



**HAL**  
open science

# Développement de formulations intégrales de volume en magnétostatique

Vinh Le Van

► **To cite this version:**

Vinh Le Van. Développement de formulations intégrales de volume en magnétostatique. Energie électrique. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAT132 . tel-01278958

**HAL Id: tel-01278958**

**<https://theses.hal.science/tel-01278958>**

Submitted on 25 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Génie Electrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Vinh LE VAN**

Thèse dirigée par **Gérard MEUNIER**  
codirigée par **Olivier CHADEBEC** et  
co-encadrée par **Jean-Michel GUICHON**

préparée au sein du **Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble**  
dans l'**École Doctorale Electronique, Electrotechnique,**  
**Automatique & Traitement du signal**

# Développement de formulations intégrales de volume en magnétostatique

Thèse soutenue publiquement le **14 Décembre 2015**,  
devant le jury composé de :

**M. Claude MARCHAND**

Professeur à l'Université Paris Sud, Président

**M. Denis PREMEL**

Chercheur au CEA Saclay, HDR, Rapporteur

**M. Didier TRICHET**

Professeur à l'Université de Nantes, Rapporteur

**M. Gérard MEUNIER**

Directeur de Recherche au CNRS, Membre

**M. Olivier CHADEBEC**

Directeur de Recherche au CNRS, Membre

**M. Jean-Michel GUICHON**

Maître de Conférences à l'Université Joseph Fourier, Membre





# *Remerciement*

J'adresse tout d'abord mes sincères remerciements aux membres du jury :

- Monsieur **Claude Marchand**, Professeur à l'Université de Paris Sud, Directeur du laboratoire de Génie Électrique et Électronique de Paris, pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de thèse ;
- Monsieur **Denis Premel**, Ingénieur Chercheur HDR Expert Senior au CEA Saclay, qui a accepté d'être rapporteur, pour son étude en profondeur de mes travaux et pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ma thèse ;
- Monsieur **Didier Trichet**, Professeur à l'Université de Nantes, qui a accepté d'être rapporteur, pour l'attention qu'il a portée à ma thèse ainsi que pour la qualité et la précision de son rapport.

Je tiens ensuite à exprimer ma reconnaissance envers mes encadrants pour m'avoir proposé ce sujet passionnant et pour la confiance qu'ils m'ont accordée tout au long de cette thèse.

- Monsieur **Gérard Meunier**, Directeur de Recherche au CNRS, mon directeur de thèse, pour ses conseils éclairés, son dévouement, sa grande compétence et son impressionnant recul scientifique, son encouragement constant et surtout pour sa chaleur humaine. Qu'il soit assuré de ma profonde admiration.
- Monsieur **Olivier Chadebec**, Directeur de Recherche au CNRS, mon co-directeur de thèse, pour ses précieux conseils, sa pédagogie et son dynamisme. Ses connaissances sur les méthodes intégrales ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.
- Monsieur **Jean-Michel Guichon**, Maître de Conférences à l'Université Joseph Fourier, mon co-encadrant, pour sa gentillesse, sa sympathie et son aide constante. Par sa bonne humeur communicative, nos discussions scientifiques ou non ont toujours été très agréables.

Je voudrais remercier l'ensemble des personnels du laboratoire de Génie Electrique de Grenoble (G2Elab) pour m'avoir donné des conditions optimales de travail. Mes remerciements vont particulièrement à: **Bertrand Bannwarth** pour sa disponibilité et sa collaboration tout au long de ce travail ; **Patrick Labie** pour son aide précieuse, ses bons conseils et ses corrections dans la plupart de mes présentations orales ; **Christophe Guerin** pour ses suggestions et ses conseils d'expert sur le logiciel Flux, **Brahim Ramdane** pour son amitié et son encouragement ; **Nicolas Galopin** pour sa bonne humeur et son amitié ; **Jean-**

**Louis Coulomb** pour ses cours et ses explications très originales sur la modélisation électromagnétique. Je tiens à remercier sincèrement **Benoit Delinchant, Gilles Cauffet, Laurent Gerbaud, Afef Lebouc, Pascal Tixador, Jean-Paul Yonnet, Frédéric Wurtz, Loric Garbuio, Zacharie de Greve** pour nos échanges et les bons moments passés.

Je remercie chaleureusement tous mes amis vietnamiens à Grenoble, particulièrement ceux présents au laboratoire du G2Elab avec **Duc Tung, Trung Son, Van Linh, Manh Hung, Xuan Hoa, Quang Phuong, Ngoc Hai, Trung Hieu, Ngoc Minh, Thai Phuong, Minh Chau, Tinh Minh, The Van, Hai Van, Hoang Anh, Thanh Hai, Cong Thanh, Tien Phu, Thanh Long, Nhat Hoang, Dinh Quang, Dinh Binh, Van Sang, Khac Lan, Tuan Anh, Dinh Truc, Van Hoa...** pour leurs aides, pour les repas au RU, les pauses café avec pleins d'histoires et surtout les excellents moments que nous avons partagés ensemble. Un grand merci à **petit Thanh Trung** pour son aide précieuse et pour nos échanges. Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements à **Tuan Tran-Quoc** pour ses précieux conseils dans la vie. Merci à **Khac-Nhan Nguyen** pour son attention durant ma thèse.

Je voudrais également remercier tous mes amis au G2Elab, notamment **Anthony Carpentier** pour son aide scientifique et son amitié, **Olivier Ghibaudo** pour son amitié et son aide depuis mes premiers jours en France, **Vincent Fedida** pour son aide à corriger mon français et son amitié, **Pauline Ferrouillat, Diego Pereira Botelho, Melissa Castillo, Jonathan Siau, Xavier Pichon, Farshid Sarrafin, Quentin Debray, Thomas Boussey, Antoine Labonne, Douglas Martins, Lyes Ifrek, Lucas Martinho, Thiago Bazzo...** pour les bons moments passés dans le laboratoire ainsi qu'en dehors et pour leurs soutiens. Je profite pour remercier également **Loïc Rondot** de Schneider Electric et **Guy Jérôme** de CEDRAT pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Au moment de clore cette thèse, c'est avec toute ma gratitude et mon amour que je pense à mes parents au Vietnam qui m'ont toujours soutenu dans mes choix et encouragé dans mon parcours.

*Con xin tỏ lòng biết ơn tới cha mẹ đã luôn dành cho con tình yêu thương, sự chăm sóc ân cần, luôn tin tưởng, quan tâm và động viên con trên mọi bước đường. Cảm ơn anh trai, chị dâu đã luôn động viên em, cảm ơn em gái bé bỏng đã luôn trò chuyện và chia sẻ cùng anh. Cháu tưởng nhớ đến ông bà ngoại, ông nội kính yêu đã dìu dắt cháu lúc còn bé thơ. Cảm ơn bà nội vì tình thương bà dành cho cháu.*

# TABLE DES MATIERES

<b>Introduction générale.....</b>	<b>5</b>
<b>CHAPITRE 1 Etat de l'art des formulations intégrales de volume pour la modélisation magnétostatique.....</b>	<b>9</b>
<b>1.1 Introduction .....</b>	<b>10</b>
<b>1.2 Le problème magnétostatique .....</b>	<b>10</b>
1.2.1 Hypothèses .....	10
1.2.2 Définition du problème type .....	11
<b>1.3 Mise en équation du problème magnétostatique.....</b>	<b>11</b>
1.3.1 Rappel des équations de Maxwell .....	11
1.3.2 Equations de Maxwell en magnétostatique .....	12
1.3.3 Lois de comportement .....	13
1.3.4 Les potentiels magnétiques .....	15
<b>1.4 Equations intégrales magnétostatiques – méthode des moments magnétiques 17</b>	
1.4.1 Equation de base en aimantation et méthode des moments .....	17
1.4.2 Approche par collocation .....	18
1.4.3 Approche par projection de Galerkin .....	19
1.4.4 Conclusions .....	19
<b>1.5 Propriétés des fonctions de forme des éléments de Whitney.....</b>	<b>20</b>
1.5.1 Introduction .....	20
1.5.2 Fonction de forme d'éléments nodaux.....	21
1.5.3 Fonction de forme des éléments d'arête .....	22
1.5.4 Fonction de forme des éléments de facette .....	22
1.5.5 Fonction de forme des éléments de volume .....	23
1.5.6 Conclusions .....	24
<b>1.6 Différentes formulations intégrales de volumes pour la magnétostatique.....</b>	<b>24</b>
1.6.1 Background .....	24
1.6.2 Formulations de <i>type h</i> .....	25
1.6.3 Formulations de <i>type b</i> .....	29
1.6.4 Conclusions .....	30
<b>1.7 Difficultés de la méthode intégrale de volume et solutions.....</b>	<b>30</b>
1.7.1 Singularité de noyaux d'intégration et les méthodes de correction .....	30
1.7.2 Matrice pleine et les méthodes de compression matricielle.....	31
<b>1.8 Conclusions .....</b>	<b>31</b>
<b>Bibliographie du chapitre 1.....</b>	<b>33</b>

<b>CHAPITRE 2 Développement des formulations intégrales de volume en flux magnétique et en potentiel vecteur .....</b>	<b>37</b>
<b>2.1 Introduction .....</b>	<b>38</b>
<b>2.2 Formulation en flux magnétique.....</b>	<b>38</b>
2.2.1 Propriétés des éléments de facette.....	38
2.2.2 Développement de la formulation .....	39
2.2.3 Exploitation après résolution.....	49
2.2.4 Applications .....	50
<b>2.3 Formulation en potentiel vecteur magnétique.....</b>	<b>54</b>
2.3.1 Propriétés des éléments d'arête .....	54
2.3.2 Développement de la formulation .....	55
2.3.3 Passage de la formulation en flux magnétique à la formulation en potentiel vecteur .....	59
2.3.4 Application : Résolution du problème TEAM Workshop 13 .....	61
<b>2.4 Comparaison des formulations intégrales de volume pour la résolution de problèmes magnétostatiques non linéaires .....</b>	<b>67</b>
2.4.1 Introduction .....	67
2.4.2 Comparaison les systèmes d'équations à résoudre .....	68
2.4.3 Exemples numériques .....	69
2.4.4 Conclusions .....	75
<b>2.5 Formulation intégrale de volume pour la modélisation des régions minces magnétiques .....</b>	<b>76</b>
2.5.1 Introduction .....	76
2.5.2 Formulation intégrale pour des régions minces magnétiques .....	76
2.5.3 Applications .....	82
2.5.4 Conclusions .....	85
<b>2.6 Conclusions .....</b>	<b>86</b>
<b>Bibliographie du chapitre 2.....</b>	<b>87</b>
<b>CHAPITRE 3 Post-traitement : Calcul du flux magnétique dans les bobines et de la force magnétique globale.....</b>	<b>89</b>
<b>3.1 Introduction .....</b>	<b>90</b>
<b>3.2 Calcul du flux magnétique dans les bobines .....</b>	<b>90</b>
3.2.1 Formulations de calcul du flux.....	90
3.2.2 Applications .....	95
3.2.3 Conclusions .....	100
<b>3.3 Calcul de la force magnétique globale.....</b>	<b>101</b>
3.3.1 Introduction .....	101

3.3.2	Méthodes pour le calcul de la force magnétique globale .....	101
3.3.3	Applications .....	105
3.3.4	Conclusions .....	111
<b>3.4</b>	<b>Conclusions .....</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliographie du chapitre 3.....</b>	<b>112</b>
	<b>Conclusion générale et perspectives .....</b>	<b>113</b>
	<b>Bibliographie générale .....</b>	<b>115</b>
	<b>Publications .....</b>	<b>119</b>





# Introduction générale

Le besoin de conception des dispositifs du génie électrique augmente sans cesse depuis l'utilisation massive de l'énergie électrique dans notre société. Une conception performante requière une connaissance solide des phénomènes électromagnétiques en présence. L'apparition, au début des années 1970s, des logiciels fondés sur la résolution numérique des équations de Maxwell a ouvert une nouvelle ère de l'étude des phénomènes électromagnétiques. Grâce à l'augmentation de la capacité de calcul numérique, l'utilisation de l'outil informatique pour la compréhension des phénomènes physiques ou la conception assistée par ordinateur (CAO) est aujourd'hui incontournable dans la recherche et l'industrie.

Les études magnétostatiques de dispositifs représentent une part non négligeable des études de pré-dimensionnement. La majeure partie des outils numériques employés actuellement pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques en basse fréquence reposent sur la méthode des éléments finis (MEF). Développée depuis plus d'un demi-siècle, cette méthode est largement répandue et reconnue aujourd'hui comme étant la méthode de référence parmi les approches numériques. La MEF conduit à la résolution de matrices creuses, ce qui présente un avantage en termes de place mémoire et de techniques de résolution permettant de traiter des dispositifs complexes. Toutefois, cette méthode nécessite une discrétisation de l'ensemble de l'espace contenant de l'énergie. Or en électromagnétisme, lorsque l'on a des dispositifs ouverts, une partie non négligeable de l'énergie se trouve dans l'air. Ces dispositifs requièrent donc un maillage fin de l'air entourant les parties actives. Cette propriété rend difficile l'application de la MEF dans plusieurs situations telles que les structures ayant un volume d'air prépondérant, des régions filaires, ou encore dans l'étude du mouvement d'une partie du dispositif.

Les figures (Fig.0.1.a et Fig.0.1.b) représentent un modèle de contacteur électromagnétique et son maillage servant à une résolution effectuée par le logiciel Flux3D (MEF). Afin d'obtenir un résultat raisonnable du calcul de la force sur la palette du contacteur, il est nécessaire de raffiner fortement le maillage dans le matériau ainsi que dans l'entrefer. Le système d'équations devient donc très lourd avec un grand nombre d'inconnues et une matrice d'interaction de taille importante. Si une stratégie de mouvement de la palette est associée, il faut remailler tout le domaine à chaque modification de la géométrie du contacteur ce qui rend la résolution très couteuse en temps de calcul et en ressources informatiques. En outre, si une

stratégie d'optimisation est appliquée, l'utilisation de la MEF conduit à un nombre de paramètres d'optimisation importants à cause du maillage de l'air.

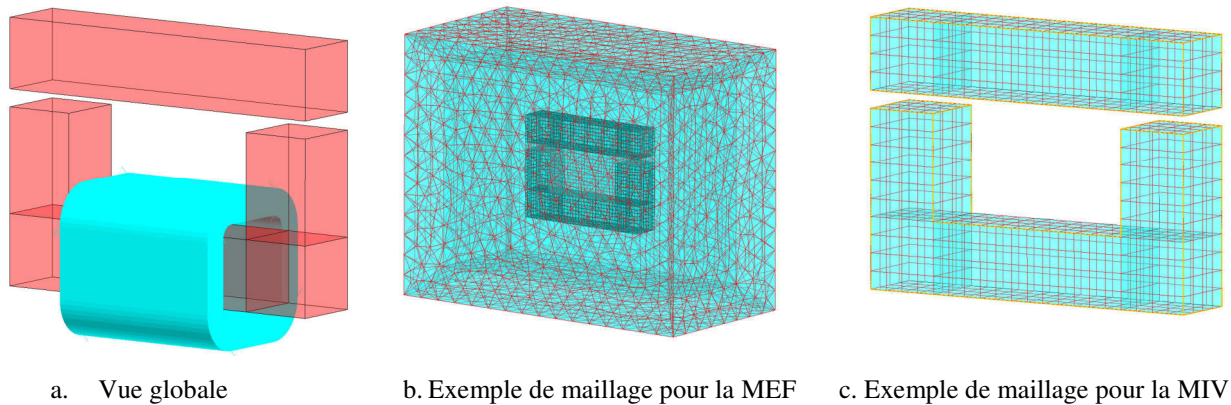


Fig.0.1. La modélisation d'un contacteur électromagnétique

Ces dernières années, la méthode intégrale de volume (MIV) a reçu une attention particulière pour la modélisation des champs électromagnétiques basses fréquences. La MIV contrairement à la MEF est une méthode d'interaction à distance. Son principal intérêt est l'absence de maillage des matériaux (ou régions) inactifs, par exemple la région air (Fig.0.1.c). Cette particularité rend la méthode MIV légère, rapide et précise pour la modélisation des dispositifs rayonnants et/ou ayant un volume d'air prépondérant. De plus, la MIV est bien adaptée pour des études multistatiques avec une stratégie de déplacement ou d'optimisation car l'air n'est pas remaillé à chaque étape de résolution.

La MIV conduit à la résolution d'un système matriciel plein. Cette contrainte semble la raison principale pour laquelle la MIV a été globalement moins attractive que les méthodes conduisant à la résolution de systèmes matriciels creux, comme c'est le cas avec la méthode des éléments finis. Le regain d'intérêt des MIV s'explique en grande partie par le développement d'algorithmes de compression matricielle de plus en plus performants associés à des calculateurs devenus aujourd'hui massivement parallèles. En effet, les méthodes de compression matricielle comme la méthode FMM (Fast Multipole Method), sa version adaptative et multiniveaux AMLFMM, ou d'autres méthodes telles que la méthode ACA (Adaptive Cross Approximation) ou HCA (Hybrid Cross Approximation) nous permettent d'économiser la mémoire tout en réduisant les temps de calcul lors des phases de construction et de résolution. Associées à ces méthodes, la MIV devient une alternative très compétitive à la MEF pour le calcul des interactions à distance mais aussi pour la détermination des champs de fuite. Les logiciels académiques basés sur l'approche intégrale comme GFUN, RADIA, CALMAG3D et LOCAP ont montré l'efficacité ainsi que la faisabilité de cette approche.

Au sein du laboratoire G2Elab, le développement de méthodes intégrales est l'objet d'une forte dynamique de recherche depuis plus d'une dizaine années. Grâce aux travaux de thèse de (Chadebec, 2001) et (Guichon, 2001) une plateforme MIPSE (Modeling of Interconnected Power SystEms) pour la modélisation multi-méthodes, spécialement la méthode intégrale de volume a été mise en place. Les travaux dans le cadre des thèses de (Ardon, 2010), (Le-Duc, 2011), (Nguyen, 2012), (Carpentier, 2013) et (Nguyen, 2014) se sont inscrits dans ce courant de recherche et ont contribué au développement de la plateforme.

Dans le cadre du développement de la MIV pour la résolution de problèmes magnétostatiques, (Chadebec, 2001) a développé une formulation intégrale de volume en aimantation magnétique basée sur l'interpolation des éléments volumiques (méthode des moments magnétiques). Cette formulation est simple pour l'implémentation numérique et permet de traiter rapidement et précisément des dispositifs de géométrie relativement simple. Son inconvénient reste le nombre élevé d'inconnues et l'imprécision pour la résolution de problèmes complexes et/ou avec des matériaux non linéaires. (Carpentier, 2013) a par la suite développé une formulation en potentiel scalaire magnétique basée sur l'interpolation en éléments nodaux avec son application au couplage magnéto-mécanique. D'une façon générale, cette formulation est apte à résoudre des problèmes complexes avec des matériaux non linéaires. Toutefois, elle requiert un maillage dense si l'on souhaite obtenir des résultats ayant une bonne précision.

Cette thèse porte sur le développement de nouvelles formulations intégrales de volume en magnétostatique avec une prise en compte de la présence de sources de courant, d'aimants permanents, de régions magnétiques non simplement connexes ainsi que des régions minces magnétiques. Le post-traitement associé à la MIV pour étudier les grandeurs locales ainsi que globales, spécifiquement la force magnétique globale et le flux dans les bobines, fait également partie de ce travail.

Le manuscrit est organisé en trois chapitres :

*Le premier chapitre* propose un état de l'art des formulations intégrales de volume pour la modélisation magnétostatique. Après la présentation du problème type, la mise en équation du problème magnétostatique et une méthodologie pour la construction des formulations intégrales de volume à travers la méthode des moments magnétiques seront élaborées. Ce chapitre rappellera également des propriétés des fonctions de forme des différents types d'élément (nodal, arête, facette, volume) et des formulations intégrales de volume proposées dans la littérature.

*Le deuxième chapitre* se focalise sur le développement de formulations intégrales de volume de type magnétique. Dans un premier temps, deux formulations pour la modélisation du problème magnétostatique non linéaire, l'une basée sur l'interpolation des éléments de facette et l'autre basée sur l'interpolation des éléments d'arête, sont proposées. Le chapitre continue dans un second temps avec le développement d'une formulation pour la modélisation des régions minces magnétiques. Enfin, dans le troisième temps, une comparaison entre les nouvelles formulations avec la formulation en potentiel scalaire magnétique est présentée.

*Le troisième chapitre* est consacré au post-traitement à partir de la solution des formulations intégrales de volume en magnétostatique. Deux approches pour le calcul du flux magnétique dans la bobine et deux méthodes pour le calcul de la force magnétique globale sont abordées. Les formulations développées, associées avec l'outil de post-traitement, sont appliquées à la modélisation d'un capteur de vitesse à réluctance variable et de contacteurs.

La dernière partie du manuscrit est destinée aux conclusions et perspectives.

# CHAPITRE 1

## Etat de l'art des formulations intégrales de volume pour la modélisation magnétostatique

### SOMMAIRE

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>10</b>
<b>1.2</b>	<b>Le problème magnétostatique .....</b>	<b>10</b>
1.2.1	Hypothèses .....	10
1.2.2	Définition du problème type .....	11
<b>1.3</b>	<b>Mise en équation du problème magnétostatique.....</b>	<b>11</b>
1.3.1	Rappel des équations de Maxwell.....	11
1.3.2	Equations de Maxwell en magnétostatique.....	12
1.3.3	Lois de comportement.....	13
1.3.4	Les potentiels magnétiques .....	15
<b>1.4</b>	<b>Equations intégrales magnétostatiques – méthode des moments magnétiques</b>	<b>17</b>
1.4.1	Equation de base en aimantation et méthode des moments .....	17
1.4.2	Approche par collocation .....	18
1.4.3	Approche par projection de Galerkin.....	19
1.4.4	Conclusions .....	19
<b>1.5</b>	<b>Propriétés des fonctions de forme des éléments de Whitney.....</b>	<b>20</b>
1.5.1	Introduction .....	20
1.5.2	Fonction de forme d'éléments nodaux.....	21
1.5.3	Fonction de forme des éléments d'arête .....	22
1.5.4	Fonction de forme des éléments de facette .....	22
1.5.5	Fonction de forme des éléments de volume .....	23
1.5.6	Conclusions .....	24
<b>1.6</b>	<b>Différentes formulations intégrales de volumes pour la magnétostatique.....</b>	<b>24</b>
1.6.1	Background .....	24
1.6.2	Formulations de <i>type h</i> .....	25
1.6.3	Formulations de <i>type b</i> .....	29
1.6.4	Conclusions .....	30
<b>1.7</b>	<b>Difficultés de la méthode intégrale de volume et solutions.....</b>	<b>30</b>
1.7.1	Singularité de noyaux d'intégration et les méthodes de correction .....	30
1.7.2	Matrice pleine et les méthodes de compression matricielle.....	31
<b>1.8</b>	<b>Conclusions .....</b>	<b>31</b>
	<b>Bibliographie du chapitre 1.....</b>	<b>33</b>

## 1.1 Introduction

De nombreuses formulations intégrales de volume pour la modélisation magnétostatique sont disponibles dans la littérature. De façon générale, chaque formulation possède ses avantages mais aussi ses inconvénients. Le choix d'une formulation convenable requiert donc sa connaissance approfondie ainsi qu'une analyse soignée du dispositif à modéliser et des grandeurs à calculer.

Nous proposons dans ce chapitre un état de l'art des différentes formulations intégrales en magnétostatique ainsi qu'une méthodologie pour la construction de ces formulations. Le chapitre commence par le rappel du problème type et la mise en équation du problème magnétostatique. Ensuite, la construction d'une formulation intégrale de volume en magnétostatique la plus simple – la méthode des moments magnétiques sera présentée par deux approches, par collocation et par projection de Galerkin. Le chapitre suit par le rappel des propriétés des fonctions de forme des différents types d'éléments (nodal, arête, facette, volume) et des formulations intégrales de volume plus complexes proposées dans la littérature. La fin du chapitre aborde les difficultés de la méthode intégrale de volume et les solutions apportées.

## 1.2 Le problème magnétostatique

### 1.2.1 Hypothèses

Dans ce document, seuls les phénomènes électromagnétiques sont étudiés. Les phénomènes mécaniques, thermiques qui pourraient être induits ne sont pas pris en compte. Les hypothèses de notre problème sont les suivantes :

- Tous les problèmes à traiter sont en trois dimensions (3D).
- Le régime considéré est stationnaire, les phénomènes étudiés ne varient pas suivant le temps. Ainsi, les sources de champ inducteur sont parcourues par des courants continus. Les courants induits sont négligés.
- Les matériaux ferromagnétiques sont supposés isotropes. Ils peuvent être linéaires ou non linéaires. Leur hystérésis n'est pas prise en compte.
- Les aimants permanents travaillent dans des zones de fonctionnement linéaire.

Ces hypothèses sont les hypothèses classiques du problème de la magnétostatique.

## 1.2.2 Définition du problème type

Notre problème type magnétostatique est schématisé sur la figure FIG.1.1. Un problème magnétostatique se compose généralement :

- de régions ferromagnétiques non conductrices,  $\Omega_f$ ,
- de régions du type aimant permanent  $\Omega_a$ ,
- de sources de champ inducteur  $\Omega_j$  (conducteurs bobinés), associées à une densité de courant  $J_0$ ,
- d'une région air englobant toutes les autres régions. Cette région est non bornée.

L'union des régions  $\Omega_f$  et  $\Omega_a$  est appelée le domaine magnétique et notée  $\Omega_m$ . Le domaine d'étude total est noté  $\Omega$ .

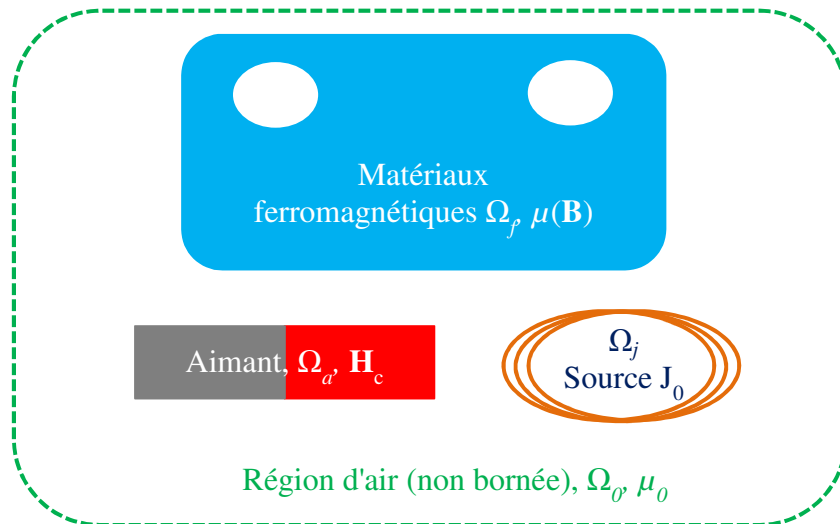


FIG.1.1. Problème type magnétostatique

Avant de détailler l'état de l'art des MIV (Méthodes Intégrale de Volume) pour la modélisation magnétostatique de ce problème, nous allons rappeler les équations de Maxwell.

## 1.3 Mise en équation du problème magnétostatique

### 1.3.1 Rappel des équations de Maxwell

#### *Equations de Maxwell*

Le fondement de l'électromagnétisme à l'échelle macroscopique repose sur les quatre équations de Maxwell. Dans les milieux continus, ces équations peuvent s'écrire sous leur forme "locale" comme suit :



- L'équation de Maxwell Gauss :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.1)$$

- L'équation de Maxwell flux magnétique :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

- L'équation de Maxwell Faraday :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

- L'équation de Maxwell Ampère :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Nous notons :

$\rho$  : la densité volumique de charge électrique ( $C/m^3$ )

$\mathbf{j}$  : la densité de courant, ( $A/m^2$ )

$\mathbf{E}$  : le champ électrique, ( $V/m$ )

$\mathbf{D}$  : l'induction électrique, ( $C/m^2$ )

$\mathbf{B}$  : l'induction magnétique, ( $T$ )

$\mathbf{H}$  : le champ magnétique, ( $A/m$ )

$t$  : le temps (s).

### 1.3.2 Equations de Maxwell en magnétostatique

En régime stationnaire, les champs électromagnétiques indépendants du temps, les termes dérivés temporels dans les équations (1.3) et (1.4) s'annulent. En conséquence, les phénomènes électriques et magnétiques deviennent indépendants et sont découplés. Les équations de *Maxwell flux magnétique* et de *Maxwell Ampère* régissent la magnétostatique :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $\mathbf{j}_0$  est le vecteur densité de courant continu.

Afin de prendre en compte les matériaux magnétiques, la relation entre l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}$  dans le matériau est introduite. Cette relation qui caractérise les matériaux est appelée la loi de comportement ou la relation constitutive du matériau. Elle est généralement donnée sous la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \quad (1.6)$$

L'objectif des études de magnéto-statique est de résoudre le système combinant (1.5) et (1.6). La résolution permet de déterminer la distribution du champ magnétique et de l'induction magnétique dans tout le domaine. Des grandeurs globales comme la force, le flux magnétique ou le moment magnétique peuvent alors être calculées.

### 1.3.3 Lois de comportement

En se basant sur la définition du problème type, nous nous intéressons à deux types de matériaux, les matériaux ferromagnétiques sans aimantation rémanente et les aimants permanents. Nous allons écrire les lois de comportement pour chaque type de matériau avant de proposer une forme générale pour tous les deux.

#### 1.3.3.1 Matériaux ferromagnétiques

En absence d'aimantation rémanente, la relation constitutive des matériaux ferromagnétiques isotropes peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H} \quad (1.7)$$

où  $\mu(\mathbf{H})$  (H/m) est la perméabilité magnétique, ce qui est souvent exprimée par  $\mu(\mathbf{H}) = \mu_0\mu_r(\mathbf{H})$  avec  $\mu_0$  la perméabilité du vide et  $\mu_r(\mathbf{H})$  la perméabilité relative du matériau.

En introduisant l'aimantation  $\mathbf{M}$  (A/m) définie par :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.8)$$

Nous pouvons exprimer la loi de comportement par la relation entre  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{M} = (\mu_r(\mathbf{H}) - 1)\mathbf{H} \quad (1.9)$$

ou par la relation entre  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{M} = (\nu_0 - \nu(\mathbf{B}))\mathbf{B} \quad (1.10)$$

où  $\nu_0$  et  $\nu(\mathbf{B})$  sont successivement les reluctivités magnétiques du vide et du matériau, les inverses de  $\mu_0$  et de  $\mu(\mathbf{H})$ .

### 1.3.3.2 Aimants permanents

En pratique, les aimants permanents sont principalement utilisés dans des zones de fonctionnement linéaire. Notons bien que le matériau des aimants permanents n'est pas isotrope. Par conséquent, leur loi de comportement est exprimée suivant (Meunier, 2002):

$$\mathbf{B} = [\mu]\mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (1.11)$$

où  $[\mu]$  est le tenseur de la perméabilité magnétique,  $\mathbf{B}_r$  est l'induction rémanente de l'aimant permanent. En supposant que  $\mathbf{B}_r$  est homogène dans la direction perpendiculaire, nous pouvons réécrire (1.11) sous la forme explicite :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{//} \\ \mathbf{B}_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{//} & 0 \\ 0 & \mu_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{//} \\ \mathbf{H}_{\perp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{r//} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

où les signes  $//$  et  $\perp$  signifient la direction parallèle ou perpendiculaire des grandeurs à la direction d'aimantation de l'aimant. Les composantes du tenseur de la perméabilité magnétique peuvent être écrits par :  $\mu_{//} = \mu_0 \mu_{r//}$  et  $\mu_{\perp} = \mu_0 \mu_{r\perp}$ . En pratique,  $\mu_{//}$  et  $\mu_{\perp}$  sont voisins de 1 (légèrement plus grands que 1). Pour les aimants parfaits,  $\mu_{//} = \mu_{\perp} = 1$ .

En introduisant l'aimantation  $\mathbf{M}$  définie par la relation (1.8) à l'équation (1.12), nous obtenons :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_{r//} - 1 & 0 \\ 0 & \mu_{r\perp} - 1 \end{bmatrix} \mathbf{H} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{r//} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

soit

$$\mathbf{M} = ([\mu] - 1)\mathbf{H} + \mathbf{M}_r \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{M}_r$  est l'aimantation rémanente,  $\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{r//} \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $M_{r//} = \frac{B_{r//}}{\mu_0}$ .

A partir de (1.12), nous pouvons écrire le champ  $\mathbf{H}$  en fonction de  $\mathbf{B}$  comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{//} \\ \mathbf{H}_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_{//} & 0 \\ 0 & \nu_{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{//} \\ \mathbf{B}_{\perp} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_{//} \mathbf{B}_{r//} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

De façon compacte :

$$\mathbf{H} = [\nu] \mathbf{B} - \mathbf{H}_c \quad (1.16)$$

où  $[\nu]$  est le tenseur de la reluctivité magnétique,  $\nu_{//} = \frac{1}{\mu_{//}}$  et  $\nu_{\perp} = \frac{1}{\mu_{\perp}}$  ;  $\mathbf{H}_c$  est le champ

magnétique coercitif de l'aimant :  $\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{c//} \\ 0 \end{bmatrix}$  avec  $\mathbf{H}_{c//} = \nu_{//} \mathbf{B}_{r//}$

En combinant (1.8) et (1.16), nous avons :

$$\mathbf{M} = \nu_0 \mathbf{B} - [\nu] \mathbf{B} + \mathbf{H}_c \quad (1.17)$$

Pour un aimant parfait, l'aimantation est constante,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_r = \mathbf{H}_c$ .

De façon générique, pour l'ensemble des matériaux magnétiques (aimants permanents et ferromagnétiques), leur loi de comportement peut s'écrire :

$$\mathbf{H} = [\nu(\mathbf{B})] \mathbf{B} - \mathbf{H}_c \quad (1.18)$$

$$\mathbf{M} = \nu_0 \mathbf{B} - [\nu(\mathbf{B})] \mathbf{B} + \mathbf{H}_c \quad (1.19)$$

En notant que  $[\nu(\mathbf{B})]$  devient un scalaire pour les matériaux ferromagnétiques et un tenseur pour les aimants permanents.

### 1.3.4 Les potentiels magnétiques

#### *Le potentiel scalaire réduit*

En supposant que les matériaux magnétiques et les sources de courant sont séparés, le champ magnétique  $\mathbf{H}$  en un point peut se décomposer en la somme de deux composantes : le *champ source*  $\mathbf{H}_0$  créé par les sources dans le vide et le *champ réduit*  $\mathbf{H}_{red}$  créé par l'aimantation de la matière et à rotationnel nul.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{red} \quad (1.20)$$

Avec  $\mathbf{rot} \mathbf{H}_0 = \mathbf{j}_0$  nous avons  $\mathbf{rot} \mathbf{H}_{red} = 0$ .  $\mathbf{H}_{red}$  dérive donc d'un potentiel scalaire  $\varphi_{red}$  :

$$\mathbf{H}_{red} = -\mathbf{grad}\varphi_{red} \quad (1.21)$$

$\varphi_{red}$  est appelé le *potentiel scalaire magnétique réduit* ou bien *potentiel scalaire réduit*. En conséquence, (1.20) peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\mathbf{H} + \mathbf{grad}\varphi_{red} = \mathbf{H}_0 \quad (1.22)$$

### ***Le potentiel scalaire source***

En supposant que le domaine  $\Omega_m$  est simplement connexe, nous pouvons définir un potentiel scalaire source  $\varphi_0$  tel que le champ magnétique source  $\mathbf{H}_0$  dérive de ce potentiel. Ce dernier peut s'écrire :

$$\mathbf{H}_0 = -\mathbf{grad}\varphi_0 \quad (1.23)$$

Remarquons que (1.23) n'est vrai qu'à l'extérieur des sources de courant. Le champ inducteur  $\mathbf{H}_0$  peut être déterminé par la loi de Biot et Savart. De nombreux travaux présentent des expressions analytiques pour différentes géométries d'inducteurs (Urankar, 1980), (Urankar, 1982a), (Urankar, 1982b). Toutefois, il n'existe que peu de travaux présentant des solutions analytiques simples pour la détermination de potentiel scalaire source. Une solution pragmatique consiste à écrire que ce potentiel est la solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\varphi_0} \left[ (\mathbf{grad}\varphi_0 + \mathbf{H}_0)^2 \right]. \quad (1.24)$$

La résolution de (1.24) peut être effectuée par la méthode des éléments finis comme proposé par (Carpentier, 2013)

### ***Le potentiel scalaire total***

En introduisant le potentiel  $\varphi_{red}$  et le potentiel  $\varphi_0$  dans (1.20), nous obtenons :

$$\mathbf{H} = -(\mathbf{grad}\varphi_0 + \mathbf{grad}\varphi_{red}) \quad (1.25)$$

Nous pouvons donc également introduire un *potentiel scalaire total*  $\varphi$  tel que :

$$\mathbf{H} = -\mathbf{grad}\varphi \quad (1.26)$$

En conséquence, nous pouvons écrire :

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{red} \quad (1.27)$$

### *Le potentiel vecteur magnétique*

L'équation de Maxwell-flux magnétique s'écrit :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.28)$$

D'après l'analyse vectorielle, la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Ceci implique que l'induction  $\mathbf{B}$  est le résultat du rotationnel d'un champ de vecteurs  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.29)$$

On appelle  $\mathbf{A}$  le *potentiel vecteur magnétique* ou bien *potentiel vecteur*. Le choix du potentiel vecteur comme variable assure rigoureusement donc la solénoïdalité de  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B}$  à flux conservatif).

## **1.4 Equations intégrales magnétostatiques – méthode des moments magnétiques**

### **1.4.1 Equation de base en aimantation et méthode des moments**

Le potentiel scalaire réduit  $\varphi_{red}$  en un point  $\mathbf{P}$  créé par le domaine des matériaux magnétiques  $\Omega_m$  peut être exprimé par l'expression suivante (Durand, 1968), (Brissonneau, 1997):

$$\varphi_{red} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \quad (1.30)$$

ou bien

$$\varphi_{red} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\Omega_m \quad (1.31)$$

où  $r$  est le module du vecteur  $\mathbf{r}$  reliant le point d'intégration  $\mathbf{Q}$  au point  $\mathbf{P}$  où le potentiel est exprimé (FIG.1.2).

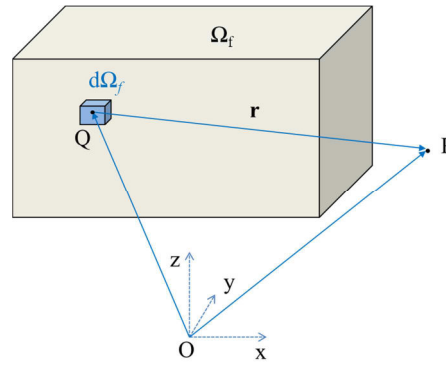


FIG.1.2. Description des notations de l'intégration

Nous avons :

$$\mathbf{H} + \mathbf{grad} \varphi_{red} = \mathbf{H}_0 \quad (1.32)$$

En utilisant la loi de comportement  $\mathbf{M} = (\mu_r(\mathbf{H}) - 1)\mathbf{H}$  et introduisant (1.31) dans (1.32), nous obtenons (Harrington, 1993), (Chadebec et al., 2006):

$$\frac{\mathbf{M}}{\mu_r(\mathbf{H}) - 1} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_{\Omega_m} \left( \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) d\Omega_m = \mathbf{H}_0 \quad (1.33)$$

Cette équation est l'équation intégrale classique de la méthode des moments magnétostatiques. Pour la résolution numérique, le domaine  $\Omega_m$  est décomposé en  $N_e$  éléments volumiques (par exemple tétraèdres, hexaèdres, prismes ou mixte). Deux approches différentes sont souvent utilisées pour la résolution : l'approche par collocation et l'approche par projection de Galerkin.

## 1.4.2 Approche par collocation

L'approche par collocation est basée sur l'écriture de l'équation (1.33) ou d'une de ces variantes sur un ensemble de points discrets dans le domaine. Il s'agit ainsi d'obtenir un jeu d'équations égal au nombre d'inconnues puis de résoudre le système (linéaire ou non) associé. Cette approche considère que l'aimantation est uniforme sur chaque élément. Il suffit alors d'écrire l'équation vectorielle (1.33) au barycentre de chacun des éléments pour obtenir un système carré.

Le problème (1.33) devient : trouver les  $\mathbf{M}_e$  telles que :

$$(\mu_r(\mathbf{H}) - 1)\mathbf{M}_e + \frac{1}{4\pi} \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \left( \frac{\mathbf{M}_e}{r^3} - \frac{3(\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{r})}{r^3} \mathbf{r} \right) d\Omega_e = \mathbf{H}_{0e}, \quad (1.34)$$

avec  $e=1, 2, \dots, N_e$ .

Le système (1.34) est la représentation de la méthode des moments magnétiques (MMM) pour la magnétostatique (Harrington, 1993), (Chadebec et al., 2006). Notons bien qu'il y a trois inconnues associées au vecteur  $\mathbf{M}_e$ . Le nombre total d'inconnues est donc  $3N_e$ .

### 1.4.3 Approche par projection de Galerkin

La projection de Galerkin consiste à projeter (1.33) non pas ponctuellement mais sur un ensemble de fonctions tests. En pratique la fonction test est choisie comme étant la fonction de forme de volume des éléments volumiques, c'est-à-dire une fonction uniforme et égale à 1 sur un élément et nulle ailleurs. Pour un élément de volume  $c$ , sa fonction de forme  $w_c$  satisfait :

$$\begin{cases} w_c |_{\text{élément } c} & = 1 \\ w_c |_{\text{autres éléments}} & = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

Le problème (1.33) devient : trouver les  $\mathbf{M}_e$  telles que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_m} w_c (\mu_r(\mathbf{H}) - 1) \mathbf{M}_e d\Omega_m + \int_{\Omega_m} w_c \left( \frac{1}{4\pi} \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \left( \frac{\mathbf{M}_e}{r^3} - \frac{3(\mathbf{M}_e \cdot \mathbf{r})}{r^3} \mathbf{r} \right) d\Omega_e \right) d\Omega_m \\ = \int_{\Omega_m} w_c \mathbf{H}_{0e} d\Omega_m \end{aligned} \quad (1.36)$$

avec  $e = 1, 2, \dots, N_e$  et  $c = 1, 2, \dots, N_e$ .

Cette approche était le sujet de travaux de (Morandi et al., 2010). Les auteurs ont montré une précision légèrement meilleure pour l'approche par projection de Galerkin par rapport à une simple collocation.

### 1.4.4 Conclusions

Deux approches pour la construction la formulation en aimantation magnétique sont présentées. Parmi ces deux approches, celle par collocation est plus simple à implémenter informatiquement et plus rapide en termes de temps de calcul. Toutefois, puisque l'intégration est calculée sur un seul point dans chaque élément, cette approche conduit à des imprécisions.

L'approche par la projection de Galerkin quant à elle, nécessitant l'intégration sur plusieurs points dans chaque élément, améliore la précision par rapport à l'approche par



collocation. Elle est capable de modéliser des dispositifs complexes comme présentés dans (Morandi et al., 2010). Toutefois, le temps d'intégration est plus important que celui de l'approche par collocation.

La méthode des moments magnétique possède un inconvénient important. Cette dernière conduit à une matrice singulière si la perméabilité du matériau est infinie. Ceci provoque une instabilité numérique de la solution pour les problèmes à forte perméabilité. Cet effet est appelé "looping pattern" (Forsman et al., 1996).

Les avantages de la MMM mais aussi ses limites motivent les chercheurs à développer de nouvelles formulations intégrales de volume. La tendance est ainsi de changer l'inconnue de résolution historique qui est l'aimantation. Nous allons donc nous concentrer sur d'autres grandeurs physiques qui seront interpolées plus judicieusement qu'avec des fonctions d'interpolation uniformes par éléments. La compréhension des propriétés des fonctions d'interpolation joue un rôle important dans l'établissement de nouvelles formulations. Nous allons dans la suite rappeler quelques points sur les propriétés des fonctions de forme des éléments finis.

## 1.5 Propriétés des fonctions de forme des éléments de Whitney

### 1.5.1 Introduction

Avec la méthode des moments magnétiques, les éléments volumiques sont utilisés lors de la discrétisation en éléments finis des matériaux actifs. Du point de vue de la modélisation, en dehors des éléments volumiques, il est possible d'employer des éléments nodaux, des éléments d'arête et des éléments de facette. Ces types d'éléments référencent sont introduits mathématiquement dans (Raviart and Thomas, 1977) (Nedelec, 1980) et sont souvent connus sous le nom des éléments de Whitney (Bossavit, 1988). L'utilisation des éléments de Whitney dans la modélisation des champs électromagnétiques a été présentée par plusieurs chercheurs (Bossavit, 1988), (Dular et al., 1994), (Ren and Razek, 1996), (Henneron, 2004).

Le domaine magnétique  $\Omega_m$  est discrétisé par un maillage composé d'éléments volumiques élémentaires (tétraèdres, hexaèdres ou des prismes). Les entités géométriques de base du maillage comprennent les nœuds, arêtes, facettes et volumes (FIG.1.3). Nous noterons que  $N_n$ ,  $N_a$ ,  $N_f$ ,  $N_e$  sont respectivement le nombre d'éléments nodaux, d'arête, de facette et de volume du maillage. Chaque élément de Whitney est associé à une fonction d'interpolation qui est également appelée fonction de forme. D'après (Bossavit, 1988), les éléments nodaux

font référence aux éléments de Whitney de degré 0, les éléments d'arête aux éléments de Whitney de degré 1, les éléments de facette aux éléments de Whitney de degré 2 et enfin les éléments de volume aux éléments de Whitney de degré 3.

Nous n'allons pas entrer dans les détails de construction des fonctions de formes des différents éléments finis. Dans le cadre de nos travaux, les éléments tétraédriques et hexaédriques sont utilisés. Le même principe peut être appliqué aux éléments de type prisme.

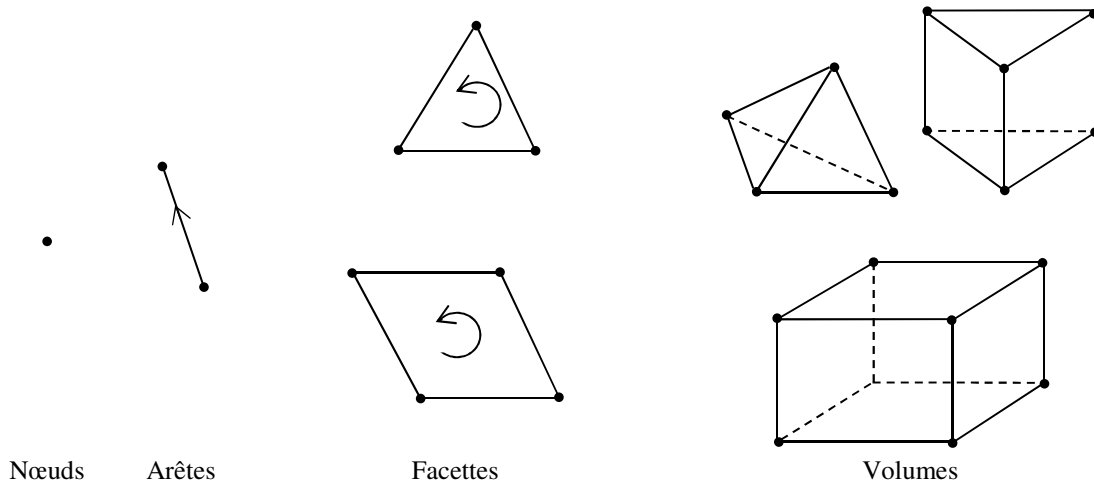


FIG.1.3. Des éléments géométriques

### 1.5.2 Fonction de forme des éléments nodaux

La fonction de forme nodale  $w_n$  associée au nœud  $n$  est scalaire, continue dans tout le domaine  $\Omega_m$  tel que  $w_n$  vaut 1 sur le nœud  $n$  et vaut 0 sur tous les autres nœuds du maillage.  $w_n$  est appelée également la fonction de poids barycentrique du nœud  $n$ . Nous notons  $E^0$  l'espace fonctionnel généré par ces fonctions. L'interpolation linéaire d'un champ scalaire  $\phi$  définie dans  $E^0$  sur un point de coordonnée  $\mathbf{r}$  s'écrit :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_n} w_n(\mathbf{r}) \phi_n \quad (1.37)$$

où  $\phi_n$  est la valeur de la fonction  $\phi$  sur le nœud  $n$ . Cette interpolation assure la continuité du champ  $\phi$  aux nœuds connectant des éléments volumiques.

Le gradient du champ scalaire  $\phi$  peut s'écrire :

$$\mathbf{grad}\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_n} \mathbf{grad}w_n(\mathbf{r})\phi_n \quad (1.38)$$

### 1.5.3 Fonction de forme des éléments d'arête

Considérons maintenant une arête  $a$  composée de deux nœuds  $n1$  et  $n2$  aux extrémités et orientée de  $n1$  vers  $n2$ . La fonction de forme d'arête  $\mathbf{w}_a$  peut être définie grâce aux fonctions de forme nodales et écrite comme suit :

$$\mathbf{w}_a = w_{n1} \mathbf{grad}w_{n2} - w_{n2} \mathbf{grad}w_{n1} \quad (1.39)$$

où  $w_{n1}$  et  $w_{n2}$  sont respectivement la fonction de forme nodale du nœud  $n1$  et du nœud  $n2$ . La fonction vectorielle  $\mathbf{w}_a$  est non nulle sur tous les éléments volumiques contenant cette arête. Le module de  $\mathbf{w}_a$  est égale à 1 sur l'arête  $a$ , et 0 sur toutes les autres arêtes.

Nous notons  $E^l$  l'espace fonctionnel généré par les fonctions  $\mathbf{w}_a$ . L'interpolation linéaire d'un champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  défini dans  $E^l$  sur un point de coordonnée  $\mathbf{r}$  s'écrit :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^{N_a} \mathbf{w}_a(\mathbf{r})V_a \quad (1.40)$$

où  $V_a$  est la circulation du champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  le long de l'arête  $a$ . Si nous notons  $\mathbf{t}_a$  le vecteur tangentiel de l'arête  $a$ ,  $V_a$  est déterminée par l'intégration linéique :

$$V_a = \int_{l_a} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_a dl_a \quad (1.41)$$

L'interpolation (1.40) assure la *continuité tangentielle* du  $\mathbf{V}$ .

Le rotationnel de  $\mathbf{w}_a$  est définie par :

$$\mathbf{rot} \mathbf{w}_a = 2 (\mathbf{grad}w_{n1} \times \mathbf{grad}w_{n2}) \quad (1.42)$$

### 1.5.4 Fonction de forme des éléments de facette

Les fonctions de formes des éléments de facette peuvent être exprimées à partir du rotationnel des fonctions de forme d'arête. Dans le cas d'un élément de facette  $f$  en triangle définie par les trois nœuds  $n1$ ,  $n2$  et  $n3$ , sa fonction de forme  $\mathbf{w}_f$  s'écrit :

$$\mathbf{w}_f = 2(w_{n1} \mathbf{grad} w_{n2} \times \mathbf{grad} w_{n3} + w_{n2} \mathbf{grad} w_{n3} \times \mathbf{grad} w_{n1} + w_{n3} \mathbf{grad} w_{n1} \times \mathbf{grad} w_{n2}) \quad (1.43)$$

Suivant le même principe nous pouvons écrire la fonction de forme pour les facettes sur un quadrangle.

Le champ de vecteurs  $\mathbf{w}_f$  possède une composante normale continue à travers la face. Le flux du  $\mathbf{w}_f$  est égale 1 à travers la facette  $f$ , non-nulle dans les tétraèdres possédant cette facette et égale 0 sur toutes les autres facettes. Nous notons  $E^2$  l'espace fonctionnel généré par les fonctions  $\mathbf{w}_f$ . En conséquence, l'interpolation linéaire d'un champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  définie dans  $E^2$  sur un point de coordonnée  $\mathbf{r}$  est :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \sum_{f=1}^{N_f} \mathbf{w}_f(\mathbf{r}) V_f \quad (1.44)$$

où  $V_f$  est le flux du champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  en traverse de la facette  $f$ . Si nous notons  $\mathbf{n}_f$  le vecteur normal de la facette  $f$ ,  $V_f$  est déterminé par l'intégration surfacique suivante :

$$V_f = \int_{S_f} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_f dS_f \quad (1.45)$$

L'interpolation (1.44) assure la *continuité normale* de  $\mathbf{V}$  entre deux éléments.

### 1.5.5 Fonction de forme des éléments de volume

Pour chaque élément tétraèdre  $e$ , la fonction de forme  $w_e$  est définie telle que  $w_e$  vaut 1 dans l'élément  $e$  et est nulle dans tous les autres éléments. Nous notons  $E^3$  l'espace fonctionnel généré par les fonctions  $w_e$ . En conséquence, l'interpolation d'un champ scalaire  $\phi$  défini dans  $E^3$  sur un point de coordonnée  $\mathbf{r}$  s'écrit :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^{N_e} w_e(\mathbf{r}) \phi_e \quad (1.46)$$

où  $\phi_e$  est la valeur de la fonction  $\phi$  déterminée dans l'élément  $e$ . De même façon, nous pouvons écrire l'interpolation d'un champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  définie dans  $E^3$  sur un point de coordonnée  $\mathbf{r}$  :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^{N_e} w_e(\mathbf{r}) \mathbf{V}_e \quad (1.47)$$

où  $\mathbf{V}_e$  est la valeur du champ de vecteurs  $\mathbf{V}$  déterminée dans l'élément  $e$ .

Les interpolations (1.46) et (1.47) n'assurent pas la continuité des champs  $\phi$  et  $\mathbf{V}$ . Nous les utilisons lorsque la continuité de ces champs n'est pas requise.

### 1.5.6 Conclusions

1. En se référant aux propriétés des différentes fonctions de forme ainsi qu'aux continuités des *grandeurs intégrales* en magnétostatique ( $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\phi$  et  $\mathbf{A}$ ), chaque grandeur possède un espace fonctionnel sur lequel il peut être interpolé:
  - ✓ Élément nodal : le potentiel scalaire total  $\phi$ . Les degrés de liberté sont  $\phi$  aux nœuds.
  - ✓ Élément d'arête : le champ magnétique  $\mathbf{H}$ , le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . Les degrés de liberté sont les circulations des vecteurs ( $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{H}$ ) sur les arêtes.
  - ✓ Élément de facette : l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ . Les degrés de liberté sont les flux magnétiques traversant les facettes.
  - ✓ Élément de volume : la magnétisation  $\mathbf{M}$ . Les degrés de liberté sont les vecteurs  $\mathbf{M}$  uniformes sur les éléments volumiques.
2. Nous pouvons utiliser la notation d'incidence pour déterminer les connexions entre les différentes entités géométriques que sont les nœuds, les arêtes, les facettes et les volumes. Les matrices incidences (nœud-arête, arête-facette, facette-élément) peuvent être considérées comme des opérateurs différentiels (**grad**, **rot**, *div*) discrets. Le passage entre les espaces fonctionnels différents peut être réalisé en utilisant ces matrices. Le détail sur la construction des matrices d'incidence peut se trouver dans la thèse de Henneron (Henneron, 2004).

## 1.6 Différentes formulations intégrales de volumes pour la magnétostatique

### 1.6.1 Background

Depuis plus de quarante ans, le développement et l'application de la MIV à la modélisation des problèmes magnétostatiques fait l'objet d'une forte dynamique de recherche dans le monde scientifique. Cette tendance a commencé par l'ouvrage de Harrington sur la méthode des moments (présentée dans la partie précédente), publié en 1968 (Harrington, 1993). Le premier code implémentant la méthode est GFUN en 1970 (Newman et al., 1972), (Trowbridge, 1982), plusieurs codes académiques ont également été développés, par

exemples, RADIA (Elleaume et al., 1997), (Chubar et al., 1998), CALMAG3D (Souza et al., 1997), LOCAPI (Chadebec et al., 2006).

Dans l'objectif de profiter des avantages de la MIV et surmonter les inconvénients de la MMM, de nombreux chercheurs ont travaillé sur le développement de nouvelles formulations intégrales de volume en se basant sur les éléments de Whitney et l'approche de géométrie discrète pour la modélisation magnétostatique. Depuis les années 1990, plusieurs publications sur ce sujet ont vu le jour : (Kettunen and Turner, 1992a), (Han et al., 1994), (Gimignani et al., 1994), (Forsman et al., 1995), (Kalimov and Svedentsov, 1996), (Forsman et al., 1996), (Souza et al., 1997), (Chubar et al., 1998), (Canova and Repetto, 2001), (Chadebec, 2001), (Vishnevsky et al., 2002), (Balasubramanian et al., 2002a), (Zhao et al., 2005), (Hafla et al., 2005), (Hafla et al., 2006), (Chadebec et al., 2006), (Takahashi et al., 2007), (Nguyen, et al., 2011), (Young and Gedney, 2011), (Carpentier et al., 2013), (Le-Van et al., 2014), (Le Van et al., 2015a), (Le Van et al., 2015b).

En général, la différence entre les formulations intégrales consiste en le type d'élément de Whitney utilisé et au type de variable associée. Hormis la méthode classique MMM, nous pouvons donc distinguer deux familles de formulations intégrales pour la magnétostatique : les formulations *de type h* et celles *de type b* (Forsman et al., 1996). Nous proposons dans la suite de faire un bref état de l'art sur des formulations proposées.

En plus des formulations susmentionnées, il existe également dans la littérature une approche utilisant des charges magnétiques équivalentes (Krstajic et al., 1992), (Hafla et al., 2005). Cette approche, qui souvent associée à la méthode intégrale de frontière étendue, est très intéressante pour la résolution de problèmes magnétostatiques linéaires. Lors de la résolution de problèmes non linéaires, elle requiert à la fois des charges surfaciques mais aussi des charges volumiques. Ces méthodes basées sur les charges peuvent à première vue sembler différentes des MIV classique. Elles présentent en fait de grandes similarités avec les formulations que nous allons présenter uniquement cachées par des notations différentes et souvent très variées. Nous ne les évoquerons pas dans cet état de l'art.

## 1.6.2 Formulations de *type h*

Les formulations de *type h* sont celles vérifiant fortement l'équation de Maxwell Ampère et faiblement l'équation de Maxwell flux magnétique. Il s'agit de formulation en champ magnétique et de formulation en potentiel scalaire total.

### 1.6.2.1 Formulation en champ magnétique

La formulation en champ magnétique consiste à l'interpolation du champ magnétique sur les arêtes. Elle a été proposée dans (Kettunen and Turner, 1992a) puis elle est développée dans (Kettunen et al., 1995), (Forsman et al., 1995), (Canova and Repetto, 2001). L'idée de base de cette formulation est la suivante.

Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  peut être approximé par l'interpolation des composantes tangentielles du champ magnétique sur des arêtes associées aux fonctions de forme des éléments d'arête :

$$\mathbf{H} = \sum_{a=1}^{N_a} \mathbf{w}_a H_a \quad (1.48)$$

où  $H_a$  est la circulation du champ magnétique  $\mathbf{H}$  le long de l'arête  $a$ .

Nous nous rappelons que la décomposition du champ magnétique total en somme de *champ source* et de *champ réduit* nous permet d'écrire :

$$\mathbf{H} + \mathbf{grad}\varphi_{red} = \mathbf{H}_0 \quad (1.49)$$

Avec le potentiel scalaire réduit  $\varphi_{red}$  déterminé par :

$$\varphi_{red} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} (\mu_r(\mathbf{H}) - 1) \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\Omega_m \quad (1.50)$$

L'introduction de (1.50) à (1.49) conduit à l'écriture :

$$\mathbf{H} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \left[ \int_{\Omega_m} (\mu_r(\mathbf{H}) - 1) \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\Omega_m \right] = \mathbf{H}_0 \quad (1.51)$$

A partir de (1.51) et (1.48), avec l'approche par collocation ou par projection de Galerkin nous pouvons déduire la formulation intégrale en champ magnétique, aussi appelée *formulation H-arête*.

En employant l'hypothèse que les régions à modéliser sont simplement connexes, il est possible de démontrer que le système des projections de champ magnétique sur les arêtes entraîne la construction d'un jeu d'équations qui n'est pas linéairement indépendant. Il existe des projections dépendantes les unes des autres. L'imposition de circulations de champ nulles sur les boucles d'arête fermées à l'intérieur du domaine permet de rendre la solution du

problème unique. D'un point de vue topologique, les degrés de liberté linéairement indépendants sont les arêtes connectant les nœuds du maillage mais ne fermant pas les boucles (Gimignani et al., 1994), (Canova and Repetto, 2001). Cette hypothèse nous permet d'éliminer les équations linéairement dépendantes en construisant un système d'arbre et de co-arbre des arêtes. Le système linéaire indépendant comprend des projections sur les arbres et la solution devient unique. Toutefois, comme le choix d'arbres n'est pas unique, une bonne construction d'arbre peut nous permettre d'avoir une résolution rapide et vice versa. Les détails sur la technique d'arbre et co-arbre peuvent être trouvés dans (Albanese and Rubinacci, 1988), (Dular and Nicolet, 1995).

Il existe en pratique une solution avec laquelle nous n'avons pas besoin de choisir d'arbres. Cette solution consiste à choisir le champ magnétique  $\mathbf{H}$  comme étant le gradient d'un champ scalaire  $\varphi$  qui impose naturellement la condition précédente. En conséquence, le choix de  $\varphi$  sur les nœuds du maillage comme inconnus nous permet d'assurer l'unicité de la solution des formulations de type  $h$  (Kettunen and Turner, 1992a). Il faut toutefois imposer la valeur du potentiel en un nœud du maillage pour garantir rigoureusement l'unicité. Il s'agit ici de la formulation intégrale en potentiel scalaire.

### 1.6.2.2 Formulation en potentiel scalaire

Cette approche est proposée dans (Han et al., 1994), (Kalimov and Svedentsov, 1998), (Carpentier et al., 2013).

D'après la définition des potentiels scalaires dans la section §1.3.4 nous avons :

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{red} \quad (1.52)$$

En absence d'aimant permanent, la loi de comportement peut s'exprimer par  $\mathbf{M} = (\mu_r(\mathbf{H}) - 1)\mathbf{H}$ . Nous pouvons donc écrire le potentiel scalaire réduit à (1.30) par :

$$\varphi_{red} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} (\mu_r(\mathbf{H}) - 1) \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\Omega_m \quad (1.53)$$

En remplaçant  $\varphi_{red}$  dans (1.52) par (1.53), nous obtenons :

$$\varphi + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} (\mu_r(\mathbf{H}) - 1) \frac{\mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{r}}{r^3} d\Omega_m = \varphi_0 \quad (1.54)$$

Le potentiel  $\varphi$  est approximé par des fonctions nodales :



$$\varphi = \sum_{n=1}^{N_n} w_n \varphi_n \quad (1.55)$$

où  $\varphi_n$  est le potentiel scalaire sur les nœuds  $n$  et  $w_n$  sa fonction de forme nodale et  $N_n$  est le nombre de nœuds du maillage. A partir de ces deux dernières équations, en utilisant une approche par collocation aux nœuds ou celle de Galerkin nous pouvons en déduire la formulation intégrale en potentiel scalaire (Carpentier, 2013).

L'utilisation *l'approche par collocation* conduit à résoudre le système :

$$\left( \mathbf{I} + \mathbf{L}^\varphi \right) \Theta = \Theta_0 \quad (1.56)$$

où  $\Theta$  est le vecteur composé des potentiels scalaires sur les nœuds,  $\Theta_0$  le vecteur des potentiels scalaires source. Les matrices d'interaction  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{L}^\varphi$  sont déterminées par:

$$I_{ii} = 1 \text{ et } I_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \text{ (}\mathbf{I} \text{ est la matrice identité);}$$

$$L_{ij}^\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} (\mu(\mathbf{H}) - 1) \frac{\mathbf{grad} w_{nj} \cdot \mathbf{r}_i}{r_i^3} d\Omega_m; \quad \text{avec } i, j = 1, 2, \dots, N_n.$$

Si *l'approche par projection de Galerkin* est utilisée, nous obtenons le système suivant:

$$\left( \mathbf{R}^\varphi + \mathbf{L}^{\varphi G} \right) \Theta = \mathbf{Y}_0 \quad (1.57)$$

avec:

$$\mathbf{R}_{ij}^\varphi = \int_{\Omega_m} w_{ni} w_{nj} d\Omega_m;$$

$$\mathbf{L}_{ij}^{\varphi G} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} w_{ni} \int_{\Omega_m} (\mu(\mathbf{H}) - 1) \frac{\mathbf{grad} w_{nj} \cdot \mathbf{r}_i}{r_i^3} d\Omega_m d\Omega_m;$$

$$\mathbf{Y}_{ij}^\varphi = \int_{\Omega_m} w_{ni} \varphi_0 d\Omega_m; \quad \text{avec } i, j = 1, 2, \dots, N_n.$$

Notons que  $\mathbf{R}^\varphi$  est une matrice creuse et  $\mathbf{L}^{\varphi G}$  est une matrice pleine. Toutes les deux sont de dimension  $N_n \times N_n$ . Si un solveur direct est utilisé pour la résolution le système (1.56) ou (1.57), il requiert un point de référence où la valeur du potentiel est imposée. Dans un tel cas, il suffit de choisir arbitrairement un degré de liberté et lui imposer un potentiel nul.

Parmi les deux approches, celle de Galerkin est plus précise mais le temps d'assemblage des matrices d'interactions, spécifiquement celui de la matrice pleine  $\mathbf{L}^{\varphi G}$ , est exorbitant

(Carpentier et al., 2013). En conséquence, malgré une précision moindre mais acceptable, l'approche par collocation est préférée. La formulation en potentiel scalaire magnétique est appelée la *formulation  $\varphi$  nodal* par la suite.

L'application de ce type de formulation devient plus compliquée pour des régions non simplement connexes. Si le circuit magnétique contient des trous, ce qui se présente très souvent dans des dispositifs industriels, des coupures magnétiques doivent être introduites afin de restaurer l'équation de Maxwell-Ampère (Phung, 2006).

Enfin, la résolution des problèmes non linéaires n'est pas sans difficulté. Si la méthode de Newton Raphson (NR) est utilisée afin de résoudre le problème non linéaire, des coefficients de relaxation convenables sont souvent requis pour assurer la convergence de la résolution (Carpentier, 2013). Ce phénomène est dû au résidu qui présente une forme en  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ . En outre, la présence de la loi de comportement dans l'expression de la matrice pleine ( $\mathbf{L}^\varphi$  ou  $\mathbf{L}^{\varphi G}$ ) requiert la réintégration cette matrice à chaque itération de la méthode NR. Cette dernière coûte cher en termes de temps de calcul.

### 1.6.3 Formulations de type *b*

Les formulations de *type b* sont celles qui vérifient fortement l'équation de Maxwell flux magnétique et faiblement l'équation de Maxwell Ampère. Il s'agit de formulation en induction magnétique et celle en potentiel vecteur.

Contrairement aux formulations de *type h*, il n'existe pas beaucoup de documents sur celles de *type b*. L'introduction sur les formulations de *type b* est évoquée dans (Kettunen et al., 1995), (Forsman et al., 1996). Toutefois, aucun résultat avec ce type de formulation n'est présenté dans ces travaux.

Nous pouvons évoquer les travaux présentés par (Balasubramanian et al., 2002a) sur une formulation intégrale utilisant l'interpolation des fonctions de forme de facette associées avec les composantes normales de l'induction magnétique (ou les flux). Cette approche est très intéressante et apte à conduire à de bons résultats. Toutefois, l'approche proposée par les auteurs nécessite d'imposer  $div \mathbf{B} = 0$  localement par élément volumique et par une pénalité ce qui conduit à une implémentation complexe et pourrait induire des imprécisions.

Une autre approche basée également sur les éléments de facette a été proposée dans (Vishnevsky et al., 2002). Cette approche utilise d'interpolation de l'aimantation associée avec les fonctions de forme de facette. Les auteurs ont montré l'efficacité de leur formulation dans

quelques situations. Pourtant, elle ne pourra pas être utilisée de façon générale pour les problèmes non linéaires. La raison de cette limitation est que la composante normale de l'aimantation n'est pas continue, la conservation du flux magnétique n'est pas assurée.

### 1.6.4 Conclusions

Deux familles de formulation intégrale de volume pour la magnétostatique existent dans la littérature. Pour la famille de *type h*, nous avons la formulation en champ magnétique et celle en potentiel scalaire. Le passage de la formulation *H-arête* à la formulation  $\varphi$  *nodal* permet de vérifier naturellement l'équation de Maxwell Ampère sans avoir besoin d'imposer une jauge. Ces formulations de *type h* nécessitent des coupures pour la résolution des problèmes non simplement connexes. La résolution des problèmes non linéaires est aussi une problématique pour cette famille de formulations car les convergences sont difficiles. Malgré tout, de nombreux auteurs se sont intéressés à ces approches et même certainement la majorité. Les formulations de *type b* quant à elles n'ont été que très peu étudiées dans la littérature. Le développement de ces formulations ainsi que leur application pour traiter des problèmes magnétostatiques complexes y compris comportant des matériaux non linéaires, non simplement connexe et en présence d'aimants permanents sont l'objet de cette thèse.

## 1.7 Difficultés de la méthode intégrale de volume et solutions

Bien que la MIV semble une méthode "légère", son application n'est pas sans difficulté. La singularité du noyau d'intégration ainsi que l'obtention d'un système matriciel plein sont les deux principales difficultés si l'on souhaite implémenter ce type de méthode.

### 1.7.1 Singularité de noyaux d'intégration et les méthodes de correction

La méthode intégrale consiste en un calcul de toutes les interactions entre des éléments. Ces dernières peuvent être critiques lorsque les points d'intégrations sont très proches ou même confondus pour le calcul de l'interaction. Si aucun traitement spécifique n'est mis en place pour l'évaluation précise des intégrants, des imprécisions trop importantes peuvent apparaître.

En général, chaque formulation est associée à un noyau que nous appelons noyau de Green (il s'agit en fait de la fonction de Green et de ses gradients). Ce noyau est de la forme

$\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$  pour les formulations du *type h* et  $\left(\frac{\mathbf{r}}{r^4}\right)$  pour la formulation en aimantation

magnétique MMM. Le développement de calculs analytiques des expressions de ces noyaux

de Green est présenté dans plusieurs travaux dont (Ardon, 2010), (Canova and Repetto, 2001). Quand une solution analytique n'est pas disponible, une solution numérique (décalage de points de Gauss entre source et cible) peut être envisagée. Une formulation dont le noyau possède une expression analytique précise et maîtrisée est donc à préférer.

### 1.7.2 Matrice pleine et les méthodes de compression matricielle

L'obtention d'une matrice pleine est inhérente à la MIV puisque toutes les interactions entre des éléments dans le domaine actif sont prises en compte. L'intégration et la résolution du système plein est un vrai défi pour la MIV car la place mémoire et le temps de résolution sont proportionnels à  $O(N^2)$  et  $O(N^3)$ , où  $N$  est nombre de degrés de liberté, si un solveur direct est utilisé. C'est pourquoi le développement de la MIV ne peut pas s'effectuer sans employer une méthode de compression matricielle. Ces dernières permettent à la fois d'économiser l'espace de mémoire et d'accélérer la vitesse de l'intégration.

Nous pouvons citer ici la méthode de multipole rapide FMM (Greengard and Rokhlin, 1987), qui est sans doute la méthode la plus connue. La méthode purement algébrique d'approximation en croix adaptatives ACA (Bebendorf and Rjasanow, 2003) ou mixte algébrique-physique HCA (Börm and Grasedyck, 2004) est actuellement de plus en plus utilisée et présente d'importants avantages pour la résolution de systèmes linéaires. Le développement récent des méthodes de compression matricielle est la raison du regain de popularité de la MIV. L'implémentation de ces méthodes pour la résolution des problèmes magnétostatiques peuvent être trouvée dans (Balasubramanian et al., 2002a), (Zhao et al., 2005), (Takahashi et al., 2007), (Le-Van et al., 2014), (Siau et al., 2015).

En appliquant des méthodes de compression et utilisant les solveurs itératifs (GMRES par exemple), le cout de calcul de la MIV réduit du  $O(N^2)$  au  $O(N \log N)$  et devient compétitive avec la MEF.

## 1.8 Conclusions

Un état de l'art des formulations intégrales de volume pour la résolution des problèmes magnétostatiques a été présenté. La méthode des moments magnétiques est la plus ancienne et aussi la plus populaire. Quelques logiciels basés sur cette méthode ont vu le jour. Sa légèreté, seul le domaine actif devant être discrétisé ainsi que la facilité pour les études multistatiques sont les avantages important de la MIV en général et de la MMM en particulier. Un grand nombre d'inconnus ainsi que l'imprécision lors de traitement des problèmes complexes sont

l'inconvénient majeur de la MMM. Ainsi d'autres formulations intégrales *type-h* ont été proposées dans la littérature afin de surmonter ces difficultés. Ces formulations sont plus flexibles et plus précises que la MMM. Pourtant leur application pour des problèmes non simplement connexe requiert des coupures. La vitesse de convergence est lente en général pour les problèmes non linéaires.

Dans le cadre de cette thèse, nous visons au développement de formulations du *type b*, ce qui doit nous permettre de traiter des problèmes complexes, contenant des matériaux non linéaires, des régions non simplement connexes, en présence d'aimants ainsi que de bobines. Nous nous intéresserons également à la résolution des problèmes avec des régions minces magnétiques et le post-traitement sur le calcul des grandeurs locales et globales dans le domaine d'étude.

## Bibliographie du chapitre 1

- Albanese, R., Rubinacci, G., 1988. Integral formulation for 3D eddy-current computation using edge elements. *IEE Proc. Phys. Sci. Meas. Instrum. Manag. Educ. Rev.* 135, 457–462. doi:10.1049/ip-a-1.1988.0072
- Ardon, V., 2010. Méthodes numériques et outils logiciels pour la prise en compte des effets capacitifs dans la modélisation CEM de dispositifs d'électronique de puissance (phdthesis). Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG.
- Balasubramanian, S., Lalgudi, S.N., Shanker, B., 2002. Fast-integral-equation scheme for computing magnetostatic fields in nonlinear media. *IEEE Trans. Magn.* 38, 3426–3432.
- Bebendorf, M., Rjasanow, S., 2003. Adaptive Low-Rank Approximation of Collocation Matrices. *Computing* 70, 1–24. doi:10.1007/s00607-002-1469-6
- Börm, S., Grasedyck, L., others, 2004. Hybrid cross approximation of integral operators.
- Bossavit, A., 1988. Whitney forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proc. Phys. Sci. Meas. Instrum. Manag. Educ. Rev.* 135, 493. doi:10.1049/ip-a-1.1988.0077
- Canova, A., Repetto, M., 2001. Integral solution of nonlinear magnetostatic field problems. *IEEE Trans. Magn.* 37, 1070–1077. doi:10.1109/20.920478
- Carpentier, A., 2013. Formulation intégrale de volume magnéto-statique et calcul des densités de force magnétique : Application au couplage magnéto-mécanique. Université de Grenoble.
- Carpentier, A., Chadebec, O., Galopin, N., Meunier, G., Bannwarth, B., Formulation, A., 2013. Resolution of Nonlinear Magnetostatic Problems With a Volume Integral Method Using the Magnetic Scalar Potential. *IEEE Trans. Magn.* 49, 1685–1688.
- Chadebec, O., 2001. Modélisation du champ magnétique induit par des tôles-identification de l'aimantation-Application à l'immunisation en boucle fermée d'une coque ferromagnétique. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- Chadebec, O., Coulomb, J.-L., Janet, F., 2006. A review of magnetostatic moment method. *IEEE Trans. Magn.* 42, 515–520. doi:10.1109/TMAG.2006.870929
- Chubar, O., Elleaume, P., Chavanne, J., 1998. A three-dimensional magnetostatics computer code for insertion devices. *J. Synchrotron Radiat.* 5, 481–484.
- Dular, P., Nicolet, A., 1995. A discrete sequence associated with mixed finite elements and its gauge condition for vector potentials. *IEEE Trans. Magn.* 31.
- Durand, É., 1968. Magnéto-statique. Masson et Cie.

- Elleaume, P., Chubar, O., Chavanne, J., 1997. Computing 3D magnetic fields from insertion devices, in: Particle Accelerator Conference, 1997. Proceedings of the 1997. IEEE, pp. 3509–3511.
- Forsman, K., Kettunen, L., Nuutinen, J.-P., 1996. Properties of b- and h-type integral equation formulations. *IEEE Trans. Magn.* 32, 1421–1424. doi:10.1109/20.497514
- Forsman, K., Kettunen, L., Nuutinen, J.-P., 1995. Performance of a nonlinear 2D and 3D magnetostatic volume integral formulation. *IEEE Trans. Magn.* 31, 1488–1491. doi:10.1109/20.376311
- Gimignani, M., Musolino, A., Raugi, M., 1994. Integral formulation for nonlinear magnetostatic and eddy currents analysis. *IEEE Trans. Magn.* 30, 3024–3027.
- Greengard, L., Rokhlin, V., 1987. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.* 73, 325–348.
- Hafla, W., Buchau, a., Groh, F., Rucker, W.M., 2005. Efficient integral equation method for the solution of 3-D magnetostatic problems. *IEEE Trans. Magn.* 41, 1408–1411. doi:10.1109/TMAG.2005.844342
- Hafla, W., Groh, F., Buchau, a., Rucker, W.M., 2006. Magnetic field computation with integral equation method and energy-controlled relaxation. *IEEE Trans. Magn.* 42, 719–722. doi:10.1109/TMAG.2006.871598
- Han, L., Tong, L., Yang, J., 1994. Integral equation method using total scalar potential for the simulation of linear or nonlinear 3D magnetostatic field with open boundary. *IEEE Trans. Magn.* 30, 2897–2890.
- Harrington, R.F., 1993. *Field Computation by Moment Methods*. Oxford University Press, USA.
- Henneron, T., 2004. Contribution à la prise en compte des Grandeurs Globales dans les Problèmes d'Electromagnétisme résolus avec la Méthode des Eléments Finis. UNIVERSITÉ LILLE I.
- Kalimov, A.G., Svedentsov, M.L., 1996. Three-dimensional magnetostatic field calculation using integro-differential equation for scalar potential. *IEEE Trans. Magn.* 32, 667–670. doi:10.1109/20.497326
- Kalimov, A., Svedentsov, M., 1998. Application of a hybrid integrodifferential method for analysis of thin magnetic shields. *IEEE Trans. Magn.* 34, 2453–2456. doi:10.1109/20.717564
- Kettunen, L., Forsman, K., Levine, D., Gropp, W., 1995. Volume integral equations in non-linear 3-D magnetostatics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38, 2655–2675.

- Kettunen, L., Turner, L., 1992. A volume integral formulation for nonlinear magnetostatics and eddy currents using edge elements. *IEEE Trans. Magn.* 28, 1639–1642.
- Krstajic, B., Andelic, Z., Milojkovic, S., Babic, S., Salon, S., 1992. Nonlinear 3D magnetostatic field calculation by the integral equation method with surface and volume magnetic charges. *IEEE Trans. Magn.* 28, 1088 – 1091. doi:10.1109/20.123871
- Le-Van, V., Bannwarth, B., Carpentier, A., Chadebec, O., Guichon, J.-M., Meunier, G., 2014. The Adaptive Cross Approximation Technique for a Volume Integral Equation Method Applied to Nonlinear Magnetostatic Problems. *IEEE Trans. Magn.* 50, 445–448. doi:10.1109/TMAG.2013.2281568
- Le Van, V., Meunier, G., Chadebec, O., Guichon, J.-M., 2015a. A Volume Integral Formulation Based on Facet Elements for Nonlinear Magnetostatic Problems. *IEEE Trans. Magn.* 1–7. doi:10.1109/TMAG.2015.2389197
- Le Van, V., Meunier, G., Chadebec, O., Guichon, J.-M., 2015b. A Magnetic Vector Potential Volume Integral Formulation for Nonlinear Magnetostatic Problems, in: *COMPUMAG 2015*. Montréal, Canada.
- Meunier, G., 2002. *Electromagnétisme et problèmes couplés : électromagnétisme et éléments finis 3 (Traite EGEM, série Génie électrique)*, Lavoisier. ed.
- Morandi, A., Fabbri, M., Ribani, P.L., 2010. A Modified Formulation of the Volume Integral Equations Method for 3-D Magnetostatics. *IEEE Trans. Magn.* 46, 3848–3859. doi:10.1109/TMAG.2010.2066571
- Nedelec, J.C., 1980. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numer. Math.* 35, 315–341. doi:10.1007/BF01396415
- Newman, M.J., Trowbridge, C.W., Turner, L.R., 1972. GFUN: An interactive program as an aid to magnet design, in: *Proc. 4th Int. Conf. Magnet Technology*. Brookhaven National Laboratory, Upton, NY, pp. 617–626.
- Nguyen, T.-S., Guichon, J.-M., Chadebec, O., Labie, P., Coulomb, J.-L., 2011. Ships Magnetic Anomaly Computation With Integral Equation and Fast Multipole Method. *IEEE Trans. Magn.* 47, 1414–1417.
- Phung, A.T., 2006. Développement de formulations électromagnétiques éléments finis 3D pour la modélisation des dispositifs en fréquence élevée.
- Raviart, P.A., Thomas, J.M., 1977. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems, in: Galligani, I., Magenes, E. (Eds.), *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, pp. 292–315.



- Ren, Z., Razek, A., 1996. Computation of 3D electromagnetic field using differential forms based elements and dual formulations. *IJNM Electron. Netw. Devices Fields* 9, 81–98.
- Siau, J., Chadebec, O., Perrussel, R., Poirier, J.-R., 2015. Hybrid Cross Approximation for a Magnetostatic Formulation. *IEEE Trans. Magn.* 51, 1–4. doi:10.1109/TMAG.2014.2364739
- Souza, M., Vidigal, C., Momy, A., Taquin, J., Sauzade, M., 1997. Nonlinear calculation of three-dimensional static magnetic fields. *IEEE Trans. Magn.* 33, 2486–2491. doi:10.1109/20.595903
- Takahashi, Y., Matsumoto, C., Wakao, S., 2007. Large-Scale and Fast Nonlinear Magnetostatic Field Analysis by the Magnetic Moment Method With the Adaptive Cross Approximation. *IEEE Trans. Magn.* 43, 1277–1280. doi:10.1109/TMAG.2006.890973
- Trowbridge, C.W., 1982. Three-dimensional field computation. *IEEE Trans. Magn.* 18, 293–297. doi:10.1109/TMAG.1982.1061776
- Urankar, L.K., 1982a. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part II: Thin sheet approximation. *Magn. IEEE Trans.* On 18, 911–917.
- Urankar, L.K., 1982b. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part III: Exact computation for rectangular cross section. *Magn. IEEE Trans.* On 18, 1860–1867.
- Urankar, L.K., 1980. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part I: Filament approximation. *IEEE Trans. Magn.* 16, 1283–1288. doi:10.1109/TMAG.1980.1060864
- Vishnevsky, A.M., Kalimov, A.G., Lapovok, A.A., 2002. Modeling magnetization using Whitney facet elements. *IEEE Trans. Magn.* 38, 489–492. doi:10.1109/20.996129
- Young, J.C., Gedney, S.D., 2011. A Locally Corrected Nyström Formulation for the Magnetostatic Volume Integral Equation. *IEEE Trans. Magn.* 47, 2163–2170.
- Zhao, K., Vouvakis, M., Lee, J., 2005. The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC problems. *IEEE Trans. Magn.* 47, 763–773.

# CHAPITRE 2

## Développement des formulations intégrales de volume en flux magnétique et en potentiel vecteur

### SOMMAIRE

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>38</b>
<b>2.2</b>	<b>Formulation en flux magnétique.....</b>	<b>38</b>
2.2.1	Propriétés des éléments de facette.....	38
2.2.2	Développement de la formulation .....	39
2.2.3	Exploitation après résolution.....	49
2.2.4	Applications .....	50
<b>2.3</b>	<b>Formulation en potentiel vecteur magnétique.....</b>	<b>54</b>
2.3.1	Propriétés des éléments d'arête .....	54
2.3.2	Développement de la formulation .....	55
2.3.3	Passage de la formulation en flux magnétique à la formulation en potentiel vecteur	59
2.3.4	Application : Résolution du problème TEAM Workshop 13 .....	61
<b>2.4</b>	<b>Comparaison des formulations intégrales de volume pour la résolution de problèmes magnéto-statiques non linéaires .....</b>	<b>67</b>
2.4.1	Introduction .....	67
2.4.2	Comparaison les systèmes d'équations à résoudre .....	68
2.4.3	Exemples numériques .....	69
2.4.4	Conclusions .....	75
<b>2.5</b>	<b>Formulation intégrale de volume pour la modélisation des régions minces magnétiques .....</b>	<b>76</b>
2.5.1	Introduction .....	76
2.5.2	Formulation intégrale pour des régions minces magnétiques .....	76
2.5.3	Applications .....	82
2.5.4	Conclusions .....	85
<b>2.6</b>	<b>Conclusions .....</b>	<b>86</b>
	<b>Bibliographie du chapitre 2.....</b>	<b>87</b>

## 2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié au développement des formulations intégrales de volume du *type b* pour la modélisation des problèmes magnétostatiques non linéaires, prenant en compte la présence de régions d'aimants permanents, de régions non simplement connexes ainsi que de régions minces magnétiques. Il s'agit de la formulation en flux magnétique (**B** de facette), qui est basée sur l'interpolation des éléments de facette au premier ordre et de la formulation en potentiel vecteur magnétique (**A** d'arête), qui est basée sur l'interpolation par éléments d'arête du premier ordre.

Ce chapitre commence, tout d'abord, par le développement de la formulation **B** de facette suivie par la modélisation d'un tore magnétique et d'un contacteur excité par un aimant permanent. Ensuite, le développement de la formulation **A** d'arête et son application à la modélisation du problème TEAM Workshop 13 sont présentés. Nous montrerons qu'il est possible de passer de la formulation **B** de facette à la formulation **A** d'arête en utilisant une matrice de passage. Puis, nous nous intéressons à une comparaison entre les formulations proposées et la formulation en potentiel scalaire qui est proposée dans la littérature pour la résolution de problèmes magnétostatiques non linéaires. Dans la fin du chapitre, nous développerons une formulation intégrale de volume de *type b* pour la modélisation de régions minces magnétiques.

## 2.2 Formulation en flux magnétique

### 2.2.1 Propriétés des éléments de facette

Considérons une facette  $f$  du premier ordre. Nous rappelons quelques propriétés de sa fonction d'interpolation  $\mathbf{w}_f$  :

$$\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n}_f = w_{nf} = \pm \frac{1}{S_f} \quad (2.1)$$

$$\text{div}(\mathbf{w}_f) = \pm \frac{1}{V_e} \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{n}_f$ ,  $S_f$  sont successivement le vecteur normal de la surface de la facette  $f$  et  $V_e$  le volume de l'élément  $E$  auquel appartient la facette  $f$ . Nous notons que les propriétés (2.1) et (2.2) sont valables quel que soit le type d'élément : tétraèdre, hexaèdre ou prisme.

Les signes de  $w_{nf}$  et de  $div(\mathbf{w}_f)$  dépendent de l'orientation du vecteur normal  $\mathbf{n}_f$ . Nous définissons une règle d'orientation des normales des facettes comme suit :

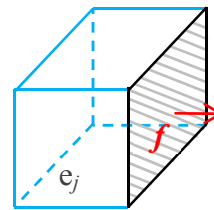
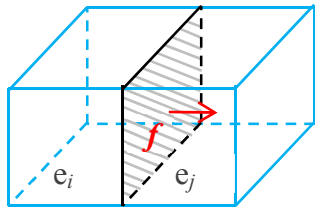
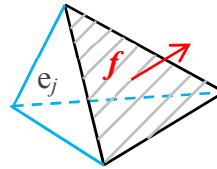
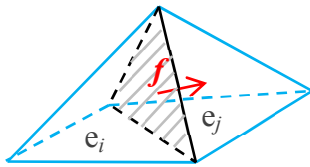
- la normale des facettes extérieures (facettes sur la frontière du domaine) est sortante ;
- la normale des facettes intérieures est orientée de l'élément de numéro le plus petit vers l'élément de numéro le plus grand.

Pour une facette  $f$  intérieure partagée par deux éléments  $e_i$  et  $e_j$  ( $j > i$ ) comme sur la figure FIG.2.1.a :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{nf}|_{e_i} = +\frac{1}{S_f} \\ div(\mathbf{w}_f)|_{e_i} = +\frac{1}{V_{e_i}} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} w_{nf}|_{e_j} = -\frac{1}{S_f} \\ div(\mathbf{w}_f)|_{e_j} = -\frac{1}{V_{e_j}} \end{array} \right.$$

Pour une facette  $f$  extérieure appartenant à l'élément  $j$  comme sur la figure FIG.2.1.b :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{nf}|_{e_j} = +\frac{1}{S_f} \\ div(\mathbf{w}_f)|_{e_j} = +\frac{1}{V_{e_j}} \end{array} \right. .$$



a. Facette intérieure

b. Facette extérieure

FIG.2.1. Localisation et orientation des facettes intérieures et extérieures

## 2.2.2 Développement de la formulation

### 2.2.2.1 Les équations de base

Considérons un problème magnétostatique comprenant des régions ferromagnétiques non linéaires, des aimants permanents et des sources de courant continu (cf. le problème type défini dans §1.2.2). L'ensemble du domaine des matériaux magnétiques est noté  $\Omega_m$ . L'induction magnétique  $\mathbf{B}$  dans le matériau peut être approximée par l'interpolation des éléments de facette du premier ordre :

$$\mathbf{B} = \sum_{f=1}^{N_f} \mathbf{w}_f \Phi_f \quad (2.3)$$

où  $\Phi_f$  est le flux magnétique traversant la facette  $f$  ;  $\mathbf{w}_f$  représente la fonction de forme du premier ordre de la facette  $f$  et  $N_f$  le nombre de facettes.

Nous rappelons que la décomposition du champ magnétique total en la somme du champ magnétique réduit  $\mathbf{H}_{red}$  et du champ magnétique créé par les sources  $\mathbf{H}_0$  nous permet d'écrire :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{grad} \varphi_{red} \quad (2.4)$$

où  $\varphi_{red}$  est le potentiel scalaire magnétique réduit dont le champ réduit  $\mathbf{H}_{red}$  dérive.

La loi de comportement des matériaux peut s'écrire :

$$\mathbf{H} = [\nu(\mathbf{B})]\mathbf{B} - \mathbf{H}_c \quad (2.5)$$

où  $[\nu(\mathbf{B})]$  est le tenseur de reluctivité magnétique et  $\mathbf{H}_c$  est le champ coercitif de l'aimant permanent. En introduisant cette loi de comportement à l'équation (2.4), nous obtenons :

$$[\nu(\mathbf{B})]\mathbf{B} + \mathbf{grad} \varphi_{red} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c \quad (2.6)$$

La projection de l'équation (2.6), dans le domaine discrétisé  $\Omega_m$ , par la méthode de Galerkin en utilisant  $\mathbf{w}_g$  (fonction de forme de la facette  $g$ ) comme fonction test conduit à :

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot [\nu(\mathbf{B})]\mathbf{B} d\Omega_m + \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} d\Omega_m = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \quad (2.7)$$

En remplaçant  $\mathbf{B}$  par son approximation à (2.3), nous avons :

$$\sum_{f=1}^{N_f} \left( \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot [\nu(\mathbf{B})] \cdot \mathbf{w}_f d\Omega_m \right) \Phi_f + \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} d\Omega_m = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \quad (2.8)$$

L'écriture de l'équation (2.8) successivement pour les  $\mathbf{w}_g$  ( $g = 1, 2, \dots, N_f$ ) nous donne le système d'équations suivant :

$$\mathbf{R}\Phi + \mathbf{I} = \mathbf{U}_0 \quad (2.9)$$

où  $\Phi$  le vecteur des flux magnétiques au travers des facettes. La matrice  $\mathbf{R}$ , les vecteurs  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{U}_0$  sont déterminés par :

$$\begin{aligned} R_{gf} &= \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot [\nu(\mathbf{B})] \cdot \mathbf{w}_f d\Omega_m \\ U_{0g} &= \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \\ I_g &= \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} d\Omega_m \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec  $g = 1, 2, \dots, N_f$  et  $f = 1, 2, \dots, N_f$

$\mathbf{R}$  est une matrice creuse du type éléments finis de facette et le vecteur  $\mathbf{U}_0$  représente les termes sources intégrés sur les éléments de facette. Intéressons-nous au terme  $I_g$  :

$$I_g = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} d\Omega_m \quad (2.11)$$

L'identité vectorielle suivante est vérifiée :

$$\mathbf{w}_g \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} = \text{div}(\varphi_{red} \mathbf{w}_g) - \varphi_{red} \text{div} \mathbf{w}_g \quad (2.12)$$

Les applications de l'identité (2.12) et du théorème de la divergence dans l'intégrale (2.11) permettent d'écrire :

$$I_g = \int_{\Gamma} \varphi_{red} \mathbf{w}_g \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Omega_m} \varphi_{red} \text{div} \mathbf{w}_g d\Omega_m \quad (2.13)$$

où  $\Gamma$  est la frontière du domaine  $\Omega_m$  et  $\mathbf{n}_{\Gamma}$  est la normale à  $\Gamma$ .

- **Si  $g$  est une facette intérieure** et partagée par deux éléments de volume  $e_i$  et  $e_j, j > i$ :

$$I_g = - \int_{\Omega_f} \varphi_{red} \text{div} \mathbf{w}_g d\Omega_f = \frac{1}{V_{ej}} \int_{\Omega_{ej}} \varphi_{red} d\Omega_{ej} - \frac{1}{V_{ei}} \int_{\Omega_{ei}} \varphi_{red} d\Omega_{ei} \quad (2.14)$$

Comme  $\frac{1}{V_e} \int_{\Omega_e} \varphi_{red} d\Omega_e$  représente le potentiel scalaire réduit moyen  $\bar{\varphi}_{red_e}$  dans l'élément volumique  $e$ , nous pouvons donc exprimer  $I_g$  par :

$$I_g = \bar{\varphi}_{red_{ej}} - \bar{\varphi}_{red_{ei}} = \Delta\bar{\varphi}_{red_{INg}} \quad (2.15)$$

où  $\Delta\bar{\varphi}_{red_{INg}}$  représente la différence du potentiel scalaire réduit moyen entre deux éléments qui partagent la facette intérieure  $g$ .

- *Si  $g$  est une facette extérieure* et appartient à l'élément  $e_j$  :

$$I_g = \frac{1}{S_g} \int_{S_g} \varphi_{red} dS_g - \frac{1}{V_{ej}} \int_{\Omega_{ej}} \varphi_{red} d\Omega_{ej} = \bar{\varphi}_{red_g} - \bar{\varphi}_{red_{ej}} = \Delta\bar{\varphi}_{red_{EXg}} \quad (2.16)$$

où  $\bar{\varphi}_{red_g}$  est le potentiel scalaire réduit moyen sur la facette  $g$  dont  $S_g$  est la surface;  $\Delta\bar{\varphi}_{red_{EXg}}$  représente la différence de potentiel scalaire réduit moyen entre la facette extérieure  $g$  et l'élément volumique lui appartenant.

### 2.2.2.2 Introduction du circuit équivalent

A partir de (2.15) et (2.16), le vecteur  $\mathbf{I}$  s'écrit :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \Delta\bar{\varphi}_{red_{IN}} \\ \Delta\bar{\varphi}_{red_{EX}} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Ce vecteur peut être représenté sur le maillage dual du maillage éléments finis initial, sous forme d'un circuit électrique où :

- un élément volumique correspond à un nœud du circuit;
- une facette correspond à une branche du circuit.

Un modèle de circuit équivalent en 2D représenté sur la figure FIG.2.2.a illustre cette approche, les segments en tiret représentant les branches du circuit.

En introduisant le vecteur  $\mathbf{I}$  dans (2.17) à l'équation (2.9) nous obtenons :

$$\mathbf{R}\Phi + \begin{pmatrix} \Delta\bar{\varphi}_{red_{IN}} \\ \Delta\bar{\varphi}_{red_{EX}} \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0 \quad (2.18)$$

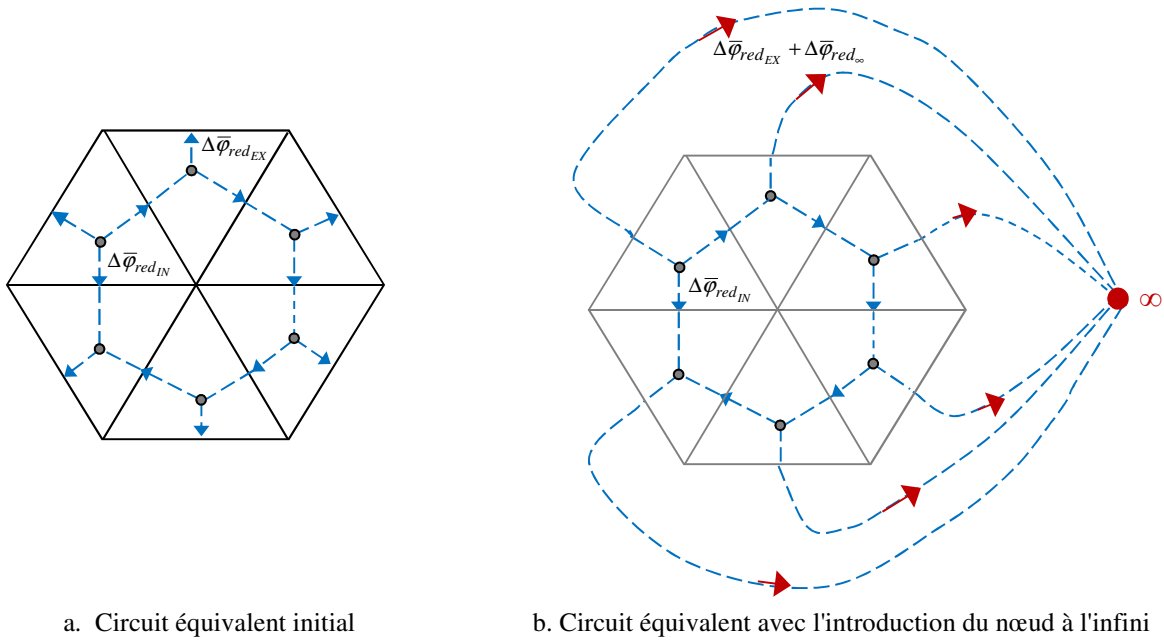


FIG.2.2. Circuits équivalents d'un maillage en 2D

Afin de prendre en compte les flux magnétiques rentrant/sortant par l'extérieur de la région  $\Omega_m$  nous introduisons des branches de circuits extérieures en introduisant un nœud à l'infini noté nœud  $\infty$ . Ce dernier relie avec toutes les facettes du bord (FIG.2.2.b) et assure la conservation du flux. En supposant que le potentiel est nul à l'infini, la différence du potentiel scalaire réduit moyen entre une facette  $g$  au bord et le nœud  $\infty$  s'écrit :

$$\Delta\varphi_{red\ \Gamma_g\infty} = \varphi_{red\ \Gamma_g} - \varphi_{red\ \infty} = \varphi_{red\ \Gamma_g} = \int_{S_g} \frac{\varphi_{red}}{S_g} dS_g \quad (2.19)$$

Nous nous rappelons que le potentiel scalaire réduit  $\varphi_{red}$  peut être calculé par :

$$\varphi_{red} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \cdot \mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) d\Omega_m \quad (2.20)$$

L'identité vectorielle suivante est vérifiée.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \text{div}\left(\frac{\mathbf{M}}{r}\right) - \frac{1}{r} \text{div}(\mathbf{M}) \quad (2.21)$$

En appliquant cette identité et le théorème de la divergence dans l'équation (2.20), nous avons :



$$\begin{aligned}
 \varphi_{red} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{M}}{r} \right) d\Omega_m + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}}{r} d\Omega_m \\
 &= -\sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_e} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_e}}{r} d\Gamma_e + \sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_e} \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}}{r} d\Omega_e
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

où  $N_e$  est nombre d'éléments volumiques,  $\Gamma_e$  est la frontière de l'élément  $e$  et  $\mathbf{n}_{\Gamma_e}$  est le vecteur normal de  $\Gamma_e$ .

Nous rappelons que la loi de comportement des matériaux magnétiques peut s'écrire :

$$\mathbf{M} = \nu_0 \mathbf{B} - [\nu(\mathbf{B})] \mathbf{B} + \mathbf{H}_c \tag{2.23}$$

En supposant que le matériau magnétique est linéaire par morceau et  $\mathbf{H}_c$  indépendant de  $\mathbf{B}$ , la reluctivité est supposée constante par élément volumique, nous avons alors  $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$  dans chaque élément  $e$  car  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ . D'ailleurs, notons bien que les frontières des éléments volumiques sont des éléments de facette. La formule (2.22) peut donc s'écrire :

$$\varphi_{red} = \sum_{f=1}^{N_f} \frac{1}{4\pi} \int_{S_f} \frac{\delta \mathbf{M}_{nf}}{r} dS_f \tag{2.24}$$

où  $\delta \mathbf{M}_{nf}$  est la différence de l'aimantation déterminée sur la facette  $f$  comme ci-dessous :

- Si  $f$  est une facette intérieure partagée par deux éléments  $e_i$  et  $e_j$ ,  $j > i$  :

$$\delta \mathbf{M}_{nf} = -(\mathbf{M}_{nj} - \mathbf{M}_{ni}) = -(\nu_i - \nu_j) \mathbf{B}_{nf} + (\mathbf{H}_{cni} - \mathbf{H}_{cnj}) \tag{2.25}$$

où  $\nu_i$ ,  $\nu_j$  sont successivement les reluctivités des éléments  $e_i$  et  $e_j$ ;  $\mathbf{H}_{cni} = \mathbf{H}_{ci} \cdot \mathbf{n}_f$  avec  $\mathbf{H}_{ci}$  vecteur champ magnétique déterminé dans l'élément  $i$ , idem pour  $\mathbf{H}_{cnj}$  et  $\mathbf{B}_{nf} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_f$ .

- Si  $f$  est une facette extérieure appartenant à l'élément  $j$  :

$$\delta \mathbf{M}_n = -\mathbf{M}_{nj} = -(\nu_0 - \nu_j) \mathbf{B}_{nf} - \mathbf{H}_{cnj} \tag{2.26}$$

Généralement,  $\delta \mathbf{M}_{nf}$  peut s'écrire :

$$\delta \mathbf{M}_{nf} = -\delta \nu_f \mathbf{B}_{nf} + \delta \mathbf{H}_{cnf} \tag{2.27}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \delta v_f |_{f \text{ intérieure}} = v_i - v_j \\ \delta v_f |_{f \text{ extérieure}} = v_0 - v_j \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \delta H_{cnf} |_{f \text{ intérieure}} = H_{cni} - H_{cnj} \\ \delta H_{cnf} |_{f \text{ extérieure}} = -H_{cnj} \end{cases}.$$

En introduisant  $\delta M_{nf}$  dans (2.27) à la formule (2.24), nous obtenons :

$$\varphi_{red} = - \sum_{f=1}^{N_f} \frac{1}{4\pi} \int_{S_f} \frac{\delta v_f \mathbf{B}_{nf}}{r} dS_f + \sum_{f=1}^{N_f} \frac{1}{4\pi} \int_{S_f} \frac{\delta H_{cnf}}{r} dS_f \quad (2.28)$$

Comme  $\mathbf{B}_{nf} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_f$ , nous pouvons appliquer l'approximation de l'induction  $\mathbf{B}$  dans l'expression (2.28) par (2.3):

$$\varphi_{red} = - \sum_{f=1}^{N_f} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{S_f} \frac{\delta v_f w_{nf}}{r} dS_f \right) \Phi_f + \sum_{f=1}^{N_f} \frac{1}{4\pi} \int_{S_f} \frac{\delta H_{cnf}}{r} dS_f \quad (2.29)$$

Avec le remplacement de  $\varphi_{red}$  dans (2.19) par (2.29), nous obtenons :

$$\Delta \varphi_{red_{\Gamma_g \infty}} = - \frac{1}{4\pi S_g} \int_{S_g} \sum_{f=1}^{N_f} \left( \int_{S_f} \frac{\delta v_f w_{nf}}{r} dS_f \right) \Phi_f dS_g + \frac{1}{4\pi S_g} \int_{S_g} \left( \sum_{f=1}^{N_f} \int_{S_f} \frac{\delta H_{cnf}}{r} dS_f \right) dS_g \quad (2.30)$$

Pour l'ensemble des facettes extérieures nous écrivons :

$$\Delta \varphi_{red_{\Gamma_\infty}} + \mathbf{L} \Phi_\Gamma = \mathbf{V}_0 \quad (2.31)$$

où  $\Phi_\Gamma$  est le vecteur des flux traversant les facettes extérieures. La matrice  $\mathbf{L}$  et le vecteur  $\mathbf{V}_0$  sont définis par :

$$\begin{cases} L_{gf} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta v_f}{S_g S_f} \int_{\Gamma_g} \int_{F_f} \frac{1}{r} dF_f d\Gamma_g \\ V_{0g} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{S_g} \sum_{f=1}^{N_f} \int_{\Gamma_g} \int_{F_f} \frac{\delta H_{cnf}}{r} dF_f d\Gamma_g \end{cases}$$

Si  $N_{f\Gamma}$  représente le nombre de facettes extérieures,  $\mathbf{L}$  est une matrice pleine de taille  $N_f \times N_{f\Gamma}$  et le vecteur  $\mathbf{V}_0$  est de taille  $N_{f\Gamma}$ . La construction de la matrice  $\mathbf{L}$  entraîne une singularité lors

de l'intégration de la fonction de Green d'un élément sur lui-même ( $g=f$ ). Cette singularité peut être levée soit à l'aide d'une intégration numérique dans laquelle un décalage des points de Gauss entre les points sources et les points cibles est effectué, soit en employant une correction analytique (Rubeck et al., 2013).

### 2.2.2.3 Mise en équation et résolution

En combinant les équations (2.18) et (2.31), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$(\mathbf{R}+\mathbf{L})\Phi+\Delta\bar{\varphi}_{red}=\mathbf{U}_0+\mathbf{V}_0 \quad (2.32)$$

Le vecteur  $\Delta\bar{\varphi}_{red}=\begin{pmatrix} \Delta\bar{\varphi}_{red_{IN}} \\ \Delta\bar{\varphi}_{red_{EX}}+\Delta\varphi_{red_{\Gamma_\infty}} \end{pmatrix}$  représente les différences de potentiels réduits moyens entre les bornes des branches du circuit équivalent.

La loi des mailles de Kirchhoff s'écrit :

$$\mathbf{P}\Delta\bar{\varphi}_{red}=0 \quad (2.33)$$

où  $\mathbf{P}$  représente la matrice d'incidence entre des mailles indépendantes et les branches (facettes) du circuit ;  $\mathbf{P}_{ij}=0$  si la branche  $j$  n'est pas présente dans la maille  $i$  sinon  $\mathbf{P}_{ij}=\pm 1$ , le signe dépendant de l'orientation de la branche dans la maille. La matrice  $\mathbf{P}$  est de taille  $N_{MI} \times N_f$  avec  $N_{MI}$  le nombre de mailles indépendantes.

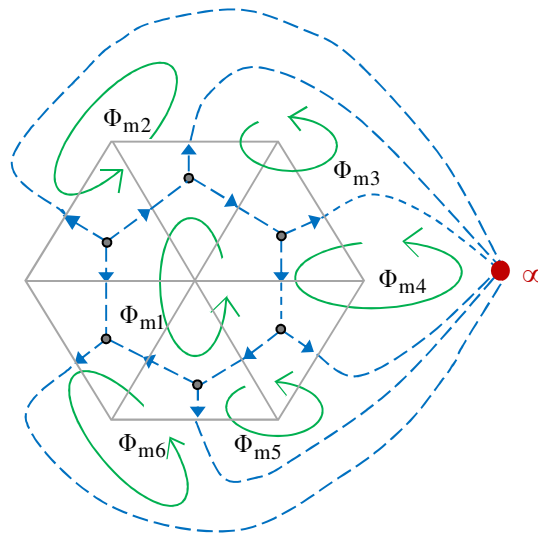


FIG.2.3. Un ensemble de mailles indépendantes

En appelant  $\Phi_m$  le vecteur des flux de mailles indépendantes (figure FIG.2.3) et  $\mathbf{P}^T$  la matrice transposée de la matrice  $\mathbf{P}$ , nous avons :

$$\Phi = \mathbf{P}^T \Phi_m \quad (2.34)$$

En utilisant les relations (2.33) et (2.34), le système (2.32) est simplifié:

$$\mathbf{P}(\mathbf{R} + \mathbf{L})\mathbf{P}^T \Phi_m = \mathbf{P}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0) \quad (2.35)$$

Nous avons donc le système d'équations de la formulation  $\mathbf{B}$  de facette. Nous rappelons que les matrices  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$  ainsi que les vecteurs  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{V}_0$  sont déterminés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{gf} &= \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot [\mathbf{V}] \cdot \mathbf{w}_f d\Omega_m \\ \mathbf{L}_{gf} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\delta v_f}{S_g S_f} \int_{\Gamma_g} \int_{F_f} \frac{1}{r} dF_f d\Gamma_g \\ \mathbf{U}_{0g} &= \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \\ \mathbf{V}_{0g} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{S_g} \sum_{f=1}^{N_f} \int_{\Gamma_g} \int_{F_f} \frac{\delta \mathbf{H}_{cnf}}{r} dF_f d\Gamma_g \end{aligned} \quad (2.36)$$

La matrice  $\mathbf{R}$  est creuse et de taille  $N_f \times N_f$ ; la matrice  $\mathbf{L}$  est pleine, de taille  $N_f \times N_{f\Gamma}$ ; le vecteur  $\mathbf{U}_0$  de taille  $N_f$  et le vecteur  $\mathbf{V}_0$  de taille  $N_{f\Gamma}$ . En pratique,  $N_{f\Gamma} \ll N_f$ . Les tailles des matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{L}$  sont illustrées sur la figure FIG.2.4.

La formulation  $\mathbf{B}$  de facette est adaptée à l'utilisation de la méthode de Newton Raphson pour la résolution des problèmes non linéaire. Avec cette méthode, seule la matrice creuse  $\mathbf{R}$  doit être recalculée à chaque itération, la réintégration de la matrice  $\mathbf{L}$  pouvant être évitée. En effet, nous pouvons décomposer la matrice  $\mathbf{L}$  par un produit entre le vecteur des différences de reluctivité  $\delta v$  et une matrice  $\mathbf{L}_0$  indépendant du matériau et déterminée par

$$\mathbf{L}_{0gf} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{S_g S_f} \int_{\Gamma_g} \int_{F_f} \frac{1}{r} dF_f d\Gamma_g. \text{ Il suffit donc de mettre à jour la matrice } \mathbf{L} \text{ par la}$$

connaissance de  $\delta v$  à chaque itération. En outre, puisque  $\delta v \ll v$  la contribution de la matrice intégrale  $\mathbf{L}$  dans le résidu est faible par rapport celle de la matrice  $\mathbf{R}$  ce qui est favorable pour la convergence du solveur non linéaire. Enfin, comme la résolution du système non linéaire de la formulation  $\mathbf{B}$  de facette utilise la courbe  $H(\mathbf{B})$ , la convergence peut être atteinte sans besoin de relaxation.

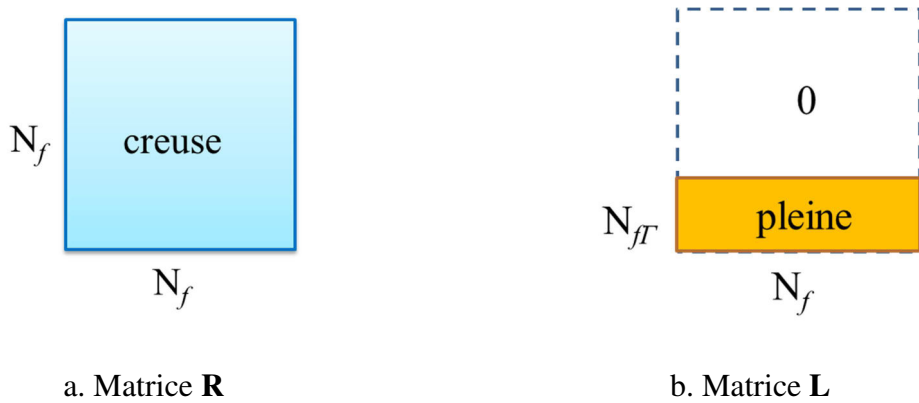


FIG.2.4. Taille des matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{L}$

Nous pouvons faire les remarques suivantes :

1. La présence d'aimant dans le système induit deux termes sources :
  - Un terme "éléments finis"  $\mathbf{U}_0$ .
  - Un terme "intégral"  $\mathbf{V}_0$ .

Si le système ne possède pas d'aimant permanent, le vecteur  $\mathbf{V}_0$  disparaît. Le vecteur  $\mathbf{U}_0$  ne contient donc que les contributions des courants sources.

2.  $\delta v_f$  s'annule aux facettes intérieures de chaque région linéaire. Dans le cas particulier d'un problème avec une seule région linéaire la matrice  $\mathbf{L}$  se réduit et devient une matrice carrée de dimensions  $N_{f\Gamma} \times N_{f\Gamma}$ .
3. Le nombre d'inconnues est égal à celui des mailles indépendantes. La matrice d'incidence des mailles indépendantes  $\mathbf{P}$  peut être déterminée en utilisant des techniques de recherche d'arbre et de co-arbres (Nguyen et al., 2012) par exemple. Comme il existe généralement plusieurs possibilités de construction de la matrice  $\mathbf{P}$  pour un maillage donné, le choix des mailles indépendantes influence directement l'étape de résolution du système, spécialement en termes de temps de calcul.
4. Comme mentionné dans le chapitre précédent, Balasubramanian et ses collègues dans (Balasubramanian et al., 2002b) ont également proposé une formulation intégrale de volume magnétostatique basée sur l'interpolation par éléments de facette. Toutefois, il reste peu clair dans leur approche comment la condition  $\text{div}\mathbf{B}=0$  est imposée. Dans notre formulation, la nullité de la divergence de l'induction magnétique a été assurée

de façon rigoureuse par l'introduction du nœud infini et l'utilisation de la méthode des mailles indépendantes.

## 2.2.3 Exploitation après résolution

### 2.2.3.1 Calcul de l'induction magnétique dans le matériau

Une fois le système (2.35) résolu, le vecteur des flux magnétiques  $\Phi$  est retrouvé par :

$$\Phi = \mathbf{P}^T \Phi_m \quad (2.37)$$

A partir de la connaissance du vecteur  $\Phi$ , nous pouvons calculer l'induction magnétique en un point dans le domaine discrétisé en employant l'interpolation suivante :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{f=1}^{N_f} \mathbf{w}_f(\mathbf{r}) \Phi_f \quad (2.38)$$

### 2.2.3.2 Calcul du champ magnétique dans l'air

Le potentiel scalaire magnétique réduit sur un point  $\mathbf{P}$  extérieur au domaine  $\Omega_m$  peut être calculé par (2.20) :

$$\varphi_{red}(\mathbf{P}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \mathbf{M}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \quad (2.39)$$

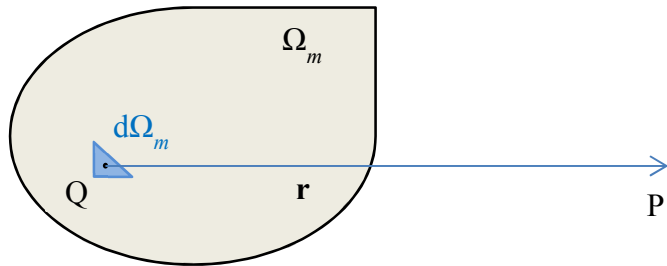


FIG.2.5. Calcul du champ magnétique sur le point  $\mathbf{P}$  dans l'air

Selon (2.24), cette intégrale peut être ramenée sur les facettes :

$$\varphi_{red}(\mathbf{P}) = \sum_{f=1}^{N_f} \frac{1}{4\pi} \int_{F_f} \frac{\delta \mathbf{M}_{nf}}{r} dF_f \quad (2.40)$$

Le champ magnétique  $\mathbf{H}$  au point  $\mathbf{P}$  est la somme du champ source créé par des bobines et du champ réduit créé par des matières ferromagnétiques :

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}) = -\mathbf{grad}_P \varphi_{red}(\mathbf{P}) + \mathbf{H}_0(\mathbf{P}) \quad (2.41)$$

Dans (2.40), seul  $\frac{1}{r}$  dépend de la position de  $\mathbf{P}$ , ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{grad}_P \varphi_{red}(\mathbf{P}) = \sum_{f=1}^{N_f} \frac{1}{4\pi} \int_{F_f} \delta \mathbf{M}_{nf} \mathbf{grad}_P \left( \frac{1}{r} \right) dF_f = - \sum_{f=1}^{N_f} \frac{1}{4\pi} \int_{F_f} \delta \mathbf{M}_{nf} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dF_f \quad (2.42)$$

avec  $\delta \mathbf{M}_{nf}$  déterminé selon les expressions (2.25) et (2.26). Nous avons donc :

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}) = \sum_{f=1}^{N_f} \frac{1}{4\pi} \int_{F_f} \delta \mathbf{M}_{nf} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dF_f + \mathbf{H}_0(\mathbf{P}) \quad (2.43)$$

## 2.2.4 Applications

### 2.2.4.1 Modélisation d'un circuit magnétique fermé

Nous considérons un circuit magnétique fermé de forme rectangulaire donc non simplement connexe, constitué d'un matériau ferromagnétique non linéaire et excité par une bobine de courant continu de 150 At (FIG.2.6). La loi de comportement du matériau est représentée par une fonction arc tangente à deux coefficients :

$$\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \mu_0 \mathbf{H} + \frac{2J_s}{\pi} \arctg \left( \frac{\pi(\mu_r - 1)\mu_0 \mathbf{H}}{2J_s} \right) \quad (2.44)$$

avec  $\mu_r = 1000$  et  $J_s = 1$  T. L'induction magnétique sur le chemin PQ, P(-25,0,-5) et Q(25,0,-5) est calculée.

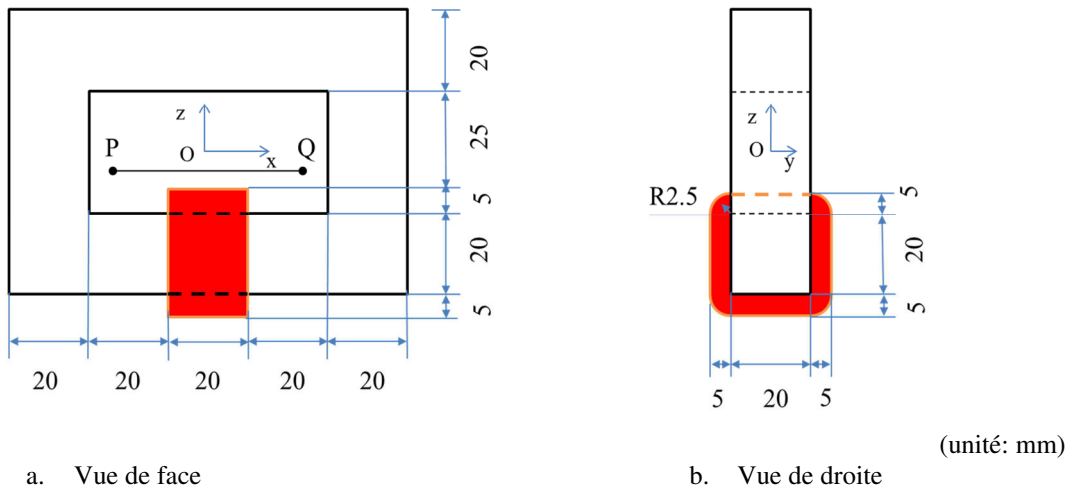


FIG.2.6. Géométrie du circuit magnétique

L'application de la formulation **B** de facette nous permet de résoudre ce problème sans coupure du circuit magnétique. Deux maillages comprenant successivement 96 tétraèdres et 890 tétraèdres sont utilisés (FIG.2.7). Une solution de référence est obtenue par la méthode des éléments finis (MEF) sur le logiciel commercial Flux3D avec un maillage très fin (300 000 éléments). La formulation MEF utilisée est celle en potentiel scalaire magnétique au deuxième ordre ce qui requiert une coupure surfacique dans le circuit magnétique (Luong, 1997), (Phung, 2006).

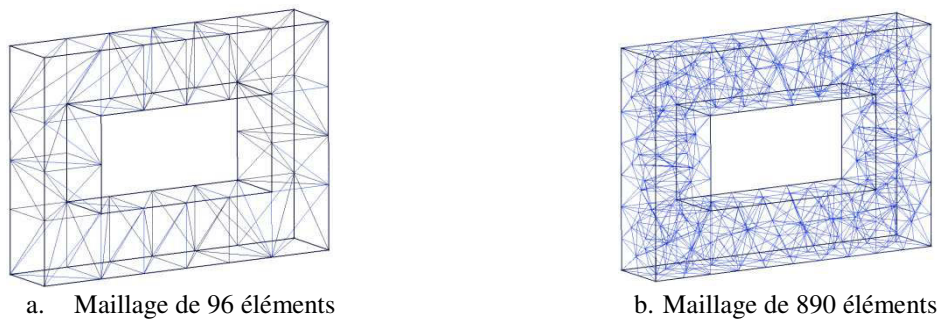


FIG.2.7. Maillages du circuit magnétique

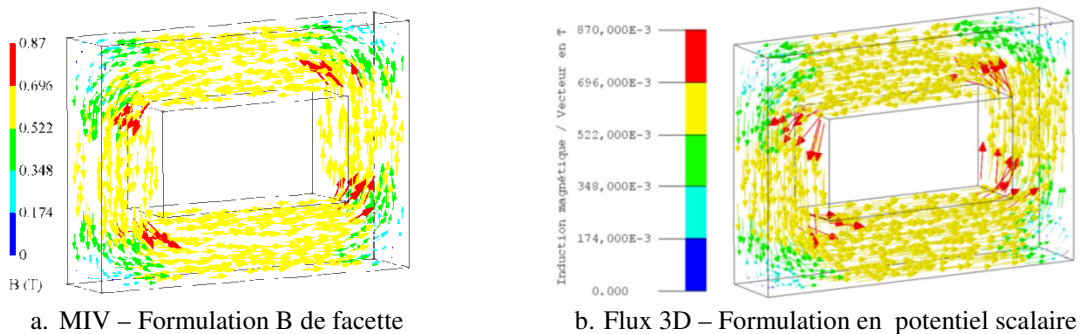


FIG.2.8. Distribution de l'induction magnétique dans le matériau (T)



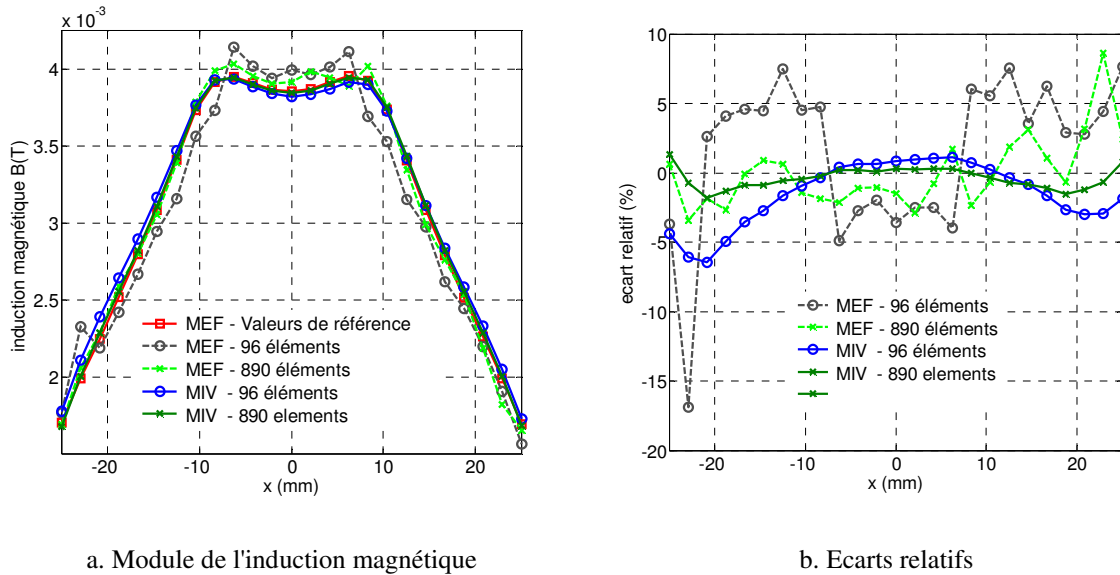


FIG.2.9. Calcul de l'induction magnétique sur le chemin PQ

Les distributions de l'induction magnétique dans le matériau ferromagnétique sont visualisées sur la figure FIG.2.8. Les résultats du calcul de champ sur le chemin PQ obtenus par la MIV et la MEF avec les mêmes maillages (les mêmes nombres d'éléments dans la région active) sont représentés sur la figure FIG.2.9. Nous constatons une bonne adéquation entre les résultats obtenus par les deux méthodes. La MIV est capable de conduire à de bons résultats même si un maillage grossier de 96 éléments est utilisé (les écarts relatifs étant de moins de 6%). Pour le maillage à 890 éléments, la MIV donnent des résultats très proches des valeurs de référence, les écarts relatifs étant inférieurs à 1%. Avec la MEF, les résultats obtenus avec ces deux maillages sont généralement loin des valeurs de référence.

#### 2.2.4.2 Modélisation d'un contacteur magnétique excité par aimant permanent

Considérons un contacteur excité par un aimant permanent dont la géométrie est présentée en figure FIG.2.10. Le matériau du contacteur est non linéaire, modélisée par l'équation (2.44) avec  $\mu_r = 1000$  et  $J_s = 1$  T. L'aimant permanent est caractérisé par son induction rémanente de 1T et une perméabilité relative égale à 1. L'induction magnétique dans l'entrefer sur le chemin MN avec M(-50, 0, 15) et N(50, 0, 15) est calculée.

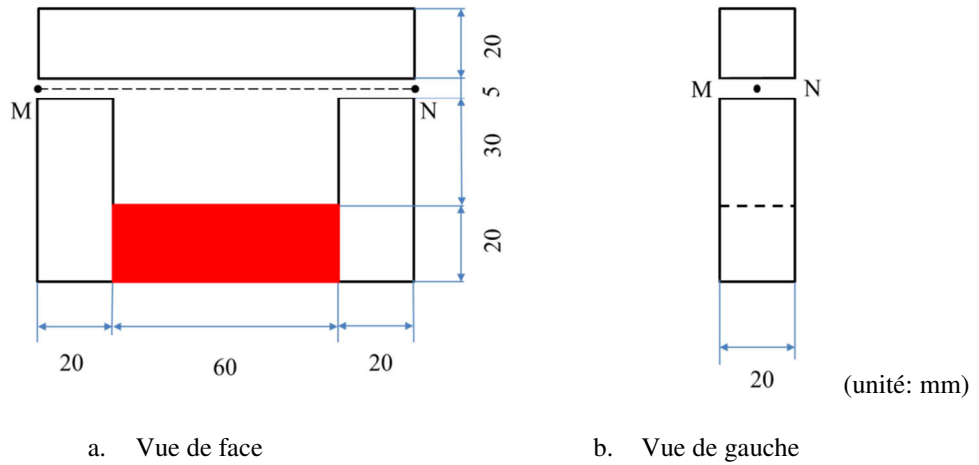


FIG.2.10. Géométrie du contacteur excité par l'aimant permanent

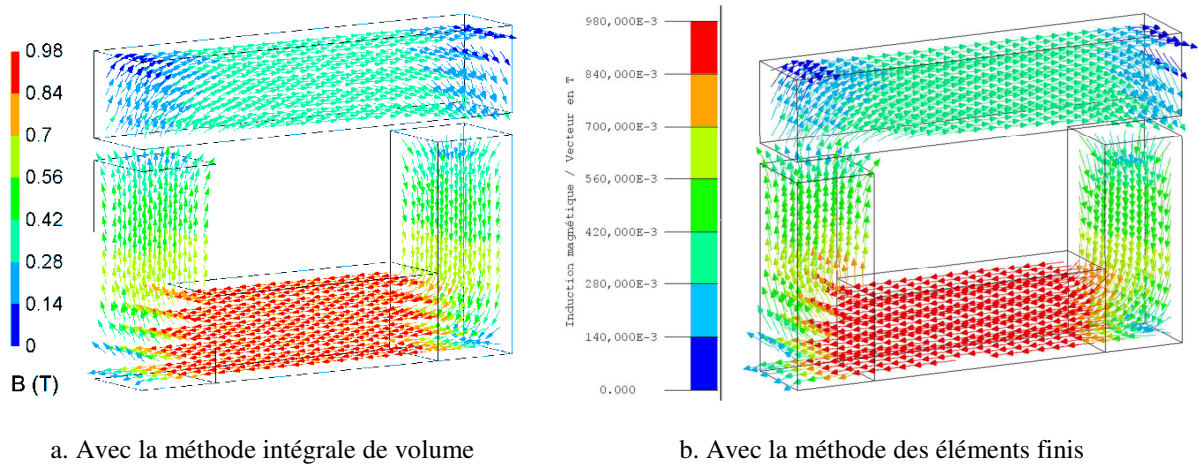
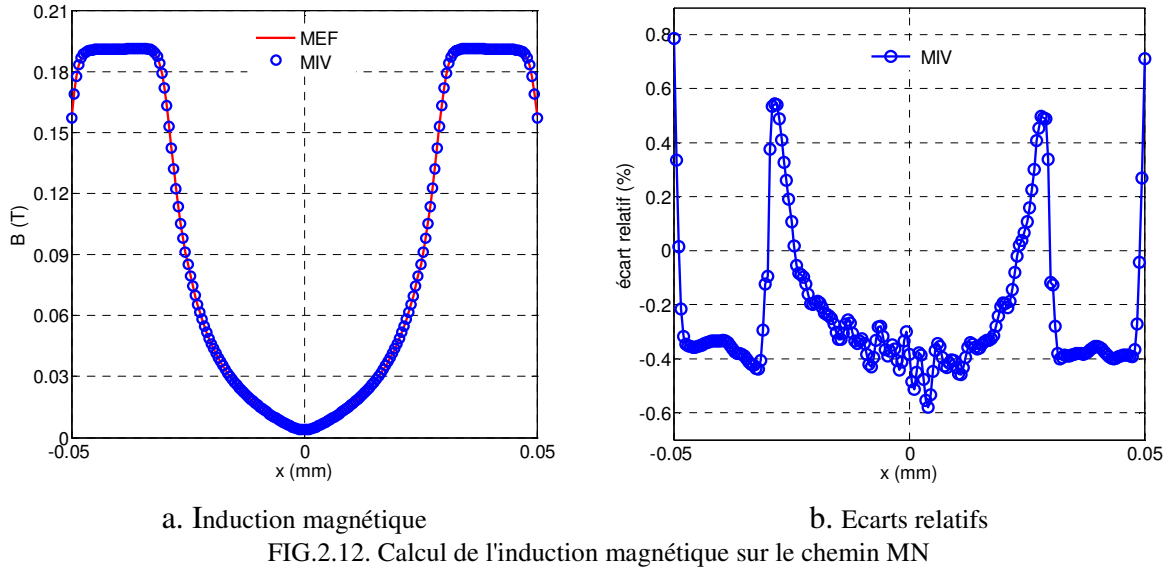


FIG.2.11. Distribution de l'induction magnétique dans le matériau du contacteur

Les distributions de l'induction magnétique dans le matériau par la MIV et par la MEF sont successivement visualisées sur les figures FIG.2.11.a et FIG.2.11.b. Sur la figure FIG.2.12, les inductions magnétiques sur 200 points du chemin MN calculées par la formulation proposée sont présentées. Ces résultats obtenus avec un maillage de 2000 éléments tétraédriques sont comparés avec ceux obtenus par le logiciel Flux3D utilisant un maillage très fin, plus 1 million d'éléments. Nous constatons que les résultats de la formulation proposée sont similaires avec ceux de la référence. L'écart relatif maximum pour le calcul de l'induction magnétique est inférieur à 0.8%. L'étude sur le calcul de la force s'exerçant sur la palette du contacteur sera présentée dans le chapitre 3, à la section §3.3.3.2.



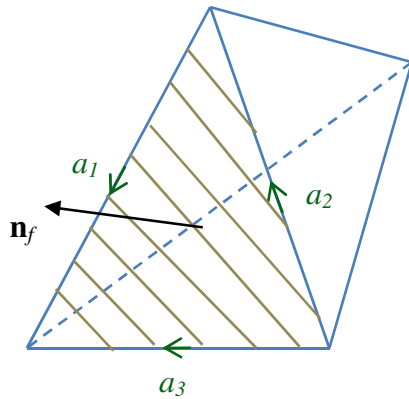
## 2.3 Formulation en potentiel vecteur magnétique

### 2.3.1 Propriétés des éléments d'arête

Appelons  $w_a$  la fonction de forme d'arête d'ordre un de l'arête  $a$  appartenant à une facette  $f$  dans le domaine discrétisé  $\Omega_m$ . Nous rappelons que :

$$\mathbf{rot} w_a \cdot \mathbf{n}_f = \pm \frac{1}{S_f} \quad (2.45)$$

où  $\mathbf{n}_f$  et  $S_f$  sont respectivement le vecteur normal et la surface de la facette  $f$ . Le signe du côté droit dépend de l'orientation de l'arête  $a$  ainsi de celle de la facette  $f$  et est illustrée sur la figure FIG.2.13.



$$\mathbf{rot} w_{a_1} \cdot \mathbf{n}_f = \mathbf{rot} w_{a_2} \cdot \mathbf{n}_f = \frac{1}{S_f}$$

$$\mathbf{rot} w_{a_3} \cdot \mathbf{n}_f = -\frac{1}{S_f}$$

FIG.2.13. Propriétés des éléments d'arête

Pour une facette  $g$  ne contenant pas l'arête  $a$ , nous avons  $\mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{n}_g = 0$ .

## 2.3.2 Développement de la formulation

### 2.3.2.1 Les équations de base

Le potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ , qui selon sa définition satisfait  $\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , peut être approximé par :

$$\mathbf{A} = \sum_{a=1}^{N_a} \mathbf{w}_a A_a \quad (2.46)$$

avec  $\mathbf{w}_a$  la fonction de forme de l'arête  $a$  et  $A_a$  la circulation du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  le long de l'arête  $a$ .

Nous rappelons que la décomposition du champ magnétique total nous permet d'écrire :

$$[\nu(\mathbf{B})]\mathbf{B} + \mathbf{grad} \varphi_{red} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c \quad (2.47)$$

où  $[\nu(\mathbf{B})]$  est le tenseur de reluctivité magnétique,  $\varphi_{red}$  le potentiel scalaire,  $\mathbf{H}_0$  le champ magnétique source et  $\mathbf{H}_c$  est le champ coercitif de l'aimant permanent. En projetant cette équation sur le domaine discrétisé  $\Omega_m$  par la méthode de Galerkin en utilisant  $\mathbf{rot} \mathbf{w}_b$  comme fonctions de projection, nous obtenons l'équation intégrale :

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot [\nu(\mathbf{B})]\mathbf{B} d\Omega_m + \int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} d\Omega_m = \int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \quad (2.48)$$

Comme  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{N_a} \left( \int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot [\nu(\mathbf{B})] \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_a d\Omega_m \right) A_a + \int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} d\Omega_m \\ = \int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \end{aligned} \quad (2.49)$$

En écrivant (2.49) successivement pour les  $\mathbf{w}_b$  différents ( $b = 1, 2, \dots, N_a$ ) nous obtenons :

$$\mathbf{R}^\alpha \mathbf{A} + \mathbf{I}^\alpha = \mathbf{Q}_0 \quad (2.50)$$

où  $\mathbf{A}$  est le vecteur des inconnues  $A_a$ . La matrice  $\mathbf{R}^\alpha$ , les vecteur  $\mathbf{I}^\alpha$  et  $\mathbf{Q}_0$  sont définis par :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{ba}^\alpha &= \int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot [\nu(\mathbf{B})] \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_a d\Omega_m \\
 \mathbf{Q}_{0b} &= \int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) d\Omega_m \\
 \mathbf{I}_b^\alpha &= \int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} d\Omega_m
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

avec  $b = 1, 2, \dots, N_a$  et  $a = 1, 2, \dots, N_a$

La matrice  $\mathbf{R}^\alpha$  et le vecteur  $\mathbf{Q}_0$  peuvent être calculés sans aucune difficulté. Il nous reste le vecteur  $\mathbf{I}^\alpha$  à développer.

### 2.3.2.2 Développement du terme intégral

L'identité vectorielle suivante est vérifiée :

$$\mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} = \text{div}(\varphi_{red} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b) \tag{2.52}$$

En appliquant cette identité et le théorème de la divergence, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{I}_b^\alpha = \int_{\Omega_m} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} d\Omega_m = \int_{\Omega_m} \text{div}(\varphi_{red} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b) d\Omega_m = \int_{\Gamma} \varphi_{red} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n} d\Gamma \tag{2.53}$$

où  $\Gamma$  est la frontière du domaine  $\Omega_m$ .

Le potentiel scalaire réduit  $\varphi_{red}$  peut être calculé par :

$$\varphi_{red} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \tag{2.54}$$

Grâce à la loi de comportement des matériaux magnétiques :

$$\mathbf{M} = \nu_0 \mathbf{B} - [\nu(\mathbf{B})] \mathbf{B} + \mathbf{H}_c \tag{2.55}$$

nous pouvons écrire :

$$\varphi_{red} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} ([\nu_0 - \nu(\mathbf{B})] \mathbf{B} + \mathbf{H}_c) \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \tag{2.56}$$

En notant que  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ , l'approximation de  $\varphi_{red}$  en fonction des inconnues  $\mathbf{A}_a$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\varphi_{red} = \frac{1}{4\pi} \sum_{a=1}^{N_a} \left( \int_{\Omega_m} [v_0 - v] \mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \right) A_a + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \quad (2.57)$$

Nous avons donc :

$$\mathbf{I}_b^\alpha = \frac{1}{4\pi} \sum_{a=1}^{N_a} \left( \int_{\Gamma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n} \left( \int_{\Omega} [v_0 - v] \mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \right) d\Gamma \right) A_a + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n} \left( \int_{\Omega_m} \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \right) d\Gamma \quad (2.58)$$

L'utilisation des éléments d'arête au premier ordre associé avec la circulation du potentiel vecteur magnétique impose l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  constante dans chaque élément volumique. La perméabilité est donc constante par morceaux. Le domaine  $\Omega_m$  peut être donc considéré comme plusieurs sous-régions à caractéristique linéaire isotrope. En appliquant l'identité (2.52) et le théorème de la divergence, les intégrales volumiques de l'expression (2.58) peuvent être ramenées sur les bords des éléments volumiques (sur les facettes) :

$$\int_{\Omega_m} [v_0 - v] \mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m = \sum_{f=1}^{N_f} \delta v_f \int_{S_f} (\mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{n}_f) \frac{1}{r} dS_f \quad (2.59)$$

$$\int_{\Omega_m} \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega = \sum_{f=1}^{N_f} \int_{S_f} \frac{\delta \mathbf{H}_{cnf}}{r} dS_f \quad (2.60)$$

où  $N_f$  est le nombre de facette,  $\mathbf{n}_f$  est le vecteur normal de la facette  $f$ ,  $\delta v_f$  et  $\delta \mathbf{H}_{cnf}$  sont déterminés sur la facette  $f$  de la façon suivante :

- Si  $f$  est partagée par deux éléments  $i$  et  $j$  avec  $j > i$  : 
$$\begin{cases} \delta v_f = v_i - v_j \\ \delta \mathbf{H}_{cnf} = \mathbf{H}_{cni} - \mathbf{H}_{cnj} \end{cases} ;$$
- Si  $f$  est au bord du domaine et appartient à l'élément  $j$  : 
$$\begin{cases} \delta v_f = v_0 - v_j \\ \delta \mathbf{H}_{cnf} = -\mathbf{H}_{cnj} \end{cases} .$$

Cela conduit à l'écriture de  $\mathbf{I}_b^\alpha$  :

$$\mathbf{I}_b^\alpha = \frac{1}{4\pi} \sum_{a=1}^{N_a} \left( \int_{\Gamma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n} \left( \sum_{f=1}^{N_f} \delta v_f \int_{S_f} (\mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{n}_f) \frac{1}{r} dS_f \right) d\Gamma \right) A_a + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n} \left( \sum_{f=1}^{N_f} \int_{S_f} \frac{\delta \mathbf{H}_{cnf}}{r} dS_f \right) d\Gamma$$

(2.61)

Ou encore :

$$\mathbf{I}_b^\alpha = \sum_{a=1}^{N_a} \mathbf{L}_{ba}^\alpha A_a + \mathbf{W}_{0b} \quad (2.62)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ba}^\alpha &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n} \left( \sum_{f=1}^{N_f} \delta v_f \int_{S_f} (\mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{n}_f) \frac{1}{r} dS_f \right) d\Gamma \\ \mathbf{W}_{0b} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_b \cdot \mathbf{n} \left( \sum_{f=1}^{N_f} \int_{S_f} \frac{\delta H_{cnf}}{r} dS_f \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.63)$$

En considérant la propriété des éléments d'arête (2.45),  $\mathbf{L}_{ba}^\alpha$  et  $\mathbf{W}_{0b}$  peuvent également être exprimés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ba}^\alpha &= \frac{1}{4\pi} \sum_{g=1}^{N_{fb}} \frac{1}{S_{gb}} \int_{S_g} \left( \sum_{f=1}^{N_{fa}} \frac{\delta v_f}{S_{fa}} \int_{S_f} \frac{1}{r} dS_f \right) dS_g \\ \mathbf{W}_{0b} &= \sum_{g=1}^{N_{fb}} \frac{1}{S_{gb}} \int_{S_g} \left( \sum_{f=1}^{N_{fa}} \int_{S_f} \frac{\delta H_{cnf}}{r} dS_f \right) dS_g \end{aligned} \quad (2.64)$$

Dans lesquelles  $N_{fb}$  est nombre des facettes contenant l'arête  $b$  et  $N_{fa}$  pour l'arête  $a$  ;  $S_{gb}$  est la surface de la facette  $g$  signée en fonction de l'orientation de l'arête  $b$  à la facette  $g$ , idem pour  $S_{fa}$ . Le vecteur  $\mathbf{W}_0$  est nul s'il n'y a pas de régions contenant des aimants permanents.

### 2.3.2.3 Mise en équation et résolution

A partir de (2.50) et (2.62) nous trouvons le système d'équations final pour la formulation A d'arête :

$$\left( \mathbf{R}^\alpha + \mathbf{L}^\alpha \right) \mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{W}_0 \quad (2.65)$$

Ici,  $\mathbf{R}^\alpha$  est une matrice creuse de type "éléments finis" de taille  $N_a \times N_a$ , qui représente les interactions proches entre les arêtes.  $\mathbf{L}^\alpha$  est une matrice pleine de type intégral de taille  $N_{a\Gamma} \times N_a$  avec  $N_{a\Gamma}$  nombre d'arêtes sur la frontière du domaine. En général,  $N_{a\Gamma} \ll N_a$ .

Le potentiel vecteur magnétique n'est pas unique car sa divergence n'est pas définie. L'utilisation d'une condition de jauge par arbre (Albanese and Rubinacci, 1990), (Dular et al.,

1995) nous permet de garantir l'unicité de la solution. Toutefois, en pratique, le système d'équations de la formulation A d'arête (2.65) peut être résolu par un solveur itératif (GMRES par exemple) sans employer de jauge. Ceci est lié au fait que le système (2.65) est compatible (compatibilité du second membre) selon les travaux de Ren (Ren, 1996).

Comme la formulation B de facette, la formulation A d'arête est également adaptée à l'utilisation de la méthode de Newton Raphson pour la résolution des problèmes non linéaires.

### 2.3.3 Passage de la formulation en flux magnétique à la formulation en potentiel vecteur

Les deux formulations B de facette et A d'arête forment la famille des formulations du type-b. En pratique, l'utilisation de l'approche à géométrie discrète (Specogna and Trevisan, 2008), (Bossavit and Kettunen, 2000) nous permet d'obtenir le système d'équations de la formulation A d'arête de façon indirecte par le biais de la formulation B de facette (Meunier et al., 2015). Considérons le maillage primal du domaine discrétisé  $\Omega_m$  et ses matrices d'incidence : C reliant les facettes et les arêtes et D reliant les éléments volumes (cellules) et les facettes. Sur le maillage dual qui définit le circuit équivalent, la matrice d'incidence reliant les arêtes et les facettes s'écrit :  $\tilde{C} = C^T$  ( $C^T$  est la transposée de la matrice C).

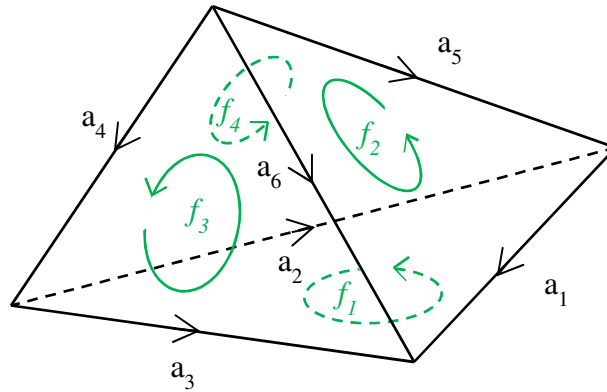


FIG.2.14. Approche de géométrie discrète sur un tétraèdre

Pour un élément tétraédrique du premier ordre  $e$  comprenant six arêtes  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$  et quatre facettes  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  comme sur la figure FIG.2.14, Les matrice C et D s'écrivent comme suit :

$$C_e = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{\text{facette, arête}}$$



$$\mathbf{D}_e = [-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1]_{cellule, facette}$$

Notons bien que  $\mathbf{DC} = 0$  (Bossavit and Kettunen, 2000).

La matrice  $\mathbf{C}$  nous permet de relier les flux magnétiques sur les facettes du tétraèdre avec les circulations du potentiel vecteur sur des arêtes. En effet, la définition du potentiel vecteur  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  conduit à l'écriture :

$$\Phi_{facet} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{edge} A_{edge} \quad (2.66)$$

Sur le tétraèdre d'exemple, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -A_1 - A_2 + A_3 \\ \Phi_2 &= -A_1 - A_5 + A_6 \\ \Phi_3 &= A_3 + A_4 - A_6 \\ \Phi_4 &= A_2 + A_4 - A_5 \end{aligned}$$

où  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) est la circulation du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  sur l'arête  $i$  et  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) est le flux magnétique traversant la facette  $j$ .

Généralement, sur le maillage primal du domaine discrétisé  $\Omega_m$ , la relation entre le vecteur des flux traversant des facettes et celui des circulations du potentiel sur des arêtes s'écrit :

$$\Phi = \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (2.67)$$

où  $\Phi$  est le vecteur des flux magnétiques traversant des facettes et  $\mathbf{A}$  est le vecteur des circulations du potentiel vecteur sur les arêtes.

Dans la section § 2.2.2.3, le système d'équations de la formulation  $\mathbf{B}$  de facette s'écrit :

$$(\mathbf{R} + \mathbf{L})\Phi + \Delta \bar{\varphi}_{red} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0 \quad (2.68)$$

En appliquant l'approche de géométrie discrète, le vecteur  $\Delta \bar{\varphi}_{red}$  peut être écrit par :

$$\Delta \bar{\varphi}_{red} = \mathbf{D}^T \bar{\Psi}_{red} \quad (2.69)$$

où  $\bar{\Psi}_{red}$  est le vecteur des potentiels scalaires réduits sur les nœuds du maillage dual,  $\mathbf{D}^T$  est la transposée de la matrice  $\mathbf{D}$ . Comme  $\mathbf{DC} = 0$ , nous avons :

$$\mathbf{C}^T \Delta \bar{\varphi}_{red} = \mathbf{C}^T \mathbf{D}^T \bar{\Psi}_{red} = 0 \quad (2.70)$$

En utilisant les relations (2.67) et (2.70), l'équation (2.68) peut être simplifiée :

$$\mathbf{C}^T (\mathbf{R} + \mathbf{L}) \mathbf{C} \mathbf{A} = \mathbf{C}^T (\mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0) \quad (2.71)$$

Nous retrouvons le système d'équations de la formulation **A** d'arête. Dans le cadre de ces travaux, le système (2.71) est utilisé.

Rappelons-nous que l'utilisation des mailles indépendantes pour l'équation (2.68) nous permet d'obtenir le système d'équations de la formulation **B** de facette :

$$\mathbf{P} (\mathbf{R} + \mathbf{L}) \mathbf{P}^T \Phi_m = \mathbf{P} (\mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0) \quad (2.72)$$

où **P** est la matrice d'incidence reliant les mailles indépendantes et les facettes,  $\Phi_m$  est le vecteur des flux de maille indépendante.

A partir de (2.71) et (2.72) nous constatons que l'utilisation de la matrice d'incidence reliant les arêtes et les facettes au lieu de matrice d'incidence des mailles indépendantes permet de passer de la formulation **B** de facette à la formulation **A** d'arête. Le système (2.68) peut être donc résolu soit avec les flux de mailles indépendants, soit avec les circulations du potentiel vecteur sur les arêtes.

## 2.3.4 Application : Résolution du problème TEAM Workshop 13

### 2.3.4.1 Présentation et modèle du problème

Le problème TEAM Workshop 13 est un problème benchmark en magnétostatique non linéaire défini dans le TEAM (Testing Electromagnetic Analysis Methods) Workshop, (Nakata and Fujiwara, 1992), (Nakata et al., 1995). Son modèle est représenté sur les figures FIG.2.15 et FIG.2.16. Deux U en acier sont placés sur les deux côtés d'une plaque en acier qui est entouré par une bobine de courant continu. Les plaques en acier ont des propriétés ferromagnétiques non linéaires spécifiées par la courbe B(H) de la figure FIG.2.16.b pour des inductions inférieures à 1,8 Tesla. La courbe pour les inductions magnétiques fortes ( $B > 1,8$  T) est approximée comme suit :

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \mathbf{H} + (-2,822 \cdot 10^{-10} \mathbf{H}^2 + 2,529 \cdot 10^{-5} \mathbf{H} + 1,591) & (1,8\text{T} \leq \mathbf{B} \leq 2,2\text{T}) \\ \mu_0 \mathbf{H} + 2,16 & (\mathbf{B} > 2,2\text{T}) \end{cases} \quad (2.73)$$

Les forces magnétomotrices de la bobine d'excitation sont de 1000 At et 3000 At, ce qui est suffisant pour saturer les plaques.

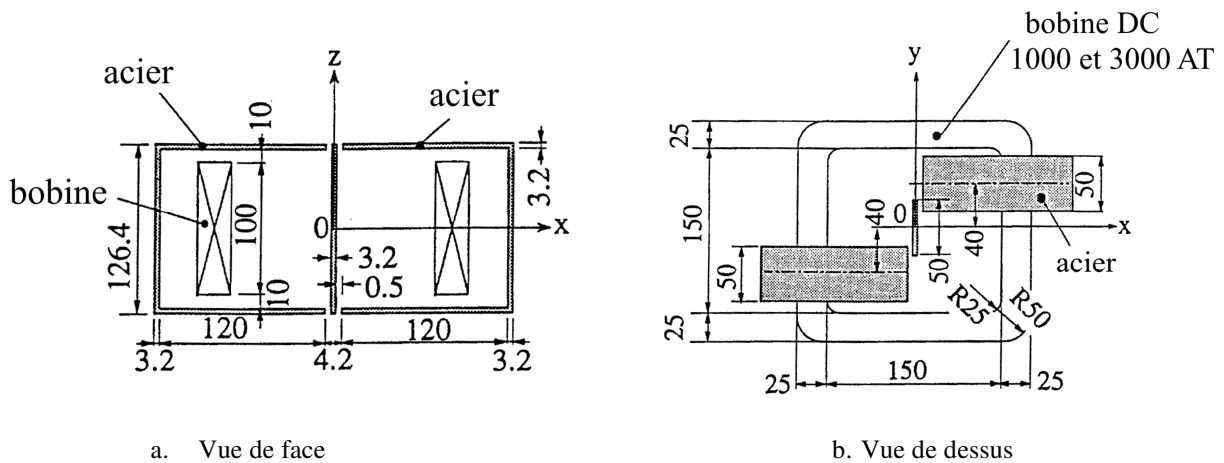


FIG.2.15. Modèle du problème TEAM 13 (Nakata et al., 1995)

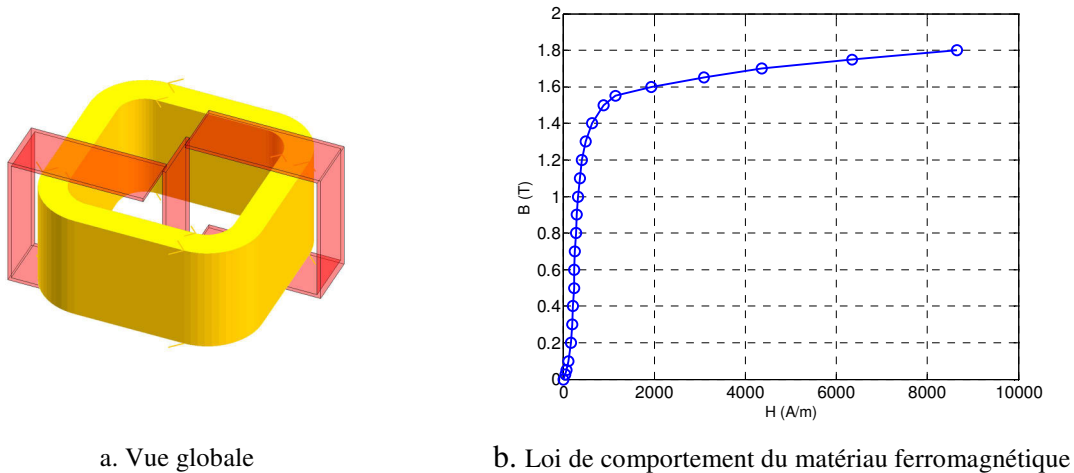


FIG.2.16. Description du problème TEAM 13

L'objectif du problème est de calculer l'induction magnétique moyenne sur différentes sections dans le matériau (sur les chemins A-B, C-D, E-F) ainsi que de calculer l'induction magnétique sur le chemin *ab* dans l'air comme illustré sur la figure FIG.2.17. Les résultats obtenus seront confrontés avec ceux obtenus par la mesure.

Ce problème a reçu une grande attention de la part de la communauté de modélisation électromagnétique depuis son apparition en 1990. De nombreuses (plus de trente) séries de résultats du problème, par différents groupes de chercheurs utilisant diverses méthodes, ont été proposées dans la littérature. Datant du début des années 90, la majorité de ces résultats est synthétisée dans (Nakata and Fujiwara, 1992), (Nakata et al., 1995). Les travaux se basant sur la MIV sont ceux de (Kettunen and Turner, 1992b), (Gimignani et al., 1994), (Vishnevsky et

al., 2002), (Balasubramanian et al., 2002b), (Morandi et al., 2010), (Young and Gedney, 2011), (Carpentier, 2013), (Le Van et al., 2015a).

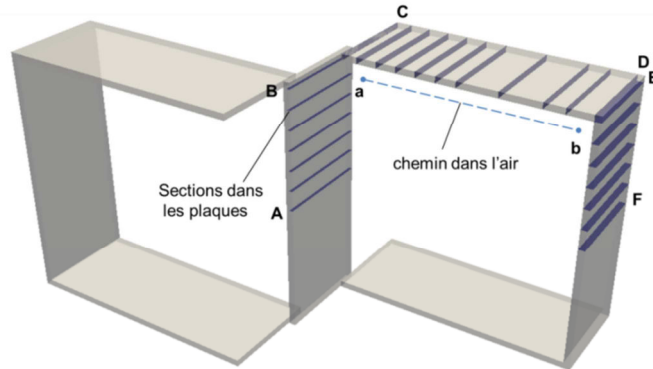


FIG.2.17. Positions des sections dans les plaques et des points dans l'air

La présence d'entrefers étroits entre les plaques d'aciers de faible épaisseur ainsi que la courbe  $B(H)$  non linéaire raide du matériau sont les principales difficultés du problème TEAM 13. Suivant la formulation utilisée, il est très souvent nécessaire d'utiliser des maillages fins afin de garantir des résultats précis.

#### 2.3.4.2 Résolution et résultats

Ce problème a été résolu par la formulation **B** de facette en utilisant trois maillages tétraédriques différents ayant respectivement 1 235, 4 855 et 20 737 éléments (FIG.2.18). La courbe  $B(H)$  est approximée par une interpolation du type *spline* et la non linéarité du matériau est traitée par la méthode de Newton Raphson classique. Le critère d'arrêt de la méthode Newton Raphson est pris tel que :

$$\left\| \Phi_m^k - \Phi_m^{k-1} \right\| < 10^{-7} \quad (2.74)$$

où  $k$  et  $k-1$  sont deux itérations consécutives.

Le système linéaire est résolu par un solveur itératif de type GMRES (Generalized Minimal Residual Method) avec un critère d'arête relatif de  $10^{-8}$ .

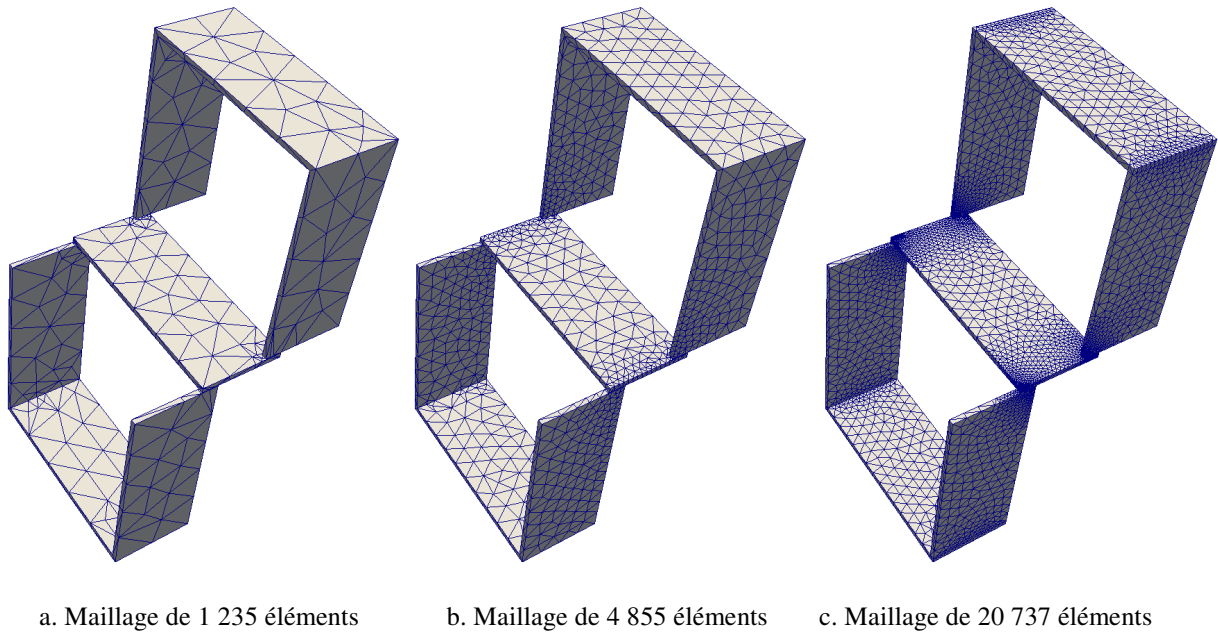


FIG.2.18. Maillages du problème 13

**a) Avec la force magnétomotrice 1000 At**

La figure FIG.2.19 montre la distribution de l'induction magnétique dans les plaques d'acier. L'induction dans la plaque centrale se situe sur le coude de la courbe B (H) tandis que les deux U en acier restent dans la zone linéaire. Les inductions magnétiques moyennes sur les sections dans le matériau et les inductions magnétiques sur les points dans l'air sont tracées respectivement sur les figures FIG.2.20 et FIG.2.21.

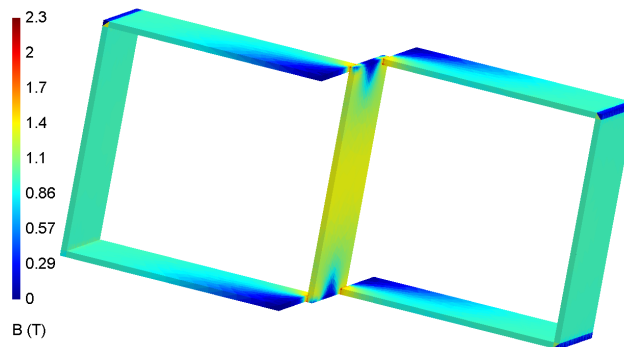


FIG.2.19. Distribution de l'induction magnétique dans le matériau (1000 At)

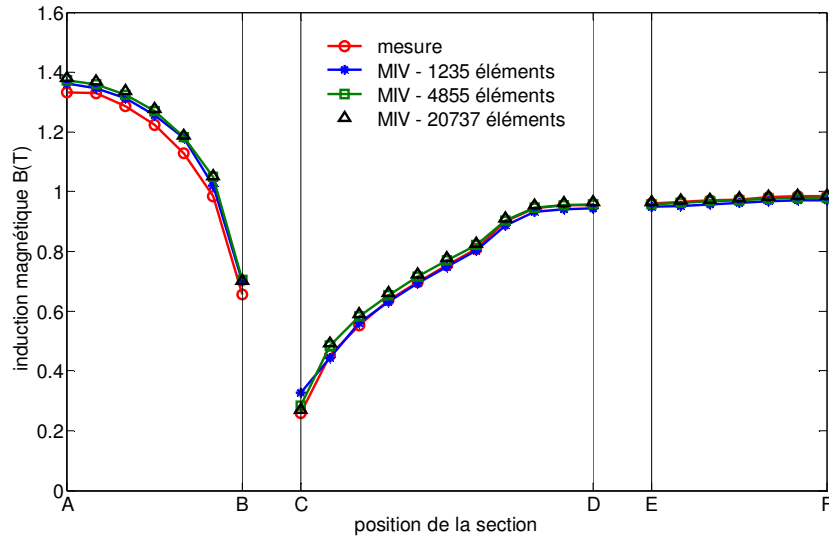


FIG.2.20. Induction magnétique moyenne sur les sections dans le matériau (1000 At)

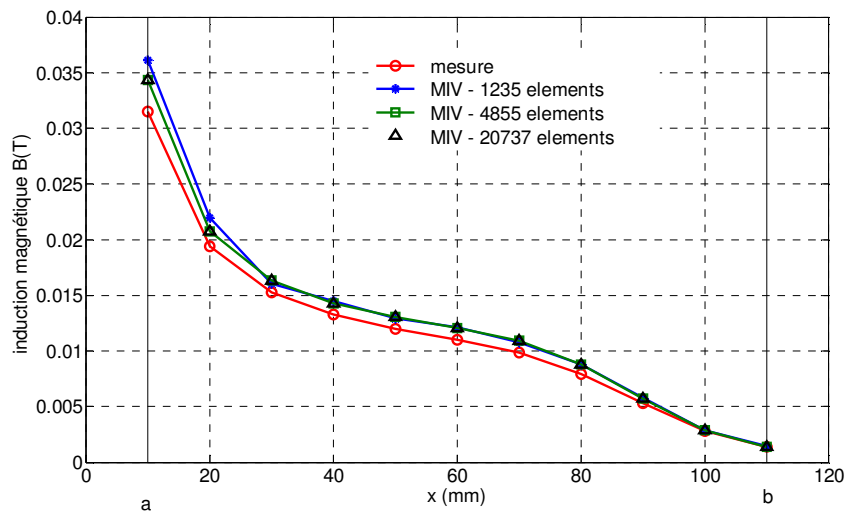


FIG.2.21. Induction magnétique sur les points dans l'air (1000 At)

Les résultats calculés numériquement sont proches de ceux obtenus par la mesure, surtout dans le matériau. Les deux maillages de 4855 éléments et de 20737 éléments nous donnent des résultats presque identiques, dans le matériau comme dans l'air. Ceci permet de conclure que la convergence est assurée avec un maillage de 4855 éléments. En outre le maillage le plus grossier de 1235 éléments est capable de conduire à un résultat de bonne qualité. Ces deux maillages (1235 et 4855 éléments) restent très grossiers comparativement aux maillages utilisés par les autres auteurs dans les références citées ci-dessus.

**b) Avec la force magnétomotrice 3000 At**

Une force magnétomotrice de 3000 At sature la plupart du domaine ferromagnétique. La distribution de l'induction magnétique dans les plaques est montrée sur la figure FIG.2.22.

Nous constatons que la plupart du circuit est saturée. Les inductions magnétiques moyennes sur les sections dans le matériau et les inductions magnétiques sur les points dans l'air sont présentées respectivement sur les figures FIG.2.23 et FIG.2.24. Les remarques pour les résultats donnés par la source d'excitation 1000 At restent valables avec la source d'excitation 3000 At. Cette fois, l'utilisation du maillage de 1235 éléments nous donne des résultats très proches de ceux obtenus à la convergence. Ceci peut s'expliquer par la saturation du circuit magnétique.

Dans les deux scénarios (1000At et 3000At), il existe toujours un écart visible entre les inductions magnétiques calculées dans l'air et celles expérimentales. Cependant, ce même écart a déjà été rapporté dans la littérature (Nakata and Fujiwara, 1992), (Simkin, 1990).

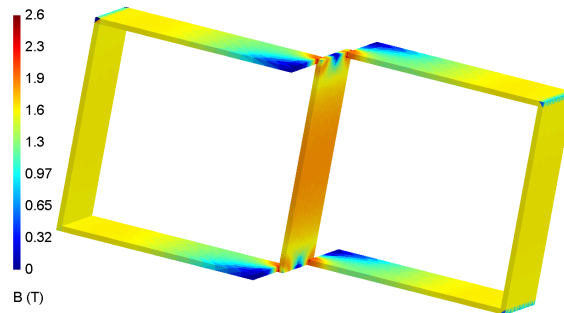


FIG.2.22. Distribution de l'induction magnétique dans le matériau (3000 At)

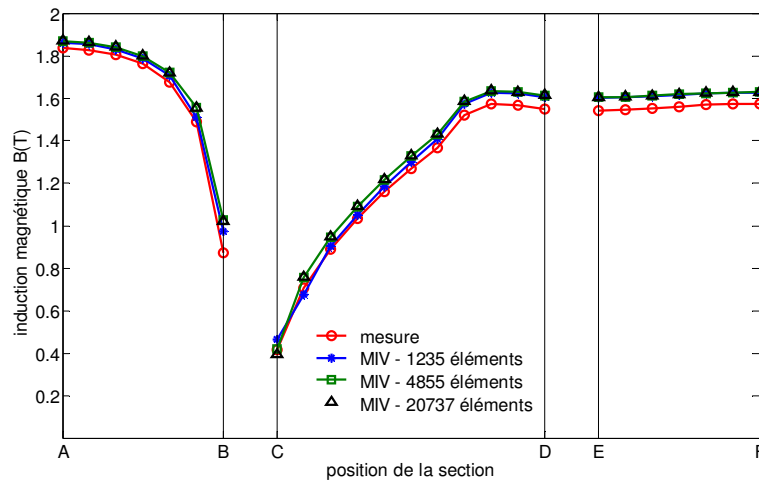


FIG.2.23. Induction magnétique moyenne sur les sections dans le matériau (3000 At)

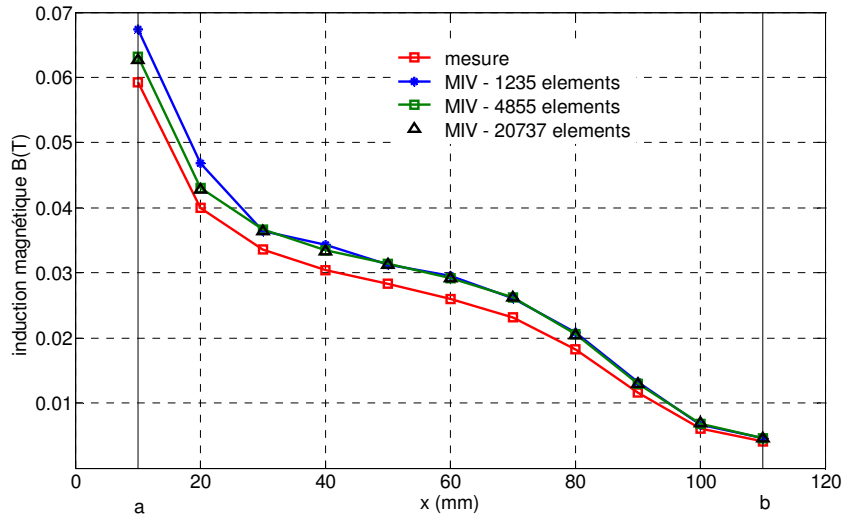


FIG.2.24. Induction magnétique sur les points dans l'air (3000 At)

**c) Coût de calcul**

Pour chaque maillage utilisé, le nombre d'inconnues, la mémoire requise pour le stockage des matrices ainsi que le nombre d'itérations de Newton Raphson et le temps de calcul sont reportés dans le tableau TAB 2.1. Le temps de calcul est la somme des temps de construction du second membre, d'assemblage des matrices ainsi que de la résolution de Newton Raphson. Tous les calculs sont réalisés sur un ordinateur standard de CPU Intel Core i7-2600 de 3.4 GHz, OS 32 bits, 3Go de RAM.

TAB 2.1 – Informations concernant la résolution du problème 13						
Maillage (nombre d'éléments)	Nombre d'inconnus	Mémoire requise (Mo)	Source 1000 At		Source 3000 At	
			Nombre d'itérations	Temps de calcul (s)	Nombre d'itérations	Temps de calcul (s)
1 235	2 180	21	5	7	13	16
4 855	8 319	304	5	55	13	98
20 737	33 697	5 776/213*	5	5104*	13	7 786*

\* : avec compression AMLFMM (Adaptative Multi Level Fast Multipole Method)

## 2.4 Comparaison des formulations intégrales de volume pour la résolution de problèmes magnéto-statiques non linéaires

### 2.4.1 Introduction

Dans les parties précédentes, les deux formulations – l'une en flux magnétique et l'autre en potentiel vecteur sont développées. Ces deux formulations sont dites des formulations de *type b*. Comme abordé dans le chapitre précédent, les formulations de *type h* ont été largement



utilisées par plusieurs chercheurs. Au laboratoire G2Elab, la formulation en potentiel scalaire –  $\varphi$  nodal a été mise en place grâce aux travaux de la thèse de Carpentier (Carpentier, 2013).

Nous allons donc dans cette partie faire une comparaison entre les formulations **B** de facette, **A** d'arête et  $\varphi$  nodal (approche par collocation) pour la résolution de deux problèmes magnétostatiques non linéaires. Le premier est un cube excité par une bobine et le deuxième est le problème TEAM 13.

## 2.4.2 Comparaison les systèmes d'équations à résoudre

Le tableau TAB 2.2 représente un bilan des systèmes équations à résoudre pour les formulations intégrales.

TAB 2.2 – Systèmes d'équations à résoudre pour les formulations			
	Formulation <b>B</b> de facette	Formulation <b>A</b> d'arête	Formulation $\varphi$ nodal (approche par collocation)
Système d'équations	$\mathbf{P}(\mathbf{R}+\mathbf{L})\mathbf{P}^T\Phi_m = \mathbf{P}(\mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0)$	$\mathbf{C}^T(\mathbf{R}+\mathbf{L})\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{C}^T(\mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0)$	$(\mathbf{I} + \mathbf{L}^\varphi)\Theta = \Theta_0$
Matrice FEM	$\mathbf{R}_{gf} = \int_{\Omega_m} \mathbf{w}_g \cdot [\nu] \cdot \mathbf{w}_f d\Omega_m$		matrice d'identité
Matrice intégrale	$\mathbf{L}_{gf} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta\nu_f}{S_g S_f} \int_{\Gamma_g} \int_{F_f} \frac{1}{r} dF_f d\Gamma_g$	$\mathbf{L}_{ij}^\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_m} (\mu(\mathbf{H}) - 1) \frac{\mathbf{grad} w_{nj} \cdot \mathbf{r}_i}{r_i^3} d\Omega_m$	
Degrés de liberté	nombre de mailles indépendantes		nombre de nœuds - 1
Dimension des matrices			

Les formulations A d'arête et B de facette sont similaires. Ces deux formulations ont les mêmes matrices d'interaction. Leur matrice intégrale **L** est une matrice rectangulaire de taille  $N_{ff} \times N_f$  avec  $N_{ff} < N_f$ . Tandis que la matrice intégrale  $\mathbf{L}^\varphi$  de la formulation  $\varphi$  est une matrice carrée, de dimension  $N_n \times N_n$ . Si l'intégration de la matrice **L** peut être calculée par des intégrales surfaciques, celle de la matrice  $\mathbf{L}^\varphi$  est en volumique. En outre, si la méthode de

Newton Raphson est utilisée pour la résolution de problèmes non linéaires, la matrice  $\mathbf{L}^\varphi$  de la formulation en potentiel scalaire doit être recalculée à chaque itération. Pour les formulations de type *b*, nous pouvons calculer la matrice  $\mathbf{L}_0$  une seule fois et puis la mettre à jour par des produits sur les lignes et les colonnes de  $\mathbf{L}$  à chaque itération.

### 2.4.3 Exemples numériques

#### 2.4.3.1 Modélisation d'un cube excité par une bobine

Considérons un cube de dimension  $0,2 \times 0,2 \times 0,2 \text{ m}^3$  excité par une bobine de courant continu de force magnétomotrice 1000 At (figure FIG.2.25.a). La bobine qui entoure le cube est de dimension 0,25 m de largeurs et 0,1 m de hauteur. Sa section est rectangulaire avec une épaisseur 0,015 m. Ses coins sont arrondis avec le rayon intérieur de 0,03 m et le rayon extérieur de 0,045 m. La loi de comportement du matériau est décrite selon (2.44) avec  $\mu_r = 1000$  et  $J_s = 1 \text{ T}$ . La distribution de l'induction magnétique dans le cube est présentée sur la figure FIG.2.25.b. On peut noter que l'induction obtenue est très importante et non réaliste (dû à la source de 1000 A.t). A travers cet exemple non physique, nous présentons le bon comportement de notre code de calcul lorsque le matériau est totalement saturé à certain endroit (ici à proximité de la bobine)

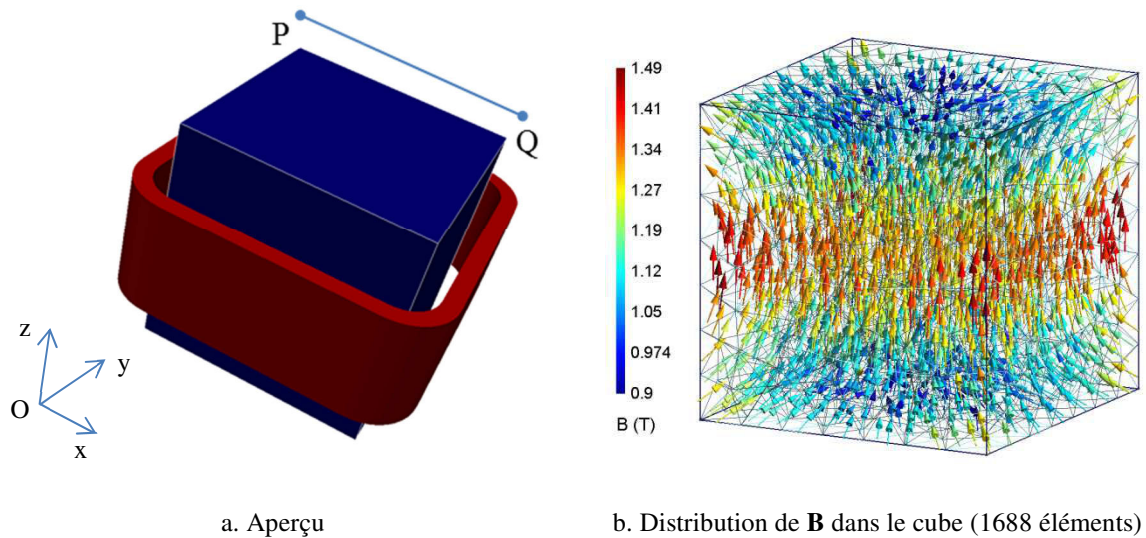


FIG.2.25. Cube excité par une bobine

Les trois formulations :  $\mathbf{B}$  de facette,  $A$  d'arête et  $\varphi$  nodal sont appliquées avec les mêmes paramètres des solveurs. Tous les matrices intégrales sont pleines (aucune méthode de compression matricielle n'est utilisée). Les systèmes non linéaires sont résolus par la méthode de Newton Raphson (NR) avec un critère d'arrête absolu de  $10^{-7}$ . Le solveur itératif GMRES est utilisé pour la résolution le système linéaire avec un critère d'arrête relatif  $10^{-8}$ . L'objectif

est de calculer l'induction magnétique sur le chemin PQ, P(0,14 ; 0 ; 0,2) et Q(-0,14 ; 0 ; 0,2) avec 15 points de calcul. Le résultat fourni par le logiciel Flux3D en utilisant un maillage très fin est considéré comme la référence.

La figure FIG.2.26 représente les inductions magnétiques calculées par les formulations différentes en utilisant un maillage de 335 éléments tétraédriques. Comme l'application des formulations **B** de facette et **A** d'arête donne des résultats presque identiques, une seule courbe est tracée pour ces deux formulations. Nous trouvons que les résultats des *formulations B* (ou **A**) sont beaucoup plus proches de la référence que ceux de la formulation  $\varphi$ . Ceci peut être expliqué par la différence du nombre de degrés de liberté entre deux formulations. En effet, le nombre de degrés de libertés de la *formulation B* est de 443 (nombre de mailles indépendantes) tandis que ce dernier de la *formulation  $\varphi$*  n'est que 121 (nombre de nœuds -1). En utilisant un maillage de 1688 éléments tétraédriques correspondant à 476 nœuds, la *formulation  $\varphi$*  permet d'avoir des résultats comparables avec ceux de la *formulation B*. Toutefois, les valeurs fournies par la formulation **B** restent plus proches de la référence.

L'écart relatif de l'induction magnétique calculé sur un point  $i$  par la MIV par rapport la valeur de référence est défini par:

$$\varepsilon_i (\%) = \frac{\left| \|\mathbf{B}\|_i^{\text{Réf}} - \|\mathbf{B}\|_i^{\text{MIV}} \right|}{\|\mathbf{B}\|_i^{\text{Réf}}} \times 100\%. \quad (2.75)$$

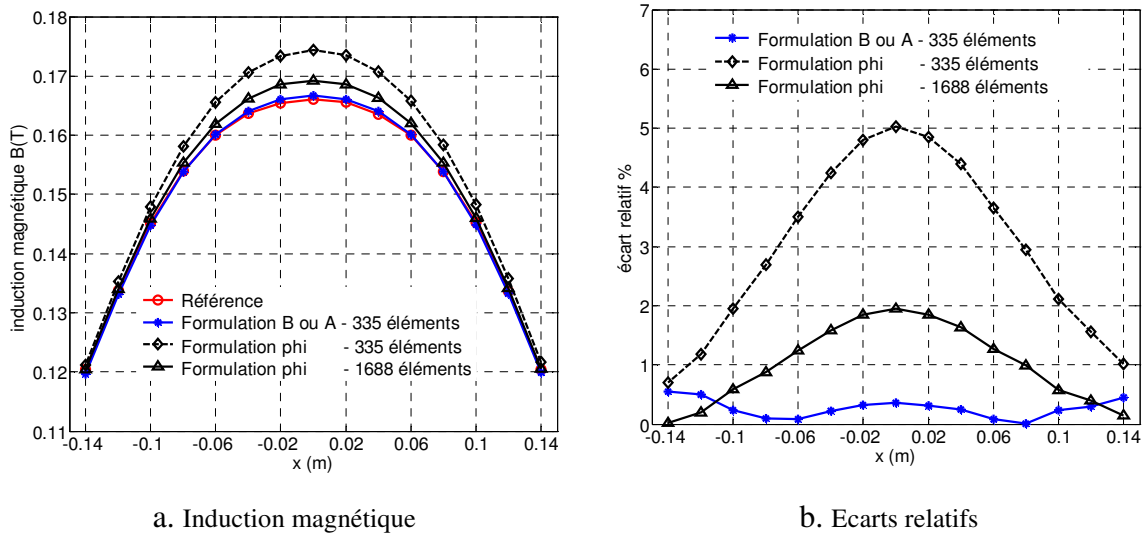


FIG.2.26. Calcul de l'induction magnétique sur le chemin PQ

Nous nous intéresserons maintenant au coût de calcul (temps et mémoire) des formulations en fonction de la précision  $p$  du calcul de l'induction magnétique. Cette dernière est définie par la moyenne des écarts relatifs sur tous les points de calcul :

$$p(\%) = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \varepsilon_i \quad (2.76)$$

Le problème est résolu par une série de maillages différents, variant de 100 à 15000 éléments tétraédriques. Le nombre d'itérations de la méthode de Newton Raphson varie très peu en fonction du nombre d'éléments du maillage: 8 itérations pour la formulation en potentiel scalaire et 4 itérations pour les deux formulations du *type b*. D'une façon générale, plus  $p$  est petit plus le maillage du cube est dense.

Une comparaison du temps de calcul entre les trois formulations, comprenant le temps de résolution et d'assemblage, est présentée sur la figure FIG.2.27. Nous trouvons que quel que soit la précision souhaitée ( $p < 1,5\%$ ), les formulations de *type b* sont toujours plus rapides que celle en potentiel scalaire. La réintégration de la matrice intégrale, le calcul des intégrations en volumique ainsi que le nombre d'itération de Newton Raphson plus important sont les raisons principales pour lesquelles la formulation  $\varphi$  est la plus lente parmi les trois formulations. Pour les formulations de *type b*, la forme de la matrice intégrale est de type éléments surfaciques (bord des régions volumiques) – éléments volumiques, cette dernière pouvant être calculée qu'une seule fois. En outre, l'utilisation d'un résidu avec une loi sous la forme  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$  facilite la convergence des systèmes non linéaires.

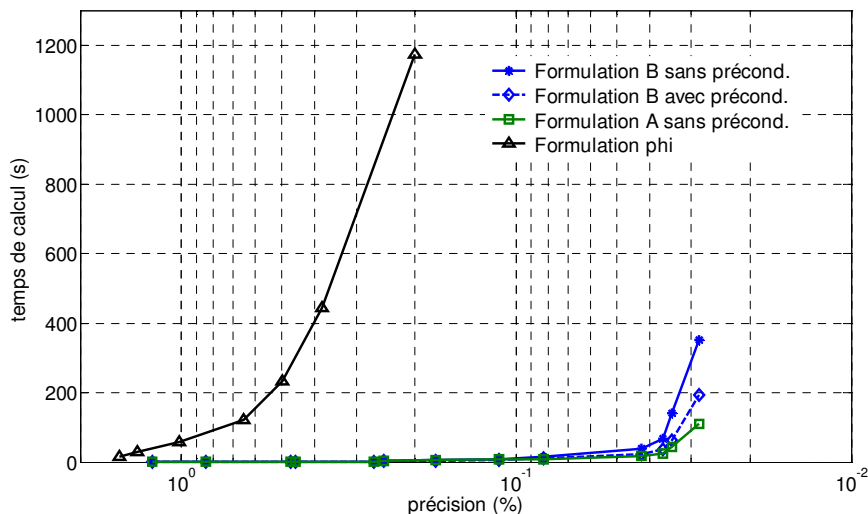


FIG.2.27. Comparaison entre les formulations B, A,  $\varphi$  sur le temps de calcul

La figure FIG.2.28 propose une comparaison entre les deux formulations de *type b*. La formulation **B** de facette est résolue soit avec un préconditionneur (décomposition LU de la

matrice  $\mathbf{R}$ ), soit sans préconditionneur. La formulation **A** est résolue sans préconditionneur. Lorsque les maillages utilisés sont grossiers, nous observons une similarité dans le temps de calcul entre les deux formulations. Quand on souhaite une meilleure précision, la formulation A sans jauge et sans préconditionneur devient la plus rapide. En utilisant le préconditionneur LU, le temps de la formulation **B** devient comparable avec celui de la formulation **A** pour des valeurs de  $p > 0,035\%$ . Avec  $p < 0,035\%$ , les maillages utilisés sont plus denses, l'algorithme de recherche des mailles indépendantes requiert un temps de calcul important (FIG.2.29) ainsi que la décomposition LU qui coûte plus cher. Ainsi, le temps de calcul de la formulation **B** devient plus grand. Quant à la formulation **A**, son système d'équations est compatible. La résolution ne requiert pas donc de jauge lorsque l'on utilise un solveur itératif.

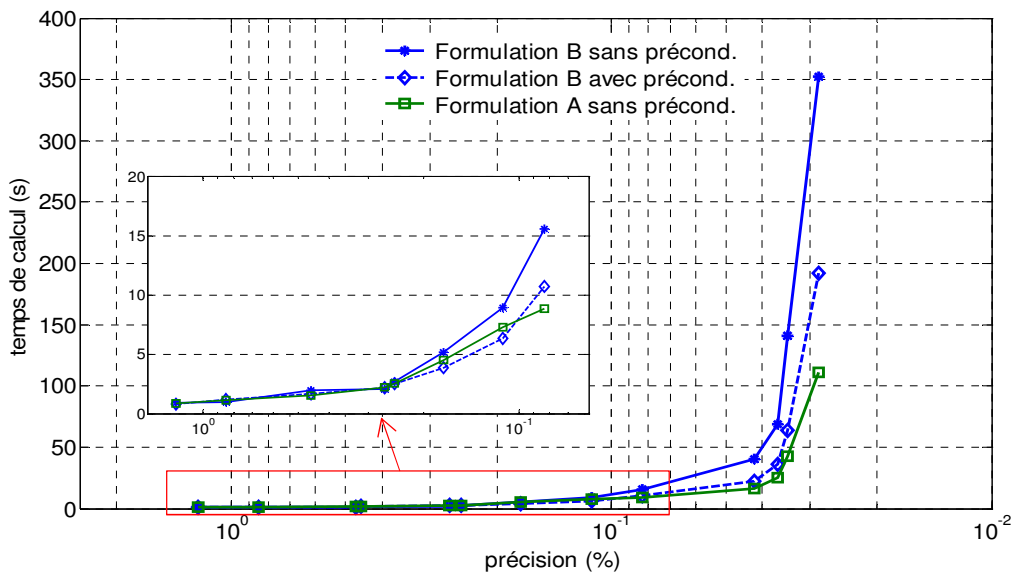


FIG.2.28. Comparaison entre deux formulations B et A sur le temps de calcul

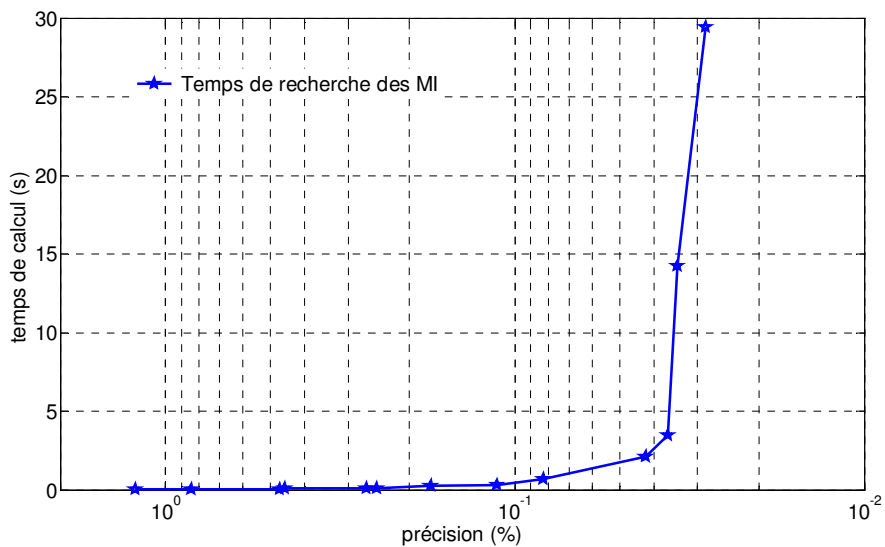


FIG.2.29. Temps de recherche des mailles indépendantes de la formulation B

La figure FIG.2.30 représente les évolutions de la précision  $p$  des formulations en fonction du nombre d'éléments et du nombre de degrés de liberté. Avec le même maillage utilisé, les résultats fournis par les formulations **B** et **A** sont nettement plus précis que ceux de la formulation  $\varphi$ . Si le nombre de degrés de liberté est équivalent, la précision de la formulation  $\varphi$  devient comparable mais toujours supérieur à celle des formulations de type *b*. Par conséquent, pour avoir un même niveau de précision, la formulation en potentiel scalaire demande plus d'espace mémoire que les deux formulations **A** et **B** comme montré sur la figure FIG.2.31.

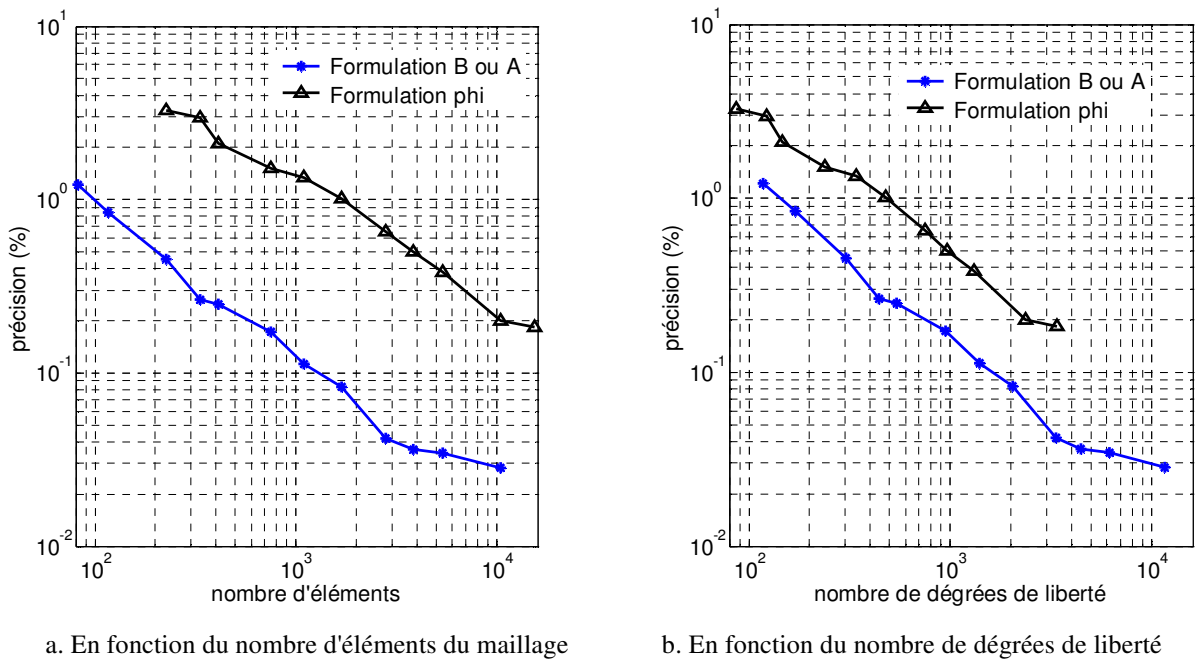


FIG.2.30. Evolution de la précision des formulations

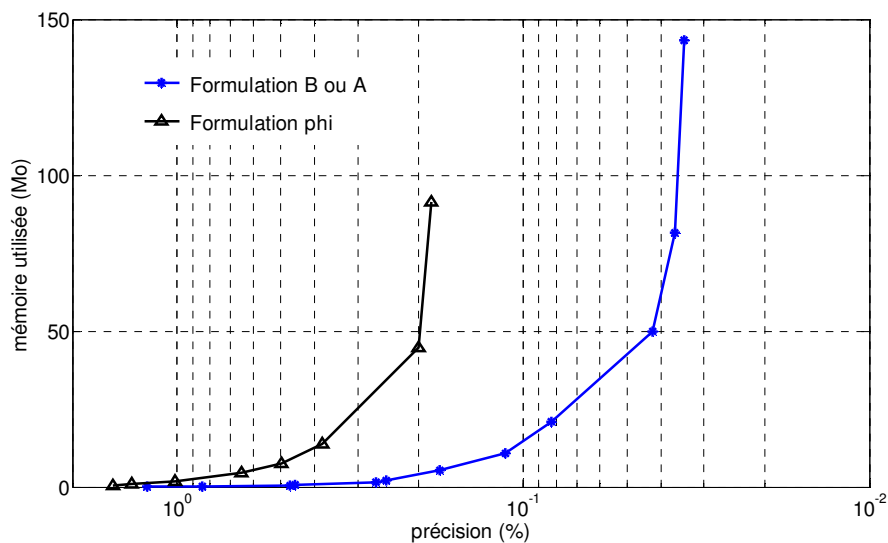


FIG.2.31. Comparaison entre les formulations B, A,  $\varphi$  sur la mémoire nécessaire

### 2.4.3.2 Résolution de problème 13 avec la force magnétomotrice 1000 At

Dans le cadre de la thèse de Carpentier (Carpentier, 2013), le problème TEAM Workshop 13 avec la force magnétomotrice 1000 At a été également résolu par la formulation  $\varphi$  nodal. Les résultats de convergence sont obtenus avec un maillage comportant 30200 éléments tétraédriques. La figure FIG.2.32 représente la comparaison des résultats de l'induction dans le matériau magnétique obtenus par la formulation  $\varphi$  nodal avec ceux de la formulation A d'arête. Cette dernière utilise un maillage de 4855 éléments tétraédriques. Les écarts relatifs par rapport aux données mesurées sont présentés sur la figure FIG.2.33.

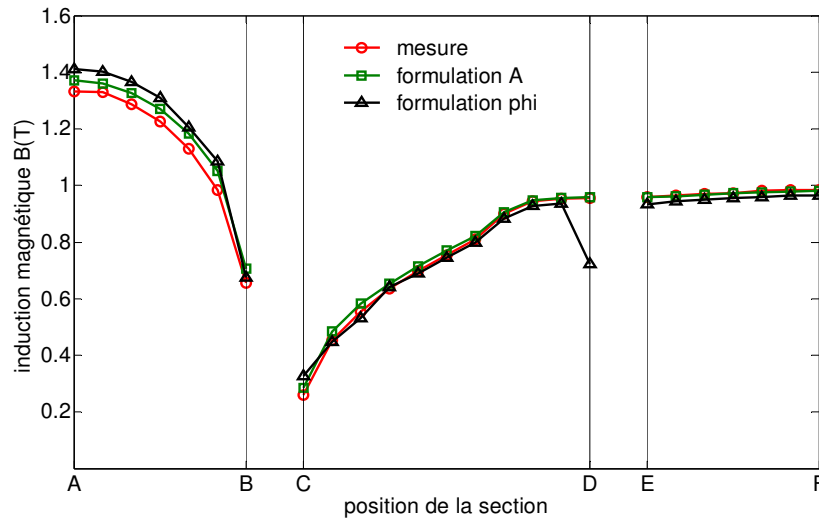


FIG.2.32. Inductions magnétiques dans le matériau par deux formulations A et phi

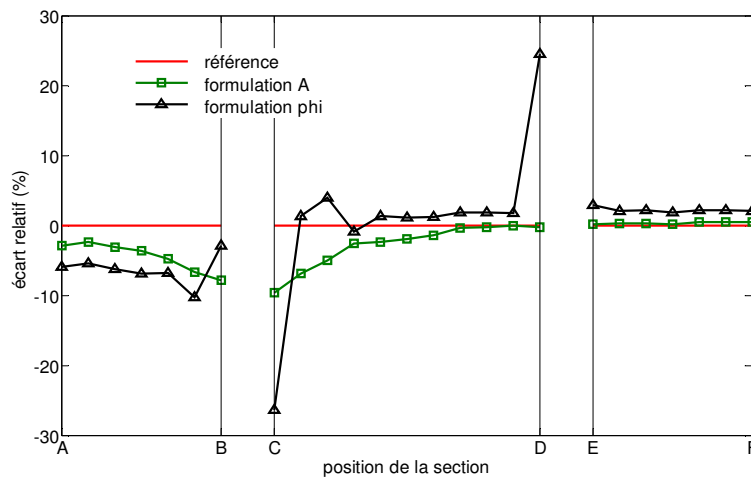


FIG.2.33. Ecarts relatifs par rapport la mesure

Dans l'ensemble, les deux formulations donnent des résultats assez proches de la mesure. Les résultats obtenus par la formulation en potentiel vecteur sont un peu plus proches des

valeurs de référence (mesure) que ceux de la formulation en potentiel scalaire. Pour la formulation  $\varphi$  nodal, on note de très grands écarts (plus de 20%) de l'induction aux extrémités de la section CD.

A titre d'information, le nombre d'inconnus de la formulation  $\varphi$  nodal correspondant au maillage de 30200 éléments est de 10300, alors que ce dernier est de 8319 avec la formulation en potentiel vecteur comportant 4855 éléments. Les nombres d'itérations de Newton-Raphson sont respectivement de 12 pour la formulation  $\varphi$  nodal et de 5 pour la formulation A d'arête.

#### 2.4.4 Conclusions

Une comparaison entre les trois formulations intégrale de volume en magnétostatique a été abordée. En utilisant la méthode de Newton Raphson et le solveur itératif GMRES pour la résolution de problèmes de matériau magnétique non linéaire, les formulations de *type b* sont plus performantes que la formulation en potentiel scalaire (approche par collocation) en termes de temps de calcul, de l'espace de mémoire ainsi que de la précision. Les deux formulations de *type b* donnent des résultats similaires. Pour les maillages grossiers, le temps de calculs de ces formulations est équivalent. Pour les maillages plus dense, la formulation A d'arête sans jauge converge plus rapidement que la formulation **B** de facette.

Afin compléter la comparaison entre ces trois formulations, il serait aussi intéressant de mener une telle comparaison en utilisant d'autres solveurs. Par exemple, le solveur direct pour la résolution des systèmes linéaires et la méthode de point fixe pour la résolution des systèmes non linéaires. Si un solveur direct est utilisé, la compatibilité de la formulation A n'est plus significative et la jauge sera nécessaire. D'ailleurs, comme l'utilisation de la méthode de point-fixe permet d'éviter la réintégration de la matrice intégrale de la formulation  $\varphi$ , le temps de calcul peut être diminué. En outre, la précision de cette formulation peut être améliorée en utilisant l'approche par projection de Galerkin.

Notons également que pour les exemples simples, la formulation en potentiel scalaire peut être préférée car elle est plus facile à implémenter ainsi qu'elle demande un nombre d'inconnus petit. En pratique, il n'existe pas de formulation générale pour tous les problèmes magnétostatique, le choix de la formulation doit reposer sur la compréhension du problème traité.



## 2.5 Formulation intégrale de volume pour la modélisation des régions minces magnétiques

### 2.5.1 Introduction

L'utilisation d'un maillage volumique pour modéliser des régions minces magnétiques conduit souvent à utiliser un grand nombre d'éléments afin d'éviter les erreurs numériques. En outre, la création du maillage volumique d'un dispositif de géométrie complexe avec une faible épaisseur (une coque de navire, une chambre blindée par exemple) requiert souvent de grands efforts.

La modélisation des régions minces magnétiques par la méthode des éléments finis est basée sur des éléments spéciaux (éléments coques) (Brunotte, 1991). Bien que cette approche permette de simplifier le maillage des régions minces et donne des résultats précis, les espaces d'air doivent toujours être maillés en volumiques. Avec cette considération, nous proposons dans cette partie une nouvelle approche basée sur la méthode intégrale de volume avec la formulation **B** de facette. Cette approche ne requiert que le maillage surfacique des régions actives.

### 2.5.2 Formulation intégrale pour des régions minces magnétiques

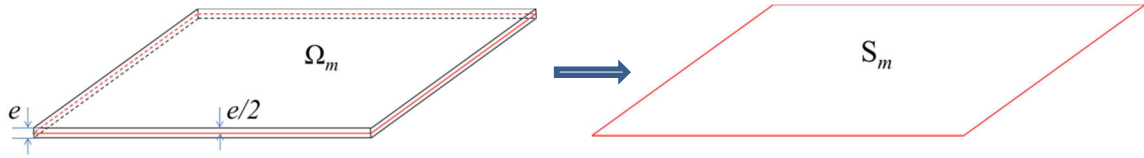
#### 2.5.2.1 Éléments de facette pour des régions minces

Considérons une région mince magnétique non conductrice  $\Omega_m$  d'épaisseur  $e$  faible par rapport aux autres dimensions. L'induction magnétique de cette région peut être supposée uniforme suivant l'épaisseur. Nous pouvons donc approximer la région  $\Omega_m$  par une région surfacique  $S_m$  associée à une épaisseur  $e$  (FIG.2.34). Ainsi, une facette  $f$  partagée par deux éléments volumiques est remplacée par une arête  $sf$  partagée par deux éléments surfaciques (FIG.2.35). Cette arête  $sf$  sera appelée la *facette équivalente* dont la fonction de forme du premier ordre  $\mathbf{w}_{sf}$  satisfait :

$$\mathbf{w}_{sf} \cdot \mathbf{n}_{sf} = \pm \frac{1}{\ell_{sf}} \quad (2.77)$$

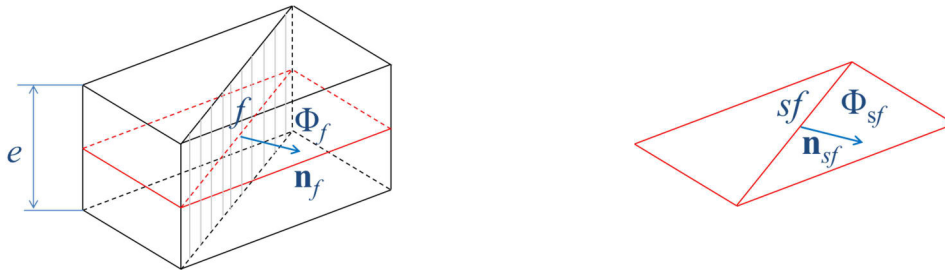
$$\text{div } \mathbf{w}_{sf} = \pm \frac{1}{S_e} \quad (2.78)$$

où  $\ell_{sf}$  est la longueur de l'arête  $sf$  et  $S_e$  la surface de l'élément auquel l'arête  $sf$  appartient.


 a. Région mince d'épaisseur  $e$ 

b. Région surfacique équivalente

FIG.2.34. Approximation de la région mince magnétique par une région surfacique


 a. Élément de facette du domaine  $\Omega$ 

b. Élément de facette équivalente

FIG.2.35. Passage d'éléments volumiques aux éléments surfaciques équivalents

### 2.5.2.2 Les équations de base

Nous supposons que les flux entrant et sortant sont sur les surfaces larges et aucun flux ne sort par les bords correspondant à l'épaisseur de la région mince. L'induction  $\mathbf{B}$  dans un élément volumique est approximée par la somme de composante tangentielle  $\mathbf{B}_t$  et de composante normale  $\mathbf{B}_n$  dans l'élément surfacique équivalent correspondant comme sur la figure FIG.2.36. En pratique, la perméabilité du matériau ferromagnétique est plus importante que celle de l'air,  $\mathbf{B}_t$  est donc plus important que  $\mathbf{B}_n$ .

L'induction magnétique tangentielle dans le matériau peut être approximée par :

$$\mathbf{B}_t = \sum_{sf=1}^{N_{sf}} \mathbf{w}_{sf} \Phi_{sf} \quad (2.79)$$

où  $\Phi_{sf}$  est le flux magnétique traversant la facette équivalente  $sf$  déterminé par  $\Phi_{sf} = \frac{1}{e} \Phi_f$ ,  $\mathbf{w}_{sf}$  est la fonction de forme de  $sf$  et  $N_{sf}$  est le nombre de facettes équivalentes actives (incluant les facettes équivalentes aux bords) du domaine discrétisé  $S_m$ .

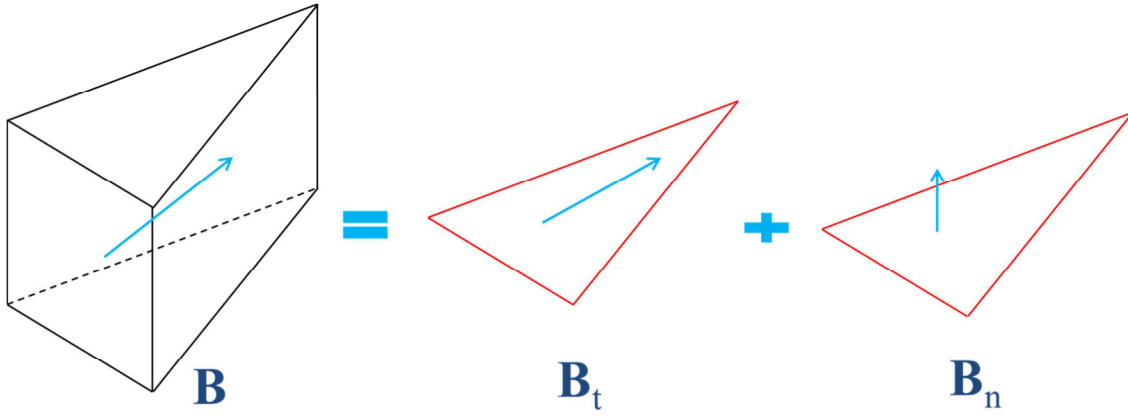


FIG.2.36. Approximation de l'induction dans un élément volumique à travers un élément surfacique

En absence de région d'aimant permanent, nous avons l'équation du flux magnétique (cf. la section §2.2.2.1) :

$$[\nu(\mathbf{B})]\mathbf{B} + \mathbf{grad}\varphi_{red} = \mathbf{H}_0 \quad (2.80)$$

En projetant l'équation (2.80) sur le domaine  $S_m$  par la méthode de Galerkin utilisant  $\mathbf{w}_{sg}$  (la fonction de forme d'une facette équivalente  $sg$ ) comme fonction test, la composante normale s'annule et nous obtenons:

$$\int_{S_m} \mathbf{w}_{sg} \cdot [\nu(\mathbf{B})]\mathbf{B}_t dS_m + \int_{S_m} \mathbf{w}_{sg} \cdot \mathbf{grad}\varphi_{red} dS_m = \int_{S_m} \mathbf{w}_{sg} \cdot \mathbf{H}_0 dS_m \quad (2.81)$$

En introduisant l'approximation de  $\mathbf{B}$  dans (2.79) à l'équation (2.81), nous obtenons :

$$\sum_{sf=1}^{N_{sf}} \int_{S_m} \mathbf{w}_{sg} \cdot [\nu(\mathbf{B})] \cdot \mathbf{w}_{sf} dS_m + \int_{S_m} \mathbf{w}_{sg} \cdot \mathbf{grad}\varphi_{red} dS_m = \int_{S_m} \mathbf{w}_{sg} \cdot \mathbf{H}_0 dS_m \quad (2.82)$$

L'écriture de l'équation (2.82) successivement pour les  $\mathbf{w}_{sg}$  différents ( $g = 1, 2, \dots, N_{sf}$ ) nous donne le système d'équations suivant :

$$\mathbf{R}^s \Phi_{IN} + \mathbf{I}^s = \mathbf{U}_0^s \quad (2.83)$$

où  $\Phi_{IN}$  est un vecteur représentant les flux magnétiques au travers des facettes équivalentes; la matrice  $\mathbf{R}^s$ , les vecteurs  $\mathbf{I}^s$  et  $\mathbf{U}_0^s$  sont déterminés par :

$$\begin{aligned}
 R_{gf}^s &= \int_{S_m} \mathbf{w}_{sg} \cdot [\nu(\mathbf{B})] \cdot \mathbf{w}_{sf} dS_m \\
 U_{0g}^s &= \int_{S_m} \mathbf{w}_g \cdot (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_c) dS_m \\
 I_g^s &= \int_{S_m} \mathbf{w}_g \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} dS_m
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

avec  $g = 1, 2, \dots, N_{sf}$  et  $f = 1, 2, \dots, N_{sf}$ .

Intéressons-nous au calcul de l'intégral  $I_g^s$ . L'identité vectorielle suivante est vérifiée :

$$\mathbf{w}_{sg} \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} = \text{div}(\varphi_{red} \mathbf{w}_{sg}) - \varphi_{red} \text{div} \mathbf{w}_{sg} \tag{2.85}$$

En appliquant cette identité et le théorème de la divergence nous pouvons écrire :

$$I_g^s = \int_{S_m} \mathbf{w}_{sg} \cdot \mathbf{grad} \varphi_{red} dS_m = \int_L \varphi_{red} \mathbf{w}_{sg} \cdot \mathbf{n}_L dL - \int_{S_m} \varphi_{red} \text{div} \mathbf{w}_{sg} dS_m \tag{2.86}$$

où  $L$  est la frontière du domaine  $S_m$  et  $\mathbf{n}_L$  est la normal de  $L$ . L'hypothèse qu'aucun flux ne sort par les bords de  $S_m$  conduit à la nullité de l'intégral linéique. Ainsi, en utilisant la propriété de la fonction de forme de facette équivalente (2.78), nous pouvons exprimer l'expression (2.86) comme suit :

$$I_g^s = - \int_{S_m} \varphi_{red} \text{div} \mathbf{w}_{sg} dS_m = \frac{1}{S_{e_i}} \int_{S_{e_i}} \varphi_{red} dS_{e_i} - \frac{1}{S_{e_j}} \int_{S_{e_j}} \varphi_{red} dS_{e_j} \tag{2.87}$$

où  $e_i$  et  $e_j$  ( $j > i$ ) sont deux éléments surfaciques qui partagent la facette équivalente  $sg$ ;  $S_{e_i}$  et  $S_{e_j}$  sont les surfaces de  $e_i$  et  $e_j$ .

### 2.5.2.3 Introduction du circuit équivalent

Dans l'expression (2.87),  $\frac{1}{S_e} \int_{\Omega_e} \varphi_{red} d\Omega_e$  représente le potentiel scalaire réduit moyen

$\bar{\varphi}_{red_e}$  dans l'élément surfacique  $e$ . Ainsi, nous pouvons donc exprimer  $I_g$  comme :

$$I_g = \bar{\varphi}_{red_{e_i}} - \bar{\varphi}_{red_{e_j}} = \Delta \bar{\varphi}_{red_{INsg}} \tag{2.88}$$

où  $\Delta\bar{\varphi}_{red_{INsg}}$  est la différence du potentiel scalaire réduit moyen entre deux éléments qui partagent la facette intérieure  $g$ . L'équation (2.83) peut s'écrire :

$$\mathbf{R}^S \Phi_{IN} + \Delta\bar{\varphi}_{red_{IN}} = \mathbf{U}_0^S \quad (2.89)$$

Le vecteur des différences de potentiel réduit moyen  $\Delta\bar{\varphi}_{red_{INsg}}$  peut être représenté sur le maillage dual du maillage éléments finis initial, sous la forme d'un circuit comme montré sur la figure FIG.2.37 où :

- à un élément surfacique correspond un nœud du circuit;
- à une facette équivalente correspond une branche du circuit.

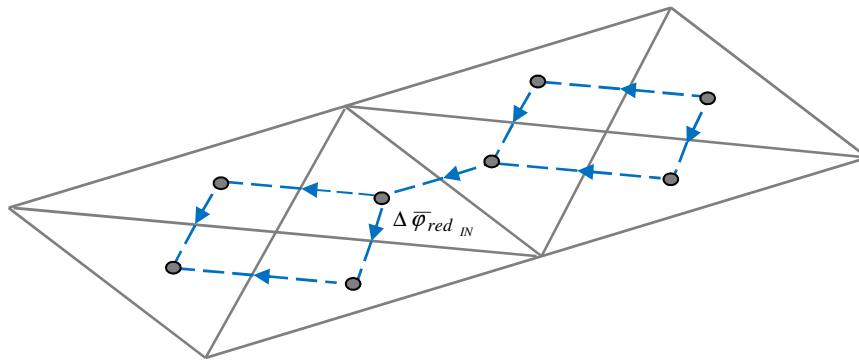


FIG.2.37. Circuit équivalent pour les régions minces magnétiques

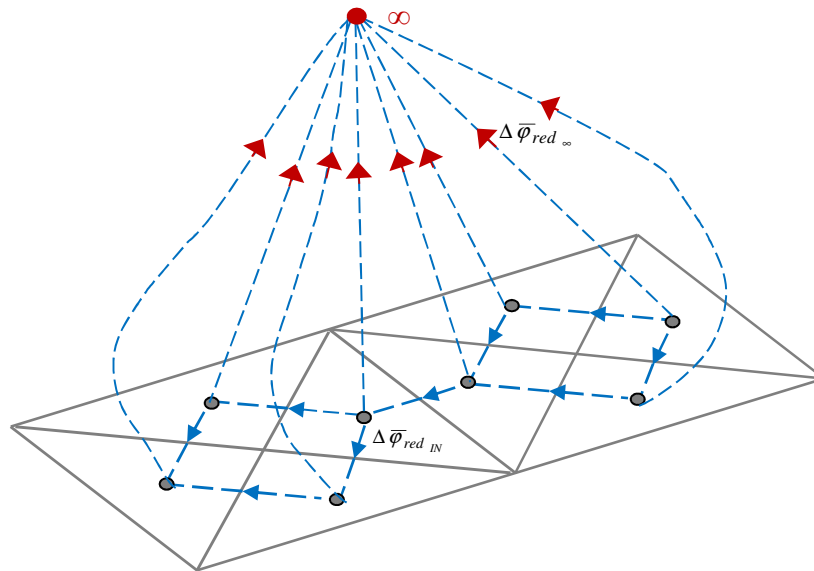


FIG.2.38. Introduction du nœud  $\infty$  pour le circuit équivalent

Afin de prendre en compte les flux magnétiques rentrant/sortant par les facettes horizontales de la région  $S_m$  nous introduisons des branches de circuits extérieures en introduisant un nœud à l'infini, dit nœud  $\infty$ , reliant tous les nœuds du circuit comme illustré

sur la figure FIG.2.38. Ceci permet la prise en compte de la composante normale ( $\mathbf{B}_n$ ) de l'induction magnétique au système d'équations. En supposant que le potentiel est nul à l'infini, la différence du potentiel scalaire réduit moyen entre l'élément  $e_i$  et le nœud  $\infty$  s'écrit :

$$\Delta\varphi_{red_{\infty e_i}} = \bar{\varphi}_{red_{e_i}} = \int_{S_{e_i}} \frac{\varphi_{red}}{S_{e_i}} dS_{e_i} \quad (2.90)$$

En utilisant le même principe que le développement présenté dans la section §2.2.2.2, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\Delta\varphi_{red_{\infty}} + \mathbf{L}^s \Phi_{\infty} = 0 \quad (2.91)$$

où  $\Delta\varphi_{red_{\infty}}$  est le vecteur des différences de potentiel entre les éléments surfaciques et le nœud  $\infty$ ,  $\Phi_{\infty}$  est le vecteur des flux sortant par les éléments surfaciques ; la matrice  $\mathbf{L}^s$  représente les interactions entre les éléments surfaciques et est déterminée par :

$$L_{ij}^s = \frac{1}{4\pi} \frac{v_0 - v_i}{S_{e_i} S_{e_j}} \int_{S_{e_i}} \int_{S_{e_j}} \frac{1}{r} dS_{e_i} dS_{e_j}$$

#### 2.5.2.4 Mise en équation et résolution

En combinant les équations (2.89) et (2.91) nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}^s & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Phi_{IN} \\ \Phi_{\infty} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\varphi_{red_{IN}} \\ \Delta\varphi_{red_{\infty}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0^s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

Nous rappelons que la loi des mailles de Kirchhoff s'écrit :

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \Delta\varphi_{red_{IN}} \\ \Delta\varphi_{red_{\infty}} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.93)$$

où  $\mathbf{P}$  représente la matrice d'incidence reliant des mailles indépendantes et les branches du circuit équivalent. Ainsi, le système d'équations (2.92) peut s'écrire :

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^s & 0 \\ 0 & \mathbf{L}^s \end{bmatrix} \mathbf{P}^T \Phi_m = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_0^s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

avec  $\Phi_m$  le vecteur des flux de mailles indépendantes.

Les problèmes linéaires peuvent être résolus sans difficulté. Pour la résolution des problèmes non linéaires, la méthode de Newton Raphson peut être utilisée. Dans un tel cas, l'évolution de la perméabilité (ou reluctivité) doit être basée sur l'induction totale ( $\mathbf{B}_t + \mathbf{B}_n$ ).

Dans les sections précédentes, nous avons trouvé que la formulation  $\mathbf{A}$  d'arête peut donner des résultats identiques que ceux de la formulation  $\mathbf{B}$  de facette avec une meilleure convergence. Néanmoins, la modélisation des régions minces par la formulation  $\mathbf{B}$  de facette est préférable par raison de simplicité. En fait, si la formulation  $\mathbf{A}$  d'arête est utilisée pour les régions minces, les inconnus sont à la fois les arêtes et les nœuds du maillage surfacique. Ceci devient compliqué lors de modélisation des tôles en forme de T.

## 2.5.3 Applications

### 2.5.3.1 Modélisation d'une plaque placée dans un champ magnétique constant

Il s'agit d'une plaque mince magnétique, non conductrice de dimension  $6\text{m} \times 4\text{m}$ , d'épaisseur  $0.05\text{m}$  placée dans un champ source magnétique constant  $\mathbf{H}_0(1,1,0)$  A/m comme montré sur la figure FIG.2.39. Le matériau est de type ferromagnétique linéaire et de perméabilité relative 1000. L'objectif est de calculer le champ magnétique sur le chemin PQ avec 21 points de calcul.

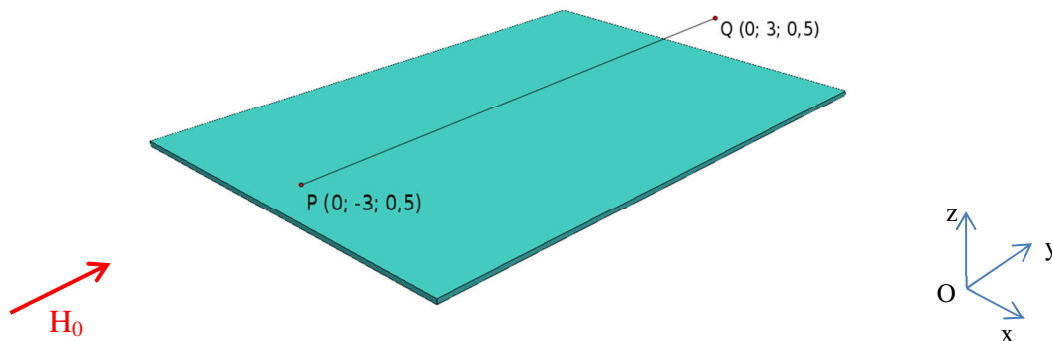


FIG.2.39. Description du problème de la plaque mince magnétique

Ce problème a été résolu par la formulation  $\mathbf{B}$  de facette pour les régions minces, les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par l'utilisation de la formulation  $\mathbf{B}$  de facette classique (volumique). La figure FIG.2.40 représente les distributions de l'induction magnétique dans la plaque données par les deux approches. Les résultats de calcul du champ magnétique sur le chemin PQ sont tracés sur la figure FIG.2.41. Nous constatons que les résultats sont en bonne adéquation. Pour le champ magnétique sur le chemin PQ, on observe au maximum une différence de 1.5 %, ce qui reste faible.

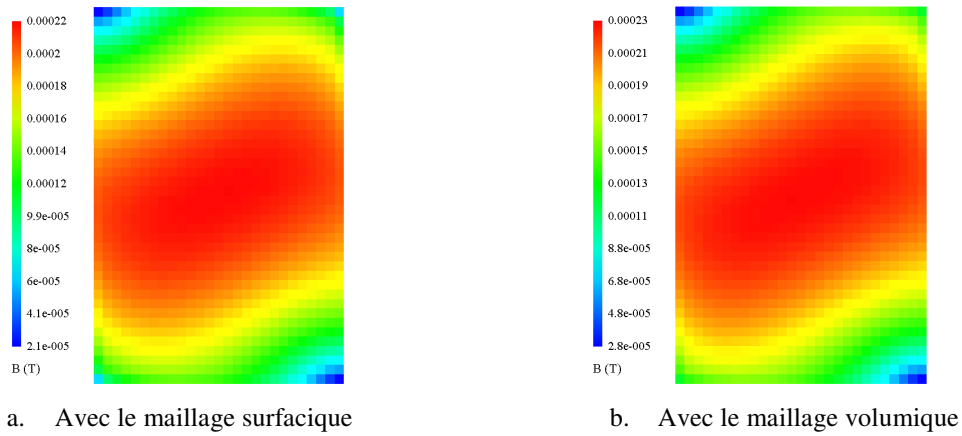


FIG.2.40. Distribution de l'induction magnétique dans la plaque

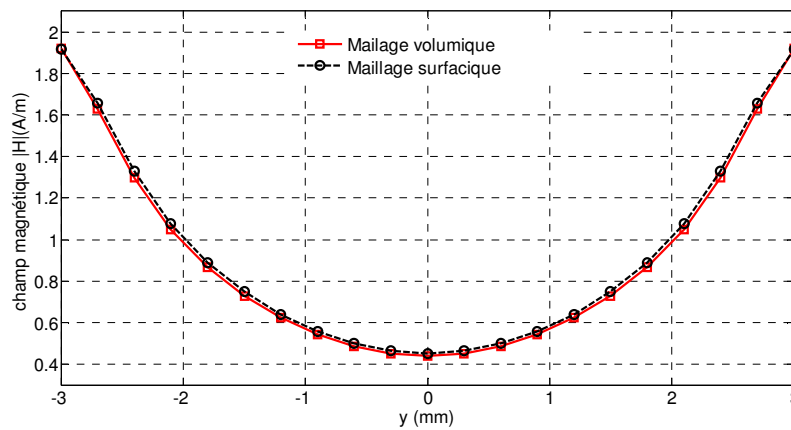


FIG.2.41. Champ magnétique sur le chemin PQ dans l'air

Ces résultats ont été obtenus avec un maillage surfacique de 1080 quadrangles et un maillage volumique de 1080 hexaèdres. Le tableau TAB 2.3 résume les informations concernant la résolution du problème par les deux approches. Nous constatons que l'approche utilisant le maillage surfacique nous permet d'économiser de la mémoire et de diminuer les temps de résolution tout en conservant une bonne précision.

TAB 2.3 – Comparaison deux approches pour la modélisation de région mince		
Approche	Maillage surfacique	Maillage volumique
nombre d'éléments	1080	1080
nombre d'inconnus	2093	3037
nombre d'itération GMRES	55	109
temps de résolution (s)	2,3	6,6

### 2.5.3.2 Modélisation d'une chambre blindée

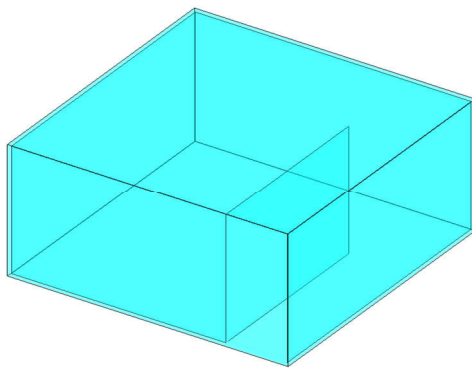


Considérons une chambre de blindage en  $\mu$ -métal de surface  $4,5 \times 4,5 \text{ m}^2$ , de hauteur 2,5 m, avec une porte ouverte et un couloir de longueur 3 m. Toutes les plaques ont une épaisseur de 1mm. La vue générale et les parties latérales de la chambre sont présentées sur la figure FIG.2.42.

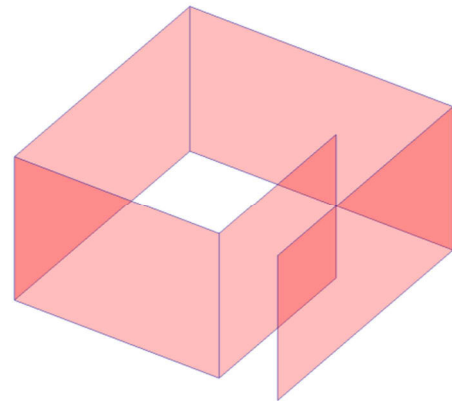
La chambre possède deux couches de blindage. Elles sont séparées par une couche d'air de 40 mm. La perméabilité relative du matériau métallique est égale à 40 000. Une maquette de cette chambre a été réalisée par l'équipe ERT (Equipe Recherche Technologique) au laboratoire G2Elab. L'objectif du blindage est de fortement diminuer le champ magnétique terrestre à l'intérieur de la chambre. On suppose que le champ magnétique terrestre est constant et vaut  $\mathbf{B}_0 = (0 ; -19,98, -39,96) \mu\text{T}$  dans tout l'espace.



a. La chambre de blindage (tout droit réservé à l'équipe ERT, G2Elab)



b. Vue générale de l'extérieur



c. Vue intérieur des parties latérales de la chambre

FIG.2.42. Présentation de la chambre blindée

Nous avons appliqué la formulation proposée pour résoudre ce problème. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par le logiciel commercial Flux3D (MEF) utilisant les éléments coques (Guérin, 1994) avec un maillage très fin.

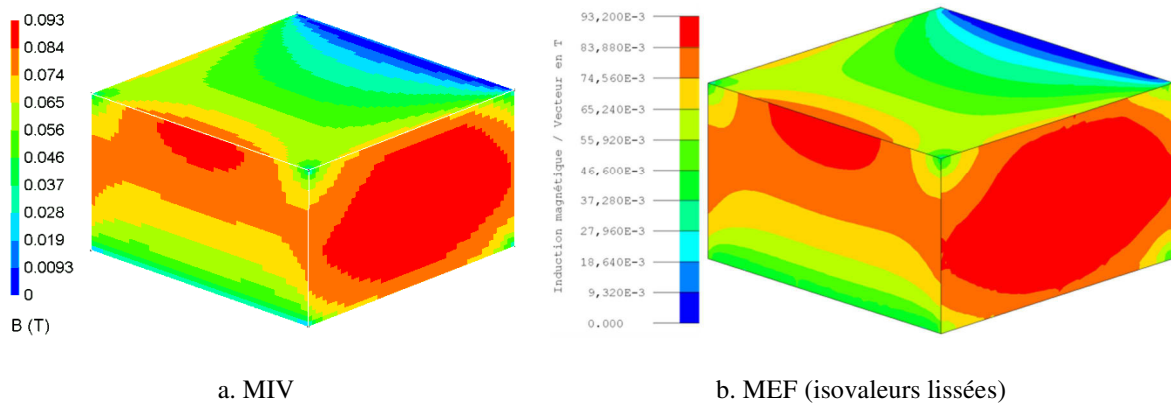


FIG.2.43. Distribution de l'induction magnétique sur la chambre blindée (avec un maillage comportant 20100 quadrangles dans le matériau magnétique).

La figure FIG.2.43 représente les distributions de l'induction magnétique dans le mur de la chambre obtenues par la formulation  $\mathbf{B}$  de facette et par le logiciel Flux3D. Les deux méthodes utilisent des maillages comportant 20 100 quadrangles dans le matériau magnétique. Toutefois, avec la MEF, la taille du maillage ajoute plus 250 000 éléments dans l'air (le volume d'air est prépondérant dans ce problème). Les résultats de l'induction magnétique au centre de la chambre sont présentés dans le tableau TAB 2.4. Nous trouvons une très bonne adéquation entre les deux méthodes.

<b>TAB 2.4 – Induction magnétique au centre de la chambre</b>		
	MIV – régions minces	MEF – éléments coques
$B_x$ ( $\mu\text{T}$ )	0,023	0,026
$B_x$ ( $\mu\text{T}$ )	0,88	0,87
$B_x$ ( $\mu\text{T}$ )	1,53	1,53
Modul ( $\mu\text{T}$ )	1,765	1,760
Ecart relatif du module (%)	0,3	référence

Cette chambre blindée permet de diviser le champ magnétique interne de la chambre par 25.

## 2.5.4 Conclusions

Nous avons développé une nouvelle formulation intégrale de volume basée sur des éléments de facette équivalente pour la modélisation des problèmes de région mince magnétique. Cette approche ne requiert que le maillage surfacique des matériaux actifs de la région mince. De façon similaire avec la formulation  $\mathbf{B}$  de facette, le développement de la

formulation utilise le circuit équivalent qui permet d'assurer la conservation des flux magnétiques. L'application de la formulation à la résolution d'une plaque et d'une chambre blindée a montré la précision et l'efficacité de l'approche.

## 2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, les formulations intégrales de volume du *type b* ont été développées. La formulation **B** de facette est basée sur l'interpolation des éléments de facette du premier ordre et les flux magnétiques traversant des facettes. Cette formulation est associée à un circuit équivalent et résolue par la méthode des flux de maille. La formulation **A** d'arête est basée sur l'interpolation des éléments d'arête du premier ordre et les circulations du potentiel vecteur sur les arêtes. Grâce à son système d'équations compatibles, elle peut être résolue par un solveur itératif sans nécessiter de jauge. Pour la modélisation des régions minces magnétiques, la formulation utilisant des éléments de facette équivalents a été développée. Cette formulation est similaire à la formulation **B** de facette, elle est associée à un circuit équivalent et résolue par la méthode des flux de maille. L'application de ces formulations à la résolution de nombreux problèmes comprenant des régions non simplement connexes, d'aimant permanent, d'entrefer très faible, de régions minces donnent des résultats précis comparables à ceux obtenus par la méthode des éléments finis ainsi qu'avec la mesure.

Les formulations du *type b* permettent la résolution des problèmes non linéaires plus efficacement que les formulations du *type h*. La convergence du solveur non linéaire est obtenue après quelques itérations et aucune relaxation n'a été utile dans les cas que nous avons expérimentés. En outre, l'application des formulations du *type b* pour la modélisation des problèmes non simplement connexes ne requière aucun travail supplémentaire.

## **Bibliographie du chapitre 2**

- Albanese, R., Rubinacci, G., 1990. Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 29, 515–532. doi:10.1002/nme.1620290305
- Balasubramanian, S., Lalgudi, S.N., Shanker, B., 2002. Fast-integral-equation scheme for computing magnetostatic fields in nonlinear media. *IEEE Trans. Magn.* 38, 3426–3432. doi:10.1109/TMAG.2002.802736
- Bossavit, A., Kettunen, L., 2000. Yee-like schemes on staggered cellular grids : a synthesis between FIT and FEM approaches. *IEEE Trans. Magn.* 36, 861–867. doi:10.1109/20.877580
- Brunotte, X., 1991. Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques minces - application à la modélisation des aimantations de navires. INP GRENOBLE.
- Carpentier, A., 2013. Formulation intégrale de volume magnétostatique et calcul des densités de force magnétique : Application au couplage magnéto-mécanique. Université de Grenoble.
- Carpentier, A., Chadebec, O., Galopin, N., Meunier, G., Bannwarth, B., Formulation, A., 2013. Resolution of Nonlinear Magnetostatic Problems With a Volume Integral Method Using the Magnetic Scalar Potential. *IEEE Trans. Magn.* 49, 1685–1688.
- Dular, P., Nicolet, A., Genon, A., Legros, W., 1995. A discrete sequence associated with mixed finite elements and its gauge condition for vector potentials. *IEEE Trans. Magn.* 31, 1356–1359. doi:10.1109/20.376278
- Gimignani, M., Musolino, A., Raugi, M., 1994. Integral formulation for nonlinear magnetostatic and eddy currents analysis. *IEEE Trans. Magn.* 30, 3024–3027.
- Guérin, C., 1994. Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique (phdthesis). Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG.
- Kettunen, L., Turner, L., 1992. A volume integral formulation for nonlinear magnetostatics and eddy currents using edge elements. *Magn. IEEE Trans.* On 28, 1639–1642.
- Le Van, V., Meunier, G., Chadebec, O., Guichon, J.-M., 2015. A Volume Integral Formulation Based on Facet Elements for Nonlinear Magnetostatic Problems. *IEEE Trans. Magn.* 1–7. doi:10.1109/TMAG.2015.2389197

- Luong, H.T., 1997. Amélioration de la formulation en potentiel scalaire magnétique et généralisation au couplage entre équations de champ et de circuit électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- Meunier, G., Chadebec, O., Guichon, J.-M., Le-Van, V., 2015. A-T Volume integral formulation for solving electromagnetic problems in the frequency domain. Presented at the COMPUMAG, Montréal, Canada, pp. OA2–4.
- Morandi, A., Fabbri, M., Ribani, P.L., 2010. A Modified Formulation of the Volume Integral Equations Method for 3-D Magnetostatics. *IEEE Trans. Magn.* 46, 3848–3859. doi:10.1109/TMAG.2010.2066571
- Nakata, T., Fujiwara, K., 1992. Summary of results for benchmark problem 13 (3-d nonlinear magnetostatic model). *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.* 11, 345–369. doi:10.1108/eb010097
- Nakata, T., Takahashi, N., Fujiwara, K., 1995. Summary of results for team workshop problem 13 (3-d nonlinear magnetostatic model). *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.* 14, 91–101. doi:10.1108/eb010140
- Nguyen, T.-S., Guichon, J.-M., Chadebec, O., Meunier, G., Vincent, B., 2012. An independent loops search algorithm for solving inductive PEEC large problems. *Prog. Electromagn. Res. M* 23, 53–63.
- Phung, A.T., 2006. Développement de formulations électromagnétiques éléments finis 3D pour la modélisation des dispositifs en fréquence élevée. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- Ren, Z., 1996. The R.H.S. on the Convergence Behaviour. *IEEE Trans. Magn.* 32.
- Rubeck, C., Yonnet, J., Allag, H., Delinchant, B., Chadebec, O., 2013. Analytical Calculation of Magnet Systems : Magnetic Field Created by Charged Triangles and Polyhedra, *IEEE Trans. Magn* 49, 144–147.
- Simkin, J., 1990. Results for the TEAM Problem 13 Benchmark, in: *Proc. of European Team Workshop and International Seminar in Electromagnetic Field Analysis*. Oxford, England, pp. 137–143.
- Specogna, R., Trevisan, F., 2008. Eddy-Currents Computation With T-Omega Discrete Geometric Formulation for an NDE Problem. *IEEE Trans. Magn.* 44, 698–701. doi:10.1109/TMAG.2007.916401
- Vishnevsky, A.M., Kalimov, A.G., Lapovok, A.A., 2002. Modeling magnetization using Whitney facet elements. *IEEE Trans. Magn.* 38, 489–492. doi:10.1109/20.996129
- Young, J.C., Gedney, S.D., 2011. A Locally Corrected Nyström Formulation for the Magnetostatic Volume Integral Equation. *IEEE Trans. Magn.* 47, 2163–2170.

# CHAPITRE 3

## Post-traitement : Calcul du flux magnétique dans les bobines et de la force magnétique globale

### SOMMAIRE

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>90</b>
<b>3.2</b>	<b>Calcul du flux magnétique dans les bobines .....</b>	<b>90</b>
3.2.1	Formulations de calcul du flux.....	90
3.2.2	Applications .....	95
3.2.3	Conclusions .....	100
<b>3.3</b>	<b>Calcul de la force magnétique globale.....</b>	<b>101</b>
3.3.1	Introduction .....	101
3.3.2	Méthodes pour le calcul de la force magnétique globale .....	101
3.3.3	Applications .....	105
3.3.4	Conclusions .....	111
<b>3.4</b>	<b>Conclusions .....</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliographie du chapitre 3.....</b>	<b>112</b>

## 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, des formulations intégrales de volume ont été développées pour la modélisation de distribution de champ et induction magnétique dans l'air ainsi que dans le matériau. Les formulations proposées sont capables de fournir des résultats précis même en présence de maillage grossier et dans des temps de résolution très faibles. Dans ce chapitre, nous allons exploiter les résultats obtenus par ces formulations intégrales de volume en développant des outils de post-traitement. Une fois les formulations intégrales résolues, nous avons accès rapidement à la distribution du champ et de l'induction magnétique en tout point des régions actives. Nous allons plus particulièrement nous intéresser au flux magnétique traversant les bobines et à la force magnétique globale, qui sont des grandeurs essentielles pour le concepteur d'un dispositif. Une question qui se pose est de savoir si les formulations intégrales de volume vont nous permettre de calculer ces grandeurs globales efficacement, tout en assurant une bonne précision en présence de maillages comportant peu d'éléments.

Dans la première partie du chapitre, nous parlerons du calcul de flux magnétique dans les bobines en employant deux formulations différentes. Ensuite une application de ces formulations est présentée aux travers de quelques dispositifs électrotechniques courants. Dans la deuxième partie, nous présenterons le calcul de la force magnétique globale. Deux approches différentes (la méthode des charges magnétiques équivalentes et la méthode des travaux virtuels) et leur mise en œuvre sont présentées et appliquées à l'étude de contacteurs.

## 3.2 Calcul du flux magnétique dans les bobines

### 3.2.1 Formulations de calcul du flux

Considérons un domaine  $\Omega$  comprenant des régions magnétiques  $\Omega_m$ , une région air  $\Omega_0$  et un ensemble  $\Omega_b$  comportant  $N_b$  bobines alimentées en courant. L'objectif est de calculer le flux  $\Psi_k$  traversant une bobine  $k$  dans le domaine  $\Omega_b$ .

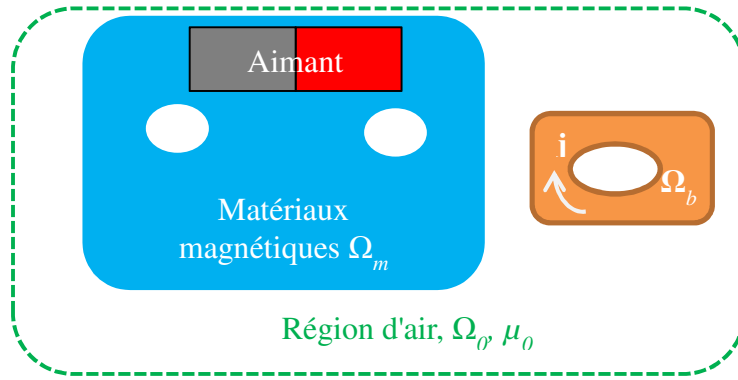


FIG.3.1. Illustration du domaine  $\Omega$

Chaque bobine dans  $\Omega_b$  est caractérisée par son nombre de spire et un vecteur d'orientation  $\mathbf{t}(x, y, z)$  définissant la direction des fils en tout point. Nous définissons une fonction d'espace de la bobine  $\mathbf{j}_0$  (1/m<sup>2</sup>) qui relie la densité de courant  $\mathbf{j}$  (A/m<sup>2</sup>) au courant  $i$  (A) traversant les spires :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 i \quad (3.1)$$

Par définition,  $\mathbf{j}_0$  est la densité de courant qui produit un courant de 1A dans le fil de la bobine. Avec une bobine de section constante  $S$  (m<sup>2</sup>), comportant  $n$  spires, nous avons :

$$\mathbf{j}_0 = \frac{n}{S} \mathbf{t} \quad (3.2)$$

Le flux magnétique  $\Psi_k$  traversant la bobine  $k$  s'écrit (Meunier, 2002) :

$$\Psi_k = \int_{\Omega_{bk}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \mathbf{A} d\Omega_{bk} \quad (3.3)$$

De même façon qu'avec la décomposition du champ magnétique  $\mathbf{H}$ , l'induction magnétique peut être décomposée en la somme de deux termes :  $\mathbf{B}_0$  créé par les sources de courant seules en l'absence de régions magnétiques et  $\mathbf{B}_r$  créé par les matériaux magnétiques soumis au champ source.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_r \quad (3.4)$$

Par conséquent, nous pouvons écrire le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_r \quad (3.5)$$



où  $\mathbf{A}_0$  est le potentiel source et  $\mathbf{A}_r$  est le potentiel réduit dû à la présence des matériaux magnétiques. D'après la loi de Biot et Savart, nous avons :

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{q=1}^{N_b} \int_{\Omega_{bq}} \mathbf{j}_{0q} \frac{i_q}{r} d\Omega_{bq} \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{j}_{0q}$  et  $i_q$  sont respectivement la fonction d'espace de la bobine  $q$  et le courant traversant cette dernière ;  $r$  est la distance entre le point d'intégration et le point de calcul du champ.

Le potentiel vecteur réduit  $\mathbf{A}_r$  peut être déterminé par (Brissonneau, 1997) :

$$\mathbf{A}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \times \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \quad (3.7)$$

où l'aimantation  $\mathbf{M}$  est récupérée à partir de la solution de la formulations intégrale de volume par :

$$\mathbf{M} = (\nu_0 - \nu) \mathbf{B} + \mathbf{H}_c \quad (3.8)$$

Ainsi, (3.3) devient :

$$\Psi_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_{bk}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \left( \sum_{q=1}^{N_b} \int_{\Omega_{bq}} \mathbf{j}_{0q} \frac{i_q}{r} d\Omega_{bq} + \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \times \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m \right) d\Omega_{bk} \quad (3.9)$$

Avec cette approche, le calcul de  $\Psi_k$  nécessite le maillage de la bobine  $k$ . Nous l'appellerons *l'approche  $\mathbf{j}_0\mathbf{A}$*  pour la distinguer de l'autre façon de calculer le flux  $\Psi_k$  présentée ci-dessous.

A partir de (3.5) et (3.9), nous pouvons décomposer le flux  $\Psi_k$  en somme du  $\Psi_{k0}$  dû aux bobines de source de courant et du  $\Psi_{km}$  dû aux régions magnétiques :

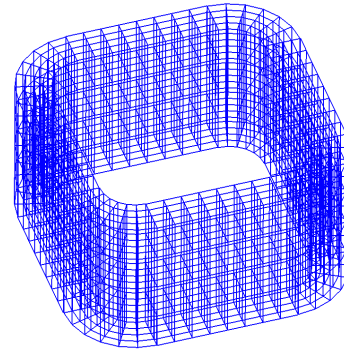
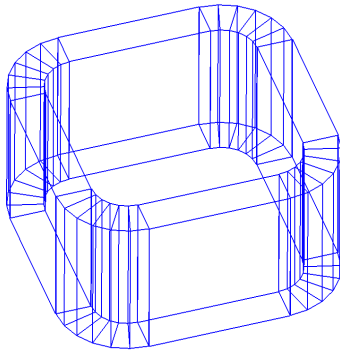
$$\Psi_k = \Psi_{k0} + \Psi_{kr} \quad (3.10)$$

avec

$$\Psi_{k0} = \int_{\Omega_{bk}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \mathbf{A}_0 d\Omega_{bk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_{bk}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \sum_{q=1}^{N_b} \int_{\Omega_{bq}} \mathbf{j}_{0q} \frac{i_q}{r} d\Omega_{bq} d\Omega_{bk} \quad (3.11)$$

$$\Psi_{kr} = \int_{\Omega_{bk}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \mathbf{A}_r d\Omega_{bk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_{bk}} \mathbf{j}_{0k} \cdot \int_{\Omega_m} \mathbf{M} \times \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega_m d\Omega_{bk} \quad (3.12)$$

Grâce aux travaux de Fabbri (Fabbri, 2008) (Fabbri, 2009) et Urankar (Urankar, 1980), (Urankar, 1982a), (Urankar, 1982b) nous pouvons calculer le flux  $\Psi_{k0}$  par une formule analytique pour des bobines circulaires. Si la bobine  $k$  est de forme complexe, il est généralement possible de la mailler sous la forme d'hexaèdres et/ou de tétraèdre dans lesquelles la densité de courant source est uniforme, comme sur la figure FIG.3.2.a. Puis, les interactions entre les éléments des bobines discrétisées sont obtenues par une expression analytique. Intéressons-nous maintenant au terme  $\Psi_{kr}$ .



a. Bobine maillée pour l'approche  $\mathbf{h}_0\mathbf{M}$

b. Bobine maillée pour l'approche  $\mathbf{j}_0\mathbf{A}$

FIG.3.2. Maillages de la bobine pour le calcul du flux magnétique (bobine du problème TEAM 13)

Le champ magnétique unitaire  $\mathbf{h}_{0k}$  produit par la bobine  $k$  avec le courant de 1A satisfait la relation suivante :

$$\mathbf{rot} \mathbf{h}_{0k} = \mathbf{j}_{0k} \quad (3.13)$$

Le flux magnétique dû aux matériaux magnétiques s'écrit donc :

$$\Psi_{kr} = \int_{\Omega_{bk}} \mathbf{rot} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{A}_r d\Omega_{bk} \quad (3.14)$$

L'identité vectorielle suivante est vérifiée :

$$\mathbf{div}(\mathbf{h}_{0k} \times \mathbf{A}_r) = \mathbf{rot} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{A}_r - \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_r \quad (3.15)$$

En appliquant cette identité et le théorème de la divergence, l'expression (3.14) devient :

$$\Psi_{kr} = \int_{\Omega_{bk}} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_r d\Omega_{bk} + \int_{\Gamma_J} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_r \times \mathbf{h}_{0k}) d\Gamma_J \quad (3.16)$$

où  $\Gamma_J$  est la frontière de  $\Omega_{bk}$ . Notons bien que  $\mathbf{n} \times \mathbf{A}_r$  et  $\mathbf{h}_{0k}$  sont conservés sur  $\Gamma_J$  ou  $\Gamma_m$ ,  $\Gamma_m$  étant la frontière du domaine magnétique  $\Omega_m$ . Par conséquence,

$$\Psi_{kr} = \int_{\Omega} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_r d\Omega \quad (3.17)$$

avec  $\Omega$  qui est tout le domaine  $\mathbf{R}^3$ .

L'induction magnétique peut être exprimée par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}_0 + \mathbf{rot} \mathbf{A}_r = \mu_0 (\mathbf{H}_0 - \mathbf{grad} \varphi_r + \mathbf{M}) \quad (3.18)$$

L'égalité  $\mathbf{rot} \mathbf{A}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$  entraîne :

$$\mathbf{rot} \mathbf{A}_r = \mu_0 (-\mathbf{grad} \varphi_r + \mathbf{M}) \quad (3.19)$$

Par conséquent :

$$\Psi_{kr} = \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{M} d\Omega - \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{grad} \varphi_r d\Omega \quad (3.20)$$

L'identité vectorielle suivante est vérifiée :

$$\mathit{div}(\varphi_r \mathbf{h}_{0k}) = \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{grad} \varphi_r + \varphi_r \mathit{div} \mathbf{h}_{0k} \quad (3.21)$$

L'application de cette identité et du théorème de la divergence permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{grad} \varphi_r d\Omega = \int_{\Gamma} \varphi_r \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \varphi_r \mathit{div} \mathbf{h}_{0k} d\Omega \quad (3.22)$$

En remarquant que  $\varphi_r$  s'annule à l'infini et que  $\mathit{div} \mathbf{h}_{0k} = \nu_0 \mathit{div}(\mathbf{rot} \mathbf{A}_0) = 0$ , nous avons :

$$\int_{\Omega} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{grad} \varphi_r d\Omega = 0 \quad (3.23)$$

A partir de (3.20) et (3.23), nous avons :

$$\Psi_{kr} = \mu_0 \int_{\Omega} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{M} d\Omega \quad (3.24)$$

Puisque l'aimantation  $\mathbf{M}$  s'annule en dehors du domaine des matériaux magnétiques  $\Omega_m$  :

$$\Psi_{kr} = \mu_0 \int_{\Omega_m} \mathbf{h}_{0k} \cdot \mathbf{M} d\Omega_m \quad (3.25)$$

Cette approche ne requiert pas le maillage de la bobine  $k$ . Elle sera appelée *l'approche  $\mathbf{h}_0\mathbf{M}$* .

## 3.2.2 Applications

### 3.2.2.1 Calcul de flux dans la bobine du problème TEAM 13

Nous considérons le problème TEAM 13 (Nakata and Fujiwara, 1992) (Nakata et al., 1995) présenté dans le chapitre 2 avec la source d'excitation 1000 At (1A×1000 tours). L'objectif est de calculer le flux dans la bobine par les deux approches proposées. Les résultats obtenus sont comparés avec celui du logiciel FLUX 3D (méthode des éléments finis). Une vue globale du problème est représentée sur la figure FIG.3.3. Une des difficultés de ce problème est que l'entrefer entre les plaques est très faible par rapport aux autres dimensions du dispositif.

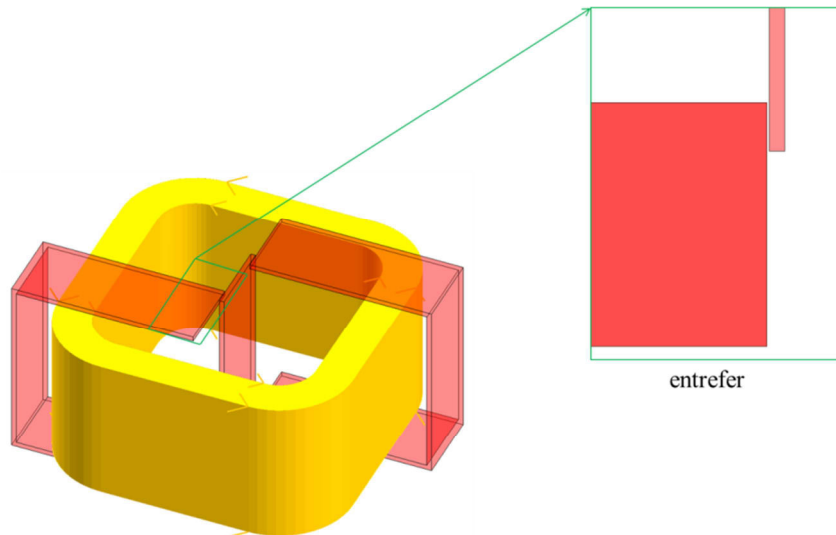


FIG.3.3. Calcul du flux dans la bobine du problème TEAM 13

Dans un premier temps nous nous intéressons à l'approche  $\mathbf{j}_0\mathbf{A}$ . Afin d'étudier l'influence du maillage de la bobine sur le résultat du calcul du flux magnétique, un maillage du circuit magnétique comportant 4855 éléments tétraédriques est utilisé. La bobine est maillée par des éléments hexaédriques comme sur la figure FIG.3.2.b. Les résultats du flux magnétique et du temps de calcul en fonction du nombre d'éléments du maillage sont présentés sur la figure FIG.3.4. Nous constatons que la convergence du flux magnétique est atteinte avec l'utilisation d'un maillage de 3500 éléments, correspondant à un temps de calcul du flux de 6 secondes. Le temps de calcul étant proportionnel au nombre d'éléments du maillage, ce maillage va être utilisé dans la suite pour le calcul du flux dans la bobine par l'approche  $\mathbf{j}_0\mathbf{A}$ .

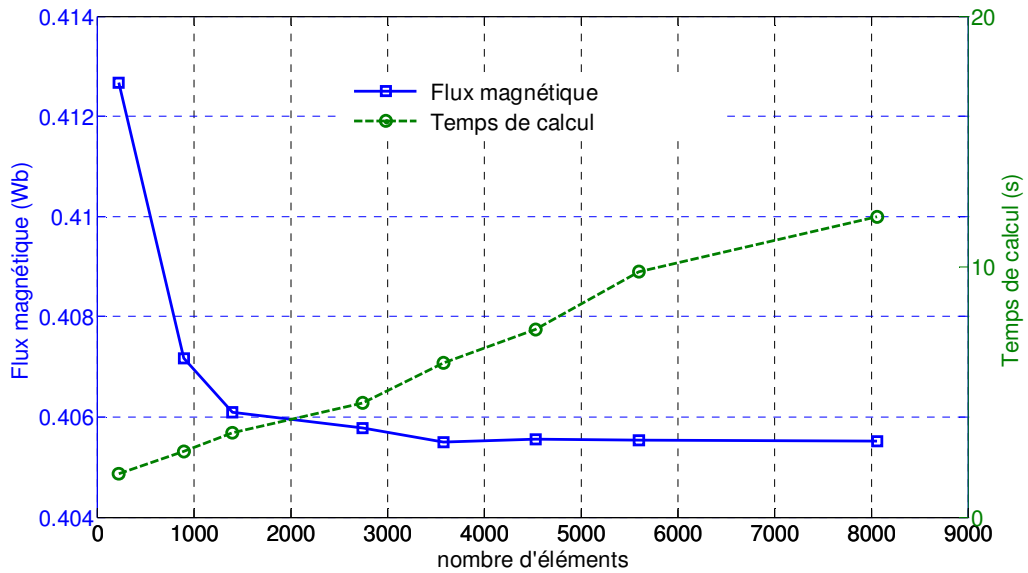


FIG.3.4. L'influence du nombre d'éléments du maillage de la bobine sur le calcul du flux par l'approche  $j_0A$

La valeur de référence du flux dans la bobine est de 0.409 Wb. Cette valeur est obtenue par l'utilisation du logiciel Flux3D avec un maillage de 1,5 millions d'éléments. La figure FIG.3.5 représente les courbes de convergence pour le calcul du flux en fonction du nombre d'éléments dans le matériau par les deux méthodes présentées.

Quant à la méthode intégrale de volume (MIV), seul le matériau et la bobine doivent être maillés. L'approche  $h_0M$  utilise un maillage de la bobine comportant 28 éléments comme présenté sur la figure FIG.3.2.a et l'approche  $j_0A$  utilise un maillage de 3500 éléments comme mentionné ci-dessus. La valeur de convergence du flux magnétique est de 0.407 Wb. Cette valeur est atteinte avec un maillage de 4855 éléments, correspondant à un écart relatif de 0,5% par rapport à la valeur de référence.

L'application des deux approches proposées pour le calcul du flux magnétique donne des résultats presque identiques, l'écart relatif maximum étant inférieur à 0,1%. Les temps de calcul pour ces deux approches sont similaires. Pour le maillage de 4855 éléments, ils sont de 6.5 secondes en utilisant l'approche  $j_0A$  et de 5.7 secondes en utilisant l'approche  $h_0M$ .

Quant à la méthode des éléments finis (MEF), le nombre d'éléments dans l'espace d'air est fixé à 43 700 éléments. La formulation en potentiel scalaire en ordre 2 est utilisée. La figure FIG.3.5 montre que la méthode MIV converge beaucoup plus rapidement que la MEF. Avec un maillage contenant plus de 48 000 éléments dans le matériau (91 700 éléments au total), la MEF n'atteint pas encore la valeur de convergence. Avec la MIV, l'utilisation d'un maillage comportant 1000 tétraèdres permet d'obtenir un résultat de flux avec un écart relatif inférieur à 2,2 % par rapport à la référence. Le temps de calcul (temps de résolution + temps de post-

traitement) est de 20 secondes. Pour avoir un écart similaire, la MEF requiert un maillage contenant plus de 16 000 éléments dans le matériau. Le temps de calcul est supérieur à 3 minutes.

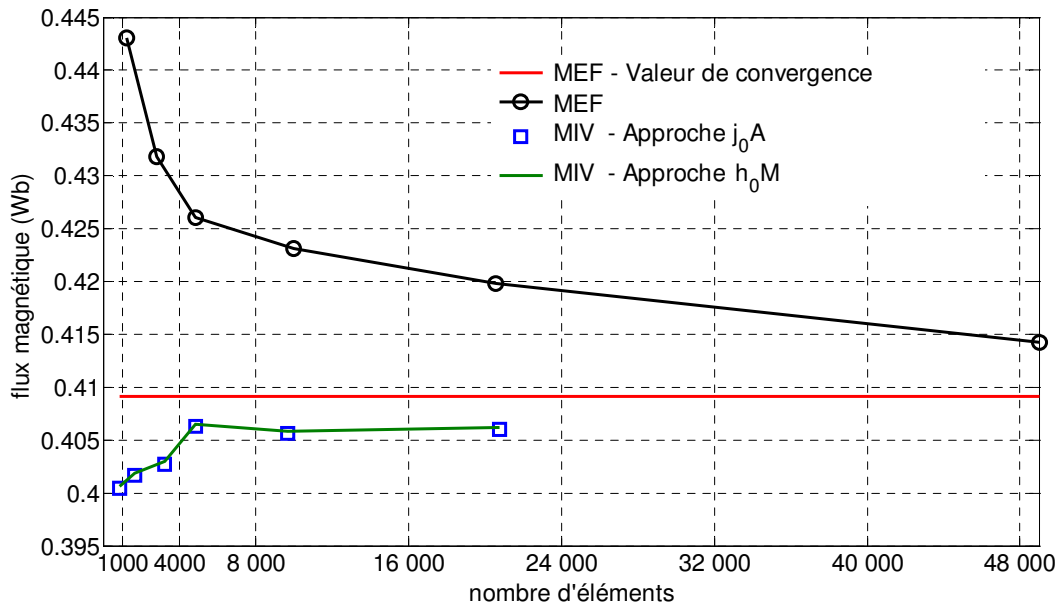


FIG.3.5. La convergence du calcul du flux magnétique dans la bobine par des méthodes différentes

### 3.2.2.2 Modélisation d'un capteur de vitesse

Considérons un capteur de vitesse à réluctance variable dont l'aperçu et le modèle sont illustrés sur les figures FIG.3.6 et FIG.3.7. La rotation de la roue cible près de la pointe du capteur modifie le flux magnétique, créant un signal de tension analogique qui peut être récupéré dans des sondes. Ce modèle du capteur se trouve dans les documents du logiciel Flux de CEDRAT (<http://cedrat.com/>).

Un modèle simplifié du capteur est présenté sur la figure FIG.3.7, se composant d'une roue avec trois dents et deux sondes composées chacune un aimant et une bobine autour. Le matériau de la roue est ferromagnétique non linéaire spécifié par la loi en arc-tangente suivante :

$$\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \mu_0 \mathbf{H} + \frac{2J_s}{\pi} \arctg\left(\frac{\pi(\mu_r - 1)\mu_0 \mathbf{H}}{2J_s}\right) \quad (3.26)$$

avec  $\mu_r = 5000$  et  $J_s = 1,9$  T. Les deux aimants permanents ont une induction rémanente de 0,8 T et une perméabilité relative de 1. Les deux bobines sont circulaires de section rectangulaire comportant 1000 tours et sans courant d'excitation.



FIG.3.6. Aperçu du capteur de vitesse à réluctance variable (@CEDRAT)

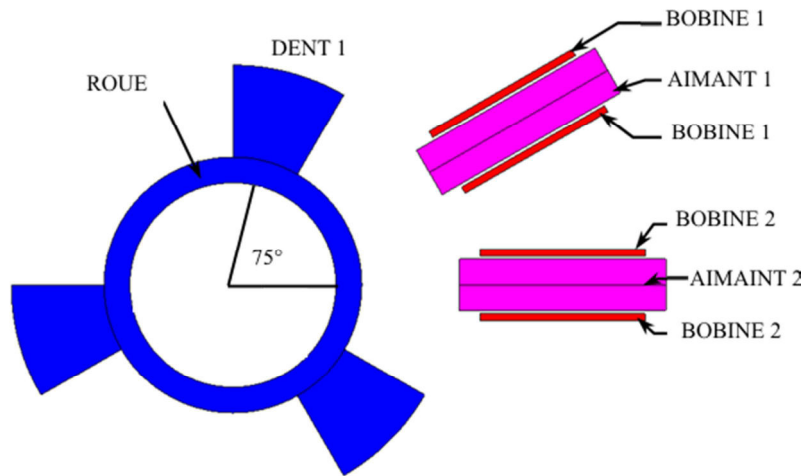


FIG.3.7. Modèle simplifié du capteur de vitesse (@CEDRAT)

La position initiale de la roue correspond à un angle  $\alpha$  de  $75^\circ$  de la première dent par rapport à l'horizontale. L'objectif est de calculer le flux magnétique dans les deux bobines en fonction de l'angle  $\alpha$ , de  $75^\circ$  jusqu'à  $195^\circ$ . Sur la figure FIG.3.8, les distributions de l'induction magnétique dans le matériau correspondant à  $\alpha = 75^\circ$  et  $\alpha = 120^\circ$  sont présentées.

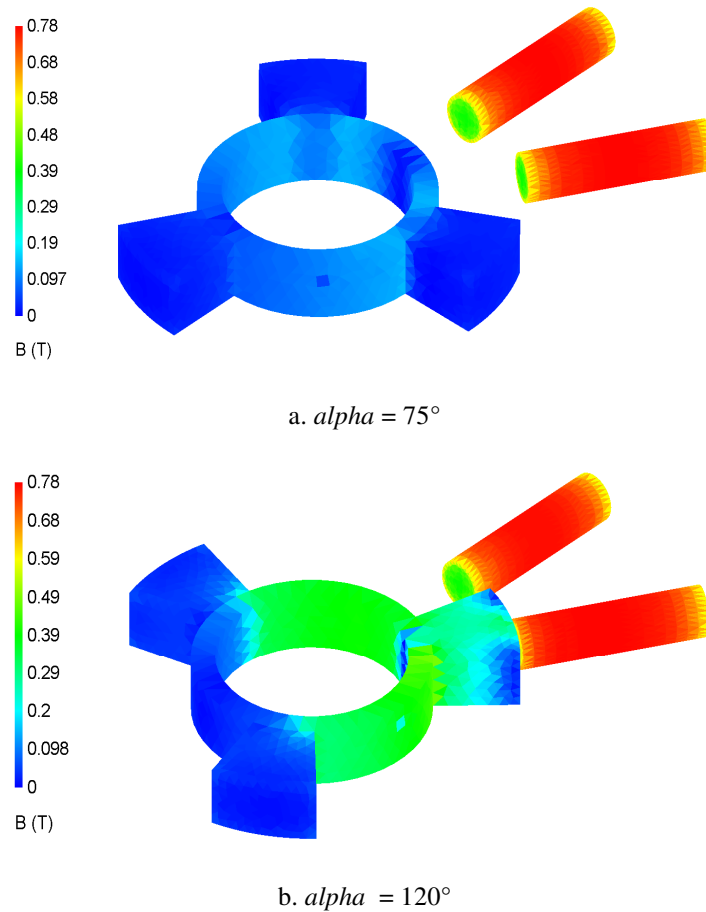
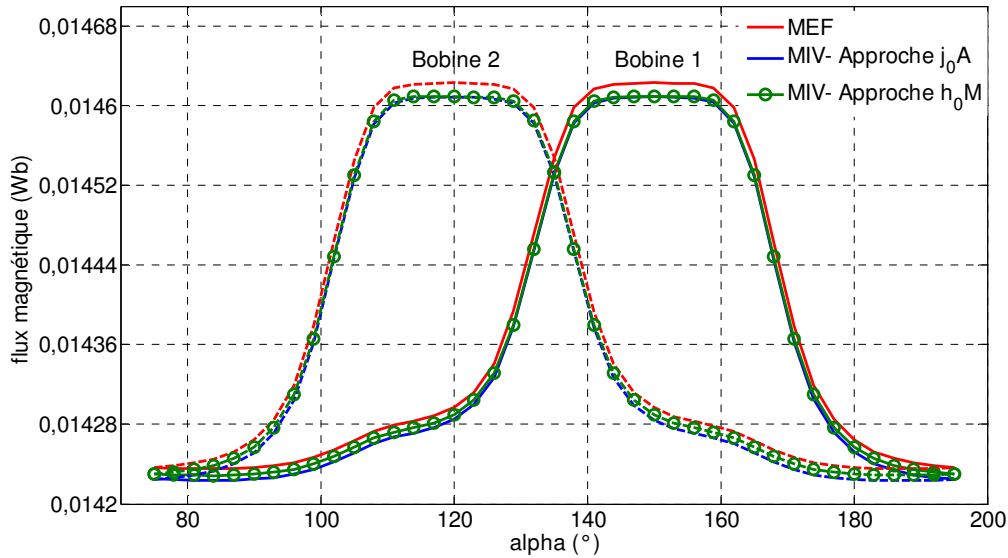


FIG.3.8. Distribution de l'induction magnétique dans le matériau magnétique

Sur la figure FIG.3.9, les flux magnétiques dans les deux bobines calculées par les deux approches sont comparés avec ceux obtenus par le logiciel FLUX utilisant un maillage de 300 000 éléments. La MIV utilise un maillage comportant 9 600 éléments dans les matériaux magnétiques. Les deux bobines sont maillées en 50 éléments pour  $\mathbf{h}_0\mathbf{M}$  et  $\mathbf{j}_0\mathbf{A}$ . Nous trouvons une bonne adéquation entre la MIV et la MEF, l'écart relatif maximum étant inférieur à 0,1 %. Les deux approches proposées donnent des valeurs similaires du flux magnétiques. Pour la MEF, nous devons remailler le domaine d'étude à chaque modification de l'angle car l'espace d'air est changé. Ceci est très coûteux quand le maillage est dense. Pour la MIV, il suffit de mailler une fois les pièces séparées (la roue et les aimants) puis de changer la position de la roue maillée.



FIG.3.9. Flux magnétique dans les deux bobines en fonction de l'angle  $\alpha$ 

### 3.2.3 Conclusions

Deux approches pour le calcul de flux traversant les bobines ont été développées. La première,  $j_0A$ , est basée sur l'utilisation de la fonction d'espace de la bobine et l'évaluation du potentiel vecteur magnétique dans la bobine. La deuxième,  $h_0M$ , est basée sur la séparation des flux créés par les bobines et ceux créés par les matériaux magnétiques. Ces approches ont été appliquées pour le calcul du flux dans la bobine du problème TEAM 13 et pour modéliser un capteur de vitesse à reluctance variable. Les résultats obtenus montrent que les deux approches donnent des résultats similaires. Tandis que l'approche  $j_0A$  est nettement plus compliquée à développer, l'approche  $h_0M$  requiert un maillage de la bobine avec un nombre d'éléments plus faible. Elle est également plus générique pour l'implémentation dans le code. En comparant avec la MEF, la MIV permet d'obtenir des résultats précis du flux magnétique avec des maillages contenant peu d'éléments entraînant des temps de calcul faibles.

## 3.3 Calcul de la force magnétique globale

### 3.3.1 Introduction

Les études sur les forces électromagnétiques sont essentielles pour la conception et l'optimisation d'une large gamme de dispositifs du génie électrique allant du contacteur au moteur électrique. Plusieurs méthodes numériques pour la détermination des forces magnétiques (la force globale ainsi que la distribution de la force locale) sont présentées dans la littérature (Carpenter, 1960), (Coulomb, 1983), (Coulomb and Meunier, 1984), (Sadowski et al., 1992), (Carpentier, 2013). Ces méthodes sont basées soit sur l'introduction de sources équivalentes (la méthode des courants équivalents, la méthode des charges équivalentes et la combinaison les deux), soit sur le principe des travaux virtuels en dérivant des énergies magnétiques ou sur l'utilisation du tenseur de Maxwell.

La plupart des travaux cités ci-dessus calculent des forces à partir des solutions de la méthode des éléments finis. L'étude sur la distribution de force magnétique à partir de la solution d'une méthode intégrale de volume (MIV) a été abordée dans la thèse de Carpentier, (Carpentier, 2013). Nous nous intéressons au calcul de la force magnétique globale en exploitant les solutions de la MIV (formulations  $\mathbf{B}$  de facette ou  $\mathbf{A}$  d'arête). La méthode des charges magnétiques équivalentes et celle des travaux virtuels sont retenues. Nous n'aborderons pas l'approche par le tenseur de Maxwell.

Nous allons dans la suite aborder les principes de ces deux méthodes avant de les appliquer à la modélisation d'un contacteur excité par une source de courant ou un aimant permanent. Les résultats numériques sont comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

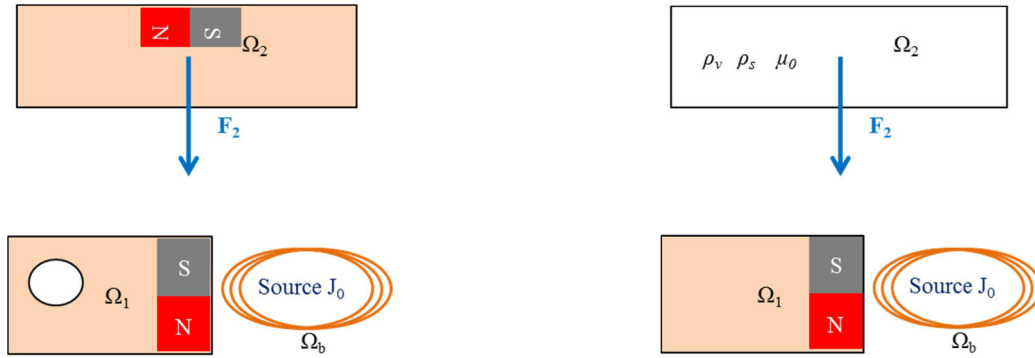
### 3.3.2 Méthodes pour le calcul de la force magnétique globale

#### 3.3.2.1 Méthode des charges équivalentes

Considérons un problème type pour le calcul de la force magnétique globale présenté sur la figure FIG.3.7.a. Les régions  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  comprennent des matériaux magnétiques (ferromagnétiques, aimants permanents) et la région  $\Omega_b$  est associée aux sources de courant. L'objectif est le calcul de la force globale  $F_2$  qui est exercée sur le domaine  $\Omega_2$  par l'ensemble des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_b$ .

La méthode des charges équivalentes fait partie du groupe de méthodes basé sur des sources équivalences. L'idée de cette méthode repose sur le remplacement de toutes les

régions aimantées par un matériau amagnétique et portant des charges magnétiques fictives qui engendrent la même valeur du champ ou de l'induction magnétique (FIG.3.7.b).



a. Problème type

b. Modèle de la méthode des charges équivalentes

FIG.3.10. Calcul de la force globale par la méthode des charges équivalentes

La matière aimantée sur laquelle est calculée la force est remplacée par une densité de charge volumique définie par (Carpenter, 1960), (Durand, 1968):

$$\rho_v = -\text{div}\mathbf{M} \quad (3.27)$$

combinée avec une densité de charge surfacique :

$$\rho_s = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \quad (3.28)$$

où  $\rho_v$ ,  $\rho_s$  sont les densités de charge volumique et surfacique, respectivement. Par l'analogie avec l'électrostatique, la distribution volumique de force  $f_v$  et la distribution surfacique de force  $f_s$  sont déterminées par :

$$\mathbf{f}_v = \rho_v \mathbf{B}_{ext} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{f}_s = \rho_s \mathbf{B}_{ext} \quad (3.30)$$

où  $\mathbf{B}_{ext}$  est l'induction magnétique créée par les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_b$ .

Nous remarquons que la perméabilité magnétique est constante ou supposée constante dans chaque élément volumique dans les formulations intégrales de volume que nous avons développées au chapitre précédent. Par conséquent,  $\text{div}\mathbf{M}$  s'annule dans chaque élément volumique ;  $\rho_v$  et  $f_v$  sont donc nulles.

La force globale est obtenue par l'intégrale surfacique de la densité  $f_s$  sur toutes les facettes des éléments volumiques du domaine  $\Omega_2$ :

$$\mathbf{F}_2 = \sum_{e=1}^{N_{e\Omega_2}} \int_{\Gamma_e} \rho_s \mathbf{B}_{ext} d\Gamma_e \quad (3.31)$$

où  $N_{e\Omega_2}$  est le nombre d'élément dans le domaine  $\Omega_2$ ,  $\Gamma_e$  est l'ensemble des surfaces de l'élément volumique  $e$ .

A partir de la solution de la formulation **B** de facette (ou le rotationnel de la solution de la formulation **A** d'arête), nous pouvons calculer l'aimantation **M** par la relation :

$$\mathbf{M} = (\nu_0 - \nu(\mathbf{B}))\mathbf{B} + \mathbf{H}_c \quad (3.32)$$

Dans laquelle  $\nu(\mathbf{B})$  est la reluctivité et  $\mathbf{H}_c$  est le champ coercitif de l'aimant permanent.

En introduisant (3.28) à (3.31), nous pouvons écrire l'expression de la force globale sous la forme :

$$\mathbf{F}_2 = \sum_{f=1}^{N_f \Omega_2} \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{M}_{nf} \mathbf{B}_{ext} d\Gamma_f \quad (3.33)$$

où  $N_{f\Omega_2}$  est le nombre de facettes dans le domaine  $\Omega_2$ ,  $\delta \mathbf{M}_{nf}$  est la différence des aimantations de deux éléments partageant la facette  $f$ , déterminée comme ci-dessous :

- Si  $f$  est une facette intérieure partagée par deux éléments  $e_i$  et  $e_j$ ,  $j > i$  :

$$\delta \mathbf{M}_{nf} = \mathbf{M}_{nfi} - \mathbf{M}_{nfj} = (\nu_i - \nu_j)\mathbf{B}_{nf} + (\mathbf{H}_{cni} - \mathbf{H}_{cnj}) \quad (3.34)$$

où  $\nu_i$ ,  $\nu_j$  sont les reluctivités des éléments  $e_i$  et  $e_j$ , respectivement;  $\mathbf{M}_{nfi} = \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{n}_f$ ,  $\mathbf{H}_{cni} = \mathbf{H}_{ci} \cdot \mathbf{n}_f$  et  $\mathbf{B}_{nf} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_f$  avec  $\mathbf{M}_i$ ,  $\mathbf{H}_{ci}$  l'aimantation et le champ coercitif de l'élément  $i$ .

- Si  $f$  est une facette extérieure appartenant à l'élément  $e_j$  :

$$\delta \mathbf{M}_{nf} = \mathbf{M}_{nfj} = (\nu_0 - \nu_j)\mathbf{B}_{nf} + \mathbf{H}_{cnj} \quad (3.35)$$

### 3.3.2.2 Méthode des travaux virtuels

La méthode des travaux virtuels repose sur l'établissement d'un bilan énergétique d'un système électromécanique soumis à un déplacement virtuel. Elle est utilisée très souvent pour le calcul des forces et couples à partir de solution issues de la méthode des éléments finis, par exemple dans le logiciel Flux (Coulomb and Meunier, 1984).

Nous considérons un domaine ferromagnétique  $\Omega_f = \Omega_I \cup \Omega_2$  soumis au champ magnétique créé par une bobine comme sur la figure FIG.3.11.a . Ce système est placé dans l'air, qui est le domaine  $\Omega_0$ . Nous notons  $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_0$ . La solution de la formulation intégrale de volume (**B** de facette ou **A** d'arête) nous permet de connaître la distribution d'induction magnétique et de potentiel vecteur magnétique dans les matériaux magnétiques.

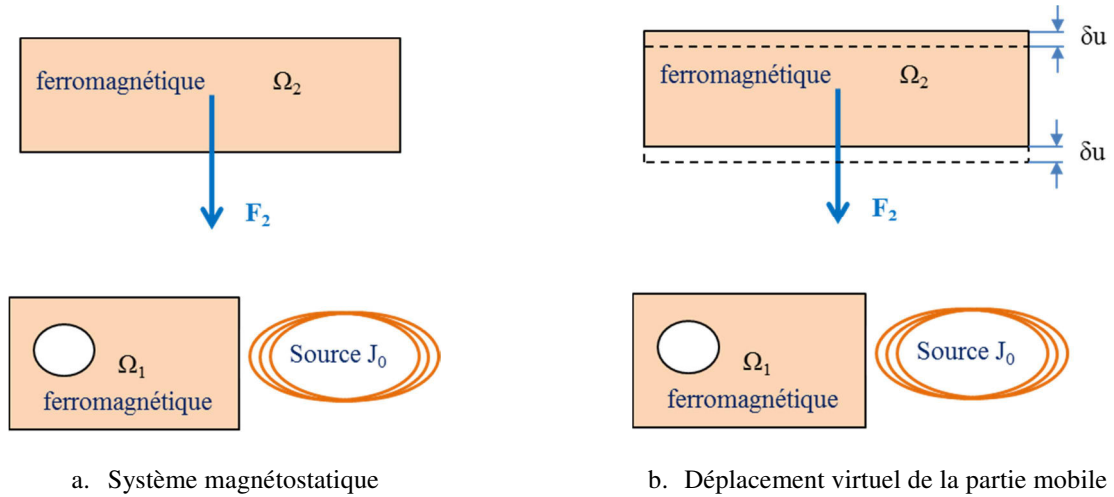


FIG.3.11. Illustration du principe de la méthode des travaux virtuels

L'énergie magnétique  $W_{mag}$  et la coénergie magnétique du système sont définies par :

$$W_{mag} = \int_{\Omega} \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} d\Omega \quad (3.36)$$

$$W_{mag}^{co} = \int_{\Omega} \int_0^H \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H} d\Omega \quad (3.37)$$

La force globale s'exerçant sur un milieu magnétique mobile non déformable du domaine est (Coulomb and Meunier, 1984) :

$$\mathbf{F}_u = \frac{\partial W_{mag}}{\partial u} \quad (3.38)$$

où  $u$  représente un déplacement virtuel de la partie mobile suivant une direction donnée. Dans ce déplacement virtuel, le maillage n'est pas distordu, la source de courant reste constante.

L'énergie magnétique peut s'exprimer par la somme de l'énergie réduite  $W_{red}$  fournie par les régions ferromagnétiques et l'énergie de source  $W_0$  fournie par la source de courant, telle que (Carpentier, 2013) :

$$W_{mag} = W_{red} + W_0 \quad (3.39)$$

avec

$$W_{red} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \left( \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + 2 \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \right) d\Omega_f \quad (3.40)$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0 d\Omega$$

où  $\mathbf{B}_0$  et  $\mathbf{H}_0$  sont les vecteurs d'induction et du champ magnétique créé par la source ;  $\mathbf{M}$  est l'aimantation.

En introduisant (3.39) à (3.38), nous pouvons écrire :

$$F_u = \frac{\partial W_{red}}{\partial u} + \frac{\partial W_0}{\partial u} \quad (3.41)$$

Comme l'énergie de source  $W_0$  ne dépend que du courant d'excitation qui reste constant lors du déplacement virtuel,  $\frac{\partial W_0}{\partial u}$  s'annule. En conséquence,

$$F_u = \frac{\partial W_{red}}{\partial u} \quad (3.42)$$

Les dérivés par rapport au déplacement virtuel des termes de (3.40) peuvent s'écrire dans toutes les directions. Par exemple, si nous nous intéressons à la direction  $x$ , la composante  $F_x$  de la force globale peut s'exprimer de la façon suivante :

$$F_x = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \left( M_x \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} + B_{0x} \frac{\partial M_x}{\partial x} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} + 2\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) d\Omega_f \quad (3.43)$$

ou bien

$$F_x = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} \left( M_x \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} + B_{0x} \frac{\partial M_x}{\partial x} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial x} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} \right) d\Omega_f \quad (3.44)$$

De la même façon, nous pouvons calculer les composantes  $F_y$  et  $F_z$ . Le principe pour le calcul des dérivées  $\frac{\partial B_{0x}}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial M_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial H_x}{\partial x}$  et  $\frac{\partial B_x}{\partial x}$  peut se trouver dans (Carpentier, 2013).

### 3.3.3 Applications

#### 3.3.3.1 Modélisation d'un contacteur excité par la source de courant

Considérons un contacteur dont la géométrie est décrite par la figure FIG.3.12 (unité en mm). Ce contacteur est excité par une bobine de 1000 tours traversée par un courant de 2A. L'entrefer entre les deux parties fixe et mobile est de 5 mm. Le matériau ferromagnétique du contacteur est non linéaire et défini par la loi suivante :

$$\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \mu_0 \mathbf{H} + \frac{2J_s}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\pi(\mu_r - 1)\mu_0 \mathbf{H}}{2J_s} \right) \quad (3.45)$$

avec  $\mu_r = 1000$  et  $J_s = 1$  T.

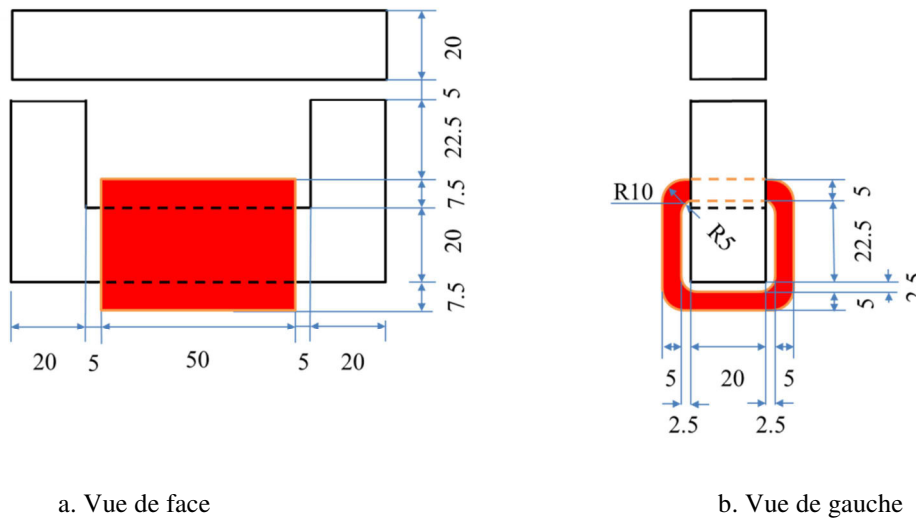


FIG.3.12. Géométrie du contacteur excité par un courant continu

Afin de modéliser ce contacteur, nous définissons trois scénarios d'étude :

1. Le courant d'excitation et l'entrefer sont fixés, la convergence du calcul de la force globale sur la palette en fonction du nombre d'éléments du maillage est étudiée.
2. A entrefer fixe, le calcul de la force sur la palette en fonction du courant d'excitation (du 0,5A à 9A) est étudié.
3. Avec un courant d'excitation constant (2A), le calcul de la force en fonction de l'entrefer (du 10 mm au 0,5 mm) est étudié.

Les résultats de la méthode des éléments finis (logiciel Flux) avec un maillage très fin sont utilisés comme référence.

**Scénario 1: Le courant et l'entrefer sont fixés.**

Pour un courant d'excitation de 2A, la distribution de l'induction magnétique dans le circuit magnétique du contacteur est représentée sur la figure FIG.3.13.

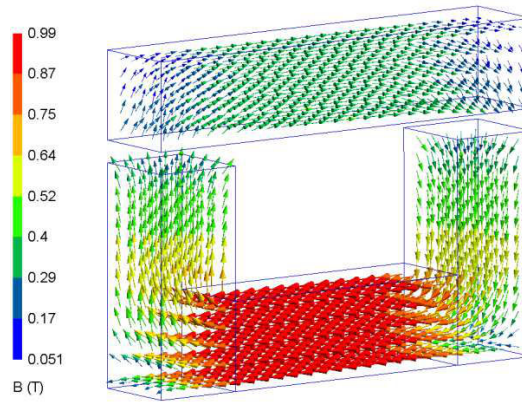


FIG.3.13. Distribution de l'induction  $\mathbf{B}$  dans le circuit magnétique du contacteur

La figure FIG.3.14 représente les courbes de convergence du calcul de la force en fonction du nombre d'éléments des régions ferromagnétiques. Les résultats obtenus par la MIV avec deux méthodes de calcul de la force proposées sont comparées avec ceux obtenus par le logiciel Flux (MEF). Ce dernier utilise la méthode des travaux virtuels pour le calcul de la force globale.

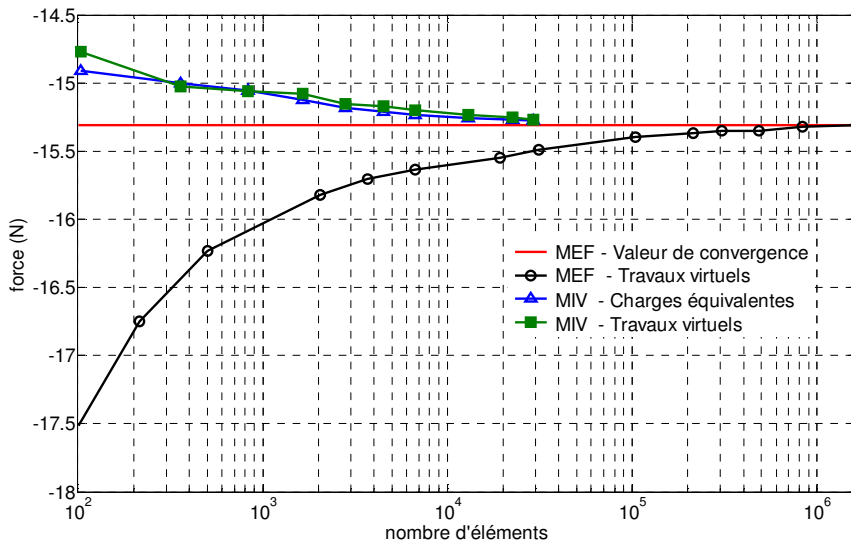


FIG.3.14. Convergence du calcul de la force pour le contacteur excité par la bobine

Les forces calculées par la MEF et la MIV convergent vers la même valeur 15,3 N. Toutefois, la force calculée avec la MIV converge plus rapidement qu'avec la MEF. En utilisant la MIV, un maillage de 100 éléments hexaèdres donne une valeur de force avec moins 5% d'écart par rapport à la référence. Pour atteindre un tel écart, la MEF requiert un maillage contenant plus de 2000 éléments hexaédriques dans les régions ferromagnétiques.



Les deux approches de calcul de la force globale proposées donnent des valeurs très similaires. En général, les écarts relatifs entre les forces obtenues par les deux approches sont inférieurs à 1%.

**Scénario 2 : L'entrefer fixé, le courant variant**

Afin d'étudier la saturation du circuit magnétique, nous nous intéressons maintenant au calcul de force en fonction du courant d'excitation en utilisant trois maillages qui se composent respectivement de 100, 830 et 6650 éléments.

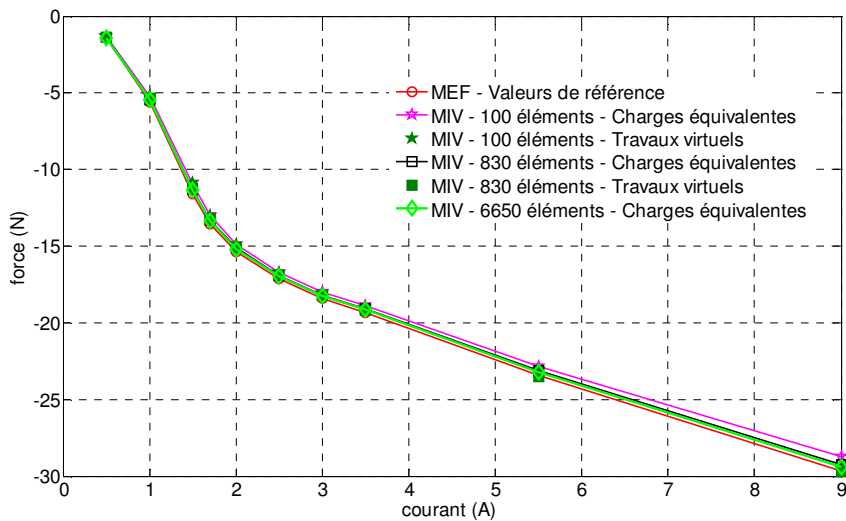


FIG.3.15. Forces globales en fonction du courant d'excitation

Sur la figure FIG.3.15, nous trouvons que les forces obtenues par la MIV sont très proches des valeurs de référence de la MEF. Le maillage de 100 éléments nous permet d'évaluer les forces avec un écart par rapport à la référence de 5% en moyenne. Si le maillage de 6650 éléments est utilisé, cet écart moyen est de 1,5%.

**Scénario 3: L'entrefer varie**

Avec un courant d'excitation de 2A, nous calculons la force en fonction de l'entrefer en définissant une variation de l'entrefer allant de 10 mm à 0.5 mm. Pour la méthode des éléments finis, nous devons redéfinir le maillage du domaine à chaque changement de la géométrie du dispositif car l'espace d'air est modifié. Ce procédé peut ainsi devenir très lourd surtout à très faible entrefer. L'application de la MIV nous permet d'éviter le remaillage du domaine. Ceci est réalisé en définissant une variable de position associée avec les coordonnées du maillage de la partie "mobile" et prenant en compte cette variable lors de l'intégration des matrices d'interaction.

Le comportement de la force globale en fonction de l'entrefer du contacteur est présenté sur la figure FIG.3.16. Les résultats obtenus par la MIV avec des maillages de 830 et 6650 éléments sont comparés avec les valeurs de référence du logiciel Flux. Nous constatons une bonne adéquation entre la MIV et les valeurs de référence pour des entrefers supérieurs à 1 mm. Pour les entrefers plus faibles, le raffinement du maillage est nécessaire afin d'obtenir des résultats précis. En outre, les techniques d'intégration pour les interactions proches (calcul analytique ou augmentation du nombre de points de Gauss) doivent être implémentées.

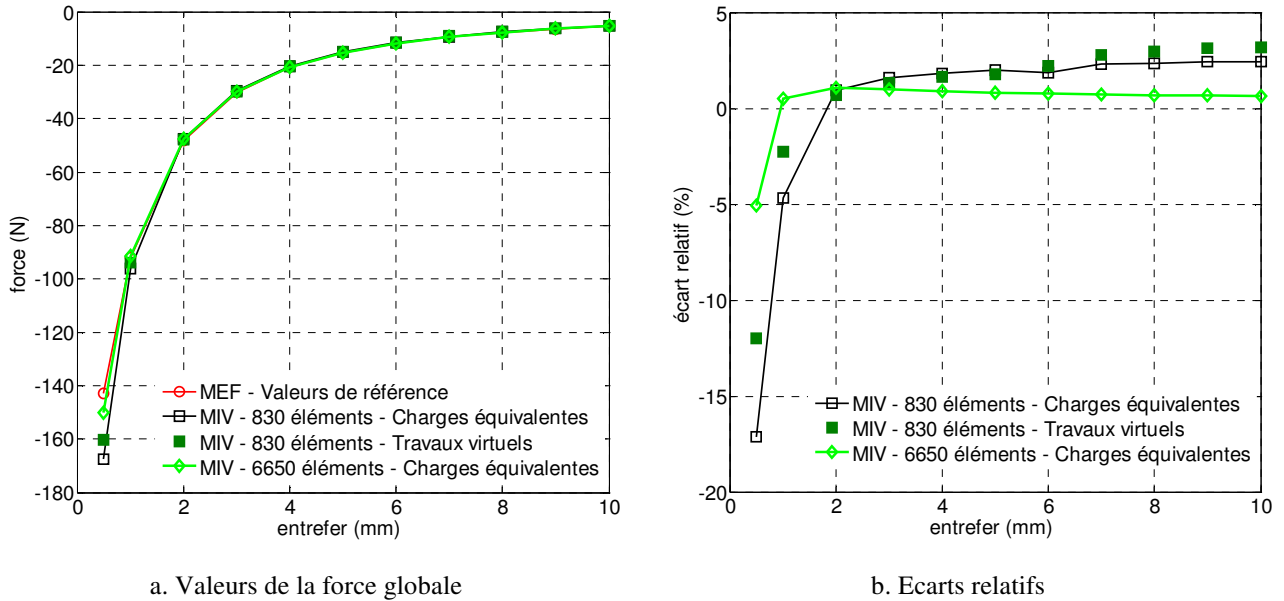
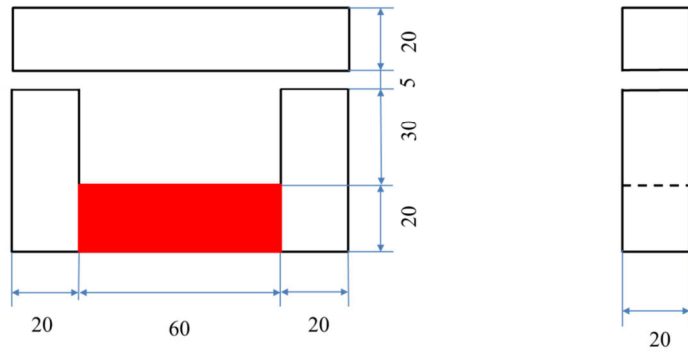


FIG.3.16. Forces globales en fonction de l'entrefer du contacteur

### 3.3.3.2 Modélisation d'un contacteur excité par un aimant permanent

Considérons un contacteur magnétique excité par un aimant permanent déjà présenté dans le chapitre précédent (section §2.2.4.1) et dont la géométrie est rappelée sur la figure FIG.3.17. Le matériau du contacteur est non linéaire avec  $\mu_r = 1000$  et  $J_s = 1$  T.



a. Vue de face b. Vue de gauche

FIG.3.17. Géométrie du contacteur excité par l'aimant permanent

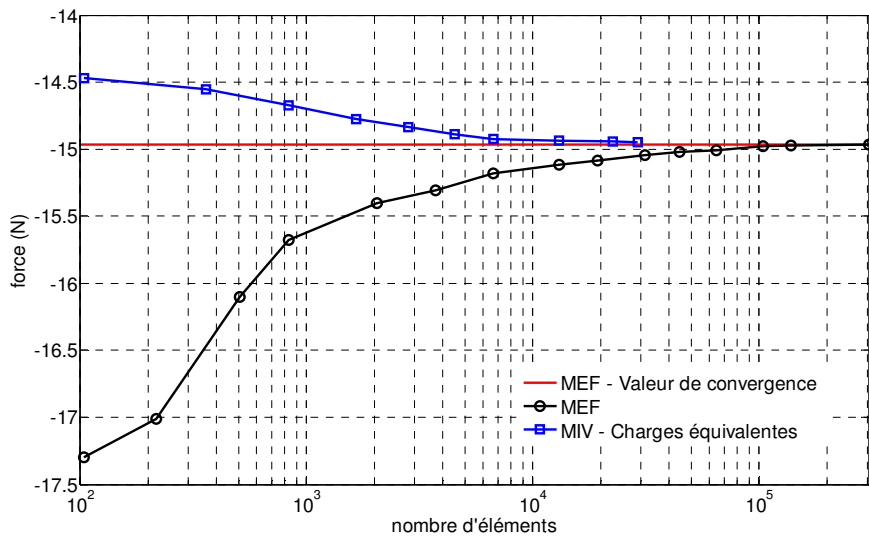


FIG.3.18. Convergence du calcul de la force pour le contacteur excité par l'aimant permanent

Les convergences du calcul de la force agissant sur la palette du contacteur obtenues avec la méthode des charges équivalentes et la MEF sont présentées sur la figure FIG.3.18. La méthode des travaux virtuels n'a pas encore été mise en place dans le cadre de ces travaux de thèse. En effet, la présence d'aimants permanents doit modifier sensiblement les calculs. La MIV possède une vitesse de convergence plus rapide que celle de la MEF et des maillages grossiers permettent d'obtenir de bons résultats.

L'utilisation de la MIV avec un maillage de 900 éléments permet d'obtenir un résultat de la force de 2% d'écart par rapport à la référence. Le temps de calcul est de 30 secondes. Pour avoir un résultat similaire, la MEF doit utiliser un maillage contenant plus de 40 000 éléments, le temps de calcul étant supérieur à 3 minutes.

### **3.3.4 Conclusions**

Deux méthodes de calcul de la force magnétique globale à partir de la solution de la méthode intégrale de volume ont été développées. L'une est basée sur l'équivalence des charges magnétiques et l'autre est basée sur le principe des travaux virtuels. L'application de ces deux méthodes pour la modélisation d'un contacteur excité par la bobine nous donne des résultats similaires. D'une part, nous avons toujours une bonne adéquation entre la MIV et la MEF dans les scénarios différents, l'augmentation du courant d'excitation ou la diminution de l'entrefer. D'autre part, la MIV permet d'obtenir de bon résultats même si des maillages avec peu d'éléments sont utilisés.

Parmi ces deux méthodes, la méthode des charges magnétiques équivalentes est plus facile à implémenter. Toutefois, lorsque l'entrefer est petit la méthode des travaux virtuels peut donner des résultats plus précis. Dans le cadre de ces travaux de thèse, les deux méthodes utilisent des matrices pleines, nous n'avons donc pas comparé les temps de calcul entre elles. Une comparaison de ce type, lorsqu'une implémentation optimisée sera faite, pourrait être une perspective de ces travaux.

## **3.4 Conclusions**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les formulations de post-traitement pour exploiter les solutions de la méthode intégrale de volume en magnétostatique. Deux méthodes pour le calcul du flux magnétique traversant la bobine et deux méthodes pour le calcul de la force magnétique globale à partir de la solution de la MIV ont été développées.

Les méthodes proposées ont été appliquées à la modélisation de différents dispositifs (le problème TEAM 13, un capteur de vitesse à reluctance variable et des contacteurs). Quelle que soit l'approche utilisée, la MIV donne des résultats précis avec un temps de calcul faible en comparaison avec la MEF. Pour la MIV, l'utilisation de maillages peu dense permet d'obtenir de bons résultats. En outre, lorsqu'une stratégie de déplacement est associée au problème, la MEF requiert de remailler le domaine. En utilisant la MIV, il suffit de changer la position de la pièce mobile maillée.

Ainsi, la MIV est très favorable aux études de pré-dimensionnement, c'est-à-dire associé à une stratégie d'optimisation.

## Bibliographie du chapitre 3

- Brissonneau, P., 1997. Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique. HERMES SCIENCE.
- Carpenter, C.J., 1960. Surface-integral methods of calculating forces on magnetized iron parts. Proc. IEE-Part C Monogr. 107, 19–28.
- Carpentier, A., 2013. Formulation intégrale de volume magnétostatique et calcul des densités de force magnétique: Application au couplage magnéto-mécanique. Université de Grenoble.
- Coulomb, J., 1983. Methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques. IEEE Trans. Magn. M.
- Coulomb, J.-L., Meunier, G., 1984. Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation. IEEE Trans. Magn. 20, 1894–1896. doi:10.1109/TMAG.1984.1063232
- Durand, É., 1968. Magnétostatique. Masson et Cie.
- Fabbri, M., 2009. Magnetic Flux Density and Vector Potential of Uniform Polyhedral Sources. COMPEL Int J Comput. Maths Electr. Electron. Eng Vol.28, pp. 1688–1700.
- Fabbri, M., 2008. Magnetic Flux Density and Vector Potential of Uniform Polyhedral Sources. IEEE Trans. Magn. 44, 32–36. doi:10.1109/TMAG.2007.908698
- Meunier, G., 2002. Electromagnétisme et problèmes couplés : électromagnétisme et éléments finis 3 (Traite EGEM, série Génie électrique), Lavoisier. ed.
- Nakata, T., Fujiwara, K., 1992. Summary of results for benchmark problem 13 (3-d nonlinear magnetostatic model). COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng. 11, 345–369. doi:10.1108/eb010097
- Nakata, T., Takahashi, N., Fujiwara, K., 1995. Summary of results for team workshop problem 13 (3-d nonlinear magnetostatic model). COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng. 14, 91–101. doi:10.1108/eb010140
- Sadowski, N., Lefèvre, Y., Lajoie-Mazenc, M., Bastos, J.P.A., 1992. Sur le calcul des forces magnétiques. J. Phys. 2, 859–870.
- Urankar, L.K., 1982a. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part II: Thin sheet approximation. Magn. IEEE Trans. On 18, 911–917.
- Urankar, L.K., 1982b. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part III: Exact computation for rectangular cross section. Magn. IEEE Trans. On 18, 1860–1867.
- Urankar, L.K., 1980. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part I: Filament approximation. IEEE Trans. Magn. 16, 1283–1288. doi:10.1109/TMAG.1980.1060864

# Conclusion générale et perspectives

Les travaux réalisés dans cette thèse ont eu pour objectif le développement d'un outil performant pour la modélisation magnétostatique de dispositifs du génie électrique. Deux formulations intégrales de volumes et des méthodes pour le calcul de la force magnétique globale et du flux dans les bobines ont été proposées. Les matériaux magnétiques non linéaires, régions non simplement connexes, aimants permanents, bobines ainsi que les régions minces magnétiques sont pris en compte.

La première formulation, dite *formulation  $\mathbf{B}$  de facette*, est basée sur l'interpolation des éléments de facette du premier ordre et les flux magnétiques traversant les facettes. Son système d'équations est résolu à travers la méthode des mailles indépendantes, les inconnus étant les flux de maille. La deuxième formulation, dite *formulation  $\mathbf{A}$  d'arête*, est basée sur l'interpolation des éléments d'arête du premier ordre et la circulation du potentiel vecteur le long des arêtes. Même si la matrice à résoudre est singulière, nous pouvons utiliser un solveur itératif pour la résolution sans avoir besoin d'introduire de jauge, car le système d'équations est compatible. Avec ces deux formulations, dites formulations de *type  $b$* , nous pouvons passer de la *formulation  $\mathbf{B}$  de facette* à la *formulation  $\mathbf{A}$  d'arête* en substituant la matrice d'incidence des mailles indépendantes par une matrice d'incidence face-arête. Les essais effectués ont montré que ces formulations permettent d'obtenir des résultats ayant une bonne précision même en présence de maillages légers. En outre, la résolution des problèmes non linéaires converge généralement avec peu d'itérations, sans nécessiter de relaxation.

Suite au développement des formulations de *type  $b$* , une comparaison entre les formulations intégrales pour la résolution de problèmes magnétostatiques non linéaires a été proposée. Comme attendu, les formulations  *$\mathbf{B}$  de facette* et  *$\mathbf{A}$  d'arête* donnent des résultats très similaires. Les résultats numériques ont montré que les formulations de *type  $b$*  sont plus performantes que la formulation en potentiel scalaire magnétique par collocation (*type  $h$* ) si un solveur itératif et la méthode de Newton Raphson sont utilisés. Afin de simplifier la discrétisation et la modélisation magnétostatique des régions minces, une formulation utilisant des maillages surfaciques reposant sur la *formulation  $\mathbf{B}$  de facette* a été proposée. Grâce à cette approche, les formes géométriques complexes peuvent être discrétisées simplement avec un nombre d'inconnues réduit tout en garantissant une bonne précision des résultats.

Un des objectifs de la modélisation magnétostatique est de déterminer des grandeurs globales sur les dispositifs. Ainsi, le post-traitement pour le calcul du flux dans les bobines et

de la force magnétique globale sur une région à partir des solutions obtenues grâce à des formulations intégrales a été étudié et développé. Deux approches pour le calcul du flux, l'une basée sur le potentiel vecteur et la densité de courant unitaire et l'autre, basée sur le champ magnétique unitaire et l'aimantation, ont été proposées. Concernant le calcul de la force, la méthode des charges magnétiques équivalentes et celle des travaux virtuels ont été implémentées. En général, les différentes approches donnent des résultats très similaires sur les grandeurs globales. En comparant les résultats obtenus avec ceux de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes dans lesquels l'air est prépondérant, les méthodes intégrales de volume basées sur les formulations développées dans cette thèse, convergent (au sens du maillage) plus rapidement. L'utilisation de maillages grossiers permet d'obtenir des résultats ayant une bonne précision avec un temps de calcul réduit.

A la suite de ces travaux, quelques perspectives sont envisagées. Premièrement, permettre la prise en compte des courants induits dans les formulations intégrales afin de traiter des problèmes magnéto harmoniques, temporels et en mouvement. Deuxièmement, en considérant l'intérêt de ne pas avoir à mailler l'air, il peut être intéressant d'appliquer les formulations développées à la modélisation des machines tournantes (thèse en cours de Q. Debray). Enfin, il paraît opportun de coupler la méthode intégrale de volume en magnétostatique avec des méthodes d'optimisation, en utilisant par exemple l'outil GOT développé au G2Elab pour le pré-dimensionnement des dispositifs.

# Bibliographie générale

- Albanese, R., Rubinacci, G., 1990. Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 29, 515–532. doi:10.1002/nme.1620290305
- Albanese, R., Rubinacci, G., 1988. Integral formulation for 3D eddy-current computation using edge elements. *IEE Proc. Phys. Sci. Meas. Instrum. Manag. Educ. Rev.* 135, 457–462. doi:10.1049/ip-a-1.1988.0072
- Ardon, V., 2010. Méthodes numériques et outils logiciels pour la prise en compte des effets capacitifs dans la modélisation CEM de dispositifs d'électronique de puissance (phdthesis). Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG.
- Balasubramanian, S., Lalgudi, S.N., Shanker, B., 2002. Fast-integral-equation scheme for computing magnetostatic fields in nonlinear media. *IEEE Trans. Magn.* 38, 3426–3432.
- Bebendorf, M., Rjasanow, S., 2003. Adaptive Low-Rank Approximation of Collocation Matrices. *Computing* 70, 1–24. doi:10.1007/s00607-002-1469-6
- Börm, S., Grasedyck, L., others, 2004. Hybrid cross approximation of integral operators.
- Bossavit, A., 1988. Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proc. Phys. Sci. Meas. Instrum. Manag. Educ. Rev.* 135, 493. doi:10.1049/ip-a-1.1988.0077
- Bossavit, A., Kettunen, L., 2000. Yee-like schemes on staggered cellular grids: a synthesis between FIT and FEM approaches. *IEEE Trans. Magn.* 36, 861–867. doi:10.1109/20.877580
- Brissonneau, P., 1997. Magnétisme et matériaux magnétiques pour l'électrotechnique. HERMES SCIENCE.
- Brunotte, X., 1991. Modélisation de l'infini et prise en compte de régions magnétiques minces - application à la modélisation des aimantations de navires. INP GRENOBLE.
- Canova, A., Repetto, M., 2001. Integral solution of nonlinear magnetostatic field problems. *IEEE Trans. Magn.* 37, 1070–1077. doi:10.1109/20.920478
- Carpenter, C.J., 1960. Surface-integral methods of calculating forces on magnetized iron parts. *Proc. IEE-Part C Monogr.* 107, 19–28.
- Carpentier, A., 2013. Formulation intégrale de volume magnétostatique et calcul des densités de force magnétique: Application au couplage magnéto-mécanique. Université de Grenoble.
- Carpentier, A., Chadebec, O., Galopin, N., Meunier, G., Bannwarth, B., Formulation, A., 2013. Resolution of Nonlinear Magnetostatic Problems With a Volume Integral Method Using the Magnetic Scalar Potential. *IEEE Trans. Magn.* 49, 1685–1688.
- Chadebec, O., 2001. Modélisation du champ magnétique induit par des tôles-identification de l'aimantation-Application à l'immunisation en boucle fermée d'une coque ferromagnétique. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- Chadebec, O., Coulomb, J.-L., Janet, F., 2006. A review of magnetostatic moment method. *IEEE Trans. Magn.* 42, 515–520. doi:10.1109/TMAG.2006.870929
- Chubar, O., Elleaume, P., Chavanne, J., 1998. A three-dimensional magnetostatics computer code for insertion devices. *J. Synchrotron Radiat.* 5, 481–484.
- Coulomb, J., 1983. Methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques. *IEEE Trans. Magn. M.*
- Coulomb, J.-L., Meunier, G., 1984. Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation. *IEEE Trans. Magn.* 20, 1894–1896. doi:10.1109/TMAG.1984.1063232



- Dular, P., Nicolet, A., 1995. A discrete sequence associated with mixed finite elements and its gauge condition for vector potentials. *IEEE Trans. Magn.* 31.
- Dular, P., Nicolet, A., Genon, A., Legros, W., 1995. A discrete sequence associated with mixed finite elements and its gauge condition for vector potentials. *IEEE Trans. Magn.* 31, 1356–1359. doi:10.1109/20.376278
- Durand, É., 1968. *Magnétostatique*. Masson et Cie.
- Elleaume, P., Chubar, O., Chavanne, J., 1997. Computing 3D magnetic fields from insertion devices, in: *Particle Accelerator Conference, 1997. Proceedings of the 1997. IEEE*, pp. 3509–3511.
- Fabbri, M., 2009. Magnetic Flux Density and Vector Potential of Uniform Polyhedral Sources. *COMPEL Int J Comput. Maths Electr. Electron. Eng* Vol. 28, pp. 1688–1700.
- Fabbri, M., 2008. Magnetic Flux Density and Vector Potential of Uniform Polyhedral Sources. *IEEE Trans. Magn.* 44, 32–36. doi:10.1109/TMAG.2007.908698
- Forsman, K., Kettunen, L., Nuutinen, J.-P., 1996. Properties of b- and h-type integral equation formulations. *IEEE Trans. Magn.* 32, 1421–1424. doi:10.1109/20.497514
- Forsman, K., Kettunen, L., Nuutinen, J.-P., 1995. Performance of a nonlinear 2D and 3D magnetostatic volume integral formulation. *IEEE Trans. Magn.* 31, 1488–1491. doi:10.1109/20.376311
- Gimignani, M., Musolino, A., Raugi, M., 1994. Integral formulation for nonlinear magnetostatic and eddy currents analysis. *IEEE Trans. Magn.* 30, 3024–3027.
- Greengard, L., Rokhlin, V., 1987. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.* 73, 325–348.
- Guérin, C., 1994. Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique (phdthesis). Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG.
- Guichon, J.-M., 2001. Modélisation, caractérisation, dimensionnement de jeux de barres. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- Hafla, W., Buchau, a., Groh, F., Rucker, W.M., 2005. Efficient integral equation method for the solution of 3-D magnetostatic problems. *IEEE Trans. Magn.* 41, 1408–1411. doi:10.1109/TMAG.2005.844342
- Hafla, W., Groh, F., Buchau, a., Rucker, W.M., 2006. Magnetic field computation with integral equation method and energy-controlled relaxation. *IEEE Trans. Magn.* 42, 719–722. doi:10.1109/TMAG.2006.871598
- Han, L., Tong, L., Yang, J., 1994. Integral equation method using total scalar potential for the simulation of linear or nonlinear 3D magnetostatic field with open boundary. *IEEE Trans. Magn.* 30, 2897–2890.
- Harrington, R.F., 1993. *Field Computation by Moment Methods*. Oxford University Press, USA.
- Henneron, T., 2004. Contribution à la prise en compte des Grandeurs Globales dans les Problèmes d'Electromagnétisme résolus avec la Méthode des Eléments Finis. UNIVERSITÉ LILLE I.
- Kalimov, A.G., Svedentsov, M.L., 1996. Three-dimensional magnetostatic field calculation using integro-differential equation for scalar potential. *IEEE Trans. Magn.* 32, 667–670. doi:10.1109/20.497326
- Kalimov, A., Svedentsov, M., 1998. Application of a hybrid integrodifferential method for analysis of thin magnetic shields. *IEEE Trans. Magn.* 34, 2453–2456. doi:10.1109/20.717564
- Kettunen, L., Forsman, K., Levine, D., Gropp, W., 1995. Volume integral equations in non-linear 3-D magnetostatics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38, 2655–2675.

- Kettunen, L., Turner, L., 1992. A volume integral formulation for nonlinear magnetostatics and eddy currents using edge elements. *IEEE Trans. Magn.* 28, 1639–1642.
- Krstajic, B., Andelic, Z., Milojkovic, S., Babic, S., Salon, S., 1992. Nonlinear 3D magnetostatic field calculation by the integral equation method with surface and volume magnetic charges. *IEEE Trans. Magn.* 28, 1088 – 1091. doi:10.1109/20.123871
- Le-Duc, T., 2011. Développement de méthodes intégrales de volume en électromagnétisme basse fréquence. Prise en compte des matériaux magnétiques et des régions minces conductrices dans la méthode PEEC. Grenoble.
- Le-Van, V., Bannwarth, B., Carpentier, A., Chadebec, O., Guichon, J.-M., Meunier, G., 2014. The Adaptive Cross Approximation Technique for a Volume Integral Equation Method Applied to Nonlinear Magnetostatic Problems. *IEEE Trans. Magn.* 50, 445–448. doi:10.1109/TMAG.2013.2281568
- Le Van, V., Meunier, G., Chadebec, O., Guichon, J.-M., 2015a. A Volume Integral Formulation Based on Facet Elements for Nonlinear Magnetostatic Problems. *IEEE Trans. Magn.* 1–7. doi:10.1109/TMAG.2015.2389197
- Le Van, V., Meunier, G., Chadebec, O., Guichon, J.-M., 2015b. A Magnetic Vector Potential Volume Integral Formulation for Nonlinear Magnetostatic Problems, in: *COMPUMAG 2015*. Montréal, Canada.
- Luong, H.T., 1997. Amélioration de la formulation en potentiel scalaire magnétique et généralisation au couplage entre équations de champ et de circuit électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- Meunier, G., 2002. *Electromagnétisme et problèmes couplés : électromagnétisme et éléments finis 3 (Traite EGEM, série Génie électrique)*, Lavoisier. ed.
- Meunier, G., Chadebec, O., Guichon, J.-M., Le-Van, V., 2015. A-T Volume integral formulation for solving electromagnetic problems in the frequency domain. Presented at the *COMPUMAG*, Montréal, Canada, pp. OA2–4.
- Morandi, A., Fabbri, M., Ribani, P.L., 2010. A Modified Formulation of the Volume Integral Equations Method for 3-D Magnetostatics. *IEEE Trans. Magn.* 46, 3848–3859. doi:10.1109/TMAG.2010.2066571
- Nakata, T., Fujiwara, K., 1992. Summary of results for benchmark problem 13 (3-d nonlinear magnetostatic model). *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.* 11, 345–369. doi:10.1108/eb010097
- Nakata, T., Takahashi, N., Fujiwara, K., 1995. Summary of results for team workshop problem 13 (3-d nonlinear magnetostatic model). *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.* 14, 91–101. doi:10.1108/eb010140
- Nedelec, J.C., 1980. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numer. Math.* 35, 315–341. doi:10.1007/BF01396415
- Newman, M.J., Trowbridge, C.W., Turner, L.R., 1972. GFUN: An interactive program as an aid to magnet design, in: *Proc. 4th Int. Conf. Magnet Technology*. Brookhaven National Laboratory, Upton, NY, pp. 617–626.
- Nguyen, T.S., 2012. Réduction de modèles issus de la méthode PEEC pour la modélisation électromagnétique des interconnexions électriques. Grenoble.
- Nguyen, T.-S., Guichon, J.-M., Chadebec, O., Labie, P., Coulomb, J.-L., 2011. Ships Magnetic Anomaly Computation With Integral Equation and Fast Multipole Method. *IEEE Trans. Magn.* 47, 1414–1417.
- Nguyen, T.-S., Guichon, J.-M., Chadebec, O., Meunier, G., Vincent, B., 2012. An independent loops search algorithm for solving inductive PEEC large problems. *Prog. Electromagn. Res. M* 23, 53–63.
- Nguyen, T.T., 2014. Méthode PEEC inductive par élément de facette pour la modélisation des régions conductrices volumiques et minces. Université de Grenoble.

- Phung, A.T., 2006. Développement de formulations électromagnétiques éléments finis 3D pour la modélisation des dispositifs en fréquence élevée. Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG.
- Raviart, P.A., Thomas, J.M., 1977. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems, in: Galligani, I., Magenes, E. (Eds.), *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, pp. 292–315.
- Ren, Z., 1996. The R.H.S. on the Convergence Behaviour. *IEEE Trans. Magn.* 32.
- Ren, Z., Razek, A., 1996. Computation of 3D electromagnetic field using differential forms based elements and dual formulations. *IJNM Electron. Netw. Devices Fields* 9, 81–98.
- Rubeck, C., Yonnet, J., Allag, H., Delinchant, B., Chadebec, O., 2013. Analytical Calculation of Magnet Systems : Magnetic Field Created by Charged Triangles and Polyhedra 49, 144–147.
- Sadowski, N., Lefèvre, Y., Lajoie-Mazenc, M., Bastos, J.P.A., 1992. Sur le calcul des forces magnétiques. *J. Phys.* 2, 859–870.
- Siau, J., Chadebec, O., Perrussel, R., Poirier, J.-R., 2015. Hybrid Cross Approximation for a Magnetostatic Formulation. *IEEE Trans. Magn.* 51, 1–4. doi:10.1109/TMAG.2014.2364739
- Simkin, J., 1990. Results for the TEAM Problem 13 Benchmark, in: *Proc. of European Team Workshop and International Seminar in Electromagnetic Field Analysis*. Oxford, England, pp. 137–143.
- Souza, M., Vidigal, C., Momy, A., Taquin, J., Sauzade, M., 1997. Nonlinear calculation of three-dimensional static magnetic fields. *IEEE Trans. Magn.* 33, 2486–2491. doi:10.1109/20.595903
- Specogna, R., Trevisan, F., 2008. Eddy-Currents Computation With T-Omega Discrete Geometric Formulation for an NDE Problem. *IEEE Trans. Magn.* 44, 698–701. doi:10.1109/TMAG.2007.916401
- Takahashi, Y., Matsumoto, C., Wakao, S., 2007. Large-Scale and Fast Nonlinear Magnetostatic Field Analysis by the Magnetic Moment Method With the Adaptive Cross Approximation. *IEEE Trans. Magn.* 43, 1277–1280. doi:10.1109/TMAG.2006.890973
- Trowbridge, C.W., 1982. Three-dimensional field computation. *IEEE Trans. Magn.* 18, 293–297. doi:10.1109/TMAG.1982.1061776
- Urankar, L.K., 1982a. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part II: Thin sheet approximation. *Magn. IEEE Trans. On* 18, 911–917.
- Urankar, L.K., 1982b. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part III: Exact computation for rectangular cross section. *Magn. IEEE Trans. On* 18, 1860–1867.
- Urankar, L.K., 1980. Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part I: Filament approximation. *IEEE Trans. Magn.* 16, 1283–1288. doi:10.1109/TMAG.1980.1060864
- Vishnevsky, A.M., Kalimov, A.G., Lapovok, A.A., 2002. Modeling magnetization using Whitney facet elements. *IEEE Trans. Magn.* 38, 489–492. doi:10.1109/20.996129
- Young, J.C., Gedney, S.D., 2011. A Locally Corrected Nyström Formulation for the Magnetostatic Volume Integral Equation. *IEEE Trans. Magn.* 47, 2163–2170.
- Zhao, K., Vouvakis, M., Lee, J., 2005. The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC problems. *IEEE Trans. Magn.* 47, 763–773.

# Publications

## *Articles dans des revues internationales avec comité de lecture :*

- [R1] **V. Le-Van**, G. Meunier, O. Chadebec, and J.-M. Guichon, «Magnetic Vector Potential Volume Integral Formulation for Nonlinear Magnetostatic Problems», vol. 52, no. 3, Mar. 2016. DOI: 10.1109/TMAG.2015.2490627
- [R2] G. Meunier, O. Chadebec, J.-M. Guichon, and **V. Le-Van**, J. Siau, B. Bannwarth, and F. Sirois, «A-T volume integral formulations for solving electromagnetic problems in the frequency domain», vol. 52, no. 3, Mar. 2016. DOI: 10.1109/TMAG.2015.2496243.
- [R3] **V. Le-Van**, G. Meunier, O. Chadebec, and J.-M. Guichon, «A Volume Integral Formulation Based on Facet Elements for Nonlinear Magnetostatic Problems», IEEE Trans. Magn., vol. 51, n° 7, p. 1-6, Jul. 2015.
- [R4] **V. Le-Van**, B. Bannwarth, A. Carpentier, O. Chadebec, J.-M. Guichon, and G. Meunier, «The Adaptive Cross Approximation Technique for a Volume Integral Equation Method Applied to Nonlinear Magnetostatic Problems», IEEE Trans. Magn., vol. 50, n° 2, p. 445-448, Feb. 2014.

## *Communications dans des conférences internationales avec comité de lecture :*

- [C1] **V. Le Van**, G. Meunier, O. Chadebec, and J.-M. Guichon, «Magnetic Vector Potential Volume Integral Formulation for Nonlinear Magnetostatic Problems», COMPUMAG'2015, Jul. 2015, Montréal, Canada. (*ref. to R1*)
- [C2] **V. Le-Van**, G. Meunier, O. Chadebec, J.-M. Guichon, and B. Bannwarth, «Formulation intégrale de volume en potentiel vecteur magnétique pour les problèmes magnétostatiques non linéaires en présence d'aimant permanent», NUMELEC'2015, Jun. 2015, Saint Nazaire, France.
- [C3] G. Meunier, O. Chadebec, et J.-M. Guichon, and **V. Le-Van**, «A-T volume integral formulations for solving electromagnetic problems in the frequency domain», COMPUMAG'2015, Jul. 2015, Montréal, Canada. (*ref. to R2*).
- [C4] G. Meunier, O. Chadebec, J.-M. Guichon, **V. Le-Van**, T.-T. Nguyen, J. Siau, B. Banwarth, P. Labie, «Formulations intégrales de volume en électromagnétisme basées sur une approche circuit», NUMELEC2015, Jun. 2015, Saint Nazaire, France.
- [C5] O. Chadebec, G. Meunier, J.-M. Guichon, and **V. Le-Van**, «A survey of Magnetostatic Volume Integral Methods», MOMAG'2014, Sep. 2014, Curitiba, Brazil.
- [C6] **V. Le Van**, G. Meunier, O. Chadebec, and J.-M. Guichon, «Magnetic Flux Volume Integral Formulation for 3D Nonlinear Magnetostatic Problems», CEFC'2014, Jun. 2014, Annecy, France. (*ref. to R3*)

- [C7] B. Bannwarth, A. Carpentier, **V. Le-Van**, O. Chadebec, J.-M. Guichon and G. Meunier, "Adaptive Cross Approximation Technique for Volume Integral Method Applied to Nonlinear Magnetostatic Problems", COMPUMAG2013, Jul. 2013, Budapest, Hungary. (*ref. to R4*).
- [C8] **V. Le Van**, O. Chadebec, B. Bannwarth, A. Carpentier, J.-M. Guichon, and G. Meunier, «The Adaptive Cross Approximation Technique for the Integral Method in Magnetostatic», EMF'2013, Apr. 2013, Bruges, Belgium.
- [C9] B. Bannwarth, A. Carpentier, O. Chadebec, J.-M. Guichon, **V. Le-Van**, «Compression matricielle ACA de formulations intégrales en potentiels», NUMELEC'2012, Jul. 2012, Marseille, France.



# DEVELOPPEMENT DE FORMULATIONS INTEGRALES DE VOLUME EN MAGNETOSTATIQUE

## Résumé:

Ces dernières années, la Méthode Intégrale de Volume (MIV) a reçu une attention particulière pour la modélisation des problèmes électromagnétiques en basse fréquence. Son intérêt principal est l'absence du maillage de la région air, ce qui rend la méthode légère et rapide. Associée aux méthodes de compression matricielle la MIV devient aujourd'hui une alternative compétitive à la méthode des éléments finis pour la modélisation de dispositifs électromagnétiques ayant un volume d'air prépondérant.

Ce rapport porte sur le développement de deux formulations intégrales de volume pour la résolution de problèmes magnétostatiques avec prise en compte des matériaux non linéaires, des aimants, des bobines, des circuits magnétiques avec ou sans entrefer et des régions minces magnétiques. La première est une formulation en flux de mailles indépendantes basée sur l'interpolation par éléments de facette. La deuxième est une formulation en potentiel vecteur magnétique basée sur l'interpolation par éléments d'arête. L'application de ces formulations permet d'une part d'obtenir des résultats précis même en présence d'un faible maillage et d'autre part de résoudre aisément des problèmes non linéaires. Des méthodes de calcul de la force magnétique globale ainsi que du flux magnétique dans les bobines ont été également mises en œuvre. Les développements informatiques ont été réalisés dans la plateforme MIPSE et ont été validés sur des problèmes académiques ainsi que sur quelques dispositifs industriels.

**Mots clés:** *méthode intégrale de volume, magnétostatique, matériau non linéaire, région mince magnétique, force magnétique globale, flux magnétique, éléments d'arête, éléments de facette.*

---

## DEVELOPEMENT OF MAGNETOSTATIC VOLUME INTEGRAL FORMULATIONS

### Abstract:

In recent years, the Volume Integral Method (VIM) has been received particular attention for modeling of low frequency electromagnetic problems. The main advantage of this method is that inactive regions do not to be discretized, which makes it light and rapid. Associated with matrix compression methods, the VIM is a competitive alternative to the finite element method for modeling electromagnetic devices containing a predominant air volume.

This PhD thesis focuses on the development of two volume integral formulations for solving magnetostatic problems, in the presence of nonlinear materials, magnets, coils, multiply connected magnetic regions, and the presence of magnetic shielding. The first one is a mesh magnetic flux formulation based on the interpolation of facet elements and the second one is a magnetic vector potential formulation based on the interpolation of edge elements. The application of these formulations provides accurate results even with coarse meshes and allows solving straightforward nonlinear magnetostatic problems. Methods for computing global magnetic force and magnetic flux through a coil were also implemented as part of this work. Developments performed in the MIPSE platform were validated on academic case-tests as well as some industrial devices.

**Keywords:** *volume integral method, magnetostatic, nonlinear materials, magnetic shielding, global magnetic force, magnetic flux through a coil, edge elements, facet elements.*