



**HAL**  
open science

# Couches absorbantes hybrides multi-pas de temps en dynamique des sols

Eliass Zafati

► **To cite this version:**

Eliass Zafati. Couches absorbantes hybrides multi-pas de temps en dynamique des sols. Génie civil. INSA de Lyon, 2015. Français. NNT : 2015ISAL0050 . tel-01278525

**HAL Id: tel-01278525**

**<https://theses.hal.science/tel-01278525>**

Submitted on 24 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT DE  
L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE  
LYON**

Spécialité

**MÉCANIQUE, GÉNIE MÉCANIQUE, GÉNIE CIVIL**

Présentée par

**Eliass ZAFATI**

Pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR I.N.S.A. de Lyon**

Sujet de la thèse :

**Couches absorbantes hybrides multi-pas de temps en  
dynamique des sols**

soutenue le 09 Juin 2015

devant le jury composé de :

<b>M. Jean-François SEMBLAT</b>	Rapporteur
<b>M. Alain MILLARD</b>	Rapporteur
<b>M. Pierre-Yves BARD</b>	Examineur
<b>M. Pierre-Alain NAZÉ</b>	Examineur
<b>Mme Irini DJERAN-MAIGRE</b>	Directrice de thèse
<b>M. Michaël BRUN</b>	Co-directeur de thèse



*à mes parents,  
à toute la famille et à mes amis*

# Résumé

Ce travail de thèse qui a pour objet la génération et l'étude des couches absorbantes dans les problèmes impliquant la dynamique des sols, est divisé en trois parties essentielles. La première consiste à proposer une méthode de dimensionnement des couches absorbantes par l'amortissement de Rayleigh afin de simuler des problèmes de propagation d'ondes dans les milieux infinis. Cette méthode repose sur une analyse mathématique du problème de propagation d'ondes dans un milieu caractérisé par la matrice de Rayleigh, qui nous permet, d'une part, d'établir des conditions de minimisation des réflexions parasites aux interfaces, et d'autre part, de proposer une simple relation de dimensionnement du domaine absorbant basée sur la notion de décrement logarithmique.

On se propose dans la deuxième partie d'appliquer une stratégie de couplage des schémas temporels pour des problèmes de propagation d'ondes dans les milieux infinis 1D et 2D. L'approche proposée est d'intégrer le domaine d'étude par un schéma explicite et le domaine absorbant par un schéma implicite, et d'évaluer le potentiel de cette méthode en faisant varier les rapports de pas de temps entre les sous domaines. Une attention particulière est accordée au cas 1D pour lequel l'effet de la finesse du maillage définie par le nombre d'éléments finis par longueur d'onde est également analysé. Par ailleurs, l'évolution du temps de calcul en fonction du rapport entre les pas de temps est étudiée afin d'estimer les gains réalisés par rapport à un calcul de référence où le problème global est intégré uniquement avec un schéma explicite.

La dernière partie est dédiée à l'étude des couches amortissantes de type PML ("Perfectly Matched Layer") dans le cadre des couplages hybrides multi-pas de temps. Cette partie est introduite par une étude de stabilité des schémas temporels dans le cas d'une PML en 1D. La couche absorbante PML est intégrée selon un schéma implicite en adoptant des pas de temps plus importants que le domaine d'intérêt intégré selon un schéma explicite. Bien que cette méthodologie de couplage s'avère très efficace pour la reproduction des milieux infinis, les études paramétriques montrent une sensibilité à

la taille du pas de temps plus forte que celle exhibée par les couches amortissantes de Rayleigh.

Ces développements ont conduits aux deux publications suivantes à comité de lectures, dont une déjà publiée et l'autre sous révision et à une communication à un congrès international :

E. Zafati, M. Brun, I. Djeran-Maigre, and F. Prunier. (2014) Multi-directional and multi-time step absorbing layer for unbounded domain. *Comptes Rendus Mécanique*, 342 :539-557,.

E. Zafati, M. Brun, I. Djeran-Maigre, and F. Prunier. Design of an efficient multi-directional explicit/implicit Rayleigh absorbing layer for seismic wave propagation in unbounded domain using a strong form formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (minor revisions).

Zafati E., Brun M. Djeran-Maigre I., (2013), A multi-directional absorbing layer for seismic wave propagation in unbounded domain by using heterogeneous multi-time step subdomain methods. *CompDyn 2013*, 4th Int. Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, 12-14 June 2013 - Kos Greece (<http://www.eccomasproceedings.org/cs2013>)

Mots-clefs : Propagation d'ondes, Couches parfaitement absorbantes (PML), Amortissement de Rayleigh, Couplage multi-pas de temps, Schémas d'intégration temporelle



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>14</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>17</b>
1.1 Elasticité linéaire . . . . .	17
1.2 Approximation par la méthode des éléments finis . . . . .	19
1.3 Discrétisation temporelle . . . . .	20
1.3.1 Aperçu sur les schémas temporels . . . . .	20
1.3.2 Schéma de Newmark . . . . .	21
1.4 Méthodes de couplage des schémas temporels . . . . .	24
1.4.1 Introduction . . . . .	24
1.4.2 Méthode GC dans le cas multi-échelles en temps . . . . .	25
1.4.3 Stabilité de la Méthode GC par la méthode énergétique . . . . .	30
1.5 Méthodes des couches absorbantes . . . . .	32
1.5.1 Propagation d'ondes dans les milieux élastiques . . . . .	33
1.5.2 Méthode d'amortissement par la matrice de Rayleigh . . . . .	36
1.5.3 Couches absorbantes parfaitement adaptées . . . . .	43
1.6 Bilan . . . . .	50
<b>2 Amortissement de Rayleigh</b>	<b>51</b>
2.1 Amortissement de Rayleigh : cadre général . . . . .	51
2.1.1 Formulation forte . . . . .	51
2.1.2 Approximation par les éléments finis . . . . .	52
2.2 Problème de propagation d'ondes dans le milieu de Rayleigh et à l'interface	55
2.2.1 Propagation d'onde dans le milieu de Rayleigh : Cas 1D . . . . .	55
2.2.2 Problème de propagation d'ondes d'un milieu linéaire vers le milieu de Rayleigh : problème d'interface . . . . .	59
2.2.3 Stratégie multi-couches . . . . .	64



2.3	Exemples numériques de validation . . . . .	70
2.3.1	Propagation d'onde en 1D dans le milieu de Rayleigh . . . . .	71
2.3.2	Propagation d'onde en 1D d'un milieu élastique vers le milieu de Rayleigh . . . . .	74
2.3.3	Test de Lamb avec couplage implicite/explicite en mono-échelle	79
2.4	Bilan . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Amortissement de Rayleigh et le multi-échelle en temps par la méthode GC</b>	<b>89</b>
3.1	Amortissement de Rayleigh et méthode de couplage GC : Cas 1D . . . . .	89
3.2	Amortissement de Rayleigh et méthode de couplage GC : Exemples 2D	95
3.2.1	Test de Lamb 2D . . . . .	95
3.2.2	Fondation rigide sur un sol homogène . . . . .	99
3.2.3	Fondation rigide sur un sol stratifié . . . . .	103
3.3	Bilan . . . . .	108
<b>4</b>	<b>Couches absorbantes parfaitement adaptées et méthode de couplage GC</b>	<b>109</b>
4.1	Stabilité dans le cas 1D . . . . .	109
4.2	Couplage milieu physique et PML . . . . .	115
4.3	Application de la méthode GC aux équations de la PML en 1D . . . . .	116
4.4	Couches Parfaitement Adaptées et méthode de couplage GC : Exemples 2D . . . . .	120
4.4.1	Test de Lamb . . . . .	120
4.4.2	Fondation rigide sur un sol homogène . . . . .	124
4.4.3	Fondation rigide sur un sol stratifié . . . . .	128
4.5	Bilan . . . . .	131
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>133</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>136</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>137</b>
	<b>Annexe C</b>	<b>140</b>
	<b>Annexe D</b>	<b>142</b>

# Liste des tableaux

2.1	Les caractéristiques mécaniques et géométriques des matériaux . . . . .	75
3.1	Valeurs de $Rt_m$ (rapport entre le temps de calcul en explicite et le temps de calcul pour un calcul explicite/implicite) en fonction du ratio $m$ (rapport entre les pas de temps) . . . . .	95
3.2	Erreurs en énergie et déplacement en fonction de $m$ dans le cas du test de Lamb en utilisant la stratégie ALID modifiée . . . . .	99
3.3	Erreurs correspondantes aux énergies et aux déplacements, en fonction de $m$ , dans le cas du test de chargement d'une fondation sur un sol homogène semi infini en utilisant la stratégie ALID modifiée . . . . .	103
3.4	Erreurs correspondantes aux énergies et aux déplacements, en fonction de $m$ , dans le cas du test de chargement d'une fondation sur un sol stratifié en utilisant la stratégie ALID modifiée . . . . .	108
4.1	Valeurs de $R_m$ en fonction du ratio $m$ . . . . .	120
4.2	Erreurs correspondant aux énergies et aux déplacements, en fonction de $m$ , dans le cas du test de Lamb en utilisant les couches parfaitement adaptées (PML) . . . . .	124
4.3	Erreurs correspondant aux énergies et aux déplacements, en fonction de $m$ , dans le cas du test de chargement d'une fondation sur un sol homogène en utilisant les PMLs . . . . .	128
4.4	Erreurs correspondant aux énergies et aux déplacements, en fonction de $m$ , dans le cas du test de chargement d'une fondation sur un sol stratifié en utilisant les couches parfaitement adaptées (PML) . . . . .	131

# Table des figures

1.1	Modélisation du domaine $\Omega$ avec les conditions aux limites . . . . .	18
1.2	Domaine $\Omega$ partitionné en deux sous domaines $\Omega_1$ et $\Omega_2$ . . . . .	24
1.3	Polarisation des ondes $P$ et ondes $S$ . . . . .	35
1.4	Polarisation des ondes SH et SV . . . . .	35
1.5	Polarisation des ondes de Rayleigh . . . . .	36
1.6	Comparaison entre les résultats numériques (amortissement de Rayleigh) et les résultats analytiques (modèle de Maxwell) (Semblat [1]) . . . . .	37
1.7	Modèle de Maxwell généralisé et la courbe d'atténuation correspondante ( Semblat <i>et al</i> [2]) . . . . .	38
1.8	Comparaison de l'amplitude relative maximale pour différents types de couches absorbantes pour un problème de propagation d'ondes dans un sol semi-infini dû à un chargement à la surface du sol (Semblat <i>et al</i> [2]) . . . . .	39
1.9	Onde se propageant dans la direction positive ou la direction négative par rapport à la direction $x$ , $f$ pour l'interface avant ("front face") et $b$ pour l'interface arrière ("back face") . . . . .	43
1.10	Incidence oblique sur une PML . . . . .	46
2.1	Problème de propagation d'onde en 1D . . . . .	55
2.2	Evolution de $\frac{V_p}{\omega_0}  Im(k_p) $ en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$ . . . . .	59
2.3	Propagation d'onde dans deux milieux séparé par une interface à $x = 0$ . . . . .	60
2.4	Coefficient de réflexion pour une onde à incidence normale en utilisant différentes valeurs de $\xi$ . . . . .	63
2.5	Problème d'interface entre deux milieux différents de Rayleigh avec une incidence normale . . . . .	64
2.6	Problème de propagation d'onde dans la partie multi-couches en 2D . . . . .	65
2.7	Isovaleurs de $\delta$ en fonction de $N_\lambda$ et $N_e$ pour $a_\xi = 0.02$ . . . . .	67
2.8	Ondes se propageant selon les directions positive ou négative dans la $n^{ème}$ sous couche par rapport à l'axe $x$ . . . . .	67
2.9	Onde de Ricker et sa transformée de Fourier . . . . .	70

2.10	Couche homogène amortissante de longueur $5\lambda$ . . . . .	71
2.11	Déplacement au point C, $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_p} = 2.09rad/s$ , $\xi = 0.5$ (à gauche), $\xi = 1$ (à droite) . . . . .	72
2.12	Zoom sur le déplacement au point C dans le cas $\xi = 1$ . . . . .	72
2.13	La différence entre la vitesse de phase numérique et la vitesse de phase exacte . . . . .	73
2.14	Evolution du décrement logarithmique $\delta^{num}$ au point C comme une fonc- tion de $\xi$ pour l'onde de Ricker : Comparaison avec la courbe théorique obtenue pour les ondes harmoniques (équation (2.22)) . . . . .	74
2.15	Les caractéristiques géométriques du maillage . . . . .	74
2.16	Illustration de l'onde incidente et l'onde réfléchie par le déplacement du point C . . . . .	76
2.17	Onde réfléchie au point C, $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_p} = 2.09 rad/s$ . . . . .	77
2.18	Valeurs de $\gamma$ minimisant l'amplitude de l'onde réfléchie : comparaison entre la courbe théorique obtenue pour les ondes harmoniques ( $\gamma =$ $\frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ ) et la courbe obtenue en considérant l'onde de Ricker . . . . .	78
2.19	Comparaison du coefficient de réflexion entre les stratégies ALID et ALID modifiée pour $a_\xi = 0.02$ et $a_\xi = 0.03$ . . . . .	79
2.20	Test de Lamb . . . . .	80
2.21	Décomposition en sous domaines : domaine d'intérêt et couche amortissante . . . . .	81
2.22	Le problème couplé : sous domaine 1 (sol) modélisé par Europlexus et sous domaine 2 (milieu absorbant) modélisé par Cast3m . . . . .	81
2.23	Déplacement horizontal au point C : résultats analytiques (Lamb) <i>versus</i> les résultats numériques obtenus par les couches absorbantes de Rayleigh . . . . .	82
2.24	Déplacement vertical au point C : résultats analytiques (Lamb) <i>versus</i> les résultats numériques obtenus par les couches absorbantes de Rayleigh . . . . .	83
2.25	Modèle EF pour le sous domaine 1 (sol) et le sous domaine 2 (multi- couches) . . . . .	84
2.26	Déplacement horizontal au point C . . . . .	85
2.27	Déplacement vertical au point C . . . . .	85
2.28	Energies cinétique et potentielle calculées en utilisant la stratégie ALID modifiée . . . . .	86
2.29	Comparaison des isovaleurs de déplacement obtenues pour plusieurs ins- tants, d'une part, par un maillage assez large, et d'autre part, en utilisant la stratégie ALID modifiée . . . . .	87
3.1	Maillage par les éléments de type barre couplant un milieu linéaire et un milieu de Rayleigh . . . . .	90

3.2	Evolution du coefficient de réflexion en fonction de $\xi$ pour différentes valeurs de $N_\lambda$ . . . . .	92
3.3	Evolution du coefficient de réflexion en fonction de $N_\lambda$ en fixant la valeur de $\xi$ . . . . .	93
3.4	Evolution du coefficient de réflexion en fonction de $N_\lambda$ dans le cas de la stratégie ALID modifiée (éléments barres) . . . . .	94
3.5	Evolution du coefficient de réflexion en fonction de $N_\lambda$ dans le cas de la stratégie ALID modifiée (éléments quadrangles) . . . . .	94
3.6	Test de Lamb : Modélisation par les multicouches (ALID modifié) . . .	95
3.7	Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu (Test de Lamb) . . . . .	97
3.8	Comparaison des énergies en C dans le cas du test de Lamb . . . . .	97
3.9	Comparaison des déplacements en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratios $m$ . . . . .	98
3.10	Comparaison des énergies en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratio $m$ . . . . .	98
3.11	Modélisation du chargement d'une fondation rigide en utilisant la stratégie ALID modifiée . . . . .	100
3.12	Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu dans le cas d'une fondation sur un sol homogène . . . . .	101
3.13	Comparaison des énergies cinétique et potentielle obtenues par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu dans le cas d'une fondation sur un sol homogène . . . . .	101
3.14	Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu pour différentes valeurs de $m$ .	102
3.15	Comparaison des énergies cinétiques et potentielles obtenues pour différents ratios $m$ . . . . .	103
3.16	Test de chargement d'une fondation sur un sol stratifié . . . . .	105
3.17	Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu . . . . .	105
3.18	Comparaison des énergies cinétique et potentielle obtenues par ALID, ALID modifiée et un maillage assez large . . . . .	106
3.19	Déplacements vertical et horizontal en C obtenus pour différentes valeurs de $m$ . . . . .	107
3.20	Comparaison des énergies cinétiques et potentielles obtenus pour différents ratio $m$ . . . . .	107

4.1	Modèle de propagation d'ondes dans une barre . . . . .	114
4.2	Courbes d'énergies (cinétique $E_c$ , interne $E_p$ et totale $E_m$ ) tracées pour différents schémas temporels dans le cas où on annule les fonctions d'amortissements de la PML selon Basu. . . . .	114
4.3	Maillage par les éléments barres couplant un milieu linéaire et une PML	116
4.4	Coefficient de réflexion dans le cas mono pas de temps avec une fonction d'amortissement de la PML nulle . . . . .	118
4.5	Coefficient de réflexion dans le cas mono pas de temps (Explicite complet et Implicite/Explicite) en fonction de $R$ pour $N_\lambda = 50$ . . . . .	118
4.6	Evolution de $R_{num}$ en fonction de $N_\lambda$ et $m$ pour $R = 0.001$ et $R = 0.01$	119
4.7	Modèle du test de Lamb 2D avec les couches parfaitement adaptées (PML)	121
4.8	Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par la PML et un maillage suffisamment étendu (Test de Lamb) dans le cas mono pas de temps (couplage explicite/explicite) . . . . .	122
4.9	Comparaison des énergies en C pour le test de Lamb dans le cas mono pas de temps . . . . .	122
4.10	Comparaison des déplacements en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratio $m$ . . . . .	123
4.11	Comparaison des énergies en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratio $m$ . . . . .	124
4.12	Fondation rigide sur un sol homogène semi infini : Modélisation avec la couche PML . . . . .	125
4.13	Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par la PML et un maillage suffisamment étendu (couplage Explicite/Explicite mono pas de temps) . . . . .	126
4.14	Comparaison des déplacements en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratio $m$ . . . . .	127
4.15	Comparaison des énergies cinétiques et potentielles obtenues pour différents ratios $m$ . . . . .	127
4.16	Modèle de fondation rigide sur un sol stratifié en utilisant les PMLs . .	129
4.17	Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par la PML et un maillage suffisamment étendu (couplage Explicite/Implicite mono pas de temps) . . . . .	129
4.18	Déplacements vertical et horizontal en C obtenus pour différentes valeurs de $m$ . . . . .	130
4.19	Comparaison des énergies cinétiques et potentielles obtenus pour différents ratio $m$ . . . . .	131

# Introduction

Dans le domaine de la dynamique des sols, recouvrant les cas des séismes ou des explosions, le processus de propagation d'ondes résulte de deux caractéristiques essentielles : l'inertie et la déformabilité du milieu. Si le milieu n'est pas déformable, toute excitation va générer uniquement soit une force interne soit un mouvement accéléré. De même, si on omet l'inertie du milieu, la transmission du mouvement sera alors instantanée. Lorsque les deux propriétés sont réunies, la transmission de l'onde est donc possible et s'accompagne en même temps du transport d'une quantité d'énergie sous la forme d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle.

La description mathématique des problèmes de propagation d'ondes est rendue possible grâce au développement du concept des milieux continus [3]. Cette idéalisation de la réalité est d'une utilité pratique considérable dans la mesure où elle permet de réaliser des études très complexes traitant des problèmes de la mécanique. Les équations de la mécanique des milieux continus accompagnées des équations de la dynamique donnent naissance à un système d'équations non linéaires couplant les différentes composantes du déplacement, généralement impossible à traiter analytiquement dans les cas réels. Des hypothèses supplémentaires, portant sur la linéarité du milieu par exemple, sont alors nécessaires afin de rendre possible une résolution mathématique.

Quand la résolution analytique est impossible, on a recours à des méthodes numériques qui fournissent des solutions numériques approximatives. Parmi ces méthodes, la méthode des éléments finis occupe actuellement une place de premier plan dans le monde du calcul scientifique. La popularité de la méthode provient de son usage intensif et pragmatique, dans les années 50, par des ingénieurs appartenant à la communauté des mécaniciens. L'analyse mathématique de cette méthode n'a débuté que vers la fin des années 60 grâce aux travaux [4] [5] portant sur l'étude des erreurs d'approximations développées à partir des outils mathématiques établis bien à l'amont vers les années 40 par Sobolev, Banach et Schwartz [6]. Ce rapprochement donnera naissance à un cadre conceptuel, général et puissant à la fois, qui va s'étendre vers d'autres problèmes d'in-

génierie et d'autres champs d'applications.

Une fois l'étape de l'approximation spatiale par la méthode des éléments finis franchie, on obtient un système d'équations en fonction de la variable temps. L'une des approches communément utilisées dans la résolution de ce genre de système est la méthode d'intégration directe par des familles de schémas temporels. Les schémas de Newmark [7], qui font partie de cette catégorie sont peut être les plus anciens, mais aussi les plus utilisés dans la dynamique transitoire. Cette méthode de résolution est efficace dans la mesure où elle peut être appliquée aux problèmes linéaires et non linéaires. Cependant, des précautions doivent être prises au niveau de la précision et de la stabilité. Certains schémas peuvent introduire de l'amortissement numérique ou de la dispersion numérique dans le cas des problèmes de propagation d'ondes, et d'autres sont assujettis à des conditions de stabilité (condition CFL : Courant, Friedrichs et Lewy). Pour des problèmes qui présentent une hétérogénéité dans la taille des éléments, l'application d'un schéma explicite est conditionnée par le plus petit élément du maillage, ce qui peut être pénalisant surtout s'il existe des régions du maillage qui ne nécessitent pas une telle précision pour obtenir les quantités physiques d'intérêt pour l'ingénieur. L'une des solutions proposées dans la littérature est la décomposition du maillage en plusieurs parties, chacune étant intégrée avec son propre schéma temporel et son propre pas de temps, sans affecter la stabilité du problème global. Figurant dans cette catégorie, la méthode GC (Gravouil et Combescure) est une technique de couplage des schémas de Newmark développée pour les milieux linéaires [8] et non linéaires [9] [10] selon l'approche duale. Cette méthode a fait l'objet d'une série d'améliorations notamment avec les travaux de (Mahjoubi *et al* [11], Brun *et al* [12]).

Les problèmes de propagation d'ondes dans les sols nécessitent la considération de domaines non bornés dans certaines directions. La réduction du domaine physique en un domaine fini est la seule option possible pour une simulation numérique par la méthode des éléments finis. Cela requiert un traitement spécial au niveau des conditions aux limites afin de représenter les conditions de radiation à l'infini. Une grande variété de techniques a été développée dans ce sens comme les conditions aux limites absorbantes [13], les éléments infinis [14] ou encore les couches absorbantes. Selon la littérature, la dernière classe peut être divisée en deux groupes : les couches parfaitement adaptées (ou PML, « Perfectly Matched Layers ») [15] et les couches absorbantes avec un amortissement augmentant progressivement (ALID, « Absorbing Layers with Increasing Damping ») [16] ou (CALM, « Caughey Absorbing Layer Method ») [2]). Les stratégies ALID ou CALM constituent des méthodes d'amortissement des ondes incidentes par l'introduction de la matrice de Rayleigh [17] qui présente les avantages d'être simple



à implémenter et efficace pour la dissipation d'énergie. Toutefois, la méthode devient pénalisante en termes de temps CPU lorsqu'on considère la matrice de rigidité dans la matrice de Rayleigh et qu'on utilise une intégration par un schéma explicite (ou de différence centrée).

Le premier chapitre de ce mémoire présente les équations principales qui régissent les problèmes de propagation d'ondes dans les sols, accompagnées d'éléments sur les couplages de schémas temporels et les différentes techniques de couches absorbantes pour reproduire les milieux infinis.

Une étude analytique de l'amortissement de Rayleigh est menée au sein du second chapitre mettant en lumière le lien entre une formulation forte basée sur des comportements physiques et la formulation faible discrétisée par la méthode aux éléments finis dans laquelle la matrice d'amortissement de Rayleigh est introduite. Cette étude débouche sur une méthode simple de dimensionnement des couches ALID, qui améliore la méthode originelle de [16].

Cette partie est suivie dans le troisième chapitre par une série d'applications de la méthode GC sur des problèmes de propagation d'ondes unidimensionnels et bidimensionnels. On profite des avantages des méthodes de couplage en considérant les couches ALID comme un sous domaine à part, et l'en intégrant par un schéma implicite avec un macro pas de temps. Cette technique de couplage nous permet de considérer la matrice de rigidité dans la matrice d'amortissement, sans réduire le pas de temps de stabilité. Une analyse d'erreurs s'avère alors nécessaire afin d'estimer la performance de ce couplage en fonction des rapports entre les pas de temps et de la finesse du maillage.

Le dernier chapitre est dédié au couplage entre un calcul explicite dans le domaine d'intérêt avec une intégration implicite des couches parfaitement adaptées (PML) aux frontières du maillage, selon la formulation de Basu [18], [19] et [20]. Cette analyse est complétée par une étude de certaines propriétés du schéma de discrétisation temporelle utilisée dans les PMLs.

# Chapitre 1

## Etat de l'art

*Le livre de la nature est écrit en langage  
mathématique.*

Galileo Galilei

Ce chapitre est divisé en trois parties. En premier lieu, le problème de la dynamique en élasticité linéaire est présenté et discrétisé en espace et en temps. Après une brève présentation des méthodes hybrides de couplages de schémas temporels, la méthode de couplage GC est introduite en détaillant d'une part l'algorithme du couplage entre deux milieux linéaires ayant le comportement de Hooke et d'autre part l'algorithme du couplage entre un milieu linéaire de Hooke et un milieu visqueux caractérisé par la matrice de Rayleigh. La stabilité de la méthode GC [8], considérée comme une condition nécessaire de la convergence de la solution numérique, sera également abordée et démontrée par la méthode énergétique. La dernière partie sera consacrée à la présentation de deux méthodes de couches absorbantes. La première connue sous le nom ALID ou CALM, basée sur une simple formulation par la matrice de Rayleigh, est présentée en faisant le point sur le calcul de l'atténuation par le facteur de qualité et par la méthode de la matrice globale. La deuxième, plus populaire, connue sous le nom de PML ("Perfectly matched layers") est présentée en distinguant brièvement les différentes approches développées dans la littérature puis en détaillant la formulation temporelle proposée par Basu *et al* [19], adaptée à la méthode des éléments finis.

### 1.1 Elasticité linéaire

On considère le système d'équations de l'élasticité linéaire où on suppose un matériau homogène isotrope. Soit  $\Omega$  un domaine (borné ou non borné) simplement connexe de

$\mathbb{R}^2$  (Figure 1.1) et  $u$  le vecteur déplacement solution de l'équation d'équilibre suivante :

$$\rho \ddot{u}_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(x, t) + f_i(x, t) \quad \forall x \in \Omega \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

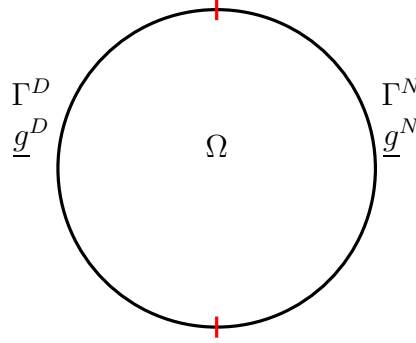


FIGURE 1.1 – Modélisation du domaine  $\Omega$  avec les conditions aux limites

où  $f_i$  représentent les composantes des forces volumiques et  $\sigma_{ij}$  les composantes du tenseur des contraintes lié au tenseur des déformations infinitésimal par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{kk} + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} \quad (1.2)$$

valide pour tout  $x \in \Omega$ , avec  $E$  le module de Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson. Sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP) le tenseur de déformation s'écrit sous sa forme linéarisée :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall x \in \Omega \quad i, j = 1, 2 \quad (1.3)$$

Multiplions l'équation d'équilibre (1.1) par une fonction test de composantes  $v_i$ , intégrons sur  $\Omega$  et appliquons l'intégration par partie, on obtient :

$$\int_{\Omega} \ddot{u}v + a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Gamma} \gamma_1 \underline{u} \gamma_0 \underline{v} ds + \int_{\Omega} \underline{f} \underline{v} dx \quad (1.4)$$

avec  $a(\underline{u}, \underline{v})$  une forme bilinéaire symétrique définie par :

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \sum \sigma_{ij}(\underline{u}, x) \varepsilon_{ij}(\underline{v}, x) dx \quad (1.5)$$

et  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  les opérateurs définis par :

$$\gamma_0 \underline{u} = \underline{u}|_{\Gamma} \quad \gamma_1 \underline{u} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}, x) \cdot \underline{n} \quad \forall x \in \Gamma \quad (1.6)$$

Le système d'équations précédent est complété par des conditions définies à la frontière du domaine :

$$\begin{aligned} \gamma_0 \underline{u}(x) &= \underline{g}^D(x) & \forall x \in \Gamma^D & \quad \text{Dirichlet} \\ \gamma_1 \underline{u}(x) &= \underline{g}^N(x) & \forall x \in \Gamma^N & \quad \text{Neumann} \end{aligned} \quad (1.7)$$

avec  $\Gamma = \Gamma^D \cup \Gamma^N$ , alors que les conditions initiales sont définies par :

$$\begin{aligned} \underline{u}(t=0, x) &= \underline{u}_0(x) \\ \partial_t \underline{u}(t=0, x) &= \underline{v}_0(x) \end{aligned} \quad (1.8)$$

## 1.2 Approximation par la méthode des éléments finis

La première étape de l'approximation de la solution du problème précédent par la méthode des éléments finis consiste à approcher le domaine  $\Omega$  par des simplexes qui sont, dans la plupart des cas, des segments en 1D, des triangles ou des rectangles en 2D. Ensuite on approxime localement, sur chaque élément  $\Omega^e$ , l'espace de solutions et des vecteurs tests de dimension infini par un espace de dimension fini construit, généralement, à partir des fonctions polynômiales. On écrit alors :

$$\underline{u}_h = \sum_{i=1}^N N_i^e(\zeta) \underline{u}_i \quad (1.9)$$

$$\underline{v}_h = \sum_{i=1}^N N_i^e(\zeta) \underline{v}_i \quad (1.10)$$

dans laquelle  $\underline{u}_h$  est la solution approchée,  $N_i^e$  la fonction de forme correspondante au noeud  $i$  défini sur un élément de référence avec les coordonnées  $\zeta$ ;  $\underline{u}_i$  désigne le déplacement au noeud  $i$ . En remplacement les intégrales  $\int_{\Omega}$  par  $\sum \int_{\Omega^e}$  et les vecteurs  $u, v$  par  $u_h, v_h$  dans la formulation faible (1.4), on obtient une équation de la forme :

$$M\ddot{U} + F_{int} = F_{ext} \quad (1.11)$$

avec  $U$  le vecteur déplacement ayant pour composantes  $\underline{u}_i$  et  $M$  la matrice de masse donnée par :

$$M_{ij} = \sum_e \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e dx \quad (1.12)$$

$F_{int,i}$  désigne le vecteur des efforts internes et  $F_{ext,i}$  celui des efforts extérieurs :

$$F_{int,i} = \sum_e \int_{\Omega^e} \sum \sigma_{kl}(\underline{u}, x) \varepsilon_{kl}(N_i^e \underline{u}_i, x) dx \quad (1.13)$$

$$F_{ext,i} = \sum_e \int_{\Omega^e} \underline{f} N_i^e dx + \sum \int_{\Gamma^{N,e}} \underline{g}^N N_i^e ds \quad (1.14)$$

Comme le comportement est linéaire, la force interne peut s'écrire sous la forme :

$$F_{int} = KU \quad (1.15)$$

où  $K$  est la matrice de rigidité. Il est important de noter que les intégrales sur les domaines  $\Omega^e$  sont calculées à partir des éléments de référence en effectuant un changement de variable et sont approchées, dans une seconde étape, par la méthode d'intégration de Gauss. On peut trouver les détails du calcul des différentes matrices dans les ouvrages de Hughes [21] et de Zienkiewicz [22].

La discrétisation spatiale par les éléments finis introduit une erreur d'approximation définie par l'écart entre la solution exacte et la solution approchée. Cette erreur est évaluée par des estimateurs qu'on peut classer en deux types : estimateur *a priori* et estimateur *a posteriori*. Ces erreurs dépendent à la fois de la norme utilisée, de l'ordre d'approximation et de la taille des éléments et elles ont un intérêt majeur dans les problèmes de génération des maillages adaptatifs (voir par exemple [23]).

## 1.3 Discrétisation temporelle

### 1.3.1 Aperçu sur les schémas temporels

Après la discrétisation spatiale, on obtient un système d'équations différentielles en fonction de la variable temps. La méthode numérique la plus communément utilisée pour la résolution de ce genre d'équations est l'intégration directe par des schémas temporels. Le principe de ces méthodes consiste à calculer les quantités cinématiques en des instants finis d'un intervalle borné  $[0, T]$  en exploitant la relation entre les quantités

à l'instant  $t_{n+1}$  et les quantités à l'instant  $t_n$  (connues à l'avance) ainsi que l'équation d'équilibre. Parmi les schémas développés dans ce sens issus de la famille de Newmark [7], exprimés en fonction des paramètres de Newmark  $\gamma$  et  $\beta$ , sont, sans doute, les plus utilisés. Lorsque  $\gamma = 0.5$  et  $\beta = 0$  on obtient le schéma de différence centrée (schéma explicite) tandis que les paramètres  $\gamma = 0.5$  et  $\beta = 0.25$  donnent le schéma de l'accélération moyenne (schéma implicite).

Il existe une autre famille de schémas semblable à celle de Newmark appelée  $\alpha$ -méthodes où l'équilibre est satisfait en moyenne par le paramètre de pondération  $\alpha$  entre  $t_{n+1}$  et  $t_n$ . On peut citer trois algorithmes de ce type : l'algorithme avec pondération de la matrice de raideur HHT (Hilbert, Hughes et Taylor) [24], l'algorithme avec pondération des efforts d'inertie par Wood *et al* [25] et la méthode  $\alpha$  généralisée par Chung *et al* [26]. L'avantage de ces méthodes est qu'elles permettent un certain contrôle de la dissipation d'énergie, utile pour atténuer les effets parasites des hautes fréquences provenant de la discrétisation spatiale, tout en conservant un bon ordre de convergence.

Il est également souhaitable que la méthode d'intégration temporelle conserve certaines quantités comme le moment des quantités de mouvement ou l'énergie dans le cas général (cas non linéaire). Ces schémas font l'objet de recherches intensives depuis le travail de Simo *et al* [27] qui a développé un algorithme avec des propriétés de conservation applicables aux lois de comportement non linéaires à condition qu'elles dérivent d'un potentiel.

### 1.3.2 Schéma de Newmark

On considère à nouveau l'équation du mouvement semi-discrétisée en espace (1.11). Sous l'hypothèse HHP et d'une loi de comportement linéaire de Hooke, on a :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F_{ext} \quad (1.16)$$

L'équation est modifiée en ajoutant une matrice d'amortissement  $C$  généralement symétrique positive comme la matrice de Rayleigh [17]. La résolution de l'équation précédente nécessite la connaissance des conditions initiales (1.8) :

$$U(0) = U_0 \quad \dot{U}(0) = V_0 \quad (1.17)$$

La résolution numérique par le schéma de Newmark est donnée par les équations suivantes :

$$M\ddot{U}_{n+1} + C\dot{U}_{n+1} + KU_{n+1} = F_{n+1} \quad (1.18)$$

$$U_{n+1} = U_n + dt\dot{U}_n + \frac{dt^2}{2} \left( (1 - 2\beta)\ddot{U}_n + 2\beta\ddot{U}_{n+1} \right) \quad (1.19)$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + dt \left( (1 - \gamma)\ddot{U}_n + \gamma\ddot{U}_{n+1} \right) \quad (1.20)$$

où  $U_{n+1}$ ,  $\dot{U}_{n+1}$  et  $\ddot{U}_{n+1}$  sont les approximations de  $U(t_{n+1})$ ,  $\dot{U}(t_{n+1})$  et  $\ddot{U}(t_{n+1})$ , respectivement. Les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  sont choisis afin d'assurer la stabilité et une précision satisfaisante du calcul. Le problème composé des équations précédentes (1.18), (1.19) et (1.20) consiste alors à calculer les quantités  $U_{n+1}$ ,  $\dot{U}_{n+1}$  et  $\ddot{U}_{n+1}$  sachant les valeurs  $U_n$ ,  $\dot{U}_n$  et  $\ddot{U}_n$ . Pour cela, on définit les prédicteurs suivants :

$$U_{n+1}^p = U_n + dt\dot{U}_n + \frac{dt^2}{2} (1 - 2\beta)\ddot{U}_n \quad (1.21)$$

$$\dot{U}_{n+1}^p = \dot{U}_n + dt(1 - \gamma)\ddot{U}_n \quad (1.22)$$

La valeur de  $\ddot{U}_0$  est déterminée par :

$$M\ddot{U}_0 = F - CV_0 - KU_0 \quad (1.23)$$

En injectant les équations (1.22) et (1.21) dans l'équation (1.18), la valeur de  $\ddot{U}_{n+1}$  est déterminée par :

$$(M + \gamma dt K + \beta dt^2 K)\ddot{U}_{n+1} = F_{n+1} - C\dot{U}_{n+1}^p - KU_{n+1}^p \quad (1.24)$$

Finalement, les quantités  $U_{n+1}$ ,  $\dot{U}_{n+1}$  sont calculées par les relations (1.19) et (1.20).

En définissant le vecteur d'état  $d_n = [\dot{U}_n \ U_n]^T$  à l'instant  $n$ , la stabilité d'un schéma d'intégration temporelle pour un pas de temps  $dt$  consiste à ce qu'une perturbation du vecteur  $d_n$  n'entraîne qu'une modification non croissante de  $d_{n+j}$  calculé à un instant  $t_{n+j}$ . Dans le cas du schéma de Newmark, on peut montrer, en éliminant la matrice d'amortissement  $C$  et le vecteur des forces extérieures, que les vecteurs d'états  $d_{n+1}$  et  $d_n$  sont reliés par :

$$\begin{bmatrix} \gamma dt K & M \\ M + \beta dt^2 K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ \dot{U}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1 - \gamma) dt K & M \\ M + (\frac{1}{2} - \beta) dt^2 K & dt M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Le système précédent peut être écrit autrement en se projetant sur un mode  $\omega_h$  ( $h$  étant la taille de l'élément de maillage). On définit la fréquence adimensionnée  $\Omega_h = dt \omega_h$  et  $[\dot{u}_n \ u_n]$  les coordonnées de  $[\dot{U}_n \ U_n]$  en se projetant sur le mode  $\varphi_h$ . De la relation (1.25), on déduit :

$$\begin{bmatrix} \gamma \Omega_h^2 & 1 \\ 1 + \beta \Omega_h^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ dt \dot{u}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1-\gamma) \Omega_h^2 & 1 \\ 1 + (\frac{1}{2} - \beta) \Omega_h^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ dt \dot{u}_n \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

En définissant la matrice d'amplification  $A = \begin{bmatrix} \gamma \Omega_h^2 & 1 \\ 1 + \beta \Omega_h^2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -(1-\gamma) \Omega_h^2 & 1 \\ 1 + (\frac{1}{2} - \beta) \Omega_h^2 & 1 \end{bmatrix}$ , la stabilité du schéma implique que les valeurs propres de cette matrices soient incluses dans le disque unité si elles sont distinctes. Ceci entraîne, sans entrer dans le détail des calculs, les propriétés classiques de stabilité du schéma de Newmark [21] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta & \quad \text{schéma inconditionnellement stable} \\ \frac{1}{2} \leq \gamma \text{ et } 2\beta \leq \gamma & \quad \text{schéma stable si } dt \leq dt_c = \frac{1}{\omega_h \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Lorsqu'on suppose que la matrice d'amortissement  $C$  est de type de Rayleigh de la forme  $C = aM + bK$  avec  $a$  et  $b$  des constantes positives, les conditions de stabilité sont modifiées [21] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \gamma \leq 2\beta & \quad \text{schéma inconditionnellement stable} \\ \frac{1}{2} \leq \gamma \text{ et } 2\beta < \gamma & \quad \text{schéma stable si } dt \leq dt_c = \frac{1}{\omega_h} \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) + [\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2(\gamma - \frac{1}{2})^2]^{1/2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta} \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec  $\xi = \frac{1}{2}(\frac{a}{\omega_h} + b\omega_h)$ .

Outre la stabilité, un schéma temporel doit également vérifier la propriété de la consistance afin d'assurer une convergence vers la solution exacte. Celle-ci est bien vérifiée dans le cas de schéma de Newmark, on peut montrer que :

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d_{n+1} - d_n}{dt} = \dot{d}_n \quad (1.29)$$

Dans le cas où  $\gamma \neq \frac{1}{2}$ , le schéma est d'ordre 1, alors qu'il est d'ordre 2 si  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

Dans la section suivante, on abordera les méthodes de couplage des schémas temporels en particulier la méthode GC qui s'appuie sur les schémas temporels de Newmark.



## 1.4 Méthodes de couplage des schémas temporels

### 1.4.1 Introduction

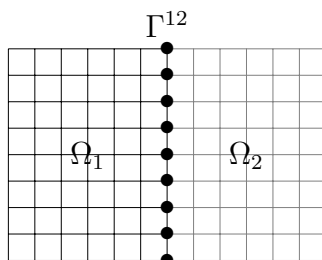


FIGURE 1.2 – Domaine  $\Omega$  partitionné en deux sous domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$

Dans cette introduction, on considère un domaine  $\Omega$  décomposé en deux sous domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  ayant pour interface  $\Gamma^{12}$  et qui peuvent, en outre, avoir des propriétés physiques différentes. On suppose que le partitionnement est sans recouvrement ( $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ) et que le maillage obtenu par la discrétisation spatiale est conforme à l'interface.

La procédure de couplage des schémas temporels consiste à subdiviser un problème en plusieurs sous domaines et intégrer chacun d'eux avec son propre schéma d'intégration et son propre pas de temps. Cette technique est d'autant plus intéressante qu'elle permet d'envisager des échelles de temps très fines sur des régions avec des maillages très fins et des échelles de temps grossières sur des régions avec des maillages grossiers. On peut imaginer sur l'exemple illustré sur la Figure 1.2, même avec un maillage uniforme sur tout domaine, une méthode d'intégration mixte où le sous domaine  $\Omega_1$  est intégré avec un schéma explicite et le sous domaine  $\Omega_2$  est intégré avec un schéma implicite.

De nombreuses méthodes de couplage ont été développées dans ce sens. Hugues *et al* [28] ont proposé une méthode mixte (Implicite/Explicite) selon l'approche primale en adoptant un pas de temps uniforme et ont démontré sa stabilité par la méthode énergétique [29]. Belytshko *et al* [30] ont développé une méthode multi-échelles en temps en considérant des schémas d'intégration homogène type Explicite/Explicite ( $E^m/E$ ) avec  $m$  le rapport entre le macro pas de temps et le micro pas de temps. Ils ont abouti à la conclusion que ce type de couplage impose des conditions de stabilité plus stricte que le couplage (E/I) qui dépendent des rigidités des deux sous domaines. Daniel [31] a

présenté une méthode de sous-cyclage formulée uniquement en déplacement autorisant l'utilisation de plusieurs échelles en temps. Cette méthode a été mise en oeuvre, dans un premier temps, pour la famille des schémas de Newmark puis étendue à la famille  $\alpha$ -généralisée. Il existe également des méthodes de couplage intéressantes qui permettent d'intégrer chaque élément de maillage par son propre pas de temps, au lieu d'intégrer tout le problème par un pas de temps contrôlé par le petit élément du maillage. On peut citer dans ce sens les références de Lew *et al* [32] [33].

Les méthodes de couplage des sous domaines basées sur l'approche duale ont connu un grand succès du fait qu'elles permettent de coupler plusieurs sous domaines de façon plus indépendante. La méthode FETI est l'une des méthodes proposées dans ce sens qui a été développée dans le travail de Farhat *et al* [34]. La continuité des quantités à l'interface est assurée par les multiplicateurs de Lagrange contrairement aux méthodes décrites précédemment. Le complément Schur dual est alors introduit permettant de calculer dans un premier temps les multiplicateurs de Lagrange avant d'en déduire les quantités cinématiques.

La méthode utilisée dans notre travail, nommée GC méthode (en référence à Gra-voil et Combescure) [10] [9] [8] est considérée comme l'extention de l'algorithme FETI dynamique pour des couplages multi-échelles en temps en utilisant les schémas de Newmark. La continuité des quantités cinématiques aux interfaces est prescrites par les multiplicateurs de Lagrange. La résolution d'un problème de la dynamique transitoire par la méthode GC nécessite 3 étapes de résolution qu'on détaillera dans la suite : la première consiste à calculer les quantités sans liaison, ensuite les multiplicateurs de Lagrange sont calculés via un problème condensé, qui permet finalement le calcul des quantités avec liaison. La stabilité de cette méthode est démontrée à travers l'approche énergétique en adoptant une condition de continuité des vitesses aux interfaces. En outre, la stabilité est conditionnée uniquement par les conditions de stabilité en chaque sous domaine. Le bilan énergétique de cette méthode introduit un terme de dissipation si le pas de temps n'est plus uniforme sur tout le problème. Des améliorations ont été alors proposées par Mahjoubi *et al* [11] et Brun *et al* [12] pour assurer une meilleure conservation de l'énergie.

### 1.4.2 Méthode GC dans le cas multi-échelles en temps

Considérons le problème décrit sur la Figure 1.2, le principe variationnel dans le milieu continu peut s'écrire, en prenant compte la décomposition en 2 sous domaines, sous la forme d'un problème de point selle :

$$\int_{\Omega} \rho_i \ddot{\underline{u}}_i \underline{v}_i d\Omega + a_i(\underline{u}_i, \underline{v}_i) + \int_{\Gamma^{ij}} \lambda^{ij} \gamma_0 \underline{v}_i ds = l_i(\underline{v}_i) \quad i, j \in \{1, 2\} \quad i \neq j \quad (1.30)$$

$$\int_{\Gamma^{ij}} \mu^{ij} (\gamma_0 \underline{u}_i - \gamma_0 \underline{u}_j) ds = 0 \quad i, j \in \{1, 2\} \quad i \neq j \quad (1.31)$$

$l_i$  forme linéaire représentant les forces extérieures agissant sur le sous domaine  $i$  en excluant l'interface  $\Gamma^{12}$ ,  $\lambda^{ij}$  les multiplicateurs de Lagrange interprétés comme les forces au signe près agissant sur l'interface  $\Gamma^{12}$ .  $\underline{u}_i, \underline{v}_i$  les champs de déplacements et  $\mu^{ij}$  des fonctions tests appartenant à des espaces convenables.

Dans un premier temps, on suppose que les comportements sont linéaires élastiques. En introduisant les éléments de la discrétisation spatiale dans les équations précédentes on obtient le système d'équations suivant (voir [8] pour les détails) :

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{U}_1 + K_1 U_1 + L_1^T \lambda &= F_{ext,1} \\ M_2 \ddot{U}_2 + K_2 U_2 + L_2^T \lambda &= F_{ext,2} \\ L_1 \dot{U}_1 + L_2 \dot{U}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

où  $M_i, K_i$  sont les matrices de masse et de rigidité du sous domaine  $i \in \{1, 2\}$ .  $\lambda$  est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange et  $L_i$  les matrices booléennes qui sélectionnent les noeuds à l'interface séparant les sous domaines. On remarque que la condition de continuité des déplacements à l'interface (1.31) a été remplacée par une condition de continuité des vitesses dans le système précédent afin d'assurer la stabilité du problème comme on va le voir dans la suite.

On suppose que le sous domaine 1 est intégré avec un micro pas de temps  $dt$  et les paramètres de Newmark  $\gamma_1$  et  $\beta_1$ , alors que le sous domaine 2 est intégré avec un macro pas de temps  $dT = m dt$  et les paramètres de Newmark  $\gamma_2$  et  $\beta_2$ .  $m$  est un entier naturel appelé le ratio des pas de temps. Le problème des sous domaines précédent peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{U}_1^j + K_1 U_1^j + L_1^T \lambda^j &= F_{ext,1}^j \quad \forall j \in [1, m] \\ M_2 \ddot{U}_2^m + K_2 U_2^m + L_2^T \lambda^m &= F_{ext,2}^m \\ L_1 \dot{U}_1^j + L_2 \dot{U}_2^j &= 0 \quad \forall j \in [1, m] \end{aligned} \quad (1.33)$$

On découple le problème précédent en s'appuyant sur la stratégie "sans liaison/avec liaison". En effet on peut résoudre le problème suivant trois étapes :

**Problème sans liaison :**

$$\tilde{M}_1 \ddot{U}_1^{j,sl} = F_{ext,1}^j - K_1 U_1^{p,j} \quad (1.34)$$

$$\tilde{M}_2 \ddot{U}_2^{m,sl} = F_{ext,2}^m - K_2 U_2^{p,m} \quad (1.35)$$

**Problème avec liaison :**

$$\tilde{M}_1 \ddot{U}_1^{j,al} = -L_1^T \lambda^j \quad (1.36)$$

$$\tilde{M}_2 \ddot{U}_2^{m,sl} = -L_2^T \lambda^m \quad (1.37)$$

**Condition de liaison :**

$$L_1(\dot{U}_1^{j,sl} + \dot{U}_1^{j,al}) + L_2(\dot{U}_2^{j,sl} + \dot{U}_2^{j,al}) = 0 \quad (1.38)$$

où  $\tilde{M}_i$  les opérateurs dynamiques définis par :

$$\begin{cases} \tilde{M}_1 = M_1 + \beta_1 dt^2 K_1 \\ \tilde{M}_2 = M_2 + \beta_2 dT^2 K_2 \end{cases} \quad (1.39)$$

et  $U_1^{p,j}$ ,  $U_2^{p,m}$  les prédicteurs en déplacements :

$$\begin{cases} U_1^{p,j} = U_1^{j-1} + dt \dot{U}_1^{j-1} + (\frac{1}{2} - \beta_1) dt^2 \ddot{U}_1^{j-1} \\ U_2^{p,m} = U_2^0 + dT \dot{U}_2^0 + (\frac{1}{2} - \beta_2) dT^2 \ddot{U}_2^0 \end{cases} \quad (1.40)$$

Les déplacements et vitesses avec et sans liaison sont fournis par les relations suivantes :

$$\begin{cases} U^{j,sl} = U^{p,j} + \beta dt^2 \ddot{U}^{j,sl} \\ U^{j,al} = \beta dt^2 \ddot{U}^{j,al} \\ \dot{U}^{j,sl} = \dot{U}^{p,j} + \gamma dt \ddot{U}^{j,sl} \\ \dot{U}^{j,al} = \gamma dt \ddot{U}^{j,al} \end{cases} \quad (1.41)$$

Les quantités totales sont obtenues par la sommation des quantités sans liaison et des quantités avec liaison. On constate que la condition de liaison (1.38) fait intervenir

les vitesses du sous domaine 2 à l'instant  $j$ . Il est nécessaire, dans ce cas, de donner des expressions approximatives de ces quantités. Combescure *et al*[8] ont proposé une interpolation linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \dot{U}_2^{j,sl} = \left(1 - \frac{j}{m}\right)\dot{U}_2^{0,sl} + \frac{j}{m}\dot{U}_2^{m,sl} \\ \dot{U}_2^{j,al} = \left(1 - \frac{j}{m}\right)\dot{U}_2^{0,al} + \frac{j}{m}\dot{U}_2^{m,al} \end{cases} \quad (1.42)$$

En considérant la relation (1.38), on substitue les vitesses avec liaison du sous domaine 2 par la relation (1.42) :

$$L_1\dot{U}_1^{j,al} + L_2 \left[ \left(1 - \frac{j}{m}\right)\dot{U}_2^{0,al} + \frac{j}{m}\dot{U}_2^{m,al} \right] = -L_1\dot{U}_1^{j,sl} - L_2\dot{U}_2^{j,sl} \quad (1.43)$$

On substitue les vitesses avec liaison par les accélérations obtenues dans (1.41) :

$$\gamma_1 dt L_1\ddot{U}_1^{j,al} + \gamma_2 dT L_2 \left[ \left(1 - \frac{j}{m}\right)\ddot{U}_2^{0,al} + \frac{j}{m}\ddot{U}_2^{m,al} \right] = -L_1\dot{U}_1^{j,sl} - L_2\dot{U}_2^{j,sl} \quad (1.44)$$

On utilise les relations entre les accélérations avec liaisons et les multiplicateurs de Lagrange, on obtient :

$$\gamma_1 dt L_1\tilde{M}_1^{-1}L_1\lambda^j + \gamma_2 dT L_2\tilde{M}_2^{-1}L_2 \left[ \left(1 - \frac{j}{m}\right)\lambda^0 + \frac{j}{m}\lambda^m \right] = L_1\dot{U}_1^{j,sl} + L_2\dot{U}_2^{j,sl} \quad (1.45)$$

On suppose que les multiplicateurs de Lagrange sont interpolés linéairement :

$$\lambda^j = \left(1 - \frac{j}{m}\right)\lambda^0 + \frac{j}{m}\lambda^m \quad (1.46)$$

On en déduit alors :

$$H\lambda^j = L_1\dot{U}_1^{j,sl} + L_2\dot{U}_2^{j,sl} \quad (1.47)$$

avec :

$$H = \left[ \gamma_1 dt L_1\tilde{M}_1^{-1}L_1 + \gamma_2 dT L_2\tilde{M}_2^{-1}L_2 \right] \quad (1.48)$$

On calcule d'abord les vitesses sans liaison en utilisant l'équation (1.41), on calcule les multiplicateurs de Lagrange à chaque instant  $j$  de l'échelle fine à partir de l'équation (1.47). Ensuite, on calcule les quantités avec liaison du sous domaine 1 en utilisant

l'équation (1.36). Une fois à l'itération  $j = m$  on calcule  $\lambda^m$  qui sera utilisé, de même, pour le calcul des quantités avec liaison du sous domaine 2. Cet algorithme peut être généralisé facilement en considérant plusieurs sous domaines.

Dans notre travail, on sera amené à utiliser le système suivant :

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{U}_1 + K_1 U_1 + L_1^T \lambda &= F_{ext,1} \\ M_2 \ddot{U}_2 + C_2 \dot{U}_2 + K_2 U_2 + L_2^T \lambda &= F_{ext,2} \\ L_1 \dot{U}_1 + L_2 \dot{U}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

où l'équation du sous domaine 2 est modifiée en introduisant une matrice d'amortissement  $C_2$ . La résolution de ce système par la méthode GC peut être déduite facilement de l'étude présentée ci-dessus. En effet, la résolution du problème comprend les mêmes étapes avec des légères modifications :

**Problème sans liaison :**

$$\tilde{M}_1 \ddot{U}_1^{j,sl} = F_{ext,1}^j - K_1 U_1^{p,j} \quad (1.50)$$

$$\tilde{M}_2 \ddot{U}_2^{m,sl} = F_{ext,2}^m - K_2 U_2^{p,m} - C_2 \dot{U}_2^{p,m} \quad (1.51)$$

**Problème avec liaison :**

$$\tilde{M}_1 \ddot{U}_1^{j,al} = -L_1^T \lambda^j \quad (1.52)$$

$$\tilde{M}_2 \ddot{U}_2^{m,sl} = -L_2^T \lambda^m \quad (1.53)$$

**Condition de liaison :**

$$H \lambda^j = -L_1 \dot{U}_1^{j,sl} - L_2 \dot{U}_2^{j,sl} \quad (1.54)$$

Dans ce cas, l'opérateur dynamique du sous domaine 2 a l'expression suivante :

$$\tilde{M}_2 = M_2 + \gamma_2 dTC_2 + \beta_2 dT^2 K_2 \quad (1.55)$$

### 1.4.3 Stabilité de la Méthode GC par la méthode énergétique

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude de la stabilité de la méthode GC par la méthode énergétique en considérant un couplage d'un milieu linéaire de Hooke (sous domaine 1) et un milieu visqueux caractérisée par la matrice  $C_2$ . Dans le cadre de la méthode énergétique de Hughes [35] utilisée pour démontrer la stabilité des schémas temporels hybrides, le bilan énergétique du sous domaine 1 peut se mettre sous la forme [8] :

$$\left[ \frac{1}{2} \ddot{U}_1 A_1 \ddot{U}_1 + \frac{1}{2} \dot{U}_1 K_1 \dot{U}_1 \right]_{t_0}^{t_m} = - \left( \gamma_2 - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=1}^m \Delta \ddot{U}_1^{j-1} A_1 \Delta \ddot{U}_1^{j-1} + \frac{1}{dt} \sum_{j=1}^m \left( \dot{U}_1^j - \dot{U}_1^{j-1} \right) L_1^T (\lambda^j - \lambda^{j-1}) \quad (1.56)$$

Avec :

$$A_1 = M_1 + dt \left( \beta_1 - \frac{\gamma_1}{2} \right) K_1 \quad (1.57)$$

Un terme d'énergie d'interface apparaît dans l'équation (1.56) qu'on définit par :

$$E_1^{interface} = \frac{1}{dt} \sum_{j=1}^m \left( \dot{U}_1^j - \dot{U}_1^{j-1} \right) L_1^T (\lambda^j - \lambda^{j-1}) \quad (1.58)$$

De façon identique, le bilan énergétique du sous domaine 2 peut se mettre sous la forme :

$$\left[ \frac{1}{2} \ddot{U}_2 A_2 \ddot{U}_2 + \frac{1}{2} \dot{U}_2 K_2 \dot{U}_2 \right]_{t_0}^{t_m} = - \left( \gamma_2 - \frac{1}{2} \right) \Delta \ddot{U}_2 A_2 \Delta \ddot{U}_2 - \Delta \dot{U}_2 C_2 \Delta \dot{U}_2 + \frac{1}{dT} \left( \dot{U}_2^m - \dot{U}_2^0 \right) L_2^T (\lambda^m - \lambda^0) \quad (1.59)$$

avec :

$$A_2 = M_2 + dT \left( \beta_2 - \frac{\gamma_2}{2} \right) K_2 \quad (1.60)$$

et :

$$E_2^{interface} = \frac{1}{dT} \left( \dot{U}_2^m - \dot{U}_2^0 \right) L_2^T (\lambda^m - \lambda^0) \quad (1.61)$$

Le bilan énergétique appliqué à tout le problème (sous domaines 1 et 2) s'écrit comme une somme des bilans détaillés précédemment :

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{2} \ddot{U}_1 A_1 \ddot{U}_1 + \frac{1}{2} \dot{U}_1 K_1 \dot{U}_1 \right]_{t_0}^{t_m} + \left[ \frac{1}{2} \ddot{U}_2 A_2 \ddot{U}_2 + \frac{1}{2} \dot{U}_2 K_2 \dot{U}_2 \right]_{t_0}^{t_m} = - \left( \gamma_1 - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=1}^m \Delta \ddot{U}_1^{j-1} A_1 \Delta \ddot{U}_1^{j-1} - \\
& \left( \gamma_2 - \frac{1}{2} \right) \Delta \ddot{U}_2 A_2 \Delta \ddot{U}_2 - \Delta \dot{U}_2 C_2 \Delta \dot{U}_2 + \frac{1}{dt} \sum_{j=1}^m \left( \dot{U}_1^j - \dot{U}_1^{j-1} \right) L_1^T (\lambda^j - \lambda^{j-1}) + \\
& \frac{1}{dT} \left( \dot{U}_2^m - \dot{U}_2^0 \right) L_2^T (\lambda^m - \lambda^0) \quad (1.62)
\end{aligned}$$

Avec le terme d'interface qui s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
E^{interface} = E_1^{interface} + E_2^{interface} = \frac{1}{dt} \sum_{j=1}^m \left( \dot{U}_1^j - \dot{U}_1^{j-1} \right) L_1^T (\lambda^j - \lambda^{j-1}) + \\
\frac{1}{dT} \left( \dot{U}_2^m - \dot{U}_2^0 \right) L_2^T (\lambda^m - \lambda^0) \quad (1.63)
\end{aligned}$$

Afin d'assurer une stabilité il suffit que :

$$E^{interface} \leq 0 \quad (1.64)$$

Ce qui revient à dire qu'il suffit d'assurer la stabilité de chaque sous domaine pour assurer la stabilité globale du problème. Combescure *et al* [8] ont montré que cette énergie peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
E^{interface} = \frac{1}{\gamma_2} \frac{\left( \dot{U}_2^{m,al} - \dot{U}_2^{0,al} \right)^T}{m dt} \tilde{M}_2 \frac{\left( \dot{U}_2^{m,al} - \dot{U}_2^{0,al} \right)}{m dt} - \\
\frac{1}{\gamma_2} \sum_{j=1}^m \frac{\left( \dot{U}_2^{j,al} - \dot{U}_2^{j-1,al} \right)^T}{m dt} \tilde{M}_2 \frac{\left( \dot{U}_2^{j,al} - \dot{U}_2^{j-1,al} \right)}{m dt} \quad (1.65)
\end{aligned}$$

Gravouil a montré que l'expression  $E^{interface}$  est équivalente à une somme de carrés négatifs. Ce qui implique immédiatement une dissipation d'énergie numérique à l'interface mais aussi la stabilité du problème global. Afin de prouver que  $E^{interface} \leq 0$ , nous proposons une autre version de démonstration plus simple :

En effet, on pose :



$$X_2^j = \frac{\dot{U}_2^{j,al} - \dot{U}_2^{j-1,al}}{dt} \quad (1.66)$$

Et :

$$f(X) = X^T \tilde{M}_2 X \quad (1.67)$$

On a alors :

$$E^{interface} = \frac{1}{\gamma_2} f\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_2^j\right) - \frac{1}{m\gamma_2} \sum_{j=1}^m f(X_2^j) \quad (1.68)$$

Comme  $\tilde{M}_2$  est définie positive, la fonction  $f$  est convexe ce qui implique en utilisant l'inégalité de Jensen [36] :

$$f\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m X_2^j\right) \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(X_2^j) \quad (1.69)$$

D'où le résultat.

## 1.5 Méthodes des couches absorbantes

Considérons un problème de propagation d'ondes dans un domaine non borné supposé être élastique. Le principe de base des couches absorbantes est de tronquer le domaine de calcul en absorbant les ondes sortantes de ce domaine. Ces couches sont attachées aux frontières du domaine d'étude et sont généralement construites avec les mêmes éléments que le reste du modèle. Dans notre travail, on considère deux techniques de couches absorbantes : les couches absorbantes par les matrices de Rayleigh comme les méthodes ALID ("Absorbing Layers with Increasing Damping") ou CALM ("Caughey Absorbing Layer Method") proposées par Rajagopal [16] et Semblat [2], et les couches parfaitement adaptées ("Perfectly Matched Layers" ou PML) qui ont la propriété d'absorber les ondes incidentes sans réflexion.

La méthode d'absorption par la matrice de Rayleigh présente l'avantage d'être facile à implémenter car on utilise uniquement des packages disponibles dans la plupart des codes EF. Cependant, cette méthode a l'inconvénient de ne plus assurer une continuité d'impédance à la frontière générant ainsi quelques réflexions à l'interface. Selon la littérature, on distinguera deux approches. La première est adoptée par Semblat *et al*[2] sous le nom de CALM dans laquelle un lien a été établi entre la matrice de Rayleigh et

une loi de comportement viscoélastique de type Maxwell [1]. L'efficacité de la méthode est montrée en utilisant la notion du facteur de qualité. La deuxième approche connue sous le nom d'ALID a été utilisée par Drodz [37] et Rajagopal *et al*[16]. Une approche similaire a été utilisée également par Liu *et al*[38]. La vérification de l'efficacité de la méthode ALID repose sur la notion de la matrice globale [39] utilisée préalablement pour le calcul des amplitudes dans des milieux stratifiés.

Dans la suite, on se limitera aux milieux homogènes linéaires isotropes. On commence par présenter certains résultats classiques des problèmes de propagation d'ondes dans les milieux élastiques en vue de mieux appréhender la suite du travail. Ensuite, on présentera les méthodes d'amortissement comme ALID ou CALM, puis la méthode PML.

### 1.5.1 Propagation d'ondes dans les milieux élastiques

On considère à nouveau le problème d'élasticité linéaire de la section 1.1 dans un milieu bidimensionnel :

$$\begin{cases} \rho \partial_t^2 u_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(x, t) + f_i(x, t) \\ \sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{kk} + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (1.70)$$

On peut formuler le problème en utilisant uniquement le déplacement. Le déplacement vérifie alors l'équation suivante [40] :

$$(\lambda + \mu) [\nabla (\nabla \cdot \underline{u})] + \mu \Delta \underline{u} = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} - \underline{f} \quad (1.71)$$

avec  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé correspondants au module de Young  $E$  et au coefficient de Poisson  $\nu$ . Selon le théorème de décomposition de Helmholtz [41] le champ de vecteur  $\underline{u}$  peut être décomposé en une somme du gradient d'un scalaire  $\phi$  et le rotationnel d'un vecteur potentiel  $\underline{\psi}$  :

$$\underline{u} = \nabla (\phi) + \nabla \wedge \underline{\psi} \quad (1.72)$$

à laquelle on ajoute la condition suivante :

$$\nabla \cdot \underline{\psi} = 0 \quad (1.73)$$

En remplaçant le vecteur déplacement dans l'équation d'équilibre (1.71) par l'équation (1.72) et en tenant compte de la condition (1.73), on obtient un système d'équations découplées :

$$\begin{cases} \Delta \phi = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - F \\ \Delta \underline{\psi} = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} - G \end{cases} \quad (1.74)$$

avec les notations :

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1.75)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.76)$$

et :

$$\underline{f} = (\lambda + 2\mu)\underline{\nabla}F + \mu\underline{\nabla} \wedge G \quad (1.77)$$

Si on suppose que le milieu est infini dans toutes les directions, le système (1.74) met en évidence une catégorie d'ondes nommée ondes de volume qu'on subdivise en deux types :

- onde de compression ou onde  $P$  se propageant avec la vitesse  $V_p$ .
- onde de cisaillement ou onde  $S$  se propageant avec la vitesse  $V_s$ .

La comparaison des expressions des deux vitesses montre que les ondes  $P$  se propagent plus vite que les ondes  $S$ . La polarisation de ces ondes est illustrée sur la Figure 1.3. Les ondes de compression sont polarisées selon la direction de propagation alors que les ondes de cisaillement sont polarisées dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Pour ces dernières, on peut distinguer deux types d'ondes de cisaillement ayant la vitesse  $V_S$  comme l'indique la Figure 1.4 :

- Ondes SV dont le déplacement se situe dans le plan vertical
- Ondes SH dont le déplacement se situe dans le plan horizontal

On considère un milieu semi infini dans le plan x-z avec une surface libre. On suppose qu'un champ d'ondes planes se propagent dans le plan x-z (ondes  $P$  et  $SV$ ). On

peut écrire les potentiels  $\phi$  et  $\psi$  sous la forme :

$$\phi = A \exp(az) \exp \left[ \frac{i\omega}{V_R} (x - V_R t) \right] \quad (1.78)$$

$$\underline{\psi} = \underline{B} \exp(bz) \exp \left[ \frac{i\omega}{V_R} (x - V_R t) \right] \quad (1.79)$$

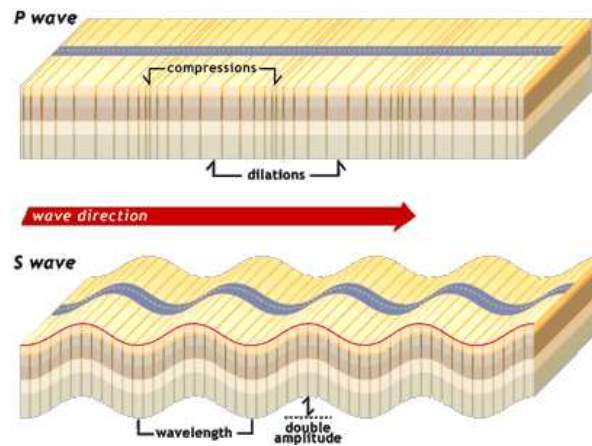


FIGURE 1.3 – Polarisation des ondes  $P$  et ondes  $S$

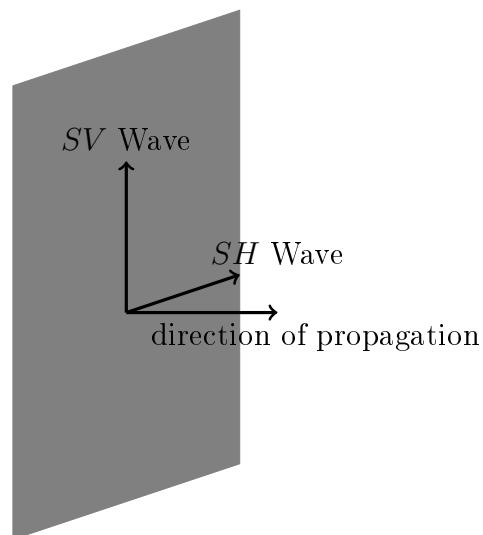


FIGURE 1.4 – Polarisation des ondes SH et SV

où  $V_R$  est la vitesse de l'onde de surface,  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $a, b$  sont des constantes positives. Si on note  $\beta^2 = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}$  et  $\chi_R = \frac{V_R}{V_s}$ , on peut montrer que la vitesse  $V_R$  vérifie l'équation suivante [40] :

$$\chi_R^6 - 8\chi_R^4 + (24 - 16\beta^2)\chi_R^2 + 16(\beta^2 - 1) = 0 \quad (1.80)$$

On peut, en outre, montrer que  $0 < V_R < V_s$  [42]. Ce type d'ondes de surface est nommé ondes de Rayleigh du nom du Lord Rayleigh qui a été le premier à les mettre en évidence, et suivent, comme l'indique la Figure 1.5, des ellipses dans le plan x-z. On note également que l'amplitude de ces ondes décroît exponentiellement en fonction de la profondeur. On renvoie le lecteur au livre de Semblat et Pecker [40] pour les détails analytiques sur les problèmes de propagation de ce type d'ondes dans les milieux élastiques.

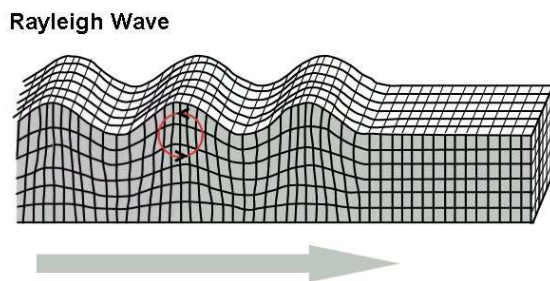


FIGURE 1.5 – Polarisation des ondes de Rayleigh

## 1.5.2 Méthode d'amortissement par la matrice de Rayleigh

### Approche CALM

La matrice de Rayleigh est une méthode très classique qui permet de construire des matrices d'amortissement pour les problèmes en dynamique transitoire [17]. L'idée de l'exploiter pour construire des couches absorbantes n'est pas aussi évidente puisqu'on a besoin des méthodes qui permettent de quantifier le potentiel d'atténuation en fonction des paramètres de la matrice. Semblat [1] a donné une interprétation rhéologique de l'amortissement de Rayleigh en faisant le lien avec le modèle viscoélastique de Maxwell. Cette description physique est efficace pour décrire le processus d'atténuation en ce

qui concerne la dépendance vis-à-vis de la fréquence des ondes. Dans le travail de Semblat, la stratégie est connue sous le nom de CALM (Caughey Absorbing Layer Method).

La matrice de Rayleigh constitue un cas particulier de la formule de Caughey et s'exprime comme une combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de rigidité :

$$C = aM + bK \quad (1.81)$$

où  $M$  et  $K$  sont les matrices de masse et de rigidité du modèle. L'avantage de l'utilisation de cette matrice est qu'elle est simple à construire dans la plupart des codes EF. Les coefficients  $a$  et  $b$  sont reliés au facteur d'amortissement  $\xi$  par la relation suivante :

$$2\xi = \frac{a}{\omega} + b\omega \quad (1.82)$$

où  $\omega$  est la pulsation.

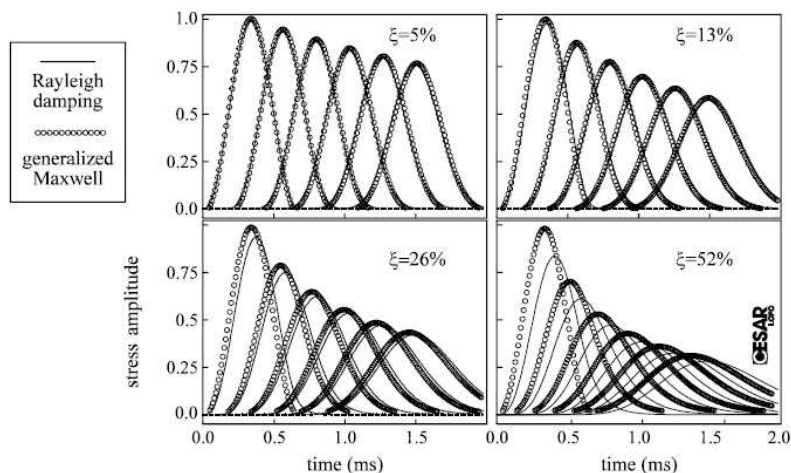


FIGURE 1.6 – Comparaison entre les résultats numériques (amortissement de Rayleigh) et les résultats analytiques (modèle de Maxwell) (Semblat [1])

Semblat a montré par des tests numériques (Figure 1.6) que l'amortissement de Rayleigh est équivalent au modèle de Maxwell généralisé pour des valeurs modérées de  $\xi$  ( $\xi < 20\%$ ). Autrement dit, il a montré que :

$$Q^{-1} \approx 2\xi \quad (1.83)$$

avec  $Q$  le facteur de qualité communément utilisé par les sismologues et défini pour un modèle viscoélastique ayant un module d'élasticité complexe  $M = M_R + iM_I$  par :

$$Q = \frac{M_I}{M_R} \quad (1.84)$$

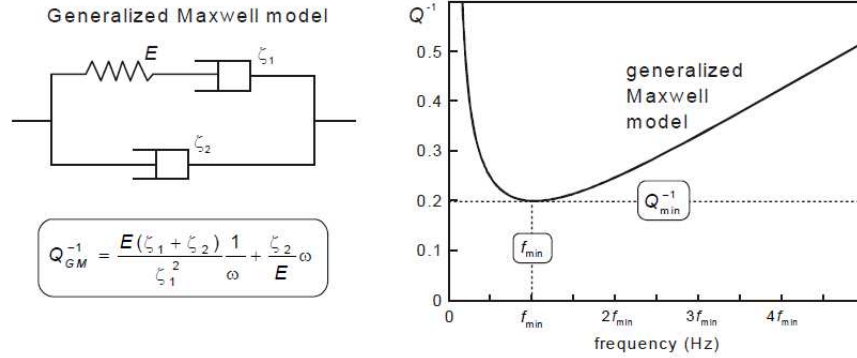


FIGURE 1.7 – Modèle de Maxwell généralisé et la courbe d'atténuation correspondante ( Semblat *et al*[2])

En faisant la correspondance entre l'expression de l'atténuation du modèle de Maxwell donnée par  $Q_{GM}^{-1} = \frac{E(\zeta_1 + \zeta_2)}{\zeta_1^2} \frac{1}{\omega} + \frac{\zeta_2}{E} \omega$ , où  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  et  $E$  les paramètres du modèle (Figure 1.7), et l'équation (1.82), les coefficients de Rayleigh sont reliés aux paramètres rhéologiques du modèle par :

$$\begin{cases} a = \frac{E(\zeta_1 + \zeta_2)}{\zeta_1^2} \\ b = \frac{\zeta_2}{E} \end{cases} \quad (1.85)$$

Afin d'étudier l'efficacité de ce type de couches, Semblat choisit les paramètres  $a$  et  $b$  de telle façon que l'atténuation soit la plus défavorable possible. Autrement dit, il fait coïncider la fréquence de l'onde incidente avec  $f_{min}$  (Figure 1.7) qui correspond à la valeur minimale de l'atténuation  $Q^{-1}$ . En étudiant une série de cas 1D et 2D avec une multitude de choix relatifs au type de la couche (homogène, hétérogène avec amortissement augmentant progressivement), les résultats sont encourageantes comme le montre l'exemple de la Figure 1.8 qui illustre les isovaleurs de déplacements pour un problème de propagation d'ondes en 2D dû à un chargement à la surface du sol. On constate que les faibles valeurs de l'amplitude des ondes réfléchies a été enregistré

pour les cas où l'amortissement augmente progressivement selon des fonctions linéaires, quadratiques ou en racines carré.

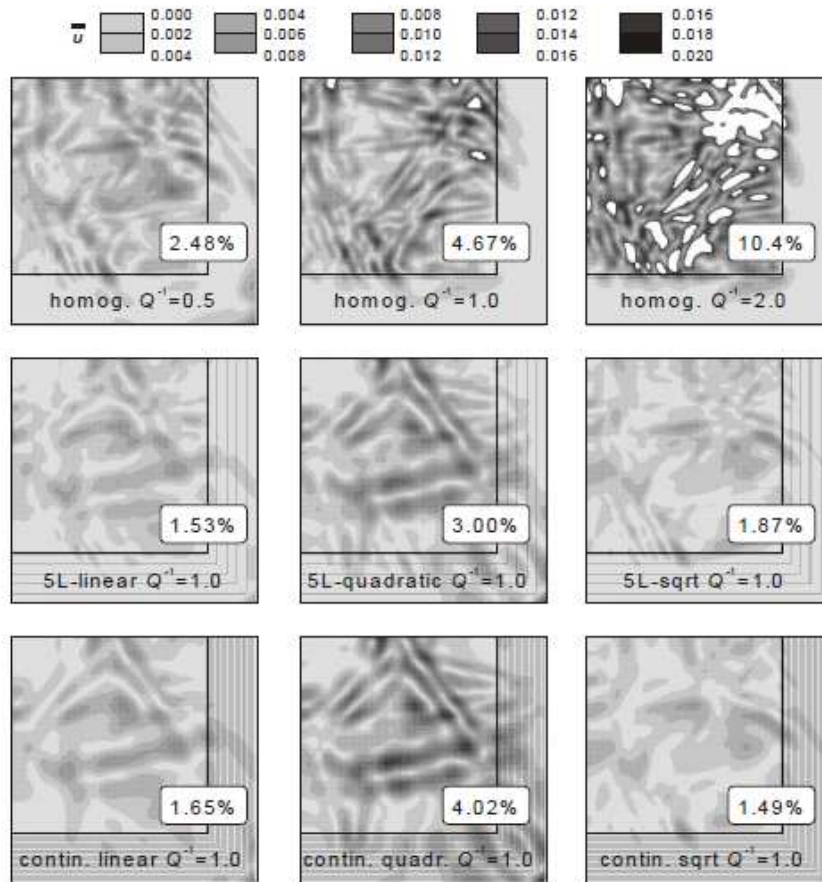


FIGURE 1.8 – Comparaison de l'amplitude relative maximale pour différents types de couches absorbantes pour un problème de propagation d'ondes dans un sol semi-infini dû à un chargement à la surface du sol (Semblat *et al*[2])

### Approche ALID

Par rapport aux fondements, il n'y a aucune différence entre la méthode ALID [16] et la méthode CALM présentée ci-dessus : les couches absorbantes ALID sont construites à partir des matrices de Rayleigh avec un amortissement augmentant progressivement dans une couche divisée en plusieurs sous couches ce qui correspond à la version CALM hétérogène. La différence se situe au niveau de la quantification du potentiel de l'atté-



nuation de la couche.

Avant de présenter la méthode en détail, on commence par écrire l'équation d'équilibre dans le domaine fréquentiel en supposant une onde harmonique :

$$-\omega^2 Mu - i\omega Cu + Ku = F \quad (1.86)$$

Avec  $C$  la matrice définie dans l'équation (1.81), on peut écrire l'équation précédente autrement :

$$-\omega^2 \left(1 + i\frac{a}{\omega}\right) Mu + (1 - i\omega b) Ku = F \quad (1.87)$$

On définit la densité complexe  $\rho_{ALID}$  et la rigidité complexe  $E_{ALID}$  par :

$$\rho_{ALID} = \rho \left(1 + i\frac{a}{\omega}\right) \quad E_{ALID} = E(1 - i\omega b) \quad (1.88)$$

De façon similaire, on définit le nombre d'onde complexe :

$$k = k_R + ik_I = \sqrt{\frac{E_{ALID}}{\rho_{ALID}}} \quad (1.89)$$

Le nombre d'onde complexe  $k$  est divisé en une partie imaginaire responsable de l'atténuation et une partie réelle variable en fonction de l'amortissement et des propriétés mécaniques du milieu d'étude, créant ainsi une discontinuité de l'impédance à l'interface. Afin de minimiser les réflexions dues à ce contraste d'impédance, l'amortissement est augmenté progressivement selon la direction de propagation en choisissant les coefficients  $a$  et  $b$  de la forme :

$$a = C_M(x) = C_{Mmax} X(x^p) \quad (1.90)$$

$$b = C_K(x) = C_{Kmax} X(x^p) \quad (1.91)$$

avec  $C_{Mmax}$  et  $C_{Kmax}$  des constantes positives et  $X$  une fonction puissance d'ordre  $p$  qui varie entre 0 à l'interface et 1 à la fin de la couche ALID. On suppose dans ce cas que la propagation est dans la direction des  $x$ .

Pour des raisons liées au temps de calcul, lorsqu'on adopte une intégration temporelle par un schéma explicite, on choisit une matrice d'amortissement proportionnelle

à la matrice de masse. Rajagopal et al. [16] ont suivi la même démarche en annulant le terme  $C_{K_{max}}$  alors que  $C_M$  varie graduellement en la supposant constante en chaque sous couche d'épaisseur égale à la taille de l'élément de maillage [16]

L'estimation du coefficient de réflexion pour la méthode ALID repose sur la méthode de la matrice globale. On résume dans la suite les principes de cette méthode. Pour cela, on considère une couche absorbante ALID divisée en plusieurs sous couches  $\dots n-1, n, n+1 \dots$  comme illustré sur la Figure 1.9. Si on se positionne dans une sous couche  $n$ , on assiste à une propagation d'ondes dans la direction positive *pos* et dans la direction négative *neg* par rapport à la direction  $x$ . Le mouvement peut être décrit par la décomposition de Helmholtz décrite dans la section (1.5.1) en utilisant les scalaire  $\phi$  et le potentiel  $\psi$ .

Pour la sous couche  $n$  dans la couche absorbante, les déplacements et les contraintes à l'interface avant  $f$  ou "front face" (celle que les ondes incidentes atteignent la première) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(n)}^f \\ \sigma_{(n)}^f \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{(n)}^f \begin{bmatrix} \mathbf{Pos}_{(n)} \\ \mathbf{Neg}_{(n)} \end{bmatrix} \quad (1.92)$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(n)}^f \\ \sigma_{(n)}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x(n)}^f \\ u_{y(n)}^f \\ \sigma_{xx(n)}^f \\ \sigma_{xy(n)}^f \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Pos}_{(n)} \\ \mathbf{Neg}_{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{pos(n)} \\ \psi_{pos(n)} \\ \phi_{neg(n)} \\ \psi_{neg(n)} \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

$\phi_{pos(n)}$  et  $\psi_{pos(n)}$  correspondent aux ondes qui se propagent dans le sens positif alors que  $\phi_{neg(n)}$  et  $\psi_{neg(n)}$  correspondent aux ondes qui se propagent dans le sens négatif.  $\mathbf{M}_{(n)}^f$  est une matrice carrée de taille  $4 \times 4$  qui peut être obtenue facilement par la relation (1.72) en considérant uniquement les ondes harmoniques (Voir [16]). De même, les déplacements et les contraintes à l'interface arrière ou "back face" s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(n)}^b \\ \sigma_{(n)}^b \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{(n)}^b \begin{bmatrix} \mathbf{Pos}_{(n)} \\ \mathbf{Neg}_{(n)} \end{bmatrix} \quad (1.95)$$

Si on suppose que les contraintes à l'interface arrière de la dernière sous couche sont nulles (interface libre), on peut écrire ces conditions sous la forme :

$$\mathbf{L}_{(last)}^b \begin{bmatrix} \mathbf{Pos}_{(last)} \\ \mathbf{Neg}_{(last)} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.96)$$

où  $L_{(last)}^b$  est une matrice de taille  $2 \times 4$  composée des lignes 3 et 4 de la matrice  $\mathbf{M}_{(n)}^b$ .

On note  $\mathbf{M}_{pos(1)}^b$  et  $\mathbf{M}_{neg(1)}^b$  les matrices composées respectivement des deux premières et des deux dernières colonnes de  $\mathbf{M}_{(1)}^b$ . En considérant la continuité des déplacements et des contraintes aux différentes interfaces, les vecteurs  $\begin{bmatrix} \mathbf{Pos}_{(n)} \\ \mathbf{Neg}_{(n)} \end{bmatrix}$  vérifient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{neg(1)}^b & -\mathbf{M}_{(2)}^f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{(2)}^b & -\mathbf{M}_{(3)}^f & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}_{(last-1)}^b & -\mathbf{M}_{(last)}^f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L}_{(last)}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Neg}_{(1)} \\ \mathbf{Pos}_{(2)} \\ \mathbf{Neg}_{(2)} \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Pos}_{(last-1)} \\ \mathbf{Neg}_{(last-1)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Pos}_{(last)} \\ \mathbf{Neg}_{(last)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_{pos(1)}^b \mathbf{Pos}_{(1)} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.97)$$

$\mathbf{Pos}_{(1)}$  et  $\mathbf{Neg}_{(1)}$  correspondent respectivement aux ondes incidentes et aux ondes réfléchies du milieu d'étude. Connaissant les valeurs  $\mathbf{Pos}_{(1)}$ , on peut calculer les valeurs  $\mathbf{Neg}_{(1)}$  en résolvant le système (1.97) et déduire par conséquent le coefficient de réflexion qui pourra servir au dimensionnement des couches ALID.

Cependant, on constate que le coefficient obtenu exige une connaissance préalable de l'épaisseur de la couche et demande, en outre, la résolution d'un système linéaire qui devient plus important avec le nombre de sous couches. Dans le chapitre 2, nous proposons une autre alternative plus simple pour dimensionner les couches ALID qu'on nommera ALID modifiée. La différence sera au niveau du choix des propriétés mécaniques (module de Young et coefficient de Poisson) qui ne seront plus homogènes comme dans le cas de la méthode ALID et doivent respecter certaines conditions qui minimisent les réflexions entre les interfaces. Dans ce cas, on cherchera à définir l'épaisseur de la couche selon un indicateur cible qui estime l'atténuation de l'onde.

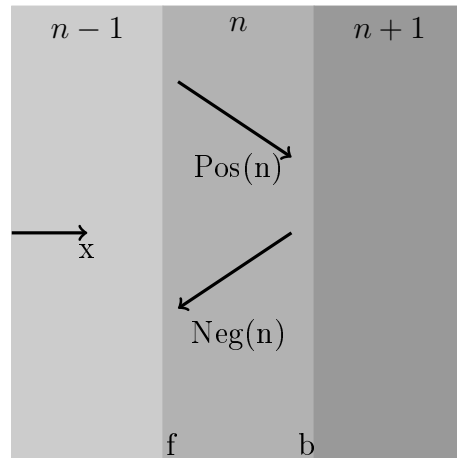


FIGURE 1.9 – Onde se propageant dans la direction positive ou la direction négative par rapport à la direction  $x$ ,  $f$  pour l'interface avant ("front face") et  $b$  pour l'interface arrière ("back face")

### 1.5.3 Couches absorbantes parfaitement adaptées

#### Présentation Générale

A l'origine, la méthode PML ("Perfectly Matched Layers") a été développée pour les équations de Maxwell (travaux de Bérenger [43]) et grâce à son succès elle est devenue l'une des méthodes les plus utilisées dans la simulation des problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques dans les milieux non-bornés. Cette idée a été adaptée ensuite aux équations de l'élastodynamique en utilisant différentes approches et différentes écritures mathématiques. Les premiers développements dans ce sens reviennent à Hastings *et al.* [44] qui ont adopté une formulation en termes de potentiels de compression et de cisaillement. Dans la même période, Chew *et al.* [15] proposent une nouvelle formulation en contrainte-vitesse pour les milieux linéaires isotropes, étendue ensuite aux milieux hétérogènes anisotropes par Collino *et al.* [45]. Wang *et al.* [46] ont proposé une nouvelle écriture de la PML, nommée C-PML, en introduisant des termes de la convolution, développée dans un premier temps pour la méthode des différences finies, puis pour la méthode des éléments finis par Matzen [47]. On peut citer également une autre formulation, nommée M-PML, de Meza-Fajardo *et al.* [48] considérée comme une généralisation de la PML en introduisant l'amortissement dans plusieurs directions.

Généralement, on peut classer toutes les formulations selon deux approches de construction. La première approche consiste à modifier le problème écrit sous une

forme hyperbolique en décomposant les champs de déplacements et de contraintes (*split – field*). Le caractère dissipatif du milieu est ensuite introduit par des termes d'absorption ([15], [45]). La seconde approche, consiste à modifier les équations de l'élastodynamique écrites selon une formulation du premier ordre ou second ordre ([18], [19]) en remplaçant les coordonnées réelles par des coordonnées complexes sans procéder à aucune décomposition des champs (*unsplit – field*). Dans la suite, on s'intéresse à une formulation de type *unsplit – field* développée par Basu *et al.* ([18], [19]), adaptée à la méthode des éléments finis.

Dans [19][20], Basu propose une formulation temporelle de la PML en introduisant dans les équations classiques de l'élastodynamique écrites dans le domaine fréquentiel des fonctions de transformations complexes  $\lambda_i$ . En effet, l'idée est de remplacer dans les équations du mouvement (1.70) les coordonnées  $x_i$  par de nouvelles coordonnées complexes  $x_i \rightarrow \tilde{x}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tel que :

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_i} = \lambda_i(x_i) = 1 + f_i^e(x_i) - i \frac{f_i^p(x_i)}{k_s} \quad (1.98)$$

avec  $k_s = \frac{\omega}{c_s}$  ( $c_s$  étant la vitesse des ondes S) et  $f_i^e, f_i^p$  sont des fonctions positives dépendant uniquement de  $x_i$  s'annulant au bord du domaine physique. Le rôle des fonctions  $f_i^e$  et  $f_i^p$  est d'amortir respectivement les modes propagatifs et les modes évanescents dans la direction des  $x_i$ . La dépendance de  $\tilde{x}_i$  par rapport à la fréquence angulaire  $\omega$  est ajoutée afin que la partie imaginaire du nombre d'onde soit indépendante de celle-ci.

Comme le changement de coordonnées dépend de la fréquence, il est bien naturel que la modification des équations commence au niveau de la formulation fréquentielle du problème original. La formulation temporelle est obtenue par la transformée inverse de Fourier. En remplaçant les anciennes coordonnées  $x_i$  par les nouvelles  $\tilde{x}_i$ , on obtient dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} \Sigma_j \frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= -\omega^2 \rho u_j \\ \sigma_{ij} &= \Sigma_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda_j(x_j)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\lambda_i(x_i)} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (1.99)$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse au système (1.99), la formulation dans le domaine temporel est donnée par :

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \tilde{F}^e + \underline{\underline{\Sigma}} \tilde{F}^p) &= \rho f_m \ddot{\underline{u}} + \rho c_s f_c \dot{\underline{u}} + \mu f_k \underline{u} \\
\underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \\
F^{eT} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} F^e + F^{pT} \underline{\underline{\varepsilon}} F^e + F^{eT} \underline{\underline{\varepsilon}} F^p + F^{pT} \underline{\underline{E}} F^p &= \frac{1}{2} ((\nabla \underline{\dot{u}})^T F^e + F^{eT} \nabla \underline{\dot{u}}) + \frac{1}{2} ((\nabla \underline{u})^T F^p + F^{pT} \nabla \underline{u})
\end{aligned} \tag{1.100}$$

avec :

$$\begin{aligned}
F^e &= \begin{bmatrix} 1 + f_1^e(x_1) & 0 \\ 0 & 1 + f_2^e(x_2) \end{bmatrix}, & F^p &= \begin{bmatrix} c_s f_1^p(x_1) & 0 \\ 0 & c_s f_2^p(x_2) \end{bmatrix} \\
\tilde{F}^e &= \begin{bmatrix} 1 + f_2^e(x_2) & 0 \\ 0 & 1 + f_1^e(x_1) \end{bmatrix}, & \tilde{F}^p &= \begin{bmatrix} c_s f_2^p(x_2) & 0 \\ 0 & c_s f_1^p(x_1) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.101}$$

et :

$$\begin{aligned}
f_m &: = (1 + f_1^e(x_1))(1 + f_2^e(x_2)) \\
f_c &: = (1 + f_1^e(x_1)) f_2^p(x_2) + (1 + f_2^e(x_2)) f_1^p(x_1) \\
f_k &: = f_1^p(x_1) f_2^p(x_2)
\end{aligned} \tag{1.102}$$

Les tenseurs  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  sont donnés par :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \int_0^t \underline{\underline{\sigma}} dt \quad \underline{\underline{E}} = \int_0^t \underline{\underline{\varepsilon}} dt \tag{1.103}$$

Généralement les fonctions d'amortissements  $f_i^e, f_i^p$  sont des fonctions polynômiales de la forme suivante :

$$f_i^\alpha = a_\alpha \left( \frac{x_i - x_0}{d} \right)^n \quad \alpha = e, p \quad x_0 \leq x_i \leq x_0 + d \tag{1.104}$$

avec  $d$  l'épaisseur de la couche PML et  $a_\alpha$  une constante qui dépendra du choix du coefficient de réflexion  $R$ .

Dans le cas où l'incidence est oblique avec un angle  $\theta$  sur une PML d'épaisseur  $d$  (Figure 1.10), on suppose une onde incidente de type  $P$ . Les coefficients de réflexions des ondes  $P$  et  $S$  transmises s'écrivent sous la forme [18] :

$$R_p = \frac{\cos(\theta + \theta_s)}{\cos(\theta - \theta_s)} \exp \left[ -2 \frac{c_s}{c_p} F_1(d) \cos(\theta) \right] \quad \text{Ondes P} \quad (1.105)$$

$$R_s = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(\theta - \theta_s)} \exp \left[ -F_1(d) \left( \frac{c_s}{c_p} \cos(\theta) + \cos(\theta_s) \right) \right] \quad \text{Ondes S} \quad (1.106)$$

avec  $F_1(x_1) = \int_0^{x_1} f_1^p(\xi) d\xi$  et  $\sin(\theta_s) = \frac{c_s}{c_p} \sin(\theta)$ .

En raisonnant sur une incidence normale et en utilisant les fonctions définies dans l'équation (1.104),  $a_\alpha$  est donné en fonction du coefficient de réflexion  $R_p$ , relatif aux ondes P, par [19] :

$$a_\alpha = \frac{\frac{c_p}{c_s}(n+1)}{2d} \ln\left(\frac{1}{R_p}\right) \quad (1.107)$$

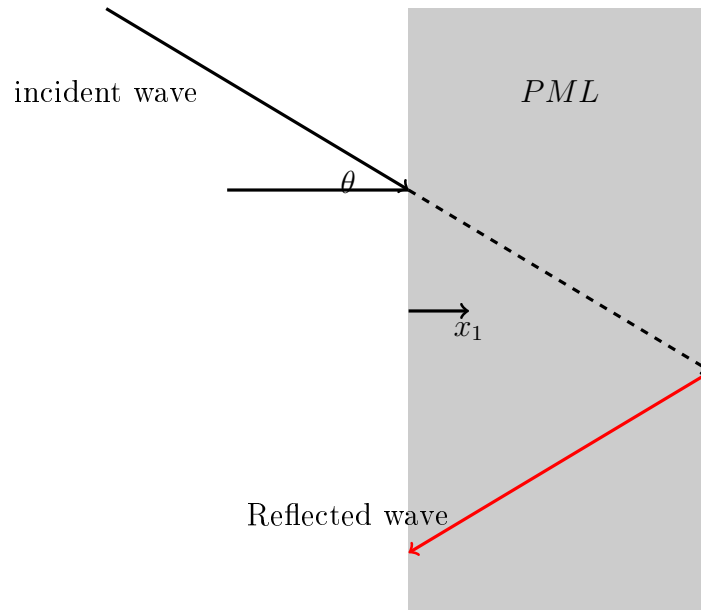


FIGURE 1.10 – Incidence oblique sur une PML

### Un mot sur la stabilité

En utilisant la technique des PMLs, des instabilités, traduites par une croissance exponentielle de la solution numérique, ont été observées pour certaines expériences

numériques. Ce problème a motivé les auteurs à repenser la question de la stabilité et le caractère bien posé des équations de la PML. Au début, une analyse mathématique de la stabilité a été établie pour les équations de Maxwell [49], en étudiant la perturbation d'un problème de Cauchy. Dans le cas des équations de l'élastodynamique, Bécache *et al.* [50] ont établi, en partant d'une analyse de la relation de dispersion de la PML, une condition nécessaire de stabilité au sens de *Kreiss* sous l'hypothèse des hautes fréquences. Cette dernière analyse a abouti à la conclusion que les PMLs dans les milieux linéaires isotropes sont, *a priori*, stables à la différence des milieux linéaires anisotropes qui peuvent manifester des instabilités dans certains cas. Meza-Fajardo *et al.*, quant à eux, ont réalisé une étude asymptotique de la M-PML et ont montré que ce modèle est plus stable qu'une PML classique [48]. Cependant, Duru *et al.* ont contredit cette affirmation dans [51], après qu'ils ont constaté des instabilités dans certains cas utilisant la M-PML. Finalement, des récents progrès ont été réalisés au niveau la PML avec d'autres types de coordonnées complexes [51], le principe de l'analyse étant assez similaire à celui de [50].

## La discrétisation spatio-temporelle

La littérature concernant les méthodes de résolution numérique des équations de la PML est assez abondante. Historiquement, la première formulation en vitesse-contrainte (*split – field*) pour les milieux isotropes a été implémentée en différences finies [15], de même que la version étendue aux milieux anisotropes [45]. En 2001, Bécache propose, pour la même formulation, une résolution par la méthode des éléments finis mixtes [52]. D'autres avancées sur ces formulations ont été présentées dans [53] [54] en utilisant la méthode des éléments spectraux. La formulation sans décomposition des champs (*unsplit – field*) initialement introduite par Basu *et al.* [46] a été implémenté en utilisant la méthode des différences finis. D'autres formulations du même type ont été implémentées par la méthode des éléments finis classique [19] ou encore par la méthode des éléments mixtes [55].

Dans notre travail, on s'intéresse à la discrétisation spatio-temporelle proposée par Basu [19] pour sa formulation discutée dans la section 1.5.3. La semi discrétisation en espace est obtenue par la méthode des éléments finis alors que la discrétisation temporelle est effectuée en utilisant les schémas classiques de Newmark et des approximations au 1er ordre de certains champs du problème. Cette manière de résolution présente, malgré sa complexité [55], l'avantage d'être adaptée aux méthodes de couplage des schémas temporels.

Dans la suite, la description de la méthode sera fidèle à celle détaillée dans les références [19][20]. Pour commencer, notons  $v$  le vecteur test appartenant à un espace



vectorel approprié et  $u$  la solution faible du système (1.100). Le problème variationnel s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} \rho f_m \underline{v} \cdot \underline{\ddot{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \rho c_s f_c \underline{v} \cdot \underline{\dot{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \mu f_k \underline{v} \cdot \underline{\dot{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\tilde{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\tilde{\varepsilon}}^p : \underline{\underline{\Sigma}} d\Omega = \int_{\Gamma} \underline{\omega} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \tilde{F}^e + \underline{\underline{\Sigma}} \tilde{F}^p) \cdot \underline{n} d\Gamma \quad (1.108)$$

avec  $\Gamma = \partial\Omega$  la frontière du domaine  $\Omega$ , et  $\underline{n}$  le vecteur unité normal à  $\Gamma$ .  $\underline{\tilde{\varepsilon}}^e$  et  $\underline{\tilde{\varepsilon}}^p$  sont données par :

$$\underline{\tilde{\varepsilon}}^e = \frac{1}{2}(\underline{grad} \underline{v} \tilde{F}^e + \tilde{F}^{eT} (\underline{grad} \underline{v})^T) \quad \underline{\tilde{\varepsilon}}^p = \frac{1}{2}(\underline{grad} \underline{v} \tilde{F}^p + \tilde{F}^{pT} (\underline{grad} \underline{v})^T) \quad (1.109)$$

Les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité sont données par :

$$m_{IJ} = \int_{\Omega} \rho f_m N_I N_J d\Omega I_d \quad c_{IJ} = \int_{\Omega} \rho f_c c_s N_I N_J d\Omega I_d \quad k_{IJ} = \int_{\Omega} \mu f_k N_I N_J d\Omega I_d \quad (1.110)$$

A partir de l'équation (1.108), on définit le vecteur de force interne  $p_{n+1}^e$  par :

$$p_{n+1}^e = \int_{\Omega_e} \tilde{B}^{eT} \hat{\sigma}_{n+1} + \int_{\Omega_e} \tilde{B}^{pT} \hat{\Sigma}_{n+1} \quad (1.111)$$

Avec  $\tilde{B}^e$  et  $\tilde{B}^p$  désignant des matrices de taille  $3 \times 2$  qui dépendent des fonctions de forme et des fonctions d'amortissement. Elles sont données sous la forme de sous matrices relatives au noeud  $I$  ci-dessous :

$$\tilde{B}_I^e = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{I1}^e & \cdot \\ \cdot & \tilde{N}_{I2}^e \\ \tilde{N}_{I2}^e & \tilde{N}_{I1}^e \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_I^p = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{I1}^p & \cdot \\ \cdot & \tilde{N}_{I2}^p \\ \tilde{N}_{I2}^p & \tilde{N}_{I1}^p \end{bmatrix} \quad (1.112)$$

avec :

$$\tilde{N}_{Ii}^e = \tilde{F}_{ij}^e N_{I,j} \quad \text{et} \quad \tilde{N}_{Ii}^p = \tilde{F}_{ij}^p N_{I,j} \quad (1.113)$$

La notation de Voigt est adoptée pour les champs  $\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$  et  $\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix}$ .

On suppose qu'ils sont reliés par :

$$\hat{\Sigma}_{n+1} = \hat{\Sigma}_n + dt \hat{\sigma}_{n+1} \quad (1.114)$$

Il en résulte :

$$p_{n+1}^e = \int_{\Omega_e} \tilde{B}^T \hat{\sigma}_{n+1} + \int_{\Omega_e} \tilde{B}^{pT} \hat{\Sigma}_n \quad (1.115)$$

avec :

$$\tilde{B}^T = \tilde{B}^{eT} + dt \tilde{B}^{pT} \quad (1.116)$$

La connaissance de  $\hat{\sigma}_{n+1}$  dépend de  $\hat{\varepsilon}_{n+1}$  obtenue en discrétisant la 3<sup>me</sup> équation du système (1.100) et en supposant que  $\dot{\varepsilon}(t_{n+1}) = \frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{dt}$  et  $E(t_{n+1}) = E_n + dt \varepsilon_n$  :

$$\hat{\varepsilon}_{n+1} = \frac{1}{dt} \left[ B^\varepsilon v_{n+1} + B^Q u_{n+1} + \frac{1}{dt} \hat{F}^\varepsilon \hat{\varepsilon}_n - \hat{F}^Q \hat{E}_n \right] \quad (1.117)$$

$B^\varepsilon$ ,  $B^Q$ ,  $\hat{F}^\varepsilon$  et  $\hat{F}^Q$  sont des matrices qui dépendent également des fonctions de formes et des fonctions d'amortissement (voir annexe A). Le vecteur  $p_{n+1}^e$  est désormais fonction des vecteurs  $v_{n+1}$  et  $u_{n+1}$  et des quantités à l'instant  $t_n = ndt$ . On peut écrire l'équation finale à l'instant  $n + 1$  sous la forme :

$$Ma_{n+1} + (C + \tilde{C})v_{n+1} + (K + \tilde{K})u_{n+1} + P(\varepsilon_n, E_n, \Sigma_n) = F_{ext} \quad (1.118)$$

$P$  étant un opérateur dépendant des quantités à l'instant  $n$ . Les matrices globales  $\tilde{C}$ ,  $\tilde{K}$  sont construites à partir des matrices élémentaires suivantes :

$$\tilde{c}^e = \frac{1}{dt} \int_{\Omega_e} \tilde{B}^T D B^\varepsilon \quad \tilde{k}^e = \frac{1}{dt} \int_{\Omega_e} \tilde{B}^T D B^Q \quad (1.119)$$

Finalement, la matrice de comportement  $D$  est donnée par :

$$D = \begin{bmatrix} \kappa + \frac{4}{3}\mu & \kappa - \frac{2}{3}\mu & \cdot \\ \kappa - \frac{2}{3}\mu & \kappa + \frac{4}{3}\mu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu \end{bmatrix} \quad (1.120)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement et  $\kappa$  le module d'élasticité isostatique. La dernière étape consiste à utiliser les schémas de Newmark [7] et résoudre le problème en une des quantités cinématiques : déplacement, vitesse ou accélération.

## 1.6 Bilan

Ce chapitre consiste à avoir un aperçu de différents aspects relatifs à la simulation de la propagation des ondes dans des milieux infinis. Premièrement, on a présenté le problème de la dynamique, pour un milieu élastique linéaire caractérisé par une loi de Hooke, sous la forme discrétisée en espace et en temps. Puis, on a décrit les grandes lignes de la méthode GC pour le couplage des schémas temporels hétérogènes issus de la famille de Newmark. L'algorithme a été présenté d'une part pour un problème de couplage entre deux domaines linéaires de Hooke et d'autre part pour un problème de couplage entre un milieu linéaire de Hooke et un milieu visqueux caractérisé par une matrice de Rayleigh. La stabilité de la méthode a été également démontrée par la méthode énergétique en faisant apparaître un terme négatif lié à l'interface. Il en ressort que la stabilité du problème global est conditionné par la stabilité de chaque sous domaine.

Enfin ce chapitre s'est intéressé à la présentation de deux stratégies de couches absorbantes utilisées dans les problèmes de propagation d'ondes dans les milieux infinis. Le premier type de couches, utilisé sous le nom ALID ou CALM, est construit à partir de la matrice de Rayleigh en introduisant des paramètres d'amortissement homogènes ou hétérogènes dans le domaine absorbant. L'avantage de cette technique se situe au niveau de la simplicité de sa programmation, la rendant ainsi utilisable dans la majorité des codes éléments finis. Le deuxième type de couches absorbantes, plus compliqué à programmer, est connu sous le nom des couches parfaitement adaptées ou PML. Cette technique présente l'avantage d'assurer une continuité des propriétés aux interface sans générer de réflexions parasites et d'avoir un dimensionnement du domaine indépendant du domaine fréquentiel de l'onde incidente.

Il ressort de cette étude bibliographique qu'il est intéressant d'exploiter les nouvelles techniques de couplage de schémas temporels par des problèmes de propagation d'ondes dans les milieux infinis. Les couches absorbantes considérées comme un sous domaine à part, intégré avec un schéma inconditionnellement stable et un macro pas de temps au lieu d'adopter un schéma conditionnellement stable pour l'ensemble du problème. Avant d'atteindre ce but, une analyse plus rigoureuse de l'amortissement de Rayleigh sera abordée dans le chapitre suivant qui nous permettra de dimensionner de façon plus simple le domaine absorbant à partir d'une atténuation cible.

# Chapitre 2

## Amortissement de Rayleigh

*C'est ainsi que je suis devenu un adepte fanatique  
de la méthode de la "simplicité logique".*

Albert Einstein

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier analytiquement l'amortissement de Rayleigh en faisant le lien, à partir d'une formulation forte, avec des modèles viscoélastiques classiques, notamment le modèle classique de Kelvin-Voigt. Cette partie sera suivie par une étude mathématique des problèmes de propagation d'ondes en 1D en considérant premièrement un problème de propagation d'onde dans le milieu absorbant puis dans un milieu composé par un domaine élastique linéaire de Hooke et un domaine absorbant. Cette étude va nous permettre d'une part d'établir des conditions de minimisation des réflexions à l'interface entre le milieu d'étude et le milieu absorbant et d'autre part de dimensionner le domaine absorbant qui sera composé d'une ou plusieurs couches. En dernier lieu, on abordera la partie numérique dont l'objectif est de valider certains résultats de la partie analytique en faisant des comparaisons entre les résultats numériques par la méthode des éléments finis et les résultats exacts issus de la théorie.

### 2.1 Amortissement de Rayleigh : cadre général

#### 2.1.1 Formulation forte

On considère un domaine borné  $\Omega$  dont le déplacement est gouverné par l'équation suivante :

$$\rho \partial_t^2 \underline{u} + a \rho \partial_t \underline{u} = \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{u})) \quad (2.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u})) + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) + b (\lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}(\partial_t \underline{u})) + 2\mu \underline{\underline{\epsilon}}(\partial_t \underline{u})) \quad (2.2)$$

avec  $a, b, \lambda, \mu$  des réels positifs.

L'équation (2.2) définit le comportement d'un matériau visqueux de type Kelvin-Voigt,  $b$  étant une caractéristique du temps. Un amortissement proportionnel à la vitesse, caractérisé par le coefficient  $a\rho$ , est également ajouté dans l'équation (2.1). Les paramètres  $\lambda, \mu$  sont les coefficients de Lamé. On note  $E$  et  $\nu$  le module de Young et le coefficient de Poisson du modèle décrit ci-dessus. Le but dans la suite est de mettre en évidence le lien entre les relations (2.1) et (2.2) avec la matrice de Rayleigh.

Les conditions aux limites sont choisies comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = g \text{ sur } \partial\Omega_n \quad \underline{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d \quad (2.3)$$

avec

$$\partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d = \partial\Omega \setminus \Gamma \quad \partial\Omega_n \cap \partial\Omega_d = \emptyset \quad (2.4)$$

Les conditions initiales sont données ci-dessous :

$$\underline{u}(x \in \Omega, t = 0) = \underline{u}_0 \quad \partial_t \underline{u}(x \in \Omega, t = 0) = \underline{v}_0 \quad (2.5)$$

**Remarque :**

On peut écrire la formulation en utilisant uniquement le champ de déplacement  $u$ . Comme dans le cas des équations de l'élastodynamique, on substitue l'équation (2.2) dans l'équation (2.1) et on obtient la forme forte suivante :

$$\rho \partial_t^2 \underline{u} + a \rho \partial_t \underline{u} - \mu \Delta \underline{u} - (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) - b \mu \Delta \partial_t \underline{u} - b(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \partial_t \underline{u}) = 0 \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Approximation par les éléments finis

On suppose que  $\underline{u} \in C^2 \left[ (0, T), (H^2(\Omega))^d \right]$  avec  $T$  l'instant final. On applique la formule de Green pour chaque fonction test  $v$  appartenant à un espace  $H^1(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{v}}_2 d\Omega = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \underline{\underline{v}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}})\underline{\underline{v}} ds \quad (2.7)$$

La formulation faible liée au problème constitué par les équations (2.1) et (2.2) est donnée par :

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \underline{\underline{u}} \underline{\underline{v}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{v}}) d\Omega + a \int_{\Omega} \rho \partial_t \underline{\underline{u}} \underline{\underline{v}} d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}})\underline{\underline{v}} d\Gamma \quad \forall \underline{\underline{v}} \in (H^1(\Omega))^d \quad (2.8)$$

La condition de Dirichlet (2.3) est équivalente à :

$$\int_{\partial\Omega_d} \gamma_0 \underline{\underline{u}} p = 0 \quad \forall p \in \left( H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_d) \right)^d \quad (2.9)$$

avec  $\gamma_0$  l'opérateur trace ou la restriction de  $\underline{\underline{u}}$  sur  $\partial\Omega$ .

On peut encore écrire la relation 2.8 sous la forme :

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t^2 \underline{\underline{u}} \underline{\underline{v}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{v}}) d\Omega + a \int_{\Omega} \rho \partial_t \underline{\underline{u}} \underline{\underline{v}} d\Omega = \int_{\partial\Omega_n} g \gamma_0 \underline{\underline{v}} d\Gamma + \int_{\partial\Omega_d} \lambda \gamma_0 \underline{\underline{v}} d\Gamma \quad (2.10)$$

avec  $\lambda$  un vecteur jouant le rôle du multiplicateur de Lagrange lié à la condition de Dirichlet.

Dans le cas où  $g = 0$  et  $\underline{\underline{v}} = \partial_t \underline{\underline{u}}$ , la relation (2.10) implique :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\partial_t \underline{\underline{u}})^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{u}}) : C : \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{u}}) d\Omega \right] = -a \int_{\Omega} \rho (\partial_t \underline{\underline{u}})^2 d\Omega - b \int_{\Omega} \underline{\underline{\epsilon}}(\partial_t \underline{\underline{u}}) : C : \underline{\underline{\epsilon}}(\partial_t \underline{\underline{u}}) d\Omega \leq 0 \quad (2.11)$$

On définit l'énergie  $E(t)$  par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\partial_t \underline{u})^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\epsilon}(\underline{u}) : C : \underline{\epsilon}(\underline{u}) d\Omega \quad (2.12)$$

On en déduit que  $E(t)$  est décroissante et reste stable au cours de temps :  $E(t) < +\infty$ .

Comme dans le cas des équations de l'élastodynamique, la discrétisation des relations ci-dessus par la méthode des éléments finis nécessite l'approximation des différents champs. Soit  $u_h$  et  $\hat{\lambda}$  les vecteurs approximant le champ de déplacement  $u$  et le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . On peut écrire  $u_h^e = N^e U^e$  et  $v_h^e = N^e V^e$  avec  $N^e$  la matrice des fonctions de forme. En substituant les différentes expressions dans la formulation faible (2.10), on obtient :

$$M\ddot{U} + KU + (aM + bK)\dot{U} = -L^T \hat{\lambda} \quad (2.13)$$

La condition de Dirichlet s'exprime alors :

$$LU = 0 \quad (2.14)$$

On remarque que la formulation matricielle (2.13) fait apparaître une matrice d'amortissement qui est la matrice de Rayleigh  $C = aM + bK$ . L'objectif dans la suite est d'exploiter la formulation forte (2.6) ou l'équation locale (2.1) afin de décrire au mieux le comportement de l'onde dans ce milieu dissipatif. L'analyse sera menée en utilisant des ondes planes harmoniques et non harmoniques. On en déduira certaines conditions pour une dissipation optimale de l'énergie incidente et une réflexion minimale des ondes incidentes à l'interface.

## 2.2 Problème de propagation d'ondes dans le milieu de Rayleigh et à l'interface

### 2.2.1 Propagation d'onde dans le milieu de Rayleigh : Cas 1D

Dans cette section, on étudie le problème de propagation d'onde dans le milieu de Rayleigh dans le cas 1D. On suppose que le milieu est infini (Figure 2.1) et que l'onde se propage dans la direction  $e_x$ .

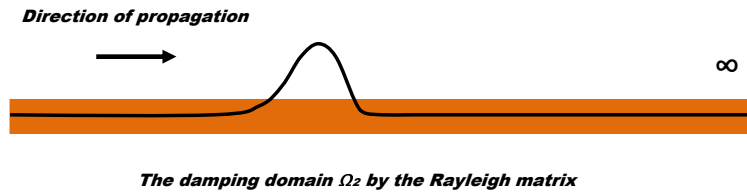


FIGURE 2.1 – Problème de propagation d'onde en 1D

#### Ondes harmoniques

Comme le problème est en 1D, on peut écrire le déplacement sous la forme :  $u(x, t) = \tilde{u}(x, t) e_x$  pour les ondes P ou  $u(x, t) = \tilde{u}(x, t) e_z$  pour les ondes S.

Les équations de propagation d'ondes pour les ondes P et les ondes S (2.1) se simplifient dans le cas 1D en :

selon  $e_x$  :

$$\rho \partial_t^2 \tilde{u} + a \rho \partial_t \tilde{u} = (\lambda + 2\mu) \partial_x^2 \tilde{u} + b (\lambda + 2\mu) \partial_x^2 \partial_t \tilde{u}_2 \quad \text{Ondes P} \quad (2.15)$$

selon  $e_z$  :

$$\rho \partial_t^2 \tilde{u} + a \rho \partial_t \tilde{u} = \mu \partial_x^2 \tilde{u} + b \mu \partial_x^2 \partial_t \tilde{u}_2 \quad \text{Ondes S} \quad (2.16)$$

On commence par chercher des solutions harmoniques sous la forme :

$$\tilde{u}(x, t) = T \exp(i(\omega_0 t - k x)) \quad (2.17)$$

avec  $k$  le nombre d'onde supposé être un nombre complexe tel que :  $Re(k) \geq 0$ .



En injectant cette solution dans les équations (2.15) et (2.16), on obtient l'expression du nombre  $k$  :

$$k^2 = \left(\frac{\omega_0}{V}\right)^2 \frac{1 - a b - i\left(\frac{a}{\omega_0} + b \omega_0\right)}{1 + b^2 \omega_0^2} \quad (2.18)$$

Avec  $V$  la vitesse de phase égale à  $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  pour les ondes P et  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  pour les ondes S. On remarque que l'expression de  $k$  dépend des paramètres  $a$  et  $b$ . Il est donc convenable de les choisir comme suit :

$$\frac{a}{\omega_0} = b \omega_0 = \xi \quad (2.19)$$

$\xi$  étant le facteur d'amortissement.

L'expression de  $k$  est alors donnée par :

$$k = \frac{1 - i\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (2.20)$$

Finalement, on trouve l'expression du déplacement dans le milieu de Rayleigh :

$$\tilde{u}(x, t) = T \exp\left(\frac{-\omega_0 \xi x}{V \sqrt{1 + \xi^2}}\right) \exp\left(i\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 x}{V \sqrt{1 + \xi^2}}\right)\right) \quad (2.21)$$

D'après la solution (2.21), on constate que l'introduction de l'amortissement dans le milieu linéaire augmente la vitesse de propagation qui devient  $V\sqrt{1 + \xi^2}$ . On définit le décrement logarithmique par :  $\delta = \ln\left(\frac{|u|(x)}{|u|(x+\Delta x)}\right)$ . Il quantifie le pourcentage d'amortissement d'une onde lorsqu'elle parcourt une distance  $\Delta x$ . Utilisant les expressions ci-dessus, la relation entre le décrement logarithmique et la distance est donnée par :

$$\Delta x = \frac{V}{\omega_0} \frac{\delta \sqrt{1 + \xi^2}}{\xi} \quad (2.22)$$

La relation ci-dessus (2.22) sera utilisée pour le dimensionnement de la couche absorbante caractérisée par la matrice de Rayleigh. La vitesse  $V$  coïncidera alors avec la plus grande vitesse qui correspond à celle des ondes P. En choisissant une valeur cible de  $\delta$ , l'épaisseur  $\Delta x$  est alors obtenue directement par l'équation (2.22).

### Ondes non harmoniques

Dans cette partie, on étudie la propagation des ondes non harmoniques en considérant uniquement les ondes P (les mêmes résultats peuvent être déduits pour les ondes S). L'objectif est de déterminer les solutions analytiques qui seront comparées aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis en utilisant la matrice de Rayleigh. On note  $\tilde{u}(x, t)$  la solution du problème suivant :

$$\rho \partial_t^2 \tilde{u} + a \rho \partial_t \tilde{u} = (\lambda + 2\mu) \partial_x^2 \tilde{u} + b (\lambda + 2\mu) \partial_x^2 \partial_t \tilde{u} \quad (x, t) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \quad (2.23)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(x = 0, t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

et les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(x, t = 0) = 0 \quad \forall x \in ]0, +\infty[ \\ \partial_t \tilde{u}(x, t = 0) = 0 \quad \forall x \in ]0, +\infty[ \end{array} \right. \quad (2.25)$$

$f$  est une fonction continue qui satisfait les conditions suivantes :

1.  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$
2. La transformée de Fourier de  $f$  est intégrable
3.  $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$

Les mêmes expressions de  $a, b$  données dans l'équation (2.19) sont adoptées. Le paramètre  $\omega_0$  est choisit comme étant la fréquence dominante du déplacement imposé au niveau des conditions aux limites  $\tilde{u}(x = 0, t) = f(t)$ . Utilisant la transformée de Fourier

de  $f$ , on peut prouver que :

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp(i(\omega t - k_p(\omega) x)) d\omega \quad (2.26)$$

où  $\hat{f}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $f(t)$ ,  $V_p$  égale à  $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  et  $k_p(\omega)$  le nombre d'onde définit par :

$$k_p(\omega) = \frac{\omega}{V_p} \sqrt{\frac{1 - \xi^2 - i\xi\left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (2.27)$$

Pour le prouver, il suffit de vérifier que l'équation (2.26) satisfait à l'équation du mouvement (2.23) en dérivant sous le signe intégrale ainsi que les conditions aux limites en  $x = 0$  (2.24) et les conditions initiales. La preuve que les conditions initiales (2.25) sont aussi satisfaites est fournie dans l'Annexe B. Dans le cas des ondes de cisaillement, on obtient la même relation en remplaçant  $k_p$  par  $k_s$  défini par :

$$k_s(\omega) = \frac{\omega}{V_s} \sqrt{\frac{1 - \xi^2 - i\xi\left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (2.28)$$

avec  $V_s$  la vitesse des ondes de cisaillement qui est égale à  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ .

Il est intéressant de noter que le nombre  $k_p$  reflète le caractère dispersif du milieu, autrement dit les différentes fréquences constituant le contenu fréquentiel de l'onde ne se propagent ni s'amortissent de la même manière. On peut démontrer en étudiant la partie imaginaire du nombre  $k_p$  que les hautes fréquences s'atténuent plus rapidement que les basses fréquences en parcourant une distance déterminée (voir Annexe C). Ce qui est mis en évidence sur la Figure 2.2 où on trace l'évolution de  $\frac{V_p}{\omega_0} |Im(k_p)|$  en fonction de  $\frac{\omega}{\omega_0}$  pour différentes valeurs de  $\xi$ .

Dans les applications numériques, la solution analytique (2.26) est calculée par la méthode de la Transformée de Fourier rapide en utilisant le logiciel Matlab. Cette estimation sera considérée comme un résultat de référence afin de valider la solution nu-

mérique obtenue par la méthode des éléments finis et un schéma d'intégration temporel explicite.

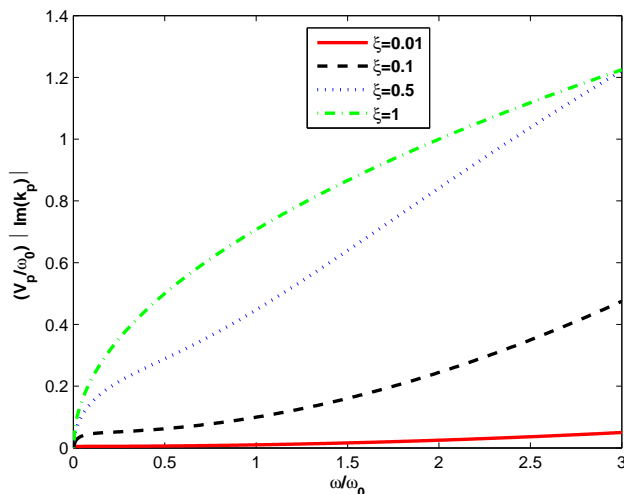


FIGURE 2.2 – Evolution de  $\frac{V_p}{\omega_0} |Im(k_p)|$  en fonction de  $\frac{\omega}{\omega_0}$

## 2.2.2 Problème de propagation d'ondes d'un milieu linéaire vers le milieu de Rayleigh : problème d'interface

Cette section est consacrée à l'étude du problème de propagation d'ondes (harmoniques et non harmoniques) d'un milieu linéaire vers un milieu de Rayleigh. Plus précisément, nous nous intéressons au comportement des ondes incidentes à l'interface séparant les deux milieux. Pour cela, une analyse basée sur les relations de continuité à l'interface, sera menée afin de déduire certaines conditions qui minimisent les ondes réfléchies parasites.

Soit un domaine linéaire  $\Omega_1$ , régi par la loi de Hooke, et un domaine de Rayleigh  $\Omega_2$ . On suppose qu'une onde harmonique unidimensionnelle (onde P ou onde S) se propage de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$  comme illustré sur la Figure 2.3. Compte tenu du le contraste entre les deux domaines au niveau des propriétés mécaniques, on doit s'attendre à des réflexions à l'interface  $x = 0$ . Le but est de chercher l'expression de cette onde réfléchie pour les deux types d'ondes : harmonique et non harmonique.

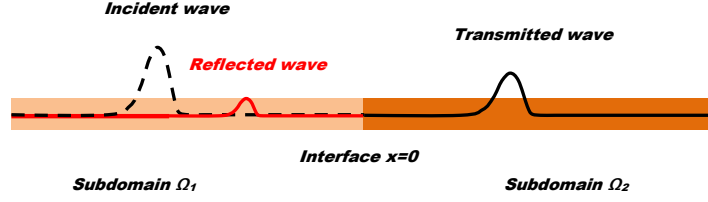


FIGURE 2.3 – Propagation d’onde dans deux milieux séparé par une interface à  $x = 0$

### Ondes harmoniques

Notons  $\tilde{u}_1$  l’onde incidente,  $\tilde{u}_2$  l’onde transmise et  $\tilde{u}_R$  l’onde réfléchie. En gardant les mêmes expressions de  $a$  et  $b$  dans la relation (2.19), on peut écrire les déplacements sous la forme :

$$\tilde{u}_1(x, t) = A \exp(i\omega_0 (t - \frac{x}{V_1})) \quad (2.29)$$

$$\tilde{u}_2(x, t) = T \exp(\frac{-\omega_0 \xi x}{V_2 \sqrt{1 + \xi^2}}) \exp(i(\omega_0 t - \frac{\omega_0 x}{V_2 \sqrt{1 + \xi^2}})) \quad (2.30)$$

$$\tilde{u}_R(x, t) = R \exp(i\omega_0 (t + \frac{x}{V_1})) \quad (2.31)$$

où  $V_i$   $\{i = 1, 2\}$  la vitesse de phase égale à  $\sqrt{\frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho_i}}$  pour les ondes P et  $\sqrt{\frac{\mu_i}{\rho_i}}$  pour les ondes S.

En considérant les conditions de continuité à l’interface (continuité des déplacements et des contraintes), on a :

$$\tilde{u}_2(x = 0, t) = \tilde{u}_1(x = 0, t) + \tilde{u}_R(x = 0, t) \quad (2.32)$$

$$\kappa_2 \partial_x \tilde{u}_2(x = 0, t) = \kappa_1 (\partial_x \tilde{u}_1 + \partial_x \tilde{u}_R) (x = 0, t) \quad (2.33)$$

avec  $\kappa_1$  égale à  $\lambda_1 + 2\mu_1$  pour les ondes P ou  $2\mu_1$  pour les ondes S alors que  $\kappa_2$  égale à  $(1 + i\xi)(\lambda_2 + 2\mu_2)$  pour les ondes P ou  $2(1 + i\xi)\mu_2$  pour les ondes S.

On se focalise sur les ondes réfléchies générées à l'interface. En utilisant les expressions (2.29) à (2.31) et les relations précédentes, on obtient le système d'équations suivant :

$$A + R = T \quad (2.34)$$

$$\rho_2 V_2 \sqrt{1 + \xi^2} T = \rho_1 V_1 A - \rho_1 V_1 R \quad (2.35)$$

Le coefficient de réflexion est donné par :

$$\frac{R}{A} = \frac{1 - \gamma \sqrt{1 + \xi^2}}{1 + \gamma \sqrt{1 + \xi^2}} \quad (2.36)$$

Avec le paramètre  $\gamma$  défini par :  $\gamma = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1}$

A présent, on peut donner la condition sous laquelle l'onde réfléchie (P ou S) est nulle :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (2.37)$$

Ce qui implique :

$$\sqrt{\frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\rho_2}} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad \sqrt{\frac{\mu_2}{\rho_2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (2.38)$$

De plus, si on choisit  $\rho_1 = \rho_2$ , la condition peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{1 + \xi^2} & \mu_2 = \frac{\mu_1}{1 + \xi^2} \\ E_2 = \frac{E_1}{1 + \xi^2} & \nu_2 = \nu_1 \end{cases} \quad (2.39)$$

Le résultat donné par (2.39) établit la relation qui doit lier les modules de Young et les coefficients de Poisson des deux domaines afin d'éliminer l'onde réfléchie. Ceci n'est possible que si la fréquence de l'onde respecte la relation qui lie les paramètres  $a$  et  $b$  à  $\omega_0$  dans l'équation (2.19). Dans le cas où l'onde est non harmonique, la condition précédente peut être utilisée comme approximation à condition que la pulsation  $\omega_0$  soit remplacée par la pulsation dominante de l'onde.

## Ondes non harmoniques

Dans la suite, on considère les ondes non harmoniques. Soit une onde incidente  $\tilde{u}_1(x, t)$  satisfaisant à  $\tilde{u}_1(x = 0, t) = f(t)$  où  $f$  est la fonction définie dans 2.2.1. On peut écrire  $\tilde{u}_1(x, t)$  sous la forme :

$$\tilde{u}_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp(i(\omega t - \frac{\omega}{V_1} x)) \quad (2.40)$$

On note  $\tilde{u}_2(x, t)$  l'onde transmise et  $\tilde{u}_R$  l'onde réfléchie. En tenant compte des conditions de continuité à l'interface, on peut montrer que :

$$\tilde{u}_R(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \gamma \sqrt{1 + \xi^2 - i \xi \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}}{1 + \gamma \sqrt{1 + \xi^2 - i \xi \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}} \hat{f}(\omega) \exp(i(\omega t + \frac{\omega}{V_1} x)) d\omega \quad (2.41)$$

$$\tilde{u}_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1 + \gamma \sqrt{1 + \xi^2 - i \xi \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}} \hat{f}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega) x)) d\omega \quad (2.42)$$

*Preuve* : En effet, on suppose que l'onde transmise et l'onde réfléchie ont les expressions suivantes :

$$\tilde{u}_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{T}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega) x)) d\omega \quad (2.43)$$

$$\tilde{u}_R(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{R}(\omega) \exp\left(i\left(\omega t + \frac{\omega}{V_1} x\right)\right) d\omega \quad (2.44)$$

En utilisant la continuité des déplacements et des contraintes à l'interface on obtient le système d'équations suivant :

$$\tilde{u}_2(x = 0, t) = \tilde{u}_1(x = 0, t) + \tilde{u}_R(x = 0, t) \quad (2.45)$$

$$\kappa_2 \partial_x \tilde{u}_2(x = 0, t) = \kappa_1 (\partial_x \tilde{u}_1 + \partial_x \tilde{u}_R)(x = 0, t) \quad (2.46)$$

avec  $\kappa_1$  égale à  $\lambda_1 + 2\mu_1$  pour les ondes P ou  $2\mu_1$  pour les ondes S alors que  $\kappa_2$  égale à  $\left(1 + i\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right) (\lambda_2 + 2\mu_2)$  pour les ondes P ou  $2 \left(1 + i\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right) \mu_2$  pour les ondes S.

Finalement, on obtient le système d'équations ci-dessous qui conduit aux solutions 2.41 et 2.42 :

$$\hat{f}(\omega) + \hat{R}(\omega) = \hat{T}(\omega) \quad (2.47)$$

$$\rho_2 V_2 \sqrt{1 + \xi^2 - i\xi \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \hat{T}(\omega) = \rho_1 V_1 \hat{f}(\omega) - \rho_1 V_1 \hat{R}(\omega) \quad (2.48)$$

*Fin de la preuve*

L'expression  $|R| = \left| \frac{1-\gamma \sqrt{1+\xi^2-i\xi\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}{1+\gamma \sqrt{1+\xi^2-i\xi\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)}} \right|$  obtenue dans l'équation (2.41) peut être interprétée comme le coefficient de réflexion correspondant au mode  $\omega$ . Remarquant que si la condition (2.37) est adoptée et si la plage de fréquences de l'onde incidente est localisée autour de  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  (Figure 2.4), alors l'onde traversera l'interface avec un minimum de réflexions. Les paramètres de la couche absorbante donnés dans l'équation (2.41) doivent alors coïncider avec la fréquence dominante  $f_0$  de l'onde incidente. L'expression ci-dessus (2.41) sera utilisée comme un résultat de référence pour la comparaison avec les résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis.

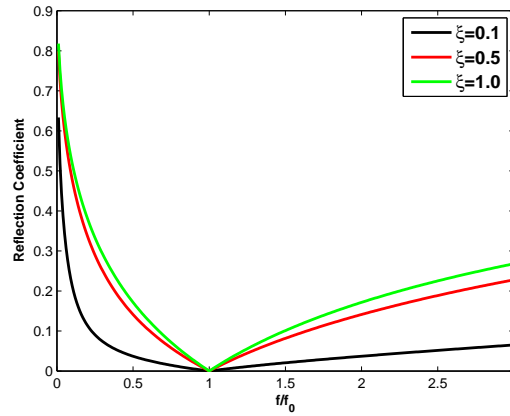


FIGURE 2.4 – Coefficient de réflexion pour une onde à incidence normale en utilisant différentes valeurs de  $\xi$



## 2.2.3 Stratégie multi-couches

### Ondes harmoniques avec une incidence normale

On considère un milieu infini composé de deux milieux de Rayleigh avec des caractéristiques mécanique différentes (Figure 2.5) et une onde harmonique se propageant d'un milieu vers l'autre avec une incidence normale et une fréquence  $f_0$ . En écrivant les conditions de continuité des déplacements et des contraintes à l'interface, la condition d'élimination de l'onde réfléchie est donnée par :

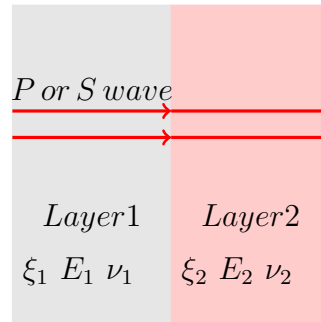


FIGURE 2.5 – Problème d'interface entre deux milieux différents de Rayleigh avec une incidence normale

$$\begin{cases} \frac{E_2^{(1)}}{E_2^{(2)}} = \frac{1+\xi_2^2}{1+\xi_1^2} \\ \nu_2^{(1)} = \nu_2^{(2)} \\ \rho_2^{(1)} = \rho_2^{(2)} \end{cases} \quad (2.49)$$

$E_2^{(1)}$ ,  $E_2^{(2)}$ ,  $\nu_2^{(1)}$  and  $\nu_2^{(2)}$  étant les modules de Young et les coefficients de Poisson de chaque milieu. On rappelle que les paramètres  $a$  et  $b$  sont toujours contrôlés par l'équation (2.19).

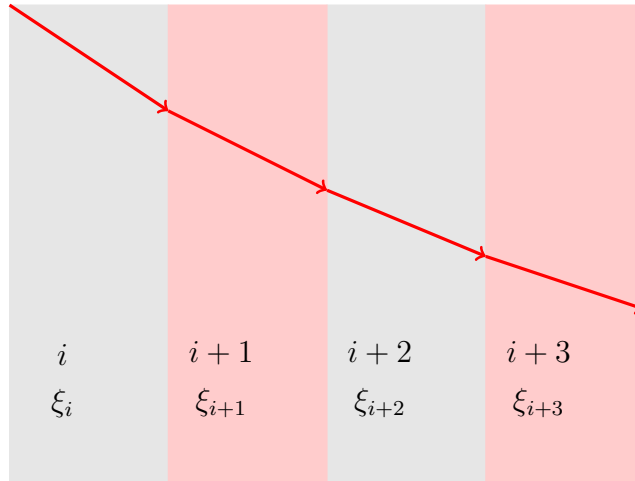


FIGURE 2.6 – Problème de propagation d’onde dans la partie multi-couches en 2D

Maintenant on considère une série de  $N$  couches absorbantes avec différents facteurs d’amortissements  $\xi_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  (Figure 2.6). On note  $E_2^{(i)}$  le module de Young et  $\nu_2^{(i)}$  le coefficient de Poisson de chaque couche ( $i$ ). En supposant une même densité de masse pour chaque couche, on a les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2^{(i+1)} = \frac{1+\xi_i^2}{1+\xi_{i+1}^2} E_2^{(i)} \\ E_2^{(1)} = \frac{1}{1+\xi_1^2} E_1 \\ \nu_2^{(i)} = \nu_1 \\ \rho_2^{(i)} = \rho_1 \\ \xi_{i+1} - \xi_i = a_\xi \end{array} \right. \quad (2.50)$$

où  $a$  un nombre positif, représentant le pas entre deux facteurs d’amortissement successifs.

Afin d’éviter d’importants retours d’ondes à l’interface séparant le milieu d’étude du milieu dissipatif, le premier facteur d’amortissement  $\xi_1$  doit être suffisamment faible, de même que le pas  $a_\xi$ . On définit  $e_i$  l’épaisseur de chaque couche et  $e$  l’épaisseur totale rassemblant toutes les couches absorbantes. De façon similaire, on note  $\delta_i$  le décrement logarithmique de chaque couche et  $\delta$  le décrement logarithmique total résultant de l’ensemble des couches. On a alors les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^N e_i = e \quad \sum_{i=1}^N \delta_i = \delta \quad (2.51)$$

Utilisant l'équation (2.22) reliant la distance au décrement logarithmique ciblé  $\delta_i$ , l'épaisseur de chaque couche vérifie :

$$e_i = \frac{V_{2p}^{(i)}}{\omega_0} \frac{\delta_i \sqrt{1 + \xi_i^2}}{\xi_i} \quad (2.52)$$

Finalement, on peut écrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N e_i = e \\ \frac{\omega_0}{V_{2p}} \sum_{i=1}^N \xi_i e_i = \delta \\ \xi_{i+1} - \xi_i = a_\xi \end{cases} \quad (2.53)$$

Etant donné la contrainte sur la taille de l'élément  $h$  souvent choisie comme constante dans le maillage des couches absorbantes, il est nécessaire de fixer l'épaisseur de chaque couche en fonction de la taille de la maille. Pour simplifier, on choisit  $h$  comme étant l'épaisseur de chaque couche (1 élément par couche) et on calcule le nombre total de couches  $N$  en utilisant le système (2.53) et le décrement logarithmique cible  $\delta$ . Le facteur d'amortissement  $\xi_i$  est, bien évidemment, constant dans la couche  $i$  et augmente avec le paramètre  $a_\xi$  dans la couche suivante. Pour simplifier, on fixe le choix  $\xi_1 = a_\xi$  dans les applications. Ceci revient à poser :  $C_{Mmax} = a_\xi N \omega_0$ ,  $C_{Kmax} = \frac{a_\xi N}{\omega_0}$  et  $p = 1$ , ceci constituant un cas particulier de la famille des fonctions adoptées dans [16].

Le système (2.53) peut être étudié autrement en faisant intervenir uniquement les variables adimensionnelles  $N_e = \frac{e}{h}$  (nombre de couches) et  $N_\lambda = \frac{\lambda}{h}$  ( finesse de maillage avec  $\lambda = V_{2p} \frac{2\pi}{\omega_0}$  la longueur d'onde dominante ). En effet, en introduisant les variables adimensionnelles précédentes dans le système (2.53), on obtient :

$$\frac{\delta}{\pi a_\xi} = \frac{N_e(1 + N_e)}{N_\lambda} \quad (2.54)$$

La Figure 2.7 illustre les différentes isovaleurs de  $\delta$  en fonction de  $N_\lambda$  et  $N_e$  en fixant le choix  $a_\xi = 0.02$ . Comme le nombre  $N_e$  est intimement lié au nombre de degrés de liberté dans le domaine absorbant donc au temps de calcul, il est convenable de choisir la valeur de  $N_\lambda$ , en fixant une valeur de  $\delta$ , la plus faible possible sans trop détériorer la solution numérique par l'effet de la dispersion numérique.

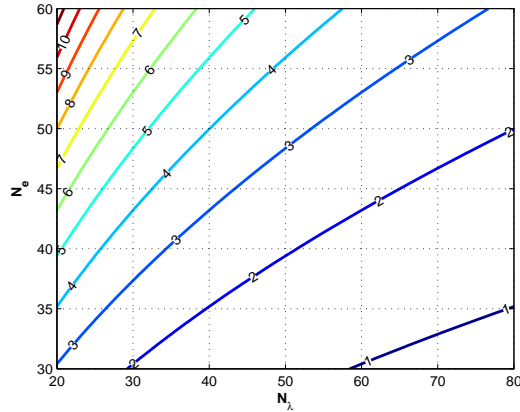


FIGURE 2.7 – Isovaleurs de  $\delta$  en fonction de  $N_\lambda$  et  $N_e$  pour  $a_\xi = 0.02$

### Ondes harmoniques avec une incidence oblique

Dans cette section, la stratégie décrite ci-dessus est considérée en étudiant une incidence oblique. Comme il est décrit sur la Figure 2.8, deux types d'ondes ont été distingués dans chaque sous couche d'indice  $n$  : ondes qui se propagent dans la direction positive par rapport à la direction de l'axe  $x$  nommées  $pos(n)$ , et ondes qui se propagent la direction négative nommées  $neg(n)$ .

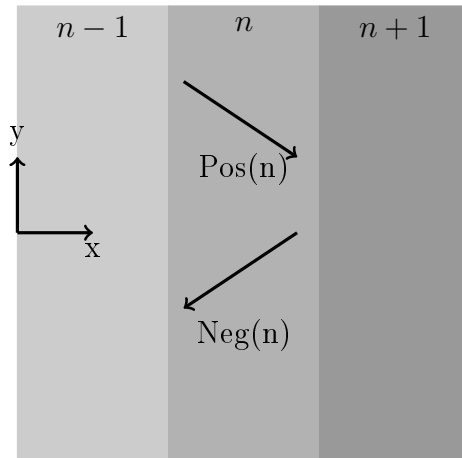


FIGURE 2.8 – Ondes se propageant selon les directions positive ou négative dans la  $n^{\text{ème}}$  sous couche par rapport à l'axe  $x$

Par analogie avec le milieu linéaire de Hooke (section 1.5.1), le champ de déplacement dans la  $n^{\text{ème}}$  sous couche  $\underline{u}_2^{(n)}$  peut être décomposé, selon le théorème de Helmholtz [56], en utilisant deux potentiels, un potentiel scalaire  $\varphi_2^{(n)}$  et un vecteur potentiel  $\psi_2^{(n)}$ , comme suit :

$$\underline{u}_2^{(n)} = \nabla \varphi_2^{(n)} + \nabla \wedge \psi_2^{(n)} \quad (2.55)$$

On définit  $\varphi_2^{\text{pos}(n)}$  and  $\psi_2^{\text{pos}(n)}$  les potentiels qui correspondent aux ondes qui se propagent dans la direction positive et  $\varphi_2^{\text{neg}(n)}$ ,  $\psi_2^{\text{neg}(n)}$  les potentiels des ondes qui se propagent dans la direction négative. On écrit :

$$\begin{cases} \varphi_2^{\text{pos}(n)}(x, y, t) = \tilde{\varphi}_2^{\text{pos}(n)} \exp \left( i \left( \omega t - k_{px}^{(n)} x + k_{py}^{(n)} y \right) \right) \\ \varphi_2^{\text{neg}(n)}(x, y, t) = \tilde{\varphi}_2^{\text{neg}(n)} \exp \left( i \left( \omega t + k_{px}^{(n)} x + k_{py}^{(n)} y \right) \right) \\ \psi_2^{\text{pos}(n)}(x, y, t) = \tilde{\psi}_2^{\text{pos}(n)} \exp \left( i \left( \omega t - k_{sx}^{(n)} x + k_{sy}^{(n)} y \right) \right) \\ \psi_2^{\text{neg}(n)}(x, y, t) = \tilde{\psi}_2^{\text{neg}(n)} \exp \left( i \left( \omega t + k_{sx}^{(n)} x + k_{sy}^{(n)} y \right) \right) \end{cases} \quad (2.56)$$

$(k_{px}^{(n)}, k_{py}^{(n)})$  et  $(k_{sx}^{(n)}, k_{sy}^{(n)})$  sont respectivement les composantes des nombres d'ondes  $k_p^{(n)}$  et  $k_s^{(n)}$  donnés par les relations (2.27) et (2.28). On écrit alors :

$$\begin{cases} k_p^{(n)}(\omega) = \frac{\omega}{V_{2p}^{(n)}} \sqrt{\frac{1 - \xi_n^2 - i \xi_n \left( \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{1 + \xi_n^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \\ k_s^{(n)}(\omega) = \frac{\omega}{V_{2s}^{(n)}} \sqrt{\frac{1 - \xi_n^2 - i \xi_n \left( \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{1 + \xi_n^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \end{cases} \quad (2.57)$$

En utilisant les lois de Snell, on obtient :

$$k_{py}^{(n)} = k_{sy}^{(n)} = k_{py}^{(m)} = k_{sy}^{(m)} \quad \forall n, m \quad (2.58)$$

En considérant la propagation entre le milieu d'étude, supposé linéaire de Hooke, et la première sous couche du domaine absorbant, on peut écrire :  $k_{py}^{(0)}, k_{sy}^{(0)} \in \mathbb{R}$  dans le milieu d'étude et  $k_{py}^{(1)}, k_{sy}^{(1)} \in \mathbb{R}$  dans la première sous couche.

Par conséquent, on déduit de la relation (2.58) que la composante  $k_{py}^{(n)}$  dans chaque sous couche est réelle et égale à  $k_{py}^{(0)}$  qui correspond au domaine d'étude. De même, la composante  $k_{sy}^{(n)}$  dans chaque sous couche est réelle égale à  $k_{sy}^{(0)}$  qui correspond également

au domaine d'étude. Le processus d'atténuation est donc décrit par les composantes  $k_{px}^{(n)}$ . Maintenant, on définit le paramètre  $t$ , constant dans chaque sous couche, par :

$$t = (k_{py}^{(0)})^2 \quad (2.59)$$

Dans le milieu élastique, la paramètre  $t$  peut être exprimé comme :

$$t = \left( \frac{\omega}{V_{1p}} \sin(\theta) \right)^2 \quad (2.60)$$

où  $\theta$  est l'angle d'incidence des ondes P dans le domaine physique. Il est évident que  $t$  croît avec l'angle  $\theta$ . De plus, on peut prouver que la partie imaginaire de  $k_{px}^{(n)}$  décroît avec  $t$ , par conséquent avec  $\theta$ , en analysant le signe de la partie imaginaire de  $\frac{dk_{px}^{(n)}}{dt}$ .

En effet, on a :

$$k_{px}^{(n)} = \sqrt{(k_p^{(n)})^2 - t} \quad (2.61)$$

En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\frac{dk_{px}^{(n)}}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{(k_p^{(n)})^2 - t}} \quad (2.62)$$

Comme  $Im(\sqrt{(k_p^{(n)})^2 - t}) \leq 0$ , il s'en suit que  $Im\left(\frac{1}{\sqrt{(k_p^{(n)})^2 - t}}\right) \geq 0$ . On en déduit

que le signe de  $Im\left(\frac{dk_{px}^{(n)}}{dt}\right)$  est négatif, indiquant que la partie imaginaire de la composante suivant x du nombre d'onde décroît avec  $t$ , par conséquent avec  $\theta$ .

En conclusion, il est suffisant de dimensionner le domaine absorbant en se basant uniquement sur une incidence normale (Eq. (2.54)), car les ondes avec une incidence oblique sont plus amorties.

### Remarques :

Remarquons que la méthode de dimensionnement proposée ci-dessus est établie en raisonnant pour les ondes P ou S. Dans le cas général, on garde la même démarche de dimensionnement pour les autres types d'ondes, notamment les ondes de surface. La pertinence de ce choix sera démontrée numériquement.

Afin de distinguer cette approche de celle utilisée par Rajagopal *et al* dans [16] sous le nom de ALID ("Absorbing Layers using Increasing Damping"), on nommera la stratégie décrite ci-dessus ALID modifiée. On rappelle que l'une des différences entre les deux se situe au niveau du choix des propriétés mécaniques des couches (module de Young et coefficient de Poisson) qui restent homogènes dans le cas de la stratégie ALID alors qu'elles changent dans le cas de la stratégie ALID modifiée en respectant les conditions (2.50). Afin d'avoir une comparaison la plus rigoureuse possible entre les deux méthodes, on dimensionnera dans un premier temps les couches en utilisant ALID modifiée puis on adoptera les mêmes propriétés mécaniques entre la couche amortissante et le domaine d'étude afin d'obtenir la solution ALID qu'on comparera avec la solution ALID modifiée proposée dans ce travail.

## 2.3 Exemples numériques de validation

Dans les applications numériques qui suivent, on considère les ondes non harmoniques en choisissant une onde incidente de type Ricker *Ric* définie par :

$$Ric(t, t_p, t_s) = A \left( 2 \pi^2 \frac{(t - t_s)^2}{t_p^2} - 1 \right) \exp\left(-\pi^2 \frac{(t - t_s)^2}{t_p^2}\right) \quad (2.63)$$

L'onde de Ricker est caractérisée par 3 paramètres : la période fondamentale  $t_p$ , le paramètre temporel  $t_s$  et l'amplitude  $A$ . On fixe les choix suivants :  $t_p = 3s$ ,  $t_s = 3s$  and  $A = 1$ , comme il est illustré dans la Figure 2.9.

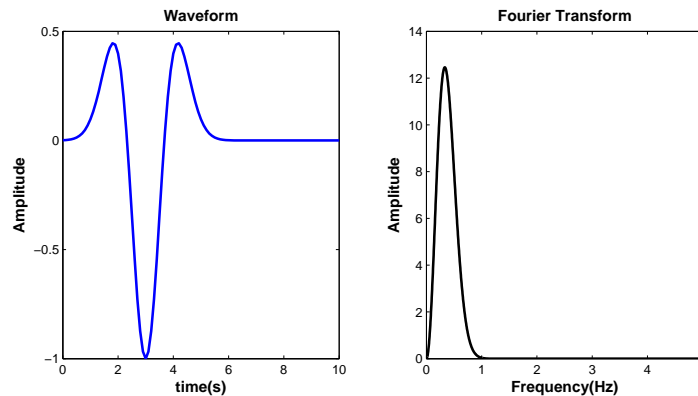


FIGURE 2.9 – Onde de Ricker et sa transformée de Fourier

Le premier exemple traite le problème de propagation d'ondes non harmoniques dans le milieu de Rayleigh. La solution numérique obtenue par la méthode des éléments

finis en utilisant un schéma d'intégration implicite (famille de Newmark) est comparée aux résultats de référence (2.26) en utilisant la transformée discrète de Fourier disponible dans Matlab. Ensuite, on montrera que la condition (2.37) est une condition approximative qui minimise les réflexions parasites à l'interface séparant le milieu élastique et le milieu dissipatif. Finalement, un test 2D (test de Lamb) est proposé afin de mettre en évidence l'efficacité de la stratégie multi-couches. Dans ce cas, la simulation est menée par le couplage de deux codes différents : le code Europlexus avec un schéma explicite pour simuler le domaine d'intérêt et le code Cast3m avec un schéma implicite pour simuler le domaine dissipatif. Le couplage entre les deux codes est assuré par un coupleur externe (Brun *et al* [57]). L'intérêt est de coupler deux schémas différents dans le même problème.

### 2.3.1 Propagation d'onde en 1D dans le milieu de Rayleigh

Dans cet exemple, on considère le problème des ondes P. La solution fournie par la méthode des éléments finis est calculée en utilisant le code Cast3m [58]. Les propriétés du matériau sont :  $E = 10MPa$ ,  $\nu = 0.24$ ,  $\rho = 1700kg/m^3$ , respectivement pour le module de Young, le coefficient de Poisson et la densité. Un maillage uniforme composé d'éléments rectangulaires avec des fonctions de forme linéaires est adopté comme illustré dans la Figure 2.10. La taille de chaque élément est  $\frac{\lambda}{50}$ , où la longueur d'onde est  $\lambda = V_p tp = 250m$ . Le déplacement est imposé à l'extrémité gauche du maillage au point  $x = 0$  sous forme d'une onde de Ricker. La longueur totale du maillage est  $5\lambda$ , assez large pour éviter la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Le calcul est mené en utilisant le schéma de l'accélération moyenne.

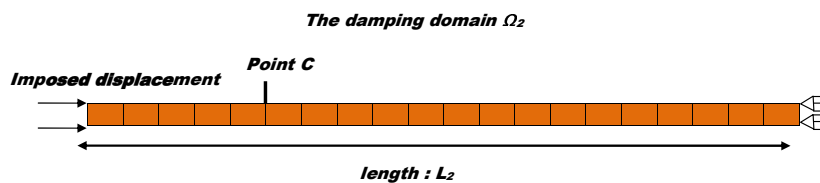


FIGURE 2.10 – Couche homogène amortissante de longueur  $5\lambda$

Le déplacement est extrait au point  $C$  situé à une distance  $0.4\lambda$  du point  $x = 0$ . Dans la Figure 2.11, on compare le déplacement obtenu par le calcul éléments finis et la solution analytique donnée dans l'équation (2.26).



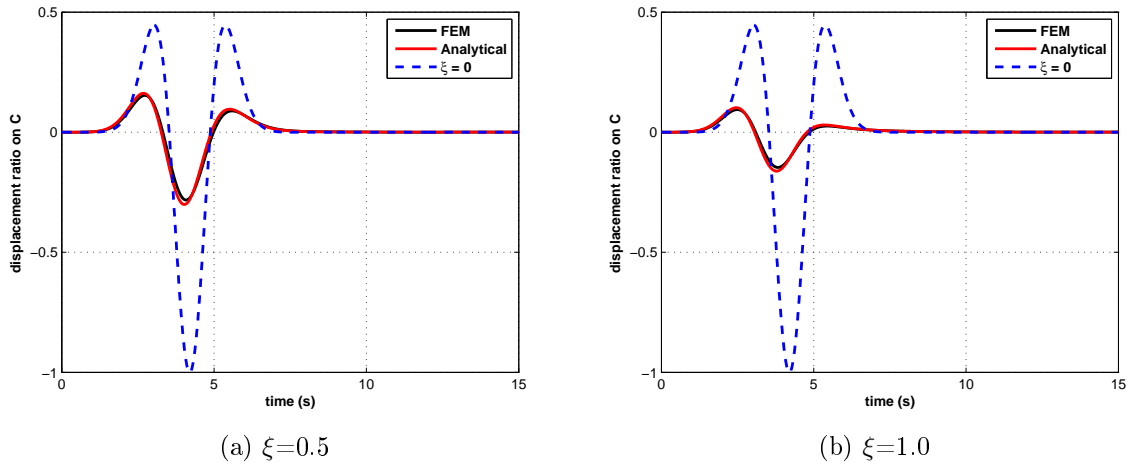


FIGURE 2.11 – Déplacement au point C,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_p} = 2.09rad/s$ ,  $\xi = 0.5$  (à gauche),  $\xi = 1$  (à droite)

La Figure 2.11 illustre l'évolution du déplacement normalisé ( $\frac{\tilde{u}_2(x,t)}{A}$ ) en fonction du temps obtenue par les deux méthodes : EF en utilisant Cast3m et la transformée de Fourier en utilisant Matlab. On trouve donc une bonne correspondance entre les résultats pour les deux cas  $\xi = 0.5$  and  $\xi = 1$ . Un zoom sur le pic du déplacement est montré sur la Figure 2.12.

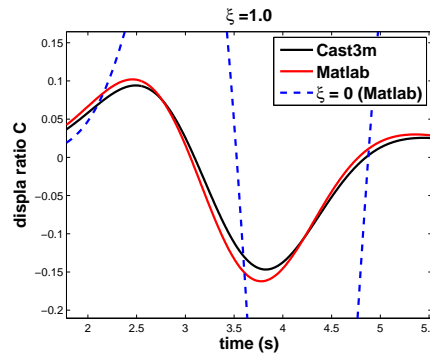


FIGURE 2.12 – Zoom sur le déplacement au point C dans le cas  $\xi = 1$

Il est important de noter que la réponse numérique est légèrement plus amortie que la solution analytique. On peut justifier cette observation par le raisonnement suivant. Premièrement, on compare les deux réponses en annulant l'amortissement comme il est illustré dans la Figure 2.13.

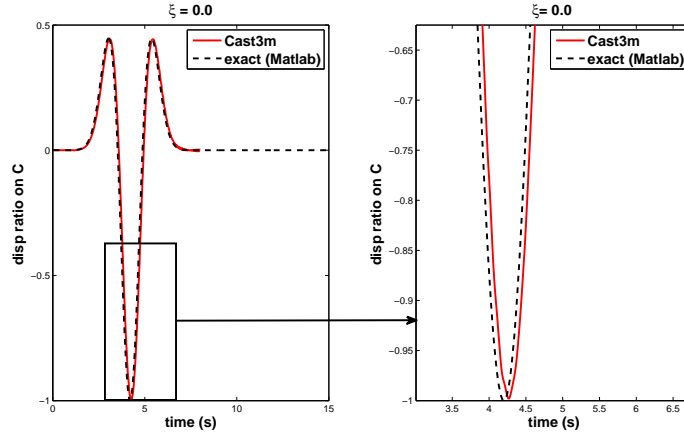


FIGURE 2.13 – La différence entre la vitesse de phase numérique et la vitesse de phase exacte

Supposons une onde quasi harmonique se propageant avec une fréquence dominante  $f_0$ . On observe d'après la Figure 2.13 que la vitesse de phase numérique  $V_p^{num}$ , en éliminant le caractère visqueux du milieu, est inférieure à la vitesse de phase exacte  $V_p^{real}$ . Si on prend en compte l'amortissement en supposant que  $\xi$  est non nul, la relation entre les décrets logarithmiques des deux cas s'écrit alors :

$$\delta^{real} = \frac{d \xi \omega_0}{V_p^{real} \sqrt{1 + \xi^2}} \leq \frac{d \xi \omega_0}{V_p^{num} \sqrt{1 + \xi^2}} = \delta^{num} \quad (2.64)$$

où  $d$  est une distance constante. On déduit de la dernière relation que le décrement numérique  $\delta^{num}$  est plus grand que le décrement réel  $\delta^{real}$ , d'où la remarque mentionnée pour la Figure 2.12.

Maintenant, si on varie le facteur d'amortissement  $\xi$ , le décrement logarithmique numérique  $\delta^{num} = f(\xi)$  est calculé au point C puis comparé à la formule (2.22) obtenue uniquement pour les ondes harmoniques. D'après la comparaison illustrée sur la Figure 2.14, on observe que la relation (2.22) correspond à une bonne approximation pour les ondes non harmoniques ayant une fréquence dominante  $f_0$ .

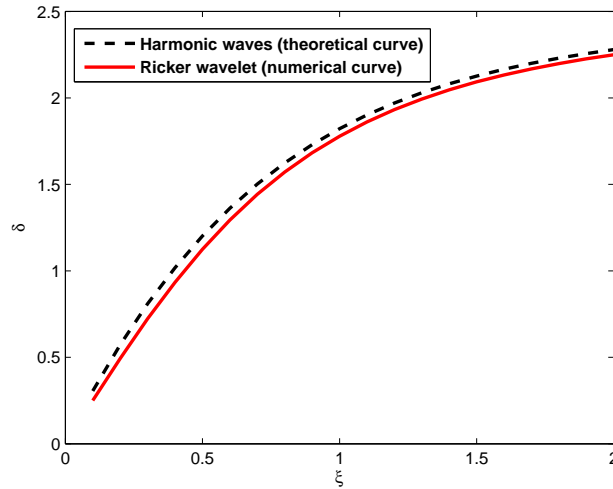


FIGURE 2.14 – Evolution du décrement logarithmique  $\delta^{num}$  au point C comme une fonction de  $\xi$  pour l'onde de Ricker : Comparaison avec la courbe théorique obtenue pour les ondes harmoniques (équation (2.22))

### 2.3.2 Propagation d'onde en 1D d'un milieu élastique vers le milieu de Rayleigh

Afin de valider les résultats théoriques obtenus dans la section 2.2.2, on commence par considérer le problème illustré dans la Figure 2.15.

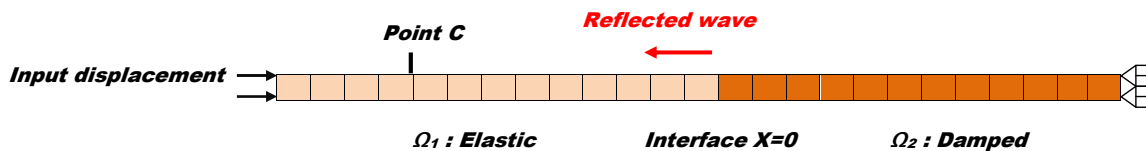


FIGURE 2.15 – Les caractéristiques géométriques du maillage

Les caractéristiques des matériaux sont résumées dans le tableau suivant :

	sous domaine 1 domaine physique	sous domaine 2 domaine absorbant
Module de Young ( <i>MPa</i> )	10	Variable
Coefficient de Poisson	0.24	0.24
Taille de l'élément	$\frac{\lambda}{50}$	$\frac{\lambda}{50}$
Type d'élément	quadrangle linéaire	quadrangle linéaire
Taille du maillage	$5\lambda$	$5\lambda$
Densité de masse ( <i>kg/m<sup>3</sup></i> )	1700	1700

TABLE 2.1 – Les caractéristiques mécaniques et géométriques des matériaux

On impose le déplacement au point  $x = -5\lambda$  sous la forme d'une onde de Ricker. Ensuite, on extrait le déplacement au point  $C$  situé à une distance de  $0.4\lambda$  du point  $x = -5\lambda$ . On peut remarquer que le point  $C$  est choisi assez loin de l'interface  $x = 0$  afin d'éviter les superpositions entre l'onde incidente et l'onde réfléchie à l'interface. Le module de Young du domaine absorbant (sous domaine 2), comme indiqué dans le tableau 2.1, est choisi selon la relation (2.39) et dépend du facteur d'amortissement via la relation (2.37) :  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ . La Figure 2.16 donne la réponse en terme de déplacement au point  $C$ , exhibant le passage de l'onde incidente et le retour de l'onde réfléchie à l'interface entre les deux sous domaines. Par la suite, on s'intéresse uniquement à l'onde réfléchie à l'interface. La Figure 2.17 compare les résultats exacts donnés par l'équation (3.4) et les résultats obtenus par la méthode EF en utilisant un schéma implicite, et ce pour différentes valeurs de  $\xi$ .

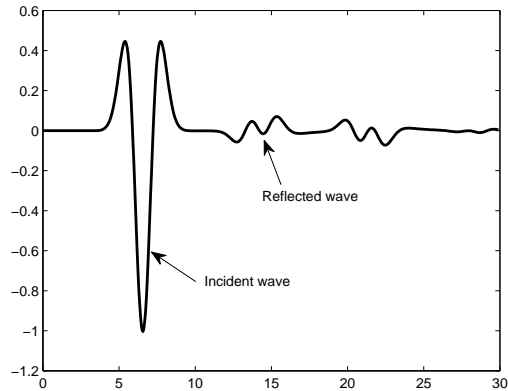


FIGURE 2.16 – Illustration de l’onde incidente et l’onde réfléchi par le déplacement du point C

De la Figure 2.17, on peut vérifier que les deux courbes (résultats numériques et analytiques) sont assez proches pour les différentes valeurs de  $\xi$ . Dans le cas  $\xi = 0.1$ , on trouve une réflexion de 1.5% inférieure aux autres cas : 5,5% pour  $\xi = 1$  et 6% pour  $\xi = 2$ . Si on garde l’homogénéité des propriétés mécaniques des deux domaines, on obtient des réflexions de l’ordre de 2%, 20% et 40% pour  $\xi = 0.1$ ,  $\xi = 1$  et  $\xi = 2$ , respectivement. Ceci montre bien que la relation (2.39) reliant les paramètres des matériaux génère moins de réflexions.

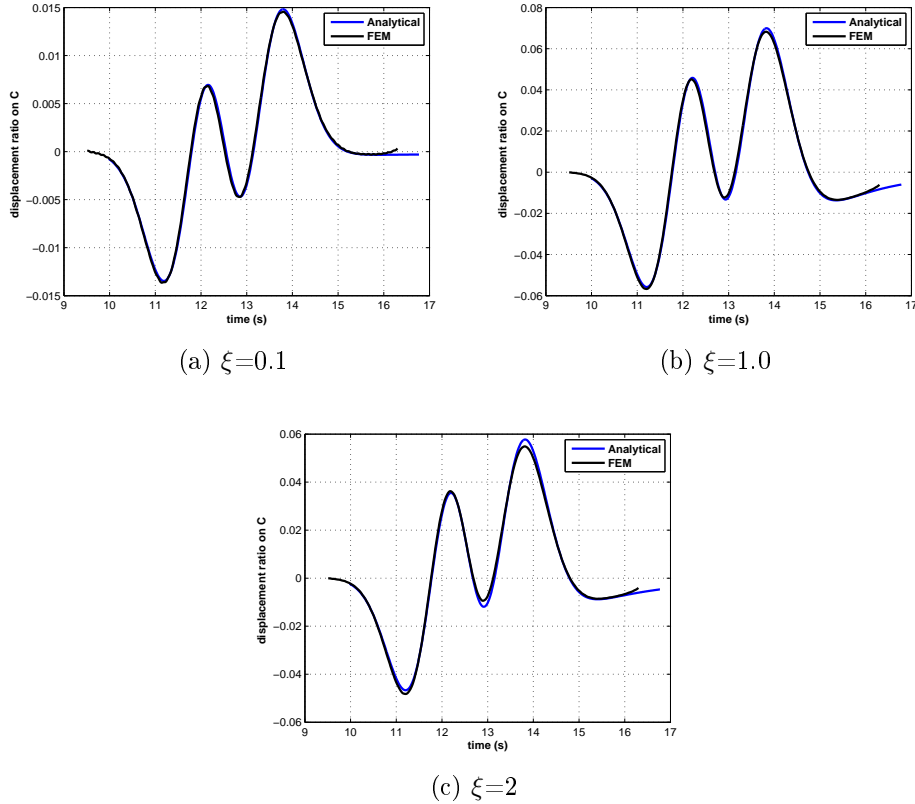


FIGURE 2.17 – Onde réfléchie au point C,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_p} = 2.09 \text{ rad/s}$

Sans imposer aucune relation entre les propriétés matérielles, on étudie l'effet de la variation du module de Young  $E_2$  sur les réflexions. On se fixe les valeurs du coefficient de Poisson et de la densité données dans le tableau précédent. Pour chaque valeur de  $\xi$ , on cherche numériquement la valeur du module de Young minimisant les réflexions à l'interface. Ensuite, on calcule la valeur du rapport  $\gamma_{num} = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1}$  pour chaque valeur de  $\xi$ . Sur la Figure 2.18, on trace le rapport  $\gamma_{num}$  minimisant les réflexions en fonction du facteur d'amortissement. La courbe ainsi obtenue est comparée à la relation théorique :  $\gamma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ . On peut observer sur la Figure 2.18 que les deux courbes sont assez proches ce qui indique que la condition  $\gamma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$  obtenue pour les ondes harmoniques dans le cas d'une propagation 1D est une bonne approximation pour les ondes non harmoniques se propageant avec une fréquence dominante  $f_0$ .

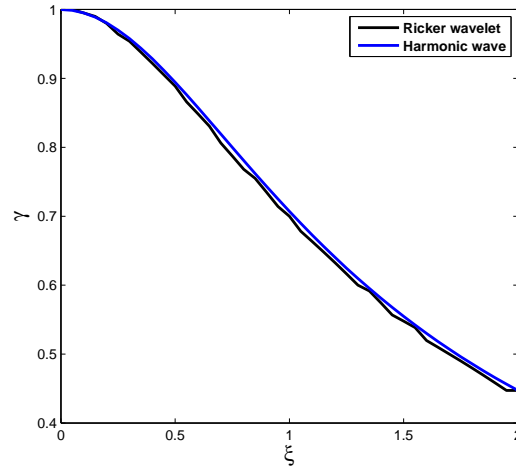


FIGURE 2.18 – Valeurs de  $\gamma$  minimisant l’amplitude de l’onde réfléchie : comparaison entre la courbe théorique obtenue pour les ondes harmoniques ( $\gamma = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ ) et la courbe obtenue en considérant l’onde de Ricker

Nous terminons cette partie par une simple analyse des réflexions dues aux deux stratégies : ALID et ALID modifiée. On garde le même test que précédemment en changeant à chaque fois le nombre  $N_\lambda$  pour une valeur fixée du pas  $a_\xi$ . On définit le coefficient de réflexion par  $R_{ricker} = \frac{\max_t |u_r|}{A}$ ,  $u_r$  étant l’onde réfléchie due au contraste entre le milieu d’étude et le milieu absorbant. Dans la Figure 2.19, on compare  $R_{ricker}$  obtenue pour les deux stratégies : on constate que les réflexions augmentent avec le paramètre  $N_\lambda$  pour les deux stratégies car l’amortissement varie plus vite spatialement. La modification des propriétés mécaniques (ALID modifiée) améliore notablement les résultats en minimisant davantage les réflexions parasites.

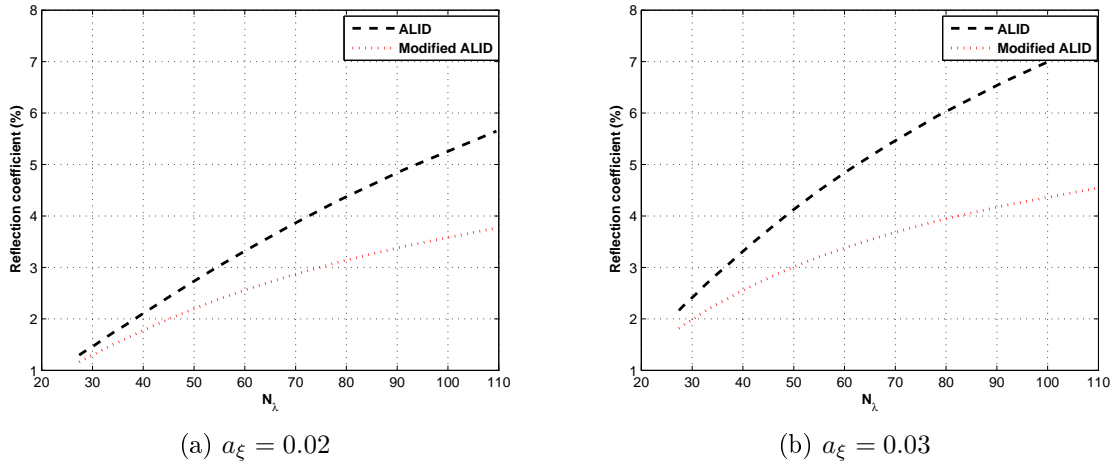


FIGURE 2.19 – Comparaison du coefficient de réflexion entre les stratégies ALID et ALID modifiée pour  $a_\xi = 0.02$  et  $a_\xi = 0.03$

### 2.3.3 Test de Lamb avec couplage implicite/explicite en mono-échelle

Le test de Lamb consiste à appliquer une charge verticale concentrée sur la surface d'un sol supposé homogène semi-infini. Un détecteur est placé à une distance  $d = 10 m$  du point de chargement dans le but d'enregistrer les déplacements verticaux et horizontaux en ce point (Figure 2.20). En 1904, Lamb [59] a calculé analytiquement les déplacements en un point quelconque de la surface du sol. La solution met en lumière la complexité du problème par la présence de différents types d'ondes dans le sol : ondes longitudinales, transversales et ondes de surface. Dans cette partie, on calcule numériquement la solution en utilisant la méthode de couplage GC explicite/implicite. Deux codes éléments finis sont impliqués dans ce calcul : il s'agit du code Europlexus ([60]) pour le domaine d'intérêt basé sur un schéma d'intégration explicite et du code Cast3m ([58]) pour le domaine absorbant basé sur un schéma implicite. Le même pas de temps sera adopté pour les deux domaines calculé selon la condition CFL. On précise que l'objectif principal de cette partie est de tester l'efficacité des méthodes de dimensionnement discutées dans les sections précédentes.

**Remarque :** Le choix du couplage explicite/implicite dans cet exemple peut être vu comme une introduction à l'application de la méthode GC en mono-échelle en temps et un test du couplage Cast3m/Europlexus. Par ailleurs, ce type de couplage n'influe



pas sur les résultats par rapport à un calcul global en explicite comme il a été démontré dans de nombreux travaux (Combescure *et al.* [8], Brun *et al.* [61] [57], Mahjoubi *et al.* [11]). Le cas multi-échelle en temps qui nous intéresse dans ce travail sera abordé dans le chapitre suivant.

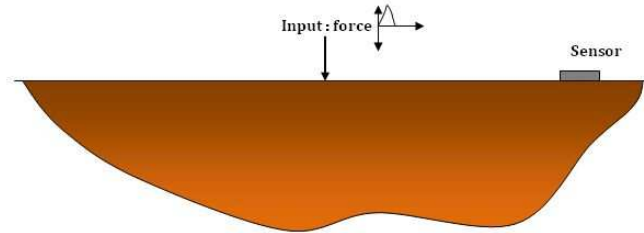


FIGURE 2.20 – Test de Lamb

La décomposition du problème est illustrée sur la Figure 2.21. Le sous-domaine 1 modélise le sol supposé linéaire élastique avec  $\rho_1 = 1700 \text{ kg/m}^3$ ,  $E_1 = 10 \text{ MPa}$  et  $\nu_1 = 0.24$ , alors que le sous-domaine 2 modélise le milieu dissipatif de Rayleigh avec  $\rho_2 = 1700 \text{ kg/m}^3$  et  $\nu_2 = 0.24$ . La matrice de Rayleigh est caractérisée par les paramètres suivants :  $\xi = 0.1$  and  $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_p}$  selon l'équation (2.19). Le sol est modélisé par un rectangle entouré d'une couche amortissante d'épaisseur  $e$ . Une force concentrée est appliquée au milieu de la surface définie par une onde de Ricker avec les paramètres :  $A = 1 \text{ MN}$ ,  $t_p = 3$ ,  $t_s = 3$ . La Figure 2.22 présente le maillage utilisé dans la simulation, le sol est modélisé par Europlexus (la symétrie du problème est prise en compte) en utilisant des éléments rectangulaires de taille  $\frac{\lambda}{50}$  et le milieu de Rayleigh est modélisé par Cast3m en utilisant les mêmes éléments que le sous domaine 1.

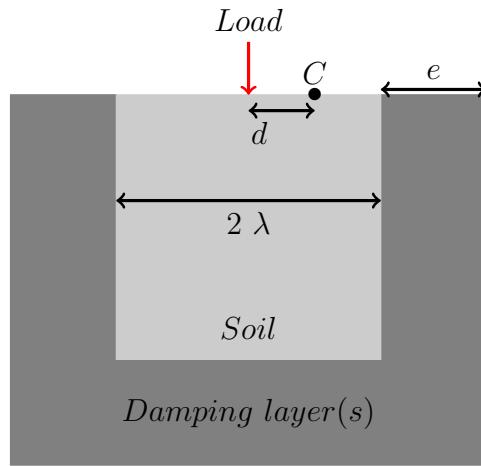


FIGURE 2.21 – Décomposition en sous domaines : domaine d'intérêt et couche amortissante

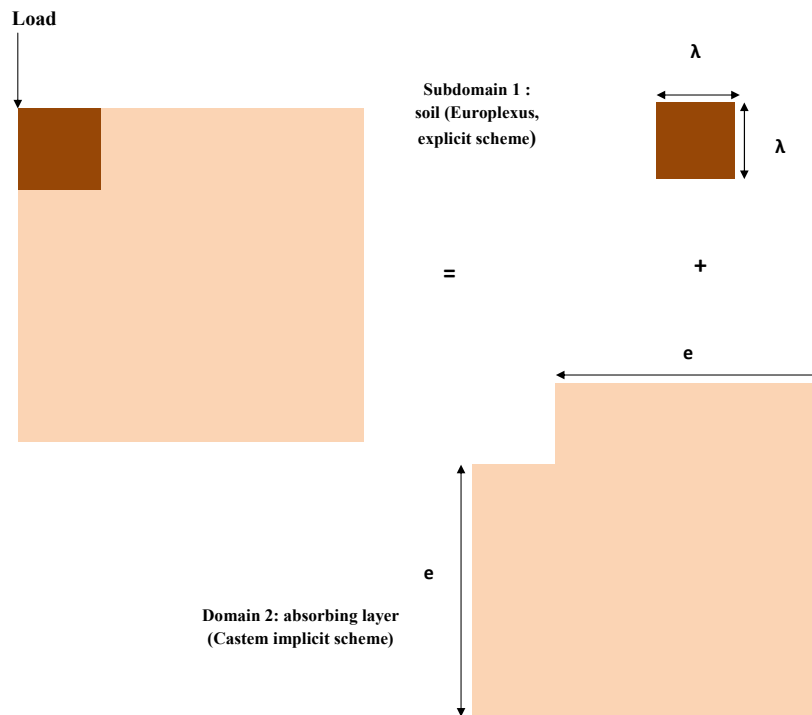
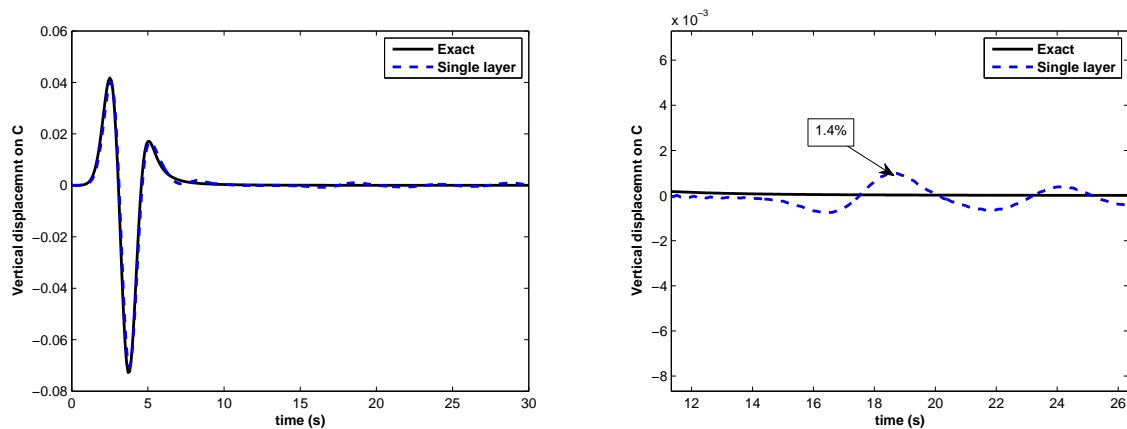


FIGURE 2.22 – Le problème couplé : sous domaine 1 (sol) modélisé par Europlexus et sous domaine 2 (milieu absorbant) modélisé par Cast3m

La couche amortissante est dimensionnée selon un décrétement logarithmique cible  $\delta = \ln(10)$  impliquant une épaisseur  $e = 914 \text{ m} = 3.6 \lambda$  en utilisant la condition (2.22). On note que ce décrétement logarithmique est choisi selon le raisonnement suivant : on cherche à ce que le rapport entre l'amplitude de l'onde incidente et celle de l'onde réfléchie, effectuant un aller-retour dans la couche absorbante, soit égale à 0.01, ce qui correspond à  $\delta = \ln(10)$ .

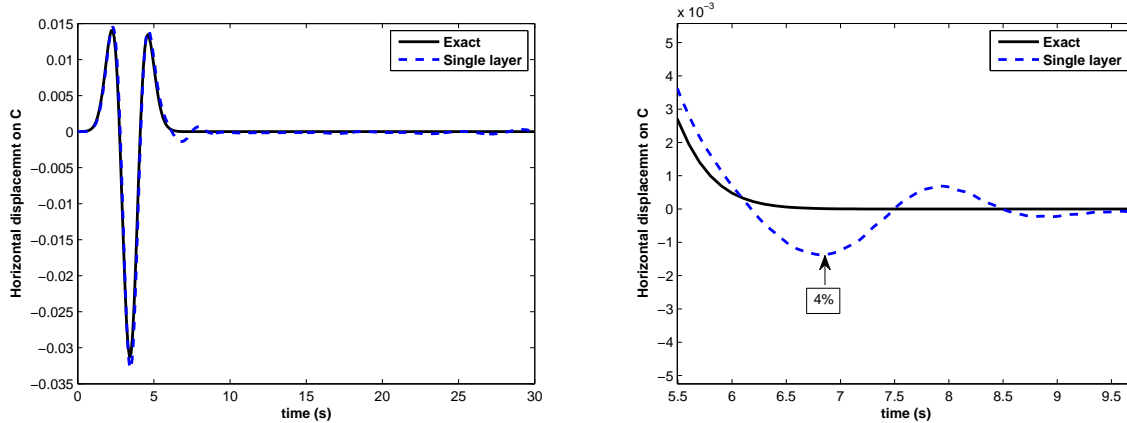
Un point C, situé à 10 m du point de chargement, est choisi afin d'extraire le déplacement vertical et le déplacement horizontal.

Dans la Figure 2.23, les déplacements au point C, obtenus en utilisant les couches absorbantes, sont comparés aux résultats analytiques déterminés par Lamb. On observe que les résultats sont très proches avec de petites réflexions qui correspondent à des erreurs de l'ordre de 4% (déplacement horizontal tracé sur les Figures 2.23 et 2.24). On précise que l'erreur dans cet exemple est définie comme étant le rapport en valeur absolue entre l'amplitude maximale de l'onde réfléchie et l'amplitude maximale de l'onde incidente. Par conséquent, la méthode de dimensionnement développée dans les parties précédentes montre son efficacité malgré la présence d'autres types d'ondes, notamment les ondes de Rayleigh présentes dans le problème de Lamb.



(a) Déplacement vertical

FIGURE 2.23 – Déplacement horizontal au point C : résultats analytiques (Lamb) *versus* les résultats numériques obtenus par les couches absorbantes de Rayleigh



(a) Déplacement horizontal

FIGURE 2.24 – Déplacement vertical au point C : résultats analytiques (Lamb) *versus* les résultats numériques obtenus par les couches absorbantes de Rayleigh

Afin de réduire la taille du milieu dissipatif, on propose d'utiliser la stratégie ALID modifiée détaillée dans la section 2.2.2. La Figure 2.25 décrit le maillage utilisé dans cette simulation : le sous domaine 1 est toujours modélisé par Europlexus alors que le sous domaine 2 (milieu absorbant) est modélisé par Cast3m subdivisé en plusieurs couches. On garde les mêmes caractéristiques mécaniques que l'exemple précédent.

L'épaisseur de chaque couche, comme il est indiqué dans le paragraphe 2.2.3, est égale à la taille de l'élément  $h = \frac{\lambda}{50}$ . Le dimensionnement de la couche absorbante est conditionné uniquement par la relation (2.54) : le pas  $a_\xi$  est fixé à 2% de même que le premier facteur d'amortissement  $\xi_1$ . Considérons une valeur cible de  $\delta = \ln(10)$  pour le décrement logarithmique, nous obtenons un nombre total de couches  $N$  égal à 40.

Les Figures 2.26 et 2.27 comparent les déplacements au point C obtenus par la stratégie décrite ci-dessus aux résultats de référence (les solutions de Lamb). Il est intéressant de souligner la précision obtenue avec la stratégie multi-couches avec une erreur ne dépassant pas les 1.7% par rapport à l'amplitude de l'onde incidente.

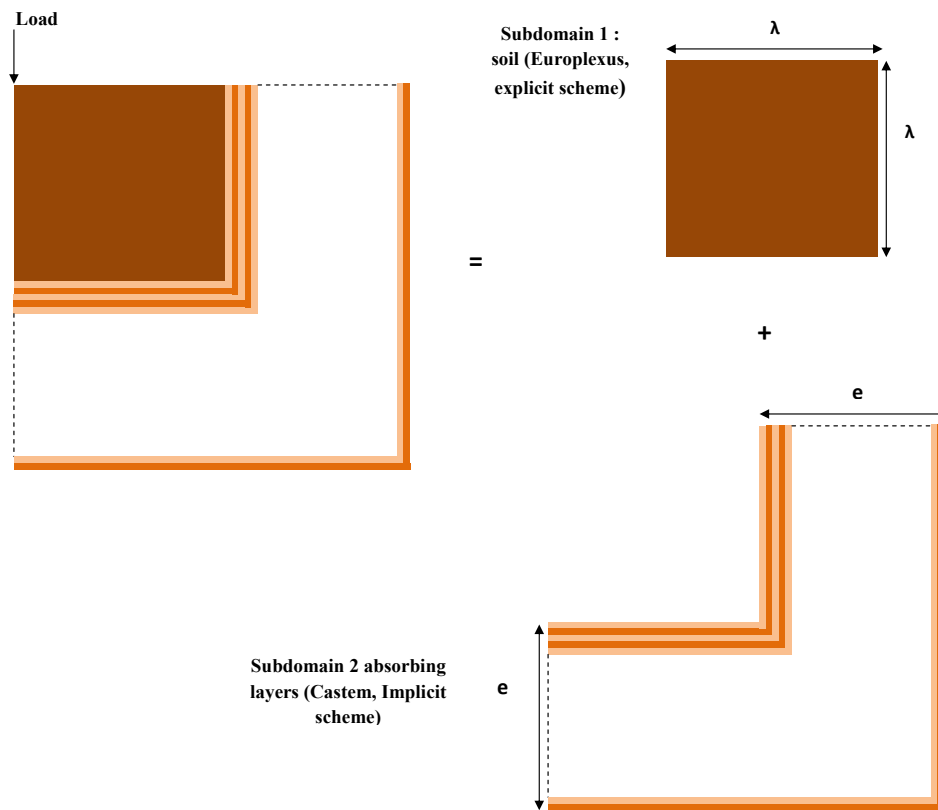
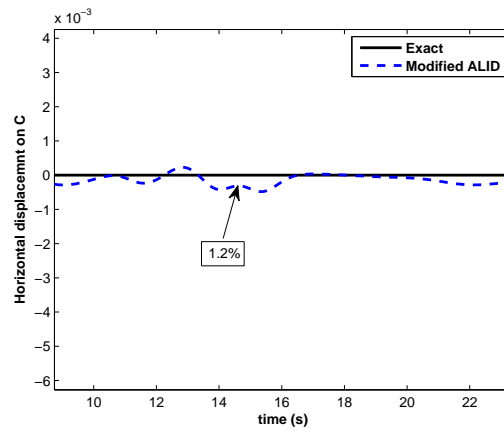
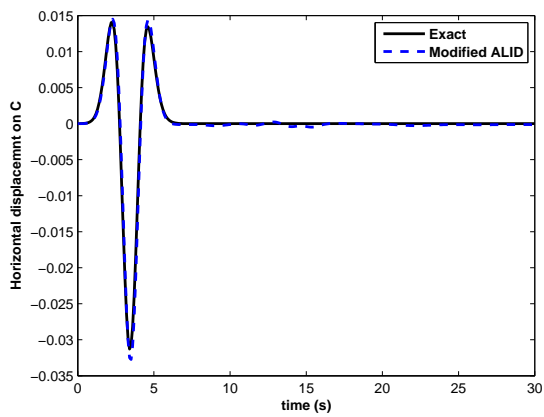


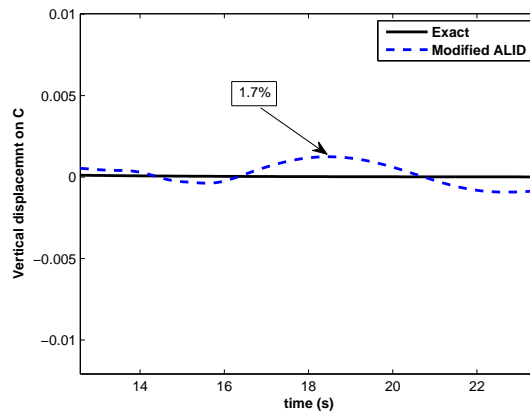
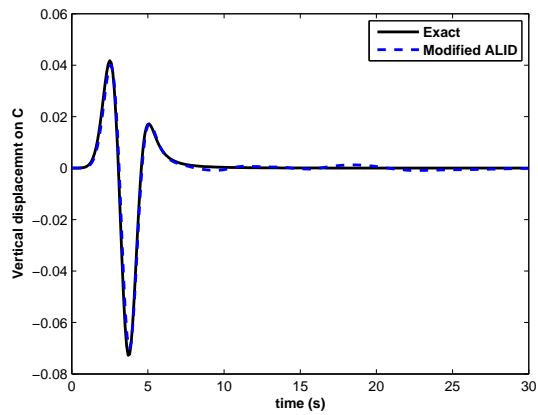
FIGURE 2.25 – Modèle EF pour le sous domaine 1 (sol) et le sous domaine 2 (multi-couches)

Les évolutions des énergies interne et cinétique sont également illustrées dans la Figure 2.28, en les comparant au cas où l'amortissement dans la couche absorbante est nul. On peut noter, sur la Figure 2.28, la bonne qualité de la dissipation du milieu avec de faibles retours d'énergie de l'ordre de 0.01%. La Figure 2.29 illustre une comparaison des isovalues de déplacements pour la partie sol (sous domaine 1), obtenues, d'une part, pour un maillage assez large pour ne pas être perturbé par les ondes réfléchies aux frontières de ce maillage étendu, et d'autre part, en utilisant la stratégie ALID modifiée. On observe également une bonne correspondance entre les isovalues avec des retours d'énergie très faibles (non observables avec l'échelle choisie pour les isovalues de déplacement) dans le cas des multi-couches. Comme la taille du milieu absorbant est réduit de  $3.6\lambda$  à  $0.8\lambda$ , l'efficacité de la stratégie multi couches est démontrée.



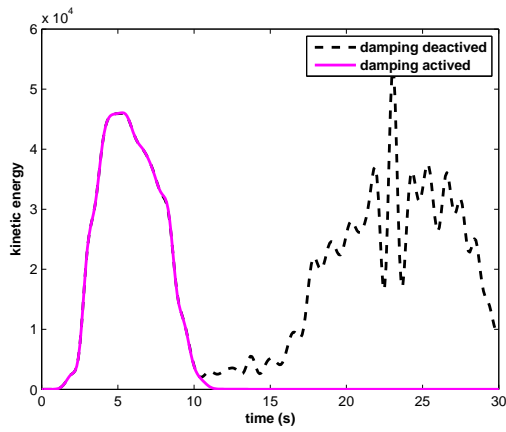
(a) Déplacement horizontal

FIGURE 2.26 – Déplacement horizontal au point C

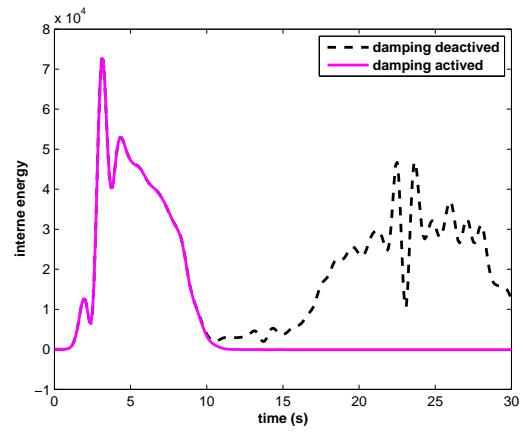


(a) Déplacement vertical

FIGURE 2.27 – Déplacement vertical au point C



(a) énergie cinétique



(b) énergie interne

FIGURE 2.28 – Energies cinétique et potentielle calculées en utilisant la stratégie ALID modifiée

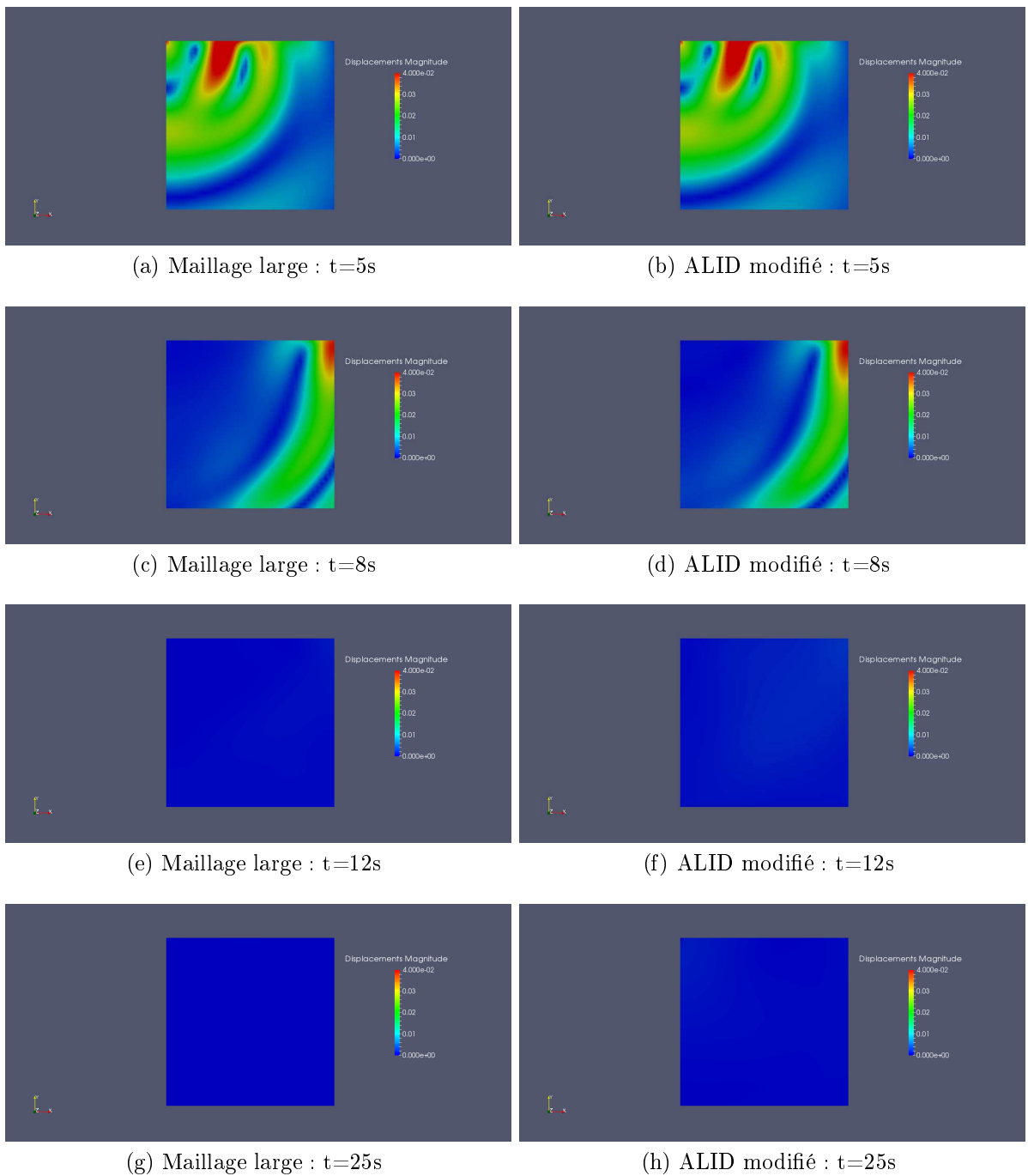


FIGURE 2.29 – Comparaison des isovalues de déplacement obtenues pour plusieurs instants, d’une part, par un maillage assez large, et d’autre part, en utilisant la stratégie ALID modifiée



## 2.4 Bilan

Dans ce chapitre, on a présenté l'amortissement de Rayleigh selon une formulation forte en faisant le lien avec le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt. Ce pont a permis d'étudier plus rigoureusement le processus de propagation d'onde, d'une part, dans un milieu visqueux caractérisé par une matrice de Rayleigh, et d'autre part, dans un milieu couplant un domaine d'étude linéaire de Hooke et un domaine visqueux caractérisé par la matrice de Rayleigh. Il en ressort qu'on peut modifier les paramètres du domaine absorbant selon des conditions afin d'éliminer les ondes parasites pour une onde incidente harmonique ou de les minimiser dans le cas non harmonique.

On a également présenté la stratégie des multicouches qu'on a nommé ALID modifiée, c'est-à-dire une version modifiée de la stratégie ALID. Notre stratégie repose sur une méthode de dimensionnement plus simple, basée sur la notion de décrétement logarithmique en raisonnant sur une onde harmonique d'incidence normale. Il en ressort que l'épaisseur du domaine absorbant dépend uniquement de la finesse du maillage (le nombre d'éléments par longueur d'onde), du décrétement logarithmique cible et du pas  $a$  définissant la variation de l'amortissement dans les couches.

Finalement, on a validé, par des tests numériques, certains résultats analytiques en faisant des comparaisons avec des résultats obtenus par le calcul éléments finis. On a constaté, en outre, que l'hétérogénéité des propriétés mécaniques dans le milieu absorbant diminue les réflexions parasites par rapport à la stratégie ALID classique.

La méthode GC multi échelle en temps, introduite dans le cas du test de Lamb 2D en utilisant le cas particulier du mono échelle en temps, est l'objectif du chapitre suivant en appliquant des ratios  $m$  supérieurs à 1. Puisque le domaine absorbant est considéré comme un domaine hors la zone d'étude, il est intéressant d'évaluer le potentiel des méthodes de couplage des schémas temporels par rapport aux calculs classiques où le domaine absorbant est intégré par un pas de temps conditionné par le milieu d'étude.

# Chapitre 3

## Amortissement de Rayleigh et le multi-échelle en temps par la méthode GC

*Algorithms are human artifacts.  
They belong to the world of memory and meaning, desire and design.*

David Berlinski

Ce chapitre sera consacré à l'analyse des erreurs, due à l'application du multi-échelle en temps par la méthode GC, en étudiant des cas tests 1D et 2D. Plus précisément, on étudiera l'effet de la variation du ratio des pas de temps  $m$  et de la finesse du maillage, ou le nombre d'éléments par longueur d'onde, sur la précision des résultats en faisant des comparaisons avec des résultats de référence. Une comparaison du temps de calcul (temps CPU) en fonction de  $m$  sera également conduite afin d'estimer le gain réalisé par rapport à un calcul classique où le problème global est intégré avec un schéma explicite.

### 3.1 Amortissement de Rayleigh et méthode de couplage GC : Cas 1D

Dans cette section, on considère le problème de propagation d'une onde de longueur  $\lambda$  dans une barre divisée en deux sous domaines : l'un est linéaire et l'autre est amortissant par la matrice de Rayleigh afin de représenter les conditions de radiation des ondes à l'infini. L'objectif ici est d'étudier les erreurs dues à l'application de l'hétérogénéité des pas de temps lorsqu'on adopte un schéma de différence centrée pour le domaine linéaire

et un schéma de l'accélération moyenne pour le domaine absorbant. Nous commençons dans un premier temps par étudier le cas où l'amortissement est homogène dans la barre puis on analysera le cas où la stratégie ALID modifiée est appliquée à la barre amortissante.

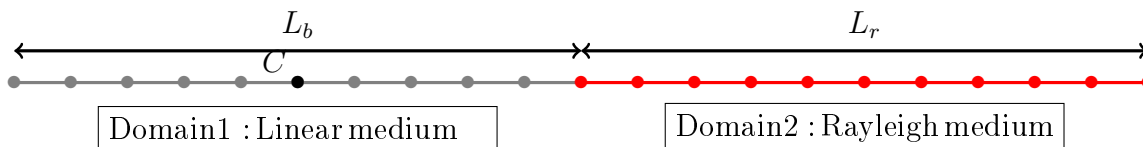


FIGURE 3.1 – Maillage par les éléments de type barre couplant un milieu linéaire et un milieu de Rayleigh

La Figure 3.1 décrit les caractéristiques géométriques du problème. La barre linéaire (domaine 1) a une longueur  $L_b = 100h$  ( $h$  la taille de l'élément) de même que celle de la barre amortissante  $L_r$ . Les éléments de maillage sont des éléments barres avec des fonctions de forme linéaires dont la taille vérifie  $\frac{\lambda}{h} = N$  pour les deux domaines,  $N$  est choisi suffisamment grand pour diminuer les effets de la dispersion numérique ( $\geq 20$ ). L'onde imposée à l'extrémité de la barre linéaire est de type de Ricker de second ordre avec  $t_p$  variable et  $A = 0.01$ . Les caractéristiques mécaniques de la barre linéaire sont choisies comme suit :  $E_1 = 1$  et  $\rho_1 = 1$ , ce qui correspond à une longueur d'onde de l'ordre de  $\lambda_0 = ct_p = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} t_p$ . La barre amortissante est homogène, caractérisée par un facteur d'amortissement  $\xi$  et par des propriétés mécaniques liées à celles de la barre linéaire par la condition  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$ . Finalement, on choisit un point  $C$  au centre de la barre linéaire afin de suivre le déplacement correspondant à l'onde réfléchie.

On rappelle que le coefficient de réflexion physique est donné par :

$$|R_{reel}| = \left| \frac{1 - \gamma \sqrt{1 + \xi^2 - i \xi \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}}{1 + \gamma \sqrt{1 + \xi^2 - i \xi \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}} \right| \quad (3.1)$$

En introduisant la discrétisation par la méthode GC, on supposera que le coefficient de réflexion numérique s'écrit :

$$R_{num} = f(\lambda, \lambda_0, \xi, h, dt, E_1, \rho_1, m) \quad (3.2)$$

Ce qui revient à écrire en utilisant une analyse adimensionnelle ou le théorème de Vaschy-Buckingham [62] :

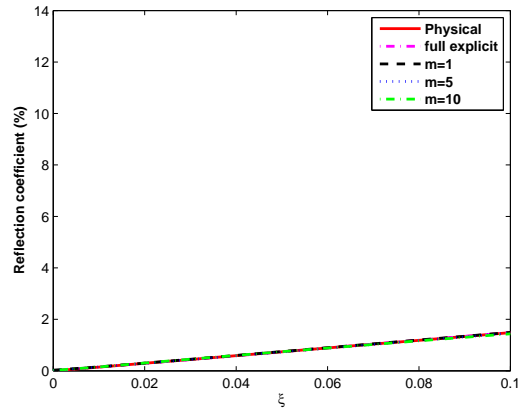
$$R_{num} = f \left( \xi, \frac{\lambda}{\lambda_0}, \frac{\lambda}{h}, \frac{c dt}{h}, m \right) \quad (3.3)$$

On suppose que les barres sont assez longues et n'influencent pas le coefficient de réflexion. Comme l'onde de Ricker est non harmonique, on adoptera encore une fois le coefficient de réflexion défini auparavant par  $R_{ricker} = \frac{\max_t |u_r|}{A}$ .  $u_r$  désigne le déplacement de l'onde réfléchie à l'interface qui, on le rappelle, a l'expression suivante :

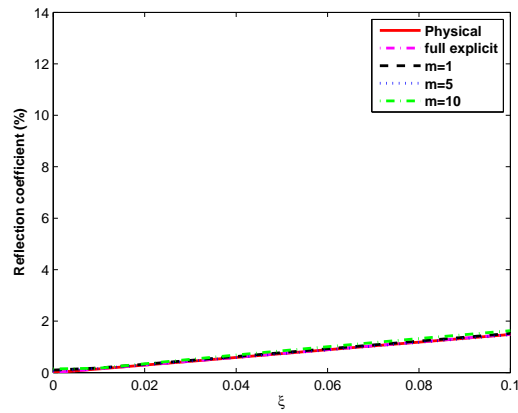
$$u_r(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \gamma \sqrt{1 + \xi^2 - i \xi \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}}{1 + \gamma \sqrt{1 + \xi^2 - i \xi \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}} \hat{f}(\omega) \exp(i(\omega t + \frac{\omega}{V_1} x)) d\omega \quad (3.4)$$

Comme le domaine fréquentiel d'une onde de Ricker est localisé autour d'une fréquence dominante, l'idée, dans la suite, est d'exploiter cette onde afin d'analyser l'évolution de  $R_{num}$  pour une onde harmonique de longueur  $\lambda_0$  et d'en déduire des conclusions relatives à l'effet de certains paramètres sur l'évolution des erreurs, notamment les paramètres  $\frac{\lambda_0}{h}$  et  $m$ .

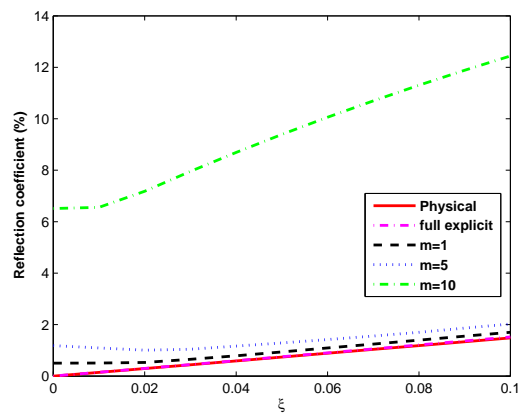
On définit  $N_\lambda = \frac{\lambda_0}{h}$  et on se fixe  $\frac{c dt}{h} = 1$  (pas de temps critique). Dans la Figure 3.2, on compare les valeurs du coefficient de réflexion  $R_{ricker}$  ("Physica") et les valeurs du même coefficient obtenu numériquement par deux méthodes différentes : calcul complet en explicite ("Full explicit") et calcul par la méthode GC en faisant varier le ratio  $m$ . Premièrement, on constate que le décalage entre les résultats obtenus par le calcul en explicite complet et les résultats de référence ( $R_{ricker}$ ) est très faible pour les différentes valeurs de  $N_\lambda$ . Cependant, une fois qu'on applique la stratégie (implicite/explicite) décrite ci-dessus, la performance du couplage devient sensible à la valeur de  $N_\lambda$  : on constate de grands écarts pour  $N_\lambda = 25$  par rapport à  $N_\lambda = 100$ . Cette remarque est illustrée sur la Figure 3.3, les réflexions à l'interface deviennent plus importantes lorsqu'on diminue la valeur de  $N_\lambda$ , même pour le cas de  $\xi = 0$  où les réflexions physiques sont nulles.



(a)  $N_\lambda = \frac{\lambda_0}{h} = 100$



(b)  $N_\lambda = \frac{\lambda_0}{h} = 50$



(c)  $N_\lambda = \frac{\lambda_0}{h} = 25$

FIGURE 3.2 – Evolution du coefficient de réflexion en fonction de  $\xi$  pour différentes valeurs de  $N_\lambda$

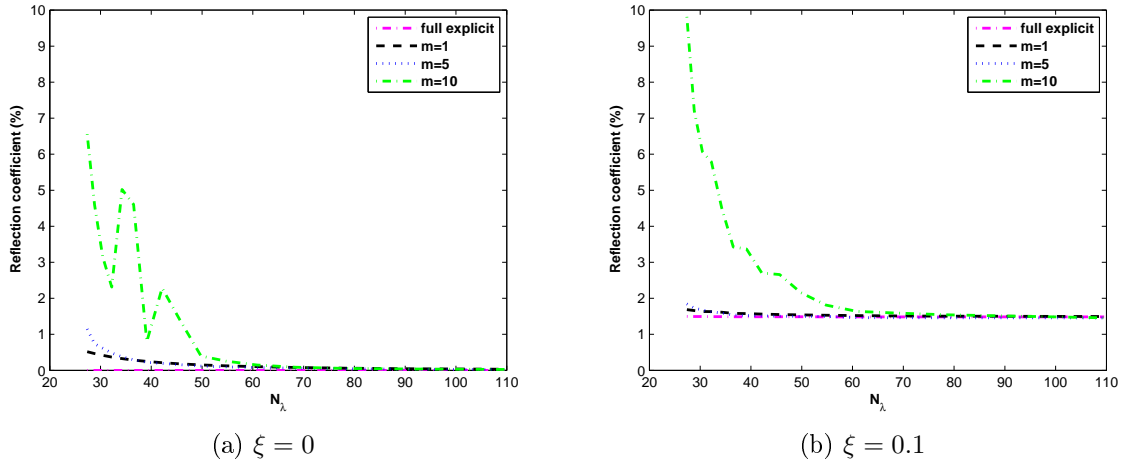
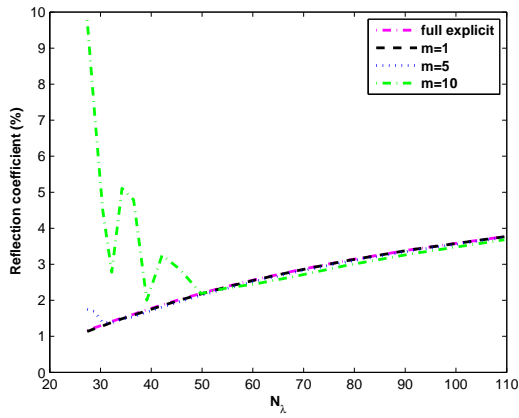


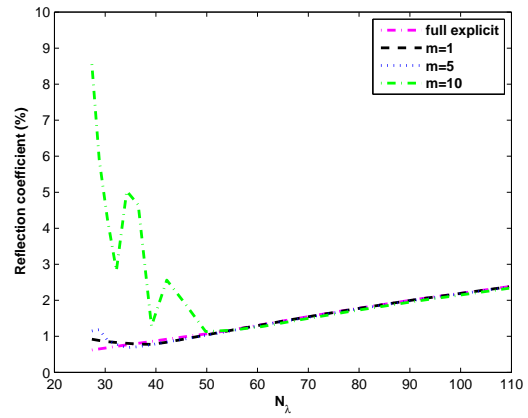
FIGURE 3.3 – Evolution du coefficient de réflexion en fonction de  $N_\lambda$  en fixant la valeur de  $\xi$

Appliquons maintenant la même étude précédente à la stratégie ALID modifiée. Dans la Figure 3.4, on trace l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de  $N_\lambda$  pour différentes valeurs du pas  $a_\xi$ . On constate, de même que lors du cas précédent, que l'écart devient plus important lorsque le nombre  $N_\lambda$  diminue. Cependant, si on augmente  $N_\lambda$ , la réflexion physique augmente comme il a été noté précédemment sur la Figure 2.19. Il est alors conseillé dans ce cas de choisir des valeurs intermédiaires de  $N_\lambda$  (entre 50 et 60 dans nos tests numériques) pour de faibles valeurs de  $a_\xi$  ou éviter de manipuler de grands ratios  $m$ . Si on substitue les éléments barres par des éléments quadrangles (2D) à interpolation linéaire, la Figure 3.5 montre, en faisant une comparaison avec la Figure 3.4, que la sensibilité s'atténue considérablement pour les faibles valeurs de  $N_\lambda$  ce qui permet d'utiliser de grands ratios  $m$ .

Nous terminons cette partie par une comparaison des temps de calcul entre le calcul complet en explicite et le calcul par la méthode GC dans le cas d'une simulation avec des éléments barres. On définit  $Rt_m$  comme étant le rapport entre le temps de calcul en explicite et le temps de calcul en adoptant la méthode de couplage avec le ratio  $m$ . Le Tableau 3.1 résume les valeurs de  $Rt_m$  pour différentes valeurs de  $m$  allant de 1 à 5 obtenues pour  $N_\lambda = 50$  et  $a = 0.01$ . Nous constatons que le calcul avec  $m = 1$  consomme relativement le même temps de calcul qu'un temps en explicite alors que les cas  $m = 5$  et  $m = 10$  consomment respectivement 2.7 et 3.3 fois moins qu'un calcul complet en explicite.

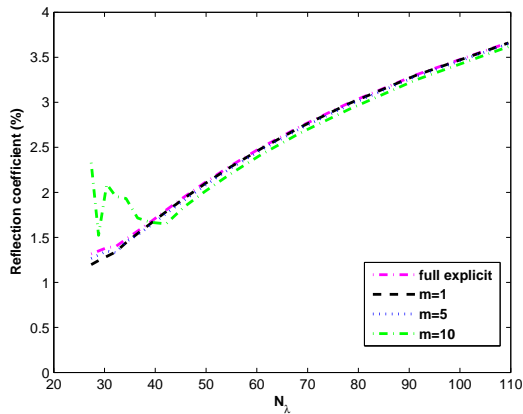


(a)  $a = 0.02$

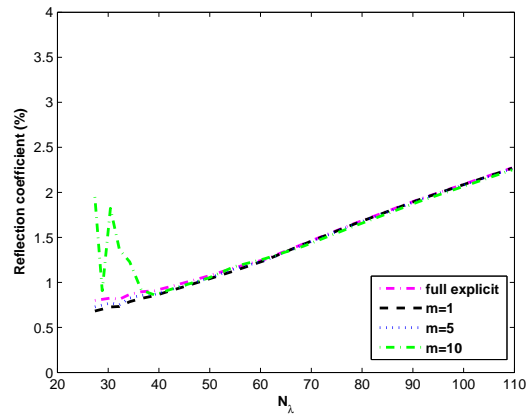


(b)  $a = 0.01$

FIGURE 3.4 – Evolution du coefficient de réflexion en fonction de  $N_\lambda$  dans le cas de la stratégie ALID modifiée (éléments barres)



(a)  $a = 0.02$



(b)  $a = 0.01$

FIGURE 3.5 – Evolution du coefficient de réflexion en fonction de  $N_\lambda$  dans le cas de la stratégie ALID modifiée (éléments quadrangles)

	$m = 1$	$m = 5$	$m = 10$
$Rt_m$	0.91	2.7	3.3

TABLE 3.1 – Valeurs de  $Rt_m$  (rapport entre le temps de calcul en explicite et le temps de calcul pour un calcul explicite/implicite) en fonction du ratio  $m$  (rapport entre les pas de temps)

## 3.2 Amortissement de Rayleigh et méthode de couplage GC : Exemples 2D

### 3.2.1 Test de Lamb 2D

Dans cet exemple, on considère à nouveau le test de Lamb décrit dans la section 2.3.3. Le but est d'analyser l'effet de la variation du ratio  $m$  lorsqu'on adopte un couplage Explicite/Implicite en utilisant la stratégie multi-couches (ALID ou ALID modifiée). Le sol jouera donc le rôle du sous domaine 1 et les couches absorbantes celui du sous domaine 2.

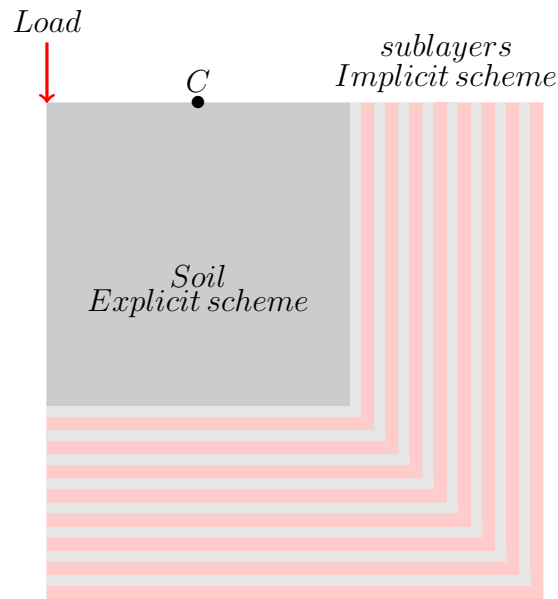
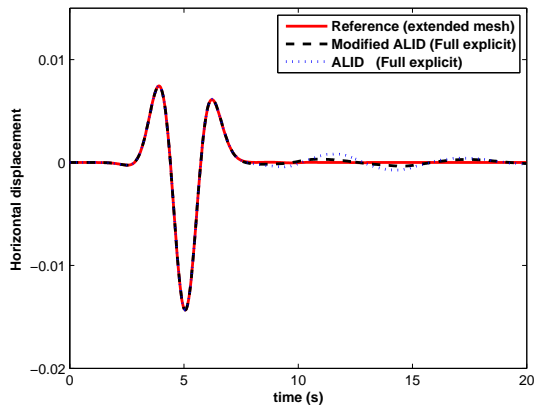


FIGURE 3.6 – Test de Lamb : Modélisation par les multicouches (ALID modifié)

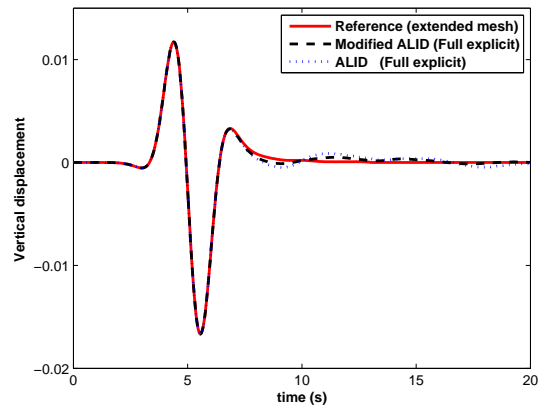


Les caractéristiques géométriques sont illustrées sur la Figure 3.6 (on tient en compte de la symétrie du problème). Le sol est élastique linéaire isotrope caractérisé par le module de Young  $E = 2.5$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$  et la densité  $\rho = 1$ . Les caractéristiques mécaniques des couches absorbantes données par le système (2.53) en adoptant un pas  $a_\xi = 0.02$ . Le chargement suit une onde de Ricker caractérisée par :  $A = 0.1$ ,  $t_p = 3$  et  $t_s = 3$ , ce qui correspond à une onde P de longueur  $\lambda = 5$ . Le sol, de taille de  $0.8\lambda$ , est discrétisé en éléments quadrangles à interpolation linéaire. L'épaisseur du milieu absorbant est déterminée à partir du décrétement logarithmique fixé à  $\ln(10)$ , ce qui correspond, en choisissant une taille d'élément  $h$  telle que  $h = \frac{\lambda}{50}$ , à  $N_e = 40$  d'après l'équation (2.54). Enfin, un point  $C$  est choisi à une distance de 2 du point de chargement afin de capturer les déplacements vertical et horizontal.

Avant d'aborder l'étude des erreurs dues à la méthode de couplage GC, on analyse dans un premier temps l'erreur due au modèle lui-même, à savoir la stratégie multicouches (ALID ou ALID modifiée). Pour cela, on définit l'erreur pour une grandeur  $E$  due au modèle par  $err = \frac{\|E_{ray} - E_{ref}\|_{L^2([0,T])}}{\|E_{ref}\|_{L^2([0,T])}}$  où  $E_{ray}$  est la valeur de  $E$  calculée en utilisant les couches amortissantes de Rayleigh et  $E_{ref}$  est la valeur de  $E$  en utilisant un maillage suffisamment étendu (résultats de référence). Dans les deux cas, le calcul est mené avec un schéma de différence centrée. Dans les Figures 3.7 et 3.8, on compare les déplacements en C et les énergies du sous domaine sol, obtenus en utilisant les différentes approches (ALID et ALID modifiée) avec les résultats de référence obtenus avec un maillage assez large. La quantification des erreurs montre que la méthode ALID modifiée améliore les résultats en réduisant l'erreur de 10% à 5% pour le déplacement horizontal et de 11% à 6% pour le déplacement vertical. Les erreurs sur les énergies sont également réduites de 0.25% à 0.14% pour l'énergie cinétique et de 0.21% à 0.14% pour l'énergie interne.

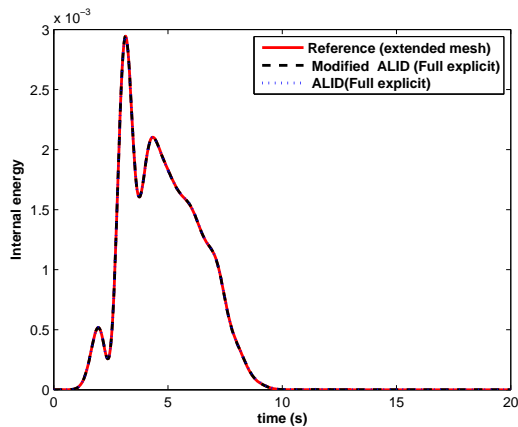


(a) Horizontal displacement

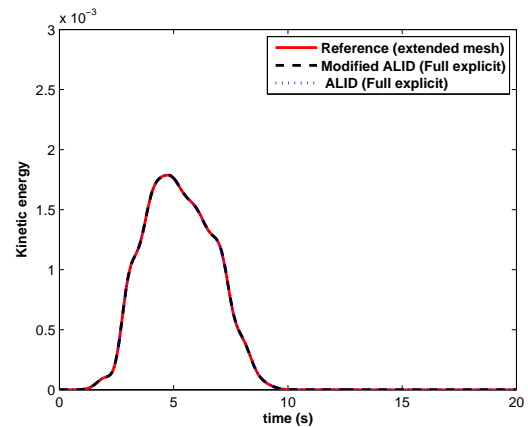


(b) Vertical displacement

FIGURE 3.7 – Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu (Test de Lamb)



(a) Energie potentielle



(b) Energie cinétique

FIGURE 3.8 – Comparaison des énergies en C dans le cas du test de Lamb

Les résultats du calcul obtenus par la méthode de couplage GC selon différentes valeurs de  $m$  sont comparés à ceux obtenus uniquement par un schéma explicite. A première vue, les résultats du calcul par la méthode GC sont conformes aux résultats de référence (calcul explicite) que ce soit au niveau des déplacements au point  $C$  (Figure 3.9) qu'au niveau des énergies cinétiques et potentielles (Figure 3.10).

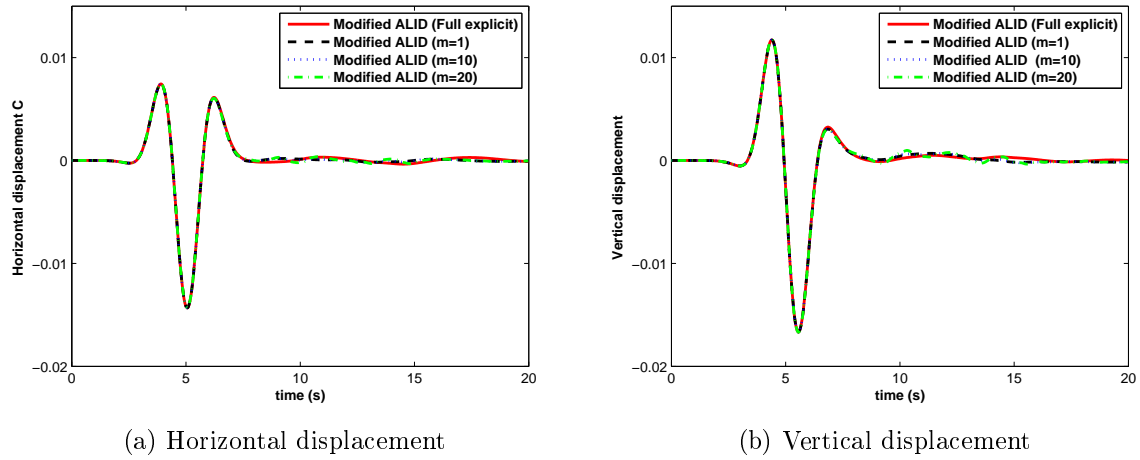


FIGURE 3.9 – Comparaison des déplacements en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratios  $m$

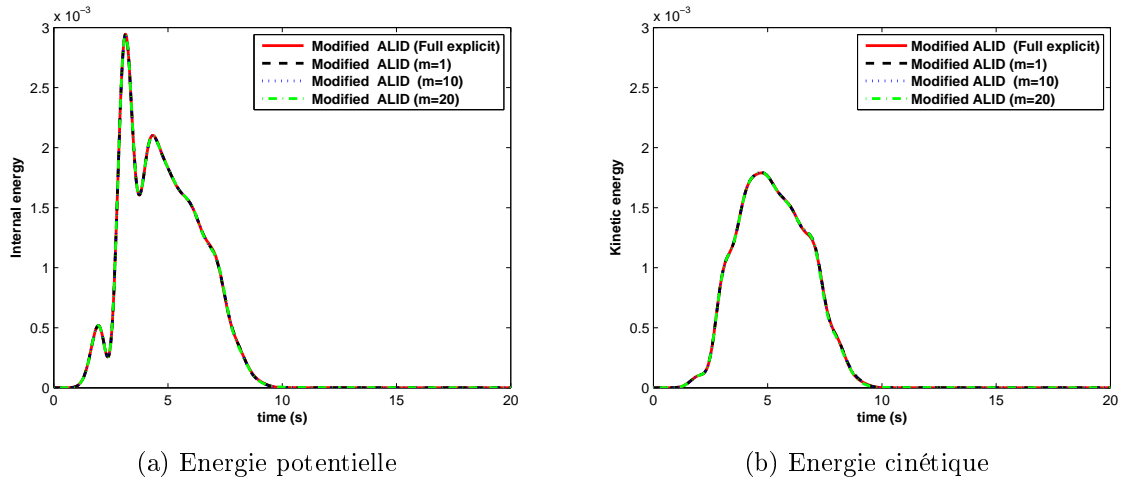


FIGURE 3.10 – Comparaison des énergies en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratio  $m$

L'évaluation de l'erreur d'une grandeur  $E$  due au couplage Implicite/Explicite est définie par  $err = \frac{\|E_{I/E}^{(m)} - E_{ref}\|_{L^2([0,T])}}{\|E_{ref}\|_{L^2([0,T])}}$ , où  $E_{I/E}^{(m)}$  est la valeur de  $E$  obtenue par le couplage Implicite/Explicite avec le ratio  $m$ ,  $E_{ref}$  est la valeur de  $E$  obtenue par un calcul en

explicite et  $T$  est l'instant final. Le Tableau 3.2 résume les erreurs pour différentes grandeurs (déplacements en  $C$  et énergies) en fonction de  $m$ . On constate que l'erreur introduite par la méthode GC reste globalement faible même avec un ratio atteignant  $m = 20$ , et ceci malgré la dissipation numérique due au couplage.

	Energie cinétique	Energie potentielle	Déplacement horizontal	Déplacement vertical
$m = 1$	0.003%	0.003%	0.02%	0.02%
$m = 10$	0.2%	0.1%	1%	1%
$m = 20$	0.7%	0.3%	3.8%	3.6%

TABLE 3.2 – Erreurs en énergie et déplacement en fonction de  $m$  dans le cas du test de Lamb en utilisant la stratégie ALID modifiée

### 3.2.2 Fondation rigide sur un sol homogène

Dans cette section, on considère le problème de chargement d'une fondation rigide (module très élevé par rapport à celui du sol) posée sur un sol semi-infini homogène (Figure 3.11). L'étude sera identique à celle menée dans l'exemple précédent sauf que la fondation rigide jouera ici le rôle du sous domaine 3 qu'on intègre avec un schéma implicite. L'intérêt de la méthode GC dans cet exemple, outre la possibilité d'inclure la matrice de rigidité dans la matrice d'amortissement totale, est l'intégration du problème avec le pas temps calculé à partir des propriétés du sol au lieu de celles de la fondation beaucoup plus rigide.

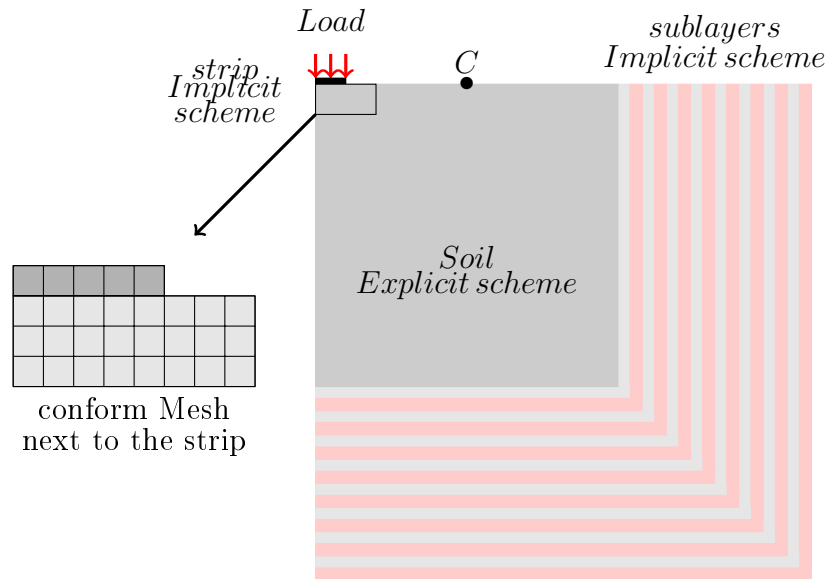
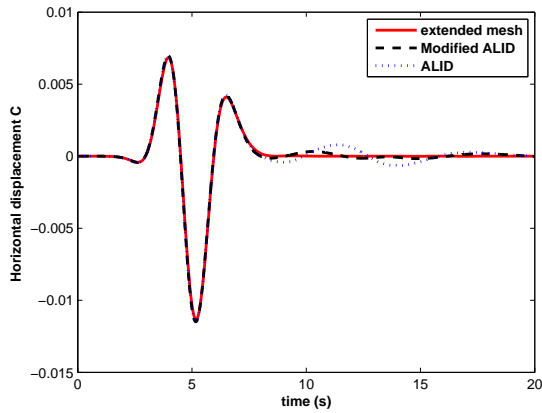


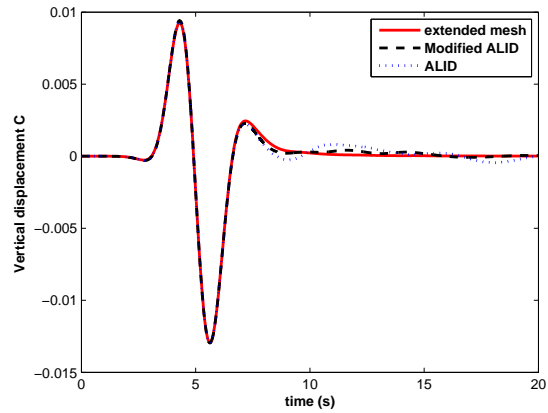
FIGURE 3.11 – Modélisation du chargement d’une fondation rigide en utilisant la stratégie ALID modifiée

On garde les mêmes propriétés mécaniques et géométriques du sol et des couches amortissantes que pour l’exemple précédent. La fondation de largeur 0.5 a un module de Young 100 fois plus important que celui du sol et subit un chargement vertical uniforme suivant l’onde de Ricker. Le dimensionnement des couches absorbantes obéit au système (2.50) en gardant  $\omega_0$  égale à la pulsation dominante de l’onde de Ricker, ce qui laisse inchangé le nombre de couches  $N_e$ . La comparaison des résultats sera au niveau des mêmes quantités que l’exemple précédent. L’énergie ici est calculée pour le système sol+fondation.

La Figure 3.12 illustre une comparaison des déplacements en C tracés, d’une part, avec un maillage assez large, et d’autre part, en adoptant les méthodes ALID et ALID modifiée. On constate encore une fois que la modification des propriétés mécaniques améliorent les résultats en réduisant l’erreur de 12% (ALID) à 5% (ALID modifiée) dans le cas du déplacement horizontal et de 8% (ALID) à 5% (ALID modifiée) dans le cas du déplacement vertical. Les erreurs par rapport aux énergies sont également réduites de 0.4% à 0.3% (Figure 3.13).

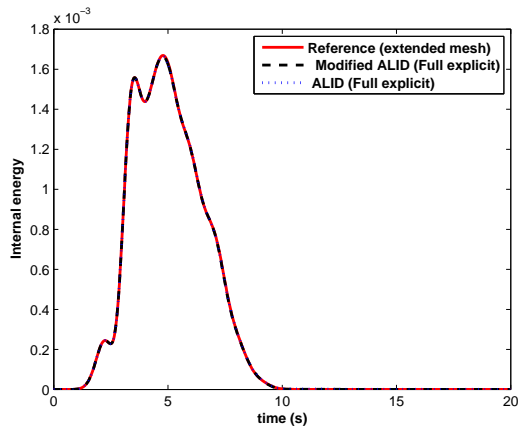


(a) Horizontal displacement

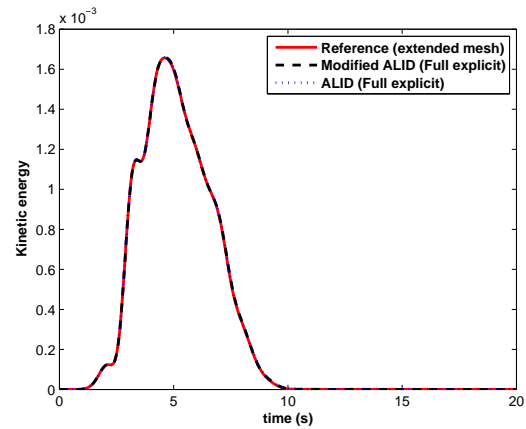


(b) Vertical displacement

FIGURE 3.12 – Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu dans le cas d’une fondation sur un sol homogène



(a) Energie potentielle



(b) Energie cinétique

FIGURE 3.13 – Comparaison des énergies cinétique et potentielle obtenues par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu dans le cas d’une fondation sur un sol homogène

Selon la décomposition des sous domaines décrite ci-dessus et le choix des propriétés mécaniques de chaque partie du problème, le couplage Implicite/Explicite permettra,

dans ce cas, d'utiliser un pas de temps dans la structure égal à au moins 10 fois le pas de temps d'un calcul complet en explicite. Le gain devrait être *a priori* conséquent. Les Figures 3.14 et 3.15 illustrent la comparaison des quantités (déplacements en C et énergies) obtenues pour différentes valeurs de  $m$  allant de 1 à 10 par rapport à celles obtenues par un calcul complet en explicite. Une description qualitative de la Figure 3.15 montre un faible décalage entre les énergies qui est visible pour le cas  $m = 10$ , alors que les déplacements demeurent en bon accord (Figure 3.14). Le Tableau 3.3 résume les erreurs calculées pour les déplacements et les énergies selon la relation décrite dans la section 3.2.1. Celles-ci restent, malgré la dissipation numérique, de l'ordre de 6% au maximum au niveau des énergies et de 3.6% au maximum au niveau des déplacements.

Par ailleurs, on a constaté un gain considérable en temps de calcul qui est de l'ordre de fois moins qu'un calcul global en explicite pour  $m = 1$ ,  $m = 5$  et  $m = 10$ . Ce qui permet de conclure que la méthode de couplage adoptée dans ce travail peut constituer une alternative potentielle pour ce type de simulations sans trop détériorer les résultats.

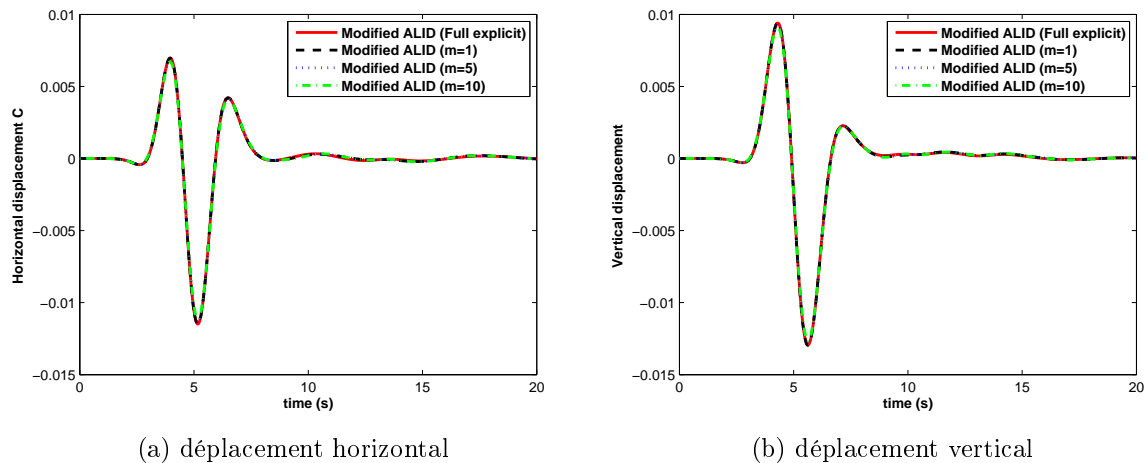


FIGURE 3.14 – Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu pour différentes valeurs de  $m$

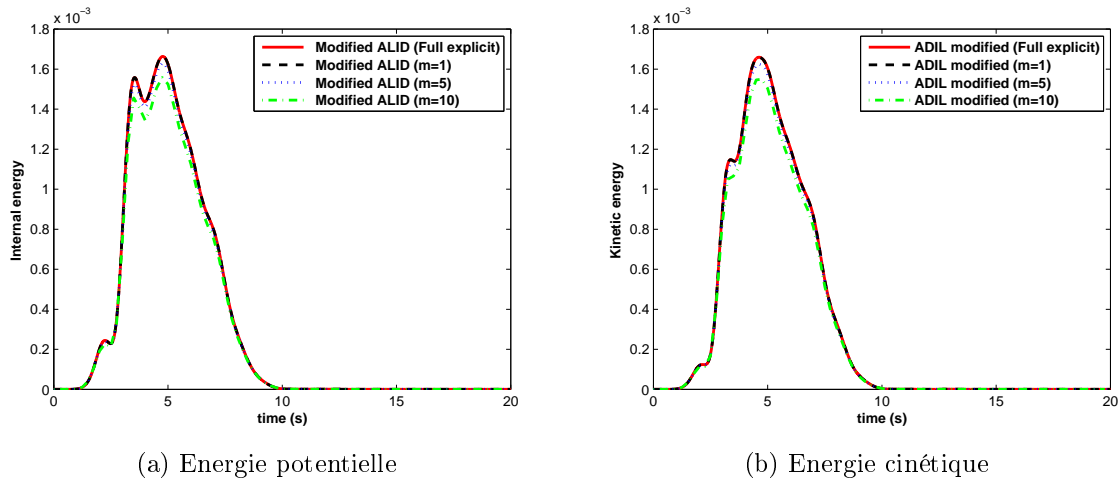


FIGURE 3.15 – Comparaison des énergies cinétiques et potentielles obtenues pour différents ratios  $m$

	Energie cinétique	Energie potentielle	Déplacement horizontal	Déplacement vertical
$m = 1$	0.1%	0.5%	0.7%	0.9%
$m = 5$	2%	2%	1.7%	1.2%
$m = 10$	6%	6%	3.6%	2.8%

TABLE 3.3 – Erreurs correspondantes aux énergies et aux déplacements, en fonction de  $m$ , dans le cas du test de chargement d’une fondation sur un sol homogène semi infini en utilisant la stratégie ALID modifiée

### 3.2.3 Fondation rigide sur un sol stratifié

Dans cette section, on reprend l’exemple précédent en modifiant la structure du sol supportant la fondation. On substitue uniquement le sol homogène par un sol stratifié composé d’une couche d’épaisseur  $h = 2$  sur un sol plus rigide semi infini (Figure 3.16). Cette différence de rigidité entraînera une série de réflexions à l’interface entre les sols et des interférences entre les ondes dans la couche de surface et par conséquent une propagation dispersive similaire à une propagation d’ondes guidées.

Les propriétés mécaniques de la couche de surface ( $E_1, \nu_1$ ) sont égales à celles du sol homogène dans les exemples précédents alors que celles du substratum vérifient les



relations suivantes :  $E_2 = 5 E_1$  et  $\nu_2 = \nu_1$ , le rendant ainsi plus rigide. Les propriétés mécaniques et géométriques de la fondation restent également inchangées. Le dimensionnement du domaine absorbant reposera sur l'hypothèse que  $\omega_0$  coïncide avec la pulsation dominante de l'onde de Ricker et que  $N_\lambda = 50$ , ce qui laisse inchangé le nombre  $N_e = 40$ . Les propriétés mécaniques des couches absorbantes doivent, en outre, respecter la transition entre le sol et le domaine absorbant. Lors de l'application du couplage Implicite/Explicite, le sol stratifié jouera toujours le rôle du sous domaine 1 intégré avec un schéma explicite, les couches absorbantes celui du sous domaine 2 intégré avec un schéma implicite et enfin la fondation celui du sous domaine 3 intégré également avec un schéma implicite.

Avant d'aborder l'étude des erreurs dues au couplage Implicite/Explicite, nous analysons dans un premier temps l'erreur due aux méthodes : ALID et ALID modifiée. La Figure 3.17 illustre une comparaison des déplacements en C tracés, d'une part, avec un maillage suffisamment étendu, et d'autre part, en adoptant les modèles ALID et ALID modifiée. La modification des propriétés mécaniques selon la stratégie ALID modifiée améliorent encore une fois les résultats en réduisant l'erreur de 6% (ALID) à 5% (ALID modifiée) dans le cas du déplacement horizontal et de 14% (ALID) à 8% (ALID modifiée) dans le cas du déplacement vertical. Les erreurs par rapport aux énergies (sol+fondation) sont également réduites de 3% à 1.5% (Figure 3.18).

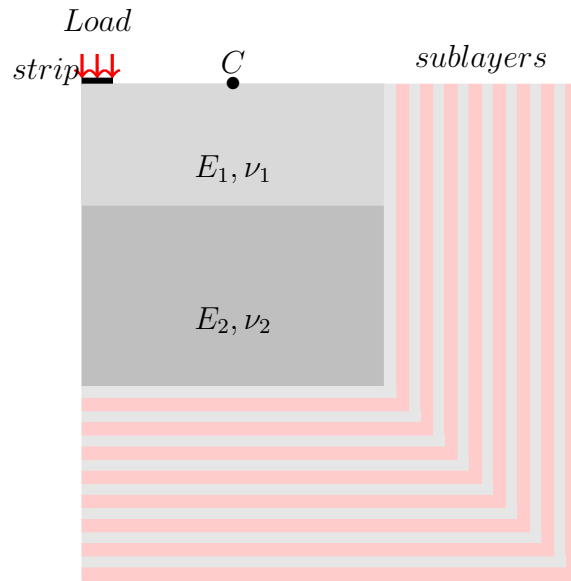


FIGURE 3.16 – Test de chargement d’une fondation sur un sol stratifié

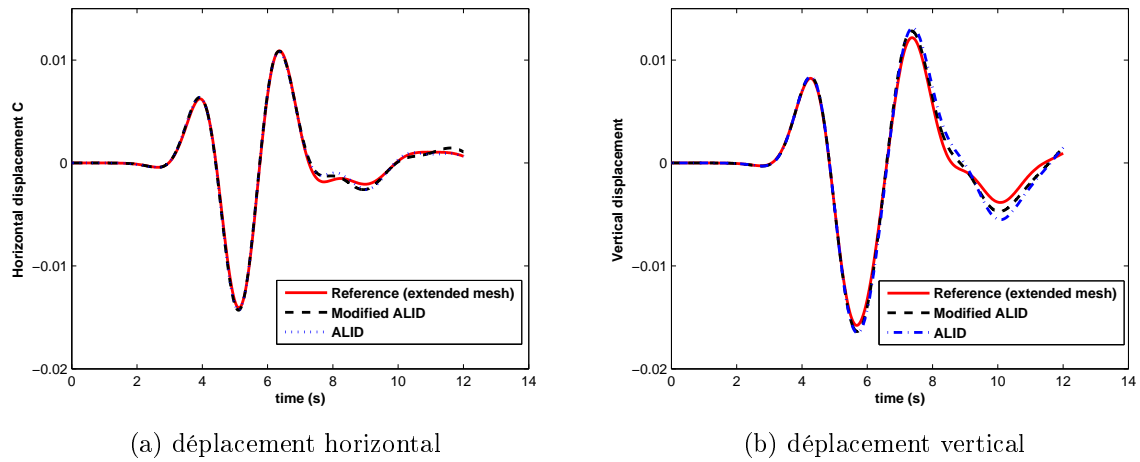


FIGURE 3.17 – Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par ALID, ALID modifiée et un maillage suffisamment étendu

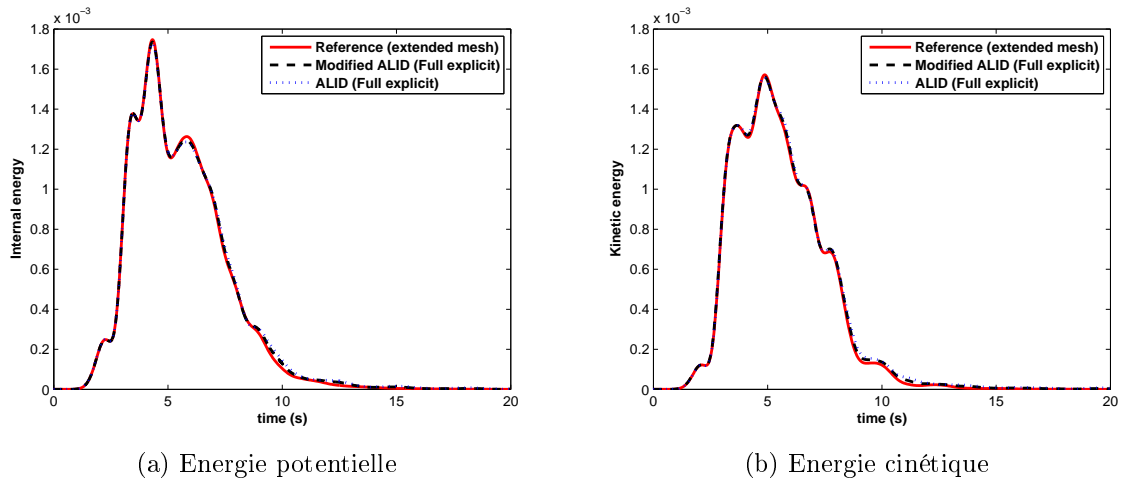
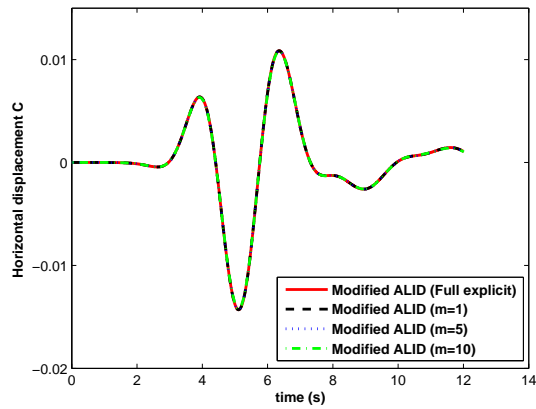
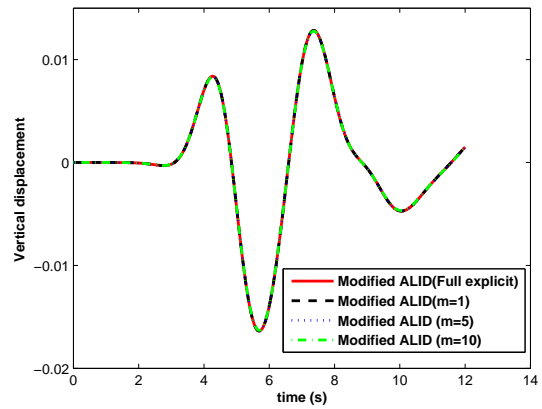


FIGURE 3.18 – Comparaison des énergies cinétique et potentielle obtenues par ALID, ALID modifiée et un maillage assez large

Les Figures 3.19 et 3.20 illustrent la comparaison des quantités (déplacements en C et énergies) obtenues pour différentes valeurs de  $m$  allant de 1 à 10 par rapport à celles obtenues par un calcul global en explicite. Premièrement, une comparaison qualitative montre des décalages très faibles par rapport à l'exemple précédent (Figure 3.14 et Figure 3.15). Le Tableau 3.4 résume les erreurs calculées pour les déplacements et les énergies selon la relation décrite dans la section 3.2.1. Celles-ci restent faibles, malgré la dissipation numérique, de l'ordre de 1.4% au maximum au niveau des énergies et de 0.8% au maximum au niveau des déplacements.

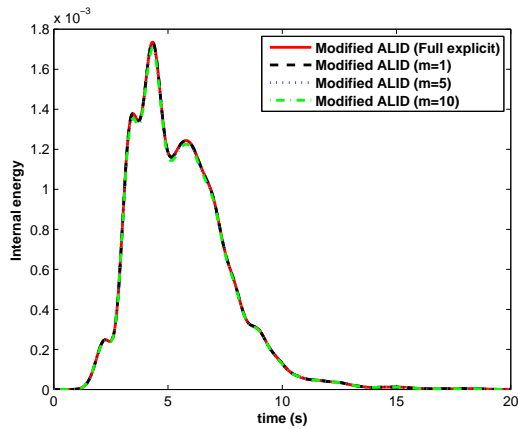


(a) déplacement horizontal

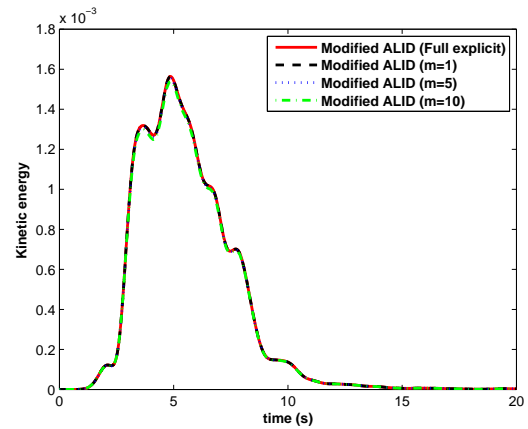


(b) déplacement vertical

FIGURE 3.19 – Déplacements vertical et horizontal en C obtenus pour différentes valeurs de  $m$



(a) Energie potentielle



(b) Energie cinétique

FIGURE 3.20 – Comparaison des énergies cinétiques et potentielles obtenus pour différents ratio  $m$

	Energie cinétique	Energie potentielle	Déplacement horizontal	Déplacement vertical
$m = 1$	0.05%	0.05%	0.1%	0.1%
$m = 5$	0.6%	0.6%	0.3%	0.2%
$m = 10$	1.4%	1.4%	0.8%	0.5%

TABLE 3.4 – Erreurs correspondantes aux énergies et aux déplacements, en fonction de  $m$ , dans le cas du test de chargement d’une fondation sur un sol stratifié en utilisant la stratégie ALID modifiée

### 3.3 Bilan

Dans ce chapitre, on s’est intéressé à l’analyse des erreurs générées par l’application de la méthode GC, qui se manifestent par des retours d’ondes parasites vers le domaine d’étude. En premier lieu, on a étudié le cas de propagation d’ondes en 1D en intégrant le domaine d’étude avec un schéma explicite et le domaine absorbant par l’introduction de l’amortissement de Rayleigh avec un schéma implicite. On a conclu que les réflexions parasites deviennent de plus en plus importantes lorsque le nombre  $N_\lambda$ , définissant la finesse du maillage, diminue et que cette sensibilité dépend du type d’élément de maillage. En revanche, le gain réalisé pour le temps de calcul devient plus intéressant en comparaison avec un calcul complet en explicite.

On s’est intéressé également aux exemples 2D en utilisant un domaine absorbant dimensionné selon les règles de la stratégie ALID modifiée. En premier lieu, on constaté que la technique de dimensionnement proposée dans ce travail génèrent moins d’erreurs en comparaison avec la méthode classique qui adopte l’homogénéité des propriétés mécanique. Ensuite, on a montré, en augmentant progressivement le ratio  $m$ , que le couplage Explicite/Implicite reproduit, avec un faible écart, les mêmes résultats qu’un calcul en explicite avec un ratio  $m$  allant jusqu’à 10. Finalement, on a montré que le gain en termes de temps de calcul réalisé par rapport à un calcul de référence en explicite est notable, avec des erreurs numériques additionnelles restant très modestes.

# Chapitre 4

## Couches absorbantes parfaitement adaptées et méthode de couplage GC

*It doesn't matter how beautiful your theory is,  
it doesn't matter how smart you are.  
If it doesn't agree with experiment, it's wrong.*

Richard P. Feynman

Nous étudions dans ce chapitre, de façon similaire au précédent, l'erreur due à l'application de la méthode GC en remplaçant les couches absorbantes de Rayleigh par une couche absorbante parfaitement adaptée (PML ou "Perfectly Matched Layers"). Cette partie sera précédée par une étude de stabilité des schémas temporels en considérant une PML dans le cas 1D.

### 4.1 Stabilité dans le cas 1D

Dans le cas d'un problème de propagation d'ondes unidimensionnel, on suppose que le champ du déplacement s'écrit sous la forme  $u = u_1(x_1)e_1$ . L'amortissement dans la direction  $x_1$  est activé alors qu'il est désactivé dans l'autre direction. Le problème défini dans le système (1.100) devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}((1 + f_1^e)\sigma_{11}) &= \rho(1 + f_1^e)\ddot{u}_1 + \rho c_s f_1^p \dot{u}_1 \\ \sigma_{11} &= k\varepsilon_{11} \\ (1 + f_1^e)^2 \varepsilon_{11} + 2c_s f_1^p (1 + f_1^e) \varepsilon_{11} + (c_s f_1^p)^2 E_{11} &= (1 + f_1^e) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_s f_1^p \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dans la suite, on étudie la stabilité de la PML dans le cas 1D en s'appuyant sur la discrétisation temporelle détaillée dans la partie 1.5.3. Pour simplifier l'étude, les éléments du maillage sont constitués d'éléments barres.

On note  $X_n = \begin{bmatrix} V_n \\ U_n \\ \bar{\varepsilon}_n \\ \bar{E}_n \end{bmatrix}$  avec  $\bar{\varepsilon}_n = \begin{bmatrix} \varepsilon_n(\varsigma_1) \\ \varepsilon_n(\varsigma_2) \end{bmatrix}$  ( $\varepsilon_n(\varsigma_i)$  la déformation aux points de Gauss) et  $\bar{E}_n = \begin{bmatrix} E_n(\varsigma_1) \\ E_n(\varsigma_2) \end{bmatrix}$ ,  $\gamma$  et  $\beta$  sont les paramètres du schéma de Newmark supposés positifs. Le lien entre  $X_{n+1}$  et  $X_n$  d'après la discrétisation de Basu, est donnée par la relation suivante :

$$AX_{n+1} + BX_n = 0 \quad (4.2)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} -\gamma dt M^{-1}C - I & 0 & -\gamma dt M^{-1}J & 0 \\ -\beta dt^2 M^{-1}C & -I & -\beta dt^2 M^{-1}J & 0 \\ A_v & A_u & -I & 0 \\ 0 & 0 & dt I & -I \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$B = \begin{bmatrix} I - dt(1 - \gamma)M^{-1}C & 0 & -dt(1 - \gamma)M^{-1}J & 0 \\ dt I - dt^2(\frac{1}{2} - \beta)M^{-1}C & I & -dt^2(\frac{1}{2} - \beta)M^{-1}J & 0 \\ 0 & 0 & A_\varepsilon & A_E \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Les sous matrices  $A_v$ ,  $A_u$ ,  $A_\varepsilon$  et  $A_E$  sont définies par :

$$A_v = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{dt}{h}}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_1))^2} & \frac{\frac{dt}{h}}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_1))^2} \\ \frac{-\frac{dt}{h}}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_2))^2} & \frac{\frac{dt}{h}}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_2))^2} \end{bmatrix} \quad A_u = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{dt}{h} c_s f^p(\varsigma_1)}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_1))^2} & \frac{\frac{dt}{h} c_s f^p(\varsigma_1)}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_1))^2} \\ \frac{-\frac{dt}{h} c_s f^p(\varsigma_2)}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_2))^2} & \frac{\frac{dt}{h} c_s f^p(\varsigma_2)}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_2))^2} \end{bmatrix}$$

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_1))^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_2))^2} \end{bmatrix} \quad A_E = \begin{bmatrix} -\frac{(c_s f^p(\varsigma_1))^2}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_1))^2} & 0 \\ 0 & -\frac{(c_s f^p(\varsigma_2))^2}{(1+dt c_s f^p(\varsigma_2))^2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\text{et } J = \frac{E}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'étude de la stabilité du schéma consiste à étudier l'argument des valeurs propres de la matrice d'amplification. Si toutes ces valeurs sont incluses dans le cercle unité alors le schéma est stable. En utilisant les expressions de  $A$  et  $B$  les valeurs propres sont données par les racines du polynôme suivant :

$$\det(B + \lambda A) = 0 \quad (4.5)$$

Afin de simplifier l'étude nous supposons des fonctions constantes le long de l'élément  $h$ . Notons les constantes adimensionnelles  $\Omega_1 = dt c_s f^p(\zeta_1) = dt c_s f^p(\zeta_2)$  et  $\Omega_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{dt}{h}$ . alors on a :

$$\det(B + \lambda A) = C (\lambda - 1)^2 \left(\lambda - \frac{1}{1 + \Omega_1}\right)^2 \left(\lambda - \frac{1 - (1 - \gamma)\Omega_1}{1 + \gamma\Omega_1}\right) \Pi(\lambda, \gamma, \beta, \Omega_1, \Omega_2) \quad (4.6)$$

avec  $\Pi(\lambda, \gamma, \beta, \Omega_1, \Omega_2)$  un polynôme du degré 3 dépendant des paramètres adimensionnelles.

On remarque que la valeur absolue de la 3ème racine du polyôme n'est inférieure à 1 que si  $\gamma \geq \frac{\Omega_1 - 2}{2\Omega_1}$ . Comme  $\Omega_1$  change de valeur le long de la PML, il est préférable d'avoir  $\gamma \geq \text{Max}_{\Omega_1} \frac{\Omega_1 - 2}{2\Omega_1} = \frac{1}{2}$ .

Notre étude dans la suite sera restreinte aux schémas classiques. Si on s'intéresse au schéma implicite de l'accélération moyenne, le polynôme  $\Pi$  peut avoir l'expression suivante :

$$\Pi\left(\lambda, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \Omega_1, \Omega_2\right) = \left(\lambda - \frac{1 - \frac{\Omega_1}{2}}{1 + \frac{\Omega_1}{2}}\right) \left(\left(\lambda - \frac{1}{1 + \Omega_1}\right)^2 + \kappa\Omega_2^2(\lambda^2 - \lambda)\right) \quad (4.7)$$

$\kappa$  dépend du type de la matrice de masse utilisée ( $\kappa = 2$  si les matrices sont diagonales ou  $\kappa = 6$  si les matrices sont consistantes). On peut vérifier de plus, par le critère de Jury [63] (Annexe D), que toutes les racines de ce polynôme sont incluses dans le cercle unité. Par conséquent le schéma implicite est inconditionnellement stable.

Si on s'intéresse au schéma explicite ou de la différence centrée le polynôme  $\Pi$  prend l'expression suivante :

$$\Pi\left(\lambda, \frac{1}{2}, 0, \Omega_1, \Omega_2\right) = b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 \quad (4.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{\Omega_1^3}{2} + 2\Omega_1^2 + \frac{5}{2}\Omega_1 + 1 + \kappa\Omega_2^2 \\ b_2 &= \frac{\Omega_1^3}{2} + \Omega_1^2 + \frac{9}{2}\Omega_1 + 3 - 2\kappa\Omega_2^2\Omega_1 \\ b_1 &= -\Omega_1^2 + \frac{3}{2}\Omega_1 + 3 - \kappa\Omega_2^2 \\ b_0 &= 1 - \frac{\Omega_1}{2} \end{aligned} \quad (4.9)$$



En utilisant le critère de Jury encore une fois, la stabilité n'est assurée que si la condition suivante est vérifiée :

$$\Omega_2^2 \leq \frac{(2 + \Omega_1)^2}{\kappa \Omega_1} \quad (4.10)$$

Comme  $\Omega_1$  peut prendre une valeur quelconque, il convient que le nombre  $\Omega_2$  vérifie l'inégalité suivante :

$$\Omega_2^2 \leq \text{Min}_{\Omega_1} \frac{(2 + \Omega_1)^2}{\kappa \Omega_1} = \frac{8}{\kappa} \quad (4.11)$$

De la dernière expression, on déduit que le pas de temps critique d'une PML (1D) est deux fois celui la discrétisation classique des équations de la dynamique en explicite. Remarquons de plus que les résultats obtenus ci-dessus sont établis en se basant sur l'hypothèse que les fonctions d'amortissements sont constantes le long de l'élément du maillage. On supposera que ces résultats restent valables dans le cas général.

Dans le cas 2D, l'étude de la stabilité s'avère un peu compliquée vu le nombre des variables qui entrent en jeu. Nous supposons que le schéma implicite est inconditionnellement stable sauf si l'instabilité a pour origine le caractère même du problème.

#### Remarque importante :

Analytiquement, en annulant les fonctions d'amortissement dans la PML on retrouve, bien évidemment, les équations d'un milieu élastique linéaire. L'utilisation de la discrétisation proposée pour la PML est déconseillée pour ce type de milieux car elle introduit de l'amortissement numérique même dans le cas des schémas classiques. Pour le prouver, on commence par écrire le système discrétisé en annulant les fonctions d'amortissement  $f^e$  et  $f^p$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \ddot{U}_{n+1} + P_{n+1} &= 0 \\ P_{n+1} &= dt M^{-1} K \dot{U}_{n+1} + P_n \\ \dot{U}_{n+1} &= \dot{U}_n + \gamma dt \ddot{U}_{n+1} + (1 - \gamma) dt \ddot{U}_n \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec  $P_n = M^{-1} \int B^t \sigma_n$ ,  $K$  la matrice de rigidité,  $\dot{U}_n$  et  $\ddot{U}_n$  les vecteurs des vitesses et des accélérations, respectivement. Afin de simplifier l'étude, on projette les vecteurs sur un mode  $\phi$ . On note  $X_n = \begin{bmatrix} \dot{U}_n \\ \ddot{U}_n \end{bmatrix}$ , la relation entre  $X_{n+1}$  et  $X_n$  est donnée par :

$$X_{n+1} = \frac{1}{1 + \gamma dt^2 \omega^2} \begin{bmatrix} 1 & dt \\ -dt \omega^2 & 1 + (\gamma - 1) dt^2 \omega^2 \end{bmatrix} X_n \quad (4.13)$$

On en déduit le polynome caractéristique :

$$\Pi(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2 + (\gamma - 1)\Omega^2}{1 + \gamma\Omega^2}\lambda + \frac{1}{1 + \gamma\Omega^2} \quad (4.14)$$

avec  $\Omega = dt\omega$ .

On remarque, tout d'abord, que la stabilité n'est assurée que si  $4 + (2\gamma - 1)\Omega^2 \geq 0$  ( $\Pi(-1) > 0$  d'après le critère de Jury), chose qui est bien vérifiée si  $\gamma = \frac{1}{2}$  (que le schéma soit implicite ou explicite). Toutefois, on peut vérifier aisément que les racines dans ce cas sont strictement incluses dans le disque ouvert unité, à l'origine de l'amortissement numérique. Le cas particulier  $\gamma = 0$  est non seulement conditionnellement stable mais les racines du polynôme caractéristique sont complexes et se situent exactement sur le cercle unité ( $|\lambda|=1$ ).

Afin d'illustrer ces résultats, on considère un exemple simple d'une barre 1D divisée en plusieurs éléments (éléments barres) comme représenté sur la Figure 4.1. On impose une onde sur l'une des deux extrémités et on enregistre à chaque instant l'évolution des diverses énergies (cinétique, interne et totale) pour différents types de schémas. La Figure 4.2 illustre clairement les conclusions de cette partie : l'observation des différentes courbes montre que le schéma ( $\gamma = 0 \beta = 0.25$ ) est plus fidèle au principe de la conservation de l'énergie à la différence des deux autres schémas (différence centrée et accélération moyenne).

Dans la suite, le couplage entre le domaine d'étude (élastique linéaire dans notre cas) et le domaine absorbant (PML) est mis en oeuvre par l'approche duale permettant le couplage des schémas temporels différents. Ceci nous permettra, d'une part de bénéficier des avantages des méthodes de couplage des schémas temporels, et d'autre part, de lever la difficulté discutée ci-dessus. En effet, le domaine d'étude sera intégré par une discrétisation classique de la dynamique transitoire alors que le domaine absorbant sera intégré par la discrétisation introduite dans la section 1.5.3. La démarche de couplage est assez similaire à celle de [8] que nous détaillons dans la section suivante. Une analyse d'erreur, sous l'effet de couplage de deux discrétisations différentes, sera également abordée en activant et désactivant l'amortissement dans la PML et en faisant varier les ratios de pas de temps entre les domaines.

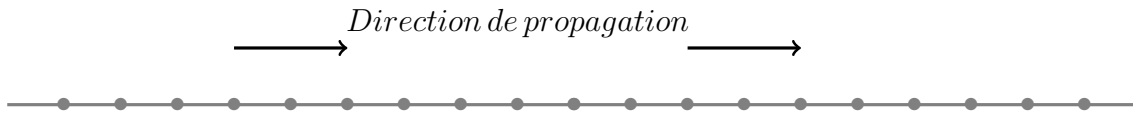
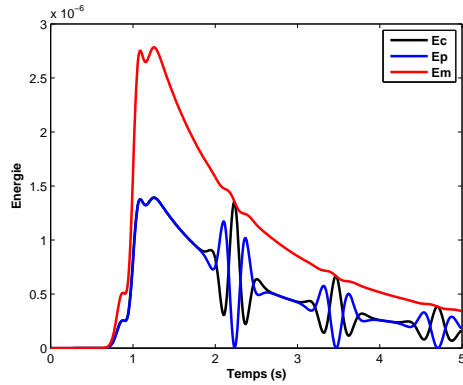
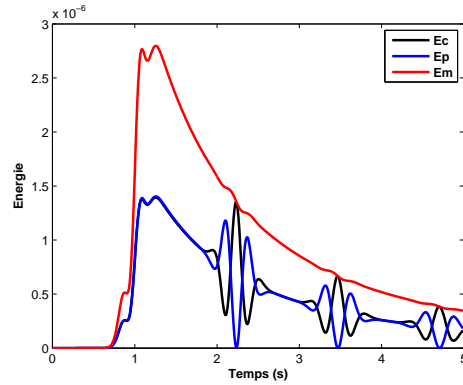


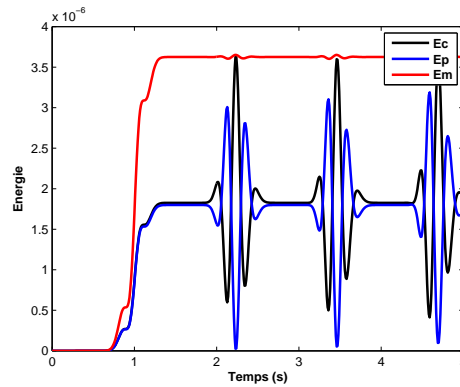
FIGURE 4.1 – Modèle de propagation d’ondes dans une barre



(a) accélération moyenne



(b) différence centrée



(c)  $\gamma = 0 \beta = 0.25$

FIGURE 4.2 – Courbes d’énergies (cinétique  $E_c$ , interne  $E_p$  et totale  $E_m$ ) tracées pour différents schémas temporels dans le cas où on annule les fonctions d’amortissements de la PML selon Basu.

## 4.2 Couplage milieu physique et PML

Nous commençons par écrire le problème de couplage entre un domaine élastique linéaire (domaine 1) et une PML (domaine 2) à l'instant  $n + 1$  selon l'approche duale :

– Le domaine 1 :

$$M_1 \ddot{U}_1 + K_1 U_1 = F_{ext,1} - L_1^T \hat{\lambda} \quad (4.15)$$

– Le domaine 2 obéit à l'équation (1.118) :

$$M_2 \ddot{U}_2 + (C_2 + \tilde{C}_2) \dot{U}_2 + (K_2 + \tilde{K}_2) U_2 + P_2(\varepsilon_n, E_n, \Sigma_n) = -L_2^T \hat{\lambda} \quad (4.16)$$

– Condition de continuité de la vitesse imposée à l'interface :

$$L_1 \dot{U}_1 + L_2 \dot{U}_2 = 0 \quad (4.17)$$

La procédure de couplage est similaire à celle présentée dans la section 1.4.2. Le domaine 1 représentant le domaine d'intérêt est intégré avec un schéma explicite ( $\gamma_1 = 0.5$  and  $\beta_1 = 0$ ) alors que le domaine 2 représentant la PML est intégré avec un schéma implicite ( $\gamma_2 = 0.5$  and  $\beta_2 = 0.25$ ). En choisissant le domaine 2, la décomposition en problèmes "avec liaison" et "sans liaison" s'écrit alors :

$$\begin{cases} \tilde{M}_2 \ddot{U}_2^{m,sl} = -P_2(\varepsilon_0, E_0, \Sigma_0) - C_2 \dot{U}_2^{p,m} - K_2 U_2^{p,m} \\ \tilde{M}_2 \ddot{U}_2^{m,al} = -L_2^T \hat{\lambda}^m \end{cases} \quad (4.18)$$

avec  $\tilde{M}_2$  l'opérateur dynamique défini par :

$$\tilde{M}_2 = M_2 + \beta_2 \Delta t^2 (K_2 + \tilde{K}_2) + \gamma_2 \Delta t (C_2 + \tilde{C}_2) \quad (4.19)$$

Après avoir calculé les multiplicateurs de Lagrange via le problème condensé, on calcule les quantités totales et on termine par l'initialisation des quantités  $\varepsilon_0, E_0, \Sigma_0$ .

On rappelle que la condition (4.17) a été démontré par la méthode énergétique pour assurer la stabilité dans le cas du couplage de domaines avec des comportements linéaires [8]. Dans le cas du couplage des milieux linéaire et PML, il est difficile d'évaluer l'effet de cette condition sur le problème global. Néanmoins, de nombreux tests menés montrent que ce choix peut être convenable pour ce type de couplage. Dans la suite, on va analyser l'effet de ce couplage, présenté ci-dessus, sur la précision des résultats pour des cas 1D et 2D. La méthode des PML sera alors implémentée dans Matlab compte tenu de son indisponibilité dans les codes Cast3m et Europlexus

### 4.3 Application de la méthode GC aux équations de la PML en 1D

Comme on l'a vu précédemment, le schéma implicite (accélération moyenne) est inconditionnellement stable dans le cas d'une PML 1D, un avantage qui permet une manipulation de grands pas de temps dans ce milieu si on suppose que les conditions de stabilité de chaque sous domaine n'affecte pas la stabilité du problème global. Notre objectif dans cette section est de tester les performances du couplage abordé dans la section 4.2 dans le cas d'un simple test de barres. La description des erreurs sera réalisée aux niveaux des réflexions numériques générées à l'interface. Rappelons à cette occasion, que ces réflexions sont dues à la fois à la discrétisation spatio-temporelle du problème et à l'utilisation des schémas temporels différents.

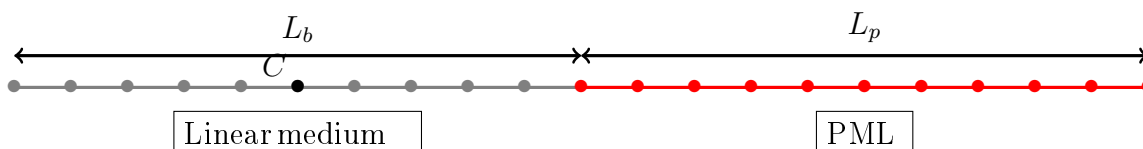


FIGURE 4.3 – Maillage par les éléments barres couplant un milieu linéaire et une PML

La Figure 4.3 décrit les caractéristiques géométriques du problème. La longueur de la barre est  $L_b = 100h$  ( $h$  désignant la taille de l'élément) de même que celle de la PML  $L_p$ . Un point  $C$  situé au milieu de la barre est choisi afin d'enregistrer les résultats relatifs aux quantités cinématiques. Dans la suite, on fixe le choix d'un schéma explicite pour la barre et d'un schéma implicite ou explicite pour la PML avec un ratio de pas de temps variant en fonction du pas de temps critique de la barre. Le maillage est constitué d'éléments barres à interpolation linéaire de longueur vérifiant  $\frac{\lambda}{h} = N_\lambda$  pour les deux sous domaines (barre et PML).  $N_\lambda$  est, en outre, choisi suffisamment grand pour diminuer les effets de la dispersion numérique. L'onde imposée à l'extrémité de la barre est de type Ricker de second ordre avec  $t_p$  variable. Les caractéristiques mécaniques des barres sont choisies comme suit :  $E = 1$ ,  $\nu = 0.25$  et  $\rho = 1$ , ce qui correspond à une longueur d'onde de  $\lambda = ct_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}} t_p = t_p$ .

Afin de ne pas compliquer inutilement l'étude, on choisit une fonction d'amortissement linéaire qui s'écrit sous la forme :  $f^p(x) = \frac{b}{L_p}(x - L_b)$  avec  $b$  paramètre caractérisant la pente de  $f^p$ . Avant de détailler l'étude avec une telle fonction, faisons une analyse du cas mono pas de temps ( $m = 1$ ) en annulant la fonction d'amortissement dans la PML.

Le couplage des deux discrétisations introduit des réflexions parasites qu'on va décrire par le coefficient de réflexion  $R_{num}$ . On peut supposer, en fixant le type d'élément, que  $R_{num}$  est de la forme :

$$R_{num} = f(\lambda, h, dt, E, \rho) \quad (4.20)$$

Ce qui revient à écrire en utilisant une analyse adimensionnelle à :

$$R_{num} = f\left(\frac{\lambda}{h}, \frac{cdt}{h}\right) \quad (4.21)$$

En gardant le terme  $\frac{dtc}{h}$  constant, les tests ont montré que  $R_{num}$  est une fonction décroissante de  $\frac{\lambda}{h}$ . L'interprétation de ce résultat est simple : si on fixe la longueur de l'élément  $h$  et si on se donne un train d'onde incident, alors le coefficient de réflexion est d'autant plus important que la fréquence est grande. Afin d'illustrer cette remarque, on considère le problème décrit ci-dessus (Figure 4.3) avec  $\frac{dtc}{h} = 1$ . Le coefficient de réflexion  $R_{num}$  est calculé à partir du déplacement au point  $C$  en changeant régulièrement  $t_p$ . On trace sur la Figure 4.4 l'évolution de  $R_{num}$  en fonction de  $N_\lambda$  obtenue par deux calculs différents : un calcul global en explicite ("Full explicit") où la barre et la PML sont intégrées avec un schéma explicite et un calcul où la barre est intégrée avec un schéma explicite et la PML avec un schéma implicite (Explicit/Implicit). On constate sur la même figure que les courbes sont bien décroissantes. De plus, les deux courbes sont confondues, indiquant les mêmes erreurs malgré la différence entre les deux calculs.

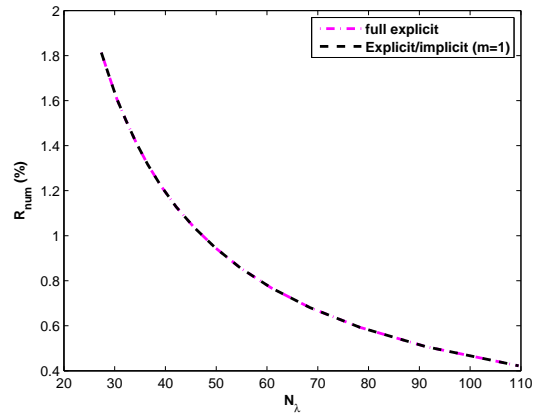


FIGURE 4.4 – Coefficient de réflexion dans le cas mono pas de temps avec une fonction d’amortissement de la PML nulle

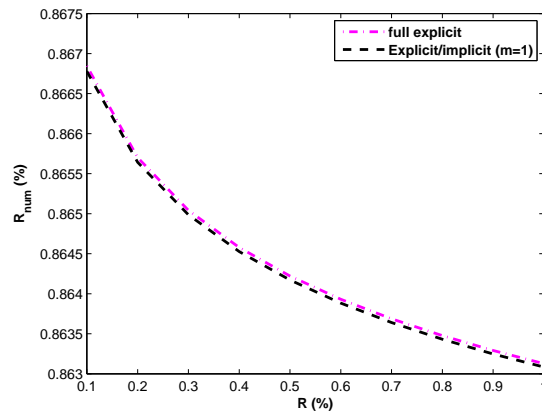


FIGURE 4.5 – Coefficient de réflexion dans le cas mono pas de temps (Explicite complet et Implicite/Explicite) en fonction de  $R$  pour  $N_\lambda = 50$

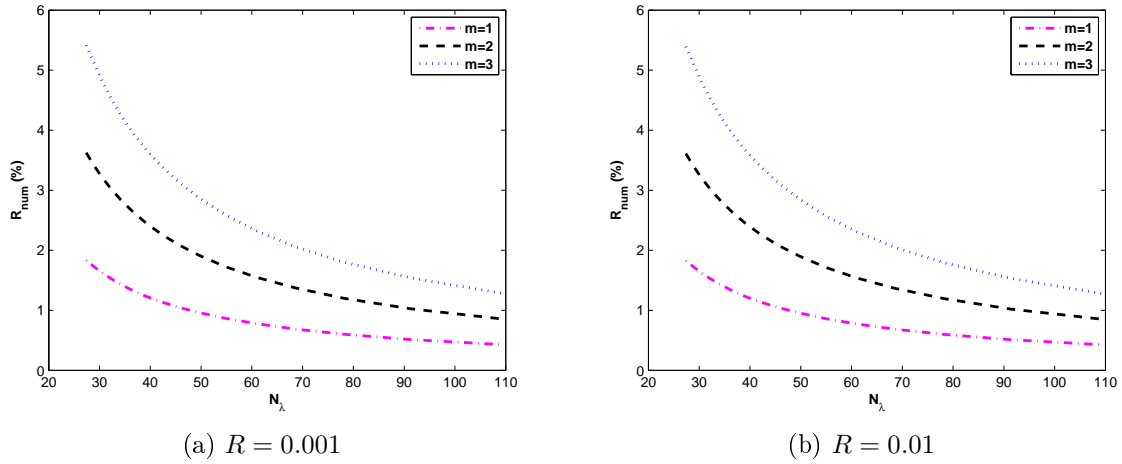


FIGURE 4.6 – Evolution de  $R_{num}$  en fonction de  $N_\lambda$  et  $m$  pour  $R = 0.001$  et  $R = 0.01$

Dans le cas où l'amortissement est activé et l'hétérogénéité des pas de temps est appliquée, on suppose que le coefficient de réflexion s'écrit :  $R_{num} = f(\frac{\lambda}{h}, \frac{dtc}{h}, R, \frac{L_p}{\lambda}, m)$  ( $R$  est le coefficient de réflexion après un aller et retour dans la PML défini dans l'équation (1.107)), c'est-à-dire que plus  $R$  est faible plus les ondes incidentes dans la PML sont amorties. Dans la suite, on se fixe  $\frac{dtc}{h} = 1$  (pas de temps critique),  $\frac{L_p}{\lambda} = 2$  et  $t_p = 0.5$ . L'analyse est alors en fonction de  $R$ ,  $m$  et  $N_\lambda = \frac{\lambda}{h}$ . Dans le cas  $N_\lambda = 50$ , une analyse de la Figure 4.5 montre que l'évolution de  $R_{num}$  est décroissante en fonction de  $R$  ce qui signifie qu'une augmentation de la pente d'amortissement dans la PML entraînera automatiquement une augmentation de la réflexion numérique qui reste, toutefois, très faible (moins de 1% pour un coefficient  $R$  dans la PML de 0.1%). En considérant à nouveau le problème de la Figure 4.3, on calcule le coefficient de réflexion à partir du déplacement au point  $C$  en faisant varier le ratio  $m$ . La Figure 4.6 décrit l'évolution du coefficient de réflexion numérique en fonction de  $N_\lambda$  pour différentes valeurs de  $R$ . On en déduit que l'augmentation du ratio  $m$  entraînera également une croissance du  $R_{num}$  qui est plus sensible au ratio  $m$  qu'au coefficient  $R$ . On rappelle à cette occasion que les valeurs obtenues sont à titre approximatifs vue que que l'onde est non harmonique avec une fréquence dominante.

Nous terminons cette partie par une remarque sur l'évolution du temps de calcul en fonction de  $m$ . On définit  $R_m$  comme étant le rapport entre le temps de calcul en mono pas de temps et le temps de calcul en adoptant le ratio  $m$ . Le Tableau 4.1 résume les valeurs de  $R_m$  pour deux valeurs différentes du coefficient de réflexion  $R$ . On constate



que, dans notre cas (propagation d'ondes dans la barre), le temps de calcul est divisé, approximativement, en  $m$  fois par rapport au temps de calcul en mono pas de temps.

	R=0.001	R=0.01
$m = 2$	2	1.98
$m = 3$	2.8	2.83
$m = 4$	3.88	3.55

TABLE 4.1 – Valeurs de  $R_m$  en fonction du ratio  $m$

## 4.4 Couches Parfaitement Adaptées et méthode de couplage GC : Exemples 2D

Dans cette section, on reprend les exemples testés dans la section 3.2 en gardant les mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques du domaine d'intérêt : sol ou sol et fondation. L'objectif est d'analyser la performance du couplage Implicite/Explicite discuté dans la section 4.2 en faisant varier le ratio  $m$ .

### 4.4.1 Test de Lamb

On garde les mêmes propriétés mécaniques et géométriques du sol décrites dans l'exemple de la partie 3.2.1. Afin de simplifier, les fonctions d'amortissements  $f_i^e$  sont nulles alors que les fonctions  $f_i^p$  sont linéaires de la forme de  $f_i^p = a_p \left( \frac{x_i - x_0}{L} \right)$  avec  $a_p = 10$  et  $x_0 = 4$ . Le dimensionnement de la couche de la PML repose alors sur le choix du coefficient de réflexion  $R$  qu'on prend égal à 0.001, ce qui implique, en utilisant la relation (1.107), une épaisseur  $L = 2$  (deux fois moins que celle utilisée dans 3.2.1 pour les couches absorbantes de Rayleigh selon l'approche ALID modifiée). De façon identique, on applique une force concentrée à la surface du sol suivant une onde de Ricker avec les mêmes paramètres  $A = 0.1$ ,  $t_p = 3$  et  $t_s = 3$ . Un point C, situé à une distance de 2 par rapport au point de chargement, jouera le rôle de récepteur qui enregistre l'évolution des déplacements en fonction du temps (voir Figure 4.7). On distingue dans la suite deux types de calculs : calcul Explicite/Explicite où chaque sous domaine est intégré avec un schéma explicite et calcul Implicite/Explicite où le sous domaine 1 (sol) est intégré avec un schéma explicite et le sous domaine 2 (PML) est intégré avec un schéma implicite.

On commence par étudier l'erreur due au modèle PML en adoptant le même pas de temps entre le sol et la PML (Couplage Explicite/Implicite mono pas de temps). Les Figures 4.8 et 4.9 illustrent les comparaisons entre les déplacements et les énergies obtenus, d'une part, par le modèle PML, et d'autre part, par un maillage suffisamment étendu. Quantitativement, l'erreur due au modèle se situe approximativement autour de 1% pour les déplacements et autour de 0.1% pour les énergies. Si on compare ces valeurs par rapport à celles citées dans 3.2.1 (couches de Rayleigh), on remarque facilement que la méthode de la PML génère moins d'erreurs que la méthode ALID ou ALID modifiée. Cependant, si on compare les temps CPU des deux algorithmes, on constate que le calcul utilisant la PML est autant consommateur avec un rapport de 0.9 et ce malgré la taille du domaine absorbant dans le cas ALID qui est deux fois celui de la PML.

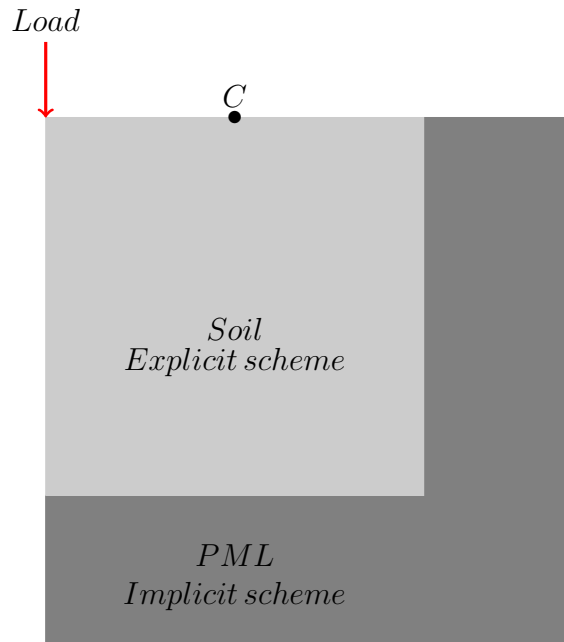
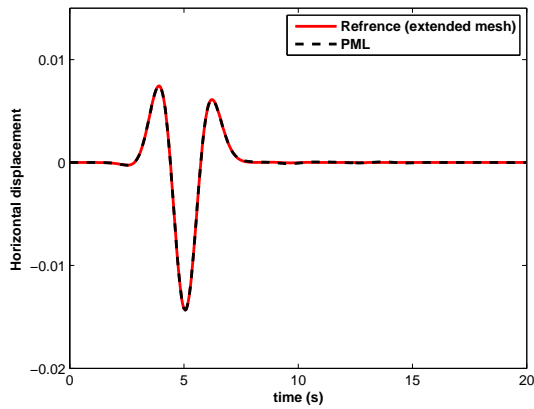
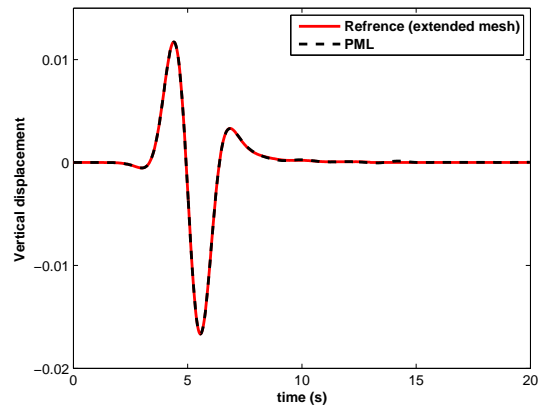


FIGURE 4.7 – Modèle du test de Lamb 2D avec les couches parfaitement adaptées (PML)

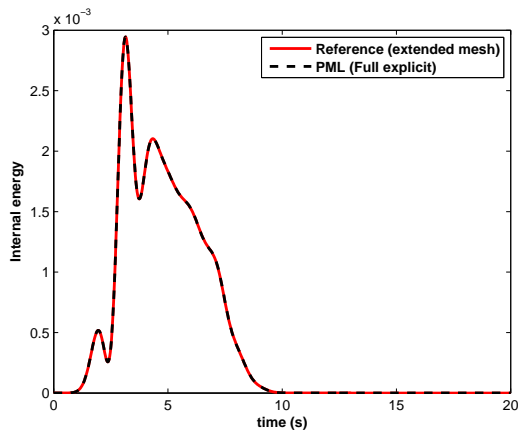


(a) Horizontal displacement

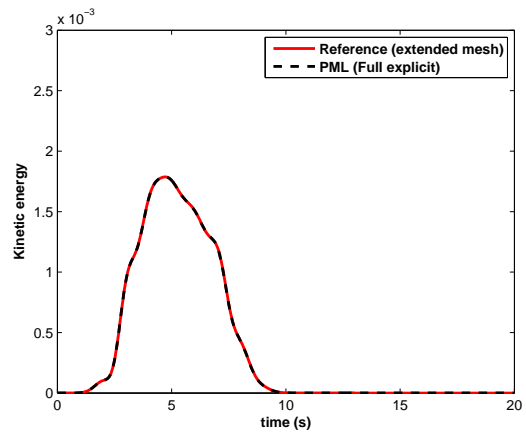


(b) Vertical displacement

FIGURE 4.8 – Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par la PML et un maillage suffisamment étendu (Test de Lamb) dans le cas mono pas de temps (couplage explicite/explicite)



(a) Energie potentielle



(b) Energie cinétique

FIGURE 4.9 – Comparaison des énergies en C pour le test de Lamb dans le cas mono pas de temps

Par analogie, on compare les résultats obtenus par la méthode de couplage en utilisant le calcul Implicite/Explicite pour différentes valeurs de  $m$  avec ceux obtenus en

utilisant le Calcul Explicite/Explicite ("Full explicit"). A première vue, on constate, d'après les Figures 4.10 et 4.11, que les différentes quantités (déplacements et énergies) sont en bonne concordance avec de légères fluctuations qu'on peut observer sur les déplacements dans le cas  $m = 5$ . Le Tableau 4.2 résume les erreurs calculées pour chaque quantité pour des valeurs de  $m$  allant jusqu'à 5. Les erreurs restent globalement à des niveaux de l'ordre de 3.6% pour les déplacements et moins de 0.7% pour les énergies. Cependant, on note la sensibilité de la méthode vis-à-vis du ratio  $m$  en comparaison avec la méthode ALID avec laquelle on a obtenu les mêmes niveaux d'erreurs en utilisant des ratios  $m$  allant jusqu'à 20.

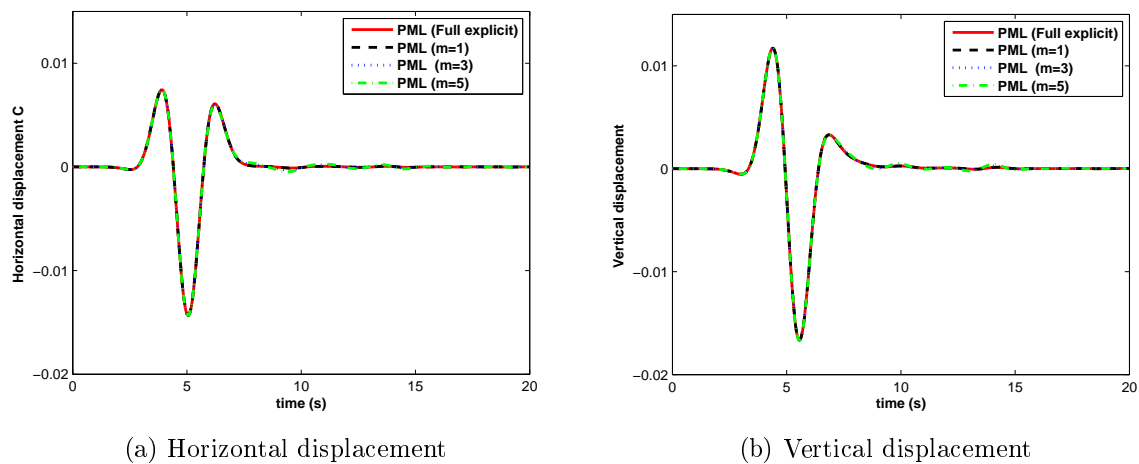


FIGURE 4.10 – Comparaison des déplacements en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratio  $m$

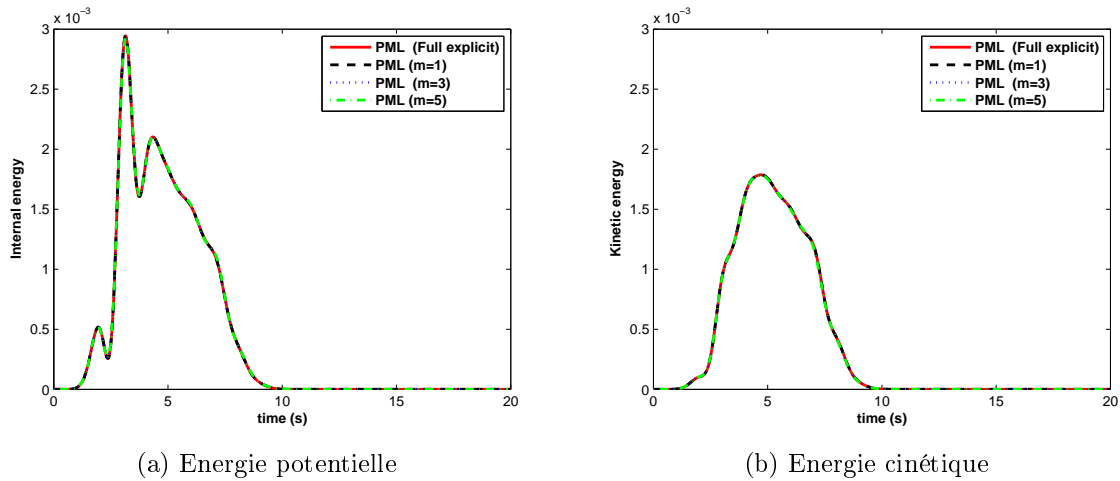


FIGURE 4.11 – Comparaison des énergies en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratio  $m$

	Energie cinétique	Energie potentielle	Déplacement horizontal	Déplacement vertical
$m = 1$	0.0002%	0.003%	0.001%	0.001%
$m = 3$	0.3%	0.1%	1.8%	1.3%
$m = 5$	0.7%	0.3%	3.6%	2.6%

TABLE 4.2 – Erreurs correspondant aux énergies et aux déplacements, en fonction de  $m$ , dans le cas du test de Lamb en utilisant les couches parfaitement adaptées (PML)

#### 4.4.2 Fondation rigide sur un sol homogène

On reprend l'exemple de la partie 3.2.2, en substituant les couches de Rayleigh par une couche absorbante parfaitement adaptée (PML) (Figure 4.12). On garde les mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques du sol et de la fondation. Les propriétés mécaniques et géométriques de la PML sont également identiques à celles de l'exemple précédent (Partie 4.4.1). Le sol jouera le rôle du sous domaine 1 (schéma explicite), la PML celui du sous domaine 2 (schéma implicite) et finalement la fondation celui du sous domaine 3 (schéma implicite). On précise que les sous domaine 2 et 3 sont intégrés avec le même pas du temps qui est  $m$  fois celui du sous domaine 1.

On rappelle que cet exemple présente un intérêt pour l'application de la méthode GC puisqu'on peut résoudre le problème en utilisant le pas de temps critique calculé à partir des propriétés du sol au lieu de celui de la fondation qui doit être 10 fois moins petit. Ceci entraîne un gain conséquent sur le temps CPU en comparaison avec un calcul complet en explicite (tous les sous domaines intégrés avec un schéma explicite).

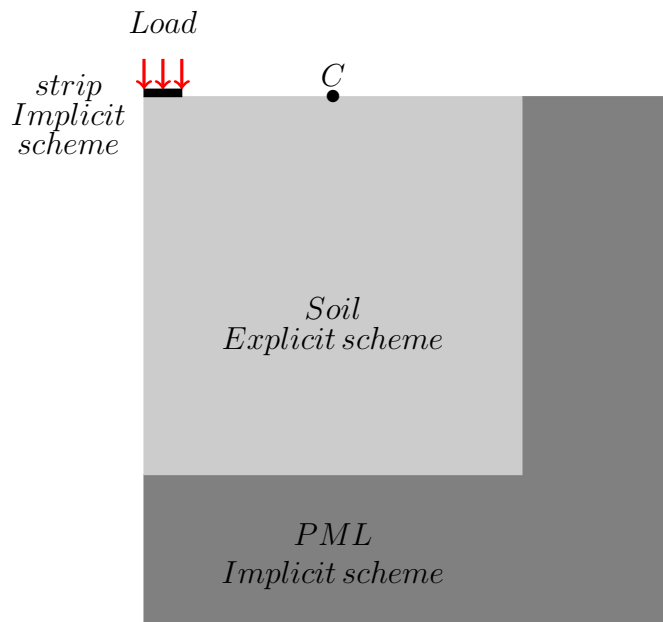


FIGURE 4.12 – Fondation rigide sur un sol homogène semi infini : Modélisation avec la couche PML

Dans la Figure 4.13, on compare les déplacements au point C obtenus, d'une part, par le modèle PML avec un calcul global en explicite, et d'autre part, avec un maillage suffisamment étendu . On constate que les déplacements sont en très bonne concordance avec une erreur ne dépassant pas 2%, plus faible que celle obtenue avec l'approche ALID modifiée.

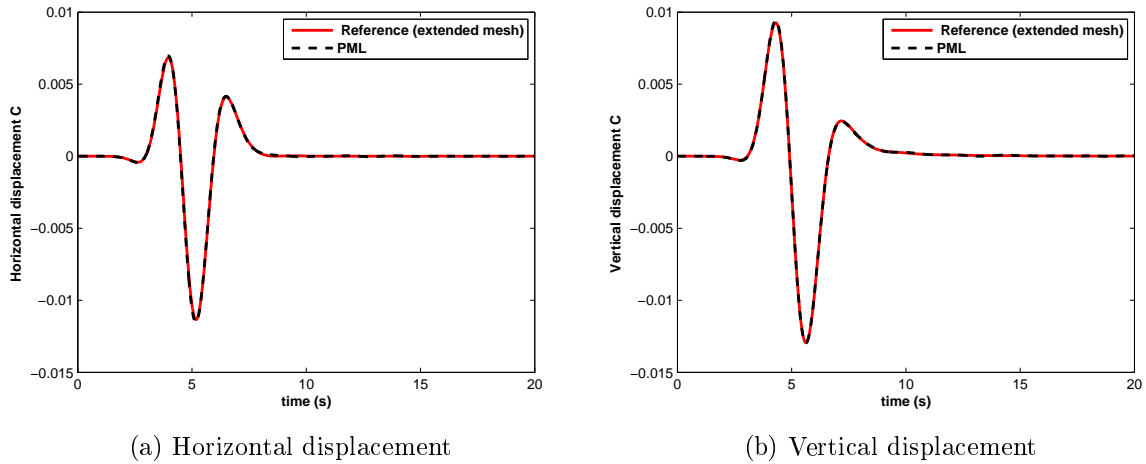
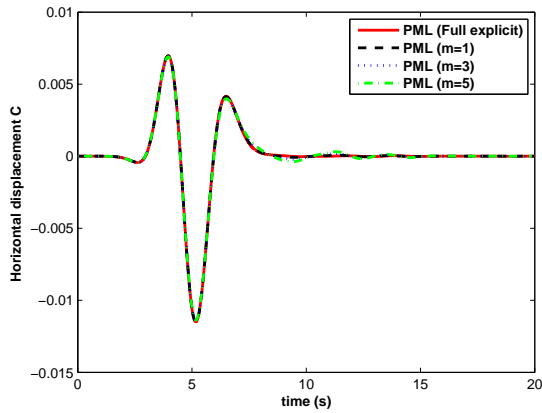
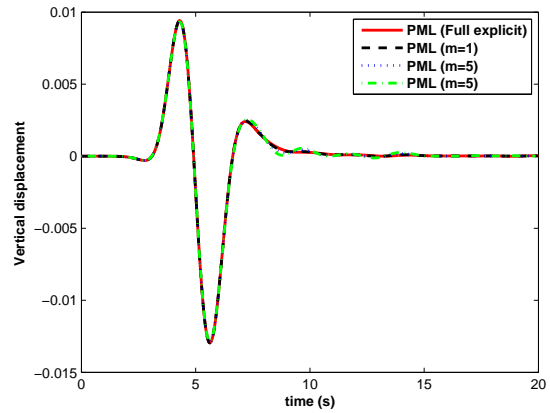


FIGURE 4.13 – Déplacements vertical et horizontal en C obtenus par la PML et un maillage suffisamment étendu (couplage Explicite/Explicite mono pas de temps)

Avec la décomposition en sous domaines proposée ci-dessus, on compare sur les Figures 4.14 et 4.15 les évolutions des quantités, déplacement en C et énergie, obtenus pour différentes valeurs de  $m$  avec celles obtenues par un calcul global en explicite. On remarque que les décalages entre les courbes commencent à se manifester pour  $m = 5$  qui restent toutefois de l'ordre de (voir Tableau 4.3) 5% pour les déplacements et de moins de 2.4% pour les énergies. En outre, on a constaté un gain considérable dans le temps CPU qui est de l'ordre de 6,16 et 21, respectivement, pour  $m = 3$  et 5 en comparaison avec un calcul en explicite.

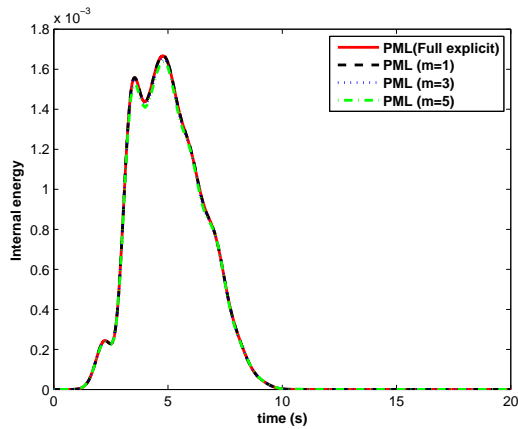


(a) Horizontal displacement

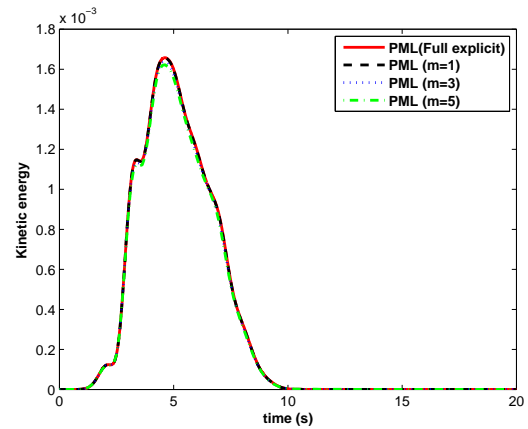


(b) Vertical displacement

FIGURE 4.14 – Comparaison des déplacements en C dans le cas du test de Lamb obtenus pour différents ratio  $m$



(a) Energie potentielle



(b) Energie cinétique

FIGURE 4.15 – Comparaison des énergies cinétiques et potentielles obtenues pour différents ratios  $m$



	Energie cinétique	Energie potentielle	Déplacement horizontal	Déplacement vertical
$m = 1$	0.2%	0.1%	0.8%	0.6%
$m = 3$	1.3%	0.9%	3%	2%
$m = 5$	2.4%	1.8%	5%	3.7%

TABLE 4.3 – Erreurs correspondant aux énergies et aux déplacements, en fonction de  $m$ , dans le cas du test de chargement d’une fondation sur un sol homogène en utilisant les PMLs

### 4.4.3 Fondation rigide sur un sol stratifié

On reprend l’exemple de la section 3.2.3 en remplaçant les couches absorbantes de Rayleigh par une couche de PML. On garde les mêmes propriétés mécaniques et géométriques du sol (la couche de surface et le substratum) et celles de la fondation. La PML aura les mêmes caractéristiques que celles des exemples précédents tout en assurant la bonne transition des propriétés entre le sol et la couche absorbante.

La décomposition en sous domaines est similaire à celle adoptée dans 3.2.3. On rappelle que le problème est décomposé en 3 sous domaines : le sol correspond au sous domaine 1 intégré avec un schéma explicite, la PML au sous domaine 2 intégré avec un schéma implicite et enfin la fondation au sous domaine 3 intégré également avec un schéma implicite.

On commence par étudier l’erreur due au modèle PML en considérant un calcul Explicite/Implicite mono pas de temps. La Figure 4.17 illustre la comparaison des déplacements en C obtenus, d’une part, par le modèle PML, et d’autre part, par un maillage suffisamment étendu (résultats de références). On constate que les résultats sont en bonne correspondance avec une erreur qui reste inférieure à 3%, plus faible que celle obtenue avec les modèles ALID dans la section 3.2.3.

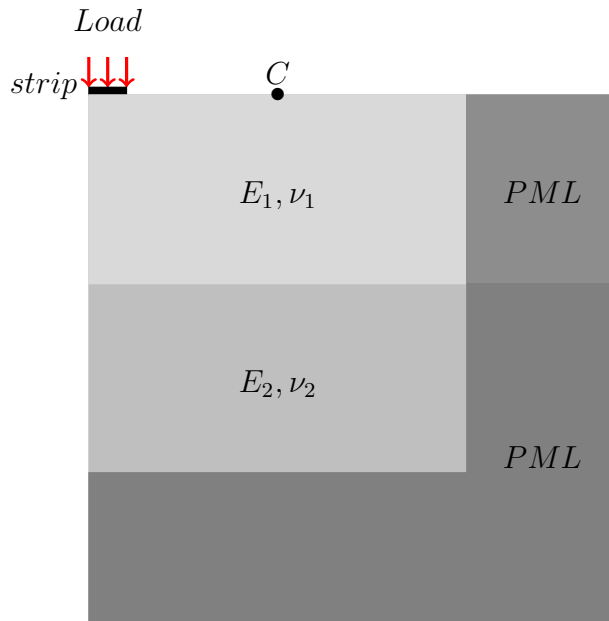


FIGURE 4.16 – Modèle de fondation rigide sur un sol stratifié en utilisant les PMLs

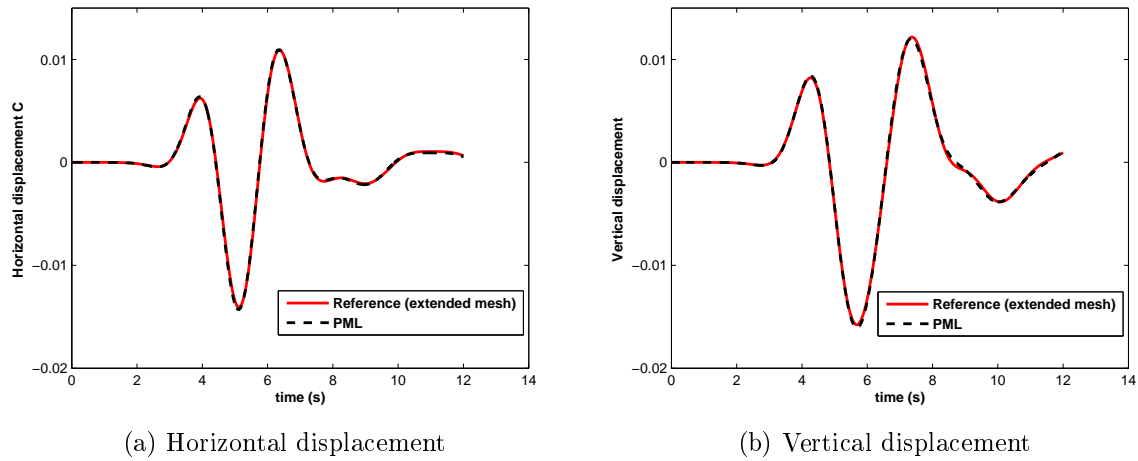


FIGURE 4.17 – Déplacements vertical et horizontal en  $C$  obtenus par la PML et un maillage suffisamment étendu (couplage Explicite/Implicite mono pas de temps)

Les Figures 4.18 et 4.19 présentent la comparaison des quantités (déplacements en  $C$  et énergies) obtenues pour différentes valeurs de  $m$  allant de 1 à 5 par rapport à

celles obtenues par un calcul global en explicite (Full explicit). Premièrement, une comparaison qualitative montre des décalages très faibles par rapport à l'exemple précédent (Figure 4.14 et Figure 4.15). Le Tableau 4.4 résume les erreurs calculées pour les déplacements et les énergies selon la relation décrite dans la section 3.2.1. Celles-ci restent, malgré la dissipation numérique, de l'ordre de 2% au maximum au niveau des énergies et de 3.6% au maximum au niveau des déplacements. Ces valeurs restent supérieures à celles obtenues pour le modèle ALID (Tableau 3.4), même lorsque des ratios allant jusqu'à 10 étaient adoptés. Cependant, cette stratégie de décomposition a permis un gain considérable dans le temps CPU puisqu'il le réduit, par rapport à un calcul global en explicite, de 6 fois dans le cas  $m = 1$  tout en gardant une bonne précision.

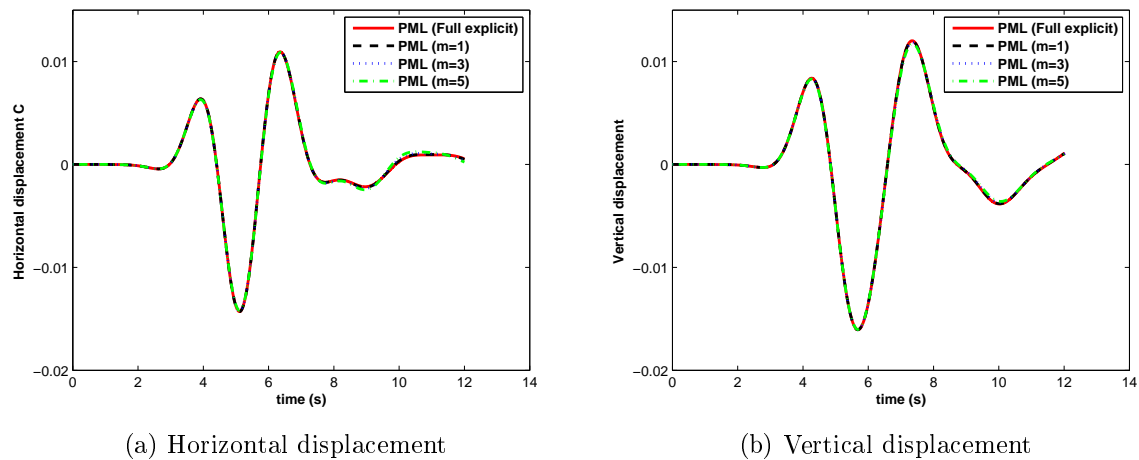


FIGURE 4.18 – Déplacements vertical et horizontal en C obtenus pour différentes valeurs de  $m$

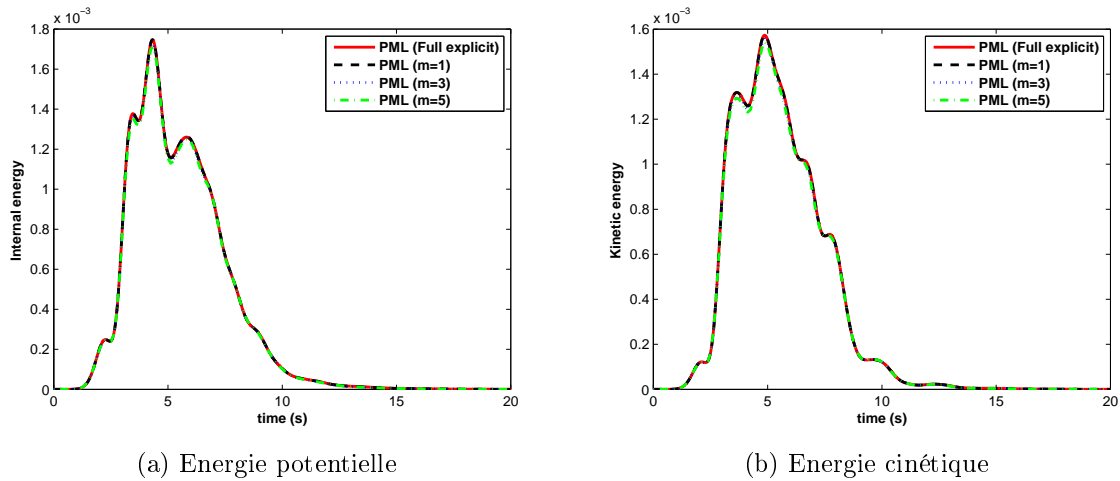


FIGURE 4.19 – Comparaison des énergies cinétiques et potentielles obtenus pour différents ratio  $m$

	Energie cinétique	Energie potentielle	Déplacement horizontal	Déplacement vertical
$m = 1$	0.1%	0.1%	0.6%	0.3%
$m = 3$	1.1%	0.8%	2%	1.4%
$m = 5$	2%	1.7%	3.6%	2.2%

TABLE 4.4 – Erreurs correspondant aux énergies et aux déplacements, en fonction de  $m$ , dans le cas du test de chargement d'une fondation sur un sol stratifié en utilisant les couches parfaitement adaptées (PML)

## 4.5 Bilan

Dans ce chapitre, on a exploité la méthode du couplage GC pour des problèmes de propagation d'ondes en utilisant les couches parfaitement adaptées (PML). En premier lieu, on a étudié la stabilité des schémas de Newmark dans le cas d'une PML en 1D en utilisant la notion de la matrice d'amplification. Il en ressort que le schéma d'accélération moyenne demeure inconditionnellement stable alors que le schéma de différence centrée est conditionnellement stable. Ensuite, on a présenté l'algorithme de couplage GC entre un milieu linéaire de Hooke et une couche PML en supposant que la condition de continuité des vitesses à l'interface n'influe pas la stabilité du problème global.

Finalement, on a analysé les erreurs, dues à la méthode GC, pour une série de tests numériques utilisant la PML dans le cas 1D et 2D. On a conclu, que le couplage proposé dans ce travail en utilisant la discrétisation temporelle proposée par Basu *et al* [19] fournit des résultats encourageants dans le cas mono pas de temps pour certaines applications intéressantes. En revanche, on a constaté la sensibilité de la méthode vis-à-vis du rapport entre les pas de temps.

# Conclusions et Perspectives

Dans le premier chapitre, on a établi un lien entre la matrice d'amortissement de Rayleigh et une formulation forte faisant intervenir des lois de comportements physiques. Une analyse mathématique des ondes harmoniques a permis d'obtenir des conditions en fonction des propriétés mécaniques du milieu d'étude et de la couche amortissante en vue d'éliminer les ondes réfléchies à l'interface dans le cas d'une incidence normale. En outre, ces relations peuvent être utilisées de façon approximative dans le cas des ondes non harmoniques se propageant avec une fréquence dominante.

Cependant, il est difficile d'établir des conditions similaires dans le cas d'une incidence oblique. L'alternative est d'utiliser la stratégie multi-couches utilisée auparavant dans [2] ou encore [16] sous le nom d'ALID (ALID, « Absorbing Layers with Increasing Damping ») ou de CALM (CALM, « Caughey Absorbing Layer Method »). Dans ce travail et contrairement à la stratégie adoptée par les autres auteurs, les propriétés mécaniques (module de Young et coefficient de Poisson) sont hétérogènes dans le milieu absorbant et doivent respecter des conditions d'élimination des ondes réfléchies entre les sous couches dans le cas d'une incidence normale pour les ondes harmoniques. On a alors proposé une méthode très simple de dimensionnement en utilisant la notion du décrétement logarithmique tout en minimisant les réflexions générées entre les interfaces. On a également démontré qu'il suffisait de dimensionner les couches par rapport à une incidence normale, étant donné qu'une onde à incidence oblique s'amortit davantage qu'une onde d'incidence normale.

Une comparaison entre la stratégie ALID et la stratégie ALID modifiée pour le cas unidimensionnel montre que la modification des propriétés mécaniques des sous couches selon les règles présentées dans ce travail permet de réduire les réflexions à l'interface. La pertinence de notre stratégie dans le cas général (incidence oblique et onde non harmonique) est mise en évidence par des exemples numériques dans les cas bidimensionnels, avec notamment le test de Lamb.

Le troisième chapitre a été consacré à l'analyse de l'effet du couplage des échelles en temps sur la précision des résultats en utilisant la stratégie ALID modifiée et l'approche GC (Gravouil et Combescure) qui permet de coupler des schémas d'intégration temporelle hétérogènes avec des pas de temps différents. L'étude des réflexions générées à l'interface dans le cas d'un test unidimensionnel a montré que, lorsqu'on adopte des schémas hétérogènes pour la barre et le milieu absorbant (Implicite/Explicite), le couplage devient sensible à la fois au ratio des pas de temps  $m$  et de la finesse du maillage par rapport à la longueur de l'onde considérée. En effet, les réflexions à l'interface augmentent lorsque la finesse du maillage diminue ou lorsque le ratio des pas de temps augmente. Par ailleurs, cette sensibilité diminue lorsqu'on adopte des éléments quadrangles au lieu des éléments barres. On peut supposer que cette erreur diminuerait si on augmentait la précision du schéma de discrétisation spatiale, en employant par exemple des fonctions de forme d'ordre plus élevées.

Les résultats numériques obtenus dans le cas des tests 2D ont été encourageants au niveau de la précision mais aussi au niveau des temps CPU. En effet, la méthode GC a permis l'usage d'un ratio  $m$  assez élevé de l'ordre de 10 sans détériorer les résultats de référence obtenus par un calcul complet en explicite. Le test du chargement d'une fondation rigide sur un sol semi-infini est particulièrement intéressant dans le sens où le pas de temps d'intégration est calculé en fonction des propriétés du sol au lieu de la fondation qui, dans ce dernier cas peut être nettement inférieur compte tenu de sa rigidité.

Dans le troisième chapitre, on a commencé par établir certaines propriétés induites par la discrétisation temporelle de Basu pour l'établissement des couches parfaitement adaptées (PML : « Perfectly Matched Layers »). Dans un premier temps, on a établi les conditions de stabilité d'une PML en 1D en utilisant les éléments barres puis on a montré que cette discrétisation n'est pas adaptée, dans le cas général, pour la simulation d'un milieu linéaire lorsqu'on annule les fonctions d'amortissement.

On a également analysé l'effet multi-échelles en temps par la méthode GC lorsqu'on couple une PML avec un milieu linéaire. Cette étude a montré que, dans le cas du test de la barre, que les réflexions deviennent plus importantes lorsqu'on diminue la finesse du maillage ou lorsqu'on augmente le rapport entre les pas de temps. En outre, on a observé que ce couplage est plus sensible au rapport entre les pas de temps par comparaison avec la méthode ALID modifiée, ce qui laisse une marge restreinte d'utilisation pour de la méthode multi-échelles temps .

Dans le cas des tests 2D, les résultats obtenus par le modèle PML avec un calcul en explicite sont en très bonne correspondance avec les résultats de référence (maillage très large) en comparant avec l'approche ALID modifiée. On a observé également un gain considérable en temps CPU pour le cas mono-échelle ( $m = 1$ ) sur les tests de chargement d'une fondation rigide tout en gardant une bonne précision. Cependant, on a constaté que le couplage milieu physique-PML devient plus sensible à la méthode multi-échelles en temps que la méthode ALID modifiée.

Les perspectives envisagées à ces travaux sont données ci-dessous :

- L'extension et la validation de l'approche ALID modifiée aux cas 3D en gardant les mêmes démarches de dimensionnement.
- Lors de l'utilisation de la méthode ALID modifiée, on a constaté que les réflexions parasites dépendent à la fois de la pente de la fonction d'amortissement utilisée (paramètre  $a_\xi$ ) et de la finesse du maillage. Il est donc intéressant de tester d'autres types de fonctions (quadratique, racine carrée,...) et de fournir des comparaisons avec le cas linéaire en suivant les mêmes démarches de dimensionnement concernant le choix des propriétés mécaniques de chaque sous couche.
- Les résultats obtenus par la méthode GC en utilisant les couches PML sont encourageants mais le couplage ne permet pas de manipuler de larges rapports entre les pas de temps en comparaison de la méthode ALID modifiée. Il serait intéressant de chercher d'autres alternatives pour l'intégration temporelle de la PML que les schémas de Newmark et de tester d'autres méthodes de couplage existantes du type MGC [64] ou BGC [12].



# Annexe A

Les matrices  $B_I^\epsilon, B_I^Q, \hat{F}^\epsilon$  et  $\hat{F}^Q$  dans l'équation 1.117 sont définies comme suit :  
Premièrement, on donne les définitions suivantes :

$$F^l = \left[ F^p + \frac{F^e}{dt} \right]^{-1} \quad F^\epsilon = F^e F^l \quad F^Q = F^p F^l \quad (4.22)$$

La matrice  $B_I^\epsilon$  est donnée en termes de sous matrices en noeud  $I$  par :

$$B_I^\epsilon = \begin{bmatrix} F_{11}^\epsilon N_{I1}^l & F_{21}^\epsilon N_{I1}^l \\ F_{12}^\epsilon N_{I2}^l & F_{22}^\epsilon N_{I2}^l \\ F_{11}^\epsilon N_{I2}^l + F_{12}^\epsilon N_{I1}^l & F_{21}^\epsilon N_{I2}^l + F_{22}^\epsilon N_{I1}^l \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

avec :

$$N_{Ii}^l = F_{ij}^l N_{I,j} \quad (4.24)$$

la matrice  $B_I^Q$  est définie de façon similaire en remplaçant  $F^\epsilon$  par  $F^Q$ . Finalement, La matrice  $\hat{F}^\epsilon$  est donnée par :

$$\hat{F}^\epsilon = \begin{bmatrix} (F_{11}^\epsilon)^2 & (F_{21}^\epsilon)^2 & F_{11}^\epsilon F_{21}^\epsilon \\ (F_{12}^\epsilon)^2 & (F_{22}^\epsilon)^2 & F_{12}^\epsilon F_{22}^\epsilon \\ 2F_{11}^\epsilon F_{12}^\epsilon & 2F_{21}^\epsilon F_{22}^\epsilon & F_{11}^\epsilon F_{22}^\epsilon + F_{12}^\epsilon F_{21}^\epsilon \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

De même, la matrice  $\hat{F}^Q$  est obtenue en remplaçant  $F^\epsilon$  par  $F^Q$ .

# Annexe B

On se propose de montrer que la solution du problème (2.23) à (2.25) est donnée par :

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega) x)) d\omega \quad (4.26)$$

avec :

$$k(\omega) = \frac{\omega}{V_{p2}} \sqrt{\frac{1 - \xi^2 - i\xi(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0})}{1 + \xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (4.27)$$

On constate que  $Im(k(\omega))$  est toujours supérieur à 0, on a alors :

$$| \hat{f}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega) x)) | \leq | \hat{f}(\omega) | \quad (4.28)$$

On suppose que  $\hat{f}$  est intégrable ce qui implique, en utilisant le théorème de la différentiation sous le signe intégrale, que  $\tilde{u}$  appartient à  $C^3([0, +\infty[ \times \mathbb{R})$ . En outre, il est facile de vérifier que  $\tilde{u}$  est une solution particulière de l'équation (2.23) et  $\tilde{u}(x = 0, t) = f(t)$ .

Dans la suite, on montre que les conditions initiales sont satisfaites. Pour cela, on utilisera quelques résultats de l'analyse complexe. Premièrement, on commence par définir la partie  $E$  du plan complexe :

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) \leq 0\} \quad (4.29)$$

On définit aussi :

$$\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-i(z t)) dt \quad (4.30)$$

Comme  $f(t) = 0$  si  $t$  est négatif, la fonction  $\hat{f}$  est alors bien définie sur  $E$ . En effet, on a :

$$|\hat{f}(z)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-i(z t)) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-i z t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| dt \quad (4.31)$$

On pose  $M(f) = \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ .

On considère les contours  $\Gamma_R$  et  $\Gamma'_R$ , avec  $R$  positif :

$$\Gamma_R = \{z \in E \mid |z| = R\} \quad (4.32)$$

$$\Gamma'_R = \{z \in E \mid \text{Im}(z) = 0 \quad -R \leq \text{Re}(z) \leq R\} \quad (4.33)$$

Il est évident que la fonction  $z \rightarrow \hat{f}(z) \exp(-i k(z) x)$  est holomorphe sur  $E$ . En choisissant une orientation particulière du contour  $\Gamma_R \cup \Gamma'_R$  et en utilisant le lemme de Schwarz [65], on a :

$$\int_{\Gamma_R \cup \Gamma'_R} \hat{f}(z) \exp(-i k(z) x) dz = 0 \quad (4.34)$$

Ce qui implique :

$$\int_{-R}^{+R} \hat{f}(\omega) \exp(-i k(\omega) x) d\omega + \int_0^{-\pi} i R \exp(i\theta) \hat{f}(R \exp(i\theta)) \exp(-i k(R \exp(i\theta)) x) d\theta = 0 \quad (4.35)$$

En outre, on remarque que :

$$-i k(R \exp(i\theta)) = \frac{\sqrt{R}}{V \sqrt{\xi \omega_0}} \exp\left(i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \quad (4.36)$$

Tenant compte de  $-\pi \leq \theta \leq 0$ , on a :

$$\exists C > 0 \quad \text{and} \quad \exists R_0 \geq 0 \quad |\exp(-i k(R \exp(i\theta)) x)| \leq \exp(-C x \sqrt{R}) \quad \forall R \geq R_0 \quad \forall \theta \quad (4.37)$$

En appliquant la dernière inégalité à l'équation (4.35), on montre que :

$$\left| \int_0^{-\pi} i R \exp(i\theta) \hat{f}(R \exp(i\theta)) \exp(-i k(R \exp(i\theta)) x) d\theta \right| \leq \pi M(f) R \exp(-C x \sqrt{R}) \quad (4.38)$$

On a alors :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{-\pi} iR \exp(i\theta) \hat{f}(R \exp(i\theta)) \exp(-i k(R \exp(i\theta)) x) d\theta \right| = 0 \quad (4.39)$$

Finalement on obtient :

$$\tilde{u}(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(-i k(\omega) x) d\omega = 0 \quad (4.40)$$

En utilisant la même démarche on peut montrer que :

$$\partial_t \tilde{u}(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \hat{f}(\omega) \exp(-i k(\omega) x) d\omega = 0 \quad (4.41)$$

# Annexe C

Considérons le nombre d'onde donné par l'équation (2.27), le but est de montrer que  $Im(k_p)$  est décroissante en fonction de  $\frac{\omega}{\omega_0}$ . Pour  $\omega$  positif, on peut écrire  $k_p$  sous la forme :

$$k_p = \frac{\omega_0}{V_p} \sqrt{\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - i\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + i\xi\frac{\omega}{\omega_0}}} \quad (4.42)$$

On pose  $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$ , l'étude de  $k_p$  revient à étudier la fonction  $F$  défini par :

$$F(\alpha, \xi) = \sqrt{\frac{\alpha^2 - i\xi\alpha}{1 + i\xi\alpha}} \quad (4.43)$$

La monotonie de la partie imaginaire de  $F$  est donnée par le signe de  $Im\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)$ . On peut vérifier aisément que :

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \left| \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right| \exp(-iZ(\alpha, \xi)) \quad (4.44)$$

Avec :

$$Z(\alpha, \xi) = \arctan\left(\frac{\alpha\xi - \frac{\xi}{\alpha}}{2}\right) + \frac{3}{2} \arctan(\alpha\xi) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \quad (4.45)$$

Il ne reste qu'à prouver que l'ensemble des valeurs de  $Z$  pour tout  $\xi$  et  $\alpha$  positifs est inclu dans  $[0 \pi]$ . Ceci peut se faire sans difficulté si on effectue le changement de variables suivant :  $X = \alpha\xi$  et  $Y = \frac{\xi}{\alpha}$ . La fonction  $Z$  s'écrit alors :

$$Z(X, Y) = \arctan\left(\frac{X - Y}{2}\right) + \frac{3}{2} \arctan(X) + \frac{1}{2} \arctan(Y) \quad (4.46)$$

En étudiant la dernière fonction, on peut aisément vérifier que :

$$\pi \geq Z \geq 0 \tag{4.47}$$

D'où la décroissance de  $Im(k_p)$ . Cela revient à dire, en tenant compte du signe de  $Im(k_p)$ , que les hautes fréquences s'atténuent plus rapidement que les basses fréquences.

# Annexe D

## Critère de Jury :

Pour que toutes les racines d'un polynôme  $D(z) = 0$  soient situées à l'intérieur du cercle unité il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

### Cas de second ordre

$$D(z) = z^2 + b_1z + b_0 \quad (4.48)$$

$$D(1) = 1 + b_1 + b_0 > 0 \quad (4.49)$$

$$D(-1) = 1 - b_1 + b_0 > 0 \quad (4.50)$$

$$|b_0| < 1 \quad (4.51)$$

### Cas de troisième ordre

$$D(z) = z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0 \quad (4.52)$$

$$D(1) = 1 + b_2 + b_1 + b_0 > 0 \quad (4.53)$$

$$D(-1) = -1 + b_2 - b_1 + b_0 < 0 \quad (4.54)$$

$$|b_0| < 1 \quad (4.55)$$

$$|b_0^2 - 1| > |b_0b_2 - b_1| \quad (4.56)$$

# Bibliographie

- [1] J. F. Semblat. Rheological interpretation of Rayleigh damping. *Journal of Sound and vibration*, 338 :741–744, 1997.
- [2] J. F. Semblat, L. Lenti, and A. Gandomzadeh. A simple multi-directional absorbing layer method to simulate elastic wave propagation in unbounded domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85 :1543–1563, 2011.
- [3] G.T. Mase and G.E. Mase. *Continuum mechanics for engineers*. CRC Press, 1999.
- [4] M. Zlamal. On the finite element method. *Numerische Mathematik*, 12 :394–409, 1968.
- [5] M.W. Johnson and R.W. Mclay. Convergence of the finit element method in the theory of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :274–278, 1968.
- [6] O. Steinbach. *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems :Finite and Boundary Elements*. Springer, 2008.
- [7] N.M. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE)*, 85 :67–94, 1959.
- [8] A. Combescure and A. Gravouil. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :1129–1157, 2002.
- [9] A. Gravouil and A. Combescure. A multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :199–225, 2001.
- [10] A. Gravouil and A. Combescure. Multi-time-step and two-scale domain decomposition method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58 :1545–1569, 2003.



- [11] N. Mahjoubi, A. Gravouil, and A. Combescure. Coupling subdomains with heterogeneous time integrators and incompatible time steps. *Computational Mechanics*, pages DOI 10.1007/s00466-009-0413-4, 2009.
- [12] M. Brun, A. Gravouil, A. Combescure, and A. Limam. Two FETI-based heterogeneous time step coupling methods for Newmark and  $\alpha$ -schemes derived from the energy method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 283 :130–176, 2015.
- [13] B. Enquist and A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31 :629–65, 1977.
- [14] P. Bettess. Infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11 :53–64, 1977.
- [15] W.C. Chew and Q.H. Liu. Perfectly matched layers for elastodynamics : a new absorbing boundary condition. *Journal of Computational Acoustics*, 4 :341–359, 1996.
- [16] P. Rajagopal, M. Drozd, E. A. Skelton, M.J. S. Lowe, and R. V. Craster. On the use of the absorbing layers to simulate the propagation of elastic waves in unbounded isotropic media using commercially available finite element packages. *NDT&E International*, 51 :30–40, 2012.
- [17] R.W. Clough and J. Penzien. *Dynamics of structures*. McGraw-Hill Compagnies, 1975.
- [18] U. Basu and A.K. Chopra. Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains : theory and finite-element implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 192 :1337–1375, 2003.
- [19] U. Basu and A.K. Chopra. Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59 :1039–1074, 2004.
- [20] U. Basu. Explicit finite element perfectly matched layer for transient three-dimensional elastic waves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77 :151–176, 2009.
- [21] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

- [22] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *Finite Element Method*. McGraw-Hill Companies, 1989.
- [23] A. Ern and J.L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer, 2003.
- [24] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5 :283–292, 1977.
- [25] W.L. Wood, M. Bossak, and O.C. Zienkiewicz. An alpha modification of Newmark’s method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15 :1562–1566, 1981.
- [26] J. Chung and G.M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- $\alpha$  method. *Journal of Applied Mechanics*, 60 :371–375, 1993.
- [27] J.C. Simo and N. Tarnow. The discrete energy-momentum method : conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Z. Angew. Math. Phys.*, 43 :757–792, 1992.
- [28] TJR Hughes and WK Liu. Implicit-explicit finite elements in transient analysis : stability theory. *Journal of Applied Mechanics*, 45 :371–374, 1978.
- [29] TJR Hughes and WK Liu. Implicit-explicit finite elements in transient analysis : stability theory. *Journal of Applied Mechanics*, 45 :375–378, 1978.
- [30] T. Belytschko, H.J. Yen, and R. Mullen. Mixed methods for time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18 :259–275, 1979.
- [31] W. Daniel. The subcycled Newmark algorithm. *Computational Mechanics*, 20 :272–281, 1997.
- [32] A. Lew, J.E. Madsen, M. Ortiz, and M. West. Asynchronous variational integrators. *Archive for rotational Mechanics and Analysis*, 167 :85–146, 2003.
- [33] A. Lew, J.E. Madsen, M. Ortiz, and M. West. Variational time integrators. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 :153–212, 2004.
- [34] C. Farhat and F.X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1205–1227, 1991.

- [35] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [36] J. Jensen. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math*, 30 :175–193, 1906.
- [37] M. Drodz. *Efficient Finite Element Modelling of ultrasonic waves in elastoic media*. PhD thesis, University of London, 2008.
- [38] G.R. Liu and S.S. Quek Jerry. A non-reflecting boundary for analysing wave propagation using the finite element method. *Finite Elements in Analysis & Design*, 39 :403–417, 2003.
- [39] MJS Lowe. Matrix techniques for modelling ultrasonic waves in multilayerd media. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 42 :525–542, 1995.
- [40] J.F. Semblat and A. Pecker. *Wave and Vibrations in Soils : Earthquakes, Traffic, Shocks, Construction works*. IUSS Press, 2009.
- [41] Y. F. Gui and W. B. Dou. A rigorous and completed statement on helmholtz theorem. *Progress In Electromagnetics Research*, 69 :287–304, 2007.
- [42] J.D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland, 1973.
- [43] J. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200, 1994.
- [44] F. Hastings, J.B. Schneider, and S.L. Broschat. Application of the perfectly matched layer (pml) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100 :3061–3069, 1996.
- [45] F. Collino and C. Tsoga. Application of the perfectly matched layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 66 :294–307, 2001.
- [46] T. Wang and X. Tang. Finite-difference modeling of elastic wave propagation : a nonsplitting perfectly matched approach. *Geophysics*, 68 :1749–1755, 2003.
- [47] R. Matzen. An efficient finite element time-domain formulation for the elastic second-order wave equation : A non split complex frequency shifted convolutional pml. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88 :951–973, 2011.

- [48] K.C. Meza-Fajardo and A.S. Papageorgiou. A nonconvolutional, split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media : Stability analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98 :1811–1836, 2008.
- [49] A. Abarbanel and D. Gottlieb. A mathematical analysis of the pml method. *Journal of Computational Physics*, 134 :357–363, 1997.
- [50] E. Bécache, S. Fauqueux, and P. Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, 188 :399–433, 2003.
- [51] K. Duru and G. Kreiss. A well-posed and didiscrete stable perfectly matched layer for elastic wave equations in second order formulation. *Communication in Computational Physics*, 11 :1643–1672, 2012.
- [52] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsoga. Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2D elastic wave propagation. *Journal of Computational Acoustics*, 9 :1175–1202, 2001.
- [53] G. Cohen and S. Fauqueux. Mixed spectral finite elements for the linear elastic system in unbouded domains. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26 :864–884, 2005.
- [54] G. Festa and JP. Vilotte. The Newmark scheme as velocity-stress time-staggering : an efficient pml implementation for spectral element simulations of elastodynamics. *Geophysical Journal International*, 161 :789–812, 2005.
- [55] S. Kucukcoban and L.F. Kallivokas. Mixed perfectly matched layers for direct transient analysis in 2d elastic heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 :57–76, 2011.
- [56] J. W.Gibbs. *Vector Analysis*. Yale University Press, 1901.
- [57] M. Brun, A. Batti, A. Limam, and A. Combescure. Implicit/explicit multi-time step co-computations for predicting reinforced concrete structure response under earthquake loading. *Soil dynamics and Earthquake Engineering*, 33 :19–37, 2012.
- [58] A Millard. *CASTEM 2000, Manuel d'utilisation, Rapport CEA-LAMBS, No. 93/007*. CEA-LAMBS, Saclay, Paris, 1993.

- [59] H. Lamb. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Proceedings of the Royal Society of London*, 72 :128–130, 1903.
- [60] *Europlexus, User's manual, 2006.*
- [61] M. Brun, A. Batti, A. Limam, and A. Gravouil. Explicit/implicit multi-time step co-computations for blast analyses on a reinforced concrete frame structure. *Finite Elements in Analysis & Design*, 52 :41–59, 2012.
- [62] A. Vaschy. Sur les lois de similitude en physique. *Annales télégraphiques*, 19 :25–28, 1892.
- [63] M. Benidir and M. Barret. *Stabilité des filtres et des systèmes linéaires*. Dunod, 1999.
- [64] N. Mahjoubi, A. Gravouil, A. Combescure, and N. Greffet. A monolithic energy conserving method to couple heterogeneous time integrators with incompatible time steps in structural dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 :1069–1086, 2011.
- [65] S. Hassani. *Mathematical Physics : A Modern Introduction to Its Foundations*. 2002.