



**HAL**  
open science

# Approches didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement. Le cas du calcul formel en lycée.

Jean-Baptiste Lagrange

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Lagrange. Approches didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement. Le cas du calcul formel en lycée. . Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Denis Diderot Paris VII, 2000. tel-01279249

**HAL Id: tel-01279249**

**<https://theses.hal.science/tel-01279249>**

Submitted on 25 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

J.B. Lagrange

Document pour l'Habilitation à Diriger les Recherches

Université Paris VII

28 janvier 2000

# Approches didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement

## Le cas du calcul formel en lycée

### **Jury**

Michèle ARTIGUE, Professeur Université Paris VII, rapporteur

Dominique GUIN, Professeur Université Montpellier

Colette LABORDE, Professeur IUFM Grenoble, rapporteur

Bernard R. HODGSON, Professeur Université Laval, Québec, rapporteur

Janine ROGALSKI Directeur de Recherche CNRS



# Sommaire

<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>3</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>3</b>
<b>LE CALCUL FORMEL DANS L'ENSEIGNEMENT : QUESTIONS DIDACTIQUES</b>	<b>7</b>
<b>Pourquoi une étude sur le calcul formel ?</b>	<b>7</b>
<b>Qu'est ce que le calcul formel ?</b>	<b>8</b>
La terminologie	8
Quels apports supposés à la pratique mathématique ? Quelles difficultés prévisibles ?	10
<b>Quelle viabilité pour le calcul formel dans l'enseignement ?</b>	<b>14</b>
Un outil a priori intéressant, mais difficile à intégrer réellement	16
La transposition didactique	19
Les recherches sur l'intégration du calcul formel.	22
<b>Quelles questions poser, comment les poser ?</b>	<b>26</b>
<b>LES RAPPORTS TECHNIQUE-CONCEPTUEL</b>	<b>29</b>
<b>Les discours et les hypothèses sur le calcul formel</b>	<b>29</b>
<b>L'étude DIDIREM sur DERIVE</b>	<b>32</b>
Hypothèses : un renouvellement de l'enseignement des mathématiques	33
La réalité	34
Synthèse sur les rapports techniques/conceptuels	38
<b>Les praxéologies</b>	<b>40</b>
<b>Les techniques dans l'utilisation du calcul formel</b>	<b>41</b>
Des techniques spécifiques d'utilisation du calcul formel	42
L'interaction avec les techniques « habituelles »	46
Effondrement et reconstruction de praxéologies	51
<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
<b>LES RELATIONS ENTRE OBJETS INTRODUITES PAR LE CALCUL FORMEL DANS LE TRAVAIL DES ELEVES</b>	<b>57</b>
<b>Les factorisations dans l'environnement habituel</b>	<b>60</b>
<b>Les factorisations en environnement « calcul formel »</b>	<b>64</b>
Les variantes de la situation « factorisation de $x^n - 1$ »	64
<b>Analyse</b>	<b>68</b>
Ostensifs et non-ostensifs dans la factorisation avec DERIVE	68
La transmutation	80
Les variables liées au logiciel : gestes disponibles et granularité	84
<b>Conclusion</b>	<b>86</b>
<b>QUELLE APPROCHE « COGNITIVE » DU CALCUL FORMEL ?</b>	<b>89</b>

<b>La fonction du "cognitif" dans une étude didactique et la nécessaire conversion</b>	<b>89</b>
<b>Les approches « cognitives » de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques</b>	<b>91</b>
Les approches initiales	91
Le calcul formel : quand la théorie cognitive fonctionne comme écran	93
L'étude cognitive des activités de programmation	94
L'ordinateur comme partenaire de l'apprenant	96
Les Environnements Interactifs d'Apprentissage Humain	97
<b>L'approche cognitive des instruments contemporains</b>	<b>99</b>
Les calculatrices graphiques	99
Schèmes instrumentaux et genèse instrumentale	100
Les schèmes dans l'utilisation d'une calculatrice « à calcul formel »	102
L'instrumentation d'une calculatrice à calcul formel. Les techniques instrumentées	103
L'instrumentalisation. Les problèmes qu'elle pose dans le cas d'un instrument complexe	106
Genèse instrumentale et apprentissage avec instruments	107
La variabilité des genèses individuelles	114
L'action de l'enseignant	120
<b>Conclusion</b>	<b>124</b>
<b>CONCLUSION</b>	<b>125</b>
<b>ANNEXE STATISTIQUE</b>	<b>137</b>
<b>Problématique et Méthodologie</b>	<b>137</b>
<b>Le choix d'un traitement des données</b>	<b>138</b>
<b>L'analyse implicative : principes et problèmes rencontrés</b>	<b>139</b>
Les choix des créateurs de l'Analyse Implicative	140
Discussion	141
<b>Une procédure inférentielle pour la quasi-implication des variables numériques</b>	<b>143</b>
Etape descriptive	143
Etape inférentielle	144
<b>Perspectives</b>	<b>146</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>147</b>

# Remerciements

Ce document d'habilitation propose une synthèse de travaux réalisés au cours des dix dernières années. La recherche, notamment en didactique, est une activité collective où les réflexions de chacun s'enrichissent du travail des autres, où des interactions croisées s'observent entre l'expérimentation dans les classes, le travail de rédaction, les avancées théoriques... Il est donc naturel que j'introduise ce texte en remerciant les très nombreuses personnes avec qui j'ai travaillé ces dernières années et qui ont par conséquent contribué d'une manière ou d'une autre à son élaboration.

- Les membres du jury réuni pour cette habilitation :

Janine ROGALSKI a dirigé mon mémoire de DEA, puis ma thèse. Le chapitre 4 de ce document doit beaucoup à la formation que j'ai reçue au cours de mes années de thèse.

Michèle ARTIGUE a su, après la thèse, m'intégrer dans une équipe de recherche en didactique. J'ai appris avec elle comment il est possible et nécessaire de travailler en équipe, malgré la diversité des situations professionnelles et la dispersion géographique. Les travaux menés avec elle constituent l'ossature de ce document. Sa volonté sans faille m'a permis de soutenir cette habilitation dans des délais raisonnables.

Dominique GUIN dirige l'équipe de Montpellier dont les travaux sur les calculatrices et le calcul formel contribuent si fortement à la connaissance des phénomènes liés à l'intégration de ces moyens technologiques. J'espère que ce document témoignera de l'interaction fructueuse entre l'équipe DIDIREM et celle de Dominique GUIN.

Colette LABORDE est reconnue pour la qualité des travaux qu'elle dirige sur l'utilisation d'un autre moyen technologique, pendant en quelque sorte du calcul formel, la géométrie dynamique. Je lui suis particulièrement reconnaissant d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter sur cette habilitation. Nul doute que la problématique de l'intégration du calcul formel puisse beaucoup progresser grâce à l'interaction avec le domaine de la géométrie dynamique.

Bernard R. HODGSON est secrétaire de la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM-ICMI). Ses travaux sur le calcul formel dans l'enseignement ont commencé à une époque où je n'étais pas même un chercheur débutant. Je lui suis

particulièrement reconnaissant d'avoir mobilisé sa connaissance des recherches tant américaines qu'européennes pour rapporter sur cette habilitation.

- Les équipes rennaises qui constituent des lieux de recherche et d'interaction :  
Le laboratoire de didactique des mathématiques de l'Institut Mathématique de Rennes,  
Le laboratoire de recherche de l'IUFM de Bretagne,  
L'IREM de Rennes, et particulièrement les membres du groupe « calcul formel ».
- Les institutions qui ont permis que les recherches se développent :  
La commission Inter-IREM Mathématiques et Informatique,  
Le département Technologies Nouvelles et Education de l'INRP  
La division des technologies nouvelles du Ministère de l'Education Nationale  
Le « International Council for Computer Algebra in Mathematics Education »
- Tous les collègues de l'ARDM, notamment les comités d'organisation des deux dernières écoles d'été, les chercheurs participant au thème « instruments » de la dernière école d'été, les membres de la recherche « Questions d'Education », les statisticiens ...
- Ma famille :  
Mes parents m'ont encouragé à « faire de la recherche »,  
Myriam a poussé l'abnégation jusqu'à traquer les fautes d'orthographe de ce document,  
Mes deux fils ont fait gentiment semblant de croire à la plaisanterie classique « Quand j'aurai fini mon habilitation, nous ferons... ».

A tous merci.

# Introduction

Ce document d'habilitation a pour ambition de faire le point sur les travaux tant expérimentaux que théoriques sur l'introduction du calcul formel dans l'enseignement scolaire des mathématiques.

Comme je vais le montrer dans le premier chapitre, le calcul formel est une question dont l'actualité est très forte. Dans l'enseignement secondaire français (lycée) et dans des établissements de niveau similaire à l'étranger, des expérimentations ont été menées, des recherches ont été développées. Acteur de ces expérimentations et recherches depuis bientôt dix ans, je voudrais saisir l'occasion de ce document d'habilitation pour préciser les questions posées aujourd'hui à l'enseignement par le calcul formel, établir un état des recherches, de leurs problématiques, des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

A partir de cet état, il me sera possible d'examiner comment les théorisations développées dans la didactique des mathématiques permettent de mieux comprendre les questions posées. La problématique générale sera celle de la viabilité du calcul formel comme moyen technologique dans l'enseignement, problématique qui, nous le verrons, ne se réduit pas à celle de sa pertinence épistémologique. Un champ de questions sera celui des rapports techniques/conceptuel (chapitre 2), où nous verrons ce qu'il faut penser de la prétention du calcul formel à promouvoir des mathématiques « conceptuelles » en diminuant la part des techniques. Ensuite, je poursuivrai plus en profondeur l'analyse de l'impact du calcul formel en m'intéressant aux objets nouveaux que le calcul formel introduit dans les situations d'enseignement et d'apprentissage.

Cette analyse m'amènera à interroger les rapports entre les objets manipulés par le logiciel et les autres objets ostensifs et non-ostentifs du travail mathématique. La complexité de ces rapports pose la question de la façon dont les élèves peuvent se les approprier. Je montrerai comment les travaux récents ont intégré une approche cognitive des instruments pour aborder cette question. Je considérerai pour terminer les perspectives que cette synthèse ouvre et les questions restant posées.





# Le calcul formel dans l'enseignement :

## questions didactiques

Ce premier chapitre présente le calcul formel tel qu'il existe ou tente d'exister dans l'enseignement, principalement en lycée, en problématisant cette existence, notamment par une analyse en terme de transposition et une revue des recherches à ce sujet. Il présente aussi les questions didactiques qui seront traitées dans les chapitres suivants..

### Pourquoi une étude sur le calcul formel ?

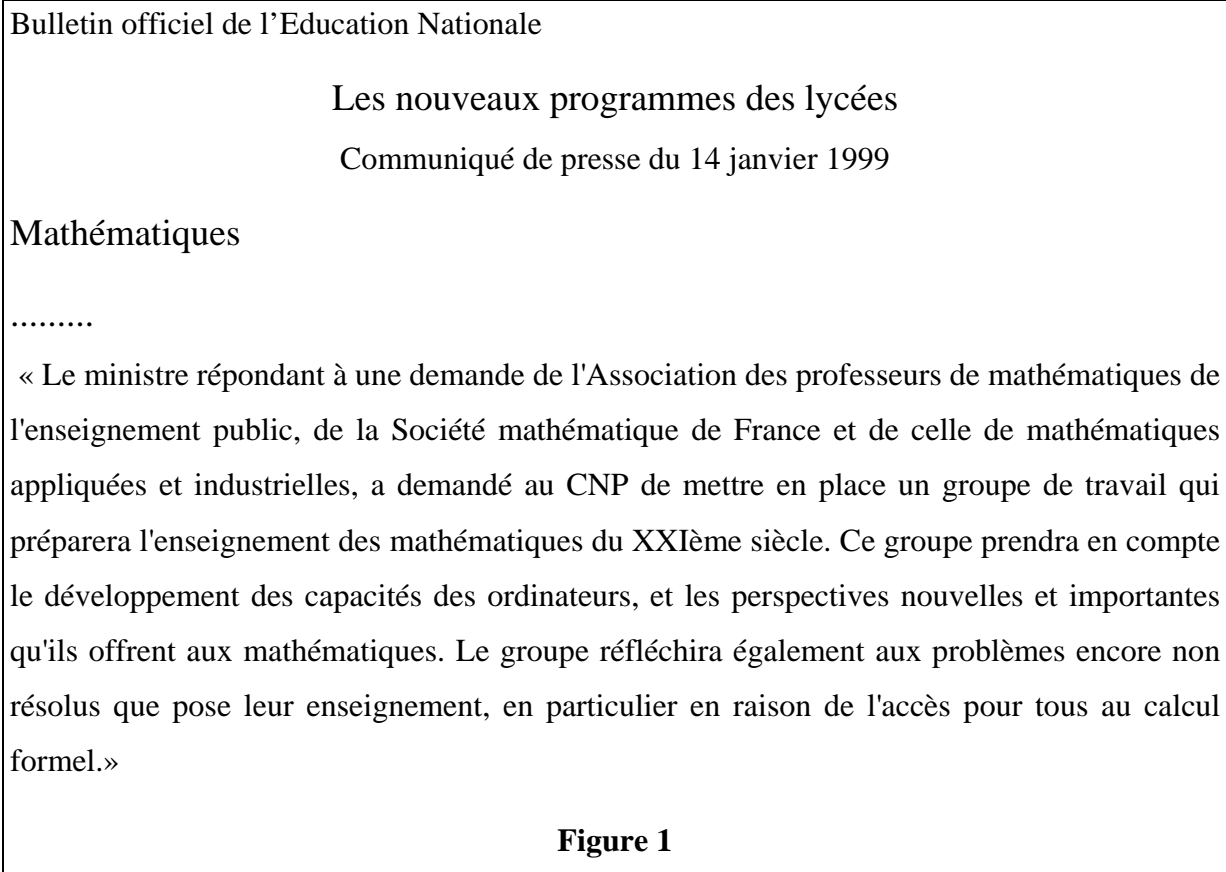
Il me faut tout d'abord justifier brièvement le choix du calcul formel comme thème central dans ce document d'habilitation. D'autres moyens technologiques, par exemple les calculatrices, notamment graphiques, sont présents dans les classes, et cela justifierait de consacrer des efforts aux problèmes que cette présence pose quotidiennement à l'enseignement.

Dans cette étude, je vais considérer le calcul formel comme une capacité nouvelle, ajoutée récemment aux moyens technologiques proposés aux élèves. De l'étude de cette capacité nouvelle, il y aura des leçons à tirer qui, je l'espère, dépasseront les spécificités du calcul formel. L'utilisation des fonctionnalités graphiques ou numériques, déjà présentes dans les calculatrices dites scientifiques ou graphiques sera étudiée, pour elle-même et en interaction avec le calcul formel. Il y a aura ainsi des éléments permettant d'éclairer l'utilisation de technologies présentes actuellement et de préparer l'utilisation de celles qui le seront dans un avenir proche.

En effet, s'il n'est pas encore, au moment où cette étude est rédigée, une réalité pour la majorité des élèves, le calcul formel, est une question posée à l'ensemble de la noosphère, comme en témoigne cet extrait d'un communiqué de presse du ministère (Figure 1).

Une des ambitions de la didactique est de concourir, à partir de recherches, à la clarification des questions posées à la noosphère. Les perspectives d'évolution apportées par le calcul formel sont très ouvertes. Un renouvellement des pratiques d'enseignement et d'apprentissage est certes envisageable. Il est également possible que le dépérissement des techniques habituellement enseignées et pratiquées en mathématiques conduise à rétrécir la part de cette

discipline dans la formation intellectuelle. Comme je vais le montrer dans cette étude, les recherches en didactique sur l'utilisation du calcul formel permettent de sortir du débat d'idée pour examiner les changements réels apportés à l'enseignement et l'apprentissage. Cette étude veut contribuer à une synthèse de ces recherches et donc au regard didactique à porter sur les évolutions en cours.



## Qu'est ce que le calcul formel ?

### La terminologie

Le terme « calcul formel » peut être discuté. En France il est utilisé à la fois pour nommer le domaine de recherche qui vise à créer et à évaluer des algorithmes de traitement des expressions mathématiques (Davenport et al., 1986) et pour le travail d'innovation mené dans l'enseignement autour de l'introduction de logiciels implémentant ces algorithmes (Juge G., 1994). En mathématiques, le terme « formel » a deux significations proches. D'une part, il renvoie à la forme, considérée comme susceptible d'un traitement indépendant de la signification. D'autre part, il renvoie aussi à un niveau de travail en mathématiques qui

privilégie les définitions et les preuves. Par exemple, l'analyse formelle est le domaine où les notions de limites, de dérivées, d'intégrales, sont définies mathématiquement pour qu'il soit possible d'organiser des énoncés de façon déductive. Les définitions « formelles » ne permettent pas nécessairement le calcul effectif de limites, de dérivées, d'intégrales... A côté de ce niveau « formel », il existe un niveau qui est celui des représentations « calculables ». Ce niveau est celui qui permet une modélisation des phénomènes réels par des représentations et des traitements « symboliques ». Il me semble que le calcul formel opère davantage à ce niveau qu'à celui, « formel » des définitions et des preuves. Ainsi le calcul formel n'utilise pas de définition formelle par exemple de la limite. Pour calculer la limite d'une expression, un système de calcul formel recherche les valeurs des éléments de l'expression par continuité, puis résout si possible les cas d'indétermination à l'aide de règles. Il faut souligner de plus que le calcul formel opère peu sur des « formes générales ». Si, par exemple pour une expression donnée, il peut calculer la dérivée à un ordre arbitraire pour autant que cette dérivée existe, il ne peut généralement pas simplifier la dérivée  $n$ ième pour  $n$  constante symbolique. Comme nous le verrons dans la suite, il est important, dans l'étude des situations d'utilisation par les élèves, de situer avec précision les capacités du logiciel. En ce sens, le terme « calcul formel » peut être trompeur.

Dans la littérature anglo-saxonne, le domaine de recherche sur les algorithmes est généralement désigné par « Symbolic and Algebraic Computation »<sup>1</sup>. Cette dénomination met l'accent sur les représentations calculables, les traitement algébriques de symboles qui se distinguent bien des définitions « formelles ». Les logiciels, notamment ceux proposés aux élèves, sont désignés par « Computer Algebra System ». Le mot « System » a l'avantage de souligner que « le calcul formel » est proposé sous forme d'une entité matérielle organisée (un système) et non comme un ensemble d'algorithmes abstraits. En revanche, « Computer » et « Algebra » peuvent être source de confusion, l'un en liant le système à un type de machine, l'autre à un domaine des Mathématiques.

En Français, le terme « Système de Mathématiques Symboliques » serait pour moi le plus approprié. En plus de l'aspect « système », il a l'avantage de bien mettre l'accent sur le traitement de symboles, par différence avec les définitions « formelles ».

---

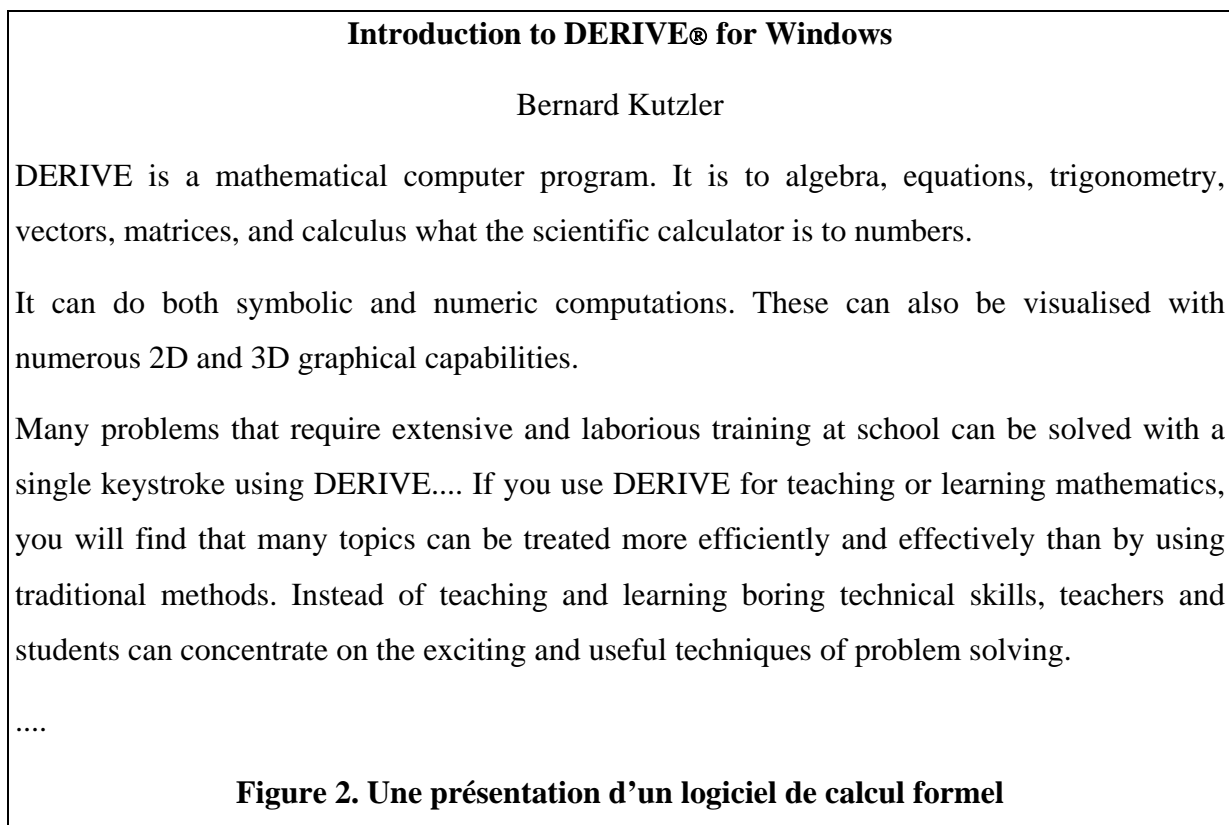
<sup>1</sup> Voir « the SAC Newsletter » [http://www.can.nl/SAC\\_Newsletter](http://www.can.nl/SAC_Newsletter)

Le champ de recherche auquel cette étude veut contribuer serait donc valablement désigné par « Etude de l'intégration de Systèmes de Mathématiques Symboliques dans l'enseignement des Mathématiques ». Cependant, dans la suite j'emploierai « calcul formel » pour désigner ce champ. En effet, cette appellation est maintenant la plus courante dans la littérature de langue française.

Quels apports supposés à la pratique mathématique ?

Quelles difficultés prévisibles ?

Je vais présenter et discuter maintenant les avantages que le calcul formel entend apporter à l'enseignement en partant d'un extrait d'une présentation du logiciel de calcul formel DERIVE, celui qui est utilisé en France dans l'enseignement secondaire (Figure 2).



Cet extrait accompagne le logiciel, et bien sûr, attire l'attention sur ses avantages. D'autres logiciels existent, comme Maple ou Mathematica et sont accompagnés d'une présentation similaire.

Etudions chacune des phrases :

*DERIVE is a mathematical computer program. It is to algebra, equations, trigonometry, vectors, matrices, and calculus what the scientific calculator is to numbers.*

Cette phrase établit un parallèle entre le calcul formel et la calculatrice scientifique. Il y aurait en mathématiques un domaine des nombres distinct d'autres domaines plus « avancés » tels que l'algèbre, la trigonométrie, les matrices, l'analyse. DERIVE serait un outil adapté à ces domaines plus « avancés », mais l'aide qu'il apporterait serait de même nature que celle que la calculatrice scientifique procure dans le domaine des nombres.

Cette présentation simplifie manifestement trop le rapport de chacun des « outils » aux domaines mathématiques :

- le calcul formel a par certains aspects un rapport plus adéquat à l'idée mathématique de nombre que les calculatrices travaillant en mode approché. Par exemple,  $1 - 3 \times \frac{1}{3}$  est nul pour le calcul formel, et non nul en calcul approché,
- en trigonométrie, pour les matrices et l'analyse, l'aide apportée par les calculatrices scientifiques, et plus généralement le calcul approché existe, bien qu'elle ne soit pas de même nature que celle apportée par le calcul formel.

D'autre part, le parallèle entre la calculatrice scientifique et le calcul formel ne rend pas compte de la spécificité des modes de calcul (respectivement approché et exact) de chacun de ces outils.

- Le mode approché peut être décrit en termes de troncature ou d'arrondi pour l'affichage à l'interface, de choix de précision pour la représentation interne ... Le mode exact entraîne quand à lui des choix d'implémentation en machine de nature différente : Bronner (1999) analyse par exemple le « micro-monde algébrique de la TI-92 » et constate que les concepteurs de cette machine l'ont « rendue euclidienne » en implémentant la simplification d'expressions du type  $\sqrt{A + \sqrt{B}}$  en somme de deux racines seulement pour les binômes  $(A, B)$  respectant la condition d'Euclide. Bernard et al. (1999) montrent de même que le répertoire nécessairement limité des valeurs connues par la machine entraîne des choix à la limite de l'inconsistance.

Par exemple, la TI-92 simplifie  $\cos \frac{\pi}{8}$  en  $\frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$  mais ne simplifie pas  $\cos \frac{\pi}{16}$ .

Elle considère comme fausse l'assertion  $2\left(\cos \frac{\pi}{16}\right)^2 - 1 = \cos \frac{\pi}{8}$  qui est pourtant mathématiquement correcte.

- L'implémentation en machine des deux modes de calcul est donc très différente, ce qui a des conséquences pour leur appropriation par l'utilisateur. Dans le cas de la calculatrice numérique, l'utilisateur doit faire la différence entre le fonctionnement approché de l'outil, et le fonctionnement mathématique, notamment par l'utilisation d'encadrements. Dans le cas du calcul formel, il y a manifestement une interaction plus grande entre le fonctionnement mathématique et le traitement des nombres et expressions par le système, et donc aussi une interaction plus grande entre l'appropriation de l'outil et le développement des connaissances sur les nombres et les expressions.

En dépit de l'apparente simplicité de la présentation de DERIVE par B. Kutzler comme outil « prolongeant » les calculatrices numériques, nous voyons apparaître des spécificités fortes et problématiques du calcul formel : rapport avec les domaines mathématiques, choix d'implémentation, appropriation par l'utilisateur. Je reviendrai dans la suite de cette étude sur ces spécificités et leurs conséquences pour l'enseignement.

*It can do both symbolic and numeric computations. These can also be visualised with numerous 2D and 3D graphical capabilities.*

Cette seconde phrase situe DERIVE comme un système de mathématiques symboliques, au-delà du seul calcul formel. Comme nous le verrons plus loin, le calcul formel intervient dans des pratiques mathématiques « assistées par ordinateur ». Dans ces pratiques, l'ordinateur ou la calculatrice ne sont pas utilisés seulement pour les traitements symboliques. Le calcul approché, le tracé de représentations graphiques et les autres fonctionnalités apportées par l'informatique contribuent à ces pratiques. Comme le sous-entend l'extrait, c'est un enrichissement potentiel de ces pratiques. Cependant, un regard didactique sur l'outil conduit à s'interroger sur la complexité d'un tel système. La TI-92<sup>2</sup>, par exemple, comprend sept modules avec des menus et des paramétrages dont certains peuvent être communs à plusieurs modules, et d'autres spécifiques. La fenêtre générale de paramétrage comprend dix entrées<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup> La calculatrice TI-92 est disponible depuis la rentrée 1995. Première calculatrice « à calcul formel », elle se présente plutôt comme un « ordinateur de paume » (palmtop) que comme un calculatrice : taille d'une feuille de format A5 (maximum autorisé à l'examen du baccalauréat français), clavier alphabétique.

<sup>3</sup> Pour une analyse de la complexité de la TI-92, voir la thèse en cours de B. Defouad.

En considérant seulement la co-existence de deux modes de calcul, l'un exact, l'autre approché, voici deux exemples où la complexité du système peut avoir une influence directe sur les conceptualisations.

- En dehors de cas simples, le nombre de solutions d'une équation polynomiale diffère généralement d'un mode à l'autre. Pour résoudre en mode exact, le système applique en effet des algorithmes de résolution symbolique, qui ne peuvent trouver que certains types de solution<sup>4</sup>. Pour résoudre en mode approché, le système applique des algorithmes de résolution numériques, basés sur la construction de suites récurrentes convergeant vers une solution, ce qui donne généralement davantage de solutions.<sup>5</sup> Cela peut paradoxalement conduire l'utilisateur à concevoir le mode approché comme « plus juste » que le mode exact.
- Certaines fonctionnalités peuvent exister sous le même nom dans les deux modes dans des modules distincts. Seule la nature du module renseigne sur le mode de calcul. Par exemple, la TI-92 a un module graphique qui comprend un menu « Math » avec des entrées telles que la dérivation. Par ailleurs, le module principal propose un menu « Calc » avec des entrées analogues. Pour comprendre que la dérivation du module graphique est numérique et que la dérivation du module principal est symbolique, il est nécessaire d'avoir une conscience précise des modes de fonctionnement de chacun des modules.

*Many problems that require extensive and laborious training at school can be solved with a single keystroke using DERIVE.... Instead of teaching and learning boring technical skills, teachers and students can concentrate on the exciting and useful techniques of problem solving.*

Cette troisième phrase résume bien les hypothèses optimistes souvent attribuées au calcul formel par ses promoteurs. Bien que le calcul formel ne soit pas a priori conçu pour l'apprentissage des mathématiques, ces hypothèses se centrent très vite sur une vision de l'évolution de l'enseignement des mathématiques : la résolution « par appui d'une touche »

---

<sup>4</sup> Il est bien connu qu'il n'existe pas d'algorithme de résolution par radicaux des équations polynomiales au delà du degré 5. Cependant, certains algorithmes peuvent s'appliquer à des cas particuliers d'équations de degré supérieur, par exemple la recherche de racines multiples par dérivation.

<sup>5</sup> De plus, les logiciels de calcul formel proposent un mode « automatique » où le logiciel décide lui-même du traitement exact ou approché à appliquer à une expression.



impliquerait une remise en cause des pratiques dans l'enseignement, le déplacement de compétences techniques étroites vers la résolution de problèmes.

Dans la suite de cette étude, je reviendrai sur ces hypothèses plus longuement. Dans ce chapitre consacré à la présentation du calcul formel, je voudrais seulement montrer le caractère plutôt mythique de la résolution « par appui d'une touche ».

Considérons deux expressions visiblement équivalentes :

- $1 - (1 - x)(3 + 2x) - x$
- $1 - x - (1 - x)(3 + 2x)$ .

La transformation par défaut de DERIVE et de la TI-92 (métaphoriquement dénommée *single keystroke* dans la présentation de B. Kutzler) donne pour ces deux expressions des résultats radicalement différents :

- la première expression est développée et réduite en  $2x^2 - 2$ ,
- la seconde est factorisée en  $2(x - 1)(x + 1)$ .

L'interprétation de ce phénomène est sans difficulté : dans la seconde expression, le logiciel repère un facteur commun qui n'apparaît pas directement dans la première. Il n'en reste pas moins vrai que pour anticiper et piloter les transformations effectuées par le logiciel il faut une compétence technique dans l'utilisation du système. Cette compétence est particulièrement nécessaire quand l'utilisateur souhaite des transformations partielles ou quand il travaille sur des expressions par exemple trigonométriques pour lesquelles il n'existe pas de forme canonique (voir chapitre 2).

## Quelle viabilité pour le calcul formel dans l'enseignement ?

Les premières expériences d'introduction des technologies informatiques dans l'enseignement sont maintenant anciennes et nous ont habitués à ce que les prévisions enthousiastes des promoteurs, le caractère «naturel» des perspectives d'intégration qu'ils ouvrent se heurtent à des difficultés non prévues. Certes, chaque génération de logiciels apporte des possibilités nouvelles, les équipements deviennent plus accessibles, l'institution scolaire accepte mieux ce type d'innovation. Ce contexte joue en faveur du calcul formel, mais, nous venons de le voir, son utilisation à des fins d'enseignement et d'apprentissage reste problématique. Les rapports entre le système de calcul formel et les mathématiques sont à clarifier dans les différents

domaines d'utilisation. La complexité d'un tel système, les compétences techniques nécessaires à l'utilisation rendent nécessaire l'étude des conditions d'appropriation par l'élève utilisateur ainsi que de l'interaction avec son apprentissage des mathématiques.

La réflexion de Chevallard (1992) reste donc centrale pour l'introduction du calcul formel comme d'autres moyens technologiques :

*« L'introduction d'outils nouveaux dans le système didactique ne va pas de soi...On assiste trop souvent à une « fuite en avant », alors qu'il convient de tenir compte des « permanences didactiques », des problèmes propres à l'enseignement et à l'apprentissage, que même les technologies nouvelles ne peuvent contourner.*

*Bien souvent, les stratégies utilisant l'ordinateur prennent peu en compte « l'intendance », qui est laissée à l'enseignant dans sa classe. »*

Balacheff (1998) souligne bien, à propos des Environnements Interactifs d'Apprentissage Humain (EIAH) à quel point cette préoccupation de viabilité reste d'actualité, à un moment où les Techniques d'Information et de Communication Educatives (TICE) connaissent un certain engouement. Pour lui, la recherche de la validité didactique d'un EIAH dépasse la mise en évidence de sa validité épistémologique. Il ne suffit pas que l'interaction soit conçue pour construire des connaissances valides dans un domaine de savoir donné. Pour décrire les limites d'une utilisation efficace de l'ordinateur dans le cadre de la pratique de la classe, il faut pouvoir diagnostiquer l'activité de résolution de problèmes par l'élève de façon suffisamment fiable, prendre en compte la gestion délicate des situations d'apprentissage par l'enseignant, tenir compte des moyens de contrôle qui lui sont indispensables dans la conduite de la classe.

Rechercher les permanences didactiques, prendre en compte l'intendance, ce sont deux principes de recherche qui, comme nous allons le voir dans la suite, ont permis de percevoir des conditions pour une intégration viable du calcul formel. Dans la suite de ce paragraphe, de façon à éclairer les questions que pose la viabilité du calcul formel, je vais présenter de façon plus complète la situation de ce moyen technologique dans l'enseignement. Je vais d'abord donner des éléments factuels permettant de situer le calcul formel dans l'institution scolaire. Puis je montrerai comment la transposition didactique permet de les interpréter. Ensuite, je

ferai une synthèse des grands courants de recherche au sujet de son intégration, de façon à situer ensuite notre approche<sup>6</sup>.

## Un outil a priori intéressant, mais difficile à intégrer réellement

### *Au niveau ministériel, une position favorable aux technologies*

En France, le calcul formel n'est pas mentionné explicitement dans les programmes actuels. Les textes recommandent « l'emploi des calculatrices non seulement pour effectuer des calculs, mais aussi pour contrôler les résultats, alimenter le travail de recherche et favoriser une bonne approche de l'informatique ». La France fait partie des rares pays où il n'y a pas de restriction sur le calcul formel à l'examen de fin d'études secondaires. A titre de comparaison, le système scolaire commun à l'Angleterre, au pays de Galles et à l'Irlande du Nord exclut les calculatrices symboliques de l'examen de l'« advanced level mathematical courses » (A level)<sup>7</sup>.

La question des calculatrices « évoluées » aux examens est très sensible dans une perspective d'intégration du calcul formel. Je vais donc rappeler les arguments qui militent en faveur d'une interdiction, puis étudier la viabilité à moyen et à long terme de la position actuellement retenue en France. Indépendamment du calcul formel, un premier argument est la capacité de stockage de ces calculatrices qui permet aux candidats aux examens d'éviter la mémorisation du cours. En France, pour rétablir l'équité, un formulaire est mis à disposition des candidats. L'idée qu'une certaine forme de mémorisation de résultats du cours peut faire partie des conceptualisations est tout à fait défendable, et, de ce point de vue, le formulaire pose question. Un second argument est celui de l'équité, question très sensible dans les pays qui

---

<sup>6</sup> De façon générale, dans cette thèse, j'emploierai la première personne du singulier pour exprimer mes apports et analyses propres et la première personne du pluriel pour parler du travail des équipes auxquelles j'ai participé. Il s'agit tout d'abord de l'équipe « DIDIREM » que Michèle Artigue avait rassemblée dans le cadre d'une convention passée avec la Direction des lycées et collèges du Ministère de l'Education Nationale à la rentrée 1993. Cette équipe comprenait aussi Maha Abboud, Jean-Philippe Drouhard et moi-même. Voir (Artigue et al., 1995), (Lagrange, 1996), (Artigue, 1997). Ensuite, pour une nouvelle convention, cette fois sur la TI-92, une nouvelle équipe a rassemblé Michèle Artigue, un doctorant, Badr Defouad, deux professeurs, Michèle Duperrier et Guy Juge et moi-même.

<sup>7</sup> Pour une discussion sur les calculatrices à l'examen du A level, voir Monaghan (1999), pour des données sur d'autres pays, voir Ruthven (1997).

interdisent les calculatrices à calcul formel, considérées comme accessibles seulement aux élèves les plus fortunés (Monaghan, 1999). Un troisième argument est celui des textes des examens. Un texte écrit pour des élèves calculant en papier/crayon prend nécessairement un sens différent lorsque le calcul formel est utilisé. Face à ces deux problèmes, les auteurs peuvent prendre le parti de rédiger un texte d'examen ne favorisant pas les élèves utilisant le calcul formel (Drijver, 1999), mais l'impact de ces modifications est alors difficile à évaluer : Berry et al. (1999) montrent par exemple, que la problématique basée sur la distinction entre questions « routinières » et questions « non routinières » n'est pas suffisante pour analyser l'évolution des textes d'examen sous l'influence du calcul formel.

A cause de ces problèmes, la position de l'institution française peut difficilement être viable à long terme : si l'impact des calculatrices et plus particulièrement du calcul formel sur les examens n'est pas mieux évalué, si les textes n'évoluent pas pour prendre en compte les spécificités du travail mathématique avec les outils nouveaux, les questions d'équité et de pertinence du travail demandé à l'examen deviendront difficiles à éluder.

A court et moyen terme, la position de l'institution française présente l'avantage de ne pas décourager l'utilisation des calculatrices et plus particulièrement du calcul formel dans les classes. Elle est précisément une condition pour qu'une réflexion à long terme puisse exister. A ce sujet, il est intéressant de noter l'expérimentation d'une épreuve du baccalauréat en deux parties, lancée par l'inspection générale de mathématiques en avril 1998 (Figure 3)..

Je reviendrai dans le paragraphe suivant sur le contenu de la partie « avec calculatrice » pour discuter du travail spécifique qui est demandé dans cette partie, en lien avec la transposition didactique des pratiques existant dans la recherche en mathématiques. Je souligne ici seulement que les dispositions institutionnelles notamment en matière d'examen ne constituent pas un frein à l'existence d'une technologie comme le calcul formel, et que la réflexion engagée sur les examens va dans le sens d'une prise en compte de l'utilisation de la technologie par les élèves.

De plus, l'institution s'est engagée dans le soutien au développement des usages du calcul formel en mettant en place des groupes de professeurs expérimentateurs et en demandant des évaluations didactiques à des laboratoires universitaires. Cela a donné lieu à la publication de brochures largement diffusées et disponibles par l'Internet.<sup>8</sup>

---

<sup>8</sup> [http://www.ac-reims.fr/datice/broc\\_men/brocmen.htm](http://www.ac-reims.fr/datice/broc_men/brocmen.htm)

### *Une mise en œuvre dans les classes souvent plus difficile que prévu*

Concernant la mise en œuvre dans les classes, plusieurs observations convergent pour montrer que assez souvent les professeurs ont une opinion positive des apports du calcul formel, mais que l'utilisation réelle dans les classes se heurte à des difficultés.

A la rentrée scolaire 1993, dans le cadre de l'étude DERIVE, nous avons recensé 57 professeurs ayant l'intention d'utiliser ce logiciel dans leurs classes. Nous avons envoyé à ces professeurs un questionnaire à nous renvoyer en fin d'année pour connaître leurs attentes et leur avis après expérimentation du logiciel. Seuls 25 de ces professeurs nous avaient renvoyé le questionnaire, les 32 autres professeurs déclarant qu'ils n'avaient pas suffisamment utilisé avec les élèves pour que leur avis soit significatif. Parmi les 25 professeurs ayant renvoyé le questionnaire, 10 seulement faisaient état d'une utilisation régulière du logiciel (plus d'une fois par mois) et ces professeurs appartenaient dans leur quasi-totalité à un groupe d'expérimentateurs mis en place par la Direction des lycées et collèges.

Dans une étude sur l'emploi du calcul formel en Angleterre, pays de Galles et Irlande du Nord, Ruthven (1997) a interrogé les établissements où le A-level est dispensé sur la disponibilité du calcul formel pour les élèves. Un intéressant tableau (p. 6) met en regard la disponibilité réelle et la disponibilité souhaitée. Un tiers des établissements souhaiterait « idéalement » que les étudiants puissent disposer du calcul formel pour la plus grande part de l'enseignement, mais seulement 4% des établissements offrent effectivement cette possibilité.

Plus récemment, Nogues et Trouche (à paraître) ont effectué le suivi d'un groupe de professeurs « animateurs Texas Instruments » durant l'année scolaire 98/99. Ces professeurs bénéficiaient du prêt par Texas Instrument d'un lot de calculatrices TI-89<sup>9</sup> pour une expérience d'intégration dans une de leur classe. Nogues et Trouche ont obtenu 15 réponses (sur 30 professeurs) à un questionnaire de début d'année. Ces réponses témoignent d'une intégration, voulue par les enseignants et pour laquelle aussi bien les élèves qu'eux-mêmes semblent enthousiastes. Les professeurs sont volontaires, ont souvent une expérience approfondie de l'utilisation de calculatrices de la génération précédente. Un second questionnaire, envoyé en cours d'année a obtenu seulement 8 réponses et montre une

---

<sup>9</sup> La calculatrice TI-89, disponible depuis la rentrée 1998, a une ergonomie très semblable à celle des calculatrices graphiques : format de poche, écran sur le tiers supérieur, clavier non-alphabétique. Elle a le même logiciel que la TI-92 présentée ci-dessus.

impression plus réservée : utiliser un tel outil est une chose complexe et même s'il s'agit d'enseignants volontaires et motivés, ils ne peuvent empêcher que les problèmes surviennent pour les élèves.

J'ai souligné plus haut que l'institution ministérielle constitue un facteur facilitant d'intégration des technologies et que donc les véritables questions de viabilité du calcul formel ne se posent pas en termes « d'inertie institutionnelle ». Les trois observations ci-dessus montrent que ces questions ne s'énoncent pas non plus en termes de « conservatisme du milieu professoral ». Une fraction non négligeable des enseignants estime le calcul formel comme un moyen moderne, intéressant, de faire des mathématiques et donc d'en apprendre. En revanche, même pour les plus motivés parmi ces professeurs, l'intégration réelle pose problème.

### La transposition didactique

L'appui apporté par l'institution à l'introduction des technologies et plus particulièrement du calcul formel dans l'enseignement et la position plutôt favorable que cette introduction occupe dans les représentations des professeurs contrastent donc avec les difficultés rencontrées dans l'intégration réelle. Pour aller plus avant dans la compréhension de ce phénomène, je vais considérer le processus de transposition didactique à l'œuvre dans ce domaine.

Yves Chevallard nous rappelle dans le premier chapitre de « La transposition didactique » (Chevallard, 1985, p.14) que l'on « ne comprend pas ce qui se passe à l'intérieur du système didactique si l'on ne prend pas en compte son extérieur », et il nous invite à considérer les « *genèses, filiations, ruptures et refontes* » qui font que le fonctionnement didactique du savoir et le fonctionnement savant sont différents, tout en constituant deux régimes du savoir en interrelation. Cette dimension « transposition » est rarement analysée de façon précise dans l'introduction des technologies<sup>10</sup>, les discours sur l'introduction des technologies dans l'enseignement s'appuyant plutôt sur une référence générale à l'utilité des outils modernes dans la société d'aujourd'hui. Interroger les technologies informatiques dans le fonctionnement savant et dans le fonctionnement didactique est un moyen de mieux percevoir

---

<sup>10</sup> Ce sujet est différent de la « transposition informatique » des savoirs introduite par Balacheff (1994) et que je discuterai au chapitre 3.

les convergences que l'interrelation des régimes du savoir peut déterminer, mais aussi les problématiques d'utilisation distinctes que déterminent les projets différents (production dans l'institution savante, diffusion dans l'institution scolaire).

Il existe des modifications du fonctionnement savant sous l'influence des ordinateurs. De nouveaux domaines de recherche, comme le calcul formel, sont certes visibles mais ils ne concernent guère le domaine des mathématiques scolaires. Une étude précise des technologies informatiques du point de vue de la transposition didactique serait à faire. Je voudrais seulement discuter un aspect des modifications du fonctionnement savant susceptible d'exercer une influence sur l'enseignement. Il s'agit de la visibilité nouvelle qu'ont aujourd'hui les approches expérimentales en mathématiques et les rapports possibles de transposition avec l'existence d'instruments nouveaux dans le travail de l'élève. Un domaine nouveau des mathématiques a pris le nom de «mathématiques expérimentales». Il dispose d'institutions telles qu'un journal spécialisé «Experimental Mathematics (Kluwer)». Borwein, Borwein, Girgensohn et Parnes (1996) le définissent ainsi:

*«Experimental mathematics is that branch of mathematics that concerns itself ultimately with codification and transmission of insights within the mathematical community through the use of experimental exploration of conjectures and more informal beliefs and a careful analysis of the data acquired in this pursuit».*

La dimension expérimentale des mathématiques a toujours existé, mais ce qui est nouveau c'est qu'elle tend à sortir du travail privé du mathématicien pour prendre un caractère officiel. Les conjectures produites dans un travail expérimental, les données à l'appui de la conjecture peuvent être présentées, discutées comme un travail mathématique valable. Une certaine spécialisation peut exister, la publication de résultats expérimentaux par des mathématiciens pouvant motiver la recherche d'une preuve par d'autres. La dimension théorique de ce programme comprend la définition de structures suffisamment générales des domaines mathématiques de façon à définir des procédures d'investigation et de transmission systématique des conjectures. La dimension pratique comprend des réalisations telles que l'«Inverse Symbolic Calculator» qui permet de fournir, pour un nombre donné en entrée, les expressions probables qui permettent de générer ce nombre.

Il est possible de repérer un phénomène de transposition dans les orientations ministérielles en matière d'usage de la technologie, lorsque par exemple, les programmes assignent à

l'utilisation de la calculatrice le rôle d'« alimenter la recherche »<sup>11</sup>. Le texte de l'expérimentation sur les calculatrices au baccalauréat en mathématiques dont j'ai parlé plus haut constitue une manifestation plus locale, mais aussi plus précise de la transposition. La question B2 (Figure 3) concerne le nombre de points d'intersection de la courbe représentative d'une fonction logarithmique, et de la droite représentative d'une fonction linéaire. Une conjecture est demandée ainsi que les éléments qui permettent de l'énoncer (en termes de dimensions de la fenêtre d'une calculatrice). La tâche de l'élève est très clairement de « transmettre une conjecture » ainsi que les moyens par lesquels il l'a trouvé, un peu comme en « mathématiques expérimentales ».

Reconnaître une parenté dans des modes de travail appartenant l'un aux mathématiques savantes et l'autre aux mathématiques scolaires n'est cependant pas confondre leurs fonctions. Les mathématiques expérimentales répondent à un besoin des mathématiciens confrontés à l'inflation des données qu'il est possible d'obtenir par investigation empirique. C'est un besoin étranger aux préoccupations scolaires. La question à poser est donc de savoir à quelle nécessité répondent des pratiques analogues aux mathématiques expérimentales dans l'institution scolaire.<sup>12</sup>

La conclusion de cette brève étude de la transposition converge donc avec celle du paragraphe précédent. L'usage de la technologie, et plus particulièrement du calcul formel bénéficie d'un contexte favorable que l'on peut voir comme déterminé par l'évolution des mathématiques dans l'institution savante. Mais cela n'assure pas automatiquement au calcul formel sa viabilité. Pour que la transposition didactique fonctionne il est aussi nécessaire que son intégration s'inscrive dans des pratiques répondant à des nécessités de l'enseignement.

---

<sup>11</sup> « Dans les classes de lycée, l'emploi des calculatrices a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi (...) d'alimenter le travail de recherche (...) ». Programme de Seconde.

<sup>12</sup> Le transfert de pratiques d'utilisation du calcul formel de la recherche à l'enseignement telle que l'envisage Mizony (1996) me semble assez représentative d'une absence de problématisation didactique de la transposition. Dans un article portant le titre « Le calcul formel dans ma pratique d'enseignant et de chercheur », l'auteur développe longuement l'intérêt du calcul formel dans sa pratique de recherche, puis dans une ligne de conclusion il déclare simplement que « les mathématiques (re)deviennent une science expérimentale » et qu'il est « certain que l'enseignement de celles-ci est amené à beaucoup évoluer ».



## Les recherches sur l'intégration du calcul formel.

La question de la viabilité du calcul formel doit donc être posée dans les situations réelles d'apprentissage avec le logiciel, en réévaluant les hypothèses optimistes des promoteurs du calcul formel, en recherchant, au delà de fonctionnements supposés analogues à ceux que l'on peut voir se développer dans les mathématiques savantes, les fonctions que le calcul formel peut remplir dans l'institution scolaire et les conditions pour qu'il puisse les remplir. Je vais donc, dans ce paragraphe, examiner comment la recherche a étudié ces questions.

Dans le cadre de la recherche DERIVE, nous avons fait une première synthèse publiée dans (Artigue et al., 1995) de la littérature de recherche sur le calcul formel qui nous était accessible le plus facilement à cette époque. Cette littérature, principalement européenne, était organisée autour de potentialités supposées du calcul formel (appuis pour la compréhension, outils de découverte, outils d'enseignement), avec à l'époque, peu d'éléments expérimentaux sur l'actualisation de ces potentialités. En 1995, la conférence « DERIVE » d'Honolulu a donné lieu à une publication (Berry et al., 1997) dont un chapitre (Mayes, 1997) est consacré à un recensement des recherches sur une base différente, incluant des thèses soutenues aux Etats Unis avec une dimension expérimentale plus marquée. Le corpus étudié comprenait des études comparatives visant à montrer une amélioration globale de la compréhension des concepts mathématiques ou un changement des attitudes envers les mathématiques. Il comportait aussi des recherches moins nombreuses prenant en compte les données expérimentales pour apprécier et interroger plus en profondeur les changements dans les processus d'apprentissage.

Parmi les recherches expérimentales comparatives de ce corpus, Heid (1988) a été une des premières à apparaître et reste très représentative. Sa problématique est basée sur la distinction de deux dimensions des mathématiques : les « habiletés manipulatoires<sup>13</sup> » et la « compréhension ». Elle examine la possibilité de « réordonner » ces dimensions. Ce « réordonnement » (re-sequencing) doit être compris comme une réorganisation dans le

---

<sup>13</sup> Je traduis « skills » par « habiletés » plutôt que par « compétence » dans un contexte où « skill » est opposé à « understanding ». En effet, la « compétence » implique un certain degré de connaissance qui dépasse la simple habileté pratique. Le fait qu'il n'y ait pas d'équivalent direct en français de « skills » dans ce contexte, montre que le cadre culturel français nous prépare peut-être mieux que la tradition anglo-saxonne à considérer les liens entre dimension technique et dimension conceptuelle comme je vais le faire au chapitre 2.

temps (les concepts avant les habiletés) aussi bien que dans l'importance donnée à chacune des dimensions (diminution du temps consacré au développement des habiletés). La comparaison porte sur un groupe expérimental de 45 personnes ayant suivi un enseignement de 12 semaines centré sur la « compréhension » et utilisant le programme MuMath<sup>14</sup> et divers utilitaires, suivi d'un enseignement de 3 semaines centré sur les « habiletés » et sur un groupe de contrôle de 122 personnes ayant suivi sur 15 semaines un enseignement entièrement consacré aux « habiletés ». La comparaison montre des performances supérieures du groupe expérimental à des questions « conceptuelles » tandis que les deux groupes atteignent le même niveau en « habiletés ».

Une autre constante des études comparatives est qu'elles s'appuient sur des théorisations où le calcul formel apparaît comme s'insérant de façon adéquate dans les processus supposés par la théorie. Un exemple typique est (Repo, 1994), qui reprend les différents moments d'« abstraction réfléchissante » de la « théorie Action Process Object Shema (APOS) » de Dubinski (1991)<sup>15</sup>. L'article blâme le mode dominant d'enseignement en Finlande « complètement orienté vers les algorithmes » et définit des « activités critiques » avec DERIVE, correspondant aux moments d'« abstraction réfléchissante » : activation des connaissances présentes chez les étudiants, internalisation, coordination, généralisation, réversibilité. Puis les activités critiques sont « administrées » à un groupe expérimental et les résultats des élèves de ce groupe sont comparés à ceux d'un groupe témoin qui a subi l'enseignement traditionnel : le groupe expérimental est significativement meilleur sur les questions « conceptuelles » posées à l'issue de l'enseignement, et à plus long terme manifeste une meilleure rétention des habiletés algorithmiques. Je discuterai davantage dans le chapitre consacré aux approches cognitives, la façon dont une théorie « cognitive » est, dans les articles de ce type, utilisée à l'appui d'une intégration du calcul formel.

Les recherches cherchant à interroger plus en profondeur les changements dans les processus d'apprentissage sont moins nombreuses à cette époque. Pozzi (1994) est la seule étude de ce type présentée par Mayes (1997). Il s'agit d'une étude qualitative portant sur quatre binômes d'élèves tentant de trouver des règles de dérivation à partir de l'observation de résultats de DERIVE. Pozzi distingue chez les élèves un comportement « syntaxique » (ils tentent

---

<sup>14</sup> MuMath est un logiciel de calcul formel, antérieur à DERIVE.

<sup>15</sup> Voir aussi (Dubinski et al., 1999). Je reparlerai de la théorie APOS dans le dernier chapitre.

d'inférer une règle sans interpréter les résultats de DERIVE) et un comportement « sémantique » (ils tentent de comprendre la structure des résultats de DERIVE). Pozzi montre que le comportement « sémantique » n'est pas automatique chez les élèves, qu'il existe des résistances et que des conditions sont nécessaires pour que les élèves abandonnent le comportement « syntaxique ».

Dans la présentation de Mayes (ibid.), les bénéfices du calcul formel en termes d'amélioration de la compréhension, des attitudes et même de rétention des algorithmes apparaissent comme des résultats attestés par les études comparatives, alors que l'« observation réflexive » de Pozzi apparaît comme un contrepoint isolé.

Plus récemment, une équipe constituée autour d'une réponse à l'appel d'offre « Questions d'éducation » du Comité National pour la Coordination de la Recherche en Education (CNCRE) a entrepris une étude bibliographique des recherches autour des technologies dans l'Education. Parmi les matériaux rassemblés par cette étude figure un dépouillement des articles parus de 1994 à 1999 dans une revue entièrement consacrée au calcul formel. Il s'agit de la revue qui a porté le nom de « International Journal DERIVE » de 1994 à 1996, et « International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education » depuis (Editeur *Research Information Limited, Hemel Hempstead, England*). Ce dépouillement comprend 114 articles, parmi lesquels 32 traitent réellement des questions liées aux situations d'apprentissage avec le calcul formel, aux fonctions qu'il remplit dans l'enseignement et l'apprentissage. Parmi ces 32 articles, 20 sont des déclarations ou études générales non appuyées sur une expérimentation précise, ou rapportent des expériences d'intégration sans problématisation ; ils rejoignent donc le type d'article que nous avons repérés dans l'étude DERIVE. Six articles sont du type « étude comparative » et huit du type « observation réflexive ».

Parmi les huit articles du type « observation réflexive », Wain (1994) est issu d'une étude de l'utilisation de DERIVE en Grande Bretagne décrite complètement par (Hunter et al . 1995) et montre que les difficultés techniques rencontrées par les élèves avec ce logiciel jouent un rôle non négligeable dans l'apprentissage. Quatre articles sont relatifs à l'expérience d'introduction de DERIVE respectivement en Autriche ( Aspetsberger et al ., 1996, Klingler, 1996) et en France (Mounier et Aldon, 1996), (Lagrange, 1996a). Ces quatre articles montrent que l'intégration réelle du logiciel dans les classes se heurte à des difficultés et qu'elle demande un effort d'analyse des situations d'utilisation. Les autres articles sont plutôt des

« meta-analyses » montrant des apports contrastés du calcul formel, soit par une synthèse de recherches partielles (Monaghan et al., 1994), soit en comparant l'activité des élèves avec le calcul formel à celle qu'ils ont avec d'autres technologies : les calculatrices graphiques pour Drijver (1994) et le tableur pour Stevenson (1995).

La présence dans cette revue d'articles du type « observation réflexive », en nombre au moins égal à celui des études comparatives montre que l'intérêt s'est développé pour une observation en profondeur de la façon dont les élèves utilisent le calcul formel, non nécessairement dirigée par des hypothèses d'amélioration de l'apprentissage. Parallèlement, les études comparatives, quand elles ont porté sur des enseignements plus longs avec des évaluations plus fines se sont révélées moins nettement concluantes que les premières études. Par exemple, Mayes, (1998) manifeste une certaine déception à la suite d'une évaluation comparative de la mise en place d'un nouveau curriculum en algèbre (ACT, application, concepts, technologie) : ses hypothèses notamment en matière de changement des attitudes des élèves ou étudiants vis à vis des mathématiques ne sont pas confirmées par le traitement statistique.

Dans une intervention au congrès ICTCM (International Congress on Technology in Collegial Mathematics, New Orleans, novembre 1998) encore non publiée sous forme d'article, Kathleen Heid et son équipe ont présenté une synthèse des études comparatives principalement nord-américaines sur le calcul formel. La conclusion à laquelle conduit cette synthèse est qu'on ne peut pas reprocher au calcul formel d'« endommager »<sup>16</sup> les élèves. Cette assertion peut être acceptée comme valide, les études comparatives l'ayant testée dans divers champs et avec diverses méthodologies. Mais l'ambition initiale des études comparatives est ainsi revue à la baisse par rapport aux hypothèses initiales. Kathleen Heid déclare qu'il faut maintenant aller au delà ce type de recherche et examiner les changements réels apportés à la pratique mathématique des élèves avec le calcul formel, programme qui a été largement commencé auparavant notamment en Europe. Je reviendrai au chapitre 2 sur les difficultés repérées par les « observations réflexives » et je montrerai comment nous avons pu mettre en évidence qu'il ne s'agit pas de difficultés isolées ou transitoires.

---

<sup>16</sup> L'expression « The claim that "a CAS will harm the kids" seems not to be true» est difficilement traduisible en français.

## Quelles questions poser, comment les poser ?

Les études comparatives confirment donc l'impression donnée par les observations rapportées au début de ce chapitre : même dans le cas où l'introduction du calcul formel est opérée par des expérimentateurs convaincus, les effets attendus ne se manifestent pas de façon évidente. Les études réflexives montrent la nécessité d'aller plus loin dans l'analyse.

Les recherches menées dans le cadre de l'équipe DIDIREM, d'abord sur DERIVE, puis sur la TI-92, les recherches menées à Montpellier (équipe ERES) sur les calculatrices graphiques puis sur la TI-92 ont permis de reformuler les hypothèses sur les changements produits par le calcul formel, en les intégrant dans des approches didactiques et cognitives cohérentes et de les mettre à l'épreuve dans un cadre suffisamment vaste pour pouvoir réellement considérer l'écologie du calcul formel dans l'enseignement.

Dans les chapitres qui suivent je vais développer l'approche didactique à partir de deux questions centrales, celle des rapports entre dimension technique et dimension conceptuelle et celle de l'analyse de l'activité avec le calcul formel. Puis je présenterai l'approche cognitive à laquelle a conduit la problématique d'intégration des calculatrices graphiques, puis « à calcul formel ». Cette approche met en avant l'intervention de « schèmes instrumentaux » dans l'apprentissage et leur construction dans l'interaction avec ces moyens technologiques. J'illustrerai ensuite la productivité de cette approche, montrant notamment comment elle permet de comprendre les rapports des élèves avec leur instrument et l'action du professeur. Je terminerai en soulignant les perspectives ouvertes, le travail pratique à réaliser pour une intégration réussie, ainsi que la nécessité de continuer à travailler au plan théorique des situations d'apprentissage avec instruments.

*Le Doyen du groupe de  
Mathématiques de l'Inspection Générale  
de l'Éducation Nationale*

à Mmes et Ms les chefs d'établissement  
participant à l'expérimentation sur les calculatrices  
au baccalauréat en mathématiques

....

5°) Déroulement de l'épreuve

L'épreuve se déroule en deux temps :

- premier temps (avec calculatrice) : seule la partie correspondante du sujet est distribuée aux candidats. Au bout de 1h30 les candidats doivent ranger leur calculatrice dans une enveloppe de grand format. Ils ferment cette enveloppe et la conservent. Simultanément, la seconde partie du sujet leur est distribuée. Les candidats conservent la première partie du sujet et leur copie sur laquelle ils continuent de composer.
- deuxième temps (sans calculatrice) : sous la seule contrainte de la non-utilisation d'une calculatrice, les candidats organisent leur travail comme ils l'entendent. Il ne leur est pas interdit en particulier de continuer à composer sur la première partie du sujet.

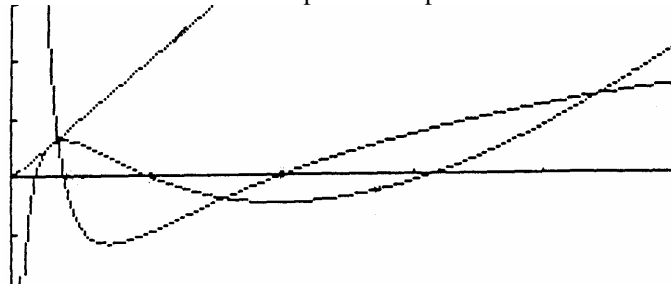
....

**Problème (11 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  : par  $f(x) = x \ln x - 2 \ln x - (\ln x)^2$ ,  
on note  $f'$  sa fonction dérivée et  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x$ .

Dans un repère orthogonal donné : on appelle  $\Gamma$  la représentation graphique de  $f$ ,  $\Gamma'$  la représentation graphique de  $f'$  et  $\Delta$  celle de  $g$ .

Voici ces trois courbes sur l'écran d'une calculatrice pour  $x$  compris entre 0 et 5.



**A- Étude de  $f$ .**

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2) Montrer que  $f'(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)(1 + \ln x)$

3) En déduire le sens de variation de  $f$ .

4) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet trois solutions.

Donner un encadrement de longueur  $10^{-1}$  pour les deux solutions non entières.

**B- Intersection des représentations graphiques de  $f$  et de  $g$**

1) Reproduire sur la copie et compléter le tableau des valeurs suivant en donnant les résultats à  $10^{-2}$  près.

Point de $\Gamma$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$x$	0,05	0,25	$e^{-1}$	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$										

2) On veut déterminer si la courbe représentative de  $f$  coupe la droite  $\Delta$  pour  $0 < x < 7$ .

Que peut-on, à l'aide de sa calculatrice, conjecturer ?

Préciser les éléments qui permettent de faire cette conjecture. (noter le type de calculatrice utilisée).

**Figure 3 Une expérience de « baccalauréat en deux parties »**



# Les rapports technique-conceptuel

Au chapitre précédent, j'ai expliqué pourquoi l'intégration du calcul formel suppose une étude approfondie des situations d'apprentissage avec ce moyen technologique et une remise en cause des hypothèses généralement émises quant à ses apports. J'ai montré aussi que les rapports technique-conceptuel, occupent une grande place dans les discours et les hypothèses de recherche sur le calcul formel.

L'étude de ces rapports, qui constitue ce second chapitre, a été une part importante de la dimension théorique des recherches sur le calcul formel auxquelles j'ai participé. Ce chapitre constitue par conséquent une synthèse d'éléments que l'on pourra trouver dans des brochures comme (Artigue et al., 1995), (Artigue et al., 1998), et dans des articles comme (Lagrange, 1996a), (Artigue, 1998) et (Lagrange, 1999a).

Cette étude des rapports technique-conceptuel constitue plutôt une approche globale des situations d'apprentissage avec le calcul formel, où la conception générale des situations, leur articulation, le sens global qu'elles prennent pour les élèves sont analysés de façon privilégiée. Le chapitre suivant sera davantage centré sur le fonctionnement local des situations en privilégiant l'étude du travail de l'élève à travers les objets auxquels il est confronté.

Dans ce chapitre, je vais d'abord expliciter les hypothèses séparant les dimensions techniques et conceptuelles dans le travail mathématique, en rechercher les origines et montrer pourquoi elles s'expriment particulièrement dans les discours sur le calcul formel. Ensuite, je montrerai en quoi les phénomènes que nous avons observés dans la recherche DERIVE sont incompatibles avec ces hypothèses, puis comment la didactique française en est venue à élaborer un cadre théorique où ces deux dimensions sont vues comme solidaires. J'étudierai ensuite plusieurs exemples de situations pour montrer comment ce cadre théorique permet de comprendre des phénomènes observés dans les tentatives d'intégration du calcul formel, et comment il permet de faire évoluer les situations.

## Les discours et les hypothèses sur le calcul formel

Comme Rachlin (1989), le rappelle, la tension entre les dimensions technique et conceptuelle dans l'enseignement de l'algèbre est ancienne.



"Teachers (in the USA) even (in 1890) were opposed to what they saw as an overemphasis on manipulative skills and were calling for a meaningful treatment of algebra that would bring about more understanding" <sup>17</sup>

Depuis une vingtaine d'années, les nouvelles technologies sont présentées comme une possibilité de diminuer la part des manipulations techniques et de rééquilibrer les mathématiques scolaires en faveur de la compréhension. A la suite d'une conférence tenue en mars 1987 sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, Kieran and Wagner (1989) rapportent ainsi les hypothèses émises dans une session consacrée à la technologie :

« On the assumption of the universal access to the new technology, we now have the tools that enable us to modify our skill-dominated conception of school algebra and rebalance it in favour of objectives related to understanding and problem solving ».

Ils font part aussi de réserves exprimées sur cette hypothèse :

« The reforms will have limited impact on algebra by the year 2000 unless the mathematics education community deal with the four factors of teachers, textbooks, evaluation and articulation between high school and college coursework » <sup>18</sup>

Lorsque le calcul formel est devenu disponible, il est apparu comme un moyen privilégié d'un rééquilibrage en faveur du conceptuel, car il est en quelque sorte «plus mathématique» que d'autres technologies, grâce aux calculs en mode exact, et à la possibilité d'utiliser sans programmer. C'est pourquoi de nombreux travaux de recherche ont posé comme hypothèse une forte séparation des dimensions techniques et conceptuelles et se sont donnés comme objectif de promouvoir, dans les utilisations du calcul formel, la dimension conceptuelle. Ceci se voit particulièrement si l'on examine les hypothèses mises en avant et éprouvées par étude comparative dans les thèses soutenues dès 1984 aux Etats-Unis et dont voici trois exemples marquants :

---

<sup>17</sup> Comme indiqué dans la note du premier chapitre, d'une langue à l'autre, les mots n'ont pas nécessairement d'équivalents directs. Mais il est clair que les « manipulative skills » appartiennent à la dimension technique, et le « understanding » à la dimension conceptuelle.

<sup>18</sup> Ecrivant cette thèse à quelques semaines de l'échéance ainsi fixée, il m'est aisé de constater que cet « arrangement » (deal) est en fait bien difficile à négocier.

- Heid (1984) « Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool ».
- Palmiter (1986) « The Impact of a Computer Algebra System on College Calculus ».
- Judson (1988) « Effects of Modified Sequencing of Skills and Applications in Introductory Calculus »

J'ai expliqué au chapitre précédent que le « résequencement » que Kathleen Heid étudie, s'interprète à la fois comme une réorganisation dans le temps et dans l'importance donnée à chacune des dimensions.

Fey (1989) précise :

« (...) the use of symbol manipulation software in teaching calcul does permit greater emphasis on concept development and problem solving and this range of priorities pays off in greater student understanding and skill in those aspects of the subject. »

Prises au pied de la lettre, ces hypothèses voient la diminution de la part des manipulations techniques entraîner mécaniquement une augmentation du travail sur les concepts, et l'acquisition d'habiletés techniques découler aussi mécaniquement de la compréhension des concepts. Je voudrais souligner à ce point de la discussion, que l'analyse statistique comparative, si elle montre des performances supérieures d'un groupe expérimental ne valide pas nécessairement ces hypothèses. Ce groupe est en effet comparé à un groupe de contrôle dont on sait peu de choses. Les enseignements expérimentaux sont en revanche conçus et souvent encadrés par les chercheurs qui, à cette occasion, mettent en œuvre leurs connaissances sur l'enseignement du sujet concerné. Les meilleures performances du groupe expérimental doivent donc s'apprécier en tenant compte de la possibilité de performances médiocres du groupe de contrôle<sup>19</sup>.

Considérons par exemple une étude comme (Repo, 1994) qui précise que les élèves du groupe de contrôle ont subi un enseignement « traditionnel » qui ne met pas assez l'accent sur les concepts. L'auteur n'analyse pas le détail des activités, ni le comportement des élèves expérimentaux et « de contrôle ». Organisé selon le schéma classique d'une étude comparative, l'article donne seulement à voir les résultats à court et long terme des élèves concernés. Les élèves expérimentaux réussiraient significativement mieux que des élèves « de

---

<sup>19</sup> Ruthven (1997) fait une analyse très rigoureuse du travail de K. Heid, J. Palmiter, et S. Repo.

contrôle » à des épreuves « conceptuelles » immédiatement après l'enseignement. A plus long terme, leurs capacités algorithmiques seraient mieux fixées.

Le problème est que cette méthodologie ne permet pas vraiment de voir l'influence des choix théoriques d'utilisation du logiciel sur la meilleure réussite des élèves expérimentaux. Je vais montrer qu'il est tout fait raisonnable d'expliquer de façon différente les améliorations constatées. Les élèves non-expérimentaux ayant eu un enseignement « algorithmique » de l'analyse, il n'est pas étonnant que leur compréhension soit limitée et que l'entraînement aux algorithmes ait peu d'effet à long terme. De leur côté, les élèves expérimentaux ont mieux compris les concepts d'analyse, mais cela doit être rapporté aux faibles performances du groupe de contrôle. Bien que ce ne soit pas dit dans l'article, il y a certainement eu une partie de l'enseignement portant sur les algorithmes, sinon ils n'auraient pas été installés. Clairement, la meilleure compréhension a permis à cet enseignement d'être plus efficace, même si cela n'est pas développé par l'auteur. En résumé, l'enseignement a porté davantage sur les concepts, l'utilisation des algorithmes s'est appuyée sur les concepts, ce qui a produit de meilleurs résultats qu'un enseignement basé directement sur les algorithmes. Cette explication est au moins aussi plausible que celle qui attribue au calcul formel les améliorations constatées sans que l'on puisse savoir quelle en a été l'utilisation réelle par les élèves.

Sur un plan plus général, les études comparatives se situent dans un cadre où beaucoup de paramètres sont en jeu, et leurs effets difficiles à séparer. Il est donc possible de rester sceptique sur le rôle exact du calcul formel dans les performances évaluées, et ce d'autant plus que les comportements des élèves au cours de l'utilisation ne sont pas précisés. D'une certaine manière, les hypothèses sur l'apport du calcul formel rendent la réalité opaque. Je montrerai au chapitre 4 qu'une théorisation « cognitive » peut renforcer l'opacité. Nous avons d'ailleurs vu au chapitre précédent que les études comparatives quand elles ont porté sur des enseignements plus longs avec des évaluations plus fines se sont révélées moins nettement concluantes. Parallèlement, les observations en profondeur comme Wain (1994) ou Pozzi (1994) de la façon dont les élèves utilisent le calcul formel ont révélé des difficultés d'élèves et des comportements inattendus non compatibles avec une hypothèse d'amélioration systématique de la réflexion conceptuelle au cours de l'utilisation du calcul formel.

## L'étude DIDIREM sur DERIVE

L'étude DIDIREM sur DERIVE, que nous avons menée à partir de la rentrée 1993 a permis, grâce à des observations de classes, couplées à un relevé par questionnaires des attentes des

professeurs et des attitudes des élèves, d'établir un état plus systématique de ces difficultés et comportements. La présentation des recherches sur le calcul formel par Mayes (1997) les faisait voir comme des dysfonctionnements locaux ne remettant pas foncièrement en cause les hypothèses sur l'apport du calcul formel. Notre étude montre qu'il s'agit en fait de constantes des situations avec le calcul formel et que, pour les comprendre, il faut remettre en cause l'indépendance entre les dimensions techniques et conceptuelles qui sous-tend ces hypothèses. Dans le paragraphe qui suit, je présente les conclusions de cette étude, dont il est possible de prendre connaissance plus complètement dans (Lagrange, 1996a) et (Artigue, 1997)<sup>20</sup>.

Ces conclusions concernent largement la question du rapport technique/conceptuel, c'est pourquoi je les présente dans le présent chapitre. Elles portent également sur d'autres aspects de l'intégration du calcul formel qui seront développés dans les chapitres suivants. Pour éviter les répétitions, je présente donc ici l'étude dans son ensemble. Les rappels seront faits ensuite aux endroits nécessaires.

Notre recherche a permis de collecter les hypothèses d'enseignants et de chercheurs sur les bénéfices potentiels du calcul formel, de référer ces hypothèses aux théorisations existantes, puis d'examiner des utilisations réelles et de montrer à quels problèmes l'intégration du calcul formel se heurte.

## Hypothèses : un renouvellement de l'enseignement des mathématiques

Voici les attentes des professeurs :

- DERIVE doit permettre plus aisément la mise en œuvre de démarches expérimentales en mathématiques,
- DERIVE doit permettre d'intégrer au curriculum des problèmes plus intéressants et plus riches que les problèmes scolaires usuels,
- DERIVE doit permettre un enseignement plus convivial et aussi d'individualiser plus facilement l'enseignement en fonction de besoins particuliers,

A un niveau plus cognitif, ils estimaient que :

---

<sup>20</sup> Une annexe consacrée à l'analyse statistique exposera le traitement des données issues du questionnaire « élèves ».

- DERIVE peut compenser jusqu'à un certain point les difficultés rencontrées par les élèves, notamment avec le calcul numérique ou l'algèbre élémentaire, en leur permettant de travailler sur des concepts et situations nouveaux sans être handicapés par ces difficultés,
- DERIVE peut favoriser un fonctionnement plus réflexif, stratégique et conceptuel, en libérant l'élève des tâches techniques,
- DERIVE peut aider au développement d'images mentales, par les possibilités offertes de visualisation, et une meilleure compréhension des liens existant entre les cadres numérique, graphique et algébrique, par la possibilité d'utilisation conjointe de ces différents cadres.

## La réalité

Les données que nous avons recueillies ont montré qu'à quelques rares exceptions près, l'objectif d'intégration de DERIVE à l'enseignement n'a pas été atteint et qu'une utilisation, même épisodique de DERIVE est plus difficile que ce que les hypothèses faisaient apparaître.

Les réponses au questionnaire élève nous ont permis d'identifier quatre types d'attitude vis à vis du logiciel (la méthodologie ayant permis la mise en évidence de ces attitudes, est présentée dans l'annexe sur l'analyse statistique).

1. L'attitude de " refus " est minoritaire chez les élèves et se décompose en deux sous-attitudes. Dans le premier cas, le refus de DERIVE est lié aux difficultés que les étudiants ont rencontrées dans l'utilisation du logiciel ; dans le second cas, il est lié au fait que DERIVE prend à l'élève son travail technique usuel, la part la plus accessible du travail mathématique. Il y a sans doute là la crainte de voir l'utilisation de DERIVE conduire à la complexification des tâches proposées, notamment dans les évaluations.
2. L'attitude de " confiance aveugle ", elle aussi minoritaire, est plus souvent présente chez les élèves les plus jeunes qui ont surtout utilisé DERIVE dans des tâches de calcul numérique et d'algèbre élémentaire.
3. La perception de DERIVE comme outil pour calculer et vérifier des résultats est l'attitude majoritaire. Elle est particulièrement bien représentée chez les élèves des deux dernières années du lycée. Les élèves les plus familiers avec DERIVE soulignent que le logiciel ne permet pas seulement des utilisations simples comme la vérification, mais aussi de « piloter » des calculs complexes.

4. La perception de DERIVE comme outil d'apprentissage est celle qui rassemble les opinions les plus cohérentes avec les hypothèses des enseignants. Elle est plutôt minoritaire et se divise en deux grandes tendances : dans la première, la contribution de DERIVE aux apprentissages est exprimée en termes de changements dans l'activité mathématique ; la seconde souligne l'apport de DERIVE à une meilleure compréhension des mathématiques. Ce qui frappe, c'est l'absence de liaison entre cette perception d'une activité mathématique renouvelée, et celle d'un apport possible à la compréhension, comme si la nouvelle pratique avec DERIVE était trop éloignée des pratiques habituelles pour avoir réellement une influence sur la compréhension.

DERIVE est ainsi perçu d'abord comme un outil pour effectuer des calculs pénibles et vérifier les résultats obtenus dans des environnements standards, ce qui correspond aux fonctionnalités du logiciel les plus faciles à mettre en œuvre. En revanche, il n'est pas aussi facile aux enseignants de faire partager une vision de DERIVE comme outil de compréhension, d'apprentissage. Peu d'élèves expriment ce point de vue et, même parmi ceux qui ont le plus utilisé DERIVE, c'est plutôt le changement dans le type d'activité mathématique qui est perçu.

Les données recueillies auprès des enseignants sont aussi en décalage avec les potentialités attribuées a priori à DERIVE. Les professeurs expriment les difficultés qu'ils rencontrent à mettre en œuvre leurs idées, écrivant par exemple que DERIVE finalement ne supprime pas les difficultés calculatoires autant qu'ils le pensaient, que, même avec l'aide de DERIVE, il est difficile de gérer efficacement des activités expérimentales.

Les observations de classe ont aidé à analyser ces difficultés, que les enseignants ont en fait du mal à situer. Voici d'abord celles qui sont révélatrices de décalages entre les hypothèses d'allègement du travail technique au profit du conceptuel, et la réalité des séances avec DERIVE, qui sont étudiées dans ce chapitre.

Dans ces hypothèses, DERIVE est vu comme un environnement qui permet à l'élève d'agir, mais aussi de prendre de la distance dans un fonctionnement plus réflexif, plus stratégique, et donc porteur d'apprentissages mathématiques réels. Dans la réalité, ce fonctionnement peut exister, mais une tendance contraire se manifeste aussi quand l'élève fait l'économie de la réflexion et quand la résolution est atomisée en une multiplicité d'actions élémentaires dont l'élève a du mal à reconstruire la cohérence globale.

Des caractéristiques de l'activité avec le logiciel, telles que nous les avons observées poussent à cette tendance. Le logiciel permet des actions multiples, souvent rapides et économes en réflexion. Cela a certes pour conséquence d'éliminer les situations de blocage, fréquemment rencontrées en papier crayon et de permettre ainsi à la tâche de survivre même si la résolution avance peu. Ainsi, les nouveaux problèmes que les enseignants souhaitent promouvoir dans l'expérimentation DERIVE peuvent vivre. En contrepartie, le coût faible des actions et du changement d'action favorise l'apparition d'un phénomène de « pêche » : l'élève fait des essais, sans se préoccuper de leur organisation ou de leur contrôle, et espère qu'en un temps raisonnable il obtiendra quelque chose d'intéressant. Les observations tendent à montrer que ces comportements de pêche peuvent être relativement productifs pour les élèves, autant que les comportements plus réfléchis qu'ils pourraient avoir. De plus, le coût cognitif souvent élevé de l'interprétation des rétroactions s'oppose à leur exploitation, pourtant considérée dans les hypothèses comme un moteur essentiel des adaptations souhaitées. Lorsque la production de DERIVE n'est pas conforme à leurs attentes, les élèves enregistrent plutôt le décalage et essaient autre chose, au lieu de rechercher les raisons du décalage constaté.

Voici d'autres difficultés davantage liées à la modification de l'activité mathématique quand un moyen de calcul formel est introduit, qui seront étudiées au chapitre suivant.

Un premier exemple est révélateur des difficultés des élèves à conceptualiser les différences entre l'interface de DERIVE et le fonctionnement mathématique. DERIVE, lorsqu'il simplifie les expressions, réordonne les variables dans un ordre qui est fixé de façon interne. Cela peut être considéré comme un choix technique sans influence sur les mathématiques que l'on fait avec DERIVE. Mais, vu par des élèves débutant en algèbre, ce fonctionnement est analysé au même niveau que les mathématiques sous-jacentes. Ainsi, dans une observation, des élèves avaient à développer avec DERIVE les carrés de sommes diverses impliquant la variable  $a$ . Le but du professeur était qu'ils constatent que le développement avait trois termes et tentent de l'expliquer. Mais pour certains élèves le phénomène le plus remarquable, auquel ils tentaient de trouver une explication était la présence en première position du terme en  $a$  carré dans le développement, quelle que soit la position de  $a$  dans la somme. Des phénomènes de ce type peuvent paraître anecdotiques, mais il se produisent suffisamment souvent pour que les élèves perdent de vue l'aspect mathématique du travail. Artigue (1997) montre d'autres phénomènes de ce type à propos du parenthésage.

D'autres phénomènes révèlent la même difficulté de conceptualisation, mais cette fois au niveau du fonctionnement interne de DERIVE qui n'est qu'en apparence conforme au fonctionnement mathématique usuel. Une des contraintes du calcul formel sur laquelle je reviendrai au chapitre suivant est que les transformations algébriques sont nécessairement poussées jusqu'au stade où elles ne produisent plus une nouvelle forme. Dans la pratique mathématique, il existe de multiples façons de transformer les expressions, qui sont relativement transparentes quand on opère à la main. En revanche une certaine expertise est nécessaire quand on utilise le calcul formel. Je vais montrer comment ce phénomène s'est manifesté, dans une séance observée, où les élèves avaient à transformer des sommes de sinus ou de cosinus en produits.

L'objectif du professeur était que ces élèves acquièrent des « démarches de transformation », et le logiciel devait prendre en charge l'aspect technique des manipulations de façon que les élèves se concentrent sur la démarche. Le professeur avait préparé une définition de fonction qui devait permettre aux élèves de transformer les sommes en produit. Une des tâches était la transformation en produit de  $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ . A partir de  $\sin(x) + \sin(2x)$ , la fonction donnait  $2\sin\left(\frac{2x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-x}{2}\right)$ . Les élèves devaient simplifier cette expression en  $2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ , puis transformer de même  $\sin(3x)$  en produit, mettre en facteur  $2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$  et transformer en produit la somme  $\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$  qui apparaissait comme le second facteur. La tâche était très guidée par un polycopié qui détaillait les expressions à obtenir à chaque étape et devait préparer un phase de recherche plus ouverte. En fait, à cause du fonctionnement de DERIVE, cette tâche a posé beaucoup de difficultés aux élèves. Un des problèmes réside dans la simplification de  $2\sin\left(\frac{2x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-x}{2}\right)$ . En papier/crayon, la simplification en  $2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$  est transparente. Dans DERIVE, différentes simplifications trigonométriques existent. L'une d'entre elle redonne  $\sin(x) + \sin(2x)$ . Lorsque les élèves activent cette simplification, il en résulte un certain découragement ! Une autre simplification donne  $\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x)$ . Comme cette expression se factorise, les élèves sont tentés de l'utiliser, mais ainsi, ils s'éloignent de la résolution proposée et se perdent.



D'autres se résignent à effectuer cette simplification "à la main", en entrant dans DERIVE l'expression  $2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ , mais font une erreur de frappe qu'ils ne parviennent pas par la suite à détecter !

Le même problème se produit dans la suite. A chaque fois que les élèves opèrent une transformation de l'expression  $2 \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \left( \cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)$ , la simplification opérée automatiquement par DERIVE soit redonne la somme initiale  $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ , soit donne l'expression  $4 \sin(x) \cos^2(x) + 2 \sin(x) \cos(x)$  qui n'est pas utile dans cette tâche.

Ainsi, ce qui était prévu pour être une simple tâche préparatoire est devenu une sorte de casse-tête où il s'agissait de contraindre DERIVE à des transformations qui ne sont pas naturelles dans cet environnement.

Il serait facile d'incriminer dans cette observation un défaut de préparation de la séance. Mais nous avons très souvent rencontré cette distance entre l'anticipation du professeur et les difficultés rencontrées par les élèves à effectivement piloter DERIVE. L'expertise du professeur, tant en mathématiques que dans l'utilisation de DERIVE, lui permet de ne voir que les mathématiques sous-jacentes. Il ne perçoit donc pas quelle familiarisation avec DERIVE serait nécessaire pour que les élèves puissent eux aussi se concentrer sur le processus de résolution.

### Synthèse sur les rapports techniques/conceptuels

Notre étude a donc montré qu'on retrouve chez les professeurs français souhaitant faire utiliser DERIVE par leurs élèves des attentes globalement conforme aux hypothèses optimistes étudiées au paragraphe précédent<sup>21</sup>. Elle a aussi montré un décalage certain entre ces attentes et la réalité. Si à certains moments un effort de réflexion des élèves a été constaté, les élèves se livrent aussi à des manipulations dont ils ne maîtrisent pas la finalité.

Nous avons vu aussi, dans les situations de résolution de problèmes, les élèves aux prises avec des difficultés techniques souvent non prévues par le professeur. Ces difficultés peuvent être

---

<sup>21</sup> Elles portent également assez fortement la marque de l'influence d'une théorie de l'étayage (Bruner, 1983), adaptée à une vision assez idéologique de l'utilisation du calcul formel (Kutzler, 1994).

vues comme liées au logiciel. C'est pourquoi, le plus souvent, les professeurs étaient tentés d'en minimiser l'importance ou de les contourner. Je montrerai plus loin dans ce chapitre que les élèves qui ne peuvent mener à bien une tâche pourtant vue comme élémentaire par le professeur, ou qui traitent la tâche de façon différente de ce que le professeur attendait, font fonctionner aussi bien leurs connaissances mathématiques que leurs représentations du logiciel, et que ces connaissances sont en fait imbriquées dans leur compréhension de la tâche.

Les professeurs qui, avec des hypothèses moins ambitieuses, pensaient faire utiliser DERIVE comme un outil de vérification, ont été également déçus. En effet, dans une pratique où les élèves font des calculs en papier/crayon qu'ils vérifient ensuite avec DERIVE, dans d'assez nombreux cas, les expressions obtenues avec DERIVE peuvent être différentes des expressions obtenues en papier/crayon, et la reconnaissance de leur équivalence peut être impossible pour l'élève. A nouveau interviennent des difficultés techniques, car une pratique de vérification suppose des capacités à « piloter le logiciel » vers la forme désirée, et des difficultés conceptuelles car l'équivalence des expressions suppose des connaissances mathématiques spécifiques<sup>22</sup>.

Enfin, l'analyse de l'observation des séances converge avec l'étude statistique des données issues des questionnaires pour révéler une coupure, dans le travail des élèves, entre les maths faites avec DERIVE et les mathématiques habituelles. Les élèves appréciaient très souvent les séances avec DERIVE, étaient actifs mais les objets manipulés par DERIVE, les pratiques avec le logiciel étaient trop éloignés des objets et pratiques habituelles pour qu'il y ait un réel effet sur les conceptualisations.

---

<sup>22</sup> Par exemple, au cours de la recherche TI-92, nous avons demandé aux élèves de dériver  $x \rightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$

à la main et avec la TI-92, et d'expliquer pourquoi les résultats sont équivalents. L'application des règles de dérivation donne  $-3\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$  et la TI-92 donne  $3\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 8 élèves dans une classe de 26 ont été

capables de l'expliquer en donnant une raison du type  $\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right)$ . Beaucoup n'ont même pas su exploiter la calculatrice pour tester la validité de l'égalité.

## Les praxéologies

La notion de praxéologie a été introduite en didactique par Chevallard (Chevallard, 1999). Dans un cours à la VIIème école d'été de didactique, Mercier (1996) a montré la genèse de cette idée à partir des difficultés rencontrées dans l'enseignement de l'algèbre. Cette genèse me paraît particulièrement éclairante pour comprendre le rôle des techniques dans l'enseignement et l'apprentissage. Je vais donc la présenter en quelques lignes.

Au départ de leur réflexion, Mercier et Chevallard soulignent le risque que l'algèbre disparaisse des mathématiques scolaires par suite des difficultés rencontrées par les élèves et de l'importance donnée à la résolution de problèmes et aux méthodes numériques. La manipulation de symboles étant souvent présentée dans les discours sur l'enseignement comme sans signification, et les calculatrices et tableurs pouvant être utilisées par les élèves comme aide à l'exploration et à la résolution numérique des problèmes, pourquoi continuer à exiger des élèves une résolution symbolique dans laquelle beaucoup échouent ?

Mercier et Chevallard montrent ensuite la puissance de l'algèbre, sa place potentielle comme fondement des mathématiques scolaires. A la recherche des raisons de la difficile position de l'algèbre dans la réalité des pratiques mathématiques des élèves, ils soulignent l'effet des réformes successives qui ont conduit à ce que l'algèbre existe dans l'enseignement seulement comme des techniques disparates. D'une part, l'enseignement insistant moins sur la preuve, les tâches que ces techniques auraient pu contribuer à mener à bien n'existaient plus et d'autre part, l'accent mis sur les aspects pratiques de la résolution faisait qu'il n'y avait plus la réflexion théorique sur les techniques susceptibles d'en faire des entités mathématiques à part entière.

Il est apparu ainsi que des techniques ne peuvent exister de façon isolée dans l'enseignement et l'apprentissage, et de cette observation est née l'idée de praxéologie. Un sujet mathématique, une œuvre, pour reprendre les termes de Yves Chevallard existe dans une institution comme ensemble cohérent sur quatre niveaux. Le premier niveau est celui des tâches. Pour celui qui « entre dans l'œuvre », les tâches sont des problèmes. Au second niveau, les techniques qui sont les façons particulières, « adéquates », d'accomplir ces tâches dans l'institution. Au troisième niveau, les technologies sont étymologiquement les discours sur les techniques. Les technologies permettent en particulier d'interroger les techniques sur leur consistance, leur domaine de validité, elles impliquent notamment le langage. Les

théories sont à un niveau supérieur, les technologies des technologies. Cet ensemble cohérent sur quatre niveaux constitue une praxéologie (mot formé à partir de « praxis » et « logos »).

## Les techniques dans l'utilisation du calcul formel

Dans une institution scolaire, pour l'élève, l'étude d'un sujet est l'entrée dans l'œuvre : les tâches sont problématiques et les techniques sont à construire. Les technologies et les théories sont des niveaux importants, bien plus que dans les situations non scolaires, mais elles ne prennent leur sens (elles n'existent) que comme réflexion sur les techniques. Si nous reprenons les hypothèses couramment émises sur les apports du calcul formel, nous pouvons y voir une vision des mathématiques scolaires où il serait possible, toutes choses égales par ailleurs, de « sauter par dessus les techniques » pour atteindre directement la réflexion technologique et théorique.

De la même façon, nous pouvons interpréter les observations faites dans l'étude DERIVE comme des manifestations de praxéologies non cohérentes : en l'absence d'un niveau technique qui permettrait d'introduire une rationalité dans la résolution sur laquelle faire fonctionner une réflexion technologique, les élèves en sont réduits à des comportements d'adaptation peu producteurs et ils ne perçoivent pas les aspects conceptuels qu'ils sont supposés « lire » dans la résolution par DERIVE. Par ailleurs, le niveau technique ainsi comprimé resurgit avec les difficultés liées au logiciel, difficultés qui font apparaître « en creux » la nécessité de techniques d'utilisation du logiciel. Même si le professeur aperçoit cette nécessité, et donne à ces techniques une certaine existence, suffisante pour que les élèves puissent utiliser le logiciel, il ne les utilise pas comme base pour la constitution des niveaux technologiques et théoriques, car elles lui paraissent trop éloignées des significations mathématiques telles qu'elles se construisent dans les praxéologies habituelles. Pour que les techniques « calcul formel » prennent du sens, il faudrait construire les praxéologies dans lesquelles ces techniques pourraient s'insérer et prendre une signification mathématique. Nul mystère qu'en l'absence de ces praxéologies, les techniques papier/crayon restent celles qui « font sens » pour les élèves car justement insérées dans des praxéologies cohérentes.

Je vais montrer en quatre exemples comment l'analyse de la dimension technique du travail avec le calcul formel permet de mieux penser l'intégration de cette technologie, d'abord par la mise en évidence de techniques spécifiques au calcul formel potentiellement constitutives de praxéologies, par l'étude de l'interaction entre techniques et particulièrement des rôles que peuvent jouer respectivement les nouvelles techniques « calcul formel » et les techniques

habituelles « papier-crayon ». Enfin, je montrerai quel travail suppose la conception de praxéologies nouvelles.

## Des techniques spécifiques d'utilisation du calcul formel

Le premier exemple est celui des factorisations de  $x^n - 1$ , un problème sur lequel Adon et Mounier ont écrit plusieurs articles (Aldon, 1994<sup>23</sup>, Mounier et Aldon, 1996). La résolution de ce problème par les élèves a de plus été observée et analysée dans la recherche DIDIREM sur DERIVE (Artigue et al, 1995). C'est aussi un problème classique dans le contexte du calcul formel : voir par exemple le compte-rendu du « Topic Group 4, Distance learning of Mathematics à ICME 8 » (Murakami 1999). En effet, les logiciels de calcul formel donnent les factorisations rationnelles de  $x^n - 1$  pour des valeurs de  $n$  arbitraires en implémentant un algorithme basé sur la théorie des polynômes cyclotomiques.

Le problème, posé en première S, est de conjecturer et de prouver des factorisations générales des polynômes de la forme  $x^n - 1$  en observant des factorisations pour des valeurs données de  $n$ . Analysant ce problème, je vais m'attacher principalement aux connaissances sur les polynômes à la construction desquelles l'activité de résolution peut conduire : lien entre factorisations et racines, compréhension des éléments en jeu dans la factorisation, prise de conscience de « factorisations générales » valables pour une classe d'entiers, mémorisation de certaines de ces factorisations d'utilité pratique... Dans ce paragraphe, nous étudierons comment cette situation peut vivre en classe, en particulier par les techniques qui permettent son existence. Au chapitre suivant, je considérerai les aspects sémiotiques en examinant plus en détail l'activité de résolution des élèves. Il est aussi possible de voir cette situation comme une activité de « mathématiques expérimentales » dans une transposition didactique dont j'ai montré au chapitre précédent le caractère problématique. J'aborderai ce point dans la conclusion, en lien avec l'analyse de cette situation comme « activité de modélisation » (Lagrange, 1996b).

Nous allons suivre l'évolution de ce problème à travers les trois versions de ce problème que Mounier et Aldon ont expérimentées.

Dans la première version, le problème a été étudié au cours d'une seule séance, en papier crayon. Selon des observations de Mounier et Aldon, les élèves ont trouvé facilement le

---

<sup>23</sup> In (Hirliman, 1994)

facteur  $x-1$ , puis par division sur quelques exemples, le quotient par  $x-1$ . Bien sûr, le calcul a été laborieux et, après ce premier résultat, peu d'élèves ont cherché d'autres conjectures.

Dans la seconde version, également sur une séance, Mounier et Aldon voulaient utiliser DERIVE pour que les élèves puissent trouver davantage de factorisations et donc pour étendre leur pratique expérimentale. Une difficulté est que le calcul formel donne des factorisations complètes qui ne sont les factorisations générales que pour certaines valeurs de  $n$ . Par exemple, la factorisation en deux facteurs  $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  n'est obtenue que pour  $n$  premier. Les professeurs pensaient que les élèves pourraient trouver des conjectures en observant les factorisations DERIVE, mais aussi en s'en éloignant suffisamment pour qu'elles ne viennent pas cacher les factorisations générales.

En fait, ce fonctionnement est difficilement possible directement pour des élèves de lycée. Voici une démarche typique d'élèves. Ils factorisent pour 2 et 3 et conjecturent une factorisation générale en deux facteurs. En factorisant pour  $n=4$ , ils constatent une irrégularité pour les  $n$  pairs, ce que confirme la factorisation pour  $n=5, 6, 7$ . Il y a alors pour eux deux factorisations distinctes, l'une valable pour les impairs  $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ , l'autre pour les pairs :  $(x-1)(x+1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + x^2 + 1)$ <sup>24</sup>. Ils tentent de confirmer par exemple pour  $n=9$ , mais ils obtiennent alors une factorisation en 3 facteurs  $x^9 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$  qui remet en cause leur conjecture. Ils n'avancent plus guère dans la séance, car toute conjecture est immédiatement démolie par un nouvel essai.

Dans ce fonctionnement des élèves, deux difficultés sont liées :

- l'une est la compréhension des rapports entre les différentes factorisations d'un même polynôme

---

<sup>24</sup> Indépendamment de l'effet de l'utilisation de DERIVE, il est possible d'interpréter aussi cette difficulté d'un point de vue de la logique implicitement mise en œuvre : s'il existe une propriété valable dans une partie donnée d'un ensemble, une propriété plus faible ne sera reconnue comme valable que dans la partie complémentaire. Cette observation rejoint les difficultés liées à la quantification de l'implication et soulignées par Durand-Guerrier (1995). « Logique formelle comme outil d'analyse des connaissances » Arsac, G., Grea, J., Grenier, D. & Tiberghien, A. (Eds) (1995). Différents types de savoirs et leur articulation. La Pensée Sauvage, Grenoble.

- l'autre est l'absence de techniques pour sélectionner et développer une partie d'une factorisation.

Un mathématicien sait qu'une factorisation par exemple en trois facteurs, va permettre d'obtenir des factorisations en deux facteurs, par regroupement. Même s'il ne connaît pas DERIVE, il devine que le logiciel doit lui donner les moyens d'opérer ce regroupement de deux facteurs. L'élève en revanche n'a pas une conscience claire des relations entre les factorisations et ne connaît pas non plus les ressources du logiciel. Il n'est donc pas étonnant qu'il ne puisse pas se dégager des factorisations DERIVE pour concevoir des factorisations plus générales. Sélectionner et développer une partie d'une factorisation n'est en effet pas une manipulation triviale : elle suppose de connaître les fonctionnalités de recopie spécifiques au logiciel, et de les intégrer dans une compréhension de la façon dont les expressions factorisées sont formées. L'élaboration de techniques est donc un moment essentiel pour à la fois permettre la poursuite de l'activité et lui donner sa dimension mathématique.

Cet exemple montre bien l'importance de considérer le niveau des techniques d'utilisation du calcul formel dans les démarches d'intégration. Bien souvent les professeurs expérimentateurs négligent ce niveau car ils considèrent à tort que ces techniques sont évidentes ou que, trop liées au logiciel, elles ne sont pas significatives d'un point de vue mathématique.

Dans cette situation, la technique de regroupement des facteurs dans DERIVE va être une clé pour que l'élève comprenne les rapports entre les différentes factorisations. C'est en effet ainsi que j'interprète la troisième version présentée par Aldon et Mounier.

Celle-ci a pris la forme de ce que Gilles Aldon (1998) appelle un problème long : les élèves disposaient de DERIVE sur ordinateur portable. La première séance a servi à poser le problème et à initier les élèves aux techniques de manipulation des facteurs dans DERIVE. Puis les élèves ont pu pratiquer à la maison, trouver des conjectures et des preuves. Sur trois mois, des moments ont été organisés où les élèves ont présenté l'avancement de leur travail et où le professeur a fait discuter les conjectures produites et relancé la recherche.

**Les factorisations de  $x^n - 1$  : communication des élèves  
à l'issue de la dernière séance (d'après Mounier et Aldon)**

Pour tout n, on a :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

Preuve faite

Pour tout n puissance de 2 :

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)\dots(x^{n/2}+1)$$

Preuve faite

Pour tout n puissance de 3 :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)\dots(x^c+x^d+1) \text{ où } c = 2n/3 \text{ et } d = n/3$$

Pas de preuve

Pour tout n puissance de 5 :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)\dots(x^A+x^B+x^C+x^D+1)$$

où  $A = 4n/5$ ,  $B = 3n/5$ ,  $C = 2n/5$ ,  $D = n/5$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{n-5}+x^{n-10}+x^{n-15}+\dots+x^5+1)$$

Pas de preuve

Pour tout n puissance de 7 :

$$x^n - 1 =$$

$$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1)\dots(x^A+x^B+x^C+x^D+x^E+x^F+1)$$

où  $A = 6n/7$ ,  $B = 5n/7$ ,  $C = 4n/7$ ,  $D = 3n/7$ ,  $E = 2n/7$ ,  $F = n/7$

Pas de preuve

Pour tout nombre premier, on a la seule factorisation :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

Pas de preuve

Pour tout n pair, on a :

$$x^n - 1 = (x^{n/2} + 1)(x^{n/2} - 1)$$

preuve faite

Pour tout  $n = wk$ , on a :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{w-1} + x^{w-2} + \dots + x + 1)(x^{n-w} + x^{n-2w} + \dots + 1)$$

preuve faite.

On a essayé :

$$x^{0,4} - 1 = (x^{1/5} - 1)(x^{1/5} + 1)$$

$$x^{0,8} - 1 = (x^{1/5} - 1)(x^{1/5} + 1)(x^{2/5} - 1)$$

$$x^{0,7} - 1 = (x^{1/10} - 1)(x^{3/5} + x^{1/2} + x^{2/5} + x^{3/10} + x^{1/5} + x^{1/10} + 1)$$

Question : qu'est ce que c'est que  $x^{a/b}$  ?

**Figure 4**



La modalité de travail «problème long» a été introduite et expérimentée par des professeurs de la commission Inter IREM Informatique. Discuter cette modalité sur un plan général nous entraînerait trop loin. Je souligne seulement que dans la situation des factorisations, le problème long répond particulièrement bien à la nécessité d'une élaboration des techniques, puis de leur pratique et de la réflexion technologique, que Gascón (1998)<sup>25</sup> appelle « le travail de la technique » (el trabajo de la técnica) et dont il souligne l'importance. Ce travail demande du temps, et ne peut être entièrement mené en classe, particulièrement dans le contexte du lycée. Il est même important qu'il ne le soit pas, le travail personnel de l'élève étant, dans ce contexte, un moment essentiel de pratique, d'assimilation, de réflexion.

La productivité de ce travail de la technique s'apprécie dans le rapport fait par les élèves à l'issue de la dernière séance et reproduit dans le tableau de la Figure 4. Le caractère général de certaines factorisations est reconnu en prenant suffisamment de distance avec les observables de DERIVE. Une factorisation DERIVE non triviale (pour tout n puissance de 2) est prouvée par le regroupement successif de deux facteurs, inspiré de la technique expérimentée dans l'usage du logiciel. La factorisation des polynômes est généralisée à des expressions non polynomiales auxquelles certains élèves parviendront finalement à donner un sens à partir de l'équivalence qu'ils connaissent entre  $\sqrt{x}$  et  $x^{\frac{1}{2}}$ <sup>26</sup>.

### L'interaction avec les techniques « habituelles »

Dans l'exemple précédent, j'ai montré que les techniques d'utilisation du calcul formel, loin d'être triviales ou seulement liées au logiciel peuvent être vues comme des éléments fondamentaux pour le nécessaire « travail sur la technique ». Au lieu d'en minimiser l'importance ou de les contourner, il est bon de les analyser, de trouver les dispositifs qui permettent à ce travail de se développer.

Montrer l'importance y compris dans le domaine conceptuel des techniques d'utilisation du calcul formel conduit-il à considérer que les techniques « habituelles » (non calcul formel) ont dit leur dernier mot, qu'elles vont devenir obsolètes à mesure que nous aurons conçu des situations adaptées au calcul ? Cette question de l'interaction du calcul formel avec les

---

<sup>25</sup> Evolución de la didáctica de las matemáticas Rdm 18/1

<sup>26</sup> Ce point sera développé au chapitre suivant.

techniques « papier/crayon » est souvent posée (par exemple par Monaghan, 1997), et je vais tenter de la préciser.

### ***Inscrire une praxéologie « calcul formel » dans des rapports plus globaux***

Je vais donner un premier exemple où une technique « calcul formel » intervient sur un plan local et où une technique « papier/crayon » se révèle indispensable pour donner un sens plus global aux résultats des élèves. Le problème est issu d'une brochure réalisée par Luc Trouche avec ses élèves (Trouche et al., 1998). Il s'agit (Figure 5) de trouver la forme des dérivées successives du produit d'un polynôme de degré 2 par la fonction exponentielle. La tâche s'insère bien dans une praxéologie qui conduirait à considérer la dérivation comme une opération interne dans l'ensemble des produits de la fonction exponentielle par les polynômes de degré donné. La technique avec le calcul formel consiste à opérer plusieurs dérivations et à reconnaître des régularités (pattern), puis à conjecturer une forme générale. La démonstration peut aussi être faite en calcul formel. Le problème est ainsi résolu sans connaissances sur la dérivation d'un produit.

Dans la brochure (Figure 5, seconde partie), les élèves déclarent que cette recherche les mène bien au résultat cherché, mais qu'elle les laisse insatisfaits. C'est pourquoi, ils utilisent une autre technique, papier/crayon, basée sur les dérivées successives de l'exponentielle et du polynôme et sur la formule de Leibnitz qui généralise la dérivation d'un produit de fonctions. Pourquoi ces élèves se posent-ils à nouveau un problème qu'ils ont déjà résolu ? Quel rôle font-ils jouer à leurs connaissances sur la dérivation d'un produit ? La praxéologie locale dans laquelle s'inscrit la recherche de pattern ne met pas en rapport les objets du problème avec des savoirs plus globaux. Ou, dit plus naïvement : la résolution avec le calcul formel « n'explique pas » pourquoi la dérivation conserve l'ensemble des produits de la fonction exponentielle par les polynômes de degré donné. Ainsi, quitter le calcul formel aide à insérer la question dans des rapports plus globaux aux objets de l'analyse.

**Un «défi» : pour tout entier  $n$  trouver la  $n$ ème  
dérivée de  $e^x(x^2 + x + 1)$  (d'après Trouche et al., 1998)**

1. Résolution avec DERIVE

*Recherche de pattern*<sup>27</sup>

$$\frac{d}{dx} ((x^2 + x + 1) \cdot \hat{e}) = \hat{e} \cdot (x^2 + 3 \cdot x + 2)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} ((x^2 + x + 1) \cdot \hat{e}) = \hat{e} \cdot (x^2 + 5 \cdot x + 5)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} ((x^2 + x + 1) \cdot \hat{e}) = \hat{e} \cdot (x^2 + 7 \cdot x + 10)$$

*Démonstration*

$$\frac{d}{dx} ((x^2 + (2 \cdot n + 1) \cdot x + 1 + n) \cdot \hat{e}) =$$

$$\hat{e} \cdot (x^2 + x \cdot (2 \cdot n + 3) + n^2 + 2 \cdot n + 2)$$

2. Un « second regard »

« Nous cherchons les dérivées du produit de deux fonctions  $u$  et  $v$ , avec  $u(x) = e^x$  and  $v(x) = x^2 + x + 1$ . Toute dérivée de  $u$  est  $u$ , la dérivée première de  $v$  est  $v'(x) = 2x + 1$ , la dérivée seconde est  $v''(x) = 2$  and les autres dérivées de  $v$  sont nulles. A partir de là, nous calculons les trois premières dérivées du produit  $uv$ . Pour généraliser, nous utilisons la formule de Leibnitz and trouvons pour tout  $n$  :  $(uv)^{(n)} = uv + nuv' + \frac{n(n-1)}{2}uv''$ . Nous retrouvons ainsi l'expression de la  $n$ ème dérivée de  $(x^2 + x + 1)e^x$ . »

**Figure 5**

Il est possible de donner bien d'autres exemples en analyse. Expliquer pourquoi le calcul formel trouve des primitives des  $x^n e^{x^2}$ , seulement pour  $n$  impair conduit par exemple à utiliser l'intégration par partie, technique « papier/crayon » dont il ne faut pas alors penser qu'elle est « routinière et dépassée ». Les techniques habituelles en analyse jouent ainsi un

<sup>27</sup> Sc. (Anglic.). Modèle simplifié d'une structure devant avoir des caractères de cohérence et une valeur démonstrative. (Dictionnaire le Robert)

rôle qui dépasse largement les manipulations calculatoires. Elles charpentent l'analyse, au moins dans sa dimension symbolique.

### *Généraliser et systématiser une praxéologie à l'aide du calcul formel*

Il ne faudrait pas inférer de ce qui précède un lien à sens unique entre des techniques « calcul formel » qui seraient vouées à des praxéologies locales et des techniques « papier/crayon »<sup>28</sup> qui seraient seules capables d'établir des rapports plus globaux aux objets. Un second exemple va montrer un lien différent, dans une situation en algèbre. Il s'agit d'un problème d'optimisation avec généralisation que nous avons expérimenté au cours de la recherche TI-92.

Nous avons retenu une situation où il s'agit d'optimiser les dimensions d'une cuve (Figure 6). L'épaisseur et le volume intérieur de la cuve sont d'abord des constantes numériques puis, dans la généralisation, sont des constantes symboliques. Sur le plan des connaissances à développer chez les élèves, la généralisation conduit à une réflexion sur les résultats différente de celle du cas numérique. Par exemple, dans le cas numérique et dans la première généralisation, la dimension optimale est la même constante numérique (4 mètres). Mais ce résultat a une signification différente dans la généralisation, puisqu'il montre que cette dimension optimale ne dépend pas de l'épaisseur de la cuve.

Nous attendions aussi une modification des techniques de résolution. En effet, la technique usuelle pour les élèves de recherche d'optimalité sur des fonctions numériques fait interagir les registres graphiques, numériques et symboliques. Les explorations graphiques et numériques donnent du sens au problème, guident dans l'étude symbolique, mais pour beaucoup d'élèves, les statuts respectifs des registres vis à vis de la preuve ne sont pas clairs. Par exemple, certains élèves vont calculer les zéros de la dérivée de façon symbolique, mais ils vont étudier le signe de cette dérivée sur son graphe. La généralisation à une fonction dépendant d'une constante symbolique introduit une rupture, puisque seule une technique d'étude entièrement symbolique devient possible. Nous attendions de cette rupture qu'elle contribue à installer l'étude symbolique comme ayant une portée différente des explorations

---

<sup>28</sup> En fait ces techniques font autant appel à la réflexion qu'à la main, c'est pourquoi je les désignerai par « techniques habituelles ».

graphiques et numériques, par exemple que l'étude du signe de la dérivée par factorisation prenne une signification qui dépasse la simple conformité au contrat didactique.

Nous attendions bien sûr de la TI-92 qu'elle aide à la dévolution de cette généralisation car, à la main, les calculs avec constantes symboliques seraient inaccessibles pour les élèves. En

effet, l'expression du volume de béton est  $\frac{e(x^4 + 4ex^3 + 4ex^2 + 4Vx + 4eV)}{x^2}$ . La TI-92 dérive

et factorise cette expression en  $\frac{2e\left((x + 2e)\left(x - (2V)^{1/3}\right)\left(x^2 + (2V)^{1/3}x + (2V)^{2/3}\right)\right)}{x^3}$  et ainsi les

élèves peuvent reconnaître que la dérivée est du signe du facteur  $\left(x - (2V)^{1/3}\right)$ .

Voici comment les élèves ont travaillé sur ce problème. Dans le cas numérique, ils ont rencontré les difficultés classiques à modéliser le volume de la cuve, puis employé des stratégies diverses d'étude de la fonction, combinant de façon variée les explorations numérico-graphiques et l'étude symbolique. Abordant la généralisation, les élèves n'ont pas eu de difficulté à étendre la modélisation. En revanche, ils ont été totalement déconcertés par l'impossibilité d'obtenir une représentation graphique de la fonction. Le professeur a dû insister sur le fait qu'ils disposaient d'une méthode avec la dérivation. Mettre en œuvre cette méthode a été pour les élèves une véritable reconstruction : insécurisés par l'impossibilité d'explorer graphiquement les variations, ils se sont aidés du calcul formel pour progresser dans les étapes de la méthode.

Dans l'exemple précédent, la technique de calcul « à la main » des dérivées inscrivait une praxéologie locale dans le cadre plus global de la dérivation symbolique. Ici, l'utilisation du calcul formel vient systématiser et généraliser une technique symbolique d'étude des variations (l'étude du signe de la dérivée par factorisation) dont les élèves n'avaient pas jusqu'alors réellement perçu l'intérêt, faute d'une tâche appropriée. Il me semble, à la suite de ces deux exemples, que pour dépasser l'impression vague que les techniques habituelles ont leur place à côté de l'utilisation du « calcul formel », et pour bien saisir la portée de leur interaction, il est nécessaire de considérer les praxéologies dans lesquelles ces techniques s'inscrivent, et leur évolution : praxéologies prenant leur sens dans des rapports plus globaux grâce aux techniques habituelles, praxéologies se systématisant et se généralisant grâce à des tâches nouvelles et à des techniques renouvelées.

### La cuve, un problème d'optimisation avec généralisation

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de 20 cm d'épaisseur et pouvant contenir  $4\text{m}^3$ . On désigne par  $x$  (en m) le côté du carré intérieur et par  $h$  (en m) la hauteur intérieure de la cuve. On veut déterminer  $x$  et  $h$  pour que le volume de béton utilisé soit minimal.

- 1) Exprimer le volume de béton en fonction de  $x$  seul. On notera  $V(x)$  ce volume.
- 2) Etudier le sens de variation de la fonction  $V$ .  $V$  admet-elle un minimum ? Déterminer alors les dimensions de la cuve pour lesquelles ce volume est minimal.

#### Première généralisation :

Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de  $e$  mètres.  
(le volume de la cuve est toujours  $4\text{ m}^3$ )

#### Seconde généralisation :

Reprendre le même problème avec une épaisseur de la cuve de  $e$  mètres.  
Le volume de la cuve à réaliser étant  $V_0$ .

**Figure 6**

## Effondrement et reconstruction de praxéologies

Dans les exemples précédents, nous avons vu l'influence du calcul formel sur les praxéologies. Dans les cas présentés, l'introduction du calcul formel apportait une plus grande diversité de techniques, et, en jouant sur ces techniques, des situations appropriées permettaient de faire évoluer les praxéologies.

Je voudrais montrer par l'exemple suivant que dans l'introduction du calcul formel, l'apparition de nouvelles techniques peut aussi bouleverser les praxéologies existantes et imposer à l'enseignant un travail important de remise en cause et de conception. Dans ce cas, c'est la praxéologie toute entière qui s'effondre par obsolescence des techniques et il faut reconstruire tous les niveaux : de la tâche à la théorie.

L'exemple est tiré de l'exposé d'une collègue autrichienne Edith Schneider au colloque « Calculatrices complexes » de Montpellier, mai 1988 (Schneider, 1999). Au départ, il y a le désir de deux professeurs de ce qui serait en France une classe de baccalauréat technique option « économie », d'intégrer la calculatrice TI-92 dans leur enseignement.

L'enseignement qu'elles assuraient portait sur les fonctions logarithmes et exponentielles, et s'appuyait, au niveau des tâches et des techniques sur la résolution de diverses formes d'équations exponentielles et logarithmiques. On voit dans le descriptif de l'enseignement (Figure 7) que la résolution de ces équations occupait alors une grande part des activités des 9 séances consacrées à ce sujet. A mon sens, il s'agissait d'une praxéologie bien rodée : les

élèves résolvait par exemple, des équations du type  $a^x = b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes numériques et  $x$  l'inconnue, dans des cas où ils le pouvaient avec leurs connaissances d'algèbre, par exemple  $a=2$  et  $b=8$ , ou  $a=4$  et  $b=2$ , ainsi que la fonction  $x \rightarrow a^x$  pour différentes valeurs de  $a$ , puis des équations s'y ramenant par diverses transformations algébriques et les techniques ainsi développées permettaient d'introduire la fonction logarithme et ses propriétés. Puis de nouvelles équations pouvaient être résolues, avec une complexité croissante.

Edith Schneider montre les limites d'une telle praxéologie :

*« Les méthodes de résolution étaient présentées, démontrées par l'enseignante et reproduites par les élèves dans des applications. Les équations exponentielles et logarithmiques étaient résolues exclusivement algébriquement, sans changer les formes de représentations (graphique, algébrique, table). Une seule méthode de résolution était présentée pour chaque type d'équations exponentielles et logarithmiques... »*

Elle donne aussi des éléments qui permettent d'en comprendre la solidité, et le caractère central des techniques de résolution d'équation :

*« Par ces choix didactiques, l'enseignement permet (...) la reconnaissance de structures d'expressions mathématiques. Pour réussir dans les cours, il faut que les élèves :*

- reconnaissent que les équations données sont des équations exponentielles ou logarithmiques ou peuvent s'y ramener,*
- reconnaissent la structure des équations pour décider quelles méthodes de résolution peuvent aboutir,*
- transforment des expressions mathématiques déjà connues (par exemple des expressions de racines, des doubles fractions) en expressions exponentielles.*

*Un tel enseignement encourage un travail de précision, la concentration et la persévérance ».*

Malgré sa solidité, cette praxéologie va être bouleversée par la volonté des deux professeurs d'intégrer la TI-92. Edith Scheider nous montre un processus en trois phases :

*« 1<sup>ère</sup> phase : Les premières idées des deux enseignantes étaient les suivantes : se servir de leurs préparations de cours faites jusqu'à présent et analyser où l'on pourrait utiliser la TI 92, quelles parties pourraient atteindre l'assistance par la calculatrice. Les deux enseignantes furent rapidement d'accord sur le fait que le calcul de la résolution d'équations*

*exponentielles et logarithmiques pourrait être exécuté à l'avenir par la TI-92 et qu'il y aurait des améliorations considérables dans ce domaine pour les élèves.*

*2<sup>ème</sup> phase : Nous leur avons demandé combien de temps elles prévoyaient pour le traitement de cette matière dans les cours. La première réaction des enseignantes à cette question : un peu moins de temps que jusqu'à présent (...). Après une analyse plus détaillée des matériaux de cours, (les professeurs répondent qu') il suffirait d'apprendre l'expression solve(équation, x). Pour cela, des exercices extensifs ne sont plus nécessaires, les matières traitées jusqu'à présent peuvent être discutées en 1 ou 2 leçons. La conséquence était une désorientation considérable (insécurité) des deux enseignantes. Il ne reste rien des mathématiques à cause de la TI 92 ? Que faire ?*

*3<sup>ème</sup> phase : Doit-on faire les calculs manuellement (sans TI 92) - du moins pour des équations exponentielles et logarithmiques simples ? Ou doit-on laisser tomber complètement cette matière ? Mais dans ce cas on ne satisfait pas le programme d'études ? A ce moment, nous avons soulevé l'idée de mettre l'accent, de souligner d'autres aspects des notions enseignées(...) Beaucoup de questions ont été soulevées par les enseignantes, non seulement sur le plan des mathématiques, mais aussi sur le plan didactique. (..) Le résultat de ce processus de collaboration longue et intensive fut un manuscrit sur les processus de croissance et de décroissance avec la TI-92 ».*

Mon analyse est que nous sommes dans un cas où l'obsolescence des techniques ne permet pas des ajustements locaux de la praxéologie. Les professeurs en prennent conscience à la seconde phase en même temps qu'elles relativisent l'intérêt des techniques « papier/crayon » pour le sujet qu'elles ont à enseigner. Cette prise de conscience entraîne un désarroi compréhensible : priver un enseignant d'une praxéologie qui a fait ses preuves, c'est le mettre en sérieuse difficulté. La nouvelle praxéologie paraît évidemment plus intéressante, et Edith Schneider, dans son article montre des conséquences positives sur le travail des élèves et la conduite de la classe. Il faut souligner deux aspects : elle a demandé beaucoup de travail de conception et cependant elle paraît encore loin d'être stabilisée. En effet, consacrer 20 séances à un enseignement qui jusque là se faisait sur 9 séances semble difficilement viable en dehors d'une expérimentation à court terme.



## **L'évolution d'un enseignement sous l'influence de la TI-92 (d'après Schneider, 1999)**

Avant le calcul formel: neuf séances

- 1<sup>ière</sup> leçon : Introduction de la fonction exponentielle : l'équation , différents domaines d'application, points particuliers, tableau, graphique.  
Introduction de la notion d'équation exponentielle ; résoudre des équations exponentielles d'une structure simple.
- 2<sup>ème</sup> leçon : Résoudre des équations exponentielles.
- 3<sup>ème</sup> leçon : Résoudre des équations exponentielles.
- 4<sup>ème</sup> leçon : Faire des exercices pour le test; résoudre des équations exponentielles.
- 5<sup>ème</sup> leçon : Résoudre des équations exponentielles. Introduction des notions de logarithme et de fonction logarithmique comme fonction inverse de la fonction exponentielle.
- 6<sup>ème</sup> leçon : Règles de calcul pour le logarithme ; calcul de logarithme.
- 7<sup>ème</sup> leçon : Résoudre des équations exponentielles et logarithmiques.
- 8<sup>ème</sup> leçon : Résoudre des équations exponentielles et logarithmiques.
- 9<sup>ème</sup> leçon : Résoudre des équations exponentielles et logarithmiques.

Introduction du calcul formel : deux séances

Réflexion didactique : **cours assisté par la TI 92**

**Processus de croissance et de décroissance** : vingt séances

Modèles de croissance et de décroissance linéaire  
(activation d'un type de fonction déjà connu par l'élève)

Modèles de croissance et de décroissance exponentielles  
(étude du développement d'une culture cellulaire).

Description récursive de suite exponentielles, représentation graphique.

Description algébrique de suite exponentielles, puis de fonctions exponentielles  
(problème de la « jonction des points de la fonction »)

Décroissance exponentielle

(développement d'une culture cellulaire ; représentation récursive, algébrique et graphique)

Comparaison entre des modèles linéaires et exponentiels.

Avantages et désavantages de la description algébrique et récursive. Problèmes

Caractéristiques de la fonction exponentielle, effets des paramètres  
(travail expérimental et heuristique)

Fonction logarithme comme inverse de la fonction exponentielle,  
caractéristiques de la fonction logarithmique (à nouveau d'une façon expérimentale)

Critique des modèles

Modèle de croissance retardée et modèle de croissance logistique

Exercices de révision et d'approfondissement

**Figure 7**

Cet exemple permet aussi de réfléchir aux conditions dans lesquelles les praxéologies intégrant le calcul formel peuvent se développer dans les classes. Une première réaction

serait, de s'étonner de ce qui apparaît comme une disproportion entre l'énergie dépensée et les résultats :

« *A total of two teachers participated in this study—two—not two hundred* » (Eisenberg, 1999),

et de promouvoir une méthode plus classique de développement, susceptible d'entraîner l'adhésion de davantage de professeurs :

« *the problem is that most teacher do not want to change—they feel that they are doing a good job (...)* *The usual model of curriculum development—with teams of subject matter experts and teachers working together developing model lessons—works* ».

Cette réaction ne prend certainement pas la mesure de ce que peut représenter l'introduction du calcul formel au dernier échelon de la transposition didactique, celui où le professeur construit son enseignement. Des praxéologies éprouvées sont remises en cause dans leurs fondements. Certes, des modèles de leçons sont utiles, mais changer de praxéologie ne peut se réduire à adopter un modèle construit par d'autres quand ce changement a des conséquences sur les multiples choix que le professeur doit réaliser quotidiennement, sur les interprétations qu'il doit faire des comportements des élèves, sur les moyens dont il dispose pour gérer l'enseignement.

## Conclusion

A la suite du premier chapitre, nous étions à la recherche des spécificités du calcul formel qui font que sa viabilité semble difficile. En m'appuyant sur les recherches menées en France, j'ai montré que les difficultés rencontrées ne sont pas anecdotiques et transitoires et que, pour bien les comprendre, il faut abandonner l'idée d'indépendance ou de relation à sens unique entre dimension technique et dimension conceptuelle. La notion de praxéologie permet de penser le développement de ces deux dimensions et de concevoir le rôle des techniques d'utilisation du calcul formel et leur interaction avec les techniques « habituelles » dans le développement des rapports des élèves aux objets mathématiques.

Ainsi, dans mon analyse, et contrairement aux hypothèses des études comparatives, le calcul formel ne réduit pas la dimension technique à un rôle accessoire. Il introduit de nouvelles techniques, qui s'ajoutant aux techniques « habituelles », permettent de donner une dimension nouvelle aux praxéologies. Les exemples donnés montrent que les relations entre les techniques « habituelles » et les nouvelles techniques « calcul formel » peuvent être riches et variées. Par exemple, la reconnaissance de pattern donne une technique adaptée à des

praxéologies locales utilisant le calcul formel. Dans ce cas, nous l'avons vu, l'appel à une technique « habituelle » donne une dimension plus globale. En revanche, dans un second exemple, le rôle d'« amplificateur conceptuel »<sup>29</sup> est assuré par le calcul formel quand il donne un statut plus assuré à une méthode symbolique d'étude de variations.

Loin de condamner la viabilité du calcul formel, cette analyse permet de dépasser les difficultés observées lorsque les techniques d'utilisation du calcul formel sont niées ou considérées comme peu significatives. Encore faut-il bien mesurer le travail de conception de nouvelles situations et d'adaptation de l'enseignement que suppose ce dépassement. L'exemple d'Edith Schneider est là pour nous montrer qu'un tel bouleversement implique un travail considérable, au plus près des pratiques de l'enseignant.

Enfin, comme le rappellent Bosch et Chevallard (1999, p. 88), si « les concepts mathématiques peuvent être considérés comme des émergents des praxéologies et les rapports institutionnels comme façonnés par les complexes praxéologiques existant à un moment donné dans l'institution », il n'en est que plus nécessaire de s'intéresser aux « ingrédients qui composent la trichotomie technique/technologie/théorie » de façon à « décrire la mise en œuvre d'une technique (...) constater cette mise en œuvre dans une situation particulière (...) distinguer une technique d'une autre... ». C'est pourquoi, dans le chapitre suivant, je vais poursuivre plus en profondeur l'analyse de l'impact du calcul formel sur les praxéologies en considérant l'impact des « ingrédients » (ou objets) qu'il introduit dans le travail mathématique.

---

<sup>29</sup> Le rôle de la technologie comme « amplificateur et réorganisateur » a été pointé par Pea (1987). Dreyfus et Hillel (1998) notent à partir d'une étude de l'utilisation de Maple par des étudiants, que la distinction entre amplification et réorganisation, très accentuée chez Pea, est en pratique difficilement observable dans cette utilisation du calcul formel. Ils mettent en évidence d'autres rôles de Maple dans le travail des étudiants. Avant même d'être activé, Maple joue le rôle d'un interlocuteur potentiel obligeant les étudiants à l'élaboration d'un mode de communication (Que vais-je « dire » à Maple ? Comment vais-je le lui dire ?). En cours d'utilisation, Maple conduit à clarifier le langage : le « vocabulaire technique » que les étudiants emploient d'abord de façon lâche, se précise au cours de l'interaction avec Maple. Ces deux dernières observations renvoient à l'analyse des objets nouveaux introduits par le calcul formel que je vais entreprendre au chapitre suivant.

# Les relations entre objets introduites par le calcul formel dans le travail des élèves

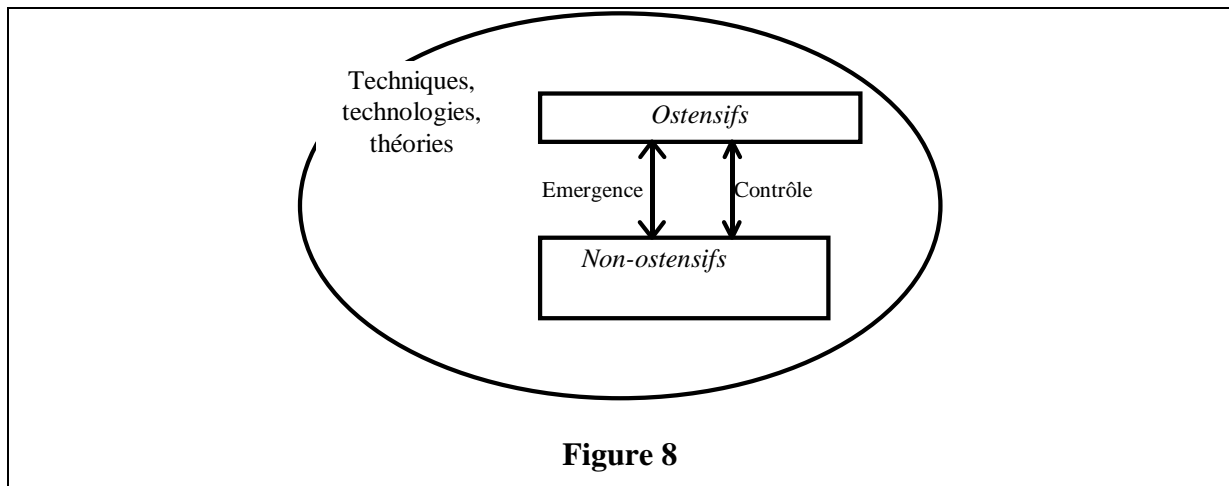
Dans le chapitre précédent, à partir de l'étude DERIVE, nous avons rencontré des difficultés d'élèves, des situations imprévues, que j'ai analysées comme des manifestations « en creux » de la nécessité de techniques spécifiques au calcul formel. Nous avons vu aussi que l'insertion de ces techniques dans les praxéologies habituelles ne va pas de soi, et que donc l'enseignement doit développer des praxéologies nouvelles intégrant le calcul formel. Pour cela, il est nécessaire d'analyser davantage les nouveaux ingrédients ou objets introduits par le calcul formel, et les rapports qu'ils peuvent entretenir avec les objets de la pratique mathématique habituelle.

Je vais donc étudier ces objets et rapports tels qu'ils apparaissent dans les situations d'enseignement et d'apprentissage avec le calcul formel.

Pour cette étude des objets, je vais adopter la même position que pour l'étude des rapports technique/conceptuel, c'est-à-dire que je ne vais pas présupposer de séparation ou de lien à sens unique entre un niveau « matériel » qui serait en quelque sorte contingent, de peu de signification, et un niveau « noble » qui serait celui de la pensée, des concepts. Cette position a montré sa productivité dans le chapitre précédent. Elle permet en effet de se dégager d'hypothèses qui, nous l'avons vu, obscurcissent l'analyse des potentialités réelles du calcul formel. Cette position conduit naturellement à adopter la dialectique ostensif non-ostensif (Chevallard, 1991 ; Bosch, 1994 : Bosch et Chevallard, 1999) comme méthode d'analyse.

Parmi les objets considérés dans une institution mathématique donnée, certains, nous rappellent Bosch et Chevallard (ibid.), sont des « ostensifs », c'est à dire qu'on peut les considérer comme manipulables et perceptibles. Ce sont les sons que nous proférons, les traces que nous laissons sur le papier, les gestes que nous faisons. Aux différents niveaux de la trichotomie technique/technologie/théorie, ils sont inséparables d'autres objets non tangibles qui, notamment, nous guident dans la manipulation des ostensifs. Ces non-ostensifs co-émergent et se contrôlent avec les ostensifs aux différents niveaux de l'activité

mathématique. Bien souvent, les ostensifs, et surtout « la sensibilité des mathématiques à ces objets » échappent à une analyse trop conceptuelle de l'activité mathématique.



**Figure 8**

Ainsi, à la différence d'approches de l'introduction de moyens technologiques dans l'enseignement et l'apprentissage qui cherchent à voir des effets de cette introduction directement au niveau des conceptualisations, je vais dans ce chapitre comme dans le précédent, considérer l'introduction du calcul formel par ce qu'il introduit, c'est-à-dire de nouveaux objets ostensifs et non ostensifs.

Comme le disent Bosch et Chevallard (ibid., p. 115), « plusieurs travaux de didactique des mathématiques proposent aujourd'hui des conceptualisations différentes de ce que nous avons appelé la dimension ostensive de l'activité mathématique ». L'approche de Raymond Duval (1996) est notamment une conceptualisation qui met en avant le travail intra et inter-registre dans l'analyse de cette activité. L'étude des contraintes du fonctionnement cognitif liées au traitement dans un registre et aux conversions d'un registre à l'autre en situation d'utilisation du calcul formel serait d'un grand intérêt. Il m'a semblé cependant que la question de la nature mathématique du travail que les élèves effectuent quand ils utilisent le calcul formel conditionne actuellement sa viabilité dans l'enseignement : « les élèves font-ils encore des mathématiques », « quelles mathématiques font-ils ? ». Or, ce sont les techniques, technologies et théories dans lesquels les objets ostensifs interviennent, qui permettent de situer la nature mathématique du travail possible sur ces objets. Pour cette étude des techniques, technologies et théories j'ai donc choisi la dialectique « ostensif/non-ostensifs »,

remettant à plus tard l'étude des processus cognitifs à l'œuvre dans les traitements et conversions portant sur les objets des registres habituels et calcul formel<sup>30</sup>.

Je me limiterai également dans ce chapitre à la dimension proprement algébrique du calcul formel, laissant en particulier de côté le calcul approché et le graphisme, qui, nous l'avons vu, sont intégrés dans les systèmes de calcul formel. En effet, l'étude de la dimension ostensive de l'activité algébrique avec calcul formel est un sujet nouveau qui mérite d'être d'abord étudié à part. C'est pourquoi je vais me restreindre dans ce chapitre, à l'étude de situations purement algébriques et à la mise en évidence de la dialectique ostensif/non-ostensif dans ces situations. L'étude de situations faisant interagir plusieurs dimensions sera à faire par la suite en s'appuyant sur cette recherche et sur des recherches portant sur les pratiques liées aux représentations graphiques (Lacasta, 1995, Chauvat, 1998).

Le but de ce chapitre est donc de présenter une méthode d'analyse des relations entre objets dans les pratiques d'enseignement et d'apprentissage utilisant le calcul formel. Il s'agira d'abord de recenser les objets, de types ostensif et non-ostensif, attachés aux domaines de pratique « habituel » et « calcul formel », de repérer leurs relations dans leur domaine respectif, puis les relations qui se créent quand les deux domaines fusionnent dans une pratique des mathématiques « assistée par le calcul formel ».

Je m'appuierai pour cela sur la situation présentée au chapitre précédent, celle du travail de conjecture à partir des factorisations rationnelles de  $x^n - 1$  données par DERIVE. Nous avons vu que c'est une situation bien connue tant du point de vue des attentes de l'enseignant que des comportements des élèves. Elle présente aussi l'intérêt de vivre sous différentes formes. Du point de vue qui nous intéresse dans ce chapitre, la factorisation est une activité riche : des objets de différents niveaux interviennent, des techniques variées existent, diversement soutenues par des technologies. Les commandes de factorisation du calcul formel

---

<sup>30</sup> Pour prendre un exemple, l'émission de la commande  $\text{limit}(f(x), x, 0, 1)$  pour obtenir par calcul formel la limite à droite en zéro d'une fonction  $f$  peut être analysée comme un changement de registre à partir de l'expression habituelle, ou comme un traitement intra-registre lorsque l'utilisateur, ayant obtenu la valeur *undef* pour la commande  $\text{limit}(f(x), x, 0)$ , ajoute un paramètre pour obtenir la limite à droite. Il est clair cependant que l'effet de l'introduction de cette fonctionnalité sur l'enseignement dépasse nettement ce niveau. Le calcul de limites par calcul formel permet en effet d'avoir immédiatement des valeurs qui, dans la pratique habituelle, sont obtenues par un processus souvent laborieux dans lequel le sujet fait intervenir diverses « significations » mathématiques. J'approfondirai l'exemple des limites à la fin de ce chapitre et dans les chapitre suivant.

correspondent à des algorithmes développés par la recherche dans ce domaine, et apportent de nouveaux objets en relation dialectique avec les objets manipulés par les élèves. Ainsi, cette situation se prête particulièrement bien à une analyse par les objets qui y interviennent.

Je vais exposer la méthode d'analyse esquissée ci-dessus. Les objets habituellement rencontrés par les élèves dans les factorisations en Seconde et en Première seront présentés à l'aide des programmes et d'extraits de manuel. Pour analyser les nouveaux objets que les commandes de factorisation du calcul formel introduisent, il est nécessaire de considérer des situations. C'est pourquoi, je reviendrai à la situation des factorisations rationnelles de  $x^n - 1$ , que je présenterai et analyserai de façon plus détaillée qu'au chapitre précédent.

J'analyserai les nouveaux objets d'abord dans leur domaine propre, puis leurs relations potentielles avec les objets habituels dans une pratique des mathématiques « assistée par le calcul formel ». Après cette analyse du calcul formel « tel qu'il existe », je tenterai de déterminer des variables liées aux situations et au logiciel sur lesquels agir pour favoriser la productivité, pour l'apprentissage mathématique, des relations entre objets ainsi repérées.

## Les factorisations dans l'environnement habituel

Le rôle de ce premier paragraphe est de repérer les différents objets intervenant dans l'activité de factorisation habituelle. Les programmes de Seconde et de Première sont présentés en Figure 9. La factorisation apparaît comme une tâche. Les techniques ne sont pas énoncées. La factorisation a plutôt un statut d'outil en Seconde. Elle apparaît davantage comme un objet<sup>31</sup> en Première. Le programme de Première précise l'objet sur lequel porte la factorisation.

En Figure 9 sont aussi présentés deux extraits de manuels respectivement de Seconde et Première, exposant des techniques de factorisation. Ces techniques sont accompagnées de justifications théoriques que j'ai résumées en troisième partie de la figure.

---

<sup>31</sup> Au sens de Douady (1988)

## La factorisation en Seconde et Première

### Les programmes

Seconde : Exemples simples de factorisations pour la résolution (des équations et inéquations)

Première : Factorisation par  $(x-a)$  d'un polynôme s'annulant en  $a$ .

### Les techniques de factorisation dans deux manuels

**Seconde** : (Déclic, Misset et al., Hachette, 1998)

*Comment factoriser ?*

Lorsqu'une expression à factoriser comporte des parenthèses, il est conseillé de se poser les questions suivantes :

Première question : l'expression est-elle déjà factorisée ?

Seconde question : a-t-on dans tous les termes de la somme le même facteur commun ?

Troisième question : l'expression est-elle une différence de deux carrés ?

Quatrième question : développer l'expression. La forme développée fait-elle apparaître un facteur commun ?

**Première** : (Tansmath, Antibii et al., Nathan, 1991)

Une tâche générique :  $f$  étant un polynôme, et  $a$  un réel, factoriser  $f(x) - f(a)$

### Technique de résolution

Exemple  $f: x \rightarrow x^3 - 3x^2 + x - 4$ .

$$f(x) - f(a) = (x^3 - 3x^2 + x - 4) - (a^3 - 3a^2 + a - 4) = (x^3 - a^3) - 3(x^2 - a^2) + (x - a)$$

$$f(x) - f(a) = (x - a)(x^2 + ax + a^2) - 3(x - a)(x + a) + (x - a) = (x - a)(x^2 + (a - 3)x + a^2 - 3a + 1)$$

Une tâche d'application :  $a$  étant une racine du polynôme  $f$ , trouver  $g$  tel que  $f(x) = (x-a)g(x)$

### Technique de résolution

- Degré de  $g$  = degré de  $f$  moins un  $\square$  écriture de  $g$  avec des coefficients indéterminés.
- Développement du produit  $(x-a)g(x)$ , ordonnancement suivant les degrés décroissants.
- Identification des coefficients.
- Résolution du système.

### Les justifications

**En Seconde** : propriété de distributivité et les produits remarquables.

**En Première** : le résultat théorique important est l'existence, pour tout polynôme  $f$ , d'un polynôme  $g$  tel que  $f(x) = (x-a)g(x) + f(a)$ . Il est appuyé par la technique de factorisation de  $f(x) - f(a)$ , dont le caractère général est souligné et fondé sur la factorisation valable pour

tout naturel  $n$ ,  $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ . Pour la justification de cette formule le manuel renvoie au chapitre sur les suites. Dans ce chapitre, la sommation des termes des suites géométriques est justifiée à partir de l'écriture suivante :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$qS_n = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

### Figure 9

Analysons les objets en jeu. En Seconde, la technique de factorisation co-active des objets sur trois niveaux :

- des ostensifs graphiques (parenthèse, signes, lettres...) et des ostensifs gestuels (réécriture),



- des non-ostensifs de premier niveau, « proto-mathématiques »<sup>32</sup> émergeant directement de l'activité de factorisation : « terme », « facteur commun », « carré »...
- des non-ostensifs plus généraux, « para-mathématiques »<sup>33</sup> (Chevallard, 1985, p.49) : « forme factorisée », « forme développée »

Les non-ostensifs de premier niveau guident la manipulation et existent principalement dans cette manipulation. Ils sont très proches des ostensifs . Les non-ostensifs généraux sont ceux qui peuvent intervenir en dehors de la technique. Par exemple, on dira : pour trouver les zéros d'une fonction, une forme factorisée est utile.

Les indications de méthodes du manuel n'utilisent pratiquement pas les ostensifs répertoriés ci-dessus (une occurrence de « parenthèse ») et beaucoup les non-ostensifs de premier niveau.

Ainsi, le style « mathématise » la technique par le biais de ces non-ostensifs. Dans le manuel, le discours de justification reprend les identités remarquables avec les non-ostensifs généraux « forme factorisée », « forme développée ». Les non-ostensifs de premier niveau n'existent donc pas dans ce discours.

En Première, la factorisation par  $(x-a)$  prend successivement la forme de deux tâches différentes :

- la tâche « générique » de factorisation de  $f(x) - f(a)$ ,  $a$  étant indéterminé, qui conduit à une technique utilisant le développement de  $x^n - a^n$ . Cette technique n'existe que le temps de développer le discours de justification.
- une tâche d'application, où  $a$  prend une valeur. Une technique « d'application » est ainsi introduite pour les polynômes s'annulant en  $a$ .

Le discours de justification s'appuie sur la technique développée pour la tâche « générique ». Elle fait intervenir un ostensif nouveau « +...+ ». Cet ostensif fonctionne, dans cette praxéologie, comme « moule d'expression ». Dans la technologie de sommation des termes

---

<sup>32</sup> « Les objets proto-mathématiques vont de soi ». Ils ne sont pas l'objet d'un discours technologique et sont supposés se lire à partir des ostensifs (Chevallard, 1985, p. 51)

<sup>33</sup> « Les notions para-mathématiques sont des notions-outils de l'activité mathématique ; elles ne sont pas « normalement » des objets d'étude pour le mathématicien » (Chevallard, 1985, p. 49).

d'une suite, à laquelle la technologie de factorisation des polynômes fait référence, cet ostensif intervient très fortement par un artifice graphique de décalage.

Les notions nouvelles non-ostensives de degré et de coefficients interviennent dans la technique d'application. Elles permettent le contrôle d'une technique intermédiaire (le développement de  $(x-a)g(x)$ ) : ils sont associés à la manipulation de signes dans la réécriture des polynômes (on « réduit » les monômes, on « regroupe » les monômes de même degré). Comme les objets « terme », « facteur commun », « carré », de la factorisation en Seconde ils sont des « émergents » de l'activité de factorisation. L'identification est un geste nouveau, qui s'appuie sur la réduction et l'ordonnement ostensifs du polynôme en les contrôlant par les nouveaux « émergents » degré et coefficient.

Les ostensifs intervenant dans la factorisation sont donc peu repérables dans les rédactions des manuels. Un ostensif nouveau, « +...+ » est introduit en Première dans le discours de justification sans explication spécifique, bien que son rôle soit déterminant. Le caractère transparent des ostensifs dans le discours sur les mathématiques est donc bien illustré ici. Des non-ostensifs de premier niveau, de caractère proto-mathématique, apparaissent. Ils permettent des descriptions « mathématisées » des techniques. Du côté de l'élève, ce premier niveau de non-ostensifs semble important pour dépasser une compréhension de la factorisation comme simple manipulation d'ostensifs et donc pour lui donner « un sens », celui-ci ne pouvant être donné directement par les non-ostensifs généraux.

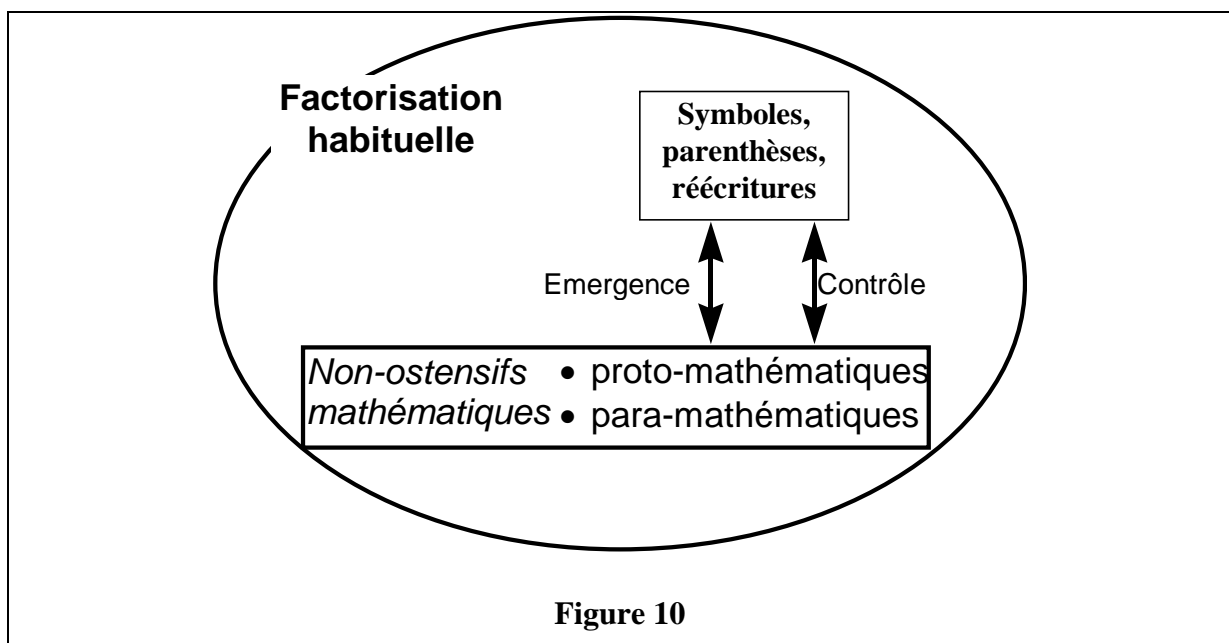


Figure 10

## Les factorisations en environnement « calcul formel »

Comme je l'ai dit dans l'introduction de ce chapitre, il est nécessaire de considérer des situations si l'on veut pouvoir analyser les nouveaux objets que les commandes de factorisation du calcul formel introduisent. C'est pourquoi, je reviens aux trois variantes de la situation des factorisations rationnelles de  $x^n - 1$ . J'analyserai ensuite les nouveaux objets d'abord dans leur domaine propre, puis dans leur interaction avec les objets habituels.

### Les variantes de la situation « factorisation de $x^n - 1$ »

Je vais faire une présentation plus détaillée qu'au chapitre précédent des variantes de la situation à partir du rapport qu'en a fait Gilles Aldon et du rapport de la recherche DIDIREM sur DERIVE (Artigue et al., 1995) de façon à préparer une analyse du rôle des objets.

#### *Variante « papier/crayon »*

Cette situation se situe dans le contexte d'utilisation d'une calculatrice sans calcul formel sur une durée de 3 heures (2 heures de recherche et une heure de mise en commun). La consigne donnée aux élèves était simplement : *factoriser  $x^n - 1$* . L'objectif était de consolider la connaissance de la factorisation par  $(x-a)$ , connaissance qui s'accompagnait de celle de la division des polynômes, technique plus générale que celle présentée plus haut dans ce chapitre.

#### Production des élèves

*La racine 1 de l'équation  $x^n - 1 = 0$  est rapidement trouvée par tous les groupes.*

*En étudiant la division de  $x^2 - 1$ ,  $x^3 - 1$  (éventuellement  $x^4 - 1$ ) par  $x - 1$  les élèves conjecturent la forme générale de  $Q(x)$ .*

*Ce résultat trouvé, les élèves ne se réinvestissent que très peu dans des recherches supplémentaires.*

*Le résultat :  $x^n - 1 = (x^{n/2} - 1)(x^{n/2} + 1)$  est apparu dans quelques groupes.*

#### Extrait des observations du professeur :

*« Les difficultés des calculs et des notations (notations indicées, somme) ont été un frein important aux recherches des élèves. Les essais peu nombreux ou portant sur des valeurs de  $n$*

*petites (2, 3, 4) n'ont pas permis de mettre en évidence des régularités. Cet exercice m'est apparu comme un exercice technique portant sur la maîtrise de la division des polynômes. »*

### **Variante « courte » avec DERIVE**

Dans le contexte d'utilisation de DERIVE en salle d'ordinateurs sur une durée de 2 heures (une heure de recherche et une heure de mise en commun), l'idée était de tirer parti de la puissance du calcul formel pour pallier les difficultés de calcul, permettre aux élèves de faire davantage d'essais et de produire davantage de factorisations, sans être obligé de les démontrer dans un premier temps. L'énoncé a aussi été modifié en ce sens :

*Trouver des factorisations de  $x^n - 1$ . Vous devez produire sur feuille un énoncé de vos résultats sous la forme de « présumés-théorèmes ».*

#### Production des élèves

Les élèves ont produit sept « présumés-théorèmes » témoignant de rapports divers à l'idée de factorisation. Je vais les présenter en les discutant par rapport à leur adéquation à deux types d'énoncés sur les factorisations : le premier type « les factorisations générales » est constitué d'énoncés valables mathématiquement indépendamment du calcul formel, avec, conformément aux usages en mathématiques, les hypothèses les moins fortes possibles, le second type « les factorisations DERIVE », expriment les résultats donnés par le logiciel.

1) *Si  $n$  est impair alors :* 
$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

Formellement, cet énoncé est juste, mais l'hypothèse  *$n$  est impair* n'est pas nécessaire. Il ne s'agit donc pas d'un énoncé complet sur des « factorisations générales ». Il ne traduit pas non plus les factorisations dans DERIVE, puisque le calcul formel ne donne cette forme que pour  $n$  premier.

2) *Pour  $n$  quelconque alors :* 
$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

Dans ce cas, on a bien une « factorisation générale ».

3) *Lorsque  $n$  est impair on peut toujours factoriser par  $x-1$ . Parfois on peut factoriser plus ;*

*par exemple :* 
$$x^9 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$$

Ici, l'élève se place bien dans le cadre des « factorisations DERIVE ». Mais il ne peut réellement exprimer une conjecture.

4) Si  $n$  est pair alors :  $x^n - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + x^2 + 1)$

Il s'agit bien d'une « factorisation générale ».

5) Si  $n$  est pair alors :  $x^n - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1)$

Il s'agit d'une version erronée de la factorisation précédente, probablement influencée par la factorisation n°1.

6) Si  $n$  est pair alors :  $x^n - 1 = (x^2 - 1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \dots + x^2 + 1)$

Version « développée » de la factorisation 4)

5) Si  $n$  est pair alors :  $x^n - 1 = (x^{n/2} + 1)(x^{n/2} - 1)$

Factorisation générale, qui n'utilise pas l'ostensif  $+\dots+$ , mais introduit un exposant fractionnaire.

Extrait des observations du professeur

*« Les élèves ont souvent été déçus par leur production : pour preuve, la remarque de ces élèves à la fin de l'heure : « on n'a rien trouvé ! » Effectivement, la pauvreté des résultats obtenus ne rend pas du tout compte de la véritable activité de recherche des élèves. »*

Observation et analyse de Michèle Artigue (rapport DIDIREM)

*« Au cours de l'observation vont apparaître deux représentations distinctes de la tâche : l'une consistant à produire des conjectures générales de factorisation en s'aidant de DERIVE, l'autre consistant à produire des conjectures sur les factorisations données par DERIVE. »*

*Avec la première interprétation de la tâche, il s'agit de produire, en se servant de DERIVE comme outil, des théorèmes de factorisation. (...) Les élèves, qui vont chercher à tester leurs conjectures avec DERIVE, vont donc avoir à faire produire par DERIVE des expressions qu'il ne donne pas directement. Il faut alors, si l'on veut éviter des entrées fastidieuses et sources d'erreur, penser à (réutiliser) certains produits partiels pour les faire développer par DERIVE (...). Rien de ceci ne va de soi.(...).*

*Des élèves, lors de l'observation, vont se situer dans (la) seconde interprétation, la faisant par là-même exister à nos yeux. La tâche pour eux va s'avérer difficile pour différentes raisons (...) Dans le temps réduit dont les élèves disposaient pour cette observation, les*

*conjectures qu'ils formuleront, soit les laisseront insatisfaits, soit seront démolies dès qu'elles seront mises à l'épreuve. »*

**Variante « longue » avec DERIVE**

Cette troisième variante articule le travail en classe et le travail dans le temps privé des élèves. Comme je l'ai dit au chapitre précédent, les élèves disposent du calcul formel en classe et « à la maison » par le biais de micro-ordinateurs se présentant comme des calculatrices. La première séance de travail en classe vise à installer la notion de conjecture, à lancer la recherche dans la direction des « factorisations DERIVE ». Ensuite, sur trois mois, des moments sont organisés où les élèves présentent l'avancement de leur travail et où le professeur fait discuter les conjectures produites et relance la recherche.

La première séance, globalement conforme à la séance constituant la variante précédente, amène cependant une conjecture inédite

$$Si n est une puissance de 2 alors : = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \dots \left( x^{\frac{n}{2}} + 1 \right)$$

Cette conjecture est une « factorisation DERIVE » aboutie, à la différence des conjectures aussitôt démolies de la variante précédente. Elle va influencer la recherche privée ultérieure des élèves.

Lors d'une mise en commun organisée trois semaines plus tard, une preuve de cette conjecture est en effet proposée par un élève, basée sur la mise en œuvre du troisième produit remarquable, de proche en proche. Des conjectures analogues sont de plus annoncées par les élèves pour les puissances de 3, 5 et 7. Par exemple : *si n est une puissance de 5 :*

$$x^n - 1 = (x - 1) \left( x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \right) \dots \left( x^{\frac{4n}{5}} + x^{\frac{3n}{5}} + x^{\frac{2n}{5}} + x^{\frac{n}{5}} + 1 \right)$$

La mise en commun qui, au bout des trois mois prévus clôt l'activité, conduit à la rédaction d'une communication aux élèves d'autres classes (figure, du chapitre précédent). Cette communication rappelle les factorisations générales pour tout *n* et pour *n* puissance de 2, et annonce qu'elles sont démontrées. Ils annoncent que la première factorisation est la « seule possible » si *n* est premier. Les élèves rappellent ensuite leurs conjectures sur les puissances de 3, 5 et 7 et annoncent qu'elles ne sont pas démontrées. Dans le cas où *n* est un produit, ils

donnent une factorisation en trois facteurs, qu'ils annoncent avoir démontrée (la démonstration passe par un changement de variable).

## Analyse

### Ostensifs et non-ostensifs dans la factorisation avec DERIVE

Considérons d'abord les objets spécifiques à DERIVE dans une pratique (virtuelle) qui utiliserait le calcul formel sans référence aux pratiques habituelles. La partie visible (les ostensifs) est constituée d'expressions telles que :

FACTOR(x<sup>6</sup>-1,Rationnel)

et de leur résultat

$$(x+1)^2 (x-1)^2 (x+x+1) (x-x+1)$$

Notons, pour caractériser ces ostensifs deux traits sur lesquels je reviendrai plus loin dans ce chapitre :

- deux types d'écritures différents, une écriture « en ligne » pour l'expression entrée et une écriture « spatiale » pour le résultat, globalement conforme aux usages mathématiques,
- l'« immédiateté » du geste, une fois la commande formée.

Quels sont les non-ostensifs spécifiques, c'est-à-dire les éléments non perceptifs évoqués par l'utilisateur concernant le fonctionnement propre du logiciel ? Il faut les chercher dans les éléments de représentation du logiciel que l'utilisateur construit pour le comprendre et le piloter et qui peuvent être vues comme des contraintes<sup>34</sup>. En ce qui concerne la factorisation en calcul formel, émettre la commande implique le choix d'un second argument (« Rationnel » dans l'exemple ci-dessus), dont je vais d'abord expliquer la raison, puis examiner comment il peut être vu par l'utilisateur.

---

<sup>34</sup> Le terme « contrainte », employé ici et très généralement dans l'analyse de l'utilisation d'instruments notamment informatiques, mérite d'être précisé. Si on l'oppose à « liberté », il a en effet une connotation péjorative. Il faut le prendre au sens d'« exigence » librement consentie par un individu acceptant une place dans une institution (ici, évidemment très locale), ou pour employer le vocabulaire didactique, s'y « assujettissant ». Sur cette approche par l'institution, voir la thèse en cours de Badr Defouad.

Comme tout système informatique, le calcul formel a un caractère *effectif* qui se traduit par l'application d'*algorithmes*<sup>35</sup>. Dans DERIVE, pour la factorisation, il y a cinq algorithmes différents qui sont visibles par l'utilisateur comme cinq « niveaux » et qui constituent le second paramètre de la commande FACTOR.

- Trivial: correspond à la recherche d'un facteur commun « évident ».
- Sans-carré : recherche des valeurs où l'expression et ses premières dérivées s'annulent, ce qui permet de mettre en facteur des puissances d'expressions du premier degré.
- Rationnel : correspond à la factorisation rationnelle. L'algorithme implémenté dans DERIVE ne résout pas toutes les factorisations rationnelles. Les polynômes du type  $x^n - 1$  font partie des expressions factorisées grâce à l'implémentation des polynômes cyclotomiques.
- Radical : DERIVE applique les méthodes de résolution par radicaux et regroupe les facteurs complexes conjugués.
- Complexe : idem Radical, mais les facteurs complexes conjugués ne sont pas regroupés.

Ainsi, le caractère d'*effectivité* du calcul formel, se traduit pour l'utilisateur par l'obligation de piloter le logiciel par le choix de « niveaux » correspondant à des algorithmes différents.

L'utilisateur n'a pas besoin de connaître dans le détail ces algorithmes, ni leur champ d'application. Cependant, il ne peut se passer d'une certaine conscience des différents algorithmes à l'œuvre et des contraintes que cela implique sur les commandes qu'il peut émettre et les résultats qu'il obtient. Bien sûr, le degré de cette « conscience » dépend de nombreux éléments parmi lesquelles les situations d'utilisation, la motivation (usage simple ou volonté de bien connaître le logiciel... )

L'important est que l'utilisation du calcul formel pour la factorisation suppose une certaine conscience des algorithmes à l'œuvre et de leurs contraintes. Il existe une autre contrainte, liée celle-là à un choix de conception du calcul formel, son caractère *fonctionnel* au sens

---

<sup>35</sup> L'effectivité est la propriété fondamentale des algorithmes : « Soit  $(P_i)_{i \in I}$  une famille de problèmes formulés en termes mathématiques, telle que, pour chaque  $i$  de  $I$ , le problème  $P_i$  admette une réponse  $R_i$ . (Une méthode effective) peut être décrite comme un ensemble d'instructions absolument précises permettant à un homme agissant mécaniquement (...) d'obtenir, à partir de la donnée d'un élément quelconque  $i$  de  $I$ , la réponse  $R_i$  en un nombre fini d'étapes. » (Encyclopædia Universalis)



informatique du terme : le résultat d'une commande doit pouvoir être réutilisé par une autre commande<sup>36</sup>. En papier/crayon « la factorisation » n'est pas un concept lié de façon univoque à une technique, le type de factorisation à effectuer s'impose en fonction de la finalité recherchée : factorisation complète pour une étude de signe, par exemple, factorisation à deux facteurs pour la recherche du quotient exact de deux polynômes... En revanche, en calcul formel, le caractère *fonctionnel* du calcul formel conduit à ce que DERIVE applique récursivement<sup>37</sup> l'algorithme choisi et retourne une factorisation « complète » pour un polynôme et un niveau donné, c'est-à-dire une factorisation en facteurs irréductibles pour l'algorithme. Cette contrainte *d'unicité du résultat* conduit à des feedbacks assez différents de ceux que la pratique mathématique habituelle fait considérer comme « naturels ». Par exemple, le polynôme  $x^6 - 1$  a deux racines réelles 1 et -1 et donc deux factorisations sont « naturelles » :

$$(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \text{ et } (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Aucune des deux n'est produite par aucun des niveaux de factorisation :

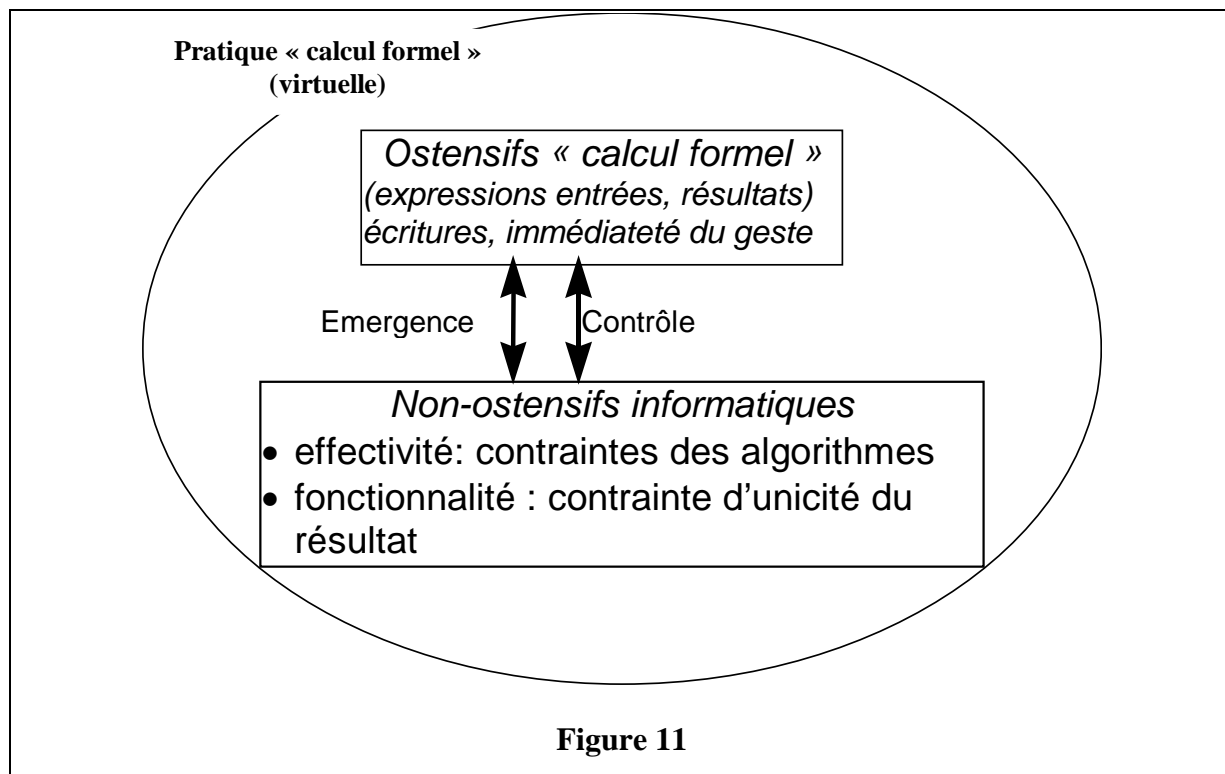
$$\begin{aligned} \text{FACTOR}(x^6 - 1, \text{Trivial}) &= x^6 - 1 \\ \text{FACTOR}(x^6 - 1, \text{Sans-carré}) &= x^6 - 1 \\ \text{FACTOR}(x^6 - 1, \text{Rationnel}) &= (x+1)^2 (x-1)^2 (x+x+1) (x-x+1) \\ \text{FACTOR}(x^6 - 1, \text{raDical}) &= (x+1)^2 (x-1)^2 (x+x+1) (x-x+1) \\ \text{FACTOR}(x^6 - 1, \text{Complex}) &= (x+1)^2 (x-1)^2 \left( x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right)^2 \left( x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right)^2 \left( x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right)^2 \left( x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right)^2 \end{aligned}$$

Faisant provisoirement abstraction de la référence à la factorisation habituelle, la factorisation dans l'utilisation du logiciel est donc vue à deux niveaux (Figure 11) : au niveau ostensif ce sont les commandes et leurs résultats dont nous avons vu le caractère spécifique, au niveau non-ostensifs c'est une certaine conscience des contraintes déterminées par les caractères effectif et fonctionnel du système. Dans le cas de la factorisation, ce sont les contraintes du

<sup>36</sup> Par exemple, il est possible de composer les commandes de dérivation et de factorisation, sous la forme d'une commande `Factor(Differentiate(f(x),x),Rationnel)`

<sup>37</sup> Si l'algorithme produit une factorisation en  $n$  facteurs, il est réappliqué à chacun des  $n$  facteurs non irréductibles pour l'algorithme et ainsi de suite jusqu'à une factorisation en facteurs tous irréductibles pour l'algorithme.

pilotage par algorithmes et de l'unicité du résultat. L'informatique<sup>38</sup> comme science des algorithmes imprime sa marque à ces non-ostensifs, et en fait d'autres entités que celles, mathématiques, évoquées dans les pratiques habituelles. C'est pourquoi j'appelle « informatiques » ces non-ostensifs.



### *La factorisation « assistée par le calcul formel »*

A la différence de la pratique virtuelle étudiée ci-dessus, la pratique des élèves est une pratique « assistée par le calcul formel » où nous voyons interagir quatre types d'objets selon le tableau ci-dessous.

Je vais analyser dans le travail des élèves comment les nouveaux objets de la pratique « calcul formel » interviennent, d'abord en considérant les relations à l'intérieur de ces objets entre ostensifs et non-ostensifs, (colonne « *Pratique calcul formel* »), puis entre ces objets et ceux de la pratique habituelle (relations entre les deux colonnes).

---

<sup>38</sup> L'informatique est la « science du traitement rationnel, notamment par machines automatiques, de l'information considérée comme le support des connaissances humaines et des communications dans les domaines techniques, économiques et sociaux. » (Académie française, avril 1966)

	<i>Pratique « habituelle »</i>	<i>Pratique « calcul formel »</i>
<i>Ostensifs</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expressions « habituelles », (symboles, parenthèses...)</li> <li>• Réécritures</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expressions « Calcul formel », (symboles, parenthèses, commandes, arguments...)</li> <li>• Immédiateté du geste.</li> </ul>
<i>Non-ostensifs</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proto-mathématiques</li> <li>• Para-mathématiques</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contrainte des algorithmes</li> <li>• Contrainte d'unicité du résultat</li> </ul>

### Ostensifs DERIVE, contraintes informatiques et représentations mathématiques

Le rôle joué par les différents niveaux de factorisation n'apparaît pas clairement dans les observations. Il est probable que le professeur a indiqué d'utiliser le niveau « Rationnel » qui est d'ailleurs proposé par défaut par le logiciel<sup>39</sup>. Néanmoins, les cinq niveaux sont bien proposés à l'élève et les observations montrent que des élèves essaient des niveaux différents de « Rationnel », notamment « Radical ». Essayons, à l'aide de ces observations, de reconstituer la démarche d'un élève qui voudrait explorer les différents niveaux sur les polynômes proposés. Il peut alors constater que :

- les niveaux Trivial et Sans-carrés ne donnent pas de factorisation,
- pour les faibles valeurs de  $n$ , Rationnel et raDical donnent les mêmes factorisations,

$$\text{FACTOR}(x^3 - 1, \text{Rationnel}) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\text{FACTOR}(x^3 - 1, \text{raDical}) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\text{FACTOR}(x^4 - 1, \text{Rationnel}) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

$$\text{FACTOR}(x^4 - 1, \text{raDical}) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

- pour des valeurs supérieures, raDical donne des expressions très volumineuses.

$$\text{FACTOR}(x^5 - 1, \text{Rationnel}) = (x - 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$\text{FACTOR}(x^5 - 1, \text{raDical}) = (x - 1) \cdot \left( x^4 + x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2f} + 1 \right) \cdot \left( x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2f} \right) + 1$$

L'observation des groupes d'élèves dans Artigue et al. (1995) montre la perplexité des élèves qui ont tenté ce niveau de factorisation. L'un d'eux déclare « C'est monstrueux », puis revient bien vite au niveau « Rationnel » sans tenter d'« interpréter le monstre ».

Pour anecdotique qu'elle soit, cette observation montre que le processus d'émergence-contrôle entre les ostensifs « calcul formel » et les non-ostensifs informatique « contraintes des algorithmes » s'arrête très vite dans la situation observée. Des questions comme « Pourquoi cinq niveaux ? », « Pourquoi choisir Rationnel ? », ne sont pas posées en dehors de l'activité privée des élèves. Ce phénomène est certainement très général en environnement informatique : l'utilisateur d'un système repère les commandes qui sont efficaces pour la tâche qu'il a à accomplir, sans se poser beaucoup de questions sur les autres possibilités qui lui sont présentées.

En revenant à la situation des factorisations, je relève deux traits de ce phénomène d'arrêt du processus d'émergence-contrôle. Le premier est qu'il ne semble pas avoir d'influence notable sur la suite de l'activité. Le second est qu'il se produit juste au moment où il faudrait que les élèves évoquent des significations mathématiques et plus précisément des non-ostensifs paramathématiques, de façon à pouvoir comparer les différentes « formes factorisées », et même des notions mathématiques, telles que la distributivité.

A la différence des algorithmes, le « non-ostensif informatique » que constitue la contrainte d'unicité du résultat d'une commande de factorisation intervient très fortement dans l'activité, puisqu'il va, pour une partie importante des élèves, contribuer à une représentation de la tâche où il s'agit, non de trouver des factorisations générales, mais de prévoir les factorisations données par DERIVE. Bien sûr d'autres facteurs interviennent que j'analyserai plus loin en reprenant cette question des deux représentations de la tâche. Notons que, pour les élèves, il n'y a pas réellement prise de conscience d'une contrainte informatique, mais plutôt de ce qu'ils voient comme une contrainte mathématique. Le fonctionnement de DERIVE qu'ils observent correspond à une représentation encore largement présente en Première : une « opération mathématique » détermine un résultat unique. Ils ont aussi des difficultés à comprendre des énoncés dont la généralité a pour contrepartie une perte d'information<sup>40</sup>. Ainsi reconnaître  $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  comme une factorisation générale impose de perdre l'information selon laquelle, pour  $n$  pair, la factorisation peut être poussée plus loin.

---

<sup>39</sup> Le logiciel offre la possibilité de former les commandes à l'aide d'un système de menus.

<sup>40</sup> Voir note 24, chapitre précédent.

Reconstituons la démarche des élèves pour lesquels la contrainte d'unicité du résultat domine la représentation de la tâche. Il vont utiliser la commande FACTOR pour disposer d'observables à la demande, sur lesquels ils vont tenter de « lire » les conjectures demandées.

Ainsi, la factorisation  $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  se « lit » bien sur les factorisations obtenues pour  $n=2, 3, 5$ .

$$\text{FACTOR}(x^2 - 1, \text{Rationnel}) = (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$\text{FACTOR}(x^3 - 1, \text{Rationnel}) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

$$\text{FACTOR}(x^5 - 1, \text{Rationnel}) = (x - 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

En revanche, cette factorisation ne s'observe pas pour les exposants 4 et 6.

$$\text{FACTOR}(x^4 - 1, \text{Rationnel}) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

$$\text{FACTOR}(x^6 - 1, \text{Rationnel}) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$$

Cela conduit les élèves à rechercher une conjecture valable pour les  $n$  pairs. Le champ de validité de la factorisation précédente devient alors incertain. Cette factorisation peut-elle être valable pour tout  $n$  ? N'y aurait-il pas plutôt une factorisation spécifique aux  $n$  pairs, et une factorisation spécifique aux  $n$  impairs ?

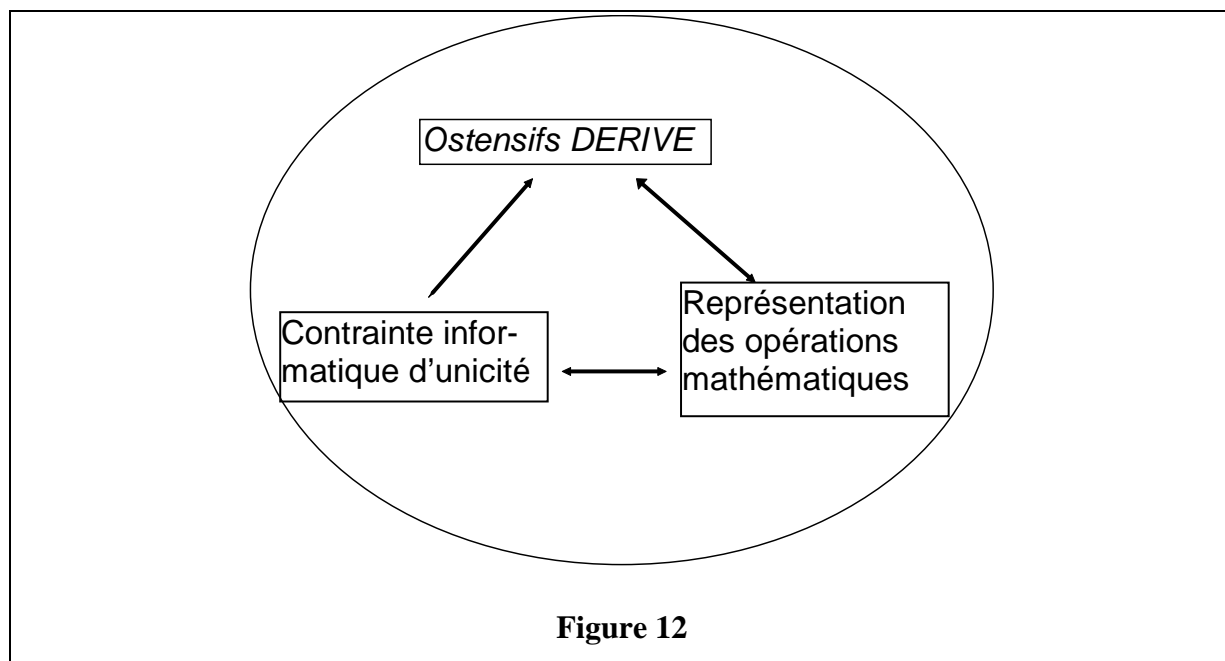
Intégrer la contrainte d'unicité du résultat et donc se limiter aux factorisations DERIVE permet à l'élève, dans un premier temps, de ne pas rencontrer cette incertitude : jusqu'à  $n=8$ , la factorisation  $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$  s'obtient avec DERIVE pour les  $n$  impairs et seulement ceux-là. Mais le cas  $n=9$  vient détruire cette certitude, d'où le découragement à la fin de la séance de la situation « courte » avec DERIVE.

Dans ce paragraphe, j'ai essayé de trouver des processus d'émergence-contrôle entre des objets ostensifs et non-ostensifs à l'intérieur du calcul formel. En fait, l'analyse permet de comprendre certains phénomènes, mais montre aussi que des non-ostensifs mathématiques interviennent nécessairement à un certain niveau de l'activité dans ces processus :

- En ce qui concerne les algorithmes, pour qu'ils interviennent vraiment, il faudrait que les élèves évoquent des non-ostensifs para-mathématiques, de façon à pouvoir comparer les différentes « formes factorisées », ce qui les ferait sortir d'une relation « interne » aux objets du calcul formel. Le pilotage du calcul formel ne pourrait en effet se faire avec la

seule connaissance des algorithmes : il faudrait que les élèves aient une certaine connaissance mathématique des différents types de factorisation.

- La compréhension par les élèves de la contrainte d'unicité du résultat est déterminée davantage par des représentations des mathématiques que par la compréhension des contraintes d'un système « fonctionnel » (Figure 12).



**Figure 12**

La question qui est alors posée est celle de la conformité plus ou moins grande des non-ostensifs informatiques aux non-ostensifs mathématiques. Je reprendrai cette question dans l'étude de la « transmutation des objets » plus loin dans ce chapitre.

Ostensifs DERIVE, ostensifs mathématiques et non-ostensifs « proto-mathématiques »

Un des traits les plus intéressants des deux variantes du problème des factorisations utilisant DERIVE est l'apparition des relations entre les ostensifs DERIVE et les objets mathématiques de premier niveau, ostensifs intervenant dans les factorisations « générales » et non-ostensifs « proto-mathématiques ». Je vais en effet montrer que, du fait de la facilité avec laquelle des observables sont produits, ces relations sont plus riches que celles qui existent, dans une situation papier/crayon entre ostensifs et non-ostensifs « habituels ».

Considérons en premier lieu les nouveaux ostensifs mathématiques que cette situation conduit les élèves à manipuler : exposants fonction de  $n$ , sommes et produits d'un nombre indéterminé de termes ou de facteurs... Dans le manuel de Première (Figure 8), ces ostensifs sont présents seulement dans les discours de justification, et appartiennent ainsi à l'activité du

professeur plus qu'à celle de l'élève. La variante papier-crayon de la « factorisation de  $x^n - 1$  » met les élèves en activité de production et conduit à une certaine émergence de ces ostensifs. Mais, malgré les trois heures qui lui sont consacrées, cette activité « tourne court » faute de possibilité d'expérimentation assez large.

Les conjectures produites par les élèves dans les situations avec DERIVE montrent une émergence plus générale de ces objets et leur utilisation pour la production d'observables DERIVE. En ce sens, la situation est incontestablement plus riche que la situation « papier-crayon » et surtout que la situation proposée par le manuel.

Considérons maintenant les non-ostensifs « proto-mathématiques » que plus haut, j'ai désignés comme de premier niveau, car susceptibles d'émerger directement de la manipulation des ostensifs. Dans la situation avec DERIVE, l'observation des groupes d'élèves au travail (rapport DIDIREM p.150) montre que ces non-ostensifs ne sont nullement exclus de l'activité des élèves dans la séance avec DERIVE. On assiste au contraire à leur émergence dans la réflexion des élèves, avec une évolution langagière caractéristique :

- Le terme « facteur » n'est pas employé au début. Les élèves, dans leurs échanges, parlent de « parenthèse ».
- Pour indiquer que le coefficient de  $x^n$  dans le polynôme à factoriser vaut 1, une des élèves déclare que «  $x$  c'est toujours 1 », et parvient à se faire comprendre seulement lorsqu'elle montre les essais auxquels elle s'est livrée sur le polynôme  $3x^5 - 1$  (« ici,  $x$  c'est 3 »).
- Avant même d'utiliser le terme « degré », les élèves utilisent « en acte » la conservation de la somme des degrés des facteurs, en faisant le rapport avec le produit des termes dominants dans les facteurs.

Voici une formulation caractéristique par laquelle une élève résume son observation sur la factorisation DERIVE de  $x^6 - 1$  :

$x^{6-2} \rightarrow x^4 \rightarrow x^{4/2} \rightarrow 2$  parenthèses de degré  $x^2$ .

Immédiatement après, elle montre à quoi cette observation conduirait pour  $x^{14} - 1$ , de façon à tester cette conjecture avec DERIVE :

$x^{14-2} \rightarrow x^{12} \rightarrow x^{12/2} \rightarrow 2$  facteurs de degré 6.

D'une formulation à l'autre, avec sa voisine, elle a corrigé « parenthèse » en « facteur » et elle est passée d'une désignation du degré comme terme dominant, à une expression numérique.

Une émergence de même nature se produit avec les exposants non entiers. En voici un exemple (rapport DIDIREM, p.155).

Un élève a conjecturé la factorisation  $x^n - 1 = (x^{n/2} + 1)(x^{n/2} - 1)$ . Beaucoup d'élèves ont observé que cette factorisation n'est produite par DERIVE ni pour les impairs ni pour certains nombres pairs et pensent qu'elle n'est pas générale. Cet élève, en revanche, vérifie par développement du second membre, ce qui le conduit à valider la conjecture pour  $n=8$ , alors qu'elle n'est pas produite par DERIVE. Il s'enhardit et éprouve la conjecture pour  $n=5$  en faisant développer par DERIVE le produit  $x^{2.5} \times x^{2.5}$ . Il est « très excité » par le résultat obtenu et tente sans succès de se faire expliquer par l'enseignant ce que signifie  $x^{2.5}$ . Il écrit alors sur sa feuille  $x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$ , puis, remplaçant  $x$  par 2, écrit  $4 \cdot \sqrt{2}$  et déclare : «  $x^{\frac{1}{2}}$  c'est  $\sqrt{x}$  quand on y pense ». Pour vérifier, il fait simplifier  $4^{2.5}$  par DERIVE et est satisfait d'obtenir 32.

Ainsi, l'ostensif  $x^a$  pour  $a$  non entier prend une existence dans DERIVE avant d'être coordonné à des ostensifs mathématiques que l'élève peut contrôler par les non-ostensifs mathématiques que sont les règles de transformation et les équivalences<sup>41</sup>.

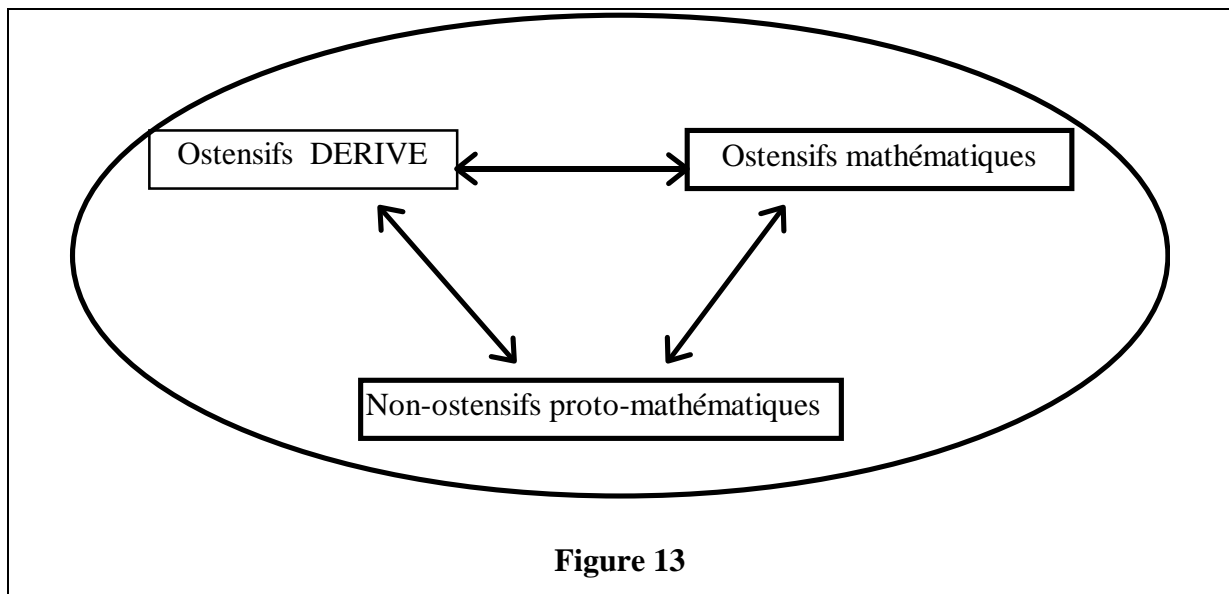
Quand Gilles Aldon nous dit que « *la pauvreté des résultats obtenus* (dans la situation courte) *ne rend pas du tout compte de la véritable activité de recherche des élèves* », j'interprète cette activité des élèves, et son intérêt dans l'émergence chez les élèves d'objets (notations ostensives et notions proto-mathématiques) liées à la factorisation, et dans l'utilisation de ces objets pour contrôler les observables DERIVE. Nous assistons bien à un processus d'émergence-contrôle « croisé » reliant des ostensifs DERIVE à des objets mathématiques de premier niveau Figure 13.

---

<sup>41</sup> En revanche, même dans la situation longue, les élèves ne parviendront pas à donner une signification aux exposants fractionnaires qu'ils obtiennent dans des factorisations DERIVE telles que :

$$\text{FACTOR}(x^{-0.4} - 1, \text{Rationnel}) = (x^{1/5} + 1)(x^{-1/5} - 1)$$





L'apport des relations nouvelles déterminées par l'introduction du calcul formel

Avant de passer à l'étude des relations entre objets sur un plan plus général, il convient de faire le point sur l'apport des relations nouvelles qui se crée suite à l'introduction du calcul formel dans la situation des factorisations de  $x^n - 1$ . J'ai souligné deux modifications importantes : l'apparition de processus d'émergence-contrôle plus riche que dans la situation « papier-crayon » et la coexistence de deux représentations de la tâche de production de conjectures (conjectures générales de factorisation ou conjectures sur les factorisations données par DERIVE).

Concernant la coexistence de deux représentations, je voudrais tout d'abord souligner trois points :

- La représentation « factorisation DERIVE » conduit les élèves à produire beaucoup d'observables. En contrepartie, leur recherche de conjecture n'aboutit pas dans la première séance, d'où leur déception.
- La recherche des élèves qui adhèrent directement à la représentation « factorisations générales » tourne assez vite court après la factorisation  $(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ , et il faut des relances du professeur pour qu'ils refassent des expériences dans DERIVE, qui, elles aussi, sont vite arrêtées dès que les élèves aperçoivent une forme générale facilement démontrable.

- Le manque de techniques pour passer des factorisations DERIVE aux factorisations générales intervient dans les deux représentations : dans la représentation « conjectures DERIVE », il contribue à isoler les factorisations DERIVE comme un domaine à « modéliser » en tant que tel, dans la représentation « conjectures générales », il appauvrit les possibilités d'expérimentation.

Il ne faudrait pas cependant conclure de ces observations que la coexistence des deux représentations de la tâche rend stérile la tâche demandée. En effet, la situation trouve une productivité réelle dans la variante « longue ». Si le véritable intérêt de la situation est le processus d'émergence-contrôle d'ostensifs et de non-ostensifs mathématiques, ce processus ne peut s'exprimer totalement dans la simple exécution de la tâche, il lui faut ce « travail sur la technique » que le temps rend possible. A partir de là, la coexistence des deux représentations de la tâche est nécessaire à la survie du problème sur un temps long et à son arrêt, deux conditions essentielles à son existence dans l'écologie de l'enseignement :

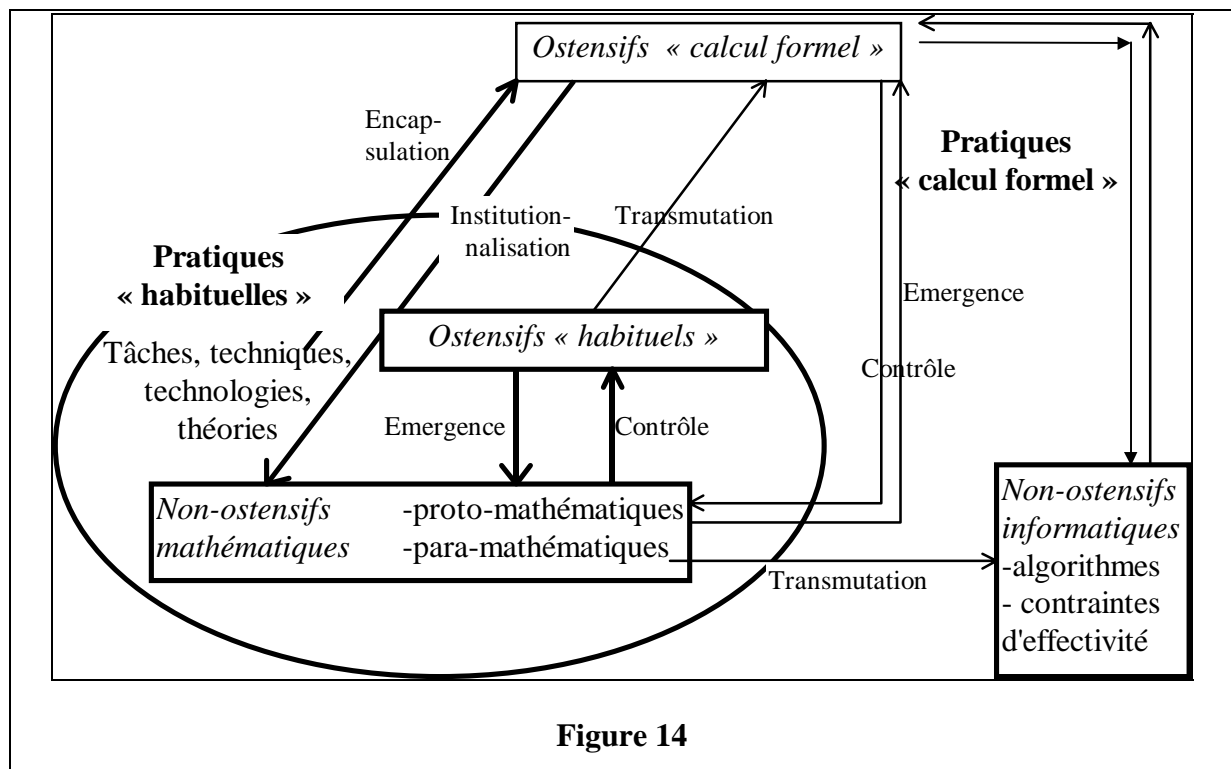
- la représentation « factorisations DERIVE » permet les relances, de nouveaux phénomènes pouvant facilement être produits. En contrepartie, l'arrêt d'un travail de recherche portant exclusivement sur ces factorisations serait difficile à négocier sachant que le modèle adéquat des factorisations rationnelles de  $x^n-1$  est la théorie des extensions cyclotomiques, inaccessible en classe de Première. La difficulté à pointer l'objet d'apprentissage, à l'institutionnaliser, à l'évaluer poserait des questions de viabilité à une situation qui reposerait seulement sur cette représentation (Lagrange, 1996b).
- la représentation « factorisations générales » ne justifierait pas à elle seule l'investissement dans un problème long. Elle conduit en revanche à des résultats plus facilement intégrables au corpus de connaissance des élèves : les factorisations valables pour tout  $n$  et pour  $n$  pair valorisent les efforts des élèves en donnant des résultats réinvestissables pour les équations, les études de signe, les suites....

Il est donc nécessaire que les élèves se situent dans les deux représentations et soient capables d'articuler la factorisation DERIVE et les factorisations générales, ce qui suppose une prise de conscience des rapports entre ces deux notions. La première séance de la situation « longue » avec DERIVE peut être analysée comme une entrée dans cette prise de conscience, qui mûrit dans le temps privé qui suit. Dans la situation « courte », on comprend le sentiment d'inachèvement ressenti par le professeur et les élèves.

## La transmutation

Dans l'analyse de la situation des factorisations de  $x^n-1$  avec DERIVE, j'ai mis l'accent principalement sur le rôle des ostensifs du calcul formel dans la création de nouvelles relations d'émergence-contrôle et sur le rôle d'un non-ostensif informatique (la contrainte d'unicité du résultat) dans l'apparition d'une double représentation de la tâche. Ces nouvelles relations font l'intérêt de la situation et la double représentation permet sa survie sur un temps long.

D'autres relations sont susceptibles d'intervenir. J'ai signalé la transmutation, notion que je vais développer davantage. Je vais aussi examiner les rapports qu'entretiennent les ostensifs calcul formel avec les techniques. La Figure 14 résume l'ensemble des relations ainsi étudiées, en rassemblant les liaisons présentes dans les figures précédentes.



Pour aborder la transmutation des objets, je vais d'abord rappeler comment cette idée est apparue dans les travaux sur les Environnements Interactifs d'Apprentissage Humain (EIAH). Balacheff (1998) nous invite à examiner les conséquences d'un postulat : toute représentation transforme le représenté. (Balacheff, 1994) voit dans cette transformation une nouvelle manifestation d'un phénomène très général: la transposition didactique. Le savoir existe dans des institutions, et en fonction des contraintes auxquelles il est soumis dans différentes institutions, il prend des formes qui peuvent être très différentes.

Ainsi les contraintes de l'implémentation conduisent à faire exister telle ou telle notion de façon spécifique dans l'institution qui existe le temps de l'interaction de l'élève avec le logiciel. Cette institution présente la caractéristique d'être à la fois très locale et transitoire, et de pouvoir être assez facilement reproductible. Les contraintes auxquelles est soumis le savoir sont par ailleurs d'une autre nature que celles qui pèsent sur lui dans des institutions telles que la noosphère ou la classe. Les contraintes d'un système automatique, agissant en différé, imposent des représentations internes d'une nature particulière qui, bien que n'apparaissant pas en tant que telles à l'agent humain qui utilise le système, impriment leur marque dans l'interaction. Ainsi en est-il dans les logiciels de géométrie dynamique, du déplacement des points portés sur un segment, lors de l'action de l'utilisateur sur une des extrémités de ce segment. Ainsi en est-il aussi dans les logiciels de calcul formel de la transformation des expressions algébriques (par exemple la factorisation), nécessairement poussée jusqu'au stade où la transformation ne produit plus une nouvelle forme, alors que la même transformation, opérée par un agent humain pourra prendre toute forme intermédiaire que nécessite le problème<sup>42</sup>.

Une autre contrainte des systèmes informatisés est que le concepteur doit prévoir les moyens offerts à l'agent humain pour agir sur le système (ce qu'on appelle l'interface-utilisateur). Dans un système complexe, les choix qu'il met en place à cette occasion sont loin d'être neutres vis-à-vis du savoir et inscrivent dans l'interaction avec le système une certaine conception de l'activité mathématique. Ainsi, dans les calculatrices à calcul formel, les concepteurs conservent l'ergonomie des calculatrices numérico-graphiques. La cohérence avec les mathématiques les conduit aussi à installer le module formel comme module principal : par défaut, les commandes vont agir sur les expressions de façon globalement mathématique. Ils installent cependant un « raccourci » qui va permettre facilement à l'utilisateur d'obtenir des valeurs approchées des expressions numériques, et donc de faire fonctionner la calculatrice à

---

<sup>42</sup> Ces représentations internes peuvent varier d'un logiciel à l'autre, en fonction de choix opérés par les concepteurs. La modélisation en vue d'une implémentation dans un système automatique, n'impose donc pas une représentation donnée, mais implique le choix d'une représentation cohérente avec la conception générale du système et donc marqué par des contraintes informatiques. Ainsi, il serait possible d'imaginer une commande effectuant seulement des factorisations en au plus deux facteurs, que l'utilisateur pourrait solliciter à plusieurs reprises pour obtenir des factorisations plus complètes. Des contraintes informatiques se manifesteraient néanmoins : en effet, pour une expression factorisable en trois facteurs au moins, il existe plusieurs factorisations possibles en deux facteurs entre lesquelles le logiciel devrait faire un choix.

calcul formel comme une calculatrice numérique. Ce choix permet à l'élève un « détour approximatif » (Trouche, à paraître) qui n'est pas sans influence sur sa conception des objets manipulés avec la calculatrice.

La modification qu'impose la modélisation en vue d'une implémentation dans un système automatique, est donc un phénomène inhérent à l'introduction de moyens informatiques dans l'activité mathématique, qui va donc agir lors de l'utilisation du calcul formel. Le champ des entités que Balacheff (1994) considère comme « connaissance » dans la transposition est suffisamment large pour inclure les objets « ingrédients des tri-chotomies » de Bosch et Chevallard (1999). Par ailleurs, Balacheff (1999) propose d'employer « transmutation » pour marquer l'ampleur de ces modifications. Comme le terme « transmutation » me paraît bien adapté à des objets, je vais considérer la transmutation à deux niveaux :

- la transmutation des non-ostensifs qui fait que des notions mathématiques comme la factorisation sont implémentées sous forme d'algorithmes,
- la transmutation des ostensifs, résultat de l'implémentation de notations, gestes... dans le système de calcul formel, sous forme d'observables dont le fonctionnement est en principe analogue aux usages mathématiques.

Ces deux niveaux pourraient s'interpréter en utilisant, comme le fait Balacheff, la distinction informatique entre le fonctionnement à l'interface et le fonctionnement interne. Cependant, cette interprétation cacherait que les deux niveaux sont d'abord déterminés par le fonctionnement mathématique qui, nous l'avons vu, fait interagir des objets ostensifs et non-ostensifs, et non par l'implémentation informatique. Elle cacherait aussi que ce qui nous intéresse dans le calcul formel, ce sont les objets tels que le sujet les utilise dans une situation donnée « assistée par le calcul formel », et non tels que le concepteur les a imaginés a priori. Ainsi la transmutation doit être comprise au moins autant comme une opération du sujet utilisateur, ou, au niveau « officiel », de l'institution dans lequel se situe l'utilisation, que comme résultant de choix du concepteur.

Ainsi, au niveau des non-ostensifs, nous avons vu que le sujet utilisant le calcul formel pour la factorisation pouvait évoquer à des degrés divers les algorithmes proposés. Ce qui est important c'est que cette évocation, pour être opératoire, devra nécessairement impliquer la contrainte d'effectivité propre aux algorithmes et la contrainte d'unicité du résultat du mode « fonctionnel » du calcul formel. Ces contraintes déterminent les modifications des non-ostensifs dans la transmutation.

Il importe à ce point de la discussion de se garder de deux positions :

1. la première viserait à réduire la distance que crée la transmutation entre des objets mathématiques et les objets du calcul formel, notamment en faisant évoluer les systèmes de calcul formel pour qu'ils soient plus conformes aux mathématiques,
2. la seconde analyserait la transmutation comme un phénomène négatif, ce qui conduirait à éviter les situations où les élèves la rencontrent.

En effet, la transmutation n'introduit pas une distance, elle change la nature des objets. Il est donc tout à fait utile d'améliorer les systèmes de calcul formel pour qu'ils soient plus efficaces, plus conviviaux, pour qu'ils intègrent de nouveaux aspects des mathématiques, mais le changement de nature est « incompressible ». Le problème n'est donc pas de l'éliminer, mais de trouver les conditions qui assurent sa productivité. Comme nous l'avons vu pour les factorisations, des conditions soient réunies pour que la transmutation soit un ressort productif dans une situation.

Au niveau des ostensifs, la particularité essentielle du calcul formel est la rapidité des gestes qui, nous l'avons vu, peut aussi bien déterminer des comportements de « pêche » (voir chapitre précédent) qu'une extension du domaine d'expérimentation. Ici aussi, il s'agit de la nature des objets et ce sont les conditions de la situation qui peuvent faire pencher vers des comportements plus ou moins réflexifs. D'autres déterminants liés à l'élève, notamment son profil cognitif, jouent aussi un rôle qui sera étudié au chapitre suivant.

Les contraintes des périphériques d'entrée et de sortie, les choix d'implémentation conduisent aussi à des effets qui, eux, sont loin d'être désirables. Dans DERIVE, par exemple, les crochets sont, dans certains affichages, équivalents aux parenthèses, alors que les algorithmes les traitent différemment. Des interfaces mieux conçues pourraient éviter les difficultés d'utilisation ainsi créées. Dans l'attente, il est important d'avoir présent à l'esprit la possibilité que ces effets indésirables se produisent.

Un autre aspect des relations que crée l'introduction des ostensifs calcul formel, et qu'il est possible de ranger dans les transmutations, est celui de la relation privilégiée qu'entretiennent ces ostensifs avec les techniques symboliques « habituelles ». De fait, les ostensifs du calcul formel, par exemple les commandes de factorisation, de résolution, de dérivation, sont conçus d'abord pour être substitués à ces techniques. Transformer ainsi une technique en objet est ce qu'on appelle « l'encapsuler ». La question de cette « encapsulation » a été largement

présentée et débattue<sup>43</sup> notamment dans les différentes utilisations de l'ordinateur. L'encapsulation est souvent présentée comme pouvant aider aux conceptualisations en permettant aux élèves de raisonner sur les concepts mathématiques en faisant abstraction des processus (ou techniques) qui y conduisent<sup>44</sup>. Cependant, des observations, notamment sur les limites, Monaghan et al., (1994), Trouche (1996), font état d'encapsulations avec le calcul formel pouvant donner des conceptions étroites d'une notion : des élèves ayant utilisé DERIVE ne sont plus capables d'évoquer les aspects « infinitésimaux » de la notion de limite car ceux-ci sont plutôt liés à des processus, à des techniques d'approximation ou de calcul. Ceci conduit à penser d'une part que l'encapsulation par le calcul formel est un phénomène dont l'enseignement doit avoir conscience sans a priori positif, et qu'il est important de concevoir des activités de « dé-encapsulation ».

Un dernier lien entre objets du calcul formel et notions mathématiques est celui de l'institutionnalisation. Il est assez bien connu, notamment dans la littérature sur Cabri-Géomètre que le fait que certaines commandes apparaissent dans des menus, portent un nom, donne un caractère officiel aux notions sous-jacentes. Ici aussi ce phénomène doit être vu sans a priori positif, notamment à cause des institutionnalisations prématurées auxquelles il peut conduire.

### Les variables liées au logiciel : gestes disponibles et granularité

Dans ce chapitre, j'ai insisté sur le rôle des situations d'utilisation dans la productivité des nouvelles relations entre objets introduites par le calcul formel. Dans les différentes recherches sur lesquelles cette réflexion s'appuie, les variables didactiques qui définissent ces situations portent sur l'énoncé du problème, le temps en classe et en travail autonome consacré à la résolution, le temps laissé à la compréhension des relations entre objets, et non sur le logiciel lui-même. J'ai essayé de considérer le calcul formel de façon assez générale pour que cette réflexion ne soit pas trop liée aux choix effectués dans une implémentation donnée. Il est cependant certain que ces choix devront être questionnés, que des variables didactiques devront être déterminées.

---

<sup>43</sup> Le terme « encapsulation » renvoie à 17 entrées dans l'ouvrage de référence *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991).

<sup>44</sup> J'y reviendrai dans le chapitre suivant à propos de la théorie APOS (Dubinsky, 1991)

Il serait vain, nous l'avons vu, de chercher à supprimer les effets de transmutation ou d'affranchir l'utilisateur d'une référence aux non-ostensifs informatiques. Il est en revanche intéressant de rechercher comment les logiciels peuvent évoluer pour que ces effets et références soient productifs. Une recherche en cours sur l'« interaction dans des EIAO intégrant des instruments de calcul formel » rassemblant des didacticiens et des chercheurs en EIAO<sup>45</sup>, permet d'apercevoir deux dimensions où la variabilité pourrait s'exercer : les gestes « calcul formel » à disposition des élèves et la « granularité » des objets et méthodes.

Concernant les gestes, une tentative assez convaincante a été faite pour limiter, dans des situations proposées à des élèves de Seconde, les commandes du calcul formel à un sous-ensemble choisi en fonction d'une analyse a priori de la productivité des gestes dans la résolution du problème (Echivard et al., 1999). Ce travail se poursuit en analyse. Partant des situations d'étude de fonctions de la recherche DIDIREM sur la TI-92, nous isolons les gestes les plus significatifs et tentons de définir un cadre pour qu'ils interagissent de façon productive. Cette démarche conduit à introduire des éléments de preuve dans l'activité avec le logiciel, de façon à ce que l'élève puisse clarifier la portée des différents gestes à sa disposition, en distinguant notamment les gestes d'exploration susceptibles de produire des conjectures, et les gestes d'étude symbolique permettant de valider ces conjectures.

La « granularité » est un concept repéré dans plusieurs domaines liés à l'informatique. En programmation informatique, il s'agit de la faculté offerte au programmeur de voir les éléments du langage ou du programme à divers niveaux, des détails de l'implémentation aux structures abstraites générales. Etudiant l'évolution des environnements de programmation, Petre (1990) met au premier rang d'une « liste de souhaits », cette possibilité de choisir « le grain sur lequel se concentrer » (grain of focus), qu'il distingue bien « l'exclusion du détail », qui, certes, permet au programmeur de considérer des structures générales, mais le prive de la possibilité d'agir sur les éléments de bas niveaux. Selon Dominique Py (communication personnelle), le terme est utilisé dans les systèmes experts et plus généralement les systèmes à base de connaissances<sup>46</sup> (par exemple les EIAO) pour désigner la taille à laquelle les connaissances sont considérées. Hobbs (1985) a systématisé cette notion en montrant que

---

<sup>45</sup> « Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateurs », voir chapitre 4.

<sup>46</sup> Connaissance est employé ici au sens « informatique » d'ensemble de faits et de règles permettant des inférences.



dans une théorie donnée, des relations d'« indistinguabilité » transitives ou non, permettent de définir des théories plus simples, recouvrant la théorie initiale, mais avec un « grain plus grossier » (more « coarse-grained »). Il considère la granularité, c'est à dire la capacité à articuler des théories de « tailles de grain » différentes, comme une des propriétés nécessaires à des « machines intelligentes ».

En revenant au calcul formel, on peut considérer que la granularité des systèmes symboliques actuels est faible : les commandes sont définies à un niveau dépendant directement des algorithmes utilisés, la définition de fonctionnalités plus stratégiques et de méthodes de résolution ne peut être fait que par programmation, l'accès à des parties d'une expression demande une certaine expertise... Concevoir un environnement de calcul formel à plusieurs niveaux de granularité permettrait à l'élève ou au professeur de mieux adapter les situations d'utilisation en fonction d'objectifs mathématiques. Ce travail a été commencé pour une tâche de recherche de l'expression explicite du terme général d'une suite à partir d'une définition récursive. Gelis et Lenne (1998) ont montré l'intérêt de distinguer et d'implémenter quatre niveaux de granularité. Au niveau supérieur, le système résout globalement le problème, ce qui permet à l'élève d'appréhender le problème et de vérifier ses solutions. A un niveau intermédiaire, des stratégies sont proposées aux élèves : elles organisent des transformations des expressions en fonction d'un but, par exemple montrer qu'une suite définie en fonction de la suite initiale est d'un type connu (géométrique, arithmétique...). Ensuite, on trouve le niveau des transformations élémentaires directement disponibles dans le calcul formel ou plus spécifiques au problème, s'appliquant directement aux expressions, ou à un dernier niveau, à des sous-expressions.

## Conclusion

J'ai commencé ce chapitre en lui fixant comme objectif d'utiliser l'approche dialectique ostensifs/non-ostensifs pour appréhender la complexité des situations d'utilisation du calcul formel. J'ai montré, à partir de la situation des factorisations quels sont les objets ostensifs et non ostensifs nouveaux apportés par le calcul formel, et quels sont leurs rapports avec les objets « habituels ». Il apparaît ainsi un ensemble particulièrement complexe de relations entre objets dans les praxéologies « assistées par le calcul formel » : émergence-contrôle entre ostensifs « calculs formels » et non-ostensifs « habituels » et aussi entre ces mêmes ostensifs et des non-ostensifs « informatiques » nouveaux, transmutation des objets...

Il résulte de cette analyse que la mise en place de situations articulant le fonctionnement principalement perceptif lié à l'utilisation des commandes du calcul formel, et le fonctionnement plus analytique des pratiques habituelles ne va pas de soi. Au long des trois variantes de la situation développée dans ce chapitre, nous avons vu comment le choix judicieux de variables didactiques dans l'énoncé du problème, la possibilité qu'il existe à la fois en classe et dans la réflexion autonome des élèves, le temps laissé à la compréhension des relations entre objets, peuvent rendre cette articulation effective. Nous avons vu aussi quelles variables didactiques pourraient permettre d'adapter un logiciel de calcul formel aux différentes situations d'apprentissage.

On aperçoit ainsi que l'appréhension par l'élève de ces rapports entre objets va demander du temps et des situations adaptées. Le chapitre suivant va précisément s'intéresser à l'élève, aux conditions dans lesquelles son utilisation du calcul formel pourrait contribuer à des apprentissages.



# Quelle approche « cognitive » du calcul formel ?

Dans les chapitres précédents, j'ai étudié l'introduction du calcul formel du point de vue des *organisations didactiques* : praxéologies, puis dialectique ostensifs/non-ostensifs. Il s'agit, dans ce chapitre, de regarder plus en détail le cadre *cognitif* permettant de penser le développement des apprentissages d'un sujet en situation d'utilisation du calcul formel. Je vais d'abord, dans le premier paragraphe, situer une manière de voir les rapports entre didactique et cognitif. En effet, à la différence de chercheurs qui situent une approche générale de l'apprentissage avant de l'« appliquer » à une modalité didactique comme, par exemple l'introduction d'un moyen technologique, je préfère, à la suite de Schubauer-Leoni (1998), considérer le cognitif comme « l'étude des conditions de possibilité du didactique ». C'est cette manière de voir la complémentarité entre approches qui détermine la place, dans ce document d'habilitation, du chapitre « cognitif » à la suite des deux chapitres « didactiques ».

Puis j'examinerai l'évolution des idées, des approches initiales marquées par « l'application » de théories cognitives jusqu'à l'approche « instruments » de Vérillon et Rabardel (1997). Je montrerai notamment le rôle joué par l'apparition des calculatrices graphiques dans cette évolution. Je présenterai l'intervention de ces approches dans le cas du calcul formel ainsi que les avantages que présente l'approche cognitive des instruments pour l'intégration du calcul formel.

## La fonction du "cognitif" dans une étude didactique et la nécessaire conversion

« Qui s'intéresse à l'apprentissage des élèves est concerné a priori par les théories de l'apprentissage et donc par les différentes théories cognitives », nous rappelle Robert (1996). Elle souligne ensuite que les théorisations fondées sur des caractéristiques du sujet sont cependant insuffisantes pour l'étude de l'apprentissage en classe, ce qui implique d'articuler approches cognitives et didactiques.

Schubauer-Leoni (1998) précise cette articulation en rappelant que le projet de la didactique est d'étudier les conditions d'existence et de diffusion des connaissances en modélisant par des situations les rôles qu'elles tiennent dans différentes activités. Elle identifie ainsi un "déplacement de la fonction du cognitif dans les études de didactique par rapport aux études de la psychologie cognitive", en notant que la didactique ne voit pas l'élève, dans une situation d'enseignement/apprentissage, seulement à travers "les contrôles internes qu'il exerce sur le problème", mais aussi par les "contrôles externes" que la situation exerce sur lui.

Elle cite à ce propos Conne (1992) : «(...) le défi que relève tout épistémologue génétique est de montrer comment le développement des connaissances d'un sujet (...) imprime sa nature jusque dans la construction sociale des savoirs scientifiques les plus élaborés (...), la gageure que doit tenir tout didacticien est, à l'inverse de montrer comment les formes et les normes préétablies des savoirs, (...) peuvent à leur tour être adaptés à ces mécanismes sans dénaturer la connaissance ni surtout désacculturer les savoirs. »

Ainsi, l'importation de notions de la psychologie cognitive dans l'étude du fonctionnement du système didactique ne vise pas la production d'une théorie psychologique du sujet, mais a pour but d'avancer dans la compréhension des conditions rendant possible la prise en charge d'une question mathématique par le sujet lui-même. La didactique a donc à faire un "travail de conversion" pour passer d'un cognitif "théorie du sujet" à un cognitif "théorie des conditions de possibilité du didactique".

Depuis une vingtaine d'année, l'introduction de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques constitue un courant d'études psychologiques et didactiques. Le calcul formel est un épisode récent de cette introduction et les recherches menées à son sujet sont marquées par ce courant ainsi que par l'approche nouvelle ou complémentaire que constitue l'approche cognitive des instruments.

Je vois le travail de conversion dont parle Schubauer-Leoni comme particulièrement crucial dans ce domaine puisqu'il ne s'agit pas pour la didactique d'étudier l'interaction élève(s)-ordinateur pour elle-même, mais bien de situer cette interaction dans un projet d'insertion de l'ordinateur dans une situation conçue pour les besoins d'un apprentissage mathématique. Considérons par exemple une situation où l'ordinateur apporte des possibilités nouvelles de manipulation d'objets du milieu. Supposons qu'une théorie cognitive montre que ces manipulations nouvelles supposent chez les élèves la construction de représentations mentales de ces objets différentes de celles qui leur sont familières. Cette théorie n'est utile au

didacticien que dans la mesure où elle l'aide à estimer l'impact de ces représentations nouvelles sur les connaissances en jeu, et d'autre part à connaître les conditions dans lesquelles elles peuvent se construire sans entraîner un bouleversement des équilibres didactiques qui rendrait irréaliste cette construction.

Ainsi, une approche cognitive de l'interaction élève(s)-ordinateur ne doit pas seulement donner au didacticien la seule compréhension de phénomènes en jeu dans cette interaction. Elle doit lui donner les moyens de prendre en compte l'impact de ces phénomènes sur les situations d'apprentissage qu'il étudie. Je vais donc, dans la suite de ce chapitre, étudier, dans différents modes d'utilisation de l'informatique pour l'enseignement des mathématiques, comment les approches cognitives qui leur sont associées fonctionnent comme « théorie des conditions de possibilité du didactique ». Cette étude constitue une synthèse d'éléments publiés dans des articles tels que (Artigue, 1996) et (Lagrange, 1999b).

## Les approches « cognitives » de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques

### Les approches initiales

Le développement de la micro-informatique qui a rendu réaliste la perspective d'utiliser l'ordinateur dans l'enseignement des mathématiques est contemporain du mouvement de rénovation de cet enseignement, marqué par le constructivisme piagétien. L'ordinateur pouvant être vu comme un moyen privilégié d'activité autonome de l'élève et de rétroaction sur cette activité, il n'est pas étonnant que les innovateurs aient théorisé son utilisation en mettant l'accent sur le rôle de l'adaptation dans les processus d'apprentissage. Dans cette théorisation, l'adaptation du sujet aux ruptures qui surviennent quand il est confronté à des effets en retour non attendus, est à l'origine de l'apprentissage. Plus que d'organiser un enseignement autour de l'ordinateur, il s'agit donc d'utiliser celui-ci pour permettre une interaction autonome de l'élève avec des objets et des structures mathématiques réifiés par l'implémentation informatique.

Je vais montrer comment cette approche s'est concrétisée dans des théories associées à l'introduction dans l'enseignement de langages informatiques dont le plus connu est LOGO (Papert, 1980), puis comment l'étude cognitive des activités de programmation a pu mettre en évidence des conditions d'existence pour cette introduction, que ces théories n'envisageaient pas. Je montrerai aussi comment la théorie a pu, dans le cas du calcul formel, fonctionner

comme écran. Puis j'indiquerai comment ces approches initiales se sont intégrées dans un ensemble aux perspectives plus vastes, où l'ordinateur a un rôle de médiation.

L'utilisation de LOGO s'est présentée d'abord comme alternative à l'enseignement programmé qui pouvait constituer un autre mode d'utilisation de l'ordinateur. Comme le dit Rouchier (1992), « (Avec Logo, l'ordinateur ) n'est plus une machine à enseigner, mais un générateur de micro-mondes, dont la prise de connaissance à travers l'écriture de programmes et la conduite de projets va contribuer au développement cognitif aussi bien qu'à la construction acquisition de savoirs spécifiques».

Le "constructionnisme" (Harel et Papert, 1991) constitue une théorisation de cette approche à partir des possibilités de construction de programmes modulaires qu'offre le langage LOGO : les situations où les apprenants ont à construire des objets publics seraient particulièrement favorables à l'élaboration de leurs structures cognitives.

LOGO apparaît dans cette théorisation comme ayant par lui-même la vertu de transformer les conditions d'apprentissage et de permettre un "apprentissage sans enseignement". Rouchier note que cette doctrine est sous-tendue et alimentée par l'analogie "un peu rapide" avec la langue maternelle et que l'interaction "spontanée" d'un élève et d'un micro-monde est une réponse trop simple à la difficulté d'un enseignement de contenus mathématiques qui sont d'une grande complexité conceptuelle. Il montre que la doctrine fonctionne plutôt comme un écran empêchant une analyse précise des réussites et des difficultés. Pour faire cette analyse, il propose de mener une étude psychologique de l'activité des élèves confrontés à la réalisation d'une tâche de programmation en LOGO puis de référer cette étude à une analyse épistémologique des notions (géométriques, algébriques) que l'élève rencontre dans cette activité.

Le constructivisme piagétien a inspiré d'autres démarches d'intégration de langages informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Un exemple est la création par Ed Dubinski du langage ISETL destiné à l'enseignement des notions de théorie des ensembles puis d'autres concepts intervenant dans l'« Advanced Mathematical Thinking ». La théorisation associée met l'accent sur l'abstraction réfléchissante que Dubinski (1991, 1992) présente comme "la principale activité qui doit être prise en considération pour faire un lien entre la théorie de Piaget et la pratique éducative" et sur l'exploitation de "similarités structurelles frappantes" entre les processus de construction cognitive piagétiens (assimilation généralisante, coordination, intériorisation, et encapsulation) et les activités mentales

impliquées dans l'écriture de programmes informatiques. Cet exemple est remarquable en ce qu'il concerne des étudiants au delà de la scolarité obligatoire dans l'apprentissage de notions de mathématiques « avancées ». Son influence sur l'intégration de l'ordinateur à ce niveau s'exerce de façon durable, comme on le verra plus loin concernant l'utilisation du calcul formel. L'aspect intéressant de ce travail est d'offrir un cadre cognitif pour concevoir l'activité de l'étudiant confronté à des concepts d'algèbre et d'analyse « avancés ». Un point faible est selon moi que des catégories psychologiques qui devraient servir d'abord à l'analyse de l'activité de l'élève, interviennent directement dans la présentation des notions et la mise en place des activités. De plus, les processus élémentaires d'abstraction réfléchissante, prennent un caractère rigide du fait qu'ils sont liés étroitement à la mise en œuvre de fonctionnalités du langage (par exemple l'encapsulation est liée à la définition de procédures). Cette théorisation ne fonctionne donc pas en tant qu'analyse des conditions d'une utilisation du langage informatique dans des situations, mais tend à se substituer à l'analyse didactique dans la conception et la mise en place de ces situations.

### **Le calcul formel : quand la théorie cognitive fonctionne comme écran**

J'ai présenté plus haut la façon dont l'importation de concepts piagétiens pouvait servir à des théorisations pour l'introduction de moyens informatiques dans l'enseignement. J'ai cité le travail particulièrement caractéristique de Dubinski où le concept central importé est l'abstraction réfléchissante, les processus de construction cognitive associés (assimilation généralisante, coordination, intériorisation, et encapsulation) étant étroitement liés à des modalités de construction de programmes informatiques. Ce travail exerce une influence notable au delà de son objet initial, et, particulièrement en ce qui concerne le calcul formel, il sert de cadre théorique et réflexif pour des expériences d'introduction. Comme nous l'avons vu au premier chapitre, Repo, (1994) définit des « activités critiques » avec DERIVE, correspondant aux moments d' « abstraction réfléchissante » : activation des connaissances présentes chez les étudiants, internalisation, co-ordination, généralisation, réversibilité. C'est clairement une association de catégories psychologiques à des activités précises proposées aux élèves, déjà présente dans l'article de Dubinski (1991).

Nous avons vu au second chapitre que la méthodologie adoptée dans l'article ne permet pas vraiment de voir l'influence des choix théoriques d'utilisation du logiciel sur la meilleure réussite des élèves expérimentaux. Ainsi, dans la théorisation, des propriétés sont attribuées au calcul formel, à sa capacité supposée à servir les processus d'abstraction réfléchissantes.



L'évaluation quant à elle montre simplement, selon moi, les vertus d'un enseignement dirigé moins directement vers les algorithmes. Aucune observation précise ne vient montrer la façon dont le calcul formel faciliterait cet enseignement, et aucune des difficultés relevées dans l'étude DIDIREM (chapitre 2) n'est rapportée. Les avantages attribués a priori au calcul formel sont donc validés sans discussion. Ainsi, pour reprendre les termes d'André Rouchier, la théorisation fonctionne comme un écran empêchant de voir les phénomènes à l'œuvre dans l'introduction du calcul formel.

### L'étude cognitive des activités de programmation

De façon générale, ces approches initiales témoignent d'un stade de développement de l'informatique qui donnait à l'enseignement le choix seulement entre un enseignement programmé d'inspiration behavioriste et l'utilisation de langages de programmation. Aujourd'hui, un choix beaucoup plus ouvert conduit à privilégier des logiciels « plus directement mathématiques »<sup>47</sup> (grapheurs, tableurs, logiciels de géométrie interactive ou de calcul formel). Ces approches initiales continuent néanmoins d'influencer les stratégies d'utilisation, bien que, selon moi, elles ne permettent pas réellement d'aborder les questions qui conditionnent la viabilité de l'utilisation de l'ordinateur.

L'étude cognitive des activités de programmation (Mendelsohn et al., 1990), (Rogalski, Samurçay, 1990) a quant à elle abordé ces questions en montrant qu'une utilisation efficace d'un langage par des élèves, n'est en rien spontanée. Avec LOGO, une certaine parenté existe entre les caractéristiques de la machine et les schèmes familiers des sujets. Cela facilite une première entrée dans le système par des tâches simples, mais, quand les tâches deviennent plus complexes, les sujets éprouvent des difficultés pour se décentrer et distinguer les caractéristiques de leur fonctionnement propre de celles du fonctionnement de la machine. Cela rend quelque peu illusoire l'hypothèse selon laquelle un langage structuré comme LOGO permettrait directement à des élèves d'implémenter leurs élaborations mathématiques et de développer une réflexion à partir de cette implémentation. L'apprentissage de structures de programmation par les élèves n'est certes pas impossible à envisager, mais, par le temps et l'énergie qu'il supposerait, il entraînerait un bouleversement profond de l'enseignement dont l'impact est difficile à évaluer.

---

<sup>47</sup> Plus précisément, les objets ostensifs et non ostensifs introduits par ces logiciels dans l'activité mathématique ont des rapports potentiellement plus riches avec les objets mathématiques.

Ainsi, en dépit des suppositions de ses concepteurs, le langage LOGO ne se distingue pas, dans le milieu écologique de l'enseignement, d'autres langages moins structurés, donc a priori moins « riches de potentialités ». D. Tall et M. Thomas (1991) montrent par exemple que des utilisations intéressantes de BASIC sont possibles, malgré la défaveur des milieux universitaires pour ce langage. Concevoir de petits programmes en BASIC conduit par exemple l'élève à une compréhension différente des expressions algébriques par leur décomposition en suite d'affectations ; l'implémentation de définitions de fonction peut modifier la manière de voir les concepts d'analyse.

Mais, même pour utiliser seulement la capacité commune aux langages de programmation à représenter des objets pour les traiter en différé, il est nécessaire de rompre avec les représentations spontanées du dispositif informatique et des objets qu'il manipule. L'ingénierie élaborée dans ma thèse (Lagrange, 1991) visait à contribuer à cette rupture en faisant rencontrer aux élèves les limites de leurs représentations familières d'objets tels que des mots, des assertions, des graphes de déplacements, et à leur faire construire des représentations calculables. L'interaction avec le langage de programmation, le choix des problèmes jouaient un grand rôle dans cette ingénierie mise en œuvre et évaluée dans le cadre d'une « alphabétisation informatique ».

J'ai montré (Lagrange, 1995) que la rupture ainsi opérée est constitutive de la pensée algébrique, en ce sens qu'elle conduit les élèves à considérer une expression comme un objet en lui-même, et non comme la simple traduction d'un processus ou comme une entité transitoire destinée à prendre une valeur à l'issue d'un processus de résolution. Du point de vue de la viabilité, l'ingénierie ne permet cependant pas de voir l'utilisation d'un langage de programmation comme un moyen particulièrement économique d'opérer cette rupture. Les objets non numériques jouent en effet un rôle essentiel dans l'ingénierie à cause des représentations non calculables qui leur sont associées, mais ils n'ont pas d'existence dans les mathématiques scolaires. La condition d'existence de l'ingénierie est donc l'enseignement d'informatique dans le cadre duquel elle était construite, enseignement nécessairement marginal et séparé des mathématiques scolaires.

En étudiant l'utilisation réelle de l'ordinateur par les élèves, sa productivité notamment mathématique, les études cognitives des activités de programmation ont ainsi permis de dépasser des hypothèses quelque peu romantiques, et d'évaluer avec précision l'impact d'introductions de l'ordinateur dans les situations d'enseignement et leur viabilité. Elles ont

certaines perdu de leur actualité avec la quasi-disparition des activités de programmation au profit des logiciels, mais elles restent de bons exemples d'approches cognitives de l'utilisation de l'ordinateur.

### L'ordinateur comme partenaire de l'apprenant

Les théorisations liées aux micro-mondes ont elles aussi évolué à partir des approches initiales que j'ai discutées plus haut, en tirant parti des nombreuses recherches auxquelles LOGO a donné lieu.

Le livre de Noss et Hoyles (1996) est bien représentatif d'une évolution des approches de la technologie dans l'éducation prenant en compte, au delà de la simple interaction élève-ordinateur, les dimensions « sociales » de la communication et de l'intégration.

Deux concepts organisent le cadre théorique de Noss et Hoyles : le « webbing » (maillage) et « l'abstraction située ». Le « webbing » articule des objets mathématiques, des entités matérielles de référence et des situations constitutives de l'expérience personnelle. L'idée de « webbing » associe ainsi ce qui est en propre au sujet, et ce qui est attaché à son environnement et aux relations qu'il entretient avec cet environnement. Le « webbing » constitue une structure sur laquelle l'apprenant peut s'appuyer et dans le cadre de laquelle il peut reconstruire le sens d'une notion mathématique. Une abstraction située est la façon dont un élève construit une idée en s'appuyant sur le « webbing » permis par un contexte particulier, contexte qui, en retour, façonne les idées qui sont exprimées. Pour les auteurs, les élèves devraient avoir la possibilité de faire cette expérience de l'abstraction au sein d'un domaine, de façon analogue aux cadres que les mathématiciens construisent pour créer de nouvelles significations sur lesquelles ils peuvent construire de nouvelles expressions et de nouvelles relations,.

Ces concepts trouvent à s'employer dans l'analyse de situations où un travail sur des expressions du langage informatique LOGO est combiné à d'autres types de tâches, sur ordinateur et en papier/crayon. Par exemple, (p. 75) dans un exemple d'une situation d'apprentissage de la proportionnalité, Noss et Hoyles montrent comment le "pouvoir d'expression" du langage informatique intervient dans l'élargissement des conceptions des élèves liées aux structures multiplicatives : les élèves agissent sur des procédures LOGO pour maintenir une relation de proportionnalité, et la prise de conscience liée à cette action leur donne un moyen d'exprimer ces relations auquel ils peuvent se référer, y compris dans les

activités sans ordinateur. L'environnement informatique offre ainsi plus qu'une contrainte sur l'action : il est un moyen par lequel l'expression mathématique peut être partagée ; il agit en quelque sorte comme médiateur de l'interaction avec le monde et avec la société.

Ainsi, Noss et Hoyles quittent la vision de l'ordinateur comme simple terrain d'interaction entre l'élève et des objets mathématiques réifiés qui était celle des premières approches. Ils mettent l'accent sur les moyens que l'ordinateur offre pour cette interaction, et sur le rôle que ces moyens peuvent jouer dans l'élargissement des conceptions des élèves, en leur donnant une dimension plus générale et plus formelle.

La notion de « webbing » est ainsi explicitement référée à l'étayage de Wood, Bruner et Ross, et à la zone proximale de développement de Vygotsky. Elle est aussi à mettre en relation avec les approches qui voient, plus largement, la médiation dans les potentialités nouvelles qu'un instrument offre à l'action de l'être humain, potentialités qui influencent fortement l'activité de l'utilisateur et, par conséquent, ses conceptualisations.

## Les Environnements Interactifs d'Apprentissage Humain

Cette idée de collaboration sujet-logiciel, d'intelligence partagée, marque aussi l'évolution qui a conduit des logiciels « d'enseignement intelligemment assistés par ordinateur » aux « Environnements Interactifs d'Apprentissage par Ordinateur » puis, plus récemment, aux « Environnements Interactifs d'Apprentissage Humain » (EIAH).

Comme pour les approches « programmation », un corpus théorique s'est constitué qui a permis progressivement d'interroger les conditions d'existence de ces environnements dans l'enseignement des mathématiques. Ce corpus n'est pas essentiellement « cognitif ». Nous avons rencontré certains de ses aspects « didactiques » d'abord dans le premier chapitre, à propos de la question de la viabilité des outils informatiques dans l'enseignement, puis dans le troisième chapitre à propos de la « transposition » ou « transmutation informatique ». Il reste un aspect que nous n'avons pas étudié jusqu'à présent, et dont la discussion se place bien dans ce chapitre. C'est celui des interactions entre l'EIAH et le sujet apprenant.

Au départ, l'EIAO a opéré, comme LOGO, une rupture par rapport à l'enseignement programmé d'inspiration behavioriste. Mais cette rupture s'est opérée différemment. L'utilisation de l'ordinateur est restée orientée vers des apprentissages délimités, et non vers le développement de capacités cognitives ou aptitudes générales. L'hypothèse était que l'utilisation de méthodes de développement logiciel particulières (l'intelligence artificielle)

allait permettre de voir l'apprentissage de façon moins fruste que l'enseignement programmé classique, en incluant des éléments d'expertise du domaine, une modélisation des interactions élève/ordinateur, des éléments tutoriels « intelligents »...

L'approche cognitive des EIAH reprend l'orientation des approches initiales que j'ai présentées plus haut, en considérant que l'apprentissage suppose l'interaction du sujet avec un milieu. Balacheff (1998) souligne que dans les EIAH, cette interaction doit être pensée comme faisant intervenir deux systèmes cognitifs l'agent humain (élève..) et la machine. Cela complexifie l'approche puisqu'il faut analyser symétriquement deux systèmes de connaissances : celles que l'agent humain investit dans l'interaction et celles que la machine va manifester pour lui répondre ou le guider. La connaissance manifestée par la machine ne peut pas être conçue comme une simple information dont l'agent humain devra tirer le meilleur parti. Le logiciel intervient dans l'interaction avec un fonctionnement cognitif propre qui joue un rôle direct dans les connaissances que l'agent humain va construire en s'adaptant, ce qui, en un certain sens, rejoint l'approche « Webbing » de l'ordinateur comme partenaire dans une intelligence partagée.

Aujourd'hui, l'intelligence artificielle n'apparaît plus comme un domaine de l'informatique « à part », et la collaboration informaticien/didacticien (Balacheff et Vivet, 1994) constitue le caractère le plus visible des EIAH. Le champ concerné par la réflexion sur les EIAH est donc très large. Au delà de l'implémentation informatique de séquences didactiques spécifiques, la réflexion s'étend aux situations d'apprentissage faisant intervenir l'ordinateur, comme par exemple lors de l'utilisation de logiciels de géométrie interactive ou de calcul formel. Concernant ce dernier domaine, l'approche « EIAH » est différente de celle que j'ai adoptée, puisque, à aucun moment, je n'ai modélisé l'interaction entre l'élève et le calcul formel comme l'interaction de deux systèmes cognitifs. J'ai essayé plutôt de ne pas faire trop d'hypothèses sur les capacités du système de calcul formel, le considérant par les modifications qu'il apporte aux organisations didactiques, de par son caractère d'instrument informatique performant mais complexe. Cette approche permet d'interpréter les phénomènes décevants par rapport à des hypothèses optimistes quand aux vertus des capacités cognitives prêtées au calcul formel. Cette approche donne également des éléments sur les potentialités effectives du calcul formel, en terme de techniques nouvelles et de relations plus riches entre objets, ce qui est compatible aussi avec l'approche « Webbing ». Il est tout à fait possible que l'approche de Nicolas Balacheff donne des résultats plus étendus, à condition bien sûr de

situer avec précision les capacités cognitives prêtées au calcul formel et de considérer l'interaction sans a priori positif. Je reprendrai ce point dans la conclusion.

## L'approche cognitive des instruments contemporains

Avec l'apparition des calculatrices graphiques dans les classes, des phénomènes nouveaux sont apparus qui ont remis sur le devant de la scène les mécanismes d'assimilation et d'adaptation piagétien, mais en les référant davantage à l'objet technologique lui-même, ainsi pensé comme un « instrument » se constituant dans une genèse, en laissant ouverte la question de l'influence de ces mécanismes sur les conceptualisations mathématiques.

### Les calculatrices graphiques

Les calculatrices graphiques ont en effet constitué un exemple d'intégration massive par les élèves d'un moyen informatique. Parallèlement, la recherche en didactique a peu préparé cette intégration, au moins en France, et les enseignants ont, dans leur majorité, laissé les élèves se confronter seuls à ce nouvel outil (Trouche, 1994). Ainsi l'analyse cognitive de l'intégration a-t-elle suivi le phénomène plus qu'elle ne l'a précédé. Elle a montré d'une part que quand les élèves intègrent la calculatrice sans intervention de l'enseignement, ils développent des rapports spécifiques, mais souvent inadéquats, aux objets de savoir et d'autre part que, dans l'utilisation banalisée d'un instrument comme la calculatrice, une certaine régularité des comportements s'observe, qui rend particulièrement pertinente une analyse cognitive en terme de schèmes.

Par exemple (Guin et Trouche, 1999a), quand les élèves sont confrontés à la recherche du nombre de solutions d'une équation telle que  $\tan(x)=x$  en papier/crayon, ils ont à considérer le comportement de la fonction tangente sur les intervalles  $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}; n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$  et à reconnaître que la fonction croît de moins l'infini à plus l'infini sur cet intervalle et donc qu'il y existe au moins une solution. Lorsque les élèves utilisent leur calculatrice graphique, leur comportement majoritaire est très différent : ils graphent la fonction tangente, la droite  $y=x$  et comptent le nombre de points d'intersection. La seule question qu'ils se posent est celle de l'« asymptote ». Dans certaines fenêtres, un tracé artificiel rejoint deux branches disjointes du graphe de la fonction tangente. Les élèves se demandent par conséquent s'il convient de compter les points d'intersection entre ce tracé et la droite  $y=x$ .

Cette conduite n'est pas en soi stupide. Pour une équation polynomiale, elle est productive. De plus, la possibilité de tracés graphiques est un avantage indéniable dans la dévolution d'un problème. Elle donne en effet aux élèves des moyens d'action qui leur permettent de ne pas être démunis face au problème. La conduite observée par Guin et Trouche témoigne simplement de la prégnance des schèmes d'observation graphique, non nécessairement contrôlés par la connaissance des propriétés des fonctions : ces schèmes ont toutes les chances d'être résistants car il est certainement difficile aux élèves de s'engager dans une démarche réflexive en faisant abstraction des images qu'ils reçoivent.

Ainsi, à la différence de LOGO et des EIAH, l'approche cognitive des calculatrices graphiques n'a pas eu à analyser les potentialités et les conditions d'intégration d'une technologie. Elle a dû se confronter à une réalité existante, à en évaluer la productivité mathématique et à en rechercher les conditions de cette productivité. Dans cette confrontation à une intégration réalisée dans la durée, la nécessité est apparue de prendre en compte les régularités observées dans les comportements des élèves, et d'analyser l'influence des spécificités de la calculatrice en tant qu'instrument sur leur apparition.

La description de ces régularités en termes de schèmes et l'utilisation d'éléments de l'approche cognitive des instruments de Vérillon et Rabardel (1997) pour rendre compte de leur développement, a constitué un premier travail. A partir là, les conditions d'une intervention explicite de l'enseignement sur le développement des schèmes d'utilisation ont pu être dégagées : apprentissage des modes de fonctionnement de la machine, réflexion mathématique sur les images produites par la calculatrice, recherche d'exemples choisis pour faire apparaître des phénomènes... (Trouche, 1996). Ainsi est-on passé d'une théorie cognitive de l'interaction d'un sujet et de son instrument à une théorie des conditions de possibilité d'une intégration efficace des calculatrices graphiques.

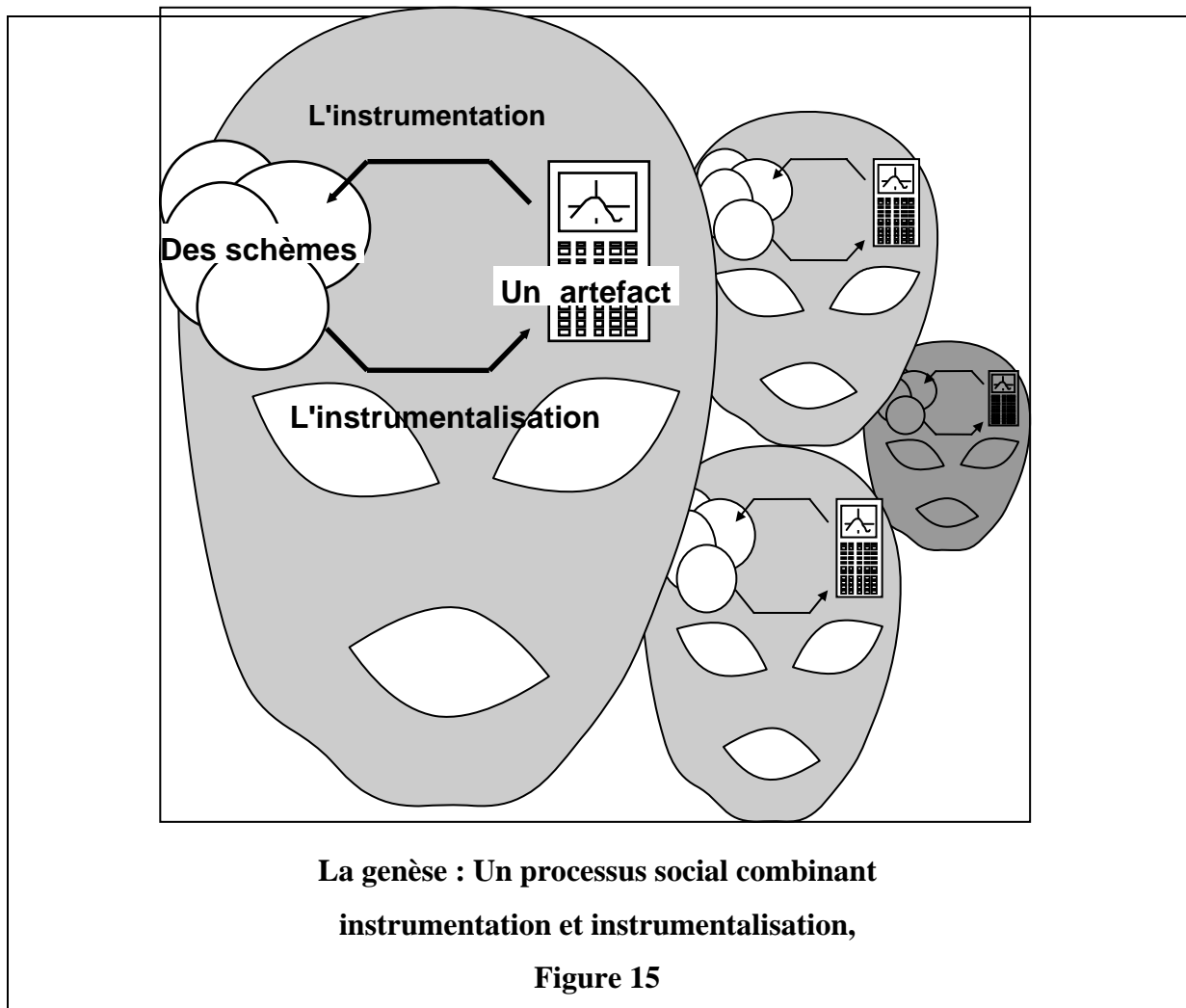
## Schèmes instrumentaux et genèse instrumentale

Je vais d'abord rappeler en quatre points des éléments généraux sur les schèmes et sur la genèse instrumentale Puis, en prenant l'exemple des calculatrices « à calcul formel », je montrerai comment se présente une approche cognitive du calcul formel comme instrument.

1. Un objet technique n'est pas d'emblée un instrument, même s'il est souvent présenté comme tel. C'est d'abord un artefact, selon la terminologie utilisée par Rabardel (1995),

c'est-à-dire un objet matériel transformé par l'homme en fonction d'un usage, mais cet usage n'est pas donné avec l'objet..

2. Ce qui fait de l'artefact un instrument, c'est l'existence chez un individu de structures psychologiques : les schèmes instrumentaux. Bien que spécifiques de l'instrument, ces structures ont les propriétés d'adaptation et d'assimilation des schèmes. J'illustrerai plus loin comment ces « totalités dynamiques fonctionnelles » (Vergnaud, 1996), constituent des organisations invariantes de la conduite pour une classe donnée de situations. Je montrerai aussi la pluralité de leurs fonctions : épistémique, pragmatique, heuristique.
3. Les schèmes instrumentaux sont élaborés dans une « genèse instrumentale » durant laquelle se combinent l'adaptation des schèmes aux nouvelles situations rencontrées dans les usages de l'instrument (*instrumentation*) et le développement des usages permis par ces schèmes (*instrumentalisation*).





4. La genèse instrumentale est à la fois individuelle et sociale : un individu construit ses propres structures psychologiques, mais, n'étant généralement pas le seul à utiliser l'instrument, le processus d'adaptation qui lui permet cette élaboration est le plus souvent social, et les schèmes eux-mêmes sont souvent partagés dans une communauté.

### Les schèmes dans l'utilisation d'une calculatrice « à calcul formel »

Je vais maintenant montrer comment l'approche cognitive du calcul formel comme instrument se présente dans le cas des calculatrices « à calcul formel ». En effet, cette approche s'est imposée dans les équipes de Montpellier (Guin, Trouche, 1999a) et de Paris (Artigue, Lagrange, 1999) à partir de la disponibilité d'une calculatrice disposant des commandes numériques et graphiques habituelles organisées autour d'un module principal fonctionnant en calcul formel.

La recherche sur DERIVE nous avait fait ainsi apercevoir les limites structurelles de tentatives d'intégration « discontinue » de ce logiciel. Ces tentatives tendaient à privilégier des situations « riches », tant d'un point de vue mathématique que dans l'utilisation du logiciel : le professeur souhaitait exploiter pleinement la séance pour faire rencontrer aux élèves des aspects nouveaux des notions via une utilisation intensive du logiciel. La contrepartie était que ces séances restaient marginales par rapport au quotidien de l'enseignement : les situations étaient trop différentes du travail habituel et les schèmes et techniques liés à l'utilisation du logiciel n'avaient guère l'occasion d'être réinvestis. La disponibilité de calculatrices « à calcul formel » nous permettait en revanche d'envisager un projet d'enseignement dans une perspective nouvelle où le calcul formel est une réalité quotidienne et où les schèmes et techniques associés au calcul formel se construisent et s'éprouvent dans la pratique ordinaire des mathématiques, en interaction avec le travail en papier/crayon.

Pour cela, il a fallu élaborer une nouvelle approche du calcul formel. Cette approche devait prendre en compte le processus nécessairement long au cours duquel l'élève prend conscience du fonctionnement de ce système. L'étude de ce processus devait donner les moyens de concevoir une organisation didactique permettant que cette prise de conscience s'accompagne d'apprentissages mathématiques. Cette approche a repris les notions élaborées par Vérillon et Rabardel et déjà utilisées par Trouche pour les calculatrices graphiques, de schèmes instrumentaux et de genèse au cours de laquelle ces schèmes s'élaborent.

Je vais situer, dans le cas de calculatrices à calcul formel, les deux mouvements d'instrumentalisation et d'instrumentation qui interagissent dans la genèse, de façon à en montrer la richesse et les difficultés.

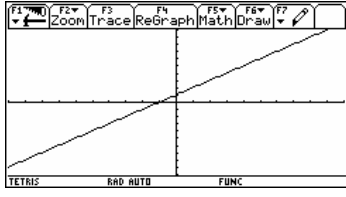
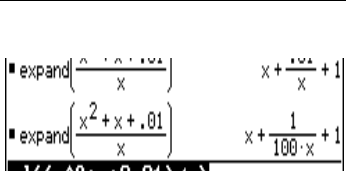
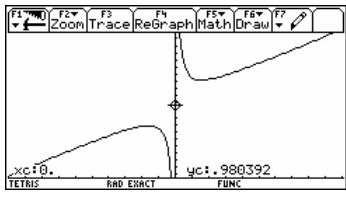
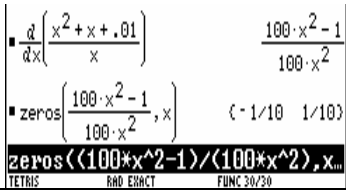
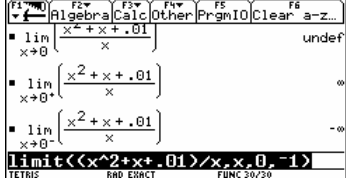
Je vais d'abord montrer des schèmes susceptibles d'être activés dans l'étude avec calculatrice à calcul formel des variations d'une fonction, de façon à donner un aperçu de ce que serait une instrumentation stable et ses rapports avec les techniques, puis j'indiquerai quelles différences avec cet état de stabilité se manifestent dans les instrumentations en cours chez les élèves que nous avons observés. Ensuite, je donnerai un exemple de démarche d'instrumentalisation et les problèmes que cette démarche peut poser.

## L'instrumentation d'une calculatrice à calcul formel.

### Les techniques instrumentées

Je vais prendre l'exemple de l'étude des variations de la fonction  $x \rightarrow \frac{x^2 + x + 0,01}{x}$ . Cette fonction a une discontinuité en zéro, mais, à cause du « petit » terme constant du numérateur, cette discontinuité n'apparaît pas sur le graphe de la fonction dans une fenêtre standard ( $x$  appartenant à l'intervalle  $[-10 ; 10]$ , par exemple). Son étude va donc solliciter la coordination de schèmes liés au module graphique de la calculatrice, et des schèmes algébriques et analytiques liés ou non à la calculatrice. Dans la recherche TI-92, au cours du suivi des élèves, nous avons proposé en entretien l'étude de fonctions de ce type (voir rapport DIDIREM), et, à partir de l'observation de ces entretiens, je vais restituer la façon dont ces schèmes sont activés par les élèves à différents moments de la genèse.

Décrire des schèmes qui sont des entités mentales est toujours hasardeux. Le tableau ci-dessous tente cette description en précisant des manifestations tangibles auxquelles ils conduisent ou auxquelles ils s'appliquent (rétro-actions), puis leurs différentes fonctions : heuristique (contrôle, organisation de l'action), pragmatique (action, transformation) puis épistémique (prise d'information, compréhension).

Nature du schème	Rétro-actions	Fonction Heuristique	Fonction Pragmatique	Fonction Epistémique
1. Graphique, TI-92		Pour obtenir les variations d'une fonction, il est utile de considérer le graphe de la fonction	Tracer le graphe de la fonction dans la fenêtre standard	La fonction est croissante, son graphe est une droite
2. Algébrique	$x \rightarrow \frac{x^2 + x + 0,01}{x}$	Il faut confronter ce qu'on voit sur le graphe à l'écriture algébrique	Regarder la définition algébrique de la fonction	$f$ n'est pas une fonction affine
3. Algébrique TI-92		Dans un cas de divergence entre le graphe et l'expression algébrique, il est intéressant de transformer l'expression	Utiliser la fonction Expand pour obtenir une partie affine et une partie fractionnaire	Il y a une « irrégularité » très près de zéro.
4. Graphique, TI-92		L'affichage graphique confirme l'étude analytique	Zoomer « in » autour de $x=0$ and $y=0$ jusqu'à ce que quelque chose apparaisse.	Il y a un maximum et un minimum locaux près de zéro et des limites infinies
5. Analytique, TI-92		La dérivée sert à trouver les extrema	Calculer les zéros de la dérivée	La position des extrema est confirmée
6. Analytique, TI-92		Si le résultat de limit est <i>undef</i> , alors, des limites à droite et à gauche peuvent exister	Ajuster la commande <i>limit</i> pour avoir les limites à droite et à gauche	La nature de la discontinuité est trouvée

A la suite de Trouche (à paraître), on peut considérer cet ensemble comme une construction mentale globale susceptible de s'appliquer à une classe assez large de fonctions. Il s'agit alors d'un « schème d'action instrumentée ». Mais je vais ici le considérer comme la somme de schèmes plus élémentaires, ce qu'il est pour l'élève de Première en phase d'élaboration d'une technique d'étude de fonctions. Ces schèmes plus élémentaires peuvent à leur tour apparaître comme globaux : c'est le cas particulièrement du schème de cadrage n°4 pour lequel l'élève dispose d'une multiplicité de commandes et de moyens de contrôler ses choix.

Le premier schème (grapher la fonction dans la fenêtre standard, et lire les propriétés de la fonction sur la courbe) s'impose chez la plupart des élèves. Souvent ce schème a été installé par l'usage d'une calculatrice graphique. En revanche, au début de l'apprentissage de l'analyse, très peu d'élèves sont capables d'un retour critique sur cette lecture, à partir de la forme algébrique de la fonction. Ce changement de registre nécessite un apprentissage, comme nous le verrons plus loin. Par la suite, les élèves les plus avancés mettent en œuvre des schèmes plus efficaces où ils font le lien entre le tracé graphique et la forme algébrique : ils repèrent sur la courbe des propriétés qu'ils sont capables de déduire de la forme algébrique. Une autre limitation des schèmes graphiques est leur manque de généralité et d'adaptabilité. Quand les élèves rencontrent des fonctions dont ils connaissent mal les propriétés (par exemple des fonctions trigonométriques) ils éprouvent de grandes difficultés à interpréter le tracé graphique.

Transformer l'expression comme dans le schème 3 est rarement spontané chez les élèves. Bien souvent, ils ne peuvent déduire la transformation à opérer en raisonnant à partir des propriétés qu'ils veulent voir apparaître, et la choisissent donc au hasard parmi les commandes proposées par la calculatrice. Comme nous le verrons plus loin dans ce chapitre, l'enseignement peut intervenir pour développer un choix rationnel des commandes. Il s'agit alors d'une technique, au sens du chapitre 2. Comme elle est liée aux schèmes d'usage de l'instrument, nous l'appelons « technique instrumentée ».

Après cette transformation, il est naturel de retourner à la fenêtre graphique, en choisissant les paramètres de cadrage pour faire apparaître les propriétés que l'étude algébrique a mises en évidence. Certains élèves anticipent directement le cadrage à effectuer, tandis que d'autres hésitent longtemps, ou procèdent par essai-erreur (voir Artigue, Lagrange, 1999, pour une étude des schèmes de cadrage dans l'étude de variation). Là aussi, des techniques instrumentées peuvent se développer dans la classe.

Chercher analytiquement la position des extrémas comme dans le schème n°5 découle de l'enseignement de la dérivation. Le champ d'application de ce schème peut cependant varier considérablement. Le plus souvent, le schème est appliqué seulement à des fonctions proches de celles qui ont été considérées dans l'enseignement, c'est à dire principalement les fonctions rationnelles. Le schème apparaît ainsi peu adaptable d'emblée à des situations nouvelles, par exemple celles où les fonctions sont paramétriques ou trigonométriques.

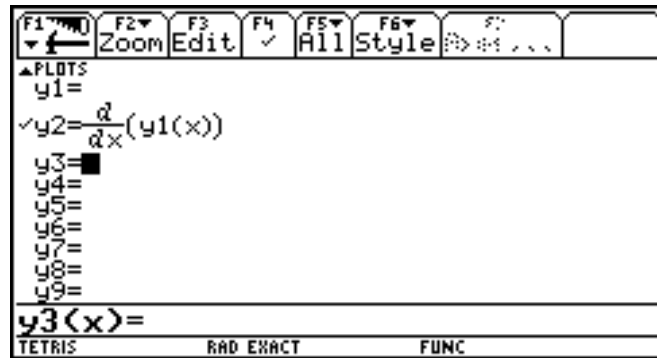
Le schème n°6 concerne les limites. Il illustre bien la spécificité des schèmes instrumentaux. Dans l'environnement papier/crayon, la notion de limite à droite et à gauche est difficile car leur calcul implique une réflexion sur le signe des sous-expressions avec laquelle les élèves sont peu familiers. Avec la calculatrice, le schème décrit dans la figure fonctionne sur la plupart des fonctions rencontrées à ce niveau et contribue à donner une certaine signification à cette notion. Bien sûr, par son caractère symbolique, cette signification est partielle, et l'on voit beaucoup d'élèves incapables d'interpréter en termes graphiques les limites aux bornes qu'ils ont obtenues avec la calculatrice.

### L'instrumentalisation. Les problèmes qu'elle pose dans le cas d'un instrument complexe

L'instrumentalisation est ce mouvement par lequel le sujet, après avoir pris conscience de certaines fonctions de son instrument et élaboré les schèmes correspondants, découvre les possibilités d'action que ces fonctions lui permettent. C'est une démarche individuelle, puisque le sujet fait fonctionner les nouvelles fonctions dans son propre répertoire de problèmes, mais elle s'insère aussi dans un cadre collectif où les utilisations diffusent entre sujets ayant des schèmes de niveaux variés. Ainsi une utilisation bien maîtrisée par un élève pourra diffuser à d'autres élèves dont les schèmes permettent cette utilisation, mais sont insuffisants pour en contrôler le domaine d'application et l'évolution.

Dans le cas d'un instrument complexe comme la calculatrice à calcul formel, il faut voir que l'instrumentalisation crée des modes d'utilisation très divers et très diversement contrôlés par les élèves. Une conséquence est de rendre malaisé à l'enseignant la compréhension des modes de résolution et des difficultés des élèves. En voici un exemple, observé dans la recherche DIDIREM sur l'intégration de la TI-92 (Artigue et al., 1998) : une élève avait pris conscience de l'intérêt, dans l'étude des variations d'une fonction, de faire calculer par la TI-92 la dérivée de cette fonction, mais elle avait par ailleurs des difficultés à s'y retrouver dans les différentes fonctions définies à un moment donné dans sa calculatrice. Un autre élève lui avait donc entré la formule  $y_2 = \frac{d}{dx}(y_1(x))$  dans la base de fonctions de sa calculatrice. Ainsi, pour chaque problème ou étude de variations, elle définissait la fonction à étudier comme  $y_1$ .  $y_2$  était alors automatiquement sa dérivée. Elle connaissait ce fonctionnement, mais, perdue dans l'organisation de la calculatrice, elle ne savait pas exactement comment il était rendu possible.

Les difficultés se sont manifestées lorsque les problèmes à étudier ont mis en jeu plusieurs fonctions et leurs dérivées. Elles ont été très difficiles à repérer et à traiter par l'enseignant.



Ainsi, l'instrumentalisation apparaît, dans l'usage de calculatrices « complexes », comme un phénomène à deux visages. D'un côté, elle participe à un mouvement d'appropriation de l'instrument tant individuel que collectif, se distinguant cependant de l'instrumentation qui suppose une adaptation des schèmes, mais pouvant la préparer. D'un autre côté, elle installe des fonctionnements très divers chez les élèves, pouvant leur faire faire l'économie d'une compréhension en profondeur de leur machine, et délicats à gérer par l'enseignant.

### Genèse instrumentale et apprentissage avec instruments

Cette description de phases d'instrumentation et d'instrumentalisation dans la genèse instrumentale de calculatrices « à calcul formel » montre un développement de schèmes d'utilisation, certes lié à l'acquisition de connaissances spécifiques à la machine, mais aussi, et de façon dialectique, à la progression des connaissances mathématiques. Certains schèmes instrumentaux, les plus efficaces dans des situations bien choisies, s'appuient sur les connaissances mathématiques et, en retour, contribuent à donner à l'élève des possibilités nouvelles d'action sur lesquelles baser une réflexion mathématique. Je voudrais illustrer cela, à propos de l'enseignement des débuts de l'analyse, en montrant comment les spécificités de la genèse instrumentale des calculatrices à calcul formel interviennent dans l'organisation didactique d'un enseignement s'appuyant sur cet instrument. Ainsi, l'approche cognitive des instruments aidera effectivement à découvrir des conditions d'une intégration possible du calcul formel.

#### *Une genèse problématique*

Le premier point à considérer est le caractère problématique de la genèse. En effet, les schèmes instrumentaux ne sont pas en eux-mêmes producteurs de connaissances

mathématiques, et leur productivité dépend du moment et des conditions dans lesquels ils sont installés. Voyons par exemple le cas de la limite à l'infini d'une expression rationnelle. Pour une limite comme  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ , dans un contexte non instrumental, les élèves peuvent faire un raisonnement comme « l'inverse d'une expression aussi grande qu'on le veut doit être aussi petite qu'on le veut, donc la limite est nulle... » Si l'expression est plus complexe, l'élève la transformera. Par exemple, il transformera  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2)$  en  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x(1 - x))$ . Des approches numériques et graphiques l'aideront à mieux comprendre la notion en jeu.

En revanche, avec un instrument « à calcul formel », les élèves peuvent associer la notion de limite à un schème singulier : l'écriture de la commande *limit* et la lecture du résultat. Ce schème est certes très généralement efficace, mais, comme Monaghan et al. (1994) l'ont observé, il peut donner aux étudiants une conception étroite de la notion de limite. Ces auteurs ont comparé des étudiants ayant utilisé largement DERIVE à d'autres étudiants. Ces derniers manifestaient des représentations plus variées des limites, avec en particulier une compréhension « infinitésimale » de la notion, alors que les élèves DERIVE voyaient seulement les limites comme des objets. Le schème de la limite avec DERIVE associe ainsi trop étroitement chez ces élèves la notion de limite et la commande symbolique de DERIVE, écrasant les autres représentations qui avaient pu ou auraient pu être construites<sup>48</sup>.

Nous avons vu aussi plus haut dans ce chapitre un schème pour la mise en évidence de certaines discontinuités utilisant les commandes de la TI-92 associées aux limites à droite et à gauche. J'ai montré que ce schème, même s'il donnait une compréhension très partielle de la discontinuité, avait une certaine productivité en aidant les élèves à concevoir qu'il peut exister des limites différentes à droite et à gauche, ce qui est plus difficile avec les ressources du calcul à la main ou de l'observation graphique.

Les exemples ci-dessus montrent ainsi la contre-productivité d'une association trop étroite d'un concept et d'une commande du calcul formel, mais aussi, localement, la contribution d'une commande symbolique à la compréhension. J'ai montré aussi, dans l'analyse de la recherche DERIVE au début du chapitre 2, comment une vision trop optimiste des capacités des élèves à utiliser d'emblée les commandes de traitement des expressions conduisait à des

---

<sup>48</sup> Au chapitre 3, ce phénomène a été décrit en terme d'encapsulation.

phénomènes de « pêche » peu productifs en réflexion mathématique. Ainsi, la productivité des schèmes instrumentaux est fonction de leur coordination avec d'autres schèmes ou significations. C'est pourquoi, pour que la technologie serve vraiment les apprentissages, il est nécessaire que l'enseignement contrôle le développement des schèmes instrumentaux et leur coordination avec les autres connaissances. Je vais montrer comment ce contrôle peut s'exercer dans l'enseignement des débuts de l'analyse, en m'appuyant sur le projet pilote d'enseignement des débuts de l'analyse que nous avons développé (Artigue et al., 1998, Artigue, Lagrange, 1999).

### *Les débuts de la genèse: les nombres, l'algèbre et les fonctions*

Au début de la genèse, l'utilisateur adapte les schèmes qu'il a construit pour d'autres instruments. Par exemple quand un nouvel utilisateur de la TI-92 veut faire une division comme 34 divisé par 14, il tape  $\blackspadesuit \psi \epsilon \blacklozenge \psi \div$ , comme sur une calculatrice ordinaire, et il est très étonné que la calculatrice réponde 17/7. Le fait que, par défaut, la TI-92 simplifie les radicaux et les rationnels symboliquement, et que les approximations décimales doivent être explicitement demandées à la machine, peut faire l'objet d'un apprentissage, qui va conduire l'utilisateur à considérer avec plus de précision qu'avant, la différence entre le traitement mathématique des nombres et les approximations de la pratique des calculatrices « ordinaires ».

Ensuite, des schèmes d'utilisation des commandes algébriques de la calculatrice sont nécessaires. Le calcul formel est fondamentalement algébrique, même s'il inclut des commandes d'analyse : le traitement des expressions algébriques y est central, et il est essentiel pour un élève d'intégrer ce traitement pour ensuite utiliser correctement la calculatrice. L'équivalence des expressions joue un rôle clé dans cette compréhension, et il est nécessaire que l'élève soit conscient des différentes formes que peut prendre une expression. Un utilisateur de la TI-92 rencontre par exemple la simplification automatique des expressions aussitôt qu'il entre des expressions. Cette simplification n'est ni simple ni transparente, même pour des expressions élémentaires, comme je l'ai montré dans le chapitre d'introduction..

C'est pourquoi un élève ne peut pas se fier à la simplification automatique pour obtenir la forme d'une expression nécessaire pour une tâche donnée. Il doit apprendre à utiliser les commandes algébriques (*Factor, Expand, ComDenom...*) pour pouvoir décider si deux expressions sont équivalentes et anticiper le résultat d'une transformation donnée. Des tâches



et des techniques existent pour cet apprentissage, nous les détaillons dans (Artigue et al., 1997).

L'initiation des élèves à la fenêtre graphique et à la table des valeurs numériques, et leur coordination avec la fenêtre algébrique fait aussi partie des préalables à l'analyse. Guin et Trouche (1999a) montrent combien, pour des élèves de 15 à 16 ans cette initiation est nécessaire. En effet, l'utilisation de la fenêtre graphique n'est en rien spontanée : « les difficultés conceptuelles (relatives à la notion de fonction) se révèlent et interfèrent avec la manipulation des graphes », « des obstacles apparaissent dans la conversion des représentations d'un registre à l'autre ». Guin et Trouche (ibid.) proposent notamment d'organiser sur plusieurs séances « des exercices spécifiques sur la coordination de deux registres, dans le domaine des fonctions, des équations, des nombres » de façon à rendre les élèves plus à l'aise dans l'utilisation des changements de registres pour conjecturer et vérifier. Dans leurs observations, on voit les élèves passer d'une phase de découverte où ils dépendent beaucoup de leur machine, à une phase plus réflexive où ils utilisent les résultats de la machine avec plus de discernement et en les confrontant à d'autres sources d'information comme le calcul en papier/crayon ou leur savoir théorique.

### *Les schèmes instrumentaux et la flexibilité des représentations en analyse*

En analyse, à chacune des notions de base (limite, dérivation, intégration) correspond une commande du calcul formel. La seule contrainte de mise en œuvre est le respect de la syntaxe. L'ergonomie est donc bien différente de l'utilisation des commandes algébriques et graphiques, où une multiplicité de commandes et de modes de résolution possibles est offerte à l'utilisateur, sans nécessairement qu'il existe une stratégie directe applicable à un type de problème donné.

Cette simplicité de l'émission d'une commande ne veut pas dire que l'utilisation du calcul formel en analyse ne pose pas de difficulté à l'élève et à l'enseignement. Je vais présenter ces difficultés comme des contraintes que la genèse exerce sur les situations d'apprentissage et leur organisation : la genèse instrumentale du calcul formel a sa logique de développement propre, dont l'enseignement doit tenir compte s'il veut pouvoir en tirer profit.

Une première contrainte est que l'ergonomie des commandes algébriques et graphiques imprime très fortement sa marque dans les activités en analyse. Nous avons vu, dans l'exemple du tableau ci-dessus, la recherche de la dérivée et des limites à l'aide des

commandes symboliques intervenir comme des gestes dans l'étude de variations. Ces gestes ne contraignent pas en eux-mêmes l'utilisateur, une fois la syntaxe acquise. Mais l'étude de variations implique une coordination des registres où les propriétés analytiques des expressions apparaissent au travers des traitements algébriques et des confrontations aux phénomènes graphiques et numériques. Cette question de la coordination des registres et des traitements algébriques se pose même dans l'utilisation courante, comme par exemple dans le cas où un élève veut vérifier avec sa machine le résultat d'une dérivation effectuée en papier/crayon : si le résultat obtenu sur sa machine est différent de celui qu'il a calculé en papier/crayon, il va lui falloir mobiliser des tests d'égalité, des transformations algébriques générales, ou d'autres plus liées au domaine (par exemple les transformations des expressions trigonométriques ou des exponentielles, voir au second chapitre, l'exemple avec DERIVE).

Cette contrainte implique que le travail sur les expressions ne doit pas s'arrêter avec l'introduction des concepts d'analyse. L'apprentissage des capacités de la machine, en lien avec l'acquisition de connaissances sur les fonctions dans les différents registres se poursuit tout au long de la mise en place de techniques d'étude de variation (Lagrange, 1999a, Defouad, 1999, Defouad, thèse en cours). Un apprentissage de ce type est de plus à mettre en place pour chaque nouvelle classe de fonctions introduite. Comme pour l'initiation à l'utilisation du calcul formel en algèbre, cet apprentissage de l'utilisation du calcul formel pour une classe de fonctions (trigonométrique, exponentielle...) dépasse largement la simple présentation de ces commandes et suppose l'organisation de situations-problèmes.

Une autre contrainte est celle que j'ai soulignée plus haut, le risque que l'élève associe trop étroitement un concept et une commande symbolique du calcul formel, écrasant les autres significations. C'est une contrainte qui pèse très fort, non sur l'utilisateur, mais sur l'enseignement. Dans ce chapitre, j'étudie plus particulièrement l'organisation globale de l'enseignement, et donc la façon dont elle peut prendre en compte cette contrainte que le calcul formel fait subir aux représentations en installant une représentation symbolique de façon très prégnante. Cela implique de porter le regard sur les différentes représentations en jeu en analyse et sur les équilibres à trouver entre ces représentations.

En s'inspirant de (Tall, 1996), Artigue et Lagrange, 1999 ont présenté ces représentations en termes de rapports possibles aux objets de l'analyse s'organisant en trois niveaux.

1. Le rapport «enactive»<sup>49</sup> aux phénomènes fonctionnels (dépendance, limites...) ou différentiels (accroissements, extremums...) se situe au niveau des connaissances quotidiennes ou construites antérieurement. Dans ce rapport, l'élève fait fonctionner des connaissances «en acte», comme s'il savait de l'analyse, mais en utilisant seulement les modes d'expression et de raisonnement qui lui sont familiers. L'étude du langage des limites, explicitement au programme de première S, donne par exemple une première signification à cette notion en travaillant sur les formulations à partir d'exemples divers explorés numériquement et graphiquement : les élèves précisent leur idée de la limite, passant d'une formulation du type « $f(x)$  se rapproche de zéro quand  $x$  se rapproche de zéro» à « $f(x)$  est aussi près qu'on le veut de zéro pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de zéro». L'élève travaille alors la notion de limite, mais sans l'exprimer à ce stade dans un registre calculable, ce qui est bien représentatif d'un rapport « enactive ».
2. Le rapport « manipulative » constitue un second niveau, celui que l'analyse du lycée cherche à mettre en place. Les concepts de limite et de dérivée, puis d'intégrale prennent une forme calculable à partir d'études numériques, graphiques, puis symboliques. L'accent est mis davantage sur l'existence et le fonctionnement de ces objets calculables que sur leur définition et leur statut théorique
3. Dans le rapport « formel », au troisième niveau, les objets et les notions sont en revanche assujettis à des définitions sur la base desquelles se construisent les preuves. Le plus souvent, l'élève découvre vraiment l'analyse formelle seulement en entrant à l'université, ce qui crée pour lui une rupture importante avec l'analyse du secondaire. C'est pourquoi il semble important de commencer à faire vivre ce rapport formel dès le secondaire.

Comme on le voit, les concepts d'analyse vivent de façon variée dans ces différents rapports et un élève ne peut vraiment les comprendre que si l'organisation de l'enseignement lui permet de les aborder effectivement dans ces différents modes en interaction. De plus, dans chaque mode, différents registres de représentations<sup>50</sup> (numérique, graphique, symbolique) interviennent et l'importance d'un travail intra et inter registres est soulignée dans les études didactiques en analyse. Pour l'enseignement, un certain équilibre est à trouver, mais, comme

---

<sup>49</sup> Nous avons préféré conserver les termes anglais qui n'ont pas de correspondant immédiat en français.

<sup>50</sup> Dans le tableau initial, David Tall distingue ces registres seulement dans le « theoretical calculus ».

le souligne Tall (1996), il n'est pas aisé de faire un choix, car des élèves de profils cognitifs différents peuvent ne pas profiter de la même façon d'un choix donné.

Un instrument, apportant des facilités d'action dans un domaine donné va favoriser des schèmes dans ce domaine et donc privilégier des représentations au détriment d'autres. Nous avons vu ainsi plus haut comment, avec leur calculatrice graphique, des élèves peuvent réduire leur vision de la résolution d'une équation au comptage des solutions sur l'écran graphique. De même, nous avons vu que les commandes symboliques du calcul formel peuvent installer des schèmes limitant la compréhension des concepts de l'analyse à une représentation « manipulative-symbolique » très pauvre. La tendance spontanée est ainsi de réduire la compréhension d'un concept aux représentations que l'instrument rend les plus accessibles. Il est donc important que l'enseignement prenne en charge la réalisation d'un équilibre où les schèmes instrumentaux participent à la variété et à l'interaction des représentations, plutôt qu'à leur appauvrissement.

Un tel équilibre suppose une vigilance à deux niveaux (Lagrange, 1999b) :

1. au niveau global de l'organisation des contenus. Pour qu'une représentation « manipulative-symbolique » d'un concept, comme par exemple la dérivation ne devienne pas hégémonique, il semble important qu'elle ne soit pas sur une longue période la seule à intervenir. Comme cette représentation porte plutôt sur l'aspect outil du concept, il est intéressant de faire jouer la dialectique « outil-objet » (Douady, 1988) pour favoriser une alternance entre des phases où le concept est construit et étudié comme modélisation calculable d'entités « enactive », et d'autres où il sert à la résolution de problèmes. Cela implique aussi que des stratégies d'utilisation des commandes symboliques soient clairement replacées dans une telle perspective, et non dans celle d'une simple introduction du concept en vue de ses applications<sup>51</sup>.

---

<sup>51</sup> La littérature sur le calcul formel (par exemple Berry et al., 1994) désigne par « black-box- white-box » un « processus d'enseignement » où les élèves sont supposés « lire » dans les résultats du calcul formel des règles opératoires, par exemple celles de la dérivation, et construire à partir de cette lecture une compréhension du concept. Plusieurs auteurs (Pozzi, 1994), (Drijver, 1996) ont montré d'une part les difficultés des élèves à réellement interpréter les feedback du calcul formel et d'autre part que la compréhension ainsi construite est nécessairement limitée aux aspects symboliques.

2. au niveau local de la pratique quotidienne. Des résultats obtenus de façon symbolique avec la machine peuvent être en permanence confrontés à leur implication dans d'autres registres et niveaux de représentation, dans une pratique de changement de registre et de cadre dont Guin et Trouche (1999a) ont justement souligné qu'elle ne peut être laissée à l'initiative spontanée de l'élève.

Il est possible de se reporter à (Artigue, et al., 1997), à (Artigue, Lagrange 1999) ou à (Lagrange, 1999b) pour une mise en pratique de ces principes.

### La variabilité des genèses individuelles

Dans le paragraphe qui précède, nous avons vu la genèse comme un processus « officiel », se déroulant dans la classe et sur lequel l'enseignement peut agir notamment par une organisation didactique des activités tenant compte de la présence de l'instrument et de son interaction avec les apprentissages mathématiques. Pour être complète, une étude de la genèse instrumentale doit aussi s'intéresser à l'histoire individuelle des rapports entre l'instrumentation et le développement des connaissances chez un élève. En effet l'élève, s'il se situe bien dans le contexte social de la classe, n'en développe pas moins son instrumentation personnelle, ses apprentissages propres, dans un mode d'interaction qui peut lui être particulier.

Cette question de la genèse individuelle a fait l'objet de deux approches. La première est une typologie de comportements issue des travaux de l'équipe de Montpellier (Guin, Trouche, 1999). La seconde est une approche biographique obtenue à partir des observations réalisées par interviews au cours de la recherche DIDIREM sur l'intégration de la TI-92 (Artigue et al., 1998). Je vais présenter ces deux approches puis étudier leur complémentarité.

#### *Une typologie de profils*

Dans les recherches de l'équipe de Montpellier, cinq profils-types ont été déterminés a priori, de façon à apprécier la diversité des modes d'instrumentation. L'observation d'élèves au cours de séances dans des classes équipées de calculatrices à calcul formel TI-92 a permis d'étudier comment ces profils évoluent au cours du processus d'instrumentation.

- Dans le profil scolaire, peu d'actions sont entreprises, la mise en œuvre de chacune d'entre elles demandant beaucoup de temps à l'élève. L'action prend la forme de « copier-coller » à partir de résolutions antérieures. L'adaptation à une calculatrice nouvelle pose

beaucoup de problèmes, notamment syntaxiques. Ensuite, l'élève utilise la calculatrice comme une béquille. Son utilisation se réduit à traduire pour la machine les questions posées et à tenter d'interpréter les résultats.

- Le profil « bricoleur » est marqué par une investigation forte. La calculatrice est la source d'information principale et renforce une tendance à considérer la preuve comme une accumulation d'indices concordants. Le passage d'une calculatrice graphique à la TI-92, peut entraîner, pour certains élèves de ce profil, un effort de rationalisation des démarches de résolution et de preuve rendu nécessaire par la complexité de l'instrument.
- Le profil « expérimentateur » utilise aussi la calculatrice comme source d'information, mais compare et coordonne davantage avec les résultats que ses connaissances mathématiques lui permettent d'obtenir. L'adaptation à la TI-92 est d'abord problématique, du fait du rapport plus complexe que cette calculatrice entretient avec les mathématiques. Ensuite son utilisation renforce les démarches de contrôle et de confrontation.
- Le profil « rationnel » est marqué par l'application méthodique de techniques. L'adaptation à une calculatrice nouvelle est relativement aisée. La calculatrice joue alors le rôle d'un cahier de brouillon interactif. Elle transforme et enrichit le travail mathématique (conjectures, changements de registres, vérifications).
- Le profil « théorique » est marqué par l'utilisation systématique de références mathématiques pour interpréter les observables et diriger l'action sur la calculatrice. L'élève va mobiliser d'abord ses connaissances mathématiques, avant d'expérimenter. L'adaptation à une calculatrice comme la TI-92 peut être problématique car l'élève ne trouve pas tout de suite comment implémenter les objets qu'il connaît, mais ensuite le travail est méthodique. La TI-92 renforce une tendance naturelle au désintérêt pour les calculs élémentaires (traités par la machine) et à la fixation sur les problèmes théoriques généraux.

La finalité de cette typologie n'est pas d'appliquer une étiquette à tel ou tel élève observé, dans le but d'expliquer son comportement. Ce serait réduire une réalité dont nous verrons la complexité dans l'approche biographique. Ces profils doivent servir à appréhender la variabilité de la genèse instrumentale dans l'apprentissage des mathématiques, ce que

Trouche appelle la « géographie de la classe », et son évolution<sup>52</sup>. Ils sont particulièrement utiles pour l'analyse a priori d'une situation de résolution ou d'enseignement. Guin et Trouche (1999) montrent notamment comment chacun des profils va utiliser de façon spécifique les possibilités de la machine pour déterminer la limite à l'infini d'un polynôme, et quelles représentations de la notion de limite vont pouvoir se construire en fonction de cette utilisation. Ils montrent aussi comment l'introduction de la commande symbolique *limit* va interagir de façon différente d'un profil à l'autre avec les représentations du concept de limite construites antérieurement.

### ***L'étude biographique***

L'étude biographique de l'instrumentation d'une calculatrice à calcul formel comme la TI-92 a été amorcée dans (Artigue et al., 1998), et se poursuit dans la thèse en cours de Defouad. Dans les deux classes participant à l'expérimentation en première année, une série d'élèves (neuf dans une classe, et sept dans l'autre) a fait l'objet d'un suivi particulier par interview trois fois dans l'année. Chaque entretien comportait systématiquement des questions visant à conduire l'élève à préciser l'utilisation qu'il avait faite de la TI92, en particulier pendant le contrôle précédant l'entretien et une étude de fonction à mener avec la calculatrice rapidement (environ 15 minutes) pour nous permettre de cerner l'évolution de l'instrumentation de la machine dans cette tâche classique du niveau de la première S.

Les entretiens étaient enregistrés. De plus, l'élève, pour l'étude de fonction, utilisait une calculatrice rétroprojetable reliée à une tablette qui nous permettait de suivre son travail, sans trop l'importuner. Nous enregistrions également des écrans de la calculatrice (voir Lagrange, Defouad, à paraître).

L'analyse des données recueillies a été menée de deux façons complémentaires. Dans l'une des classes (neuf élèves), la genèse a été étudiée dans le travail d'étude de fonction demandée aux élèves : l'instrumentation des différents modules de la calculatrice (graphique, numérique, formel) a été repérée dans son évolution d'un entretien à l'autre. Dans l'autre classe (sept élèves), nous avons étudié le rapport plus global de chaque élève à sa machine,

---

<sup>52</sup> Trouche précise aussi que les étiquettes (« bricoleur », etc.) sont des raccourcis commode, mais que les profils ne saurait s'y réduire.

tentant de repérer ainsi des modes typiques d'interaction entre instrumentation de la TI92 et développement des connaissances mathématiques.

L'étude de la genèse dans le travail d'étude de fonction montre que le rapport initial à la machine est dominé par l'expérience d'utilisation des calculatrices graphiques : les modules graphiques et numériques jouent un rôle essentiel. L'élève repère visuellement et qualitativement les variations par le tracé graphique, ensuite il les quantifie à l'aide des fonctionnalités numériques approchées. Même dès ce premier stade de la genèse, des niveaux d'instrumentation différents apparaissent, de la lecture qualitative des tracés dans la fenêtre standard à une lecture quantifiée ou ajustée par changement efficace de fenêtre.

A ce stade, le calcul formel proprement dit joue un rôle mineur. Par la suite, l'introduction des dérivées permet de nouvelles actions conduisant à d'autres niveaux d'instrumentation : l'élève peut tracer non seulement la fonction mais aussi sa dérivée et faire intervenir des lectures graphiques et numériques des deux fonctions conjointement, utiliser des commandes spécifiques de la fenêtre graphique pour quantifier l'étude des variations. Les élèves qui ont un rapport très positif aux technologies informatiques saisissent en premier ces possibilités, sans toutefois voir toujours les limites inhérentes aux approximations qui caractérisent ces commandes.

Plus tard dans l'année, quand le contrat didactique évolue pour placer l'étude analytique de la fonction au premier plan, l'instrumentation de la fenêtre principale, qui, rappelons le, fonctionne dans la calculatrice utilisée par les élèves comme un module de calcul formel, devient essentielle. Les modules graphique et numérique deviennent des sources d'information complémentaires utiles pour vérifier, lever des doutes... plus que comme source de conviction. Là encore, plusieurs niveaux peuvent être distingués. Certains élèves en restent au stade précédent d'instrumentation de leur machine comme « calculatrice graphique » : seuls les schèmes graphico-numériques sont réellement installés. Chez d'autres, des schèmes symboliques existent, mais ils sont trop faibles pour apporter la conviction, et l'élève s'en remet principalement à l'exploration graphique ou numérique. L'instrumentation la plus achevée est celle où les schèmes symboliques fondent la conviction de l'élève, les schèmes graphico-numériques servant à la vérification et à la confrontation. Son efficacité dans les situations problématiques (fonction nouvelle pour l'élève, inconsistance entre les différentes informations recueillies...) dépend de la façon dont l'élève est capable de coordonner ses schèmes symboliques d'une part, et graphico-numériques d'autre part.



L'évolution des techniques d'étude et des schèmes correspondants se double d'une évolution de la nature du recours à la machine. Dans un premier temps, les nombreuses possibilités nouvelles qu'offre la machine déterminent des phénomènes d' « oscillation », de « zapping », de « sur-vérification » où l'élève change fréquemment de stratégie sans que l'on puisse identifier un projet cohérent, et multiplie les vérifications en utilisant la diversité des moyens fournis par la machine. Cette phase dure plus ou moins longtemps selon les élèves, et des stratégies plus stables apparaissent. Cependant, la recherche de preuves par cohérence de multiples vérifications pragmatiques tend à perdurer. Il en résulte une grande diversité des recours à la machine et des significations mathématiques associées, diversité qui peut être d'autant plus grande que, contrairement à ce qui se passe en papier/crayon, il n'y a pas, dans l'enseignement, de routinisation de techniques instrumentées spécifiques.

### ***Différents modes de relation entre instrumentation et développement des connaissances***

En considérant, dans l'autre classe observée, le rapport plus global de chaque élève à sa machine, nous avons repéré des modes typiques de relation entre instrumentation et développement des connaissances mathématiques.

Dans un premier mode, des difficultés mathématiques accompagnent une instrumentation faible. L'élève manque de souplesse dans son utilisation de la machine (mémoire, modules...) et ses limites mathématiques l'empêchent de dépasser le niveau de la lecture du résultat ou du graphisme. Dans un cas observé, l'élève parvient à dépasser ses difficultés mathématiques tout en gardant une instrumentation limitée : face aux difficultés ressenties dans l'appropriation de la machine, l'élève fait le choix de se centrer plus directement sur les mathématiques.

Dans un second mode, une instrumentation réussie, mais limitée peut coexister avec un bon niveau mathématique. L'élève apprend à se servir de la machine dans le cadre collectif de la classe, mais, comme il réussit bien sans elle, il considère cet aspect de son travail comme secondaire et fait plus confiance à ses calculs « manuels » ou à son raisonnement, notamment dans son travail personnel et en contrôle. Son instrumentation lui permet de s'intégrer dans le travail collectif en classe mené sur calculatrice, mais il reste pour cet élève une certaine distance entre le travail sur calculatrice et le travail proprement mathématique.

Dans un troisième mode, le lien entre instrumentation de la calculatrice et développement des connaissances mathématiques est plus tangible. Dans ce mode, les élèves utilisent leur

machine dans les différents aspects de leur travail mathématique, en classe, en contrôle, à la maison. Ils discernent des apports de la machine dans le domaine des apprentissages et de la compréhension et savent en reconnaître les limites. Bien sûr, cette description générale recouvre des réalités individuelles qui peuvent être très diverses. La calculatrice ne compense pas toutes les difficultés. Par exemple, un élève avait une instrumentation assez complète de la machine, une bonne compréhension en mathématiques, mais aussi des difficultés en temps limité. Il voulait tirer parti de la machine en contrôle, où le temps limité intervient pour beaucoup, mais au cours de l'année, il n'a pas maîtrisé suffisamment cette utilisation de la machine pour obtenir les meilleurs notes qu'il souhaitait aux contrôles. Il existe aussi des élèves qui tirent un profit important de l'utilisation de la machine. C'est le cas par exemple d'un redoublant dont l'instrumentation très positive a constitué le point d'appui qui lui a permis un nouveau départ en mathématiques.

Cette description en trois modes n'épuise certainement pas la variété des cas. Elaborée à partir de l'observation d'un petit groupe d'élèves elle montre seulement qu'il n'y a pas de relation univoque entre instrumentation et développement des connaissances. Elle est cohérente avec la typologie de comportements présentée ci-dessus : le comportement « copier-coller » domine par exemple le groupe des élèves ayant des difficultés et une élève parvient à s'en détacher seulement au prix d'un certain abandon de la machine.

### ***Tendances, diversité et déterminants***

Les différentes approches présentées ci-dessus permettent bien de cerner la variabilité des genèses instrumentales et de leurs rapports avec l'apprentissage des mathématiques. La typologie montre des grandes tendances, particulièrement utiles pour l'analyse a priori des situations d'apprentissage avec instrument. Elle permet de passer d'une analyse a priori globale marquée par des hypothèses générales sur le comportement des élèves, à une analyse plus différenciée tenant compte de la diversité des rapports possibles à la machine et aux connaissances mathématiques. L'approche biographique permet d'appréhender la complexité de l'histoire individuelle de ces rapports. Si, pour une tâche donnée, une évolution globale des techniques d'utilisation, des modes de recours à la machine et des schèmes associés est prévisible, le rythme auquel cette évolution s'effectue et les formes de cette évolution varient beaucoup d'un élève à l'autre. Au delà, l'étude de rapports plus globaux montre comment tous les facteurs intervenant dans la scolarité interagissent avec l'instrumentation : la

calculatrice n'est pas neutre vis à vis des apprentissages, et son instrumentation va nécessairement s'inscrire dans les multiples déterminants qui influent sur l'apprentissage.

## L'action de l'enseignant

Parmi les déterminants de l'instrumentation, l'action du professeur est bien sûr à considérer en priorité. Plus haut, dans ce chapitre, en prenant comme exemple l'apprentissage des débuts de l'analyse, j'ai expliqué pourquoi l'enseignement, s'il veut orienter le développement des schèmes instrumentaux dans un sens productif, doit prendre en compte les caractéristiques de la genèse instrumentale. J'ai montré aussi que cette prise en compte se traduit par des choix d'organisation des contenus et activités, aussi bien que dans l'action quotidienne de l'enseignant.

### *Quel travail sur les techniques ?*

Dans ce paragraphe, à partir de l'approche individuelle de la genèse qui précède, je vais revenir sur le comportement quotidien du professeur et à son effet sur l'évolution des schèmes et techniques. Nous avons vu que la diversité des genèses peut partiellement s'expliquer par le fait que les techniques « instrumentées » ne font pas nécessairement l'objet d'un travail de même nature que celui que les professeurs demandent aux élèves dans le cas des techniques « habituelles ». Au second chapitre de ce document, j'ai observé que l'usage discontinu du calcul formel tel que nous l'avions rencontré dans la recherche DERIVE, ne favorisait pas ce travail : les professeurs ne voyaient pas la nécessité de s'attarder sur des techniques qui pouvaient vivre seulement dans les temps limités d'utilisation du logiciel. En revanche, les conditions du travail sur les techniques instrumentées étaient a priori meilleures dans l'expérience d'intégration d'une calculatrice à calcul formel, que j'ai étudiée dans ce chapitre, mais j'ai noté à partir de l'étude biographique du paragraphe précédent que, malgré ces conditions, les évolutions des élèves restent très hétérogènes. L'observation qui a permis cette étude a été effectuée au cours de la première année, période où les professeurs découvraient ces nouvelles techniques instrumentées. Leur incertitude quant à ces techniques et à leur évolution les a probablement conduits à privilégier l'initiative des élèves, la construction en relative autonomie de leurs procédures de résolution, ce qui a sans doute contribué à la diversité des parcours observés.

### *Quels effets sur l'instrumentation des élèves ?*

Des différences constatées entre les deux classes observées m'ont fait apercevoir comment l'action du professeur peut influencer sur les schèmes d'usage. Dans une classe, l'étude de fonctions a été dirigée assez vite vers la méthode standard par dérivation, alors que dans l'autre, le professeur a permis aux méthodes graphico-numériques d'exister plus longtemps. Les techniques ont donc « convergé » plus rapidement dans la première classe que dans la seconde, où des phénomènes d'« oscillation », de « zapping », de « sur-vérification » se sont produits plus longtemps. Cependant, j'ai pu observer en fin d'année, que les élèves de la première classe étaient parfois désarmés face à des incohérences de leur étude analytique telles qu'une fonction trouvée décroissante entre deux valeurs ordonnées de façon croissante. Dans la seconde classe, en revanche, les élèves avaient un arsenal plus important de moyens de lever les doutes et les incohérences : ils utilisaient le graphisme et la table de valeurs numériques, observaient la fonction aussi bien que la dérivée... Bien sûr cette observation reste qualitative, et il faut bien considérer les multiples autres déterminants qui, nous l'avons vu, influencent la genèse. J'ai développé la comparaison de ces deux classes dans (Lagrange, 1999a) et observé notamment l'influence de rapports différents aux mathématiques et d'une expérience antérieure différente de l'utilisation de calculatrices graphiques.

Kendal et Stacey (1999) ont mené une des rares études de l'influence du professeur sur les stratégies d'utilisation du calcul formel par les élèves. Cette étude, faite sur trois classes équipées en TI-92, et portant sur les débuts de l'analyse, montre des utilisations très différentes de la calculatrice, d'une classe à l'autre. Les auteurs ont également recueilli des données sur les caractéristiques de l'enseignement de chacun des professeurs. Bien qu'enseignant le même « projet », chaque professeur a son propre style d'enseignement qui se traduit dans le rapport à la machine dans la classe : l'un privilégie un style « direct », et dirige les usages de la calculatrice, les autres font de « la découverte guidée » où les élèves ont plus d'autonomie dans leur usage de l'instrument. Les choix personnels s'observent aussi dans les utilisations de la calculatrice : un seul des trois professeurs privilégie les approches graphiques et l'interaction graphique/symbolique. Le résultat essentiel est que l'influence de ces choix et style, s'observe de façon directe dans les utilisations de la calculatrice par les élèves, et que cette « homogénéisation » des usages est plutôt appauvrissante. C'est particulièrement le cas dans la classe où le professeur privilégie le style direct et les approches algébriques à l'aide du calcul formel, sans interaction avec les techniques papier/crayon et avec le graphisme : les élèves utilisent sans discernement le calcul formel dans des approches

uniquement algébriques ce qui leur permet une certaine réussite aux tâches les plus calculatoires. Mon interprétation est qu'une intervention trop directe du professeur sur les usages de la machine aurait ainsi tendance à appauvrir les schèmes d'utilisation, notamment du calcul formel.

### *Quels dispositifs, quelles compétences du professeur ?*

Il est vrai par ailleurs qu'une autonomie totale laissée aux élèves dans l'utilisation de leur machine conduit, nous l'avons vu avec les calculatrices graphiques, au développement de schèmes d'usage de l'instrument liés à des rapports spécifiques souvent inadéquats aux objets de savoir. Entre cette autonomie et une intervention trop directe du professeur, un espace doit exister pour que l'élève puisse développer ses schèmes d'utilisation propres dans une élaboration collective propice à la diversité, et des situations de classe doivent permettre à ces schèmes de s'inscrire dans des rapports adéquats aux concepts mathématiques. Pour organiser cet espace et ces situations, l'action du professeur est certainement essentielle mais les formes qu'elle peut prendre ne sont pas simples à définir et à évaluer.

Les recherches menées à Montpellier (Guin, Trouche, 1999b) ont étudié cette question et mis en évidence deux axes possibles de l'action de l'enseignant relative aux instruments :

1. La mise en place d'une organisation de l'étude visant à la socialisation des techniques instrumentées.
2. Une intervention explicite de l'enseignement pour contrôler les processus d'instrumentation dans la classe.

Je vais tenter de montrer comment ces deux axes se concrétisent dans trois dispositifs d'études : le cours, les travaux pratiques (T.P.) et les problèmes sur un temps plus long.

Le cours, tel qu'il a été expérimenté à Montpellier, combine l'utilisation d'un tableau et d'un écran sur lequel une des calculatrices de la classe est rétroprojetée, renvoyant ainsi à la dualité fondamentale que doit constituer, dans l'activité de l'élève le travail "papier/crayon" et le travail avec calculatrice. Le professeur ne monopolise pas cet espace « officiel ». Tout comme un élève peut-être « envoyé au tableau », la calculatrice rétroprojetée est activée par les élèves à tour de rôle ou pour une intervention pertinente à un moment donné. L'élève « aux commandes » fournit une référence instrumentale commune pour la classe, qui favorise un débat dans la classe, une explicitation des démarches, et contrebalance le caractère « privé » du travail dans l'espace restreint de la calculatrice personnelle de chaque élève. Le caractère

collectif du travail avec instrument pendant le cours impose une négociation permanente de l'usage des calculatrices : dans certaines phases les calculatrices sont fermées (et le rétroprojecteur éteint), dans d'autres le travail est guidé strictement par l'écran projeté, et enfin le travail avec la calculatrice peut être libre pendant un temps donné (pour un exercice, une mise au point d'une conjecture, l'observation d'un nouvel objet, la mise à l'épreuve d'une nouvelle commande...). Le professeur a ainsi à animer le cours, à négocier les usages, tout en restant suffisamment en retrait par rapport à l'élaboration collective. Cela nécessite de sa part une bonne connaissance de l'instrument, de ses potentialités et de ses contraintes ainsi que des processus d'instrumentation à l'œuvre chez les élèves.

Deuxième dispositif, les travaux pratiques sont institués régulièrement comme dans une classe « non instrumentée » : élèves regroupés pour un travail d'équipe, pas d'intervention directe du professeur sur la résolution. La prise en compte de l'instrument s'exerce d'abord dans la tâche demandée aux élèves. L'énoncé va dépendre bien sûr des connaissances présentes et visées, mais aussi prendre en compte les possibilités d'utilisation de l'instrument pour la résolution, les caractéristiques de l'instrumentation par les élèves au moment où il est proposé. Il peut notamment jouer sur des situations où la première réponse donnée par l'instrument est trompeuse et où, par conséquent, un recul réflexif est indispensable pour comprendre un phénomène. Un rapport de recherche est demandé aux élèves. Il permet l'explicitation des démarches avec calculatrice, l'évaluation de la pertinence des résultats... Il sert aussi au professeur de recueil d'information sur l'évolution des processus d'instrumentation et de conceptualisation. Tout travail mathématique, « instrumenté » ou non, doit articuler le temps en classe et le temps autonome « à la maison ». Il est donc intéressant que l'énoncé comporte une « question du jour » et des « questions du lendemain » permettant de remettre la question en chantier, d'approfondir la preuve, d'envisager une généralisation possible, de proposer d'autres pistes de recherche.

Le troisième dispositif consiste en des moments de recherche moins dirigés et plus longs. La combinaison d'un environnement instrumenté (qui suscite de nombreuses questions pas toujours prévues ni mêmes prévisibles par le professeur) et d'un processus de recherche institué dans la classe peut faire émerger à l'occasion d'un TP, d'un cours, d'une lecture, une question plus vaste qui ne peut pas toujours être traitée dans le cadre de la classe. Différentes propositions de résolution, globales ou partielles, sont proposées par leurs découvreurs à l'ensemble de la classe, le problème est alors relancé sous une autre forme... Cela nécessite un temps souvent long de maturation, de reformulation, d'échange. Nous retrouvons le dispositif

de «problème long» dont nous avons vu la productivité avec la situation des factorisations aux chapitres 2 et 3.

Dans les dispositifs de travaux pratiques et de problème long, l'intervention du professeur va viser l'explicitation des démarches et des techniques d'usage de l'instrument, favoriser l'interaction du travail avec instrument et du travail papier/crayon. D'où, à nouveau, la nécessité d'une bonne connaissance de l'instrument et des processus d'instrumentation des élèves.

En conclusion de ce paragraphe, il nous faut constater le peu de recul dont nous disposons sur l'action du professeur en situation instrumentée. Nous savons qu'il y a des différences notables qui constituent des déterminants forts, qu'une absence de prise en compte de l'instrument a des effets négatifs sur les conceptualisations, mais qu'une intervention trop directe peut avoir un effet appauvrissant sur les schèmes. Le travail fait à Montpellier ouvre la voie à des recherches sur l'enseignant en situation instrumentée : repérage des dispositifs, mise en évidence des compétences nécessaires de l'enseignant...

## Conclusion

Ce chapitre avait pour but d'explorer ce que pourrait être une approche cognitive de l'utilisation du calcul formel par les élèves pour des apprentissages mathématiques. Nous avons vu qu'une étude didactique ne peut se contenter d'une théorisation du sujet face à une tâche ou un problème. Pour qu'un didacticien puisse s'appuyer sur une approche cognitive, il faut que celle-ci interroge les situations auxquelles l'élève va être confronté dans un apprentissage donné, de façon à considérer l'impact sur ces situations des phénomènes observés dans l'interaction sujet-problème. Après l'étude des approches initiales, de l'approche EIAH et « webbing », nous avons vu apparaître l'approche « instruments » et comment cette approche permet d'étudier les rapports des élèves avec une calculatrice « à calcul formel », ainsi que l'action du professeur dans une classe « instrumentée ». Le bilan de ce chapitre sera tiré dans la conclusion générale qui va suivre.

# Conclusion

Je me suis donné pour but, dans ce document d'habilitation, de faire le point sur les travaux concernant l'introduction du calcul formel dans l'enseignement scolaire des mathématiques. J'ai d'abord examiné les questions que cette introduction pose à l'enseignement des mathématiques et distingué trois champs :

- La viabilité.

Les matériels progressent, des logiciels autrefois disponibles seulement sur de grosses unités existent maintenant sur les calculatrices des élèves. La conception des logiciels et des interfaces s'améliore. Le ministère, les professeurs, les élèves et les parents sont de plus en plus réceptifs aux discours sur les technologies d'information et de communication. Ces circonstances favorables sont-elles suffisantes pour assurer l'existence des nouveaux moyens technologiques dans l'enseignement, en dehors d'expériences limitées ?

- La transposition didactique.

Les « mathématiques expérimentales » constituent maintenant une activité très visible dans la recherche mathématique en raison du grand nombre de données que l'ordinateur permet d'obtenir dans une théorie donnée. Ce contexte rend élèves et professeurs réceptifs à l'idée de démarches expérimentales. Mais l'enseignement a des buts et des contraintes différents de ceux de la recherche. Les mathématiques expérimentales peuvent-elles servir ces buts et satisfaire ces contraintes ?

- Les techniques.

Sans la technologie, les manipulations symboliques, les techniques mathématiques occupent une place importante dans l'activité des élèves, à côté de dimensions souvent considérées comme plus nobles (compréhension, applications, résolution de problèmes). La technologie change-t-elle réellement les équilibres ? Peut-elle réduire à une place mineure les aspects techniques du travail mathématique ?

Ces questions s'adressent, bien sûr, à tous les moyens technologiques proposés dans l'enseignement. Nous avons vu au premier chapitre que, pour le calcul formel, elles sont d'une actualité forte, et qu'elles conditionnent en partie la place des mathématiques dans la formation intellectuelle des élèves.



Examinant la littérature de recherche sur le « calcul formel » nous avons pu constater que, quand les travaux comportent des hypothèses, celles-ci portent le plus souvent sur les apports supposés du logiciel. Leurs auteurs posent ainsi implicitement que le calcul formel est viable, que les mathématiques expérimentales se transposent sans difficulté, et que les techniques peuvent occuper une place mineure dans les apprentissages.

Parmi ces travaux, il existe des articles où des apports très généraux à la conceptualisation, à la remédiation des difficultés des élèves sont supposés. Les conclusions de ces articles sont généralement enthousiastes, mais non appuyées sur une méthodologie solide.

En spécifiant mieux les apports du calcul formel qu'ils supposent, d'autres articles donnent un statut d'hypothèse de recherche à ces apports. Généralement, la méthodologie est basée sur la comparaison d'un groupe utilisant le calcul formel et d'un groupe « de contrôle ». Assez souvent, l'interprétation que l'article fait des résultats de la comparaison laisse le lecteur sceptique : les améliorations constatées peuvent être dues à bien d'autres facteurs que l'introduction du calcul formel. De plus, les études comparatives les plus récentes supportent très faiblement les hypothèses optimistes.

D'autres articles, plus réflexifs, reconnaissent que l'utilisation du calcul formel « ne va pas de soi » et problématisent à des degrés divers les champs de questions mentionnés ci-dessus. Les questions les plus générales trouvent peu de réponse. Les articles qui posent des questions précises sur les élèves, sur les enseignants, sur l'instrument ou sur des situations spécifiques permettent en revanche d'apercevoir et de comprendre des difficultés liées à l'utilisation du calcul formel par les élèves. Ils montrent une réalité déjà perceptible dans certaines études comparatives : même dans le cas où l'introduction du calcul formel est opérée par des expérimentateurs convaincus, l'introduction du calcul formel ne se fait pas facilement, et ses effets ne vont pas automatiquement dans le sens d'une plus grande réflexivité, d'une meilleure conceptualisation.

Les recherches menées dans le cadre de l'équipe DIDIREM, d'abord sur DERIVE, puis sur la TI-92, les recherches menées à Montpellier (équipe ERES) sur les calculatrices graphiques puis sur la TI-92 ont permis d'élargir et de synthétiser ces questions en étudiant l'« intégration du calcul formel ». Elles ont montré que les difficultés repérées dans les articles réflexifs ne sont ni transitoires ni anecdotiques. Il faut donc abandonner les hypothèses optimistes et rechercher quelles spécificités du calcul formel font que sa viabilité semble difficile, alors

même qu'il existe un contexte « transpositif » favorable et des professeurs prêts à faire l'effort que suppose l'intégration du calcul formel.

Les commandes du calcul formel permettent aux élèves d'obtenir aisément des résultats, d'avoir une activité expérimentale mais cette facilité ne déclenche pas automatiquement une attitude réflexive face à une situation : l'élève peut enregistrer passivement les résultats ou bien osciller d'une stratégie à une autre, sans exercer sa réflexion sur les résultats obtenus. Il est de plus difficile aux élèves de faire le lien entre l'activité qu'ils développent dans l'utilisation du calcul formel, et leur activité mathématique habituelle sur laquelle ils appuient leur compréhension des mathématiques. Les difficultés de l'enseignement à concevoir des situations d'utilisation productrices d'apprentissages sont donc réelles.

Pour que des élèves puissent développer une réflexion sur leurs actions avec le logiciel, faire le lien entre ces actions et les mathématiques « habituelles » il faut qu'ils puissent organiser et systématiser ces actions en techniques, et articuler ces techniques d'utilisation du logiciel avec les techniques habituelles. Nous sommes loin des hypothèses selon lesquelles il serait possible de diminuer la part de technique dans l'activité mathématique des élèves, d'ignorer les nouvelles techniques d'utilisation, et de faire ainsi accéder les élèves directement à une activité « conceptuelle ». Cette perception du rôle important joué par les techniques « nouvelles » et « habituelles » dans l'utilisation du calcul formel conduit, au contraire, à abandonner l'idée d'indépendance ou de relation à sens unique entre dimension technique et dimension conceptuelle dans l'activité mathématique de l'élève. Elle rejoint la théorie anthropologique, qui avec la notion de praxéologie, permet de penser les techniques comme un niveau important, intermédiaire entre d'une part les tâches et d'autre part le discours (technologique ) et la théorie.

Les techniques « calcul formel » sont sans doute plus faciles et plus rapides à mettre en œuvre que les techniques « habituelles ». Leur élaboration, le travail de réflexion que suppose le passage aux technologies et aux théories n'en demandent pas moins du temps et des efforts, et, pour que ce travail soit possible, il est nécessaire que l'enseignement développe des praxéologies cohérentes. L'intérêt d'un moyen technologique comme le calcul formel n'est donc pas dans une diminution de cette part de technicité, mais bien dans les nouvelles techniques qu'il apporte, susceptibles de s'intégrer à des praxéologies renouvelées. Encore faut-il bien mesurer le travail de conception de nouvelles situations et d'adaptation de

l'enseignement que suppose ce dépassement. Certains exemples montrent qu'un tel bouleversement implique un travail considérable, au plus près des pratiques de l'enseignant.

Une illusion courante est de considérer qu'une praxéologie « intégrant le calcul formel » va permettre de « gagner du temps » ou d'aborder davantage d'aspects d'un même sujet dans le même temps. Même si l'enseignement dispose d'atouts supplémentaires avec ces nouvelles techniques, les conditions du « travail sur la technique » ne sont pas fondamentalement modifiées. Il faut donc que l'enseignement reconnaisse l'importance des techniques dans le travail avec le calcul formel et crée les conditions d'un travail sur ces techniques : recherche à long terme permettant d'éprouver et d'assimiler les techniques, « installation » de l'instrument dans toutes les dimensions du travail scolaire.

Une autre illusion serait de concevoir de façon rigide les relations entre techniques « habituelles » et techniques « calcul formel ». On peut certes concevoir des techniques « calcul formel » généralisant, « amplifiant », les méthodes utilisées en papier/crayon. Par exemple, supposons que des élèves aient élaboré des méthodes d'études de fonctions réelles utilisant à divers degrés les approches graphiques, numériques et symboliques. Leur étude de variations prendra un sens plus général quand ils systématiseront la méthode symbolique, pour, à l'aide du calcul formel, étudier par exemple une famille de fonctions dépendant d'un paramètre. Mais la relation inverse est également possible. Certaines techniques « calcul formel », notamment celles qui utilisent la reconnaissance de pattern, peuvent en effet exister comme mode de résolution efficace d'un problème donné, sans toutefois donner à la solution un caractère suffisamment général. L'élaboration, la mise en œuvre d'une telle technique donnera aux élèves une première compréhension du problème. Une technique « habituelle » pourra ensuite élargir cette compréhension en inscrivant le problème et sa solution dans un cadre plus global., Pour la recherche de la dérivée  $n^{\text{ème}}$  du produit d'un polynôme et de l'exponentielle par exemple, une technique « calcul formel » basée sur la reconnaissance de pattern s'insère bien dans une praxéologie locale permettant notamment de prendre conscience de l'invariance par dérivation de l'ensemble des produits d'un polynôme de degré donné et de l'exponentielle. Les techniques de dérivation employées en « papier/crayon », notamment la dérivation d'un produit, la dérivation des polynômes et de l'exponentielle permettent ensuite de donner une explication plus générale à cette invariance. Ainsi, il n'y a pas de relation à sens unique entre les deux types de techniques, les interactions entre techniques de différents types peuvent être riches et variées.

Comme on le voit, la théorie anthropologique a constitué un cadre théorique productif pour remettre les techniques à leur vraie place. En retour, la recherche sur le calcul formel donne un exemple frappant de l'intérêt d'une analyse des praxéologies dans l'introduction d'une innovation dans l'enseignement. La théorie anthropologique a aussi permis de poursuivre plus en profondeur l'analyse de l'impact du calcul formel sur les praxéologies. En effet, pour comprendre les interactions entre techniques de différents types, pour concevoir le travail sur les techniques, il a été nécessaire d'analyser les praxéologies dans lesquelles elles prennent leur sens et les situations qui vont permettre à ces praxéologies de se développer. Pour cela, j'ai poursuivi plus en profondeur l'analyse de l'activité avec le calcul formel en considérant l'impact des objets qu'il introduit dans la trichotomie technique/technologie/théorie.

J'ai utilisé pour cela la dialectique ostensifs/non-ostensifs, et montré qu'elle permet d'appréhender la complexité des situations d'utilisation du calcul formel. Cette complexité peut en effet se comprendre comme l'apport d'objets ostensifs et non ostensifs nouveaux, ayant des rapports à différents niveaux avec les objets de la pratique habituelle qui continuent à faire référence. Pour l'utilisateur, les ostensifs nouveaux sont visibles par leur syntaxe, apparentée à la syntaxe mathématique, mais marquée par des contraintes informatiques. Ils sont visibles aussi par les gestes qu'ils permettent, gestes dont l'immédiateté existe peu dans la pratique habituelle. C'est cette immédiateté qui va permettre la production d'observables nombreux susceptibles, si la situation s'y prête, de s'intégrer dans des techniques instrumentées. Dans d'autres situations, l'immédiateté peut aussi conduire à des comportements peu réflexifs de « pêche » ou de simple collecte de résultats.

Une propriété importante des ostensifs « calcul formel » est que, dans les praxéologies « assistées par le calcul formel », ils ont des relations aussi bien avec les non-ostensifs mathématiques « habituels » qu'avec des non-ostensifs « informatiques » nouveaux. Dans la situation des factorisations étudiée à titre d'exemple dans les chapitres 2 et 3, les ostensifs nouveaux peuvent être contrôlés par les non-ostensifs de la pratique habituelle, qui trouvent ainsi une nouvelle occasion d'émerger : c'est ce qui fait l'intérêt principal de cette situation pour l'apprentissage de la factorisation. Les ostensifs nouveaux sont aussi dans une relation d'émergence-contrôle avec des non-ostensifs « informatiques » marqués par le caractère effectif et fonctionnel du calcul formel. Les ostensifs du calcul formel se situent ainsi dans une « double référence » à des non-ostensifs mathématiques d'une part, informatiques d'autre part. Cette « double référence » apparaît peu productive dans une séance isolée, mais permet en revanche de faire vivre une situation intéressante sur un temps plus long, tout en donnant

au professeur les moyens de la contrôler : il peut en effet utiliser les nombreux phénomènes produits par la factorisation « informatique » pour relancer la recherche, et revenir aux factorisations « mathématiques » quand il s'agit d'institutionnaliser des connaissances.

Pour bien comprendre la nature des objets tant ostensifs que non-ostensifs que le calcul formel introduit, il est nécessaire de considérer la transmutation informatique, c'est-à-dire la transformation qui fait passer d'un objet habituel à un objet du calcul formel. Une première propriété importante est que la transmutation modifie la nature des objets pour répondre aux contraintes de l'implémentation informatique, aussi bien qu'à la nécessité, pour le concepteur, de faire des choix. Il en résulte que, malgré les améliorations que peuvent apporter les progrès de l'informatique, le changement de nature est « incompressible ». Le problème n'est donc pas d'éliminer la transmutation, mais de trouver les conditions qui assurent sa productivité.

J'ai proposé aussi de considérer la transmutation comme résultant non seulement des choix du concepteur du logiciel et des contraintes du calcul formel, mais aussi de caractéristiques de l'institution ou du sujet. Par exemple, le caractère fonctionnel du calcul formel conduit à ce que la factorisation « informatique » produise comme résultat unique une expression complètement factorisée, alors que la factorisation « mathématique » produit des factorisations plus ou moins complètes, en fonction de l'expression à factoriser et du problème posé. Certains élèves voient bien cette différence, ont conscience du fonctionnement différent du calcul formel et de la nécessité d'élaborer des techniques spécifiques et opèrent ainsi une transmutation adéquate. La conception des transformations mathématiques qu'ont d'autres élèves n'inclut pas la possibilité d'une pluralité de résultats et donc la transmutation produit, pour ces élèves, des factorisations informatiques et mathématiques globalement semblables. Pour ces élèves, la recherche de « factorisations générales » ne se comprend que comme recherche de conjectures sur les factorisations données par le logiciel de calcul formel. Comme on le voit les rapports aux objets mathématiques dans l'institution ou propres au sujet influent sur l'idée que se fait l'institution ou le sujet des objets du calcul formel et donc conditionnent leur utilisation.

L'encapsulation est un autre type de relation, reliant cette fois les techniques habituelles aux ostensifs du calcul formel. Les écritures, les gestes que sont ces ostensifs ne prennent en effet leur sens que comme « résumé instantané » de processus papier/crayon demandant souvent à ceux qui s'y livrent patience, application voire obstination. En ce sens, les objets du calcul formel peuvent aider à faire émerger un concept dans sa dualité « objet-processus ». Il peut

arriver aussi, nous l'avons vu avec le concept de limite, que dans l'utilisation du calcul formel, les techniques disparaissent en tant que processus et que l'hégémonie de l'aspect « objet » ainsi créée appauvrit les représentations du concept. L'encapsulation ne doit donc pas être considérée comme un phénomène a priori positif, mais bien comme une possibilité que l'enseignement doit contrôler.

Dans le document, j'ai insisté sur le rôle des situations d'utilisation pour assurer la productivité mathématique des diverses relations entre objets introduites par le calcul formel. L'exemple des factorisations montre qu'un même problème peut être frustrant pour les élèves dans un temps court face à la machine et que, en revanche, dans un temps long et dans une situation d'échange collectif, sa résolution peut enrichir la capacité des élèves à se référer à des objets (proto) mathématiques, ainsi que leur répertoire de factorisations.

Le rôle des variables liées au logiciel lui-même est aussi à prendre en compte. Les recherches et expérimentations ont porté jusqu'à présent sur des logiciels de calcul formel non conçus spécifiquement pour un usage éducatif, et où peu de choix peuvent être faits en fonction de la mise en place de situations d'apprentissage. Une recherche en cours présentée à la fin du chapitre 3 permet d'apercevoir des spécifications d'environnements de calcul formel permettant une réelle adéquation aux situations d'apprentissage. Il devrait tout d'abord être possible, pour une situation donnée, d'isoler a priori les gestes « calcul formel » les plus significatifs et de définir un cadre pour qu'ils interagissent de façon productive. L'introduction d'éléments de preuve dans l'activité avec le logiciel devrait notamment conduire l'élève à clarifier la portée des différents gestes à sa disposition. Les concepteurs pourraient aussi développer la « granularité »<sup>53</sup> des systèmes de calcul formel : pour une tâche donnée il faudrait, au dessus du niveau des algorithmes du calcul formel, un (des) niveau(x) plus stratégique(s) permettant d'appréhender la tâche à des niveaux plus généraux, et un (des) niveau(x) plus élémentaire(s) permettant d'agir sur des objets plus fins que les expressions sur lesquelles opère le calcul formel.

On se rend compte alors que, malgré un contexte favorable, l'introduction du calcul formel dans les pratiques d'enseignement et d'apprentissage ne va pas sans un travail considérable, qui doit se poursuivre jusqu'aux échelons ultimes de la transposition didactique, notamment celui des pratiques d'enseignement et d'apprentissage dans la classe. Le quatrième chapitre

---

<sup>53</sup> Ce concept est présenté au chapitre 3.

s'est précisément intéressé à l'élève, sujet principal de ces pratiques, aux conditions dans lesquelles son utilisation du calcul formel pourrait s'insérer dans des apprentissages.

J'ai repéré d'abord des approches « cognitives » de l'utilisation de l'informatique pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques qui tendent à considérer les processus d'accommodation et d'assimilation à l'œuvre dans l'interaction de l'élève avec l'ordinateur comme directement producteurs de processus d'abstraction conceptuels. Appliquées au calcul formel, ces approches peuvent avoir pour conséquence de masquer les phénomènes réellement à l'œuvre dans l'activité des élèves.

D'autres approches considèrent l'ordinateur comme un partenaire de l'apprenant qui lui offre des moyens d'abstraction dans une sorte d'intelligence partagée. Cette conception est compatible avec une modélisation de l'interaction logiciel-élève comme celle de deux systèmes cognitifs complexes qui est celle des EIAH. L'approche retenue dans ce document d'habilitation est légèrement différente tout en restant compatible avec la conception de l'ordinateur comme partenaire interagissant avec l'élève. J'ai essayé de ne pas faire trop d'hypothèses sur les capacités du système de calcul formel, le considérant seulement comme un instrument informatique performant mais complexe<sup>54</sup>. L'important est que dans l'interaction avec le calcul formel, l'élève tend à s'adapter dans un sens qui n'est a priori ni nécessairement réflexif ni nécessairement mathématique. C'est seulement dans la durée, et à l'aide de situations spécifiques que l'élève peut prendre conscience des caractéristiques de la machine, et les intégrer dans son travail et sa réflexion mathématique.

L'approche cognitive des instruments permet de préciser ce processus. La notion de schème est particulièrement pertinente pour appréhender les conduites des élèves avec des instruments tels que la calculatrice graphique ou la calculatrice à calcul formel. La genèse par laquelle les schèmes instrumentaux se développent est un processus long, complexe et problématique qui interagit dialectiquement avec le développement des connaissances. Une analyse de cette interaction donne des moyens pour concevoir un enseignement s'appuyant sur un tel instrument. Elle montre comment l'enseignement peut et doit prendre en compte l'élaboration de schèmes d'utilisation par les élèves que ce soit au plan global de l'organisation des situations ou au plan local des situations elles-mêmes. Elle permet d'analyser la variabilité des

---

<sup>54</sup> Ces deux façons de considérer un instrument informatique dans l'interaction avec l'élève seraient à approfondir, notamment dans une étude de l'insertion de l'instrument aux différents niveaux du milieu.

genèses individuelles, ainsi que d'étudier l'action du professeur en situation instrumentée. Ainsi, le didacticien ne dispose pas seulement d'une compréhension de phénomènes en jeu dans l'interaction élève-calcul formel. L'approche cognitive lui permet aussi de prendre en compte l'impact de ces phénomènes sur les situations d'apprentissage qu'il étudie.

A l'issue de la synthèse menée dans ce document d'habilitation j'ai le sentiment de mieux percevoir certaines conditions de viabilité du calcul formel dans l'enseignement. Tout d'abord il faut abandonner la réduction des techniques à un rôle mineur ainsi que l'idée de promouvoir des mathématiques « directement conceptuelles », comme finalité de l'introduction du calcul formel. En revanche, le calcul formel pourrait rendre possible de nouvelles techniques et technologies potentiellement plus riches, plus intéressantes, au prix, il est vrai d'un travail important aux différents niveaux de l'institution scolaire.

Ce travail se décrit en termes de conception de praxéologies et de dispositifs d'enseignement, de nouvelles compétences à acquérir par l'enseignant. De plus, nous venons de le voir, les logiciels actuels de calcul formel sur ordinateur ou calculatrice ne sont probablement qu'une étape dans les instruments proposés aux élèves et il convient de travailler à la conception d'environnements interactifs pour les apprentissages en algèbre et en analyse, plus facilement intégrables dans des situations d'enseignement/apprentissage, en prenant notamment en compte les questions de granularité et de preuve. C'est le projet que je poursuis actuellement.

L'étude menée dans ce document montre aussi l'intérêt de problématiser la transposition didactique des « mathématiques expérimentales ». Si la visibilité nouvelle des mathématiques expérimentales grâce à l'ordinateur participe au contexte favorable au calcul formel, les besoins auxquels elles répondent sont ceux de mathématiciens confrontés à l'inflation des données empiriques, besoins a priori étrangers aux préoccupations scolaires. Dans l'institution scolaire, le calcul formel est davantage une question posée par la disponibilité de plus en plus évidente de « facilités » apportées au travail mathématique des élèves que la réponse directe à un besoin. On peut donc se demander s'il ne serait pas plus simple d'éviter cette nouveauté dont l'intérêt pour l'apprentissage est moins immédiat après une analyse rigoureuse. Ce serait ignorer qu'une « facilité » apportée au travail mathématique des élèves s'imposera de toute façon et ainsi exposer l'enseignement à une instrumentation sauvage interférant négativement avec les conceptualisations mathématiques, phénomène déjà rencontré avec les calculatrices



graphiques<sup>55</sup>. Problématiser la transposition didactique des « mathématiques expérimentales », c'est donc concevoir que des instruments informatiques notamment à calcul formel vont nécessairement s'introduire dans l'activité mathématique des élèves, tout en se donnant les moyens d'évaluer les situations où cette introduction est réellement productive, de façon notamment à pouvoir négocier un contrat clair quant à leur utilisation. D'où, à nouveau, la nécessité d'un travail important aux différents niveaux de l'institution scolaire soulignée ci-dessus.

Sur le plan théorique, une question qui appellerait des travaux supplémentaires, est celle des situations a-didactiques en présence de ces instruments. Dans ce document, j'ai considéré en effet les situations d'apprentissage de façon assez générale, et analysé le rôle que le calcul formel peut y jouer, sans regard particulier sur les situations ou moments a-didactiques, dont on connaît pourtant la place centrale. J'ai insisté sur l'importance de la prise en compte de l'instrument par l'enseignant, de la réflexion instituée dans la classe sur les techniques instrumentées. Il me semble avoir montré leur nécessité, sans prétendre cependant qu'elles sont suffisantes pour faire vivre des situations d'apprentissage productrices.

A la différence de logiciels directement conçus pour que le professeur puisse constituer un milieu a-didactique<sup>56</sup>, le calcul formel propose des algorithmes de traitement symbolique sans donner au professeur beaucoup de moyens d'organiser ce milieu. De plus, l'interaction y est particulièrement complexe. Il y a certes possibilité, d'une construction authentique de connaissance mathématique dans cette interaction mais elle peut aussi être vécue différemment par l'élève. L'interaction peut conduire l'élève à simplement s'adapter à l'instrument sans construction de connaissance mathématique. Il peut aussi tenter de « lire » des propriétés mathématiques sur l'instrument, faisant ainsi, par « effet Topaze » (Brousseau, 1986), l'économie de leur construction. De plus, les utilisations du calcul formel sont parfois présentées comme s'insérant dans une démarche de recherche de problème pour elle-même ou de « modélisation » peu maîtrisable par le professeur (Lagrange, 1996b), renforçant l'idée que les conditions d'un réel apprentissage ne sont pas réunies.

---

<sup>55</sup> Selon des données communiquées par un fabricant, sur cinq calculatrices graphiques vendues aujourd'hui, une est à calcul formel et les prévisions sont nettement à la hausse.

<sup>56</sup> C'est le cas, par exemple, du système de représentations graphiques « Orge » que son concepteur Chauvat, (1998) présente comme un « créateur de milieu », ou « moyeu », (contraction de moyen et milieu).

Les différents exemples examinés dans ce document d'habilitation montrent cependant que, au delà de leur présentation par des professeurs « innovateurs », il existe des situations où il est possible d'analyser rigoureusement les conceptualisations possibles et les variables sur lesquelles le professeur peut agir. Par ailleurs, l'utilisation du calcul formel se situe principalement au lycée, où les notions de « moments » a-didactique, de structuration du milieu, font l'objet de travaux pour, notamment, intégrer davantage l'action du professeur qui paraît si présent à ce niveau (Robert, 1998, Mercier, 1995, Bloch, 1999). Constatant les efforts qui ont été nécessaires pour que la situation du professeur par rapport au milieu, réalité vécue quotidiennement dans les classes, soit théorisée, je voudrais souligner qu'une analyse de même nature d'instruments apparus récemment, demandera elle aussi du temps.

Nul doute, donc, que la question des instruments dans les moments a-didactiques est féconde, que les avancées récentes sur la structuration du milieu seront utiles pour la comprendre, et pourront à un niveau plus pratique, éclairer le travail de développement d'environnements d'apprentissage utilisant le calcul formel qui constitue mon projet actuel.



# Annexe statistique

J'ai présenté dans le second chapitre la recherche DERIVE et montré qu'elle a été un moment important dans l'approche du calcul formel dans l'enseignement : les difficultés relevées lors d'études antérieures n'étaient pas locales ou transitoires, mais étaient la manifestation de phénomènes généraux à l'œuvre dans l'utilisation du calcul formel. L'étude de ces phénomènes a conduit à reconsidérer le rôle des techniques (chapitre 2), à analyser l'intervention des objets nouveaux du calcul formel (chapitre 3) et à rechercher une approche cognitive permettant de dégager des conditions pour que cette intervention soit productive (chapitre 4).

Pour dépasser le caractère local des études antérieures, il était important de mener une étude quantitative avec une méthodologie fiable. Cela supposait une méthodologie de recueil des données et le choix d'un traitement statistique. Le but de cette annexe est d'exposer cette méthodologie, puis comment nous avons été amenés à choisir des traiter les données par analyse implicite (Gras, 1996) et les problèmes auxquels ce choix a conduit. Je montrerai ensuite comment la procédure statistique a évolué pour répondre aux exigences de fiabilité<sup>57</sup>.

## Problématique et Méthodologie

En nous engageant dans la recherche DERIVE, nous faisons l'hypothèse de l'existence de décalages entre les discours et la vie réelle de situations de classe avec DERIVE, et l'analyse didactique devait nous permettre de mettre en évidence les caractéristiques des processus d'enseignement et apprentissage avec DERIVE susceptibles d'expliquer ces décalages.

L'utilisation de la statistique s'est insérée dans cette problématique, avec le dispositif méthodologique suivant :

- Une méthodologie « externe », à base de questionnaires, pour préciser l'étendue de la pénétration de DERIVE dans l'enseignement secondaire et ses effets sur les représentations et pratiques des élèves,

---

<sup>57</sup> L'interprétation des résultats obtenus est résumée au chapitre 2, page 31. Elle est développée dans (Artigue et al, 1995), (Lagrange, 1996), (Lagrange, 1998).

- une méthodologie « interne », basée sur l’observation et l’analyse de situations d’enseignement avec DERIVE.

Ces deux méthodologies étaient vues comme complémentaires : l’observation de situations de classes permettait de décrire des phénomènes liés à l’introduction de DERIVE, et l’approche quantitative avait pour but de créer par des moyens statistiques, une modélisation d’éléments intervenant dans ces situations, susceptible d’éclairer les phénomènes observés.

Pour obtenir les données nécessaires à l’approche quantitative, nous avons interrogé par questionnaire les 465 élèves des 20 classes dont nous savions qu’elles avaient utilisé le logiciel DERIVE. Le questionnaire comportait une cinquantaine de questions. Parmi ces questions, un tableau de 17 opinions proposées aux élèves constituait l’élément central<sup>58</sup>. Ce tableau a permis un traitement automatique et les autres questions ont contribué à la vérification des interprétations des résultats de ce traitement. Les 17 opinions avaient été discutées avec un groupe de professeurs expérimentateurs pour refléter l’éventail des jugements possibles d’élèves sur DERIVE et les mathématiques, à partir des indications données par les premières observations. Comme il est classique dans ce type de questionnaire, les élèves avaient, pour chaque opinion, à faire le choix d’une réponse parmi "Pas du tout d'accord", "Plutôt pas d'accord", "Plutôt d'accord", et "Tout à fait d'accord" (échelle « Likert »).

## Le choix d’un traitement des données

Un premier traitement a consisté à ordonner les opinions selon le critère d’adhésion. Nous avons pondéré chaque réponse en donnant les valeurs respectives 0, 1/3, 2/3 et 1 aux choix "Pas du tout d'accord", "Plutôt pas d'accord", "Plutôt d'accord", et "Tout à fait d'accord", puis calculé la moyenne pour chaque opinion.

Ce traitement nous a permis d’apercevoir que les opinions selon lesquelles DERIVE est utile surtout pour vérifier ses résultats ont l’adhésion la plus forte, que les opinions négatives ou trop confiantes ont l’adhésion la plus faible, et que beaucoup d’opinions, particulièrement celles qui soulignent les apports du logiciel aux apprentissages mathématiques sont en position moyenne. Ce traitement était cependant bien insuffisant pour la mise en évidence de

---

<sup>58</sup> Ce tableau est reproduit dans chacune des publications présentant la recherche DERIVE : (Artigue et al, 1995), (Lagrange, 1996), (Lagrange, 1998).

positionnements d'élèves. Il était clair qu'une méthode multidimensionnelle était nécessaire pour organiser les opinions en positionnements. Cela supposait un certain nombre de choix :

- L'analyse implicative a été choisie d'abord parce qu'il s'agit d'un traitement statistique bien reconnu dans la didactique des mathématiques. De plus, la quasi-implication entre variables correspondait bien aux relations que nous recherchions entre opinions chez les élèves.
- La pondération 0, 1/3, 2/3 et 1 a été maintenue : regrouper ensemble les opinions négatives d'une part, et positives d'autre part, pour déterminer des variables binaires serait revenu à abuser les élèves en leur demandant de s'exprimer de façon nuancée, puis en ne tenant pas compte des nuances qu'ils expriment. Ce choix conduit à considérer des variables « numériques » (non binaires).

## L'analyse implicative : principes et problèmes rencontrés

La mise en œuvre de l'analyse implicative est en principe simple, grâce au logiciel CHIC<sup>59</sup>. Dans une première étape, l'utilisateur entre ses données. Puis le logiciel calcule, pour chaque couple de variables, une « intensité d'implication » représentative d'un certain « seuil de risque » auquel l'analyste peut s'engager sur l'implication dans ce couple. L'utilisateur choisit un seuil au dessous duquel il ne retient pas l'implication de deux variables, et le logiciel fournit un graphe de la relation implicative au dessus du seuil choisi. Dans la pratique, l'utilisateur ajuste le seuil suffisamment bas pour avoir un ensemble intéressant d'implications, mais pas trop bas pour ne pas perdre la crédibilité statistique.

Un problème s'est posé : lors des calculs opérés sur une version pré-expérimentale du questionnaire, il a fallu descendre jusqu'à des intensités d'implication de 0,62 pour avoir un ensemble intéressant d'implications. D'un point de vue statistique, des valeurs aussi proches de 0,5 signifient une quasi-neutralité des observations vis à vis de l'implication. Il a semblé difficile de présenter ces implications comme des résultats dans la communauté de didactique des mathématiques. La résolution de ce problème était donc indispensable pour la validité des résultats. Elle m'a conduit à construire une procédure statistique différente de l'analyse implicative pour rendre compte de la quasi-implication des variables numériques. Pour

---

<sup>59</sup> CHIC 0.51, logiciel pour la Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive. Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

présenter ce travail, je vais préciser les fondements probabilistes de l'analyse implicative puis les discuter en fonction de mon expérience d'utilisateur.

## Les choix des créateurs de l'Analyse Implicative

Dans l'article fondateur de l'analyse implicative, Lerman, Gras, et Rostam (1981) définissent la quasi-implication d'une variable binaire  $a$  vers une variable binaire  $b$  sur une population  $P$ , à partir de la quasi-inclusion de deux ensembles  $A$  et  $B$ ,  $A$  (resp.  $B$ ) étant la partie de  $P$  dont les éléments donnent la valeur 1 à la variable  $a$ , (resp. à la variable  $b$ ). L'indicateur descriptif de « non inclusion » est  $n_{a(1-b)}$  taille de l'intersection de  $A$  et du complémentaire de  $B$  : plus cet indice est faible par rapport à la taille de la population  $P$ , et plus  $A$  pourra être considéré comme « inclus » dans  $B$ .

Ensuite, ils placent les valeurs de cet indicateur sur une échelle probabiliste. Pour cela, ils considèrent une population aléatoire  $\mathcal{P}$  et des parties aléatoires  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de cette population représentatives respectivement de  $A$ ,  $B$ , avec des lois que je vais indiquer plus loin. Ils définissent l'intensité d'implication comme la probabilité que la taille de l'intersection de  $\mathcal{A}$  et du complémentaire de  $\mathcal{B}$  soit supérieure à l'indicateur  $n_{a(1-b)}$ . Plus la valeur de cet indicateur est faible, et plus l'intensité est proche de 1.

Les lois de probabilité des différentes parties aléatoires sont les suivantes :  $\mathcal{P}$  est une population aléatoire dont l'effectif suit une loi de Poisson de paramètre  $n$ . Les parties aléatoires  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{P}$  sont telles que les événements  $\{i \in \mathcal{A}\}$   $\{i \in \mathcal{B}\}$ ,  $i$  parcourant  $\mathcal{P}$  sont indépendants deux à deux et que  $P(i \in \mathcal{A}) = \frac{n_a}{n}$ , et  $P(i \in \mathcal{B}) = \frac{n_b}{n}$ . Il en résulte que,  $m$  étant un entier, la loi de la taille de l'intersection de  $\mathcal{A}$  et du complémentaire de  $\mathcal{B}$ , conditionnée par l'événement  $\{\text{card}(\mathcal{E}) = m\}$  est binomiale  $B\left(m, \frac{n_a n_{1-b}}{n^2}\right)$ . Une propriété classique de la loi de Poisson permet par conséquent de démontrer que la loi de la taille de l'intersection de  $\mathcal{A}$  et du complémentaire de  $\mathcal{B}$  est une loi de Poisson de paramètre  $\frac{n_a n_{1-b}}{n}$ . En pratique, une approximation par une loi normale est utilisée pour les calculs.

Par la suite, Larher étend le calcul de l'intensité d'implication aux variables non binaires à valeurs dans l'intervalle  $[0,1]$  en remplaçant  $n_a$  par la somme de la variable  $a$  sur

l'échantillon,  $n_{1-b}$  par la somme de la variable  $1-b$  sur l'échantillon, et  $n_{a(1-b)}$  par la somme de la variable  $a(1-b)$  sur l'échantillon (Gras, Larher, 1992).

## Discussion

L'étude de ces choix m'a conduit à deux questions.

1. Pourquoi faire varier la taille de la population de référence ? Pourquoi une loi de Poisson ? De plus, la taille de l'intersection de  $\mathcal{A}$  et du complémentaire de  $\mathcal{B}$  est considérée dans l'absolu, alors qu'elle n'aurait de sens que rapportée à la taille (variable) de la population  $\mathcal{P}$ .
2. Le choix de Larher de procéder par extension du calcul binaire convient-il ? Il semble en effet conduire à abaisser notablement le seuil nécessaire pour avoir des implications intéressantes dans un ensemble de variables non binaires, les conditions d'expérimentation étant par ailleurs semblables. Par exemple Totohasina pour son étude sur les conceptions des probabilités conditionnelles, représentées par des variables binaires adopte un seuil de 0,9. En revanche, l'étude de Bailleul sur les opinions d'enseignants sur les mathématiques - exprimées sur une échelle non binaire - adopte un seuil de 0,66 (Gras R., et al., 1994).

L'importance que l'utilisateur de l'analyse implicative peut accorder à ces questions dépend des fonctions qu'il assigne à l'intensité d'implication :

1. L'intensité d'implication peut servir à l'inférence. Si, comme dans un test d'hypothèse, je choisis un seuil  $\varepsilon$  (typiquement 0,1 ou 0,05), et si la probabilité trouvée est supérieure à  $1-\varepsilon$ , je considérerai que la valeur de l'indicateur de non inclusion est exceptionnellement faible, et donc qu'il y a bien « quasi-implication ». Dans le cas contraire, je ne pourrai pas me prononcer. Cette démarche conduit à considérer dans un ensemble de variables exclusivement les implications supérieures à  $1-\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant choisi généralement inférieur ou égal à 0,1. Dans cette optique, adopter, comme dans notre pré-expérimentation, un seuil d'intensité de 0,62 revient à accepter un risque statistique de 38%, ce qui rend peu crédible les résultats.
2. Les créateurs de l'analyse implicative donnent souvent une autre fonction à l'intensité d'implication, celle de mesurer la « force » de l'implication, indépendamment d'un seuil de risque. Des intensités inférieures à 0,5 correspondant à des variables de



covariance négative, seules les intensités supérieures à ce seuil sont cependant considérées. C'est ainsi que deux études présentées au colloque « 20 ans de didactique » s'appuient sur des graphes présentant des intensités de l'ordre de 0,7.

La première fonction insère l'analyse implicative dans le cadre inférentiel classique : détermination d'un indice descriptif, puis modélisation probabiliste permettant de s'engager sur le caractère significatif de la quasi-implication. La seconde fonction apparente l'analyse implicative au cadre de l'analyse des données où les calculs probabilistes servent à définir des échelles plutôt qu'à faire des inférences. Cette fonction devient dominante dans la méthode de « classification hiérarchique implicative » (Gras, Ratsimba-Rajohn, 1996) qui constitue un développement ultérieur de l'analyse implicative.

Si l'on souhaite utiliser l'intensité d'implication comme probabilité pour l'inférence il devient crucial de clarifier les principes de modélisation, de développer une modélisation véritablement adaptée aux variables non binaires et non une simple extension. Si, en revanche, il s'agit de placer des valeurs sur une échelle, ce sont davantage les propriétés de l'échelle qui seront à considérer que les développements probabilistes qui y conduisent.

Les questions ci-dessus existent donc surtout à partir d'une position inférentielle. Il est cependant important de noter que le problème posé par l'extension de Larher existe même si l'on cherche seulement une échelle de quasi-implication. En effet, une variable non binaire à valeurs dans l'intervalle  $[0,1]$  a un écart-type plus faible qu'une variable binaire de même somme, et ceci d'autant plus que ses valeurs sont plus « réparties » dans l'intervalle. Si on lui applique les mêmes calculs, on majore donc cet écart-type et donc un écart des valeurs à la moyenne apparaît moins significatif qu'il ne l'est en réalité. Si cette majoration était uniforme, l'intensité d'implication pourrait servir d'échelle de quasi-implication, sans perspective inférentielle. Mais, comme les différentes variables étudiées vont avoir des répartitions différentes, la majoration va différer d'un couple de variable à l'autre. L'intensité d'implication de l'extension de Lahrer ne peut donc pas servir à comparer valablement des quasi-implications.

La position inférentielle présente des avantages pour le didacticien. Le premier avantage est la crédibilité qu'il donne à ses résultats, du point de vue de la reproductibilité. C'est la position adoptée par Artigue (1988), dans son étude de la reproductibilité des situations didactiques, que beaucoup considèrent comme emblématique (Rouchier, 1998). La position inférentielle me semble aussi faciliter le contrôle des choix mathématiques par un non spécialiste de la

statistique. Les avantages que j'attribue à cette position inférentielle ne constituent pas une remise en cause de l'intérêt que présentent pour la recherche les développements de type classificatoire. Ils me semblent cependant légitimer le travail de définition d'une procédure statistique inférentielle pour la quasi-implication des variables numériques. Je vais présenter ce travail au paragraphe suivant.

## Une procédure inférentielle pour la quasi-implication des variables numériques

La procédure statistique adoptée reprend, dans une première étape, les éléments descriptifs de l'analyse implicative en les appliquant à des variables à valeurs dans l'intervalle  $[0,1]$ <sup>60</sup>. Elle comporte ensuite une étape inférentielle, basée sur une modélisation probabiliste des variations possibles de ces éléments. Cette modélisation a évolué en deux temps. Dans un premier temps, j'ai repris la modélisation de Lerman, Gras, et Rostam en l'adaptant à des variables non nécessairement binaires, en fonction de ma critique de l'extension de Lahrer (question 2. ci-dessus). Dans un second temps, j'ai modifié certains choix de modélisation en fonction des questions que soulève cette modélisation (question 1, ci-dessus).

J'expose ces différents éléments en les exemplifiant à l'aide du questionnaire DERIVE.

### Etape descriptive

Considérons  $P$ , une population de 465 élèves du secondaire ayant été interrogés par questionnaire dans le cadre de la recherche DERIVE.  $a$  et  $b$  sont leurs positionnement sur une « Likert scale » d'appréciation sur deux aspects de l'utilisation du logiciel. Les vecteurs de réels de l'intervalle  $[0 ; 1]$  ( $a_i$ ) et ( $b_i$ ),  $i$  parcourant  $P$ , quantifient ces positionnements.

Supposons que la moyenne de  $a$  (resp.  $b$ ) soit 0,37 (resp. 0,68). Supposons que la moyenne du

produit,  $\frac{\sum_{i \in P} a_i b_i}{n}$  soit 0,28. La covariance statistique de  $a$  et  $b$  est donc 0,03. Elle est positive,

ce qui indique une certaine liaison entre les variables. Mais la quasi-implication n'est pas un concept symétrique et la covariance ne peut suffire à la décrire.

---

<sup>60</sup> Dans un article en préparation, je confronte ces choix de description de la quasi-implication à ceux d'autres auteurs tels que (Bernard et Charron, 1996)

Pour cela, considérons  $\frac{\sum_{i \in P} a_i(1-b_i)}{n}$ . Si cette moyenne est faible, cela signifie que peu d'élèves, en moyenne, adhèrent fortement à l'opinion  $a$  et faiblement à l'opinion  $b$ . C'est pourquoi j'appelle cette moyenne « indice de non-implication pour l'implication de  $a$  vers  $b$  ». Le calcul donne 0,09. Dans la mesure où cette valeur est « faible », je considérerai qu'il y a « quasi-implication » de  $a$  vers  $b$ . En revanche l'indice de non-implication pour l'implication

réciroque de  $b$  vers  $a$   $\frac{\sum_{i \in P} b_i(1-a_i)}{n}$  vaut 0,4, valeur qui, intuitivement, peut être considérée comme « forte » et donc conduit à penser que la quasi-implication réciroque n'est pas vérifiée.

### Etape inférentielle

L'étape inférentielle vise à savoir si la valeur du premier indice est réellement « faible » et la seconde réellement « forte », ou si elles ne sont que le résultat de fluctuations statistiques.

Voici la démarche qui permet de répondre à cette question. Supposons calculée la loi d'un indice aléatoire  $Z$  dont l'indice statistique de non implication de  $a$  vers  $b$  serait une valeur observée, sur une population modélisant la population observée, et qui puisse être considérée comme "neutre" vis à vis de l'implication. Supposons que cette loi soit telle que  $P(Z \geq 0,09) \approx 0,96$ . Avec le seuil de risque classique de 5%, je peux alors admettre que la valeur 0,09 de l'indice statistique est exceptionnelle et donc valider l'implication de  $a$  vers  $b$ .

Supposons symétriquement calculée la loi d'un indice aléatoire  $Z'$  dont l'indice statistique de non implication de  $b$  vers  $a$  serait une valeur observée et que cette loi soit telle que  $P(Z' \geq 0,4) \approx 0,73$ . Nous en déduisons alors que la valeur 0,4 n'est pas exceptionnellement faible, et nous ne pouvons pas valider l'implication de  $b$  vers  $a$ .

Les deux modélisations que je vais discuter constituent deux définitions possibles de la population et de l'indice aléatoire.

#### **Modélisation 1**

Dans cette modélisation, tout en conservant les choix de modélisation de Lerman, Gras, et Rostam, j'ai voulu donner plus de sens à la variation de la taille de l'ensemble aléatoire en

considérant la population observée comme une partie d'un ensemble « grand ». La modélisation est décrite dans (Lagrange, 1998). Je la résume ici.

Considérons un ensemble  $\mathcal{P}$ , partie aléatoire d'un ensemble fixe  $E$  "grand". Les éléments de  $\mathcal{P}$  sont déterminés aléatoirement en considérant les événements  $(\{i \in \mathcal{P}\})_{i \in E}$  comme indépendants et de même probabilité. Pour modéliser les variables statistiques  $a$  et  $b$ , je définis pour chaque élément  $i$  de  $E$ , des variables aléatoires  $A_i$  et  $B_i$  toutes indépendantes entre elles. Pour exprimer que les fluctuations aléatoires de  $\mathcal{P}$  sont "neutres" vis à vis de l'implication, je pose que les variables aléatoires  $1_{\{i \in \mathcal{P}\}}$  et  $A_j(1 - B_j)$  sont indépendantes.

Les diverses variables étant introduites, je définis ensuite l'indice aléatoire modélisant l'indice

moyen de non implication  $\frac{\sum_{i \in \mathcal{P}} a_i(1 - b_i)}{n}$ . J'ai retenu l'indice aléatoire  $Z = \frac{\sum_{i \in \mathcal{P}} A_i(1 - B_i)}{n}$ ,

plutôt que la moyenne des  $A_i(1 - B_i)$  sur  $\mathcal{P}$ . Il fallait en effet, pour examiner les conséquences de l'extension de Lahrer, conserver le choix de Lerman, Gras, et Rostam de ne pas rapporter la quasi-implication à la taille (variable) de la population  $\mathcal{P}$ .

La procédure statistique qui en découle prolonge le calcul de l'intensité d'implication des variables binaires. Dans le cas de variables non binaires, elle donne des intensités supérieures à celles obtenues dans l'extension de Lahrer, et l'on vérifie rigoureusement que cette réévaluation n'est pas uniforme, mais dépend bien du type de répartition des variables (Lagrange, 1998). L'intérêt de ce travail est dans cette vérification plus que dans la procédure elle-même. En effet, comme je l'ai souligné, la modélisation maintient le biais existant dans l'analyse implicite des variables binaires : l'indice aléatoire correspond d'autant moins à l'indice observé que la taille de la population aléatoire s'éloigne de la taille de la population observée.

### **Modélisation 2**

Elle consiste simplement à ne pas considérer de population aléatoire variable. En effet, la modélisation de la population observée par une population aléatoire variable ne doit pas être considérée comme un principe en soi. Il existe certes des expériences statistiques où la population observée résulte clairement d'un processus aléatoire de sélection par échantillonnage ou en fonction d'une loi d'arrêt. En revanche, dans le cas de la recherche DERIVE, nous avons interrogé tous les élèves ayant participé à l'expérimentation. Il n'y a

donc pas de raison de considérer une population aléatoire variable. Avec ce choix, le biais de

la modélisation 1 n'existe pas : l'indice aléatoire  $Z = \frac{\sum_{i \in P} A_i(1 - B_i)}{n}$  modélise bien l'indice observé.

Par le théorème de limite centrale, pour  $n$  assez grand, la loi de  $\frac{Z - E[A_i(1 - B_i)]}{\sqrt{\frac{\text{var}(A_i(1 - B_i))}{n}}}$  est

approchée par la loi normale centrée réduite.

$\Phi$  désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et  $s$  l'indice observé

$\frac{\sum_{i \in P} a_i(1 - b_i)}{n}$ , on a

$$P[Z \geq s] \approx \Phi(-q) \text{ avec } q \approx \frac{s - m_a(1 - m_b)}{\sqrt{\frac{m_a^2 m_{(1-b)}^2 - m_a^2(1 - m_b)^2}{n}}}$$

## Perspectives

L'intérêt de la seconde modélisation est de fonder la quasi-implication sur une base inférentielle solide. Elle confirme d'ailleurs les résultats de l'étude DERIVE au seuil de 5%. Ainsi, l'étude statistique développée dans cette annexe renforce la confiance dans cette étude et permet d'envisager dans de bonnes conditions l'utilisation de la méthode pour des recherches analogues sur l'intégration du calcul formel telles que celle que je développe avec John Monaghan (Université de Leeds, Grande Bretagne). Ce projet concerne l'étude de 13 enseignants souhaitant développer une intégration de moyens technologiques dans leur enseignement. Monaghan a recueilli un ensemble de données selon une méthodologie inspirée de celle que nous avons adoptée pour DERIVE, et nous allons aborder le traitement et l'interprétation de ces données.

# Bibliographie

- Aldon G. (1994), Un logiciel de calcul symbolique dans la classe. In Juge G. (ed) *Les outils du calcul formel dans l'enseignement des mathématiques* IREM de Basse Normandie, pp. 91-98.
- Aldon G. (1996), DERIVE for 16-18 year old students. *International DERIVE Journal*, n°3.3, pp. 13-20
- Aldon G. (1998), Problèmes longs et calcul symbolique. In *Actes de l'Université d'été 1996 « Des outils informatiques dans la classe... »*, IREM de Rennes, pp. 1-18.
- Artigue M. (1986), Étude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité, *Recherche en Didactique des mathématiques*, vol 7.1, pp 5-62
- Artigue M. (1996), Computer environments and learning theories in mathematics education. In B.Barzel (ed), *Teaching Mathematics with Derive and the TI92*, Münster : Zentrale Koordination Lehrerausbildung, pp. 1-17.
- Artigue M. (1997), Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2), pp. 133-169.
- Artigue M., Defouad B., Dupérier M., Juge G., Lagrange J.B. (1998), *L'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée*. Cahier DIDIREM spécial n°4 IREM Paris 7.
- Artigue M., Lagrange, J.B. (1999), Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de Première S. In Guin D. (ed) *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »*, Mai 1998, IREM de Montpellier pp 15-38
- Artigue, M.(1998), Rapports entre dimension technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques. *Actes de l'Université d'été 1996 « Des outils informatiques dans la classe... »*, IREM de Rennes (pp. 19-40).

- Artigue, M., Abboud, M., Drouhard, J.P., Lagrange, J.B. (1995), *Une recherche sur le logiciel DERIVE*. Cahier de DIDIREM spécial n°3 IREM Paris 7
- Aspetsberger K., Fuchs K. and Watkins A. J. P (1996), Reflections on the Austrian DERIVE Project based on an Investigation by the Centre of School Development. *International DERIVE Journal*, n°3.1, pp. 97-106
- Balacheff N., Vivet M. (1994), Introduction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, n°1.2, pp. 5-8,
- Balacheff N. (1994), Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, n°1.2, pp. 9-42.
- Balacheff N. (1998), Eclairage didactique sur les EIAH en mathématiques. In *Actes du Colloque annuel du Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec* Montréal, Université de Concordia, 25-26 mai 1998, pp.11-42
- Bernard J.M., Charron C. (1996), L'analyse implicative bayésienne, une méthode pour l'étude des dépendances orientées. I : données binaires, *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, 134, (pp. 5-38).
- Bernard R., Faure C., Nogues M., Nouazé Y. (1999), Représentation approchée, représentation symbolique des nombres, coexistence dans une calculatrice. In Guin D. (ed) *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »*, Mai 1998 IREM de Montpellier, pp. 15-38
- Berry J., Graham T., Watkins A. (1994), Integrating the DERIVE Program into the Teaching of Mathematics. *International DERIVE Journal* n°1.1, pp. 83-96
- Berry J., Maull W., Johnson P., Monaghan J. (1999), Routine questions and examination performances. In O. Zaslavsky (ed), *Proceedings of the 23rd conference of PME Technion*, Haifa, Israël. pp. 2-105-112
- Berry J., Monaghan J. (ed), (1997), *The state of computer algebra in mathematics education* Chartwell-Bratt, Bromley
- Bloch I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19.2, pp 135-194

- Borwein J., Borwein P., Girgensohn R., Parnes S. (1996), Making sense of Experimental Mathematics. *The mathematical Intelligencer* Vol 18 n°4 Springer, New York, pp. 12-17
- Bosch M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática : el caso de la proporcionalidad*. Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Bosch M., Chevallard Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19.1, pp 77-124
- Bronner A., (1999), Pratiques de calcul : des égyptiens à la TI-92. In Guin D. (ed) *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »*, Mai 1998 IREM Montpellier, pp. 15-38
- Brousseau G. (1986 ), Fondements et méthodes de la didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, pp.33-115
- Bruner J. (1983), *Le développement de l'enfant. Savoir faire, Savoir dire*, P.U.F. Paris
- Chauvat G. (1998), *Etude didactique pour la réalisation et l'utilisation d'un logiciel de représentations graphiques cartésiennes des relations binaires entre réels dans l'enseignement des mathématiques des DUT industriels*. Thèse de doctorat. Université d'Orléans
- Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique*, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Chevallard Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. Grenoble : IMAG, pp. 103-117
- Chevallard Y. (1992), Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. In Cornu B. (ed), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques*, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, pp. 183-203
- Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.19.2, pp. 221-266
- Connes F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12.2-3, pp. 221-270
- Davenport J., Siret Y., Tournier E. (1986), *Calcul formel*. Masson



- Defouad B. (1999), Processus d'instrumentation de la TI92 en classe de première. In Guin D. (ed) *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »*, Mai 1998 IREM Montpellier, pp 151-158
- Douady R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil / objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, pp. 5-31.
- Dreyfus T. et Hillel J. (1998), Reconstruction of meanings for function approximation. *The International Journal of Computers in Mathematics Education*, n° 3.2, pp.93-112
- Drijvers P. (1996), White Box/Black Box revisited. *International DERIVE Journal*, n°2.1, pp. 3-14
- Drijvers P.(1999), Évaluation et nouvelles technologies : différentes stratégies dans différents pays. In Guin D. (ed) *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »* Mai 1998 IREM Montpellier, pp. 127- 137
- Drijvers P. (1994), The Use of Graphics Calculators and Computer Algebra Systems: Differences and Similarities, *International DERIVE Journal*, n°1.1, pp. 71-82
- Dubinsky E. (1991), Reflexive abstraction. In Tall D. (ed) *Advanced mathematical thinking*, Kluwer. pp-95-123
- Dubinsky E. (1992), Utilisation de l'ordinateur à partir d'une théorie de Piaget sur l'apprentissage de concepts mathématiques. In Cornu B. (ed), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques*, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, pp. 237-269
- Dubinsky E., Czarnocha B, Prabhu V., Vidakovic D. (1999), One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. In Zaslavsky O. (ed), *Proceedings of the 23rd conference of PME Technion*, Haifa, Israël. pp. 95-110
- Duval R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique?, *Recherches en Didactique des Mathématiques* , vol. 16 (3), pp. 349-382
- Echivard L., Heilbronner L., Hilt D., Le Feuvre B., Lagrange J.B., Meyrier X. (1999), De DERIVE à la TI-92. In Guin D. (ed) *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »*, Mai 1998 IREM Montpellier, pp 273-280

- Eisenberg Th. (1999), A skeptic replies to Edith Schneider's « on using CAS in teaching mathematics ». *CAME Meeting at the Weizmann Institute* (Rehovot, Israël), 1-2 août 1999, <http://metric.ma.ic.ac.uk/came/events/weizmann/>
- Fey J.(1989), Technology and mathematics education, a survey of recent developments and important problems, *Educational Studies in Mathematics* n°20, pp. 237-272
- Gascón J. (1998), Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18/1, pp.7-33
- Gelis J.M., Lenne D. (1998), Integration of learning capabilities into a CASs: the suites environment example. *The First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 27th - 31st August 1998 Osnabrueck - Haus Ohrbeck, Germany <http://www.erne.uni-osnabrueck.de/erne98.html>
- Gras R. (1996), *L'implication statistique, nouvelle méthode exploratoire de données*. La Pensée sauvage (Grenoble)
- Gras R., Larher A. (1993), L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données. *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, N° 120, (pp. 5-31).
- Gras R., Totohasina A., Ag Almouloud, S., Ratsimba-Rajohn H., Bailleul M. (1994), La méthode d'analyse implicative en didactique : applications . In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavinot P. (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage
- Guin D., Trouche L. (1999a), The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *The International Journal of Computers in Mathematics Education*, n° 3.3
- Guin D., Trouche L. (1999b), Environnements "calculatrice symbolique" : Nécessité d'une socialisation des processus d'instrumentation, Evolution des comportements d'élèves au cours de ces processus. In Guin D. (ed) *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »*, Mai 1998 IREM Montpellier, pp. : 61-78
- Harel I., Papert S. (eds.) (1991), *Constructionism*. Norwood, N.J., Ablex Publishing Corp.
- Heid M.K. (1988), Resequencing skills and concepts in applied calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*. 19 N°1, pp 3-25

- Hirlimann A. (ed) (1994). Enseignement des Mathématiques et Logiciels de Calcul Formel. *Ministère de l'Education Nationale*.  
Téléchargeable à [http://www.ac-reims.fr/datice/broc\\_men/brocmen.htm](http://www.ac-reims.fr/datice/broc_men/brocmen.htm)
- Hirlimann A. (ed), (1998). Faire des mathématiques avec un système de calcul formel. *Ministère de l'éducation nationale, Direction de la technologie*.  
Téléchargeable à [http://www.ac-reims.fr/datice/broc\\_men/brocmen.htm](http://www.ac-reims.fr/datice/broc_men/brocmen.htm)
- Hunter M., Marshall P., Monaghan J., Roper T. (1995), Using a Computer Algebra System with 14-15 year old Students. In L. Burton, B. Jaworski (ed) *The Technology in Mathematics Teaching* Chartwell-Bratt pp. 307-325
- Juge G. (ed) (1994), *Les outils de calcul formel dans l'enseignement des Mathématiques*. Actes de l'Université d'été. IREM de basse Normandie
- Kendal M., Stacey K. (1999), CAS, Calculus and CLASSROOMS, in In O. Zaslavsky (ed), *Proceedings of the 23rd conference of PME Technion*, Haifa, Israël. pp. 3. 129-136
- Kieran C. , Wagner S. (1989), The research agenda conference on algebra: background and issues. In Kieran and Wagner (eds) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, NCTM-LEA, pp. 1-10.
- Klinger W. (1996), Using DERIVE for 13 and 14 year old Pupils in Austrian Grammar Schools. *International DERIVE Journal*, n°3.1, pp. 25-38
- Lacasta E. (1995), *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire et supérieur : illusions et contrôles*. Thèse, Université Bordeaux I.
- Lagrange J.B. (1991), Représentations mentales et processus d'acquisition dans les premiers apprentissages en informatique. *Thèse de doctorat* Université PARIS VII
- Lagrange J.B. (1995), Penser algébriquement des objets nouveaux. In. C. Margolinas (ed) *Les débats de didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 131-144
- Lagrange J.B. (1996a), Analysing actual use of a computer algebra system in the teaching and learning of mathematics. *International DERIVE Journal*, 1996, Vol.3 .3, pp. 91-108

- Lagrange J.B. (1996b), Systèmes de mathématiques symboliques et activité de modélisation. In R. Noirfalise, M.J. Perrin-Glorian (eds), *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. IREM Clermont Ferrand, pp. 308/316
- Lagrange J.-B. (1998), Analyse implicative d'un ensemble de variables numériques ; application au traitement d'un questionnaire à réponses modales ordonnées . *Revue de Statistiques Appliquées XLVI* (1), (pp. 71-93)
- Lagrange J.B. (1999a), Techniques and concepts in pre-calculus using CAS: a two year classroom experiment with the TI-92. *International Journal for Computer Algebra in Mathematics Education*, n° 6.2 pp. 143-165
- Lagrange, J.B. (1999b), Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, n°4.1 pp. 51-81
- Lerman I.C., Gras R., Rostram H. (1981), Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires. *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 74 p.5-35 et n° 75 p. 5-47.
- Mayes R. (1997), Current state of research into CAS in mathematics education. In J. Berry, J. Monaghan (eds) *The state of computer algebra in mathematics education*. Chartwell-Bratt, pp.171-189.
- Mayes R. (1998), Act in Algebra: Student Attitude and Belief, *International Journal for Computer Algebra in Mathematics Education*, n°5.1, pp. 3-14
- Mendelsohn P., Green T. R. G., Brna P., (1990), Programming languages in Education : the search for an easy start. In Hoc J.M., Green T.R.G., Samurçay R., Gilmore D.J. *Psychology of Programming*. Academic Press. pp. 175-200
- Mercier, A. (1995), Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations a-didactiques. In C. Margolinas (ed) *Les débats de didactique des mathématiques*. La pensée sauvage. Grenoble. pp.157-168
- Mercier, A. (1996), L'algèbrique, une dimension fondatrice des pratiques mathématiques scolaires. In R. Noirfalise, M.J. Perrin-Glorian (eds), *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. IREM Clermont Ferrand, pp. 345-361.

- Mizony, A. (1996) « Le calcul formel dans ma pratique d'enseignant et de chercheur », *Actes de l'Université d'été : « Développer la recherche scientifique à travers l'étude de situations mathématiques »*. IREM de Lyon, juillet 1996
- Monaghan J. (1997), Teaching and Learning in a Computer Algebra Environment: Some Issues Relevant to Sixth-Form Teachers in the 1990s. *International DERIVE Journal*, vol.3. 3, n°4.3, pp. 207-220
- Monaghan J. (1999) Technology and assesment in the U.K. : one step forwards, two steps back. In J. Marwick, Townsley-Kulich L. (eds) *Proceedings of the Tenth Annual International Conference in Collegiate Mathematics*. Goodell. pp. 294-298
- Monaghan, J., Sun S., Tall D. (1994), Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System. In *Proceedings of PME 8 University of Lisbon, Portugal, III*, 279-286
- Mounier G., Aldon G. (1996), A Problem Story: Factorisations of  $x^n-1$ . *International DERIVE Journal*, vol.3. 3, pp. 51-61
- Murakami H. (1999), Distance Learning of Mathematics. In Alsina et al. (eds) *Proceedings of the 8th Internatinal Congress on Mathematical Education*, pp. p. 249-257
- Nogues M. et Trouche L. (à paraître), Quelle prise en compte des contraintes didactiques dans des environnements technologiques complexes ? A paraître dans les *actes de la Xème école d'été de didactique des mathématiques* (Houlgate, août 1999)
- Noss R. & Hoyles C. (1996), *Windows on Mathematical Meanings - Learning Cultures and Computers*, Kluwer Academic Press
- Papert S. (1980), *Mindstorms, Children, Computers, and Powerful Ideas*. Basic Books, New York.
- Pea R.D., Roy (1987), Cognitive technologies for mathematics education. In Schoenfeld A.H. (ed), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum, pp. 89-122
- Petre M., (1990), Expert Programmers and Programming Languages. In In Hoc J.M., Green T.R.G., Samurçay R., Gilmore D.J. (eds) *Psychology of Programming*, Academic Press, pp. 103-115

- Pozzi S. (1994), Algebraic Reasoning and CAS: Freeing Students from Syntax? In Heugl H., Kutzler B. (eds) *DERIVE in Education*, Chartwell-Bratt, Bromley.
- Rabardel P. (1995), *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, Paris.
- Rachlin, S. (1989). The research agenda in algebra: a curriculum development perspective. In Kieran and Wagner (eds) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, NCTM-LEA, pp. 257-265
- Repo S. (1994), Understanding and Reflexive Abstraction: Learning the concept of derivative in the computer environment.' *International DERIVE Journal*, vol.1. 1.97-113
- Robert A. (1996), La prise en compte du cognitif en didactique des mathématiques. In R. Noirfalise, M.J. Perrin-Glorian (eds), *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. IREM Clermont Ferrand, pp. 157-158
- Robert A. (1998), Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* , vol.18-2, pp. 139-189.
- Rogalski J., Samurçay R. (1990), Acquisition of Programming Knowledge and Skills. In Hoc J.M., Green T.R.G., Samurçay R., Gilmore D.J. (eds) *Psychology of Programming*, Academic Press, pp. 157-170
- Rouchier A. (1992), Logo : exemple générique ou cas particulier ? In B.Cornu (ed), *L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques*, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, pp. 299-328
- Rouchier A. (1998), Les mathématiques dans le travail des didacticiens des mathématiques. In Comiti et al. (eds), *Actes de la IXième école d'été de didactique des mathématiques*, (pp. 298-313), ARDM.
- Ruthven K. (1997), *Computer algebra systems in advanced-level mathematics*. Report to School Curriculum and Assessment Authority. University of Cambridge. UK.
- Schneider E. (1999), La TI-92 dans l'enseignement des mathématiques, des enseignant(e)s découvrent la didactique des mathématiques. . In Guin D. (ed) *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »*, Mai 1998, IREM Montpellier, pp. : 49 - 60

- Schubauer-Leoni M.L., (1997). Entre théories du sujet et théories des conditions de possibilité du didactique : quel « cognitif » ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 17-1, pp. 7-28.
- Sfard A., Linchevski L. (1994), The Gains and Pitfalls of Reification. *Educational Studies in Mathematics*, n° 26, pp. 191-228
- Stevenson I. (1995), I can't,... but I know a CAS that can! *International DERIVE Journal*, n°2.1, pp. 43-62
- Tall D. (1996), Functions and calculus. In Bishop A.J. et al. (eds) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic, pp. 289-325
- Tall D., Thomas M. (1991), Encouraging Versatile Thinking in Algebra using the Computer. *Educational Studies in Mathematics*, n°22, pp. 125-147
- Trouche L. (1994), Calculatrices graphiques: la grande illusion. *Repères IREM*, Topiques Editions, n°14, pp. 39-55
- Trouche L. (à paraître), Éléments de méthode pour une étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes. A paraître dans *Educational Studies in Mathematics*
- Trouche L. et al. (1998). *Faire des Mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques*. IREM Montpellier.
- Trouche L. (1996), *Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Thèse de l'Université de Montpellier 2
- Vergnaud G. (1996), Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, . In R. Noirfalise, M.J. Perrin-Glorian (eds), *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*. IREM Clermont Ferrand, pp. 174-185
- Verillon P., Rabardel P. (1995), Cognition and Artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, vol. X, n°1, pp. 77-101.
- Wain G. (1994), Some Technical Problems in the Use of DERIVE with School Pupils. *International DERIVE Journal*, n°1.1, pp. 49-56