



**HAL**  
open science

# Géolocalisation d'émetteurs en une étape : Algorithmes et performances

Cyrile Delestre

► **To cite this version:**

Cyrile Delestre. Géolocalisation d'émetteurs en une étape : Algorithmes et performances. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris Saclay (COmUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLN006 . tel-01280408

**HAL Id: tel-01280408**

**<https://theses.hal.science/tel-01280408v1>**

Submitted on 29 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## ENS Cachan

ÉCOLE DOCTORALE n°580 : STIC - Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

Laboratoire SATIE, ENS Cachan

**DISCIPLINE : Traitement du signal et des images**

### THÈSE DE DOCTORAT

Soutenue le 26/01/2016

par

**Cyrile DELESTRE**

### GÉOLOCALISATION D'ÉMETTEURS EN UNE ÉTAPE : ALGORITHMES ET PERFORMANCES

**Composition du jury :**

<i>Présidente du jury :</i>	Sylvie MARCOS	Directrice de recherche (L2S, CNRS)
<i>Rapporteurs :</i>	Pascal CHEVALIER Jérôme MARS	Professeur (CNAM) Professeur des universités (INP Grenoble)
<i>Examineurs :</i>	André FERRARI	Professeur des universités (Université de Nice Sophia Antipolis)
<i>Directeur de thèse :</i>	Pascal LARZABAL	Professeur des universités (Université Paris-Sud 11)
<i>Encadrante :</i>	Anne FERREOL	Ingénieur en traitement du signal (THALES Communication and Security)



## Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mes deux encadrants : Pascal Larzabal et Anne Ferréol pour m'avoir guidé et soutenu durant ces 3 années de thèse. A leur contact j'ai pu apprendre beaucoup de choses et ceci a été très enrichissant pour moi, autant d'un point de vue professionnel, que personnel. Je tiens à saluer Anne pour sa disponibilité qui pourrait rendre jaloux un bon nombre de doctorants, ainsi que la sagesse dont elle fait preuve dans le domaine du traitement d'antenne. Je remercie également Pascal, car contrairement à ce qu'il semble penser, je l'ai trouvé très disponible, à l'écoute et d'un soutien moral sans faille. Finalement, il se dit que la qualité d'une thèse dépend pour beaucoup de la qualité de l'encadrement et je pense ne pas contredire cette idée reçue aujourd'hui.

Je tiens également à remercier M. Emmanuel De Gramont, chef du laboratoire SBP pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et de THALES Communications & Security.

Je remercie Messieurs Pascal Chevalier et Jérôme Mars pour avoir rapporté sur ce manuscrit ainsi que l'attention apportée à mes travaux. Je remercie également M. André Ferrari et Mme. Sylvie Marcos d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

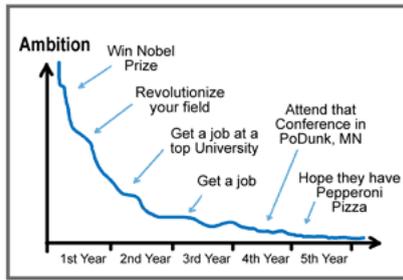
Je remercie également tout le laboratoire SATIE et plus particulièrement l'équipe MOSS pour leur sympathie et bonne humeur. Je pense tout particulièrement aux doctorants que j'ai pu croiser tout au long de ma thèse : Maxime Boizard, Arnaud Breloy, Gayathri Masi et Virginie Ollier ainsi que les permanents Jean-Pierre Barbot et Eric Vourch qui par leur bonne humeur animent le couloir au quotidien.

Je tiens également à remercier toutes les personnes que j'ai pu côtoyer à THALES pour leur accueil chaleureux. Je tiens particulièrement à saluer le jeune papa Alban Denicourt, ainsi que Pierre Thaly.

Et puis sans oublier les nombreuses personnes que j'ai pu régulièrement rencontrer ces dernières années, que ce soit durant mes nombreux déplacements ou dans d'autres circonstances. Ainsi j'ai une pensée affectueuse envers : Alexandre Renaux, Nabil El Korso, Rémi Boyer, Guillaume Ginolhac, Frédéric Pascal, Eric Chaumette et tant d'autres...

Finalement mes dernières pensées vont à ma moitié Alice Combernoux et à ma famille qui m'ont soutenu durant ces 3 années et même au-delà. Du fond du cœur, "Merci !"





JORGE CHAN © 2008

WWW.PHDCOMICS.COM



# Contents

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation du signal multi-station et hypothèses</b>	<b>7</b>
1.1 Aperçu du système	7
1.2 Modélisation des observations locales et globales	7
1.2.1 Hypothèses des signaux incidents	9
1.2.1.1 Hypothèse front d'onde plan/front d'onde courbe	9
1.2.1.2 Hypothèse bande étroite/large bande	11
1.2.2 Hypothèses statistiques du modèle des observations	14
1.2.2.1 Matrice de covariance du signal reçu sur la l-ième base	15
1.3 Formulation du problème	15
<b>2 État de l'art</b>	<b>17</b>
2.1 Estimation paramétrique en traitement d'antenne	17
2.1.1 Généralités sur l'estimation paramétrique	17
2.1.2 Estimation du paramètre AoA : goniométrie	18
2.1.2.1 Méthodes conventionnelles basées sur le filtrage spatial	19
2.1.2.2 Méthodes bande étroite	20
2.1.3 Estimation des paramètres ToA et TDoA	24
2.1.3.1 Méthode conventionnelle	24
2.1.3.2 Méthodes de type haute-résolution	25
2.2 Géolocalisation à partir d'un système multi-station	27
2.2.1 Méthodes conventionnelles en deux étapes	27
2.2.1.1 Triangulation (AoA/AoA)	28
2.2.1.2 Méthodes par temps d'arrivée (TDoA/TDoA)	31
2.2.1.3 Méthodes hybrides (AoA/TDoA)	32
2.2.1.4 Limitations des approches en 2 étapes conventionnelles	34
2.2.2 Méthodes HR en une étape	34
2.2.2.1 Approche par décomposition par banc de filtres : DPD	35
2.2.2.2 Approche spatiotemporelle	38
2.3 Conclusions	41
<b>3 Erreur de modélisation BE des méthodes en 1 étape de type HR : calcul du biais</b>	<b>43</b>
3.1 Analyse qualitative de l'effet large bande sur deux capteurs éloignés	43
3.2 Contexte de l'étude	45
3.3 Le biais sur l'antenne globale	46
3.3.1 Erreur de modèle LB sur l'antenne globale	46
3.3.2 Calcul du biais sur l'estimation de la position des méthodes en 1 étape	48

3.3.2.1	Minimisation sur les atténuations complexes et positions . . . . .	48
3.3.2.2	Atténuations complexes inconnues : GMA . . . . .	49
3.4	Décomposition du signal par banc de filtres : DPD . . . . .	50
3.4.1	Erreur de modélisation des matrices de covariance en sortie du banc de filtres . . . . .	51
3.4.2	Expression du biais de position dans le cadre du DPD . . . . .	52
3.5	Approche spatiotemporelle : LOST . . . . .	53
3.5.1	Erreur de modèle dans le cadre de l'algorithme LOST . . . . .	53
3.5.2	Expression du biais de position dans le cadre de l'algorithme LOST . . . . .	54
3.6	Simulations . . . . .	55
3.7	Conclusions . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Amélioration des algorithmes existants en 1 étape</b>	<b>59</b>
4.1	Une approche spatiotemporelle complète : LOST-FIND . . . . .	59
4.1.1	Estimateur exploitant la structure spatiale et temporelle du signal . . . . .	59
4.1.1.1	Étape d'estimation des fréquences des sources à partir des positions . . . . .	60
4.1.1.2	Étape d'estimation des positions à partir des fréquences des sources . . . . .	60
4.1.1.3	Algorithme LOST-FIND . . . . .	61
4.1.2	Analyse du biais dû à l'effet large bande résiduel après décomposition de LOST-FIND . . . . .	62
4.1.3	Avantage de la diversité fréquentielle dans le modèle spatiotemporel . . . . .	63
4.1.4	Comparaisons avec les autres méthodes en 1 étape . . . . .	65
4.1.5	Conclusion sur LOST-FIND . . . . .	68
4.2	Les RMT en grandes dimensions au secours des méthodes de géolocalisation HR en 1 étape . . . . .	69
4.2.1	Introduction aux RMT . . . . .	69
4.2.1.1	Analyse du comportement spectral de la matrice de covariance . . . . .	71
4.2.1.2	Convergence des formes quadratiques . . . . .	77
4.2.2	Lien comportemental du projecteur des méthodes en 1 étape . . . . .	79
4.2.2.1	Méthode à banc de filtres : DPD . . . . .	79
4.2.2.2	Méthode spatiotemporelle : LOST et LOST-FIND . . . . .	79
4.2.3	Simulations . . . . .	80
4.2.4	Conclusions . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Approche en 1 étape s'adaptant à la structure large bande : TARGET</b>	<b>85</b>
5.1	Contexte . . . . .	85
5.2	Analyse algébrique de la matrice de synchronisation . . . . .	86
5.2.1	Identifiabilité de l'observation . . . . .	88
5.3	Vers un nouvel estimateur du TDoA . . . . .	88
5.3.1	Analyse de l'estimateur du TDoA TARGET . . . . .	90
5.4	Estimateur à haute résolution AoA/TDoA conjoint . . . . .	91
5.5	Algorithme TARGET . . . . .	93
5.6	Estimation de la puissance du bruit . . . . .	94
5.7	Étude comparative de l'estimateur TDoA TARGET avec l'estimateur du TDoA classique . . . . .	95
5.8	Comparaison avec les méthodes en 2 étapes et 1 étape . . . . .	99
5.9	Conclusions . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Considérations opérationnelles</b>	<b>105</b>
6.1	Transmission compressée des signaux entre les bases . . . . .	105
6.1.1	Principe de la compression des données pour une transmission inter-base pour les méthodes en 1 étape . . . . .	106
6.1.1.1	Transmission des signaux entre 1 base et l'opérateur . . . . .	106

6.1.1.2	Cas des algorithmes en 1 étape effectuant une décomposition en sous-bande . . .	107
6.1.1.3	Cas de l’algorithme TARGET . . . . .	109
6.2	Analyse du comportement de l’antenne globale et des ambiguïtés large bande d’ordre 1 des algorithmes . . . . .	110
6.2.1	Diagramme de rayonnement de l’antenne globale . . . . .	111
6.2.2	Diagramme d’ambiguïté large bande d’ordre 1 de l’antenne globale avec atténuations complexes connues et égales entre les stations . . . . .	112
6.2.3	Diagramme d’ambiguïté large bande d’ordre 1 de l’antenne globale avec atténuations complexes inconnues et inégales entre les stations . . . . .	115
6.2.4	Conclusions sur les diagrammes d’ambiguïté large bande d’ordre 1 . . . . .	118
6.3	Simulations sur des scénarii opérationnels . . . . .	118
6.3.1	Contexte de stations composées de 1 ou 2 antennes . . . . .	119
6.3.1.1	Cas mono-source . . . . .	119
6.3.1.2	Cas bi-sources . . . . .	120
6.3.1.3	Conclusions du contexte de bases de la Fig.6.9 . . . . .	122
6.3.2	Contexte de stations composées de 1 antenne avec une station maîtresse . . . . .	123
6.3.2.1	Cas mono-source . . . . .	123
6.3.2.2	Cas bi-sources . . . . .	126
6.3.2.3	Conclusions du second scénario de bases . . . . .	127
6.3.3	Conclusions sur ces deux exemples de configuration de bases . . . . .	127
6.4	Étude des algorithmes développés sur des signaux réels . . . . .	127
6.4.1	Premier contexte bases/source . . . . .	128
6.4.2	Deuxième contexte bases/source . . . . .	129
6.4.3	Conclusions sur l’application des algorithmes sur les mesures réelles . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>135</b>
7.1	Conclusions . . . . .	135
7.2	Perspectives . . . . .	136
	<b>Les notations</b>	<b>139</b>
<b>8</b>	<b>Annexes</b>	<b>143</b>
8.1	Quotient de Rayleigh . . . . .	143
8.2	Le biais sur la position des sources estimée . . . . .	143
8.3	Approximation du biais sur la position des sources estimée pour une erreur de modèle faible . . . . .	144
8.4	Perturbation sur le projecteur . . . . .	145
8.5	Gradient et Hessienne de la valeur propre d’une forme quadratique . . . . .	145
8.5.1	Gradient du critère . . . . .	145
8.5.2	Hessien du critère . . . . .	146
8.6	Détermination de la matrice de covariance en sortie du $k$ -ième canal par décomposition en banc de filtres . . . . .	146
8.7	Rang de la matrice de covariance du DPD . . . . .	148
8.8	Rang de la matrice de covariance de l’observation spatiotemporelle . . . . .	149
8.9	Centre de phase de l’antenne globale . . . . .	150
	<b>Table des figures</b>	<b>156</b>



# Introduction

## Préambule

Ce sujet de thèse, proposé par THALES Communications and Security, s'inscrit dans une collaboration avec le laboratoire SATIE (Systèmes et Applications des Technologies de l'Information et de l'Énergie) UMR CNRS et THALES. Elle est cofinancée par THALES et l'ANRT.

## Motivation et cadre de l'étude

Le cadre applicatif de cette étude est la géolocalisation de sources à partir d'un système composé de plusieurs stations éloignées et sans *a priori* sur les signaux émis (Fig.1). Les émetteurs sont par exemple un téléphone mobile ou toute autre source émettant des ondes électromagnétiques, sonores, *etc.* non coopérative. *A contrario*, dans un système de type GPS ou GALILEO un mobile se localise à partir de plusieurs satellites dont les signaux sont parfaitement connus et maîtrisés. Ceci peut permettre par exemple à des secours de localiser une personne enfouie sous la neige à la suite d'une avalanche en montagne où un dispositif de stations d'antenne mobiles serait déployé et pourrait permettre un secours rapide quand le temps est un facteur clef.

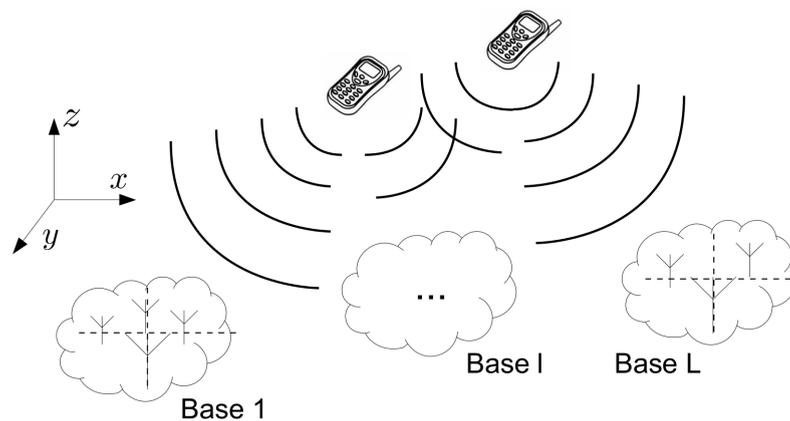


Figure 1: Contexte d'une réception de 2 sources avec  $L$  stations éloignées

Tout un pan du domaine du traitement du signal est consacré à l'estimation de paramètres d'intérêts issus d'un modèle. Les paramètres que l'on cherche à estimer ne sont pas "mesurables" directement à partir d'une observation. Il est alors très souvent considéré que le modèle des observations est stochastique et supposé stationnaire. Alors une approche classique pour "mesurer" ces paramètres est de créer une statistique à partir des observations. Puis de cette statistique, on cherche à extraire les paramètres cachés du modèle. Cette opération s'appelle estimation paramétrique.

Les méthodes de géolocalisation conventionnelles dites en 2 étapes sont les héritières directes de l'estimation de paramètres d'intérêt sur un réseau d'antennes (appelé station d'antennes). Dans une première étape, elles consistent à estimer localement les paramètres d'un modèle sur une station (l'angle d'arrivée, les fréquences, le temps d'arrivée, *etc.*), puis à fusionner vers une Unité Centrale (UC) ces informations. De cette UC, un opérateur estime le paramètre d'intérêt qui est la position de la source *a posteriori* à partir des paramètres intermédiaires de toutes les stations. Une seule station d'antennes ne suffit pas à localiser dans l'espace une source, c'est pour cela que l'opérateur a besoin de paramètres intermédiaires issus de plusieurs stations. En prenant par exemple la triangulation pour géolocaliser les sources (méthode très utilisée dans le domaine), la procédure est la suivante [PNMG08] :

- 1 Estimation des paramètres intermédiaires locaux sur chacune des stations, par exemple les angles d'arrivée dans le cadre de la triangulation. Puis fusion de ces paramètres vers l'UC, c.-à-d. envoi des angles d'arrivée estimés sur chacune des stations à l'UC ;
- 2 De la fusion des paramètres intermédiaires, l'opérateur estime la position des sources dans l'espace. Dans une triangulation les positions sont estimées seulement grâce aux directions d'arrivée des sources.

La Fig.2 illustre une géolocalisation de sources en 2 étapes où deux étapes d'estimation sont effectuées de façon clairement séparée. La première localement sur chacune des antennes afin de déterminer les paramètres intermédiaires et la seconde sur le paramètre d'intérêt (les positions des sources) grâce à la centralisation de l'ensemble des paramètres intermédiaires provenant de toutes les bases. La transmissions des paramètres intermédiaires vers l'UC se fait généralement par lien radio, de même il est possible que l'UC soit située au niveau d'une station économisant ainsi la transmission d'information d'une base.

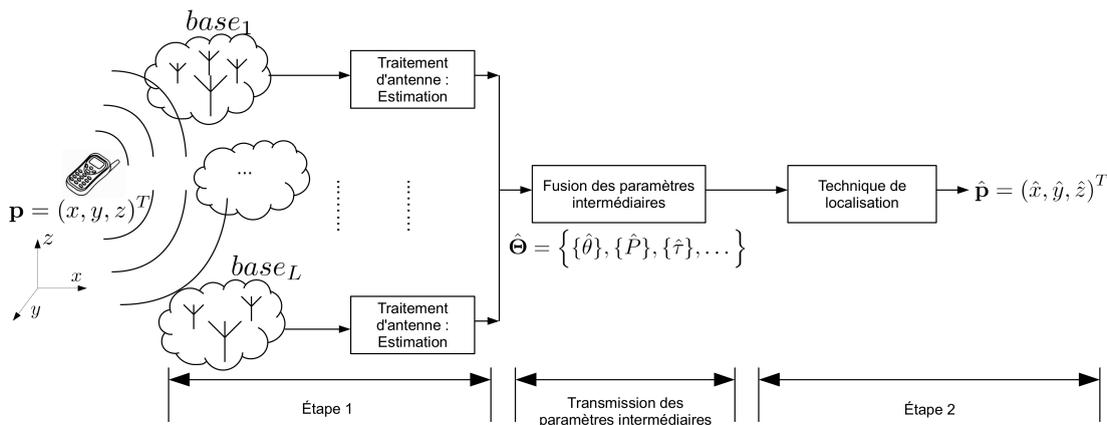


Figure 2: Diagramme du processus d'estimation de position de sources en 2 étapes.

Ces méthodes en 2 étapes sont sous-optimales dans ce contexte [ON10]. En effet, soit ces méthodes n'exploitent pas toutes les informations du système, ce qui est par exemple le cas de la triangulation qui consiste à estimer la position des sources seulement à l'aide des angles d'arrivée de chacune des sources sur chaque station d'antenne (qui est la méthode la plus répandue), soit, elles exploitent toutes les informations, mais ne les utilisent pas conjointement, ce qui est le cas par exemple de l'estimation des positions où l'opérateur exploite les paramètres intermédiaires du type angles d'arrivée et temps différentiel d'arrivée. La qualité de l'estimateur pour localiser les sources de la deuxième étape sera bridée par les performances du plus mauvais estimateur de la première étape (qui est souvent dans cet exemple l'estimation du TDoA). Et pourtant ce sont les méthodes de loin les plus répandues dans ce domaine, aussi bien d'un point de vue académique qu'industriel.

Dans ce mémoire, nous allons développer une deuxième stratégie de géolocalisation dite en une étape. Cette stratégie a été initiée dans les années 80 [Wei81], [WK85b]. Le principal frein de ces méthodes est d'ordre

technique, mais la technique évoluant, elles sont tout à fait envisageables aujourd’hui de manière pratique. Ces stratégies visent à considérer l’antenne globale composée de toutes les stations d’antennes du système. On envoie alors la concaténation de tous les signaux issus de l’antenne globale à l’opérateur, il sera alors fait un traitement d’antenne qui permettra d’estimer directement la position des sources. Ces stratégies sont optimales, car elles exploitent de manière conjointe toutes les informations du système grâce à l’antenne globale. Sur le diagramme de la Fig.3, on peut observer la procédure 1-étape.

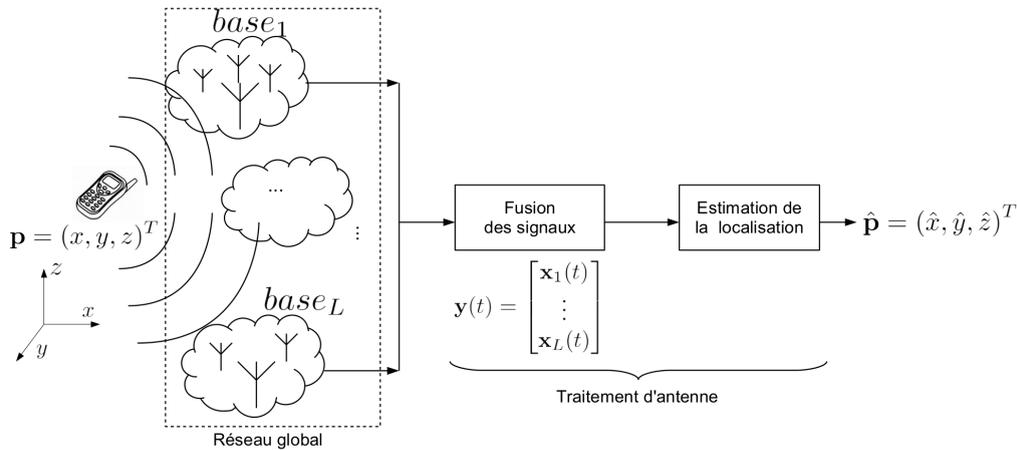


Figure 3: Diagramme du processus d’estimation de position de sources en 1 étape.

Nous appelons ces méthodes, les méthodes en 1 étape. Car, *a contrario* des méthodes 2-étapes, elles estiment directement les paramètres d’intérêt, sans passer par l’estimation de paramètres intermédiaires.

L’inconvénient de traiter l’antenne globale est que les signaux deviennent alors large bande vis-à-vis de celle-ci. Avant cette étude, les méthodes les plus performantes : DPD [Wei04], [AW04] et LOST [BFL11], [BFL13], consistent à effectuer une décomposition de l’observation en signaux bande étroite, afin de lutter contre l’effet large bande. Il est à noter l’importance de cette notion de lutte, car ces algorithmes décomposent le signal afin d’appliquer des algorithmes à haute résolution dont l’approximation bande étroite est nécessaire pour l’estimation des positions des sources. L’étude s’axera sur l’analyse des performances théoriques des approches en 1 étape de référence, notamment dans la limite de leurs approches par décomposition qui engendre des erreurs de modèle quand celle-ci n’est pas parfaite. Et il est à noter qu’en pratique la décomposition ne sera jamais parfaite. DPD et LOST n’utilisent pas le même type de décomposition. DPD exploite la décomposition grâce à un banc de filtres. LOST quant à lui exploite la structure d’un modèle de composantes additives bande étroite. Nous verrons que ce modèle est sous-optimal en le sens que le TDoA n’est pas exploité. Nous développerons durant cette étude un nouvel algorithme visant à exploiter pleinement l’approche spatiotemporelle.

Dans cette optique un des buts de cette thèse sera de proposer une alternative à LOST avec une approche également spatiotemporelle qui exploite toute la structure du signal (contrairement à LOST), notamment grâce à la prise en compte des TDoA. Nous tenterons également d’améliorer les performances des méthodes en 1 étape grâce à la théorie des grandes matrices aléatoires qu’on montrera être particulièrement bien adaptée à notre application. Un nouvel algorithme sera aussi développé proposant d’exploiter le large bande pour l’estimation des positions, se débarrassant ainsi des contraintes liées à la décomposition en bande étroite des méthodes existantes. Enfin nous étudierons ces algorithmes dans des contextes opérationnels complexes.

## Organisation du mémoire

Le mémoire est divisé en 7 chapitres distincts. Le chapitre un est un chapitre introductif qui permet de mettre en place et en équations le système opérationnel qui sera utilisé durant tout le mémoire et permet également d'aborder les problèmes que cache ce système de géolocalisation.

Le chapitre deux propose un état de l'art qui est découpé en 3 parties. La première permettant d'introduire brièvement des notions d'estimation paramétrique telles que l'angle d'arrivée, le temps différentiel d'arrivée, *etc.* Puis dans une deuxième partie nous allons aborder la localisation, sans *a priori* sur les signaux, à l'aide des paramètres estimés ce qui nous permettra d'introduire les méthodes d'estimation de localisation de source usuelles en 2 étapes. Puis la dernière partie présentera un état de l'art des méthodes qui nous intéressent plus directement, à savoir les méthodes de géolocalisation en 1 étape.

Le chapitre trois traite d'un biais apparaissant sur les estimées des positions dû à une décomposition des observations sur l'antenne globale en observations partiellement cohérentes entre les stations d'antennes composant le système. Ce chapitre est l'occasion d'aborder plus en détails ce que l'on nommera l'effet large bande résiduel et l'impact de ce dernier sur les positions estimées.

Le chapitre quatre propose des améliorations des algorithmes déjà existant. En premier lieu on proposera une alternative à l'algorithme LOST, algorithme basé sur des observations spatiotemporelles. En effet ce dernier n'exploite pas toute la structure algébrique des observations spatiotemporelles. Cette alternative que nous nommons LOST-FIND est un algorithme à relaxation qui ne concentre pas la structure spatiotemporelle permettant l'exploitation des diversités spatiale et temporelle du système. Enfin dans la deuxième partie nous montrons que la théorie des grandes matrices aléatoires trouve ici un domaine d'application particulier. En outre, on montre dans cette partie un gain notable sur le pouvoir de résolution des méthodes en 1 étape à l'aide d'un résultat connu dans ce milieu, l'estimateur G-MUSIC.

Le chapitre cinq aborde l'élaboration d'un nouvel algorithme que l'on nomme TARGET. Cet algorithme s'appuie sur un principe sensiblement différent des méthodes en 1 étape pour le moment abordées. Jusqu'à présent ces méthodes traitaient soit des signaux non cohérents entre chaque base composant l'antenne globale, soit les rendaient cohérent à l'aide d'une décomposition en bande étroite des observations. Dans ce chapitre nous développons un algorithme large bande se basant sur les propriétés algébriques d'une matrice de synchronisation. Il en résultera un estimateur conjoint (ou direct) des angles d'arrivée et temps différentiels d'arrivée des sources à haute résolution. On montre alors que l'avantage principal de TARGET est de ne pas avoir de biais.

Le chapitre six permet d'aborder diverses problématiques plus opérationnelles. Ce chapitre est l'occasion d'aborder les problèmes qui peuvent être liés au débit nécessaire dans les transmissions bases vers opérateur et permet d'apporter un élément de réponse afin de réduire cet inconvénient sans détériorer les performances des algorithmes. Puis nous traitons du diagramme d'ambiguïté de l'antenne globale ce qui permet d'observer l'influence de la prise en compte de la diversité temporelle de l'antenne en plus de la diversité spatiale, mais aussi d'analyser le comportement de l'antenne vis-à-vis de l'ouverture dans bases. Enfin nous traitons du diagramme d'ambiguïté large bande du premier ordre des algorithmes en 1 étape. Pour finir ce chapitre, nous nous intéressons à des applications où les configurations des bases comportant peu d'antennes rendent le contexte difficile pour la géolocalisation, mais intéressant d'un point de vue opérationnel. Cette étude est l'occasion d'analyser les performances des méthodes en 1 étape face à des méthodes en 2 étapes.

Pour finir le chapitre huit permet de conclure ces études menées sur trois ans tout en abordant un série de perspectives du domaine qu'il sera intéressant d'aborder à plus ou moins long terme.

## Contributions du travail de thèse

Les travaux de thèse que j'ai eu à mener au long de ces trois années, se sont déroulées selon trois axes essentiels :

- Le but des principaux algorithmes en 1 étape pré-thèse est de canaliser les observations afin de les rendre cohérentes entre chaque station composant l'antenne globale. Nous avons mené l'analyse en terme de performances théoriques mesurant l'impact du non respect de l'hypothèse bande étroite. C.-à-d. le cas où les signaux sont partiellement incohérents entre chaque station de l'antenne globale.
- L'algorithme LOST réalisé par mon prédécesseur (J.Bosse) est une alternative à l'algorithme DPD en exploitant la structure spatiotemporelle de l'observation. Cependant afin de diminuer les coûts calculatoires d'une approche spatiotemporelle brute, la structure algébrique a été contractée perdant ainsi l'exploitation de la diversité temporelle de l'antenne globale. Nous avons donc déterminé une nouvelle approche à relaxation, LOST-FIND, exploitant toute la structure spatiotemporelle tout en contenant le coût algorithmique.
- Finalement nous avons développé une nouvelle approche purement large bande travaillant sur la non cohérence des observations inter-base. Cette algorithme, représentant une nouvelle façon d'aborder le problème de la géolocalisation de sources émettrices à l'aide d'une antenne globale et est appelé TARGET.

Ces principaux axes d'études ont été menés à bien et s'articulent autour d'autres études sur le sujet que nous développerons pleinement le long de ce manuscrit.

## Publications, communications et collaborations

Cette étude a donné lieu à des publications et des articles de congrès. Elle a donné également lieu à une collaboration avec Dr. Alon Amar travaillant à Raphael, Israël, que nous remercions profondément pour sa contribution sur les études portant sur les biais asymptotiques dus aux signaux partiellement incohérents entre les stations d'antennes.

### Revue internationale

Un article de revue internationale en cours de préparation portant sur l'étude du biais des estimations de position sur les méthodes en 1 étape.

### Article de congrès

- C. Delestre, A. Ferréol et P. Larzabal. *Performances de méthodes à sous-espace pour une géolocalisation direct à l'aide de stations éloignées*, GRETSI, Septembre 2013,
- A. Ferréol, C. Delestre et P. Larzabal. *DoA estimation performances of multi-parametric MUSIC in presence of modeling errors - case of coherent multi-paths.*, ICASSP, Mai 2014,
- C. Delestre, A. Ferréol et P. Larzabal. *Array-broadband effects on direct geolocation algorithm*, EUSIPCO, Septembre 2014,
- C. Delestre, A. Ferréol et P. Larzabal. *LOST-FIND: a spectral-space-time direct blind geolocalization algorithm*, ICASSP, Avril 2015,
- C. Delestre, A. Ferréol, A. Amar et P. Larzabal. *On the broadband effect of remote stations in DPD algorithm*, ICASSP, Avril 2015,
- C. Delestre, A. Ferréol, P. Larzabal et C. Germond. *TARGET: a direct AoA-TDoA estimation for blind broadband geolocalization*, EUSIPCO, Septembre 2015.

## **Brevet**

C. Delestre, A. Ferréol et P. Larzabal. *Procédé de compression de signaux dans le cadre des méthodes de localisation en 1 étape*, No. de dépôt : 1502678.

# Chapter 1

## Modélisation du signal multi-station et hypothèses

Dans ce chapitre nous allons modéliser les signaux reçus sur les stations composant le système de géolocalisation multi-base. Nous aborderons de manière disjointe les hypothèses faites sur les stations d'antennes locales nommées bases ou encore station, et celles sur le système composé de toutes les stations : l'antenne globale.

### 1.1 Aperçu du système

Le système de géolocalisation est constitué de stations de réception de même bande  $B$  parfaitement synchronisées. Cette bande est centrée autour d'une fréquence porteuse  $f_0$  puis ramenée en bande de base. Notons également la présence d'un convertisseur analogique/numérique de fréquence  $F_e = \alpha \times B$  où  $\alpha$  est légèrement supérieur à 1 afin de garantir la condition d'échantillonnage de Nyquist-Shannon ( $F_e > B$ ). Les bandes passantes des  $Q$  signaux en réception sont inférieures à la bande de réception et sont centrées autour de leurs fréquences porteuses  $f_q$ . Sur la Fig.1.1 on peut voir un schéma type de réception en sortie d'une antenne. Sur la Fig.1.2 un exemple type de représentation spectrale des signaux sources et des bandes des récepteurs est représentée.

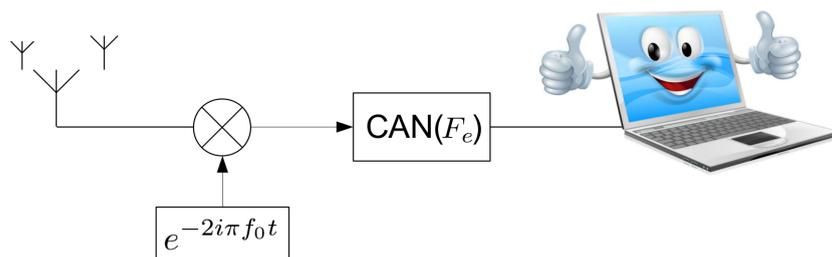


Figure 1.1: Réception d'une antenne.

### 1.2 Modélisation des observations locales et globales

Les signaux transmis notés  $m_q(t)$ , sont des signaux complexes aléatoires avec une amplitude et une phase dépendantes du temps. Ces signaux proviennent d'une modulation issue des télécommunications (par exemple une modulation GMSK, QPSK, etc.). Enfin les signaux modulés sont transposés autour d'une fréquence  $f_0 + f_q$ . Pour la  $q$ -ième source, nous avons :

$$s_q(t) = m_q(t)e^{2i\pi(f_0+f_q)t}, \quad (1.1)$$

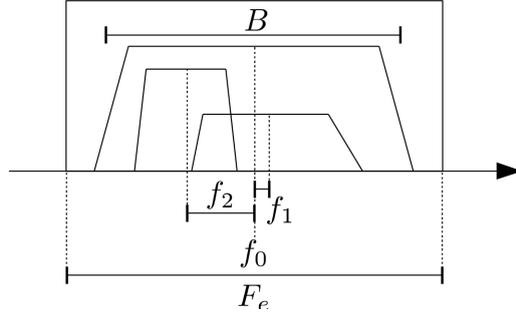


Figure 1.2: Récepteur avec une bande  $B$  centrée en  $f_0$  et un échantillonnage de fréquence  $F_e$  en présence de deux signaux centrés autour de  $f_1$  et  $f_2$ .

où  $f_0$  est la fréquence centrale des récepteurs et  $f_q$  représente le résidu de porteuse de la  $q$ -ième source par rapport à la fréquence porteuse  $f_0$ . Pour simplifier l'approche, nous allons par la suite considérer que les  $Q$  sources sont transmises autour de la même fréquence  $f_0$ . Un signal  $q$  reçu par un récepteur centré en  $f_0$  s'écrit :

$$s_q(t - \tau) = m_q(t - \tau)e^{2i\pi f_0 t} e^{-2i\pi f_0 \tau}, \quad (1.2)$$

Comme nous l'avons vu, nous traitons les signaux transposés en bande de base. Un signal retardé de  $\tau$  en sortie du numériseur (CAN) de la Fig.1.1 s'écrit de la manière suivante :

$$s_q(t - \tau) = m_q(t - \tau)e^{-2i\pi f_0 \tau}. \quad (1.3)$$

Dans le cadre de cette thèse nous supposons que la propagation entre une source et les antennes des bases est en ligne directe (LoS pour *Line of Sight*) sans présence de trajets multiples. En présence de  $Q$  sources, le  $m$ -ième capteur de la base  $l$  reçoit le signal suivant :

$$x_l^m(t) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q}^m s_q(t - \tau_l^m(\mathbf{p}_q)) + n_l^m(t), \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{p}_q$  est la position de la  $q$ -ième source,  $\rho_{l,q}^m$  est l'atténuation complexe de la  $q$ -ième source sur le  $m$ -ième capteur de la  $l$ -base,  $\tau_l^m(\mathbf{p}_q)$  est le temps de propagation de la  $q$ -ième source vers le  $m$ -ième capteur de la  $l$ -ième base et  $n_l^m(t)$  est un bruit additif. Le temps de propagation entre la source  $q$  de position  $\mathbf{p}_q$  et le  $m$ -ième capteur de la  $l$ -ième base est donné par :

$$\tau_l^m(\mathbf{p}_q) = \frac{\|\mathbf{b}_l^m - \mathbf{p}_q\|}{c}, \quad (1.5)$$

où  $\mathbf{b}_l^m$  est la position du  $m$ -ième capteur de la  $l$ -ième base et  $c$  la constante de vitesse de la lumière dans le vide. Nous considérons ici que les atténuations complexes de chaque capteur d'un même réseau sont égales ( $\rho_{l,q} = \rho_{l,q}^1 = \dots = \rho_{l,q}^{M_l}$ ). Comme vu précédemment, en traitement d'antenne nous considérons un réseau d'antennes où le signal observé en sortie de la  $l$ -ième base s'écrit :

$$\mathbf{x}_l(t) = \begin{bmatrix} x_l^1(t) \\ \vdots \\ x_l^{M_l}(t) \end{bmatrix} = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{s}_{l,q}(t) + \mathbf{n}_l(t), \quad (1.6)$$

avec

$$\mathbf{s}_{l,q}(t) = \begin{bmatrix} s_q(t - \tau_l^1(\mathbf{p}_q)) \\ \vdots \\ s_q(t - \tau_l^{M_l}(\mathbf{p}_q)) \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

et  $M_l$  est le nombre d'antenne composant la station  $l$ .

Dans le contexte de cette thèse nous considérons l'observation sur l'antenne globale composée de toutes les observations des signaux des stations d'antenne locales. Le système de géolocalisation global composé de  $L$  stations qui reçoivent les signaux dans la même bande avec une fréquence d'échantillonnage  $F_e$ . On suppose les stations parfaitement synchronisées entre elles. On note la période d'échantillonnage des bases  $T_e = \frac{1}{F_e}$ . Comme chaque base est composée de  $M_l$  capteurs, l'antenne globale contient  $M (= \sum_{l=1}^L M_l)$  capteurs. La Fig.1.3 représente la propagation du signal des  $Q$  sources sur les  $L$  bases de l'antenne globale sous l'hypothèse LoS.

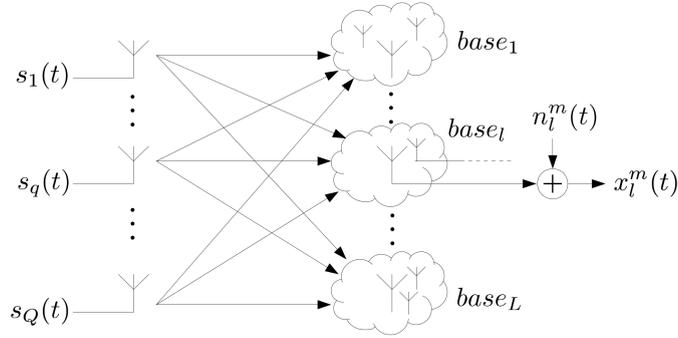


Figure 1.3: Représentation des sources et de l'antenne globale

On note alors l'observation sur l'antenne globale, du système composé de  $L$  bases par :

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_L(t) \end{bmatrix} = \sum_{q=1}^Q \begin{bmatrix} \rho_{1,q} \mathbf{s}_{1,q}(t, \boldsymbol{\tau}_1) \\ \vdots \\ \rho_{L,q} \mathbf{s}_{L,q}(t, \boldsymbol{\tau}_L) \end{bmatrix} + \mathbf{n}(t). \quad (1.8)$$

## 1.2.1 Hypothèses des signaux incidents

Dans le cadre de ce mémoire nous nous intéressons à la forme du front d'onde ainsi qu'aux hypothèses bande étroite (BE) et large bande (LB) des signaux. Dans le système de géolocalisation composé de bases éloignées, ces hypothèses vont être différentes suivant que l'on s'intéresse au signal des bases (localement) ou au signal sur l'antenne globale (globalement).

### 1.2.1.1 Hypothèse front d'onde plan/front d'onde courbe

Une onde (sonore ou électromagnétique) dans un milieu isotrope se propage suivant une sphère autour de la source ou un cercle dans le plan. Ces formes géométriques sont des variétés, c'est-à-dire qu'elles peuvent être localement approximées par un plan dont l'origine est la position de la station. Cette origine est définie par le centre de phase de la station qui correspond au centre de gravité des capteurs. Si on note les coordonnées cartésiennes des capteurs de la  $l$ -ième base par  $\mathbf{b}_l^m = [x_l^m, y_l^m]^T \forall m \in \llbracket 1; M_l \rrbracket$ , le centre de phase sera donné par :  $\mathbf{b}_l = \frac{1}{M_l} \sum_{m=1}^{M_l} \mathbf{b}_l^m$ . Dans ce mémoire, on supposera que l'hypothèse front d'onde plan est vérifiée sur chaque base. L'onde n'est donc localement plus circulaire, mais représente un plan traversant radialement la station d'antennes. La Fig.1.4(a) représente ce phénomène où  $\mathbf{k}(\theta_{l,q}^m)$  est le vecteur d'onde dans le plan horizontal formé par les bases de la  $q$ -ième source de direction  $\theta_q$  sur un capteur  $m$  de la base  $l$  :

$$\mathbf{k}(\theta_{l,q}^m) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{l,q}^m) \\ \sin(\theta_{l,q}^m) \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{b}_l^m - \mathbf{p}_q}{\|\mathbf{b}_l^m - \mathbf{p}_q\|}. \quad (1.9)$$

Alors, en considérant  $\theta_{l,q}$  l'angle entre la source  $q$  et le centre de phase de la base  $l$ , on peut voir sur la Fig.1.4(a) que généralement  $\mathbf{k}(\theta_{l,q}) \neq \mathbf{k}(\theta_{l,q} + \Delta\theta)$ , mais lorsque l'hypothèse front d'onde plan est vérifiée sur une station, alors  $\mathbf{k}(\theta_{l,q}) \approx \mathbf{k}(\theta_{l,q} + \delta\theta_{l,q}^m)$  car  $\delta\theta_{l,q}^m = \theta_{l,q} - \theta_{l,q}^m \approx 0$ . Ainsi en supposant l'hypothèse front d'onde plan sur la base  $l$ , la direction d'arrivée de la source au capteur  $m$  est donnée pour tout  $m \in \llbracket 1; M_l \rrbracket$  :

$$\mathbf{k}(\theta_{l,q} + \delta\theta_{l,q}^m) \approx \mathbf{k}(\theta_{l,q}) = \frac{\mathbf{b}_l - \mathbf{p}_q}{\|\mathbf{b}_l^m - \mathbf{p}_q\|}. \quad (1.10)$$

L'hypothèse front d'onde plan permet d'avoir la même direction d'arrivée sur chacun des capteurs. Ainsi, localement, les temps différentiels d'arrivée inter-capteur sont seulement dépendants de la direction d'arrivée sur la base  $l$ . En effet on peut écrire le temps d'arrivée de l'onde issue de la source  $q$  par :

$$\tau_l^m(\mathbf{p}_q) = \delta\tau_l^m(\mathbf{p}_q) + \tau_l(\mathbf{p}_q), \quad (1.11)$$

avec  $\tau_l(\mathbf{p}_q)$  le temps de propagation de la source  $q$  vers le centre de phase de la base  $l$  :

$$\tau_l(\mathbf{p}_q) = \frac{\|\mathbf{b}_l - \mathbf{p}_q\|}{c}, \quad (1.12)$$

et  $\delta\tau_l^m(\mathbf{p}_q)$  le temps différentiel de propagation du capteur  $m$  au centre de phase de la  $l$ -ième base radialement à l'angle de la  $q$ -ième source :

$$\delta\tau_l^m(\mathbf{p}_q) = \frac{\|\mathbf{b}_l - \mathbf{p}_q\| - \|\mathbf{b}_l^m - \mathbf{p}_q\|}{c} \quad (1.13)$$

$$= -\frac{1}{c} \mathbf{k}^T(\theta_{l,q} + \delta\theta_{l,q}^m) \Delta\mathbf{b}_l^m, \quad (1.14)$$

où  $\Delta\mathbf{b}_l^m = \mathbf{b}_l^m - \mathbf{b}_l$ . Alors, avec l'approximation front d'onde plan, ce temps ne dépend plus de la direction d'arrivée sur chacun des  $M_l$  capteurs :

$$\delta\tau_l^m(\mathbf{p}_q) \approx -\frac{1}{c} \mathbf{k}^T(\theta_{l,q}) \Delta\mathbf{b}_l^m. \quad (1.15)$$

En d'autres termes, on peut faire l'hypothèse du front d'onde plan selon les Fig.1.4 lorsque tous les capteurs du réseau voient la  $q$ -ième source selon la même direction d'arrivée  $\theta_{l,q}$  et donc possèdent le même vecteur d'onde sur tout le réseau.

Durant la suite de ces travaux, l'hypothèse front d'onde plan sera toujours respectée sur chacune des stations locales. Intéressons-nous à présent à l'antenne globale. Il est à noter que pour géolocaliser une source dans l'espace il est important que les stations d'antenne possèdent des directions d'arrivées différentes vis-à-vis de la source. Localement l'hypothèse front d'onde plan sera respectée sur les bases, mais ne doit pas être vérifiée sur l'antenne globale, ce qui est une condition nécessaire pour que la diversité spatiale soit informative de la position de la source dans le plan. Ainsi en définissant le centre de phase de l'antenne globale par :  $\mathbf{b} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{b}_l$ , nous avons pour direction d'arrivée d'une source  $q$  sur le centre de phase de l'antenne globale, comme illustré à la Fig.1.5, les vecteurs d'onde :

$$\mathbf{k}(\theta_q + \Delta\theta_{l,q}) \neq \mathbf{k}(\theta_q + \Delta\theta_{v,q}), \quad \forall (l, v) \in \llbracket 1; L \rrbracket^2, \quad l \neq v, \quad (1.16)$$

avec  $\Delta\theta_{l,q} = \theta_q - \theta_{l,q}$ . C'est ce que l'on appelle la diversité angulaire.

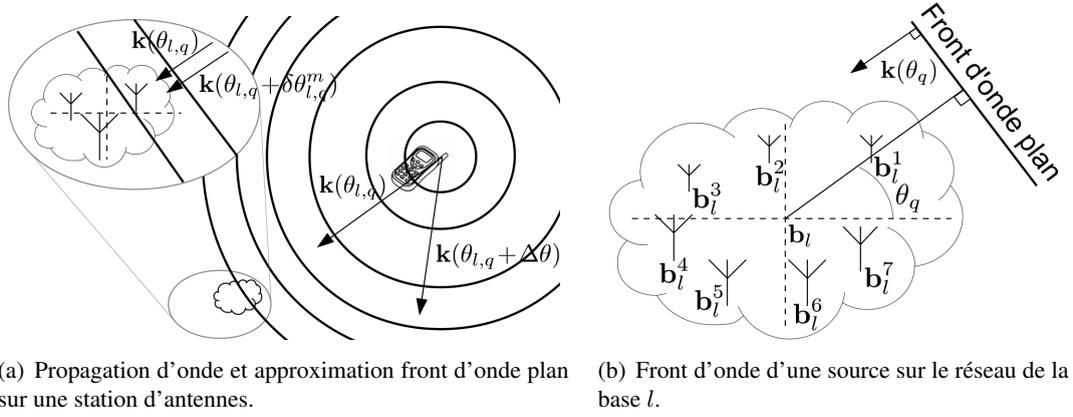


Figure 1.4: Approximation front d'onde plan permettant de déterminer une direction d'arrivée unique localement sur toute la station pour chaque source.

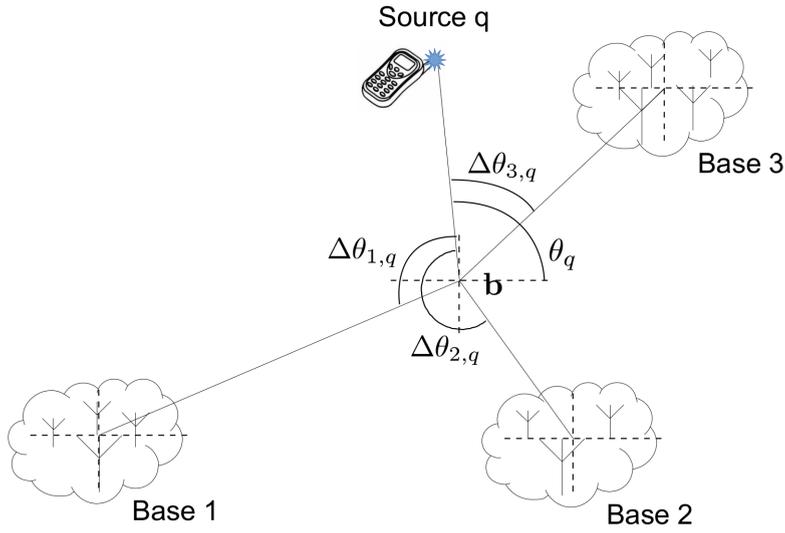


Figure 1.5: Diversité angulaire sur l'antenne globale.

### 1.2.1.2 Hypothèse bande étroite/large bande

On souhaite que l'hypothèse BE soit au minimum vérifiée sur chacune des bases. Le temps différentiel de propagation entre la source  $q$  et deux antennes d'une base  $l$  est défini par  $\Delta\tau_{m,j}^l(\mathbf{p}_q) = \tau_l^m(\mathbf{p}_q) - \tau_l^j(\mathbf{p}_q)$  pour  $\forall(m, j, q) \in \llbracket 1; M_l \rrbracket^2 \times \llbracket 1; Q \rrbracket$ . On définit alors le produit Temps Bande (TB) sur la  $l$ -ième base par :

$$TB = \max_{(q,m,j) \in \llbracket 1; Q \rrbracket \times \llbracket 1; M_l \rrbracket^2} B \times \left| \Delta\tau_{m,j}^l(\mathbf{p}_q) \right|, \quad (1.17)$$

$$= B \times \left| \Delta\tau_{\max}^l \right|, \quad (1.18)$$

où  $B$  est la bande de réception. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'hypothèse bande étroite soit vérifiée sur la base  $l$  est :

$$B \times \left| \Delta\tau_{\max}^l \right| \ll 1. \quad (1.19)$$

Cela signifie que le signal ayant le plus grand TDoA possède un temps de variation du signal beaucoup plus long que le temps de traversée de l'onde sur la station d'antennes. Si le système respecte le critère (1.19) alors la

différence entre les signaux des capteurs et le centre de phase de la  $l$ -ième base s'exprime juste au moyen d'une phase. Ainsi en respectant l'hypothèse bande étroite, nous avons sur le capteur  $m$  de la  $l$ -ième station d'après (1.1), le signal observé :

$$s_q(t - \tau_l^m(\mathbf{p}_q)) = s_q(t - \delta\tau_l^m(\mathbf{p}_q) - \tau_l(\mathbf{p}_q)), \quad (1.20)$$

$$\approx s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q))e^{-2i\pi f_0 \delta\tau_l^m(\mathbf{p}_q)}, \quad (1.21)$$

où en injectant (1.15) dans la phase :

$$e^{-2i\pi f_0 \delta\tau_l^m(\mathbf{p}_q)} = e^{2i\pi \frac{f_0}{c} \mathbf{k}^T(\theta_{l,q}) \Delta \mathbf{b}_l^m} = a_l^m(\theta_{l,q}), \quad \forall m \llbracket 1; M \rrbracket. \quad (1.22)$$

Le signal observé sur la  $l$ -ième base de (1.6) devient alors :

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_{l,q}) s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) + \mathbf{n}_l(t), \quad (1.23)$$

où  $\mathbf{a}_l(\theta_{l,q}) = \mathbf{a}_l(\theta_{l,q})$  que nous écrirons pour simplifier  $\mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q)$  est appelé *steering vector* (vecteur directeur) avec :

$$\mathbf{a}_l(\theta) = \begin{pmatrix} a_l^1(\theta) \\ \vdots \\ a_l^{M_l}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2i\pi \frac{f_0}{c} \mathbf{k}^T(\theta) \Delta \mathbf{b}_l^1} \\ \vdots \\ e^{2i\pi \frac{f_0}{c} \mathbf{k}^T(\theta) \Delta \mathbf{b}_l^{M_l}} \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Si sur une base les hypothèses bande étroite et front d'onde plan sont respectées, le modèle d'observation est linéaire. Cela permet d'appliquer de nombreux algorithmes simples à mettre en œuvre, pour estimer la direction d'arrivée d'une source sur la base, comme illustré sur la Fig.1.6.

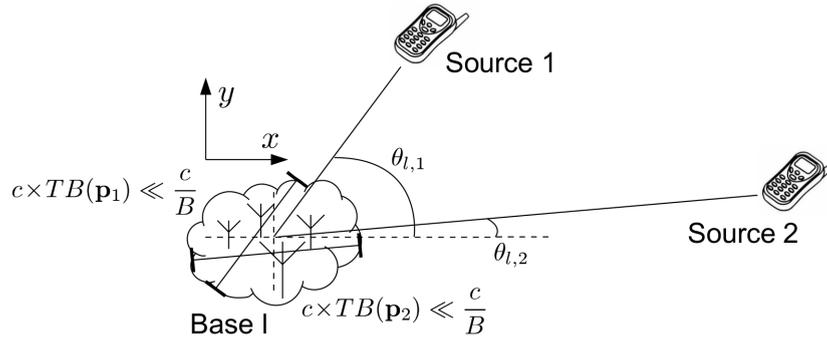


Figure 1.6: Angle d'arrivée de deux sources traduisant leurs directions d'arrivées quand les hypothèses front d'onde plan et bande étroite sont respectées.

Nous allons maintenant étudier l'hypothèse bande étroite au niveau du réseau de base. Pour cela, il faut s'intéresser aux temps de propagation de la source vers les bases. Le TDoA d'une source entre deux bases de l'antenne globale est défini de la manière suivante :

$$\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q) = \tau_l(\mathbf{p}_q) - \tau_v(\mathbf{p}_q), \quad (1.25)$$

$$= \frac{\|\mathbf{b}_l - \mathbf{p}_q\| - \|\mathbf{b}_v - \mathbf{p}_q\|}{c} \quad \forall (q, l, v) \in \llbracket 1; Q \rrbracket \times \llbracket 1; L \rrbracket^2. \quad (1.26)$$

Sachant que l'inégalité triangulaire nous donne :

$$\|\mathbf{b}_l - \mathbf{p}_q\| - \|\mathbf{b}_v - \mathbf{p}_q\| \leq \|\mathbf{b}_l - \mathbf{b}_v\|. \quad (1.27)$$

On en déduit que le TDoA est borné :

$$\max_{q \in \llbracket 1; Q \rrbracket} \Delta\tau_q = \max_{(q,l,v) \in \llbracket 1; Q \rrbracket \times \llbracket 1; L \rrbracket^2} |\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)| \leq \Delta\tau_{\max} = \max_{(l,v) \in \llbracket 1; L \rrbracket^2} \frac{1}{c} \|\mathbf{b}_l - \mathbf{b}_v\|_2. \quad (1.28)$$

Le produit TB (=  $B \times \Delta\tau_q$ ) sur l'antenne globale est alors borné, cela permet de donner une condition sur l'hypothèse bande étroite multi-base dépendant uniquement des distances inter-bases et de la bande de réception :

$$\max_{q \in \llbracket 1; Q \rrbracket} B \times \Delta\tau_q \leq B \times \Delta\tau_{\max} \ll 1. \quad (1.29)$$

En d'autres termes, si on définit  $D_{\max} = c \times \Delta\tau_{\max}$  la distance maximale entre deux centres de phase de station d'antennes, alors l'hypothèse bande étroite est respectée pour  $\frac{D_{\max}}{c} \ll \frac{1}{B_{\max}}$ . Ainsi, si nous notons  $D_{\max}$  la distance la plus longue que doit parcourir une onde entre deux stations, par exemple la distance entre la station 1 et  $L$  dans le cas de la Fig.1.7, le temps de parcours de l'onde est alors non négligeable entraînant un produit TB non négligeable devant 1.

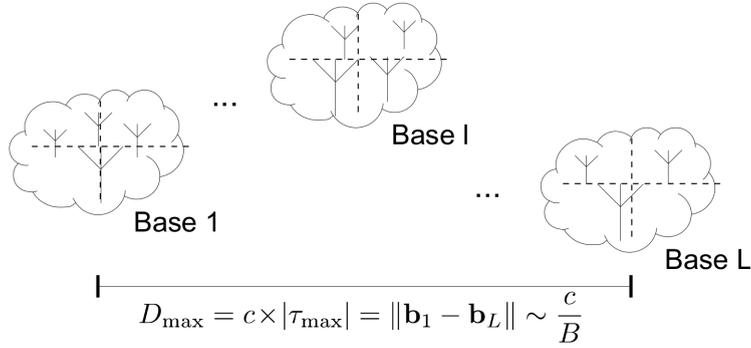


Figure 1.7: La condition bande étroite n'est généralement pas respectée. Les signaux sont *a priori* large bande sur l'antenne globale.

On définit le coefficient de corrélation des observations de moyennes nulles et d'écart type  $\sigma_l$  et  $\sigma_v$  entre deux capteurs des deux bases les plus éloignées de l'antenne globale par :

$$\text{Cor}(x_l^{m_l}(t), x_v^{m_v}(t)) = \frac{\mathbb{E}[x_l^{m_l}(t)x_v^{m_v^*}(t)]}{\sigma_l\sigma_v}. \quad (1.30)$$

Nous avons alors deux cas de figure :

- Contexte large bande : sur l'antenne globale le signal dans l'Eq.(1.21)  $s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q))$  ne peut pas être approximé par  $s_q(t)e^{-2i\pi f_0\tau_l(\mathbf{p}_q)}$ . Les signaux entre stations sont dans ce cas :
  - décorrés :  $\text{Cor}(x_l^{m_l}(t), x_v^{m_v}(t)) = 0$  correspondant au cas  $\Delta\tau_{\max} > \frac{1}{B}$ , [ON10], [KS04] ;
  - corrélés :  $0 < |\text{Cor}(x_l^{m_l}(t), x_v^{m_v}(t))| < 1$  correspondant au cas  $\Delta\tau_{\max} < \frac{1}{B}$ , [AW09], [BFL13].

Alors l'observation de l'antenne globale donnée en (1.8) a pour modèle :

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}(\mathbf{p}_q)\mathbf{\Omega}_q\mathbf{s}_q(t, \mathbf{p}_q) + \mathbf{n}(t) \\ \mathbf{s}_q(t, \mathbf{p}_q) = \begin{bmatrix} s_q(t - \tau_1(\mathbf{p}_q)) \\ \vdots \\ s_q(t - \tau_L(\mathbf{p}_q)) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.31)$$

avec :

$$\mathbf{U}(\mathbf{p}_q) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1(\mathbf{p}_q) & \cdots & \mathbf{0}_{M_1 \times 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M_L \times 1} & \cdots & \mathbf{a}_L(\mathbf{p}_q) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{\Omega}_q = \begin{pmatrix} \rho_{1,q} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho_{L,q} \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

où  $\mathbf{U}(\mathbf{p}_q)$  est la matrice définie par bloc où chaque bloc diagonal est le *steering vector* d'une base composant l'antenne globale et  $\mathbf{\Omega}_q$  la matrice diagonale composée des atténuations complexes. Cette matrice qu'on peut appeler *steering matrix* contient la structure de la diversité spatiale de l'antenne globale.

- Contexte bande étroite : les sources vis-à-vis de l'antenne globale, vérifient la condition  $B \times \Delta\tau_q \ll 1$  sans pour autant respecter la condition forte  $B \times \Delta\tau_{\max} \ll 1$ . Alors la différence de temps entre les signaux observés sur chacune des stations peut être approximée par  $s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \approx s_q(t)e^{-2i\pi f_0 \tau_l(\mathbf{p}_q)}$ , on parle dans ce cas ci de signaux cohérents entre stations de l'antenne globale ( $\text{Cor}(x_l^{m_l}(t), x_v^{m_v}(t)) = 1$ ). Dans ce cas le modèle d'observation de l'antenne globale (1.8) devient :

$$\begin{cases} \mathbf{y}(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) s_q(t) + \mathbf{n}(t), \\ \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) = \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_0) \boldsymbol{\rho}_q, \end{cases} \quad (1.33)$$

où apparait la matrice contenant les informations des ToA :

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_0) = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi f_0 \tau_1(\mathbf{p}_q)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-2i\pi f_0 \tau_L(\mathbf{p}_q)} \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

qui est composée des phases liées à la propagation de l'onde des sources sur l'antenne globale et  $\boldsymbol{\rho}_q = [\rho_{1,q}, \dots, \rho_{L,q}]^T$  est le vecteur composé des atténuations complexes de la source  $q$  sur les  $L$  bases composant l'antenne globale. Dans ce cas les ToA  $\tau_l(\mathbf{p}_q)$  contenus dans la matrice  $\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}, f)$  ne sont pas mesurables, car la structure algébrique dépend du vecteur  $\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_0) \boldsymbol{\rho}_q$  où les phases des atténuations complexes s'ajoutent aux phases des temps de propagation rendant ainsi les deux indiscernables.

## 1.2.2 Hypothèses statistiques du modèle des observations

En considérant toutes les hypothèses préalablement vérifiées sur chaque station, et en s'appuyant sur le résultat de l'Eq.(1.23), le modèle du signal observé sur la  $l$ -ième station d'antenne devient :

$$\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l) \mathbf{\Gamma}_l \mathbf{s}_l(t) + \mathbf{n}_l(t), \quad (1.35)$$

où :

- $\mathbf{x}_l(t) = [x_l^1(t), \dots, x_l^{M_l}(t)]^T$  est le vecteur d'observation complexe de la  $l$ -ième base composé de  $M_l$  capteurs où chaque élément  $x_l^m(t) \forall m \in \llbracket 1; M_l \rrbracket$  est le signal reçu sur le  $m$ -ième capteur de la station ;
- $\mathbf{\Gamma}_l = (\delta_{q,j} \rho_{l,q})_{1 \leq (q,i) \leq Q}$  est la matrice diagonale composée des coefficients d'atténuation des  $Q$  sources sur la  $l$ -ième base (attention à ne pas confondre avec la matrice  $\mathbf{\Omega}_q$ ) ;
- $\mathbf{s}_l(t) = [s_1(t - \tau_l(\mathbf{p}_1)), \dots, s_Q(t - \tau_l(\mathbf{p}_Q))]^T$  est le vecteur des signaux reçus par les  $Q$  sources ;
- $\boldsymbol{\Theta}_l = \{\theta_{l,1}, \dots, \theta_{l,Q}\}$  est l'ensemble des directions d'arrivée (AoA) des  $Q$  sources sur la  $l$ -ième base ;
- $\mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l) = [\mathbf{a}_l(\theta_{l,1}), \dots, \mathbf{a}_l(\theta_{l,Q})]$  est la matrice des vecteurs directeurs  $\mathbf{a}_l(\theta_{l,q})$  dépendants de la géométrie de l'antenne, de la structure des capteurs et des directions d'arrivée ;

- $\mathbf{n}(t) = [n_l^1(t), \dots, n_l^{M_l}(t)]^T$  est le vecteur aléatoire modélisant le bruit de chaque capteur.

Avec comme hypothèses :

- H1** On considère les sources comme étant stationnaires de puissance  $\mathbb{E}[|s_q(t)|^2] = \gamma_q$ . De même, les sources sont indépendantes deux à deux. Pour finir les signaux sont supposés inconnus et aléatoires.
- H2** Le bruit est supposé indépendant des signaux. On considère  $\mathbf{n}_l(t)$  comme étant un processus temporellement blanc, circulaire ( $\mathbb{E}[\mathbf{n}_l(t)\mathbf{n}_l^T(t)] = \mathbf{0}$ ), à moyenne nulle et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_n^l = \mathbb{E}[\mathbf{n}_l(t)\mathbf{n}_l^H(t)] = \sigma_l^2\mathbf{I}_{M_l}$  (spatialement blanc) où  $\sigma_l^2$  est invariant en temps et supposé inconnu.
- H3** Les paramètres  $\Theta$  d'angle d'arrivée sont inconnus et constants pendant la durée d'observation. Ce qui implique que les sources soient fixes pendant le temps d'observation du signal.
- H4** La matrice  $\mathbf{A}(\Theta)$  est de rang plein, avec  $Q \leq M_l$ . Nous considérons (sauf indication contraire) que les bases sont non-ambigües, c.-à-d. que le problème est identifiable ( $\mathbf{A}(\Theta) = \mathbf{A}(\Theta') \Rightarrow \Theta = \Theta'$ ).
- H5** On suppose que le nombre de sources  $Q$  est connu. (En pratique cela implique une pré-étape de dénombrement du nombre de sources que l'on supposera parfaite.)

Il est à noter qu'à l'hypothèse H2 nous ne donnons pas de loi à la génération du bruit. Ce qui veut dire que d'une manière générale, nous n'aurons pas besoin de préciser la loi, sauf cas contraires qui seront explicitement mentionnés.

### 1.2.2.1 Matrice de covariance du signal reçu sur la l-ième base

Nous allons ici donner la forme théorique de la matrice de covariance du modèle du signal de l'Eq.(1.35). Car en plus d'être un élément très employé dans ce mémoire, cela permet d'introduire, dans ce chapitre, le modèle, les écritures et notations qu'on rencontrera régulièrement.

Par définition la matrice de covariance des observations mesurées à la  $l$ -ième base s'écrit :

$$\mathbf{R}_{ll} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_l(t)\mathbf{x}_l^H(t)]. \quad (1.36)$$

Si les signaux et les bruits définis au modèle (1.35) respectent les hypothèses, alors la matrice de covariance ne dépend pas du temps. Donc en prenant en compte les hypothèses nous avons rigoureusement :

$$\mathbf{R}_{ll} = \mathbf{A}_l(\Theta_l)\Gamma_l\mathbb{E}[\mathbf{s}_l(t)\mathbf{s}_l^H(t)]\Gamma_l^H\mathbf{A}_l^H(\Theta_l) + \sigma_l^2\mathbf{I}_{M_l} \quad (1.37)$$

$$= \mathbf{A}_l(\Theta_l)\Gamma_l\mathbf{R}_{s_{ll}}\Gamma_l^H\mathbf{A}_l^H(\Theta_l) + \sigma_l^2\mathbf{I}_{M_l}. \quad (1.38)$$

Avec  $\mathbf{R}_{s_{ll}} = (\delta_{q,j}\gamma_q)_{1 \leq (q,j) \leq Q}$  la matrice diagonale composée des puissances des  $Q$  signaux. Durant ce mémoire, nous croiserons également régulièrement la forme décomposée :

$$\mathbf{R}_{ll} = \sum_{q=1}^Q \gamma_q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\theta_q) \mathbf{a}_l^H(\theta_q) + \sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l}. \quad (1.39)$$

## 1.3 Formulation du problème

L'un des principaux enjeux de la géolocalisation directe à l'aide d'une antenne globale est d'exploiter les informations angulaires et temporelles du système de manière conjointe et optimale. D'après (1.31), l'exploitation de la diversité angulaire est contenue dans la matrice structurale  $\mathbf{U}(\mathbf{p})^1$  et l'information temporelle est contenue dans le vecteur  $\mathbf{s}_q(t, \mathbf{p}_q)$ . Il existe alors deux possibilités pour exploiter conjointement les informations angle et temps :

<sup>1</sup>Les premières méthodes historiques n'exploitent d'ailleurs que cette information [Wei81], [WK85b].

- La première utilise la connaissance de signaux de référence  $s_q(t)$  permettant de remonter aux décalages temporels entre stations et ainsi d'utiliser ces informations pour la géolocalisation. Ces méthodes permettent d'estimer le ToA entre la source et les bases. Cependant, dans notre contexte, nous ne supposons aucun *a priori* sur les sources, c'est ce que l'on nomme également la géolocalisation aveugle.
- La deuxième solution consiste à exploiter la cohérence des signaux entre station en mesurant le TDoA. Ceci permet de remonter à l'information temporelle du système et ainsi de l'exploiter dans l'estimation de la position des sources. Le TDoA est mesuré en intercorrélant les signaux entre station et ne nécessite ainsi pas de connaissance *a priori* sur les signaux.

Dans les deux cas, l'exploitation de l'angle passera par l'exploitation de la matrice  $\mathbf{U}(\mathbf{p})$ . Enfin, dans certains contextes d'application où les largeurs de bandes des signaux et celle du récepteur sont faibles par rapport à l'ouverture de l'antenne globale permettant ainsi de vérifier l'hypothèse BE sur l'antenne globale, il est possible de considérer les signaux cohérents (coefficient de corrélation égal à 1) ou fortement corrélés (coefficient de corrélation proche de 1) entre stations et ainsi d'exploiter le modèle Eq.(1.33) où seule l'information angulaire sera exploitée.

## Chapter 2

# État de l'art

La localisation d'une source sans connaissance *a priori* du signal (non coopérative) est une application importante en traitement d'antenne. Les domaines d'applications sont vastes, qu'ils soient civils ou militaires (sécurité, radar, services de localisation, radiogoniométrie, sonar, etc.). Il existe donc de nombreuses techniques pour traiter ces problèmes. Nous allons en présenter certaines d'entre elles, historiquement importantes ou techniquement marquantes du domaine.

Notre état de l'art exécutera un zoom, commençant au fondamental, puis grossissant vers le domaine applicatif de la thèse. On débutera cet état de l'art sur un bref rappel des enjeux de l'estimation paramétrique, puis nous aborderons les méthodes les plus courantes pour faire de l'estimation d'angle d'arrivée et de temps d'arrivée. Cette première partie se fera sans but de localisation des sources dans l'espace, mais seulement d'estimation des paramètres propres à celles-ci. Puis pour finir, nous parlerons de localisation dans l'espace, en associant les informations d'angles d'arrivée et de temps de propagation issus d'un contexte multi-station, que ce soit pour les méthodes conventionnelles de ce milieu ou pour les méthodes directes en 1 étape.

### 2.1 Estimation paramétrique en traitement d'antenne

L'atome, la partie insécable de la géolocalisation de sources émettrices est l'estimation de paramètres d'intérêts d'un modèle tels que les temps d'arrivée ou angles d'arrivée. Abordons brièvement ce domaine en nous focalisant sur certaines notions et généralités.

#### 2.1.1 Généralités sur l'estimation paramétrique

Tout un pan du traitement du signal est consacré à l'estimation de paramètres (ou paramètres d'intérêt) d'un modèle, que ce soit des paramètres d'un modèle statistique ou d'un modèle physique. Cette estimation se fait à partir d'une ou plusieurs observations. Le modèle peut être linéaire ou non vis-à-vis des paramètres recherchés et est très souvent un *a priori* sur la réalité du modèle fait par l'utilisateur. Les paramètres d'intérêts usuellement recherchés dans ce contexte d'utilisation sont : une direction d'arrivée (AoA), un temps différentiel d'arrivée (TDoA), une fréquence, une phase, la puissance d'un bruit, etc. La théorie de l'estimation offre un cadre formel, très bien défini qui peut-être représenté sur la Fig.2.1. Les outils d'estimation paramétrique sont une pierre angulaire du traitement d'antenne, qui, à partir d'un modèle de propagation du signal et des observations, exploitent une diversité pour extraire typiquement les directions d'arrivée, les temps d'arrivée, etc.

Sur la Fig.2.1, l'ensemble  $\eta$  représente les paramètres à rechercher dans la dimension de paramètre  $\mathcal{P}$ ,  $f(\eta)$  est l'*a priori* sur le modèle. Dans notre cas on considérera un modèle linéaire comme celui de l'Eq.(1.35).  $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_N, f(\eta))$  est la fonction à minimiser dépendante des observations et du modèle en  $\eta$ . Pour finir

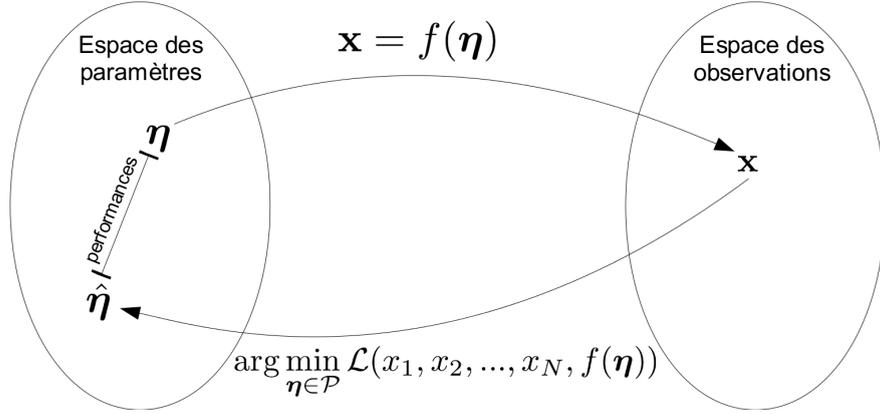


Figure 2.1: Cadre de l'estimation paramétrique

l'argument du minimum de ce critère nous donne une estimée des paramètres d'intérêts souhaités  $\hat{\eta}$ . Une étape très importante, qui va déterminer la qualité de notre estimation, est la mesure de la performance. Cette valeur nous dira à quelle distance l'estimation se trouve de la valeur du paramètre théorique. Cette mesure peut prendre différentes formes, ça peut être un biais, une variance (un bruit autour de  $\eta$ ), etc. Nous allons ici définir quelques notions que nous utiliserons tout au long du mémoire.

**Variance d'un estimateur** La variance donne la notion de puissance de bruit de l'estimation autour de la valeur théorique :

$$\text{Var}(\hat{\eta}) = \mathbb{E}[\hat{\eta}\hat{\eta}^H] - \mathbb{E}[\hat{\eta}]\mathbb{E}[\hat{\eta}]^H. \quad (2.1)$$

Plus un estimateur possède une variance faible pour un RSB donné, plus il est performant. Mais généralement, le gain sur la variance se fait au prix d'un coût calculatoire plus grand. La variance d'un estimateur particulier est inversement proportionnelle au RSB de l'observation. De plus cette mesure possède une borne minimale qui permet de comparer les performances avec une limite théorique idéale. Cette borne dépend des statistiques de l'observation et s'appelle la borne de Cramer Rao [Rao45], [Cra46].

**Biais d'un estimateur** Le biais est donné en asymptotique avec un nombre  $N$  d'observations infini. Il correspond à l'écart entre la valeur théorique du paramètre d'intérêt et la moyenne de son estimée :

$$\text{Biais}(\hat{\eta}) = \mathbb{E}[\hat{\eta}] - \eta. \quad (2.2)$$

**REQM** Pour Racine de l'Erreur Quadratique Moyenne est l'unité de mesure des performances d'un estimateur la plus utilisé. Elle combine le biais et la variance en une seule mesure :

$$\text{REQM}(\hat{\eta}) = \sqrt{\mathbb{E}[(\hat{\eta} - \eta)(\hat{\eta} - \eta)^H]} \quad (2.3)$$

$$= \sqrt{\text{Var}(\hat{\eta}) + \text{Biais}^2(\hat{\eta})}. \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Estimation du paramètre AoA : goniométrie

Dans le cadre du traitement d'antenne, l'estimation la plus courante (et par la même la plus classique) est l'estimation de la direction d'arrivée<sup>1</sup>. Un tel estimateur est appelé un goniomètre et les premières formula-

<sup>1</sup>Sous l'hypothèse front d'onde plan vérifiée de même que l'hypothèse bande étroite.

tions mathématiques remontent à la première guerre mondiale [Sta47]. Nous allons ici aborder les méthodes les plus classiques.

### 2.1.2.1 Méthodes conventionnelles basées sur le filtrage spatial

Les méthodes dites conventionnelles suivent un schéma en trois étapes. Un diagramme du traitement de données spatiales est fourni par la Fig.2.2. La première étape consiste à faire un filtrage spatial dans la direction  $\theta$  avec les poids  $w_m(\theta)$ , puis dans une seconde étape calculer l'énergie  $P(\theta)$  du signal en sortie du filtre et, pour finir, la dernière étape maximise suivant la direction la puissance  $P(\theta)$  en sortie de filtre. Ils dérivent tous de ce principe.

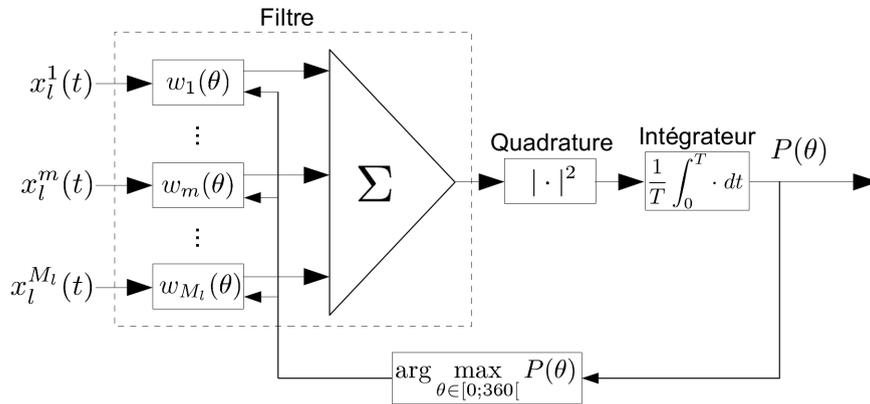


Figure 2.2: Détermination de la puissance dans la direction  $\theta$

Il est possible d'écrire ces méthodes à l'aide d'un vecteur de pondération qu'on nommera  $\mathbf{w}_l$ . Pour une station de base quelconque  $l$  nous avons d'un point de vue général :

$$\mathbf{w}_l(\theta) = \begin{bmatrix} w_1(\theta) \\ \vdots \\ w_{M_l}(\theta) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_l^{-q} \mathbf{z}(\theta), \quad (2.5)$$

où  $q$  est un entier et  $\mathbf{z}(\theta)$  est un vecteur de pointage. Un vecteur de pointage typique peut être le vecteur directeur  $\mathbf{a}_l(\theta)$  d'une station d'antennes et  $\mathbf{R}_l$  la matrice de covariance de la base  $l$ . L'optimisation est sous la contrainte  $\mathbf{w}_l^H(\theta) \mathbf{a}_l(\theta) = 1$ . Finalement, l'ensemble de paramètres recherchés est constitué des directions d'arrivée des sources  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Theta}$ . L'estimateur de la direction d'arrivée est donné par :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\Theta}}_l = \max_{\theta \in [0;360[} P(\theta), \\ P(\theta) = \mathbf{w}_l^H(\theta) \mathbf{R}_l \mathbf{w}_l(\theta). \end{cases} \quad (2.6)$$

Les directions d'arrivée des  $Q$  sources sont celles qui maximisent la puissance  $P(\theta)$ .

### La formation de voie

Se basant sur l'Eq.(2.5), la formation de voie [VB88] est obtenue pour  $q = 0$  et  $\mathbf{z}(\theta) = \frac{\mathbf{a}_l(\theta)}{\|\mathbf{a}_l(\theta)\|_2} = \mathbf{a}_l^+(\theta)$  où  $(.)^+$  est la pseudo-inverse. Cela revient à remettre en phase les signaux reçus en compensant les retards de propagation et à maximiser la puissance ainsi obtenue. L'estimateur est asymptotiquement non biaisé en présence d'une source. Toutefois en multi-source sa résolution est limitée par l'ouverture d'antenne. La fonction coût de la

méthode par formation de voie est finalement :

$$P_{FV}(\theta) = \frac{\mathbf{a}_l^H(\theta) \mathbf{R}_l \mathbf{a}_l(\theta)}{\mathbf{a}_l^H(\theta) \mathbf{a}_l(\theta)} \quad (2.7)$$

### La méthode de Capon

En partant de l'Eq.(2.5), la méthode de Capon [Cap69] est obtenue pour  $q = 1$  et  $\mathbf{z}(\theta) = \frac{\mathbf{a}_l(\theta)}{\mathbf{a}_l^H(\theta) \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{a}_l(\theta)}$ . En fait, cela correspond au filtre adapté spatial, qui maximise le rapport signal dans la direction  $\theta$  sur le mélange bruit + interférences dans les autres directions. Cet estimateur améliore la résolution de la formation de voie conventionnelle. Ainsi, deux sources situées dans le lobe principal de la formation de voie peuvent être séparées par la méthode pourvu que le RSB soit suffisant. Les directions d'arrivée de ces deux sources resteront cependant biaisées. La fonction coût de la méthode par Capon est donnée par :

$$P_C(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}_l^H(\theta) \mathbf{R}_l^{-1} \mathbf{a}_l(\theta)} \quad (2.8)$$

### Remarques sur les méthodes conventionnelles

Les directions d'arrivées des sources sont données par les maxima de la fonction coût. Toutefois, ces méthodes nécessitent un bon contraste entre le lobe principal et les lobes secondaires du critère pour détecter et estimer la direction d'arrivée des sources incidentes. Le réglage du seuil de détection est difficile.

Ces méthodes ont l'avantage d'avoir une interprétation physique simple, mais ont pour inconvénient d'avoir un pouvoir de résolution limité et d'être souvent biaisées dans un contexte multi-source [Tre02]. C'est pour ces raisons que la communauté scientifique et industrielle étudie avec grand intérêt les méthodes dites à haute résolution possédant asymptotiquement un pouvoir de résolution infini [Mar98].

#### 2.1.2.2 Méthodes bande étroite

Dans les méthodes à haute résolution, on peut distinguer 2 approches. L'une est l'approche par maximum de vraisemblance et la seconde est l'approche de type MUSIC. Nous allons aborder ici brièvement chacune des deux approches.

#### Le maximum de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance maximise la probabilité conditionnelle de  $N$  observations dépendantes des mêmes paramètres  $\boldsymbol{\eta}$  pour estimer ces derniers. En présence de  $N$  observations indépendantes  $\mathbf{x}_l(t_n) = \mathbf{x}_l(t + (n-1)T_e)$  de même loi  $f_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}_l(t_n))$ , la vraisemblance a pour expression :

$$l(\mathbf{x}_l(t_1), \dots, \mathbf{x}_l(t_N) | \boldsymbol{\eta}) = \prod_{n=1}^N f_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}_l(t_n)). \quad (2.9)$$

Un estimateur au sens du maximum de vraisemblance recherche les paramètres qui maximisent cette probabilité conditionnelle. Deux approches au sens du maximum de vraisemblance ont été envisagées : l'approche stochastique et celle déterministe. Dans les deux cas le bruit est supposé gaussien.

**Maximum de vraisemblance stochastique (MVS)** L'approche stochastique suppose que les signaux émis  $\mathbf{s}(t_n)$  du modèle (1.35) sont aléatoires. La méthode la plus connue consiste à considérer que ces signaux sont gaussiens iid en temps, c'est à dire que le produit TB respecte le condition pour valider l'hypothèse BE et suivent la loi  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_s)$ . En s'appuyant sur l'Eq.(1.38), nous avons une observation qui suit la loi :

$$\mathbf{x}_l(t) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_{ll}). \quad (2.10)$$

Si on considère les atténuations complexes connues, les paramètres à estimer sont alors les angles d'arrivées et les puissances des sources ainsi que la puissance du bruit sur la  $l$ -ième base ,  $\boldsymbol{\eta} = \{\boldsymbol{\Theta}_l, \gamma_1, \dots, \gamma_Q, \sigma_l^2\}$ . La vraisemblance des telles observations s'écrit alors :

$$l(\mathbf{x}_l(t_1), \dots, \mathbf{x}_l(t_N) | \boldsymbol{\eta}) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M_l}{2}} |\mathbf{R}_{ll}(\boldsymbol{\eta})|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}_l^H(t_n) \mathbf{R}_{ll}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{x}_l(t_n)}, \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{NM_l}{2}} |\mathbf{R}_{ll}(\boldsymbol{\eta})|^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_l^2} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_l^H(t_n) \mathbf{R}_{ll}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{x}_l(t_n)}. \quad (2.12)$$

Il est alors commode pour les fonctions de la forme  $l(\cdot) = e^{-\|\cdot\|_\alpha^2}$  de considérer le log de vraisemblance que l'on note  $L(\cdot) = \ln l(\cdot)$ . Nous avons alors :

$$-L(\mathbf{x}_l(t_1), \dots, \mathbf{x}_l(t_N) | \boldsymbol{\eta}) = NM_l \times \ln(\pi) + N \times \ln(|\mathbf{R}_{ll}(\boldsymbol{\eta})|) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_l^H(t_n) \mathbf{R}_{ll}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{x}_l(t_n). \quad (2.13)$$

La minimisation du log de vraisemblance  $-L(\mathbf{x}_l(t_1), \dots, \mathbf{x}_l(t_N) | \boldsymbol{\eta})$  permet d'obtenir l'estimateur suivant :

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_l = \arg \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{P}} \ln(|\mathbf{R}_{ll}(\boldsymbol{\eta})|) + \text{tr} \left[ \mathbf{R}_{ll}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) \hat{\mathbf{R}}_{ll} \right], \quad (2.14)$$

avec  $\hat{\mathbf{R}}_{ll}$  la Sample Covariance Matrix (SCM) de la  $l$ -ième base. Il a été démontré que le problème est séparable et qu'il existe une solution analytique de  $\hat{\mathbf{R}}_{ll}$  et  $\hat{\sigma}_l^2$  à directions d'arrivée  $\boldsymbol{\Theta}$  fixées. L'estimateur au sens de MVS des paramètres d'intérêts  $\boldsymbol{\Theta}_l = \{\theta_{l,1}, \dots, \theta_{l,Q}\}$  est donné par [Bö86], [Bre88], [Jaf88] :

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_l = \arg \min_{\boldsymbol{\Theta} \in [0;360]^Q} \left| \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}) \boldsymbol{\Gamma}_l \hat{\mathbf{R}}_s(\boldsymbol{\Theta}) \boldsymbol{\Gamma}_l^H \mathbf{A}_l^H(\boldsymbol{\Theta}) + \hat{\sigma}_l^2(\boldsymbol{\Theta}) \mathbf{I}_{M_l} \right|, \quad (2.15)$$

avec les deux estimateurs des puissances des signaux et du bruit suivant :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_l^2(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{1}{M_l - Q} \text{tr} \left[ \boldsymbol{\Pi}_l^\perp(\boldsymbol{\Theta}) \hat{\mathbf{R}}_{ll} \right], \\ \hat{\mathbf{R}}_s(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{A}_l^+(\boldsymbol{\Theta}) \boldsymbol{\Gamma}_l^{-1} \left( \hat{\mathbf{R}}_{ll} - \hat{\sigma}_l^2(\boldsymbol{\Theta}) \mathbf{I}_{M_l} \right) \boldsymbol{\Gamma}_l^{-1H} \mathbf{A}_l^{+H}(\boldsymbol{\Theta}), \end{cases} \quad (2.16)$$

et où  $\boldsymbol{\Pi}_l^\perp(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{I}_{M_l} - \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}) \mathbf{A}_l^+(\boldsymbol{\Theta})$  est le projecteur orthogonal sur l'espace engendré par les colonnes de  $\mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta})$ . Cet estimateur est complexe à optimiser car dépendant de beaucoup de paramètre. De plus, supposer les signaux gaussiens, n'a aucune raison d'être. C'est pour cela qu'il est souvent préféré l'approche déterministe que nous allons aborder.

**Maximum de vraisemblance déterministe (MVD)** Avec l'estimateur MVD on considère les signaux émis déterministes où finalement, seul le bruit est supposé aléatoire gaussien centré et circulaire de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l})$ . Les signaux sont supposés inconnus et déterministes. Ils font alors partie des paramètres du système à estimer. D'après le modèle de (1.35) on a alors :

$$\mathbf{n}_l(t) = \mathbf{x}_l(t) - \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l) \boldsymbol{\Gamma}_l \mathbf{s}(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l}). \quad (2.17)$$

Les paramètres inconnus dans  $\boldsymbol{\eta}$  sont les directions d'arrivée  $\boldsymbol{\Theta}_l$ , les signaux aux différents instants  $\mathbf{s}(t_n)$  et finalement la puissance du bruit  $\sigma_l^2$ . La fonction de vraisemblance à maximiser est sous ces hypothèses la suivante :

$$l(\mathbf{x}_l(t_1), \dots, \mathbf{x}_l(t_N) | \boldsymbol{\eta}) = \prod_{n=1}^N \frac{1}{(2\pi\sigma_l^2)^{\frac{M_l}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_l^2} (\mathbf{x}_l(t_n) - \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)\boldsymbol{\Gamma}_l\mathbf{s}(t_n))^H (\mathbf{x}_l(t_n) - \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)\boldsymbol{\Gamma}_l\mathbf{s}(t_n))}, \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma_l^2)^{\frac{NM_l}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_l^2} \sum_{n=1}^N (\mathbf{x}_l(t_n) - \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)\boldsymbol{\Gamma}_l\mathbf{s}(t_n))^H (\mathbf{x}_l(t_n) - \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)\boldsymbol{\Gamma}_l\mathbf{s}(t_n))}. \quad (2.19)$$

Et donc pour fonction de log vraisemblance :

$$-L(\mathbf{x}_l(t_1), \dots, \mathbf{x}_l(t_N) | \boldsymbol{\eta}) = NM_l \times \ln(\pi\sigma_l^2) + \frac{1}{2\sigma_l^2} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{x}_l(t_n) - \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)\boldsymbol{\Gamma}_l\mathbf{s}(t_n)\|^2. \quad (2.20)$$

Cette optimisation est plus simple que celle du MVS. Les signaux  $\mathbf{s}(t_n)$  estimés en minimisant le critère (2.20) s'écrivent :

$$\hat{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{A}_l^+(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{x}_l(t). \quad (2.21)$$

L'interprétation de cet estimateur est immédiate. Si l'on considère le problème comme étant un problème de mélange des signaux et que la matrice  $\mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta})$  est la matrice de mélange linéaire instantané (MLI) connue, le démixage se fait alors par simple pseudo-inversion de la matrice MLI. L'estimateur de la variance du bruit au sens du maximum de vraisemblance déterministe est :

$$\hat{\sigma}_l^2 = \frac{1}{M_l} \text{tr} \left[ \boldsymbol{\Pi}_l^\perp(\boldsymbol{\Theta}) \hat{\mathbf{R}}_{ll} \right]. \quad (2.22)$$

Finalement l'estimation des paramètres d'intérêts de directions d'arrivées au sens du maximum de vraisemblance déterministe est donné par [Bö84] :

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_l = \arg \min_{\boldsymbol{\Theta} \in [0; 360[^\circ]} \text{tr} \left[ \boldsymbol{\Pi}_l^\perp(\boldsymbol{\Theta}) \hat{\mathbf{R}}_{ll} \right]. \quad (2.23)$$

L'optimisation du MVD est plus simple que le MVS car les paramètres  $\hat{\mathbf{s}}(t)$ ,  $\hat{\sigma}_l^2$  et  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_l$  peuvent être estimés les uns après les autres. De plus dans le cas du MVS les calculs sont menés généralement avec un signal suivant une loi gaussienne, qui n'est pas toujours vérifiée pour des signaux de télécommunication<sup>2</sup>. Dans le cadre de la MVD les calculs sont menés pour le cas où le bruit suit une loi normale, ce qui semble moins restrictif.

Cependant si les conditions sont respectées, ces méthodes sont biaisées pour un faible nombre d'observations, mais sont consistantes<sup>3</sup> [Was04]. Asymptotiquement, à  $N$  infini, il a été montré que les estimateurs au sens du maximum de vraisemblance sont efficaces<sup>4</sup> [Was04] et [CT05]. Cependant si l'on quitte les variables aléatoires de type gaussienne, les calculs peuvent s'avérer vite ardu. De plus, la recherche du minima se fait sur  $Q$  dimensions ce qui est très coûteux en terme de calcul. Un des enjeux est alors d'imaginer des méthodes d'estimation s'approchant des performances des estimateurs MV tout en réduisant le coût et ne faisant pas nécessairement d'*a priori* sur les lois des variables aléatoires du système.

<sup>2</sup>Par exemple les signaux modulés par l'OFDM du MTE suivent une loi gaussienne.

<sup>3</sup>Si on note l'estimation d'un paramètre  $\hat{\theta}_N = f(x_1, \dots, x_N)$  avec  $f$  une fonction d'estimation quelconque, alors un estimateur est consistant (ou convergent) si  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_N - \theta| \leq \epsilon) = 1$  avec  $\epsilon > 0$  et est fortement consistant (ou convergent presque sûrement) si  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\hat{\theta}_N = \theta) = 1$ , c.-à-d. que l'estimation tend presque sûrement vers la vraie valeur. La consistance et le biais ne sont pas à confondre.

<sup>4</sup>Un estimateur efficace est un estimateur qui atteint la borne de Cramer Rao, un estimateur fortement consistant est un estimateur efficace.

### 2.1.2.2.1 Méthodes à haute résolution

Les méthodes à sous-espaces se basent sur la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance. Pour  $Q$  signaux non cohérents en présence d'un bruit additif spatialement blanc sur les  $M_l$  capteurs de la station d'antennes  $l$ , la matrice de covariance de l'Eq.(1.38) possède la décomposition en éléments propres suivante :

$$\mathbf{R}_{ll} = \mathbb{E} [\mathbf{x}_l(t)\mathbf{x}_l^H(t)], \quad (2.24)$$

$$= \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^H, \quad (2.25)$$

$$= \mathbf{E}_s\mathbf{\Lambda}_s\mathbf{E}_s^H + \sigma_l^2\mathbf{E}_b\mathbf{E}_b^H, \quad (2.26)$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres classées par ordre décroissant  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_Q \geq \lambda_{Q+1} = \dots = \lambda_{M_l} = \sigma_l^2$  et  $\mathbf{E}$  est la matrice des vecteurs propres associés aux valeurs propres. D'après (2.26) nous avons le partitionnement suivant :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_l^2\mathbf{I}_{M_l-Q} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{E}_s \quad \mathbf{E}_b], \quad (2.27)$$

où l'espace engendré par les colonnes de  $\mathbf{E}_s$  est orthogonal à l'espace engendré par les colonnes de  $\mathbf{E}_b$ .  $\mathbf{E}_s$  réunit les vecteurs propres associés à  $\mathbf{\Lambda}_s$  (vecteur propre signal) et  $\mathbf{E}_b$  ceux associés à  $\mathbf{\Lambda}_b$  (vecteurs propres bruit). Grâce à la structure blanche du bruit, le sous-espace engendré par les colonnes de  $\mathbf{E}_s$  est le même que celui engendré par les vecteurs directionnels (colonnes de la matrice  $\mathbf{A}_l(\Theta_l)$ ) sous la condition que la matrice  $\mathbf{A}_l(\Theta_l)$  soit de rang plein :

$$\text{vect}(\mathbf{E}_s) = \text{vect}(\mathbf{A}_l(\Theta_l)), \quad (2.28)$$

il s'agit du sous-espace signal. Le sous-espace complémentaire (engendré par les vecteurs propres  $\mathbf{E}_b$ ) est appelé sous-espace bruit.

#### Algorithme MUSIC

L'algorithme MUSIC pour *MUltiple Signal Characterization* [BK79] et [Sch86], est la méthode à sous-espace la plus couramment utilisée. Elle vise à exploiter directement la structure algébrique de la matrice de covariance, notamment la propriété (2.28). De plus comme les colonnes de  $\mathbf{E}_s$  sont orthogonales à celles de  $\mathbf{E}_b$ , on a :

$$\mathbf{a}_l^H(\theta_q)\mathbf{\Pi}_l^\perp\mathbf{a}_l(\theta_q) = 0, \quad \forall q \in \llbracket 1; Q \rrbracket, \quad (2.29)$$

où  $\mathbf{\Pi}_l^\perp = \mathbf{E}_b\mathbf{E}_b^H$  est le projecteur vers le sous-espace bruit. En exploitant la propriété (2.29), les directions d'arrivée des sources sont les  $Q$  minima du critère  $\mathcal{L}_{MUSIC}$  :

$$\begin{cases} \hat{\Theta}_l = \arg \min_{\theta \in [0; 360[} \mathcal{L}_{MUSIC}(\theta), \\ \mathcal{L}_{MUSIC}(\theta) = \frac{\mathbf{a}_l^H(\theta)\hat{\mathbf{\Pi}}_l^\perp\mathbf{a}_l(\theta)}{\mathbf{a}_l^H(\theta)\mathbf{a}_l(\theta)}. \end{cases} \quad (2.30)$$

La matrice  $\hat{\mathbf{\Pi}}_l^\perp$  est le projecteur estimé à partir des  $M_l - Q$  vecteurs bruit de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}_{ll}$ . Le critère MUSIC dépend techniquement d'un angle d'arrivée  $\theta$  mono-dimensionnel, alors qu'avec les méthodes MV, les directions des  $Q$  sources doivent être estimées dans un espace de dimension  $Q$ .

#### Algorithme WSF

L'algorithme WSF pour *Weighted Subspace Fitting* [VOK91] à une complexité algorithmique équivalente à la méthode du MVD, pour des performances asymptotiquement équivalentes. La méthode se base sur le fait que dans le cas général le sous-espace signal est inclut dans l'espace engendré par les vecteurs directeurs des sources :

$$\text{vect}(\mathbf{E}_s) \subseteq \text{vect}(\mathbf{A}_l(\Theta_l)), \quad (2.31)$$

avec une inclusion stricte en présence d'au moins deux sources totalement corrélées, c.-à-d. que la matrice  $\mathbf{R}_l$  n'est pas de rang plein. Ceci conduit à estimer :

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)\mathbf{H}, \quad (2.32)$$

où  $\mathbf{H}$  est une matrice rectangulaire dont le rang est celui de  $\mathbf{E}_s$ . Les directions  $\boldsymbol{\Theta}_l$  des sources sont estimées conjointement de la manière suivante :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\Theta}}_l = \arg \min_{\boldsymbol{\Theta} \in [0; 360[^\circ} \mathcal{L}_{WSF}(\boldsymbol{\Theta}), \\ \mathcal{L}_{WSF}(\boldsymbol{\Theta}) = \text{tr} \left[ \boldsymbol{\Pi}^\perp(\boldsymbol{\Theta}) \hat{\mathbf{E}}_s \mathbf{W} \hat{\mathbf{E}}_s^H \right], \end{cases} \quad (2.33)$$

où  $\hat{\mathbf{E}}_s$  est le sous-espace propre de la matrice de covariance estimée et  $\mathbf{W}$  est une matrice de pondération. La matrice de pondération optimale au sens de la variance des estimées, dépend des valeurs propres signal :

$$\mathbf{W}_{opt} = \left( \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_s - \hat{\sigma}_l^2 \mathbf{I}_{M_l} \right)^2 \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_s^{-1} \quad (2.34)$$

Il existe un certain nombre d'autres méthodes utilisant la structure de la matrice de covariance. On peut citer par exemple la méthode MODE pour *Method Of Direction Estimation* [SS90b] se basant sur une approximation asymptotique du critère d'estimation des paramètres d'intérêt du maximum de vraisemblance déterministe [SN89] dans le cadre d'un réseau d'antenne linéaire et uniforme.

### 2.1.3 Estimation des paramètres ToA et TDoA

Après quelques exemples de méthodes d'estimation des paramètres de directions d'arrivée, nous allons à présent nous intéresser à l'estimation du Temps Différentiel d'Arrivée (TDoA) ou du Temps d'Arrivée (ToA). Ces paramètres expriment le temps de propagation d'une source ou le temps différentiel entre deux bases [GG05], [PNMG08]. L'expression du ToA entre la  $l$ -ième station d'antennes et la  $q$ -ième source est :

$$\tau_l(\mathbf{p}_q) = \frac{\|\mathbf{b}_l - \mathbf{p}_q\|}{c}. \quad (2.35)$$

L'expression du TDoA qui est le temps de propagation différentiel d'une source entre deux bases s'écrit :

$$\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q) = \tau_l(\mathbf{p}_q) - \tau_v(\mathbf{p}_q). \quad (2.36)$$

On peut montrer que le temps différentiel de propagation entre deux bases de position  $\mathbf{b}_l$  et  $\mathbf{b}_v$  est borné de la manière suivante grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)| \leq \frac{\|\mathbf{b}_l - \mathbf{b}_v\|}{c} = \Delta\tau_{\max}, \quad (2.37)$$

où l'égalité est donnée pour une source sur l'extérieur de l'axe formé par la droite passant par les deux bases. En fonction des algorithmes et du savoir sur les sources l'un sera plus pratique que l'autre, mais ces deux critères témoignent du temps de propagation des sources vers les stations d'antennes.

#### 2.1.3.1 Méthode conventionnelle

La méthode classique pour mesurer le TDoA consiste à intercorrélérer les signaux reçus sur deux stations éloignées [Gez07], [LDB107]. L'estimateur du TDoA entre les stations  $l$  et  $v \neq l$  est le suivant :

$$\{\Delta\hat{\tau}_{l,v}(\mathbf{p}_q) | q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\} = \arg \min_{|\tau| \leq \Delta\tau_{\max}} \left( 1 - \frac{|r_{l,v}(\tau)|^2}{r_{l,l}(0)r_{v,v}(0)} \right), \quad (2.38)$$

où en s'appuyant sur la définition (1.4),  $r_{l,l}$ ,  $r_{v,v}$  et  $r_{l,v}$  sont les auto et inter-corrélation définies par :

$$r_{l,v}(\tau) = \mathbb{E} \left[ x_l^m(t) x_v^{m*}(t - \tau) \right]. \quad (2.39)$$

Cet estimateur intuitif possède deux inconvénients [Gez07] :

- Le premier, est d'avoir des minimum d'interférence si les signaux ne sont pas totalement décorrélés. Ces minimum sont dues à l'intercorrélacion non nul entre les signaux. Ce problème est négligeable, car en considérant l'hypothèse H1 page 15 les sources sont décorrélées entre elles, mais il peut l'être beaucoup moins dans un contexte de multi-trajet.
- Le deuxième inconvénient, plus gênant dans notre contexte d'utilisation. L'estimateur est dans le cas multi-source biaisé. C.-à-d. que les minimums globaux du critères sont influencés par les lobes secondaires entraînant un biais sur l'estimation du TDoA. De même, il peut être non résolu. En effet, si deux sources sont relativement proches il n'y aura alors qu'un seul minima pour les deux sources, elles seront confondues. L'opérateur devra donc choisir  $Q$  minima pour l'estimation des TDoA des  $Q$  sources, alors qu'en réalité aura un nombre de minimum correspondant aux TDoA des sources inférieur au nombre de sources forçant l'opérateur à choisir d'autres lobes secondaires entraînant une erreur totale sur l'estimation du TDoA sur certaines sources.

### 2.1.3.2 Méthodes de type haute-résolution

Il existe un certain nombre de méthodes à haute résolution pour estimer les temps de propagation. Nous allons en aborder deux, mais en étant non exhaustif sur toutes les méthodes de type HR possibles dans la littérature.

#### Approche par mélange linéaire instantané

Cette méthode par approche des MLI se fait en deux étapes [FBL10]. La première vise à estimer la matrice de mélange instantané grâce à une goniométrie, puis la deuxième à démêler les observations. En effet, en se basant sur le modèle du signal (1.35), la matrice de mélange  $\mathbf{A}_l(\hat{\Theta}_l)$  est calculée à partir des directions d'arrivée  $\hat{\Theta}_l$  des  $Q$  sources estimées sur la  $l$ -ième station d'antennes. Nous avons alors :

$$\hat{\Theta}_l = \arg \min_{\theta \in [0; 360[} \mathcal{L}(\theta) \quad (2.40)$$

où  $\mathcal{L}(\theta)$  peut être l'une des méthodes d'estimation d'angle d'arrivée vu précédemment. Les signaux des sources sont estimés par :

$$\hat{\mathbf{s}}_l(t) = \begin{bmatrix} \hat{s}_{l,1}(t) \\ \vdots \\ \hat{s}_{l,Q}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_l^+(\hat{\Theta}_l) \mathbf{x}_l(t), \quad (2.41)$$

qui peut être considéré comme une estimation des signaux des sources au sens du maximum de vraisemblance (2.21). La deuxième étape consiste alors à estimer les TDoA par intercorrélacion des  $Q$  signaux démêlés  $\hat{s}_{l,q}(t)$  sur la  $l$ -ième base et les observations de la base  $v$ .

$$\{\Delta \hat{\tau}_{l,v}(\mathbf{p}_q) | q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\} = \arg \min_{|\tau| \leq \Delta \tau_{\max}} \left( 1 - \frac{|r_{q,v}(\tau)|^2}{r_q r_{v,v}(0)} \right), \quad (2.42)$$

avec

$$r_q = \mathbb{E} \left[ |\hat{s}_{l,q}(t)|^2 \right] \text{ et } r_{q,v}(\tau) = \mathbb{E} \left[ \hat{s}_{l,q}(t) x_v^{m*}(t - \tau) \right]. \quad (2.43)$$

Cette méthode qui utilise l'estimation de la matrice de mélange possède l'avantage d'être non biaisé, à contrario de la méthode conventionnelle exploitant seulement l'intercorrélacion entre deux antennes de deux bases différentes. Cependant cette méthode possède l'inconvénient d'être à deux étapes, c.-à-d. que les performances de l'estimateur dépendent de la qualité d'estimation de la matrice de mélange, et *in fine* de la qualité des estimations des AoA. Enfin, la méthode nécessite un nombre d'antennes strictement supérieur au nombre de sources sur la base où les AoA sont estimés.

Afin d'avoir de meilleures performances, une approche multi-capteur est préférée [FM] dans le but d'exploiter au mieux toutes les informations présentes sur les bases. Ainsi le critère d'estimation du TDoA est alors :

$$\{\Delta \hat{\tau}_{l,v}(\mathbf{p}_q) | q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\} = \arg \min_{|\tau| \leq \Delta \tau_{\max}} \left( 1 - \frac{\mathbf{r}_{q,v}^H(\tau) \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{r}_{q,v}(\tau)}{r_q} \right), \quad (2.44)$$

avec

$$\mathbf{r}_{q,v}(\tau) = \mathbb{E} [\mathbf{x}_v(t - \tau) \hat{s}_{l,q}^*(t)]. \quad (2.45)$$

### 2.1.3.2.1 Approche de type MUSIC

Une autre approche consiste à envoyer un signal connu dans le canal de transmission. Ceci représente un *a priori* très fort, et cela revient à connaître à chaque instant le signal  $s(t)$ . Pour des signaux de télécommunication (GSM, LTE, Wi-Fi, *etc.*), le signal de référence à une transmission est utilisé, sinon pour résoudre ce problème une séquence binaire pseudo-aléatoire stationnaires (SBPA) permet d'avoir un signal déterministe connu à tout moment.

D'après le modèle (1.1) l'observation sur une antenne  $m$  de la  $l$ -ième base s'écrit :

$$x_l^m(t) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} s_q(t - \tau_l^m(\mathbf{p}_q)) + n_l^m(t). \quad (2.46)$$

Une composante fréquentielle de cette observation s'écrit alors :

$$X_l^m(f) = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} S_q(f) e^{-2i\pi f \tau_l^m(\mathbf{p}_q)} + N_l^m(f), \quad (2.47)$$

les signaux étant stationnaires, l'observation fréquentielle ne dépend pas du temps. En supposant que le spectre du signal s'étend sur  $K$  canaux fréquentiels, le vecteur d'observation à donc pour modèle :

$$\mathbf{x}_l = \mathbf{C}_l \boldsymbol{\rho}_l + \mathbf{n}_l, \quad (2.48)$$

avec :

- $\mathbf{x}_l = [X_l^m(f_1), \dots, X_l^m(f_K)]^T$  est le vecteur composé des composantes fréquentielles du signal reçu,
- $\mathbf{n}_l = [N_l^m(f_1), \dots, N_l^m(f_K)]^T$  est le vecteur des composantes fréquentielles du bruit,
- $\mathbf{C}_l = [\mathbf{c}_1(\tau_l^m(\mathbf{p}_1)), \dots, \mathbf{c}_Q(\tau_l^m(\mathbf{p}_Q))]$  avec  $\mathbf{c}_q(\tau_l^m(\mathbf{p}_q)) = [S_q(f_1) e^{-2i\pi f_1 \tau_l^m(\mathbf{p}_q)}, \dots, S_q(f_K) e^{-2i\pi f_K \tau_l^m(\mathbf{p}_q)}]^T$  est la structure algébrique de l'observation.

Ce modèle est alors très proche de celui donné en (1.35) dont la solution par l'approche des sous-espaces propres a été donnée par l'algorithme MUSIC (2.30). L'estimation des temps de propagation consiste alors en la recherche des  $Q$  minima d'une fonction coût [BK79], [BK83], [PJ91] :

$$\{\hat{\tau}_l^m(\mathbf{p}_q) | q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\} = \arg \min_{|\tau| \leq \Delta\tau_{\max}} \frac{1}{\|s_q(t)\|_2^2} \mathbf{c}^H(\tau) \hat{\Pi}_{l,m}^\perp \mathbf{c}(\tau), \quad (2.49)$$

avec  $\hat{\Pi}_{l,m}^\perp$  le projecteur vers le sous-espace bruit estimé à partir de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}_l^{\mathcal{F}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_l(t_n) \mathbf{x}_l^H(t_n)$  de rang  $K$ . Cependant, il est à noter que contrairement à l'algorithme MUSIC qui exploite la diversité spatiale, les vecteurs directeurs exploitant la diversité temporelle n'ont pas de forme analytique. Ceci entraîne qu'il est impossible d'appliquer des méthodes d'optimisation aussi simples et que le résultat final passe inévitablement par une interpolation qui dépend de la précision du résultat final souhaité. De même il est nécessaire d'avoir une connaissance *a priori* du signal qu'il est généralement compliqué d'obtenir dans le cas de la géolocalisation aveugle de sources.

## 2.2 Géolocalisation à partir d'un système multi-station

Comme nous l'avons vu, toutes les méthodes précédentes permettent de déterminer les paramètres intermédiaires de type AoA ou TDoA (voir ToA) contenant une information sur la position des sources. Pour déterminer la position des sources il est nécessaire d'avoir plusieurs bases afin de croiser les informations des paramètres intermédiaires. Nous allons donc ici considérer  $Q$  sources, mais avec un système composé de  $L$  stations d'antenne réparties dans le plan afin d'être capable de déterminer la position des sources.

### 2.2.1 Méthodes conventionnelles en deux étapes

Les méthodes dites en 2 étapes comme illustrées à la Fig.2 page 2 s'appuient sur un réseau de stations pour localiser la source dans un espace (volume ou plan) [LDBI07], [PNMG08]. Ces méthodes, qui sont (de très loin) les plus répandues utilisent les paramètres intermédiaires estimés par les algorithmes des paragraphes précédents pour déterminer la position de la source dans une nouvelle étape. On parle également de méthodes décentralisées, car le système d'estimation du paramètre d'intérêt de position est décentralisé des stations d'antennes sur lesquelles on estime les paramètres intermédiaires. Voici le principe de fonctionnement des algorithmes en 2 étapes :

1. Estimation des paramètres intermédiaires  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  qui dépendent de la position ( $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})$ ) sur chacune des stations (ou paire de stations pour les TDoA) à partir des observations bruitées  $\mathbf{x}_l(t)$  et de la règle d'estimation  $\mathcal{L}(\cdot)$  :

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{P}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})), \quad (2.50)$$

2. Le paramètre d'intérêt de position  $\hat{\mathbf{p}}$  est estimé à son tour grâce aux paramètres intermédiaires. Cette seconde étape est généralement un moindre carré pondéré :

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} (\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p}))^H \mathbf{W} (\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{p})), \quad (2.51)$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice de pondération pouvant dépendre de la covariance de l'erreur  $\delta\boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}$  [Bos12]. Les paramètres contenus dans le vecteur  $\boldsymbol{\eta}$  et  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  ont des dimensions différentes les unes par rapport aux autres. Par exemple les angles seront exprimés en degré ou radian et les TDoA en seconde. La difficulté est de choisir une matrice de pondération optimale qui rendra les paramètres sans dimension tout en accordant plus d'importance aux paramètres les mieux estimés. En vertu du principe d'invariance étendu où les paramètres intermédiaires de la première étape seraient estimés avec des estimateurs performants au sens du maximum de vraisemblance, et si l'étape d'estimation des paramètres d'intérêts de la seconde

étape est également performant au sens du maximum de vraisemblance, alors la variance des paramètres intermédiaires se reporte sur les paramètres d'intérêt. Il s'agit du principe EXIP pour *EXtended Invariance Principle* étudié par P. Stoica et T. Söderström en 1989 [SS89], [SS90a]. Dans le cadre d'un estimateur performant au sens du maximum de vraisemblance, la matrice de poids optimal est alors l'inverse de la borne de Cramer Rao, à savoir la matrice d'information de Fisher (MIF). Le choix théorique optimum est donc la MIF pour  $\mathbf{W}$ . Malheureusement pour calculer la MIF on a besoin de connaître la position des sources. Donc dans la pratique il est usuellement utilisé l'inverse de la matrice de covariance estimée sur  $D$  échantillons des paramètres intermédiaires :

$$\mathbf{W}^{-1} = \hat{\mathbf{R}}_{\eta} = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \delta \hat{\eta}_d \delta \hat{\eta}_d^H, \quad (2.52)$$

avec  $\delta \hat{\eta}_d = \hat{\eta}_d - \bar{\eta}$  et  $\bar{\eta} = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \hat{\eta}_d$ . Cependant il est à noter que cette étape d'estimation accroît le coût de calcul des méthodes en 2 étapes et nécessite de bien séparer les paramètres de chacune des sources. Cela est en fait un des problèmes des méthodes en deux étapes.

En s'appuyant sur les deux paramètres intermédiaires mentionnés dans les précédentes sections, on a alors 3 moyens de localisation. La méthode exploitant seulement les AoA qui est le moyen de géolocalisation le plus utilisé dans le domaine et connu sous le nom de triangulation. Une deuxième approche, exploitant que les TDoA, puis pour finir, une dernière méthode utilisant les deux types de paramètres intermédiaires AoA/TDoA appelée méthode hybride.

### 2.2.1.1 Triangulation (AoA/AoA)

La triangulation est une méthode de géolocalisation simple à mettre en œuvre [PNMG08], [LDBI07]. Elle utilise les angles d'arrivée des  $Q$  sources estimés sur les  $L$  bases composant le système pour localiser les sources émettrices, comme on peut le voir sur la Fig.2.3. Cette méthode possède l'avantage d'être la seule à ne pas nécessiter la transmission de signaux entre les bases, ce qui lui permet d'être extrêmement moins coûteuse dans sa mise en application.

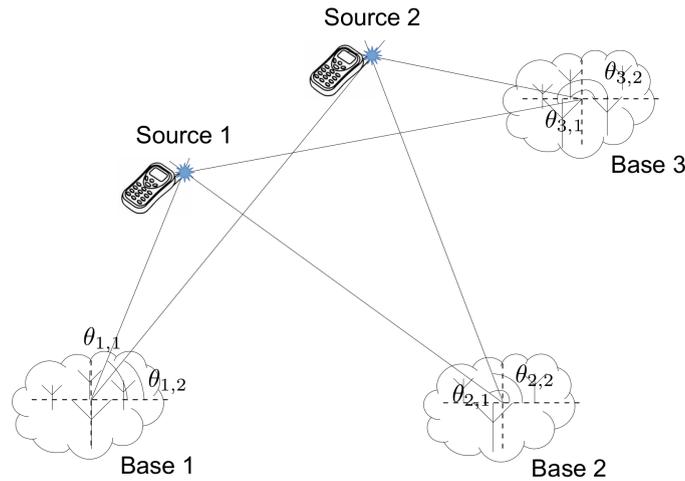


Figure 2.3: Principe de triangulation avec  $Q = 2$  et  $L = 3$

Le problème de la triangulation doit résoudre le système d'équations suivant :

$$\hat{\mathbf{p}}_q \text{ tel que } \mathbf{k}(\hat{\theta}_{l,q}) = \frac{\hat{\mathbf{p}}_q - \mathbf{b}_l}{\|\hat{\mathbf{p}}_q - \mathbf{b}_l\|} \quad \forall l \in \llbracket 1; L \rrbracket. \quad (2.53)$$

Ainsi la position  $\hat{p}_q$  satisfaisant ce système correspond à la position de la source  $q$ . Malheureusement, bien que facile à mettre en œuvre, la méthode possède quelques inconvénients :

**Ambiguïté géométrique / Association paramétrique** (*Problème multi-source.*) Dans le plan, cette méthode conduit à des ambiguïtés géométriques. Ce phénomène s’observe sur le système (2.53) où il existe une seule solution unique ssi les paramètres intermédiaires de chacune des bases sont associés à une même source. Or il est impossible d’associer à une direction d’arrivée estimée sur une base un indice de source. On ne sait pas *a priori* comment associer les directions d’arrivée de chacune des stations. Un exemple simple consiste à considérer le cas 2 stations et 2 sources. Dans ce cas, la triangulation amène à 4 solutions possibles, 2 fausses et 2 bonnes, comme illustré sur la Fig.2.4. Il est à noter l’effet pandémique du problème. En effet, si l’on ajoute une troisième source nous avons alors 6 ambiguïtés. Ce qui rend complexe la détermination des positions réelles des sources. Le nombre d’ambiguïtés géométriques du système est un problème qui dépend des positions des sources vis-à-vis de la position des 2 bases. Un moyen simple d’enrayer le problème d’ambiguïtés dans un contexte de géolocalisation de type AoA/AoA est d’avoir  $L = 3$  bases. Mais le nombre de stations est un paramètre sur lequel on a pas toujours le contrôle. Il s’agit d’un problème combinatoire. En effet, c’est à l’opérateur qu’il incombe de tester chacune des associations possibles des paramètres qui lui sont transmis. Ce problème est équivalent à celui du commis-voyageur, l’opérateur est donc confronté à un problème NP complet, c.-à-d. plus le système possèdera de bases et de sources à géolocaliser, plus la solution du problème d’association paramétrique sera coûteuse.

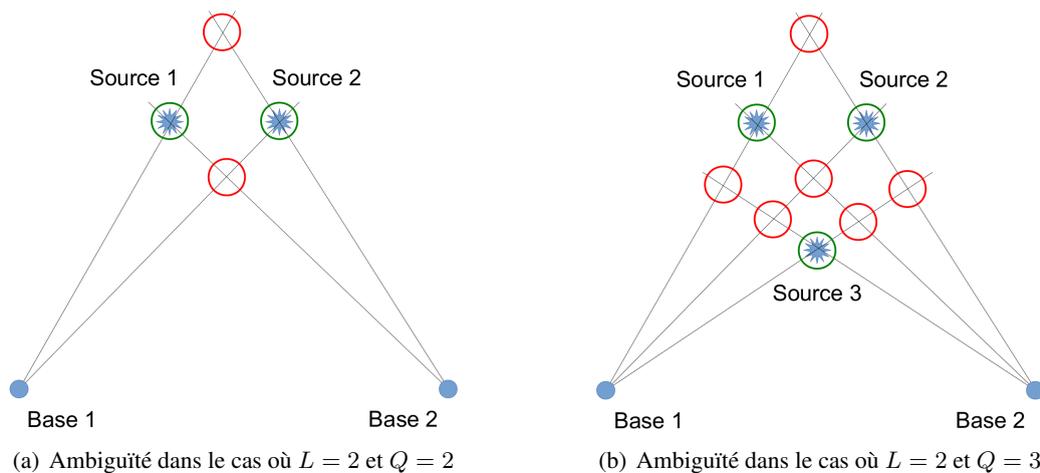


Figure 2.4: Visualisation des ambiguïtés pour deux cas simples, où la croissance du nombre d’ambiguïtés est fonction du nombre de sources

**Non intersection des paramètres intermédiaires** (*Problème multi-base.*) Ce problème ne se rencontre pas dans le cas où le système est composé de seulement deux stations. Or avec plus de deux stations il est statistiquement improbable que les paramètres se croisent deux à deux sur la position réelle de la source. Ceci est dû au fait que l’estimation des angles d’arrivée est erronée sur chacune des bases, comme illustré sur la Fig.2.5. Cependant l’étape d’estimation de la position par moindres carrés pondérés Eq.(2.52) résout en partie le problème, reste le coût calculatoire de la matrice de poids  $\mathbf{W}$ .

**Conditionnement géométrique des méthodes de triangulation** Le terme conditionnement géométrique signifie que la qualité d’une position estimée est conditionnée à la géométrie formée par les bases vis-à-vis d’une source. La méthode de triangulation possède un conditionnement géométrique. C’est-à-dire des zones de

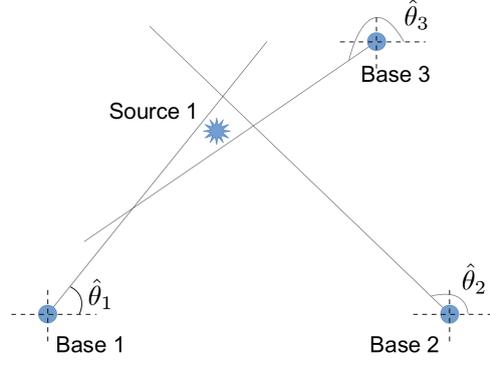


Figure 2.5: Non intersection des 3 estimations  $\hat{\theta}_i = \theta_i + \epsilon_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  où  $\epsilon_i$  est une erreur d'estimation indépendante entre chaque station indiquée par  $i$ .

dysfonctionnement qui dépend de la position des sources par rapport aux bases. Pour illustrer ceci nous allons considérer le cas simple  $Q = 1$  source et  $L = 2$  bases décrit à la Fig.2.6.

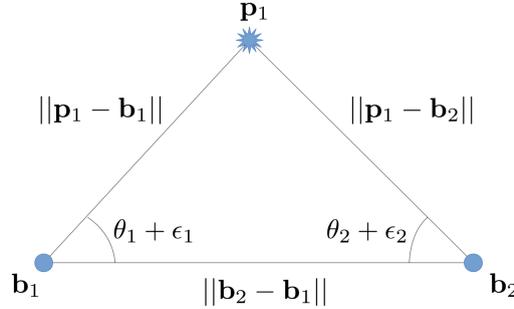


Figure 2.6: Position d'une source en présence de 2 bases

Pour une source,  $\hat{\theta}_1 = \theta_1 + \epsilon_1$  et  $\hat{\theta}_2 = \theta_2 + \epsilon_2$  sont les angles d'arrivée estimés respectivement sur la première et seconde base et  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont les erreurs d'estimation des incidences exactes qui sont respectivement  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de la source sur les deux bases. Nous considérons que ces erreurs ont un écart type respectant  $\sigma \ll \frac{\pi}{2}$ . En considérant une calibration parfaite, asymptotiquement pour  $RSB \rightarrow \infty$  et  $N \rightarrow \infty$  nous avons  $\sigma \rightarrow 0$ . Grâce au système (2.53) et à la loi des sinus nous pouvons écrire que :

$$\|p_1 - b_1\| = \frac{\|b_2 - b_1\| \sin(\theta_2 + \epsilon_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2 + \epsilon_1 + \epsilon_2)}. \quad (2.54)$$

De plus d'après le théorème d'Al-Kashi (également nommé théorème de Pythagore généralisé) nous avons :

$$\|p_1 - b_2\| = \sqrt{\|p_1 - b_1\|^2 + \|b_2 - b_1\|^2 - 2\|p_1 - b_1\|\|b_2 - b_1\| \cos(\theta_1 + \epsilon_1)}. \quad (2.55)$$

Nous avons alors deux cas de figure :

1. Si la source se rapproche de la droite formée par les deux bases, nous avons  $\theta_1$  et  $\theta_2 \rightarrow 0$ , alors l'Eq.(2.55) devient asymptotiquement :

$$\|p_1 - b_2\| = \sqrt{\|p_1 - b_1\|^2 + \|b_2 - b_1\|^2 - 2\|p_1 - b_1\|\|b_2 - b_1\|}. \quad (2.56)$$

Nous avons deux degrés de liberté ( $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ ), on définit alors trois comportements pour l'Eq.(2.54) :

- (a) Cas où  $\epsilon_2 = 0$  et  $|\epsilon_1| > \sigma$  :  $\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{b}_1\| = 0$  ;
- (b) Cas où  $|\epsilon_2| > \sigma$  et  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  :  $\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{b}_1\| = \infty$  ;
- (c) Cas où  $|\epsilon_2| > \sigma$  et  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  :  $0 < \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{b}_1\| < \infty$ .

Donc dans le cas limite où la source se trouve sur cette droite nous avons  $0 \leq \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{b}_1\| \leq \infty$  ce qui entraîne  $0 \leq \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{b}_2\| \leq \infty$ . La position est indéfinie et la solution possède une variance infinie.

2. Si la source s'éloigne de la droite formée par les deux bases, nous avons  $\theta_1$  et  $\theta_2 \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ , alors l'Eq.(2.55) devient asymptotiquement :

$$\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{b}_2\| = \sqrt{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|^2}. \quad (2.57)$$

L'Eq.(2.54) possède une grande variation du fait que le dénominateur varie autour de zéros. Nous avons donc  $0 < \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{b}_1\| \leq \infty$  et  $0 < \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{b}_2\| \leq \infty$ . On s'aperçoit que la solution possède une variance également infinie.

Cependant, le deuxième cas de figure possède un deuxième problème qui lui n'est pas lié au problème de conditionnement géométrique sus-cité. En effet, les deux bases étant très proches vis-à-vis de la distance de la source, le vecteur directeur de la propagation d'onde possède alors une différence d'angle très faible entre les deux stations. Asymptotiquement, le front d'onde est plan sur les deux bases, ce qui empêche de déterminer la distance de la source.

Pour illustrer ce phénomène, nous avons tracé le REQM de la position estimée d'une source pour trois cas de conditionnement sur la Fig.2.7. Nous avons représenté le schéma du contexte des trois cas : le premier en vert sur lequel la source est bien positionnée face aux deux bases, un second en rouge où on se trouve dans le premier cas de dysfonctionnement où l'angle de la source est proche de  $180^\circ$  et un dernier cas en magenta correspondant au deuxième cas de dysfonctionnement où l'angle de la source est proche de  $0^\circ$ .

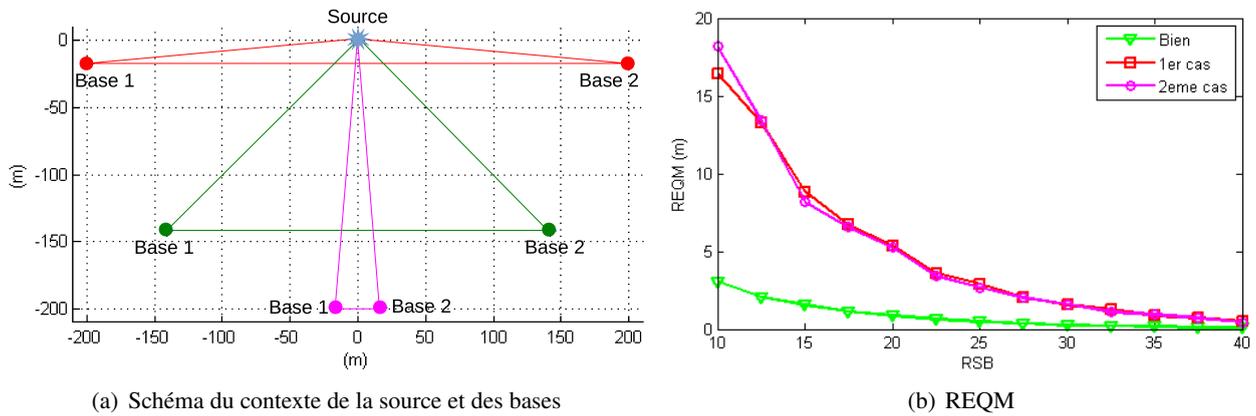


Figure 2.7: Exemple de conditionnement géométrique : en vert bien conditionné, en rouge premier et en vert le deuxième cas de mauvais conditionnement.

### 2.2.1.2 Méthodes par temps d'arrivée (TDoA/TDoA)

Les méthodes par temps d'arrivée utilisent les TDoA entre deux bases et les sources pour déterminer la position des sources [PNMG08], [LDBI07]. Elles sont dites paraboliques, car elles consistent à positionner la source sur

le croisement des paraboles formées par les lignes de TDoA inter-base, voir Fig.2.8. Les algorithmes utilisant les TDoA doivent résoudre le système d'équations suivant :

$$\hat{\mathbf{p}}_q \text{ tel que } \Delta\hat{\tau}_{l,v}(\mathbf{p}_q) = \frac{\|\hat{\mathbf{p}}_q - \mathbf{b}_l\| - \|\hat{\mathbf{p}}_q - \mathbf{b}_v\|}{c} \quad \forall (l, v) \in \llbracket 1; L \rrbracket^2, \quad (2.58)$$

où  $\Delta\hat{\tau}_{l,v}(\mathbf{p}_q)$  sont les TDoA estimés. Pour ces méthodes il est nécessaire d'avoir au minimum trois stations pour estimer la position d'une source  $\mathbf{p}_q$ . Mais les stations d'antennes peuvent être constituées d'une ou plusieurs antenne(s).

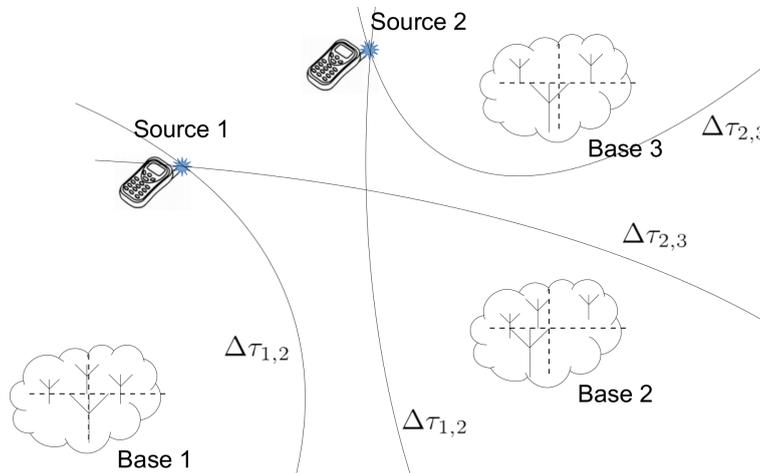


Figure 2.8: Représentation de la géolocalisation par TDoA/TTDoA pour  $Q = 2$  et  $L = 3$  où les sources sont situées au croisement des TDoA de la base 1 et 2 ( $\Delta\tau_{1,2}$ ) et de la base 2 et 3 ( $\Delta\tau_{2,3}$ )

Ces méthodes ont exactement les mêmes inconvénients que la triangulation. Elles ont le même principe d'ambiguïté géométrique avec une éventuelle non intersection des paramètres intermédiaires. Elle possèdent également des zones de dysfonctionnement. Ce conditionnement géométrique est cependant plus *souple* que pour la méthode de triangulation. En effet, la zone est toujours située sur la droite formée par les stations, mais seulement sur l'extérieur de celles-ci. Ceci peut se démontrer assez simplement avec l'inégalité triangulaire, où une faible erreur sur l'estimation du TDoA entraîne une forte disparité sur l'estimation de la position à proximité de cet axe tronqué par le segment de droite entre les deux bases. Sur la Fig.2.9 on peut voir la représentation de l'axe de dysfonctionnement dû à la géométrie du système, où en rouge et en bleu sont respectivement représentés le conditionnement géométrique de la triangulation et celui d'une approche purement temporelle. Le gros avantage par rapport à la triangulation est de ne pas avoir de mauvais conditionnement géométrique à l'intérieur du segment formé par les deux bases.

Cette approche sera relativement peu employée dans ce mémoire. En effet, l'estimation des TDoA par une méthode conventionnelle est très souvent biaisée lorsque l'estimation se fait à partir d'une antenne de chacune des bases [Gez07]. Cependant, ces méthodes ont l'avantage de fonctionner avec très peu d'antennes composant la base (une antenne par base est suffisant). Nous allons très peu aborder cette approche durant ce manuscrit excepté au dernière chapitre traitant des scénarios plus opérationnels.

### 2.2.1.3 Méthodes hybrides (AoA/TDoA)

L'approche hybride vise à associer différents types de paramètres intermédiaires [PNMG08], [BLNL08]. Elle a pour principe d'exploiter les AoA des bases avec les TDoA inter-bases pour déterminer la position des sources.

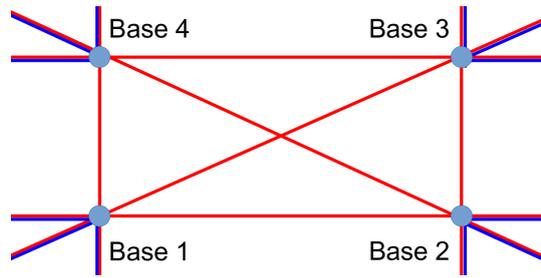


Figure 2.9: Représentation des axes de dysfonctionnement dû au conditionnement géométrique de la méthode de triangulation (en rouge) et de la méthode TDoA/TDoA (en bleu)

Cette approche permet d'associer les avantages de l'estimation de chaque paramètre intermédiaire. Les paramètres intermédiaires peuvent être employés de diverses manières, cependant une procédure est régulièrement utilisée. Elle vise à choisir une base de référence, cette base peut-être choisie en fonction du nombre de capteurs. De cette base de référence, on mesurera les AoA, puis les TDoA seront également mesurés par rapport à une autre base. Sur la Fig.2.11 on peut voir un schéma exploitant les TDoA et l'AoA, où les AoA utilisés sont ceux de la base 1 et les TDoA des sources sont calculés par rapport à la base 1.

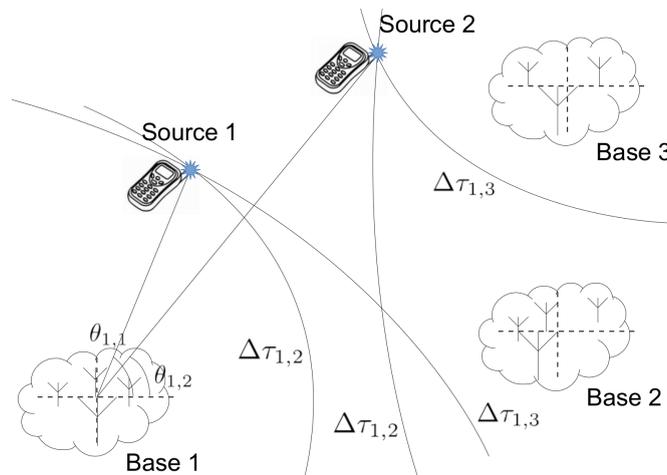


Figure 2.10: Système de géolocalisation par TDoA/TDoA pour  $Q = 2$  sources et  $L = 3$  bases où la base de référence est la première base. Les sources sont situées à l'intersection des droites AoA et hyperbols TDoA.

Les inconvénients des deux précédentes approches en 2 étapes sont ici en partie résolus. En effet, pour l'ambiguïté géométrique, on voit qu'il ne peut y avoir qu'un seul angle par source qui peut intersecter le croisement des TDoA, et ce quelque soit le nombre de sources. En effet, si les angles d'arrivée sont issus d'une unique base maîtresse, alors chaque croisement des courbes TDoA hyperbolique correspond *a priori* à un seul angle d'arrivée estimé à la base maîtresse. De même, en associant angle d'arrivée avec temps de propagation, on réduit le problème lié au mauvais conditionnement géométrique. En effet, la méthode n'utilise pas le principe de croisement de direction d'arrivée seul pour estimer la position, l'impact au voisinage des droites de dysfonctionnement lié au conditionnement géométrique de l'AoA est moindre. La zone de dysfonctionnement est voisine de celle des méthodes TDoA. Cependant il est à noter que le problème de non intersection des paramètres intermédiaires subsiste.

### 2.2.1.4 Limitations des approches en 2 étapes conventionnelles

Les approches en 2 étapes souffrent de plusieurs limitations [SNS95], [AW09] :

- Exploiter une approche à plusieurs étapes par le biais de paramètres intermédiaires est sous-optimal en termes de précision d'estimation et d'ambiguïté [SS89]. De telles approches n'exploitent pas le fait que chaque station reçoit le même signal plus ou moins retardé sur les différentes bases.
- En utilisant le réseau de manière parcellaire, les approches décentralisées conventionnelles se privent de l'exploitation du réseau global constitué de l'ensemble des stations. Ainsi la réduction du nombre théorique de capteurs disponibles a pour effet de diminuer les performances d'estimation ainsi que les capacités du système en terme d'identifiabilité du nombre de sources [AW07].
- Le fait de traiter le problème localement sur chaque station conduit à des problèmes d'association des paramètres [PDBSJ92]. C'est-à-dire qu'une fois les paramètres estimés puis transférés à l'UC, il convient d'associer au flot de paramètres incidents la source correspondante afin de réaliser la localisation.

La communauté scientifique a très tôt pris conscience que ces méthodes sont sous-optimales, dès 1983 [WK83], à notre connaissance. Mais centraliser les mesures pour gérer toutes les bases en même temps et ainsi prendre en compte toutes les informations du système simultanément est souvent jugé trop compliqué à mettre en œuvre. Il a alors été envisagé de s'orienter vers les méthodes 2-étapes qui étaient une bonne alternative [PNMG08], [LDB107]. Aujourd'hui, avec l'évolution technologique, la quantité de données à transmettre entre les bases peut être plus importante. De même la synchronisation inter-base n'est plus une réelle difficulté (en effet il est commode d'utiliser l'horloge GPS pour synchroniser en temps les stations éloignées).

### 2.2.2 Méthodes HR en une étape

Afin d'améliorer les performances des méthodes en 2 étapes [ON10], il a été envisagé très tôt de centraliser les informations vers l'UC pour exploiter au mieux l'information issue de toutes les antennes simultanément [Wei81], [WK85b], [SNS95]. Nous avons vu au chapitre précédent que les signaux peuvent ne pas être corrélés (non-cohérents), ou partiellement corrélés (partiellement cohérents) [KS04] ou enfin corrélés (cohérents) [ON10] entre les stations composant l'antenne globale. Il a alors été envisagé deux types de méthodes :

- Algorithmes faisant abstraction de la cohérence des signaux entre bases : à notre connaissance le premier algorithme traitant de la gestion de toutes les antennes simultanément date de 1985 par M. Wax et T. Kailath [WK85b]. Le principe est simple, l'algorithme estime le projecteur vers le sous-espace bruit sur chacune des  $L$  stations d'antennes et l'envoie à l'UC. Une simple somme incohérente sur le critère MUSIC de toutes les bases est réalisée :

$$\begin{cases} \{\hat{\mathbf{p}}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_Q\} = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} \mathcal{L}_{WK}(\mathbf{p}), \\ \mathcal{L}_{WK}(\mathbf{p}) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{a}_l^H(\mathbf{p}) \hat{\Pi}_l^\perp \mathbf{a}_l(\mathbf{p}), \end{cases} \quad (2.59)$$

où  $\hat{\Pi}_l^\perp$  est le projecteur vers le sous-espace bruit estimé à partir de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}_{ll}$ . Le minimum<sup>5</sup> de cette fonction coût donne la position des sources. L'avantage de cette approche est de passer par moins de paramètres intermédiaires que les méthodes classiques en 2 étapes. En effet une seule optimisation est faite à partir des projecteurs vers les sous-espaces bruit de chacune des bases. Cependant, cet algorithme ne répond pas réellement aux inconvénients des méthodes en 2 étapes :

- Les ambiguïtés seront exactement les mêmes que pour la triangulation ;

<sup>5</sup> Si le projecteur vers le sous-espace signal a été préféré, c'est le maximum de la fonction coût qui donne la position des sources.

- L’algorithme a également les mêmes zones de dysfonctionnement que la méthode triangulation classique ;
- Comme pour la triangulation, la méthode est liée à la qualité d’estimation du projecteur vers le sous-espace bruit  $\hat{\Pi}_l^\perp$  de chacune des bases.

Ces problèmes sont dus au fait que l’algorithme n’exploite pas les propriétés de dépendance entre les signaux reçus sur chacune des bases.

On pourra également citer la méthode des *Centralized* MODE de P. Stoica, *et al* en 1995 [SNS95] s’appuyant sur l’algorithme MODE [SS90b] ou plus récemment la méthode GMA pour *Global* MUSIC Approach parue en 2012 de J. Bosse, *et al* [Bos12]. Cette dernière approche exploite justement le fait que les bases reçoivent le même signal et élimine en partie les inconvénients de l’approche de M. Wax et T. Kailath. L’algorithme GMA sera d’autant plus efficace que les signaux sont BE sur l’antenne globale. Il est également intéressant de remarquer que l’algorithme GMA est un cas particulier des algorithmes DPD et LOST, que nous introduirons au prochain paragraphe, pour un facteur de décomposition  $K = 1$ .

- Algorithmes luttant contre l’effet large bande : l’exploitation de l’antenne globale peut être faite en rendant les signaux cohérents entre les bases composant l’antenne globale. En effet, si les signaux sont cohérents alors l’équation de l’observation globale (1.31) peut s’écrire :

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{q=1}^Q \frac{1}{B_q} \int_{\mathcal{B}_q} \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f) s_q(f, t) e^{2i\pi ft} df + \mathbf{n}(t), \quad (2.60)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \frac{1}{B_q} \int_{\mathcal{B}_q} \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}_q, f) \boldsymbol{\rho}_q s_q(f, t) e^{2i\pi ft} df + \mathbf{n}(t), \quad (2.61)$$

où  $\mathcal{B}_q$  est le support de la décomposition spectrale du  $q$ -ième signal et  $s_q(f, t)$  la décomposition fréquentielle instantanée de celle-ci. Donc dans le cas de signaux cohérents entre les bases du système on voit très clairement que le modèle de l’observation globale (2.61) fait apparaître la matrice de la structure angulaire  $\mathbf{U}(\mathbf{p})$  ainsi que la matrice de la structure temporelle  $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}, f)$ . Pour ce faire les algorithmes luttant contre l’effet LB utilisent principalement deux approches : une première exploitant une décomposition par banc de filtres et une deuxième exploitant la structure de décomposition des observations spatiotemporelles. Nous allons étudier ces deux approches de décomposition.

### 2.2.2.1 Approche par décomposition par banc de filtres : DPD

Le modèle du signal sur l’antenne globale est généralement large bande, c.-à-d. qu’il ne vérifie pas l’Eq.(1.33). L’objectif est ici d’appliquer des algorithmes adaptés au cas BE, comme la méthode MUSIC. Pour cela le signal reçu qui est LB est décomposé en sous-signaux BE. Une méthode pour y parvenir est de faire passer les signaux de l’observation globale dans un banc de filtres [WK85a], [DW92], [Lee94]. Si la largeur de bande de chacun des filtres est suffisamment étroite, il est alors possible de faire l’approximation bande étroite en sortie de chacun de ces filtres.

Sur la Fig.2.12 on donne un exemple des gabarits fréquentiels de  $K = 7$  filtres d’un banc de filtres n’utilisant pas de fenêtre d’apodisation. En effet, la mise en oeuvre du banc de filtres se fait par FFT de  $K$  points et le gabarit des filtres est la fenêtre d’apodisation. En présence d’un signal échantillonné à  $F_e$  la bande des signaux en sortie des filtres est de l’ordre de  $\frac{F_e}{K}$  et diminue lorsque le facteur  $K$  augmente.

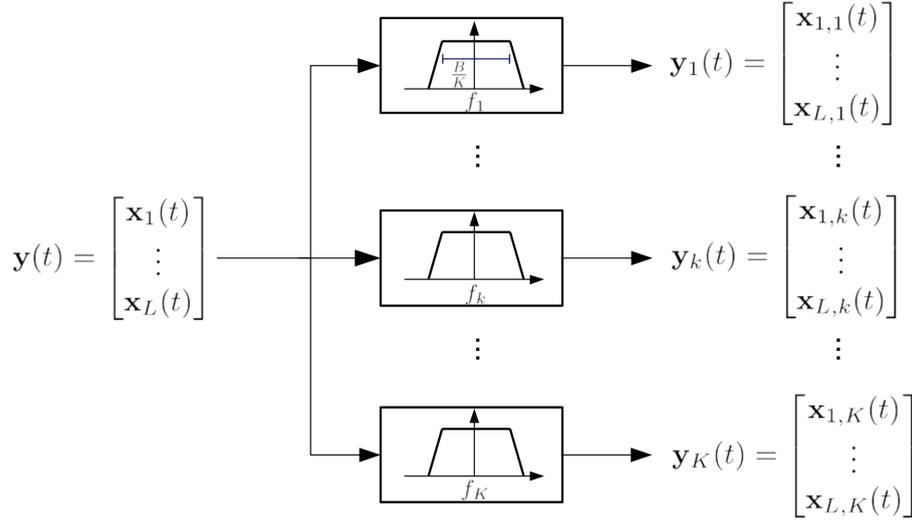


Figure 2.11: Le banc de filtres décompose le signal d'observation  $\mathbf{y}(t)$  de l'Eq.(1.31) en  $K$  sous-signaux bande étroite  $\mathbf{y}_k(t) \forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket$  ayant au maximum une largeur de bande  $\frac{B}{K}$ .

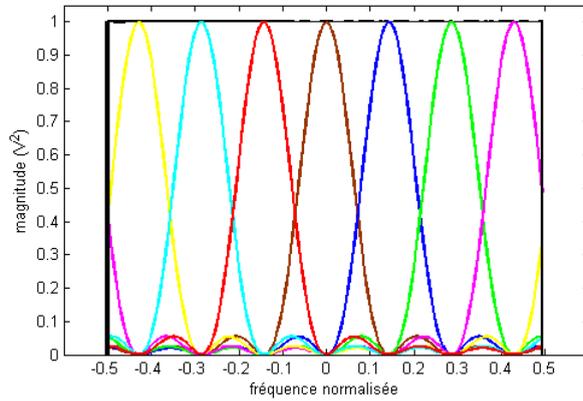


Figure 2.12: Réponse fréquentielle des différents filtres du banc de filtres pour  $K = 7$  en fréquence normalisée sans fenêtre d'apodisation. La courbe en noir représente la somme des différents gabarits fréquentiels.

Le DPD, pour *Direct Position Determination* [AW04], [Wei04], [AW09], a été introduit en 2004 par A. Amar et A. J. Weiss et utilise les signaux en sortie du banc de filtres. L'algorithme n'impose pas de contrainte sur les filtres employés. La décomposition doit être orthogonale, et ne doit pas créer ou supprimer de l'information, c.-à-d.  $\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k(t)$ . La largeur de bande des filtres (ou la largeur de bande équivalente) est de  $\frac{B}{K}$  où  $B$  est la largeur de bande des récepteurs. Se basant sur l'hypothèse BE (Eq.(1.29)) sur l'antenne globale, l'hypothèse BE est vérifiée dans un filtre lorsque :

$$\frac{B}{K} \times \Delta\tau_{\max} \rightarrow_{K \rightarrow \infty} 0. \quad (2.62)$$

Les signaux en sortie du banc de filtres sont BE si  $K$  est suffisamment élevé. En sortie du  $k$ -ième filtre, le signal s'écrit d'après l'Eq.(1.33) :

$$\mathbf{y}_k(t) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) s_{q,k}(t) + \mathbf{n}_k(t), \quad (2.63)$$

où  $s_{q,k}(t)$  et  $\mathbf{n}_k(t)$  sont respectivement le signal  $s_q(t)$  et le bruit filtrés par le  $k$ -ième filtre, et où comme défini à l'Eq.(1.33) nous avons :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) = \mathbf{V}(\mathbf{p}_q, f_k) \boldsymbol{\rho}_q, \\ \mathbf{V}(\mathbf{p}_q, f_k) = \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_k). \end{cases} \quad (2.64)$$

La méthode DPD applique alors le critère de l'algorithme HR MUSIC en sortie de chaque filtre du banc de filtres et réalise une somme incohérente de chacun de ces critères. Les paramètres inconnus à estimer sont donnés par  $\boldsymbol{\eta} = \{(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q) | q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\}$ . Finalement le critère du DPD est :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}} = \arg \min_{(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^L} \mathcal{L}_{DPD'}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}), \\ \mathcal{L}_{DPD'}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^K \frac{\mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k) \hat{\boldsymbol{\Pi}}_k^\perp \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k)}{\mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k) \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k)}. \end{cases} \quad (2.65)$$

Avec  $\mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k) \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_k) = \sum_{l=1}^L |\rho_l|^2 M_l$  et  $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_k^\perp$  le projecteur estimé vers le sous-espace bruit de l'antenne globale en sortie du  $k$ -ième filtre du banc de filtres déterminer grâce à la SCM de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_{\mathbf{y}_k} = \mathbb{E}[\mathbf{y}_k(t) \mathbf{y}_k^H(t)]$ . La matrice de covariance est de rang  $R = \sum_{q=1}^Q \ell_q$ , où  $\ell_q$  est le nombre de TDoA distinct<sup>6</sup>. Ce problème à  $2L + 2$  dimensions réelles est complexe à résoudre. Cependant grâce à la structure du vecteur directeur du DPD (2.64), il est possible d'écrire le critère DPD sous la forme :

$$\mathcal{L}_{DPD'}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{\boldsymbol{\rho}^H \sum_{k=1}^K \left( \mathbf{V}^H(\mathbf{p}, f_k) \hat{\boldsymbol{\Pi}}_k^\perp \mathbf{V}(\mathbf{p}, f_k) \right) \boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p}, f_k) \mathbf{V}(\mathbf{p}, f_k) \boldsymbol{\rho}}, \quad (2.66)$$

$$= \frac{\boldsymbol{\rho}^H \sum_{k=1}^K \hat{\mathbf{Q}}_k(\mathbf{p}) \boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{M} \boldsymbol{\rho}}, \quad (2.67)$$

avec  $\hat{\mathbf{Q}}_k(\mathbf{p})$  la forme quadratique dépendant uniquement de la position  $\mathbf{p}$  et le dénominateur ne dépendant ni des positions, ni des fréquences où la matrice  $\mathbf{M}$  est définie par :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_L \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

En utilisant la propriété du quotient de Rayleigh généralisé (Annexe 8.1) nous avons :

$$\mathcal{L}_{DPD}(\mathbf{p}) = \min_{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{C}^L} \mathcal{L}_{DPD'}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = \lambda_{\min} \left\{ \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=1}^K \hat{\mathbf{Q}}_k(\mathbf{p}) \right\}. \quad (2.69)$$

Finalement l'algorithme DPD tel que rencontré dans [Wei04], [AW04], [AW09], s'écrit :

$$\{\hat{\mathbf{p}}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_Q\} = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} \mathcal{L}_{DPD}(\mathbf{p}), \quad (2.70)$$

réduisant ainsi la complexité de l'optimisation sur le critère à 2 dimensions.

L'algorithme du DPD a les avantages suivants par rapport aux méthodes en 2 étapes :

- Le DPD exploite toutes les antennes du système de manière conjointe.

<sup>6</sup>Voir le détail du calcul du rang de la matrice de covariance en Annexe 8.7

- L'algorithme utilise conjointement les paramètres de ToA et AoA de manière complètement implicite et transparente pour l'utilisateur. La position de la source est estimée via les AoA et les TDoA conjointement via la forme quadratique  $\hat{\mathbf{Q}}_K(\mathbf{p})$  Eq.(2.67) faisant dépendre la position des fréquences grâce à la matrice  $\Phi(\mathbf{p}, f)$ .
- Ne passant plus par des paramètres intermédiaires, il n'y a plus de problème d'association de paramètres vis-à-vis des sources à l'UC, problème combinatoire créant les ambiguïtés mathématiques des méthodes en 2 étapes. Le problème étant combinatoire cela rendait complexe la solution [PDBSJ92].
- Le DPD possède des performances moins sensible aux variations du RSB sur les différentes stations d'antennes dû à l'aspect coopératif entre les bases.

Mais le DPD a les inconvénient suivants :

- La somme incohérente des critères MUSIC sur toutes les sous-bandes est une solution sous-optimale. En effet, elle nécessite la présence du signal dans chacune des sous-bandes et idéalement de même puissance au risque de ne plus fonctionner dans le pire des cas ou de rendre l'algorithme inefficace [WK85a].
- L'exploitation du TDoA nécessite la décomposition du signal en au moins  $K = 2$  sous canaux, sinon seule l'information des AoA est exploitée par l'algorithme. En effet, sans la somme sur les fréquences dans la forme quadratique  $\hat{\mathbf{Q}}_K(\mathbf{p})$  Eq.(2.67), il est alors impossible de différencier les phases liées aux temps de propagation de la structure  $\Phi(\mathbf{p}, f)$  et les phases liées aux atténuations complexes  $\rho$ .

### 2.2.2.2 Approche spatiotemporelle

L'approche spatiotemporelle a pour objectif de pallier les inconvénients de l'algorithme DPD en estimant conjointement à la position les fréquences des sources. Cette approche utilise l'observation de l'antenne globale à différents temps d'intervalle. L'objectif est d'offrir un algorithme capable d'estimer les fréquences d'un émetteur et donc de ne pas faire d'hypothèse sur l'occupation spectrale des signaux. L'observation spatiotemporelle reprend le principe de l'algorithme MUSIC fréquentiel, qui permet d'estimer les fréquences d'un signal stationnaire, ou d'appliquer une estimation de direction d'arrivée dans un contexte large bande [Bie83], [BG88], [Gre94], [GB95], [FCT00]. D'après (1.33), l'observation spatiotemporelle sur  $K$  décalages s'écrit :

$$\mathbf{z}(t) = [\mathbf{y}^T(t), \mathbf{y}^T(t + T_e), \dots, \mathbf{y}^T(t + (K - 1)T_e)]^T. \quad (2.71)$$

En considérant le vecteur composé des différents instants d'échantillonnage du signal  $q$  :

$$\mathbf{s}_{K,q}(t) = \begin{pmatrix} s_q(t) \\ \vdots \\ s_q(t + (K - 1)T_e) \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

et en considérant  $\mathbf{U}_l(\mathbf{p})$  la  $l$ -ième colonne de la matrice  $\mathbf{U}(\mathbf{p})$  (1.32). Il est alors possible de réécrire l'observation  $\mathbf{z}(t)$  par :

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{l=1}^L \mathbf{s}_{K,q}(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \otimes \mathbf{U}_l(\mathbf{p}_q) \rho_{l,q} + \mathbf{n}(t). \quad (2.73)$$

En considérant la projection du signal sur la base orthogonale de Fourier, nous avons :

$$\mathbf{s}_{K,q}(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) = \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{c}(f_{q,k}) s_{q,k}(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)), \quad (2.74)$$

avec :

$$f_{q,k} = \frac{k-1}{K} F_e, \quad \mathbf{c}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2i\pi f T_e} \\ \vdots \\ e^{2i\pi(K-1)f T_e} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s_{q,k}(t) = \frac{1}{K} \mathbf{c}^H(f_{q,k}) \mathbf{s}_{K,q}(t). \quad (2.75)$$

Le signal  $s_{q,k}(t)$  a une largeur de bande dépendante du temps d'observation, dû au principe d'incertitude de Heisenberg. La bande équivalente du signal est de  $\frac{F_e}{K}$ . Donc si  $K \gg 1$  alors le produit TB (1.29) sera très faible par rapport à 1. On pourra alors admettre l'hypothèse BE :

$$s_{q,k}(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) \approx s_{q,k}(t) e^{-2i\pi f_{q,k} \tau_l(\mathbf{p}_q)}. \quad (2.76)$$

Alors se basant sur le modèle de l'observation sur l'antenne globale donné en (1.31) et en considérant que le nombre de décompositions temporelles est suffisamment grand pour effectuer l'hypothèse bande étroite, le modèle de l'observation spatiotemporelle s'écrit :

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^{K_q} \sum_{l=1}^L \mathbf{c}(f_k) \otimes \mathbf{U}_l(\mathbf{p}_q) \rho_{l,q} e^{-2i\pi f_{q,k} \tau_l(\mathbf{p}_q)} s_{q,k}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (2.77)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k}) s_{q,k}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (2.78)$$

où

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k}) = \mathbf{c}(f_{q,k}) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k}), \quad (2.79)$$

$$= \mathbf{B}(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) \rho_q, \quad (2.80)$$

avec

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) = \mathbf{c}(f_{q,k}) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \Phi(\mathbf{p}_q, f_{q,k}). \quad (2.81)$$

On peut voir sur le modèle (2.78) que le signal se décompose en  $K_q$  sous-signaux, avec  $1 \leq K_q \leq K$ . On aura l'égalité  $K_q = 1$  si le  $q$ -ième signal respecte les conditions BE et l'égalité  $K_q = K$  si le signal occupe toute la bande de réception. Le modèle s'adaptant automatiquement à la structure fréquentielle du signal, il est adaptatif, ce qui résout l'inconvénient de l'algorithme du DPD. Les paramètres du critère spatiotemporel sont l'ensemble des 3-uplet  $\boldsymbol{\eta} = \{(\mathbf{p}_q, \mathcal{F}_q, \rho_q) \mid q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\}$  où l'ensemble  $\mathcal{F}_q = \{f_{q,k} \mid 1 \leq k \leq K_q\}$  est composé des  $K_q$  fréquences, alors l'algorithme spatiotemporel est donné par :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}} = \arg \min_{(\mathbf{p}, f, \rho) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^L} \mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}, f, \rho), \\ \mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}, f, \rho) = \frac{\mathbf{b}^H(\mathbf{p}, \rho, f) \hat{\Pi}^\perp \mathbf{b}(\mathbf{p}, \rho, f)}{\mathbf{b}^H(\mathbf{p}, \rho, f) \mathbf{b}(\mathbf{p}, \rho, f)}. \end{cases} \quad (2.82)$$

Avec  $\hat{\Pi}^\perp$  le projecteur vers le sous-espace bruit estimé déterminé grâce à la SCM spatiotemporelle de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_z = \mathbb{E}[\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^H(t)]$  de rang  $R = \sum_{q=1}^Q K_q \ell_q$ , où  $\ell_q$  est le nombre de TDoA distinct<sup>7</sup> et où  $\mathbf{b}^H(\mathbf{p}, \rho, f) \mathbf{b}(\mathbf{p}, \rho, f) = K \times \sum_{l=1}^L |\rho_l|^2 M_l$ . Ce critère à  $3 + 2L$  dimensions réelles revient à trouver  $2L \times \sum_{q=1}^Q K_q$  minima, ce qui rend cette approche directe extrêmement complexe. Le critère spatiotemporel (2.80) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}, f, \rho) = \frac{\rho^H \mathbf{B}^H(\mathbf{p}, f) \hat{\Pi}^\perp \mathbf{B}(\mathbf{p}, f) \rho}{\rho^H \mathbf{B}^H(\mathbf{p}, f) \mathbf{B}(\mathbf{p}, f) \rho}, \quad (2.83)$$

$$= \frac{1}{K} \frac{\rho^H \mathbf{B}^H(\mathbf{p}, f) \hat{\Pi}^\perp \mathbf{B}(\mathbf{p}, f) \rho}{\rho^H \mathbf{M} \rho}, \quad (2.84)$$

<sup>7</sup>Voir le détail du calcul du rang de la matrice de covariance spatiotemporelle en Annexe 8.8

où la matrice  $\mathbf{M}$  est définie en (2.68). En utilisant le critère du quotient de Rayleigh généralisé (Annexe 8.1), où la minimisation du critère spatiotemporel de l'Eq.(2.82) en fonction de l'atténuation  $\rho$  donne :

$$\min_{\rho \in \mathbb{C}^L} \mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}, f, \rho) = \frac{1}{K} \lambda_{\min} \left\{ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^H(\mathbf{p}, f) \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{B}(\mathbf{p}, f) \right\} = \mathcal{L}_{ST}(\mathbf{p}, f), \quad (2.85)$$

où  $\mathcal{L}_{ST}(\mathbf{p}, f)$  est le critère spatiotemporel. Donc pour estimer les couples  $(\hat{\mathbf{p}}_q, \hat{f}_{q,k})$  on utilise l'algorithme :

$$\left\{ (\hat{\mathbf{p}}_q, \hat{f}_{q,k}) \mid (q, k) \in \llbracket 1; Q \rrbracket \times \llbracket 1; K_q \rrbracket \right\} = \arg \min_{(\mathbf{p}, f) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} \mathcal{L}_{ST}(\mathbf{p}, f), \quad (2.86)$$

réduisant ainsi la complexité du problème. Cependant l'approche est encore très coûteuse et revient à chercher  $2 \times \sum_{q=1}^Q K_q$  minima sur un problème à 3 dimensions. L'algorithme LOST a pour but de réduire la complexité du problème tout en préservant la propriété d'adaptabilité aux spectres des signaux.

### 2.2.2.2.1 LOST : Localization by Space-Time

LOST, pour *LOcalization by Space-Time* [BFL11], [BFL13], a pour but de simplifier l'approche spatiotemporelle (2.86) en diminuant la complexité de ce dernier. Ainsi, en utilisant (2.80) et (2.81), il est possible d'écrire le vecteur directeur spatiotemporel comme suit :

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}, \rho, f) = \mathbf{c}(f) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}) \mathbf{\Phi}(\mathbf{p}, f) \rho, \quad (2.87)$$

$$= \mathbf{W}(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{p}, f, \rho), \quad (2.88)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{W}(\mathbf{p}) = \mathbf{I}_K \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}), \\ \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{p}, f, \rho) = (\mathbf{c}(f) \otimes \tilde{\rho}(\mathbf{p}, f, \rho)), \\ \tilde{\rho}(\mathbf{p}, f, \rho) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{p}, f) \rho. \end{cases} \quad (2.89)$$

Le critère spatiotemporel (2.82) peut alors s'écrire de la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}, f, \rho) = \frac{\tilde{\mathbf{c}}^H(\mathbf{p}, f, \rho) \mathbf{W}^H(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{W}(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{p}, f, \rho)}{\tilde{\mathbf{c}}^H(\mathbf{p}, f, \rho) \mathbf{W}^H(\mathbf{p}) \mathbf{W}(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{p}, f, \rho)}, \quad (2.90)$$

$$= \frac{\tilde{\mathbf{c}}^H(\mathbf{p}, f, \rho) \mathbf{W}^H(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{W}(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{p}, f, \rho)}{\tilde{\mathbf{c}}^H(\mathbf{p}, f, \rho) (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{p}, f, \rho)}, \quad (2.91)$$

où  $\mathbf{M}$  est définie en (2.68). Donc en utilisant le quotient de Rayleigh généralisé (Annexe 8.1), nous avons :

$$\mathcal{L}_{LOST}(\mathbf{p}) = \min_{(f, \rho) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^L} \mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}, f, \rho) = \lambda_{\min} \left\{ (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{W}^H(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{W}(\mathbf{p}) \right\}, \quad (2.92)$$

où  $\mathcal{L}_{LOST}(\mathbf{p})$  est le critère utilisé par l'algorithme LOST. On effectue alors l'estimation de la position des sources en effectuant :

$$\{\hat{\mathbf{p}}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_Q\} = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} \mathcal{L}_{LOST}(\mathbf{p}). \quad (2.93)$$

On peut voir ainsi que la complexité a été considérablement diminuée. En effet, l'algorithme LOST consiste à chercher  $Q$  minima sur un espace de dimension 2. Les avantages de cette approche sont :

- Les avantages du premier, troisième et quatrième point de l'algorithme DPD que sont l'exploitation conjointe des antennes de l'antenne globale, non problème d'associativité des paramètres et ainsi que l'exploitation des observations conjointes entre les stations, sont également vérifiés pour l'algorithme LOST.

- L'avantage par rapport au DPD est l'adaptativité au spectre fréquentiel des sources, rendant l'algorithme capable de traiter toutes les sources quelque soit leur occupation spectrale.

Cependant LOST possède un certain nombre de défauts :

- On constate que l'exploitation du TDoA contenu dans la matrice  $\Phi(\mathbf{p}, f)$  est sacrifiée au profit de la diminution de la complexité de l'optimisation. LOST n'exploite donc pas toutes les informations issues de l'antenne globale rendant l'algorithme sous-optimal vis-à-vis de celle-ci.
- Du fait de la non exploitation des TDoA, l'algorithme est donc plus sensible au mauvais conditionnement géométrique.

## 2.3 Conclusions

Cet état de l'art montre deux stratégies pour appréhender la géolocalisation de sources non coopératives. La première dite en 2 étapes qui représente l'ensemble des méthodes usuellement employées. Ces approches sont sous-optimales et souffrent de différents problèmes liés à la double estimation (paramètres intermédiaires + paramètres d'intérêts). Puis une deuxième stratégie visant à exploiter toutes les antennes de manière simultanée afin de géolocaliser directement les sources. On a vu que ces dernières méthodes résolvent quasiment tous les inconvénients liés aux méthodes en 2 étapes.

L'un des principaux enjeux des méthodes travaillant sur l'antenne globale est de pouvoir exploiter toutes les informations issues de celle-ci. En effet, du fait de sa composition constituée de plusieurs stations éloignées entre elles, l'observation globale possède une information de diversité angulaire (due à la composition des stations d'antennes locales avec front d'onde plan) et temporelle (due à l'éloignement de ces dernières) permettant d'avoir une information sur la distance. Le but étant d'exploiter au mieux ces deux informations rendant l'estimation de la position des sources optimale vis-à-vis de l'antenne globale.

Nous avons vu qu'il existe dans l'état de l'art deux stratégies. Celles ne prenant pas en compte la corrélation (ou la cohérence) des signaux entre stations ([WK85b], [SNS95], [Bos12]) rendant ces méthodes sous-optimales et ne permettant pas d'exploiter toute l'information issue de l'antenne globale. Puis la stratégie développée par les algorithmes DPD et LOST qui vise à rendre les signaux BE (ou cohérents) entre station à l'aide d'une décomposition du signal en sous-signaux bande étroite.

Ainsi nous avons vu que l'algorithme DPD utilise un banc de filtres pour rendre les signaux cohérents entre stations exploitant ainsi la matrice structurelle angulaire  $\mathbf{U}(\mathbf{p})$  et la matrice structurelle temporelle  $\Phi(\mathbf{p}, f)$  de l'Eq.(2.61). Mais la solution du banc de filtres rend la méthode sous-optimale, notamment avec la nécessité de connaître *a priori* le support spectral des sources. Donc pour l'algorithme LOST une décomposition à l'aide d'une observation spatiotemporelle a été préférée rendant cette méthode adaptative au support spectral des sources. Mais dans le but de simplifier la complexité du spatiotemporel LOST n'exploite plus la matrice  $\Phi(\mathbf{p}, f)$  contenant l'information temporelle, ce qui est dommageable. En effet, l'information temporelle des TDoA sur l'antenne globale est importante pour augmenter la robustesse aux ambiguïtés. Dans ce manuscrit nous allons répondre à ce problème par 2 algorithmes différents (LOST-FIND et TARGET).



## Chapter 3

# Erreur de modélisation BE des méthodes en 1 étape de type HR : calcul du biais

Dans cette partie nous allons étudier le comportement des algorithmes 1-étape luttant contre l'effet large bande pour appliquer une technique BE. Ces méthodes ont pour point commun de décomposer le signal de l'observation globale en  $K$  sous-signaux dans lesquels la largeur de bande a été diminuée d'un facteur  $K$ . Ces méthodes supposent alors que les sous-signaux sont bande étroite. Cette dernière condition est vérifiée uniquement si le facteur  $K$  est suffisamment grand. Cependant, il se peut que le facteur de décomposition  $K$  ne soit pas suffisamment grand pour des raisons calculatoires. En effet, plus  $K$  est grand plus les algorithmes sont coûteux en temps de calcul. Dans la Sec.4.2 nous montrons qu'augmenter  $K$  pour un nombre d'observations temporelles  $N$  fixe, a un impact négatif sur la variance d'estimation de la position des sources. Selon l'état de l'art, 2 approches d'algorithme en 1 étape existent :

- L'approche du DPD qui canalise le signal reçu en plusieurs sous-bandes supposées BE ;
- L'approche de LOST qui utilise une décomposition spatio-fréquentielle d'une observation spatiotemporelle.

Lorsque le nombre  $K$  de sous-canaux est insuffisant, les signaux en sortie d'un canal ne seront pas tout à fait BE : il reste un effet LB que nous nommons effet large bande résiduel. L'objectif de ce chapitre est donc d'étudier les performances de ces méthodes lorsque le facteur de décomposition  $K$  n'est pas suffisamment grand. Finalement on pourra également ajouter une troisième approche, celui de l'algorithme GMA correspondant au cas particulier où le facteur de décomposition  $K = 1$  des algorithmes DPD et LOST.

### 3.1 Analyse qualitative de l'effet large bande sur deux capteurs éloignés

Nous rappelons ici que le modèle du signal considéré dans ce chapitre est celui de l'Eq.(1.31). Pour simplifier cette approche qualitative nous allons considérer que l'antenne globale est composée de bases possédant une seule antenne à la position de la base  $\mathbf{b}_l \forall l \in \llbracket 1; L \rrbracket$ . De même, pour des raisons de simplicité nous considérerons que les atténuations complexes sont identiques et égales à 1 ( $\rho_{l,q} = 1 \forall (l, q) \in \llbracket 1; L \rrbracket \times \llbracket 1; Q \rrbracket$ ). Alors le signal non bruité reçu sur la  $l$ -ième base s'écrit :

$$x_l(t) = \sum_{q=1}^Q s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)). \quad (3.1)$$

D'après l'Eq.(1.28), l'approximation bande étroite est vérifiée ssi le produit TB ( $= B \times \Delta\tau_q$ ) respecte la condition suivante  $\forall q \in \llbracket 1; Q \rrbracket$  :

$$B \times \Delta\tau_q = 0, \quad (3.2)$$

avec  $\Delta\tau_q < \Delta\tau_{\max}$  défini en Eq.(1.28). Nous avons remarqué que cette condition est difficilement vérifiée. Toutefois, il existe des positions de sources par rapport aux bases où  $\Delta\tau_q \approx 0$ . La condition (3.2) est alors vérifiée dans une zone plus ou moins large autour de ces positions BE. Nous considérons ainsi les cas suivant :

- 1er cas : Les sources sont dans une zone à équidistance des centres de phase des bases. Ce cas permettant de quasiment vérifier (3.2) où le signal est BE vis-à-vis de l'antenne globale. D'après (1.33), les différentes observations faites sur les  $L$  bases s'écrivent dans ce cas, de la manière suivante :

$$x_l(t) \approx \sum_{q=1}^Q s_q(t) e^{-2i\pi f_0 \tau_l(\mathbf{p}_q)}, \quad (3.3)$$

où  $B \times \Delta\tau_q \ll 1$ . Il y a stricte égalité lorsque les sources sont à équidistance des bases de l'antenne globale<sup>1</sup>. Alors nous avons pour le pire des cas, c.-à-d. en considérant les deux stations les plus éloignées de l'antenne globale et la source la plus éloignée, le respect de la condition de l'hypothèse BE :

$$\max_{(q,l,v) \in \llbracket 1;Q \rrbracket \times \llbracket 1;L \rrbracket^2} |\tau_l(\mathbf{p}_q) - \tau_v(\mathbf{p}_q)| = \Delta\tau_q \ll \Delta\tau_{\max}, \quad (3.4)$$

où  $\Delta\tau_{\max}$  ne dépend pas de la position des sources. Alors si nous considérons le produit scalaire entre les deux observations pour la source  $q$  donnant le TDoA maximal sur l'antenne globale, nous avons :

$$x_l(t) \times x_v^*(t) \approx |s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q))|^2 e^{-2i\pi f_0 \Delta\tau_q}, \quad (3.5)$$

si on considère des signaux en bande de base, la phase du produit scalaire sera nulle ;

- 2ème cas : L'hypothèse BE n'est pas respectée sur l'antenne globale. Ce cas correspond à des scénarii bases/sources bien plus généraux. Dans ces conditions, nous n'avons plus  $\Delta\tau_{\max} \ll \tau_{\max}$  et la condition pour respecter l'hypothèse BE n'est plus vraie. Dans ces conditions, l'approximation du signal reçu sur la  $l$ -ième base faite à l'Eq.(3.3) n'est plus vraie également. Nous avons alors pour produit scalaire des observations pour la source  $q$  correspondant au TDoA maximal du système :

$$x_l(t) \times x_v^*(t) = s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) s_q^*(t - \tau_v(\mathbf{p}_q)) = \tilde{s}_q(t) \tilde{s}_q^*(t - \Delta\tau_q), \quad (3.6)$$

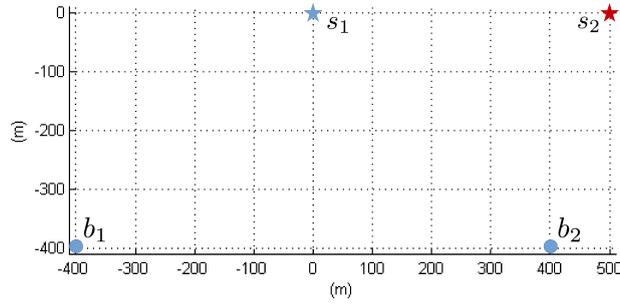
où  $\tilde{s}_q(t) = s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q))$  et entraînant une différence de phase non constante et un écart de  $\Delta\tau_q$  entre les deux amplitudes des observations sur la base  $l$  et  $v$  à l'instant  $t$ .

Ainsi une antenne globale est intrinsèquement LB<sup>2</sup>, mais l'effet LB évolue en fonction des scénarii de position bases/sources. Il est ainsi relativement facile d'éviter ce problème par un placement judicieux des bases et des sources. Par exemple dans les parties simulations que l'on peut trouver dans [AW04], [AW07], [BFL11], [BFL13], les bases et les sources ont été placées afin de minimiser l'impact de l'effet LB. Une illustration simple peut permettre de visualiser l'effet large bande sur l'antenne globale, elle est donnée sur la Fig.3.1 avec un cas deux sources. Une première  $s_1$  (en bleu) placée à équidistance des deux bases  $b_1$  et  $b_2$  de position  $\mathbf{p}_1 = [0, 0]^T$  m et une seconde  $s_2$  (en rouge), a une position que l'on décale sur les abscisses telle que  $\mathbf{p}_2 = [500, 0]^T$  m.

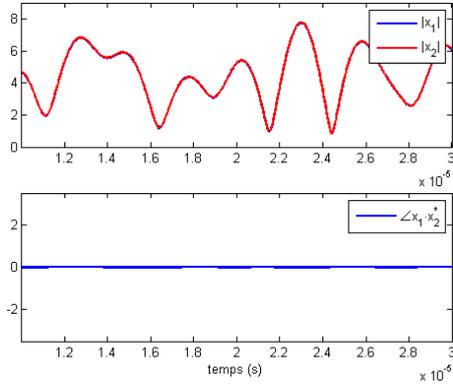
Si la source est équidistante des bases Fig.3.1(b), nous avons par conséquent un TDoA nul entraînant un produit TB nul. Le système respecte donc l'hypothèse BE. On peut observer clairement que la phase liée au produit scalaire (3.5) est constante et nulle. En considérant la source  $s_2$  très excentrée par rapport aux deux bases, le TDoA est non nul et non négligeable rendant le produit TB non négligeable devant 1. On observe alors sur la Fig.3.1(c) le cas d'une source fortement excentrée. On voit très clairement que la phase liée au produit scalaire (3.6) est fortement variable et que cette variation est non négligeable. Il est à noter que le décalage temporel entre les valeurs absolues  $|x_1(t)|$  et  $|x_2(t)|$  est égal à  $\Delta\tau_q$ .

<sup>1</sup>Ceci est possible ssi les bases forment un réseau de bases circulaire autour de la source.

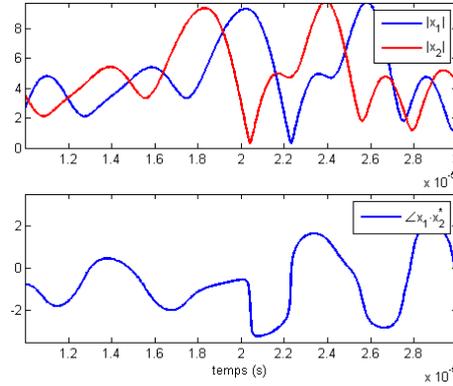
<sup>2</sup>Ceci peut dépendre de l'application, par exemple si les signaux traités ont une largeur de bande faible vis-à-vis de l'ouverture de l'antenne globale, alors l'antenne globale peut-être bande étroite quelle que soit la position des sources et des bases.



(a) Schémat du contexte sources bases



(b) Cas bande étroite (source  $s_1$ ).



(c) Cas large bande (source  $s_2$ ).

Figure 3.1: Valeur absolue et phase des signaux reçus pour les deux configurations de source  $s_1$  et  $s_2$ .

### 3.2 Contexte de l'étude

L'objectif de cette étude est de déterminer analytiquement le biais sur l'estimation des positions lorsque l'hypothèse BE n'est pas vérifiée sur le réseau constituant l'antenne globale. D'après la Fig.3.2, nous considérons  $Q$  signaux  $s_q(t)$  générés par le filtrage d'un signal blanc par un filtre de réponse impulsionnelle  $h_q(t)$  telle que  $\|h_q(t)\|_2^2 = 1$ . La modélisation des signaux par un filtre linéaire ne nuit pas à la généralité du problème. En effet, certaines modulations, comme la GMSK [Lau86], peuvent être approximés par ce modèle linéaire. Plus généralement, on peut considérer que le signal d'une source est issu d'un filtrage d'un signal blanc  $e_q(t)$  par un filtre  $h_q(t)$  comme illustré sur la Fig.3.2.

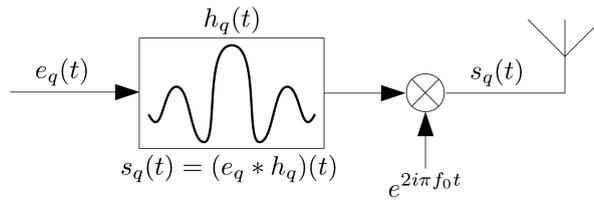


Figure 3.2: Le signal  $e_q(t)$  blanc transmis est filtré par une filtre de réponse  $h_q(t)$  donnant en sortie le signal  $s_q(t)$

En considérant que le signal  $e_q(t)$  est stationnaire et blanc, l'expression de la fonction d'auto-corrélation est la

suivante :

$$r_q(\tau) = \mathbb{E} [s_q(t)s_q^*(t-\tau)], \quad (3.7)$$

$$= \gamma_q e^{-2i\pi f_0 \tau} t_q(\tau), \quad (3.8)$$

où l'on retrouve la fonction d'auto-corrélation du filtre de mise en forme :

$$t_q(\tau) = \int_{\mathbb{R}} h_q(t)h_q^*(t-\tau) dt, \quad (3.9)$$

et la puissance du  $q$ -ième signal :

$$\gamma_q = \mathbb{E} [|e_q(t)|^2]. \quad (3.10)$$

De même nous supposons le nombre de sources  $Q$  transmises connu. Ainsi le rang des matrices de covariance considérées pour chacun des algorithmes sera déterminé en fonction de  $Q$  et non en fonction de l'estimation de  $Q$ . Cette précision est importante, car nous avons vu durant l'état de l'art que les rangs des matrices de covariances dépendent du nombre de TDoA distincts entre les  $Q$  sources et les  $L$  bases composant l'antenne globale. Ce rang dépend de  $Q$  ssi le système est réellement BE après la décomposition. Cependant le biais sur les positions des sources estimées que nous nous apprêtons à calculer existe car nous considérons que l'hypothèse BE est vérifiée alors que le système est LB. Ainsi le rang des matrices de covariance considérées sera :

- Pour l'algorithme DPD en sortie du  $k$ -ième filtre du banc de filtres :

$$\text{rang}(\mathbf{R}_{\mathbf{y}_k}) = Q; \quad (3.11)$$

- Pour l'observation spatiotemporelle de l'algorithme LOST :

$$\text{rang}(\mathbf{R}_{\mathbf{z}}) = \sum_{q=1}^Q K_q. \quad (3.12)$$

### 3.3 Le biais sur l'antenne globale

Dans cette partie nous allons donner l'expression analytique du biais sur l'antenne globale provoqué par l'effet LB du signal reçu. L'algorithme de géolocalisation en 1 étape est mis en œuvre directement sur l'observation  $\mathbf{y}(t)$  de bande  $B$  centrée en  $f_0$ . Il s'agit d'un cas particulier des algorithmes DPD et LOST avec  $K = 1$  qu'on appelle algorithme GMA [Bos12]. La méthode suppose que le signal est BE dans la bande  $B$ . Cela veut dire que le rang de la matrice de covariance est supposé être égal au nombre de sources.

#### 3.3.1 Erreur de modèle LB sur l'antenne globale

L'erreur de l'algorithme est une erreur sur le modèle de la matrice de covariance de l'observation. Dans une première étape nous allons donc évaluer cette erreur en calculant l'écart entre la matrice de covariance sans hypothèse avec celle vérifiant l'hypothèse BE. En s'appuyant sur l'observation issue de l'antenne globale (1.31), la matrice de covariance sans hypothèse s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}} = \mathbb{E} [\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)], \quad (3.13)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \cdots & \mathbf{R}_{1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{L1} & \cdots & \mathbf{R}_{LL} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

où  $\mathbf{R}_{lv} = \mathbb{E} [\mathbf{x}_l(t)\mathbf{x}_v^H(t)]$  est la matrice de covariance entre deux stations composant l'antenne globale. D'après l'Eq.(1.31), la matrice de covariance LB s'écrit :

$$\mathbf{R}_y = \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}(\mathbf{p}_q)\mathbf{\Omega}_q\mathbf{R}_{s_q}\mathbf{\Omega}_q^H\mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q) + \sigma^2\mathbf{I}_M, \quad (3.15)$$

avec la matrice de corrélation temporelle du signal due à l'éloignement des stations :

$$\mathbf{R}_{s_q} = \mathbb{E} [\mathbf{s}(t, \mathbf{p}_q)\mathbf{s}^H(t, \mathbf{p}_q)], \quad (3.16)$$

$$= \begin{pmatrix} r_q(0) & \cdots & r_q(\Delta\tau_{1,L}(\mathbf{p}_q)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_q(\Delta\tau_{L,1}(\mathbf{p}_q)) & \cdots & r_q(0) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

En utilisant la relation (3.8) liant le signal  $q$  à son filtre de mise en forme, la matrice de corrélation du signal dans le cas large bande a pour expression :

$$\mathbf{R}_{s_q} = \gamma_q\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_0)\mathbf{T}_q\mathbf{\Phi}^H(\mathbf{p}_q, f_0), \quad (3.18)$$

où

$$\mathbf{T}_q = \begin{pmatrix} t_q(0) & \cdots & t_q(\Delta\tau_{1L}(\mathbf{p}_q)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_q(\Delta\tau_{L1}(\mathbf{p}_q)) & \cdots & t_q(0) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Finalement, la matrice de covariance des observations issues de l'antenne globale dans un contexte large bande est donnée par :

$$\mathbf{R}_y = \sum_{q=1}^Q \gamma_q\mathbf{U}(\mathbf{p}_q)\mathbf{\Omega}_q\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_0)\mathbf{T}_q\mathbf{\Phi}^H(\mathbf{p}_q, f_0)\mathbf{\Omega}_q^H\mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q) + \sigma^2\mathbf{I}_M. \quad (3.20)$$

Sous l'hypothèse BE le signal  $\mathbf{y}(t)$  vérifie l'Eq.(1.33). La matrice de covariance sous cette hypothèse vérifie alors :

$$\mathbf{R}_y^{BE} = \mathbb{E} [\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t)], \quad (3.21)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \gamma_q\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_0)\mathbf{u}^H(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_0) + \sigma^2\mathbf{I}_M, \quad (3.22)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \gamma_q\mathbf{U}(\mathbf{p}_q)\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_0)\rho_q\rho_q^H\mathbf{\Phi}^H(\mathbf{p}_q, f_0)\mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q) + \sigma^2\mathbf{I}_M, \quad (3.23)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \gamma_q\mathbf{U}(\mathbf{p}_q)\mathbf{\Omega}_q\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_0)\mathbf{1}_{L \times 1}\mathbf{1}_{L \times 1}^H\mathbf{\Phi}^H(\mathbf{p}_q, f_0)\mathbf{\Omega}_q^H\mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q) + \sigma^2\mathbf{I}_M. \quad (3.24)$$

Finalement, en considérant la matrice de covariance dans le contexte LB (3.20) et celle dans le contexte BE (3.24), l'erreur de modélisation sur la matrice de covariance est donnée par :

$$\Delta\mathbf{R}_y = \mathbf{R}_y - \mathbf{R}_y^{BE}, \quad (3.25)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \gamma_q\mathbf{U}(\mathbf{p}_q)\mathbf{\Omega}_q\mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_0)\mathbf{E}_q\mathbf{\Phi}^H(\mathbf{p}_q, f_0)\mathbf{\Omega}_q^H\mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q), \quad (3.26)$$

avec la matrice d'erreur :

$$\mathbf{E}_q = \mathbf{T}_q - \mathbf{1}_{L \times L}, \quad (3.27)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & t_q(\Delta\tau_{1L}(\mathbf{p}_q)) - 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_q(\Delta\tau_{L1}(\mathbf{p}_q)) - 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

En considérant l'expression des éléments de la matrice  $\mathbf{T}_q$  définie en Eq.(3.9), plus les signaux seront BE sur l'antenne globale, plus chaque élément de la matrice  $\mathbf{T}_q$  tendra vers 1 ce qui induira une matrice d'erreur  $\mathbf{E}_q$  nulle. De même, si les signaux d'une source sont totalement décorrélés entre les bases de l'antenne globale, alors la matrice d'erreur sera  $\mathbf{E}_q = \mathbf{I}_L - \mathbf{1}_{L \times L}$ .

### 3.3.2 Calcul du biais sur l'estimation de la position des méthodes en 1 étape

Nous allons dans un premier temps envisager un cas simple où  $K$ , le facteur de décomposition, est égal à 1. Nous allons alors étudier deux possibilités, une première où les atténuations complexes sont estimées, ce qui va nous permettre de mieux comprendre le comportement du biais. Puis une seconde, plus en accord avec le cadre des méthodes en 1 étape, qui étudiera le biais de l'algorithme GMA.

#### 3.3.2.1 Minimisation sur les atténuations complexes et positions

Dans ce paragraphe l'algorithme correspond au facteur de décomposition  $K = 1$ <sup>3</sup>. Dans cette première approche la minimisation sur les atténuations complexes  $\boldsymbol{\rho}$  sera conservée, ainsi les paramètres recherchés sont  $\boldsymbol{\eta} = \{(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q) | q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\}$ . Alors d'après les équations (2.65) et (2.82) pour un facteur de décomposition  $K = 1$  nous avons comme critère :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}} = \arg \min_{(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^L} \mathcal{L}_{Global}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}), \\ \mathcal{L}_{Global}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\kappa} \mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0) \boldsymbol{\Pi}^\perp(\Delta \mathbf{R}_y) \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0), \end{cases} \quad (3.29)$$

où  $\kappa = \sum_{l=1}^L |\rho_l|^2 M_l$ . Le projecteur  $\boldsymbol{\Pi}^\perp(\Delta \mathbf{R}_y)$  est le projecteur vers le sous-espace bruit perturbé calculé à partir de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_y$  de l'Eq.(3.20) sous hypothèse LB. Le projecteur dépend de l'erreur modèle faite sur la matrice de covariance sous l'hypothèse BE. Si l'hypothèse BE est respectée, le projecteur est défini par :

$$\boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{0}) = \mathbf{I}_M - \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H, \quad (3.30)$$

avec  $\mathbf{A} = [\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f_0), \dots, \mathbf{u}(\mathbf{p}_Q, \boldsymbol{\rho}_Q, f_0)]$ . On vérifie donc bien que  $\mathcal{L}_{Global}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q) = 0 \forall q \in \llbracket 1; Q \rrbracket$ . Dans ce cas, sans erreur, la position estimée sera  $\mathbf{p}_q(\mathbf{R}_y^{BE}) = \mathbf{p}_q$ . Or si la matrice considérée est  $\mathbf{R}_y = \mathbf{R}_y^{BE} + \Delta \mathbf{R}_y$ , le projecteur  $\boldsymbol{\Pi}^\perp(\Delta \mathbf{R}_y)$  sera différent du projecteur  $\boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{0})$  et le critère  $\mathcal{L}_{Global}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q)$  sera non nul. En conséquence, la position vérifiera  $\mathbf{p}_q(\mathbf{R}_y) \neq \mathbf{p}_q(\mathbf{R}_y^{BE})$ . L'objectif est donc de calculer le biais suivant  $\Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}_y)$  provoqué par l'erreur d'hypothèse BE :

$$\Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}_y) = \mathbf{p}_q(\mathbf{R}_y) - \mathbf{p}_q(\mathbf{R}_y^{BE}), \quad (3.31)$$

En considérant que l'erreur  $\Delta \mathbf{R}_y$  est suffisamment faible l'approximation du biais à l'ordre 2 vaut (voir Annexe 8.2) :

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}_y) \\ \Delta \boldsymbol{\rho}_q(\Delta \mathbf{R}_y) \end{bmatrix} \approx -\tilde{\mathbf{H}}_q^{-1}(\Delta \mathbf{R}_y) \nabla_q(\Delta \mathbf{R}_y), \quad (3.32)$$

<sup>3</sup>Dans le cadre d'un facteur de décomposition  $K = 1$ , nous avons  $\mathbf{V}(\mathbf{p}_q, f_0) = \mathbf{B}(\mathbf{p}_q, f_0)$  où  $\mathbf{V}(\mathbf{p}_q, f_0)$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{p}_q, f_0)$  sont définis en (2.64) et (2.81). Ceci montre que les comportements de l'algorithme DPD et d'une méthode spatiotemporelle (telle que LOST) sont identiques pour  $K = 1$ .

où  $\nabla_q(\Delta\mathbf{R}_y)$  et  $\tilde{\mathbf{H}}_q(\Delta\mathbf{R}_y)$  sont le gradient et l'approximation de la Hessienne du critère  $\mathcal{L}_{Global}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q)$  au point  $(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q)$ . Afin de simplifier l'écriture par la suite nous noterons pour une application  $f$  quelconque que  $\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=y} = \frac{\partial f(y)}{\partial x}$ . En effectuant une approximation d'ordre 1 sur le biais  $\Delta\mathbf{p}_q(\Delta\mathbf{R}_y)$  (voir Annexe 8.3), l'expression (3.32) devient :

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{p}_q(\Delta\mathbf{R}_y) \\ \Delta\boldsymbol{\rho}_q(\Delta\mathbf{R}_y) \end{bmatrix} \approx -\tilde{\mathbf{H}}_q^{-1}(\mathbf{0})\partial\nabla_q(\Delta\mathbf{R}_y). \quad (3.33)$$

Finalement, en notant  $\mathbf{p} = [p_x, p_y]^T$ , on pose la matrice  $\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0)$  contenant les dérivées du vecteur directeur sur chaque composante :

$$\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) = \left[ \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0)}{\partial p_x}, \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0)}{\partial p_y}, \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0)}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0)}{\partial \rho_L} \right], \quad (3.34)$$

$$= \left[ \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0)}{\partial p_x}, \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0)}{\partial p_y}, \mathbf{V}(\mathbf{p}_q, f_0) \right], \quad (3.35)$$

où la matrice  $\mathbf{V}(\mathbf{p}_q, f_0)$  est définie en (2.64). Nous avons alors ([FDL14], [FLV08]) :

$$\partial\nabla_q(\Delta\mathbf{R}_y) = \frac{2}{\kappa} \Re \left\{ \dot{\mathbf{U}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) \partial\Pi^\perp(\Delta\mathbf{R}_y) \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) \right\}, \quad (3.36)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_q(\mathbf{0}) = \frac{2}{\kappa} \Re \left\{ \dot{\mathbf{U}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) \Pi^\perp(\mathbf{0}) \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) \right\}. \quad (3.37)$$

Cependant le calcul du biais  $\Delta\mathbf{p}_q(\Delta\mathbf{R}_y)$  est complexe et non linéaire en  $\Delta\mathbf{R}_y$ . Nous définissons alors le projecteur perturbé dû à l'erreur de modèle par :

$$\Pi^\perp(\Delta\mathbf{R}_y) \approx \Pi^\perp(\mathbf{0}) + \partial\Pi^\perp(\Delta\mathbf{R}_y), \quad (3.38)$$

où  $\partial\Pi^\perp(\Delta\mathbf{R}_y)$  est la perturbation du projecteur dépendant de l'erreur sur la matrice de covariance. Nous utilisons alors l'approximation au premier ordre de la perturbation [KFP92] (voir Annexe 8.4) :

$$\partial\Pi^\perp(\Delta\mathbf{R}_y) = -\Pi^\perp(\mathbf{0})\Delta\mathbf{R}_y\mathbf{S}_y^+ - \mathbf{S}_y^+\Delta\mathbf{R}_y\Pi^\perp(\mathbf{0}), \quad (3.39)$$

où  $\mathbf{S}_y = \mathbf{R}_y^{BE} - \sigma^2\mathbf{I}_M$  est la matrice de covariance débruitée sous hypothèse BE. Nous remarquons que pour la position  $\mathbf{p}_q$  de la  $q$ -ième source nous avons :

$$\partial\Pi^\perp(\Delta\mathbf{R}_y) \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) \approx -\left( \Pi^\perp(\mathbf{0})\Delta\mathbf{R}_y\mathbf{S}_y^+ + \mathbf{S}_y^+\Delta\mathbf{R}_y\Pi^\perp(\mathbf{0}) \right) \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0), \quad (3.40)$$

$$\approx -\Pi^\perp(\mathbf{0})\Delta\mathbf{R}_y\mathbf{S}_y^+ \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0). \quad (3.41)$$

En injectant (3.38) dans (3.32), nous avons finalement pour expression du biais :

$$\Delta\mathbf{p}_q(\Delta\mathbf{R}_y) \approx \left( \Re \left\{ \dot{\mathbf{U}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) \Pi^\perp(\mathbf{0}) \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) \right\} \right)^{-1} \Re \left\{ \dot{\mathbf{U}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) \Pi^\perp(\mathbf{0}) \Delta\mathbf{R}_y \mathbf{S}_y^+ \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0) \right\}. \quad (3.42)$$

### 3.3.2.2 Atténuations complexes inconnues : GMA

Nous avons remarqué à plusieurs reprises que l'optimisation sur les atténuations complexes  $\boldsymbol{\rho}_q$  des  $Q$  sources est un problème coûteux en terme de calculs. Cependant en partant du critère issu de l'antenne globale avec un facteur de décomposition  $K = 1$  de l'Eq.(3.29) et en considérant la structure algébrique de l'observation BE Eq.(1.33), nous déduisons :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0) = \mathbf{U}(\mathbf{p})\tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0), \\ \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}, f_0)\boldsymbol{\rho}. \end{cases} \quad (3.43)$$

Où  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0)$  est le vecteur d'atténuation complexe où les phases liées aux TDoA et aux atténuations complexes sont indiscernables. Alors la recherche des  $Q$  minima du critère donnant la position des sources se réalise sur le critère suivant dépendant du projecteur perturbé par l'erreur de modèle :

$$\mathcal{L}_{Global}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0) \mathbf{U}^H(\mathbf{p}) \boldsymbol{\Pi}^\perp(\Delta \mathbf{R}_y) \mathbf{U}(\mathbf{p}) \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0)}{\tilde{\boldsymbol{\rho}}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0) \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0)}, \quad (3.44)$$

où  $\mathbf{M}$  est définie en (2.68). L'optimisation de ce problème sur un espace de dimension  $3 + L$  est complexe. Ainsi en utilisant la propriété du quotient de Rayleigh généralisé (Annexe 8.1), le critère GMA [Bos12] est :

$$\mathcal{L}_{GMA}(\mathbf{p}) = \min_{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{C}^L} \mathcal{L}_{Global}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}) = \lambda_{\min} \left\{ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{U}^H(\mathbf{p}) \boldsymbol{\Pi}^\perp(\Delta \mathbf{R}_y) \mathbf{U}(\mathbf{p}) \right\}. \quad (3.45)$$

Nous pourrions utiliser directement les dérivées premières et secondes du critère GMA grâce à l'Annexe 8.5 concernant l'étude du gradient et de la Hessienne d'une valeur propre d'une forme Hermitienne. Cependant (Eq.(3.32)) l'approximation du biais à l'ordre 2 sous-entend que la position de la source  $\mathbf{p}_q$  est à minima dans le lobe principal et l'exploitation de l'approximation de la Hessienne suggère que le minimum du critère en  $\mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}_y)$  n'est pas trop éloigné de la position  $\mathbf{p}_q$ . Dans un contexte LB le vecteur propre  $\mathbf{v}_{\min}$  associé à la valeur propre minimale  $\lambda_{\min}$  de la  $q$ -ième source évolue dans un espace à  $L$  dimensions engendré par les vecteurs  $\{\tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_v, f_0) \mid v \in \llbracket 1; L \rrbracket\}$  orthogonaux entre eux. Ces vecteurs sont solution des  $L$  minima du critère (3.44) à la position  $\mathbf{p}_q$ . Or dans le lobe principal, aux abords du minimum de la  $q$ -ième source, une des  $L$  solutions de  $\mathbf{v}_{\min}$  tend vers un vecteur proportionnel à  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_0)$  et ainsi les critères (3.29) et (3.45) sont très proches, voir identiques. Finalement l'approximation de l'expression du biais de l'algorithme GMA est celle donnée par l'Eq.(3.42). Nous avons donc une expression du biais analytique  $\Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}_y)$  pour la  $q$ -ième source lorsque les signaux ne sont pas décomposés en sous-bandes (cas d'un facteur de décomposition  $K = 1$ ). On a donc par conséquence le biais de l'algorithme GMA qui est un cas particulier des algorithmes DPD et LOST pour  $K = 1$ .

L'étude du biais sera faite sur l'algorithme DPD qui selon (2.65) utilise les matrices de covariance en sortie de chacun des filtres du banc de filtres, puis sur l'algorithme LOST, utilisant la matrice de covariance spatiotemporelle. Les 3 points majeurs du déroulement de l'étude sont :

1. La détermination de la matrice de covariance des observations sans hypothèse BE où existe potentiellement un effet LB résiduelle sur l'antenne globale (matrice  $\mathbf{R}_y$  (3.20)) ;
2. Puis détermination de la matrice de covariance théorique dans le cadre où la décomposition des observations en sous-signaux BE sur l'antenne globale est vraie (matrice  $\mathbf{R}_y^{BE}$  (3.24)). Ces deux étapes permettent de déterminer la matrice d'erreur de modèle sur la matrice de covariance  $\Delta \mathbf{R}_y$  (3.26) ;
3. Pour finir, à partir de la perturbation sur le projecteur (Annexe 8.4), on détermine les éléments du gradient et de la Hessienne de la forme quadratique du DPD ou de LOST afin de calculer le biais analytique de la  $q$ -ième source  $\Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}_y)$  (3.42).

### 3.4 Décomposition du signal par banc de filtres : DPD

L'algorithme DPD Sec.2.2.2.1 décompose les signaux LB sur l'antenne globale en sous-signaux BE via un banc de filtres où chaque filtre est de bande  $\frac{B}{K}$ . Ainsi, comme exprimé à l'Eq.(2.69), le produit TB sur l'antenne globale est inversement proportionnel au facteur de décomposition  $K$ . Cependant le critère de l'algorithme DPD (2.62) consiste en une somme non cohérente de critères MUSIC en sortie de chaque filtre. Ainsi quand le facteur  $K$  grandit le coût calculatoire grandit également. Donc, pour des besoins opérationnels, le facteur de décomposition  $K$  ne sera pas assez grand et engendrera un effet LB résiduel sur les observations filtrées par le banc de filtres et *in fine* une erreur de modèle engendrant un biais sur les positions estimées [DFL13], [DFAL15].

### 3.4.1 Erreur de modélisation des matrices de covariance en sortie du banc de filtres

La modélisation du signal en sortie du  $k$ -ième filtre est celle de l'Eq.(2.63). Le signal  $s_{q,k}(t)$  est le signal de la  $q$ -ième source filtré par le  $k$ -ième filtre de réponse  $w_k(t)$  tel que  $s_{q,k}(t) = (w_k * s_q)(t)$  où  $w_k(t) = w(t)e^{2i\pi f_k t}$ . Les coefficients du filtre RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) sont définis dans le vecteur  $\mathbf{w}_k = [w_k[1], \dots, w_k[J]]^T$  composé de  $J$  composantes. Sachant que  $s_q(t) = (h_q * e_q)(t)$  (Fig.3.2), on en déduit alors la fonction d'auto-corrélation du signal en sortie du  $k$ -ième filtre du banc de filtres :

$$r_{q,k}(\tau) = \mathbb{E} [s_{q,k}(t)s_{q,k}^*(t - \tau)], \quad (3.46)$$

$$= \mathbf{w}_k^H \mathbf{\Gamma}_q(\tau) \mathbf{w}_k, \quad (3.47)$$

$$= \mathbf{w}^H \mathbf{\Xi}_k^H \mathbf{\Gamma}_q(\tau) \mathbf{\Xi}_k \mathbf{w}, \quad (3.48)$$

avec :

$$\mathbf{\Xi}_k = \text{diag} \left( 1, \dots, e^{2i\pi f_k (J-1)T_e} \right). \quad (3.49)$$

Le détail de ce calcul est donné en Annexe 8.6. De même, grâce à (3.8), nous pouvons écrire :

$$\mathbf{\Gamma}_q(\tau) = \begin{pmatrix} r_q(\tau) & \cdots & r_q((1-J)T_e + \tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_q((J-1)T_e + \tau) & \cdots & r_q(\tau) \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

D'après les équations (3.13)-(3.17) la matrice de covariance des signaux en sortie du  $k$ -ième filtre s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}_k} = \mathbb{E} [\mathbf{y}_k(t)\mathbf{y}_k^H(t)], \quad (3.51)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11}^k & \cdots & \mathbf{R}_{1L}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{L1}^k & \cdots & \mathbf{R}_{LL}^k \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \mathbf{\Omega}_q \mathbf{R}_{\mathbf{s}_{q,k}} \mathbf{\Omega}_q^H \mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q) + \sigma_k^2 \mathbf{I}_M, \quad (3.53)$$

avec  $\sigma_k^2 = \mathbf{w}^H \mathbf{w} \sigma^2$  la puissance du bruit filtré par le  $k$ -ième filtre,  $\mathbf{R}_{lv}^k$  la matrice de covariance inter-base en sortie du  $k$ -ième filtre et la matrice de covariance temporelle des signaux filtrés due à l'éloignement des stations :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{s}_{q,k}} = \mathbb{E} [\mathbf{s}_k(t, \mathbf{p}_q) \mathbf{s}_k^H(t, \mathbf{p}_q)], \quad (3.54)$$

$$= \begin{pmatrix} r_{q,k}(0) & \cdots & r_{q,k}(\Delta\tau_{1,L}(\mathbf{p}_q)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{q,k}(\Delta\tau_{L,1}(\mathbf{p}_q)) & \cdots & r_{q,k}(0) \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Ainsi nous avons :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{s}_{q,k}} = \gamma_{q,k} \mathbf{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_k) \mathbf{T}_{q,k} \mathbf{\Phi}^H(\mathbf{p}_q, f_k), \quad (3.56)$$

avec  $\gamma_{q,k} = \mathbf{w}^H \mathbf{w} \gamma_q$  la puissance du signal  $q$  en sortie du  $k$ -ième filtre et  $\mathbf{T}_{q,k}$  la matrice de dimension  $L \times L$  où l'expression de l'élément de la  $l$ -ième ligne et  $v$ -ième colonne est donnée par :

$$(\mathbf{T}_{q,k})_{l,v} = \mathbf{w}^H \mathbf{\Xi}_k^H \begin{pmatrix} t_q(\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) & \cdots & t_q((1-J)T_e + \Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_q((J-1)T_e + \Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) & \cdots & t_q(\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) \end{pmatrix} \mathbf{\Xi}_k \mathbf{w}. \quad (3.57)$$

Finalement, en injectant (3.56) dans (3.53), la matrice de covariance en sortie du  $k$ -ième filtre s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}_k} = \sum_{q=1}^Q \gamma_{q,k} \mathbf{V}(\mathbf{p}_q, f_k) \boldsymbol{\Omega}_q \mathbf{T}_{q,k} \boldsymbol{\Omega}_q^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p}_q, f_k) + \sigma_k^2 \mathbf{I}_M. \quad (3.58)$$

D'après le modèle d'observation BE en sortie du  $k$ -ième filtre (2.63) et la structure algébrique décrite en (2.64), la matrice de covariance sous cette hypothèse vérifie :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}_k}^{BE} = \sum_{q=1}^Q \mathbb{E} [|s_{q,k}(t)|^2] \mathbf{u}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) \mathbf{u}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) + \sigma_k^2 \mathbf{I}_M, \quad (3.59)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \gamma_{q,k} \mathbf{V}(\mathbf{p}_q, f_k) \boldsymbol{\Omega}_q \mathbf{1}_{L \times L} \boldsymbol{\Omega}_q^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p}_q, f_k) + \sigma_k^2 \mathbf{I}_M. \quad (3.60)$$

Puis, pour finir, en considérant les matrices de covariance en sortie du  $k$ -ième filtre (3.58) et celles où l'hypothèse BE est vérifiée (3.60), l'erreur de modélisation BE définie en (3.25) est alors la suivante :

$$\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{y}_k} = \mathbf{R}_{\mathbf{y}_k} - \mathbf{R}_{\mathbf{y}_k}^{BE}, \quad (3.61)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \gamma_{q,k} \mathbf{V}(\mathbf{p}_q, f_k) \boldsymbol{\Omega}_q \mathbf{E}_{q,k} \boldsymbol{\Omega}_q^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p}_q, f_k), \quad (3.62)$$

où la matrice d'erreur  $\mathbf{E}_{q,k}$  en sortie du  $k$ -ième filtre, définie en (3.28), s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{E}_{q,k} = \mathbf{T}_{q,k} - \mathbf{1}_{L \times L}. \quad (3.63)$$

### 3.4.2 Expression du biais de position dans le cadre du DPD

Nous réemployons ici la même définition du biais sur la position des sources définie en Eq.(3.42) ainsi que la même perturbation sur le projecteur définie en Eq.(3.38) que sur l'antenne globale sans décomposition vu précédemment. Nous définissons cependant le critère de l'algorithme DPD donné en (2.69) dépendant de l'erreur de modèle sur la matrice de covariance  $\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{y}_k}$  (3.62) :

$$\mathcal{L}_{DPD}(\mathbf{p}) = \lambda_{\min} \left\{ \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=1}^K \mathbf{V}^H(\mathbf{p}, f_k) \boldsymbol{\Pi}_k^\perp(\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{y}_k}) \mathbf{V}(\mathbf{p}, f_k) \right\}, \quad (3.64)$$

Comme pour l'algorithme GMA, aux abords de la solution, on peut considérer l'approximation du biais donnée par l'Eq.(3.33). Ainsi, en définissant  $\mathbf{S}_{\mathbf{y}_k} = \mathbf{R}_{\mathbf{y}_k}^{BE} - \sigma_k^2 \mathbf{I}_M$  la matrice de covariance débruitée en sortie du  $k$ -ième filtre et en considérant les expressions (3.40) et (3.41), nous avons pour perturbation du gradient et la matrice Hessienne approximée de l'algorithme DPD :

$$\partial \nabla_q(\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{y}}) = -\frac{2}{\kappa} \sum_{k=1}^K \Re \left\{ \dot{\mathbf{U}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) \boldsymbol{\Pi}_k^\perp(\mathbf{0}) \Delta \mathbf{R}_{\mathbf{y}_k} \mathbf{S}_{\mathbf{y}_k}^+ \mathbf{u}(\mathbf{p}, q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) \right\}, \quad (3.65)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_q(\mathbf{0}) = \frac{2}{\kappa} \sum_{k=1}^K \Re \left\{ \dot{\mathbf{U}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) \boldsymbol{\Pi}_k^\perp(\mathbf{0}) \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_k) \right\}. \quad (3.66)$$

### 3.5 Approche spatiotemporelle : LOST

Comme nous l'avons vu Sec.2.2.2.2.1, l'algorithme LOST utilise la structure des observations spatiotemporelles pour décomposer les signaux observés sur l'antenne globale en sous-signaux BE. À l'instar de l'algorithme DPD, plus le facteur de décomposition  $K$  est grand, plus la décomposition fréquentielle des signaux sera fine avec une proportionnalité directe entre le facteur  $K$  et la finesse de la décomposition fréquentielle. Cependant augmenter le facteur  $K$  engendre une taille de matrice de covariance grandie d'un facteur  $K$  rendant le problème coûteux pour la décomposition en éléments propres de cette dernière. Dans un cadre opérationnel le facteur  $K$  ne sera donc pas assez grand engendrant un effet LB résiduel sur l'antenne globale qui produira un biais sur l'estimation des positions des sources [DFL14].

#### 3.5.1 Erreur de modèle dans le cadre de l'algorithme LOST

D'après le modèle des observations du processus spatiotemporel (2.74), dans le cadre où l'hypothèse BE n'est pas vérifiée et les éléments (2.75). L'observation  $\mathbf{z}(t)$  peut s'écrire :

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{c}(f_{q,k}) \otimes \mathbf{U}_l(\mathbf{p}_q) \rho_{l,q} s_{q,k}(t - \tau_l(\mathbf{p}_q)) + \mathbf{n}(t), \quad (3.67)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{c}(f_{q,k}) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \boldsymbol{\Omega}_q \mathbf{s}_{q,k}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (3.68)$$

où on rappelle que  $\mathbf{U}_l(\mathbf{p}_q)$  est la  $l$ -ième colonne de la matrice  $\mathbf{U}(\mathbf{p}_q)$ . De même nous rappelons que dans le contexte spatiotemporel nous avons :

$$\mathbf{s}_{q,k}(t) = \begin{pmatrix} s_{q,k}(t - \tau_1(\mathbf{p}_q)) \\ \vdots \\ s_{q,k}(t - \tau_L(\mathbf{p}_q)) \end{pmatrix}, \quad s_{q,k}(t) = \frac{1}{K} \mathbf{c}^H(f_{q,k}) \mathbf{s}_{K,q}(t). \quad (3.69)$$

Alors, comme pour l'algorithme DPD, nous définissons l'auto-corrélation du signal de la  $k$ -ième Transformation de Fourier à Court Terme (TFCT) intervenant dans le modèle spatiotemporel :

$$r_{s_{q,k}}(\tau) = \mathbb{E} [s_{q,k}(t) s_{q,k}(t - \tau)], \quad (3.70)$$

$$= \frac{1}{K^2} \mathbf{c}^H(f_{q,k}) \boldsymbol{\Gamma}_q(\tau) \mathbf{c}(f_{q,k}), \quad (3.71)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Gamma}_q(\tau) = \mathbb{E} [\mathbf{s}_{K,q}(t) \mathbf{s}_{K,q}^H(t - \tau)], \quad (3.72)$$

$$= \begin{pmatrix} r_q(\tau) & \cdots & r_q((1-K)T_e + \tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_q((K-1)T_e + \tau) & \cdots & r_q(\tau) \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

On peut constater une certaine ressemblance du modèle avec l'algorithme DPD (3.47) où nous aurions pris comme coefficient de noyau de convolution  $\mathbf{w} = \mathbf{1}_{J \times 1}$  avec  $J = K$ , à l'exception près que les algorithmes spatiotemporels sont adaptatifs en fréquence. Finalement nous avons pour matrice de covariance pour une observation spatiotemporelle ne respectant pas l'hypothèse BE :

$$\mathbf{R}_z = \mathbb{E} [\mathbf{z}(t) \mathbf{z}^H(t)], \quad (3.74)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{c}(f_{q,k}) \mathbf{c}^H(f_{q,k}) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \boldsymbol{\Omega}_q \mathbf{R}_{s_{q,k}} \boldsymbol{\Omega}_q^H \mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q) + \sigma^2 \mathbf{I}_{KM}. \quad (3.75)$$

En utilisant (3.71) et (3.73), la matrice de covariance des signaux filtrés par la  $k$ -ième TFCT s'écrit :

$$\mathbf{R}_{s_{q,k}} = \frac{\gamma_q}{K^2} \Phi(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) \mathbf{T}_{q,k} \Phi^H(\mathbf{p}_q, f_{q,k}), \quad (3.76)$$

où en utilisant (3.9) :

$$(\mathbf{T}_{q,k})_{l,v} = \mathbf{c}^H(f_{q,k}) \begin{pmatrix} t_q(\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) & \cdots & t_q((1-K)T_e + \Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_q((K-1)T_e + \Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) & \cdots & t_q(\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)) \end{pmatrix} \mathbf{c}(f_{q,k}). \quad (3.77)$$

Nous avons finalement :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}} = \sum_{q=1}^Q \frac{\gamma_q}{K^2} \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{c}(f_{q,k}) \mathbf{c}^H(f_{q,k}) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \Omega_q \Phi(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) \mathbf{T}_{q,k} \Phi^H(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) \Omega_q^H \mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q) + \sigma^2 \mathbf{I}_{KM}. \quad (3.78)$$

À présent, d'après l'Eq.(2.78), la matrice de covariance des observations  $\mathbf{z}(t)$  sous l'hypothèse BE s'écrit :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{BE} = \sum_{q=1}^Q \gamma_q \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k}) \mathbf{b}^H(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k}) + \sigma^2 \mathbf{I}_{KM}, \quad (3.79)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \gamma_q \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{c}(f_{q,k}) \mathbf{c}^H(f_{q,k}) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \Omega_q \Phi(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) \mathbf{1}_{L \times L} \Phi^H(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) \Omega_q^H \mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q) + \sigma^2 \mathbf{I}_{KM}. \quad (3.80)$$

Nous avons donc pour erreur de modèle sur la matrice de covariance (définie en (3.25)) dans le cadre d'une observation spatiotemporelle :

$$\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{z}} = \sum_{q=1}^Q \gamma_q \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{c}(f_{q,k}) \mathbf{c}^H(f_{q,k}) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \Omega_q \Phi(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) \mathbf{E}_{q,k} \Phi^H(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) \Omega_q^H \mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q), \quad (3.81)$$

avec pour matrice d'erreur définie en (3.28) :

$$\mathbf{E}_{q,k} = \frac{1}{K^2} \mathbf{T}_{q,k} - \mathbf{1}_{L \times L}. \quad (3.82)$$

### 3.5.2 Expression du biais de position dans le cadre de l'algorithme LOST

Tout comme pour l'algorithme GMA et DPD, nous allons à présent déterminer la forme analytique du biais asymptotique sur l'estimation des positions engendré par l'erreur de modèle (3.81). L'expression du biais est donnée en (3.42) et dépend de la perturbation des projecteurs (3.38). En se basant sur le critère de l'algorithme LOST (2.92), écrivons l'expression dépendant de l'erreur de modèle faite sur la matrice de covariance  $\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{z}}$  :

$$\mathcal{L}_{LOST}(\mathbf{p}) = \lambda_{\min} \left\{ (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{W}(\mathbf{p}) \mathbf{\Pi}^\perp (\Delta \mathbf{R}_{\mathbf{z}}) \mathbf{W}^H(\mathbf{p}) \right\}, \quad (3.83)$$

Cependant, tout comme l'algorithme du DPD, aux abords de la solution nous pouvons considérer l'expression du biais définie en Eq.(3.32). Ainsi, nous définissons la matrice  $\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k})$  contenant les dérivées du vecteur directeur spatiotemporel sur chaque composante et dépendante d'une fréquence  $f_{q,k}$  issue de la décomposition spatiotemporelle :

$$\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k})}{\partial p_x}, \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k})}{\partial p_y}, \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k})}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k})}{\partial \rho_L} \right], \quad (3.84)$$

$$= \left[ \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k})}{\partial p_x}, \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \rho_q, f_{q,k})}{\partial p_y}, \mathbf{B}(\mathbf{p}_q, f_{q,k}) \right], \quad (3.85)$$

où le vecteur  $\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k})$  et la matrice  $\mathbf{B}(\mathbf{p}_q, f_{q,k})$  sont définis Eq.(2.80). Nous avons vu en Sec.2.2.2.2.1 que la concentration structurelle de LOST via le vecteur  $\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{p}, f, \boldsymbol{\rho})$  défini en Eq.(2.89) nous avait fait perdre l'information des TDoA. Ainsi LOST consiste à considérer n'importe quelle fréquence  $f_{q,k}$  parmi les fréquences issues de la décomposition spatiotemporelle de la  $q$ -ième source.

Finalement, si nous notons  $\mathbf{S}_z = \mathbf{R}_z^{BE} - \sigma^2 \mathbf{I}_{KL}$  la matrice de covariance débruitée des observations spatiotemporelles. En considérant les expressions (3.40) et (3.41), nous avons pour perturbation du gradient et pour matrice Hessienne approximée de l'algorithme LOST :

$$\partial \nabla_q(\Delta \mathbf{R}_y) = -\frac{2}{\kappa K} \Re \left\{ \dot{\mathbf{B}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k}) \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{0}) \Delta \mathbf{R}_z \mathbf{S}_z^+ \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k}) \right\}, \quad (3.86)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_q(\mathbf{0}) = \frac{2}{\kappa K} \Re \left\{ \dot{\mathbf{B}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k}) \boldsymbol{\Pi}^\perp(\mathbf{0}) \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k}) \right\}. \quad (3.87)$$

### 3.6 Simulations

Nous allons considérer un scénario similaire à l'étude qualitative du début de chapitre. En effet, pour deux capteurs nous connaissons la position de la source permettant de valider l'hypothèse BE et une seconde position où l'hypothèse BE n'est pas vérifiée. Nous allons généraliser l'approche en considérant deux stations, l'une positionnée à  $(-400\text{m}, -400\text{m})$  et une seconde à  $(400\text{m}, -400\text{m})$ . Chaque station est composée d'un réseau de 6 antennes avec 5 antennes formant un réseau UCA autour de la sixième en son centre. Elles possèdent toutes deux un rayon de  $2.4\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde et une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 500\text{kHz}$ . La première source est placée à la position  $(d, 0)$  avec  $d \in \mathbb{R}_+$  et peut donc se déplacer sur l'axe des abscisses par l'intermédiaire de la variable  $d$ . Nous considérons également un cas bi-sources où la première source a une position identique au cas mono-source et une seconde source située à  $(d, -100\text{m})$ . Ainsi comme illustré qualitativement au début de ce chapitre, les sources "iront" d'un état BE vers un état LB quand  $d$  croît. Une illustration du scénario est donnée à la Fig.3.3.

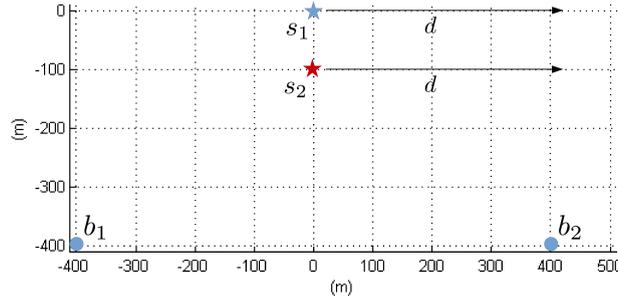


Figure 3.3: Schéma du contexte sources/bases

Nous considérons les sources avec une fréquence centrale  $f_0 = 900\text{MHz}$ , un filtre de mise en forme  $h_q(t)$  Nyquist. Pour l'algorithme du DPD les coefficients  $\mathbf{w}_k$  sont ceux d'une poste temporelle transposée à la fréquence  $f_k$  et normalisée ( $\mathbf{w}^H \mathbf{w}_k = 1$ ), correspondant au cas d'un banc de filtres FFT. La largeur de bande des sources est  $B = 426\text{kHz}$ . Grâce à l'inégalité triangulaire, le produit TB (3.2) est dans notre cas borné :  $0 \leq TB < B \times \Delta\tau_{\max}$ , avec  $\Delta\tau_{\max}$  la valeur maximale que peut prendre le TDoA (2.37). Dans notre scénario la borne maximale est donnée pour  $B \times \Delta\tau_{\max} = 1.14$  et est atteinte pour  $d \rightarrow \infty$ . Donc plus  $d$  croît, plus le système devient LB vis-à-vis de l'antenne globale.

## GMA

Nous allons considérer ici le biais sur l'estimation de la position de la source dans le cas bi-sources de l'algorithme GMA (3.45). En effet, l'algorithme GMA n'étant pas biaisé en mono-source, nous n'aborderons donc pas ce cas de figure. Nous avons vu que cette approche consiste à appliquer un algorithme BE de type MUSIC sur l'antenne globale sans réaliser de décomposition des signaux en sous-signaux BE sur l'antenne globale. Cette approche est équivalente à l'algorithme DPD et LOST avec un facteur de décomposition  $K = 1$ .

Sur la Fig.3.4 on peut observer le biais sur l'estimation de la position de la source  $s_1$  exprimé en mètre. Nous superposons le biais analytique (en vert) calculé grâce aux équations (3.36) et (3.37) et le biais réel (en rouge). Le biais réel est donné par une recherche du minimum du critère sur des signaux simulés avec un RSB infini. L'axe des abscisses est donné en produit  $TB$ . On peut constater que la forme analytique et le biais réel sont plutôt proche jusqu'à  $TB = 0.5$  correspondant à une distance  $d \approx 263\text{m}$ . On constate cependant un écart entre les deux courbes, s'accroissant en fonction du produit  $TB$ .

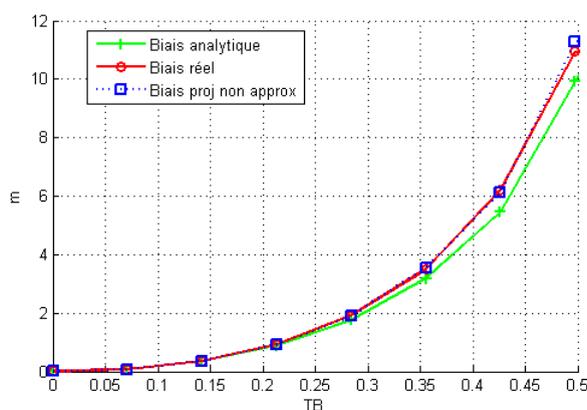


Figure 3.4: Biais sur l'estimation de la source  $s_1$  en fonction du produit  $TB$  : (vert +) biais analytique, (rouge o) biais réel et (bleu pointillé ■) biais analytique avec projecteur non approximé.

En effet, durant ce chapitre, nous avons réalisé plusieurs approximations. La première consiste à considérer une approximation du second ordre du biais (3.32) à partir de la position théorique, la seconde est une approximation du premier ordre de l'expression du biais (3.36) et (3.37), puis pour finir une approximation au premier ordre de la perturbation sur le projecteur (3.38). Nous avons donc tracé en bleu pointillé le biais calculé avec les deux premières approximations toujours vérifiées, mais en considérant dans le calcul le projecteur non approximé calculé à partir de la matrice de covariance  $LB$ . On constate que la courbe correspond quasiment à celle du biais réel. Ainsi, on en déduit, que l'écart fait entre le biais analytique et le biais réel est dû à l'approximation du premier ordre faite sur le projecteur. Ceci semble logique, car en effet une approximation du premier ordre n'est valable que proche de la solution finale. Or ici plus  $d$  grandit, plus l'erreur de modèle devient importante.

## DPD

L'algorithme DPD prenant en compte les informations TDoA, est également biaisé en mono-source. Sur la Fig.3.5(a) nous avons tracé le biais sur la position de la source  $s_1$  dans le cadre mono-source. Le biais est donné en fonction du produit  $K \times TB$  où le facteur  $K$  permet de normaliser et de comparer explicitement les biais issus de différents facteurs de décomposition. En effet, nous avons en bleu un facteur de décomposition  $K = 2$  et en vert un facteur  $K = 6$ . On constate bien que plus  $K$  est grand, plus le biais est faible. Nous avons vu, Eq.(2.62), que plus  $K$  est grand, plus le système tend vers l'hypothèse BE. Comme pour l'algorithme GMA, nous constatons

que les biais analytiques (en trait plein) suivent relativement bien les biais réels. On note cependant, comme pour GMA, un écart entre le biais réel et analytique dû à l'approximation au premier ordre de la perturbation du projecteur.

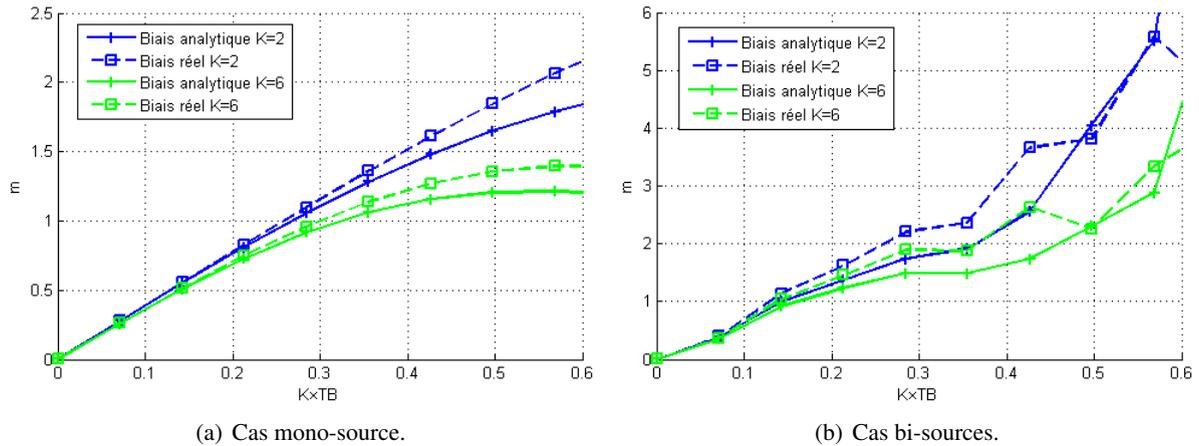


Figure 3.5: Biais sur l'estimation de la source  $s_1$  en fonction du produit TB : (bleu +) biais analytique et (bleu pointillé ■) biais réel pour  $K = 2$  et (vert +) biais analytique et (vert pointillé ■) biais réel pour  $K = 6$ .

Nous avons également considéré le cas bi-source sur la Fig.3.5(b), permettant de montrer également le bon fonctionnement du biais analytique dans un cas multi-source. Les observations faites dans le cadre mono-source sont également valides ici.

## LOST

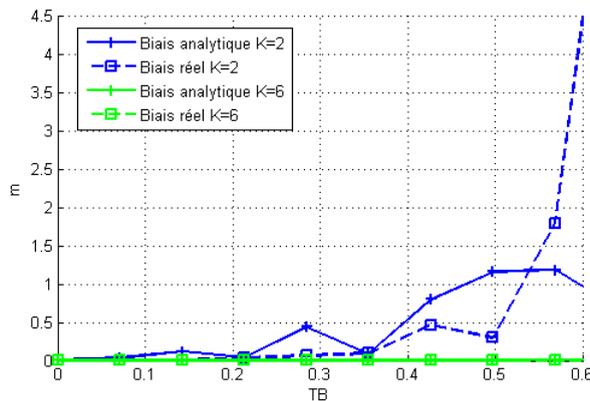


Figure 3.6: Biais sur l'estimation de la source  $s_1$  en fonction du produit TB : (bleu +) biais analytique et (bleu pointillé ■) biais réel pour  $K = 2$  et (vert +) biais analytique et (vert pointillé ■) biais réel pour  $K = 6$ .

Puis pour finir, on s'intéresse à l'algorithme LOST qui est non biaisé en mono-source comme l'algorithme GMA. Toutefois l'algorithme ne prend pas en compte l'information TDoA due à son *absorption* dans la concentration structurale. La méthode est cependant biaisée en multi-sources. Nous considérons sur la Fig.3.6 le biais pour le cas bi-sources tracé en fonction du produit TB. Nous avons en bleu un facteur de décomposition  $K = 2$  et en vert une facteur  $K = 6$ . On constate alors que pour LOST, le biais décroît très fortement en fonction de  $K$ . En

effet, pour un facteur  $K = 6$  on note un biais quasiment inexistant. Pour finir, on note que le biais analytique suit convenablement le biais réel.

### 3.7 Conclusions

Durant cette étude théorique de performances, nous avons analysé le biais sur l'estimation de la position des algorithmes en 1 étape utilisant le principe de décomposition en sous-canaux BE. Pour ce faire, nous avons :

- Défini dans un premier temps l'erreur de modélisation BE et avons conclu que cette dernière était due à un écart entre les matrices de covariance sous l'hypothèse BE et celles ne respectant pas cette hypothèse ;
- Calculé l'erreur de modèle sur l'antenne globale en considérant les atténuations complexes inconnues et estimées, puis celle des algorithmes GMA, DPD et des processus spatiotemporels tels que LOST ;
- Déterminé le biais, en utilisant notamment l'approximation au premier ordre de la perturbation sur le projecteur induite par l'erreur de modèle.

Cette étude nous a permis de donner un outil performant permettant de donner une approximation convenable du biais en fonction du modèle de l'antenne globale et des sources. Il permet par exemple de déterminer la valeur du facteur de décomposition en fonction de la précision voulue par le cahier des charges. De même, cette étude représente une première étape pour déterminer la borne de Cramér-Rao des algorithmes en 1 étape décomposant les observations issues de l'antenne globale en sous-signaux BE. En effet, dans un contexte biaisé, le calcul de la borne de Cramér-Rao est différent.

## Chapter 4

# Amélioration des algorithmes existants en 1 étape

Dans ce chapitre de nouveaux algorithmes sont proposés pour améliorer les algorithmes en 1 étape utilisant des modèles BE. En particulier LOST-FIND est une amélioration de l'algorithme LOST prenant en compte l'information des TDoA de l'observation spatiotemporelle de l'antenne globale avec un faible coût calculatoire. Dans un second temps nous considérerons le problème de l'estimation de la matrice de covariance des observations issues de l'antenne globale. C'est pourquoi, nous évaluerons l'apport de la théorie des matrices aléatoires à grandes dimensions aux algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND.

### 4.1 Une approche spatiotemporelle complète : LOST-FIND

Le principal objectif de LOST Sec.2.2.2.2.1 est de simplifier l'optimisation du critère spatio-fréquentiel difficile à optimiser car dépendant conjointement des positions et fréquences Eq.(2.82). Malheureusement, cette simplification exploitant la structure algébrique (2.88) pour minimiser le critère  $\mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}, f, \boldsymbol{\rho})$  (2.92), ne fait dépendre le critère que des positions  $\mathbf{p}$ . Le paramètre TDoA a été perdu dans la contraction du critère suivant les fréquences. LOST n'exploite ainsi plus le lien paramétrique entre le TDoA et la position.

Le but de LOST-FIND pour *Localization by Space-Time with Frequency Identification in Narrowband Decomposition*, [DFL15a] est d'exploiter l'intégralité de la structure algébrique de l'observation spatiotemporelle. Le but de LOST-FIND est donc double : exploiter les paramètres TDoA perdus dans LOST tout en simplifiant la complexité algorithmique de l'approche spatiotemporelle donnée en Eq.(2.82). En d'autres termes, l'objectif de LOST-FIND est de retrouver (*find*) ce que LOST a perdu.

#### 4.1.1 Estimateur exploitant la structure spatiale et temporelle du signal

Le principal objectif de cette approche est de proposer un algorithme s'adaptant au spectre des signaux et exploitant conjointement et simultanément le lien entre le TDoA, l'AoA et la position des sources du processus spatiotemporel. En effet, les AoA et TDoA sont des fonctions différentes de la position d'une source. Cette stratégie sera implantée dans une méthode d'optimisation à relaxation. Pour cela nous allons aborder le problème en considérant les deux estimateurs suivants : le premier est l'estimation des fréquences d'une source en connaissant la position de celle-ci et le second l'estimation de la position avec la connaissance des fréquences de la source. Ces deux estimateurs seront deux étapes de l'algorithme d'optimisation du critère spatio-fréquentiel de LOST-FIND.

#### 4.1.1.1 Etape d'estimation des fréquences des sources à partir des positions

L'objectif de cette étape est d'estimer l'ensemble des fréquences  $\mathcal{F}_q = \{f_{q,k} | k \in \llbracket 1; K_q \rrbracket\}$  de la  $q$ -ième source en supposant sa position  $\mathbf{p}_q$  connue. En s'appuyant sur le modèle de l'observation spatiotemporelle (2.80) et (2.81) nous avons pour une position  $\mathbf{p}_q$  :

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}, f) = \tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{p}_q, f) \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}_q, f, \boldsymbol{\rho}), \quad (4.1)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{p}_q, f) = \mathbf{c}(f) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q), \\ \tilde{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}_q, f, \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}_q, f) \boldsymbol{\rho}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Le critère spatiotemporel (2.82) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}_q, \tilde{\boldsymbol{\rho}}, f) = \frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}^H \tilde{\mathbf{W}}^H(\mathbf{p}_q, f) \hat{\boldsymbol{\Pi}}^\perp \tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{p}_q, f) \tilde{\boldsymbol{\rho}}}{\tilde{\boldsymbol{\rho}}^H \tilde{\mathbf{W}}^H(\mathbf{p}_q, f) \tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{p}_q, f) \tilde{\boldsymbol{\rho}}}, \quad (4.3)$$

$$= \frac{1}{K} \frac{\tilde{\boldsymbol{\rho}}^H \tilde{\mathbf{W}}^H(\mathbf{p}_q, f) \hat{\boldsymbol{\Pi}}^\perp \tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{p}_q, f) \tilde{\boldsymbol{\rho}}}{\tilde{\boldsymbol{\rho}}^H \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\rho}}}, \quad (4.4)$$

où la matrice  $\mathbf{M}$  est définie en (2.68) et  $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^\perp$  est le projecteur vers le sous-espace bruit calculé à partir de la SCM de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_z = \mathbb{E}[\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^H(t)]$ . En utilisant le quotient de Rayleigh généralisé (Annexe 8.1), la minimisation du critère  $\mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}_q, \tilde{\boldsymbol{\rho}}, f)$  par rapport à  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$  vérifie :

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{C}^{KL}} \mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}_q, \tilde{\boldsymbol{\rho}}, f) = \frac{1}{K} \lambda_{\min} \left\{ \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}^H(\mathbf{p}_q, f) \hat{\boldsymbol{\Pi}}^\perp \tilde{\mathbf{W}}(\mathbf{p}_q, f) \right\} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}_q}(f, \mathbf{p}_q). \quad (4.5)$$

On en déduit alors que l'estimation des fréquences  $\hat{f}_{q,k}$  est donnée par l'algorithme :

$$\hat{\mathcal{F}}_q = \left\{ \hat{f}_{q,k} \mid k \in \llbracket 1; K_q \rrbracket \right\} = \arg \min_{f \in \mathbb{R}} \mathcal{L}_{\mathcal{F}_q}(f, \mathbf{p}_q). \quad (4.6)$$

Pour clôturer ce paragraphe, nous analysons le comportement de cet estimateur pour des signaux à spectre continu. Le produit scalaire des vecteurs directeurs spatiotemporels pour deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  de la source de position  $\mathbf{p}_q$  et d'atténuation  $\boldsymbol{\rho}_q$  vérifie :

$$\mathbf{b}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_1) \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_2) = (\mathbf{c}^H(f_1) \mathbf{c}(f_2)) \otimes (\boldsymbol{\rho}_q^H \boldsymbol{\Phi}^H(\mathbf{p}_q, f_1) \mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q) \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}_q, f_2) \boldsymbol{\rho}_q), \quad (4.7)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} e^{2i\pi(f_2-f_1)kT_e} \times \sum_{l=1}^L |\rho_q|^2 M_l e^{-2i\pi(f_2-f_1)\tau_l(\mathbf{p}_q)}. \quad (4.8)$$

D'après (4.8), on en déduit que les deux vecteurs directeurs sont orthogonaux lorsque la différence entre les deux fréquences est égale à  $f_2 - f_1 = \frac{kF_e}{K}$  annulant ainsi le premier terme. En conséquence, un signal de bande  $B$  se modélisera par un mélange de  $K_q = \frac{B}{\Delta f}$  porteuses où  $\Delta f = \frac{F_e}{K}$  car l'ensemble des vecteurs  $\{\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k}) \mid k \in \llbracket 1; K_q \rrbracket\}$  sont orthogonaux.

#### 4.1.1.2 Etape d'estimation des positions à partir des fréquences des sources

Dans cette étape les  $K_q$  fréquences du  $q$ -ième signal sont supposées connues. Cette information *a priori* est utilisée pour déterminer la position  $\mathbf{p}_q$  de la source.

Le sous-espace de la source  $q$  est engendré par les vecteurs  $\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k})$  pour  $k \in \llbracket 1; K_q \rrbracket$  où les atténuations complexes sont inconnues. En reprenant la décomposition des vecteurs directeurs du modèle spatiotemporel (2.81) avec  $f_{q,k} \in \mathcal{F}_q$ , nous avons :

$$\mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}, f_{q,k}) = \mathbf{B}(\mathbf{p}, f_{q,k})\boldsymbol{\rho}. \quad (4.9)$$

L'exploitation des fréquences de l'ensemble  $\mathcal{F}_q$  nécessite d'optimiser le nouveau critère suivant :

$$\mathcal{L}_{ST-FIND}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, \mathcal{F}_q) = \frac{1}{K_q} \sum_{k=1}^{K_q} \mathcal{L}_{ST'}(\mathbf{p}, f_{q,k}, \boldsymbol{\rho}). \quad (4.10)$$

D'après l'Eq.(4.9) le critère  $\mathcal{L}_{ST-FIND}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, \mathcal{F}_q)$  s'écrit :

$$\mathcal{L}_{ST-FIND}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, \mathcal{F}_q) = \frac{1}{K_q K} \frac{\boldsymbol{\rho}^H \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_q) \boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{M} \boldsymbol{\rho}}, \quad (4.11)$$

où  $\mathbf{M}$  est défini en (2.68) et où nous posons la forme quadratique :

$$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_q) = \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{B}^H(\mathbf{p}, f_{q,k}) \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{B}(\mathbf{p}, f_{q,k}). \quad (4.12)$$

En utilisant l'expression (4.11) et en utilisant la propriété du quotient de Rayleigh généralisé (Annexe 8.1), la minimisation du critère  $\mathcal{L}_{ST-FIND}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, \mathcal{F}_q)$  en fonction de  $\boldsymbol{\rho}$  est :

$$\min_{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{C}^L} \mathcal{L}_{ST-FIND}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, \mathcal{F}_q) = \frac{1}{K_q K} \lambda_{\min} \left\{ \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_q) \right\} = \mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_q). \quad (4.13)$$

La position de la  $q$ -ième source est alors estimée de la manière suivante :

$$\{\hat{\mathbf{p}}_q\} = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2} \mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_q). \quad (4.14)$$

#### 4.1.1.3 Algorithme LOST-FIND

La mise en œuvre de l'algorithme LOST-FIND nécessitera d'estimer alternativement les positions et l'ensemble des fréquences suivant les étapes des paragraphes 4.1.1.1 et 4.1.1.2. Cela est équivalent à estimer conjointement les couples  $(\mathbf{p}_q, \mathcal{F}_q)$  pour  $q \in \llbracket 1; Q \rrbracket$ . L'approche d'estimation est à relaxation.

L'algorithme LOST-FIND se résume ainsi en 5 étapes :

Pour la première itération ( $n = 0$ ) :

- **Étape 1 (initialisation)** : Estimation préliminaire des positions  $\hat{\mathbf{p}}_q^0$  pour  $q \in \llbracket 1; Q \rrbracket$  à l'aide des algorithmes en 1 étape de type DPD ou LOST, ou des algorithmes en 2 étapes comme par exemple la triangulation.

On applique alors sur chacune des  $Q$  sources l'algorithme LOST-FIND :

Pour la  $n$ -ième itération :

- **Étape 2** : Estimation des fréquences  $\hat{\mathcal{F}}_q^n = \left\{ \hat{f}_{q,k}^n \mid k \in \llbracket 1; K_q \rrbracket \right\}$  en cherchant les  $K_q$  minima de la fonction coût  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_q}(f, \hat{\mathbf{p}}_q^{n-1})$  de l'Eq.(4.6) à partir d'une estimée de la position  $\hat{\mathbf{p}}_q^{n-1}$  obtenue à l'itération précédente.
- **Étape 3** : Estimation de la position  $\hat{\mathbf{p}}_q^n$  de la  $q$ -ième source en cherchant le minimum de la fonction coût  $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \hat{\mathcal{F}}_q^n)$  de l'Eq.(4.14) en sachant l'estimation des  $K_q$  fréquences de la source  $q$ .
- **Étape 4** : Retour à l'étape 2 pour l'itération ( $n + 1$ ) si les conditions d'arrêt ne sont pas satisfaites.

Les conditions d'arrêt de l'étape 4 peuvent être soit sur le niveau de critère  $\mathcal{L}_{FIND}(\hat{\mathbf{p}}_q^n, \hat{\mathcal{F}}_q^n) < \epsilon$ , soit sur le nombre d'itérations atteint pour limiter le coût calculatoire de l'algorithme LOST-FIND.

### 4.1.2 Analyse du biais dû à l'effet large bande résiduel après décomposition de LOST-FIND

Nous avons abordé durant le Chapitre 3 une analyse théorique du biais sur l'estimation des positions des sources des méthodes en 1 étape réalisant une décomposition des observations issues de l'antenne globale en sous-signaux BE. Cette étude nous a permis d'établir un outil analytique performant de prédiction du biais à partir du modèle de l'antenne globale et des signaux. Nous avons établi cet outil sur les algorithmes GMA, DPD et LOST. À présent, nous allons l'étendre à l'algorithme LOST-FIND.

#### Biais analytique

L'algorithme LOST-FIND étant un algorithme exploitant une observation spatiotemporelle, l'erreur de modèle est identique à celle de l'algorithme LOST de l'Eq.(3.81). De même nous avons vu que LOST-FIND exploite toute la structure algébrique de modèle spatiotemporel. Ceci signifie que asymptotiquement, c.-à-d. pour un nombre d'itérations de l'algorithme LOST-FIND suffisant, le biais sur la position estimée de LOST-FIND sera équivalent à celui de l'algorithme spatiotemporel (2.85). Nous allons donc déterminer le biais du critère de l'Eq.(4.13) en considérant l'ensemble des fréquences de la  $q$ -ième source  $\mathcal{F}_q$  connu :

$$\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_q) = \frac{1}{KK_q} \lambda_{\min} \left\{ \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{B}^H(\mathbf{p}, f_{q,k}) \mathbf{\Pi}^\perp(\Delta \mathbf{R}_z) \mathbf{B}(\mathbf{p}, f_{q,k}) \right\}. \quad (4.15)$$

Tout comme les méthodes précédentes (GMA, DPD et LOST), on constate qu'aux abords du minimum du critère de la  $q$ -ième source, nous avons le vecteur propre  $\mathbf{v}_{\min}$  associé à la valeur propre  $\lambda_{\min}$  qui tend vers un vecteur proportionnel à  $\boldsymbol{\rho}_q$ . On peut alors considérer comme expression du biais l'Eq.(3.42). On prend la matrice  $\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k})$  composée des dérivées des vecteurs directeurs de l'observation spatiotemporelle définie en (3.85) et on note  $\mathbf{S}_z = \mathbf{R}_z^{BE} - \sigma^2 \mathbf{I}_{KM}$  la matrice de covariance débruitée des observations spatiotemporelles dans le cadre où l'hypothèse BE est respectée. Les expressions de la perturbation du gradient et de l'approximation de la Hessienne se basant sur l'approximation au premier ordre de la perturbation sur le projecteur (3.38) étudiée au Chapitre 3 est dans le cadre de l'algorithme LOST-FIND :

$$\partial \nabla_q(\Delta \mathbf{R}_y) = -\frac{2}{\kappa K K_q} \sum_{k=1}^{K_q} \Re \left\{ \dot{\mathbf{B}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k}) \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0}) \Delta \mathbf{R}_z \mathbf{S}_z^+ \mathbf{b}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k}) \right\}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_q(\mathbf{0}) = \frac{2}{\kappa K K_q} \sum_{k=1}^{K_q} \Re \left\{ \dot{\mathbf{B}}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k}) \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0}) \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q, f_{q,k}) \right\}. \quad (4.17)$$

#### Simulations

Les simulations réalisées se basent sur les contextes mono-source et bi-source que nous avons étudiés dans la Sec.3.6 et représentés sur la Fig.3.3. Sur la Fig.4.1(a) nous avons tracé le biais sur l'estimation de la position de la source  $s_1$  pour différents facteurs de décomposition  $K$ . Nous avons considéré dans un premier temps un facteur de décomposition  $K = 3$  permettant d'avoir une décomposition du signal en 2 sous-canaux  $K_q = 2$ , permettant d'avoir ainsi un nombre de sous-canaux équivalents à l'algorithme DPD. On constate que le biais de l'algorithme LOST-FIND est moindre que celui du DPD que l'on peut observer à la Fig.3.5(a). Cette observation est importante, en effet, nous verrons par la suite que de manière générale, l'algorithme LOST-FIND est moins biaisé que le DPD. Puis dans un second temps, nous avons considéré un facteur de décomposition  $K = 8$  donnant une décomposition du signal  $K_q = 6$ . On observe que nous avons bien une diminution du biais quand le facteur  $K$  grandit, montrant que l'on s'approche des conditions de l'hypothèse BE. Asymptotiquement, quand  $K \rightarrow \infty$ , le biais sera nul.

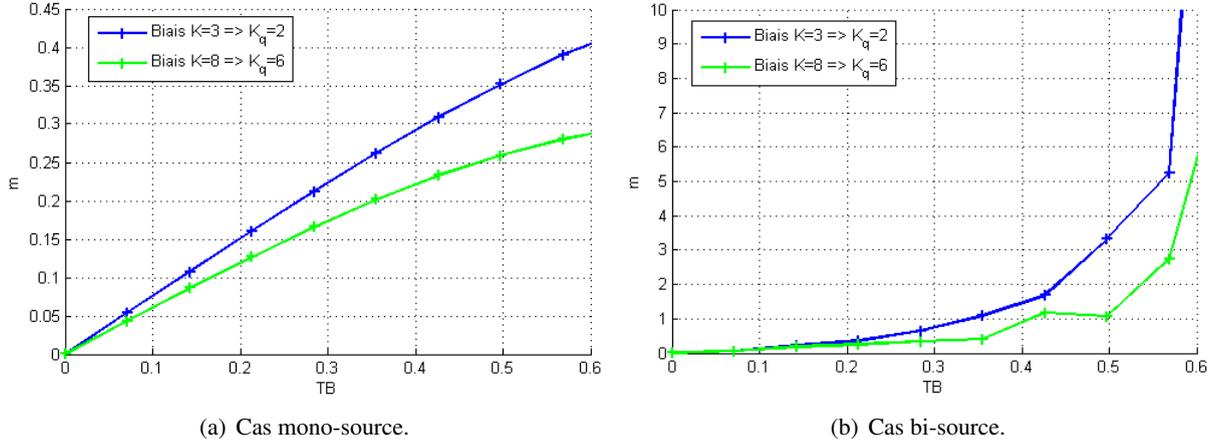


Figure 4.1: Biais sur l'estimation de la source  $s_1$  (voir Fig.(3.3)) en fonction du produit TB : (bleu) biais analytique pour  $K = 3$  représentant une décomposition du signal  $K_q = 2$  et (vert) biais analytique pour  $K = 8$  représentant une décomposition du signal  $K_q = 6$ .

Finalement, sur la Fig.4.1(b), nous avons considéré un cas bi-sources pour les mêmes facteurs de décomposition  $K$ . Il est toujours possible de comparer les résultats à l'algorithme DPD Fig.3.5(b) et de remarquer que le biais de LOST-FIND dans un contexte multi-source est inférieur au biais du DPD.

#### 4.1.3 Avantage de la diversité fréquentielle dans le modèle spatiotemporel

Les méthodes spatiotemporelles permettent de traiter des sources ayant des supports spectraux  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  différents. En effet, la méthode optimise un critère dans l'espace position-fréquences avec le couple de paramètres  $(\mathbf{p}, \mathcal{F})$ . Cette optimisation bi-dimensionnelle permet d'améliorer le pouvoir de résolution en présence de deux sources ayant des supports spectraux différents  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ . Ainsi, la distance entre le couple de paramètres  $(\mathbf{p}_1, \mathcal{F}_1)$  et  $(\mathbf{p}_2, \mathcal{F}_2)$  est plus grande que la distance entre le couple  $(\mathbf{p}_1, \mathcal{F})$  et  $(\mathbf{p}_2, \mathcal{F})$  avec  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ . Le scénario  $(\mathbf{p}_1, \mathcal{F}_1)$  et  $(\mathbf{p}_2, \mathcal{F}_2)$  conduira à une meilleure estimation que le scénario  $(\mathbf{p}_1, \mathcal{F})$  et  $(\mathbf{p}_2, \mathcal{F})$ . Deux sources qui n'ont pas le même support fréquentiel ne se verront pas mutuellement dans le critère de LOST-FIND de l'Eq.(4.14). Pour exposer ce fait, considérons le cas de la Fig.4.2 avec deux bases et deux sources. Les deux stations sont composées d'un réseau de 6 capteurs avec 5 capteurs sur un cercle et un 6-ième au centre. Le réseau a un rayon de  $2.4\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $F_e = 500\text{kHz}$  la fréquence d'échantillonnage. Nous allons considérer un premier cas où les supports spectraux des deux sources ne se superposent pas, comme illustré sur la Fig.4.3(a). Puis nous considérons un deuxième cas où les supports spectraux se superposent comme illustré sur la Fig.4.3(b). Enfin, nous considérons un troisième cas où le support spectral de la première source est incluse dans le support de la seconde ( $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ) comme illustré sur la Fig.4.3(c).

Finalement nous traçons sur la Fig.4.4(a) et la Fig.4.4(b) le critère de LOST-FIND (4.14) avec les ensembles de fréquences  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  de la première et seconde source respectivement dans le scénario des supports spectraux disjoint de la Fig.4.3(a). La première figure montre que la seconde source est complètement invisible sur le critère, et vice-versa. Sur les figures 4.4(c) et 4.4(d) nous traçons le critère de LOST-FIND (4.14) avec le scénario de la Fig.4.3(b) où les ensembles de fréquences  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  se superposent partiellement. On constate alors qu'un lobe secondaire plus marqué apparaît au niveau de l'autre source. Cependant, le niveau du lobe reste encore relativement élevé par rapport à celui de la source. Enfin, sur les figures 4.4(e) et 4.4(f) nous traçons le critère de LOST-FIND (4.14) avec le scénario de la Fig.4.3(c) où le support spectral de la première source est entièrement inclus dans le support spectral de la seconde source. On observe dans ce cas, où les supports spectraux des deux sources sont indiscernables pour un observateur, que l'algorithme LOST-FIND parvient à bien séparer les deux

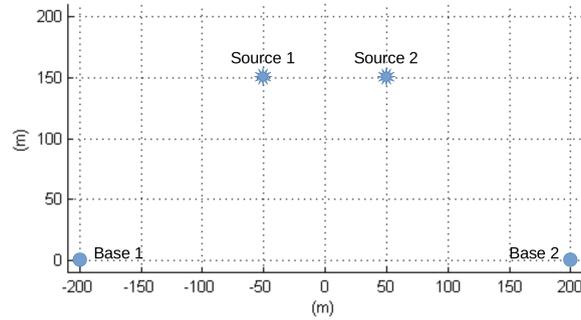
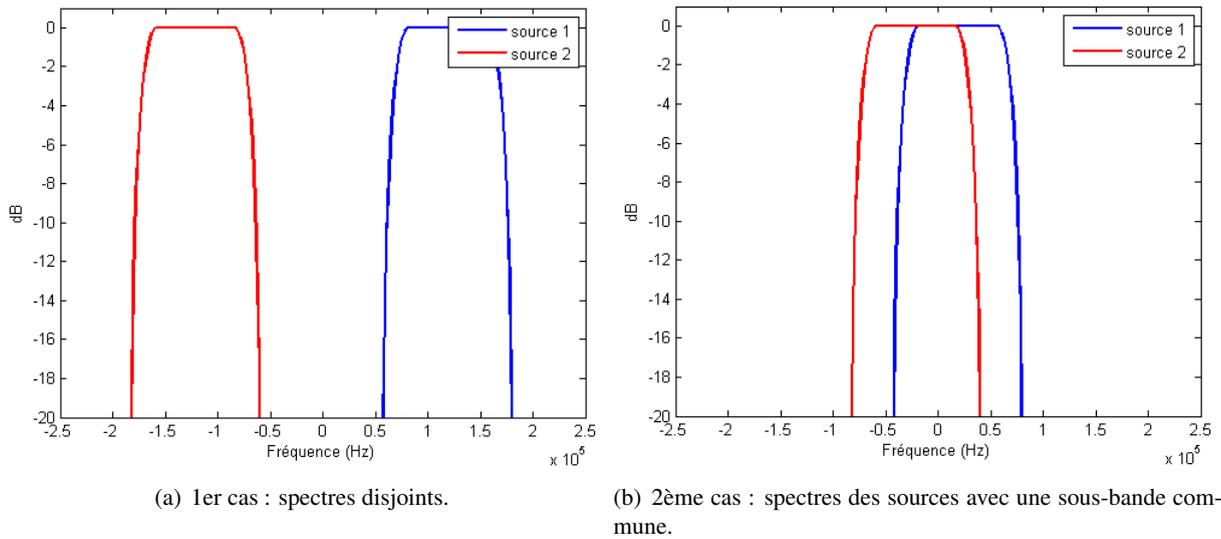
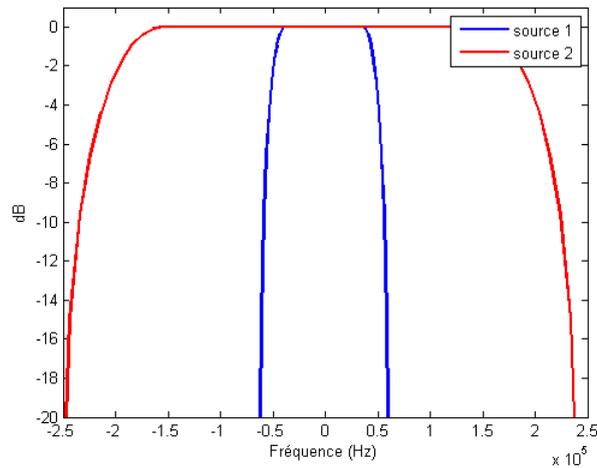


Figure 4.2: Contexte de deux bases et deux sources possédant des spectres fréquentiels différents.



(a) 1er cas : spectres disjoints.

(b) 2ème cas : spectres des sources avec une sous-bande commune.



(c) 3ème cas : spectre de la source 1 inclus dans celui de la source 2.

Figure 4.3: Occupation spectrale des deux sources, en bleu la première et en rouge la seconde.

sources qui ont des supports spectraux différents. Ceci est extrêmement utile car, en plus d'augmenter le pouvoir de résolution vis-à-vis de deux sources n'ayant pas le même spectre (ce qui est également valable pour l'algorithme LOST sauf que toutes les sources seront présentes sur le critère contrairement au critère de l'algorithme LOST-

FIND), la méthode permet également de faire accessoirement de l'identification du type d'émission des sources. Il sera par exemple possible de distinguer sur le critère LOST-FIND des sources n'ayant pas la même bande de fonctionnement comme l'UMTS ou le LTE.

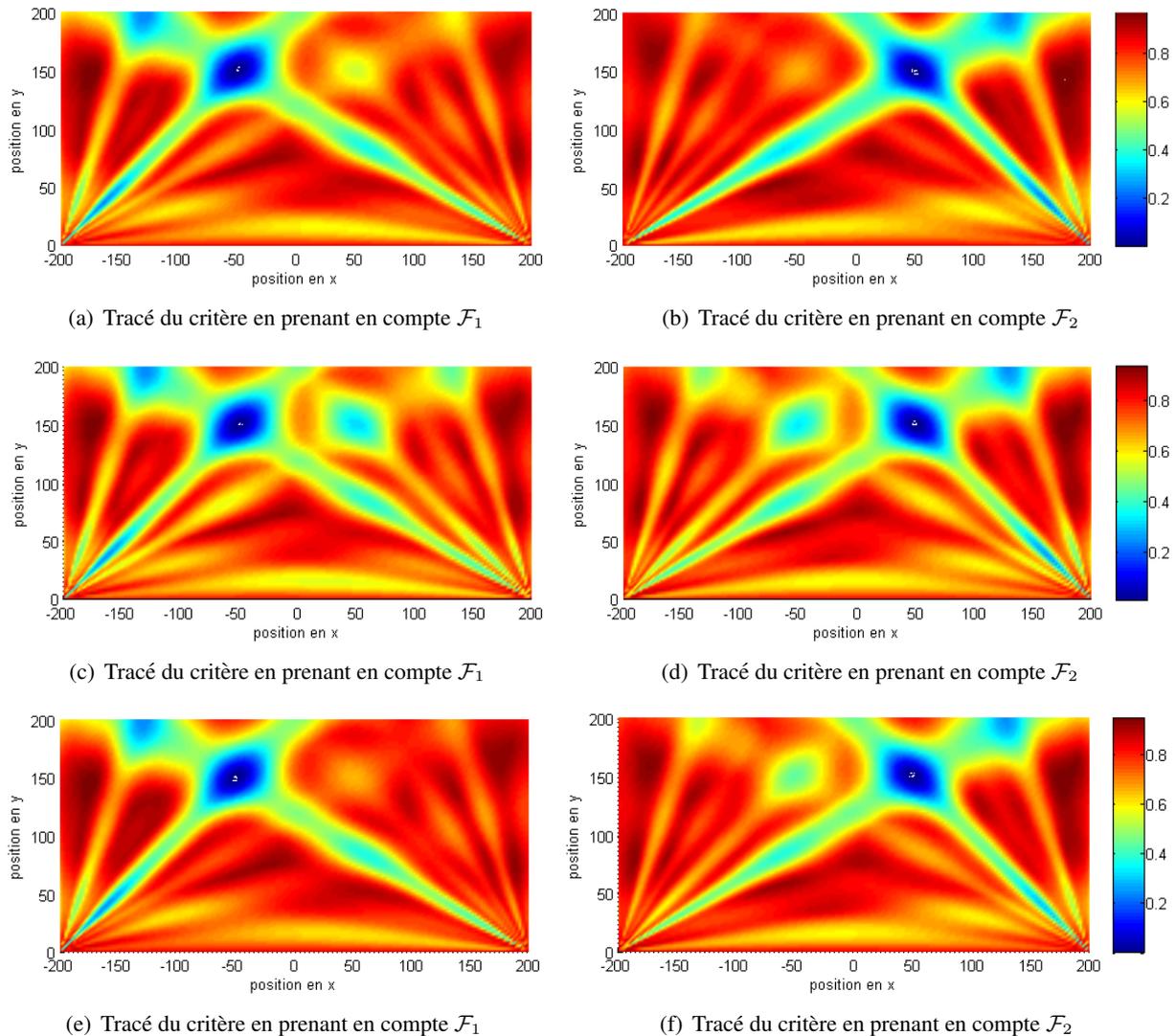


Figure 4.4: Tracé de la fonction coût : (a)  $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_1)$ , (b)  $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_2)$  dans le cas de supports spectraux disjoints, (c)  $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_1)$ , (d)  $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_2)$  dans le cas d'une union des supports spectraux non nulle et (e)  $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_1)$ , (f)  $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_2)$  dans le cas d'une inclusion stricte des supports spectraux.

#### 4.1.4 Comparaisons avec les autres méthodes en 1 étape

Nous allons dans cette partie comparer l'algorithme LOST-FIND à la triangulation (AoA/AoA), à la méthode hybride exploitant l'AoA et le TDoA (AoA/TDoA) et aux algorithmes en 1 étape LOST et DPD. Pour la méthode hybride le TDoA est estimé par une simple intercorrélacion entre les signaux d'une antenne de chaque base comme décrit dans la partie 2.1.3.1. La position des deux stations est donnée sur la Fig.4.5. Les stations sont composées d'un réseau de 6 capteurs avec 5 capteurs en formation circulaire et un sixième au centre. Le réseau a un rayon de  $2.4\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $F_e = 500\text{kHz}$  est la fréquence d'échantillonnage. Nous considérons  $K = 5$  décalages temporels pour l'observation des méthodes spatiotemporelles LOST et LOST-FIND et  $K = 5$  filtres

pour l'algorithme DPD.

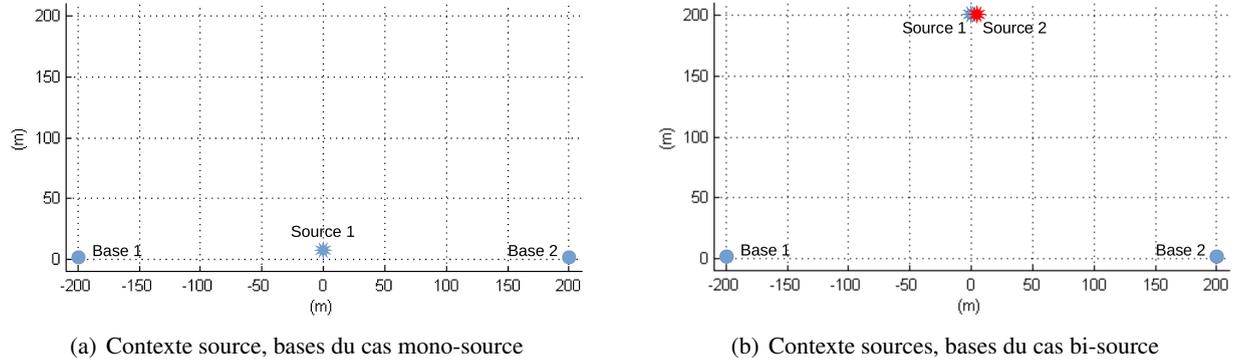


Figure 4.5: Représentation des contextes des deux configurations bases/sources traitées

Dans un premier temps nous allons considérer une seule source dont la position (0m, 5m) est relativement proche de la zone de dysfonctionnement pour les estimateurs exploitant seulement les AoA. Le scénario est représenté sur la Fig.4.5(a). Nous considérons tout d'abord un cas où la source occupe toute la bande passante des bases. Le signal est donc présent dans tous les sous-canaux du banc de filtres du DPD. Les performances en terme de REQM sur l'estimation de la position de la source sont données en fonction du RSB sur la Fig.4.6.

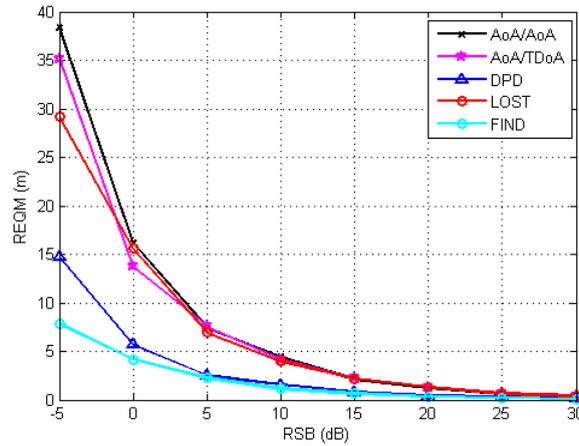


Figure 4.6: REQM en fonction du RSB dans la cas mono-source occupant toute la bande des récepteurs proche de la zone de dysfonctionnement des estimateurs de position exploitant seulement les AoA.

L'estimateur du TDoA est en dysfonctionnement à cause de la largeur de bande relativement faible (500kHz). En effet, plus le signal possède une bande étroite, plus l'estimateur classique du TDoA se dégrade<sup>1</sup>. On peut montrer que l'écart type du TDoA est approximativement inversement proportionnel à l'inverse de la bande du signal. Nous avons alors dans ce cas un écart type proportionnel à  $\sigma_{TDoA} = 2\mu s$ , sachant que l'excursion maximale du TDoA donné en (2.37) vaut approximativement  $\Delta\tau_{max} \approx 1.33\mu s$ . L'écart type  $\sigma_{TDoA}$  est dans ce contexte de stations supérieur à l'excursion maximale du TDoA. La matrice de poids  $\mathbf{W}$  de l'estimation quadratique de la seconde étape (2.52) va donc accorder beaucoup plus d'importance aux AoA. Les résultats sont alors très proches

<sup>1</sup>Le chapitre 5 sur l'estimateur du TDoA par l'algorithme TARGET rentre plus dans le détail de cet inconvénient.

de ceux de la triangulation classique<sup>2</sup>. On peut constater également que dans le cas mono-source avec une source utilisant toute la bande, le DPD possède de bonnes performances. Cependant l’algorithme LOST-FIND possède de meilleures performances et l’écart entre le REQM des algorithmes DPD et LOST-FIND se creuse à faible RSB.

Dans un deuxième contexte, la position de la source et des stations est identique à celui de la Fig.4.5(a). Cependant la source a une bande plus faible valant 250kHz. Les performances du DPD se dégradent du facteur de réduction de la bande, c.-à-d. d’un facteur 2 en comparant la Fig.4.6 avec la Fig.4.7. En effet comme nous l’avions vu durant la présentation de l’algorithme du DPD, le critère est une somme incohérente de critères MUSIC dans chacune des sous-bandes du banc de filtres. Donc si le signal n’est pas présent dans une sous-bande, les performances du DPD se dégradent très rapidement. On peut observer ce REQM en fonction du RSB sur la Fig.4.7.

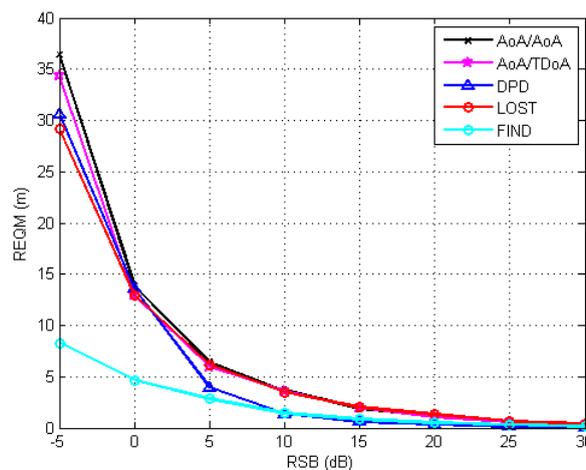


Figure 4.7: REQM en fonction du RSB dans la cas mono-source n’occupant que la moitié de la bande des récepteurs proche de la zone de dysfonctionnement des estimateurs de position exploitant seulement les AoA.

Ainsi, la réduction de la bande du signal dégrade encore plus les performances de l’estimateur du TDoA et la méthode hybride AoA/TDoA se comporte progressivement comme la méthode de triangulation AoA/AoA. Pour finir LOST et LOST-FIND ont des performances qui ne varient pas lorsque le scénario d’occupation spectrale change.

Pour finir nous considérons un cas avec  $Q = 2$  sources. Le contexte sources, bases est présenté sur la Fig.4.5(b) où une première source est placée en (0m, 200m) et une seconde en (5m, 200m). Les sources ont alors une position plus favorable pour les estimateurs exploitant seulement les AoA. Mais par contre elles sont extrêmement proches avec une distance de 0.0125 la distance inter-base. Les sources occupent de nouveau toute la largeur de bande des récepteurs des bases. Nous allons analyser l’influence sur les performances de LOST-FIND, des itérations et des points d’initialisation. Ce que nous appelons “ $\infty$  iter” correspond au cas où LOST-FIND a convergé. Pour arriver à cette borne nous initialisons LOST-FIND sur les valeurs exactes  $\mathbf{p}_q$  et  $\mathcal{F}_q$ . Les résultats de la Fig.4.8 montrent que l’algorithme LOST-FIND<sup>3</sup> a convergé en performance vers la borne après très peu d’itérations.

<sup>2</sup>Sans la matrice de poids  $\mathbf{W}$ , et en accordant beaucoup d’importance au TDoA les performances de l’estimation de la position seraient encore plus mauvaises.

<sup>3</sup>Du fait de la construction de LOST-FIND, les performances asymptotiques sont identiques à celles du processus spatiotemporel.

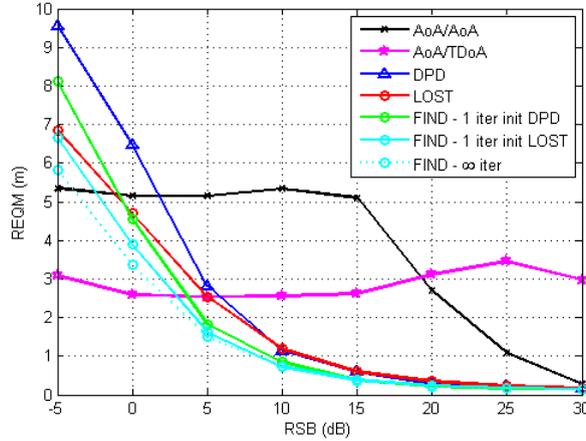


Figure 4.8: REQM en fonction du RSB dans la cas bi-source occupant toute la bande des récepteurs, une à (0,200m) et une autre à (5m,200m), les deux sources sont séparées de 0.0125 fois la distance inter-base.

Du fait de la faible séparation des deux sources, l'estimateur du TDoA ne voit qu'un seul TDoA qui se trouve entre les deux vraies valeurs. L'estimateur AoA/TDoA est en dysfonctionnement et sa performance n'apparaît pas sur la figure (REQM supérieur à 10m). On constate plutôt un bon comportement de LOST et LOST-FIND. LOST-FIND possède de meilleures performances que LOST grâce à la prise en compte des TDoA dans l'une des étapes de l'algorithme qui permet de mieux discriminer les sources. Jusqu'à présent les résultats de LOST-FIND ont été donnés pour une infinité d'itérations. Nous pouvons ici considérer deux cas d'initialisation. En vert nous avons pour initialisation de LOST-FIND l'algorithme du DPD et en turquoise l'initialisation l'algorithme LOST. On remarque un gain confortable réalisé dès la première itération en utilisant une initialisation par l'algorithme LOST plutôt que par le DPD. Le choix de l'initialisation de l'algorithme LOST-FIND sera donc un choix important afin de réduire le coût calculatoire (en limitant le nombre d'itérations) de ce dernier. Nous avons représenté en trait pointillé turquoise la performance limite avec un nombre d'itérations très grand. On peut voir qu'il est encore possible d'améliorer les performances de LOST-FIND avec l'initialisation par LOST en ajoutant des itérations. Cette marge d'amélioration est visible avec l'initialisation via l'algorithme DPD. Il sera donc conseillé d'utiliser l'algorithme le mieux adapté au contexte de bases et de sources pour initialiser LOST-FIND. Sinon il faudra compenser par un nombre d'itérations plus grand. Par exemple si la source est proche de la zone de dysfonctionnement de l'AoA, il est préférable d'utiliser le DPD pour converger plus rapidement. L'initialiser avec LOST nécessitera un plus grand nombre d'itérations pour des performances équivalentes.

#### 4.1.5 Conclusion sur LOST-FIND

L'algorithme LOST-FIND exploite tout le modèle de l'observation spatiotemporelle qui dépend des AoA, TDoA et des fréquences des sources, tandis que LOST n'exploite que les AoA. De plus, la complexité de LOST-FIND est comparable à celle de LOST en réduisant le nombre de dimensions du problème spatiotemporel initial. Un gain de performance a été observé par rapport aux algorithmes DPD et LOST et également vis-à-vis de la triangulation et de la méthode hybride AoA/TDoA. Finalement le choix de l'algorithme initialisant la position des sources est important afin de limiter le nombre d'itérations de l'algorithme LOST-FIND pour atteindre la performance souhaitée et ainsi réduire le coût de calcul de ce dernier.

## 4.2 Les RMT en grandes dimensions au secours des méthodes de géolocalisation HR en 1 étape

Le domaine des RMT (*Random Matrix Theory*) a pour origine les travaux de J. Wishart [Wis28] en 1928 qui portent sur l'étude de la densité de probabilité d'une matrice de covariance calculé à partir de données i.i.d. suivant une loi gaussienne et centrée. Il sera donné à cette loi le nom de son découvreur, à savoir loi de Wishart. C'est en 1955 que les premiers résultats du comportement asymptotique des valeurs propres furent établis par E. P. Wigner [Wig55] dans le domaine de la physique nucléaire. Cependant ces travaux portent sur des matrices Hermitiennes de diagonale nulle et où les composantes aléatoires sont i.i.d. avec des valeurs  $\pm 1$  représentant le spin des électrons. Il considéra en 1958 la même construction matricielle mais avec des valeurs aléatoires de loi gaussienne et centrées [Wig58]. Il faut attendre 1967 pour que V. A. Marčenko et L. A. Pastur établissent la loi asymptotique du comportement des valeurs propres d'une matrice de covariance empirique générée par des données aléatoires et i.i.d. [MP67]. Ce cadre théorique est plus général que les trois précédents. Notamment en imposant aucune loi de distribution aux données permettant d'estimer la matrice de covariance contrairement au modèle de Wishart (sous certaines hypothèses que nous citerons par la suite). De plus, de par sa construction même, la matrice hermitienne étudiée est plus proche d'une matrice de covariance que celles étudiées par Wigner.

### 4.2.1 Introduction aux RMT

Les méthodes de géolocalisation envisagées s'appuient sur la statistique d'ordre 2 d'un mélange linéaire, comme le suivant :

$$\mathbf{x}(jT_e) = \sum_{q=1}^r \mathbf{a}_q s_q(jT_e) + \mathbf{n}(jT_e), \quad (4.18)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{s}(jT_e) + \mathbf{n}(jT_e), \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{x}(jT_e)$  est un vecteur de dimension  $D \times 1$  et  $\mathbf{n}(jT_e)$  est un bruit stationnaire dont les statistiques d'ordre 2 vérifient :  $\mathbb{E}[\mathbf{n}(jT_e)\mathbf{n}^H(jT_e)] = \sigma^2\mathbf{I}_D$  et  $\mathbb{E}[\mathbf{n}(jT_e)\mathbf{n}^H(iT_e)] = \mathbf{0}_{D \times D}$  pour  $j \neq i$ . Il est donc supposé blanc temporellement et spatialement.

L'objectif des méthodes HR est d'extraire de la matrice de covariance de  $\mathbf{x}(nT_e)$  le projecteur orthogonal à l'espace engendré par les vecteurs  $\{\mathbf{a}_q | q \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$ . Cette matrice de covariance s'écrit :

$$\mathbf{R}_x = \mathbb{E}[\mathbf{x}(jT_e)\mathbf{x}^H(jT_e)], \quad (4.20)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}_D. \quad (4.21)$$

La décomposition en éléments propres de  $\mathbf{R}_x$  s'écrit alors :

$$\mathbf{R}_x = \sum_{d=1}^D \lambda_d \mathbf{v}_d \mathbf{v}_d^H, \quad (4.22)$$

$$= \sum_{d=1}^r \lambda_d \mathbf{v}_d \mathbf{v}_d^H + \sigma^2 \mathbf{\Pi}^\perp, \quad (4.23)$$

où  $\mathbf{v}_d$  est le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_d$  telle que  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_D = \sigma^2$  et  $\mathbf{\Pi}^\perp$  est le projecteur vers le sous-espace bruit défini par :

$$\mathbf{\Pi}^\perp = \sum_{d=r+1}^D \mathbf{v}_d \mathbf{v}_d^H. \quad (4.24)$$

D'après (4.21) on sait que le sous-espace signal défini par les vecteurs  $\{\mathbf{v}_d | d \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$  engendre le même espace que  $\{\mathbf{a}_q | q \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$ . D'autre part on sait que ce sous-espace signal est orthogonal au sous-espace bruit engendré par  $\{\mathbf{v}_d | d \in \llbracket r+1; D \rrbracket\}$ . On en déduit alors que :

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{a}_q = 0. \quad (4.25)$$

C'est cette propriété qui est utilisée par les méthodes HR de type MUSIC. D'un point de vue pratique la matrice  $\mathbf{R}_x$  est estimée sur  $n$  échantillons par la SCM (*Sample Covariance Matrix*) :

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}(jT_e) \mathbf{x}^H(jT_e), \quad (4.26)$$

où la décomposition en éléments propres s'écrit :

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \sum_{d=1}^D \hat{\lambda}_d \hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d^H, \quad (4.27)$$

où  $\hat{\lambda}_d$  sont les valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}_x$  telles que  $\hat{\lambda}_1 > \dots > \hat{\lambda}_r > \hat{\lambda}_{r+1} > \dots > \hat{\lambda}_D$  et  $\hat{\mathbf{v}}_d$  les vecteurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}_x$  associés. Lorsque  $n$  n'est pas suffisamment grand, le projecteur  $\hat{\mathbf{\Pi}}^\perp$  calculé avec les vecteurs propres estimés à partir de l'opération (4.24), n'est plus parfaitement orthogonal aux vecteurs directeurs, ainsi :

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{a}_q \neq 0. \quad (4.28)$$

Ainsi lorsque  $n$  est faible, le projecteur  $\hat{\mathbf{\Pi}}^\perp$  est mal estimé car l'intersection entre le sous-espace bruit estimé  $\{\mathbf{v}_d | d \in \llbracket r+1; D \rrbracket\}$  et  $\{\mathbf{a}_q | q \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$  est non nulle.

La matrice  $\hat{\mathbf{R}}_x$  est en fait une matrice aléatoire dont la taille est  $D$ . On parle de grandes dimensions lorsque  $D$  et  $n$  sont très grands avec un rapport constant, c.-à-d.  $D/n \rightarrow c \in \mathbb{R}_{+*}$ . On notera de façon abusive la valeur de convergence  $c = D/n$ . On définit alors le régime dimensionnel quand pour tout  $D$  et  $n$  ce rapport est vérifié. Les outils de RMT permettent d'obtenir la répartition statistique des valeurs propres  $\hat{\lambda}_d$  de  $\hat{\mathbf{R}}_x$  sous les hypothèses suivantes :

- le bruit est spatialement et temporellement blanc, circulaire et de moment d'ordre 8 fini ;
- les composantes du vecteur bruit sont i.i.d. ;
- $D, n \rightarrow \infty$  avec  $D/n \rightarrow c$  ;
- les signaux et le bruit sont de puissance finie :  $\forall d \in \llbracket 1; D \rrbracket, \lambda_d < \infty$ .

L'objectif est de déterminer un pseudo-projecteur  $\hat{\mathbf{\Pi}}_{pseudo}^\perp$  où :

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{pseudo}^\perp \mathbf{a}_q = \frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \left( \sum_{d=1}^D \phi_d \hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d^H \right) \mathbf{a}_q \underset{\substack{\text{p.s.} \\ D, n \rightarrow \infty \\ D/n \rightarrow c < \infty}}{\rightarrow} \frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{a}_q, \quad (4.29)$$

avec  $\phi_d$  dépendant des valeurs propres  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_D$ . La théorie permet ainsi d'augmenter le contraste entre la projection de  $\{\mathbf{a}_q | q \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$  sur le sous-espace signal  $\{\mathbf{v}_d | d \in \llbracket 1; r \rrbracket\}$  et celle sur la partie bruit  $\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \hat{\mathbf{\Pi}}_{pseudo}^\perp \mathbf{a}_q$  à partir de la connaissance de la répartition statistique des valeurs propres du bruit.

Nous introduirons dans un premier temps les principes fondamentaux des RMT à grande dimension. Dans un second temps nous montrerons que les algorithmes en 1 étape luttant contre l'effet large bande tels que le DPD, LOST et LOST-FIND nécessitent l'estimation d'une matrice de covariance à grande dimension et se prêtent ainsi très bien au cadre théorique des RMT à grande dimension. Nous adaptons ensuite ces différents algorithmes à l'approche G-MUSIC [Mes08a], [ML08].

### 4.2.1.1 Analyse du comportement spectral de la matrice de covariance

Nous allons dans un premier temps rappeler les résultats marquants des RMT dans le contexte de l'estimation paramétrique. Ainsi nous allons aborder plus en détails la loi décrivant le comportement asymptotique des valeurs propres d'une matrice de covariance estimée dite SCM et nous donnerons quelques résultats importants sur la convergence de formes quadratiques utilisant les outils de la RMT. Finalement, nous allons appliquer les outils étudiés à notre cas applicatif des méthodes en 1 étape.

#### 4.2.1.1.1 Étude du comportement des valeurs propres de la SCM d'un bruit spatialement blanc

La matrice de covariance de l'observation  $\mathbf{x}(t)$  composée seulement d'un bruit blanc circulaire de puissance unitaire s'écrit  $\mathbf{R}_x = \mathbf{I}_D$ . Toutes les valeurs propres sont alors égales à 1. Lorsque la dimension  $D$  et la durée d'observation  $n$  sont grandes avec un rapport  $c = D/n$  constant, les valeurs propres de la SCM du bruit suivent presque sûrement la loi de Marčenko-Pastur. Dans les résultats suivants, nous vérifions cette propriété en comparant l'histogramme normalisé des valeurs propres de la SCM avec la Densité De Probabilité (DDP) de Marčenko-Pastur pour différents cas :

- Le cas d'une grande matrice avec  $D = 500$  en considérant une loi  $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  pour deux temps d'intégrations différents :
  - le premier à  $n = 10^4$  sur la Fig.4.9(a), pour un rapport  $c = 0.05$  faible. La SCM est faiblement perturbée, ceci induit un support compact de variation des valeurs propres petit ;
  - le deuxième à  $n = 1000$  sur la Fig.4.9(b), pour un rapport  $c = 0.5$  plus élevé que le précédent et relativement proche de 1. La SCM est donc fortement perturbée induisant un support compact des valeurs propres plus grand que pour  $n = 10^4$ .

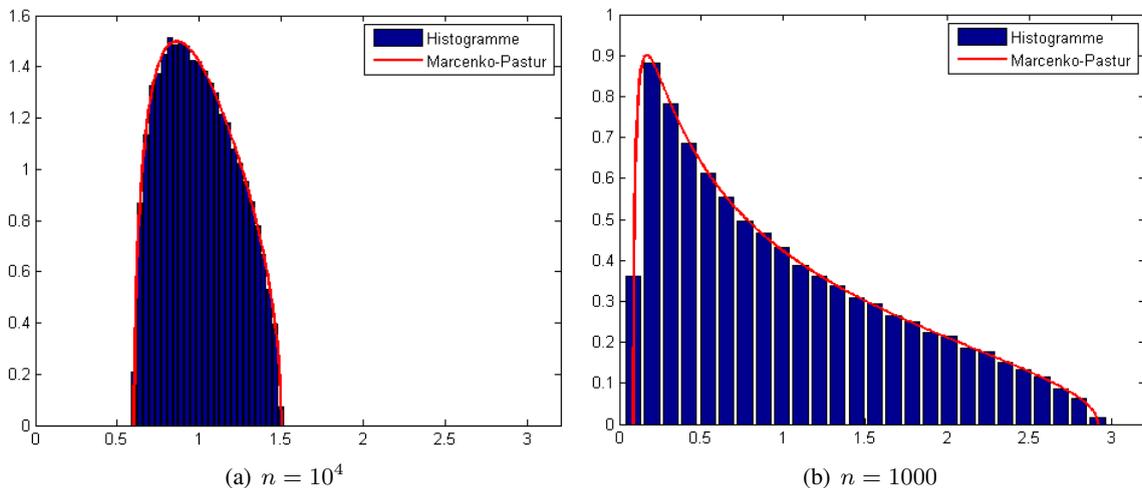


Figure 4.9: Histogramme normalisé des valeurs propres de la SCM d'un bruit blanc circulaire gaussien  $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , pour une matrice de dimension  $D = 500$ .

- Le cas d'une matrice de taille plus proche de nos applications avec  $D = 15$ . Nous considérons une loi  $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  pour deux temps d'intégration différents :
  - le premier à  $n = 300$  sur la Fig.4.10(a), qui permet d'avoir un rapport  $c = 0.05$  identique que sur la Fig.4.9(a). On constate que sur les figures 4.9(a) et 4.10(a) les histogrammes normalisés des valeurs propres de la SCM sont relativement proches. On note cependant un léger dépassement des valeurs propres aux extrémités de leurs supports ;

- le deuxième à  $n = 30$  sur la Fig.4.10(b), pour un rapport  $c = 0.5$  identique à celui de la Fig.4.9(b).

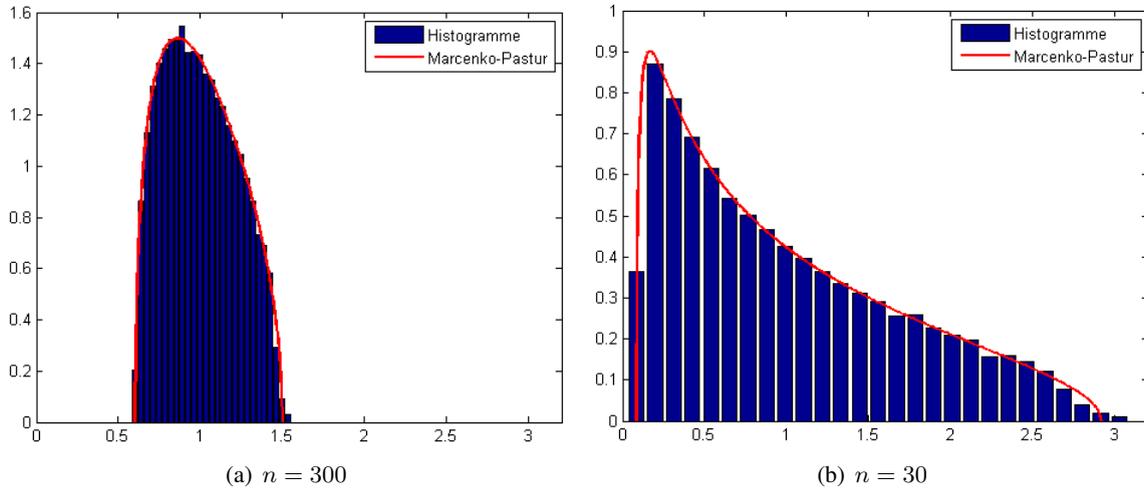


Figure 4.10: Histogramme normalisé des valeurs propres de la SCM d’un bruit blanc circulaire gaussien  $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , pour une matrice de dimension  $D = 15$ .

- Enfin, le cas où nous considérons une matrice de taille  $D = 15$  mais avec un bruit blanc circulaire uniforme  $\mathcal{CU}(-1, 1)$ , pour deux temps d’intégration différents :
  - le premier à  $n = 300$  sur la Fig.4.11(a), avec un rapport  $c = 0.05$ . On remarque que sur les figures 4.10(a) et 4.11(a) les histogrammes des valeurs propres de la SCM ont un comportement identique ;
  - le deuxième à  $n = 30$  sur la Fig.4.10(b), pour un rapport  $c = 0.5$  où de la même manière les valeurs propres vérifient une loi proche de la loi Marčenko-Pastur.

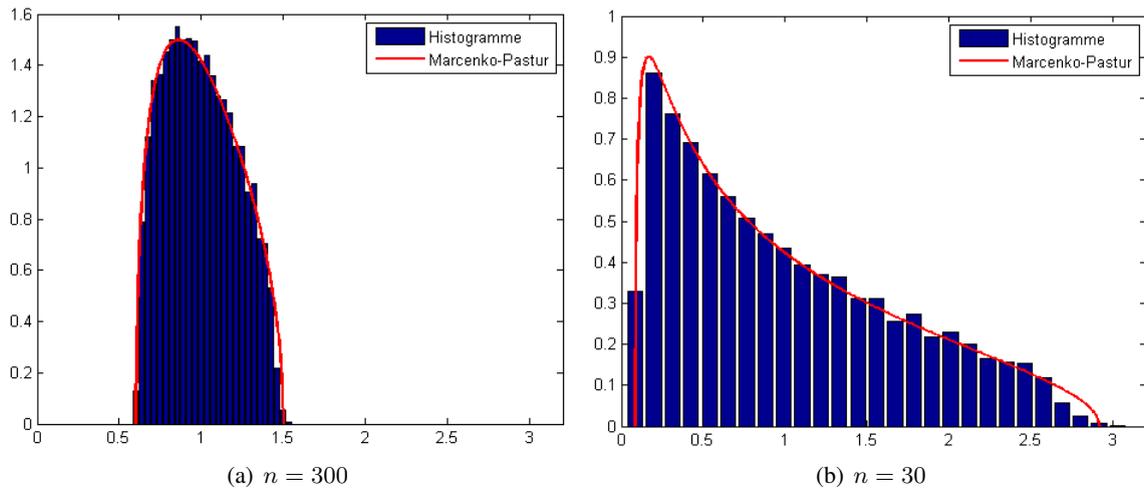


Figure 4.11: Histogramme normalisé des valeurs propres de la SCM d’un bruit blanc circulaire uniforme  $\mathcal{CU}(-1, 1)$ , pour une matrice de dimension  $D = 15$ .

On observe que lorsque  $n$  est très grand devant  $D$  l’histogramme des valeurs propres de la SCM est centré sur la valeur théorique de 1 avec un support compact de variation des valeurs propres petit. Asymptotiquement, si  $n$  tend vers l’infini et  $D$  reste constant, nous obtenons un Dirac sur la valeur propre théorique 1. Cependant lorsque  $n$  est

du même ordre de grandeur que la taille  $D$  de la matrice  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}$  l'étalement des valeurs propres devient plus grand avec un support compact élargi. De plus, bien qu'ayant un support plus large, la moyenne des valeurs propres de la SCM n'est pas égale à la valeur théorique de 1. Pour finir, nous avons observé sur ces quelques exemples, que la matrice de covariance n'a pas nécessairement besoin d'une taille très grande pour que la loi de distribution des valeurs propres de la SCM converge vers la loi de Marčenko-Pastur. De plus, nous avons constaté que cette distribution est indépendante de la loi du bruit d'observation.

#### 4.2.1.1.2 Généralités sur la loi de Marčenko-Pastur

Nous nous intéressons ici à la loi asymptotique des valeurs propres de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$  de l'Eq.(4.21), telle que  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \mathbb{E} [\mathbf{x}(jT_e)\mathbf{x}^H(jT_e)]$ . La SCM des observations  $\mathbf{x}(t)$  de dimension  $D \times 1$  vérifie :

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{X}^H, \quad (4.30)$$

avec  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(T_e), \dots, \mathbf{x}(nT_e)]$ . Lorsque  $D, n \rightarrow \infty$  avec un rapport  $D/n \rightarrow c$  constant, la statistique des valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}$  converge presque sûrement vers une loi asymptotique. Ainsi, la fonction de répartition normalisée empirique  $\hat{F}_c(x)$  et l'histogramme normalisé  $\hat{f}_c(x)$  convergeront respectivement vers les fonctions  $F_c(x)$  et  $f_c(x)$ . Par la suite nous nommerons abusivement l'histogramme normalisé  $\hat{f}_c(x)$  par DDP empirique<sup>4</sup>. Les outils de RMT montrent que sous certaines conditions la densité empirique  $\hat{f}_c(x)$  peut converger presque sûrement vers une densité de probabilité  $f_c(x)$  déterministe, à support compact. La DDP asymptotique  $f_c(x)$  permettra alors de caractériser le modèle de la perturbation de la SCM. La fonction de répartition empirique des valeurs propres de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}$  est définie de la manière suivante :

$$\hat{F}_c(x) = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D 1_{\hat{\lambda}_d \leq x}(x), \quad (4.31)$$

où  $1_{\mathcal{E}}$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathcal{E}$ . Cependant, en pratique, la caractérisation asymptotique de  $\hat{F}_c(x)$  est trop compliquée. De ce fait, la transformée de Stieltjes [Sti94] notée  $\mathcal{ST}[\cdot]$  est utilisée :

$$\hat{b}_c(z) = \mathcal{ST}[\hat{F}_c(x)] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} d\hat{F}_c(x), \quad (4.32)$$

$$= \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D \frac{1}{\hat{\lambda}_d - z} = \frac{1}{D} \text{tr} \left[ \left( \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}} - z \mathbf{I}_D \right)^{-1} \right], \quad (4.33)$$

où  $z = x + i\Im\{z\}$  avec  $z \in \mathbb{C}_+ \equiv \{z \in \mathbb{C} : \Im\{z\} > 0\}$ . La fonction  $\hat{b}_c(z)$  converge presque sûrement vers une fonction  $\bar{b}_c(z)$  qui reste à définir. La transformée inverse de Stieltjes dans le cadre d'une fonction de répartition empirique, qui selon [CD11] existe, est donnée par :

$$\hat{F}_c(x) = \lim_{\Im\{z\} \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \Im \left\{ \hat{b}_c(x + i\Im\{z\}) \right\} dx, \quad (4.34)$$

avec  $x \in \mathbb{R}$ . Alors il est intéressant de noter que la DDP empirique peut être déterminée à partir de la transformée de Stieltjes de la fonction de répartition empirique associée par la relation suivante [Mes08b] :

$$\hat{f}_c(x) = \lim_{\Im\{z\} \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \Im \left\{ \hat{b}_c(z) \right\}. \quad (4.35)$$

D'une autre manière, la détermination de  $\hat{f}_c(x)$  (resp.  $f_c(x)$ ) peut être obtenue à partir de  $\hat{b}_c(z)$  (resp.  $\bar{b}_c(z)$ ).

<sup>4</sup>Sous réserve d'un nombre de valeurs propres suffisamment grand et d'un pas suffisamment petit pour que l'histogramme normalisé tende vers une DDP continue.

#### 4.2.1.1.3 Analyse de la covariance d'une perturbation spatialement blanche

Nous définissons une perturbation  $\mathbf{y}(jT_e)$  composée d'entrées aléatoires i.i.d. de même loi circulaire, de moment d'ordre 8 fini, de moyenne nulle et ayant pour matrice de covariance  $\mathbf{R}_y = \mathbb{E} [\mathbf{y}(jT_e)\mathbf{y}^H(jT_e)] = \mathbf{I}_D$ . En présence de  $n$  observations indépendantes, sa SCM s'écrit :

$$\hat{\mathbf{R}}_y = \frac{1}{n} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H, \quad (4.36)$$

avec  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(T_e), \dots, \mathbf{y}(nT_e)]$ . Dans ce contexte particulier, la transformée inverse de Stieltjes de  $\bar{b}_c(z)$  correspondant à  $F_c(x)$  a été calculée pour tout  $z \in \mathbb{C}^+$  et sous les hypothèses précédentes, quand  $D, n \rightarrow \infty$  à ratio  $c$  constant. Dans l'ensemble  $\{\bar{b}_c(z) \in \mathbb{C} \mid -(1-c)/z + c\bar{b}_c(z) \in \mathbb{C}_+\}$  la fonction  $\bar{b}_c(z)$  est l'unique solution de l'équation suivante [MP67], [Mes08b] :

$$\bar{b}_c(z) = \frac{1}{1 - c - cz\bar{b}_c(z) - z}. \quad (4.37)$$

Ainsi, en utilisant la relation (4.35) permettant de déterminer la fonction de densité asymptotique  $f_c(x)$  à partir de  $\bar{b}_c(x)$ , la densité de probabilité associée à  $\bar{b}_c(x)$  est la loi de Marčenko-Pastur [MP67], elle est définie de la façon suivante :

$$f_c(x) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{c}) & \text{si } x = 0 \text{ et } c > 1, \\ \frac{1}{2\pi cx} \sqrt{(\lambda_- - x)(x - \lambda_+)} & \text{si } x \in ]\lambda_-; \lambda_+[ , \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.38)$$

avec  $\lambda_- = (1 - \sqrt{c})^2$  et  $\lambda_+ = (1 + \sqrt{c})^2$ . Cette loi est à support compact  $] (1 - \sqrt{c})^2; (1 + \sqrt{c})^2 [$  et la valeur propre maximale (resp. minimale) de  $\frac{1}{n} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$  tend presque sûrement vers  $(1 + \sqrt{c})^2$  (resp.  $(1 - \sqrt{c})^2$ ). On peut observer que la loi théorique correspond bien à la densité de probabilité empirique des valeurs propres de la SCM sur les figures 4.9, 4.10 et 4.11 où les lois de Marčenko-Pastur sont représentées en rouge. Plusieurs exemples peuvent être également observés sur la Fig.4.12 pour plusieurs valeurs de  $c$ .

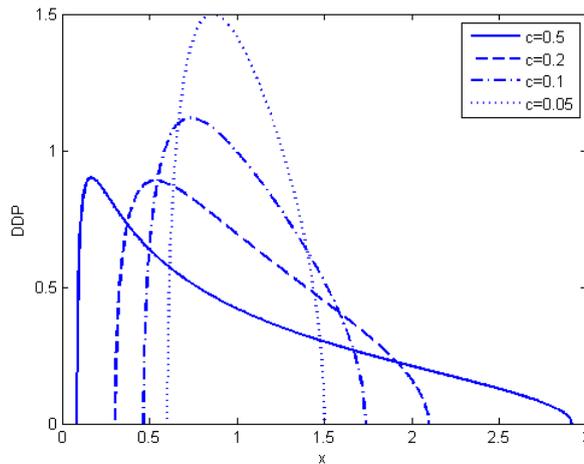


Figure 4.12: Loi de Marčenko-Pastur pour différentes valeurs de  $c$ .

#### 4.2.1.1.4 Adaptation de la loi de Marčenko-Pastur à une matrice non blanche

L'objectif est d'adapter les résultats du paragraphe 4.2.1.1.3 sur des observations  $\mathbf{y}(jT_e)$  blanches aux observations  $\mathbf{x}(jT_e)$  de l'Eq.(4.18) dont la matrice de covariance  $\mathbf{R}_x$  n'est pas blanche. Dans ce cadre il est supposé entre les

observations de  $\mathbf{x}(jT_e)$  et  $\mathbf{y}(jT_e)$  de covariance blanche le lien suivant :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}(T_e), \dots, \mathbf{x}(nT_e)], \quad (4.39)$$

$$= \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}. \quad (4.40)$$

Le lien entre les SCM des deux vecteurs aléatoires est alors le suivant :

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{R}}_y \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}H}, \quad (4.41)$$

où  $\hat{\mathbf{R}}_y$  est appelée matrice de perturbation et  $\mathbf{R}_x$  est une matrice déterministe (non aléatoire). L'idée qualitative du modèle G-MUSIC est que les valeurs propres de multiplicité multiple de  $\mathbf{R}_x$  vont créer des *clusters* de valeurs propres sur la SCM. Chacun des *clusters* étant spatialement décorrélé, il est possible d'appliquer les résultats obtenus sur une matrice blanche pour la statistique des valeurs propres.

#### 4.2.1.1.5 Modèle G-MUSIC

G-MUSIC (pour Girko-MUSIC) est un algorithme issu des RMT à grandes dimensions permettant de faire de l'estimation paramétrique en exploitant la fonction de répartition de la loi de Marčenko-Pastur. Il s'agit de l'un des algorithmes les plus connus et les plus représentés dans le domaine des RMT appliqué à de l'estimation paramétrique. Dans le cadre de G-MUSIC la décomposition en éléments propres de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_x$  est la suivante [Mes08a], [Mes08b], [ML08] :

$$\mathbf{R}_x = \sum_{d=1}^D \lambda_d \mathbf{v}_d \mathbf{v}_d^H, \quad (4.42)$$

$$= \sum_{d=1}^{\bar{D}} \alpha_d \mathbf{V}_d \mathbf{V}_d^H, \quad (4.43)$$

où  $\alpha_d$  sont les  $\bar{D}$  valeurs propres distinctes de  $\mathbf{R}_x$  et  $\mathbf{V}_d$  les sous-espaces associés avec  $\alpha_1 > \dots > \alpha_{\bar{D}} \geq 0$ .  $\alpha_d$  est de multiplicité  $\mathcal{K}_d$ , on a donc  $\mathbf{V}_d = [\mathbf{v}_q, \dots, \mathbf{v}_{q+\mathcal{K}_d}]$  la matrice des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\alpha_d$  de multiplicité  $\mathcal{K}_d$  avec  $q = \sum_{i=1}^{d-1} \mathcal{K}_i$  pour  $d > 1$ . Nous avons alors  $\alpha_d = \lambda_q = \dots = \lambda_{q+\mathcal{K}_d}$ . La particularité du modèle G-MUSIC est que la multiplicité  $\mathcal{K}_d$  augmente avec  $D$  [Mes08a], [CD11] :

$$\frac{\mathcal{K}_d}{D} \xrightarrow[D/n \rightarrow c < \infty]{D, n \rightarrow \infty} c_d \in ]0, 1], \quad (4.44)$$

avec  $\sum_{d=1}^{\bar{D}} c_d = 1$ . Ainsi, la convergence de la transformée de Stieltjes de la fonction de répartition associée au modèle est décrite par le théorème suivant :

**Théorème 4.1.** [Sil95] *Pour  $z \in \mathbb{C}_+$ , une matrice de covariance avec des valeurs propres bornées et une matrice de perturbation  $\mathbf{Y}$  satisfaisant les hypothèses mentionnées et quand  $D, n \rightarrow \infty$  à rapport constant  $c$ , alors :*

$$\left| \hat{b}_c(z) - \bar{b}_c(z) \right| \xrightarrow{\text{p.s.}} 0, \quad (4.45)$$

où  $\bar{b}_c(z)$  est l'unique solution de l'équation suivante dans l'ensemble  $\{\bar{b}_c(z) \in \mathbb{C} : -(1-c)/z + c\bar{b}_c(z) \in \mathbb{C}_+\}$  :

$$\bar{b}_c(z) = \sum_{d=1}^{\bar{D}} c_d \frac{1}{\alpha_d (1-c - cz\bar{b}_c(z)) - z}. \quad (4.46)$$

Cependant, en pratique, il est impossible de trouver une solution analytique pour  $\bar{b}_c(z)$  car cela reviendrait à trouver les racines d'un polynôme de degré  $\bar{D} + 1$ <sup>5</sup>. Le problème de l'Eq.(4.46) est résolu de façon numérique pour  $z = x + i\epsilon$  avec  $\epsilon \rightarrow 0$  de façon à calculer :

$$\hat{f}_c(x) \xrightarrow{\text{p.s.}} f_c(x) = \lim_{\Im\{z\} \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \Im \{ \bar{b}_c(z) \}. \quad (4.47)$$

On peut alors visualiser des exemples de DDP asymptotique  $f_c(x)$  des valeurs propres de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}_x$  sur la Fig.4.13 pour deux valeurs de  $c$ . Les quatre valeurs propres de la matrice de covariance théorique  $\mathbf{R}_x$  sont 1, 2, 3 et 7 et de même multiplicité quel que soit  $D$  (c.-à-d.  $c_d = 0.25$ ). On note alors que, quand  $c$  augmente, le support des *clusters* augmente aussi jusqu'à se confondre et se combiner en un *cluster* de support plus grand (ici les *clusters* associés aux valeurs propres  $\hat{\lambda}_2 = 3$  et  $\hat{\lambda}_3 = 2$  se réunissent en un seul *cluster*).

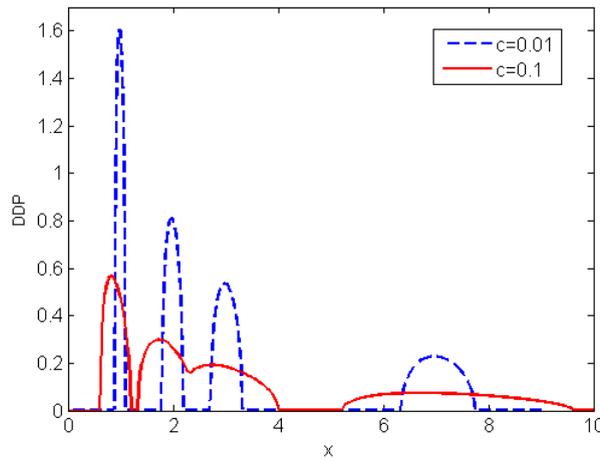


Figure 4.13: DDP asymptotique des valeurs propres de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}_x$  lorsque les valeurs propres de  $\mathbf{R}_x$  sont 1, 2, 3 et 7.

On définit alors un nouveau théorème qui permet de garantir la séparabilité de tous les *clusters* :

**Théorème 4.2.** [Mes08b] Si nous définissons  $\bar{x}_d$  les minima locaux de la fonction  $\psi(x)$  entre chaque valeur propre  $\alpha_d$  de la matrice  $\mathbf{R}_x$  (c.-à-d.  $\bar{x}_d$  minimum local entre  $\alpha_d$  et  $\alpha_{d+1} \forall d \in \llbracket 1; \bar{D} - 1 \rrbracket$ ), où la fonction  $\psi(x)$  est définie par :

$$\psi(x) = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^{\bar{D}} \mathcal{K}_d \left( \frac{\alpha_d}{\alpha_d - x} \right)^2. \quad (4.48)$$

On cherche le ratio  $c = \frac{D}{n}$  de telle sorte que  $\frac{1}{c}$  soit strictement supérieur à  $\{\Psi(\bar{x}_d) : d \in \llbracket 1; \bar{D} - 1 \rrbracket\}$ .

Pour le bon fonctionnement de G-MUSIC il faut qu'au minimum le *cluster* associé au bruit et ceux associés au signaux soient séparés. En d'autres termes il faut que le  $c$  satisfasse  $\psi(\bar{x}_1) < \frac{1}{c}$ .

Une représentation typique de  $\psi(x)$  peut être observée sur la Fig.4.14. On observe que  $\psi(x)$  tend vers l'infini lorsque  $x$  tend vers  $\alpha_d$ . Les intersections de  $\psi(x)$  avec la droite horizontale à  $\frac{1}{c}$  sont directement liées aux bornes des supports de  $f_c(x)$ . De même, on constate que plus  $\frac{1}{c}$  augmente, plus les différents *clusters* sont séparés.

<sup>5</sup>Le théorème d'Abel-Ruffini [Abe24] dit qu'il n'existe pas d'expression par radicaux aux racines des polynômes de degré supérieur ou égal à 5 sauf cas particulier.

Par exemple, sur la Fig.4.14, l'intersection de la droite  $\frac{1}{c}$  (pointillée rouge) avec  $\psi(x)$  correspond aux bornes du support  $f_c(x)$  pour  $c = 0.1$  de la Fig.4.13 (en rouge) et amène à 3 *clusters* séparés. Si la droite horizontale  $\frac{1}{c}$  avait été plus haute telle que  $\psi(\bar{x}_2) < \frac{1}{c}$  en prenant par exemple  $c = 0.01$ , correspondant aux *clusters* de Marčenko-Pastur en bleu pointillé de la Fig.4.13, alors nous aurions bien eu les 4 *clusters* associés aux 4 valeurs propres de  $\mathbf{R}_x$ .

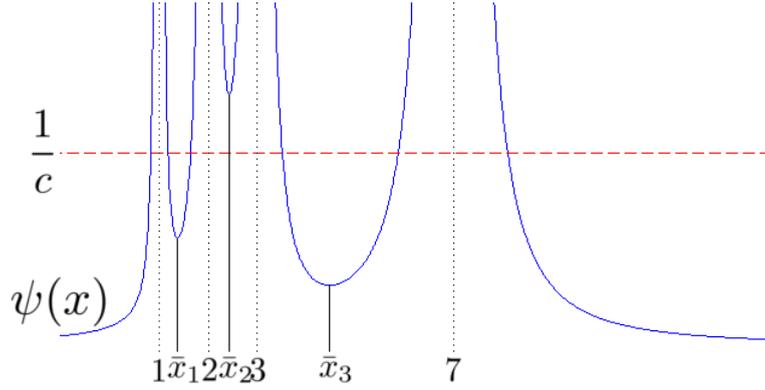


Figure 4.14: Visualisation de  $\psi(x)$  quand les valeurs propres de  $\mathbf{R}_x$  sont 1, 2, 3 et 7..

#### 4.2.1.2 Convergence des formes quadratiques

Dans le régime à grande dimension ( $n$  et  $D$  infini avec  $D/n$  fini), on maîtrise statistiquement le comportement de certaines quantités telles que la trace de  $\hat{\mathbf{R}}_x$  ou encore certaines formes quadratique dépendant des éléments propres de la SCM. Nous nous intéressons plus particulièrement à la forme quadratique du critère de MUSIC dépendant du projecteur vers les sous-espace bruit estimé. Nous allons étudier le comportement de ce projecteur classique dans le cas du régime à grande dimension et donner son biais. Nous donnerons ensuite le pseudo-projecteur G-MUSIC qui prend en compte le régime grande dimension pour obtenir un nouveau critère d'estimation non biaisé.

Pour ce faire nous définissons le vecteur  $\mathbf{a}_q$  complexe uniformément normé de dimension  $D$ . Nous allons donc étudier la généralisation de la forme quadratique de MUSIC utilisée dans les méthodes en 1 étape :  $\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{a}_q$  où  $\mathbf{\Pi}^\perp$  est le projecteur vers le sous espace bruit issu de la matrice  $\mathbf{R}_x$  de rang  $r$ .

##### 4.2.1.2.1 Convergence de la forme quadratique classique

Dans le domaine de l'estimation paramétrique on s'intéresse à la forme quadratique (4.25). Dans la mise en œuvre de MUSIC, on estime le projecteur à partir de la SCM donnant la forme quadratique suivante :  $\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{a}_q$ . On s'intéresse donc à sa convergence quand :

- $n \rightarrow \infty$  à  $D$  fixé ;
- $D, n \rightarrow \infty$  à ratio  $c$  constant.

La loi des grands nombres permet de dire que lorsque  $n \rightarrow \infty$  à  $D$  fixé alors  $\hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{\Pi}^\perp$  [Bil95], [Vaa00]. Ainsi :

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{a}_q \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}, D < \infty} \frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{a}_q, \quad (4.49)$$

$\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{a}_q$  est donc consistant en régime classique. Cependant, dans le cadre du régime en grandes dimensions, cette forme quadratique n'est plus consistante. Si les valeurs propres de la SCM suivent le modèle que nous avons établi plus haut, le biais de la forme quadratique est donné par le théorème suivant.

**Théorème 4.3.** *Convergence du critère de MUSIC dans le cadre du modèle de la SCM de G-MUSIC [Mes08b]*  
*Sous les hypothèses que nous avons établies sur la matrice de perturbation, des valeurs propres de la SCM avec une bonne séparation des clusters des valeurs propres, quand  $D, n \rightarrow \infty$  à ratio constant  $c$ , la forme quadratique du critère de MUSIC vérifie :*

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \hat{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{a}_q \xrightarrow[D/n \rightarrow c < \infty]{D, n \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \bar{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{a}_q, \quad (4.50)$$

avec  $\bar{\mathbf{\Pi}}^\perp = \sum_{d=1}^D w_d \mathbf{v}_d \mathbf{v}_d^H$ , où :

$$w_d = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{\lambda_d - \sigma^2} - \frac{\nu_D}{\lambda_d - \nu_D} & \text{si } d \leq r, \\ 1 - \frac{1}{D-r-1} \sum_{i=1}^r \left( \frac{\sigma^2}{\lambda_i - \sigma^2} - \frac{\nu_D}{\lambda_i - \nu_D} \right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.51)$$

où  $r$  est le rang de  $\mathbf{R}_x$ ,  $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_D$  sont les valeurs propres de  $\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{c}{D} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}}^T$ , avec  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_D]^T$  et  $\sigma^2$  est la puissance du bruit.

Le critère MUSIC est donc biaisé. C'est pourquoi d'autres estimateurs de la forme quadratique consistants dans le régime en grandes dimensions ont été définis.

#### 4.2.1.2.2 G-MUSIC

L'objectif est d'établir un pseudo-projecteur  $\hat{\mathbf{\Pi}}_G^\perp$  permettant de corriger le biais qu'il existe entre  $\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \bar{\mathbf{\Pi}}^\perp \mathbf{a}_q$  et  $\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{a}_q$ . Les résultats des théorèmes 4.2 et 4.3, font apparaître le pseudo-projecteur G-MUSIC  $\hat{\mathbf{\Pi}}_G^\perp$  en régime à grande dimension. Selon [Mes08a], [ML08] la forme quadratique suivante vérifie :

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \hat{\mathbf{\Pi}}_G^\perp \mathbf{a}_q \xrightarrow[D/n \rightarrow c < \infty]{D, n \rightarrow \infty, \text{p.s.}} \frac{1}{\|\mathbf{a}_q\|_2} \mathbf{a}_q^H \mathbf{\Pi}^\perp \mathbf{a}_q, \quad (4.52)$$

avec la construction du pseudo-projecteur  $\hat{\mathbf{\Pi}}_G^\perp$  donnée par :

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_G^\perp = \sum_{d=1}^D \phi_d \hat{\mathbf{v}}_d \hat{\mathbf{v}}_d^H, \quad (4.53)$$

où un coefficient de régularisation  $\phi_d$  est appliqué à chacun des sous-espaces propres associés à la SCM et dont voici l'expression :

$$\phi_d = \begin{cases} - \sum_{i=r+1}^D \left( \frac{\hat{\lambda}_i}{\hat{\lambda}_d - \hat{\lambda}_i} - \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\lambda}_d - \hat{\mu}_i} \right) & \text{si } d \leq r, \\ 1 + \sum_{i=1}^r \left( \frac{\hat{\lambda}_i}{\hat{\lambda}_d - \hat{\lambda}_i} - \frac{\hat{\mu}_i}{\hat{\lambda}_d - \hat{\mu}_i} \right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.54)$$

où  $\hat{\lambda}_q$  et  $\hat{\mathbf{v}}_q$  sont les éléments propres de la SCM et où  $\hat{\mu}_1 \geq \dots \geq \hat{\mu}_D$  sont les  $D$  solutions réelles de l'équation :

$$\sum_{d=1}^D \frac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m - \hat{\mu}} = \text{tr} \left[ \left( \hat{\mathbf{R}}_x - \hat{\mu} \mathbf{I}_D \right)^{-1} \hat{\mathbf{R}}_x \right] = n. \quad (4.55)$$

Trouver les solutions de (4.55) revient à déterminer les valeurs propres de [CD11] :

$$\text{diag}(\hat{\lambda}) - \frac{1}{n} \sqrt{\hat{\lambda}} \sqrt{\hat{\lambda}}^T, \quad (4.56)$$

avec  $\hat{\lambda} = [\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_D]^T$ . Si  $c \geq 1$ ,  $\hat{\mu}_D = \dots = \hat{\mu}_n = 0$ .

## 4.2.2 Lien comportemental du projecteur des méthodes en 1 étape

Nous allons seulement considérer ici les méthodes en 1 étape qui utilisent une décomposition en bande étroite pour lutter contre l'effet large bande sur l'antenne globale. En effet, toutes les méthodes conduisent à estimer un projecteur vers le sous-espace bruit dépendant d'une observation multi-dimensionnelle. Les algorithmes utilisent des observations différentes : le DPD utilise les observations en sortie du banc de filtres tandis que LOST ou LOST-FIND utilise une observation spatiotemporelle. Nous allons montrer qu'il existe un régime à grande dimension pour les projecteurs issus de ces deux observations.

### 4.2.2.1 Méthode à banc de filtres : DPD

En sortie d'un filtre du banc de filtres de bande  $\frac{B}{K}$ , les échantillons de bruit  $\mathbf{n}_k(nT_e)$  pour  $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$  deviennent temporellement dépendants : il ne reste plus que  $\frac{N}{K}$  échantillons de bruit statistiquement indépendants. En effet, les filtres idéaux du banc de filtres représentent une convolution dans le domaine temporel avec pour noyau de convolution  $\text{sinc}(\pi \frac{B}{K} t)$ . Ce sinus cardinal a pour largeur de lobe principale  $\frac{2K}{B}$ . Afin que deux échantillons successifs en sortie du filtre soient indépendants, il faut que  $\frac{K}{B} \leq \frac{1}{B}$ . Ainsi l'indépendance des signaux est garantie pour deux échantillons séparés d'au moins  $\frac{K}{B}$  échantillons. Le nombre d'échantillons indépendants parmi les  $N$  observations est donc réduit d'un facteur  $K$ . Par conséquent, le nombre d'échantillons indépendants pour estimer la matrice de covariance en sortie du  $k$ -ième filtre est de  $\frac{N}{K}$ . En garantissant la condition de non dégénérescence de la SCM on a  $n = \frac{N}{K} \geq Q$ . Sachant que la taille de la matrice est de  $M$ , que  $K \gg 1$  pour garantir une bonne décomposition et que  $\frac{N}{K} \geq Q$ , le régime en grande dimension est le suivant :

$$\frac{D}{n} = \frac{K \times M}{N} \xrightarrow{K=\frac{N}{Q}} c = \frac{M}{Q} \quad (4.57)$$

Alors que la taille de la matrice de covariance n'augmente pas, le nombre d'observations diminue proportionnellement au nombre de filtres  $K$ . Nous retrouvons un régime à grande dimensions conforme aux hypothèses des RMT à grande dimension.

### 4.2.2.2 Méthode spatiotemporelle : LOST et LOST-FIND

À présent nous allons étudier le comportement en régime asymptotique à grandes dimensions des algorithmes LOST et LOST-FIND exploitant le projecteur issu de l'observation spatiotemporelle. Du fait du processus spatiotemporel la taille de la matrice de covariance  $D$  est égale à  $K \times M$ . Le rang de la matrice de covariance vérifie  $\sum_{q=1}^Q K_q$ . Ce rang est borné par  $\sum_{q=1}^Q K_q \leq K \times Q$  correspondant au cas où toutes les sources occupent toute la bande de réception  $B$ . Afin de garantir la non dégénérescence de la SCM et sans *a priori* sur la dimension du sous-espace bruit, nous posons  $n = N \geq K \times Q$ . La bonne estimation de la SCM nous impose que  $K \leq \frac{N}{Q}$ . Nous avons pour ratio du régime à grande dimension avec  $K \gg 1$  :

$$\frac{D}{N} = \frac{K \times M}{N} \xrightarrow{K=\frac{N}{Q}} c = \frac{M}{Q} \quad (4.58)$$

Il est intéressant de noter que les deux approches (banc de filtres et spatiotemporelle) ont le même comportement de régime dimensionnel. Cependant dans le cadre des approches spatiotemporelles c'est la taille de la matrice

de covariance qui croit d'un facteur  $K$ , et dans le cadre de l'algorithme DPD c'est le nombre d'échantillons indépendants pour estimer la SCM qui décroît d'un facteur  $K$ .

Cependant, pour le bon fonctionnement des outils RMT, il nous faut garantir que l'observation spatiotemporelle ne modifie pas le comportement statistique du bruit. Pour ceci intéressons-nous à la matrice composée d'une composante du bruit aux différents temps d'intégrations. Ainsi la  $k$ -ième colonne de cette matrice est composée des  $N$  observations du bruit décalées de  $k - 1$  échantillons. Cette matrice que nous nommerons  $\mathbf{N}$  est définie comme suit :

$$\mathbf{N} = [\mathbf{n}(0), \dots, \mathbf{n}((K - 1)T_e)] = \begin{bmatrix} n(0) & n(T_e) & \cdots & n(KT_e) \\ n(T_e) & n(2T_e) & \cdots & n((K + 1)T_e) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n(NT_e) & n((N + 1)T_e) & \cdots & n((K + N)T_e) \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Ainsi en exploitant les propriétés de l'hypothèse H2 de la page 15, nous posons :

$$\begin{cases} \mathbb{E} [\mathbf{N}\mathbf{N}^H] = \sum_{k=1}^K \mathbb{E} [\mathbf{n}((k - 1)T_e)\mathbf{n}^H((k - 1)T_e)] = K \times \sigma^2 \mathbf{I}_N, \\ \mathbb{E} [\mathbf{N}\mathbf{N}^T] = \sum_{k=1}^K \mathbb{E} [\mathbf{n}((k - 1)T_e)\mathbf{n}^T((k - 1)T_e)] = \mathbf{0}_{N \times N}. \end{cases} \quad (4.60)$$

Donc, bien que le décalage entre chaque colonne soit de  $T_e$ , l'observation spatiotemporelle permet de conserver l'indépendance et la circularité entre chaque colonne de la matrice  $\mathbf{N}$  du bruit. Le processus spatiotemporel respecte donc les hypothèses de base pour appliquer les outils issus des RMT.

Il a été montré que l'un des intérêts principaux de l'estimateur G-MUSIC par rapport à l'estimateur MUSIC est d'avoir un meilleur pouvoir de résolution sans pour autant améliorer l'estimation<sup>6</sup> des paramètres d'intérêt lorsque les sources sont éloignées [VML15]. Donc si nous nous intéressons au cas limite de résolution, alors les sources ont des positions proches entre elles. Dans ces conditions les vecteurs directeurs de chacune de ces sources sont quasiment égaux, asymptotiquement quand  $\mathbf{p}_1 = \dots = \mathbf{p}_Q$  les vecteurs directeurs sont alors égaux. Si nous considérons que les puissances des signaux sont égales sur toutes leurs bandes d'émission, nous avons alors asymptotiquement pour la valeur propre  $\alpha_q$  (telle que définie en (4.43)) associée à la  $q$ -ième source une multiplicité  $\mathcal{K}_q = K_q$ . Or nous avons vu que dans le modèle G-MUSIC la multiplicité des valeurs propres du sous-espace signal doit être proportionnelle à la taille de la matrice de covariance. Ainsi, on peut supposer que les approches spatiotemporelles doivent bénéficier d'un apport plus important sur les performances que l'algorithme DPD. Cependant, dans les faits, il se peut que la puissance du signal ne soit pas constante dans la bande, s'éloignant ainsi du modèle G-MUSIC. Il sera intéressant de voir l'influence de cette hypothèse sur les approches spatiotemporelles dans le cadre d'un exemple de puissance non constante dans la bande.

### 4.2.3 Simulations

Nous allons ici comparer les performances de l'algorithme en 2 étapes traditionnel AoA/AoA pour lequel le gain en passant par le pseudo-projecteur G-MUSIC devrait être négligeable, avec celui des algorithmes 1-étape DPD, LOST et LOST-FIND. Nous considérons 2 stations réceptrices ( $L = 2$ ). Les stations ont pour coordonnées  $(-200\text{m}, 0)$  et  $(+200\text{m}, 0)$ . Les deux stations sont composées d'un réseau circulaire de rayon 0.8m de 6 capteurs ( $M = 12$ ) où le sixième capteur est au centre. La bande de réception est de  $B = 500\text{kHz}$ . Les sources ont la même bande d'émission de puissance constante dans la bande.

Nous considérons un cas 2 sources ( $Q = 2$ ) où les deux sources sont placées à  $(-4.5\text{m}, +200\text{m})$  et  $(+4.5\text{m}, +200\text{m})$ . Ces deux sources sont très proches vis-à-vis des dimensions du système mettant en avant

<sup>6</sup>Mais ne dégrade pas l'estimation de paramètre, dans le cas de sources éloignées G-MUSIC et MUSIC ont des performances équivalentes.

les propriétés à haute résolution des algorithmes. Une représentation du contexte sources base est donnée sur la Fig.4.15. Comme on peut l'observer, la position en ordonnées est identique pour les 2 sources. Il sera donc intéressant d'observer l'estimation moyenne seulement en abscisses.

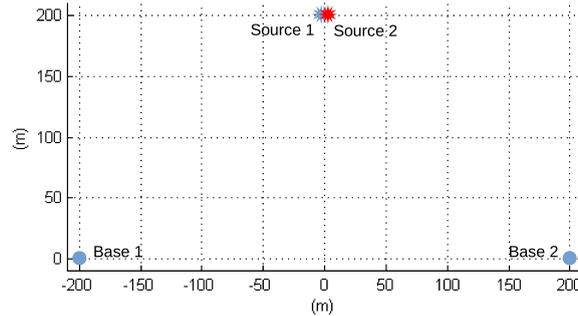
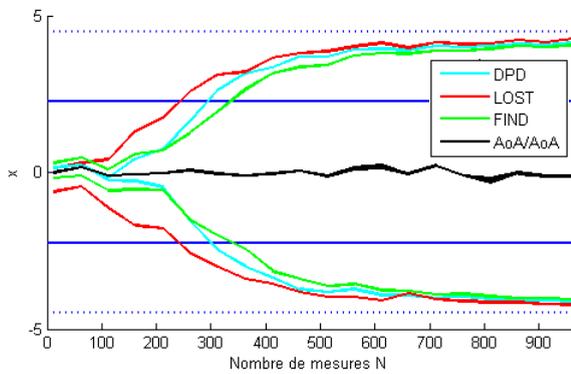
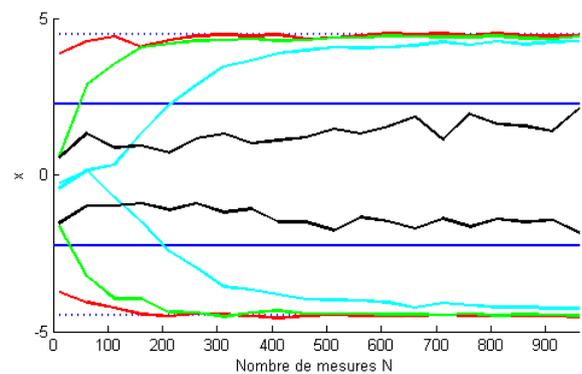


Figure 4.15: Contexte sources/bases des simulations.

Dans un premier temps nous allons considérer un nombre de décompositions  $K = 5$  fixe pour les algorithmes DPD, LOST ou LOST-FIND. Puis nous traçons la position moyenne des estimations de positions des sources en abscisse sur 200 itérations en fonction du nombre d'échantillons  $N$  avec  $12 \leq N \leq 950$ . Nous avons donc pour les algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND un rapport  $\frac{D}{n}$  variant entre  $0.06 \leq c \leq 5$  signifiant que nous allons d'une estimation de la matrice de covariance très perturbée vers une bonne estimation. Nous présentons ces résultats sur la Fig.4.16 où les traits pointillés bleus correspondent aux vraies positions en abscisse des sources et les traits pleins bleus représentent 50% de la séparation des deux sources.



(a) Estimation de la position des sources en fonction de  $N$  pour  $\hat{\mathbf{\Pi}}^\perp$  (MUSIC)



(b) Estimation de la position des sources en fonction de  $N$  pour  $\hat{\mathbf{\Pi}}_G^\perp$  (G-MUSIC)

Figure 4.16: Position moyenne estimée sur l'axe des abscisses avec le projecteur MUSIC et le pseudo-projecteur G-MUSIC en fonction du nombre de mesures indépendentes  $N$  où en trait pointillé bleu la position réelle des sources est représentée et en trait plein la séparation à 50% des sources.

Sur la Fig.4.16(a), est représenté le pouvoir de séparation des algorithmes en fonction de  $N$  pour le projecteur MUSIC. On constate dans un premier temps que le pouvoir de résolution des méthodes en 1 étape est très supérieur à la méthode AoA/AoA où les sources sont si proches que l'évolution de  $N$  n'a pas d'impact visible. On remarque que les algorithmes DPD et LOST-FIND ont quasiment le même pouvoir de séparation avec une séparation à 50% pour  $N \approx 320$ . Finalement on peut voir que l'algorithme LOST a un pouvoir de séparation meilleur avec un passage à 50% pour  $N \approx 230$ . Ce gain de LOST par rapport à LOST-FIND est dû à la non

considération des grandeurs physiques liées aux TDoA, réduisant ainsi les contraintes physiques.

Sur la Fig.4.16(b) on peut observer le pouvoir de séparation des algorithmes en fonction de  $N$  pour le pseudo-projecteur de G-MUSIC. On note un très fort gain du pouvoir séparateur des algorithmes en 1 étape où le DPD passe la séparation à 50% pour  $N \approx 210$ , LOST-FIND pour  $N \approx 40$  et LOST ne passe pas en dessous des 50%. Ce fort gain sur les méthodes spatiotemporelles par rapport au gain sur le DPD est dû au fait que la construction du spatiotemporel dans le cadre d'une puissance constante dans la bande respecte plus les conditions des hypothèses de G-MUSIC que le DPD avec une multiplicité des valeurs propres proportionnelle à  $K$ . Finalement on note un très léger gain de la méthode AoA/AoA grâce au pseudo-projecteur G-MUSIC avec un écartement moyen entre les deux sources qui tend progressivement vers la séparation à 50%, mais ce gain est bien moins *spectaculaire* que sur les méthodes en 1 étape.

Nous traçons sur la Fig.4.17 les REQM de la première source à  $(-4.5m, +200m)$ . On peut voir très clairement le gain de performance en utilisant le pseudo-projecteur de G-MUSIC contre celui de MUSIC. Et on observe également sur le REQM que le gain est bien plus important avec les méthodes spatiotemporelles qui peuvent être plus en adéquation avec les hypothèses G-MUSIC nécessitant plusieurs *clusters* de valeurs propres.

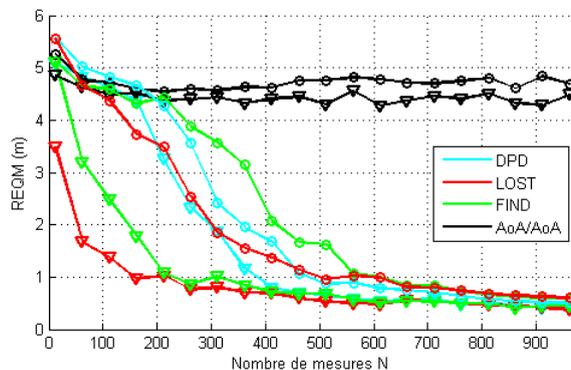
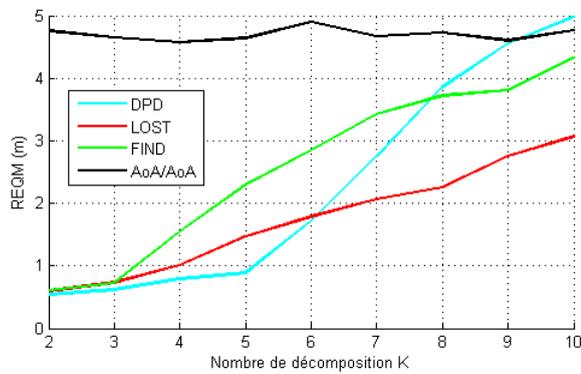


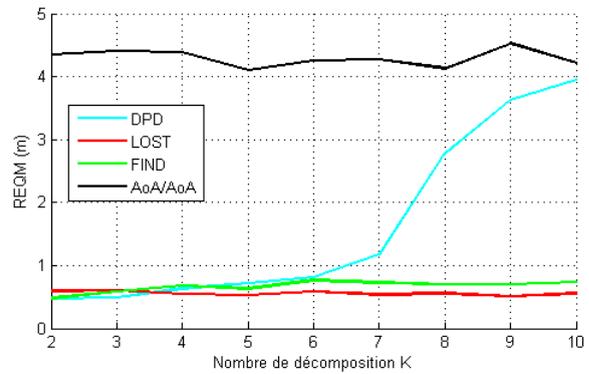
Figure 4.17: REQM des différentes méthodes en fonction du nombre d'observations indépendants  $N$  où les marqueurs ( $\circ$ ) représentent l'estimation avec  $\hat{\Pi}^\perp$  et ( $\nabla$ ) représentent l'estimation avec  $\hat{\Pi}_G^\perp$ .

À présent nous fixons  $N = 500$  échantillons pour estimer la matrice de covariance et nous faisons varier  $K$  de  $2 \leq K \leq 10$ . Dans ce cas, le rapport  $\frac{D}{n}$  varie entre  $0.048 \leq c \leq 0.24$ . Contrairement au cas précédent, la perturbation croît en fonction de  $K$ . Nous considérons toujours un  $RSB = 10\text{dB}$  ainsi que le même contexte sources/bases que précédemment. La configuration est telle que le biais de l'effet large bande résiduel est négligeable devant l'erreur d'estimation de la matrice de covariance. Les algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND sont donc comparés avec un biais quasiment nul. Les REQM des différentes méthodes sont représentées sur la Fig.4.19 en fonction de  $K$ .

Sur la Fig.4.18(a) sont représentées les performances pour le projecteur MUSIC. Les performances de la méthode de triangulation (AoA/AoA) restent indépendantes du facteur  $K$ . On note toutefois le fort gain des algorithmes en 1 étape par rapport à la triangulation. Cependant on constate que ces algorithmes ont des performances qui se détériorent assez vite en fonction de  $K$ . Par exemple pour un  $K$  supérieur à 10 le DPD possède de plus mauvaises performances que la triangulation. Ceci est dû au biais du régime dimensionnel  $\frac{D}{n}$  qui pour  $N$  fixé croît en fonction de  $K$ . Finalement on observe sur la Fig.4.18(b) le REQM pour le pseudo-projecteur G-MUSIC et observons que les méthodes spatiotemporelles non biaisées restent insensibles à l'évolution de  $K$ . En effet, nous avons vu que l'interprétation de G-MUSIC correspond au modèle spatiotemporel à puissance constante dans la bande où la multiplicité des valeurs propres croît proportionnellement à  $K$ . On constate l'apparition d'une



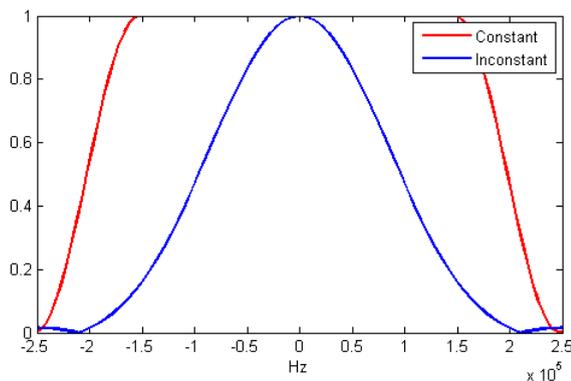
(a) REQM en fonction de  $K$  pour  $\hat{\Pi}^\perp$  (MUSIC)



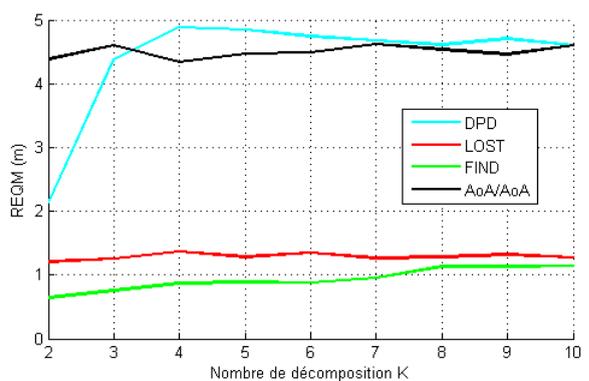
(b) REQM en fonction de  $K$  pour  $\hat{\Pi}_G^\perp$  (G-MUSIC)

Figure 4.18: REQM des méthodes en fonction de la décomposition bande étroite  $K$  des méthodes en 1 étape pour  $N = 500$  fixé.

dégradation des performances de l'algorithme DPD dont le rang ne dépend pas de  $K$ . Malgré que le DPD ait de moins bonnes performances que les méthodes spatiotemporelles, on observe tout de même un gain à utiliser le pseudo-projecteur de G-MUSIC. Ceci confirme que d'autres modèles, toujours issus de la théorie des matrices aléatoires, peuvent mieux convenir au contexte de l'algorithme DPD.



(a) Représentation spectrale des sources : rouge puissance constante dans la bande et en bleu puissance non constante dans la bande



(b) REQM en fonction de  $K$  pour  $\hat{\Pi}_G^\perp$  (G-MUSIC)

Figure 4.19: REQM des méthodes en fonction de la décomposition bande étroite  $K$  des méthodes en 1 étape pour une puissance non constante dans la bande et  $N = 500$  fixé.

Pour finir, nous allons considérer la même expérience, mais à présent avec des signaux qui n'ont pas une puissance constante dans la bande. Sur la Fig.4.19(a) est représenté en bleu le comportement fréquentiel des sources ayant une puissance en forme de *cloche* qu'on peut comparer au précédent comportement en rouge où la puissance est constante. Nous traçons les performances des différentes méthodes sur la Fig.4.19(b) que l'on peut comparer aux performances de la Fig.4.18(b). Le changement de comportement spectral n'a pas de conséquences sur la triangulation où les performances sont équivalentes. L'algorithme du DPD montre des difficultés dues au fait que la puissance du signal n'est pas identique dans toutes les sous-bandes dégradant fortement les performances. En effet, les sous-bandes sur les bords de la bande fréquentielle contiennent une puissance de signal faible, ce qui a un impact sur la somme incohérente des formes quadratiques dans chaque sous-bande. Finalement le non respect du modèle G-MUSIC a un impact faible sur les algorithmes spatiotemporels. On peut noter une dégradation des

performances des deux algorithmes spatiotemporels, LOST et LOST-FIND, avec une légère croissance du REQM en fonction de  $K$ . Ceci témoigne d'une divergence entre le modèle G-MUSIC et le modèle du spatiotemporel quand la puissance du signal n'est plus constante dans la bande entraînant une multiplicité unique des valeurs propres. Cependant, la dimension du sous-espace signal est toujours proportionnelle à  $K$ .

#### 4.2.4 Conclusions

Les décompositions en  $K$  sous-canaux BE des algorithmes 1-étape de géolocalisation pour lutter contre l'effet LB dégradent la consistance des critères d'estimation. Plus le facteur  $K$  augmente, plus le biais dû à l'effet LB diminue, plus la consistance des critères d'estimation devient mauvaise pour un nombre  $N$  d'observations fixé. Cette effet, dépendant du facteur  $K$ , est essentiellement visible en limite de résolution. Pour pallier cette dégradation nous avons introduit des résultats issus de la théorie des grandes matrices aléatoires en remplaçant le projecteur vers le sous-espace bruit issu de l'algorithme MUSIC par le pseudo-projecteur de l'algorithme G-MUSIC. Les simulations ont prouvé l'intérêt tant en termes de résolution que de précision. Ce chapitre constitue une étude préliminaire portant sur l'apport des outils RMT. En effet, à notre connaissance, il serait intéressant d'étudier d'autres estimateurs issus des RMT. Par exemple Spike MUSIC [HLM<sup>+</sup>13] qui considère les valeurs propres ainsi que leur nombre fixe et de multiplicité constante quelle que soit la dimension de la matrice de covariance, modèle qui semble s'éloigner de notre cadre applicatif. Ou encore *Generalized-MUSIC* [VLM12] dont G-MUSIC et Spike MUSIC sont des cas particuliers, mais qui a pour inconvénient d'avoir des coefficients de régularisation des sous-espaces de forme intégrale qui rend l'algorithme délicat et coûteux à mettre en œuvre. De plus l'application des outils RMT au problème d'estimation paramétrique est un domaine relativement vaste dont certains pans restent encore inexplorés. Il serait également possible d'envisager de développer un algorithme spécifique aux besoins des méthodes en 1 étape.

## Chapter 5

# Approche en 1 étape s'adaptant à la structure large bande : TARGET

La difficulté principale des méthodes en 1 étape utilisant des méthodes d'estimation BE sur l'observation globale est de combattre l'effet LB en décomposant le signal en sous-bandes vérifiant l'hypothèse BE. Le coût de calcul est proportionnel au nombre de sous-bandes tandis que le biais provoqué par l'effet large bande résiduel est inversement proportionnel au nombre de sous-bande. Il y a donc un compromis à optimiser entre le biais et le coût calculatoire. Les algorithmes en 1 étape nécessitant un modèle BE se décomposent en 2 catégories :

- La première catégorie suppose que le signal est BE sur l'antenne globale. Dans cette catégorie on peut citer la méthode de M.Wax et T.Kailath [WK85b], la méthode *Centralized* MODE [SNS95] ou encore GMA [Bos12]. Ces algorithmes ont l'inconvénient de ne pas exploiter le temps différentiel d'arrivée (TDoA) des ondes entre les bases du système.
- La seconde catégorie, plus intéressante, lutte contre l'effet large bande des signaux sur le système en décomposant les observations en BE afin de les rendre BE sur l'antenne globale. Dans cette catégorie, on peut citer, l'algorithme DPD [Wei04], [AW04], LOST<sup>1</sup> [BFL11], [BFL13] ou encore LOST-FIND [DFL15a].

L'algorithme TARGET pour *Time and Angle Retrieval for Geolocation Estimation Technic* [DFLG15] a pour principe d'utiliser le modèle LB des signaux sur l'antenne globale qui dépend des TDoA et AoA des signaux. L'approche basée sur des techniques de synchronisation entre base dans le cadre d'une méthode en 1 étape est nouvelle.

### 5.1 Contexte

L'algorithme TARGET a été développé avec deux stations<sup>2</sup>. Nous considérerons les observations  $\mathbf{x}_1(t)$  et  $\mathbf{x}_2(t-\tau)$  de deux stations dont le modèle est donné en Eq.(1.8). Les deux observations sont synchronisées pour la  $q$ -ième source lorsque le retard  $\tau$  vérifie  $\tau = \Delta\tau_{12}(\mathbf{p}_q)$ . Nous considérons l'observation multi-station suivante dépendant de  $\tau$  :

$$\mathbf{y}(t, \tau) = [\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t - \tau)]^T, \quad (5.1)$$

où le signal de la deuxième station  $\mathbf{x}_2(t)$  du modèle (1.8) a été remplacé par  $\mathbf{x}_2(t - \tau)$ . L'objectif est d'estimer le TDoA via le paramètre libre  $\tau$  rendant synchrones les observations  $\mathbf{x}_1(t)$  et  $\mathbf{x}_2(t - \tau)$ . L'approche aboutira à un

<sup>1</sup>Bien que n'exploitant pas l'information de temps, la méthode consiste à décomposer les signaux en signaux bande étroite.

<sup>2</sup>Le cas bi-stations pose les principes de base. Au prix d'un effort de calcul il sera possible d'étendre le principe posé par TARGET bi-stations au cas plus large de  $L$  stations, cas qui ne sera pas abordé dans ce mémoire.

estimateur conjoint des AoA ( $\theta_1(\mathbf{p}_q)$  et  $\theta_2(\mathbf{p}_q)$ ) et des TDoA ( $\Delta\tau_{12}(\mathbf{p}_q)$  que nous noterons  $\Delta\tau_q$ <sup>3</sup>) en exploitant la structure algébrique de la matrice de covariance de  $\mathbf{y}(t, \tau)$  que nous nommerons matrice de synchronisation.

## 5.2 Analyse algébrique de la matrice de synchronisation

Pour définir un nouvel estimateur AoA/TDoA nous étudions dans cette partie les propriétés algébriques de la matrice de covariance des observations  $\mathbf{y}(t, \tau)$  de l'Eq.(5.1). TARGET a pour but d'exploiter la déficience du rang de la matrice de synchronisation lorsque le retard  $\tau$  correspond au TDoA d'une des sources. En se basant sur l'observation théorique de l'antenne globale (Eq.(1.31)), on peut écrire :

$$\mathbf{y}(t, \tau) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t - \tau) \end{bmatrix} = \sum_{q=1}^Q \mathbf{H}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q) \mathbf{s}_q(t, \tau) + \mathbf{n}(t, \tau), \quad (5.2)$$

où d'après (1.32) :

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q) = \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \boldsymbol{\Omega}_q \quad (5.3)$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_{1,q} \mathbf{a}_1(\theta_1(\mathbf{p}_q)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho_{2,q} \mathbf{a}_2(\theta_2(\mathbf{p}_q)) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

et d'après (1.31) :

$$\mathbf{s}_q(t, \tau) = \begin{bmatrix} \tilde{s}_q(t) \\ \tilde{s}_q(t + \Delta\tau_{12}(\mathbf{p}_q) - \tau) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

avec

$$\tilde{s}_q(t) = s_q(t - \tau_1(\mathbf{p}_q)). \quad (5.6)$$

Notons que si le décalage temporel  $\tau$  est égal au TDoA  $\Delta\tau_q$  de la  $q$ -ième source, l'observation (5.1) devient :

$$\mathbf{y}(t, \Delta\tau_q) = \mathbf{h}_q s_q(t) + \sum_{j \neq q}^Q \mathbf{H}(\mathbf{p}_j, \boldsymbol{\rho}_j) \mathbf{s}_j(t, \Delta\tau_q) + \mathbf{n}(t, \Delta\tau_q), \quad (5.7)$$

où

$$\mathbf{h}_q = \begin{pmatrix} \rho_{1,q} \mathbf{a}_1(\theta_1(\mathbf{p}_q)) \\ \rho_{2,q} \mathbf{a}_2(\theta_2(\mathbf{p}_q)) \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

D'après (5.7) l'observation  $\mathbf{y}(t, \Delta\tau_q)$  est une combinaison linéaire de  $2Q - 1$  signaux, alors que selon (5.2) l'observation  $\mathbf{y}(t, \tau)$  pour  $\tau \neq \Delta\tau_q$  est la combinaison linéaire des  $2Q$  signaux. En conséquence la matrice de covariance de  $\mathbf{y}(t, \Delta\tau_q)$  aura un rang de  $2Q - 1$  alors que celle de  $\mathbf{y}(t, \tau)$  aura un rang de  $2Q$ . C'est cette déficience de rang qui sera utilisée dans TARGET.

La matrice de synchronisation du système global s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \mathbb{E} [\mathbf{y}(t, \tau) \mathbf{y}^H(t, \tau)] \quad (5.9)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \mathbf{H}(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q) \mathbf{R}_{s_q}(\tau) \mathbf{H}^H(\mathbf{p}_q, \boldsymbol{\rho}_q) + \mathbf{R}_n, \quad (5.10)$$

<sup>3</sup>Dans ce cas bi-stations l'écriture du TDoA maximum pour la  $q$ -ième source de l'Eq.(1.28) n'offre aucune ambiguïté.

où  $\mathbf{R}_{s_q}(\tau)$  est la matrice de covariance des signaux  $\mathbf{s}_q(t, \tau)$  qui s'écrit :

$$\mathbf{R}_{s_q}(\tau) = \begin{pmatrix} r_q(0) & r_q(\tau - \Delta\tau_q) \\ r_q(\Delta\tau_q - \tau) & r_q(0) \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

avec les coefficients de corrélation :

$$\begin{cases} r_q(\tau) = \mathbb{E} [s_q(t)s_q^*(t - \tau)], \\ r_q(-\tau) = r_q^*(\tau). \end{cases} \quad (5.12)$$

et  $\mathbf{R}_n$  est la matrice de covariance du bruit  $\mathbf{n}(t, \tau)$  que nous considérons indépendant entre stations et spatialement blanc :

$$\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_{M_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2^2 \mathbf{I}_{M_2} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

D'après (5.7) et (5.11), la matrice de covariance des observations pour  $\tau = \Delta\tau_q$  de la  $q$ -ième source s'écrit :

$$\mathbf{R}_y(\Delta\tau_q) = r_q(0)\mathbf{h}_q\mathbf{h}_q^H + \sum_{j \neq q}^Q \mathbf{H}(\mathbf{p}_j, \rho_j)\mathbf{R}_{s_j}(\Delta\tau_q)\mathbf{H}^H(\mathbf{p}_j, \rho_j) + \mathbf{R}_n. \quad (5.14)$$

Selon les formes théoriques des matrices de covariance (5.10) et (5.14), le rang de la matrice de synchronisation débruitée vérifie alors :

$$\text{rang}(\mathbf{R}_y(\tau) - \mathbf{R}_n) = \sum_{q=1}^Q \text{rang}(\mathbf{R}_{s_q}), \quad (5.15)$$

$$= \begin{cases} 2Q & \text{si } \tau \neq \Delta\tau_q, \\ 2Q - 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.16)$$

Lorsque  $\tau = \Delta\tau_q$  le rang de la matrice  $\tilde{\mathbf{R}}_y(\tau) = \mathbf{R}_y(\tau) - \mathbf{R}_n$  est déficient en étant strictement inférieur à  $2Q$ . Les valeurs propres de  $\tilde{\mathbf{R}}_y(\tau)$  classées par ordre décroissant vérifient :

$$\lambda_1(\tau) \geq \dots \geq \lambda_{2Q}(\tau) \geq \underbrace{0 = \dots = 0}_{M-2Q}, \quad (5.17)$$

La plus petite valeur propre  $\lambda_{2Q}(\tau)$  est nulle ssi  $\tau = \Delta\tau_q$ <sup>4</sup>. On peut donc en déduire un premier estimateur des TDoA :

$$\{\Delta\hat{\tau}_q | q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\} = \arg \min_{|\tau| < \Delta\tau_{\max}} \lambda_{2Q}(\tau), \quad (5.18)$$

où  $\Delta\tau_{\max}$  est la valeur maximale du TDoA valant  $\lambda_{2Q}(\tau) = \lambda_{2Q} \left\{ \tilde{\mathbf{R}}_y(\tau) \right\}$  selon Eq.(1.28). De plus, lorsque  $\tau = \Delta\tau_q$ , le vecteur propre  $\mathbf{v}_{2Q}(\Delta\tau_q) = \left[ \mathbf{v}_{2Q_1}^T(\Delta\tau_q), \mathbf{v}_{2Q_2}^T(\Delta\tau_q) \right]^T$  associé à la valeur propre  $\lambda_{2Q}(\Delta\tau_q)$  est orthogonal au vecteur  $\mathbf{h}_q$  de l'Eq.(5.8) :

$$\frac{|\mathbf{h}_q^H \mathbf{v}_{2Q}(\Delta\tau_q)|^2}{|\rho_{1,q}|^2 M_1 + |\rho_{2,q}|^2 M_2} = \frac{|\rho_{1,q}^* \mathbf{a}_1^H(\theta_{1,q}) \mathbf{v}_{2Q_1}(\Delta\tau_q) + \rho_{2,q}^* \mathbf{a}_2^H(\theta_{2,q}) \mathbf{v}_{2Q_2}(\Delta\tau_q)|^2}{|\rho_{1,q}|^2 M_1 + |\rho_{2,q}|^2 M_2} = 0, \quad (5.19)$$

<sup>4</sup>Si plusieurs sources ont les mêmes TDoA alors le rang de la matrice de synchronisation diminuera du nombre de sources ayant le même TDoA

où  $\theta_{l,q} = \theta_l(\mathbf{p}_q)$ . Il est alors possible de déduire un premier estimateur conjoint des AoA et TDoA à partir du résultat de l'Eq.(5.19). Les paramètres recherchés d'un tel estimateur sont  $\boldsymbol{\eta} = \{(\boldsymbol{\rho}_q, \Delta\tau_q, \theta_{1,q}) \mid q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\}$  sachant que l'angle d'incidence  $\theta_{2,q}$  sur la deuxième base est relié à celui sur la première par :  $\theta_{2,q} = \Psi(\theta_{1,q}, \Delta\tau_q)$ . Ce premier estimateur *candidate* se basant sur un nouveau critère  $\mathcal{L}_{SYNC'}$  (pour SYNChronisation) est défini par :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}} = \arg \min_{(\boldsymbol{\rho}, |\tau|, \theta) \in \mathbb{C}^2 \times [0; \Delta\tau_{\max}] \times [0; 360]} \mathcal{L}_{SYNC}(\boldsymbol{\rho}, \tau, \theta), \\ \mathcal{L}_{SYNC'}(\boldsymbol{\rho}, \tau, \theta) = \frac{|\rho_1^* \mathbf{a}_1^H(\theta) \mathbf{v}_{2Q_1}(\tau) + \rho_2^* \mathbf{a}_2^H(\Psi(\theta, \tau)) \mathbf{v}_{2Q_2}(\tau)|^2}{|\rho_1|^2 M_1 + |\rho_2|^2 M_2}. \end{cases} \quad (5.20)$$

Ce premier critère évolue dans un espace à 6 dimensions réelles. Il est possible de réécrire le critère à l'aide de la structure algébrique  $\mathbf{U}(\mathbf{p})$  donnée en Eq.(1.32). Alors le critère devient :

$$\mathcal{L}_{SYNC'}(\boldsymbol{\rho}, \tau, \theta) = \frac{\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{U}^H(\mathbf{p}) \mathbf{v}_{2Q_2}(\tau) \mathbf{v}_{2Q_2}^H(\tau) \mathbf{U}^H(\mathbf{p}) \boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{M} \boldsymbol{\rho}}. \quad (5.21)$$

En utilisant la propriété du quotient de Rayleigh généralisé (Annexe 8.1) il est possible de réduire la dimension de problème par :

$$\mathcal{L}_{SYNC}(\tau, \theta) = \min_{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{C}^2} \mathcal{L}_{SYNC'}(\boldsymbol{\rho}, \tau, \theta) = \lambda_{\min} \{ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{U}^H(\mathbf{p}) \mathbf{v}_{2Q_2}(\tau) \mathbf{v}_{2Q_2}^H(\tau) \mathbf{U}^H(\mathbf{p}) \}. \quad (5.22)$$

Cependant la recherche des  $Q$  minima reste un problème difficile à résoudre avec deux décompositions en éléments propres imbriquées.

### 5.2.1 Identifiabilité de l'observation

Nous allons ici déterminer le nombre de sources maximum pour que le TDoA soit mesurable sur l'observation  $\mathbf{y}(t, \tau)$ . En effet si nous considérons raisonnablement un bon RSB, c.-à-d. que nous avons  $(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) - \lambda_{2Q}(\tau) \ll 1$  pour  $\tau \neq \Delta\tau_q$ , nous pouvons alors admettre que la différence de puissance entre les deux bases est négligeable par rapport aux grandeurs du système et écrivons  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \epsilon$ . Nous considérons alors le cas théorique du rang de la matrice  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}(\tau) = \mathbf{R}_{\mathbf{y}}(\tau) - \epsilon \mathbf{I}_M$ . Alors le nombre de source identifiables vérifie :

$$2Q < M = M_1 + M_2 \quad (5.23)$$

$$Q < \frac{M}{2} \quad (5.24)$$

La méthode permet alors d'identifier potentiellement plus de sources que de capteurs sur l'une des stations. La seconde station compensera la déficience de la première avec plus de capteurs que de sources.

## 5.3 Vers un nouvel estimateur du TDoA

La recherche des zéros du critère  $\lambda_{2Q} \{ \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}(\tau) \}$  est coûteux en terme de puissance de calcul. Nous allons ici aborder un moyen de réduire ce coût de calcul en cherchant la valeur propre minimale d'un critère moins coûteux à optimiser. Cela aura pour conséquence d'ajouter une condition sur le maximum de sources identifiables.

La matrice de synchronisation est composée de quatre blocs représentant chacun les sous-matrices de covariance de l'observation TARGET (5.1). On peut la décrire comme suit :

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12}(\tau) \\ \mathbf{R}_{12}^H(\tau) & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

où chaque bloc est défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{lv}(\tau) = \mathbb{E} [\mathbf{x}_l(t)\mathbf{x}_v^H(t-\tau)] & \text{si } l \neq v, \\ \mathbf{R}_{ll} = \mathbb{E} [\mathbf{x}_l(t)\mathbf{x}_l^H(t)] - \sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l}. \end{cases} \quad (5.26)$$

Pour simplifier les écritures mathématiques nous notons que  $\mathbf{R}_{12}^H(\tau) = \mathbf{R}_{21}^H(-\tau)$ . Les puissances de bruit  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  sont estimées avec la décomposition en éléments propres des matrices  $\mathbf{R}_{ll}, \forall l \in \{1; 2\}$ . En reprenant le modèle théorique de la matrice de covariance de l'Eq.(1.38) nous pouvons écrire :

$$\mathbf{R}_{lv}(\tau) = \mathbf{A}_l \mathbf{\Gamma}_l \mathbf{R}_{s_{lv}}(\tau) \mathbf{\Gamma}_v^H \mathbf{A}_v^H, \quad (5.27)$$

où

$$\mathbf{R}_{s_{lv}}(\tau) = \mathbb{E} [\mathbf{s}_l(t)\mathbf{s}_v^H(t-\tau)], \quad (5.28)$$

$$= \begin{pmatrix} r_1(\tau - \Delta\tau_{lv}(\mathbf{p}_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_Q(\tau - \Delta\tau_{lv}(\mathbf{p}_Q)) \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

qui selon l'hypothèse H1 d'indépendance des sources page 15 est une matrice diagonale. Pour simplifier la mise en œuvre, on fait le choix de blanchir et de projeter les observations  $\mathbf{x}_l(t)$ , en effectuant :

$$\mathbf{z}_l(t) = \mathbf{B}_l^+ \mathbf{x}_l(t) \text{ de telle sorte que } \mathbf{B}_l^+ \mathbf{R}_{ll} \mathbf{B}_l^{+H} = \mathbf{I}_{M_l}, \quad (5.30)$$

sachant que la décomposition en éléments propres de  $\mathbf{R}_{ll}$  vérifie  $\mathbf{R}_{ll} = \mathbf{E}_l \mathbf{\Lambda}_l \mathbf{E}_l^H$ . On en déduit que :

$$\mathbf{B}_l = \mathbf{R}_{ll}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{E}_l \mathbf{\Lambda}_l^{1/2}, \quad (5.31)$$

où les colonnes de la matrice  $\mathbf{E}_l$  de dimension  $M_l \times Q$  sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles de  $\mathbf{R}_{ll}$  et la matrice diagonale  $\mathbf{\Lambda}_l$  est composée des valeurs propres associées. Cette étape de l'algorithme a pour conséquence de limiter le nombre de sources  $Q$  à :

$$Q \leq \min \{M_1, M_2\}, \quad (5.32)$$

avec naturellement  $M_l \neq 0$ . La matrice de synchronisation de l'Eq.(5.25) de dimension  $M \times M$  peut alors être réduite à une dimension  $2Q \times 2Q$  plus faible en effectuant :

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}}(\tau) = \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}(\tau) \mathbf{Y}^H, \quad (5.33)$$

où la matrice de blanchiment  $\mathbf{Y}$  vérifie :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2^+ \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}}(\tau)$  s'écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{Y}}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_Q & \tilde{\mathbf{R}}_{12}(\tau) \\ \tilde{\mathbf{R}}_{21}(-\tau) & \mathbf{I}_Q \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

où les éléments blocs non diagonaux s'écrivent :

$$\tilde{\mathbf{R}}_{lv}(\tau) = \mathbf{B}_l^+ \mathbf{R}_{lv}(\tau) \mathbf{B}_v^{+H}. \quad (5.36)$$

Cette matrice est par construction de rang plein pour  $\tau \neq \Delta\tau_q \forall q \in \llbracket 1; Q \rrbracket$  et possède au moins un rang inférieur à  $Q$  si  $\tau = \Delta\tau_q$ . Alors nous avons  $\tilde{\mathbf{R}}_{\Upsilon}(\Delta\tau_q)\mathbf{v} = 0$ , où  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]^T$  est le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de  $\tilde{\mathbf{R}}_{\Upsilon}(\Delta\tau_q)$ . On en déduit d'après (5.35) le système matriciel suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_{12}(\Delta\tau_q)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}_{M_1 \times 1}, \\ \tilde{\mathbf{R}}_{21}(-\Delta\tau_q)\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}_{M_2 \times 1}. \end{cases} \quad (5.37)$$

Sa résolution est donnée pour :

$$\mathbf{v}_l^H \tilde{\mathbf{G}}_l(\Delta\tau_q) \mathbf{v}_l = 0, \quad (5.38)$$

où

$$\tilde{\mathbf{G}}_l(\tau) = \mathbf{I}_Q - \tilde{\mathbf{R}}_{lv}(\xi_v \times \tau) \tilde{\mathbf{R}}_{vl}(\xi_l \times \tau), \quad (5.39)$$

avec  $\xi_l = (-1)^l$ . Finalement grâce aux propriétés du quotient de Rayleigh (Annexe 8.1) et à l'excursion du TDoA donné en (2.37), nous obtenons l'estimateur du TDoA que nous nommerons estimateur TDoA TARGET qui est le suivant :

$$\{\Delta\hat{\tau}_q | q \in \llbracket 1; Q \rrbracket\} = \min_{\tau \leq \Delta\tau_{\max}} \lambda_{\min} \left\{ \tilde{\mathbf{G}}_l(\tau) \right\}. \quad (5.40)$$

### 5.3.1 Analyse de l'estimateur du TDoA TARGET

L'objectif de ce paragraphe est d'analyser l'estimateur TDoA TARGET. Plus particulièrement nous nous intéresserons aux propriétés algébriques du projecteur  $\tilde{\mathbf{G}}_l(\tau)$  (5.39). Le but est double :

- faire le lien entre l'estimateur TDoA conventionnel et celui de TARGET ;
- en déduire des propriétés pour l'estimateur AoA/TDoA conjoint.

Pour se faire nous allons donner une expression analytique à la matrice  $\tilde{\mathbf{G}}_l(\tau)$ .

Nous rappelons ici que pour une matrice  $\mathbf{A}$  quelconque la pseudo-inverse est définie par  $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ . En se basant sur le modèle théorique de la matrice de synchronisation donné en (5.27) nous pouvons déduire d'après (5.31) l'expression analytique de la matrice de blanchiment suivante :

$$\mathbf{B}_l = \mathbf{A}_l \Gamma_l \mathbf{R}_{sl}^{1/2}, \quad (5.41)$$

$$\mathbf{B}_l^+ = \mathbf{R}_{sl}^{-1/2} \Gamma_l^{-1} \mathbf{A}_l^+, \quad (5.42)$$

D'après (5.27) et (5.42) la matrice  $\tilde{\mathbf{R}}_{lv}(\tau)$  de l'Eq.(5.36) s'écrit de la manière suivante sachant que  $\mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{I}$  :

$$\tilde{\mathbf{R}}_{lv}(\tau) = \mathbf{B}_l^+ \mathbf{R}_{lv}(\tau) \mathbf{B}_v^{+H}, \quad (5.43)$$

$$= \mathbf{R}_{sl}^{-1/2} \mathbf{R}_{slv}(\tau) \mathbf{R}_{sv}^{-1/2}. \quad (5.44)$$

Il est intéressant de noter que les atténuations complexes inconnues contenues dans  $\Gamma_l$  disparaissent, ce qui fait dépendre le résultat du seul paramètre inconnu  $\tau$  qui est le paramètre d'intérêt. Enfin ceci nous permet de déduire la forme analytique de l'expression de la matrice de  $\tilde{\mathbf{G}}_l(\tau)$  utilisée dans l'estimateur du TDoA TARGET en (5.40) :

$$\tilde{\mathbf{G}}_l(\tau) = \mathbf{I}_Q - \tilde{\mathbf{R}}_{lv}(\xi_v \times \tau) \tilde{\mathbf{R}}_{vl}(\xi_l \times \tau), \quad (5.45)$$

$$= \mathbf{I}_Q - \mathbf{R}_{sl}^{-1/2} \mathbf{R}_{slv}(\xi_v \times \tau) \mathbf{R}_{sv}^{-1} \mathbf{R}_{svl}(\xi_l \times \tau) \mathbf{R}_{sl}^{-1/2}, \quad (5.46)$$

$$= \mathbf{I}_Q - \Sigma_l(\tau), \quad (5.47)$$

avec :

$$\Sigma_l(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{|r_1(\tau - \Delta\tau_1)|^2}{|r_1(0)|^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{|r_Q(\tau - \Delta\tau_Q)|^2}{|r_Q(0)|^2} \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

En résumé, si le nombre de sources est inférieur ou égal à  $\min\{M_1, M_2\}$ , l'estimateur TARGET TDoA donné en (5.40) peut être vu comme étant le minimum des  $Q$  critères d'intercorrélacion des sources après séparation :

$$\lambda_{\min} \left\{ \tilde{\mathbf{G}}_l(\tau) \right\} = \min_{q \in \llbracket 1; Q \rrbracket} \left( 1 - \frac{|r_q(\tau - \Delta\tau_q)|^2}{|r_q(0)|^2} \right). \quad (5.49)$$

Cet estimateur est donc à haute résolution, car il est possible de distinguer les TDoA de deux sources, même si celles-ci sont infiniment proches. Un lien entre ce nouvel estimateur du TDoA et le conventionnel de l'Eq.(2.38) peut être fait. En effet, si on considère le cas où la condition d'identifiabilité n'est pas vérifiée en prenant deux stations composées d'une seule antenne, on retrouve alors l'estimateur du TDoA classique avec une intercorrélacion des  $Q$  signaux mélangés car :

$$\lambda_{\min} \left\{ \tilde{\mathbf{G}}_l(\tau) \right\} = \tilde{g}(\tau) = 1 - \frac{|r_{12}(\tau)|^2}{r_{11}(0)r_{22}(0)}, \quad (5.50)$$

où  $r_{lv}(\tau) = \tilde{\mathbf{R}}_{lv}(\tau)$  et  $\tilde{g}(\tau) = \tilde{\mathbf{G}}_l(\tau)$  dans un cadre mono-capteur. Sachant que :

$$r_{lv}(\tau) = \mathbb{E} [x_l(t)x_v^*(t - \tau)], \quad (5.51)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \rho_{v,q}^* r_q(t - \Delta\tau_q) + \delta_{l,v} \sigma_l^2. \quad (5.52)$$

On en déduit que :

$$\tilde{g}(\tau) = 1 - \frac{\left| \sum_{q=1}^Q \rho_{1,q} \rho_{2,q}^* r_q(t - \Delta\tau_q) \right|^2}{\left( \sum_{q=1}^Q |\rho_{1,q}|^2 r_q(0) + \sigma_1^2 \right) \left( \sum_{q=1}^Q |\rho_{2,q}|^2 r_q(0) + \sigma_2^2 \right)}, \quad (5.53)$$

qui indique que l'estimateur classique du TDoA est biaisé en multi-source.

## 5.4 Estimateur à haute résolution AoA/TDoA conjoint

À partir de l'analyse du paragraphe précédent sur l'estimateur TDoA TARGET et la structure algébrique de  $\pi_l(\tau)$ , nous pouvons déduire un estimateur TARGET permettant de déterminer les AoA et TDoA conjointement. Cet estimateur est dérivé de la matrice  $\tilde{\mathbf{G}}_l(\tau)$  issue de l'Eq.(5.39). Plus précisément nous allons nous intéresser à la matrice d'intérêt  $\mathbf{F}_l(\tau)$  de taille  $M_l \times M_l$ . D'après les équations (5.36) et (5.39) la matrice  $\mathbf{F}_l(\tau)$  est :

$$\mathbf{F}_l(\tau) = \mathbf{B}_l^{+H} \tilde{\mathbf{G}}_l(\tau) \mathbf{B}_l^H \quad (5.54)$$

$$= \mathbf{\Pi}_l - \mathbf{R}_{ll}^+ \mathbf{R}_{lv}(\xi_v \times \tau) \mathbf{R}_{vv}^+ \mathbf{R}_{vl}(\xi_l \times \tau), \quad (5.55)$$

où  $\mathbf{\Pi}_l = \mathbf{E}_l \mathbf{E}_l^H$  est le projecteur vers le sous-espace signal de la matrice  $\mathbf{R}_{ll}$ . En utilisant la démarche précédente, il est aisé de montrer que les  $Q$  valeurs propres maximales de cette matrice sont les mêmes que celles de la matrice

$\tilde{\mathbf{G}}_l(\tau)$ , et que les  $M_l - Q = \bar{Q}$  plus petites valeurs propres sont nulles. La matrice diagonale  $\mathbf{\Lambda}_l(\tau)$  des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{F}_l(\tau)$  s'écrit alors :

$$\mathbf{\Lambda}_l(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_Q - \mathbf{\Sigma}_l(\tau) & \mathbf{0}_{Q \times \bar{Q}} \\ \mathbf{0}_{\bar{Q} \times Q} & \mathbf{0}_{\bar{Q} \times \bar{Q}} \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

Pour compléter l'espace associé aux  $M_l - Q$  plus petites valeurs propres nulles de la matrice  $\tilde{\mathbf{G}}_l(\tau)$ , nous additionnons à la matrice  $\mathbf{F}_l(\tau)$  le projecteur orthogonal à  $\mathbf{\Pi}_l$  qui est le projecteur vers le sous-espace bruit, soit :

$$\mathbf{G}_l(\tau) = \mathbf{F}_l(\tau) + \mathbf{\Pi}_l^\perp \quad (5.57)$$

$$= \mathbf{I}_{M_l} - \mathbf{R}_{lv}^+ \mathbf{R}_{lv}(\xi_v \times \tau) \mathbf{R}_{vv}^+ \mathbf{R}_{vl}(\xi_l \times \tau), \quad (5.58)$$

où  $\mathbf{\Pi}_l^\perp + \mathbf{\Pi}_l = \mathbf{I}_{M_l}$ . À présent, analysons la structure algébrique de  $\mathbf{G}_l(\tau)$  afin d'en déduire un estimateur AoA/TDoA conjoint. En s'appuyant sur la forme analytique (5.42), la matrice  $\mathbf{G}_l(\tau)$  utilisée pour l'estimation AoA/TDoA TARGET peut s'écrire :

$$\mathbf{G}_l(\tau) = \mathbf{I}_{M_l} - \mathbf{B}_l^{+H} \mathbf{\Sigma}_l(\tau) \mathbf{B}_l^H, \quad (5.59)$$

$$= \mathbf{I}_{M_l} - \mathbf{A}_l^{+H} \mathbf{\Gamma}_l^{-1H} \mathbf{R}_{sl}^{-\frac{1}{2}H} \mathbf{\Sigma}_l(\tau) \mathbf{R}_{sl}^{\frac{1}{2}H} \mathbf{\Gamma}_l^H \mathbf{A}_l^H, \quad (5.60)$$

$$= \mathbf{I}_{M_l} - \mathbf{A}_l (\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_l)^{-1} \mathbf{\Sigma}_l(\tau) \mathbf{A}_l^H. \quad (5.61)$$

Sachant que :

$$\mathbf{a}_l^H(\theta_{1,q}) \mathbf{A}_l (\mathbf{A}_l^H \mathbf{A}_l)^{-1} = \mathbf{1}_q^T, \quad (5.62)$$

où  $\mathbf{1}_q$  est la  $q$ -ième colonne de la matrice identité. Nous en déduisons la relation suivante pour la  $q$ -ième source :

$$\mathbf{a}_l^H(\theta_{1,q}) \mathbf{G}_l(\tau) \mathbf{a}_l(\theta_{1,q}) = M_l \left( 1 - (\mathbf{\Sigma}_l(\tau))_{q,q} \right). \quad (5.63)$$

D'après la définition de la matrice  $\mathbf{\Sigma}_l(\tau)$  (5.48), où  $(\mathbf{\Sigma}_l(\tau))_{q,q} = 1$  ssi  $\tau = \Delta\tau_q$ , nous en déduisons la relation suivante :

$$\mathbf{a}_l^H(\theta_{1,q}) \mathbf{G}_l(\Delta\tau_q) \mathbf{a}_l(\theta_{1,q}) = 0. \quad (5.64)$$

Nous pouvons alors en déduire un nouveau critère HR pour estimer conjointement  $(\theta_{l,q}, \Delta\tau_q)$ . Le nouveau critère d'optimisation que nous nommons  $\mathcal{L}_{T_l}$  avec  $T_l$  pour TARGET sur la  $l$ -ième base est alors :

$$\mathcal{L}_{T_l}(\theta_l, \tau) = \frac{1}{M_l} \mathbf{a}_l^H(\theta_l) \mathbf{G}_l(\tau) \mathbf{a}_l(\theta_l), \quad (5.65)$$

où le critère est borné par  $0 \leq \mathcal{L}_{T_l}(\theta_l, \tau) \leq 1$  en s'annulant ssi  $\theta_l = \theta_{l,q}$  et  $\tau = \Delta\tau_q \forall q \in \llbracket 1; Q \rrbracket$ . Sur la base  $l$  l'algorithme d'estimation TARGET est donc :

$$\left\{ (\hat{\theta}_l, \Delta\hat{\tau}_q) \mid q \in \llbracket 1; Q \rrbracket \right\} = \arg \min_{(\theta_l, |\tau|) \in [0; 360] \times [0; \Delta\tau_{\max}]} \mathcal{L}_{T_l}(\theta_l, \tau). \quad (5.66)$$

TARGET est donc pleinement HR pour les paramètres de temps et d'angle pour estimer la position de la source. Cependant le critère  $\mathcal{L}_{T_l}$  n'exploite pas l'angle d'arrivée sur l'autre station  $v \neq l$ . Afin d'exploiter les angles d'arrivée de chacune des bases, nous définissons un second critère TARGET :

$$\mathcal{L}_{TARGET}(\theta_1, \tau) = \frac{\mathcal{L}_{T_1}(\theta_1, \tau) + \mathcal{L}_{T_2}(\theta_2 = \Psi(\theta_1, \tau), \tau)}{2}. \quad (5.67)$$

Ce dernier critère est celui de l'algorithme TARGET. Il nécessite de déterminer la fonction  $\theta_2 = \Psi(\theta_1, \tau)$ . En effet, pour une source de position  $\mathbf{p}$  nous avons  $\theta_1(\mathbf{p})$  et  $\Delta\tau_{12}(\mathbf{p})$ . Pour déterminer la relation entre  $\theta_2(\mathbf{p})$  et le couple  $(\theta_1(\mathbf{p}), \Delta\tau_{12}(\mathbf{p}))$ , les relations sur le vecteur d'onde (1.10) et le TDoA (1.26) sont utilisées :

$$\begin{cases} \mathbf{k}(\theta_l(\mathbf{p})) = \frac{\mathbf{b}_l - \mathbf{p}}{\|\mathbf{b}_l - \mathbf{p}\|}, \\ \Delta\tau(\mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{p}\| - \|\mathbf{b}_2 - \mathbf{p}\|}{c}, \end{cases} \quad (5.68)$$

ce qui permet de déduire :

$$\begin{cases} \theta_2 = \Psi(\theta_1, \Delta\tau) = \frac{180}{\pi} \arg(\mathbf{p}(\theta_1, \Delta\tau) - \mathbf{b}_2), \\ \mathbf{p}(\theta_1, \Delta\tau) = \mathbf{b}_1 + \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{p}\| \mathbf{k}(\theta_1), \\ \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{p}\| = \frac{(c\Delta\tau)^2 - \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|^2}{2(c\Delta\tau - \mathbf{k}^T(\theta_1)(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2))}. \end{cases} \quad (5.69)$$

Finalement l'estimateur AoA/TDoA TARGET prenant en compte les deux bases peut s'écrire :

$$\left\{ (\hat{\theta}_{1q}, \Delta\hat{\tau}_q) \mid q \in \llbracket 1; Q \rrbracket \right\} = \arg \min_{(\theta_1, |\tau|) \in [0; 360] \times [0; \Delta\tau_{\max}]} \mathcal{L}_{TARGET}(\theta_1, \tau). \quad (5.70)$$

## 5.5 Algorithme TARGET

Nous décrivons ici les différentes étapes de l'algorithme TARGET [DFLG15] :

- **Étape 1** : Estimation des puissances du bruit  $\hat{\sigma}_l^2$  à partir des éléments propres des matrices de covariance des signaux reçus sur les deux bases, puis déduction des matrices de covariances débruitées suivantes :

$$\hat{\mathbf{R}}_{ll} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_l(nT_e) \mathbf{x}_l^H(nT_e) - \hat{\sigma}_l^2 \mathbf{I}_{M_l}, \quad (5.71)$$

pour  $l \in \{1; 2\}$  ;

- **Étape 2** : Sur-échantillonnage d'un facteur  $T$  des signaux  $\mathbf{x}_1(t)$  et  $\mathbf{x}_2(t)$  ;
- **Étape 3** : Estimation des matrices d'intercorrélacion interbases :

$$\hat{\mathbf{R}}_{lv}(\xi_v \times \tau) = \frac{1}{NT} \sum_{n=1}^{NT} \mathbf{x}_l\left(\frac{nT_e}{T}\right) \mathbf{x}_v^H\left(n\frac{nT_e}{T} - \xi_v \times \tau\right), \quad (5.72)$$

pour  $l \neq v$  et avec  $\tau = \left| \frac{nT_e}{T} \right| \leq \Delta\tau_{\max}$  où  $n \in \left[ \left\lceil -\frac{N}{2} \right\rceil; \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \right]$  et  $\Delta\tau_{\max}$  le TDoA maximal défini en (2.37) ;

- **Étape 4** : Calcul des matrices  $\hat{\mathbf{G}}_l(\tau)$  selon l'Eq.(5.58) :

$$\hat{\mathbf{G}}_l(\tau) = \mathbf{I}_{M_l} - \hat{\mathbf{R}}_{ll}^+ \hat{\mathbf{R}}_{lv}(\xi_v \times \tau) \hat{\mathbf{R}}_{vv}^+ \hat{\mathbf{R}}_{vl}(\xi_l \times \tau), \quad (5.73)$$

pour  $(l, v) \in \{1; 2\}$  ;

- **Étape 5** : Détermination du critère TARGET Eq.(5.67) et optimisation sur le critère Eq.(5.70).

## 5.6 Estimation de la puissance du bruit

La première étape de l'approche TARGET nécessite d'estimer la puissance du bruit sur chacune des stations. Nous utilisons les résultats statistiques des RMT de la Sec.4.2 pour obtenir des estimateurs non biaisés de ces niveaux de bruit.

Nous nous intéressons à l'estimée de la matrice de covariance (SCM) de  $\mathbf{x}_l(t)$  :

$$\mathbb{E} [\mathbf{x}_l(t)\mathbf{x}_l^H(t)] = \mathbf{R}_{ll} + \sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l}, \quad (5.74)$$

telle que définie à l'étape 1 de l'algorithme TARGET. La décomposition en éléments propres de  $\hat{\mathbf{R}}_{ll}$  est donnée par l'expression suivante :

$$\hat{\mathbf{R}}_{ll} = [\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{M_l}] \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \hat{\lambda}_{M_l} \end{pmatrix} [\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{M_l}]^H, \quad (5.75)$$

où  $\hat{\lambda}_1 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{M_l}$  sont les valeurs propres classées par ordre décroissant et  $\hat{\mathbf{e}}_m$  le vecteur propre associé à la valeur propre  $\hat{\lambda}_m$ . Une première approche consiste à estimer la puissance de bruit sur chacune des stations en effectuant :

$$\hat{\sigma}_l^2 = \frac{1}{M_l - Q} \sum_{m=Q+1}^{M_l} \hat{\lambda}_m. \quad (5.76)$$

Malheureusement cet estimateur est biaisé et converge presque sûrement vers  $\sigma_l^2$  ( $\hat{\sigma}_l^2 \xrightarrow{ps} \sigma_l^2$ ) quand  $N \rightarrow \infty$ . Si  $N$  est largement supérieur à  $M_l$  l'estimateur de  $\sigma_l^2$  est suffisamment précis, dans le cas contraire l'estimateur est biaisé. Il existe d'autres estimateurs de valeurs propres améliorant la précision d'estimation de  $\sigma_l^2$ . On peut citer l'estimateur de G. A. Anderson [And65] ou encore celui de Stein [Mui80] se basant sur la minimisation d'une fonction coût. Mais ces estimateurs font l'hypothèse que la multiplicité de toutes les valeurs propres de la matrice de covariance théorique sont égales à 1. Ce n'est pas le cas dans notre exemple car la multiplicité théorique des valeurs propres associées au sous-espace bruit est  $M_l - Q$ .

Sous certaines hypothèses mentionnées dans le paragraphe 4.2.1, la théorie des matrices aléatoires à grandes dimensions offre un cadre propice pour l'estimation de la puissance du bruit. Cette théorie s'appuie sur le régime dimensionnel  $\frac{M_l}{N} = c$  constant quand la taille de la matrice et le nombre d'observation tendent vers l'infini. Ce rapport  $c$  définit une perturbation sur la SCM. Dans ces conditions la matrice de covariance estimée à l'étape 1 de l'algorithme TARGET a des valeurs propres de bruit qui suivent une loi de Marčenko-Pastur (voir Sec.4.2). L'estimateur de la puissance du bruit en utilisant la loi *a priori* de Marčenko-Pastur est donné par [Mes08a] :

$$\hat{\sigma}_l^2 = \frac{N}{M_l - Q} \sum_{m=Q+1}^{M_l} (\hat{\lambda}_m - \hat{\mu}_m), \quad (5.77)$$

où les  $\hat{\mu}_m$  sont les  $M_l$  solutions réelles de l'équation :

$$\sum_{m=1}^{M_l} \frac{\hat{\lambda}_m}{\hat{\lambda}_m - \hat{\mu}} = N, \quad (5.78)$$

avec  $\hat{\mu}_1 \geq \dots \geq \hat{\mu}_{M_l}$ . Trouver les solutions de (5.78) revient à déterminer les valeurs propres de [CD11] :

$$\text{diag}(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{1}{N} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}} \sqrt{\boldsymbol{\lambda}}^T, \quad (5.79)$$

avec  $\lambda = [\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{M_l}]^T$ . Le cas où  $N < M_l$  est explicité dans [Mes08a].

On peut voir sur la Fig.5.1 l’histogramme normalisé de l’estimation du bruit d’une puissance théorique de 1 avec un pas suffisamment fin pour donner une estimée convenable de la DDP. La station est composée de 6 capteurs. Sur la Fig.5.1(a) il y a 1 source et sur la Fig.5.1(b) il y a 2 sources pour un nombre d’observations pour calculer la SCM de  $N = 10$ . Nous avons donc un régime dimensionnel  $c = \frac{6}{10} = 0.6$  relativement proche de 1, donc une SCM fortement perturbée. Nous comparons l’estimateur classique (5.76) (en bleu) avec celui qui prend comme *a priori* la Marčenko-Pastur (5.77) (en rouge). Les résultats montrent que l’estimateur avec *a priori* Marčenko-Pastur donne un niveau de bruit moins biaisé que celui de l’estimateur classique.

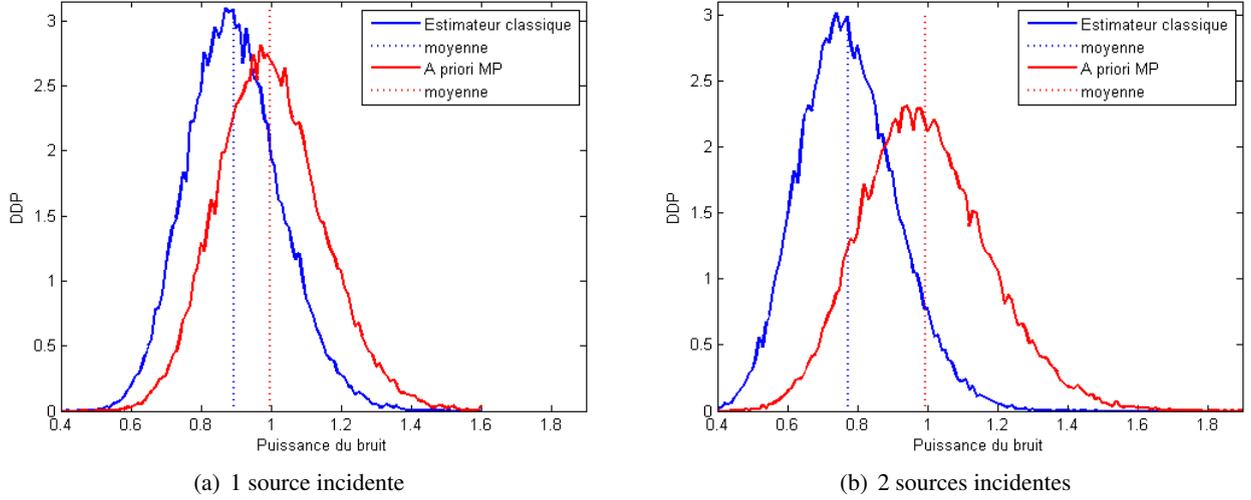


Figure 5.1: Densité de probabilité pour une station de 6 capteurs et  $N = 10$ , en bleu l’estimateur classique et en rouge celui avec un *a priori* Marcenko-Pastur.

## 5.7 Étude comparative de l’estimateur TDoA TARGET avec l’estimateur du TDoA classique

Nous allons comparer dans ce paragraphe les performances de l’estimateur TARGET TDoA avec celles de l’estimateur du TDoA classique. Nous considérons dans notre analyse que les sources ont toutes le même spectre et vérifient  $r_q(\tau) = \gamma_q r(\tau)$ . Nous rappelons ici que l’estimateur du TDoA classique réalise une intercorrélation de  $Q$  signaux mélangés. En respectant le hypothèse H1 de la page 15, l’estimateur du TDoA classique (2.38) a pour forme analytique :

$$\mathcal{L}(\tau) = 1 - \frac{|r_{12}(\tau)|^2}{r_{11}(0)r_{22}(0)}, \quad (5.80)$$

et s’écrit de la manière suivante d’après (5.53) :

$$\mathcal{L}(\tau) = 1 - \frac{\left| \sum_{q=1}^Q \rho_{1,q} \rho_{2,q}^* \gamma_q r(t - \Delta\tau_q) \right|^2}{\left( \sum_{q=1}^Q |\rho_{1,q}|^2 \gamma_q + \sigma_1^2 \right) \left( \sum_{q=1}^Q |\rho_{2,q}|^2 \gamma_q + \sigma_2^2 \right)}. \quad (5.81)$$

Pour effectuer la comparaison, un nouveau critère en lien avec la limite de résolution est introduit. D’après la condition énoncée en (2.37) la valeur du TDoA est bornée par :

$$|\Delta\tau_q| \leq \Delta\tau_{\max}, \quad (5.82)$$

où  $\Delta\tau_{\max}$  dans le cas de 2 stations est égal à  $\frac{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\|}{c}$ . En conséquence la différence de TDoA maximum entre deux sources est telle que :

$$|\Delta\tau_q - \Delta\tau_j| \leq 2\Delta\tau_{\max}, \quad (5.83)$$

avec  $q \neq j$ . La borne  $2\Delta\tau_{\max}$  est atteinte pour deux sources situées de part et d'autre de la zone de dysfonctionnement des TDoA pour deux stations dont la configuration est donnée sur la Fig.2.9. Nous allons à présent considérer des signaux parfaits occupant une bande de largeur  $B$  avec un spectre de type porte où  $r(\tau) = \text{sinc}(\pi B\tau)$ . Nous représentons la fonction d'autocorrélation  $r(\tau)$  de ce signal sur la Fig.5.2.

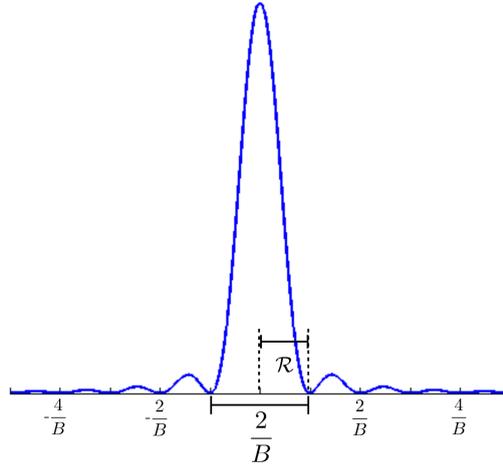


Figure 5.2: Représentation de la fonction d'autocorrélation  $r(\tau)$  d'un signal occupant une bande  $B$ .

On peut constater que la mesure des TDoA en multi-sources sera toujours biaisée sauf si l'écart entre les TDoA des sources respecte la condition suivante :

$$|\Delta\tau_q - \Delta\tau_j|_{\text{non biaisé}} = \frac{k}{2B}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_* \setminus \{1\}, \quad (5.84)$$

correspondant aux annulations de la dérivée du sinus cardinal. Selon Rayleigh la limite de résolution correspondant au cas où 2 minima de  $\mathcal{L}(\tau)$  sont visibles correspond à un écart  $|\Delta\tau_q - \Delta\tau_j|$  au moins plus grand que la largeur des lobes principaux. La limite de résolution  $\mathcal{R}$  est alors la suivante :

$$|\Delta\tau_q - \Delta\tau_j|_{\text{résolue}} \geq \mathcal{R} = \frac{1}{B}. \quad (5.85)$$

Pour caractériser la difficulté du scénario, nous introduisons un critère  $E$  correspondant au nombre de lobes principaux contenus dans l'excursion maximale  $2\Delta\tau_{\max}$  des TDoA.  $E$  est donné par :

$$E = B \times \Delta\tau_{\max}. \quad (5.86)$$

Dans les exemples qui suivent l'analyse est donnée pour deux stations d'antennes composées d'un réseaux de 6 antennes dont 5 sont en formation UCA de rayon  $2.4\lambda$  autour d'une sixième au centre. La configuration des sources et bases est donnée sur la Fig.5.3(a). Cette configuration correspond à la borne  $E$  maximale en écart de TDoA (5.83). C'est donc le meilleur scénario pour l'estimateur du TDoA (2.38) où  $2\Delta\tau_{\max} = 2.67\mu\text{s}$ . Le RSB est infini pour l'analyse.

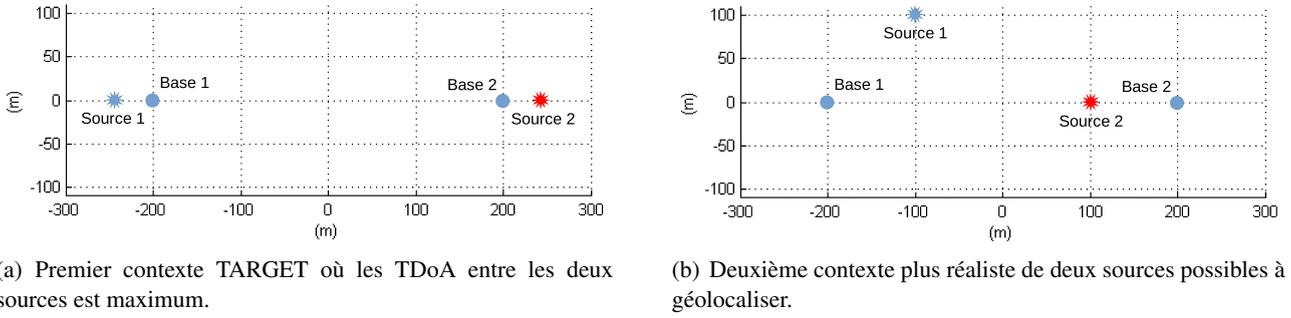
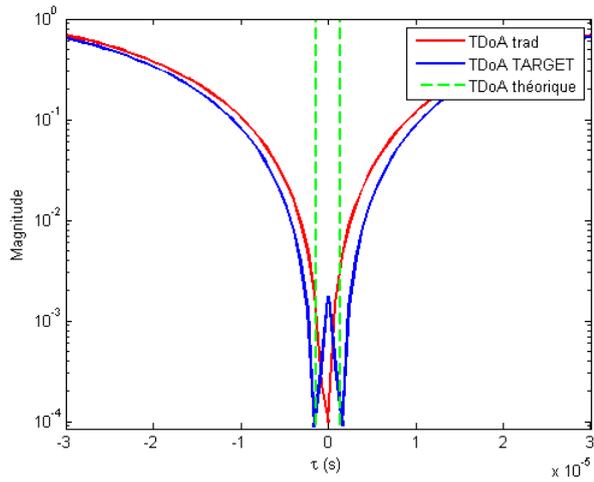


Figure 5.3: Scénario avec 2 sources et 2 bases où  $\mathbf{b}_1 = [-200, 0]^T \text{m}$  et  $\mathbf{b}_2 = [200, 0]^T \text{m}$ .

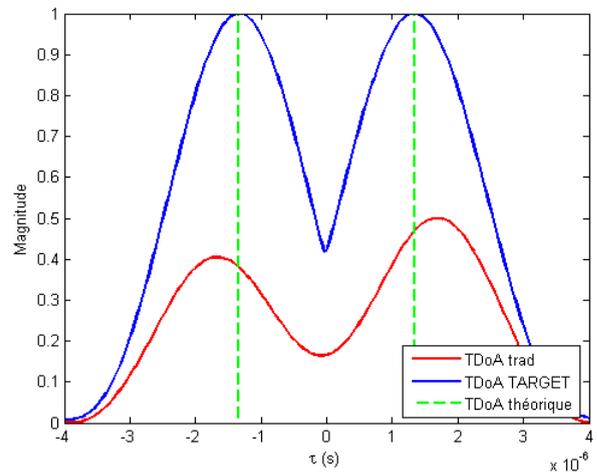
Nous allons étudier trois configurations de bande correspondant à des contextes réalistes des signaux de télécommunication :

- Dans un premier cas le signal a une bande passante  $B$  de 25kHz. Cette bande est celle des PMR qui est utilisée pour des moyens de communication tels que ceux de la police, des pompiers, etc. Cette bande est extrêmement étroite et donc très défavorable pour l'estimateur du TDoA classique. Avec  $E = 0.0334\text{lobe}$ , l'excursion en TDoA ne peut contenir qu'à peine plus de trois centième d'un lobe principal, représentant un contexte extrêmement difficile. De plus le pouvoir de résolution de  $\mathcal{R} = 40\mu\text{s}$  est extrêmement grand, car  $\mathcal{R} > 2\Delta\tau_{\text{max}}$  rendant non résolu l'estimateur classique. Toutefois l'estimateur TDoA TARGET de l'Eq.(5.40) permet selon la Fig.5.4(a) d'obtenir deux maxima correspondant aux TDoA des deux sources. L'aspect HR de l'estimateur est ainsi mis en évidence.
- Nous considérons dans un deuxième contexte une bande passante  $B$  de 500kHz relativement proche de ce qu'on peut trouver en GSM. Nous avons une valeur de  $E = 0.67\text{lobe}$ , plus favorable que dans le cas PMR, mais qui reste toujours inférieure au lobe principal dans l'excursion du TDoA. Le pouvoir de résolution de l'ordre de  $\mathcal{R} = 2\mu\text{s}$ , vérifie  $\mathcal{R} < 2\Delta\tau_{\text{max}}$  tel que les sources sont bien résolues. Cependant, l'estimateur classique sera très fortement biaisé avec  $E = 0.67\text{lobe}$  dans l'excursion en TDoA. La Fig.5.4(b) montre que l'estimateur TDoA TARGET reste non biaisé.
- Pour finir, un dernier cas où les sources ont une bande très large avec  $B = 2\text{MHz}$ . On peut trouver ce type de bande, par exemple, dans le cadre du LTE ou UMTS. Cette largeur de bande permet de se mettre dans un cas où l'estimateur du TDoA classique est relativement bon. Dans ce cas nous avons  $E = 2.67\text{lobes}$ , ce qui est très bon. De même nous avons un pouvoir de résolution de l'ordre de  $\mathcal{R} = 500\text{ns}$  qui est tel que  $\mathcal{R} \ll 2\Delta\tau_{\text{max}}$ . Nous remarquons sur la Fig.5.4(c) que le biais existe toujours pour la méthode conventionnelle bien que les performances soient relativement proches de celle de TARGET qui est non biaisé.

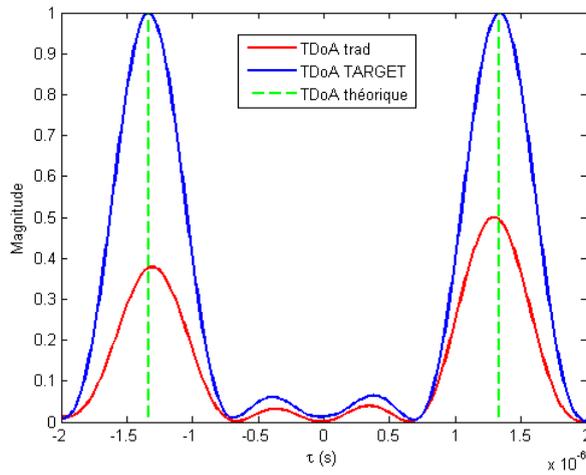
Ces scénarii représentent des cas extrêmes et idylliques pour l'estimateur du TDoA classique. Mais ces scénarii sont loin d'être idéaux pour la géolocalisation de sources. En effet, il est tout simplement impossible de géolocaliser des sources placées sur les zones de dysfonctionnement des AoA et des TDoA. C'est pour cette raison que nous analysons le comportement de ces estimateurs dans un scénario plus réaliste présenté sur la Fig.5.3(b) avec deux sources dont la différence de TDoA n'est plus égale à la borne limite de l'excursion en TDoA de  $2\Delta\tau_{\text{max}}$ . Cependant les sources sont encore suffisamment éloignées, et correspondent à un contexte



(a)  $B = 25\text{kHz}$  du PMR, tracé de  $\mathcal{L}(\tau)$  en échelle log.



(b)  $B = 500\text{kHz}$  du GSM, tracé de  $1 - \mathcal{L}(\tau)$ .

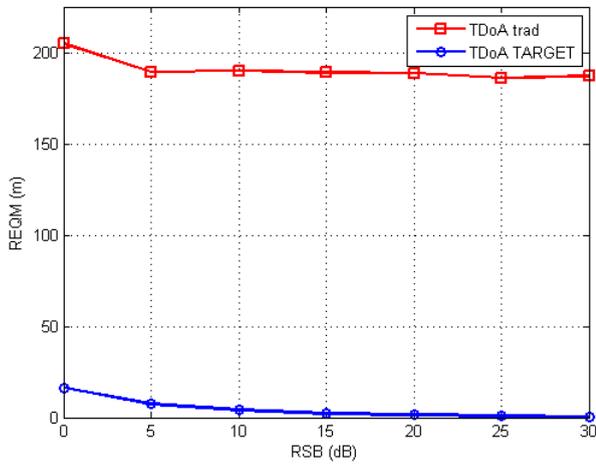


(c)  $B = 2\text{MHz}$ , tracé de  $1 - \mathcal{L}(\tau)$ .

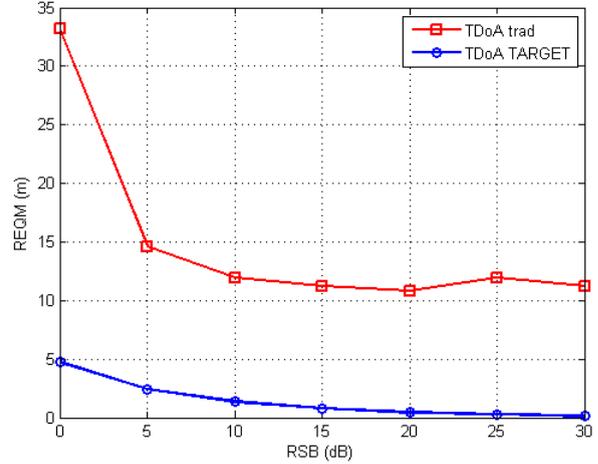
Figure 5.4: Fonctions coût  $\mathcal{L}(\tau)$  du TDoA traditionnel (en rouge) donné par (2.38) et du TDoA TARGET (en bleu) donné par (5.40). Le TDoA théorique est indiqué par les traits pointillés vert.

plutôt favorable. Nous n'allons pas traiter ici le contexte PMR, celui-ci étant déjà non résolu dans le cas des positions de sources le plus favorable. Sur les Fig.5.5 nous traçons le REQM où le TDoA est multiplié par la valeur de la vitesse de propagation  $c$  ce qui donne une performance en mètre peut-être plus parlante que des résultats en seconde.

D'après la Fig.5.5(a), les performances de l'estimateur du TDoA classique sont très mauvaises malgré une différence de TDoA  $\Delta\tau_1 - \Delta\tau_2 = 1.25\mu\text{s}$  relativement grande, mais qui est toutefois inférieure au pouvoir de résolution. Il est important de noter ici que dans un contexte de géolocalisation de sources usuellement utilisées tel que des signaux de télécommunication, l'estimateur du TDoA traditionnel n'est pas adapté au cas multi-sources. Pour des bandes de 2MHz Fig.5.5(b), l'estimateur traditionnel est résolu, cependant on voit très clairement apparaître le biais pour des forts RSB. Dans les deux cas l'estimateur TDoA TARGET a de bonnes performances et est non biaisé.



(a) REQM pour des sources de type GSM ( $B = 500\text{kHz}$ ).



(b) REQM pour des sources de bande  $B = 2\text{MHz}$ .

Figure 5.5: Performances REQM exprimé en mètre ( $\text{REQM} \times \nu$ ) de l'estimateur TDoA traditionnel (en rouge) et celui de TDoA TARGET (en bleu).

## 5.8 Comparaison avec les méthodes en 2 étapes et 1 étape

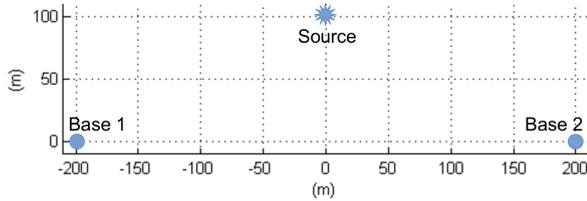
Dans cette partie nous comparons les performances de l'estimation conjointe de l'AoA/TDoA par TARGET (5.70) avec les algorithmes en 1 étape DPD, LOST et LOST-FIND, ainsi qu'avec la triangulation (AoA/AoA) et la méthode hybride AoA/TDoA. Pour cela nous allons considérer trois scénarii. Pour ces trois scénarii nous plaçons 2 bases, l'une à  $(-200\text{m}, 0)$  et l'autre à  $(+200\text{m}, 0)$  dans un repère cartésien. Ces bases sont équipées de 6 antennes composées d'un réseau circulaire de rayon  $2.4\lambda$  avec 5 éléments et d'une antenne au centre de réseau. Enfin pour les trois scénarii nous allons prendre  $K = 7$  pour le nombre de filtres du banc de filtres du DPD et pour le nombre de décalages temporels des méthodes spatiotemporelles (LOST et LOST-FIND).

Nous allons considérer les trois scénarios suivants qui sont représentés sur la Fig.5.6 :

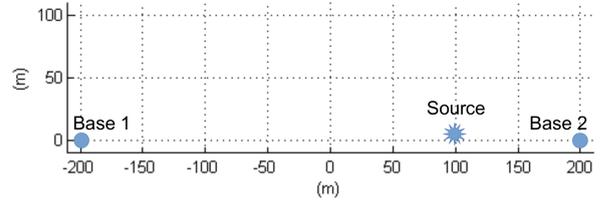
- Le premier cas est celui de la Fig.5.6(a) avec une source de position  $(0, +100\text{m})$ . Cette source est relativement éloignée de la zone de dysfonctionnement des estimateurs AoA représentée par l'axe passant par les deux stations d'antennes. Cette configuration source/bases sera le point de référence pour observer le comportement de l'algorithme TARGET car ce scénario ne présente aucune difficulté. En effet, l'observation sur l'antenne globale est bande étroite car le TDoA entre la source et les deux bases est nul. D'autre par la source est éloignée de la zone de dysfonctionnement.
- Cependant l'algorithme TARGET a été conçu pour fonctionner dans un contexte large bande. C'est pourquoi pour le deuxième scénario nous allons toujours considérer un cas mono-source représenté à la Fig.5.6(b) où la source située à  $(+100\text{m}, +5\text{m})$  est large bande. La source est très proche de la zone de dysfonctionnement tout en étant LB sur l'antenne globale, rendant ainsi la position très complexe à estimer pour les estimateurs que nous avons vus jusqu'à présent. En effet, en plus d'être très proche de la zone de dysfonctionnement des estimateurs AoA pénalisant très fortement les estimateurs de position se basant sur cette information seule, elle est en plus très excentrée des deux bases donnant une observation large bande sur l'antenne globale. L'approximation bande étroite, même après une décomposition en  $K = 7$  sous-bandes étroites, n'est plus vérifiée. Bien que le nombre de décompositions soit relativement élevé : 7 filtres dans le banc de filtres du DPD et 7 décalages temporels dans le cas des deux méthodes

spatiotemporelles, il demeurera un effet large bande résiduel que nous avons étudié au Chap.3.

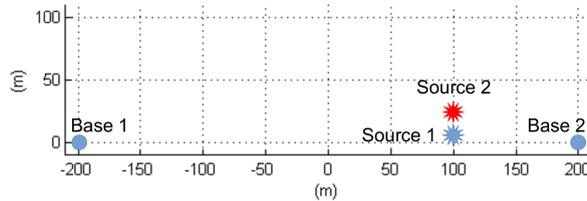
- Puis pour finir dans le troisième scénario nous aborderons un cas bi-sources, Fig.5.6(c). La première source, que l'on cherche à estimer, est à la même position (+100m, +5m) qu'au scénario précédent entraînant les mêmes difficultés que précédemment. Cependant une deuxième source est ajoutée vingt mètres au-dessus de celle-ci en (+100m, +25m), ce qui ajoute inévitablement encore plus de difficultés pour les estimateurs.



(a) Cas mono-source avec la source située à (0, +100m).



(b) Cas mono-source très difficile avec la source située à (+100m, +5m).

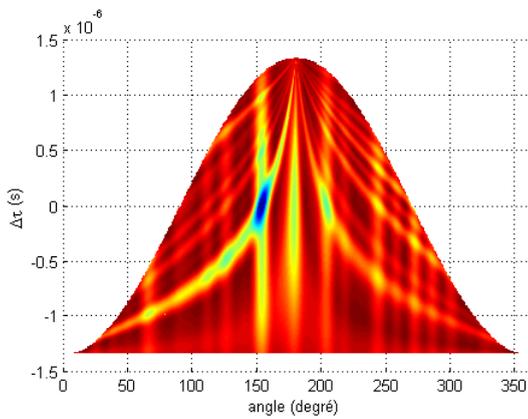


(c) Cas bi-source avec la première source situés à (+100m, +5m) et la seconde source à (+100m, +25m).

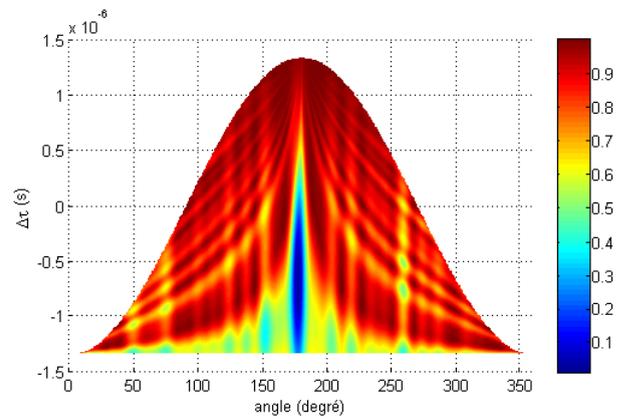
Figure 5.6: Les trois différents scénarii étudiées pour l'algorithme TARGET.

Sur la Fig.5.7 on peut observer les différentes fonctions coûts de l'algorithme TARGET pour les différents scénarii précédents avec un RSB infini et pour référence la deuxième base. Sur ces figures on observe très bien que le minimum est bien à la bonne position dans le critère bi-dimensionnel dépendant de l'angle d'arrivée sur la seconde base et du TDoA entre les deux bases. La forme en cloche du critère est directement dû au fait que le TDoA est borné et que l'angle de la source sur la première base dépend du TDoA et de l'angle d'arrivée sur la seconde base. On observe très clairement sur les différentes figures des lobes secondaires formant des courbes qui vont des bords jusqu'au sommet de la cloche. Ces lignes correspondent aux lobes secondaires des AoA de la première base. De même on peut voir des lignes verticales qui représentent les lobes secondaires des angles de la deuxième base. Ceci est dû au fait que le critère TARGET est la moyenne des deux sous-critères TARGET  $\mathcal{L}_{T_1}$  et  $\mathcal{L}_{T_2}$  Eq.(5.65). Grâce à la séparation angle et temps de TARGET, on peut voir par exemple sur le critère de la Fig.5.7(c) correspondant au troisième scénario bi-sources, que bien que les deux sources sont très proches l'une de l'autre, avec une différence entre les deux TDoA extrêmement faible qui serait non résolu pour l'estimateur du TDoA classique, la séparation en angle permet de bien différencier les deux minima du critère, augmentant ainsi la robustesse de l'algorithme TARGET. Les représentations de ces différents critères permettent également d'apprécier une certaine robustesse vis-à-vis des lobes secondaires avec un fort contraste entre lobe(s) principal(aux) et lobes secondaires.

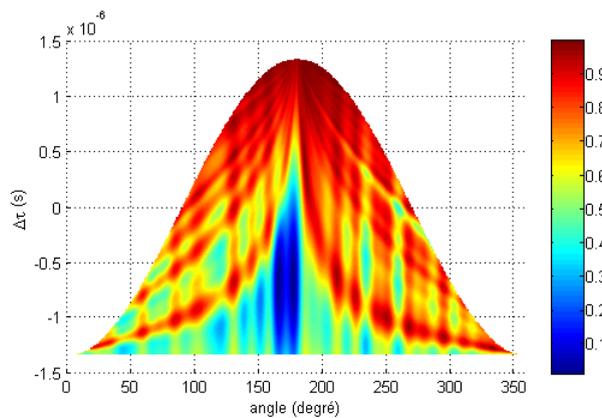
Sur les figures 5.8 nous analysons les performances en terme de REQM de chacun des scénarii. Le REQM du premier scénario mono-source de la Fig.5.6(a) est présenté sur la Fig.5.8(a) et permet de voir que dans ce contexte tous les algorithmes ont des performances équivalentes. L'algorithme LOST possède des performances



(a) Fonction coût du premier cas mono-source.



(b) Fonction coût du deuxième cas mono-source.



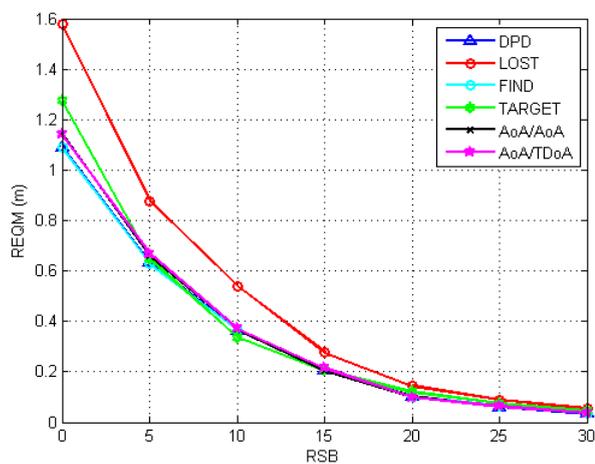
(c) Fonction coût du troisième scénario bi-source.

Figure 5.7: Critère TARGET des trois scénarios.

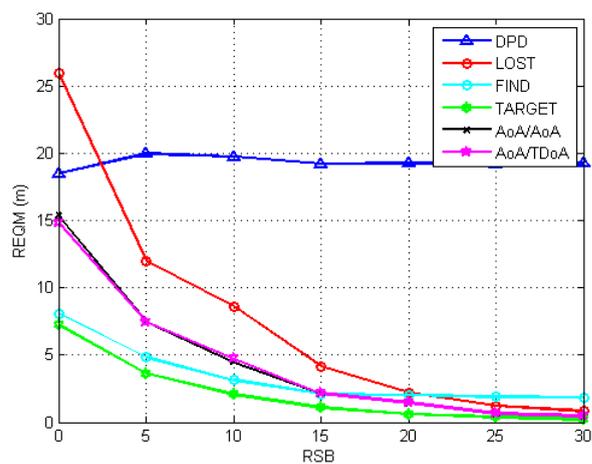
légèrement plus mauvaises que les autres algorithmes à faible RSB dû à la non exploitation du TDoA. La position optimale pour un estimateur exploitant seulement les AoA est donnée pour une source positionnée à  $(0, 400\frac{\sqrt{3}}{2}\text{m}) = (0, 346\text{m})$ . Les positions source/bases représenteraient alors un triangle équilatéral. Cependant TARGET est quant à lui au même niveau de REQM que les algorithmes DPD, LOST-FIND, AoA/AoA et AoA/TDoA.

Dans le deuxième scénario de la Fig.5.6(b), les performances en terme de REQM présentées sur la Fig.5.8(b) mettent en avant les propriétés de TARGET. En premier lieu, on observe que les algorithmes DPD et LOST-FIND sont biaisés avec un très fort biais pour le DPD qui, comme nous l'avons vu, est un algorithme plus sensible que les autres au phénomène résiduel de la largeur de bande des signaux. Nous retrouvons sur le Tab.5.1 les différents biais théoriques pour  $K = 7$ . TARGET quant à lui est l'algorithme qui offre les meilleures performances. De plus il est non biaisé grâce à la prise en compte de l'effet large bande (le biais est visible à fort RSB). Ceci offre de belles perspectives à cet algorithme et montre qu'il est plus profitable en terme de performances de prendre en compte la largeur de bande des signaux plutôt que d'effectuer une canalisation fine en sous-bande des méthodes en 1 étape de type DPD, LOST et LOST-FIND.

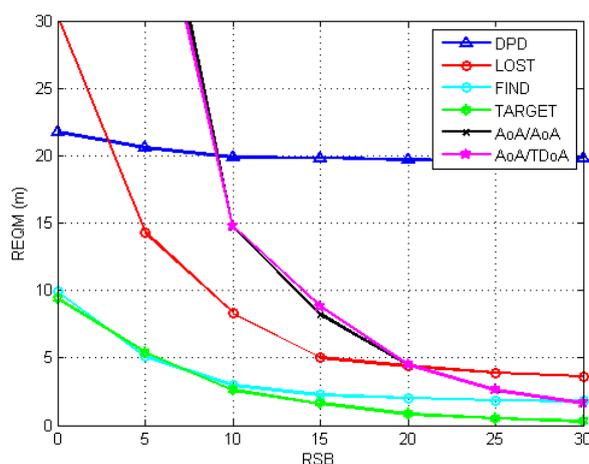
Pour terminer l'analyse nous étudions un cas bi-sources. Nous avons vu précédemment que l'algorithme TARGET est un algorithme à haute résolution. Pour cette dernière configuration sources/bases (Fig.5.6(c)) nous



(a) REQM mono-source placée à  $(0, +100\text{m})$ .



(b) REQM mono-source placée à  $(+100\text{m}, +5\text{m})$ .



(c) REQM bi-source avec pour position de source située : la première à  $(+100\text{m}, +5\text{m})$  et une seconde à  $(+100\text{m}, +25\text{m})$ .

Figure 5.8: Comparaison des REQM des algorithmes DPD, LOST, LOST-FIND, triangulation (AoA/AoA) et AoA/TDoA avec celui de l'algorithme TARGET.

Méthode ( $K = 7$ )	DPD	LOST	LOST-FIND
Biais (m)	17	1	2

Table 5.1: Biais des méthodes en 1 étape pour le deuxième scénario de la Fig.5.6(b) avec une source située à  $(100, 5)\text{m}$ .

allons exploiter toutes les propriétés de l'algorithme TARGET en considérant des sources très excentrées et relativement proches offrant aux deux bases un écartement en angle très réduit (seulement  $3.8^\circ$  sur la première base et  $11.2^\circ$  sur la seconde) et des TDoA très proches (un écart de  $6.5\text{ns}$ ). En observant les performances données sur la Fig.5.8(c) TARGET possède les meilleures performances, avec un biais nul. Ce contexte très défavorable pour la géolocalisation de sources cumulant sources proches et signaux très large bande sur l'antenne globale est tout à fait adapté à la méthode. Les biais théoriques occasionnés par l'erreur de modèle BE des algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND sont donnés dans le Tab.5.2.

Méthode ( $K = 7$ )	DPD	LOST	LOST-FIND
Biais (m)	18	4	2

Table 5.2: Biais des méthodes en 1 étape pour le troisième scénario de la Fig.5.6(c) avec une source située à  $(100, 5)$ m et une seconde à  $(100, 25)$ m.

## 5.9 Conclusions

Dans ce chapitre un nouvel algorithme TARGET est développé. L'approche prend en compte le modèle large bande sur l'antenne globale. *A contrario* des algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND qui cherchent à lutter contre l'effet large bande en effectuant une décomposition en sous-bande imparfaitement bande étroite, l'algorithme TARGET s'adapte à une observation large bande. Ainsi l'algorithme TARGET est non biaisé pour un RSB infini alors que les algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND le sont. De plus TARGET a montré de bonnes performances vis-à-vis des différents scénarii rencontrés. Cette nouvelle approche offre une souplesse d'utilisation par rapport aux autres algorithmes en 1 étape en s'affranchissant du choix délicat du nombre de décompositions en sous-bande (le facteur  $K$ ) dépendant du compromis entre le coût de calcul et le biais provoqué par l'effet large bande résiduel.



## Chapter 6

# Considérations opérationnelles

Ce chapitre permet d'analyser et de revisiter les travaux de cette thèse dans un contexte plus opérationnel :

- Nous allons, dans un premier temps, chercher à répondre à la problématique technologique et opérationnelle qui concerne la minimisation de la quantité de données à transmettre entre deux stations.
- Dans un second temps, nous analysons la forme du diagramme de rayonnement de l'antenne globale. L'objectif est d'une part de connaître la largeur du lobe principal qui est proportionnelle à la précision d'estimation et d'autre part d'analyser la hauteur des lobes secondaires nécessaire pour évaluer la robustesse aux ambiguïtés. Toute cette analyse permettra de connaître l'influence de la géométrie de l'antenne globale sur les performances des algorithmes en 1 étape tels que le DPD, LOST et LOST-FIND.
- Dans un troisième temps nous simulons les différents algorithmes pour des scénarii difficiles et intéressants d'un point de vue opérationnel. Le but est d'analyser le comportement de ces méthodes en 1 étape par rapport aux méthodes conventionnelles.
- Puis, dans un dernier temps, nous allons appliquer les algorithmes DPD, LOST, LOST-FIND et TARGET à des signaux réels. À notre connaissance il s'agit de la première tentative d'appliquer ces algorithmes à des signaux réels, ceci permettra d'observer le comportement de ces derniers dans un cas réel.

### 6.1 Transmission compressée des signaux entre les bases

L'un des problèmes des algorithmes en 1 étape comme le DPD, LOST, LOST-FIND et TARGET est d'acheminer les observations issues de chaque station vers un opérateur. Ce qui engendre une quantité d'informations très importante à envoyer dans un canal de transmission qui peut être soit hertzien, soit par liaison physique (câbles coaxiaux, fibre optique, etc.). La quantité de données à transmettre est limitée par la bande passante et le débit de la liaison.

Pour se rendre bien compte de la difficulté, nous analysons le cas d'une base ayant une bande  $B = 500\text{kHz}$ . Le signal à transmettre peut être issu d'un CAN (Convertisseur Analogique Numérique), d'une précision de  $n_{bit} = 12$  bits et la fréquence d'échantillonnage est 10% supérieure à la bande  $B$  pour respecter la condition de Shannon-Nyquist. Avec une fréquence de 550 kilo-échantillons par seconde, le débit de transmission de la  $l$ -ième base vers l'opérateur est le suivant :

$$D \text{ [bit/s]} = 2 \times M_l \times n_{bit} \times B \times 1.1 \quad (6.1)$$

Dans cet exemple où la base est composée de 6 capteurs le débit est de  $D = 2 \times 6 \times 12 \times 550 \cdot 10^3 = 79.2\text{Mbit/s}$ , ce qui reste relativement important. Pour réduire la quantité de données à transmettre, on peut envisager de

transmettre uniquement lorsqu'un signal est détecté. À titre de comparaison voici quelques ordres de grandeur de capacité envisageables suivant la technologie actuelle :

- WIFI 802.11n [wif09] : type de transmission hertzienne MIMO avec une capacité de 7.2 à 72.2 Mbit/s pour une bande de 20MHz et une capacité de 15 à 150 Mbit/s pour une bande de 40MHz par flux, pouvant aller jusqu'à 4 flux ;
- WIFI 802.11ac [wif13] : type de transmission hertzienne MIMO plus récent avec une capacité de 7.2 à 96 Mbit/s pour une bande de 20MHz allant de 65 à 866 Mbit/s pour une bande de 160MHz par flux, pouvant aller jusqu'à 8 flux ;
- Ethernet 100BASE-T [Spu00] : type de transmission par câble d'une capacité de 100Mbit/s ;
- Fibre optique : type de transmission par câble, sans réelle limite de capacité, aujourd'hui elle va de 4Gbit/s à plusieurs centaines de giga bits par seconde en fonction du protocole de transmission utilisé et de la qualité de la fibre.

Nous pouvons voir avec ce bref tour d'horizon que l'acheminement des observations pouvait constituer un vrai défi par le passé, mais est actuellement applicable pour les méthodes en 1 étape. Les solutions sont plus ou moins coûteuses (par exemple la fibre optique semble la solution la plus onéreuse) et plus ou moins simples à mettre en place (par exemple des méthodes de transmission par voie hertzienne semblent plus simples à utiliser dans la mise en œuvre du système).

Nous proposons dans cette section une solution de transmission des signaux permettant de réduire le débit à transmettre tout en conservant les performances des méthodes [DFL15b].

### 6.1.1 Principe de la compression des données pour une transmission inter-base pour les méthodes en 1 étape

Le principe est d'envoyer vers un opérateur un nombre de signaux ne dépassant pas le nombre de sources. Pour ce faire, une projection des observations dans le sous-espace signal de dimension  $Q$  est envisagée. Ainsi la  $l$ -ième base n'enverra vers l'opérateur que  $\min(Q, M_l) \times N$  données en plus du projecteur plutôt que les  $M_l \times N$  observations. Ainsi dans le pire des cas où le nombre de sources est supérieur ou égal au nombre de capteurs d'une base, le nombre de signaux à transmettre sera égal au nombre d'antennes. La quantité de données à transmettre sera alors réduite d'un facteur  $\min\left(\frac{Q}{M_l}, 1\right)$ . Dans un premier temps nous nous intéresserons à la transmission des signaux d'une base vers un opérateur, puis nous étendrons le principe aux algorithmes effectuant une décomposition en sous-bandes des observations (DPD, LOST et LOST-FIND) et dans un second temps à l'algorithme TARGET.

#### 6.1.1.1 Transmission des signaux entre 1 base et l'opérateur

D'après (1.35), le modèle de l'observation sur une base s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)\boldsymbol{\Gamma}_l s_l(t) + \mathbf{n}_l(t). \quad (6.2)$$

La matrice de covariance est d'après (1.38), la suivante :

$$\mathbf{R}_{ll} = \mathbb{E} [\mathbf{x}_l(t)\mathbf{x}_l^H(t)], \quad (6.3)$$

$$= \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)\boldsymbol{\Gamma}_l \mathbf{R}_{s_l} \boldsymbol{\Gamma}_l^H \mathbf{A}_l^H(\boldsymbol{\Theta}_l) + \sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l}, \quad (6.4)$$

où la matrice  $\mathbf{R}_{s_l} = (\delta_{q,j} \gamma_q)_{1 \leq (q,j) \leq Q}$  est composée des puissances des  $Q$  signaux. La décomposition en éléments propres de  $\mathbf{R}_{ll}$  vérifie :

$$\mathbf{R}_{ll} = \mathbf{E}_l \boldsymbol{\Lambda}_l \mathbf{E}_l^H, \quad (6.5)$$

où  $\mathbf{\Lambda}_l = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M_l})$  est une matrice diagonale composée des valeurs propres rangées par ordre décroissant  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_Q \geq \lambda_{Q+1} = \dots = \lambda_{M_l} = \sigma_l^2$  et  $\mathbf{E}_l = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{M_l}]$  est la matrice composée des vecteurs propres  $\mathbf{e}_m$  associés à la valeur propre  $\lambda_m$ . En présence de  $Q$  sources, le sous-espace signal s'écrit  $\mathbf{E}_{l_s} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_Q]$ .

La technique de compression des signaux consiste à projeter l'observation  $\mathbf{x}_l(t)$  sur la matrice espace signal  $\mathbf{E}_{l_s}$  pour obtenir :

$$\tilde{\mathbf{x}}_l(t) = \mathbf{E}_{l_s}^H \mathbf{x}_l(t), \quad (6.6)$$

$$= \mathbf{O}_l \mathbf{s}_l(t) + \mathbf{E}_{l_s}^H \mathbf{n}_l(t), \quad (6.7)$$

où  $\mathbf{O}_l = \mathbf{E}_{l_s}^H \mathbf{A}_l(\Theta_l)$  est une matrice de dimension  $\min(Q, M_l) \times Q$ . Le vecteur  $\tilde{\mathbf{x}}_l(t)$  est une observation compressée de dimension  $\min(Q, M_l)$  qui dans le pire des cas (si  $Q \geq M_l$ ) sera de même dimension que  $\mathbf{x}_l(t)$ , sinon  $\tilde{\mathbf{x}}_l(t)$  a une dimension égale à  $Q$ . La technique de décompression consiste à construire une observation  $\mathbf{y}_l(t)$  de dimension  $M_l$  proche de  $\mathbf{x}_l(t)$  à partir du signal compressé  $\tilde{\mathbf{x}}_l(t)$  et de la matrice de *compression*  $\mathbf{E}_{l_s}$ . L'observation  $\mathbf{y}_l(t)$  décompressée s'écrit alors :

$$\mathbf{y}_l(t) = \mathbf{E}_{l_s} \tilde{\mathbf{x}}_l(t), \quad (6.8)$$

$$= \mathbf{A}_l(\Theta_l) \mathbf{s}_l(t) + \mathbf{\Pi}_l \mathbf{n}_l(t), \quad (6.9)$$

où  $\mathbf{\Pi}_l = \mathbf{E}_{l_s} \mathbf{E}_{l_s}^H$  est le projecteur vers le sous-espace signal de la matrice  $\mathbf{R}_{ll}$ . La technique de décompression est appliquée à l'opérateur. À l'opérateur, après décompression du signal, nous retrouvons donc bien un signal de dimension  $M_l$  où l'espace signal des  $Q$  sources est bien engendré par les colonnes de  $\mathbf{A}_l(\Theta_l)$ . D'autre part on constate que le bruit est aussi projeté sur le sous-espace signal. En conséquence, le niveau du bruit  $\mathbf{\Pi}_l \mathbf{n}_l(t)$  sur le signal décompressé est plus faible que celui du signal bruité avec  $\mathbf{n}_l(t)$ . Cela aura un effet positif sur les performances des méthodes avec les signaux décompressés. La compression sur la  $l$ -ième base se décompose en 6 étapes relativement simples :

- **Étape 1** : Calcul de la SCM  $\hat{\mathbf{R}}_{ll}$  de la base sur  $N$  échantillons indépendants ;
- **Étape 2** : Décomposition en éléments propres de la matrice  $\hat{\mathbf{R}}_{ll}$  ;
- **Étape 3** : Construction de la matrice de *compression* avec les vecteurs propres de l'espace signal  $\hat{\mathbf{E}}_{l_s} = [\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_Q]$  ;
- **Étape 3 bis (pour TARGET uniquement)** : Estimer la puissance du bruit  $\hat{\sigma}_l^2$  à l'aide des  $M_l - Q$  plus petites valeurs propres, selon une des approches décrites dans Sec.5.6 ;
- **Étape 4** : Compression du signal en effectuant l'opération (6.7) :  $\tilde{\mathbf{x}}_l(t) = \hat{\mathbf{E}}_{l_s}^H \mathbf{x}_l(t)$  ;
- **Étape 5** : Transmission du signal  $\tilde{\mathbf{x}}_l(t)$  de dimension  $\min(Q, M_l) \times N$  ainsi que de la matrice de compression  $\hat{\mathbf{E}}_{l_s}$  vers l'opérateur (pour TARGET également envoyer  $\hat{\sigma}_l^2$ ) ;
- **Étape 6** : Décompression du signal à l'opérateur en effectuant selon (6.9) :  $\mathbf{y}_l(t) = \hat{\mathbf{E}}_{l_s} \tilde{\mathbf{x}}_l(t)$ .

### 6.1.1.2 Cas des algorithmes en 1 étape effectuant une décomposition en sous-bande

La mise en œuvre des algorithmes en 1 étape (DPD, LOST et LOST-FIND) avec la transmission comprimée des signaux des bases est en réalité assez simple et relativement directe. En effet il suffit de considérer que les signaux envoyés par les bases sont tous compressés. L'opérateur doit ainsi décompresser les signaux de chacune des bases avant d'appliquer l'un des algorithmes. Il est possible que l'opérateur soit l'une des stations, afin de réduire encore plus la quantité d'information à transmettre. Les 3 étapes pour gérer la décompression des signaux sur l'antenne globale avec des algorithmes tels que DPD, LOST ou encore LOST-FIND sont alors :

- **Étape 1** : Réception sur l'opérateur des  $\min(Q, M_l) \times N$  mesures de chacune des  $L$  bases ainsi que des  $L$  matrices de compression  $\hat{\mathbf{E}}_{l_s}$  ;
- **Étape 2** : Décompression des signaux des  $L$  bases à l'aide de l'opération (6.9) ;
- **Étape 3** : Application des algorithmes en 1 étape avec les signaux décompressés.

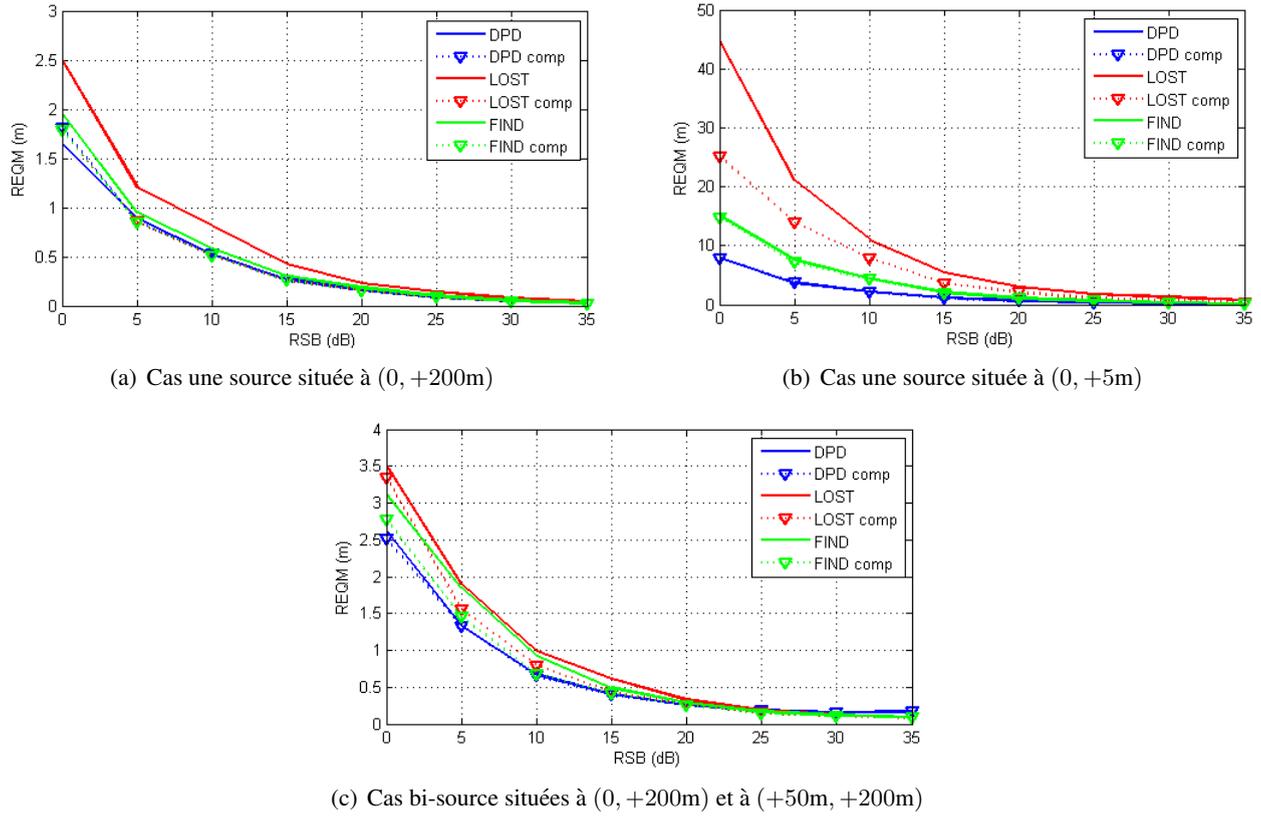


Figure 6.1: REQM des algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND dans le cas non compressé (tracé plein) et dans celui où les transmissions inter-bases sont compressées (tracé pointillé).

Afin d'illustrer le bon fonctionnement de cette procédure, nous allons considérer 3 contextes bases/émetteurs en comparant les performances en terme de REQM des versions classique et compressée. Les différents scénarii seront composés de 2 stations ayant pour coordonnées  $(-200\text{m}, 0)$  et  $(+200\text{m}, 0)$ . Les réseaux des stations sont composés de 5 capteurs en formation UCA de rayon  $2.4\lambda$  autour d'un sixième au centre. La bande des signaux est égale à la bande des bases, valant 500kHz. Le premier contexte est un cas mono-source Fig.6.1(a), où la source est située à  $(0, +200\text{m})$ , soit à une distance éloignée de la zone de dysfonctionnement des estimateurs exploitant les AoA (comme LOST). On constate alors que la version compressée possède des performances sensiblement identiques à la version non compressée pour les algorithmes DPD et LOST-FIND. Cependant on constate un gain de performance pour l'algorithme LOST, où le pré-traitement de compression-décompression permet de supprimer en partie le bruit (6.9) et améliore l'algorithme à faible RSB. De plus, la méthode a permis de réduire d'un facteur 6 la quantité de données à transmettre. En effet, en reprenant l'exemple de l'introduction, nous passons d'un débit initial de 79.2Mbit/s à 13.2Mbit/s pour la variante algorithmique ayant subit les étapes de compression-décompression.

À présent, nous considérons un deuxième scénario, toujours mono-source, où la source est beaucoup plus proche de la zone de dysfonctionnement des AoA, avec les coordonnées  $(0, +5\text{m})$ . Nous avons vu la sous-optimalité de

la méthode LOST où les performances se dégradent très fortement dans ce contexte car l'algorithme n'utilise que les informations de direction d'arrivée des antennes composant l'antenne globale. La Fig.6.1(b) montre que LOST se dégrade en effet très fortement face au DPD et LOST-FIND. Cependant, comme précédemment le processus de compression a pour effet d'améliorer les performances à faible RSB grâce à l'étape de pré-traitement. La performance de LOST est bien plus améliorée que celles du DPD et LOST-FIND en présence d'une source proche de la zone de dysfonctionnement. Les performances des algorithmes DPD et LOST-FIND restent toujours aussi bonnes tout en garantissant un gain de débit de transmission de  $\frac{1}{6}$ .

Afin d'observer le comportement de la compression dans un cas multi-source nous considérons le scénario de la Fig.6.1(c) composé de 2 sources de coordonnées (0, +200m) et (+50m, +200m). Dans ce cas nous comparons les performances des versions compressées et non compressées des algorithmes. Les performances sont très similaires avec un gain de débit de transmission de  $\frac{2}{6}$ , passant ainsi de 79.2Mbit/s à 26.4Mbit/s pour le mode utilisant les étapes de compression et décompression.

### 6.1.1.3 Cas de l'algorithme TARGET

L'algorithme TARGET (Chap.5) ne s'appuie pas sur le même principe de décomposition des signaux en sous-signaux BE sur l'antenne globale comme les algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND. TARGET exploite le comportement algébrique d'une matrice de synchronisation (5.27) afin de créer une estimation conjointe des AoA/TDoA exploitant naturellement le large bande. L'algorithme TARGET est mis en œuvre principalement pour 2 bases. Les matrices de covariance entre les bases définies pour des signaux non compressés en (5.26) peuvent s'écrire à l'aide de la compression (6.7) pour tout  $(l, v) \in \{1; 2\}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{ll} = \mathbf{E}_{l_s} \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}_l(t) \tilde{\mathbf{x}}_l^H(t)] \mathbf{E}_{l_s}^H, \\ \mathbf{R}_{lv}(\xi_v \times \tau) = \mathbf{E}_{l_s} \mathbb{E} [\tilde{\mathbf{x}}_l(t) \tilde{\mathbf{x}}_v^H(t - \xi_v \times \tau)] \mathbf{E}_{v_s}^H. \end{cases} \quad (6.10)$$

La matrice  $\mathbf{G}_l(\tau)$  de l'Eq.(5.61) de l'algorithme TARGET est calculée à partir des matrices de l'Eq.(6.10) de la manière suivante :

$$\mathbf{G}_l(\tau) = \mathbf{I}_{M_l} - \mathbf{E}_{l_s} \mathbf{R}_{ll}^+ \mathbf{R}_{lv}(\xi_v \times \tau) \mathbf{R}_{vv}^+ \mathbf{R}_{vl}(\xi_l \times \tau) \mathbf{E}_{l_s}^H. \quad (6.11)$$

On s'aperçoit que dans le cadre de la compression des signaux, l'algorithme TARGET utilise directement les signaux compressés selon l'Eq.(6.7). Seul le calcul de la matrice  $\mathbf{G}_1(\tau)$  changera. Les 5 étapes permettant de prendre en compte la compression dans l'algorithme TARGET sont les suivantes :

- **Étape 1** : Réception des  $\min(Q, M_l) \times N$  mesures de chacune des 2 bases avec les 2 matrices de compression  $\hat{\mathbf{E}}_{1_s}$  et  $\hat{\mathbf{E}}_{2_s}$  et les puissances de bruit associées  $\hat{\sigma}_1^2$  et  $\hat{\sigma}_2^2$  ;
- **Étape 2** : Sur-échantillonnage d'un facteur  $T$  des signaux compressés  $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$  et  $\tilde{\mathbf{x}}_2(t)$  ;
- **Étape 3** : Calcul des SCM des signaux compressés intra et inter bases où pour tout  $(l, v) \in \{1; 2\}$  :

$$\hat{\mathbf{R}}_{ll}^c = \frac{1}{NT} \sum_{n=1}^{NT} \tilde{\mathbf{x}}_l(t_n) \tilde{\mathbf{x}}_l^H(t_n), \quad (6.12)$$

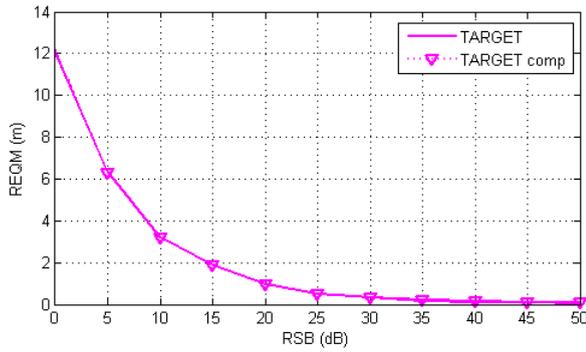
$$\hat{\mathbf{R}}_{lv}^c(\xi_v \times \tau) = \frac{1}{NT} \sum_{n=1}^{NT} \tilde{\mathbf{x}}_l(t_n) \tilde{\mathbf{x}}_v^H(t_n - \xi_v \times \tau); \quad (6.13)$$

- **Étape 4** : Calcul des matrices  $\hat{\mathbf{G}}_1(\tau)$  et  $\hat{\mathbf{G}}_2(\tau)$  (5.61) pour tout  $(l, v) \in \{1; 2\}$  par :

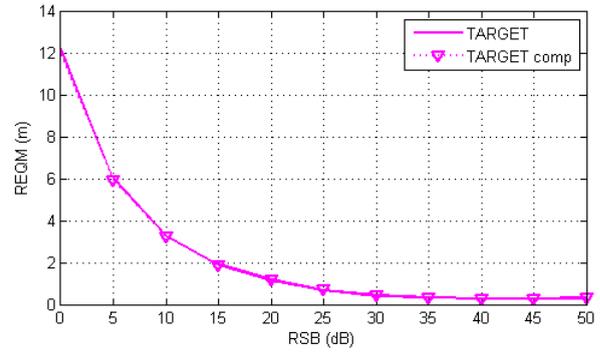
$$\hat{\mathbf{G}}_l(\tau) = \mathbf{I}_{M_l} - \hat{\mathbf{E}}_{l_s} \hat{\mathbf{R}}_{ll}^{c+} \hat{\mathbf{R}}_{lv}^c(\xi_v \times \tau) \hat{\mathbf{R}}_{vv}^{c+} \hat{\mathbf{R}}_{vl}^c(\xi_l \times \tau) \hat{\mathbf{E}}_{l_s}^H; \quad (6.14)$$

- **Étape 5** : Application de l'algorithme TARGET en optimisant le critère de l'Eq.(5.70) suivant les AoA et TDoA.

Pour témoigner du bon fonctionnement de l'algorithme nous avons considéré le scénario de bases du paragraphe précédent (soit  $(-200\text{m}, 0)$  et  $(+200\text{m}, 0)$ ). Dans un premier cas la source est fortement excentrée des deux stations et relativement proche de la zone de dysfonctionnement des méthodes AoA avec la position  $(+100\text{m}, +5\text{m})$ . En effet, on souhaite montrer que l'algorithme TARGET se comporte aussi bien que les autres méthodes en 1 étape. Le REQM des deux versions est représenté sur la Fig.6.2(a) où l'on voit très nettement que la différence entre la version avec les signaux transmis non compressés et ceux compressés n'a pas d'impact notable sur les performances, tandis que le gain de transmission est de  $\frac{1}{6}$  sur le débit bases/opérateur. Nous analysons ensuite le cas de deux sources ayant pour positions  $(+100\text{m}, +5\text{m})$  et  $(+100\text{m}, +150\text{m})$ . Le résultat est donné sur la Fig.6.2(b). Comme les autres algorithmes en 1 étape tels que le DPD et LOST-FIND, les performances des modes de transmission complet ou compressé sont très comparables avec un gain sur le débit bases/opérateur de  $\frac{2}{6}$  pour le mode compressé.



(a) REQM de TARGET pour 1 source de position  $(+100\text{m}, +5\text{m})$ .



(b) REQM de TARGET dans un cas bi-source où la première source a pour position  $(+100\text{m}, +5\text{m})$  et la seconde  $(+100\text{m}, +150\text{m})$ .

Figure 6.2: REQM de l'algorithme TARGET dans le cas de transmission non compressée (tracé plein) et transmission compressée (tracé pointillé).

## 6.2 Analyse du comportement de l'antenne globale et des ambiguïtés large bande d'ordre 1 des algorithmes

En traitement d'antenne, la géométrie d'un réseau d'antennes est très important pour comprendre le comportement des performances des algorithmes en fonction des positions des sources et des bases. On peut analyser la robustesse aux ambiguïtés et déterminer la taille des lobes dépendant directement de la précision du réseau. Nous nous intéressons, en premier lieu, au diagramme d'ambiguïté large bande d'ordre 1 sur l'antenne globale<sup>1</sup>, et observons l'influence des réseaux des bases sur la taille du lobe et donc son ouverture. Dans un deuxième temps nous étudierons les ambiguïtés au premier ordre des algorithmes en 1 étape et déduirons leur robustesse aux ambiguïtés.

Dans cette section nous appelons ouverture la taille du réseau. En présence d'un réseau circulaire UCA, l'ouverture est égale à deux fois le rayon.

<sup>1</sup>Le terme exact est diagramme d'ambiguïté d'ordre  $K_1$  car la structure de la source est paramétrée par  $K_1$  paramètres. Mais pour marquer le fait que l'on s'intéresse au cas mono-source, nous appelons cette ambiguïté l'ambiguïté large bande d'ordre 1.

### 6.2.1 Diagramme de rayonnement de l'antenne globale

Dans un premier temps nous observons le diagramme de rayonnement de l'antenne globale. Ceci permettra d'analyser certains comportements du système vis-à-vis du pouvoir de résolution et de la robustesse aux ambiguïtés. L'analyse est réalisée avec des réseaux UCA à 6 capteurs qui sont moins robustes aux ambiguïtés que le réseau utilisé dans les simulations : réseau UCA de 5 capteurs avec un capteur au centre. Le diagramme de rayonnement sur un réseau de réponse  $\mathbf{a}_l(\theta)$  est défini par [Ath03] :

$$R_l(\theta, \theta_1) = \frac{\mathbf{a}_l^H(\theta)\mathbf{\Pi}(\theta_1)\mathbf{a}_l(\theta)}{\mathbf{a}_l^H(\theta)\mathbf{a}_l(\theta)}, \quad (6.15)$$

où  $\theta_1$  est une position fixée et avec :

$$\begin{cases} \mathbf{\Pi}(\theta_1) = \frac{\mathbf{a}_l(\theta_1)\mathbf{a}_l^H(\theta_1)}{\mathbf{a}_l^H(\theta_1)\mathbf{a}_l(\theta_1)}, \\ \mathbf{a}_l^H(\theta)\mathbf{a}_l(\theta) = M_l. \end{cases} \quad (6.16)$$

Finalement le diagramme de rayonnement sur un réseau d'antennes est donné par :

$$R_l(\theta, \theta_1) = \frac{1}{M_l^2} |\mathbf{a}_l^H(\theta)\mathbf{a}_l(\theta_1)|^2. \quad (6.17)$$

$R_l(\theta, \theta_1)$  permet d'analyser les ambiguïtés d'ordre 1 arrivant en présence d'une source. Le diagramme de rayonnement du réseau UCA à 6 capteurs de rayon  $r_l = 0.4\lambda$  et de direction  $\theta_1 = 45^\circ$  est donné sur la Fig.6.3. Le lobe principal est très large avec une largeur à  $-3\text{dB}$  de  $60^\circ$  environ. Le pouvoir de résolution et la précision d'estimation proportionnels à la taille du lobe ne sont pas très bons.

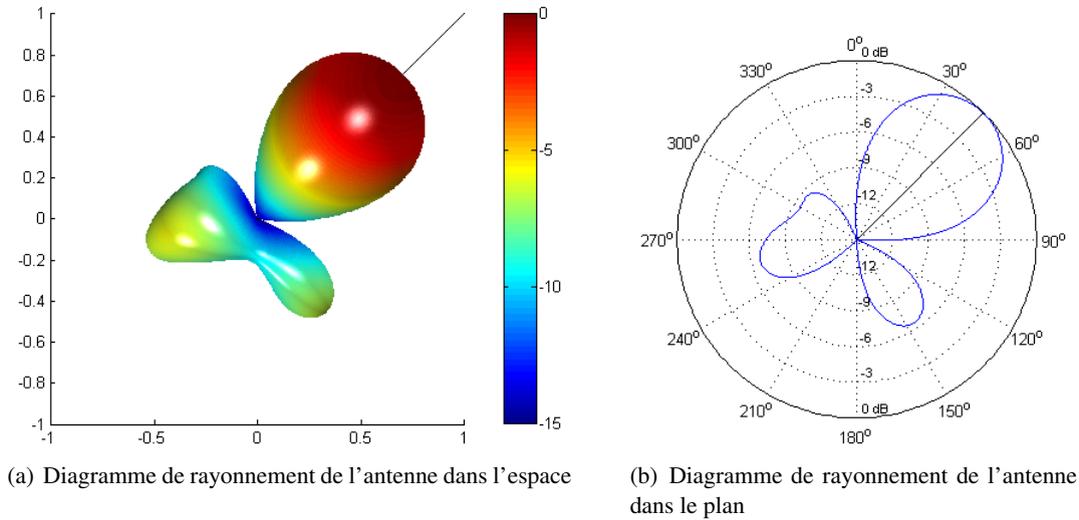


Figure 6.3: Diagramme de rayonnement pour un réseau UCA de 6 capteurs de rayons  $r_l = 0.4\lambda$  dans la direction  $\theta_1 = 45^\circ$ .

Il faut donc augmenter l'ouverture pour améliorer le pouvoir de résolution de la station. Malheureusement au-delà d'une certaine limite, le réseau devient ambigu car il existe au moins un lobe secondaire dont le niveau est très proche de celui du lobe principal. Si nous prenons toujours  $\theta_1 = 45^\circ$ , avec un rayon de  $r_l = 2.1\lambda$ , nous obtenons le diagramme de rayonnement de la Fig.6.4. Le lobe principal est beaucoup plus fin du facteur des rayons  $\frac{0.4}{2.1} \approx 0.19$ . Le pouvoir de résolution de la base est ainsi amélioré (le largeur du lobe principal est de

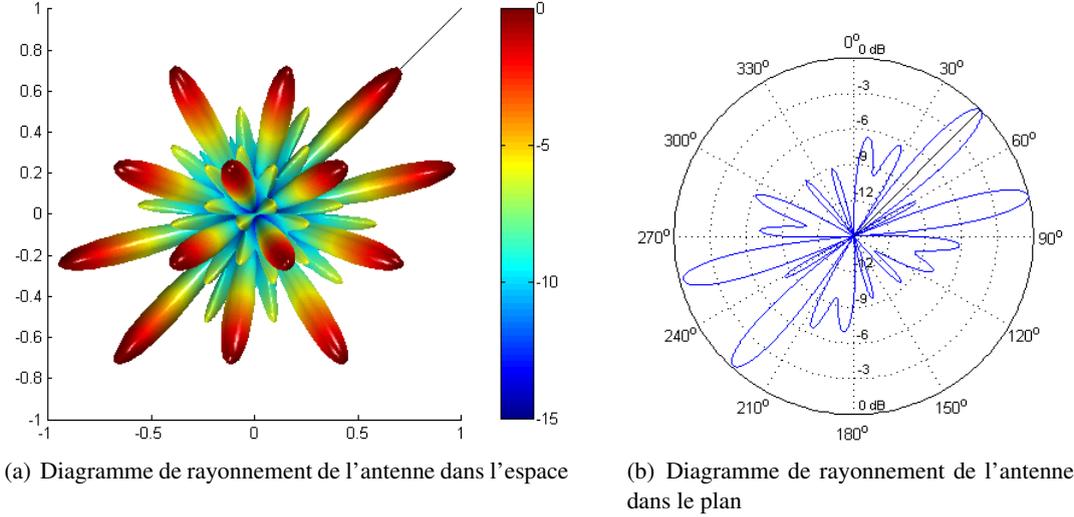


Figure 6.4: Diagramme de rayonnement pour un réseau UCA de 6 capteurs de rayon  $r_l = 2.1\lambda$  dans la direction  $\theta_1 = 45^\circ$ .

$60^\circ \times 0.19 \approx 11^\circ$ ) au détriment de fortes ambiguïtés. En effet pour une source incidente de  $45^\circ$  on ne sait pas déterminer si elle a une direction d'arrivée de  $45^\circ$ ,  $77^\circ$ ,  $223^\circ$  ou encore de  $256^\circ$ . En d'autres termes ce réseau ne permet plus d'identifier de façon unique la direction d'une source car la fonction  $\mathbf{a}_l(\theta)$  devient non bijective (l'hypothèse H4 de la page 15 n'est plus respectée).

## 6.2.2 Diagramme d'ambiguïté large bande d'ordre 1 de l'antenne globale avec atténuations complexes connues et égales entre les stations

L'objectif de cette analyse est d'étudier le diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 sur l'antenne globale composée de  $L$  stations. L'analyse d'ambiguïté sera effectuée pour un signal dans une bande  $\mathcal{B}_1 = [f_0 - \frac{B_1}{2}; f_0 + \frac{B_1}{2}]$  autour de la fréquence centrale  $f_0$ . De plus, afin de simplifier les écritures, nous supposons dans un premier temps les atténuations complexes connues et égales à 1 avec  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{1}_{L \times 1}$ . La structure algébrique de la réponse de l'antenne globale dépend d'une position  $\mathbf{p}$  et d'une fréquence  $f \in \mathcal{B}_1$  et est, selon (1.33), la suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}, f) = \mathbf{U}(\mathbf{p})\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}, f)\mathbf{1}_{L \times 1}. \quad (6.18)$$

Pour une source de position  $\mathbf{p}_1$  et de bande  $B_1$  le projecteur s'écrit :

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{B_1} \int_{\mathcal{B}_1} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, f)\mathbf{u}^H(\mathbf{p}_1, f)}{\mathbf{u}^H(\mathbf{p}_1, f)\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, f)} df, \quad (6.19)$$

avec  $\mathbf{u}^H(\mathbf{p}_1, f)\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, f) = M$ . Nous avons montré dans le cas d'une approche spatiotemporelle que les fréquences estimées sont de telle sorte que les vecteurs directeurs sont orthogonaux entre eux pour chacune des  $K$  fréquences (Eq.(4.8)). De même, si nous considérons deux filtres du banc de filtres à deux fréquences différentes de l'algorithme DPD, et que nous nommons ces filtres RIF  $\mathbf{w}(f_k) = [w_1, w_2 e^{2i\pi f_k T_e}, \dots, w_J e^{2i\pi f_k (J-1)T_e}]^T$  en sachant que  $f_k = \frac{(k-1)}{T_e}$  et que  $\mathbf{w}^H(f_k)\mathbf{w}(f_k) = 1$ , alors pour  $k \neq v$  :

$$\mathbf{w}^H(f_k)\mathbf{w}(f_v) = \sum_{j=1}^J |w_j|^2 e^{2i\pi(f_v - f_k)(j-1)T_e} = 0. \quad (6.20)$$

Donc après filtrage l'ensemble des vecteurs  $\{\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f_k) | k \in \llbracket 1; K \rrbracket\}$  sont orthogonaux. Finalement, si nous considérons le cas limite où  $K = \infty$  afin d'exploiter toute la bande  $\mathcal{B}_1$  de la source, le diagramme d'ambiguïté LB d'une source de position  $\mathbf{p}_1$  et de bande  $B_1$  sera alors :

$$R_{\rho_1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1) = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{u}^H(\mathbf{p}, f) \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{p}_1) \mathbf{u}(\mathbf{p}, f) df, \quad (6.21)$$

$$= \frac{1}{B_1 M^2} \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{u}^H(\mathbf{p}, f) \mathbf{u}(\mathbf{p}_1, f) \mathbf{u}^H(\mathbf{p}_1, f) \mathbf{u}(\mathbf{p}, f) df, \quad (6.22)$$

$$= \frac{1}{B_1 M^2} \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L \mathbf{a}_l^H(\mathbf{p}) \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_1) \mathbf{a}_j^H(\mathbf{p}_1) \mathbf{a}_j(\mathbf{p}) \int_{\mathcal{B}_1} e^{-2i\pi f(\Delta\tau_{l,j}(\mathbf{p}_1) - \Delta\tau_{l,j}(\mathbf{p}))} df. \quad (6.23)$$

En posant les fonctions d'ambiguïté temporelle et angulaire :

$$T_{l,j}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1) = \frac{1}{B_1} \int_{\mathcal{B}_1} e^{-2i\pi f(\Delta\tau_{l,j}(\mathbf{p}_1) - \Delta\tau_{l,j}(\mathbf{p}))} df, \quad (6.24)$$

$$= \text{sinc}(\pi B_1 (\Delta\tau_{l,j}(\mathbf{p}_1) - \Delta\tau_{l,j}(\mathbf{p}))) e^{-2i\pi f_0(\Delta\tau_{l,j}(\mathbf{p}_1) - \Delta\tau_{l,j}(\mathbf{p}))}, \quad (6.25)$$

$$R_l(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = \frac{1}{M} \mathbf{a}_l^H(\mathbf{p}) \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_1), \quad (6.26)$$

où il est à noter que dans ce cas  $R_l(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = \sqrt{R_l(\theta(\mathbf{p}), \theta(\mathbf{p}_1))}$  défini à l'Eq.(6.17). Finalement le diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 sur l'antenne globale s'écrit :

$$R_{\rho_1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1) = \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^L R_l(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) R_j^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) T_{l,j}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1). \quad (6.27)$$

D'après (6.27), les caractéristiques des ambiguïtés des stations  $R_l(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$  et  $R_j(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$  vont jouer un rôle sur les ambiguïtés de l'antenne globale. Toutefois l'antenne globale dépend aussi des fonctions d'ambiguïtés temporelles  $T_{l,j}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1)$ . Tout cela permet de comprendre que les AoA au travers des fonctions  $R_l(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$  et les TDoA au travers des  $T_{l,j}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1)$  auront un rôle sur les ambiguïtés de l'antenne globale.

Nous allons maintenant illustrer cette fonction d'ambiguïté sur quelques scénarii. Considérons 2 stations ( $L = 2$ ) avec le réseau circulaire précédent de rayon  $r_1 = r_2 = 0.4\lambda$  positionnées dans un repère cartésien en  $(-200\text{m}, 0)$  et  $(+200\text{m}, 0)$ , puis une source à  $\mathbf{p}_1 = (+100\text{m}, +200\text{m})$  sur les figures 6.5. Sur la Fig.6.5(a) nous considérons une seule composante fréquentielle, avec  $B_1 = 0\text{Hz}$ . On voit clairement que la fonction  $T_{l,j}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, 0)$  dépend seulement d'une phase telle que les ambiguïtés de l'antenne globale dépendent uniquement des réseaux des bases, où toute information liée au TDoA est perdue. On constate que l'antenne globale est non ambiguë avec un lobe principal très large donnant un pouvoir de résolution faible. Enfin sur la Fig.6.5(b), nous considérons une source de bande  $B_1 = 5\text{MHz}$ . Dans ce cas le lobe principal est plus fin, on a gagné en pouvoir de résolution. On peut constater que la courbure du lobe principal suit la ligne TDoA de la source.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas d'une antenne globale où les réseaux sur chacune des bases sont ambigus avec un rayon de  $r_l = 2.1\lambda$ . Les résultats sont donnés sur la Fig.6.6. En premier lieu, nous considérons une seule fréquence pure afin que l'antenne globale ne dépende pas de l'information du TDoA. On peut voir les ambiguïtés sur la Fig.6.6(a). Le pouvoir de résolution du système a fortement grandi grâce à la taille plus importante du réseau. Cependant on constate que l'ambiguïté des réseaux se répercute sur l'antenne globale. Pour une source positionnée en  $\mathbf{p}_1 = (+100\text{m}, +200\text{m})$ , on ignore si elle est en  $(+100\text{m}, +200\text{m})$ ,  $(+220\text{m}, -250\text{m})$  ou encore en  $(-20\text{m}, -100\text{m})$  et ceci seulement sur les supports d'abscisses et d'ordonnées observés. Il est aisé d'imaginer que le nombre d'ambiguïtés est bien supérieur à ce que montre la figure.

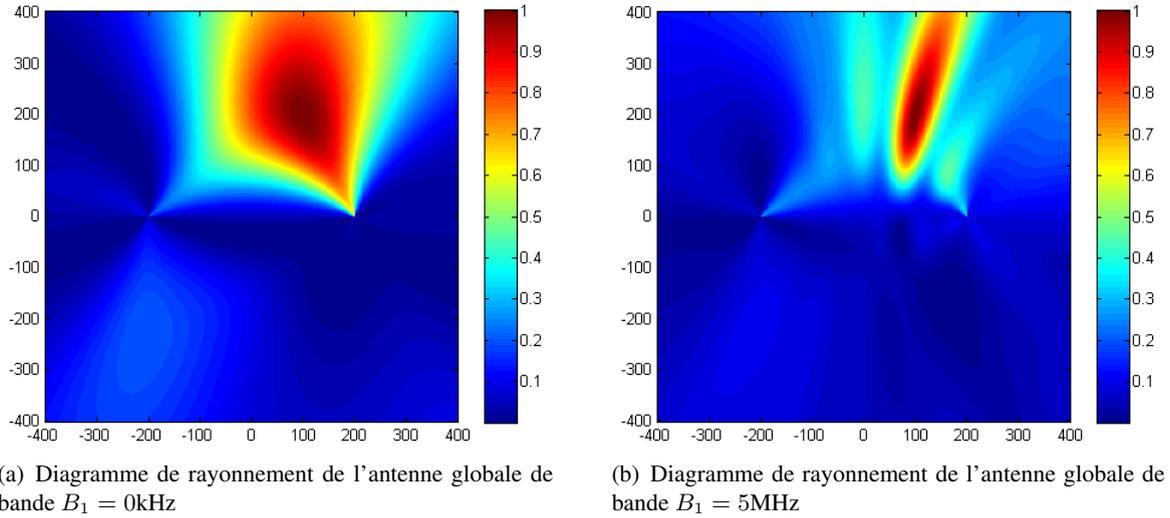
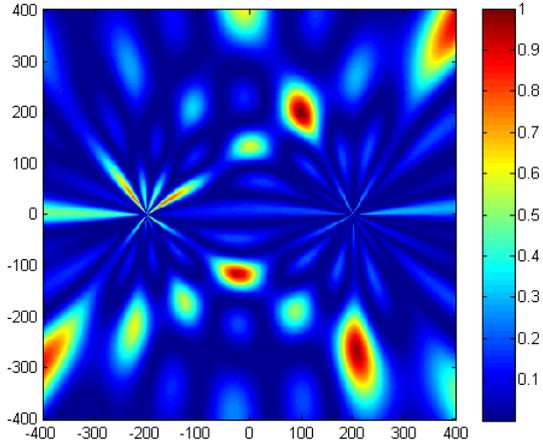


Figure 6.5: Diagramme de rayonnement de l'antenne globale pour 2 stations à  $(-200\text{m}, 0)$  et à  $(+200\text{m}, 0)$ , de rayon  $r_l = 0.4\lambda$  et 1 source à  $\mathbf{p}_1 = (+100\text{m}, +200\text{m})$ .

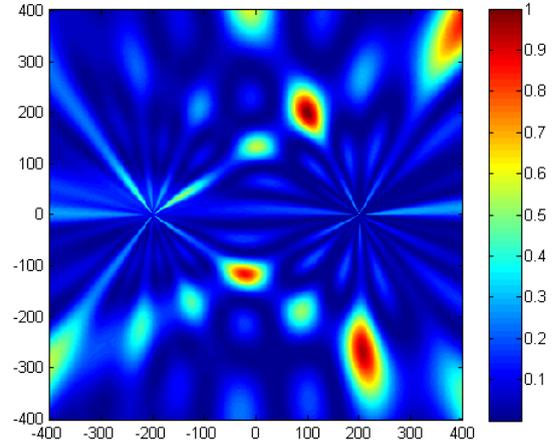
Sur la Fig.6.6(b) on considère un cas beaucoup plus réaliste où la bande passante vaut  $B_1 = 500\text{kHz}$ . On constate que le fait d'avoir augmenté la bande permet à l'antenne d'atténuer les ambiguïtés. Sur cette figure, bien que certains lobes secondaires soient plutôt élevés, il n'y a pas d'ambiguïté sur la position de la source. De plus, d'après l'Eq.(6.27), on observe que grâce à la fonction d'ambiguïté temporelle  $T_{l,j}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, B_1)$  la largeur de bande passante de la source joue un rôle important dans la suppression des ambiguïtés. En effet, si on prend une bande de  $B_1 = 1\text{MHz}$  les ambiguïtés sont plus atténuées que dans le cas d'une bande de  $500\text{kHz}$  selon la Fig.6.6(c). Nous poussons alors la logique avec une bande de  $5\text{MHz}$  (Fig.6.6(d)). Dans ce cas les lobes secondaires sont très fortement atténués laissant apparaître un lobe principal avec un très fort contraste par rapport aux lobes secondaires. Grâce à la dynamique des lobes secondaires, on peut déduire que plus un lobe secondaire est loin de la ligne de TDoA de la source, plus il sera atténué.

Nous allons maintenant montrer que l'augmentation du nombre de bases permet de réduire les ambiguïtés en comparant les figures 6.6(b) et 6.7. Sur la Fig.6.7 nous avons ajouté une troisième station en  $(-200\text{m}, +200\text{m})$ . En effet, plus il y a de stations, plus il y a de croisements entre les lignes des AoA formés par les lobes principaux et secondaire des stations et les lignes TDoA entre les sources et les stations. Augmentant ainsi les conditions pour que les lobes secondaires soient élevés, un lobe élevé devra rassembler la condition du croisement d'un lobe AoA important sur chacune des bases en plus de correspondre au TDoA de la source. Ainsi, plus on augmentera le nombre de stations, moins les conditions pour qu'un lobe secondaire soit fort seront réunies.

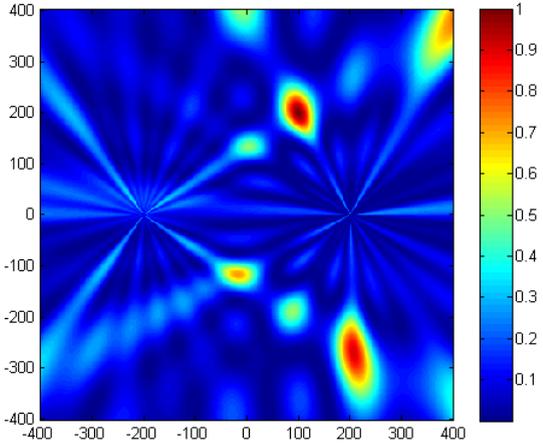
Cette analyse comportementale sur le diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale nous a permis d'en déduire qu'il est parfaitement possible de travailler avec des réseaux d'antennes ambigus sur les bases et non ambigus sur l'antenne globale. Ce résultat montre que l'on peut augmenter considérablement le pouvoir de résolution et la précision d'estimation des positions des sources sur l'antenne globale. Cela n'est pas le cas pour un algorithme en 2 étapes tel que la triangulation. De plus, vis-à-vis des robustesses aux ambiguïtés nous en ressortons deux comportements. Tout d'abord plus la largeur de la bande est importante, plus le système est robuste aux ambiguïtés grâce à l'exploitation des TDoA. Puis, plus le système est composé de bases, plus le contraste entre le lobe principal et les lobes secondaires sera important pour une bande fixée. C.-à-d. que pour un algorithme n'exploitant pas les TDoA ou encore une bande de signal faible, les lobes secondaires pourront être atténués par un nombre de bases plus grand. La combinaison de l'augmentation de la bande avec le nombre de



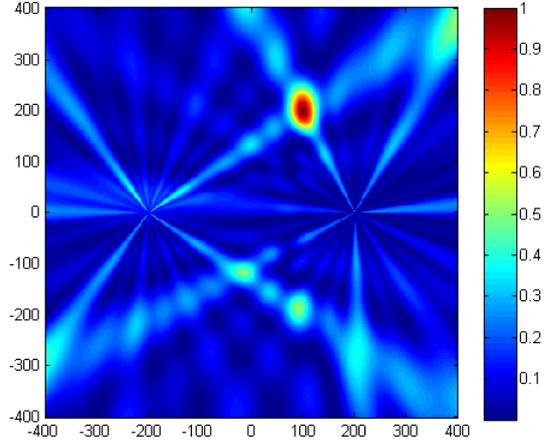
(a) Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale avec une bande de  $B_1 = 0\text{Hz}$



(b) Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale avec une bande de  $B_1 = 500\text{kHz}$



(c) Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale avec une bande de  $B_1 = 1\text{MHz}$



(d) Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale avec une bande de  $B_1 = 5\text{MHz}$

Figure 6.6: Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale pour 2 stations à  $(-200\text{m}, 0)$  et à  $(+200\text{m}, 0)$  et 1 source à  $\mathbf{p}_1 = (+100\text{m}, +200\text{m})$ .

stations permettra d'obtenir une antenne globale avec une bonne robustesse aux ambiguïtés.

### 6.2.3 Diagramme d'ambiguïté large bande d'ordre 1 de l'antenne globale avec atténuations complexes inconnues et inégales entre les stations

À présent nous allons considérer que les atténuations complexes ne sont plus égales entre les bases. Si nous considérons la structure algébrique (2.64), dans ce cas nous avons pour le projecteur vers le sous-espace source :

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1) = \frac{1}{B_1} \int_{B_1} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f) \mathbf{u}^H(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f)}{\mathbf{u}^H(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f) \mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f)} df, \quad (6.28)$$

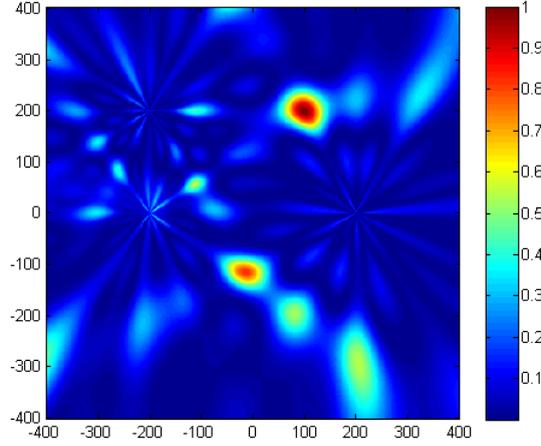


Figure 6.7: Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale avec une bande passante de  $B_1 = 500\text{kHz}$  et une troisième base supplémentaire à  $(-200\text{m}, +200\text{m})$ .

où  $\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f) = \mathbf{V}(\mathbf{p}_1, f)\boldsymbol{\rho}_1$  et  $\mathbf{u}^H(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f)\mathbf{u}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, f) = \sum_{l=1}^L |\rho_{l,1}|^2 M_l$ . D'après (6.28), en reprenant la définition du projecteur (6.28) le diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 défini en (6.21) devient :

$$R_{global}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1, \mathcal{B}_1) = \int_{\mathcal{B}_1} \frac{\mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1)\mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)}{\mathbf{u}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)\mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)} df, \quad (6.29)$$

$$= \frac{1}{B_1 \sum_{l=1}^L |\rho_{l,1}|^2 M_l} \int_{\mathcal{B}_1} \frac{\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p}, f)\mathbf{V}(\mathbf{p}_1, f)\boldsymbol{\rho}_1 \boldsymbol{\rho}_1^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p}_1, f)\mathbf{V}(\mathbf{p}, f)\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p}, f)\mathbf{V}(\mathbf{p}, f)\boldsymbol{\rho}} df. \quad (6.30)$$

Nous avons vu que l'optimisation sur les atténuations complexes  $\boldsymbol{\rho}$  rendait le problème coûteux en terme de calcul pour les algorithmes exploitant cette forme quadratique. Nous utilisons alors la propriété du quotient de Rayleigh généralisé (Annexe 8.1), ainsi nous posons :

$$R(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathcal{B}_1) = \max_{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{C}^L} R_{global}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1, \mathcal{B}_1), \quad (6.31)$$

$$= \frac{1}{B_1 \sum_{l=1}^L |\rho_{l,1}|^2 M_l} \lambda_{\max} \left\{ \mathbf{M}^{-1} \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{V}^H(\mathbf{p}, f)\mathbf{V}(\mathbf{p}_1, f)\boldsymbol{\rho}_1 \boldsymbol{\rho}_1^H \mathbf{V}^H(\mathbf{p}_1, f)\mathbf{V}(\mathbf{p}, f) df \right\}. \quad (6.32)$$

avec :

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}^H(\mathbf{p}, f)\mathbf{V}(\mathbf{p}, f) = \begin{pmatrix} M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_L \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Finalement nous avons pour diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale dans le cadre d'atténuations complexes non égales et inconnues entre stations, pour une source de bande  $\mathcal{B}_1 = [f_0 - \frac{B_1}{2}; f_0 + \frac{B_1}{2}]$  :

$$R(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathcal{B}_1) = \frac{1}{\sum_{l=1}^L |\rho_{l,1}|^2 M_l} \lambda_{\max} \{ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{T}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1) \boldsymbol{\Omega}_1^H \mathbf{S}^H(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \}. \quad (6.34)$$

Où en utilisant les définitions du diagramme de rayonnement sur un réseau (6.17) et d'ambiguïté temporelle (6.25), nous avons :

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) = \begin{pmatrix} R_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_L(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} T_{1,1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1) & \cdots & T_{1,L}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{L,1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1) & \cdots & T_{L,L}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathcal{B}_1) \end{pmatrix}. \quad (6.36)$$

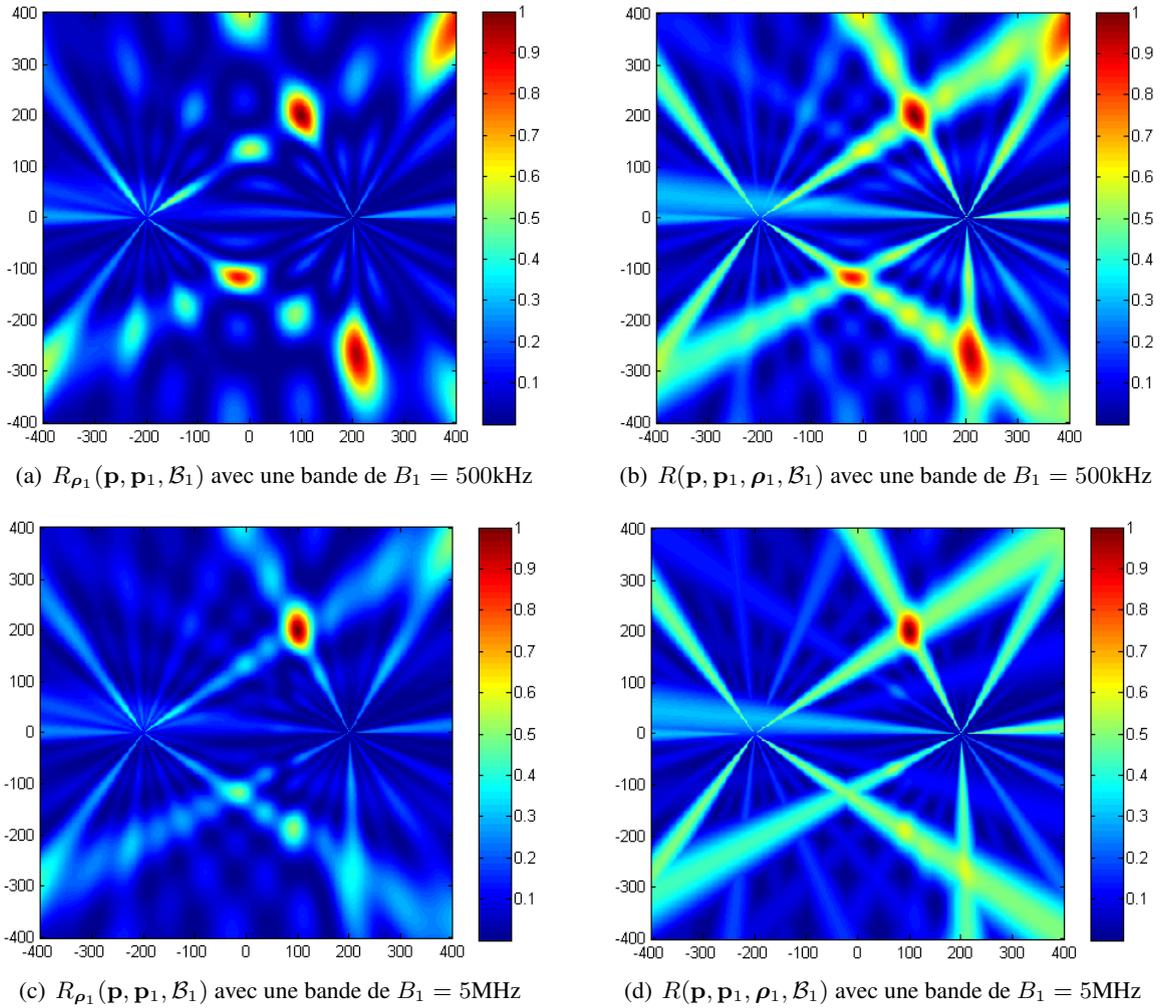


Figure 6.8: Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale pour 2 stations à  $(-200\text{m}, 0)$  et à  $(+200\text{m}, 0)$  et 1 source à  $\mathbf{p}_1 = (+100\text{m}, +200\text{m})$  et  $\rho_1 = \mathbf{1}_{L \times 1}$ .

Afin de comparer les diagrammes d'ambiguïté des scenarii d'atténuations complexes connues et égales (6.27) et inconnues et égales en posant  $\rho_1 = \mathbf{1}_{L \times 1}$  à des fins de comparaison directe (6.34), nous traçons sur les figures 6.8 les deux cas pour deux largeurs de bande  $B_1$  différentes. Nous considérons le même contexte bases/source que précédemment vu dans le cas des atténuations complexes connues. Aux figures 6.8(a) et 6.8(b) nous considérons une bande  $B_1 = 500\text{kHz}$ . La Fig.6.8(a) est le diagramme d'ambiguïté dans le cas de  $\rho_1$  connu et la Fig.6.8(b)

est le diagramme d'ambiguïté dans le cas de  $\rho_1 = \mathbf{1}_{L \times 1}$  inconnu. On peut s'apercevoir que le prix de la simplification de l'optimisation par le biais du quotient de Rayleigh est la diminution de la robustesse aux ambiguïtés. Toutefois, le lobe principal ne semble pas impacté, ainsi nous n'avons pas de perte en pouvoir de résolution, de même nous n'avons pas d'apparition de nouvelles zones d'ambiguïtés. Aux figures 6.8(c) et 6.8(d) nous réalisons la même comparaison, avec une bande  $B_1 = 5\text{MHz}$  plus grande, ce qui permet d'arriver aux mêmes conclusions. Finalement, on constate que l'impact des atténuations inconnues sur le diagramme d'ambiguïté marque essentiellement les lignes formées par les lobes secondaires des stations locales en augmentant de manière significative leurs niveaux.

#### 6.2.4 Conclusions sur les diagrammes d'ambiguïté large bande d'ordre 1

Nous avons étudié durant cette partie le diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale et nous nous sommes penchés sur le cas où les réseaux d'antennes qui composent l'antenne globale sont ambigus dû à une trop grande ouverture. Nous avons alors remarqué que l'antenne globale est plus robuste aux ambiguïtés du premier ordre grâce à deux comportements différents. Le premier du fait de la largeur de bande des signaux qui réduit naturellement les ambiguïtés, et que plus le signal a une largeur de bande grande, plus l'antenne aura des lobes secondaire faibles. *A contrario*, nous avons vu que si le signal est une simple sinusoïde, alors l'antenne globale reste ambiguë. Puis le deuxième comportement est que plus il y a de stations composant l'antenne globale, plus les lobes secondaires de l'antenne globale seront faibles à bande du signal constante. Cette analyse est très intéressante, cela signifie que contrairement aux méthodes en 2 étapes (telle que la triangulation), il est parfaitement envisageable de travailler avec des réseaux d'antennes ambigus pour les méthodes en 1 étape garantissant un grand gain du pouvoir de résolution du système.

### 6.3 Simulations sur des scénarii opérationnels

Nous allons ici étudier le comportement des algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND dans le cadre de positionnements stations/sources intéressants dans un contexte opérationnel. Pour cela nous étudions des situations où les bases sont plus nombreuses avec moins de capteurs. Le nombre d'antennes composant chacun des réseaux est soit inférieur, soit très proche du nombre de sources incidentes. L'objectif est de montrer l'apport de l'exploitation de la diversité angulaire sur l'antenne globale par rapport aux méthodes en 2 étapes de type AoA et TDoA.

Dans ce but nous allons considérer 2 scénarii de stations :

- Le premier sera composé de stations avec 1 ou 2 antennes où l'exploitation des AoA est impossible pour certaines stations composées d'une antenne et est difficile pour des stations à 2 antennes ;
- Le deuxième scénario est composé de stations avec une antenne et d'une station maîtresse composée de 6 antennes. Ainsi les informations de direction d'arrivée ne seront exploitables que sur la station multi-voies et les autres stations permettront d'exploiter les TDoA.

Il est à noter qu'en fonction du nombre de sources et de la configuration des antennes tous les algorithmes ne seront pas applicables. Nous traiterons au cas par cas les méthodes exploitables dans le scénario considéré.

Les performances sont analysées en terme de REQM et d'ellipse d'incertitude correspondant à la zone de confiance pour estimer un paramètre de position  $\eta = \mathbf{p}_q$ . Les REQM des composantes du vecteur de paramètres sont les racines carrées des éléments diagonaux de la matrice de covariance de l'erreur suivante :

$$\hat{\mathbf{R}}_{\eta} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{\eta}_n - \bar{\eta}) (\hat{\eta}_n - \bar{\eta})^H, \quad (6.37)$$

où  $N$  est le nombre d'itérations,  $\hat{\eta}_n$  est la  $n$ -ième estimée de  $\eta$  et  $\bar{\eta} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^M \hat{\eta}_n$  est l'estimation de la moyenne. Le biais est quant à lui le vecteur  $\Delta\eta = \eta - \bar{\eta}$ . Puisque  $\eta = [p_x, p_y]^T$  sont les coordonnées cartésiennes de la source à estimer, l'ellipse d'incertitude est à 2 dimensions et a pour équation :

$$\mathcal{E} = \left\{ \hat{\mathbf{R}}_{\bar{\eta}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{r}(\phi) + \bar{\eta} \mid \phi \in [0; 360[ \right\}, \quad (6.38)$$

avec  $\hat{\mathbf{R}}_{\eta} = \hat{\mathbf{R}}_{\bar{\eta}}^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{R}}_{\bar{\eta}}^{\frac{1}{2}H}$  et  $\mathbf{r}(\phi) = [\cos(\phi), \sin(\phi)]^T$  le vecteur de coordonnées sphériques.

### 6.3.1 Contexte de stations composées de 1 ou 2 antennes

Dans un premier temps nous nous intéressons au cas où les réseaux des bases sont soit mono-antenne soit bi-antenne. Pour les stations composées de deux antennes, nous prenons garde de bien respecter la condition spatiale d'échantillonnage avec un écart entre les antennes valant  $\frac{\lambda}{2}$ . La Fig.6.9 représente la répartition spatiale de ces 5 bases disposées suivant un cercle de rayon 282 mètres.

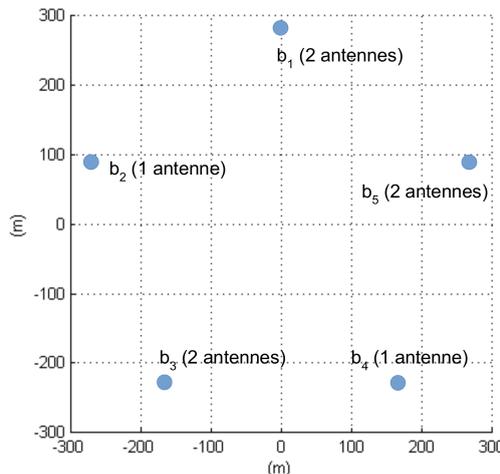


Figure 6.9: Scénario de bases utilisé avec alternance de stations composées de 1 ou 2 antennes.

#### 6.3.1.1 Cas mono-source

La source a une bande passante de 2GHz et est placée au centre, comme indiqué sur la Fig.6.10(a). La source est ainsi relativement proche des zones de dysfonctionnement des estimateurs AoA étant représentées en rouge sur la figure. À noter que dans ce scénario mono-source nous allons comparer les performances des algorithmes DPD, LOST, LOST-FIND, TDoA/TDoA, TDoA/AoA et AoA/AoA. Seulement les stations 1, 3 et 5 pourront exploiter l'information de direction d'arrivée.

Nous allons dans un premier lieu observer le diagramme de rayonnement donné à l'Eq.(6.27) pour cette source dans un tel contexte. On observera 2 cas, le premier où le diagramme de rayonnement exploite les temps d'arrivée et le second où le diagramme de rayonnement n'exploite pas les TDoA, comme nous l'avons fait précédemment. C'est ce que l'on peut voir sur la Fig.6.10(c) et la Fig.6.10(d). On constate que l'exploitation des TDoA permet de mieux résister aux ambiguïtés. Cependant la taille du lobe, dépendante de la petite ouverture des stations avec deux capteurs espacés de  $\frac{\lambda}{2}$ , reste relativement large. Par contre dans le cas de la non exploitation de la diversité spectrale de la source, on constate la présence notable de lobes secondaires, voire d'ambiguïtés. Ce profil d'antenne n'est pas adapté à des algorithmes exploitant seulement les AoA (comme LOST). On remarque

sur la Fig.6.10(d) qu'on arrive à observer la position des 3 bases bi-capteurs qui apportent de l'information sur l'AoA.

La Fig.6.10(b) montre les performances des différents algorithmes. Nous vérifions donc que les algorithmes comme LOST et la triangulation (AoA/AoA) ont des performances nettement inférieures, car exploitant l'information AoA de 3 bases seulement. Dans un scénario mono-source rien ne permet de vraiment distinguer les algorithmes DPD, LOST-FIND, AoA/TDoA et TDoA/TDoA qui ont de bonnes performances. D'ailleurs les ellipses d'incertitude que nous avons représentées pour un RSB de 20dB correspondent avec nos constatations où on voit très nettement sur la Fig.6.10(e) un très fort écart-type pour LOST et la triangulation. De même sur la Fig.6.10(f) on peut voir que les algorithmes ayant le minimum de variance exploitent toutes les diversités, qu'elles soient spatiale ou temporelle. Finalement on peut voir qu'il n'y a pas de biais avec un écart très minime entre la position moyenne et la position réelle de la source. C'est ce que montrent les formules théoriques du biais des algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND résumées au Tab.6.1. Ceci se comprend aisément dès lors que nous remarquons que la source se situe au centre des bases où les TDoA sont nuls. Le contexte est donc bande étroite.

Méthode	DPD	LOST	LOST-FIND
Biais (m)	0	0	0

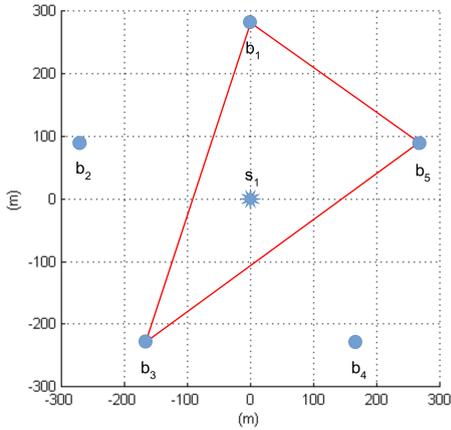
Table 6.1: Biais des méthodes en 1 étape pour le contexte de la Fig.6.9 avec une source au centre, située à  $(0, 0)$ .

### 6.3.1.2 Cas bi-sources

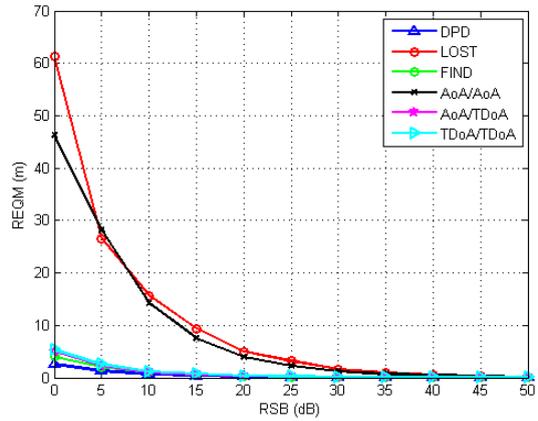
Avec la même configuration de bases que précédemment, nous étudions un cas bi-sources. Nous plaçons les sources à  $(+50m, +50m)$  et à  $(+50m, +100m)$  comme illustré sur la Fig.6.11(a). Nous cherchons à estimer la position de la première source placée à une distance plus grande des axes de dysfonctionnement des estimateurs AoA (en rouge) afin de moins défavoriser les estimateurs AoA. Dans ce scénario les méthodes de triangulation et AoA/TDoA ne peuvent pas fonctionner, car il y a autant de sources que de capteurs sur trois bases multi-capteurs, ces dernières ne pouvant plus estimer les AoA.

Dans un premier lieu nous observons sur la Fig.6.11(b) le REQM de l'estimation de la première source. On constate que l'estimation de la position se basant seulement sur les TDoA ne fonctionne pas. En effet nous avons vu à la Sec.5.7 page 95 que l'estimateur classique des TDoA est biaisé dans le cas multi-source et également mal résolu. Nous sommes ici dans le cas où les deux sources sont assez proches pour que l'estimateur soit non résolu. L'estimation de la position avec cette méthode est donc complètement fautive. On remarque que LOST, bien qu'ayant des performances relativement dégradées à bas RSB, fonctionne tout de même mieux que précédemment par rapport aux méthodes exploitant toutes les informations du système (telles que le DPD et LOST-FIND) du fait que nous avons éloigné les sources des zones de dysfonctionnement des estimateurs AoA. Pour un RSB de 25dB LOST possède même de meilleures performances que l'algorithme DPD. On constate que l'algorithme DPD est fortement biaisé et que ce biais est visible sur l'ellipse d'incertitude pour un RSB de 20dB sur la Fig.6.11(d). On remarque que la moyenne de l'estimation de la position représentée par la croix bleu au centre de l'ellipse est très éloignée de la position théorique de la première source. Ce résultat se retrouve aussi dans le Tab.6.2 où le DPD possède le biais le plus important. Finalement LOST-FIND est l'algorithme présentant les performances les plus intéressantes que ce soit à bas RSB avec des performances équivalentes au DPD ou à fort RSB avec des performances très proches de celles de LOST.

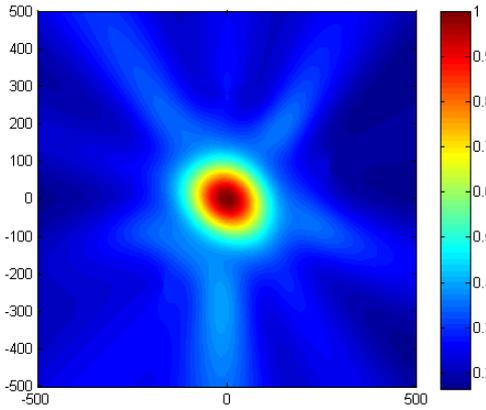
Finalement on peut constater sur les ellipses d'incertitude des Fig.6.11(c) et Fig.6.11(d) données à 20dB que LOST-FIND est l'algorithme le moins biaisé. De plus, les écart-types de la position estimée du DPD et LOST-



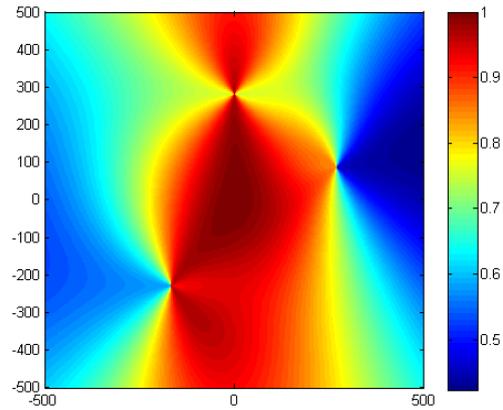
(a) Représentation des bases et de la source située en  $(0;0)$  avec en rouge la zone de dysfonctionnement des estimateurs AoA.



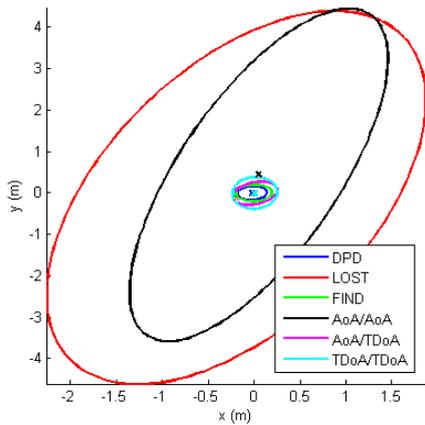
(b) REQM de la source située en  $(0;0)$  du DPD, LOST, LOST-FIND, AoA/AoA, AoA/TDoA et pour finir TDoA/TDoA.



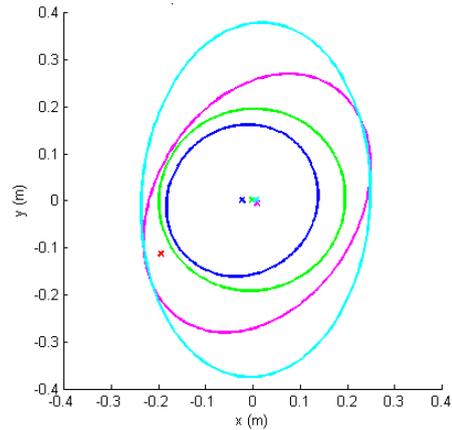
(c) Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale dans le cas d'une largeur de bande de signal de 2GHz.



(d) Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale dans le cas d'une non exploitation des TDoA (bande du signal considérée de 0Hz).



(e) Ellipse d'incertitude  $\mathcal{E}$  pour un RSB de 20dB avec un très fort contraste entre AoA/AoA et LOST avec les autres méthodes.



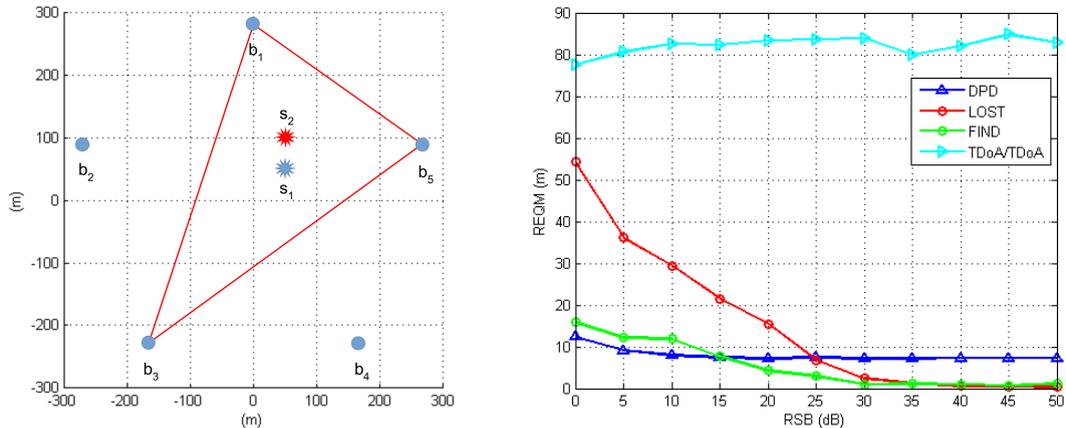
(f) Zoom de l'ellipse d'incertitude  $\mathcal{E}$  pour un RSB de 20dB sur les méthodes DPD, LOST-FIND, AoA/TDoA et TDoA/TDoA.

Figure 6.10: Performances du scénario mono-source pour le contexte de la Fig.6.9.

FIND sont relativement faibles. *A contrario* on peut observer à 20dB les dysfonctionnements de l'algorithme TDoA/TDoA et les difficultés de LOST avec une forte variance et un biais relativement faible.

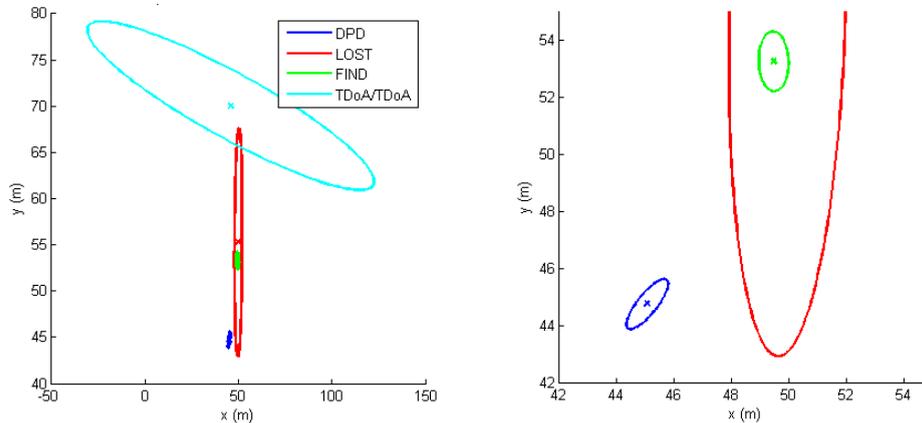
Méthode	DPD	LOST	LOST-FIND
Biais (m)	9	2	2

Table 6.2: Biais sur la première source des méthodes en 1 étape pour le contexte de la Fig.6.9 avec deux sources, la première située à (+50m, +50m) et la seconde à (+50m, +100m).



(a) Représentation des bases et des sources situées en (+50m, +50m) et en (+50m, +100m) avec en rouge la zone de dysfonctionnement des estimateurs AoA.

(b) REQM de la première source située en (+50m, +50m) pour le DPD, LOST, LOST-FIND et pour finir TDoA/TDoA.



(c) Ellipse d'incertitude  $\mathcal{E}$  pour un RSB de 20dB avec un très fort contraste entre TDoA/TDoA et LOST avec les autres méthodes.

(d) Zoom de l'ellipse d'incertitude  $\mathcal{E}$  pour un RSB de 20dB sur les méthodes DPD et LOST-FIND.

Figure 6.11: Performances du scénario bi-source pour le contexte de la Fig.6.9.

### 6.3.1.3 Conclusions du contexte de bases de la Fig.6.9

Cette configuration de base est très intéressante. En effet, elle nécessite peu d'antennes par station et joue sur le nombre de celles-ci pour améliorer les performances d'estimation. C'est un schéma de composition classique dans

un contexte de guerre électronique. Les bases comportant peu d'antennes sont mobiles et peuvent être installées sur des unités légères. On peut observer que ce type de scénario est très propice aux algorithmes en 1 étape, d'autant plus quand ceux-ci exploitent toutes les diversités de l'antenne globale (diversité spatiale et temporelle) comme pour les algorithmes DPD et LOST-FIND. L'inconvénient de LOST est que ce type de géométrie de bases et de réseaux rend la méthode peu robuste aux ambiguïtés. De plus dans un contexte où plus de deux stations d'antennes sont présentes, la probabilité pour avoir des sources dans les zones de dysfonctionnement des AoA est plus grande. Les méthodes exploitant seulement les AoA, telles que LOST ou la triangulation sont alors défavorisées. Pour finir nous avons mis en évidence un dernier intérêt des méthodes en 1 étape dans ce contexte, c'est la possibilité d'estimer la position d'un nombre de sources supérieur au nombre de capteurs d'une base. Les méthodes de triangulation ou AoA/TDoA ne peuvent pas fonctionner dans ce cas.

### 6.3.2 Contexte de stations composées de 1 antenne avec une station maîtresse

Dans un deuxième contexte nous considérons le cas de 6 bases avec une station maîtresse composée de 6 capteurs. Le réseau de la station maîtresse est composé d'un réseau UCA de rayon  $2.4\lambda$  de 5 capteurs avec le sixième en son centre. Le réseau de goniométrie de la station maîtresse possède, de par son ouverture, un lobe principal peu large garantissant de bonnes performances, mais au prix de lobes secondaires élevés. Cependant, cette configuration d'antennes est plus robuste aux ambiguïtés que le réseau UCA de 6 capteurs classique. On peut en effet voir sur la Fig.6.12 un tracé du diagramme de rayonnement de cette base pour une source incidente à  $45^\circ$ , que l'on peut comparer avec le diagramme de la Fig.6.4 correspondant à une antenne circulaire de 6 capteurs UCA. Puis nous avons 5 autres stations qui sont des stations mono-antenne. Le contexte des stations est représenté sur la Fig.6.13. Dans cette configuration on peut imaginer que la station maîtresse, relativement imposante, peut-être située sur un véhicule et les 5 autres sont des unités légères. Le but est d'exploiter les angles d'arrivée des sources avec la station maîtresse et d'exploiter l'information des temps de propagation des sources avec les 5 autres stations mono-antenne.

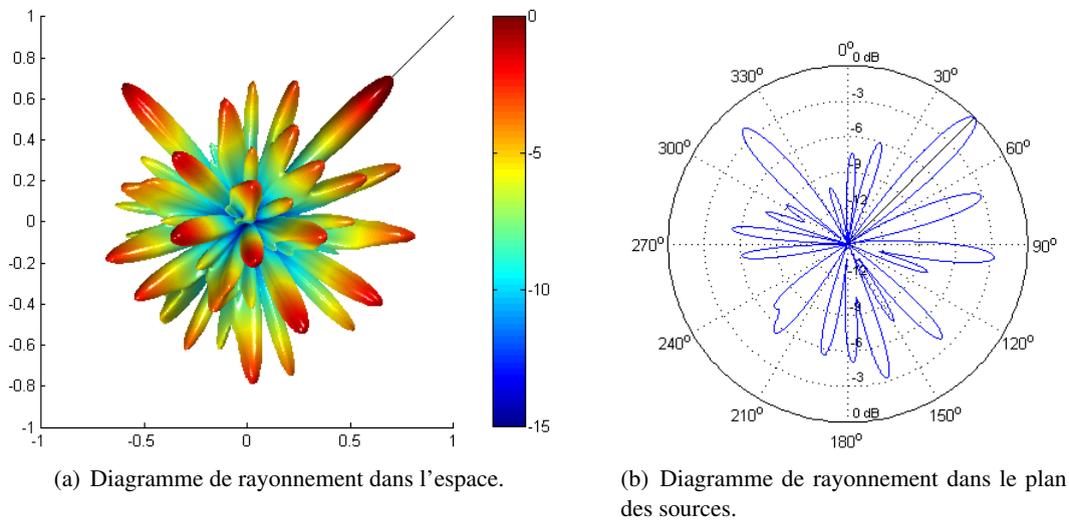


Figure 6.12: Diagramme de rayonnement de la station maîtresse avec 5 capteurs en formation UCA autour d'un sixième, le réseau circulaire a un rayon de  $2.4\lambda$ .

#### 6.3.2.1 Cas mono-source

Comme dans le paragraphe précédent, nous étudions dans un premier temps un cas mono-source représenté sur la Fig.6.14(a), avec une source de position  $(+100m, 0)$ . Il est évident que les algorithmes n'exploitant que les AoA

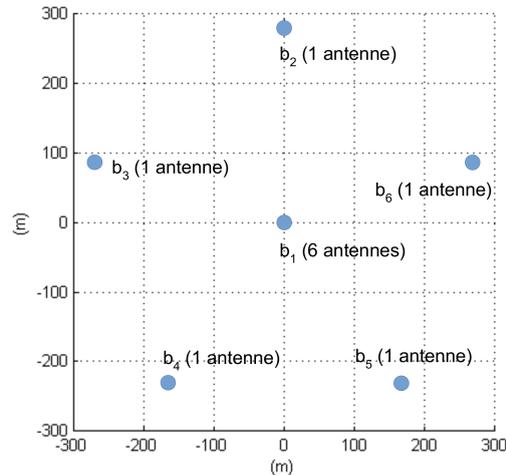


Figure 6.13: Scénario des bases utilisé avec 1 station de référence composée de 6 antennes et 5 stations mono-antenne.

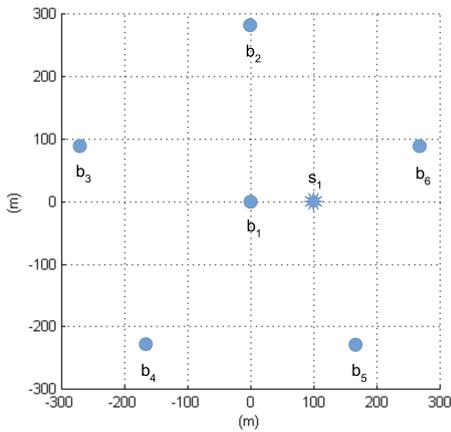
ne peuvent pas fonctionner, car seule la direction d'arrivée de la base maîtresse est exploitable. Un algorithme de géolocalisation exploitant uniquement les AoA doit avoir au minimum 2 stations pouvant estimer la direction d'arrivée pour déterminer la position d'une source dans le plan. Le diagramme d'ambiguïté de l'antenne globale de la Fig.6.14(d) montre effectivement que si la source est une fréquence pure il est possible d'estimer sa direction sans estimer sa distance. En effet, une bande nulle empêche d'exploiter le TDoA sur ce réseau ne pouvant pas faire de géolocalisation avec les AoA. Les algorithmes de triangulation (AoA/AoA) et LOST qui n'exploitent que l'information des directions d'arrivée ne peuvent pas fonctionner dans un tel contexte.

*A contrario*, les algorithmes exploitant conjointement les informations AoA et TDoA sont capables d'estimer la position des sources grâce aux informations conjointes des angles d'arrivée données par la base maîtresse et les temps de propagation des stations mono-antenne. C'est ce qu'il est possible d'observer sur le diagramme d'ambiguïté de l'antenne globale sur la Fig.6.14(c) montrant que les diversités angulaire et temporelle sont prises en compte car la bande de la source est exploitée.

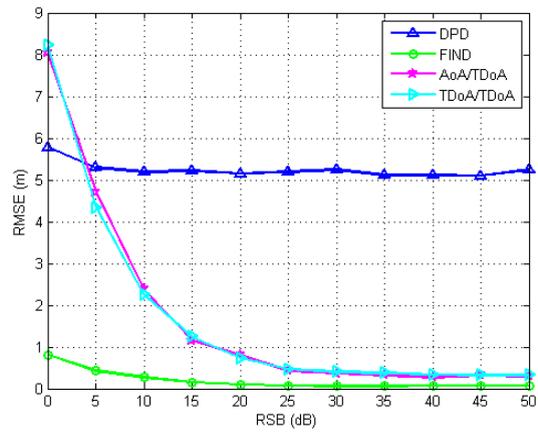
Sur le Tab.6.3 sont indiqués les biais liés aux méthodes en 1 étape dans cette configuration de bases et source. On constate que le biais de l'algorithme DPD est très important par rapport à celui de LOST-FIND. C'est ce que l'on peut observer sur le REQM représenté sur la Fig.6.14(b) où le biais du DPD rend la méthode moins performante que les algorithmes en 2 étapes AoA/TDoA et TDoA/TDoA pour des valeurs du RSB relativement faibles. On peut également observer ce biais sur la Fig.6.14(e) où la moyenne des estimations de position de la source est très éloignée de la position théorique pour un RSB de 20dB. Enfin les algorithmes en 2 étapes AoA/TDoA et TDoA/TDoA ont des performances relativement similaires et relativement dégradées à faible RSB. Finalement les performances de LOST-FIND sont les meilleures avec une très faible valeur de REQM. La Fig.6.14(f) donnant l'ellipse d'incertitude à 20dB pour l'AoA/TDoA, le TDoA/TDoA et LOST-FIND vient renforcer ces observations où LOST-FIND est faiblement biaisé et possède un très faible rayon d'incertitude.

Méthode	DPD	LOST-FIND
Biais (m)	5	0.5

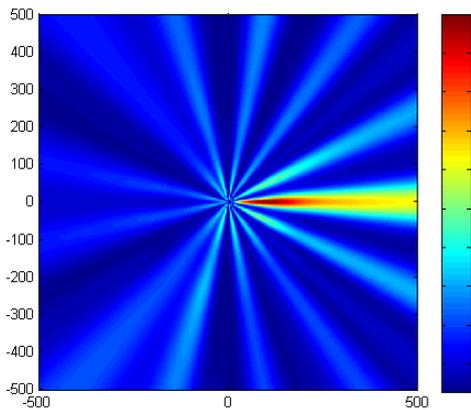
Table 6.3: Biais sur les méthodes en 1 étape pour le contexte de bases de la Fig.6.13 dans le cas mono-source située à (+100m, 0).



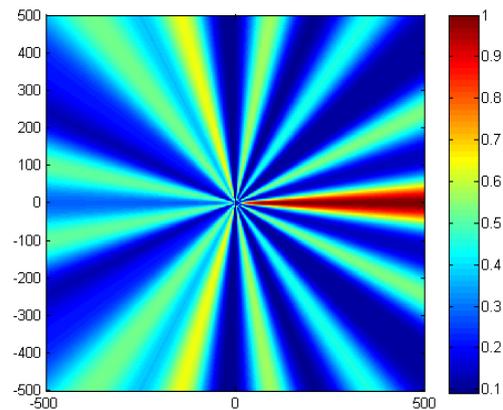
(a) Représentation des bases et de la source située en  $(+100\text{m}; 0)$ .



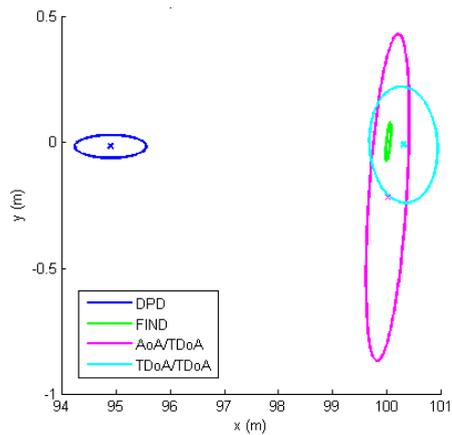
(b) REQM de la source située en  $(+100\text{m}; 0)$  du DPD, LOST-FIND, AoA/TDoA et pour finir TDoA/TDoA.



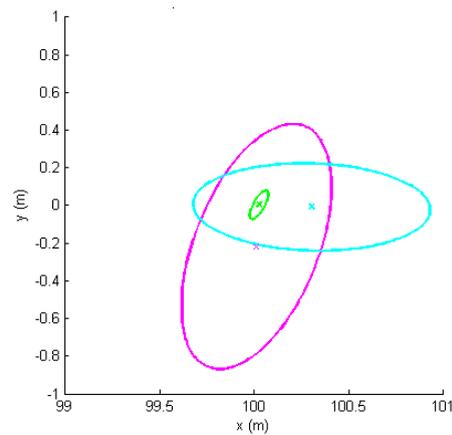
(c) Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale dans le cas d'une largeur de bande de signal de 2GHz.



(d) Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale dans le cas d'une non exploitation des TDoA (bande du signal considéré de 0Hz).



(e) Ellipse d'incertitude  $\mathcal{E}$  pour un RSB de 20dB avec un très fort contraste entre DPD et AoA/TDoA avec les autres méthodes.

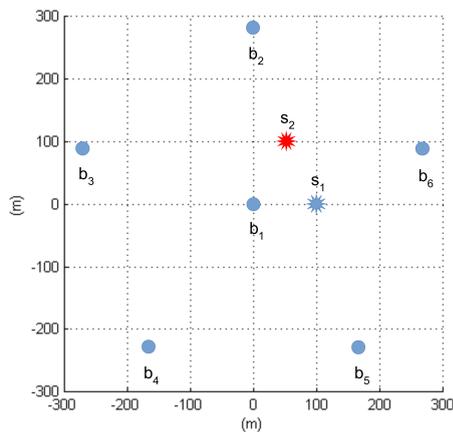


(f) Zoom de l'ellipse d'incertitude  $\mathcal{E}$  pour un RSB de 20dB sur les méthodes LOST-FIND et TDoA/TDoA.

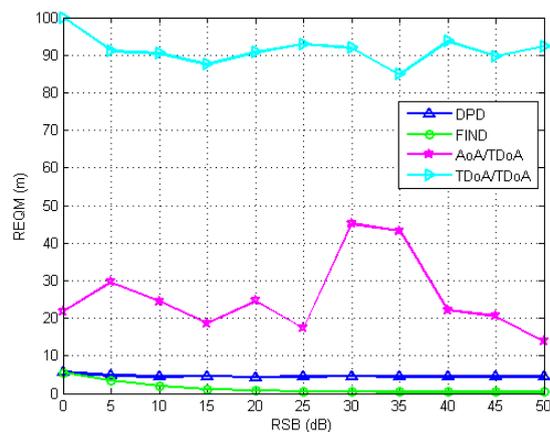
Figure 6.14: Performances du scénario mono-source pour le contexte de bases de la Fig.6.13.

### 6.3.2.2 Cas bi-sources

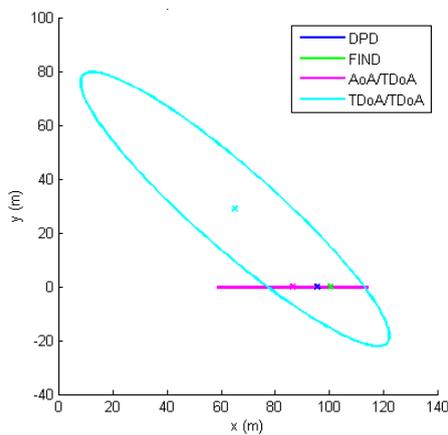
Dans le cas bi-sources nous allons considérer une première source de position  $(+100\text{m}; 0)$ , puis une deuxième source de position  $(+50\text{m}; +50\text{m})$  tel que représenté sur la Fig.6.15(a). Ces deux sources faiblement séparées en TDoA ont l'avantage d'avoir des angles d'incidence fortement différents sur la station maîtresse. La proximité des deux sources en TDoA est telle que l'estimateur classique du TDoA est non résolu avec un écart inférieur à l'inverse de la bande. C'est exactement ce que l'on observe sur les REQM Fig.6.15(b) des algorithmes AoA/TDoA et TDoA/TDoA. Cependant grâce à la pondération de la matrice  $\mathbf{W}$  de l'Eq.(2.52) l'algorithme AoA/TDoA possède de meilleures performances que celui du TDoA/TDoA en prenant beaucoup plus en compte le paramètre d'angle que celui du TDoA qui possède une très forte variation.



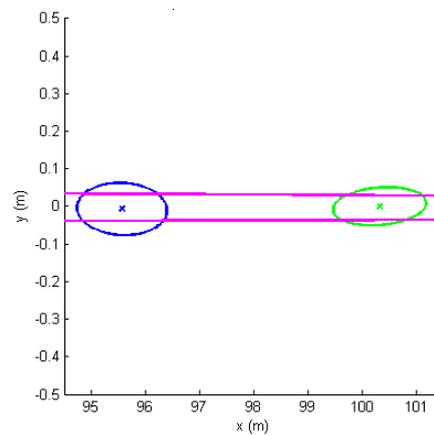
(a) Représentation des bases et des sources situées en  $(+100\text{m}, 0)$  et en  $(+50\text{m}, +50\text{m})$ .



(b) REQM de la première source située en  $(+100\text{m}, 0)$  pour le DPD, LOST-FIND, AoA/TDoA et pour finir TDoA/TDoA.



(c) Ellipse d'incertitude  $\mathcal{E}$  pour un RSB de 20dB avec un très fort contraste entre AoA/TDoA et TDoA/TDoA avec les autres méthodes.



(d) Zoom de l'ellipse d'incertitude  $\mathcal{E}$  pour un RSB de 20dB sur les méthodes DPD et LOST-FIND.

Figure 6.15: Performances du scénario bi-source dans le contexte des bases de la Fig.6.13.

Comme dans le cas mono-source de ce scénario de bases, on peut observer sur le Tab.6.4 que le biais de l'algorithme DPD est bien supérieur à celui de LOST-FIND. C'est ce que montre l'ellipse d'incertitude donnée sur la Fig.6.15(d) pour 20dB de RSB où le biais du DPD est visiblement très supérieur à celui de LOST-FIND pour des variances relativement semblables. L'algorithme LOST-FIND, comme dans le cas mono-source, est l'algorithme

possédant les meilleures performances.

Méthode	DPD	LOST-FIND
Biais (m)	6	2

Table 6.4: Biais sur les méthodes en 1 étape pour le contexte de bases de la Fig.6.13 avec deux sources, la première située à (+100m, 0) et la seconde en (+50m, +50m).

### 6.3.2.3 Conclusions du second scénario de bases

Dans ce contexte de bases les limites de l’algorithme LOST ont été atteintes. Ce dernier n’est pas applicable pour ce scénario. Cependant les méthodes en 1 étape ont clairement montré leurs avantages, même dans le scénario mono-source avec un gain de performance très sensible face aux méthodes en 2 étapes. Ce nouveau contexte de bases semble également montrer que LOST-FIND est une bonne alternative au DPD fortement biaisé.

### 6.3.3 Conclusions sur ces deux exemples de configuration de bases

Nous avons analysé le comportement des algorithmes en 1 étape dans des contextes applicatifs beaucoup plus opérationnels et plus difficiles que le cas classique bi-stations composées de 6 capteurs chacune. Nous avons alors montré le fort intérêt de ces méthodes par rapport aux méthodes en 2 étapes. De manière générale les méthodes en 1 étape ont de meilleures performances en multi-source, et dans certains contextes de bases de meilleures performance même en mono-source, comme pour le deuxième contexte de bases. Nous avons de plus observé les avantages, inconvénients de chacun des algorithmes. Par exemple nous avons mis en évidence un contexte de bases où LOST n’est pas applicable. De plus, les algorithmes DPD et LOST-FIND ont l’avantage de mieux s’adapter que les autres méthodes aux différentes configurations de bases. En effet, ces méthodes exploitent conjointement tous les AoA et TDoA d’un système de bases ce qui a pour effet de donner le meilleur résultat en termes d’ambiguïté et précision. Il suffit d’envoyer les signaux des bases à un opérateur et d’appliquer la méthode indépendamment de la configuration, garantissant une adaptativité opérationnelle sur le terrain très appréciable. Par exemple la configuration de la Fig.6.13 est telle que les stations mono-antenne peuvent changer facilement de position.

## 6.4 Étude des algorithmes développés sur des signaux réels

Nous allons appliquer les algorithmes de triangulation, DPD, LOST, LOST-FIND et TARGET sur des mesures réalisées sur une partie désaffectée de l’aérodrome de Coulommiers. Ce terrain est très utilisé par Thales afin de faire des mesures réelles, dans des objectifs de test ou de calibration, en condition extérieure et dans un contexte non urbain. Nous avons deux véhicules terrestres équipés sur leurs toits d’un réseau d’antenne circulaire de 5 capteurs en formation autour d’un sixième situé au centre. Les deux réseaux d’antennes possèdent un rayon d’ouverture de  $0.54\lambda$ , où  $\lambda$  est la longueur d’onde des sources. Les bandes de réception des deux stations de bases sont de  $B = 600\text{kHz}$ . Les deux bases sont synchronisées par temps GPS, garantissant (selon la documentation constructeur) une précision de  $\pm 9.7\text{ns}$ . Cette erreur théorique représente une incertitude de position sur les mesures TDoA de 2.9m. En pratique, dû probablement à des problèmes de mise en œuvre matérielle (fréquence d’échantillonnage non strictement égale sur chacune des stations, calibration, nombre d’observations fini, *etc.*), nous avons mesuré une plus forte disparité et remarqué parfois des erreurs de l’ordre de 90ns, représentant une erreur de position de l’ordre de 27m. Mais cependant seule la triangulation ne souffre pas de ce problème. En effet, nous avons vu que toute méthode exploitant l’information TDoA doit avoir des bases synchronisées entre elles. Ce verrou technologique n’est donc pas propre aux méthodes en 1 étape et se généralise aux méthodes en 2 étapes.

Durant ces expériences, nous considérons seulement un cas mono-source de type GSM ayant pour fréquence centrale  $f_0 = 900\text{MHz}$  et largeur de bande  $B_1 = 500\text{kHz}$ . Le signal GSM est composé de plusieurs séquences de transmission appelées *burst*. Un *burst* GSM dure  $577\text{ns}$  et est composé de différentes parties nécessaires à la transmission de données entre le mobile et la base opérateur. Les SCM sont calculées avec  $N = 325$  échantillons, représentant un temps d'observation de  $541\text{ns}$ , soit la quasi totalité du temps du *burst* garantissant *a priori* des SCM faiblement perturbées.

#### 6.4.1 Premier contexte bases/source

Dans un premier temps nous allons considérer un contexte relativement simple de positionnement de bases et de source. On peut voir sur la Fig.6.16 que la source est relativement isolée d'obstacles pouvant créer des trajets multiples et qu'elle est relativement bien située par rapport aux deux bases. En effet, elle n'est pas trop éloignée de l'axe passant par le centre des deux bases représentant le TDoA nul, signifiant que la source n'est pas trop LB vis-à-vis de l'antenne globale. De même, elle est relativement éloignée de l'axe de dysfonctionnement formé par la droite passant par les deux bases. Sur la Fig.6.17 nous avons superposé un exemple de critère issu de l'algorithme DPD avec l'image satellite de la zone. L'étoile rouge, indiquant le minimum du critère, donne la position estimée de la source par le DPD. De même, l'étoile bleue indique la position de la source estimée via l'algorithme de triangulation. Le marqueur en forme de téléphone représente la position de la source réelle. On constate alors un gain sur la position estimée grâce au DPD par rapport à la triangulation.



Figure 6.16: Premier contexte bases/source.

Nous pouvons observer sur les figures 6.18 les fonctions coût des différents algorithmes. Sur les critères du DPD, LOST, LOST-FIND et TARGET, nous avons représenté par un cercle rouge le minimum des critères. Puis nous

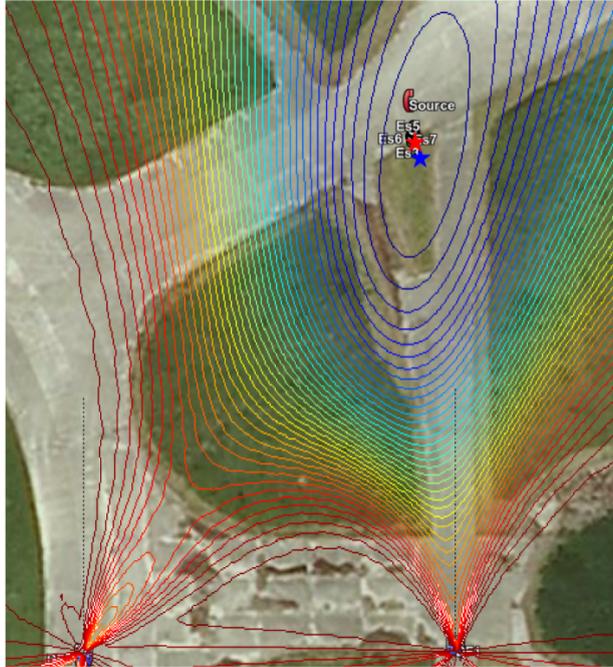


Figure 6.17: Superposition des lignes de niveau de la fonction coût du critère DPD sur le mappage du terrain. (Étoile bleue) résultat de l'algorithme de triangulation et (étoile rouge) celui du DPD.

avons mis à l'aide d'un cercle vert la position de la source réelle. À notre connaissance, c'est la première tentative d'appliquer sur des signaux réels les algorithmes en 1 étape prenant en compte l'effet LB sur l'antenne globale. En effet, même l'algorithme DPD, pourtant le plus ancien dans cette catégorie, n'a jamais été appliqué sur des signaux réels. On peut noter alors dans un premier temps, avec satisfaction, que chacun des algorithmes étudiés et réalisés durant cette thèse fonctionnent sur des signaux réels. Cependant, il est intéressant de remarquer que ce contexte n'est pas favorable à l'algorithme TARGET. En vérité, la distance inter-bases de seulement 50m nous donne une excursion en TDoA  $\tau_{\max} = 167\text{ns}$  seulement, ce qui est très inférieur à la période d'échantillonnage du système. Afin de tracer la fonction coût du critère TARGET de la Fig.6.18(e), nous avons réalisé une interpolation d'échantillons d'un facteur  $T = 400$ , ce qui est relativement conséquent et donc coûteux en terme de calcul.

Finalement dans le Tab.6.5 nous résumons l'erreur faite sur l'estimation de position par chacun des algorithmes par rapport à la position réelle de la source. Nous constatons alors que, pour les mêmes mesures, les méthodes en 1 étape ont de meilleures performances que la triangulation. De même, bien que le positionnement des bases ne soit pas favorable à l'utilisation de l'algorithme TARGET, ce dernier est celui qui réalise l'erreur la plus faible sur l'estimation de la position de la source au prix cependant d'une interpolation.

	AoA/AoA	DPD	LOST	LOST-FIND	TARGET
Erreur (m)	7.6	7.19	7.11	7.14	6.4

Table 6.5: Erreur en mètres sur l'estimation de la position de la source des différents algorithmes du contexte de la Fig.6.16.

#### 6.4.2 Deuxième contexte bases/source

Dans ce deuxième contexte de bases et source, nous allons nous placer dans des conditions d'estimation plus complexes. En effet, comme on peut le voir sur la Fig.6.19, la source se trouve très excentrée des deux bases

rendant les observations faites sur l’antenne globale très LB. De même, par rapport aux dimensions du système, la source se trouve plus proche de la zone de dysfonctionnement, devant impacter significativement les algorithmes exploitant l’information de direction d’arrivée seule (triangulation et LOST). Pour finir, la source se trouve relativement proche de bâtiments, engendrant ainsi des trajets multiples plus marqués que dans le contexte précédent. L’influence de ces trajets multiples s’observe très bien sur la goniométrie que l’on peut observer sur la Fig.6.20(a). En effet, le critère n’atteint plus le 0 contrairement à la configuration source/bases précédente.

Nous observons alors sur la Fig.6.20 le critère des différents algorithmes. Nous remarquons alors une différence de comportement plus marquée entre le DPD, LOST et LOST-FIND que dans le cas précédent. En effet, sur la Fig.6.20(c) représentant le critère LOST, on constate que les niveaux des lobes secondaires sont beaucoup plus bas que les critères DPD et LOST. Ceci est notamment dû à la non prise en compte de l’information TDoA et que nos observations sont beaucoup plus LB que dans le contexte précédent. Sur ces mesures nous ne sommes pas parvenus à appliquer l’algorithme TARGET dû probablement à une erreur sur la synchronisation ou dans le fichier de configuration sur la deuxième base. Cependant, nous avons réussi à appliquer le critère  $\mathcal{L}_{T_1}(\theta_1, \tau)$  (Eq.(5.65)) que l’on peut observer sur la Fig.6.20(e) correspondant au critère TARGET appliqué seulement sur la première base. On constate que ce dernier donne une estimée de l’AoA et du TDoA très proche des valeurs réelles. En effet, la source étant placée dans un contexte LB vis-à-vis des deux bases et proche de la zone de dysfonctionnement, nous avons remarqué dans le Chapitre 5 que l’algorithme TARGET était plus performant que les algorithmes se basant sur une décomposition en sous-bandes BE.

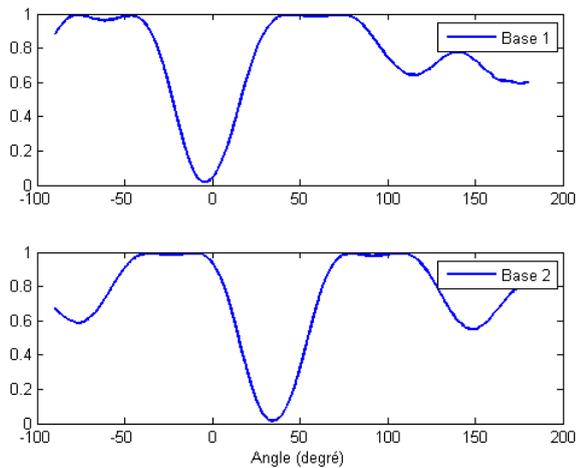
Pour finir, résumons dans le Tab.6.6 les erreurs d’estimation par rapport à la position réelle de la source des différents algorithmes. Comme envisagé pendant la présentation du contexte, la proximité de la source avec la zone de dysfonctionnement des estimateurs AoA rend les algorithmes de triangulation et LOST moins bons que les autres algorithmes exploitant le TDoA. Ainsi, dans ce contexte complexe, les algorithmes DPD et LOST-FIND possèdent d’excellentes performances par rapport à la méthode classique et à LOST. Il est à noter la très bonne performance de l’algorithme TARGET offrant l’erreur la plus faible de tous les algorithmes proposés.

	AoA/AoA	DPD	LOST	LOST-FIND	TARGET
Erreur (m)	19.33	9.8	14	10.5	4.6

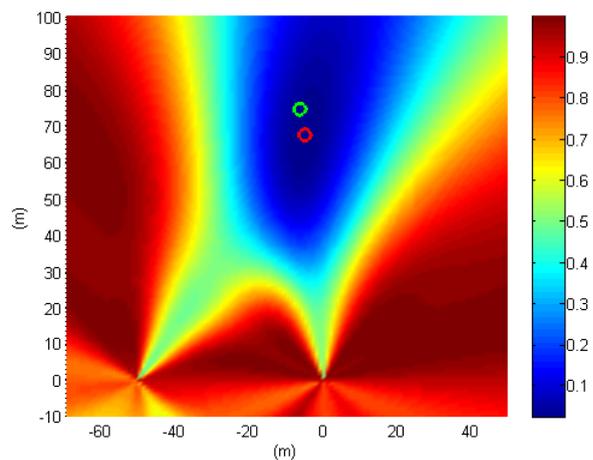
Table 6.6: Erreur en mètre sur l’estimation de la position de la source des différents algorithmes du contexte de la Fig.6.19.

### 6.4.3 Conclusions sur l’application des algorithmes sur les mesures réelles

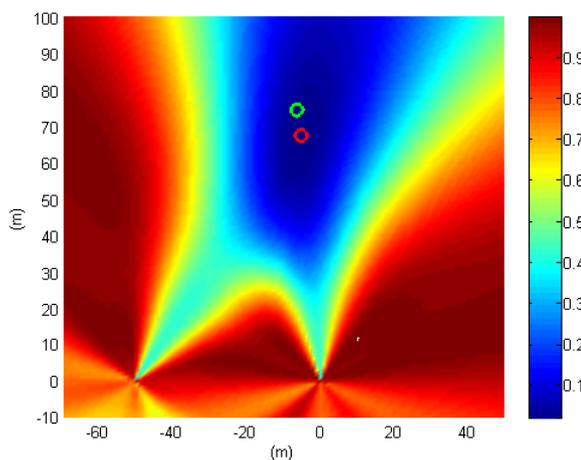
Durant cette partie nous avons appliqué les algorithmes en 1 étape étudiés durant cette thèse à des signaux réels. À notre connaissance il s’agit de la première tentative. On peut conclure de cette expérience que non seulement les algorithmes en 1 étape fonctionnent à l’aide d’une synchronisation GPS, mais qu’en plus elles offrent de meilleures performances que la triangulation pour les deux contextes bases/source étudiés. Ceci constitue une étape préliminaire de l’étude des méthodes en 1 étape appliquées à des signaux réels et nécessite maintenant une plus grosse investigation. En effet, nous n’avons pas fait une étude comparative poussée qui aurait balayé un large spectre des méthodes existantes. De même, nous n’avons pas étudié de cas multi-source. Il serait en effet intéressant d’exploiter le fait que les méthodes en 1 étape peuvent travailler avec des stations de bases localement ambiguës augmentant ainsi le pouvoir de résolution de l’antenne globale. Cependant, les études sur signaux réels sont des études difficiles à mener, car très chronophages : il faut réaliser, traiter et enfin exploiter les mesures, et chaque étape peut être relativement fastidieuse à réaliser. Mais cette première approche est encourageante au vu des résultats obtenus et ne manquera pas de susciter l’envie d’étudier le problème plus en profondeur.



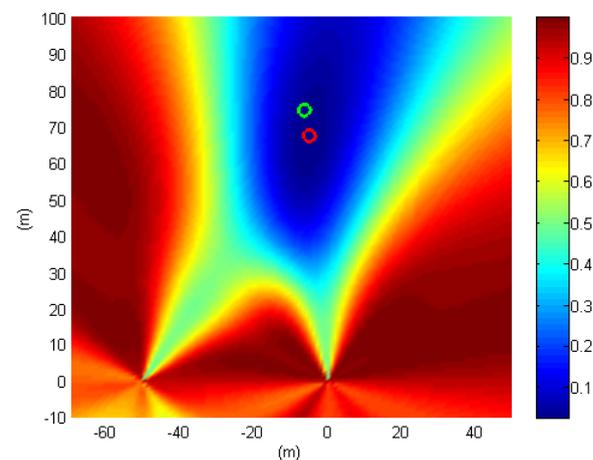
(a) Fonction coût de la goniométrie de chacune des bases.



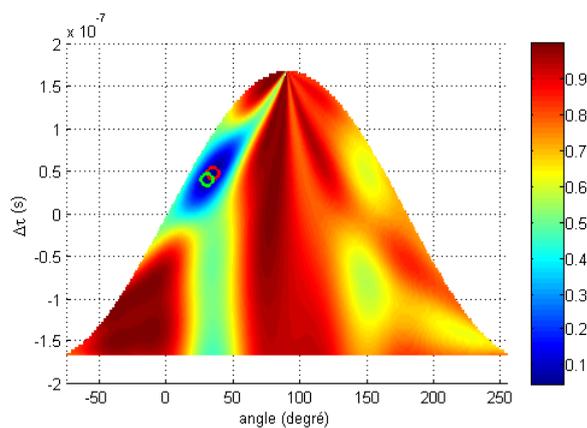
(b) Fonction coût de l'algorithme DPD avec  $K = 6$  : (cercle rouge) estimation de la position et (cercle vert) position réelle de la source.



(c) Fonction coût de l'algorithme LOST avec  $K = 6$  : (cercle rouge) estimation de la position et (cercle vert) position réelle de la source.



(d) Fonction coût de l'algorithme LOST-FIND avec  $K = 6$  : (cercle rouge) estimation de la position et (cercle vert) position réelle de la source.

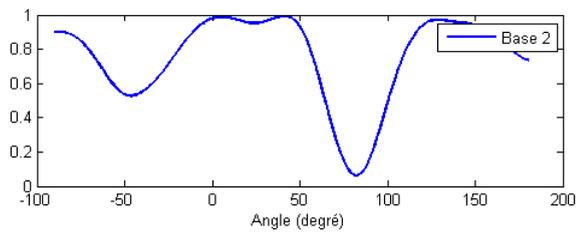
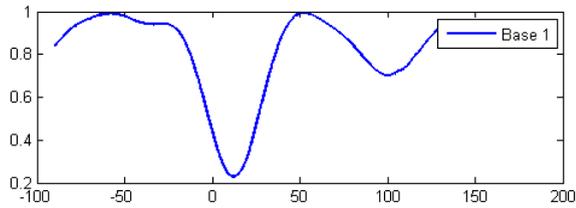


(e) Fonction coût de l'algorithme TARGET : (cercle rouge) estimation des paramètres d'angle et TDoA et (cercle vert) les paramètres réels.

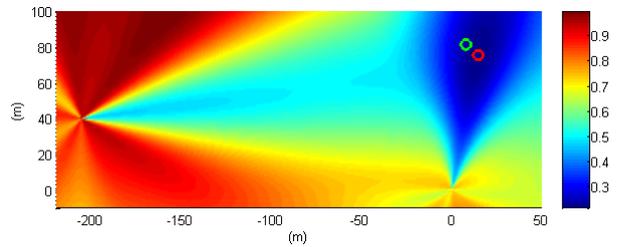
Figure 6.18: Critère des algorithmes triangulation, DPD, LOST, LOST-FIND et TARGET sur signaux réels du contexte Fig.6.16.



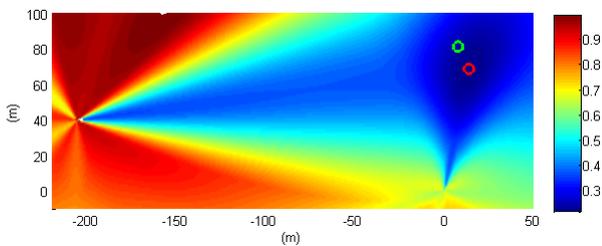
Figure 6.19: Deuxième contexte bases/source.



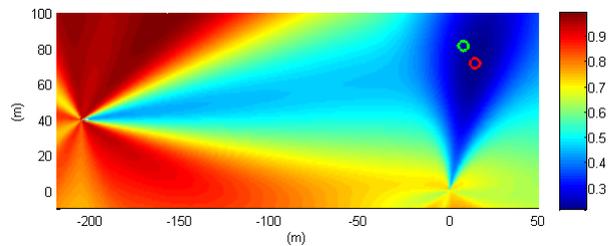
(a) Fonction coût de la goniométrie de chacune des bases.



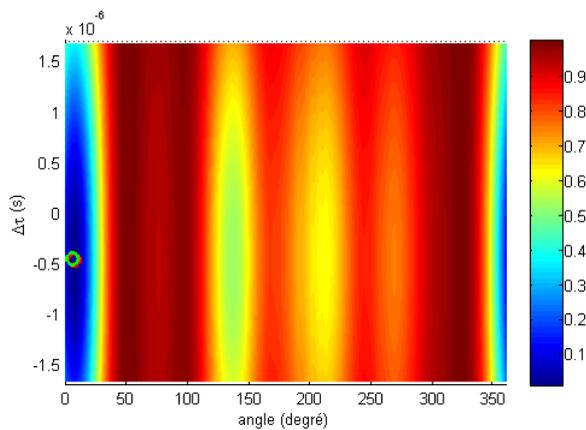
(b) Fonction coût de l'algorithme DPD avec  $K = 6$  : (cercle rouge) estimation de la position et (cercle vert) position réelle de la source.



(c) Fonction coût de l'algorithme LOST avec  $K = 6$  : (cercle rouge) estimation de la position et (cercle vert) position réelle de la source.



(d) Fonction coût de l'algorithme LOST-FIND avec  $K = 6$  : (cercle rouge) estimation de la position et (cercle vert) position réelle de la source.



(e) Fonction coût  $\mathcal{L}_{T_1}(\theta_1, \tau)$  issue de l'algorithme TARGET : (cercle rouge) estimation des paramètres d'angle et TDoA et (cercle vert) les paramètres réels.

Figure 6.20: Critère des algorithmes triangulation, DPD, LOST, LOST-FIND et TARGET sur signaux réels du contexte Fig.6.19.



## Chapter 7

# Conclusions et perspectives

### 7.1 Conclusions

Durant ce mémoire nous avons étudié le principe de fonctionnement des méthodes de géolocalisation 1 étape utilisant une antenne globale composée des stations d'antennes locales (déjà utilisées dans les méthodes de géolocalisation classique (en 2 étapes)). Du fait de travailler sur l'antenne globale directement celle-ci ne satisfait plus les hypothèses bandes étroites traditionnellement admises sur une station d'antennes locales. Nous avons pu voir que le principal verrou technologique se situe sur ce point. Et avec l'état d'avancement des travaux sur les méthodes en 1 étape à la fin de cette thèse on peut distinguer trois familles d'algorithmes traitant différemment ce problème :

- Les algorithmes faisant abstraction de l'effet large bande sur l'antenne globale. Historiquement, à notre connaissance, il s'agit de la première catégorie apparue traitant du problème et fut traitée en 1985 par M.Wax et T.Kailath [WK85b]. Puis on pourra citer la méthode *centralized MODE* pour *Method Of Direction Estimation* de P.Stoica [SNS95], *et al* en 1995 et plus récemment la méthode GMA pour *Global MUSIC Approach* de J.Bosse, *et al* en 2012 [Bos12]. L'avantage de ces méthodes face aux méthodes en 2 étapes classiques est d'atténuer ou, dans certains cas, de détruire les ambiguïtés mathématiques faisant apparaître les sources fantômes. Mais cependant, en ignorant l'effet large bande sur l'antenne globale, ces méthodes ne peuvent pas exploiter les informations temporelles du système, les rendant sous-optimales.
- Puis les méthodes luttant contre l'effet large bande en introduisant une décomposition en bande étroite. Le premier fut le DPD pour *Direct Position Determination*, apparu en 2004 et élaboré par A.J.Weiss et A.Amar [AW04]. Cette méthode est la plus intuitive car la décomposition s'appuie sur un banc de filtres où en sortie de ce dernier nous récupérons des sous-signaux bande étroite. L'inconvénient de cette approche est de demander une connaissance a priori du comportement spectral des sources en réception, ce qu'on a pas forcément. Mais a pour avantage d'exploiter la diversité spatiale et temporelle de l'antenne globale rendant l'algorithme très performant vis-à-vis des méthodes classiques en 2 étapes et détruit complètement les ambiguïtés mathématiques suscitées. Pour pallier ces problèmes de connaissance a priori du comportement spectral des sources il a alors été introduit la méthode LOST pour *LOcalization by Space-Time* en 2013 par J.Bosse, *et al*, [BFL13], qui a pour principe d'utiliser une observation spatiotemporelle afin d'exploiter sa décomposition structurelle. La méthode est adaptative vis-à-vis du comportement spectral des sources mais a le gros inconvénient de seulement exploiter la diversité spatiale de l'antenne globale. C'est pour cette raison qu'il a été introduit durant ce mémoire une nouvelle et dernière approche de cette famille de méthodes en 1 étape exploitant toute l'information structurelle du spatiotemporel, l'algorithme LOST-FIND pour *LOcalization by Space-Time with Frequency Identification in Narrowband Decomposition*. Il a été montré que cette méthode, à l'instar du DPD, exploite l'information spatiale et temporelle de l'antenne globale tout en étant adaptative vis-à-vis des comportements spectraux des sources. Il a été montré à plusieurs reprises que

dans cette famille il s'agit de l'algorithme offrant les meilleures performances en terme de REQM.

- Pour finir, la dernière catégorie qui a été introduite durant cette étude vise à exploiter directement l'effet large bande en composant avec ce dernier. Il s'agit de l'algorithme TARGET pour *Time and Angle Retrieval for Geolocation Estimation Technic*. Cette méthode exploite la structure algébrique d'une matrice de synchronisation afin de déterminer simultanément l'AoA et le TDoA d'une source. L'avantage de cette méthode est de ne pas décomposer les signaux en sous-signaux bande étroite, n'introduisant pas de biais dans le cas d'une décomposition imparfaite. Il a été montré qu'en terme de performance cette famille se comporte très bien par rapport aux algorithmes en 1 étape de la famille précédente et également vis-à-vis des méthodes en 2 étapes.

Une partie de ce manuscrit était consacrée également à l'étude du biais d'estimation engendré sur les paramètres de position souhaitée dû à une décomposition fréquentielle imparfaite des méthodes en 1 étape de la deuxième famille. En effet nous avons vu qu'une décomposition parfaite sous-entendait un facteur de décomposition (appelé  $K$  durant le manuscrit) très grand, voir infini, mais pour des raisons techniques il est impossible d'avoir un tel facteur. Ceci créé un effet appelé large bande résiduel sur l'antenne globale après la décomposition. Une étude de performance théorique a ainsi été menée quant à l'influence de cet effet sur l'estimation de position des sources. Ceci se traduit par un biais dont nous avons donné la forme analytique.

Nous avons également remarqué que cette famille de méthode en 1 étape luttant contre l'effet large bande se prêtait bien au domaine de la théorie des matrices aléatoires à grande dimension. Nous avons donc étudié le lien entre ces approches et un résultat connu du domaine pour l'estimation paramétrique, à savoir le pseudo-projecteur G-MUSIC [Mes08a]. Il a alors été observé le gain appréciable fait sur le pouvoir de résolution des méthodes en limite de résolution sur les approches spatiotemporelles telles que LOST et LOST-FIND correspondant au cadre parfait de G-MUSIC et un gain appréciable mais moins marqué sur l'algorithme DPD dont le comportement spectral de la matrice de covariance colle moins au cadre de G-MUSIC.

Pour finir, au dernier chapitre, des études plus opérationnelles ont été menées. Ces études répondent à des questionnements pratiques. Nous avons ainsi étudié la quantité d'information à transmettre des bases vers l'opérateur et avons proposé une méthode qui permet de réduire cette quantité tout en conservant des performances équivalentes voir à compenser la sous-optimalité de l'algorithme LOST en offrant des performances meilleures en terme de REQM. Nous avons également étudié le diagramme de rayonnement de l'antenne globale et observé le comportement vis-à-vis des ambiguïtés de l'antenne en fonction du nombre de bases et l'exploitation ou non de la diversité temporelle. Nous avons complété cette étude en déterminant le diagramme d'ambiguïté de premier ordre sur les algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND. Puis nous avons mené une étude comparative poussée en comparant les méthodes en 1 étape et les méthodes en 2 étapes sur différents contextes sources/bases qu'il est possible de rencontrer sur le terrain. Il s'agit de contextes relativement complexes à faible nombre d'antenne par base constituant un vrai défi pour ces méthodes. Nous avons vu que les algorithmes en 1 étape offrent des performances très au-dessus des méthodes en 2 étapes avec un avantage certain pour les méthodes en 1 étape qui exploitent toutes les informations de l'antenne globale comme le DPD et LOST-FIND. Durant ces tests LOST-FIND est l'algorithme qui offrait le plus de performance dans la grande majorité des cas. Finalement, nous avons appliqué sur signaux réels les méthodes en 1 étape abordées durant ce mémoire et avons conclu du bon comportement de ces dernières offrant des performances supérieures à la triangulation.

## 7.2 Perspectives

Les perspectives liées à cette thèse sont multiples. En premier lieu l'étude ne porte que sur des sources avec un modèle de propagation à chemin direct. Il serait donc intéressant d'observer le comportement, voire d'adapter les méthodes, dans le cas d'un modèle de source multi-trajet concordant plus avec la réalité terrain. De même, dans

un contexte urbain les algorithmes sont régulièrement confrontés à des sources diffuses, constituant également un domaine d'étude à développer.

Nous avons vu durant cette thèse que la théorie des matrices aléatoires apporte un socle théorique intéressant pour les algorithmes en 1 étape luttant contre l'effet large bande. Ainsi exploiter un autre modèle que G-MUSIC pourrait apporter un gain de performance supplémentaire.

Une étude théorique peut être également envisagée. Cette étude porterait sur l'influence des erreurs de modèle dues aux erreurs sur les vecteurs directeurs de chacune des bases ainsi que sur les erreurs de synchronisation inter-base. Cela permettrait d'analyser l'influence de ces erreurs sur l'estimation de la position finale et ainsi prédire les performances théoriques limites atteignables sur un système donné.

Finalement, nous avons abordé brièvement l'application des différentes méthodes en 1 étapes rencontrées durant ce manuscrit à des signaux réels. Les enjeux d'une telle étude prouvent la faisabilité des méthodes sur des cas réels. Il serait donc très intéressant de pousser la démarche à des situations bases/sources plus variées, à un contexte multi-source et/ou urbain. De même, il serait digne d'intérêt de faire une étude comparative avec un panel exhaustif des méthodes existantes.



# Les notations

## Notations mathématiques

$\Re\{a\}$ pour $a \in \mathbb{C}$	partie réelle de $a$
$\Im\{a\}$ pour $a \in \mathbb{C}$	partie imaginaire de $a$
$i$	racine carrée de $-1$
$\mathbb{K}$	anneau commutatif ou semi-anneau
$\mathbb{K}_*$	$\mathbb{K} \setminus \{0\}$
$\mathbb{K}_+$	$\{x \in \mathbb{K} \mid 0 \leq \Re\{x\} < +\infty\}$
$\mathbf{A}$ ou $(a_{ij})_{1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J}$ $\forall (I, J) \in \mathbb{N}_*^2$	matrice de dimension $I \times J$
$\mathbf{a}$ ou $(a_i)_{1 \leq i \leq I}$ $\forall I \in \mathbb{N}_*$	vecteur colonne de dimension $I$
$\mathbf{I}_I$	matrice identité de dimension $I$
$a$ ou $A$	scalaire
$(\cdot)^H$	hermitien d'une application
$(\cdot)^T$	transposé d'une application
$(\cdot)^*$	conjugué d'un scalaire
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\text{tr}(\mathbf{A})$	trace de la matrice $\mathbf{A}$
$\text{rang}(\mathbf{A})$	rang de la matrice $\mathbf{A}$
$\ f\ _p$	$(\int_X  f ^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ est la norme $p$ de la fonctionnelle $f \in L^p$ sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$
$\ \mathbf{x}\ _{\mathbf{A}}$	norme euclidienne de base $\mathbf{A}$
$\mathbb{E}[\cdot]$	espérance mathématique
$\mathbf{A}^+$ pour $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{I \times J}$	pseudo-inverse de Moore-Penrose
$\lambda_{\min}\{\mathbf{A}\}$	valeur propre minimale de la décomposition en éléments propres de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{I \times I}$
$\lambda_{\max}\{\mathbf{A}\}$	valeur propre maximale de la décomposition en éléments propres de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{I \times I}$
$\otimes$	produit tensoriel
$\odot$	produit de Hadamard
$\llbracket a, b \rrbracket$	$\{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b, \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$
$\text{diag}(\mathbf{A})$	$(a_{ii})_{1 \leq i \leq I}$ avec $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{I \times I}$
$\text{diag}(\mathbf{a})$	$(\delta_{ij} a_i)_{1 \leq (i,j) \leq I}$ avec $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^I$
$\cup, \cap$ et $\subset$	union, intersection et inclusion stricte de deux ensembles
$(f * y)(\cdot)$	convolution de deux applications
$\text{sinc}(\cdot)$	fonction sinus cardinal
$\hat{x}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{X}}$	valeurs estimées

## Constantes entières

- $Q$  nombre de sources
- $N$  nombre d'observations indépendantes pour calculer la SCM
- $L$  nombre de bases composant l'antenne globale
- $M$  nombre de capteurs composant l'antenne globale
- $M_l$  nombre de capteurs composant la  $l$ -ième base
- $K$  nombre de filtres du banc de filtres de la méthode DPD ou nombre de décalages temporels des méthodes spatiotemporelles
- $c$  vitesse d'une onde électromagnétique dans le vide ou rapport taille sur nombre d'observations de la SCM

## Variabes scalaires

- $x_l^m(\cdot)$  observation sur le  $m$ -ième capteur de la  $l$ -ième base
- $n_l^m(\cdot)$  bruit sur le  $m$ -ième capteur de la  $l$ -ième base
- $\sigma_l^2$  puissance du bruit sur la  $l$ -ième base
- $\sigma^2$  puissance du bruit égale sur toutes les bases
- $s_q(\cdot)$  signal émis par la  $q$ -ième source
- $h_q(\cdot)$  réponse impulsionnelle de la  $q$ -ième source
- $e_q(\cdot)$  signal de la  $q$ -ième source avant modulation
- $\gamma_q$  puissance de la  $q$ -ième source
- $B_q$  largeur de bande fréquentielle de la  $q$ -ième source
- $B$  largeur de bande fréquentielle des bases
- $F_e$  fréquence d'échantillonnage
- $T_e$  période d'échantillonnage
- $f_0$  fréquence centrale d'émission
- $\rho_{l,q}$  atténuation complexe de la  $q$ -ième source sur la  $l$ -ième base
- $a_l^m(\theta)$  gain du  $m$ -ième capteur dans la direction d'arrivée  $\theta$
- $\theta_{l,q}$  ou  $\theta_l(\mathbf{p}_q)$  AoA de la  $q$ -ième source sur la  $l$ -ième base
- $\tau_l(\mathbf{p}_q)$  temps de propagation de la  $q$ -ième source jusqu'à la  $l$ -ième base
- $\Delta\tau_{l,v}(\mathbf{p}_q)$  TDoA entre la  $q$ -ième source et les bases  $l$  et  $v$
- $\Delta\tau_q$  TDoA maximum de la  $q$ -ième source sur toutes les paires des  $L$  bases
- $\Delta\tau_{\max}$  excursion maximum des TDoA sur l'antenne globale
- $\mathcal{L}(\cdot)$  écriture générale d'un critère à optimiser

## Variables vectorielles et matricielles

$\mathbf{s}_l(\cdot)$	vecteur des $Q$ signaux reçus sur la $l$ -ième base, de dimension $Q$
$\mathbf{x}_l(\cdot)$	observation spatiale sur la $l$ -ième base, de dimension $M_l$
$\mathbf{y}(\cdot)$	observation spatiale sur l'antenne globale, de dimension $M$
$\mathbf{z}(\cdot)$	observation spatiotemporelle sur l'antenne globale, de dimension $KM$
$\mathbf{n}_l(\cdot)$	vecteur de bruit sur la $l$ -ième base, de dimension $M_l$
$\mathbf{n}(\cdot)$	vecteur de bruit sur l'antenne globale, de dimension $M$ ou $KM$ pour une observation spatiotemporelle
$\mathbf{a}_l(\theta)$	vecteur directionnel spatial de la $l$ -ième base, de dimension $M_l$
$\boldsymbol{\rho}_q$	vecteur des atténuations complexes de la $q$ -ième source sur les $L$ bases, de dimension $L$
$\mathbf{p}$	vecteur de coordonnées cartésiennes, de dimension 2
$\mathbf{p}_q$	vecteur de coordonnées cartésiennes de la $q$ -ième source, de dimension 2
$\mathbf{0}_{p \times v}$	matrice de dimension $p \times v$ composée de 0
$\mathbf{1}_{p \times v}$	matrice de dimension $p \times v$ composée de 1
$\mathbf{R}_{s_l v}$	matrice de covariance entre les vecteurs $\mathbf{s}_l$ et $\mathbf{s}_v$ entre la $l$ -ième et $v$ -ième base, de dimension $Q \times Q$
$\mathbf{R}_{v_l}$	matrice de covariance entre les vecteurs $\mathbf{x}_l$ et $\mathbf{x}_v$ entre la $l$ -ième et $v$ -ième base, de dimension $M_l \times M_v$
$\mathbf{R}_y$	matrice de covariance du vecteur $\mathbf{y}$ , de dimension $M \times M$
$\mathbf{R}_z$	matrice de covariance du vecteur $\mathbf{z}$ , de dimension $KM \times KM$
$\boldsymbol{\Omega}_q$	matrice diagonale $\text{diag}(\boldsymbol{\rho}_q)$ , de dimension $L \times L$
$\boldsymbol{\Gamma}_l$	matrice diagonale composée des atténuations complexes des $Q$ sources sur la $l$ -ième base, de dimension $Q \times Q$ (ne pas confondre $\boldsymbol{\Gamma}_l$ et $\boldsymbol{\Omega}_q$ )
$\mathbf{U}(\mathbf{p})$	matrice bloc diagonale composée des $L$ vecteurs directeurs des bases composant l'antenne globale, de dimension $M \times L$
$\mathbf{T}_q$	matrice des autocorrélations des réponses impulsionnelles de la $q$ -ième source aux différents instants des TDoA du système, de dimension $L \times L$
$\mathbf{E}_q$	matrice d'erreur de modèle de la $q$ -ième source, de dimension $L \times L$
$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{p}, f)$	matrice diagonale composée des phases dues aux temps de propagation entre la position $\mathbf{p}$ et les $L$ bases composant l'antenne globale, de dimension $L \times L$
$\mathbf{A}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)$	matrice composée des vecteurs directeurs de la $l$ -ième base $\mathbf{a}_l(\theta_{l,q})$ aux angles d'arrivée des $Q$ sources sur celle-ci, de dimension $M_l \times Q$
$\mathbf{M}$	matrice diagonale composée du nombre de capteurs des $L$ bases, de dimension $M \times M$
$\boldsymbol{\Pi}$	projecteur vers le sous-espace signal
$\boldsymbol{\Pi}^\perp$	projecteur vers le sous-espace orthogonal au sous-espace signal, le sous-espace bruit
$\boldsymbol{\Lambda}$	matrice des valeurs propres d'une décomposition en éléments propres
$\mathbf{E}$	matrice des vecteurs propres d'une décomposition en éléments propres
$\mathbf{W}$	matrice de pondération de la forme quadratique de la méthode des moindres carrés pondérés

## Ensembles

$\eta$	ensemble des paramètres composant un système
$\boldsymbol{\Theta}_l$	ensemble des angles d'arrivée des $Q$ sources sur la $l$ -ième base
$\mathcal{F}_q$	ensemble dénombrable des fréquences de la $q$ -ième source
$\mathcal{B}_q$	ensemble indénombrable des fréquences de la $q$ -ième source

## Abréviations

AoA	Angle d'Arrivée ( <i>Angle of Arrival</i> )
BCR	Borne de Cramér-Rao
BE	Bande Étroite
DDP	Densité De Probabilité
DPD	<i>Direct Position Determination</i>
EXIP	<i>EXtended Invariance Principle</i>
GMA	<i>Global MUSIC Approach</i>
HR	Haute Résolution
i.i.d.	Indépendant et Identiquement Distribué
LB	Large Bande
LOST	<i>LOcalization by Space-Time</i>
LOST-FIND	<i>LOcalization by Space-Time with Frequency Identification in Narrowband Decomposition</i>
MCP	Moindres Carrés Pondérés
MLI	Mélange Linéaire Instantané
MUSIC	<i>MUltiple Signal Classification</i>
MV(S/D)	Maximum de Vraisemblance (Stochastique/Déterministe)
OP	OPérateur
produit TB	produit Temps Bande
REQM	Racine de l'Erreur Quadratique Moyenne
RIF	Réponse Impulsionnelle Finie
RMT	<i>Random Matrix Theory</i>
RSB	Rapport Signal à Bruit
SCM	<i>Sample Covariance Matrix</i>
ssi	Si et Seulement Si
TARGET	<i>Time and Angle Retrieval for Geolocation Estimation Technic</i>
TDoA	Temps Différentiel d'Arrivée ( <i>Time Differential of Arrival</i> )
TFCT	Transformée de Fourier à Court Terme
ToA	Temps d'Arrivée ( <i>Time of Arrival</i> )
UC	Unité Centrale
UCA	<i>Uniform Circular Array</i>

# Chapter 8

## Annexes

### 8.1 Quotient de Rayleigh

Le quotient de Rayleigh doit son nom au physicien J. W. S. Rayleigh qui l'étudia en 1877 [Ray77]. Le quotient de Rayleigh se définit comme suit [Gan59], [Par98] :

Pour une matrice hermitienne  $\mathbf{C}$  et un vecteur  $\mathbf{x}$  non nuls, le quotient de Rayleigh est l'expression scalaire définie par :

$$R(\mathbf{C}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{C} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} \in \mathbb{R}, \quad (8.1)$$

une propriété remarquable de ce rapport est d'être borné par les valeurs propres extremum de la matrice  $\mathbf{C}$  :

$$\lambda_{\min} \{ \mathbf{C} \} \leq R(\mathbf{C}, \mathbf{x}) \leq \lambda_{\max} \{ \mathbf{C} \}, \quad (8.2)$$

Ces extremum sont respectivement atteints pour  $\mathbf{x}$  correspondant aux vecteurs propres associés aux valeurs propres minimale et maximale de la décomposition spectrale de  $\mathbf{C}$ .

Si on considère également un matrice  $\mathbf{B}$  hermitienne, alors on définit une approche généralisée appelée quotient de Rayleigh généralisé noté :

$$R(\mathbf{C}, \mathbf{B}; \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{C} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{B} \mathbf{x}} \in \mathbb{R}, \quad (8.3)$$

qui a pour bornes :

$$\lambda_{\min} \{ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \} \leq R(\mathbf{C}, \mathbf{B}; \mathbf{x}) \leq \lambda_{\max} \{ \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \}. \quad (8.4)$$

### 8.2 Le biais sur la position des sources estimée

Le biais est l'erreur asymptotique sur l'estimation de la position des  $Q$  sources. Ce biais est engendré par l'erreur de modèle due à une décomposition BE imparfaite ou à une non considération de l'effet LB sur l'antenne globale. Cette erreur se répercute essentiellement sur la matrice de covariance, où on aura d'un côté la matrice de covariance théorique du modèle BE que l'on nomme  $\mathbf{R}^{BE}$ . Puis d'un autre côté la matrice de covariance théorique du modèle LB est notée  $\mathbf{R}$ . Cette erreur est notée :

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{R}^{BE}. \quad (8.5)$$

Le biais sur la position estimée de la  $q$ -ième source noté  $\Delta \mathbf{p}_q$  est dépendante de l'erreur sur la matrice de covariance. Son expression est donnée par :

$$\Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}) = \mathbf{p}_q(\mathbf{R}) - \mathbf{p}_q(\mathbf{R}^{BE}), \quad (8.6)$$

où  $\mathbf{p}_q(\mathbf{R})$  sera simplifié par  $\mathbf{p}_q$  pour la position de la source à l'aide de la matrice de covariance LB  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{p}_q(\mathbf{R}^{BE})$  sera simplifié par  $\mathbf{p}_q^{BE}$  pour la position de la source via la matrice de covariance BE  $\mathbf{R}^{BE}$ . Afin de donner une forme analytique, nous donnons l'expression du critère  $\mathcal{L}$  dans un contexte LB sur l'antenne globale approximé au second ordre par le développement en série de Taylor en fonction du biais  $\Delta \mathbf{p}_q$  et de la position  $\mathbf{p}_q^{BE}$  :

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}_q) \approx \mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE}) + \nabla \mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE}) \Delta \mathbf{p}_q + \frac{1}{2} H(\mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE})) \Delta \mathbf{p}_q^2, \quad (8.7)$$

où respectivement  $\nabla$  est le gradient du critère et  $H$  le Hessien de la fonction coût  $\hat{\mathcal{L}}$ . Nous avons pour forme quadratique :

$$\frac{1}{2} H(\mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE})) \Delta \mathbf{p}_q^2 + \nabla \mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE}) \Delta \mathbf{p}_q + \mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE}) - \mathcal{L}(\mathbf{p}_q) = 0, \quad (8.8)$$

qui a pour discriminant :

$$\Delta = (\nabla \mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE}))^2 - 2H(\mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE})) (\mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE}) - \mathcal{L}(\mathbf{p}_q)). \quad (8.9)$$

Aux abords de la solution avec une hypothèse BE qui tend à être vérifiée, nous avons alors  $\Delta \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{0}$  ce qui entraîne le cas particulier où  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{BE}$  induisant  $\mathbf{p}_q \rightarrow \mathbf{p}_q^{BE}$ . Alors  $(\mathcal{L}(\mathbf{p}_q^{BE}) - \mathcal{L}(\mathbf{p}_q)) \rightarrow 0$ . En notant que nous avons par définition  $\nabla \mathcal{L}^{BE}(\mathbf{p}_q^{BE}) = \mathbf{0}$ , nous avons alors  $\Delta = 0$ . Donc dans le cadre d'un biais pas trop important, l'expression de ce biais dépendant de l'erreur sur la matrice de covariance est alors :

$$\Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}) \approx -H^{-1}(\Delta \mathbf{R}) \nabla(\Delta \mathbf{R}). \quad (8.10)$$

### 8.3 Approximation du biais sur la position des sources estimée pour une erreur de modèle faible

Partant de l'expression du biais approximé au second ordre de l'Eq.(8.10), on peut écrire son approximation par :

$$\Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}) \approx \Delta \mathbf{p}_q(\mathbf{0}) + \partial \Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}), \quad (8.11)$$

où  $\Delta \mathbf{p}_q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  et  $\partial \Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R})$  est la sensibilité du biais au premier ordre. Nous avons alors :

$$\partial \Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}) = -\partial H^{-1}(\Delta \mathbf{R}) \times \nabla(\Delta \mathbf{R}) - H^{-1}(\Delta \mathbf{R}) \times \partial \nabla(\Delta \mathbf{R}), \quad (8.12)$$

$$= H^{-1}(\Delta \mathbf{R}) \partial H(\Delta \mathbf{R}) H^{-1}(\Delta \mathbf{R}) \nabla(\Delta \mathbf{R}) - H^{-1}(\Delta \mathbf{R}) \partial \nabla(\Delta \mathbf{R}). \quad (8.13)$$

Ainsi si nous considérons une erreur de modèle faible par  $\Delta \mathbf{R} \approx \mathbf{0}$  alors nous avons par définition  $H^{-1}(\mathbf{0}) \nabla(\mathbf{0}) = \Delta \mathbf{p}_q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . L'expression du biais peut s'écrire alors [FC09] :

$$\Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}) \approx -H^{-1}(\mathbf{0}) \partial \nabla(\mathbf{0}), \quad (8.14)$$

où  $\partial \nabla(\mathbf{0})$  est la perturbation sur le gradient. Cette perturbation se calcule pour le gradient  $\partial \nabla(\Delta \mathbf{R})|_{\Delta \mathbf{R}=\mathbf{0}}$ , que nous écrirons par la suite  $\partial \nabla(\Delta \mathbf{R})$ . De même que toutes les approximations d'optimisation faites durant le manuscrit, la solution est valide seulement quand la position de la source biaisée n'est pas trop éloignée de la position théorique de la source. Nous pouvons alors considérer l'approximation de la matrice hessienne où les sensibilités d'ordre 2 sont négligées [Bjo96]. Nous avons finalement pour l'expression du biais :

$$\Delta \mathbf{p}_q(\Delta \mathbf{R}) \approx -\tilde{H}^{-1}(\mathbf{0}) \partial \nabla(\Delta \mathbf{R}). \quad (8.15)$$

## 8.4 Perturbation sur le projecteur

L'erreur de modèle sur la matrice de covariance  $\Delta\mathbf{R}$  Eq.(8.6) engendre une perturbation sur le projecteur s'ajoutant au projecteur théorique dans la cas d'une décomposition parfaite. Il a été montré par H. Krim, P. Forster et J. G. Proakis [KFP92] qu'à l'ordre  $n$  cette erreur est :

$$\mathbf{\Pi}^\perp(\Delta\mathbf{R}) = \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0}) - \sum_{i=1}^n \partial^i \mathbf{\Pi}(\Delta\mathbf{R}) + o(\partial^{n+1} \mathbf{\Pi}(\Delta\mathbf{R})). \quad (8.16)$$

Afin d'alléger les écritures, la dépendance en  $\Delta\mathbf{R}$  sera omise sur la perturbation  $\partial\mathbf{\Pi}$ . L'expression de la  $n$ -ième perturbation du projecteur est donnée par :

$$\begin{aligned} \partial^n \mathbf{\Pi} = & -\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0})(\partial^{n-1} \mathbf{\Pi})\Delta\mathbf{R}\mathbf{S}^+ + \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0})\Delta\mathbf{R}(\partial^{n-1} \mathbf{\Pi})\mathbf{S}^+ - \mathbf{S}^+\Delta\mathbf{R}(\partial^{n-1} \mathbf{\Pi})\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0}) + \mathbf{S}^+(\partial^{n-1} \mathbf{\Pi})\Delta\mathbf{R}\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0}) \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{\Pi}(\mathbf{0})(\partial^i \mathbf{\Pi})(\partial^{n-i} \mathbf{\Pi})\mathbf{\Pi}(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0})(\partial^i \mathbf{\Pi})(\partial^{n-i} \mathbf{\Pi})\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0}), \end{aligned} \quad (8.17)$$

avec  $\mathbf{S} = \mathbf{R}^{BE} - \sigma^2 \mathbf{I}_M$  la matrice de covariance théorique (hypothèse bande étroite respectée) débruitée. Nous allons considérer l'approximation de projecteur perturbé à l'ordre 1 (c.-à-d.  $\mathbf{\Pi}^\perp(\Delta\mathbf{R}) \approx \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0}) - \partial\mathbf{\Pi}(\Delta\mathbf{R})$ ). Alors l'expression non triviale de la perturbation à l'ordre  $n$  (8.17) devient :

$$\partial\mathbf{\Pi}(\Delta\mathbf{R}) \approx \mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0})\Delta\mathbf{R}\mathbf{S}^+ + \mathbf{S}^+\Delta\mathbf{R}\mathbf{\Pi}^\perp(\mathbf{0}). \quad (8.18)$$

## 8.5 Gradient et Hessienne de la valeur propre d'une forme quadratique

Nous allons considérer la forme du quotient de Rayleigh (Annexe 8.1) afin de déterminer les dérivées premières et secondes des valeurs propres. Nous allons considérer une matrice hermitienne  $\mathbf{Q}(\bar{\boldsymbol{\eta}})$  dépendante d'un sous-ensemble des paramètres  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_i, \dots, \eta_I]^T$ . Alors la valeur propre et les vecteurs propres dépendent également *a priori* des paramètres. Afin de simplifier les écritures nous n'exprimerons pas les dépendances aux paramètres. Considérons la  $k$ -ième valeur propre donnée par le quotient de Rayleigh :

$$\frac{\mathbf{v}_k^H \mathbf{Q} \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^H \mathbf{v}_k} = \lambda_k \{ \mathbf{Q} \}, \quad (8.19)$$

où  $\mathbf{v}_k$  est le  $k$ -ième vecteur propre de  $\mathbf{Q}$  correspondant à la  $k$ -ième valeur propre  $\lambda_k$ . Les relations suivantes sont immédiates :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_k^H \mathbf{v}_k = 1, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_k^H \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k = -\mathbf{v}_k^H \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i}. \end{cases} \quad (8.20)$$

### 8.5.1 Gradient du critère

En partant de la définition (8.19) nous posons :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \mathbf{Q} \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_k^H \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_k^H \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_i}. \quad (8.21)$$

Pour être rigoureux observons les différents éléments à gauche de l'égalité :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \mathbf{Q} \mathbf{v}_k = \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \left( \sum_{n=1}^K \lambda_n \mathbf{v}_n^H \mathbf{v}_n \right) \mathbf{v}_k, \quad (8.22)$$

$$= \lambda_k \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k. \quad (8.23)$$

De manière identique on pose :

$$\mathbf{v}_k^H \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i} = \lambda_k \mathbf{v}_k^H \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i}, \quad (8.24)$$

$$= -\lambda_k \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k. \quad (8.25)$$

En injectant (8.23) et (8.25) dans (8.21) nous avons au final :

$$\frac{\partial \lambda_k \{\mathbf{Q}\}}{\partial \eta_i} = \mathbf{v}_k^H \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k. \quad (8.26)$$

### 8.5.2 Hessien du critère

En partant du gradient du critère (8.26) on peut écrire :

$$H_{ij}(\lambda_k \{\mathbf{Q}\}) = \frac{\partial^2 \lambda_k \{\mathbf{Q}\}}{\partial \eta_i \partial \eta_j} = \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_j} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_k^H \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_k^H \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta_i} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_j}. \quad (8.27)$$

De même posons la relation immédiate :

$$\mathbf{Q} \mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k, \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k + \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k + \lambda_k \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i}. \quad (8.29)$$

Permettant de donner les relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i} = (\mathbf{Q} - \lambda_k \mathbf{I})^{-1} \left( \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_i} \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta_i} \right) \mathbf{v}_k, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} = \mathbf{v}_k^H \left( \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_i} \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta_i} \right) (\mathbf{Q} - \lambda_k \mathbf{I})^{-1}, \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k = \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k + \lambda_k \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i} - \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_i}, \\ \mathbf{v}_k^H \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_i} \mathbf{v}_k^H + \lambda_k \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} - \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \mathbf{Q}. \end{cases} \quad (8.30)$$

Nous avons donc pour chaque élément de la matrice Hessienne :

$$H_{ij}(\lambda_k \{\mathbf{Q}\}) = \frac{\partial^2 \lambda_k \{\mathbf{Q}\}}{\partial \eta_i \partial \eta_j} = \mathbf{v}_k^H \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \mathbf{v}_k + 2\lambda_k \Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_j} \right\} - 2\Re \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_k^H}{\partial \eta_i} \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial \eta_j} \right\}. \quad (8.31)$$

## 8.6 Détermination de la matrice de covariance en sortie du $k$ -ième canal par décomposition en banc de filtres

Nous allons dans cette annexe calculer la matrice de covariance du DPD en sortie du  $k$ -ième filtre quand les signaux sont modulés par un filtre linéaire (un formant) et dans le contexte général où la décomposition du banc de filtres en sous-signaux bande étroite laisse apparaître des effets large bande résiduels sur l'antenne globale. La matrice de covariance en sortie du  $k$ -ième filtre est définie par bloc où chaque sous-matrice est l'inter-corrélation entre chaque station :

$$\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11}^k & \cdots & \mathbf{R}_{1L}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{L1}^k & \cdots & \mathbf{R}_{LL}^k \end{pmatrix}, \quad (8.32)$$

avec :

$$\mathbf{R}_{lv}^k = \mathbb{E} [\mathbf{y}_{l,k}(t) \mathbf{y}_{v,k}^H(t)], \quad \forall (l, v) \in \llbracket 1; L \rrbracket^2, \quad (8.33)$$

où nous rappelons que nous avons pour modèle de signal filtré par le  $k$ -ième filtre du banc de filtres du DPD :

$$\mathbf{x}_{l,k}(t) = \sum_{j=1}^J \left( \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q) s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q) - jT_e) + \mathbf{n}_l(t - jT_e) \right) w[j], \quad (8.34)$$

$$= \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q) \sum_{j=1}^J s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q) - jT_e) w[j] + \sum_{j=1}^J \mathbf{n}_l(t - jT_e) w[j]. \quad (8.35)$$

À présent, en utilisant l'indépendance des signaux et la linéarité de l'opérateur espérance et du produit de convolution, nous avons pour une sous-matrice de la matrice bloc  $\hat{\mathbf{R}}_k$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_{lv}^k &= \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^J \left( \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q) s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q) - jT_e) \right) w[j] \times \sum_{j=1}^J \left( \sum_{q=1}^Q \rho_{v,q}^* \mathbf{a}_v^H(\mathbf{p}_q) s_q(t - \tau_v(\mathbf{p}_q) - jT_e) \right) w^*[j] \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^J \mathbf{n}_l(t - jT_e) w[j] \times \sum_{j=1}^J \mathbf{n}_v^H(t - jT_e) w^*[j] \right], \end{aligned} \quad (8.36)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q} \rho_{v,q}^* \mathbf{a}_l(\mathbf{p}_q) \mathbf{a}_v^H(\mathbf{p}_q) \sum_{j=1}^J \sum_{g=1}^J w[j] w^*[g] \mathbb{E} [s_q(t - \tau_l(\mathbf{p}_q) - jT_e) s_q^*(t - \tau_v(\mathbf{p}_q) - gT_e)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \sum_{g=1}^J w[j] w^*[g] \mathbb{E} [\mathbf{n}_l(t - jT_e) \mathbf{n}_v^H(t - gT_e)]. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Pour la partie bruit nous avons :

$$\sum_{j=1}^J \sum_{g=1}^J w[j] w^*[g] \mathbb{E} [\mathbf{n}_l(t - jT_e) \mathbf{n}_v^H(t - gT_e)] = \begin{cases} \sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l} \sum_{j=1}^J |w[j]|^2 & \text{si } v = l \text{ et } g = j \\ \mathbf{0}_{M_l \times M_v} & \text{sinon} \end{cases}, \quad (8.38)$$

où généralement, dans la cas d'une décomposition par banc de filtres, nous avons  $\sum_{j=1}^J |w[j]|^2 = 1$ , donc  $\sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l} \sum_{j=1}^J |w[j]|^2 = \sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l}$  qui correspond à la puissance du bruit sur la  $l$ -ième station. À présent, afin d'alléger les écritures, nous n'allons plus écrire les dépendances en position des sources. Maintenant intéressons-nous à la partie signal :

$$\mathbb{E} [s_q(t - \tau_l - jT_e) s_q^*(t - \tau_v - gT_e)] = \phi \varphi(j, g) \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} e_q(t) h(-jT_e - \tau_l - t) dt \int_{\mathbb{R}} e_q^*(t) h^*(-gT_e - \tau_v - t) dt \right], \quad (8.39)$$

où  $\phi = e^{2i\pi f_0 \Delta \tau_{vl}}$  est la phase liée à la différence de temps de propagation des sources entre les bases (TDoA) et  $\varphi(j, g) = e^{2i\pi f_0 (j-g)T_e}$  est la phase liée à l'échantillonnage du filtrage. En utilisant la séparabilité des variables et le théorème de Fubini, on pose :

$$\mathbb{E} [s_q(t - \tau_l - jT_e) s_q^*(t - \tau_v - gT_e)] = \phi \varphi(j, g) \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^2} h(-jT_e - \tau_l - t) h^*(-gT_e - \tau_v - u) e_q(t) e_q^*(u) dt du \right], \quad (8.40)$$

En réemployant la linéarité de l'opérateur espérance, nous avons :

$$\mathbb{E} [s_q(t - \tau_l - jT_e) s_q^*(t - \tau_v - gT_e)] = \phi \varphi(j, g) \int_{\mathbb{R}^2} h(-jT_e - \tau_l - t) h^*(-gT_e - \tau_v - u) \mathbb{E} [e_q(t) e_q^*(u)] dt du. \quad (8.41)$$

En télécommunications les signaux à transmettre  $e_q(t)$  sont généralement considérés comme spectralement blancs. Soit  $\gamma_q$  la puissance du signal  $e_q(t)$  (nous rappelons que les filtres du banc de filtres sont orthogonaux et neutres), alors :

$$\mathbb{E} [s_q(t - \tau_l - jT_e)s_q^*(t - \tau_v - gT_e)] = \phi\phi(j, g)\gamma_q^2 \int_{\mathbb{R}} h(-jT_e - \tau_l - t)h^*(-gT_e - \tau_v - t) dt. \quad (8.42)$$

On voit ici clairement apparaître l'énergie croisée des formants pondérée par la puissance du signal. Nous avons donc :

$$\hat{\mathbf{R}}_{l_v}^k = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q}\rho_{v,q}^* \gamma_q \mathbf{a}_l \mathbf{a}_v^H \phi \sum_{j=1}^J \sum_{g=1}^J w[j]w^*[g]\varphi(j, g) \int_{\mathbb{R}} h(-jT_e - \tau_l - t)h^*(-gT_e - \tau_v - t) dt + \delta_{l,v}\sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l \times M_v}. \quad (8.43)$$

Au final, nous avons sous forme matricielle :

$$\hat{\mathbf{R}}_{l_v}^k = \sum_{q=1}^Q \rho_{l,q}\rho_{v,q}^* \mathbf{a}_l \mathbf{a}_v^H \gamma_q \phi \mathbf{w}_k^H \mathbf{\Gamma}_q(\Delta\tau_{lv}) \mathbf{w}_k + \delta_{l,v}\sigma_l^2 \mathbf{I}_{M_l \times M_v}. \quad (8.44)$$

## 8.7 Rang de la matrice de covariance du DPD

Nous allons ici déterminer le rang de la matrice de covariance de l'algorithme DPD en sortie du  $k$ -ième filtre du banc de filtres  $\mathbf{R}_{y_k}$ . De même nous considérons les coefficients du  $k$ -ième filtre RIF par le vecteur  $\mathbf{w}_k$ . En se basant sur l'observation filtrée par le  $k$ -ième filtre (2.63) on peut écrire la matrice de covariance théorique comme suit :

$$\mathbf{R}_{y_k} - \mathbf{R}_{n_k} = \sum_{q=1}^Q \mathbf{U}(\mathbf{p}_q) \mathbf{\Omega}_q \mathbf{R}_{s_{q,k}} \mathbf{\Omega}_q^H \mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q), \quad (8.45)$$

avec  $\mathbf{R}_{n_k} \in \mathcal{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$  la matrice de covariance du bruit filtré :

$$\mathbf{R}_{n_k} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_k^H \mathbf{w}_k \sigma_1^2 \mathbf{I}_{M_1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{w}_k^H \mathbf{w}_k \sigma_L^2 \mathbf{I}_{M_L} \end{pmatrix}, \quad (8.46)$$

De par sa construction (explicitée en Eq.(3.55)) on peut dire que :

$$\text{rang}(\mathbf{R}_{s_{q,k}}) = \ell_q, \quad (8.47)$$

avec  $\ell_q$  le nombre de TDoA différents. On pose alors deux définitions :

1. Pour toute application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , toute base  $B$  de  $E$  et toute base  $C$  de  $F$ , si  $\mathbf{A} = M(f, B, C)$  alors  $\text{rang} f = \text{rang} \mathbf{A}$ . Donc un corollaire évident est que si  $\mathbf{B}$  est de dimension  $n \times k$  et de rang  $n$  alors  $\text{rang} \mathbf{A}\mathbf{B} = \text{rang} \mathbf{A}$  et si  $\mathbf{C}$  est une matrice de dimension  $l \times m$  de rang  $m$  alors  $\text{rang} \mathbf{C}\mathbf{A} = \text{rang} \mathbf{A}$ .
2. Le théorème de la somme pour deux sous-espaces issus d'un espace vectoriel de dimension finie nous donne :

$$\dim(\text{im} \mathbf{A} + \text{im} \mathbf{B}) = \dim \text{im} \mathbf{A} + \dim \text{im} \mathbf{B} - \dim(\text{im} \mathbf{A} \cap \text{im} \mathbf{B}), \quad (8.48)$$

Si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont linéairement indépendantes, donc  $\text{im} \mathbf{A} \cap \text{im} \mathbf{B} = \{\emptyset\}$ , ce qui est notre cas, alors on peut poser que :

$$\text{rang}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rang} \mathbf{A} + \text{rang} \mathbf{B}. \quad (8.49)$$

En utilisant la première définition, nous avons :

$$\text{rang}(\mathbf{U}(\mathbf{p}_q)\boldsymbol{\Omega}_q\mathbf{R}_{\mathbf{s}_{q,k}}\boldsymbol{\Omega}_q^H\mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q)) = \ell_q. \quad (8.50)$$

Puis à l'aide de la deuxième définition :

$$\text{rang}(\mathbf{R}_{\mathbf{y}_k} - \mathbf{R}_{\mathbf{n}_k}) = \sum_{q=1}^Q \ell_q. \quad (8.51)$$

## 8.8 Rang de la matrice de covariance de l'observation spatiotemporelle

Nous allons ici déterminer le rang de la matrice de covariance du processus spatiotemporel  $\mathbf{R}_z$  sans bruit. Selon la définition de l'observation du processus spatiotemporel (2.74) on peut écrire la matrice de covariance théorique comme suit :

$$\mathbf{R}_z - \mathbf{R}_n = \sum_{q=1}^Q \sum_{k=1}^{K_q} \mathbf{c}(f_{q,k})\mathbf{c}^H(f_{q,k}) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q)\boldsymbol{\Omega}_q\mathbf{R}_{\mathbf{s}_{q,k}}\boldsymbol{\Omega}_q^H\mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q), \quad (8.52)$$

avec  $\mathbf{R}_n \in \mathcal{M}_{M \times M}(\mathbb{R})$  la matrice de covariance du bruit :

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{I}_K \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_{M_1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \sigma_L^2 \mathbf{I}_{M_L} \end{pmatrix}, \quad (8.53)$$

De par sa construction (explicitée en Eq.(3.76)) on peut dire que :

$$\text{rang}(\mathbf{R}_{\mathbf{s}_{q,k}}) = \ell_q, \quad (8.54)$$

avec  $\ell_q$  le nombre de TDoA différents. De même :

$$\text{rang}(\mathbf{c}(f_{q,k})\mathbf{c}^H(f_{q,k})) = 1. \quad (8.55)$$

On pose alors trois définitions :

1. Pour toute application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , toute base  $B$  de  $E$  et toute base  $C$  de  $F$ , si  $\mathbf{A} = M(f, B, C)$  alors  $\text{rang} f = \text{rang} \mathbf{A}$ . Donc un corollaire évident est que si  $\mathbf{B}$  est de dimension  $n \times k$  et de rang  $n$  alors  $\text{rang} \mathbf{A}\mathbf{B} = \text{rang} \mathbf{A}$  et si  $\mathbf{C}$  est une matrice de dimension  $l \times m$  de rang  $m$  alors  $\text{rang} \mathbf{C}\mathbf{A} = \text{rang} \mathbf{A}$ .
2.  $\text{rang}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{rang}(\mathbf{A}) \text{rang}(\mathbf{B})$ .
3. Le théorème de la somme pour deux sous-espaces issus d'un espace vectoriel de dimension finie nous donne :

$$\dim(\text{im} \mathbf{A} + \text{im} \mathbf{B}) = \dim \text{im} \mathbf{A} + \dim \text{im} \mathbf{B} - \dim(\text{im} \mathbf{A} \cap \text{im} \mathbf{B}), \quad (8.56)$$

Si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont linéairement indépendantes, donc  $\text{im} \mathbf{A} \cap \text{im} \mathbf{B} = \{\emptyset\}$ , ce qui est notre cas, alors on peut poser que :

$$\text{rang}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rang} \mathbf{A} + \text{rang} \mathbf{B}. \quad (8.57)$$

Alors en utilisant la première et deuxième définition, nous avons :

$$\text{rang}(\mathbf{c}(f_{q,k})\mathbf{c}^H(f_{q,k}) \otimes \mathbf{U}(\mathbf{p}_q)\boldsymbol{\Omega}_q\mathbf{R}_{\mathbf{s}_{q,k}}\boldsymbol{\Omega}_q^H\mathbf{U}^H(\mathbf{p}_q)) = \ell_q. \quad (8.58)$$

Finalement, à l'aide de la troisième définition, nous avons pour rang de la matrice de covariance d'un processus spatiotemporel :

$$\text{rang}(\mathbf{R}_z - \mathbf{R}_n) = \sum_{q=1}^Q K_q \times \ell_q. \quad (8.59)$$

## 8.9 Centre de phase de l'antenne globale

Nous allons dans cette annexe déterminer le centre de phase de l'antenne globale. Nous allons considérer le modèle d'observation décrit à une phase près :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0) = \mathbf{u}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f_0) e^{2i\pi f_0 \tau}, \quad (8.60)$$

$$= \mathbf{U}(\mathbf{p}) \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{p}, f_0) \boldsymbol{\rho}, \quad (8.61)$$

avec :

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{p}, f_0) = \begin{pmatrix} e^{2i\pi f_0(\tau - \tau_1(\mathbf{p}))} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{2i\pi f_0(\tau - \tau_L(\mathbf{p}))} \end{pmatrix}. \quad (8.62)$$

De même nous notons  $\mathbf{p} = [p_x, p_x]^T$  les coordonnées cartésiennes d'une position. En prenant comme phase de référence le centre de phase de l'antenne globale, nous avons par définition du centre phase :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)}{\partial p_i} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f) = 0, \quad (8.63)$$

$$\left( \boldsymbol{\rho}^H \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^H(\mathbf{p}, f)}{\partial p_i} \mathbf{U}^H(\mathbf{p}) + \boldsymbol{\rho}^H \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^H(\mathbf{p}, f) \frac{\partial \mathbf{U}^H(\mathbf{p})}{\partial p_i} \right) \mathbf{U}(\mathbf{p}) \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{p}, f) \boldsymbol{\rho} = 0. \quad (8.64)$$

Nous posons :

$$\frac{\partial \mathbf{U}^H(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}_1(\mathbf{p})}{\partial p_i} & \dots & \mathbf{0}_{M_1 \times 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{M_L \times 1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{a}_L(\mathbf{p})}{\partial p_i} \end{pmatrix} \quad (8.65)$$

avec :

$$\frac{\partial \mathbf{a}_l(\mathbf{p})}{\partial p_i} = 2i\pi \frac{f_0}{c} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{k}_l^T(\mathbf{p})}{\partial p_i} \Delta \mathbf{b}_1^1 e^{2i\pi \frac{f_0}{c} \mathbf{k}_l^T(\mathbf{p}) \Delta \mathbf{b}_1^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{k}_l^T(\mathbf{p})}{\partial p_i} \Delta \mathbf{b}_1^{M_1} e^{2i\pi \frac{f_0}{c} \mathbf{k}_l^T(\mathbf{p}) \Delta \mathbf{b}_1^{M_1}} \end{pmatrix}, \quad (8.66)$$

où l'on rappelle que  $\Delta \mathbf{b}_1^m = \mathbf{b}_l^m - \mathbf{b}_l$  comme défini à l'Eq.(1.15). À partir de ces informations, penchons-nous sur la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}^H(\mathbf{p})}{\partial p_i} \mathbf{U}(\mathbf{p}) = -2i\pi \frac{f_0}{c} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{k}_l^T(\mathbf{p})}{\partial p_i} \sum_{m=1}^{M_1} \Delta \mathbf{b}_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\partial \mathbf{k}_l^T(\mathbf{p})}{\partial p_i} \sum_{m=1}^{M_L} \Delta \mathbf{b}_L^m \end{pmatrix}, \quad (8.67)$$

où l'on note par définition que  $\sum_{m=1}^{M_1} \Delta \mathbf{b}_1^m = 0$ . Ainsi on a :

$$\frac{\partial \mathbf{U}^H(\mathbf{p})}{\partial p_i} \mathbf{U}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}_{L \times L}. \quad (8.68)$$

Du fait d'avoir considéré le centre de phase des stations de bases, l'Eq.(8.64) se simplifie grandement. En effet, nous avons :

$$\boldsymbol{\rho}^H \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^H(\mathbf{p}, f)}{\partial p_i} \mathbf{U}^H(\mathbf{p}) \mathbf{U}(\mathbf{p}) \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{p}, f) \boldsymbol{\rho} = 0, \quad (8.69)$$

$$\boldsymbol{\rho}^H \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Phi}}^H(\mathbf{p}, f)}{\partial p_i} \mathbf{M} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{p}, f) \boldsymbol{\rho} = 0, \quad (8.70)$$

avec la matrice diagonale  $\mathbf{M}$  définie en (2.68). Notons que nous avons :

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(\mathbf{p}, f)}{\partial p_i} = 2i\pi f \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta\tau_1(\mathbf{p})}{\partial p_i} e^{2i\pi f \delta\tau_1(\mathbf{p})} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\partial \delta\tau_L(\mathbf{p})}{\partial p_i} e^{2i\pi f \delta\tau_L(\mathbf{p})} \end{pmatrix}, \quad (8.71)$$

avec  $\delta\tau_l(\mathbf{p})$  le temps différentiel lié au centre de phase de l'antenne globale définit par :

$$\delta\tau_l(\mathbf{p}) = \tau(\mathbf{p}) - \tau_l(\mathbf{p}), \quad (8.72)$$

$$= \frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{b}\| - \|\mathbf{p} - \mathbf{b}_l\|}{c}, \quad (8.73)$$

où  $\mathbf{b}$  est la position du centre de phase de l'antenne globale. Alors :

$$\mathbf{M} \frac{\partial \tilde{\Phi}^H(\mathbf{p}, f)}{\partial p_i} \tilde{\Phi}(\mathbf{p}, f) = -2i\pi f \begin{pmatrix} M_1 \frac{\partial \delta\tau_1(\mathbf{p})}{\partial p_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M_L \frac{\partial \delta\tau_L(\mathbf{p})}{\partial p_i} \end{pmatrix}. \quad (8.74)$$

Finalement en injectant (8.74) dans l'Eq.(8.70), nous avons :

$$\boldsymbol{\rho}^H \mathbf{M} \frac{\partial \tilde{\Phi}^H(\mathbf{p}, f)}{\partial p_i} \tilde{\Phi}(\mathbf{p}, f) \boldsymbol{\rho} = -2i\pi f \sum_{l=1}^L |\rho_l|^2 M_l \frac{\partial \delta\tau_l(\mathbf{p})}{\partial p_i} = 0, \quad (8.75)$$

$$\sum_{l=1}^L |\rho_l|^2 M_l \frac{\partial \delta\tau_l(\mathbf{p})}{\partial p_i} = 0. \quad (8.76)$$

Intéressons-nous à présent à la dérivée par rapport à la position de notre définition du temps de propagation par rapport au centre de phase de l'antenne globale donnée à l'Eq.(8.73) :

$$\frac{\partial \delta\tau_l(\mathbf{p})}{\partial p_i} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \|\mathbf{p} - \mathbf{b}\|}{\partial p_i} - \frac{\partial \|\mathbf{p} - \mathbf{b}_l\|}{\partial p_i} \right). \quad (8.77)$$

Si nous notons comme coordonnée  $\mathbf{b} = [b_x, b_y]^T$  la position du centre de phase de l'antenne globale, alors le gradient (que l'on note  $\nabla f$  pour une application  $f$  quelconque) des composantes du temps de propagation de la position  $\mathbf{p}$  vers le centre de phase est :

$$\frac{1}{c} \nabla \|\mathbf{p} - \mathbf{b}\| = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sqrt{(p_x - b_x)^2 + (p_y - b_y)^2}}{\partial p_x} \\ \frac{\partial \sqrt{(p_x - b_x)^2 + (p_y - b_y)^2}}{\partial p_y} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \frac{p_x - b_x}{\|\mathbf{p} - \mathbf{b}\|} \\ \frac{p_y - b_y}{\|\mathbf{p} - \mathbf{b}\|} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{p} - \mathbf{b}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{b}\|} = \frac{1}{c} \mathbf{k}(\theta(\mathbf{p})), \quad (8.78)$$

où  $\mathbf{k}(\theta(\mathbf{p}))$  est la direction d'arrivée de la position  $\mathbf{p}$  vers le centre de phase de l'antenne globale  $\mathbf{b}$ . De manière similaire nous avons :

$$\frac{1}{c} \nabla \|\mathbf{p} - \mathbf{b}_l\| = \frac{1}{c} \mathbf{k}_l(\theta(\mathbf{p})), \quad (8.79)$$

où  $\mathbf{k}_l(\theta(\mathbf{p}))$  est la direction d'arrivée de la position  $\mathbf{p}$  vers le centre de phase de la station de base  $l$ . Le centre de phase de l'antenne globale est finalement donné pour :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f)}{\partial p_i} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\rho}, f) = \sum_{l=1}^L |\rho_l|^2 M_l (\mathbf{k}(\theta(\mathbf{p})) - \mathbf{k}_l(\theta(\mathbf{p}))) = 0. \quad (8.80)$$

Finalement, le centre de phase de l'antenne globale correspond au point où la direction d'arrivée de la position  $\mathbf{p}$  vers le centre de phase respecte :

$$\mathbf{k}(\theta(\mathbf{p})) = \frac{\sum_{l=1}^L |\rho_l|^2 M_l \mathbf{k}_l(\theta(\mathbf{p}))}{\sum_{l=1}^L |\rho_l|^2 M_l}. \quad (8.81)$$

Il est intéressant de noter que le centre de phase de l'antenne globale sera différent pour chacune des sources. De plus, dans le cas particulier de 2 stations de bases, le centre de phase est la droite de direction  $\mathbf{k}(\theta(\mathbf{p})) = \frac{|\rho_1|^2 M_1 \mathbf{k}_1(\theta(\mathbf{p})) + |\rho_2|^2 M_2 \mathbf{k}_2(\theta(\mathbf{p}))}{|\rho_1|^2 M_1 + |\rho_2|^2 M_2}$  commençant en la position  $\mathbf{p}$ . En effet, au-delà de la position  $\mathbf{p}$ , la direction  $\mathbf{k}(\theta(\mathbf{p}))$  doit subir un changement de signe car le centre de phase de l'antenne globale sera à l'opposé de la source.

# List of Figures

1	Contexte d'une réception de 2 sources avec $L$ stations éloignées . . . . .	1
2	A floating figure . . . . .	2
3	A floating figure . . . . .	3
1.1	Réception d'une antenne. . . . .	7
1.2	Recepteur avec une bande $B$ centrée en $f_0$ et un échantillonnage de fréquence $F_e$ en présence de deux signaux centrés autour de $f_1$ et $f_2$ . . . . .	8
1.3	Représentation des sources et de l'antenne globale . . . . .	9
1.4	Approximation front d'onde plan permettant de déterminer une direction d'arrivée unique localement sur toute la station pour chaque source. . . . .	11
1.5	Diversité angulaire sur l'antenne globale. . . . .	11
1.6	Angle d'arrivée de deux sources traduisant leurs directions d'arrivées quand les hypothèses front d'onde plan et bande étroite sont respectées. . . . .	12
1.7	La condition bande étroite n'est généralement pas respectée. Les signaux sont <i>a priori</i> large bande sur l'antenne globale. . . . .	13
2.1	Cadre de l'estimation paramétrique . . . . .	18
2.2	Détermination de la puissance dans la direction $\theta$ . . . . .	19
2.3	Principe de triangulation avec $Q = 2$ et $L = 3$ . . . . .	28
2.4	Visualisation des ambiguïtés pour deux cas simples, où la croissance du nombre d'ambiguïtés est fonction du nombre de sources . . . . .	29
2.5	Non intersection des 3 estimations $\hat{\theta}_i = \theta_i + \epsilon_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ où $\epsilon_i$ est une erreur d'estimation indépendante entre chaque station indiquée par $i$ . . . . .	30
2.6	Position d'une source en présence de 2 bases . . . . .	30
2.7	Exemple de conditionnement géométrique : en vert bien conditionné, en rouge premier et en vert le deuxième cas de mauvais conditionnement. . . . .	31
2.8	Représentation de la géolocalisation par TDoA/TDoA pour $Q = 2$ et $L = 3$ où les sources sont situées au croisement des TDoA de la base 1 et 2 ( $\Delta\tau_{1,2}$ ) et de la base 2 et 3 ( $\Delta\tau_{2,3}$ ) . . . . .	32
2.9	Représentation des axes de dysfonctionnement dû au conditionnement géométrique de la méthode de triangulation (en rouge) et de la méthode TDoA/TDoA (en bleu) . . . . .	33
2.10	Système de géolocalisation par TDoA/TDoA pour $Q = 2$ sources et $L = 3$ bases où la base de référence est la première base. Les sources sont situées à l'intersection des droites AoA et hyperbols TDoA. . . . .	33
2.11	Le banc de filtres décompose le signal d'observation $\mathbf{y}(t)$ de l'Eq.(1.31) en $K$ sous-signaux bande étroite $\mathbf{y}_k(t) \forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket$ ayant au maximum une largeur de bande $\frac{B}{K}$ . . . . .	36
2.12	Réponse fréquentielle des différents filtres du banc de filtres pour $K = 7$ en fréquence normalisée sans fenêtre d'apodisation. La courbe en noir représente la somme des différents gabarits fréquentiels. . . . .	36

3.1	Valeur absolue et phase des signaux reçus pour les deux configurations de source $s_1$ et $s_2$ . . . . .	45
3.2	Le signal $e_q(t)$ blanc transmis est filtré par une filtre de réponse $h_q(t)$ donnant en sortie le signal $s_q(t)$ . . . . .	45
3.3	Schéma du contexte sources/bases . . . . .	55
3.4	Biais sur l'estimation de la source $s_1$ en fonction du produit TB : (vert +) biais analytique, (rouge $\circ$ ) biais réel et (bleu pointillé ■) biais analytique avec projecteur non approximé. . . . .	56
3.5	Biais sur l'estimation de la source $s_1$ en fonction du produit TB : (bleu +) biais analytique et (bleu pointillé ■) biais réel pour $K = 2$ et (vert +) biais analytique et (vert pointillé ■) biais réel pour $K = 6$ . . . . .	57
3.6	Biais sur l'estimation de la source $s_1$ en fonction du produit TB : (bleu +) biais analytique et (bleu pointillé ■) biais réel pour $K = 2$ et (vert +) biais analytique et (vert pointillé ■) biais réel pour $K = 6$ . . . . .	57
4.1	Biais sur l'estimation de la source $s_1$ (voir Fig.(3.3)) en fonction du produit TB : (bleu) biais analytique pour $K = 3$ représentant une décomposition du signal $K_q = 2$ et (vert) biais analytique pour $K = 8$ représentant une décomposition du signal $K_q = 6$ . . . . .	63
4.2	Contexte de deux bases et deux sources possédant des spectres fréquentiels différents. . . . .	64
4.3	Occupation spectrale des deux sources, en bleu la première et en rouge la seconde. . . . .	64
4.4	Tracé de la fonction coût : (a) $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_1)$ , (b) $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_2)$ dans le cas de supports spectraux disjoints, (c) $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_1)$ , (d) $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_2)$ dans le cas d'une union des supports spectraux non nulle et (e) $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_1)$ , (f) $\mathcal{L}_{FIND}(\mathbf{p}, \mathcal{F}_2)$ dans le cas d'une inclusion stricte des supports spectraux. . . . .	65
4.5	Représentation des contextes des deux configurations bases/sources traitées . . . . .	66
4.6	REQM en fonction du RSB dans la cas mono-source occupant toute la bande des récepteurs proche de la zone de dysfonctionnement des estimateurs de position exploitant seulement les AoA. . . . .	66
4.7	REQM en fonction du RSB dans la cas mono-source n'occupant que la moitié de la bande des récepteurs proche de la zone de dysfonctionnement des estimateurs de position exploitant seulement les AoA. . . . .	67
4.8	REQM en fonction du RSB dans la cas bi-source occupant toute la bande des récepteurs, une à (0,200m) et une autre à (5m,200m), les deux sources sont séparées de 0.0125 fois la distance inter-base. . . . .	68
4.9	Histogramme normalisé des valeurs propres de la SCM d'un bruit blanc circulaire gaussien $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , pour une matrice de dimension $D = 500$ . . . . .	71
4.10	Histogramme normalisé des valeurs propres de la SCM d'un bruit blanc circulaire gaussien $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ , pour une matrice de dimension $D = 15$ . . . . .	72
4.11	Histogramme normalisé des valeurs propres de la SCM d'un bruit blanc circulaire uniforme $\mathcal{CU}(-1, 1)$ , pour une matrice de dimension $D = 15$ . . . . .	72
4.12	Loi de Marčenko-Pastur pour différentes valeurs de $c$ . . . . .	74
4.13	DDP asymptotique des valeurs propres de la SCM $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}$ lorsque les valeurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ sont 1, 2, 3 et 7. . . . .	76
4.14	Visualisation de $\psi(x)$ quand les valeurs propres de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ sont 1, 2, 3 et 7.. . . .	77
4.15	Contexte sources/bases des simulations. . . . .	81
4.16	Position moyenne estimée sur l'axe des abscisses avec le projecteur MUSIC et le pseudo-projecteur G-MUSIC en fonction du nombre de mesures indépendentes $N$ où en trait pointillé bleu la position réelle des sources est représentée et en trait plein la séparation à 50% des sources. . . . .	81
4.17	REQM des différentes méthodes en fonction du nombre d'observations indépendants $N$ où les marqueurs ( $\circ$ ) représentent l'estimation avec $\hat{\mathbf{\Pi}}^\perp$ et ( $\nabla$ ) représentent l'estimation avec $\hat{\mathbf{\Pi}}_G^\perp$ . . . . .	82
4.18	REQM des méthodes en fonction de la décomposition bande étroite $K$ des méthodes en 1 étape pour $N = 500$ fixé. . . . .	83

4.19	REQM des méthodes en fonction de la décomposition bande étroite $K$ des méthodes en 1 étape pour une puissance non constante dans la bande et $N = 500$ fixé. . . . .	83
5.1	Densité de probabilité pour une station de 6 capteurs et $N = 10$ , en bleu l'estimateur classique et en rouge celui avec un <i>a priori</i> Marcenko-Pastur. . . . .	95
5.2	Représentation de la fonction d'autocorrélation $r(\tau)$ d'un signal occupant une bande $B$ . . . . .	96
5.3	Scénario avec 2 sources et 2 bases où $\mathbf{b}_1 = [-200, 0]^T$ m et $\mathbf{b}_2 = [200, 0]^T$ m. . . . .	97
5.4	Fonctions coût $\mathcal{L}(\tau)$ du TDoA traditionnel (en rouge) donné par (2.38) et du TDoA TARGET (en bleu) donné par (5.40). Le TDoA théorique est indiqué par les traits pointillés vert. . . . .	98
5.5	Performances REQM exprimé en mètre ( $\text{REQM} \times \nu$ ) de l'estimateur TDoA traditionnel (en rouge) et celui de TDoA TARGET (en bleu). . . . .	99
5.6	Les trois différents scénarii étudiées pour l'algorithme TARGET. . . . .	100
5.7	Critère TARGET des trois scénarios. . . . .	101
5.8	Comparaison des REQM des algorithmes DPD, LOST, LOST-FIND, triangulation (AoA/AoA) et AoA/TDoA avec celui de l'algorithme TARGET. . . . .	102
6.1	REQM des algorithmes DPD, LOST et LOST-FIND dans le cas non compressé (tracé plein) et dans celui où les transmissions inter-bases sont compressées (tracé pointillé). . . . .	108
6.2	REQM de l'algorithme TARGET dans le cas de transmission non compressée (tracé plein) et transmission compressée (tracé pointillé). . . . .	110
6.3	Diagramme de rayonnement pour un réseau UCA de 6 capteurs de rayons $r_l = 0.4\lambda$ dans la direction $\theta_1 = 45^\circ$ . . . . .	111
6.4	Diagramme de rayonnement pour un réseau UCA de 6 capteurs de rayon $r_l = 2.1\lambda$ dans la direction $\theta_1 = 45^\circ$ . . . . .	112
6.5	Diagramme de rayonnement de l'antenne globale pour 2 stations à $(-200\text{m}, 0)$ et à $(+200\text{m}, 0)$ , de rayon $r_l = 0.4\lambda$ et 1 source à $\mathbf{p}_1 = (+100\text{m}, +200\text{m})$ . . . . .	114
6.6	Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale pour 2 stations à $(-200\text{m}, 0)$ et à $(+200\text{m}, 0)$ et 1 source à $\mathbf{p}_1 = (+100\text{m}, +200\text{m})$ . . . . .	115
6.7	Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale avec une bande passante de $B_1 = 500\text{kHz}$ et une troisième base supplémentaire à $(-200\text{m}, +200\text{m})$ . . . . .	116
6.8	Diagramme d'ambiguïté LB d'ordre 1 de l'antenne globale pour 2 stations à $(-200\text{m}, 0)$ et à $(+200\text{m}, 0)$ et 1 source à $\mathbf{p}_1 = (+100\text{m}, +200\text{m})$ et $\boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{1}_{L \times 1}$ . . . . .	117
6.9	Scenarion de bases utilisé avec alternance de stations composées de 1 ou 2 antennes. . . . .	119
6.10	Performances du scénario mono-source pour le contexte de la Fig.6.9. . . . .	121
6.11	Performances du scénario bi-source pour le contexte de la Fig.6.9. . . . .	122
6.12	Diagramme de rayonnement de la station maîtresse avec 5 capteurs en formation UCA autour d'un sixième, le réseau circulaire a un rayon de $2.4\lambda$ . . . . .	123
6.13	Scénario des bases utilisé avec 1 station de référence composée de 6 antennes et 5 stations mono-antenne. . . . .	124
6.14	Performances du scénario mono-source pour le contexte de bases de la Fig.6.13. . . . .	125
6.15	Performances du scénario bi-source dans le contexte des bases de la Fig.6.13. . . . .	126
6.16	Premier contexte bases/source. . . . .	128
6.17	Superposition des lignes de niveau de la fonction coût du critère DPD sur le mappage du terrain. (Étoile bleu) résultat de l'algorithme de triangulation et (étoile rouge) celui du DPD. . . . .	129
6.18	Critère des algorithmes triangulation, DPD, LOST, LOST-FIND et TARGET sur signaux réels du contexte Fig.6.16. . . . .	131
6.19	Deuxième contexte bases/source. . . . .	132
6.20	Critère des algorithmes triangulation, DPD, LOST, LOST-FIND et TARGET sur signaux réels du contexte Fig.6.19. . . . .	133



# Bibliography

- [Abe24] N. H. Abel. Les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré. *Mémoire*, 1824.
- [And65] G. A. Anderson. An asymptotic expansion for the distribution of the latent roots of the estimated covariance matrix. *The Annals of Mathematical Statistics*, 36(4):1153 – 1173, August 1965.
- [Ath03] F. Athley. Space-Times parameter estimation in radar array processing. *Chalmers*, 2003.
- [AW04] A. Amar and A. J. Weiss. Direct position determination of multiple radio signal. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2:81 – 84, May 2004.
- [AW07] A. Amar and A. J. Weiss. Fundamental limitations on the number of resolvable emitter using a geolocation system. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(5):2193 – 2202, May 2007.
- [AW09] A. Amar and A. J. Weiss. Direct position determination: A single-step emitter localization approach. *Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation*, Editors Tuncer, T.E. and Friedlander, B. Academic Press, 2009.
- [Bö84] J. F. Böhme. Estimation of source parameters by maximum likelihood and nonlinear regression. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 271 – 274, March 1984.
- [Bö86] J. F. Böhme. Estimation of spectral parameters of correlated signals in wavefields. *Signal Processing, Elsevier*, 11(4):329 – 337, December 1986.
- [BFL11] J. Bosse, A. Ferréol, and P. Larzabal. A space time array processing for passive geolocalization of radio transmitters. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 2596 – 2599, May 2011.
- [BFL13] J. Bosse, A. Ferréol, and P. Larzabal. A spatio-temporal array processing for passive localization of radio transmitters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 61(22):5485 – 5494, November 2013.
- [BG88] K. M. Buckley and L. J. Griffiths. Broadband signal subspace spatial spectrum (BASS-ALE) estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 36(7):953 – 964, July 1988.
- [Bie83] G. Bienvenu. Eigensystem properties of the sample space correlation matrix. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 8:332 – 335, April 1983.
- [Bil95] P. Billingsley. Probability and measure. *A Wiley-Interscience Publication*, 1995.
- [Bjo96] A. Bjorck. Numerical methods for least squares problems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, December 1996.
- [BK79] G. Bienvenu and L. Kopp. Principe de la goniométrie adaptative. *Septième colloque GRETSI*, 1979.

- [BK83] G. Bienvenu and L. Kopp. Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 31(5):1235 – 1248, October 1983.
- [BLNL08] A. Broumandan, T. Lin, J. Nielsen, and G. Lachapelle. Practical results of hybrid aoa/tdoa geolocation estimation in cdma wireless networks. *IEEE Vehicular Technology Conference*, pages 1 – 5, September 2008.
- [Bos12] J. Bosse. Géolocalisation de sources radioélectriques : Stratégies, algorithmes et performances. *Mémoire de thèse de l'EDSP, ENS Cachan*, 2012.
- [Bre88] Y. Bresler. Maximum likelihood of linearly structured covariance with application to antenna array processing. *Proceeding ASSP Workshop on Spectrum Estimation and Modeling*, pages 172 – 175, 1988.
- [Cap69] J. Capon. High resolution frequency wavenumber spectrum analysis. *Proceeding of the IEEE*, 57:1408 – 1418, 1969.
- [CD11] R. Couillet and M. Debbah. Random matrix methods for wireless communications. *Cambridge University Press*, November 2011.
- [Cra46] H. Cramér. Mathematical methods of statistics. *Princeton University, Press, New York*, 1946.
- [CT05] C. Cameron and P. Trivedi. Microeconometrics: Methods and applications. *Cambridge University Press*, page 119, 2005.
- [DFAL15] C. Delestre, A. Ferréol, A. Amar, and P. Larzabal. On the broadband effect of remote stations in DPD algorithm. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 2859 – 2863, April 2015.
- [DFL13] C. Delestre, A. Ferréol, and P. Larzabal. Performances de méthodes à sous-espace pour une géolocalisation direct à l'aide de stations éloignées. *24-ième Colloque du Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images (GRETSI)*, September 2013.
- [DFL14] C. Delestre, A. Ferréol, and P. Larzabal. Array-broadband effects on direct geolocation algorithm. *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 1502 – 1506, September 2014.
- [DFL15a] C. Delestre, A. Ferréol, and P. Larzabal. LOST-FIND: A spectral-space-time direct blind geolocalization algorithm. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 2619 – 2623, April 2015.
- [DFL15b] C. Delestre, A. Ferréol, and P. Larzabal. Procédé de compression de signaux dans le cadre des méthodes de localisation en 1 étape (réf. TCSINV15\_521), 2015.
- [DFLG15] C. Delestre, A. Ferréol, P. Larzabal, and C. Germond. TARGET: A direct AoA-TDoA estimation for blind broadband geolocalization. *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, September 2015.
- [DW92] M. A. Doron and A. J. Weiss. On focusing matrices for wide-band array processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(6):1295 – 1302, June 1992.
- [FBL10] A. Ferréol, J. Bosse, and P. Larzabal. A low-cost aoa-tdoa approach for blind geolocation in multipaths context. *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 686 – 690, August 2010.

- [FC09] A. Ferréol and P. Chevalier. High resolution direction finding: From performance toward antenna array optimization - the mono-source case. *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 1973 – 1977, August 2009.
- [FCT00] A. Ferréol and M. Chenu-Tournier. Space-frequency direction finding in wideband and multi-path contexts. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 42:3113 – 3116, June 2000.
- [FDL14] A. Ferréol, C. Delestre, and P. Larzabal. DoA estimation performances of multi-parametric MUSIC in presence of modeling errors – case of coherent multi-paths. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 2247 – 2251, May 2014.
- [FLV08] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. Performance prediction of maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of modeling errors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(10), October 2008.
- [FM] A. Ferréol and P. Morgand. Procédé de localisation AoA TDoA multi-émetteurs et multi-trajets comprenant un sous procédé de synchronisation et d'égalisation des stations de réception (réf. 0708219).
- [Gan59] F. Gantmacher. The theory of matrices. *Chelsea*, 1 - 2, 1959.
- [GB95] P. Gounon and S. Bozinoski. High resolution spatio-temporal analysis by an active array. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 5:3575 – 3578, May 1995.
- [Gez07] S. Gezici. A survey on wireless position estimation. *Wireless Personal Communications*, 44(3):263 – 282, October 2007.
- [GG05] F. Gustafsson and F. Gunnarsson. Mobile positioning using wireless networks: Possibilities and fundamental limitations based on available wireless network measurements. *IEEE Signal Processing Magazine*, 22(2):41 – 53, June 2005.
- [Gre94] Y. Grenier. Wideband source location through frequency-dependent modeling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(2):1087 – 1096, May 1994.
- [HLM<sup>+</sup>13] W. Hachem, P. Loubaton, X. Mestre, J. Najim, and P. Vallet. A subspace estimator for fixed rank perturbations of large random matrices. *Elsevier Journal of Multivariate Analysis*, 114:427 – 447, February 2013.
- [Jaf88] A. G. Jaffer. Maximum likelihood direction finding of stochastic sources: A separable solution. *IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 5:2893 – 2896, April 1988.
- [KFP92] H. Krim, P. Forster, and J.G. Proakis. Operator approach to performance analysis of root-music and root-min-norm. *IEEE Signal Processing Society*, 40(7):1687 – 1696, July 1992.
- [KS04] R. J. Kozick and B. M. Sadler. Source location with distributed sensor arrays and partial spatial coherence. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(3):601 – 616, 2004.
- [Lau86] P. Laurent. Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulses (amp). *IEEE Transactions on Communications*, 34(2):150 – 160, February 1986.
- [LDB107] H. Liu, H. Darabi, P. Banerjee, and J. Liu. Survey of wireless indoor positioning techniques and systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 37(6):1067 – 1080, November 2007.

- [Lee94] T. S. Lee. Efficient wideband source localization using beamforming invariance technique. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6):1376 – 1387, June 1994.
- [Mar98] S. Marcos. Les méthodes à haute résolution. *Edition Hermes*, 1998.
- [Mes08a] X. Mestre. Improved estimation of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices using their sample estimates. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54(11):5113 – 5129, November 2008.
- [Mes08b] X. Mestre. On the asymptotic behavior of the sample estimates of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(11):5353 – 5368, November 2008.
- [ML08] X. Mestre and M. Lagunas. Modified subspace algorithm for DoA estimation with large arrays. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56(2):598 – 614, February 2008.
- [MP67] V. A. Marčenko and L. A. Pastur. Distributions of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1(4):457 – 483, April 1967.
- [Mui80] R. Muirhead. Developments in eigenvalue estimation. *A. K. Gupta, Ed. Boston, MA: Reidel*, 5:277 – 288, 1980. Chapter: Advances in Multivariate Statistical Analysis.
- [ON10] M. Oispuu and U. Nickel. 3d passive source localization by a multi-array network: Noncoherent vs. coherent. *International ITG Workshop Smart Antennas (WSA)*, pages 300 – 305, 2010.
- [Par98] B. N. Parlett. The symmetric eigenvalue problem. *SIAM, Classics in Applied Mathematics*, 1998.
- [PDBSJ92] K. R. Pattipati, S. Deb, Y. Bar-Shalom, and R. B. Washburn Jr. A new relaxation algorithm and passive sensor data association. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(2):198 – 213, February 1992.
- [PJ91] M. A. Pallas and G. Jourdain. Active high resolution time delay estimation for large BT signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(4):781 – 787, April 1991.
- [PNMG08] M. Porreta, P. Nepa, G. Manara, and F. Filippo Giannetti. Location, location, location. *IEEE Vehicular Technology Magazine*, 3(2):20 – 29, June 2008.
- [Rao45] C. R. Rao. Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 37:81 – 91, 1945.
- [Ray77] J. W. S. Rayleigh. The theory of sound. *Chelsea*, 1, 1877.
- [Sch86] R.-O. Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(3):276 – 280, March 1986.
- [Sil95] J. W. Silverstein. Strong convergence of the empirical distribution of eigenvalues of large dimensional random matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 55(2):331 – 339, November 1995.
- [SN89] P. Stoica and A. Nehorai. MUSIC, maximum likelihood, and cramer-rao bound. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 37(5):720 – 741, May 1989.
- [SNS95] P. Stoica, A. Nehorai, and T. Söderström. Decentralized array processing using the MODE algorithm. *Circuits, Systemes, Signal Processing*, 14(1):17 – 38, October 1995.
- [Spu00] C. E. Spurgeon. Ethernet: The definitive guide. *O’Reilly Media, Inc.*, pages 142 – 148, 2000. Chapter 10 – Fast Ethernet Twisted-Pair Media System (100BASE-TX).

- [SS89] P. Stoica and T. Söderström. On reparametrization of loss functions used in estimation and the invariance principle. *Signal Processing, Elsevier*, 17(4):383 – 387, August 1989.
- [SS90a] P. Stoica and K. C. Sharman. Maximum likelihood methods for direction of arrival estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38(7):1132 – 1143, July 1990.
- [SS90b] P. Stoica and K. C. Sharman. Novel eigenanalysis method for direction estimation. *IEEE Proceeding*, 137(1):19 – 26, February 1990.
- [Sta47] R. G. Stansfield. Statistical theory of DF fixing. *Journal of the Institution of Electrical Engineers – Part IIIA: Radiocommunication*, 94(15):762 – 770, March - April 1947.
- [Sti94] T. J. Stieltjes. Recherches sur les fractions continues. *Annales de la Faculté des sciences de Tououse : Mathématiques*, 4(1):1 – 35, 1894. 6ème série publié en 1995.
- [Tre02] H. L. Van Trees. Optimum array processing. *Edition Wiley, Detection, Estimation, and Modulation Theory-4*, 2002.
- [Vaa00] A. Wan Der Vaart. Asymptotic statistics. *Cambridge University Press*, 2000.
- [VB88] B. D. Van Veen and K. M. Buckley. Beamforming: A versatile approche to spatial filtering. *IEEE ASSP Magazine*, 5(2):4 – 24, April 1988.
- [VLM12] P. Vallet, P. Loubaton, and X. Mestre. Improved subspace estimation for multivariate observations of high dimension: The deterministic signals case. *IEEE Transactions on Information Theory*, 58(2):1043 – 1068, February 2012.
- [VML15] P. Vallet, X. Mestre, and P. Loubaton. Performance analysis of an improved MUSIC DoA estimator. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(23):6407 – 6422, August 2015.
- [VOK91] M. Viberg, B. Ottersten, and T. Kailath. Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(11):2436 – 2449, November 1991.
- [Was04] L. Wasserman. All of statistics: A concise course in statistical inference. *New York, Springer-Verlag*, page 126, September 2004.
- [Wei81] E. Weinstein. Decentralization of the gaussian maximum likelihood estimator and its applications to passive array processing. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 29(5):945 – 951, October 1981.
- [Wei04] A. J. Weiss. Direct position determination of narrowband radio frequency transmitters. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(5):513 – 516, May 2004.
- [wif09] Wi-Fi CERTIFIED n: Longer-range, faster-throughput, multimedia-grade Wi-Fi networks. Technical report, Wi-Fi Alliance, 2009.
- [wif13] IEEE 802.11ac: What does it mean for test? Technical report, LitePoint, 2013.
- [Wig55] E. P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *The Annals of Mathematics*, 62(3):548 – 564, November 1955.
- [Wig58] E. P. Wigner. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Annals of Mathematics*, 67(2):325 – 327, March 1958.

- [Wis28] J. Wishart. The generalised product moment distribution in sample from a normal multivariate population. *Biometrika*, 20A(1/2):32 – 52, July 1928.
- [WK83] M. Wax and T. Kailath. Optimum localization of multiple sources by passive arrays. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 31(5):1210 – 1217, October 1983.
- [WK85a] H. Wang and M. Kaveh. Coherent signal-subspace processing for the detection and estimation of angle of arrival of multiple wide-band sources. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(4):823 – 831, August 1985.
- [WK85b] M. Wax and T. Kailath. Decentralized processing in sensor arrays. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 33(5):1123 – 1129, October 1985.



## Résumé

Le travail présenté dans ce document concerne la géolocalisation de sources émettrices non coopératives à l'aide de stations séparées. Les méthodes actuellement utilisées combinent les estimations de certains paramètres effectuées sur des antennes distantes pour remonter à la localisation des sources. Ce principe même de 2 étapes d'estimation en cascade souffre entre autres d'ambiguïtés et de sous optimalité. Notre travail tente de promouvoir l'utilisation de méthodes en 1 étape effectuant directement l'estimation en exploitant simultanément tous les signaux de toutes les stations simultanément. Il s'agit d'effectuer une estimation centralisée à partir des observations de l'antenne globale, et non plus d'estimations réparties sur les stations séparées puis combinées dans une seconde étape. Certaines méthodes en 1 étape, DPD et LOST, sont déjà présentes dans la littérature. D'autres sont introduites dans ce document, notamment LOST-FIND qui est un raffinement de la méthode LOST exploitant totalement la structure spatiotemporelle de l'observation globale sur l'antenne. Les récents résultats obtenus en théorie des grandes matrices aléatoires sont aussi exploités pour améliorer les algorithmes à base de sous espace ainsi proposés. L'inconvénient de travailler sur une très grande antenne est l'effet large bande qui apparaît. Nous montrons l'influence de l'effet large bande résiduel sur le biais pour lequel nous donnons une expression analytique fort utile pour définir les paramètres des estimateurs utilisés. Afin de s'affranchir de ce biais une nouvelle méthode TARGET, intrinsèquement large bande est proposée. Elle repose sur la déficience de rang d'une matrice de synchronisation utilisée à cet effet. De nombreuses considérations opérationnelles sont étudiées : compression des signaux transmis pour l'estimation centralisée, diagramme de rayonnement de l'antenne et diagramme d'ambiguïté des méthodes proposées, simulations intensives sous des scénarii opérationnels, validation des algorithmes proposés sur des signaux réels. Quelques perspectives de recherche sont fournies.

**Mots-clés :** Géolocalisation, Performances, Méthodes distribuées, Méthodes centralisées.

## Abstract

The work presented in this document concerns the geolocalization techniques of non cooperative sources using separated stations. The classical methods combine several parameters estimated on each antenna array to estimate the sources positions. The principle of two consecutive estimations suffers among other of ambiguities and sub optimality. Our work attempts to promote the use of 1 step methods which directly estimate the sources position from the observations of the global array. Some 1 step methods as DPD and LOST, are already present in the literature. Others are introduced in this document, such as LOST-FIND which is a refinement of the method LOST and fully exploiting the spatiotemporal structure of the global observation of the antenna. Recent results of random matrix theory in the large dimensional regime are also exploited to improve the proposed algorithms based on subspace techniques. Working on a very large antenna introduces a drawback: the broadband effect. We show the influence of the residual broadband effect on the bias and we give its analytic expression useful to define the used estimators parameters. To overcome this bias a new method inherently broadband called TARGET is proposed. It is based on the rank deficiency of a synchronization matrix used for that purpose. Many operational considerations are studied: compression of the transmitted signals for the central estimation, the antenna radiation pattern and ambiguity diagram of the proposed methods, intensive simulations in operational scenarios, validation of the proposed algorithms on real signals. Finally, some research perspectives are provided.

**Keys words:** Géolocalization, Performance, Distributed methods, Centralized methods.