



**HAL**  
open science

# Planification de mouvement pour tiges élastiques

Olivier Roussel

► **To cite this version:**

Olivier Roussel. Planification de mouvement pour tiges élastiques. Robotique [cs.RO]. Université Toulouse III Paul Sabatier, 2015. Français. NNT: . tel-01280258v1

**HAL Id: tel-01280258**

**<https://theses.hal.science/tel-01280258v1>**

Submitted on 29 Feb 2016 (v1), last revised 16 May 2017 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Olivier ROUSSEL**

le lundi 5 octobre 2015

**Titre :**

Planification de Mouvement pour Tiges Élastiques  
Motion Planning for Elastic Rods

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

EDSYS : Robotique 4200046

**Unité de recherche :**

LAAS-CNRS

**Directeur/trice(s) de Thèse :**

Michel TAÏX

**Jury :**

M. Patrick DANÈS Président  
M. Seth HUTCHINSON Rapporteur  
M. Frédéric BOYER Rapporteur  
M. Bernard BAYLE Examineur  
M. Philippe SOUÈRES Examineur  
M. Étienne FERRÉ Invité



---

## Résumé

---

Le problème de la planification du mouvement a été largement étudié dans le cas de corps rigides articulés mais peu de travaux considèrent les corps déformables. En particulier, les tiges élastiques telles que câbles électriques, flexibles hydrauliques et pneumatiques, apparaissent dans de nombreux contextes industriels. Du fait d'une modélisation complexe et d'un grand nombre de degrés de liberté, l'extension des méthodes de planification de mouvement à de tels corps est un problème particulièrement difficile. En se basant sur les propriétés des configurations à l'équilibre statique, cette thèse propose plusieurs approches au problème de planification de mouvement pour des tiges élastiques.



---

## Abstract

---

The motion planning problem has been broadly studied in the case of articulated rigid body systems but so far few work have considered deformable bodies. In particular, elastic rods such as electric cables, hydraulic or pneumatic hoses, appear in many industrial contexts. Due to complex models and high number of degrees of freedom, the extension of motion planning methods to such bodies is a difficult problem. By taking advantage of the properties of static equilibrium configurations, this thesis presents several approaches to the motion planning problem for elastic rods.



---

## Remerciements

---

Je tiens à remercier avant tout mon directeur de thèse Michel Taïx pour ses conseils, son expertise et son soutien tout au long de mon travail de recherche. Malgré la quantité de travail considérable que la préparation de cette thèse impliqua, ce fut un réel privilège et un plaisir d'être son élève.

Je remercie sincèrement les membres de mon jury, Patrick Danès, Bernard Bayle, Philippe Souères, Etienne Ferré et particulièrement Seth Hutchinson et Frédéric Boyer pour la relecture de mon manuscrit et leurs commentaires pertinents.

Je tiens à remercier chaleureusement Patrick Danès, pour son soutien précieux qui débuta bien avant ces travaux de thèse et pour m'avoir initié au milieu de la recherche.

Un grand merci à Marc Renaud pour avoir partagé son expertise sur mes travaux de recherche. Ce fut un réel plaisir de travailler sur ces sujets avec une personne aussi compétente et passionnée.

Merci à Tim Bretl et Andy Borum pour leur accueil chaleureux et nos échanges enrichissants lors de mon séjour à l'Université d'Illinois à Urbana-Champaign.

Pour leur disponibilité, les discussions scientifiques ou non, les moments agréables passés ensemble durant ces trois dernières années, je remercie tous les chercheurs et étudiants de Gepetto que j'ai côtoyés : Andreas Orthey, Antonio El Khoury, Andrea Del Petre, Christian Vassallo, Justin Carpentier, Mehdi Benallegue, Nirmal Giftsun, Mylene Campana, Joseph Mirabel, Steve Tonneau, Nassime Blin, Pierre Fernbach, Thomas Flayols, Florent Forget, Francois Bailly, Mathieu Geisert, Alexis Mifsud, Maximilien Naveau, Guilhem Saurel, Aiva Simaite, Benjamin Coudrin, Mukunda Bharatheesha, Florent Lamiroux, Nicolas Mansard, Olivier Stasse, Philippe Souères et Jean-Paul Laumond. Merci également à tous les membres des autres équipes que j'ai pu rencontrer.

À mes parents, mon frère et mes proches, pour m'avoir supporté et soutenu depuis toujours, pour leur patience et sans qui je n'aurais pu mener à bien cette aventure.





---

## Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Éléments théoriques pour la planification d'objets déformables</b>	<b>1</b>
1.1 Planification de mouvement . . . . .	1
1.1.1 Les transformations rigides . . . . .	2
1.1.2 L'espace des configurations . . . . .	2
1.1.3 Géométrie directe et inverse . . . . .	4
1.1.4 Méthodes de planification déterministes . . . . .	6
1.1.5 Méthodes de planification probabilistes . . . . .	7
1.1.6 Planification à échantillonnage pour des systèmes dynamiques	13
1.2 Mécanique des corps déformables unidimensionnels . . . . .	18
1.2.1 Notions de mécanique des milieux continus . . . . .	18
1.2.2 Domaines de déformation . . . . .	21
1.2.3 Modèles de tiges . . . . .	24
1.2.4 Méthodes numériques pour la simulation dynamique de tiges	26
1.3 Planification de mouvement pour corps déformables . . . . .	27
1.3.1 Approches géométriques . . . . .	28
1.3.2 Approches avec prise en compte de la dynamique . . . . .	30
1.4 Synthèse . . . . .	31
<b>2 Configurations à l'équilibre d'une tige élastique</b>	<b>33</b>
2.1 Étude de l'équilibre d'une tige de Kirchhoff . . . . .	34
2.1.1 Modèle géométrique . . . . .	34
2.1.2 Équations d'équilibre statique . . . . .	35
2.2 L'approche par commande optimale . . . . .	38
2.2.1 Principe du Maximum de Pontryagin . . . . .	39
2.2.2 Application au cas de la tige planaire . . . . .	40
2.2.3 Cas d'une tige tridimensionnelle de Kirchhoff . . . . .	43
2.2.4 Extension du cas de Kirchhoff vers un modèle de tige de Ti-	
moshenko . . . . .	48
2.2.5 Autres extensions et perspectives . . . . .	51
2.3 Solutions analytiques des équations d'équilibre d'une tige de Kirchhoff	51

2.3.1	Cas tridimensionnel intégrable . . . . .	52
2.3.2	Cas planaire . . . . .	57
2.4	Géométrie inverse pour tiges élastiques à l'équilibre . . . . .	65
2.4.1	Formulation du problème . . . . .	65
2.4.2	Résolution par optimisation numérique dans le cas planaire . . . . .	66
2.4.3	Résultats en simulation . . . . .	68
2.4.4	Conclusion et perspectives . . . . .	69
2.5	Implémentation . . . . .	70
2.6	Synthèse . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Planification de mouvement pour des tiges élastiques</b>	<b>71</b>
3.1	Réduction de dimension pour la planification de mouvement . . . . .	72
3.1.1	Méthodes de réduction de dimension linéaires pour des tiges déformables . . . . .	72
3.1.2	Trajectoires irréductibles . . . . .	82
3.1.3	Conclusion . . . . .	82
3.2	Le cas quasi-statique . . . . .	83
3.2.1	Paramétrisation des configurations à l'équilibre . . . . .	83
3.2.2	Formulation du problème . . . . .	84
3.2.3	Résultats expérimentaux . . . . .	92
3.2.4	Conclusion . . . . .	96
3.3	Planification avec prise en compte du modèle dynamique et des contacts	96
3.3.1	Un exemple de cas critique : le double entonnoir . . . . .	98
3.3.2	Formulation du problème . . . . .	99
3.3.3	Résultats expérimentaux . . . . .	105
3.3.4	Conclusion et perspectives . . . . .	109
3.4	Synthèse . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>
4.1	Contributions principales . . . . .	113
4.2	Perspectives . . . . .	114
<b>A</b>	<b>Formes analytiques de la sensibilité aux conditions initiales dans le cas planaire</b>	<b>117</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>123</b>

---

## Table des figures

---

1	Étude d'assemblage de tiges flexibles. . . . .	xviii
2	Tige élastique manipulée par des pinces robotiques. . . . .	xix
1.1	Espace des configurations d'un bras manipulateur à deux degrés de liberté . . . . .	3
1.2	Représentation de l'espace libre et des obstacles dans l'espace des configurations . . . . .	3
1.3	Un mouvement solution et sa représentation sous forme de chemin dans l'espace des configurations . . . . .	4
1.4	Une itération de la diffusion d'un RRT. . . . .	9
1.5	Analogie cinématique entre l'unicycle et une tige élastique à l'équilibre. . . . .	15
1.6	Composantes du vecteur contrainte. . . . .	20
1.7	Domaines de déformation d'un matériau idéalisé. . . . .	21
1.8	Description géométrique d'une tige. . . . .	25
1.9	Déformations élémentaires d'un tige. . . . .	25
1.10	Mise en évidence du cisaillement entre des tiges de Kirchhoff et de Timoshenko. . . . .	26
2.1	Équilibre des forces dans une tige élastique. . . . .	35
2.2	Description géométrique de la tige planaire. . . . .	41
2.3	Différentes configurations d'une tige élastique de Kirchhoff à l'équilibre. . . . .	47
2.4	Tracé du polynôme cubique fonction du carré de la courbure. . . . .	53
2.5	Énergie élastique potentielle totale calculée sur des coordonnées $\mathcal{A}$ . Sous l'application du changement de coordonnées $\theta$ , cette fonction énergie devient <i>quasi-étoilée</i> en l'origine et la trajectoire $\pi$ devient une ligne droite. . . . .	56
2.6	Énergie élastique potentielle totale calculée sur des coordonnées $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{stable}$ . . . . .	56
2.7	Configurations d'une tige planaire à l'équilibre dans le cas <i>ondulé</i> . . . . .	58
2.8	Configurations d'une tige planaire à l'équilibre dans le cas <i>orbital</i> . . . . .	59
2.9	Résolution du problème de géométrie inverse pour des tiges élastiques planaires. . . . .	68

3.1	Valeurs propres et erreur de d'approximation pour une description de la tige dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	75
3.2	Valeurs propres pour une description de la tige dans $SE(3)$ . . . . .	77
3.3	Erreurs d'approximation en translation et rotation pour une description de la tige dans $SE(3)$ . . . . .	77
3.4	Valeurs propres pour une description de la tige dans $TSE(3)$ . . . . .	78
3.5	Erreurs d'approximation en position et vitesse 6D pour une description de la tige dans $TSE(3)$ . . . . .	79
3.6	Erreurs d'approximation en position et vitesse 6D pour une description de la tige dans $TSE(3)$ sur un jeu d'observations externes . . . . .	81
3.7	Hiérarchie de volumes englobants pour une tige. . . . .	86
3.8	Temps de calcul du MGD de la tige et de son approximation au premier ordre . . . . .	88
3.9	Erreur due à l'approximation du MGD en fonction de la distance au voisinage. . . . .	88
3.10	Validation d'un chemin local en utilisant l'approximation du MGD par la matrice jacobienne. . . . .	89
3.11	Illustration des deux cas de non-détection de collision suite à l'utilisation de l'approximation du MGD. . . . .	90
3.12	Les scénarios <i>Crack</i> et <i>Backward</i> . . . . .	93
3.13	Les deux cas industriels de désassemblage d'un câble d'un bloc moteur. . . . .	94
3.14	Déformation d'une tige par le contact. . . . .	97
3.15	Exemple de cas critique d'un passage étroit pour une tige élastique. . . . .	98
3.16	Manipulation locale de la tige en deux temps . . . . .	101
3.17	Schéma d'intégration des contrôleurs des pinces manipulant la tige avec le simulateur. . . . .	102
3.18	Illustration de l'arbre d'exploration dans l'espace d'états $\mathcal{X}_{adm}$ avec échantillonnage sur la variété des configurations à l'équilibre $\mathcal{Y}$ . . . . .	103
3.19	Surface balayée entre états d'une tige comme métrique. . . . .	105
3.20	Le scénario <i>Double funnel</i> . . . . .	106
3.21	Le scénario <i>Engine FF</i> . . . . .	107
3.22	Le scénario <i>Grid</i> . . . . .	107
3.23	Le scénario <i>Powerplant</i> . . . . .	108
3.24	Résultats sur le scénario <i>Crack</i> de l'information de contact. . . . .	110

---

## Liste des tableaux

---

2.1	Résultats de la géométrie inverse de tiges élastiques planaires par la méthode de Newton. . . . .	69
3.1	Résultats de planification de tiges élastiques quasi-statiques avec approximation de la géométrie . . . . .	95
3.2	Résultats de planification pour des tiges élastiques avec modèle dynamique et contacts . . . . .	108



---

## Liste des algorithmes

---

1	RRT( $\mathbf{q}_{start}, \mathbf{q}_{goal}$ ) . . . . .	9
2	INVERSE_GEOMETRY_PLANAR_ROD_NEWTON( $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_{des}, \alpha$ ) . .	67
3	FFG-RRT( $\mathbf{x}_{start}, \mathbf{x}_{goal}$ ) . . . . .	91
4	CHECK_SOLUTION( $\mathbf{x}_{start}, \mathbf{x}_{goal}, \mathcal{T}$ ) . . . . .	92
5	RRT pour tiges élastiques avec prise en compte de la dynamique et des contacts . . . . .	104
6	EXTEND_BY_CONTROL( $\mathbf{x}_{from}, \mathbf{x}_{to}$ ) . . . . .	104





---

## Table des notations usuelles

---

Symbole	Signification
$\mathcal{C}$	Espace des configurations
$\mathbf{q}$	Configuration généralisée
$\mathcal{C}_{free}$	Espace des configurations libre
$\mathcal{W}$	Espace de travail
MGD	Modèle Géométrique Direct
MGI	Modèle Géométrique Inverse
RRT	<i>Rapidly-exploring Random Tree</i>
$\dot{\mathbf{q}}$	Vitesse généralisée
$\mathcal{X}$	Espace d'états
$\mathbf{x}$	État
$\mathcal{U}$	Espace des commandes
MMC	Mécanique des Milieux Continus
$E_{el}$	Énergie potentielle élastique totale
$\mathcal{Q}_{stable}$	Ensemble des configurations à l'équilibre statique d'une tige élastique
$\mathcal{A}_{stable}$	Ensemble des coordonnées paramétrant $\mathcal{Q}_{stable}$
$\mathbf{J}$	Matrice jacobienne
ACP	Analyse en Composantes Principales
$\mathcal{B}_{stable}$	Ensemble des positions 6D de l'extrémité d'une tige à l'équilibre statique
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
EDO	Équation Différentielle Ordinaire



# Introduction

La science-fiction soulève régulièrement le questionnement de l'intelligence artificielle des robots et les possibilités de création d'une intelligence pourvue d'une conscience suscite de vifs débats. Cependant, les connaissances actuelles ne nous permettent que de simuler certaines capacités cognitives permettant de résoudre des problématiques clairement définies. Parmi elles, figurent des problèmes que l'homme résout quotidiennement de façon purement intuitive et qui consistent toujours en un défi majeur pour les roboticiens. L'exemple qui nous intéresse ici peut être formulé ainsi : comment coordonnons-nous l'ensemble de nos muscles afin d'accomplir une tâche donnée telle que déplacer un objet ? Pour un robot, cela revient à déterminer la séquence de commandes à appliquer sur ses différents actionneurs tout en évitant de rentrer en collision avec son environnement. Ce problème est appelé *planification de mouvement* et il a été montré qu'il est généralement dans la classe des problèmes les plus difficiles à résoudre. Le problème de planification de mouvement est dorénavant clairement formulé et grâce aux outils mathématiques couplés à la puissance de calcul des ordinateurs, il peut être résolu en un temps suffisamment faible pour des applications réelles sur des robots.

Par ailleurs, la structure mécanique des robots est en pleine évolution. Alors que la grande majorité des robots depuis leur apparition est constituée de corps rigides articulés entre eux par des liaisons mécaniques, des robots constitués de composants flexibles font leur apparition. Par exemple, les robots bio-inspirés de type anguilles (cf. [Khalil 07]) offrent de remarquables capacités locomotrices. De même, les bras manipulateurs dits *continus* (cf. [Robinson 99]), c'est à dire qui tendent à reproduire un bras déformable, possèdent plus de degrés de liberté et une meilleure souplesse réduisant les risques vis à vis de l'homme. Aussi, certains bras manipulateurs possèdent déjà des composants flexibles à l'extérieur de leur structure, tels que des tubes pneumatiques, des flexibles hydrauliques ou des câbles électriques. Tous ces objets présentent une caractéristique commune : il s'agit de solides déformables ayant une dimension bien supérieure aux deux autres que nous nommerons *tiges*. Dans cette thèse, nous allons étendre la problématique de la planification de mouvement à des robots manipulant ou étant composés de tiges. Au delà d'offrir une certaine autonomie pour de tels robots, cette nouvelle problématique trouve notamment des applications industrielles.

## Planification de mouvement pour le prototypage virtuel

Le prototypage virtuel est à présent couramment utilisé dans des domaines comme l'automobile et l'aéronautique et il permet de concevoir et de dimensionner à moindre coût des systèmes complexes. Grâce à l'apparition de la Conception Assistée par Ordinateur (CAO), l'industriel dispose de maquettes numériques de systèmes telles que des avions composés de plusieurs dizaines de milliers de pièces et de plusieurs centaines kilomètres de tiges flexibles. Cependant, malgré de tels outils, les études d'assemblage de tels systèmes (cf. figure 1) ne peuvent plus être entièrement effectuées par un opérateur humain.

Les méthodes de planification de mouvement constituent alors un outil capable d'aider l'homme à répondre aux questions suivantes :

- Est-il possible d'assembler ou désassembler de tels systèmes ?
- Quelles sont les séquences de mouvement à appliquer sur les différentes pièces pour réaliser l'opération d'assemblage ou de désassemblage ?

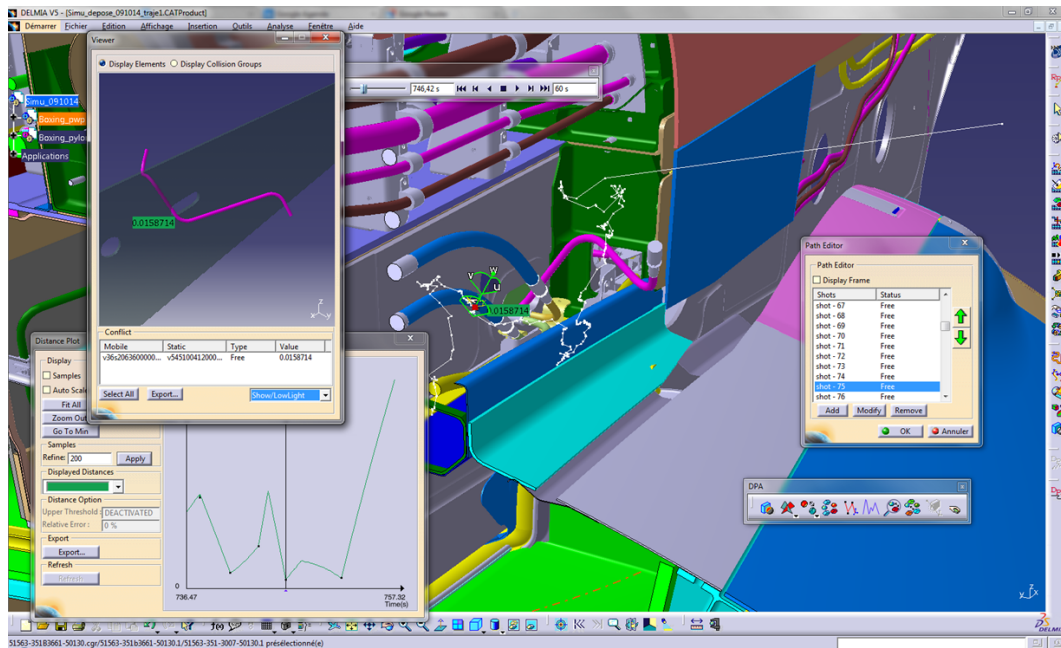


FIGURE 1 – Étude d'assemblage de tiges flexibles (crédits : Airbus).

Or, les méthodes de planification actuelles ne permettent que de considérer les pièces rigides. Jusqu'à présent, les composants de type tiges flexibles étaient assimilés à des pièces rigides ou ignorés. Le projet Flecto, financé par l'Agence Nationale de la Recherche, a pour objectif de répondre à ce besoin (cf. [Roussel 15c]). Le consortium du projet est composé du CEA-LIST, de Siemens-Kineo et du LAAS-CNRS. Le CEA-LIST dispose du simulateur physique eXtended Dynamic Engine (XDE) capable de simuler des tiges flexibles en temps réel. D'un autre côté, la société Siemens-

Kineo a développé une solution logicielle implémentant les méthodes de planification de mouvement. Un des objectifs de cette thèse, dans le cadre du projet Flecto, consiste à étudier les possibilités d'intégration du simulateur XDE avec ces méthodes de planification. Plus particulièrement, nous nous intéressons au cas d'assemblage ou de désassemblage d'une tige flexible dans un environnement composé de pièces rigides. Ce projet a permis au groupe Gepetto de démarrer cette nouvelle activité de recherche. Dans de telles applications, il est généralement nécessaire que les pièces ne soient pas endommagées durant l'opération. Pour des pièces déformables, nous nous limitons aux déformations réversibles, c'est à dire au domaine de l'élasticité.

La problématique traitée dans cette thèse consiste à étendre les méthodes de planification de mouvement à des tiges élastiques manipulées à leurs extrémités par des pinces robotiques (cf. figure 2).

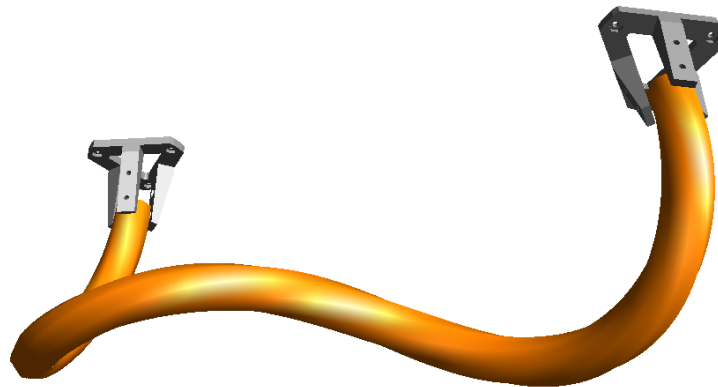


FIGURE 2 – Tige élastique manipulée par des pinces robotiques.

La difficulté de cette problématique peut expliquer l'absence de méthode de résolution. En effet, les modèles de déformations réalistes sont bien plus complexes que le mouvement de corps rigides articulés. En particulier, la prise en compte des déformations d'une tige élastique implique que l'espace de recherche des méthodes de planification soit de dimension infinie. De plus, ces méthodes doivent être capables de résoudre le problème en un temps très court.

## Contributions

Au cours de cette thèse, nous avons développé différentes approches permettant de répondre à la problématique décrite ci-dessus. L'étude de l'équilibre statique de tiges élastiques, qui offre une catégorie de déformations remarquable, constitue un élément central de nos travaux.

En considérant l'hypothèse de manipulation quasi-statique, nous avons montré dans [Roussel 14] qu'il est possible de tirer parti des propriétés mathématiques des déformations à l'équilibre pour résoudre efficacement le problème de planification de mouvement pour une tige élastique manipulée à ses extrémités.

D'autre part, nous donnons une nouvelle formulation analytique de la courbure des tiges élastiques à l'équilibre dans le cas général grâce aux fonctions elliptiques de Jacobi. De plus, dans le cas d'une tige plane, nous donnons les formes analytiques de la géométrie et de la sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, nous montrons dans [Roussel 15b] qu'il est possible d'utiliser ces formes analytiques pour résoudre le problème de géométrie inverse pour des tiges planes élastiques à l'équilibre.

Aussi, dans le cadre d'une collaboration avec l'Université d'Illinois (séjour de 3 mois à Urbana-Champaign), nous étendons dans [Roussel 15a] les travaux de [Bretl 14] permettant de caractériser les configurations à l'équilibre des tiges élastiques de Kirchhoff aux tiges de Timoshenko grâce au formalisme de la commande optimale sur des variétés différentielles. Grâce à cette caractérisation des configurations à l'équilibre, nous développons une approche permettant de planifier pour des tiges élastiques en considérant leur dynamique et les contacts grâce au couplage avec le simulateur XDE.

Cette problématique a aussi permis d'aborder le problème de réduction de dimension et de l'étendre à des systèmes autres que la tige [Orthey 15].

L'ensemble des caractérisations analytiques et numériques des configurations à l'équilibre de tiges élastiques présentées au chapitre 2 ont été implémentées dans la bibliothèque logicielle `qserl` disponible en *open-source* à l'adresse <https://github.com/olivier-roussel/qserl>.

## Plan de cette thèse

Cette thèse est organisée en introduisant d'abord les notions et outils mathématiques utilisés et en décrivant ensuite leur intégration aux méthodes de planification de mouvement. Le chapitre 1 donne les éléments théoriques nécessaires pour la planification de mouvement pour des objets déformables. Le chapitre 2 s'intéresse à l'étude des configurations à l'équilibre des tiges élastiques. Enfin, le chapitre 3 montre différentes approches au problème de planification de mouvement pour des tiges élastiques.

## Publications

L'ensemble des publications et des vidéos associées sont disponibles à la page <http://projects.laas.fr/gepetto/index.php/Members/OlivierRoussel>.

## Conférences internationales avec comité de lecture

- Olivier Roussel, Marc Renaud and Michel Taïx. **Closed-forms of planar Kirchhoff elastic rods : application to inverse geometry**, *IMA Conference on Mathematics of Robotics*, 2015.
- Olivier Roussel, Andy Borum, Michel Taïx and Timothy Bretl. **Manipulation planning with contacts for an extensible elastic rod by sampling on the submanifold of static equilibrium configurations**, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2015.

- Olivier Roussel, Michel Taïx and Timothy Bretl. **Efficient Motion Planning for Quasi-Static Elastic Rods Using Geometry Neighborhood Approximation**, *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, 2014.
- Olivier Roussel and Michel Taïx. **DLO manipulation planning with contacts**, *Robot Manipulation : What has been achieved and what remains to be done? Full day Workshop at IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2014.
- Olivier Roussel, Michel Taïx and Timothy Bretl. **Motion Planning for a Deformable Linear Object**, *European Workshop on Deformable Object Manipulation*, 2014

### Journaux

- Andreas Orthey, Olivier Roussel, Olivier Stasse and Michel Taïx. **Irreducible Motion Planning by Exploiting Linear Linkage Structures**, *In IEEE Transactions on Robotics*, 2015 (en révision).

### Conférences nationales avec comité de lecture

- Olivier Roussel, Michel Taïx, Benoit Michel and Etienne Ferré. **Calcul automatique de trajectoires pour l'assemblage d'objets déformables**, *14ème Colloque national AIP-Primeca*, 2015





# Chapitre 1

## Éléments théoriques pour la planification d'objets déformables

Dans ce chapitre nous donnons les définitions et notations qui sont utilisées tout au long du document. Après avoir introduit la problématique et les méthodes en planification de mouvement, nous présentons ensuite brièvement les notions de mécanique des milieux continus indispensables dans notre travail.

Nous terminons ce chapitre par un état de l'art de la planification d'objets déformables.

### 1.1 Planification de mouvement

Le problème de la planification de mouvement a été étudié par de nombreuses communautés sous différents aspects. Il est à présent clairement formulé et est le sujet de plusieurs ouvrages de référence dans le domaine [Choset 05, LaValle 06, Latombe 91]. L'exemple le plus classique est connu sous le nom du *Problème du déménageur de piano* : peut-on déplacer un piano (un objet géométrique rigide) d'une position et orientation initiale (appelée situation initiale) à une position et orientation finale (situation finale) sans collision avec l'environnement ?

Cette problématique s'étend aux systèmes mécaniques articulés (e.g. bras manipulateurs, robots humanoïdes), rigides ou déformables ou encore multi-systèmes (e.g. une flotte de robot mobiles). De façon plus générale, pour un système mécanique quelconque appelé *robot*, le problème de planification de trajectoires entre une situation initiale et finale du robot dans un environnement contenant des obstacles consiste à trouver une séquence continue de situations sans collision permettant de relier les deux situations. Il a été montré dans [Reif 79] que ce problème est NP-difficile.

Bien souvent, le système mécanique est soumis à des contraintes et nous recherchons alors une séquence continue valide, c'est à dire respectant les contraintes du systèmes et sans collision avec l'environnement.

Alors que la définition initiale du problème restreint la recherche de solution à un espace reflétant la géométrie du problème, nous pouvons étendre la recherche à l'espace représentant l'ensemble des états que peut prendre le système, que nous nommerons espace d'états de façon générale.

Dans cette section, nous allons introduire les notions de base ainsi que les principales méthodes utilisées en planification de mouvement.

### 1.1.1 Les transformations rigides

Les transformations rigides, i.e. qui préservent les distances entre les points, sont un élément essentiel de l'étude du mouvement d'objets rigides. Nous verrons que ces transformations apparaissent régulièrement pour la représentation des situations des robots et que les outils mathématiques utilisés pour l'étude du mouvement de corps rigides s'étendent aux corps déformables. Parmi eux, les groupes de Lie *spécial orthogonal*  $SO(n)$  et *spécial euclidien*  $SE(n)$  constituent un outil sur lequel nous nous appuyerons tout au long de cette thèse. Le lecteur intéressé pourra consulter [Murray 94] pour plus de détails sur l'ensemble du formalisme mathématique utilisé.

Par la suite, les transformations rigides dans  $\mathbb{R}^3$ , qui peuvent être représentées par une orientation et translation dans  $\mathbb{R}^3$ , et qui sont des éléments du groupe de Lie  $SE(3)$  seront nommées *position 6D*. A défaut, le terme *position* employé seul désigne uniquement la partie en translation.

### 1.1.2 L'espace des configurations

Un concept essentiel qui a permis un développement majeur des recherches en planification de mouvement est celui d'espace des configurations [Lozano-Perez 83], noté  $\mathcal{C}$ . Celui-ci consiste en l'ensemble des configurations d'un système, où chaque configuration décrit de façon unique la géométrie du système. Une configuration est décrite par un vecteur  $\mathbf{q}$  contenant ses  $n$  degrés de liberté indépendants. L'espace des configurations est alors généralement une variété de dimension  $n$ . Il permet une abstraction du problème, indépendante du système et de l'environnement considérés, grâce à un formalisme général. Nous pouvons en voir un exemple sur la Figure 1.1.

Notons que les espaces des configurations peuvent être composés entre eux grâce au produit cartésien, e.g. un espace des configurations égal à un tore de dimension 2 est défini par  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

L'ensemble des configurations *libres de collisions* forme un ouvert noté  $\mathcal{C}_{free}$ . La notion de configuration en collision concerne typiquement la collision avec l'environnement mais peut aussi inclure selon le contexte l'auto-collision. Par définition, le complément de  $\mathcal{C}_{free}$ , noté  $\mathcal{C}_{obs}$ , est un fermé et consiste alors en l'ensemble des configurations en collision (cf. Figure 1.2). Notons qu'une configuration libre de collision n'autorise pas le contact.

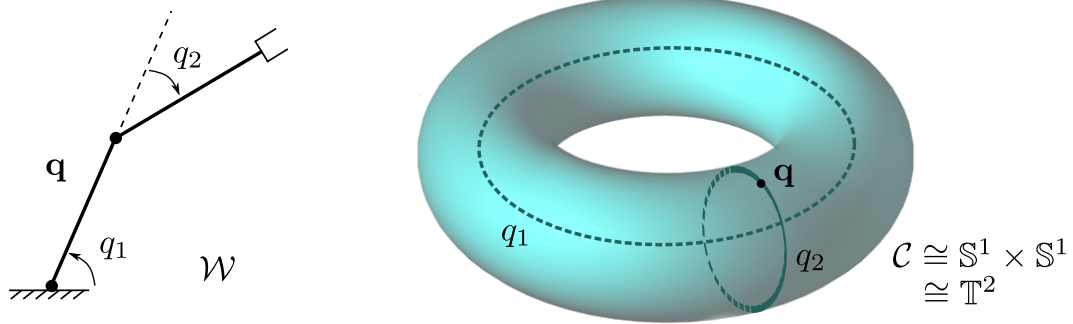


FIGURE 1.1 – Un bras manipulateur avec deux degrés de liberté en rotation (non bornés) dans une configuration  $\mathbf{q}$  donnée représenté dans l'espace de travail  $\mathcal{W}$  (à gauche) et dans son espace des configurations  $\mathcal{C}$ . L'espace des configurations est ici homéomorphe au tore de dimension 2.

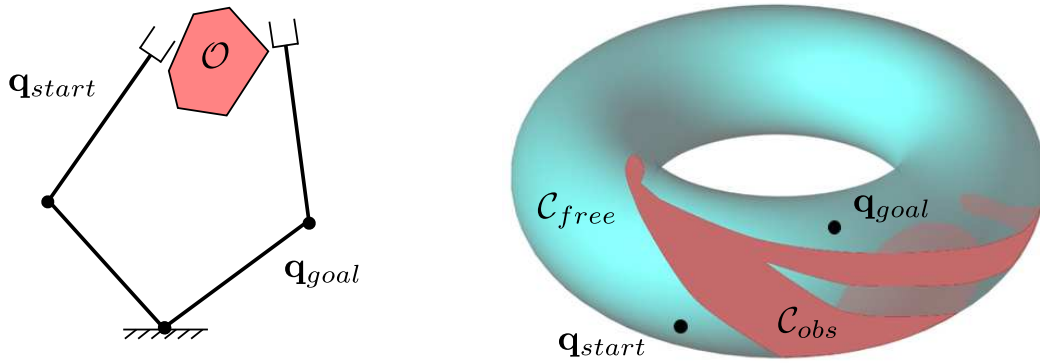


FIGURE 1.2 – Le bras manipulateur doit se déplacer depuis une configuration  $\mathbf{q}_{start}$  vers une configuration  $\mathbf{q}_{goal}$  en évitant l'obstacle  $\mathcal{O}$  (à gauche) et la représentation équivalente dans l'espace des configurations  $\mathcal{C}$ .

Formellement, étant donné un environnement, représenté par l'ensemble  $\mathcal{W}$ , contenant  $p$  obstacles  $\mathcal{O}_i$ ,  $i = \{1, \dots, p\}$  et un robot  $\mathcal{A}(\mathbf{q})$  dans la configuration  $\mathbf{q}$ , l'espace des configurations en collision  $\mathcal{C}_{obs,i}$  correspondant à l'obstacle  $\mathcal{O}_i$  est défini par

$$\mathcal{C}_{obs,i} = \{\mathbf{q} \in \mathcal{C} \mid \mathcal{A}(\mathbf{q}) \cap \mathcal{O}_i \neq \emptyset\}. \quad (1.1)$$

L'ensemble fermé  $\mathcal{C}_{obs}$  est alors défini par

$$\mathcal{C}_{obs} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{C}_{obs,i} \quad (1.2)$$

Le problème de planification de mouvement peut alors être formulé dans l'espace des configurations ainsi :

**Définition 1** (Problème de planification de mouvement dans l'espace des configurations). *Étant donné :*

1. Un espace de travail  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^d$  avec typiquement  $d = 2$  ou  $d = 3$  ;
2. Un ensemble de  $p$  obstacles  $\mathcal{O}_i \subset \mathcal{W}, i = \{1, \dots, p\}$  ;
3. Un robot  $\mathcal{A}$  possédant  $n$  degrés de liberté, décrivant l'espace des configurations  $\mathcal{C}$  de dimension  $n$ . L'espace en collision  $\mathcal{C}_{obs}$  est alors défini par (1.1) et (1.2). De même, l'espace libre  $\mathcal{C}_{free}$  est alors donné par  $\mathcal{C}_{free} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{obs}$ .
4. Une configuration initiale  $\mathbf{q}_{start} \in \mathcal{C}_{free}$  et finale  $\mathbf{q}_{goal} \in \mathcal{C}_{free}$  du robot ;

Le problème de planification de mouvement consiste à trouver, si il existe, un chemin continu  $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_{free}$  tel que  $\tau(0) = \mathbf{q}_{start}$  et  $\tau(1) = \mathbf{q}_{goal}$

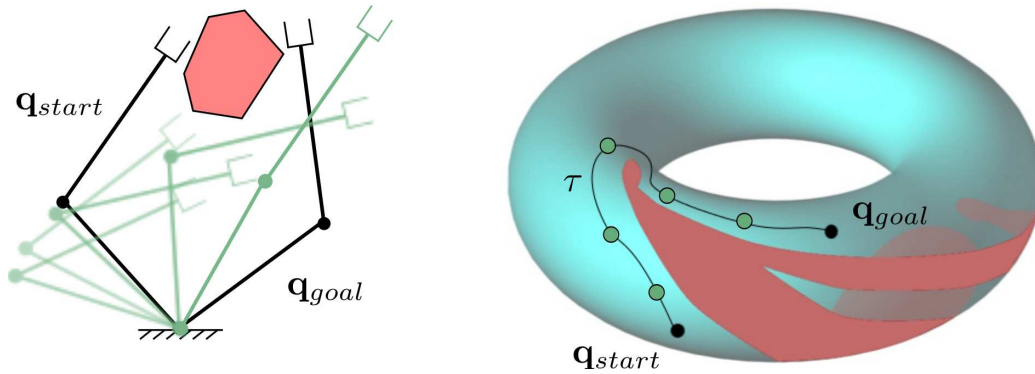


FIGURE 1.3 – Un mouvement solution dans l'espace de travail entre les configurations  $\mathbf{q}_{start}$  et  $\mathbf{q}_{goal}$  et sa représentation sous forme d'un chemin  $\tau$  dans l'espace des configurations libre  $\mathcal{C}_{free}$ .

Il est à noter que le chemin obtenu  $\tau$ , si il existe, est une solution purement géométrique au problème (cf. Figure 1.3). En effet, ce-dernier est paramétré par une abscisse normalisée. Dans certaines applications, nous verrons qu'il est parfois souhaitable de définir une paramétrisation temporelle de la solution.

### 1.1.3 Géométrie directe et inverse

Bien qu'une configuration décrive la situation géométrique du robot, elle ne fournit généralement pas la représentation explicite de la géométrie. À titre d'exemple, considérons le cas d'un bras manipulateur tel qu'illustré en Figure 1.1. Afin de déterminer la position de son organe terminal à partir de sa configuration, il est nécessaire d'appliquer une transformation géométrique fonction de sa configuration (valeurs angulaires) ainsi que de la longueur de ses liaisons. Cette transformation, liant la configuration d'un robot à la position 6D de son organe terminal dans le cas général, est appelée *Modèle Géométrique Direct* (MGD). La transformation inverse, liant la position 6D de l'organe terminal d'un robot à sa configuration, est appelée *Modèle Géométrique Inverse* (MGI).

Les bras manipulateurs, premiers robots industriels, sont modélisés par des *chaînes cinématiques*, i.e. une séquence de corps rigides connectés ensemble par des articulations motorisées. Ces articulations restreignent le mouvement des corps sous-jacents à des sous-groupes de  $SE(3)$ . Dans la plupart des formalismes et applications robotiques, seules deux articulations à un seul degré de liberté sont rencontrées :

- l’articulation *rotoïde* de type pivot, imposant un mouvement rotationnel autour d’un axe commun entre deux corps. Elle est paramétrée par l’angle autour de cet axe ;
- l’articulation *prismatique* de type glissière, imposant un mouvement translationnel le long d’un axe commun entre deux corps. Elle est paramétrée par la distance le long de cet axe.

Bien que d’autres articulations existent, telles que les articulations *rotules*, *cylindriques* ou *planaires*, elles sont généralement réalisées grâce aux deux articulations élémentaires précédemment introduites.

### 1.1.3.1 Modèle Géométrique Direct

Le Modèle Géométrique Direct est l’application qui à toute configuration  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  du robot fait correspondre la position 6D, notée  $g$ , de son organe terminal, i.e.  $MGD : \mathcal{C} \rightarrow SE(3)$ . Dans le cas de bras manipulateurs à  $n$  articulations modélisés par des chaînes cinématiques, la position 6D de l’organe terminal  $g$  peut s’exprimer sous la forme

$$\begin{aligned} g &= \mathbf{T}_{0,1}(q_1) \dots \mathbf{T}_{n-1,n}(q_n) \\ &= \mathbf{T}_{0,n}(\mathbf{q}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

où  $\mathbf{T}_{i-1,i}(q_i)$  est la matrice représentant la position relative du corps  $i$  par rapport au corps  $i - 1$  qui n’est fonction que de la configuration de l’articulation  $i$ . Les formes explicites de ces matrices sont connues pour les articulations élémentaires et plusieurs méthodes existent pour les déterminer, comme les paramètres de Denavit-Hartenberg (cf. [Khalil 04]) ou les paramétrisations par *twist* (cf. [Murray 94]). Dans le Chapitre 3, nous sommes amenés à calculer le MGD étendu au cas d’une tige élastique afin de faire le lien entre leur configuration et leur géométrie. Nous verrons que ce calcul est une étape critique pour la détection de collision.

### 1.1.3.2 Modèle Géométrique Inverse

Le Modèle Géométrique Inverse d’un robot consiste en l’application qui à la position 6D, notée  $g$ , de son organe terminal fait correspondre une configuration  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  du robot, i.e.  $MGI : SE(3) \rightarrow \mathcal{C}$ . Contrairement au MGD, le MGI peut avoir :

- soit une unique solution ;
- soit un nombre fini de solutions ;

- soit aucune solution ;
- soit une infinité de solutions.

Dans le cas de bras manipulateurs, ceci revient à résoudre l'équation (1.3). Selon la structure du bras et bien que difficiles à déterminer, les solutions analytiques sont parfois disponibles [Renaud 06]. Cette application est fréquemment utilisée en planification de mouvement pour lier une tâche donnée aux configurations ou encore dans le cas de la planification pour des chaînes fermées (e.g. manipulation d'objets ou robots parallèles). Dans le cadre de la problématique de cette thèse, il est parfois intéressant de connaître la configuration de la tige pour des positions 6D imposées à ses extrémités. Cette extension du MGI pour des tiges élastiques à l'équilibre statique sera présentée au Chapitre 2.

#### 1.1.4 Méthodes de planification déterministes

Les premières approches au problème de planification étaient basées sur des méthodes dites déterministes, c'est à dire dont le comportement est reproductible pour des entrées au problème identiques.

**Approches exactes** Parmi elles, les approches dites exactes ont suscité de nombreux travaux (voir par exemple [Latombe 91]) car elles ont permis la mise au point d'algorithmes *complets*. Un algorithme est dit complet si, quelles que soient les données du problème, il est capable de trouver une solution en un temps fini si elle existe ou à défaut de signaler qu'il n'y a pas de solution. Elles requièrent généralement une description explicite de l'espace des configurations, permettant une décomposition de l'espace libre  $\mathcal{C}_{free}$  en cellules et une représentation sous forme de graphe. L'espace de recherche initialement continu est alors ramené à un espace de recherche discret. Lorsque le graphe modélisant l'espace des configurations est construit, des algorithmes de recherche de chemin dans des graphes tels que A\* peuvent alors donner efficacement une solution au problème. De plus, en utilisant ce formalisme, il est possible d'appliquer des critères d'optimalité sur la solution, comme par exemple obtenir le plus court chemin entre les situations initiale et finale.

Les méthodes complètes sont particulièrement adaptées aux problèmes à faible dimension. Par exemple, dans le domaine de l'intelligence artificielle et des jeux vidéos, les méthodes basées sur les *maillages de navigation* permettent la planification d'agents ayant peu de degrés de liberté se déplaçant à la surface d'un environnement tridimensionnel en un temps inférieur à la milliseconde [Saupin 13]. La construction du graphe, qui peut être déportée dans une phase hors-ligne, ne nécessite que quelques minutes du fait de la faible dimension de l'espace de recherche.

Cependant, ces approches ne sont pas applicables dans des espaces de grande dimension du fait qu'il devient soit impossible soit trop coûteux de calculer explicitement  $\mathcal{C}_{free}$ . [Canny 88] donne une borne supérieure sur la complexité du problème

de planification en montrant qu'une représentation explicite de l'espace des configurations peut être obtenue en complexité exponentielle par rapport à sa dimension. De plus, du fait de la construction d'une représentation de l'espace libre, ces méthodes sont difficilement adaptables à des environnements dynamiques.

**Fonctions de navigation** Les fonctions de navigation fournissent une autre famille d'approches permettant une solution sous forme de commande rétroactive en boucle fermée, capable de gérer des environnements dynamiques ou incertains en temps-réel. Ces fonctions définissent typiquement un champ de potentiel attractif vers le but et un potentiel répulsif vis à vis des obstacles. La commande est alors obtenue par une descente de gradient. Cette approche trouve ses premières applications en robotique dans les travaux de [Khatib 80, Khatib 86]. Aussi, grâce à leur simplicité et leur faible coût calculatoire, ces méthodes furent appliquées en réalité virtuelle pour la simulation de foule [Helbing 95]. Cependant, la présence possible de plusieurs minima locaux dans ces fonctions de potentiel ne garantit pas la complétude. [Rimon 92] étend ce concept à des méthodes complètes avec une nouvelle famille de fonctions de navigation ayant un unique minimum de potentiel pour des environnements de type *étoilés* (la notion d'ensemble *étoilés* sera présentée en Section 2.2.3.4). Cependant, de telles fonctions ne sont pas disponibles dans le cas général.

### 1.1.5 Méthodes de planification probabilistes

En pratique, de par leur complexité, les méthodes déterministes exactes ne sont plus applicables pour des problèmes de dimension  $n > 6$ . D'un autre côté, les méthodes probabilistes à échantillonnage ne s'appuient pas sur la représentation explicite de  $\mathcal{C}_{free}$  mais essaient d'en capturer la connectivité grâce à un échantillonnage aléatoire de  $\mathcal{C}$ . A chaque itération, une configuration  $\mathbf{q}_{rand}$  est échantillonnée et la géométrie correspondante est testée en collision, i.e. on cherche à déterminer si  $\mathbf{q}_{rand}$  appartient à  $\mathcal{C}_{free}$ . Les configurations libres définissent alors une représentation discrète de  $\mathcal{C}_{free}$  sous forme de graphe. Tandis que dans les méthodes exactes les tests de collision se font dans  $\mathcal{C}$ , ce qui implique la construction explicite de la frontière de  $\mathcal{C}_{free}$ , ici les tests de collision se font dans  $\mathcal{W}$  et se ramènent dans les cas les plus complexes à des tests d'intersection de polyèdres.

Les algorithmes basés sur ces méthodes présentent une notion de complétude plus faible que les méthodes exactes, dite *complétude probabiliste*. Un algorithme est *probabilistiquement complet* si, lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini, la probabilité qu'il trouve une solution si elle existe tend vers un. Ainsi, ces méthodes ne peuvent garantir avec certitude et en un temps fini qu'un problème ne possède pas de solution. Notons que, comme nous le verrons en détail, ces méthodes requièrent que  $\mathcal{C}$  soit muni d'une métrique.

On distingue deux familles d'algorithmes implémentant les approches probabilistes à échantillonnage aléatoire, que nous appellerons *méthodes à échantillonnage* par la suite :



- les méthodes orientées graphes, telles que la *Probabilistic Roadmap Method* (PRM) [Kavraki 96], appropriées à des problèmes statiques et multi-requêtes grâce à une construction hors-ligne du graphe représentant l'espace libre ;
- les méthodes à diffusion d'arbres, telles que le *Rapidly-exploring Random Tree* (RRT) [LaValle 98], permettant la construction du graphe en ligne et adaptées aux problèmes mono-requête.

Chacune de ses familles repose sur les mêmes principes théoriques et offre en pratique de bons résultats sur des problèmes à grandes dimensions, là où les méthodes déterministes montrent leurs limites. Les éléments de bases requis par ces méthodes et qui seront détaillés par la suite sont à minima :

- une métrique sur l'espace de recherche ;
- une méthode d'échantillonnage aléatoire sur l'espace de recherche ;
- un détecteur de collision, permettant de déterminer si une configuration donnée est libre de collision ou non ;
- un planificateur local, retournant le chemin entre deux configurations données.

Nous allons présenter l'algorithme RRT et nous appuyer sur celui-ci pour présenter plus en détail les fondements théoriques des méthodes à échantillonnage.

#### 1.1.5.1 L'algorithme *Rapidly-exploring Random Tree*

La structure générale de l'algorithme RRT est présentée en algorithme 1. À chaque itération, l'arbre  $\mathcal{T}$  représentant  $\mathcal{C}_{free}$  est étendu au travers de 3 étapes :

1. Une configuration  $\mathbf{q}_{rand}$  est échantillonnée aléatoirement dans  $\mathcal{C}$  ;
2. Pour une métrique donnée sur  $\mathcal{C}$ , on récupère la configuration  $\mathbf{q}_{near}$  la plus proche de  $\mathbf{q}_{rand}$  dans l'arbre  $\mathcal{T}$  ;
3. Si possible, l'arbre  $\mathcal{T}$  est étendu selon une méthode de *planification locale* depuis  $\mathbf{q}_{near}$  vers  $\mathbf{q}_{rand}$ .

Le comportement d'une itération est illustré en Figure 1.4.

Depuis son apparition, il existe de très nombreuses variantes d'implémentation de l'algorithme 1 afin d'en améliorer l'efficacité ou bien pour prendre en compte certaines particularités du système ([Leven 03], [Yershova 05], [Zucker 07], [Karaman 11], [Perez 12], ...).

Parmi elles, on peut citer le RRT-Connect [Kuffner 00] où deux arbres, l'un initialisé à la configuration initiale et l'autre au but, se diffusent alternativement et explorent l'espace libre tout en essayant de se connecter mutuellement. De manière générale, nous pouvons remarquer que l'échantillonnage aléatoire est légèrement biaisé vers le but afin que l'arbre puisse atteindre celui-ci.

**Algorithm 1** RRT( $\mathbf{q}_{start}$ ,  $\mathbf{q}_{goal}$ )**Output:** Chemin solution  $\tau$  ou signaler un échec

---

```

1: Initialize the tree  $\mathcal{T}$  with  $\mathbf{q}_{start}$ 
2: while  $\neg$  solved and  $iter < N_{max}$  do
3:    $\mathbf{q}_{rand} \leftarrow$  RANDOM.SAMPLE()
4:    $\mathbf{q}_{near} \leftarrow$  NEAREST( $\mathcal{T}, \mathbf{q}_{rand}$ )
5:    $\mathbf{q}_{new} \leftarrow$  EXTEND( $\mathbf{q}_{near}, \mathbf{q}_{rand}$ )
6:   if  $\mathbf{q}_{new} \neq \mathbf{q}_{near}$  then
7:     Add vertex  $\mathbf{q}_{new}$  to  $\mathcal{T}$ 
8:     Add edge ( $\mathbf{q}_{near}, \mathbf{q}_{new}$ ) to  $\mathcal{T}$ 
9:     if  $\mathbf{q}_{new} = \mathbf{q}_{goal}$  then
10:      solved  $\leftarrow$  true
11:    end if
12:  end if
13: end while
14: if solved then
15:   return the path  $\tau$  from  $\mathbf{q}_{start}$  to  $\mathbf{q}_{goal}$ 
16: else
17:   return failure
18: end if

```

---

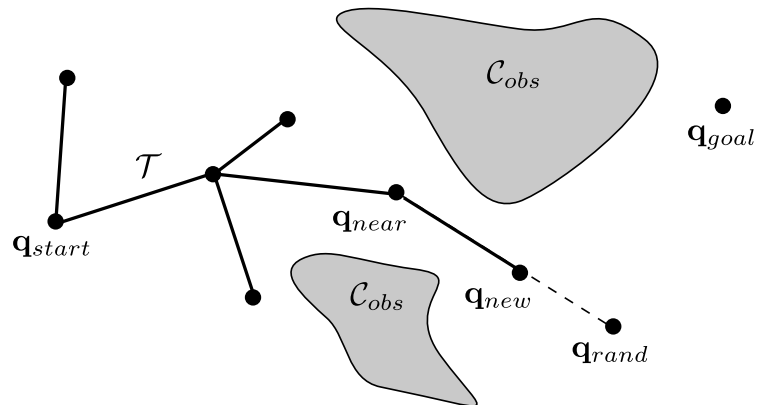


FIGURE 1.4 – L'arbre  $\mathcal{T}$  dont la racine est  $\mathbf{q}_{start}$  se diffuse dans l'espace libre  $\mathcal{C}_{free}$  afin de rejoindre la configuration but  $\mathbf{q}_{goal}$ . Lorsqu'une configuration  $\mathbf{q}_{rand}$  est échantillonnée aléatoirement, l'arbre s'étend depuis la configuration la plus proche  $\mathbf{q}_{near}$  en direction de  $\mathbf{q}_{rand}$  d'une éventuelle distance maximale. La configuration résultante  $\mathbf{q}_{new}$  est alors ajoutée à l'arbre et le processus est répété.

### 1.1.5.2 Échantillonnage aléatoire

La propriété essentielle qui garantit les performances du RRT est le *biais de Voronoi* (cf. [LaValle 00]). Celui-ci se traduit par une régularité du volume des régions de Voronoi dans l'espace libre  $\mathcal{C}_{free}$  lorsque le nombre d'itérations augmente. Intuitivement, l'arbre a tendance à se diffuser dans les régions les moins explorées.

L'efficacité du biais de Voronoi dépend de la capacité à échantillonner uniformément sur  $\mathcal{C}$ . Il est trivial d'obtenir un échantillonnage aléatoire uniforme sur les espaces  $\mathbb{R}^1$  et  $\mathbb{S}^1$  qui sont les espaces élémentaires de nombreux systèmes robotiques. Comme de nombreux espaces des configurations utilisés en robotique peuvent être définis par composition grâce au produit cartésien, il est possible d'échantillonner aléatoirement sur chacun des sous-espaces en conservant la propriété de régularité pour l'espace global. Plus formellement, un échantillonnage uniforme des espaces  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  implique un échantillonnage uniforme de l'espace  $\mathcal{X} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ . De plus, l'application de méthodes de type rejet pour échantillonner sur des sous-ensembles conserve aussi la propriété de régularité, i.e. si  $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$  avec  $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{X}$ , un échantillonnage uniforme de  $\mathcal{C}$  implique un échantillonnage uniforme de  $\mathcal{U}$ .

Considérons à présent d'autres espaces rencontrés couramment en robotique, comme l'espace des rotations 3D, i.e. le groupe de Lie  $SO(3)$ . Pour échantillonner uniformément sur ces variétés, il convient d'être prudent vis à vis de la paramétrisation utilisée pour l'échantillonnage. Par exemple, échantillonner uniformément des angles d'Euler n'implique pas un échantillonnage uniforme de  $SO(3)$ , contrairement à l'utilisation des quaternions unitaires que nous considérons par la suite.

### 1.1.5.3 Métrique et recherche de voisins

Pour la phase de recherche de voisins d'une configuration, les méthodes à échantillonnage requièrent la définition d'une métrique. Une application  $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$  est une métrique sur  $\mathcal{X}$  si et seulement si elle respecte les axiomes suivants :

1.  $\rho(a, b) = \rho(b, a), \forall a, b \in \mathcal{X}$  (symétrie) ;
2.  $\rho(a, b) = 0$  si et seulement si  $a = b, \forall a, b \in \mathcal{X}$  (séparation) ;
3.  $\rho(a, b) + \rho(b, c) \geq \rho(a, c), \forall a, b, c \in \mathcal{X}$  (inégalité triangulaire).

**Métriques usuelles et pseudo-métriques** Sur les espaces vectoriels, les métriques  $L_p$  telles que la distance Euclidienne  $L_2$  sont généralement utilisées. Cependant dans certains espaces, par exemple lorsque nous considérons la planification pour des systèmes dynamiques, définir une métrique peut s'avérer trop complexe ou celle-ci peut être trop coûteuse à calculer. Pour de tels systèmes, il est alors courant d'utiliser une fonction qui ne satisfait pas tous les axiomes d'une métrique. De telles fonctions seront nommées par la suite *pseudo-métriques*.

**Propriétés** Comme de nombreux espaces utilisés en robotique peuvent être définis par composition, il est intéressant de noter que les métriques d'espaces composés

peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire des métriques des sous-espaces. Ainsi, considérons l'espace  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$  où chaque élément peut s'écrire sous la forme  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et les sous-espaces  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$  sont munis des métriques  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , respectivement. Une métrique  $\rho$  sur  $\mathcal{X}$  peut être définie par

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = w_1\rho_1(a_1, b_1) + w_2\rho_2(a_2, b_2)$$

où  $w_1$  et  $w_2$  sont des réels positifs définissant la pondération de chaque sous-espace. De par sa simplicité, ce type de métrique est couramment utilisé mais le choix des pondérations est généralement arbitraire et dépend des cas considérés.

Une autre propriété des métriques qui sera utilisée dans cette thèse est l'extension aux sous-ensembles et variétés, i.e. soient un espace  $\mathcal{X}$  muni d'une métrique  $\rho$  et  $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ , alors  $\rho$  est aussi une métrique sur  $\mathcal{U}$ .

**Recherche de voisins** Les configurations échantillonnées aléatoirement permettent de guider l'exploration du graphe dans les régions inexplorées de l'espace libre. Pour cela, il est nécessaire à chaque itération de déterminer les  $k$  plus proches voisins de la configuration échantillonnée. Dans le cas d'approches de type RRT, on ne considère généralement que le plus proche voisin (i.e.  $k = 1$ ) tandis que les approches de type PRM considèrent généralement plusieurs voisins (i.e.  $k > 1$ ).

En théorie, le nombre de voisins nécessaires pour capturer la connectivité autour d'une configuration donnée est exponentiel en la dimension  $n$  du problème. En pratique, le voisinage des configurations est en général suffisamment peu contraint pour ne pas à avoir à explorer l'ensemble du voisinage, permettant un coût bien inférieur à la borne supérieure en complexité exponentielle. Les cas extrêmes où le voisinage est fortement contraint correspondent à des *passages étroits* et représentent des cas très difficiles à résoudre pour les méthodes probabilistes à échantillonnage. Nous trouvons dans la littérature de nombreux travaux permettant de résoudre ce problème des passages étroits avec plus ou moins de généralité (cf. [Amato 98], [Sun 05], [Saha 05], [Hsu 98], [Zhang 08], [Flavigne 10]). Comme nous le verrons au Chapitre 3, les possibilités de déformations de la tige induisent une forte probabilité de collision ce qui se traduit par une recherche de passages étroits dans l'espace libre.

Ainsi, une dimensionnalité  $n$  élevée du problème implique un grand nombre de configurations  $m$  dans le graphe, bien que la complexité ne soit pas exponentielle en pratique. La complexité de la recherche du  $k$  plus proche voisin devient alors critique. Une approche naïve implique dans le pire cas une complexité en  $O(nm^2 + k)$ . Les *k-d tree* [Friedman 77, Ericson 04] sont des structures hiérarchiques permettant de ramener la complexité d'une requête de recherche en  $O(m^{1/d} + k)$  moyennant un coût de construction en  $O(nm \log m)$ . Leur faible complexité explique le fait que ces structures sont couramment utilisées dans les implémentations des algorithmes de planification de mouvement.

#### 1.1.5.4 Détection de collision

Un détecteur de collision doit au minimum être capable de déterminer si une configuration donnée du système est libre de collision. Celle-ci peut concerner les obstacles de l'environnement, l'auto-collision ou encore d'autres robots. Deux corps sont dits en collision si leurs géométries respectives s'intersectent (contact inclus). Le problème a été largement étudié dans la communauté du calcul géométrique. Les géométries des corps sont généralement approximées par des primitives appelées *volumes englobants*. Parmi les plus courants, on peut citer les sphères, les *Axis-Aligned Bounding Boxes* (AABB), les *Oriented Bounding Boxes* (OBB), les *Line Swept Spheres* (LSS) aussi appelées *capsules*, les *Rectangle Swept Spheres* (RSS) et les enveloppes convexes. Chacun de ces volumes englobants présente un compromis entre précision de l'approximation et coût de calcul. Ceux-ci sont généralement ensuite utilisés sous forme d'une *hiérarchie de volumes englobants* permettant de séparer la détection de collision en une étape dite grossière (*broad phase*) et une phase de précision (*narrow phase*). Nous invitons le lecteur intéressé à consulter des ouvrages dédiés tel que [Ericson 04]. De nombreuses implémentations logicielles de détecteur de collision existent telles que [Hudson 97, Larsen 00, Mirtich 98, Pan 12].

En pratique, la diffusion de l'arbre nécessite non pas de valider des configurations mais des chemins entre configurations. Ainsi, dans l'algorithme RRT, il est nécessaire de tester l'appartenance à l'espace libre du chemin entre  $\mathbf{q}_{near}$  et  $\mathbf{q}_{rand}$ . Généralement, le chemin est alors discrétisé et chaque échantillon est testé.

**Validation dichotomique** Le chemin est validé par dichotomie en testant la configuration située au milieu du chemin. Si celle-ci est valide, l'opération est répétée récursivement sur chacun des deux sous-chemins obtenus. Le critère d'arrêt est soit la détection d'un état en collision et le chemin est alors considéré comme en collision, soit l'atteinte de la résolution minimale et le chemin est alors considéré comme libre de collision. Cette méthode est généralement la plus rapide mais elle ne permet pas de récupérer la partie libre de collision du chemin.

**Validation itérative à pas constant** Le chemin est découpé selon une résolution constante et chaque échantillon est testé progressivement entre les configurations de départ et d'arrivée. Si un des échantillons est en collision, alors le chemin est considéré en collision. Cette méthode permet de récupérer la dernière configuration libre de collision qui peut être utilisée pour étendre l'arbre.

**Validation itérative à pas adaptatif** Le chemin est validé progressivement entre les configurations de départ et d'arrivée mais le pas est ajusté grâce à des bornes minimales de distance aux obstacles (cf. [Schwarzer 05]). Le coût de calcul de ces bornes est typiquement bien inférieur au coût de calcul de la distance exacte. Cependant, selon les systèmes considérés, ces bornes ne sont pas toujours disponibles. Ces méthodes permettent aussi de récupérer la dernière configuration libre de collision.

**Détection de collision continue** Le calcul de la distance exacte entre une configuration et la frontière de l'espace libre peut s'avérer très utile, notamment pour la planification au contact (cf. [Redon 05]). Cependant, celui-ci n'est disponible que pour certains systèmes particuliers et présente un coût de calcul supérieur d'au moins un ordre de grandeur.

### 1.1.5.5 Planification locale

La phase de planification locale consiste à trouver un chemin dit local libre de collisions entre deux configurations données. La validité du chemin est testée via les méthodes présentées précédemment. Généralement, le chemin local est le plus court chemin, i.e. la géodésique sur l'espace  $\mathcal{C}$  si elle est disponible à moindre coût. Ainsi, sur les espaces vectoriels  $\mathbb{R}^n$ , le chemin local adopté est typiquement une interpolation linéaire, ce qui se traduit par une ligne droite dans  $\mathcal{C}$ . Lorsque l'on considère des systèmes avec des contraintes différentielles, comme une voiture, le problème de planification locale devient similaire à un problème aux limites (*Boundary Value Problem*). Si on ajoute des critères d'optimalité tel que le plus court chemin, alors ce problème devient un problème de commande optimale (cf. [Bryson 75]).

### 1.1.6 Planification à échantillonnage pour des systèmes dynamiques

En pratique, les systèmes réels sont modélisés en considérant des contraintes cinématiques et dynamiques. Le problème de *planification de systèmes dynamiques* (*kinodynamic planning*) est l'extension du problème de planification de mouvement que nous avons présenté en intégrant des contraintes du premier et second ordre sur  $\mathcal{C}$ . Dans cette section, nous allons brièvement présenter comment utiliser les modèles cinématiques ou dynamiques issus de la mécanique dans les méthodes à échantillonnage.

#### 1.1.6.1 Contraintes cinématiques

Les contraintes cinématiques se retrouvent dans de nombreux systèmes robotiques. Par exemple, une voiture ne peut se déplacer que dans la direction de ses roues avant. Ces contraintes peuvent être exprimées sous forme implicite ou paramétrique.

**Forme implicite** De manière générale, une contrainte différentielle sous forme implicite s'écrit

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad \textit{Bilatérale} \quad (1.4)$$

ou

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0 \quad \textit{Unilatérale} \quad (1.5)$$

avec  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  et  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}\mathcal{C}$ , l'espace tangent à  $\mathcal{C}$  en  $\mathbf{q}$ .

**Forme paramétrique** La cinématique d'un système à  $n$  degrés de liberté peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel du premier ordre et de dimension  $n$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \quad (1.6)$$

pour des conditions initiales  $\mathbf{q}(0) \in \mathcal{C}$  données et où  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  sont les commandes applicables sur le système. On observera que la dimension  $n$  du système est égale au nombre de composantes de la condition initiale, i.e. de l'espace des configurations  $\mathcal{C}$ . L'équation (1.6), que nous appellerons *équation de transition de configuration*, décrit implicitement l'espace d'état du système. Pour une commande  $\mathbf{u}$  donnée, le champ de vecteurs  $\mathbf{f}$  sur  $\mathcal{C}$  fait correspondre à chaque configuration  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  une vitesse  $\dot{\mathbf{q}}$  de l'espace tangent  $T_q\mathcal{C}$ . L'union disjointe des espaces tangents à chaque configuration forme le fibré tangent à  $\mathcal{C}$ , noté  $T\mathcal{C}$ , où chaque élément est un couple  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  avec  $\mathbf{q} \in \mathcal{C}$  et  $\dot{\mathbf{q}} \in T_q\mathcal{C}$ . Le fibré tangent, de dimension  $2n$ , décrit par le système différentiel est alors l'espace d'état.

Généralement, les contraintes dérivées des lois de la mécanique sont sous forme implicite. Cependant, la forme paramétrique est préférable car celle-ci nous donne les commandes  $u$  admissibles et est alors prête à être utilisée dans des algorithmes de planification. Il est possible de passer de la forme implicite à la forme paramétrique comme nous le verrons à travers l'exemple du monocycle.

**Contraintes autonomes et non-autonomes** Une contrainte présentant une dépendance explicite au temps est dite *non-autonome*. Dans le cas contraire, la contrainte est dite *autonome*. Les systèmes considérés dans cette thèse présentent tous un caractère autonome et par conséquent les modèles ne présenteront jamais de dépendance explicite au temps.

**Contraintes holonomes et non-holonomes** Une contrainte est dite *holonome* si elle peut s'écrire sous forme bilatérale et uniquement en fonction de la configuration (et éventuellement du temps pour des contraintes non-autonomes), i.e.

$$g(\mathbf{q}) = 0.$$

Dans ce cas, on dit aussi que la contrainte est complètement intégrable. Une méthode systématique pour déterminer l'intégrabilité d'une contrainte est d'utiliser les crochets de Lie à travers le théorème de Frobenius.

**L'exemple de l'unicycle et son analogie avec les tiges élastiques** Pour illustrer cela, nous allons détailler l'exemple d'un robot mobile de type unicycle. Ce type de robot peut être commandé par deux variables d'actions : sa vitesse linéaire et sa vitesse angulaire. Dans cet exemple, nous considérons que l'unicycle se déplace à vitesse linéaire unitaire. Outre sa simplicité, le choix de cet exemple est motivé par le fait qu'il possède de fortes similarités avec les tiges élastiques.

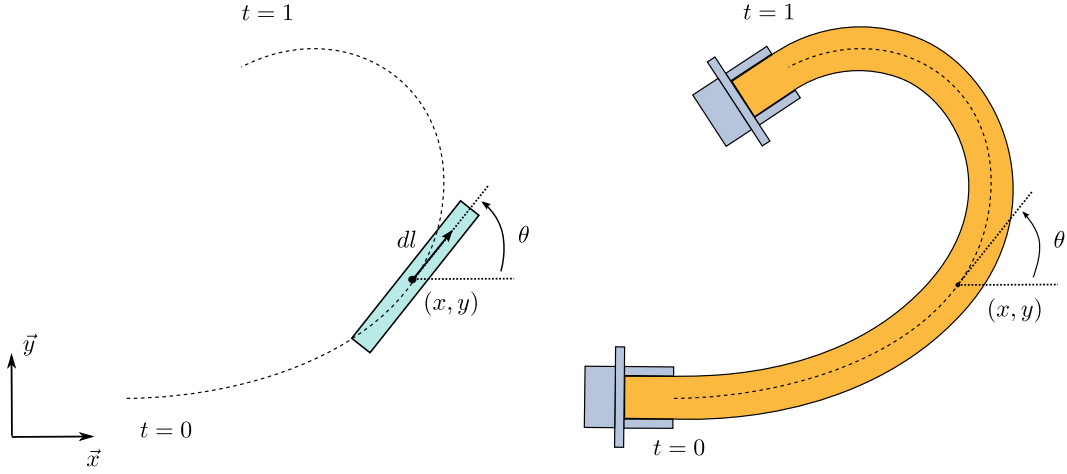


FIGURE 1.5 – Analogie entre le modèle de l’unicycle (à gauche) à 3 degrés de liberté décrivant une trajectoire dans le temps et la forme d’une tige élastique à l’équilibre (à droite). Dans le cas de l’unicycle, la variable indépendante est le temps (noté  $t$ ) et dans le cas de la tige élastique, celle-ci est son abscisse curviligne (notée  $t$  par analogie).

L’espace des configurations de l’unicycle est  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  et chaque configuration peut s’écrire sous la forme  $\mathbf{q} = (x, y, \theta)$ . La variable de commande  $u \in \mathbb{R}$  est donc la vitesse angulaire de l’orientation de l’unicycle, i.e.  $\dot{\theta} = u$ . Pour un déplacement infinitésimal  $dl$ , assimilé alors en ligne droite, on a  $dy = dx \tan \theta$ , donc

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt} \tan \theta \\ &= \dot{x} \tan \theta \end{aligned}$$

ce qui nous mène à la contrainte cinématique de l’unicycle

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0. \quad (1.7)$$

Notons que les contraintes qui peuvent s’écrire sous la forme  $\mathbf{w}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0$ , telle que (1.7), s’appellent des *contraintes de Pfaffian*. Une solution à l’équation (1.7) est  $\dot{x} = \cos \theta$  et  $\dot{y} = \sin \theta$ . Le modèle différentiel de l’unicycle est donc

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \theta \\ \dot{y} &= \sin \theta \\ \dot{\theta} &= u. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Tel qu’illustré en Figure 1.5, le modèle de l’unicycle donné en (1.8) décrit une trajectoire qui respecte les mêmes contraintes différentielles qu’une tige élastique à l’équilibre, dont le modèle sera présenté en détail au Chapitre 2.



### 1.1.6.2 Contraintes dynamiques

Les modèles de systèmes réels issus de la mécanique impliquent généralement aussi des contraintes dynamiques. De même que pour que les contraintes cinématiques, celles-ci peuvent être exprimées sous forme implicite

$$f(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 0$$

ou sous forme paramétrique

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{u}).$$

En introduisant la *variable d'état* (ou *vecteur d'état*)  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , il est possible d'exprimer les contraintes dynamiques en contraintes du premier ordre. Bien que nous nous limitons aux contraintes du second ordre, d'une manière générale, il est possible de ramener toute contrainte différentielle d'ordre quelconque au prix de l'augmentation de la dimension de l'espace d'état. Afin d'être intégré dans des méthodes de planification, le modèle différentiel doit être préférablement écrit sous forme paramétrique, ce qui dans l'espace d'état nous mène à *l'équation de transition d'état*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{1.9}$$

### 1.1.6.3 Intégration de la dynamique dans les méthodes à échantillonnage

Les méthodes à échantillonnage telles que l'algorithme RRT que nous avons présentées pour des problèmes géométriques peuvent être étendues à des problèmes différentiels. Pour cela, nous reprenons brièvement les concepts fondamentaux de ces méthodes.

**L'espace d'état** Contrairement aux problèmes géométriques, l'espace de recherche  $\mathcal{X}$  n'est plus uniquement l'espace des configurations  $\mathcal{C}$  mais l'espace d'état. Comme nous nous limitons au second ordre, cet espace est alors le fibré tangent de l'espace des configurations, i.e.  $\mathcal{X} = T\mathcal{C}$ . Les concepts d'espace libre de collision  $\mathcal{C}_{free}$  et en collision  $\mathcal{C}_{obs}$  s'étendent naturellement sur l'espace d'état. Les espaces correspondants sont notés  $\mathcal{X}_{free}$  et  $\mathcal{X}_{obs}$  respectivement.

**Espace des commandes** En complément de l'espace d'état, l'intégration de modèles différentiels exprimés sous forme paramétrique (1.9) implique la définition de l'espace des commandes admissibles sur le système. Pour chaque état  $\mathbf{x}$ , un ensemble de commandes admissibles  $U(\mathbf{x})$  est défini, et l'union de ces ensembles de commandes admissibles pour tous les états  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$  forme l'espace des commandes admissibles  $\mathcal{U}$ .

**Échantillonnage aléatoire et planification locale** Afin de maintenir la propriété du biais de Voronoi sur l'espace d'état  $\mathcal{X}$ , il est nécessaire d'avoir une méthode permettant un échantillonnage aléatoire uniforme de  $\mathcal{X}$ . Selon le système considéré, plusieurs approches sont possibles :

- le système est de faible dimension ainsi que son espace des commandes, il est alors possible de définir l'ensemble des primitives de mouvement qui garantissent la complétude, généralement à une résolution près. L'influence de ces primitives, appliquées pendant un temps court, est calculée explicitement pour chaque état et il est possible de résoudre le problème de planification locale grâce à un assemblage de ces primitives ;
- une solution au problème de planification locale peut être calculée efficacement, i.e. pour un état initial  $\mathbf{x}_{from}$  et final  $\mathbf{x}_{to}$ , il est possible de déterminer rapidement une séquence de commandes  $\tilde{u} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  tel que  $\tilde{u}(0) = \mathbf{x}_{from}$  et  $\tilde{u}(1) = \mathbf{x}_{to}$ . Dans ce cas, il est possible d'échantillonner directement dans  $\mathcal{X}$  et de résoudre le problème local afin de satisfaire le modèle différentiel.

D'autres approches spécifiques à certains contextes sont possibles, telles que celle que nous présenterons pour la planification dynamique de tiges élastiques en Section 3.3. Dans le cas où le modèle n'est pas connu, par exemple lors de l'utilisation d'un simulateur externe en "boîte noire" qui implémente la fonction de transition d'état, il est bien sûr possible d'échantillonner sur l'espace des commandes  $\mathcal{U}$ . Cependant, cette approche ne fournit généralement pas un bon résultat car il n'y a aucune garantie sur la qualité de l'exploration de  $\mathcal{X}_{free}$ .

**Métriques** De même que pour les espaces de configuration composés, les métriques sur l'espace d'état peuvent être définies par une combinaison linéaire des distances sur l'espace des positions et l'espace des vitesses, généralement bien définies indépendamment. Cependant, le choix des pondérations est alors empirique et dépend du cas considéré. Généralement, cette métrique a une signification physique, telle que l'énergie cinétique, mais est difficile ou coûteuse à calculer.

**Test de collision** Les tests de collisions sont similaires à ceux effectués dans l'espace des configurations. Pour de meilleures performances, il est parfois possible de calculer si un état est en collision en dehors de critères purement géométriques. En effet, un état peut avoir une géométrie libre de collision, mais une vitesse et des contraintes différentielles impliquant que quelles que soient les actions appliquées au système, son état sera en collision dans un temps fini. L'ensemble de ces états est appelé *espace des états en collision inévitable*, noté  $\mathcal{X}_{ric}$ . Cette approche permet de meilleures performances de planification en définissant avec plus de précision l'espace libre  $\mathcal{X}_{free}$ , à condition que  $\mathcal{X}_{ric}$  puisse être calculé efficacement.

**But** Étant donné qu'il est parfois difficile d'atteindre un état donné avec exactitude, il est courant dans certains cas de considérer une *région but*  $X_{goal}$  au lieu d'un état but  $\mathbf{x}_{goal}$ . Une région but est généralement définie par une boule autour de  $\mathbf{q}_{goal}$  sur l'espace  $\mathcal{X}$  muni d'une métrique.

Nous avons introduit dans cette section les fondements théoriques liés à la problématique de la planification de mouvement. Nous avons vu que le problème est difficile à résoudre et que les méthodes à échantillonnage offrent à ce jour la meilleure alternative dans le cas général. Nous avons aussi présenté comment étendre ce formalisme aux systèmes présentant des contraintes différentielles. Ceci nous permettra d'aborder des systèmes complexes tels que les tiges élastiques qui peuvent être modélisées grâce à des systèmes différentiels comme nous allons le voir dans la section suivante.

## 1.2 Mécanique des corps déformables unidimensionnels

Dans les études d'assemblage de systèmes complexes, la manipulation d'objets solides déformables doit garantir leur non-détérioration. Dans ce contexte, les déformations plastiques et la rupture ne doivent pas être atteintes et il convient de se limiter au cadre des *petites déformations*, i.e. de rester dans le domaine de déformation de l'élasticité linéaire. Dans cette thèse, nous limitons notre étude à la manipulation de tiges déformables, c'est à dire des solides élancés dont une dimension est grande devant les deux autres. Cette spécificité géométrique permet de simplifier l'étude des déformations grâce à une modélisation unidimensionnelle face à la complexité de l'analyse tridimensionnelle.

De même, les matériaux sont considérés homogènes, i.e. les propriétés du matériau sont les mêmes en tous points du corps. De plus, lorsque cela sera spécifié, certaines parties de cette étude admettront l'hypothèse d'isotropie, i.e. les propriétés du matériau sont les mêmes quelle que soit la direction considérée dans le solide.

### 1.2.1 Notions de mécanique des milieux continus

La Mécanique des Milieux Continus (MMC) est un outil permettant en particulier une analyse quantitative de la déformation des solides. Elle offre plusieurs modèles de tiges élastiques. Elle est fondée sur l'hypothèse que, au niveau de l'œil humain, la matière présente des caractéristiques continues et cette hypothèse reste valable tant que l'on reste dans le domaine des petites déformations. En effet, les phénomènes de plasticité et de rupture s'expliquent en considérant l'échelle atomique où la matière est constituée d'un ensemble discret de particules. Grâce à la MMC, il est alors possible de caractériser la matière grâce à des fonctions continues au sens mathématique du terme. Nous présentons ici un très bref rappel des notions de mécanique des milieux continus qui seront utilisées dans cette thèse. Le lecteur pourra se référer à [Salençon 05a, Salençon 05b, Forest 10] pour une présentation plus complète et rigoureuse.

#### 1.2.1.1 Description du milieu

Considérons un solide déformable occupant un volume  $V_0$  à l'instant initial  $t = 0$ . Après une déformation  $\Phi$  appliquée pendant un temps  $t$ , le volume  $V_0$  est déformé

en un volume  $V_t$  et chaque point matériel occupe une nouvelle position dans l'espace. Il est clair que chaque point matériel ne peut occuper qu'une seule position spatiale et que inversement, chaque point spatial ne peut être occupé que par un seul point matériel. La déformation  $\Phi$ , qui décrit l'évolution de chaque point matériel, est donc une bijection. Intuitivement, elle est aussi différentiable ainsi que sa réciproque. Formellement, chaque point matériel ayant pour coordonnées initiales  $\mathbf{P}$  est susceptible de se déplacer et l'évolution de sa position spatiale  $\mathbf{p}$  à l'instant  $t$  est donnée par le difféomorphisme

$$\mathbf{p}(\mathbf{P}, t) = \Phi(\mathbf{P}, t).$$

Comme l'application  $\Phi$  entre les coordonnées matérielles et spatiales est bijective, il est possible de décrire le mouvement par les variables spatiales  $\mathbf{p}$ , dites variables d'Euler, ou par les variables matérielles  $\mathbf{P}$ , dites variables de Lagrange. Intuitivement, la description Lagrangienne consiste à suivre l'évolution d'un point matériel dans le temps, tandis que la description Eulérienne consiste à suivre l'évolution d'un point spatial dans le temps. Chaque représentation trouve son application dans chacune des branches de la MMC. Le point de vue lagrangien sera généralement plus adapté pour la mécanique des solides tandis que l'on préférera le point de vue eulérien pour la mécanique des fluides.

### 1.2.1.2 Déplacements, déformations et contraintes

**Déplacements** Le vecteur déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{P}, t)$  du point matériel  $\mathbf{P}$  à l'instant  $t$  est défini par

$$\mathbf{u}(\mathbf{P}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{P}, t) - \mathbf{P}.$$

On peut ainsi définir la vitesse et l'accélération de chaque particule par  $\vec{v} = \dot{\vec{u}}$  et  $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$  respectivement.

**Le tenseur des déformations** Le champ de vecteurs déplacements traduit le mouvement de chacune des particules indépendamment. Par conséquent, il ne permet pas à priori de distinguer une déformation d'une transformation rigide comme une rotation du corps. Pour cela, on introduit la notion de *déformation* qui traduit l'allongement ou la variation angulaire relative. Du point de vue lagrangien, l'ensemble des déformations dans les trois directions en translation et orientation, exprimées par 6 coefficients indépendants, définit le tenseur symétrique des déformations de Green-Lagrange  $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$  d'ordre 2 par

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{P}, t) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi(\mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{P}}^T \frac{\partial \Phi(\mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{P}} - \bar{\bar{\mathbf{I}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{P}}^T \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{P}} - \bar{\bar{\mathbf{I}}} \right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Comme

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{P}} + \bar{\bar{\mathbf{I}}}$$

le tenseur des déformations de Green-Lagrange peut être réécrit en fonction des déplacements par

$$\bar{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{P}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{P}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{P}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{P}} \right). \quad (1.11)$$

Du fait de l'hypothèse de petites déformations, il est courant de négliger les termes du second ordre dans l'expression du tenseur des déformations en (1.11). Cette linéarisation simplifie les calculs par la suite. On obtient alors le tenseur des déformations linéarisé

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{P}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{P}} \right). \quad (1.12)$$

Notons aussi l'existence du tenseur des déformations d'Euler-Almansi, correspondant au point de vue eulérien. En considérant l'hypothèse des petites déformations, sa forme linéarisé est égale à celle retrouvée en (1.12). Pour cette raison, le point de vue considéré n'importe pas et nous parlerons simplement du tenseur des déformations linéarisé  $\bar{\bar{\varepsilon}}$ .

**Le tenseur des contraintes** La notion de contrainte correspond aux forces exprimées relativement à une unité de surface, c'est à dire aux efforts intérieurs entre les surfaces du milieu. L'ensemble des contraintes exprimées dans les six directions en un point spatial  $\mathbf{p}$  définit alors le tenseur symétrique des contraintes  $\bar{\bar{\sigma}}$  d'ordre 2. Étant donné une surface de normale unitaire  $\mathbf{n}$ , le tenseur des contraintes  $\bar{\bar{\sigma}}(\mathbf{p})$  nous donne le vecteur contrainte agissant sur cette surface par

$$\mathbf{T} = \bar{\bar{\sigma}} : \mathbf{n}$$

où  $:$  représente le produit tensoriel contracté.

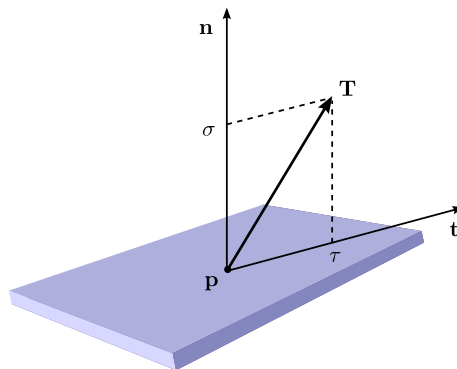


FIGURE 1.6 – Illustration du vecteur contrainte  $\mathbf{T}$  agissant sur une surface au point spatial  $\mathbf{p}$  et de ses composantes normale  $\sigma \mathbf{n}$  et tangentielle  $\tau \mathbf{t}$ .

Comme illustré en Figure 1.6, ce vecteur donne une interprétation des efforts intérieurs appliqués sur cette surface grâce à la décomposition

$$\mathbf{T} = \sigma \mathbf{n} + \tau \mathbf{t}$$

où  $\sigma$  est le module de la composante normale et  $\tau$  le module de la composante tangentielle, i.e. le cisaillement. On peut alors distinguer les cas suivants :

- lorsque  $\sigma > 0$  ou  $\sigma < 0$ , la surface est respectivement en traction ou compression ;
- lorsque  $\tau = 0$  et  $\sigma \neq 0$ , la surface est en traction ou compression pure ;
- lorsque  $\sigma = 0$  et  $\tau \neq 0$ , la surface est en cisaillement pur.

Les lois régissant les liens entre contraintes et déformations à l'échelle globale sont complexes et se répartissent selon différents domaines de déformations.

### 1.2.2 Domaines de déformation

Les déformations appliquées sur le solide induisent différents phénomènes caractérisant les déformations en trois domaines : l'élasticité, la plasticité et la rupture. Ceux-ci peuvent être identifiés par l'évolution des contraintes en fonction des déformations telle qu'illustrée en Figure 1.7. Selon la nature du matériau, certains domaines peuvent ne jamais être atteints. Par exemple, un matériau dit *fragile* aura tendance à atteindre la rupture sans passer par une phase de plasticité. A l'inverse, un matériau *ductile* passera par une phase de plastification avant rupture tel que sur la courbe en Figure 1.7.

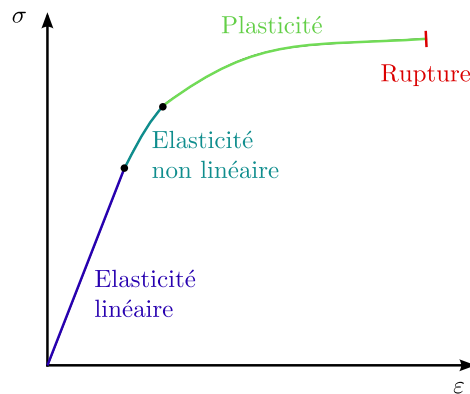


FIGURE 1.7 – Expression de la contrainte  $\sigma$  en fonction de la déformation  $\epsilon$  définissant une loi de comportement d'un matériau idéalisé.

#### 1.2.2.1 Déformations réversibles

L'élasticité est le domaine des déformation réversibles, i.e. le solide retrouve son état initial lorsqu'il n'est plus soumis à des forces extérieures.

**Élasticité linéaire** Lorsqu'un solide se déforme, les relations entre contraintes et déformations appliqués en tout point de celui-ci sont définies par les lois de comportement du matériau. Dans le cas de l'élasticité linéaire, la relation entre contraintes et déformations est linéaire ce qui s'exprime grâce à la *loi de Hooke* par

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon} \quad (1.13)$$

où  $\bar{\bar{C}}$  est le *tenseur des rigidités* d'ordre 4 et  $:$  est le double produit tensoriel contracté. Cependant, grâce à la symétrie des tenseurs  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\varepsilon}$ , celui-ci est décrit dans le cas le plus général par 21 coefficients indépendants. Afin d'alléger les calculs, il est alors courant de noter ces tenseurs sous leur forme compacte

$$\sigma = \mathbf{C} \varepsilon \quad (1.14)$$

où  $\sigma, \varepsilon \in \mathbb{R}^6$  et  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ .

**Paramètres d'élasticité linéaire dans le cas homogène et isotrope** Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope, le tenseur des rigidités ne dépend plus alors que de deux coefficients. Il existe plusieurs conventions sur le choix de ceux-ci, comme les coefficients de Poisson  $\nu$ , de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  ainsi que les modules de Young  $E$  et de cisaillement  $G$ . Afin de maintenir la cohérence avec le reste des travaux présentés dans cette thèse, nous utiliserons le module de Young  $E$  et le module de cisaillement  $G$  qui est égal au coefficient de Lamé  $\mu$ . Les formules de passage entre les différents coefficients d'élasticité isotrope peuvent être trouvées dans la plupart des ouvrages traitant de l'élasticité linéaire. La loi de Hooke (1.13) se simplifie alors en

$$\bar{\sigma} = 2G\bar{\varepsilon} + \frac{G(E - 2G)}{3G - E} \text{tr} \bar{\varepsilon} \bar{\mathbf{I}} \quad (1.15)$$

avec  $\lambda$  le coefficient de Lamé lié aux modules de Young  $E$  et de cisaillement  $G$  par

$$\lambda = \frac{G(E - 2G)}{3G - E}.$$

La notation matricielle (1.14) devient

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \frac{G}{E + G} \begin{pmatrix} 4G + E & E & E & 0 & 0 & 0 \\ E & 4G + E & E & 0 & 0 & 0 \\ E & E & 4G + E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E + G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E + G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E + G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix}$$

**Lois de conservation et équations de Navier** En tout point du solide de masse volumique  $\rho$  sur lequel s'appliquent les forces extérieures  $\mathbf{f}$ , la loi de conservation de la quantité de mouvement est donnée par

$$\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}} = \rho (\mathbf{a} - \mathbf{f}) \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}}$  est l'opérateur divergence du tenseur des contraintes  $\bar{\bar{\sigma}}$  et est ici donné par

$$(\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}})_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

En combinant les lois de comportement du matériau (1.15), les relations entre déformations et déplacements (1.12) et la loi de conservation (1.16), on obtient les *équations de Navier*

$$(\lambda + G) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + G \Delta \mathbf{u} = \rho (\mathbf{a} - \mathbf{f}) \quad (1.17)$$

où  $\Delta \mathbf{u}$  est le Laplacien de  $\mathbf{u}$  et est égal à  $\mathbf{div} (\overline{\overline{\mathbf{grad} \mathbf{u}}})$ .

En général, les équations de Navier reliant les déplacements aux forces ne peuvent être résolues analytiquement. Pour cela, la mise en œuvre de méthodes numériques telles que les Méthodes à Éléments Finis est nécessaire (cf. Section 1.2.4.1).

**Énergie élastique** L'état de déformation du solide sur son domaine  $\Omega$  génère une énergie potentielle élastique qui est définie par

$$E_{el} = \int_{\Omega} \bar{\bar{\varepsilon}} : \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{\varepsilon}} d\Omega$$

où  $:$  est le produit tensoriel contracté. Dans le cas homogène isotrope, l'équation (1.2.2.1) se réduit en

$$E_{el} = \int_{\Omega} \frac{EG}{2(E+G)} (\operatorname{tr} \bar{\bar{\varepsilon}})^2 + G \operatorname{tr} \bar{\bar{\varepsilon}}^2 d\Omega$$

**Élasticité non-linéaire** Lorsque l'on sort du domaine des *petites déformations*, la phase d'élasticité linéaire est parfois suivie d'une phase *d'élasticité non-linéaire*. La déformation est toujours réversible mais la loi de Hooke (1.13) n'est plus valable, i.e. la relation liant contraintes et déformations n'est plus linéaire.

### 1.2.2.2 Déformations irréversibles

Bien qu'en dehors du cadre de cette thèse, nous allons introduire brièvement les phénomènes qui interviennent dans le cas de *grandes déformations*.



**Plasticité** Au delà d'un seuil intrinsèque au matériau, la déformation devient irréversible et est appelée déformation plastique. Le solide ne retrouve plus alors entièrement son état de repos et une partie des déformations restent appliquées. Cela se traduit au niveau atomique par un réarrangement des positions relatives des atomes et la MMC n'est alors généralement plus un outil adapté à la description de ce phénomène.

**Rupture et fatigue** Pour des déformations importantes, le matériau subit des dislocations entre les plans atomiques et des fissures apparaissent. Les contraintes se retrouvent alors concentrées à la base de ces fissures et il y a un risque de propagation entraînant la rupture du solide. Lorsque des cycles de contraintes importantes sont répétés, l'apparition de fissures diminue la durée de vie du solide, i.e. son seuil de tolérance en contrainte avant rupture est abaissé. On parle alors de fatigue.

### 1.2.3 Modèles de tiges

Une *tige* est un corps élancé ayant une dimension grande devant les deux autres. Pour des tiges courbes telles que considérées dans cette étude, le ratio envisagé est au minimum d'un ordre de grandeur. Telle qu'illustrée en Figure 1.8, une tige de Cosserat est entièrement définie par une courbe paramétrée  $\varphi_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  et par un ensemble de repères *matériels*  $\Lambda : [0, 1] \rightarrow SO(3)$  associés en tout point de la courbe  $\varphi_0$ . Les sections  $A(t)$  ne sont pas explicitement représentées et sont décrites grâce aux paramètres d'élasticité de la tige. Les repères matériels  $\Lambda(t) = (\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{z}(t))$  sont des repères orthonormés directs de  $\mathbb{R}^3$ . La courbe  $\varphi_0$  doit être au moins de classe  $C^2$  et est généralement appelée *fibre neutre*. Chaque point de la fibre neutre  $\varphi_0(t)$  correspond au centre d'inertie de la section  $A(t)$ . Enfin, l'orientation de la section  $A(t)$  est définie par le repère  $\Lambda(t)$  défini pour tout point de la fibre neutre  $\varphi_0(t)$ . Par convention l'axe  $\vec{x}(t)$  est orthogonal à la section  $A(t)$ . Dans une tige de Cosserat, chaque point matériel possède alors 6 degrés de libertés.

Dans le cadre de nos travaux, en complément de l'hypothèse d'élasticité linéaire et d'homogénéité du matériau, nous nous imposons les hypothèses suivantes :

- les sections restent planes sous l'effet des déformations (hypothèse de Navier-Bernoulli) ;
- les sections sont de forme constante le long de la tige ;
- la tige n'est pas soumise aux phénomènes de résonances liés aux vibrations.

Notons que nous paramétrons par défaut la tige par le paramètre  $t \in [0, 1]$ , de par les travaux existants basés sur les similitudes avec des modèles différentiels temporels. Dans les rares cas où une confusion avec le temps est possible, nous utiliserons une autre paramétrisation et le lecteur en sera averti en début de section.

Il existe de nombreuses autres hypothèses simplificatrices des modèles de tige. Nous nous limitons aux deux modèles les plus couramment rencontrés et présentés dans les sous-sections à venir.

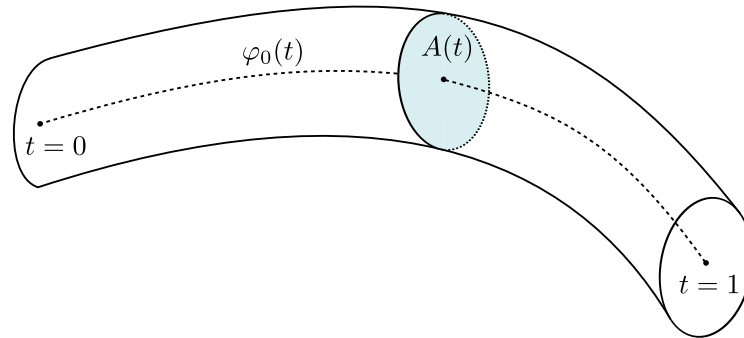


FIGURE 1.8 – Description géométrique d’une tige par sa fibre neutre paramétrée  $\varphi_0$  et les sections  $A$  définies en tout point de la fibre.

### 1.2.3.1 Déformations élémentaires d’une tige

Comme illustré en Figure 1.9, une tige peut subir six déformations élémentaires, liées aux forces et moments exercés en chaque point matériel que l’on peut classer selon quatre types du fait de certaines symétries :

- les forces de traction ou compression, dirigées selon l’axe  $\vec{x}$  du point matériel ;
- les forces de cisaillement, dirigées selon les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  du point matériel ;
- les moments de torsion, dirigés selon l’axe  $\vec{x}$  du point matériel ;
- les moments de flexion, dirigés selon les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  du point matériel.

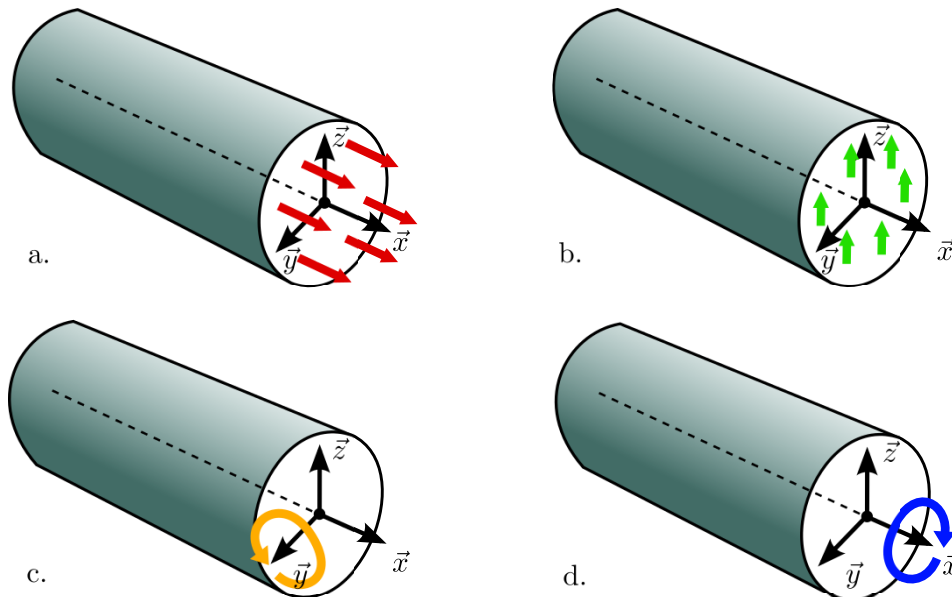


FIGURE 1.9 – Les quatre types de déformations d’une tige : traction/compression le long de l’axe  $\vec{x}$  (en a), cisaillement selon les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  (en b), flexion selon les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  (en c) et torsion autour de l’axe  $\vec{x}$  (en d).

### 1.2.3.2 Tiges de Kirchhoff

L'hypothèse de Bernoulli suppose que les sections restent orthogonales à la fibre neutre, ce qui revient à négliger les effets du cisaillement. Cette hypothèse est valable pour des sections suffisamment fines ou de très petites déformations. Chaque point matériel perd alors 2 degrés de liberté. Le modèle de la *tige de Kirchhoff* qui en résulte est équivalent au modèle de *poutre d'Euler-Bernoulli*, étant donné nos hypothèses. De plus, nous admettrons sauf mention contraire que les tiges de Kirchhoff ne sont pas extensibles ce qui entraîne la perte d'un degré de liberté supplémentaire, similairement au modèle de *poutre de Rayleigh*.

Par conséquent, dans le modèle de tige de Kirchhoff que nous considérons dans cette thèse, chaque point matériel de la tige n'a plus que 3 degrés de liberté et ainsi seules les déformations de flexion et de torsion sont prises en compte. Le repère matériel  $\Lambda(t)$  coïncide alors avec le repère de Frenet.

### 1.2.3.3 Tiges de Timoshenko ou Cosserat

Le modèle de tige de Timoshenko, aussi connu sous le nom de *modèle de Reissner-Simo* [Simo 85], n'impose pas l'orthogonalité des sections par rapport à la fibre neutre et intègre alors les déformations de type cisaillement (cf. Figure 1.10).



FIGURE 1.10 – Tige de Kirchhoff ne considérant pas le cisaillement du fait de l'hypothèse d'orthogonalité des sections à la fibre neutre (à gauche) et tige de Timoshenko avec prise en compte du cisaillement (à droite).

Ce modèle est particulièrement adapté à des poutres à section non-négligeable ou pour de grandes déformations. Le repère matériel  $\Lambda : [0, 1] \rightarrow SO(3)$  doit être défini en tout point de la fibre  $\varphi_0$  et l'axe  $\vec{x}$  n'est alors plus nécessairement tangent à  $\varphi_0$ . On obtient une description tridimensionnelle des déformations en translation et rotation et en ce sens, une tige de Timoshenko est équivalente à une tige de Cosserat. Ainsi, les six déformations sont prises en compte par ce modèle.

## 1.2.4 Méthodes numériques pour la simulation dynamique de tiges

Les équations du mouvement décrivant le comportement d'une tige élastique obtenues depuis la MMC consistent généralement en Équations aux Dérivées Partielles (EDP) ou Équations Différentielles Ordinaires (EDO) telles que les équations de Navier (1.17). Hormis dans certains cas particuliers, il est généralement impossible d'en trouver des solutions analytiques et des méthodes numériques sont alors utilisées pour les résoudre. Une solution consiste à utiliser des schémas d'intégration

numérique explicites tels que la méthode d'Euler ou de Runge-Kutta. Bien que simples à mettre en œuvre, ces méthodes ne sont pas adaptées à des systèmes d'équations différentielles présentant de grands écarts de sensibilité entre les différentes équations. De telles équations sont dites *raides*. Le pas de discrétisation nécessaire à l'intégration numérique est alors très petit afin de garantir la stabilité de la résolution et le coût de calcul rend ces méthodes inefficaces. Dans ces cas, une alternative consiste à employer les *Méthodes à Éléments Finis*.

#### 1.2.4.1 Méthodes à Éléments Finis

Les *Méthodes à Éléments Finis* forment l'outil le plus couramment utilisé dans l'ingénierie afin de dimensionner différents types de pièces et structures. Plutôt que de résoudre les EDP sur le domaine global du solide et des conditions initiales données, le domaine est approximé par un nombre discret d'éléments géométriques de base. L'ensemble des éléments joints entre eux par des nœuds forme un maillage. Sur chacun de ces éléments, les EDP sont linéarisées sous forme d'un système linéaire calculé pour chaque nœud. La concaténation de tous ces systèmes linéarisés et des conditions aux limites globales forme alors un système linéaire de grande dimension qui peut être résolu grâce aux méthodes d'algèbre linéaire. La solution ainsi obtenue à chaque nœud peut être utilisée pour approximer la solution en tout point du domaine par interpolation entre les différents nœuds, en général grâce aux fonctions polynômiales. Ces méthodes sont généralement plus complexes à mettre en œuvre et s'avèrent généralement coûteuses en calcul. Cependant, leur propriété de convergence, i.e. le fait que l'erreur numérique tend vers zéro lorsque la résolution du maillage tend vers zéro, offre une grande précision.

#### 1.2.4.2 Le moteur physique XDE

Dans le cadre de cette thèse, nous avons à disposition le simulateur physique *eXtended Dynamical Engine* (XDE) [Merlhiot 12]. Celui-ci offre une simulation réaliste de la dynamique de systèmes mécaniques poly-articulés et des poutres de Timoshenko, basées sur les Méthodes à Éléments Finis, avec des performances temps-réel. De plus, XDE est capable de gérer avec précision les contacts non-lisses en tenant compte de plusieurs modèles de friction. Enfin, il permet l'interaction de corps grâce à des mécanismes de couplages de type Proportionel-Dérivé permettant d'asservir un corps sur une position ou une vitesse donnée. Ce simulateur sera utilisé pour la planification de mouvement en Section 3.3.

### 1.3 Planification de mouvement pour corps déformables

Nous avons vu en Section 1.1 que le problème de la planification de mouvement pour des corps rigides et des chaînes cinématiques a été largement étudié. Son extension vers la prise en compte de systèmes dynamiques est plus récente et

fait l’objet de nombreuses recherches actuelles. Cependant, relativement peu de travaux considèrent les objets déformables dans la formulation du problème. En dehors du contexte de prototypage virtuel abordé dans cette thèse, ce problème trouve de nombreuses autres applications en robotique comme par exemple en chirurgie faiblement invasive ou en animation graphique. L’intégration des déformations à la formulation du problème de planification de mouvement implique deux difficultés majeures. Tout d’abord, la continuité des déformations augmente radicalement la dimension de l’espace des configurations et donc la complexité. D’autre part, les modèles géométriques ou mécaniques qui définissent le comportement des parties déformables sont généralement très coûteux en terme de temps de calcul.

Trois cas se distinguent :

1. La planification d’objets déformables dans un environnement rigide ;
2. La planification d’objets rigides dans un environnement déformable ;
3. La planification d’objets déformables dans un environnement déformable ;

Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur la planification d’objets déformables dans un environnement rigide. Pour le second sous-problème concernant la planification d’objets rigides dans un environnement déformable, nous référons le lecteur aux travaux de [Frank 08, Frank 11, Frank 13].

### 1.3.1 Approches géométriques

#### 1.3.1.1 Déformations purement géométriques

Pour des déformations simples, comme par exemple les homothéties de la géométrie du solide, l’approche la plus intuitive consisterait à utiliser une des méthodes de planification de mouvement pour la géométrie au repos du solide et à autoriser une pénétration dans les obstacles. Les travaux de [Bayazit 02] se basent sur cette idée pour proposer un algorithme de planification de mouvement pour des objets déformables. Le principe est similaire aux algorithmes de planification de type dit *Lazy* [Bohlin 01], à savoir la génération de nœuds valides du graphe dans un premier temps, potentiellement dans une phase hors ligne, puis la validation des chemins locaux lors de la phase de requête. Lors de la phase de génération de nœuds, les configurations sont d’abord calculées en raisonnant dans l’espace des configurations du corps à l’état non déformé. Si cette configuration est en collision, alors différents niveaux de déformations sont appliqués graduellement jusqu’à que cette configuration soit libre de collision ou que la déformation maximale soit atteinte.

Cette méthode a pour principal inconvénient de n’étendre que partiellement l’espace des configurations aux déformations, en décrivant l’état de déformation par un espace unidimensionnel. Le modèle de déformation est donc ici réduit à sa forme la plus simple et n’offre aucun réalisme physique vis à vis des lois de mécaniques régissant les déformations de corps solides. En contrepartie, le coût de calcul des déformations est faible et cette approche offre de bonnes performances de planification. Cette approche convient particulièrement aux applications d’animation gra-

phique, mais le manque de réalisme physique la rend inadaptée à une application en robotique.

### 1.3.1.2 Manipulation quasi-statique

Pour la plupart des tâches robotiques, l’hypothèse de quasi-staticité est généralement admissible. La théorie de l’élasticité nous dit que lorsqu’un solide élastique est soumis à des contraintes externes, il tend à retrouver un état dit d’équilibre stable qui minimise localement son énergie élastique potentielle. Cette idée est exploitée par [Lamiriaux 01] afin de calculer les configurations à l’équilibre de solides déformables manipulés par des pinces robotiques en minimisant l’énergie potentielle élastique. Les prises de manipulation du solide sont fixes et par conséquent le contact n’est pas autorisé, en cohérence avec la formulation originelle du problème de planification donnée en Définition 1.

Grâce à cette hypothèse, il est possible de découpler la position du solide de son état de déformation. L’espace des configurations est alors de la forme  $\mathcal{C} = \mathcal{F} \times \mathcal{D}$  où  $\mathcal{F} \subset SE(3)$  définit la position du solide et  $\mathcal{D}$  la configuration des  $m$  pinces manipulant le solide. La dimension de  $\mathcal{C}$ , linéaire en  $m$ , est alors suffisamment faible pour une application des méthodes de planification à échantillonnage.

Cependant, cette approche présente quelques points délicats. D’un point de vue théorique, la complétude n’est pas assurée. Ceci est principalement dû au fait que la relation entre l’espace des configurations des pinces et l’espace des configurations du solide à l’équilibre statique n’est pas bijective. En effet, pour un placement des pinces donné, il existe typiquement un nombre fini de configurations à l’équilibre. Même si l’espace  $\mathcal{D}$  est entièrement exploré, certaines configurations à l’équilibre ne seront jamais atteintes.

Aussi, d’un point de vue pratique, les performances sont lourdement impactées par le temps de calcul des configurations à l’équilibre pour un placement des pinces donné. Ce sous-problème est résolu par des méthodes d’optimisation numérique dont le temps de résolution est important. Le découplage des configurations permet de réduire cet impact en appliquant un état de déformation sur de multiples positions de l’espace. Durant la planification locale, les configurations interpolées servent de conditions initiales pour un *démarrage à chaud* des méthodes d’optimisation numérique. Cette méthode peut cependant échouer au passage des singularités, correspondant aux points de bifurcation de l’état de déformation. [Moll 06] étend ces travaux dans le cadre de tiges de Kirchhoff afin de réduire le coût du processus de recherche des minima locaux d’énergie élastique par l’utilisation de subdivisions récursives.

Cette approche offre des applications en robotique grâce à la considération des modèles mécaniques de déformation, bien que limitée au cadre de l’élasticité linéaire homogène isotrope et au cas quasi-statique. Son principal inconvénient est le temps de calcul des configurations d’équilibre pénalisant le temps de résolution global.

Similairement, [Bretl 14] montre que les configurations à l’équilibre statique d’une tige élastique de Kirchhoff manipulée par ses extrémités forment une variété de

dimension 6 paramétrée par une carte globale. Contrairement à l’approche précédente, la paramétrisation globale garantit la couverture de l’espace des configurations à l’équilibre  $\mathcal{D}$  ainsi que la complétude probabiliste. Cette approche sera présentée en détail dans le Chapitre 2 et des extensions de ces travaux seront exposées dans le Chapitre 3.

### 1.3.2 Approches avec prise en compte de la dynamique

Une autre famille d’approches permet de tenir compte du modèle dynamique du déformable, permettant de lier les forces appliquées sur celui-ci aux déformations grâce aux méthodes présentées en Section 1.1.6. En complément d’une solution purement géométrique au problème de planification et tout comme les approches basées sur la manipulation quasi-statique, elles permettent de déterminer la séquence de commandes, i.e. de forces et moments, à appliquer en différents points d’actions sur l’objet déformable.

[Rodriguez 06] proposent une approche pour la planification d’objets déformables dans des environnements déformables. Pour cela, ils utilisent un modèle de déformation basé sur des lois de conservation d’énergie et implémenté via la Méthodes des Éléments Finis. L’algorithme de planification, extension du RRT aux modèles dynamiques, sélectionne aléatoirement les forces qui sont appliquées sur leur modèle pour l’ensemble des objets déformables afin d’en déduire les déplacements correspondants. Les performances de cette approche sont intimement liées au choix des forces à appliquer sur le solide, i.e. à résoudre le problème de planification locale donnant la séquence de commandes à appliquer pour relier deux états. Pour cela, en complément des forces sélectionnées aléatoirement, les auteurs utilisent des forces déterminées par interpolation pour attirer rapidement le solide vers l’état final du problème, similairement aux méthodes de champs de potentiel. Ainsi, le solide force son passage grâce à la capacité de déformation de l’environnement, contournant les problèmes de minima locaux. Cette méthode de sélection des commandes n’est pas adaptée à des environnements rigides.

#### 1.3.2.1 Planification basée sur un *chemin guide*

[Gayle 05a] intègrent leur modèle de déformation basé sur la conservation d’énergie à leur plateforme de planification pour un solide déformable tridimensionnel. Leur méthode, basée sur l’algorithme PRM, crée dans un premier temps un graphe de l’espace libre en considérant un robot dont la géométrie consiste en un seul point. Ce principe permet d’obtenir très rapidement une solution approximée pour un robot très simple, appelée *chemin guide*. Le chemin guide est alors simulé avec leur modèle de déformation afin d’atteindre le but. Cependant, l’utilisation d’un chemin guide implique une perte de la complétude probabiliste car certaines solutions ne pouvant être atteintes par l’approximation du robot point sont perdues. Les extensions à des déformables unidimensionnels de type tige [Gayle 05b, Kabul 07] utilisent la même approche basée sur un chemin guide et présentent les mêmes inconvénients.

### 1.3.2.2 Planification dans l'espace topologique de la tige

Dans de nombreuses tâches de manipulation de tiges élastiques telles que la suture chirurgicale impliquant de nombreux nœuds, la considération de la situation topologique de la tige est plus appropriée que la situation purement géométrique. [Saha 07] ont mis au point une approche de planification de mouvement pour des tiges déformables où l'espace de recherche consiste en l'espace topologique de la tige tel que défini par la théorie des nœuds. Leur algorithme de planification s'appuie sur un modèle dynamique de tige existant et sélectionne aléatoirement la commande à appliquer. Lorsqu'un nouvel état topologique est proche d'être atteint, alors leur approche permet d'ajouter de nouvelles prises statiques sur la tige. Ceci leur permet de réaliser des nœuds complexes et l'utilisation d'un modèle physique leur facilite la validation expérimentale sur un robot manipulateur.

## 1.4 Synthèse

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté les notions permettant d'aborder notre problématique de planification de mouvement pour des tiges élastiques qui se trouve à la jonction de deux domaines distincts. D'une part, la planification de mouvement est un domaine dorénavant largement étudié et qui bénéficie de nombreux outils permettant de résoudre le problème dans le cas de systèmes mécaniques composés d'objets rigides et en prenant en compte leur dynamique. D'autre part, la Mécanique des Milieux Continus offre un formalisme mathématique permettant de décrire de façon physiquement réaliste les déformations d'objets unidimensionnels tels que des tiges élastiques dans le cadre de petites déformations. Nous avons vu que relativement peu de travaux ont abordé la problématique de planification de mouvement pour des objets déformables et notamment pour le cas d'objets unidimensionnels, pourtant largement présents dans les contextes applicatifs. Nos travaux vont tenter d'apporter plusieurs approches à ce problème en s'appuyant notamment sur un cas particulier de l'état de déformation des tiges : les déformations à l'équilibre. Comme nous allons le présenter en détail dans le chapitre suivant, ces déformations offrent de nombreuses propriétés mathématiques qui peuvent être utilisées efficacement pour la planification de mouvement.





## Chapitre 2

# Configurations à l'équilibre d'une tige élastique

Considérons une tige élastique manipulée à ses extrémités, par exemple, par des pinces robotiques. Pour des positions données de ces pinces, la tige se stabilise toujours dans une configuration dite à l'équilibre. La caractérisation de ces configurations est plus connue sous le nom de *problème de l'élasticité d'Euler*, du nom de celui qui y apporta la première solution complète. Ce problème a suscité l'attention de nombreux autres grands mathématiciens tels que Galilée et Bernoulli et la première formulation connue de ce problème remonte au 13<sup>ème</sup> siècle. Pour une étude exhaustive de l'histoire du problème de l'élasticité d'Euler, le lecteur pourra se référer à [Levien 08].

Il existe différentes approches au problème de l'élasticité dont certaines seront développées dans ce chapitre. La plus intuitive consiste certainement à formuler le problème grâce aux équations d'équilibre des forces au sens mécanique tel que présenté en Section 2.1. De plus, il est connu que cet équilibre est atteint aux minima locaux de l'énergie potentielle élastique totale de la tige. Cette propriété permet une reformulation de l'élasticité d'Euler en un problème de calcul variationnel tel que présenté en Section 2.2. Enfin, il a été montré que les solutions à ce problème sont équivalentes aux solutions des intégrales elliptiques. Nous proposerons ainsi une formulation des solutions analytiques au problème grâce aux fonctions elliptiques de Jacobi et de leurs intégrales en Section 2.3. Nous montrerons ensuite comment l'utilisation de ces formes analytiques peut permettre de résoudre efficacement le problème de géométrie inverse pour des tiges élastiques à l'équilibre en Section 2.4.

Tout au long de ce chapitre, nous verrons sous quelles conditions il est possible de manipuler une tige élastique de façon quasi-statique, c'est à dire que pour une manipulation à vitesse infinitésimale la tige reste à l'équilibre statique. Dans ces configurations particulières, nous allons voir que le système décrivant le comportement de la tige élastique possède des propriétés intéressantes pour une application en planification de mouvement qui sera présentée au Chapitre 3.

## 2.1 Étude de l'équilibre d'une tige de Kirchhoff

Dans un premier temps, nous allons aborder le problème d'équilibre statique d'une tige élastique de Kirchhoff grâce aux équations d'équilibre définies par les lois de la mécanique. Nous verrons qu'il est possible d'obtenir de cette analyse les équations régissant l'évolution des efforts internes le long de la tige, résultat qui constitue un élément central de ce chapitre et qui sera démontré par la suite via différentes approches.

### 2.1.1 Modèle géométrique

Considérons l'équilibre statique d'une tige élastique de Kirchhoff, naturellement droite, maintenue à ses extrémités. Nous supposons que la tige est de longueur unitaire. En considérant  $t \in [0, 1]$  l'abscisse curviligne le long de la fibre neutre de la tige, la position 6D de la tige est décrite par l'application continue  $\mathbf{q} : [0, 1] \rightarrow SE(3)$  telle que

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \left( \sum_{i=1}^3 u_i X_i + X_4 \right) \quad (2.1)$$

où

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & X_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & X_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ X_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & X_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & X_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

est une base de  $\mathfrak{se}(3)$ , l'algèbre de Lie associée à  $SE(3)$ . Les commandes  $\mathbf{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  décrivent les déformations avec  $u_1$  la déformation en torsion et  $u_{2,3}$  les déformations en flexion. De plus, sans restreindre la généralité, nous supposons dans un premier temps que la position de la base de la tige est à l'identité, i.e.  $\mathbf{q}(0) = e$ . L'autre extrémité de la tige est à une position donnée  $\mathbf{q}(1)$  dont l'ensemble des possibilités forme l'espace  $\mathcal{B} \subset SE(3)$ . Les positions de la fibre neutre de la tige  $\mathbf{q}(t) \in SE(3)$  peuvent s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $\mathbf{R}(t)$  matrice de rotation du groupe de Lie  $SO(3)$ , i.e.  $\mathbf{R}^{-1}(t) = \mathbf{R}^T(t)$ . On peut montrer facilement que

$$\mathbf{q}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Les éléments de l'espace tangent  $\dot{\mathbf{q}}(t) \in T_q SE(3)$  peuvent alors s'écrire sous la forme

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} & \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

La *trivialisation à gauche*  $\mathbf{q}^{-1}\dot{\mathbf{q}} \in \mathfrak{se}(3)$ , permettant de ramener les éléments de l'espace tangent  $T_q SE(3)$  à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{se}(3)$ , s'écrit alors sous la forme

$$\mathbf{q}^{-1}\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} & \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Or, d'après le modèle de tige donné en (2.1), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{-1}\dot{\mathbf{q}} &= \sum_{i=1}^3 u_i X_i + X_4 \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}} & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(3)$$

En identifiant (2.2) et (2.3), on obtient finalement

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} &= \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2.1.2 Équations d'équilibre statique

### 2.1.2.1 Dans le cas général

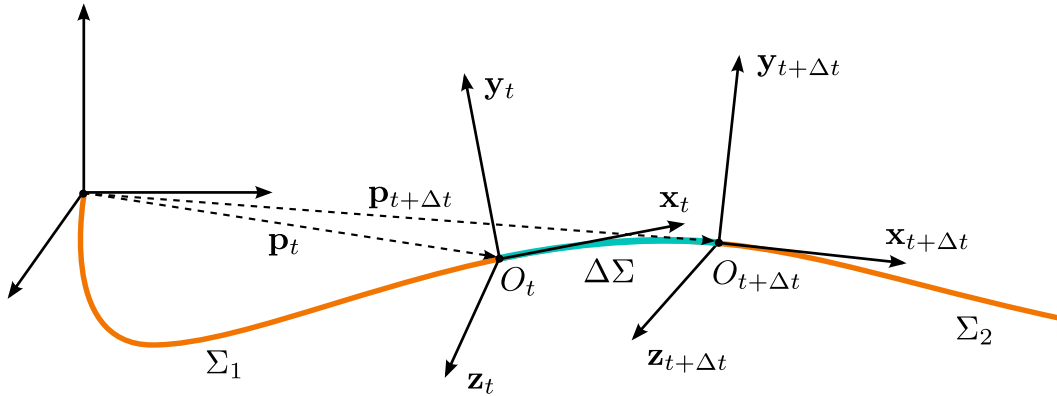


FIGURE 2.1 – Tige élastique séparée en trois parties :  $\Sigma_1$  à gauche,  $\Sigma_2$  à droite et la partie infinitésimale  $\Delta\Sigma$  à la jonction de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Le bilan des forces à l'équilibre est donné en considérant les forces à la position  $t$  et  $t + \Delta t$  de la tige, avec  $\Delta t$  qui tend vers zéro.

Considérons à présent la portion infinitésimale  $\Delta\Sigma$  de la tige telle qu'illustré en Figure 2.1. La partie  $\Sigma_1$  située avant  $O_t$  crée sur  $\Delta\Sigma$  un torseur d'efforts ayant pour

éléments de réduction en  $O_t$

$$\boldsymbol{\tau}_1(O_t) = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_t(O_t) \\ \mathbf{f}_t \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{m}_t(O_t)$  est le moment à la position  $t$  par rapport à  $O_t$  et  $\mathbf{f}_t$  est la force à la position  $t$ . La partie  $\Sigma_2$  située après  $O_{t+\Delta t}$  crée sur  $\Delta\Sigma$  un torseur d'efforts ayant pour éléments de réduction en  $O_{t+\Delta t}$

$$\boldsymbol{\tau}_2(O_{t+\Delta t}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{m}_{t+\Delta t}(O_{t+\Delta t}) \\ -\mathbf{f}_{t+\Delta t} \end{pmatrix}$$

qui peuvent être réduits en  $O_t$

$$\boldsymbol{\tau}_2(O_t) = \begin{pmatrix} -\mathbf{m}_{t+\Delta t}(O_{t+\Delta t}) - (\mathbf{p}_{t+\Delta t} - \mathbf{p}_t) \times \mathbf{f}_{t+\Delta t} \\ -\mathbf{f}_{t+\Delta t} \end{pmatrix}$$

Comme cette portion  $\Delta\Sigma$  est en équilibre, la somme des éléments de réduction en  $O_t$  est nulle, i.e.  $\boldsymbol{\tau}_1(O_t) + \boldsymbol{\tau}_2(O_t) = \mathbf{0}$ , donc,

$$\mathbf{m}_t(O_t) = \mathbf{m}_{t+\Delta t}(O_{t+\Delta t}) + (\mathbf{p}_{t+\Delta t} - \mathbf{p}_t) \times \mathbf{f}_{t+\Delta t} \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{f}_{t+\Delta t} \quad (2.5b)$$

Lorsque  $\Delta t$  est petit, (2.5b) et (2.5a) conduisent à

$$\mathbf{m}_t(O_t) \approx \mathbf{m}_{t+\Delta t}(O_{t+\Delta t}) + \Delta t \mathbf{x}_t \times \mathbf{f}_t \quad (2.6)$$

Or, les expressions des forces  $\mathbf{f}_{t+\Delta t}$  et des moments  $\mathbf{m}_{t+\Delta t}(O_{t+\Delta t})$  dans le repère  $\mathcal{R}_t$  depuis leur expression dans le repère  $\mathcal{R}_{t+\Delta t}$  sont données par les équations respectives

$$\{\mathbf{f}_{t+\Delta t}\}_{\mathcal{R}_t} = \mathbf{R}_t^T \mathbf{R}_{t+\Delta t} \{\mathbf{f}_{t+\Delta t}\}_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}} \quad (2.7a)$$

$$\{\mathbf{m}_{t+\Delta t}(O_{t+\Delta t})\}_{\mathcal{R}_t} = \mathbf{R}_t^T \mathbf{R}_{t+\Delta t} \{\mathbf{m}_{t+\Delta t}(O_{t+\Delta t})\}_{\mathcal{R}_{t+\Delta t}} \quad (2.7b)$$

. Lorsque  $\Delta t$  est petit, on déduit de (2.5b) et (2.7a)

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} &= \{\mathbf{f}_{t+\Delta t}\}_{\mathcal{R}_t} \\ &\approx \mathbf{R}_t^T \left( \mathbf{R}_t + \Delta t \dot{\mathbf{R}}_t \right) \left( \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} + \Delta t \{\dot{\mathbf{f}}_t\}_{\mathcal{R}_t} \right) \\ &\approx \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} + \Delta t \left( \mathbf{R}_t^T \dot{\mathbf{R}}_t \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} + \{\dot{\mathbf{f}}_t\}_{\mathcal{R}_t} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Soit

$$\begin{aligned} \{\dot{\mathbf{f}}_t\}_{\mathcal{R}_t} &= -\mathbf{R}_t^T \dot{\mathbf{R}}_t \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} \\ &= -\hat{\mathbf{u}} \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} \end{aligned} \quad (2.9)$$

De même, des équations (2.6) et (2.7b) on a

$$\begin{aligned} \{\mathbf{m}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} &\approx \mathbf{R}_t^T \left( \mathbf{R}_t + \Delta t \dot{\mathbf{R}}_t \right) \left( \{\mathbf{m}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} + \Delta t \{\dot{\mathbf{m}}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} \right) + \Delta t \hat{\mathbf{x}} \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} \\ &\approx \{\mathbf{m}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} + \Delta t \left( \mathbf{R}_t^T \dot{\mathbf{R}}_t \{\mathbf{m}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} + \hat{\mathbf{x}} \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} + \{\dot{\mathbf{m}}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Soit

$$\begin{aligned} \{\dot{\mathbf{m}}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} &= -\mathbf{R}_t^T \dot{\mathbf{R}}_t \{\mathbf{m}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} - \hat{\mathbf{x}} \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} \\ &= -\hat{\mathbf{u}} \{\mathbf{m}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} - \hat{\mathbf{x}} \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons les coordonnées des efforts internes dans leur repère local par

$$\{\mathbf{m}_t(O_t)\}_{\mathcal{R}_t} = \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \\ \mu_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{f}_t\}_{\mathcal{R}_t} = \begin{pmatrix} \mu_4(t) \\ \mu_5(t) \\ \mu_6(t) \end{pmatrix},$$

les équations différentielles de l'équilibre peuvent s'écrire sous la forme du système différentiel suivant

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= u_3 \mu_2 - u_2 \mu_3 \\ \dot{\mu}_2 &= -u_3 \mu_1 + u_1 \mu_3 + \mu_6 \\ \dot{\mu}_3 &= u_2 \mu_1 - u_1 \mu_2 - \mu_5 \\ \dot{\mu}_4 &= u_3 \mu_5 - u_2 \mu_6 \\ \dot{\mu}_5 &= -u_3 \mu_4 + u_1 \mu_6 \\ \dot{\mu}_6 &= u_2 \mu_4 - u_1 \mu_5 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les déformations  $u_i$  sont reliés aux efforts internes  $\mu_i$  grâce à la loi de Hooke par la relation

$$\mu_i = c_i u_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

où les constantes  $c_i, i = \{1, 2, 3\}$  représentent les coefficients de rigidité du matériau.

### 2.1.2.2 Dans le cas intégrable

Considérons à présent le cas de la tige ayant une rigidité isotrope en flexion, i.e.  $c_2 = c_3$ . Physiquement, cela correspondrait par exemple au cas d'une tige homogène isotrope avec une section circulaire. Sans perte de généralité, normalisons ces constantes de raideurs avec  $c_2 = c_3 = 1$  et  $c_1 \neq 0$ . Si de plus, nous supposons

que  $c_1 = 1$ , le système différentiel (2.12) se réduit alors en

$$\begin{aligned}
 \dot{\mu}_1 &= 0 \\
 \dot{\mu}_2 &= \mu_6 \\
 \dot{\mu}_3 &= -\mu_5 \\
 \dot{\mu}_4 &= \mu_3\mu_5 - \mu_2\mu_6 \\
 \dot{\mu}_5 &= -\mu_3\mu_4 + a_1\mu_6 \\
 \dot{\mu}_6 &= \mu_2\mu_4 - a_1\mu_5
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

avec  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\mu}(0)$  et  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \ \dots \ \mu_6)^T$ . Ainsi, on note  $\mathbf{a} = (a_1 \ \dots \ a_6)^T$ .

De plus, [Biggs 07] montre que la courbure  $\kappa$  et la torsion  $\tau$  en tout point de la tige peuvent alors être exprimées par

$$\kappa^2 = \mu_2^2 + \mu_3^2 \quad \tau = \mu_1 - \frac{\mu_2\mu_5 + \mu_3\mu_6}{\mu_2^2 + \mu_3^2}.$$

Dans ce cas, les équations (2.12) régissant l'évolution des efforts internes dans la tige peuvent être reformulées en fonction de la courbure et de la torsion par

$$2\ddot{\kappa} + \kappa^3 - 2\kappa(\tau - \lambda_1)^2 = \lambda_2\kappa \tag{2.14a}$$

$$\kappa^2(\tau - \lambda_1) = \lambda_3 \tag{2.14b}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{a_1}{2} \\
 \lambda_2 &= a_2^2 + a_3^2 + 2a_4 - \frac{a_1^2}{2} \\
 \lambda_3 &= \frac{a_1}{2}(a_2^2 + a_3^2) - (a_2a_5 + a_3a_6).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Notons que le cas planaire peut-être traité comme un cas particulier où la torsion  $\tau$  est nulle. Le système d'équations (2.14) se réduit alors à

$$2\ddot{\kappa} + \kappa^3 = (a_3^2 + 2a_4)\kappa \tag{2.16}$$

Les équations (2.14) sont un élément central de ce chapitre. Elles correspondent aux résultats obtenus par une approche lagrangienne telle que [Langer 96]. Nous présenterons la démonstration de ce résultat via une approche hamiltonienne en Section 2.2. D'autre part, nous montrerons en Section 2.3 leur intégration permettant d'obtenir les solutions analytiques au problème d'équilibre statique.

## 2.2 L'approche par commande optimale

Dans cette section, nous formulons le problème d'équilibre statique comme un problème de commande optimale où l'on recherche les trajectoires décrites par la

fibre neutre de la tige qui minimisent l'énergie élastique totale, i.e. les déformations intégrées le long de la tige. Pour cela, nous nous appuyons essentiellement sur les travaux de [Biggs 07] et [Bretl 14]. Nous illustrons d'abord le concept sur une tige dans le cas planaire. Ceci nous permet de ramener l'espace des configurations de la tige à un espace vectoriel et simplifie alors grandement l'approche. Nous verrons ensuite l'extension à des tiges tridimensionnelles de type Kirchhoff dont l'espace des configurations est une variété différentielle et enfin l'une de nos contributions permettant l'extension à des tiges de type Timoshenko.

### 2.2.1 Principe du Maximum de Pontryagin

Nous rappelons ici brièvement le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) [Pontryagin 87] pour les problèmes de commande optimale aux conditions aux limites fixes. Pour plus de détail, le lecteur pourra se référer à [Liberzon 12, Soueres 98].

Soit le problème de commande optimale défini sur  $\mathbb{R}^n$  aux conditions aux limites fixes sous la forme

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{q}, u}{\text{minimize}} && \int_0^1 L(\mathbf{q}, u) dt \\ & \text{subject to} && \dot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}, u) \\ & && \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{q}_1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

avec  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  l'état du système,  $u \in \mathcal{U}$  les commandes,  $L : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction de coût (stationnaire),  $f : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  le modèle différentiel et enfin  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^n$  les conditions aux limites aux temps  $t = 0$  et  $t = 1$  respectivement. Alors, le Principe du Maximum de Pontryagin nous donne les conditions nécessaires d'optimalité globale au problème de commande optimale (2.17).

**Théorème 1** (Principe du Maximum pour des problèmes de commande optimale sur  $\mathbb{R}^n$  aux conditions aux limites fixes). *Soit  $u^* : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$  la commande optimale et  $\mathbf{q}^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  la trajectoire optimale de l'état. Il existe alors une fonction  $\mathbf{p}^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et une constante  $p_0 \leq 0$  qui satisfont  $(p_0, \mathbf{p}^*(t)) \neq (0, \mathbf{0}) \forall t \in [0, 1]$  et qui possèdent les propriétés suivantes :*

1.  $\mathbf{q}^*$  et  $\mathbf{p}^*$  satisfont les équations canoniques

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^* &= \nabla_p H(\mathbf{q}^*, u^*, \mathbf{p}^*, p_0) \\ \dot{\mathbf{p}}^* &= -\nabla_q H(\mathbf{q}^*, u^*, \mathbf{p}^*, p_0) \end{aligned} \tag{2.18}$$

avec les conditions aux limites  $\mathbf{q}^*(0) = \mathbf{q}(0)$  et  $\mathbf{q}^*(1) = \mathbf{q}(1)$  et où l'hamiltonien  $H : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est défini par

$$H(\mathbf{q}, u, \mathbf{p}, p_0) \triangleq \langle \mathbf{p}, f(\mathbf{q}, u) \rangle + p_0 L(\mathbf{q}, u). \tag{2.19}$$

2. A chaque instant  $t$  donné, la fonction  $u \mapsto H(\mathbf{q}^*(t), u, \mathbf{p}^*(t), p_0)$  a un maximum global en  $u = u^*(t)$ , i.e. l'inégalité

$$H(\mathbf{q}^*(t), u^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0) \geq H(\mathbf{q}^*(t), u, \mathbf{p}^*(t), p_0) \tag{2.20}$$

est vraie pour tout  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $u \in \mathcal{U}$ .



3.

$$H(\mathbf{q}^*(t), u^*(t), \mathbf{p}^*(t), p_0) = 0 \quad (2.21)$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Notons que la variable  $\mathbf{p}(t)$  est généralement nommée état adjoint. De plus, il est nécessaire de distinguer le cas dit *anormal* où  $p_0 = 0$  du cas dit *normal* où  $p_0 < 0$ . En pratique, dans le cas *normal* les états adjoints  $(p_0, \mathbf{p}^*(t))$  sont normalisés de sorte que  $p_0 = -1$ .

Nous allons à présent pouvoir appliquer le PMP tel que présenté au problème d'équilibre statique d'une tige élastique planeaire.

## 2.2.2 Application au cas de la tige planeaire

Nous considérons une tige élastique planeaire et nous admettons comme pour le reste de cette thèse l'hypothèse d'élasticité linéaire. Sans perte de généralité, la tige est supposée de longueur unitaire et inextensible. De plus, nous faisons l'hypothèse que sa configuration au repos, i.e. lorsque aucune force n'est appliquée sur les manipulateurs, est la configuration droite.

### 2.2.2.1 Formulation du problème de commande optimale

La géométrie de la fibre neutre peut être décrite par l'application

$$\mathbf{q} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

où  $(q_1, q_2)$  sont les coordonnées en  $x$  et  $y$  et  $q_3$  est l'angle tangent à la fibre neutre (cf. Figure 2.2). Notons que les coordonnées  $\mathbf{q}$  sont systématiquement exprimées dans le repère de la base de la tige et que pour cela, nous supposons que  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$ .

La géométrie de la tige doit aussi satisfaire le modèle différentiel

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \cos q_3 \\ \dot{q}_2 &= \sin q_3 \\ \dot{q}_3 &= u \end{aligned}$$

qui est identique au modèle différentiel du monocycle vu en Section 1.1.6. La commande  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$  représente alors la déformation de la tige par la variation de l'angle tangent à la fibre  $q_3$ , i.e. la courbure de la fibre neutre. Étant donné cette description géométrique et l'hypothèse de l'élasticité linéaire impliquant des petites déformations  $u$ , il est possible d'exprimer l'énergie élastique potentielle totale de la tige définie en (1.2.2.1) par

$$E_{el} = \int_0^1 cu^2 dt$$

où  $c$  est la constante de raideur.

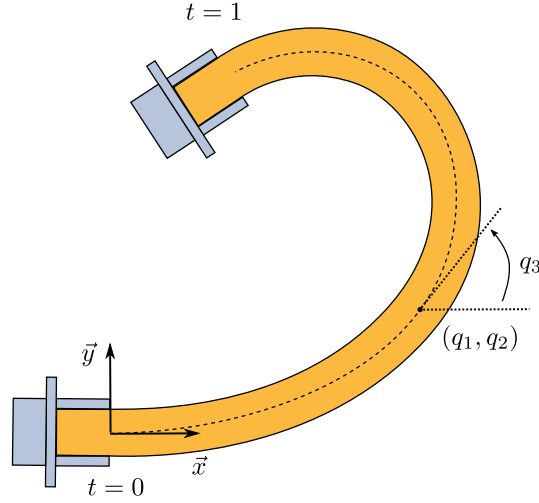


FIGURE 2.2 – Illustration de la description géométrique de la fibre neutre de la tige plane par  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^3$ .

Le problème d'équilibre statique de la tige peut alors être reformulé comme un problème de commande optimale de la forme vue en (2.17) par

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{q}, u}{\text{minimize}} && \frac{1}{2} \int_0^1 cu^2 dt \\ & \text{subject to} && \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \cos q_3 \\ \sin q_3 \\ u \end{pmatrix} \\ & && \mathbf{q}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.22)$$

pour  $\mathbf{b} \in \mathcal{B} \subset SE(3)$ , l'ensemble des positions accessibles de l'extrémité en  $t = 1$  de la tige.

### 2.2.2.2 Conditions nécessaires d'optimalité par application du PMP

Par application du PMP, il est possible d'identifier les conditions nécessaires de la commande optimale  $u^*$  satisfaisant (2.22). Ainsi, si  $(\mathbf{q}^*, u^*)$  est un optimum local, alors il existe une trajectoire adjointe optimale

$$\mathbf{p}^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

et une constante  $p_0 \leq 0$  qui satisfont les conditions (2.18), (2.20) et (2.21). L'hamiltonien tel que défini en (2.19) s'écrit alors ici sous la forme

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q}, u, \mathbf{p}, p_0) &= \langle \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}} \rangle + p_0 \frac{1}{2} cu^2 \\ &= p_1 \cos q_3 + p_2 \sin q_3 + p_3 u + p_0 \frac{1}{2} cu^2 \end{aligned}$$

Quel que soit  $p_0 \leq 0$ , la condition (2.18) devient

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \cos q_3 & \dot{p}_1 &= 0 \\ \dot{q}_2 &= \sin q_3 & \dot{p}_2 &= 0 \\ \dot{q}_3 &= u & \dot{p}_3 &= p_1 \sin q_3 - p_2 \cos q_3 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Il convient à présent de discerner le cas *anormal* du cas *normal*. La condition (2.20) nous dit que

$$\frac{\partial H(\mathbf{q}^*, u^*, \mathbf{p}^*, p_0)}{\partial u} = 0. \quad (2.24)$$

Dans le cas *anormal* où  $p_0 = 0$ , (2.24) mène à

$$p_3 = 0$$

donc  $\dot{p}_3$  est constant. Comme  $p_1$  et  $p_2$  sont constants, il est clair que  $q_3$  est aussi constant. Du fait de la condition initiale  $q_3(0) = 0$ , alors  $q_3(t) = 0$ . Le cas *anormal* correspond physiquement au cas où la tige est en configuration droite, c'est à dire son état de repos. Dans le cas *normal* avec  $p_0 = -1$ , (2.24) mène à

$$p_3 = cu \quad (2.25)$$

On peut déduire des équations (2.24) et (2.25) que les trajectoires  $(\mathbf{q}^*, u^*)$  et  $\mathbf{p}^*$  sont entièrement déterminées par les conditions initiales de l'état adjoint  $\mathbf{p}(0)$ . En d'autres termes, l'ensemble des configurations à l'équilibre d'une tige élastique plane est paramétré par un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  qui correspond à l'ensemble des conditions initiales de l'état adjoint  $\mathbf{p}(0)$ . Cependant, nous avons jusqu'à présent vérifié uniquement les conditions nécessaires d'optimalité et mis de côté les conditions suffisantes. Ces dernières sont présentées dans les sections suivantes.

### 2.2.2.3 Interprétation physique

Dans le cas de la tige plane, l'état adjoint  $\mathbf{p}(t)$  peut être interprété comme les efforts internes le long de la tige exprimés dans le repère global, i.e. par rapport à la configuration de la base de la tige  $\mathbf{q}(0)$ . Soient  $\boldsymbol{\mu} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  les efforts internes exprimés dans le repère local, ceux-ci sont définis par

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \cos q_3(t) & \sin q_3(t) & 0 \\ -\sin q_3(t) & \cos q_3(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}(t) \quad (2.26)$$

En dérivant  $\boldsymbol{\mu}$  par rapport à  $t$  dans (2.26) et étant donné (2.23), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= u(p_2 \cos q_3 - p_1 \sin q_3) \\ \dot{\mu}_2 &= -u(p_1 \cos q_3 + p_2 \sin q_3) \\ \dot{\mu}_3 &= \dot{p}_3 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_1 &= u\mu_2 \\ \dot{\mu}_2 &= -u\mu_1 \\ \dot{\mu}_3 &= -\mu_2.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Nous retrouvons le résultat (2.12) obtenu par une approche classique de mécanique en 3D en traitant le cas planaire comme un cas particulier. Notons que dans notre approche du cas planaire,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  représentent les forces internes en  $x$  et  $y$ , ce qui correspond aux variables  $\mu_4$  et  $\mu_5$  respectivement dans le système (2.12). De même pour le moment  $\mu_3$  qui dans le cas planaire correspond à la variable  $\mu_1$  dans notre traitement du cas 3D. Des résultats illustrant des configurations à l'équilibre d'une tige planaire seront présentés en Section 2.3.

### 2.2.3 Cas d'une tige tridimensionnelle de Kirchhoff

Nous étendons le formalisme de la commande optimale aux tiges tridimensionnelles de Kirchhoff dont nous avons présenté le modèle géométrique et une étude de l'équilibre par une approche classique en Section 2.1.

#### 2.2.3.1 Formulation du problème

L'hypothèse du modèle de Kirchhoff nous permet de définir l'énergie potentielle élastique de la tige par

$$E_{el} = \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^3 c_i u_i^2 dt \tag{2.28}$$

où  $c_i > 0, i = \{1, 2, 3\}$  représentent les constantes de raideurs.

La géométrie de la tige est alors décrite par des positions 6D qui sont des éléments du groupe de Lie  $SE(3)$ . Le problème de commande optimale correspondant doit alors être étendu à une formulation sur des variétés différentielles. Ainsi, la tige élastique est à l'équilibre statique si elle minimise localement son énergie potentielle élastique, c'est à dire si  $(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  est un optimum local du problème de commande optimale

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{q}, \mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^3 c_i u_i^2 dt \\ \text{subject to} \quad & \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \left( \sum_{i=1}^3 u_i X_i + X_4 \right) \\ & \mathbf{q}(0) = e, \quad \mathbf{q}(1) = b\end{aligned}\tag{2.29}$$

où  $e$  est l'élément identité de  $SE(3)$  et  $b \in \mathcal{B}$  avec  $\mathcal{B} \subset SE(3)$  l'ensemble des positions 6D accessibles par l'extrémité de la tige. Les matrices  $X_i, i = \{1, \dots, 6\}$  définies en (2.2) forment une base de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{se}(3)$ .

Il est alors possible d'obtenir les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (2.29) en appliquant le PMP étendu aux variétés différentielles. Nous ne

détaillerons pas ce théorème ici mais nous invitons le lecteur intéressé à consulter [Liberzon 12, Agrachev 04]. De même, l'obtention des conditions suffisantes d'optimalité nécessite l'introduction de nombreux fondements théoriques de géométrie différentielle tel que la réduction de Lie-Poisson [Marsden 13, Renaud 15]. Dans cette section, nous allons brièvement résumer les résultats obtenus par [Bretl 14] pour une tige de Kirchhoff, qui constituent un des éléments centraux sur lesquels s'appuient les travaux de cette thèse.

### 2.2.3.2 Conditions nécessaires d'optimalité

L'application du PMP étendu aux variétés différentielles et l'application de la réduction de Lie-Poisson nous donne les conditions nécessaires d'optimalité du problème de commande optimale (2.29) suivantes :

**Théorème 2** (Conditions nécessaires d'optimalité réduites). *Soit l'espace*

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^6 \mid (a_2, a_3, a_5, a_6) \neq (0, 0, 0, 0)\}.$$

Une trajectoire  $(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  est un extremum normal de 2.29 si et seulement si il existe la trajectoire adjointe  $\boldsymbol{\mu} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^6$  satisfaisant

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= u_3 \mu_2 - u_2 \mu_3 \\ \dot{\mu}_2 &= \mu_6 + u_1 \mu_3 - u_3 \mu_1 \\ \dot{\mu}_3 &= -\mu_5 + u_2 \mu_1 - u_1 \mu_2 \\ \dot{\mu}_4 &= u_3 \mu_5 - u_2 \mu_6 \\ \dot{\mu}_5 &= u_1 \mu_6 - u_3 \mu_4 \\ \dot{\mu}_6 &= u_2 \mu_4 - u_1 \mu_5 \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$u_i = c_i^{-1} \mu_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \tag{2.31}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \left( \sum_{i=1}^3 u_i X_i + X_4 \right) \tag{2.32}$$

avec la condition initiale  $\boldsymbol{\mu}(0) = \mathbf{a}$  pour  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ .

Il est intéressant de souligner que le Théorème 2 nous permet de retrouver le système différentiel des efforts internes le long de la tige (2.12) que nous avons obtenu par une approche classique en Section 2.1. En d'autres termes, la trajectoire adjointe  $\boldsymbol{\mu}$  peut alors être interprétée comme les efforts internes le long de la tige.

Soit  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des applications  $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) : [0, 1] \rightarrow SE(3) \times \mathbb{R}^3$  qui satisfont les conditions nécessaires d'optimalité. Alors tout  $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in \mathcal{Q}$  est entièrement défini par le choix de  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ , tout comme la trajectoire adjointe correspondante  $\boldsymbol{\mu}$ . Nous noterons les applications correspondantes par  $\Psi(\mathbf{a}) = (\mathbf{q}, \mathbf{u})$ . Notons que l'on peut en déduire que  $\Psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{Q}$  est un homéomorphisme (cf. Lemme 4 de [Bretl 14]). Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{Q}$  est une variété différentielle de dimension 6 qui peut être paramétrée par un atlas muni de l'unique carte  $(\mathcal{Q}, \Psi^{-1})$  et dont  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des coordonnées.

### 2.2.3.3 Conditions suffisantes d'optimalité

Les conditions nécessaires (2.30), (2.31) et (2.32) nous ont donné l'ensemble des extrema  $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in \mathcal{C}$  du problème de commande optimale (2.29). Soient les constantes  $c_{ij}$  définies par  $c_{ij} = c_i^{-1} - c_j^{-1}$  et les matrices  $\mathbf{M} : [0, 1] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{6 \times 6}$  et  $\mathbf{J} : [0, 1] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{6 \times 6}$ . Les conditions suffisantes d'optimalité réduites, obtenues grâce à la théorie des points conjugués dans les problèmes de commande optimale [Agrachev 04], sont alors données par le Théorème 3.

**Théorème 3** (Conditions suffisantes d'optimalité réduites). *Soient les matrices*

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 c_{32} & \mu_2 c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_3 c_{13} & 0 & \mu_1 c_{13} & 0 & 0 & 1 \\ \mu_2 c_{21} & \mu_1 c_{21} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\mu_6/c_2 & \mu_5/c_3 & 0 & \mu_3/c_3 & -\mu_2/c_2 \\ \mu_6/c_1 & 0 & -\mu_4/c_3 & -\mu_3/c_3 & 0 & \mu_1/c_1 \\ -\mu_5/c_1 & \mu_4/c_2 & 0 & \mu_2/c_2 & -\mu_1/c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \text{diag}(c_1^{-1}, c_2^{-1}, c_3^{-1}, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3/c_3 & -\mu_2/c_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_3/c_3 & 0 & \mu_1/c_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2/c_2 & -\mu_1/c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3/c_3 & -\mu_2/c_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\mu_3/c_3 & 0 & \mu_1/c_1 \\ 0 & -1 & 0 & \mu_2/c_2 & -\mu_1/c_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit le système différentiel linéaire instationnaire

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{F}\mathbf{M} \\ \dot{\mathbf{J}} &= \mathbf{G}\mathbf{M} + \mathbf{H}\mathbf{J} \end{aligned} \tag{2.33}$$

ayant pour conditions initiales  $\mathbf{M}(0, \mathbf{a}) = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}(0, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ . Alors  $(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  est un optimum local du problème de commande optimale (2.29) si et seulement si  $\det(\mathbf{J}(t, \mathbf{a})) \neq 0$  pour tout  $t \in (0, 1]$ .

Il est possible d'interpréter physiquement les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{J}$  définies au Théorème 3. La matrice  $\mathbf{M}(t, \mathbf{a})$  décrit les variations des efforts internes  $\boldsymbol{\mu}(t)$  par rapport aux conditions initiales  $\mathbf{a}$ , i.e.

$$[\mathbf{M}(t, \mathbf{a})]_{ij} = \frac{\partial \mu_i(t)}{\partial a_j}.$$

La matrice  $\mathbf{J}(t, \mathbf{a})$ , nommée matrice jacobienne par la suite, décrit les variations de la géométrie  $\mathbf{q}(t)$  par rapport aux conditions initiales  $\mathbf{a}$  dans le repère local, i.e.

$$[\mathbf{J}(t, \mathbf{a})]_{ij} = \left[ \mathbf{q}(t, \mathbf{a})^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}(t, \mathbf{a})}{\partial a_j} \right]_i^\vee.$$

L'opérateur  $\check{\cdot}$ , opérateur réciproque de l'opérateur  $\hat{\cdot}$  tel que défini dans [Murray 94], donne une représentation vectorielle d'une matrice antisymétrique. On a  $\mathbf{W}^\check{\cdot} = \mathbf{w}$  tel que la matrice  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est antisymétrique, i.e.  $-\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$  et avec  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ . Notons que réciproquement, on a  $\mathbf{W} = \hat{\mathbf{w}}$ .

Nous pouvons alors définir l'ensemble des coordonnées satisfaisant le Théorème 3 par l'ouvert

$$\mathcal{A}_{stable} = \{\mathbf{a} \in \mathcal{A} \mid \det(\mathbf{J}(t, \mathbf{a})) \neq 0, \forall t \in (0, 1]\}$$

#### 2.2.3.4 L'ensemble des configurations stables $\mathcal{Q}_{stable}$

Nous désignons par la suite le complément de  $\mathcal{A}_{stable}$  par le fermé  $\mathcal{A}_{unstable} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{stable}$  et la frontière de  $\mathcal{A}_{stable}$  par  $\partial\mathcal{A}_{stable}$ . Les configurations stables  $\mathcal{Q}_{stable}$  sont alors données par  $\mathcal{Q}_{stable} = \Psi(\mathcal{A}_{stable})$ . Intuitivement, les configurations dites *instables* paramétrées par  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{unstable}$  correspondent à des extremums qui ne sont pas des minimums locaux de l'énergie élastique potentielle totale. Par exemple, on peut imaginer se trouver sur un point selle de la fonction d'énergie, auquel cas on se retrouve à une *bifurcation* du système et celui-ci possède alors plusieurs directions de descente pour retrouver un état stable. Des exemples de configurations à l'équilibre obtenues grâce aux conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sont présentés en Figure 2.3.

Nous avons vu que d'après les conditions nécessaires d'optimalité,  $\mathcal{Q}$  est une variété différentielle de dimension 6 paramétrée par un atlas muni de l'unique carte  $(\mathcal{Q}, \Psi^{-1})$ . Or, comme  $\mathcal{A}_{stable} \subset \mathcal{A}$  et  $\mathcal{Q}_{stable} = \Psi(\mathcal{A}_{stable}) \subset \mathcal{Q}$ , alors  $\mathcal{Q}_{stable}$ , i.e. l'ensemble des configurations à l'équilibre d'une tige élastique de Kirchhoff, est aussi une variété différentielle de dimension 6 paramétrée par un atlas muni de l'unique carte  $(\mathcal{Q}_{stable}, \Psi^{-1})$  et dont l'espace des coordonnées est  $\mathcal{A}_{stable}$ .

Avant de présenter les résultats concernant la topologie de l'ensemble  $\mathcal{A}_{stable}$ , il nous est nécessaire de rappeler quelques notions.

**Définition 2** (Ensemble étoilé). *Un ensemble  $E$  est dit étoilé par rapport au point  $p \in E$  si et seulement si*

$$\forall x \in E \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)p + \lambda x \in E$$

De manière générale, un ensemble  $E$  est dit étoilé s'il existe au moins un point  $p$  tel que  $E$  soit étoilé par rapport à  $p$ . Nous pouvons alors introduire la notion d'ensemble quasi-étoilé.

**Définition 3** (Ensemble quasi-étoilé). *Un ensemble  $E$  est dit quasi-étoilé par rapport au point  $p \in \partial E$  si et seulement si*

$$\forall x \in E \text{ et } \forall \lambda \in (0, 1], (1 - \lambda)p + \lambda x \in E$$

Il a été montré dans [Borum 15b] que l'espace  $\mathcal{A}_{stable}$  est simplement connexe. Plus précisément,  $\mathcal{A}_{stable}$  est un ensemble *quasi-étoilé* en l'origine sous l'application d'un changement de coordonnées que nous présenterons en 2.3.1.2.

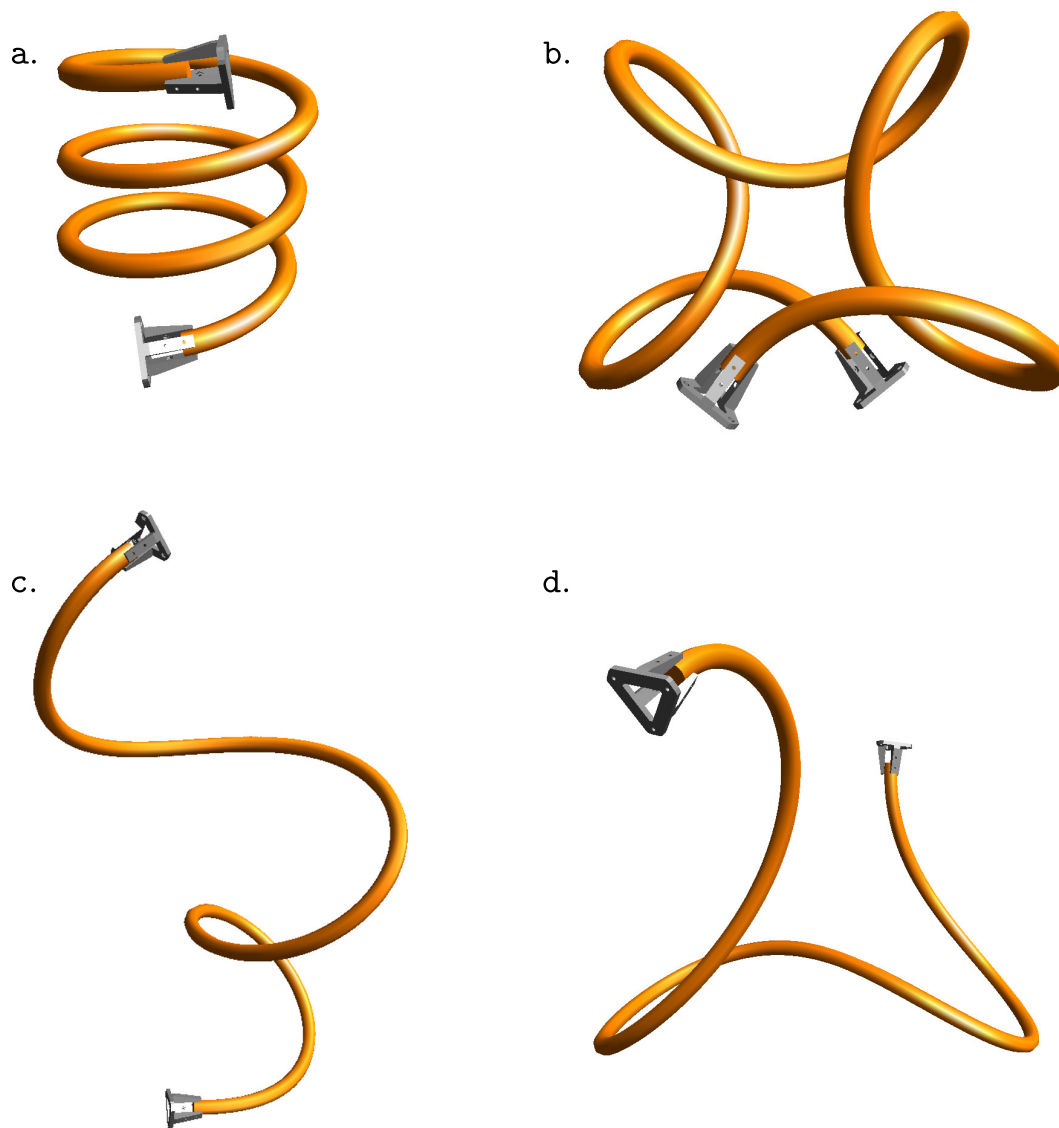


FIGURE 2.3 – Différentes configurations d'une tige élastique de Kirchhoff à l'équilibre. Le cas a correspond au cas où la tige a une courbure constante décrivant alors une courbe hélicoïdale.



Physiquement, cette propriété traduit le fait que pour toute paire de configurations à l'équilibre, il existe un chemin entre ces deux configurations où toutes les configurations sont à l'équilibre passant près de l'origine, i.e. la configuration droite au repos.

### 2.2.3.5 Résolution numérique du problème

Les conditions nécessaires et suffisantes établies précédemment présentent en pratique des problèmes d'implémentation de par la nécessité d'outils numériques pour les déterminer.

Premièrement, les différents systèmes différentiels (2.33), (2.32) et (2.30) sont instationnaires. Il n'existe pas de solution analytique générale à de tels systèmes et ceux-ci doivent alors être résolus par des méthodes d'intégration numérique telles que les méthodes de Runge-Kutta. Plus particulièrement, les positions 6D de la tige sont des éléments de la variété décrite par  $SE(3)$  et ces méthodes n'offrent aucune garantie que les solutions approximées appartiennent à la variété.

Ensuite, nous soulignons que le critère permettant de tester les conditions suffisantes d'optimalité établi au Théorème 3 est en pratique difficile à établir via des méthodes numériques. En effet, afin de tester que la matrice jacobienne  $\mathbf{J}(t)$  est de rang plein pour tout  $t \in (0, 1]$ , nous calculons en pratique le déterminant de celui-ci. Or, le déterminant pour  $t = 0$  est nul et il est par conséquent proche de zéro pour des valeur de  $t + \epsilon$ . Du fait des imprécisions numériques, il est dans certains cas difficile de vérifier numériquement ce critère aux valeurs proches de  $t = 0$ .

## 2.2.4 Extension du cas de Kirchhoff vers un modèle de tige de Timoshenko

De façon similaire à l'approche présentée précédemment, nous avons reformulé le problème d'équilibre statique pour des tiges élastiques de Timoshenko par un problème de commande optimale sur des variétés différentielles. Cette contribution est détaillée en [Roussel 15a].

Considérons à présent une tige élastique de Timoshenko, i.e. qui peut présenter aussi des déformations de type traction, compression et cisaillement. Comme précédemment, la tige est manipulée par ses extrémités, possède une configuration droite au repos et est supposée de longueur unitaire. La géométrie de la tige est décrite par l'application  $\mathbf{q} : [0, 1] \rightarrow SE(3)$  qui doit alors satisfaire le modèle différentiel

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \left( \sum_{i=1}^6 u_i X_i + X_4 \right)$$

pour des déformations  $\mathbf{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^6$ . La fonction  $u_1$  est la déformation en torsion,  $u_2$  et  $u_3$  les déformations en flexion,  $u_4$  la déformation axiale en traction et compression et  $u_5$  et  $u_6$  les déformations en cisaillement le long de la tige. Les matrices  $X_i$ ,  $i = \{1, \dots, 6\}$  définissent une base de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{se}(3)$  telle que définie

en (2.2). Sous ces hypothèses, la tige est considérée à l'équilibre statique lorsqu'elle minimise localement son énergie élastique potentielle totale définie par

$$E_{el} = \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^6 c_i u_i dt$$

où les constantes  $c_i$ ,  $i = \{1, \dots, 6\}$  sont les coefficients de raideur correspondant aux déformations respectives.

Ainsi, les trajectoires  $(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  correspondent à une configuration d'équilibre statique de la tige si elles sont un optimum local du problème de commande optimale

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{q}, \mathbf{u}}{\text{minimize}} && \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^6 c_i u_i^2 dt \\ & \text{subject to} && \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \left( \sum_{i=1}^6 u_i X_i + X_4 \right) \\ & && \mathbf{q}(0) = e, \quad \mathbf{q}(1) = b \end{aligned} \quad (2.34)$$

où  $e$  est l'élément identité de  $SE(3)$  et  $b \in \mathcal{B}$  avec  $\mathcal{B} \subseteq SE(3)$  l'ensemble des positions 6D accessibles par l'extrémité de la tige.

#### 2.2.4.1 Conditions nécessaires d'optimalité

Soient les constantes  $c_{ij}$  définies par  $c_{ij} = c_i^{-1} - c_j^{-1}$  pour  $i, j = \{1, \dots, 6\}$ . Les conditions nécessaires d'optimalité pour les trajectoires  $(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  sont alors données par le Théorème 4.

**Théorème 4** (Conditions nécessaires d'optimalité réduites). *Soit l'espace  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^6$ . Une trajectoire  $(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  est un extremum normal de 2.34 si et seulement si il existe la trajectoire adjointe  $\boldsymbol{\mu} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^6$  satisfaisant*

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= c_{32} \mu_2 \mu_3 + c_{65} \mu_5 \mu_6 \\ \dot{\mu}_2 &= \mu_6 + c_{13} \mu_1 \mu_3 + c_{46} \mu_4 \mu_6 \\ \dot{\mu}_3 &= -\mu_5 + c_{21} \mu_1 \mu_2 + c_{54} \mu_4 \mu_5 \\ \dot{\mu}_4 &= c_3^{-1} \mu_3 \mu_5 - c_2^{-1} \mu_2 \mu_6 \\ \dot{\mu}_5 &= c_1^{-1} \mu_1 \mu_6 - c_3^{-1} \mu_3 \mu_4 \\ \dot{\mu}_6 &= c_2^{-1} \mu_2 \mu_4 - c_1^{-1} \mu_1 \mu_5 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$u_i = c_i^{-1} \mu_i \quad \text{pour } i = \{1, \dots, 6\} \quad (2.36)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \left( \sum_{i=1}^6 u_i X_i + X_4 \right) \quad (2.37)$$

avec la condition initiale  $\boldsymbol{\mu}(0) = \mathbf{a}$  pour  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ .

Comme dans le cas précédent, la trajectoire adjointe  $\boldsymbol{\mu}$  peut être interprétée comme les efforts internes le long de la tige. Le Théorème 4 nous donne les conditions sous lesquelles la trajectoire  $(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  est un extremum normal du problème de commande optimale (2.34). Nous définirons par  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des applications différentielles  $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) : [0, 1] \rightarrow SE(3) \times \mathbb{R}^6$  qui satisfont ces conditions. Les applications correspondantes seront notées  $\Psi(\mathbf{a}) = (\mathbf{q}, \mathbf{u})$ .

### 2.2.4.2 Conditions suffisantes d'optimalité

Les trajectoires  $(\mathbf{q}, \mathbf{u}) \in \mathcal{Q}$  sont des extrema du problème de commande optimale (2.34). Soient les matrices  $\mathbf{M} : [0, 1] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{6 \times 6}$  et  $\mathbf{J} : [0, 1] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{6 \times 6}$ . Les conditions suffisantes d'optimalité réduites sont alors données par le Théorème 5.

**Théorème 5** (Conditions suffisantes d'optimalité réduites). *Soient les matrices*

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 c_{32} & \mu_2 c_{32} & 0 & \mu_6 c_{65} & \mu_5 c_{65} \\ \mu_3 c_{13} & 0 & \mu_1 c_{13} & \mu_6 c_{46} & 0 & \mu_4 c_{46} + 1 \\ \mu_2 c_{21} & \mu_1 c_{21} & 0 & \mu_5 c_{54} & -1 + \mu_4 c_{54} & 0 \\ 0 & -\mu_6 c_2^{-1} & \mu_5 c_3^{-1} & 0 & \mu_3 c_3^{-1} & -\mu_2 c_2^{-1} \\ \mu_6 c_1^{-1} & 0 & -\mu_4 c_3^{-1} & -\mu_3 c_3^{-1} & 0 & \mu_1 c_1^{-1} \\ -\mu_5 c_1^{-1} & \mu_4 c_2^{-1} & 0 & \mu_2 c_2^{-1} & -\mu_1 c_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \text{diag}(c_1^{-1}, c_2^{-1}, c_3^{-1}, c_4^{-1}, c_5^{-1}, c_6^{-1})$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3/c_3 & -\mu_2/c_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_3/c_3 & 0 & \mu_1/c_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2/c_2 & -\mu_1/c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_6/c_6 & -\mu_5/c_5 & 0 & \mu_3/c_3 & -\mu_2/c_2 \\ -\mu_6/c_6 & 0 & 1 + \mu_4/c_4 & -\mu_3/c_3 & 0 & \mu_1/c_1 \\ \mu_5/c_5 & -1 - \mu_4/c_4 & 0 & \mu_2/c_2 & -\mu_1/c_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit le système différentiel linéaire instationnaire

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{F}\mathbf{M} \\ \dot{\mathbf{J}} &= \mathbf{G}\mathbf{M} + \mathbf{H}\mathbf{J} \end{aligned}$$

ayant pour conditions initiales  $\mathbf{M}(0, \mathbf{a}) = \mathbf{I}$  et  $\mathbf{J}(0, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$ . Alors  $(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  est un optimum local du problème de commande optimale (2.34) si et seulement si  $\det(\mathbf{J}(t, \mathbf{a})) \neq 0$  pour tout  $t \in (0, 1]$ .

Comme pour le cas de Kirchhoff, les matrices  $\mathbf{M}(t, \mathbf{a})$  et  $\mathbf{J}(t, \mathbf{a})$  définies au Théorème 5 peuvent être interprétées respectivement comme les variations des efforts internes  $\boldsymbol{\mu}(t)$  et de la géométrie  $\mathbf{q}(t)$  par rapport aux conditions initiales  $\mathbf{a}$ .

Les conditions suffisantes données par le Théorème 5 nous permettent de déterminer quelles conditions initiales  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{stable} \subset \mathcal{A}$ , fournissant des extrema grâce au Théorème 4, correspondent à des optimums locaux de (2.34).

De façon similaire au cas des tiges de Kirchhoff, nous avons obtenu une paramétrisation de l'ensemble des configurations à l'équilibre des tiges de Timoshenko  $\mathcal{Q}_{stable}$ , qui est une variété différentielle de dimension 6 et qui est paramétrée globalement par un atlas muni d'une unique carte  $(\mathcal{Q}_{stable}, \Psi^{-1})$  dont l'ensemble des coordonnées sont  $\mathcal{A}_{stable}$ .

### 2.2.5 Autres extensions et perspectives

Les travaux initiateurs de [Biggs 07] et [Bretl 14] sur le traitement du problème de l'équilibre statique d'une tige comme un problème de commande optimale ont suscité l'émergence d'autres extensions basées sur le même formalisme. Les résultats de [Borum 15a] permettent la prise en compte de forces extérieures telles que la gravité. Ceci brise la symétrie du groupe de Lie  $SE(3)$  et il est alors montré qu'il est possible de réduire l'application à un sous-groupe de  $SE(3)$ . D'autres travaux [Mukadam 14] ont par ailleurs montré que le problème d'une tige élastique plane manipulée par  $m + 1$  manipulateurs était équivalent à planifier dans une variété de dimension  $3m$  et ont permis l'établissement d'une borne inférieure sur le nombre de manipulateurs nécessaires pour que la tige puisse effectuer un mouvement dans un environnement planaire donné.

## 2.3 Solutions analytiques des équations d'équilibre d'une tige de Kirchhoff

Dans cette section, nous revisitons les solutions analytiques de la courbure et la torsion de certains types de tiges élastiques à l'équilibre statique. La découverte de l'existence solutions analytiques au problème de l'élasticité remonte aux années 1880 par Saalschütz (cf. [Levien 08]). Ces solutions s'expriment grâce aux fonctions elliptiques de Jacobi et leurs intégrales. Le lecteur pourra se référer à [Renaud 14] pour plus de détails sur les fonctions elliptiques. Nous montrerons alors qu'il est possible d'intégrer les équations différentielles de la courbure de la tige dans le cas tridimensionnel isotrope transverse, i.e. quand  $c_2 = c_3$ . De plus, nous verrons que ces solutions peuvent s'intégrer dans le cas planaire afin d'obtenir les formes analytiques de la géométrie et de la sensibilité aux conditions initiales de la tige à l'équilibre.

L'obtention de ces formes analytiques présente un intérêt majeur pour une application en robotique. Si la solution générique aux équations différentielles de la courbure de la tige élastique à l'équilibre est connue depuis longtemps, dans notre cas il est critique de pouvoir calculer analytiquement la géométrie de la tige. En effet, le calcul de la géométrie et de la matrice jacobienne nécessitent l'appel à des méthodes numériques à la fois coûteuses et manquant de stabilité. Il est alors possible d'envisager la résolution du problème de géométrie inverse pour une tige, i.e. trouver

les configurations à l'équilibre qui satisfont des positions données des manipulateurs comme nous le verrons en Section 2.4. Une méthode efficace de géométrie inverse peut alors être intégrée dans les méthodes de planification de mouvement pour traiter notamment les chaînes cinématiques fermées. Par exemple, il serait possible de considérer les câbles électriques et pneumatiques d'un bras manipulateur durant la phase de planification.

### 2.3.1 Cas tridimensionnel intégrable

Dans le cas d'une tige de Kirchhoff satisfaisant  $c_2 = c_3$  et en normalisant avec  $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ , il est possible de représenter les conditions nécessaires d'optimalité par les équations différentielles (2.14). En substituant (2.14b) dans (2.14a) et en intégrant une fois, on obtient

$$\dot{\kappa}^2 + \frac{1}{4}\kappa^4 + \lambda_3^2\kappa^{-2} - \frac{\lambda_2}{2}\kappa^2 = \lambda_4 \quad (2.38)$$

avec la constante d'intégration  $\lambda_4$  donnée par

$$\lambda_4 \triangleq a_5^2 + a_6^2 - \frac{1}{4}(a_2^2 + a_3^2)^2 + \frac{1}{2}(a_2^2 + a_3^2)(a_1^2 - 2a_4) - a_1(a_2a_5 + a_3a_6). \quad (2.39)$$

Avec  $v = \kappa^2$  le carré de la courbure de la tige, (2.38) devient

$$\dot{v}^2 + v^3 - 2\lambda_2v^2 - 4\lambda_4v + 4\lambda_3^2 = 0. \quad (2.40)$$

Comme cela a déjà été souligné dans [Langer 84], l'équation (2.40) est sous la forme  $\dot{v}^2 = P(v)$  où  $P$  est le polynôme cubique

$$P(v) \triangleq -v^3 + 2\lambda_2v^2 + 4\lambda_4v - 4\lambda_3^2. \quad (2.41)$$

Soient  $-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  les zéros du polynôme  $P(v)$  tels que

$$-\alpha_1 \leq 0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3. \quad (2.42)$$

. Comme  $P(\pm\infty) = \mp\infty$  et que  $P(0) = -4\lambda_3^2 \leq 0$ ,  $P(v)$  prend la forme illustrée en Figure 2.4.

Étant donné que  $v \geq 0$  et  $P(v) \geq 0$  car ce sont des carrés, on a  $v \in [\alpha_2, \alpha_3]$ . Le polynôme  $P$  peut être réécrit en fonction de ses zéros par

$$P(v) = -(v + \alpha_1)(v - \alpha_2)(v - \alpha_3).$$

De plus, les zéros de  $P$  sont liés aux constantes d'intégration  $\lambda_i$ ,  $i = \{1, \dots, 4\}$  par

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= -2\lambda_2 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3 &= 4\lambda_4 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= 4\lambda_3^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

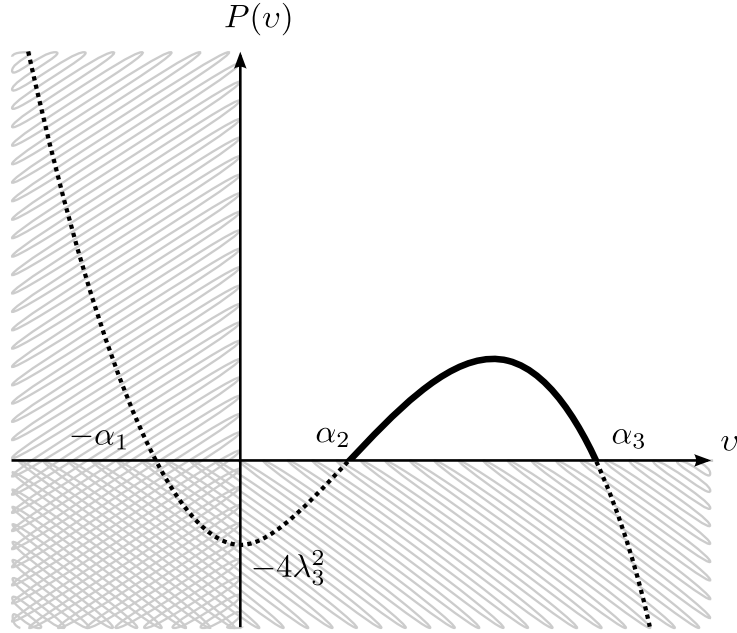


FIGURE 2.4 – Tracé du polynôme cubique  $P(v)$  en fonction du carré de la courbure  $v$ . Les régions hachurées correspondent aux valeurs impossibles montrant que le seul intervalle valide pour  $v$  est  $[\alpha_2, \alpha_3]$ .

Grâce à la forme de l'équation (2.41), le carré de la courbure  $v$  est donné grâce aux fonctions elliptiques de Jacobi par

$$v(t) = \alpha_3[1 - n \operatorname{sn}^2(rt + \varphi|m)] \quad (2.44)$$

où le paramètre  $m$ , la caractéristique  $n$  et la constante  $r$  peuvent s'écrire en fonction des zéros de  $P$  par

$$m = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3 + \alpha_1} \quad n = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_3} \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3 + \alpha_1} \quad (2.45)$$

Notons que d'après (2.42) et (2.45), nous avons la contrainte

$$0 \leq m \leq n \leq 1.$$

Soit la constante  $\varpi$  définie par

$$\varpi \triangleq \sqrt{\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{a_2^2 + a_3^2}{\alpha_3} \right)}, \quad (2.46)$$

la phase  $\varphi$  peut être obtenue par (2.44) en posant  $t = 0$  et est donnée par

$$\varphi = \operatorname{sgn}(a_3 a_5 - a_2 a_6) \operatorname{arcsn}(\varpi|m) \quad (2.47)$$

où  $\operatorname{arcsn}$  est la fonction réciproque de la fonction elliptique de Jacobi  $\operatorname{sn}$ .

### 2.3.1.1 Courbure et efforts internes

On peut montrer que les solutions au système différentiel des efforts internes d'une tige de Kirchhoff dans le cas intégrable donné en (2.13) peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 \mu_2 &= \kappa \sin \psi \\
 \mu_3 &= \kappa \cos \psi \\
 \mu_4 &= \frac{1}{2} \left( \lambda_2 + \frac{a_1^2}{2} - v \right) \\
 \mu_5 &= -\dot{\kappa} \cos \psi + \kappa \dot{\psi} \sin \psi \\
 \mu_6 &= \dot{\kappa} \sin \psi + \kappa \dot{\psi} \cos \psi .
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

où la courbure non-signée est donnée par  $\kappa = \sqrt{v}$  et

$$\psi(t) = \lambda_1 t - \frac{\lambda_3}{\alpha_3 r} \left\{ \Pi[n, \operatorname{am}(rt + \varphi|m) | m] - \Pi[n, \operatorname{am}(\varphi|m) | m] \right\} + \psi(0)$$

avec  $\Pi(n, u|m)$  intégrale elliptique de troisième espèce et  $\operatorname{am}(u|m)$  amplitude de Jacobi.

### 2.3.1.2 Énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique d'une tige de Kirchhoff a été définie en (2.28). Dans le cas d'isotropie transverse et ayant normalisé les constantes de rigidités, l'expression de l'énergie potentielle élastique totale devient

$$E_{el} = \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^3 \mu_i^2 dt$$

**Forme analytique** Étant donné les solutions analytiques des efforts internes  $\mu_i(t)$ ,  $i = \{1, \dots, 3\}$  données en (2.13) et l'expression du carré de la courbure  $v(t) = \kappa^2(t)$  donnée en (2.44), l'énergie peut alors être exprimée analytiquement par

$$\begin{aligned}
 E_{el} &= \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \kappa^2(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_3 \left( 1 - n \int_0^1 \operatorname{sn}^2(rt + \varphi|m) \right) \\
 &= \frac{1}{2} a_1^2 + \frac{1}{2} \left\{ \alpha_3 - \frac{\alpha_3 n}{m} [1 + \mathcal{E}(\varphi) - \mathcal{E}(\varphi + r)] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (a_1^2 - \alpha_1) - \sqrt{\alpha_1 + \alpha_3} [\mathcal{E}(\varphi) - \mathcal{E}(\varphi + r)]
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

où la fonction Epsilon de Jacobi  $\mathcal{E}$  est définie par

$$\mathcal{E}(u|m) = \int_0^u \operatorname{dn}^2(t|m) dt .$$

L'énergie paraît être une métrique adaptée sur l'espace des configurations à l'équilibre statique et qui pourrait être utilisée dans les algorithmes de planification de mouvement appliqués aux tiges à l'équilibre. Cependant, cette formulation analytique de l'énergie en fonction de coordonnées dans l'espace  $\mathcal{A}$  de dimension 6 ne paramètre que des extrema d'énergie. Ainsi, l'expression (2.49) ne peut être utilisée pour vérifier les conditions suffisantes permettant de déterminer si l'extremum  $E_{el}(\mathbf{a})$ ,  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  est un minimum local, i.e. si  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{stable}$ .

**Propriétés** Il a été montré dans [Borum 15b] que les équations différentielles caractérisant les configurations à l'équilibre de la tige sont invariantes par changement d'échelle. Plus particulièrement, soient  $L \in (0, 1]$  et la transformation  $S_L : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  définie par

$$S_L(\mathbf{a}) = (La_1 \quad La_2 \quad La_3 \quad L^2a_4 \quad L^2a_5 \quad L^2a_6)^T. \quad (2.50)$$

De plus, rappelons que  $\Psi(\mathbf{a}) = (\mathbf{q}, \mathbf{u})$  et notons  $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \Psi(S_L(\mathbf{a}))$ . L'invariance des déformations  $\mathbf{u}(t)$  est donnée par

$$\mathbf{v}(t) = L\mathbf{u}(Lt) \quad (2.51)$$

Nous allons à présent démontrer que sous réserve d'un changement de coordonnées, l'énergie potentielle paramétrée par les coordonnées  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  est *étoilée* en l'origine. Pour cela, nous rappelons la définition d'une fonction *étoilée* :

**Définition 4** (Fonction étoilée). *Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite étoilée si et seulement si*

$$f(\alpha \mathbf{x}) \leq \alpha f(\mathbf{x})$$

L'énergie élastique potentielle totale pour des coordonnées transformées est donnée par

$$E_{el}(S_L(\mathbf{a})) = \frac{1}{2}L^2 \int_0^1 \sum_{i=1}^3 u^2(Lt) dt$$

ce qui, en procédant au changement de variable  $\tau = Lt$ , devient

$$E_{el}(S_L(\mathbf{a})) = \frac{1}{2}L \int_0^L \sum_{i=1}^3 u^2(\tau) d\tau$$

Il est alors clair que

$$E_{el}(S_L(\mathbf{a})) \leq LE_{el}(\mathbf{a}) \quad (2.52)$$



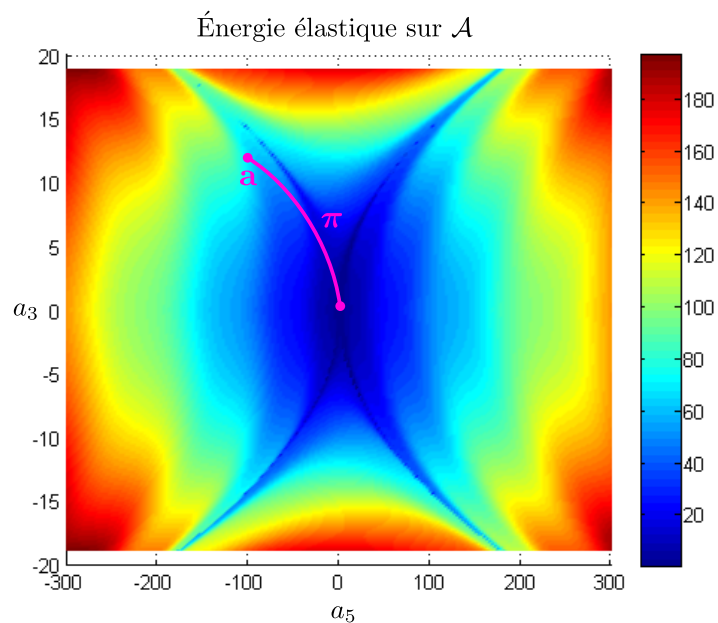


FIGURE 2.5 – Énergie élastique potentielle totale calculée sur des coordonnées  $\mathcal{A}$ . Sous l'application du changement de coordonnées  $\theta$ , cette fonction énergie devient *quasi-étoilée* en l'origine et la trajectoire  $\pi$  devient une ligne droite.

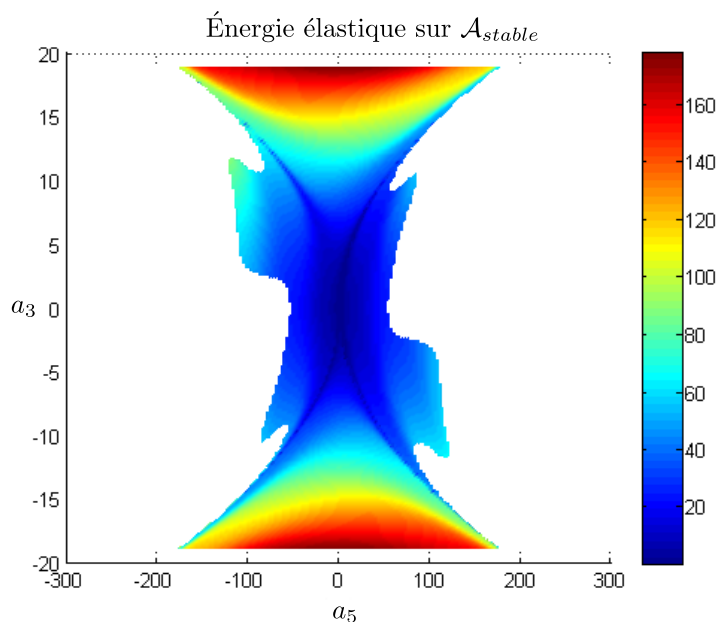


FIGURE 2.6 – Énergie élastique potentielle totale calculée aux configurations à l'équilibre, i.e. sur les coordonnées  $\mathcal{A}_{stable}$ . Sous l'application du changement de coordonnées  $\theta$ ,  $\mathcal{A}_{stable}$  devient un ensemble *étoilé*.

Introduisons à présent le changement de coordonnées  $\theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^6$  par

$$\theta_i(\mathbf{a}) = a_i \quad \theta_j(\mathbf{a}) = \operatorname{sgn}(a_j) \sqrt{|a_j|}$$

pour  $i = 1, 2, 3$  et  $j = 4, 5, 6$ . Dans [Borum 15b], les auteurs ont montré que l'ensemble  $\theta(\mathcal{A}_{stable})$  est *quasi-étoilé*. En appliquant ce changement de coordonnées sur (2.52) et en notant que  $\theta(S_L(\mathbf{a})) = L\theta(\mathbf{a})$ , on obtient

$$E_{el}(L\theta(\mathbf{a})) \leq LE_{el}(\theta(\mathbf{a})) \quad (2.53)$$

Ainsi, d'après la Définition 4 et l'équation (2.53), nous avons montré que l'énergie élastique potentielle totale, paramétrée par les coordonnées  $\mathcal{A}$ , est une fonction *étoilée*.

Il est possible d'interpréter cette propriété grâce à la Figure 2.5 qui montre une tranche de la fonction d'énergie dans le cas où  $a_1 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$ . Considérons le point  $\mathbf{a} = (0, 0, a_3, 0, a_5, 0) \neq \mathbf{0}$  sur cette tranche et la trajectoire  $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$  avec  $\pi(0) = \mathbf{0}$  et  $\pi(1) = \mathbf{a}$  telle que l'énergie le long de cette trajectoire vérifie la propriété d'une fonction étoilée, i.e.

$$E_{el}(\pi(L)) \leq LE_{el}(\mathbf{a})$$

Sous le changement de coordonnées  $\theta$ , la nouvelle trajectoire  $\theta(\pi)$  prend alors la forme d'une ligne droite dans  $\theta(\mathcal{A})$  entre  $\mathbf{0}$  et  $\theta(\mathbf{a})$ .

De même, lorsque l'on se restreint aux configurations à l'équilibre, l'ensemble  $\mathcal{A}_{stable}$  devient *quasi-étoilé* lorsque l'on applique le changement de coordonnées  $\theta$  (cf. Figure 2.6). Intuitivement, pour tout  $\mathbf{a}$ , le chemin en ligne droite entre l'origine exclue et  $\theta(\mathbf{a})$  appartient à  $\theta(\mathcal{A}_{stable})$ .

### 2.3.2 Cas planaire

Dans le cas planaire, nous allons montrer que les formes analytiques de la géométrie de la tige  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^3$  peuvent être obtenues par intégration de la courbure. De plus, il est alors possible de dériver la géométrie de la tige pour obtenir les formes analytiques de la matrice jacobienne (i.e. la sensibilité de la tige) décrivant les variations de la géométrie  $\mathbf{q}(t)$  par rapport aux conditions initiales  $\mathbf{a}$ .

Dans les développements qui suivent, lorsque nous nous référerons à une fonction elliptique de Jacobi  $\operatorname{pq}(u|m)$  avec  $\{p, q\} = \{c, s, d\}$ , nous omettrons volontairement le paramètre  $m$  et utiliserons la notation simplifiée  $\operatorname{pq} u$ . Aussi, notons

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &\triangleq a_4^2 + a_5^2 \\ \Gamma(t) &\triangleq rt + \varphi \end{aligned}$$

tel que  $\Gamma(0) = \varphi$ .

Nous distinguons deux cas tel que dans [Langer 84, Singer 08] selon la nature de la courbure :

— le cas *ondulé* avec  $\lambda_4 > 0$  où la courbure change de signe le long de la tige (cf. Figure 2.7) ;

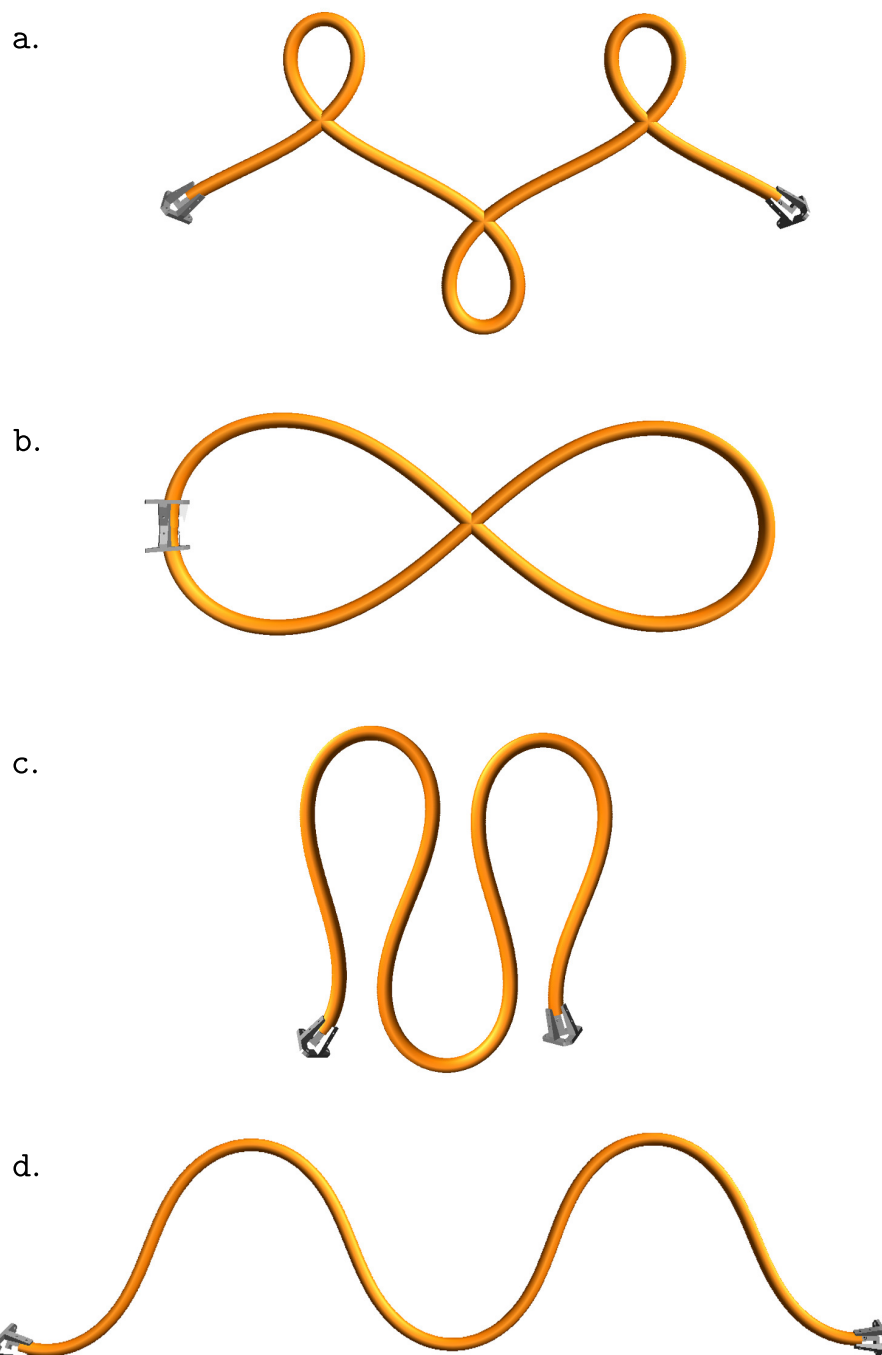


FIGURE 2.7 – Configurations d'une tige plane à l'équilibre dans le cas *ondulé*. Notons le cas b qui correspond à la classe de configurations décrivant le *lemniscate de Bernoulli*.

— le cas *orbital* avec  $\lambda_4 < 0$  où la courbure ne s'annule jamais et ne change donc pas de signe le long de la tige (cf. Figure 2.8).

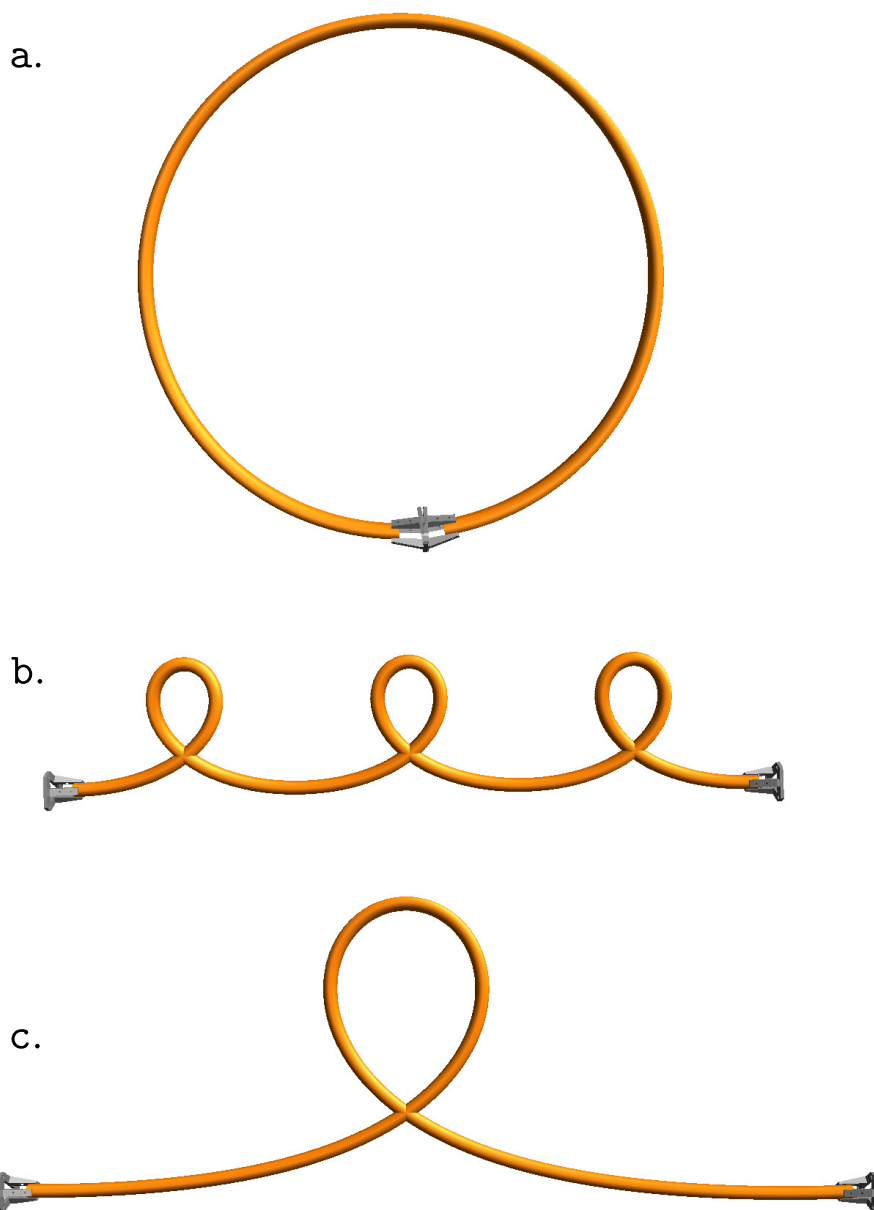


FIGURE 2.8 – Configurations d'une tige planaire à l'équilibre dans le cas *orbital*. Le cas a correspond à la classe de configurations ayant une courbure constante et décrivant une courbe circulaire.

Notons que le cas limite où  $\lambda_4 = 0$  peut-être traité comme un cas particulier d'un des deux cas cités.

### 2.3.2.1 Courbure et efforts internes

Nous avons vu en Section 2.2.3 que le cas planaire peut-être traité comme un cas particulier du cas tridimensionnel avec  $\mathbf{q} = (0, 0, \theta, x, y, 0)$ . Le système différentiel des efforts internes (2.27) est donné sous la forme tridimensionnelle par

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_1 &= 0 \\ \dot{\mu}_2 &= 0 \\ \dot{\mu}_3 &= -\mu_5 \\ \dot{\mu}_4 &= \mu_3\mu_5 \\ \dot{\mu}_5 &= -\mu_3\mu_4 \\ \dot{\mu}_6 &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions données en (2.48) se réduisent en

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= 0 \\ \mu_3 &= \kappa \\ \mu_4 &= \frac{1}{2}(\lambda_2 - \kappa^2) \\ \mu_5 &= -\dot{\kappa} \\ \mu_6 &= 0.\end{aligned}$$

Le cas planaire correspond alors aux coordonnées  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{stable}$  du cas tridimensionnel telles que  $a_1 = a_2 = a_6 = 0$ . Les constantes d'intégration  $\lambda_i, i = \{1, \dots, 4\}$  données en (2.15) et (2.39) deviennent alors

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= a_3^2 + 2a_4 \\ \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_4 &= a_5^2 - a_3^2\left(\frac{1}{4}a_3^2 + a_4\right).\end{aligned}$$

L'expression de la phase  $\varphi$  donnée en (2.47) se simplifie en

$$\varphi = \text{sgn}(a_3a_5) \arcsn(\varpi|m)$$

où  $\varpi$  donné en (2.46) s'écrit alors

$$\varpi = \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{a_3^2}{\alpha_3}\right)}.$$

Enfin, le polynôme  $P$  donné en (2.41) se simplifie en

$$P(v) = -v^3 + 2\lambda_2v^2 + 4\lambda_4v$$

donc  $P(v)$  a un zéro trivial en  $v = 0$ .

**Cas *ondulé* où  $\lambda_4 > 0$**  D'après les relations entre les zéros de  $P$  et les constantes  $\lambda_i, i = \{1, \dots, 4\}$  données en (2.43), les zéros de  $P$  sont donnés par

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\lambda_2 + 2\sigma_0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= \lambda_2 + 2\sigma_0.\end{aligned}$$

Les constantes des fonctions elliptiques données en (2.45) se simplifient en

$$m = \frac{\lambda_2 + 2\sigma_0}{4\sigma_0} \quad n = 1 \quad r = \sqrt{\sigma_0}$$

et le carré de la courbure en

$$\begin{aligned}v(t) &= \alpha_3 (1 - \operatorname{sn}^2 \Gamma(t)) \\ &= \alpha_3 \operatorname{cn}^2 \Gamma(t).\end{aligned}$$

La courbure (signée) est alors donnée par

$$\kappa(t) = \operatorname{sgn}(a_3) \sqrt{\alpha_3} \operatorname{cn} \Gamma(t). \quad (2.54)$$

La courbure oscille alors entre  $\sqrt{\alpha_3}$  et  $-\sqrt{\alpha_3}$  donnant une forme ondulée à la géométrie  $\mathbf{q}(t)$ .

**Cas *orbital* où  $\lambda_4 < 0$**  D'après (2.43), les zéros de  $P$  sont donnés par

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= \lambda_2 - 2\sigma_0 \\ \alpha_3 &= \lambda_2 + 2\sigma_0.\end{aligned}$$

Les constantes des fonctions elliptiques données en (2.45) se simplifient en

$$m = \frac{4\sigma_0}{\lambda_2 + 2\sigma_0} \quad n = m \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_2 + 2\sigma_0}$$

et le carré de la courbure en

$$\begin{aligned}v(t) &= \alpha_3 (1 - m \operatorname{sn}^2 \Gamma(t)) \\ &= \alpha_3 \operatorname{dn}^2 \Gamma(t).\end{aligned}$$

La courbure (signée) est alors donnée par

$$\kappa(t) = \operatorname{sgn}(a_3) \sqrt{\alpha_3} \operatorname{dn} \Gamma(t). \quad (2.55)$$

Comme  $\alpha_3 > 0$  et  $\operatorname{dn} \Gamma(t) > 0$ , la courbure ne s'annule jamais et son signe est entièrement déterminé par le signe de  $a_3$  pour tout le long de la tige.

### 2.3.2.2 Géométrie de la tige

Pour notre choix de coordonnées réduites  $(\theta, x, y)$ , nous retrouvons le modèle différentiel de la tige plane

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= u_3 \\ \dot{x} &= \cos \theta \\ \dot{y} &= \sin \theta\end{aligned}\tag{2.56}$$

avec  $u_3 = \kappa$ . Par intégration de la courbure, il est possible d'exprimer les solutions du système différentiel (2.56) sous la forme générale

$$\cos \theta(t) = \beta_1(0)\beta_1(t) + 4\beta_2(0)\beta_2(t)\tag{2.57a}$$

$$\sin \theta(t) = 2\varepsilon(\beta_1(0)\beta_2(t) - \beta_2(0)\beta_1(t))\tag{2.57b}$$

$$x(t) = \beta_1(0) \int_0^t \beta_1(\zeta) d\zeta + 4\beta_2(0) \int_0^t \beta_2(\zeta) d\zeta\tag{2.57c}$$

$$y(t) = 2\varepsilon \left( \beta_1(0) \int_0^t \beta_2(\zeta) d\zeta - \beta_2(0) \int_0^t \beta_1(\zeta) d\zeta \right).\tag{2.57d}$$

Les fonctions  $\beta_1(t)$  et  $\beta_2(t)$  s'expriment grâce aux fonctions elliptiques de Jacobi et à la fonction Epsilon de Jacobi  $\mathcal{E}$ .

**Cas ondulé** L'intégration de la courbure donnée en (2.54) (cf. [Abramowitz 65] §16.24) mène à

$$\theta(t) = 2\varepsilon [\arccos(\operatorname{dn} \Gamma(t)) - \arccos(\operatorname{dn} \varphi)]$$

Soit  $A(t) \triangleq \arccos[\operatorname{dn} \Gamma(t)]$ , alors

$$\begin{aligned}\cos A(t) &= \operatorname{dn} \Gamma(t) \\ \sin A(t) &= \pm \sqrt{1 - \operatorname{dn}^2 \Gamma(t)} \\ &= \sqrt{m} \operatorname{sn} \Gamma(t).\end{aligned}$$

Étant donné que  $\frac{\theta(t)}{2} = \operatorname{sgn}(a_3)(A(t) - A(0))$ , on obtient

$$\begin{aligned}\cos \frac{\theta(t)}{2} &= \cos A(0) \cos A(t) + \sin A(0) \sin A(t) \\ &= \operatorname{dn} \varphi \operatorname{dn} \Gamma(t) + m \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \Gamma(t) \\ \sin \frac{\theta(t)}{2} &= \operatorname{sgn}(a_3) [\cos A(0) \sin A(t) - \sin A(0) \cos A(t)] \\ &= \operatorname{sgn}(a_3) \sqrt{m} [\operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \Gamma(t) - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \Gamma(t)].\end{aligned}$$

En appliquant la formule de l'angle moitié, on obtient

$$\begin{aligned}\cos \theta(t) &= \cos^2 \frac{\theta(t)}{2} - \sin^2 \frac{\theta(t)}{2} \\ &= (2 \operatorname{dn}^2 \varphi - 1) (2 \operatorname{dn}^2 \Gamma(t) - 1) + 4m \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \Gamma(t) \operatorname{sn} \Gamma(t) \\ \sin \theta(t) &= 2 \cos \frac{\theta(t)}{2} \sin \frac{\theta(t)}{2} \\ &= 2 \varepsilon \sqrt{m} [(2 \operatorname{dn}^2 \varphi - 1) \operatorname{dn} \Gamma(t) \operatorname{sn} \Gamma(t) - \operatorname{dn} \varphi \operatorname{sn} \varphi (2 \operatorname{dn}^2 \Gamma(t) - 1)]\end{aligned}$$

qui est alors sous la forme (2.57) avec  $\beta_1(t)$  et  $\beta_2(t)$  données par

$$\beta_1(t) = 2 \operatorname{dn}^2 \Gamma(t) - 1 \quad (2.58a)$$

$$\beta_2(t) = \sqrt{m} \operatorname{sn} \Gamma(t) \operatorname{dn} \Gamma(t) \quad (2.58b)$$

et dont l'intégration mène à

$$\int_0^t \beta_1(\zeta) d\zeta = 2r^{-1} [\mathcal{E}(\Gamma(t)) - \mathcal{E}(\varphi)] - t \quad (2.59a)$$

$$\int_0^t \beta_2(\zeta) d\zeta = -r^{-1} \sqrt{m} (\operatorname{cn} \Gamma(t) - \operatorname{cn} \varphi). \quad (2.59b)$$

$$(2.59c)$$

**Cas *orbital*** Dans le cas *orbital*, l'intégration de la courbure (2.55) (cf. [Abramowitz 65] §16.24) mène à

$$\theta(t) = 2 \varepsilon [\arcsin(\operatorname{sn} \Gamma(t)) - \arcsin(\operatorname{sn} \varphi)]$$

Soit  $A(t) \triangleq \arcsin(\operatorname{sn} \Gamma(t))$ , alors

$$\begin{aligned}\cos A(t) &= \pm \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \Gamma(t)} \\ &= \operatorname{cn} \Gamma(t) \\ \sin A(t) &= \operatorname{sn} \Gamma(t).\end{aligned}$$

Étant donné que  $\frac{\theta(t)}{2} = \operatorname{sgn}(a_3)[A(t) - A(0)]$ , on obtient

$$\begin{aligned}\cos \frac{\theta(t)}{2} &= \cos A(0) \cos A(t) + \sin A(0) \sin A(t) \\ &= \operatorname{cn} \varphi \operatorname{cn} \Gamma(t) + \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn} \Gamma(t) \\ \sin \frac{\theta(t)}{2} &= \operatorname{sgn}(a_3) [\cos A(0) \sin A(t) - \sin A(0) \cos A(t)] \\ &= \operatorname{sgn}(a_3) [\operatorname{sn} \Gamma(t) \operatorname{cn} \varphi - \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cn} \Gamma(t)].\end{aligned}$$



D'après la formule de l'angle moitié, on a alors

$$\begin{aligned}\cos \theta(t) &= \cos^2 \frac{\theta(t)}{2} - \sin^2 \frac{\theta(t)}{2} \\ &= (1 - 2 \operatorname{sn}^2 \varphi) (1 - 2 \operatorname{sn}^2 \Gamma(t)) + 4 \operatorname{cn} \varphi \operatorname{sn} \varphi \operatorname{cn} \Gamma(t) \operatorname{sn} \Gamma(t) \\ \sin \theta(t) &= 2 \cos \frac{\theta(t)}{2} \sin \frac{\theta(t)}{2} \\ &= 2\varepsilon [ (1 - 2 \operatorname{sn}^2 \varphi) \operatorname{cn} \Gamma(t) \operatorname{sn} \Gamma(t) - \operatorname{cn} \varphi \operatorname{sn} \varphi (1 - 2 \operatorname{sn}^2 \Gamma(t)) ]\end{aligned}$$

qui est alors sous la forme (2.57) avec  $\beta_1(t)$  et  $\beta_2(t)$  données par

$$\beta_1(t) = 1 - 2 \operatorname{sn}^2 \Gamma(t) \quad (2.60a)$$

$$\beta_2(t) = \operatorname{sn} \Gamma(t) \operatorname{cn} \Gamma(t) \quad (2.60b)$$

et qui peuvent être intégrées en

$$\int_0^t \beta_1(\zeta) d\zeta = m^{-1} \left\{ t(m-2) + 2r^{-1} [\mathcal{E}(\Gamma(t)) - \mathcal{E}(\varphi)] \right\} \quad (2.61a)$$

$$\int_0^t \beta_2(\zeta) d\zeta = -m^{-1} r^{-1} (\operatorname{dn} \Gamma(t) - \operatorname{dn} \varphi). \quad (2.61b)$$

$$(2.61c)$$

### 2.3.2.3 Sensibilité aux conditions initiales

Dans le cas général, la sensibilité de la géométrie de la tige  $\mathbf{q}(t)$  par rapport aux conditions initiales  $\mathbf{a}$  est donnée par la matrice jacobienne  $\mathbf{J}(t, \mathbf{a})$  telle que définie au Théorème 3 dans le cas de Kirchhoff ou au Théorème 5 dans le cas de Timoshenko. Ces variations sont exprimées dans le repère local par la trivialisatation à gauche sur le groupe de Lie  $SE(3)$ . Ainsi, pour  $\mathbf{q}(t) \in SE(3)$ , cette matrice est sous la forme

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{a}) = \left[ \left( \mathbf{q}(t, \mathbf{a})^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}(t, \mathbf{a})}{\partial a_1} \right)^\vee \quad \dots \quad \left( \mathbf{q}(t, \mathbf{a})^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}(t, \mathbf{a})}{\partial a_6} \right)^\vee \right] \quad (2.62)$$

où  $\mathbf{q}(t, \mathbf{a})^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}(t, \mathbf{a})}{\partial a_j} \in \mathfrak{se}(3)$  représente les variations dans le repère local par rapport aux variations en  $a_j$ .

Dans ce cas, la sensibilité de la tige est donnée par la matrice jacobienne de dimension 6

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} J_{11} & \cdots & J_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{61} & \cdots & J_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Dans le cas planaire, cette matrice prend la forme

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} *_{2,2} & 0_{2,3} & *_{2,1} \\ 0_{3,2} & \mathbf{J}_{3,3}^P(t, \mathbf{a}) & 0_{3,1} \\ *_{1,2} & 0_{1,3} & *_{1,1} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

où  $*$  représente des valeurs indéterminées.

Afin de déterminer intégralement les formes analytiques de la matrice  $\mathbf{J}_{3,3}^P(t, \mathbf{a})$  décrivant la sensibilité aux conditions initiales de la tige planaire, il nous reste à dériver les expressions de la géométrie  $\mathbf{q}(t) = (\theta(t), x(t), y(t))$  vues en Section 2.3.2.2 par rapport aux conditions initiales  $\mathbf{a}$ . Ces formes sont données en annexe A.

Nous présentons dans la section suivante une application de ces formes analytiques permettant de résoudre le problème de géométrie inverse pour des tiges élastiques à l'équilibre.

## 2.4 Géométrie inverse pour tiges élastiques à l'équilibre

Pour des robots manipulateurs, le *Modèle Géométrique Inverse* présenté en 1.1.3.2, consiste à déterminer une configuration, si elle existe, qui satisfait une position de l'organe terminal donnée. En général, ce problème peut avoir une infinité, un nombre fini ou bien aucune solution. Pour de tels robots, ce modèle est fréquemment utilisé en planification de mouvement pour effectuer des tâches de manipulation d'objets ou pour la planification de robots parallèles.

De nombreux bras manipulateurs sont munis de flexibles pouvant être des câbles électriques ou bien des tuyaux pneumatiques. Ces flexibles peuvent être externes à la structure mécanique et constituent alors des obstacles. Ceux-ci sont généralement ignorés dans les tâches industrielles ce qui en limite les applications, faute de méthodes efficaces permettant leur intégration dans les méthodes de planification de mouvement. Une solution à cette problématique consiste à considérer l'ensemble constituant la chaîne articulée du bras manipulateur et des flexibles comme une chaîne cinématique fermée. Il est alors possible de planifier classiquement pour la chaîne articulée tout en vérifiant les possibilités de fermeture de la chaîne au niveau des flexibles grâce à la résolution du problème de la géométrie inverse que nous présentons ici.

### 2.4.1 Formulation du problème

Nous avons vu en Section 2.2 que l'ensemble des configurations à l'équilibre d'une tige élastique  $\mathcal{Q}_{stable}$  forme une variété munie d'une paramétrisation globale  $\Psi : \mathcal{A}_{stable} \rightarrow \mathcal{Q}_{stable}$ . Les configurations  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{stable}$  doivent satisfaire les conditions suffisantes d'optimalité, i.e. la matrice jacobienne  $\mathbf{J}(t, \mathbf{a})$  doit être de rang plein pour tout  $t \in (0, 1]$ . Définissons par  $\Upsilon : \mathcal{A}_{stable} \rightarrow \mathcal{B}_{stable}$  l'application qui fait correspondre à toute configuration à l'équilibre la position de l'extrémité de la tige  $\mathbf{q}(1)$ . Comme la matrice jacobienne de  $\Upsilon(\mathbf{a})$  est donnée par  $\mathbf{J}(1, \mathbf{a})$  qui est de rang plein, alors  $\Upsilon$  est un difféomorphisme local.

Le problème de géométrie inverse pour des tiges élastiques à l'équilibre peut alors être formulé par la Définition 5.

**Définition 5** (Géométrie inverse pour des tiges élastiques à l'équilibre statique). *Étant donnée une position de l'extrémité de la tige  $\mathbf{b}_{des} \in \mathbb{R}^3$ , le problème de géométrie inverse pour une tige élastique à l'équilibre consiste à trouver une configuration à l'équilibre de la tige paramétrée par coordonnées  $\mathbf{a}^* \in \mathcal{A}_{stable}$  qui satisfait*

$$\Upsilon(\mathbf{a}^*) = \mathbf{b}_{des} \quad (2.65)$$

Par définition, il existe au moins une solution à ce problème si et seulement si  $\mathbf{b}_{des} \in \mathcal{B}_{stable}$ .

Dans le cas planaire, bien que les formes analytiques de l'expression  $\Upsilon(\mathbf{a})$  soient connues (cf. Section 2.3.2.2), le système (2.65) ne peut être résolu analytiquement. Nous proposons ici une approche par optimisation numérique pour résoudre ce problème en utilisant les formes analytiques de la géométrie et de la matrice jacobienne de la tige que nous avons présenté en section précédente.

#### 2.4.2 Résolution par optimisation numérique dans le cas planaire

Soit la fonction

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}) \triangleq \Upsilon(\mathbf{a}) - \mathbf{b}_{des} \quad (2.66)$$

où  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{stable} \subset \mathbb{R}^3$  et  $\mathbf{b}_{des} \in \mathbb{R}^3$ . Le problème de géométrie inverse est alors équivalent à la recherche de zéros de la fonction  $\mathbf{r}$  décrite par un système non-linéaire de dimension 3. Une approche numérique telle que la méthode de Newton (cf. [Nocedal 06]) peut être mise en œuvre pour résoudre ce problème.

La méthode de Newton consiste à approximer itérativement un modèle  $M_k(\mathbf{p}_k)$  de la fonction  $\mathbf{r}(\mathbf{a}_k + \mathbf{p}_k)$  où  $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^6$  est le pas de descente à l'itération  $k$ , puis de trouver le pas  $\mathbf{p}_k$  qui satisfait  $M_k(\mathbf{p}_k) = 0$ . Comme la fonction  $\Upsilon$  est continument différentiable, il est clair que  $\mathbf{r} : \mathcal{A}_{stable} \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'est aussi. On a alors

$$\mathbf{r}(\mathbf{a} + \mathbf{p}) = \mathbf{r}(\mathbf{a}) + \int_0^1 \mathbf{J}(\mathbf{a} + s\mathbf{p})\mathbf{p}ds \quad (2.67)$$

pour  $s \in (0, 1)$ . Le modèle linéaire  $M_k(\mathbf{p}_k)$  est alors obtenu par l'approximation au premier ordre du second terme de (2.67), avec

$$M_k(\mathbf{p}_k) \triangleq \mathbf{r}(\mathbf{a}_k) + \mathbf{J}(1, \mathbf{a}_k)\mathbf{p}_k.$$

Il est alors possible de résoudre le système linéarisé  $M_k(\mathbf{p}_k) = 0$  et la solution est alors donnée par

$$\mathbf{p}_k = -\mathbf{J}(1, \mathbf{a}_k)^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{a}_k)$$

Dans la méthode de Newton, l'amplitude du pas est modulée par un paramètre  $\alpha \in (0, 1]$  et le pas est alors donné par

$$\mathbf{p}_k = -\alpha\mathbf{J}(1, \mathbf{a}_k)^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{a}_k) \quad (2.68)$$

pour toute matrice jacobienne  $\mathbf{J}(1, \mathbf{a}_k)$  non-singulière, i.e. pour  $\mathbf{a}_k \in \mathcal{A}_{stable}$ . La solution  $\mathbf{a}^*$  au problème donné en Définition 5 peut alors être approximée itérativement par  $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \mathbf{p}_k$  pour des conditions initiales  $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{A}_{stable}$  données. L'algorithme détaillé est donné en Algorithme 2.

---

**Algorithm 2** INVERSE\_GEOMETRY\_PLANAR\_ROD\_NEWTON( $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_{des}, \alpha$ )

---

**Input:** Conditions initiales  $\mathbf{a}_0$ , position désirée de l'extrémité de la tige  $\mathbf{b}_{des}$ , amplitude du pas de Newton  $\alpha$

**Output:** Une solution  $\mathbf{a}^*$  telle que  $\mathbf{r}(\mathbf{a}^*) = \mathbf{b}_{des}$  si elle existe, sinon signaler un échec si aucune solution n'a été trouvée après  $N_{max}$  itérations ou si  $\mathbf{J}(1, \mathbf{a}_k)$  est singulière, i.e.  $\mathbf{a}_k \notin \mathcal{A}_{stable}$

```

1:  $k \leftarrow 0$ 
2: solved  $\leftarrow$  false
3: while  $\neg$  solved and  $k < N_{max}$  do
4:    $\mathbf{r}(\mathbf{a}_k) \leftarrow \Upsilon(\mathbf{a}_k) - \mathbf{b}_{des}$ 
5:   if  $\|\mathbf{r}(\mathbf{a}_k)\| < \epsilon$  then
6:      $\mathbf{a}^* \leftarrow \mathbf{a}_k$ 
7:     solved  $\leftarrow$  true
8:   else
9:     if  $\mathbf{J}(1, \mathbf{a}_k)$  is singular then return failure
10:    else
11:       $\mathbf{p}_k = -\alpha \mathbf{J}(1, \mathbf{a}_k)^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{a}_k)$ 
12:       $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \mathbf{p}_k$ 
13:    end if
14:  end if
15: end while
16: if solved then return  $\mathbf{a}^*$ 
17: else return failure
18: end if

```

---

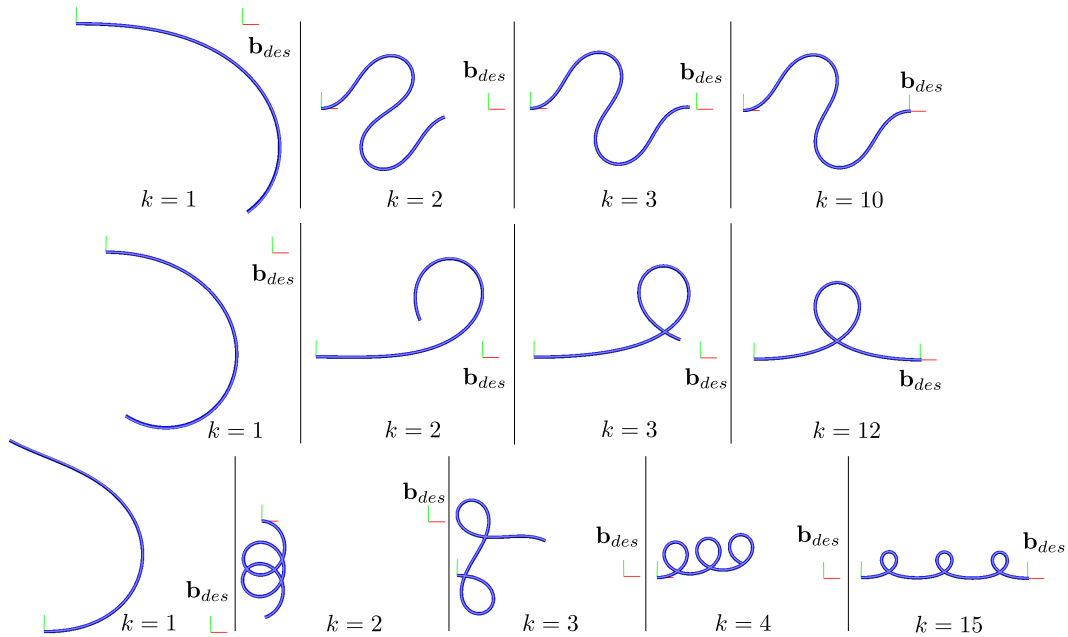


FIGURE 2.9 – Résolution du problème de géométrie inverse pour des tiges élastiques planaires en utilisant la méthode de Newton. Une même position désirée  $\mathbf{b}_{des}$  pour l'extrémité de la tige est présentée dans les trois cas présentant trois solutions  $\mathbf{a}^*$  différentes obtenues en utilisant différentes conditions initiales  $\mathbf{a}_0$ . Notons la présence des deux différents cas d'élasticité abordés précédemment, i.e. le cas *ondulé* (en haut) et le cas *orbital* (au milieu et en bas).

### 2.4.3 Résultats en simulation

L'Algorithme 2 requiert de nombreuses évaluations de la fonction  $\Upsilon(\mathbf{a})$  et de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}(1, \mathbf{a})$ . Dans le cas de tiges tridimensionnelles de Kirchhoff, nous avons vu en Section 2.2.3 que celles-ci pouvaient être obtenues par intégration numérique de plusieurs systèmes différentiels non-linéaires. Dans le cas planaire où les formes analytiques sont disponibles, les fonctions  $\Upsilon(\mathbf{a})$  et  $\mathbf{J}(1, \mathbf{a})$  peuvent être calculées plus rapidement avec deux à trois ordres de grandeurs et avec une meilleure stabilité numérique. Nous avons alors implémenté cette approche dans le cas planaire permettant de tirer parti des solutions analytiques. La Figure 2.9 illustre différentes itérations de l'algorithme obtenues pour trois différentes solutions ayant pour objectif la même position de l'extrémité de la tige  $\mathbf{b}_{des}$ . Les solutions diffèrent par différents choix de conditions initiales  $\mathbf{a}_0$ .

Un banc d'essai a été réalisé via une implémentation en C++ de l'approche présentée. Le solveur a été testé sur 1000 valeurs différentes de  $\mathbf{b}_{des}$  ayant au moins une solution (i.e.  $\mathbf{b}_{des} \in \mathcal{B}_{stable}$ ) et pour chacune 100 conditions initiales  $\mathbf{a}_0$  furent

$\alpha$	Succès (%)	Échecs par instabilité (%)	Temps de résolution ( $\mu s$ )	Nombre d'itérations
1.0	$81.5 \pm 15.9$	$18.4 \pm 15.9$	$71.2 \pm 7.4$	$8.1 \pm 0.8$
0.9	$86.9 \pm 15.1$	$13 \pm 15.1$	$92.2 \pm 7$	$10.6 \pm 0.8$
0.7	$92.8 \pm 13.4$	$7.2 \pm 13.3$	$130.7 \pm 8.6$	$14.9 \pm 0.8$
0.5	$95.7 \pm 11.6$	$4.2 \pm 11.5$	$197.9 \pm 9.7$	$22.8 \pm 1.1$
0.3	$97.3 \pm 9.98$	$2.5 \pm 9.9$	$361.7 \pm 14.3$	$41.6 \pm 1.6$
0.2	$97.4 \pm 9.7$	$2.1 \pm 9.3$	$564.8 \pm 15.8$	$64.9 \pm 1.9$

TABLE 2.1 – Résultats pour la résolution du problème de géométrie inverse de tiges élastiques planaires en utilisant la méthode de Newton avec différentes valeurs du coefficient  $\alpha$  modulant l'amplitude du pas de descente.

testées. Enfin, nous avons testé différentes valeurs du coefficient  $\alpha$  déterminant la modulation d'amplitude du pas de Newton. Le solveur peut échouer si le nombre maximal d'itérations est atteint, ici fixé à 100, ou si la matrice jacobienne est singulière.

Comme le montrent les résultats du banc d'essai présentés en table 2.1, le taux de succès et le temps de résolution dépendent fortement du coefficient  $\alpha$ . Lorsque  $\alpha$  tend vers zéro, les pas deviennent infinitésimaux et l'erreur liée au modèle linéarisé  $M_k$  tend zéro. Ainsi, les valeurs de  $\mathbf{a}_k$  tendent à ne pas sortir du domaine de stabilité  $\mathcal{A}_{stable}$ , i.e.  $\mathbf{J}(1, \mathbf{a}_k)$  est non-singulière. En contre partie, le nombre d'itérations augmente significativement impactant le temps de résolution. Un compromis doit alors être fait entre garantie de succès et temps de résolution.

#### 2.4.4 Conclusion et perspectives

Globalement, l'approche présentée permet de résoudre le problème de géométrie inverse pour des tiges élastiques planaires en environ 100  $\mu s$  avec une garantie de succès de 90 %. Ces performances permettent d'envisager une intégration dans les méthodes de planification afin de résoudre la classe de problème présentée en introduction. Cependant, il reste à étendre cette formulation aux tiges tridimensionnelles telles que les tiges de Kirchhoff afin de pouvoir modéliser les flexibles des bras manipulateurs. L'extension au cas tridimensionnel implique qu'il ne sera pas possible d'évaluer la fonction  $\Upsilon(\mathbf{a})$  et la matrice  $\mathbf{J}(1, \mathbf{a}_k)$  analytiquement, ce qui augmenterait considérablement le temps de calcul.

Plusieurs pistes sont envisagées afin d'améliorer les performances de l'approche et l'extension au cas tridimensionnel. Premièrement, le coefficient  $\alpha$  modulant l'amplitude du pas de descente peut être adapté à chaque pas selon différentes critères, tels que une approximation de la distance de la matrice jacobienne aux singularités. Ensuite, nous avons présenté en Section 2.3 les formes analytiques de l'énergie po-

tentielle élastique totale. Celle-ci pourrait alors être utilisée comme métrique sur  $\mathcal{A}_{stable}$ . Enfin, de nombreuses méthodes d'optimisation numérique plus complexes à mettre en œuvre que la méthode de Newton existent. Parmi elles, les méthodes de type *Line Search* et *Levenberg-Marquardt* ont été testées mais n'ont pas offert de résultats satisfaisants.

## 2.5 Implémentation

Les différentes approches permettant de caractériser les configurations à l'équilibre statique d'une tige élastique ont été implémentées dans la bibliothèque logicielle libre `qserl` disponible à l'adresse <https://github.com/olivier-rousseau/qserl>. Cette bibliothèque est écrite en C++ et permet les paramétrisations par résolution numérique des modèles de tige de Kirchhoff, Timoshenko et du cas planaire, traitées respectivement en Sections 2.2.3, 2.2.4 et 2.2.2. Les formes analytiques en Section 2.3 sont aussi implémentées et ont été vérifiées numériquement. Nous avons pu observer qu'elles offrent une meilleure stabilité numérique et peuvent être calculées plus efficacement.

## 2.6 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude des configurations à l'équilibre des tiges élastiques selon différentes approches. Nous avons vu que ces approches se complètent et chacune permet de déduire certaines propriétés sur ces configurations. Ainsi, nous avons pu appliquer certains de ces résultats en Section 2.4 pour résoudre le problème de géométrie inverse pour des tiges élastiques à l'équilibre, ouvrant les applications possibles en planification de mouvement. Nous présentons dans le prochain chapitre comment tirer efficacement parti des propriétés des configurations à l'équilibre pour résoudre le problème de planification de mouvement pour des tiges élastiques, à l'équilibre ou dans le cas dynamique.

## Chapitre 3

# Planification de mouvement pour des tiges élastiques

L'extension du problème de planification de mouvement à des corps déformables implique de nouveaux défis. Premièrement, le nombre de degrés de libertés induits par la déformation peut-être très élevé, même avec des modèles de déformations ne considérant que l'élasticité linéaire. Nous avons vu que le problème de planification de mouvement est en complexité exponentielle par rapport au nombre de degrés de liberté et que même si les méthodes probabilistes permettent en pratique de meilleurs résultats, un espace de recherche de grande dimension induit des temps de résolution élevés, qui ne sont pas acceptables dans un contexte applicatif industriel.

De plus, une modélisation réaliste et précise au sens mécanique des déformations implique l'usage de méthodes numériques coûteuses. Ces calculs sont intégrés dans les algorithmes de planification et leur complexité se cumule avec celle induite par la grande dimensionnalité du problème. Enfin, un des défis majeurs consiste à identifier l'espace lié à ces modèles, comprendre sa topologie afin de pouvoir l'intégrer au mieux dans les méthodes de planification.

Le problème de planification de mouvement que nous considérons dans cette section consiste à trouver un chemin  $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}_{free}$  entre deux états  $\mathbf{x}_{start}$  et  $\mathbf{x}_{goal}$  pour une tige élastique flottante tels que  $\tau(0) = \mathbf{x}_{start}$  et  $\tau(1) = \mathbf{x}_{goal}$ , où  $\mathcal{X}_{free}$  représente l'espace d'états de la tige libre de collisions. Dans les cas où l'on ne considère que l'espace des configurations, on a alors  $\mathcal{X} = \mathcal{C}$ . Nous emploierons la notation  $\mathbf{q}$  pour une configuration et  $\mathbf{x}$  pour un état.

Nous ne nous intéressons pas ici à la planification qui se trouve en amont des pinces robotisées telles que par exemple les bras robotiques qui manipulent la tige. Comme nous le verrons par la suite, il nous sera aussi possible d'obtenir la solution au problème de manipulation de la tige, à savoir la séquence des commandes à appliquer sur les manipulateurs.

Une première approche naïve consiste à intégrer le simulateur XDE utilisé en tant que "boîte noire" dans les méthodes de planification de mouvement avec prise



en compte de la dynamique introduites en Section 1.1.6. En considérant l'espace des commandes représentées par les forces et couples appliqués sur la tige, l'utilisation de commandes aléatoires sur le simulateur mène à une exploration peu efficace de l'espace d'états de la tige. De plus, le coût de calcul élevé lié à l'utilisation du simulateur ne permet pas des résultats satisfaisants, ce qui nous amène à proposer d'autres solutions.

Dans ce chapitre, nous présentons en Section 3.1 une première approche permettant d'aborder le problème de la grande dimensionnalité de l'espace  $\mathcal{X}$  de la tige par les techniques de réduction de dimension. Nous verrons ensuite en Section 3.2 qu'il est possible de planifier efficacement pour une tige élastique de Kirchhoff dans le cas quasi-statique grâce aux propriétés des configurations à l'équilibre vues au Chapitre 2. Enfin, nous présenterons en Section 3.3 comment tirer parti de ces propriétés pour la planification de tiges élastiques de Timoshenko en considérant leur dynamique et les contacts avec l'environnement grâce au simulateur XDE.

### 3.1 Réduction de dimension pour la planification de mouvement

Bien que les méthodes de planification à échantillonnage aléatoire peuvent résoudre bien plus efficacement des problèmes à haute dimension que les méthodes déterministes, le fléau de la dimension demeure l'un des principaux défis en planification de mouvement. Dans cette section, nous présentons deux approches qui permettent de résoudre des problèmes hautement dimensionnés en limitant la recherche des solutions dans un espace réduit.

#### 3.1.1 Méthodes de réduction de dimension linéaires pour des tiges déformables

L'Analyse en Composantes Principales (ACP) [Jolliffe 02] est un outil statistique de réduction de dimension. Étant donné un ensemble de données définies dans un espace de dimension  $n$ , peut-on représenter ces points dans un sous-espace linéaire de dimension plus faible ? Cette approche a été utilisée en planification de trajectoires pour des objets rigides en montrant ses limites [Dalibard 11] lors d'une utilisation en ligne pour contrôler l'étape d'extension du RRT.

Dans notre approche, l'idée n'est pas d'utiliser la méthode ACP pour modifier les étapes du RRT lors l'extension de l'arbre mais de travailler directement dans un espace de plus faible dimension grâce à un pré-analyse de la dispersion des états de déformation de la tige. Nous cherchons à capturer les linéarités de la variation des déplacements le long de la tige via des méthodes de réduction linéaire telles que l'ACP. Pour cela, il convient de poser les hypothèses suivantes :

- nous restons dans le domaine des petites déformations de la tige, ce qui n'exclut pas les grands déplacements ;

- nous n'autorisons pas les contacts, afin d'éviter les fortes non-linéarités que cela induirait sur la variation des déplacements.

En discrétisant la tige par un nombre fini de nœuds  $N$ , sa configuration peut être exprimée par le déplacement  $\delta p$  de chacun de ses nœuds dans l'espace des positions 6D  $SE(3)$ . Notons que, autorisant de grands déplacements, il est impossible de travailler dans l'espace des positions 6D infinitésimales  $\mathfrak{se}(3)$  qui est homéomorphe à un espace vectoriel. Dans [Mahoney 10], les auteurs ont appliqué ce type de description pour des corps déformables quelconques, mais ont limité leur représentation des configurations à la partie translation de chacun des déplacements des nœuds. L'espace des configurations du corps déformable résultant, appelé espace des déformations, de dimension  $n = 3N$  et noté  $\mathcal{D}$ , est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . En appliquant une ACP comme méthode de réduction de dimension à l'espace des déformations  $\mathcal{D}$ , un espace des déformations réduit  $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$  de dimension  $n'$  bien inférieure à  $n$  est obtenu et offre une bonne approximation de l'espace des déformations. Dans cette section, nous étudions et analysons ces travaux comme une première approche au problème de planification de mouvement pour des tiges élastiques et nous établissons ses limitations.

### 3.1.1.1 Analyse en Composantes Principales de l'espace des déformations

Pour pouvoir appliquer une ACP, l'espace des déformations doit être au préalable approximé par un jeu d'observations représentatives via la matrice d'observation

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \delta p_{1,1} & \cdots & \delta p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta p_{m,1} & \cdots & \delta p_{m,n} \end{bmatrix}$$

où  $m$  est le nombre d'observations. Chaque ligne de la matrice d'observation décrit un état de déformation issu d'un modèle quelconque. La matrice possède  $n$  colonnes qui correspondent aux paramètres nécessaires pour décrire un état donné de la tige et qui dépendent du modèle considéré.

Dans notre étude, la matrice d'observation  $\mathbf{M}$  est obtenue en manipulant la tige à ses extrémités par des pinces robotiques et en appliquant des consignes en position 6D sur ces pinces. Notons que, dans le cas général, la tige a une vitesse non nulle et chaque état de la tige doit être alors décrit dans l'espace des phases, en considérant position et vitesse de chaque nœud.

Soit la matrice de covariance  $\text{cov}(\mathbf{C})$  des données centrées sur la moyenne  $\mathbf{C} = \mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}}$ , où  $\bar{\mathbf{M}}$  est la matrice des moyennes par paramètre. La matrice de covariance  $\text{cov}(\mathbf{C})$  reflète les corrélations entre les déplacements des nœuds et est donnée par

$$\text{cov}(\mathbf{C}) = \frac{1}{m-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C}. \quad (3.1)$$

Les valeurs propres de la matrice de covariance nous indiquent la corrélation entre les paramètres et nous permettent de définir la matrice de transformation de

base  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n' \times n}$  composée des  $n'$  vecteurs propres correspondants aux plus grandes valeurs propres. Notons que d'après la définition de la matrice de covariance donnée en (3.1), cette matrice est symétrique définie semi-positive, ce qui implique que ses valeurs propres sont toutes réelles et non négatives.

La matrice de transformation  $\mathbf{T}$  nous donne alors une nouvelle base qui minimise la norme de tous les échantillons au sens des moindres carrés. La matrice d'observation réduite  $\mathbf{M}_R \in \mathbb{R}^{m \times n'}$  est donnée par  $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}\mathbf{T}^T$ . Réciproquement, les observations réduites peuvent être ramenées dans l'espace vectoriel original  $\mathbb{R}^{m \times n}$  en utilisant la transposée de la matrice de transformation. La matrice d'observation reconstituée résultante est donnée par  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_R\mathbf{T}$ .

### 3.1.1.2 Application aux méthodes à échantillonnage aléatoire

L'hypothèse d'absence de contacts nous permet de découpler la partie base flottante et la partie déformation de l'espace d'état par  $\mathcal{X} = \mathcal{F} \times \mathcal{D}$ . Les états de la tige sont représentés par le vecteur  $\mathbf{x} = (\mathbf{f} \ \mathbf{d})^T \in \mathcal{X}$ . L'espace  $\mathcal{F} \subseteq SE(3)$  est l'ensemble des positions 6D  $\mathbf{f}$  possibles de la base de la tige, alors que l'espace des déformations  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des déformations  $\mathbf{d}$  possibles de la tige par rapport à son état au repos. L'espace des déformations est typiquement de dimension élevée de par la considération de l'ensemble des degrés de liberté des particules. Sa topologie dépend du modèle de tige considéré comme cela sera détaillé dans les paragraphes qui suivent.

L'idée essentielle de cette approche est de limiter la recherche dans un espace des déformations réduit  $\mathcal{D}_R$  de dimension  $n'$  avec  $n' \ll n$ , obtenu grâce à l'ACP. Comme l'ACP nous donne une nouvelle base à travers la matrice  $\mathbf{T}$  pour un espace vectoriel, l'espace réduit résultant  $\mathcal{D}_R$  est aussi une linéarisation et consiste en un espace vectoriel. Chaque état  $\mathbf{x}_{rand}$  est échantillonné dans  $\mathbb{R}^{n'}$  et l'on peut considérer la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^{n'}$  comme métrique. Aussi, chaque état  $\mathbf{d}_R \in \mathcal{D}_R$  peut être ramené dans l'espace des déformations complet  $\mathcal{D}$  pour les tests de collision par  $\mathbf{d} = \mathbf{T}^T \mathbf{d}_R$ . Réciproquement, chaque déformation  $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$  peut être projetée dans l'espace des déformations réduit  $\mathcal{D}_R$  par  $\mathbf{d}_R = \mathbf{T}\mathbf{d}$ .

Le succès de cette approche réside dans la capacité à projeter les déformations dans l'espace réduit ayant une dimension bien inférieure à la dimension initiale et en permettant une erreur suffisamment faible liée à la projection. Ceci se traduit par un forte disparité dans les valeurs propres de la matrice de covariance  $\text{cov}(\mathbf{C})$ , avec un faible nombre de valeurs propres significatives et un grand nombre de valeurs propres proches de zéro.

### 3.1.1.3 Résultats

Nous avons utilisé le moteur physique XDE (cf. Section 1.2.4.2) qui permet de simuler précisément des tiges de type Timoshenko afin de générer la matrice d'observation  $\mathbf{M}$ . Les paramètres utilisés pour nos résultats expérimentaux sont de  $N = 100$  nœuds pour la tige et de  $m = 500$  observations pour la matrice  $\mathbf{M}$ . Sans

perte de généralité, la tige a été considérée de longueur unitaire, soit ici 1 m, afin de faciliter l'analyse des erreurs. Notons que le rayon est de 0.02 m et que nous obtenons ainsi un ratio de  $1/25$  entre la dimension dominante de la tige et les deux autres, respectant l'hypothèse de milieu déformable unidimensionnel. Nous présentons ici nos résultats sur la réduction de dimension de l'espace des déformations appliquée à différents modèles de tige en analysant l'erreur entre les déformations observées  $\mathbf{d}$  et les déformations reconstruites après projection dans l'espace réduit, i.e.  $\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{d}$ . Enfin, nous étudions la qualité de couverture de l'espace réduit par rapport à l'espace des déformations complet en analysant les erreurs avec d'autres observations que celles utilisées pour calculer la réduction.

**Modèle de tige de Kirchhoff dans l'espace des configurations** Considérant uniquement 3 degrés de liberté pour chaque particule comme dans [Mahoney 10], la tige peut être décrite par la courbe

$$\mathbf{q} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

La discrétisation de la tige par  $N$  nœuds mène à un espace d'états homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$  avec  $n = 3N$  et chaque position d'un nœud peut être décrite par le vecteur ligne  $\mathbf{p}^T \in \mathbb{R}^3$ . La restriction à la partie en translation de chaque position 6D des nœuds limite le modèle de déformation. A partir de la courbe  $\mathbf{q}(t)$  dans  $\mathbb{R}^3$ , il est possible de calculer le repère de Frenet en chaque point. Cette description est alors compatible avec les tiges de Kirchhoff. Comme chaque état d'un nœud est un élément d'un espace vectoriel, chaque déplacement s'exprime sous la forme  $\delta \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}_i$  où  $\bar{\mathbf{p}}_i$  est la position au repos du  $i$ -ème nœud.

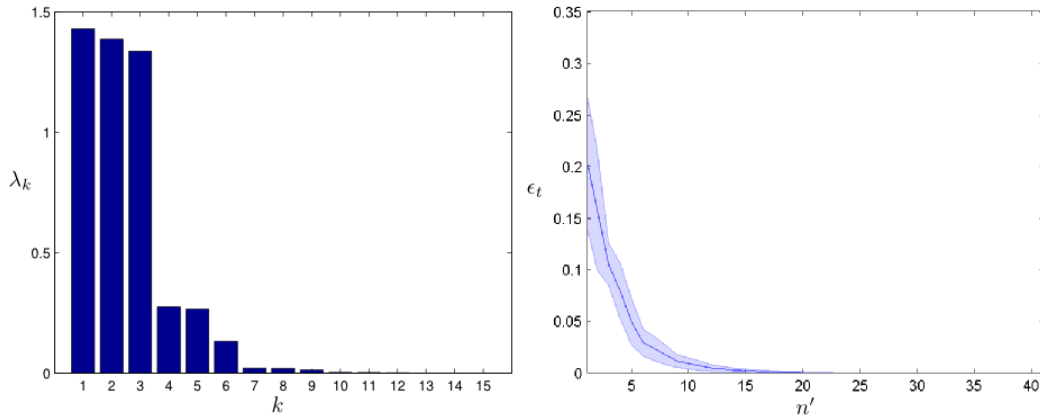


FIGURE 3.1 –  $k$  premières valeurs propres  $\lambda_k$  obtenues par l'ACP sur l'espace  $\mathcal{D}$  via une description de la tige en position 3D dans  $\mathbb{R}^3$  (à gauche) et l'erreur en translation  $\epsilon_t$  due à l'approximation (à droite).

Nous avons utilisé  $N = 100$  nœuds pour les expérimentations soit un espace des déformations de dimension  $n = 300$ . La Figure 3.1 montre les principales va-

leurs propres  $\lambda_k$  et l'erreur en translation  $\epsilon_t$  entre les déformations observées et reconstituées après réduction. L'erreur décroît quasi-exponentiellement lorsque la dimension réduite  $n'$  tend vers la dimension initiale  $n$ . Ceci implique qu'il existe une base de faible dimension dans laquelle il est possible de représenter la matrice d'observation avec une erreur faible. Ainsi, on obtient une erreur moyenne de  $10^{-3}$  m à partir de  $n' = 19$ , ce qui représente un rapport de réduction proche de 16 par rapport à la dimension  $n$  de l'espace des déformations.

**Modèle de tige de type Cosserat dans l'espace des configurations** D'après la théorie de Cosserat, chaque particule possède 6 degrés de libertés en translation et orientation. Ainsi, on peut assimiler l'espace des configurations d'une particule au groupe de Lie  $SE(3)$  et une tige de Cosserat peut être décrite par l'application

$$\mathbf{q} : [0, 1] \rightarrow SE(3).$$

Cette description est compatible avec les différents modèles de tiges traités dans cette thèse. En effet, nous avons vu qu'une tige de Cosserat équivaut au modèle de Timoshenko grâce aux 6 degrés de liberté de chaque point matériel. Il est aussi possible de représenter une tige de Kirchhoff avec une telle représentation en contraignant 3 degrés de liberté. Une discrétisation de la tige par  $N$  nœuds induit un espace d'états homéomorphe à  $SE(3)^N$ . Comme nous autorisons de grands déplacements pour la tige, il est impossible de nous placer dans le cas de petites rotations pouvant être décrites par l'espace tangent à l'espace des rotations. La partie rotation  $SO(3)$  doit alors être représentée par une paramétrisation globale telle que les quaternions unitaires. Ceux-ci offrent une paramétrisation compacte via quatre coefficients réels soumis à une seule contrainte de norme unitaire. Il est alors aisé d'appliquer cette contrainte pour normaliser un quaternion quelconque, hors singularités. Chaque configuration d'un nœud est alors décrite par le vecteur ligne  $\mathbf{p} = (\mathbf{t} \quad \mathbf{h})^T$  de dimension 7, où  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$  décrit la partie translation et où le quaternion unitaire  $\mathbf{h} = (h_0 \quad h_1 \quad h_2 \quad h_3) \in \mathbb{H}$  tel que  $\|\mathbf{h}\| = 1$  décrit la partie rotation. Un déplacement d'une particule s'exprime alors dans  $SE(3)$  et est donné par  $\delta \mathbf{p}_i = \bar{\mathbf{p}}_i^{-1} \mathbf{p}_i$ , où  $\mathbf{p}_i \in SE(3)$  est la position à la configuration de déformation et  $\bar{\mathbf{p}}_i \in SE(3)$  la position à la configuration de repos du  $i$ -ème nœud.

Comme les quaternions unitaires décrivent une sous-variété dans  $\mathbb{R}^4$ , il est important de souligner certains points lorsque l'on projette un état réduit vers l'espace des déformations complet. Typiquement, la contrainte de norme unitaire ne sera plus respectée et le phénomène s'accroît lorsque la dimension de réduction  $n'$  diminue. Il est possible de projeter les quaternions reconstruits sur la sous-variété des quaternions unitaires via leur normalisation, mais cette opération implique une erreur qui s'ajoutera à l'erreur liée à l'opération de réduction.

En considérant 6 degrés de liberté par nœud, la dimension de l'espace des déformations est doublée par rapport au modèle purement translationnel. Dans nos expérimentations, la dimension passe alors à  $n = 600$  pour  $N = 100$  nœuds car  $n = 6N$ . Notons cependant que, comme chaque position 6D doit être décrite par 7

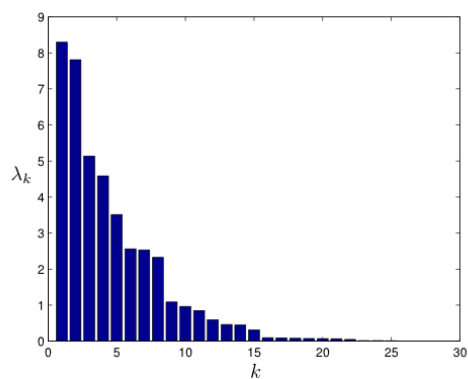


FIGURE 3.2 –  $k$  premières valeurs propres  $\lambda_k$  obtenues par l'ACP sur l'espace  $\mathcal{D}$  via description de la tige en position 6D dans  $SE(3)$ .

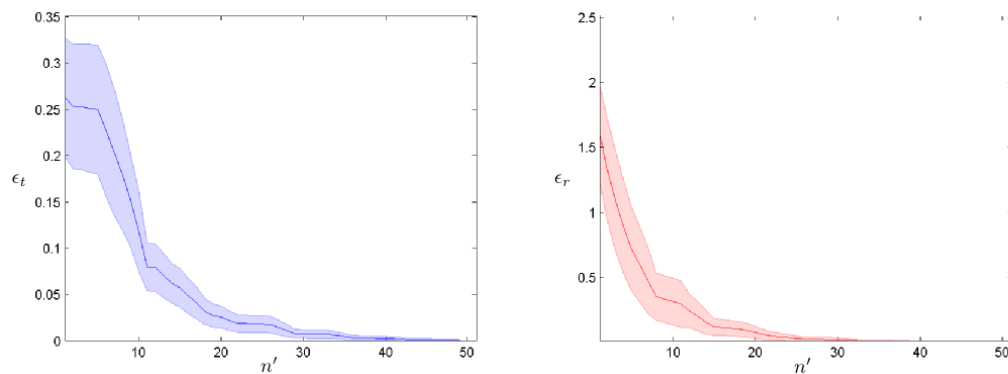


FIGURE 3.3 – Erreurs en translation  $\epsilon_t$  (en bleu) et rotation  $\epsilon_r$  (en rouge) dues à l'approximation après réduction de l'espace  $\mathcal{D}$  par une ACP en utilisant une description de la tige en position 6D dans  $SE(3)$ .

paramètres, la matrice d'observations  $\mathbf{M}$  possède  $7N$  colonnes. On peut constater une décroissance moins importante que dans le cas du modèle purement tridimensionnel. Une erreur en translation  $\epsilon_t$  de  $10^{-3}$  m est atteinte à partir d'une dimension de réduction de  $n' = 50$  et on obtient une erreur en rotation  $\epsilon_r$  de  $10^{-3}$  rad à partir de  $n' = 57$ . Le ratio de réduction est donc ici légèrement inférieur (10 à 12) de par la prise en compte de la variété des rotations qui implique une renormalisation des quaternions et donc une erreur supplémentaire.

**Modèle de tige de type Cosserat dans l'espace d'état** Ne souhaitant pas nous limiter à de la manipulation quasi-statique, nous avons généré des états dynamiques via la simulation et cette dynamique doit alors être intégrée dans l'espace d'état de la tige. La tige de Cosserat définie dans l'espace d'état peut alors être décrite par l'application

$$\mathbf{x} : [0, 1] \rightarrow TSE(3).$$

où  $TSE(3)$  est le fibré tangent au groupe de Lie  $SE(3)$  et est homéomorphe à  $SE(3) \times \mathfrak{se}(3)$ .

Chaque état d'un nœud est de dimension 12 et peut être décrit par le couple  $(\mathbf{p} \ \dot{\mathbf{p}})$  avec  $\mathbf{p} = (\mathbf{t} \ \mathbf{h})$  et  $\dot{\mathbf{p}} = (\mathbf{v} \ \mathbf{w})$ , où  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$  représente la translation,  $\mathbf{h} \in \mathbb{H}$  tel que  $\|\mathbf{h}\| = 1$  est un quaternion unitaire représentant la partie rotation,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  la vitesse linéaire et  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  la vitesse angulaire avec  $\hat{\mathbf{w}} \in \mathfrak{so}(3)$ . Ainsi, chaque état d'un nœud peut être paramétré par 13 coefficients réels. La dimension de l'espace de déformation est de  $n = 12N$  soit  $n = 1200$  dans notre cas et la matrice d'observation  $\mathbf{M}$  possède  $13N$  colonnes.

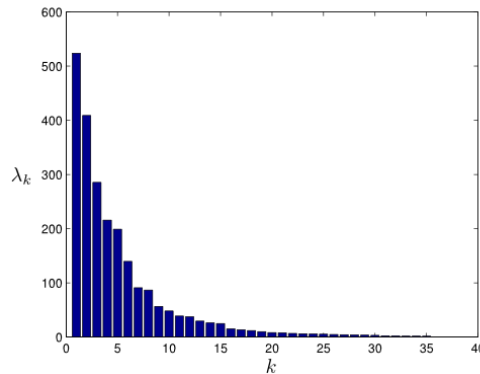


FIGURE 3.4 –  $k$  premières valeurs propres  $\lambda_k$  obtenues par l'ACP sur l'espace  $\mathcal{D}$  via description de la tige en position et vitesse 6D dans  $TSE(3)$ .

Les différentes erreurs illustrées en Figure 3.5 montrent une décroissance de l'erreur moins marquée de par l'inclusion de nouveaux degrés de liberté pour chaque nœud.

Une erreur en translation  $\epsilon_t$  de  $10^{-3}$  m est atteinte à partir de  $n' = 122$ , en rotation  $\epsilon_r$  de  $10^{-3}$  rad à partir de  $n' = 132$ , en vitesse linéaire  $\epsilon_v$  de  $10^{-3}$   $\text{ms}^{-1}$  à

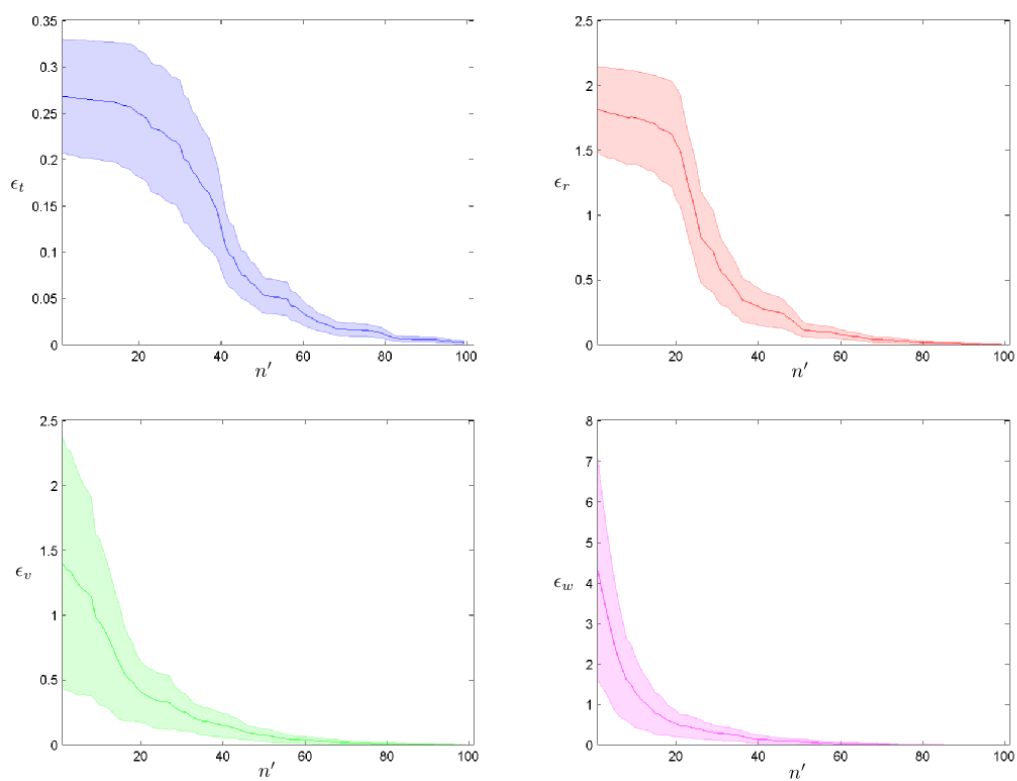


FIGURE 3.5 – Erreurs en translation  $\epsilon_t$  (en bleu), rotation  $\epsilon_r$  (en rouge), vitesse linéaire  $\epsilon_v$  (vert) et vitesse angulaire  $\epsilon_w$  (violet) dues à l'approximation après réduction de l'espace  $\mathcal{D}$  par une ACP en utilisant une description de la tige en position et vitesse 6D dans  $TSE(3)$ .



partir de  $n' = 123$  et en vitesse angulaire  $\epsilon_w$  de  $10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$  à partir de  $n' = 121$ . Ces résultats impliquent un taux de réduction entre 9 et 10.

Notons qu'en procédant séparément pour chaque sous-espace de l'état (translation, rotation, etc.), nous obtenons une dimension de réduction cumulée très proche de la dimension de réduction de l'espace global pour une même erreur. L'ACP étant une méthode de réduction linéaire, ce résultat était prévisible.

**Analyse de la couverture de l'espace des déformations** Dans l'ensemble, les résultats présentés nous ont montré une erreur qui décroît rapidement avec la dimension de réduction sur les observations reconstruites après réduction. Nous nous intéressons à présent à la qualité de couverture de l'espace des déformations complet par l'espace réduit. Pour cela, la matrice de transformation de base  $\mathbf{T}$  est comme précédemment construite à partir de  $m$  observations données via la matrice  $\mathbf{M}$ . La Figure 3.6 présente les erreurs obtenues entre  $m_V$  déformations observées et déformations reconstruites après réduction sur un jeu différent d'observations en utilisant la matrice de transformation  $\mathbf{T}$  préalablement construite. Nous pouvons observer qu'une erreur en translation  $\epsilon_t$  de  $10^{-3} \text{ m}$  est atteinte à partir de  $n' = 126$ , en rotation  $\epsilon_r$  de  $10^{-3} \text{ rad}$  à partir de  $n' = 136$ , en vitesse linéaire  $\epsilon_v$  de  $10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$  à partir de  $n' = 125$  et en vitesse angulaire  $\epsilon_w$  de  $10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$  à partir de  $n' = 125$ . Ces résultats sont stables pour différents jeux d'observations, que ce soit sur la phase d'apprentissage de la nouvelle base définie par  $\mathbf{T}$  ou sur les observations validées. L'erreur décroît sensiblement moins rapidement et le taux de réduction est alors ramené à un ratio de 8 à 10.

Ainsi, une dimension réduite  $n'$  supérieure à environ 135 est requise pour une bonne qualité d'approximation (erreurs inférieures à  $10^{-3}$ ) liée à la réduction de l'espace et une bonne couverture de l'ensemble des déformations.

**Conclusion sur la réduction de dimension par ACP** Nous avons étudié dans cette section une méthode de réduction de dimension qui permet de contourner les principaux problèmes liés à l'application des méthodes de planification probabilistes aux corps déformables. En effet, cette approche de type régression linéaire permet d'apprendre le modèle de déformation dans une phase hors-ligne, où sont générées les observations. Il est alors tout à fait envisageable d'employer des simulateurs coûteux et précis, comme ceux basés sur les méthodes à éléments finis. De plus, cette approche permet de capturer les linéarités du modèle, offrant un espace de dimension réduit qui est un espace vectoriel. Ces derniers sont particulièrement adaptés aux méthodes à échantillonnage aléatoire. Dans le cas de tige de Kirchhoff, il est possible de travailler dans un espace de dimension 20.

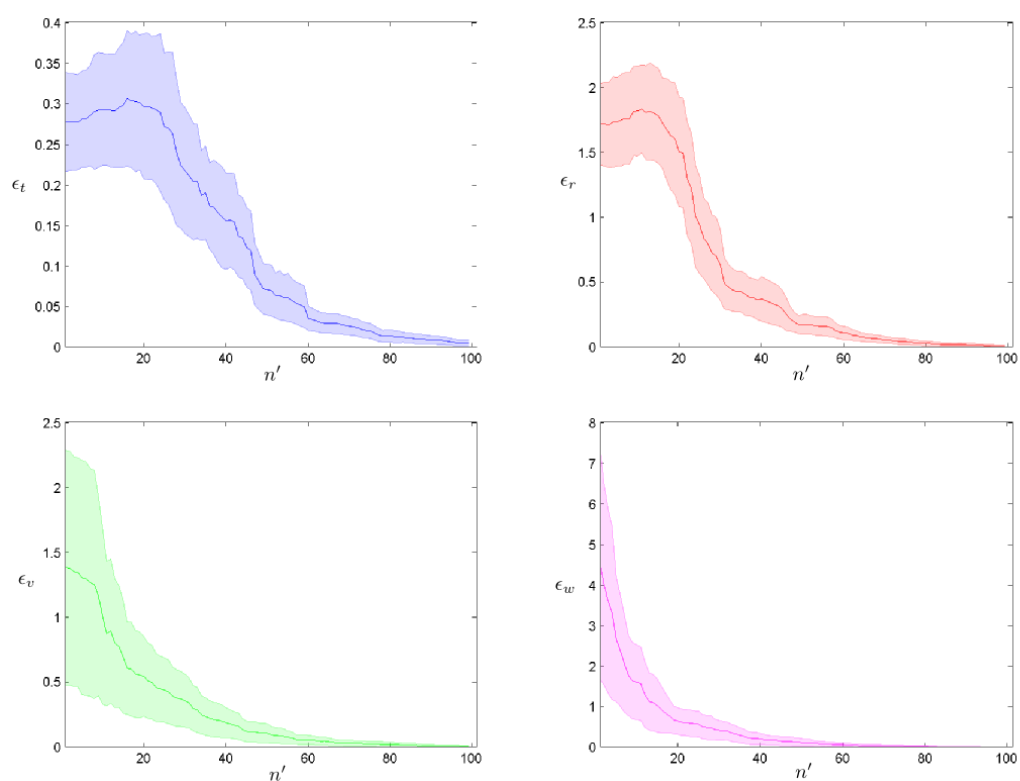


FIGURE 3.6 – Erreurs en translation  $\epsilon_t$  (en bleu), rotation  $\epsilon_r$  (en rouge), vitesse linéaire  $\epsilon_l$  (vert) et vitesse angulaire  $\epsilon_w$  (violet) dues à l'approximation après réduction de l'espace  $\mathcal{D}$  par une ACP en utilisant une description de la tige en position et vitesse 6D dans  $TSE(3)$  sur un jeu d'observations différents du jeu d'apprentissage.

Cependant, nous avons vu que dans les cas des tiges de Timoshenko et de l'extension à l'espace d'état cette nouvelle dimension demeure trop élevée pour permettre une résolution dans des temps raisonnables, ce qui explique pourquoi nous avons choisi de ne pas implémenter d'algorithme de planification basé sur cette approche.

Il est important de souligner que la dimension réduite  $n'$  ne dépend pas de la dimension  $n$  de l'espace de déformation complet pour une valeur suffisamment grande de  $n$ . Nous avons analysé les erreurs pour différents nombres de nœuds de la tige, à savoir  $N = 50$ ,  $N = 100$  et  $N = 200$ , et nous obtenons des résultats similaires. Notre choix d'utiliser  $N = 100$  nœuds pour ces expérimentations était principalement motivé pour assurer la cohésion avec les différentes approches présentées dans ce chapitre.

### 3.1.2 Trajectoires irréductibles

Une autre approche à la réduction de dimension consiste à considérer la redondance des systèmes mécaniques afin de les simplifier. Nous pouvons modéliser la tige comme un robot série comportant  $n$  corps rigides articulés par des liaisons rotoïdes. Si  $n$  est suffisamment grand, nous obtenons une bonne représentation géométrique mais qui nécessite une exploration dans un espace de grande dimension. Les travaux que nous présentons en [Orthey 15] permettent de calculer la structure minimale de chaînes articulées arborescentes de corps rigides. Si nous savons planifier une trajectoire pour une extrémité de la tige qui respecte des contraintes de courbure, nous avons une solution au problème de planification en ayant simplifié à l'extrême le modèle puisqu'il n'inclut aucune contrainte mécanique mais seulement des contraintes de courbure maximale. C'est un modèle qui peut convenir dans certaines applications, cependant la modélisation de tiges par de telles structures est peu réaliste. De plus, la restriction à la planification pour une extrémité de la tige ne nous permet plus de garantir la complétude du problème de planification pour l'ensemble de la tige. Ce travail est plus intéressant pour des structures arborescentes, de type robot humanoïde, que pour des tiges. Ainsi, ce travail n'est pas présenté en détail dans cette thèse.

### 3.1.3 Conclusion

Nous avons abordé dans cette section deux méthodes permettant de rechercher des solutions à un problème de planification dans un espace de dimension réduite. Dans la continuité des méthodes de réduction linéaires, il serait intéressant d'étendre cette étude aux méthodes de réduction de dimension de type non-linéaires telles que [Tenenbaum 00, Roweis 00]. Cependant, ces méthodes demandent généralement une connaissance a priori du modèle et peuvent s'avérer extrêmement complexes à mettre en œuvre.

## 3.2 Le cas quasi-statique

Comme présenté en détail au Chapitre 2, les configurations à l'équilibre d'une tige tridimensionnelle élastique de Kirchhoff forment une variété clairement identifiée de faible dimension avec  $n = 6$ . De plus, il a été montré que cette variété peut être paramétrée globalement avec une carte unique, offrant une description sous forme d'espace vectoriel de l'espace des configurations des configurations à l'équilibre. Des travaux tels que [Berenson 09] ont permis d'étendre l'application des méthodes à échantillonnage aléatoire sur des variétés munies d'un projecteur. Cependant la projection des configurations sur les variétés ne permet plus de garantir la complétude probabiliste dans le cas général. Par ailleurs, lorsqu'une variété de dimension  $n$  est munie d'une carte unique  $(\phi, \mathcal{M})$ , c'est à dire d'une paramétrisation globale  $\phi$  de  $\mathcal{M}$ , avec  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , les méthodes à échantillonnage aléatoire peuvent alors être efficacement appliquées sur ces paramétrisations qui sont des espaces vectoriels. Nous présentons ici comment exploiter efficacement ces résultats pour résoudre le problème de planification de mouvement d'une tige élastique flottante, manipulée par ses extrémités, dans le cas quasi-statique au moyen d'un algorithme de type RRT appelé FFG-RRT.

### 3.2.1 Paramétrisation des configurations à l'équilibre

Nous rappelons ici très brièvement le contexte et les résultats concernant la caractérisation des configurations à l'équilibre des tiges de Kirchhoff grâce à une approche hamiltonienne tels que présentés en détail en Section 2.2.3. Considérons l'équilibre statique d'une tige élastique de type Kirchhoff, naturellement droite, de longueur unitaire et maintenue à ses extrémités. En notant  $t \in [0, 1]$  l'abscisse curviligne le long de la fibre neutre de la tige, la position 6D de la tige est décrite par l'application continue  $\mathbf{q} : [0, 1] \rightarrow SE(3)$  telle que

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \left( \sum_{i=1}^3 u_i X_i + X_4 \right)$$

où  $\mathbf{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  décrit les déformations en torsion (pour  $i = 1$ ) et flexion (pour  $i = 2, 3$ ) et où  $X_i, i = \{1, \dots, 6\}$  est une base de  $\mathfrak{se}(3)$ , l'algèbre de Lie associée à  $SE(3)$ . En considérant l'énergie potentielle élastique telle que définie en (2.28), il est possible de formuler le problème d'équilibre statique d'une tige de Kirchhoff par le problème de commande optimale (2.29). Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité données par les Théorèmes 2 et 3 respectivement, montrent que l'espace  $\mathcal{Q}_{stable}$  des configurations à l'équilibre statique définies par  $(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  est une variété de dimension 6 munie d'une carte unique  $(\mathcal{Q}_{stable}, \Psi^{-1})$  dont les coordonnées forment l'espace  $\mathcal{A}_{stable} \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^6$ , i.e.  $\Psi : \mathcal{A}_{stable} \rightarrow \mathcal{Q}_{stable}$ . Nous verrons que cet espace des coordonnées  $\mathcal{A}_{stable}$ , qui est un espace vectoriel de dimension 6, permet d'appliquer les méthodes à échantillonnage aléatoire sur l'espace des configurations à l'équilibre  $\mathcal{Q}_{stable}$ .

De plus, les conditions suffisantes d'optimalité nous donnent un critère pour caractériser l'ensemble des coordonnées paramétrant  $\mathcal{Q}_{stable}$  par  $\mathcal{A}_{stable} = \{\mathbf{a} \in \mathcal{A} \mid \det \mathbf{J}(t, \mathbf{a}) \neq 0, \forall t \in (0, 1]\}$ , où  $\mathbf{J}(t, \mathbf{a})$  est la matrice jacobienne décrivant les variations des positions  $\mathbf{q}(t, \mathbf{a})$  de la tige par rapport aux coordonnées  $\mathbf{a}$ . Ces variations étant trivialisées à gauche, nous rappelons ici que cette matrice introduite en (2.62) s'exprime sous la forme

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{a}) = \left[ \left( \mathbf{q}(t, \mathbf{a})^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}(t, \mathbf{a})}{\partial a_1} \right) \checkmark \quad \dots \quad \left( \mathbf{q}(t, \mathbf{a})^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}(t, \mathbf{a})}{\partial a_n} \right) \checkmark \right]$$

où  $\mathbf{q}(t, \mathbf{a})^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}(t, \mathbf{a})}{\partial a_j} \in \mathfrak{se}(3)$  représente les variations dans le repère local par rapport aux variations en  $a_j$ .

### 3.2.2 Formulation du problème

L'espace des configurations d'une tige de Kirchhoff flottante, sans contact, manipulée par ses extrémités et à l'équilibre statique est une variété de dimension 12 qui peut s'écrire sous la forme  $\mathcal{X} = \mathcal{F} \times \mathcal{Q}_{stable}$ , où  $\mathcal{F} \subset SE(3)$  est l'ensemble des positions possibles de la base de la tige et  $\mathcal{Q}_{stable}$  est l'espace des configurations à l'équilibre statique paramétré par l'unique carte  $\mathcal{A}_{stable}$ . Ce découplage entre position de la tige dans l'espace et sa configuration de déformation est permis grâce à l'hypothèse d'absence de contacts. Comme nous ne considérons pas de modèle dynamique pour la tige dans cette approche, l'espace  $\mathcal{X}$  consistera uniquement en l'espace des configurations.

Pour pouvoir appliquer les méthodes à échantillonnage aléatoire sur un tel système, il convient d'être capable :

- de tirer aléatoirement des configurations dans l'espace  $\mathcal{X}$  ;
- de tester si une configuration donnée  $\mathbf{x}$  est libre de collisions, i.e.  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{free}$ .

Ces deux opérations élémentaires nécessitent des calculs coûteux dont la majeure partie est commune.

#### 3.2.2.1 Échantillonnage aléatoire uniforme des configurations

Échantillonner uniformément dans l'espace  $\mathcal{F}$  qui est un sous-espace de  $SE(3)$  est un problème largement étudié (cf. [Yershova 09]) et considéré comme résolu. L'espace  $\mathcal{A}_{stable}$  paramétrant les déformations à l'équilibre statique nécessite un traitement particulier qu'il convient de détailler. L'espace  $\mathcal{A}_{stable}$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^6$  où chaque élément doit satisfaire deux conditions :

1. Les coordonnées  $\mathbf{a}$  ne doivent pas correspondre à la configuration singulière, i.e.  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  ;
2. La matrice jacobienne  $\mathbf{J}(t, \mathbf{a})$  doit être de rang plein pour tout  $t \in (0, 1]$ , i.e.  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_{stable}$ .

En théorie, la probabilité pour que des coordonnées  $\mathbf{a}$  tirées aléatoirement correspondent à la configuration singulière est nulle car celle-ci représente une variété de dimension inférieure. En pratique, bien que cette probabilité soit très faible elle doit être prise en compte et peut aisément être gérée par rejet.

Le test de non-dégénérescence de la matrice jacobienne nécessite le calcul explicite de celle-ci. Concrètement, pour des coordonnées  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ , il convient de calculer le déterminant de  $\mathbf{J}(t, \mathbf{a})$  puis de rejeter les coordonnées si il existe une valeur de  $t \in (0, 1]$  pour laquelle celui-ci est nul.

Ainsi, en utilisant la méthode de rejet sur ces deux conditions, on obtient un échantillonnage aléatoire uniforme sur  $\mathcal{A}_{stable}$ .

### 3.2.2.2 Test de collision

Afin de pouvoir tester si la configuration d'une tige  $\mathbf{x}$  est en collision avec les obstacles de son environnement ou en auto-collision, il est nécessaire de calculer la position et forme de la tige dans l'espace de travail  $\mathcal{W}$ , ce qui permet ensuite d'effectuer un test de collision purement géométrique via l'approche présentée dans [Agarwal 04] à l'aide de l'un des nombreux outils existants. Pour cela, nous étendons la définition du Modèle Géométrique Direct (MGD) présentée en Section 1.1.3.1 aux tiges élastiques. Comme nous devons considérer la géométrie de la tige en tout point et non uniquement la position de son organe terminal, l'application correspondant au MGD est paramétrée par la position  $t \in [0, 1]$  le long de la tige.

Grâce au découplage de l'espace  $\mathcal{X}$ , le calcul du MGD réside essentiellement dans le calcul de l'application  $\Psi : \mathcal{A}_{stable} \rightarrow \mathcal{Q}_{stable}$  qui est définie par plusieurs systèmes différentiels. Pour calculer  $\Psi(\mathbf{a})$ , il convient alors de résoudre numériquement ces systèmes différentiels, et l'on obtient alors la géométrie de la tige  $\mathbf{q}(t)$  sous forme discrétisée par une polyligne 3D où chaque nœud décrit une position 6D dans  $SE(3)$ .

Dans notre implémentation, nous avons choisi d'approximer géométriquement la tige par un volume englobant constitué d'une séquence de capsules dont le volume global surestime d'une tolérance  $\epsilon$  le volume de la tige. En utilisant différentes valeurs de tolérance, nous avons construit une hiérarchie de volumes englobants telle qu'illustrée en Figure 3.7 permettant d'accélérer considérablement les tests de collision.

On considère que une configuration  $\mathbf{x}$  de la tige est libre de collision, i.e.  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{free}$ , si et seulement si elle respecte les conditions suivantes :

- la tige n'est pas en auto-collision ;
- la tige n'est pas en collision avec les obstacles de l'environnement.

On peut alors redéfinir l'ouvert  $\mathcal{X}_{free}$  par  $\mathcal{X}_{free} = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{X}_{obs} \cup \mathcal{X}_{self})$ , où les fermés  $\mathcal{X}_{obs}$  et  $\mathcal{X}_{self}$  représentent respectivement l'ensemble des configurations en collision avec les obstacles et en auto-collision.

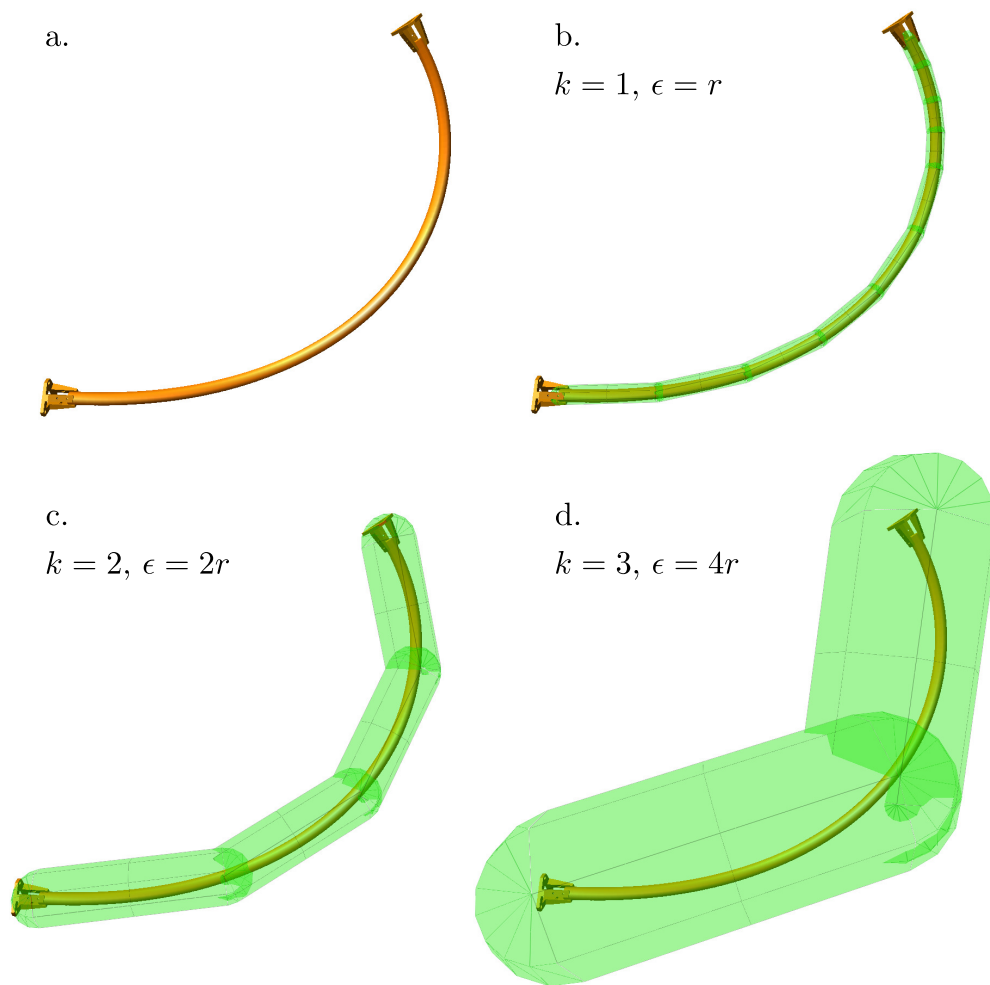


FIGURE 3.7 – Différents niveaux  $k$  d'une hiérarchie de volumes englobants pour une configuration donnée de la tige (a), où la tolérance  $\epsilon$  augmente avec chaque niveau menant à une approximation de la géométrie de plus en plus grossière (b, c et d).

### 3.2.2.3 Approximation au voisinage du MGD

En planification de mouvement, le test de collision est généralement le goulot d'étranglement du temps de calcul. En comparaison, le MGD implique un coût négligeable pour la plupart des systèmes tels que les chaînes cinématiques car il s'appuie sur des formes analytiques. Dans notre cas, le MGD consiste à calculer l'application  $\mathbf{q}(t, \mathbf{a})$  pour  $t \in [0, 1]$ . Ceci revient à résoudre numériquement deux systèmes différentiels non-linéaires de dimension 6. Or, les solutions de ces systèmes sont nécessaires pour résoudre les deux autres systèmes différentiels de dimension 36 permettant le calcul de la matrice jacobienne afin de vérifier sa non-dégénérescence. De plus, leur intégration numérique implique l'utilisation d'une résolution suffisamment fine pour assurer une faible erreur d'intégration. Le nombre de nœuds de la tige est alors lié à cette résolution. De par la nécessité d'un nombre élevé de nœuds et de la haute dimensionnalité des systèmes différentiels, le coût de calcul du MGD devient équivalent, ou supérieur, à celui du test de collision.

**Approximation au premier ordre du MGD** Dans les phases de planification locale des méthodes à échantillonnage, les MGD sont recalculés entièrement pour des configurations voisines. Pour des coordonnées  $\mathbf{a}$  données, il est alors possible de tirer parti du calcul préalable de la matrice jacobienne pour approximer le voisinage du MGD, puisque cette matrice décrit les variations au premier ordre de la géométrie de la tige par rapport aux coordonnées  $\mathbf{a}$ . Comme l'application  $\mathbf{q} : [0, 1] \times \mathcal{A} \rightarrow SE(3)$  est de classe  $C^\infty$  [Bretl 14], il est possible d'utiliser une approximation de Taylor au premier ordre sur les groupes de Lie. Au voisinage des coordonnées  $\mathbf{a}$ , une variation  $\delta\mathbf{a}$  entraîne un déplacement infinitésimal  $\xi = \mathbf{J}(t, \mathbf{a})\delta\mathbf{a}$  avec  $\hat{\xi} \in \mathfrak{se}(3)$ . On peut alors exprimer la géométrie approximée de la tige par

$$\tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) = \mathbf{q}(t, \mathbf{a}) \exp(\hat{\xi}) \quad (3.2)$$

où  $\exp : \mathfrak{se}(3) \rightarrow SE(3)$  est l'application exponentielle.

Tel qu'illustré en Figure 3.8, le calcul de l'approximation donnée en (3.2) est environ dix fois moins coûteux que le calcul du MGD complet, indépendamment du nombre de nœuds utilisés pour décrire la tige.

L'utilisation d'une approximation au premier ordre est motivée par la faible erreur en distance entre la géométrie approximée par (3.2) et la géométrie exacte obtenue par le calcul du MGD comme le montre la Figure 3.9. La fonction de distance considérée ici est la distance maximum nœud à nœud donnée par

$$\rho(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \max_{t \in [0, 1]} d_{SE(3)}(\mathbf{q}_i(t), \mathbf{q}_j(t))$$

où  $d_{SE(3)} : SE(3) \times SE(3) \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une distance dans  $SE(3)$  telle que définie dans [Park 95]. Ainsi, on peut en déduire une distance maximale approximative dans l'espace  $\mathcal{A}$  pour laquelle l'erreur maximale est inférieure à un seuil donné.



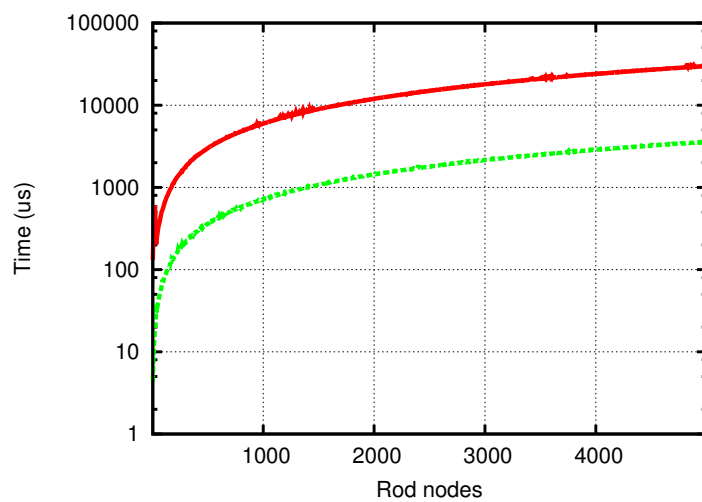


FIGURE 3.8 – Temps de calcul (échelle logarithmique) du MGD (en rouge) et de son approximation au premier ordre via la matrice jacobienne (en vert).

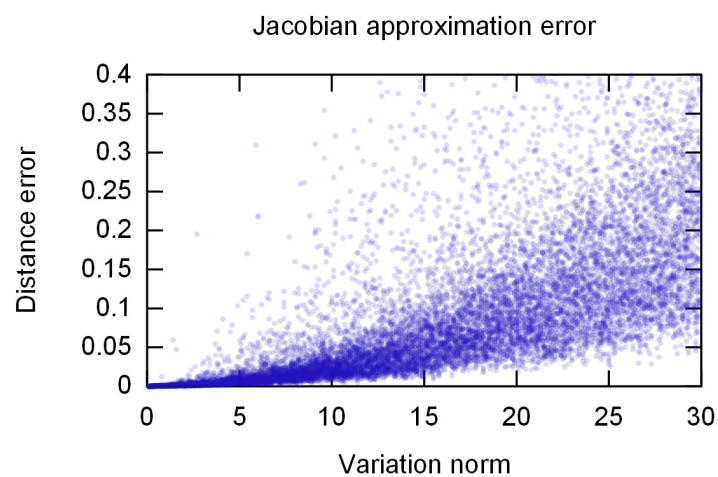


FIGURE 3.9 – Mesures de l'erreur en distance entre les géométries exactes (via MGD) et approximées en fonction de la norme de la variation  $\|\delta\mathbf{a}\|$  dans  $\mathcal{A}$ .

**Validation de chemin locaux** Lorsqu'une configuration  $\mathbf{x}_{rand}$  est échantillonnée, la méthode directionnelle retourne un chemin local  $\pi(\lambda), \lambda \in [0, 1]$  la reliant à sa plus proche voisine  $\mathbf{x}_{near}$ , i.e.  $\pi(0) = \mathbf{x}_{rand}$  et  $\pi(1) = \mathbf{x}_{near}$ . Notre espace  $\mathcal{X}$  étant découplé, les chemins locaux  $\pi_{\mathcal{F}}$  et  $\pi_{\mathcal{A}}$  dans les espaces  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{A}$  respectifs sont aussi découplés.

L'espace des positions de la base de la tige  $\mathcal{F}$  étant un sous-espace de  $SE(3)$ , la géodésique dans  $SE(3)$  basée sur la métrique définie dans [Park 95] est un choix évident de chemin local  $\pi_{\mathcal{F}}$ . On a alors

$$\pi_{\mathcal{F}}(\lambda) = \mathbf{p}_0 \exp(\lambda \log(\mathbf{p}_0^{-1} \mathbf{p}_1))$$

où  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \mathcal{F}$ .

Comme présenté en Section 2.3.1.2, un choix approprié de métrique sur  $\mathcal{A}_{stable}$  pourrait être l'énergie potentielle élastique totale  $E_{el}$ . Aussi, l'espace  $\mathcal{A}_{stable} \subset \mathcal{A}$  étant un sous-espace vectoriel de dimension 6, il est possible sous certaines conditions d'utiliser la géodésique dans  $\mathbb{R}^6$  qui se réduit au chemin en ligne droite

$$\pi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda \mathbf{a}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{a}_1$$

où  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \in \mathcal{A}_{stable}$ . Cette géodésique ne nous donne aucune garantie de rester dans l'espace  $\mathcal{A}_{stable}$ , ni-même sur  $\mathcal{A}$ . Ainsi, pour tout  $\pi_{\mathcal{A}}(\lambda) \in \mathbb{R}^6$ , il convient de vérifier dans l'ordre les conditions suivantes :

- $\pi_{\mathcal{A}}(\lambda) \neq (a_1, 0, 0, a_4, 0, 0), \forall a_1, a_4 \in \mathbb{R}$ , i.e.  $\pi_{\mathcal{A}}(\lambda) \in \mathcal{A}$ ;
- $\det(\mathbf{J}(t, \pi_{\mathcal{A}}(\lambda))) \neq 0$ , i.e.  $\pi_{\mathcal{A}}(\lambda) \in \mathcal{A}_{stable}$ .

Ayant défini le chemin local  $\pi$  sur l'espace  $\mathcal{X}$ , il est possible d'utiliser une méthode de validation de type itérative par discrétisation (cf. Section 1.1.5.4). Dans cette approche, les tests de collision sont effectués progressivement le long du chemin par incréments  $\Delta_x$ , impliquant le calcul entier du MGD pour chaque configuration interpolée. Il est alors possible d'utiliser l'approximation du MGD définie en (3.2) pour un voisinage  $\delta \mathbf{a}$  autour de coordonnées  $\mathbf{a}$  d'une configuration  $\mathbf{x}$  tel qu'illustré en Figure 3.10.

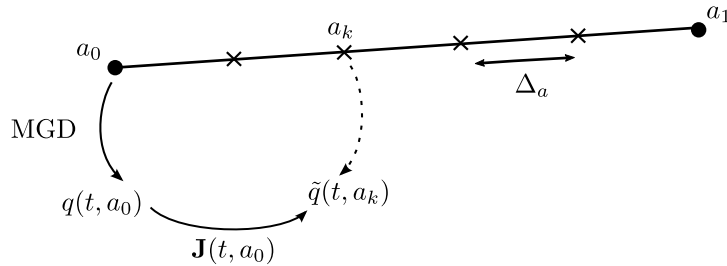


FIGURE 3.10 – Validation d'un chemin local en utilisant l'approximation du MGD par la matrice jacobienne. La géométrie approximée  $\tilde{q}$  est obtenue en utilisant la géométrie  $q$  de la configuration  $a$  la plus proche dont le MGD a été calculé. Le chemin local est validé par discrétisation d'un pas  $\Delta_a$ .

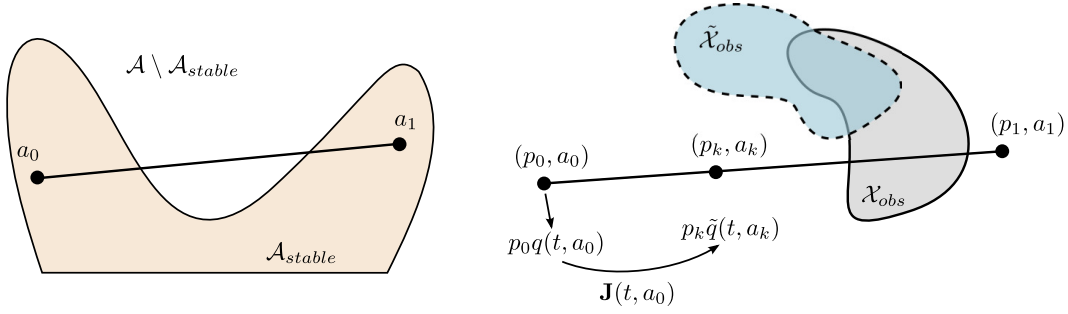


FIGURE 3.11 – Illustration des deux cas de non-détection de collision suite à l'utilisation de l'approximation du MGD. À gauche, le cas de non-respect des conditions de stabilité dans  $\mathcal{A}_{stable}$  et à droite, le cas d'une erreur en géométrie.

### 3.2.2.4 L'algorithme de planification FFG-RRT

De par l'absence de bornes exactes sur l'erreur en géométrie liée à l'approximation donnée en (3.2), l'algorithme de planification retournant une solution approximée doit être capable de vérifier et de corriger celle-ci au besoin. Tel qu'illustré en Figure 3.11, deux différents cas de non-détection de collision sont possibles suite à l'utilisation de notre méthode d'approximation du MGD.

Le premier cas est lié à l'absence de métrique dans l'espace  $\mathcal{A}_{stable}$  telle qu'évoquée précédemment. D'après la topologie de  $\mathcal{A}_{stable}$  vue au Chapitre 2, nous savons que l'ensemble  $\mathcal{A}_{stable}$  n'est pas convexe, donc il n'y a aucune garantie que pour des conditions aux limites dans  $\mathcal{A}_{stable}$ , le chemin local en ligne droite les reliant soit aussi dans  $\mathcal{A}_{stable}$ .

Le second cas est dû à l'erreur sur la géométrie de la tige de par son approximation. Cette erreur est équivalente à une approximation des obstacles dans l'espace  $\tilde{\mathcal{X}}_{obs}$  pouvant mener à une non-détection de la collision avec l'obstacle.

Afin de remédier à cela, nous avons mis au point l'algorithme *Fast Forward Geometry* RRT (FFG-RRT) qui encapsule l'approximation du MGD et permet de détecter et corriger les erreurs liées à l'approximation. La structure globale du FFG-RRT de l'Algorithme 3 est similaire à l'algorithme Lazy-RRT [Bohlin 00] [Bohlin 01].

L'algorithme FFG-RRT est générique et est particulièrement adapté à tout système dont le calcul du MGD est coûteux et où il est possible d'en obtenir une approximation pour un coût bien inférieur. Dans notre contexte de planification pour des tiges élastiques de Kirchhoff, les différentes fonctions utilisées dans les Algorithmes 3 et 4 ont le comportement suivant :

- `RANDOM_SAMPLE()` retourne une configuration  $\mathbf{x}_{rand} \in \mathcal{X}$  tirée au hasard. Pour cela, nous devons appliquer la méthode d'échantillonnage aléatoire par rejet présentée en Section 3.2.2.1 ;
- `NEAREST( $\mathcal{T}$ ,  $\mathbf{x}_{rand}$ )` retourne la configuration la plus proche de  $\mathbf{x}_{rand}$  dans l'arbre  $\mathcal{T}$  en utilisant la métrique entre deux configurations  $\mathbf{x}_i = (\mathbf{p}_i \ \mathbf{a}_i)^T$  et

$$\mathbf{x}_j = (\mathbf{p}_j \quad \mathbf{a}_j)^T$$

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = w d_{SE(3)}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) + (1 - w) \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\|$$

où  $w \in [0, 1]$  définit la pondération de chaque espace  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{A}_{stable}$ ,  $d_{SE(3)}$  est une métrique dans  $SE(3)$  et  $\|\cdot\|$  est la norme usuelle dans  $\mathbb{R}^6$  ;

- APPROX\_EXTEND( $\mathbf{x}_{near}$ ,  $\mathbf{x}_{rand}$ ) consiste en la méthode directionnelle combinée à la validation du chemin local entre les configurations  $\mathbf{x}_{near}$  et  $\mathbf{x}_{rand}$  telle que présentée au paragraphe 3.2.2.3 ;
- PATH\_EXISTS( $\mathbf{x}_{start}$ ,  $\mathbf{x}_{goal}$ ,  $\mathcal{T}$ ) retourne vrai si un chemin existe entre les configurations  $\mathbf{x}_{start}$  et  $\mathbf{x}_{goal}$  dans le graphe  $\mathcal{T}$  ;
- FIND\_PATH( $\mathbf{x}_{start}$ ,  $\mathbf{x}_{goal}$ ,  $\mathcal{T}$ ) retourne un chemin (à ce stade, seulement validé via la méthode d'approximation) entre les configurations  $\mathbf{x}_{start}$  et  $\mathbf{x}_{goal}$  dans le graphe  $\mathcal{T}$  ;
- LOCAL\_PATH\_VALID( $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{x}_j$ ) valide le chemin local entre les configurations  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$  sans utiliser d'approximation.

---

**Algorithm 3** FFG-RRT( $\mathbf{x}_{start}$ ,  $\mathbf{x}_{goal}$ )
 

---

**Input:** Configurations initiale  $\mathbf{x}_{start}$  et finale  $\mathbf{x}_{goal}$

**Output:** Un chemin solution  $\tau$  ou signaler un échec

```

1:  $\mathcal{T}.init(\mathbf{x}_{start})$ 
2: for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
3:    $\mathbf{x}_{rand} \leftarrow \text{RANDOM.SAMPLE}()$ 
4:    $\mathbf{x}_{near} \leftarrow \text{NEAREST}(\mathcal{T}, \mathbf{x}_{rand})$ 
5:    $\mathbf{x}_{new} \leftarrow \text{APPROX\_EXTEND}(\mathbf{x}_{near}, \mathbf{x}_{rand})$ 
6:   if  $\mathbf{x}_{new} \neq \mathbf{x}_{near}$  then
7:      $\mathcal{T}.addVertex(\mathbf{x}_{new})$ 
8:      $\mathcal{T}.addEdge(\mathbf{x}_{near}, \mathbf{x}_{new})$ 
9:   end if
10:  ( $solved$ ,  $\tau$ )  $\leftarrow \text{CHECK\_SOLUTION}(\mathbf{x}_{start}, \mathbf{x}_{goal}, \mathcal{T})$ 
11:  if  $solved$  then return  $\tau$ 
12:  end if
13: end for
14: return failure

```

---

La fonction CHECK\_SOLUTION( $\mathbf{x}_{start}$ ,  $\mathbf{x}_{goal}$ ,  $\mathcal{T}$ ) essaie de trouver un chemin solution dans l'arbre  $\mathcal{T}$  entre les configurations  $\mathbf{x}_{start}$  et  $\mathbf{x}_{goal}$  en considérant les chemins locaux validés par approximation. Lorsqu'une solution est trouvée, alors la validité réelle du chemin est testée en calculant le MGD systématiquement. Si un chemin local n'était pas valide, celui-ci est supprimé de l'arbre.

---

**Algorithm 4** CHECK\_SOLUTION( $\mathbf{x}_{start}, \mathbf{x}_{goal}, \mathcal{T}$ )

---

**Input:** Configurations initiale  $\mathbf{x}_{start}$  et finale  $\mathbf{x}_{goal}$ , un arbre des configurations  $\mathcal{T}$   
**Output:** Un booléen indiquant si un chemin solution existe entre  $\mathbf{x}_{start}$  et  $\mathbf{x}_{goal}$   
dans  $\mathcal{T}$  et le chemin solution  $\tau$  si il existe

- 1: **if** PATH\_EXISTS( $\mathbf{x}_{start}, \mathbf{x}_{goal}, \mathcal{T}$ ) **then**
- 2:      $\tau \leftarrow$  FIND\_PATH( $\mathbf{x}_{start}, \mathbf{x}_{goal}, \mathcal{T}$ )
- 3:      $isSolutionValid \leftarrow$  **true**
- 4:     **for all** edges ( $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ ) of  $\tau$  **do**
- 5:         **if not** LOCAL\_PATH\_VALID( $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ ) **then**
- 6:              $\mathcal{T}$ .removeEdge( $\mathbf{x}_{near}, \mathbf{x}_{new}$ )
- 7:              $isSolutionValid \leftarrow$  **false**
- 8:         **end if**
- 9:     **end for**
- 10:     **if**  $isSolutionValid$  **then return** (**true**,  $\tau$ )
- 11:     **end if**
- 12: **end if**
- 13: **return** (**false**, *emptyPath*)

---

### 3.2.3 Résultats expérimentaux

Nous allons présenter et analyser les résultats expérimentaux obtenus en simulation pour la planification d’une tige de Kirchhoff à base flottante en utilisant l’algorithme de planification FFG-RRT. On utilise alors le modèle permettant le calcul exact des configurations à l’équilibre et l’approximation du MGD par la matrice jacobienne dans l’objectif de réduire les temps de calcul.

#### 3.2.3.1 Détails d’implémentation

L’approche *Fast Forward Geometry* permettant l’approximation du MGD par la matrice jacobienne a été intégrée aux algorithmes de planification RRT et RRT-Connect [Kuffner 00] et nous avons implémenté les algorithmes résultants, respectivement FFG-RRT et FFG-RRT-Connect, en nous appuyant sur la bibliothèque C++ de planification de mouvement OMPL [Sucan 12]. Les tests de collision ont été effectués grâce à la bibliothèque FCL [Pan 12]. Les bancs d’essai ont été réalisés sur un PC avec 8Go de mémoire vive et en utilisant un seul cœur d’un processeur Intel Core i7-2720QM cadencé à 2,2Ghz.

#### 3.2.3.2 Scénarios du banc d’essai

Nous avons sélectionné quatre scénarios afin de valider l’efficacité de notre approche. Deux d’entre eux (Figure 3.12) consistent en des scénarios académiques permettant de mettre en avant une difficulté spécifique. Les deux autres scénarios correspondent à des cas industriels (Figure 3.13) d’une étude de désassemblage d’un câble

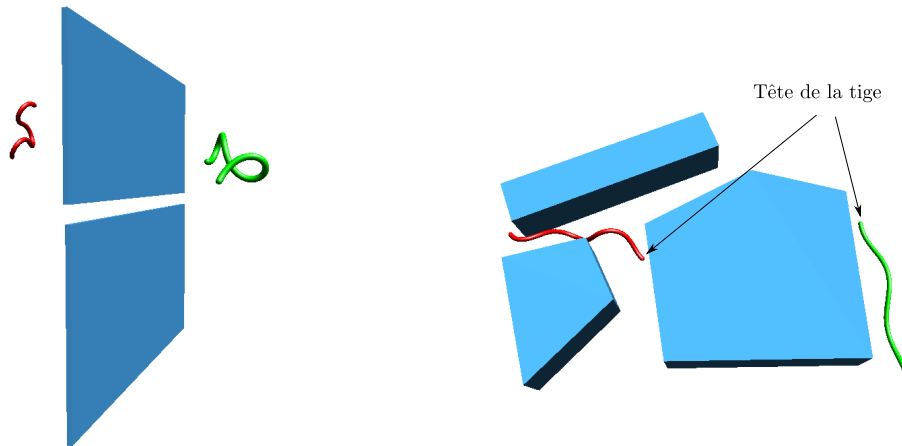


FIGURE 3.12 – Les scénarios *Crack* (à gauche) et *Backward* (à droite). Les configurations de départ et finale sont représentées en vert et rouge respectivement.

d'un bloc moteur. Notons que la résolution d'un problème d'assemblage peut être obtenue symétriquement en inversant les conditions initiales et finales du problème. Sur tous ces scénarios, le problème de planification ne peut pas être résolu en déplaçant uniquement la base mobile de la tige, i.e. la solution impose à la tige de se déformer.

- *Crack* : Modèle léger où la tige doit passer à travers un passage étroit de type fente. La longueur et le diamètre de la tige sont fixés à la moitié de la longueur et de la hauteur de la fente respectivement ;
- *Backward* : Modèle léger où des approches consistant à planifier un chemin guide via un robot point (e.g. la tête de la tige) donneraient une solution irréalisable et échoueraient. Notons que la tige doit passer par le corridor intérieur et ne peut pas passer à l'extérieur des obstacles ;
- *Engine Free-Flying* : Modèle de type industriel de 132 000 polygones où la tige représente un câble qui doit être démonté d'un bloc moteur dans une étude de désassemblage ;
- *Engine Fixed* : Le modèle est identique au scénario précédent mais on considère ici un cas de désassemblage d'un câble à base fixe passant à travers un passage très étroit à l'intérieur du bloc moteur.

Le banc d'essai comprend 50 instances différentes de planification pour chaque scénario. La limite de temps de recherche pour chaque instance a été fixée à 30 minutes. Le nombre de nœuds de la tige a été fixé à  $N = 100$  afin de permettre un réalisme physique suffisant.

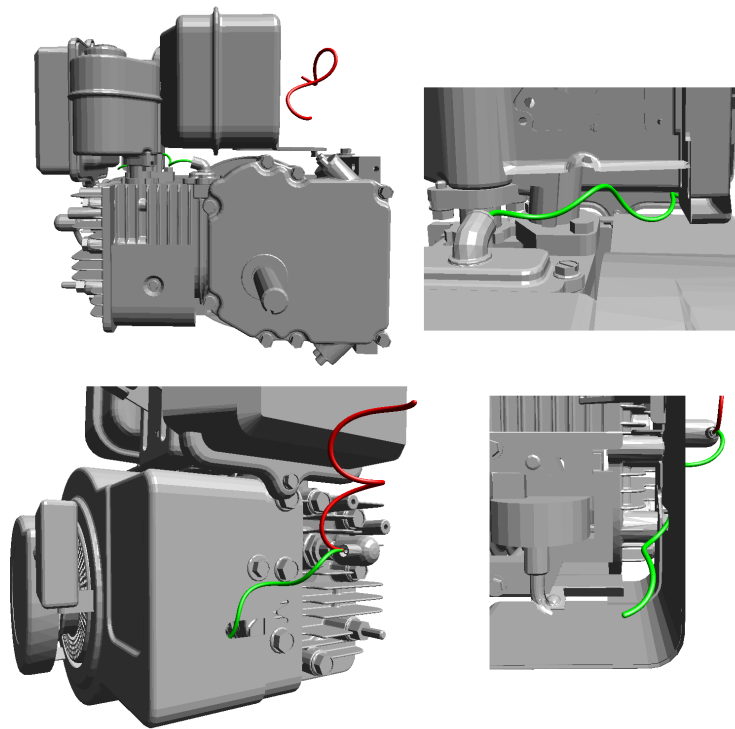


FIGURE 3.13 – Les deux cas industriels de désassemblage d'un câble à base flottante (en haut) ou à base fixe (en bas) d'un bloc moteur.

TABLE 3.1 – Résultats de planification de tiges élastiques quasi-statiques avec approximation de la géométrie

Scénario	RRT	FFG-RRT	RRT Connect	FFG-RRT Connect	
Crack	Échec	Échec	301,2	113,5	Temps de résolution (s)
	0	0	80	96,7	Taux de succès (%)
	Échec	Échec	246,7	38,5	Temps MGD et approx. (s)
	-	Échec	-	0,07	# Fausses approximations
Backward	Échec	Échec	450,6	172,9	Temps de résolution (s)
	0	0	93,3	86,7	Taux de succès (%)
	Échec	Échec	360,1	49,4	Temps MGD et approx. (s)
	-	Échec	-	0,34	# Fausses approximations
Engine	Échec	Échec	240,7	82,9	Temps de résolution (s)
	0	0	100	100	Taux de succès (%)
	Free-Flying	Échec	129,5	11,4	Temps MGD et approx. (s)
	-	Échec	-	0,4	# Fausses approximations
Engine Fixed	95,1	19,6	636,8	250,9	Temps de résolution (s)
	50	40	100	100	Taux de succès (%)
	69,4	3,4	446,1	49,3	Temps MGD et approx. (s)
	-	0	-	0,8	# Fausses approximations

### 3.2.3.3 Résultats

Les résultats du banc d'essai présentés en Table 3.1 nous montrent que notre approche d'approximation du MGD permet une résolution deux à trois fois plus rapide qu'une approche classique, avec un taux de succès similaire. Ces résultats s'expliquent par deux raisons. Tout d'abord, dans des approches classiques où le MGD est systématiquement calculé, on constate que le temps de calcul du MGD prédomine avec 55 à 85 % du temps de résolution. Notre approche permet de diviser ce temps d'un ratio allant de 6 à 11 selon les cas, bien que l'on inclut le temps d'approximation du MGD. Ensuite, on constate que le nombre moyen de solutions approximées invalides, corrigées à posteriori par notre algorithme, est très faible. En moyenne, le nombre de fausses solutions approximées est inférieur à un. Ces solutions erronées sont essentiellement dues à l'utilisation de lignes droites comme chemins locaux dans l'espace  $\mathcal{A}_{stable}$ , confirmant la qualité de l'approximation de la géométrie. Ce faible nombre d'erreurs d'approximation garanti les performances de notre approche.



Il est à noter que l'approche RRT classique ne parvint pas à résoudre les cas où la tige possède une base flottante mais à l'inverse celle-ci s'avère bien plus efficace que l'approche RRT-Connect pour le scénario avec base fixe. En effet, dans le scénario *Engine Fixed*, la configuration de départ se trouve dans un passage très étroit de l'espace des configurations et doit en sortir en exploitant de très faibles variations sur l'espace des configurations à l'équilibre. Dans ce cas où l'une des conditions aux limites du problème correspond à un cas fortement contraint, les approches bidirectionnelles telles que RRT-Connect s'avèrent moins performantes que les approches unidirectionnelles, du fait que l'exploration dans la partie peu contrainte n'apporte rien à l'exploration, augmente inutilement la taille du graphe et affecte alors les performances générales.

### 3.2.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons présenté une approche permettant de résoudre en un temps raisonnable le problème de planification de mouvement pour des tiges de Kirchhoff à base flottante dans le cas quasi-statique. En tirant parti des propriétés de l'espace des configurations à l'équilibre d'une tige de Kirchhoff présentées au Chapitre 2, nous avons pu adapter les méthodes de planification à échantillonnage aléatoire en explorant un espace de faible dimension. De plus, il est possible d'utiliser la solution obtenue pour l'expérimentation réelle de la manipulation la tige, du fait de la correspondance entre les forces et couples à appliquer à la base de la tige avec les coordonnées dans l'espace  $\mathcal{A}_{stable}$ . Ces travaux ont été publiés en [Roussel 14]. Bien que l'hypothèse de quasi-staticité ne soit pas incompatible avec une expérimentation réelle, l'absence de contacts ne permet pas la résolution de problèmes fortement contraints.

## 3.3 Planification avec prise en compte du modèle dynamique et des contacts

Nous avons vu que la planification de mouvement pour des objets déformables tels que des tiges trouve diverses applications telles que les études d'assemblage et désassemblage ou encore la manipulation de câbles par des systèmes robotiques. Le cas quasi-statique présenté en Section 3.2 offre une formulation mathématique élégante et des performances acceptables. Cependant, la manipulation quasi-statique, bien que réalisable en pratique, limite fortement l'espace de recherche et les solutions possibles. De plus, le modèle quasi-statique utilisé n'autorise pas les contacts. Or, les scénarios applicatifs sont généralement fortement contraints, notamment pour les études d'assemblage et désassemblage, et ne peuvent pas être résolus sans la prise en compte des contacts.

La prise en compte des contacts dans le problème de planification est peu étudiée [Redon 05]. Ceci peut s'expliquer par le faible nombre de travaux sur la planification pour des corps déformables, car la prise en compte du contact devient essentielle

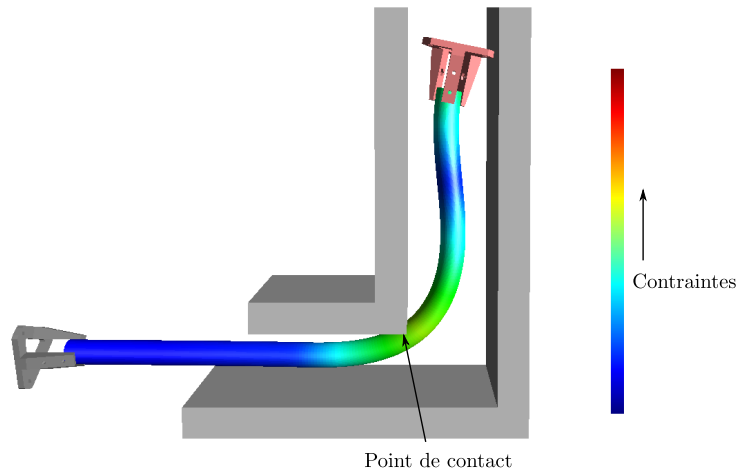


FIGURE 3.14 – Le point de contact de la tige dans cet environnement contraint induit un état qui ne peut être obtenu par la manipulation de ses extrémités uniquement.

lorsque l'on ne considère plus uniquement des corps rigides. En effet, l'espace  $\mathcal{X}$  d'un système composé de corps déformables diffère selon que l'on considère ou non les contacts. Formellement, autoriser  $m$  points de contact revient à considérer  $m$  manipulateurs sur le déformable. En général, le nombre de points de contact n'est pas constant pour un mouvement donné, ce qui revient à considérer un espace d'états à dimension variable. Ce concept a déjà été illustré dans [Mukadam 14] où les auteurs étendent le modèle de tige quasi-statique à un nombre quelconque de manipulateurs et montrent que la dimension de l'espace d'état résultant augmente avec le nombre de manipulateurs. Pour illustrer cela, considérons une tige déformable dans un passage étroit impliquant un état fortement contraint (Figure 3.14). Cet état ne peut être obtenu par la manipulation de la tige uniquement à ses extrémités sans contact.

Dans la formulation du problème de planification, nous avons vu que l'espace libre  $\mathcal{X}_{free}$  était un ouvert, ce qui traduit l'absence de considération des contacts. Dans cette section, nous allons étendre l'espace de recherche de solutions aux contacts en introduisant l'espace d'états admissibles  $\mathcal{X}_{adm}$ . De plus, nous considérons aussi la dynamique de la tige, ce qui implique que l'espace de recherche sera l'espace d'état, i.e. chaque état  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  s'écrit sous la forme  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  avec  $\mathbf{q}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$  représentant respectivement la configuration en position et en vitesse de la tige.

L'approche proposée en [LaValle 01] et introduite en Section 1.1.6 permet d'étendre la formulation du problème de planification classique en incluant les contraintes différentielles correspondantes aux EDOs de la fonction de transition d'état. L'efficacité de celle-ci repose sur la capacité à résoudre, pour chaque itération de l'algorithme, le problème de planification locale consistant à trouver la séquence de commandes permettant d'atteindre un état désiré pour un état initial donné. Selon le système considéré, ce problème peut s'avérer aussi difficile que le problème de planification globale. Un compromis est alors nécessaire entre pertinence des

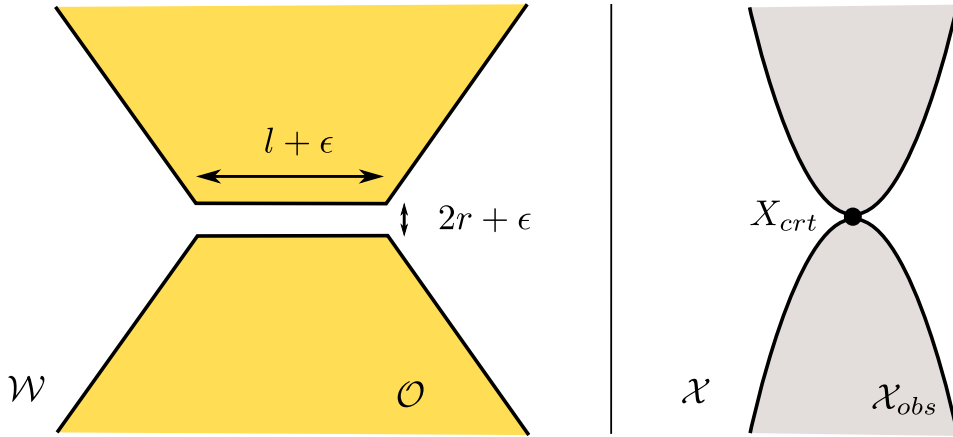


FIGURE 3.15 – Un cas critique de passe étroit extrême pour une tige élastique représenté dans l'espace de travail  $\mathcal{W}$  (à gauche) et dans l'espace d'états de la tige  $\mathcal{X}$ . Lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro, la probabilité d'échantillonner sur  $X_{crt}$  tend aussi vers zéro.

commandes et coût de calcul. Des travaux [Gayle 10] ont déjà étudié l'intégration d'un simulateur dynamique dans des algorithmes de planification, mais la classe de problèmes pouvant être résolus est fortement restreinte par l'utilisation d'un chemin guide permettant de biaiser l'exploration.

Nous présentons ici une approche permettant de planifier pour une tige élastique de type Timoshenko en considérant sa dynamique et en autorisant les mouvements au contact grâce à un simulateur physique et nous montrons qu'il est alors possible de résoudre en un temps raisonnable des scénarios insolubles avec les approches précédentes.

### 3.3.1 Un exemple de cas critique : le double entonnoir

Pour cet exemple, considérons une tige déformable de longueur  $l$  et de rayon  $r$  ainsi qu'un environnement présentant un long passage très étroit. Dans un cas extrême, ce passage étroit se ramènerait à l'état initial de la tige, i.e. un tunnel d'une longueur  $l + \epsilon$  et de diamètre  $2r + \epsilon$  (Figure 3.15). Soit  $X_{crt}$  l'ensemble des états sans collision quand la tige est centrée dans le tunnel. Lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro, l'ensemble  $X_{crt}$  tend vers l'unique état dont la géométrie est libre de collision dans le tunnel. Le volume de  $X_{crt}$  ainsi que la probabilité d'échantillonner un état dans  $X_{crt}$  tendent alors vers zéro et le temps requis pour résoudre le problème tend vers l'infini.

Cet exemple de passage très étroit illustre la limite de l'efficacité des méthodes à échantillonnage. Intuitivement, il conviendrait de reformuler le problème de planification afin de :

- permettre les états d'être au contact, i.e.  $x \in \partial\mathcal{X}_{obs}$  où  $\partial\mathcal{X}_{obs}$  est la frontière de  $\mathcal{X}_{obs}$  ;

- être capable de glisser au contact ;
- être capable de sortir du contact.

Il est connu que les méthodes à échantillonnage ne sont pas adaptées aux cas présentant des passages très étroits. L'idée que nous souhaitons exploiter ici est de coupler le glissement au contact tel que dans le *Bug algorithm* [Kamon 97, Kamon 99, Lumelsky 87] avec les méthodes à échantillonnage afin d'être capable de résoudre efficacement ces cas qui se retrouvent dans des applications réelles.

### 3.3.2 Formulation du problème

Dans cette approche, nous considérons que la tige est de type Timoshenko et peut-être manipulée par ses extrémités par des pinces robotiques. Notons que les deux extrémités ne sont pas nécessairement manipulées simultanément. De plus, la méthode présentée est généralisable à un nombre quelconque de pinces robotiques manipulant la tige et leur position peut-être choisie arbitrairement.

Comme nous considérons une planification dynamique, la notion de temps intervient et nous paramétrons la fibre neutre de la tige par  $s \in [0, 1]$  pour éviter toute confusion avec le paramètre  $t$  représentant le temps. La géométrie de la tige est représentée par l'application  $\mathbf{q} : [0, 1] \rightarrow SE(3)$ . L'espace des configurations résultant est un sous ensemble de l'espace fonctionnel de dimension infinie  $C^\infty([0, 1], SE(3))$ . De par l'utilisation d'un simulateur du modèle dynamique de la tige basé sur les méthodes à éléments finis, celle-ci est discrétisée en  $N - 1$  éléments géométriquement exacts, soit  $N$  nœuds. L'espace des configurations est alors un sous ensemble de  $SE(3)^N$  et chaque configuration de la tige  $\mathbf{q}$  est décrite par le vecteur  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N)$ . Cependant, nous souhaitons à présent inclure la dynamique de la tige dans la planification. L'espace  $\mathcal{X}$  est alors l'espace d'états tel que  $\mathcal{X} \subset TSE(3)^N$ , i.e. le produit cartésien des fibré tangents au groupe de Lie  $SE(3)$  pour chaque nœud. Chaque état  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  est donc défini par  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

Le simulateur physique traduit un système dynamique en implémentant une fonction de transition d'état de la forme  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  où  $\mathbf{u}$  sont les commandes. Notons  $\mathcal{U}$  l'espace borné des commandes applicables (celui-ci sera défini pour notre cas ultérieurement). Pour des conditions initiales de simulation  $\mathbf{x}(0)$  données, on a

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau$$

Cette fonction de transition consiste typiquement en plusieurs équations différentielles ordinaires (EDO) et elle définit l'espace  $\mathcal{X}$ . En pratique, le simulateur discrétise le temps en itérations  $k$  d'un pas de temps constant  $\delta t$  et la fonction de transition d'états discrète  $\mathbf{f}_d$  est donnée par  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_d(\mathbf{x}_k, u_k)$ , avec  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$  l'état à l'instant  $t_k$  et  $t_k = k \delta t$  le temps écoulé après  $k$  pas de simulations d'une durée  $\delta t$ . A la différence de la version continue,  $\mathbf{f}_d$  a aussi un rôle d'intégrateur. Le passage du

continu au discret s'exprime simplement par

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}_d(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ &= \mathbf{x}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau\end{aligned}$$

ce qui, dans un schéma d'intégration de type Euler, se réduit à

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k \delta t \\ &= \mathbf{x}_k + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \delta t\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent introduire l'espace des états admissibles  $\mathcal{X}_{adm}$  défini par  $\mathcal{X}_{adm} = \mathcal{X}_{free} \cup \partial\mathcal{X}_{obs}$ . Le simulateur doit alors garantir que pour tout état admissible initial, les états résultants doivent eux aussi être admissibles. Formellement,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \in \mathcal{X}_{adm}$  pour tous  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X}_{adm}$  et  $\mathbf{u}_k \in \mathcal{U}$ .

### 3.3.2.1 Échantillonnage sur la variété des configurations à l'équilibre

Étant donné un état initial  $\mathbf{x}_{init}$  et un état destination  $\mathbf{x}_{dest}$ , il n'y a aucune garantie que l'orbite décrite par le système dynamique pour des conditions initiales données par  $\mathbf{x}_{init}$  n'atteigne l'état  $\mathbf{x}_{dest}$ . Dans notre cas, l'échantillonnage d'un état présente une double difficulté lié à l'utilisation de deux modèles différentiels distincts :

- Le modèle de déformation la tige qui décrit l'évolution de l'état de long de celle-ci, i.e  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}$  ;
- Le modèle dynamique de la tige qui décrit l'évolution de la tige dans le temps, i.e.  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$ .

Intuitivement, l'application de commandes bornées sur ces deux modèles restreint l'espace d'état accessible et il est alors impossible d'échantillonner directement dans l'espace d'état.

D'autre part, nous avons vu en Section 2.2.4 que l'espace des configurations à l'équilibre statique et sans contact d'une tige élastique de type Timoshenko est une variété  $\mathcal{Q}_{stable}$  de dimension 6 dont une paramétrisation globale est donnée par l'unique carte  $(\mathcal{Q}_{stable}, \Psi^{-1})$  et où les coordonnées forment l'ensemble  $\mathcal{A}_{stable}$ . Considérons maintenant que cette tige soit munie d'une base flottante, son espace des configurations est alors une variété de dimension 12 définie par  $\mathcal{Y} = \mathcal{F} \times \mathcal{Q}_{stable}$  où  $\mathcal{F} \subset SE(3)$  est l'ensemble des positions 6D possibles de la base de la tige. Alternativement, on peut définir cette variété dans l'espace des  $\mathcal{X}$  par

$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{x} \in \text{int}(\mathcal{X}_{adm}) \mid \dot{\mathbf{q}} = 0\}$$

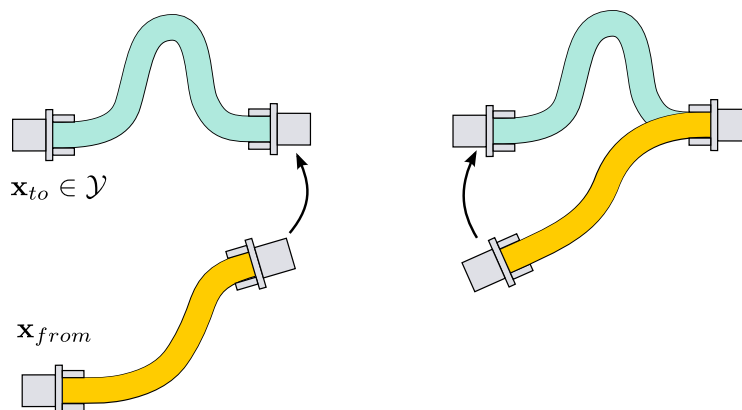


FIGURE 3.16 – Illustration du schéma de commande permettant de relier un état  $\mathbf{x}_{from}$  quelconque à un état quasi-statique  $\mathbf{x}_{to}$ . La manipulation des extrémités s'effectue en deux temps.

Comme la variété décrite par le groupe de Lie  $SE(3)$  peut être paramétrée par les quaternions unitaires, on a alors une paramétrisation de l'espace  $\mathcal{Y}$  et il est possible d'échantillonner aléatoirement de façon uniforme dans cet espace tel que détaillé en Section 3.2.2.1.

### 3.3.2.2 Planification locale avec dynamique et contacts

Dans notre contexte, le problème de planification locale consiste à trouver un chemin d'un état admissible  $\mathbf{x}_{from} \in \mathcal{X}_{adm}$  vers un état échantillonné  $\mathbf{x}_{to} \in \mathcal{Y}$ . Différentes approches sont possibles et nous présentons ici le schéma de commande que nous avons mis en œuvre ainsi que son intégration dans le planificateur local.

Afin d'améliorer significativement l'exploration de l'espace d'état dans des cas fortement contraints, nous souhaitons tirer parti des informations de contact fournies par le simulateur. Dans cette optique, nous exploitons les mouvements au contact en ne contraignant pas les chemins locaux sur la variété  $\mathcal{Y}$ . Notre méthode locale, qui sera détaillée dans l'Algorithme 6 consiste en une approche en deux étapes (Figure 3.16). Premièrement, la tige est manipulée par une de ses pinces jusqu'à que celle-ci atteigne sa position de consigne. Ensuite, cette pince est fixée et l'autre extrémité est manipulée par l'autre pince afin d'atteindre à son tour sa position de consigne. L'ordre dans lequel les pinces sont actionnées est tiré aléatoirement et peut-être considéré comme un degré de liberté discret supplémentaire dans l'espace des commandes.

Nous pouvons à présent définir l'espace des commandes par  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_w \times \{g_0, g_1\}$  où  $\mathcal{U}_w \subset \mathbb{R}^6$  est l'ensemble des forces 6D applicables sur les pinces robotiques manipulant la tige et  $\{g_0, g_1\}$  est le degré de liberté discret indiquant la pince sur laquelle s'applique la commande.

La manipulation des extrémités de la tige est effectuée avec un contrôleur de

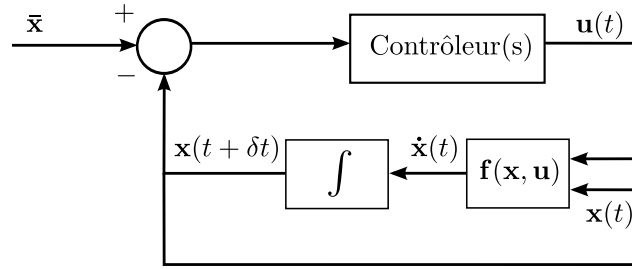


FIGURE 3.17 – Schéma d'intégration des contrôleurs des pinces manipulant la tige avec le simulateur.

type Proportionnel-Dérivé sur leur position 6D de consigne. Ce choix a été motivé par sa simplicité de mise en œuvre car ce type de contrôleur est déjà intégré au simulateur XDE utilisé dans cette approche. Comme la phase de planification locale ne tient pas compte des obstacles, il est nécessaire de considérer une limite en temps  $\Delta t_{max}$  pendant laquelle un contrôleur est appliqué, permettant d'éviter que le contrôleur ne soit bloqué dans un minimum local, i.e. que la pince ne puisse converger vers sa consigne à cause de la présence d'obstacles. Cette valeur  $\Delta t_{max}$  est choisie aléatoirement sur un intervalle  $(0, \Delta T_{max}]$  et doit être supérieure au pas d'intégration du simulateur  $\delta t$ . L'intégration des contrôleurs avec le simulateur est présentée en Figure 3.17.

### 3.3.2.3 Planification de mouvement avec dynamique par échantillonnage sur une sous-variété

À présent que nous avons introduit les notions nécessaires, nous pouvons formuler le problème de planification de mouvement avec prise en compte du modèle dynamique et des contacts traité dans cette section. Étant donné l'espace des états admissibles  $\mathcal{X}_{adm}$ , une solution au problème de planification consiste à trouver un chemin faisable, i.e.  $\tau : [0, t_{max}] \rightarrow \mathcal{X}_{adm}$ , étant donné un état initial  $\mathbf{x}_{start} \in \mathcal{Y}$  et final  $\mathbf{x}_{goal} \in \mathcal{Y}$  correspondants à des configurations quasi-statiques libres de contacts. Notons que le chemin solution  $\tau(t)$  est ici paramétré par le temps du fait de la prise en compte de la dynamique. De plus, cette approche apporte une solution au problème de planification de manipulation de la tige, i.e. une séquence de commandes  $\tilde{u} : [0, t_{max}] \rightarrow \mathcal{U}$  solution au problème où  $\mathcal{U}$  est l'espace des commandes tel que défini en Section 3.3.2.2.

Contrairement aux approches de planification avec contraintes [Berenson 09, El Khoury 13] et bien que l'échantillonnage soit contraint à une variété, la recherche de solutions se fait dans tout l'espace d'état.

La Figure 3.18 illustre le développement de l'arbre de recherche dans l'espace d'états. Nous allons détailler les trois cas de figures qui peuvent se présenter au cours de l'exploration et qui sont représentés par les chemins locaux  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$ .

- Cas  $\pi_1$  : L'état échantillonné  $\mathbf{x}_{rand} \in \mathcal{Y}$  a pu être atteint depuis son plus

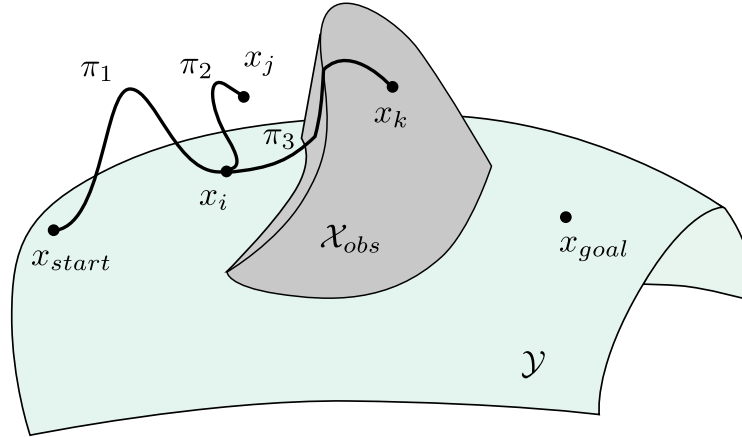


FIGURE 3.18 – Illustration de l’arbre d’exploration dans l’espace d’états  $\mathcal{X}_{adm}$  avec échantillonnage sur la variété des configurations à l’équilibre  $\mathcal{Y}$ .

proche voisin  $\mathbf{x}_{start}$  avant la limite de temps du contrôleur de  $\Delta t_{max}$ . Bien que le chemin  $\pi_1(t)$  ne soit pas contraint sur la variété  $\mathcal{Y}$ , l’état atteint  $x_i$  correspond à la configuration à l’équilibre échantillonnée  $\mathbf{x}_{rand}$ , i.e.  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{Y}$ ;

- Cas  $\pi_2$  : L’état échantillonné  $\mathbf{x}_{rand} \in \mathcal{Y}$  n’a pas pu être atteint depuis son plus proche voisin  $\mathbf{x}_i$  avant la limite de temps  $\Delta t_{max}$ . L’état  $\mathbf{x}_j$  atteint au terme de cette limite n’est pas une configuration à l’équilibre, i.e.  $\mathbf{x}_j \notin \mathcal{Y}$ ;
- Cas  $\pi_3$  : Comme dans le cas précédent, l’état échantillonné  $\mathbf{x}_{rand} \in \mathcal{Y}$  n’a pas pu être atteint depuis  $\mathbf{x}_i$  avant la limite de temps  $\Delta t_{max}$ . L’état  $x_j$  atteint au terme de cette limite est un état au contact, i.e.  $\mathbf{x}_k \in \partial\mathcal{X}_{obs}$  et donc  $\mathbf{x}_k \notin \mathcal{Y}$ .

#### Algorithme RRT pour tiges de Timoshenko avec dynamique et contact

L’Algorithme 5 présente la structure générale de l’algorithme RRT modifié pour prendre en compte le modèle dynamique de la tige et les contacts, ainsi que l’échantillonnage sur la variété des configurations à l’équilibre. A noter que comme notre simulateur ne nous permet pas de simuler à sens inverse, il n’est ici pas possible d’implémenter notre approche sur un algorithme bidirectionnel de type RRT-Connect. Cette limitation est propre à notre simulateur XDE et l’implémentation d’algorithmes de planification bidirectionnels basés sur cette approche est envisageable avec des simulateurs permettant l’intégration à sens inverse.

**Métrique** Définir une métrique  $\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$  sur l’espace des phases  $\mathcal{X}$  est une tâche généralement complexe. Dans notre cas, l’énergie totale nécessaire pour relier deux états paraît être une métrique appropriée. Cependant, calculer cette métrique est un problème aussi coûteux que le problème de planification locale. Il convient alors d’utiliser une approximation rapide à calculer. Nous avons considéré la pseudo-métrique  $\rho$  définie par



---

**Algorithm 5** RRT pour tiges élastiques avec prise en compte de la dynamique et des contacts

---

**Input:** Modèle de l'environnement, état initial  $\mathbf{x}_{start}$ , état but  $\mathbf{x}_{goal}$  ou région but  $X_{goal}$

- 1: Initialize the tree  $\mathcal{T}$  with  $\mathbf{x}_{start}$
- 2: **while**  $\neg$  solved **and**  $iter < N_{max}$  **do**
- 3:    $\mathbf{x}_{rand} \leftarrow$  random quasi-static state  $\in \mathcal{Y}$  or goal state
- 4:    $\mathbf{x}_{near} \leftarrow$  NEAREST( $\mathcal{T}, \mathbf{x}_{rand}$ )
- 5:    $\mathbf{x}_{new} \leftarrow$  EXTEND\_BY\_CONTROL( $\mathbf{x}_{near}, \mathbf{x}_{rand}$ )
- 6:   **if**  $\mathbf{x}_{new} \neq \mathbf{x}_{near}$  **then**
- 7:     Add current state  $\mathbf{x}_{new}$  to  $\mathcal{T}$
- 8:     Add edge ( $\mathbf{x}_{near}, \mathbf{x}_{new}$ )
- 9:     **if**  $\mathbf{x}_{new} \in X_{goal}$  **then** solved  $\leftarrow$  **true**
- 10:    **end if**
- 11:   **end if**
- 12: **end while**
- 13:

---



---

**Algorithm 6** EXTEND\_BY\_CONTROL( $\mathbf{x}_{from}, \mathbf{x}_{to}$ )

---

**Input:** Limite de temps  $\Delta T_{max}$ , durée du pas d'intégration  $\delta t$

- 1: Select at random first gripper  $g_f$
- 2: Select at random a time limit  $\Delta t_{max} \in (0, \Delta T_{max}]$
- 3:  $\mathbf{x}_{new} \leftarrow \mathbf{x}_{from}$
- 4: **while** gripperDistance( $\mathbf{x}_{new}, \mathbf{x}_{to}, g_f$ )  $< \epsilon$  **and**  $t < \Delta t_{max}$  **do**
- 5:   Apply position control on  $\mathbf{x}_{new}$  at  $g_f$  for  $\delta t$
- 6: **end while**
- 7: Let  $g_s$  be the other gripper
- 8: **while** gripperDistance( $\mathbf{x}_{new}, \mathbf{x}_{to}, g_s$ )  $< \epsilon$  **and**  $t < \Delta t_{max}$  **do**
- 9:   Apply position control on  $\mathbf{x}_{new}$  at  $g_s$  for  $\delta t$
- 10: **end while**
- 11: **return**  $\mathbf{x}_{new}$

---

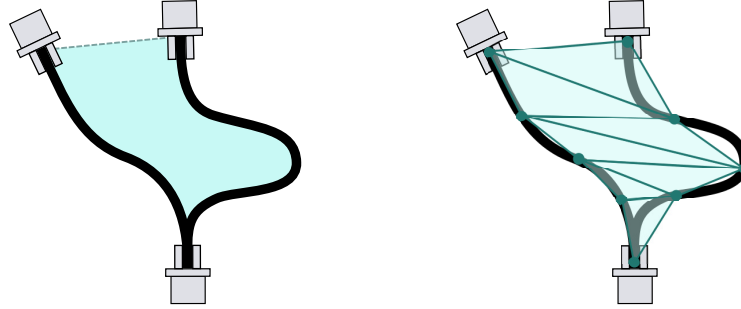


FIGURE 3.19 – Illustration de la surface balayée (en bleu) entre deux états de la tige utilisée comme métrique et son approximation par triangulation utilisée en pratique (à droite).

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \int_0^1 \|\mathbf{p}_i(s) - \mathbf{p}_j(s)\| ds$$

où  $\mathbf{p}(s) \in \mathbb{R}^3$  est la partie translationnelle de la position de la tige  $\mathbf{q}(s) \in SE(3)$ . Intuitivement, cette pseudo-métrique représente la surface balayée dans l'espace de travail par la tige entre deux états en supposant que chaque point de la tige se déplace en ligne droite. En général, ce mouvement n'est pas permis par le modèle dynamique, mais cette fonction nous donne un minorant de la surface balayée réelle. Comme illustré en Figure 3.19, en pratique cette pseudo-métrique est approximée par la surface triangulée entre chaque nœud de la tige. Le choix de cette métrique s'est révélé pertinent lors des validations expérimentales.

### 3.3.3 Résultats expérimentaux

Nous avons implémenté cette approche permettant de planifier pour une tige de Timoshenko à base flottante avec prise en compte de sa dynamique et des contacts grâce à l'utilisation du simulateur externe XDE. Dans cette section, nous présentons et analysons les résultats expérimentaux obtenus en simulation sur différents scénarios, présentant des difficultés spécifiques ou correspondant à des cas industriels.

#### 3.3.3.1 Détails d'implémentation

Le banc d'essai a été réalisé sur un PC avec 16Go de mémoire vive et en utilisant un seul coeur d'un processeur Intel Core i7-2720QM cadencé à 2,2Ghz. L'Algorithme 5 du RRT modifié a été implémenté en C++ en s'appuyant sur la bibliothèque OMPL [Sucan 12]. Le moteur physique utilisé est XDE (cf. Section 1.2.4.2) permettant la simulation par éléments finis de la tige de Timoshenko ainsi que la gestion des collisions et contacts avec l'environnement.

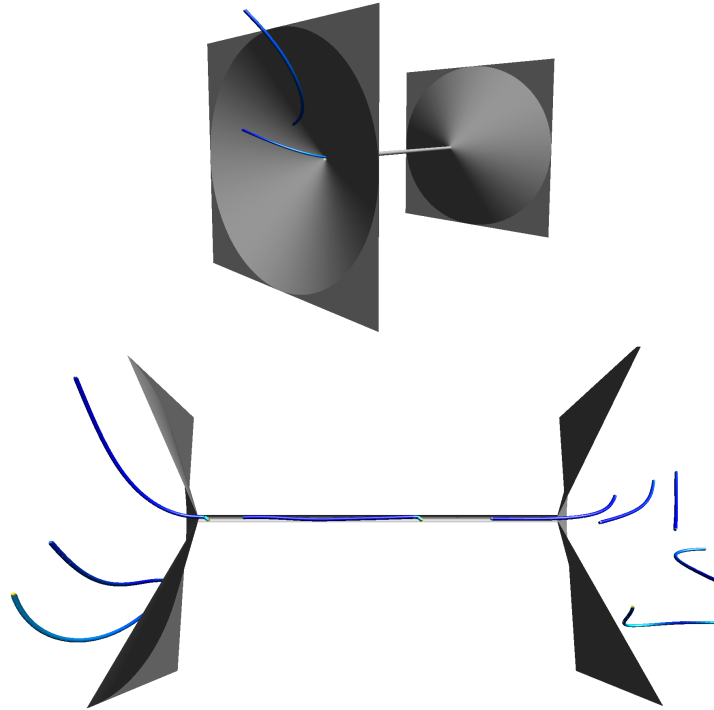


FIGURE 3.20 – Le scénario *Double funnel* où la tige élastique doit passer au travers d'un passage très étroit (haut) et un chemin solution obtenu (bas)

### 3.3.3.2 Scénarios du banc d'essai

Nous avons implémenté et testé en simulation notre approche sur les scénarios suivants :

- *Double funnel* (Figure 3.20) : Scénario présentant un passage très étroit tel que présenté en Section 3.3.1 et deux parois en forme d'entonnoir de chaque côté du passage permettant les mouvements de glissement au contact ;
- *Engine Free Flying* (Figure 3.21) : Scénario de type industriel consistant en une étude de désassemblage d'un câble d'un bloc moteur ;
- *Grid* (Figure 3.22) : Scénario de désassemblage d'un câble enroulé dans une grille ;
- *Powerplant* (Figure 3.23) : Scénario présentant un état initial et final fortement contraints dans un modèle complexe d'une centrale électrique.

Le banc d'essai comprend 50 instances différentes de planification pour chaque scénario. la limite de temps de recherche a été fixé à 20 minutes. Nous avons été contraints de réduire le nombre de nœuds de la tige à  $N = 40$  pour éviter de saturer le simulateur.

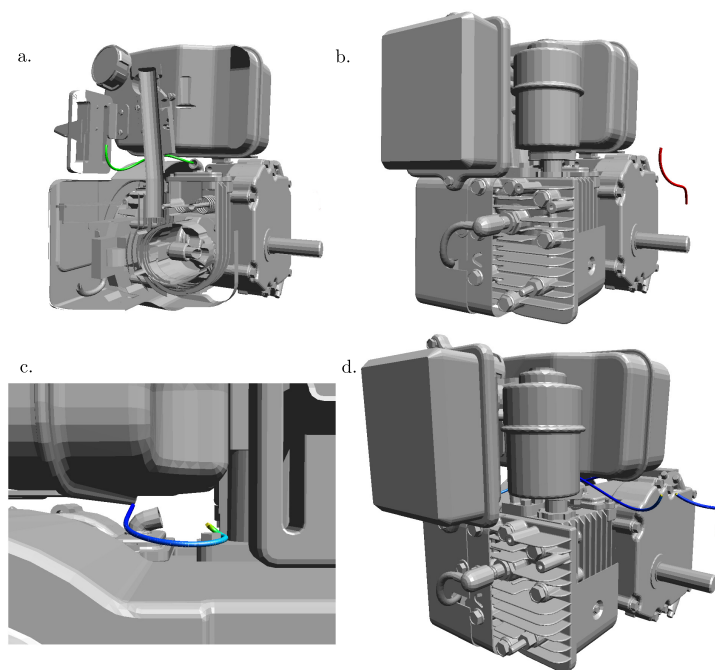


FIGURE 3.21 – État initial (en vert, vue a) et but (en rouge, vue b) pour le scénario de désassemblage *Engine FF*. Le chemin solution (en vues c et d) utilise le mouvement au contact.

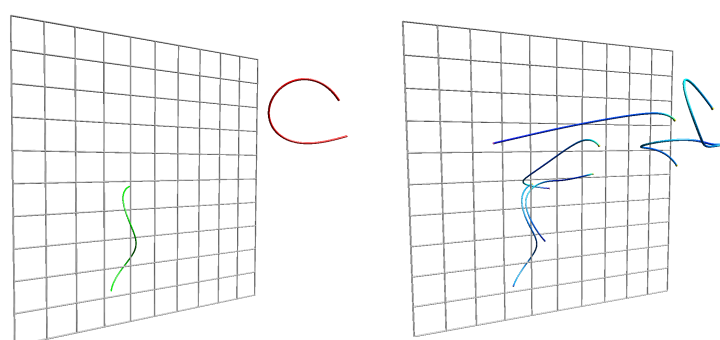
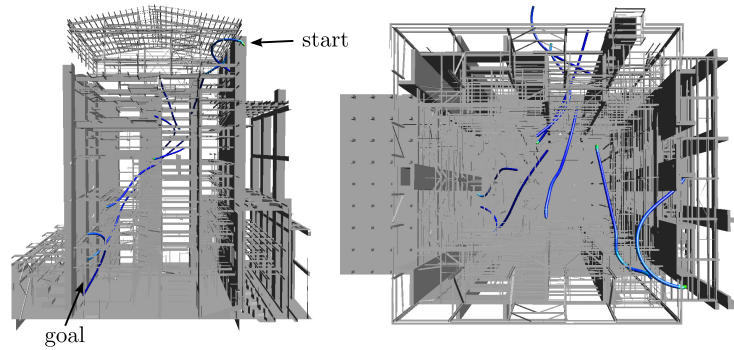


FIGURE 3.22 – Le scénario *Grid* où la tige élastique doit aller d'un état enroulé contraint (haut, en vert) à un état libre (haut, en rouge) et un chemin solution (bas).


 FIGURE 3.23 – Un chemin solution pour une tige élastique au scénario fortement contraint *Powerplant*.

### 3.3.3.3 Résultats

TABLE 3.2 – Résultats de planification pour des tiges élastiques avec modèle dynamique et contacts

Scénario	Nombre de sommets / faces du modèle	Taux de succès (%)	Temps de résolution (s)	Nombre de sommets / arrêtes du graphe
Double funnel	198/388	100%	$77.2 \pm 36.0$	$14.4 \pm 4.8$
Grid	704/1320	96%	$34.4 \pm 25.5$	$10.2 \pm 5.3$
Engine FF	64885/131583	94%	$119.6 \pm 109.3$	$6.8 \pm 3.6$
Powerplant	24870/20053	40%	$402.3 \pm 226.3$	$12.9 \pm 5.8$

Les résultats de la planification sur les scénarios précédemment introduits sont présentés en Table 3.2. Le temps de résolution et le nombre de sommets et arrêtes générés par graphe sont donnés par leur moyenne et leur écart type. Le scénario *Double funnel* ne présente qu'un seul passage étroit dans une unique classe d'homotopie. Le glissement le long de la surface au contact couplé aux méthodes probabilistes offre alors de bonnes performances. De même, les scénarios de désassemblage *Grid* et *Engine FF* sont fortement contraints via un passage très étroit autour de leurs états initiaux. Des algorithmes à diffusion unidirectionnelle de type RRT sont donc adaptés à ces cas.

A l'inverse, le scénario *Powerplant* présente de nombreuses passages étroits et classes d'homotopies. Pour les méthodes à échantillonnage, il s'agit des cas extrêmement difficiles à résoudre pour lesquels ces méthodes ne sont pas adaptées. Malgré le couplage avec le glissement au contact, ceci explique le temps de résolution élevé et donc le faible taux de succès. Avec une simulation à sens inverse et une diffusion bidirectionnelle, de meilleures performances semblent envisageables.

Par ailleurs, la très faible taille des graphes générés pour résoudre ces cas nous indique que notre approche permet une exploration très efficace de l'espace des solutions. Cependant, chaque itération de l'algorithme est très coûteuse de par l'utilisation du simulateur.

Il faut noter que ces cas ne sont pas résolus si on utilise les méthodes précédentes qui n'explorent que l'espace libre.

### 3.3.4 Conclusion et perspectives

Dans cette section, nous avons présenté une approche permettant de résoudre à la fois le problème de planification de mouvement et de manipulation pour une tige de Timoshenko en tenant compte de son modèle dynamique et des contacts. L'utilisation d'un simulateur à éléments finis nous garantit le réalisme physique de la solution. D'autre part, nous introduisons le couplage entre glissement à la surface du contact et méthodes à échantillonnage, permettant de résoudre des cas extrêmement difficiles pour celles-ci.

Dans le cas de corps déformables, une des difficultés est de pouvoir échantillonner des états physiquement réalistes. Notre approche nous permet d'échantillonner sur une variété de l'espace d'états du corps déformable, et sous certaines conditions, de maintenir la complétude probabiliste. Ces travaux ont été publiés en [Roussel 15a].

L'utilisation de l'information au contact fourni par le simulateur, telle que la normale au contact, a été étudiée afin de guider encore plus efficacement l'exploration. Par exemple, dans le cas de contacts ayant une même normale au contact, il est possible d'échantillonner sur le plan défini par la normale<sup>1</sup>. Ce type d'approche permet de réduire significativement le nombre d'états à explorer (Figure 3.24).

## 3.4 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs approches permettant de résoudre le problème de planification de tiges élastiques. Pour des modèles de tige suffisamment réaliste, l'approche par réduction de dimension par les méthodes linéaires de type ACP a permis une réduction de dimension significative et peut être intégrée aux méthodes de planification de mouvement pour des tiges élastiques. Cependant, la dimension de l'espace réduit reste trop élevée pour obtenir des temps de résolution satisfaisants. Une étude plus approfondie de méthodes de réduction non-linéaire pourrait permettre un meilleur taux de réduction.

D'autre part, nous avons présenté deux approches tirant parti des propriétés des configurations à l'équilibre d'une tige élastique vues au Chapitre 2. La première permet la planification de tiges élastiques dans le cas quasi-statique en utilisant les linéarités du MGD données par sa matrice jacobienne. Grâce à cette approximation du MGD dont le coût de calcul est prohibitif, les temps de résolution du problème

---

1. Je remercie Pierre Fernbach, stagiaire que j'ai eu l'opportunité de co-encadrer, pour ses travaux et résultats.

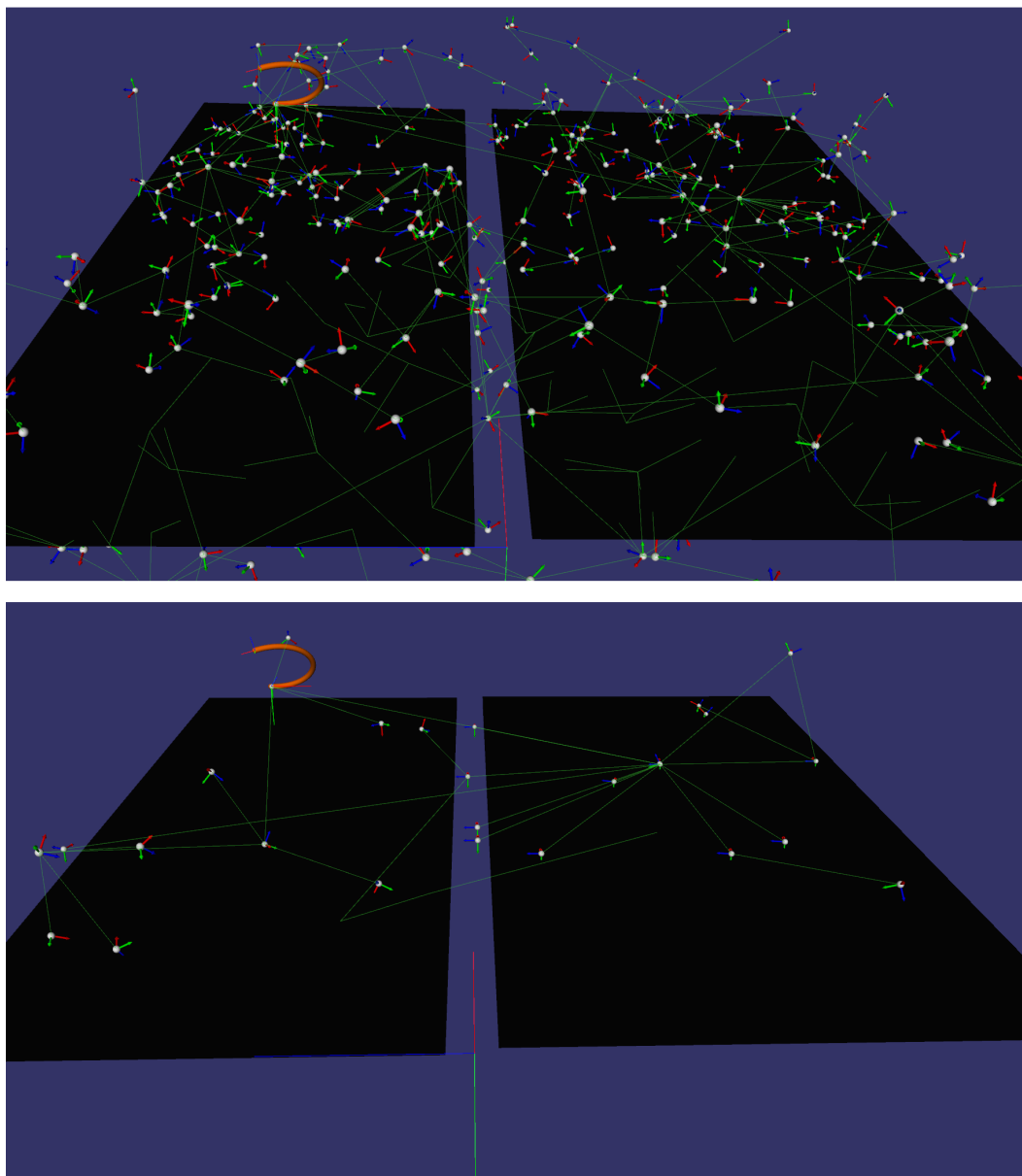


FIGURE 3.24 – Graphes résultant de planifications résolues sans (en haut) et avec (en bas) l'utilisation de l'information de contact pour guider l'échantillonnage sur le scénario *Crack*. On peut remarquer que grâce à l'utilisation de l'information de contact, peu d'états ont du être explorés et le temps de résolution est alors nettement réduit.

de planification ont été significativement améliorés. La dernière approche présentée utilise les configurations à l'équilibre statique de la tige pour guider l'échantillonnage aléatoire, permettant un couplage efficace avec le simulateur physique XDE et autorisant la prise en compte de la dynamique de la tige ainsi que les contacts. Nous avons vu que l'information de contact fournie par le simulateur pourrait être utilisée pour guider encore plus efficacement la recherche.

Bien que des améliorations soient envisageables pour réduire le temps de résolution, nous avons présenté dans ce chapitre différentes approches qui permettent de répondre au problème de planification de mouvement pour des tiges élastiques.





# Chapitre 4

## Conclusion

### 4.1 Contributions principales

Les travaux présentés dans cette thèse traitent du problème de planification de mouvement pour des tiges élastiques manipulées à leurs extrémités par des pinces robotiques. Une des motivations à ces travaux est l'application de ces méthodes en tant qu'outil d'aide à la décision pour les études d'assemblage et de désassemblage de systèmes complexes comprenant des tiges flexibles. L'extension des méthodes de planification de mouvement à des corps déformables tels que des tiges élastiques est un domaine peu étudié et qui présente des difficultés majeures. Dans cette thèse, nous avons proposé différentes approches permettant de répondre à cette problématique telles que :

- une méthode de planification efficace pour des tiges de Kirchhoff à l'équilibre. Nous avons développé une approche permettant de tirer parti du calcul de la paramétrisation des configurations à l'équilibre et qui permet de résoudre des scénarios industriels d'assemblage et de désassemblage ;
- une méthode de planification pour des tiges de Timoshenko qui tient compte du modèle dynamique de la tige et qui autorise les contacts. En proposant une extension de la caractérisation des configurations à l'équilibre aux tiges de Timoshenko, nous utilisons celle-ci pour guider l'échantillonnage de notre méthode de planification couplée au simulateur physique XDE. L'utilisation de mouvements au contact en tirant parti des informations de contact fournies par le simulateur nous permet de résoudre des cas complexes avec un grand réalisme physique ;
- une approche au problème de géométrie inverse pour des tiges élastiques à l'équilibre, permettant de trouver une configuration de la tige qui satisfait des positions données de ses extrémités. Pour cela, nous avons donné une nouvelle formulation des solutions analytiques des différentes équations de l'équilibre d'une tige élastique. Cet outil a pour objectif d'être ensuite intégré dans les méthodes de planification de mouvement de bras manipulateurs afin de pou-

voir prendre en compte les composants flexibles de celui-ci, tels que les câbles électriques ou les flexibles hydrauliques, dans la phase de planification.

Ces approches donnent non seulement une solution géométrique au problème mais aussi les séquences de commandes qui doivent être appliquées par les pinces robotiques manipulant la tige élastique. La validation expérimentale a été effectuée en simulation et des expérimentations sur des robots réels ont été initiées. Aussi, cette problématique nouvelle dans le groupe Gepetto a ouvert de nouvelles perspectives.

## 4.2 Perspectives

Le passage sur des systèmes robotiques réels nécessite certaines considérations. Typiquement, lors de la manipulation quasi-statique d'une tige élastique, il est souhaitable d'éviter les points de bifurcation. Ces singularités, où la tige est dans un état instable, sont clairement identifiées grâce aux conditions suffisantes d'optimalité que nous avons présentées et il paraît envisageable d'éviter ces situations en pratique.

D'une manière générale, l'étude des configurations à l'équilibre d'une tige élastique a permis de découvrir certaines propriétés qui peuvent trouver des applications en planification. Parmi elles, les formes analytiques de l'énergie élastique potentielle totale ainsi que ses propriétés permettent d'envisager son utilisation comme métrique dans les méthodes à échantillonnage ou pour résoudre plus efficacement le problème de géométrie inverse. Aussi, les solutions analytiques générales des extrema au problème de minimisation d'énergie offrent une alternative intéressante vis à vis des méthodes de résolution numérique grâce à leur coût de calcul négligeable et leur stabilité numérique. Le critère numérique permettant de vérifier les conditions suffisantes d'optimalité est particulièrement coûteux et sensible à l'imprécision numérique et il serait intéressant de pouvoir tirer parti de l'efficacité des formes analytiques à ce niveau.

D'autre part, nous avons vu que l'application de méthodes de réduction de dimension linéaires aux modèles de déformations de tiges élastiques permet une réduction significative de la dimension. Bien que la dimension réduite demeure trop élevée pour être applicable efficacement en planification de mouvement, cette approche offre des perspectives intéressantes notamment auprès des méthodes de réduction de dimension non-linéaires.

Par ailleurs, nous avons vu que la prise en compte des contacts était essentielle à la résolution de problèmes de planification pour des objets déformables dans des cas complexes. L'utilisation de l'information de contact fournie par le simulateur nous a permis des résultats préliminaires encourageants et ces travaux vont être poursuivis.

Enfin, bien que nous ayons résolu efficacement le problème de géométrie inverse d'une tige élastique à l'équilibre dans le cas planaire, de nombreux travaux sont encore à mener dans cette direction. En particulier, le cas tridimensionnel n'offre pas de forme analytique pour la géométrie de la tige ce qui rend la résolution via notre approche d'optimisation numérique inefficace. En particulier, nous envisageons une approche différente tirant parti des formes analytiques de l'état adjoint qui sont

disponibles. Une méthode de résolution efficace du cas tridimensionnel permettrait alors l'intégration aux méthodes de planification de mouvement avec de nombreuses applications.



## Annexe A

# Formes analytiques de la sensibilité aux conditions initiales dans le cas planaire

Cette annexe complète la section 2.3.2 en donnant le détail des formes analytiques des variations de la géométrie  $\mathbf{q}(t)$  d'une tige planaire par rapport aux conditions initiales  $\mathbf{a}$ .

Pour cela, nous utiliserons comme point de départ l'expression de la géométrie  $\mathbf{q}(t)$  donnée en (2.57). Étant données les intégrales

$$I_1(t) = \int_0^t \beta_1(\zeta) d\zeta$$

$$I_2(t) = \int_0^t \beta_2(\zeta) d\zeta$$

En dérivant (2.57) par rapport à  $\mathbf{a}$ , on obtient

$$\frac{\partial \cos(\theta(t))}{\partial \mathbf{a}} = \beta_1(0) \frac{\partial \beta_1(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \beta_1(0)}{\partial \mathbf{a}} \beta_1(t) + 4 \left( \beta_2(0) \frac{\partial \beta_2(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \beta_2(0)}{\partial \mathbf{a}} \beta_2(t) \right) \quad (\text{A.1a})$$

$$\frac{\partial \sin(\theta(t))}{\partial \mathbf{a}} = 2\varepsilon \left( \beta_1(0) \frac{\partial \beta_2(t)}{\partial \mathbf{a}} + \beta_2(t) \frac{\partial \beta_1(0)}{\partial \mathbf{a}} - \beta_2(0) \frac{\partial \beta_1(t)}{\partial \mathbf{a}} - \beta_1(t) \frac{\partial \beta_2(0)}{\partial \mathbf{a}} \right) \quad (\text{A.1b})$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial \mathbf{a}} = \beta_1(0) \frac{\partial I_1(t)}{\partial \mathbf{a}} + I_1(t) \frac{\partial \beta_1(0)}{\partial \mathbf{a}} + 4 \left( \beta_2(0) \frac{\partial I_2(t)}{\partial \mathbf{a}} + I_2(t) \frac{\partial \beta_2(0)}{\partial \mathbf{a}} \right) \quad (\text{A.1c})$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \mathbf{a}} = 2\varepsilon \left( \beta_1(0) \frac{\partial I_2(t)}{\partial \mathbf{a}} + I_2(t) \frac{\partial \beta_1(0)}{\partial \mathbf{a}} - \beta_2(0) \frac{\partial I_1(t)}{\partial \mathbf{a}} - I_1(t) \frac{\partial \beta_2(0)}{\partial \mathbf{a}} \right) \quad (\text{A.1d})$$

Nous pouvons dériver dans le cas général les formes suivantes :

— Les paramètres elliptiques  $m$ ,  $n$  et  $r$

$$\frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} = \frac{1}{(\alpha_3 + \alpha_1)^2} \left( \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{a}} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mathbf{a}} \right) (\alpha_3 + \alpha_1) - \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{a}} \right) (\alpha_3 - \alpha_2) \right) \quad (\text{A.2a})$$

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{a}} = \frac{1}{4\sqrt{\alpha_3 + \alpha_1}} \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mathbf{a}} \right) \quad (\text{A.2b})$$

$$\frac{\partial n}{\partial \mathbf{a}} = \frac{1}{\alpha_3^2} \left( \frac{\partial \alpha_3}{\partial \mathbf{a}} \alpha_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mathbf{a}} \alpha_3 \right) \quad (\text{A.2c})$$

— La phase  $\varphi$

Soient

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{a}} = \frac{1}{2n\varpi} \left( \frac{a_3^2}{\alpha_3^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_3}{\partial a_3} - 2\frac{\alpha_3}{a_3} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial a_4} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial a_5} \end{pmatrix} - \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{a_3^2}{\alpha_3} \right) \frac{\partial n}{\partial \mathbf{a}} \right) \quad (\text{A.3})$$

et les dérivés au premier ordre de la fonction  $\arcsn(z|m)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \arcsn(z|m)}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-mz^2}} \\ \frac{\partial \arcsn(z|m)}{\partial m} &= \frac{1}{2(m-1)m} \left( \frac{m\sqrt{1-z^2}z}{\sqrt{1-mz^2}} - E(\arcsin z|m) - (m-1)F(\arcsin z|m) \right) \end{aligned}$$

où  $\text{cd}(z|m)$  est la fonction elliptique de Jacobi définie par

$$\text{cd } z = \frac{\text{cn } z}{\text{dn } z}$$

et où les fonctions  $F(z|m)$  et  $E(z|m)$  sont les intégrales elliptiques de première et seconde espèce, respectivement. Nous pouvons alors exprimer les dérivées de la fonction  $\arcsn(\varpi|m)$  par rapport à  $\mathbf{a}$  en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées

$$\begin{aligned} \frac{\partial \arcsn \varpi}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial \arcsn \varpi}{\partial \varpi} \frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \arcsn \varpi}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-mz^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{a}} + \frac{mz\sqrt{1-z^2} - E_\varpi - (m-1)F_\varpi}{2(m-1)m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \right) \end{aligned}$$

avec  $E_\varpi \triangleq E(\arcsin \varpi|m)$  et  $F_\varpi \triangleq F(\arcsin \varpi|m)$ . Alors, la forme générale de l'expression de la dérivée de la phase  $\varphi$  par rapport à  $\mathbf{a}$  est

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{a}} = \text{sgn}(a_3 a_5) \frac{\partial \arcsn(\varpi|m)}{\partial \mathbf{a}}$$

— La fonction  $\Gamma(t)$

$$\frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} = t \frac{\partial r}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{a}}$$

— La fonction elliptique de Jacobi  $\text{sn}(\Gamma(t)|m)$

Soient les dérivés au premier ordre de la fonction  $\text{sn}(z|m)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{sn}(z|m)}{\partial z} &= \text{cn}(u|m) \text{dn}(u|m) \\ \frac{\partial \text{sn}(z|m)}{\partial m} &= \frac{\text{dn}(z|m) \text{cn}(z|m) ((1-m)z - \mathcal{E}(z|m) + m \text{cd}(z|m) \text{sn}(z|m))}{2m(1-m)} \end{aligned}$$

nous pouvons en déduire directement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{sn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial \text{sn} \Gamma(t)}{\partial \Gamma(t)} \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \text{sn} \Gamma(t)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \\ &= \text{cn} \Gamma(t) \text{dn} \Gamma(t) \left( \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{(m-1)\Gamma(t) + \mathcal{E}(\Gamma(t)) - m \text{cd} \Gamma(t) \text{sn} \Gamma(t)}{2m(m-1)} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \right). \end{aligned}$$

— La fonction elliptique de Jacobi  $\text{cn}(\Gamma(t)|m)$

Soient les dérivés au premier ordre de la fonction  $\text{cn}(z|m)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{cn}(z|m)}{\partial z} &= -\text{sn}(u|m) \text{dn}(u|m) \\ \frac{\partial \text{cn}(z|m)}{\partial m} &= \frac{\text{dn}(z|m) \text{sn}(z|m) ((m-1)z + \mathcal{E}(z|m) - m \text{cd}(z|m) \text{sn}(z|m))}{2m(1-m)} \end{aligned}$$

nous pouvons en déduire directement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{cn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial \text{cn} \Gamma(t)}{\partial \Gamma(t)} \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \text{cn} \Gamma(t)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \\ &= -\text{sn} \Gamma(t) \text{dn} \Gamma(t) \left( \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{(m-1)\Gamma(t) + \mathcal{E}(\Gamma(t)) - m \text{cd} \Gamma(t) \text{sn} \Gamma(t)}{2m(m-1)} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \right). \end{aligned}$$

— La fonction elliptique de Jacobi  $\text{dn}(\Gamma(t)|m)$

Soient les dérivés au premier ordre de la fonction  $\text{dn}(z|m)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{dn}(z|m)}{\partial z} &= -m \text{cn}(u|m) \text{sn}(u|m) \\ \frac{\partial \text{dn}(z|m)}{\partial m} &= \frac{\text{sn}(z|m) \text{cn}(z|m) ((m-1)z + m\mathcal{E}(z|m) - m \text{dn}(z|m) \text{sc}(z|m))}{2(1-m)} \end{aligned}$$



où  $\text{sc}(z|m)$  est la fonction elliptique de Jacobi définie par

$$\text{sc } z = \frac{\text{sn } z}{\text{cn } z},$$

nous pouvons en déduire directement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{dn } \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial \text{dn } \Gamma(t)}{\partial \Gamma(t)} \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \text{dn } \Gamma(t)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \\ &= -m \text{cn } \Gamma(t) \text{sn } \Gamma(t) \left( \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m-1)\Gamma(t) + m\mathcal{E}(\Gamma(t)) - m \text{dn } \Gamma(t) \text{sc } \Gamma(t)}{2m(m-1)} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \right). \end{aligned}$$

— La fonction Epsilon de Jacobi  $\mathcal{E}(\Gamma(t)|m)$

En considérant l'égalité suivante

$$\mathcal{E}(z|m) = \text{E}[\text{am}(z|m) m],$$

nous devons dans un premier temps exprimer la dérivée de la fonction amplitude de Jacobi  $\text{am}(\Gamma(t)|m)$  par rapport à  $\mathbf{a}$ . Étant donnés les dérivés au premier ordre de la fonction  $\text{am}(z|m)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{am}(z|m)}{\partial z} &= \text{dn}(u|m) \\ \frac{\partial \text{am}(z|m)}{\partial m} &= \frac{\text{dn}(z|m) ((m-1)z + \mathcal{E}(z|m)) - m \text{cn}(z|m) \text{sn}(z|m)}{2m(1-m)} \end{aligned}$$

nous obtenons les dérivés  $\text{am}(\Gamma(t)|m)$  par rapport à  $\mathbf{a}$  en appliquant le théorème des fonctions composées

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{am } \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial \text{am } \Gamma(t)}{\partial \Gamma(t)} \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \text{am } \Gamma(t)}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \\ &= \text{dn } \Gamma(t) \left( \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{(m-1)\Gamma(t) + \mathcal{E}(\Gamma(t)) - m \text{cd } \Gamma(t) \text{sn } \Gamma(t)}{2m(m-1)} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \right). \end{aligned}$$

De plus, étant donnés les dérivés au premier ordre de l'intégrale elliptique de deuxième espèce  $\text{E}(z|m)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{E}(z|m)}{\partial z} &= \sqrt{1 - m \sin^2 z} \\ \frac{\partial \text{E}(z|m)}{\partial m} &= \frac{\text{E}(z|m) - \text{F}(z|m)}{2m}. \end{aligned}$$

Notons la simplification

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}(\Gamma(t))}{\partial \operatorname{am} \Gamma(t)} &= \frac{\partial E(\operatorname{am} \Gamma(t))}{\partial \operatorname{am} \Gamma(t)} \\ &= \sqrt{1 - m \sin^2(\operatorname{am} \Gamma(t))} \\ &= \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 \Gamma(t)} \\ &= \operatorname{dn} \Gamma(t),\end{aligned}$$

et

$$F(\operatorname{am} \Gamma(t)) = \Gamma(t),$$

nous avons finalement toutes les expressions nécessaires pour exprimer la dérivée de  $\mathcal{E}(\Gamma(t)|m)$  par rapport à  $\mathbf{a}$  par

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}(\Gamma(t))}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{\partial E(\operatorname{am} \Gamma(t))}{\partial \mathbf{a}} \\ &= \frac{\partial E(\operatorname{am} \Gamma(t))}{\partial \operatorname{am} \Gamma(t)} \frac{\partial \operatorname{am} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial E(\operatorname{am} \Gamma(t))}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \\ &= \operatorname{dn}^2 \Gamma(t) \left( \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\mathcal{E}(\Gamma(t)) - \operatorname{cd} \Gamma(t) \operatorname{sn} \Gamma(t)}{2(m-1)} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \right)\end{aligned}$$

La plupart de ces expressions se simplifient dans les deux cas d'élasticité que nous avons introduits. Nous pouvons alors donner les formes analytiques des dérivées des fonctions  $\beta_1(t)$  et  $\beta_2(t)$  ainsi que de leurs intégrales respectives  $I_1(t)$  et  $I_2(t)$  par rapport à  $\mathbf{a}$  :

— Le cas *ondulé* avec  $\lambda_4 > 0$

De par (2.58) et (2.59), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_1(t)}{\partial \mathbf{a}} &= 4 \operatorname{dn} \Gamma(t) \frac{\partial \operatorname{dn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} \\ \frac{\partial \beta_2(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \operatorname{dn} \Gamma(t) \frac{\partial \operatorname{sn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \operatorname{sn} \Gamma(t) \frac{\partial \operatorname{dn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} \\ \frac{\partial I_1(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{2}{r} \left( \left( \frac{\partial E(\Gamma(t))}{\partial \mathbf{a}} - \frac{\partial E(\varphi)}{\partial \mathbf{a}} \right) - \frac{1}{r} \left( E(\Gamma(t)) - E(\varphi) \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{a}} \right) \\ \frac{\partial I_2(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} (\operatorname{cn} \Gamma(t) - \operatorname{cn} \varphi) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{a}} - \left( \frac{\partial \operatorname{cn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} - \frac{\partial \operatorname{cn} \varphi}{\partial \mathbf{a}} \right) \right)\end{aligned}$$

— Le cas *orbital* avec  $\lambda_4 < 0$

De par (2.60) et (2.61), on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \beta_1(t)}{\partial \mathbf{a}} &= -4 \operatorname{sn} \Gamma(t) \frac{\partial \operatorname{sn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} \\
 \frac{\partial \beta_2(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \operatorname{cn} \Gamma(t) \frac{\partial \operatorname{sn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} + \operatorname{sn} \Gamma(t) \frac{\partial \operatorname{cn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} \\
 \frac{\partial I_1(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{1}{m} \left( \frac{t(1-m)}{m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} + \frac{2}{r} (\mathcal{E}(\Gamma(t)) - \mathcal{E}(\varphi)) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{a}} - \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{r} \left( \frac{\partial \mathbf{E}(\Gamma(t))}{\partial \mathbf{a}} - \frac{\partial \mathbf{E}(\varphi)}{\partial \mathbf{a}} \right) \right) \\
 \frac{\partial I_2(t)}{\partial \mathbf{a}} &= \frac{1}{rm} \left( (\operatorname{dn} \Gamma(t) - \operatorname{dn} \varphi) \left( \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial \mathbf{a}} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{a}} \right) - \left( \frac{\partial \operatorname{dn} \Gamma(t)}{\partial \mathbf{a}} - \frac{\partial \operatorname{dn} \varphi}{\partial \mathbf{a}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

---

## Bibliographie

---

- [Abramowitz 65] Milton Abramowitz, Irene A Stegun *et al.* Handbook of mathematical functions, volume 1046. Dover New York, 1965.
- [Agarwal 04] Pankaj Agarwal, Leonidas Guibas, An Nguyen, Daniel Russel & Li Zhang. *Collision detection for deforming necklaces*. Computational Geometry, vol. 28, no. 2, pages 137–163, 2004.
- [Agrachev 04] Andrei A Agrachev & Yuri Sachkov. Control theory from the geometric viewpoint, volume 2. Springer Science & Business Media, 2004.
- [Amato 98] Nancy M. Amato, O. Burchan Bayazit, Lucia K. Dale, Christopher Jones & Daniel Vallejo. *OBPRM : An Obstacle-based PRM for 3D Workspaces*. In Proceedings of the Third Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics on Robotics : The Algorithmic Perspective., WAFR '98, pages 155–168, 1998.
- [Bayazit 02] O Burhcan Bayazit, Jyh-Ming Lien & Nancy M Amato. *Probabilistic roadmap motion planning for deformable objects*. In Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA'02. IEEE International Conference on, volume 2, pages 2126–2133. IEEE, 2002.
- [Berenson 09] Dmitry Berenson, Siddhartha S Srinivasa, Dave Ferguson & James J Kuffner. *Manipulation planning on constraint manifolds*. In Robotics and Automation, 2009. ICRA'09. IEEE International Conference on, pages 625–632. IEEE, 2009.
- [Biggs 07] James Biggs, William Holderbaum & Velimir Jurdjevic. *Singularities of optimal control problems on some 6-D Lie groups*. Automatic Control, IEEE Transactions on, vol. 52, no. 6, pages 1027–1038, 2007.
- [Bohlin 00] Robert Bohlin & Lydia E Kavraki. *Path planning using lazy PRM*. In Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA'00. IEEE International Conference on, volume 1, pages 521–528. IEEE, 2000.

- [Bohlin 01] R Bohlin & Lydia E Kavraki. *A randomized algorithm for robot path planning based on lazy evaluation*. Handbook on Randomized Computing, pages 221–249, 2001.
- [Borum 15a] Andy Borum. *Optimal control problems on lie groups with symmetry breaking cost functions*. 2015.
- [Borum 15b] Andy Borum & Timothy Bretl. *The free configuration space of a kirchhoff elastic rod is path-connected*. In Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on, pages 2958–2964. IEEE, 2015.
- [Bretl 14] Timothy Bretl & Zoe McCarthy. *Quasi-static manipulation of a kirchhoff elastic rod based on a geometric analysis of equilibrium configurations*. The International Journal of Robotics Research, vol. 33, no. 1, pages 48–68, 2014.
- [Bryson 75] Arthur Earl Bryson. Applied optimal control : optimization, estimation and control. CRC Press, 1975.
- [Canny 88] John Canny. The complexity of robot motion planning. MIT press, 1988.
- [Choset 05] Howie M Choset. Principles of robot motion : theory, algorithms, and implementation. MIT press, 2005.
- [Dalibard 11] Sébastien Dalibard. *Planification de mouvement pour systèmes anthropomorphes*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2011.
- [El Khoury 13] Antonio El Khoury, Florent Lamiroux & Michel Taix. *Optimal motion planning for humanoid robots*. In Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on, pages 3136–3141. IEEE, 2013.
- [Ericson 04] Christer Ericson. Real-time collision detection. CRC Press, 2004.
- [Flavigne 10] D. Flavigne & M. Taix. *Improving motion planning in weakly connected configuration spaces*. In Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on, pages 5900–5905, Oct 2010.
- [Forest 10] Samuel Forest, Michel Amestoy, Gilles Damamme, Serge Kruch, Vincent Maurel & Matthieu Mazière. Mécanique des milieux continus. Ecole des Mines de Paris, 2010.
- [Frank 08] Barbara Frank, Markus Becker, Cyrill Stachniss, Matthias Teschner & Wolfram Burgard. *Efficient Path Planning for Mobile Robots in Environments with Deformable Objects*. In Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA), Pasadena, CA, USA, May 2008.

- [Frank 11] Barbara Frank, Cyrill Stachniss, Nichola Abdo & Wolfram Burgard. *Efficient Motion Planning for Manipulation Robots in Environments with Deformable Objects*. In Proc. of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), San Fransico, CA, USA, 2011.
- [Frank 13] Barbara Frank. *Techniques for Robot Motion Planning in Environments with Deformable Objects*. PhD thesis, Department of Computer Science, University of Freiburg, April 2013.
- [Friedman 77] Jerome H Friedman, Jon Louis Bentley & Raphael Ari Finkel. *An algorithm for finding best matches in logarithmic expected time*. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), vol. 3, no. 3, pages 209–226, 1977.
- [Gayle 05a] Russell Gayle, Ming C Lin & Dinesh Manocha. *Constraint-based motion planning of deformable robots*. In Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on, pages 1046–1053. IEEE, 2005.
- [Gayle 05b] Russell Gayle, Paul Segars, Ming C Lin & Dinesh Manocha. *Path Planning for Deformable Robots in Complex Environments*. In Robotics : science and systems, volume 2005, pages 225–232. Citeseer, 2005.
- [Gayle 10] Thomas Russell Gayle. *Physically-based sampling for motion planning*. PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, 2010.
- [Helbing 95] Dirk Helbing & Peter Molnar. *Social force model for pedestrian dynamics*. Physical review E, vol. 51, no. 5, page 4282, 1995.
- [Hsu 98] David Hsu, Lydia E. Kavraki, Jean-Claude Latombe, Rajeev Motwani & Stephen Sorkin. *On Finding Narrow Passages with Probabilistic Roadmap Planners*. In Proceedings of the Third Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics on Robotics : The Algorithmic Perspective., WAFR '98, pages 141–153. A. K. Peters, Ltd., 1998.
- [Hudson 97] Thomas C Hudson, Ming C Lin, Jonathan Cohen, Stefan Gottschalk & Dinesh Manocha. *V-COLLIDE : accelerated collision detection for VRML*. In Proceedings of the second symposium on Virtual reality modeling language, pages 117–ff. ACM, 1997.
- [Jolliffe 02] I.T. Jolliffe. *Principal component analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, 2002.
- [Kabul 07] Ilknur Kabul, Russell Gayle & Ming C Lin. *Cable route planning in complex environments using constrained sampling*. In Proceedings of the 2007 ACM symposium on Solid and physical modeling, pages 395–402. ACM, 2007.

- [Kamon 97] Ishay Kamon & Ehud Rivlin. *Sensory-based motion planning with global proofs*. Robotics and Automation, IEEE Transactions on, vol. 13, no. 6, pages 814–822, 1997.
- [Kamon 99] Ishay Kamon, Elon Rivlin & Ehud Rivlin. *Range-sensor based navigation in three dimensions*. In Robotics and Automation, 1999. Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on, volume 1, pages 163–169. IEEE, 1999.
- [Karaman 11] Sertac Karaman & Emilio Frazzoli. *Sampling-based algorithms for optimal motion planning*. The International Journal of Robotics Research, vol. 30, no. 7, pages 846–894, 2011.
- [Kavraki 96] Lydia E Kavraki, Petr Švestka, Jean-Claude Latombe & Mark H Overmars. *Probabilistic roadmaps for path planning in high-dimensional configuration spaces*. Robotics and Automation, IEEE Transactions on, vol. 12, no. 4, pages 566–580, 1996.
- [Khalil 04] Wisama Khalil & Etienne Dombre. Modeling, identification and control of robots. Butterworth-Heinemann, 2004.
- [Khalil 07] W. Khalil, G. Gallot & F. Boyer. *Dynamic Modeling and Simulation of a 3-D Serial Eel-Like Robot*. Systems, Man, and Cybernetics, Part C : Applications and Reviews, IEEE Transactions on, vol. 37, no. 6, pages 1259–1268, Nov 2007.
- [Khatib 80] Oussama Khatib. *Commande dynamique dans l'espace opérationnel des robots manipulateurs en présence d'obstacles*. PhD thesis, Sup'Aéro, Toulouse, 1980.
- [Khatib 86] Oussama Khatib. *Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots*. The International Journal of Robotics Research, vol. 5, no. 1, pages 90–98, 1986.
- [Kuffner 00] James J Kuffner & Steven M LaValle. *RRT-connect : An efficient approach to single-query path planning*. In Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA'00. IEEE International Conference on, volume 2, pages 995–1001. IEEE, 2000.
- [Lamiroux 01] F. Lamiroux & L.E. Kavraki. *Planning paths for elastic objects under manipulation constraints*. The International Journal of Robotics Research, vol. 20, no. 3, pages 188–208, 2001.
- [Langer 84] Joel Langer, David A Singer *et al.* *The total squared curvature of closed curves*. Journal of Differential Geometry, vol. 20, no. 1, pages 1–22, 1984.
- [Langer 96] Joel Langer & David A Singer. *Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod*. SIAM review, vol. 38, no. 4, pages 605–618, 1996.
- [Larsen 00] Eric Larsen, Stefan Gottschalk, Ming C Lin & Dinesh Manocha. *Fast distance queries with rectangular swept sphere volumes*. In

- Robotics and Automation, 2000. Proceedings of the IEEE International Conference on. ICRA'00., volume 4, pages 3719–3726. IEEE, 2000.
- [Latombe 91] Jean-Claude Latombe. Robot motion planning, volume 124. Springer Science & Business Media, 1991.
- [LaValle 98] Steven M LaValle. *Rapidly-Exploring Random Trees : A New Tool for Path Planning*. 1998.
- [LaValle 00] Steven M LaValle & James J Kuffner Jr. *Rapidly-exploring random trees : Progress and prospects*. 2000.
- [LaValle 01] Steven M LaValle & James J Kuffner. *Randomized kinodynamic planning*. The International Journal of Robotics Research, vol. 20, no. 5, pages 378–400, 2001.
- [LaValle 06] Steven M LaValle. Planning algorithms. Cambridge university press, 2006.
- [Leven 03] P. Leven & S. Hutchinson. *Using Manipulability to Bias Sampling During the Construction of Probabilistic Roadmaps*. IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 19, no. 6, pages 1020–1026, December 2003.
- [Levien 08] Raph Levien. *The elastica : a mathematical history*. 2008.
- [Liberzon 12] Daniel Liberzon. Calculus of variations and optimal control theory : a concise introduction. Princeton University Press, 2012.
- [Lozano-Perez 83] Tomas Lozano-Perez. *Spatial planning : A configuration space approach*. Computers, IEEE Transactions on, vol. 100, no. 2, pages 108–120, 1983.
- [Lumelsky 87] Vladimir J Lumelsky & Alexander A Stepanov. *Path-planning strategies for a point mobile automaton moving amidst unknown obstacles of arbitrary shape*. Algorithmica, vol. 2, no. 1-4, pages 403–430, 1987.
- [Mahoney 10] Arthur Mahoney, Joshua Bross & David Johnson. *Deformable robot motion planning in a reduced-dimension configuration space*. In Robotics and Automation (ICRA), 2010 IEEE International Conference on, pages 5133–5138. IEEE, 2010.
- [Marsden 13] Jerrold E Marsden & Tudor Ratiu. Introduction to mechanics and symmetry : a basic exposition of classical mechanical systems, volume 17. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Merlhiot 12] Xavier Merlhiot, Jérémie Le Garrec, Guillaume Saupin & Claude Andriot. *The XDE Mechanical Kernel : Efficient and Robust Simulation of Multibody Dynamics with Intermittent Nonsmooth Contacts*. In Proceedings of the Second Joint International Conference on Multibody System Dynamics - IMSD 2012, 2012.



- [Mirtich 98] Brian Mirtich. *V-Clip : Fast and robust polyhedral collision detection*. ACM Transactions On Graphics (TOG), vol. 17, no. 3, pages 177–208, 1998.
- [Moll 06] Mark Moll & Lydia E Kavraki. *Path planning for deformable linear objects*. Robotics, IEEE Transactions on, vol. 22, no. 4, pages 625–636, 2006.
- [Mukadam 14] Mustafa Mukadam, Andy Borum & Timothy Bretl. *Quasi-static manipulation of a planar elastic rod using multiple robotic grippers*. In Intelligent Robots and Systems (IROS 2014), 2014 IEEE/RSJ International Conference on, pages 55–60. IEEE, 2014.
- [Murray 94] Richard M Murray, Zexiang Li & S Shankara Sastry. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC press, 1994.
- [Nocedal 06] Jorge Nocedal & Stephen Wright. *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [Orthey 15] Andreas Orthey, Olivier Roussel, Olivier Stasse & Michel Taix. *Irreducible Motion Planning by Exploiting Linear Linkage Structures*. In Transactions on Robotics (T-RO), (under review). IEEE, 2015.
- [Pan 12] Jia Pan, Sachin Chitta & Dinesh Manocha. *FCL : A general purpose library for collision and proximity queries*. In Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on, pages 3859–3866. IEEE, 2012.
- [Park 95] Frank C Park. *Distance metrics on the rigid-body motions with applications to mechanism design*. Journal of Mechanical Design, vol. 117, no. 1, pages 48–54, 1995.
- [Perez 12] A. Perez, R. Platt, G. Konidaris, L. Kaelbling & T. Lozano-Perez. *LQR-RRT\* : Optimal sampling-based motion planning with automatically derived extension heuristics*. In Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on, pages 2537–2542, May 2012.
- [Pontryagin 87] Lev Semenovich Pontryagin. *Mathematical theory of optimal processes*. CRC Press, 1987.
- [Redon 05] Stephane Redon & Ming C Lin. *Practical local planning in the contact space*. In Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on, pages 4200–4205. IEEE, 2005.
- [Reif 79] John H Reif. *Complexity of the mover’s problem and generalizations*. In Proceedings of the 20th Annual IEEE Conference on Foundations of Computer Science, pages 421–427, 1979.

- [Renaud 06] M. Renaud. *Calcul des modèles géométriques inverses des robots manipulateurs 6R*. Rapport technique 06332, LAAS-CNRS, 2006.
- [Renaud 14] Marc Renaud. *Les intégrales et fonctions elliptiques*. Rapport technique 14264, LAAS-CNRS, 2014.
- [Renaud 15] Marc Renaud. *Étude des groupes et algèbre de Lie. Théorème de réduction de Lie-Poisson. Application au groupe spécial euclidien  $SE(3)$  et à son algèbre  $se(3)$* . Rapport technique (à paraître), LAAS-CNRS, 2015.
- [Rimon 92] Elon Rimon & Daniel E Koditschek. *Exact robot navigation using artificial potential functions*. Robotics and Automation, IEEE Transactions on, vol. 8, no. 5, pages 501–518, 1992.
- [Robinson 99] G. Robinson & J.B.C. Davies. *Continuum robots - a state of the art*. In Robotics and Automation, 1999. Proceedings. 1999 IEEE International Conference on, volume 4, pages 2849–2854 vol.4, 1999.
- [Rodriguez 06] Samuel Rodriguez, Jyh-Ming Lien & Nancy M Amato. *Planning motion in completely deformable environments*. In Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on, pages 2466–2471. IEEE, 2006.
- [Roussel 14] Olivier Roussel, Michel Taïx & Timothy Bretl. *Efficient motion planning for quasi-static elastic rods using geometry neighborhood approximation*. In Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 2014 IEEE/ASME International Conference on, pages 1024–1029. IEEE, 2014.
- [Roussel 15a] Olivier Roussel, Andy Borum, Michel Taïx & Timothy Bretl. *Manipulation planning with contacts for an extensible elastic rod by sampling on the submanifold of static equilibrium configurations*. In Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on, pages 3116–3121, May 2015.
- [Roussel 15b] Olivier Roussel, Marc Renaud & Michel Taïx. *Inverse geometry for Kirchhoff elastic rods*. In IMA Conference on Mathematics of Robotics, September 2015.
- [Roussel 15c] Olivier Roussel, Michel Taïx, Benoit Michel & Etienne Ferré. *Calcul automatique de trajectoires pour l'assemblage d'objets déformables*. In 14ème Colloque national AIP-Primeca, 2015.
- [Roweis 00] Sam T Roweis & Lawrence K Saul. *Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding*. Science, vol. 290, no. 5500, pages 2323–2326, 2000.
- [Saha 05] Mitul Saha, Jean-Claude Latombe, Yu-Chi Chang & Friedrich Prinz. *Finding Narrow Passages with Probabilistic Roadmaps* :

- The Small-Step Retraction Method*. Autonomous Robots, vol. 19, no. 3, pages 301–319, 2005.
- [Saha 07] Mitul Saha & Pekka Isto. *Manipulation planning for deformable linear objects*. Robotics, IEEE Transactions on, vol. 23, no. 6, pages 1141–1150, 2007.
- [Salençon 05a] Jean Salençon. *Mécanique des milieux continus : Concepts généraux*, volume 1. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [Salençon 05b] Jean Salençon. *Mécanique des milieux continus : Milieux curvilignes*, volume 3. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [Saupin 13] Guillaume Saupin, Olivier Roussel & Jeremie Le Garrec. *Robust and Scalable Navmesh Generation with multiple levels and stairs support*. In International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization (WSCG), 2013.
- [Schwarzer 05] Fabian Schwarzer, Mitul Saha & Jean-Claude Latombe. *Adaptive dynamic collision checking for single and multiple articulated robots in complex environments*. Robotics, IEEE Transactions on, vol. 21, no. 3, pages 338–353, 2005.
- [Simo 85] JC Simo. *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I*. Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 49, no. 1, pages 55–70, 1985.
- [Singer 08] David A Singer, Oscar J Garay, Eduardo Garcia-Rio & Ramon Vazquez-Lorenzo. *Lectures on elastic curves and rods*. In AIP Conference Proceedings, volume 1002, page 3. Citeseer, 2008.
- [Soueres 98] P Soueres & J-D Boissonnat. *Optimal trajectories for nonholonomic mobile robots*. In Robot motion planning and control, pages 93–170. Springer, 1998.
- [Sucan 12] Ioan Sucan, Maciej Moll, Lydia E Kavrakiet al. *The open motion planning library*. Robotics & Automation Magazine, IEEE, vol. 19, no. 4, pages 72–82, 2012.
- [Sun 05] Zheng Sun, D. Hsu, Tingting Jiang, H. Kurniawati & J.H. Reif. *Narrow passage sampling for probabilistic roadmap planning*. Robotics, IEEE Transactions on, vol. 21, no. 6, pages 1105–1115, Dec 2005.
- [Tenenbaum 00] Joshua B Tenenbaum, Vin De Silva & John C Langford. *A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction*. Science, vol. 290, no. 5500, pages 2319–2323, 2000.
- [Yershova 05] A. Yershova, L. Jaillet, T. Simeon & S.M. LaValle. *Dynamic-Domain RRTs : Efficient Exploration by Controlling the Sampling Domain*. In Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on, pages 3856–3861, April 2005.

- [Yershova 09] Anna Yershova, Swati Jain, Steven M Lavelle & Julie C Mitchell. *Generating uniform incremental grids on  $SO(3)$  using the Hopf fibration*. The International journal of robotics research, 2009.
- [Zhang 08] Liangjun Zhang & D. Manocha. *An efficient retraction-based RRT planner*. In Robotics and Automation, 2008. ICRA 2008. IEEE International Conference on, pages 3743–3750, May 2008.
- [Zucker 07] Matt Zucker, James Kuffner & Michael Branicky. *Multipartite RRTs for rapid replanning in dynamic environments*. In Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on, pages 1603–1609. IEEE, 2007.