



HAL
open science

Théorie de l'archet

Edmond Charron

► **To cite this version:**

Edmond Charron. Théorie de l'archet. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paul Sabatier, 1916. Français. NNT: . tel-01276114

HAL Id: tel-01276114

<https://theses.hal.science/tel-01276114>

Submitted on 18 Feb 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ORDRE :

29.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR

Edmond CHARRON,

Licencié ès Sciences,

Professeur à l'École Sainte-Geneviève « ancienne "Rue des Postes" », à Versailles.

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DE L'ARCHET.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le décembre 1916 devant la Commission d'Examen.

MM. BOUASSE, *Président,*
LAMOTTE, } *Examineurs.*
GIRAN, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

PERSONNEL.

MM.

Administration.....	{ PAUL SABATIER.....	Doyen.
	{ CAMICHEL.....	Assesseur.
Honorariat.....	{ BAILLAUD.....	Doyen honoraire, Directeur de l'Observatoire de Paris.
	{ LECLERC DU SABLON.	Doyen honoraire.
	{ SABATIER.....	Chimie.
	{ MOQUIN-TANDON.....	Zoologie.
	{ LECLERC DU SABLON.	Botanique.
	{ COSSERAT.....	Astronomie.
	{ BOUASSE.....	Physique.
	{ PRUNET.....	Botanique agricole.
	{ CARALP.....	Minéralogie.
Professeurs.....	{ FABRE.....	Chimie agricole et industrielle.
	{ CAMICHEL.....	Électricité industrielle.
	{ GIRAN.....	Chimie.
	{ BUHL.....	Mathématiques générales.
	{ LÉCAILLON.....	Histoire naturelle.
	{ LAMOTTE.....	Physique.
	{ LATTÈS.....	Calcul différentiel et intégral.
	{ JACOB.....	Géologie.
Professeurs adjoints.	{ JAMMES.....	Zoologie.
	{ MAILHE.....	Chimie.
Chargé de cours.....	ROY.....	Mécanique rationnelle et appliquée.
Chargé de cours complémentaire.....	LALA.....	Physique.
Maitres de conférences.....	{ SOURISSEAU.....	Mécanique agricole.
	{ JOUANE.....	Électrotechnique pratique.
Maitre de conférences adjoint.....	PÉE-LABY.....	Botanique.
Secrétariat.....	J. CHAUDRON.....	Secrétaire.

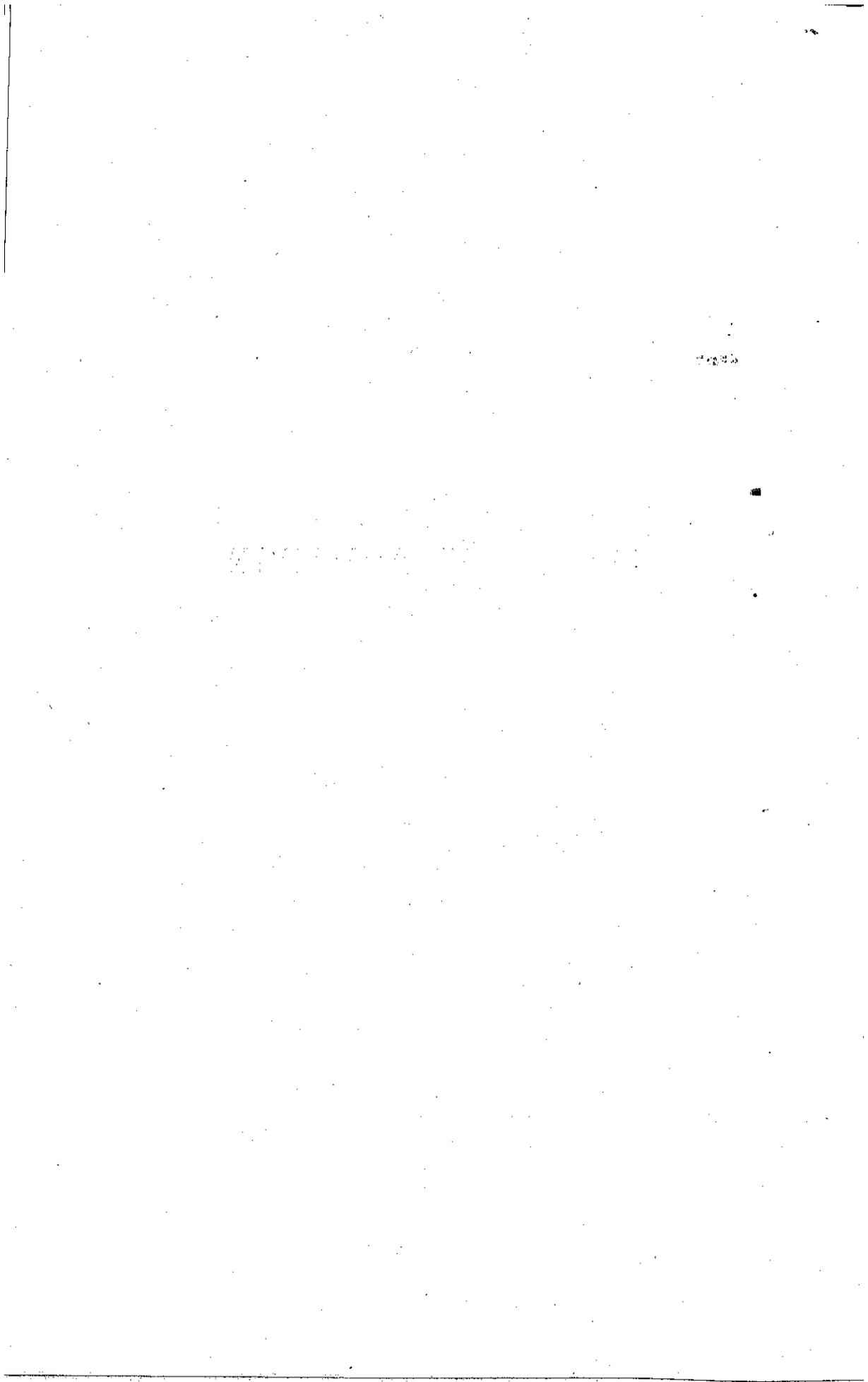


A

MONSIEUR H. BOUASSE,

Hommage respectueux.

E. CHARRON.



PREMIÈRE THÈSE.

THÉORIE DE L'ARCHET.

EXPOSÉ ET HISTORIQUE.

Bon nombre de mouvements vibratoires, et non des moins familiers, sont entretenus par des procédés dont le mécanisme et la théorie sont fort mal connus. C'est ainsi que l'on n'explique guère comment, dans un tuyau sonore, le courant d'air fournit l'énergie nécessaire à l'entretien du mouvement vibratoire de l'anche, comment, dans les embouchures de flûte, le choc du jet gazeux sur un biseau produit le mélange de sons complexes dont le tuyau renforcera quelques-uns, comment le frottement de l'archet colophané sur une corde ou du drap mouillé sur une tige les fait entrer en vibration. Je pourrais citer d'autres cas qui sont plutôt du domaine du laboratoire, par exemple, la production du son dans un tuyau par une flamme ou par une toile métallique chauffée.

Dans le travail dont j'expose ici le résumé, j'ai étudié l'entretien des mouvements vibratoires par frottement au moyen d'un archet colophané et je me suis efforcé d'en préciser le mécanisme et la théorie aussi complètement que possible.

C.

Peu de recherches sérieuses ont déjà été faites sur ce sujet. La plus ancienne explication qui nous soit parvenue et qu'il est à peine utile de réfuter doit être celle qu'a hasardée l'un des Bernoulli et suivant laquelle l'archet colophané agirait comme une scie dont les fines dents donneraient à la corde une série d'impulsions. Or une scie, quelle que soit sa forme, ou un archet construit sur ce principe, ne peut pas entretenir, sinon très mal, les vibrations d'une corde. De plus, remarquons rapidement quelques conséquences de cette hypothèse, toutes en contradiction avec l'expérience :

1° Si chaque dent produisait une vibration, la hauteur du son augmenterait en même temps que la vitesse, comme il arrive avec la roue dentée de Savart ou le phonographe.

2° Il semble que le mouvement devrait être ou celui d'une corde frappée ou celui d'une corde pincée. (Il est tout différent.)

3° Le point de la corde pris sous l'archet aurait forcément même vitesse que celui-ci lorsque les deux mouvements sont de même sens. (Il peut en être autrement.)

En 1840, Duhamel a fait paraître quelques travaux sur les vibrations des cordes au moyen de l'archet ⁽¹⁾, mais il ne semble pas avoir étudié sérieusement la question de l'entretien. Il me suffit, d'ailleurs, de noter qu'il suppose indépendant de la vitesse relative le frottement entre l'archet et la corde, et qu'il arrive à conclure que la vitesse de l'archet ne peut dépasser celle de la corde sans que les vibrations s'arrêtent, toutes choses en opposition formelle avec mes expériences.

Quelques années plus tard, J. Antoine ⁽²⁾ a remarqué

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, janvier-juin 1840.

⁽²⁾ *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XXVII, 1849.

que les fils de l'archet en action vibraient transversalement dans le plan perpendiculaire à la corde. Sans autre preuve, il a conclu que celle-ci était en contact intermittent et non permanent avec les crins et qu'elle recevait d'eux des impulsions périodiques entre lesquelles elle vibrait en liberté.

A cette explication je puis opposer :

1^o Que dans toutes mes expériences le vibreur ne perdait jamais contact avec le bord du disque tournant qui me servait d'archet. En supposant donc qu'il en soit parfois autrement, ce qui n'est pas prouvé, c'est un effet et non une cause du mouvement de la corde : les fils de l'archet forment un angle obtus dont le sommet s'appuie sur la corde et participe à son mouvement rapide; il est donc tout naturel que les côtés de cet angle entrent aussi en vibration;

2^o Que les impulsions de l'archet comparables soit à l'action des doigts dans la mandoline, soit au choc d'un marteau léger, devraient communiquer à la corde les mouvements correspondants (cordes pincées ou frappées). Entre deux impulsions, les vibrations libres se rapprocheraient du mouvement sinusoïdal. Or, le mouvement réel, parfaitement caractérisé, est très différent de tout ceci;

3^o Que chaque impulsion de l'archet devrait produire, en général, un changement de phase dans le mouvement vibratoire, ce qui n'a pas lieu sauf, peut-être, quand l'archet d'un violon, mal conduit, cause un raclement désagréable.

Nous ne serons donc pas étonnés de voir Helmholtz, qui n'eût pas manqué de connaître les bons travaux relatifs à cette question, écrire dans sa *théorie physiologique de la musique* terminée vers 1870 : « Le mouvement des cordes de violon ne peut être traité par l'analyse mathé-

matique parce qu'on ignore de quelle manière agit l'archet, mais j'ai déterminé, dans la mesure du possible, le mouvement de chaque point et j'en ai déduit la forme de la corde à chaque instant. »

Quelques auteurs ont pourtant entrevu la vraie cause de l'entretien qui réside dans la variation du frottement avec la vitesse relative ⁽¹⁾, mais ils ont émis cette idée comme une simple supposition et sans preuve à l'appui.

L'exposé de mon travail est divisé en deux Parties.

La première a pour objet le mécanisme et la théorie de l'entretien des oscillations lentes (période égale à 1 seconde environ) d'un disque métallique formant oscillateur, au moyen d'un archet tournant.

La seconde est consacrée aux vibrations des cordes entretenues par un procédé semblable.

Suit une note dans laquelle j'examine très rapidement le cas analogue des vibrations longitudinales produites dans les tiges par frottement.

Enfin, je termine en résumant brièvement mes conclusions.

J'ai fait toutes les expériences au laboratoire de l'École de Sorèze (Tarn) et j'y ai construit moi-même tous les appareils.

J'ai voulu dédier cette thèse à M. Bouasse en témoignage de reconnaissance pour le profit que j'espère avoir retiré de ses conseils si éclairés et de ses critiques non moins utiles, puisque, en excluant impitoyablement toute hypothèse hasardée, tout raisonnement superficiel, toute explication trouble, elles forcent à la précision, à la logique, à la clarté.

Je dois aussi, en partie, à l'enseignement de M. Couette, mon ancien professeur à la Faculté libre d'Angers, ce qu'il y a de bon dans ce travail et je l'en remercie vive-

(1) *Mécanique physique* de Bouasse, § 121.

ment ainsi que mon frère, Fernand Charron, professeur à la même Faculté, qui m'a indiqué le sujet de la présente étude.

PREMIÈRE PARTIE.

OSCILLATIONS LENTES D'UN DISQUE.

PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE I.

Description de mon appareil.

1. L'appareil que j'ai construit pour étudier le mécanisme de l'entretien sur des oscillations lentes est schématiquement représenté figure 1. La partie oscillante est un disque évidé en laiton O (oscillateur) de 37^{cm},50 de circonférence, dont l'axe horizontal, très mobile dans ses tourillons, est prolongé par un fil d'acier F fixé à l'autre extrémité dans une pince.

L'archet tournant A est un second disque en laiton de 19^{cm},75 de circonférence, dont l'axe est parallèle au précédent et au même niveau et dont les tourillons mobiles permettent d'écarter les bords cylindriques de ces deux volants ou de les mettre en contact avec une pression arbitraire.

Afin que cette pression ne varie pas pendant le mouvement, j'ai fait en sorte que le centre de gravité de l'archet tournant fût exactement sur son axe et que celui-ci fût un axe principal d'inertie. De plus, les liaisons des tourillons mobiles sont telles que les variations de frotte-

dû construire un transformateur de vitesse qui se compose essentiellement d'un grand disque métallique plan sur la surface duquel roule un galet à distance variable du centre.

La surface frottante de l'archet est entourée d'un fil verni sur lequel appuie constamment un morceau de colophane.

2. Le mouvement de l'oscillateur peut être enregistré par une méthode optique. A cet effet, son axe porte un cylindre O' sur lequel s'enroulent deux fils fins soutenant une lentille convergente L . Un arc électrique éloigné S envoie, à travers une très petite ouverture circulaire, un faisceau lumineux qui traverse la lentille, se réfléchit sur le miroir plan M effectuant des oscillations tournantes au bout du fil élastique F' et vient converger sur l'écran cylindrique E d'axe F' .

En réalité, la lentille est enchâssée dans une petite planche verticale mince et étroite (non représentée sur la figure) afin que la lumière tombant en dehors ne parvienne pas sur l'écran E . A la partie inférieure de cette planchette est fixée une réglette horizontale portant deux petites masses de plomb. Je puis ainsi faire varier la période des oscillations gênantes de toutes sortes que pourrait prendre cet équipage suspendu à deux fils et éviter que le mouvement de l'oscillateur ne les produise par résonance. Alors le centre optique de la lentille se déplace exactement sur une droite verticale.

La période des oscillations tournantes du miroir M peut être réglée par son fil élastique et son moment d'inertie que l'on fait varier en déplaçant deux masses de plomb H et H' sur une règle horizontale fixée à la partie inférieure.

Lorsqu'on lance ce miroir, on ne peut manquer de produire, outre les oscillations tournantes, des mouvements

nuisibles. Pour amortir ceux-ci, je fais passer le fil de suspension, à sa partie inférieure, à travers une très petite plaque métallique dont les bords reposent, par l'intermédiaire d'un corps visqueux, sur un support fixe.

La distance SL est environ 2^m , la distance ME 1^m ; le déplacement vertical de la lentille peut atteindre 14^{cm} .

Lorsque le miroir M oscille seul, l'image lumineuse trace sur l'écran un arc de circonférence horizontal, et quand, au contraire, la lentille seule se déplace, l'image trace une droite verticale. Enfin, dans le cas général où le miroir et l'oscillateur sont en mouvement, le point lumineux décrit une courbe dans laquelle les ordonnées sont proportionnelles aux déplacements angulaires de l'oscillateur et les abscisses à ceux du miroir. Je puis recevoir et fixer cette courbe sur du papier sensible.

Pour indiquer dans quel sens elle a été tracée, je fais tourner, d'un mouvement uniforme, une roue portant quatre dents égales qui traversent normalement le faisceau lumineux près de S et sont séparées par des intervalles croissants comme les nombres 1, 2, 3. Les interruptions qui en résultent dans la courbe permettent de reconnaître immédiatement son sens.

CHAPITRE II.

Variation de la force de frottement avec la vitesse et la pression.

3. Cet appareil m'a permis de mesurer la force de frottement ou, pour abrégé, le frottement exercé par l'archet tournant sur l'oscillateur dans les conditions suivantes : je donne à l'archet une vitesse et une pression arbitraires, j'amortis les oscillations qui pourraient se produire et je note alors la torsion du fil F .

J'ai d'abord vérifié, par ce moyen, que le frottement

est sensiblement indépendant de la vitesse lorsque l'archet, entouré de fil ou non, n'est pas colophané. Il est d'ailleurs incapable, dans ce cas, d'entretenir les oscillations du balancier.

Au contraire, dès que l'archet est colophané, le frottement devient une fonction rapidement décroissante de la vitesse.

Soient, en général, f sa valeur (fonction de la vitesse) et f_0 sa limite lorsque la vitesse tend vers zéro : c'est ce que Coulomb appelait *frottement au départ*. Dans le voisinage de f_0 , f varie très rapidement, mais cependant il m'a paru qu'il n'y a pas discontinuité.

Au fur et à mesure que l'archet perd sa colophane, f augmente très nettement, pour une même vitesse, mais f_0 ne varie pas d'une façon sensible.

Quels que soient la vitesse et l'état du colophanage, f et f_0 sont proportionnels à la pression.

Dans le Tableau ci-dessous, je cite quelques résultats des nombreuses expériences que j'ai faites à ce sujet. La vitesse de l'archet y est exprimée par le nombre de tours à la minute. Comme sa circonférence mesure $19^{\text{cm}},75$, la plus grande vitesse réalisée, 2710 tours, correspond à 890^{cm} par seconde environ. Le frottement est exprimé en degrés de torsion du fil, torsion que j'ai trouvée proportionnelle au couple dans les conditions de mes expériences. Pour celles que je cite, 160° correspondent à un frottement de 100^{g} , mais j'ai aussi employé des fils plus gros qui m'ont permis de vérifier la proportionnalité entre le frottement et la pression pour de plus grandes valeurs. La pression de l'archet est comptée en grammes.

Vitesse.	Frottement.					
	<i>a.</i>		<i>c.</i>			<i>d.</i> Pression (archet mouillé).
	Pressions.		Pressions.			
	88 ^s .	88 ^s .	88 ^s .	88 ^s × 2.	88 ^s × 3.	88 ^s × 2.
0.....	102	100 98	105	210	»	115
60.....	97	95	»	»	»	112
81.....	89	83 87	90	180	»	95
146.....	82	56 60	82	168	»	84
211.....	74	44	73	146	»	83
275.....	69	38	68	140	»	78
337.....	65	34	65	130	183	75
403.....	64	28 29	63	139	190	70
531.....	61	24 26	60	126	180	68
670.....	58	23 28	60 52	115 118	170 168	65
955.....	50	20 22	50 48	100 94	156 150	56
1540.....	42	17 19	48 40	85 80	120 110	50
2110.....	36	14 17	30 28	65 60	102 88	45
2710.....	26	13 15	23	52	70	44

Chaque valeur du frottement, dans la colonne verticale *a*, a été obtenue en prenant la moyenne dans une dizaine d'expériences. (L'archet n'était pas très bien colophané.)

Dans la colonne *b* (archet bien colophané), on voit souvent plusieurs valeurs du frottement pour une même vitesse et une même pression : elles correspondent à autant de mesures non consécutives entre lesquelles l'état du colophanage a quelque peu varié.

La troisième série *c*, comprenant trois colonnes verticales, a surtout pour objet la relation entre le frottement et la pression. Les deux ou trois valeurs situées sur une même ligne horizontale correspondent à des mesures consécutives pendant lesquelles la surface de l'archet n'a pu se modifier sensiblement.

Le graphique (*fig. 2*) représente la première série par

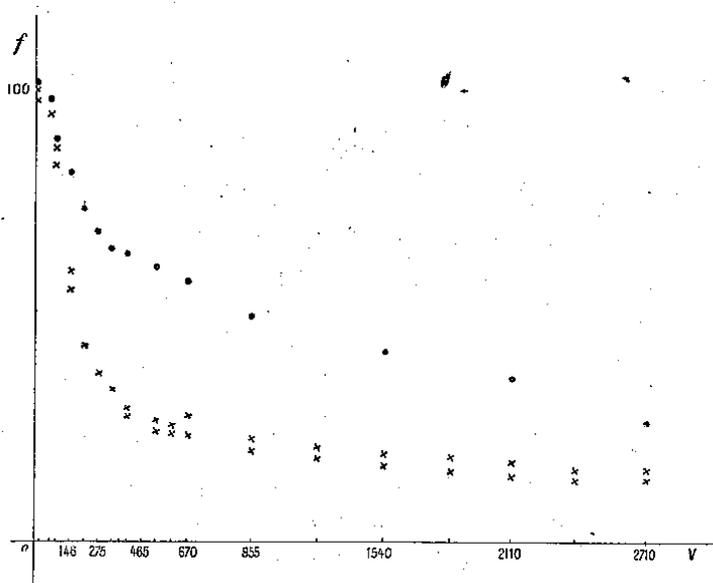


Fig. 2.

des points et la deuxième par des croix. (Toutes les expériences qu'il figure ne sont pas inscrites sur le Tableau.)

4. On sait que les oscillations longitudinales des tiges peuvent s'entretenir par frottement avec un chiffon mouillé. Cela m'a donné l'idée de répéter les expériences précédentes après avoir entouré l'archet d'une double couche de fil à coudre imbibé d'eau acidulée par l'acide sulfurique.

Le frottement suit alors à peu près la même loi que si l'archet était assez mal colophané. La dernière ligne du Tableau se rapporte à ce cas.

Ce frottement ne peut pas tout à fait entretenir les oscillations du balancier, mais celles-ci s'amortissent beaucoup moins vite que si l'archet était sec ou était écarté de l'oscillateur.

Avec l'eau pure, l'alcool, les résultats sont presque identiques; avec le pétrole, l'huile fine, le frottement est à peu près indépendant de la vitesse; avec l'huile épaisse il en est une fonction nettement croissante.

5. *Représentation algébrique.* — Je représente le frottement produit, dans les expériences précédentes, par l'archet colophané ou mouillé d'eau pure ou acidulée, par la fonction

$$(1) \quad f = \frac{f_0 B}{B + V},$$

où V est la vitesse de l'archet.

Je ne prétends pas que f tende vers zéro lorsque V tend vers l'infini, mais on peut voir, par la comparaison des courbes (3) obtenues avec cette formule et des graphiques expérimentaux de la figure 2, que la représentation est suffisante pour V inférieur à 329^{cm} par seconde (1000 tours par minute), valeur que la vitesse relative ne dépasse jamais dans la suite. D'ailleurs, le frottement varie si rapidement avec l'état du colophanage qu'il est impossible de le mesurer avec précision; il serait donc puéril de compliquer la formule sous prétexte d'obtenir une représentation un peu meilleure.

La pression ne figure pas explicitement, mais f_0 doit être considéré comme lui étant proportionnel.

Le terme B caractérise l'état de l'archet : il doit être d'autant plus petit que celui-ci est mieux colophané.

On voit que la formule (1) traduit bien les résultats expérimentaux : f est proportionnel à la pression comme f_0

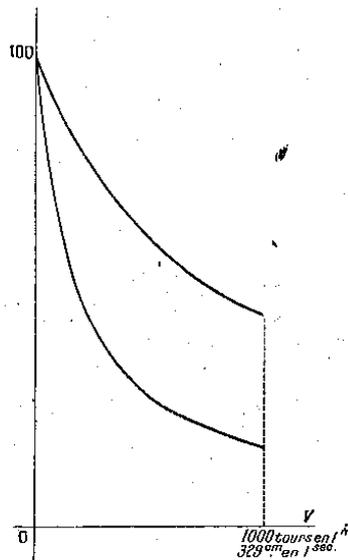


Fig. 3.

et dépend de B (colophanage), tandis que f_0 n'en dépend pas.

Sous une pression de 88^s, en prenant $f_0 = 100^{\circ}$ de torsion, $B = 60$ (archet bien colophané) et en mesurant V en centimètres par seconde, on a

$$(2) \quad f = \frac{6000}{60 + V},$$

ce qui donne le graphique inférieur de la figure 3, et en posant $B = 260$ (archet assez mal colophané), on a

$$f = \frac{26000}{260 + V},$$

ce qui donne l'autre courbe.

CHAPITRE III.

Principes.

6. L'expérience montre que l'archet colophané est capable d'entretenir les oscillations tournantes de l'oscillateur.

L'objet de toute cette première Partie de mon travail est de prouver que ce phénomène peut être complètement expliqué, jusque dans ses détails et dans les cas les plus variés, en appliquant les principes suivants :

1^o Malgré le mouvement, la force de frottement est la même fonction de la vitesse relative des surfaces frottantes que dans les expériences précédentes.

2^o Lorsque cette vitesse relative s'annule, je dis qu'il y a adhérence. Pendant l'adhérence, le frottement peut prendre, dans un sens ou dans l'autre, n'importe quelle valeur comprise entre 0 et f_0 . Cette valeur est déterminée par la condition que l'accélération de l'oscillateur est égale à celle de l'archet (en particulier, si le mouvement est uniforme, il y a équilibre dynamique).

L'adhérence subsiste tant que cette condition peut être remplie.

3^o D'où résulte que, si la vitesse relative de l'oscillateur change brusquement de signe (l'adhérence ne subsistant qu'un temps inappréciable), le frottement varie de $2 f_0$ à cet instant.

CHAPITRE IV.

Notations (*fig. 4*).

7. Supposons que, pendant les oscillations de période T (ou de fréquence $N = \frac{1}{T}$), un point M de l'oscillateur se

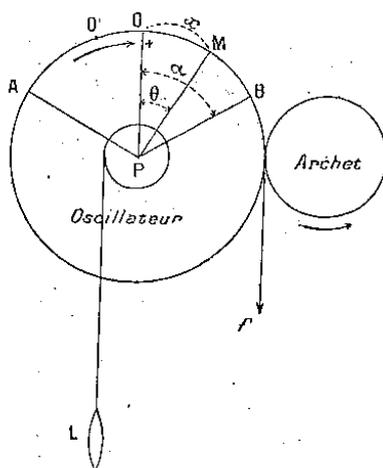


Fig. 4.

déplace entre A et B . Soient O le milieu de l'arc AB , et O' la position d'équilibre du point M sous la seule action du fil élastique; soit enfin f le frottement appliqué à l'oscillateur.

L'arc $OM = x$ est l'élongation linéaire, et l'angle $OPM = \theta$ l'élongation angulaire. De même, l'arc $OB = a$ est l'amplitude linéaire de l'oscillation, et l'angle $OPB = \alpha$ l'amplitude angulaire.

Le sens positif est AB , de sorte que, sur la figure 4, OM et f sont positifs.

J'appelle $v = \frac{dx}{dt}$ la vitesse linéaire de l'oscillateur et V

celle de l'archet, toutes deux exprimées en centimètres par seconde; V est toujours positif, l'archet tournant dans le sens indiqué sur la figure 4.

La vitesse relative est $u = V - v$. On voit que u et f sont toujours de même signe.

Quand le point M va de A en B , l'archet entraîne l'oscillateur (en supposant $v < V$), le travail de f est moteur : c'est l'aller de l'oscillation. Dans le retour BA , l'archet retient l'oscillateur et produit un travail résistant. La lentille monte dans l'aller et descend dans le retour.

J'appelle *amortissement minimum* celui que je n'ai pu éviter et qui est produit par le frottement des axes dans les tourillons, la résistance de l'air, l'hystérésis et la viscosité du fil d'acier, etc. Pour certaines expériences, j'ajoute un *amortissement supplémentaire*.

Dans tous les cas, je désigne par \mathcal{R} le travail résistant de tous les amortissements pendant une oscillation.

CHAPITRE V.

Lemme : Travail \mathcal{E} de la force de frottement f pendant une oscillation sinusoïdale.

8. C'est une oscillation fictive que je considère en ce moment et les résultats de ce calcul me serviront simplement de base pour l'étude des oscillations réelles, car je ne puis traiter le problème directement, c'est-à-dire en appliquant à l'oscillateur l'équation de la dynamique : elle est inintégrable dans le cas actuel.

Pour évaluer le travail \mathcal{E} il faut connaître le frottement et par conséquent la vitesse relative à chaque instant de l'oscillation.

Je puis écrire :

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T} = a \sin \omega t \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N \right).$$

Par suite

$$v = a\omega \cos \omega t,$$

et, en fonction de x ,

$$v = \pm \omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

La vitesse relative de l'oscillateur par rapport à l'archet est donc

$$(3) \quad u = V \mp \omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Dans ces oscillations, je suppose que u est toujours positif, c'est-à-dire que la vitesse maxima de l'oscillateur $a\omega$ est inférieure à celle de l'archet V , et j'appelle a_0 l'amplitude limite telle que $a_0 \omega = V$; c'est-à-dire telle que, pendant l'aller, il y ait adhérence un instant.

Je pourrais donner aux constantes a , ω , V des valeurs arbitraires et calculer f en fonction de x en me servant de la formule (3) et des graphiques expérimentaux (fig. 2) : la courbe fermée qui représenterait cette variation limiterait une surface proportionnelle au travail \mathfrak{C} . Je préfère obtenir une expression algébrique approchée de ce travail en utilisant la formule (1) qui devient ici

$$f = \frac{f_0 B}{B + u} = \frac{f_0 B}{B + V \mp \omega \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Je commence par représenter graphiquement la variation avec les valeurs numériques suivantes correspondant à des expériences réelles :

$$\begin{aligned} f &= 100 \text{ et } B = 60 \text{ comme dans la formule (2);} \\ V &= 285 \text{ tours par minute} = 94^{\text{cm}} \text{ par seconde;} \\ \omega &= \frac{2\pi}{0,936} = 6,71. \end{aligned}$$

Il faut prendre $a < a_0$. Or

$$a_0 = \frac{V}{\omega} = 14^{\text{cm}}$$

G.

($\alpha_0 = 135^\circ$, la circonférence de l'oscillateur mesurant $37^{\text{cm}},5$). Je prends $a = 10$.

Alors

$$f = \frac{6000}{15,4 \mp 6,71 \sqrt{100 - x^2}},$$

d'où la courbe (fig. 5).

Elle est parcourue dans le sens ABCDA; ACB correspond à l'aller et BDA au retour.

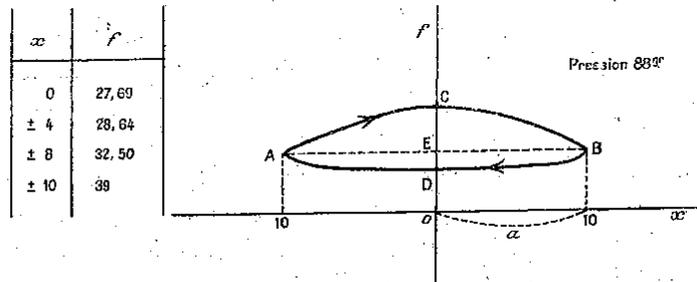


Fig. 5.

Le travail \mathcal{E} , qui a même mesure que l'aire comprise, a pour expression, en général,

$$\mathcal{E} = \int_{-a}^{+a} \frac{f_0 B}{B + V - \omega \sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int_{-a}^{+a} \frac{f_0 B}{B + V + \omega \sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

Comme l'intégrale est compliquée et se prête mal à la discussion, je remplace la courbe ACBD par deux demisinusoïdes passant, l'une par les points ABC, l'autre par les points ABD. L'équation de ABC devient

$$f = OE + EC \cos \pi \frac{x}{2a},$$

celle de ABD devient

$$f = OE - ED \cos \pi \frac{x}{2a}$$

et l'expression approchée du travail \mathfrak{E} devient

$$\mathfrak{E} = 2 \int_0^a (ED + EC) \cos \pi \frac{x}{2a} = 2 DC \left[\frac{2a}{\pi} \sin \pi \frac{x}{2a} \right]_0^a = \frac{4a}{\pi} DC.$$

Or, la formule (1) donne ici

$$OC = \frac{f_0 B}{V + B - \omega a}, \quad OD = \frac{f_0 B}{V + B + \omega a},$$

d'où

$$(4) \quad DC = \frac{2 f_0 B \omega a}{(V + B)^2 - \omega^2 a^2}.$$

En remplaçant DC par cette valeur, il vient

$$(5) \quad \mathfrak{E} = \frac{8}{\pi} f_0 \frac{a^2 \omega B}{(V + B)^2 - a^2 \omega^2}.$$

9. *Discussion de cette formule.* — Le travail \mathfrak{E} est proportionnel à f_0 et par suite à la pression, ce qui est presque évident. Il en résulte un moyen très commode pour mesurer le travail d'amortissement \mathfrak{A} dont j'ai déjà parlé : il suffit de diminuer la pression jusqu'à ce que le mouvement soit sur le point de s'amortir et de s'arrêter. Je démontre plus loin que les oscillations sont alors sensiblement sinusoïdales et que $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}$. Ainsi, avec l'amortissement minimum, une pression de 10^6 suffisait pour entretenir des oscillations de 14^{cm} d'amplitude. \mathfrak{A} avait alors pour mesure la surface du graphique 6; ce travail résistant

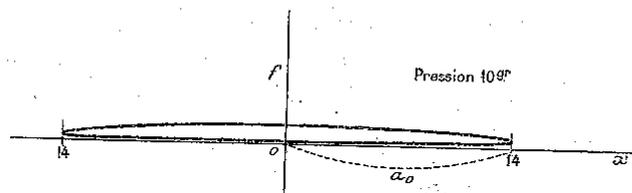


Fig. 6.

est 8,8 fois plus faible que \mathfrak{E} pour la même amplitude et pour une pression de 88^6 (fig. 7).

Le travail \mathcal{E} croît très vite (toutes choses égales d'ailleurs) avec a . Ainsi pour $a = a_0 = 14^{\text{cm}}$,

$$f = \frac{6000}{154 \mp 6,71 \sqrt{14^2 - x^2}},$$

d'où le graphique (fig. 7) dont l'aire est beaucoup plus grande que celle du graphique 5 ($a = 10$).

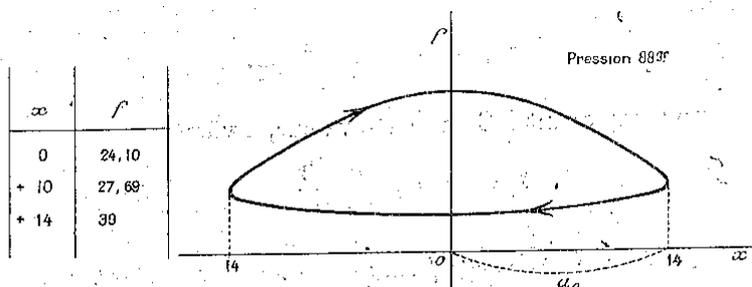


Fig. 7.

Lorsque V augmente seul, \mathcal{E} décroît rapidement. J'ai vérifié, en effet, que, toujours avec l'amortissement minimum et la pression de 88%, les oscillations (très sensiblement sinusoïdales) de même amplitude 14^{cm} s'amortissaient pour $V > 980$ tours à la minute ou 326^{cm} par seconde (au lieu de 285 tours dans les exemples précédents). Au contraire, pour $V < 980$ tours, elles avaient tendance à augmenter d'amplitude. Pour $V = 980$ tours, on avait donc $\mathcal{E} = \mathcal{R}$, d'où un second moyen de mesurer \mathcal{R} . On trouve à peu près la même valeur.

L'influence du terme B n'est pas simple dans le cas général de la formule (5); étudions-la seulement dans un cas qui se présente souvent en pratique : lorsque

$$a = a_0 = \frac{V}{\omega}.$$

Alors,

$$\mathcal{E} = \frac{8}{\pi} f_0 \frac{V^2}{\omega(2V + B)}.$$

On voit que \mathfrak{C} est d'autant plus grand que B est plus petit, c'est-à-dire que l'archet est mieux colophané.

ÉTUDE DES OSCILLATIONS RÉELLES.

10. *Division de cette étude.* — N'oublions pas que les calculs précédents se rapportent à des oscillations pendulaires fictives. Pour étudier les oscillations réelles, je considère deux cas extrêmes suivant la valeur relative de ce que j'ai appelé \mathfrak{C} et \mathfrak{R} : dans le premier cas, \mathfrak{R} est à peine inférieur à \mathfrak{C} (pour $a = a_0$); dans le second, \mathfrak{R} est négligeable en comparaison de \mathfrak{C} (pour $a = a_0$).

Cette double étude nous renseignera en même temps sur tous les cas intermédiaires.

CHAPITRE VI.

Premier cas : \mathfrak{R} est à peine inférieur à \mathfrak{C} .

11. *Le mouvement est sinusoïdal et de même période que les oscillations libres.* — Remarquons que, dans ce cas, je ne pose pas que \mathfrak{R} est forcément négligeable : \mathfrak{R} et \mathfrak{C} peuvent être tous deux relativement grands.

Je commence par supposer que le mouvement est sinusoïdal.

Soit alors ACBD (*fig. 8*), le graphique du frottement f en fonction de l'élongation (pression 45°). La force d'amortissement, qui s'oppose toujours au mouvement, se retranche de f dans l'aller ACB et s'y ajoute dans le retour BDA. Le résultat est d'aplatir la courbe ACBD et de rendre quasiment constante la résultante entre f et les forces d'amortissement, surtout si ces dernières sont produites en grande partie par des résistances visqueuses ou gazeuses proportionnelles à la vitesse, et mieux encore

si, en même temps, elles sont plus grandes dans l'aller ACB que dans le retour BDA. On voit encore aisément, en regardant les graphiques 5, 6, 7, 8, que cette approxima-

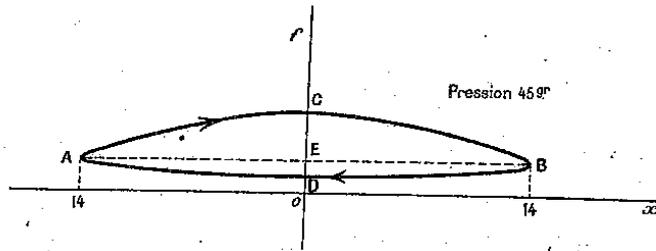


Fig. 8.

tion est d'autant meilleure que la courbe est plus mince et plus longue, c'est-à-dire que le quotient $\frac{DC}{AB}$ est plus petit.

Cette résultante quasi constante est figurée par la droite AB (fig. 8 et 9).

Soit $A'B'$ (fig. 9) la droite représentant, en fonction de x , la force (proportionnelle à la torsion) exercée par le fil d'acier. On comprendra par la suite qu'elle doit passer par le point E' tel que $OE' = OE$.

La droite A_1B_1 représente la résultante de toutes les forces et l'approximation est d'autant meilleure que l'angle A_1Ox' est plus grand, c'est-à-dire que le coefficient de torsion k du fil est plus fort. Cette résultante est donc proportionnelle à l'élongation x ; par suite, le mouvement supposé sinusoïdal est tel en réalité; les oscillations se font autour du point O , et, comme A_1B_1 est parallèle à $A'B'$, la période de ce mouvement est la même que celle des oscillations libres de l'oscillateur soumis à la seule action du fil élastique (laquelle est pratiquement indépendante de R).

La position d'équilibre O' du point M de l'oscillateur

sous l'action de ce fil est à une distance de O, dans le sens négatif :

$$OO' = \frac{OE'}{\tan E'O'O} \quad (\text{fig. 9}).$$

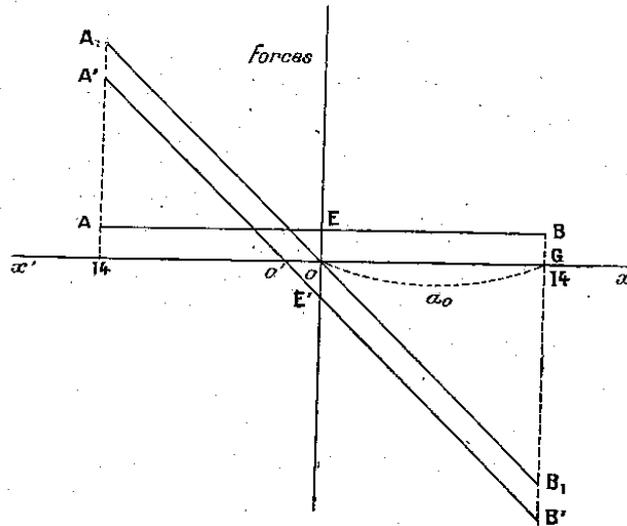


Fig. 9.

Or $\tan E'O'O = k$.

$OE' = OE = BG$ représente la valeur de f au moment où, l'oscillateur s'arrêtant, la vitesse relative est celle de l'archet V ; donc

$$OE = \frac{f_0 B}{B + V}$$

et

$$(6) \quad OO' = \frac{f_0 B}{k(B + V)}.$$

12. Il y a adhérence un instant : $a_0 \omega = V$, et, par suite, l'amplitude est proportionnelle à la vitesse de l'archet. — Je rappelle que j'ai déjà désigné par a_0 l'amplitude satisfaisant à cette condition : $a_0 \omega = V$.

Le travail d'amortissement \mathcal{R} est proportionnel à l'amplitude a s'il est produit par des frottements solides indépendants de la vitesse; il est proportionnel à son carré a^2 s'il est produit par des résistances liquides (huile des tourillons) ou gazeuses (résistance de l'air) qui, dans ces mouvements peu rapides, sont sensiblement proportionnelles à la vitesse. L'hystérésis et la viscosité du fil participent à ces deux catégories. \mathcal{R} est donc, en général, de la forme $\mathcal{R} = ma + na^2$.

Supposons que, pour une amplitude $a_1 < a_0$, on ait $\mathcal{R} = \mathcal{E}$, c'est-à-dire, d'après la formule (5),

$$ma_1 + na_1^2 = \frac{8f_0 B \omega}{\pi} \frac{a_1^2}{(V + B)^2 - a_1^2 \omega^2}$$

Théoriquement, cela peut constituer un régime permanent, mais ce régime est instable. En effet, pour une variation d'amplitude da , on a, en valeur absolue, $d\mathcal{E} > d\mathcal{R}$; sans même faire le calcul, un coup d'œil sur les formules ci-dessus montre que \mathcal{E} varie plus rapidement que \mathcal{R} en fonction de a . Si donc a décroît un peu, \mathcal{E} deviendra plus petit que \mathcal{R} et les oscillations finiront par s'arrêter. Si a croît, \mathcal{E} deviendra plus grand que \mathcal{R} et l'amplitude continuera d'augmenter jusqu'à ce qu'il y ait adhérence. Alors, par le mécanisme que nous étudierons dans le deuxième cas, \mathcal{E} diminuera un peu pour un très petit accroissement de a ; ce sera un état oscillatoire stable.

La relation $V = a_0 \omega$ qui résulte de ceci montre que, pour un même fil élastique (ω constant), l'amplitude ne dépend que de V et lui est proportionnelle.

13. *Remarque.* — Nous avons vu plus haut que les approximations que j'ai faites sont d'autant plus légitimes que le coefficient de torsion k du fil est plus grand et le

quotient $\frac{DC}{AB}$ (fig. 8) plus petit. Or j'ai trouvé [formule (3)]

$$DC = \frac{2f_0 B a \omega}{(V + B)^2 - a^2 \omega^2}$$

et comme ici $AB = 2 a_0$ et $a_0 = \frac{V}{\omega}$,

$$\frac{DC}{AB} = \frac{2f_0 \omega}{2 a_0 \omega + B}.$$

Donc, pour avoir des oscillations très sensiblement pendulaires, les meilleures conditions sont : fil élastique fort, faible pression (et par conséquent faible amortissement), grande amplitude et archet assez mal colophané.

14. *Vérifications expérimentales.* — Une partie de ces vérifications consiste en graphiques photographiés comme je l'ai indiqué dans la description de l'appareil. J'en ai fait de deux sortes.

Dans les uns que j'appelle *graphiques avec le miroir synchrone*, les oscillations du miroir sont de même période que celles de l'oscillateur. Lorsque ce dernier a un mouvement sinusoïdal, la courbe est, comme dans les expériences de Lissajous, une ellipse en général et une droite si les oscillations sont dans la même phase ou dans des phases opposées : je me place presque toujours dans l'un de ces deux derniers cas.

Dans les autres graphiques que j'appelle *graphiques en fonction du temps*, le mouvement horizontal du rayon lumineux est très sensiblement uniforme. Ils contiennent environ une oscillation et demie de l'oscillateur. Je suis arrivé à ces résultats en donnant à l'amplitude (190°) et à la période (96^{sec}) du miroir des valeurs telles que le point lumineux parcourt horizontalement les 60^{cm} de l'écran, pendant le temps $\frac{3T}{2}$ et que sa vitesse, dans ce trajet, ne varie pas de $\frac{1}{1000}$.

Pour me placer dans les conditions voulues, \mathcal{R} à peine inférieur à \mathcal{C} , je donne d'abord à l'archet une pression plus que suffisante pour entretenir les oscillations avec ou sans amortissement supplémentaire, puis je la diminue progressivement jusqu'à ce qu'elles soient sur le point de s'amortir et de s'arrêter comme un moteur synchrone qui se décroche.

Lorsqu'ils correspondent aux meilleures conditions indiquées à la fin du paragraphe précédent, les graphiques avec le miroir synchrone ne diffèrent pas sensiblement d'une droite (ils ont jusqu'à 30^{cm} de long) et les autres d'une sinusoïde.

J'ai opéré ensuite en ajoutant, soit un frottement solide considérable (une pince en bois à pression réglable sur l'axe de l'oscillateur), soit un amortissement par l'air (de grandes ailes en carton fixées au même axe). Les oscillations étaient encore, d'après les graphiques, très voisines de mouvements pendulaires, un peu moins cependant que les premières.

Enfin, j'ai donné aux ailes en carton une forme telle que l'amortissement fût plus grand à l'aller qu'au retour. Nous avons déjà prévu un meilleur résultat dans ces conditions. L'expérience m'a donné, en effet, des oscillations aussi bonnes que les premières malgré la forte pression nécessaire à l'entretien.

Dans ces différentes conditions, la période T est toujours très sensiblement la même qu'en oscillations libres, comme nous l'avons démontré plus haut; à peine ai-je pu quelquefois la trouver plus grande de $\frac{T}{100}$ environ, résultat d'ailleurs très normal puisque la différence sera de même sens dans le deuxième cas (\mathcal{R} négligeable) dont le premier se rapproche dès que \mathcal{R} est inférieur à \mathcal{C} .

La relation (6)

$$OO' = \frac{f_0 B}{k(B+V)}$$

relative au décalage qui existe entre la position moyenne des oscillations et la position d'équilibre, m'a paru peu importante; je l'ai seulement vérifiée qualitativement en constatant que OO' décroît lorsque la pression diminue, lorsque la vitesse de l'archet augmente ou lorsque le fil est remplacé par un autre plus fort.

Par contre, j'ai fait un grand nombre de vérifications numériques très satisfaisantes de la formule

$$V = \alpha_0 \omega = 2\pi N \alpha_0,$$

exprimant qu'il y a adhérence un instant, en faisant varier V , N (au moyen du fil) et en opérant avec amortissement minimum ou avec amortissements supplémentaires de diverses natures.

Voici les résultats de deux expériences résumant toutes celles de ce genre; les amplitudes angulaires sont mesurées à 2° ou 3° près.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE. — Amortissement minimum (pression très faible).^a

Archet. — Circonférence : $19^{\text{cm}},75$; vitesse : 420 tours par minute ou 138^{cm} par seconde.

Oscillateur. — Circonférence : $37^{\text{cm}},50$;

$$N = \frac{70,7}{60};$$

$$\alpha_0 = 180^\circ; \quad \alpha_0 \omega = 2\pi N \alpha_0 = 143^{\text{cm}},6 \text{ par seconde.}$$

Différence relative :

$$\frac{5,6}{140} = \frac{1}{25}.$$

Cette différence est d'ailleurs de même sens qu'au deuxième cas.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE (avec un autre fil), ayant pour objet de vérifier que l'amplitude ne dépend pas de l'amortissement, pour une même vitesse de l'archet :

1^o Amplitude avec amortissement minimum (pression très faible) : 170°;

2^o Amplitude avec amortissement par frottement solide 6 fois plus grand que l'amortissement minimum (pression forte) : 170°;

3^o Amplitude avec fort amortissement par l'air (pression forte) : 180°.

Mais, la période, qui était $\frac{66^{\text{sec}}}{70}$ sans amortisseur est devenue 1 seconde à cause du moment d'inertie de ce dernier.

Correction : les oscillations de période $\frac{66^{\text{sec}}}{70}$ ayant même vitesse maxima que les oscillations de période 1 seconde et d'amplitude 180° auraient pour amplitude

$$180 \times \frac{66}{70} = 169^{\circ}.$$

Il est donc impossible, dans ce premier cas, de diminuer l'amplitude en augmentant l'amortissement ou en affaiblissant la pression : dès que ζ devient inférieur à \mathcal{R} , on voit les oscillations s'amortir peu à peu et s'arrêter complètement.

J'ai fait encore d'autres vérifications de cette adhérence pendant un instant; elles reposent sur une comparaison entre le deuxième cas et le premier, de sorte que nous les verrons dans la suite.

CHAPITRE VII.

Deuxième cas : \mathcal{R} est négligeable par rapport à ζ .
Division de ce deuxième cas.

15. Dans ce deuxième cas, le travail d'amortissement \mathcal{R} est très faible en comparaison du travail moteur ζ (fictif) que produirait f si l'oscillation était pendulaire.

Nous avons vu au n° 9 et sur les graphiques 6 et 7 que ce cas est facilement réalisable. Pratiquement je m'y place en opérant avec une forte pression de l'archet et avec l'amortissement minimum; je dois alors constater qu'il faudrait ajouter un amortissement supplémentaire considérable pour passer au premier cas, puis arrêter le mouvement.

Considérons donc, dans ce cas, des oscillations réelles d'amplitude $a < a_0$ et admettons que, tant qu'il n'y a pas adhérence, le travail effectif du frottement f est sensiblement égal à \mathfrak{E} .

Comme on a $\mathfrak{E} > \mathfrak{R}$, l'amplitude a et par suite la vitesse maxima $a \omega$ du mouvement croîtront, mais ce n'est pas par ce fait que l'égalité pourra s'établir entre \mathfrak{E} et \mathfrak{R} puisque, au contraire, l'étude du premier cas nous a montré que si l'on a $\mathfrak{E} = \mathfrak{R}$ pour une amplitude $a < a_0$, un accroissement d'amplitude donne $\mathfrak{E} > \mathfrak{R}$. Je ne changerai donc pas l'allure du phénomène en supposant, dans ce deuxième cas, l'amortissement nul.

L'amplitude croissante des oscillations atteint la valeur a_0 et alors, dans l'aller, la vitesse de l'oscillateur égale celle de l'archet et il y a adhérence un instant. La courbe en pointillé $A_0 CB_0 D$ (fig. 10) qui reproduit le graphique 7 correspond à ce cas : dans l'aller de l'oscillation $A_0 CB_0$, la vitesse de l'oscillateur en O égale celle de l'archet.

La droite $A' B'$ représente la variation, en fonction de x , de la force de torsion du fil. On comprendra par la suite que, comme dans la figure 9, elle doit passer par un point D' tel que, approximativement, $OD' = OD$.

L'amplitude continue naturellement à croître; elle devient ${}^1_2 A_1 B_1$, alors l'oscillateur rattrape l'archet en E , avant le milieu : à ce moment, le frottement vient d'atteindre sa valeur maxima f_0 . Pour que l'adhérence sub-

siste, en admettant que le mouvement de l'archet reste uniforme et en négligeant l'amortissement, il faut que le frottement prenne à chaque instant une valeur égale et opposée à la torsion du fil. Il passe donc brusquement de la valeur $HE = f_0$ à la valeur HF , puis le point figu-

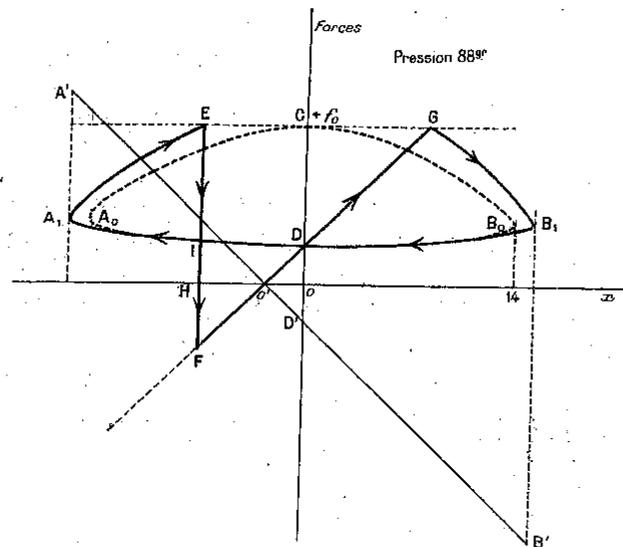


Fig. 10.

ratif décrit la droite FG symétrique de $A'B'$ par rapport à Ox jusqu'au point G où le frottement atteint sa valeur maxima f_0 et où, par conséquent, la torsion du fil commence à l'emporter sur lui et à rompre l'adhérence. Le graphique rejoint ensuite le point B_1 . La ligne de retour B_1A_1 ne peut différer sensiblement de B_0A_0 , car le frottement y varie peu et prend la même valeur aux quatre points A_0, B_0, A_1, B_1 .

Le travail moteur de f a pour mesure :

$$\text{aire } A_1EI + \text{aire } B_1DG - \text{aire } DIF.$$

Il est visiblement positif, donc l'amplitude va encore augmenter (*fig. 11*), l'adhérence commencera plus tôt et l'on arrivera au cycle A_2EFGB_2 qui représente la variation de f en fonction de x et où je suppose nul le travail total : c'est un état oscillatoire permanent et stable.

En composant ce frottement avec la force du fil, j'obtiens, pour le graphique de la résultante φ : $AEFGB$ (*fig. 12*) que je simplifie suivant la figure 13.

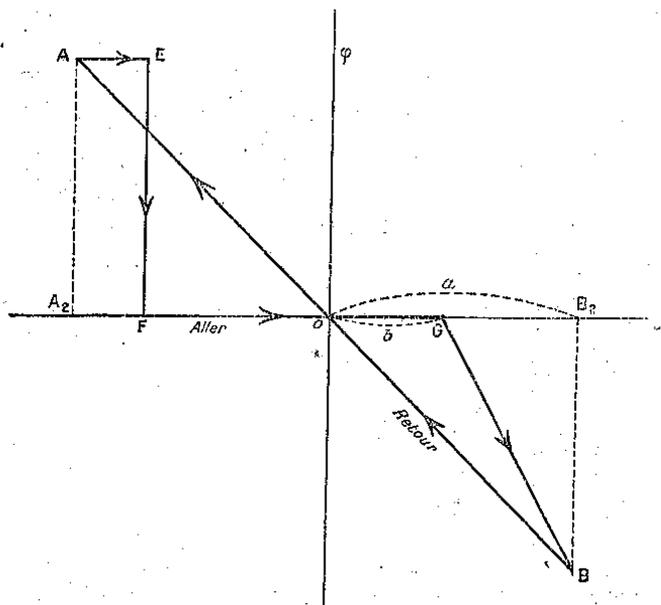


Fig. 13.

16. C'est ici que ce deuxième cas se divise en deux autres.

J'ai supposé que le travail total de f s'était annulé dans la position de la figure 11. S'il était demeuré positif, l'amplitude eut augmenté et l'adhérence eut commencé plus tôt. Mais si elle se produit avant le point J, nous verrons que l'allure du phénomène change nettement

ou

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{2}(2\alpha - ID)CD - \frac{1}{2}ID \times IF \leq 0.$$

Or,

$$OC = f_0,$$

$$OD = \frac{f_0 B}{B + 2V} \quad (\text{approximativement});$$

donc

$$CD = \frac{2f_0 V}{B + 2V}$$

et

$$IF = C'D = \frac{2f_0(B + V)}{B + 2V}.$$

De plus, en appelant k le coefficient de torsion du fil,

$$IF = kID; \quad ID = \frac{2f_0(B + V)}{k(B + 2V)}.$$

Finalement, la condition devient

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{f_0 V}{B + 2V} \left[2\alpha - \frac{2f_0(B + V)}{k(B + 2V)} \right] - \frac{2}{k} \left[\frac{f_0(B + V)}{B + 2V} \right]^2 \leq 0$$

ou

$$(7) \quad \mathfrak{E}_1 = \frac{4f_0}{k(B + 2V)} [kaV - f_0(B + V)] \leq 0,$$

d'où

$$(8) \quad kaV - f_0(B + V) \leq 0.$$

CHAPITRE VIII.

Première subdivision : Il y a adhérence pendant une partie de l'aller et l'oscillateur ne dépasse pas l'archet.

17. Vérifions qu'il doit en être ainsi dans le cas numérique que j'ai commencé à traiter :

$V = 94^{\text{cm}}$ par seconde (285 tours par minute);

$B = 60$;

$f_0 = 100^{\circ}$ de torsion.

Je prends $a = 16$, a_0 étant égal à 14.

$k = \frac{135}{14}$, car pour $a = 14^{\text{cm}}$, la torsion est 135° .

Alors, la condition (8) devient

$$94 \times 16 \times \frac{135}{14} - 100(94 + 60) \leq 0,$$

$$14\,503 - 15\,400 \leq 0.$$

De plus, j'ai négligé l'amortissement.

18. *Équation de ces oscillations.* — Reportons-nous à la figure 13 et au texte correspondant.

Comme la vitesse de l'oscillateur s'annule en A et en B, l'accroissement de force vive le long de AE et la perte le long de GB sont égaux, d'où

$$\text{aire } A_2 AEF = \text{aire } B_2 BG \quad (\text{dans l'aller}).$$

De même,

$$\text{aire } A_2 AO = \text{aire } B_2 BO \quad (\text{dans le retour}).$$

Ces deux conditions sont suffisantes, car elles expriment en même temps que le travail total de f est nul.

On en déduit

$$OA_2 = OB_2 = a,$$

et, en posant $OG = b$,

$$AE = \frac{a - b}{2}.$$

Le terme b est approximativement égal à CG (fig. 11) et par conséquent croît avec OC, c'est-à-dire avec la pression. Toutefois, dans les discussions ci-dessous, je ne devrai pas lui attribuer des valeurs s'écartant beaucoup des proportions de la figure 13 ($b = \frac{2}{5} a$ environ) parce que les simplifications que j'ai faites pour obtenir cette figure ne seraient plus légitimes.

On peut remarquer de suite sur les figures 12 et 13 que la vitesse maxima dans l'aller (phase motrice) est plus petite que dans le retour (phase résistante), puisque

$$\text{aire } B_2BG < \text{aire } B_2BO.$$

Le long de AE, la résultante φ entre le frottement et la torsion du fil est égale à ka ; $\varphi = ka$.

$$\text{Le long de GB, } \varphi = -ka \frac{x-b}{a-b}.$$

$$\text{Le long de BA, } \varphi = -kx.$$

Sur le parcours AE,

$$x = -a + \frac{kR^2a}{2I} t^2,$$

R et I désignant le rayon et le moment d'inertie de l'oscillateur. Or $\frac{kR^2}{I} = \omega_1^2$, où $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, T_1 étant la période des oscillations libres ou des oscillations du premier cas.

Alors, je puis écrire :

$$x = -a + \frac{\omega_1^2 a}{2} t^2.$$

La durée du parcours est

$$t_1 = \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{a-b}{a}},$$

et la vitesse en E

$$\omega_1 \sqrt{a(a-b)}.$$

Cette vitesse est égale à celle de l'archet:

$$(9) \quad \omega_1 \sqrt{a(a-b)} = V;$$

elle ne varie pas de E ou F jusqu'en G.

La durée du parcours FG est

$$t_2 = \frac{a+3b}{2\omega_1 \sqrt{a(a-b)}}.$$

Le long de GB, en comptant le temps à partir de G,

on trouve

$$x = b + (a - b) \sin \omega_1 \sqrt{\frac{a}{a - b}} t$$

et

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_1 \sqrt{a(a - b)} \cos \omega_1 \sqrt{\frac{a}{a - b}} t.$$

La durée du parcours est

$$t_3 = \frac{\pi}{2 \omega_1} \sqrt{\frac{a - b}{a}}.$$

Enfin, dans le retour BA qui est sinusoïdal, en comptant le temps à partir de B,

$$x = a \cos \omega_1 t$$

et

$$(10) \quad v = \frac{dx}{dt} = -a \omega_1 \sin \omega_1 t.$$

La durée est

$$(11) \quad t_4 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{T_1}{2};$$

c'est la demi-période des oscillations libres.

La période totale de l'aller AEFGB est

$$(12) \quad \tau = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{a - b}{a}} + \frac{a + 3b}{2 \omega_1 \sqrt{a(a - b)}}.$$

Il faut ajouter le retour t_4 pour avoir la période totale T.

19. *Premières vérifications expérimentales.* — Pour voir expérimentalement si, dans son ensemble, l'oscillation ainsi déterminée reproduit fidèlement l'oscillation réelle, je fais une application numérique en posant $a = 5$ et $b = 2$, valeurs qui correspondent à peu près aux proportions de la figure 13.

Dans l'expérience réelle correspondant au cas traité, la période des oscillations libres étant un peu moins de

1 seconde, je prends

$$\omega_1 = \sqrt{45} \quad \left(T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{45}} = 0,936 \right).$$

Alors je calcule, avec les formules ci-dessus, les valeurs de x correspondant à une vingtaine de valeurs de t pendant une oscillation complète, et je trace un graphique

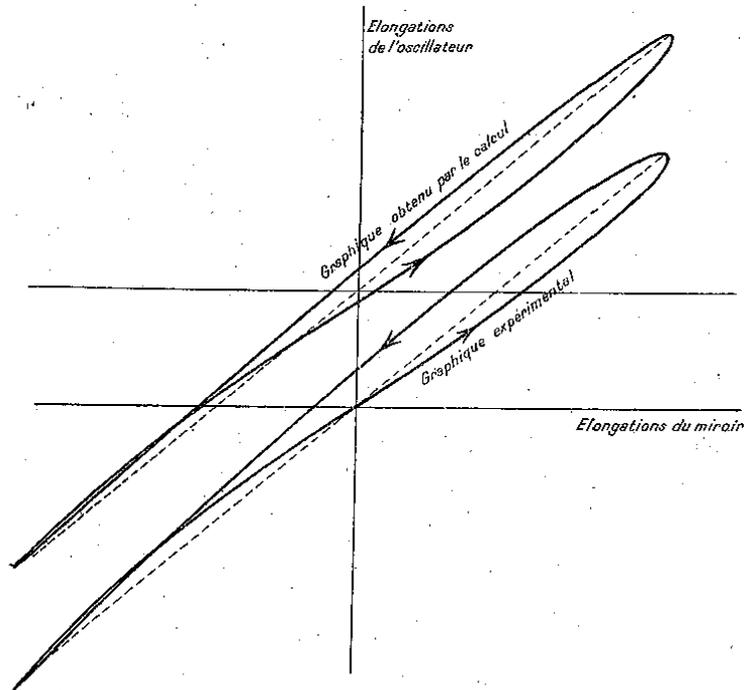


Fig. 15.

en prenant pour ordonnées ces valeurs et pour abscisses celles de la fonction $A \sin 2\pi \frac{t}{T}$, t jouant le rôle de paramètre. Cette dernière fonction représente les oscillations sinusoïdales d'amplitude A , de même période

$$(T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$$

et de même phase initiale produites par le miroir tournant dans les graphiques avec le miroir synchrone. Ensuite j'ai réalisé expérimentalement un de ces graphiques en donnant à l'archet la même vitesse et une pression un peu plus forte à cause de l'amortissement. La ressemblance est frappante : les deux courbes ont exactement les mêmes caractéristiques.

Elles sont reproduites sur la figure 15; la courbe expérimentale est celle du dessous; elle est réduite aux deux cinquièmes.

Les graphiques en fonction du temps ont la forme indiquée figure 16. Ils accusent très nettement l'adhérence

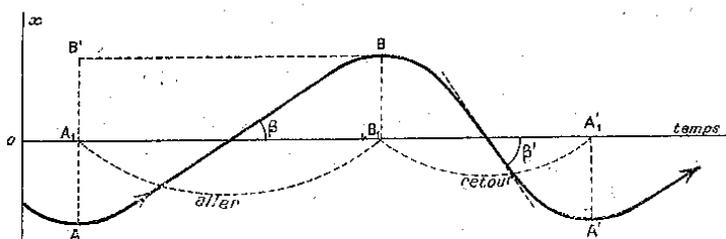


Fig. 16.

par une partie rectiligne dans l'aller AB, tandis que le retour BA' est sinusoïdal.

J'ai déjà fait remarquer que la vitesse maxima devait être plus petite à l'aller qu'au retour. Les formules (9) et (10) donnent leur valeur $\omega_1 \sqrt{a(a-b)}$ et $\omega_1 a$. On vérifie très bien ce fait sur les mêmes graphiques : $\beta' > \beta$.

Lorsqu'on diminue la pression jusqu'à ce que l'oscillation devienne sensiblement pendulaire (1^{er} cas), la vitesse maxima de l'aller ne doit pas changer puisqu'elle doit toujours être égale à celle de l'archet [elle pourrait cependant la dépasser un peu si la condition exprimée dans la formule (8) n'était plus satisfaite, mais c'est à peine visible sur ces graphiques]; celle du retour doit donc dimi-

nuer jusqu'à égaler la première. Les graphiques montrent qu'en effet β' décroît progressivement jusqu'à β qui ne varie pas.

20. L'amplitude a est plus grande que a_0 et croît avec la pression ainsi que la durée de l'adhérence. — On peut remarquer (fig. 10 et 11) que j'ai déjà été conduit à admettre ces conclusions.

La formule (9) donne

$$\omega_1 \sqrt{a(a-b)} = V$$

et si l'on diminuait la pression de façon que l'oscillation fût sinusoïdale (1^{er} cas), on aurait

$$\omega_1 a_0 = V; \quad \text{donc} \quad a(a-b) = a_0^2,$$

ce qui montre que a est plus grand que a_0 et croît avec b et par conséquent avec la pression.

L'adhérence a lieu sur le parcours FG (fig. 13). Or

$$FG = \frac{a+3b}{2}$$

et croît avec la pression.

De plus, l'amplitude a , toujours supérieure à a_0 , croît naturellement, comme cette dernière, avec la vitesse de l'archet.

Toutes ces conclusions sont des plus faciles à vérifier expérimentalement : en augmentant progressivement la pression à partir de sa valeur minima correspondant au premier cas, on voit l'amplitude croître régulièrement ainsi que la partie rectiligne de l'aller AB (fig. 16) sur les graphiques en fonction du temps.

Pour une même vitesse de l'archet j'ai trouvé $a_0 = 93^\circ$ sous la pression minima de 20^g et $a = 125^\circ$ sous la pression de 150^g environ.

De plus, comme dans le premier cas, le milieu O (fig. 12)

des oscillations s'éloigne de plus en plus de O' à mesure que croît la pression.

21. *A cause de l'aller, la période est plus grande que celle des oscillations libres et augmente avec la pression.* — Dans l'exemple numérique ci-dessus, l'aller durait $0^{\text{sec}},508$ et le retour $0^{\text{sec}},468$; la période de l'oscillation libre eût été $0^{\text{sec}},468 \times 2$.

D'une façon générale, la durée du retour

$$t_4 = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{\omega_1} \quad [\text{formule (11)}]$$

est la même qu'en oscillation libre et ne dépend par conséquent ni de la pression ni de la vitesse de l'archet.

Le temps de l'aller est [formule (12)]

$$\tau = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\omega_1} \sqrt{\frac{a-b}{a}} + \frac{a+3b}{2\omega_1 \sqrt{a(a-b)}}.$$

La discussion de cette formule montre que l'on a toujours $\tau > t_4$, excepté si b est inférieur à $0,12 a$, cas que je ne dois pas envisager, d'après ce qui a été dit plus haut (n° 18).

De plus, τ croît avec la pression car je puis écrire

$$\tau = \frac{(3 + \pi)a + (1 - \pi)b}{2\omega_1 \sqrt{a(a-b)}} = \frac{(3 + \pi)a + (1 - \pi)b}{2V}.$$

Lorsque la pression augmente, nous savons que a et b croissent, mais $\omega_1 \sqrt{a(a-b)} = V$ reste constant, d'où

$$db = \frac{a-b}{a} da.$$

Donc

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial a} da + \frac{\partial \tau}{\partial b} db = \frac{4a + (\pi - 1)b}{2aV} da > 0.$$

Voici quelques résultats numériques d'expériences :

avec un certain fil de torsion, la période des oscillations libres était $\frac{48,7}{60}$ sec; sous faible pression (1^{er} cas) elle était sensiblement la même : $\frac{49}{60}$; et sous une forte pression d'environ 120^s elle devenait $\frac{54}{60}$.

Tous ces résultats sont d'ailleurs parfaitement visibles sur les graphiques en fonction du temps (*fig. 16*) : $A_1 B_1$ est toujours plus grand que $A'_1 B_1$, et croît avec la pression tandis que, dans des courbes correspondant à des pressions et à des vitesses différentes et en particulier quand on passe au premier cas, $B_1 A'_1$ reste sensiblement constant.

22. Donc, en résumé, lorsque la pression, d'abord forte, diminue progressivement, on voit décroître, sur les graphiques, l'amplitude AB' (*fig. 16*) et le temps de l'aller $A_1 B_1$, ce dernier jusqu'à la valeur $B_1 A'_1$. La partie rectiligne de la branche AB se raccourcit, β demeurant sensiblement constant (excepté si l'oscillateur dépasse un peu l'archet, mais c'est à peine visible). En même temps, dans le retour BA' , β' décroît jusqu'à β , $B_1 A'_1$ ne variant pas : la courbe ABA' devient sinusoïdale et l'on se trouve au premier cas.

Le fait que β n'a pas varié vérifie à nouveau que, dans le premier cas, il y a adhérence un instant.

CHAPITRE IX.

Deuxième subdivision : Pendant l'aller, l'oscillateur dépasse l'archet.

23. La condition (8) nous apprend que si l'on a (approximativement)

$$kaV - f_0(B + V) > 0$$

le travail moteur de f, ε_1 , est encore positif dans la position

de la figure 14, c'est-à-dire lorsque l'adhérence commence

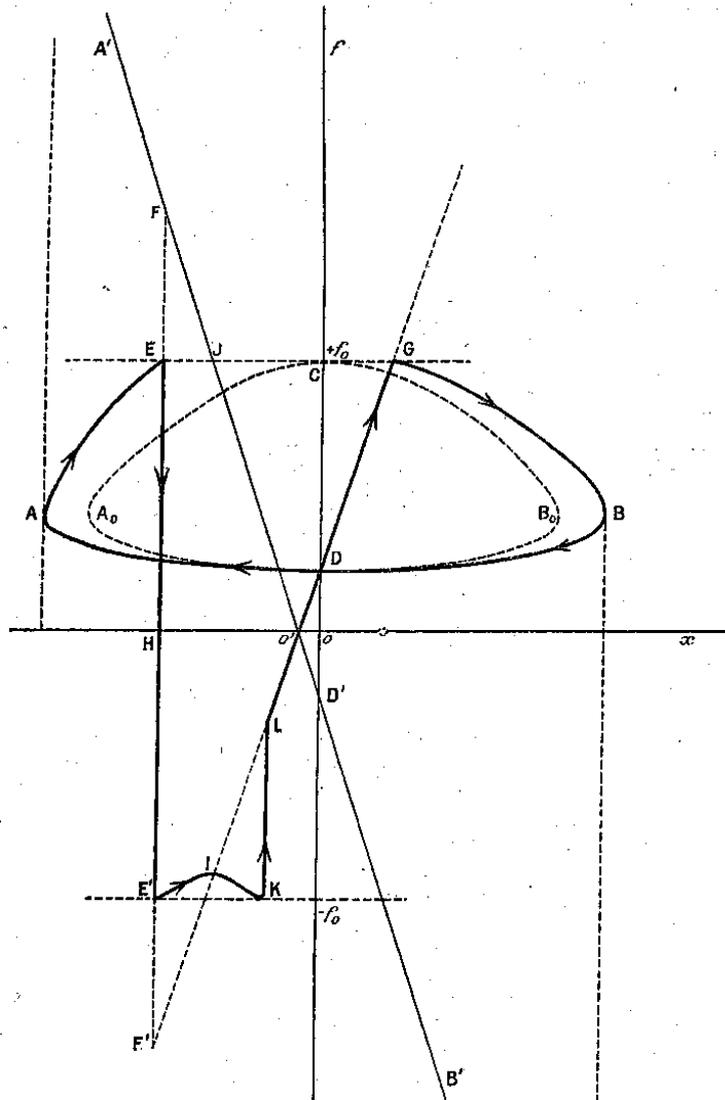


Fig. 17.

au point J. Donc l'amplitude va encore augmenter et, par suite, l'oscillateur rattrapera l'archet avant le point J,

par exemple en E (fig. 17). L'adhérence ne peut subsister, car le frottement ne peut pas prendre une valeur plus grande que $HE' = HE$, valeur inférieure à la force du fil HF. Il reste donc la résultante positive de valeur $EF = F'E'$ qui accélère le mouvement : *l'oscillateur dépasse l'archet*. Il en résulte que le frottement décroît un peu le long de $E'I$ jusqu'au point I où le graphique coupe la droite $F'G$ symétrique de $A'B'$ par rapport à Ox : en ce point, le frottement et la torsion du fil se faisant équilibre, le mouvement ne s'accélère plus. Ensuite, comme la torsion du fil diminue, le mouvement se ralentit; il en résulte aussitôt que le frottement augmente le long de IK , ce qui ralentit d'autant plus, et l'adhérence se produit de nouveau en K. On peut montrer aisément que les surfaces $IE'F'$ et IKL sont égales et que, par suite, I est un peu plus rapproché de KL que de $E'F'$.

L'adhérence peut subsister jusqu'en G (mais on peut concevoir que l'abscisse du point K soit plus grande que celle du point G, et alors l'adhérence ne dure qu'un instant), puis l'oscillation continue comme dans la précédente subdivision. Par ce mécanisme, le travail moteur de f, ε_1 , ne peut manquer de s'annuler.

24. *Vérifications expérimentales.* — J'ai pensé que je déterminerais de bonnes conditions pour que l'oscillateur dépasse nettement l'archet en posant que, lorsque l'adhérence commence en J (fig. 14), le travail moteur de f, ε_1 , doit être le plus grand possible. Or, d'après la formule (7),

$$\varepsilon_1 = \frac{4f_0}{k(B+2V)} [kaV - f_0(B+V)].$$

En considérant a comme à peu près proportionnel à V et inversement proportionnel à \sqrt{k} , nous trouvons que ε_1 est d'autant plus grand que k et V sont plus grands et B

plus petit. Il faut donc prendre un fil de torsion fort, opérer sous de grandes vitesses de l'archet et colophaner le mieux possible. De plus, la meilleure pression est déterminée par la condition

$$f_0 = \frac{kaV}{2(B+V)}$$

Elle doit par conséquent être forte, d'autant plus que j'ai négligé l'amortissement inévitable R . Il va sans dire que ce dernier doit être le plus petit possible.

La vérification expérimentale est difficile, car (j'ai pu le mesurer approximativement) la vitesse de mon oscillateur n'a jamais dépassé celle de l'archet, V , de plus de $\frac{1}{20}V$. Ce léger accroissement de vitesse est peu visible sur les graphiques en fonction du temps. De plus, ces graphiques ne peuvent prouver d'une façon certaine que l'oscillateur dépasse l'archet, car, même si l'adhérence subsiste, la réaction de l'oscillateur sur l'archet pendant le commencement de l'adhérence accélère un peu leur mouvement (l'élasticité des transmissions entre le moteur et l'archet permettant cela), malgré que j'aie beaucoup augmenté, pour la circonstance, le moment d'inertie de l'archet.

Alors, j'ai imaginé et construit le dispositif suivant : J'accrole à l'oscillateur un cylindre concentrique d'un rayon à peine plus petit et de 2^{cm} de largeur sur lequel j'enroule une bande de papier photographique. De même, je fixe à l'archet un cylindre concentrique en fort papier noir un peu plus petit (que l'archet) et de même largeur que l'autre : 2^{cm}. Il est percé de fines fentes équidistantes de 6^{mm} suivant les génératrices. Ces deux cylindres se trouvent donc l'un en face de l'autre sans se toucher tout à fait. Un arc électrique éloigné est placé à peu près au même niveau et de telle sorte que les rayons lumineux puissent traverser les fentes voisines du papier

photographique et tomber normalement sur ce dernier dans le voisinage de la ligne de tangence ou, plus exactement, dans la partie des cylindres où ils se touchent presque. Un écran percé d'une petite fenêtre ne laisse parvenir la lumière que dans cette région.

Je commence par faire plusieurs expériences en supprimant le fil élastique de l'oscillateur : alors, il y a constamment adhérence. En donnant la lumière pendant un tour de l'oscillateur, je trace sur le papier sensible une série de traits noirs parallèles équidistants présentant le même intervalle que les fentes du cylindre accolé à l'archet : ces bandes me servent d'échelle de comparaison.

Ensuite, je fixe à l'oscillateur son fil d'acier, je produis les oscillations et je donne la lumière pendant l'aller. On comprend que, lorsque l'oscillateur va un peu moins vite que l'archet, les traits sur la bande de papier sensible sont un peu plus rapprochés que sur les échelles précédentes et qu'ils sont, au contraire, un peu plus écartés si l'oscillateur dépasse l'archet.

Par ce moyen j'ai constaté très nettement que, dans les conditions prévues, l'oscillateur dépasse légèrement l'archet et qu'ensuite il y a adhérence pendant un certain temps.

J'ai aussi vérifié que, au contraire, dans les conditions correspondant à la première subdivision, il y a plus ou moins longuement adhérence sans que l'oscillateur dépasse l'archet.

DEUXIÈME PARTIE.

VIBRATIONS DES CORDES AU MOYEN DE L'ARCHET.

Travaux d'Helmholtz.

25. Helmholtz marquait un point blanc sur une corde de violon et l'examinait à travers un microscope animé d'un mouvement sinusoïdal, généralement de même période, parallèle à la position d'équilibre de la corde. La courbe résultant de la composition des deux mouvements rectangulaires lui apprit que, à quelques détails près, chaque point se déplace avec des vitesses constantes à l'aller et au retour, différentes entre elles, sauf pour le point milieu.

Il en déduisit la forme de la corde à chaque instant, celle du fuseau et la relation entre les vitesses des différents points.

Il ne s'est pas occupé de la question de l'entretien.

CHAPITRE X.

Description de mon appareil.

26. Il restait à vérifier expérimentalement ces conclusions et à étudier ce que le procédé insuffisant d'Helmholtz ne lui avait pas permis de découvrir.

Pour y arriver, il fallait d'abord entretenir d'une façon permanente un mouvement vibratoire très régulier.

A cette fin, je fais vibrer la corde AB (*fig. 18*) au moyen d'un archet tournant constitué par un grand disque vertical en ébonite D, de 50^{cm} de diamètre et 3^{mm} d'épaisseur, mobile autour de son axe EF et dont le bord est très

soigneusement tourné et colophané. L'axe EF et la corde AB sont parallèles dans un même plan horizontal, donc celle-ci vibre dans un plan vertical. Les coussinets de l'archet sont mobiles de telle sorte que l'on peut le

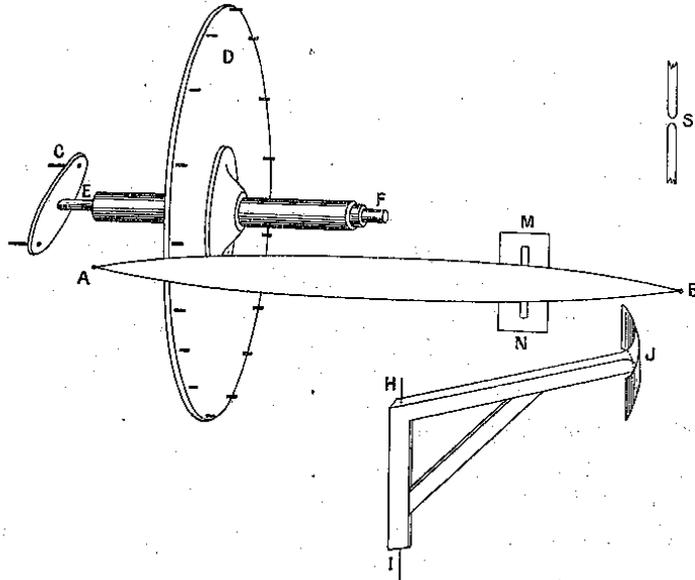


Fig. 18.

déplacer horizontalement dans son plan pour faire varier sa pression sur la corde où l'en écarter complètement. Le mouvement de rotation uniforme lui est transmis par l'intermédiaire d'un cardan C qui permet ces déplacements et évite les réactions nuisibles qu'une courroie produirait sur l'axe.

La corde est tendue avec des poids par l'intermédiaire d'une poulie. Ses extrémités s'appuient sur deux chevalets qui, suivant les circonstances, sont en bois, plus ou moins légers, fixés quelquefois à une caisse de résonance, ou bien en plomb massif, de 1^{kg} environ, lorsque je veux qu'ils ne vibrent pas pour conserver plus pur le mouvement de la corde.

J'ai fait des expériences très variées, employant des cordes de différentes grosseurs, depuis le *la* du violon jusqu'au *sol* de contrebasse, et de différentes natures : cordes en boyau, cordes roulées ou cordes métalliques, soit en acier, soit en laiton. Les longueurs variaient entre 10^{cm} et 450^{cm}, les amplitudes entre 0^{cm} et 10^{cm}, les fréquences entre 15 et 1100; la vitesse progressivement réglable de l'archet atteignait jusqu'à 15^m par seconde.

27. *Dispositif pour photographier le mouvement, en fonction du temps, d'un point P de la corde.* — Un écran MN muni d'une fente verticale de 1^{mm} de largeur est disposé à 2^{mm} de la corde parallèlement à son plan de vibration. En face de cette fente et à 50^{cm}, un arc électrique S est enfermé dans une chambre noire qui ne laisse passer que la lumière tombant sur l'écran. De l'autre côté de la corde se trouve un appareil HIJ en forme de potence mobile autour de son axe vertical HI, et dont la branche horizontale porte l'écran cylindrique J sur lequel est appliqué un papier photographique très sensible et qui, dans la rotation, vient passer à 2^{mm} de la corde en face de la fente. Je lance l'écran plus ou moins vivement au moyen d'un ressort; il passe rapidement devant la fente, et l'ombre mobile de la corde trace en blanc, sur le papier, le mouvement du point P en fonction du temps. L'écran bute ensuite contre une lame élastique qui amortit le choc et s'accroche automatiquement pour éviter de revenir en arrière.

Comme mon arc électrique est actionné par un courant alternatif de fréquence 50, les charbons augmentent d'éclat tous les $\frac{1}{100}$ de seconde, et il en résulte que les graphiques sont rayés de franges verticales sombres dont la distance horizontale représente $\frac{1}{100}$ de seconde : c'est un moyen très commode de mesurer approximativement le temps et par suite la fréquence.

Ces graphiques ont 24^{cm} de longueur sur 1^{cm} à 6^{cm} de largeur utile. Ils sont lancés à la vitesse de 150^{cm} à 350^{cm} par seconde et contiennent de 2 à 12 vibrations de fréquence 15 à 150.

Lorsqu'il s'agit du point de la corde saisi par l'archet, j'emploie, à la place de l'écran MN, un écran spécial tel que l'un des bords de la fente soit constitué par la face même du disque. De plus, j'ai fixé sur cette face, à 1^{mm} du bord, des petites pointes métalliques de 1^{mm} de diamètre et 3^{mm} de longueur. Pendant le mouvement, elles passent à 1^{mm} de la corde et tracent, sur le graphique, des droites parallèles dont la pente indique la vitesse de l'archet.

28. *Dispositif pour obtenir des instantanés de la corde en vraie grandeur.* — Je fais jaillir une forte étincelle électrique en face du milieu de la corde et au même niveau, à 130^{cm} de distance. Elle est produite par une machine de Wimshurst avec une batterie de six grosses jarres. A 4^{mm} de l'autre côté de la corde, c'est-à-dire du côté de l'archet, deux bandes de papier très sensible sont fixées parallèlement au fuseau vibratoire, de part et d'autre du disque. Un fil témoin qui ne touche pas à l'archet et ne vibre pas est tendu un peu au-dessus de la corde.

Si fine soit celle-ci et si rapide soit son mouvement, l'ombre sur le papier photographique donne une ligne blanche aussi nette apparemment que celle du fil témoin, car on sait que ces étincelles électriques durent moins de 10⁻⁶ seconde.

Je colle ces bandes sur de grandes feuilles de papier en les ajustant d'après le tracé rectiligne du fil témoin.

Naturellement, la corde est photographiée au hasard dans n'importe quelle phase de son mouvement.

J'ai fait des instantanés de 10^{cm} à 80^{cm} de longueur, les fréquences variant de 100 à 1100.

CHAPITRE XI.

Étude superficielle du mouvement le plus général.

29. *Premières expériences.* — Dès que l'archet en mouvement vient frotter la corde, celle-ci entre en vibration. L'amplitude augmente avec la vitesse de l'archet; en général la pression n'influe pas apparemment.

Le mouvement de la corde est parfaitement plan, car, en plaçant l'œil verticalement au-dessus, on croit la voir immobile.

Il est aussi très régulier, car il produit aisément des battements avec un tuyau d'orgue.

Quelle que soit la pression, la corde ne perd pas contact avec l'archet car, en plaçant une large source lumineuse au-dessous du point de frottement et en regardant au-dessus à travers un trou dans un écran destiné à protéger l'œil contre les rayons passant à côté, je n'ai jamais pu voir filtrer de la lumière entre la corde et l'archet.

Les graphiques du mouvement des différents points sont formés de lignes droites et ont en général la forme indiquée sur la figure 19; ils confirment ce que dit Helm-

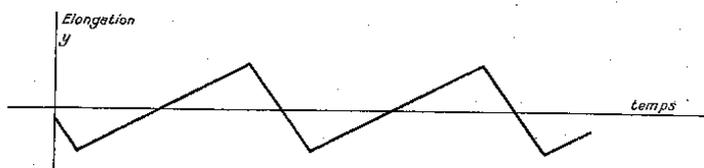


Fig. 19.

holtz : chaque point de la corde est animé d'un mouvement uniforme à l'aller et au retour avec des vitesses inégales sauf pour le point milieu.

Une expérience citée dans le Cours de M. Bouasse et que j'ai répétée conduit aux mêmes conclusions : on fait vibrer avec un archet et dans leur plan commun deux

cordes rectangulaires de même période. En réalité, elles ne se touchent pas tout à fait. On noircit les parties voisines de l'intersection et, en les regardant devant un papier blanc, l'œil voit, en traits pâles sur fond sombre, le lieu des points d'intersection qui est, en général, un quadrilatère (un parallélogramme si les cordes se coupent en leur milieu) et non une ellipse comme avec des mouvements sinusoïdaux.

Dans les graphiques du point de frottement, les droites tracées par les pointes du bord de l'archet sont rigoureusement parallèles aux côtés les moins penchés de la vibration (fig. 20), donc la vitesse linéaire de l'archet est égale

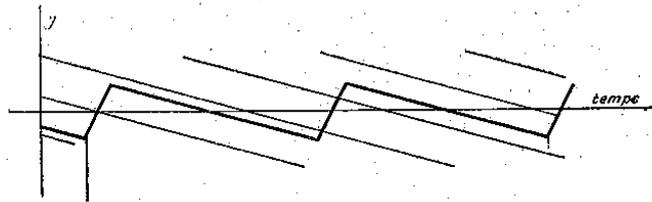


Fig. 20.

à la plus petite des deux vitesses de ce point qui, par suite, adhère à l'archet pendant la plus grande partie de la vibration (l'aller), comme le supposait Helmholtz, puis revient plus rapidement en arrière pour être repris par un autre point de l'archet, et ainsi de suite.

30. *Conséquences théoriques et vérifications expérimentales.* — Helmholtz a établi, par une méthode d'ailleurs assez compliquée et que je ne suivrai pas, la plupart de ces premières conséquences; il ne les a pas vérifiées expérimentalement.

Forme de la corde. — Je suppose que, malgré l'action de l'archet, l'équation générale des cordes vibrant libre-

ment,

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mathfrak{C} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

où \mathfrak{C} est la tension, m la masse de l'unité de longueur, y l'élongation et x l'abscisse, s'applique encore à peu près. En effet, lorsqu'on empêche la corde de vibrer, le frottement de l'archet produit un déplacement permanent très petit en comparaison de l'amplitude des vibrations.

Le présent Chapitre constitue donc une intéressante vérification de cette équation dans un cas particulier curieux.

Chaque point de la corde ayant une vitesse constante, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ est toujours nul pour lui, sauf à l'instant où son mouvement change de sens. Soit S (fig. 21) la position d'un

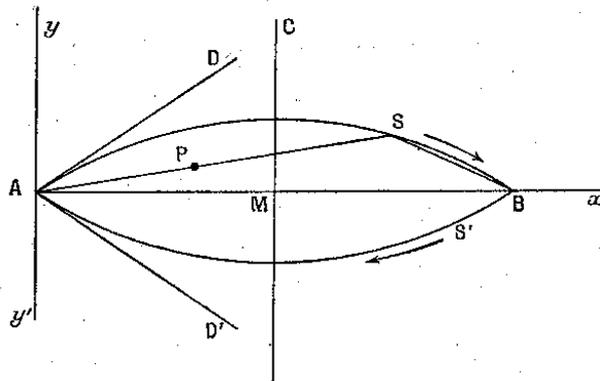


Fig. 21.

point se trouvant dans ce cas. Il est évident que toutes les parties de la corde ne peuvent pas changer ainsi brusquement de vitesse et prendre une accélération infinie au même instant. Le plus simple est de supposer que, à un moment donné, le seul point S est dans ce cas. Alors, d'après l'équation générale, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ est nul tout le long

de la corde, sauf en S, c'est-à-dire que la corde est entièrement rectiligne excepté en ce point. Sa forme générale est donc celle de la ligne brisée ASB. Le sommet S ne peut être d'abscisse constante, sans quoi toutes les parties de la corde changeraient de vitesse au même instant. Il se déplace sur la courbe ASBS'A limitant le fuseau que l'œil perçoit. J'admets, d'après l'expérience, que les droites $AB = l$ et MC perpendiculaire en son milieu sont les axes de symétrie de cette courbe.

31. *Mouvement de la corde et forme du fuseau.* — Je suppose que le sommet S tourne dans le sens marqué et je mesure le temps à partir du moment où il était en A. Soit AD la tangente au fuseau et $\text{tang BAD} = a$.

Pour tout point P de la portion AS, y décroît proportionnellement au temps, de telle sorte que je puis écrire l'équation suivante valable tant que S se trouve entre P et B :

$$(13) \quad \frac{y}{x} = \text{tang BAS} = a - ht,$$

où h est une constante telle que pour $t = \frac{T}{2}$ (S est en B)

$$(14) \quad \text{tang BAS} = a - h \frac{T}{2} = 0, \quad h \frac{T}{2} = a.$$

De même, sur la portion BS,

$$\frac{y}{l-x} = \text{tang ABS} = h't.$$

Mais, pour $t = \frac{T}{2}$ on doit avoir $\text{tang ABS} = a$, donc $h' = h$ et

$$(15) \quad \frac{y}{l-x} = \text{tang ABS} = ht.$$

Les deux équations (13) et (15) s'appliquent au sommet S (X, Y) qui est à la fois sur les deux portions de

corde. En éliminant t entre elles, il vient

$$(16) \quad Y = \frac{a}{l}(lX - X^2).$$

Cette parabole est la courbe ASB.

En faisant $X = \frac{l}{2}$, on trouve que la largeur E du fuseau en son milieu est

$$(17) \quad E = \frac{al}{2}.$$

Les mêmes équations (13) et (15) donnent encore

$$X(a - ht) = (l - X)ht,$$

d'où

$$X = \frac{lh}{a}t = 2l \frac{t}{T}.$$

Donc, on aura le mouvement de la corde en faisant tourner le sommet S sur les deux arcs de parabole qui limitent le fuseau, de telle sorte que sa projection parcourt AB puis BA d'un mouvement uniforme pendant la période T .

Nous vérifions ainsi, dans ce cas particulier, ce que l'on démontre en Mécanique : Toute discontinuité sur une corde vibrante se propage à la même vitesse qu'une onde ordinaire.

32. *Vérifications expérimentales.* — Les instantanés ont très nettement la forme d'une ligne brisée ASB dans laquelle le sommet se trouve en n'importe quelle portion de la corde. Il est toujours un peu arrondi et d'autant plus que celle-ci est plus raide et plus courte. Les deux parties de part et d'autre de l'archet ne sont pas exactement en ligne droite : elles présentent toujours une petite déviation due au frottement, de telle sorte que la position moyenne pendant le mouvement n'est pas exactement

la position d'équilibre AB. Le mouvement général de la corde n'en est d'ailleurs pas sensiblement troublé.

Pour vérifier la forme parabolique du fuseau j'ai fait plusieurs expériences très concluantes; en voici une en détail : Une corde en boyau de 200^{cm} de longueur vibrait de telle sorte que le fuseau mesurait 40^{mm} de largeur au milieu. L'archet était au $\frac{1}{12}$: dans cette position, sa pression n'influe pas sur l'amplitude. J'ai calculé la largeur théorique au $\frac{1}{6}$ et au $\frac{1}{9}$, premièrement en supposant le fuseau sinusoïdal, secondement en le supposant parabolique, puis j'ai fait la mesure aussi exactement que possible en marquant un point blanc sur la corde. Le Tableau ci-dessous donne les résultats :

	Largeurs		
	au milieu.	au $\frac{1}{6}$.	au $\frac{1}{9}$.
Fuseau sinusoïdal.....	40 ^{mm}	20	13,68
» parabolique.....	40	22,22	15,80
» réel.....	40	22,8	15,9

J'ai fait la mesure au $\frac{1}{6}$ et au $\frac{1}{9}$ de la corde pour les raisons suivantes : 1^o la différence entre les deux fuseaux est maxima dans cette région; 2^o le fuseau réel n'est pas exactement parabolique, comme nous le verrons plus loin, mais, l'archet étant au $\frac{1}{12}$, ses dimensions ne s'en ressentent pas à tous les $\frac{1}{12}$ de la corde.

Remarquons que le fuseau parabolique est moins effilé que le fuseau sinusoïdal de même largeur au milieu : les tangentes des demi-angles aux extrémités sont dans le rapport $\frac{4}{\pi}$.

33. *Vitesse relative des différents points.* — Lorsque le point P (x, y) se trouve sur la droite AS, il descend et sa vitesse est, d'après l'équation (13), hx en valeur absolue. Lorsqu'il se trouve sur BS, il monte et sa vitesse est, d'après (15), $h(l - x)$.

Ainsi les deux vitesses de chaque point sont proportionnelles à ses distances aux chevalets et leur somme hl est constante tout le long de la corde. Au milieu, elles sont égales entre elles; soit V_1 leur valeur commune: tout près d'un chevalet, l'une tend vers $2V_1$, l'autre vers zéro.

Dans la figure 21 les grandes vitesses sont en montant, pour la moitié AM, en descendant pour la moitié BM.

Deux points équidistants des chevalets ont les deux mêmes vitesses, mais disposées en sens inverse.

Les durées de l'aller et du retour d'un point P sont inversement proportionnelles à ses vitesses et, par suite, proportionnelles aux deux segments (comptés comme il convient) qu'il détermine sur la corde.

34. *Vérifications expérimentales.* — Lorsque le sommet S tourne comme sur la figure 21, c'est-à-dire lorsque l'archet placé, par exemple, entre A et M, descend (sens de la plus petite vitesse), les graphiques du mouvement des différents points, en allant de A vers B, ont la forme indiquée sur la figure 22. J'ai fait une trentaine de ces graphiques avec des cordes de différentes espèces et dans toutes sortes de positions depuis $\frac{1}{20}$. On y voit que les longueurs α et β mesurant le temps sont entre elles comme les segments correspondants de la corde, ce qui démontre la loi ci-dessus. Ainsi au $\frac{1}{10}$ de la corde, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{9}$.

Lorsqu'on renverse le mouvement de l'archet, les deux vitesses de chaque point sont interverties et, par suite, le sens de rotation du sommet S est aussi renversé.

Voici une autre vérification très curieuse de ce mouvement: J'approche d'un point quelconque de la corde une sorte de second archet tournant disposé comme le premier: c'est un grand disque en ébonite très mobile autour de son axe qui est parallèle à la corde et au même niveau. Dès que le bord de ce disque (non colophané)

vient à frotter légèrement la corde en vibration, il se met à tourner.

En effet, les impulsions élémentaires qu'il reçoit successivement dans les deux sens par le frottement (supposé constant) ne sont pas égales en durée et le disque est

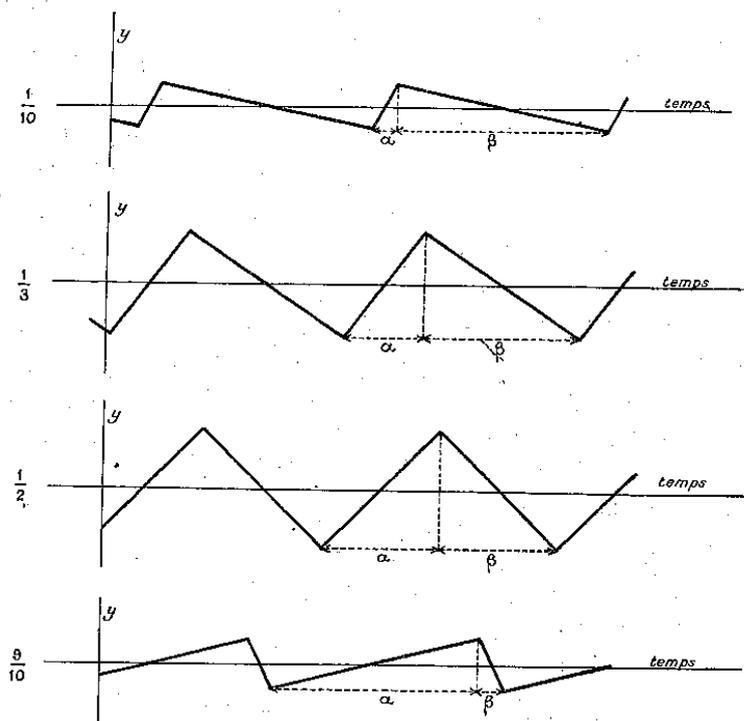


Fig. 22.

entraîné dans le sens de la plus longue, c'est-à-dire dans le sens de la plus petite vitesse. (L'expérience réussit *a fortiori* lorsque le disque est colophané.) Son mouvement s'accélère donc jusqu'à ce qu'il égale cette vitesse. On voit qu'il ne peut la dépasser, puisqu'alors les deux impulsions le retarderaient.

Lorsque le disque et l'archet sont sur la même moitié

de corde, leurs mouvements ont même sens, sinon ils sont opposés.

Quand le disque s'éloigne d'un chevalet, son mouvement s'accélère puisque la plus petite des deux vitesses est proportionnelle à la distance au chevalet le plus proche. L'expérience ne réussit évidemment pas au milieu de la corde ni même dans son voisinage.

Avec une corde de 100^{cm}, l'archet à 20^{cm} d'un chevalet, j'ai mesuré les vitesses du disque placé successivement à 10^{cm}, 20^{cm} et 40^{cm} de l'autre chevalet. Elles seraient théoriquement $\frac{V}{2}$, V , $2V$. J'ai trouvé

$$\frac{V}{2}, \quad V \times \frac{9}{10}, \quad 2V \times \frac{6}{7}.$$

L'expérience est délicate car, si j'appuie peu, la force d'entraînement est trop faible et, si j'appuie fort, je trouble ou même j'arrête le mouvement vibratoire.

33. *Relation entre la largeur du fuseau, la vitesse et la position de l'archet.* — L'archet est au $\left(\frac{1}{n}\right)^{\text{ième}}$ de la corde ($n > 2$) et sa vitesse linéaire est V .

Les vitesses du point qu'il frotte sont, d'après ce que nous avons vu au n° 33, V et $(n - 1)V$.

Soit e la largeur du fuseau sous l'archet, E au milieu. Pendant la période T , l'espace e est parcouru une fois avec chacune de ces vitesses, d'où

$$T = \frac{e}{V} + \frac{e}{(n-1)V}.$$

D'ailleurs, la forme parabolique du fuseau entraîne

$$e = 4E \frac{n-1}{n^2}.$$

En éliminant e entre les deux équations, il vient

$$(18) \quad E = \frac{1}{4} VTn.$$

Donc l'amplitude, au milieu de la corde et, par suite, en tous les points, est proportionnelle, en particulier, à la vitesse de l'archet. Elle ne dépend pas de la pression.

Avec une corde en boyau de 200^{cm}, l'archet faisant successivement 10 tours en 28^{sec},4, puis en 46^{sec},7 j'ai trouvé pour E les valeurs 38^{mm},7 et 24^{mm}. Il y a proportionnalité à $\frac{1}{60}$ près.

Avec la même corde, en plaçant l'archet au $\frac{1}{12}$ puis au $\frac{1}{6}$, E diminuait de 44,5 à 22,6.

Lorsqu'on augmente la tension pendant que la corde vibre, T diminue et le fuseau s'aplatit.

J'ai souvent mesuré la période de mes cordes en m'appuyant sur la formule (18) et je trouvais toujours sensiblement le même résultat qu'en utilisant la formule générale $(T = 2l\sqrt{\frac{m}{g}})$ ou en mesurant le temps sur mes graphiques (n° 27) ou en produisant des battements avec un tuyau d'orgue de hauteur connue.

36. *Réactions sur les chevalets.* — Je n'ai pas vu que Helmholtz se soit occupé de cette question.

Il résulte du mouvement général de la corde, et en particulier des formules (13) et (15) que, à partir du moment où le sommet S (*fig.* 21) est passé en A ($t = 0$), l'angle BAS , supposé toujours petit, décroît proportionnellement au temps, de sorte que la direction AS baisse régulièrement pendant une période entière, depuis AD ($t = 0$) jusqu'à AD' ($t = T$). A ce moment, elle revient instantanément suivant AD , et ainsi de suite.

Le plan de vibration étant vertical, la composante verticale de la pression que la corde exerce en A et que

j'appelle simplement la *réaction* sur le chevalet varie de la même manière. Elle augmente (dans le sens Ay'), proportionnellement au temps, de la valeur $\mathfrak{E} \times \widehat{DAD'}$ pendant une période entière à la fin de laquelle elle diminue instantanément de la même quantité.

$\mathfrak{E} \times DAD' = \mathfrak{E} \times 2a$, ce qui fait, d'après la formule (17), $\frac{4\mathfrak{E}E}{l}$. Avec une corde de 40^{cm} tendue de 10^{kg} et formant un fuseau de 1^{cm}, les impulsions sont de 1^{kg}.

C'est donc par impulsions instantanées que la corde du violon agit sur le chevalet et par lui sur la caisse; ces sortes de chocs la mettent en vibration comme ceux d'un marteau sur une cloche et lui laissent son mouvement propre tout en lui imposant la fréquence de la corde. Ceci explique l'influence si grande de la caisse sur la qualité du timbre.

Sur le chevalet voisin de l'archet, les impulsions sont de sens contraire à son mouvement; elles sont de même sens sur l'autre.

37. *Vérifications expérimentales.* — Le chevalet schématiquement représenté en projection verticale de grandeur naturelle (fig. 23) est constitué par une petite pièce de bois B pesant environ 4^g, très mobile autour d'un axe O parallèle à la corde C (tous deux perpendiculaires au plan de la figure) et au même niveau. Elle est traversée solidairement par une tige d'acier R de même direction, fixée à ses extrémités et qui forme ressort. Enfin elle porte, à un bout, le petit crochet D sur lequel s'appuie la corde et, à l'autre, le miroir M argenté extérieurement qui donne, à 70^{cm}, une image réelle d'un arc électrique placé presque en face à 50^{cm} et muni d'un diaphragme percé d'un trou de 1^{mm} à peine.

Lorsque la corde est en mouvement, ses réactions verticales sur le crochet D font osciller tout le système DM

autour de l'axe horizontal O, de sorte que l'image I vibre verticalement. Ses déplacements atteignent 40^{mm} , ceux du crochet D $0^{\text{mm}},4$ au maximum. Cette image est reçue normalement sur un papier photographique lancé horizon-

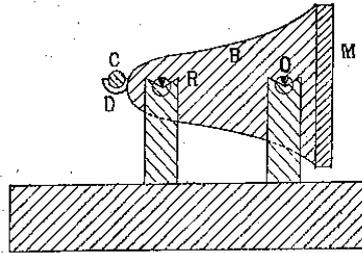


Fig. 23.

talement au moyen de l'appareil HIJ (*fig. 18*) déjà décrit.

La fréquence propre de ce chevalet, réglable au moyen de ressorts additionnels, est en moyenne 400. Je fais en sorte que celle de la corde soit 12 fois au moins plus petite.

Les graphiques sont représentés sur la figure 24. Lorsque

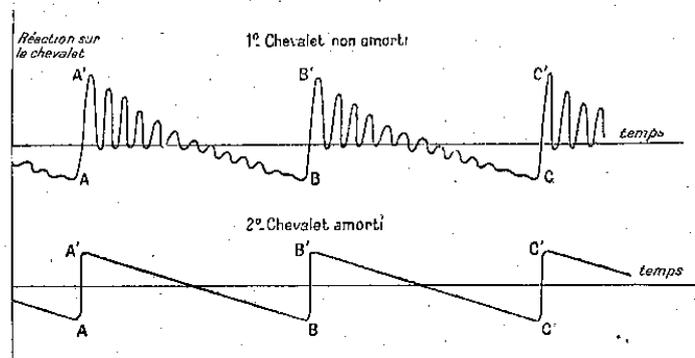


Fig. 24.

le mouvement du miroir n'est pas amorti, les impulsions en AA', BB', CC' dirigées vers le haut lancent le chevalet dont on voit les oscillations propres qui diminuent ensuite

progressivement. Comme elles sont beaucoup plus rapides que celles de la corde, la ligne moyenne donne très sensiblement les variations de la réaction sur le crochet D. Je puis d'ailleurs les amortir convenablement avec de la cire molle; les graphiques prennent alors la seconde forme indiquée sur la figure 24. Les angles sont toujours plus ou moins arrondis, les lignes A'B, B'C, etc. quelque peu sinueuses, les lignes AA', BB', CC', etc., légèrement obliques. Néanmoins, on voit qu'ils vérifient très bien la théorie.

CHAPITRE XII.

Mécanisme de l'entretien.

38. Nous connaissons maintenant suffisamment ce genre de mouvement pour expliquer aisément, au moyen des principes établis dans la première Partie de cette étude, le mécanisme de l'entretien. Il ne faudrait pas croire que les archets ordinaires en crin peuvent fonctionner d'une manière toute différente du mien, puisque j'ai vérifié, avec mon appareil, tous les résultats que Helmholtz a obtenus avec des archets usuels.

La pression de l'archet sur la corde supposée en repos est égale à $C\delta$, δ étant la déviation qu'il produit dans cette position. On démontrerait aisément que, pendant le mouvement, la composante normale à l'archet garderait constamment la même valeur si ce dernier était rectiligne. J'admets qu'en réalité cette pression normale est sensiblement constante pendant une vibration. D'ailleurs, s'il en était autrement, on ne manquerait pas de voir, aux faibles pressions, la corde quitter l'archet, ce qui n'a jamais lieu (n° 29).

Portons, sur un axe horizontal Oy (*fig. 25*), les élongations d'amplitude OC du point P saisi par l'archet, comptées positivement dans le sens de son mouvement.

Mesurons, sur l'axe vertical, le frottement appliqué

à ce point, compté positivement dans le même sens.

Ses deux vitesses sont, d'après les formules (13) et (15), hx et $h(l-x)$.

Nous avons vu que la plus petite hx est égale à celle

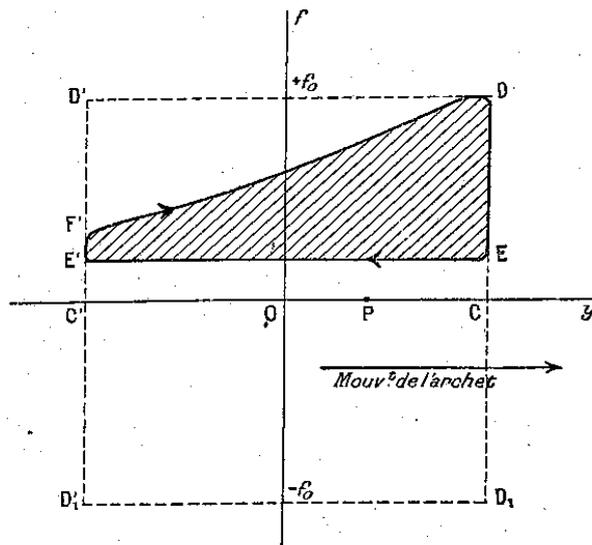


Fig. 25.

de l'archet V et de même sens OC . La vitesse relative pendant le retour est donc hl . Le frottement prend alors, le long de EE' , la valeur constante $f = f_0 \frac{B}{B + hl}$ d'après la formule (1).

Pendant l'aller $C'C$, comme il y a adhérence, le frottement peut prendre n'importe quelle valeur entre $+f_0$ et $-f_0$, sauf à la fin, au moment où le point P , arrivé en C , va rompre l'adhérence pour revenir en arrière : le frottement est, à cet instant, $+f_0$.

Supposons qu'il décrive la ligne $F'D$. L'aire $EE'F'D$ représente le travail moteur fourni par l'archet à la corde et dont le rôle est de compenser tous les amortissements qui s'opposent à son mouvement.

39. *Pression minima.* — Diminuons progressivement la pression de l'archet. Nous savons que le mouvement de la corde n'en est pas sensiblement modifié, donc les amortissements restent les mêmes et, par suite, le travail moteur du frottement ne doit pas varier. Or, le rectangle $EE' D' D$ diminue. Il a, en effet, pour mesure

$$R = 2 OC \left(f_0 - f_0 \frac{B}{B + hl} \right) = 2 OC \times f_0 \frac{hl}{B + hl}$$

et, dans le cas actuel, tout reste constant sauf f_0 qui décroît avec la pression. Nous sommes donc conduits à admettre que l'aire constante $EE' F' D$ finira par remplir entièrement le rectangle décroissant $EE' D' D$, le côté $F' D$ se confondant avec $D' D$. La figure 26 correspond à ce

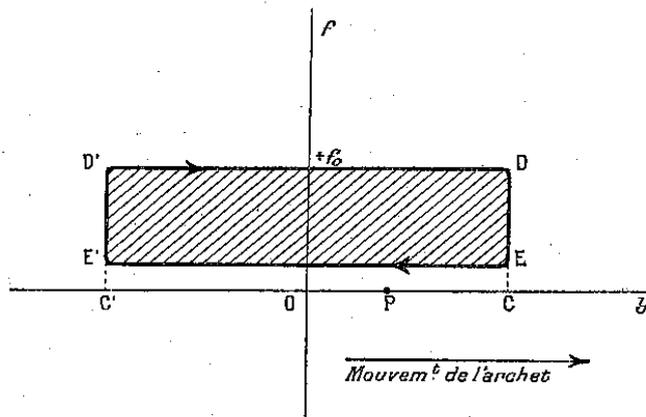


Fig. 26.

cas limite; la pression est alors minima. Si l'on continuait à la diminuer, le travail moteur deviendrait trop petit et la vibration se troublerait.

Si, tout en maintenant la pression minima, on augmente la vitesse de l'archet, l'expérience montre que la vibration se trouble encore et n'est plus normalement entretenue. En effet, l'amplitude OC est proportionnelle à V ;

h aussi, puisque $V = hx$, donc R croît moins vite que V^2 , tandis que le travail d'amortissement croît comme V^3 si nous admettons que, dans ces mouvements rapides, les forces résistantes dues surtout à l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse et, par suite, de l'amplitude.

40. *Effets des fortes pressions.* — Revenons au cas de la figure 26 (pression minima). Augmentons considérablement la pression. Le travail moteur du frottement demeurant constant, le graphique doit prendre approximativement la forme de la figure 27, c'est-à-dire que le frotte-

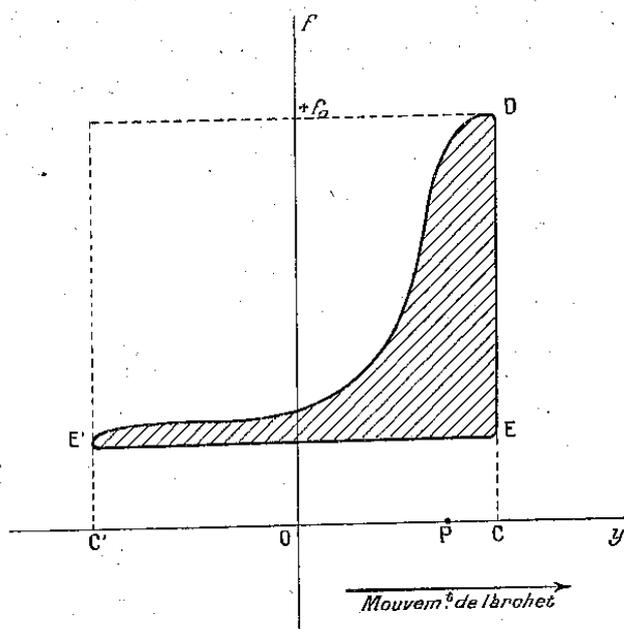


Fig. 27.

ment augmente rapidement (dans le sens du mouvement) avant la fin de l'aller et diminue instantanément au moment où va commencer le retour, c'est-à-dire au moment où le sommet S de la corde (*fig. 28*) passe sous

l'archet en se dirigeant vers le chevalet le plus proche A.

Cette brusque variation de frottement donne naissance à deux ondes qui se propagent en sens inverses sur la corde à la même vitesse que le sommet S et exercent sur les

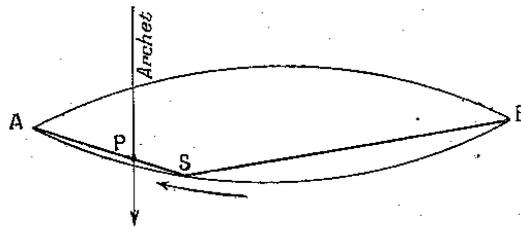


Fig. 28.

chevalets, en s'y réfléchissant, les mêmes forces qui leur ont donné naissance. L'une de ces ondes se dirige vers A, précédant immédiatement le sommet S, et l'on voit que son effet est d'augmenter la réaction sur ce chevalet.

Les graphiques confirment cette théorie : ils ont la forme indiquée sur la figure 29 : les renflements B, B',

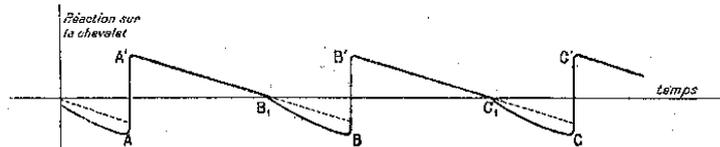


Fig. 29.

C, C' qui précèdent l'impulsion sont dus aux forces transmises par l'onde que la rapide variation de frottement a fait naître sous l'archet et qui précède le sommet S.

On voit qu'à l'autre chevalet les phénomènes sont plus complexes ; je n'insiste pas.

Cette théorie constitue une première explication de l'influence qu'a la pression sur l'intensité du son. Sa place était ici bien que je doive revoir plus loin cette question.

41. Remarquons que le mécanisme de l'entretien

exposé dans ce Chapitre pourrait s'expliquer en faisant intervenir seulement, conformément aux lois de Coulomb, le frottement au départ f_0 et un frottement plus petit f indépendant de la vitesse relative, sans qu'il soit nécessaire d'admettre la loi de variation progressive entre le frottement et la vitesse, loi établie dans la première Partie sur des mouvements lents, mais qui pourrait n'être plus vraie dans ces mouvements rapides. Aussi ai-je été heureux de produire, sous de faibles pressions et dans certaines positions de l'archet, des mouvements sinusoïdaux dans lesquels les graphiques du point sous l'archet montrent qu'à aucun moment il n'y a adhérence, la corde n'allant jamais aussi vite que l'archet. J'ai donc toutes raisons de conserver, pour les mouvements rapides, les lois de frottement établies au début de ce travail.

CHAPITRE XIII.

Représentation de ce mouvement par une série de Fourier.

42. Représentons le mouvement de la corde par une somme de mouvements sinusoïdaux suivant la série de Fourier :

$$y = \sum A_q \sin q \omega t + B_q \cos q \omega t.$$

Je suppose que le sommet S tourne dans le sens indiqué sur la figure 30.

Le point B, supposé en P₁ pour $t = 0$, monte avec la vitesse $v_1 = h(l-x)$ pendant le temps τ tel que $v_1 \tau = 2y_1$.

Il redescend ensuite avec la vitesse $v_2 = hx$ (en valeur absolue) pendant le temps $T - \tau$ tel que $v_2(T - \tau) = 2y_1$.

Il en résulte

$$(19) \quad \frac{\tau}{T} = \frac{x}{l}.$$

On a donc, de $t = 0$ à $t = \tau$,

$$y = -y_1 + v_1 t,$$

puis de $t = \tau$ à $t = T$,

$$y = y_1 - v_2(t - \tau).$$

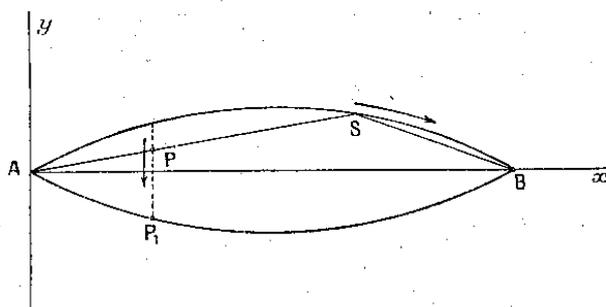


Fig. 30.

D'ailleurs, on sait que

$$A_q = \frac{2}{T} \int_0^T y \sin q \omega t dt,$$

$$A_q = \frac{2}{T} \left[\int_0^\tau (-y_1 + v_1 t) \sin q \omega t dt + \int_\tau^T [y_1 - v_2(t - \tau)] \sin q \omega t dt \right].$$

On trouve

$$A_q = \frac{v_1 + v_2}{2 q^2 \pi^2} T \sin q \omega \tau.$$

De même,

$$B_q = \frac{2}{T} \int_0^T y \cos q \omega t dt.$$

On trouve

$$B_q = -\frac{v_1 + v_2}{2 q^2 \pi^2} T (1 - \cos q \omega \tau).$$

D'où

$$y = \frac{v_1 + v_2}{\pi^2} T \sum \frac{1}{q^2} \sin q \omega \frac{\tau}{2} \sin q \omega \left(t - \frac{\tau}{2} \right).$$

Changeons l'origine des temps qui, dans cette expres-

sion, n'est pas la même pour tous les points; prenons l'instant où la corde est entièrement rectiligne et monte : le sommet S partant de A pour courir sur la parabole supérieure. Il suffit de remplacer $t - \frac{\tau}{2}$ par t .

De plus,

$$(\nu_1 + \nu_2)T = hlT = 2al = 4E$$

[d'après les formules (14) et (17)].

Alors,

$$y = \frac{4E}{\pi^2} \sum \frac{1}{q^2} \sin q \omega \frac{\tau}{2} \sin q \omega t.$$

Remplaçons, d'après d'après (19), τ par $T \frac{x}{l}$.

$$(20) \quad y = \frac{4E}{\pi^2} \sum \frac{1}{q^2} \sin q \pi \frac{x}{l} \sin q \omega t.$$

L'amplitude des différents harmoniques décroît comme le carré de leur numéro d'ordre.

Je rappelle une remarque très intéressante d'Helmholtz : on serait tenté de croire que cette décomposition du mouvement de la corde en mouvements sinusoidaux est un simple exercice de mathématiques et ne correspond à rien de réel; au contraire, l'oreille fait la même décomposition et peut, avec de l'habitude, saisir distinctement le son fondamental et les premiers harmoniques.

ÉTUDE APPROFONDIE.

43. Suivant la position, la pression et la vitesse de l'archet, le mouvement de la corde peut être très différent de celui que nous venons d'étudier et que j'appelle le *mouvement normal*. L'étude de ces influences n'a pas seulement pour but l'examen de cas particuliers curieux; elle permet encore d'expliquer leur action sur la force et le timbre du son.

Helmholtz a remarqué que les courbes de vibration des différents points de la corde présentaient généralement des dentelures plus ou moins fines et nombreuses, et il dit simplement et sans démonstration qu'elles proviennent le plus souvent de ce que les harmoniques qui ont un nœud sous l'archet ou dans le voisinage immédiat ne sortent que peu ou point sous son action. J'ai étudié théoriquement cette question, puis vérifié expérimentalement les conclusions très curieuses quant au mouvement de chaque point, à la forme du fuseau et à celle de la corde.

CHAPITRE XIV.

L'archet est à $\frac{l}{p}$ (p entier) du chevalet voisin.

44. Je suppose donc que les harmoniques ayant un nœud sous l'archet, c'est-à-dire ceux d'ordre p , $2p$, $3p$, ... sont supprimés. Séparons-les du mouvement normal y [formule (20)] et représentons leur somme par y' : le mouvement réel sera $y - y'$.

$$y' = \frac{4E}{\pi^2} \left[\frac{1}{p^2} \sin p\pi \frac{x}{l} \sin p\omega t + \frac{1}{(2p)^2} \sin 2p\pi \frac{x}{l} \sin 2p\omega t + \dots \right],$$

$$y' = \frac{4}{\pi^2} \frac{E}{p^2} \sum \frac{1}{q^2} \sin q\pi \frac{x}{\left(\frac{l}{p}\right)} \sin q(p\omega)t.$$

En comparant avec la formule (20), on voit que, pour $x < \frac{l}{p}$, c'est-à-dire dans le segment AD_1 (fig. 31), y' représente un mouvement identique au mouvement normal y et où, par conséquent, le sommet S' tourne dans le même sens que le sommet S et part du même point A pour $t = 0$.

La fréquence est pN et la largeur du fuseau $\frac{E}{p^2}$. Les sommets S et S' ont la même vitesse suivant Ox , puisque S' parcourt le fuseau de longueur $\frac{l}{p}$ à la fréquence pN ; ils ont donc même abscisse pour $x < \frac{l}{p}$.

De plus, les formules (14) et (17), $h = \frac{2a}{T}$ et $E = \frac{al}{2}$, montrent que h' (relatif à y') est égal à h . Il en résulte que la vitesse en descente est la même dans les deux

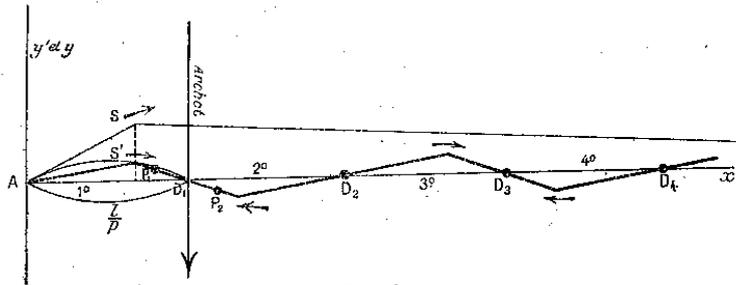


Fig. 31.

mouvements : hx . Ceci n'est plus vrai dans les segments intérieurs non adjacents aux chevalets.

Le mouvement y' est le même à chaque instant dans les 1^{er}, 3^e, 5^e, ... segments puisque y' reprend la même valeur lorsqu'on augmente x de $\frac{2l}{p}$.

En deux points tels que P_1 et P_2 équidistants de D_1 , y' prend constamment des valeurs opposées, ce qui conduit à la construction de la figure 31.

Le sens de rotation du sommet est le même dans tous les petits fuseaux et dans le grand.

43. *Mouvement d'un point de la corde.* — Je suppose

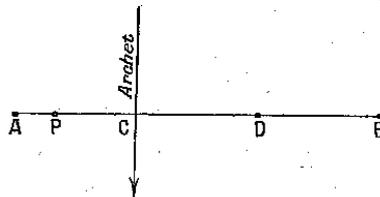


Fig. 32.

l'archet au $\frac{1}{3}$ ($p = 3$) et je considère un point P du premier segment (fig. 32) tout près de A (au $\frac{1}{9}$).

La figure 33 donne, en traits fins, les mouvements y et y' en fonction du temps. Les descentes sont représentées

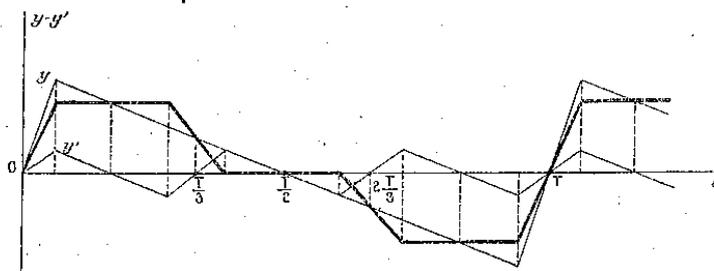


Fig. 33.

par des droites parallèles puisque les vitesses y sont égales. Il s'ensuit que, dans le mouvement réel ($y - y'$) indiqué en traits forts, on a trois paliers horizontaux pendant lesquels ce point reste immobile. Ils se raccourcissent jusqu'à zéro lorsque P se rapproche de C; le mouvement du point C ne se ressent naturellement pas de ces perturbations : c'est le mouvement normal d'un point au $\frac{1}{3}$.

Pendant ces arrêts de la corde sur le bord ou à l'intérieur du fuseau, l'œil la voit distinctement : il en résulte trois raies dont la netteté s'affaiblit à partir du chevalet et qui disparaissent en C.

C'est la même chose à l'autre bout de la corde.

Dans le segment CD (fig. 32), les graphiques de vibration sont semblables, mais il n'y a pas de paliers horizontaux parce que la vitesse de tout point dans le mouvement y est toujours plus grande que dans le mouvement y' . Il en résulte que l'on ne voit pas de raies.

En général, on voit, dans les deux segments extrêmes et dans ceux-là seulement, p raies dont la netteté décroît à partir du chevalet et qui disparaissent à la distance $\frac{l}{p}$.

Les tracés photographiques accusent nettement les

p paliers qui sont d'autant plus larges que le point est plus voisin du chevalet; on y voit aussi que les points de division de la corde en p segments égaux, et en particulier le point sous l'archet, ont toujours le mouvement normal.

46. *Forme du fuseau.* — J'appelle *fuseau* ce que l'œil perçoit de la corde vibrante : c'est la portion du plan où elle se meut.

Dans le cas actuel, le fuseau est un polygone de $2p$ côtés dont les sommets sont sur les paraboles du mouvement normal et ont pour projections les points de division de la corde en p segments égaux.

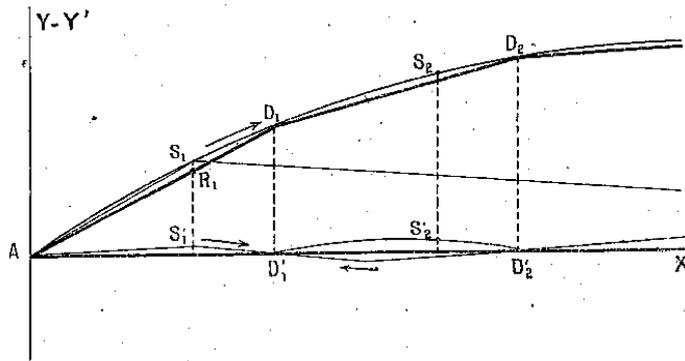


Fig. 34.

L'équation de la parabole AD_1D_2 (fig. 34) du mouvement normal est [(formule (16)]

$$Y = \frac{a}{l}(lX - X^2).$$

L'équation de la parabole $D'_1S'_2D'_2$ qui limite le fuseau de longueur $\frac{l}{p}$ et de largeur $\frac{E}{p^2}$ est donc, en appelant d l'abscisse OD'_1 ,

$$Y' = \frac{a}{l} \left[\frac{l}{p}(X - d) - (X - d)^2 \right].$$

On voit que $(Y - Y')$ ne contient plus de termes en X^2 et représente par conséquent la droite $D_1 D_2$.

Suivons maintenant le mouvement des sommets S et S' . Lorsque S parcourt l'arc AD_1 (position S_1), le sommet réel R , d'ordonnée $(Y - Y')$, parcourt la droite AD_1 (position R_1). Lorsque S parcourt l'arc $D_1 D_2$ (position S_2), S'_2 qui était sous la corde est passé au-dessus et a même abscisse que S_2 . Le sommet réel parcourt donc la droite $D_1 D_2$, et ainsi de suite. Il reste à montrer qu'un côté quelconque $AD_1, D_1 D_2, \dots$ parcouru par le sommet principal (la corde a d'autres points anguleux) n'est jamais ensuite traversé par la corde. Nous le comprendrons par l'exemple suivant.

47. *Cas de l'archet au $\frac{1}{3}$.* — Lorsque le sommet du mouvement normal est en S_1 (fig. 35), le sommet réel R_1 est

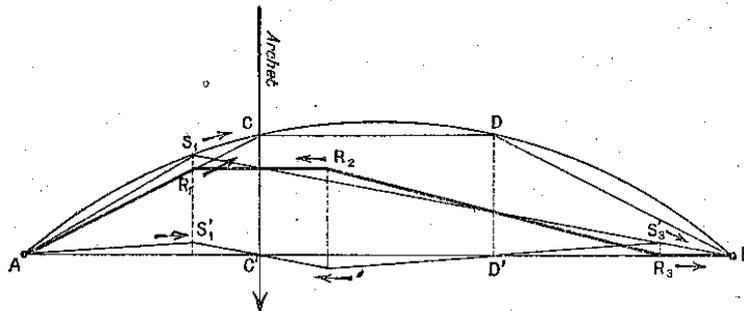


Fig. 35.

rejeté sur AC et court vers C . La portion AS_1 de la corde est tout entière appliquée sur AC et ne bouge plus pour l'instant, constituant une raie sur le bord du fuseau.

Pendant ce temps, l'autre extrémité de la corde est rejetée en BR_3 , car BS'_3 et BS_1 , qui doivent être parallèles se confondent ici. Tous les points de la portion BR_3 sont immobiles jusqu'au moment de la rencontre du sommet R_3 qui court vers B : BD' est une raie centrale du fuseau.

La portion $R_1 R_2$ est horizontale.

Lorsque le sommet S du mouvement normal est en S_2 (fig. 36), le sommet réel R_2 parcourt la droite CD

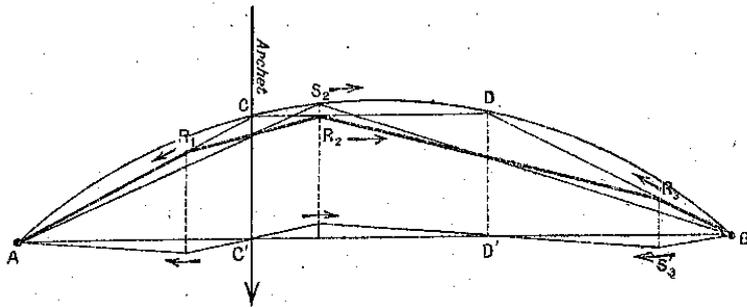


Fig. 36.

qui ne constitue pas une raie puisque la corde ne s'y arrête pas. Le sommet R_1 revient de C vers A , les différents points de AR_1 restant jusque-là immobiles puisque les vitesses en descente sont égales dans les mouvements y et y' .

A l'autre bout de la corde, le sommet R_3 s'éloigne de B et parcourt la droite BD en formant une raie. En effet, les points du segment BR_3 sont immobiles, car ici les vitesses en montée sont égales dans les deux mouvements y et y' . De plus, ce segment est constamment rectiligne puisqu'il résulte de la composition des deux droites BS'_3 et BS_2 ; enfin il passe par le point D puisque R_3 y arrivera en même temps que R_2 .

Ainsi de suite : lorsque S courra de D vers B , R_1 ira de A vers C' et R_3 de D vers B .

Les mêmes phénomènes se reproduiront ensuite au-dessous de AB .

Remarquons que le mouvement des points de division est constamment le mouvement normal y .

De plus, lorsque le sommet principal est en C ou D , la corde tout entière a la forme normale ACB , ADB .

La figure 37 donne l'aspect du fuseau.

J'ai vérifié expérimentalement tout ceci avec soin. Le fuseau, les instantanés de la corde, les photographies du mouvement des différents points et en particulier du point sous l'archet confirment parfaitement cette

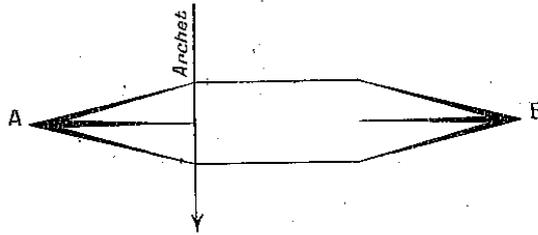


Fig. 37.

théorie. Néanmoins les angles sont toujours un peu arrondis.

J'ai fait aussi quelques vérifications expérimentales

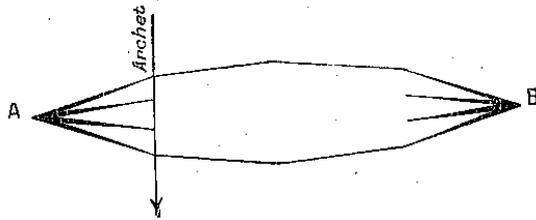


Fig. 38.

toujours très satisfaisantes avec l'archet au $\frac{1}{4}$ (fig. 38), au $\frac{1}{5}$, etc.

Plus l'archet s'approche du chevalet, plus ces particularités s'atténuent : lorsqu'il est au $\frac{1}{20}$ ou même au $\frac{1}{10}$ de la corde, le mouvement est sensiblement normal.

48. *Cas de l'archet au milieu ($p = 2$).* — Je me contente d'indiquer les constructions et les résultats : les raisonnements sont semblables aux précédents et même plus simples.

Le graphique du mouvement d'un point a deux paliers (fig. 39) qui se raccourcissent à mesure que ce point

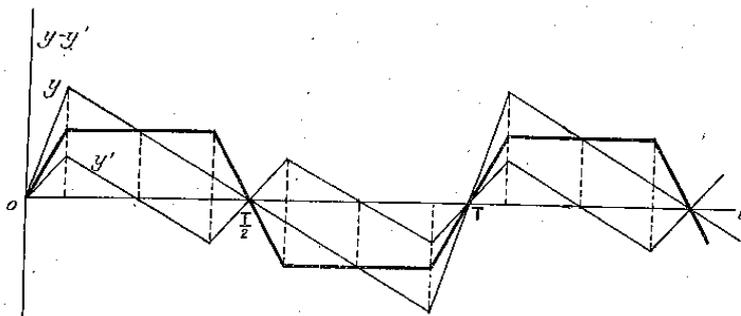


Fig. 39.

s'approche de l'archet et disparaissent dans cette dernière position : c'est alors le mouvement normal du milieu d'une corde.

Le fuseau est un losange dont les quatre côtés sont des raies (fig. 40).

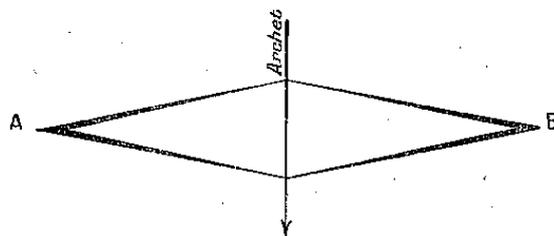


Fig. 40.

Enfin, la corde a, en général, la forme AR_1R_2B (fig. 41). Elle est immobile le long des segments AR_1 et BR_2 qui font partie des côtés du losange et constituent des raies. Le segment horizontal R_1R_2 monte, d'un mouvement uniforme, de C' en C , en se rétrécissant, pendant que AR_1 et BR_2 s'allongent; ensuite il redescend à la même vitesse jusqu'en C'' , puis remonte et ainsi de suite.

Il ne reste plus rien du sens de rotation du sommet

principal. Si l'on change le sens de l'archet, le mouvement n'en est pas modifié.

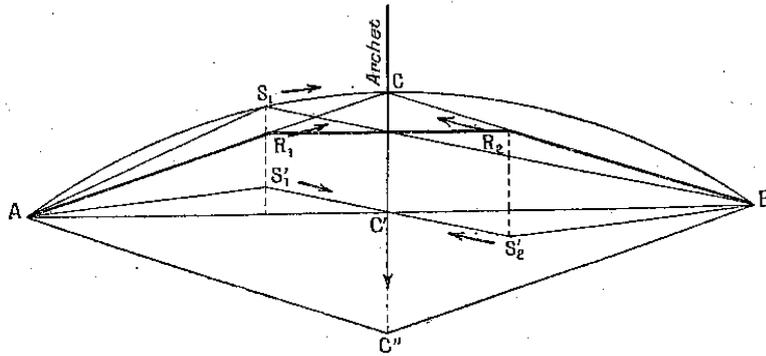


Fig. 41.

Remarquons que c'est le mouvement d'une corde pincée au milieu.

49. *Vérifications expérimentales.* — J'ai étudié minutieusement ce cas curieux, mais je fus gêné par une difficulté expérimentale : les vibrations n'étaient pas planes, le mouvement de chaque moitié de la corde, de part et d'autre de l'archet étant la résultante du mouvement de fréquence N , décrit ci-dessus (dans un plan vertical) et de vibrations de fréquences $2N$ dans un plan horizontal. Ces dernières sont dues aux impulsions horizontales que l'archet, à cause de sa courbure, donne au milieu de la corde : il y en a deux dans chaque sens par période T ; elles ont donc pour fréquence $2N$, c'est-à-dire la fréquence propre de chacune des deux demi-cordes et, par suite, elles les mettent aisément en vibration par résonance.

J'empêchais la production de ces vibrations horizontales, soit en plaçant verticalement des fils rigides tout près de la corde, soit en mettant l'archet un peu en dehors du milieu, soit en les amortissant par des étoupes de forme spéciale au voisinage des chevalets.

Alors, j'ai pu photographier le mouvement des différents points, faire des instantanés de la corde et vérifier ainsi toutes les conclusions ci-dessus.

Remarque : Cas où l'archet ne détermine pas une partie aliquote. — Nous venons d'étudier, dans ce Chapitre, le mouvement de la corde lorsque l'archet est à $\frac{l}{p}$ du chevalet; quand il n'est pas dans cette position le mouvement dépend essentiellement de la pression, de sorte que nous traiterons ce cas dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XV.

Influence de la pression sur le mouvement.

50. *L'archet est à $\frac{l}{p}$ (p entier) du chevalet voisin.* — Pour mesurer la pression j'accroche un petit dynamomètre à la corde, tout près de l'archet, et je tire pour l'en écarter jusqu'à ce qu'elle ne frotte plus ou à peine.

Je mesure l'amplitude des vibrations avec un compas, soit en marquant un point blanc sur la corde à l'endroit considéré, soit en visant les bords et en tenant compte du diamètre.

Lorsque l'archet détermine une partie aliquote de la corde, la pression peut varier dans de très larges limites sans influencer en rien sur l'amplitude. Ainsi, avec une certaine corde en boyau, l'archet étant au $\frac{1}{4}$, la pression pouvait baisser de 180^g à 30^g sans que l'amplitude du mouvement s'en ressentit.

Sous de trop fortes pressions, le mouvement se trouble comme aux très petites vitesses de l'archet. Sous de très faibles pressions, on voit, par les instantanés et les graphiques de vibration, que la corde, quelle que soit alors

la position de l'archet, tend à simplifier sa forme à arrondir ses angles et même à vibrer en sinusoïde lorsque l'archet n'est pas trop éloigné de son milieu. Dans ce dernier cas, les photographies du point sous l'archet montrent qu'il y a d'abord adhérence un instant, la vitesse de la corde au point de frottement égalant un moment celle de l'archet, mais que, sous de plus faibles pressions, l'amplitude du mouvement diminue et qu'il n'y a plus adhérence à aucun instant, la corde n'allant jamais aussi vite que l'archet.

Remarquons que ceci ne se produisait jamais avec les mouvements lents étudiés dans la première Partie (n° 12); c'est probablement parce que, dans ceux-ci, les forces d'amortissement étaient constantes ou proportionnelles à la vitesse, tandis que, dans les vibrations rapides des cordes, elles doivent augmenter proportionnellement à son carré.

C'est avec l'archet au milieu que j'obtiens le plus facilement des vibrations sinusoïdales : en diminuant la pression, je vois le fuseau en losange s'arrondir brusquement. L'amplitude au milieu diminue en même temps. En effet, soit, dans ce dernier cas, E_1 la largeur du fuseau, et par suite, $\frac{E_1}{2}$ l'amplitude du milieu de la corde. La vitesse maxima de ce point est $\frac{E_1}{2} \omega$. Si elle égale celle de l'archet, on a

$$\frac{E_1}{2} \omega = V, \quad E_1 = \frac{VT}{\pi}.$$

Sous forte pression (fuseau en losange), le point sous l'archet a le mouvement normal et, par conséquent, d'après la formule (18),

$$E = \frac{VT}{2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{E_1}{E} = \frac{2}{\pi}.$$

J'ai vérifié cette relation à $\frac{1}{10}$ près.

§1. *L'archet ne détermine pas une partie aliquote.* — Nous avons étudié en détail le mouvement lorsque l'archet est à $\frac{l}{p}$ (p entier) d'un chevalet. Lorsqu'il est placé à $\frac{2l}{p}$, $\frac{3l}{p}$, ..., on pourrait croire que les harmoniques supprimés seront les mêmes en général (sauf lorsqu'on peut simplifier la fraction) et que, par suite, le mouvement de la corde sera identique. En réalité, il est tout différent dans ses détails.

Helmholtz ne semble pas avoir établi cette distinction. Il écrit en outre : « Quant à ce qui se passe lorsque l'archet saisit la corde entre deux points de division aliquote, je n'ai pu le déterminer par l'expérience. »

Les phénomènes deviennent, en effet, très complexes; voici ce que j'ai réussi à en dégager.

Supposons, par exemple, que l'archet soit aux $\frac{2}{7}$. Le mouvement ne ressemble donc nullement, dans ses détails, à ce qu'il est avec l'archet au $\frac{1}{7}$, mais les deux parties aliquotes immédiatement voisines de $\frac{2}{7}$ étant $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$, le mouvement se rapproche, suivant la pression, de ceux que produit l'archet au $\frac{1}{3}$ et au $\frac{1}{4}$. Si l'archet est plus voisin du $\frac{1}{3}$, il est plus facile de reproduire le cas de l'archet au $\frac{1}{3}$. On voit que la position $\frac{2}{7}$ n'est pas une position remarquable comme $\frac{1}{4}$. Dans ce qui suit je suppose l'archet équidistant du $\frac{1}{3}$ et du $\frac{1}{4}$ (environ $\frac{2}{7}$).

Sous une vitesse donnée, il existe alors une pression faible pour laquelle on voit trois raies disposées comme si l'archet était au $\frac{1}{3}$; le fuseau prend assez nettement l'aspect correspondant, et le quotient des vitesses du point sous l'archet est à peine supérieur à 2 (2,2).

Il existe une pression forte pour laquelle on voit quatre raies; le fuseau ressemble à celui que produit l'archet au $\frac{1}{4}$ et le quotient des vitesses du point de frottement est à peine inférieur à 3 (2,8).

De ceci résulte immédiatement que la largeur e du fuseau sous l'archet croît avec la pression.

En effet, les deux vitesses de ce point sont V (vitesse de l'archet) à l'aller et mV au retour, et nous venons de voir que le coefficient m peut augmenter de près d'une unité sous la pression.

On peut écrire

$$\frac{e}{V} + \frac{e}{mV} = T, \quad \text{d'où} \quad e = VT \frac{m}{m+1}.$$

Comme T ne varie pas sensiblement, on voit que e augmente avec m . Tout le fuseau s'élargit en même temps.

Le terme $\frac{e}{V}$ qui mesure la durée de l'adhérence a augmenté : aux fortes pressions, la corde adhère plus longtemps à l'archet ; c'est assez naturel.

Si l'archet était plus près du chevalet, par exemple entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{11}$, le coefficient m serait plus grand et, par suite, la variation de e plus petite. En général, plus l'archet s'approche du chevalet, moins la pression a d'influence sur le mouvement qui diffère alors très peu du mouvement normal.

Reprenons la position $\frac{2}{7}$. Comme je l'ai dit plus haut, sous de très faibles pressions, les angles de la corde s'arrondissent et elle peut même vibrer en sinusoïde lorsque (et c'est le cas) l'archet n'est pas trop éloigné du milieu. Si, au contraire, il était très voisin d'un chevalet, la corde aurait plutôt tendance à se diviser en plusieurs fuseaux.

Il existe une pression moyenne pour laquelle le mouvement est presque normal, c'est quand on passe d'un mode à l'autre : du tiers au quart. Les raies disparaissent à peu près ainsi que les paliers sur les photographies de vibration et le fuseau s'arrondit régulièrement.

Enfin, sous de très fortes pressions, les quatre raies que l'on voyait aux deux bouts de la corde s'enflent (surtout avec les cordes métalliques) et se transforment en quatre petits fuseaux; les photographies du mouvement de la corde à leur ventre montrent que les paliers sont remplacés par de petites sinusoïdes (fig. 42) en sorte

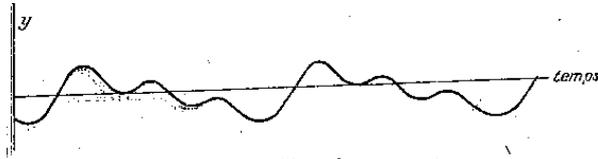


Fig. 42.

que la corde, en ces points, ne s'arrête pas seulement, mais revient même en arrière plusieurs fois dans le cours de l'aller ou du retour. En même temps, on voit apparaître des raies un peu partout, là où il ne s'en produit pas avec l'archet au $\frac{1}{3}$ ou au $\frac{1}{4}$. De plus, le fuseau se borde de festons en sorte que ses extrémités se trouvent renflées.

Ces perturbations sont évidemment une conséquence du mouvement anormal du point sous l'archet. Le quotient des vitesses y est environ 3 au lieu de 2,5. Cela nécessite en ce point l'existence de mouvements secondaires anormaux qui produisent des déformations dans tout le fuseau.

Avec une corde en boyau ($l = 80$, $E = 20\text{mm}$ à 25mm), il fallait environ :

Pour produire le mouvement de l'archet au tiers.....	20 ^s .
» quasi-normal.....	40 ^s .
» de l'archet au quart....	100 ^s .
Pour produire très nettement la dernière catégorie de phénomènes.....	160 ^s .

Toutes ces pressions sont fonction de la vitesse et croissent avec elle.

Voici, de plus, quelques chiffres relatifs à cette même corde et montrant les variations de largeur e du fuseau sous l'influence de la pression.

Position de l'archet.	Pression.	e .		E.
		près du chevalet.	sous l'archet.	Au milieu.
	g.	mm.	mm.	mm.
Entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.	20...	6,5	16	20
	40...	8	20	24,5
	160...	9,5	21	26
Entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{7}$.	45...	»	»	15
	60...	»	»	16
	150...	»	»	16,5
	400...	»	»	17
Entre $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{10}$.	30...	»	»	22
	75...	»	»	23
	275...	»	»	23

Les cordes roulées donnent les mêmes résultats.

Les cordes métalliques vibrent mal à faible pression; par contre, les phénomènes de la dernière catégorie, à forte pression, y sont particulièrement nets. L'amplitude varie moins.

Remarque. — Le cas de l'archet aux $\frac{2}{5}$ (entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$) est un peu exceptionnel et très curieux : aux fortes pressions, le fuseau a l'aspect indiqué sur la figure 43. Le mouvement du point milieu est celui de la figure 39. Le point sous l'archet (aux $\frac{2}{5}$) a le mouvement normal du point au $\frac{1}{5}$ d'une corde : il adhère donc pendant les $\frac{4}{5}$ de la vibration (au lieu des $\frac{2}{5}$ si la corde vibrerait normalement).

Enfin, pour certaines valeurs de la vitesse, de la pression et de la position de l'archet, on peut quelquefois pro-

duire des mouvements vibratoires (généralement peu stables) très différents de tous ceux que nous avons vus :

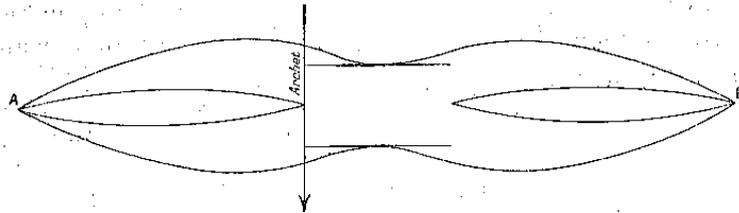


Fig. 43.

il y en a où la position d'équilibre de la corde n'est pas un axe de symétrie du fuseau.

52. *Variation des réactions sur les chevalets sous l'influence de la pression.* — Nous avons vu, dans l'étude simplifiée du mouvement normal, que la corde agit théoriquement sur les chevalets par impulsions instantanées. En réalité, ces impulsions ne sont pas infiniment courtes, surtout lorsque la corde a de la raideur et que la pression est faible. On le voit nettement sur les graphiques obtenus avec le chevalet oscillant convenablement amorti : lorsque la pression croît, les réactions deviennent plus brusques et un peu plus grandes. Il en résulte que le son est moins doux et un peu plus fort.

Je crois que la pression agit de deux manières distinctes. La première a déjà été expliquée plus haut (n° 40) : à forte pression, la brusque variation de frottement que subit la corde au moment où elle rompt l'adhérence produit deux ondes dont l'une accompagne le sommet S et renforce son action. En second lieu la pression peut augmenter l'amplitude ou mieux, puisque cela seul importe, l'angle du fuseau aux chevalets.

Lorsque l'archet détermine une partie aliquote, la première action subsiste seule puisque, dans ce cas, la

pression ne modifie pas l'amplitude; les réactions doivent par conséquent moins varier que dans l'autre cas, sous son influence. Je l'ai vérifié, comme on peut en juger par le Tableau ci-dessous, qui se rapporte à une corde en boyau de 70^{cm} à 80^{cm}.

Je mesurais, sans tracer de graphique, le déplacement de l'image lumineuse sur un écran fixe; le chevalet oscillant, placé du côté de l'archet, n'était pas amorti.

Position de l'archet.	Pression.	Déplacement de l'image.
		g. mm.
	55.....	22
$\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$	80.....	24
	150.....	25
	280.....	27
	60.....	21
$\frac{1}{4} < \frac{20}{70} < \frac{1}{3}$	80.....	24
	180.....	27
	230.....	38

Lorsque l'archet est tout près d'un chevalet, par exemple entre $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{10}$, les réactions varient autant, malgré que l'amplitude de la corde ne change presque pas. Il ne faut pas voir là une contradiction : j'ai dit qu'aux très fortes pressions le fuseau se bordait de festons qui renflent ses extrémités; si l'archet est tout près du chevalet, ces festons sont plus nombreux et plus courts; ils modifient donc beaucoup moins l'amplitude mais peuvent augmenter tout autant l'angle extrême du fuseau.

Sur le chevalet opposé à l'archet, les variations sont un peu moins grandes.

Pour les cordes roulées et surtout pour les cordes métalliques, la pression minima nécessaire pour l'entretien du mouvement est un peu plus forte (peut-être parce que le frottement est plus faible sur le métal que sur le boyau), et les réactions varient un peu moins.

Nous pouvons maintenant comprendre comment la pression, la position et la vitesse de l'archet ont une influence considérable sur le timbre du son : les réactions sur les chevalets subissent les mêmes perturbations que le mouvement de la corde dans leur voisinage. Il en résulte que les côtés A' B, B' C (*fig. 24, 2°*) des graphiques de réaction ne sont pas rectilignes. Lorsque l'archet est à $\frac{l}{p}$ d'une extrémité, ils présentent p paliers (plus ou moins déformés); lorsqu'il ne détermine pas une partie aliquote, ce qui est naturellement le cas le plus fréquent, ils forment des sinuosités dues aux harmoniques anormaux dont j'ai parlé plus haut et qui sont d'autant plus accentuées que la pression est plus forte.

Je pense que le plus joli son correspond à la pression moyenne (fonction de la vitesse) qui donne à la corde le mouvement presque normal.

CHAPITRE XVI.

Influence de la pression et de la vitesse sur la fréquence N.

53. Pour constater et mesurer les moindres variations de fréquence, je produisais des battements entre un tuyau d'orgue donnant le do_3 ($N = 261$) et la corde vibrante dont un chevalet portait sur une caisse de résonance accordée pour la même note.

Ces battements étaient tellement nets qu'on les percevait distinctement des salles voisines, les portes de communication restant fermées.

Par ce moyen j'ai remarqué que la fréquence n'est pas tout à fait indépendante de la pression et de la vitesse.

L'archet agit de deux manières distinctes : 1° par les

forces de frottement; 2^o par la tension de la corde qu'il augmente.

1^o Nous avons vu (n^o 40) comment un accroissement de pression doit modifier d'une façon compliquée le frottement dans le cours d'une vibration. Il est assez naturel qu'il en résulte une variation de fréquence. Pour l'étudier expérimentalement, il fallait empêcher que cette pression de l'archet augmente la tension de la corde. A cette fin, l'un des chevalets était mobile à sa base; la tension était obtenue, comme d'habitude, avec des poids, par l'intermédiaire d'une poulie. Dans ces conditions, avec les cordes en boyau, la fréquence diminuait de 1 ou 2 unités (sur 261) lorsque la pression croissait de 40^g à 250^g. Avec les cordes roulées ou métalliques je n'ai rien remarqué de bien net.

2^o Lorsque les chevalets sont bien fixes, la pression augmente la tension et par suite, en général, la fréquence malgré l'action précédente qui est de sens contraire. De 40^g à 300^g, N croissait de 3 à 4 vibrations.

La vitesse produit le même effet pour la même raison : elle augmente l'amplitude et, par suite, la tension moyenne. La fréquence d'une corde en boyau augmentait de 3 ou 4 unités lorsque la largeur du fuseau passait de 5^{mm} à 15^{mm}, la vitesse ayant triplé.

La variation est moins grande avec les cordes roulées, plus grande avec les cordes métalliques, sans doute parce que la tension de celles-ci augmente plus vite avec l'allongement.

Enfin, les vibrations libres de la corde pincée ont même fréquence que les autres lorsque la vitesse et la pression de l'archet sont assez faibles.

NOTE.

Vibrations longitudinales des tiges par frottement.

Je suis parvenu à entretenir d'une façon permanente et régulière les vibrations longitudinales de tiges en verre au moyen du dispositif suivant : Un volant de moment d'inertie assez considérable porte sur son axe un cylindre de 5^{cm} de diamètre sur lequel est enroulée une bande de toile. Une gorge très régulière est ménagée dans cet enroulement. La tige de verre placée dans le plan de cette rainure est fixée en son milieu dans une pince en bois et, au voisinage d'une extrémité (c'est la meilleure position), elle pénètre dans la gorge sur le fond et les bords de laquelle un fil fin qui ne trouble pas le mouvement vibratoire la maintient assez fortement appuyée. Dès que l'on met ce système en rotation, l'enroulement de toile étant largement imbibé d'une dissolution de colophane dans l'alcool, la tige de verre commence à vibrer. Une vitesse linéaire de 50^{cm} par seconde produisait des vibrations énergiques sur une verge longue de 2^m.

On peut admettre, d'après les expériences du n^o 4, que, dans ce cas encore, l'entretien est dû au fait que le frottement diminue lorsque la vitesse relative augmente, de sorte que la matière vibrante reçoit un travail positif pendant une oscillation complète.

A l'inverse de ce que nous avons vu pour les cordes, la vitesse des différents points à l'aller et au retour est ici la même, car un petit cavalier placé sur la tige supposée horizontale tressaute sans se déplacer en général (comparer avec l'expérience du n^o 34). Ce résultat n'est pas étonnant : dans les cordes, le point sous l'archet a forcément une vitesse constante pendant l'adhérence et c'est là ce qui détermine la nature du mouvement de

la corde entière. Dans le cas actuel il n'en est plus de même : la matière de l'archet étant très molle et souple en comparaison du verre et l'amplitude du mouvement vibratoire étant très petite, cet archet en drap est incapable d'imposer un mouvement uniforme à la portion de tige qui lui adhère. D'autre part, je n'ai pu faire vibrer une verge avec un archet en matière dure.

RÉSUMÉ.

Dans la première Partie de ce travail, j'étudie les oscillations lentes (période voisine de 1 seconde) d'un disque métallique, entretenues par le frottement d'un disque moteur colophané formant archet tournant. La pression mutuelle est constante dans le cours d'une oscillation.

Des expériences statiques, c'est-à-dire dans lesquelles l'oscillateur était en repos, m'ont suggéré le principe suivant : Pendant le mouvement oscillatoire, le frottement est une fonction rapidement décroissante de la vitesse relative des surfaces frottantes.

J'admets de plus que, lorsqu'il y a adhérence, le frottement peut prendre n'importe quelle valeur inférieure à une certaine limite f_0 .

En partant de ces principes, j'ai pu expliquer le mécanisme de l'entretien et les caractéristiques des oscillations dans des cas très variés :

Premier cas. — Lorsqu'on donne à l'oscillateur l'amortissement maximum compatible avec l'entretien, les oscillations sont sensiblement sinusoïdales et de même période que les oscillations libres. Pendant l'aller, il y a adhérence un instant de sorte que l'amplitude est proportionnelle à la vitesse de l'archet.

Deuxième cas. — Lorsque, au-contraire, l'amortissement

est négligeable et la pression forte, les oscillations sont nettement différentes. L'amplitude et la période sont plus grandes que dans le premier cas et croissent avec la pression.

Dans l'aller, l'oscillateur peut adhérer à l'archet pendant un certain temps sans jamais aller plus vite (1^{re} subdivision); dans certaines conditions il peut le dépasser pendant quelques instants (2^e subdivision).

Dans la deuxième Partie, j'étudie les vibrations des cordes entretenues de la même manière.

En simplifiant un peu le mouvement le plus général, on peut dire que la corde est formée de deux parties rectilignes constituant un angle très obtus dont le sommet court successivement d'un chevalet à l'autre, à la vitesse d'une onde ordinaire, le long de deux arcs de parabole qui limitent le fuseau. Chaque point se déplace transversalement d'un mouvement uniforme avec des vitesses différentes (sauf pour le milieu de la corde) à l'aller et au retour.

De ceci résulte que la corde agit sur les chevalets par impulsions infiniment courtes.

Le point de la corde saisi par l'archet ne perd jamais contact avec lui et adhère pendant tout l'aller qui est la plus grande partie de sa vibration.

L'entretien est dû à la même cause que dans la première Partie.

Cette théorie n'explique pas l'influence de la pression sur l'intensité et le timbre du son. C'est que le mouvement réel de la corde peut différer sensiblement du précédent:

1^o Quand l'archet est placé au $\frac{1}{3}$, au $\frac{1}{4}$, au $\frac{1}{10}$, ... de la corde, c'est-à-dire détermine sur elle une partie aliquote, tous les harmoniques qui ont un nœud en ce point sont supprimés, le mouvement général ayant été décomposé en mouvements sinusoïdaux suivant la série de Fourier.

La forme du fuseau, celle de la corde et la vibration des différents points s'en trouvent d'autant plus profondément modifiées que l'archet est plus voisin du milieu.

2° Quand l'archet est dans une position intermédiaire, par exemple entre le $\frac{1}{3}$ et le $\frac{1}{4}$, le mouvement dépend essentiellement de la pression; suivant qu'elle est faible ou forte, il se rapproche du mouvement que produit l'archet au $\frac{1}{3}$ ou au $\frac{1}{4}$.

Les réactions sur les chevalets et, par suite, le son produit se ressentent de ces modifications.

Enfin, la fréquence augmente généralement un peu avec la pression et la vitesse de l'archet qui font croître la tension moyenne de la corde.

Vu et approuvé :

Toulouse, le 8 juillet 1916.

LE DOYEN,

PAUL SABATIER.

Vu et permis d'imprimer :

Toulouse, le 10 juillet 1916.

LE RECTEUR.

Pour le Recteur :

Le Doyen délégué,

F. DUMAS.



SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Tonométrie, application à l'iode.

Vu et approuvé :

Toulouse, le 8 juillet 1916.

LE DOYEN,

PAUL SABATIER.

Vu et permis d'imprimer :

Toulouse, le 10 juillet 1916.

LE RECTEUR.

Pour le Recteur :

Le Doyen délégué,

F. DUMAS.