



HAL
open science

Contribution à la modélisation par éléments finis des écoulements turbulents.

Alima Samassi Kamara

► **To cite this version:**

Alima Samassi Kamara. Contribution à la modélisation par éléments finis des écoulements turbulents. : Application au remplissage en fonderie . Mathématiques [math]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris 1993. Français. NNT: . tel-01278854

HAL Id: tel-01278854

<https://theses.hal.science/tel-01278854>

Submitted on 6 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée à

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES MINES DE PARIS

Par

Alima KAMARA

en vue de l'obtention du titre de DOCTEUR en
SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX

CONTRIBUTION A LA MODELISATION PAR ELEMENTS
FINIS DES ECOULEMENTS TURBULENTS. APPLICATION
AU REMPLISSAGE EN FONDERIE

Soutenue le 04 février 1993 devant le jury composé de :

J.-L. CHENOT	Président
A. DERVIEUX	Rapporteur
G. DHATT	Rapporteur
M. BELLET	Directeur de Thèse
I. POITRAULT	Examineur

**A ma très regrettée soeur Aminata dite Mimie
(1967-1992),**

à mes parents Ladji et Fatou,

à tous mes proches

Je tiens à remercier monsieur Jean-Loup CHENOT directeur du Centre de Mise en Forme des Matériaux de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, pour m'avoir acceptée au sein du laboratoire, pour m'avoir orientée quelques fois dans ce chemin difficile de la recherche et pour avoir accepté la présidence du jury.

Je remercie Michel BELLET pour s'être intéressé à mon travail et diriger ma thèse durant ces quelques années.

Mes remerciements vont également au professeur Gouri DHATT et à monsieur Alain DERVIEUX d'avoir accepté malgré leurs multiples engagements de faire partie du jury en qualité de rapporteurs.

Que madame Isabelle POITRAULT représentant CREUSOT-LOIRE-INDUSTRIE avec qui cette étude a été menée trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je ne peux oublier Marie-Françoise GUENEGAN qui a dactylographié une partie de ce document et Marlène DORE.

Qui peut douter de la compétence d'Yvette GIANINI en ce qui concerne l'édition de thèse ?
Merci Yvette.

Tous mes remerciements au groupe Thermo-Mécanique Plastique (TMP) et au groupe informatique EII.

Je ne pourrai pas m'empêcher de remercier particulièrement Marie-Anne Le DAIN, Valerie SAMPER, Elisabeth MASSONI, Albin ANTUNES, Mylène VANTAL, Barbara GLUT, Madame Amina SYLLA, Abou SOW.

Je n'oublie pas Hala, Isabelle BELLET, DISDIER Edith, Thierry COUPEZ, François BAY, Marie-Louise et Philippe MOURNIAC, Gilbert FIORUCCI, Nicole BOUSQUET, Laurence GASTON, Christine BERAUDO, Michel PERRIN, Sabine PORCIER, Gilles COCCOZ, Patrick COELS, Patrick ROUBAUD, Jérôme PASCAL, Guy SOLA, Alain Le FLOCH, Marc CASAMASSIMA, Marc BOUYSSOU, Mohamed BOUZIDI, Doulaye DEMBELE, Roland HAINAULT, Francis FOURNIER, Stéphane MARIE, tous mes amis du C.I.V. ou des DOLLINES, bref pour n'oublier personne, merci à tous ceux qui m'ont témoigné une sincère sympathie pendant mon séjour.

Je ne peux oublier mes chers parents qui m'ont accordé un soutien sans faille tant moralement que financièrement.

Je tiens également à remercier monsieur Vakaba TOURE, monsieur Aimé CAMBON, monsieur Inza KAMARA, Abdoul et Assita DIENG, tous les proches qui m'ont soutenue.

I-INTRODUCTION

- I-1-Généralités
- I-2-Revue de quelques modèles numériques
- I-3-Position du problème
- I-4-But du travail

II-MODELISATION DE LA TURBULENCE

- II-1-Equation du champ moyen de vitesse
- II-2-Modèles à zéro équation
- II-3-Modèles à une équation
- II-4-Modèles à deux équations
 - II-4-1- Equation de transport de la turbulence
- II-5-Le modèle k- ϵ
 - II-5-1- Equation d'évolution "exacte" et équation d'évolution "modélisée" de k
 - II-5-2- Equation d'évolution "exacte" et équation d'évolution "modélisée" de ϵ
- II-6-Le modèle k- θ
- II-7-Lois de paroi
- II-8-Détermination des constantes empiriques

III-METHODES DE RESOLUTION DANS LE CAS LAMINAIRE

- III-1-Formulation en lagrangien réactualisé
 - III-1-1-Equation d'équilibre d'un fluide newtonien : équation de Navier-Stokes
 - III-1-2-Conditions aux limites dans le cas du remplissage des moules
 - III-1-3-Formulation faible : principe des puissances virtuelles
- III-2-Equation de l'écoulement en formulation incrémentale
 - III-2-1-Principe du schéma d'intégration
- III-3-Discretisation par éléments finis
 - III-3-1-Cas général pour des problèmes de dimension 2 ou 3
 - III-3-2-Cas axisymétriques
- III-4-Cas de résolution du problème mixte avec utilisation d'éléments enrichis P2 + P1
 - III-4-1-Formulation variationnelle
 - III-4-2-Les éléments utilisés
- III-5-Evolution du contact
- III-6-Technique de remaillage automatique
 - III-6-1-critère de remaillage
 - III-6-2-Contrôle de la géométrie et génération des noeuds frontières

III-6-3-Génération des noeuds internes

III-6-4-Transport des variables d'un maillage à l'autre

IV-INTRODUCTION DES MODELES DE TURBULENCE DANS UN MODELE NUMERIQUE BIDIMENSIONNEL

IV-1-Expression du principe des puissances virtuelles dans le cas d'écoulements turbulents

IV-2-Traitement des lois de paroi

IV-3-Introduction du modèle à zéro équation

IV-4-Introduction du modèle k- ϵ

IV-4-1-Conditions aux limites

IV-4-2-Formulation faible des équations de transport des variables turbulentes

IV-4-3-Discretisation temporelle de k et de ϵ

IV-5-Introduction du modèle k- θ

IV-5-1-L'étape de convection

IV-5-1-1-Formulation variationnelle des équations

IV-5-1-2-Discretisation spatiale et temporelle des équations

IV-5-2-L'étape de diffusion

IV-5-2-1-Formulation variationnelle

IV-5-2-2-Discretisation spatiale et temporelle

IV-6-Nouvelle formulation du modèle k- ϵ à partir d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2

IV-6-1-Méthode classique de Runge-Kutta modifiée

IV-6-2-Méthode de Runge-Kutta modifiée

IV-6-3-Application aux équations de transport de k et de ϵ

IV-6-4-Méthode de condensation de la matrice de masse

V-TEST DES MODELES DE TURBULENCE

V-1-Ecoulement dans une conduite cylindrique

V-1-1-Nature des expériences

V-1-2-Application de notre modèle instationnaire

V-1-2-1-Description des conditions au limites

V-1-2-2-Comparaison des résultats obtenus par rapport aux expériences

V-2-Etude du couplage des équations de transport des variables turbulentes. Modèles d'éléments finis 1D avec le modèle k- ϵ

V-2-1-Etude de l'impact d'une colonne de métal liquide sur une paroi.

Analyse monodimensionnelle

V-2-2-Conditions aux limites

V-2-3-Résolution

V-2-4-Equations de transport de k et de ϵ dans le cas 1D

V-2-5-Comparaison entre le cas laminaire et le cas avec le modèle $k-\epsilon$

V-2-6-Comparaison $k-\epsilon/k-\theta$

V-2-6-1-Comparaison de la valeur des variables turbulentes

V-2-6-2-Ecoulements moyens obtenus avec le modèle $k-\theta$

VI-APPLICATION AU REMPLISSAGE DES MOULES DE FONDERIE

VI-1-Utilisation d'éléments P2P0

VI-1-1-Validation

→ 133

VI-1-2-Application

VI-1-2-1-Ecoulement avec une marche ascendante

} 140

~~VI-1-2-2-Moule en source~~

VI.2 P2+P1

VI21 validat → 159

VI22 Applicat

1) Marche ascendante → 162

2) moule en source → 167

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I-INTRODUCTION

Après quelques rappels de généralités en fonderie et la revue de quelques codes de simulation de la phase de remplissage, de solidification et de refroidissement, on situera le problème qui nous concerne qui est la prise en compte des phénomènes de turbulence pendant la phase de remplissage et on définira le but que l'on veut atteindre.

I-1-Généralités

Le procédé de fonderie consiste à mettre en forme métaux et alliages directement à partir de l'état liquide, en les versant dans un moule à la forme voulue. On obtient ainsi des produits quasi finis (destinés à l'utilisation directe ou à être assemblés en modules plus complexes) ou bien des demi-produits destinés à alimenter l'aval du cycle de production : lingots qui seront refondus, ébauches pour opérations de matriçage...

On distingue principalement deux types de fonderies :

- les fonderies autonomes qui produisent directement des pièces brutes ou usinées de manière incomplète. Ces fonderies font fait appel à un modèle établi d'après le dessin proposé par la clientèle. On parle dans ce cas là, de fonderie sur modèle.
- les fonderies intégrées plus spécialisées, qui font partie d'un ensemble d'usines auxquelles elles apportent leurs demi-produits (fonderies intégrées de l'industrie automobile, de la sidérurgie, de l'industrie mécanique; etc ...).

On s'adresse en général au fondeur pour la fabrication de pièces de forme compliquée, difficiles ou même impossibles à réaliser par le moyen d'autres procédés. On fait appel également au fondeur pour la production de pièces plus simples (Figure(I-1)) à moindre coût.

Le fondeur met en oeuvre le moule pour la fabrication d'une pièce. Le moulage est une technique assez performante qui permet d'obtenir des pièces de forme assez proches de leur géométrie finale. Mais à l'heure actuelle, cette technique nécessite de longues phases de mise au point du moule avant l'obtention de pièces correctes. Généralement, on a affaire aux moulages classiques, surtout aux moulages en moules de sable ou en moules métalliques (ou "coquilles") qui peuvent être regroupés en différentes catégories:

-a) le moulage au sable par gravité

Le sable utilisé pour le moulage est du sable silico-argileux ou du sable au ciment.

Le moulage au sable silico-argileux est le procédé le plus courant. Il est économique et permet d'envisager aussi bien la coulée d'une pièce unitaire (qui peut être une pièce prototype mais souvent de grandes dimensions), que des pièces en séries (petites et moyennes dimensions). Ce sont des procédés universels appliqués à tous les alliages. Le moulage au ciment s'est beaucoup développé ces dernières années surtout dans la fabrication des pièces en fonte et en acier, en raison de ses propriétés refractaires, de sa perméabilité élevée, de sa cohésion satisfaisante après prise, de sa désagrégation acceptable après coulée, enfin du prix relativement bas.

-b) le moulage en coquille par gravité

Le moulage en coquille par gravité (figure (I-2)) est un procédé ancien. Au moyen âge, ce procédé existait déjà, mais c'est surtout au vingtième siècle qu'il prend de l'ampleur, pour la coulée d'alliages d'aluminium dont la température de fusion aux alentours de 600 ° C autorise l'utilisation de moules permanents en acier ou en fonte. La fabrication du moule est en général très coûteuse: ce procédé s'adresse donc à la fabrication de pièces en grande série. Les pièces produites sont des pièces relativement simples. Un tel procédé est utilisé pour avoir une bonne précision dimensionnelle (réduction de l'usinage) et un bon aspect de surface des pièces (surfaces lisses). Le moule, constitué d'au moins deux parties dont l'assemblage reproduit les formes extérieures de la pièce, est souvent en fonte (car la fonte est facile à couler et à usiner). L'alliage est coulé sous la seule action de la pesanteur, d'où le nom de moulage en coquille par gravité.

-c) le moulage en coquille sous pression

L'essor industriel du procédé correspond pratiquement à celui de l'automobile (1904). Ce procédé est successivement appliqué aux alliages de zinc (1910), aux alliages d'aluminium (1920), aux alliages de magnésium (1930) et de nos jours à la fonte. Il est aussi appliqué à la coulée de demi-produits en acier (figure I-3). Dans ce procédé de moulage, contrairement au moulage en coquille par gravité où seule la pesanteur intervient, l'alliage liquide est soumis à une pression beaucoup plus élevée. Dans le procédé basse pression, on exerce généralement une surpression à la surface du bain liquide pour faire monter l'alliage et alimenter le moule. Dans le procédé haute pression, le liquide est d'abord admis dans une chambre puis mis en mouvement par un piston pour remplir le moule (ALLSOP, KENNEDY). Ces procédés permettent de produire des pièces de géométrie plus complexe.

Notons enfin qu'il existe d'autres techniques moins fréquentes comme la coulée en cire perdue en carapace céramique (superalliages), le procédé "lost foam" (modèle perdu en polystyrène expansé placé dans du sable), etc.

Dans les procédés de fonderie en général, la qualité des pièces dépend notamment :

- des phases de remplissage du moule où des oxydes se forment par emprisonnement d'air dans le flot liquide, notamment lorsque celui-ci est turbulent,
- de la phase de solidification pendant laquelle on peut assister à l'apparition de défauts tels que les retassures, les microporosités, les criques, auxquels s'ajoutent les problèmes de contrôle dimensionnel (effet de la dilatation thermique et du retrait à la solidification, induisant des déformations et des contraintes résiduelles).

Les fondeurs, conscients de l'importance de ces deux principales phases, essaient d'en modifier le déroulement afin d'améliorer la qualité des pièces. Dans ce cadre, la modélisation mathématique du procédé est un facteur déterminant de son optimisation.

1-2-Revue de quelques modèles numériques

La simulation numérique du remplissage est intéressante pour de multiples raisons telles que :

- la prédiction des défauts comme le remplissage incomplet de certaines parties du moule ("mal venues"),
- la connaissance des champs de vitesses résiduels et du champ de température en fin de remplissage qui sont utilisés pour l'initialisation de la simulation de la solidification,
- la possibilité d'optimiser les conditions de remplissage (conditions d'attaque),
- l'étude de la faisabilité du remplissage sous certaines conditions.

Il existe dans la littérature des publications relatives à des écoulements instationnaires avec surfaces libres. Plusieurs méthodes telles que les différences finies et les volumes finis ont été utilisées dans un premier temps avec plusieurs variantes: MARKER & CELL (M.A.C.), SOLA-VOF method (HARLOW & WELCH(1966) , HIRT & NICHOLS (1981), CHEN & aL (1991)). Ces méthodes ont l'avantage d'être peu coûteuses et l'inconvénient d'être limitées. En effet, on a :

- des domaines de calculs de formes régulières,
- une description grossière des surfaces externes du domaine de calcul: interface fluide/moule, surfaces libres du fluide.

Dans un deuxième temps, on s'est intéressé à la méthode des éléments finis qui permet d'avoir une formulation intégrale plus précise associée à une discrétisation spatiale générale. Cette méthode peut être aussi bien adaptée à une formulation eulérienne qu'à une formulation lagrangienne.

De nos jours, certains logiciels simulent la phase de remplissage du moule, la phase de solidification

et la phase de refroidissement. Parmi ceux relatifs au remplissage de moule, la plupart issus du modèle "VOF" (Volume of Fluid de HIRT & NICHOLS), on peut citer SIMULOR (BOURG et al (1992)), MAGMASOFT, FLOW 3D, PROCAST. Dans ce cadre, on peut citer de manière générale (PIWONKA, VOLLER & KATGERMAN (1993))

SIMULOR simule la coulée sous basse pression. Il résout les équations de Navier-Stokes dans le cas tridimensionnel, ainsi que les équations de transfert thermique aussi bien pour le métal liquide que pour l'air présent dans le moule durant le remplissage.

Le logiciel MAGMASOFT permet également de simuler le remplissage des moules par la méthode SOLA-VOF (différences finies) modifiée pour la prise en compte du mouvement de la surface libre.

Parmi les logiciels traitant la phase de solidification et de refroidissement, citons 3-MOS (THEVOZ et al (1993)), le modèle de COMBEAU (COMBEAU et al (1993)) et THERCAST3 (BELLET et al (1993)) qui prend en compte les phénomènes thermomécaniques macroscopiques inhérents à la solidification des alliages (contraintes, déformations et apparition des lames d'air dues au retrait).

Dans la présente étude, nous allons nous intéresser à la phase de remplissage, plus précisément aux phénomènes de turbulence à travers des modèles de turbulence. L'objectif visé est l'application de ces modèles au remplissage à forts nombres de REYNOLDS (moyennes et hautes pressions). Pour la simulation du remplissage, on s'est inspiré des travaux précédents sur la simulation numérique du procédé de mise en forme des métaux comme le forgeage. On a donc utilisé la formulation lagrangienne réactualisée et une résolution par la méthode des éléments finis. Il est bien connu que cette formulation permet un traitement de l'évolution de la surface, le maillage étant convecté avec l'écoulement.

I-3-Position du problème

L'étude de la turbulence est déjà relativement ancienne. Elle date de plus de cent cinquante ans si l'on considère que les équations de Navier-Stokes régissent aussi bien les écoulements laminaires que les écoulements turbulents. A cette époque, on disposait de la théorie de BOUSSINESQ (1877) qui reste d'actualité. Mais à l'heure actuelle, certains pensent que l'on maîtrise mieux le noyau atomique que les tourbillons qui nous sont pourtant plus familiers (LESIEUR (1982)).

La principale caractéristique des écoulements turbulents réside dans le fait qu'ils ont, en leur sein, de grosses structures porteuses d'énergie situées dans les régions de basses fréquences et des petites structures appelées microéchelles de KOLMOGOROV situées dans les régions de hautes fréquences. Les grosses structures se brisent par convection en petites structures qui elles, vont dissiper l'énergie. Pour traiter les équations de Navier-Stokes qui régissent l'écoulement pour ces

différentes échelles, il faut procéder à une discrétisation spatiale et temporelle. Une modélisation directe reste tout simplement hors de portée des calculateurs actuels. La taille des mailles devrait en principe être plus fine que celle des microstructures afin de bien prendre en compte leurs effets. Ceci explique que, généralement, on ne se préoccupe pas des mouvements de fluctuation mais plutôt de l'impact de la turbulence sur le mouvement moyen.

Un traitement statistique des équations instantanées s'avère donc nécessaire comme le suggéra Osborne REYNOLDS vers 1890 et HINZE en 1959. Ce qui nous intéresse au premier abord, c'est une description du mouvement moyen par l'intermédiaire de la vitesse, de la pression, de la température, etc. Il est certain que lorsque l'on moyennera ces équations instantanées du mouvement, il y aura perte d'information dans la mesure où il y aura apparition d'inconnues supplémentaires alors que le nombre d'équations restera inchangé. Il y aura plus d'inconnues que d'équations et l'on sera confronté au problème de "fermeture" du nouveau système d'équations aux dérivées partielles. Pour pallier le problème de "fermeture" du système à résoudre, c'est à dire avoir un nombre d'inconnues égal au nombre d'équations, on doit procéder à des modélisations et ce sera l'objet du prochain chapitre. On peut tout de suite signaler qu'il existe toute une gamme de modèles, des plus simples aux plus complexes, des moins coûteux aux plus coûteux, des particuliers aux plus généraux (SCHIESTEL(1993)).

I-4-But du travail

Dans le présent travail, nous nous sommes attachés à étudier l'effet de la turbulence sur l'écoulement par l'intermédiaire de deux modèles de turbulence:

- le modèle à zéro équation pour lequel on ne fera appel à aucune équation aux dérivées partielles à part celle qui est relative au champ de vitesse,
- le modèle à deux équations qui nécessite l'adjonction aux équations de Navier-Stokes moyennées, de deux autres équations aux dérivées partielles qui seront modélisées. Une fois modélisées, ces équations aux dérivées partielles seront résolues comme les équations de Navier-Stokes par la méthode des éléments finis après application d'une formulation variationnelle appropriée.

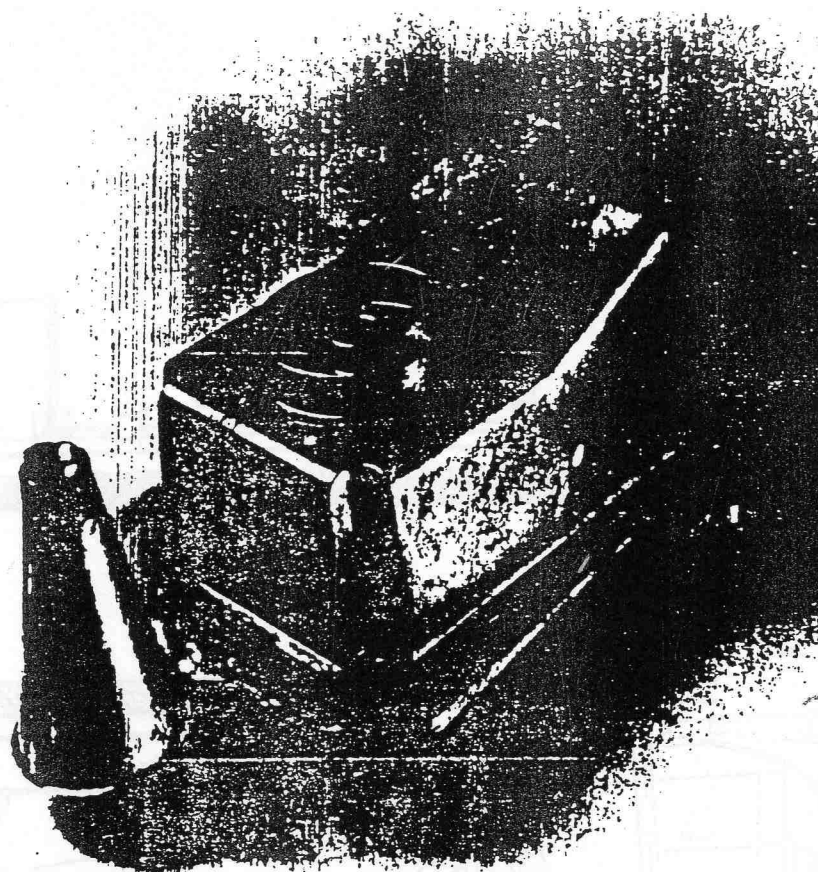
Dans le chapitre II, nous présenterons les différents modèles de turbulence les plus utilisés, ainsi que le couplage avec les équations de Navier-Stokes appliquées à l'écoulement moyen du fluide.

Le chapitre III sera un rappel de la modélisation par éléments finis que nous avons utilisée pour application au remplissage, en particulier de la formulation lagrangienne réactualisée antérieurement développée au laboratoire pour le traitement des écoulements instationnaires et qui a servi de base à ce travail.

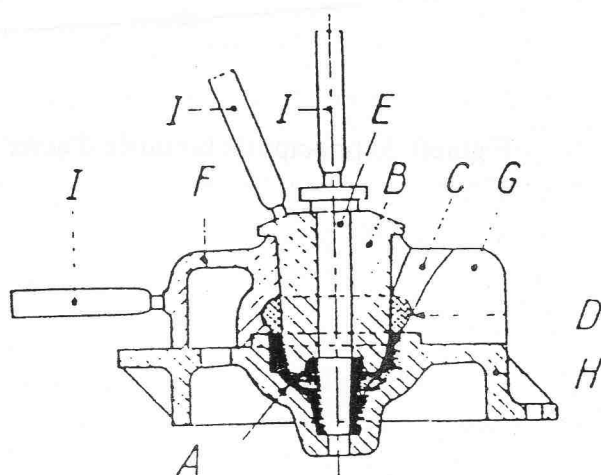
Dans le chapitre IV, nous expliquerons comment nous avons introduit la résolution des équations d'évolution des variables turbulentes dans le précédent modèle. Pour ce qui concerne le modèle à deux équations (k - ϵ), nous traiterons de différentes stratégies de résolution. En particulier, nous proposerons un schéma numérique d'intégration dans le temps de type Runge-Kutta, apte à améliorer son comportement numérique.

Le chapitre V a pour objet la validation de notre formulation éléments finis instationnaire dans le cas simple d'un écoulement en conduite cylindrique. Dans ce chapitre, nous étudierons le comportement du modèle de turbulence à deux équations (k - ϵ et variantes) dans un cas simple monodimensionnel de compression uniaxiale brutale d'une colonne de liquide.

Enfin le chapitre VI traite de quelques applications au remplissage de moules, dans des géométries bidimensionnelles.

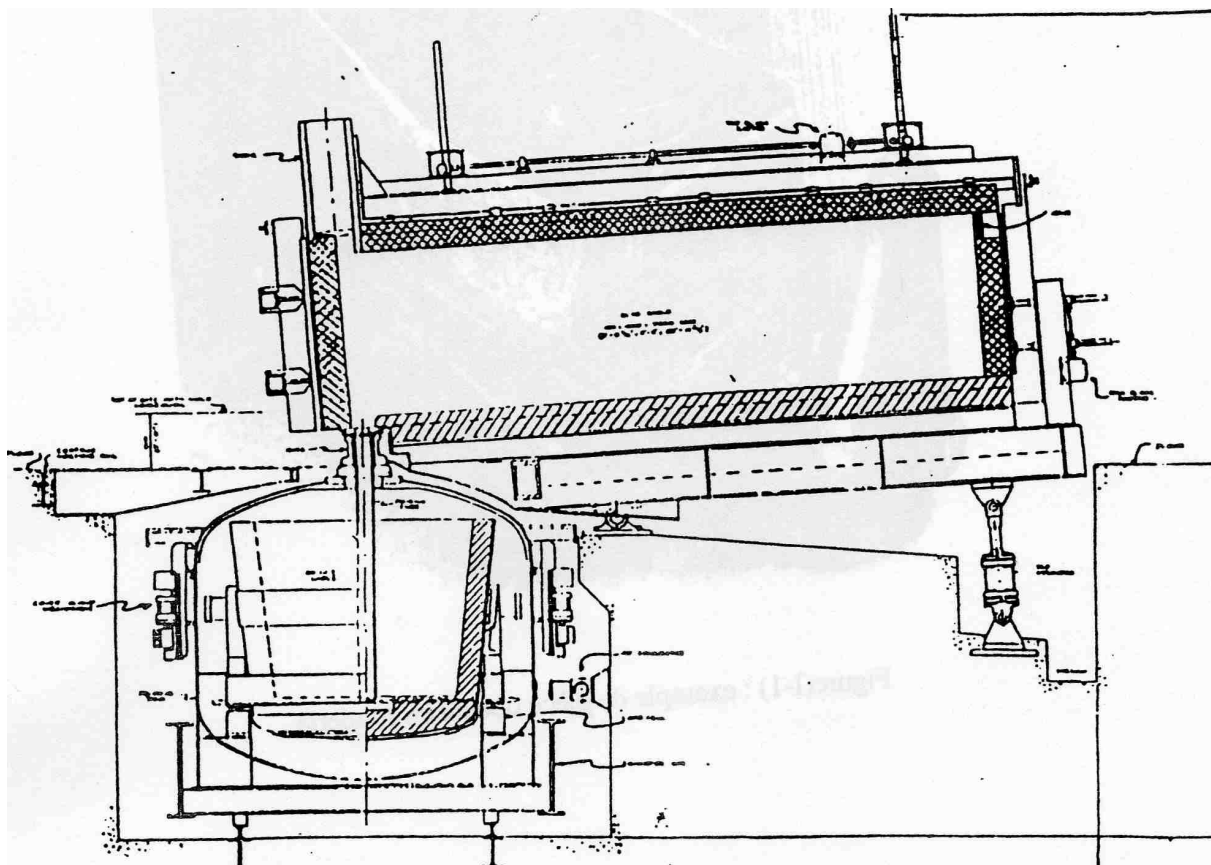


Figure(I-1) : exemple de pièce obtenu en fonderie



- | | | | |
|---|------------------|---|-------------------------|
| A | pièce | F | chape |
| B | noyau métallique | G | joint de chape |
| C | coulée | H | semelle |
| D | masselotte | I | poignées de manutention |
| E | broche | | |

Figure(I-2): moulage en coquille coulée par gravité avec noyau métallique



Références du chapitre I

- P. ALEXANDRE, M. CASTRO, J. LACAZE, G. LESOULT, M. RAPPAZ and J. L. DESBIOLLES, "Finite Element Modelling of Spheroidal Graphite Cast Iron Microstructure Formation", Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes (1991).
- D. ALLSOP, D. KENNEDY, Pressure Diecasting Part 2, The technology of the Casting and the Die.
- M. BELLET, M. MENAI, F. BAY, P. SCHMIDT & I. L. SVENSSON, "Finite element Modelling of the Cooling phase in Casting Process", Proc. 6th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and advanced Solidification Processes, T.S. Piwonka et al. (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, pp 561-568 (1993).
- A. BOURG, A. LATROBE, P. LATY, G. KREZIAK & C. RIGAUT, "Predicting Mould Filling Time with SIMULOR", International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Process" - Numiform '92, Valbonne/France/14-18 (September 1992).
- S. CHEN, D. B. JOHNSON, P. RAAD, "The Surface Marker Method", Proc. of Computational Modelling of Free Surface and Moving Boundary Problems, Southampton, Com. Mech. Public., Vol. 1, pp 221-234, July (1991).
- H. COMBEAU & G. LESOULT, "Simulation of Freckles Formation and Related Segregation During Directional Solidification of Metallic Alloys.", Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes (1993).
- B. FEDELICH, R. U. MATHIAK & W. DEISENROTH, "Low Pressure Die Casting Simulation of Wheel: Comparison", International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Process" - Numiform '92, Valbonne/France/14-18 (September 1992).
- F. H. HARLOW, J. E. WELCH, "Numerical Study of Large Amplitude Free Surface Motion", Phys. Fluids, 9, p. 842 (1966).
- C. W. HIRT, B. D. NICHOLS, "Volume of Fluid (VOF) Method for Dynamics of Free Boundaries", J. Comp. Phys., 39, p. 210, (1981).
- T. J. R. HUGHES, W. K. LIU, A. BROOKS, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation", J. Comp. Physics, 30, pp. 1-60, (1979).

T. J. R. HUGHES, "The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, (1987).

J. LAINE, Fonderie et Moulage, Généralités par Jean LAINE, Techniques de l'Ingénieur, M3, II, Métallurgie, Fonderie et Moulage, M 750, (1972).

M. LESIEUR, "La Turbulence Développée", La Recherche , 139, pp 1412-1425 (1982).

G. LESOULT, "Prediction of Cast Structures, Segregations and Defects : Progresses and Tendencies", Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes (1991).

S. A. ORZAG, "The Statistical Theory of Turbulence ", CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

T. S. PIWONKA, V. VOLLER & L. KATGERMAN (eds.), "Modeling of Casting Welding and Advanced Solidification Processes- VI"- The Minerals, Metals and Materials Society (1993).

R. SCHIESTEL, "Modélisation et Simulation des Ecoulements Turbulents", Traité des Nouvelles Technologies, série Mécanique, Editions HERMES, (1993).

Ph. THEVOZ and M. RAPPAZ, "Modelling of Equiaxed Microstructures in Solidification Processes: An overview of Solute Diffusion Models", Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes (1993).

CHAPITRE II

MODELISATION DE LA TURBULENCE

Modélisation de la turbulence

II - MODELISATION DE LA TURBULENCE

L'objectif de ce chapitre, est de rappeler pour chaque modèle de turbulence, à partir de la bibliographie citée en fin de chapitre, l'expression des variables turbulentes et des équations de transport exactes ou modélisées qui les régissent et qui sont établies à partir d'équations instantanées moyennées.

II-1 - Equation du champ moyen de vitesse

L'écoulement que l'on se propose d'étudier dans un premier temps est un écoulement de fluide newtonien, incompressible. On le suppose isotherme.

En utilisant la convention d'EINSTEIN des indices répétés, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent respectivement :

$$(II-1) \quad V_{i,i} = 0 \quad (\text{div } \mathbf{V} = 0, \text{ incompressibilité})$$

$$(II-2) \quad \frac{dV_i}{dt} = V_{i,t} + V_j V_{i,j} = -\frac{1}{\rho} P_{,i} + \nu_0 (V_{i,j})_{,j} + F_i$$

où V_i et F_i sont les composantes suivant la i ème direction de la vitesse instantanée \mathbf{V} et de la force de gravité \mathbf{F} . P , ν_0 et ρ sont respectivement la pression hydrostatique instantanée, la viscosité cinématique laminaire (constante) et la masse volumique du fluide. Les équations (II-2) représentent les équations de Navier-Stokes en Eulérien.

Pour prendre en compte la turbulence, il est nécessaire d'introduire un traitement statistique des équations précédemment écrites comme le suggéra Osborne REYNOLDS (1890). Pour cela, on écrit la valeur moyenne dans le temps de la vitesse et la pression instantanées. Sur un intervalle de temps de durée T , nous avons :

$$(II-3) \quad \overline{V}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t V_i(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

$$(II-4) \quad \overline{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t P(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

T est supposé très grand par rapport aux échelles de temps du mouvement turbulent et dans le cas instationnaire, petit devant les échelles de temps caractéristiques du mouvement moyen.

On peut décomposer ainsi toute grandeur instantanée en la somme de sa valeur moyenne et de sa valeur fluctuante comme suit :

$$(II-5) \quad V_i(x,t) = \overline{V}_i(x,t) + v_i(x,t)$$

$$(II-6) \quad P(x,t) = \overline{P}(x,t) + p(x,t)$$

$v_i(x,t)$ et $p(x,t)$ étant respectivement les parties fluctuantes de $V_i(x,t)$ et $P(x,t)$. Par définition, les valeurs moyennes des parties fluctuantes sont nulles.

$$(II-7) \quad \overline{v_i(x,t)} = 0 \quad \overline{p(x,t)} = 0$$

On démontre facilement que pour deux quantités E et F de valeurs moyennes respectives \overline{E} et \overline{F} , de valeurs fluctuantes e et f, et remplissant les conditions de dérivabilité :

$$(II-8) \quad \overline{E + F} = \overline{E} + \overline{F}$$

$$(II-9) \quad \overline{E F} = \overline{E} \cdot \overline{F} + \overline{ef}$$

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \overline{(E+e)(F+f)} \\ &= \overline{EF + eF + eF + ef} \\ &= \overline{EF} + \overline{eF} + \overline{eF} + \overline{ef} \end{aligned}$$

$$(II-10) \quad \overline{\alpha E} = \alpha \overline{E} \quad \text{pour toute constante } \alpha :$$

$$(II-11) \quad \overline{\overline{E}} = \overline{E}$$

$$(II-12) \quad \overline{E_{,i}} = (\overline{E})_{,i}$$

$$(II-13) \quad \overline{E_{,j}} = (\overline{E})_{,j}$$

En reportant les équations (II-5) et (II-6) dans l'équation exprimant l'incompressibilité (II-1) et dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (II-2), elles-mêmes moyennées, il en résulte le système d'équations de REYNOLDS suivant :

$$(II-14) \quad \overline{V_{i,i}} = \overline{(V_i + v_i)_{,i}} = \overline{V_{i,i}} = 0$$

$$(II-15) \quad \overline{(\overline{V}_i + v_i)_{,t} + (\overline{V}_j + v_j) ((\overline{V}_i + v_i)_{,j})} = -\frac{1}{\rho} (\overline{P} + p)_{,i} + v_0 ((\overline{V}_i + v_i)_{,j})_{,j} + \overline{F}_i + f_i$$

Les forces de gravité ne fluctuant bien évidemment pas et l'incompressibilité entraînant $(V_{j,i})_{,j} = 0$, nous obtenons le système suivant :

$$\overline{V}_{i,i} = 0$$

$$(II-16) \quad \overline{V}_{i,t} + \overline{V}_j \overline{V}_{i,j} = -\frac{1}{\rho} \overline{P}_{,i} + (v_0 \overline{V}_{i,j} - \overline{v_i v_j})_{,j} + \overline{F}_i$$

On constate que ce système d'équations n'est plus un système fermé avec l'apparition de nouvelles inconnues qui peuvent être interprétées comme composantes d'un tenseur de dispersion des vitesses turbulentes ou tensions de REYNOLDS $R_{ij} = \overline{v_i v_j}$. Ces termes de corrélation traduisent l'interaction entre le mouvement moyen et le mouvement turbulent (RODI(1980)). Dans les zones turbulentes, les tensions turbulentes interviennent de manière plus importante que les tensions moléculaires. En revanche dans les zones laminares, on assiste à une prépondérance des tensions moléculaires.

Le nombre d'inconnues s'élève alors à dix dont quatre qui sont V_i et P et six qui sont les tensions de REYNOLDS $\overline{v_i v_j}$. Pour fermer ce système d'équations, il faut procéder à une modélisation des corrélations doubles $\overline{v_i v_j}$, qui consiste à les exprimer en fonction des variables connues ou calculables relatives au champ moyen. Il est ainsi nécessaire d'adjoindre pour un modèle à N équations, N équations supplémentaires aux équations de REYNOLDS.

L'hypothèse qui nous conduit à des modèles simples consiste à supposer l'existence d'une viscosité turbulente, isotrope. Plusieurs modèles se distingueront par l'expression de cette viscosité turbulente, fonction des grandeurs de l'écoulement moyen. Lorsque la viscosité turbulente est exprimée en fonction du gradient des vitesses, alors il s'agit d'un modèle de viscosité turbulente algébrique (exemple : modèle à zéro équation).

Cette viscosité turbulente peut aussi être fonction de deux quantités turbulentes régies par des équations aux dérivées partielles impliquant les phénomènes de production, convection, diffusion et de dissipation. En revanche si on lève l'hypothèse de l'existence de la viscosité turbulente on se voit obligé de modéliser les tensions de REYNOLDS et d'aboutir à un modèle qui se distingue principalement des modèles précédents par le fait que la turbulence n'est plus supposée isotrope. Les tensions de REYNOLDS $\overline{v_i v_j}$ s'expriment directement en fonction de relations algébriques faisant intervenir k (énergie cinétique turbulente) et ϵ (taux de dissipation de l'énergie) qui sont obtenues par résolution d'équations aux dérivées partielles. Les modèles

de turbulence qui seront étudiés dans ce travail sont des modèles de turbulence isotrope. On se basera sur la notion de "viscosité équivalente de turbulence" due à BOUSSINESQ (1877), qui a postulé que les tensions de REYNOLDS devaient, comme les tensions laminares, être proportionnelles au gradient des vitesses. Le coefficient de proportionnalité selon cette hypothèse n'est rien d'autre que la viscosité équivalente de turbulence. L'hypothèse de BOUSSINESQ est ainsi basée sur l'écriture suivante :

$$(II-17) \quad -\overline{v_i v_j} = \nu_t (\overline{V_{i,j}} + \overline{V_{j,i}}) - 2/3 k \delta_{ij}$$

où k représente l'énergie cinétique turbulente, $k = \frac{1}{2} \overline{v_i v_i}$.

ν_t est réduit à un scalaire conformément à l'hypothèse d'isotropie.

δ_{ij} représente le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$.

En prenant la trace de l'équation (II-17), on a $R_{ii} = 2 k$

Ce modèle admet certaines limites :

- Dans un écoulement bidimensionnel plan cisailé, on constate que $\overline{v_1 v_1} = \overline{v_2 v_2} = 2/3 k$ ce qui est en contradiction avec les résultats expérimentaux.

- La représentation en gradient des vitesses pour les tensions turbulentes néglige un des aspects essentiels de la turbulence, sa mémoire. En effet, les contraintes de REYNOLDS ne s'adaptent pas instantanément aux gradients de vitesse moyenne qui leur sont appliqués, ce qui exclut toute relation ponctuelle entre tensions de REYNOLDS et déformation du champ moyen. Il y a certains écoulements bidimensionnels dans lesquels il existe des zones à contregradients HANJALIC (1970) , DEKEYSER (1982), c'est à dire des zones où les tensions de REYNOLDS et les gradients de vitesse ne changent pas de signe au même moment, ce qui signifie, d'après l'hypothèse de BOUSSINESQ, que ν_t prend des valeurs négatives, ce qui n'a aucune signification physique.

Malgré les défauts qui viennent d'être cités, le concept de viscosité turbulente équivalente est relativement performant et est encore à la base de nombreux modèles.

Une fois cette hypothèse de BOUSSINESQ acceptée, le problème consiste à relier la viscosité cinématique turbulente ν_t aux variables caractéristiques de l'écoulement turbulent, c'est à dire à

écrire une "loi de comportement du matériau turbulent". Nous présentons ci-après une brève revue des principaux modèles trouvés dans la littérature.

Lorsqu'on reporte (II-17) dans Navier-Stokes moyennées (II-16), on met en évidence que ν_t est une viscosité additive donc joue le même rôle que ν_0 .

$$(II-18) \quad \bar{V}_{i,j} + \bar{V}_j \bar{V}_{i,j} = -\frac{1}{\rho} \bar{P}_{,i} + (\nu_0 + \nu_t) \bar{V}_{i,jj} + \bar{F}_i$$

II-2-Modèles à zéro équation

Pour ces modèles, la seule variable utilisée est la viscosité turbulente ν_t . Il convient de souligner que ν_t n'est pas une propriété du fluide mais une propriété du mouvement turbulent lui-même (SCHIESTEL (1993)). Il s'ensuit qu'il devra être choisi différemment dans chaque cas particulier d'écoulement.

Les modèles à zéro équation n'utilisent pas d'équations d'évolution pour les quantités turbulentes mis à part celles qui sont relatives au champ de vitesse moyen.

- Le modèle de viscosité turbulente constante

C'est bien évidemment le modèle le plus simple que l'on puisse imaginer, la valeur de la viscosité additionnelle étant fixée a priori. Ce modèle n'a aucune signification physique et s'il peut donner éventuellement quelques bons résultats par "calage" par rapport à une expérience bien spécifique, il n'a aucun caractère prédictif par rapport à une nouvelle géométrie d'écoulement proposée par exemple.

- Modèle utilisant l'hypothèse de PRANDTL

Pour calculer la viscosité de turbulence, on utilise l'hypothèse de longueur de mélange émise par PRANDTL (1925), hypothèse qui s'inspire de la théorie cinétique des gaz, relative au libre parcours moyen des molécules. La longueur de mélange est une échelle de grandeur des tourbillons. On lui accorde une signification physique.

En première approximation, PRANDTL propose une viscosité cinématique turbulente ν_t , produit d'une échelle de longueur l_m (dite "longueur de mélange") par une échelle de vitesse V_t .

$$(II-19) \quad \nu_t = l_m V_t$$

Dans un deuxième temps, il émet l'hypothèse que l'échelle de vitesse V_t pour les couches bidimensionnelles cisillées s'écrit :

$$(II-20) \quad V_t = l_m |\overline{V_{i,j}}|$$

On aboutit ainsi à l'hypothèse de longueur de mélange de PRANDTL,

$$(II-21) \quad v_t = l_m^2 |\overline{V_{i,j}}|$$

Dans le cas général (tridimensionnel), on a l'expression suivante, suggérée par RODI(1980)

$$(II-22) \quad v_t = l_m^2 (\overline{V_{i,j}} (\overline{V_{i,j}} + \overline{V_{j,i}}))^{1/2}$$

On peut remarquer, en introduisant le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon}$ associé au champ de vitesse moyenné \overline{V} , ainsi que sa "norme", le scalaire vitesse de déformation équivalente, définis par :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\overline{V_{i,j}} + \overline{V_{j,i}}) \quad \text{et} \quad \dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$$

que la viscosité cinématique turbulente peut également s'écrire :

$$(II-23) \quad v_t = l_m^2 (2 \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2} = l_m^2 (3 (\dot{\epsilon})^2)^{1/2} = l_m^2 \sqrt{3} \dot{\epsilon}$$

La viscosité dynamique turbulente μ_t s'écrit alors :

$$(II-24) \quad \mu_t = \rho v_t = \rho l_m^2 \sqrt{3} \dot{\epsilon}$$

l_m est donnée par un certain nombre de lois empiriques lorsqu'il s'agit d'écoulements simples comme l'écoulement dans une conduite cylindrique (modèle de NIKURADSE), mais lorsqu'il s'agit d'écoulements complexes, comme ceux présentant des zones de recirculation, l_m devient très difficile à déterminer a priori. Certains auteurs prenant directement la distance à la paroi pour des écoulements en conduite. Une solution utilisée par les auteurs TWORZYDLO, HUANG & ODEN(1992) consiste à effectuer une moyenne harmonique des longueurs de mélange l_{mi} déduites des distances d_i des différentes parois. Ainsi:

$$(II-25) \quad \frac{1}{l_m} = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{l_{mi}} \right)$$

$$(II-26) \quad l_{mi} = \kappa d_i \left(1 - \exp\left(-\frac{d_i^+}{A}\right) \right) \quad d_i^+ = \frac{V_* d_i}{\nu_0}$$

κ et V_* sont respectivement la constante de Von KARMAN et la vitesse de frottement à la paroi. Nous reviendrons sur ces deux grandeurs à la fin de ce chapitre. $A=26$ est la constante de Van DRIEST tandis que M_l représente le nombre d'échelle de longueur l_{mi} .

Des exemples d'expression de l_m sont fournis en annexe.

• Modèle basé sur une hypothèse de Von KARMAN

Von KARMAN (1930) propose l'expression de la viscosité équivalente suivante :

$$(II-27) \quad \nu_t = l_m^2 \left| \overline{V_{i,j}} \right| \quad \text{avec}$$

$$(II-28) \quad l_m \approx \left| \overline{V_{i,j}} / \overline{V_{i,jj}} \right|$$

Il émet donc une hypothèse qui va au-delà de l'hypothèse de PRANDTL dès lors que la longueur de mélange n'est plus imposée mais calculée algébriquement en fonction de la dérivée spatiale première et seconde. L'inconvénient d'un tel modèle réside dans le fait qu'aux points d'inflexion la longueur de mélange est infinie.

II-3 - Modèles à une équation

Pour remédier aux faiblesses des modèles à zéro équation, on peut considérer les modèles qui prennent en compte l'évolution d'une variable caractéristique de la turbulence. La turbulence est caractérisée par une variable turbulente indépendante calculée à partir d'une équation de transport. Les autres quantités turbulentes s'obtiennent en fonction de cette variable indépendante par des relations algébriques.

Si l est l'échelle de grandeur des grosses structures (tourbillons porteurs d'énergie), t_1 l'échelle de temps pour la dissipation turbulente et ϵ le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente, on a $t_1 \approx k/\epsilon$

Si l'on fait l'hypothèse d'une convection des grosses structures par une vitesse fluctuante qui a pour ordre de grandeur \sqrt{k} , on a par ailleurs $t_1 \approx \frac{l'}{\sqrt{k}}$. On en déduit par conséquent $l' \approx \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$

et

$$(II-29) \quad l' = C_D \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

ou

$$(II-30) \quad \varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l'}$$

l' et C_D étant respectivement l'échelle de longueur et une constante empirique. On accorde à l' la même signification physique qu'à l_m .

Si l'on part du postulat de PRANDTL (II-19), $v_t = l'V_t$ avec $V_t \approx \sqrt{k}$, on obtient $v_t \approx k^{1/2} l'$ et la relation de PRANDTL - KOLMOGOROV

$$(II-31) \quad v_t = C_\mu k^{1/2} l'$$

C_μ étant une constante empirique. En combinant les relations (II-29) - (II-30), on conçoit qu'il y'ait plusieurs choix possibles pour la variable caractéristique étudiée. Toutefois c'est en général l'énergie cinétique k qui est choisie : k est régie par une équation de transport qui sera exposée dans le paragraphe suivant. Comme dans le modèle à zéro équation, le problème reste entier quant à la détermination de l' . En résumé, on peut dire que les modèles à une équation donnent des résultats plus réalistes que le modèle à zéro équation car ils tiennent compte de l'histoire de l'écoulement. En effet v_t est affecté par les mêmes phénomènes de diffusion, de convection, de production et de dissipation de k .

II-4 - Modèles à deux équations

Les modèles à deux équations d'évolution permettent de pallier le problème de détermination de la longueur de mélange. En effet, comme on l'a dit plus haut, lorsque l'on a affaire à des écoulements complexes tels ceux qui présentent des zones de recirculation en leur sein, il est pratiquement impossible de déterminer l'échelle de longueur locale dans ces zones.

On utilise généralement les modèles qui introduisent deux équations de transport dont l'une pour l'énergie cinétique turbulente et l'autre pour l'échelle de longueur l' , ou pour toute autre variable $Z = k^m l'^n$. La valeur des puissances m et n détermine le type de modèle.

Ces modèles à deux équations de transport utilisent aussi le concept de viscosité équivalente de la turbulence de BOUSSINESQ (II -17) ainsi que la relation de PRANDTL - KOLMOGOROV (II-31).

On peut ainsi décrire macroscopiquement la turbulence à partir de deux quantités turbulentes et d'une viscosité équivalente de turbulence, même si cela paraît être une approximation assez grossière de la réalité physique.

La forme générale de l'équation d'évolution de la variable turbulente Z issue de manipulations sur les équations de Navier-Stokes (partie fluctuante et partie moyennée) est la suivante :

$$(II-32) \quad Z_{,t} + V_j Z_{,j} = \left[\frac{\nu_t}{\sigma_Z} Z_{,j},_j + Z \left(C_{Z1} \frac{P_r}{k} - C_{Z2} \frac{k}{\nu_t} \right) \right] + S_Z$$

Pr est la production d'énergie cinétique turbulente que l'on précisera plus tard, S_Z représente un terme source qui dépend du choix de la variable Z. Nous en verrons un exemple lorsqu'il s'agira de déterminer les équations de transport de k et ϵ .

σ_Z , C_{Z1} , C_{Z2} sont des constantes empiriques valables pour un grand nombre d'écoulements ce qui n'est pas le cas pour le modèle à zéro équation où la constante empirique dépend étroitement de l'écoulement. On peut dresser la liste des principaux modèles à partir des années 1940 dans le tableau suivant :

Modèles	m	n	(k,Z)
KOLMOGOROV (1942)	1/2	-1	(k, $k^{1/2}/l'$)
CHOU (1945), DAVIDOV (1961), HARLOW-NARAYAMA (1962), JONES-LAUNDER (1972)	3/2	-1	(k, $k^{3/2}/l'$) (k, ϵ)
ROTA (1951), SPALDING (1967)	0	1	(k,l')
ROTA (1968, 1971), RODI-SPALDING (1970), NG-SPALDING (1972)	1	1	(k,kl')
SPALDING (1969)	1	-2	(k,k/l' ²)

Tableau (II-1) : différents modèles à deux équations

Ce qui fait la popularité du modèle k- ϵ standard ($\epsilon \approx \frac{k^{3/2}}{l'}$) auquel nous allons attacher une attention particulière, c'est le fait que la source secondaire S_Z apparaissant dans l'équation

d'évolution de Z s'annule pour $Z = \varepsilon$, ce que nous verrons plus tard. Pour obtenir le modèle $k-\varepsilon$, il faut prendre $m = 3/2$ et $n = 1$.

Avant de nous attarder sur le modèle $k-\varepsilon$, remarquons qu'il existe des modèles à N équations, N supérieur à 2. Ce sont des modèles intéressants dans la mesure où on résout des équations d'évolution de $\overline{v_i v_j}$ en plus des équations du modèle à deux équations. On tente de fermer les équations en faisant intervenir des corrélations d'ordre quatre qui sont au nombre de cinquante quatre tous différents CHOU (1945), ANDRE & al (1976). Le risque encouru est celui d'une croissance du nombre de constantes empiriques, d'une lourdeur du système et d'un coût prohibitif pour des résultats peut-être voisins de ceux du modèle à deux équations.

II-4-1 - Equations de transport de la turbulence

On établit les équations de transport de k et Z , Z dépendant du modèle choisi. On se situera ici dans le cadre du modèle $k-\varepsilon$ que nous introduirons au paragraphe suivant.

Equations de REYNOLDS : rappelons qu'elles portent sur les valeurs moyennes de l'écoulement. Ce sont les équations (II-16).

$$\overline{V_{i,t}} + \overline{V_j} \overline{V_{i,j}} = -\frac{1}{\rho} \overline{P_{,i}} + (v_0 \overline{V_{i,j}} - \overline{v_i v_j})_{,j} + \overline{F_i} \quad \forall i = 1,3 ; \forall j = 1,3$$

Equations de Navier-Stokes (II-2) : elles portent sur les équations instantanées de l'écoulement.

$$V_{i,t} + V_j V_{i,j} = -\frac{1}{\rho} P_{,i} + v_0 (V_{i,j})_{,j} + F_i \quad \forall i = 1,3 ; \forall j = 1,3$$

La différence entre les équations (II-2) et (II-16) conduit aux nouvelles équations suivantes :

$$(II-33) \quad \overline{v_{i,t}} + \overline{V_j v_{i,j}} = -v_j \overline{V_{i,j}} - v_j v_{i,j} - \frac{1}{\rho} \overline{p_{,i}} + (v_0 \overline{v_{i,j}} + \overline{v_i v_j})_{,j}$$

On a vu que $R_{ij} = \overline{v_i v_j}$ représente le tenseur de REYNOLDS. Les équations (II-33) permettent donc d'obtenir les équations d'évolution des tensions de REYNOLDS en considérant que

$$R_{ij,t} = \overline{(v_i v_j)_{,t}} = \overline{v_{i,t} v_j} + \overline{v_i v_{j,t}}$$

En effet en remplaçant dans l'équation (II-33) j par k, on obtient les équations suivantes :

$$v_{i,t} + \overline{v}_k v_{i,k} = -v_k \overline{v}_{i,k} - v_k v_{i,k} - \frac{1}{\rho} p_{,i} + (v_0(v_{i,k} + v_{k,i}) + \overline{v_i v_k}),_k$$

On multiplie l'équation ci-dessus par v_j et on lui ajoute le terme analogue obtenu en permutant i et j, ce qui donne :

$$v_j v_{i,t} + \overline{v}_k v_{i,k} v_j = -v_j v_k \overline{v}_{i,k} - v_j v_k v_{i,k} - \frac{1}{\rho} p_{,i} v_j + v_j (v_0(v_{i,k} + v_{k,i}) + \overline{v_i v_k}),_k$$

$$+$$

$$v_i v_{j,t} + \overline{v}_k v_{j,k} v_i = -v_i v_k \overline{v}_{j,k} - v_i v_k v_{j,k} - \frac{1}{\rho} p_{,j} v_i + v_i (v_0(v_{j,k} + v_{k,j}) + \overline{v_j v_k}),_k$$

En additionnant et en passant à la moyenne, on aboutit à l'équation d'évolution du tenseur de REYNOLDS

$$R_{ij,t} + \overline{v}_k R_{ij,k} = -R_{jk} \overline{v}_{i,k} - R_{ik} \overline{v}_{j,k} - \frac{1}{\rho} \overline{(p_{,i} v_j + p_{,j} v_i)} - \overline{(v_k v_i v_j)},_k + v_0 \overline{v_i v_j},_{kk}$$

$$+ \overline{v_0 v_j v_i},_{kk}$$

$$\text{or } R_{ij,kk} = \overline{(v_i v_j)},_{kk} = 2 \overline{v_{i,k} v_{j,k}} + \overline{v_{i,kk} v_j} + \overline{v_i v_{j,kk}}$$

On en déduit :

$$\overline{v_{i,kk} v_j} + \overline{v_i v_{j,kk}} = R_{ij,kk} - 2 \overline{v_{i,k} v_{j,k}}$$

D'autre part,

$$\frac{1}{\rho} (p_{,i} v_j + p_{,j} v_i) = \frac{1}{\rho} [(p v_j),_i + (p v_i),_j - p(v_{i,j} + v_{j,i})]$$

Finalement, en tenant compte des égalités précédentes, on obtient l'équation d'évolution des tensions de REYNOLDS R_{ij} :

$$(II-34) \quad R_{ij,t} + \overline{v}_k R_{ij,k} = -R_{jk} \overline{v}_{i,k} - R_{ik} \overline{v}_{j,k} - \frac{1}{\rho} \overline{[(p v_i),_j + (p v_j),_i]}$$

$$+ \frac{1}{\rho} \overline{[p(v_{i,j} + v_{j,i})]} - \overline{(v_k v_i v_j)},_k - 2v_0 \overline{v_{i,k} v_{j,k}} + v_0 R_{ij,kk}$$

L'équation (II-34) contient 8 termes différents

$$(1) \quad R_{ij,t}$$

$$(2) \quad \overline{\nabla_k R_{ij,k}}$$

$$(3) \quad - R_{jk} \overline{\nabla_{i,k}} - R_{ik} \overline{\nabla_{j,k}}$$

$$(4) \quad \frac{1}{\rho} \overline{[p(v_{i,j} + v_{j,i})]}$$

$$(5) \quad \overline{(v_k v_i v_j)},_k$$

$$(6) \quad \frac{1}{\rho} \overline{((p v_i)_{,j} + (p v_j)_{,i})}$$

$$(7) \quad 2v_0 \overline{v_{i,k} v_{j,k}}$$

$$(8) \quad v_0 R_{ij,kk}$$

Ces termes peuvent être classés en trois catégories. Dans une première catégorie, on classe les termes fonctions d'autres termes connus ou calculables (termes 1, 3 et 8). Dans une deuxième catégorie, on range les termes pouvant être modélisés compte tenu du fait qu'ils contiennent des termes de corrélation d'ordre supérieur à deux, comme le terme 5. Enfin dans la troisième catégorie, se trouvent tous les termes qui contiennent des corrélations entre quantités turbulentes qui ne sont ni connues, ni calculables, ni même mesurables expérimentalement (termes 4, 6 et 7).

On peut accorder une interprétation physique à chacun des termes, comme le suggère HAMINH (1976).

On regroupe tous ces résultats dans le tableau suivant :

Dérivée particulière	termes en gradient	termes sources et puits
1) $R_{ij,t}$: taux de variation temporelle	5) $\overline{(v_i v_j v_k)},_k$: diffusion turbulente ou convection moyenne par le mouvement d'agitation	3) $- R_{jk} \overline{V}_{i,k} - R_{ik} \overline{V}_{j,k}$: terme de production résultant des tensions de Reynolds soumis au gradient de vitesse moyenne
2) $\overline{V}_k R_{ij,k}$: variation convective associée au mouvement moyen	6) $\frac{1}{\rho} (\overline{p v_i},_j + \overline{p v_j},_i)$: diffusion turbulente par fluctuation de pression	4) $\overline{\frac{p}{\rho} (v_{i,j} + v_{j,i})}$: terme tendant à ramener la turbulence à l'isotropie, responsable d'une redistribution de l'énergie suivant ces diverses composantes du tenseur de Reynolds
	8) $\nu_0 R_{ij,kk}$: diffusion visqueuse	7) $2\nu_0 \overline{v_{i,k} v_{j,k}}$: terme toujours positif de pseudo-dissipation dû à la viscosité du fluide

Tableau (II-2) : termes de l'équation d'évolution du tenseur de REYNOLDS R_{ij}

II-5- Le modèle k- ϵ

Dans un premier temps nous établirons les équations de transport exactes de k et ϵ et dans un deuxième temps, il s'agira d'une modélisation de ces équations. Pour cela nous utiliserons les équations d'évolution du tenseur de REYNOLDS.

II-5-1 Equation d'évolution "exacte" et équation d'évolution "modélisée" de k

Les équations de transport (II-34) fournissent de suite l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k. En effet $k = \frac{1}{2} \overline{v_i v_i} = \frac{1}{2} R_{ii}$. (II-34) avec $i=j$ même, après quelques manipulations simples (utilisant notamment l'incompressibilité de la composante turbulente de la vitesse) à :

$$(II-35) \quad k_{,t} + \overline{V}_j k_{,j} = -R_{ij} \overline{V}_{i,j} - \overline{v_j \left(\frac{v_i v_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{,j}} - v_0 \overline{v_{i,j} v_{i,j}} + v_0 k_{,jj}$$

qui contient 5 termes principaux :

$$(1) \quad k_{,t} + \overline{V}_j k_{,j}$$

$$(2) \quad -R_{ij} \overline{V}_{i,j}$$

$$(3) \quad \overline{v_j \left(\frac{v_i v_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{,j}}$$

$$(4) \quad v_0 \overline{v_{i,j} v_{i,j}}$$

$$(5) \quad v_0 k_{,jj}$$

Le terme (2) traduit on un échange d'énergie du mouvement moyen vers le mouvement turbulent. Les termes (3) et (4) qui représentent respectivement la diffusion et la dissipation vont être simplifiés en vue d'avoir l'équation "modélisée" de k. Par analogie avec l'hypothèse de BOUSSINESQ sur la proportionnalité entre les tensions de REYNOLDS et le gradient de vitesse moyenne, le terme $v_j \left(\frac{v_i v_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{,j}$ est supposé proportionnel au gradient de k, par introduction d'une constante empirique σ_k :

$$(II-36) \quad \overline{v_j \left(\frac{v_i v_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{,j}} = \left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) k_{,j}$$

d'où

$$(II-37) \quad \overline{\left(-v_j \left(\frac{v_i v_i}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\right)_j} = \left(\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) k_{,j}\right)_j$$

Le terme (4) est la dissipation de l'énergie cinétique k donc égal à ε par définition :

$$v_0 \overline{v_{i,j} v_{i,j}} = \varepsilon$$

L'équation d'évolution de k devient alors:

$$(II-38) \quad k_{,t} + \overline{V_j k_{,j}} = \left(\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) k_{,j}\right)_j - R_{ij} \overline{V_{i,j}} - \varepsilon$$

Le tenseur de Reynolds R_{ij} vérifiant l'hypothèse de BOUSSINESQ (II-17) à savoir :

$$-R_{ij} = v_t (V_{i,j} + V_{j,i}) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

On en déduit l'expression suivante :

$$(II-39) \quad k_{,t} + \overline{V_j k_{,j}} = \left(\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) k_{,j}\right)_j + v_t \overline{V_{i,j}} (\overline{V_{i,j}} + \overline{V_{j,i}}) - \varepsilon$$

que l'on écrira sous la forme

$$(II-40) \quad k_{,t} + \overline{V_j k_{,j}} = \left(\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_k}\right) k_{,j}\right)_j + Pr - \varepsilon$$

en posant :

$$(II-41) \quad Pr = v_t \overline{V_{i,j}} (\overline{V_{i,j}} + \overline{V_{j,i}}) = 3 v_t \dot{\varepsilon}^2$$

Pr comme on l'a vu précédemment représente la production d'énergie cinétique turbulente.

Remarque :

Le terme (5) qui représente la diffusion moléculaire, est négligeable devant la dissipation visqueuse $v_0 \overline{v_{i,j} v_{i,j}}$, si l'on considère que le nombre de REYNOLDS $Re = \frac{V L}{v_0}$ est

suffisamment grand. L représente une échelle caractéristique de la géométrie du domaine, V une vitesse caractéristique de l'écoulement incident et v_0 la viscosité cinématique laminaire. Dans les écoulements à fort nombre de REYNOLDS, v_0 est négligeable v_t . On peut donc écrire

$$(II-42) \quad k_{,t} + \overline{V}_j k_{,j} = \left(\frac{v_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + Pr - \varepsilon$$

II-5-2- Equation d'évolution "exacte" et équation d'évolution "modélisée" de ε

Elle s'obtient en dérivant les équations (II-33) par rapport à x_j , et en multipliant par $2v_0 v_{i,j}$ (HARLOW-NAKAYAMA(1968), SCHIESTEL (1981)) et en prenant la moyenne.

Rappelons que si $\varepsilon = \overline{v_0 v_{i,j} v_{i,j}}$, on obtient

$$(II-43) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{,t} + \overline{V}_j \varepsilon_{,j} = & - 2v_0 \overline{V}_{i,m} \overline{(v_{i,l} v_{m,l} + v_{l,i} v_{l,m})} - 2v_0 \overline{V}_{i,l,m} \overline{v_{i,l} v_m} \\ & - \frac{2}{\rho} v_0 \overline{(p_{,j} v_{i,j})_{,i}} + v_0 \varepsilon_{,jj} - 2v_0^2 \overline{(v_{i,jm} v_{i,jm})} - 2v_0 \overline{v_{i,m} v_{i,l} v_{m,l}} - v_0 \overline{(v_{i,j} v_{i,j} v_m)_{,m}} \end{aligned}$$

Comme pour l'énergie cinétique turbulente, on peut accorder à chacun des termes, une signification physique. Les principaux résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Dérivée particulaire	Termes en gradient	Termes sources et puits
1) ε_t taux de variation temporelle	9) $-v_0 \overline{(v_m v_{i,j} v_{i,j})}_{,m}$: diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse	7) $-2v_0^2 \overline{v_{i,j}^2}$ terme dû au mouvement de fluctuation
2) $\overline{V_j} \varepsilon_{,j}$: variation convective	5) $-2 \frac{v_0}{\rho} \overline{(p_{,j} v_{i,j})}_{,i}$ diffusion turbulente par fluctuation de pression	8) $-2v_0 \overline{v_{i,m} v_{i,l} v_{m,l}}$ production par action du mouvement fluctuant
	6) $v_0 \varepsilon_{,jj}$: diffusion moléculaire	3) $-2v_0 \overline{V_{i,m} (v_{i,l} v_{m,l} + v_{l,i} v_{l,m})}$ et 4) $-2v_0 \overline{V_{i,l,m} v_m v_{i,l}}$ représentent tous deux le terme de production par action du champ moyen

Tableau (II-3) : termes de l'équation d'évolution de ε

On procède comme il a été fait pour l'énergie cinétique turbulente à une modélisation de l'équation d'évolution exacte de ε . On considère qu'on a un nombre de REYNOLDS assez grand qui nous permette de négliger (RODI (1971)) les termes (3), (4), (5), (6). Quant aux termes restant,

d'après LAUNDER & SPALDING(1974), le terme (9) devient

$$(II-44) \quad -v_0 \overline{v_m v_{i,l} v_{i,l}} = \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \varepsilon_{,m}$$

et d'après LAUNDER (1975):

$$(7)+(8) \text{ donne (II-45) } \quad -2v_0(v_0 \overline{v_{i,m} v_{i,m}} + \overline{v_{i,m} v_{i,l} v_{m,l}}) = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} Pr - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Modélisation de la turbulence/

où

$$(II-46) \quad Pr = \nu_t \overline{V}_{i,j} (\overline{V}_{i,j} + \overline{V}_{j,i}) = - \overline{V}_{i,j} \overline{v_i v_j}$$

On obtient donc l'équation d'évolution modélisée de ε

$$(II-47) \quad \varepsilon_{,t} + \overline{V}_j \varepsilon_{,j} = \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} Pr - C_{\varepsilon 2} \varepsilon)$$

En résumé, le modèle à deux équations est constitué lorsqu'on néglige la viscosité cinématique laminaire ν_0 , du système d'équations et des relations algébriques suivantes :

$$(II-48) \quad \frac{dk}{dt} = \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} k_{,j} \right)_{,j} + Pr - \varepsilon$$

$$(II-49) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right)_{,j} + C_{\varepsilon 1} Pr \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$(II-50) \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$(II-51) \quad Pr = \nu_t \overline{V}_{i,j} (\overline{V}_{i,j} + \overline{V}_{j,i}) = 3 \nu_t \dot{\varepsilon}^2$$

Il est intéressant de remarquer qu'on peut exprimer ν_t et ε de la manière suivante :

$$\varepsilon = C_D k^{3/2} l'$$

$$\nu_t = C_\mu k^{1/2} l'$$

Ce qui permet de déterminer l'échelle de longueur une fois le taux de dissipation obtenu. Ce ne sera pas le cas dans ce travail, car on ne déterminera que k , ε et ν_t .

Désormais dans le but de simplifier l'écriture, les grandeurs moyennes \overline{V} , \overline{P} etc seront simplement notées V , P .

II-6- Le modèle k- θ

Le modèle k- θ dérive du modèle k- ϵ . C'est un modèle qui est utilisé pour éviter des valeurs peu réalistes de k et de ϵ surtout pour des écoulements complexes. On utilise la variable intermédiaire θ qui représente le quotient de l'énergie cinétique k par son taux de dissipation ϵ . θ a peu de signification physique mais permet d'avoir un comportement numérique du modèle sensiblement meilleur que le modèle k- ϵ (BEGUE, CARDOT & PIRONNEAU (1988)).

Pour établir les équations de transport du modèle k- θ , on part des équations de transport du modèle k- ϵ (voir ANNEXES)

$$(II-52) \quad \frac{dk}{dt} - \text{div} \left[\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \text{Grad} k \right] = C_\mu k \theta V_{i,j} (V_{i,j} + V_{j,i}) - \frac{k}{\theta}$$

$$(II-53) \quad \frac{d\theta}{dt} - \text{div} \left[\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_\theta} \right) \text{Grad} \theta \right] = C_\mu (1 - C_{\epsilon 1}) \theta^2 V_{i,j} (V_{i,j} + V_{j,i}) - 1 + C_{\epsilon 2}$$

$$\epsilon = \frac{k}{\theta}, v_t = C_\mu k^2 / \epsilon = C_\mu k \theta$$

Les constantes empiriques sont :

$$\sigma_k = 1$$

$$\sigma_\theta = 0.1$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.44$$

$$C_{\epsilon 2} = 1.92$$

$$C_\mu = 0.09$$

Pour chaque équation, le premier membre contient le terme transitoire et le terme de diffusion, le second membre représente les termes sources et puits. La viscosité laminaire considérée comme négligeable en dehors de la couche limite peut ne pas apparaître dans ces équations. Pour la résolution du modèle k- θ deux étapes sont à étudier : l'étape de convection et l'étape de diffusion pure.

L'étape de convection

L'étape de convection consiste à résoudre l'équation de transport de k et θ sans les termes de diffusion :

$$(II-54) \quad \frac{dk}{dt} = C_\mu k \theta V_{i,j} (V_{i,j} + V_{j,i}) - \frac{k}{\theta}$$

$$(II-55) \quad \frac{d\theta}{dt} = C_{\mu}(1 - C_{\varepsilon 1}) \theta^2 V_{i,j} (V_{i,j} + V_{j,i}) - 1 + C_{\varepsilon 2}$$

On sait que l'équation différentielle $\frac{d\phi}{dt} + a\phi^2 - b = 0$ avec a et b des réelles positives admet pour solution, la solution analytique suivante

$$(II-56) \quad \phi(t) = \frac{\psi (e^{-\mu t} (\phi_0 - \psi) + \phi_0 + \psi)}{-e^{-\mu t} (\phi_0 - \psi) + \phi_0 + \psi}$$

$$\text{où } \psi = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{et} \quad \mu = \sqrt{a \cdot b}$$

ϕ_0 est la solution à l'instant $t = 0$.

On démontre aisément que si la variable ϕ est positif à l'instant initial $t = 0$ et égal à ϕ_0 , alors elle le restera (BEGUE, CARDOT & PIRONNEAU (1988)).

L'équation à l'étape de convection de θ est du type $\frac{d\theta}{dt} + a\theta^2 - b = 0$. En effet

$$(II-57) \quad \frac{d\theta}{dt} + C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1)V_{i,j} (V_{i,j} + V_{j,i})\theta^2 - (C_{\varepsilon 2} - 1) = 0$$

$$C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) > 0 \quad \text{et} \quad (C_{\varepsilon 2} - 1) > 0$$

$a = C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) V_{i,j} (V_{i,j} + V_{j,i})$ et $b = (C_{\varepsilon 2} - 1)$ sont toutes les deux des réelles positives .

La valeur initiale de θ étant positive, θ est donc une variable qui reste positive au cours du temps.

L'étape de diffusion

L'étape de diffusion consiste à réécrire les équations de transport sans les termes sources et puits :

$$(II-58) \quad \frac{dk}{dt} = \text{div} \left[\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \text{Grad} k \right]$$

$$(II-59) \quad \frac{d\theta}{dt} = \text{div} \left[\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_{\theta}} \right) \text{Grad} \theta \right]$$

II-7- Lois de paroi

Les équations du modèle $k-\varepsilon$ étant de type elliptique, il est nécessaire de définir des conditions aux limites sur toute la frontière du domaine pour avoir un problème bien posé. Nous examinerons plus loin les conditions aux limites en surface libre et dans la zone d'injection de fluide. Pour l'instant rappelons quels sont les phénomènes essentiels en zone de paroi en nous basant essentiellement sur la bibliographie (SCHILCHTING (1960), LANDAU & LIFSHITZ (1987)).

Sur la paroi proprement dite, lorsque celle-ci est imperméable, il est d'usage de considérer des conditions dites d'adhérence : la vitesse du fluide est nulle.

$$V_i = 0 \quad \text{pour } i = 1,3$$

La zone de paroi est le siège de phénomènes complexes, difficiles à prendre en compte. Dans cette zone, on a de forts gradients, ce qui nécessiterait un maillage très fin d'où des temps de calcul trop élevés. Pour pallier ces difficultés, nous excluerons la zone de paroi de notre domaine de calcul. Ceci revient à définir une frontière artificielle sur laquelle seront imposées des conditions aux limites par l'intermédiaire des lois de paroi, qui permettront d'établir un lien entre la paroi non calculée et le reste de l'écoulement. Nous allons expliciter cette stratégie.

Les lois de paroi sont établies à partir de l'écoulement de Poiseuille permanent entre plaques planes parallèles infinies suivant la troisième direction.

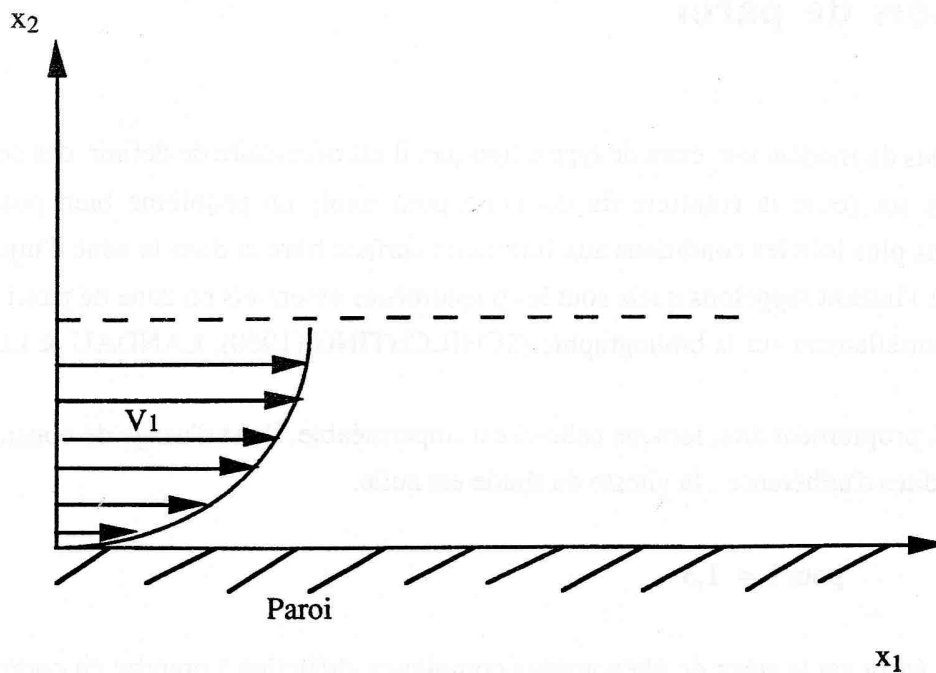


Figure (II-1) : écoulement de Poiseuille entre plaques planes infinies

Nous allons considérer dans la zone de paroi deux zones principales et une zone intermédiaire entre ces deux zones.

- Une zone logarithmique

Dans la sous couche turbulente, à une distance x_2 de la paroi, une analyse dimensionnelle (LANDAU & LIFSHITZ (1987)) p.172-175) amène à écrire la proportionnalité entre le gradient normal de vitesse et la quantité $\left(\frac{\tau_w}{\rho x_2^2}\right)^{1/2}$ où τ_w désigne la contrainte de cisaillement 1,2 dans

l'écoulement. L'expérience confirme cette analyse; la constante de proportionnalité est notée $\frac{1}{\kappa}$,

où κ est constante de Von KARMAN :

$$(II-60) \quad V_{1,2}(x_2) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\tau_w}{\rho x_2^2} \right)^{1/2}$$

La valeur de κ obtenue expérimentalement est 0,41.

Il est d'usage de noter V_* , la quantité

$$(II-61) \quad V_* = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}$$

qui est homogène à une vitesse et qu'on appelle couramment vitesse de frottement à la paroi. Ainsi on obtient :

$$(II-62) \quad V_{1,2}(x_2) = \frac{1}{\kappa} \frac{V_*}{x_2}$$

En intégrant cette dernière relation, on a :

$$(II-63) \quad V_1(x_2) = \frac{1}{\kappa} V_* (\ln x_2 + A)$$

où A est une constante d'intégration. Cette loi ne s'applique pas aux petites distances de la paroi. En effet lorsque x_2 tend vers zéro, $\ln x_2$ tend vers l'infini et par conséquent V_1 tend aussi vers l'infini. D'ailleurs, dans les zones où x_2 tend vers zéro, la viscosité laminaire du fluide prédomine comme nous allons le voir ci-dessous.

-une sous couche visqueuse

Dans cette zone où l'écoulement est laminaire, la contrainte de cisaillement du fluide considéré comme Newtonien a pour expression

$$(II-64) \quad \tau_w = \rho \nu_0 V_{1,2}(x_2)$$

τ_w étant supposé constante (hypothèse de frottement visqueux, cisaillement permanent d'une couche visqueuse), on a un profil linéaire. L'intégration donne, en considérant la vitesse nulle à la paroi :

$$(II-65) \quad V_1(x_2) = \frac{\tau_w}{\rho \nu_0} x_2 = \frac{V_*^2}{\nu_0} x_2$$

Le raccordement des deux solutions en sous-couche et en zone logarithmique doit être obtenu lorsque les effets d'inertie et de viscosité s'équilibrent, c'est à dire $Re \approx 1$. On a alors au point de raccordement x'_2 :

$$(II-66) \quad Re \approx \left(\frac{V_* x'_2}{\nu_0} \right) \approx 1,$$

on a donc $x'_2 \approx \frac{v_0}{V_*}$ et $V_1(x'_2) = V_*$ d'après (II-65).

En reportant dans (II-63), on obtient $A = \kappa - \ln x'_2$ et finalement

$$(II-67) \quad V_1(x_2) = \frac{1}{\kappa} V_* \left(\kappa + \ln \left(\frac{V_*}{v_0} x_2 \right) \right)$$

La constante 1 est généralement négligée. D'autre part, dans la relation (II-67), on introduit souvent une constante empirique E traduisant l'effet de la rugosité de la paroi.

La relation devient alors, dans la sous-couche turbulente:

$$(II-68) \quad V_1(x_2) = \frac{1}{\kappa} V_* \left(\ln \left(\frac{E V_*}{v_0} x_2 \right) \right)$$

E représente la contrainte de rugosité et vaut 9 pour les parois lisses.

Remarque : si on introduit les variables adimensionnelles

$$(II-69) \quad x_2^+ = \frac{V_*}{v_0} x_2$$

et

$$(II-70) \quad V_1^+(x_2) = \frac{V_1(x_2)}{V_*},$$

alors le profil des vitesses peut s'écrire sous la forme $V_1(x_2) = f(x_2^+)$:

- dans la sous-couche visqueuse,

$$(II-71) \quad V_1^+(x_2) = x_2^+$$

- dans la sous-couche turbulente,

$$(II-72) \quad V_1^+(x_2) = \frac{1}{\kappa} \ln(E x_2^+)$$

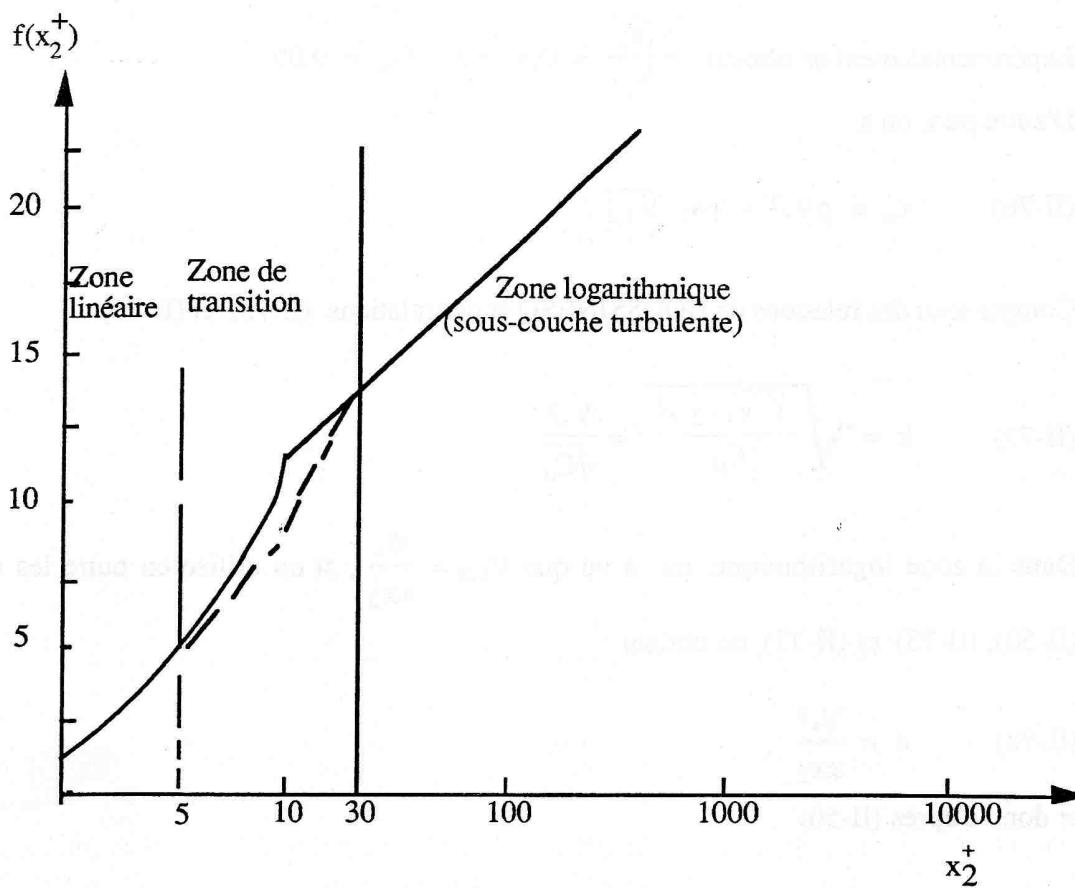


Figure (II-2) : différentes zones de paroi (la courbe en pointillés traduit l'évolution physique du profil de vitesse adimensionnelle dans la zone intermédiaire)

Conséquence sur les conditions aux limites des variables turbulentes

Dans la zone de paroi on a un équilibre entre production et dissipation, les termes de convection et de diffusion étant négligeables. On a donc:

$$(II-73) \quad Pr = \varepsilon \text{ ou } v_t (V_{1,2})^2 = \varepsilon$$

Les relations de BOUSSINESQ (II-17) donnent :

- $\overline{v_1 v_2} = v_t V_{1,2}$ donc $(\overline{v_1 v_2})^2 = v_t^2 (V_{1,2})^2$ et en utilisant (II-73), on a :

$$(II-74) \quad \frac{\varepsilon}{(\overline{v_1 v_2})^2} = \frac{1}{v_t} = \frac{\varepsilon}{C_\mu k^2}$$

et donc

$$(II-75) \quad C_\mu = \left(\frac{\overline{v_1 v_2}}{k} \right)^2$$

Expérimentalement on obtient $\frac{\overline{v_1 v_2}}{k} = 0,3$ d'où $C_\mu = 0,09$

D'autre part, on a

$$(II-76) \quad \tau_w = \rho V_*^2 = \rho \nu_t \overline{V_{1,2}}$$

Compte tenu des relations de BOUSSINESQ et des relations (II-75) et (II-76):

$$(II-77) \quad k = \sqrt{\frac{(\overline{v_1 v_2})^2}{C_\mu}} = \frac{V_*^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

Dans la zone logarithmique, on a vu que $V_{1,2} = \frac{V_*}{\kappa x_2}$, si on utilise en outre les relations

(II-50), (II-73) et (II-77), on obtient

$$(II-78) \quad \varepsilon = \frac{V_*^3}{\kappa x_2}$$

et donc d'après (II-50)

$$(II-79) \quad \nu_t = \kappa V_* x_2$$

On peut regrouper dans le tableau suivant les principaux résultats :

Sous couche visqueuse	zone intermédiaire	zone logarithmique
$x_2^+ < 5$	$5 < x_2^+ < 30$	$x_2^+ > 30$
$V_{1^+}(x_2^+) = x_2^+$	$V_{1^+}(x_2^+) = f(x_2^+)$	$V_{1^+}(x_2^+) = \frac{1}{\kappa} \ln(Ex_2^+)$
		$k = \frac{V_*^2}{\sqrt{C_\mu}}$
		$\varepsilon = \frac{V_*^3}{\kappa x_2}$
		$\nu_t = \kappa V_* x_2$

Tableau (II-4) : différentes zones de paroi

On résume toutes ces conditions précédemment écrites en une seule :
pour tout $x_2^+ > 0$

$$(II-80) \quad V_1^+ = f(x_2^+) = 2,5 \ln(1 + 0,4 x_2^+) + 7,8 \left(1 - e^{-\frac{x_2^+}{11}} - \frac{x_2^+}{11} e^{-0,33 x_2^+}\right)$$

$f(x_2^+)$ est la fonction de REICHARDT. Ainsi pour déterminer la vitesse de frottement V_* au pont p il faudra résoudre $\frac{V_p}{V_*} = f(x_2^+)$, V_p où est la composante parallèle à la paroi de la vitesse du point p .

Les équations du modèle k - ϵ standard établies dans le cas de forts nombres de REYNOLDS ne sont plus valables en zone de paroi où le nombre de REYNOLDS est faible (LAUNDER & SPALDING (1974)). On aura donc le choix entre les deux stratégies suivantes :

- soit conserver le modèle k - ϵ standard en supposant la frontière du maillage située à x_2^+ de la frontière physique. On imposera alors les valeurs de k et ϵ fonction de la vitesse tangente à la frontière du maillage,

- soit mailler la sous-couche visqueuse et adopter dans cette zone un modèle k - ϵ modifié pour traiter des nombres de REYNOLDS plus faibles. Les équations d'évolution sont généralement de la forme (LAUNDER-SHARMAN (1974), LAM-BREMHORST (1981), MYONG & KASAGI (1990)),

$$(II-81) \quad \frac{dk}{dt} = \left(\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) k_{,j} \right)_{,j} + v_t V_{ij} (V_{ij} + V_{j,i}) - \epsilon$$

$$(II-82) \quad \frac{d\epsilon}{dt} = \left(\left(v_0 + \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \right) \epsilon_{,j} \right)_{,j} + c_{\epsilon 1} f_1 v_t \frac{\epsilon}{k} V_{ij} (V_{ij} + V_{j,i}) - c_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k}$$

$$(II-83) \quad v_t = c_\mu f_\mu k^2 / \epsilon$$

Les fonctions f_1 , f_2 et f_μ sont des fonctions qui sont introduites en vue de tenir compte de la paroi et elles peuvent varier d'un auteur à l'autre.

Dans le cadre de ce travail, nous avons privilégié la première stratégie pour éviter de mailler finement à la paroi.

II-8-Détermination des constantes empiriques du modèle k-ε

Pour spécifier les constantes empiriques du modèle k-ε, il faut faire des hypothèses ou utiliser des relations déjà établies. Les constantes numériques sont au nombre de six : C_μ , C_D , σ_k , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$.

- La constante C_μ a été déterminée à partir de l'hypothèse des écoulements en équilibre local comme on l'a vu précédemment $C_\mu = 0,09$.

- C_D s'obtient en rapprochant les relations $\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l}$ et $v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$. On obtient : $C_D = 1$.

- $C_{\varepsilon 2}$ est déterminée par référence à la décroissance de la turbulence derrière grille (COMTE-BELLOT & CORRISIN (1966)). $C_{\varepsilon 2} = 1,92$. $C_{\varepsilon 2}$ est directement relié au taux de décroissance de k.

- Pour la détermination de $C_{\varepsilon 1}$, on se place dans la zone logarithmique et on utilise l'hypothèse d'équilibre local.

$$0 = \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,j} \right]_{,j} + \frac{\varepsilon^2}{k} (C_{\varepsilon 1} - C_{\varepsilon 2})$$

On utilise aussi les relations établies dans cette même région :

$$k = \frac{V_*^2}{\sqrt{C_\mu}}$$

$$\varepsilon = \frac{V_*^3}{\kappa x_2}$$

On aboutit à

$$C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon C_\mu^{1/2}}$$

Les valeurs de σ_ε et σ_k sont obtenues par optimisation numérique AUTRET(1981) : $\sigma_k = 1,0$ et $\sigma_\varepsilon = 1,30$. On obtient alors :

$$C_{\varepsilon 1} = 1,44 .$$

On résume ce paragraphe par le tableau suivant :

$C_\mu = 0,09$	$C_D = 1.$	$\sigma_k = 1.$
$\sigma_\varepsilon = 1,30$	$C_{\varepsilon 1} = 1,44$	$C_{\varepsilon 2} = 1,92$

Tableau (II-5) : valeurs des constantes empiriques du modèle k- ε

Références du chapitre II

A. AUTRET, "Calculs d'écoulements turbulents par une méthode aux éléments finis", Thèse Docteur Ingénieur, Université Aix-Marseille II, (1985).

K. J. BATHE and J. DONG, "Studies of Finite Element Procedures. The Use of ABINA-F in Fluid Flow Analysis", Computers and Structures, vol. 32, n°3/4, pp. 499-516, (1989).

C. BEGUE B. CARDOT, O. PIRONNEAU, "Simulation d'écoulements turbulents à moyenne instationnaire", Rapport de Recherche n°914, INRIA (Rocquencourt), (oct. 1988).

A. C. BENIM, "Investigation into the Finite Element Analysis of Confined Turbulent Flows using a k- ϵ Model of Turbulence", Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng., 51, pp 507-523 (1985).

A. C. BENIM, "Finite Element Solution of an enclosed Turbulent Diffusion Flame", Int. Journ. for Num. Meth. in Fluids, vol. 9, 289-303 (1989).

A. C. BENIM, "Finite Element Analysis of Confined Swirling Flows", Int. J. Num. Meth. in Fluids, vol. 11, 697-717 (1990).

J. P. BENQUE, "Modélisations d'écoulements turbulents isothermes", rapport DER-LNH HE 041/78/12 (EDF-CHATOU) (1978).

J. P. CHABARD, B. METIVET, G. POT, B. THOMAS, "An Efficient Finite Element Method for the Computation of 3D Turbulent Incompressible Flows", submitted to International Journal for Numerical Methods in Fluids (1989).

J. P. CHABARD, G. POT, B. METIVET and B. THOMAS, "A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for Industrial Applications", Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow, vol. 6, part 2, 285-296, (1989).

K. C. CHANG, L. S. CHEN and G. I. VANG, "A Hybrid k- ϵ Turbulence model of Recirculating Flow", Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow, vol. 6, part 2, 341-352, (1989).

C. J. CHEN and W. RODI, "A Mathematical Model for Stratified Turbulent Flows and its Application to Buoyant Jets", paper C4, 16th IAHR Congress Sao Paulo, (July 1975).

P. Y. CHOU, " On Velocity Correlations and The Solutions of the Equations of Turbulent Fluctuations " - Quaterly of Applied Mathematics , Vol. 3- 1, pp 38 - 54.

J. F. COMBES, A. VERRY, M. DELORME, R. PHILIBERT, J. M. VANEL, "Numerical and Experimental Analysis of the Flow inside an Elbow Draft Tube", Symposium G5, Belgrade, Yugoslavia, (1990).

G. COMTE-BELLOT, "Contribution à l'étude de la turbulence de conduite", Thèse, Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble (1963).

G. COMTE-BELLOT, "Ecoulement turbulent entre deux parois planes", Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air. S. O. S. T. A., (1965).

I. DEKEYSER, " Etude d'un Jet Plan Dyssimétrique Chauffé en Régime Turbulent Incompressible" Thèse d'Etat -AIX - MARSEILLE II - (1982).

Modélisation de la turbulence/

D. ELKAIM, "Simulation numérique d'écoulements turbulents avec réactions chimiques", Thèse, Ecole Polytechnique de Montréal, Département de Math. Appliquées (Mai 1990).

A. FAURE, L. KOVASNAY, R. DUMAS, J. GAVIGLIO, M. COANTIC, "La Turbulence en Mécanique des fluides", GAUTHIER - VILLARS (1976). GAUTHIER - VILLARS (1976).

D. GREENBLATT, D. F. DA SILVA et E. A. MOSS, "A Numerical and Experimental Investigation of Temporally Accelerated Turbulent Pipe Flow", Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow, vol. 6, part 2, 365-376, (1989).

K. HANJALIC, "Two Dimensional Asymmetric Turbulent Flow Inducts", Ph. D. -University of LONDON - (1970).

J. O. HINZE, "Turbulence" - 2nd Edition - Mc GRAW -HILL (1959).

M. JAEGER, G. DHATT, "A k- ϵ Finite Element Model for 3-D Incompressible Flows", 6th Int. Conf. on Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flows (July 1989).

C. K. G. LAM, K. BREMHORST, "A Modified Form of the k- ϵ Model for Predicting Wall Turbulence", Transaction of the ASME, vol. 103, pp 456-460, (September 1981).

L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ, Course of Theoretical Physics, vol. 6, Fluid Mechanics, Pergamon Press (1987).

B. E. LAUNDER and D. B. SPALDING, "Mathematical Models of Turbulence", Academic Press (1972).

B. E. LAUNDER and D. B. SPALDING, "The Numerical Computation of Turbulent Flows", Computer methods in applied Mechanics and Engineering 3, pp 269-289, North-Holland Publishing Company. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht. Printed in The Netherlands (1974).

B. E. LAUNDER, G. J. REECE, W. RODI, "Progress in the Development of a REYNOLDS Stress Turbulence Closure", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 68, pp 537-566, (1975).

J. C. MONNIER and M. STANISLAS, "Critical Examination of Various Turbulence Models Applied to Different One Dimensional Internal Flows, including Couette Flows with Pressure Gradient", Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow, vol. 6, part 2, 297-306, (1989).

L. PRANDTL, "Bericht Über Untersuchungen zur Ausgebildeten Turbulenz", ZAMM, 5, p. 236 (1925).

L. PRANDTL, "Über Ein Neues Formelsystem für Die Ausgebildete Turbulenz", Nachrichten Von Der Akad. Der Wissenschaft in Gottingen, Math.-Phys. Klassen, p. 6 (1945).

W. RODI, "On the Equation Governing the Rate of Turbulent Energy Dissipation", Imperial College, Mech. Eng. Rep. TWF/TN/A/14, (1971).

W. RODI, "The Prediction of Free Turbulent Boundary Layers by Use of a Two-Equation Model of Turbulence", PhD Thesis, University of London, (1972).

W. RODI, "A Note on the Empirical Constant in the Kolmogorov-Prandtl Eddy-Viscosity Expression", J. of Fluids Eng., Trans. ASME, pp. 386-389, (1975).

W. RODI, "A New Algebraic Relation for Calculating the Reynolds Stresses", ZAMM 56, T219-T221, (1976).

W. RODI, "Turbulence Models and Their Application in Hydraulics" - A State of the Art Review", presented by the IAHR - Section of Fundamentals of Division II : Experimental and Mathematical Fluid Dynamics, the Netherlands (1980).

W. RODI, "Examples of Turbulence Models for Incompressible Flows", AIAAA Journal, n°7, pp. 872-879, (1981).

S. ROGERS, L. KATGERMAN, P. G. ENRIGHT and N. A. DARBY, "Modelling of Liquid-Liquid Metal Mixing", Applied Scientific Research, 44 : 175-195 (1987).

R. SCHIESTEL, "Modélisation numérique des écoulements turbulents", Cours de D. E. A. - I. M. S. T. Marseille (1981-1982).

R. SCHIESTEL, "Modélisation et simulation des écoulements turbulents", Traité des Nouvelles Technologies, Serie Mécanique. Editions HERMES, Paris (1993).

H. SCHLITCHING, "Boundary Layer Theory", Mc Graw Hill Series in Mechanical Engineering, Seventh Edition (1979).

CHAPITRE III

METHODES DE RESOLUTION DANS LE CAS LAMINAIRE

Méthode de résolution dans le cas laminaire!

III-METHODES DE RESOLUTION DANS LE CAS LAMINAIRE

Dans ce chapitre, il s'agira d'établir à partir des équations locales de conservation de la quantité de mouvement et de la conservation de masse, les équations globales de l'écoulement en formulation incrémentale, puis sous forme discrétisée par éléments finis.

III-1- Formulation en lagrangien réactualisé des équations de Navier-Stokes

III-1-1- Equation d'équilibre d'un fluide newtonien : équations de Navier-Stokes

Comme première approximation, on suppose qu'un métal liquide a un comportement newtonien incompressible. Dans ces conditions, la relation qui relie le déviateur du tenseur de contrainte de CAUCHY σ et le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\epsilon}$ est linéaire :

$$(III-1) \quad \mathbf{s} = 2\mu_0\dot{\epsilon} \quad \text{avec} \quad \mathbf{s} = \sigma + P\mathbf{I}$$

où $\mu_0 = \rho\nu_0$ est la viscosité dynamique laminaire du fluide (ρ masse volumique que l'on prendra constante) et P la pression hydrostatique associée au tenseur des contraintes.

\mathbf{I} : représentant le tenseur identité

La vitesse de déformation a pour expression

$$(III-2) \quad \dot{\epsilon} = \frac{1}{2}(\text{Grad}\mathbf{V} + (\text{Grad}\mathbf{V})^T)$$

avec la condition d'incompressibilité

$$(III-3) \quad \text{div } \mathbf{V} = 0$$

Par ailleurs, l'équation d'équilibre dynamique d'un fluide à l'instant t , est donnée par

$$(III-4) \quad \text{div } \sigma + \rho\mathbf{g} = \rho\gamma$$

En utilisant (III-1), (III-2) et (III-3) dans (III-4), on aboutit à l'équation classique de Navier-Stokes

$$(III-5) \quad \text{div} (\mu_0 \text{Grad } \mathbf{V}) - \text{Grad} P + \rho \mathbf{g} = \rho \gamma$$

où \mathbf{g} est le vecteur gravité (ou accélération de la pesanteur). L'accélération γ est la dérivée particulière du champ de vitesse.

$$(III-6) \quad \gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

Puisqu'on se place dans le cadre d'une formulation lagrangienne réactualisée incrémentale, on exprimera sur l'incrément de temps $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ le champ de vitesse ainsi $\mathbf{V}(\mathbf{x}_\tau, t)$ avec \mathbf{x}_τ coordonnées du point matériel M à τ et $t \in [\tau, \tau + \Delta\tau]$. \mathbf{x}_τ étant fixé, la dérivée particulière de \mathbf{V} n'est rien d'autre que la dérivée partielle par rapport au temps. Le terme convectif $\text{Grad} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ de la formulation Eulérienne disparaît :

$$(III-7) \quad \gamma(\mathbf{x}_\tau, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{x}_\tau, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

III-1-2- Conditions aux limites dans le cas du remplissage des moules

Dans la simulation du remplissage des moules, les conditions aux limites du domaine Ω occupé à un instant donné par le fluide sont diverses selon qu'on est à l'interface moule/fluide, en entrée ou sur la surface libre.

Considérons l'exemple schématique de remplissage suivant :

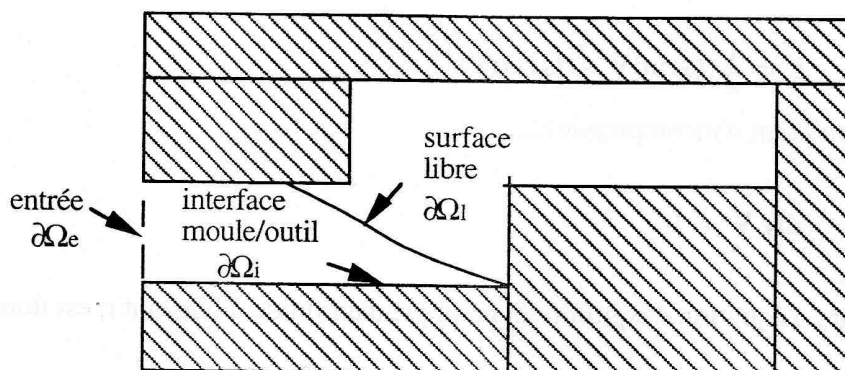


Figure (III-1): exemple de moule de remplissage

- à la surface du fluide $\partial\Omega_i$

$$(III-8) \quad \sigma \mathbf{n} = \overline{\mathbf{T}}$$

\mathbf{n} représentant le vecteur unitaire normal extérieur à la frontière $\partial\Omega_i$.

$\overline{\mathbf{T}}$ représente le vecteur contrainte imposé. Il est à noter que cette surface du fluide $\partial\Omega_i$, qu'on aurait tendance à appeler surface libre ne l'est en fait pas. En effet, le vecteur contrainte imposé $\overline{\mathbf{T}}$ peut résulter de plusieurs phénomènes physiques tels que la pression générée par la compression de gaz résiduels dans le moule lorsqu'il n'est pas muni d'évents ou que le débit de fuite de ceux-ci est insuffisant, ou bien encore la tension superficielle à la surface du fluide. Dans le premier cas, si π désigne la pression des gaz confinés à un instant donné dans le moule, la condition à appliquer est :

$$(III-9) \quad \sigma \mathbf{n} = -\pi \mathbf{n}$$

Dans le cas de la tension superficielle, celle-ci peut s'assimiler à une contrainte normale Γ à la surface, qui est inversement proportionnelle au rayon de courbure moyen r_c local (TEMPERLEY & TREVENA (1977)):

$$(III-10) \quad \sigma \mathbf{n} = -\Gamma \mathbf{n} \text{ avec } \Gamma = \frac{2\mathbf{T}_S}{r_c}$$

\mathbf{T}_S : représente la tension superficielle

- à l'interface fluide/moule $\partial\Omega_i$, on a :

un contact strictement collant se traduit par la nullité du vecteur vitesse

$$(III-11-a) \quad \mathbf{V} = 0$$

ou, un contact avec frottement

$$(III-11-b) \quad \sigma \mathbf{n} = \tau_w \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_i$$

On établit la loi de frottement en considérant le cisaillement d'une couche de fine épaisseur d'un matériau newtonien emprisonné entre un outil et un fluide newtonien. La loi de frottement donne l'expression de la cission en fonction du taux de cisaillement de cette couche. Si h est l'épaisseur de la couche lubrifiante cisillée (figure (III-2)), de vitesse de glissement relative \mathbf{V}_g , la cission de frottement s'écrit :

$$(III-12) \quad \sigma_c = \alpha_f |\mathbf{V}_g|^{p_f - 1} \mathbf{V}_g$$

où α_f est le coefficient de frottement.

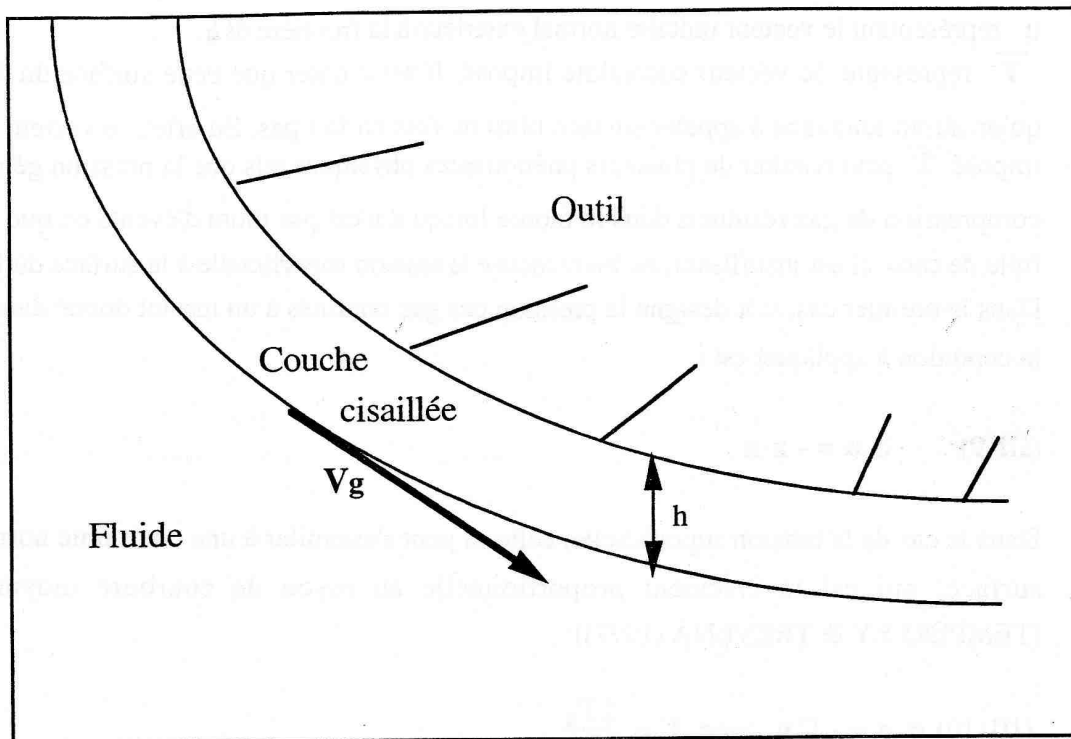


Figure (III-2) : schéma d'une couche cisailée pour l'établissement d'une loi de frottement

L'outil subit une cission de signe opposé à σ_c , on aboutit ainsi à l'établissement de la loi de frottement.

$$(III-13) \quad \tau_w = - \alpha_f |\mathbf{V}_g|^{p_f - 1} \mathbf{V}_g$$

p_f représente la sensibilité à la vitesse de frottement. Dans le cas Newtonien, $p_f = 1$.

On peut également exprimer la loi de frottement de la manière suivante :

$$(III-14) \quad \tau_w = - 2\mu_0 \frac{1}{2h} \mathbf{V}_g$$

$$(III-15) \quad \alpha_f = \frac{\mu_0}{h}$$

- dans la section d'entrée du fluide,
on impose, soit un profil de vitesse d'injection $\overline{\mathbf{V}}(x,t)$, soit une pression d'injection $P'(t)$.

$$(III-16) \quad \mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}}(x,t) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = -P'(t) \mathbf{n}$$

III-1-3-Formulation faible : principe des puissances virtuelles

Si Ω désigne le domaine occupé par le fluide à l'instant t , l'équilibre mécanique est donné par le principe des puissances virtuelles :

$$(III-17) \quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}^* \, dS + \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}^* \, d\Omega = \rho \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{V}^* \, d\Omega$$

Pour tout champ de vitesse virtuel \mathbf{V}^* possédant les propriétés nécessaires de dérivabilité et d'intégration.

\mathbf{T} représente le vecteur contrainte des forces extérieures

$$(III-18) \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$$

Pour prendre en compte la condition d'incompressibilité définie par $\text{div} \mathbf{V} = 0$, une méthode de pénalisation est utilisée. Elle consiste à supposer le fluide très faiblement compressible. Ainsi, on relie la divergence du champ de vitesse à la valeur de la pression par l'intermédiaire d'une constante positive de valeur élevée ρ_p :

$$(III-19) \quad P = -\rho_p \mu_0 \text{div} \mathbf{V} \quad \text{pour} \quad \rho_p \gg 0 .$$

L'équation (III-17) devient alors, en vertu de cette relation et du comportement newtonien (III-1) :

$$(III-20) \quad \int_{\Omega} 2 \mu_0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \, d\Omega + \rho_p \int_{\Omega} \mu_0 \text{div} \mathbf{V} \text{div} \mathbf{V}^* \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}^* \, dS - \rho \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}^* \, d\Omega + \rho \int_{\Omega} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{V}^* \, d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{V}^*$$

Le second terme apparaît comme le terme de pénalisation de l'incompressibilité. Cette équation intégrale d'équilibre sera résolue à chaque pas de temps, par une discrétisation par éléments finis, dans le cadre d'un calcul incrémental.

III-2-Equations de l'écoulement en formulation incrémentale

III-2-1-Principe du schéma d'intégration temporelle

L'écoulement instationnaire se déroule durant l'intervalle de temps $[0, T]$ qui peut être découpé en intervalles de temps $[t, t + \Delta t]$ où Δt est connu. Le problème doit alors être résolu sur chaque intervalle de temps. Connaissant la configuration du fluide à l'instant t , Ω_t , il s'agit de la déterminer à l'instant $t + \Delta t$. La configuration à l'instant t est considérée comme la configuration de référence. C'est ce qu'on appelle la méthode du lagrangien réactualisé.

Une particule fluide localisée à l'instant t sur la configuration Ω_t se trouvera à l'instant $t + \Delta t$ sur la configuration $\Omega_{t + \Delta t}$. On écrit le vecteur vitesse de cette particule fluide en ces deux instants:

$$(III-21) \quad \mathbf{V}^t = \mathbf{V}(\mathbf{x}^t, t) \quad \forall \mathbf{x}^t \in \Omega_t$$

$$(III-22) \quad \mathbf{V}^{t+\Delta t} = \mathbf{V}(\mathbf{x}^t, t+\Delta t) \quad \forall \mathbf{x}^t \in \Omega_{t + \Delta t}$$

Il nous faut préciser maintenant, comment dans le cadre de cette discrétisation temporelle, nous allons prendre en compte les effets d'inertie et comment nous nous proposons d'actualiser la configuration d'un incrément à l'autre.

Ces équations seront donc prises en compte dans l'équation (III-20) pour la résolution numérique. Une fois le système résolu on passe au pas de temps suivant, la réinitialisation se fera à l'aide des variables lagrangiennes $t + \Delta t$, $\mathbf{x}^{t+\Delta t}$. Les coordonnées spatiales initiales seront celles qui viennent d'être calculées et le temps initial sera celui qui vient d'être atteint.

Pour ce qui est de l'accélération, nous avons choisi d'utiliser un schéma d'intégration de type NEWMARK(1959) sur l'incrément de temps $[t, t + \Delta t]$:

$$(III-23) \quad \mathbf{V}^{t+\zeta} = \mathbf{V}^t + \zeta((1 - \alpha)\gamma^t + \alpha\gamma^{t+\Delta t}) \quad \zeta \in [0, \Delta t]$$

où α est un paramètre déterminant le caractère plus ou moins implicite du schéma et pris dans l'intervalle $]0,1]$. Pour $\alpha = 1$, le schéma est purement implicite. Ceci revient en fait à supposer l'accélération de particule fluide constante au cours du temps :

$$(III-24) \quad \gamma^* = (1 - \alpha)\gamma^t + \alpha\gamma^{t+\Delta t} \text{ est constant au cours de l'incrément de temps.}$$

et

$$(III-25) \quad \mathbf{V}^{t+\Delta t} = \mathbf{V}^t + \Delta t \gamma^* = \mathbf{V}^t + \Delta t ((1 - \alpha)\gamma^t + \alpha\gamma^{t+\Delta t})$$

Si on considère qu'entre t et $t + \Delta t$, le mouvement de chaque particule est uniformément accéléré, d'accélération constante γ^* , on déduit des équations (III-23) et (III-24)

$$(III-26) \quad \mathbf{x}^{t+\zeta} = \mathbf{x}^t + \mathbf{V}^t \zeta + \gamma^* \frac{\zeta^2}{2}$$

et donc en particulier,

$$(III-27) \quad \mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{x}^t + \Delta t \mathbf{V}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \gamma^* = \mathbf{x}^t + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{V}^t + \mathbf{V}^{t+\Delta t})$$

Les équations (III-25) et (III-27) permettent donc d'exprimer la prise en compte des effets d'inertie et l'actualisation de la configuration. Ainsi si Ω_t est connu au temps t , c'est à dire \mathbf{x}^t connu, ainsi que le champ de vitesse \mathbf{V}^t et d'accélération γ^t , il nous faut écrire l'équation d'équilibre de la configuration $\Omega_{t+\Delta t}$:

$$(III-28) \quad \int_{\Omega_{t+\Delta t}} 2\mu_0 \dot{\epsilon}^{t+\Delta t} : \dot{\epsilon}^* d\Omega + \rho_p \int_{\Omega_{t+\Delta t}} \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{V}^{t+\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{V}^* d\Omega - \int_{\partial \Omega_{t+\Delta t}} \mathbf{T}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{V}^* dS - \rho \int_{\Omega_{t+\Delta t}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}^* d\Omega = - \frac{\rho}{\alpha} \int_{\Omega_{t+\Delta t}} \left(\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{V}^{t+\Delta t} - \mathbf{V}^t) - (1-\alpha)\gamma^t \right) \cdot \mathbf{V}^* d\Omega$$

Comme on peut le constater sur cette équation, bien qu'on ait un comportement linéaire du fluide, cette équation est non linéaire à cause du fait que l'intégration se fait sur $\Omega_{t+\Delta t}$ qui dépend de $\mathbf{V}^{t+\Delta t}$ à travers l'équation (III-27). Une résolution exacte de cette équation conduit donc à une résolution itérative. Nous avons préféré pour notre part, faire l'hypothèse des petites perturbations de façon à conserver la linéarité. On suppose dans ce cas là, que le pas de temps est suffisamment petit pour que $\Omega_{t+\Delta t}$ ne soit pas trop différent de Ω_t .

En effet si on part de l'égalité suivante :

$$(III-29) \quad \mathbf{x}^{t+\Delta t}(\mathbf{x}^t, \Delta t) = \mathbf{x}^t + \mathbf{U}^{t+\Delta t}(\mathbf{x}^t, \Delta t)$$

où $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ représente le déplacement incrémental entre t et $t+\Delta t$. La matrice jacobienne $\mathbf{F}^{t,t+\Delta t}$ est telle que

$$(III-30) \quad \mathbf{F}_{ij}^{t,t+\Delta t} = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i^{t+\Delta t}}{\partial x_j^t}$$

δ_{ij} représentant le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$)

Si Δt est assez petit, alors le déplacement est alors de faible amplitude

$$(III-31) \quad \mathbf{x}^{t+\Delta t} \approx \mathbf{x}^t$$

$$(III-32) \quad \mathbf{F}^{t,t+\Delta t} \approx \mathbf{I} \text{ (tenseur identité)}$$

En approximant ainsi $\Omega_{t+\Delta t}$ par Ω_t l'équation (III-28) devient :

$$(III-33) \quad \int_{\Omega_t} 2 \mu_0 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{t+\Delta t} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* d\Omega + \rho_p \int_{\Omega_t} \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{V}^{t+\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{V}^* d\Omega - \int_{\Omega_t} \mathbf{T}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{V}^* dS - \rho \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}^* d\Omega = - \frac{\rho}{\alpha} \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{V}^{t+\Delta t} - \mathbf{V}^t) - (1-\alpha)\boldsymbol{\gamma}^t \right) \cdot \mathbf{V}^* d\Omega \quad \forall \mathbf{V}^*$$

avec

$$(III-34) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} [\mathbf{Grad} \mathbf{V}^{t+\Delta t} + (\mathbf{Grad} \mathbf{V}^{t+\Delta t})^T]$$

Dans cette équation, la seule inconnue est le champ de vitesse $\mathbf{V}^{t+\Delta t}$. Pour sa résolution il faut connaître l'accélération à l'instant t ainsi que la vitesse au même instant. C'est pour cette raison qu'à l'instant initial le schéma est totalement implicite $\alpha = 1$ (le terme en $\boldsymbol{\gamma}^t$ disparaît). Durant les incréments suivants, la valeur $\alpha = 1/2$ sera choisie pour des raisons de stabilité ($\alpha \geq \frac{1}{2}$ garantit une stabilité inconditionnelle du schéma) et de précision.

Une fois l'équation (III-33) résolue, on obtiendra la vitesse à l'instant $t + \Delta t$ qui jusqu'alors était inconnue et on déduira donc de la relation (III-25) la valeur de l'accélération $\boldsymbol{\gamma}^{t+\Delta t}$. Enfin l'actualisation de la configuration est effectuée par (III-27).

III-3-Discrétisation par éléments finis

Le domaine de calcul Ω_t est approximé par N éléments élémentaires Ω_e suivant la méthode usuelle HUGHES(1987). Les éléments sont déterminés par des vecteurs de coordonnées \mathbf{x}^n de chaque noeud n . On utilise des éléments isoparamétriques, c'est-à-dire que les coordonnées matérielles, le champ de vitesse etc ... sont interpolés dans chaque élément par les mêmes fonctions d'interpolation nodales N_n définies dans l'élément de référence.

III-3-1- Cas général pour des problèmes de dimension 2 ou 3

Dans le cas plan, chaque point appartenant au domaine Ω_t est repéré au moyen de points nodaux de la manière suivante

$$(III-35) \quad \mathbf{x} = \sum_n N_n(\xi) \mathbf{x}^n \quad \mathbf{V} = \sum_n N_n(\xi) \mathbf{V}^n$$

\mathbf{V}^n : vecteur nodal de composantes V_i^n , $i = 1, N$ où N est la dimension du calcul ($N = 2$ dans notre cas)

ξ : vecteur de coordonnées dans l'élément de référence relié au vecteur de coordonnées \mathbf{x} de l'espace réel par une application bijective (les fonctions d'interpolations des noeuds sont prolongées par zéro à l'extérieur des éléments contenant ces noeuds).

En utilisant la convention de sommation des indices répétés, le tenseur des vitesses de déformation s'écrit de la manière suivante :

$$(III-36) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (N_{n,j} \delta_{ik} + N_{n,i} \delta_{jk}) V_k^n$$

La discrétisation de l'équation (III-33) nous conduit au système d'équations suivant, dans lequel $V_i^{n,t+\Delta t}$ est la i ème composante de la vitesse au noeud n , à l'instant $t + \Delta t$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t} \mu_0 (N_{n,j} N_{m,j} \delta_{kl} + N_{n,l} N_{m,k}) V_l^{m,t+\Delta t} d\Omega \\
+ & \rho_p \int_{\Omega_t} \mu_0 N_{n,k} N_{m,l} V_l^{m,t+\Delta t} d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} T_k^t N_n dS - \rho \int_{\Omega_t} g_k N_n d\Omega \\
& = -\frac{\rho}{\alpha} \int_{\Omega_t} \left(\frac{N_m}{\Delta t} (V_k^{m,t+\Delta t} - V_k^{m,t}) - (1-\alpha) N_m \gamma_k^{m,t} \right) N_n d\Omega
\end{aligned}$$

(III-37)

On utilise la méthode de GAUSS qui consiste à évaluer l'intégrale d'une fonction quelconque à l'aide de la somme des valeurs de celle-ci en Nbp points appelés points d'intégration et des poids associés à ces points. Cette méthode permet par construction des points et des poids, de calculer la valeur exacte de l'intégrale de polynômes jusqu'au degré $2n - 1$ sur un élément de référence.

L'équation précédente peut s'écrire sous forme d'un système de la manière suivante :

$$(III-38) \quad [\mathbf{K}] \{ \mathbf{V}^{t+\Delta t} \} = \{ \mathbf{F} \}$$

$\{ \mathbf{V}^{t+\Delta t} \}$ représente le vecteur global constitué des composantes des vecteurs nodaux qu'il faudra déterminer. $[\mathbf{K}]$ représente la matrice globale obtenue après assemblage des matrices élémentaires $[\mathbf{K}^e]$ calculées sur chaque élément du maillage tandis que $\{ \mathbf{F} \}$ est le vecteur chargement global constitué des composantes des vecteurs chargement nodaux. $[\mathbf{K}]$ peut être définie de la manière suivante :

$$(III-39) \quad [\mathbf{K}] = [\mathbf{K}^{visc}] + [\mathbf{K}^{incp}] + [\mathbf{K}^{iner}]$$

où $[\mathbf{K}^{visc}]$, $[\mathbf{K}^{incp}]$ et $[\mathbf{K}^{iner}]$ sont respectivement les matrices relatives aux termes de viscosité, d'incompressibilité et d'inertie. On peut également écrire $\{ \mathbf{F} \}$ de la manière suivante :

$$(III-40) \quad \{ \mathbf{F} \} = \{ \mathbf{F}^{grav} \} + \{ \mathbf{F}^{ext} \} + \{ \mathbf{F}^{iner} \}$$

$\{ \mathbf{F}^{grav} \}$, $\{ \mathbf{F}^{ext} \}$ et $\{ \mathbf{F}^{iner} \}$ sont respectivement les vecteurs relatifs à la gravité, aux efforts extérieurs et à l'inertie. Les termes des différentes matrices et des différents vecteurs explicités sont les suivants :

$$(III-41) \quad K_{nkml}^{visc} = \int_{\Omega_t} \mu_0 (N_{n,j} N_{m,j} \delta_{kl} + N_{n,l} N_{m,k}) d\Omega$$

$$(III-42) \quad K_{nkml}^{incp} = \rho_p \int_{\Omega_t} \mu_0 N_{n,k} N_{n,k} d\Omega$$

$$(III-43) \quad K_{nkml}^{iner} = \frac{\rho}{\alpha \Delta t} \int_{\Omega_t} N_m N_n \delta_{kl} d\Omega$$

$$(III-44) \quad F_{nk}^{grav} = \rho \int_{\Omega_t} g_k N_n d\Omega$$

$$(III-45) \quad F_{nk}^{ext} = \int_{\partial\Omega_t} T_k^{t+\Delta t} N_n d\Omega$$

$$(III-46) \quad F_{nk}^{iner} = \frac{\rho}{\alpha} \int_{\Omega_t} \left(\frac{N_m}{\Delta t} (V_k^{m,t+\Delta t} - V_k^{m,t}) - (1-\alpha) N_m \gamma_k^{m,t} \right) N_n d\Omega$$

Le code remplissage a été développé par Frédéric MUTTIN à partir du code de forgeage FORGE2 où l'inertie et la gravité n'étaient pas pris en compte.

Les éléments utilisés dans le cadre bidimensionnel, sont des éléments P2P0 c'est à dire des triangles à six noeuds avec une approximation en pression constante par élément. Concernant l'intégration, on procèdera à une intégration complète par la méthode de GAUSS avec 7 points d'intégration sauf pour la matrice relative à l'incompressibilité qui sera sous intégrée (HUGHES (1979)) avec 3 points. Par rapport à un calcul newtonien sans inertie, où il est d'usage de prendre $\rho_p = 10^5$, on peut s'attendre à ce qu'en remplissage, les termes d'inertie soient dominants dans une bonne partie de l'écoulement. Pour pouvoir imposer effectivement l'incompressibilité dans ces conditions, on définit le paramètre de pénalisation ρ_p de la manière suivante :

$$(III-47) \quad \rho_p = 10^5 \text{Max}(1, \rho/\mu_0\alpha\Delta t)$$

L'expression de \mathbf{T} varie suivant qu'on est à l'interface, sur la surface libre ou sur la section d'entrée (voir III-1-2).

III-3-2- Cas axisymétrique

La discrétisation définie plus haut est générale, pour des problèmes de dimension 2 ou 3. Dans le cas de résolution d'un problème présentant une symétrie de révolution, on doit introduire quelques modifications à la formulation précédente. En effet, si on note (r, θ, z) , les coordonnées cylindriques d'un point du domaine, l'axisymétrie rend le problème indépendant de la coordonnée θ , ce qui ramène à une formulation 2D en (r, z) . M. ABOUAF(1985) a montré que lorsqu'on transpose l'interpolation classique des coordonnées planes (x_1, x_2) aux coordonnées (r, z) , on ne peut prétendre décrire correctement une déformation incompressible et a proposé une autre interpolation qui est l'interpolation en (r^2, z) :

$$(III-48) \quad r^2 = \sum_{n=1}^{Nbn} N_n(\xi) (r^2)^n \quad \text{et} \quad z = \sum_{n=1}^{Nbn} N_n(\xi) z^n$$

On note (V_r, V_z) les coordonnées de la vitesse. Les problèmes cités plus haut viennent de la présence de rV_r dans l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques. L'interpolation classique conduit à une expression non linéaire de rV_r en fonction de ses valeurs nodales. En choisissant d'interpoler le carré de la coordonnée radiale, l'expression de rV_r s'obtient en dérivant simplement r^2 par rapport au temps :

$$(III-49) \quad rV_r = \sum_{n=1}^{Nbn} N_n(\xi) r^n V_r^n$$

En ce qui concerne l'inertie, on ne s'intéressera qu'à γ_r , composante radiale de l'accélération. Un raisonnement analogue au précédent amène à calculer la dérivée seconde de r^2 et on aboutit à

$$(III-50) \quad V_r^2 + r\gamma_r = \sum_{n=1}^{Nbn} N_n(\xi) (V_r^{2n} + r^n \gamma_r^n)$$

quelques manipulations algébriques conduisent à

$$(III-51) \quad \gamma_r = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{Nbn} N_n(\xi) r^n \gamma_r^n + \frac{1}{r^3} \left(\left(\sum_{k=1}^{Nbn} N_k(\xi) r^{k^2} \right) \left(\sum_{k=1}^{Nbn} N_k(\xi) V_r^{k^2} \right) - \sum_{k=1}^{Nbn} (N_k(\xi) r^k V_r^k)^2 \right)$$

ou encore à

$$(III-52) \quad \gamma_r = \frac{1}{r} \sum_n^{Nbn} N_n r^n \gamma_r^n + \sum_{k \neq n} \{N_n N_k (r^k V_r^n - r^n V_r^k)^2\}$$

Il a été démontré que sauf pour un maillage dégénéré, le second terme de l'expression de l'accélération peut être négligé devant le premier terme (L.GASTON (1992)). Finalement on interpole l'accélération radiale de la même manière que la vitesse radiale.

$$(III-53) \quad r\gamma_r = \sum_{n=1}^{Nbn} N_n(\xi) r^n \gamma_r^n$$

III-4- Cas de résolution du problème mixte avec utilisation d'éléments enrichis $P_2^+ - P_1$

III-4-1-Formulation variationnelle

A partir de l'équation d'équilibre (III-17) et de la condition d'incompressibilité, le problème mixte, d'inconnues le vecteur vitesse et le champ de pression en chaque point s'écrit de la manière suivante : trouver (V, p) appartenant à $\vartheta \times L^2(\Omega)$ tels que

$$\int_{\Omega} 2\mu_0 \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon}^* d\Omega - \int_{\Omega} P \operatorname{div} V^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} T \cdot V^* dS - \rho \int_{\Omega} g \cdot V^* d\Omega = -\rho \int_{\Omega} \gamma V^* d\Omega \quad \forall V^* \in \vartheta$$

(III-54)
et

$$(III-55) \quad \int_{\Omega} P^* \operatorname{div} V d\Omega = 0 \quad \forall P^* \in L^2(\Omega)$$

Les espaces fonctionnels étant définis ainsi :

$$\vartheta = H^1(\Omega)^2 \quad H^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq 2 \right\}$$

On peut éviter de résoudre le système complet en utilisant une méthode de Lagrangien augmenté. L'équation d'équilibre devient alors, après ajout du terme d'augmentation :

$$\int_{\Omega} 2\mu_0 \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon}^* d\Omega - \int_{\Omega} p \mathbf{V}^* d\Omega + \rho_p \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}^* dS - \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}^* d\Omega$$

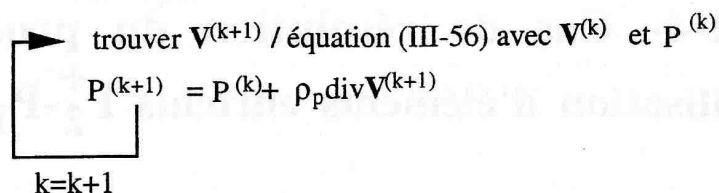
$$= -\rho \int_{\Omega} \gamma \mathbf{V}^* d\Omega \quad \forall \mathbf{V}^* \in \mathcal{V}$$

(III-56)

L'algorithme d'UZAWA, déjà mis en oeuvre par TRONEL dans le cadre de la simulation du forgeage (TRONEL, (1993) permet alors de calculer itérativement \mathbf{V} et p :

$$p^{(0)} = 0$$

itération (k) :



L'algorithme itératif ci-dessus est appliqué à l'équation d'équilibre (III-56) écrite pour les inconnues $\mathbf{V}^{t+\Delta t}$ et $p^{t+\Delta t}$, et dans laquelle on exprime l'accélération γ au moyen de $\mathbf{V}^{t+\Delta t}$ et \mathbf{V}^t . On résout donc par UZAWA l'équation suivante :

$$\int_{\Omega_t} 2\mu_0 \dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} : \dot{\varepsilon}^* d\Omega + \rho_p \int_{\Omega_t} \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{V}^{t+\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{V}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{V}^* dS$$

$$- \rho \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}^* d\Omega - \int_{\Omega_t} p^{t+\Delta t} \operatorname{div} \mathbf{V}^* d\Omega = -\frac{\rho}{\alpha} \int_{\Omega_t} \left(\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{V}^{t+\Delta t} - \mathbf{V}^t) - (1-\alpha)\gamma^t \right) \cdot \mathbf{V}^* d\Omega \quad \forall \mathbf{V}^*$$

(III-57)

III-4-2-Les éléments utilisés

La méthode précédente sera efficace si l'on utilise une approximation discontinue par élément pour la pression.

Dans ce cas en effet la matrice n'augmente pas en largeur de bande puisqu'elle se calcule au niveau de l'élément et d'autre part, la réactualisation de la pression se fait à moindre coût élément par élément. Nous avons testé l'approximation linéaire par élément pour la pression.

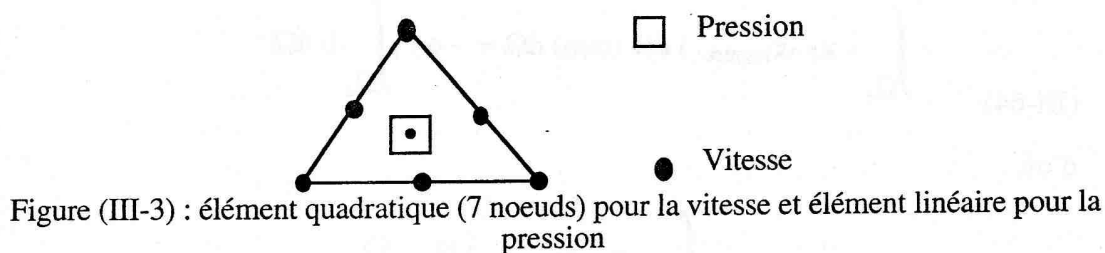
L'élément P2P1

Cet élément triangulaire est caractérisé par une approximation quadratique de la vitesse et une approximation linéaire de la pression. On ajoute à la base quadratique utilisée pour la méthode P2P0 une fonction du troisième degré valant 1 au centre et 0 sur les bords. Cette fonction "bulle" b peut être rajoutée sans modifier les autres fonctions de base. Dans ce cas, les degrés de liberté α_7 associés à la fonction bulle diffèrent de la vitesse au barycentre, car les fonctions N_n ne s'annulent pas en ce point :

$$(III-58) \quad \mathbf{V} = \sum_{n=1}^6 N_n(\xi) \mathbf{V}^n + \alpha_7 b$$

L'approximation en pression étant linéaire discontinue, on écrit sur chaque élément :

$$(III-59) \quad P(x_1, x_2) = a_0 + a_1 (x_1 - x_{1 \text{ centre}}) + a_2 (x_2 - x_{2 \text{ centre}})$$



L'ajout de la fonction bulle peut paraître artificiel alors qu'elle est nécessaire pour vérifier la condition de compatibilité vitesse-pression. Cet élément est du second ordre.

Remarque

Une méthode d'élimination locale du septième noeud permet de se ramener à la résolution du problème précédent obtenu avec le P2P0 (FORTIN & FORTIN (1985)).

Le calcul des degrés de libertés s'obtient en utilisant la condition de divergence nulle avec cet élément :

$$(III-60) \quad \int_{\Omega_e} \operatorname{div} \mathbf{V} \, d\Omega = 0$$

$$(III-61) \quad \int_{\Omega_e} (x_1 - x_{1\text{centre}}) \operatorname{div} \mathbf{V} \, d\Omega = 0$$

$$(III-62) \quad \int_{\Omega_e} (x_2 - x_{2\text{centre}}) \operatorname{div} \mathbf{V} \, d\Omega = 0$$

Les deux dernières relations permettent de calculer α_7 en fonction des \mathbf{V}^n . Explicitons le calcul des degrés de liberté α_7 :

$$(III-63) \quad \int_{\Omega_e} (x_1 - x_{1\text{centre}}) \operatorname{div} (\alpha_7 b) \, d\Omega = - \int_{\Omega_e} (x_1 - x_{1\text{centre}}) \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^6 N_n \mathbf{V}^n \right) \, d\Omega$$

or

$$(III-64) \quad \int_{\Omega_e} (x_1 - x_{1\text{centre}}) \operatorname{div} (\alpha_7 b) \, d\Omega = - \alpha_7 \int_{\Omega_e} b \, d\Omega$$

d'où

$$(III-65) \quad \alpha_{71} = \frac{\sum_{n=1}^6 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_e} (x_1 - x_{1\text{centre}}) N_{n,i} \, d\Omega}{\int_{\Omega_e} b \, d\Omega} V_i^n$$

$$(III-66) \quad \alpha_{72} = \frac{\sum_{n=1}^6 \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_e} (x_2 - x_{2\text{centre}}) N_{n,i} \, d\Omega}{\int_{\Omega_e} b \, d\Omega} V_i^n$$

Après avoir construit les matrices (14:14) et les vecteurs élémentaires (14), on les condense en matrices (12:12) et vecteurs (12) en utilisant les relations donnant α_7 en fonction de \mathbf{V}^n ($n = 1,6$), soit

$$(III-67) \quad \{V_e\} = (V_i^n, \alpha_{7i})^T, \quad n=1, 6, i=1, 2$$

et

$$(III-68) \quad \{\widehat{V}_e\} = (V_i^n)^T, \quad n=1, 6$$

L'opération de condensation consiste à transformer $\{V_e\}^T [K] \{V_e\}$ en $\{\widehat{V}_e\}^T [K] \{\widehat{V}_e\}$.

Sachant que $\{V_e\}$ peut s'écrire sous la forme $[D] \{V_e\}$ en utilisant $\alpha_7 = f(V^n, n=1,6)$, on obtient :

$$(III-69) \quad [K'] = [D]^T [K] [D]$$

En conclusion, l'implantation de cet élément enrichi exige peu de modification par rapport au solveur classique P2P0 : l'ajout de la fonction "bulle", la condensation des matrices et des vecteurs élémentaires. Du point de vue temps de calcul, on peut s'attendre également à un coût supplémentaire faible par rapport au solveur P2P0.

III-5-Evolution du contact

L'écoulement étant amené à évoluer dans le moule, il est nécessaire d'étudier l'évolution du contact entre le domaine géométrique discrétisé occupé par le fluide et la surface du moule également discrétisée en une succession de segments linéaires. A chaque incrément de temps, après la réactualisation de la configuration du fluide, certains noeuds pénètrent dans le moule comme le montre la figure suivante :

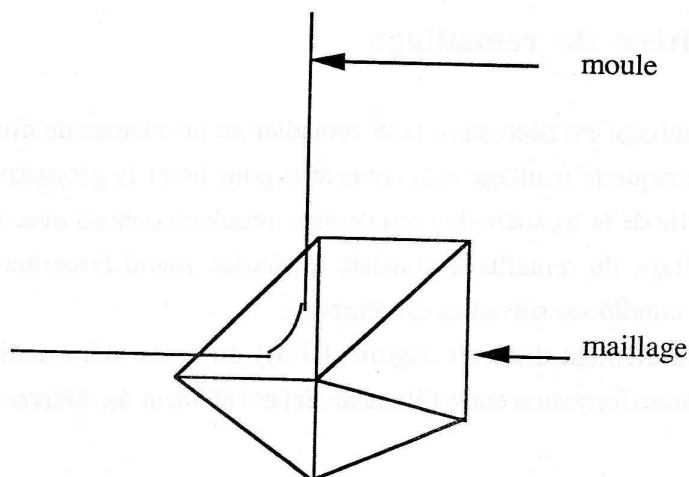


Figure (III-4) : pénétration du maillage dans le moule

Pour remédier à cela, on a deux possibilités:

- on réduit le pas de temps, ce qui réduit par la même occasion les déplacements nodaux. Le nouveau pas de temps est choisi de telle sorte que les noeuds qui auraient pénétré dans le moule se retrouvent à la surface de celui-ci, ou tout au moins dans une certaine couche limite donnée par une tolérance de contact,
- une autre méthode plus efficace car ne nécessite pas une réduction du pas de temps et n'affecte presque pas la précision des calculs, consiste à projeter orthogonalement un noeud qui se trouve dans l'outil sur sa surface. De plusieurs projections orthogonales, on ne retiendra que celle qui est proche de l'intersection de la trajectoire du noeud et de la surface du moule. Ce traitement est simple si la surface du moule est constituée de petits segments.

III-6-Technique de remaillage automatique

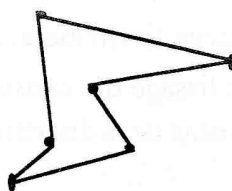
Dans le procédé de remplissage, on est confronté à de grandes déformations et donc le maillage initial du domaine fluide convecté avec les particules matérielles, subit d'énormes distorsions pour aboutir à un maillage dégénéré. Dans ce cas, le calcul lorsqu'il n'est pas interrompu, donne des résultats peu fiables. Il faut donc générer un nouveau maillage où les éléments sont beaucoup plus réguliers que ceux du maillage précédent pour permettre la bonne poursuite des calculs. Ce nouveau maillage est obtenu grâce à une méthode de remaillage automatique préalablement développée dans le cadre de la simulation du forgeage des métaux (COUPEZ(1993)). Mais plusieurs critères doivent être vérifiés avant un éventuel remaillage.

III-6-1 Critère de remaillage

L'étape de remaillage est nécessaire pour remédier aux problèmes de distorsions d'éléments qui apparaissent lorsque le maillage est convecté et pour lisser la géométrie de la zone de contact lorsqu'une partie de la frontière de l'écoulement rentre en contact avec la surface du moule.

La première étape du remaillage consiste à décider quand remailler. La décision est prise lorsqu'une des conditions suivantes est remplie :

- existence d'un élément distordu (figure (III-5)) du à une déformation trop importante (le jacobien de la transformation entre l'élément réel et l'élément de référence devient négatif).



Figure(III-5) : élément dégénéré

- courbure d'un côté d'élément fini trop importante en surface libre : le rapport "flèche"/"corde" du côté quadratique (parabolique) est supérieur à une valeur critique donnée.
- Lorsque la répartition des noeuds de la frontière ne permet pas une description précise de la zone de contact (volume pénétré localement ou globalement trop important).
Lorsque le volume pénétré est de précision supérieure à celle imposée, la valeur donnée par l'utilisateur étant le seuil supérieur, le remaillieur est activé.

III-6-2-Contrôle de la géométrie et génération de noeuds frontières

La création de noeuds frontières doit être adaptée à la frontière de l'écoulement car les conditions de contact changent pendant le remplissage des moules. Il s'agit d'abord de contrôler la géométrie réelle du maillage; pour cela, on procède comme suit :

Soit G , la discrétisation de la frontière du maillage courant et G_S la surdiscrétisation (subdivision de tous les côtés) de cette même frontière qui est utilisée pour avoir un maillage plus adapté de la frontière. Tous les points de G_S vérifient la condition d'impénétrabilité. Ainsi, lorsqu'un noeud de G_S pénètre dans l'outil, il est systématiquement projeté sur sa surface. Il est dans ce cas possible de comparer la position du noeud avant et après correction.

Le volume de pénétration est estimé de la manière suivante :

$$\text{Vol}(\Omega \cap O) \approx \sum_{G_S} |\mathbf{x}^s - p(\mathbf{x}^s)| h^s$$

où O représente le volume occupé par le moule, $p(\mathbf{x}^s)$ la projection de \mathbf{x}^s la plus proche se trouvant sur la surface du moule et h^s , la distance entre deux points consécutifs de G_S . La précision géométrique donnée par l'utilisateur permet de contrôler le volume de pénétration.

Il s'agira de trouver une sous-discrétisation plus simple nécessaire et suffisante à partir de G_S pour décrire correctement la géométrie décrite par G_S en éliminant les points qui ne sont pas nécessaires. Concrètement, si l'on considère trois noeuds voisins sur G_S , le noeud milieu est éliminé si cela n'entraîne pas de variation significative du volume local. En particulier si trois points sont alignés, le noeud milieu est systématiquement supprimé. En revanche, un point est maintenu lorsque sa suppression peut entraîner la proximité d'éléments de tailles trop différentes. Lorsque plus aucun autre point ne peut être supprimé, on obtient la discrétisation

minimale suffisante pour bien décrire la frontière. L'étape d'élimination de points de G_S est conjuguée avec une procédure de lissage qui consiste à bouger les noeuds voisins du noeud éliminé sur G_S pour améliorer la qualité de la discrétisation.

III-6-3-Génération de noeuds internes

Il existe divers types de mailleurs automatiques avec des éléments triangulaires. Le générateur de maillage 2D que l'on utilise est basé sur la triangulation de DELAUNAY. Nous adoptons la méthode proposée par HERMELINE(1982) et aussi utilisé par COULOMB(1987).

Tout d'abord, on utilise l'algorithme de triangulation de DELAUNAY qui consiste à créer un maillage sans noeuds intérieurs, s'appuyant uniquement sur des noeuds frontières (figure III-6).

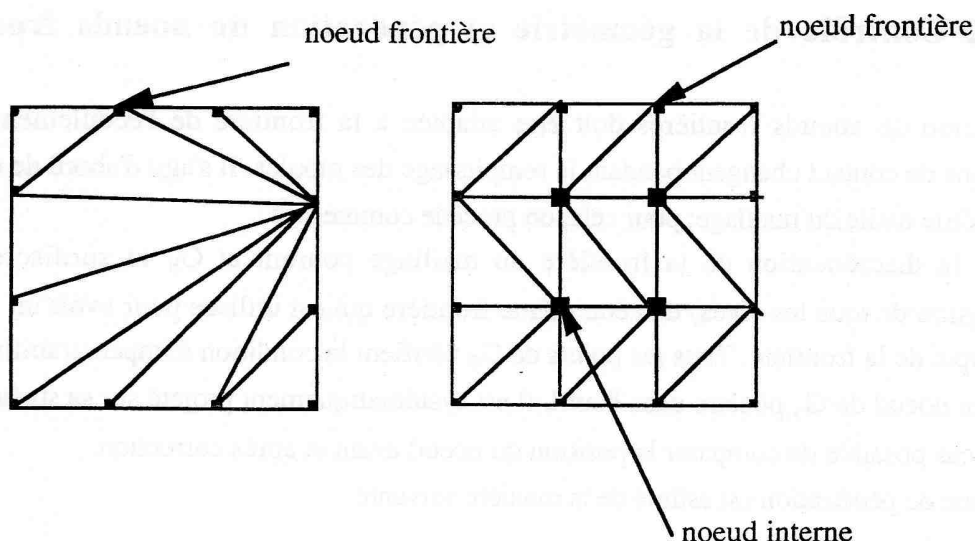


Figure (III-6): triangulation de DELAUNAY et génération de noeuds internes

La taille des mailles est induite par la longueur des côtés frontières. Cette triangulation est la première étape d'une méthode d'itération utilisée pour créer des noeuds internes de façon optimale. Le maillage est affiné en ajoutant des noeuds internes afin d'obtenir des éléments corrects. Soit T un triangle du maillage courant, T est considéré comme trop grand lorsque $S(T)$ qui représente sa surface est telle que

$$(III-71) \quad \frac{S(T)}{(P^1 P^2 P^3)^{\frac{2}{3}}} > 1$$

P^1 , P^2 et P^3 représentent les poids associés aux trois sommets du triangle. Initialement, le poids associé à un noeud frontière est la longueur moyenne de deux côtés ayant le noeud en commun. Si T est trop grand, un noeud est créé dans l'élément tel que sa position soit donnée par :

$$(III-72) \quad \mathbf{x} = \frac{(P^1 \mathbf{x}^1 + P^2 \mathbf{x}^2 + P^3 \mathbf{x}^3)}{P^1 + P^2 + P^3}$$

\mathbf{x}^1 , \mathbf{x}^2 et \mathbf{x}^3 représentent les positions des sommets du triangle. Le poids associé au nouveau point est donnée par la relation suivante :

$$(III-73) \quad P(\mathbf{x}) = \frac{P^1 + P^2 + P^3}{3}$$

Le point est ensuite inséré dans le maillage courant à partir de l'algorithme de triangulation de DELAUNAY. Cette procédure se poursuit jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de triangle jugé trop grand. Deux autres procédures sont utilisées pour parfaire le maillage. La première consiste en une inversion de la diagonale entre deux triangles adjacents. La seconde consiste en une régularisation du maillage en utilisant l'algorithme de LAPLACE. Les noeuds internes sont ramenés au barycentre des noeuds voisins. Ainsi, avec ces deux procédures, on arrive à un maillage quasi optimal.

III-6-4-Transport des variables d'un maillage à l'autre

Les paramètres dépendant du temps sont interpolés de l'ancien maillage au nouveau maillage lorsqu'il y a remaillage pour la bonne poursuite des calculs. La variable d'état E du noeud n du nouveau maillage est obtenu à partir des valeurs de la même variable d'état aux noeuds voisins ($n^i, i=1, Nb$) de l'ancien maillage

$$E(n) = \frac{\sum_{i=1}^{Nb} \frac{E(n^i)}{d(n, n^i)}}{\sum_{i=1}^{Nb} \frac{1}{d(n, n^i)}}$$

Références du chapitre III

J. F. AGASSANT, P. AVENAS, J. Ph. SERGENT, "La mise en forme des matières plastiques", Deuxième Edition, Technique et Documentation (Lavoisier), (1986).

P. BACH, O. HASSAGER, " An Algorithm for the Use of Lagrangien Specification in Newtonian Fluid Mechanics and Applications to Free-Surface Flow ", J. Fluide Mech., Vol. 152, p. 179,1985.

M.BELLET & J.L.CHENOT , " A Lagrangian Approach to Fluid Flow in Metal Casting Processes ", Comput. Methods for Free and Mouving Boundary Problems in heat and Fluide Flow, Eds: LC WROBEL and CA BREBBIA, (1993).

J. J. BRIOIST, F. BAY, M. BELLET, J. L. CHENOT, "Three-Dimensional Finite Element Analysis for the Casting Process", Proc. of the Advanced Computational Methods in Heat Transfer, Southampton, Comput. Mech. Publ., Springer Verlag, (1990).

J. P. CESCUTTI, J. L. CHENOT, "A Geometrical Continuous Remeshing Procedure for Application to Finite Element Calculation of Non-Steady State Forming Processes", Proc. of the Numeta 87 Conf., G. N. Pande and J. Middleton Editor, MartinusNijhoff Pub., Dordrecht, 1, p. 517, (1987).

J. L. CHENOT, "Finite Element Calculation of Unilateral Contact with Friction in non-Steady-State Processes", Proc. of the Numeta 87 Conf., G. N. Pande and Middleton Editor, Martinus Nijhoff Pub., Dordecht, 2, p.T1, (1987).

C. CORSINI, E. WEY, T. COUPEZ, J. L. CHENOT, "Numerical Simulation of the Forging Process with Automatic Remeshing", European Conference on New Advances in Computational Strutural Mechanics, Software Exhibition, Giens, France, (1991).

J. L. COULOMB, "2D and 3D mesh génération. Experiment with Delaunay's tessellation", Proc. Conf. on Automated Mesh Generation and Adaptation, Grenoble, france, 1-2 Oct. (1987).

T. COUPEZ, "Grandes transformations et remaillage automatique", Thèse, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, (1991).

T. COUPEZ, J. L. CHENOT, "Grandes déformations et remaillage automatique", Proc. of Xème Ccongrès Français de Mécanique, Tome 4, Paris, 73-76, September (1991).

G. DHATT, D. M. GAO, A. B. CHEIKH, "A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds", Int. J. Num. Meth. in Eng., 30, 821, (1990).

P. DESTUYNDER, "Modélisation mécanique des milieux continus", Ecole Centrale de Paris, Chatenay Malabry, (1987).

M. FORTIN, A. FORTIN, "Experiments with Several elements for Viscous Incompressible Flows", Int. Journal for Numerical Methods, Vol 5, pp. 911-928,(1985).

L. GASTON, "Simulation Numérique du Remplissage de Moules de Fonderie Axisymétriques : un premier modèle simple d'ALE", Mémoire de stage 1991-1992, D.E.A. de "Metallurgie Spéciale et Matériaux".

F. HERMELINE, "Triangulation Automatique d'un Polyèdre en Dimension n". R.A.I.R.O., Analyse Numérique, 16, n°3, pp. 211-242, (1982).

C.W. HIRT, B. D. NICHOLS, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries", J. Comp. Phys., 39, p.210, (1981).

T. J. R. HUGHES, W. K. LIU, A. BROOKS, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation", J. Comput. Phys. 30, pp.1-60, (1979).

T. J. R. HUGHES, " The finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis ", Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A. (1987).

M. KAWAHARA, H. HIRANO, "A Finite Element Method for High Reynolds Number Viscous Fluid Flow Using Step Explicit Scheme", Int. J. Num. Meth. in Fluids, 3, pp.137-163, (1983).

M. KAWAHARA, K. OHMIYA, "A Finite Element Method Analysis of Density Using the Velocity Correction Method", Int. J. Num. Meth. Fluids, 5, pp. 981-993, (1985).

A. M. LUSH, "Numerical Grid Generation Used for Remeshing Finite Element Analysis of Metal Forming", Proceeding of Second Int. Conf. on Num. Grid Generation in Computational Fluid Mechanics, Miami, 1029-1038, December (1988).

F. MUTTIN, T. COUPEZ, M. BELLET, J. L. CHENOT, "Lagrangian Finite Element Analysis of Transient Viscous Free Surface Flow. Application to Metal Casting Flow Using an automatic Remeshing Technique", submitted to "International Journal for Numerical Method in Engineering", November (1991).

N. M. NEWMARK, "A Method of Computation of Structural Dynamics", ASCE Journal of Engng. Mech. Division, 85, 67-94, (1959).

J. T. ODEN, "Penalty Methods and Selective Reduced Integration for Stokesian Flows", Proc. of the 3rd Int. Conf. on Finite Element in Flow Problems, Univ. of Calgary, 140-154, (1980).

T. OKAMOTO, M. KAWAHARA, "Two-Dimensional Sloshing Analysis by Lagrangian Finite Element Method", Int. J. num. Meth. in fluids, 11, 453-477, (1990).

B. RAMASWAMY, M. KAWAHARA, T. NAKAYAMA, "Lagrangian Finite Element Method for the Analysis of Two Dimensional Sloshing Problems", Int; J. Num. Meth. in Fluids, 7, 953-984, (1987).

B. RAMASWAMY, M. KAWAHARA, "Lagrangian Finite Element Analysis Applied to Viscous Free Surface Flow", Int. J. Num. Meth. in Fluids, 7, 953-984, (1987).

B. RAMASWAMY, "Numerical Simulation of Unsteady Viscous Free Surface Flow", Int. Comp. Physics, 90, 396, (1990).

K. J. RUSCHAK, "A Method for Incorporating Free Boundaries with Surface Tension in Finite Element Fluid-Flow Simulator", Int. J. Num. Meth. Engng, 15, 639-648, (1980).

J. Y. TALON, "Algorithmes d'amélioration de maillages pour éléments finis", Conférence on "Automated Mesh Generation and Adaptation, Grenoble, 1-2 October (1987).

CHAPITRE IV

INTRODUCTION DES MODELES DE TURBULENCE DANS UN MODELE NUMERIQUE BIDIMENSIONNEL

IV - INTRODUCTION DES MODELES DE TURBULENCE DANS UN MODELE NUMERIQUE BIDIMENSIONNEL

Cette partie a pour objectif d'exposer la méthode utilisée pour prendre en compte dans les équations (III-33) en vue d'une résolution cinématique, la viscosité cinématique turbulente additive qui a une expression qui varie selon le modèle de turbulence considéré.

IV-1- Expression du principe des puissances virtuelles dans le cas d'écoulements turbulents

Si l'on part des équations de REYNOLDS (II-16) et qu'on utilise l'hypothèse de BOUSSINESQ (II-17), on obtient pour chaque composante i :

$$(IV-1) \quad \gamma_i = - \left[\frac{1}{\rho} P + \frac{2}{3} k \right]_{,i} + ((\nu_0 + \nu_t) V_{i,j})_{,j} + F_i$$

soit, en écriture vectorielle

$$(IV-2) \quad \gamma = - \frac{1}{\rho} \text{Grad}(P + \frac{2}{3} \rho k) + \text{div}((\nu_0 + \nu_t) \text{Grad } V) + F$$

$$(IV-3) \quad \text{Si on prend } F = \rho g$$

Si l'on considère la seule force gravitationnelle, alors $F = \rho g$ où g est le vecteur accélération de la pesanteur, on peut encore écrire cette équation de la manière suivante :

$$(IV-4) \quad \text{div}((\mu_0 + \mu_t) \dot{\epsilon}) + \rho g - \text{Grad}(P + \frac{2}{3} \rho k) = \rho \gamma \quad \forall x \in \Omega$$

μ_t : viscosité dynamique turbulente, $\mu_t = \rho \nu_t$

Ω : domaine considéré

La forme intégrale, ou forme faible, de l'équation (IV-4), c'est à dire l'énoncé du principe des puissances virtuelles pour l'écoulement moyen, s'écrit, par analogie avec l'équation (III-20)

$$(IV-5) \quad \int_{\Omega} 2(\mu_0 + \mu_t) \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}^* d\Omega + \rho_p \int_{\Omega} (\mu_0 + \mu_t) \operatorname{div} \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V}^* d\Omega - \int_{\Omega} \frac{2}{3} \rho k \operatorname{div} \mathbf{V}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}^* dS - \rho \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}^* d\Omega = - \rho \int_{\Omega} \gamma \cdot \mathbf{V}^* d\Omega$$

La discrétisation spatiale et temporelle donne par analogie avec (III-37)

$$(IV-6) \quad \int_{\Omega_t} (\mu_0 + \mu_t) (N_{n,j} N_{m,j} \delta_{kl} + N_{n,l} N_{m,k}) V_1^{m,t+\Delta t} d\Omega + \rho_p \int_{\Omega_t} (\mu_0 + \mu_t) N_{n,k} N_{m,l} V_1^{m,t+\Delta t} d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} T_k^t N_n dS - \rho \int_{\Omega_t} g_k N_n d\Omega - \frac{2}{3} \int_{\Omega} \rho k^t N_{n,k} d\Omega = - \frac{\rho}{\alpha} \int_{\Omega_t} \left(\frac{N_m}{\Delta t} (V_k^{m,t+\Delta t} - V_k^{m,t}) - (1-\alpha) N_m \gamma_k^{m,t} \right) N_n d\Omega$$

Généralement le terme $\frac{2}{3} \int_{\Omega_t} k^t N_{n,k} d\Omega$ n'est pas pris en compte par de nombreux auteurs.

Les intégrales qui figurent dans l'expression de l'équation (IV-6) sont calculées sur chaque élément par la méthode de GAUSS.

IV-2 - Traitement des lois de paroi

Soit x_p représente la distance qui sépare le point p situé sur la paroi numérique à la vraie paroi physique, on peut schématiser les différentes zones de la manière suivante :

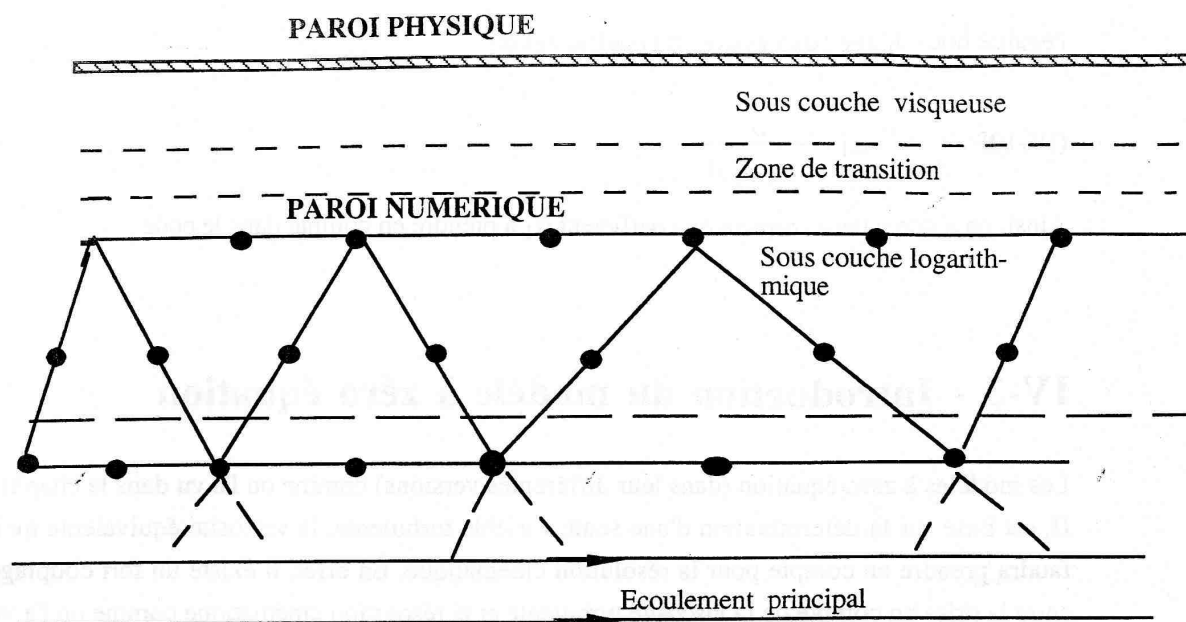


figure (IV-1) : paroi physique et paroi numérique

On peut calculer V_* à partir de la relation

$$(IV-7) \quad f(V_*) = \frac{V_p}{V_*} \quad (V_* \text{ la vitesse de frottement, } f(V_*) \text{ la fonction de REICHARDT})$$

comme on l'a vu dans le paragraphe chapitre II consacré aux lois de paroi, en initialisant x_p , V_p (composante parallèle à la paroi de la vitesse du point p) étant connu après résolution des équations de Navier-Stokes à l'instant précédent. Après l'obtention de V_* , on peut donc

calculer $x_2^+ = \frac{\rho V_* x_p}{\mu_0}$. Si x_2^+ ne se trouve pas dans la zone logarithmique alors une autre valeur

de x_p est choisie. Une autre possibilité plus simple que nous avons adoptée consiste à fixer x_2^+ dans la zone logarithmique c'est-à-dire choisir x_2^+ tel qu'il soit supérieur à 30, et calculer V_* .

Pour pouvoir introduire correctement le frottement dans le code de calcul, il faut établir une analogie entre l'expression de la contrainte de cisaillement $\tau_w = \rho V_*^2$ (vu dans le chapitre II) et l'expression de τ_w issue de la loi de frottement de type visqueux présente dans le code :

$$(IV-8) \quad \tau_w = \alpha_1 V_p^2$$

Pour cela, il faut utiliser l'expression (IV-7). En effet d'après cette expression,

$$(IV-9) \quad \tau_w = \rho \frac{V_p^2}{(f(x_2^+))^2}$$

l'égalité nous donne l'expression du coefficient α_1

$$(IV-10) \quad \alpha_1 = \frac{\rho}{f(x_2^+)^2}$$

Ainsi, on a une valeur correcte du coefficient α_1 à prendre en compte dans le code .

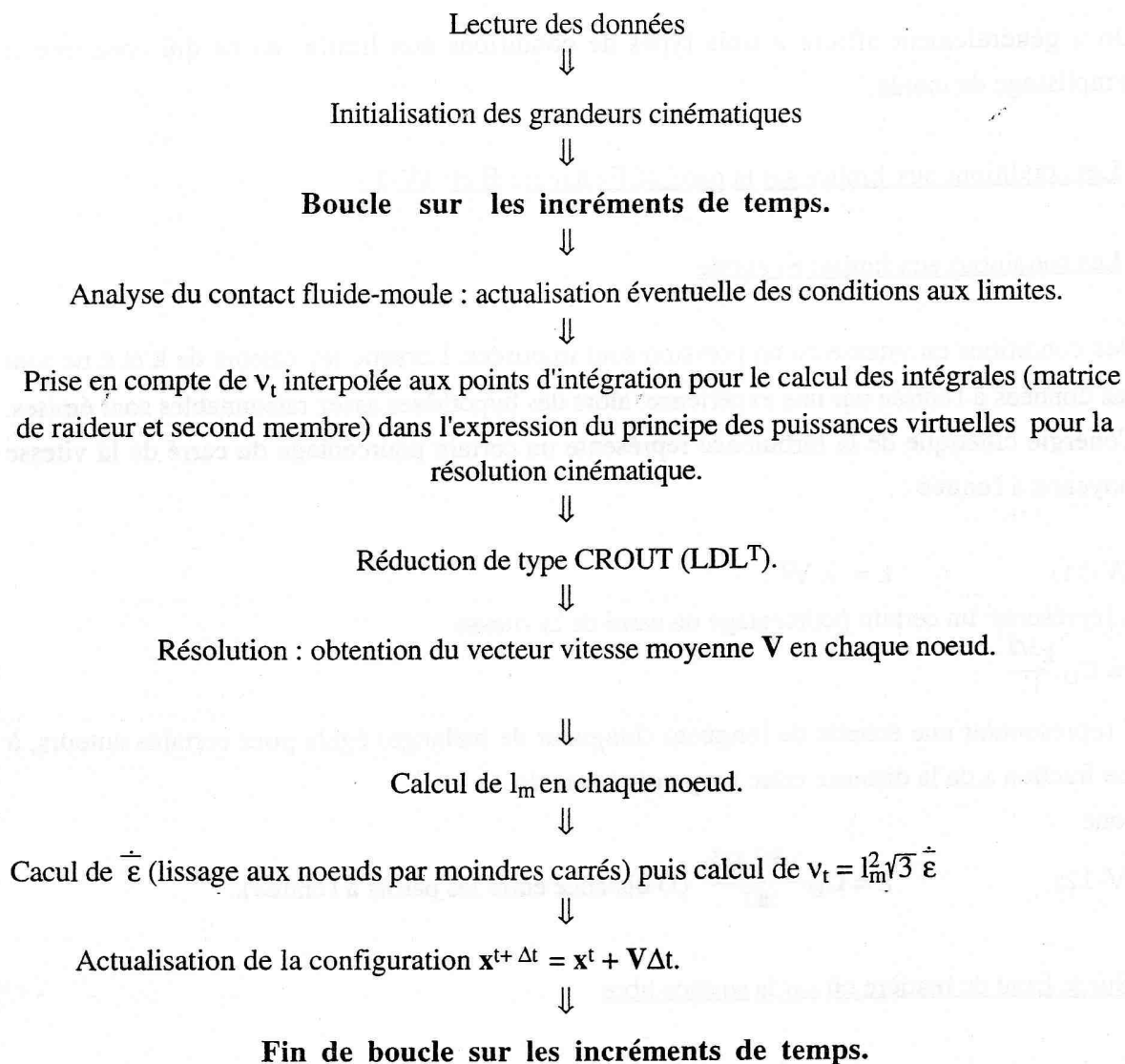
IV-3 - Introduction du modèle à zéro équation

Les modèles à zéro équation (dans leur différentes versions) comme on l'a vu dans le chapitre II, est basé sur la détermination d'une seule variable turbulente, la viscosité équivalente qu'il faudra prendre en compte pour la résolution cinématique. En effet, il existe un fort couplage entre la prise en compte de la viscosité turbulente et la résolution cinématique comme on l'a vu dans le paragraphe précédent. Cette variable turbulente ν_t aura une expression plus ou moins évidente selon que l'écoulement est plus ou moins complexe. Dans le chapitre II, on a vu que ν_t dépend de l'expression de la longueur de mélange qui peut être approximée par des formules largement empiriques dans le cas d'écoulements simples.

Description de l'algorithme

Dans ce code, après la lecture des données et l'initialisation du champ de vitesse, de la température, du contact, etc..., la résolution cinématique est faite pour chaque incrément de calcul. La prise en compte d'un modèle à zéro équation s'effectue donc par la réactualisation de la viscosité turbulente à la fin de chaque pas de temps. Cette réactualisation est locale, en chaque noeud du maillage éléments finis.

Algorithme de résolution



IV-4- Introduction du modèle k- ε

Pour la résolution des équations de transport de l'énergie cinétique turbulente k et du taux de dissipation de cette énergie ε , on procède à une discrétisation spatiale par éléments finis et à une discrétisation temporelle. Ainsi à chaque incrément de temps résoudra-t-on alternativement ces équations de transport et les équations de Navier-Stokes modifiées donnant le champ de vitesse moyen.

IV-4-1-Conditions aux limites

On a généralement affaire à trois types de conditions aux limites en ce qui concerne le remplissage de moule.

- Les conditions aux limites sur la paroi (CF chapitre II et IV-2)

- Les conditions aux limites en entrée

Des conditions en vitesse ou en pression sont imposées. Lorsque les valeurs de k et ε ne sont pas données à l'entrée par une expérience, alors des hypothèses assez raisonnables sont émises. L'énergie cinétique de la turbulence représente un certain pourcentage du carré de la vitesse moyenne à l'entrée :

$$(IV-11) \quad k = \lambda V^2$$

λ représente un certain pourcentage du carré de la vitesse

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l'}$$

l' représentant une échelle de longueur (longueur de mélange) égale pour certains auteurs, à une fraction a de la distance entre les parois à l'entrée .

donc

$$(IV-12) \quad \varepsilon = C_D \frac{\lambda^{3/2} V^3}{aD} \quad (D \text{ distance entre les parois à l'entrée}).$$

- Sur le front de matière où sur la surface libre

$\sigma \cdot \mathbf{n} = -p_{\text{atm}}$ où \mathbf{n} représente la normale extérieure à la surface sur laquelle agit la pression. Le flux de k et de ε , ou encore les composantes normales des gradients de k et ε , $\frac{\partial k}{\partial n}$ et $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}$ sont nuls.

on peut résumer toutes ces conditions de la manière suivante :

Soit $\partial\Omega_D$, la partie de la frontière du domaine sur laquelle on impose des conditions aux limites de DIRICHLET qui traduisent les conditions d'injection et les lois de paroi, $k = \bar{k}$ et $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ où \bar{k} et $\bar{\varepsilon}$ sont des valeurs imposées et $\partial\Omega_N$, la partie de la frontière sur laquelle on impose des conditions de NEUMANN qui sont des conditions caractéristiques des surfaces libres de l'écoulement et qui se traduisent par: $\mathbf{Grad}k \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\mathbf{Grad}\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0$. Schématiquement, on a:

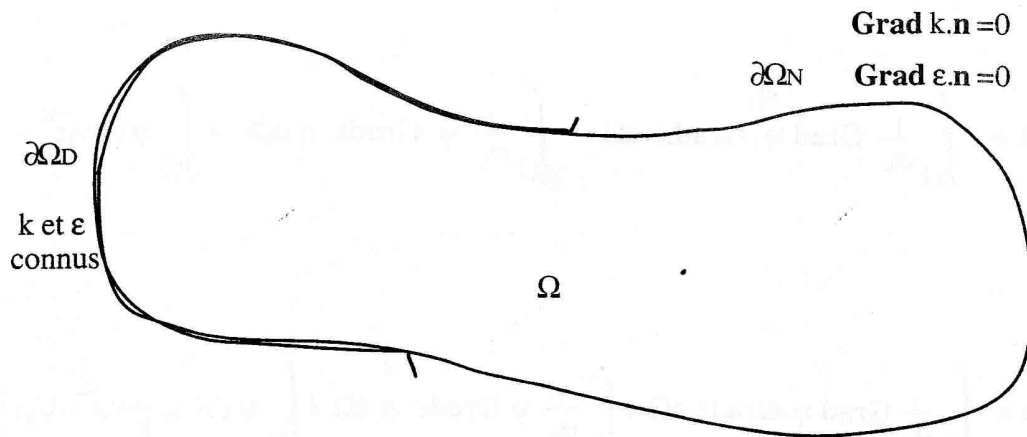


Figure (IV-2): conditions aux limites sur k et ϵ

IV-4-2 Formulation faible des équations de transport des variables turbulentes

Soit Ψ l'ensemble des fonctions test ayant les propriétés de dérivabilité adéquates et nulles sur $\partial\Omega_D$ (là où les valeurs de k et de ϵ sont connues)

$$\Psi = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) \quad / \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}$$

avec

$$H^1(\Omega) = \left\{ \psi \quad / \quad \psi^2 \text{ intégrable et } (\text{grad } \psi)^2 \text{ intégrable} \right\}$$

Nous avons alors

$$\forall \psi \in \Psi$$

$$(IV-13) \quad \int_{\Omega} \psi \frac{dk}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma_k} \psi \text{div} (v_t \text{Grad} k) d\Omega + \int_{\Omega} \psi (3v_t \epsilon^{-2} - \epsilon) d\Omega$$

$$(IV-14) \quad \int_{\Omega} \psi \frac{d\epsilon}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma_\epsilon} \psi \text{div} (v_t \text{Grad} \epsilon) d\Omega + \int_{\Omega} \psi (3C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} v_t \epsilon^{-2} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}) d\Omega$$

ce qui donne après intégration par parties de la première intégrale des seconds membres,

(IV-15)

$$\int_{\Omega} \psi \frac{dk}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma_k} \text{Grad } \psi \cdot \text{Grad} k d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma_k} \psi \text{Grad} k \cdot \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Omega} \psi (3v_t \varepsilon^{-2} - \varepsilon) d\Omega$$

(IV-16)

$$\int_{\Omega} \psi \frac{d\varepsilon}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \text{Grad } \psi \cdot \text{Grad} \varepsilon d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \psi \text{Grad} \varepsilon \cdot \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Omega} \psi (3C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_t \varepsilon^{-2} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}) d\Omega$$

Compte tenu des conditions aux limites, de la nullité de ψ sur $\partial\Omega_D$ et de l'expression de v_t en fonction de k et de ε ($v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$), on obtient :

$$(VI-17) \quad \int_{\Omega} \psi \frac{dk}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_k} \text{Grad } \psi \cdot \text{Grad} k d\Omega + \int_{\Omega} \psi (3 C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \varepsilon^{-2} - \varepsilon) d\Omega$$

$$(IV-18) \quad \int_{\Omega} \psi \frac{d\varepsilon}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \text{Grad } \psi \cdot \text{Grad} \varepsilon d\Omega + \int_{\Omega} \psi (3 C_\mu C_{\varepsilon 1} k \varepsilon^{-2} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}) d\Omega$$

On adoptera pour k et ε la même discrétisation spatiale par éléments finis que pour le champ de vitesse (CF. CH III). Nous avons donc

$$(IV-19) \quad k = \sum_n N_n(\xi) k^n \quad \varepsilon = \sum_n N_n(\xi) \varepsilon^n$$

La formulation de Galerkin associée à l'équation (IV-17), qui revient à prendre les fonctions d'interpolation N_i comme fonctions test s'écrit donc

$$(IV-20) \quad \int_{\Omega} N_i N_j \frac{dk^j}{dt} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_k} N_{i,k} N_{j,k} k^j d\Omega + \int_{\Omega} N_i N_j \left(\frac{\epsilon}{k} \right) k^j d\Omega = \int_{\Omega} 3N_i C_{\mu} \frac{k^2}{\epsilon} \epsilon^2 d\Omega$$

pour tout $i = 1, \dots, N_{bn}$ (nombre de noeud du maillage)

Le principe consiste à "expliciter" les termes de production dus aux champ moyen de vitesse et "d'impliciter" ou de "semi-impliciter" les autres termes où interviennent les variables turbulentes

(COEFFE (1980)).

→ pas dans les références - -

On peut écrire l'équation précédente sous la forme matricielle suivante

$$(IV-21) \quad [C] \{k\} + [H] \{k\} = \{Q\}$$

avec

$$(IV-22) \quad C_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega$$

$$(IV-23) \quad H_{ij} = \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_k} N_{i,k} N_{j,k} d\Omega + \int_{\Omega} N_i N_j \left(\frac{\epsilon}{k} \right) d\Omega$$

$$(IV-24) \quad Q_i = \int_{\Omega} 3N_i C_{\mu} \frac{k^2}{\epsilon} \epsilon^2 d\Omega$$

On procède de la même manière pour l'équation de transport de ϵ . La formulation de Galerkin associée à (IV-18) permet d'écrire

$$(IV-25) \quad \int_{\Omega} N_i N_j \frac{d\epsilon^j}{dt} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_{\epsilon}} N_{i,k} N_{j,k} \epsilon^j d\Omega + 2C_{\epsilon 2} \int_{\Omega} N_i N_j \left(\frac{\epsilon}{k} \right) \epsilon^j d\Omega = \int_{\Omega} N_i \left(3C_{\mu} C_{\epsilon 1} \frac{k^2}{k} \epsilon^2 + C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \right) d\Omega$$

ce qui donne sous forme matricielle

$$(IV-26) \quad [C'] \{ \dot{\varepsilon} \} + [H'] \{ \varepsilon \} = \{ Q' \}$$

avec

$$(IV-27) \quad C'_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega$$

$$(IV-28) \quad H'_{ij} = \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_{\varepsilon}} N_{i,k} N_{j,k} d\Omega + 2 C_{\varepsilon 2} \int_{\Omega} N_i N_j \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) d\Omega$$

$$(IV-29) \quad Q'_i = \int_{\Omega} N_i \left(3 C_{\mu} C_{\varepsilon 1} k \varepsilon^2 + C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \right) d\Omega$$

IV-4-3-Discrétisation temporelle de k et de ε

La discrétisation temporelle est faite en utilisant un schéma aux différences finies à un pas de temps à deux niveaux puisqu'il fait intervenir $k^{t+\Delta t}$, k^t , $\varepsilon^{t+\Delta t}$, ε^t .

Pour la résolution des équations de transport de k et de ε, on utilise la méthode du point milieu généralisé (où α-méthode).

Ainsi

$$(IV-30) \quad [C] \left\{ \frac{k^{t+\Delta t} - k^t}{\Delta t} \right\} + [H] \{ (1-\alpha)k^t + \alpha k^{t+\Delta t} \} = \{ Q \}$$

$$(IV-31) \quad [C'] \left\{ \frac{\varepsilon^{t+\Delta t} - \varepsilon^t}{\Delta t} \right\} + [H'] \{ (1-\alpha)\varepsilon^t + \alpha \varepsilon^{t+\Delta t} \} = \{ Q' \}$$

Les inconnues étant $\{k^{t+\Delta t}\}$ et $\{\varepsilon^{t+\Delta t}\}$.

On peut écrire pour k, le système suivant :

$$(IV-32) \quad \left[\frac{C}{\Delta t} + \alpha H \right] \{k^{t+\Delta t}\} = \left[\frac{C}{\Delta t} - (1-\alpha) H \right] \{k^t\} + \{Q\}$$

Si on pose

$$(IV-33) \quad [K] = \left[\frac{C}{\Delta t} + \alpha H \right] \text{ et } \{F\} = \left[\frac{C}{\Delta t} - (1-\alpha) H \right] \{k^t\} + \{Q\}$$

alors on a l'écriture suivante

$$(IV-34) \quad [\mathbf{K}] \{\mathbf{k}^{t+\Delta t}\} = \{\mathbf{F}\}$$

La même démarche pour ε conduit à

$$(IV-35) \quad \left[\frac{\mathbf{C}'}{\Delta t} + \alpha \mathbf{H}' \right] \{\varepsilon^{t+\Delta t}\} = \left[\frac{\mathbf{C}'}{\Delta t} - (1-\alpha) \mathbf{H}' \right] \{\varepsilon^t\} + \{\mathbf{Q}'\}$$

avec

$$(IV-36) \quad [\mathbf{K}'] = \left[\frac{\mathbf{C}'}{\Delta t} + \alpha \mathbf{H}' \right] \text{ et } \{\mathbf{F}'\} = \left[\frac{\mathbf{C}'}{\Delta t} - (1-\alpha) \mathbf{H}' \right] \{\varepsilon^t\} + \{\mathbf{Q}'\}$$

d'où l'écriture

$$(IV-37) \quad [\mathbf{K}'] \{\varepsilon^{t+\Delta t}\} = \{\mathbf{F}'\}$$

Linéarisation des différentes matrices

On utilise des expressions analogues à celles posées pour \mathbf{k} et ε . Pour ne pas faire intervenir l'instant $t + \Delta t$ on écrit :

Pour \mathbf{k}

$$(IV-38) \quad \begin{aligned} C_{ij} &= \int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega \\ H_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{v_i^t}{\sigma_k} N_{i,k} N_{j,k} \, d\Omega + \int_{\Omega} N_i N_j \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^t \, d\Omega \end{aligned}$$

$$(IV-39) \quad Q_i = 3 \int_{\Omega} N_i \left(v_i^t \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^t \right) \, d\Omega$$

on en fait de même pour ε . La matrice de capacité élémentaire C_{ij}^e et la matrice de masse élémentaire H_{ij}^e ont respectivement pour expression

$$C'_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega$$

$$H'_{ij} = \int_{\Omega} \frac{v_i^t}{\sigma_\varepsilon} N_{i,k} N_{j,k} d\Omega + 2 C_{\varepsilon 2} \int_{\Omega} N_i N_j \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^t d\Omega$$

(IV-40)

Le second membre s'écrit

$$Q'_i = \int_{\Omega} N_i \left(3 C_{\mu} C_{\varepsilon 1} k^t \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^t + C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon^2}{k}\right)^t \right) d\Omega$$

(IV-41)

La méthode de résolution utilisée est la méthode de CROUT (décomposition LDL^T de la matrice du système.

IV-5-Introduction du modèle k-θ

Comme on l'a dit dans le chapitre II, on introduit le modèle k-θ dérivé du modèle k-ε pour avoir un bon comportement numérique du modèle. On traite successivement deux étapes : l'étape de convection et l'étape de diffusion.

IV-5-1-L'étape de convection

Dans l'étape de convection, on résout l'équation de transport de k et θ sans les termes de diffusion :

$$(IV-42) \quad \frac{dk}{dt} = C_{\mu} k \theta V_{i,j} (V_{i,j} + V_{j,i}) - \frac{k}{\theta}$$

$$(IV-43) \quad \frac{d\theta}{dt} = C_{\mu} (1 - C_{\varepsilon 1}) \theta^2 V_{i,j} (V_{i,j} + V_{j,i}) - 1 + C_{\varepsilon 2}$$

IV-5-1-1 Formulation variationnelle des équations

On utilise une formulation variationnelle des équations à l'étape de convection parce que les termes de production sont déterminés aux points d'intégration. Pour préserver la positivité de

θ , on procède à un traitement semi-implicite du terme de production (BEGUE, CARDOT & PIRONNEAU (1988)).

La formulation faible variationnelle des équations de k et de θ à l'étape de convection s'écrivent respectivement :

$$(IV-44) \quad \int_{\Omega} \frac{dk}{dt} \psi \, d\Omega + C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) \int_{\Omega} \Pi k \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(C_{\mu} C_{\varepsilon 1} \Pi k \theta - \frac{k}{\theta} \right) \psi \, d\Omega$$

$$(IV-45) \quad \int_{\Omega} \frac{d\theta}{dt} \psi \, d\Omega + C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) \int_{\Omega} \Pi \theta \psi \, d\Omega = (C_{\varepsilon 2} - 1) \int_{\Omega} \psi \, d\Omega$$

où

$$\Pi = 3 \theta^{-2} \varepsilon$$

IV-5-1-2-Discretisation spatiale et temporelle des équations (IV-44) et (IV-45)

S'appuyant sur les calculs déjà faits dans le cadre du modèle k - ε , on s'abstient de détailler tous les calculs intermédiaires pour la discretisation temporelle des équations (IV-44) et (IV-45).

pour k

$$(IV-46) \quad \int_{\Omega} N_i N_j \frac{dk^j}{dt} \, d\Omega + C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) \int_{\Omega} \Pi N_i N_j k^j \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(C_{\mu} C_{\varepsilon 1} \Pi k \theta - \frac{k}{\theta} \right) N_i \, d\Omega$$

ou sous forme matricielle

$$(IV-47) \quad [\mathbf{E}] \{ \dot{\mathbf{k}} \} + [\mathbf{F}] \{ \mathbf{k} \} = \{ \mathbf{G} \}$$

avec

$$(IV-48) \quad E_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega$$

$$(IV-49) \quad F_{ij} = C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) \int_{\Omega} \Pi N_i N_j \, d\Omega$$

$$(IV-50) \quad G_i = \int_{\Omega} \left(C_{\mu} C_{\varepsilon 1} \Pi k \theta - \frac{k}{\theta} \right) N_i \, d\Omega$$

Pour θ , on a

$$(IV-51) \quad \int_{\Omega} N_i N_j \frac{d\theta^j}{dt} \, d\Omega + C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) \int_{\Omega} \Pi N_i N_j \theta^j \, d\Omega = (C_{\mu} - 1) \int_{\Omega} N_i \, d\Omega$$

En écriture matricielle, on a :

$$(IV-52) \quad [\mathbf{E}'] \{\dot{\theta}\} + [\mathbf{F}'] \{\theta\} = \{\mathbf{G}'\}$$

avec

$$(IV-53) \quad E'_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega$$

$$(IV-54) \quad F'_{ij} = C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) \int_{\Omega} \Pi N_i N_j \, d\Omega$$

$$(IV-55) \quad G'_i = (C_{\varepsilon 2} - 1) \int_{\Omega} N_i \, d\Omega$$

Il faudra linéariser les matrices et les vecteurs comme cela a été fait pour le modèle k- ε et déterminer \mathbf{k}_c^t et θ_c^t (valeur de k et de θ à l'étape de convection) de la manière suivante :

$$(IV-56) \quad \left[\frac{\mathbf{E}}{\Delta t} + \mathbf{F} \right] \{\mathbf{k}_c^t\} = \left[\frac{\mathbf{E}}{\Delta t} \right] \{\mathbf{k}^t\} + \{\mathbf{G}\}$$

avec

$$E_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega$$

$$(IV-57) \quad F_{ij} = C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) \int_{\Omega} \Pi^t N_i N_j \, d\Omega$$

$$(IV-58) \quad G_i = \int_{\Omega} \left(C_{\mu} C_{\varepsilon 1} \Pi^t k^t \theta^t - \left(\frac{k}{\theta} \right)^t \right) N_i \, d\Omega$$

et

$$(IV-59) \quad \left[\frac{\mathbf{E}'}{\Delta t} + \mathbf{F}' \right] \{ \theta_c^t \} = \left[\frac{\mathbf{E}'}{\Delta t} \right] \{ \theta^t \} + \{ \mathbf{G}' \}$$

avec

$$\mathbf{E}'_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega$$

$$(IV-60) \quad F'_{ij} = C_{\mu}(C_{\varepsilon 1} - 1) \int_{\Omega} \Pi^t N_i N_j \, d\Omega$$

$$(IV-61) \quad G'_i = (C_{\varepsilon 2} - 1) \int_{\Omega} N_i \, d\Omega$$

IV-5-2-Etape de diffusion

Une fois que les solutions des équations de transport de k et θ sans les termes de diffusion sont obtenues, on aborde l'étape de diffusion qui consiste à résoudre l'équation suivante :

$$(IV-62) \quad \int_{\Omega} \frac{d\phi}{dt} \psi \, d\Omega = \int_{\Omega} \text{div} \left[\frac{v_t}{\sigma_{\phi}} \text{Grad } \phi \right] \psi \, d\Omega$$

avec $\phi = k$ ou $\phi = \theta$.

IV-5-2-1-Formulation variationnelle

Après une intégration par partie et en tenant compte des conditions aux limites en ϕ (ϕ est soit imposé en surface dans ce cas on prend ψ nulle, soit de gradient nul), on obtient :

$$(IV-63) \quad \int_{\Omega} \frac{d\phi}{dt} \psi \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_{\phi}} \mathbf{Grad}\phi \cdot \mathbf{Grad} \psi \, d\Omega$$

La formulation de Galerkin associée à l'équation précédente, donne:

$$(IV-64) \quad \forall i = 1, N_{bn} \quad \int_{\Omega} \frac{d\phi}{dt} N_i \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_{\phi}} \mathbf{Grad}\phi \cdot \mathbf{Grad} N_i \, d\Omega$$

IV-5-2-2-Discretisation spatiale et temporelle

Après discrétisation spatiale de ϕ , on obtient :

$$(IV-65) \quad \forall i = 1, N_{bn} \quad \int_{\Omega} N_i N_j \dot{\phi}^j \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_{\phi}} N_{i,k} N_{j,k} \phi^j \, d\Omega$$

$\phi^{t+\Delta t}$ est la nouvelle inconnue à déterminer

ϕ_c^t la valeur de la variable ϕ déterminée à l'étape de convection

On peut écrire

$$(IV-66) \quad [\mathbf{L}] \{\dot{\phi}\} + [\mathbf{M}] \{\phi\} = 0$$

avec

$$(IV-67) \quad L_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j \, d\Omega$$

$$(IV-68) \quad M_{ij} = \int_{\Omega} \frac{v_t}{\sigma_{\phi}} N_{i,k} N_{j,k} \, d\Omega$$

Après une discrétisation temporelle et une linéarisation des matrices, on obtient :

$$(IV-69) \quad \left[\frac{\mathbf{L}}{\Delta t} + \mathbf{M} \right] \left\{ \phi^{t+\Delta t} \right\} = \left[\frac{\mathbf{L}}{\Delta t} \right] \left\{ \phi_c^t \right\}$$

La matrice $[\mathbf{L}]$ reste inchangée tandis que la matrice $[\mathbf{M}]$ est telle que

$$(IV-70) \quad M_{ij} = \int_{\Omega} \frac{v_i^t}{\sigma_{\phi}} N_{i,k} N_{j,k} d\Omega$$

IV-6- Nouvelle formulation du modèle k-ε à partir d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 modifié

Pour venir à bout des valeurs négatives de k et de ε et intégrer plus précisément les équations, il a été proposé une autre méthode de résolution qui est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 modifiée.

Soit $\mathbf{Y}(t)$, une fonction dépendant du temps t. On cherche à résoudre l'équation suivante

$$(IV-71) \quad \dot{\mathbf{Y}}(t) = \frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t))$$

donc on en déduit la dérivée seconde

$$(IV-72) \quad \ddot{\mathbf{Y}}(t) = \frac{d^2\mathbf{Y}(t)}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t))}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t))}{\partial \mathbf{Y}} \dot{\mathbf{Y}}(t)$$

IV-6-1-Méthode classique de Runge-Kutta dite de la tangente améliorée

Si \mathbf{Y}^n est la valeur de \mathbf{Y} à l'instant t, alors sa valeur à l'instant $t + \Delta t/2$ est

$$(IV-73) \quad \mathbf{Y}^{n+1/2} = \mathbf{Y}^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{Y}}^n$$

on a

$$(IV-74) \quad \dot{\mathbf{Y}}^{n+1/2} = \mathbf{F}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{Y}^{n+1/2}\right)$$

et la valeur finale obtenue à $t + \Delta t$ est

$$(IV-75) \quad Y^{n+1} = Y^n + \Delta t \dot{Y}^{n+1/2}$$

ou encore

$$(IV-76) \quad Y^{n+1} = Y^n + \Delta t F\left(t + \frac{\Delta t}{2}, Y^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{Y}^n\right)$$

Estimation de l'erreur pour une telle approximation

Effectuons un développement au premier ordre de

$$(IV-77) \quad F\left(t + \frac{\Delta t}{2}, Y^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{Y}^n\right)$$

on obtient

$$(IV-78) \quad Y^{n+1} = Y^n + \Delta t \left[F(t, Y^n) + \frac{\partial F(t, Y^n)}{\partial t} \frac{\Delta t}{2} + \frac{\partial F(t, Y^n)}{\partial Y} \frac{\Delta t}{2} \dot{Y}^n + o(\Delta t^3) \right]$$

On constate alors que

$$(IV-79) \quad Y^{n+1} = Y^n + \Delta t \dot{Y}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{Y}^n + o(\Delta t^3)$$

La méthode est donc du second ordre et l'erreur sur un pas de temps est estimée par :

$$(IV-80) \quad e \approx \frac{\Delta t}{12} (-5 Y^{n+1} + 12 Y^{n+1/2} - 8 Y^n + Y^{n-1})$$

IV-6-2-Méthode de Runge-Kutta modifiée

Lorsque physiquement Y doit conserver toutes ces composantes positives, l'objectif est de trouver schéma d'intégration qui conserve cette propriété en donnant le même ordre d'approximation.

De l'équation initiale, pour chaque composante i de Y

$$(IV-81) \quad \dot{Y}_i(t) = \frac{dY_i(t)}{dt} = F_i(t, Y(t))$$

on déduit :

$$(IV-82) \quad \frac{\dot{Y}_i(t)}{Y_i(t)} = \frac{F_i(t, \mathbf{Y}(t))}{Y_i(t)}$$

Si Y_i est positif, on peut écrire l'équation suivante :

$$(IV-83) \quad \frac{d(\text{Log} Y_i(t))}{dt} = \frac{\dot{Y}_i(t)}{Y_i(t)}$$

Pour un mi-pas de temps on a, en vertu d'une première intégration explicite,

$$(IV-84) \quad \frac{\text{Log} Y_i^{n+1/2} - \text{Log} Y_i^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\dot{Y}_i(t)}{Y_i(t)}$$

et

$$(IV-85) \quad Y_i^{n+1/2} = Y_i^n \exp\left(\frac{\Delta t}{2} \frac{\dot{Y}_i^n}{Y_i^n}\right)$$

$$(IV-86) \quad \frac{\dot{Y}_i^{n+1/2}}{Y_i^{n+1/2}} = \frac{F_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{Y}^{n+1/2}\right)}{Y_i^{n+1/2}}$$

La valeur Y_i à $t^n + \Delta t$ a pour expression

$$(IV-87) \quad Y_i^{n+1} = Y_i^n \exp\left(\Delta t \frac{\dot{Y}_i^{n+1/2}}{Y_i^{n+1/2}}\right)$$

On démontre que ce schéma est du second ordre. En effet ,

$$(IV-88) \quad Y_i^{n+1/2} \approx Y_i^n \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \frac{\dot{Y}_i^n}{Y_i^n}\right) = Y_i^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{Y}_i^n$$

En dérivant, on aboutit à

$$(IV-89) \quad \dot{Y}_i^{n+1/2} \approx F_i(t, \mathbf{Y}^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F_i(t, \mathbf{Y}^n)}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F_i(t, \mathbf{Y}^n)}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{Y}}^n$$

on en déduit,

$$(IV-90) \quad Y_i^{n+1} = Y_i^n \exp \left[\Delta t \frac{F_i(t, Y^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F_i(t, Y^n)}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F_i(t, Y^n)}{\partial Y} \cdot \dot{Y}^n}{Y_i^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{Y}_i^n} \right]$$

On remarque que

$$(IV-91) \quad \frac{1}{Y_i^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{Y}_i^n} = \frac{1}{Y_i^n \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \frac{\dot{Y}_i^n}{Y_i^n} \right)} \approx \frac{1}{Y_i^n} \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \frac{\dot{Y}_i^n}{Y_i^n} \right)$$

de cette relation on peut en déduire le développement au second ordre sous l'exponentielle

$$(IV-92) \quad \frac{\Delta t}{Y_i^n} \left[F_i(t, Y^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F_i(t, Y^n)}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F_i(t, Y^n)}{\partial Y} \dot{Y}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\dot{Y}_i^n}{Y_i^n} F_i(t, Y^n) \right]$$

en posant

$$(IV-93) \quad Y_i^n = F_i^n = F_i(t, Y^n), \quad \frac{\partial F_i^n}{\partial t} = \frac{\partial F_i(t, Y^n)}{\partial t}, \quad \frac{\partial F_i^n}{\partial Y} = \frac{\partial F_i(t, Y^n)}{\partial Y}$$

on obtient

$$(IV-94) \quad Y_i^{n+1} = Y_i^n \left(1 + \frac{\Delta t}{Y_i^n} \left(F_i^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F_i^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial F_i^n}{\partial Y} \dot{Y}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\dot{Y}_i^n}{Y_i^n} F_i^n \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{Y_i^n} F_i^n \right)^2 \right)$$

ou

$$(IV-95) \quad Y_i^{n+1} = Y_i^n + \Delta t F_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial F_i^n}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial F_i^n}{\partial Y} \dot{Y}^n + o(\Delta t^2)$$

qui est l'équivalent de (VI-8) donc on conclut que là aussi, on a une approximation d'ordre 2

IV-6-3 -Application aux équations de transport de k et de ε

Nous appliquons donc la méthode de Runge-KUTTA modifiée au système d'équation (CF chapitre IV plus haut).

On résout en \dot{k}^n et en $\dot{\varepsilon}^n$ (dérivées particulières de k et de ε à t) :

$$(IV-96) \quad \left[\int_{\Omega} NN^T d\Omega \right] \{ \dot{k}^n \} = - \left[\frac{1}{\sigma_k} \int_{\Omega} v_t N_{,m} N_{,m}^T d\Omega \right] \{ k^n \} + \left\{ 3 \int_{\Omega} N (v_t \dot{\varepsilon}^2)^n d\Omega \right\} - \left[\int_{\Omega} NN^T d\Omega \right] \{ \varepsilon^n \}$$

$$(IV-97) \quad \left[\int_{\Omega} NN^T d\Omega \right] \{ \dot{\varepsilon}^n \} = - \left[\frac{1}{\sigma_{\varepsilon}} \int_{\Omega} v_t N_{,m} N_{,m}^T d\Omega \right] \{ \varepsilon^n \} + \left\{ 3 \int_{\Omega} N \left(C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k \dot{\varepsilon}^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \right)^n d\Omega \right\}$$

Une fois k^n et ε^n obtenus, on calcule $k^{n+1/2}$ et $\varepsilon^{n+1/2}$ de la manière suivante :

$$(IV-98) \quad k^{n+1/2} = k^n \exp \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\dot{k}^n}{k^n} \right]$$

$$(IV-99) \quad \varepsilon^{n+1/2} = \varepsilon^n \exp \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\dot{\varepsilon}^n}{\varepsilon^n} \right]$$

puis on calcule $\dot{k}^{n+1/2}$ et $\dot{\varepsilon}^{n+1/2}$ en résolvant les équations suivantes :

$$(IV-100) \quad \left[\int_{\Omega} NN^T d\Omega \right] \{ \dot{k}^{n+1/2} \} = - \left[\frac{1}{\sigma_k} \int_{\Omega} v_t N_{,m} N_{,m}^T d\Omega \right] \{ k^{n+1/2} \} + \left\{ 3 \int_{\Omega} N (v_t \dot{\varepsilon}^2)^n d\Omega \right\} - \left[\int_{\Omega} NN^T d\Omega \right] \{ \varepsilon^{n+1/2} \}$$

$$(IV-101) \quad \left[\int_{\Omega} NN^T d\Omega \right] \{ \dot{\varepsilon}^{n+1/2} \} = - \left[\frac{1}{\sigma_{\varepsilon}} \int_{\Omega} v_t N_{,m} N_{,m}^T d\Omega \right] \{ \varepsilon^{n+1/2} \} + \left\{ 3 \int_{\Omega} N \left(C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k \dot{\varepsilon}^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \right)^{n+1/2} d\Omega \right\}$$

on obtient ainsi les valeurs de k et ε à $t + \Delta t$

$$(IV-102) \quad k^{n+1} = k^n \exp \left[\Delta t \frac{\dot{k}^{n+1/2}}{k^{n+1/2}} \right]$$

$$(IV-103) \quad \varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n \exp \left[\Delta t \frac{\dot{\varepsilon}^{n+1/2}}{\varepsilon^{n+1/2}} \right]$$

Ainsi, on résout en k et ε à chaque incrément de temps, après calcul du champ de vitesse relatif à l'écoulement moyen.

IV-6-4-Méthode de condensation de la matrice de masse

Le schéma ci-dessus évite toute valeur négative de k et ε . Cependant, nous avons constaté que le résultat pouvait être affecté d'oscillations spatiales et temporelles capables de lui enlever toute signification physique. Cela est dû à de très forts gradients de k et de ε , notamment aux frontières du maillage, qui exigeraient en principe une adaptation du pas de temps et de la taille des éléments dans la direction du gradient. Nous avons préféré utiliser la méthode de condensation de la matrice de masse, préalablement développée au laboratoire pour le transfert thermique (TRONEL (thèse 1993)) et abondamment utilisée dans la littérature (HUGHES(1979)).

Nous procédons ici à un rappel de la méthode qui consiste à condenser les termes de la matrice de masse d'origine (consistante) $[C]$ sur la diagonale. On obtient $[C^L]$ définie usuellement pour des éléments linéaires par :

$$(IV-104) \quad C_{ij}^L = \delta_{ij} \sum_k C_{ik}$$

Cette méthode a pour effet de réduire considérablement les oscillations de la solution tout en évitant d'avoir à raffiner exagérément le maillage. Toutefois, pour des éléments triangulaires quadratiques (6 noeuds), cette première forme de condensation peut conduire à des termes nuls sur la diagonale. Il faut alors mettre en oeuvre un changement de base dont la justification complète pourra être trouvée dans la thèse de Yves TRONEL(1993). Le principe de changement de base de fonctions d'interpolation repose sur l'équivalence des noeuds sommets et milieux du triangle (figure (IV-3)).

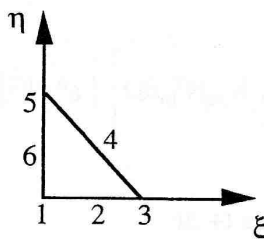


Figure (IV-3) : équivalence des noeuds sommets et des noeuds triangles

Ainsi, si nous notons $N_i(\xi, \eta)$ la fonction d'interpolation associée au noeud i et \tilde{N}_i la fonction modifiée, nous imposons une modification du type :

$$(IV-105) \quad \tilde{N}_1 = N_1 + \beta (N_2 + N_6)$$

$$(IV-106) \quad \tilde{N}_2 = N_2 (1 - 2\beta)$$

que nous étendons aux noeuds 3,4,5,6 par symétrie. β est un scalaire à déterminer. On a évidemment $\sum_i \tilde{N}_i = 1$ et l'équivalence entre noeuds sommets (qui appartiennent à éléments lorsque le maillage est régulier) et noeuds milieux (qui appartiennent à deux éléments) se traduit par :

$$(IV-107) \quad 6 \int_{\Omega_e} \tilde{N}_1 d\Omega = 2 \int_{\Omega_e} \tilde{N}_2 d\Omega$$

Etant donné que

$$(IV-108) \quad \int_{\Omega_e} N_1 d\Omega = 0$$

on finalement compte tenu de (IV-105) et (IV-106), $\beta = \frac{1}{8}$.

Le même raisonnement peut être appliqué aux côtés frontières, avec le même résultat : $\beta = \frac{1}{8}$

Pour illustrer l'influence de la condensation, nous avons comparé les cartes d'isovaleurs de l'énergie cinétique turbulente pour un écoulement entre plaques planes (figure IV-5)).

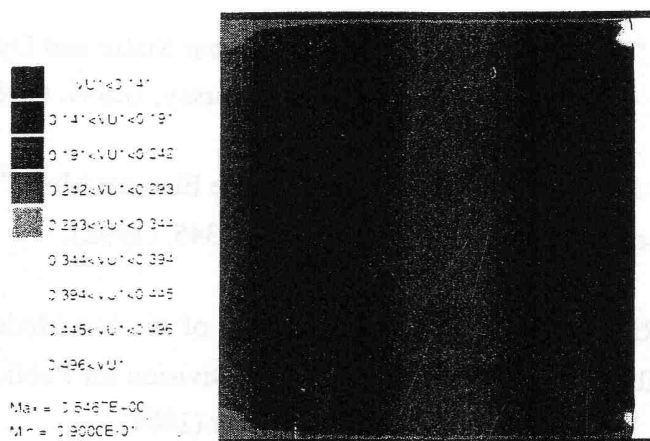


Figure (IV-4) : cas où la matrice de masse n'a pas été condensée

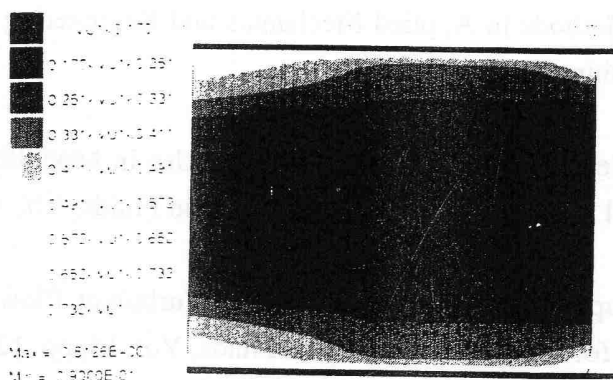


Figure (IV-5) : cas où la matrice de masse à été condensée

Les figures précédentes représentent les iso-valeurs de l'énergie cinétique turbulente au début du remplissage (l'injection à lieu su la frontière gauche, la frontière droite étant libre). En haut, on a un calcul avec la matrice de masse consistante. En bas, on a un calcul avec la matrice de masse condensée.

Références du chapitre IV

A. AUTRET, "Calculs d'écoulements turbulents par une méthode aux éléments finis", Thèse Docteur Ingénieur, Université Aix-Marseille II, (1985).

D. ELKAIM, M. REGGIO and R. CAMARERO, " Simulating Two-Dimensional Turbulent Flow by Using the k- ϵ Model and the Vorticity-Streamfunction Formulation", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 14, pp. 961-980, (1992).

T. J. R. HUGHES, W. K. LIU, A. BROOKS, "Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation", J. Comput. Phys. 30, pp.1-60, (1979).

T. J. R. HUGHES, "The finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis ", Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A. (1987).

M. JAEGER and G. DHATT, "An Extended k- ϵ Finite Element Model", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 14, pp. 1325-1345, (1992).

C. K. LAM, K. BREMHORST, "A Modified Form of the k- ϵ Model for Predicting Wall Turbulence", Contributed by the Fluids Engineering Division for Publication in the Journal of Fluids Engineering, Vol. 103, pp. 456-460, September (1981).

B. E. LAUNDER and D. B. SPALDING, "The Numerical Computational of Turbulent Flows", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3 (1974), pp. 269-289, North-Holland Publishing Company.

B. E. LAUNDER, "Second Moment Closure and its Use in Modelling Turbulent Industrial Flows.", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 9, pp. 963-985, (1989).

C. LEMOS, "A Simple Numerical Technique for Turbulent Flows with Free Surfaces", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 15, pp. 127-147, (1992).

Y. TRONEL , "Contribution à la modélisation thermo-mécanique et physique du forgeage à chaud", Thèse (1993).

CHAPITRE V

TEST DES MODELES DE TURBULENCE

V-TEST DES MODELES DE TURBULENCE

Ce chapitre se décompose en deux parties :

- dans un premier temps, nous comparerons notre modèle d'éléments finis, agrémenté d'un modèle à zéro équation à des résultats expérimentaux et à des formules sémi-analytiques extraits de la littérature dans le cas d'un écoulement simple en conduite cylindrique.
- Dans un deuxième temps, nous décrirons un modèle d'éléments finis monodimensionnel qui a servi de modèle d'étude pour envisager les différentes stratégies de couplages des deux équations de transport de modèles à deux équations. Nous discuterons ces résultats sur l'exemple de l'impact d'une colonne de métal liquide sur un massif.

V-1 - Ecoulement dans une conduite cylindrique

V-1-1 - Nature des expériences

Dans un souci de valider notre code numérique nous nous sommes référés à certains travaux expérimentaux comme ceux réalisés par NIKURADSE, (SCHLICHTING(1979)), qui constituent une bonne base de comparaison. Les expériences ont consisté pour l'essentiel à mesurer en écoulement établi dans une conduite cylindrique (figure (V-1)), les vitesses en fonction du rayon r (ou bien ce qui revient au même, en fonction de la distance à la paroi). NIKURADSE a analysé ses résultats expérimentaux en les comparant à un modèle analytique utilisant un modèle de turbulence à zéro équation basé sur l'hypothèse de longueur de mélange l_m . Il a trouvé un bon accord en introduisant une dépendance de l_m en fonction de la distance à l'axe de symétrie r . En notant R le rayon de la conduite, la formule proposée est la suivante :

$$(V-1) \quad \frac{l_m}{R} = 0,14 - 0,08 \left[\frac{r}{R} \right]^2 - 0,06 \left[\frac{r}{R} \right]^4$$

Rappelons que la viscosité cinématique turbulente s'exprime en fonction du carré de cette longueur et de la vitesse de déformation généralisée :

$$(V-2) \quad \nu_t = l_m^2 \sqrt{3} \dot{\epsilon}$$

La viscosité dynamique turbulente s'en déduit par la relation suivante :

$$(V-3) \quad \mu_t = \rho \nu_t$$

On peut remarquer pour $r = R$, on a $l_m = 0$ et donc $\nu_t = 0$. NIKURADSE a ainsi conçu la formule de la longueur de mélange l_m pour rendre compte à la fois d'une sous couche visqueuse avec contact collant à la paroi et d'un écoulement turbulent dans la plus grande partie de l'écoulement.

V-1-2 - Application de notre modèle instationnaire

V-1-2-1 - Description des conditions aux limites

On considère une conduite cylindrique (figure (V-1)) de longueur 1m, de rayon 0,1 m , à l'entrée de laquelle on impose un profil de vitesse parabolique.

L'expression de la vitesse en fonction du rayon courant est la suivante

$$(V-4) \quad V(r) = V_{\max} \left(1 - \left[\frac{r}{R}\right]^2\right) = 2 V_{\text{moy}} \left(1 - \left[\frac{r}{R}\right]^2\right) = \frac{2 Q}{\pi R^2} \left(1 - \left[\frac{r}{R}\right]^2\right)$$

Q représente le débit de fluide à travers la section d'entrée

V_{\max} représente la vitesse maximale dans la section d'entrée

V_{moy} représente la vitesse moyenne dans la section d'entrée

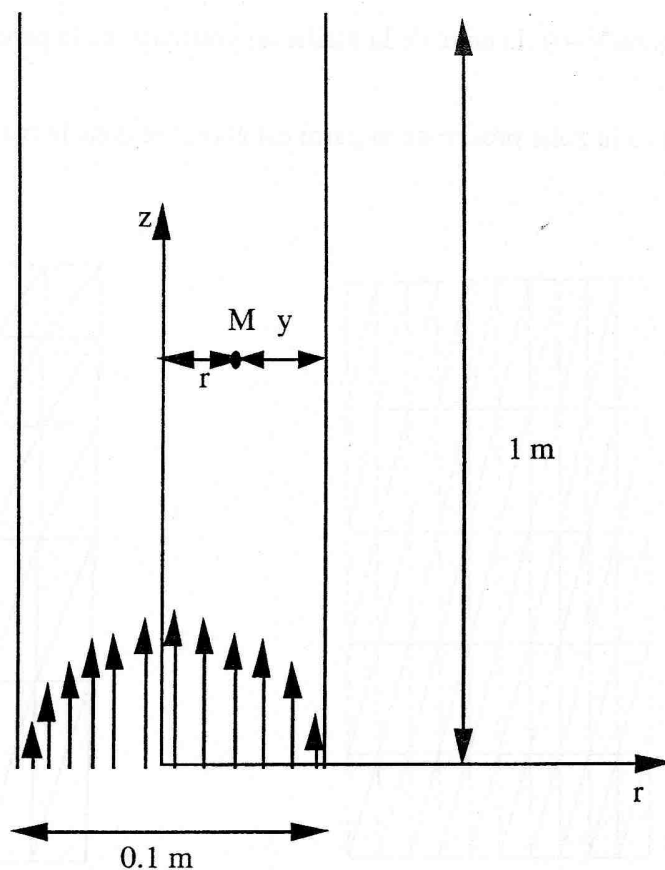


Figure (V-1)

Le contact de la conduite avec le fluide qui s'y trouve est donc collant, les noeuds en contact avec la conduite ne peuvent se déplacer.

La totalité de l'écoulement doit en principe être maillé par éléments finis mais par raison de symétrie, toutefois, nous ne maillerons qu'une demi-section longitudinale (de $r = 0$ à $r = R$).
A la sortie de la conduite $\sigma \mathbf{n} = -P_{atm} \mathbf{n}$, (\mathbf{n} étant le vecteur normal à la surface libre et P_{atm} la pression atmosphérique).

V-1-2-2 - Comparaison des résultats obtenus par rapport aux expériences

Premier test : sans le modèle à zéro équation

Trois maillages différents, de même nombre de noeuds ont été testés :

Maillage 1 (figure(V-2)) : la taille de la maille au voisinage de la paroi vaut $\Delta r = 5$ mm .

Maillage 2 (figure(V-3)): la taille de la maille au voisinage de la paroi vaut $\Delta r = 2$ mm .

Maillage 3 (figure(V-4)) :la taille de la maille au voisinage de la paroi vaut $\Delta r = 1 \text{ mm}$.

Le raffinement de la zone proche de la paroi est accentué dans le maillage 2 et plus encore dans le maillage 3.

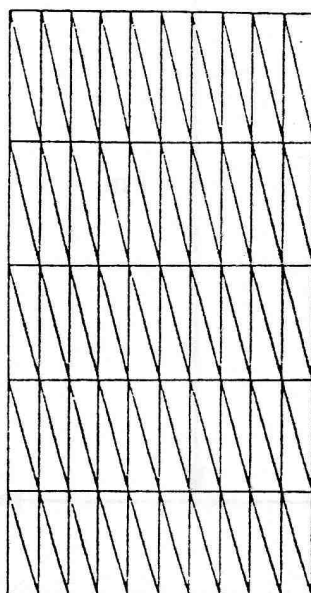


Figure (V-2) : maillage 1

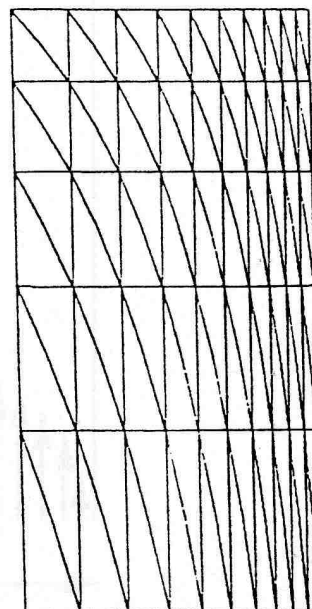


Figure (V-3) : maillage 2

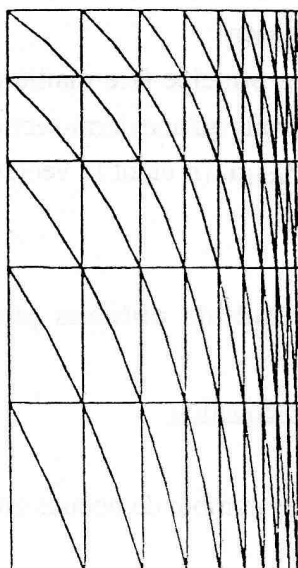


Figure (V-4) : maillage 3

Considérons par exemple le maillage 3 pour ce qui concerne l'effet de l'introduction du modèle de turbulence, le débit à l'entrée est de $0,0325 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ ($Re=144\,900$).

Lorsqu'on n'introduit pas le modèle de NIKURADSE dans le code de calcul, c'est à dire lorsqu'on effectue un calcul laminaire à viscosité uniforme dans l'écoulement, on obtient un profil parabolique (écoulement de Poiseuille tube) dans les sections situées cotes $z = 0,45 \text{ m}$ et $h = 0,9 \text{ m}$ au lieu d'un profil aplati de NIKURADSE comme le montrent la figure (V-5). On voit clairement l'effet de la turbulence qui tend à homogénéiser les vitesses moyennes dans la plus grande partie de l'écoulement et, en contrepartie, à créer de forts gradients de vitesses près des parois

Deuxième test : influence du maillage

Sur chacun de ces trois maillages, le même débit ($0,0325 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$) suffisamment élevé pour assurer un nombre de REYNOLDS élevé ($Re=144\,900$), une vitesse moyenne de $1,035 \text{ ms}^{-1}$ et une vitesse maximale de $2,07 \text{ ms}^{-1}$, a été testé pour étudier le profil de vitesse relative V/V_{\max} en fonction de la distance relative de la paroi $\frac{y}{R}$ dans deux sections de la conduite situées respectivement à $z=0,45 \text{ m}$ et à $z=0,9 \text{ m}$. Les résultats dans les deux sections, étant très voisins, on ne présentera que la figure relative à la section située à $z=0,45 \text{ m}$.

Maillage 1

On a un accord satisfaisant (CF figure (V-6)) avec les résultats expérimentaux de NIKURADSE. Le profil de vitesse relative est bien décrit dans la région centrale. On constate en revanche un écart non négligeable loin de l'axe de l'écoulement.

Maillage 2

Le profil du champ de vitesse relative dans la section située à $h = 0,45$ est donné par la figure (V-7). Les résultats numériques se rapprochent davantage des résultats expérimentaux.

Maillage 3

Le profil du champ de vitesse relative à $h = 0,45$ est donné par la figure (V-8). Les résultats numériques sont encore meilleurs. On a l'impression que les résultats convergent vers les relevés expérimentaux lorsque le maillage est raffiné au voisinage de la paroi.

On constate que pour un même nombre de noeuds, plus le maillage est raffiné vers la paroi, plus les résultats numériques se rapprochent des résultats expérimentaux. En raffinant le maillage vers la paroi, on constate l'influence de la couche limite sur les courbes $V/V_{\max}(y/R)$.

Ce résultat illustre l'inconvénient de l'hypothèse "contact collant" à la paroi. Les forts gradients de vitesse présents au voisinage de celle-ci obligent à un maillage très fin en paroi pour une bonne représentation de l'écoulement, même relativement loin de la paroi.

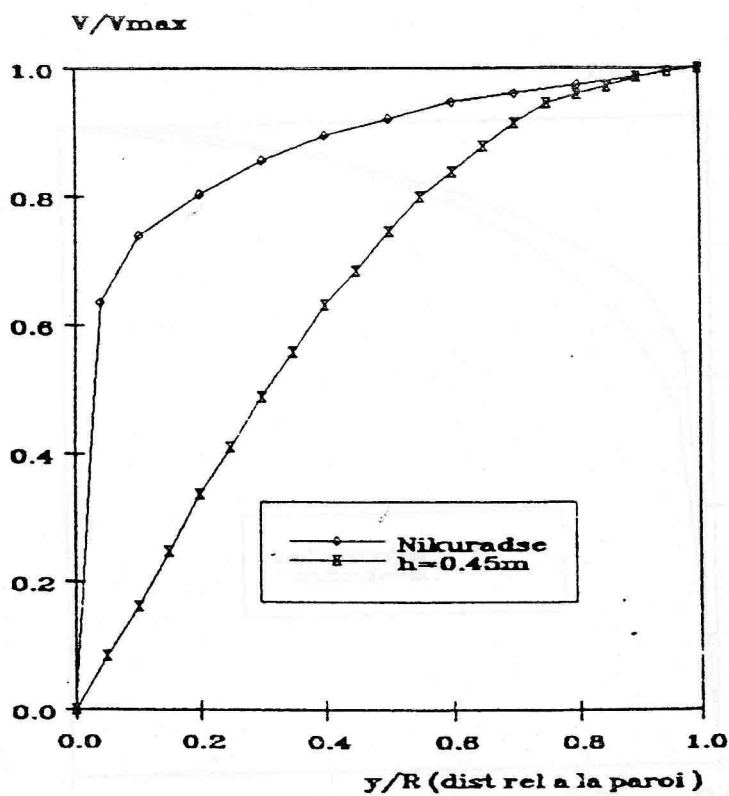
Troisième test : influence du nombre de REYNOLDS

Nous avons étudié ci-dessus le cas d'un nombre de REYNOLDS élevé $Re = 144900$ et nous avons eu les meilleurs résultats avec le maillage le plus raffiné vers la paroi c'est-à-dire le maillage 3. Nous allons tester sur ce maillage deux nombres de REYNOLDS relativement faibles.

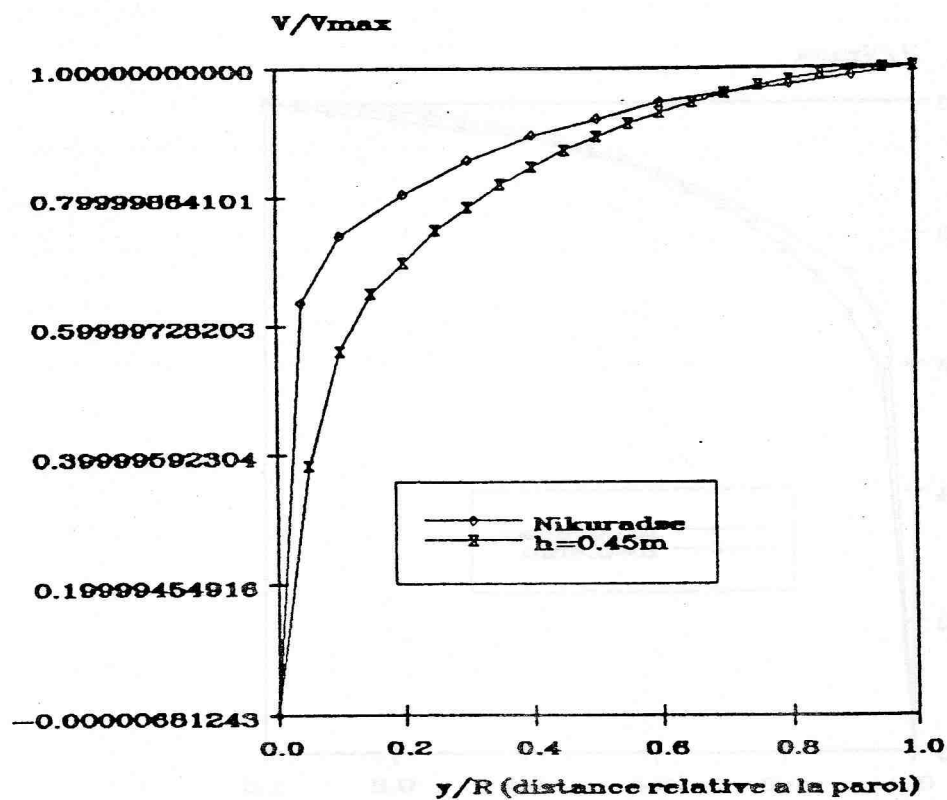
Pour $Q = 0,65 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ et $Re = 2898$ et pour $Q = 0,65 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ et $Re = 289,8$, les résultats obtenus sont donnés par la figure (V-9).

On constate que plus le nombre de REYNOLDS est faible plus la courbe $V/V_{\max}(y/R)$ s'écarte de la courbe expérimentale de NIKURADSE même si le maillage utilisé est le maillage le plus raffiné vers la paroi. Il est évidemment normal que la formule de NIKURADSE établie sur la base d'écoulements pleinement turbulents donne de moins bons résultats lorsque la vitesse de l'écoulement décroît.

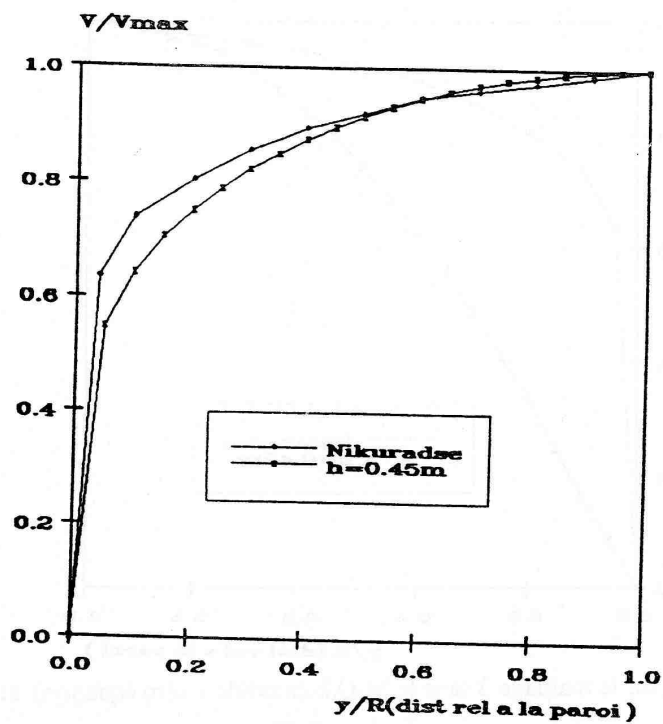
Nous conclurons cette partie en notant que les comparaisons ci-dessus nous ont permis de valider les calculs d'écoulement effectués avec notre modèle d'éléments finis. En ce qui concerne l'application à des écoulements turbulents complexes, nous constatons que l'hypothèse de contact collant à la paroi se révèle très pénalisante en terme de maillage et donc en temps de calcul. Elle sera avantageusement remplacée par l'utilisation d'une loi de paroi.



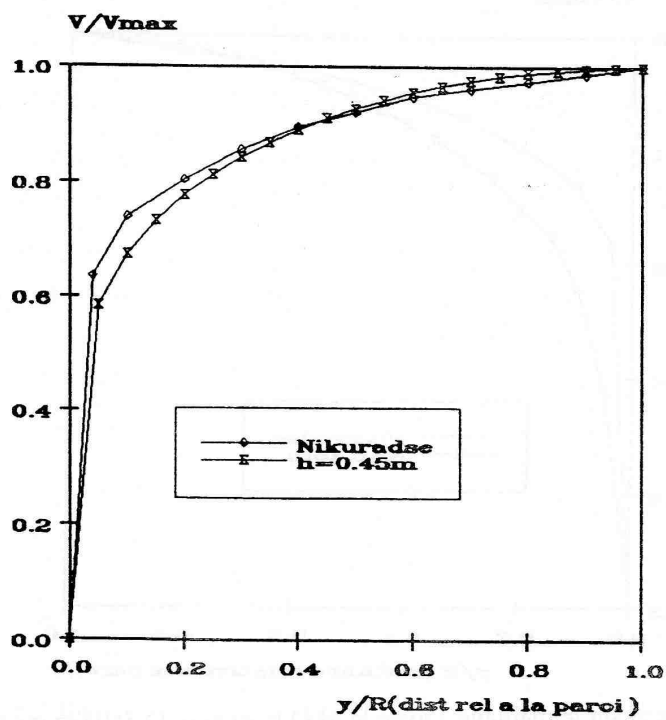
Figure(V-5) : test sur le maillage 3 sans le M.O.E.(modèle à zéro équation) et avec $Q=0,0325$ $m^3.s^{-1}$, $z=0,45$ m



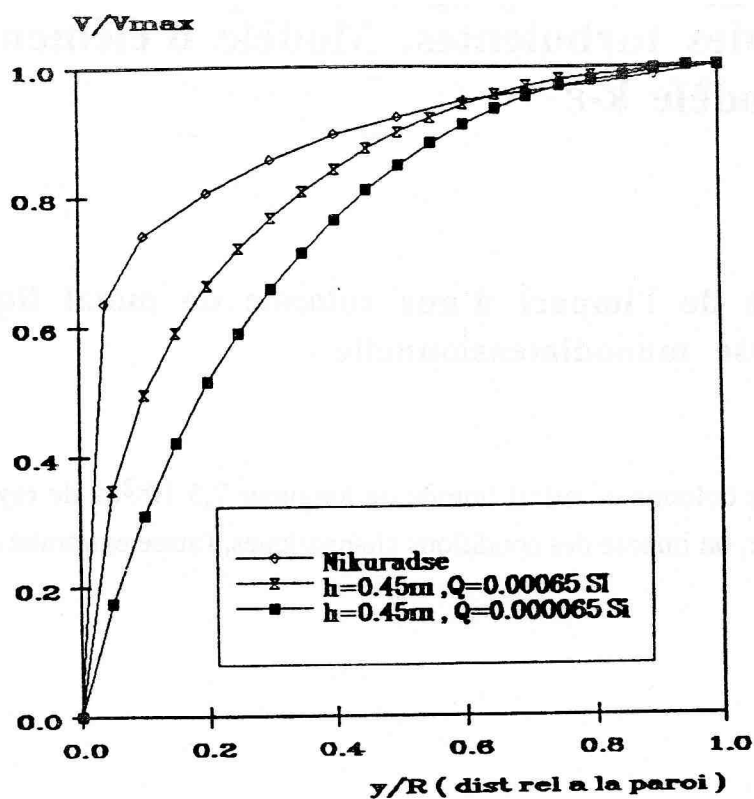
Figure(V-6) : test sur le maillage 1 avec le M.O.E. et avec $Q=0,0325$ $m^3.s^{-1}$, $z=0,45$ m



Figure(V-7) : test sur le maillage 2 avec le M.O.E. et avec $Q=0,0325 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $z=0,45 \text{ m}$



Figure(V-8) : test sur le maillage 3 avec le M.O.E. et avec $Q=0,0325 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $z=0,45 \text{ m}$



Figure(V-9) : influence du nombre de REYNOLDS (maillage 3, M.O.E., $z=0,45m$)

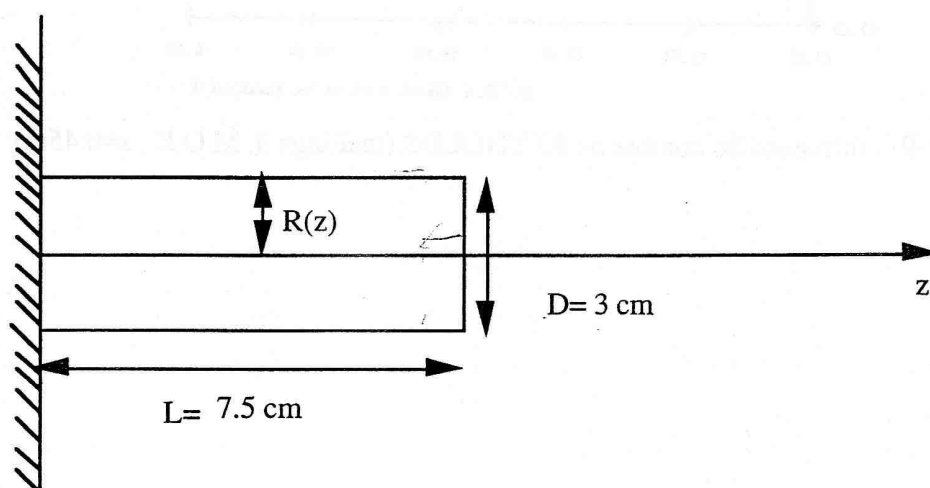
V-2 - Etude du couplage des équations de transport des variables turbulentes. Modèle d'éléments finis 1D avec le modèle k-ε

[JLC]

Modèle k-ε : posé dans une 1D
1D (Ch. Suppl.)

V-2-1- Etude de l'impact d'une colonne de métal liquide sur une paroi. Analyse monodimensionnelle.

On considère une colonne de métal liquide de longueur $7,5 \cdot 10^{-2} \text{m}$, de rayon $1,5 \cdot 10^{-2} \text{m}$. Sur l'extrémité mobile, on impose des conditions cinématiques, l'autre extrémité étant fixe.



Figure(V- 10) : colonne de métal liquide

On suppose que dans le repère (r, z) , le champ de vitesse a pour composantes :

$$(V-5) \quad \begin{cases} V_r = -\frac{1}{2} r \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ V_z = V_z(z, t) \end{cases}$$

V_r et V_z représentent respectivement la vitesse radiale et la vitesse axiale de la colonne.

Il faut signaler qu'il s'agit d'une approximation, car en fait il y a des termes de cisaillement lorsque l'éprouvette ne se déforme pas de manière homogène.

Le tenseur des vitesses de déformation sous forme matricielle s'écrit alors de la manière suivante, en tenant compte de l'hypothèse d'incompressibilité du liquide.

$$(V-6) \quad [\dot{\epsilon}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\partial V_z}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\partial V_z}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Soient γ_r et γ_z respectivement les composantes radiale et axiale de l'accélération.

$$(V-7) \quad \gamma_r = -\frac{1}{2} \left[V_r \frac{\partial V_z}{\partial z} + r \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} V_z + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial t} \right) \right]$$

$$\gamma_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} V_z + \frac{\partial V_z}{\partial t}$$

Dans le but de ne pas faire apparaître γ_r dans l'expression du principe des puissances virtuelles que nous verrons plus bas, certaines transformations s'avèrent nécessaires. Si on dérive γ_z par rapport à z on obtient l'égalité suivante :

$$(V-8) \quad \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} V_z + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial t} + \left[\frac{\partial V_z}{\partial z} \right]^2$$

Ainsi, on peut réécrire γ_r en tenant compte de (V-5), (V-7) et (V-8):

$$(V-9) \quad \gamma_r = \frac{3}{4} r \left[\frac{\partial V_z}{\partial z} \right]^2 - \frac{1}{2} r \frac{\partial \gamma_z}{\partial z}$$

Alors le principe des puissances virtuelles a pour expression en l'absence des forces de masse:

$$(V-10) \quad \int_{\Omega} \rho \gamma \cdot \mathbf{V}^* dV = - \int_{\Omega} \mathbf{s} : \dot{\epsilon}^* dV$$

ou

$$(V-11) \quad \int_{\Omega} \rho \gamma_z V_z^* dV + \int_{\Omega} \rho \gamma_r V_r^* dV = - \int_{\Omega} \mathbf{s} : \dot{\epsilon}^* dV$$

où \mathbf{V}^* et $\dot{\epsilon}^*$ représentent respectivement la vitesse et la vitesse de déformation virtuelles, \mathbf{V}^* étant cinématiquement admissible à zéro, c'est à dire nul là où les conditions cinématiques sont imposées (en l'occurrence, aux extrémités de la barre). \mathbf{s} est le tenseur déviateur des contraintes.

Compte tenu de (V-9), le premier terme de l'intégrale s'écrit, après calcul :

$$\pi\rho \int_0^L \frac{-R^4(z)}{16} \left[3 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right] \frac{\partial V_z^*}{\partial z} dz + \pi\rho \int_0^L R^2(z) \gamma_z V_z^* dz$$

La matrice représentant le tenseur déviateur des contraintes dans le cas laminaire newtonien s'écrit de la manière suivante (rappelons que μ_0 est la viscosité dynamique laminaire):

$$(V-12) \quad [\mathbf{s}] = 2\mu_0 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\partial V_z}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\partial V_z}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

on a

$$\mathbf{s} : \dot{\epsilon}^* = 3\mu_0 \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial V_z^*}{\partial z}$$

et le second terme de (V-11) s'écrit alors :

$$- \int_0^L \mathbf{s} : \dot{\epsilon}^* dV = -3\mu_0 \pi \int_0^L R^2(z) \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial V_z^*}{\partial z} dz$$

On obtient finalement, pour expression du principe des puissances virtuelles :

$$(V-13) \quad \rho \int_0^L \left(\frac{-R^4(z)}{16} \left[3 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right] \frac{\partial V_z^*}{\partial z} + R^2(z) \gamma_z V_z^* \right) dz + 3\mu_0 \int_0^L R^2(z) \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial V_z^*}{\partial z} dz = 0$$

V-2-2 - Conditions aux limites

La loi habituellement admise pour l'établissement de la vitesse de l'extrémité mobile est la suivante :

$$(V-14) \quad V(t) = V_m \left(1 - \exp - \left(\frac{t}{t_c} \right) \right)$$

$|V_m|$ représente la vitesse maximale en valeur absolue atteinte et t_c une échelle de temps.

Cette loi est remplacée par une loi empirique :

$$(V-15) \quad V(t) = \frac{V_m}{1 + \left(\frac{t_1}{t} \right)^3}$$

Ainsi, lorsque t tend vers zéro, $V(t)$, $\gamma(t)$ et $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ tendent tous vers zéro. L'accélération $\gamma(t)$ imposée à l'extrémité mobile s'écrit alors :

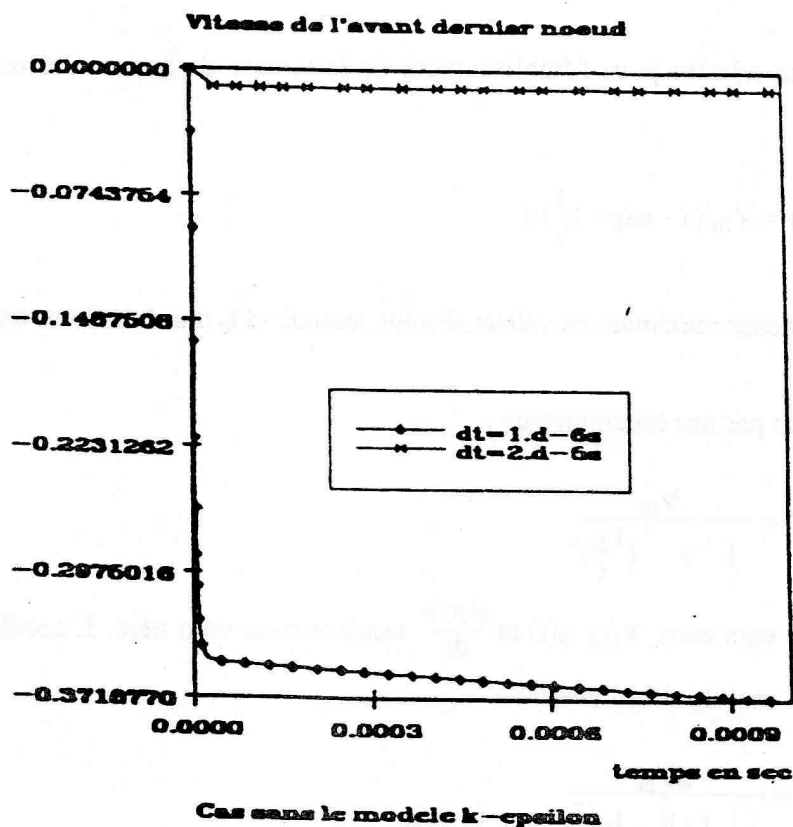
$$(V-16) \quad \gamma(t) = \frac{3V_m}{t_1 \left[\left(\frac{t}{t_1} \right)^2 + \frac{t_1}{t} \right]^2}$$

La constante de temps t_1 est calculée de façon à ce que la valeur maximale atteinte par γ d'après la relation (V-16) soit égale à celle obtenue pour la loi (V-14) d'où :

$$t_1 = \frac{3t_c}{(2^{-2/3} + 2^{1/3})^2} = 0,84 t_c$$

En prenant $t_c = 5 \mu s$, on a $t_1 = 4,2 \mu s$.

La vitesse de l'extrémité mobile atteint approximativement sa valeur nominale au bout d'un temps $t = 4,6 \mu s$. Le pas de temps doit être suffisamment petit pour bien représenter la courbe de montée en vitesse (figure V- 11).



Figure(V-11) : influence d'un pas de temps relativement élevé

V-2-3- Résolution

Pour résoudre le problème, il faut discrétiser spatialement l'expression du principe des puissances virtuelles (V-13). Si l'on considère un maillage à $N_{bn}-1$ éléments finis linéaires (N_{bn} noeuds) de la colonne de liquide, on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{N_{bn}-1} \rho \int_{z_m}^{z_{m+1}} & \left(\frac{-R^4(z)}{16} \left[3 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} \right] \frac{\partial V_z^*}{\partial z} + R^2(z) \gamma_z V_z^* \right) dz \\
 & + 3 \mu_0 \sum_{m=1}^{N_{bn}-1} \int_{z_m}^{z_{m+1}} R^2(z) \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial V_z^*}{\partial z} dz = 0
 \end{aligned}
 \tag{V-17}$$

$$z_1 = 0 \text{ et } z_{Nbn} = L$$

où L est la longueur courante de la colonne. A chaque élément réel, on associe un élément de référence linéaire.

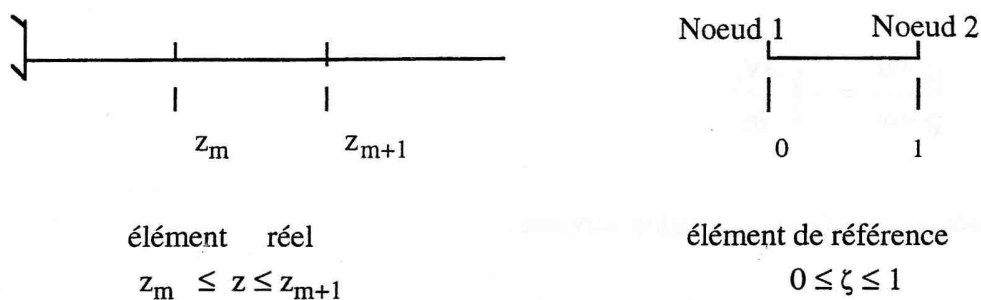


Figure (V-12): discrétisation en éléments finis monodimensionnels

Nous noterons les fonctions de pondération dans l'élément de référence de la manière suivante :

au noeud 1, $N_1 = 1 - \zeta$ et au noeud 1+1, $N_2 = \zeta$

En discrétisant $V_z^* = N_n V_n^*$ et étant donné que R^{es} (résidu) doit être nul $\forall V_z^*$, on doit avoir :

$\forall n$,

$$\sum_{m=1}^{Nbn-1} \rho \int_{z_m}^{z_{m+1}} \left(\frac{R^4(z)}{16} \left(2 \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_p}{\partial z} \gamma_p \right) + R^2(z) N_n N_p \gamma_p \right) dz$$

$$= 3\mu_0 \sum_{m=1}^{Nbn-1} \int_{z_m}^{z_{m+1}} R^2(z) \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_p}{\partial z} V_p dz + 3\rho \sum_{m=1}^{Nbn-1} \int_{z_m}^{z_{m+1}} \frac{R^4(z)}{16} \frac{\partial N_n}{\partial z} \left(\frac{\partial N_p}{\partial z} V_p \right)^2 dz$$

(V-18)

L'assemblage des matrices et des seconds membres permet d'aboutir à un système linéaire à résoudre en γ_p , valeurs de l'accélération aux différents noeuds du maillage. Après résolution en accélération, on calcule les vitesses, les nouvelles positions des noeuds et les rayons des éléments au moyen des formules suivantes :

$$(V-19) \quad V_z^{t+\Delta t} = V_z^t + \frac{\Delta t}{2} (\gamma^{t+\Delta t} + \gamma^t)$$

$$(V-20) \quad z^{t+\Delta t} = z^t + V_z^t \Delta t + \frac{\Delta t^2}{6} (\gamma^{t+\Delta t} + 2\gamma^t)$$

La vitesse de déformation suivant le rayon peut s'écrire de la manière suivante :

$$(V-21) \quad \frac{\dot{R}^{t+\Delta t}}{R^{t+\Delta t}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

D'autre part $R^{t+\Delta t}$ doit vérifier la relation suivante :

$$(V-22) \quad R^{t+\Delta t} = R^t + \frac{\Delta t}{2} (\dot{R}^{t+\Delta t} + \dot{R}^t)$$

Des équations (V-21) et (V-22), on obtient l'expression suivante :

$$(V-23) \quad R^{t+\Delta t} = \frac{R^t + \frac{\Delta t}{2} \dot{R}^t}{1 + \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

V-2-4-Equations de transport de k et de ε dans le cas 1D

Pour se placer dans le cas monodimensionnel, on fait dépendre k et ε uniquement que de la variable z , et donc en notant $\frac{\partial V_z}{\partial z} = V_{z,z}$, $\frac{\partial k}{\partial z} = k_{,z}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \varepsilon_{,z}$, les équations de transport de k et de ε sont les suivantes :

$$(V-24) \quad \frac{dk}{dt} = \left(\frac{v_t}{\sigma_k} k_{,z} \right)_{,z} + 2 v_t V_{z,z}^2 - \varepsilon$$

$$(V-25) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_{,z} \right)_{,z} + 2 C_{\varepsilon 1} v_t V_{z,z}^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

avec $v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ qui sera pris en compte pour la résolution cinématique.

On applique la formulation variationnelle à chacune des équations (V-24) et (V-25). On les intègre par parties et on tient compte des conditions de flux nul $\left(\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0\right)$, qui sont des conditions aux limites de NEUMANN aux extrémités.

Pour l'énergie cinétique turbulente, après discrétisation spatiale, on aboutit au système suivant :

(V-26)

$$\int_0^L N_i N_j \frac{dk^j}{dt} \pi R^2(z) dz + \int_0^L \left[\frac{v_t^t}{\sigma_k} N_{i,z} N_{j,z} k^j - 2 v_t^t (V_{z,z}^{t+\Delta t})^2 N_i + \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^t N_j k^j N_i \right] \pi R^2(z) dz = 0$$

$$(V-27) \quad [C] \left\{ \frac{dk}{dt} \right\} + [H] \{k\} = \{Q\}$$

avec

$$C_{ij} = \int_0^L N_i N_j R^2(z) dz$$

$$H_{ij} = \int_0^L \left[\frac{v_t^t}{\sigma_k} N_{i,z} N_{j,z} + \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^t N_j N_i \right] R^2(z) dz$$

$$Q_i = \int_0^L 2 v_t^t (V_{z,z}^{t+\Delta t})^2 N_i R^2(z) dz$$

On procède de la même manière pour avoir l'équation de transport discrétisée de ε . On obtient donc le système suivant :

$$(V-28) \quad \int_0^L N_i N_j \frac{d\varepsilon^j}{dt} \pi R^2(z) dz + \int_0^L \left[\frac{v_t^t}{\sigma_\varepsilon} N_{i,z} N_{j,z} \varepsilon^j - 2 C_\mu C_{\varepsilon 1} (V_{z,z}^{t+\Delta t})^2 k^t N_i \right] \pi R^2(z) dz + \int_0^L \left[2 C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^t N_j \varepsilon^j N_i - C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon^2}{k}\right)^t N_i \right] \pi R^2(z) dz = 0$$

$$(V-29) \quad [C'] \left\{ \frac{d\varepsilon}{dt} \right\} + [H'] \{\varepsilon\} = \{Q'\}$$

avec

$$C'_{ij} = \int_0^L N_i N_j R^2(z) dz$$

$$H'_{ij} = \int_0^L \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} N_{i,z} N_{j,z} + 2 C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^t N_j N_i \right] R^2(z) dz$$

$$Q'_i = \int_0^L \left[2 C_{\varepsilon 1} k^t (v_{z,z}^{t+\Delta t})^2 + C_{\varepsilon 2} \left(\frac{\varepsilon^2}{k} \right)^t \right] N_i R^2(z) dz$$

Pour la discrétisation temporelle, un schéma à un pas de temps est utilisé (voir Chapitre IV). On discrétise donc k , ε et leur dérivée temporelle de la manière suivante :

$$(V-30) \quad k = (1 - \alpha) k^t + \alpha k^{t+\Delta t}, \quad \frac{dk}{dt} = \frac{k^{t+\Delta t} - k^t}{\Delta t}$$

$$(V-31) \quad \varepsilon = (1 - \alpha) \varepsilon^t + \alpha \varepsilon^{t+\Delta t}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\varepsilon^{t+\Delta t} - \varepsilon^t}{\Delta t}$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1$. k^t et ε^t les valeurs connues à l'instant t , $k^{t+\Delta t}$, $\varepsilon^{t+\Delta t}$ les inconnues à l'instant $t + \Delta t$.

Après assemblage des matrices et des seconds membres linéarisés (exprimés en fonction de k , ε , v_t calculés à l'instant t), on aboutit à un système linéaire à résoudre.

On obtient pour k :

$$(V-32) \quad \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \alpha \mathbf{H} \right] \{ \mathbf{k}^{t+\Delta t} \} = \{ \mathbf{Q} \} + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}] \{ \mathbf{k}^t \} - (1 - \alpha) [\mathbf{H}'] \{ \mathbf{k}^t \}$$

et pour ε :

$$(V-33) \quad \left[\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}' + \alpha \mathbf{H}' \right] \{ \varepsilon^{t+\Delta t} \} = \{ \mathbf{Q}' \} + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}'] \{ \varepsilon^t \} - (1 - \alpha) [\mathbf{H}'] \{ \varepsilon^t \}$$

Une fois que la résolution est faite en k et en ε pour chaque noeud, on peut calculer la viscosité cinématique turbulente qui sera prise en compte au même titre que la viscosité cinématique laminaire du fluide.

L'algorithme général de résolution sur un incrément de temps est donc le suivant :

- résolution en accélération pour déterminer $\gamma^{t+\Delta t}$ (de l'écoulement moyen) : (V-18)
- obtention du champ de vitesse moyen par intégration

$$V_z^{t+\Delta t} = V_z^t + \frac{\Delta t}{2} (\gamma^{t+\Delta t} + \gamma^t)$$

- actualisation du maillage

$$z^{t+\Delta t} = z^t + V_z^t \Delta t + \frac{\Delta t^2}{6} (\gamma^{t+\Delta t} + 2\gamma^t)$$

- résolution en k et ε à $t + \Delta t$ ((V-29) et (V-30))
- actualisation de la viscosité cinématique turbulente ν_t .

V-2-5- Comparaison entre le cas laminaire et le cas avec le modèle k- ε

Le fluide considéré est un métal liquide de masse volumique, $\rho = 7000 \text{ kg/m}^3$, de vitesse maximale à l'extrémité mobile ($V_m = 0,7 \text{ m.s}^{-1}$), de viscosité dynamique $\mu_0 = 10^{-2} \text{ Pa.s}$. La valeur initiale de k vaut $5.10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2$ et celle de ε , $5.10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^3$. Les deux cas test consistent en une réduction de la longueur de la colonne de métal liquide de moitié au bout d'un certain temps.

Calcul laminaire : viscosité uniforme et constante dans le temps

On étudie l'influence de certains paramètres tels que le pas de temps et le maillage sur les résultats.

Influence du pas de temps sur la vitesse de l'avant dernier noeud

On considère un premier maillage de la colonne avec dix éléments de taille $7.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Pour différents pas de temps ($\Delta t = 5.10^{-7} \text{ s}$, $\Delta t = 1.10^{-6} \text{ s}$, $\Delta t = 2.10^{-6} \text{ s}$), les trois courbes représentant la vitesse de l'avant dernier noeud (près de l'extrémité mobile) en fonction du

temps sont confondues comme on peut le constater sur la figure (V-13). On conclut que le pas de temps n'a pas trop d'influence sur le champ de vitesse lorsqu'il est choisi suffisamment faible devant la durée critique d'établissement de la vitesse de l'extrémité mobile (ici $4,2 \mu\text{s}$).

Influence du maillage sur le champ de vitesse aux différents noeuds à $t = 0,06 \text{ s}$

Cinq maillages réguliers ont été testés: dix, vingt, trente, quarante, cinquante éléments. Sur la figure (V-14) on peut constater que les courbes représentant la vitesse en fonction de l'abscisse des noeuds convergent correctement avec la finesse accrue du maillage. Le maillage grossier (dix, vingt éléments) donne des courbes avec des lignes brisées tandis que les autres maillages (trente, quarante, cinquante éléments) donnent des courbes à allure plus régulière.

Influence du maillage sur l'évolution du rayon en fonction des éléments à l'instant $t = 0,06 \text{ s}$ (figure (V-15))

Les maillages pris dans le cas précédent ont servi au test. De façon générale, d'après les courbes représentant l'évolution du rayon en fonction des éléments, on constate que plus on s'éloigne de l'extrémité mobile (dernier élément), plus les valeurs des rayons sont faibles. L'écart entre la valeur du rayon du dernier élément et celle du rayon du premier élément est important. Les rayons les plus élevés sont les rayons des derniers éléments du maillage le plus raffiné. Là encore, les résultats convergent avec la finesse du maillage. Au bout de $0,06 \text{ s}$, on arrive à une réduction de longueur de plus de 50% comme l'indique la figure (V-16).

calcul turbulent avec le modèle k- ϵ

Influence du pas de temps sur la vitesse de l'avant dernier noeud (figure (V-17))

Les courbes traduisant l'évolution de la vitesse de l'avant dernier noeud en fonction du temps pour le maillage à dix éléments sont confondues pour des pas de temps relativement faibles qui sont ceux choisis pour le cas laminaire. On arrive à la même conclusion, à savoir que le pas de temps n'a pas d'influence notable sur l'évolution en fonction du temps de la vitesse.

Influence du maillage sur le champ de vitesse aux différents noeuds à $t = 0,06 \text{ s}$ (figure (V-18))

Les cinq maillages utilisés sont ceux pris dans le cas sans le modèle k- ϵ . On constate que les courbes sont des droites confondues. On peut donc en déduire que la vitesse de déformation est

constante et que la déformation est quasi homogène contrairement à ce que l'on avait dans le cas sans le modèle $k-\varepsilon$, où la déformation n'était pas homogène. On se rend compte du rôle que joue la viscosité cinématique additive qui est très grande par rapport à la viscosité cinématique laminaire.

Influence du maillage sur l'évolution du rayon en fonction des éléments à l'instant $t = 0,06$ s (figure (V-19))

On constate que quel que soit le maillage il n'y a pas trop d'écart entre les valeurs des rayons des éléments. Les éléments dont les rayons ont des valeurs relativement grandes sont les derniers éléments (vers l'extrémité mobile) comme dans le cas sans le $k-\varepsilon$. Cela confirme le fait que la déformation soit quasi homogène.

Evolution de k , ε , ν_t du dernier noeud en fonction du temps

* Evolution de k (figure (V-20))

On utilise un schéma à un pas de temps et le maillage grossier (dix éléments). On observe sur la figure (V-20), que pour $\alpha = 1$ (schéma implicite), ou $\alpha = \frac{1}{2}$ (schéma de Crank-Nicholson) ou $\alpha = \frac{2}{3}$ (schéma de Galerkin) on a la même courbe. On n'a donc aucune influence notable de la valeur de α sur l'évolution de l'énergie cinétique turbulente. On observe que cette énergie croît lentement pendant un certain temps, puis la croissance se fait plus rapidement. Cela pourrait s'expliquer par le fait que les vitesses se stabilisent à un moment donné et les noeuds se rapprochant davantage, la vitesse de déformation des éléments ne cesse d'augmenter, donc la production d'énergie devient de plus en plus grande (figure (V-21)).

*Evolution du taux de dissipation de k du dernier noeud (figure (V-22))

Le même maillage est utilisé ainsi que le même schéma d'intégration temporelle. La valeur de α ($\alpha = 1$ ou $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = \frac{2}{3}$) n'a aucune influence sur l'évolution de ε . On constate que la courbe $\varepsilon(t)$ à la même allure que celle de $k(t)$, à savoir que la croissance est lente puis rapide par la suite. Cette croissance rapide est probablement due à la croissance de la production de taux de dissipation (figure (V-23)).

* Evolution de la viscosité cinématique turbulente du dernier noeud (figure (V-24))

Comme pour k et ε , les trois schémas ont été testés: le schéma implicite, le schéma de Galerkin, le schéma de Crank-Nicholson. Toutes les courbes sont confondues. L'allure de $v_t(t)$ est différente de celle de $k(t)$ et celle de $\varepsilon(t)$. On observe une croissance rapide de la courbe sur les premiers incréments, puis une décroissance lente jusqu'à environ $t = 0,01s$ puis une croissance assez rapide à nouveau.

Influence du maillage sur les valeurs de $k(t)$, $\varepsilon(t)$, $v_t(t)$ du dernier noeud

Les maillages dix, vingt, trente quarante et cinquante éléments ont été repris pour étudier l'influence du maillage sur les courbes $k(t)$, $\varepsilon(t)$ et $v_t(t)$. On constate que plus le maillage est fin, plus les courbes donnant l'évolution de k en fonction du temps se rapprochent (figure (V-25)). On a la même constatation en ce qui concerne les courbes $\varepsilon(t)$ (figure (V-26)) et $v_t(t)$ (figure (V-27)).

Evolution de k , ε et v_t en fonction de l'abscisse z des noeuds

Dès les premiers incréments, on constate que les valeurs les plus fortes de k se trouvent vers l'extrémité mobile. Au fil du temps, au fur et à mesure que la longueur de la colonne de métal liquide diminue, on constate un phénomène d'homogénéisation (figure (V-28)). On a le même phénomène pour les courbes $\varepsilon(z)$ (figure (V-29)) et $v_t(z)$ (figure (V-30)). Des fluctuations spatiales se font sentir de manière générale sur les premiers incréments et disparaissent avec le temps.

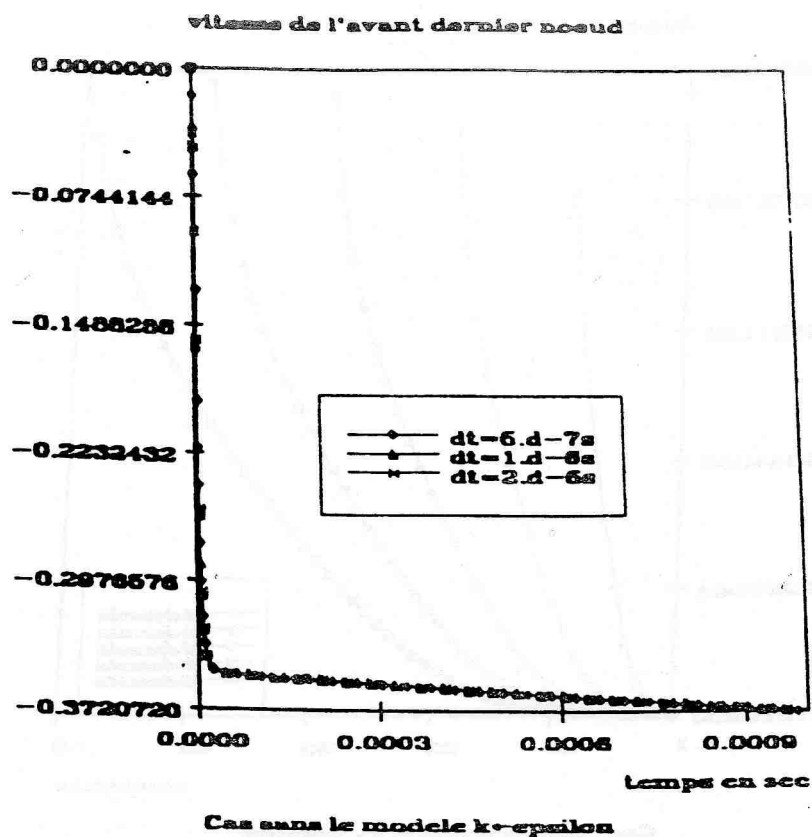


Figure (V-13) : vitesse de l'avant dernier noeud pour différents pas de temps

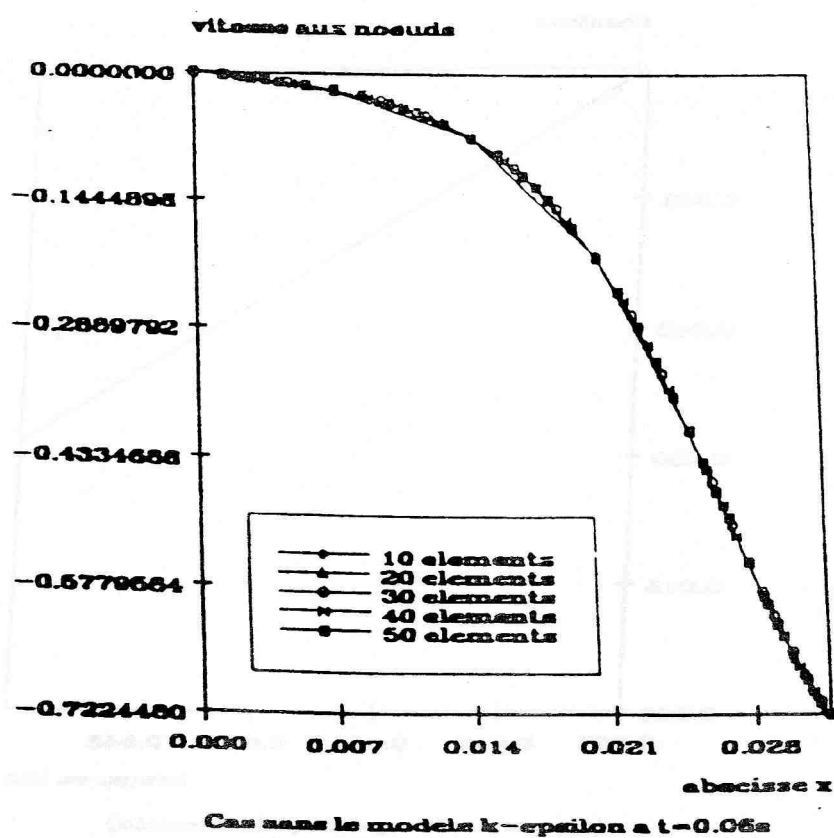


Figure (V-14) : influence du maillage sur la vitesse aux noeuds

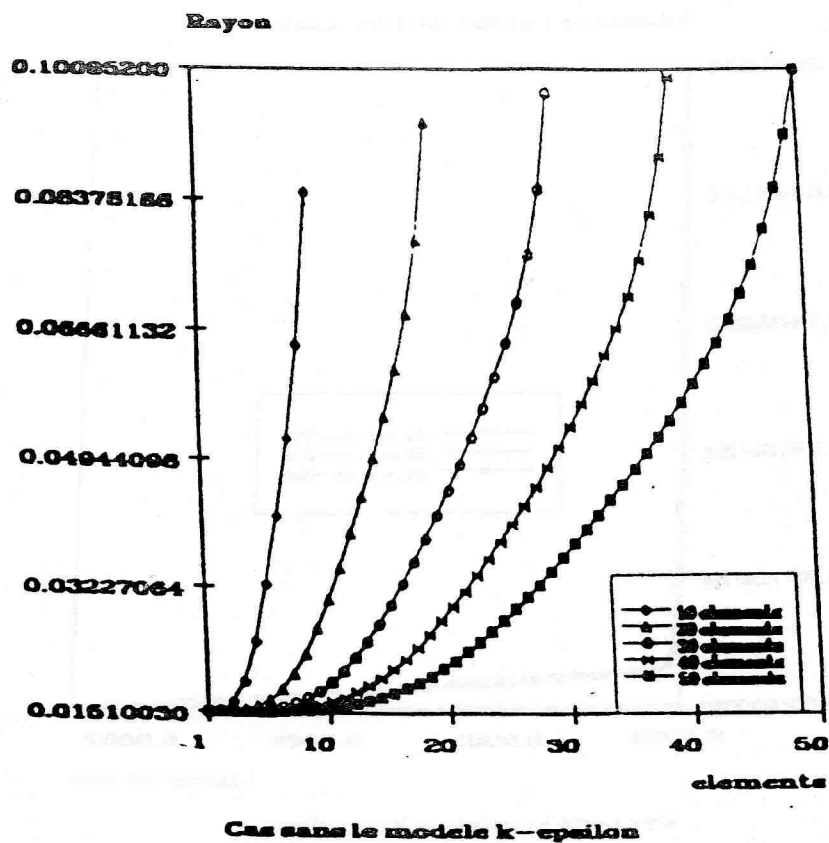


Figure (V-15): rayon des différents éléments à $t=0,06$ s

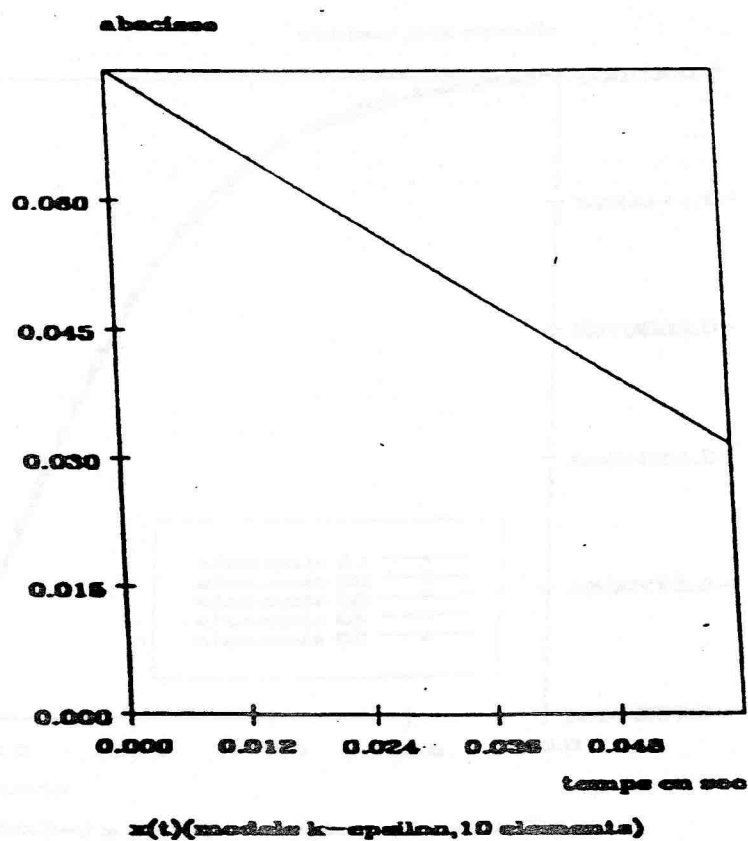


Figure (V-16) : évolution de l'abscisse de l'extrémité mobile en fonction du temps

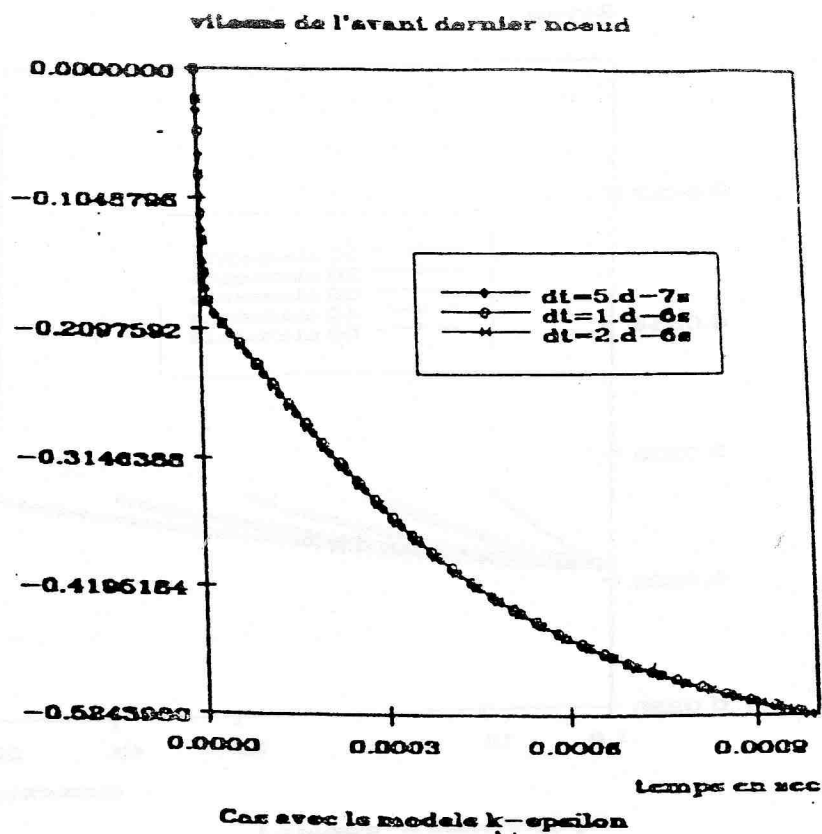


Figure (V-17) : vitesse de l'avant dernier noeud pour différents pas de temps

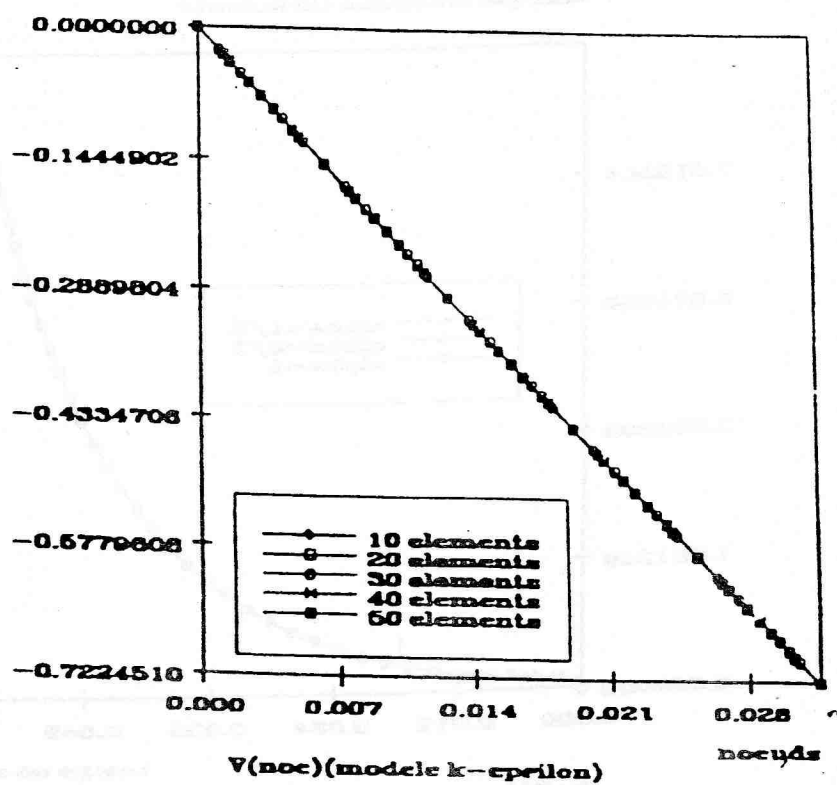


Figure (V-18) : vitesse aux différents noeuds à $t = 0,06s$

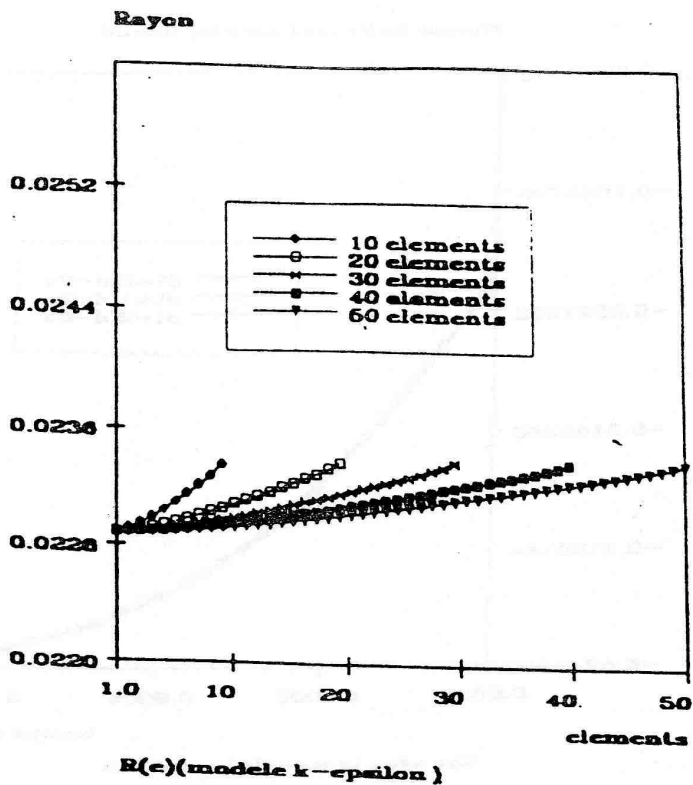


Figure (V-19) : rayon des différents éléments à $t=0,06$ s

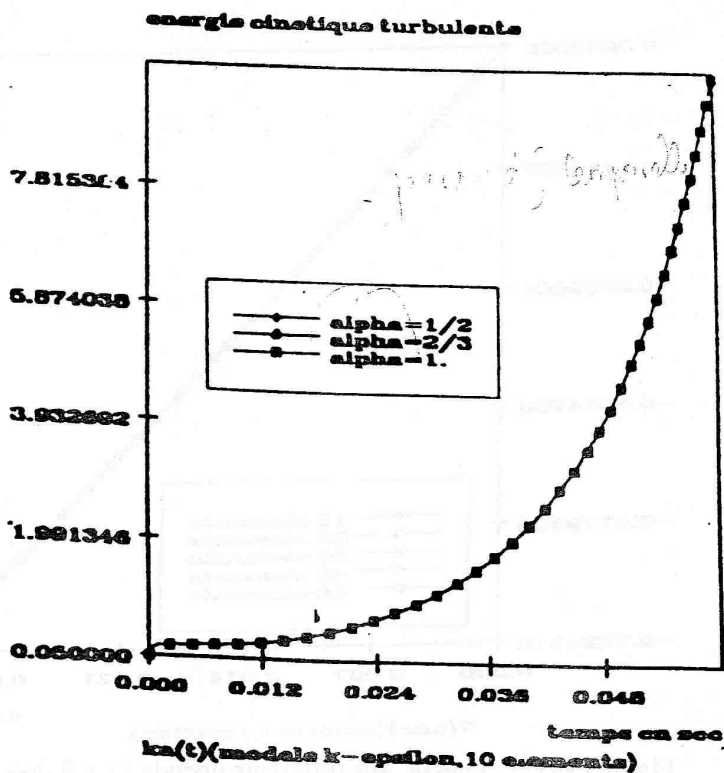


Figure (V-20) : énergie cinétique turbulente du dernier noeud en fonction du temps

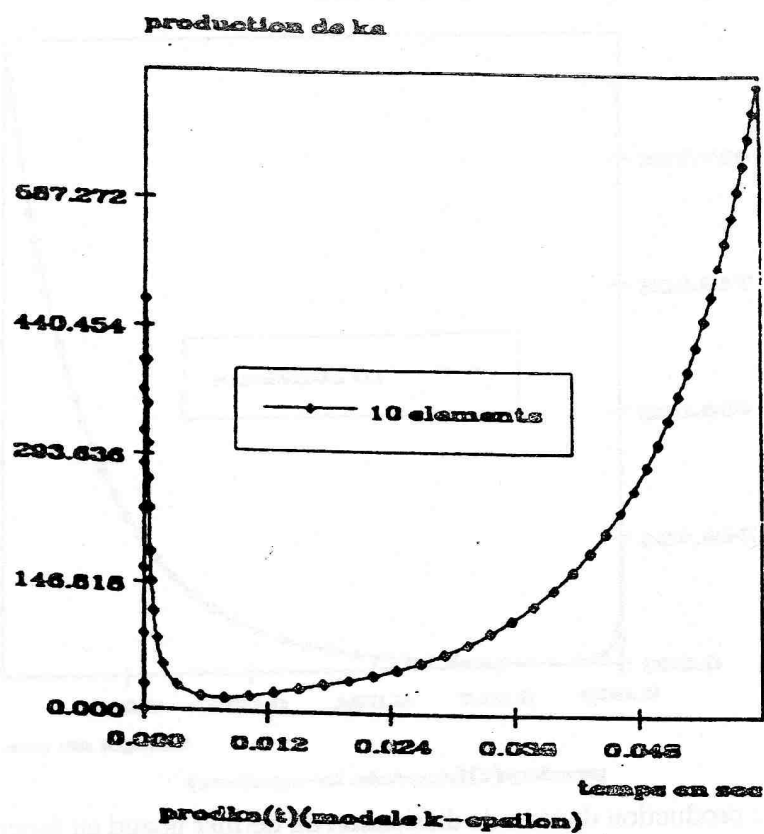


Figure (V-21) : production d'énergie cinétique du dernier noeud en fonction du temps

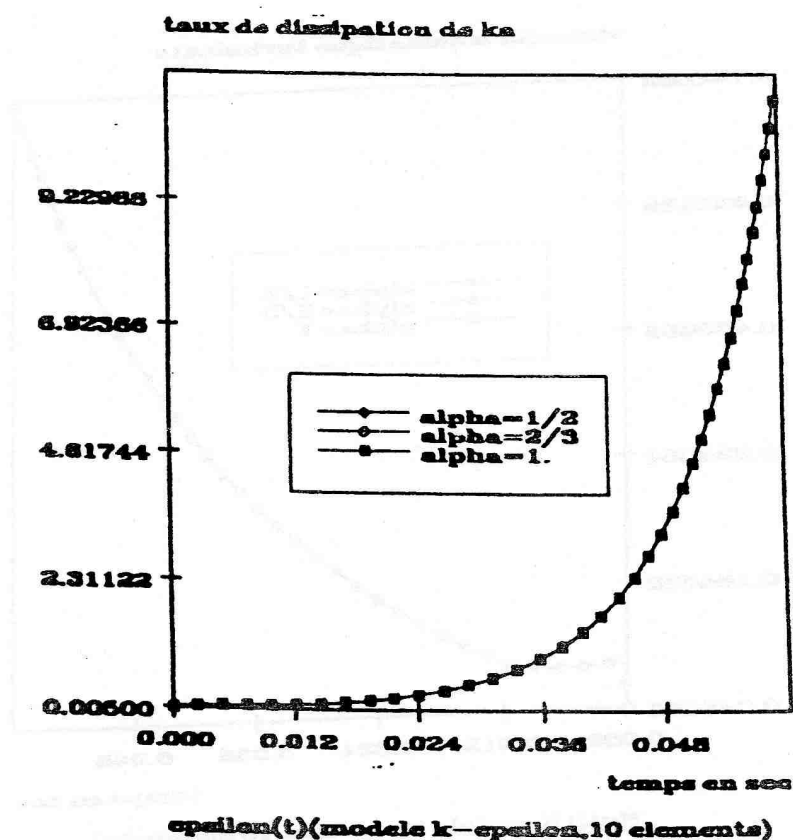


Figure (V-22) : taux de dissipation de l'énergie cinétique du dernier noeud en fonction du temps

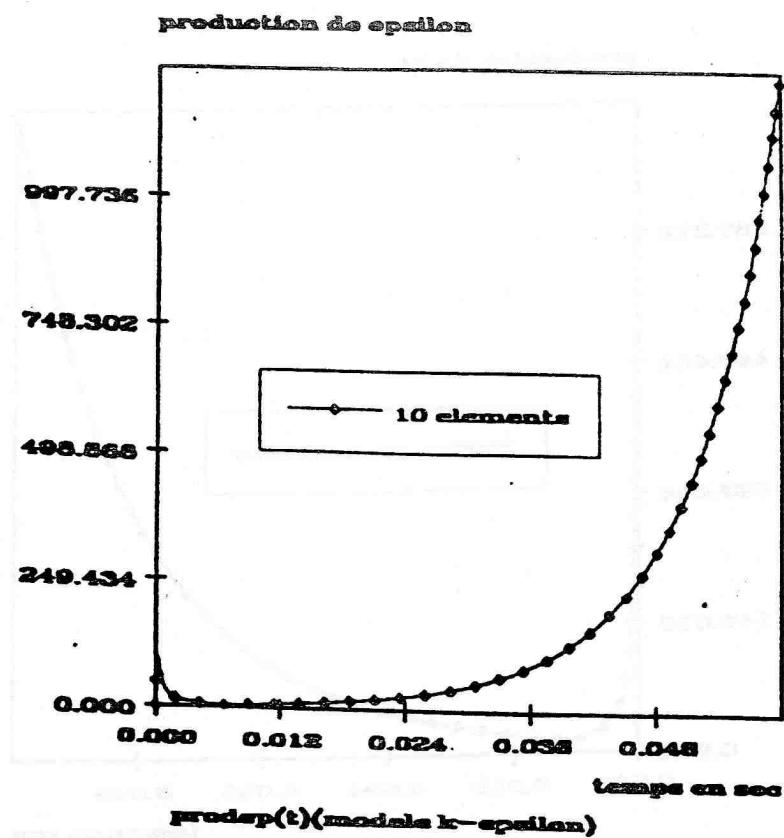


Figure (V-23) : production du taux de dissipation du dernier noeud en fonction du temps

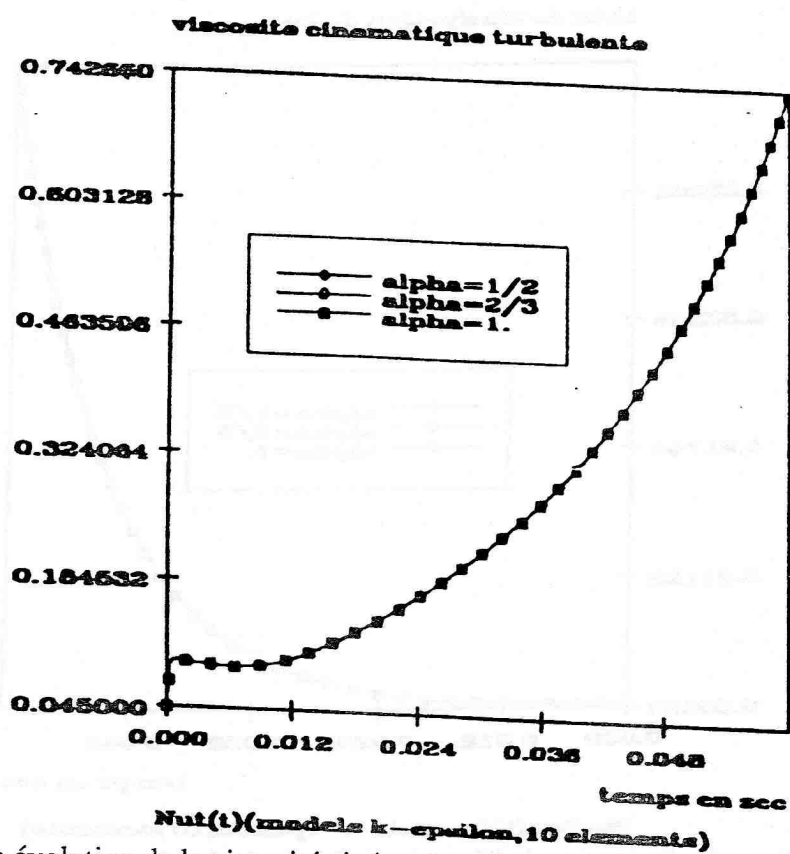


Figure (V-24) : évolution de la viscosité cinématique du dernier noeud en fonction du temps

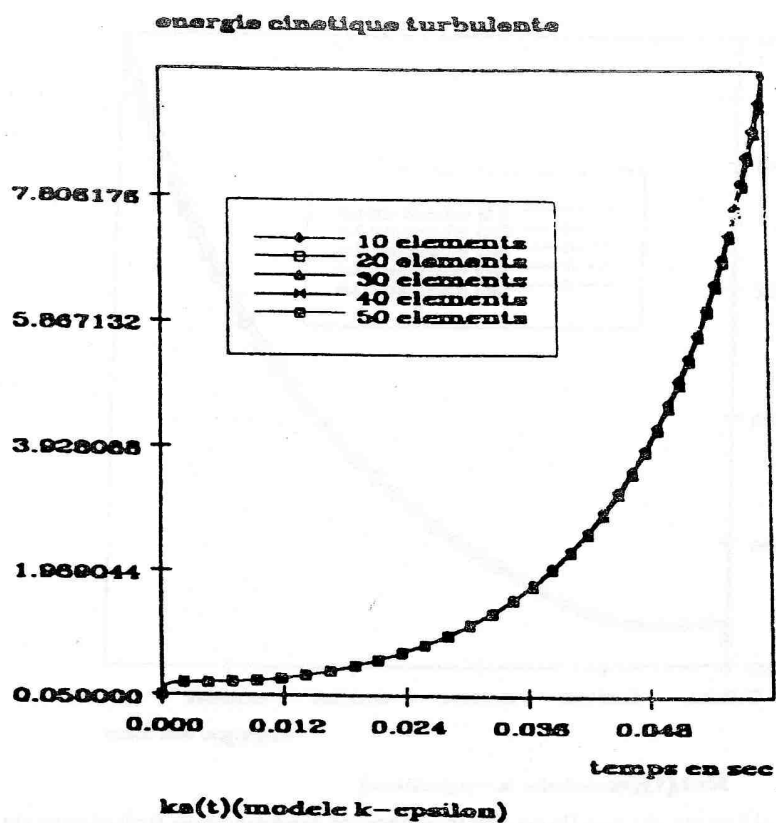


Figure (V-25) : influence du maillage sur l'énergie cinétique turbulente de l'extrémité mobile

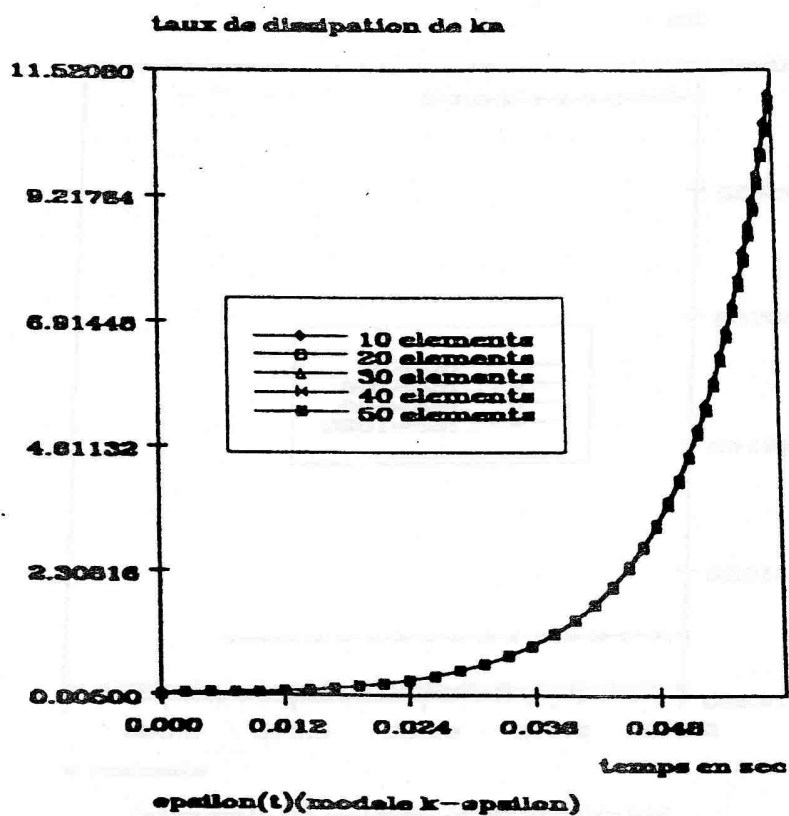
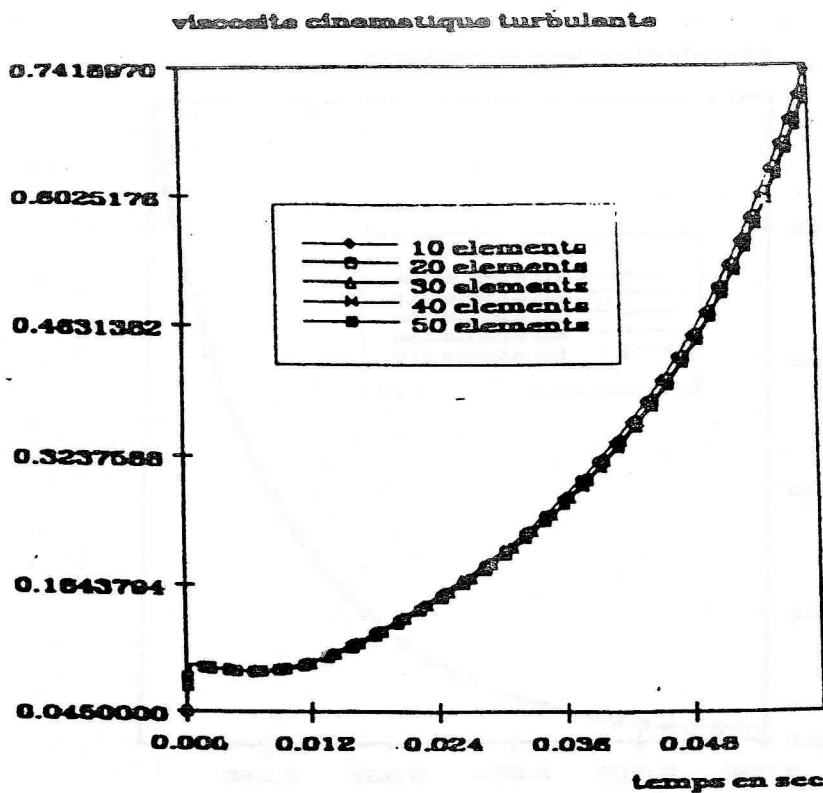


Figure (V-26) : influence du maillage sur le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente de l'extrémité mobile



125

Figure (V-27) : influence du maillage sur la viscosité cinématique turbulente de l'extrémité mobile

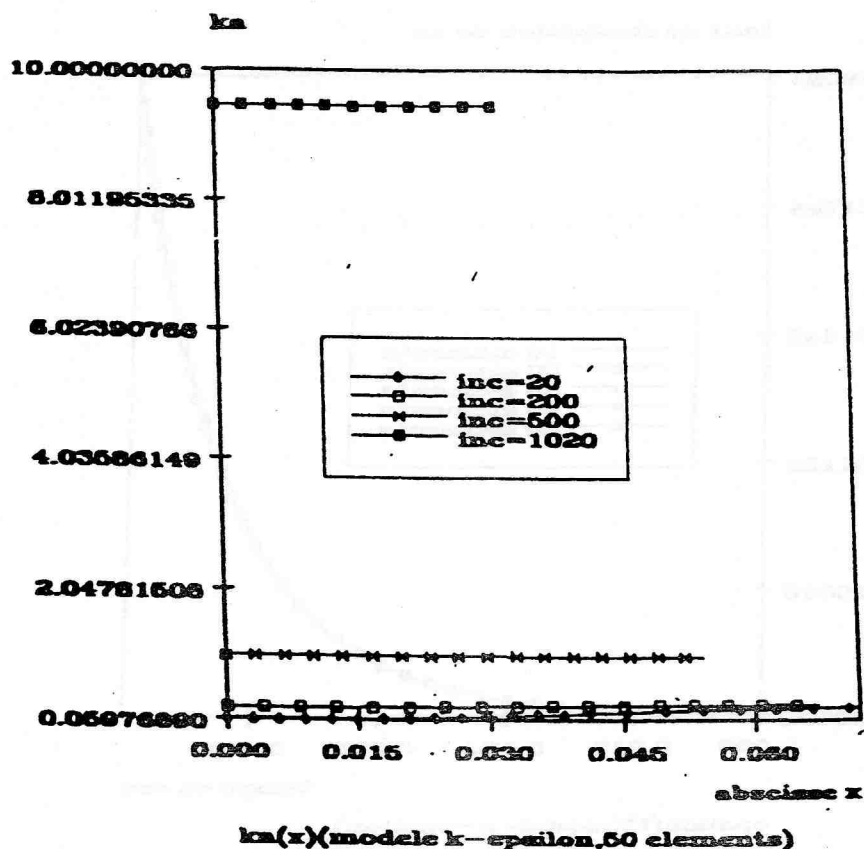


Figure (V-28) : l'énergie cinétique turbulente en fonction de l'abscisse pour différents incréments

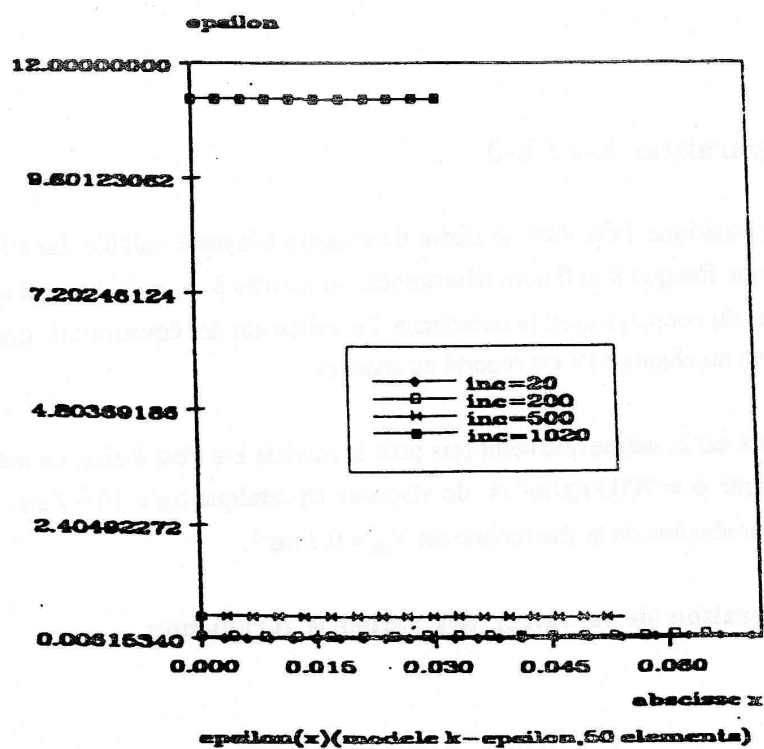


Figure (V-29) : le taux de dissipation en fonction de l'abscisse pour différents incréments

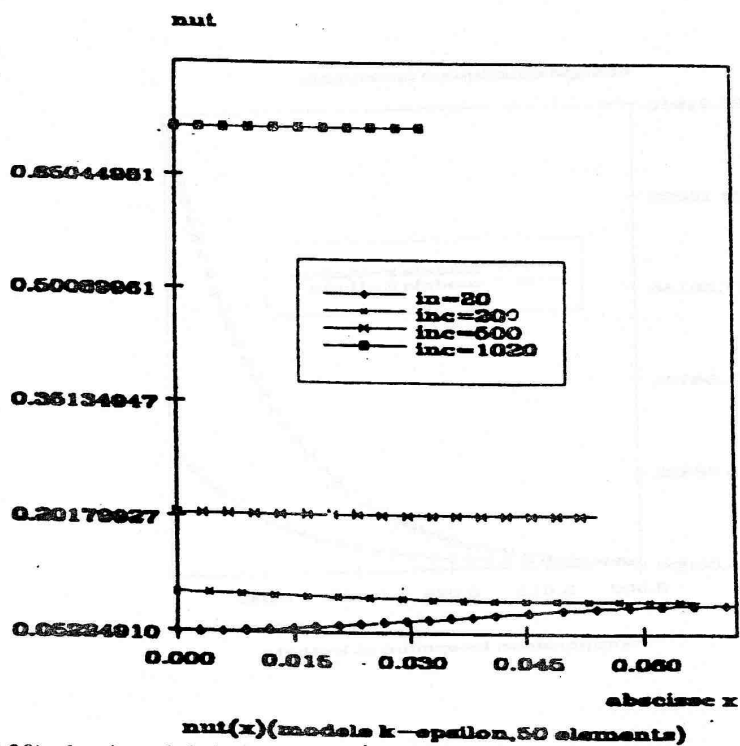


Figure (V-30) : la viscosité cinématique turbulente en fonction de l'abscisse pour divers incréments

V-2-6- Comparaison k- ϵ / k- θ

La résolution cinématique faite dans le cadre du modèle k- ϵ reste valable dans le cadre du modèle k- θ puisque lorsque k et θ sont déterminés, on a accès à $v_t = C_\mu k \theta$ qui sera pris en compte dans le cas du couplage avec la turbulence. Le traitement des équations de transport de k et θ , conformément au chapitre IV est reporté en annexes.

Le fluide considéré est le même que celui pris pour le modèle k- ϵ c'est à dire, un métal liquide de masse volumique $\rho = 7000 \text{ kg/m}^3$ et de viscosité dynamique $\mu_0 = 10^{-2} \text{ Pa.s}$. La vitesse maximale en valeur absolue de la tête mobile est $V_m = 0.7 \text{ ms}^{-1}$.

V-2-6-1- Comparaison de la valeur des variables turbulentes

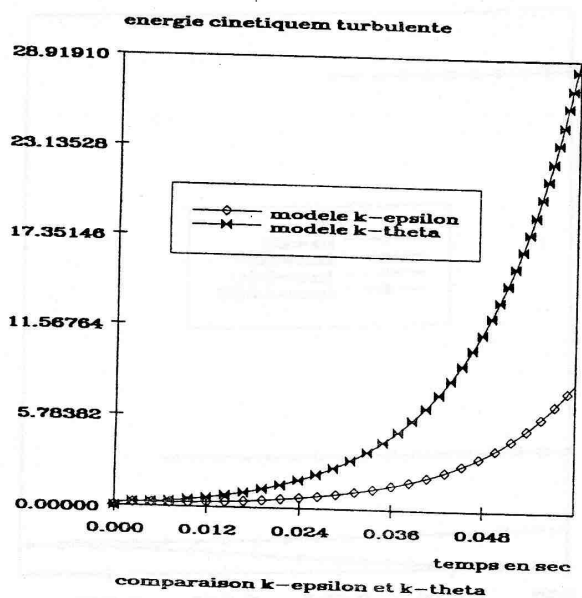


Figure (V-31) : évolution de l'énergie cinétique turbulente (modèle k- ϵ et modèle k- θ)

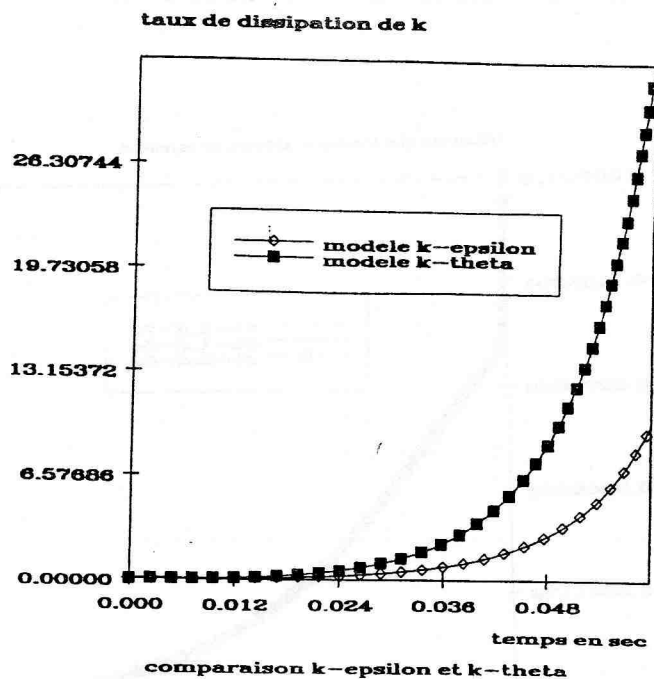


Figure (V-32) : évolution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente (modèle k- ϵ et modèle k- θ)

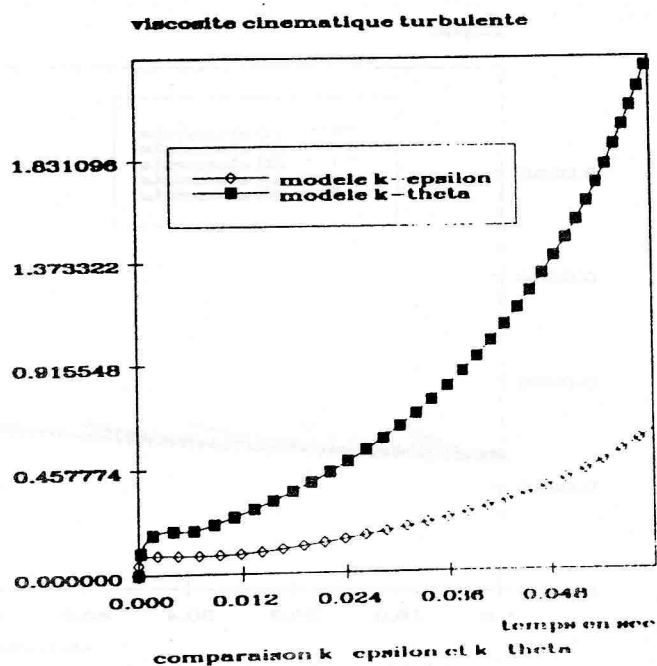


Figure (V-33) : évolution de la viscosité cinématique turbulente (modèle k- ϵ et modèle k- θ)

V-2-6-2-Ecoulements moyens obtenus avec le modèle $k-\theta$

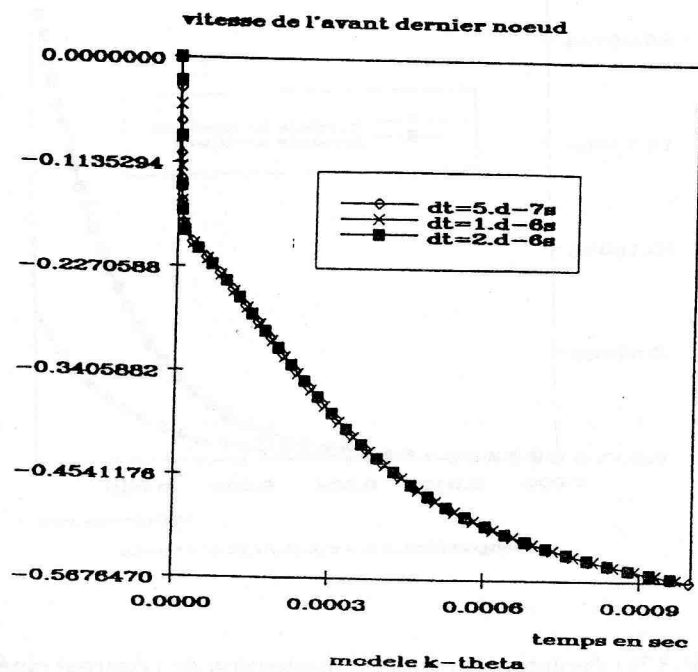


Figure (V-34) : vitesse de l'avant dernier noeud en fonction du temps

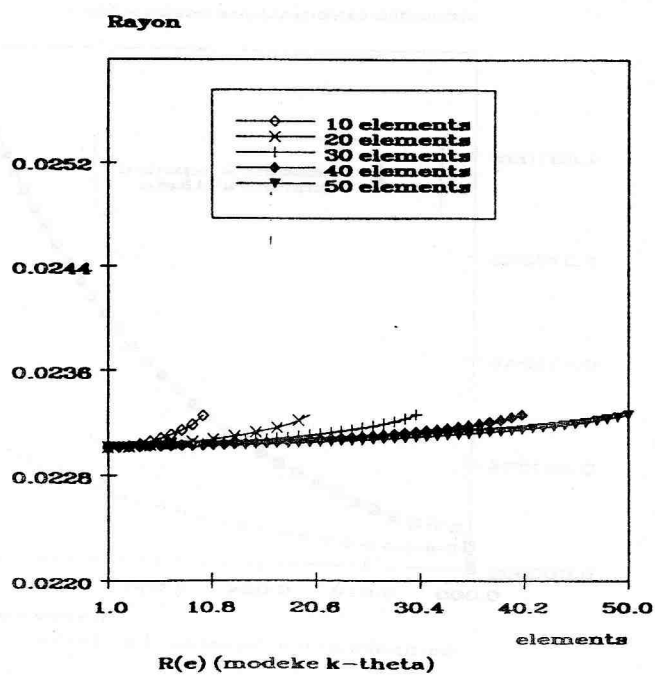


Figure (V-35) : rayon en fonction des éléments

Conclusion

Quantitativement, il y a des écarts au niveau des valeurs des variables turbulentes. Cela est probablement dû au fait que lors de l'établissement des équations de transport de k et de θ , il y'a eu par le fait qu'on a pris des coefficients de diffusion de k et de ε égaux, une suppression de certains termes de diffusion (Annexes).

On a une évolution qualitativement similaire. Le comportement numérique du modèle $k-\theta$ est meilleure dans la mesure où il ne génère aucune valeur négative.

La viscosité cinématique turbulente est relativement homogène, les différences enregistrées entre les résultats du modèle $k-\varepsilon$ et du modèle $k-\theta$ sont faibles, cependant on pourrait avoir de plus grandes différences pour des écoulements complexes.

Même si le modèle $k-\theta$ se comporte mieux numériquement, le modèle $k-\theta$ est différent du modèle $k-\varepsilon$.

Références du chapitre V

K. J. BATHE , " Finite Element Procedures in Engineering Analysis " , Prentice-Hall, Englewood Cliffs , NJ (1982).

K. J. BATHE & J. DONG, "Studies of Finite Element Procedures-The Use of ADINA-F in Fluid Flow Analyses", Computers & Structures Vol. 32, n° 3/4 ,pp 499 - 516, (1989).

C. BEGUE, B. CARDOT & O. PIRONNEAU, " Simulation d'Écoulements Turbulents à Moyenne Instationnaire " , Rapports de Recherche n° 914 , Programme 7 , Institut National de Recherche en Informatique (I.N.R.I.A.-ROCQUENCOURT)(1987)

H. CHLICHING, "Boundary Layer Theory " , 7th Edition , Mc-Graw-Hill , New-York (1979).

T. GOUSSEBAILE, A. JACOMY, "Application à la Thermo-hydraulique des Méthodes d'Éclatement d'Opérateur dans le Cadre Elements Finis: Traitement du modèle k- ϵ " , Rapport E.D.F. -L.N.H. HE/41/85.11 (1985).

CHAPITRE VI

APPLICATION AU REMPLISSAGE DES MOULES DE FONDERIE

VI-APPLICATION AU REMPLISSAGE DES MOULES DE FONDERIE

Dans ce chapitre, nous présenterons dans un premier temps une validation de notre modèle dans le cas d'un écoulement simple entre plaques planes, en le confrontant avec des résultats expérimentaux tirés de la littérature. Dans un second temps, nous présenterons un certain nombre d'applications de notre modèle au remplissage de moules.

Les moules utilisés en fonderie de métaux peuvent être de formes très diverses, des plus simples aux plus compliqués. Pour notre part, nous avons dû nous limiter à des géométries bidimensionnelles planes ou axisymétriques. De plus, nous avons dû tenir compte des limitations inhérentes à la formulation Lagrangienne avec remaillage automatique. Ainsi, par exemple, les cas de coulée en chute impliquant l'impact du jet liquide contre une paroi étaient-ils hors de portée de notre formulation du fait de l'impossibilité de remailler automatiquement des domaines non simplement connexes ou disjoints. Cette contrainte a suscité au laboratoire, une étude spécifique concernant les algorithmes de remaillage automatique (GLUT (1992)) et devrait prochainement être libérée. Nous avons donc dû nous satisfaire de géométries relativement simples, avec alimentation de fluide latérale ou en source, qui puissent néanmoins être le siège des phénomènes caractéristiques des écoulements turbulents.

VI-1-Utilisation d'éléments P2

VI-1-1-Validation

Pour valider le code, on considère l'expérience de référence de COMTE-BELLOT (COMTE-BELLOT (1963)). Celle-ci consiste en un écoulement stationnaire dans un canal plan symétrique, de demi-largeur 0,0855m, d'un fluide ayant les caractéristiques suivantes :

$$\rho = 1,208 \text{ kgm}^{-3}$$

$$\mu_0 = 1,812 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$$

$$v_0 = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

Les conditions d'entrée exprimées dans le tableau suivant, sont les conditions expérimentales de COMTE-BELLOT à $Re=57\ 000$.

n°	Y	U	k	ε
1	0.0045	6.84	0.497	35.336
2	0.0090	7.47	0.461	16.975
3	0.0135	7.83	0.437	11.850
4	0.0180	8.13	0.410	8.360
5	0.0225	8.39	0.389	6.717
6	0.0270	8.60	0.367	5.553
7	0.0315	8.76	0.347	4.740
8	0.0360	8.93	0.319	3.903
9	0.0405	9.06	0.299	3.391
10	0.0450	9.20	0.271	2.788
11	0.0495	9.33	0.250	2.395
12	0.0540	9.44	0.224	1.955
13	0.0585	9.55	0.203	1.642
14	0.0630	9.63	0.179	1.313
15	0.0675	9.72	0.158	1.057
16	0.0720	9.80	0.143	0.899
17	0.0765	9.88	0.131	0.783
18	0.0810	9.93	0.120	0.686
19	0.0855	9.98	0.114	0.648
20	0.0900	10.00	0.110	0.633

Tableau (VI-1) : tableau des valeurs expérimentales

Les conditions aux limites sont illustrées sur la figure suivante :

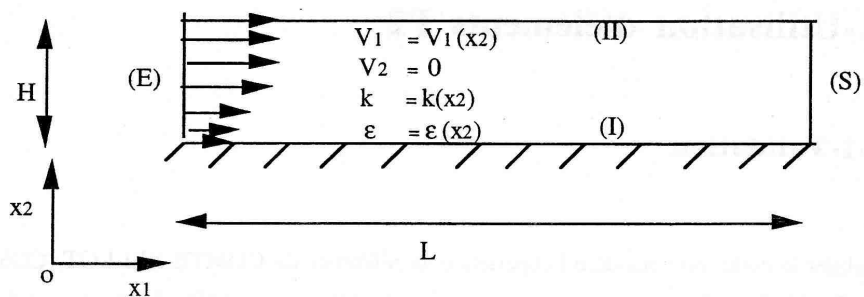


Figure (VI-1) : canal plan symétrique

Conditions aux limites :

* sur (E) : V_1, k, ε : références expérimentales pour $Re = 57\ 000$

* sur (I) : lois de paroi, $x_2^+ = 117$

* sur (S), (II) : $\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0$; $V_2 = 0$; $\frac{\partial k}{\partial n} = 0$; $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$

Pour ce qui concerne notre simulation, la longueur du canal est de 3m, la longueur du domaine

initial fluide est de 0,1m.

On laisse par injection, la matière s'écouler, jusqu'à atteindre un régime quasi-stationnaire. A 1,8m de l'entrée du canal, distance qui correspond à près de 20 demi-largeurs, on étudie l'évolution du champ de vitesse relative, de l'énergie cinétique turbulente, du taux de dissipation de cette énergie en fonction de la distance de la paroi. Nous comparons nos résultats (figures (VI-2), (VI-3) et (VI-4)) avec les résultats expérimentaux de COMTE-BELLOT.

En ce qui concerne le champ de vitesse, vers la paroi, on note des écarts et dans la plus grande partie de l'écoulement, on a un bon accord.

Les figures (VI-5) montrent l'évolution du maillage dans le canal à travers quelques pas de temps. On représente également (figures (VI-6) et (VI-7)), les isovaleurs de l'énergie cinétique turbulente ainsi que ceux du taux de dissipation pour quelques pas de temps. L'énergie cinétique décroît de la paroi vers le centre de l'écoulement, il en est de même pour le taux de dissipation. Les faibles valeurs sont donc concentrées dans la région centrale. L'allure générale de la repartition initiale de l'énergie cinétique et du taux de dissipation se maintient (effet de la condensation des matrices de masse).

Qualitativement, les résultats sont les mêmes, mais du point de vue quantitatif, il y'a quelques écarts qui sont dus au fait que les conditions initiales qui sont les mêmes que les conditions d'entrée évoluent au cours du temps.

Pour l'énergie cinétique, on a un accord satisfaisant, pour le taux de dissipation, on constate un écart un peu plus important, mais globalement les résultats sont satisfaisants.

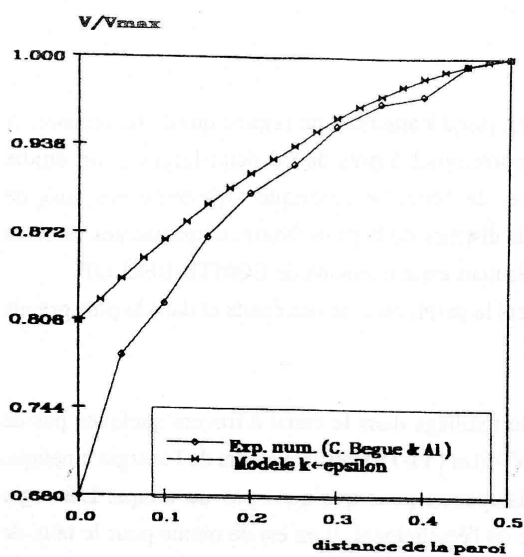


Figure (VI-2)

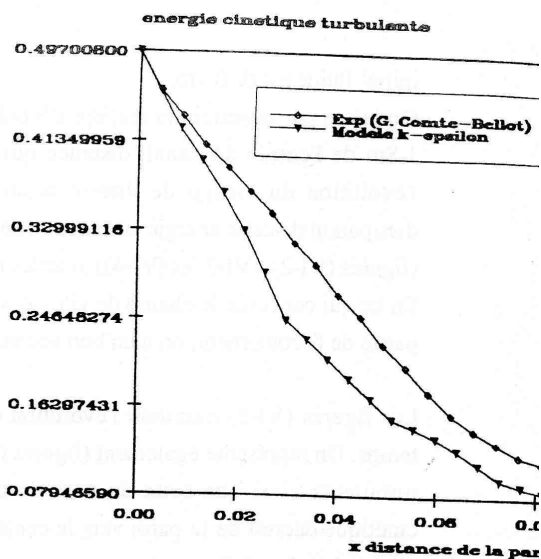


Figure (VI-3)

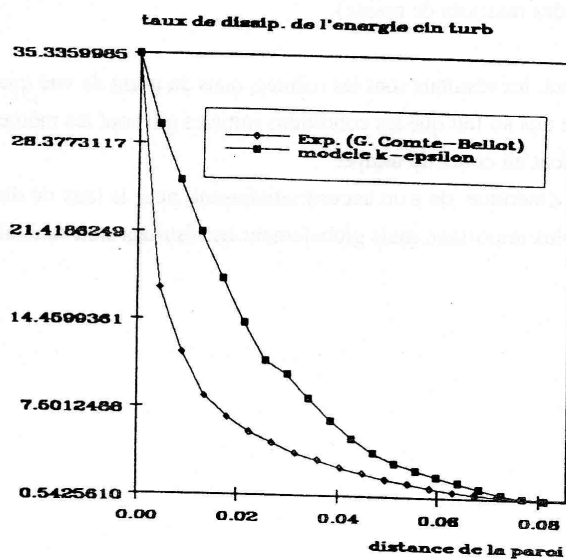


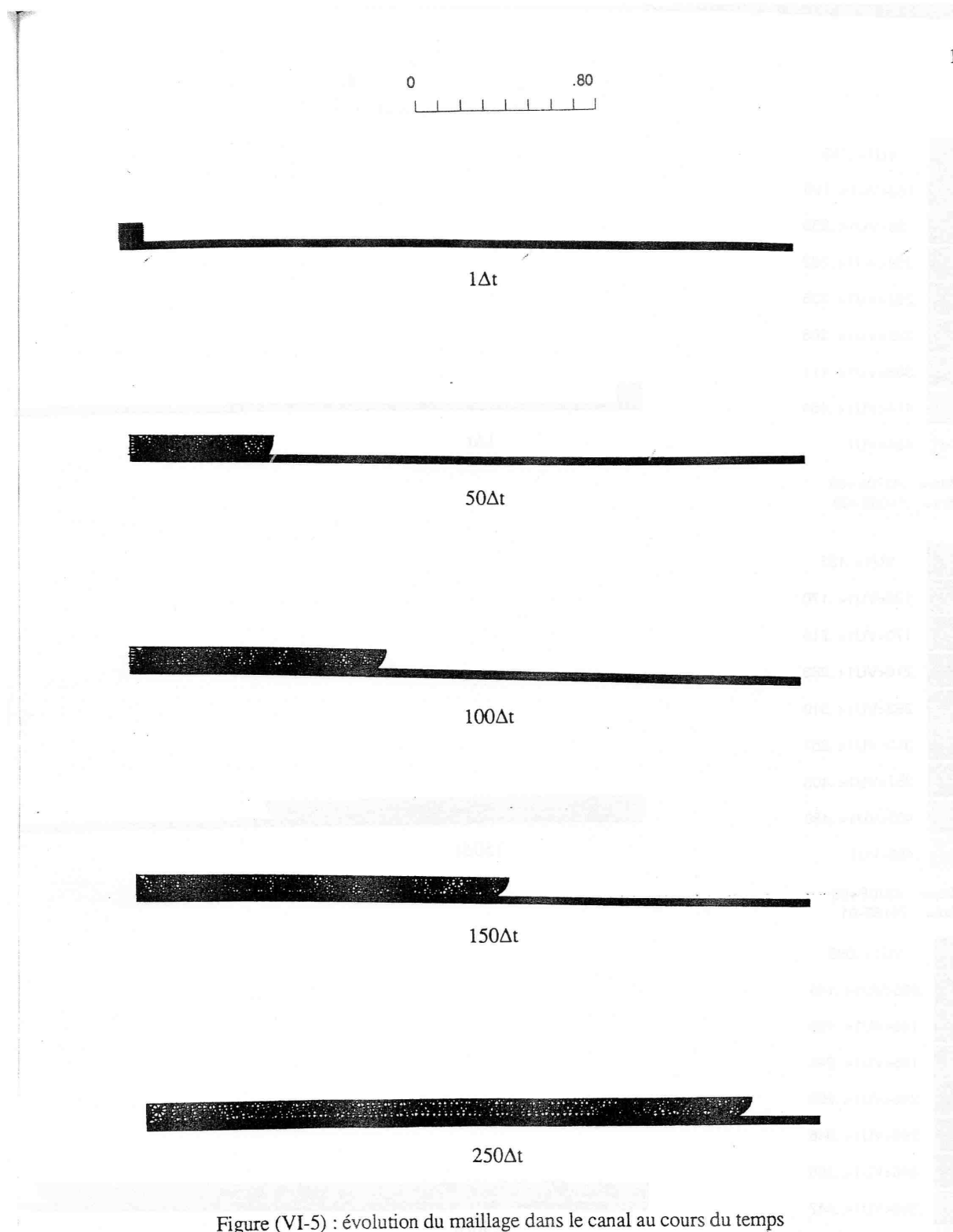
Figure (VI-4)

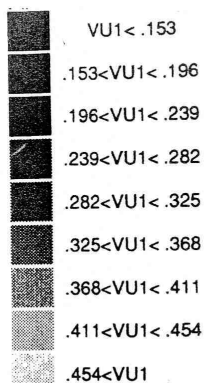
Figure(VI-2) : comparaison des vitesses relatives

Figure(VI-3) : comparaison des énergies cinétiques turbulentes

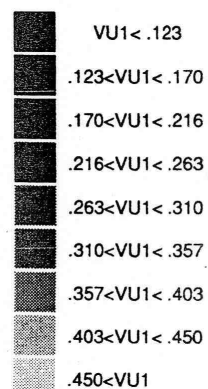
Figure(VI-4) : comparaison des taux de dissipation

Application au remplissage des moules de fonderie /

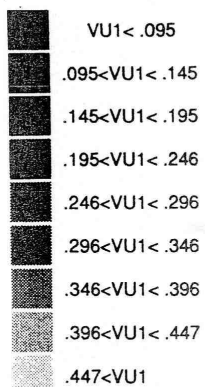




Maxi= .4970E+00
Mini= .1100E+00



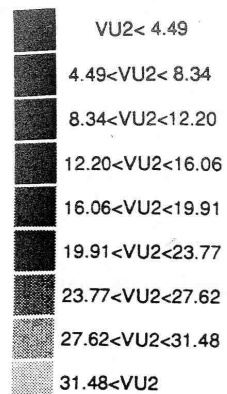
Maxi= .4970E+00
Mini= .7616E-01



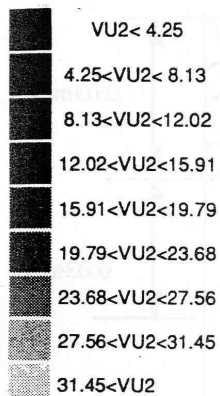
Maxi= .4970E+00
Mini= .4444E-01



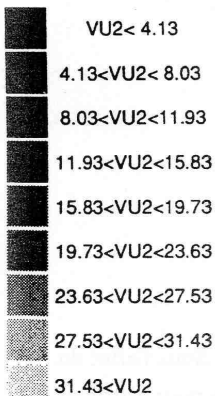
Figure (VI-6) : énergie cinétique turbulente (VU1) à différents incréments de temps



Maxi= .3534E+02
Mini= .6330E+00



Maxi= .3534E+02
Mini= .3606E+00



Maxi= .3534E+02
Mini= .2263E+00



1Δt



150Δt



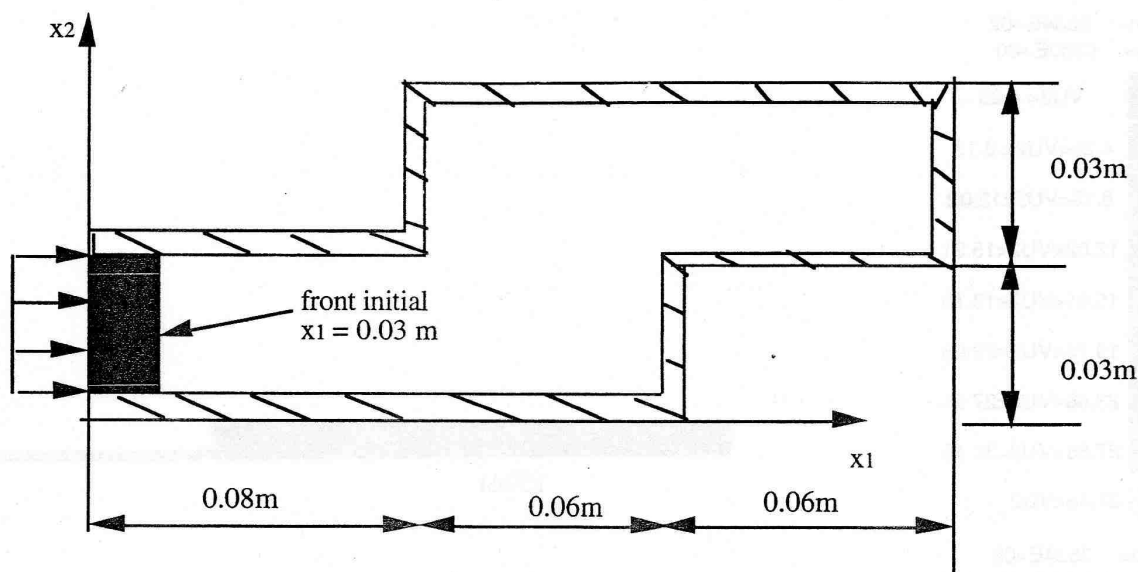
250Δt

Figure (VI-7) : taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente (VU2) à différents incréments de temps

VI-1-2-Application

VI-1-2-1-Ecoulement avec une marche ascendante

Le moule est celui de DHATT & Al(1990), les dimensions et la configuration initiale sont données par la figure suivante



Les paramètres de l'écoulement sont les suivants:

$$\rho = 7000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_0 = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$g = -10. \text{ m/s}^2$$

$$y^+ = 117.$$

$$Re = 52\,500$$

Les angles droits du moule constituent des obstacles au remplissage du moule. Sous l'effet du poids, le fluide s'étale, puis après quelques pas de temps, il monte dans le moule pour affronter le deuxième angle droit puis s'étale à nouveau sous son poids dans la partie supérieure du moule jusqu'à la fin du remplissage.

Deux modèles ont été étudiés: le modèle $k-\epsilon$ et le modèle $k-\theta$.

Modèle k-ε

On constate dans un premier temps, d'après les isovaleurs de l'énergie cinétique turbulente, que les valeurs les plus élevées se trouvent dans la zone d'injection et qu'au fil du temps, la surface libre dégage une énergie cinétique plus forte par endroit. On a tendance à avoir une valeur élevée de k là où le mouvement est plus violent, plus libre.

On remarque, que lorsque la cavité commence à se remplir, on a une large zone où la turbulence s'est développée.

Lorsque le moule est presque plein, dans la zone où le remplissage n'est pas effectif, le mouvement du fluide étant libre, l'énergie cinétique y est élevée.

En ce qui concerne le taux de dissipation, on remarque que dans la zone d'injection, on a un fort taux de dissipation qui est en fait sa valeur initiale. On a par la suite, au fur et à mesure que le moule se remplit, une zone importante où le taux de dissipation est relativement élevé. On note également, comme dans le cas de l'énergie cinétique turbulente, que lorsque le moule est presque rempli, dans la zone où le remplissage n'est pas effectif, on a des taux de dissipation élevés.

Les isovaleurs représentant la viscosité cinématique turbulente, ont presque la même allure que celles de l'énergie cinétique turbulente. On pouvait s'attendre à cela vu l'expression de la viscosité cinématique turbulente ($\nu_t = C_\mu k^2/\varepsilon$). En effet puisque ε décroît, ν_t est une fonction croissante de k , donc l'énergie cinétique turbulente impose son comportement à la viscosité cinématique turbulente.

Modèle k-θ

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus avec le modèle k-ε et ceux obtenus avec le modèle k-θ. On constate qu'au niveau de l'évolution du maillage et du champ de vitesse, les deux modèles sont en bon accord. En ce qui concerne les isovaleurs relatives à l'énergie cinétique, on constate qu'à un moment donné, la zone de surface libre est le siège de fortes valeurs. Au fur et à mesure que le moule se remplit, on a comme dans le cas du modèle k-ε, une région importante où il se dégage plus d'énergie. Également comme dans le cas du modèle k-ε, lorsque le moule est presque plein, l'énergie cinétique est élevée dans la zone où le remplissage n'est pas effectif, c'est à dire là où le mouvement est encore libre. Il faut noter cependant qu'il demeure quelques fluctuations.

Le taux de dissipation décroît fortement de la zone d'injection à la surface libre. On a donc une décroissance au cours du temps du taux de dissipation, la valeur sur la ligne d'injection étant la

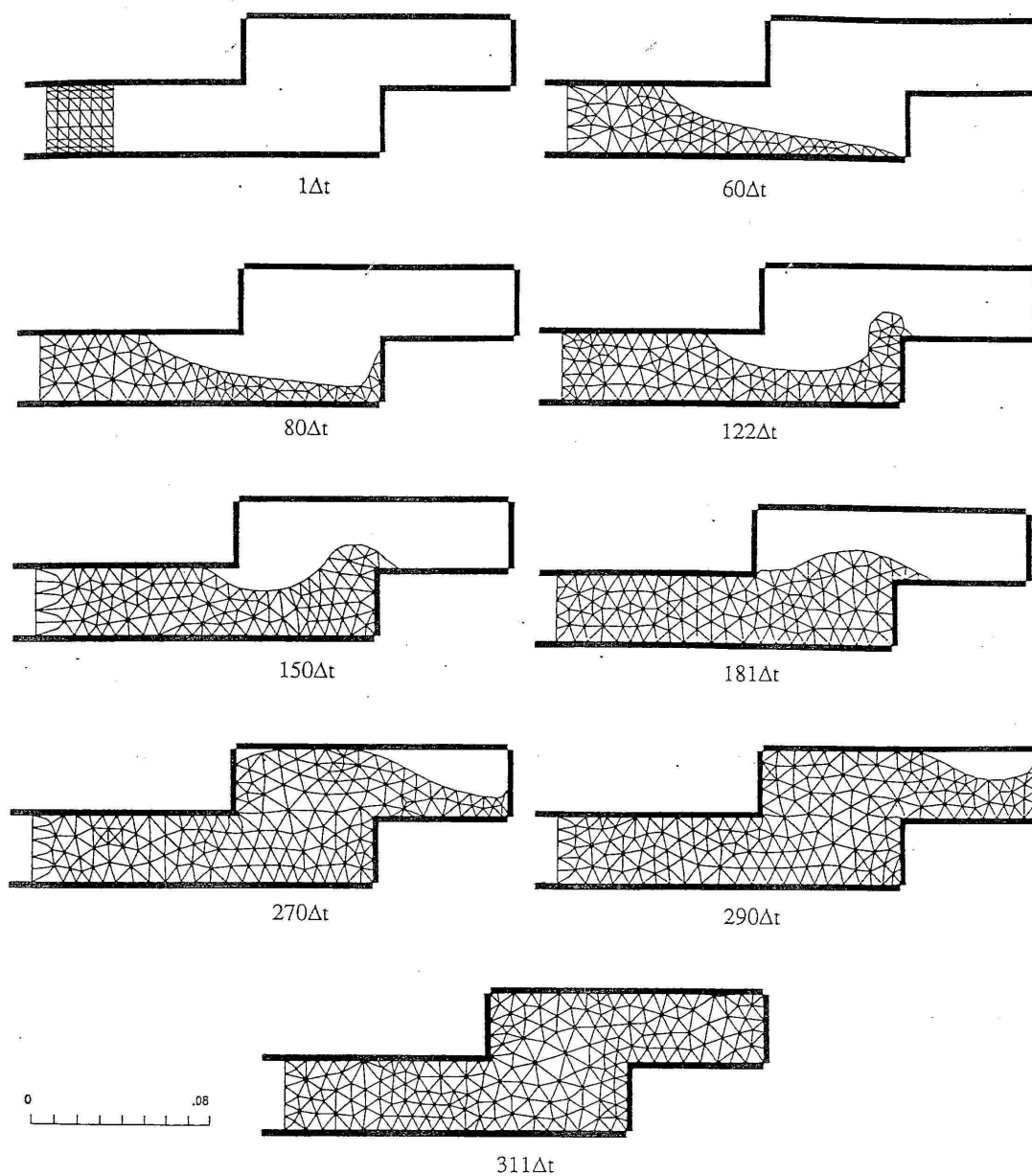
valeur initiale du taux de dissipation.

Les isovaleurs de la variable θ ($\theta = k/\varepsilon$), ont la même allure que celle de l'énergie cinétique. Les valeurs sont élevées, ce qui exprime le fait que très rapidement, l'énergie cinétique croît et que le taux de dissipation décroît.

Compte tenu de l'évolution de θ , on peut prévoir alors que la viscosité cinématique ait des valeurs très élevées. Ainsi, le modèle $k-\theta$ n'a-t-il donné de résultats acceptables qu'en introduisant des précautions tendant à avoir une borne supérieure pour la viscosité afin de ne pas avoir un fluide trop visqueux. La présentation des isovaleurs de la viscosité n'a pas été jugée nécessaire.

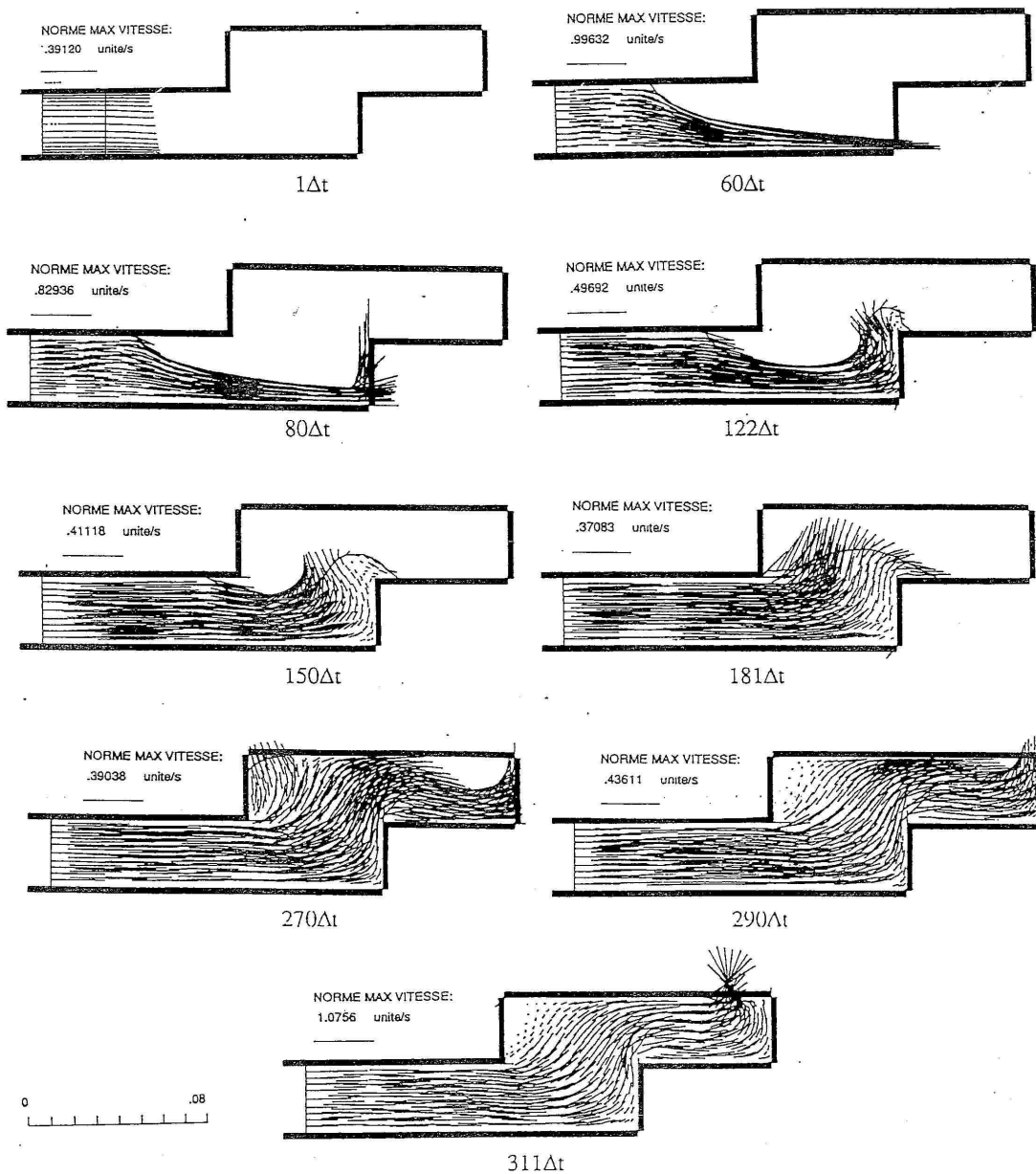
Modèle k-ε

Evolution du maillage pour différents incréments de temps.



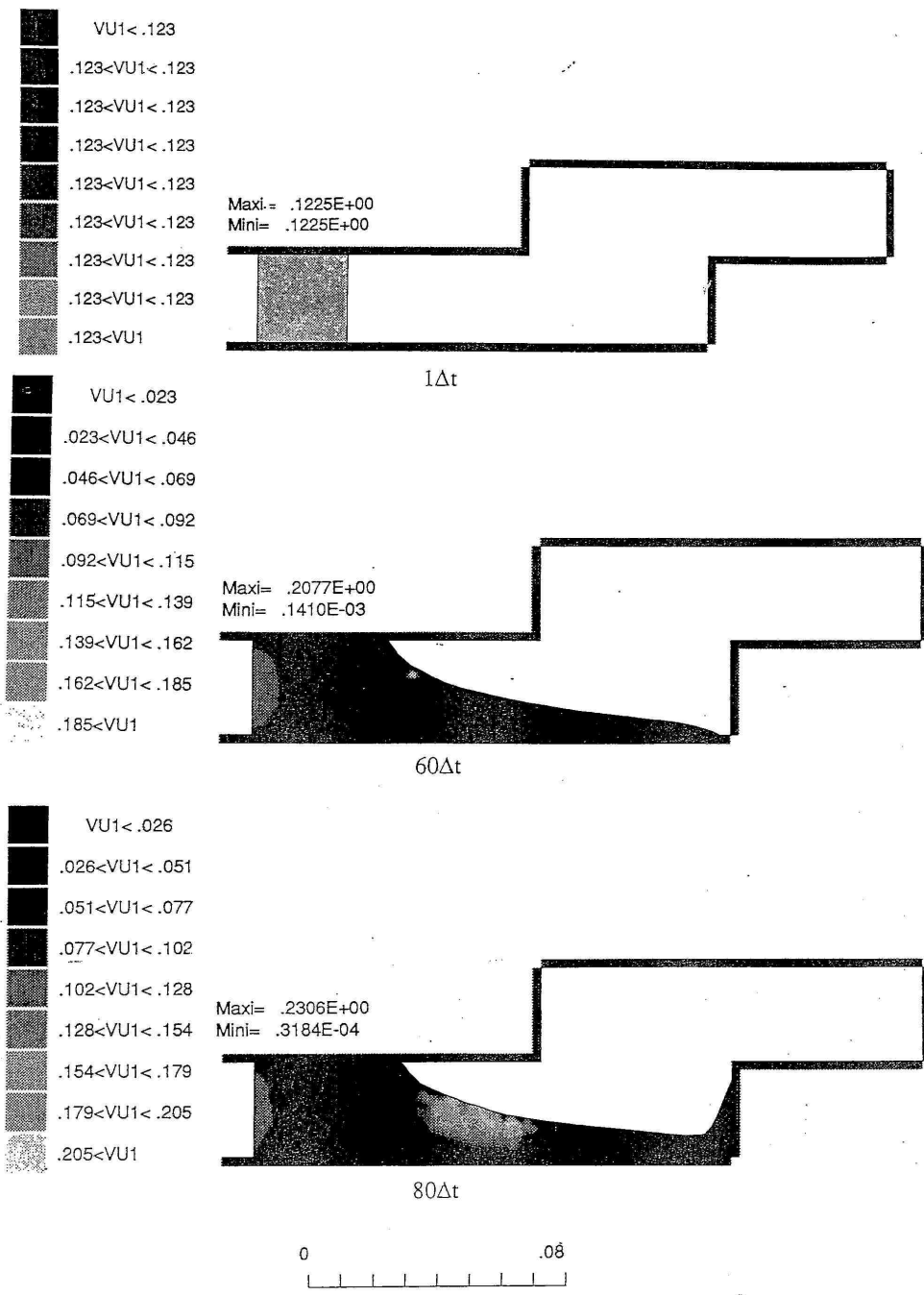
Application au remplissage des moules de fonderie I

Evolution du champ de vitesse pour différents incréments de temps.

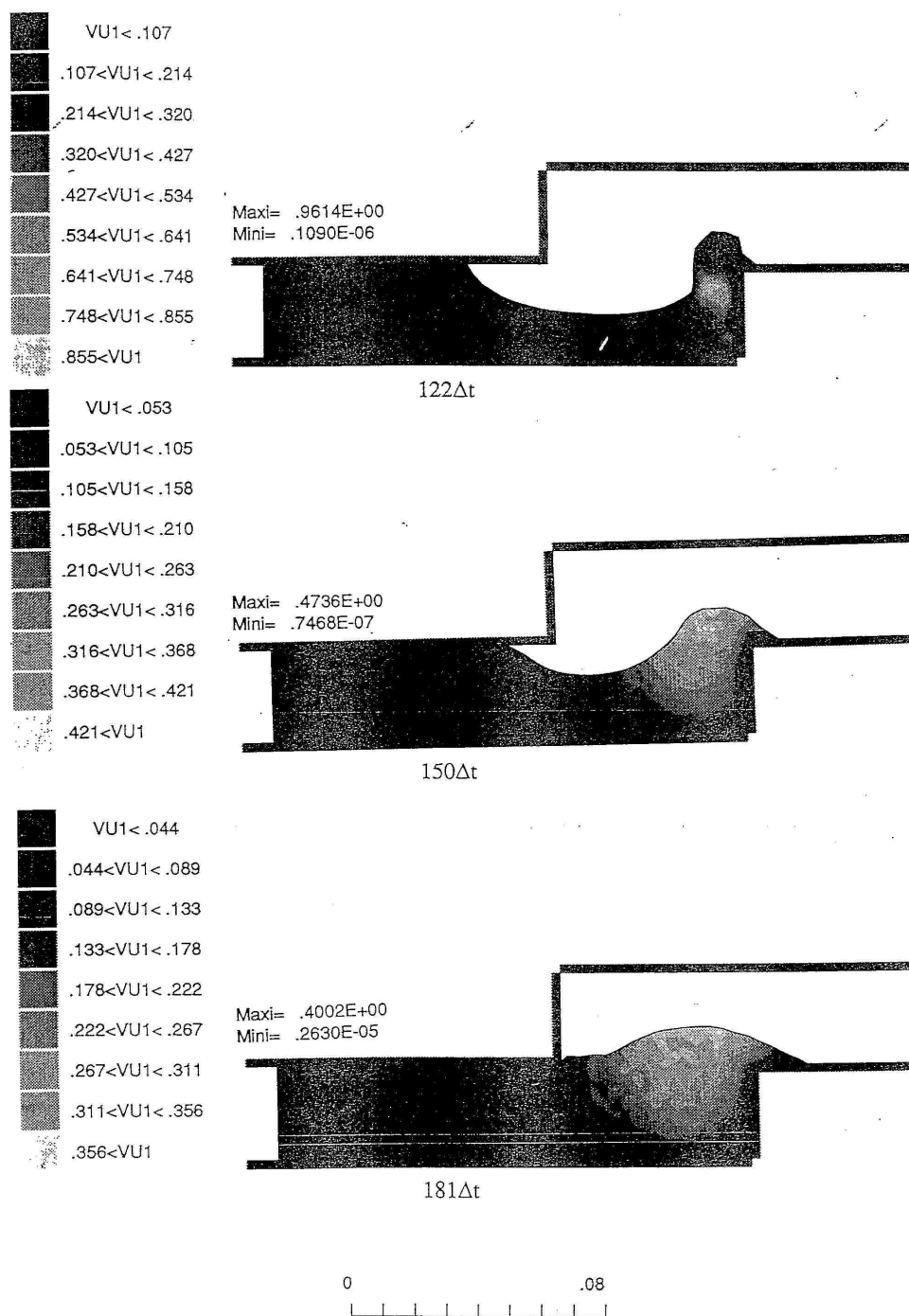


Application au remplissage des moules de fonderie /

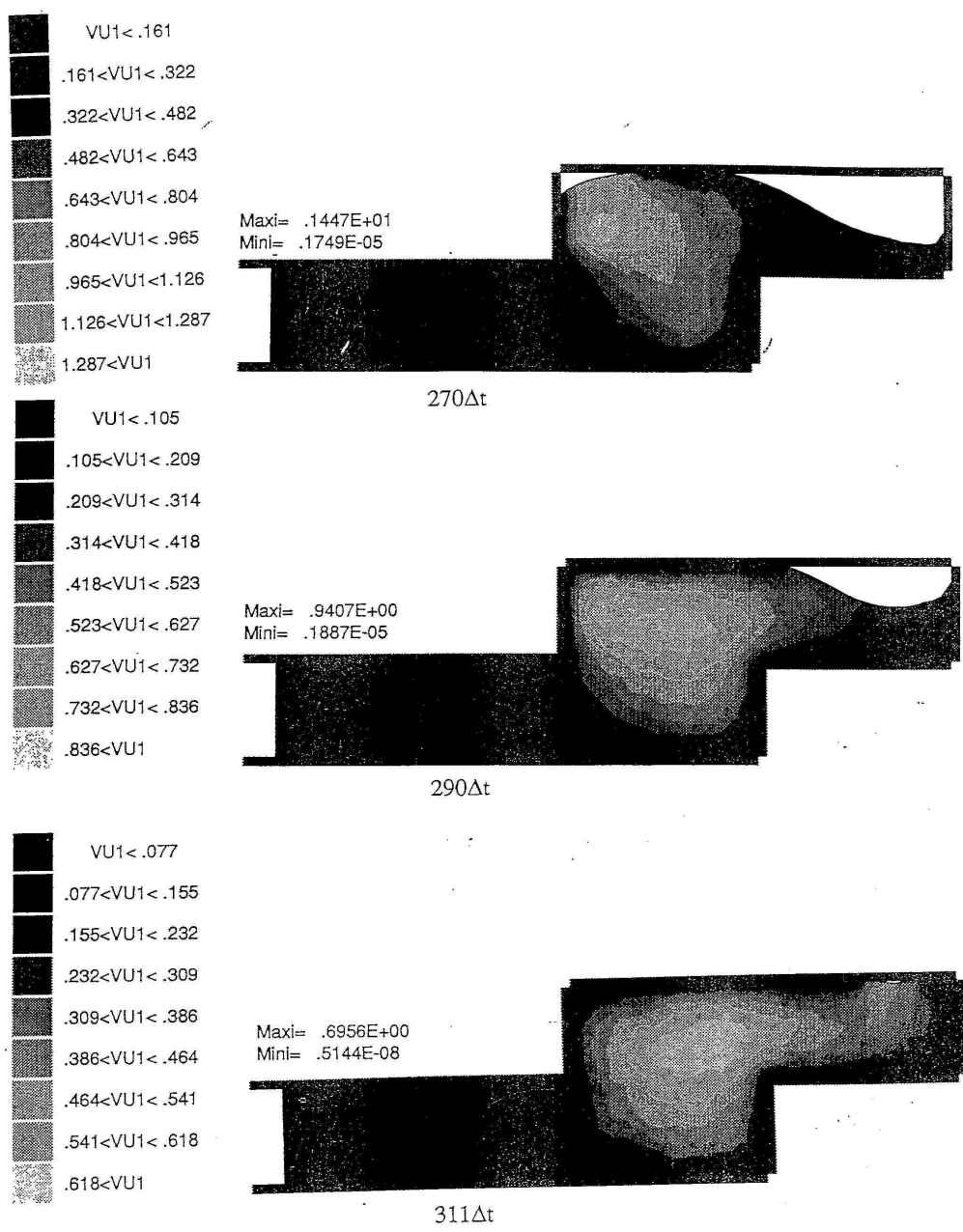
Evolution de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps



Application au remplissage des moules de fonderie t

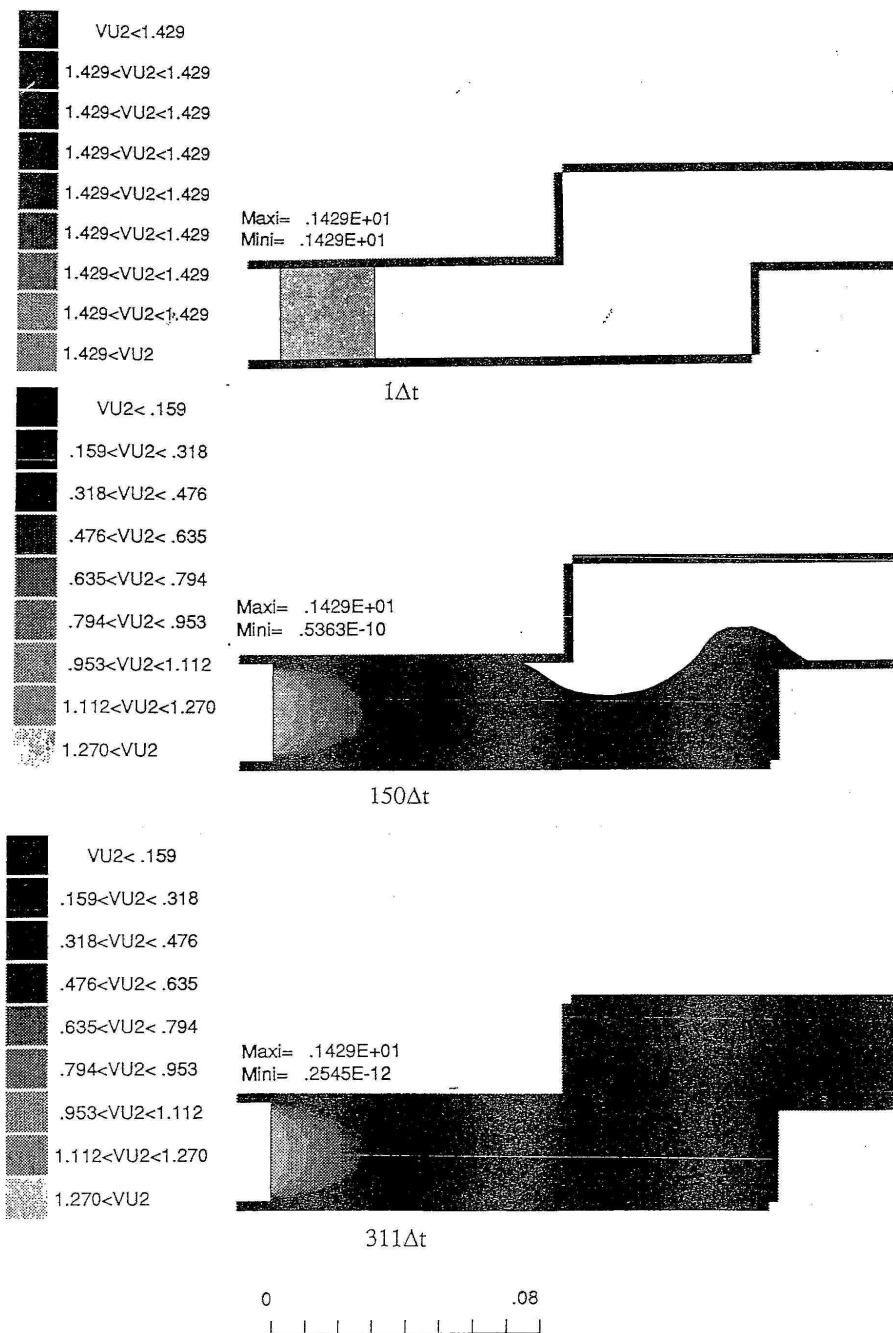


Application au remplissage des moules de fonderie I



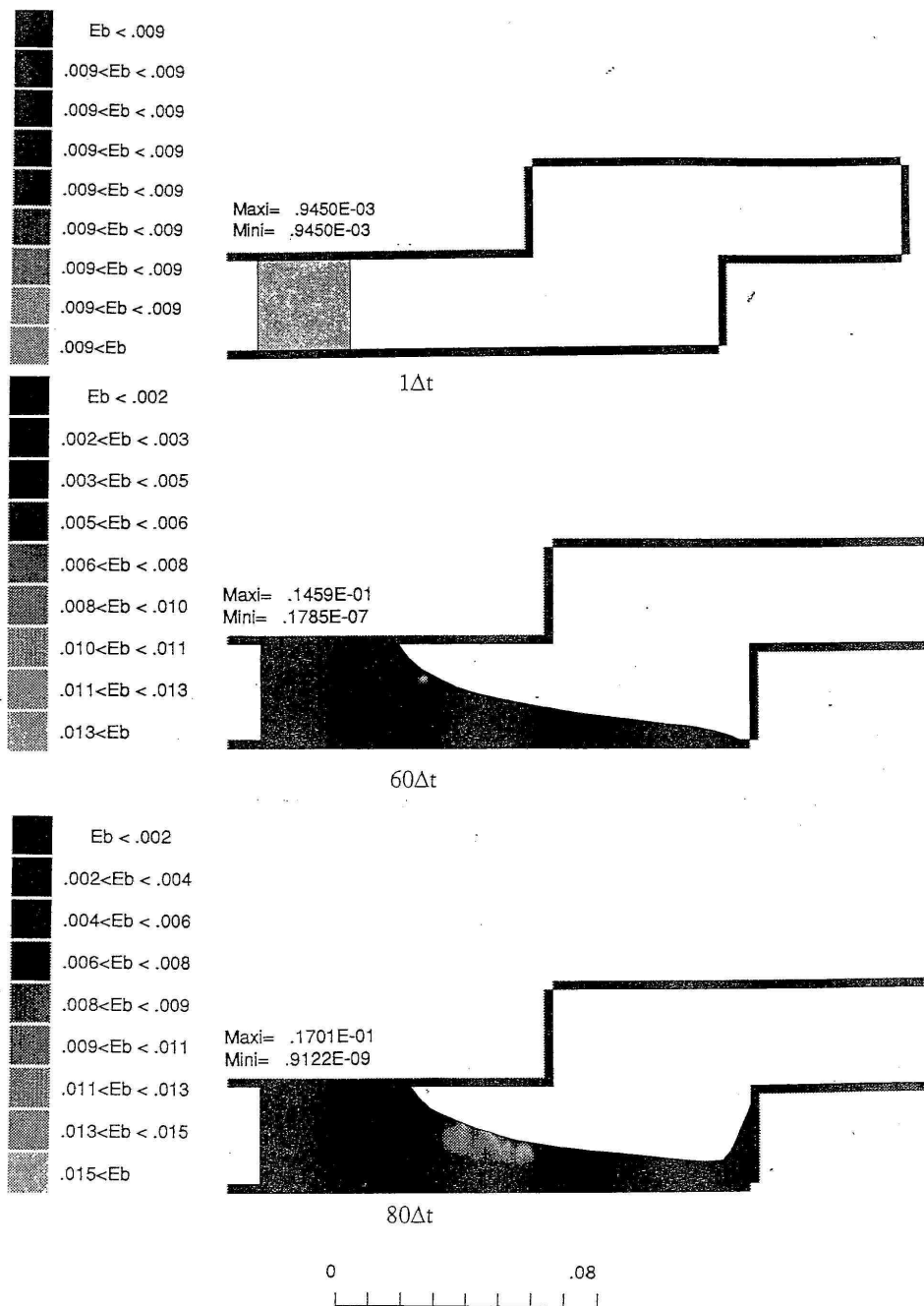
Application au remplissage des moules de fonderie I

Evolution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps

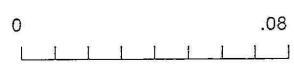
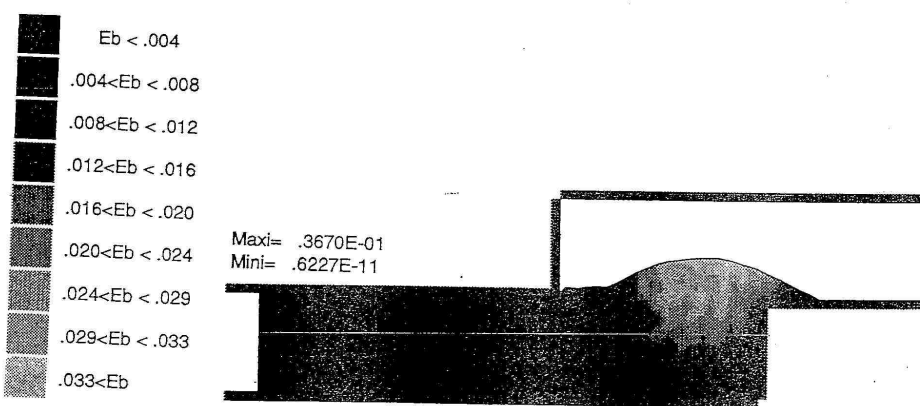
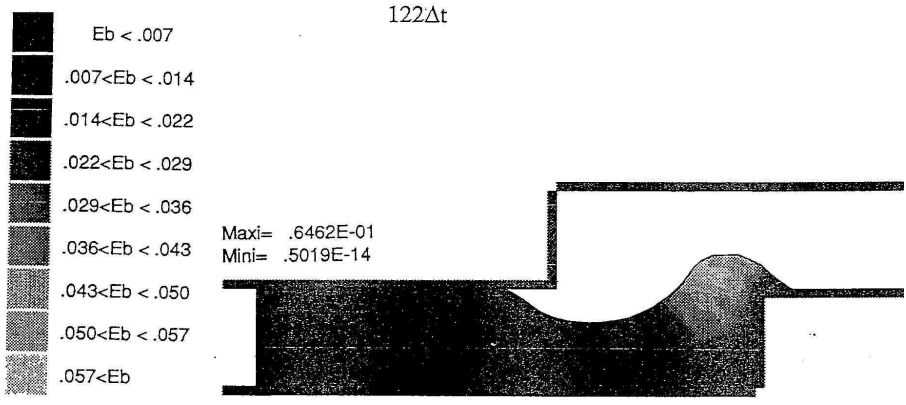
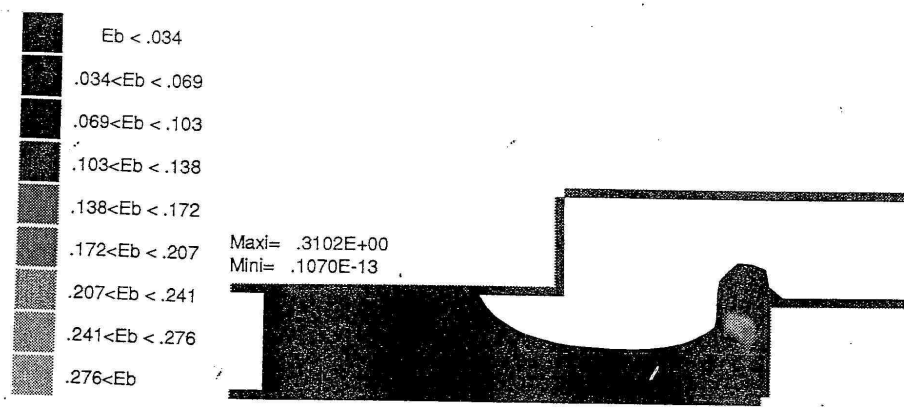


Application au remplissage des moules de fonderie I

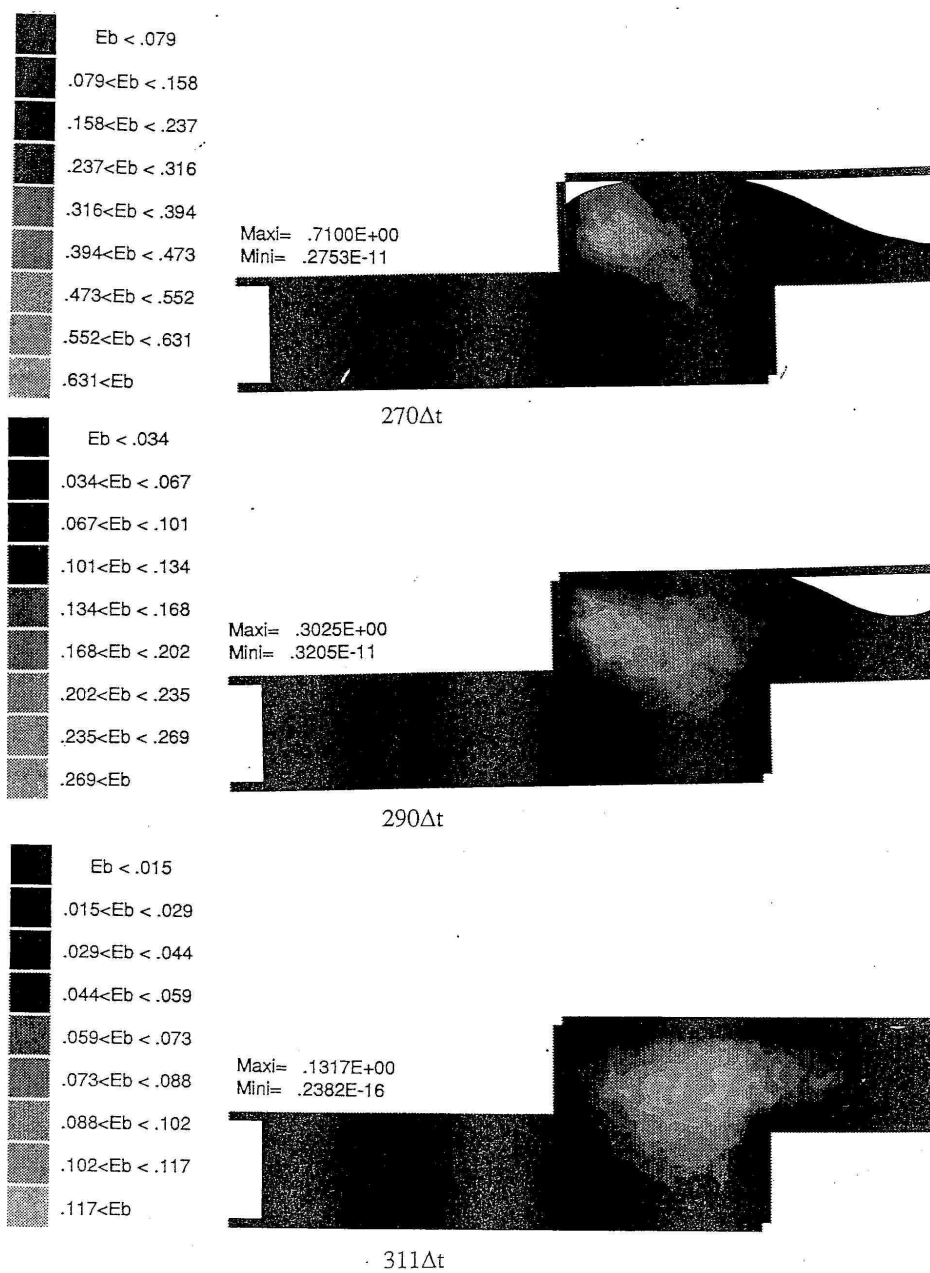
Evolution de la viscosité cinématique turbulente au cours du temps



Application au remplissage des moules de fonderie I



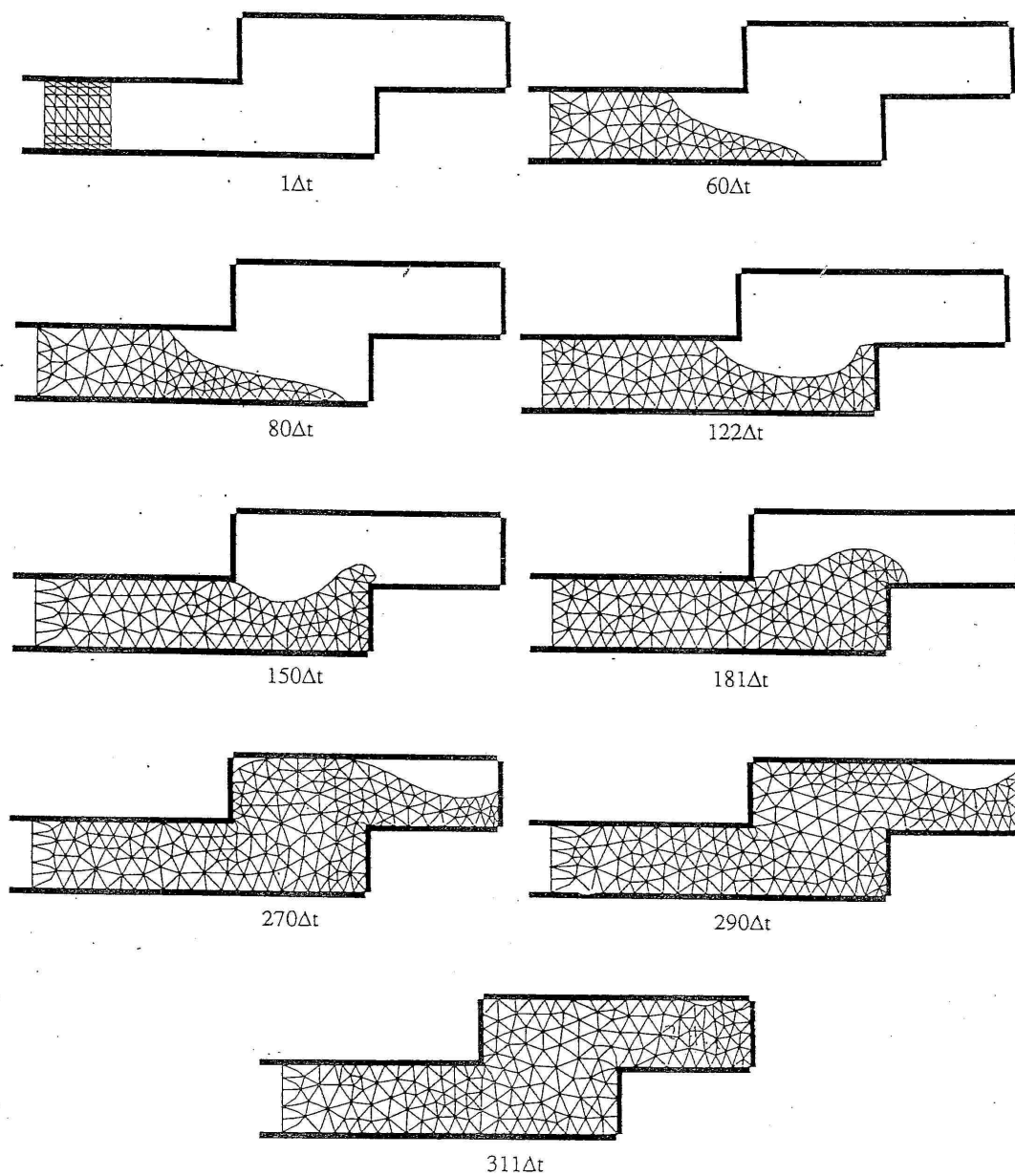
Application au remplissage des moules de fonderie /



Application au remplissage des moules de fonderie I

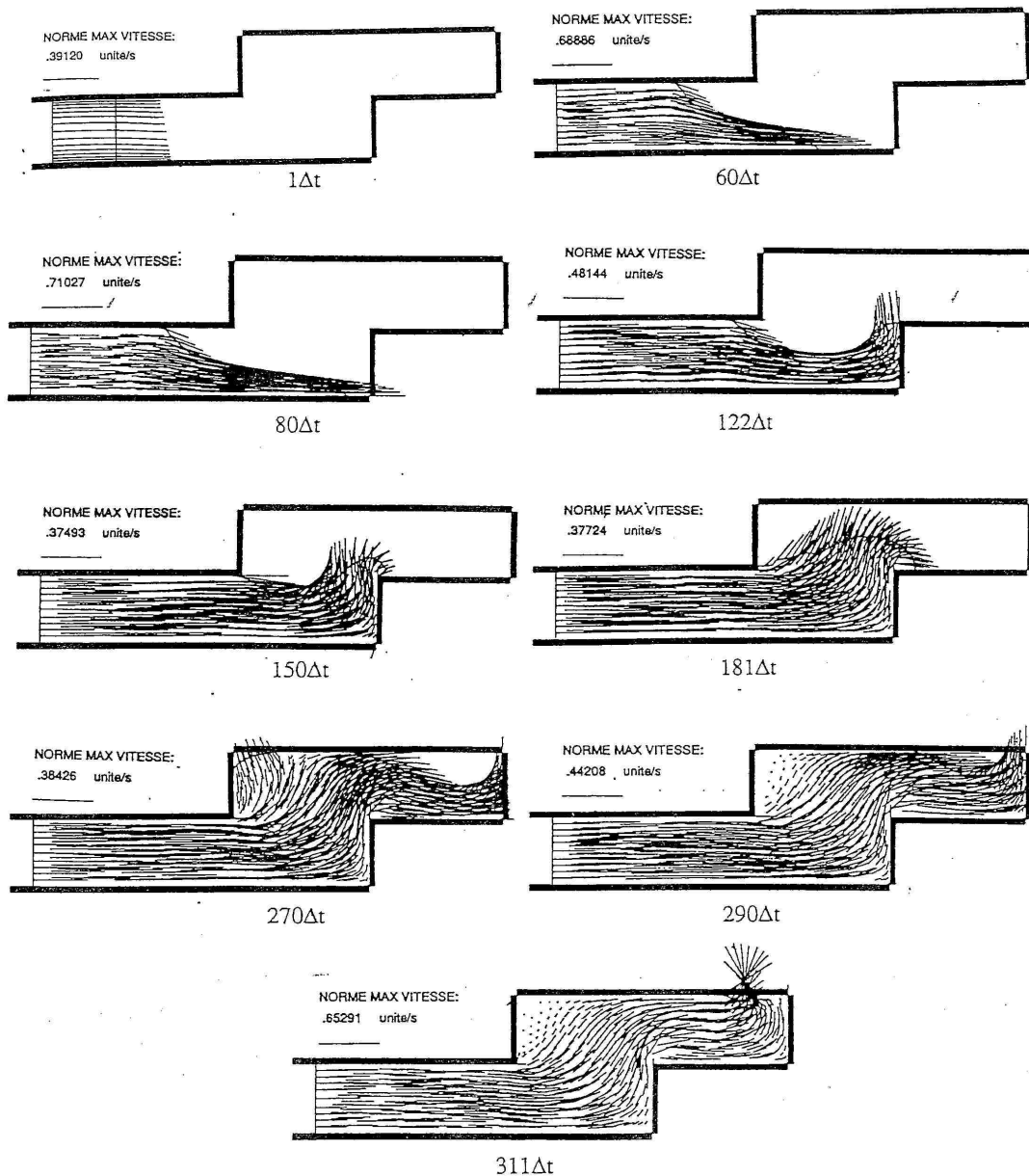
Modèle k- θ

Evolution du maillage pour différents incréments de temps.



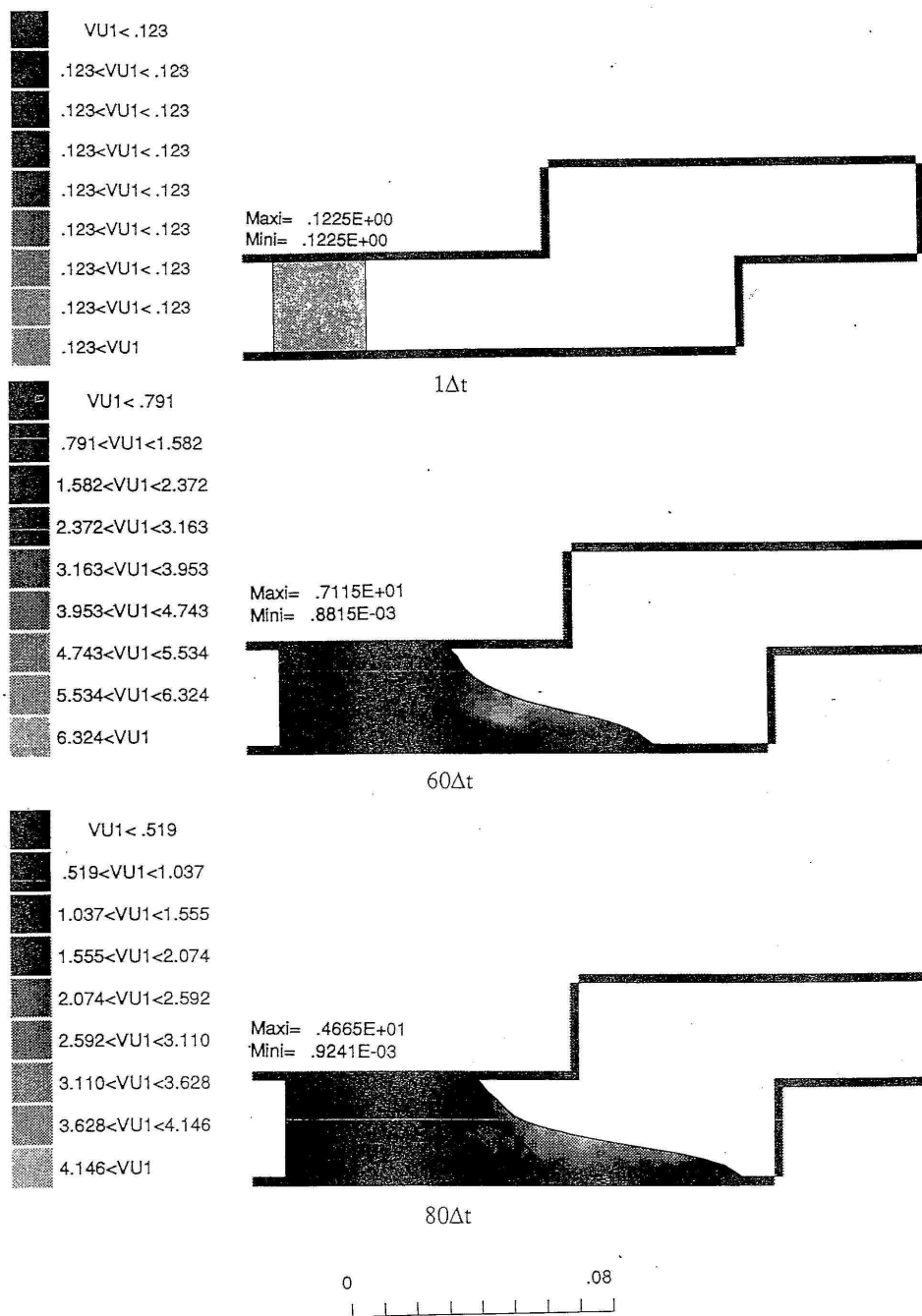
Application au remplissage des moules de fonderie /

Evolution du champ de vitesse pour différents incréments de temps.

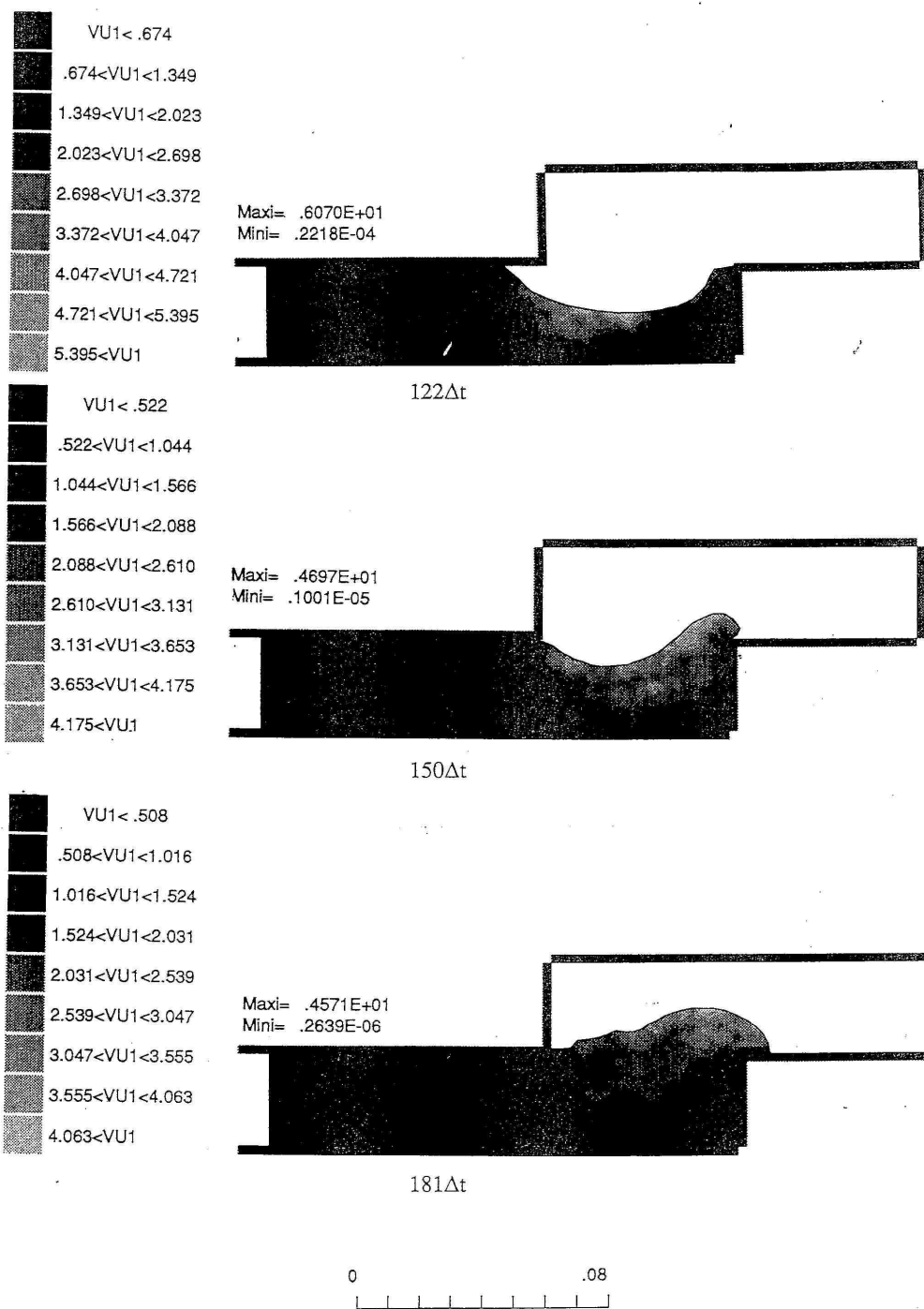


Application au remplissage des moules de fonderie I

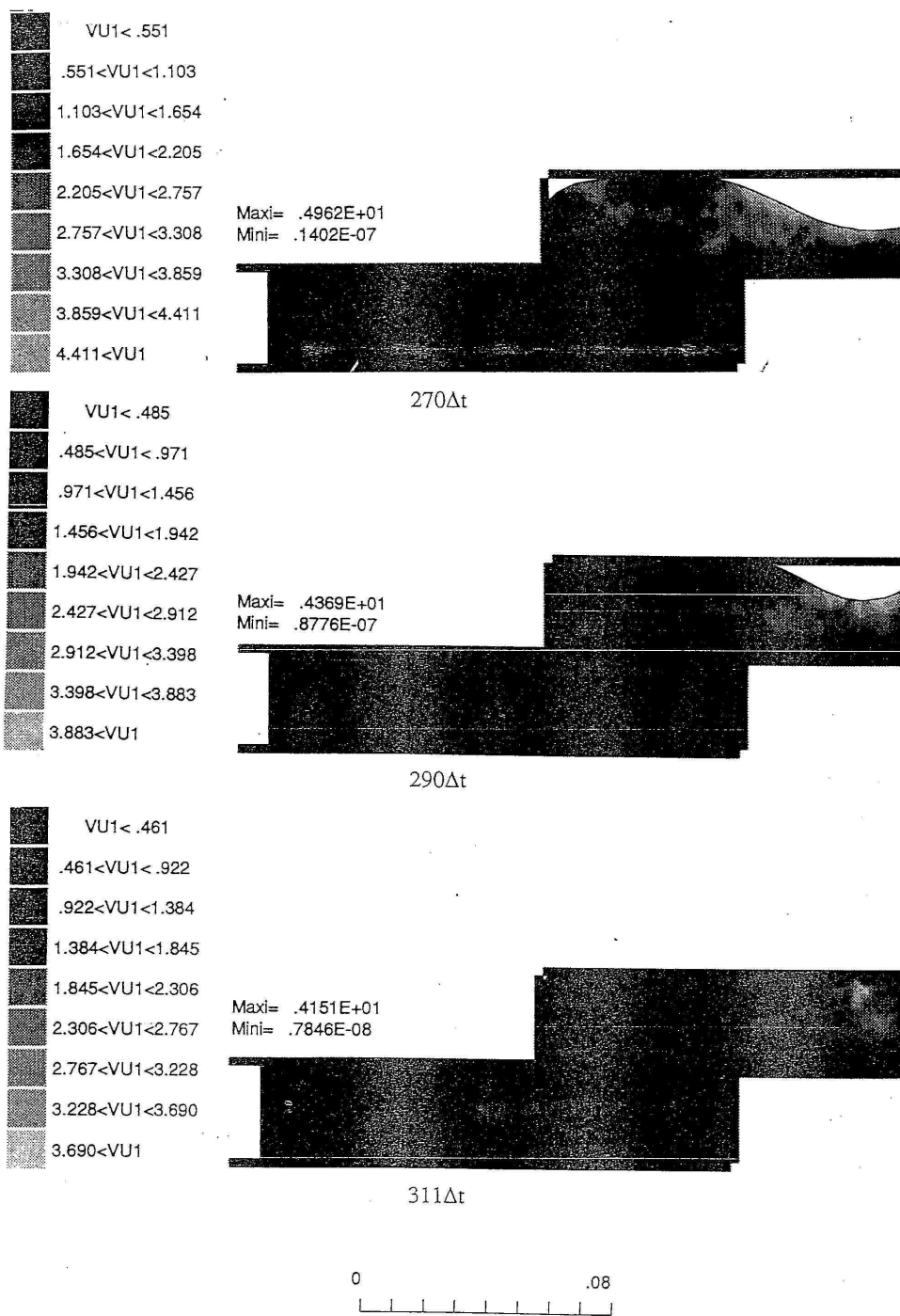
Evolution de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps



Application au remplissage des moules de fonderie /

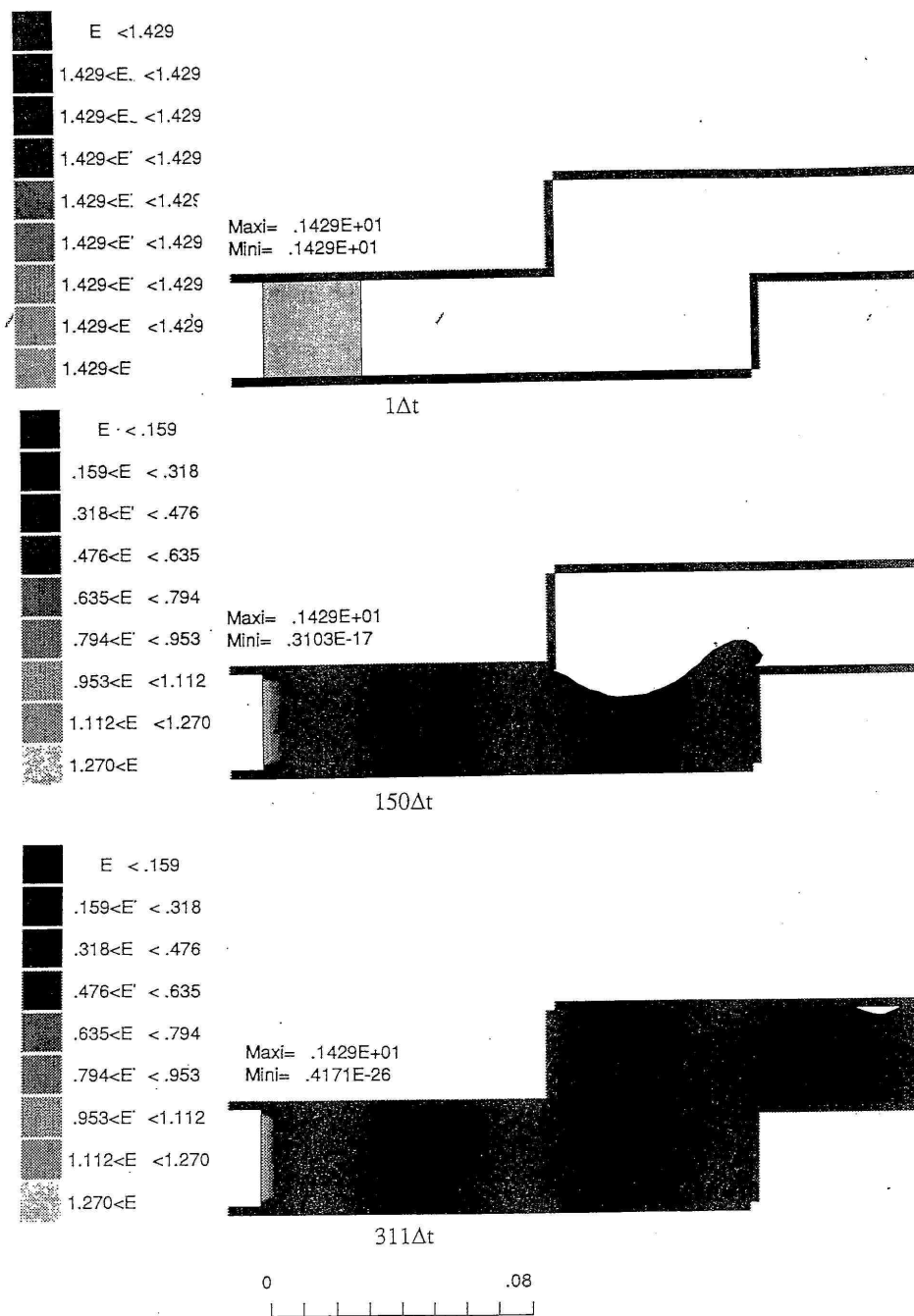


Application au remplissage des moules de fonderie I



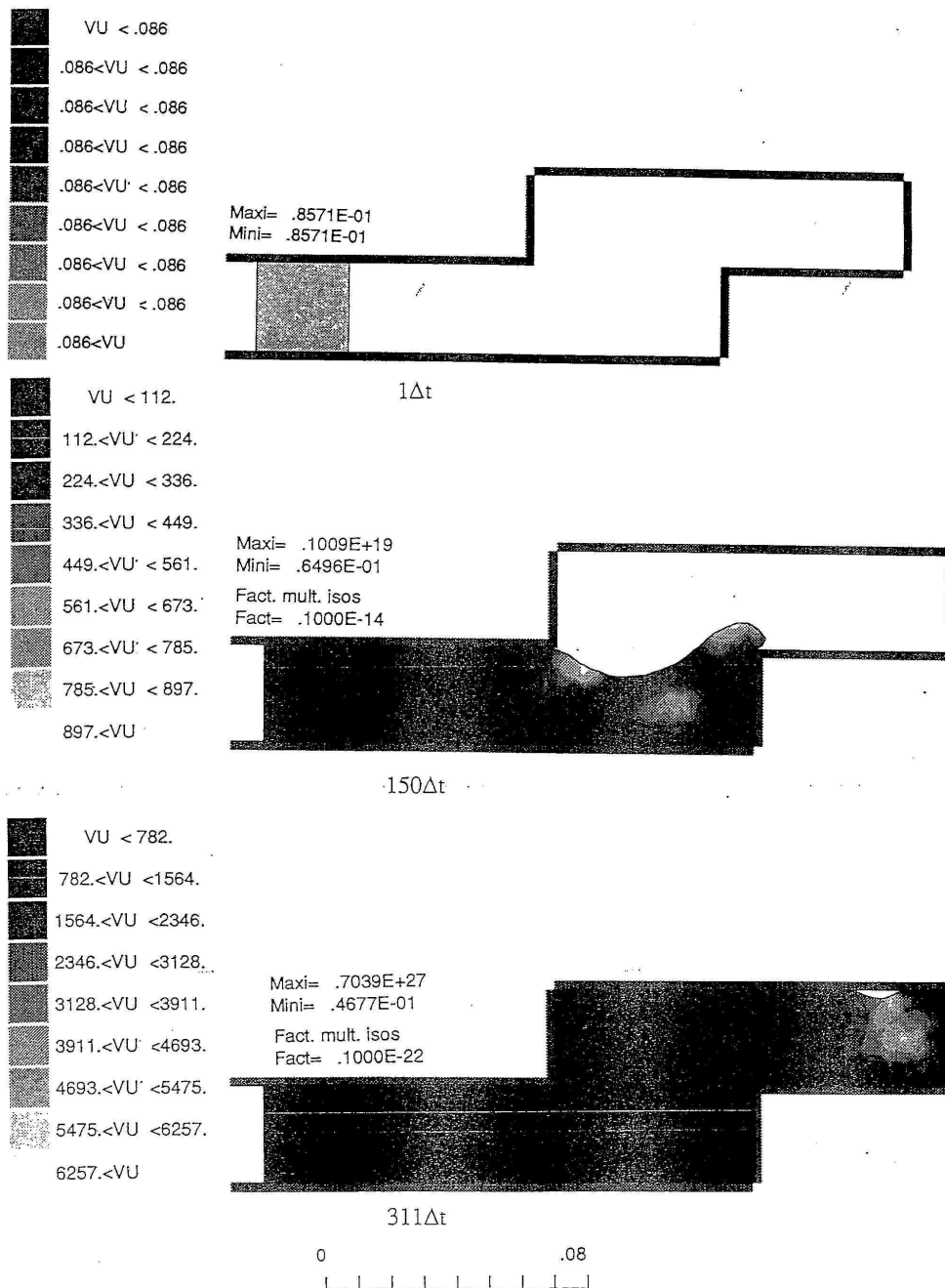
Application au remplissage des moules de fonderie I

Evolution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps



Application au remplissage des moules de fonderie I

Evolution de la variable $\theta = \frac{k}{\varepsilon}$ au cours du temps



Application au remplissage des moules de fonderie I

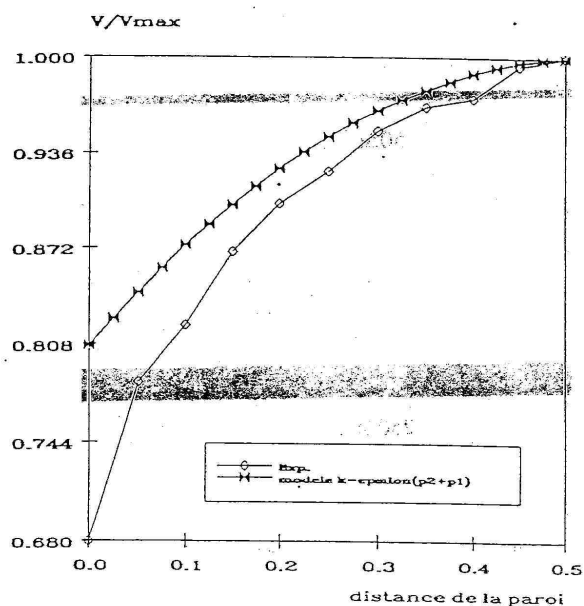
VI-2-Utilisation d'éléments P_2^+ - P_1

Nous avons utilisé les éléments P_2+P_1 (triangles à 7 noeuds pour la résolution cinématique et triangles à 3 noeuds pour le calcul de la pression linéaire par élément et discontinue d'un élément à l'autre) en vu de faire des comparaisons avec les éléments P_2 (triangles à 6 noeuds pour la résolution cinématique, pression constante par élément et discontinue d'un élément à l'autre) en ce qui concerne la validation et l'écoulement avec une marche ascendante.

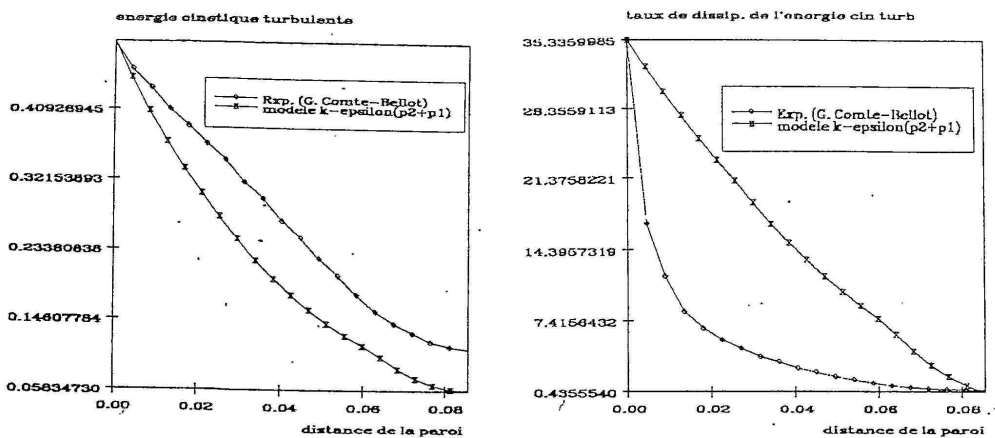
VI-2-1-Validation

Les données sont les mêmes que celles du paragraphe (VI-1-1). On étudie donc l'évolution de la vitesse relative, de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de la distance de la paroi.

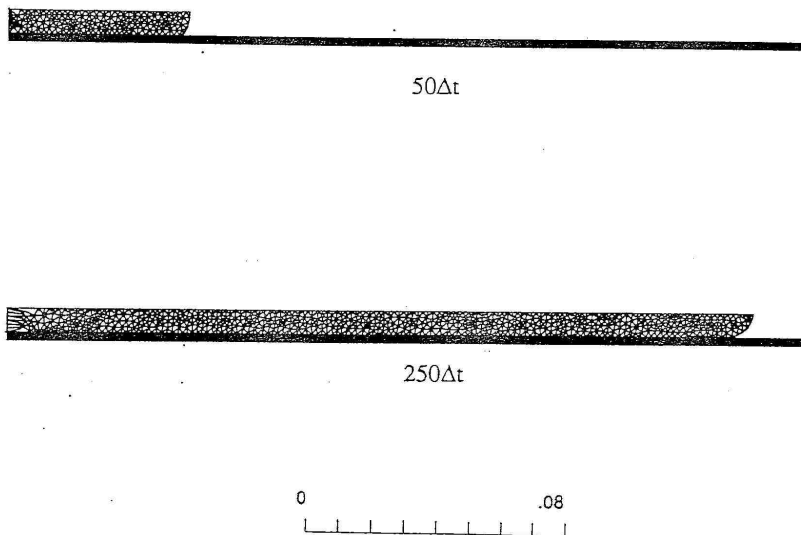
Comparaisons avec les résultats expérimentaux



Application au remplissage des moules de fonderie /

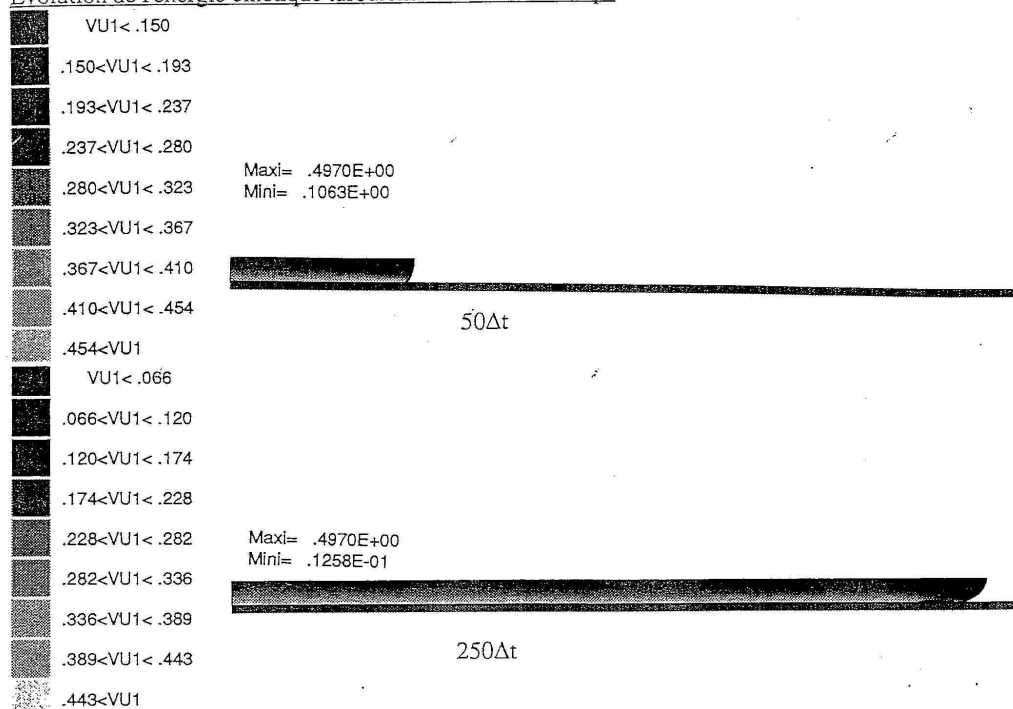


Evolution du maillage au cours du temps

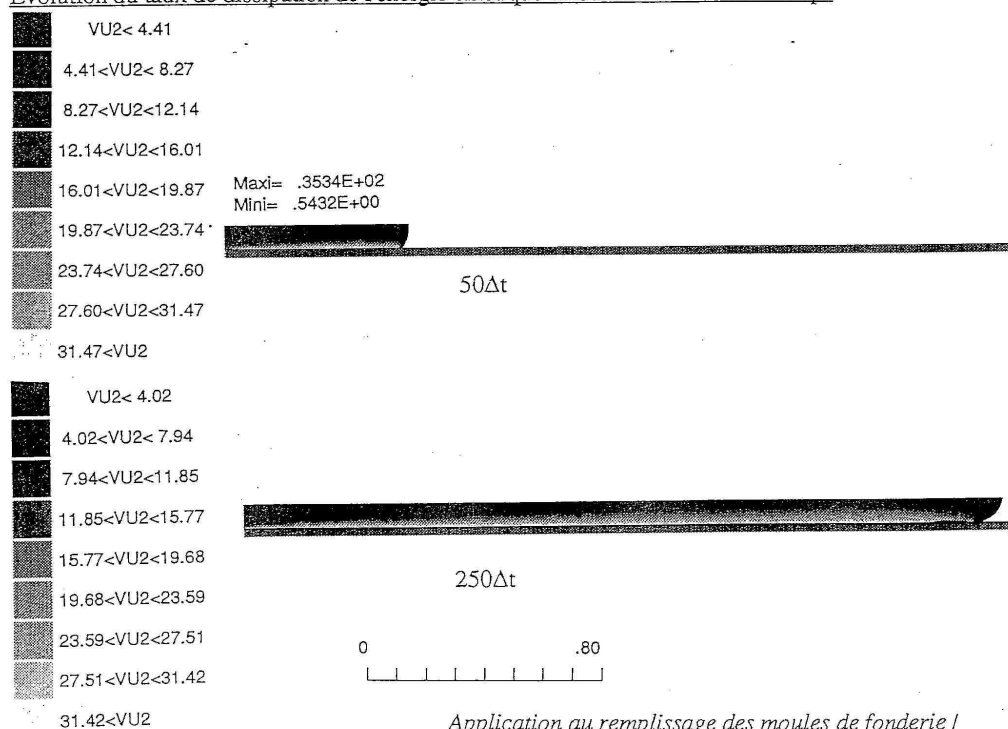


Application au remplissage des moules de fonderie /

Evolution de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps



Evolution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps



Application au remplissage des moules de fonderie I

On constate que les résultats obtenus sont en accord avec les résultats expérimentaux, sauf l'évolution du taux de dissipation en fonction de la distance relative à la paroi. Il faut cependant remarquer que la méthode utilisant les éléments P2 donne des résultats meilleurs.

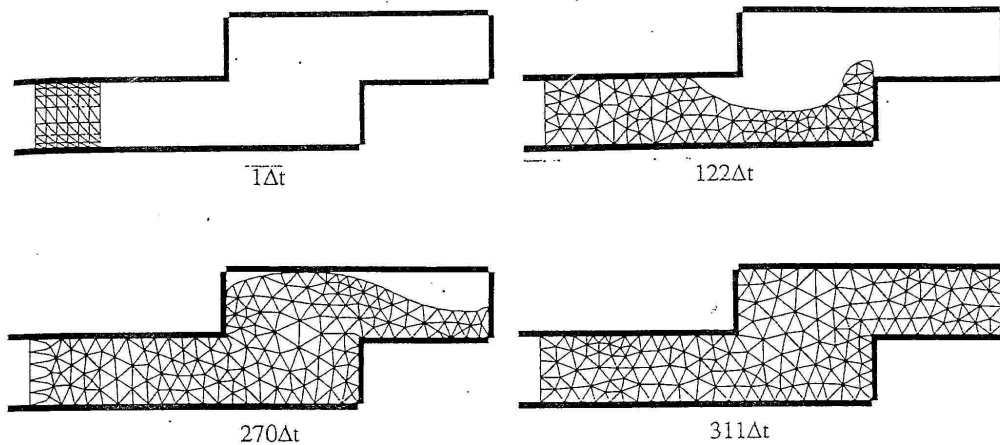
VI-2-2-Applications

On utilise pour l'application de notre formulation mixte, l'écoulement avec une marche ascendante (VI-1-2-1) et l'écoulement dans un moule en source. Successivement on étudie l'évolution du maillage, du champ de vitesse, de l'énergie cinétique turbulente, du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente et de la viscosité cinématique turbulente au cours du temps.

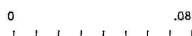
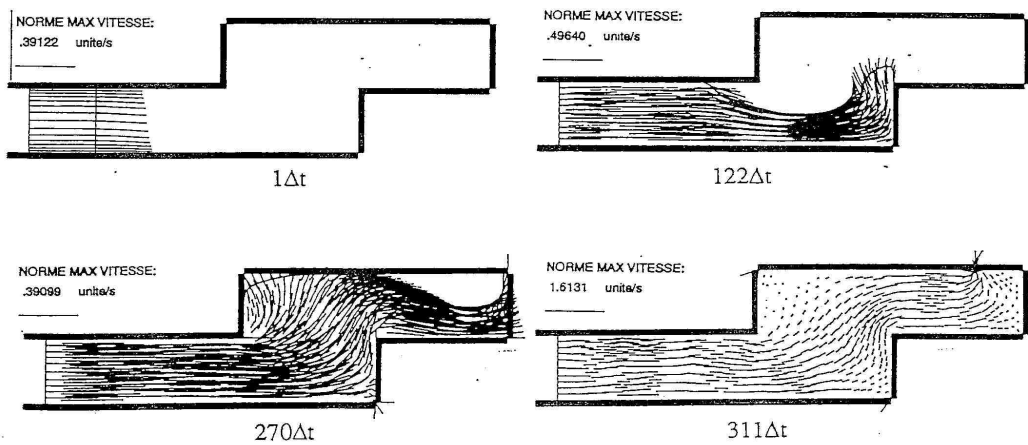
VI-2-2-1-Ecoulement avec une marche ascendante

On constate que l'évolution du maillage, du champ de vitesse, de l'énergie cinétique turbulente, du taux de dissipation et de la viscosité cinématique turbulente en fonction du temps sont en bon accord avec les résultats obtenus dans le cadre du "P2P0". On constate en effet, concernant par exemple l'énergie cinétique, que les fortes valeurs sont concentrées dans les zones où l'écoulement est libre. Le taux de dissipation décroît de la zone d'injection vers la surface libre. La viscosité quant à elle, conserve presque la même allure que celle de l'énergie cinétique turbulente.

Evolution du maillage pour différents incréments de temps.

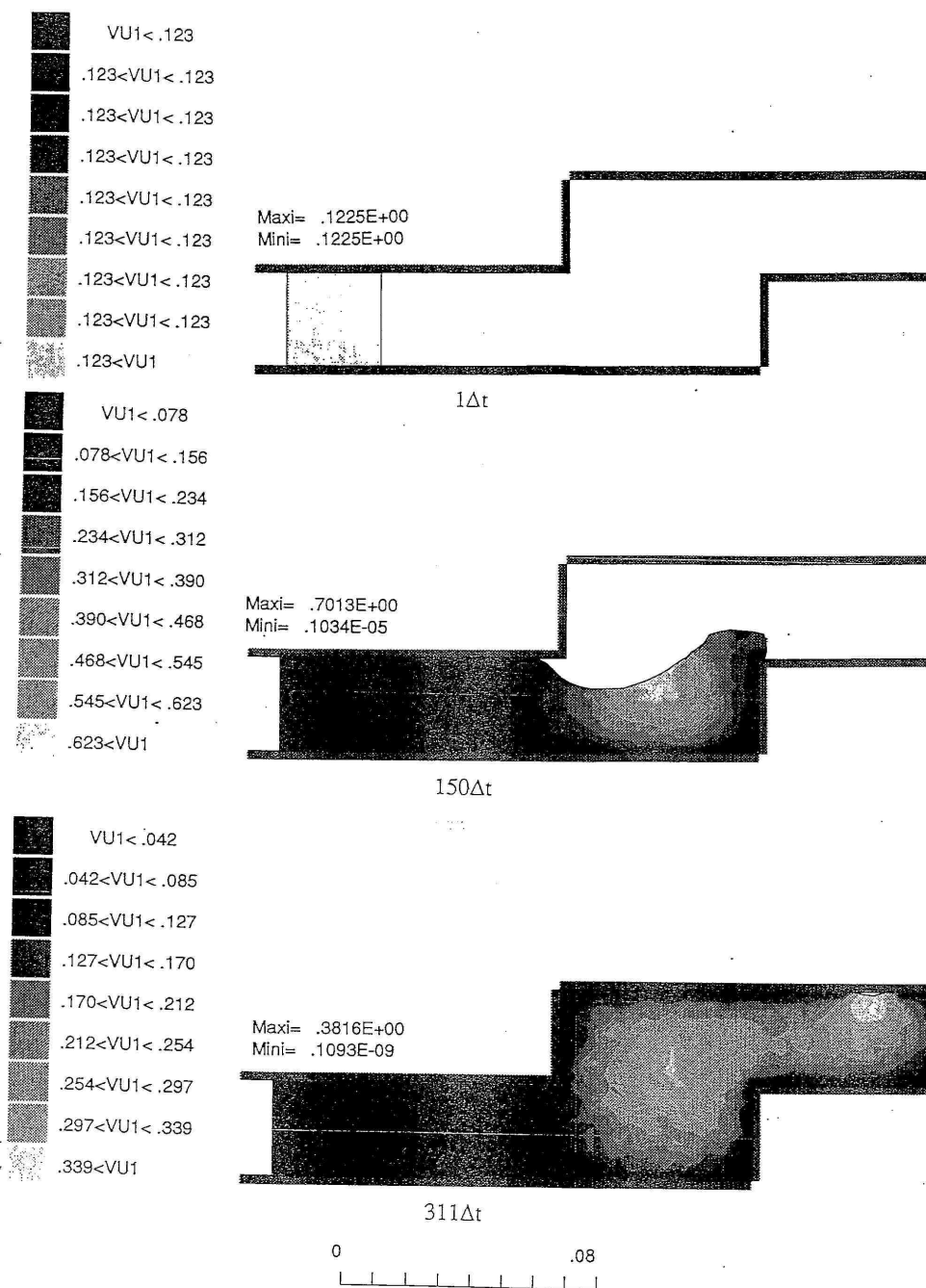


Evolution du champ de vitesse au cours du temps



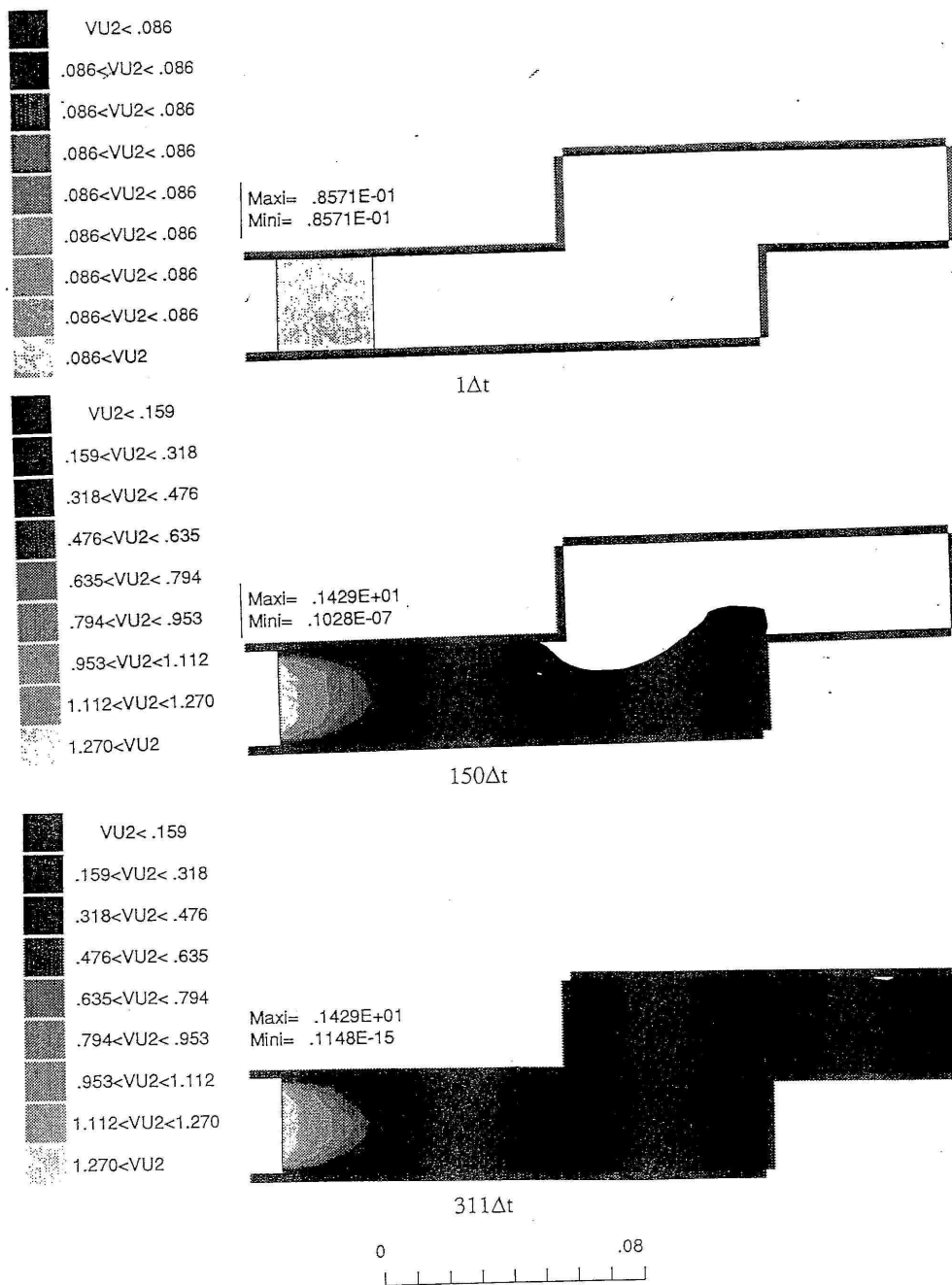
Application au remplissage des moules de fonderie I

Evolution de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps



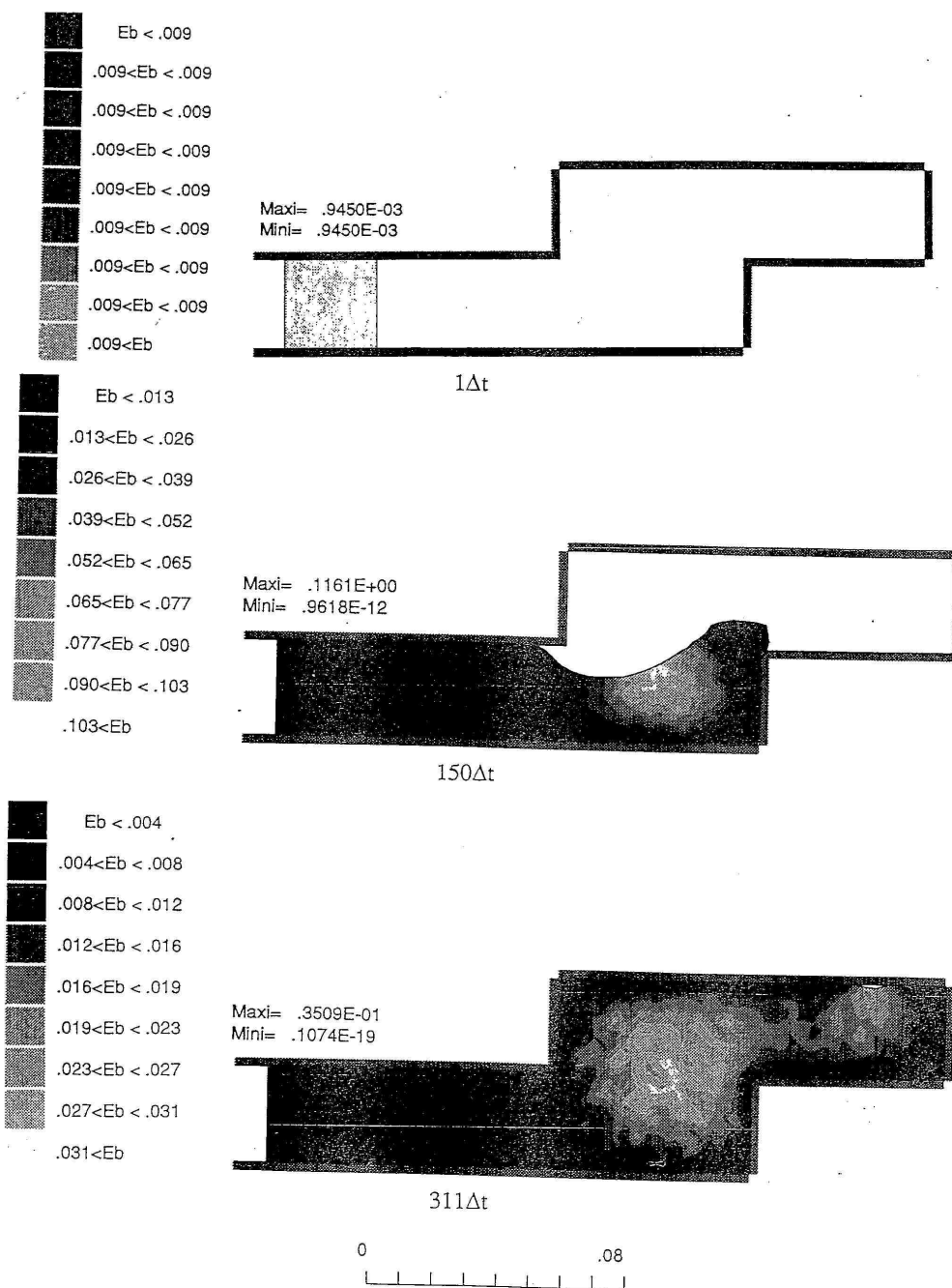
Application au remplissage des moules de fonderie I

Evolution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps



Application au remplissage des moules de fonderie /

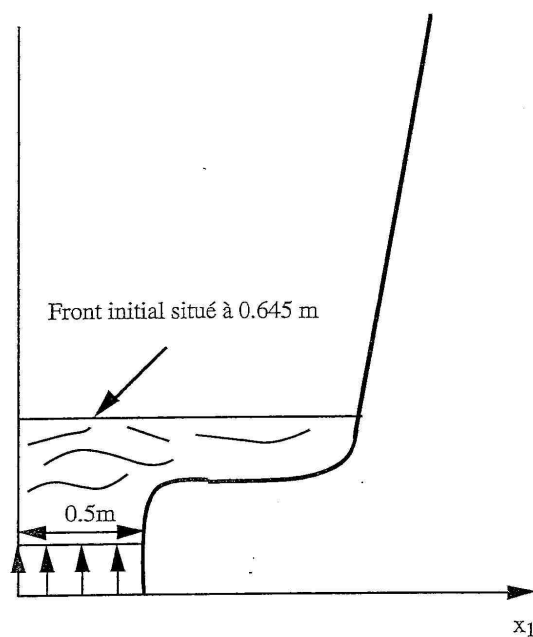
Evolution de la viscosité cinématique turbulente au cours du temps



Application au remplissage des moules de fonderie I

VI-2-2-2-Moule en source

La configuration initiale et les dimensions du moule sont illustrées par la figure suivante



les données de l'écoulement sont les suivantes

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_0 = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$g = -10. \text{ m/s}^2$$

$$y^+ = 117.$$

$$\Delta t = 2.5881 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

La vitesse à l'entrée du moule est de 1m/s .

Les différentes étapes du remplissage sont données par les figures suivantes. On remarque qu'avec le modèle k- ϵ , on a des vagues qui se déplacent de gauche à droite et de droite à gauche et à un moment donné, on a une tendance à la stabilité. On note une récirculation qui ne cesse de se développer au cours du temps (Figures)

Application au remplissage des moules de fonderie /

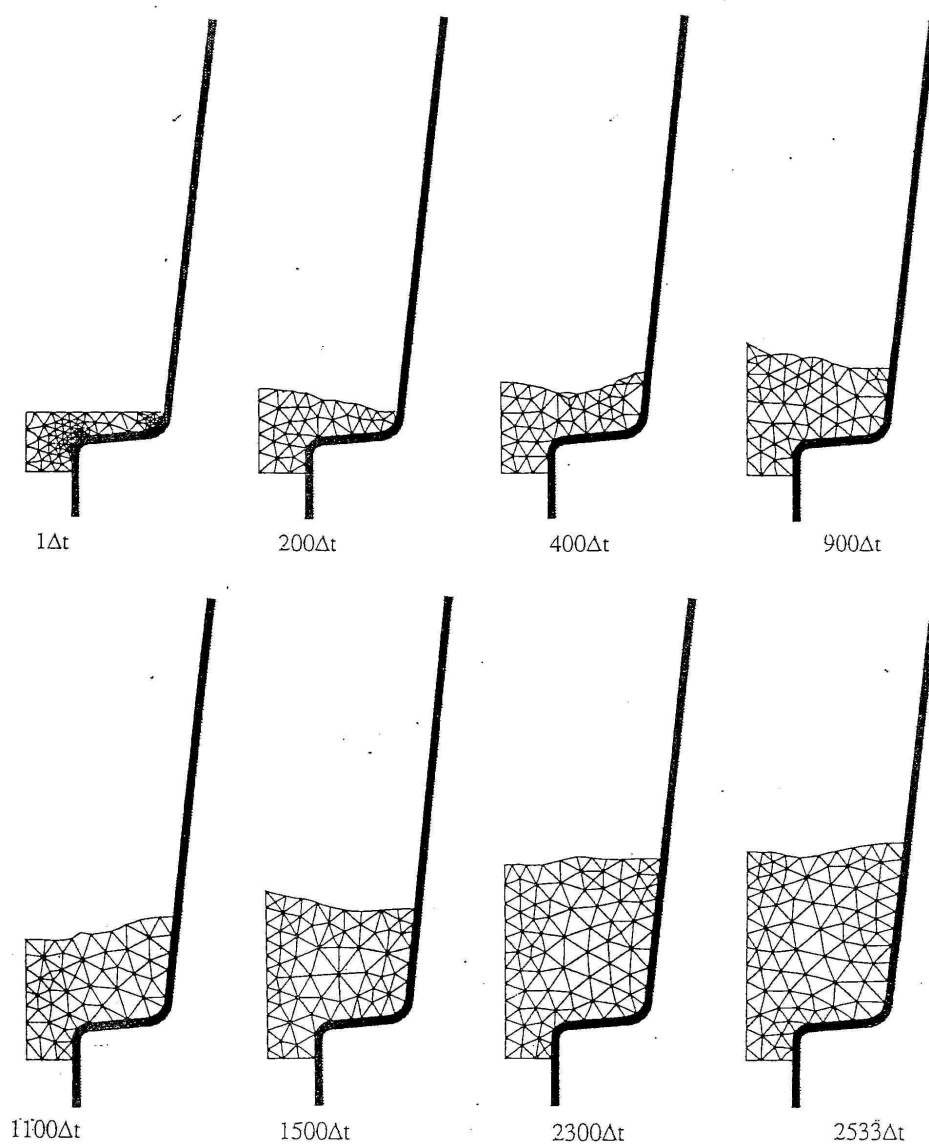
Modèle k-ε

Une fois les conditions aux limites imposées, on se rend compte qu'en dehors de la zone d'injection, les régions où l'énergie cinétique turbulente est la plus élevée, sont la zone centrale de la surface libre, ainsi que le coeur de l'écoulement dans la section divergente. On passe de faibles énergies cinétiques en paroi aux fortes énergies vers le centre de l'écoulement. La région de faibles énergies s'accroît avec le temps surtout dans la zone où on a un tourbillon qui se crée et se développe.

En ce qui concerne les isovaleurs du taux de dissipation, on remarque que les valeurs imposées à la paroi, ne sont pas faibles partout. En dehors de la zone d'injection, des régions pouvant présenter des singularités ou proches de ces zones de singularités, on a comme dans le cas de l'énergie cinétique turbulente, des valeurs élevées sur la surface libre surtout dans la zone centrale. On note également à un moment donné, dans le coeur de l'écoulement, des taux de dissipation d'énergie élevés.

Comme dans le cas de l'écoulement avec une marche ascendante, les isovaleurs décrivant la repartition de la viscosité dans le moule, ressemblent à celles de l'énergie cinétique turbulente. On a une zone à faible viscosité qui ne cesse de croître avec le temps. Il faut signaler aussi la présence dans cette zone d'un tourbillon.

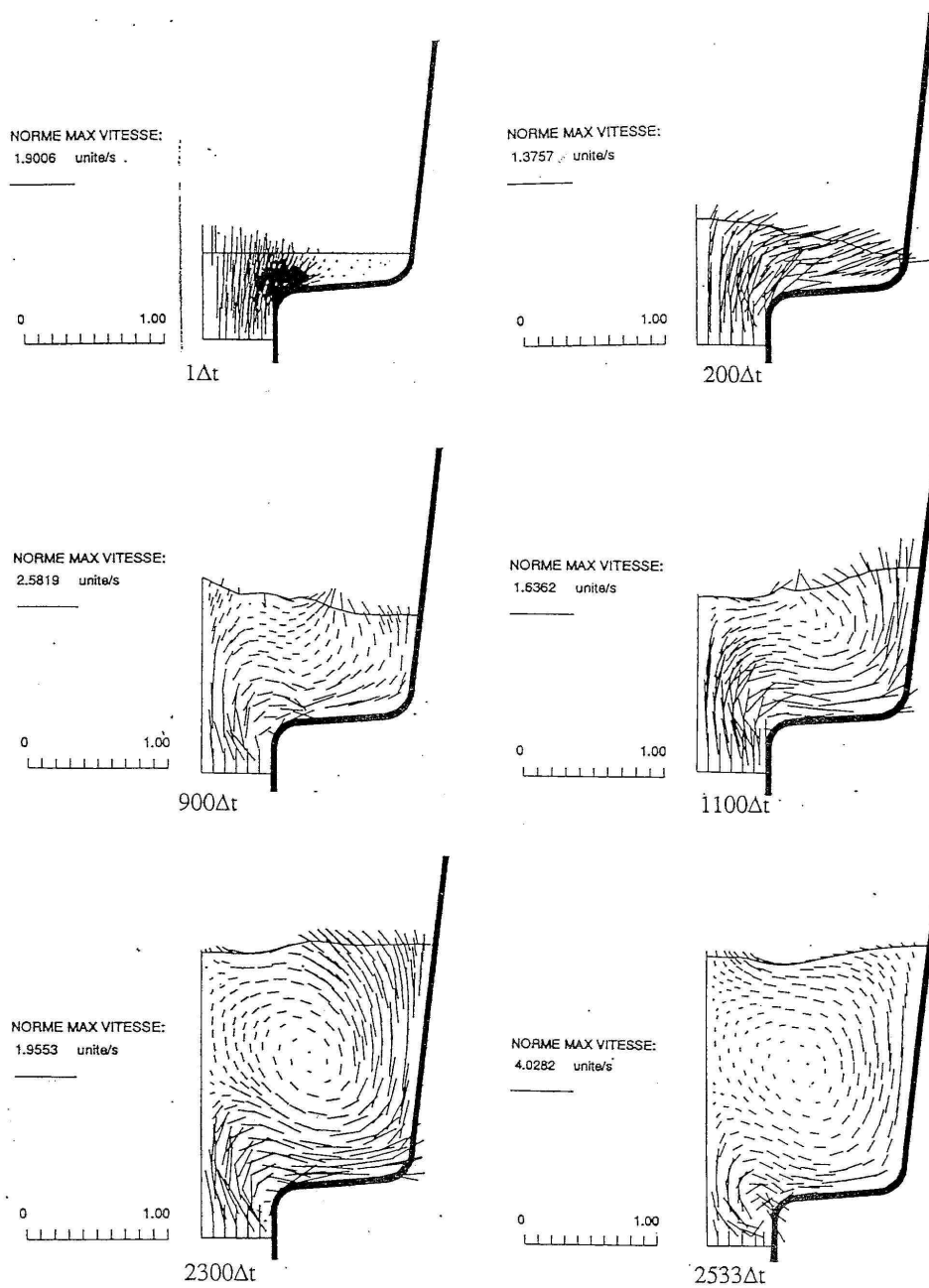
Evolution du maillage au cours du temps



0 2.00

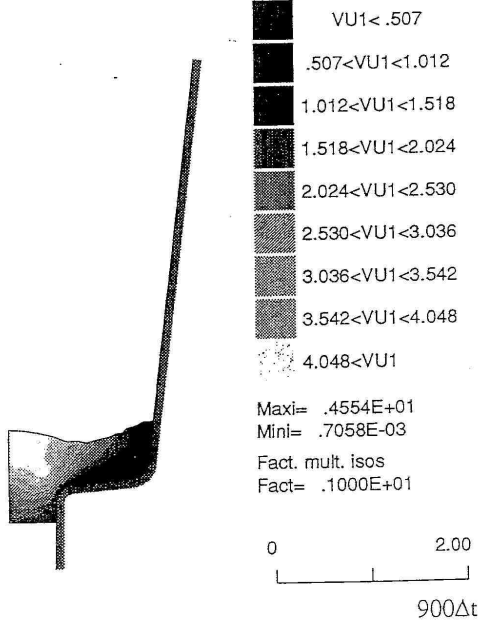
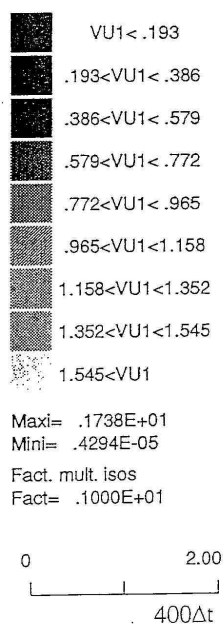
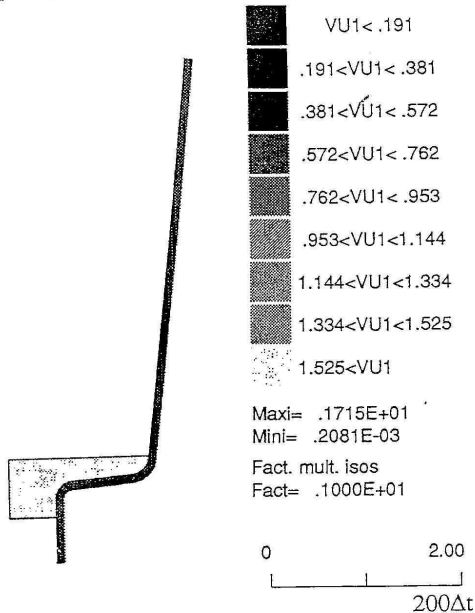
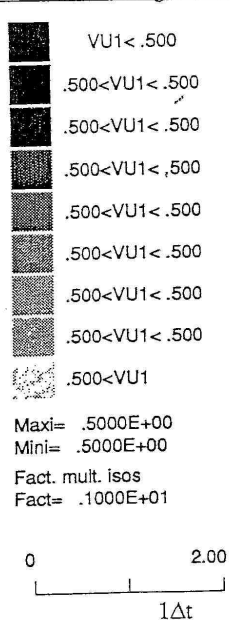
Application au remplissage des moules de fonderie /

Evolution du champ de vitesse au cours du temps

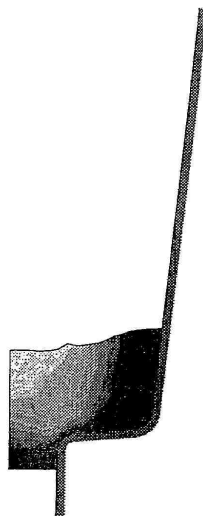
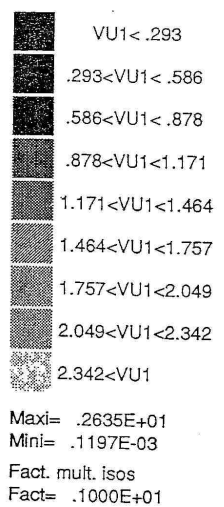


Application au remplissage des moules de fonderie /

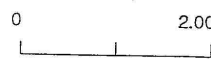
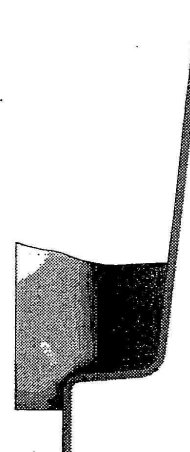
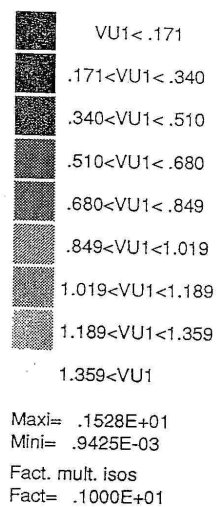
Evolution de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps



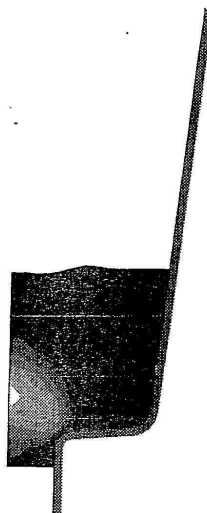
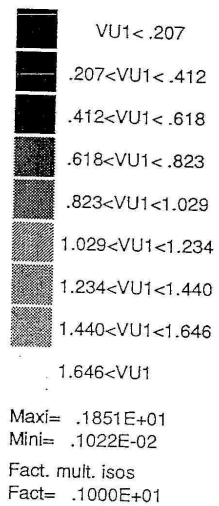
Application au remplissage des moules de fonderie I



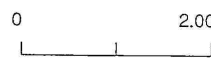
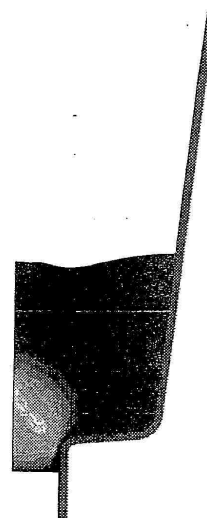
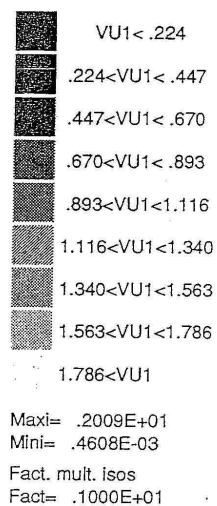
1100Δt



1500Δt



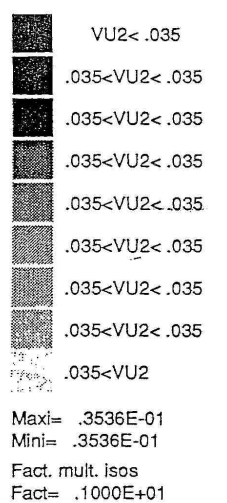
2300Δt



2533Δt

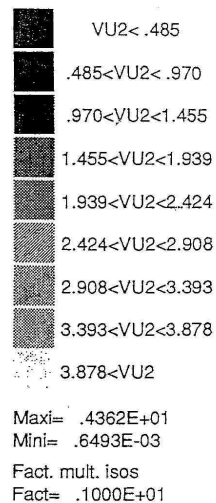
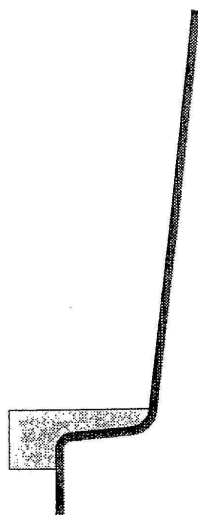
Application au remplissage des moules de fonderie I

Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente au cours du temps



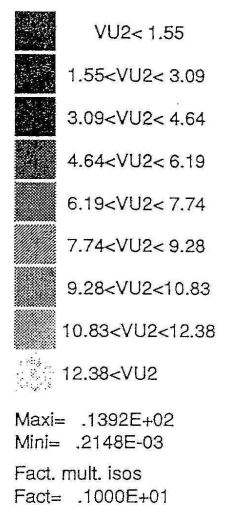
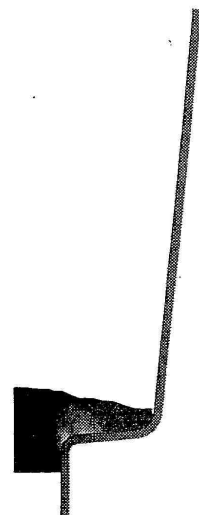
0 2.00

1Δt



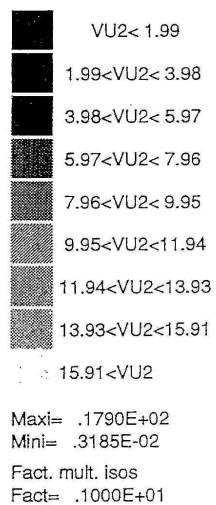
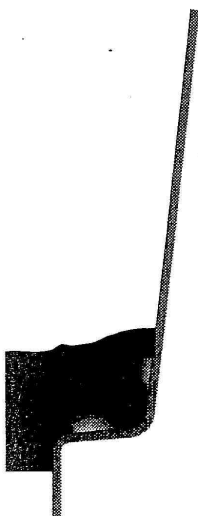
0 2.00

200Δt



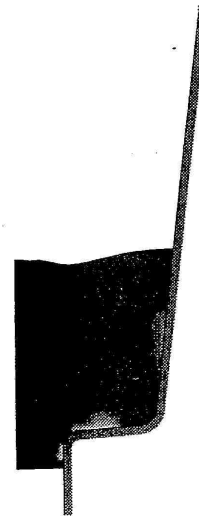
0 2.00

1100Δt



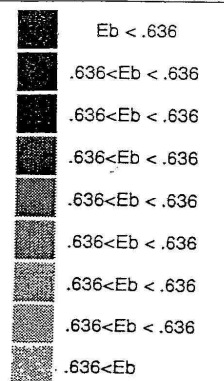
0 2.00

2533Δt

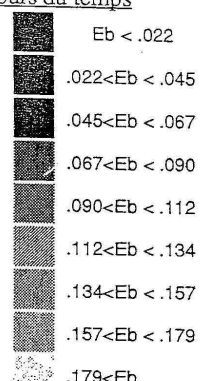
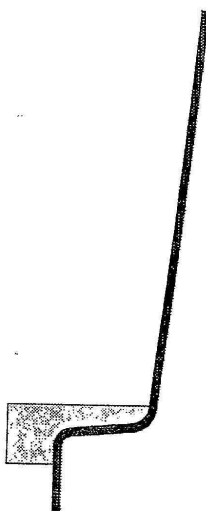


Application au remplissage des moules de fonderie I

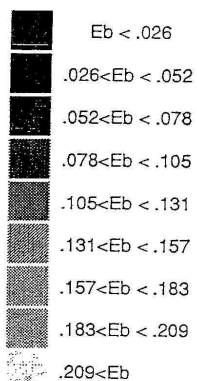
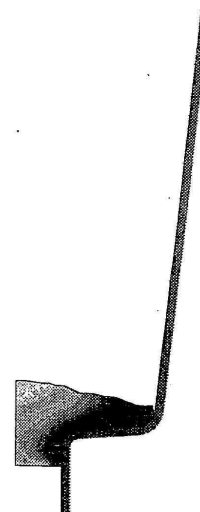
Evolution de la viscosité cinématique turbulente au cours du temps



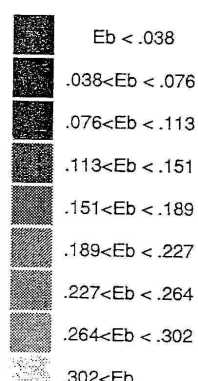
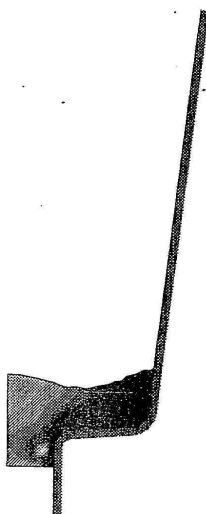
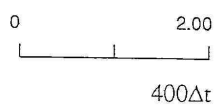
Maxi= .6364E+00
 Mini= .6364E+00
 Fact. mult. isos
 Fact= .1000E+01



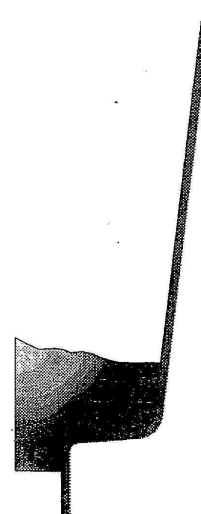
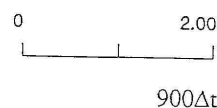
Maxi= .2017E+00
 Mini= .3871E-07
 Fact. mult. isos
 Fact= .1000E+01



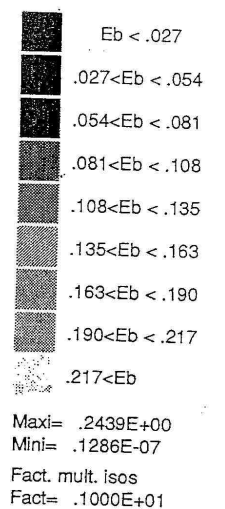
Maxi= .2351E+00
 Mini= .1659E-10
 Fact. mult. isos
 Fact= .1000E+01



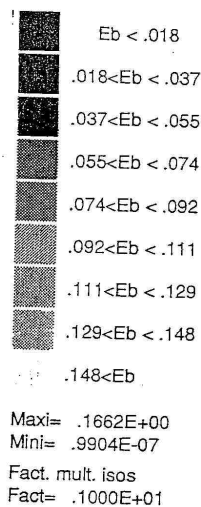
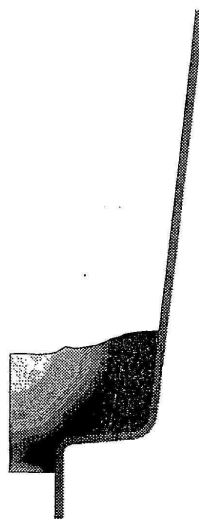
Maxi= .3399E+00
 Mini= .4085E-06
 Fact. mult. isos
 Fact= .1000E+01



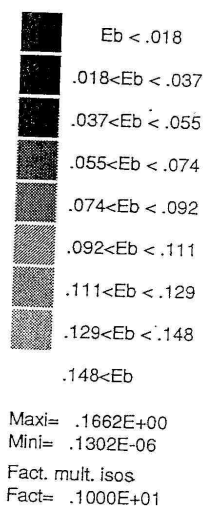
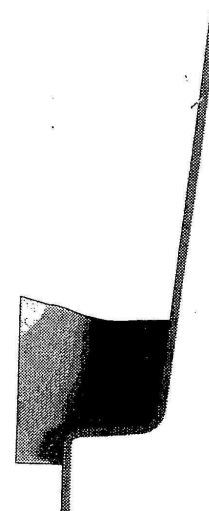
Application au remplissage des moules de fonderie I



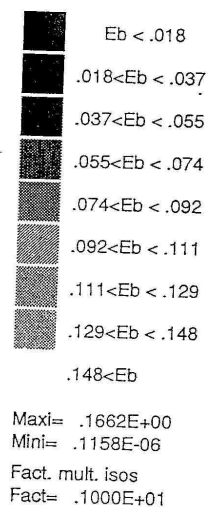
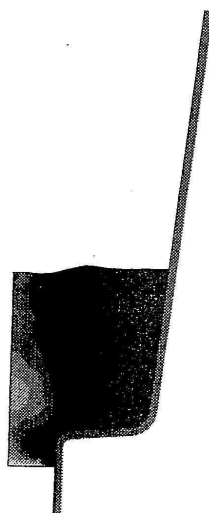
1100Δt



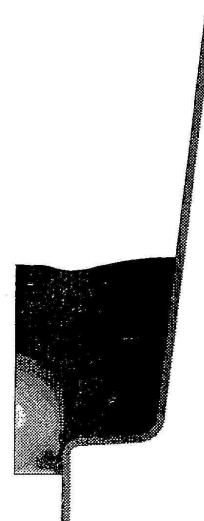
1500Δt



2300Δt



2533Δt



Application au remplissage des moules de fonderie I

Références du chapitre VI

A. AUTRET, "Calculs d'écoulements turbulents par une méthode aux éléments finis", Thèse Docteur Ingénieur, Université Aix-Marseille II, (1985).

C. BEGUE B. CARDOT, O. PIRONNEAU, "Simulation d'écoulements turbulents à moyenne instationnaire", Rapport de Recherche n°914, INRIA (Rocquencourt), (oct. 1988).

G. COMTE-BELLOT, "Contribution à l'étude de la turbulence de conduite", Thèse, Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Grenoble (1963).

G. COMTE-BELLOT, "Ecoulement turbulent entre deux parois planes", Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air. S. O. S. T. A., (1965).

G. DHATT, D. M. GAO, A. B. CHEIKH, A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds", Int. J. Num. Meth. in Eng., 30, 821, (1990).

CONCLUSION

Ce travail s'est inscrit dans le cadre du développement d'un modèle numérique de remplissage des moules de fonderie. Nous avons donc travaillé à partir d'un logiciel d'éléments finis en formulation Lagrangienne réactualisée en deux dimensions, capable de simuler des écoulements de fluides instationnaires, en régime laminaire. Notre contribution personnelle a consisté en la relaxation de cette dernière contrainte. En effet, dans de nombreux cas de figure de remplissages de moules de fonderie dans l'industrie, l'écoulement est turbulent. Nous nous sommes donc attachés à l'introduction de modèles statistiques de turbulence dans le logiciel de départ. Nous avons pour ce faire considéré des modèles simples (de type Prandtl, à zéro équation) et d'autres plus complexes, mais déjà répandus dans la littérature (type k- ϵ , à deux équations). L'introduction des modèles à zéro équation est sans difficulté aucune mais sans grand intérêt pour l'étude du remplissage de moules. En effet, la prédétermination nécessaire de la "longueur de mélange" en fonction de la géométrie de l'écoulement enlève tout caractère prédictif à ce type de modèle, a fortiori en régime instationnaire. Les modèles à deux équations sont de ce point de vue beaucoup plus intéressants. En revanche, leur introduction dans les modèles numériques s'avère difficile du fait de la résolution de deux équations de transport couplées portant sur les variables turbulentes, ainsi que du couplage avec la résolution en champ de vitesse moyen par l'intermédiaire d'une viscosité turbulente. En particulier, la discrétisation temporelle s'avère critique et peut facilement donner lieu si l'on n'y prend garde à des valeurs aberrantes des énergies cinétiques turbulentes, des taux de dissipation ou des viscosités turbulentes. Nous avons mis en oeuvre une première stratégie reprenant certains résultats de la littérature, consistant à utiliser une approximation du modèle initial k- ϵ (dénommée k- θ) au traitement numérique plus favorable : résolution analytique de l'étape de convection pure excluant en particulier les valeurs négatives de k et ϵ . Cependant, si on prend le modèle k- ϵ pour référence, le modèle k- θ fournit des résultats qualitativement corrects (champ de vitesse moyen) mais quantitativement éloignés, ainsi que nous l'a confirmé notre étude mono-dimensionnelle d'impact d'une colonne liquide. Une seconde stratégie a alors consisté à repartir du modèle k- ϵ original et à utiliser un schéma d'intégration temporelle de type Runge-Kutta modifié (portant sur la dérivée logarithmique) d'ordre 2. Cette méthode associée à une procédure de condensation de la matrice de masse s'est avérée très efficace, éliminant en particulier par construction même, toute valeur négative de k et ϵ .

A titre de validation, nous avons comparé les résultats des différents modèles, zéro-équation et k- ϵ à des solutions de référence, expérimentales et analytiques de la littérature : écoulement en conduite cylindrique et entre plans. Les résultats sont globalement satisfaisants, montrant un bon accord sur le champ de vitesse moyen et un calcul raisonnablement correct des variables turbulentes.

Un deuxième aspect de ce travail a été la mise en oeuvre d'une formulation mixte vitesse-expression, plus précise et plus satisfaisante d'un point de vue théorique par rapport à la

pénalisation de l'incompressibilité. Nous avons utilisé des éléments P_2^+ - P_1 (triangles quadratiques en vitesse, avec noeud central et linéaires en pression) associés à une méthode itérative d'Uzawa pour imposer l'incompressibilité.

En ce qui concerne l'application au remplissage de moules, nous avons du tenir compte des limitations inhérentes à la formulation Lagrangienne avec remaillage automatique. L'état actuel de développement du remaillleur ne permettant pas le remaillage de domaines géométriques non simplement connexes ou disjoints, nous nous sommes limités à des cas de figure relativement simples, avec alimentation de fluide latérale ou en source. Nous avons ainsi étudié le remplissage d'un moule présentant une marche ascendante et un remplissage en source d'un réservoir, tous deux à nombre de REYNOLDS élevé. Ces deux cas ont révélé la capacité de notre modèle à rendre compte des phénomènes caractéristiques des écoulements turbulents à surface libre : génération de la turbulence lors du déferlement de vague, régime d'écoulement complexe du à l'augmentation de la viscosité du fluide, etc...

Les suites à donner à ce travail et les perspectives que nous pouvons dégager sont les suivantes:

- en premier lieu, procéder à une validation du modèle par comparaison avec des écoulements réels complexes. En effet, la comparaison que nous avons faite par rapport à des écoulements simples établis est insuffisante du point de vue d'une validation en remplissage, mais il était difficile de réaliser une validation exhaustive dans le cadre de ce travail. Ceci permettra de juger pleinement de la pertinence du modèle $k-\varepsilon$ dans le cadre d'écoulements instationnaires avec une turbulence pleinement développée dans certaines régions de l'écoulement et des zones laminaires.

- une deuxième orientation serait de s'affranchir des contraintes trop fortes dues à la formulation Lagrangienne avec remaillage automatique, tout d'abord en étendant les possibilités du remaillleur à des situations complexes : replis de matière en surface libre (vagues), séparation de jet liquide (impact, chute), etc. Ces développements font l'objet d'une thèse actuellement en cours au laboratoire. Un autre point déterminant est l'utilisation d'une formulation Eulérienne-Lagrangienne dans laquelle l'évolution du maillage est dissociée de la cinématique des particules matérielles. Une manière de procéder consiste à régulariser le maillage du domaine fluide à chaque incrément de temps en conservant le même nombre de noeuds et la même connectivité. Il est prévisible que dans les régions du moule déjà remplies, le maillage se conserve (formulation quasi-Eulérienne) alors qu'il évolue au voisinage de la surface libre (formulation quasi-Lagrangienne). On diminue ainsi considérablement le nombre de remaillages nécessaires lors d'une opération de remplissage, et donc les temps de calcul associé aux remaillages ainsi que l'erreur de transport sur les différentes variables. Une thèse est également en cours sur ce sujet au laboratoire.

- par ailleurs, nous avons limité notre approche à la turbulence d'écoulements isothermes, mais nous n'oublions pas que le transfert de chaleur reste un des points fondamentaux en remplissage de moules. En effet, un des buts de la simulation du remplissage est le calcul du

champ de température en fin d'opération afin d'initialiser correctement un calcul thermomécanique du refroidissement des pièces coulées. Par rapport aux équations de transport de la turbulence que nous avons résolues, le traitement du transfert thermique - avec des conductivités considérablement augmentées par la turbulence - ne pose aucune difficulté spécifique et devrait pouvoir être introduit facilement.

- enfin, un dernier point nécessaire à l'application industrielle de telles simulations est l'extension au 3D qui constitue un défi considérable en terme de remaillage automatique.

...
 ...
 ...
 ...
 ...

ANNEXES

Annexe 1

Modèles à zéro équation

$$\text{Rappel : } v_t = l_m^2 |V_{1,2}|$$

Cas des écoulements turbulents cisailés libres

$$* \text{ Zone de mélange plane : } \frac{l_m}{\delta} = 0,070$$

$$* \text{ Jet plan : } \frac{l_m}{\delta} = 0,090$$

$$* \text{ Jet circulaire : } \frac{l_m}{\delta} = 0,075$$

$$* \text{ Jet radial : } \frac{l_m}{\delta} = 0,125$$

$$* \text{ Sillage plan : } \frac{l_m}{\delta} = 0,160$$

δ : épaisseur de l'écoulement c'est à dire distance à l'axe du point dont la vitesse est moitié de la vitesse sur l'axe

Cas des couches limites sur paroi

- * Développement de l_m sur une fonction rampe

Formule D'ESCUДИER

$$x_2 \leq \frac{\lambda}{\kappa} \delta \quad \Rightarrow \quad l_m = \kappa x_2$$

$$x_2 > \frac{\lambda}{\kappa} \delta \quad \Rightarrow \quad l_m = \lambda \delta$$

$$\kappa = 0,41 ; \lambda = 0,09$$

δ : épaisseur de l'écoulement à l'abscisse x_1 c'est à dire distance à l'axe du point dont la vitesse est moitié de la vitesse sur l'axe

Remarque : cette formule nécessite une modification très près de la paroi.

Cas des écoulements en zone de paroi

* Hypothèse de Van DRIEST

$$l_m = \kappa x_2 \left(1 - \exp\left(-\frac{x_2 V^*}{A \nu_0}\right) \right)$$

$\kappa = 0,41$; V^* : vitesse de frottement à la paroi ; $A=26$

Annexe 2

Etablissement des équations de transport du modèle k - θ

Pour établir les équations de transport du modèle k - θ , on se sert des équations de transport du modèle k- ε sous la forme suivante :

$$\frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \nabla k \right) - 3v_t \dot{\varepsilon} - \varepsilon$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) - 3 C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} v_t \dot{\varepsilon} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

qui peuvent encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left(C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right) - \frac{1}{2} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left| \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T \right|^2 - \varepsilon$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left(C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) - C_1 k \left| \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T \right|^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

avec

$$C_1 = \frac{C_{\varepsilon 1} C_\mu}{2}$$

Hypothèse

On suppose que les coefficients de diffusion de k et de ε sont égaux c'est à dire :

$$C_\mu = C_\varepsilon \quad (\text{en r\u00e9alit\u00e9 } C_\mu = 0.09 \text{ et } C_\varepsilon = 0.07)$$

L'\u00e9quation de transport de θ s'\u00e9tablit \u00e0 partir des \u00e9quations de transport de k et de ε comme suit :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dk}{dt} - \frac{k}{\varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\text{Notons } E = \frac{|\nabla V + \nabla V^T|^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right) + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} E - 1 - \frac{k}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \left(C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) - 2 C_1 \frac{k^2}{\varepsilon^2} E + C_{\varepsilon 2} \\ &= \theta^2 E (C_\mu - 2 C_1) + C_{\varepsilon 2} - 1 + \frac{C_\mu}{\varepsilon} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right) - C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) \\ &= \theta^2 E (C_\mu - 2 C_1) + C_{\varepsilon 2} - 1 + \frac{C_\mu}{\varepsilon} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right) - C_\mu \frac{k}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) \\ &\quad + (C_\mu - C_\varepsilon) \frac{k}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) \end{aligned}$$

D\u00e9veloppons s\u00e9par\u00e9ment les termes

$$-\frac{C_\mu}{\varepsilon} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right) - C_\mu \frac{k}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) \quad \text{et} \quad (C_\mu - C_\varepsilon) \frac{k}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{C_\mu}{\varepsilon} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right) - C_\mu \frac{k}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) \\ &= C_\mu \frac{\theta}{k} \nabla \cdot (k\theta \nabla k) - C_\mu \frac{\theta^2}{k} \nabla \cdot (k\theta \nabla k) \\ &= C_\mu \frac{\theta}{k} (k\theta(k)_{,i})_{,i} - C_\mu \frac{\theta^2}{k} \nabla \cdot \left(k\theta \left(\frac{k}{\theta} \right)_{,i,i} \right) \\ &= C_\mu \frac{\theta}{k} (\theta k_{,i} k_{,i} + k \theta_{,i} k_{,i} + k \theta k_{,ii}) - C_\mu \frac{\theta^2}{k} \left[k\theta \left(\frac{1}{\theta} k_{,i} - \frac{k}{\theta^2} \theta_{,i} \right) \right]_{,i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_\mu \frac{\theta}{k} (\theta k_{,i} k_{,i} + k \theta_{,i} k_{,i} + k \theta k_{,ii}) - C_\mu \frac{\theta^2}{k} \left[k k_{,i} - \frac{k^2}{\theta} \theta_{,i} \right]_{,i} \\
&= C_\mu \frac{\theta}{k} (\theta k_{,i} k_{,i} + k \theta_{,i} k_{,i} + k \theta k_{,ii}) \\
&= 3 C_\mu \theta \nabla \theta \cdot \nabla k - C_\mu k (\nabla \theta)^2 + C_\mu \theta k \Delta \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{k}{\varepsilon^2} \nabla \cdot \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) &= \frac{\theta^2}{k} \nabla \cdot \left(k \theta \nabla \left(\frac{k}{\theta} \right) \right) \\
&= \frac{\theta^2}{k} \left(k \theta \left(\frac{k}{\theta} \right)_{,i,i} \right) \\
&= \frac{\theta^2}{k} \left[k \theta \left(\frac{1}{\theta} k_{,i} - \frac{k}{\theta^2} \theta_{,i} \right) \right]_{,i} \\
&= \frac{\theta^2}{k} \left[k_{,i} k_{,i} + k k_{,ii} - \frac{2k}{\theta} k_{,i} \theta_{,i} + \frac{k^2}{\theta^2} \theta_{,i} \theta_{,i} - \frac{k^2}{\theta} \theta_{,ii} \right] \\
&= \frac{\theta^2}{k} (\nabla k)^2 + \theta^2 \Delta k - 2\theta \nabla k \cdot \nabla \theta + k (\nabla \theta)^2 - k \theta \Delta \theta
\end{aligned}$$

Dans le cas où $C_\mu = C_\varepsilon$, on obtient alors l'équation de transport suivante :

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta^2 E (C_\mu - 2C_1) + C_{\varepsilon 2} - 1 + C_\mu (3\theta \nabla \theta \cdot \nabla k - k (\nabla \theta)^2 + \theta k \Delta \theta)$$

une modélisation permet d'obtenir

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta^2 E (C_\mu - 2C_1) + C_\theta \nabla \cdot (k \theta \nabla \theta) + C_{\varepsilon 2} - 1$$

$$C_\mu = 0.09, \quad C_\varepsilon = 0.07, \quad C_1 = 0.0648, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1., \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

$$C_\theta = \frac{C_\mu}{\sigma_\theta} = 0.9, \quad \sigma_\theta = 0.1$$

Annexe 3

Modèle k - ε dans le cas 1D

L'équation de transport de k

$$\frac{dk}{dt} = \left(\frac{v_t}{\sigma_k} k_{,z} \right)_{,z} + 2v_t V_{z,z}^2 - \varepsilon$$

On applique la formulation variationnelle faible à l'équation de transport de k en prenant pour fonction test $\psi \in \Psi$ tel que

$$\Psi = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) \quad / \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}$$

Ω_D représente la frontière du domaine sur lequel on impose des conditions de DIRICHLET en k et en ε.

On obtient alors pour l'énergie cinétique turbulente

$$\begin{aligned} \int_0^L R^2(z) \frac{dk}{dt} \psi dz &= - \frac{1}{\sigma_k} \int_0^L R^2(z) v_t k_{,z} \psi_{,z} dz + \int_0^L R^2(z) v_t V_{z,z}^2 \psi dz \\ &\quad - \int_0^L R^2(z) \varepsilon \psi dz \end{aligned}$$

Soient R^e et L^e respectivement le rayon et la longueur de l'élément e, après application de la formulation de Galerkin, une discrétisation par éléments finis et une linéarisation des matrices, on obtient pour chaque élément, le système suivant :

$$\begin{aligned} \left[(R^e)^2 L^e \int_0^1 \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\xi \right] \left\{ \frac{d\mathbf{k}^e}{dt} \right\} + \left[\frac{1}{\sigma_k} \frac{(R^e)^2}{L^e} \int_0^1 \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{N}_{,\xi}^T d\xi + (R^e)^2 L^e \int_0^1 \left(\frac{\xi}{k} \right)^t \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\xi \right] \{ \mathbf{k}^e \} = \\ \left\{ 2C_\mu (R^e)^2 L^e \int_0^1 \mathbf{N} \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \right)^t (v_{z,z}^{t+\Delta t})^2 d\xi \right\} \end{aligned}$$

On procède la même manière pour ε.

Equation de transport de ε

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon, z \right) + 2 C_{\varepsilon 1} v_t V_{z,z}^2 \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

La formulation variationnelle faible de cette équation s'écrit de la manière suivante :

$$\int_0^L R^2(z) \frac{d\varepsilon}{dt} \psi dz = - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \int_0^L R^2(z) v_t \varepsilon, z \psi, z dz + C_{\varepsilon 1} \int_0^L R^2(z) v_t \frac{\varepsilon}{k} V_{z,z}^2 \psi dz - C_{\varepsilon 2} \int_0^L R^2(z) \frac{\varepsilon^2}{k} \psi dz$$

Après une discrétisation par éléments finis, on obtient pour chaque élément le système suivant :

$$\left[(R^e)^2 L^e \int_0^1 N N^T d\xi \right] \left\{ \frac{d\varepsilon^e}{dt} \right\} + \left[\frac{1}{\sigma_\varepsilon L^e} \int_0^1 N_{,\xi} N_{,\xi}^T d\xi + 2C_{\varepsilon 2} (R^e)^2 L^e \int_0^1 \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^t N N^T d\xi \right] \{ \varepsilon^e \} = \left\{ 2C_{\mu} C_{\varepsilon 1} (R^e)^2 L^e \int_0^1 N k^t \left(v_{z,z}^{t+\Delta t} \right)^2 d\xi + C_{\varepsilon 2} (R^e)^2 L^e \int_0^1 N \left(\frac{\varepsilon^2}{k} \right)^t d\xi \right\}$$

Toutes les matrices élémentaires et les vecteurs élémentaires sont assemblés respectivement en matrice globale et en vecteur global pour la résolution. Après une discrétisation temporelle utilisant un schéma à un pas, on aura donc respectivement pour k et ε , les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} [K] \{ k^{t+\Delta t} \} &= \{ F \} \\ [K'] \{ \varepsilon^{t+\Delta t} \} &= \{ F' \} \end{aligned}$$

Annexe 4

Modèle k- θ dans le cas 1D

Dans le cas monodimensionnel, les équations de transport de k et de θ sont, en notant que

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = V_{z,z}, \quad \frac{\partial k}{\partial z} = k_{,z}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \theta_{,z}, \quad \text{etc sont les suivantes :}$$

$$\frac{dk}{dt} = \left(\frac{v_t}{\sigma_k} k_{,z} \right)_{,z} + 2 C_\mu k \theta V_{z,z}^2 - \frac{k}{\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{v_t}{\sigma_\theta} \theta_{,z} \right)_{,z} + 2 C_\mu (1 - C_{\varepsilon 1}) \theta^2 V_{z,z}^2 - 1 + C_{\varepsilon 2}$$

avec $v_t = C_\mu k \theta$ qui sera pris en compte pour la résolution cinématique.

Traitement des équations à l'étape de convection

Les équations de k et de θ à l'étape de convection sont les suivantes :

$$\frac{dk}{dt} = 2 C_\mu k \theta V_{z,z}^2 - \frac{k}{\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2 C_\mu (1 - C_{\varepsilon 1}) \theta^2 V_{z,z}^2 - 1 + C_{\varepsilon 2}$$

On applique la formulation variationnelle à chacune des équations, on les intègre par parties. On obtient alors après une discrétisation spatiale le système suivant :

pour l'énergie cinétique turbulente

$$[C] \{k_c^t\} = \{Q\}$$

où $\{k_c^t\}$ est l'inconnue à l'étape de convection

$$[C] = \Lambda_{\text{Nbelt}}^{e=1} [C^e] \quad , \quad \{Q\} = \Lambda_{\text{Nbelt}}^{e=1} \{Q^e\}$$

avec

$$C_{ij}^e = \left[\int_0^1 N_i N_j d\xi + 2(2 C_1 - C_\mu) dt \int_0^1 \theta_t N_i N_j d\xi \right]$$

$$Q_i^e = \left\{ (R^e)^2 L^e dt \int_0^1 \left(4C_1 k t \theta^t (V_{z,z})_t^2 - \left(\frac{k}{\theta} \right)^t \right) N_i d\xi \right\} + \left[\int_0^1 N_i N_j d\xi \right] \{k^t e\}$$

pour la variable θ , on aboutit au système

$$[C'] \{ \theta_t^c \} = \{ Q' \}$$

où

$\{ \theta_t^c \}$ est l'inconnue à l'étape de convection

$$[C'] = \Lambda_{\text{Nbelt}}^{e=1} [C'^e] \quad , \quad \{ Q' \} = \Lambda_{\text{Nbelt}}^{e=1} \{ Q'^e \}$$

avec

$$C_{ij}^{e'} = \left[\int_0^1 N_i N_j d\xi + 2(2 C_1 - C_\mu) dt \int_0^1 \theta_t N_i N_j d\xi \right]$$

$$Q_i^{e'} = \left\{ (R^e)^2 L^e (C_2 - 1) dt \int_0^1 N_i d\xi \right\} + \left[\int_0^1 N_i N_j d\xi \right] \{ \theta^{t,e} \}$$

Traitement des équations à l'étape de diffusion

Les équations à l'étape diffusion s'écrivent si ϕ désigne k ou θ :

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(\frac{V_t}{\sigma_\phi} \phi_{,z} \right)$$

Ainsi après application de la formulation variationnelle et intégration par parties des équations, il s'ensuit

$$\int_0^L R^2(z) \frac{d\phi}{dt} \psi dz = \int_0^L R^2(z) \frac{v_t}{\sigma_\theta} \theta_{,z} \psi_{,z} dz$$

La discrétisation spatiale et temporelle pour chaque élément permet d'écrire

$$\left[(R^e)^2 L^e \int_0^1 \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\xi + \frac{dt}{\sigma_\phi} \cdot \frac{(R^e)^2}{L^e} \int_0^1 v_t^i \mathbf{N}_{,\xi} \mathbf{N}_{,\xi}^T d\xi \right] \{ \phi^{t+\Delta t, e} \} = \left[(R^e)^2 L^e \int_0^1 \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\xi \right] \{ \phi_c^{t, e} \}$$

On simplifie toutes ces équations par $(R^e)^2 L^e$. Comme pour les cas précédent, on peut écrire le système global à résoudre sous la forme

$$[\mathbf{A}] \{ \phi^{t+\Delta t} \} = \{ \mathbf{B} \}$$

RESUME

Ce travail est une contribution à la simulation numérique du remplissage de moules de fonderie, centrée sur l'étude de la modélisation de la turbulence dans les écoulements de fluide instationnaires. Après avoir passé en revue les différents modèles de la littérature (chapitre II), notre étude s'est focalisée sur les modèles simples à zéro équation et plus complexes, à deux équations, de type k-e. Après avoir rappelé les méthodes de résolution des écoulements fluides par éléments finis dans le cas laminaire (chapitre GI), l'introduction de ces différents modèles est détaillée au chapitre IV. Deux formulations différentes ont été utilisées, donnant des assez voisins : éléments P2P0 avec pénalisation de l'incompressibilité et éléments F formulation mixte vitesse-pression avec algorithme itératif d'Uzawa. En ce qui concerne le traitement des équations de transport de la turbulence, un modèle (k, k/e) a été investigué avec des résultats peu satisfaisants car éloignés du modèle de référence k-e (Chapitre V). Une stratégie plus efficace a été l'utilisation d'un schéma d'intégration temporelle de type Runge-kutta modifié, d'ordre 2, éliminant les valeurs aberrantes (négatives) des variables turbulentes. Deux cas d'application de ce modèle au remplissage de moules (chapitre VI) ont montré sa capacité à rendre compte des phénomènes caractéristiques des écoulements turbulents instationnaires à surface libre.

ABSTRACT

This work deals with the numerical simulation of die-casting mold filling. It focuses mainly on turbulence modeling for non-stationary fluid flows. After a review of the various models described in the literature, our study deals with the simple zero-equation model and the more complex two-equation model of the k-e kind. After recalling the finite element methods used for solving laminar fluid flows (chapter III), we describe in chapter IV the way the various models are taken into account in these methods. Two different formulations have been used, their results being quite the same: P₂P₀ elements with incompressibility penalization, and P₂⁺-P₁ elements using a mixte velocity-pressure formulation along with an Uzawa-like algorithm. As to the way we deal with the turbulence transport equations, a (k, k/e) model has been investigated with less than satisfactory results far from the initial (k,e) models results. A more efficient strategy has been the use of a modified Runge-Kutta time-integration scheme, which eliminates out-of-range (negative) values for the turbulence variables. A couple of mold filling cases put in evidence the model's ability to describe specific phenomena for turbulent non-stationary free surface flows.