HAL
open science

Méthodologies de réduction de modèles multiphysiques pour la conception et la commande d'une chaîne de traction électrique

Frédéric da Silva

To cite this version:

Frédéric da Silva. Méthodologies de réduction de modèles multiphysiques pour la conception et la commande d'une chaîne de traction électrique. Autre. Université Paris Saclay (COmUE), 2015. Français. NNT : 2015SACLC022 . tel-01275878

HAL Id: tel-01275878

https://theses.hal.science/tel-01275878v1

Submitted on 18 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2015SACLC022

THESE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY
PREPAREE A
CENTRALESUPELEC

ECOLE DOCTORALE N° 573
Interfaces : approches interdisciplinaires / fondements, applications et innovation

Spécialité Mathématiques appliquées

Par

M. Frédéric DA SILVA

Méthodologies de réduction de modèles multiphysiques pour la conception et la commande d'une chaîne de traction électrique

Thèse présentée et soutenue à Saint-Ouen, le 24 novembre 2015 :

Composition du Jury :

M. MENCIK Jean-Mathieu	Professeur des Universités, INSA Centre Val de Loire	Président
M. BALMES Etienne	Professeur des Universités, Arts et Métiers ParisTech	Rapporteur
M. VIVIER Stéphane	Maître de conférences (HDR), UTC	Rapporteur
M. CHOLEY Jean-Yves	Maître de conférences, SUPMECA	Examinateur
M. PLATEAUX Régis	Maître de conférences, SUPMECA	Examinateur
M. RIVIERE Alain	Professeur des Universités, SUPMECA	Directeur de thèse
M. CHEVALLIER Gaël	Professeur des Universités, FEMTO-ST	Co-directeur de thèse
M. MOHAND-KACI Ibrahim	Architecte Métier Système, RENAULT SAS	Invité

ÉCOLE DOCTORALE
INTERFACES
Approches Interdisciplinaires : Fondements, Applications et Innovation

Titre : Méthodologies de réduction de modèles multiphysiques pour la conception et la commande d'une chaîne de traction électrique

Mots clés : Réduction de modèle, POD, Analyse modale, Modes de composants, Thermique, Electromagnétisme

Résumé : La simulation numérique occupe une part de plus en plus importante dans les phases de conception mais aussi de validation de systèmes innovants. Dans le cadre de la conception d'une chaîne de traction d'un véhicule électrique, la simulation numérique peut par exemple être employée pour choisir une technologie de moteur électrique ou encore pour mettre au point des stratégies de pilotage au regard de critères de décision tels que l'autonomie du véhicule, son coût mais aussi sa performance.

Les systèmes devenant de plus en plus complexes, ils requièrent des simulations de plus en plus fines afin d'appréhender au mieux les phénomènes qu'ils mettent en œuvre - par exemple l'étude des pertes fer dans une machine électrique. L'utilisation de simulations 3D permet d'avoir des résultats très précis à l'échelle d'un organe mais ne se prête pas encore à l'étude de systèmes de grande taille (c'est-à-dire avec beaucoup de degrés de liberté, de nombreux paramètres d'optimisation et plusieurs domaines de la Physique en jeu). En effet, les simulations 3D sont d'autant plus coûteuses en temps de calcul que le modèle à étudier contient de degrés de liberté. C'est pourquoi, depuis quelques années les techniques de réduction de modèles attisent les développements. En effet, elles permettent de garantir un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats produits par les modèles réduits.

Nous nous intéressons ici à l'utilisation de ces techniques dans un contexte industriel autour de deux axes :

- l'étude de phénomènes thermiques (dans les modules d'électronique de puissance)
- l'étude de phénomènes électromagnétiques (dans les machines électriques)

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France

ÉCOLE DOCTORALE
INTERFACES
Approches Interdisciplinaires : Fondements, Applications et Innovation

Title: Multiphysics model reduction methodologies for the design and control of an electric powertrain

Keywords: MOR, POD, Modal Analysis, Component Modes, Thermal, Electromagnetism

Abstract: Numerical simulations are widely used during the design phase of a product but also for the validation of an innovative system. For example, during the conception of an electric vehicle's powertrain, numerical simulations can be used to select the appropriate electric engine technology or for the development of control strategies taking into account decision criteria such as vehicle's autonomy, but also its cost and performance.

System's complexity is always increasing, so they require more and more precise simulations in order to better understand the phenomena involved - for example to study iron losses in an electric engine. 3D simulations provide very accurate results to study a body but are still not appropriate for the study of large scale systems (ie. with many degrees of freedom, many optimization parameters and several areas of Physics). Indeed, 3D simulations computing time cost is directly linked with the number of degrees of freedom. That's why, in recent years, model order reduction techniques stir developments because they guarantee a good compromise between the computation time and accuracy of results produced by these models.
This study will focuses on techniques that can be used in an industrial context around two axes:

- the study of thermal phenomena (in the power electronics modules)
- the study of electromagnetic phenomena (in electric engines)

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France

Remerciements

Quand arrive la rédaction de cette partie, c'est que tout va bien dans le meilleur des mondes et qu'une page s'apprête à être définitivement tournée. La Thèse, contrairement à ce que beaucoup de personnes pensent n'est pas un travail solitaire. Je ne souhaite pas faire ici un listing à n'en plus finir des personnes grâce auxquelles j'ai pu arriver au bout de mes travaux mais il est certain que sans eux la montagne aurait été d'autant plus dure à gravir...

Tout d'abord, je tiens à remercier Etienne Balmes et Stéphane Vivier d'avoir accepté de rapporter mes travaux. Leurs relectures assidues, leurs rapports précis et la sympathie de leurs commentaires lors de la soutenance furent réellement appréciables. Je remercie aussi Jean-Matthieu Mencik qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. Merci également à Alain Rivière, Jean-Yves Choley et Régis Plateaux pour leur présence et leur soutien.

Je tiens tout particulièrement à remercier Gaël, la principale personne sans qui la rédaction de cette partie de mon manuscrit n'aurait pas pu être possible... Merci pour tous ces bons moments passés ensemble que ce soit pour le travail ou juste pour plaisanter (et encore mieux quand on faisait les deux en même temps ! :)). Je pense qu'avoir un encadrant de Thèse comme toi est rare ! J'arrête de te faire trop de compliments sinon tu ne vas plus me croire... On repart quand au Brésil sinon ? Et oui tu n'as pas fini d'entendre parler de moi ! :)

Merci également à toute l'équipe Modélisation et Simulation 3EA de m'avoir si bien accueilli chez Renault. Plus particulièrement, merci à Mehdi, mon encadrant au quotidien qui malheureusement n'a pas pu être là le jour de ma soutenance. J'espère venir te voir un jour au Sénégal ! Merci également à Ibrahim, chef d'UET de choc qui a su me suivre jusqu'au bout. Enfin merci à tous les autres membres de l'équipe : François, Rémi, Pierre, Benjamin, Joe, Noëlle, Martine, Xavier, Olivier. Grâce à vous je venais et repartais du bureau avec la banane.

Je remercie également toutes les personnes que je pouvais cotoyer au laboratoire : Vincent ("le roi du bon coin"), Hervé ("Vévé"), Véronique ("Mamie"), Christel, Roberta ("Tatinha"), Franck, Jean-Luc, Nico et tant d'autres personnes. Même si mon trajet jusqu'au labo était régulièrement chaotique (ligne 13 oblige... :)), j'ai vraiment passé de très bons moments grâce à vous.

Enfin, je tiens à remercier ceux qui ont su être présents jusqu'aux derniers instants : Timothée, Mathilde, Paul, Lex, Aurélien, Pierre, Laura et Perrine. Merci à tous, merci à tout ceux que j'ai oublié de citer ici, merci à ma famille et à tous mes proches qui ont su me soutenir durant les traversées du désert...

Table des matières

Remerciements **5**

Table des matières **8**

Glossaire **9**

Introduction **11**

1 Un peu de physique **13**
1.1 Équations de la Thermique . . . 14
1.1.1 Quelques généralités . . . 14
1.1.2 Equation de la chaleur dans un milieu continu solide . . . 17
1.1.3 Formulation faible . . . 18
1.1.4 Méthode des Éléments Finis . . . 19
1.1.5 Processus de simulation . . . 20
1.2 Équations de l'Electromagnétisme . . . 22
1.2.1 Équations de Maxwell . . . 22
1.2.2 Existence d'un potentiel vecteur . . . 24
1.2.3 Formulation locale . . . 24
1.2.4 Formulation faible . . . 25
1.2.5 Méthode des Éléments Finis . . . 25
1.2.6 Processus de simulation . . . 27
1.3 Conclusion du Chapitre 1 . . . 33

2 Etat de l'art ROM **35**
2.1 Introduction . . . 36
2.2 Transformation linéaire des variables d'état . . . 40
2.2.1 Méthode de la synthèse modale . . . 40
2.2.2 Méthodes de sous-structuration . . . 41
2.2.3 Estimation d'erreur . . . 44
2.3 Méthodes optimales . . . 44
2.3.1 POD classique . . . 44
2.3.2 SVD . . . 45
2.3.3 POD Snapshots . . . 46
2.3.4 PGD . . . 46
2.4 Modèles réduits paramétriques . . . 48
2.4.1 Séparation de variables et POD/SVD . . . 48
2.4.2 Utilisation de la PGD . . . 49

2.4.3 Interpolation sur base de modèles réduits 49
2.5 Méthodes de réduction pour des problèmes non-linéaires 50
2.5.1 Identification 50
2.5.2 APR 51

3 Application à la Thermique linéaire 53
3.1 Cas d'étude 54
3.2 Réduction par troncature modale 58
3.3 Principe de la sélection sur un critère énergétique 65
3.4 Correction statique 69
3.5 Modes de composants 72
3.6 SVD ou réduction optimale 76
3.7 Conclusion du Chapitre 3 80

4 Application à l'électromagnétisme dans les moteurs tournants 81
4.1 État de l'art 82
4.2 Présentation du cas d'étude 82
4.3 Hypothèses de travail 86
4.3.1 Approximation de résolution 86
4.3.2 Simplifications géométriques 86
4.4 Bases de potentiels vecteurs 87
4.4.1 SVD sur une base de Snapshot 87
4.4.2 Base de vecteurs spécifiques 88
4.5 Bases de couples 93
4.6 Conclusion du Chapitre 4 102

5 Extensions et Utilisations des travaux 103
5.1 Introduction 104
5.2 Extension en Thermique non-linéaire 104
5.3 Cas d'applications 108
5.3.1 Utilisation en phase d'avant-projet 109
5.3.2 Utilisation en phase de développement / validation 114
5.3.3 Utilisation dans un module de surveillance embarqué 116
5.4 Conclusion du Chapitre 5 119

Conclusion générale 121

A Illustration de la saturation magnétique du matériau 125

B Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour différentes intensités 127

Bibliographie générale 135

Glossaire

h	:	Coefficient d'échange par convection (W/(m^2.K))
λ	:	Conductivité thermique (W/(m.K))
c_p	:	Capacité thermique (J/kg.K)
ρ	:	Masse volumique (kg/m^3)
$[C]$	:	Matrice des capacités thermiques (J/K)
$[K]$	:	Matrice des conductivités thermiques (W/K)
$\{Q\}$	:	Vecteur des chargements thermiques (W)
φ_c	:	Flux convectif (W)
φ_r	:	Flux rayonnant (W)
$\{R\}$	:	Vecteur Résidu
$\{T(t)\}$	:	Vecteur température à l'instant t
$\left\{\tilde{T}(t)\right\}$	:	Vecteur température projeté à l'instant t
Φ	:	Base de projection
ϕ_i	:	i^{ième} mode
T^*	:	Fonctions de pondération
N_i	:	Fonctions d'interpolation
$\overrightarrow{E}$	:	Vecteur Champ Electrique (V/m)
$\overrightarrow{B}$	:	Pseudo-Vecteur induction magnétique (T)
$\overrightarrow{H}$	:	Vecteur Champ magnétique (A/m)
$\overrightarrow{A}$	:	Vecteur Potentiel vecteur (Wb/m)
ρ	:	Densité volumique de charge (C/m^3)
ε_0	:	Permittivité diélectrique du vide (F/m)
μ	:	Perméabilité magnétique (H/m)
σ	:	Conductivité électrique (S/m)
$\overrightarrow{v}$	:	Vitesse de la particule (m/s)
$\overrightarrow{J}$	:	Vecteur densité de courant (A/m^2
Ω	:	Vitesse de rotation du rotor (rad/s)
C_{mot}	:	Couple moteur (N.m)
C_{res}	:	Couple résistant (N.m)
FEM	:	Finite Element Method
ROM	:	Reduced Order Model
DDL	:	Degré De Liberté
SVD	:	Singular Value Decomposition
POD	:	Proper Orthogonal Decomposition
UT	:	Unité de Temps

Introduction

Contexte industriel des travaux

La place de la simulation numérique dans un processus industriel

Depuis plusieurs dizaines d'années la simulation numérique occupe une place importante dans les bureaux d'étude. Celle-ci intervient à différentes étapes telles que la conception, la fabrication ou encore la distribution, et cela dans des secteurs d'activité comme par exemple l'aéronautique, l'automobile ou encore la production d'énergie.
Le recours à la simulation numérique a plusieurs finalités :

- réduire les coûts et accélérer les temps de développement en minimisant les recours aux prototypes physiques,
- détecter en amont les possibles erreurs de conception,
- explorer des solutions innovantes,
- aider en phase de spécifications,
- etc...

Voici un exemple concret : dans l'automobile, le poids est "l'ennemi" numéro 1 ! En effet, il influence directement les performances, la consommation ou encore les rejets de CO2. Les constructeurs cherchent donc à alléger au maximum les automobiles. Cependant les structures doivent conserver une certaine rigidité pour des raisons de sécurité (par exemple tenue de route ou aussi résistance aux crashs). Ainsi pour les crash test, le recours à la simulation numérique est devenu systématique afin d'optimiser au plus juste les structures tout en garantissant une sécurité optimale.

Le véhicule électrique

Dans le contexte automobile actuel, minimiser les impacts environnementaux est l'une des principales priorités des constructeurs. En effet, pour être commercialisés en Europe, les véhicules produits doivent respecter les normes fixées par l'Union Européenne (actuellement il s'agit de la Norme Euro 6). Pour cela les constructeurs ont recours à plusieurs solutions : optimisation des performances des moteurs, réduction des cylindrées (downsizing), hybridation de la motorisation ou encore électrification à 100%. La voiture électrique est aujourd'hui au coeur des attentions car elle possède de nombreux avantages sur le papier : "zéro" émissions, "zéro" bruit, confort de conduite, etc... Cependant l'autonomie de ces véhicules reste encore très limitée et représente un réel frein à leur développement. Citons par exemple :

- BMW i3 à batterie Lithium : 160km d'autonomie,
- Nissan Leaf à batterie Lithium-ion : 199km d'autonomie,
- Renault Zoé à batterie Lithium-ion : 210km d'autonomie,
- Tesla S à batterie Lithium : de 375 à 500km d'autonomie.

Les constructeurs ont donc comme objectif majeur d'essayer d'optimiser le rapport coût / autonomie / performances. Dans ce contexte la simulation numérique permet de reproduire les cycles d'utilisation normalisés (comme par exemple NEDC ou WLTC) avant même la réalisation d'un prototype.

Objectifs de la Thèse

Comme évoqué précédemment, la simulation numérique occupe une part de plus en plus importante dans les phases de conception mais aussi de validation de systèmes innovants. Dans le cadre de la conception d'une chaîne de traction d'un véhicule électrique, la simulation numérique peut par exemple être employée pour choisir une technologie de moteur électrique ou encore pour mettre au point des stratégies de pilotage au regard de critères de décision tels que l'autonomie du véhicule, son coût mais aussi sa performance.
Les systèmes devenant de plus en plus complexes, ils requièrent des simulations de plus en plus fines afin d'appréhender au mieux les phénomènes qu'ils mettent en oeuvre - par exemple l'étude des pertes fer dans une machine électrique. L'utilisation de simulations 3D permet d'avoir des résultats très précis à l'échelle d'un organe mais ne se prête pas encore aujourd'hui à l'étude de systèmes de grande taille (c'est-à-dire avec beaucoup de degrés de liberté, de nombreux paramètres d'optimisation et plusieurs domaines de la Physique en jeu). En effet, les simulations 3D sont d'autant plus coûteuses en temps de calcul que le modèle à étudier contient de degrés de liberté. C'est pourquoi, depuis quelques années les techniques de réduction de modèles attisent les développements car elles permettent de garantir un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats produits par les modèles réduits.
Nous nous intéressons ici à l'utilisation de ces techniques dans un contexte industriel autour de deux axes :

- l'étude de phénomènes thermiques (dans les modules d'électronique de puissance)
- l'étude de phénomènes électromagnétiques (dans les machines électriques)

Organisation du document

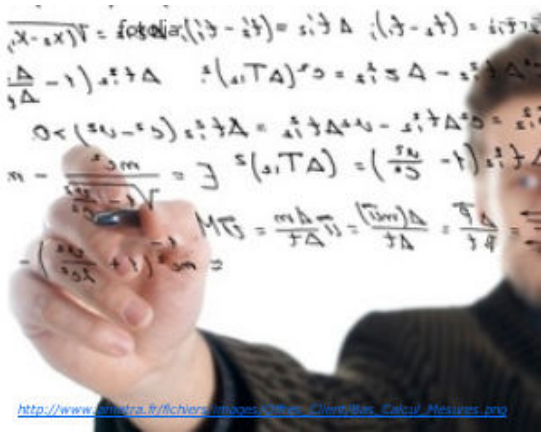
Le document s'articule autour des deux axes évoqués précédemment, à savoir l'étude de phénomènes thermiques et électromagnétiques.
Le Chapitre 1 a pour but de cadrer le contenu théorique associé aux deux domaines de la Physique étudiés et le Chapitre 2 fera un état de l'art des techniques de réduction de modèles.
Dans le Chapitre 3 nous présenterons tout à bord le cas d'étude thermique auquel nous nous intéressons, à savoir une carte d'électronique de puissance composée de plusieurs sources et de plusieurs empilements. Nous appliquerons plusieurs techniques de réduction de modèles sur ce cas pour comparer leurs performances et nous terminerons par proposer une démarche permettant de construire de manière *a priori* des modèles compacts pour la Thermique.
Dans le Chapitre 4 nous commencerons par présenter la machine électrique qui sera utilisée comme cas d'étude. Il s'agit d'une machine à réluctance variable composée de 6 pôles statoriques et 4 pôles rotoriques. Nous énoncerons ensuite quelques approches permettant de simplifier le modèle d'étude et nous proposerons finalement une démarche qui aboutit à une construction d'un modèle réduit électromagnétique capable étudier le couple fourni par cette machine.
Le Chapitre 5 sera constitué de plusieurs applications concrètes de modèles réduits dans un contexte industriel.

Chapitre 1

Un peu de physique

Sommaire

1.1 Équations de la Thermique 14
1.1.1 Quelques généralités 14
1.1.2 Equation de la chaleur dans un milieu continu solide 17
1.1.3 Formulation faible 18
1.1.4 Méthode des Éléments Finis 19
1.1.5 Processus de simulation 20
1.2 Équations de l'Electromagnétisme 22
1.2.1 Équations de Maxwell 22
1.2.2 Existence d'un potentiel vecteur 24
1.2.3 Formulation locale 24
1.2.4 Formulation faible 25
1.2.5 Méthode des Éléments Finis 25
1.2.6 Processus de simulation 27
1.3 Conclusion du Chapitre 1 33



Résumé

Ce chapitre présente le contenu théorique associé aux deux domaines de la Physique qui seront discutés dans cette partie : **la Thermique et l'Electromagnétisme**.

Dans ce chapitre nous aborderons successivement la description des deux domaines de la Physique que sont la Thermique et l'Electromagnétisme en en présentant les différentes formulations faible, forte et approximation par Éléments Finis respectifs. Ce chapitre servira de référence théorique pour la suite de ce manuscrit.

1.1 Équations de la Thermique

1.1.1 Quelques généralités

Il existe trois différents modes de transfert thermique (voir [1] pour plus de détails) :

- la **conduction thermique** : celle-ci s'effectue par transfert de chaleur de proche en proche. Spontanément l'énergie thermique part d'une région à température élevée pour aller vers une région à température plus basse jusqu'à atteindre l'équilibre. Il existe alors un gradient de température entre ces deux régions (cf Figure 1.1).

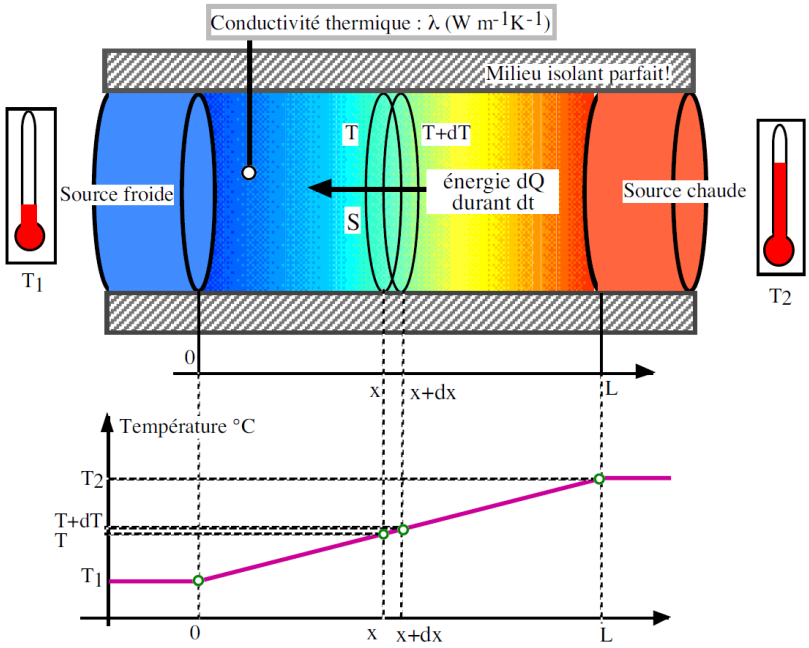


Figure 1.1 – Schéma explicatif de l'échange thermique par conduction λ [2]

Fourier a démontré expérimentalement en 1822 la relation établie en 1804 par Biot reliant le flux de chaleur φ au gradient de température par :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T) \tag{1.1}$$

avec :
$\vec{\varphi}$: flux de chaleur $(W.m^{-2})$
λ : conductivité thermique $(W.m^{-1}.K^{-1})$
T : température (K)

La conductivité thermique λ est un paramètre du matériau dépendant de la température qui traduit la "résistance" du matériau au passage de la puissance dissipée thermiquement.

Ce coefficient dépend généralement lui même de la température, notamment à très basse température (Figure 1.1). Cependant il peut souvent être considéré constant lorsque la plage de température étudiée est suffisamment étroite ($\Delta T < 50^{\circ}K$) et lorsque l'étude porte sur des températures proches de l'ambiant (300 ˚K). Sur la Figure 1.2 on peut ainsi voir l'évolution de cette conductivité en fonction de la température pour quelques matériaux caractéristiques.

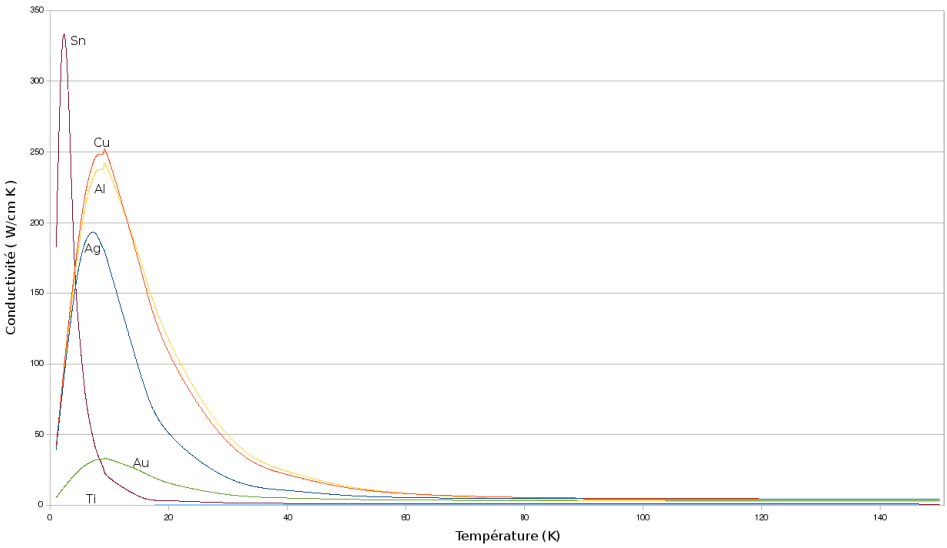


Figure 1.2 – Évolution de la conductivité thermique des matériaux (Sn, Cu, Al, Ag, Au, Ti) en fonction de la température [3]

– la **convection thermique** : celle-ci implique ou est impliquée par le déplacement d'un fluide, d'un liquide ou d'un gaz. Elle peut être soit de type naturelle soit de type forcée. Dans le premier cas, l'écoulement se fait naturellement et est dû à la différence de température qui implique une variation de densité des différentes zones du fluide. Dans le deuxième cas, l'écoulement est dû à des forces extérieures (turbines, ventilateurs, etc...). Dans notre contexte d'étude nous serons uniquement confrontés à des cas de convection forcée dont le flux convectif est noté φ_c.
En se référant au schéma de la Figure 1.3, la convection est caractérisée par la présence d'un fluide à la température T_f en mouvement contre une paroi de surface S qui est à la température T_s.
D'après la loi de Newton, la quantité de chaleur reçue par le solide de surface S à la température T_s est définie par :

$$\varphi_c = h(T_f - T_s) \tag{1.2}$$

avec :
φ_c : flux de chaleur par convection (W.m^2)
h : coefficient d'échange par convection (W/m^2.K)
T_f : température du fluide (K)
T_s : température de la paroi de surface S (K)

Lorsque la convection est forcée, h peut-être déterminé par l'analyse du nombre de Nusslet caractéristique de l'écoulement. h est ainsi égal au produit du nombre de Nusselt par la conductivité du fluide divisé par une grandeur géométrique caractéristique de l'écoule-

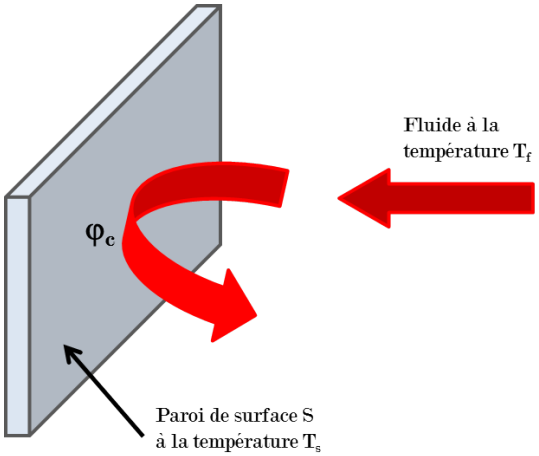


Figure 1.3 – Illustration de l'échange thermique par convection, avec φ_c : flux convectif

ment. Le nombre de Nusselt dépend lui même du nombre de Reynolds R_e et du nombre de Prandtl P_r.
avec :
$R_e = \rho V L/\mu$
$P_r = \mu c_p/\lambda$
V : la vitesse de l'écoulement
μ : la viscosité cinématique du fluide

Il est raisonnable de considérer h indépendant de la température T_S.

Dans le cas de la convection naturelle, le coefficient d'échange h peut être déterminé par la résolution des équations de Navier Stokes et en prenant en compte la dépendance de la masse volumique du fluide à la température. Dans ce cas, considérer h constant est une hypothèse beaucoup plus forte.

– le **rayonnement thermique** : celui-ci résulte de la propagation d'ondes électromagnétiques. En se référant à la Figure 1.4, nous considérons un corps noir à la température T_∞ émettant de l'énergie par sa surface sous forme de rayonnement thermique. Ces rayons sont émis dans toutes les directions de l'espace et suivant toutes les longueurs d'onde.
D'après la loi de Stefan-Boltzmann, la quantité de chaleur reçue par un corps gris à la température T est égale à :

$$\varphi_r = \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4) \tag{1.3}$$

avec :
σ : constante de Stefan-Boltzmann $(5,6703.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4})$
ε : émissivité intrinsèque à la surface $(0 \leq \varepsilon \leq 1)$
T : température (K)
T_∞ : température du corps émetteur (K)

Dans la suite de ces travaux, les échanges par rayonnement seront négligés.

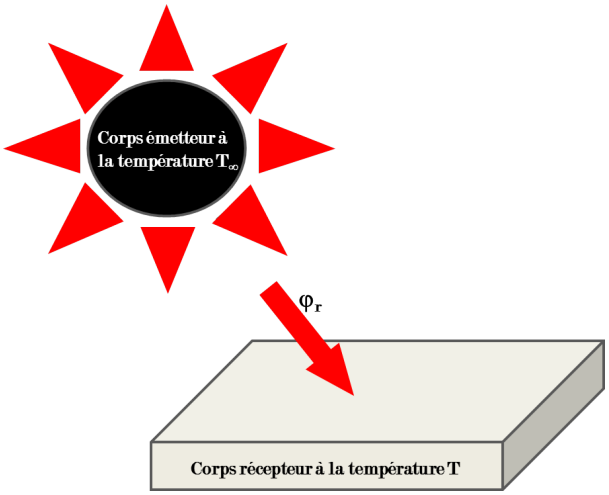


Figure 1.4 – Illustration de l'échange thermique par rayonnement, avec φ_r : flux par rayonnement

1.1.2 Equation de la chaleur dans un milieu continu solide

Afin d'établir l'équation de la chaleur, considérons un volume élémentaire quelconque **v** limité par la surface **s** présent dans le volume Ω (cf Figure 1.5). Les conditions aux limites appliquées sur le volume Ω sont de deux types :

- des flux surfaciques φ_i appliqués sur une surface $\partial\Omega_\varphi$,
- des températures T_i appliquées sur une surface $\partial\Omega_T$.

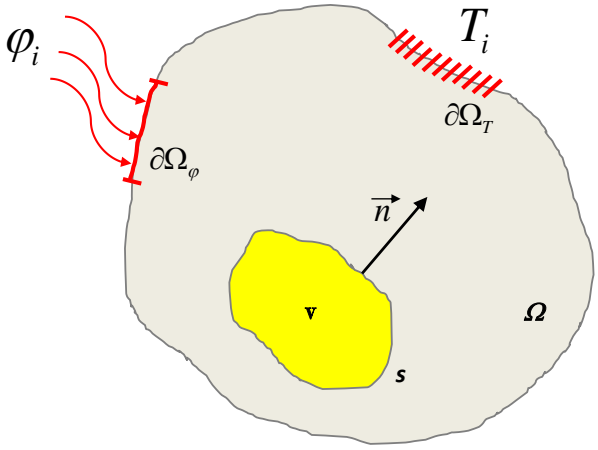


Figure 1.5 – Illustration des différentes conditions limites appliquées à un volume

La puissance thermique P_{th} présente dans un volume v est égale à la somme de la puissance thermique P_s engendrée par les volumes sources V_s et de la puissance thermique P_{flux} reçue sous forme de flux à travers la surface $\partial\Omega$.

Cela se traduit par :

$$P_{th} = P_s + P_{flux} \tag{1.4}$$

$$\underbrace{\int_v \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega}_{Terme\,d'évolution} = \underbrace{\int_{V_s} q dv}_{\substack{Terme \\ source}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} -\vec{n}.(-\lambda.\overrightarrow{grad}(T))dS}_{Loi\,de\,Fourier} \tag{1.5}$$

avec :

ρ : masse volumique du matériau (kg/m^3)
c_p : capacité thermique massique (J/(kg.K))
λ : conductivité thermique (W/(m.K))
q : source de chaleur volumique (W/m^3)
$\vec{n}$: normale sortante de v

Par application du théorème de Green-Ostrogradski [4] liant intégrale de surface à intégrale de volume et en réduisant v à un volume élémentaire sur lequel les grandeurs intégrées peuvent être considérées constantes, on obtient l'équation locale suivante :

$$\rho c_p \dot{T} - div(\lambda.\overrightarrow{grad}(T)) = q \tag{1.6}$$

1.1.3 Formulation faible

Afin de résoudre l'équation 1.6 par la méthode des Éléments Finis on utilise la méthode des résidus pondérés dans la formulation de Galerkin, voir par exemple [5]. Pour cela on introduit la fonction de pondération $T^* \in \{f(x,y,z) \,|\, f\, est\, C^2\, et\, f = T_i\, sur\, \partial\Omega\}$ dans l'équation 1.6 et on intègre sur Ω en pondérant par T^* :

$$\int_\Omega T^*[\rho c_p \dot{T} - div(\lambda.\overrightarrow{grad}(T)) - q]d\Omega = 0 \qquad \forall T^* \tag{1.7}$$

En utilisant la relation d'intégration par parties $div(f.\vec{v}) = f.div(\vec{v}) + \vec{v}.\overrightarrow{grad}(f)$, on obtient :

$$\int_\Omega T^* \rho c_p \dot{T} d\Omega - \int_\Omega div(T^*(\lambda.\overrightarrow{grad}(T)))d\Omega + \int_\Omega \overrightarrow{grad}(T^*).\lambda.\overrightarrow{grad}(T)d\Omega - \int_\Omega T^* q d\Omega = 0 \quad \forall T^* \tag{1.8}$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski : $\int_V div(\vec{f})dV = \int_S \vec{f}.\vec{n}dS$
En utilisant cette relation sur la deuxième intégrale, on obtient :

$$\int_\Omega T^* \rho c_p \dot{T} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{n}.T^*.\lambda.\overrightarrow{grad}(T)dS + \int_\Omega \overrightarrow{grad}(T^*).\lambda.\overrightarrow{grad}(T)d\Omega - \int_\Omega T^* q d\Omega = 0 \quad \forall T^* \tag{1.9}$$

Selon la loi de Fourier, la puissance thermique qui traverse $\partial\Omega$ dans le sens de $\overrightarrow{n}$ est égale à la somme des flux surfaciques, convectifs et des termes de rayonnement (ici nuls). Nous avons alors la relation suivante sur la surface $d\Omega$:

$$\overrightarrow{n}.(\lambda.\overrightarrow{grad}(T)) = \varphi_S + h(T_f - T_S) \tag{1.10}$$

On dispose alors de la formulation intégrale faible en température suivante :

$$\int_v T^* \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dv + \int_v \overrightarrow{grad}(T^*) \lambda . \overrightarrow{grad}(T)) dv - \int_v T^* q dv - \int_{\partial\Omega_\varphi} T^* h(T_f - T_s) dS - \int_{\partial\Omega_T} T^* \varphi_s dS = 0 \quad \forall T^* \tag{1.11}$$

1.1.4 Méthode des Éléments Finis

Le champ de température T(x,y,z ;t) a pour expression sur l'ensemble du domaine V :

$$T(x,y,z;t) = [N_1(x,y,z) \ ... \ N_i(x,y,z) \ ... \ N_n(x,y,z)] \begin{Bmatrix} T_1(t) \\ \vdots \\ T_i(t) \\ \vdots \\ T_n(t) \end{Bmatrix} \tag{1.12}$$

avec

- n : le nombre de noeuds du maillage
- $[N(x,y,z)]$ la matrice d'interpolation où les fonctions d'interpolation vérifient : $N_i(x_j, y_j, z_j) = \delta_{ij} \quad \forall i,j$ où (x_j, y_j, z_j) sont les coordonnées du noeud j
- $\{T\,(t)\}$: le vecteur des températures nodales

Afin de résoudre un problème par la méthode des Éléments Finis, il est tout d'abord nécessaire de discrétiser le volume d'étude à l'aide d'éléments (encore appelés volumes élémentaires en 3D). Sur la Figure 1.6, on peut voir l'exemple d'un élément hexaédrique linéaire dans son espace de référence (ξ, η, ζ). Le principe de la méthode des Éléments Finis consiste à résoudre ici les équations de la Thermique non pas sur le domaine réel complet mais plutôt sur un assemblage d'éléments. Cet assemblage permet de créer une approximation de l'élément réel. Cette approximation sera d'autant plus juste que les éléments de référence seront fins. La méthode des Éléments Finis n'est pas la seule façon de résoudre numériquement un problème mais reste à l'heure actuelle l'une des plus utilisées par les codes du commerce. Une alternative bien connue est la méthode des Volumes Finis (celle-ci est très largement employée dans le domaine de la mécanique des fluides).

L'interpolation présentée sur l'élément réel dans l'équation 1.12 peut donc maintenant s'écrire sur un élément de référence sous la forme :

$$T(\xi,\eta,\zeta;t) = [N_1(\xi,\eta,\zeta) \ ... \ N_i(\xi,\eta,\zeta) \ ... \ N_n(\xi,\eta,\zeta)] \begin{Bmatrix} T_1(t) \\ \vdots \\ T_i(t) \\ \vdots \\ T_n(t) \end{Bmatrix} \tag{1.13}$$

On en déduit alors

$$\dot{T} = [N] \left\{ \dot{T}_i \right\} \tag{1.14}$$

et

$$\{grad\, T_i\} = [B]\,\{T_i\} \quad avec \ \ [B] = \begin{bmatrix} \{B_1\} & \dots & \{B_i\} & \dots & \{B_n\} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

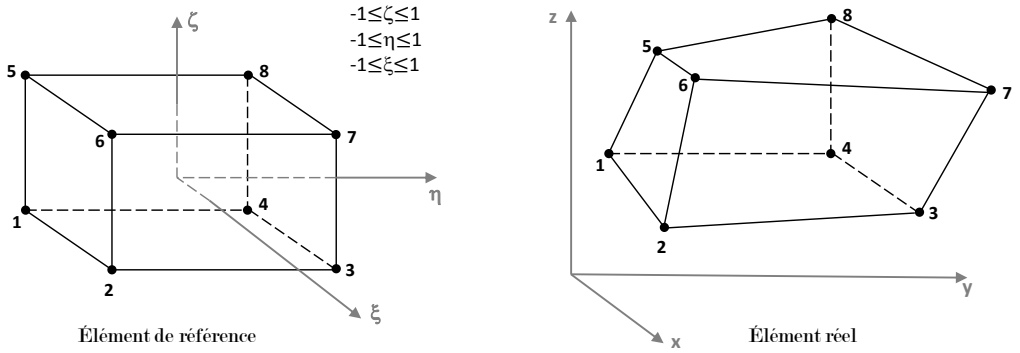


Figure 1.6 – Illustration d'un élément hexaédrique linéaire

où $\{B_i\}$ dépend du problème à traiter.

De même on peut écrire :

$$T^* = [N]\,\{T_i^*\} = \{T_i^*\}^T[N]^T \tag{1.16}$$

puis

$$\{grad\,T_i^*\} = [B]\,\{T_i^*\} \tag{1.17}$$

et

$$\{grad\,T_i^*\}^T = \{T_i^*\}^T[B]^T \tag{1.18}$$

A l'échelle d'un élément nous définissons :

$[C_e] = \int\limits_V \rho c_p[N]^T[N]\,dV$: matrice de capacité thermique élémentaire

$[K_e] = \int\limits_V [B]^T.[\lambda].[B]\,dV + \int\limits_S h[N]^T\,[N]\;dS$: matrice de conductivité thermique élémentaire

$\{Q\} = \int\limits_V [N]^T.q\,dV + \int\limits_S [N]^T hT_f\,dS$: vecteur des flux nodaux

Une fois ces équations décrites localement, une étape d'assemblage de chaque élément et de résolution du système permet d'aboutir à l'évaluation noeud à noeud de la température du modèle étudié. Cela se synthétise sous la forme :

$$\{T_i^*\}^T\left([C]\left\{\dot{T}_i\right\} + [K]\,\{T_i\} - \{Q\}\right) = 0 \tag{1.19}$$

1.1.5 Processus de simulation

Afin de résoudre un problème de Thermique par la méthode des Éléments Finis, la démarche à suivre est assez classique :

1. Construction de la géométrie

   Nous illustrons sur la Figure 1.7 la géométrie d'un redresseur en électronique de puissance. Ce type de composant est employé dans le but de redresser un signal pour les charges nécessitant une alimentation positive. Il supprime donc l'alternance négative tout en conservant la positive.

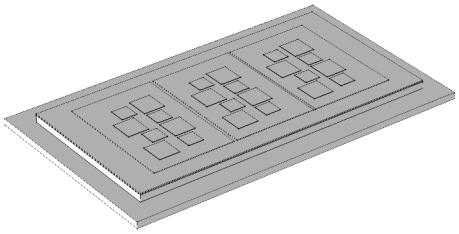


Figure 1.7 – Exemple de géométrie pour un modèle 3D thermique

2. Application des propriétés matériaux

   Dans notre cas, nous considérons un problème de conduction thermique avec refroidissement par convection thermique. Les paramètres matériaux à renseigner sont donc :
   – λ : conductivité thermique ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
   – c_p : capacité thermique massique ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)
   – ρ : masse volumique (kg/m^3)

3. Définition des conditions limites et de chargement

   Les conditions de chargement à définir sur un tel modèle sont principalement les pertes volumiques (en W/m^3) par puce. À ces pertes nous devons associer une condition limite de refroidissement sur la face inférieure des empilements. Dans notre cas, celle-ci est de type convection forcée pour matérialiser un refroidissement par air pulsé.

4. Maillage

   L'étape de maillage est très souvent la plus délicate car il faut trouver un bon compromis entre le temps de calcul et la précision des résultats. Dans notre cas, pour avoir le maximum de précision pour décrire les phénomènes locaux dans les puces, nous raffinons le maillage dans cette zone (cf Figure 1.8).

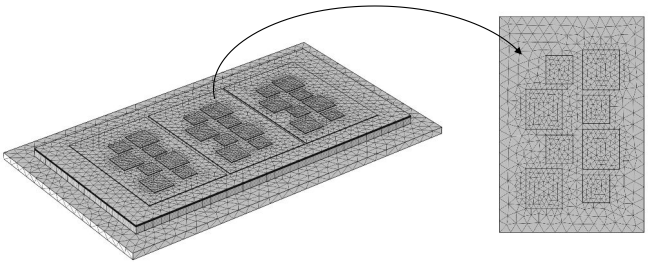


Figure 1.8 – Exemple de maillage pour un modèle 3D thermique

5. Résolution et post-traitement

   La résolution temporelle d'un tel modèle permet d'aboutir à des résultats comme ceux présentés en Figure 1.9. Cette cartographie illustre les interactions qui ont lieu entre les puces. On peut y voir, pour cet instant donné, les conséquences de la conduction thermique sur toute la carte. Lors de calculs de fiabilité, l'évaluation qui nous intéressera le plus est présentée dans le chapitre 3 en Figure 3.6(a). On peut y voir l'évolution dynamique de la température en fonction des pertes appliquées en entrée des puces.

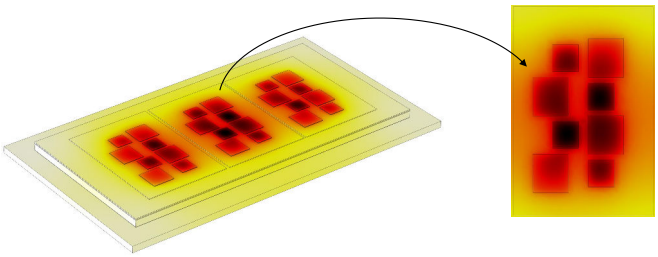


Figure 1.9 – Résultat de cartographie 3D de température pour un modèle d'électronique de puissance

1.2 Équations de l'Electromagnétisme

Après avoir présenté les différentes formulations qui seront employées durant l'étude des composants d'électronique de puissance dans le chapitre 3, nous nous intéressons à présent aux formulations associées au domaine de l'Electromagnétisme. Celles-ci nous seront utiles pour l'étude des machines électriques dans le chapitre 4.

1.2.1 Équations de Maxwell

En se référant à la Figure 1.10, nous définissons les domaines classiques en jeu dans l'étude des phénomènes électromagnétiques :

- Ω_{air} : région composée d'air
- $\Omega_{conducteur}$: région conductrice (par exemple le bobinage d'une machine électrique)
- $\Omega_{magnétique}$: région magnétique (par exemple les tôles en fer d'une machine électrique)
- Γ : contour du volume contenant toutes les régions précédemment citées (le champ magnétique a la propriété d'être nul sur ce contour).

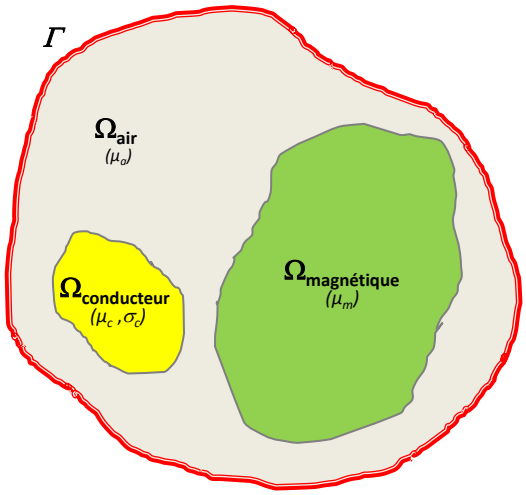


Figure 1.10 – Définition des volumes en jeu lors de l'étude d'un phénomène électromagnétique

Les phénomènes électromagnétiques en jeu au sein des dispositifs classiques d'électrotechnique sont régis par les quatre équations de Maxwell. Celles-ci ont déjà été longuement discutées et de nombreux développements peuvent être lus dans [6][7][8].

- La première, l'équation de **Maxwell-Gauss**, donne la divergence du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de la densité volumique de charge électrique ρ et de la permittivité diélectrique du vide ε_0 grâce à la relation :

$$\text{div } \vec{E} \ = \ \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.20}$$

  Cette équation décrit comment un champ électrique est généré à partir de charges électriques. Cette loi décrit en écriture intégrale le flux électrique à travers une surface fermée qui délimite un volume à l'intérieur duquel se situent les charges électriques.

- La deuxième, l'équation de **Maxwell-Faraday**, donne le rotationnel du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de la dérivée temporelle du champ magnétique $\vec{B}$ grâce à la relation :

$$\vec{\text{rot}} \ \vec{E} \ = \ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.21}$$

  Cette équation décrit le phénomène d'induction électromagnétique découvert par Faraday. Elle décrit comment une variation de champ magnétique induit un champ électrique.

- La troisième, l'équation de **Maxwell-Ampère**, donne le rotationnel du champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de la dérivée temporelle du champ électrique $\vec{E}$ et du vecteur densité de courant $\vec{J}$ grâce à la relation :

$$\vec{\text{rot}} \ \vec{B} \ = \ \mu_0 \vec{J} \ + \ \mu_0 \ \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.22}$$

  Cette équation décrit le fait qu'un champ magnétique peut être généré par un courant électrique ou par la variation d'un champ électrique.

- La quatrième, l'équation de **Maxwell-Thomson**, décrit la conservation du champ magnétique $\vec{B}$ grâce à la relation :

$$\text{div } \vec{B} \ = \ 0 \tag{1.23}$$

  Cette équation est au champ magnétique ce qu'est l'équation de Maxwell-Gauss au champ électrique. Elle traduit également le fait qu'il n'existe pas de monopole magnétique.

À ces équations, il faut ajouter des relations constitutives qui décrivent le comportement en fonction du milieu considéré. Dans notre cas, nous avons :

$$\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H} \tag{1.24}$$

$$\overrightarrow{J} = \sigma(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \tag{1.25}$$

avec : μ : Perméabilité magnétique (H/m)
σ : Conductivité électrique (S/m)
$\overrightarrow{v}$: Vitesse de la particule (m/s)
$\overrightarrow{J}$: Vecteur densité de courant(A/m^2)

$\overrightarrow{H}$: Champ d'excitation magnétique (A/m)

Sachant que dans notre cas nous nous concentrons sur l'étude magnétostatique des machines électriques tournantes, les formulations à retenir sont : $\vec{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et div $\vec{B} = 0$.

1.2.2 Existence d'un potentiel vecteur

En reprenant l'équation 1.23 et en considérant la relation telle que :

$$div(\overrightarrow{rot}(\vec{f})) = 0 \qquad \forall \vec{f} \tag{1.26}$$

On en déduit alors l'existence d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) \tag{1.27}$$

1.2.3 Formulation locale

Afin d'avoir une écriture en potentiel vecteur nous combinons les équations 1.21 et 1.27 pour alors obtenir :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})}{\partial t} \tag{1.28}$$

On peut encore écrire :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}) = \vec{0} \tag{1.29}$$

D'après la relation $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}) = \vec{0}$, on en déduit l'existence de f telle que :

$$\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = \overrightarrow{grad}(f) \tag{1.30}$$

Or en régime stationnaire le champ électrique est défini par :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \tag{1.31}$$

On en déduit alors l'écriture suivante du champ électrique :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}(V) - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \tag{1.32}$$

En reportant cette formulation dans 1.22 et dans 1.25 nous obtenons finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\tfrac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})) + \sigma(\overrightarrow{grad}(V) + \tfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})) = \overrightarrow{J}} \tag{1.33}$$

<u>Remarques</u> : Pour des raisons d'invariance suivant l'axe Oz, les moteurs électriques sont le plus souvent modélisés en 2D dans le plan Oxy, ce qui implique que :

- le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ est dirigé suivant z et peut être considéré comme scalaire. Par abus de langage on note :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z = A \end{pmatrix}$$

- le potentiel scalaire électrique V ne dépend que de z et du temps t (ce qui implique que le gradient de V est nul)
- la densité de courant est orientée suivant z

1.2.4 Formulation faible

Afin de résoudre l'équation 1.33 par la méthode des Éléments Finis on utilise la méthode des résidus pondérés dans la formulation de Galerkin [5]. Nous illustrons ici cette formulation sur un problème de magnétostatique dans le plan Oxy. En reprenant l'équation 1.33 et en tenant compte des simplifications liées au problème traité en 2D, nous obtenons :

$$\overrightarrow{rot}(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A})) = \overrightarrow{J}_z \tag{1.34}$$

Par développement, nous arrivons à :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\right) + J_z = 0 \tag{1.35}$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$R(A) = 0 \tag{1.36}$$

La formulation faible est obtenue en multipliant ce résidu R par des fonctions test A^* et en effectuant ensuite une intégration par parties sur le domaine d'étude Ω. Les fonctions test A^* sont telles que $A^* \in \ \{f(x,y,z) \,|\, f\, est\, C^2\, et\, f = A_i\, sur\, \partial\Omega\}$.

$$\iint_{\Omega} A^* R(A) d\Omega = 0 \tag{1.37}$$

En se référant à [9] pour le détail des calculs, nous avons finalement la formulation faible en potentiel vecteur suivante :

$$\boxed{\iint_{\Omega} \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial A^*}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial A^*}{\partial y}\right) d\Omega = \iint_{\Omega} J_z A^* d\Omega} \tag{1.38}$$

1.2.5 Méthode des Éléments Finis

Le potentiel vecteur A(x,y ;t) peut s'exprimer sur l'ensemble du domaine Ω sous la forme :

$$A(x,y;t) = [N_1(x,y) \dots N_i(x,y) \dots N_n(x,y)] \begin{Bmatrix} A_1(t) \\ \vdots \\ A_i(t) \\ \vdots \\ A_n(t) \end{Bmatrix} \tag{1.39}$$

avec

- n : le nombre de noeuds du maillage
- $[N(x,y)]$ la matrice d'interpolation où les fonctions d'interpolation vérifient :
  $N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad \forall i,j$ où (x_j, y_j) sont les coordonnées du noeud j

L'interpolation présentée sur l'élément réel dans l'équation 1.39 peut donc maintenant s'écrire sur un élément de référence sous la forme :

$$A(\xi,\eta;t) = [N_1(\xi,\eta) \dots N_i(\xi,\eta) \dots N_n(\xi,\eta)] \begin{Bmatrix} A_1(t) \\ \vdots \\ A_i(t) \\ \vdots \\ A_n(t) \end{Bmatrix} \tag{1.40}$$

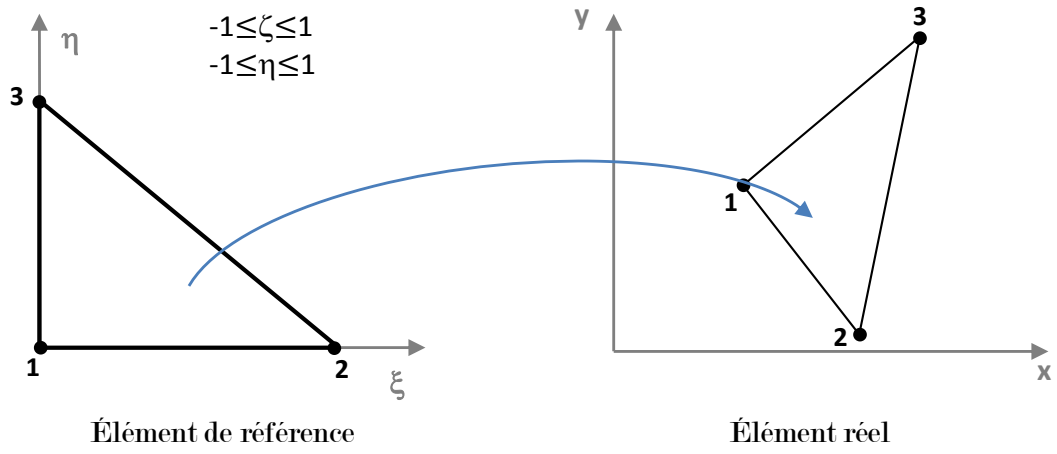


Figure 1.11 – Illustration d'un élément de référence triangulaire linéaire

Définissons les différents opérateurs :

[S] : Matrice de "rigidité" (comprend les perméabilités qui dépendent de A si le matériau est non-linéaire),

[C] : Matrice "d'amortissement" (comprend les conductivités),

$\{F\}$: Vecteur source dû aux courants,

[M] : Vecteur source dû aux aimants permanents.

$$S_{ij} = \iint_{\Omega_e} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \tag{1.41}$$

$$C_{ij} = \iint_{\Omega_e} \sigma N_i N_j d\Omega \tag{1.42}$$

$$F_i = \iint_{\Omega_e} J N_j d\Omega \tag{1.43}$$

$$M_i = \iint_{\Omega_e} \frac{1}{\mu} \left(B_{ry} \frac{\partial N_i}{\partial x} - B_{rx} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega \tag{1.44}$$

Le système matriciel à résoudre est alors un système du premier ordre obtenu par assemblage et qui est de la forme :

$$[S(A)]\{A\} + [C]\left\{\frac{dA}{dt}\right\} = \{F\} + [M] \tag{1.45}$$

Tout au long de notre étude, nous ferons référence à des problèmes de magnétostatique, ce qui permet de simplifier l'équation 1.45 sous la forme :

$$[S(A)]\{A\} = \{F\} + [M] \tag{1.46}$$

1.2.6 Processus de simulation

D'une manière générale, il existe différentes étapes permettant la modélisation d'une machine électrique :

1. Définition des paramètres et des variables du problème

   Dans cette étape nous définissons par exemple :
   - la longueur de la machine, qui pour des raisons de simplifications géométriques n'est pas modélisée. Elle intervient toutefois dans les valeurs des courants appliqués dans les enroulements.
   - les paramètres permettant de définir le vecteur source $\{F\}$, tels que le nombre d'enroulements et les courants par phase.

2. Dessin de la géométrie

   Pour notre cas, nous étudions une géométrie de Machine à Réluctance Variable possédant 6 dents statoriques et 4 dents rotoriques (cf. Figure 1.12).

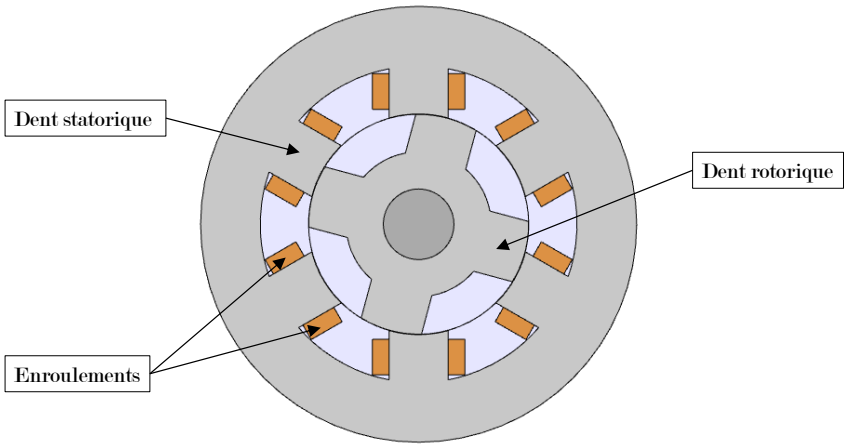


Figure 1.12 – Géométrie de la machine étudiée (MRV 6/4)

3. Définition des propriétés matériaux

   Nous considérons dans notre cas une étude électro-magnéto-mécanique, il est donc nécessaire de renseigner les propriétés matériaux suivantes :
   - conductivité électrique σ (S/m),
   - permittivité relative ϵ_r,
   - perméabilité relative μ_r,
   - masse volumique ρ (kg/m^3).

   Les non-linéarités matériaux en jeu dans une telle simulation sont principalement dues à la perméabilité relative. Sur la Figure 1.13, nous pouvons ainsi voir l'allure de la courbe B(H) du fer. Pour rappel, l'induction magnétique B est reliée au champ magnétique H par la relation $B = \mu H$.

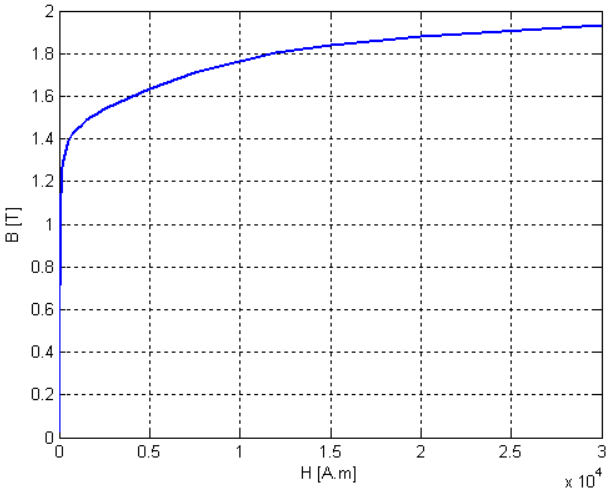


Figure 1.13 – Allure de la courbe B(H) du fer

4. Déclaration du couplage avec l'équation mécanique pour le mouvement rotorique

   Afin de pouvoir effectuer une simulation dynamique en mode moteur de la machine électrique étudiée, il est nécessaire de coupler les équations électro-magnétiques à une équation de mouvement. Nous écrivons donc le principe fondamental de la dynamique en rotation :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = C_{mot} - C_{res} \tag{1.47}$$

   avec :
   J : Inertie du rotor (kg.m^2)
   θ : Position angulaire du rotor (rad)
   C_{mot} : Couple moteur (N.m)
   C_{res} : Couple résistant (N.m)

   Connaissant le couple moteur à l'issue d'un calcul de magnétostatique, il nous est possible par double intégration de déterminer la nouvelle position angulaire du rotor θ pour la machine étudiée. Ce processus itératif est décrit dans la Figure 1.14.

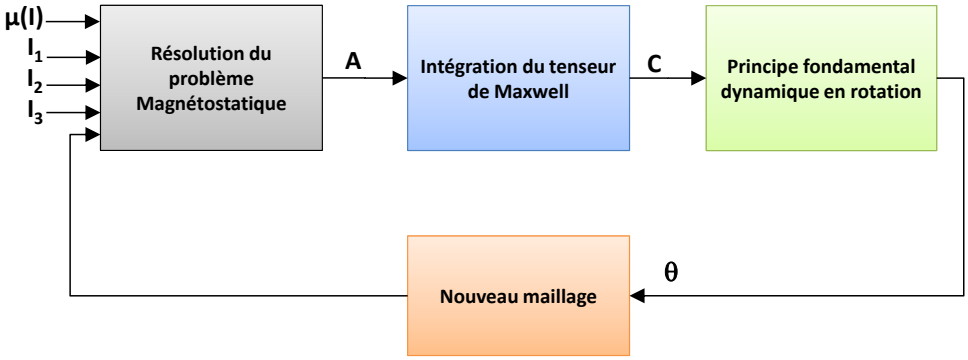


Figure 1.14 – Processus itératif permettant l'obtention du couple "dynamique" à partir d'une série de calculs statiques

5. Paramétrage du maillage

   Le maillage du modèle est l'étape la plus délicate dans la phase de construction. En effet il faut réussir à obtenir un maillage suffisamment précis (principalement dans l'entrefer) sans trop détériorer le temps de calcul. De plus, le rotor étant en mouvement, il est nécessaire de lui appliquer un maillage mobile et d'assurer la continuité avec le stator. En Figure 1.15, nous pouvons voir une illustration du maillage appliqué et un focus sur l'entrefer où un maillage plus fin a été nécessaire.

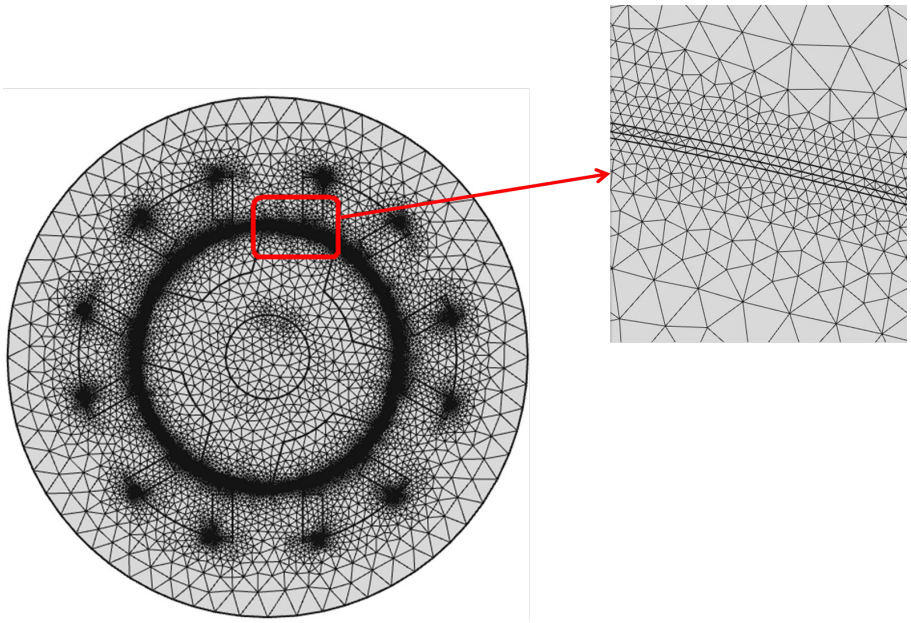


Figure 1.15 – Maillage de la machine et raffinement dans la zone d'entrefer (environ 150 000 DDL)

6. Calcul de la solution

La simulation temporelle d'une telle machine nécessite un pilotage des courants statoriques en fonction de la position angulaire du rotor. Une allure de ces courants est donnée dans la Figure 1.16 pour un cas de commande de type trapézoïdale.

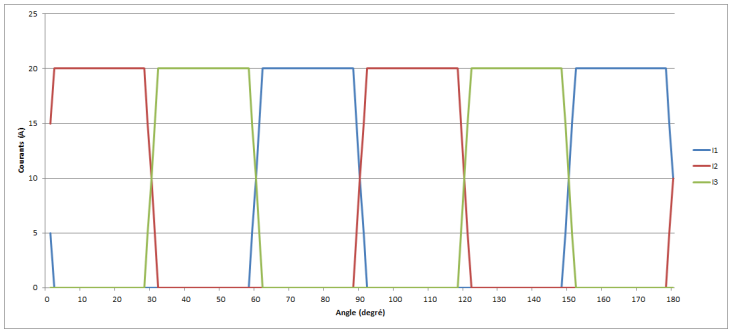


Figure 1.16 – Allure des alimentations statoriques en fonction de l'angle rotor

Les grandeurs intéressantes à évaluer sont la cartographie de champs **B** et les lignes de champs (cf Figure 1.17) mais également l'allure du couple moteur C_{mot}.

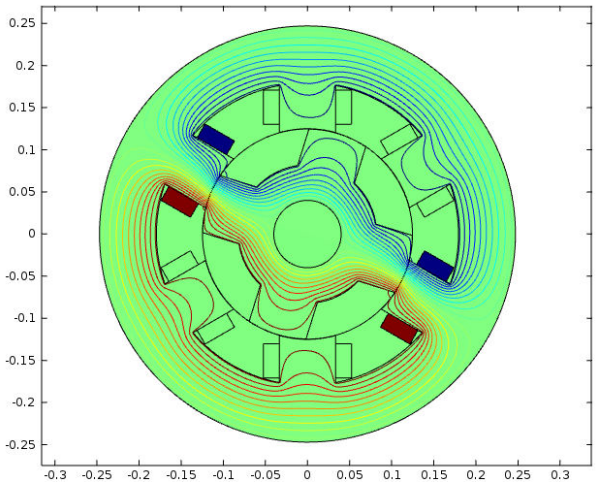


Figure 1.17 – Exemple de cartographie représentant le champ B ainsi que les lignes de champs

7. Post-traitement du couple

Afin de post-traiter le couple moteur (cf Figure 1.18), le logiciel de calcul Éléments Finis utilisé emploie la méthode du Tenseur de Maxwell. Elle permet de calculer les forces locales d'origine magnétique dans les systèmes électromécaniques. Cette approche est très courante et est étudiée dans [10].
D'après [11], ce tenseur que nous noterons ici T a pour expression :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{B_r^2 - B_\theta^2 - B_z^2}{2} & B_r B_\theta & B_r B_z \\ B_\theta B_r & \frac{B_\theta^2 - B_r^2 - B_z^2}{2} & B_\theta B_z \\ B_z B_r & B_z B_\theta & \frac{B_z^2 - B_r^2 - B_\theta^2}{2} \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

On obtient alors le couple C_{mot} par intégration de ce tenseur sur le contour du rotor :

$$\begin{aligned} C_{mot} &= \oint r\overrightarrow{e_r} \wedge T\overrightarrow{e_r} dS \\ &= \oint r\frac{1}{\mu} B_r(\theta, z) B_\theta(\theta, z) r d\theta dz \end{aligned} \tag{1.49}$$

or en coordonnées cylindriques nous avons :

$$B = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

<u>Hypothèse</u> : A_θ et A_r sont indépendant de z. Nous obtenons alors :

$$B = \begin{pmatrix} B_r(\theta, z) \\ B_\theta(\theta, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial r} \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

En réinjectant ces résultats dans l'équation 1.49, il en résulte :

$$C_{mot} = \oint r\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial \theta}\frac{\partial A_z}{\partial r} d\theta dz \tag{1.52}$$

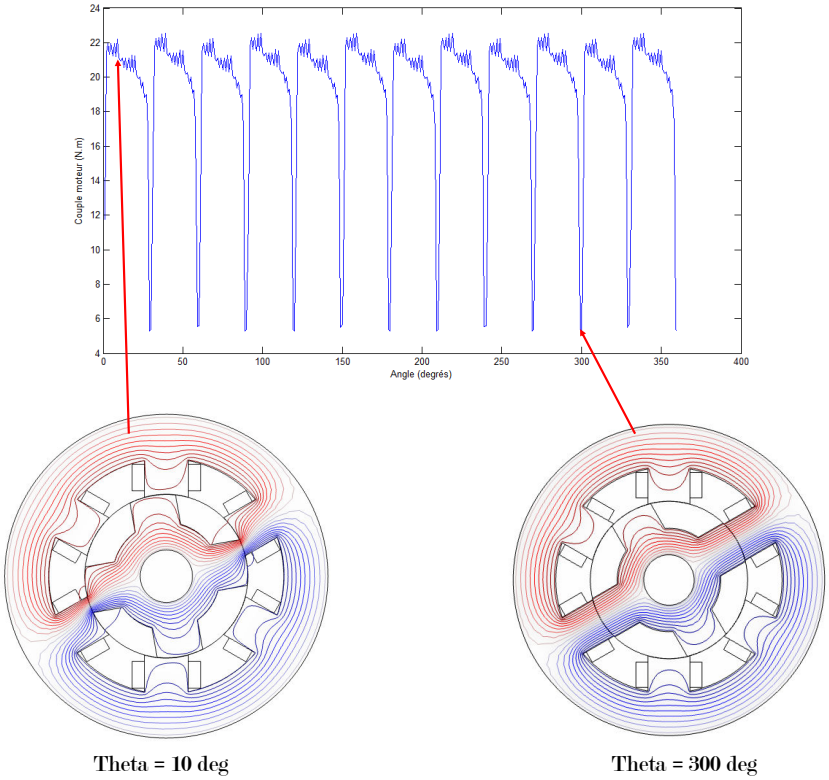


Figure 1.18 – Allure du couple moteur calculé en fonction de l'angle rotor

Une synthèse explicative de cette démarche est présentée dans la Figure 1.19. Elle représente le processus global employé depuis la construction de la géométrie, en passant par l'étape de maillage puis de résolution magnéto-statique, jusqu'au couplage avec l'équation dynamique du mouvement de rotation et son intégration pour obtenir la nouvelle position angulaire du rotor.

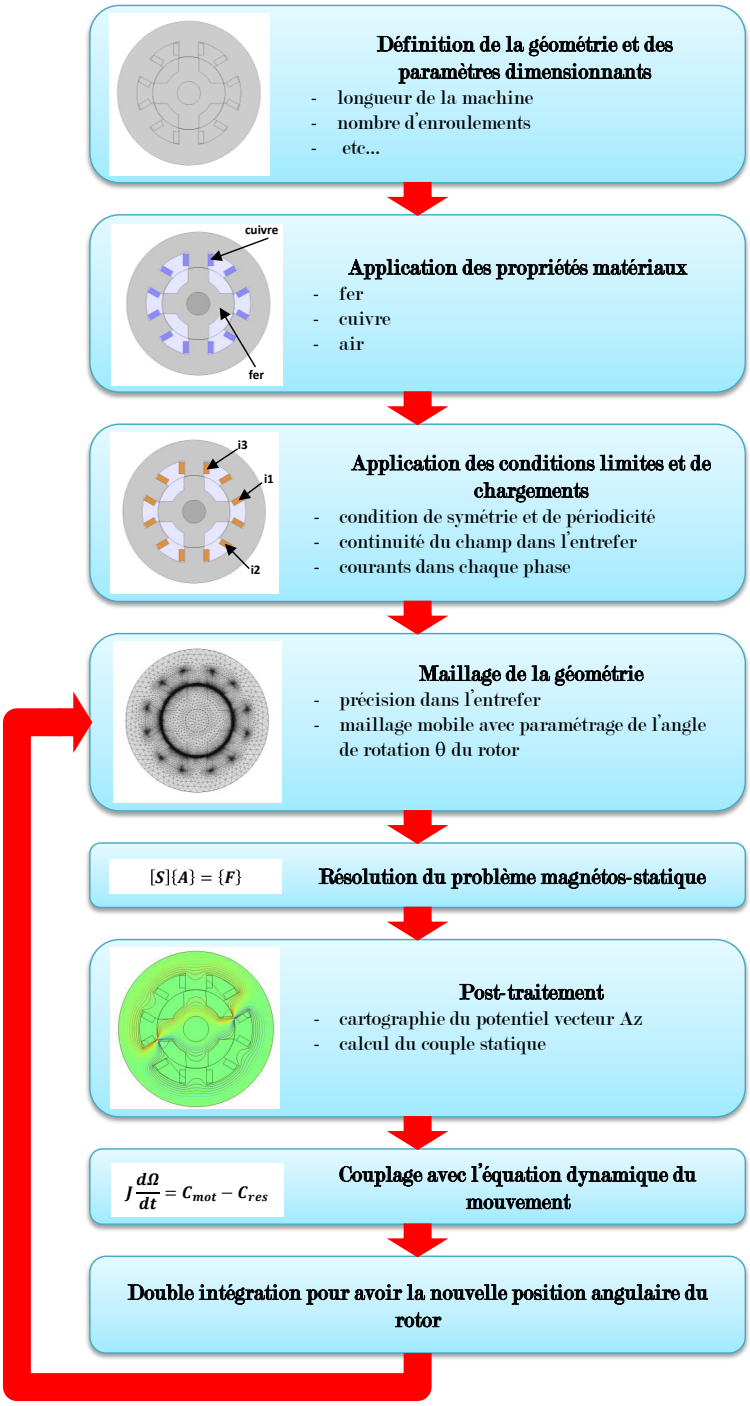


Figure 1.19 – Synthèse du processus mis en oeuvre pour la simulation d'une machine électrique

1.3 Conclusion du Chapitre 1

Ce chapitre a permis de mettre en place les bases théoriques liées aux deux domaines de la Physique qui seront étudiés par la suite. Nous avons ainsi abordé en premier lieu la Thermique en décrivant les différentes équations permettant d'aboutir à la formulation de "l'équation de la chaleur" (cf équation 1.6). Celle-ci est ensuite discrétisée par la méthode des Éléments Finis afin de définir les opérateurs qui seront le point de départ des méthodes de réduction de modèles développées dans le chapitre 3.
Une démarche similaire a été adoptée pour décrire les équations nécessaires à l'étude des machines électriques. Les phénomènes en jeu sont régis par l'équation en potentiel vecteur présentée par la relation 1.33. Afin de tenir compte du mouvement de rotation du rotor, celle-ci est couplée à l'équation mécanique issue du principe fondamental de la dynamique en rotation. Cela nous permet par la suite de post-traiter la valeur du couple moteur de la machine étudiée.

Le but de notre étude présentée dans les chapitres suivants est de construire des modèles réduits pour ces deux axes de travail :

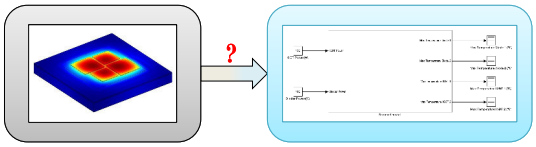
- en Thermique : le modèle réduit doit être capable de post-traiter la température en tout point de la carte d'électronique de puissance indépendamment des puissances appliquées aux puces et le refroidissement considéré,
- en Electromagnétisme : le modèle réduit doit être capable de post-traiter le couple moteur pour tous les courants appliqués sur les enroulements de la machine et pour toutes les positions angulaires du rotor.

Chapitre 2

Etat de l'art ROM

Sommaire

2.1 Introduction **36**
2.2 Transformation linéaire des variables d'état **40**
2.2.1 Méthode de la synthèse modale 40
2.2.2 Méthodes de sous-structuration 41
2.2.3 Estimation d'erreur 44
2.3 Méthodes optimales **44**
2.3.1 POD classique 44
2.3.2 SVD 45
2.3.3 POD Snapshots 46
2.3.4 PGD 46
2.4 Modèles réduits paramétriques **48**
2.4.1 Séparation de variables et POD/SVD 48
2.4.2 Utilisation de la PGD 49
2.4.3 Interpolation sur base de modèles réduits 49
2.5 Méthodes de réduction pour des problèmes non-linéaires **50**
2.5.1 Identification 50
2.5.2 APR 51



Résumé

Ce chapitre présente une vue d'ensemble des différentes méthodes de réduction existantes. Celui-ci est non-exhaustif, mais présente celles jugées comme étant majeures dans notre cadre d'application.

2.1 Introduction

Les techniques de réduction de modèles sont nombreuses et connaissent un fort engouement ces dix dernières années. De nouvelles méthodes ont vu le jour comme par exemple la PGD (Proper Generalized Decomposition) ou encore l'APHR (A Priori Hyper Reduction). Des méthodes plus anciennes (RITZ, POD, Petrov-Galerkin) continuent d'être développées et améliorées. Toutes ces méthodes sont présentées dans ce chapitre avec pour but de donner aux lecteurs une vue d'ensemble des techniques de réduction majeures. Nous verrons ainsi que ces méthodes peuvent se classer en différentes catégories en fonction de leur optimalité au regard de l'ordre de réduction du modèle, de leur capacité à traiter des problèmes non-linéaires ou encore de leur aptitude à conserver des paramètres de conception dans le modèle réduit.
L'émergence des techniques de réduction est due à leur capacité à accélérer les temps de calcul tout en conservant une bonne précision dans les résultats. Cela a été rendu possible grâce à l'intégration de ces techniques dans la plupart des codes de calcul du commerce.
Un axe très important est la facilité d'intégration du modèle réduit dans des plateformes de simulation de systèmes (Simulink, AMEsim, Modelica,...). En effet, celles-ci sont couramment utilisées dans les phases de conception de systèmes complexes et nécessitent l'intégration de modèles pour les construire. Du point de vue de la précision, les modèles Éléments Finis sont à l'heure actuelle ceux fournissant les meilleures résultats pour l'étude des composants constituant les systèmes complexes. Cependant, cette précision se fait au détriment du temps de calcul et de la facilité d'intégration. A l'inverse, les modèles analytiques ont l'avantage d'être très facilement intégrables tout en fournissant rapidement des résultats. En revanche, ces résultats sont d'une qualité moindre. Une synthèse de ces critères est présentée dans la Figure 2.1. Nous y constatons la pertinence de l'emploi de modèles réduits et surtout y remarquons l'intéressant compromis qu'ils nous proposent en terme de (coût en temps de modélisation et simulation) vs (précision des résultats) vs (facilité d'intégration).

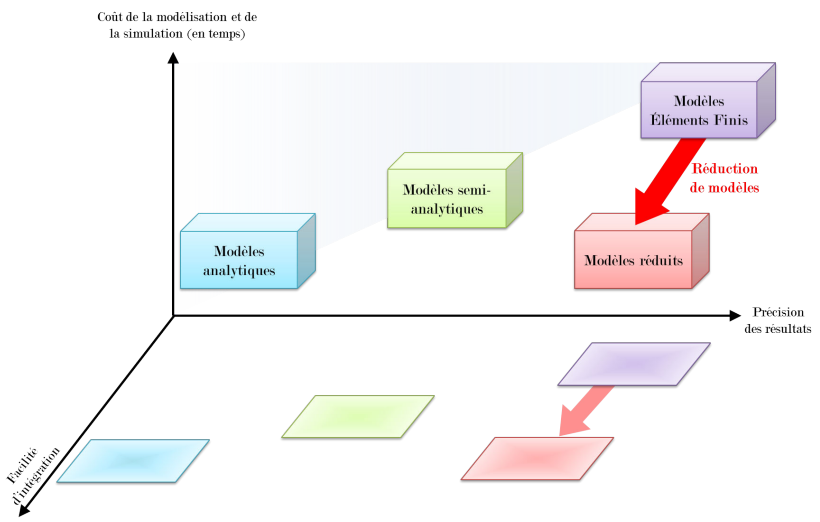


Figure 2.1 – Positionnement des différents types de modèles employés en phase de conception de systèmes complexes en fonction de leur coût de modélisation et de simulation (en temps), de leur précision des résultats fournis et de leur facilité d'intégration dans des plateformes de modélisation

Dans les domaines étudiés, les problèmes sont de deux types :
- des problèmes LTI (Linear Time Invariant)
- des problèmes NLTI (Non-Linear Time Invariant)

Dans les deux cas ils peuvent se ramener à un problème du premier ordre qui s'écrit sous la forme :

- pour les problèmes LTI :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

  Pour les automaticiens, ces équations peuvent se résumer au "schéma-bloc" suivant :

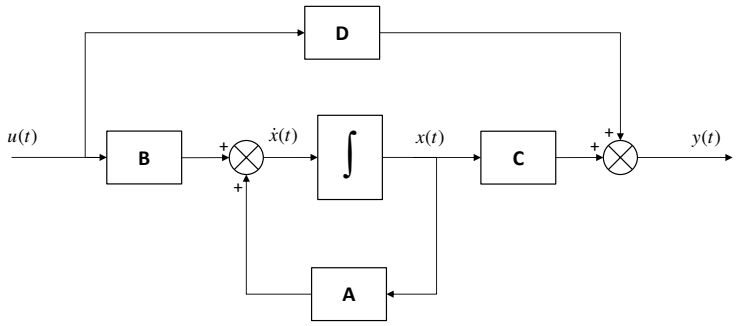


Figure 2.2 – Schéma fonctionnel des problèmes LTI

- pour les problèmes NLTI (voir l'article de Carlberg [12]) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t)) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

  Afin d'avoir la même représentation fonctionnelle que pour les LTI, nous supposons pouvoir écrire : $F(x(t)) = A(x(t))x(t)$. Nous obtenons ainsi le schéma fonctionnel présenté en figure 2.3.

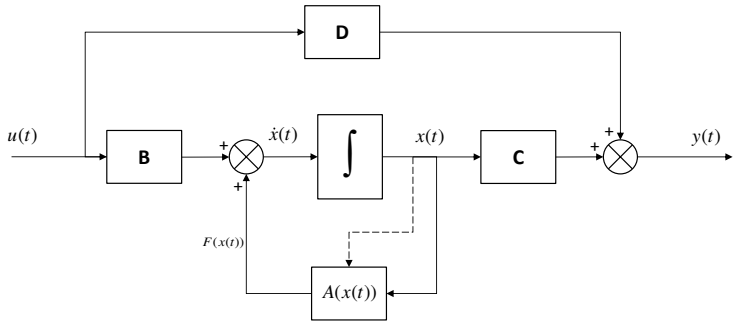


Figure 2.3 – Schéma fonctionnel des problèmes NLTI

Hypothèses :
- Dans les deux cas, le terme $Du(t)$ est négligé car nous supposons dans notre cas que l'entrée est corrélée directement avec l'état.
- Les opérateurs A,B et C sont invariants dans le temps.

Les opérateurs A,B,C peuvent être obtenus à partir de la Méthode des Éléments Finis appliquée à des équations aux dérivées partielles. Nous appellerons par la suite les solutions ainsi obtenues, les solutions "haute fidélité". [1]

Le but des méthodes de réductions de modèles est de diminuer la dimension N des systèmes d'équations présentés précédemment pour avoir un système qui s'écrit sous la forme suivante (dans le cas des LTI) :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= a\tilde{x}(t) + b\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= c\tilde{x}(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les opérateurs a, b et c sont les opérateurs réduits. $\tilde{x}(t)$ est l'inconnue réduite de dimension n$\ll$N. Les équations linéaires pour les domaines de la Mécanique, de la Thermique et de la Magnéto-statique sont données dans le tableau 2.1.

1. Cette appellation est couramment employée par Amsallem et Farhat [13]

Mécanique	Thermique	Magnéto-statique
$\begin{cases} div(\sigma) + f = \rho\ddot{u} \quad sur\,\Omega \\ \sigma = H\varepsilon \quad sur\,\Omega \\ \varepsilon = \frac{1}{2}(grad(u) + grad^T(u)\ ) \quad sur\,\Omega \\ u = u_d \quad sur\,\Gamma_u \\ \sigma.n = F_d \quad sur\,\Gamma_f \\ u(x,t=0) = u_0 \quad sur\,\Omega \\ \dot{u}(x,t=0) = \dot{u}_0 \quad sur\,\Omega \end{cases}$	$\begin{cases} \rho c_p \dot{T} = div(\varphi) + q \quad sur\,\Omega \\ \varphi = -\lambda grad(T) \quad sur\,\Omega \\ \varphi = \phi_d \quad sur\,\Gamma_\phi \\ T = T_d \quad sur\,\Gamma_T \\ T(x,t=0) = T_0 \quad sur\,\Omega \end{cases}$	$\begin{cases} rot(H) = J_0 \quad sur\,\Omega \\ div(B) = 0 \quad sur\,\Omega \\ H \wedge n = 0 \quad sur\,\Gamma_H \\ B \cdot n = 0 \quad sur\,\Gamma_B \\ A(x,t=0) = A_0 \quad sur\,\Omega \end{cases}$
$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F$ *nous posons :* $\begin{cases} Y = \dot{X} \\ \dot{Y} = \ddot{X} \end{cases} \quad et \quad W = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$ *nous avons alors :* $\begin{cases} M\dot{Y} = -C\dot{X} - KX + F \\ \dot{X} = Y \end{cases}$ *soit finalement :* $\dot{W} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ \mathbb{1} & \emptyset \end{bmatrix} W + Bu$ $avec\, Bu = \begin{bmatrix} -M^{-1}F \\ 0 \end{bmatrix}$	$C\dot{T} + KT = Q$ *nous pouvons écrire encore :* $\dot{T} = AT + Bu$ *avec* $A = -C^{-1}K$ $Bu = -C^{-1}Q$	*à l'aide de la relation :* $B = \mu H$ $= rot(A)$ *nous obtenons :* $C\dot{A} + SA = F$ *ce qui peut encore s'écrire :* $\dot{A} = -C^{-1}SA + C^{-1}F$ *dans notre cas magnétostatique, cela se simplifie sous la forme :* $A = S^{-1}F$
u : Vecteur déplacement ε : Tenseur des déformations H : Loi de comportement σ : Tenseur des contraintes F_d : Forces appliquées (Neumann) u_d : Conditions aux limites en déplacement (Dirichlet) Ω : Domaine d'étude Γ_u : Frontière à conditions limites Dirichlet ou déplacement Γ_f : Frontière à conditions limites Neumann ou force f : Force volumique ρ : Masse volumique	λ : Conductivité thermique c_p : Capacité thermique ρ : Masse volumique φ : Flux q : Chargements thermiques $T(t)$: Vecteur température à l'instant t Ω : Domaine d'étude Γ_ϕ : Frontière à conditions limites en flux Γ_ϕ : Frontière à conditions limites en température	B : Induction magnétique H : Champ magnétique A : Potentiel vecteur μ : Perméabilité magnétique J_0 : Densité de courant

Table 2.1 – Équations linéaires d'Elastodynamique, de la Thermique et de la Magnéto-statique

2.2 Transformation linéaire des variables d'état

Que le problème à résoudre soit linéaire ou non-linéaire, la solution "haute fidélité" $x(t)$ du problème 2.1 est souvent contenue dans un sous-espace de dimension plus faible que celui engendré par les degrés de liberté du modèle résolu par la Méthode des Éléments Finis. Notons N le nombre de degrés de liberté du modèle Éléments Finis et n la dimension d'un tel sous-espace. La solution peut alors se décomposer comme une combinaison linéaire des vecteurs qui engendrent ce sous-espace.

$$x(\underline{X}, t) = x_1(\underline{X}, t)\phi_1 + \ldots + x_n(\underline{X}, t)\phi_n \tag{2.4}$$

Les vecteurs ϕ_i sont de dimension N, comme la solution du problème "haute fidélité". Plus généralement, nous considérons un changement de variable de la forme :

$$x = \Phi\tilde{x} \tag{2.5}$$

Φ est ici une matrice de passage non singulière entre le vecteur d'état x et le vecteur d'état $\tilde{x}$. Les vecteurs qui constituent Φ forment une base qui engendre un espace de solution au problème 2.1. En utilisant ce changement de base, l'équation 2.1 devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \Phi\dot{\tilde{x}}(t) = A\Phi\tilde{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\Phi\tilde{x}(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \Phi^{-1}A\Phi\tilde{x}(t) + \Phi^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= C\Phi\tilde{x}(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Les opérateurs $\tilde{A} = \Phi^{-1}A\Phi$, $\tilde{B} = \Phi^{-1}B$ et $\tilde{C} = C\Phi$ régissent le nouveau système d'état. Dans la plupart des cas, nous optons pour une base Φ orthonormée, ce qui permet l'égalité $\Phi^{-1} = \Phi^T$. Les opérateurs s'écrivent alors : $\tilde{A} = \Phi^T A\Phi$, $\tilde{B} = \Phi^T B$ et $\tilde{C} = C\Phi$.
Dans le cas où la base Φ contient moins de vecteurs que la dimension du vecteur d'état x, nous disons que la base de projection est tronquée. Cela conduit à un système d'ordre réduit. La projection du modèle sur une telle base est souvent appelée méthode de Ritz. Les paragraphes qui suivent décrivent différentes approches de construction de la base Φ engendrant un sous-espace permettant la meilleure représentation possible de la réponse $x(t)$ à l'ensemble des chargements $u(t)$ [14].
L'avantage de ces méthodes de réduction est de pouvoir à tout moment remonter l'information du champ complet par une simple opération inverse. Il est ainsi possible de post-traiter en tout point de l'espace, les grandeurs locales comme des contraintes, des flux, des cartographies de températures, etc...

2.2.1 Méthode de la synthèse modale

L'approche couramment utilisée dans les codes de calcul industriels est basée sur l'extraction préliminaire des valeurs propres et des vecteurs propres de l'équation différentielle sans second membre :

$$\dot{x} = Ax \tag{2.8}$$

Dans le domaine de Laplace, cette équation devient :

$$s\tilde{x} = A\tilde{x} \tag{2.9}$$

Cela permet de faire apparaître le problème aux valeurs propres suivant :

$$(s_i \mathbb{1} - A)\phi_i = 0 \tag{2.10}$$

Les s_i et ϕ_i satisfaisant cette équation sont connus comme étant les pulsations propres et les modes propres en dynamique des structures et comme étant les constantes de temps et les modes propres de diffusion en Thermique. Étant donnée la grande taille du problème 2.9 et l'objectif de réduction de modèle, seules les valeurs propres les plus basses sont retenues. Le critère de troncature implicite est donc un critère fréquentiel ; les comportements les plus lents sont donc les mieux représentés par le sous-espace ainsi engendré.
Il existe plusieurs méthodes dédiées à l'extraction des valeurs propres et des vecteurs propres. Citons parmi les plus connues la méthode d'itération de LANCZOS, la méthode d'itération sur les sous-espaces ou encore les méthodes de transformation (par exemple Jacobi). Pour plus de détails sur ces méthodes, nous pouvons nous référer à l'ouvrage de Bathe [15].

Remarques :

- Le sous-espace engendré par cette extraction modale est construit à partir de la solution générale de l'ODE. Il est donc **indépendant des chargements** $u(t)$.
- Cette méthode de réduction **n'est pas optimale au regard de l'ordre du modèle réduit**. En effet, un trop grand nombre de modes est généralement retenu par rapport à un cas de charge étudié. La solution particulière ne nécessite souvent pas tous les modes retenus.

Pour les problèmes de Thermique, la thèse de Flament [16] introduit l'utilisation des modes classiques pour la réduction de modèle ainsi qu'une fonction de couplage entre sous-structures. Ensuite, certains auteurs comme Lafay [17] ont exploité la base des modes de branches construite à partir d'un opérateur d'inertie modifié en introduisant une condition aux limites dite de Steklov faisant intervenir la valeur propre. Cette base permet, selon l'auteur, la prise en compte de comportements non-linéaires dans la construction des champs propres en intégrant les caractéristiques matériaux moyennes du point de vue de l'amplitude de l'état qui gouverne la non-linéarité localement. A noter que la détermination des modes de branches peut être assez lente algorithmiquement. Par ailleurs, l'utilisation de la base de branche est la même que la base modale classique. Elle peut donc être tronquée suivant différents critères comme les critères de Marshall et de Litz [18][19].

2.2.2 Méthodes de sous-structuration

Méthode de Guyan

Cette méthode de réduction est classique et est souvent implémentée dans les codes de calcul par Éléments Finis sous l'appellation "construction de super-éléments" [20]. Dans cette méthode nous supposons que la solution du modèle "Haute fidélité" peut être décomposée en deux ensembles de DDL :

- Le premier ensemble contient les DDL sur lesquels s'appliquent un chargement qui peut être cinématique (Dirichlet), exprimé comme un flux (Neumann) ou inertiel. On appelle généralement ces DDL : degrés de liberté d'interface (notés ici x_I).
- Le deuxième ensemble contient les DDL libres généralement appelés degrés de liberté complémentaires (notés x_C).

Ce type de méthode a initialement été conçu pour les équations conservatives (ie. sans amortissement) de la dynamique des structures, soit :

$$\begin{bmatrix} M_{II} & M_{IC} \\ M_{CI} & M_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_I \\ \ddot{x}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{II} & K_{IC} \\ K_{CI} & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

à partir de l'équation stationnaire :

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IC} \\ K_{CI} & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

il est possible d'exprimer les DDL complémentaires x_C en fonction des DDL d'interface x_I, soit :

$$x_C(t) = -K_{CC}^{-1} K_{CI}.x_I(t) \tag{2.13}$$

Ce qui donne la base de réduction suivante :

$$\Phi = \begin{bmatrix} -K_{CC}^{-1} K_{CI} \\ \mathbb{1} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Un point particulier de cette méthode est qu'elle conduit à un vecteur de DDL du système réduit constitué de DDL du système "Haute fidélité". Cette méthode permet donc facilement de coupler différents modèles réduits grâce aux équations de liaison entre les domaines de la Physique ; cela est couramment appelé la synthèse de modèles. Chaque modèle d'état utilisé pour effectuer la synthèse modale est classiquement appelé super-élément.
Une illustration de cette synthèse modale est donnée dans Figure 2.4 à partir du modèle d'électronique de puissance qui sera traité dans le chapitre 3. Nous comprenons ainsi comment il est possible d'instancier un modèle possédant 5 super-éléments à partir de 3 modèles réduits.

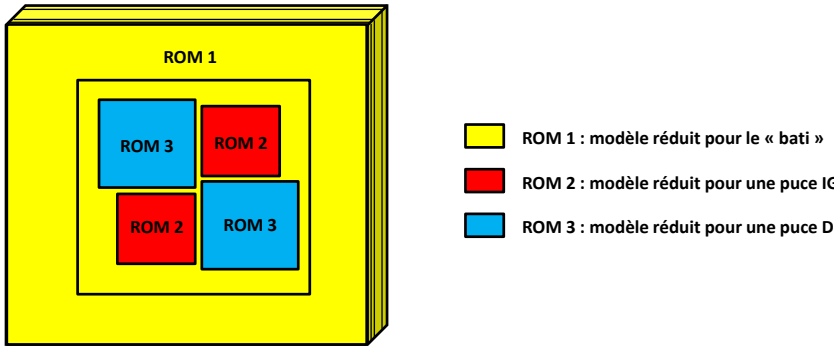


Figure 2.4 – Illustration d'une synthèse modale de 5 super-éléments à partir de 3 modèles réduits

Des limites sont rencontrées avec cette méthode :

- Le coût de construction de la base peut être très élevé à cause de l'inversion de la matrice K_{CC}.

- La dissociation en DDL d'interface et DDL complémentaires nécessite une forte intrusivité dans les opérateurs.
- Plus les interfaces sont grandes, plus la base de réduction Φ est grande. Cela limite donc fortement l'ordre de réduction du modèle.

Craig Bampton

La méthode de Guyan présentée précédemment possède des limitations quant à la précision du modèle réduit généré. En effet, celui-ci décrit difficilement les phénomènes dynamiques étant donné qu'il est construit uniquement à partir de la base statique.
La méthode de Craig Bampton [21] consiste à améliorer la méthode de Guyan en ajoutant des modes propres internes (ϕ) à la base statique (ces modes sont souvent appelés modes à interface fixe).

$$\begin{pmatrix} x_I \\ x_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -K_{CC}^{-1}K_{CI} & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_I \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Notons que cette famille de méthodes étant très répandue dans les codes de calcul, un certain nombre de travaux récents continue à l'améliorer et à l'utiliser. Citons par exemple les travaux de Friswell et al. [22], de Rixen [23] ou de Mignolet [24].
Retenons également que les couplages multi-physiques sont assez rapidement implémentés grâce à ces méthodes. Par exemple en multicorps flexibles, nous pouvons nous référer aux travaux de Spanos [25], en thermo-mécanique à ceux de Nachtergaele [26] et en vibro-acoustique à ceux de Kropp [27].

Modes de composants

La méthode de Craig Bampton présentée précédemment se révèle être peu performante dans le cas où nous devons traiter des structures avec des interfaces grandes. En effet, la base de projection sera alors d'autant plus grande que le nombre de modes à interface fixe sera grand.
Une alternative est d'utiliser la méthode des modes de composants. Celle-ci consiste à effectuer une synthèse modale entre des modes globaux extraits sur toute la structure étudiée, et des modes locaux - dits "modes de composants" - extraits uniquement à l'échelle du composant.

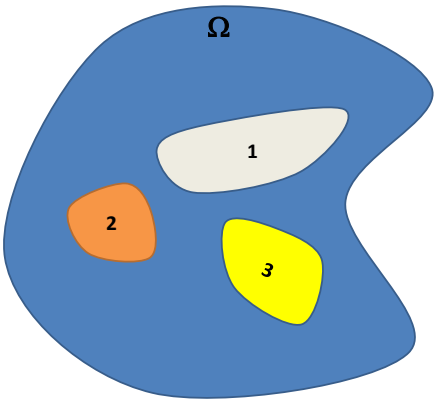


Figure 2.5 – Illustration d'un domaine d'étude Ω associé à ses sous-domaines (composants numérotés ici de 1 à 3)

En considérant le domaine Ω associé à ses sous-domaines (composants numérotés de 1 à 3 sur la figure 2.5), il est possible d'écrire la base de projection Φ sous la forme :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \\ 0 & \phi_2 & 0 & \phi_\Omega \\ 0 & 0 & \phi_3 & \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

où les ϕ_i sont les modes extraits uniquement sur le composant i et ϕ_Ω sont les modes extraits sur la structure complète.

Un exemple de cette méthode étendue à la prise en compte des non-linéarités de contacts est présentée dans l'article de Vermot des Roches [28] avec comme cas d'application un système de freinage (disque de freinage + étriers).

2.2.3 Estimation d'erreur

Toute construction de modèles réduits doit se faire en ayant conscience de l'erreur associée à celui-ci. Pour cela il est possible d'estimer cette erreur en réinjectant la solution du modèle réduit dans le modèle haute fidélité. Cela fait apparaitre un résidu R_ϕ tel que :

$$R_\phi = \Phi\dot{T} - A\Phi T - Bu \tag{2.17}$$

Ce résidu R_ϕ étant homogène à un flux, nous pouvons obtenir un résidu homogène à une température R_T grâce à la relation :

$$R_T = A^{-1}R_\phi \tag{2.18}$$

Comme nous le verrons par la suite, il est possible d'itérer sur ce résidu afin d'enrichir la base de projection et ainsi améliorer la précision du modèle réduit généré. Le processus d'enrichissement du sous-espace par itération sur le résidu est développé dans les thèses de Renaud [29] et de Bobillot [30] et également dans le mémoire d'habilitation à diriger des recherches de Balmes [14].

2.3 Méthodes optimales

2.3.1 POD classique

Parmi toutes les techniques de réduction existantes, la POD (Proper Orthogonal Decomposition) est la plus connue et la plus utilisée. Elle est par exemple souvent employée dans des domaines tels que le traitement d'image, la compression de données ou encore l'identification. De nombreux travaux portent sur la POD, citons par exemple [31, 32, 33, 34, 35, 36].
La POD est connue sous différents noms en fonction des domaines d'étude, comme par exemple :
- décomposition de Karhunen-Loève (KLT [2])
- analyse en composantes principales (PCA [3])
- fonctions propres empiriques (EOF [4])

2. Karhunen-Loève Transform
3. Principal Composent Analysis
4. Empirical Orthogonal Functions

Pour plus de détails, la POD est décrite dans l'article de Podvin [37] ou dans le livre d'Antoulas [38].

Afin de décrire la POD classique, considérons la fonction $u(x,t)$ telle que :

$$u : \begin{array}{ccc} \Omega \times]0,T[& \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ (x,t) & \rightarrow & u(x,t) \end{array} \tag{2.19}$$

Le principe de la POD est de rechercher les champs ϕ qui maximisent leur projection sur l'ensemble des champs connus u. Nous notons $\lambda(\phi)$ le quotient de cette projection :

$$\lambda(\phi) = \max \frac{\left\langle (\phi, u)^2 \right\rangle}{(\phi, \phi)} \tag{2.20}$$

où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ désigne l'opérateur moyenne et $(\bullet, \bullet)$ le produit scalaire.
Chercher à maximiser le produit scalaire entre ϕ et u est une étape généralement très coûteuse en temps de calcul c'est pourquoi cette version de la POD est ainsi peu utilisée. Nous préfèrerons ici employer la méthode POD Snapshot (cf 2.3.3).

2.3.2 SVD

La SVD (Singular Value Decomposition) est une méthode de factorisation de matrices introduite dans les années 1870 par Beltrami et Jordan. Le principe de base de cette méthode démarre à partir de M clichés connus. Nous disposons alors d'une matrice de snapshots A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_M^1 & \cdots & u_M^N \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

où $u_i^j = u(x_j, t_i)_{j=1,\dots,N\,;\,i=1,..,M}$ sont les champs connus.

Effectuer une SVD sur cette matrice A de dimension M x N, consiste à écrire sa factorisation sous la forme :

$$A(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x) \sigma_i v_i(t)^T \tag{2.22}$$

où U=u_i et V=v_i sont des matrices orthogonales, respectivement de dimension M x M et N x N ; Σ=σ_i est une matrice diagonale par bloc de dimension M x N contenant les valeurs singulières σ_i de A. Les r premiers termes de Σ (avec $r = \min(M,N)$) sont positifs tels que $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant ... \geqslant \sigma_r \geqslant 0$, tous les autres étant nuls.

L'une des approches les plus connues consiste à jouer sur l'ordre du modèle réduit N en le tronquant à une valeur fixée.

2.3.3 POD Snapshots

La méthode des snapshots [5] fut introduite par Sirovich dans [39]. En comparaison avec la méthode POD classique, celle-ci a l'avantage d'être moins coûteuse en temps de calcul étant donné que la taille du problème à résoudre dépend uniquement du nombre de snapshots conservés.
Pour cette méthode on considère M réalisations $u(x,t_i)_{i=1,..,M}$ connues et $\phi(x)$ un vecteur propre. On cherche alors les a_k tels que :

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{M} a_k u(x,t_k) \tag{2.23}$$

Dans la pratique, la méthode POD Snapshots revient à recherche les valeurs propres de la matrice de corrélation $A = {}^T[U][U]$ où $[U] = [\{u(t_1),\ldots,u(t_M)\}]$.

2.3.4 PGD

La méthode PGD (Proper Generalized Decomposition) est une méthode dite "a priori" due au fait que les fonctions d'approximations sont construites sans avoir recours à la solution globale du problème étudié. Cette méthode est une extension de la méthode LATIN (LArge Time INcrement method) introduite par Ladévèze dans [40]. Elle consiste à trouver une décomposition spatio-temporelle pour la solution du problème étudié. Une description complète de la PGD est faite par Nouy dans [41].

Afin de décrire la démarche de la PGD, considérons le problème suivant à résoudre :

$$\begin{cases} C\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} + KT(x,t) = Q \\ T(x,0) = T_0 \end{cases} \qquad \forall\, T(x,t) \in \Omega \times]0,T] \tag{2.24}$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = AT(x,t) + C^{-1}Q \\ T(x,0) = T_0 \end{cases} \qquad \forall\, T(x,t) \in \Omega \times]0,T] \tag{2.25}$$

avec : $A = -C^{-1}K$

La PGD consiste à trouver les fonctions d'approximations telles que la solution $u(x,t)$ du problème 2.24 puisse se décomposer sous la forme :

$$T(x,t) \approx T_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) a_i(t) \tag{2.26}$$

où :
- ϕ_i sont les fonctions spatiales
- a_i sont les fonctions temporelles

5. clichés

Il existe plusieurs variantes de la PGD. Citons par exemple : la PGD progressive, la PGD Galerkin ou encore la PGD progressive pondérée. Ces méthodes sont développées dans la thèse de Dumon [42].

Nous allons ici décrire le principe de la PGD progressive. Pour cela, nous considérons connu à l'ordre m-1 :

$$T_{m-1} = \sum_{i=1}^{m-1} \phi_i(x) a_i(t) \tag{2.27}$$

Afin de déterminer T_m, il est nécessaire de trouver $(\phi_m, a_m) \in \Omega \times]0, T]$ tel que :

$$\begin{aligned} T_m &= T_{m-1} + \phi_m a_m \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \phi_i a_i + \phi_m a_m \end{aligned} \tag{2.28}$$

Nous réinjectons 2.28 dans 2.25 pour obtenir :

$$\frac{\partial T_{m-1}}{\partial t} + \phi_m \frac{\partial a_m}{\partial t} = A\left[T_{m-1} + \phi_m a_m\right] + Q + Res^m \tag{2.29}$$

où Res^m est le résidu d'ordre m.
L'équation précédente peut encore s'écrire sous la forme :

$$\phi_m \frac{\partial a_m}{\partial t} - A\phi_m a_m = Q - \frac{\partial T_{m-1}}{\partial t} + AT_{m-1} + Res^m \tag{2.30}$$

Pour déterminer ϕ_m et a_m une projection de l'équation précédente est effectuée sur chacune de ces inconnues. Nous avons alors :

$$\left(\phi_m \frac{\partial a_m}{\partial t} - A\phi_m a_m, a_m\right)_{L^2(]0,T])} = \left(Q - \frac{\partial T_{m-1}}{\partial t} + AT_{m-1}, a_m\right)_{L^2(]0,T])} + (Res^m, a_m)_{L^2(]0,T])} \tag{2.31}$$

et

$$\left(\phi_m \frac{\partial a_m}{\partial t} - A\phi_m a_m, \phi_m\right)_{L^2(\Omega)} = \left(Q - \frac{\partial T_{m-1}}{\partial t} + AT_{m-1}, \phi_m\right)_{L^2(\Omega)} + (Res^m, \phi_m)_{L^2(\Omega)} \tag{2.32}$$

Nous imposons que le résidu Res^m soit orthogonal aux inconnues ϕ_m et a_m, les deux équations précédentes deviennent alors :

$$\left(\phi_m \frac{\partial a_m}{\partial t} - A\phi_m a_m, a_m\right)_{L^2(]0,T])} = \left(Q - \frac{\partial T_{m-1}}{\partial t} + AT_{m-1}, a_m\right)_{L^2(]0,T])} \tag{2.33}$$

et

$$\left(\phi_m \frac{\partial a_m}{\partial t} - A\phi_m a_m, \phi_m\right)_{L^2(\Omega)} = \left(Q - \frac{\partial T_{m-1}}{\partial t} + AT_{m-1}, \phi_m\right)_{L^2(\Omega)} \tag{2.34}$$

Pour déterminer les fonctions ϕ_m et a_m, il est nécessaire que les deux équations précédentes soient vérifiées simultanément. La méthode classiquement employée pour résoudre ces équations est basée sur l'algorithme du point fixe.
La PGD est une méthode largement développée ces dernières années. Celle-ci possède de nombreux avantages mais nous ne l'emploierons pas ici car étant trop intrusive dans le code de calcul et demandant trop de calculs préalables à la construction du modèle réduit. Elle est donc incompatible avec une utilisation industrielle.

2.4 Modèles réduits paramétriques

Le problème de la plupart des méthodes de réduction de modèles est qu'elles ont comme point de départ le maillage d'une géométrie figée. Le modèle réduit ainsi généré est à usage unique et devra donc être reconstruit dans le cas de toute modification géométrique.

2.4.1 Séparation de variables et POD/SVD

L'idée est d'introduire une dépendance paramétrique dans le modèle réduit généré. Par exemple en introduisant une dépendance à des paramètres p dans la formulation d'un problème de thermique, nous obtenons :

$$\dot{T}(x,t) = A(p)T(x,t) + Q \tag{2.35}$$

- Dans le cas où le paramètre p décrit le comportement d'un matériau linéaire, c'est-à-dire ici indépendant de la température, il est généralement possible de factoriser p de façon à obtenir :

  $$A(p) = \sum_i f_i(p) A_i \tag{2.36}$$

  Nous pouvons alors construire une base de projection dépendant du paramètre p. Quelques travaux ont déjà explorés dans cette voie, citons par exemple les travaux de Plouin et Balmes [43] ou encore ceux de Renaud [29].

- Dans le cas où p sont des paramètres géométriques (ou des paramètres matériaux dépendant de la température), il est beaucoup plus compliqué de construire le modèle réduit correspondant car les opérateurs ne sont pas constants. Nous pouvons toutefois passer par la méthode POD (ou une méthode SVD) pour construire le modèle réduit moyennant une étape lourde de calculs préalable. Pour cela via un plan d'expériences, il est envisageable de construire la cartographie en trois dimensions décrivant $T(p,x,t)$ (ie. l'évolution de la température en fonction des paramètres p, de l'espace x et du temps t). Une approche classique est de réduire cette cartographie à une matrice en 2 dimensions de la forme :

  $$T(p,x,t) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} T_{p_1}^{x_1}(t_1) & \dots & T_{p_1}^{x_1}(t_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{p_1}^{x_n}(t_1) & \cdots & T_{p_1}^{x_n}(t_k) \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} T_{p2}^{x_1}(t_1) & \dots & T_{p_2}^{x_1}(t_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{p_2}^{x_n}(t_1) & \cdots & T_{p_2}^{x_n}(t_k) \end{matrix}} \\ \begin{matrix} \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{p_m}^{x_n}(t_1) & \cdots & T_{p_m}^{x_n}(t_k) \end{matrix} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

  Il est alors possible d'effectuer une SVD sur cette matrice afin de construire une base de projection dépendant de ces paramètres.

Afin d'illustrer ces propos, revenons à un problème ne dépendant que de p et de x. Nous pouvons alors écrire :

$$T(p,x) = \underbrace{\begin{pmatrix} T_{p_1}^{x_1} & \dots & T_{p_m}^{x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{p_1}^{x_n} & \dots & T_{p_m}^{x_n} \end{pmatrix}}_{U\Sigma V^T} \tag{2.38}$$

Grâce à la SVD nous avons alors une dépendance en x de U et une dépendance en p de V.

2.4.2 Utilisation de la PGD

Une autre approche permettant de construire des modèles réduits paramétriques est basée sur la PGD. En effet, au lieu de considérer une décomposition en espace et en temps, nous pouvons par exemple employer une décomposition en espace et paramètre. Ce qui revient à écrire :

$$T(x,p) \approx T_n(x,p) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) a_i(p) \tag{2.39}$$

Toute la difficulté est ensuite de construire une norme sur ces paramètres p. Plusieurs travaux se sont déjà intéressés à cette approche, citons par exemple les travaux de Bordeu [44], de Chinesta [45] ou encore de Ladevèze [46].

2.4.3 Interpolation sur base de modèles réduits

Cette idée a été introduite par Amsallem et Farhat dans [47]. Celle-ci est la combinaison de l'approche du type plan d'expériences avec les méthodes de réduction. En effet en se donnant une dépendance à deux paramètres, il est possible de pré-calculer plusieurs modèles réduits pour des valeurs bien précises de ces paramètres afin de cartographier l'espace. Il ne restera plus qu'à interpoler au besoin entre les modèles réduits afin de reconstruire instantanément le nouveau modèle.

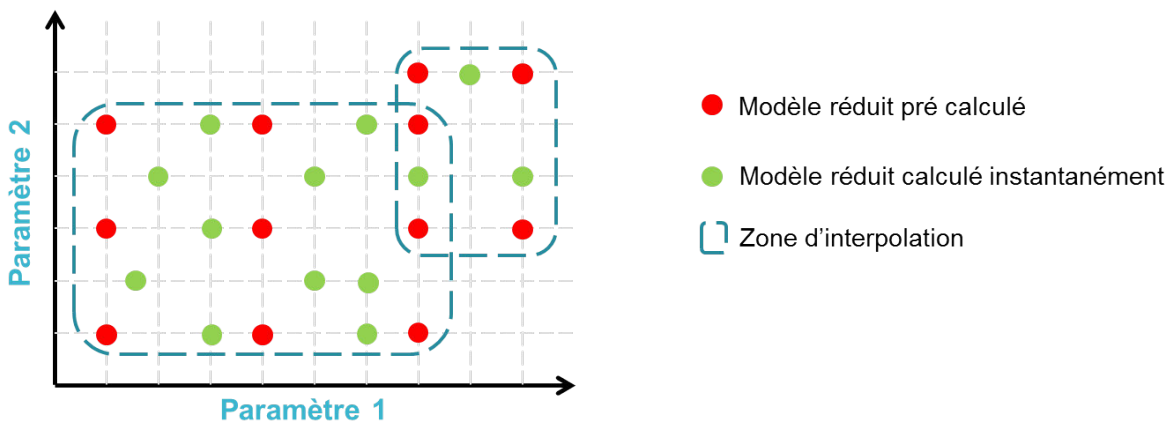


Figure 2.6 – Principe d'interpolation entre les modèles réduits

2.5 Méthodes de réduction pour des problèmes non-linéaires

Dès que nous avons à traiter des problèmes non-linéaires, les méthodes de projection sur sous-espace sont en difficulté. Cela provient du fait que la base de projection n'est plus pertinente quand les opérateurs tangents évoluent avec la non-linéarité.
Considérons le problème non linéaire en X suivant :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(X).X(t) + Bu(t) \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Par projection sur une base Φ nous pouvons encore écrire :

$$\begin{aligned} \Phi^T \dot{X}(t) &= \Phi^T A(\Phi\tilde{x}).\Phi\tilde{x}(t) + \Phi^T Bu(t) \\ Y(t) &= C\Phi\tilde{x}(t) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Remarques :

- Si la base Φ est invariante alors le résidu sera croissant.
- Si la base Φ est mise à jour en cours de simulation alors le résidu restera stable. Cette précision s'effectue au détriment du coût de calcul (la mise à jour de la base de projection pouvant parfois être plus longue qu'un calcul direct).

2.5.1 Identification

Tout d'abord commençons par définir le modèle d'état à identifier. Celui-ci est de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_I X + B_I U \\ Y &= C_I X \end{aligned} \tag{2.42}$$

Pour effectuer une identification à partir d'un snapshot (ou cas de charge) connu, il est nécessaire de faire tourner en parallèle de la résolution du problème "haute fidélité" un algorithme d'identification des paramètres du modèle réduit (A_I, B_I et C_I).
Le vecteur inconnu X peut s'écrire sous la forme :

$$X = \left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ \vdots \\ T_{n_r} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \right\} \tag{2.43}$$

où $(T_1, ..., T_{n_r})$ sont les observations réduites et $(p_1, ..., p_n)$ sont les coefficients des matrices A_r,B_r et C_r qui gouvernent le modèle réduit.

Le problème d'identification à résoudre est un problème de minimisation du résidu au sens de la norme ℓ^2 au regard des paramètres p_i qui peut s'écrire sous la forme :

$$\min_{p_i}(R) = \min_{p_i}(\|Y_{HF} - Y_r\|_{\ell^2}) \tag{2.44}$$

Le temps de convergence pour résoudre ce problème de minimisation afin d'identifier les paramètres du modèle réduit peut être assez coûteux et dépend complètement du cas de charge étudié. Comme pour toute technique de réduction, la précision des résultats du modèle réduit pour des problèmes non-linéaires ne peut s'effectuer que pour un cas de charge identique (ou alors au voisinage proche) au cas de charge ayant permis la construction de ce modèle. Cependant, contrairement à des méthodes du type SVD ou POD, les méthodes d'identification exploitent les résultats provenant du modèle "Haute fidélité" au fur et à mesure de la résolution. Ces méthodes restent donc des méthodes *a posteriori* mais ont l'avantage de ne pas nécessiter la résolution complète du problème "Haute fidélité".

Un exemple de ces techniques d'identification est présenté par Abid dans [48]. Ici le filtre de Kalman est employé pour identifier un problème de Thermique. Nous y voyons par exemple que pour un cas de Thermique, les paramètres p_i peuvent s'écrire sous la forme :

$$p_i = \left[e^{a_1 t} \cdots e^{a_M t}, \frac{b_1}{a_1} \cdots \frac{b_M}{a_M}, c_{11} \cdots c_{nn} \right] \tag{2.45}$$

2.5.2 APR

La méthode de réduction a priori (APR) est une méthode incrémentale basée sur un enrichissement de la base de projection à l'aide des sous-espaces de Krylov. Celle-ci a été développée par Ryckelinck dans [49] et [50] pour des applications en Thermomécanique et a ensuite été utilisée dans différents domaines. Citons par exemple Ammar [51] pour des problèmes d'élasticité non-linéaire, Verdon pour résoudre des équations de transfert [52] ou encore Ryckelynck pour des problèmes élasto-vibro-plastiques [53].

Le principe de base de cette méthode peut se résumer en quatre étapes :

1. Initialisation de la base
2. Résolution du système réduit
3. Utilisation de la solution du système réduit et du modèle pour déterminer un résidu
4. Enrichissement de la base par le résidu

Les étapes 2, 3 et 4 sont répétées jusqu'à convergence du modèle réduit vers une précision fixée par l'utilisateur. Pour plus de détails, l'algorithme complet de l'APR est présenté dans la Thèse de Dumon [42]. Notons que cette démarche est assez semblable à celle introduite par Balmes [14] et par Bobillot [30].

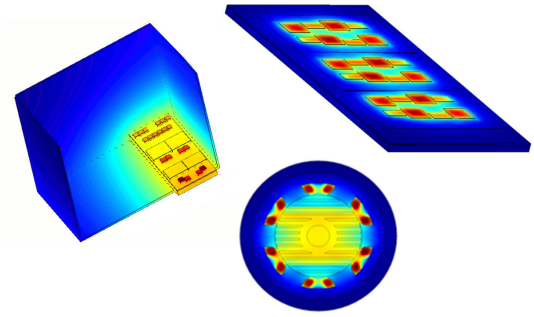
Cette méthode a ensuite été étendue par Ryckelynck dans [50] vers la méthode APHR (A Priori Hyper Reduction). Il s'agit d'une méthode de réduction adaptative de modèle. L'aspect "Hyper Reduction" introduit par la méthode vient du fait qu'une sous-structuration du modèle est réalisée. Par rapport à l'APR, l'enrichissement ne porte alors que sur une partie du domaine.

Chapitre 3

Application à la Thermique linéaire

Sommaire

3.1 Cas d'étude 54
3.2 Réduction par troncature modale 58
3.3 Principe de la sélection sur un critère énergétique 65
3.4 Correction statique 69
3.5 Modes de composants 72
3.6 SVD ou réduction optimale 76
3.7 Conclusion du Chapitre 3 80



Résumé

Ce chapitre présente différentes méthodes de réduction de modèles appliquées à un cas de Thermique linéaire. Une comparaison entre celles-ci est effectuée afin de dégager les avantages et inconvénients de chacune.

3.1 Cas d'étude

Les méthodes de réduction de modèle qui sont développées ici ont pour but de s'appliquer sur tous les organes du GMP-e [1]. La démarche sera ici présentée et illustrée sur une carte d'électronique de puissance mais peut facilement être étendue à d'autres composants (ce qui a été fait sur d'autres applications durant cette thèse). Ces cartes sont traditionnellement utilisées sur un véhicule électrique afin de convertir le courant continu issu de la batterie en courant alternatif exploitable par la machine électrique et réciproquement convertir le courant alternatif en courant continu (lors des phases de récupération d'énergie par exemple).

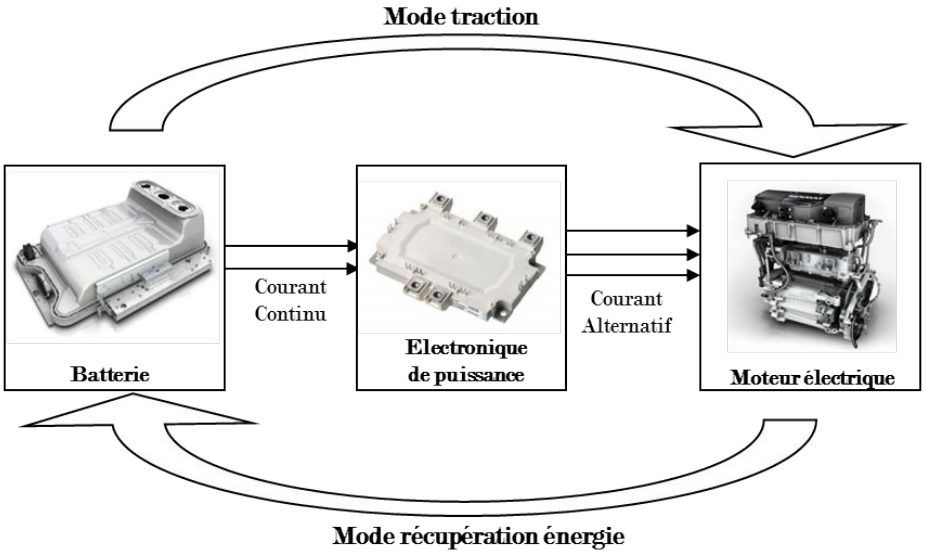


Figure 3.1 – Modes d'utilisation des modules d'électronique de puissance dans un véhicule électrique

Le module étudié ici est une carte multicouche composée de 4 puces : 2 diodes et 2 IGBT [2]. La puissance dissipée sur chaque puce de ce type de carte est de l'ordre de 100 à 150W dans notre cas d'étude. Celle-ci correspond à la valeur moyenne de la somme des pertes par commutation avec les pertes par conduction. Elle est co-localisée [3] avec les capteurs des températures qui nous intéressent, ce qui nous force à avoir une grande précision dans cet espace géographique. Cette carte peut être considérée comme le motif élémentaire d'un module d'électronique de puissance.

Le problème étudié est un problème en Thermique linéaire dont la formulation intégrale est donnée dans la partie 1.1.3. Le rayonnement ne sera ici pas pris en compte. La carte est plongée dans un environnement à 25°C et a pour unique condition limite un refroidissement modélisé par un coefficient de convection **h** sur la paroi inférieure. Nous prendrons ici l'hypothèse que **h** est constant.

1. Groupe Moto-Propulseur Électrique
2. de l'anglais Insulated Gate Bipolar Transistor : transistor bipolaire à grille isolée
3. ici, ce sont l'application de la puissance et la mesure qui sont co-localisés

La Figure 3.2 ci-dessous représente une vue de dessus ainsi qu'une coupe de la carte dans laquelle nous visualisons l'empilement des couches et les matériaux associés à celles-ci, ainsi que leurs dimensions.

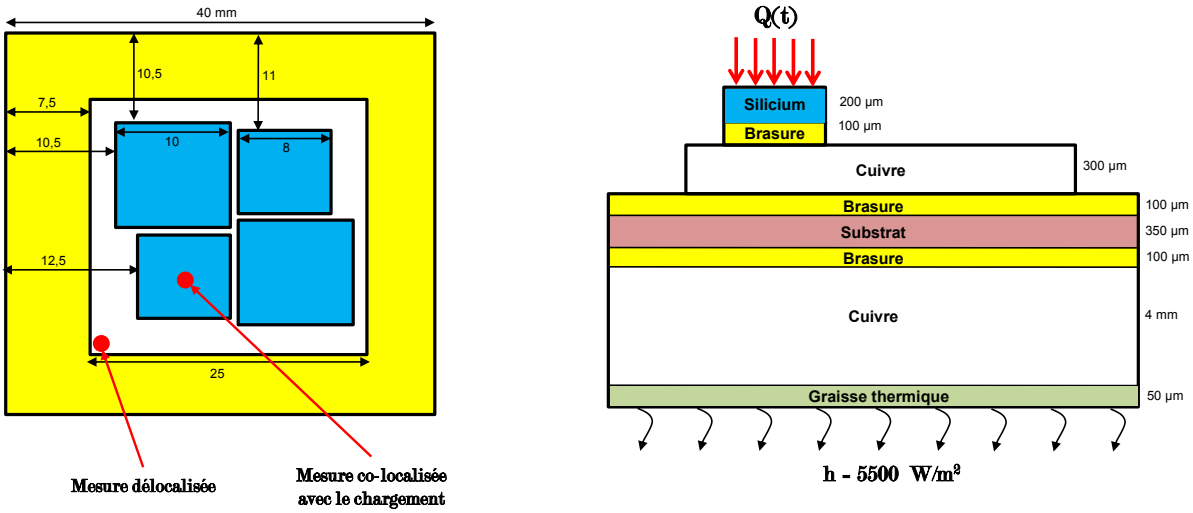


Figure 3.2 – Descriptif de la carte électronique (dimensions + matériaux)

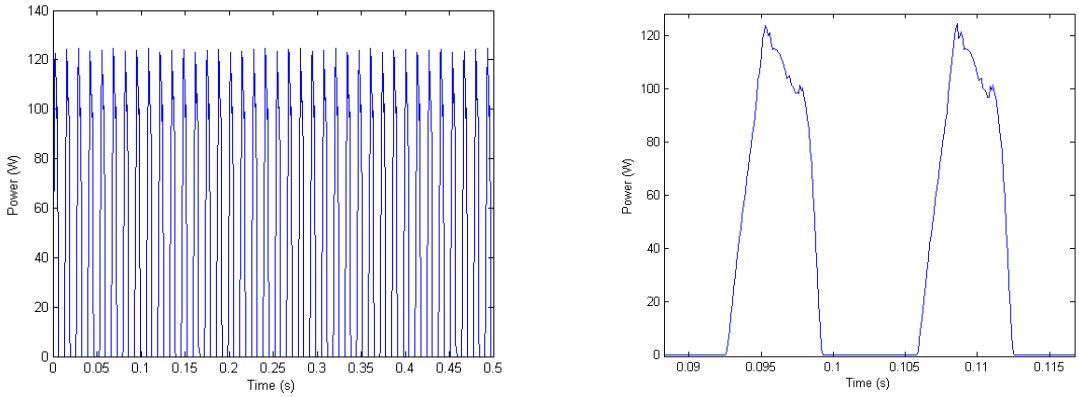
Le tableau 3.1 qui suit regroupe les valeurs de conductivités thermiques λ, capacités thermiques c_p et masses volumiques ρ des matériaux constitutifs de la carte.

	$\lambda(W.m^{-1}.K^{-1})$	$c_p(J.kg^{-1}.K^{-1})$	ρ(kg/m3)
Graisse	1.5	105	10000
Cuivre	383	385	8700
Brasure	60	180	7300
Substrat	23	880	3960
Silicium	771	180	2330

Table 3.1 – Propriétés thermiques des matériaux utilisés

Les entrées d'un tel modèle sont des puissances volumiques appliquées dans le silicium des puces. Ces puissances sont caractéristiques des commutations des interrupteurs dont la fréquence est ici proche de 100Hz. Comme la figure 3.3 le présente, le signal d'entrée est non-sinusoidal mais périodique. Ce chargement sera notre chargement de référence pour la suite de notre étude. Toutes les illustrations de montée en température présentées seront effectuées avec ce chargement en entrée.
Comme dit précédemment, le modèle haute fidélité étudié est un modèle thermique obtenu par la méthode des Éléments Finis qui produit des résultats dont la précision dépend de la qualité et du raffinement du maillage. Le modèle se compose ici de plus de 110 000 DDL et une simulation du cycle présenté en figure 3.3(a) s'effectue en plus de 60 minutes [4].

4. simulation réalisée sur Intel Core i7-2630QM avec 8Go de RAM sous le logiciel Comsol Multiphysics ®



(a) Allure périodique des puissances IGBT et Diode

(b) Zoom sur les puissances ⇒ signal non-sinusoidal

Figure 3.3 – Signal en entrée du modèle thermique étudié

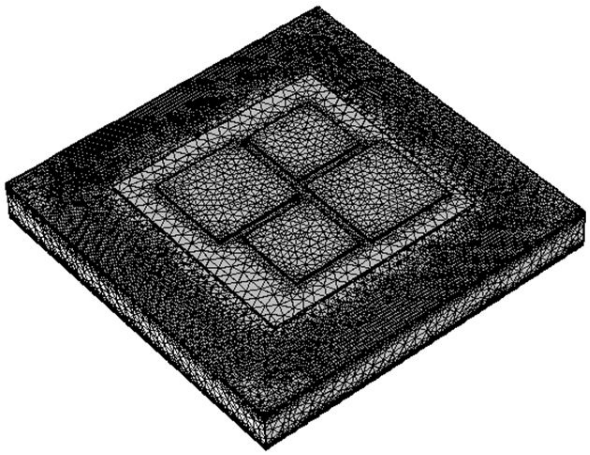


Figure 3.4 – Réprésentation du maillage étudié - 110 000 DDL

La Figure 3.5 ci-dessous illustre les résultats qu'il est possible d'obtenir à l'aide d'une simulation 3D transitoire basée sur la résolution de l'équation de la chaleur présentée dans le Chapitre 1.

L'idée directrice est donc de construire un modèle 0D facilement intégrable dans une modélisation du système GMP-e tout en conservant la précision d'un modèle 3D avec possibilité de remonter l'information en tout point du maillage. Ici nous nous intéressons à deux types de mesure dont les allures des évolutions de la température sont présentées en figure 3.6. Nous pouvons y voir deux mesures de température (cf figure 3.2) :

- l'une est effectuée au centre d'une puce (c'est-à-dire co-localisée avec le chargement)
- l'autre est effectuée dans un des coins de la couche supérieure du cuivre (c'est-à-dire délocalisée avec le chargement)

Dans le cas de la mesure co-localisée avec le chargement, nous pouvons constater que celle-ci est la superposition d'un signal basse fréquence (un premier ordre décrivant les phénomènes globaux) avec un signal haute fréquence (signal caractéristique des phénomènes locaux). Cette décomposition nous sera utile par la suite lorsque nous chercherons à réduire le modèle.

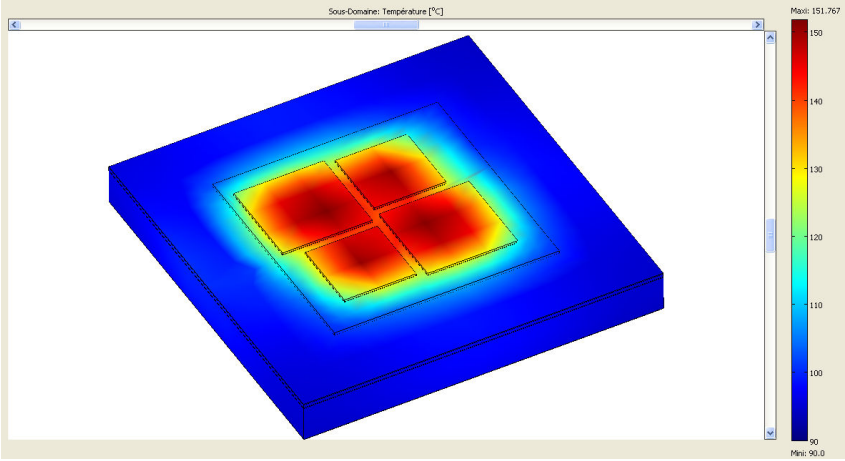
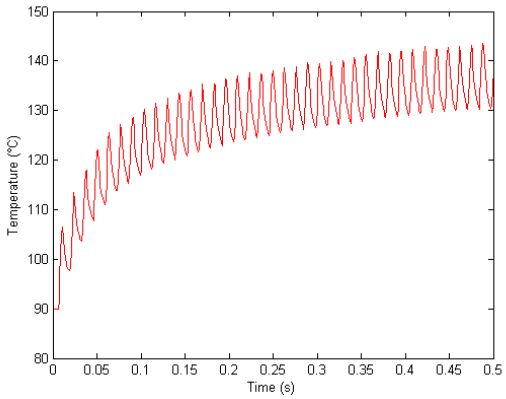
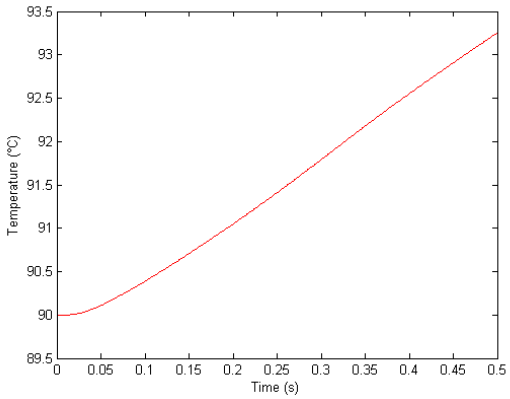


Figure 3.5 – Illustration d'une cartographie 3D de température (°C) obtenue sous Comsol Multiphysics ®

Dans le cas de la mesure délocalisée, nous pouvons voir que la courbe est totalement lissée. Il s'agit d'une montée linéaire en température. Les phénomènes locaux présents dans les puces n'ont ici pas d'influence. Nous pouvons cependant remarquer un retard au début de la montée de température. Cela est dû au temps de propagation de la température depuis les sources chaudes présentes dans les puces vers notre point de mesure.



(a) Evolution de la température au cours du temps pour un point d'évaluation co-localisé dans le silicium d'une puce



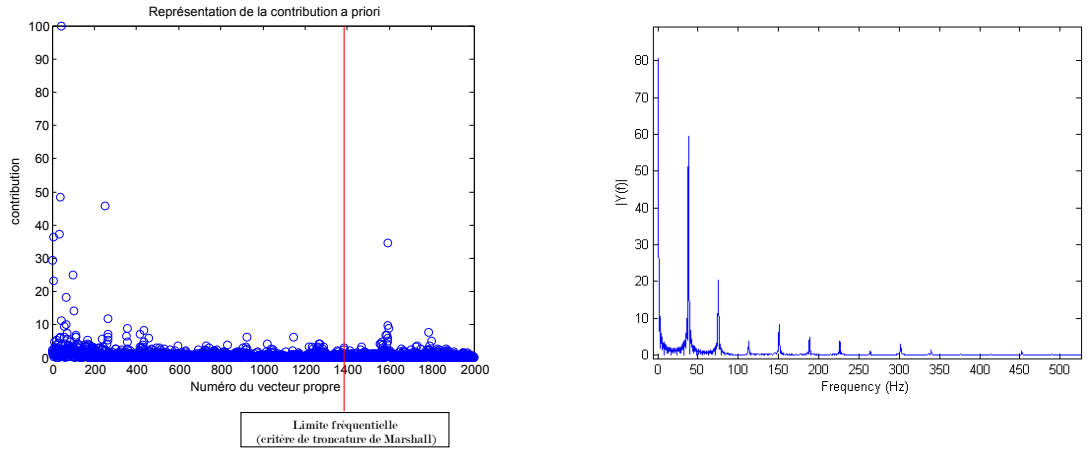
(b) Evolution de la température au cours du temps pour un point d'évaluation délocalisé (ici dans un des coins de la couche supérieure de cuivre)

Figure 3.6 – Comparaison des évolutions des températures dans le cas d'une mesure co-localisée avec le chargement et d'une mesure délocalisée

3.2 Réduction par troncature modale

Il existe plusieurs méthodes de troncature modale. Citons parmi les plus connues celles basées sur le critère de Marshall [18] ou encore sur le critère de Litz [19]. Une excellente revue est disponible sur ce sujet dans les thèses de B. Flament [16] et de Pierre-Olivier Laffay [17, 54]. Toutes les méthodes de troncature modale reposent sur un même principe : la description d'un phénomène peut s'effectuer grâce à certains modes propres. Pour cela il faut sélectionner ces modes de manière judicieuse.

La méthode de troncature modale la plus couramment employée par les codes de calcul est basée sur le critère de Marshall. Celui-ci consiste à définir l'importance d'un mode propre en fonction de sa constante de temps et de venir uniquement sélectionner les n premiers modes propres. Nous sélectionnons ainsi les n modes ayant une fréquence inférieure à un seuil fixé (cf figure 3.7(a)). Cette méthode est assez simple à mettre en oeuvre et peut fournir de très bons résultats pour des phénomènes à évolution lente. Elle a cependant l'inconvénient d'avoir une convergence très lente mais aussi de ne pas être adaptée pour décrire des phénomènes à dynamique élevée (cf figure 3.8(b)).

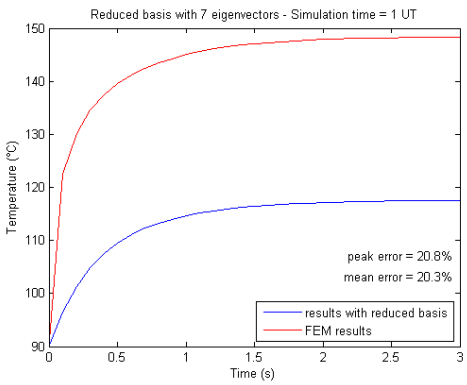


(a) Représentation de la contribution (cf eq. 3.2) de chaque mode propre vis-à-vis du chargement et critère de sélection en fréquence (Marshall)

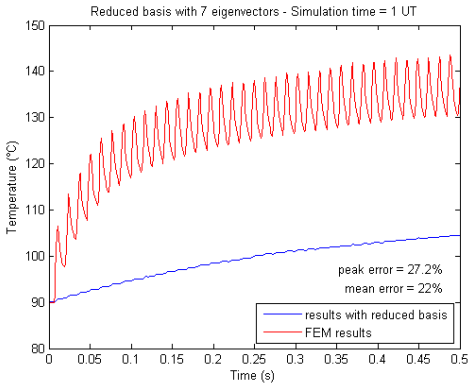
(b) Transformée de Fourier du signal d'entrée appliqué au puces (ref figure 3.3(a))

Figure 3.7 – Mise en évidence de l'existence du critère de Marshall (troncature modale)

Les résultats sont ici présentés avec uniquement les 7 premiers modes retenus dans la base de projection. Il est clair qu'en conservant un plus grand nombre de modes les résultats pour une dynamique élevée seraient meilleurs. Cependant cette précision serait au détriment de la rapidité d'exécution du modèle réduit. Afin d'illustrer cela, une série de calculs a été effectué en repoussant l'ordre de troncature. Cela revient à conserver dans la base de projection des modes dont la constante de temps est plus élevée. Ces résultats sont présentés dans les figures 3.10 à 3.13. Cela permet de mettre en évidence que certains modes ayant une participation quasi nulle n'auront aucune utilité dans le modèle réduit. Ils n'auront donc que pour seule et unique conséquence d'alourdir celui-ci et donc d'avoir un temps de calcul plus long.

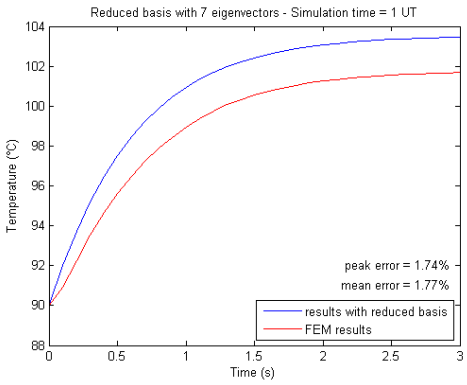


(a) cas d'une alimentation de type échelon

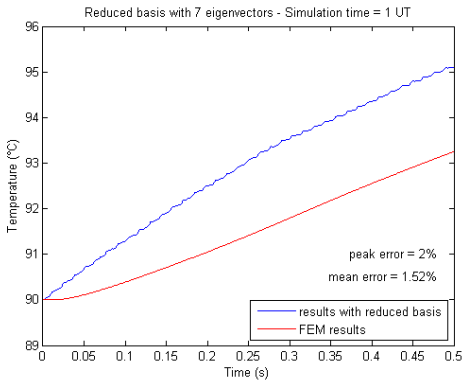


(b) cas d'une alimentation typique d'IGBT (cf 3.3(a))

Figure 3.8 – Montée en température pour une mesure co-localisée avec le chargement - Comparaison entre un modèle réduit par troncature modale et un modèle Éléments Finis *(le nombre de modes retenus étant ici fixé à 7)*



(a) cas d'une alimentation de type échelon



(b) cas d'une alimentation typique d'IGBT (cf 3.3(a))

Figure 3.9 – Montée en température pour une mesure délocalisée par rapport au chargement - Comparaison entre un modèle réduit par troncature modale et un modèle Éléments Finis *(le nombre de modes retenus étant ici fixé à 7)*

La série de figures qui suit est le résultat des différents calculs effectués avec projection sur les 10, 20, 50, 100, 200 et 500 premiers vecteurs propres. Ceux-ci ont été réalisés pour une alimentation typique d'IGBT (représentant les commutations) et pour une alimentation de type échelon. Des résultats dans les deux cas de mesure (co-localisée ou délocalisée par rapport au chargement) sont également présentés.

Nota : se référer à la page 64 pour les définitions concernant le temps de simulation en UT ***59*** ainsi que pour le calcul des erreurs moyenne et crête

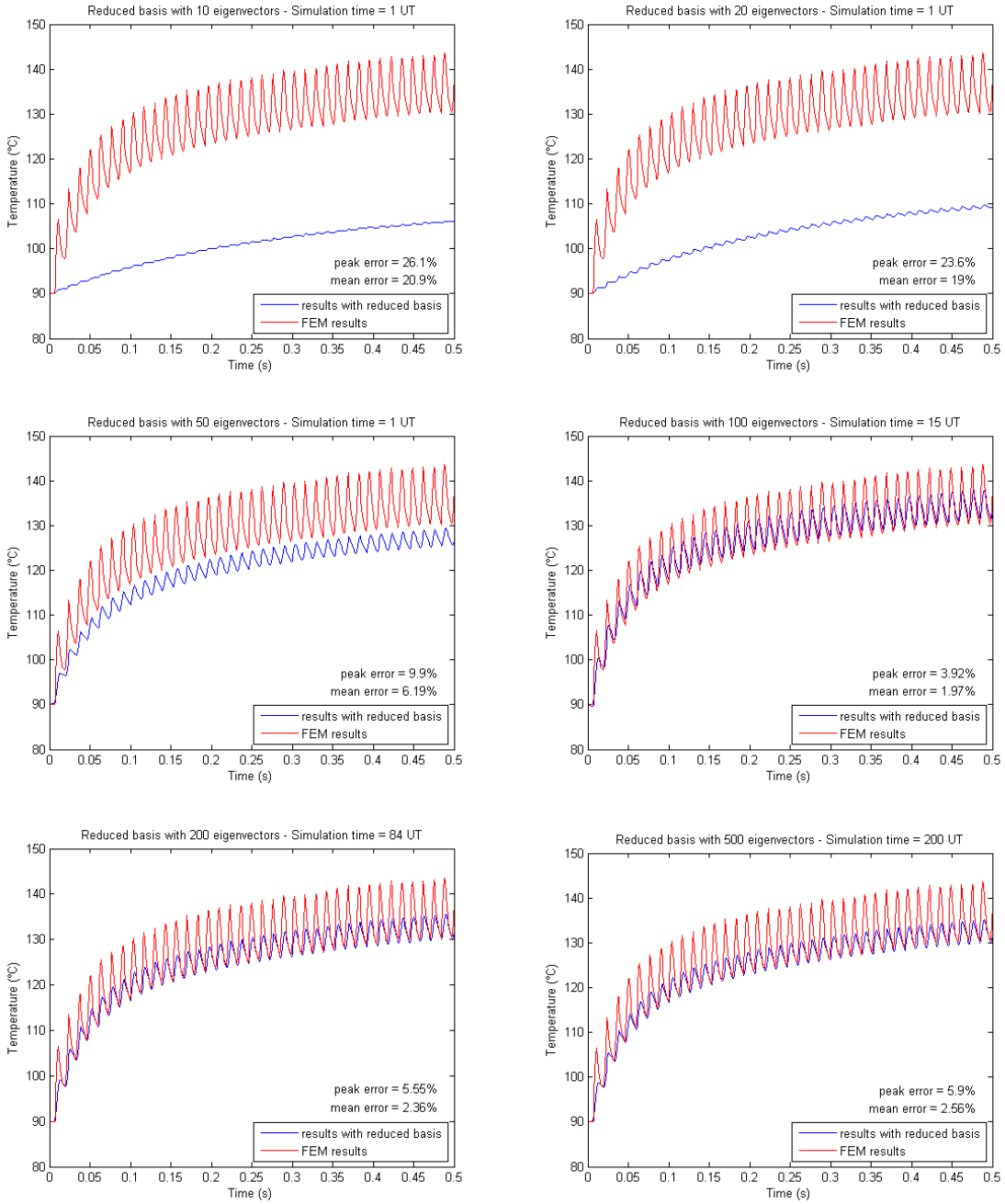


Figure 3.10 – Illustration de la convergence lente du modèle réduit vers le modèle haute fidélité lors de l'ajout des 10, 20, 50, 100, 200 et 500 premiers vecteurs propres dans la base de projection. Cas d'une mesure co-localisée avec le chargement (alimentation typique d'IGBT (cf 3.3(a)))

Nota : se référer à la page 64 pour les définitions concernant le temps de simulation en UT ***60*** ainsi que pour le calcul des erreurs moyenne et crête

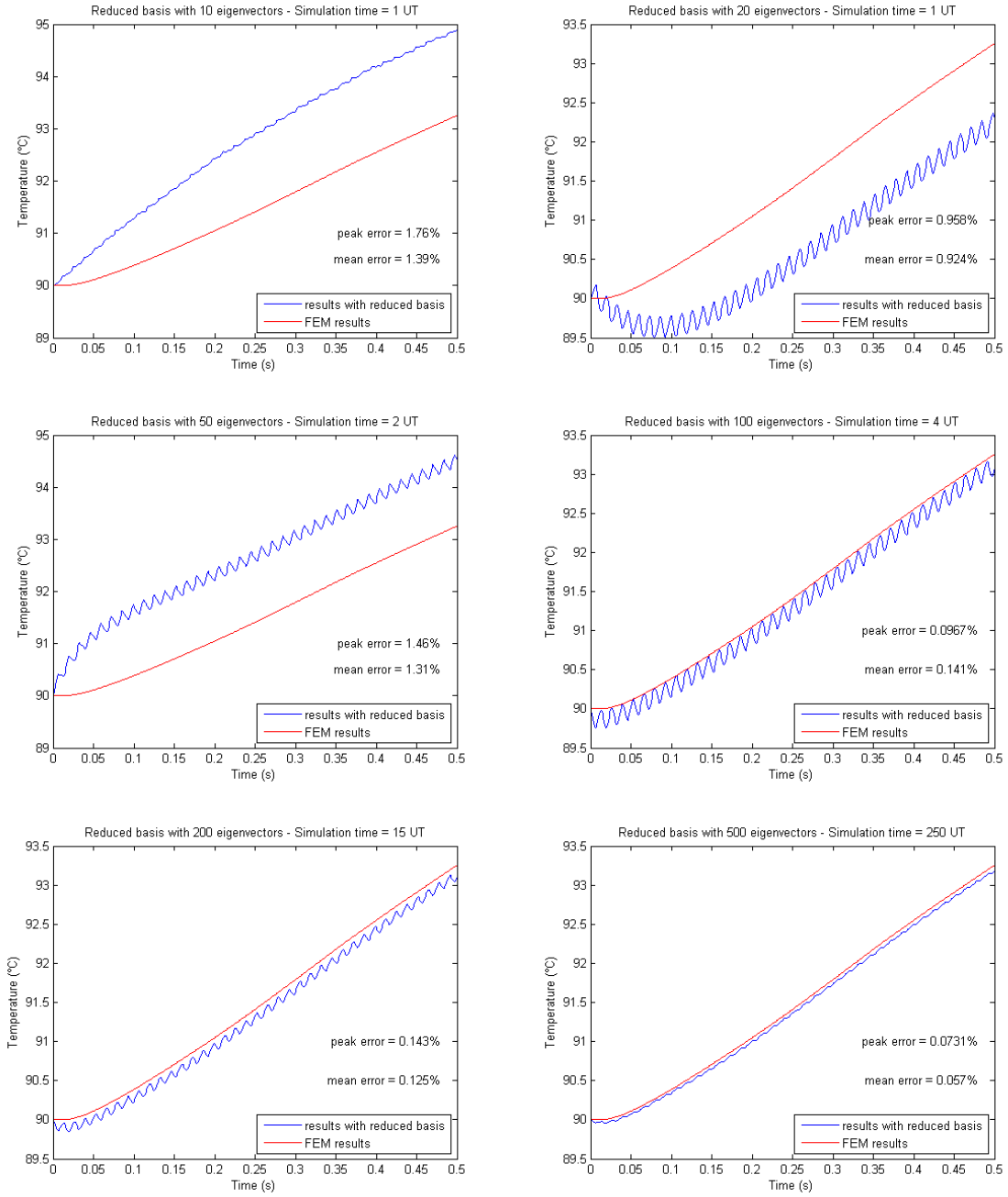


Figure 3.11 – Illustration de la convergence lente du modèle réduit vers le modèle haute fidélité lors de l'ajout des 10, 20, 50, 100, 200 et 500 premiers vecteurs propres dans la base de projection. Cas d'une mesure délocalisée avec le chargement (alimentation typique d'IGBT (cf 3.3(a)))

Nota : se référer à la page 64 pour les définitions concernant le temps de simulation en UT

ainsi que pour le calcul des erreurs moyenne et crête

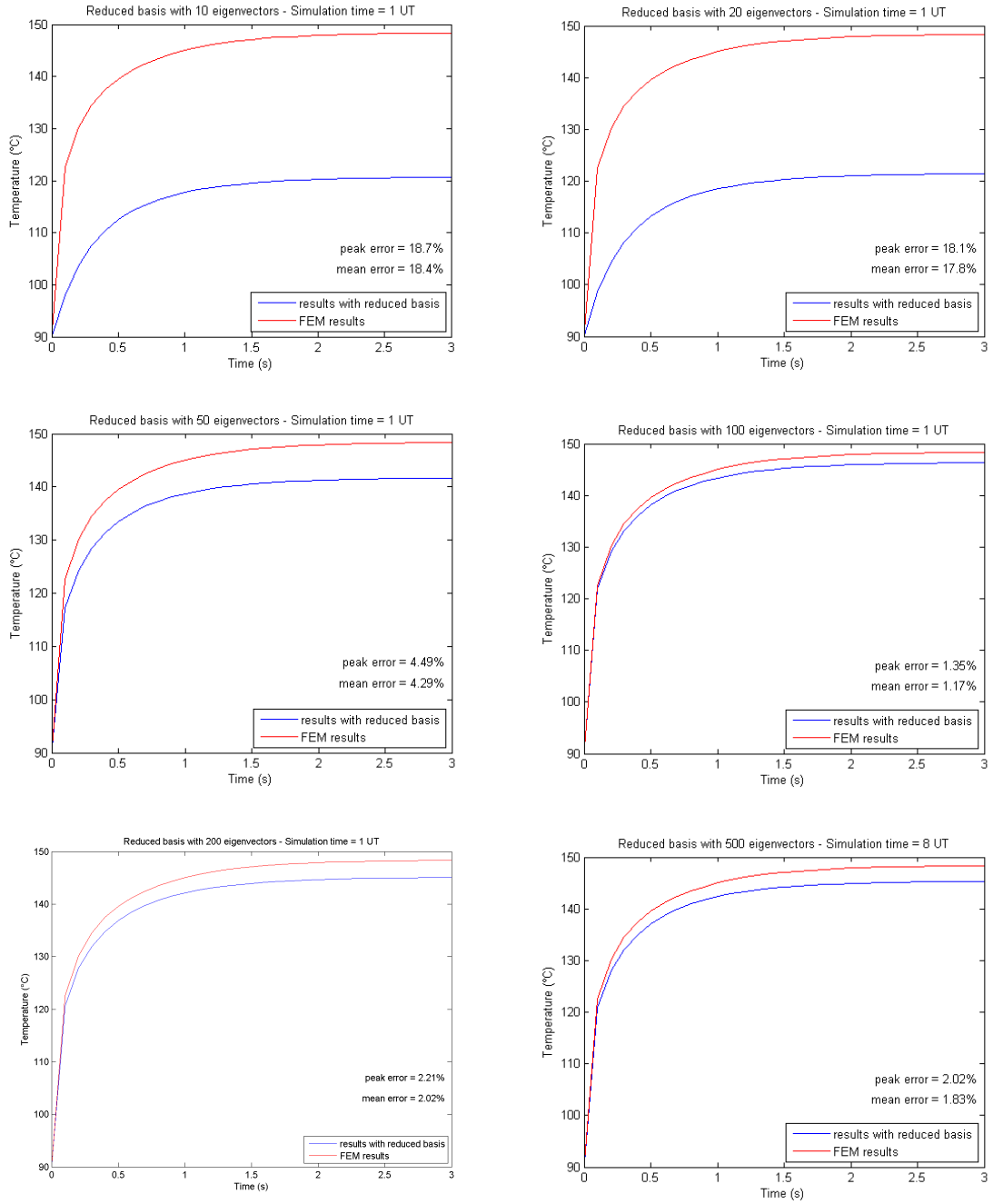


Figure 3.12 – Illustration de la convergence lente du modèle réduit vers le modèle haute fidélité lors de l'ajout des 10, 20, 50, 100, 200 et 500 premiers vecteurs propres dans la base de projection. Cas d'une mesure délocalisée avec le chargement (alimentation de type échelon)

Nota : se référer à la page 64 pour les définitions concernant le temps de simulation en UT ***62*** ainsi que pour le calcul des erreurs moyenne et crête

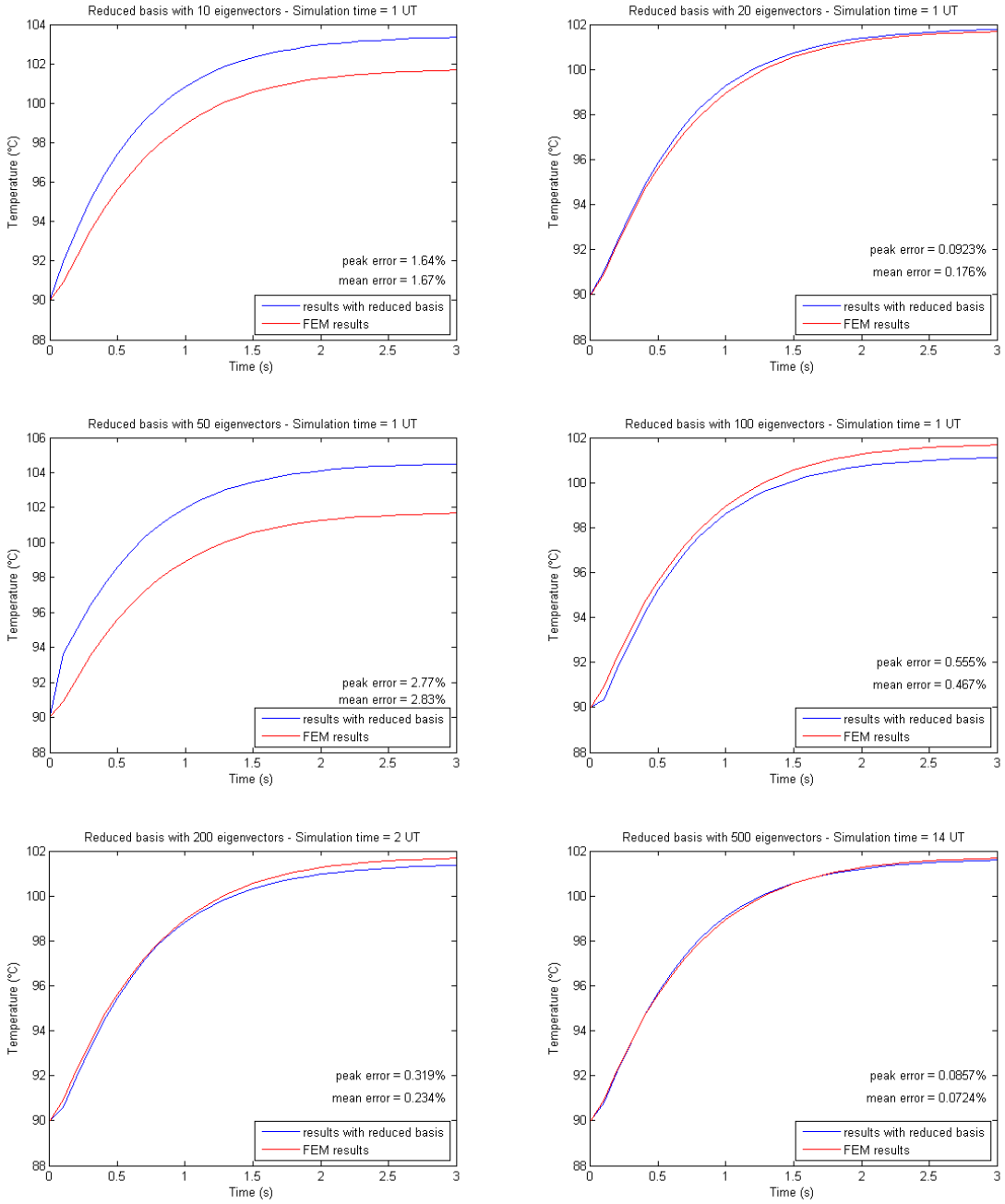


Figure 3.13 – Illustration de la convergence lente du modèle réduit vers le modèle haute fidélité lors de l'ajout des 10, 20, 50, 100, 200 et 500 premiers vecteurs propres dans la base de projection. Cas d'une mesure délocalisée avec le chargement (alimentation de type échelon)

Nota : se référer à la page 64 pour les définitions concernant le temps de simulation en UT ***63*** ainsi que pour le calcul des erreurs moyenne et crête

L'analyse de ces figures permet de faire plusieurs constatations :

- La convergence est plus lente dans le cas d'une mesure co-localisée avec le chargement. Ce qui est logique puisque la distance entre la source et le capteur agit comme un filtrage passe bas. Les phénomènes rapides sont ainsi moins visibles lorsque nous nous éloignons de la source.
- En prenant comme exemple le cas présenté en Figure 3.10, nous constatons que l'ajout de 100 ou 500 vecteurs propres n'a quasiment aucune conséquence sur la précision des résultats. Cependant, le temps de calcul quant à lui se trouve multiplié par plus de 13 (cf figure 3.14). Ce résultat de convergence lente est assez classique en dynamique des structures lorsque nous nous intéressons à l'écart statique entre le modèle réduit et le modèle "haute fidélité".

Nota concernant les figures :

- le temps de calcul ("Simulation time") correspond au temps d'exécution du modèle projeté. Il a été normalisé pour être fourni en UT (Unité de Temps).
- l'erreur crête ε_{peak} ("peak error") et l'erreur moyenne ε_{mean} ("mean error") sont définies par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{peak}(\%) &= \frac{\left|\max(T_{ref}(t)) - \max(\widetilde{T}(t))\right|}{\max(T_{ref}(t))} \times 100 \\ \varepsilon_{mean}(\%) &= \int_0^T \frac{\left|T_{ref}(t) - \widetilde{T}(t)\right|}{T_{ref}(t)}\, dt \times 100 \end{aligned} \tag{3.1}$$

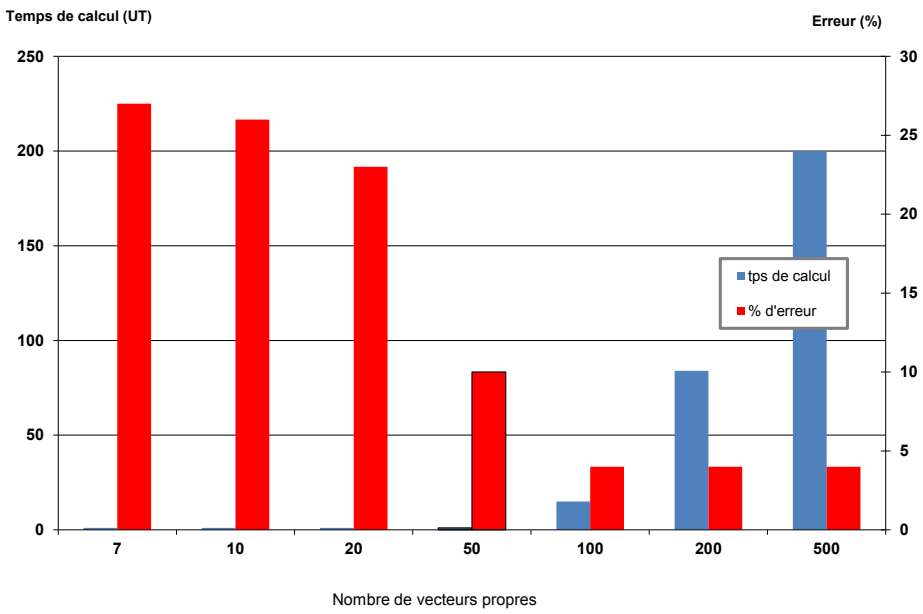


Figure 3.14 – Évolution du temps de calcul et de la précision du modèle réduit ("mean error") en fonction du nombre de modes ajoutés dans la base de projection (cf figure 3.10)

3.3 Principe de la sélection sur un critère énergétique

Nous allons désormais voir comment améliorer le critère de sélection des modes propres afin d'uniquement conserver les plus contributeurs. Pour cela, un critère énergétique est ajouté au critère de Marshall. Celui-ci consiste à évaluer la colinéarité C_i entre chaque mode ϕ_i et le chargement Q. Le calcul de cette contribution *a priori* s'effectue grâce à la relation 3.2 qui suit.

$$\mathrm{C}_i = \frac{{}^t\phi_i Q}{\|{}^t\phi Q\|_\infty} \tag{3.2}$$

Afin d'expliquer l'origine de cette formulation reprenons l'équation de la chaleur du chapitre 1 :

$$\begin{aligned} C\dot{T} + KT - Q &= 0 \\ T(t=0) &= T_0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Considérant la réduction de modèles sur la base ϕ des modes propres donnés par le problème homogène 3.3, nous pouvons écrire $T = \phi\tilde{T}$, ce qui donne :

$$C\phi\dot{\tilde{T}} = -A\phi\tilde{T} + Q \tag{3.4}$$

en multipliant à gauche par ϕ^T, nous obtenons :

$$\phi^T C\phi\dot{\tilde{T}} = -\phi^T A\phi\tilde{T} + \phi^T Q \tag{3.5}$$

si les vecteurs de ϕ sont orthonormalisés par rapport à C, nous avons alors $\phi^T C\phi = \mathbb{1}$ et nous en déduisons :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{T}}_i = \dfrac{1}{\tau_i}\tilde{T}_i + \phi_i^T Q \quad \textit{pour } i \in [1, N] \\ T = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi_i \tilde{T}_i(t) \\ \tilde{T}_0 = \phi^{-1} T_0 = \phi^T C T^0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Par Transformée de Laplace, les équations précédentes deviennent :

$$\begin{cases} s\hat{\tilde{T}}_i = \dfrac{1}{\tau_i}\hat{\tilde{T}}_i + \phi_i^T \hat{Q} + X_{0i} \\ \hat{T} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{\tilde{T}}_i \end{cases} \tag{3.7}$$

en intégrant les conditions initiales et en concaténant les deux équations précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{\tilde{T}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \phi_i \left(\frac{s\tau_i - 1}{\tau_i}\right)^{-1} (\phi_i^T \hat{Q} + \phi_i^T C T_0) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\tau_i}{s\tau_i - 1}\right) \left(\phi_i \phi_i^T \hat{Q} + \phi_i \phi_i^T C T_0\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

De cette dernière équation, nous tirons le résultat important suivant : si les termes $\phi_i^T \hat{Q}$ ou $\phi_i^T C T_0$ sont faibles, alors ils participent peu au résultat. Ces modes pour lesquels les produits $\phi_i^T \hat{Q}$ et $\phi_i^T C T_0$ prennent une valeur faible sont "non dominants" et peuvent être supprimés de la base. Cette approche conduit à une sélection proche de celle obtenue par Litz [19]. Nous pouvons citer Davison qui utilise les modes dominants pour les systèmes dynamiques non-linéaires dans [55] ou encore Ran et al. en Electromagnétique dans [56]. Citons finalement Rommes qui présente dans [57] une méthode permettant de calculer directement les modes dominants.

Une représentation de cette contribution *a priori* se trouve dans la Figure 3.7(a). Nous y voyons clairement que le critère de Marshall consistant à tronquer en fréquence n'est pas suffisant. Une grande quantité de modes sont retenus bien qu'ayant une contribution proche de 0.
Il apparait dès lors que venir ajouter un 2ème critère basé sur la valeur de la contribution spatiale C_i devrait améliorer sensiblement les résultats. Reprenons la figure 3.7(a) pour y ajouter un seuil correspondant à une contribution minimale en dessous de laquelle les modes sont considérés comme "non-contributeurs". Nous définissons ainsi une "zone d'intérêt" dans laquelle nous viendrons retenir les modes propres constitutifs de la base de projection (cf figure 3.15).

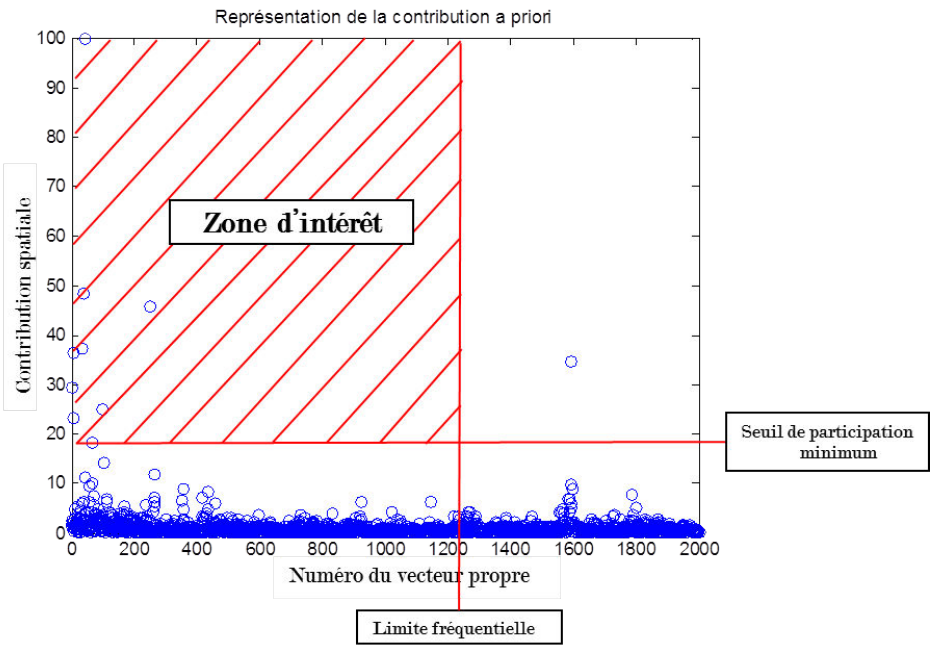


Figure 3.15 – Définition de la zone d'intérêt dans laquelle sont retenus les modes les plus contributeurs

Ce seuil de contribution minimum est fixé *a priori*. Il a un impact direct sur le ratio rapidité/précision du modèle réduit obtenu (cf figure 3.16). Ce seuil est donc à fixer en fonction du besoin auquel doit répondre le modèle réduit. Dans un soucis d'automatisation et d'industrialisation de la démarche, nous avons dégagé deux valeurs pour ce seuil :

- l'une permet d'avoir un modèle réduit très précis mais avec un temps d'exécution relativement long.
- l'autre permet d'avoir un modèle réduit rapidement simulable mais avec une précision moindre.

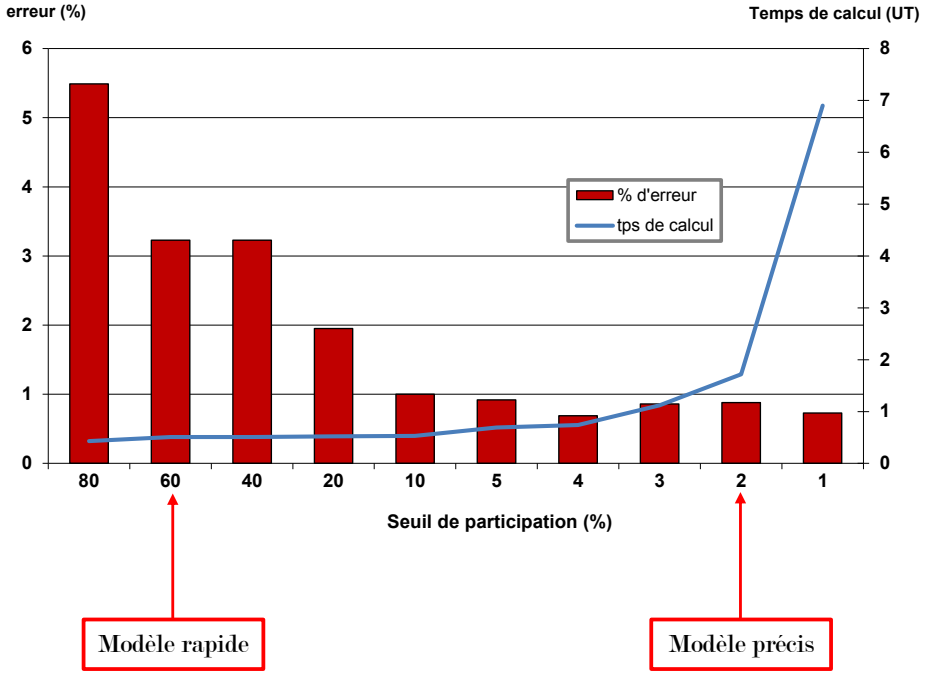


Figure 3.16 – Évolution du pourcentage d'erreur et du temps de calcul en fonction du seuil de participation

Afin de comparer ces résultats à ceux présentés en figure 3.8(b) nous conservons le même nombre de modes propres sélectionnés pour construire la base de projection (soit 7 modes). Les résultats sont présentés dans les figures 3.17 et 3.18. Ces derniers fournissent les bonnes tendances dans le cas d'une mesure co-localisée avec le chargement mais ne sont toujours pas suffisamment précis. Nous verrons dans la section 3.4 une méthode d'enrichissement permettant d'améliorer la précision de ces résultats.
La figure 3.19 qui suit, illustre l'intérêt de la sélection des modes propres en fonction de leur contribution au regard du ratio précision/temps de calcul. Nous constatons nettement que pour une méthode classique de troncature modale, le temps de calcul est beaucoup plus important pour passer sous la barrière des 1% d'erreur. Avec la sélection *a priori*, nous arrivons à trouver un bon compromis entre le temps de simulation et la précision des résultats.

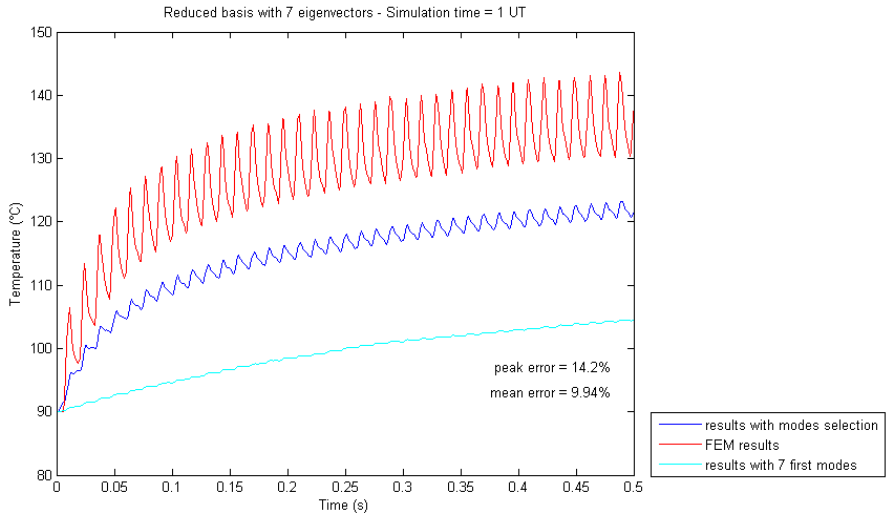


Figure 3.17 – Comparaison des résultats obtenus entre un solveur Éléments Finis 3D et un modèle réduit dans le cas d'une mesure co-localisée avec le chargement (projection sur base modale composée de 7 modes sélectionnés)

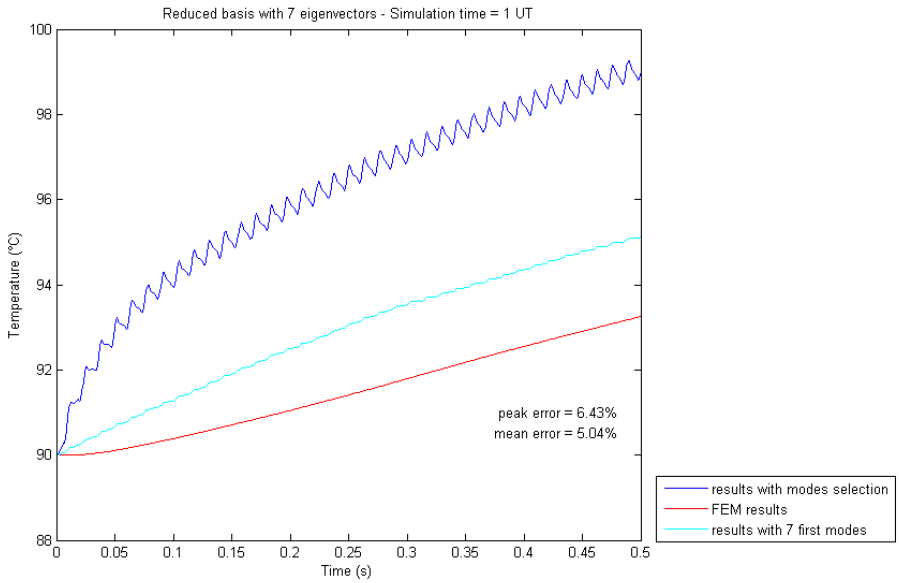


Figure 3.18 – Comparaison des résultats obtenus entre un solveur Éléments Finis 3D et un modèle réduit dans le cas d'une mesure délocalisée avec le chargement (projection sur base modale composée de 7 modes sélectionnés)

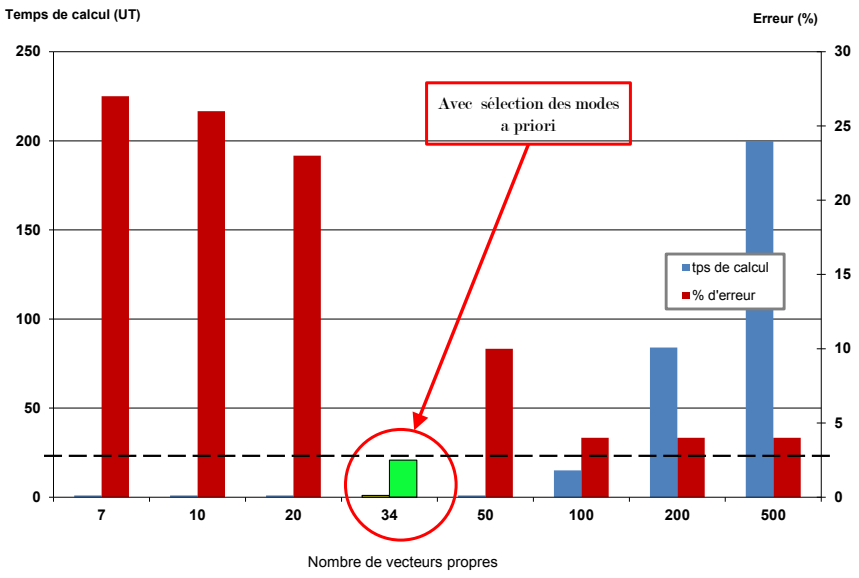


Figure 3.19 – Influence de la sélection a priori sur le ratio temps de calcul/précision des résultats (comparaison avec l'ajout consécutif de vecteurs propres dans la base de projection)

3.4 Correction statique

Suite aux résultats obtenus par sélection *a priori* des modes propres, il apparaît nécessaire d'améliorer cette dernière en agissant sur la base de projection utilisée. Pour cela, nous utilisons une correction par le résidu statique.

Le cumul de la troncature de Marshall [18] et de la sélection des modes dominants conduit à l'écriture :

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\tau_i}{s\tau_i - 1} \right) \left(\phi_i \phi_i^T \hat{Q} + \phi_i \phi_i^T C T_0 \right) \tag{3.9}$$

avec $n << N$ soit $\tau_n >> \tau_N$
et $\phi_i Q >> \phi_j Q$ et $\phi_i C T_0 >> \phi_j C T_0$ où i correspond aux modes dominants et j à ceux non-dominants.

Évidemment cette troncature et cette sélection introduisent un résidu tel que :

$$R(s) = \sum_{k=n+1}^{N} \tau_k \frac{\phi_k \phi_k^T \hat{Q}}{s\tau_k - 1} + \sum_{k=n+1}^{N} \tau_k \frac{\phi_k \phi_k^T C}{s\tau_k - 1} T_0 \tag{3.10}$$

Supposons que les modes non-dominants $\phi_k \phi_k^T \hat{Q}$ et $\phi_k \phi_k^T C T_0$ sont négligeables. Cela est consistant avec notre mode de sélection et avec le fait que dans la bande de fréquence d'intérêt pour la simulation $s << \frac{1}{\tau_i}$.

Nous définissons alors le résidu tel que :

$$R(s) = \sum_{k=n+1}^{N} -\tau_k \phi_k \phi_k^T \left(\hat{Q} + CT_0\right) \tag{3.11}$$

ce qui peut s'écrire dans l'espace des variables physiques :

$$R_s = K^{-1}\left(\hat{Q} + CT_0\right) - \hat{T} \tag{3.12}$$

en considérant que les τ_k sont les plus grandes valeurs propres de K.

Ce résidu n'est autre que le premier vecteur de Krilov. La solution corrigée s'écrit alors :

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\tau_i}{s\tau_i - 1}\right)\left(\phi_i \phi_i^T \hat{Q} + \phi_i \phi_i^T CT_0\right) + R_s \tag{3.13}$$

Soit en repassant dans le domaine temporel :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{T}} = \begin{pmatrix} 1/\tau_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\tau_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 \\ \vdots \\ \tilde{T}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_n \end{pmatrix}^T Q(t) \\ T = \begin{pmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_n \end{pmatrix} \tilde{T} + R_s \\ \tilde{T}_0 = \begin{pmatrix} \phi_1 & \cdots & \phi_n \end{pmatrix}^T CT_0 \end{cases} \tag{3.14}$$

Afin d'évaluer la pertinence de cette écriture, nous reprenons les 7 mêmes modes sélectionnés dans la partie 3.3 auxquels nous ajoutons un résidu statique. Les résultats sont présentés dans les figures 3.21 et 3.22. Ils sont ici proches de ceux de référence (modèle haute fidélité) dans le cas d'une mesure co-localisée. Pour une mesure délocalisée par rapport au chargement, la correction statique améliore les résultats une fois le régime stationnaire établi. En effet, nous constatons que sur la phase transitoire le modèle réduit se détache des valeurs de références fournies par le modèle haute fidélité pour finalement revenir progressivement se centrer dessus. Cette approche combinant la sélection des modes suivant un critère fréquentiel (Marshall), à un critère spatial (contribution) et également à l'ajout d'un résidu statique est très efficace. Cependant, elle a un fort inconvénient : le temps de calcul dit "off-line". En effet, l'étape d'analyse modale permettant d'aboutir à la sélection des modes les plus contributeurs s'avère être une étape très coûteuse en temps de calcul. Plus le modèle de référence contient de DDL, plus l'étape d'analyse modale sera longue. Du fait de la co-localisation entre le point d'application de la puissance et le point d'évaluation de l'évolution de la température il est nécessaire d'avoir une description assez fine des phénomènes locaux. Il nous est donc nécessaire d'aller sélectionner des modes propres ayant un indice élevé dans la base modale car ceux-ci sont représentatifs de comportements locaux (cf figure 3.20). C'est alors cette extraction haute fréquence qui nécessite un lourd calcul "off-line".

Nous allons donc dans la partie suivante aborder une technique permettant de construire un modèle réduit rapidement tout en conservant une bonne précision sur les résultats.

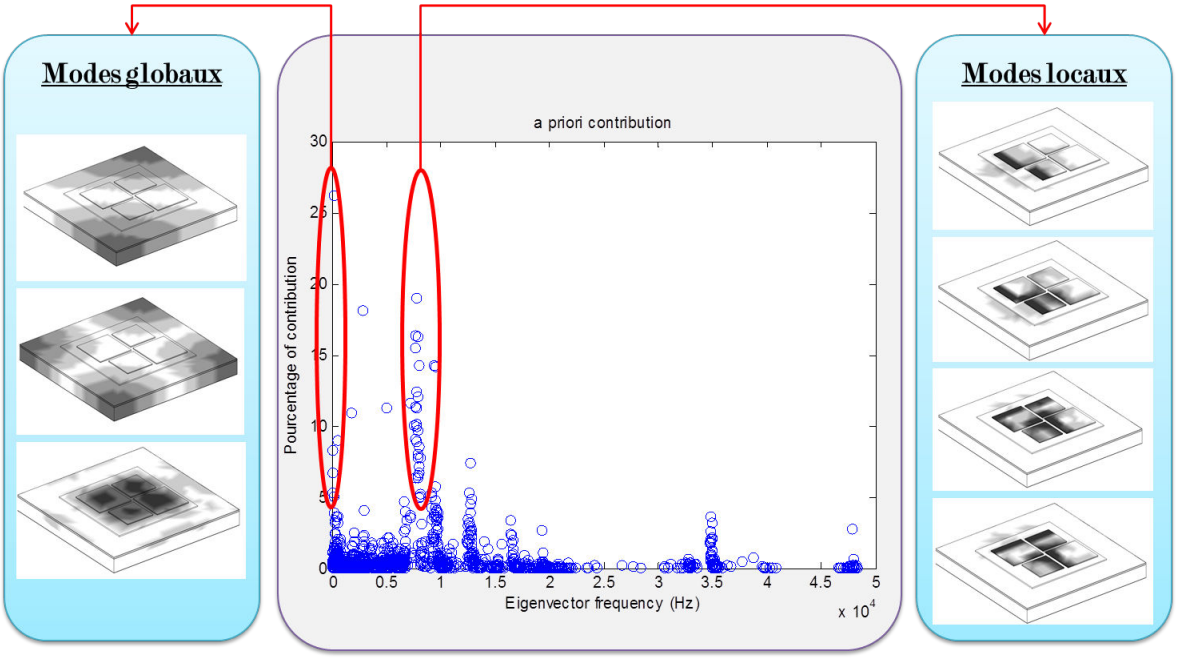


Figure 3.20 – Exemple de localisation dans la base modale et allure des modes globaux et locaux

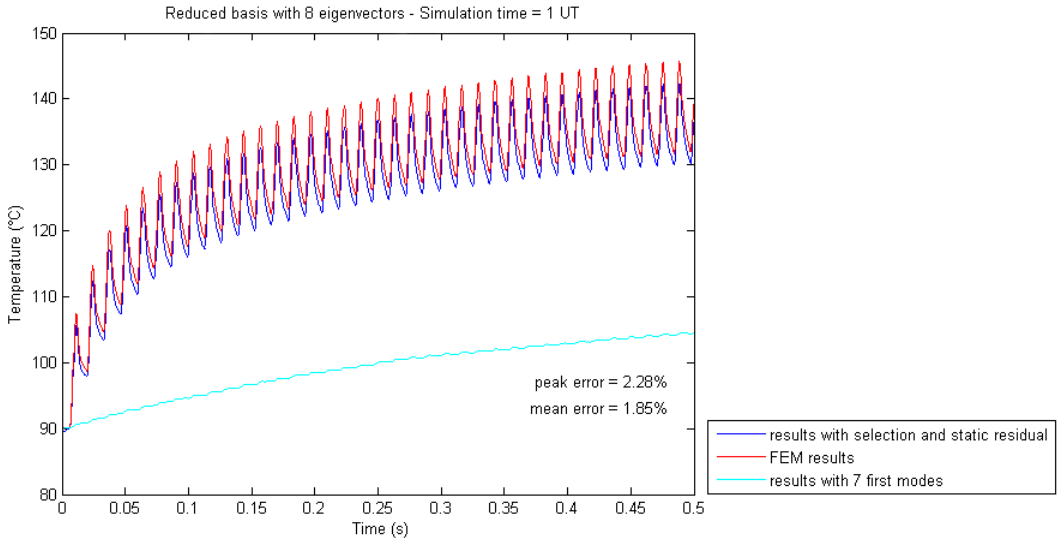


Figure 3.21 – Comparaison des résultats obtenus entre un solveur EF 3D et un modèle réduit dans le cas d'une mesure co-localisée avec le chargement (projection sur base composée de 7 modes sélectionnés + enrichissement par le résidu statique)

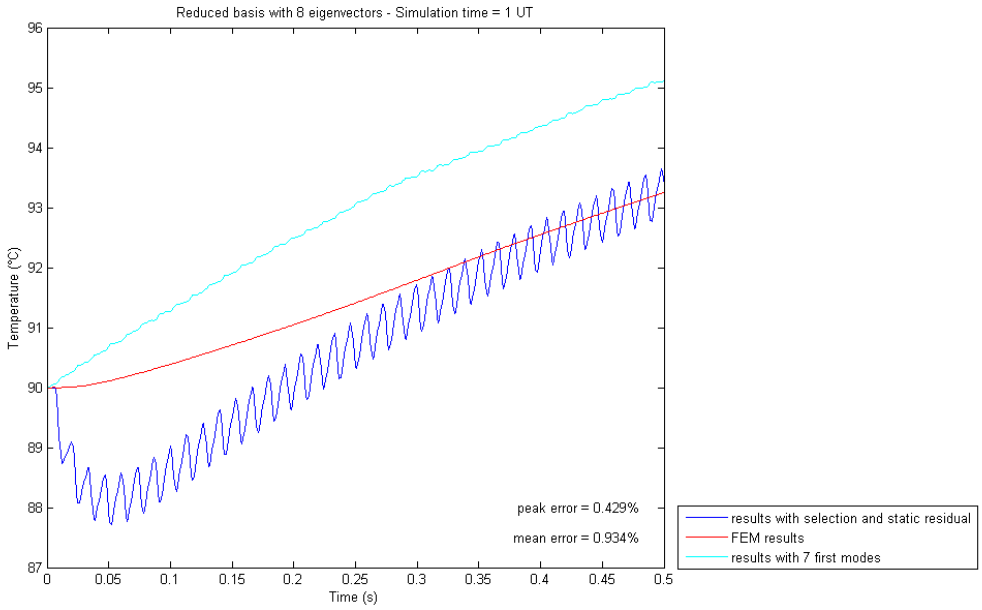


Figure 3.22 – Comparaison des résultats obtenus entre un solveur EF 3D et un modèle réduit dans le cas d'une mesure délocalisée avec le chargement (projection sur base composée de 7 modes sélectionnés + enrichissement par le résidu statique)

3.5 Modes de composants

Comme dit précédemment, dans le cadre de notre étude de carte d'électronique de puissance, la température la plus intéressante à évaluer dans le cadre du dimensionnement de notre système est le point le plus chaud. Celui-ci se trouve constamment dans l'épaisseur de silicium de la puce électronique, là même où est appliquée la puissance. En se référant à l'illustration de la cartographie de température présentée dans la Figure 3.5, nous constatons que la diffusion thermique dans la globalité de la carte se fait par conduction dans l'épaisseur avec comme noeuds "maîtres" ceux présents dans les puces. Les autres noeuds présents sur la carte se comportent alors comme "esclaves" de ces noeuds maîtres.
Il semblerait alors classique d'utiliser une méthode de sous-structuration de type Craig-Bampton mais celle-ci a l'inconvénient d'être assez coûteuse car pour chaque puce il faut évaluer :

$$\begin{pmatrix} T_{master} \\ T_{slave} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{master} \\ \tilde{T} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

En effet, la base statique de Guyan composée par $K_{ss}^{-1}K_{sm}$ peut s'avérer longue à construire. De plus, la synthèse globale pour chaque puce est d'autant plus coûteuse que les interfaces sont grandes.
Nous allons donc désormais étudier une technique basée sur la prise en compte des modes de composants libres permettant une construction rapide de la base de projection. Ainsi pour chaque puce nous construisons :

$$T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \phi_L \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{T} \tag{3.16}$$

La base ϕ_L est très rapide à construire du fait du faible nombre de DDL présents dans chaque puce. Les bases décrivant le comportement unitaire de chaque puce sont ensuite associées à des modes globaux. Nous obtenons finalement :

$$T = \begin{pmatrix} & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \vdots \\ \phi_{globaux} & \phi_{L_{puce\,1}} & \cdots & \phi_{L_{puce\,N}} \\ & \vdots & & \vdots \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix} \tilde{T} \tag{3.17}$$

Les modes globaux contenus dans $\phi_{globaux}$ sont faciles à calculer et rapides à obtenir du fait de leur faible indice dans la base modale (cf figure 3.20).
La figure 3.23 permet de synthétiser la démarche depuis la construction du modèle 3D jusqu'à l'obtention de la cartographie de température à l'aide du modèle réduit.

Afin d'évaluer la pertinence de cette démarche nous reprenons l'exemple "fil rouge". Pour conserver une base de comparaison commune entre toutes les méthodes précédemment évoquées, nous nous fixons comme critère de seulement garder 7 modes dans la base de projection. Cela se traduit ici par la présence de 3 modes globaux représentant la diffusion thermique dans toute la structure de la carte et de 4 modes de composants (1 par puce). En se référant à la Figure 3.24 nous constatons que le modèle réduit a tendance à légèrement surévaluer les résultats mais cet écart est acceptable dans notre cas. Pour améliorer cette précision, il nous suffirait de modifier notre critère visant à seulement conserver 7 modes dans la base de projection. En effet, celui-ci est très contraignant et n'a été utilisé qu'à titre de comparaison entre les méthodes.

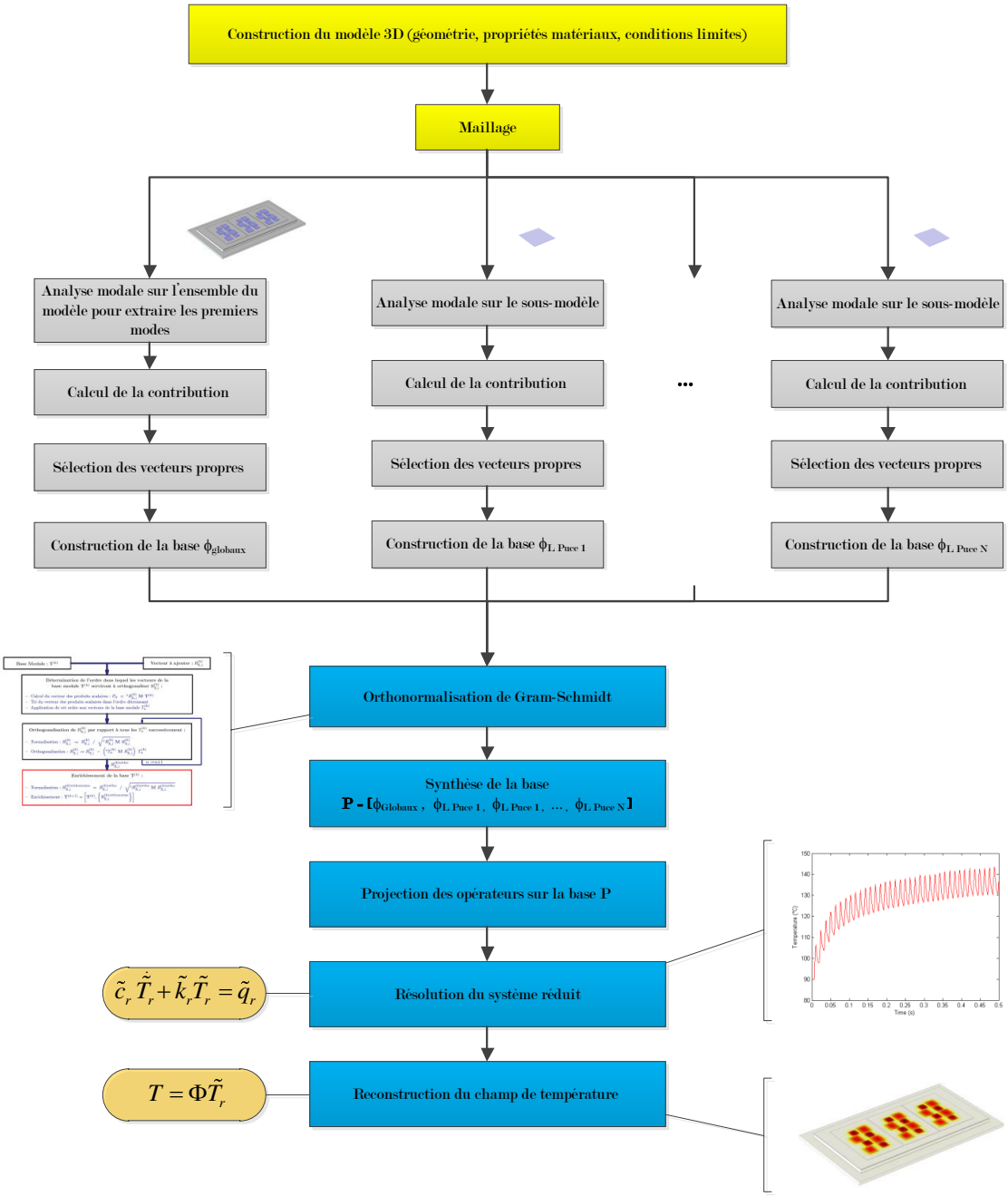


Figure 3.23 – Démarche globale de réduction avec utilisation des modes de composants dans la construction de la base de projection

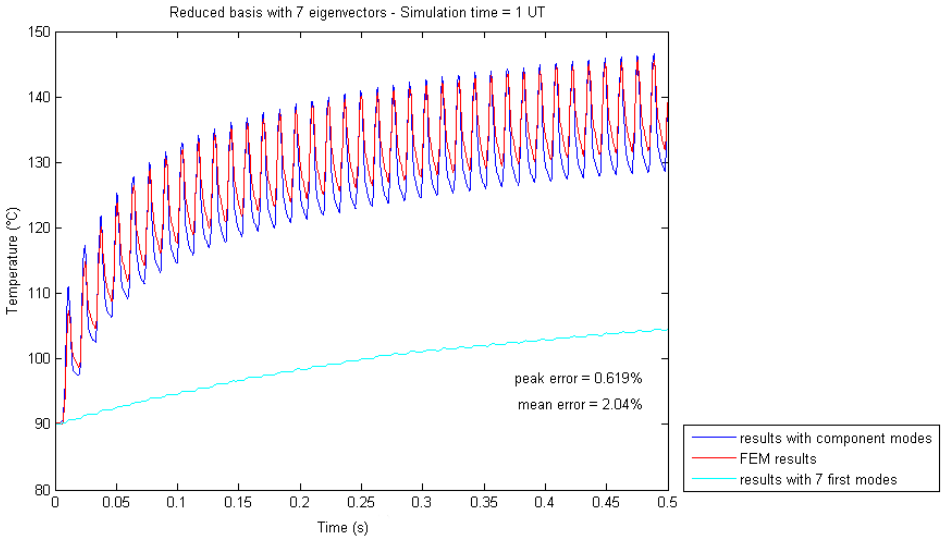


Figure 3.24 – Comparaison des résultats obtenus entre un solveur EF 3D et un modèle réduit construit grâce à la méthode des modes de composants dans le cas d'une mesure co-localisée avec le chargement (projection sur base modale composée de 3 modes globaux + 4 modes de composants)

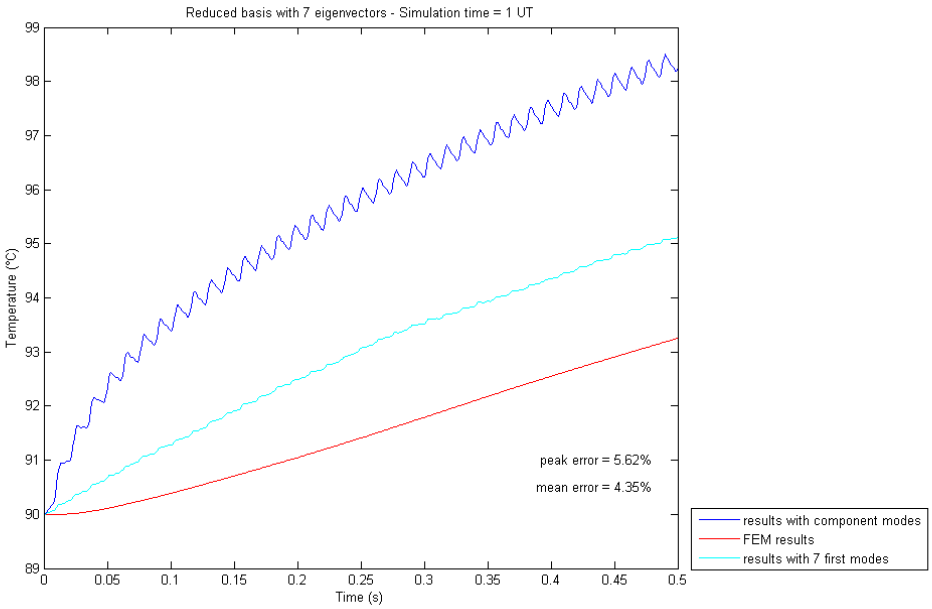


Figure 3.25 – Comparaison des résultats obtenus entre un solveur EF 3D et un modèle réduit construit grâce à la méthode des modes de composants dans le cas d'une mesure délocalisée avec le chargement (projection sur base modale composée de 3 modes globaux + 4 modes de composants)

Limites de l'approche :

- Dans le cas d'une mesure délocalisée avec le chargement (qui ici se trouve dans les puces), cette méthode est peu performante (cf figure 3.25). En effet, seuls les modes globaux permettent de décrire l'évolution de la température dans ce cas.
- L'étape de sélection des modes fait intervenir le chargement de référence appliqué aux puces. Le modèle réduit généré n'est donc valide que pour des chargements s'écartant peu de ce chargement de référence (d'un point de vue géographique mais aussi d'un point de vue ordre de grandeur des puissances).
- Chaque mode de composant ne dépend que du modèle de puce considéré. Un changement de géométrie oblige donc un changement de mode. Une possibilité reste toutefois à l'étude, en considérant que les géométries des puces soient fixes, il serait alors possible de faire du placement de composants grâce à cette méthode. En effet, il faudrait au moment de l'assemblage des modes de composants avec les modes globaux localiser les coordonnées des puces pour réussir à les assembler à une autre position.

3.6 SVD ou réduction optimale

Nous avons pu voir précédemment des démarches de réduction de modèle dites *a priori*, ne nécessitant pas de résolution temporelle pour construire la base de projection. Ces méthodes ont l'avantage de ne pas être coûteuses en temps de calcul "off-line" (plus précisément la méthode des modes de composants présentée dans le paragraphe 3.5). Cependant elles ont l'inconvénient de ne pas fournir un modèle réduit optimal au regard du ratio ordre de réduction vs précision des résultats. En effet si le temps de calcul "off-line" n'est pas un problème, de nombreuses méthodes dites *a posteriori* fournissent de bons résultats. Nous allons ici évaluer l'une d'entre elles, la plus courante : la SVD (Singular Value Decomposition). Cette méthode est un cas particulier de la POD présentée dans le Chapitre 2. Nous pouvons voir une démonstration de cette proximité entre SVD et POD faite par M. Bergman dans [34].

La SVD se définit par :

pour toute matrice réelle A de dimension M x N, on peut écrire sa factorisation sous la forme :

$$A = U\Sigma V^T \tag{3.18}$$

où U et V sont des matrices orthogonales, respectivement de dimensions M x M et N x N et Σ est une matrice diagonale par bloc de dimensions M x N contenant les valeurs singulières σ_i de A. Les r premiers termes de Σ sont positifs tels que $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant ... \geqslant \sigma_r \geqslant 0$, tous les autres étant nuls.

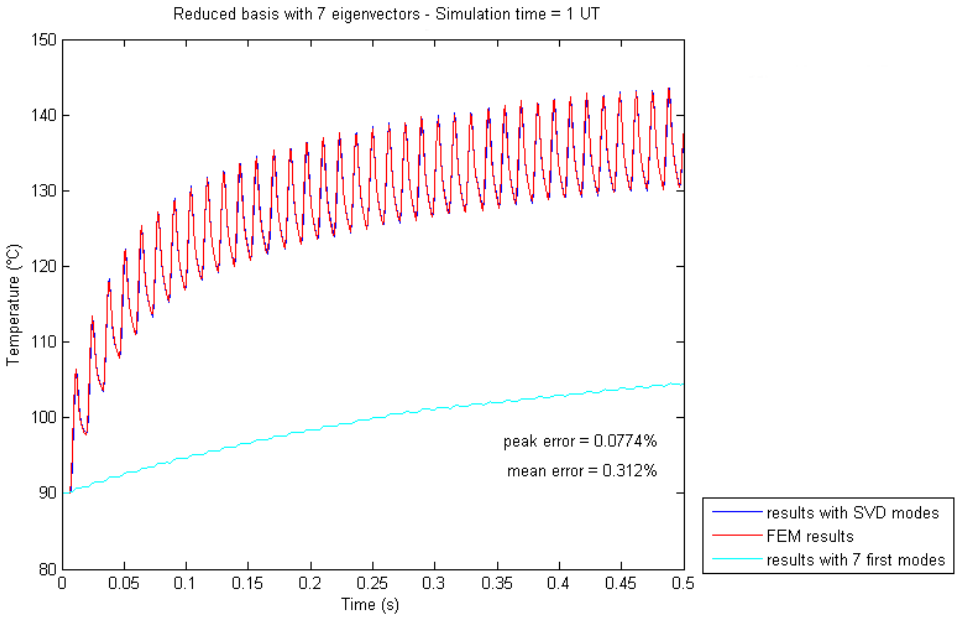


Figure 3.26 – Comparaison des résultats obtenus entre un solveur EF 3D et un modèle réduit construit grâce à la SVD dans le cas d'une mesure co-localisée avec le chargement (projection sur base modale composée de 7 modes SVD)

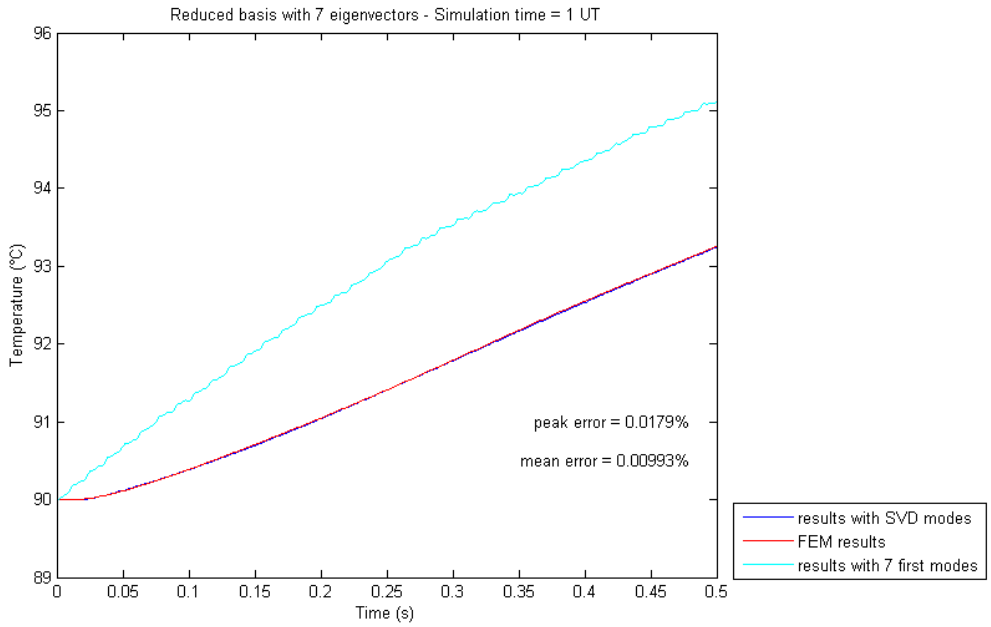


Figure 3.27 – Comparaison des résultats obtenus entre un solveur EF 3D et un modèle réduit construit grâce à la SVD dans le cas d'une mesure délocalisée avec le chargement (projection sur base modale composée de 7 modes SVD)

Afin de conserver le même critère de comparaison entre toutes les méthodes précédemment évoquées, nous illustrons dans les figures 3.26 et 3.27 les résultats obtenus grâce à la SVD sur la carte d'électronique de puissance de la partie 3.1. Ces résultats sont présentés pour un cas de mesure co-localisée mais aussi délocalisé avec le chargement. Dans les deux cas les résultats sont excellents. La SVD est une méthode performante qui est souvent employée dans le domaines des compressions de données. Elle permet de trouver une base de projection très compacte ce qui est profitable vis-à-vis du ratio ordre de réduction/précision. Cependant, cette méthode a l'inconvénient d'être *a posteriori* et n'a donc ici été utilisée qu'à des fins de comparaison de résultats.

Les points clés de cette méthode sont :

- La méthode étant a posteriori, elle nécessite un temps de calcul assez long. Dans notre cas, le temps de calcul de la solution temporelle par la méthode des Éléments Finis est de 50 UT et le temps d'extraction des modes SVD est de 2 UT. En comparaison, le temps de construction et d'exécution par la méthode des modes de composants n'est que de 4 UT (cf tableau 3.2).
- Les modes SVD étant obtenus pour un chargement donné, ils ne peuvent pas être utilisés pour un chargement différent. Cela nécessite alors de repasser par l'étape de calcul "off-line" des modes SVD. Une illustration de quelques modes SVD est donnée dans la Figure 3.28. Nous constatons que ceux-ci n'ont pas de sens physique contrairement à ceux obtenus à l'aide d'une analyse modale sur les opérateurs matriciels.

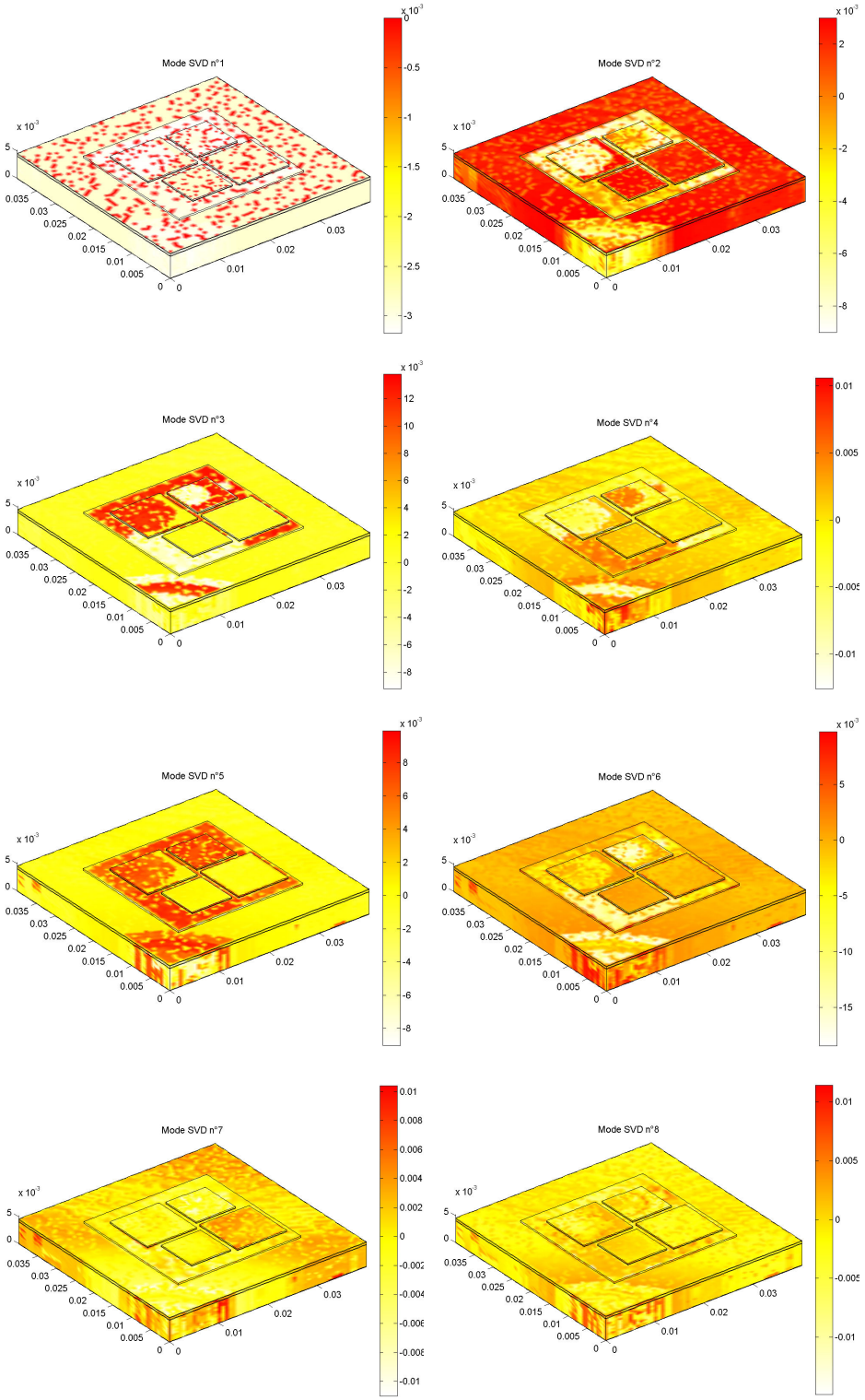


Figure 3.28 – Allure des 8 premiers modes SVD

3.7 Conclusion du Chapitre 3

Ce chapitre a permis de comparer diverses méthodes de réduction de modèles appliquées à un cas de Thermique linéaire. Nous avons ainsi évalué les avantages et inconvénients de chacune d'entre elles pour finalement arriver à la proposition d'une démarche basée sur les modes de composants. Cette méthode permet d'obtenir des modèles compacts très précis tout en ayant un temps de construction relativement court. Cela est possible grâce à la combinaison de modes globaux (extraits sur toute la structure) avec des modes locaux (extraits uniquement dans les puces de notre structure). Nous avons de cette façon la description des phénomènes globaux combinée avec celle des phénomènes locaux. Cela permet d'obtenir de bons résultats dans le cas d'une mesure co-localisée avec le chargement (c'est-à-dire ici pour un DDL présent au sein des puces où nous extrayons nos modes locaux). Toutefois, cette méthode révèle des limites dans le cas d'une mesure délocalisée. En effet, les modes locaux décrivent bien les phénomènes au sein des puces mais ont l'inconvénient d'être nuls sur le reste de la structure. Ainsi, seuls les modes globaux seront utiles au sein du modèle réduit. La méthode des modes de composants sera alors peu performante ici.
Dans le cas où le temps de calcul "off-line" pour construire le modèle réduit n'est pas une contrainte, des méthodes performantes telles que la SVD ou la projection sur base modale avec enrichissement par le résidu statique peuvent être employées. Elles fournissent toutes les deux de bons résultats avec un avantage pour la SVD qui fournit un modèle réduit plus compact et ainsi plus optimal au regard du ratio ordre de réduction / précision des résultats.

Une synthèse de cette comparaison est présentée dans le tableau 3.2.

Méthodes	Etape 0	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Temps Total	Précision par rapport au modèles Eléments Finis	Remarques
HF Transitoire	Construction des opérateurs 10 UT Commun à tous les opérateurs donc non comptabilisé dans le total	Intégration temporelle 50 UT	/	/	/	50 UT		
Traoncature modale		Extraction des premiers modes propres < 1 UT	Projection des opérateurs << 1 UT	Intégration Temporelle < 1 UT	/	1 UT	30,00%	Méthode non applicable pour les problème à dynamique élevée
Selection des modes		Extraction d'une base modale élargie 28 UT	Selection des modes < 1 UT	Projection des opérateurs << 1 UT	Intégration Temporelle < 1 UT	30 UT	63,00%	Nécessite de retenir plus de modes pour avoir une meilleure précision -> couteux en temps
Enrichissement par résidus statiques		Extraction des premiers modes propres < 1 UT	Projection des opérateurs << 1 UT	Itération sur les résidus 28 UT	Intégration Temporelle < 1 UT	30 UT	99,50%	Méthode performante mais couteuse en temps
Modes de composants		Extraction des modes de composants 1 UT	Projection des opérateurs << 1 UT	Synthèse du modèle 2 UT	Intégration Temporelle < 1 UT	4 UT	99,00%	Temps de mise en œuvre rapide et précision OK
SVD		Intégration temporelle 50 UT	Décomposition SVD 2 UT	Projection des opérateurs << 1 UT	Intégration Temporelle < 1 UT	53 UT	99,90%	Méthodes très précise mais très couteuse en temps

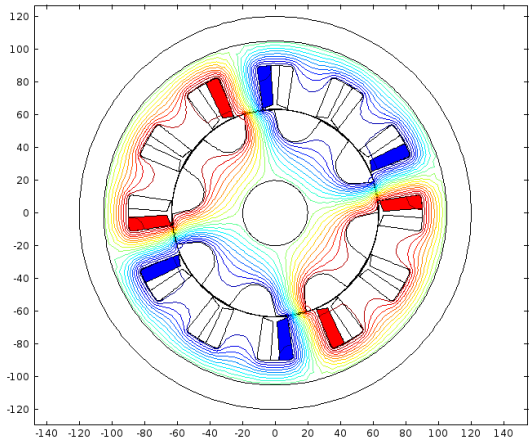
Table 3.2 – Comparaison des méthodes vis-à-vis de leur précision et de leur temps de mise en oeuvre et d'exécution

Chapitre 4

Application à l'électromagnétisme dans les moteurs tournants

Sommaire

4.1 État de l'art **82**
4.2 Présentation du cas d'étude **82**
4.3 Hypothèses de travail **86**
4.3.1 Approximation de résolution 86
4.3.2 Simplifications géométriques 86
4.4 Bases de potentiels vecteurs **87**
4.4.1 SVD sur une base de Snapshot 87
4.4.2 Base de vecteurs spécifiques 88
4.5 Bases de couples **93**
4.6 Conclusion du Chapitre 4 . . . . . **102**



Résumé

Ce chapitre présente une approche permettant de construire un modèle réduit d'une machine électrique, ici une machine à réluctance variable, capable d'être intégré dans une plateforme de développement système afin d'étudier le fonctionnement du Groupe Moto-Propulseur électrique (GMP-e) lors de sollicitations telles qu'un cycle NEDC ou ARTEMIS.

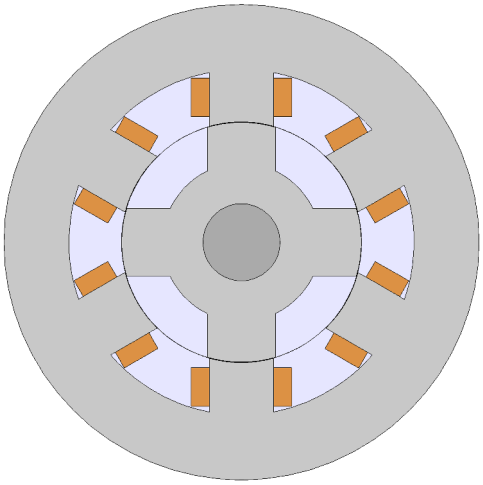
4.1 État de l'art

L'étude de systèmes mettant en jeu des phénomènes électromagnétiques requiert généralement des simulations très coûteuses en temps de calcul. Prenons comme exemple l'étude d'un moteur électrique. En phase de pré-dimensionnement, les modèles analytiques sont communément utilisés car ils permettent d'obtenir rapidement des premiers résultats. Ceux-ci ont été largement étudiés dans le domaine du génie électrique. Citons par exemple Ragot, Dogan ou encore Radarozandry qui se sont intéréssés à l'étude des moteurs synchrones [58, 59, 60]. Nous pouvons notamment mentionner les travaux d'Espanet [61] sur les moteurs Brushless mais également ceux de Fasquelle sur l'étude du couplage électro-vibro-acoustique et aérothermique [62]. Cependant, ces modèles ont pour inconvénient d'être peu précis dans la prise en compte des phénomènes locaux. C'est pourquoi, le recours aux modèles numériques basés sur la résolution directe des équations de Maxwell est indispensable. Ayant besoin d'une discrétisation très fine (cf. Figure 4.1(b)), ces modèles vont nécessiter des temps de résolution très longs, les rendant alors inutilisables pour des simulations du véhicule complet. Voilà pourquoi le recours à des modèles réduits présente aujourd'hui un réel intérêt car ils garantissent un très bon compromis entre le temps de calcul et la précision du modèle.
En Électromagnétisme, il existe différentes approches pour avoir des modèles dit réduits. Les plus courantes étant les méthodes de réseaux de réluctances/perméances [63, 64]. Celles-ci sont semblables à l'utilisation des modèles masses-ressorts en Mécanique (ou des équivalences électrique en thermique), ou encore la construction de surfaces de réponses via un plan d'expériences [65, 66]. Dans le premier cas, la démarche est difficile à automatiser est requiert une forte expertise pour mettre en place le réseau de réluctances adéquat. Dans le second cas, bien que le temps d'exploration des surfaces de réponses soit quasi instantané, son temps de construction est non négligeable (il est nécessaire d'effectuer une simulation Éléments Finis par point de fonctionnement !). Notons également que chaque surface de réponse est associée à une géométrie figée, il est donc nécessaire de refaire la totalité du plan d'expériences dans le cas d'une modification d'un paramètre géométrique de la machine !

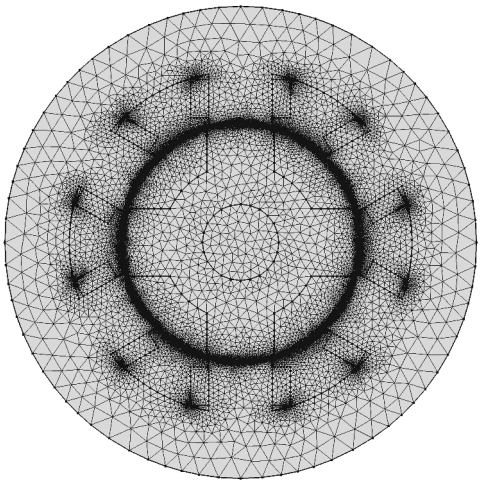
4.2 Présentation du cas d'étude

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons à une Machine à Réluctance Variable (MRV). Cette typologie de machine a été largement étudiée ces dernières années, notamment pour la traction électrique, mais encore aujourd'hui aucune solution commerciale de voiture électrique propulsée par une MRV n'est disponible à l'achat. Sur le papier, les MRV possèdent beaucoup d'avantages : fiabilité, faible coût de fabrication, poids modéré. Cependant, beaucoup de développements sont encore en cours, notamment pour la partie liée à l'acoustique de ce type de moteur. Une comparaison de quatre types de moteurs pour la traction électrique légère est faite par Ilea dans [67].
Nous nous intéressons ici à une MRV composée de 6 pôles statoriques et 4 pôles rotoriques (MRV 6/4) dont la topologie est présentée dans la Figure 4.1(a). Cette machine se compose quasi exclusivement de Fer (cf courbe B(H) en Figure 4.2), le reste étant du cuivre pour les bobinages. Une illustration du maillage effectué est présenté en figure 4.1(b). Notons également que le maillage associé à ce cas d'étude doit être raffiné dans l'entrefer afin de capturer les phénomènes d'aimantation du fer qui y ont lieu.

Les MRV ont la particularité d'avoir un rotor entièrement composé de Fer. Sa mise en mou-

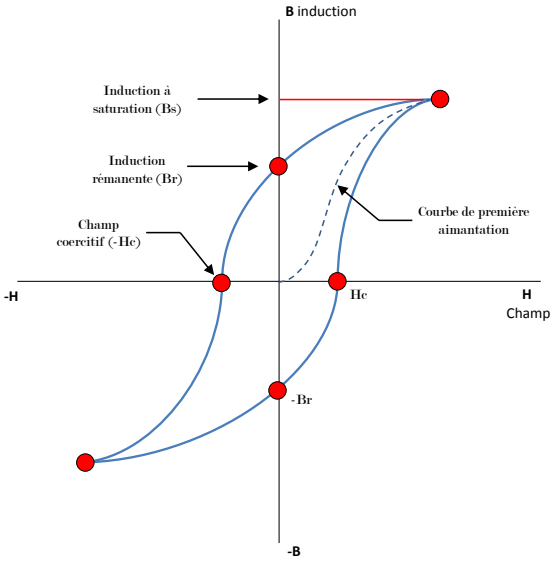


(a) Géométrie du cas d'étude

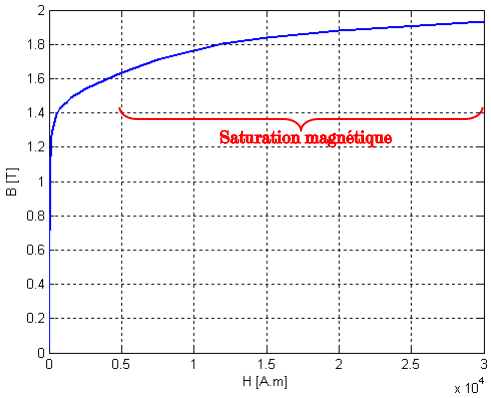


(b) Maillage utilisé pour le cas d'étude

Figure 4.1 – Géométrie et maillage du cas d'étude : une MRV 6/4 (6 pôles statoriques et 4 pôles rotoriques)



(a) Caractéristique d'un matériau magnétique



(b) Courbe B(H) du Fer utilisé pour le cas d'étude

Figure 4.2 – Propriétés du matériau magnétique constituant les tôles de la machine électrique

vement est rendue possible par un pilotage précis des alimentations des bobines au stator. Dans notre cas, il s'agit d'une alimentation triphasée dont la commande est de type trapézoïdal (cf illustration en Figure 4.3). L'alimentation dépend de la position angulaire du rotor. Un moteur à réluctance variable comporte un rotor à encoches non aimantées se positionnant dans la direction de la plus faible réluctance. Le fonctionnement du moteur est assuré par un pilotage du type unipolaire et l'avance du rotor est obtenue en excitant tour à tour une paire de pôles du stator. En effet, l'alimentation d'une phase est stoppée progressivement avant que le rotor ne s'aligne sur celle-ci et on allume alors une autre phase pour poursuivre le mouvement. Ce type

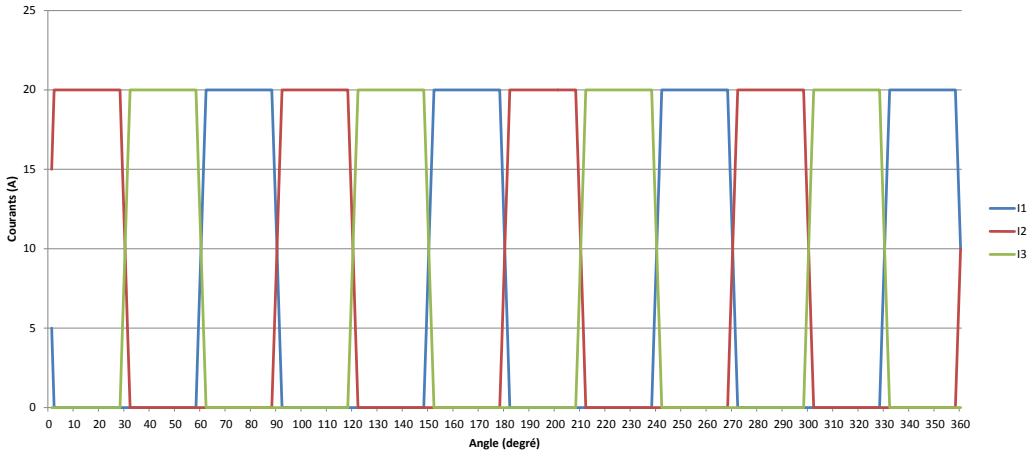


Figure 4.3 – Alimentation triphasée de type trapèze pour la MRV 6/4 étudiée

de commande est le plus simple à mettre en oeuvre. Le fonctionnement d'une MRV peut alors s'apparenter à celui d'un moteur pas-à-pas. Ce type de pilotage provoque de fortes ondulations de couple (cf résultats de simulations présentés en Figure 4.4). Pour bien comprendre le fonctionnement, nous pouvons visualiser en Figure 4.5 les lignes de flux lorsqu'un pôle rotorique s'approche d'un pôle statorique. La phase associée à ce pôle statorique est allumée et le pôle rotorique est donc attiré vers le pôle statorique. Les lignes de flux s'alignent alors et le rotor tend à s'aligner par la même occasion. Tout l'enjeu du pilotage des alimentations sur les trois phases est de gérer finement la polarité sur les enroulements statoriques afin de créer un moment mécanique du stator sur le rotor quasi constant.

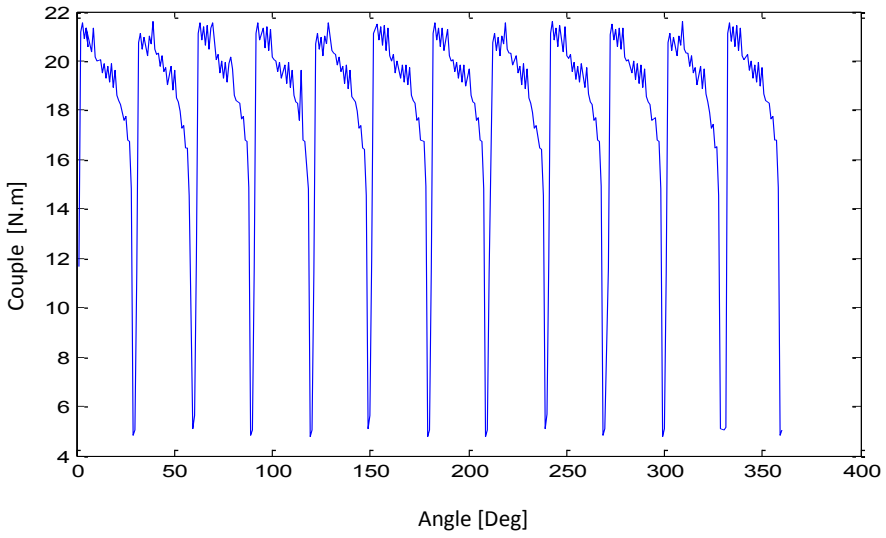


Figure 4.4 – Résultats d'ondulations de couple, pour la MRV 6/4 étudiée, obtenus par simulation Éléments Finis

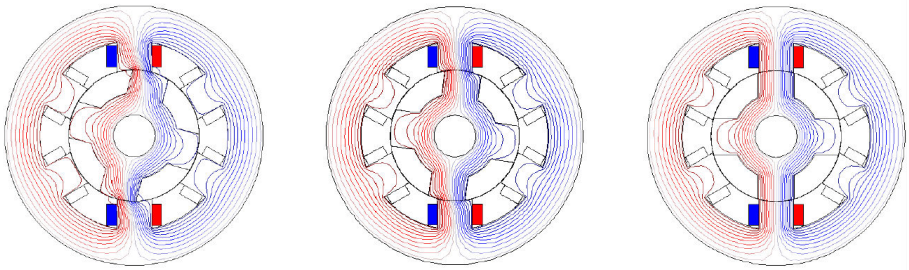


Figure 4.5 – Alignement du rotor sur MRV 6/4

Afin d'atteindre le maximum des performances des Machines à Réluctance Variable, il est nécessaire de les faire travailler sur des points de fonctionnement en régime saturé. Dans notre cas d'étude nous nous positionnons donc sur de tels points. Pour illustrer la saturation magnétique de notre matériau, nous pouvons visualiser en Figure 4.6 la valeur locale maximale de H obtenue pour une alimentation minimale à 5A. Cette valeur est de $2,8\ 10^5$ A/m. En se référant à la caractéristique magnétique du matériau présentée en Figure 4.2, nous vérifions bien que ce matériau est effectivement en pleine plage de saturation magnétique. Il est également possible d'effectuer cette même vérification pour une alimentation à 50A. Nous obtenons alors ; max(Az)=$1,7\ 10^6$ A/m. Le matériau est encore en régime saturé (voir Annexe A pour l'illustration graphique).

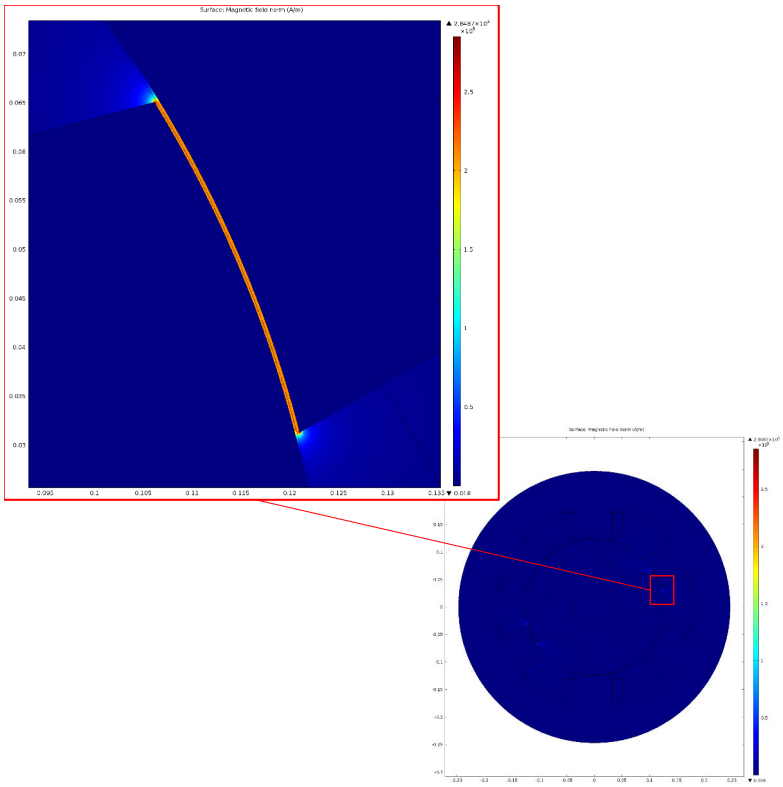


Figure 4.6 – Illustration de la saturation magnétique pour une alimentation de 5A. (localement nous obtenons max(H)=$2,8\ 10^5$ A/m)

4.3 Hypothèses de travail

4.3.1 Approximation de résolution

L'une des premières simplifications possible concerne l'étude en régime transitoire. En effet, dans notre cas, celle-ci peut être considérée comme une succession de calculs magnétostatiques dont les conditions varient (position angulaire du rotor θ et alimentations des 3 phases $I(\theta)$). Une résolution transitoire des équations mécaniques couplées à une résolution algébrique des équations Magnéto-statique permet d'obtenir les évolutions instantanées des positions du GMP-e. Dans notre cas, le calcul du couple $C(\theta, I(\theta))$ s'obtient par résolution des équations de Maxwell couplées à l'équation de mouvement du rotor (cf processus décrit dans la Figure 1.19).

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} = C_{mot} - C_{res} \\ SA_Z(\theta) = F(I(\theta)) \\ C_{mot} = f(A_Z(\theta)) = \oint R\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_Z}{\partial \theta}\frac{\partial A_Z}{\partial r}d\theta dz \end{cases} \tag{4.1}$$

4.3.2 Simplifications géométriques

En analysant la topologie de la machine présentée en Figure 4.1(a), nous constatons une périodicité. Une simplification est applicable en étudiant uniquement une partie angulaire de cette machine, puis en déduisant les résultats sur la topologie complète par déphasage angulaire. Une illustration de la validité de cette approximation est présentée en Figure 4.7. Le tracé bleu représente le calcul complet du couple sur les 360 degrés de rotation du rotor obtenu en considérant la géométrie complète de la machine. Le tracé rouge quant à lui correspond au calcul du couple effectué uniquement sur un secteur angulaire de la machine [0-30 deg]. Ce résultat est ensuite déphasé géométriquement pour reconstruire le couple sur la totalité de la période angulaire. On constate une quasi parfaite superposition des deux courbes, ce qui permet de valider la pertinence de la simplification géométrique. En effet, en ne considérant ici que 1/12 ième de machine cela permet de réduire le nombre de degrés de liberté du maillage, ce qui accélère alors considérablement le temps de calcul.

Nota : Cette simplification géométrique est possible car les alimentations sont équilibrées (ie. les alimentations sont les mêmes à un déphasage prêt). En régime transitoire, les intensités I1, I2 et I3 peuvent prendre des valeurs différentes, ce qui rompt la périodicité.

Afin de valider "mathématiquement" cette simplification géométrique, nous avons réalisé un calcul de Modal Assurance Criterion (MAC) sur la base des potentiels vecteurs obtenus pour chaque position angulaire $A_z(\theta_i)$. Le calcul de ce critère est formulé dans l'équation 4.2 et les résultats sont présentés dans la Figure 4.8.

$$MAC(i,j) = \frac{({}^TA_Z(\theta_i).A_Z(\theta_j))^2}{{}^TA_Z(\theta_i).A_Z(\theta_i).{}^TA_Z(\theta_j).A_Z(\theta_j)} \tag{4.2}$$

Cette représentation est riche en informations et nous l'exploiterons plus longuement dans les paragraphes suivants. La première constatation en observant les résultats du calcul du MAC est qu'il existe effectivement une certaine périodicité. Pour la bonne lecture de cette figure il faut noter qu'une valeur de MAC proche de 1 est associée à la couleur rouge tandis qu'une valeur proche de 0 est associée à la couleur bleue. Ainsi en ne se focalisant que sur les valeurs de

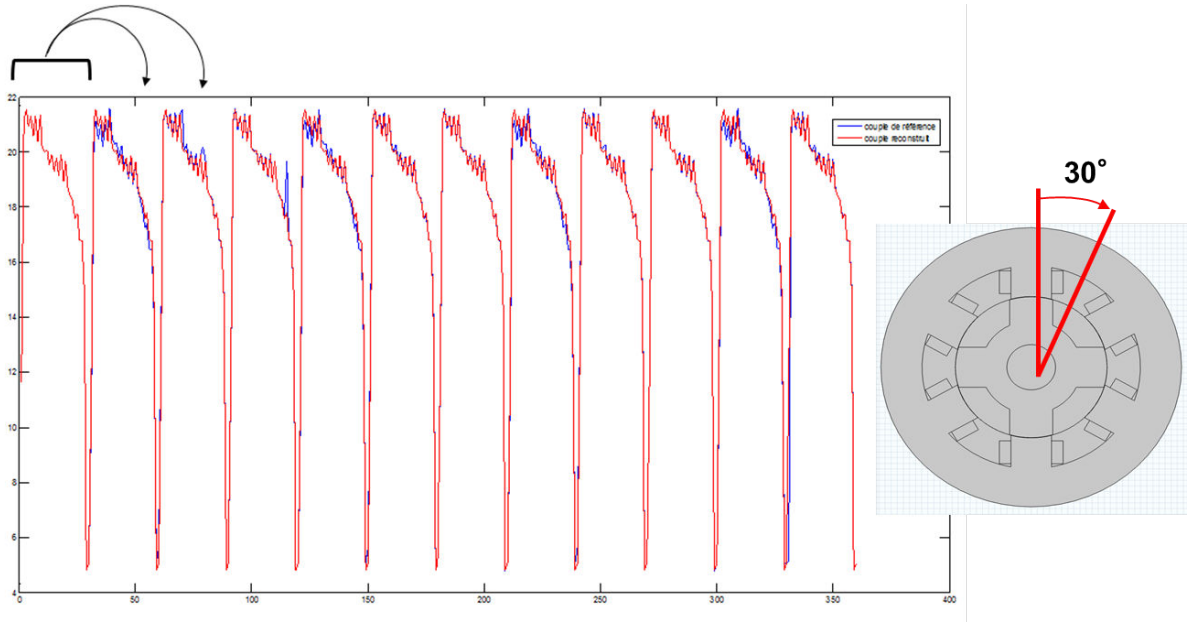


Figure 4.7 – Illustration de la validité des simplifications géométries liées à la symétrie topologique : comparaison du couple moteur calculé sur une topologie complète avec celui calculé uniquement à partir de 30 premiers degrés.

MAC proches de 1 (c'est-à-dire ayant une forte colinéarité deux à deux), nous constatons qu'un "motif" se répète sur toute la diagonale. Celui-ci est périodique et se répète tous les 30 degrés. Cela permet donc de renforcer l'hypothèse faite précédemment consistant à ne considérer qu'une symétrie angulaire sur 30 degrés pour effectuer la totalité des calculs sur un tour complet. Par ailleurs, notons que les couplages sont très faibles entre les intervalles.

4.4 Bases de potentiels vecteurs

Nous allons à présent nous intéresser à différentes approches permettant d'aboutir à la construction d'un modèle réduit pour l'étude des machines électriques. Ce modèle, comme dans le cas d'une étude Thermique, a pour but d'être intégré dans une plateforme de développement pour concevoir et optimiser des systèmes mettant en jeu plusieurs sous-organes. Dans cette partie le potentiel vecteur $A(\theta)$ est décomposé sur une base telle que $A(\theta) = \sum \phi_i f(\theta_i)$.

4.4.1 SVD sur une base de Snapshot

Comme décrit pour un cas Thermique dans le Chapitre 3, la décomposition de Karhunen-Loève (ou la Singular Value Decomposition (SVD) lorsque la fonction est discrète) est une méthode de réduction de modèles capable de fournir de très bons résultats lors de l'étude de phénomènes linéaires. Nous allons évaluer ici ses performances pour la MRV 6/4 étudiée. Pour cela nous utilisons un "snapshot" de potentiels vecteurs obtenus pour différentes positions angulaires $A(\theta_i)$. Nous cherchons à décomposer A tel que :

$$A(x_h, \theta) = U \Sigma V^T = \sum_{k=1}^{N_{SVD}} U_k(x_h) \sigma_k V_k(\theta) \tag{4.3}$$

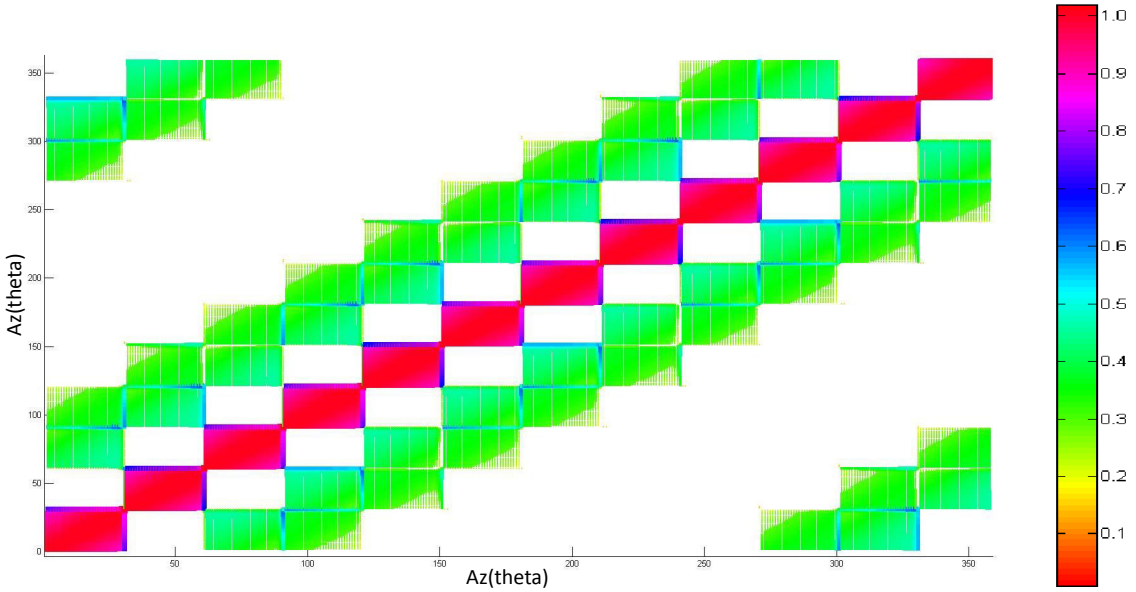


Figure 4.8 – Représentation du Modal Assurance Criterion calculé sur la base des potentiels vecteurs $A_z(\theta_i)$

où U et V sont des matrices, respectivement de dimensions M x M et N x N et Σ est une matrice diagonale par bloc de dimensions M x N contenant les valeurs singulières σ_i de A. Les r premiers termes de Σ sont positifs tels que $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant ... \geqslant \sigma_r \geqslant 0$, tous les autres étant nuls.

Une comparaison entre un calcul de couple obtenu directement par résolution du modèle Éléments Finis avec celui obtenu grâce au modèle réduit re-construit à partir de la base SVD tronquée à différents ordres N_{SVD} est présentée en Figure 4.9. Nous pouvons y constater une convergence en terme de précision des résultats en fonction du nombre de modes SVD retenus dans la base de projection pour construire le modèle réduit. Ainsi pour 7 modes SVD dans la base de projection, le couple "resynthétisé" grâce au modèle réduit est semblable à celui obtenu à partir du modèle 2D EF. Bien qu'étant en régime saturé, ce qui implique d'avoir un comportement matériau non-linéaire, les résultats obtenus par SVD sont très performants en terme de précision et de compacité du modèle réduit. Ce modèle conserve cependant l'inconvénient d'être construit *a posteriori*. Une cartographie de couple très gourmande en calculs préliminaires doit être calculée, pour construire au préalable le modèle réduit. Toutefois, pour une utilisation en phase de développement de lois de commande ou pour des simulations du véhicule complet lors de cycles d'utilisations sur une géométrie figée du moteur, cette démarche permet de posséder une sorte d'Abaque ou de cartographie numérique du moteur.

4.4.2 Base de vecteurs spécifiques

Afin de réduire le temps de construction de la cartographie, nous nous sommes posé la question de savoir s'il existe des positions angulaires du rotor θ_i pour lesquelles, connaissant $A(\theta_i)$, il est possible de reconstruire l'ensemble $A(\theta)$ pour tout $\theta \in \Omega$ (où Ω est l'intervalle angulaire d'étude). Connaissant $A(\theta_i)$, est-il alors possible de déterminer la grandeur d'étude

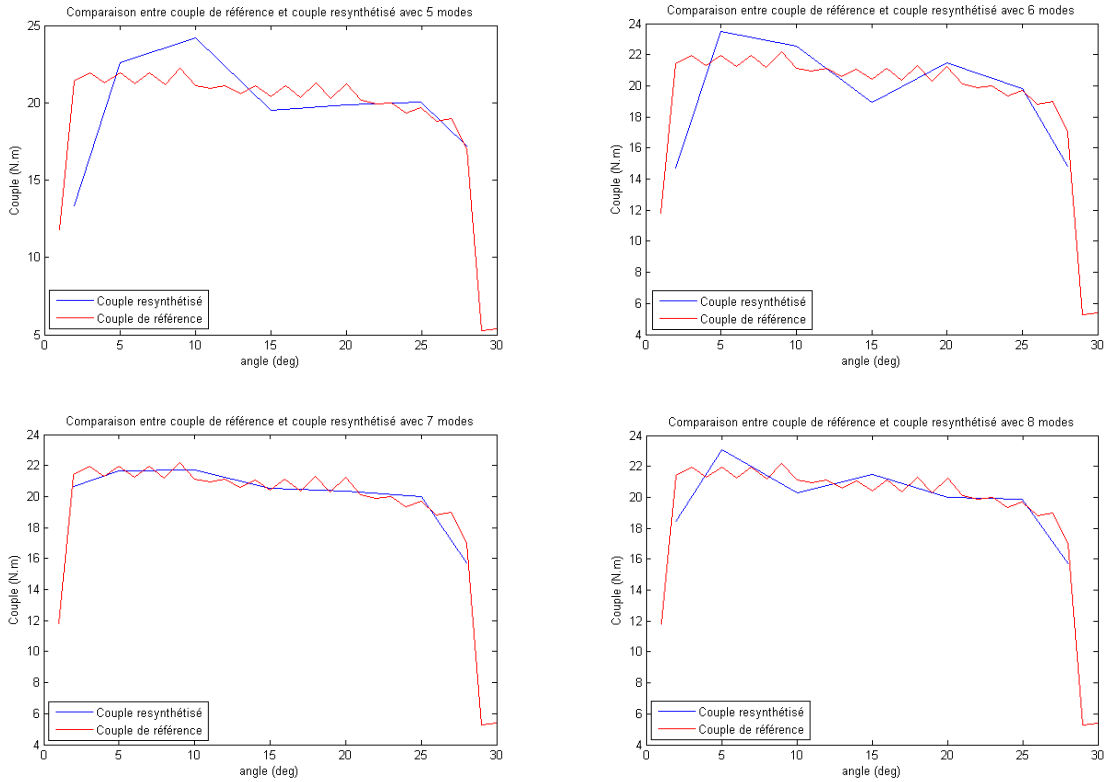


Figure 4.9 – Comparaison du calcul du couple moteur de la MRV 6/4 obtenu par résolution du modèle Éléments Finis avec celui obtenu grâce au modèle réduit construit à partir 5, 6, 7 et 8 modes SVD

qui nous intéresse, à savoir le couple moteur, pour toutes les valeurs de θ ? Si c'est possible, alors il est possible de construire un plan d'expériences sous-échantillonné par rapport au plan établi pour générer l'analyse SVD. Cela permet ainsi de réduire les coûts de calcul préliminaires.

Question : Existe-t-il des θ_i tels que :

$$\begin{cases} \tilde{A}(\theta, I) \ = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\theta) A_{\theta_i}(I) \\ \text{avec N} \ << \ \text{M} \\ \text{et } \alpha_i(\theta) \ \text{ tel que } \ \underset{\alpha_i}{Min} \left\| A - \tilde{A} \right\|_2 \end{cases} \tag{4.4}$$

où M désigne le nombre de positions angulaires calculées.

Pour répondre à cette question, reprenons la Figure 4.8 présentée précédemment. Les valeurs de MAC sont retracées uniquement sur les 30 premiers degrés (pour les raisons de périodicité évoquées dans les paragraphes précédents). Nous obtenons alors la Figure 4.10 suivante. Pour rappel, le MAC est calculé par produit scalaire des $A_z(\theta_i)$ deux à deux (cf equation 4.2) et permet alors d'évaluer leur colinéarité.
En analysant la Figure 4.10 nous constatons que pour un θ_i donné, il existe un intervalle $[\theta_l, \theta_m]$, avec $\theta_i \in [\theta_l, \theta_m]$, tel que :

$$\text{pour tout } \theta_j \in [\theta_l, \theta_m], \;\; A(\theta_j) \simeq A(\theta_i).$$

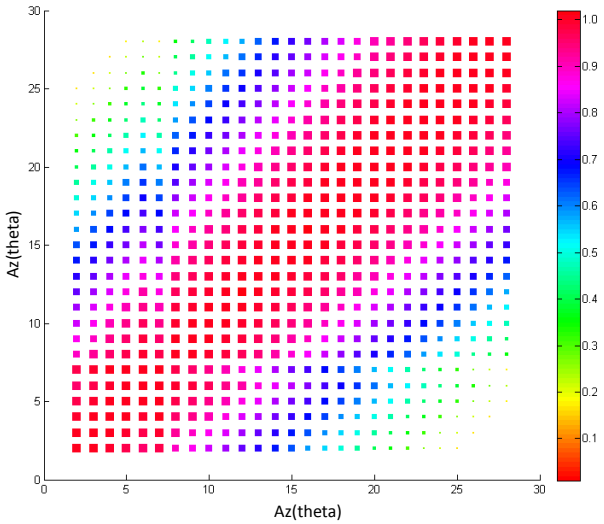


Figure 4.10 – Représentation du Modal Assurance Criterion calculé sur la base des potentiels vecteurs $A_z(\theta_i)$ avec $\theta_i \in [0, 30]deg$

La question qui se pose dorénavant est de savoir combien de θ_i sont nécessaires pour reconstruire correctement l'ensemble des $A(\theta, I)$ à partir de $A(\theta_i, I)$. Pour montrer l'influence de la position des θ_i et de leur quantité, une étude de sensibilité a été réalisée et est synthétisée en Figure 4.13. Sur cette figure sont présentés plusieurs résultats :

- sur la 1ère ligne le couple resynthétisé est obtenu à partir de **3 positions angulaires différentes** (N=3),
- sur la 2ème ligne le couple resynthétisé est obtenu à partir de **4 positions angulaires différentes** (N=4),
- sur la 3ème ligne le couple resynthétisé est obtenu à partir de **5 positions angulaires différentes** (N=5).

On note ainsi que la précision des résultats est extrêmement sensible à la fois au nombre de θ_i retenus mais également à leur position ! La dépendance des fonctions $\alpha(\theta)$ à θ est donnée sur la Figure 4.11 suivante.

Il est également important de mentionner que les résultats présentés ici ne sont valables uniquement que pour une commande en intensité donnée (celle présentée en Figure 4.3). En effet, en tenant compte de la dépendance en intensité, la décomposition s'écrit alors :

$$\tilde{A}(x, \theta, I) \;=\; \underbrace{\sum_{k=1}^{M} \beta_k(I) \underbrace{\sum_{h=1}^{N} A_{h_k}(x)\alpha_{h_k}(\theta)}_{\text{Décomposition à I fixé}}}_{\text{Décomposition en tenant compte de la dépendance à I}} \tag{4.5}$$

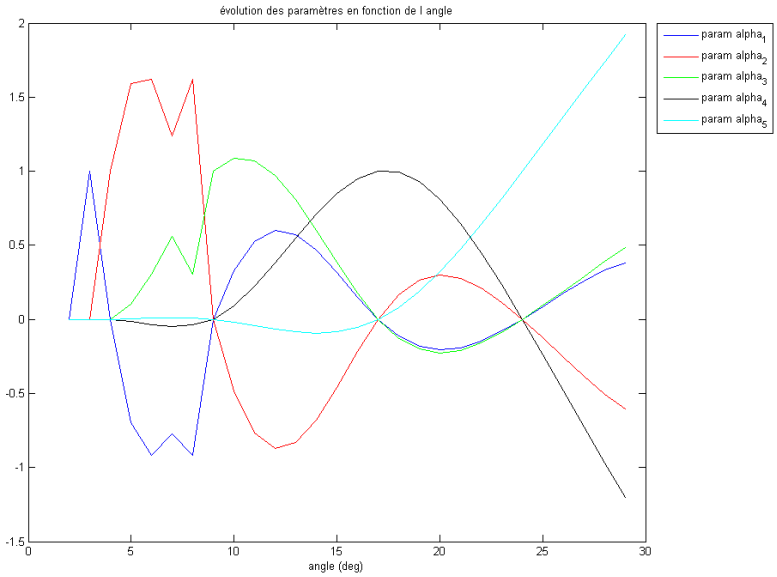


Figure 4.11 – Dépendance des fonctions $\alpha(\theta)$ à θ pour un modèle réduit d'ordre 5

Ceci est illustré par la Figure 4.12 qui montre la reconstruction de $C_{mot} = f(A(\theta))$ pour deux valeurs d'intensités différentes.

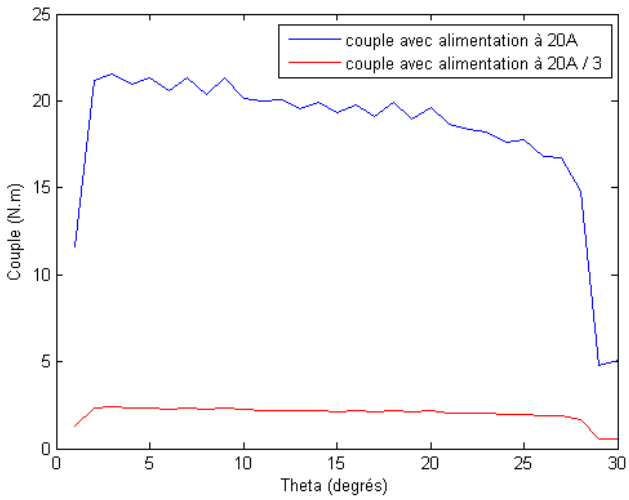


Figure 4.12 – Illustration de l'influence de la commande en intensité sur le résultat du calcul de couple moteur.

Points à retenir sur cette approche :

- il est possible de resynthétiser une cartographie $C(\theta, I)$ complète uniquement à partir de quelques positions remarquables θ_i,
- la précision de ce couple resynthétisé est sensible au nombre de θ_i retenus mais également

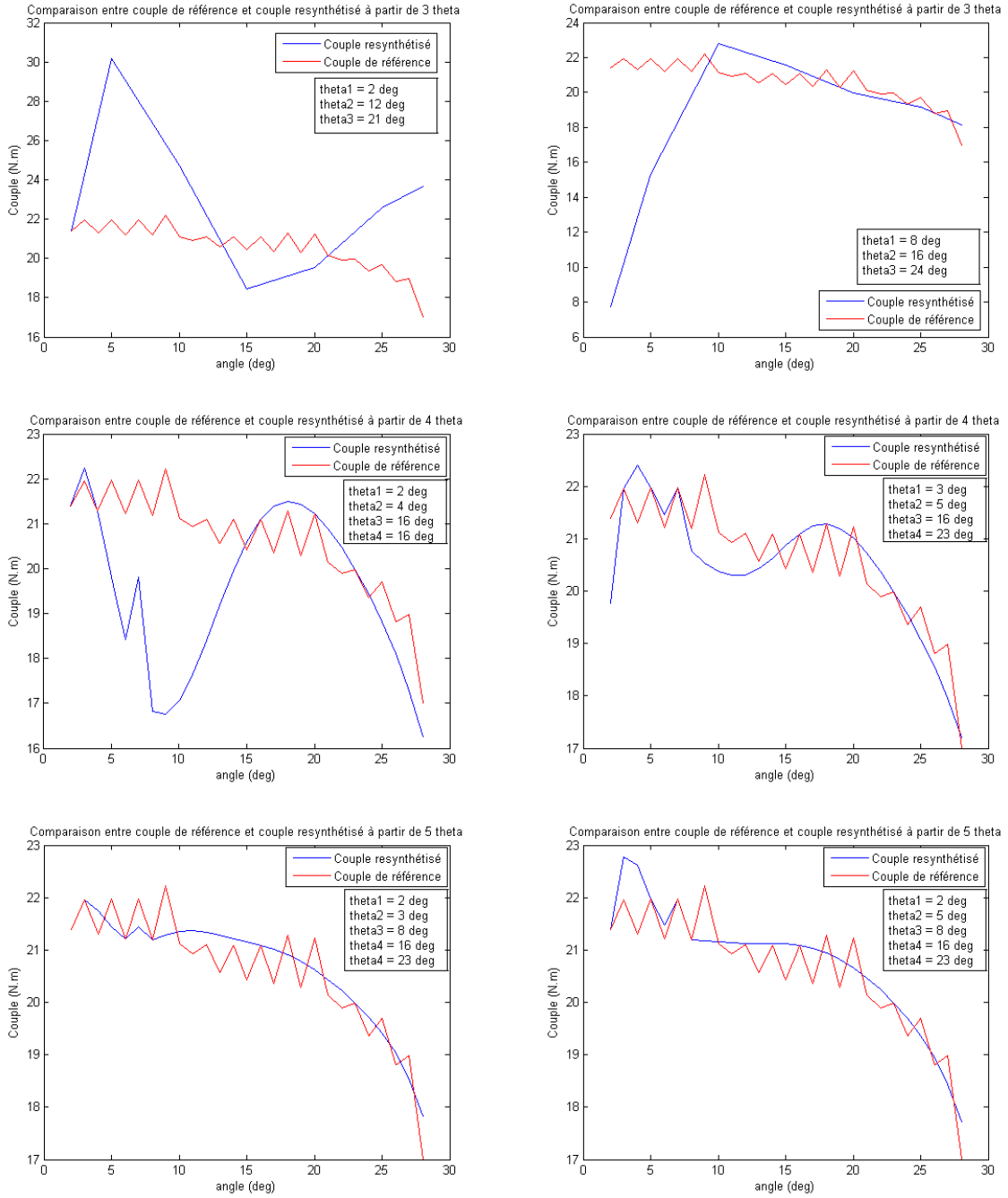


Figure 4.13 – Comparaison entre le couple de référence obtenu par calcul EF et le couple resynthétisé à partir de positions angulaires θ_i choisies. Étude de l'influence de la quantité et de la position des θ_i sur la précision des résultats

à leur position,

– les fonctions de forme $\alpha_i(\theta)$ sont peu régulières du fait de la rotation du rotor. Cette rotation induit un déplacement des noeuds du modèle qui nécessiterait le passage par une ré-interpolation pour proposer une décomposition du type :

$$\tilde{A}(x) \ = \sum_{i=1}^{N} A_{\theta_i}(x)\alpha_i(\theta) \tag{4.6}$$

au lieu d'une décomposition dans l'espace des indices nodaux telle que celle qui a été utilisée :

$$\tilde{A}(n_h) \ = \sum_{i=1}^{N} A_{\theta_i}(n_h)\alpha_i(\theta) \tag{4.7}$$

Malheureusement, faute de temps, cette piste n'a pas été testée. Afin d'éviter cet écueil, nous travaillerons directement sur le couple, ce qui permet d'éviter de faire apparaître la dépendance spatiale de la décomposition.

4.5 Bases de couples

Nous allons ici proposer une démarche permettant de construire plus rapidement une cartographie de couple $C(\theta, I)$. En effet, comme discuté précédemment, il existe des positions rotoriques θ_i pour lesquelles connaissant le couple C_{θ_i} il est possible de reconstruire $C(\theta, I)$. Tout d'abord, commençons par justifier pourquoi nous nous intéressons directement à la grandeur du couple $C(\theta, I)$ et non pas au potentiel vecteur A. Pour cela, repartons de l'équation 1.45 présentée dans le Chapitre 1, à savoir pour notre cas d'étude :

$$[S]\,\{A\} = \{F\} \tag{4.8}$$

avec :

[S] : Matrice de "rigidité" (comprend les perméabilités qui dépendent de A si le matériau est non-linéaire),

$\{F\}$: Vecteur source dû aux courants,

D'après l'hypothèse d'une étude en régime quasi-statique, ce système peut alors se simplifier sous la forme :

$$\begin{aligned} &S(I,\theta).A(X,I,\theta) = F(I(\theta)) \\ &\text{et } \ C_{mot} = f(A((X,I,\theta))) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Or ici l'opérateur S étant non-linéaire, nous ne savons pas donner de décomposition du potentiel vecteur *a priori* satisfaisant tous les cas de charges. Par ailleurs, comme vu plus haut, la rotation d'une partie du domaine induit une différence entre les coordonnées dans le repère fixe avec celles dans le repère mobile. En cherchant directement une décomposition sur le couple, ce problème devient transparent pour l'utilisateur.

Étant donné les symétries cylindriques du problème, nous cherchons une décomposition du problème sur une base de Ritz constituée de fonctions harmoniques :

$$C_{mot} \approx \tilde{C}_m^{N_H}(\theta, I) = D_0(I) + \sum_{k=1}^{N_H} D_k(I)\cos(\frac{k\theta}{T} + \varphi_k(I)) \tag{4.10}$$

avec :
$D = \{D_k\}$: ensemble des coefficients de Fourier d'indice k
$\varphi = \{\varphi_k\}$: ensemble des phases d'indice k

D et φ sont des matrices de dimensions $N_I \times N_H$, avec N_I : le nombre d'intensités différentes retenues pour construire la cartographie $C(\theta, I)$; et N_H : le nombre d'harmoniques retenues dans la décomposition de Fourier. Ce type de décomposition a été largement utilisé dans des travaux analytiques tels que [61] et [11].

T est la périodicité du moteur. Elle dépend directement du nombre de pôles. Pour la machine étudiée, cette période est égale à $\frac{1}{12}$ de tour.

Les termes D_0 et D_k sont déterminés pour chaque intensité grâce à une projection de Galerkin du couple moteur C_{mot} sur le terme de la série de Fourier considéré :

$$D_0(I) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C_{mot}(\theta, I) dt \tag{4.11}$$

$$D_k(I) = \left| \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C_{mot}(\theta, I) e^{-j\frac{k\theta}{T}} d\theta \right| \tag{4.12}$$

$$\varphi_k(I) = \frac{\mathrm{Im}\left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C_{mot}(\theta, I) e^{-j\frac{k\theta}{T}} d\theta \right\}}{\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C_{mot}(\theta, I) e^{-j\frac{k\theta}{T}} d\theta \right\}} \tag{4.13}$$

Pour des raisons pratiques, la projection peut se faire en utilisant la transformée de Fourier discrète (ie. la fonction "fft"), en veillant à transformer un couple décrit sur un nombre entier de périodes.

Une fois les coefficients D_0 et D_k déterminés, le couple peut être reconstruit et comparé aux calculs de référence (voir les figures 4.14 et B.7).

La qualité de la décomposition est estimée par le calcul d'une erreur relative :

$$\varepsilon = \frac{\left\| C_{mot} - \tilde{C}_m^{N_H} \right\|_2}{\left\| C_{mot} \right\|_2} \tag{4.14}$$

Une convergence vers une erreur inférieure à 5% intervient à partir de $N_H = 7$ pour toutes les configurations d'intensités.

A ce stade nous possédons un modèle réduit permettant de reconstruire le couple moteur pour n'importe quelle valeur angulaire θ et n'importe quelle valeur d'intensité $I \in [5A, \cdots, 40A]$ en utilisant la relation :

$$\tilde{C}_m^{N_H}(\theta, I) = D_0(I) + \sum_{k=1}^{N_H} D_k(I) \cos(\frac{k\theta}{T} + \varphi_k(I)) \tag{4.15}$$

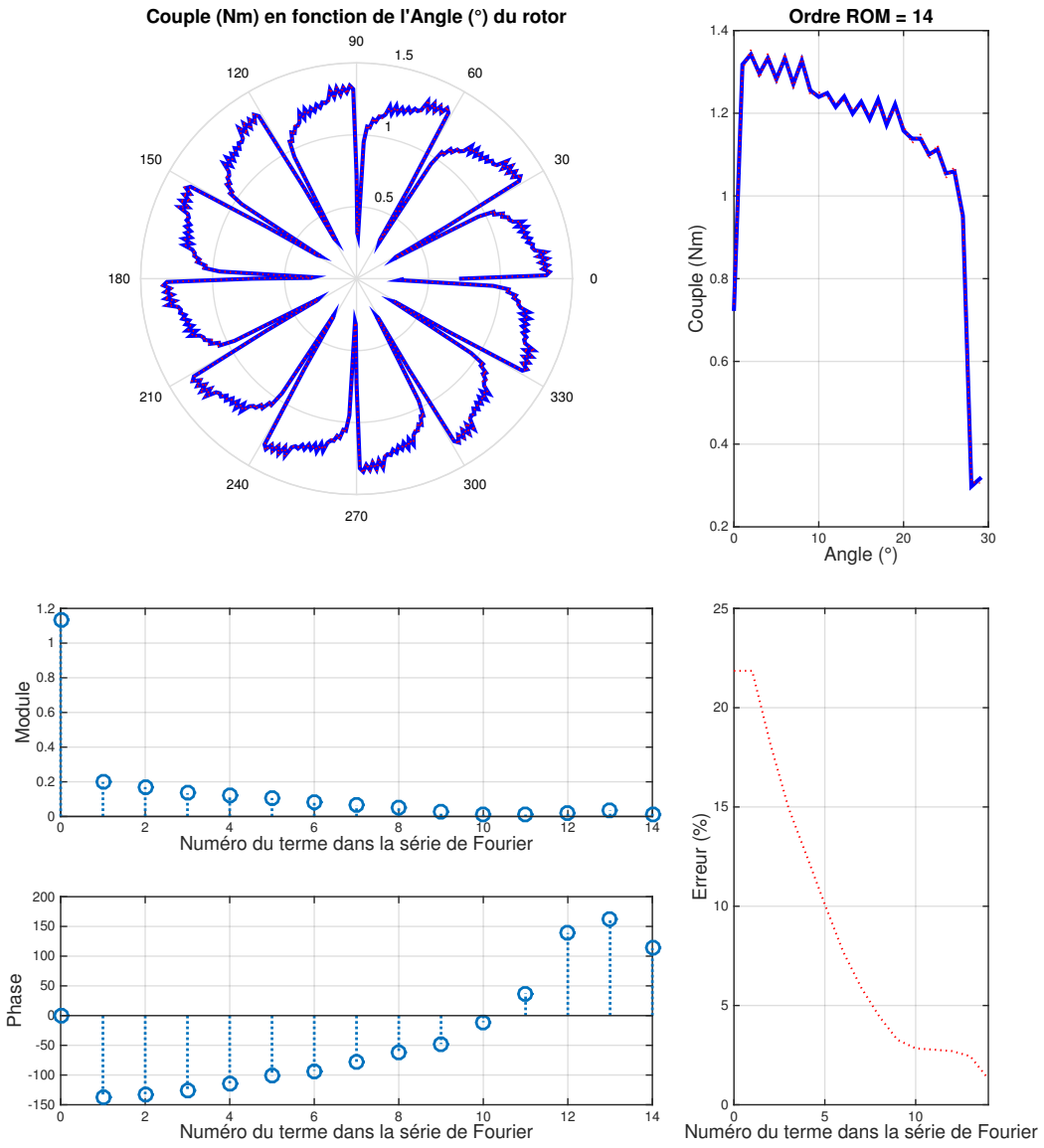


Figure 4.14 – Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour $I = 5A$ (Utiliser les boutons de contrôle pour visualiser l'influence de l'ordre du modèle sur l'erreur commise)

Chacun des termes (D_k, φ_k) avec $0 \leqslant k \leqslant N_h$ dépend de l'intensité selon les courbes des Figures 4.16 et 4.17. Si nous omettons le mode 12 qui influence peu la réponse, les dépendances ont toutes des forces assez similaires pour les modules D_k. Les dépendances de la phase sont un peu plus erratiques.

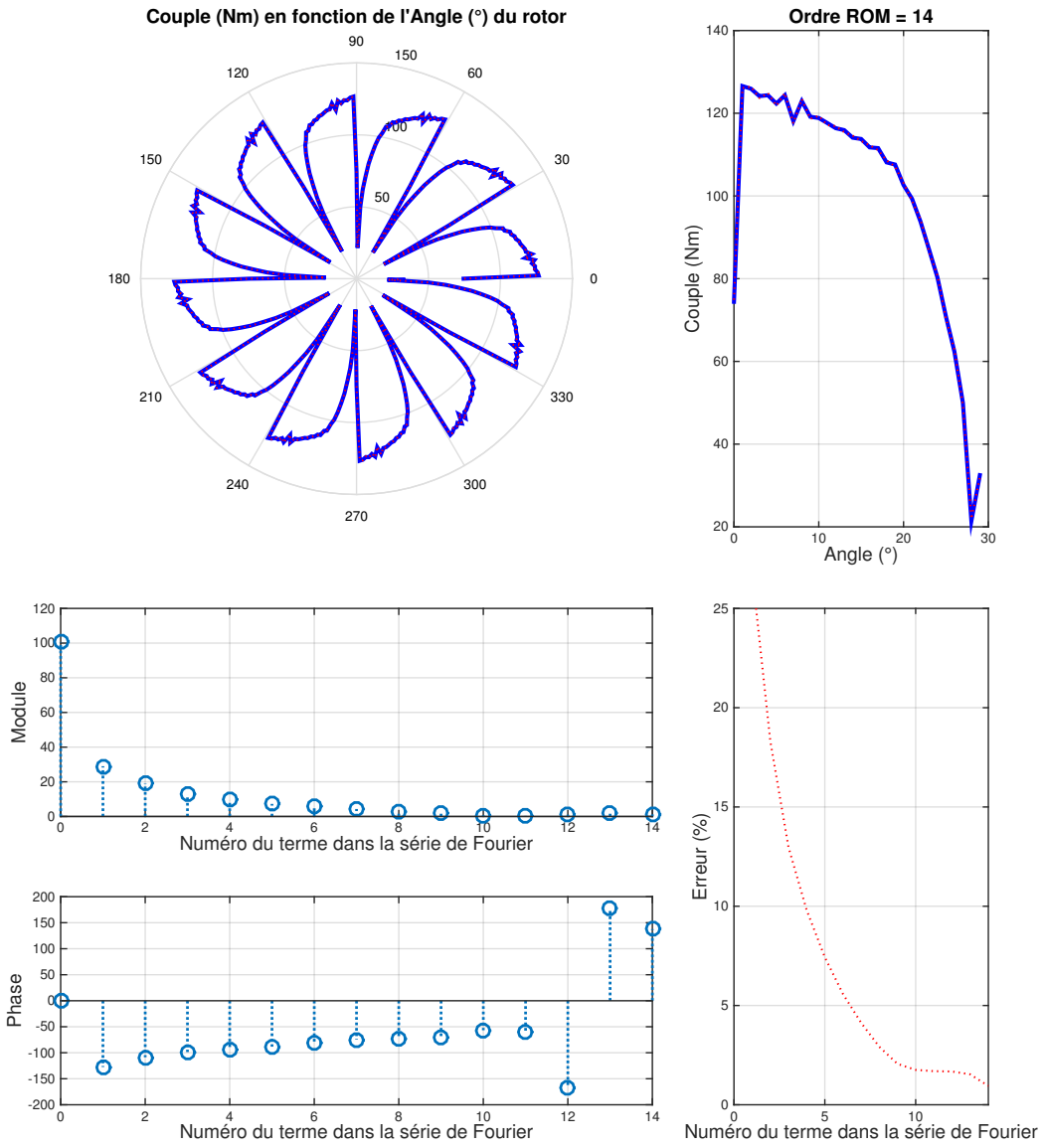


Figure 4.15 – Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour $I = 50A$ (Utiliser les boutons de contrôle pour visualiser l'influence de l'ordre du modèle sur l'erreur commise)

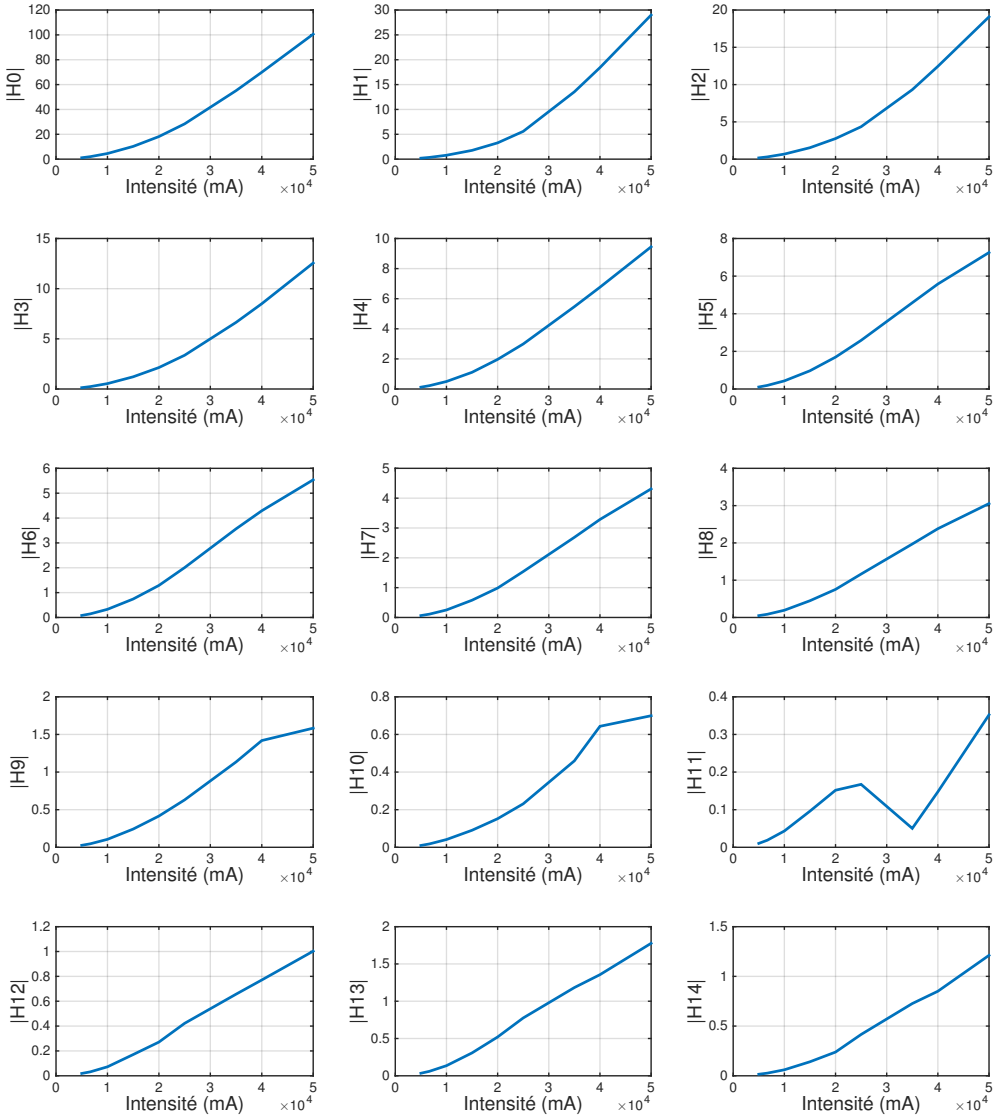


Figure 4.16 – Dépendance de la base harmonique à l'intensité - Module des H_I

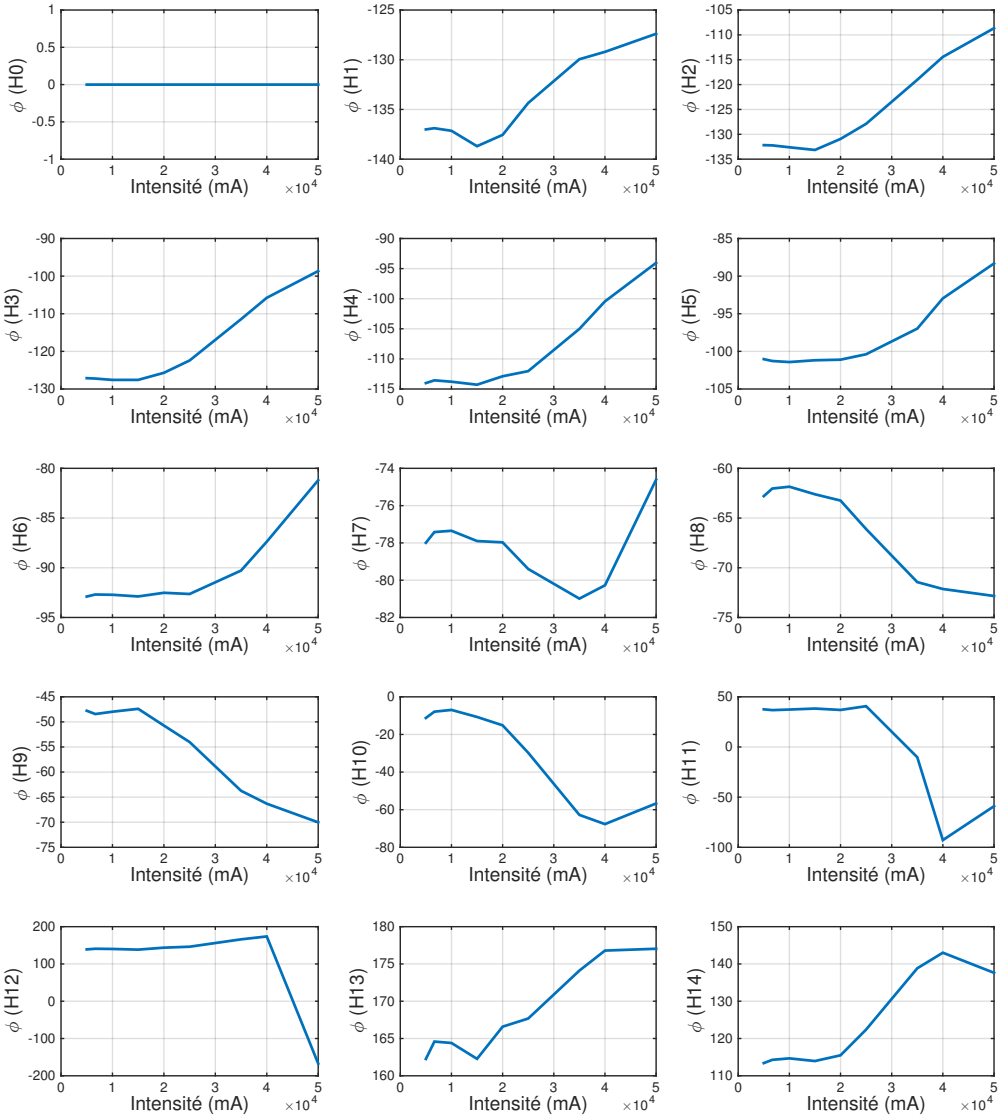


Figure 4.17 – Dépendance de la base harmonique à l'intensité - Phase des H_I

Une décomposition de Karhunen-Loève de l'opérateur $D_k(I)$ (ou SVD de la matrice D) peut s'écrire sous la forme :

$$D = \begin{bmatrix} D_{01} & & \cdots & & D_{0N_I} \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & D_{ki} & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ D_{N_H 1} & & \cdots & & D_{N_H N_I} \end{bmatrix} = US^T V \tag{4.16}$$

Cette formulation permet de déterminer une écriture optimale des coefficients :

$$D_k(I) = \sum_{l=1}^{S} \varphi_l^k \sigma_l f_l(I) \tag{4.17}$$

Sur le cas que nous avons traité dans ces travaux, la décomposition SVD fait apparaître que seule la première valeur singulière est significative, voir Figure 4.18.

Une décomposition de Karhunen-Loève de l'opérateur $\varphi_k(I)$ (ou SVD de la matrice φ) peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{01} & & \cdots & & \varphi_{0N_I} \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & \varphi_{ki} & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ \varphi_{N_H 1} & & \cdots & & \varphi_{N_H N_I} \end{bmatrix} = US^T V \tag{4.18}$$

Cette formulation permet de déterminer une écriture optimale des coefficients :

$$\varphi_k(I) = \sum_{l=1}^{S} \varphi_l^k \sigma_l g_l(I) \tag{4.19}$$

Sur le cas que nous avons traité dans ces travaux, la décomposition SVD fait apparaître que seule la première valeur singulière est significative, voir Figure 4.19.

Ces constats, permettent d'écrire que les fonctions D_k et φ_k peuvent uniquement être décomposées sur la première valeur singulière, soit :

$$\begin{aligned} D_k(I) &= D_k f(I) \\ \varphi_k(I) &= \varphi_k g(I) \end{aligned} \tag{4.20}$$

L'approximation du couple prend donc une écriture encore plus simplifiée :

$$\tilde{C}_m^{N_H}(\theta, I) = f(I) \left[D_0 + \sum_{k=1}^{N_H} D_k \cos(\frac{k\theta}{T} + \varphi_k g(I)) \right] \tag{4.21}$$

En poussant l'analyse un peu plus loin, il est même envisageable de négliger la dépendance de la phase à l'intensité. Ce qui donne l'écriture suivante :

$$\tilde{C}_m^{N_H}(\theta, I) = f(I) \left[D_0 + \sum_{k=1}^{N_H} D_k \cos(\frac{k\theta}{T} + \varphi_k) \right] \tag{4.22}$$

Dans cette dernière écriture la phase φ_k peut être vue comme la phase moyenne associée à chaque harmonique. L'utilisation de cette fonction a été testée pour générer la Figure 4.20 pour différentes valeurs d'intensité et avec une base de fonction harmonique limitée à 5 termes.

Cette partie a permis d'évaluer la possibilité de construire des modèles réduits permettant de déterminer le couple moteur d'une machine électrique en connaissant la position angulaire du rotor et l'intensité du courant imposé à chaque phase. La méthode est basée sur deux étapes. Dans un premier temps, il faut construire une cartographie du moteur à partir de simulations détaillées. L'échantillonnage du plan d'expériences (nombre de valeurs angulaires à tester et nombre de valeurs d'intensité) n'a pas été discuté, mais cela reste une voie importante d'amélioration. Cet échantillonnage pourrait être automatisé par l'utilisation d'une méthode de synthèse du modèle réduit intégrant un estimateur d'erreur à chaque itération de la construction (type méthode PGD). Ensuite, étant donné les symétries de la machine, une base de fonctions harmoniques a été utilisée pour décomposer la dépendance du couple à θ. Enfin la dépendance des coefficients de la série de Fourier à l'intensité a été analysée grâce à une décomposition en valeurs singulières. Cette décomposition a montré dans notre cas particulier qu'un seul terme permet d'approximer le comportement de la machine sur toute sa plage de fonctionnement.

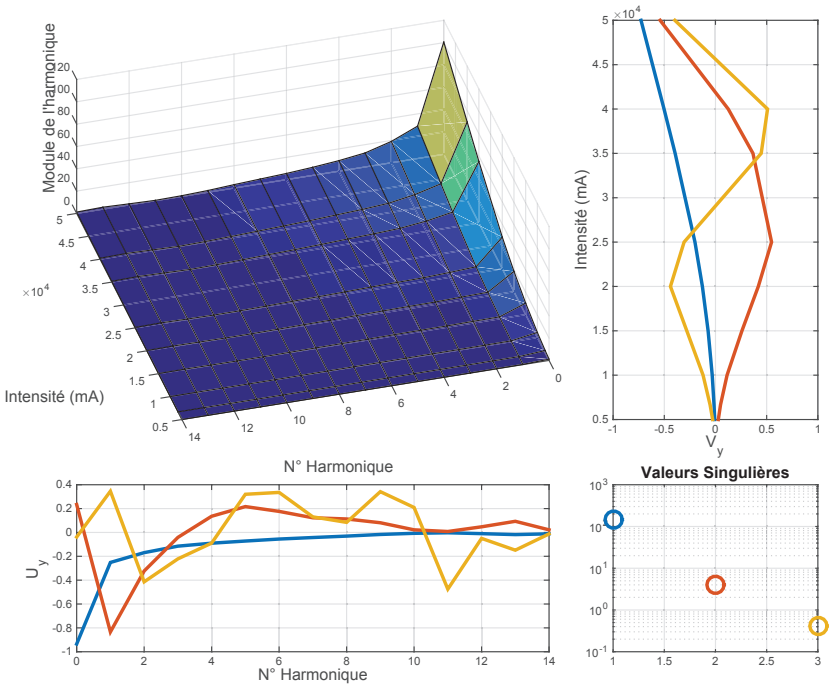


Figure 4.18 – Décomposition en valeurs singulières de la matrice D.

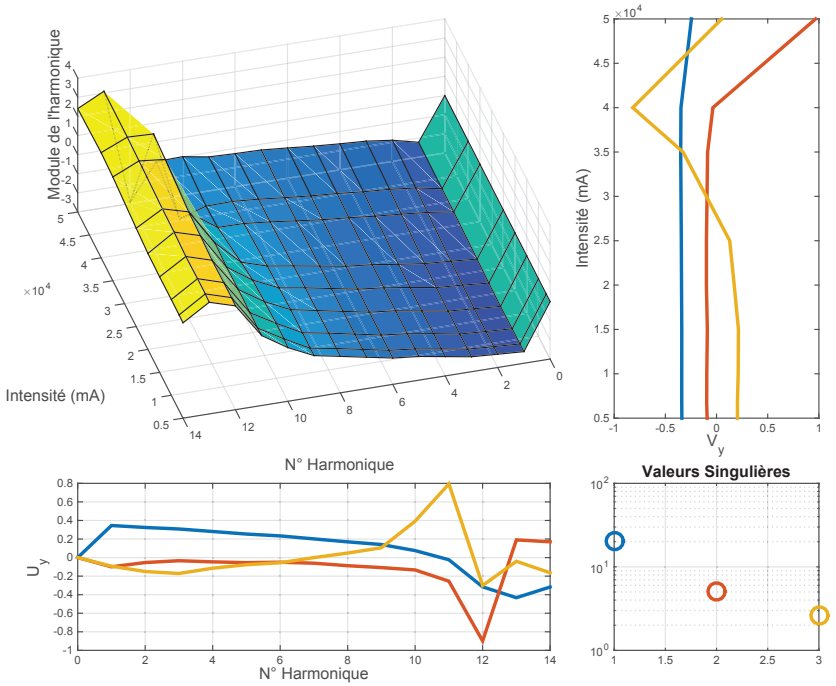


Figure 4.19 – Décomposition en valeurs singulières de la matrice φ.

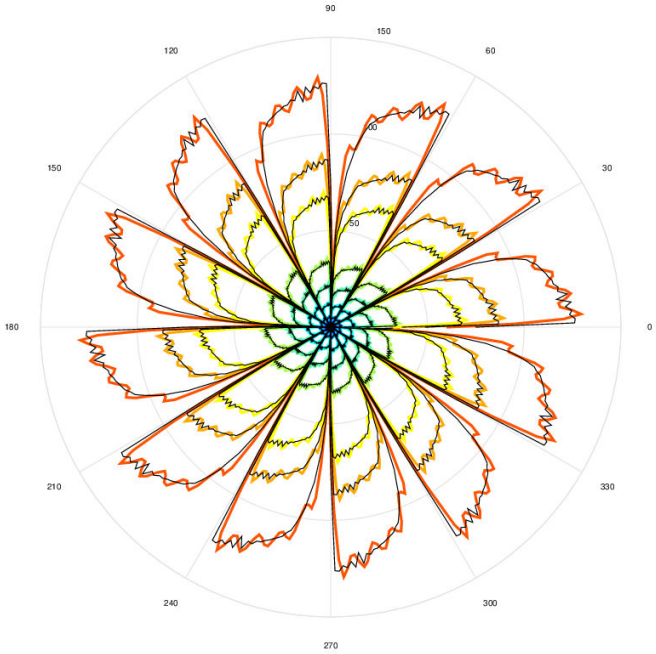


Figure 4.20 – Approximation du couple moteur à partir d'une base harmonique constituée de 5 termes et d'une seule fonction de dépendance à l'intensité.

4.6 Conclusion du Chapitre 4

Deux pistes ont été explorées dans ce Chapitre. La première consiste à décomposer directement le champ de potentiel vecteur. Cette piste est séduisante puisqu'elle pourrait permettre de générer des modèles réduits capables d'analyser des phénomènes locaux comme les pertes ou d'étudier des couplages avec d'autres physiques comme la vibroacoustique. Néanmoins la rotation du rotor induit une difficulté liée au choix du repère d'analyse (fixe ou mobile) qui n'a pas été levée dans ces travaux. Indiquons toutefois que des travaux récents [68] ou [69] ont proposé l'utilisation de la méthode de Craig-Brampton ou la POD pour traiter cette difficulté.

Dans un deuxième temps, nous avons présenté une approche permettant de construire un modèle réduit Électromagnétique d'une machine électrique. Celle-ci consiste à travailler directement sur le couple pour le projeter sur une base de fonctions harmoniques. Comme nous avons pu le voir, cette approche est très efficace. Elle permet d'obtenir un modèle réduit produisant de très bons résultats et cela quelle que soit la position angulaire du rotor θ ou l'intensité appliquée à la machine I.

Cependant cette approche a tout de même l'inconvénient de nécessiter plusieurs calculs off-line pour construire la cartographie de couple. C'est pourquoi quelques pistes restent encore à tester afin d'améliorer l'approche proposée dans ce Chapitre :

- **Piste 1** :
  Une approche intéressante serait de tester une technique de sous-échantillonnage afin de construire la cartographie de couple uniquement pour quelques points de fonctionnement. Cela réduirait drastiquement le temps off-line de construction de cette cartographie.

- **Piste 2** :
  Une autre piste intéressante à évaluer serait de travailler directement à partir du potentiel vecteur A et non depuis le couple $C(\theta, I)$. Nécessitant un temps de mise en oeuvre plus lourd du fait de devoir travailler avec deux repères dont un tournant, cette piste n'a malheureusement pas été finalisée durant cette Thèse.

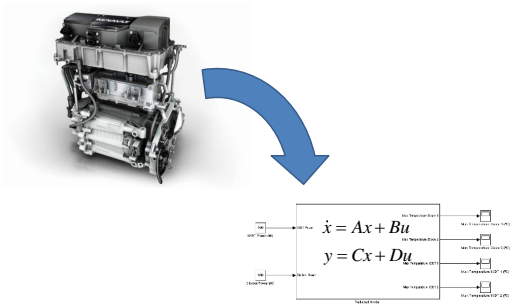
Il reste pour finir à tester cette approche sur d'autres technologies de machines que des Machines à Réluctance Variable afin de valider, ou non, son efficacité quelle que soit la machine étudiée.

Chapitre 5

Extensions et Utilisations des travaux

Sommaire

5.1 Introduction 104
5.2 Extension en Thermique non-linéaire 104
5.3 Cas d'applications 108
5.3.1 Utilisation en phase d'avant-projet 109
5.3.2 Utilisation en phase de développement / validation 114
5.3.3 Utilisation dans un module de surveillance embarqué 116
5.4 Conclusion du Chapitre 5 119



Résumé

Ce Chapitre présente des applications concrètes de la réduction de modèle dans l'industrie. Nous verrons ainsi comment il est possible d'utiliser des modèles réduits à différentes phases de conception d'un produit.

5.1 Introduction

Historiquement, la réduction de modèle a toujours été présente dans l'industrie. Cependant, elle est très régulièrement employée sans même que son utilisateur en ait conscience. En effet, la plupart des codes du commerce utilisent des méthodologies de réduction de modèles dans leur solveurs afin d'accélérer les temps de calcul. C'est d'ailleurs la fonction la plus connue de la réduction de modèle. Dans ces travaux de Thèse nous nous intéressons à une extension de son utilisation. Celle-ci se base sur la possibilité de construire des modèles réduits exploitables dans des plateformes de développements (type Matlab/Simulink). Cette approche est intéressante d'un point de vue industriel car elle permet de couvrir deux besoins lors de la conception d'un produit :

- avoir des modèles de prédiction en phase amont projet.
- avoir des modèles robustes, précis et rapidement simulables en phase d'optimisation.

En se référant au cycle de conception d'un produit - communément appelé cycle en V - il est possible de placer ces deux besoins en phase descendante du cycle (cf Figure 5.1).

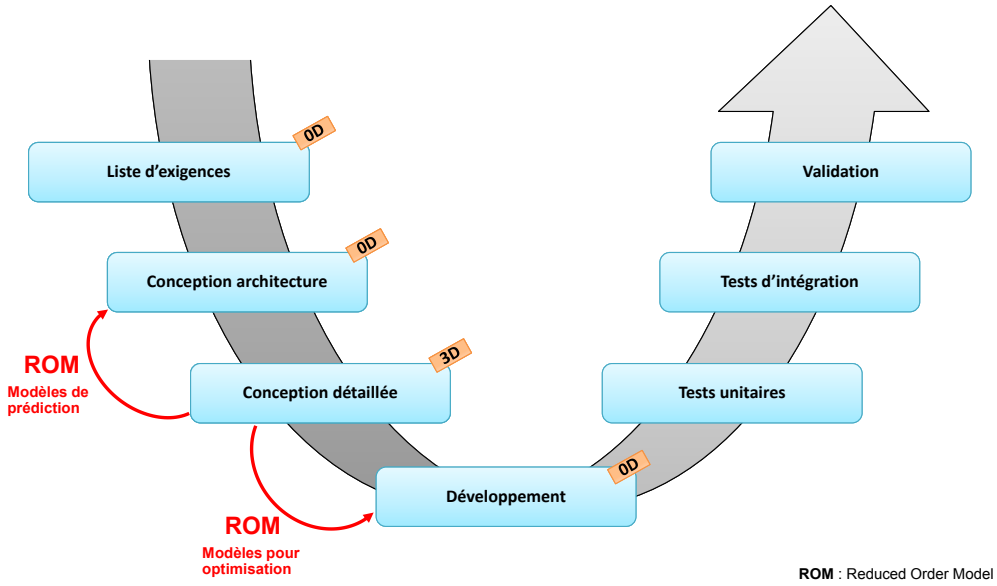


Figure 5.1 – Utilisation de modèles réduits dans un cycle en V de conception d'un produit

5.2 Extension en Thermique non-linéaire

Dans ces travaux, les exemples de transferts de chaleur traités étaient tous linéarisés. Les méthodes développées pourraient, à notre avis, néanmoins assez facilement être adaptés au traitement de cas non-linéaires. C'est ce que nous montrons dans cette partie. Le problème de

Thermique linéaire de la forme :

$$\begin{cases} C\dfrac{dT}{dt} + KT = Q \\ T(t=0) = T_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

a été réduit en supposant une décomposition telle que :

$$T = \sum_k \Phi_k \tilde{T}_k(t) \tag{5.2}$$

dans laquelle la base de projection est constituée par des Φ_k contenant les modes de diffusion à l'échelle des composants Φ_{Li} mais également ceux à l'échelle du modèle complet Φ_G. Nous pouvons écrire cette base sous la forme :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{L_1} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \Phi_G \\ & \cdots & \Phi_{L_N} & \vdots \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Φ_G contient les premiers vecteurs propres du problème linéaire homogène mais peut également contenir des termes de correction statique.
L'extension à un cas non-linéaire peut se faire en introduisant des corrections au niveau des modes de composants ou au niveau des modes globaux. C'est cette dernière approche qui a été retenue dans le cadre de l'outil développé au cours de cette Thèse.
Après construction d'un modèle discret par la méthode des Éléments Finis, le problème de Thermique non-linéaire s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} C\dfrac{dT}{dt} + K(T)T = Q \\ T(t=0) = T_0 \end{cases} \tag{5.4}$$

où K est un opérateur "tangent" intégrant un comportement matériaux non-linéaire et des conditions aux limites non-linéaires de convection naturelle ou de rayonnement.

Une décomposition initiale est réalisée grâce à des modes de composant et des modes globaux construits à partir de l'opérateur $K(T_0)$ et de l'opérateur C.

$$T = \sum_{k=1}^{N} \Phi_k \tilde{T}_k^N(t) \tag{5.5}$$

Le problème s'écrit alors sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{N} C\Phi_k \frac{d\tilde{T}_k^N}{dt} + \sum_{k=1}^{N} K(\Phi\tilde{T}^N)\Phi_k\tilde{T}_k^N = Q(t) + R_N(t) \tag{5.6}$$

Nous effectuons alors une projection de Galerkin du problème sur chacun des vecteurs de la base Φ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{N} {}^T\Phi_n C \Phi_k \frac{d\tilde{T}_k^N}{dt} + \sum_{k=1}^{N} {}^T\Phi_n K(\Phi\tilde{T}^N)\Phi_k \tilde{T}_k^N = {}^T\Phi_n Q(t) \quad pour\ n = 1...N \tag{5.7}$$

La solution du problème réduit est alors évaluée sur tout l'intervalle de temps par une méthode d'intégration pas à pas (cf. Algorithme 1 ci-dessous). Il est aussi possible d'évaluer la solution du système différentiel par une méthode Éléments Finis en temps. Nous n'avons ici pas évalué cette solution.

while $t<t_n$ **do**
- $\tilde{T}_{t-dt}^N = \tilde{T}_t^N; \tilde{T}_a^N = \tilde{T}_t^N;$
- $\tilde{\dot{T}}_t^N = \tilde{C}^{-1}\left[\tilde{K}(\tilde{T}_a^N)\tilde{T}_a^N - \tilde{Q}_t\right];$
- $\tilde{T}_t^N = \tilde{T}_{t-dt}^N + \Delta t(\tilde{\dot{T}}_t^N);$
- $e = \left\|\tilde{T}_t - \tilde{T}_a\right\|_2;$
- **if** $e>\epsilon$ **then**
  - réduction du pas de temps;
- **end**

end

Algorithm 1: Méthode d'intégration pas à pas explicite

Notons que la construction et la mise à jour de l'opérateur $\tilde{K}={}^T\Phi_n K(\Phi\tilde{T}^N)\Phi_k$ peut s'avérer très lourde selon le schéma d'intégration retenu pour les équations différentielles sous-jacentes. Une reconstruction partielle est envisageable si seulement une partie du domaine est affectée notablement par la non-linéarité.

L'opérateur $\tilde{K}$ peut être construit en évaluant :

$$T^N = \sum_{k=1}^{N} \Phi_n \tilde{T}_k^N \tag{5.8}$$

On rappelle que le flux de conducto-convection s'écrit tel que (voir Chapitre 1) :

$$\varphi = KT = \sum_{k=1}^{M} \left[\int_{\Omega_h} B^T \lambda B dV + \int_S h N^T N dS \right] T_h \tag{5.9}$$

dans le cas non-linéaire, φ peut s'écrire :

$$\varphi(T^N) = KT = \sum_{k=1}^{M} \left[\int_{\Omega_h} B^T \lambda(NT^N) B dV + \int_S h(NT^N) N^T N dS \right] T_h \tag{5.10}$$

Si sur une partie du domaine h et λ peuvent être considérés comme constants, l'assemblage peut être réduit à :

$$\varphi(T^N) = KT = \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{\Omega_h} B^T \lambda B dV + \int_S h N^T N dS \right] T_h + \sum_{k=m+1}^{M} \left[\int_{\Omega_h} B^T \lambda(T) B dV + \int_S h(T) N^T N dS \right] T_h \tag{5.11}$$

évidemment cette hypothèse permet de réduire les coûts de construction de l'approximation. Cette forme de construction se rapproche des travaux de Ryckelynck sur l'APHR [50].

A posteriori, la qualité de l'approximation de $\tilde{K}(T_a^N)T_a^N = {}^T\Phi^N\varphi(T^N)$ s'avère insuffisante. Cela est évaluable grâce à l'expression de la norme du résidu $\|R_N(t)\|$.
Lorsque le résidu R_N excède une certaine valeur ϵ fixée à un temps t_i, ce résidu peut être utilisé pour enrichir l'approximation :

$$T^{N+1} = \sum_{k=1}^{N+1} \Phi_k \tilde{T}_k^{N+1}(t) \tag{5.12}$$

avec Φ_{k+1} le $(k+1)^{ème}$ vecteur de la base obtenu par orthonormalisation de Gram-Schmidt du vecteur $[K(T_{t_i})]^{-1}R_N(t_i)$ au reste de la base.
Ce vecteur est également le premier vecteur du sous-espace de Krylov qui engendre la solution. Afin de ne pas augmenter l'ordre de la solution, une décomposition de Karhunen-Loève (ou SVD) peut être pratiquée sur le snapshot constitué des solutions $\mathrm{T_{k_i}} = \mathrm{T_k}(t_i)$.
La troncature de ce snapshot à l'ordre inférieur à N permet de réduire la dimension de l'approximation.

Notons pour terminer que le gain apporté est plus spectaculaire si le schéma d'intégration est implicite puisque l'inversion de l'opérateur tangent est alors nettement moins coûteux.

La Figure 5.2 illustre cette démarche de construction du modèle réduit par itération sur les résidus. Ces résultats sont obtenus pour le même cas d'étude que celui utilisé dans le Chapitre 3, à savoir une carte d'électronique de puissance composée de 2 paires de puces (IGBT et Diodes dont les termes sources sont notés de F1 à F4 sur la Figure 5.2) et refroidie sur la couche inférieure par un système convectif (terme source F5 sur la Figure 5.2).
Afin de faciliter la lecture de cette Figure, il est possible d'utiliser les boutons de contrôle situés au bas et ainsi de visualiser chaque itération successive sur les résidus. Cela permet pour chaque itération :

- de comparer les sorties du modèle réduit avec celles du modèle complet (tracé nommé "Ref" sur la Figure).
- de visualiser l'erreur sur les sorties des capteurs S1 à S5 (centre de chacune des puces et coin de la carte).
- d'observer la contribution de la base de projection par rapport aux vecteurs sources.

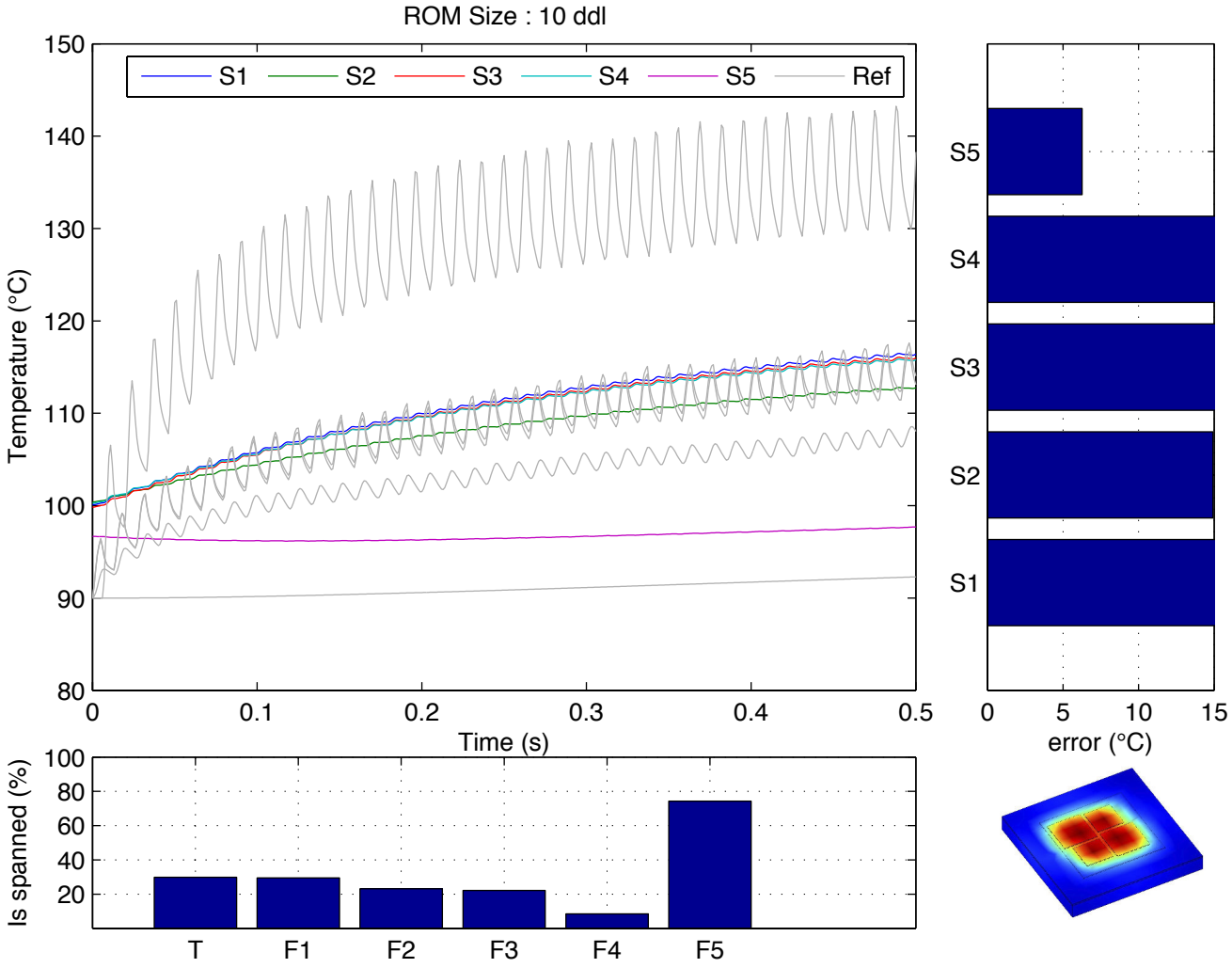


Figure 5.2 – Exemple d'utilisation de l'itération sur les résidus pour la construction d'un modèle réduit

5.3 Cas d'applications

Nous allons présenter dans cette partie trois cas d'applications des modèles réduits correspondant à trois phases du cycle de conception d'un produit :

- l'utilisation en phase d'avant-projet :
  les modèles réduits servent alors au pré-dimensionnement géométrique des systèmes,
- l'utilisation en phase de développement :
  les modèles réduits sont alors intégrés dans des plateformes décrivant le système global afin de mettre au point les lois de contrôle/commande,
- l'utilisation dans un module de surveillance embarqué :
  les modèles réduits permettent dans ce cas de monitorer mais aussi de piloter en temps réel le système.

5.3.1 Utilisation en phase d'avant-projet

Dans la plupart des cas, les modèles réduits sont obtenus à partir de modèles détaillés. En se référant au cycle de développement d'un produit, ces modèles réduits sont alors destinés à une utilisation en phase de développement/validation (c'est-à-dire en bas du cycle en V (cf Figure 5.1).
Nous allons ici évoquer une approche innovante permettant d'utiliser les modèles réduits en phase amont avant même d'avoir les spécifications d'une géométrie détaillée. Cette méthode consiste à construire une base de modèles réduits afin de pouvoir "resynthétiser" une variété de modèles à partir de celle-ci. Cela est rendu possible grâce à la technique dite "des modes de composants" présentée dans le Chapitre 3. L'avantage de cette méthode est qu'il est possible de construire une base de modèles réduits très riche sachant que ceux-ci sont d'une taille vraiment faible (quelques octets). Ainsi, en y stockant quelques géométries de forme "primaire", il est possible de resynthétiser très rapidement de nombreux modèles. En avant projet, cela permet de construire et de simuler différents scénarios avec différentes solutions techniques afin d'effectuer rapidement un comparatif entre elles.
La Figure 5.3 illustre comment à partir de trois modèles réduits de forme parallélépipédique il est possible de reconstruire le module d'électronique de puissance ayant servi de cas d'étude dans le Chapitre 3.

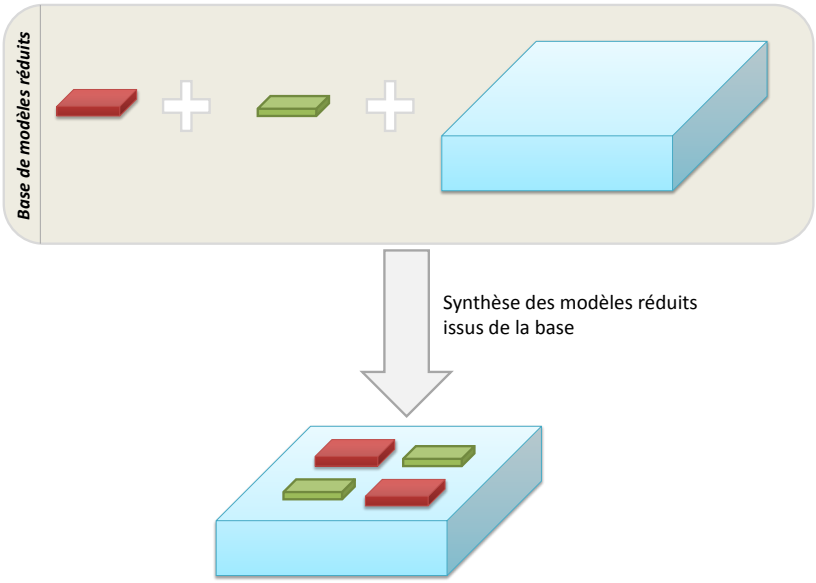


Figure 5.3 – Synthèse d'un nouveau modèle à partir d'une base de modèles réduits

Un autre exemple d'utilisation de cette méthode, appliquée à un système de freinage, est présenté dans l'article de Vermot de Roches et al. [28].

Dans le cadre des processus de conception, les modes de composants peuvent provenir de systèmes de génération précédente. Cela permet de repartir d'une base connue. Les modes globaux, peuvent eux être calculés très rapidement en utilisant des géométries simplifiées.

Supposons connus les modes de composants des puces 1 à N grâce à une étude sur un module

de génération I :

$$\Phi_1^I = \left[\begin{array}{ccc} \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{n1} \end{array} \right], \ldots, \Phi_N^I = \left[\begin{array}{ccc} \Phi_{1N} & \cdots & \Phi_{nN} \end{array} \right] \tag{5.13}$$

La conception d'un module de génération I+1 peut s'appuyer sur ces bases connues et sur la base globale Φ_G obtenue par l'étude modale d'un modèle "Haute Fidélité" du module I+1.

Il est alors possible de décrire l'obtention de ce nouveau module I+1 grâce à l'algorithme suivant :

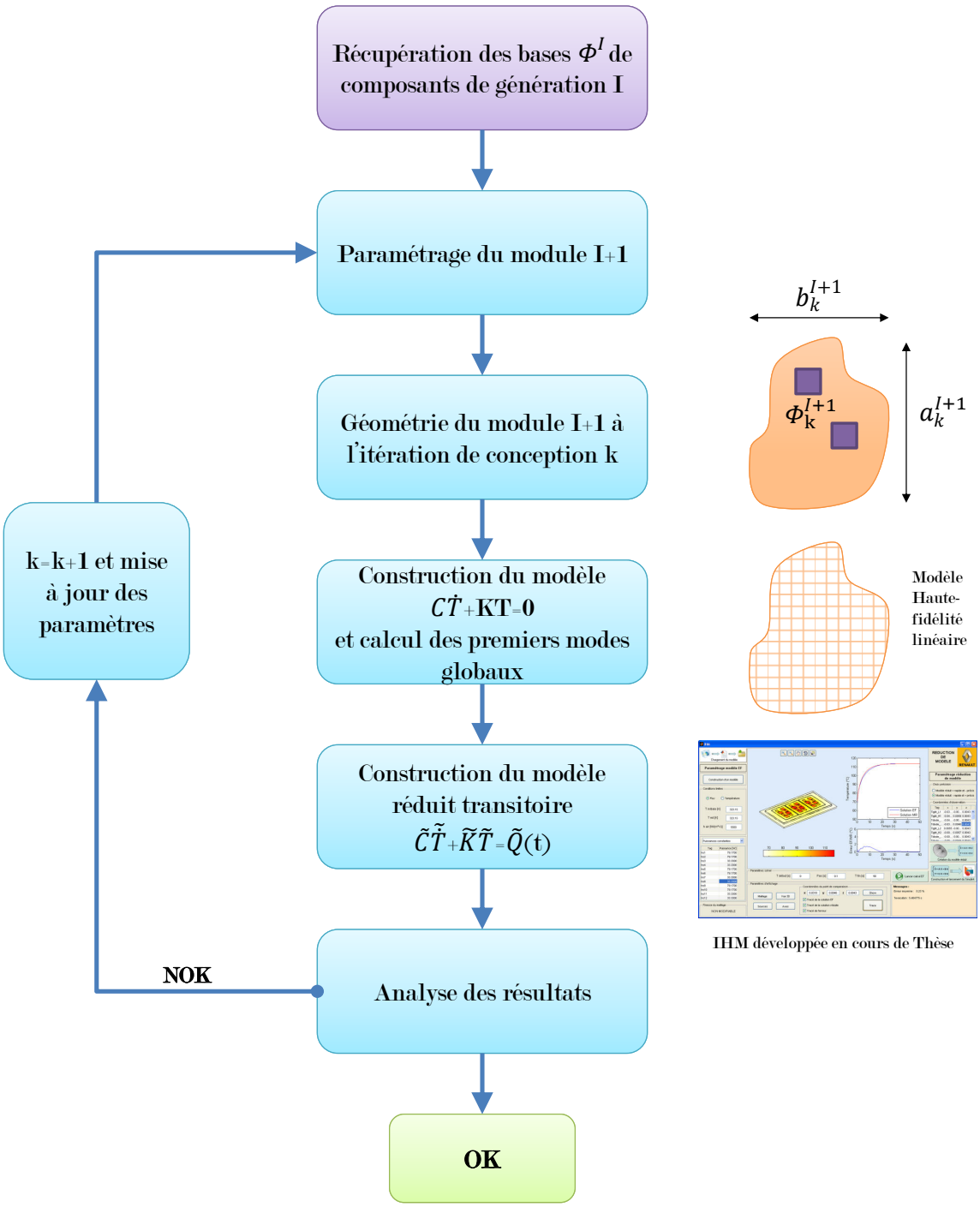


Figure 5.4 – Processus de construction d'un module de génération I+1 à partir d'un module de génération I

Exemple : Réduction de modèle thermique appliquée à un onduleur et à un redresseur

Le cas d'étude utilisé dans le Chapitre 3 est une version simplifiée d'un composant d'électronique de puissance qui ici servait à des fins de communication. La figure 5.5 présente la géométrie du réel onduleur utilisé et qui sera étudié dans cette partie. Pour des raisons de confidentialité, les dimensions et propriétés des matériaux employés ne seront pas communiquées. Ce composant d'électronique de puissance est caractérisé par un empilement de différents matériaux et par un assemblage de plusieurs diodes et IGBT.

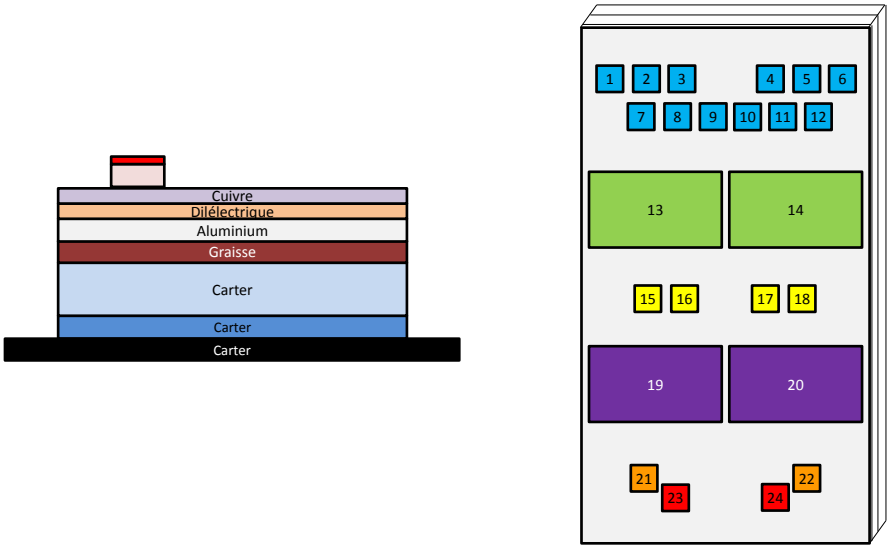


Figure 5.5 – Géométrie de l'onduleur étudié

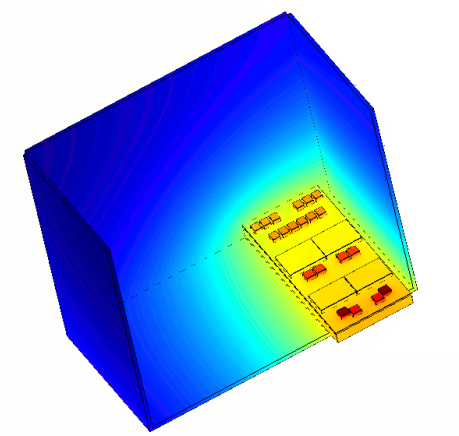


Figure 5.6 – Cartographie 3D de l'onduleur étudié

Le modèle Éléments Finis utilisé pour étudier ce composant est discrétisé en plus de 300000 éléments. Une simulation transitoire d'un tel modèle sur le PC portable qui a servi tout au

long de l'étude[1] excède les 30 minutes de calcul. Il apparaît donc irréaliste d'intégrer un tel modèle dans une plateforme de développement afin de simuler de façon itérative différentes lois de contrôle/commande. Ce processus serait bien trop long.
La Figure 5.6 représente une cartographie 3D de l'échauffement thermique de l'onduleur étudié dans son carter.
Le modèle réduit généré permet d'évaluer plus de 25 températures de sortie différentes (T_{max} pour les diodes et IGBT ainsi que certains points remarquables sur la face supérieure du cuivre). L'évolution sur une période de simulation d'une de ces températures est présentée en Figure 5.7. Celle-ci est comparée aux résultats théoriques issus d'une simulation Éléments Finis 3D. Nous pouvons ainsi nous rendre compte de la précision du modèle réduit. A titre d'information, le temps d'exécution du modèle réduit est de l'ordre de la seconde (plus d'un facteur 100 avec le calcul Éléments Finis). Ce temps d'exécution contenu est l'un des premiers arguments favorisant le recours aux modèles réduits pour les intégrer dans des plateformes de développement système. Le deuxième argument vient de leur facilité d'écriture et de diffusion dans un environnement collaboratif. Il a été fait le choix de passer par une écriture de type "représentation d'état" pour décrire les modèles réduits générés ($\dot{x} = Ax + Bu$ et $y = Cx + Du$). Cette représentation permet de n'avoir qu'à stocker (et diffuser si nécessaire) les matrices réduites A,B,C et D. L'une des utilisations concrète de ce mode de fonctionnement peut être vue dans la relation client-fournisseur. En effet en tant que client, il est possible de recevoir le modèle réduit en mode "boite noire" d'un des fournisseurs, afin de l'intégrer dans une plateforme de développement. Cela permet au fournisseur de conserver son savoir-faire tout en communiquant un modèle précis au client. Modèle qui est très utile en phase de conception d'un système.

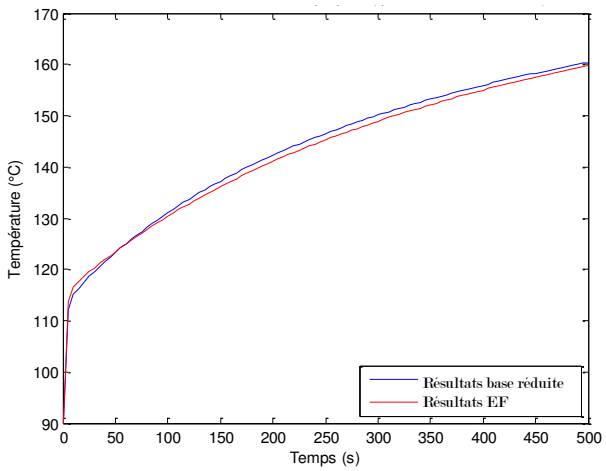


Figure 5.7 – Évolution de la montée en température au niveau d'un point de prélèvement de l'onduleur. Comparaison entre un modèle 3D éléments finis et un modèle réduit.

1. Intel Core i7-2630QM - 8Go RAM DDR3 - SSD

5.3.2 Utilisation en phase de développement / validation

Afin de concevoir et développer des systèmes complexes, qui bien souvent mettent en jeu des couplages multiphysiques, le recours aux plateformes de développement est de nos jours inévitable. Nous pouvons citer comme exemple des plateformes telles que Matlab/Simulink® ou encore AMESim®. Ce type de logiciel permet de modéliser et d'analyser des systèmes multi-domaines, multi-physiques et multi-échelles. Pour cela il est possible d'avoir accès à des librairies de modèles analytiques validés qui représentent le comportement réel Électrique, Thermique ou encore Mécanique du système étudié. Un exemple de modélisation d'une chaîne de traction d'un véhicule électrique est présenté dans la thèse de Janiaud [70].
L'intérêt de la réduction de modèle est d'apporter au niveau "système" d'une modélisation, une représentativité et une précision uniquement disponible lors des études 3D d'un organe du système. Cela permet de prédire et d'anticiper les comportements à la fois globaux mais aussi locaux des systèmes étudiés. Il est alors possible d'effectuer des optimisations fines.

Exemple : Calcul de fiabilité de modules d'électronique de puissance

Dans un composant d'électronique de puissance, la grandeur caractéristique qu'il faut en permanence surveiller se nomme la température de jonction. Celle-ci correspond à la température à ne pas dépasser sous peine de dégrader, voire détruire, complètement le composant. Afin de s'assurer que l'équipement respecte les performances requises, la méthode traditionnelle consiste à placer celui-ci sur un banc de validation afin de lui faire subir une batterie de tests. Cette méthode est coûteuse en temps, à la fois pour mettre au point le banc mais également pour effectuer les séries de tests.
Le recours à la simulation numérique permet de limiter les coûts et l'utilisation de modèles réduits diminue les temps de simulation pour chaque boucle de test. Dans le cas d'une chaîne de traction d'un véhicule électrique, il est ainsi possible de mettre au point numériquement les lois de contrôle/commande afin d'optimiser finement le compromis performance/autonomie tout en garantissant la fiabilité des composants mis en jeu.
La Figure 5.8 est l'exemple d'un processus de simulation qui, partant d'une commande haut niveau en couple/vitesse, permet d'estimer la température de jonction T_j du module de puissance utilisé. Ce processus de calcul intègre un modèle réduit Thermique de ce module. Grâce à celui-ci, il est possible d'estimer finement la température en tout point du module. Pour une loi de contrôle/commande donnée, ce processus permet d'évaluer si un seuil de température maximale n'est pas franchi et donc de valider les prestations de cette loi. Par boucles itératives, les lois de pilotage sont ainsi mises au point plus rapidement.

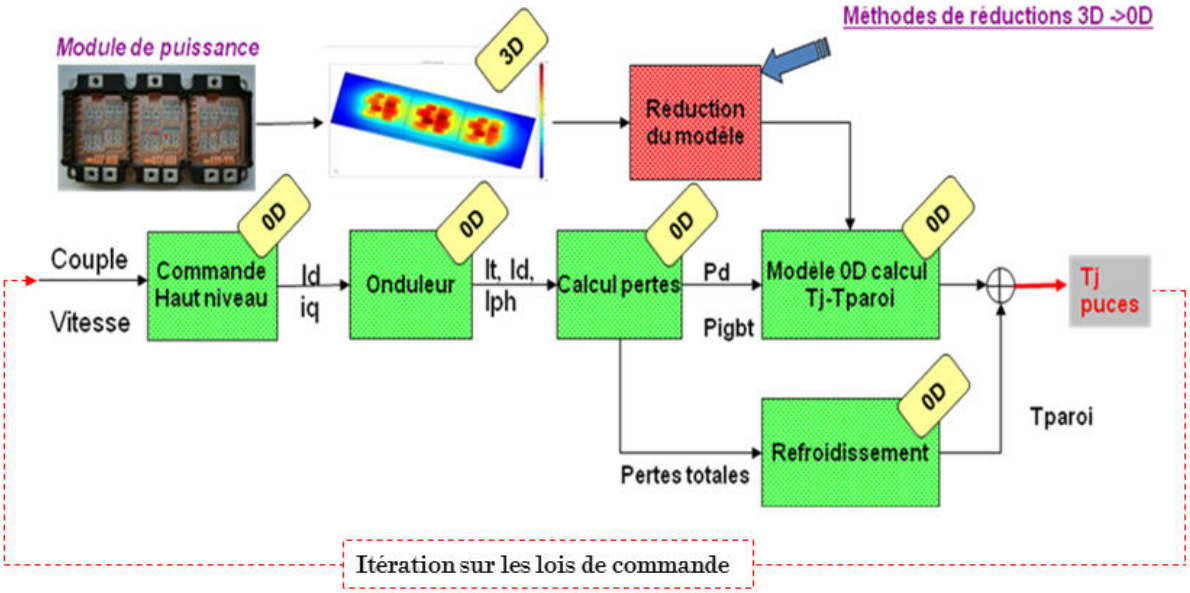


Figure 5.8 – Processus utilisant un modèle réduit pour estimer la fiabilité d'un composant

Exemple d'une interface homme/machine

Dans cette partie nous allons voir un exemple permettant de facilement déployer dans l'industrie les méthodologies de réduction de modèles dont nous avons discuté dans les précédents chapitres. Pour cela une interface homme/machine a été développée afin de pouvoir construire de manière automatique des modèles réduits en Thermique (cf Chapitre 3). Nous pouvons voir en Figure 5.9 une illustration de cette interface. Celle-ci se résume autour de 5 principales parties :

- une partie dédiée au paramétrage du modèle Éléments Finis (conditions limites, propriétés matériaux, maillage).
- une partie pour paramétrer le solveur (pas d'itération, points d'évaluations pour l'affichage,etc...).
- une partie paramétrage du modèle réduit (choix de la précision du modèle réduit, définition des sorties).
- une partie "action" (lancement du calcul du modèle réduit, construction automatique du modèle Simulink et de son workspace associé).
- une partie affichage des résultats (visualisation 3D, évaluation de la température en un point, évolution de l'erreur).

Cette interface est un bon moyen pour qu'une personne non-initiée aux méthodes de réduction de modèles puisse quand même les utiliser. En effet, la génération du modèle réduit se faisant automatiquement, l'utilisateur n'a qu'à choisir le degré de précision souhaité. L'algorithme mis en place construira alors directement le modèle réduit sous une formulation d'état.

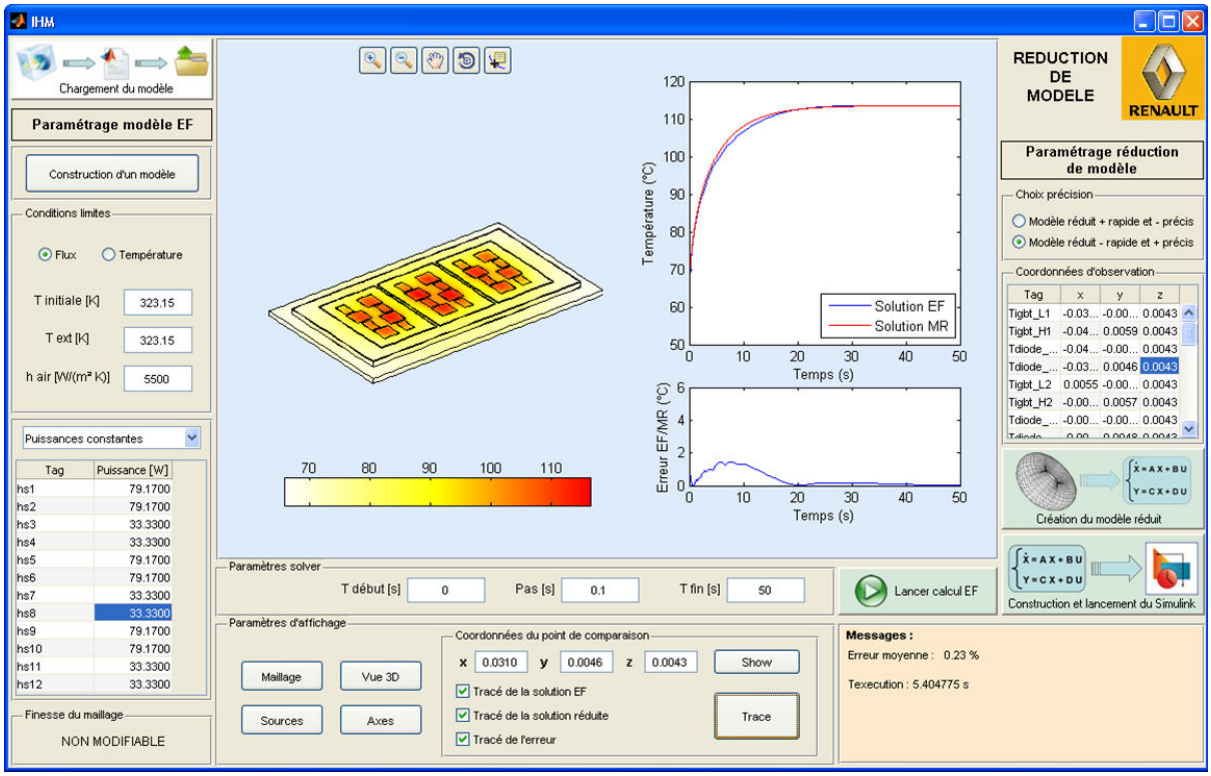


Figure 5.9 – Interface Homme/Machine pour la construction automatique de modèles réduits en Thermique

5.3.3 Utilisation dans un module de surveillance embarqué

Nous rappelons que notre modèle réduit s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = \tilde{A}X + \tilde{B}u \\ T = \tilde{C}X \end{cases} \tag{5.14}$$

Les températures mesurées sont notées T_M et celles non mesurées sont notées T_I.
La base est constituée de modes de composants et de modes globaux, soit la topologie suivante pour la matrice $\tilde{C}X$:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 & g_{11} & & g_{1M} \\ & \ddots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & & c_N & g_{N1} & & g_{NM} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

où les c_i sont des modes de composants d'indice i et g_{ij} sont des modes globaux d'indice i,j.

Nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} T_M \\ T_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [C_{MM}] & & [C_{MG}] \\ & [C_{II}] & [C_{IG}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_M \\ X_I \\ X_G \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

Les états du vecteur c associés à des composants non observés ne sont pas déterminables grâce à la seule équation d'observation. Les autres le sont grâce à la relation suivante :

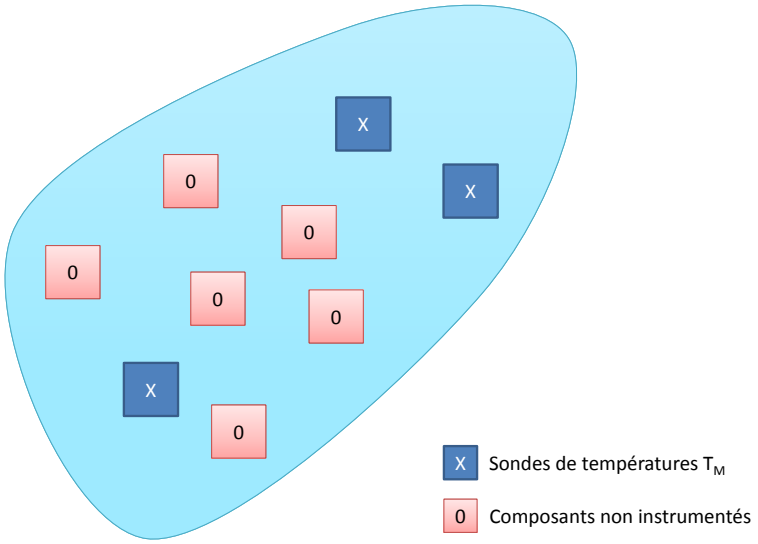


Figure 5.10 – Schéma de principe : différence en composants instrumentés (= sondes de température) et composants non instrumentés

$$T_M = \begin{pmatrix} [C_{MM}] & [C_{MG}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_M \\ X_G \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

qui peut être inversée au sens des moindres carrés :

$$\|r\|_2 = \left\| T_M - \begin{pmatrix} c_{MM} & c_{MG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_M \\ X_G \end{pmatrix} \right\|_2 \tag{5.18}$$

par la relation suivante :

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix} c_{MM} & c_{MG} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_{MM} & c_{MG} \end{pmatrix} \right]}_{W} \begin{pmatrix} X_M \\ X_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{MM} & c_{MG} \end{pmatrix}^T T_M \tag{5.19}$$

Dès lors, l'équation d'état devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_M \\ \dot{X}_I \\ \dot{X}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{MM} & 0 & A_{MG} \\ 0 & A_{II} & A_{IG} \\ A_{GM} & A_{GI} & A_{GG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_M \\ X_I \\ X_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{MM} & B_{MI} \\ B_{IM} & B_{II} \\ B_{GM} & B_{GI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_M \\ U_I \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

Cette équation peut être utilisée pour déterminer X_I connaissant X_M et X_G par la mesure.

$$\dot{X}_I = A_{II}X_I + A_{IG}X_G + B_{IM}U_M + B_{II}U_I \tag{5.21}$$

T_I peut alors être déterminée grâce à la relation d'observation :

$$T_I = C_{II}X_I + C_{IG}X_G \tag{5.22}$$

En temps discret, pour la programmation du module temps réel, nous avons donc :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X_M^{n+1} \\ X_G^{n+1} \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} c_{MM} & c_{MG} \end{pmatrix}^T T_M^{n+1} \\ X_I^{n+1} = X_I^{n+1} + \Delta t \left(A_{II} X_I^{n+1} + A_{IG} X_G^{n+1} + B_{IM} U_M^{n+1} + B_{II} U_I^{n+1} \right) \\ T_I^{n+1} = C_{II} X_I^{n+1} + C_{IG} X_G^{n+1} \end{cases} \tag{5.23}$$

Cette démarche présente comme principal inconvénient l'hypothèse de linéarité des opérateurs $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$. Cette hypothèse pourrait être relaxée en utilisant une mise à jour des opérateurs grâce aux mesures et à un modèle non-linéaire. L'utilisation d'un filtre de Kalman serait probablement une bonne piste pour effectuer ces mises à jour.

Exemple : Utilisation d'un modèle réduit comme sonde de température embarquée dans un calculateur

Dans le cadre du contrôle/commande de la chaîne de traction d'un véhicule électrique, il est essentiel de monitorer en permanence plusieurs grandeurs physiques afin de pouvoir en piloter tous ses constituants. Classiquement, des capteurs sont utilisés pour mesurer ces grandeurs physiques. Le problème est que ceux-ci deviennent de plus en plus nombreux dans un véhicule, ce qui entraine des contraintes de masse et de prix supplémentaires. L'idée est donc venue d'intégrer dans les calculateurs déjà existants dans le véhicule, des modèles permettant de reproduire le comportement du composant afin d'évaluer la grandeur physique grâce à ce modèle et non plus grâce à un capteur dédié. Ces modèles se veulent précis tout en ayant un temps d'exécution proche du temps réel afin de fournir quasi instantanément les résultats. Les modèles réduits tels que présentés précédemment ont donc complètement leur place dans ce genre de processus.
Cette partie traite d'un exemple industriel exploité au cours de cette Thèse. Pour des raisons de confidentialité, aucune donnée technique sur ce cas d'étude ne sera communiquée dans ce manuscrit. Cet exemple d'utilisation concrète consiste à intégrer un modèle réduit Thermique d'un onduleur directement dans un calculateur afin d'avoir une prédiction quasi instantanée de la température en certains points de ce module d'électronique de puissance. Cette pratique est très intéressante car elle permet d'utiliser très peu de ressources dans un des calculateurs déjà présent dans le véhicule. Cela n'engendre donc aucun surcoût et au contraire il est ainsi possible de limiter le nombre de capteurs à embarquer pour monitorer les grandeurs souhaitées. La Figure 5.11 ci-dessous, illustre le processus mis en oeuvre pour évaluer la température à chaque instant pour plusieurs points de référence (Tp,Td et Tigbt) grâce à un modèle réduit embarqué dans un calculateur. Cela permet d'ajuster en temps réel les lois de pilotages et ainsi de passer en "mode dégradé" si nécessaire afin de limiter l'échauffement des composants engendré par les commutations des interrupteurs.

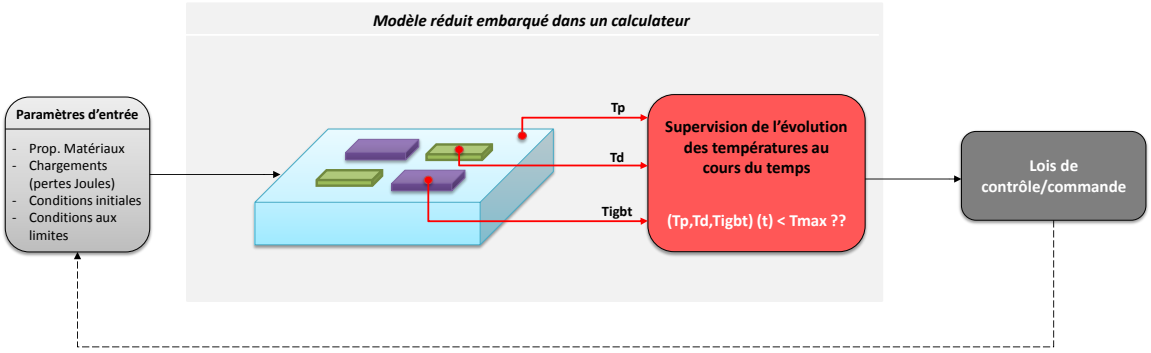


Figure 5.11 – Illustration de l'utilisation d'un modèle réduit comme sonde de température embarquée dans un calculateur

5.4 Conclusion du Chapitre 5

Lors de ce Chapitre nous avons tout d'abord présenté une démarche de construction d'un modèle réduit par itération sur les résidus. Cette approche permet l'étude de cas en Thermique non-linéaire. Une extension intéressante de cette démarche serait d'utiliser un schéma implicite d'intégration temporelle et non explicite. Cela permettrait d'obtenir des gains plus spectaculaire grâce à cette approche du fait que l'inversion de l'opérateur tangent K serait moins coûteux.

Ce chapitre a ensuite été l'occasion d'aborder plusieurs cas d'applications concrets étudiés au cours de cette Thèse. Ces cas couvrent tout le cycle de vie d'un système, depuis la phase de conception en avant-projet, en passant par la phase de développement-validation, pour enfin terminer par la phase embarquée.
Nous avons ainsi pu présenter comment il était possible en phase d'avant-projet d'obtenir rapidement un modèle réduit en réutilisant comme base de départ des modèles évalués lors de générations antérieures à notre système considéré. L'utilisation de modes de composants couplés avec des modes globaux nous permet ensuite de construire rapidement un modèle réduit fournissant de bons résultats pour du pré-dimensionnement.
Nous avons ensuite montré tout l'intérêt du recours aux modèles réduits au cours d'une phase de développement-validation au travers d'un exemple de calcul de fiabilité. En effet, grâce à la précision et à la rapidité d'exécution des modèles réduits, il est possible de les intégrer au sein de plateformes 0D décrivant le système complet afin de, par exemple, mettre au point, par boucles itératives, des lois de contrôle-commande.
Pour finir, nous avons présenté une utilisation très intéressante d'un modèle réduit en l'intégrant directement dans un calculateur pour que celui-ci serve de sonde de température et puisse ainsi remonter en temps réel des informations de température locale. Cette approche innovante permet ainsi de substituer des capteurs physiques par un modèle réduit embarqué fournissant lui aussi de bons résultats.

Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans ce manuscrit de Thèse vise à proposer des approches de réduction de modèle utilisables dans le cadre d'une conception ou d'une optimisation d'une chaîne de traction d'un véhicule électrique. Celle-ci se compose de plusieurs sous-organes et met en jeu plusieurs domaines de la Physique. Nous avons donc affaire à un système complexe qu'il est nécessaire d'optimiser en trouvant le meilleur compromis au regard de critères tels que le coût, l'autonomie ou encore la performance.

Le Chapitre 3, nous a permis de mettre en avant le fait que l'utilisation des modes dominants en Thermique était une méthode très performante. Nous en avons proposé une extension dite de modes de composants, en concentrant uniquement l'extraction de modes propres sur les puces de la carte électronique étudiée. Cette approche a l'avantage d'être *a priori* et d'avoir un temps de construction du modèle réduit faible car le nombre de DDL sur lesquels nous extrayons les modes propres est faible. Dans l'exemple étudié, les résultats sont probants avec une précision de l'ordre de 99% et un temps de calcul divisé par plus de 10 (cf. Tableau 3.2). Cette technique est très performante en Thermique linéaire, il reste à présent à adapter cette approche de sélection par un critère énergétique couplée à une extraction de modes de composants pour des cas non-linéaires lorsque cela est nécessaire.

Dans le Chapitre 4 nous avons pu démontrer qu'il est possible de construire un modèle réduit par projection modale. Cette base est obtenue à l'aide d'une méthode SVD sur un snapshot de potentiels vecteurs. Cette approche fournit de bons résultats sur notre cas d'étude (une MRV 6/4). Cependant, cette technique étant *a posteriori*, elle a l'inconvénient d'être assez consommatrice en temps de calculs préalables pour obtenir cette base de snapshots. C'est pourquoi nous avons proposé une méthode permettant de construire cette base en sélectionnant judicieusement les points de calculs sur lesquels sont construits ces snapshots (position du rotor et intensité d'alimentation). Ainsi, uniquement à partir de quelques échantillons il est possible de reconstruire la totalité de la cartographie de couple du moteur électrique étudié. Une perspective intéressante serait de venir tester les apports de la PGD introduite par Nouy dans [41] sur notre cas d'étude et d'ensuite pouvoir étendre ses approches à d'autres topologies de machines (synchrone, asynchrone, etc...).
Dans un deuxième temps, nous avons présenté une approche permettant de construire un modèle réduit Électromagnétique d'une machine électrique en travaillant directement sur le couple pour le projeter sur une base de fonctions harmoniques. Comme nous avons pu le voir, cette approche est très efficace. Elle permet d'obtenir un modèle réduit produisant de bons résultats et cela quelle que soit la position angulaire du rotor θ ou l'intensité appliquée à la machine I. Cependant cette approche a tout de même l'inconvénient de nécessiter plusieurs calculs off-line pour construire la cartographie de couple. C'est pourquoi, quelques pistes restent encore à tester afin d'améliorer l'approche proposée dans ce Chapitre. Nous pensons par exemple qu'il serait in-

téressant de travailler directement à partir du potentiel vecteur A et non du couple $C(\theta, I)$. Cela permettrait de coupler directement le modèle réduit à un modèle vibro-acoustique de la machine.

En effet, la conception de systèmes complexes requiert de plus en plus la compréhension des phénomènes couplés. Pour cela, un appel à divers étapes de simulations multi-physiques est nécessaire. Le couplage entre les différents domaines de la Physique peut s'effectuer :

- soit par un **couplage faible** : les résultats d'un solveur mono-physique alimentent les entrées d'un autre solveur. Les différents domaines de la Physique sont donc traités de façon séquentielle. Une illustration est donnée par Gendre [71](cf Figure 5.12) avec comme cas d'application la simulation du comportement thermo-mécanique d'une aube de turbine.

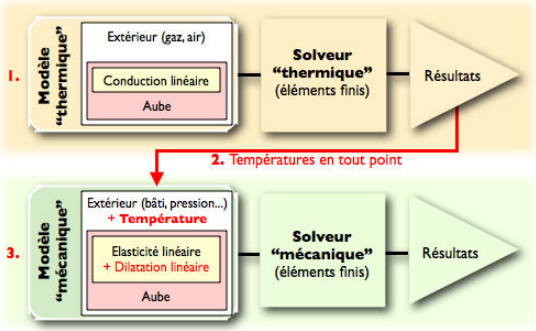


Figure 5.12 – Simulation thermo-mécanique d'une aube de turbine couplée faiblement [71]

- soit par un **couplage fort** : les différents domaines de la Physique sont couplés directement par les équations et sont alors résolus simultanément. Une autre illustration est donnée par Gendre (cf Figure 5.13) avec comme cas d'application la simulation fluide-structure des vibrations d'une aile d'avion.

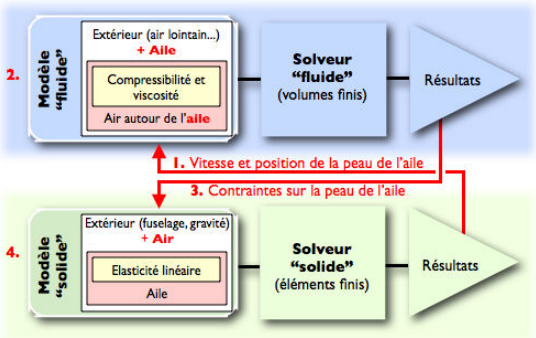


Figure 5.13 – Simulation par couplage fort fluide-structure des vibrations d'une aile d'avion [71]

Bien souvent, l'appel à un couplage fort n'est pas nécessaire car les constantes de temps associées à chacun des domaines de la Physique sont totalement disjoints. C'est par exemple le cas de la Thermique et de l'Electromagnétisme qui ont respectivement des constantes de temps de l'ordre de la seconde pour le premier et de la milliseconde pour le second.

Finalement nous avons vu dans le Chapitre 5 que l'utilisation des modèles réduits dans le secteur industriel permet l'étude de systèmes de plus en plus complexes. L'exemple de la chaîne de traction d'un véhicule électrique traité tout le long de ce document illustre bien cette complexité. En effet, cette chaîne de traction se compose de plusieurs organes, eux-mêmes composés de sous-systèmes. Dans le contexte économique/environnemental actuel, il est nécessaire que cette chaîne de traction soit optimisée au regard de critères de performance, de coût et d'autonomie. Le recours à la simulation numérique et aux techniques de réduction de modèles aide à accomplir cette optimisation.

Annexe A

Illustration de la saturation magnétique du matériau

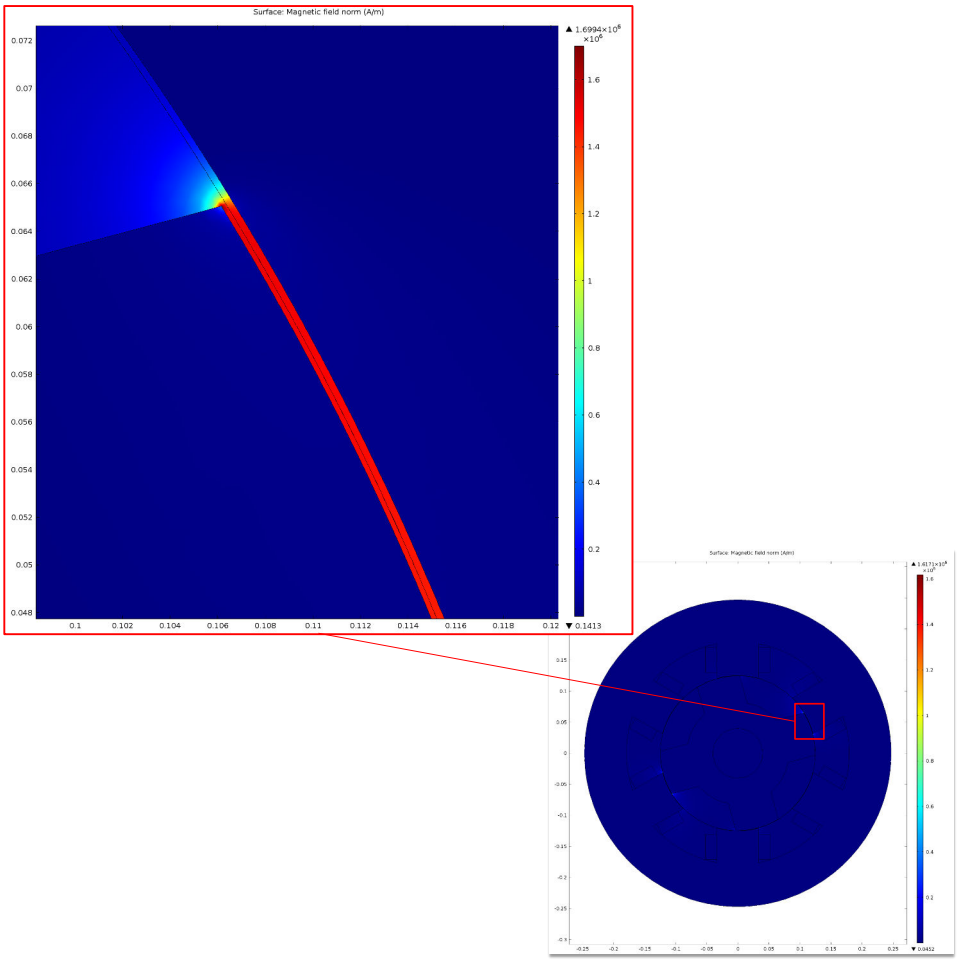


Figure A.1 – Illustration de la saturation magnétique pour une alimentation de 50A. (localement on obtient $max(H) = 1,710^6 A/m$)

Annexe B

Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour différentes intensités

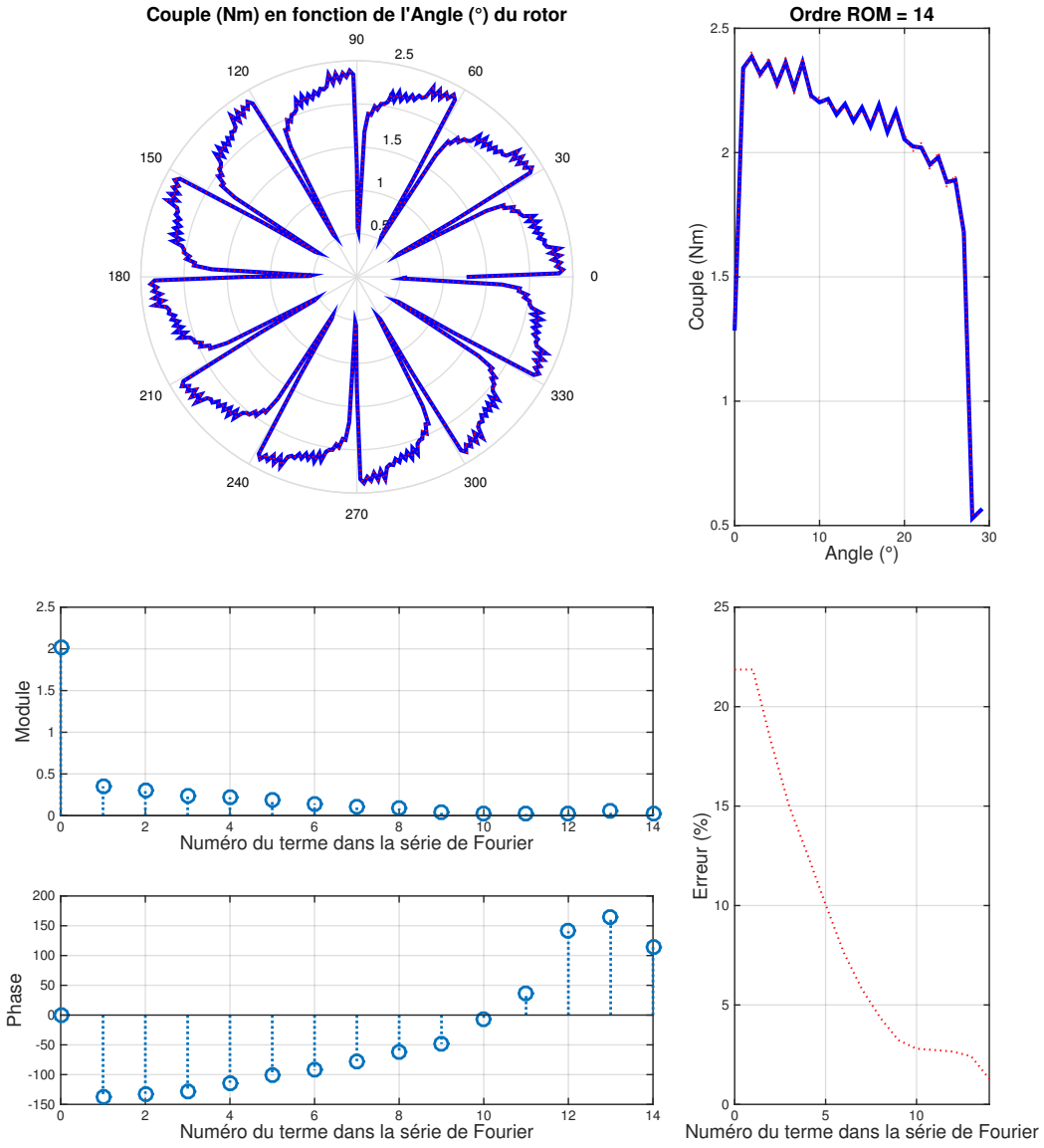


Figure B.1 – Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour $I = 6.66A$ (Utiliser les boutons de contrôle pour visualiser l'influence de l'ordre du modèle sur l'erreur commise)

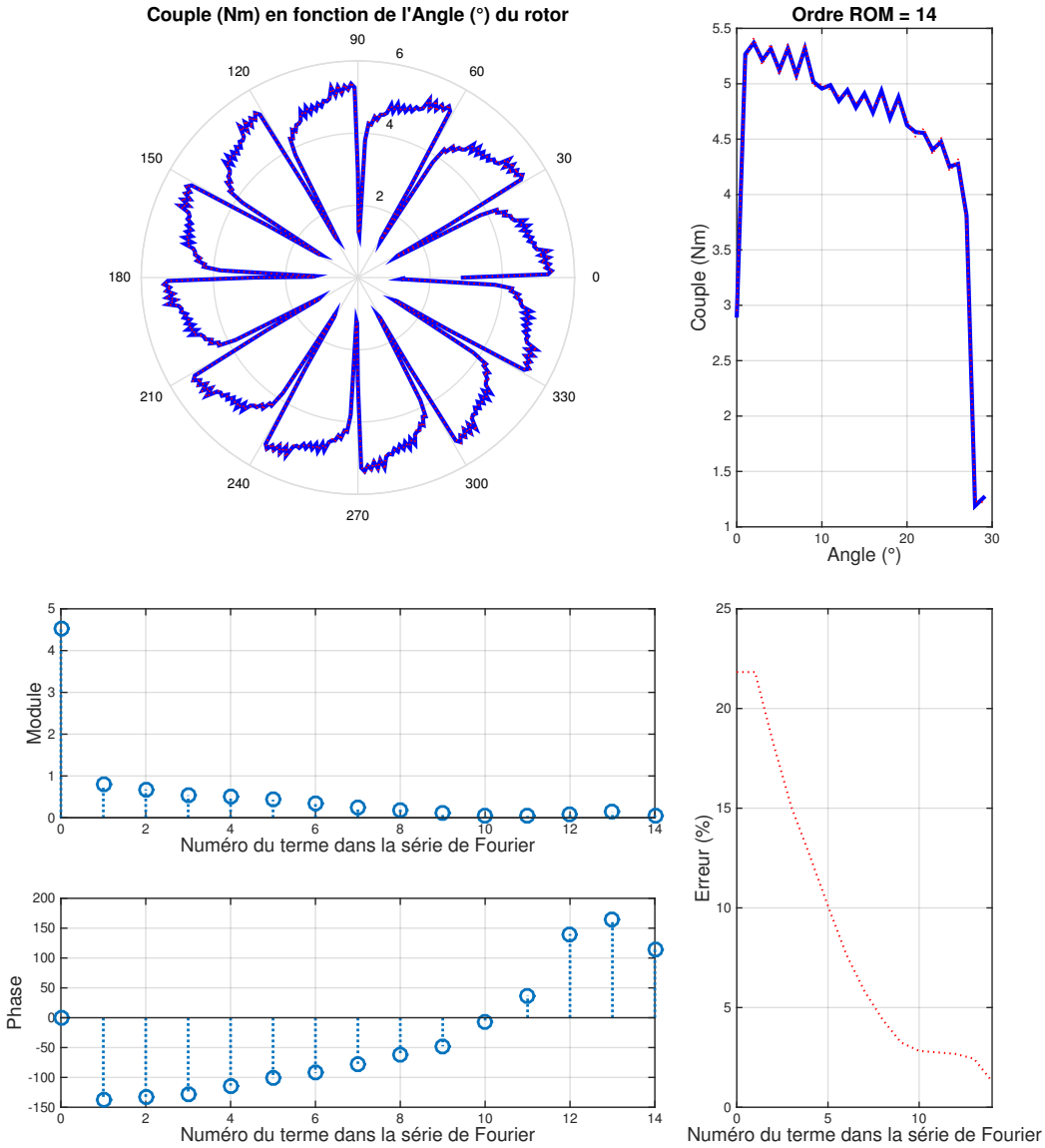


Figure B.2 – Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour $I = 10A$ (Utiliser les boutons de contrôle pour visualiser l'influence de l'ordre du modèle sur l'erreur commise)

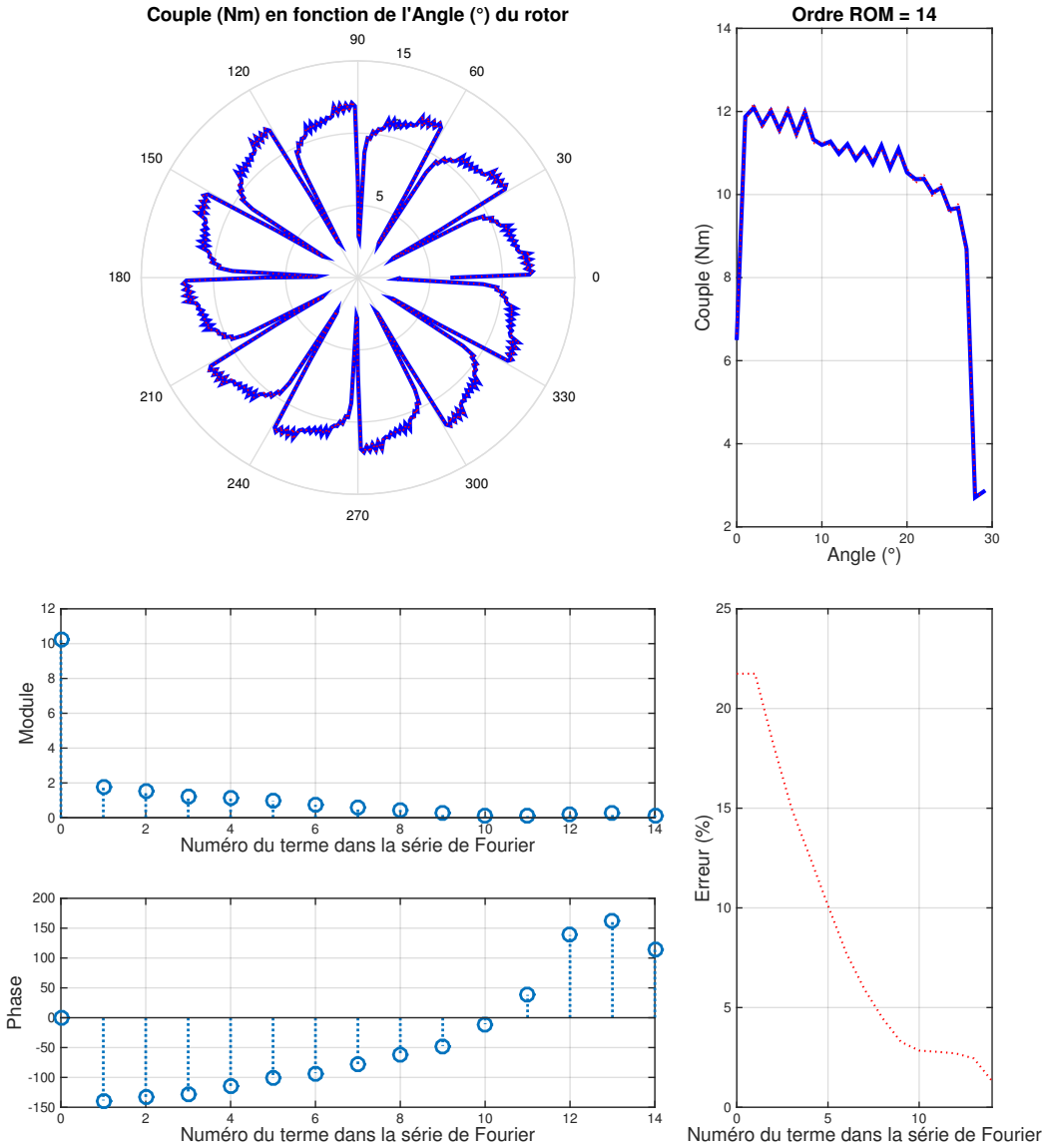


Figure B.3 – Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour $I = 15A$ (Utiliser les boutons de contrôle pour visualiser l'influence de l'ordre du modèle sur l'erreur commise)

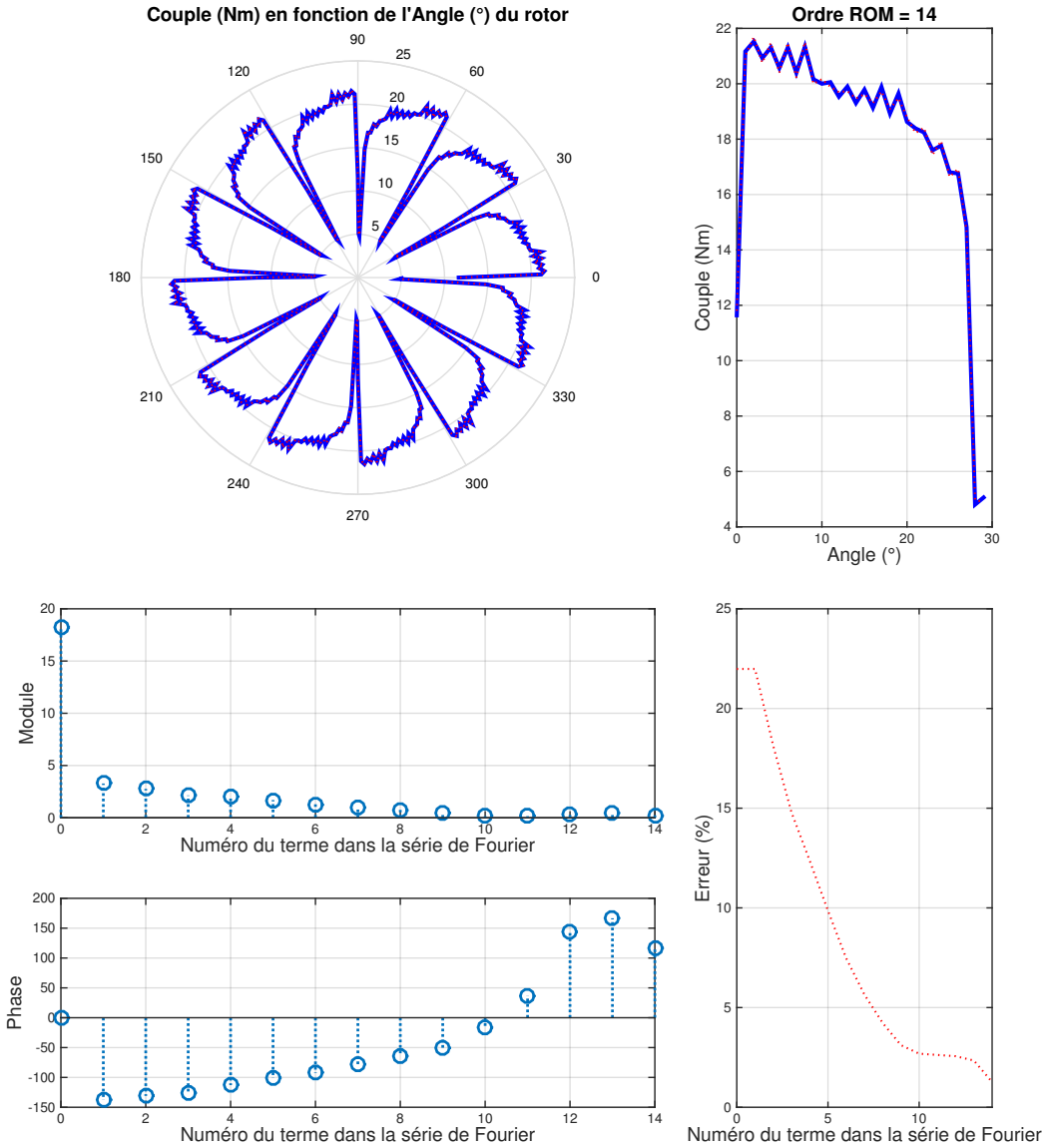


Figure B.4 – Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour $I = 20A$ (Utiliser les boutons de contrôle pour visualiser l'influence de l'ordre du modèle sur l'erreur commise)

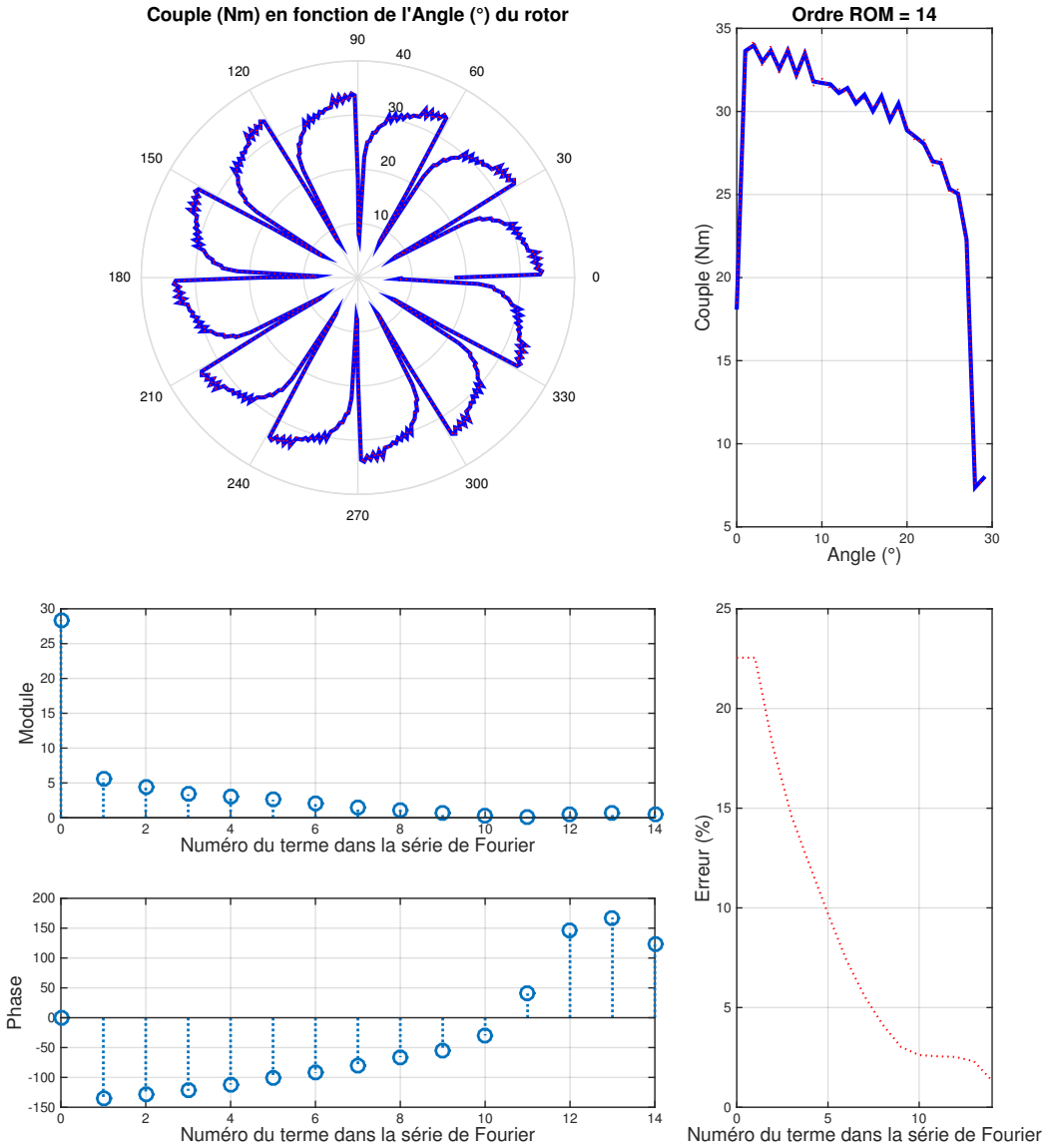


Figure B.5 – Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour $I = 25A$ (Utiliser les boutons de contrôle pour visualiser l'influence de l'ordre du modèle sur l'erreur commise)

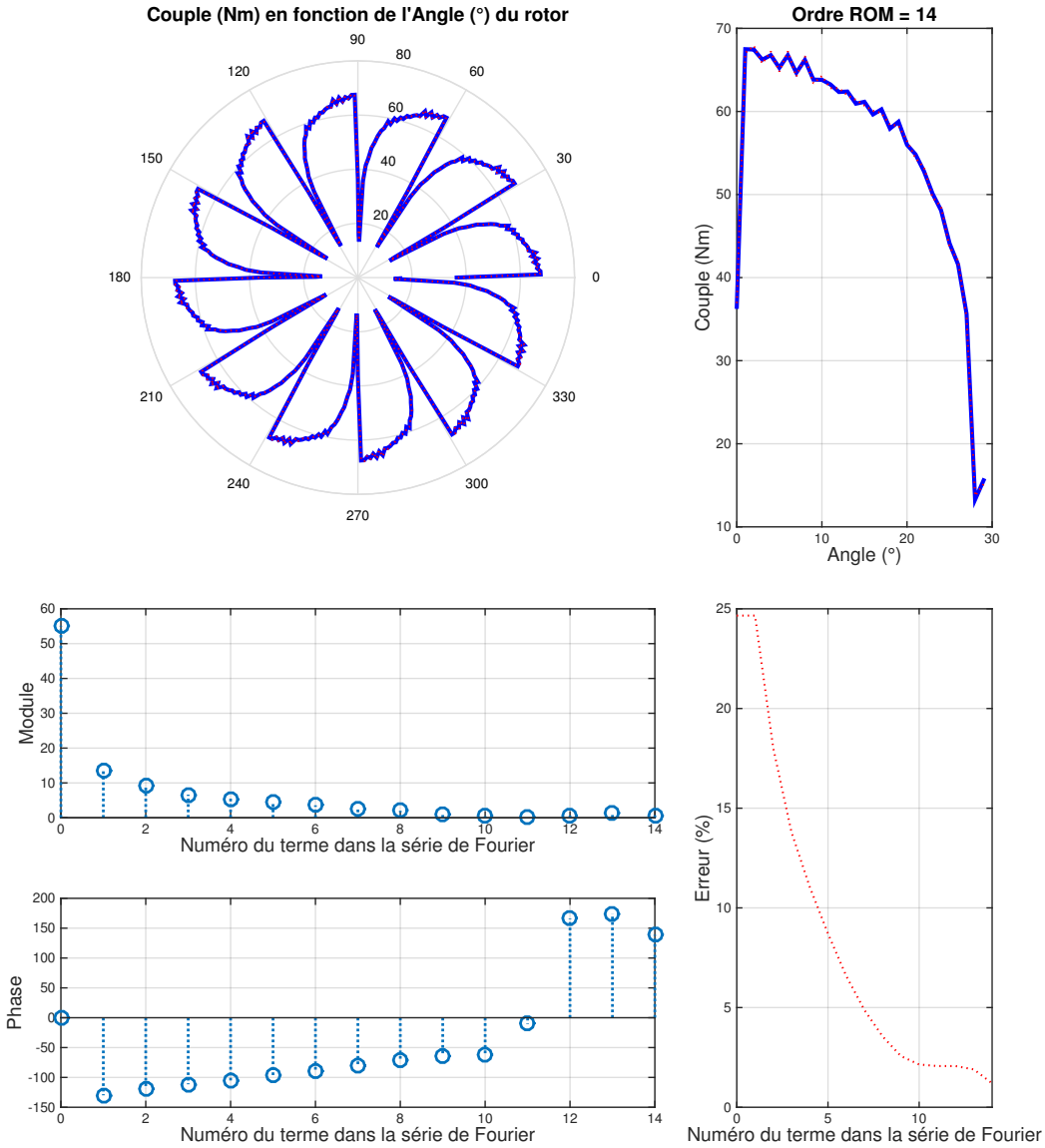


Figure B.6 – Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour $I = 35A$ (Utiliser les boutons de contrôle pour visualiser l'influence de l'ordre du modèle sur l'erreur commise)

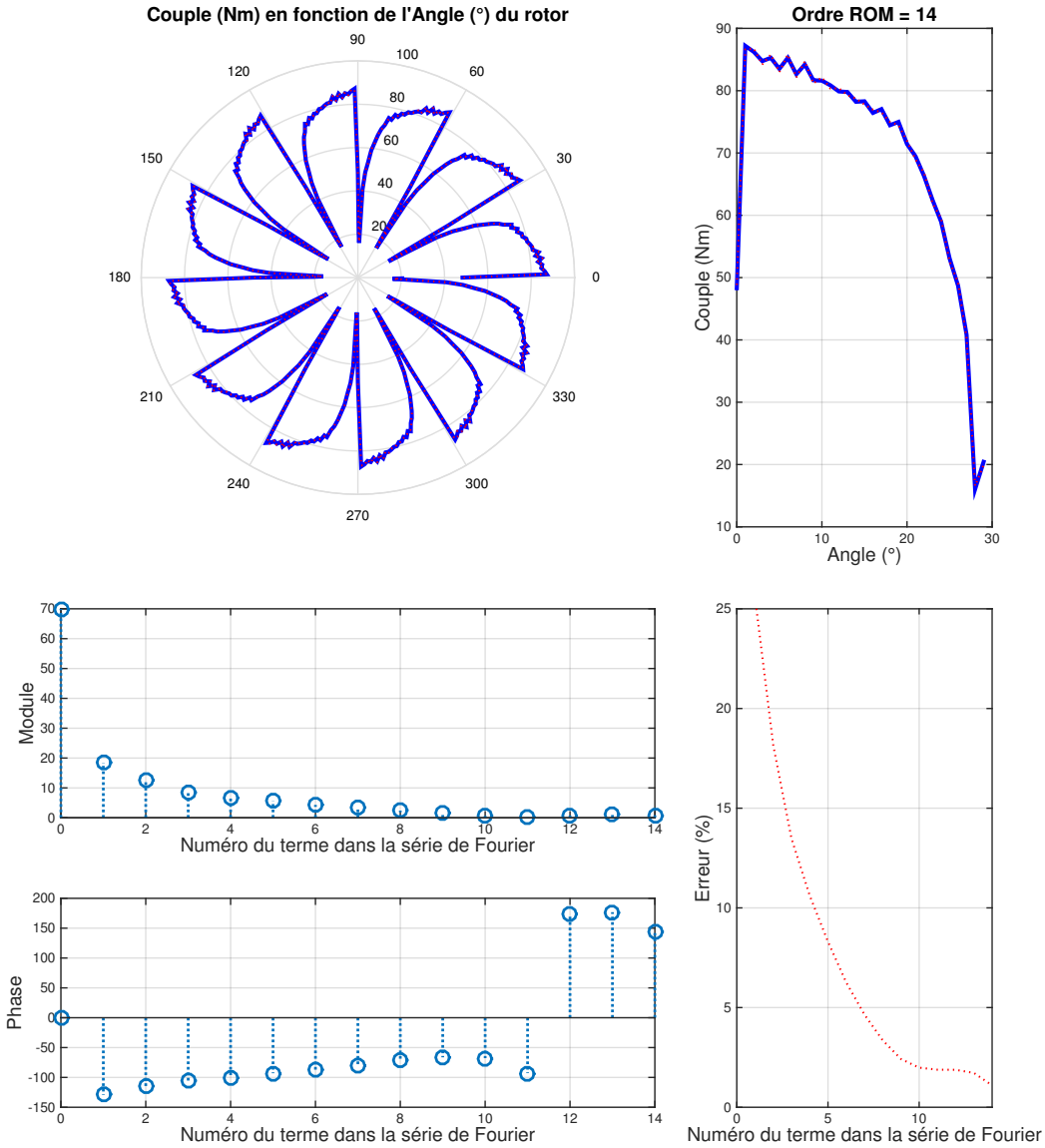


Figure B.7 – Reconstruction de la cartographie angulaire de couple sur une base harmonique pour $I = 40A$ (Utiliser les boutons de contrôle pour visualiser l'influence de l'ordre du modèle sur l'erreur commise)

Bibliographie générale

[1] A.M. Bianchi, Y. Fautrelle, and J. Etay. *Transferts thermiques.* Collection de l'Agence universitaire de la Francophonie. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.

[2] P. Roux. Cours de thermique, 2006. `http://philippe.roux.7.perso.neuf.fr/Resources/Cours%20thermique.pdf`, consulté le 30/04/2012.

[3] Robert C Weast, Melvin J Astle, and William H Beyer. *CRC handbook of chemistry and physics*, volume 69. CRC press Boca Raton, FL, 1988.

[4] Wikipedia. Théorème de flux-divergence. `http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_flux-divergence/`, consulté le 13/11/2012.

[5] G Dhatt, G Touzot, and E Lefrançois. *Méthode des éléments finis.* Hermès - Lavoisier, 2005.

[6] Jian-Ming Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics.* Wiley, 2002.

[7] G. Meunier. *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling.* Wiley, 2010.

[8] M. Jufer. *Traité d'électricité : électromécanique.* Presses Polytechniques Romandes, 1995.

[9] J-C Sabonnadiere and J-L Coulomb. Calcul des champs électromagnétiques, 1988.

[10] O. Barre. *Contribution à l'étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale.* PhD thesis, 2003.

[11] KJ Meessen, JJH Paulides, and EA Lomonova. Force calculations in 3-d cylindrical structures using fourier analysis and the maxwell stress tensor. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 49(1) :536–545, 2013.

[12] K. Carlberg, C. Bou-Mosleh, and C. Farhat. Efficient non-linear model reduction via a least-squares petrov–galerkin projection and compressive tensor approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(2) :155–181, 2011.

[13] D. Amsallem and C. Farhat. Cme 345 : Model reduction. University Lecture - Stanford University, 2011.

[14] E. Balmes. *Modeles experimentaux complets et modeles analytiques reduits en dynamique des structures.* Hdr, Université PARIS VI, 1997.

[15] K.J. Bathe. *Finite element procedures.* Prentice Hall, 1996.

[16] B. Flament. *Synthèse modale : une méthode de sous-structuration dynamique pour la modélisation de systèmes thermiques linéaires.* PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 1993.

[17] P.O. Laffay. *Sous structuration de systemes thermiques par modes de branche.* PhD thesis, Université d'Evry Val d'Essonne, 2008.

[18] S. A. Marshall. An approximate method for reducing the order of a linear system. *International Journal of Control*, 10 :642–643, 1966.

[19] L. Litz. Order reduction of linear state space models via optimal approximation of the nondominant modes. *North'Holland Publishing Company Large Scale system 2*, pages 171–184, 1981.

[20] RJ. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3(2) :380, 1965.

[21] R. Craig and M.C.C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA*, 6(7) :1313–1319, jully 1968.

[22] M.I. Friswell, S.D. Garvey, and J.E.T. Penny. Model reduction using dynamic and iterated irs techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 186(2) :311–323, 1995.

[23] D. Rixen. A dual craig–bampton method for dynamic substructuring. *Journal of Computational and applied mathematics*, 168(1) :383–391, 2004.

[24] M. Mignolet, C. Soize, and J. Avalos. Nonparametric stochastic modeling of structures with uncertain boundary conditions/coupling between substructures. *AIAA Journal*, pages 1–13, 2013.

[25] J.T. Spanos and W.S. Tsuha. Selection of component modes for flexible multibody simulation. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 14(2) :278–286, 1991.

[26] P. Nachtergaele, D. Rixen, and AM. Steenhoek. Efficient weakly coupled projection basis for the reduction of thermo-mechanical models. *Journal of computational and applied mathematics*, 234(7) :2272–2278, 2010.

[27] A. Kropp and D. Heiserer. Efficient broadband vibro-acoustic analysis of passenger car bodies using an fe-based component mode synthesis approach. *Journal of Computational Acoustics*, 11(02) :139–157, 2003.

[28] G. Vermot des Roches, JP. Bianchi, E. Balmes, R. Lemaire, and T. Pasquet. Using component modes in a system design process. In Tom Proulx, editor, *Structural Dynamics, Volume 3*, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, pages 617–625. Springer New York, 2011.

[29] F. Renaud. *Etude de l'incidence des comportements dissipatifs dans les instabilités vibratoires des systèmes de freinage.* PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2011.

[30] Adrien Bobillot. *Méthodes de réduction pour le recalage. Application au cas d'Ariane 5.* PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2002.

[31] E. Liberge. *Réduction de modèles par POD'Galerkin pour les problèmes d'intéraction fluide structure.* PhD thesis, Université de La Rochelle, 2008.

[32] O.F. Balima. *Réduction de modèle non linéaire par identification modale : application en thermique et comparaison avec la méthode POD Galerkine.* PhD thesis, ENSMA Poitiers, 2006.

[33] P. Astrid. *Reduction of Process Simulation Models : a proper orthogonal decomposition approach.* PhD thesis, 2004.

[34] M. Bergmann. *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal : application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2004.

[35] J. A. Atwell. *Proper Orthogonal Decomposition for Reduced Order Control of Partial Differential Equations.* PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, 2000.

[36] F. Boumediene. *Méthode Asymptotique Numérique et Techniques de Réduction de Modèles : Application aux Vibrations non linéaires de plaques minces amorties.* PhD thesis, Université Européenne de Bretagne, 2011.

[37] B. Podvin. Introduction à la décomposition orthogonale aux valeurs propres ou p.o.d. November 2001.

[38] A.C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems.* Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[39] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45 :561–571, October 1987.

[40] P. Ladevèze and J.G. Simmonds. *Nonlinear computational structural mechanics : new approaches and non-incremental methods of calculation.* Mechanical engineering series. Springer, 1999.

[41] A. Nouy. A priori model reduction through pgd for solving time dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1603'1626, April 2010.

[42] A. Dumon. *Reduction dimensionnelle de type PGD pour la resolution des ecoulements incompressibles.* PhD thesis, Universite de La Rochelle, 2011.

[43] A. Plouin and E. Balmes. Pseudo-modal representations of large models with viscoelastic behavior. In *Society for Experimental Mechanics, Inc, 16 th International Modal Analysis Conference.*, volume 2, pages 1440–1446, 1998.

[44] F. Bordeu, F. Chinesta, L. Adrien, E. Cueto, S. Niroomandi, et al. Reduction de modele par pgd applique la simulation en temps reel de solide deformables. In *10e colloque national en calcul des structures*, 2011.

[45] F. Chinesta and E. Cueto. Pgd based dynamic data driven application systems. In *PGD-Based Modeling of Materials, Structures and Processes*, pages 149–169. Springer, 2014.

[46] P. Ladevèze. Pgd in linear and nonlinear computational solid mechanics. In *Separated Representations and PGD-Based Model Reduction*, pages 91–152. Springer, 2014.

[47] D. Amsallem, J. Cortial, K. Carlberg, and C. Farhat. A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(9) :1241–1258, 2009.

[48] F. Abid, G. Chevallier, JL. Blanchard, JL. Dion, and N. Dauchez. System identification using kalman filters. IMAC XXXI, 2013.

[49] D. Ryckelynck. Réduction a priori de modèles thermomécaniques. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences-Mécanique*, Vol 330, Issue 7 :pp. 499–505, 2002.

[50] D. Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1) :346 – 366, 2005.

[51] D. Ammar, Aand Ryckelynck, F. Chinesta, and R. Keunings. On the Reduction of Kinetic Theory Models Related to Finitely Extensible Dumbbells. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 134 :136–147, 2006.

[52] N. Verdon, C. Allery, D. Ryckelynck, and A. Hamdouni. An adaptive ROM approach for solving transfer equations. *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, n.a.(n.a.) :n.a., 2006.

[53] D. Ryckelynck and D. Benziane. Multi-level a priori hyper reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 199(17'20) :1134'1142, 2010.

[54] P.O. Laffay, O. Quemener, A. Neveu, et al. Optimisation de couplage de modèles réduits par fonctionnelle de pénalisation de flux : application à un composant. *13 èmes Journées Internationales de Thermique*, 2007.

[55] E. Davison. A method for simplifying linear dynamic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 11(1) :93–101, 1966.

[56] L. Ran, S. Gokani, J. Clare, K.J. Bradley, and C. Christopoulos. Conducted electromagnetic emissions in induction motor drive systems. i. time domain analysis and identification of dominant modes. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, 13(4) :757–767, 1998.

[57] J. Rommes and N. Martins. Computing transfer function dominant poles of large-scale second-order dynamical systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(4) :2137–2157, 2008.

[58] Patrick Ragot. *Modélisation analytique multiphysique pour la conception optimale de moteurs synchrones à aimants permanents.* PhD thesis, STI, Lausanne, 2008.

[59] L.E. Radaorozandry. *Conception et optimisation des machines synchrones avec des modèles analytiques en tenant compte de la saturation magnétique.* Université Laval, 2007.

[60] Hussein Dogan. *Permanent Magnet Synchronous Motor design methodology for electrical vehicle with rapid charger on board.* Theses, Université de Grenoble, July 2013.

[61] Christophe Espanet. *Modeling and optimal design of brushless motors with outer rotor - Application to the in-wheel motor.* Theses, Université de Franche-Comté, January 1999.

[62] Aurélie Fasquelle. *Coupled electromagnetic, acoustic and thermal-flow modelling of an induction motor of railway traction.* Theses, Ecole Centrale de Lille, November 2007.

[63] Bertrand Du Peloux De Saint Romain. *Modélisation des actionneurs électromagnétiques par réseaux de réluctances : création d'un outil métier dédié au prédimensionnement par optimisation.* Theses, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, October 2006.

[64] Boumedyen Nedjar. *Modeling method based on magnetic equivalent circuit for the optimization of single and double excitation synchronous machines.* Theses, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, December 2011.

[65] Frédéric Gillon. *Modélisation et Optimisation par plans d'expériences d'un moteur à commutations électroniques.* Theses, Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, December 1997.

[66] Stéphane VIVIER. *Optimisation strategies using the Experimental Design Method and Application to electrotechnical devices modelled by finite elements.* Theses, Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, July 2002.

[67] Dan Ilea. *Optimal design of switched reluctance motors for light electric traction applications.* Theses, Ecole Centrale de Lille ; Universitatea tehnica (Cluj-Napoca, Roumanie), October 2011.

[68] Michael Kirschneck, Daniel Rixen, and Henk Polinder. Model reduction methods for magnetic fields based on modal analysis. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 50(11) :1–4, 2014.

[69] T Henneron and S Clénet. Model order reduction applied to the numerical study of electrical motor based on pod method taking into account rotation movement. *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields*, 27(3) :485–494, 2014.

[70] Noëlle Janiaud. *Modélisation du système de puissance du véhicule électrique en régime transitoire en vue de l'optimisation de l'autonomie, des performances et des coûts associés.* PhD thesis, Supélec, 2011.

[71] L. Gendre and D. Néron. La simulation multi-physiques. `http://www.si.ens-cachan.fr/accueil_V2.php?page=affiche_ressource&id=119`, 2011. visité le 20 juin 2013.