coefficients dépendent de l'espace.

## Structure

1	Introduction and main results. . . . .	130
2	Preliminaries. . . . .	136
3	Partial null controllability with constant coupling matrices. . . . .	138
4	Partial null controllability with time dependent matrices . . . . .	148
5	Partial null controllability for a space dependent coupling matrix . . . . .	151
	References. . . . .	161

1. Laboratoire de Mathématiques de Besançon UMR CNRS 6623, Université de Franche-Comté



## 1 Introduction and main results

Let  $\Omega$  be a bounded domain in  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ) with a  $C^2$ -class boundary  $\partial\Omega$ ,  $\omega$  be a non-empty open subset of  $\Omega$  and  $T > 0$ . Let  $p, m, n \in \mathbb{N}^*$  such that  $p, m \leq n$ . We consider in this paper the following system of  $n$  parabolic linear equations

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B\mathbb{1}_\omega u & \text{in } Q_T := \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{on } \Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T), \\ y(0) = y_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

where  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$  is the initial data,  $u \in L^2(Q_T)^m$  is the control and

$$A \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \text{ and } B \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)).$$

In many fields such as chemistry, physics or biology it appeared relevant to study the controllability of such a system (see [AK+11a]). For example, in [CH09], the authors study a system of three semilinear heat equations which is a model coming from a mathematical description of the growth of brain tumors. The unknowns are the drug concentration, the density of tumors cells and the density of wealthy cells and the aim is to control only two of them with one control. This practical issue motivates the introduction of the partial null controllability.

For an initial condition  $y(0) = y_0 \in L^2(\Omega)^n$  and a control  $u \in L^2(Q_T)^m$ , it is well-known that System (1.1) admits a unique solution in  $W(0, T)^n$ , where

$$W(0, T) := \{y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \partial_t y \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\},$$

with  $H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)'$  and the following estimate holds (see [LM68])

$$\|y\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^n)} + \|y\|_{C^0([0, T]; L^2(\Omega)^n)} \leq C(\|y_0\|_{L^2(\Omega)^n} + \|u\|_{L^2(Q_T)^m}), \quad (1.2)$$

where  $C$  does not depend on time. We denote by  $y(\cdot; y_0, u)$  the solution to System (1.1) determined by the couple  $(y_0, u)$ .

Let us consider  $\Pi_p$  the *projection matrix* of  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  given by  $\Pi_p := (I_p \ 0_{p, n-p})$  ( $I_p$  is the identity matrix of  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  and  $0_{p, n-p}$  the null matrix of  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-p}, \mathbb{R}^p)$ ), that is,

$$\begin{aligned} \Pi_p : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p, \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto (y_1, \dots, y_p). \end{aligned}$$

System (1.1) is said to be

- **$\check{\mathbb{E}}_p$ -approximately controllable** on the time interval  $(0, T)$ , if for all real number  $\varepsilon > 0$  and  $y_0, y_T \in L^2(\Omega)^n$  there exists a control  $u \in L^2(Q_T)^m$  such that

$$\|\Pi_p y(T; y_0, u) - \Pi_p y_T\|_{L^2(\Omega)^p} \leq \varepsilon.$$

- **$\check{\mathbb{E}}_p$ -null controllable** on the time interval  $(0, T)$ , if for all initial condition  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$ , there exists a control  $u \in L^2(Q_T)^m$  such that

$$\Pi_p y(T; y_0, u) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

Before stating our main results, let us recall the few known results about the (full) null controllability of System (1.1). The first of them is about cascade systems (see [GBT10]). The authors prove the null controllability of System (1.1) with the control matrix  $B := e_1$  (the first vector of the canonical basis of  $\mathbb{R}^n$ ) and a coupling matrix  $A$  of the form

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ 0 & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

where the coefficients  $\alpha_{i,j}$  are elements of  $L^\infty(Q_T)$  for all  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  and satisfy for a positive constant  $C$  and a nonempty open set  $\omega_0$  of  $\omega$

$$\alpha_{i+1,i} \geq C \text{ in } \omega_0 \quad \text{or} \quad -\alpha_{i+1,i} \geq C \text{ in } \omega_0 \quad \text{for all } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

A similar result on parabolic systems with cascade coupling matrices can be found in [AB13].

The null controllability of parabolic  $3 \times 3$  linear systems with space/time dependent coefficients and non cascade structure is studied in [Ben+14] and [Mau13] (see also [GBT10]).

If  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  and  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  (the constant case), it has been proved in [AK+09b] that System (1.1) is null controllable on the time interval  $(0, T)$  if and only if the following condition holds

$$\text{rank } [A|B] = n, \quad (1.4)$$

where  $[A|B]$ , the so-called *Kalman matrix*, is defined as

$$[A|B] := (B|AB|\dots|A^{n-1}B). \quad (1.5)$$

For time dependent coupling and control matrices, we need some additional regularity. More precisely, we need to suppose that  $A \in C^{n-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  and  $B \in C^n([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$ . In this case, the associated Kalman matrix is defined as follows. Let us define

$$\begin{cases} B_0(t) := B(t), \\ B_i(t) := A(t)B_{i-1}(t) - \partial_t B_{i-1}(t) \quad \text{for all } i \in \{1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

and denote by  $[A|B](\cdot) \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{nm}; \mathbb{R}^n))$  the matrix function given by

$$[A|B](\cdot) := (B_0(\cdot)|B_1(\cdot)|\dots|B_{n-1}(\cdot)). \quad (1.6)$$

In [AK+09a] the authors prove first that, if there exists  $t_0 \in [0, T]$  such that

$$\text{rank } [A|B](t_0) = n, \quad (1.7)$$

then System (1.1) is null controllable on the time interval  $(0, T)$ . Secondly that System (1.1) is null controllable on every interval  $(T_0, T_1)$  with  $0 \leq T_0 < T_1 \leq T$  if and only if there exists a dense subset  $E$  of  $(0, T)$  such that

$$\text{rank } [A|B](t) = n \text{ for every } t \in E. \quad (1.8)$$

In the present paper, the controls are acting on several equations but on one subset  $\omega$  of  $\Omega$ . Concerning the case where the control domains are not identical, we refer to [Oli12].

Our first result is the following:

**THEOREM 1.1.** *Assume that the coupling and control matrices are constant in space and time, i. e.,  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  and  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ . The condition*

$$\text{rank } \Pi_p[A|B] = p \quad (1.9)$$

*is equivalent to the  $\Pi_p$ -null/approximate controllability on the time interval  $(0, T)$  of System (1.1).*

The Condition (1.9) for  $\Pi_p$ -null controllability reduces to Condition (1.4) whenever  $p = n$ . A second result concerns the non-autonomous case:

**THEOREM 1.2.** *Assume that*

$$A \in C^{n-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \text{ and } B \in C^n([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)).$$

*If*

$$\text{rank } \Pi_p[A|B](T) = p, \quad (1.10)$$

*then System (1.1) is  $\Pi_p$ -null/approximately controllable on the time interval  $(0, T)$ .*

In Theorems 1.1 and 1.2, we control the  $p$  first components of the solution  $y$ . If we want to control some other components a permutation of lines leads to the same situation.

*Remark 1.1.* 1. When the components of the matrices  $A$  and  $B$  are analytic functions on the time interval  $[0, T]$ , Condition (1.7) is necessary for the null controllability of System (1.1) (see Th. 1.3 in [AK+09a]). Under the same assumption, the proof of this result can be adapted to show that the following condition

$$\begin{cases} \text{there exists } t_0 \in [0, T] \text{ such that :} \\ \text{rank } \Pi_p[A|B](t_0) = p, \end{cases}$$

is necessary to the  $\Pi_p$ -null controllability of System (1.1).

2. As told before, under Condition (1.7), System (1.1) is null controllable. But unlike the case where all the components are controlled, the  $\Pi_p$ -null controllability at a time  $t_0$  smaller than  $T$  does not imply this property on the time interval  $(0, T)$ . This roughly explains Condition (1.10). Furthermore this condition can not be necessary under the assumptions of Theorem 1.2 (for a counterexample we refer to [AK+09a]).

*Remark 1.2.* In the proofs of Theorems 1.1 and 1.2, we will use a result of null controllability for cascade systems (see Section 2) proved in [AK+09a; GBT10] where the authors consider a time-dependent second order elliptic operator  $L(t)$  given by

$$L(t)y(x, t) = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha_{i,j}(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_j}(x, t) \right) + \sum_{i=1}^N b_i(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x, t) + c(x, t)y(x, t), \quad (1.11)$$

with coefficients  $\alpha_{i,j}$ ,  $b_i$ ,  $c$  satisfying

$$\begin{cases} \alpha_{i,j} \in W_\infty^1(Q_T), \quad b_i, c \in L^\infty(Q_T) \quad 1 \leq i, j \leq N, \\ \alpha_{i,j}(x, t) = \alpha_{j,i}(x, t) \quad \forall (x, t) \in Q_T, \quad 1 \leq i, j \leq N \end{cases}$$

and the uniform elliptic condition: there exists  $a_0 > 0$  such that

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{i,j}(x, t) \xi_i \xi_j \geq a_0 |\xi|^2, \quad \forall (x, t) \in Q_T.$$

Theorems 1.1 and 1.2 remain true if we replace  $-\Delta$  by an operator  $L(t)$  in System (1.1).

Now the following question arises: what happens in the case of space and time dependent coefficients? As it will be shown in the following example, the answer seems to be much more tricky. Let us now consider the following parabolic system of two equations

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \alpha z + \mathbb{1}_\omega u & \text{in } Q_T, \\ \partial_t z = \Delta z & \text{in } Q_T, \\ y = z = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(0) = y_0, z(0) = z_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.12)$$

for given initial data  $y_0, z_0 \in L^2(\Omega)$ , a control  $u \in L^2(Q_T)$  and where the coefficient  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ .

**THEOREM 1.3.** (1) Assume that  $\alpha \in C^1([0, T])$ . Then System (1.12) is  $\Pi_1$ -null controllable for any open set  $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), that is for all initial conditions  $y_0, z_0 \in L^2(\Omega)$ , there exists a control  $u \in L^2(Q_T)$  such that the solution  $(y, z)$  to System (1.12) satisfies  $y(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ .

(2) Let  $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ),  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ ,  $(w_k)_{k \geq 1}$  be the  $L^2$ -normalized eigenfunctions of  $-\Delta$  in  $\Omega$  with Dirichlet boundary conditions and for all  $k, l \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\alpha_{kl} := \int_{\Omega} \alpha(x) w_k(x) w_l(x) dx.$$

If the function  $\alpha$  satisfies

$$|\alpha_{kl}| \leq C_1 e^{-C_2 |k-l|} \text{ for all } k, l \in \mathbb{N}^*, \quad (1.13)$$

for two positive constants  $C_1 > 0$  and  $C_2 > b - a$ , then System (1.12) is  $\Pi_1$ -null controllable for any open set  $\omega \subset \Omega$ .

(3) Assume that  $\Omega := (0, 2\pi)$  and  $\omega \subset (\pi, 2\pi)$ . Let us consider  $\alpha \in L^\infty(0, 2\pi)$  defined by

$$\alpha(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos(15jx) \text{ for all } x \in (0, 2\pi).$$

Then System (1.12) is not  $\Pi_1$ -null controllable. More precisely, there exists  $k_1 \in \{1, \dots, 7\}$  such that for the initial condition  $(y_0, z_0) = (0, \sin(k_1 x))$  and any control  $u \in L^2(Q_T)$  the solution  $y$  to System (1.12) is not identically equal to zero at time  $T$ .

We will not prove item (1) in Theorem 1.3, because it is a direct consequence of Theorem 1.2.

*Remark 1.3.* Suppose that  $\Omega := (0, \pi)$ . Consider  $\alpha \in L^\infty(0, \pi)$  and the real sequence  $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}}$  such that for all  $x \in (0, \pi)$

$$\alpha(x) := \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \cos(px).$$

Concerning item (2), we remark that Condition (1.13) is equivalent to the existence of two constants  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > \pi$  such that, for all  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$|\alpha_p| \leq C_1 e^{-C_2 p}.$$

As it will be shown, the proof of item (3) in Theorem 1.3 can be adapted in order to get the same conclusion for any  $\alpha \in H^k(0, 2\pi)$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) defined by

$$\alpha(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{k+1}} \cos((2k+13)jx) \text{ for all } x \in (0, 2\pi). \quad (1.14)$$

These given functions  $\alpha$  belong to  $H^k(0, \pi)$  but not to  $D((-\Delta)^{k/2})$ . Indeed, in the proof of the third item in Theorem 1.3, we use the fact that the matrix  $(\alpha_{kl})_{k,l \in \mathbb{N}^*}$  is sparse (see (5.28)), what seems true only for coupling terms  $\alpha$  of the form (1.14). Thus  $\alpha$  is not zero on the boundary.

*Remark 1.4.* From Theorem 1.3, one can deduce some new results concerning the null controllability of the heat equation with a right-hand side. Consider the system

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + f + \mathbb{1}_\omega u & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ y(0) = y(\pi) = 0 & \text{on } (0, T), \\ y(0) = y_0 & \text{in } (0, \pi), \end{cases} \quad (1.15)$$

where  $y_0 \in L^2(0, \pi)$  is the initial data and  $f, u \in L^2(Q_T)$  are the right-hand side and the control, respectively. Using the Carleman inequality (see [FI96]), one can prove that System (1.15) is null controllable when  $f$  satisfies

$$e^{\frac{C}{T-t}} f \in L^2(Q_T), \quad (1.16)$$

for a positive constant  $C$ . For more general right-hand sides it was rather open. The second and third points of Theorem 1.3 provide some positive and negative null controllability results for System (1.15) with right-hand side  $f$  which does not fulfil Condition (1.16).

*Remark 1.5.* Consider the same system as System (1.12) except that the control is now on the boundary, that is

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \alpha z & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ \partial_t z = \Delta z & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ y(0, t) = v(t), \quad y(\pi, t) = z(0, t) = z(\pi, t) = 0 & \text{on } (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad z(x, 0) = z_0(x) & \text{in } (0, \pi), \end{cases} \quad (1.17)$$

where  $y_0, z_0 \in H^{-1}(0, \pi)$ . In Theorem 5.1, we provide an explicit coupling function  $\alpha$  for which the  $\Pi_1$ -null controllability of System (1.17) does not hold. Moreover one can adapt the proof of the second point in Theorem 1.3 to prove the  $\Pi_1$ -null controllability of System (1.17) under Condition (1.13).

If the coupling matrix depends on space, the notions of  $\Pi_1$ -null and approximate controllability are not necessarily equivalent. Indeed, according to the choice of the coupling function  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ , System (1.12) can be  $\Pi_1$ -null controllable or not. But this system is  $\Pi_1$ -approximately controllable for all  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ :

**THEOREM 1.4.** *Let  $\alpha \in L^\infty(Q_T)$ . Then System (1.12) is  $\Pi_1$ -approximately controllable for any open set  $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), that is for all  $y_0, y_T, z_0 \in L^2(\Omega)$  and all  $\varepsilon > 0$ , there exists a control  $u \in L^2(Q_T)$  such that the solution  $(y, z)$  to System (1.12) satisfies*

$$\|y(T) - y_T\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

This result is a direct consequence of the unique continuation property and existence/uniqueness of solutions for a single heat equation. Indeed System (1.12) is  $\Pi_1$ -approximately controllable (see Proposition 2.1) if and only if for all  $\phi_0 \in L^2(\Omega)$  the solution to the adjoint system

$$\begin{cases} -\partial_t \phi = \Delta \phi & \text{in } Q_T, \\ -\partial_t \psi = \Delta \psi + \alpha \phi & \text{in } Q_T, \\ \phi = \psi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \phi(T) = \phi_0, \psi(T) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1.18)$$

satisfies

$$\phi \equiv 0 \text{ in } \omega \times (0, T) \Rightarrow (\phi, \psi) \equiv 0 \text{ in } Q_T.$$

If we assume that, for an initial data  $\phi_0 \in L^2(\Omega)$ , the solution to System (1.18) satisfies  $\phi \equiv 0$  in  $\omega \times (0, T)$ , then using Mizohata uniqueness Theorem in [Miz58],  $\phi \equiv 0$  in  $Q_T$  and consequently  $\psi \equiv 0$  in  $Q_T$ . For another example of parabolic systems for which these notions are not equivalent we refer for instance to [AK+14].

*Remark 1.6.* The quantity  $\alpha_{kl}$ , which appears in the second item of Theorem 1.3, has already been considered in some controllability studies for parabolic systems. Let us define for all  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} I_{1,k}(\alpha) := \int_0^a \alpha(x) w_k(x)^2 dx, \\ I_k(\alpha) := \alpha_{kk}. \end{cases}$$

In [AK+15], the authors have proved that the system

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \alpha z & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ \partial_t z = \Delta z + \mathbb{1}_\omega u & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ y(0, t) = y(\pi, t) = z(0, t) = z(\pi, t) = 0 & \text{on } (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), z(x, 0) = z_0(x) & \text{in } (0, \pi), \end{cases} \quad (1.19)$$

is approximately controllable if and only if

$$|I_k(\alpha)| + |I_{1,k}(\alpha)| \neq 0 \text{ for all } k \in \mathbb{N}^*.$$

A similar result has been obtained for the boundary approximate controllability in [BO14]. Consider now

$$T_0(\alpha) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{-\log(\min\{|I_k|, |I_{1,k}|\})}{k^2}.$$

It is also proved in [AK+15] that: If  $T > T_0(\alpha)$ , then System (1.19) is null controllable at time  $T$  and if  $T < T_0(\alpha)$ , then System (1.19) is not null controllable at time  $T$ . As in the present paper, we observe a difference between the approximate and null controllability, in contrast with the scalar case (see [AK+11a]).

In this paper, the sections are organized as follows. We start with some preliminary results on the null controllability for the cascade systems and on the dual concept associated to the  $\Pi_p$ -null controllability. Theorem 1.1 is proved in a first step with one force i.e.  $B \in \mathbb{R}^n$  in Section 3.1 and in a second step with  $m$  forces in Section 3.2. Section 4 is devoted to proving Theorem 1.2. We consider the situations of the second and third items of Theorem 1.3 in Section 5.1 and 5.2 respectively. This paper ends with some numerical illustrations of  $\Pi_1$ -null controllability and non  $\Pi_1$ -null controllability of System (1.12) in Section 5.3.

## 2 Preliminaries

In this section, we recall a known result about cascade systems and provide a characterization of the  $\Pi_p$ -controllability through the corresponding adjoint system.

### 2.1 Cascade systems

Some theorems of this paper use the following result of null controllability for the following cascade system of  $n$  equations controlled by  $r$  distributed functions

$$\begin{cases} \partial_t w = \Delta w + Cw + D\mathbb{1}_\omega u & \text{in } Q_T, \\ w = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ w(0) = w_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

where  $w_0 \in L^2(\Omega)^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_r) \in L^2(Q_T)^r$ , with  $r \in \{1, \dots, n\}$ , and the coupling and control matrices  $C \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  and  $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n)$  are given by

$$C(t) := \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) & \cdots & C_{1r}(t) \\ 0 & C_{22}(t) & \cdots & C_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{rr}(t) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

with

$$C_{ii}(t) := \begin{pmatrix} \alpha_{11}^i(t) & \alpha_{12}^i(t) & \alpha_{13}^i(t) & \cdots & \alpha_{1,s_i}^i(t) \\ 1 & \alpha_{22}^i(t) & \alpha_{23}^i(t) & \cdots & \alpha_{2,s_i}^i(t) \\ 0 & 1 & \alpha_{33}^i(t) & \cdots & \alpha_{3,s_i}^i(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{s_i,s_i}^i(t) \end{pmatrix},$$

$s_i \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{i=1}^r s_i = n$  and  $D := (e_{S_1} | \dots | e_{S_r})$  with  $S_1 = 1$  and  $S_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} s_j$ ,  $i \in \{2, \dots, r\}$  ( $e_j$  is the  $j$ -th element of the canonical basis of  $\mathbb{R}^n$ ).

**THEOREM 2.1.** *System (2.1) is null controllable on the time interval  $(0, T)$ , i.e. for all  $w_0 \in L^2(\Omega)^n$  there exists  $u \in L^2(\Omega)^r$  such that the solution  $w$  in  $W(0, T)^n$  to System (2.1) satisfies  $w(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ .*

The proof of this result uses a Carleman estimate (see [FI96]) and can be found in [AK+09a] or [GBT10].

### 2.2 Partial null controllability of a parabolic linear system by $m$ forces and adjoint system

It is nowadays well-known that the controllability has a dual concept called *observability* (see for instance [AK+11a]). We detail below the observability for the  $\Pi_p$ -controllability.

**PROPOSITION 2.1.** 1. System (1.1) is  $\Pi_p$ -null controllable on the time interval  $(0, T)$  if and only if there exists a constant  $C_{obs} > 0$  such that for all initial data  $\varphi_0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_p^0) \in L^2(\Omega)^p$  the solution  $\varphi \in W(0, T)^n$  to the adjoint system

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \Delta \varphi + A^* \varphi & \text{in } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \varphi(\cdot, T) = \Pi_p^* \varphi_0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_p^0, 0, \dots, 0) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

satisfies the observability inequality

$$\|\varphi(0)\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C_{obs} \int_0^T \|B^* \varphi\|_{L^2(\omega)^m}^2 dt. \quad (2.4)$$

2. System (1.1) is  $\Pi_p$ -approximately controllable on the time interval  $(0, T)$  if and only if for all  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)^p$  the solution  $\varphi$  to System (2.3) satisfies

$$B^* \varphi \equiv 0 \text{ in } (0, T) \times \omega \Rightarrow \varphi \equiv 0 \text{ in } Q_T.$$

*Démonstration.* For all  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$ , and  $u \in L^2(Q_T)^m$ , we denote by  $y(t; y_0, u)$  the solution to System (1.1) at time  $t \in [0, T]$ . For all  $t \in [0, T]$ , let us consider the operators  $S_t$  and  $L_t$  defined as follows

$$\begin{aligned} S_t : L^2(\Omega)^n &\rightarrow L^2(\Omega)^n & \text{and} & & L_t : L^2(Q_T)^m &\rightarrow L^2(\Omega)^n \\ y_0 &\mapsto y(t; y_0, 0) & & & u &\mapsto y(t; 0, u). \end{aligned} \quad (2.5)$$

1. System (1.1) is  $\Pi_p$ -null controllable on the time interval  $(0, T)$  if and only if

$$\begin{aligned} \forall y_0 \in L^2(\Omega)^n, \exists u \in L^2(Q_T)^m \text{ such that} \\ \Pi_p L_T u = -\Pi_p S_T y_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Problem (2.6) admits a solution if and only if

$$\text{Im } \Pi_p S_T \subset \text{Im } \Pi_p L_T. \quad (2.7)$$

The inclusion (2.7) is equivalent to (see [Cor07], Lemma 2.48 p. 58)

$$\begin{aligned} \exists C > 0 \text{ such that } \forall \varphi_0 \in L^2(\Omega)^p, \\ \|S_T^* \Pi_p^* \varphi_0\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C \|L_T^* \Pi_p^* \varphi_0\|_{L^2(Q_T)^m}^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

We note that

$$\begin{aligned} S_T^* \Pi_p^* : L^2(\Omega)^p &\rightarrow L^2(\Omega)^n & \text{and} & & L_T^* \Pi_p^* : L^2(\Omega)^p &\rightarrow L^2(Q_T)^m \\ \varphi_0 &\mapsto \varphi(0) & & & \varphi_0 &\mapsto \mathbb{1}_\omega B^* \varphi, \end{aligned}$$

where  $\varphi \in W(0, T)^n$  is the solution to System (2.3). Indeed, for all  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$ ,  $u \in L^2(Q_T)^m$  and  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)^p$

$$\begin{aligned} \langle \Pi_p S_T y_0, \varphi_0 \rangle_{L^2(\Omega)^p} &= \langle y(T; y_0, 0), \varphi(T) \rangle_{L^2(\Omega)^n} \\ &= \int_0^T \langle \partial_t y(s; y_0, 0), \varphi(s) \rangle_{L^2(\Omega)^n} ds \\ &\quad + \int_0^T \langle y(s; y_0, 0), \partial_t \varphi(s) \rangle_{L^2(\Omega)^n} ds + \langle y_0, \varphi(0) \rangle_{L^2(\Omega)^n} \\ &= \langle y_0, \varphi(0) \rangle_{L^2(\Omega)^n} \end{aligned} \quad (2.9)$$



and

$$\begin{aligned}
\langle \Pi_p L_T u, \varphi_0 \rangle_{L^2(\Omega)^p} &= \langle \mathbf{y}(T; \mathbf{0}, u), \varphi(T) \rangle_{L^2(\Omega)^n} \\
&= \int_0^T \langle \partial_t \mathbf{y}(s; \mathbf{0}, u), \varphi(s) \rangle_{L^2(\Omega)^n} ds \\
&\quad + \int_0^T \langle \mathbf{y}(s; \mathbf{0}, u), \partial_t \varphi(s) \rangle_{L^2(\Omega)^n} ds \\
&= \langle \mathbf{1}_\omega B u, \varphi \rangle_{L^2(Q_T)^n} = \langle u, \mathbf{1}_\omega B^* \varphi \rangle_{L^2(Q_T)^m}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

The inequality (2.8) combined with (2.9)-(2.10) lead to the conclusion.

2. In view of the definition in (2.5) of  $S_T$  and  $L_T$ , System (1.1) is  $\Pi_p$ -approximately controllable on the time interval  $(0, T)$  if and only if

$$\begin{aligned}
\forall (y_0, y_T) \in L^2(\Omega)^n \times L^2(\Omega)^p, \forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(Q_T)^m \text{ such that} \\
\| \Pi_p L_T u + \Pi_p S_T y_0 - y_T \|_{L^2(\Omega)^p} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

This is equivalent to

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0, \forall z_T \in L^2(\Omega)^p, \exists u \in L^2(Q_T)^m \text{ such that} \\
\| \Pi_p L_T u - z_T \|_{L^2(\Omega)^p} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

That means

$$\overline{\Pi_p L_T(L^2(Q_T)^m)} = L^2(\Omega)^p.$$

In other words

$$\ker L_T^* \Pi_p^* = \{0\}.$$

Thus System (1.1) is  $\Pi_p$ -approximately controllable on the time interval  $(0, T)$  if and only if for all  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)^p$

$$L_T^* \Pi_p^* \varphi_0 = \mathbf{1}_\omega B^* \varphi \equiv 0 \text{ in } Q_T \Rightarrow \varphi \equiv 0 \text{ in } Q_T.$$

□

**Corollary 2.1.** *Let us suppose that for all  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)^p$ , the solution  $\varphi$  to the adjoint System (2.3) satisfies the observability inequality (2.4). Then for all initial condition  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$ , there exists a control  $u \in L^2(q_T)^m$  ( $q_T := \omega \times (0, T)$ ) such that the solution  $\mathbf{y}$  to System (1.1) satisfies  $\Pi_p \mathbf{y}(T) \equiv 0$  in  $\Omega$  and*

$$\|u\|_{L^2(q_T)^m} \leq \sqrt{C_{obs}} \|y_0\|_{L^2(\Omega)^n}. \tag{2.11}$$

The proof is classical and will be omitted (estimate (2.11) can be obtained directly following the method developed in [FCZ00]).

### 3 Partial null controllability with constant coupling matrices

Let us consider the system

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{y} = \Delta \mathbf{y} + A \mathbf{y} + B \mathbf{1}_\omega u & \text{in } Q_T, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \mathbf{y}(0) = y_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

where  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$ ,  $u \in L^2(Q_T)^m$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  and  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ . Let the natural number  $s$  be defined by

$$s := \text{rank } [A|B] \quad (3.2)$$

and  $X \subset \mathbb{R}^n$  be the linear space spanned by the columns of  $[A|B]$ .

In this section, we prove Theorem 1.1 in two steps. In subsection 3.1, we begin by studying the case where  $B \in \mathbb{R}^n$  and the general case is considered in subsection 3.2.

All along this section, we will use the lemma below which proof is straightforward.

**Lemma 3.1.** *Let be  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$ ,  $u \in L^2(Q_T)^m$  and  $P \in C^1([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  such that  $P(t)$  is invertible for all  $t \in [0, T]$ . Then the change of variable  $w = P^{-1}(t)y$  transforms System (3.1) into the equivalent system*

$$\begin{cases} \partial_t w = \Delta w + C(t)w + D(t)\mathbb{1}_\omega u & \text{in } Q_T, \\ w = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ w(0) = w_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

with  $w_0 := P^{-1}(0)y_0$ ,  $C(t) := -P^{-1}(t)\partial_t P(t) + P^{-1}(t)AP(t)$  and  $D(t) := P^{-1}(t)B$ . Moreover

$$\Pi_p y(T) \equiv 0 \text{ in } \Omega \Leftrightarrow \Pi_p P(T)w(T) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

If  $P$  is constant, we have

$$[C|D] = P^{-1}[A|B].$$

### 3.1 One control force

In this subsection, we suppose that  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$  and denote by  $[A|B] =: (k_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  and  $s := \text{rank } [A|B]$ . We begin with the following observation.

**Lemma 3.2.**  $\{B, \dots, A^{s-1}B\}$  is a basis of  $X$ .

*Démonstration.* If  $s = \text{rank } [A|B] = 1$ , then the conclusion of the lemma is clearly true, since  $B \neq 0$ . Let  $s \geq 2$ . Suppose to the contrary that  $\{B, \dots, A^{s-1}B\}$  is not a basis of  $X$ , that is for some  $i \in \{0, \dots, s-2\}$  the family  $\{B, \dots, A^i B\}$  is linearly independent and  $A^{i+1}B \in \text{span}(B, \dots, A^i B)$ , that is  $A^{i+1}B = \sum_{k=0}^i \alpha_k A^k B$  with  $\alpha_0, \dots, \alpha_i \in \mathbb{R}$ . Multiplying by  $A$  this expression, we deduce that  $A^{i+2}B \in \text{span}(AB, \dots, A^{i+1}B) = \text{span}(B, \dots, A^i B)$ . Thus, by induction,  $A^l B \in \text{span}(B, \dots, A^i B)$  for all  $l \in \{i+1, \dots, n-1\}$ . Then

$$\text{rank } (B|AB|\dots|A^{n-1}B) = \text{rank } (B|AB|\dots|A^i B) = i+1 < s$$

, contradicting with (3.2). □

*Proof of Theorem 1.1.* Let us remark that

$$\text{rank } \Pi_p [A|B] = \dim \Pi_p [A|B](\mathbb{R}^n) \leq \text{rank } [A|B] = s. \quad (3.4)$$

Lemma 3.2 yields

$$\text{rank } (B|AB|\dots|A^{s-1}B) = \text{rank } [A|B] = s. \quad (3.5)$$

Thus, for all  $l \in \{s, s+1, \dots, n\}$  and  $i \in \{0, \dots, s-1\}$ , there exist  $\alpha_{l,i}$  such that

$$A^l B = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_{l,i} A^i B. \quad (3.6)$$

Since, for all  $l \in \{s, \dots, n\}$ ,  $\Pi_p A^l B = \sum_{i=0}^{s-1} \alpha_{l,i} \Pi_p A^i B$ , then

$$\text{rank } \Pi_p(B|AB|\dots|A^{s-1}B) = \text{rank } \Pi_p[A|B]. \quad (3.7)$$

We first prove in (a) that condition (1.9) is sufficient, and then in (b) that this condition is necessary.

(a) Sufficiency part: Let us assume first that condition (1.9) holds. Then, using (3.7), we have

$$\text{rank } \Pi_p(B|AB|\dots|A^{s-1}B) = p. \quad (3.8)$$

Let be  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$ . We will study the  $\Pi_p$ -null controllability of System (3.1) according to the values of  $p$  and  $s$ .

*Case 1* :  $p = s$ . The idea is to find an appropriate change of variable  $P$  to the solution  $y$  to System (3.1). More precisely, we would like the new variable  $w := P^{-1}y$  to be the solution to a cascade system and then, apply Theorem 2.1. So let us define, for all  $t \in [0, T]$ ,

$$P(t) := (B|AB|\dots|A^{s-1}B|P_{s+1}(t)|\dots|P_n(t)), \quad (3.9)$$

where, for all  $l \in \{s+1, \dots, n\}$ ,  $P_l(t)$  is the solution in  $C^1([0, T])^n$  to the system of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \partial_t P_l(t) = AP_l(t) \text{ in } [0, T], \\ P_l(T) = e_l. \end{cases} \quad (3.10)$$

Using (3.9) and (3.10), we can write

$$P(T) = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & I_{n-s} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

where  $P_{11} := \Pi_p(B|AB|\dots|A^{s-1}B) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$ ,  $P_{21} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^{n-s})$  and  $I_{n-s}$  is the identity matrix of size  $n-s$ . Using (3.8),  $P_{11}$  is invertible and thus  $P(T)$  also. Furthermore, since  $P(t) \in C^1([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  continuous in time on the time interval  $[0, T]$ , there exists  $T^* \in [0, T)$  such that  $P(t)$  is invertible for all  $t \in [T^*, T]$ .

Let us suppose first that  $T^* = 0$ . Since  $P(t) \in C^1([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  and invertible, in view of Lemma 3.1: for a fixed control  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $y$  is the solution to System (3.1) if and only if  $w := P(t)^{-1}y$  is the solution to System (3.3) where  $C, D$  are given by

$$C(t) := -P^{-1}(t)\partial_t P(t) + P^{-1}(t)AP(t) \quad \text{and} \quad D(t) := P^{-1}(t)B,$$

for all  $t \in [0, T]$ . Using (3.6) and (3.10), we obtain

$$\begin{cases} -\partial_t P(t) + AP(t) = (AB|\dots|A^s B|0|\dots|0) = P(t) \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{in } [0, T], \\ P(t)e_1 = B & \text{in } [0, T], \end{cases} \quad (3.12)$$

where

$$C_{11} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s,0} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s,1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \alpha_{s,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{s,s-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s). \quad (3.13)$$

Then

$$C(t) = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } D(t) = e_1. \quad (3.14)$$

Using Theorem 2.1, there exists  $u \in L^2(Q_T)$  such that the solution to System (3.3) satisfies  $w_1(T) \equiv \dots \equiv w_s(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Moreover, using (3.11), we have

$$\Pi_s y(T) = (y_1(T), \dots, y_s(T)) = P_{11}(w_1(T), \dots, w_s(T)) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

If now  $T^* \neq 0$ , let  $\bar{y}$  be the solution in  $W(0, T^*)^n$  to System (3.1) with the initial condition  $\bar{y}(0) = y_0$  in  $\Omega$  and the control  $u \equiv 0$  in  $\Omega \times (0, T^*)$ . We use the same argument as above to prove that System (3.1) is  $\Pi_s$ -null controllable on the time interval  $[T^*, T]$ . Let  $v$  be a control in  $L^2(\Omega \times (T^*, T))$  such that the solution  $z$  in  $W(T^*, T)^n$  to System (3.1) with the initial condition  $z(T^*) = \bar{y}(T^*)$  in  $\Omega$  and the control  $v$  satisfies  $\Pi_s z(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Thus if we define  $y$  and  $u$  as follows

$$(y, u) := \begin{cases} (\bar{y}, 0) & \text{if } t \in [0, T^*], \\ (z, v) & \text{if } t \in [T^*, T], \end{cases}$$

then, for this control  $u$ ,  $y$  is the solution in  $W(0, T)^n$  to System (3.1). Moreover  $y$  satisfies

$$\Pi_s y(T) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

*Case 2 :  $p < s$ .* In order to use Case 1, we would like to apply an appropriate change of variable  $Q$  to the solution  $y$  to System (3.1). If we denote by  $[A|B] =: (k_{ij})_{ij}$ , equalities (3.5) and (3.8) can be rewritten

$$\text{rank} \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{ns} \end{pmatrix} = s \quad \text{and} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{p1} & \dots & k_{ps} \end{pmatrix} = p.$$

Then there exist distinct natural numbers  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_s$  such that we have  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_s\} \subset \{p+1, \dots, n\}$  and

$$\text{rank} \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{p1} & \dots & k_{ps} \\ k_{\lambda_{p+1}1} & \dots & k_{\lambda_{p+1}s} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{\lambda_s1} & \dots & k_{\lambda_s s} \end{pmatrix} = s. \quad (3.15)$$

Let  $Q$  be the matrix defined by

$$Q := (e_1 | \dots | e_p | e_{\lambda_{p+1}} | \dots | e_{\lambda_n})^t,$$

where  $\{\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n\} := \{p+1, \dots, n\} \setminus \{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_s\}$ .  $Q$  is invertible, so taking  $w := P^{-1}y$  with  $P := Q^{-1}$ , for a fixed control  $u$  in  $L^2(Q_T)$ ,  $y$  is solution to System (3.1) if and only if  $w$  is solution to System (3.3) where  $w_0 := Qy_0$ ,  $C := QAQ^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  and  $D := QB \in \mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ . Moreover there holds

$$[C|D] = Q[A|B].$$

Thus, equation (3.15) yields

$$\text{rank } \Pi_s[C|D] = \text{rank } \Pi_s Q[A|B] = \text{rank} \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{p1} & \cdots & k_{pn} \\ k_{\lambda_{p+1}1} & \cdots & k_{\lambda_{p+1}n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{\lambda_s1} & \cdots & k_{\lambda_sn} \end{pmatrix} = s.$$

Since  $\text{rank } [C|D] = \text{rank } [A|B] = s$ , we proceed as in Case 1 forward deduce that System (3.3) is  $\Pi_s$ -null controllable, that is there exists a control  $u \in L^2(Q_T)$  such that the solution  $w$  to System (3.3) satisfies

$$\Pi_s w(T) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

Moreover the matrix  $Q$  can be rewritten

$$Q = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix},$$

where  $Q_{22} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-p})$ . Thus

$$\Pi_p y(T) = \Pi_p Q y(T) = \Pi_p w(T) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

(b) Necessary part: Let us denote by  $[A|B] =: (k_{ij})_{ij}$ . We suppose now that (1.9) is not satisfied: there exist  $\bar{p} \in \{1, \dots, p\}$  and  $\beta_i$  for all  $i \in \{1, \dots, p\} \setminus \{\bar{p}\}$  such that  $k_{\bar{p}j} = \sum_{i=1, i \neq \bar{p}}^p \beta_i k_{ij}$  for all  $j \in \{1, \dots, s\}$ . The idea is to find a change of variable  $w := Qy$  that allows to handle more easily our system. We will achieve this in three steps starting from the simplest situation.

Step 1. Let us suppose first that

$$k_{11} = \dots = k_{1s} = 0 \text{ and } \text{rank} \begin{pmatrix} k_{21} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{s+1,1} & \cdots & k_{s+1,s} \end{pmatrix} = s. \quad (3.16)$$

We want to prove that, for some initial condition  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$ , a control  $u \in L^2(Q_T)$  cannot be found such that the solution to System (3.1) satisfies  $y_1(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Let us consider the matrix  $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  defined by

$$P := (B | \dots | A^{s-1}B | e_1 | e_{s+2} | \dots | e_n). \quad (3.17)$$

Using the assumption (3.16),  $P$  is invertible. Thus, in view of Lemma 3.1, for a fixed control  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $y$  is a solution to System (3.1) if and only if  $w := P^{-1}y$  is a solution to System (3.3) where  $C, D$  are given by  $C := P^{-1}AP$  and  $D := P^{-1}B$ . Using (3.6) we remark that

$$A(B|AB|\dots|BA^{s-1}) = (B|AB|\dots|BA^{s-1}) \begin{pmatrix} C_{11} \\ 0 \end{pmatrix},$$

with  $C_{11}$  defined in (3.13). Then  $C$  can be rewritten as

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

where  $C_{12} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-s}, \mathbb{R}^s)$  and  $C_{22} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-s})$ . Furthermore

$$D = P^{-1}B = P^{-1}Pe_1 = e_1.$$

and with the Definition (3.17) of  $P$  we get

$$y_1(T) = w_{s+1}(T) \text{ in } \Omega.$$

Thus we need only to prove that there exists  $w_0 \in L^2(\Omega)^n$  such that we cannot find a control  $u \in L^2(Q_T)$  with the corresponding solution  $w$  to System (3.3) satisfying  $w_{s+1}(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Therefore we apply Proposition 2.1 and prove that the observability inequality (2.4) can not be satisfied. More precisely, for all  $w_0 \in L^2(\Omega)^n$ , there exists a control  $u \in L^2(Q_T)$  such that the solution to System (3.3) satisfies  $w_{s+1}(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ , if and only if there exists  $C_{obs} > 0$  such that for all  $\varphi_{s+1}^0 \in L^2(\Omega)$  the solution to the adjoint system

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \Delta \varphi + \begin{pmatrix} C_{11}^* & 0 \\ C_{12}^* & C_{22}^* \end{pmatrix} \varphi & \text{in } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \varphi(T) = (0, \dots, 0, \varphi_{s+1}^0, 0, \dots, 0)^t = e_{s+1} \varphi_{s+1}^0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.19)$$

satisfies the observability inequality

$$\int_{\Omega} \varphi(0)^2 dx \leq C_{obs} \int_{\omega \times (0, T)} \varphi_1^2 dx dt. \quad (3.20)$$

But for all  $\varphi_{s+1}^0 \neq 0$  in  $\Omega$ , the inequality (3.20) is not satisfied. Indeed, we remark first that, since  $\varphi_1(T) = \dots = \varphi_s(T) = 0$  in  $\Omega$ , we have  $\varphi_1 = \dots = \varphi_s = 0$  in  $Q_T$ , so that  $\int_{\omega \times (0, T)} \varphi_1^2 dx = 0$ , while, if we choose  $\varphi_{s+1}^0 \neq 0$  in  $\Omega$ , using the results on backward uniqueness for this type of parabolic system (see [Ghi86]), we have clearly  $(\varphi_{s+1}(0), \dots, \varphi_n(0)) \neq 0$  in  $\Omega$ .

Step 2. Let us suppose only that  $k_{11} = \dots = k_{1s} = 0$ . Since  $\text{rank}(B|\dots|A^{s-1}B) = s$ , there exists distinct  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \{2, \dots, n\}$  such that

$$\text{rank} \begin{pmatrix} k_{\lambda_1, 1} & \dots & k_{\lambda_1, s} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{\lambda_s, 1} & \dots & k_{\lambda_s, s} \end{pmatrix} = s.$$

Let us consider the following matrix

$$Q := (e_1 | e_{\lambda_1} | \dots | e_{\lambda_{n-1}})^t,$$

where  $\{\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{n-1}\} = \{2, \dots, n\} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ . Thus, for  $P := Q^{-1}$ , again, for a fixed control  $u \in L^2(Q_T)$ ,  $y$  is a solution to System (3.1) if and only if  $w := P^{-1}y$  is a solution to System (3.3) where  $C, D$  are given by  $C := QAQ^{-1}$  and  $D := QB$ . Moreover, we have

$$[C|D] = Q[A|B].$$

If we note  $(\tilde{k}_{ij})_{ij} := [C|D]$ , this implies  $\tilde{k}_{11} = \dots = \tilde{k}_{1s} = 0$  and

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \tilde{k}_{21} & \dots & \tilde{k}_{2s} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{k}_{s+1,1} & \dots & \tilde{k}_{s+1,s} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} k_{\lambda_1 1} & \dots & k_{\lambda_1 s} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{\lambda_s 1} & \dots & k_{\lambda_s s} \end{pmatrix} = s.$$

Proceeding as in Step 1 for  $w$ , there exists an initial condition  $w_0$  such that for all control  $u$  in  $L^2(Q_T)$  the solution  $w$  to System (3.3) satisfies  $w_1(T) \neq 0$  in  $\Omega$ . Thus, for the initial condition  $y_0 := Q^{-1}w_0$ , for all control  $u$  in  $L^2(Q_T)$ , the solution  $y$  to System (3.1) satisfies

$$y_1(T) = w_1(T) \neq 0 \text{ in } \Omega.$$

Step 3. Without loss of generality, we can suppose that there exists  $\beta_i$  for all  $i \in \{2, \dots, p\}$  such that  $k_{1j} = \sum_{i=2}^p \beta_i k_{ij}$  for all  $j \in \{1, \dots, s\}$  (otherwise a permutation of lines leads to this case). Let us define the following matrix

$$Q := \left( (e_1 - \sum_{i=2}^p \beta_i e_i) | e_2 | \dots | e_n \right)^t.$$

Thus, for  $P := Q^{-1}$ , again, for a fixed initial condition  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$  and a control  $u \in L^2(Q_T)$ , consider System (3.3) with  $w := P^{-1}y$ ,  $y$  being a solution to System (3.1). We remark that if we denote by  $(\tilde{k}_{ij}) := [C|D]$ , we have  $\tilde{k}_{11} = \dots = \tilde{k}_{1s} = 0$ . Applying step 2 to  $w$ , there exists an initial condition  $w_0$  such that for all control  $u$  in  $L^2(Q_T)$  the solution  $w$  to System (3.3) satisfies

$$w_1(T) \neq 0 \text{ in } \Omega. \tag{3.21}$$

Thus, with the definition of  $Q$ , for all control  $u$  in  $L^2(Q_T)$  the solution  $y$  to System (3.1) satisfies

$$w_1(T) = y_1(T) - \sum_{i=2}^p \beta_i y_i(T) \text{ in } \Omega.$$

Suppose  $\Pi_p y(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ , then  $w_1(T) \equiv 0$  in  $\Omega$  and this contradicts (3.21).

As a consequence of Proposition 2.1, the  $\Pi_p$ -null controllability implies the  $\Pi_p$ -approximate controllability of System (3.3). If now Condition (1.9) is not satisfied, as for the  $\Pi_p$ -null controllability, we can find a solution to System (3.19) such that  $\phi_1 \equiv 0$  in  $\omega \times (0, T)$  and  $\phi \neq 0$  in  $Q_T$  and we conclude again with Proposition 2.1.  $\square$

### 3.2 $m$ -control forces

In this subsection, we will suppose that  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  and  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ . We denote by  $B =: (b^1 | \dots | b^m)$ . To prove Theorem 1.1, we will use the following lemma which can be found in [AK+09a].

**Lemma 3.3.** *There exist  $r \in \{1, \dots, s\}$  and sequences  $\{l_j\}_{1 \leq j \leq r} \subset \{1, \dots, m\}$  and  $\{s_j\}_{1 \leq j \leq r} \subset \{1, \dots, n\}$  with  $\sum_{j=1}^r s_j = s$ , such that*

$$\mathcal{B} := \bigcup_{j=1}^r \{b^{l_j}, Ab^{l_j}, \dots, A^{s_j-1}b^{l_j}\}$$

is a basis of  $X$ . Moreover, for every  $1 \leq j \leq r$ , there exist  $\alpha_{k,s_j}^i \in \mathbb{R}$  for  $1 \leq i \leq j$  and  $1 \leq k \leq s_j$  such that

$$A^{s_j}b^{l_j} = \sum_{i=1}^j \left( \alpha_{1,s_j}^i b^{l_i} + \alpha_{2,s_j}^i Ab^{l_i} + \dots + \alpha_{s_i,s_j}^i A^{s_i-1}b^{l_i} \right). \quad (3.22)$$

*Proof of Theorem 1.1.* Consider the basis  $\mathcal{B}$  of  $X$  given by Lemma 3.3. Note that

$$\text{rank } \Pi_p[A|B] = \dim \Pi_p[A|B](\mathbb{R}^n) \leq \text{rank } [A|B] = s.$$

If  $M$  is the matrix whose columns are the elements of  $\mathcal{B}$ , i.e.

$$M = (m_{ij})_{ij} := (b^{l_1} | Ab^{l_1} | \dots | A^{s_1-1}b^{l_1} | \dots | b^{l_r} | Ab^{l_r} | \dots | A^{s_r-1}b^{l_r}),$$

we can remark that

$$\text{rank } \Pi_p M = \text{rank } \Pi_p [A|B]. \quad (3.23)$$

Indeed, relationship (3.22) yields

$$\Pi_p A^{s_j} b^{l_j} = \sum_{i=1}^j \left( \alpha_{1,s_j}^i \Pi_p b^{l_i} + \alpha_{2,s_j}^i \Pi_p Ab^{l_i} + \dots + \alpha_{s_i,s_j}^i \Pi_p A^{s_i-1} b^{l_i} \right).$$

We first prove in (a) that condition (1.9) is sufficient, and then in (b) that this condition is necessary.

(a) Sufficiency part: Let us suppose first that (1.9) is satisfied. Let be  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$ . We will prove that we need only  $r$  forces to control System (3.1). More precisely, we will study the  $\Pi_p$ -null controllability of the system

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + \tilde{B}1_\omega v & \text{in } Q_T, \\ y = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(0) = y_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (3.24)$$

where  $\tilde{B} = (b^{l_1} | b^{l_2} | \dots | b^{l_r}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n)$ . Using (1.9) and (3.23), we have

$$\text{rank } \Pi_p (b^{l_1} | Ab^{l_1} | \dots | A^{s_1-1}b^{l_1} | \dots | b^{l_r} | Ab^{l_r} | \dots | A^{s_r-1}b^{l_r}) = p. \quad (3.25)$$

*Case 1 :  $p = s$ .* As in the case of one control force, we want to apply a change of variable  $P$  to the solution  $y$  to System (3.24). Let us define for all  $t \in [0, T]$  the following matrix

$$P(t) := (b^{l_1} | Ab^{l_1} | \dots | A^{s_1-1}b^{l_1} | \dots | b^{l_r} | Ab^{l_r} | \dots | A^{s_r-1}b^{l_r} | P_{s+1}(t) | \dots | P_n(t)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad (3.26)$$



where for all  $l \in \{s+1, \dots, n\}$ ,  $P_l$  is solution in  $C^1([0, T])^n$  to the system of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \partial_t P_l(t) = AP_l(t) \text{ in } [0, T], \\ P_l(T) = e_l. \end{cases} \quad (3.27)$$

Using (3.26) and (3.27) we have

$$P(T) = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & I_{n-s} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

where  $P_{11} := \Pi_s(b^{l_1} | Ab^{l_1} | \dots | A^{s_1-1} b^{l_1} | \dots | b^{l_r} | Ab^{l_r} | \dots | A^{s_r-1} b^{l_r}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$  and  $P_{21} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-s}, \mathbb{R}^s)$ . From (3.25),  $P_{11}$  and thus  $P(T)$  are invertible. Furthermore, since  $P$  is continuous on  $[0, T]$ , there exists a  $T^* \in [0, T)$  such that  $P(t)$  is invertible for all  $t \in [T^*, T]$ .

We suppose first that  $T^* = 0$ . Since  $P$  is invertible and continuous on  $[0, T]$ , for a fixed control  $v \in L^2(Q_T)^r$ ,  $y$  is the solution to System (3.24) if and only if  $w := P(t)^{-1}y$  is the solution to System (3.3) where  $C, D$  are given by

$$C(t) := -P^{-1}(t)\partial_t P(t) + P^{-1}(t)AP(t) \quad \text{and} \quad D(t) := P^{-1}(t)\tilde{B},$$

for all  $t \in [0, T]$ . Using (3.22) and (3.27), we obtain

$$\begin{cases} -\partial_t P(t) + AP(t) &= (Ab^{l_1} | A^2 b^{l_1} | \dots | A^{s_1} b^{l_1} | \dots | Ab^{l_r} | A^2 b^{l_r} | \dots | A^{s_r} b^{l_r} | 0 | \dots | 0), \\ &= P(t) \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ in } [0, T], \\ P(t)e_{S_i} &= b^{l_i} \text{ in } [0, T], \end{cases} \quad (3.29)$$

where  $S_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} s_j$  for  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$\tilde{C}_{11} := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{rr} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s) \quad (3.30)$$

and for  $1 \leq i \leq j \leq r$  the matrices  $C_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{s_j}, \mathbb{R}^{s_i})$  are given by

$$C_{ii} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{1, s_i}^i \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{2, s_i}^i \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \alpha_{3, s_i}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{s_i, s_i}^i \end{pmatrix}$$

and

$$C_{ij} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{1, s_j}^i \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{2, s_j}^i \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{3, s_j}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{s_j, s_j}^i \end{pmatrix} \text{ for } j > i.$$

Then

$$C(t) = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } D(t) = (e_{s_1} | \dots | e_{s_r}). \quad (3.31)$$

Using Theorem 2.1, there exists  $v \in L^2(Q_T)^r$  such that the solution to System (3.3) satisfies  $w_1(T) = \dots = w_s(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Moreover, using (3.28), we have

$$\Pi_s y(T) = (y_1(T), \dots, y_s(T)) = P_{11}(w_1(T), \dots, w_s(T)) \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

If now  $T^* \neq 0$ , we conclude as in the proof of Theorem 1.1 with one force (see § 3.1).

*Case 2* :  $p < s$ . The proof is a direct adaptation of the proof of Theorem 1.1 with one force, it is possible to find a change of variable in order to get back to the situation of Case 1 (see § 3.1).

(b) Necessary part: If (1.9) is not satisfied, there exist  $\bar{p} \in \{1, \dots, p\}$  and, for all  $i \in \{1, \dots, p\} \setminus \{\bar{p}\}$ , scalars  $\beta_i$  such that  $m_{\bar{p}j} = \sum_{i=1, i \neq \bar{p}}^p \beta_i m_{ij}$  for all  $j \in \{1, \dots, s\}$ . As previously, without loss of generality, we can suppose that

$$m_{11} = \dots = m_{1s} = 0 \text{ and } \text{rank} \begin{pmatrix} m_{21} & \dots & m_{2s} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{s+1,1} & \dots & m_{s+1,s} \end{pmatrix} = s \quad (3.32)$$

(otherwise a permutation of lines leads to this case). Let us consider the matrix  $P$  defined by

$$P := (b^1 | Ab^1 | \dots | A^{s_1-1} b^1 | \dots | b^r | Ab^r | \dots | A^{s_r-1} b^r | e_1 | e_{s+2} | \dots | e_n). \quad (3.33)$$

Relationship ensures (3.32) that  $P$  is invertible. Thus, again, for a fixed control  $u \in L^2(Q_T)^m$ ,  $y$  is the solution to System (3.1) if and only if  $w := P^{-1}y$  is the solution to System (3.3) where  $C, D$  are given by  $C := P^{-1}AP$  and  $D := P^{-1}B$ . Using (3.22), we remark that

$$\begin{aligned} & A(b^1 | Ab^1 | \dots | A^{s_1-1} b^1 | \dots | b^r | Ab^r | \dots | A^{s_r-1} b^r) \\ &= (Ab^1 | A^2 b^1 | \dots | A^{s_1} b^1 | \dots | Ab^r | A^2 b^r | \dots | A^{s_r} b^r) = P \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

where  $\tilde{C}_{11}$  is defined in (3.30). Then  $C$  can be written as

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \\ 0 & \tilde{C}_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

where  $\tilde{C}_{12} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^{n-s})$  and  $\tilde{C}_{22} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-s})$ . Furthermore, the matrix  $D$  can be written

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

where  $D_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$ . Using (3.33), we get

$$y_1(T) = w_{s+1}(T) \text{ in } \Omega.$$

Thus, we need only to prove that there exists  $w_0 \in L^2(\Omega)^n$  such that we cannot find a control  $u \in L^2(Q_T)^m$  with the corresponding solution  $w$  to System (3.3) satisfying  $w_{s+1}(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Therefore we apply Proposition 2.1 and prove that the observability inequality (2.4) can not be satisfied. More precisely, for all  $w_0 \in L^2(\Omega)^n$ , there exists a control  $u \in L^2(Q_T)^m$  such that the solution  $w$  to System (3.3) satisfies  $w_{s+1}(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ , if and only if there exists  $C_{obs} > 0$  such that for all  $\varphi_{s+1}^0 \in L^2(\Omega)$  the solution to the adjoint system

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \Delta \varphi + \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11}^* & 0 \\ \tilde{C}_{12}^* & \tilde{C}_{22}^* \end{pmatrix} \varphi & \text{in } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \varphi(T) = (0, \dots, 0, \varphi_{s+1}^0, 0, \dots, 0)^t = e_{s+1} \varphi_{s+1}^0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.35)$$

satisfies the observability inequality

$$\int_{\Omega} \varphi(0)^2 dx \leq C_{obs} \int_{\omega \times (0, T)} (D_1^*(\varphi_1, \dots, \varphi_s)^t)^2 dx dt. \quad (3.36)$$

But for all  $\varphi_{s+1}^0 \neq 0$  in  $\Omega$ , the inequality (3.36) is not satisfied. Indeed, we remark first that, since  $\varphi_1(T) = \dots = \varphi_s(T) = 0$  in  $\Omega$ , we have  $\varphi_1 = \dots = \varphi_s = 0$  in  $Q_T$ . Furthermore, if we choose  $\varphi_{s+1}^0 \neq 0$  in  $\Omega$ , as previously, we get  $(\varphi_{s+1}(0), \dots, \varphi_n(0)) \neq 0$  in  $\Omega$ .

We recall that, as a consequence of Proposition 2.1, the  $\Pi_p$ -null controllability implies the  $\Pi_p$ -approximate controllability of System (3.24). If Condition (1.9) is not satisfied, as for the  $\Pi_p$ -null controllability, we can find a solution to System (3.35) such that  $D_1^*(\phi_1, \dots, \phi_s)^t \equiv 0$  in  $\omega \times (0, T)$  and  $\phi \neq 0$  in  $Q_T$  and we conclude again with Proposition 2.1.  $\square$

#### 4 Partial null controllability with time dependent matrices

We recall that  $[A|B](\cdot) = (B_0(\cdot) | \dots | B_{n-1}(\cdot))$  (see (1.6)). Since  $A(t) \in C^{n-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  and  $B(t) \in C^n([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$ , we remark that the matrix  $[A|B]$  is well defined and is an element of  $C^1([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ . We will use the notation  $B_i =: (b_1^i | \dots | b_m^i)$  for all  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . To prove Theorem 1.2, we will use the following lemma of [GBT10]

**Lemma 4.1.** *Assume that  $\max\{\text{rank } [A|B](t) : t \in [0, T]\} = s \leq n$ . Then there exist  $T_0, T_1 \in [0, T]$ , with  $T_0 < T_1$ ,  $r \in \{1, \dots, m\}$  and sequences  $(s_j)_{1 \leq j \leq r} \subset \{1, \dots, n\}$ , with  $\sum_{i=1}^r s_j = s$ , and  $(l_j)_{1 \leq j \leq r} \subset \{1, \dots, m\}$  such that, for every  $t \in [T_0, T_1]$ , the set*

$$\mathcal{B}(t) = \bigcup_{j=1}^r \{b_0^{l_j}(t), b_1^{l_j}(t), \dots, b_{s_j-1}^{l_j}(t)\}, \quad (4.1)$$

is linearly independent, spans the columns of  $[A|B](t)$  and satisfies

$$b_{s_j}^{l_j}(t) = \sum_{k=1}^j \left( \theta_{s_j, 0}^{l_j, l_k}(t) b_0^{l_k}(t) + \theta_{s_j, 1}^{l_j, l_k}(t) b_1^{l_k}(t) + \dots + \theta_{s_j, s_k-1}^{l_j, l_k}(t) b_{s_k-1}^{l_k}(t) \right), \quad (4.2)$$

for every  $t \in [T_0, T_1]$  and  $j \in \{1, \dots, r\}$ , where

$$\theta_{s_j, 0}^{l_j, l_k}(t), \theta_{s_j, 1}^{l_j, l_k}(t), \dots, \theta_{s_j, s_k-1}^{l_j, l_k}(t) \in C^1([T_0, T_1]).$$

With exactly the same argument for the proof of the previous lemma, we can obtain the

**Lemma 4.2.** *If rank  $[A|B](T) = s$ , then the conclusions of Lemma 4.1 hold true with  $T_1 = T$ .*

*Proof of Theorem 1.2.* Let  $y_0 \in L^2(\Omega)^n$  and  $s$  be the rank of the matrix  $[A|B](T)$ . As in the proof of the controllability by one force with constant matrices, let  $X$  being the linear space spanned by the columns of the matrix  $[A|B](T)$ . We consider  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t)$  the basis of  $X$  defined in (4.1).

As in the constant case, we will prove that we need only  $r$  forces to control System (1.1) that is we study the partial null controllability of System (3.24) with the coupling matrix  $A(t) \in C^{n-1}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  and the control matrix  $\tilde{B}(t) = (B_{l_1}(t)|B_{l_2}(t)|\dots|B_{l_r}(t)) \in C^n([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n))$ . If we define  $M$  as the matrix whose columns are the elements of  $\mathcal{B}(t)$ , i.e. for all  $t \in [0, T]$

$$M(t) = (m_{ij}(t))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq s} := \left( b_0^{l_1}(t)|b_1^{l_1}(t)|\dots|b_{s_1-1}^{l_1}(t)|\dots|b_0^{l_r}(t)|b_1^{l_r}(t)|\dots|b_{s_r-1}^{l_r}(t) \right),$$

we can remark that

$$\text{rank } \Pi_p M(T) = \text{rank } \Pi_p [A|B](T) = p. \quad (4.3)$$

Indeed, using (4.2),

$$\Pi_p b_{s_j}^{l_j}(t) = \sum_{k=1}^j \left( \theta_{s_j,0}^{l_j, l_k}(t) \Pi_p b_0^{l_k}(t) + \theta_{s_j,1}^{l_j, l_k}(t) \Pi_p b_1^{l_k}(t) + \dots + \theta_{s_j, s_k-1}^{l_j, l_k}(t) \Pi_p b_{s_k-1}^{l_k}(t) \right).$$

*Case 1* :  $p = s$ . As in the constant case, we want to apply a change of variable  $P$  to the solution  $y$  to System (3.24). Let us define for all  $t \in [0, T]$  the following matrix

$$P(t) := (b_0^{l_1}(t)|b_1^{l_1}(t)|\dots|b_{s_1-1}^{l_1}(t)|\dots|b_0^{l_r}(t)|b_1^{l_r}(t)|\dots|b_{s_r-1}^{l_r}(t)|P_{s+1}(t)|\dots|P_n(t)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \quad (4.4)$$

where for all  $i \in \{s+1, \dots, n\}$ ,  $P_i$  is solution in  $C^1([0, T])^n$  to the system of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \partial_t P_i(t) = AP_i(t) \text{ in } [0, T], \\ P_i(T) = e_i. \end{cases} \quad (4.5)$$

Using (4.4) and (4.5),  $P(T)$  can be rewritten

$$P(T) = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & I_{n-s} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

where  $P_{11} := \Pi_p (b_0^{l_1}(T)|b_1^{l_1}(T)|\dots|b_{s_1-1}^{l_1}(T)|\dots|b_0^{l_r}(T)|b_1^{l_r}(T)|\dots|b_{s_r-1}^{l_r}(T)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s)$  and  $P_{21} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-s}, \mathbb{R}^s)$ . Using (4.3),  $P_{11}$ , and thus  $P(T)$ , are invertible. Furthermore, since  $P$  is continuous on  $[0, T]$ , there exists a  $T^* \in [0, T)$  such that  $P(t)$  is invertible for all  $t \in [T^*, T]$ .

As previously it is sufficient to prove the result for  $T^* = 0$ . Since  $P(t)$  is a element of  $C^1([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$  and is invertible on the time interval  $[0, T]$ , again, for a fixed control  $v \in L^2(Q_T)^r$ ,  $y$  is the solution to System (3.24) if and only if  $w := P(t)^{-1}y$  is the solution to System (3.3) where  $C, D$  are given by

$$C(t) := -P^{-1}(t)\partial_t P(t) + P^{-1}(t)AP(t) \quad \text{and} \quad D(t) := P^{-1}(t)\tilde{B},$$

for all  $t \in [0, T]$ . Using (4.2) and (4.5), we obtain

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_t P(t) + AP(t) = (b_1^l(t)|b_2^l(t)|\dots|b_{s_1}^l(t)|\dots|b_1^r(t)|b_2^r(t)|\dots|b_{s_r}^r(t)|0|\dots|0), \\ \qquad \qquad \qquad = P(t) \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ in } [0, T], \\ P(t)e_{S_i} = b_0^i \text{ in } [0, T], \end{array} \right. \quad (4.7)$$

where  $S_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} s_j$  for  $1 \leq i \leq r$ ,

$$\tilde{C}_{11} := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ 0 & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{rr} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^s), \quad (4.8)$$

and for  $1 \leq i \leq j \leq r$ , the matrices  $C_{ij} \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^{s_j}, \mathbb{R}^{s_i}))$  are given here by

$$C_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta_{s_i,0}^{i,i} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \theta_{s_i,1}^{i,i} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \theta_{s_i,2}^{i,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \theta_{s_i,s_i-1}^{i,i} \end{pmatrix}$$

and

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta_{s_j,0}^{i,j} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta_{s_j,1}^{i,j} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta_{s_j,2}^{i,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \theta_{s_j,s_i-1}^{i,j} \end{pmatrix} \text{ for } j > i.$$

Then

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } D = (e_{S_1}|\dots|e_{S_r}). \quad (4.9)$$

Using Theorem 2.1, there exists  $v \in L^2(Q_T)^r$  such that the solution to System (3.3) satisfies  $w_1(T) = \dots = w_s(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Moreover, the equality (4.6) leads to

$$\Pi_s y(T) = (y_1(T), \dots, y_s(T))^t = P_{11}(w_1(T), \dots, w_s(T))^t \equiv 0 \text{ in } \Omega.$$

*Case 2* :  $p < s$ . The same method as in the constant case leads to the conclusion (see § 3.1).

The  $\pi_p$ -approximate controllability can be proved also as in the constant case. □

## 5 Partial null controllability for a space dependent coupling matrix

All along this section, the dimension  $N$  will be equal to 1, more precisely  $\Omega := (0, \pi)$  with the exception of the proof of the third point in Theorem 1.3 and the numerical illustration in Section 5.3 where  $\Omega := (0, 2\pi)$ . We recall that the eigenvalues of  $-\Delta$  in  $\Omega$  with Dirichlet boundary conditions are given by  $\mu_k := k^2$  for all  $k \geq 1$  and we will denote by  $(w_k)_{k \geq 1}$  the associated  $L^2$ -normalized eigenfunctions. Let us consider the following parabolic system of two equations

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \alpha z + \mathbb{1}_\omega u & \text{in } Q_T, \\ \partial_t z = \Delta z & \text{in } Q_T, \\ y = z = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ y(0) = y_0, z(0) = z_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

where  $y_0, z_0 \in L^2(\Omega)$  are the initial data,  $u \in L^2(Q_T)$  is the control and the coupling coefficient  $\alpha$  is in  $L^\infty(\Omega)$ . We recall that System (5.1) is  $\Pi_1$ -null controllable if for all  $y^0, z^0 \in L^2(\Omega)$ , we can find a control  $u \in L^2(Q_T)$  such that the solution  $(y, z) \in W(0, T)^2$  to System (5.1) satisfies  $y(T) \equiv 0$  in  $\Omega$ .

### 5.1 Example of controllability

In this subsection, we will provide an example of  $\Pi_1$ -null controllability for System (5.1) with the help of the method of moments initially developed in [FR71]. As already mentioned, we suppose that  $\Omega := (0, \pi)$ , but the argument of Section 5.1 can be adapted for any open bounded interval of  $\mathbb{R}$ . Let us introduce the adjoint system associated to our control problem

$$\begin{cases} -\partial_t \phi = \Delta \phi & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ -\partial_t \psi = \Delta \psi + \alpha \phi & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ \phi(0) = \phi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0 & \text{on } (0, T), \\ \phi(T) = \phi_0, \psi(T) = 0 & \text{in } (0, \pi), \end{cases} \quad (5.2)$$

where  $\phi_0 \in L^2(0, \pi)$ . For an initial data  $\phi_0 \in L^2(0, \pi)$  in adjoint System (5.2), we get

$$\int_0^\pi \phi_0 y(T) dx - \int_0^\pi \phi(0) y_0 dx - \int_0^\pi \psi(0) z_0 dx = \iint_{q_T} \phi u dx dt, \quad (5.3)$$

with the notation  $q_T := \omega \times (0, T)$ . Since  $(w_k)_{k \geq 1}$  spans  $L^2(0, \pi)$ , System (5.1) is  $\Pi_1$ -null controllable if and only if there exists  $u \in L^2(q_T)$  such that, for all  $k \in \mathbb{N}^*$ , the solution to System (5.2) satisfies the following equality

$$-\int_0^\pi \phi_k(0) y_0 dx - \int_0^\pi \psi_k(0) z_0 dx = \iint_{q_T} \phi_k u dx dt, \quad (5.4)$$

where  $(\phi_k, \psi_k)$  is the solution to adjoint System (5.2) for the initial data  $\phi_0 := w_k$ .

Let  $k \in \mathbb{N}^*$ . With the initial condition  $\phi_0 := w_k$  is associated the solution  $(\phi_k, \psi_k)$  to adjoint System (5.2):

$$\phi_k(t) = e^{-k^2(T-t)} w_k \text{ in } (0, \pi)$$

for all  $t \in [0, T]$ . If we write:

$$\psi_k(x, t) := \sum_{l \geq 1} \psi_{kl}(t) w_l(x) \text{ for all } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T),$$

then a simple computation leads to the formula

$$\psi_{kl}(t) = \frac{e^{-k^2(T-t)} - e^{-l^2(T-t)}}{-k^2 + l^2} \alpha_{kl} \text{ for all } l \geq 1, t \in (0, T), \quad (5.5)$$

where, for all  $k, l \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha_{kl}$  is defined in (2). In (5.5) we implicitly used the convention: if  $l = k$  the term  $(e^{-k^2(T-t)} - e^{-l^2(T-t)})/(-k^2 + l^2)$  is replaced by  $(T - t)e^{-k^2(T-t)}$ . With these expressions of  $\phi_k$  and  $\psi_k$ , the equality (5.4) reads for all  $k \geq 1$

$$-e^{-k^2 T} y_k^0 - \sum_{l \geq 1} \frac{e^{-k^2 T} - e^{-l^2 T}}{-k^2 + l^2} \alpha_{kl} z_l^0 = \iint_{q_T} e^{-k^2(T-t)} w_k(x) u(t, x) dx dt. \quad (5.6)$$

In the proof of Theorem 1.3, we will look for a control  $u$  expressed as  $u(x, t) = f(x)\gamma(t)$  with  $\gamma(t) = \sum_{k \geq 1} \gamma_k q_k(t)$  and  $(q_k)_{k \geq 1}$  a family biorthogonal to  $(e^{-k^2 t})_{k \geq 1}$ . Thus, we will need the two following lemma

**Lemma 5.1.** (see Lemma 5.1, [AK+15]) *There exists  $f \in L^2(0, \pi)$  such that  $\text{Supp } f \subset \omega$  and for a constant  $\beta$ , one has*

$$\inf_{k \geq 1} f_k k^3 = \beta > 0,$$

where, for all  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_k := \int_0^\pi f w_k dx$ .

**Lemma 5.2.** (see Corollary 3.2, [FR71]) *There exists a sequence  $(q_k)_{k \geq 1} \subset L^2(0, T)$  biorthogonal to  $(e^{-k^2 t})_{k \geq 1}$ , that is*

$$\langle q_k, e^{-l^2 t} \rangle_{L^2(0, T)} = \delta_{kl}.$$

Moreover, for all  $\varepsilon > 0$ , there exists  $C_{T, \varepsilon} > 0$ , independent of  $k$ , such that

$$\|q_k\|_{L^2(0, T)} \leq C_{T, \varepsilon} e^{(\pi + \varepsilon)k}, \quad \forall k \geq 1. \quad (5.7)$$

*Remark 5.1.* When  $\Omega := (a, b)$  with  $a, b \in \mathbb{R}$ , the inequality (5.7) of Lemma 5.2 is replaced by

$$\|q_k\|_{L^2(0, T)} \leq C_{T, \varepsilon} e^{(b - a + \varepsilon)k}, \quad \forall k \geq 1.$$

*Proof of the second point in Theorem 1.3.* As mentioned above, let us look for the control  $u$  of the form  $u(x, t) = f(x)\gamma(t)$ , where  $f$  is as in Lemma 5.1. Since  $f_k \neq 0$  for all  $k \in \mathbb{N}^*$ , using (5.6), the  $\Pi_1$ -null controllability of System (5.1) is reduced to find a solution  $\gamma \in L^2(0, T)$  to the following problem of moments:

$$\int_0^T \gamma(T-t) e^{-k^2 t} dt = f_k^{-1} \left( -e^{-k^2 T} y_k^0 - \sum_{l \geq 1} \frac{e^{-k^2 T} - e^{-l^2 T}}{-k^2 + l^2} \alpha_{kl} z_l^0 \right) := M_k \quad \forall k \geq 1. \quad (5.8)$$

The function  $\gamma(t) := \sum_{k \geq 1} M_k q_k(T-t)$  is a solution to this problem of moments. We need only to prove that  $\gamma \in L^2(0, T)$ . Using the convexity of the exponential function, we get for

all  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{l \geq 1} \left| \frac{e^{-k^2 T} - e^{-l^2 T}}{-k^2 + l^2} \right| |\alpha_{kl}| &= \sum_{l=1}^k \left| \frac{e^{-k^2 T} - e^{-l^2 T}}{-k^2 + l^2} \right| |\alpha_{kl}| \\
 &\quad + \sum_{l=k+1}^{\infty} \left| \frac{e^{-k^2 T} - e^{-l^2 T}}{-k^2 + l^2} \right| |\alpha_{kl}| \quad (5.9) \\
 &\leq \sum_{l=1}^k T e^{-l^2 T} |\alpha_{kl}| + \sum_{l=k+1}^{\infty} T e^{-k^2 T} |\alpha_{kl}| \\
 &=: A_{1,k} + A_{2,k}.
 \end{aligned}$$

With the Condition (1.13) on  $\alpha$ , there exists a positive constant  $C_T$  which do not depend on  $k$  such that for all  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 A_{1,k} &\leq C_1 T \sum_{l=1}^k e^{-l^2 T} e^{-C_2(k-l)} \\
 &\leq C_1 T e^{-C_2 k} \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l^2 T + C_2 l} \quad (5.10) \\
 &\leq C_T e^{-C_2 k}
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 A_{2,k} &\leq C_1 T e^{-k^2 T} \sum_{l=k+1}^{\infty} e^{-C_2(l-k)} \\
 &\leq C_1 T e^{-k^2 T} \sum_{j=0}^{\infty} (e^{-C_2})^j \quad (5.11) \\
 &\leq C_1 T e^{-k^2 T} \frac{1}{1 - e^{-C_2}}.
 \end{aligned}$$

Combining the three last inequalities (5.9)-(5.11), for all  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{l \geq 1} \left| \frac{e^{-k^2 T} - e^{-l^2 T}}{-k^2 + l^2} \right| |\alpha_{kl}| \leq C_T e^{-C_2 k}, \quad (5.12)$$

where  $C_T$  is a positive constant independent of  $k$ . Let  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Then, with Lemma 5.1, (5.8) and (5.12), there exists a positive constant  $C_{T,\varepsilon}$  independent of  $k$  such that for all  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 |M_k| &\leq \beta^{-1} k^3 \left( e^{-k^2 T} \|y_0\|_{L^2(0,\pi)} + C_T e^{-C_2 k} \|z_0\|_{L^2(0,\pi)} \right) \\
 &\leq C_{T,\varepsilon} e^{-C_2(1-\varepsilon)k} (\|y_0\|_{L^2(0,\pi)} + \|z_0\|_{L^2(0,\pi)}).
 \end{aligned}$$

Thus, using Lemma 5.2, for  $\varepsilon$  small enough and a positive constant  $C_{T,\varepsilon}$

$$\|\gamma\|_{L^2(0,T)} \leq C_{T,\varepsilon} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^*} e^{-[C_2(1-\varepsilon) - \pi + \varepsilon]k} \right) (\|y_0\|_{L^2(0,\pi)} + \|z_0\|_{L^2(0,\pi)}) < \infty.$$

□

## 5.2 Example of non controllability

In this subsection, to provide an example of non  $\Pi_1$ -null controllability of System (5.1), we will first study the boundary controllability of the following parabolic system of two



equations

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \alpha z & \text{in } Q_T := (0, \pi) \times (0, T), \\ \partial_t z = \Delta z & \text{in } Q_T, \\ y(0, t) = v(t), \quad y(\pi, t) = z(0, t) = z(\pi, t) = 0 & \text{on } (0, T), \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad z(x, 0) = z_0(x) & \text{in } \Omega := (0, \pi), \end{cases} \quad (5.13)$$

where  $y_0, z_0 \in H^{-1}(0, \pi)$  are the initial data,  $v \in L^2(0, T)$  is the boundary control and  $\alpha \in L^\infty(0, \pi)$ . For any given  $y_0, z_0 \in H^{-1}(0, \pi)$  and  $v \in L^2(0, T)$ , System (5.13) has a unique solution in  $L^2(Q_T)^2 \cap C^0([0, T]; H^{-1}(\Omega)^2)$  (defined by transposition; see [FCGBT10]).

As in Section 5.1, for an initial data  $(y_0, z_0) \in H^{-1}(0, \pi)^2$  we can find a control  $v \in L^2(0, T)$  such that the solution to (5.13) satisfies  $y(T) \equiv 0$  in  $(0, \pi)$  if and only if for all  $\phi_0 \in H_0^1(0, \pi)$  the solution to System (5.2) verifies the equality

$$-\langle y_0, \phi(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \langle z_0, \psi(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_0^T v(t) \phi_x(0, t) dt, \quad (5.14)$$

where the duality bracket  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$  is defined as  $\langle f, g \rangle_{H^{-1}, H_0^1} := f(g)$  for all  $f \in H^{-1}(0, \pi)$  and all  $g \in H_0^1(0, \pi)$ .

The used strategy here is inspired from [GI13]. The idea involves constructing particular initial data for adjoint System (5.2):

**Lemma 5.3.** *Let  $m, G \in \mathbb{N}^*$ . For all  $M \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , there exists  $\phi_{0, M} \in L^2(0, \pi)$  given by*

$$\phi_{0, M} = \sum_{i=1}^m \phi_{GM+i}^{0, M} w_{GM+i},$$

with  $\phi_{GM+1}^{0, M}, \dots, \phi_{GM+m}^{0, M} \in \mathbb{R}$ , such that the solution  $(\phi_M, \psi_M)$  to adjoint System (5.2) with  $\phi_0 = \phi_{0, M}$  satisfies

$$\left( \int_0^T (\phi_M)_x(0, t)^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{\gamma_1}{M^{(2m-5)/2}}, \quad (5.15)$$

where  $\gamma_1$  does not depend on  $M$ . Moreover for an increasing sequence  $(M_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  and a  $k_1 \in \{1, \dots, m\}$ , we have  $|\phi_{GM_j+k_1}^{0, j}| = 1$  for all  $G \in \mathbb{N}^*$  and  $j \in \mathbb{N}$ .

To study the controllability of System (5.13) we will use the fact that for fixed  $m, G \in \mathbb{N}^*$ , the quantity in the left-side hand in (5.15) converge to zero when  $M$  goes to infinity.

*Démonstration.* We remark first that

$$A_M := \int_0^T (\phi_M)_x(0, t)^2 dt = \int_0^T \left| \sum_{k=GM+1}^{GM+m} k e^{-k^2(T-t)} \phi_k^{0, M} \right|^2 dt. \quad (5.16)$$

We can rewrite  $A_M$  as follows:

$$\begin{aligned} A_M &= \int_0^T \left| \sum_{j=1}^m (GM+j) e^{-(G^2M^2+2GMj+j^2)(T-t)} \phi_{GM+j}^{0, M} \right|^2 dt \\ &= \int_0^T e^{-2G^2M^2(T-t)} g_M(t) dt, \end{aligned} \quad (5.17)$$

where, for all  $t \in [0, T]$ ,  $g_M(t) := f_M(t)^2$  with

$$f_M(t) := \sum_{j=1}^m (GM + j) e^{-(2GMj+j^2)(T-t)} \phi_{GM+j}^{0,M}.$$

Let  $(\phi_{GM+1}^{0,M}, \phi_{GM+2}^{0,M}, \dots, \phi_{GM+m}^{0,M})$  be a nontrivial solution of the following homogeneous linear system of  $m - 1$  equations with  $m$  unknowns

$$f_M^{(l)}(T) = \sum_{j=1}^m (GM + j)(2GMj + j^2)^l \phi_{GM+j}^{0,M} = 0, \text{ for all } l \in \{0, \dots, m - 2\}. \quad (5.18)$$

Using Leibniz formula

$$g_M^{(l)} = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} f_M^{(k)} f_M^{(l-k)}$$

we deduce that

$$g_M^{(l)}(T) = 0, \text{ for all } l \in \{0, \dots, 2m - 4\}. \quad (5.19)$$

Using (5.19), after  $2m - 3$  integrations by part in (5.17), we obtain

$$\begin{aligned} A_M &= \frac{-g_M(0)e^{-2G^2M^2T}}{2G^2M^2} + \int_0^T \frac{e^{-2G^2M^2(T-t)}}{(-2G^2M^2)} g_M^{(1)}(t) dt \\ &= \sum_{l=0}^{2m-4} \frac{g_M^{(l)}(0)e^{-2G^2M^2T}}{(-2G^2M^2)^{l+1}} + \int_0^T \frac{e^{-2G^2M^2(T-t)}}{(-2G^2M^2)^{2m-3}} g_M^{(2m-3)}(t) dt. \end{aligned}$$

By linearity, in (5.18) we can choose  $\phi_{GM+1}^{0,M}, \dots, \phi_{GM+m}^{0,M}$  such that

$$\sup_{i \in \{1, \dots, m\}} |\phi_{GM+i}^{0,M}| = 1. \quad (5.20)$$

Thus, for all  $l \in \mathbb{N}$  and all  $t \in [0, T]$ , the following estimate holds

$$\begin{aligned} |g_M^{(l)}(t)| &= \left| \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} f_M^{(k)}(t) f_M^{(l-k)}(t) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \left| \sum_{j=1}^m (GM + j)(2GMj + j^2)^k e^{-(2GMj+j^2)(T-t)} \phi_{GM+j}^{0,M} \right| \\ &\quad \times \left| \sum_{j=1}^m (GM + j)(2GMj + j^2)^{l-k} e^{-(2GMj+j^2)(T-t)} \phi_{GM+j}^{0,M} \right| \\ &\leq (GM + m)^2 m^2 \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (2GMm + m^2)^l \\ &\leq CM^{l+2}, \end{aligned}$$

where  $C$  does not depend on  $M$ . Then, since  $\sup_{i \in \{1, \dots, m\}} |\phi_{GM+i}^{0,M}| = 1$ , there exist  $C, \tau > 0$  such that

$$\begin{aligned} A_M &\leq e^{-2G^2M^2T} \sum_{l=0}^{2m-4} \frac{\|g_M^{(l)}\|_\infty}{(2G^2M^2)^{l+1}} + \frac{T \|g_M^{(2m-3)}\|_\infty}{(2G^2M^2)^{2m-3}} \\ &\leq e^{-\tau M^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C}{M^l} + \frac{C}{M^{2m-5}} \\ &\leq CM^{-2} e^{-\tau M^2} \frac{1}{1 - M^{-2}} + \frac{C}{M^{2m-5}}. \end{aligned}$$

Thus there exists  $\gamma_1 > 0$  such that we have the estimate

$$A_M \leq \frac{\gamma_1}{M^{2m-5}},$$

where  $\gamma_1$  does not depend on  $M$ . Using (5.29), for all  $M \geq 2$ , there exists  $k_1(M) \in \{1, \dots, 7\}$ , such that  $|\phi_{15M+k_1(M)}^{0,M}| = 1$ . Thus there exists an increasing sequence  $(M_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  such that  $|\phi_{15M_j+k_1}^{0,M_j}| = 1$  for a  $k_1 \in \{1, \dots, m\}$  independent of  $j$ .  $\square$

**THEOREM 5.1.** *Let  $T > 0$  and  $\alpha$  be the function of  $L^\infty(0, \pi)$  defined by*

$$\alpha(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos(15jx) \text{ for all } x \in (0, \pi). \quad (5.21)$$

*Then there exists  $k_1 \in \{1, \dots, 7\}$  such that for  $(y_0, z_0) := (0, w_{k_1})$  and all control  $v \in L^2(0, T)$ , the solution to System (5.13) verifies  $y(T) \neq 0$  in  $(0, \pi)$ .*

*Démonstration.* To understand why the number «15» appears in the definition (5.21) of the function  $\alpha$ , we will consider for all  $x \in (0, \pi)$

$$\alpha(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos(Gjx) \text{ for all } x \in (0, \pi), \quad (5.22)$$

where  $G \in \mathbb{N}^*$ . We recall that for an initial condition  $(y_0, z_0) \in L^2(0, \pi)^2$  and a control  $v \in L^2(0, T)$ , the solution to System (5.21) satisfies  $y(T) \equiv 0$  in  $(0, \pi)$  if and only if for all  $\phi_0 \in L^2(0, \pi)$ , we have the equality

$$-\langle y_0, \phi(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \langle z_0, \psi(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_0^T v(t) \phi_x(0, t) dt, \quad (5.23)$$

where  $(\phi, \psi)$  is the solution to the adjoint System (5.2). Let us consider the sequences  $(M_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  and  $(\phi_{0, M_j})_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $k_1$  defined in Lemma 5.3 and  $(\phi_{M_j}, \psi_{M_j})$  the solution to

$$\begin{cases} -\partial_t \phi_{M_j} = \Delta \phi_{M_j} & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ -\partial_t \psi_{M_j} = \Delta \psi_{M_j} + \alpha \phi_{M_j} & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ \phi_{M_j}(0) = \phi_{M_j}(\pi) = \psi_{M_j}(0) = \psi_{M_j}(\pi) = 0 & \text{on } (0, T), \\ \phi_{M_j}(T) = \phi_{0, M_j}, \psi_{M_j}(T) = 0 & \text{in } (0, \pi). \end{cases}$$

The goal is to prove that for the initial data  $(y_0, z_0) := (0, w_{k_1})$  and  $\phi_{0, M_j}$  for  $j$  large enough, the equality (5.23) does not holds. Using Lemma 5.3, we have

$$\left| \int_0^T v(t) (\phi_{M_j})_x(0, t) dt \right| \leq \frac{\gamma_1 \|v\|_{L^2(q_T)}}{M_j^{(2m-5)/2}}. \quad (5.24)$$

Since  $y_0 = 0$ , we obtain

$$\langle y_0, \phi_{M_j}(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = 0. \quad (5.25)$$

Let us now estimate the term  $\langle z_0, \psi_{M_j}(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$  in the equality (5.23). We recall that the expression of  $\alpha$  is given in (5.22). Then, the function  $\alpha$  is of the form  $\alpha(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \cos(px)$  for all  $x \in (0, \pi)$ , with

$$\alpha_p := \begin{cases} \frac{1}{p^2} & \text{if } p = Gi \text{ with } i \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.26)$$

From the definition of  $\alpha_{kl}$  in (2), there holds for all  $k, l \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{\pi}(\alpha_{|k-l|} - \alpha_{k+l}).$$

Let  $k \in \{1, \dots, m\}$  and  $l \in \{GM_j + 1, \dots, GM_j + m\}$ . We have

$$k + l \in \{GM_j + 2, \dots, GM_j + 2m\}.$$

Thus if we choose

$$G \geq 2m + 1, \quad (5.27)$$

using (5.26), we obtain

$$\alpha_{k+l} = 0$$

and

$$\alpha_{|k-l|} = \begin{cases} \frac{1}{M_j^2} & \text{if } |k-l| = GM_j, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

So that we have the following submatrix of  $(\alpha_{kl})_{1 \leq k, l \leq GM_j+m}$ :

$$(\alpha_{kl})_{1 \leq k \leq m, GM_j+1 \leq l \leq GM_j+m} = \frac{1}{\pi M_j^2} I_{\mathbb{R}^m}. \quad (5.28)$$

According to Lemma 5.3, there exists  $k_1 \in \{1, \dots, m\}$  such that

$$|\phi_{GM_j+k_1}^{0, M_j}| = 1. \quad (5.29)$$

Furthermore, since  $k_1 \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$|e^{-k_1^2 T} - e^{-(GM_j+k_1)^2 T}| \geq |e^{-m^2 T} - e^{-G^2 M_j^2 T}| \quad (5.30)$$

and

$$(GM_j + k_1)^2 - k_1^2 \leq (GM_j + m)^2 - 1. \quad (5.31)$$

Since  $z_0 = w_{k_1}$ , the equality (5.28) leads to

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi z_0 \psi_{M_j}(0) dx \right| &= \left| \sum_{s=1}^7 \frac{e^{-k_1^2 T} - e^{-(GM_j+s)^2 T}}{-k_1^2 + (GM_j+s)^2} \alpha_{k_1, GM_j+s} \phi_{GM_j+s}^{0, M_j} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-k_1^2 T} - e^{-(GM_j+k_1)^2 T}}{-k_1^2 + (GM_j+k_1)^2} \frac{1}{\pi M_j^2} \right|. \end{aligned}$$

Then using (5.30) and (5.31) for all  $j \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \langle z_0, \psi_{M_j}(0) \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \right| = \left| \int_0^\pi z_0 \psi_{M_j}(0) dx \right| \geq \frac{\gamma_2}{M_j^4}, \quad (5.32)$$

where  $\gamma_2$  does not depend on  $j$ . Combining (5.24) and (5.32), we obtain a contradiction with equality (5.23). Thus, for this initial condition  $y_0$  and  $z_0$ , we can not find a control  $v \in L^2(0, T)$  such that the solution  $(y, z)$  to system (5.21) satisfies  $y(T) \equiv 0$  in  $(0, \pi)$ .

□

*Proof of the third point in Theorem 1.3.* Using Theorem 5.1, for the initial data  $(p_0, q_0) := (0, w_{k_1}) \in L^2(0, \pi)^2$  and all control  $v \in L^2(0, T)$ , the solution  $(p, q) \in W(0, T)^2$  (defined by transposition) to the system

$$\begin{cases} \partial_t p = \Delta p + \alpha q & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ \partial_t q = \Delta q & \text{in } (0, \pi) \times (0, T), \\ p(\pi, \cdot) = v, p(0, \cdot) = q(0, \cdot) = q(\pi, \cdot) = 0 & \text{on } (0, T), \\ p(\cdot, 0) = p_0, q(\cdot, 0) = q_0 & \text{in } (0, \pi) \end{cases} \quad (5.33)$$

satisfies  $p(T) \neq 0$  in  $(0, \pi)$ . Consider now  $\bar{p}_0, \bar{q}_0 \in L^2(0, 2\pi)$  defined by

$$\bar{p}_0(x) = 0 \quad \text{and} \quad \bar{q}_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(k_1 x) \quad \text{for all } x \in (0, 2\pi).$$

Remark that  $(\bar{p}_0|_{(0, \pi)}, \bar{q}_0|_{(0, \pi)}) = (p_0, q_0)$ . Let  $\omega \subset (0, \pi)$ . Suppose now that the system

For given  $(y_0, z_0) : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $u : (0, 2\pi) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

Find  $(y, z) : (0, 2\pi) \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  such that

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \alpha z + \mathbf{1}_\omega u & \text{in } (0, 2\pi) \times (0, T), \\ \partial_t z = \Delta z & \text{in } (0, 2\pi) \times (0, T), \\ y(0, \cdot) = y(2\pi, \cdot) = z(0, \cdot) = z(2\pi, \cdot) = 0 & \text{on } (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y_0, z(\cdot, 0) = z_0 & \text{in } (0, 2\pi) \end{cases} \quad (5.34)$$

is  $\Pi_1$ -null controllable, more particularly for the initial conditions  $y(0) = \bar{p}_0$  and  $z(0) = \bar{q}_0$  in  $(0, 2\pi)$ , there exists a control  $u$  in  $L^2((0, 2\pi) \times (0, T))$  such that the solution  $(y, z)$  to System (5.34) satisfies  $y(T) \equiv 0$  in  $(0, 2\pi)$ . We remark now that  $(p, q) := (y|_{(0, \pi)}, z|_{(0, \pi)})$  is a solution of (5.33) with  $(p(0), q(0)) = (p_0, q_0)$  in  $(0, \pi)$ ,  $v(t) = y(\pi, t)$  in  $(0, T)$  and satisfying  $p(T) \equiv 0$  in  $(0, \pi)$ . This contradicts that for any control  $v \in L^2(0, T)$  the solution  $(p, q)$  to System (5.33) can not be identically equal to zero at time  $T$ .  $\square$

### 5.3 Numerical illustration

In this section, we illustrate numerically the results obtained previously in Sections 5.1 and 5.2. We adapt the HUM method to our control problem. For all penalty parameter  $\varepsilon > 0$ , we compute the control that minimizes the penalized HUM functional  $F_\varepsilon$  given by

$$F_\varepsilon(u) := \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|y(T; y_0, u)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

where  $y$  is the solution to (5.1). We can find in [Boy13] the argument relating the null/approximate controllability and this kind of functional. Using the Fenchel-Rockafellar theory (see [ET74] p. 59) we know that the minimum of  $F_\varepsilon$  is equal to the opposite of the minimum of  $J_\varepsilon$ , the so-called dual functional, defined for all  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$  by

$$J_\varepsilon(\varphi_0) := \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi_0\|_{L^2(Q_T)}^2 + \langle y(T; y_0, 0), \varphi_0 \rangle_{L^2(\Omega)},$$

where  $\varphi$  is the solution to the backward System (5.35). Moreover the minimizers  $u_\varepsilon$  and  $\varphi_{0, \varepsilon}$  of the functionals  $F_\varepsilon$  and  $J_\varepsilon$  respectively, are related through the equality  $u_\varepsilon = \mathbf{1}_\omega \varphi_{\varepsilon}$ , where

$\varphi_\varepsilon$  is the solution to the backward System (5.35) with the initial data  $\varphi(T) = \varphi_{0,\varepsilon}$ . A simple computation leads to

$$\nabla J_\varepsilon(\varphi_0) = \Lambda\varphi_0 + \varepsilon\varphi_0 + y(T; y_0, 0),$$

with the Gramiam operator  $\Lambda$  defined as follows

$$\begin{aligned} \Lambda : L^2(\Omega) &\mapsto L^2(\Omega), \\ \varphi_0 &\rightarrow w(T), \end{aligned}$$

where  $w$  is the solution to the following backward and forward systems

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \Delta \varphi & \text{in } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ \varphi(T) = \varphi_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (5.35)$$

and

$$\begin{cases} \partial_t w = \Delta w + \mathbb{1}_\omega \varphi & \text{in } Q_T, \\ w = 0, & \text{on } \Sigma_T, \\ w(0) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (5.36)$$

Then the minimizer  $u_\varepsilon$  of  $F_\varepsilon$  will be computed with the help of the minimizer  $\varphi_{0,\varepsilon}$  of  $J_\varepsilon$  which is the solution to the linear problem

$$(\Lambda + \varepsilon)\varphi_{0,\varepsilon} = -y(T; y_0, 0).$$

*Remark 5.2.* The proof of Theorem 1.7 in [Boy13] can be adapted to prove that

- (i) System (5.1) is  $\Pi_1$ -null controllable if and only if  $\sup_{\varepsilon > 0} \left( \inf_{L^2(\omega \times (0,T))} F_\varepsilon \right) < \infty$ ,
- (ii) System (5.1) is  $\Pi_1$ -approximately controllable if and only if  $y_\varepsilon(T) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ ,

where  $y_\varepsilon$  is the solution to System (5.1) for the control  $u_\varepsilon$ .

System (5.1) with  $T = 0.005$ ,  $\Omega := (0, 2\pi)$ ,  $\omega := (0, \pi)$  and  $y_0 := 100 \sin(x)$  has been considered. We take the two expressions below for the coupling coefficient  $\alpha$  that correspond respectively to Cases (1)-(2) and (3) in Theorem 1.3:

(a)  $\alpha(x) = 1$ ,

(b)  $\alpha(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p^2} \cos(15px)$ .

Systems (5.1) and (5.35)-(5.36) are discretized with backward Euler time-marching scheme (time step  $\delta t = 1/400$ ) and standard piecewise linear Lagrange finite elements on a uniform mesh of size  $h$  successively equal to  $2\pi/50$ ,  $2\pi/100$ ,  $2\pi/200$  and  $2\pi/300$ . We follow the methodology of F. Boyer (see [Boy13]) that introduces a penalty parameter  $\varepsilon = \phi(h) := h^4$ . We denote by  $E_h$ ,  $U_h$  and  $L^2_{\delta t}(0, T; U_h)$  the fully-discretized spaces associated to  $L^2(\Omega)$ ,  $L^2(\omega)$  and  $L^2(Q_T)$ .  $F_\varepsilon^{h,\delta t}$  is the discretization of  $F_\varepsilon$  and  $(y_\varepsilon^{h,\delta t}, z_\varepsilon^{h,\delta t}, u_\varepsilon^{h,\delta t})$  the solution to the corresponding fully-discrete problem of minimisation. For more details on the fully-discretization of System (5.1) and Gramiam  $\Lambda$  (used to the minimisation of  $F_\varepsilon$ ), we refer to Section 3 in [Boy13] and in [GLH08, p. 37] respectively. The results are depicted Figure A.1 and A.2.

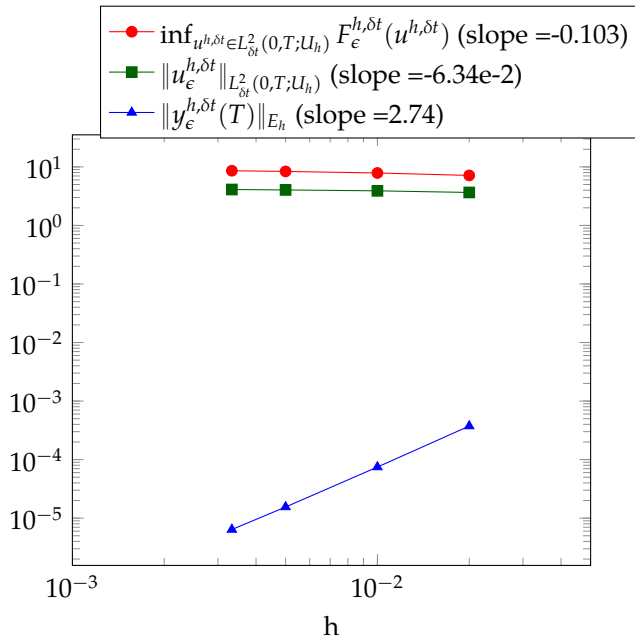


FIGURE A.1: Minimal value of the functional  $F_\epsilon^{h,\delta t}$  in  $L^2_{\delta t}(0, T; U_h)$ , norm of the control  $\|u_\epsilon^{h,\delta t}\|_{L^2_{\delta t}(0,T;U_h)}$ , and distance to the target  $\|y_\epsilon^{h,\delta t}(T)\|_{E_h}$  in Case (a).

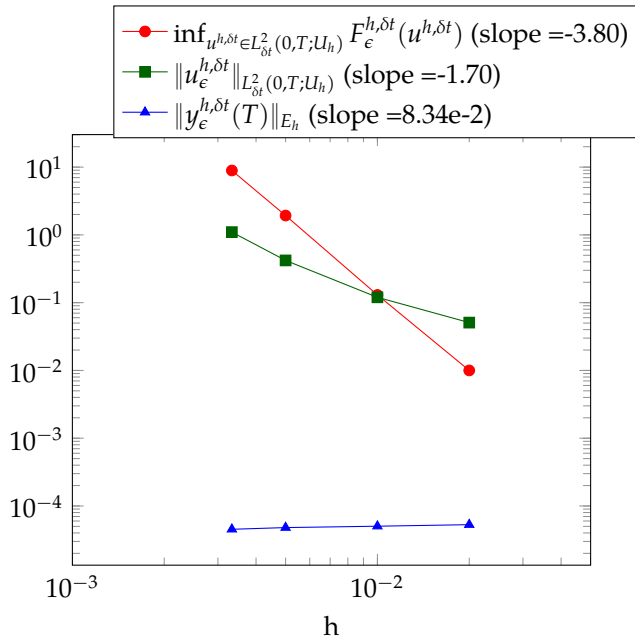


FIGURE A.2: Minimal value of the functional  $F_\epsilon^{h,\delta t}$  in  $L^2_{\delta t}(0, T; U_h)$ , norm of the control  $\|u_\epsilon^{h,\delta t}\|_{L^2_{\delta t}(0,T;U_h)}$ , and distance to the target  $\|y_\epsilon^{h,\delta t}(T)\|_{E_h}$  in Case (b).

As mentioned in the introduction of the present article (see Theorem 1.3), in both situations (a) and (b), System (5.1) is  $\Pi_1$ -approximately controllable and we observe indeed in Figure A.1 and A.2 that the norm of the numerical solution to System (5.1) at time  $T$  ( $-\blacktriangle-$ ) is decreasing when reducing the penalty parameter  $\varepsilon = h^4$ .

In Figure A.1, the minimal value of the functional  $F_\varepsilon^{h,\delta t}$  ( $-\bullet-$ ) as well as the  $L^2$ -norm of the control  $u_\varepsilon^{h,\delta t}$  ( $-\blacksquare-$ ) remain roughly constant whatever is the value of  $h$  (and  $\varepsilon = h^4$ ). This appears in agreement with the results (1)-(2) of Theorem 1.3, that state the  $\Pi_1$ -null controllability of System (5.1) in Case (a) of a constant coupling coefficient  $\alpha$  (see Remark 5.2 (i)). Furthermore the convergence to the null target is approximately of order 2 (slope of 2.27). This is in agreement with the convergence rate established in [Boy13, Proposition 2.2], which should be  $h^2$  for  $\varepsilon = h^4$  (this result should be in fact slightly adapted to consider  $\Pi_1$ -null controllability).

At the opposite, in Figure A.2, the minimal value of the functional  $F_\varepsilon^{h,\delta t}$  as well as the  $L^2$ -norm of the control  $u_\varepsilon^{h,\delta t}$  are strongly increasing whenever  $h$  (and  $\varepsilon$ ) become smaller. This coincides with point (3) of Theorem 1.3: for the chosen value of the coupling coefficient  $\alpha$  in Case (b), no  $\Pi_1$ -null controllability of System (5.1) is expected. Moreover, convergence to the null target is quite slow, with a slope of approximately  $8.34e - 2$ .

*Acknowledgements.* The authors thank Assia Benabdallah and Franck Boyer for their interesting comments and suggestions. They thank as well the two referees for their remarks that helped to improve the paper.

## References

- [AB13] F. ALABAU-BOUSSOIRA. "A hierarchic multi-level energy method for the control of bidiagonal and mixed  $n$ -coupled cascade systems of PDE's by a reduced number of controls". In : *Adv. Differential Equations* 18.11-12 (2013), p. 1005–1072 (cf. p. 34, 36, 52, 70, 131).
- [AK+09a] F. AMMAR KHODJA et al. "A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems". In : *Differ. Equ. Appl.* 1.3 (2009), p. 427–457 (cf. p. 31, 38, 55, 70, 99, 131, 132, 136, 145).
- [AK+09b] F. AMMAR-KHODJA et al. "A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems". In : *J. Evol. Equ.* 9.2 (2009), p. 267–291 (cf. p. 31, 37, 70, 99, 131).
- [AK+11a] F. AMMAR-KHODJA et al. "Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey". In : *Math. Control Relat. Fields* 1.3 (2011), p. 267–306 (cf. p. 16, 70, 99, 105, 130, 135, 136).
- [AK+14] F. AMMAR KHODJA et al. "Minimal time of controllability of two parabolic equations with disjoint control and coupling domains". In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 352.5 (2014), p. 391–396 (cf. p. 7, 70, 99, 135).
- [AK+15] F. AMMAR-KHODJA et al. "New phenomena for the null controllability of parabolic systems: Minimal time and geometrical dependence". In : *Submitted* (2015) (cf. p. 7, 18, 37, 53, 99, 101, 105, 110, 111, 117, 120–124, 135, 152).



- [Ben+14] A. BENABDALLAH et al. "Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force". In : *Math. Control Relat. Fields* 4.1 (2014), p. 17–44 (cf. p. 36, 39, 48–50, 71, 100, 125, 131).
- [BO14] F. BOYER et G. OLIVE. "Approximate controllability conditions for some linear 1D parabolic systems with space-dependent coefficients". In : *Math. Control Relat. Fields* 4.3 (2014), p. 263–287 (cf. p. 36, 53, 101, 122, 135).
- [Boy13] F. BOYER. "On the penalised HUM approach and its applications to the numerical approximation of null-controls for parabolic problems". In : *CANUM 2012, 41e Congrès National d'Analyse Numérique*. T. 41. ESAIM Proc. EDP Sci., Les Ulis, 2013, p. 15–58 (cf. p. xii, 8, 57, 158, 159, 161, 165, 167, 168, 175, 176, 189).
- [CH09] S. CHAKRABARTY et F. B. HANSON. "Distributed parameters deterministic model for treatment of brain tumors using Galerkin finite element method". In : *Math. biosci.* 219.2 (2009), p. 129–141 (cf. p. 1, 130).
- [Cor07] J.-M. CORON. *Control and nonlinearity*. T. 136. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, 2007, p. xiv+426 (cf. p. 1, 6, 12, 73, 76, 105, 137).
- [ET74] I. EKELAND et R. TEMAM. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Collection Études Mathématiques. Dunod; Gauthier-Villars, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974, p. x+340 (cf. p. 158, 170, 171).
- [FCGBT10] E. FERNÁNDEZ-CARA, M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. "Boundary controllability of parabolic coupled equations". In : *J. Funct. Anal.* 259.7 (2010), p. 1720–1758 (cf. p. 13, 58, 98, 99, 107, 154).
- [FCZ00] E. FERNÁNDEZ-CARA et E. ZUAZUA. "The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case". In : *Adv. Differential Equations* 5.4-6 (2000), p. 465–514 (cf. p. 7, 138).
- [FI96] A. V. FURSIKOV et O. Y. IMANUVILOV. *Controllability of evolution equations*. 34. Seoul National University, 1996 (cf. p. xi, 12, 24, 34, 76, 84, 134, 136, 177).
- [FR71] H. O. FATTORINI et D. L. RUSSELL. "Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension". In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 43 (1971), p. 272–292 (cf. p. xi, 16, 18, 33, 151, 152).
- [GBT10] M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. "Controllability results for cascade systems of  $m$  coupled parabolic PDEs by one control force". In : *Port. Math.* 67.1 (2010), p. 91–113 (cf. p. 34, 35, 39, 40, 50, 68, 70, 99, 108, 131, 132, 136, 148).
- [Ghi86] J.-M. GHIDAGLIA. "Some backward uniqueness results". In : *Nonlinear Anal.* 10.8 (1986), p. 777–790 (cf. p. 143).
- [GI13] S. GUERRERO et O. Y. IMANUVILOV. "Remarks on non controllability of the heat equation with memory". In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 19.1 (2013), p. 288–300 (cf. p. xi, 20, 154).

- 
- [GLH08] R. GLOWINSKI, J.-L. LIONS et J. HE. *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*. T. 117. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2008, p. xii+458 (cf. p. xii, 159, 165, 168, 180).
- [LM68] J.-L. LIONS et E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. 2. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 18. Paris : Dunod, 1968, p. xvi+251 (cf. p. 94, 130).
- [Mau13] K. MAUFFREY. "On the null controllability of a  $3 \times 3$  parabolic system with non-constant coefficients by one or two control forces". In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 99.2 (2013), p. 187–210 (cf. p. 131).
- [Miz58] S. MIZOHATA. "Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques". In : *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.* 31 (1958), p. 219–239 (cf. p. 135).
- [Oli12] G. OLIVE. "Null-controllability for some linear parabolic systems with controls acting on different parts of the domain and its boundary". In : *Math. Control Signals Systems* 23.4 (2012), p. 257–280 (cf. p. 38, 131).



---

# Schémas numériques pour la contrôlabilité partielle

## Résumé

Dans cette partie, nous illustrerons numériquement des problèmes de contrôlabilité partielle approchée et à zéro de [AKCD15]. La difficulté principale consiste à distinguer la contrôlabilité approchée et la contrôlabilité à zéro sur un système donné. Pour ce faire, nous emploierons la "Hilbert Uniqueness Method", dite HUM, initialement introduite dans [GLH08] (voir également [Lio68]) en suivant la méthodologie de [Boy13]. Dans un premier temps, nous expliquerons comment utiliser la pénalisation et la dualité et quelles en sont les différents atouts. Nous discrétiserons ensuite le système parabolique étudié dans ce chapitre à l'aide d'un  $\theta$ -schéma en temps et des techniques d'éléments finis, puis de différences finies en espace. Les fonctionnelles considérées seront minimisées grâce à un algorithme de type gradient conjugué détaillé en annexe. Nous terminerons par des illustrations numériques.

## Structure

1	Contrôlabilité et contrôle optimal . . . . .	166
2	Approximation numérique du problème de contrôle . . . . .	174
3	Simulations numériques. . . . .	187
	References. . . . .	193

## 1 Contrôlabilité et contrôle optimal

### 1.1 Cadre et problème

Soit un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) de bord  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ , un ouvert non vide  $\omega$  de  $\Omega$  et un temps final  $T > 0$ . Considérons le système de  $n$  équations paraboliques contrôlées par  $m$  forces

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + \mathbf{1}_\omega Bu & \text{dans } Q_T := \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  est la donnée initiale,  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  est le contrôle,

$$A \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \text{ et } B \in L^\infty(Q_T; \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)).$$

Pour toute donnée initiale  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et tout contrôle  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ , le système (1.1) admet une unique solution dans  $W(0, T)^n$  (Cf [Lio68], p. 102), où

$$W(0, T) := \{v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \partial_t v \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}. \quad (1.2)$$

On notera  $y(t; y^0, u)$  cette solution à l'instant  $t$ .

Soit  $p \in \{1, \dots, n\}$  et  $\Pi_p$  la *matrice de projection* définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi_p : \quad \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^p, \\ (y_1, \dots, y_n) &\mapsto (y_1, \dots, y_p), \end{aligned}$$

ou plus précisément  $\Pi_p := (I_p \ 0_{p, n-p})$  avec  $I_p$  la matrice identité de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$  et  $0_{p, n-p}$  la matrice nulle de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-p}, \mathbb{R}^p)$ .

Pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$  et tout ensemble  $E$ , nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_E &:= \|\cdot\|_{L^2(E)}, & \langle \cdot, \cdot \rangle_E &:= \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(E)}, \\ \|\cdot\|_{E,r} &:= \|\cdot\|_{L^2(E; \mathbb{R}^r)}, & \langle \cdot, \cdot \rangle_{E,r} &:= \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(E; \mathbb{R}^r)}. \end{aligned}$$

Le système (1.1) est dit

- $\Pi_p$ -**approximativement contrôlable à zéro** à partir de la donnée initiale  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  sur l'intervalle de temps  $(0, T)$ , si pour tout réel  $\varepsilon > 0$  il existe un contrôle  $u_\varepsilon \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  tel que

$$\|\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon)\|_{\Omega, p} \leq \varepsilon.$$

- $\Pi_p$ -**exactement contrôlable à zéro** à partir de la donnée initiale  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  sur l'intervalle de temps  $(0, T)$ , si il existe un contrôle  $u_\varepsilon \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  tel que

$$\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon) \equiv 0 \text{ dans } \Omega.$$

*Remarque 1.1.* Dans la littérature, les auteurs s'intéressent en général à la contrôlabilité à partir de toutes données initiales et non à partir d'une en particulier. La notion étudiée ici permet d'apporter de nouvelles informations lorsque le système n'est pas contrôlable à partir de toutes données initiales, plus précisément de savoir pour quelles données initiales le système est contrôlable ou non.

*Remarque 1.2.* Soit  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et  $\varepsilon > 0$ . Supposons que le système (1.1) soit approximativement contrôlable à zéro à partir de la donnée initiale  $y^0$ . L'opérateur différentiel  $\Delta + A$  est générateur d'un semi-groupe analytique  $(e^{t(\Delta+A)})_{t \geq 0}$  (Cf [Paz83]). Ainsi l'image de  $e^{T(\Delta+A)}$  est dense dans  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Pour toute cible  $y^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , il existe donc une donnée initiale  $\tilde{y}_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  telle que

$$\|y^T - e^{T(\Delta+A)}\tilde{y}_0\|_{\Omega, n} \leq \varepsilon.$$

De plus, comme le système (1.1) est approximativement contrôlable à zéro, il existe un contrôle  $u_\varepsilon \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  tel que

$$\|\Pi_p y(T; y^0 - \tilde{y}_0, u_\varepsilon)\|_{\Omega, p} \leq \varepsilon.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon) - \Pi_p y^T\|_{\Omega, p} &\leq \|\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon) - \Pi_p e^{T(\Delta+A)}\tilde{y}_0\|_{\Omega, p} \\ &\quad + \|\Pi_p y^T - \Pi_p e^{T(\Delta+A)}\tilde{y}_0\|_{\Omega, p} \\ &\leq \|\Pi_p y(T; y^0 - \tilde{y}_0, u_\varepsilon)\|_{\Omega, p} + \|\Pi_p y^T - \Pi_p e^{T(\Delta+A)}\tilde{y}_0\|_{\Omega, p} \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme dans le cas  $\Pi_p = I_n$  (Cf [Boy13]), les notions de  $\Pi_p$ -contrôlabilité approchée à zéro et de  $\Pi_p$ -contrôlabilité approchée sont équivalentes. Nous étudierons donc seulement la  $\Pi_p$ -contrôlabilité approchée à zéro.

## 1.2 Fonctionnelle pénalisée

Lorsque l'on s'intéresse à la contrôlabilité d'un système, le contrôle n'est en général pas unique. Par exemple, numériquement il est plus raisonnable de demander à un algorithme d'approcher un contrôle particulier que toute une classe de contrôles. La méthode HUM propose d'en choisir un qui minimise une certaine fonctionnelle. En ce qui concerne la contrôlabilité partielle, pour une donnée initiale  $y^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  fixée, elle consiste par exemple à résoudre, pour un  $\delta \geq 0$  fixé, le problème de minimisation

$$\inf_{u \in \text{Adm}(y^0, \delta)} F(u), \quad (1.3)$$

où la fonctionnelle  $F$  est définie pour tout  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  par

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{Q_T, m}^2 \quad (1.4)$$

et

$$\text{Adm}(y^0, \delta) := \{u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m) : \|\Pi_p y(T; y^0, u)\|_{\Omega, p} \leq \delta\}.$$

Nous remarquons d'une part que l'ensemble  $\text{Adm}(y^0, \delta)$  est non vide pour tout  $\delta > 0$  si et seulement si le système (1.1) est  $\Pi_p$ -approximativement contrôlable à zéro à partir de la donnée initiale  $y^0$ . D'autre part, l'ensemble  $\text{Adm}(y^0, 0)$  est non vide si et seulement si le système (1.1) est  $\Pi_p$ -exactement contrôlable à zéro à partir de la donnée initiale  $y^0$ .

Lorsque l'on souhaite résoudre numériquement le problème (1.3) directement, nous pouvons rencontrer quelques difficultés. D'une part, si le système (1.1) n'est pas  $\Pi_p$ -exactement contrôlable à zéro, l'ensemble  $\text{Adm}(y^0, 0)$  est vide, et le problème (1.3) n'a donc pas

de solution. D'autre part, lorsque  $\delta = 0$ , la fonctionnelle duale associée à (1.4), dont nous parlerons par la suite, ne sera coercive que dans le complété de  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$  pour une certaine norme, ce qui numériquement représente d'autres difficultés (Cf [GLH08, Rem. 1.17]). Enfin, si  $\delta > 0$ , la fonctionnelle duale ne sera pas différentiable (Cf [GLH08, p. 16]). Pour ces différentes raisons, nous serons amenés à considérer la fonctionnelle (1.6) dite *pénalisée* qui possédera de meilleures propriétés que (1.4). Pour plus d'explication nous renvoyons à [Cia82]. Plus précisément, nous nous intéresserons au problème de minimisation

$$\inf_{u \in L^2(Q_T)} F_\varepsilon(u), \quad (1.5)$$

où, pour toute *pénalité*  $\varepsilon > 0$ , la fonctionnelle HUM pénalisée  $F_\varepsilon$  est donnée par

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{Q_T, m}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Pi_p y(T; y^0, u)\|_{\Omega, p}^2. \quad (1.6)$$

La fonctionnelle  $F_\varepsilon$  étant quadratique, non nulle et positive, elle est donc strictement convexe. Puisque de plus l'application linéaire

$$\begin{aligned} L^2(Q_T; \mathbb{R}^m) &\mapsto L^2(\Omega; \mathbb{R}^p) \\ u &\rightarrow \Pi_p y(T; 0, u) \end{aligned}$$

est bornée,  $F_\varepsilon$  est continue sur  $L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ . Si  $\|u\|_{Q_T, m}$  tend vers  $+\infty$  alors  $F_\varepsilon(u)$  tend également vers  $+\infty$ , donc  $F_\varepsilon$  est coercive. La fonctionnelle  $F_\varepsilon$  est strictement convexe, continue et coercive sur un espace vectoriel, elle admet ainsi un unique minimum sur  $L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ . Le rapport entre la  $\Pi_p$ -exacte contrôlabilité à zéro du système (1.1) et la fonctionnelle  $F_\varepsilon$  n'est pas immédiat, et peut être précisé à l'aide du théorème suivant (adaptation du Théorème 1.7 de [Boy13]) :

**THÉORÈME 1.1.** (1) *Le système (1.1) est  $\Pi_p$ -approximativement contrôlable à zéro à partir de la donnée initiale  $y^0$  si et seulement si nous avons*

$$\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \quad (1.7)$$

où  $u_\varepsilon$  est le minimiseur de  $F_\varepsilon$  définie dans (1.6).

(2) *Le système (1.1) est  $\Pi_p$ -exactement contrôlable à zéro à partir de la donnée initiale  $y^0$  si et seulement si nous avons*

$$M_{y^0, T}^2 := 2 \sup_{\varepsilon > 0} \left( \inf_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)} F_\varepsilon \right) < \infty. \quad (1.8)$$

De plus, dans le cas où (1.8) est satisfaite, nous avons

$$\begin{aligned} (i) \quad &\|u_\varepsilon\|_{Q_T, m} \leq M_{y^0, T} & (ii) \quad &\|\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon)\|_{\Omega, p} \leq M_{y^0, T} \sqrt{\varepsilon} \\ (iii) \quad &M_{y^0, T}^2 = \|u_0\|_{Q_T, m}^2 & (iv) \quad &u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0 \text{ dans } L^2(Q_T; \mathbb{R}^m), \end{aligned}$$

où  $u_0$  est le minimiseur de la fonctionnelle  $F$  sur l'ensemble des contrôles  $u$  de  $L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  satisfaisant  $\Pi_p y(T; y^0, u) = 0$ , c'est-à-dire sur  $\text{Adm}(y^0, 0)$ .

*Preuve.* (1) Si la condition (1.7) est satisfaite, alors le système (1.1) est  $\Pi_p$ -approximativement contrôlable à partir de la donnée initiale  $y^0$ . Si maintenant on suppose que le système

(1.1) est  $\Pi_p$ -approximativement contrôlable à partir de la donnée initiale  $y^0$ , pour tout  $\beta > 0$ , il existe un contrôle  $w$  tel que la solution  $y$  du système (1.1) satisfasse

$$\|\Pi_p y(T; y^0, w)\|_{\Omega, p} \leq \frac{\beta}{\sqrt{2}}. \quad (1.9)$$

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\varepsilon \|w\|_{Q_{T,m}}^2 \leq \frac{\beta^2}{2}. \quad (1.10)$$

Si l'on considère  $u_\varepsilon$  l'argument minimum de la fonctionnelle pénalisée  $F_\varepsilon$ ,  $u_\varepsilon$  satisfait en particulier

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \|u_\varepsilon\|_{Q_{T,m}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon)\|_{\Omega, p}^2.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon)\|_{\Omega, p}^2 &= 2\varepsilon \left( F_\varepsilon(u_\varepsilon) - \frac{1}{2} \|u_\varepsilon\|_{Q_{T,m}}^2 \right) \\ &\leq 2\varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Puisque  $u_\varepsilon$  est le minimiseur de  $F_\varepsilon$ , on a

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(w) = \frac{1}{2} \|w\|_{Q_{T,m}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Pi_p y(T; y^0, w)\|_{\Omega, p}^2. \quad (1.12)$$

En combinant (1.11)-(1.12), puis (1.9)-(1.10), on obtient

$$\begin{aligned} \|\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon)\|_{\Omega, p}^2 &\leq 2\varepsilon \left( \frac{1}{2} \|w\|_{Q_{T,m}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\Pi_p y(T; y^0, w)\|_{\Omega, p}^2 \right) \\ &\leq 2\varepsilon \left( \frac{\beta^2}{4\varepsilon} + \frac{\beta^2}{4\varepsilon} \right) \\ &\leq \beta^2. \end{aligned}$$

On en conclut donc que

$$\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

- (2) Si l'on suppose que le système (1.1) est  $\Pi_p$ -exactement contrôlable à zéro, alors l'ensemble  $\text{Adm}(y^0, 0)$  est non vide. De plus  $F$  est coercive, c'est-à-dire pour une suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  telle que  $\|u_k\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)}$  converge vers  $+\infty$ , alors la suite  $(|F(u_k)|)_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge également vers  $+\infty$ . De la même manière que pour  $F_\varepsilon$ , la fonctionnelle  $F$  est strictement convexe, continue et coercive sur un ensemble non vide fermé et strictement convexe. Elle admet donc un unique minimiseur  $u_0$  sur  $\text{Adm}(y^0, 0)$ . On remarque que  $F_\varepsilon(u_0) = \frac{1}{2} \|u_0\|_{Q_{T,m}}^2$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . On obtient ainsi

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left\{ \inf_{L^2(Q_T)} F_\varepsilon \right\} \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{Q_{T,m}}^2,$$

et donc

$$M_{y^0, T}^2 \leq \|u_0\|_{Q_{T,m}}^2. \quad (1.13)$$

Ainsi la  $\Pi_p$ -exacte contrôlabilité à zéro du système (1.1) implique la condition (1.8).

Supposons maintenant que la condition (1.8) soit vérifiée. Alors on a pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\|u_\varepsilon\|_{Q_{T,m}}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\Pi_p y(T; y^0, u_\varepsilon)\|_{\Omega, p}^2 \leq M_{y^0, T}^2.$$



On en déduit directement les items (i) et (ii) du Théorème 1.1. Étant donnée que la solution dans  $W(0, T)^n$  du système (1.1) dépend continument du contrôle et de la donnée initiale (Cf [Lio68, p. 102]), les solutions  $y_\varepsilon$  associées aux contrôles  $u_\varepsilon$  sont uniformément bornées dans  $W(0, T)^n$ . Il existe alors une suite  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}_+^*$  qui converge vers 0 et telle que

$$\begin{cases} y_{\varepsilon_k} \rightharpoonup y & \text{faiblement dans } W(0, T)^n, \\ u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } L^2(Q_T; \mathbb{R}^m), \\ \Pi_p y(T; y^0, u_{\varepsilon_k}) \rightarrow 0 & \text{fortement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^p). \end{cases}$$

En passant à la limite faible dans le système (1.1),  $y$  est solution de (1.1). L'injection

$$W(0, T)^n \hookrightarrow C(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$$

étant continue (Cf [DL88] p. 570), la suite  $(\Pi_p y_{\varepsilon_k}(T; y^0, u_{\varepsilon_k}))_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge faiblement dans l'espace  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  vers  $\Pi_p y(T; y^0, u)$ . Par unicité de la limite,  $\Pi_p y(T; y^0, u) = 0$ . Ainsi la condition (1.8) implique la  $\Pi_p$ -exacte contrôlabilité à zéro du système (1.1).

Il reste à démontrer les items (iii) et (iv) du Théorème 1.1. Par définition de  $u_0$ , on a  $\|u_0\|_{Q_T, m} \leq \|u\|_{Q_T, m}$ , on en déduit, avec (i) et (1.13), les inégalités suivantes :

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|u_{\varepsilon_k}\|_{Q_T, m}^2 \leq M_{y^0}^2 \leq \|u_0\|_{Q_T, m}^2 \leq \|u\|_{Q_T, m}^2.$$

De plus, comme  $(u_{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u$  faiblement, nous avons l'inégalité suivante :

$$\|u\|_{Q_T, m}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|u_{\varepsilon_k}\|_{Q_T, m}^2$$

(Cf [Bre83, p. 35]). On en conclut que la convergence de la suite  $(u_{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$  vers  $u$  est en réalité forte (Cf [Bre83, p. 52]) et  $M_{y^0}^2 = \|u_0\|_{Q_T, m}^2 = \|u\|_{Q_T, m}^2$ . On a ainsi montré (iii). Le minimum de  $F$  étant unique, on a également  $u = u_0$  et on en déduit (iv). □

### 1.3 Problème dual

Nous présentons dans cette section comment appliquer la théorie de Fenchel - Rockafellar (Cf [Fen49; FB53; Roc66; Roc67; Roc69]) au problème de minimisation (1.5). Cette théorie permet de construire un problème dit *dual* équivalent au problème (1.5) qui sera dit *primal*. Ce nouveau problème peut avoir des avantages tant théoriques que numériques. Nous donnerons plus de détails par la suite. La théorie Fenchel-Rockafellar est un cas particulier de la méthode des points selles et du Lagrangien. Nous suivrons ici le formalisme de [ET74]. Nous renvoyons à [Cia82], pour une étude en dimension finie du Lagrangien, et à [Fur00, p. 72] pour des problèmes non linéaires en dimension infinie.

Pour la suite nous aurons besoin de la définition de fonctionnelle conjuguée.

**DEFINITION 1.1.** ([Bre83, p. 9]) Soit  $V$  un espace vectoriel et  $F : V \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonctionnelle telle que  $F \neq +\infty$ . La fonctionnelle conjuguée à  $F$  est l'application  $F^*$  donnée par :

$$\begin{aligned} F^* : V^* &\rightarrow ]-\infty, +\infty] \\ u^* &\mapsto \sup_{u \in V} \{\langle u, u^* \rangle_{V, V^*} - F(u)\}, \end{aligned}$$

où  $V^*$  est l'ensemble des formes linéaires sur  $V$  (dual algébrique).

La théorie de Fenchel-Rockafellar pour des fonctionnelles de la forme (1.14) peut s'écrire de la façon suivante :

**THÉORÈME 1.2.** ([ET74, p. 59]) Soit  $V$  un espace de Banach réflexif,  $Y$  un espace vectoriel topologique séparé et  $F$  la fonctionnelle définie pour tout  $u \in V$  par

$$F(u) := F_1(u) + F_2(Lu) \quad (1.14)$$

avec  $F_1 : V \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  et  $F_2 : Y \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  différentiables et  $L : V \rightarrow Y$  linéaire. On considère la fonctionnelle dite duale à  $J$  définie pour tout  $y \in Y$  par  $J(y) = F_1^*(L^*y) + F_2^*(-y)$  où  $F_1^*, F_2^*$  sont les fonctionnelles conjuguées à  $F_1$  et  $F_2$  et  $L^*$  est l'opérateur adjoint de  $L$ . On suppose que  $F$  et  $J$  sont strictement convexes et coercives sur leur ensemble de définition.

Alors  $F$  et  $J$  admettent chacune un unique minimum. De plus, on a l'égalité

$$\inf_{u \in V} F(u) = - \inf_{y \in Y} J(y)$$

et les minimiseurs respectifs  $\bar{u}$  et  $\bar{y}$  de  $F$  et  $J$  vérifient l'égalité

$$\frac{dF_1}{du}(\bar{u}) = L^*\bar{y}.$$

A l'aide de ce théorème, le minimiseur  $u_\varepsilon$  de  $F_\varepsilon$  du Théorème 1.1 est caractérisé comme suit

**PROPOSITION 1.1.** Soit  $\varepsilon > 0$  et considérons la fonctionnelle  $J_\varepsilon$  définie pour tout  $\varphi^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$  par

$$J_\varepsilon(\varphi^T) = \frac{1}{2} \|\mathbb{1}_\omega B^* \varphi\|_{Q_T, m}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi^T\|_{\Omega, p}^2 + \langle \Pi_p y(T, y^0, 0), \varphi^T \rangle_{\Omega, p}, \quad (1.15)$$

avec  $\varphi$  la solution du système rétrograde

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \Delta \varphi + A^* \varphi & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi(\cdot, T) = \Pi_p^* \varphi^T & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.16)$$

Les fonctionnelles  $F_\varepsilon$  et  $J_\varepsilon$  admettent chacune un unique minimum  $u_\varepsilon$  et  $\varphi_\varepsilon^T$  respectivement. De plus, nous avons

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = -J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^T) \quad (1.17)$$

et les minimiseurs  $u_\varepsilon$  et  $\varphi_\varepsilon^T$  sont reliés par la relation suivante :

$$u_\varepsilon = \mathbb{1}_\omega B^* \varphi_\varepsilon \quad \text{dans } L^2(Q_T; \mathbb{R}^m), \quad (1.18)$$

où  $\varphi_\varepsilon$  est la solution du système (1.16) avec la donnée initiale  $\varphi(T) = \Pi_p^* \varphi_\varepsilon^T$ .

*Preuve.* Nous rappelons que  $F_\varepsilon$  admet un unique minimum. Afin d'appliquer la théorie de Fenchel-Rockafellar, nous écrivons la fonctionnelle  $F_\varepsilon$  comme suit :

$$F_\varepsilon(u) = F_1(u) + F_{2,\varepsilon}(Lu),$$

où  $F_1, F_{2,\varepsilon}$  et  $L$  sont définies pour tout  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$  et tout  $g \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$  par

$$F_1(u) := \frac{1}{2} \|u\|_{Q_T, m'}^2, \quad F_{2,\varepsilon}(g) := \frac{1}{2\varepsilon} \|g + \Pi_p y(T; y^0, 0)\|_{\Omega, p}^2 \quad \text{et } Lu := \Pi_p y(T; 0, u).$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , introduisons la fonctionnelle duale associée à  $F_\varepsilon$  définie pour tout  $\varphi^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$  par

$$J_\varepsilon(\varphi^T) := F_1^*(L^*\varphi^T) + F_{2,\varepsilon}^*(-\varphi^T),$$

où  $F_1^*$  et  $F_{2,\varepsilon}^*$  sont les fonctionnelles conjuguées à  $F_1$  et  $F_{2,\varepsilon}$  respectivement. Après calcul, on obtient la formulation (1.15) où  $\varphi$  est la solution du système dual (1.16) pour la donnée initiale  $\varphi^T$ . En effet, pour tout  $v \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ , la fonction conjuguée à  $F_1$  s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F_1^*(v) &= \sup_{\hat{v} \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)} \{ \langle v, \hat{v} \rangle_{Q_T, m} - F_1(\hat{v}) \} \\ &= \sup_{\hat{v} \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)} \left\{ \langle v, \hat{v} \rangle_{Q_T, m} - \frac{1}{2} \|\hat{v}\|_{Q_T, m}^2 \right\} \\ &= \sup_{\hat{v} \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)} \left\{ \langle v, \hat{v} \rangle_{Q_T, m} - \frac{1}{2} \|\hat{v}\|_{Q_T, m}^2 - \frac{1}{2} \|v\|_{Q_T, m}^2 \right\} + \frac{1}{2} \|v\|_{Q_T, m}^2 \\ &= \sup_{\hat{v} \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)} \left\{ -\frac{1}{2} \|v - \hat{v}\|_{Q_T, m}^2 \right\} + \frac{1}{2} \|v\|_{Q_T, m}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|v\|_{Q_T, m}^2 \\ &= F_1(v), \end{aligned}$$

si l'on note  $y^T := \Pi_p y(T; y^0, 0)$ , pour tout  $\varphi^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$  on a

$$\begin{aligned} F_{2,\varepsilon}^*(\varphi^T) &= \sup_{g \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)} \{ \langle \varphi^T, g \rangle_{\Omega, p} - F_{2,\varepsilon}(g) \} \\ &= \sup_{g \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)} \left\{ \langle \varphi^T, g \rangle_{\Omega, p} - \frac{1}{2\varepsilon} \|g + y^T\|_{\Omega, p}^2 \right\} \\ &= \sup_{g \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)} \left\{ \langle g, \varphi^T - \frac{1}{\varepsilon} y^T \rangle_{\Omega, p} - \frac{1}{2\varepsilon} \|g\|_{\Omega, p}^2 \right\} - \frac{1}{2\varepsilon} \|y^T\|_{\Omega, p}^2 \\ &= \sup_{g \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \langle g, \varepsilon \varphi^T - y^T \rangle_{\Omega, p} - \frac{1}{2\varepsilon} \|g\|_{\Omega, p}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|\varepsilon \varphi^T - y^T\|_{\Omega, p}^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \|\varepsilon \varphi^T - y^T\|_{\Omega, p}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|y^T\|_{\Omega, p}^2 \\ &= \sup_{g \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)} \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} \|g - \varepsilon \varphi^T + y^T\|_{\Omega, p}^2 \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi^T\|_{\Omega, p}^2 - \langle \varphi^T, y^T \rangle_{\Omega, p} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi^T\|_{\Omega, p}^2 - \langle \varphi^T, y^T \rangle_{\Omega, p}, \end{aligned}$$

et enfin pour tout  $u \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ ,  $\varphi^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$  et  $\varphi$  la solution du problème dual (1.16) nous avons

$$\begin{aligned} \langle Lu, \varphi^T \rangle_{\Omega, p} &= \langle y(T; 0, u), \varphi(T) \rangle_{\Omega, n} \\ &= \langle \partial_t y(\cdot; 0, u), \varphi \rangle_{Q_T, n} + \langle y(\cdot; 0, u), \partial_t \varphi \rangle_{Q_T, n} \\ &= \langle \mathbb{1}_\omega B u, \varphi \rangle_{Q_T, n} = \langle u, \mathbb{1}_\omega B^* \varphi \rangle_{Q_T, m}, \end{aligned}$$

d'où

$$L^* \varphi^T = \mathbb{1}_\omega B^* \varphi.$$

La fonctionnelle  $J_\varepsilon$  est combinaison d'une forme quadratique positive et d'une application linéaire continue, elle est donc continue et strictement convexe.

De plus, pour tout  $\varphi^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$ , on a

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\varphi^T) &\geq \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi^T\|_{\Omega,p}^2 + \langle \Pi_p y(T, y^0, 0), \varphi^T \rangle_{\Omega,p} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4} \|\varphi^T\|_{\Omega,p}^2 - \frac{1}{\varepsilon} \|\Pi_p y(T, y^0, 0)\|_{\Omega,p'}^2 \end{aligned}$$

on en déduit donc que  $J_\varepsilon$  est coercive. Les fonctionnelles  $F_1$  et  $F_{2,\varepsilon}$  sont différentiables, strictement convexes et coercives sur leur ensemble de définition et l'opérateur  $L$  est linéaire, donc d'après le Théorème 1.2,  $J_\varepsilon$  admet un unique minimum sur  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$  et les relations (1.17) et (1.18) entre le minimum de ces fonctionnelles et leur minimiseurs sont vérifiées.  $\square$

*Remarque 1.3.* Le minimum de  $F_\varepsilon$  est en réalité caractérisé par le système primal (1.1), le système dual (1.16) et l'égalité (1.18). Ce résultat peut être obtenu à l'aide du Théorème 2.2 p. 131 dans [Lio68], ce qui nous permet de s'épargner du calcul des fonctions conjuguées à  $F_1$  et  $F_{2,\varepsilon}$ . Les résultats de [Lio68] permettent d'appliquer la théorie de la dualité à des systèmes linéaires paraboliques et elliptiques très généraux, mais ne donnent pas explicitement l'expression de  $J_\varepsilon$ , qui va, elle, nous être utile par la suite lors de l'approximation numérique.

#### 1.4 Solution du problème de contrôle optimal

Nous nous intéressons dans cette section à la manière de trouver une solution explicite du problème (1.5) en vue de construire un schéma numérique. D'après la Proposition 1.1, (1.5) est équivalent au problème de minimisation

$$\inf_{\varphi^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)} J_\varepsilon(\varphi^T), \quad (1.19)$$

plus précisément, les solutions  $u_\varepsilon$  et  $\varphi_\varepsilon^T$  de (1.5) et (1.19) sont reliées par l'égalité

$$u_\varepsilon = \mathbb{1}_\omega B^* \varphi_\varepsilon \text{ dans } L^2(Q_T; \mathbb{R}^m),$$

où  $\varphi_\varepsilon$  est la solution du système (1.16) avec la donnée initiale  $\varphi(T) = \Pi_p^* \varphi_\varepsilon^T$ .

**PROPOSITION 1.2.** *La solution du problème (1.19) est donnée par la solution du problème linéaire*

$$(\Lambda + \varepsilon)\varphi^T = -\Pi_p y(T; y^0, 0), \quad (1.20)$$

avec le Gramien  $\Lambda$  défini par

$$\begin{aligned} \Lambda : L^2(\Omega; \mathbb{R}^p) &\mapsto L^2(\Omega; \mathbb{R}^p) \\ \varphi^T &\rightarrow \Pi_p w(T), \end{aligned}$$

où  $w$  est obtenue à partir des deux systèmes dual et primal

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi = \Delta \varphi + A^* \varphi & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ \varphi(\cdot, T) = \Pi_p^* \varphi^T & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t w = \Delta w + Ay + \mathbb{1}_\omega B B^* \varphi & \text{dans } Q_T, \\ w = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \\ w(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.21)$$

De plus,  $\Lambda + \varepsilon Id$  est une application linéaire symétrique définie positive.

*Preuve.* Déterminons le gradient de  $J_\varepsilon$ . Pour tout  $\varphi^T, h \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$ , on a

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\varphi^T + h) &= \frac{1}{2} \|L^*(\varphi^T + h)\|_{Q_T, m}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi^T + h\|_{\Omega, p}^2 + \langle \Pi_p y(T, y^0, 0), \varphi^T + h \rangle_{\Omega, p} \\ &= J_\varepsilon(\varphi^T) + \langle LL^* \varphi^T, h \rangle_{\Omega, p} + \varepsilon \langle \varphi^T, h \rangle_{\Omega, p}^2 + \langle \Pi_p y(T, y^0, 0), h \rangle_{\Omega, p} + o(h). \end{aligned}$$

Ainsi le gradient de la fonctionnelle  $J_\varepsilon$  s'exprime comme suit :

$$\nabla J_\varepsilon(\varphi^T) = \Lambda \varphi^T + \varepsilon \varphi^T + \Pi_p y(T; y^0, 0).$$

On en déduit que le minimiseur  $\varphi^T$  de  $J_\varepsilon$  est la solution dans  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$  du problème linéaire (1.20). Puisque  $\Lambda = LL^*$ , nous remarquons de plus que pour tout  $\varphi^T, \psi^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$ , nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} \langle (\Lambda + \varepsilon) \varphi^T, \psi^T \rangle_{\Omega, p} &= \varepsilon \langle \varphi^T, \psi^T \rangle_{\Omega, p} + \langle L^* \varphi^T, L^* \psi^T \rangle_{Q_T, m}, \\ &= \varepsilon \langle \varphi^T, \psi^T \rangle_{\Omega, p} + \langle B^* \varphi, B^* \psi \rangle_{\omega \times (0, T), m}, \end{aligned}$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont les solutions du système (1.21) pour les données initiales  $\varphi^T$  et  $\psi^T$ . On en déduit que pour tout  $\varphi^T, \psi^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$ ,

$$\langle (\Lambda + \varepsilon) \varphi^T, \psi^T \rangle_{\Omega, p} = \langle \varphi^T, (\Lambda + \varepsilon) \psi^T \rangle_{\Omega, p}$$

et pour tout  $\varphi^T \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$  non nul

$$\langle (\Lambda + \varepsilon) \varphi^T, \varphi^T \rangle_{\Omega, p} > 0.$$

Ainsi l'application  $(\Lambda + \varepsilon)$  est symétrique et définie positive.  $\square$

*Remarque 1.4.* D'après la Proposition 1.1, les minima de  $J_\varepsilon$  et  $F_\varepsilon$  sont reliés par la relation (1.18). A partir du minimum de  $F_\varepsilon$ , nous pouvons donc en déduire celui de  $J_\varepsilon$ . Nous remarquons qu'une fois discrétisé, l'ensemble de définition de  $J_\varepsilon$ , i.e.  $L^2(Q_T; \mathbb{R}^m)$ , aura une dimension bien supérieure à celui de  $F_\varepsilon$ , i.e.  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^p)$ . C'est pour cette raison que nous choisissons de chercher le minimum  $F_\varepsilon$  plutôt que celui de  $J_\varepsilon$ . Pour davantage d'exemples pour lesquels il est avantageux de résoudre le problème dual que le problème primal, nous renvoyons à [Cia82].

*Remarque 1.5.* Une façon de résoudre (1.20) est de calculer la matrice correspondante à l'opérateur  $\Lambda + \varepsilon Id$  et de l'inverser, ce qui demandera beaucoup de temps de calcul. Puisque l'opérateur  $\Lambda + \varepsilon Id$  est symétrique et défini positif, nous pouvons utiliser un algorithme de descente de gradient conjugué (détaillé dans le cas discret à la section 2.1).

## 2 Approximation numérique du problème de contrôle

Dans cette partie, nous discrétiserons le problème cible (1.1) en temps à l'aide d'un  $\theta$ -schéma avec  $\theta \in [0, 1]$  (différences finies pondérées, Cf [All05]). En ce qui concerne la discrétisation en espace, nous commencerons par nous placer dans un cadre général et montrerons ensuite comment il est possible de s'y ramener à partir de schémas de type éléments finis et différences finies. Nous supposons que les matrices de couplage  $A$  et de contrôle  $B$  définies dans les systèmes (1.1) sont constantes en temps, afin de simplifier les notations.

## 2.1 Cadre général

Dans cette section, nous nous placerons dans un cadre général que l'on peut retrouver par exemple dans [Boy13 ; BHLR10a ; BHLR10b ; BHLR11 ; BLR14 ; LT06]. Soit un pas de discrétisation en temps  $\delta t := T/M$  avec  $M \in \mathbb{N}^*$ , et  $h$  le paramètre de discrétisation en espace que nous précisons dans les deux sections suivantes. Définissons les objets suivants :

- Trois espaces euclidiens  $E_h, F_h$  et  $U_h$  de dimension finie dont les produits scalaires et les normes seront notés  $(\cdot, \cdot)_{E_h}, (\cdot, \cdot)_{F_h}, (\cdot, \cdot)_{U_h}$  et  $|\cdot|_{E_h}, |\cdot|_{F_h}, |\cdot|_{U_h}$ , respectivement. Nous désignerons par  $0_h$  l'élément neutre de  $E_h$ .
- Un opérateur linéaire  $\mathcal{M}_h : E_h \rightarrow E_h$  symétrique et défini positif pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{E_h}$  et un opérateur linéaire  $\mathcal{A}_h : E_h \rightarrow E_h$ .
- Étant donné que l'opérateur  $\mathcal{M}_h$  est symétrique et défini positif, on peut définir un nouveau produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_h}$  et une nouvelle norme  $\|\cdot\|_{E_h}$  définis sur  $E_h$  pour tout  $x, y \in E_h$  par

$$\langle x, y \rangle_{E_h} := (\mathcal{M}_h x, y)_{E_h} \quad \text{et} \quad \|x\|_{E_h} := |\mathcal{M}_h^{1/2} x|_{E_h}. \quad (2.1)$$

- Deux opérateurs linéaires continus  $\mathcal{B}_h : U_h \rightarrow E_h$  et  $\Pi_h : E_h \rightarrow F_h$  où  $E_h$  est muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_h}$  et de la norme  $\|\cdot\|_{E_h}$ . Les opérateurs adjoints  $\mathcal{B}_h^*$  et  $\Pi_h^*$  de  $\mathcal{B}_h$  et  $\Pi_h$  définis pour tout  $x \in E_h, y \in U_h$  et  $z \in F_h$  par

$$(\mathcal{B}_h^* x, y)_{U_h} := \langle x, \mathcal{B}_h y \rangle_{E_h} \quad \text{et} \quad \langle \Pi_h^* z, x \rangle_{E_h} := (z, \Pi_h x)_{F_h}. \quad (2.2)$$

Nous supposons que  $\mathcal{B}_h^*$  est un opérateur borné.

- On suppose que l'opérateur  $\Pi_h$  satisfait

$$\Pi_h \Pi_h^* = Id_{F_h}. \quad (2.3)$$

Nous remarquons qu'en tenant compte de (2.3), nous avons pour tout  $x, y \in F_h$

$$(x, y)_{F_h} = \langle \Pi_h^* x, \Pi_h^* y \rangle_{E_h} \quad \text{et} \quad |x|_{F_h} = \|\Pi_h^* x\|_{E_h}.$$

- L'ensemble  $L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$  des éléments de  $U_h^M$  (on notera  $0^{\delta t}$  l'élément neutre) munis du produit scalaire et de la norme définie pour tout  $u_h^{\delta t} := (u_h^k)_{1 \leq k \leq M}, v_h^{\delta t} := (v_h^k)_{1 \leq k \leq M} \in U_h^M$  par

$$\langle u_h^{\delta t}, v_h^{\delta t} \rangle_{L_{\delta t}^2(0, T; U_h)} := \delta t \sum_{k=1}^M (u_h^k, v_h^k)_{U_h} \quad \text{et} \quad \|u_h^{\delta t}\|_{L_{\delta t}^2(0, T; U_h)} := \left( \delta t \sum_{k=1}^M |u_h^k|_{U_h}^2 \right)^{1/2}.$$

Nous nous intéressons ici à la contrôlabilité du système complètement discrétisé suivant

:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (y_h^k)_{0 \leq k \leq M} \in E_h^{M+1} \text{ telle que :} \\ \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h (y_h^{k+1} - y_h^k) + \mathcal{A}_h (\theta y_h^{k+1} + (1 - \theta) y_h^k) = \mathcal{B}_h u_h^{k+1}, \quad \forall k \in \{0, \dots, M-1\}, \\ y_h^0 = y_{0,h}, \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $y_{0,h} \in E_h$  est la donnée initiale et  $u_h^{\delta t} := (u_h^k)_{1 \leq k \leq M} \in U_h^M$  représente le contrôle. Nous supposons pour le moment que le système (2.4) admet une unique solution, nous montrerons l'existence et l'unicité d'une solution dans le cas de schéma de type éléments finis

et différences finies. On notera

$$\mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_{0,h}|u_h^{\delta t}) = \Pi_h y_h^M \in F_h. \quad (2.5)$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et afin d'approcher la solution du problème d'optimisation (1.5), considérons la fonctionnelle  $F_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  définie pour tout  $u_h^{\delta t} := (u_h^k)_{1 \leq k \leq M} \in L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$  par

$$F_{h,\varepsilon}^{\delta t}(u_h^{\delta t}) := \frac{1}{2} \|u_h^{\delta t}\|_{L_{\delta t}^2(0, T; U_h)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |\mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_{0,h}, u_h^{\delta t})|_{F_h}^2, \quad (2.6)$$

où  $\mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}$  est défini dans (2.5). Le problème de minimisation (1.5) sera ainsi approché par le problème de minimisation

$$\inf_{u_h^{\delta t} \in L_{\delta t}^2(0, T; U_h)} F_{h,\varepsilon}^{\delta t}(u_h^{\delta t}). \quad (2.7)$$

Supposons qu'il est possible d'introduire l'espace des familles de données initiales

$$E_{init} := \prod_{h>0} E_h.$$

Au lieu de faire tendre  $h$  et  $\varepsilon$  arbitrairement vers 0, une stratégie développée dans [Boy13] consiste à choisir la pénalité en fonction de  $h$ . Pour le problème discret (2.4), nous utiliserons donc la notion de contrôlabilité suivante :

**DÉFINITION 2.1.** Soit  $Y^0 := (y_{0,h})_{h>0} \in E_{init}$ . Nous dirons que le problème discret (2.4) est

- (i)  $\Pi_p$ - $\phi(h)$ -exactement contrôlable à zéro à partir de la donnée initiale  $Y^0$  s'il existe  $h_0 > 0$  et une fonction réelle  $g$  croissante avec  $g(0) = 0$  telles que nous avons

$$\sup_{0 < h < h_0} \left( \inf_{L^2(0, T; U_h)} F_{h,\phi(h)}^{g(h)} \right) < +\infty,$$

où  $F_{h,\phi(h)}^{g(h)}$  est considérée pour la donnée initiale  $y_{0,h}$ .

- (ii)  $\Pi_p$ - $\phi(h)$ -approximativement contrôlable à zéro à partir de la donnée initiale  $Y^0$  s'il existe une fonction  $g$  croissante avec  $g(0) = 0$  telle que nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathcal{L}_{h,T}^{g(h)}(y_{0,h}|u_{h,\phi(h)}^{g(h)})|_{F_h} \rightarrow 0.$$

**HYPOTHÈSE 2.1.** Soit  $\mathcal{A}_h$  symétrique définie positive dans  $(E_h, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_h})$  et  $\mathcal{B}_h^*$  une famille d'opérateurs uniformément bornés. Considérons l'inégalité spectrale de Lebeau-Robbiano suivante : il existe  $h_0 > 0$ ,  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\beta > 0$  et  $\kappa, \ell > 0$  tel que pour tout  $h > h_0$  et  $(a_j)_j \in \mathbb{R}^N$ , nous avons

$$\left| \sum_{\mu_{j,h} \leq \mu} a_j \psi_{j,h} \right|_{E_h}^2 = \sum_{\mu_{j,h} \leq \mu} |a_j|^2 \leq \kappa e^{\kappa \mu^\alpha} \left| \mathcal{B}_h^* \left( \sum_{\mu_{j,h} \leq \mu} a_j \psi_{j,h} \right) \right|_{U_h}^2 \quad \forall \mu < \frac{\ell}{h^\beta}, \quad (2.8)$$

où  $\psi_{j,h}$  est une base constituée de vecteurs propres de  $\mathcal{A}_h$  et  $\mu_{j,h}$  sont les valeurs propres correspondantes.

**THÉORÈME 2.1** (Cf [BHLR11]). Soit  $\theta \in ]1/2, 1]$ . Supposons que l'hypothèse 2.1 soit vérifiée, prenons  $\Pi_p := Id_{E_h}$  et soit  $\phi$  telle que

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{e^{-C/h^\theta}} > 0.$$

Alors il existe  $C_1, C_2, h_0 > 0$  telle que pour tout  $0 < h < h_0$ ,

$$\delta t < C_1 |\log \phi(h)|^{-1} \quad (2.9)$$

et pour toute donnée initiale  $y_h^0 \in E_h$ , le contrôle  $u_{h,\phi(h)}^{\delta t} \in L^2(0, T; U_h)$  obtenu en minimisant  $J_{h,\phi(h)}^{\delta t}$  est tel que

$$\|u_{h,\phi(h)}^{\delta t}\|_{L^2(0,T;U_h)} \leq C_2 |y_{0,h}|_{E_h}$$

et de plus on a

$$|\mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_{0,h}|u_{h,\phi(h)}^{\delta t})|_{E_h} \leq C_2 \sqrt{\phi(h)} |y_{0,h}|_{E_h}.$$

*Remarque 2.1.* Bien que ce théorème soit relativement général, il laisse encore plusieurs points ouverts. Premièrement, nous pouvons nous demander si il est possible de se passer de la condition CFL (Courant Friedrichs Lewy: pas de temps qui dépend du pas d'espace) donnée en (2.9). Comme dans [BHLR11], nous observerons numériquement dans la section 3.2 que le pas de temps ne semble pas influencer. Deuxièmement, en ce qui concerne l'étude des systèmes, peut-on obtenir de tels résultats puisque l'opérateur  $\mathcal{A}_h$  n'est en général pas symétrique ?

*Remarque 2.2.* Il existe d'autres stratégies permettant d'approcher numériquement ce type de problème de contrôle. L'une d'entre elles est développée dans une suite d'articles [FCM11 ; FCM12 ; FCM13 ; FCM14]. Par exemple pour l'équation de la chaleur avec des conditions de Dirichlet aux bords

$$\begin{cases} \partial_t y = \partial_{xx} y + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } (0, 1) \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sur } \{0, 1\} \times (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } (0, 1), \end{cases} \quad (2.10)$$

les auteurs approchent la solution du problème d'optimisation

$$F(u) := \frac{1}{2} \int_{Q_T} \rho y^2 + \frac{1}{2} \int_{q_T} \rho_0 u^2, \quad (2.11)$$

où les fonctions  $\rho$  et  $\rho_0$  sont des poids définis sur  $Q_T$  s'écrasant exponentiellement aux temps 0 et  $T$ . La fonctionnelle (2.11) a été introduite dans [FI96] afin de démontrer la contrôlabilité à zéro du système (2.10). Comme nous l'avons en partie remarqué dans l'introduction de ce manuscrit, la solution de ce problème d'optimisation est très régulière. L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut adapter les poids en fonction de la situation étudiée. Il peut être intéressant d'essayer d'appliquer cette stratégie pour l'étude de la contrôlabilité des systèmes paraboliques.

Similairement à la Proposition 1.1, à l'aide la théorie de Fenchel-Rockfellar, le minimiseur de la fonctionnelle  $F_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  est caractérisé de la façon suivante :



**PROPOSITION 2.1.** *Considérons la fonctionnelle définie pour tout  $\varphi_h^T \in F_h$  par*

$$J_{h,\varepsilon}^{\delta t}(\varphi_h^T) := \frac{1}{2} \|\mathcal{B}_h^*(\varphi_h^T)\|_{L_{\delta t}^2(0,T;U_h)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\varphi_h^T|_{F_h}^2 + (\mathbf{y}_h^T, \varphi_h^T)_{F_h}, \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{y}_h^T := \mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_{0,h}|0^{\delta t})$  et  $(\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M+1}$  est la solution pour la donnée initiale  $\varphi_h^{M+1} = \Pi_h^* \varphi_h^T$  du système adjoint

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M+1} \in E_h^{M+1} \text{ tel que} \\ \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h(\varphi^M - \varphi^{M+1}) + \theta \mathcal{A}_h \varphi^M = 0_h, \\ \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h(\varphi^k - \varphi^{k+1}) + \mathcal{A}_h(\theta \varphi^k + (1-\theta)\varphi^{k+1}) = 0_h \quad \forall k \in \{1, \dots, M-1\}. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Si l'on note respectivement  $u_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  et  $\varphi_{h,\varepsilon}^T$  les minimiseurs respectifs des fonctionnelles  $F_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  et  $J_{h,\varepsilon}^{\delta t}$ , on a

$$\inf_{L_{\delta t}^2(0,T;U_h)} F_{h,\varepsilon}^{\delta t} = F_{h,\varepsilon}^{\delta t}(u_{h,\varepsilon}^{\delta t}) = -J_{h,\varepsilon}^{\delta t}(\varphi_{h,\varepsilon}^T) = -\inf_{F_h} J_{h,\varepsilon}^{\delta t}, \quad (2.14)$$

et de plus pour tout  $k \in \{1, \dots, M\}$

$$u_h^k = \mathcal{B}_h^* \varphi_{h,\varepsilon}^k, \quad (2.15)$$

où  $\varphi_{h,\varepsilon}^{\delta t} := (\varphi_{h,\varepsilon}^k)_{1 \leq k \leq M+1}$  est la solution du système adjoint (2.13) pour la donnée initiale  $\varphi_{h,\varepsilon}^T$ .

*Preuve.* Procédons de la même manière que dans la preuve de la Proposition 1.1. Pour tout  $u_h^{\delta t} \in L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$

$$|F_{h,\varepsilon}^{\delta t}(u_h^{\delta t})| \geq \frac{1}{2} \|u_h^{\delta t}\|_{L_{\delta t}^2(0,T;U_h)}^2,$$

donc  $F_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  est coercive. Avec les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 1.1,  $F_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  est continue et strictement convexe. Elle admet ainsi un unique minimum sur  $L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$ .

Ecrivons la fonctionnelle  $F_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  comme suit :

$$F_{h,\varepsilon}^{\delta t}(u_h^{\delta t}) = F_{h,1}^{\delta t}(u_h^{\delta t}) + F_{h,2,\varepsilon}^{\delta t}(L_{h,\varepsilon}^{\delta t} u_h^{\delta t}),$$

où pour tout  $u_h^{\delta t} = (u_h^k)_{1 \leq k \leq M} \in L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$  et tout  $g_h \in E_h$

$$F_{h,1}^{\delta t}(u_h^{\delta t}) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \delta t |u_h^k|_{U_h}^2, \quad F_{h,2,\varepsilon}^{\delta t}(g_h) := \frac{1}{2\varepsilon} |g_h + \mathbf{y}_h^T|_{F_h}^2 \quad \text{et} \quad L_{h,\varepsilon}^{\delta t} u_h^{\delta t} := \Pi_h \mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(0_h | u_h^{\delta t}),$$

où  $\mathbf{y}_h^T := \mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_h^0 | 0^{\delta t})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , introduisons la fonctionnelle duale de  $F_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  définie pour tout  $\varphi_h^T \in E_h$  par

$$J_{h,\varepsilon}^{\delta t}(\varphi_h^T) := F_{h,1}^{\delta t*}(L_{h,\varepsilon}^{\delta t*} \varphi_h^T) + F_{h,2,\varepsilon}^{\delta t*}(-\varphi_h^T),$$

où  $F_{h,1}^{\delta t*}$  et  $F_{h,2,\varepsilon}^{\delta t*}$  sont les fonctionnelles conjuguées à  $F_{h,1}^{\delta t}$  et  $F_{h,2,\varepsilon}^{\delta t}$  respectivement. En utilisant le même raisonnement que dans la preuve de la Proposition 1.1, pour tout  $v_h^{\delta t} = (v_h^k)_{1 \leq k \leq M} \in L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$  et  $\varphi_h^T \in F_h$ , on a

$$F_{h,1}^{\delta t*}(v_h^{\delta t}) = F_{h,1}^{\delta t}(v_h^{\delta t}), \quad F_{h,2,\varepsilon}^{\delta t*}(\varphi_h^T) = \frac{\varepsilon}{2} |\varphi_h^T|_{F_h}^2 - (\varphi_h^T, \mathbf{y}_h^T)_{F_h}.$$

Calculons maintenant l'adjoint de l'opérateur  $L_{h,\varepsilon}^{\delta t}$ . Soient  $u_h^{\delta t} = (u_h^k)_{1 \leq k \leq M} \in L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$  et  $\varphi_h^T \in F_h$ . Notons  $(\mathbf{y}_h^k)_{0 \leq k \leq M}$  la solution du problème primal (2.4) pour la donnée initiale

$y_h^0 := 0_h$  et le contrôle  $u_h^{\delta t}$ , et  $(\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M+1}$  celle du problème dual (2.13) pour la donnée initiale  $\varphi_h^T \in F_h$ . En utilisant la définition de  $L_{h,\varepsilon}^{\delta t}$ , on a

$$(L_{h,\varepsilon}^{\delta t} u_h^{\delta t}, \varphi_h^T)_{F_h} = (\Pi_h y_h^M, \varphi_h^T)_{F_h}. \quad (2.16)$$

A l'aide de la définition de  $\Pi_h^*$ , nous en déduisons

$$(\Pi_h y_h^M, \varphi_h^T)_{F_h} = \langle y_h^M, \Pi_h^* \varphi_h^T \rangle_{E_h}. \quad (2.17)$$

La définition (2.1) du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_h}$  et le fait que  $\varphi_h^{M+1} = \Pi_h^* \varphi_h^T$  donnent

$$\langle y_h^M, \Pi_h^* \varphi_h^T \rangle_{E_h} = (\mathcal{M}_h y_h^M, \Pi_h^* \varphi_h^T)_{E_h} = (\mathcal{M}_h y_h^M, \varphi_h^{M+1})_{E_h}. \quad (2.18)$$

Comme  $y_h^0 = 0_h$ , on remarque que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{M}_h y_h^M, \varphi_h^{M+1})_{E_h} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \delta t \left( \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h (y_h^{k+1} - y_h^k), \varphi_h^{k+1} \right)_{E_h} + \sum_{k=0}^M \delta t \left( y_h^k, \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h (\varphi_h^{k+1} - \varphi_h^k) \right)_{E_h}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En remplaçant  $\frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h (y_h^{k+1} - y_h^k)$  et  $\frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h (\varphi_h^{k+1} - \varphi_h^k)$  du membre de droite de (2.19) par les expressions correspondantes des systèmes (2.4) et (2.13), on en déduit

$$\begin{aligned} & (\mathcal{M}_h y_h^M, \varphi_h^{M+1})_{E_h} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} \delta t [-\theta (\mathcal{A}_h y_h^{k+1}, \varphi_h^{k+1})_{E_h} - (1 - \theta) (\mathcal{A}_h y_h^k, \varphi_h^{k+1})_{E_h} + (\mathcal{B}_h u_h^{k+1}, \varphi_h^{k+1})_{E_h}] \\ & \quad + \sum_{k=1}^{M-1} \delta t [\theta (\mathcal{A}_h \varphi_h^k, y_h^k)_{E_h} + (1 - \theta) (\mathcal{A}_h \varphi_h^{k+1}, y_h^k)_{E_h}] + \delta t \theta (\mathcal{A}_h \varphi_h^M, y_h^M)_{E_h}. \end{aligned}$$

Ce qui donne après simplification

$$(\mathcal{M}_h y_h^M, \varphi_h^{M+1})_{E_h} = \sum_{k=1}^M \delta t (\mathcal{B}_h u_h^k, \varphi_h^k)_{E_h}. \quad (2.20)$$

En combinant (2.16)-(2.18) et (2.20), on obtient

$$(L_{h,\varepsilon}^{\delta t} u_h^{\delta t}, \varphi_h^T)_{F_h} = \sum_{k=1}^M \delta t (\mathcal{B}_h u_h^k, \varphi_h^k)_{E_h} = \langle u_h^{\delta t}, \mathcal{B}_h^* (\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M} \rangle_{L_{\delta t}^2(0,T;U_h)}. \quad (2.21)$$

D'où

$$L_{h,\varepsilon}^{\delta t*} \varphi_h^T = \mathcal{B}_h^* (\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M} \in L_{\delta t}^2(0,T;U_h).$$

Le calcul d'adjoint précédent justifie du choix du système adjoint discret (2.13), et entre autre le choix de la deuxième ligne. On remarque que, pour tout  $\varphi_h^T \in F_h$ , on a

$$\begin{aligned} J_{h,\varepsilon}^{\delta t}(\varphi_h^T) &\geq \frac{\varepsilon}{2} |\varphi_h^T|_{F_h}^2 + (\mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_{0,h}|0_h^{\delta t}), \varphi_h^T)_{F_h} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{4} |\varphi_h^T|_{F_h}^2 - \frac{1}{\varepsilon} |\mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_{0,h}|0_h^{\delta t})|_{F_h}, \end{aligned}$$

on en déduit donc que la fonctionnelle  $J_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  est coercive. Les fonctionnelles  $F_{h,1}^{\delta t}$  et  $F_{h,2,\varepsilon}^{\delta t}$  sont différentiables, strictement convexes et coercives sur leur ensemble de définition et l'opérateur  $L_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  est linéaire, donc d'après le Théorème 1.2 la fonctionnelle  $J_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  admet un unique minimum sur  $F_h$  et les relations (2.14) entre le minimum de ces fonctionnelles et (2.15) de leur minimiseurs sont vérifiées. □

Grâce à la Proposition 2.1, la résolution du problème de minimisation (2.7) est équivalente à la résolution d'un système linéaire :

**Corollaire 2.1.** *Le minimiseur de la fonctionnelle  $J_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  est la solution  $\varphi_h^T$  de l'équation linéaire*

$$(\Lambda_h^{\delta t} + \varepsilon)\varphi_h^T = -y_h^T, \quad (2.22)$$

où  $y_h^T := \mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_{0,h}|0_h^{\delta t})$  et  $\Lambda_h^{\delta t}$ , appelé Gramien, est l'application qui à tout  $\varphi_h^T \in F_h$  associe la solution  $\Pi_p y_h^M \in F_h$  des problèmes primal et dual

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M+1} \in E_h^{M+1} \text{ telle que :} \\ \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h(\varphi_h^M - \varphi_h^{M+1}) + \theta \mathcal{A}_h \varphi_h^M = 0, \\ \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h(\varphi_h^k - \varphi_h^{k+1}) + \theta \mathcal{A}_h \varphi_h^k + (1 - \theta) \mathcal{A}_h \varphi_h^{k+1} = 0, \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, M-1\}. \\ \varphi_h^{M+1} = \varphi_h^T \end{array} \right. \quad (2.23)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (y_h^k)_{0 \leq k \leq M} \in E_h^{M+1} \text{ telle que :} \\ \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h(y_h^{k+1} - y_h^k) + \theta \mathcal{A}_h y_h^{k+1} + (1 - \theta) \mathcal{A}_h y_h^k = \mathcal{B}_h \mathcal{B}_h^* \varphi_h^{k+1} \text{ pour tout } k \in \{0, \dots, M-1\}, \\ y_h^0 = 0. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

De plus l'application  $\Lambda_h^{\delta t} + \varepsilon Id$  est symétrique et définie positive.

*Preuve.* Nous rappelons qu'à l'aide du calcul (2.21), l'adjoint de  $L_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  est l'opérateur qui à tout  $\varphi^T \in F_h$  associe  $(\mathcal{B}^* \varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M}$  où  $(\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M+1}$  est la solution du problème adjoint (2.23). Pour tout  $\varphi_h^T, \psi_h^T \in F_h$ , nous avons

$$\begin{aligned} J_{h,\varepsilon}^{\delta t}(\varphi_h^T + \psi_h^T) &= \frac{1}{2} \|L_{h,\varepsilon}^{\delta t*}(\varphi_h^T + \psi_h^T)\|_{L_{\delta t}^2(0,T;U_h)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\varphi_h^T + \psi_h^T|_{F_h}^2 + (y_h^T, \varphi_h^T + \psi_h^T)_{F_h} \\ &= J_{h,\varepsilon}^{\delta t}(\varphi_h^T) + (L_{h,\varepsilon}^{\delta t} L_{h,\varepsilon}^{\delta t*} \varphi_h^T, \psi_h^T)_{F_h} + \varepsilon (\varphi_h^T, \psi_h^T)_{F_h}^2 + (y_h^T, \psi_h^T)_{F_h} + o(\|\psi_h^T\|). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $\varphi_h^T \in F_h$ , le gradient de  $J_{h,\varepsilon}^{\delta t}$  est donné par

$$\nabla J_{h,\varepsilon}^{\delta t}(\varphi_h^T) = \Lambda_h^{\delta t} \varphi_h^T + \varepsilon \varphi_h^T + y_h^T.$$

Comme dans le cas continu, nous remarquons que pour tout  $\varphi^T, \psi^T \in F_h$ , on a

$$\begin{aligned} ((\Lambda_h^{\delta t} + \varepsilon)\varphi_h^T, \psi_h^T)_{F_h} &= (L_{h,\varepsilon}^{\delta t} L_{h,\varepsilon}^{\delta t*} \varphi_h^T, \psi_h^T)_{F_h} + \varepsilon (\varphi_h^T, \psi_h^T)_{F_h} \\ &= (L_{h,\varepsilon}^{\delta t*} \varphi_h^T, L_{h,\varepsilon}^{\delta t} \psi_h^T)_{F_h} + \varepsilon (\varphi_h^T, \psi_h^T)_{F_h}. \end{aligned}$$

Ainsi l'application linéaire  $(\Lambda_h^{\delta t} + \varepsilon Id)$  est symétrique définie positive.  $\square$

Comme il est mentionné dans la Remarque 1.5, une méthode de type descente de gradient est appropriée pour résoudre le problème de minimisation (2.7). Nous choisirons ici d'utiliser un algorithme de gradient conjugué qui est un outil fréquemment utilisé pour approcher la solution d'un problème linéaire avec une matrice symétrique définie positive. On trouve ce type d'algorithme par exemple dans [GLH08], où les auteurs étudient l'approximation numérique des contrôles contrôlant approximativement l'équation de la chaleur.

Pour davantage de détails ainsi que la démonstration de la convergence de cette méthode, nous renvoyons à [All05 ; AK08]. Nous suivrons donc l'algorithme suivant :

<b>Entrées :</b> Condition initiale $y_{0,h} \in E_h$	
<b>Initialisation :</b>	
$(y_h^k)_{0 \leq k \leq M}$ solution du système (2.4) pour $y_h^0 := y_{0,h}$ et $u_h^k := 0_h \forall k \in \{1, \dots, M\}$	
$b_h := -\Pi_h y_h^M;$	/* Second membre du problème linéaire */
$\varphi_h^T := 0_h;$	/* Init. du gradient conjugué */
$(\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M+1}$ solution de (2.23) pour $\varphi_h^{M+1} := \varphi_h^T;$	/* Problème dual */
$(y_h^k)_{0 \leq k \leq M}$ solution de (2.24) où $u_h^k := \varphi_h^k \forall k \in \{1, \dots, M\};$	/* Problème primal */
$y_h^T := \Pi_h y_h^M;$	/* $y_h^T := \Lambda_h^{\delta t} \varphi_h^T$ */
$r_{0,h} := b_h - y_h^T - \varepsilon \varphi_h^{M+1};$	/* Résidu */
$p_{0,h} := r_{0,h};$	/* Résidu tampon */
$\gamma_0 :=  r_{0,h} _{E_h};$	/* Norme du résidu */
<b>Tant que <math>\gamma_i/\gamma_0 &gt; \varepsilon_{tol}</math> pour <math>i \geq 1</math> faire</b>	
$(\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M+1}$ solution de (2.23) pour $\varphi_h^{M+1} := p_{i-1,h};$	/* Problème dual */
$(y_h^k)_{0 \leq k \leq M}$ solution de (2.24) où $u_h^k := \varphi_h^k \forall k \in \{1, \dots, M\};$	/* Problème primal */
$y_h^T := \Pi_h y_h^M;$	/* $y_h^T := \Lambda_h^{\delta t} p_{i-1,h}$ */
$\alpha_{i-1} := \frac{ r_{i-1} _{E_h}^2}{(y_h^T + \varepsilon p_{i-1,h}, p_{i-1,h})_{E_h}};$	/* Pas de descente */
$\varphi_{i,h}^T := \varphi_{i-1,h}^T + \alpha_{i-1} p_{i-1,h};$	
$r_{i,h} := r_{i-1,h} - \alpha_{i-1} (y_h^T + \varepsilon p_{i-1,h});$	
$\beta_{i-1} := \frac{ r_{i,h} _{E_h}^2}{ r_{i-1,h} _{E_h}^2};$	
$p_{i,h} := r_{i,h} + \beta_{i-1} p_{i-1,h};$	
$\gamma_i :=  r_{i,h} _{E_h};$	
<b>Fin</b>	
$(\varphi_h^k)_{1 \leq k \leq M+1}$ la solution du système dual (2.23) pour $\varphi_h^T = \varphi_{h,i}^{M+1};$	
$(y_h^k)_{0 \leq k \leq M}$ la solution du système primal (2.4) où $y_h^0 := y_{0,h}$ et $u_h^k := \varphi_h^k \forall k \in \{1, \dots, M\};$	
<b>Sorties :</b> Contrôle $(u_h^k)_{1 \leq k \leq M} \in L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$ , Solution contrôlée $(y_h^k)_{0 \leq k \leq M}$ .	

**Algorithme 1 :** Gradient conjugué pour la méthode HUM

Rappelons les différents paramètres de cet algorithme:

$\varepsilon$	pénalité
$h$	pas de discrétisation en espace
$\delta t$	pas de discrétisation en temps
$\theta$	paramètre du $\theta$ -schéma
$\varepsilon_{tol}$	critère d'arrêt du gradient conjugué

Dans l'algorithme 1, la matrice de l'opérateur  $\Lambda_h^{\delta t} + \varepsilon Id$  n'est pas explicite. A l'aide de la définition donnée dans le corollaire 2.1, pour un vecteur  $\varphi_h^T$  de  $E_h$ ,  $\Lambda_h^{\delta t} \varphi_h^T$  est la solution  $\Pi_p y_h^M \in F_h$  des problèmes primal et dual (2.23) et (2.24).

*Remarque 2.3.* Comme l'opérateur  $(\Lambda_h^{\delta t} + \varepsilon I)$  est symétrique défini positif, l'algorithme de gradient conjugué ci-dessus est en théorie exact, plus précisément il permet pour un vecteur  $y_h^T$  donné de résoudre notre problème

$$(\Lambda_h^{\delta t} + \varepsilon) \varphi_h^T = -y_h^T, \quad (2.25)$$

en moins de  $R$  itérations avec  $R$  la dimension de  $E_h$ . Malheureusement, lorsque cet algorithme est implémenté sur ordinateur, lorsque cet algorithme est implémenté sur ordinateur, la représentation des réels en arithmétique flottante implique une perte de cette propriété de convergence en un nombre fini d'itérations. De plus, lorsque la pénalité  $\varepsilon$  tend vers zéro, les valeurs propres de  $(\Lambda_h^{\delta t} + \varepsilon I)$  convergent vers zéro, et le problème linéaire (2.25) tend ainsi à être mal posé, ce qui peut augmenter les erreurs. C'est pour cette raison que nous avons imposé le critère d'arrêt  $\varepsilon_{tol}$  (voir algorithme).

## 2.2 Éléments finis

Regardons maintenant comment on peut retrouver le cadre général défini dans la section précédente lors de la discrétisation du système (1.1) à l'aide d'éléments finis en espace et d'un  $\theta$ -schéma en temps. Nous renvoyons à [All05] pour des explications détaillées de ce type de méthode d'approximation. Nous désignerons par  $\delta t := T/M$  le pas de discrétisation en temps où  $M$  est un entier naturel non nul. Soit  $\mathcal{T}_h$  un maillage d'éléments finis de  $\Omega$  ( $h$  est la taille de la plus grande maille  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ). Pour un élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , on notera  $h_K$  le rayon du cercle circonscrit de  $K$  ( $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ ) et  $\rho_K$  le rayon du cercle inscrit de  $K$ . On supposera que  $h_K/\rho_K$  est uniformément borné par rapport à  $K$ . Nous approximations  $H_0^1(\Omega)$  par les espaces de dimension finie

$$V_h := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

et

$$V_{0h} := \{v_h \in V_h : v_h|_{\partial\Omega} = 0\},$$

où  $\mathbb{P}_1(K)$  est l'espace des polynômes sur  $K$  de  $N$  variables et de degré  $\leq 1$ . Nous noterons  $R$  la dimension de  $V_{0h}$  et  $(\psi_j)_{1 \leq j \leq R}$  une de ses bases.

Considérons l'opérateur de projection  $\Pi_{h,p}$  défini par

$$\begin{aligned} \Pi_{h,p} : \quad V_h^n &\rightarrow V_h^p, \\ (y_{h,1}, \dots, y_{h,n}) &\mapsto (y_{h,1}, \dots, y_{h,p}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pour toute donnée initiale  $y_{0,h} := (y_{h,1}^0, \dots, y_{h,n}^0)$  dans  $V_{0h}^n$  et tout contrôle  $u_h^{\delta t} := (u_h^k)_{1 \leq k \leq M}$  dans  $V_h^{mM}$ , la solution du système (1.1) sera approchée par la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (y_h^k)_{0 \leq k \leq M} \in V_{0h}^{n(M+1)} \text{ telle que pour tout } g_h \in V_h^n : \\ \frac{1}{\delta t} \langle y_h^{k+1} - y_h^k, g_h \rangle_{\Omega, n} + \theta \langle \nabla y_h^{k+1}, \nabla g_h \rangle_{\Omega, Nn} + (1 - \theta) \langle \nabla y_h^k, \nabla g_h \rangle_{\Omega, Nn} \\ \quad = \theta \langle A y_h^{k+1}, g \rangle_{\Omega, n} + (1 - \theta) \langle A y_h^k, g \rangle_{\Omega, n} + \langle B u_h^{k+1}, g \rangle_{\omega, n} \\ y_h^0 = y_{0,h} \end{array} \right. \quad \forall k \in \{0, \dots, M-1\}, \quad (\mathcal{P}_{EF})$$

et on notera

$$\mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_{0,h} | u_h^{\delta t}) = \Pi_{h,p} y_h^M,$$

où  $(y_h^k)_{0 \leq k \leq M}$  est la solution du système  $(\mathcal{P}_{EF})$ . Définissons les espaces de dimension finie  $E_h := \mathbb{R}^{nR}$ ,  $F_h := \mathbb{R}^{pR}$ ,  $U_h := \mathbb{R}^{mR}$ . Nous utiliserons également la notation  $L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$  définie comme dans la section précédente. Si l'on note  $y_{0,h,s} = \sum_{j=1}^R y_{h,sj}^0 \psi_j$ ,  $u_{h,r}^k = \sum_{j=1}^R u_{h,rj}^k \psi_j$  et  $y_{h,s}^k := \sum_{j=1}^R y_{h,sj}^k \psi_j$  pour tout  $k \in \{0, \dots, M\}$ ,  $r \in \{1, \dots, m\}$  et  $s \in \{1, \dots, n\}$ , alors en remplaçant  $g_h$  par  $e_r \psi_j$  dans  $(\mathcal{P}_{EF})$  avec  $e_r$  le  $r^{\text{ème}}$  élément de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \left( \sum_{i=1}^R y_{ri}^{k+1} \langle \psi_i, \psi_j \rangle_{\Omega} - \sum_{i=1}^R y_{ri}^k \langle \psi_i, \psi_j \rangle_{\Omega} \right) + \theta \sum_{i=1}^R y_{ri}^{k+1} \langle \nabla \psi_i, \nabla \psi_j \rangle_{\Omega, N} \\ & + (1 - \theta) \sum_{i=1}^R y_{ri}^k \langle \nabla \psi_i, \nabla \psi_j \rangle_{\Omega, N} = \theta \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^R y_{si}^{k+1} \langle a_{rs} \psi_i, \psi_j \rangle_{\Omega} \\ & + (1 - \theta) \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^R y_{si}^k \langle a_{rs} \psi_i, \psi_j \rangle_{\Omega} + \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^R u_{si}^{k+1} \langle b_{rs} \psi_i, \psi_j \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

Ainsi nous retrouvons le système linéaire (2.4), c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h (y_h^{k+1} - y_h^k) + \mathcal{A}_h (\theta y_h^{k+1} + (1 - \theta) y_h^k) = \mathcal{B}_h u_h^{k+1}, \quad \forall k \in \{0, \dots, M-1\}, \\ y_h^0 = y_{0,h}, \end{array} \right.$$

avec les matrices  $\mathcal{M}_h$ ,  $\mathcal{A}_h$  et  $\mathcal{B}_h$  définies comme suit

$$\mathcal{M}_h := \begin{pmatrix} M_h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_h \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_h := \begin{pmatrix} K_h - A_h^{11} & \dots & -A_h^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_h^{n1} & \dots & K_h - A_h^{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_h := \begin{pmatrix} B_h^{11} & \dots & B_h^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_h^{n1} & \dots & B_h^{nm} \end{pmatrix},$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} M_h := (\langle \psi_i, \psi_j \rangle_{\Omega})_{1 \leq i, j \leq R}, \\ K_h := (\langle \nabla \psi_i, \nabla \psi_j \rangle_{\Omega, N})_{1 \leq i, j \leq R}, \\ A_h^{rs} := (\langle a_{rs} \psi_i, \psi_j \rangle_{\Omega})_{1 \leq i, j \leq R}, \\ B_h^{rs} := (\langle b_{rs} \psi_i, \psi_j \rangle_{\omega})_{1 \leq i, j \leq R} \end{array} \right.$$

avec  $A = (a_{rs})_{1 \leq r, s \leq n}$  la matrice de couplage et  $B = (b_{rs})_{1 \leq r \leq n, 1 \leq s \leq m}$  la matrice de contrôle du système (1.1). Nous remarquons que pour tout  $y_h := (y_{h,sj})_{sj}, z_h := (z_{h,sj})_{sj} \in E_h$  nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}_h y_h, z_h \rangle_{E_h} &= \sum_{s=1}^n \langle \mathcal{M}_h(y_{h,sj})_j, (z_{h,si})_i \rangle_{\mathbb{R}^R} \\ &= \sum_{s=1}^n \langle (\sum_{j=1}^R y_{h,sj} \langle \psi_j, \psi_i \rangle_{L^2(\Omega)})_i, (z_{h,si})_i \rangle_{\mathbb{R}^R} \\ &= \sum_{s=1}^n \langle \sum_{j=1}^R y_{h,sj} \psi_j, \sum_{i=1}^R z_{h,si} \psi_i \rangle_{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'opérateur  $\mathcal{M}_h$  est donc symétrique et défini positif et de plus  $\mathcal{A}_h$  est linéaire. En notant  $\Pi_h := (I_{Rp} \ 0_{Rp, R(n-p)})$ , l'opérateur  $\Pi_h$  vérifie bien la condition (2.3). Ainsi les espaces et les opérateurs que nous venons de définir vérifient bien les hypothèses décrites au début de la section 2.1. Montrons maintenant que le système linéaire  $(\mathcal{P}_{EF})$  admet une unique solution.

**PROPOSITION 2.2.** *Supposons que*

$$\delta t < n^{-1} \theta^{-1} \|A\|_{\infty}^{-1}. \quad (2.28)$$

Alors le système linéaire  $(\mathcal{P}_{EF})$  admet une unique solution.

*Preuve.* Il est clair que le système 2.4 admet une unique solution si et seulement si la matrice  $(\frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h + \theta \mathcal{A}_h)$  est inversible. Soit  $y_h \in V_h^n \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et  $(y_{h,sj})_{1 \leq s \leq n, 1 \leq j \leq R}$  ses coordonnées c'est-à-dire pour tout  $s \in \{1, \dots, n\}$ ,  $y_{h,s} = \sum_{j=1}^R y_{h,sj} \psi_j$ . On a donc d'une part, en utilisant (2.27),

$$\langle \mathcal{M}_h(y_{h,sj})_{sj}, (y_{h,sj})_{sj} \rangle_{E_h} = \|y_h\|_{\Omega, n}^2.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}_h(y_{h,sj})_{sj}, (y_{h,sj})_{sj} \rangle_{E_h} \\ &= \|\nabla y_h\|_{\Omega, Nn}^2 - \sum_{r,s=1}^n \langle A_h^{r,s}(y_{h,rj})_j, (y_{h,si})_i \rangle_{\mathbb{R}^R} \\ &= \|\nabla y_h\|_{\Omega, Nn}^2 - \sum_{r,s=1}^n \langle (\sum_{j=1}^R y_{h,rj} \langle a_{rs} \psi_j, \psi_i \rangle_{\Omega})_i, (y_{h,si})_i \rangle_{\mathbb{R}^R} \\ &= \|\nabla y_h\|_{\Omega, Nn}^2 - \sum_{r,s=1}^n \langle a_{rs} \sum_{j=1}^R y_{h,rj} \psi_j, \sum_{i=1}^R y_{h,si} \psi_i \rangle_{\Omega} \\ &= \|\nabla y_h\|_{\Omega, Nn}^2 - \sum_{r,s=1}^n \langle a_{rs} y_{h,r}, y_{h,s} \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\langle (\frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h + \theta \mathcal{A}_h)(y_{h,sj})_{sj}, (y_{h,sj})_{sj} \rangle_{E_h} \\ &\geq \frac{1}{\delta t} \|y_h\|_{\Omega, n}^2 - \theta \|A\|_{\infty} \sum_{r,s=1}^n \|y_{h,s}\|_{\Omega} \|y_{h,r}\|_{\Omega} + \theta \|\nabla y_h\|_{\Omega, nN}^2 \\ &\geq \left( \frac{1}{\delta t} - n\theta \|A\|_{\infty} \right) \|y_h\|_{\Omega, n}^2 + \theta \|\nabla y_h\|_{\Omega}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\left\langle \left( \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h + \theta \mathcal{A}_h \right) (y_{h,sj})_{sj}, (y_{h,sj})_{sj} \right\rangle_{E_h} \geq \left( \frac{1}{\delta t} - n\theta \|A\|_\infty \right) \|y_h\|_{\Omega, \mathbb{R}^n}^2$$

Nous en concluons donc que pour  $\delta t$  suffisamment petit indépendamment de  $h$ , le système (2.4) admet une unique solution et ainsi le système  $(\mathcal{P}_{EF})$  également.  $\square$

### 2.3 Différences finies

Nous utiliserons dans cette section une méthode de différences finies en espace et en temps de type  $\theta$ -schéma pour discrétiser le système (1.1). Nous montrerons qu'il est possible de se ramener au cadre général décrit dans la section 2.1. Afin d'alléger les notations, nous nous placerons en espace sur un intervalle réel  $[0, L]$  ( $L > 0$ ) et sur l'intervalle  $[0, T]$  en temps ( $T > 0$ ). Pour un schéma en dimension supérieure nous renvoyons au livre d'Allaire [All05, p. 31]. On notera  $\delta t := T/M$  et  $h := L/R$  les pas de discrétisation en temps et en espace. On discrétisera les intervalles de temps et d'espace de la manière suivante en notant

$$(t_k, x_j) := (k \cdot \delta t, j \cdot h) \text{ pour tout } k \in \{0, \dots, M\} \text{ et tout } j \in \{0, \dots, R\}.$$

On notera  $y_j^k$  la valeur de la solution discrète au point  $(t_k, x_j)$  qui approche la solution du problème continu (1.1). Un schéma implicite standard de type différence finie en espace combiné avec un  $\theta$ -schéma en temps pour le système (1.1) donne

$$\begin{cases} \frac{y_{h,j}^{k+1} - y_{h,j}^k}{\delta t} + \theta \frac{-y_{h,j-1}^{k+1} + 2y_{h,j}^{k+1} - y_{h,j+1}^{k+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{-y_{h,j-1}^k + 2y_{h,j}^k - y_{h,j+1}^k}{h^2} \\ \quad = \theta A(x_j) y_{h,j}^{k+1} + (1 - \theta) A(x_j) y_{h,j}^k + B(x_j) u_{h,j}^{k+1} \quad \forall k \in \{0, \dots, M-1\}, \\ y_{h,0}^k = y_{h,R}^k = 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, M-1\}, \\ y_{h,j}^0 = y_{0,h}(x_j). \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{DF})$$

De la même manière que dans la section précédente, on note  $E_h := \mathbb{R}^{n(R-1)}$ ,  $F_h := \mathbb{R}^{p(R-1)}$ ,  $U_h := \mathbb{R}^{m(R-1)}$  et  $L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$  désigne l'espace défini dans la section 2.1. Si nous notons  $y_{0,h} = (y^0(x_1), \dots, y^0(x_{R-1})) \in E_h$ ,  $u_h^k = (u_s(x_1, k\delta t), \dots, u_s(x_{R-1}, k\delta t))_{1 \leq s \leq m} \in U_h$  et  $y_h^k = (y_{h,sj}^k)_{1 \leq j \leq R-1, 1 \leq s \leq n} \in E_h$  pour tout  $k \in \{0, \dots, M\}$ , on en déduit que pour tout  $r \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, R-1\}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \left( y_{h,rj}^{k+1} - y_{h,rj}^k \right) + \frac{\theta}{h^2} \left( -y_{h,r(j-1)}^{k+1} + 2y_{h,rj}^{k+1} - y_{h,r(j+1)}^{k+1} \right) \\ & \quad + \frac{1 - \theta}{h^2} \left( -y_{h,r(j-1)}^k + 2y_{h,rj}^k - y_{h,r(j+1)}^k \right) \\ & = \theta \sum_{s=1}^n a_{rs}(x_j) y_{h,sj}^{k+1} + (1 - \theta) \sum_{s=1}^n a_{rs}(x_j) y_{h,sj}^k + \sum_{s=1}^m b_{rs}(x_j) u_{h,sj}^{k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi la résolution du système  $(\mathcal{P}_{DF})$  est équivalente à trouver  $y_h^k = (y_{h,sj}^k)_{1 \leq j \leq R-1, 1 \leq s \leq n}$  pour tout  $k \in \{1, \dots, M\}$  satisfaisant le système linéaire (2.4), c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h (y_h^{k+1} - y_h^k) + \mathcal{A}_h (\theta y_h^{k+1} + (1 - \theta) y_h^k) = \mathcal{B}_h u_h^{k+1}, \quad \forall k \in \{0, \dots, M-1\}, \\ y_h^0 = y_{0,h}, \end{cases}$$



où  $\mathcal{M}_h$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_{(R-1)n}(\mathbb{R})$  et les matrices  $\mathcal{A}_h$  et  $\mathcal{B}_h$  sont définies comme suit :

$$\mathcal{A}_h := \begin{pmatrix} K_h - A_h^{11} & \cdots & -A_h^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_h^{n1} & \cdots & K_h - A_h^{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_h := \begin{pmatrix} B_h^{11} & \cdots & B_h^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_h^{n1} & \cdots & B_h^{nm} \end{pmatrix}$$

où

$$K_h := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_h^{rs} := \begin{pmatrix} a_{rs}(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{rs}(x_{R-1}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_h^{rs} := \begin{pmatrix} b_{rs}(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{rs}(x_{R-1}) \end{pmatrix}.$$

L'opérateur de projection  $\Pi_h$  défini par  $\Pi_h := (I_{(R-1)p} \ 0_{(R-1)p, (R-1)(n-p)})$  vérifie la condition (2.3). Définissons l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}$  défini pour tout  $y_{0,h} \in E_h$  et tout  $u_h^{\delta t} \in L_{\delta t}^2(0, T; U_h)$  par

$$\mathcal{L}_{h,T}^{\delta t}(y_{0,h} | u_h^{\delta t}) = \Pi_h y_h^M,$$

où  $(y_{h,j}^k)_{0 \leq k \leq M, 1 \leq j \leq R-1}$  est la solution du système (2.4). L'opérateur  $\mathcal{M}_h$  est bien symétrique et défini positif. Les espaces et les opérateurs que nous venons de définir vérifient ainsi les hypothèses du cadre abstrait décrit au début de la section 2.1. Montrons maintenant l'existence et l'unicité de la solution du système  $(\mathcal{P}_{DF})$ .

**PROPOSITION 2.3.** *Supposons que*

$$\delta t < n^{-1} \theta^{-1} \|A\|_{\infty}^{-1}. \quad (2.29)$$

Alors le système linéaire  $(\mathcal{P}_{DF})$  admet une unique solution.

*Preuve.* Nous rappelons que le système  $(\mathcal{P}_{DF})$  admet une unique solution si et seulement si la matrice  $\frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h + \theta \mathcal{A}_h$  est inversible. Or pour tout élément  $y_h := (y_{h,s})_{1 \leq s \leq n} \in E_h$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle (\frac{1}{\delta t} \mathcal{M}_h + \theta \mathcal{A}_h) y_h, y_h \rangle_{E_h} &\geq \frac{1}{\delta t} \|y_h\|_{E_h}^2 - \theta \|A\|_{\infty} \sum_{r,s=1}^n \|y_{h,r}\|_{\mathbb{R}^{(R-1)}} \|y_{h,s}\|_{\mathbb{R}^{(R-1)}} \\ &\geq \left( \frac{1}{\delta t} - n\theta \|A\|_{\infty} \right) \|y_h\|_{E_h}^2, \end{aligned}$$

car la matrice  $K_h$  est symétrique définie positive. Ainsi le système  $(\mathcal{P}_{DF})$  admet une unique solution.  $\square$

*Remarque 2.4.* Nous pouvons remarquer que ce soit dans le cas du schéma par éléments finies ou par différences finies, le système (2.4) est bien posé dès que le pas de temps  $\delta t$  est suffisamment petit indépendamment du pas d'espace  $h$ . Plus précisément respectivement lorsque (2.28) (ou (2.29)) est vérifiée, qui sont des conditions très proches, puisque  $\theta \in [0, 1]$ .

### 3 Simulations numériques

Dans cette partie, nous considérerons le système (1.1) pour  $n = 2$ ,  $m = 1$  et  $p = 1$  c'est-à-dire un système avec seulement deux équations contrôlé par un seul contrôle et nous ne souhaiterons contrôler que la première composante. Plus précisément, en reprenant la définition 2.1, nous étudierons la  $\Pi_p$ - $\phi(h)$ -exact contrôlabilité à zéro du système

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + \alpha z + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ \partial_t z = \Delta z & \text{dans } Q_T, \\ y = z = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y(\cdot, 0) = y^0, z(\cdot, 0) = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $y^0, z^0 \in L^2(\Omega)$  sont les données initiales et  $u \in L^2(Q_T)$  le contrôle. Nous supposerons également que nous sommes en dimension 1, plus précisément que  $\Omega := (0, 2\pi)$ . Le système (3.1) sera considéré sur l'intervalle de temps  $(0, T)$  avec  $T := 2$ , un domaine de contrôle  $\omega := (0, \pi)$  et une donnée initiale

$$\begin{cases} y^0 := 0, \\ z^0 := \sin(x). \end{cases}$$

Nous discrétiserons le système (3.1) en temps à l'aide du  $\theta$ -schéma décrit dans la section 2 pour  $\theta = 1$  c'est-à-dire un schéma en temps de type Euler implicite. En espace, nous utiliserons les discrétisations éléments finis ( $\mathcal{P}_{EF}$ ) et différences finies ( $\mathcal{P}_{DF}$ ) données dans les sous-sections 2.2 et 2.3, respectivement. Enfin nous minimiserons la fonctionnelle (2.6) de la section 2.1 en suivant l'algorithme 1 avec un critère d'arrêt  $\varepsilon_{tol} := 10^{-8}$ . Les programmes des simulations de cette section sont écrits en langage *Python* à l'aide principalement des bibliothèques *NumPy*, *Scipy*, *Dolfin* et *FeNICS* (Cf [JOP+01 ; LW10]).

#### 3.1 Allure des solutions

Reprenons les deux exemples de couplage  $\alpha$  du système (3.1) correspondant aux items (1)-(2) et (3) du Théorème 1.3 du chapitre précédent (Cf [AKCD15]), c'est-à-dire

(a)  $\alpha(x) = 1$ ,

(b)  $\alpha(x) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \cos(15px)$ .

Dans cette partie, la pénalité est indépendante de l'espace et fixée arbitrairement à  $10^{15}$  et nous utiliserons le schéma ( $\mathcal{P}_{DF}$ ) décrit dans la section 2.3.

La série donnée dans le cas (b) sera bien évidemment tronquée lors des simulations numériques qui suivront. Nous renvoyons à la section 3.2 pour plus de précisions. La deuxième composante  $z$  de la solution, représentée dans la figure B.1, est la même dans les deux situations (a) et (b) et est donnée par

$$z(x, t) = e^{-t} \sin(x) \quad \forall (x, t) \in (0, 2\pi) \times (0, T).$$

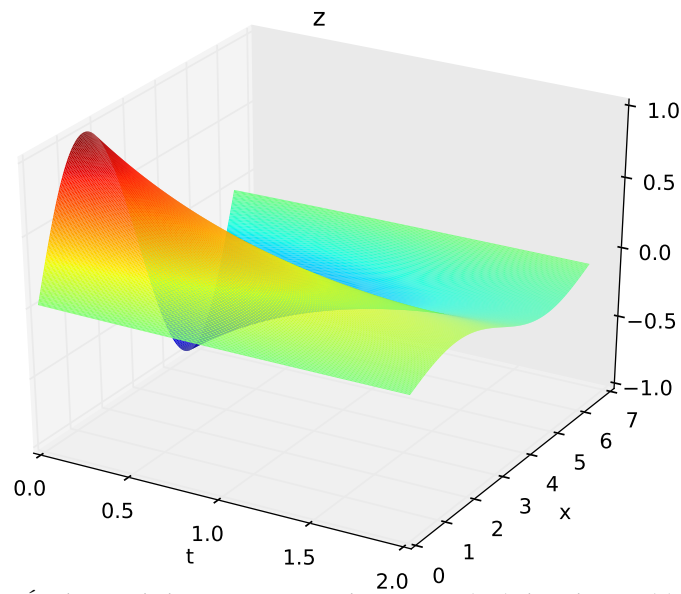


FIGURE B.1: Évolution de la composante  $z$  du système (3.1) dans les cas (a) et (b).

Dans le chapitre précédent, nous avons montré d'une part que dans les deux cas le système (1.1) est  $\Pi_1$ -approximativement contrôlable à zéro et d'autre part qu'il est  $\Pi_1$ -exactement contrôlable à zéro dans le cas (a), mais ne l'est pas dans le cas (b). Il est intéressant de remarquer que dans la première situation, représentée dans la figure B.2, la première composante  $y$  de la solution admet de légères oscillations à l'instant  $T$  d'amplitude qui tend rapidement vers zéro, tandis que dans la deuxième situation (Cf figure B.3), nous observons à l'instant  $T$  des oscillations d'amplitude fortement croissante. Nous remarquons donc déjà certaines différences

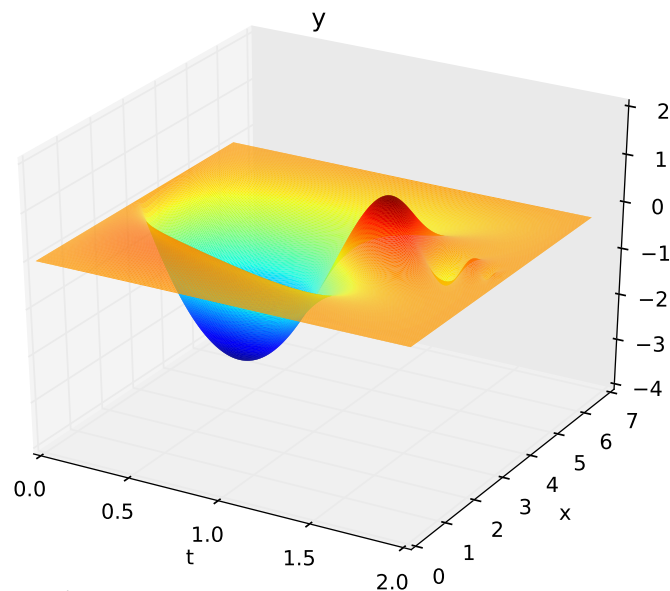


FIGURE B.2: Évolution de la composante  $y$  du système (3.1) dans le cas (a).

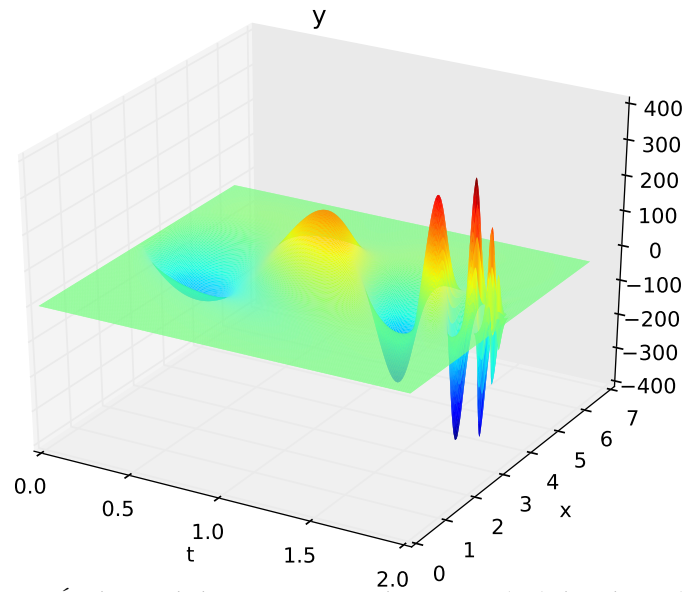


FIGURE B.3: Évolution de la composante  $y$  du système (3.1) dans le cas (b).

### 3.2 Influence du pas de temps et du schéma en espace

Considérons le  $\theta$ -schéma ( $\mathcal{P}_{DF}$ ) (différences finies), et suivons la méthodologie de F. Boyer (cf [Boy13]) en prenant une pénalité dépendante du pas d'espace, plus précisément choisissons dans la définition 2.1  $\varepsilon = \phi(h) := h^4$ . Pour davantage d'explications concernant ce choix de  $\phi$ , nous renvoyons à [Boy13]. En ce qui concerne le pas de discrétisation en temps, comme dans [Boy13], nous pouvons observer qu'il n'influe pas sur la contrôlabilité du système discrétisé ( $\mathcal{P}_{DF}$ ). En effet, dans le Tableau B.1, nous constatons que l'énergie optimale  $\inf F_{h,\phi(h)}^{\delta t}$  tend à se stabiliser pour un pas d'espace fixé et lorsque le nombre d'intervalles de temps  $M$  augmente dans les cas (a) et (b). Nous observons donc les mêmes phénomènes que F. Boyer dans [Boy13].

(a) Cas $\alpha(x) = 1$					(b) Cas $\alpha(x) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \cos(15px)$				
R	M				R	M			
	20	80	320	1280		20	80	320	1280
20	11.0	7.70	6.91	6.73	20	0.236	0.193	0.182	0.179
50	17.4	9.57	8.04	7.68	50	3.66	3.07	2.82	2.71
100	26.0	11.6	9.23	8.69	100	52.3	42.4	36.8	34.1
200	37.7	14.0	10.6	9.79	200	801	606	486	440

Tableau B.1: Energie optimale  $\inf F_{h,\phi(h)}^{\delta t}$

Dans le Tableau B.2, nous montrons que le nombre d'itérations du gradient conjugué semble également atteindre un maximum lorsque le nombre d'intervalles en temps  $M$  aug-

mente, que ce soit dans le cas d'un système contrôlable ou non contrôlable, ce qui nous conforte dans l'idée que la discrétisation en temps ne semble pas avoir d'influence.

(a) Cas $\alpha(x) = 1$					(b) Cas $\alpha(x) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \cos(15px)$				
R	M				R	M			
	20	80	320	1280		20	80	320	1280
20	24	30	30	29	20	25	30	34	34
50	78	78	85	86	50	77	95	95	107
100	223	231	232	224	100	249	277	276	266
200	706	716	756	720	200	724	926	929	872

**Tableau B.2:** Nombre d'itérations du gradient conjugué

Les simulations des Tableaux B.3 et B.4 ont été effectuées dans le cas (a), c'est-à-dire lorsque le système (3.1) est contrôlable, et avec 400 points de discrétisation en temps. On remarque que lorsque le nombre  $R$  de points de discrétisation en espace augmente, la norme de la première composante  $y_{h,\phi(h)}^{\delta t}(T)$  de la solution du système à l'instant  $T$ , la norme du contrôle  $u_{h,\phi(h)}^{\delta t}$  et le minimum de la fonctionnelle  $F_{h,\phi(h)}^{\delta t}$  dans le cas des différences finies et dans le cas des éléments finis sont de plus en plus proches. Les deux schémas semblent converger vers les mêmes solutions.

R	50	10	200	300
$\ y_{h,\phi(h)}^{\delta t}(T)\ _{E_h}$	5.30e-4	1.18e-4	2.77e-5	1.18e-5
$\ u_{h,\phi(h)}^{\delta t}\ _{L_{\delta t}^2(0,T;U_h)}$	3.76	4.09	4.41	4.59
$\inf F_{h,\phi(h)}^{\delta t}$	7.94	9.08	10.3	11.1

**Tableau B.3:** Différences finies

R	50	10	200	300
$\ y_{h,\phi(h)}^{\delta t}(T)\ _{E_h}$	4.97e-4	1.16e-4	2.74e-5	1.18e-5
$\ u_{h,\phi(h)}^{\delta t}\ _{L_{\delta t}^2(0,T;U_h)}$	3.65	4.05	4.40	4.58
$\inf F_{h,\phi(h)}^{\delta t}$	7.43	8.90	10.3	11.1

**Tableau B.4:** Éléments finis

La série donnée dans le cas (b) est bien évidemment tronquée lors des simulations numériques. Nous pouvons remarquer dans le Tableau B.5, où le nombre de points en espace et le nombre de points en temps ont été fixés à 100 et 200 respectivement, que la norme de

l'instant final  $y_{h,\phi(h)}^{\delta t}(T)$ , la norme du contrôle  $u_{h,\phi(h)}^{\delta t}$  ainsi que le minimum de la fonctionnelle  $F_{h,\phi(h)}^{\delta t}$  se stabilise très rapidement dès lors que le nombre de termes considérés dans la série  $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \cos(15px)$  est suffisamment important.

P (Cf titre tableau)	10	30	50	100	200	300
$\ y_{h,\phi(h)}^{\delta t}(T)\ _{E_h}$	2.37e-4	2.39e-4	2.40e-4	2.40e-4	2.40e-4	2.40e-4
$\ u_{h,\phi(h)}^{\delta t}\ _{L^2_{\delta t}(0,T;U_h)}$	0.154	0.192	0.199	0.204	0.207	0.208
$\inf F_{h,\phi(h)}^{\delta t}$	2.83	2.88	2.89	2.90	2.91	2.91

**Tableau B.5:** Influence de la troncature  $\sum_{p=1}^P \frac{1}{p^2} \cos(15px)$  dans le cas (b)

### 3.3 Commentaires

Nous terminerons ce chapitre par quelques commentaires concernant les résultats positifs et négatifs de contrôlabilité sur le système (3.1) obtenus dans le chapitre précédent. Si l'on écrit  $\alpha$  sous la forme  $\alpha := \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \alpha_k \cos(kx)$ , nous avons prouvé dans le chapitre précédent (Cf [AKCD15]) que le système (3.1) est  $\Pi_1$ -exactement contrôlable à zéro s'il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 2\pi$  telles que

$$|\alpha_k| \leq C_1 e^{-C_2 k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Les fonctions  $\alpha$  vérifiant (3.2) sont des fonctions de classe  $C^\infty$ . De plus, nous avons également montré que pour  $k \in \mathbb{N}$  et la fonction de couplage  $\alpha$  donné par

$$\alpha(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{k+1}} \cos((2k+13)jx) \text{ pour tout } x \in (0, 2\pi),$$

le système (3.1) n'est pas  $\Pi_1$ -exactement contrôlable à zéro en tout temps et nous remarquons que ces fonctions sont de classe  $C^{k-1}$ . Nous pourrions nous demander si les couplages pour lesquels le système (3.1) est  $\Pi_1$ -exactement contrôlable à zéro sont tous de classe  $C^\infty$ .

Considérons la fonction de couplage  $\alpha := x$ . Nous constatons dans la Figure B.4 que le minimum de la fonctionnelle  $F_{h,\phi(h)}^{\delta t}$  (—●—) et la norme du contrôle  $u_{h,\phi(h)}^{\delta t}$  (—■—) sont uniformément bornés (pente de  $3.70e - 3$  et  $1.35e - 1$  respectivement). En comparant cette observation avec le second item du Théorème 1.1, il est probable que le système (3.1) soit  $\Pi_1$ -exactement contrôlable à zéro pour ce couplage. D'autre part, la norme de la solution à l'instant  $T$   $y_{h,\phi(h)}^{\delta t}(T)$  (—▲—) est décroissante lorsque le pas d'espace  $h$  (et la pénalité  $\varepsilon = h^4$ ) tend vers zéro. Ce qui confirme que le système est  $\Pi_1$ -approximativement contrôlable à zéro dans ce cas.

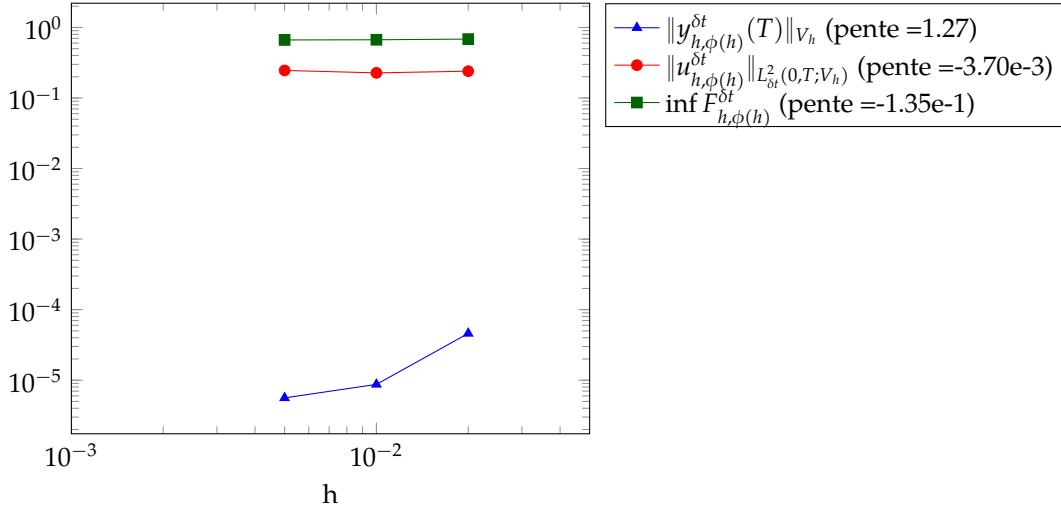


FIGURE B.4: Distance à la cible  $\|y_{h,\phi(h)}^{\delta t}(T)\|_{V_h}$ , norme du contrôle  $\|u_{h,\phi(h)}^{\delta t}\|_{L^2_{\delta t}(0,T;V_h)}$  et valeur minimale de la fonctionnelle  $\inf_{L^2_{\delta t}(0,T;V_h)} F_{h,\phi(h)}^{\delta t}$  dans le cas  $\alpha(x) = x$

Dans le système (3.1), étant donné que l'équation de  $z$  est complètement découplée, la première équation n'est autre que l'équation de la chaleur avec le second membre  $\alpha z$ . L'équation de la chaleur avec un second membre ne dépendant que de l'espace n'est pas contrôlable à zéro si celui-ci n'est pas de classe  $C^\infty$  sur le domaine privé de la zone de contrôle. En effet, soit  $T > 0$ ,  $\Omega$  un domaine non vide borné de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) de frontière  $\partial\Omega$  de classe  $C^\infty$ ,  $\omega$  un ouvert non vide de  $\Omega$  et considérons le système

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + f + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T := \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ y(\cdot, 0) = y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $y^0 \in L^2(\Omega)$  et supposons qu'il existe  $y^T \in L^2(\Omega)$  tel que  $\Delta y^T = f$ . Pour un contrôle  $u \in L^2(Q_T)$ , la solution du système (3.3) est nulle à l'instant  $T$  si, et seulement si, la solution  $z := y + y^T$  du système

$$\begin{cases} \partial_t z = \Delta z + \mathbb{1}_\omega u & \text{dans } Q_T, \\ z = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ z(\cdot, 0) = z^0 := y^0 + y^T & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.4)$$

vérifie  $z(T) = y^T$  sur  $\Omega$ . D'après le Théorème 1.1 de l'introduction, le système (3.4) admet une unique solution dans  $W(0, T) := W(0, T; H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ . Soit  $\eta \in C^\infty(0, T)$  une fonction de troncature en temps telle que  $\text{supp}(\eta) \subseteq (0, 2T/3)$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$  et  $\eta = 1$  sur  $(0, T/3)$ . De la même manière, soit  $\theta \in C^\infty(\Omega)$  une fonction de troncature en espace telle que  $\text{supp}(\theta) \subseteq \omega_0$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  et  $\theta = 1$  sur  $\omega$  où  $\omega_0$  est un ouvert de  $\Omega$  contenant strictement  $\omega$ . La fonction

$w := (1 - \eta)(1 - \theta)z$  est solution du système

$$\begin{cases} \partial_t w = \Delta w + g & \text{dans } Q_T, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ w(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $g := (1 - \eta)[2\nabla\theta \cdot \nabla z + \Delta\theta z] - (\partial_t\eta)(1 - \theta)z$ . On remarque que  $g \in L^2(Q_T)$ . A nouveau, en appliquant le Théorème 1.1 de l'introduction au système (3.5),  $w$  appartient à  $W_2^{2,1}(Q_T) := W(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ . De plus, d'après la Propriété 1.1 de l'introduction,  $w(T) \in H_0^1(\Omega)$ , d'où  $z(T) \in H_0^1(\Omega \setminus \omega_0)$ . En utilisant le même raisonnement que précédemment et le Lemme 2.5 de l'introduction, on peut montrer que  $z(T)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega \setminus \omega_0$ . Ainsi si l'on choisit une cible  $y^T$  qui n'est pas de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega \setminus \omega_0$ , on ne peut pas trouver de contrôle  $u$  tel que la solution correspondante  $z$  du système (3.4) soit égale à  $y^T$  à l'instant  $T$ . On peut trouver ce type d'argument par exemple dans [BGBPG04b; BGBPG04c; GBPG06]. Nous en concluons que pour une fonction  $f$  qui n'est pas de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega \setminus \omega_0$ , le système (3.3) n'est pas contrôlable à zéro.

Ces constatations nous confortent dans l'idée qu'il est certainement nécessaire que le couplage  $\alpha$  soit de classe  $C^\infty$  pour que le système (3.1) soit  $\Pi_1$ -exactement contrôlable à zéro au temps  $T$ .

## References

- [AK08] G. ALLAIRE et S. M. KABER. *Numerical linear algebra*. T. 55. Texts in Applied Mathematics. Translated from the 2002 French original by Karim Trabelsi. Springer, New York, 2008, p. xii+271 (cf. p. 181).
- [AKCD15] F. AMMAR KHODJA, F. CHOULY et M. DUPREZ. "Partial null controllability of parabolic linear systems by  $m$  forces". In : *submitted* (2015) (cf. p. xii, 7, 54, 165, 187, 191).
- [All05] G. ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005 (cf. p. 174, 181, 182, 185).
- [BGBPG04b] O. BODART, M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. "Existence of insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity". In : *Comm. Partial Differential Equations* 29.7-8 (2004), p. 1017–1050 (cf. p. xi, 16, 24, 28, 193).
- [BGBPG04c] O. BODART, M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. "Insensitizing controls for a heat equation with a nonlinear term involving the state and the gradient". In : *Nonlinear Anal.* 57.5-6 (2004), p. 687–711 (cf. p. xi, 24, 28, 193).
- [BHLR10a] F. BOYER, F. HUBERT et J. LE ROUSSEAU. "Discrete Carleman estimates for elliptic operators and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations". In : *J. Math. Pures Appl.* (9) 93.3 (2010), p. 240–276 (cf. p. xii, 175).



- [BHLR10b] F. BOYER, F. HUBERT et J. LE ROUSSEAU. “Discrete Carleman estimates for elliptic operators in arbitrary dimension and applications”. In : *SIAM J. Control Optim.* 48.8 (2010), p. 5357–5397 (cf. p. xii, 175).
- [BHLR11] F. BOYER, F. HUBERT et J. LE ROUSSEAU. “Uniform controllability properties for space/time-discretized parabolic equations”. In : *Numer. Math.* 118.4 (2011), p. 601–661 (cf. p. xii, 175, 177).
- [BLR14] F. BOYER et J. LE ROUSSEAU. “Carleman estimates for semi-discrete parabolic operators and application to the controllability of semi-linear semi-discrete parabolic equations”. In : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 31.5 (2014), p. 1035–1078 (cf. p. xii, 175).
- [Boy13] F. BOYER. “On the penalised HUM approach and its applications to the numerical approximation of null-controls for parabolic problems”. In : *CANUM 2012, 41e Congrès National d’Analyse Numérique*. T. 41. ESAIM Proc. EDP Sci., Les Ulis, 2013, p. 15–58 (cf. p. xii, 8, 57, 158, 159, 161, 165, 167, 168, 175, 176, 189).
- [Bre83] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Théorie et applications. [Theory and applications]. Paris : Masson, 1983 (cf. p. 16, 28, 45, 170).
- [Cia82] P. CIARLET. *Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Masson, Paris, 1982, p. xii+279 (cf. p. 168, 170, 174).
- [DL88] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Vol. 8. INSTN: Collection Enseignement. [INSTN: Teaching Collection]. Évolution: semi-groupe, variationnel. [Evolution: semigroups, variational methods], Reprint of the 1985 edition. Paris : Masson, 1988, i–xliv, 345–854 and i–xix (cf. p. 3, 170).
- [ET74] I. EKELAND et R. TEMAM. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Collection Études Mathématiques. Dunod; Gauthier-Villars, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974, p. x+340 (cf. p. 158, 170, 171).
- [FB53] W. FENCHEL et D. BLACKETT. *Convex cones, sets, and functions*. Princeton University, Department of Mathematics, Logistics Research Project, 1953 (cf. p. 170).
- [FCM11] E. FERNÁNDEZ-CARA et A. MÜNCH. “Numerical null controllability of a semi-linear heat equation via a least squares method”. In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 349.15-16 (2011), p. 867–871 (cf. p. 177).
- [FCM12] E. FERNÁNDEZ-CARA et A. MÜNCH. “Numerical null controllability of semi-linear 1-D heat equations: fixed point, least squares and Newton methods”. In : *Math. Control Relat. Fields* 2.3 (2012), p. 217–246 (cf. p. 177).
- [FCM13] E. FERNÁNDEZ-CARA et A. MÜNCH. “Strong convergent approximations of null controls for the 1D heat equation”. In : *EMA J.* 61 (2013), p. 49–78 (cf. p. 177).

- [FCM14] E. FERNÁNDEZ-CARA et A. MÜNCH. “Numerical exact controllability of the 1D heat equation: duality and Carleman weights”. In : *J. Optim. Theory Appl.* 163.1 (2014), p. 253–285 (cf. p. 177).
- [Fen49] W. FENCHEL. “On conjugate convex functions”. In : *Canadian J. Math.* 1 (1949), p. 73–77 (cf. p. 170).
- [FI96] A. V. FURSIKOV et O. Y. IMANUVILOV. *Controllability of evolution equations*. 34. Seoul National University, 1996 (cf. p. xi, 12, 24, 34, 76, 84, 134, 136, 177).
- [Fur00] A. V. FURSIKOV. *Optimal control of distributed systems: theory and applications*. T. 187. Amer Mathematical Society, 2000 (cf. p. 170).
- [GBPG06] M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. “Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force”. In : *Asymptot. Anal.* 46.2 (2006), p. 123–162 (cf. p. xi, 16, 24, 28, 68, 72, 193).
- [GLH08] R. GLOWINSKI, J.-L. LIONS et J. HE. *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*. T. 117. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2008, p. xii+458 (cf. p. xii, 159, 165, 168, 180).
- [JOP+01] E. JONES, T. OLIPHANT, P. PETERSON et al. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. [Online; accessed 2015-09-16]. 2001– (cf. p. xii, 187).
- [Lio68] J.-L. LIONS. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Paris : Dunod, 1968, p. xiii+426 (cf. p. xii, 3, 7, 26, 27, 85, 86, 98, 165, 166, 170, 173).
- [LT06] S. LABBÉ et E. TRÉLAT. “Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems”. In : *Systems Control Lett.* 55.7 (2006), p. 597–609 (cf. p. xii, 175).
- [LW10] A. LOGG et G. N. WELLS. “DOLFIN: Automated Finite Element Computing”. In : *ACM Transactions on Mathematical Software* 37.2 (2010) (cf. p. xii, 187).
- [Paz83] A. PAZY. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. T. 44. Applied Mathematical Sciences. New York : Springer-Verlag, 1983, p. viii+279 (cf. p. 3, 167).
- [Roc66] R. ROCKAFELLAR. “Extension of Fenchel’s duality theorem for convex functions”. In : *Duke Math. J.* 33 (1966), p. 81–89 (cf. p. 170).
- [Roc67] T. ROCKAFELLAR. “Duality and stability in extremum problems involving convex functions”. In : *Pacific J. Math.* 21 (1967), p. 167–187 (cf. p. 170).
- [Roc69] T. ROCKAFELLAR. “Convex functions and duality in optimization problems and dynamics”. In : *Mathematical systems theory and economics, I, II (Proc. Internat. Summer School, Varenna, 1967)*. Springer, Berlin, 1969, 117–141. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Vols. 11, 12 (cf. p. 170).



---

## Bibliographie générale

- [AB13] F. ALABAU-BOUSSOIRA. “A hierarchic multi-level energy method for the control of bidiagonal and mixed  $n$ -coupled cascade systems of PDE’s by a reduced number of controls”. In : *Adv. Differential Equations* 18.11-12 (2013), p. 1005–1072 (cf. p. 34, 36, 52, 70, 131).
- [ABCO15] F. ALABAU-BOUSSOIRA, J.-M. CORON et G. OLIVE. “Internal controllability of first order quasilinear hyperbolic systems with a reduced number of controls”. In : *Submitted* (2015) (cf. p. 29, 72, 73).
- [ABL11] F. ALABAU-BOUSSOIRA et M. LÉAUTAUD. “Indirect controllability of locally coupled systems under geometric conditions”. In : *Comptes Rendus Mathématique* 349.7 (2011), p. 395–400 (cf. p. 99).
- [ABL13a] F. ALABAU-BOUSSOIRA et M. LÉAUTAUD. “Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications”. In : *J. Math. Pures Appl.* (9) 99.5 (2013), p. 544–576 (cf. p. 70).
- [ABL13b] F. ALABAU-BOUSSOIRA et M. LÉAUTAUD. “Indirect controllability of locally coupled wave-type systems and applications”. In : *J. Math. Pures Appl.* 99 (2013), 544—576 (cf. p. 36, 52, 99).
- [AK+03] F. AMMAR KHODJA et al. “Controllability to the trajectories of phase-field models by one control force”. In : *SIAM J. Control Optim.* 42.5 (2003), p. 1661–1680 (cf. p. 34).
- [AK+05] F. AMMAR KHODJA et al. “Null-controllability of some systems of parabolic type by one control force”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 11.3 (2005), 426–448 (electronic) (cf. p. 34, 99).
- [AK+09a] F. AMMAR KHODJA et al. “A generalization of the Kalman rank condition for time-dependent coupled linear parabolic systems”. In : *Differ. Equ. Appl.* 1.3 (2009), p. 427–457 (cf. p. 31, 38, 55, 70, 99, 131, 132, 136, 145).
- [AK+09b] F. AMMAR-KHODJA et al. “A Kalman rank condition for the localized distributed controllability of a class of linear parabolic systems”. In : *J. Evol. Equ.* 9.2 (2009), p. 267–291 (cf. p. 31, 37, 70, 99, 131).

- [AK+11a] F. AMMAR-KHODJA et al. "Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems: a survey". In : *Math. Control Relat. Fields* 1.3 (2011), p. 267–306 (cf. p. 16, 70, 99, 105, 130, 135, 136).
- [AK+11b] F. AMMAR-KHODJA et al. "The Kalman condition for the boundary controllability of coupled parabolic systems. Bounds on biorthogonal families to complex matrix exponentials". In : *J. Math. Pures Appl.* (9) 96.6 (2011), p. 555–590 (cf. p. 58).
- [AK+12] F. AMMAR KHODJA et al. "Controllability of some system of parabolic equations". In : *Proceedings of the II Encuentro RSME-SMM*. 2012 (cf. p. 99).
- [AK+14] F. AMMAR KHODJA et al. "Minimal time of controllability of two parabolic equations with disjoint control and coupling domains". In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 352.5 (2014), p. 391–396 (cf. p. 7, 70, 99, 135).
- [AK+15] F. AMMAR-KHODJA et al. "New phenomena for the null controllability of parabolic systems: Minimal time and geometrical dependence". In : *Submitted* (2015) (cf. p. 7, 18, 37, 53, 99, 101, 105, 110, 111, 117, 120–124, 135, 152).
- [AK08] G. ALLAIRE et S. M. KABER. *Numerical linear algebra*. T. 55. Texts in Applied Mathematics. Translated from the 2002 French original by Karim Trabelsi. Springer, New York, 2008, p. xii+271 (cf. p. 181).
- [AKBD06a] F. AMMAR-KHODJA, A. BENABDALLAH et C. DUPAIX. "Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force". In : *J. Math. Anal. Appl.* 320.2 (2006), p. 928–943 (cf. p. 70).
- [AKBD06b] F. AMMAR KHODJA, A. BENABDALLAH et C. DUPAIX. "Null-controllability of some reaction-diffusion systems with one control force". In : *J. Math. Anal. Appl.* 320.2 (2006), p. 928–943 (cf. p. 34).
- [AKCD15] F. AMMAR KHODJA, F. CHOULY et M. DUPREZ. "Partial null controllability of parabolic linear systems by  $m$  forces". In : *submitted* (2015) (cf. p. xii, 7, 54, 165, 187, 191).
- [All05] G. ALLAIRE. *Analyse numérique et optimisation: une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005 (cf. p. 174, 181, 182, 185).
- [Bar00] V. BARBU. "Exact controllability of the superlinear heat equation". In : *Appl. Math. Optim.* 42.1 (2000), p. 73–89 (cf. p. xi, 24, 84).
- [Ben+14] A. BENABDALLAH et al. "Controllability to trajectories for some parabolic systems of three and two equations by one control force". In : *Math. Control Relat. Fields* 4.1 (2014), p. 17–44 (cf. p. 36, 39, 48–50, 71, 100, 125, 131).
- [BGBPG04a] O. BODART, M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. "A local result on insensitizing controls for a semilinear heat equation with nonlinear boundary Fourier conditions". In : *SIAM J. Control Optim.* 43.3 (2004), 955–969 (electronic) (cf. p. xi, 24, 28).

- [BGBPG04b] O. BODART, M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. “Existence of insensitizing controls for a semilinear heat equation with a superlinear nonlinearity”. In : *Comm. Partial Differential Equations* 29.7-8 (2004), p. 1017–1050 (cf. p. xi, 16, 24, 28, 193).
- [BGBPG04c] O. BODART, M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. “Insensitizing controls for a heat equation with a nonlinear term involving the state and the gradient”. In : *Nonlinear Anal.* 57.5-6 (2004), p. 687–711 (cf. p. xi, 24, 28, 193).
- [BH03] D. BOTHE et D. HILHORST. “A reaction-diffusion system with fast reversible reaction”. In : *J. Math. Anal. Appl.* 286.1 (2003), p. 125–135 (cf. p. 1).
- [BHLR10a] F. BOYER, F. HUBERT et J. LE ROUSSEAU. “Discrete Carleman estimates for elliptic operators and uniform controllability of semi-discretized parabolic equations”. In : *J. Math. Pures Appl. (9)* 93.3 (2010), p. 240–276 (cf. p. xii, 175).
- [BHLR10b] F. BOYER, F. HUBERT et J. LE ROUSSEAU. “Discrete Carleman estimates for elliptic operators in arbitrary dimension and applications”. In : *SIAM J. Control Optim.* 48.8 (2010), p. 5357–5397 (cf. p. xii, 175).
- [BHLR11] F. BOYER, F. HUBERT et J. LE ROUSSEAU. “Uniform controllability properties for space/time-discretized parabolic equations”. In : *Numer. Math.* 118.4 (2011), p. 601–661 (cf. p. xii, 175, 177).
- [BLR14] F. BOYER et J. LE ROUSSEAU. “Carleman estimates for semi-discrete parabolic operators and application to the controllability of semi-linear semi-discrete parabolic equations”. In : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 31.5 (2014), p. 1035–1078 (cf. p. xii, 175).
- [BO14] F. BOYER et G. OLIVE. “Approximate controllability conditions for some linear 1D parabolic systems with space-dependent coefficients”. In : *Math. Control Relat. Fields* 4.3 (2014), p. 263–287 (cf. p. 36, 53, 101, 122, 135).
- [Boy13] F. BOYER. “On the penalised HUM approach and its applications to the numerical approximation of null-controls for parabolic problems”. In : *CANUM 2012, 41e Congrès National d’Analyse Numérique*. T. 41. ESAIM Proc. EDP Sci., Les Ulis, 2013, p. 15–58 (cf. p. xii, 8, 57, 158, 159, 161, 165, 167, 168, 175, 176, 189).
- [Bre83] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree]. Théorie et applications. [Theory and applications]. Paris : Masson, 1983 (cf. p. 16, 28, 45, 170).
- [BT73] C. BARDOS et L. TARTAR. “Sur l’unicité rétrograde des équations paraboliques et quelques questions voisines”. In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 50 (1973), p. 10–25 (cf. p. 67).
- [CG09] J.-M. CORON et S. GUERRERO. “Null controllability of the  $N$ -dimensional Stokes system with  $N - 1$  scalar controls”. In : *J. Differential Equations* 246.7 (2009), p. 2908–2921 (cf. p. 77, 78).

- [CH09] S. CHAKRABARTY et F. B. HANSON. "Distributed parameters deterministic model for treatment of brain tumors using Galerkin finite element method". In : *Math. biosci.* 219.2 (2009), p. 129–141 (cf. p. 1, 130).
- [Cia82] P. CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1982, p. xii+279 (cf. p. 168, 170, 174).
- [CL14] J.-M. CORON et P. LISSY. "Local null controllability of the three-dimensional Navier-Stokes system with a distributed control having two vanishing components". In : *Invent. Math.* 198.3 (2014), p. 833–880 (cf. p. 29, 33, 72–74, 90, 91).
- [Cor07] J.-M. CORON. *Control and nonlinearity*. T. 136. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, 2007, p. xiv+426 (cf. p. 1, 6, 12, 73, 76, 105, 137).
- [DL14] B. DEHMAN et M. LÉAUTAUD. "Controllability of two coupled wave equations on a compact manifold". In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 211 (2014), p. 113–187 (cf. p. 99).
- [DL15] M. DUPREZ et P. LISSY. "Indirect controllability of some linear parabolic systems of  $m$  equations with  $m - 1$  controls involving coupling terms of zero or first order." In : *Submitted* (2015) (cf. p. xi, 29, 33, 100, 125).
- [DL88] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Vol. 8. INSTN: Collection Enseignement. [INSTN: Teaching Collection]. Évolution: semi-groupe, variationnel. [Evolution: semigroups, variational methods], Reprint of the 1985 edition. Paris : Masson, 1988, i–xliv, 345–854 and i–xix (cf. p. 3, 170).
- [Dou+02] A. DOUBOVA et al. "On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient". In : *SIAM J. Control Optim.* 41.3 (2002), p. 798–819 (cf. p. 14).
- [DR77] S. DOLECKI et D. L. RUSSELL. "A general theory of observation and control". In : *SIAM J. Control Optimization* 15.2 (1977), p. 185–220 (cf. p. 5).
- [Dup15] M. DUPREZ. "Controllability of a 2X2 parabolic system by one force with space-dependent coupling term of order one." In : *submitted* (2015) (cf. p. xii, 7).
- [ET74] I. EKELAND et R. TEMAM. *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Collection Études Mathématiques. Dunod; Gauthier-Villars, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974, p. x+340 (cf. p. 158, 170, 171).
- [Eva10] L. C. EVANS. *Partial differential equations*. Second. T. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010 (cf. p. 25, 66, 67, 78).
- [Fat66] H. O. FATTORINI. "Some remarks on complete controllability". In : *SIAM J. Control* 4 (1966), p. 686–694 (cf. p. 36, 52, 100, 122).

- [FB53] W. FENCHEL et D. BLACKETT. *Convex cones, sets, and functions*. Princeton University, Department of Mathematics, Logistics Research Project, 1953 (cf. p. 170).
- [FC+06] E. FERNÁNDEZ-CARA et al. “Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions: the linear case”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 12.3 (2006), 442–465 (electronic) (cf. p. 43, 44, 77, 92).
- [FCGBT10] E. FERNÁNDEZ-CARA, M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. “Boundary controllability of parabolic coupled equations”. In : *J. Funct. Anal.* 259.7 (2010), p. 1720–1758 (cf. p. 13, 58, 98, 99, 107, 154).
- [FCM11] E. FERNÁNDEZ-CARA et A. MÜNCH. “Numerical null controllability of a semi-linear heat equation via a least squares method”. In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 349.15-16 (2011), p. 867–871 (cf. p. 177).
- [FCM12] E. FERNÁNDEZ-CARA et A. MÜNCH. “Numerical null controllability of semi-linear 1-D heat equations: fixed point, least squares and Newton methods”. In : *Math. Control Relat. Fields* 2.3 (2012), p. 217–246 (cf. p. 177).
- [FCM13] E. FERNÁNDEZ-CARA et A. MÜNCH. “Strong convergent approximations of null controls for the 1D heat equation”. In : *EMA J.* 61 (2013), p. 49–78 (cf. p. 177).
- [FCM14] E. FERNÁNDEZ-CARA et A. MÜNCH. “Numerical exact controllability of the 1D heat equation: duality and Carleman weights”. In : *J. Optim. Theory Appl.* 163.1 (2014), p. 253–285 (cf. p. 177).
- [FCZ00] E. FERNÁNDEZ-CARA et E. ZUAZUA. “The cost of approximate controllability for heat equations: the linear case”. In : *Adv. Differential Equations* 5.4-6 (2000), p. 465–514 (cf. p. 7, 138).
- [Fen49] W. FENCHEL. “On conjugate convex functions”. In : *Canadian J. Math.* 1 (1949), p. 73–77 (cf. p. 170).
- [FI96] A. V. FURSIKOV et O. Y. IMANUVILOV. *Controllability of evolution equations*. 34. Seoul National University, 1996 (cf. p. xi, 12, 24, 34, 76, 84, 134, 136, 177).
- [FR71] H. O. FATTORINI et D. L. RUSSELL. “Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension”. In : *Arch. Rational Mech. Anal.* 43 (1971), p. 272–292 (cf. p. xi, 16, 18, 33, 151, 152).
- [FR74] H. O. FATTORINI et D. L. RUSSELL. “Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations”. In : *Quart. Appl. Math.* 32 (1974/75), p. 45–69 (cf. p. xi, 16, 33).
- [Fur00] A. V. FURSIKOV. *Optimal control of distributed systems: theory and applications*. T. 187. Amer Mathematical Society, 2000 (cf. p. 170).
- [GBPG06] M. GONZÁLEZ-BURGOS et R. PÉREZ-GARCÍA. “Controllability results for some nonlinear coupled parabolic systems by one control force”. In : *Asymptot. Anal.* 46.2 (2006), p. 123–162 (cf. p. xi, 16, 24, 28, 68, 72, 193).
- [GBT10] M. GONZÁLEZ-BURGOS et L. de TERESA. “Controllability results for cascade systems of  $m$  coupled parabolic PDEs by one control force”. In : *Port. Math.* 67.1 (2010), p. 91–113 (cf. p. 34, 35, 39, 40, 50, 68, 70, 99, 108, 131, 132, 136, 148).



- [Ghi86] J.-M. GHIDAGLIA. “Some backward uniqueness results”. In : *Nonlinear Anal.* 10.8 (1986), p. 777–790 (cf. p. 143).
- [GI13] S. GUERRERO et O. Y. IMANUVILOV. “Remarks on non controllability of the heat equation with memory”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 19.1 (2013), p. 288–300 (cf. p. xi, 20, 154).
- [GLH08] R. GLOWINSKI, J.-L. LIONS et J. HE. *Exact and approximate controllability for distributed parameter systems*. T. 117. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2008, p. xii+458 (cf. p. xii, 159, 165, 168, 180).
- [Gro86] M. GROMOV. *Partial differential relations*. T. 9. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Berlin : Springer-Verlag, 1986, p. x+363 (cf. p. xi, 29, 73).
- [Gue07a] S. GUERRERO. “Controllability of systems of Stokes equations with one control force: existence of insensitizing controls”. In : *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 24.6 (2007), p. 1029–1054 (cf. p. 44).
- [Gue07b] S. GUERRERO. “Null controllability of some systems of two parabolic equations with one control force”. In : *SIAM J. Control Optim.* 46.2 (2007), p. 379–394 (cf. p. 35, 39, 43, 44, 50, 51, 70, 99, 100, 125).
- [HP09] T. HILLEN et K. J. PAINTER. “A user’s guide to PDE models for chemotaxis”. In : *J. Math. Biol.* 58.1-2 (2009), p. 183–217 (cf. p. 1).
- [IY03] O. Y. IMANUVILOV et M. YAMAMOTO. “Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations”. In : *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 39.2 (2003), p. 227–274 (cf. p. 92).
- [JOP+01] E. JONES, T. OLIPHANT, P. PETERSON et al. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. [Online; accessed 2015-09-16]. 2001– (cf. p. xii, 187).
- [KFA69] R. E. KALMAN, P. L. FALB et M. A. ARBIB. *Topics in mathematical system theory*. New York : McGraw-Hill Book Co., 1969, p. xiv+358 (cf. p. 10, 38).
- [KT10] O. KAVIAN et L. de TERESA. “Unique continuation principle for systems of parabolic equations”. In : *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 16.2 (2010), p. 247–274 (cf. p. 37, 101).
- [LAK82] D LAUFFENBURGER, R ARIS et K KELLER. “Effects of cell motility and chemotaxis on microbial population growth.” In : *Biophysical journal* 40.3 (1982), p. 209 (cf. p. 1).
- [Lio68] J.-L. LIONS. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Paris : Dunod, 1968, p. xiii+426 (cf. p. xii, 3, 7, 26, 27, 85, 86, 98, 165, 166, 170, 173).
- [Lis13] P. LISSY. *Sur la contrôlabilité et son coût pour quelques équations aux dérivées partielles*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2013 (cf. p. 29, 67).

- [LM68] J.-L. LIONS et E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 2. Travaux et Recherches Mathématiques*, No. 18. Paris : Dunod, 1968, p. xvi+251 (cf. p. 94, 130).
- [LR95] G. LEBEAU et L. ROBBIANO. “Contrôle exact de l’équation de la chaleur”. In : *Comm. Partial Differential Equations* 20.1-2 (1995), p. 335–356 (cf. p. 34).
- [LSU68] O. A. LADYZENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV et N. N. URALCCEVA. “Linear and quasilinear equations of parabolic type”. In : Translated from the Russian by S. Smith. *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 23 (1968), p. xi+648 (cf. p. 29, 44).
- [LT06] S. LABBÉ et E. TRÉLAT. “Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems”. In : *Systems Control Lett.* 55.7 (2006), p. 597–609 (cf. p. xii, 175).
- [LW10] A. LOGG et G. N. WELLS. “DOLFIN: Automated Finite Element Computing”. In : *ACM Transactions on Mathematical Software* 37.2 (2010) (cf. p. xii, 187).
- [Mau13] K. MAUFFREY. “On the null controllability of a  $3 \times 3$  parabolic system with non-constant coefficients by one or two control forces”. In : *J. Math. Pures Appl.* (9) 99.2 (2013), p. 187–210 (cf. p. 131).
- [Mil06] L. MILLER. “The control transmutation method and the cost of fast controls”. In : *SIAM J. Control Optim.* 45.2 (2006), 762–772 (electronic) (cf. p. 36, 99).
- [Miz58] S. MIZOHATA. “Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques”. In : *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.* 31 (1958), p. 219–239 (cf. p. 135).
- [Oli12] G. OLIVE. “Null-controllability for some linear parabolic systems with controls acting on different parts of the domain and its boundary”. In : *Math. Control Signals Systems* 23.4 (2012), p. 257–280 (cf. p. 38, 131).
- [Oli14] G. OLIVE. “Boundary approximate controllability of some linear parabolic systems”. In : *Evol. Equ. Control Theory* 3.1 (2014), p. 167–189 (cf. p. 37, 101).
- [Paz83] A. PAZY. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. T. 44. Applied Mathematical Sciences. New York : Springer-Verlag, 1983, p. viii+279 (cf. p. 3, 167).
- [Roc66] R. ROCKAFELLAR. “Extension of Fenchel’s duality theorem for convex functions”. In : *Duke Math. J.* 33 (1966), p. 81–89 (cf. p. 170).
- [Roc67] T. ROCKAFELLAR. “Duality and stability in extremum problems involving convex functions”. In : *Pacific J. Math.* 21 (1967), p. 167–187 (cf. p. 170).
- [Roc69] T. ROCKAFELLAR. “Convex functions and duality in optimization problems and dynamics”. In : *Mathematical systems theory and economics, I, II (Proc. Internat. Summer School, Varenna, 1967)*. Springer, Berlin, 1969, 117–141. *Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics*, Vols. 11, 12 (cf. p. 170).

- [RT11a] L. ROSIER et L. de TERESA. "Exact controllability of a cascade system of conservative equations". In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 349.5-6 (2011), p. 291–296 (cf. p. 52, 99).
- [RT11b] L. ROSIER et L. de TERESA. "Exact controllability of a cascade system of conservative equations". In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 349.5-6 (2011), p. 291–296 (cf. p. 70).
- [SKT79] N. SHIGESADA, K. KAWASAKI et E. TERAMOTO. "Spatial segregation of interacting species". In : *Journal of Theoretical Biology* 79.1 (1979), p. 83–99 (cf. p. 1).
- [SM67] L. M. SILVERMAN et H. E. MEADOWS. "Controllability and observability in time-variable linear systems". In : *SIAM J. Control* 5 (1967), p. 64–73 (cf. p. 38).
- [TW09] M. TUCSNAK et G. WEISS. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, p. xii+483 (cf. p. 1, 13).
- [Zab92] J. ZABCZYK. *Mathematical control theory: an introduction*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992 (cf. p. 1, 4).
- [ÉT89] P. ÉRDI et J. TÓTH. *Mathematical models of chemical reactions*. Nonlinear Science: Theory and Applications. Theory and applications of deterministic and stochastic models. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989, p. xxiv+259 (cf. p. 1).

# Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la contrôlabilité approchée et à zéro des systèmes paraboliques linéaires sur un domaine non vide borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), contrôlés par moins de forces que d'équations. Les contrôles seront localisés sur un ouvert de  $\Omega$  ou sur son bord. Nous étudierons deux problèmes différents.

Le premier consiste à contrôler une des équations indirectement à l'aide d'un opérateur de couplage d'ordre un. Nous obtenons alors des résultats pour plusieurs classes d'opérateurs et de systèmes.

La deuxième question que nous étudierons est de savoir s'il est possible de contrôler seulement certaines composantes de la solution du système. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante lorsque les coefficients de couplage sont constants ou dépendent du temps et étudions un système simplifié quand ils dépendent de l'espace.

Nous terminerons en détaillant un schéma numérique avec lequel nous fournirons des perspectives quant à quelques problèmes qui restent ouverts en contrôlabilité partielle des systèmes paraboliques linéaires.

**Mots clefs :** Contrôlabilité, Observabilité, Condition de Kalman, Méthode des moments, Inégalité de Carleman, Systèmes paraboliques

# Abstract

This thesis is devoted to the study of the approximate and null controllability of linear parabolic systems on a nonempty bounded domain  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ), controlled by less controls than equations. The controls will be localized in an open set of  $\Omega$  or on its boundary. We will study two different problems.

The first of them involves controlling one of the equations indirectly with a coupling operator of order one. We obtain some results for different class of operators and systems.

The second question we will study is to know if it is possible to control only some components of the solution of the system. We give a necessary and sufficient condition when the coupling coefficients are constant or time depending and study a simplified system when they are space dependent.

We will finish by giving details on a numerical scheme with which we provide perspectives concerning some open problems in partial controllability of linear parabolic systems.

**Key words :** Controllability, Observability, Kalman condition, Moment Method, Carleman inequalities, Parabolic Systems.

**MSC 2010 :** 93B05, 93B07, 93C20, 93C05, 35K40.