HAL
open science

Comportement mécanique de tissus à voiles, en fibres synthétiques, sous sollicitations biaxiales et déformation finie

Wassim Dib

To cite this version:

Wassim Dib. Comportement mécanique de tissus à voiles, en fibres synthétiques, sous sollicitations biaxiales et déformation finie. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Grenoble, 2014. Français. NNT : 2014GRENI006 . tel-01281128

HAL Id: tel-01281128

https://theses.hal.science/tel-01281128

Submitted on 1 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Matériaux, Mécanique, Génie civil, Electrochimie**
Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

DIB Wassim

Thèse dirigée par **Ali Tourabi** et **Guilhem BLES**

Préparée au sein de **3SR (Grenoble) et au LBMS (Brest)**
dans **l'École Doctorale : Ingénierie – matériaux Mécanique Énergétique Environnement Procédé Production**

Comportement mécanique de tissus à voiles, en fibres synthétiques, sous sollicitations biaxiales et déformation finie

Thèse soutenue publiquement le 11 mars 2014,
devant le jury composé de :

Monsieur, Laurent, ORGEAS Directeur de Recherche au (CNRS)	Président
Monsieur, Philippe, BOISSE Professeur (INSA de Lyon)	Rapporteur
Monsieur, Peter, DAVIES Ingénieur de recherche (HDR) IFREMER	Rapporteur
Monsieur, Pascal CASARI Professeur (IUT de Saint Nazaire)	Examinateur
Monsieur, Stéphane, FAUVE Ingénieur GROUP INCIDENCES	Invité
Monsieur, Guilhem, BLES Maître de Conférences ENSTA - Brest	Co-directeur de thèse
Monsieur, Ali, TOURABI Maître de Conférences (HDR) U.J.F.	Directeur de thèse

A mes parents

A mes frères

A ma sœur et sa famille

A ma femme Hanaa

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse **Ali Tourabi** et **Guilhem BLES** pour m'avoir guidé, encouragé et conseillé ; ils n'ont ménagé aucun effort pour la bonne réussite de ce travail et ils m'ont apporté une compréhension plus approfondie des divers aspects du sujet.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Laurent ORGEAS**, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse et pour l'intérêt qu'il a manifesté à mon travail.

Je suis très reconnaissant à Messieurs **Philippe BOISSE** et **Peter Davies**, qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs sur mon mémoire de thèse et je les remercie vivement pour le travail qu'ils ont fourni pour l'évaluation scientifique de mon travail.

Monsieur **Pascal CASARI** et Monsieur **Stéphane FAUVE** m'ont fait l'honneur de participer à ma soutenance; je les en remercie profondément, ainsi que pour leur intérêt à ce travail.

J'aimerais adresser un remerciement particulier à Monsieur **Didier IMBAULT**, pour son aide, sa gentillesse et son soutien tout au long de ces années.

Je remercie également Monsieur **Antoine MIRAS,** pour sa gentillesse, sa disponibilité et son soutien.

Un grand merci à Madame **Mayssa SHASH** pour son soutien moral et sa gentillesse.

Je remercie tous mes Amis, **Murad Abuaisha**, **Mahmoud Ibrahim**, **Jamal Barafi**, **Senan et sa femme**, **Shadi Abras**, **Widad**, **Elie**, **Mario Ibrahim**, **Hashem Abdou**, **Bui Huu Phuoc**, **Harthong Barthélémy** ; pour leur sincère amitié, confiance et à qui je dois ma reconnaissance et mon attachement.

Table des matières

I Notion préliminaires **5**

1 Etude Bibliographique **7**
1.1 Notions et terminologies liées à l'industrie textile et à la voile 7
1.1.1 Désignation des orientations dans le plan du matériau tissé 7
1.1.2 Embuvage 7
1.1.3 Le tissage 8
1.1.4 Unités de mesure de la masse linéique des fils et de la masse surfacique des matériaux tissés 8
1.2 Matériaux pour les voiles 9
1.2.1 Les matériaux tissés 9
1.2.2 Les laminés à fibres parallèles 9
1.2.3 Les laminés à fibres orientées 10
1.3 Les fibres utilisées pour la confection des matériaux pour les voiles 11
1.4 Comportement mécanique viscoélastique 12
1.4.1 Comportement viscoélastique linéaire 12
1.4.2 Comportement viscoélastique non linéaire 16
1.5 Caractérisation et modélisation du comportement mécanique des fibres et des matériaux tissés 17
1.5.1 Comportement mécanique des fibres polymères 17
1.5.2 Comportement mécanique d'une sangle tissée en PA66 19
1.5.3 Comportement mécanique des matériaux tissés 24

2 Aspects théoriques préliminaires **31**
2.1 Hypothèse de la membrane 31
2.2 Cinématique de la membrane 32
2.3 Déformation et taux de déformation 35
2.3.1 Cas du matériau tissé 36
2.3.2 Paramètres de déformation du matériau tissé 37
2.4 Définition de la contrainte massique 39
2.5 Espace de représentation d'un tenseur 2D du second ordre symétrique 42
2.6 Dérivée objective de Green-Naghdi 45

II Approche expérimentale **47**

3 Techniques expérimentales **49**
3.1 Machine d'essai 49
3.2 Attaches spécifiques articulées et forme de l'éprouvette 50
3.3 Condition des essais 50
3.4 Pilotage des essais et acquisition des données 51

3.5 Contrainte et déformation lors d'un essai traction 52
3.5.1 Système de suivi de cibles par caméra CCD 52
3.5.2 Elongations et déformations dans les sens axial et transversal 54
3.5.3 Traction hors axes 54
3.5.4 Contrainte axial appliquée à l'éprouvette 56
3.6 Essai de traction à taux de déformation imposé 57
3.6.1 Traction à taux de déformation constant 57
3.6.2 Traction à vitesse de déplacement constante 58
3.7 Notion de base équivalente 59
3.8 Matériaux testés et numérotation des éprouvettes 60
3.8.1 Matériaux étudiés 60
3.8.2 Numérotation des éprouvettes 60
3.8.3 Propriétés géométriques et massiques de la toile de Kevlar X15 60
3.8.4 Propriétés géométriques et massiques du Dacron SF HTP Plus 62

4 Résultats d'essais préliminaires 67
4.1 Résultats d'essais sur le Dacron SF HTM simple 67
4.1.1 Essai de traction monotone à vitesse de déplacement constante dans le sens trame 67
4.1.2 Validation de la mesure de déformation par caméra CCD 69
4.1.3 Essais de traction monotone à vitesse de déformation constant dans le sens de chaîne 70
4.1.4 Commentaires sur les résultats du Dacron simple : 74
4.2 Résultat des essais sur la toile laminée en Kevlar X15 74
4.2.1 Essais de tractions monotones et ondulées contrôlées en force. 74
4.2.2 Essais de traction monotone et ondulée à vitesse de déformation constant. 76
4.2.3 Caractéristiques à la rupture du Kevlar X15 dans le sens trame 83
4.2.4 Caractéristiques à la rupture du Kevlar X15 dans le sens chaîne 84
4.2.5 Commentaires sur les résultats du Kevlar : 84
4.3 Conclusion 85

5 Résultats expérimentaux sur le Dacron SF HTP Plus 87
5.1 Résultats de traction monotone et traction ondulée interrompue par des séquences de fluage 87
5.2 Résultats de tractions monotones à différentes vitesse de déformation 88
5.3 Résultats de tractions monotones interrompues par des séquences de relaxation . 91
5.4 Résultats de tractions ondulées 94
5.4.1 Traction ondulée avec des cycles décharge-charge 94
5.4.2 Traction ondulée en chargement sinusoïdale en petite déformation 101
5.4.3 Résultats de traction ondulée avec reptation des cycles 104
5.5 Résultats de traction hors axes 105
5.5.1 Traction monotones hors axes à différente orientations 105
5.5.2 Traction ondulée avec des séquences de relaxation 109
5.5.3 Traction ondulée sinusoïdale 111
5.6 Analyse des Résultats 112
5.7 Commentaire sur les résultats du Dacron SF HTP Plus. 121
5.8 Conclusion 122

III Approche théorique et modélisation 123

6 Modélisation du comportement des matériaux tissés et des toiles 125
6.1 Hypothèse de superposition des contraintes 125
6.1.1 Cas d'un matériau tissé sans enduction 125
6.1.2 Cas d'un matériau tissé avec enduction 127
6.1.3 Généralisation de l'hypothèse de superposition 127
6.2 Expression du tenseur contrainte massique du Dacron SF HTP Plus 129
6.3 Expression du tenseur contrainte massique de la toile de Kevlar X15 131
6.4 Conclusion 132

7 Modélisation du comportement des fils et de leur interaction 133
7.1 Hypothèse fondamentale de superposition 133
7.2 Fil de comportement élastique non linéaire 134
7.3 Fil de comportement viscoélastique à élasticité retardée non-linéaire. 135
7.4 Fil de comportement viscoélastique à comportement retardé irréversible. 136
7.5 Critère d'inversion 137
7.6 Comportement élastique non linéaire lors d'un cycle décharge-charge. 140
7.7 Modélisation de l'interaction entre deux fils en un point de liage 145
7.8 Application à la modélisation d'une sangle en PA66 146
7.8.1 Identification des paramètres de la contrainte élastique non linéaire en première charge 146
7.8.2 Identification des paramètres de la composante visqueuse non-Newtonienne :147
7.8.3 Identification des paramètres de la composante élastique non linéaire au cours d'un cycle décharge-charge 149
7.8.4 Résultats de modélisation du comportement des sangles 149
7.9 Conclusion 155

8 Modélisation bidimensionnelle du comportement de l'enduction 157
8.1 Démarche adoptée pour décrire le comportement de l'enduction 157
8.2 Loi élastique de Hooke 2D 159
8.3 Loi élastique non linéaire à coefficient de Poisson constant 160
8.4 Loi irréversible radiale 163
8.5 Loi irréversible octo-directionnelle 167
8.5.1 Principe de projection 167
8.5.2 Définition des directions privilégiées 170
8.5.3 Définition de la loi octo-directionnelle 171
8.6 Loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope linéaire 175
8.7 Loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope non linéaire 177
8.8 Loi viscoélastique à comportement retardé irréversible. 182
8.9 Conclusion 183

IV Simulation Numérique 187

9 Simulation par Eléments Finis du comportement du Dacron 189
9.1 Modèle éléments finis d'une éprouvette de traction 189
9.2 Validation de l'implémentation de la loi de comportement 189
9.2.1 Essai de traction biais 190
9.2.2 Essai de traction hors axes à 30° 191
9.3 Simulations numériques 195

9.4 Conclusion 196

10 Modélisation du comportement du Dacron 199
10.1 Hypothèses de modélisation du Dacron SF HTP plus 199
10.2 Identification des paramètres du modèle H1 199
10.2.1 Identification du comportement irréversible de l'enduction 200
10.2.2 Identification des modules (K_1, μ_1), dans la zone α 202
10.2.3 Identification des modules (K_c, μ_c), dans la zone β 204
10.2.4 Identification des modules (K_2, μ_2), dans la zone cyclique 205
10.2.5 Identification des déformations au coude ε_m^* et Q_ε^* 207
10.3 Identification du comportement des fils de chaîne et de trame 208
10.3.1 Identification des paramètres de la contribution réversible 209
10.3.2 Identification des paramètres de la contribution visqueuse 210
10.3.3 Identification du comportement de l'interaction des fils 213
10.4 Identification des paramètres du modèle H2 214
10.4.1 Identification du comportement de l'enduction 214
10.4.2 Identification du comportement des fils de chaîne et de trame 217
10.4.3 Identification du comportement de l'interaction des fils 217
10.5 Identification des paramètres du modèle H3 218
10.6 Remarques et conclusions 219

11 Résultats de simulation du comportement du Dacron 221
11.1 Résultats de simulation du modèle H1 221
11.2 Résultats de simulation du modèle H2 226
11.3 Résultats de simulation du modèle H3 avec les paramètres provisoires 230
11.4 Résultats de simulation du modèle H3 avec les paramètres adoptés 237
11.5 Remarques et conclusions 238

12 Simulation de l'essai de traction biaxiale 243
12.1 Formes des éprouvettes adoptées 243
12.2 Paramètres de simulation et chargements 244
12.3 Erreurs d'homogénéité de la contrainte et de la déformation 245
12.3.1 paramètres d'erreur d'homogénéité de la contrainte 245
12.3.2 paramètres d'erreur d'homogénéité de la déformation 245
12.4 Résultats de simulation de l'éprouvette 1 246
12.5 Résultats de simulation de l'éprouvette 2 251
12.6 Résultats de simulation de l'éprouvette 3 254
12.7 Remarques et conclusions 255

Conclusion générale 256

Annexes 262

A Comportement élastique non linéaire lors d'un cycle décharge-charge 265

B Paramètres de modélisation du Dacro SF HTP plus 269
B.1 Paramètres du modèle H1 269
B.1.1 Paramètres de l'enduction 269
B.1.2 Paramètres des fils 269

B.1.3 Paramètres de l'interaction entre les fils 269
B.2 Paramètres du modèle H2 270
B.2.1 Paramètres de l'enduction 270
B.2.2 Paramètres des fils 270
B.2.3 Paramètres de l'interaction entre les fils 271
B.3 Paramètres du modèle H3 272
B.3.1 Paramètres de l'enduction 272
B.3.2 Paramètres des fils 272
B.3.3 Paramètres de l'interaction entre les fils 273
B.4 Paramètres finaux du modèle H3 273
B.4.1 Paramètres de l'enduction 273
B.4.2 Paramètres des fils 274
B.4.3 Paramètres de l'interaction entre les fils 275

C Résultats de modélisation 277
C.1 Modélisation de l'hypothèse H1 277
C.2 Modélisation de l'hypothèse H2 278
C.3 Modélisation de l'hypothèse H3 avec les paramètres provisoires 281
C.4 Modélisation de l'hypothèse H3 avec les paramètres adoptés 287

bibliographie 299

Notation

Notation générale

$\vec{u} = u^i\ \vec{e}_i = u_i\ \vec{e}^i$	Vecteur $\vec{u}$ de composantes u^i dans la base $\vec{e}_i$ et u_i dans la base duale $\vec{e}^i$ ($\vec{e}_i.\vec{e}^j = \delta^i_j$).
$\vec{u}.\vec{v}$	Produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$\lvert\vec{u}\rvert$	Norme du vecteur $\vec{u}$.
$\vec{u} \otimes \vec{v}$	Produit tensoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = A^{ij}\ \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	Tenseur d'ordre 2 $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$, de composantes A^{ij} dans la base tensorielle. $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$.
$\underset{\approx}{\boldsymbol{A}}$	Tenseur d'ordre 4.
$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^T$	Transposée du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$.
$\overline{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$	Déviateur du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$.
$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta^i_j$	Symbole de Kronecker.
$\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\right)$	Trace du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$.
$\left\lvert\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\right\rvert = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^t\right)}$	Norme du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$.
$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\vec{u} = A^{ij}\ u_j\ \vec{e}_1$	Produit contracté du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ et du vecteur $\vec{u}$.
$I_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$	Premier invariant du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$.
$II_{\overline{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}}$	Deuxième invariant du déviateur $\overline{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$.
$Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$	Le rayon dans le plan déviatoire du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$.

Paramètres physiques du matériau

ρ	Masse volumique du matériau $[Kg/m^3]$.
$\rho_e, \rho_c, \rho_t, \rho_f$	Masse volumique de l'enduction, des fils de chaîne, de trame et de l'ensemble des fils de chaîne et de trame ($\rho_f = \rho_c + \rho_t$) $[Kg/m^3]$.
$\overline{\rho}$	Masse surfacique du matériau $[Kg/m^2]$.
$\overline{\rho}_e, \overline{\rho}_c, \overline{\rho}_t, \overline{\rho}_f$	Masse surfacique de l'enduction, des fils de chaîne, de trame et de l'ensemble des fils de chaîne et de trame ($\overline{\rho}_f = \overline{\rho}_c + \overline{\rho}_t$) $[Kg/m^2]$.
$\overline{\overline{\rho}}$	Masse linéique d'un fil $[Kg/m]$.
n_c, n_t	Nombre de fils de chaîne et de trame par mètre $[fils/m]$.

Paramètres mécaniques

$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_{ij}$	Tenseur contrainte de Cauchy et ses composantes [Pa].
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_c, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_t, \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_e$	Contrainte de Cauchy sur les fils de chaîne, de trame et sur l'enduction [Pa].
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}, \Sigma_{ij}$	Tenseur contrainte massique et ses composantes [N.m/Kg ou J/Kg].
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_c, \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_t, \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_e$	Contrainte massique sur les fils de chaîne, de trame et sur l'enduction [N.m/Kg ou J/Kg].
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_{ct}$	Contrainte massique d'interaction, aux points de liage, des fils de chaîne et des fils de trame [N.m/Kg ou J/Kg].
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}}, \tau_{ij}$	Tenseur contrainte de Kirchhoff et ses composantes [Pa].

Paramètres cinématiques

$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}, F_{ij}$	Tenseur gradient de la transformation et ses composantes [s.u].
$det(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}})$	Déterminant de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ [s.u].
$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_c, \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t, \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_e$	Tenseur gradient de la transformation sur la nappe de fils de chaîne, et sur la nappe de l'enduction [s.u].
$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$	Tenseur taux de déformation $[s^{-1}]$
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}$	Tenseur taux de rotation $[rd/s]$
$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \ln(\underset{\sim}{\boldsymbol{V}})$	Tenseur de déformation de Hencky gauche [s.u].
γ	Angle de distorsion.
α	Angle entre les fils de chaîne et les fils de trame.
$\varepsilon\gamma$	Déformation de distorsion.

Paramètres géométriques

S, s	Sections initiale et actuelle $[m^2]$
V, v	Volumes initial et actuel $[m^3]$
L, l	Longueurs initiale et actuelle $[m]$
α, α_0	Angle entre les fils d'une nappe de matériau tissé ou d'une toile, respectivement dans la configuration initiale et dans la configuration déformée $[rd]$.

Introduction

Motivation de l'étude sur les matériaux pour les voiles

L'étude porte sur la caractérisation et la modélisation du comportement mécanique de matériaux tissés et de toiles laminées à base de fibres synthétiques, comme le polyester ou le Kevlar. Le comportement mécanique de ces fibres est caractérisé, en premier lieu, par une élasticité non linéaire et une forte contribution visqueuse non linéaire, au sens de Boltzmann. De plus, elles possèdent un caractère irréversible indépendant du temps, non négligeable et une anisotropie particulière, avec une rigidité faible en cisaillement. Ces matériaux sont très prisés pour la construction des voiles de navires dans le domaine de la plaisance et de la compétition (fig. 1-a) ; et sont de très bons candidats pour la fabrication de kites géants pour la propulsion auxiliaire de navire de commerce (porte-containers par exemple), en vue de réduire leur consommation de carburant (fig. 1-b).

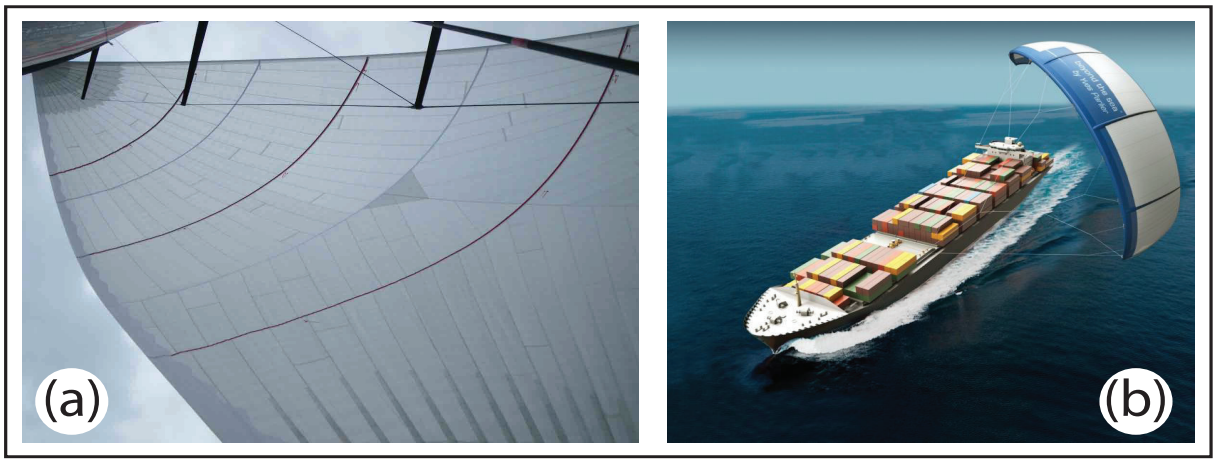


Fig. 1 – (a) Voile Gennaker pour monocoque (source : voilerie INCIDENCES Brest), (b) Kite géant pour navire porte-containers (source : beyond the sea® - Yves Parlier).

Trois arguments majeurs motivent et justifient l'étude du comportement mécanique de ces matériaux :

1. Le profil aérodynamique des voiles est étroitement lié à leurs déformations sous l'effet de chargements cycliques répétés. L'évaluation des performances des voiles et les études des interactions fluide-structure, entre la voile et le vent, nécessitent une modélisation fine du comportement des toiles ([26], [56], [84], [101], [102], [103], [123], [124])

2. Les techniques de fabrication des voiles ont aujourd'hui évolué. Ainsi, les processus de confection de la toile et de la voile peuvent être fusionnés et la voile est réalisée à la demande, sur mesure, à l'aide de toiles laminées à fibres orientées. Les fils sont alors disposés sur la voile et orientés selon les directions principales des contraintes (cf. chapitre 1). La

prévision du comportement de la voile et son optimisation deviennent alors des enjeux essentiels.

3. Des applications comme la conception de Kites géants pour cargos, posent aujourd'hui des problèmes liés à la performance mécanique des toiles et à la nécessité de disposer d'outils d'aide à la conception. En effet, si on passe d'un Kite actuellement disponible (typiquement $10m^2$) à un Kite géant (par exemple $1000m^2$), par une simple homothétie, de rapport k, les forces aérodynamiques, qui sont proportionnelles à la surface, évolueront en k^2, tandis que le poids évoluera en k^3. Ainsi, en allant vers les grandes tailles de kite, le poids sera toujours gagnant sur la poussée aérodynamique, et l'engin ne volera plus. Si maintenant, on considère une épaisseur de toile, qui n'augmente pas lorsque le facteur d'homothétie k augmente afin de favoriser l'aptitude au vol et de réduire le poids de la construction, les contraintes de service augmentent alors de façon draconienne, dans la toile, avec le facteur k. Ainsi, on dépasse largement les limites en contrainte généralement admises, pour ce type d'application ([34], [67]).

Objectifs de l'étude dans le cadre de la thèse

Ces dernières années, l'équipe de recherche a particulièrement mis l'accent sur les approches phénoménologiques macroscopiques, qui considèrent le matériau tissé comme un milieu continu homogène. Ainsi, un modèle élastoviscoplastique isotrope en grandes déformations a été proposé et validé ([31], [32], [33]). L'objectif essentiel de l'étude consiste actuellement à trouver de nouvelles voies de développement, suivant deux axes principaux : (i) Mettre l'accent sur les comportements aux échelles pertinentes ; (ii) Etendre l'étude à la description de l'anisotropie typique de ces matériaux. Dans cette optique, il paraît nécessaire de développer une approche de modélisation, qui permet une prise en compte du comportement spécifique des différentes composantes du matériau (fils, enduction) et à la prise en compte de leurs interactions.

Ainsi, dans le cadre de la thèse, notre objectif essentiel est de mettre en œuvre et d'évaluer une approche théorique originale, pour décrire le comportement biaxial des matériaux tissés et des toiles destinés à la voile, en chargements cycliques complexes ; avec une prise en compte des déformations finies, des effets visqueux non linéaires, de l'irréversibilité indépendante du temps et de l'anisotropie. De plus, cette mise en œuvre sera effectuée dans un code d'Eléments Finis, afin de produire un outil opérationnel pour le calcul des voiles et des kites. Cet objectif nécessite donc des développements au niveau théorique, expérimental et numérique et constitue un challenge. Afin d'avoir une meilleure chance d'atteindre notre objectif, nous avons choisi d'étudier le comportement du DACRON SF HTP plus du fabricant Dimension-Polyant, fourni par la voilerie INCIDENCES à Brest ; c'est un matériau tissé de structure relativement classique, muni d'une enduction (cf. chapitre 3). Néanmoins, les objectifs futurs, en termes d'application intéressante, concernent naturellement les toiles en fibres synthétiques à haut module, comme le Kevlar (cf. chapitre 3).

Présentation du mémoire

Le mémoire est composé de quatre parties. La première partie concerne l'étude bibliographique et l'exposé de quelques notions préliminaires. Dans la deuxième partie nous présentons les résultats expérimentaux obtenus. L'approche théorique est décrite dans la troisième partie. La quatrième partie est destinée à la simulation numérique du comportement.

Première partie

Notion préliminaires

Chapitre 1

Etude Bibliographique

1.1 Notions et terminologies liées à l'industrie textile et à la voile

1.1.1 Désignation des orientations dans le plan du matériau tissé

La figure 1.1 donne la désignation des orientations dans le plan du matériau tissé, utilisée dans le domaine de la voile. La direction du tissage, dans le sens du rouleau produit par le métier à tisser, est désignée par la direction Chaîne (Warp or long direction). La direction transversale est appelée direction Trame (Fill or cross direction). La direction Biais (Bias direction) est orientée à 45° de la direction chaîne et de la direction trame.

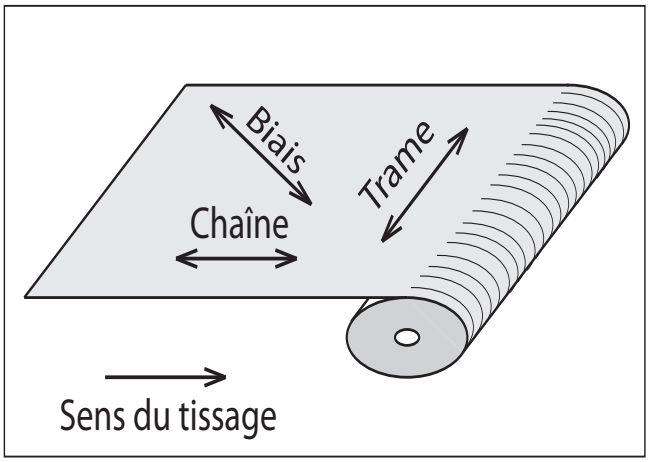


Fig. 1.1 – Orientation dans le plan du matériau tissé.

1.1.2 Embuvage

L'embuvage est directement lié à la technique du tissage. Sur le métier à tisser, à chaque pas du tissage, la navette insère un fil de trame entre les fils de chaine (fig. 1.2). Le fil de trame est tassé après chaque passage de la navette, grâce au battant support de peigne. Par conséquent le fil de chaîne oscille autour du fil de trame qui reste droit (fig. 1.3) : c'est le phénomène d'embuvage (Shrinkage, crimp). Ce phénomène exprime cette oscillation, qui a pour conséquence une variation de longueur du fil de chaîne avant et après tissage. L'embuvage peut être caractérisé par un paramètre $e = \frac{L-\ell}{L}$, qui définit la différence relative entre la longueur du fil de chaîne avant et après le tissage (fig. 1.3).

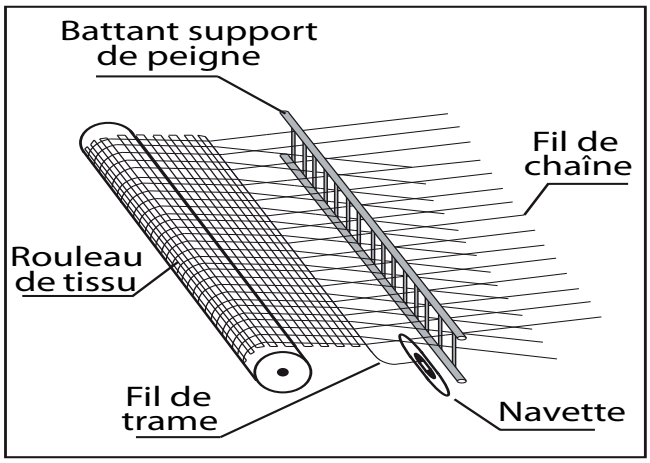


Fig. 1.2 – Principe du métier à tisser.

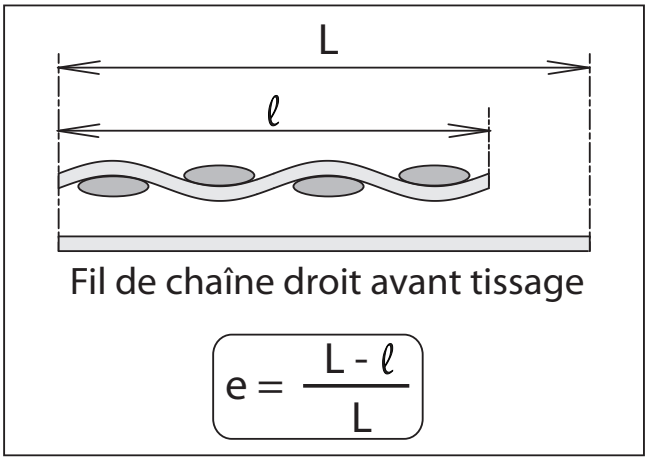


Fig. 1.3 – Définition de l'embuvage d'un matériau tissé.

1.1.3 Le tissage

Le tissage est le résultat du croisement des fils de chaîne et de trame. Les différentes façons de réaliser ce croisement sont appelées armures. Les points du tissu où les fils de chaîne et de trame se croisent sont appelées points de liage. Les trois armures le plus souvent rencontrées sont ([45], [51], [65]) :

- la Toile ou Drap : chaque fil de chaîne passe une fois au-dessus et une fois en dessous de chaque fil de trame (fig. 1.4-a).
- le Serge ou Sergé nxm : un fil de chaîne passe n fois au-dessus et m fois en dessous des fils de trame (fig. 1.4-b).
- le Satin : les points de liage sont dispersés dans le matériau tissé, ce qui permet de réduire l'effet de diagonale que présente le Sergé (fig. 1.4-c).

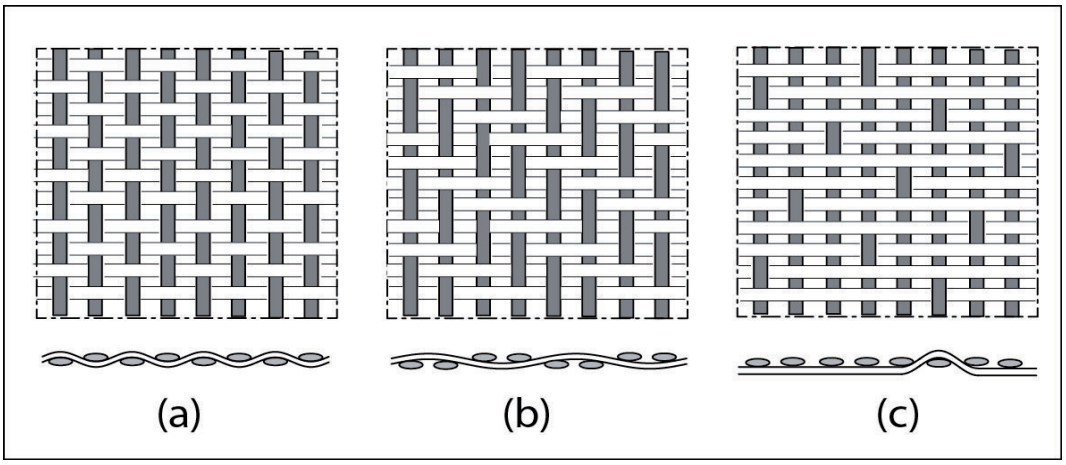


Fig. 1.4 – Les trois armures les plus communes : (a) Toile, (b) Sergé 2x2, (c) Satin.

1.1.4 Unités de mesure de la masse linéique des fils et de la masse surfacique des matériaux tissés

La masse linéique ou *titre* d'une fibre ou d'un fil textile est exprimée en *tex*, tel que [44] [168] :

$$1\ tex = 1\ g/km = 10^{-3}\ g/m \tag{1.1}$$

Des fractions du *tex* sont également utilisées, tel que le *dtex* :

$$1\ dtex = 0.1\ tex = 1\ g/10km = 10^{-4}\ g/m \tag{1.2}$$

Une autre unité est également utilisée pour exprimer la masse linéique, c'est le *denier*, tel que :

$$1 \text{ denier} = 1\ g/9km \tag{1.3}$$

Ce qui conduit à :

$$1\ tex = 9 \text{ deniers} \tag{1.4}$$

L'unité typique pour la mesure de la masse surfacique des matériaux pour les voiles est le *Sailmaker Ounce*, de symbole *smoz*, telle que :

$$1 \text{ smoz} = 42.828\ g/m^2 \tag{1.5}$$

1.2 Matériaux pour les voiles

Plusieurs constructeurs au niveau mondial proposent des matériaux pour la fabrication des voiles. Parmi les plus connus, on peut citer Dimension-Polyant ; mais aussi Bainbridge international, Contender Sailcloth et China Sail Factory.

Il existe trois grandes familles de matériaux pour la confection des voiles : les matériaux tissés, les laminés à fibres parallèles et les laminés à fibres orientées. Les enjeux essentiels, liés aux propriétés de ces matériaux, concernent la légèreté, la raideur, la tenue mécanique, la durabilité aux frottements (frottements des voiles sur les haubans), la durabilité aux pliages répétés et la sensibilité aux rayons ultraviolets.

1.2.1 Les matériaux tissés

Ces matériaux sont réalisés par les techniques traditionnelles de l'industrie textile, à base de fils tissés sur un métier à tisser (fig. 1.5). Ils sont destinés essentiellement pour la plaisance ou pour certaines régates où les facteurs budget et fiabilité sont des priorités. Plusieurs types de fibres peuvent être utilisés pour le tissage. Par ailleurs, ces matériaux peuvent être traités thermiquement après le tissage. Ils peuvent aussi être renforcés et protégés par une enduction en résine (finish, coating ou impregnation en anglais), appliquée après le tissage [72] [73].

1.2.2 Les laminés à fibres parallèles

Les laminés à fibres parallèles sont constitués d'une ou de plusieurs couches de fibres parallèles orientées selon les sens chaîne, trame et/ou selon d'autres orientations dans le plan. Ces couches sont ensuite emprisonnées entre deux films de Mylar (fig. 1.6). Dans certains cas, deux couches de protection additionnelles sont collées sur les faces extérieures du matériau. Ces couches sont généralement constituées d'un tissé en polyester très léger, appelé taffetas [68].

Les laminés à fibres parallèles sont appelés *toiles laminées* ou plus communément *Sandwiches Mylar* ou *Sandwiches Mylar taffetas*, selon que le matériau est doté ou non des deux couches extérieures de protection. Ces matériaux sont essentiellement utilisés pour la compétition ; ils sont confectionnés avec des fibres de bonnes qualités mécaniques. Les constructeurs proposent une large gamme de fibres pour l'élaboration de ces matériaux [70] [71]

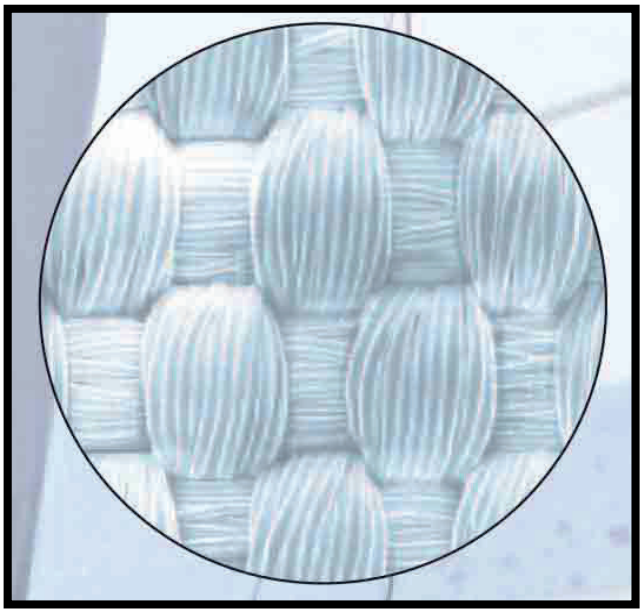


Fig. 1.5 – Matériau tissé [72].

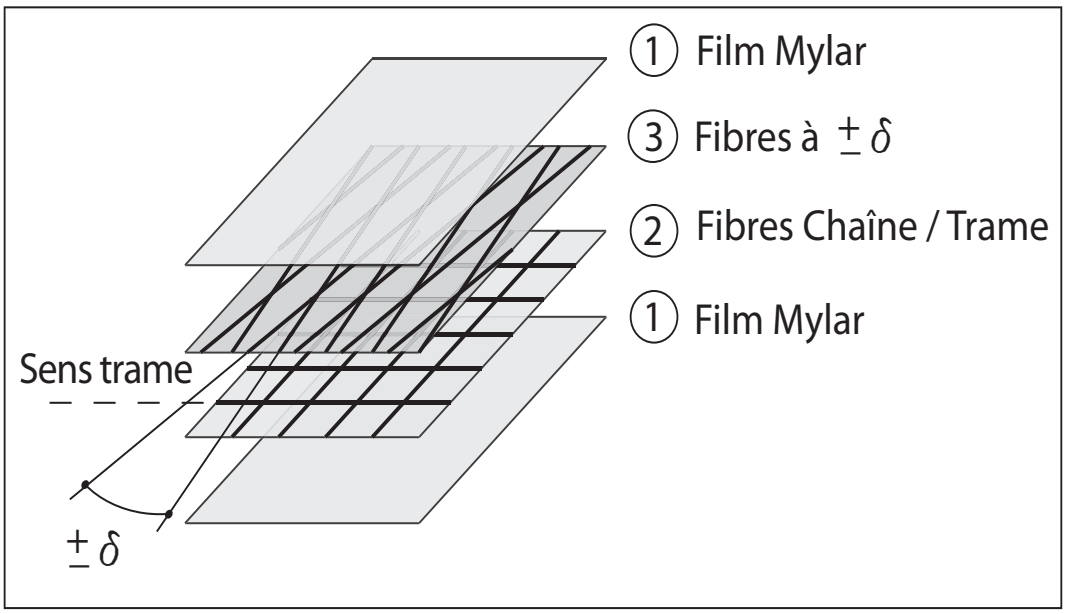


Fig. 1.6 – Laminé à fibres parallèles.

1.2.3 Les laminés à fibres orientées

Comme pour les laminés à fibres parallèles, les laminés à fibres orientées sont essentiellement utilisés pour la compétition. Ces matériaux proposent aujourd'hui la meilleure performance et le meilleur rapport raideur/légèreté.

Dans le cas des laminés à fibres parallèles, la démarche consiste à confectionner les voiles à partir d'une matière première fournie par le constructeur, qui correspond aux rouleaux de toile préalablement fabriqués. Dans le cas des laminés à fibres orientées, il s'agit de confectionner une toile spécifique pour chaque voile. Les processus de confection du matériau et de la voile sont alors fusionnés et la voile est réalisée à la demande, sur mesure. Les fils sont disposés sur la voile et orientés selon les directions principales des contraintes. En un point donné et sur une surface élémentaire donnée de la voile, la quantité de fibres et leur espacement sont déterminés en fonction de l'intensité des contraintes. La voile apparaît alors avec des zones plus au moins

fournies en fibres et des orientations qui ne respectent aucun parallélisme des fibres (fig. 1.7). Les laminés à fibres orientées sont appelés *toiles laminées orientées* ou *membranes*. Comme pour les laminés à fibres parallèles, deux couches de protection additionnelles en taffetas peuvent être collées sur les faces extérieures de la voile.

Fig. 1.7 – Production d'une voile en toile laminée à fibres orientées [69].

1.3 Les fibres utilisées pour la confection des matériaux pour les voiles

Nous donnons dans ce paragraphe les principales fibres utilisées pour la confection des matériaux pour les voiles [90].

La fibre Nylon : Le Nylon est une fibre polymère inventée dans les années 30 par *DuPont de Nemours*. Le nylon est aujourd'hui un nom générique associé aux polyamides. Cette fibre présente beaucoup de qualités : souplesse, légèreté, faible frottement. Néanmoins, sa rigidité relativement faible empêche son usage pour la confection de la *GV* (Grand Voile ou voile principale à l'arrière du mat) ou du *Génois* (voile placée à l'avant du mat). Cette fibre est essentiellement utilisée pour la confection du *Spinnaker* (voile à l'avant du voilier, qu'on hisse lorsque le vent souffle de l'arrière ; allures au portant).

La fibre Polyester : Cette fibre présente une durabilité remarquable, une excellente résistance aux rayons ultraviolets, une bonne résistance au frottement et au pliage répété. Son faible coût ajouté à ces qualités, lui permet d'être parmi les fibres les plus utilisées en voilerie. Néanmoins, sa raideur globale relativement faible conduit à une perte rapide des performances et ne permet pas son utilisation en compétition de haut niveau. Cette fibre est surtout connue par son appellation commerciale, nommée Dacron, du nom du produit initialement proposé par la société DuPont de Nemours, même si aujourd'hui plusieurs fabricants proposent des fibres en polyester. Cette fibre est utilisée essentiellement sous forme de matériaux tissés.

La fibre Aramide : Cette fibre est essentiellement utilisée pour la compétition et la confection de toiles laminées à fibres parallèles ou à fibres orientés. Elle se présente sous une couleur jaune.

Cette fibre a été brevetée et commercialisée par la société Dupont de Nemours dans les années 70, sous le nom de Kevlar. A l'expiration du brevet de *DuPont de Nemours*, des fibres concurrentes sont apparues comme la fibre Twaron, la fibre Technora ou la fibre Black Technora (de couleur noire). Ce type de fibre présente des caractéristiques mécaniques remarquables. Néanmoins, la fibre aramide présente une fragilité au pliage et une résistance aux rayons ultraviolets relativement faible.

La fibre de carbone : C'est une fibre de très hautes rigidité et résistance à la rupture, qui est quasiment insensible aux rayons ultraviolets. La fibre de carbone est souvent classée selon sa rigidité, sa résistance à la rupture et sa ductilité. Une large gamme de fibres de carbone est proposée, qui va d'une fibre fragile et de rigidité très élevée à une fibre plus ductile et plus durable, mais de rigidité et de résistance à la rupture comparables à celles des fibres aramides. Cette fibre est essentiellement utilisée pour la compétition. Elle est souvent associée à d'autres fibres pour la confection de toiles laminées à fibres parallèles ou à fibres orientés.

La fibre Spectra ou Dynema : La fibre Spectra fait partie de la famille des polyéthylènes (UHMWPE : Ultra high molecular weight polyethylene). L'appellation Spectra est une marque de la société Honeywell. Une fibre équivalente au Spectra, la fibre Dyneema est produite par la société *DSM* (Dutch State Mines). Cette fibre allie une très bonne résistance aux pliures, une très bonne résistance aux rayons ultraviolets, équivalentes à celles des fibres Dacron et une raideur élevée, qui la placent juste derrière les fibres de carbone. Néanmoins, cette fibre présente un comportement au fluage non négligeable, qui se traduit par une dégradation assez rapide de la forme des voiles dans le temps. Cette fibre est essentiellement utilisée pour la compétition et la confection de toiles laminées à fibres parallèles ou à fibres orientées.

La fibre Pentex ou PEN : C'est une fibre de haute rigidité qui fait partie de la famille des polyesters, produite par Honeywell. Sa rigidité est supérieure à celle des fibres Dacron et inférieure à celle des fibres aramide. Elle présente une bonne résistance aux rayons ultraviolets. D'un coût légèrement plus élevé que celui des fibres Dacron, La fibre Pentex est une bonne alternative aux fibres polyester classiques, Kevlar ou Spectra. Du fait de son manque de flexibilité la fibre Pentex ne peut pas produire un tissage très serré. Le matériau tissé doit donc être imprégné avec une plus grande quantité de résine, ce qui le rend moins performant. La fibre Pentex est utilisée pour confectionner des matériaux tissés ou des toiles laminées à fibres parallèles.

La fibre Vectran : Cette fibre fait partie de la famille des polyesters de haute performance ; elle est produite par Ticona. Sa rigidité est équivalente à celle des fibres aramides. Elle présente une bonne résistance au frottement, une excellente résistance au pliage répété et une bonne tenue au fluage. Sa résistance aux rayons ultraviolets est moindre que le Dacron ou le Pentex, néanmoins la fibre se stabilise et arrête de perdre ses qualités mécaniques après 400h d'exposition environ, contrairement à la fibre aramide, dont la dégradation est continue tant qu'elle est exposée au soleil. Cette fibre est essentiellement utilisée pour la compétition et la confection de toiles laminées à fibres parallèles ou à fibres orientés.

1.4 Comportement mécanique viscoélastique

1.4.1 Comportement viscoélastique linéaire

Le comportement viscoélastique linéaire appelé aussi comportement viscoélastique Newtonien, obéit au principe de superposition de Boltzmann, qui traduit la proportionnalité de l'effet et de la cause. Dans le cas présent l'effet peut être la contrainte et la cause la déformation ou

inversement. Le comportement viscoélastique linéaire est appelé comportement viscoélastique Boltzmannien ou comportement viscoélastique linéaire au sens Boltzmannien [138].

Le modèle Boltzmannien de Zener de la figure 1.8, caractérisée par deux modules élastiques G_1 et G_2 constants et une viscosité η constante, obéit à l'équation différentielle de comportement suivante :

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\theta} = (G_1 + G_2)\,.\dot{\varepsilon} + \frac{G_2}{\theta}.\varepsilon \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{\eta}{G_1} \tag{1.6}$$

Son comportement lors d'un chargement monotone à différentes vitesses de déformation est donné sur la figure 1.9. La pente $G_1 + G_2$ caractérise le Comportement d'Elasticité Instantanée (C.E.I.) et la pente G_2 caractérise le Comportement d'Elasticité Retardée (C.E.R.) sur le seuil du Régime Permanent (R.P.) à vitesse de déformation constante [30].

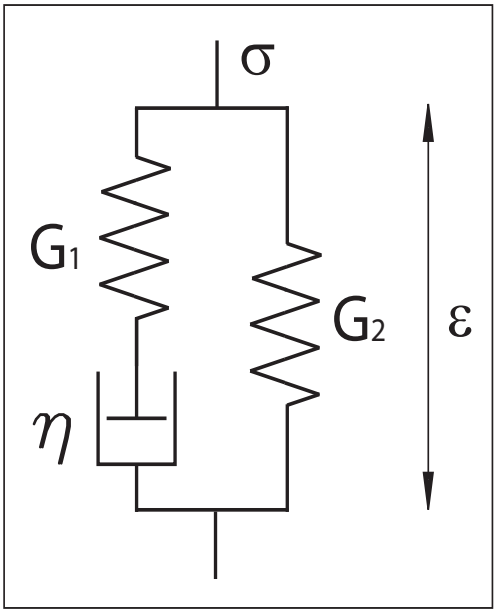


Fig. 1.8 – Modèle Boltzmannien de Zener.

L'élasticité instantanée d'un modèle viscoélastique est révélée aux temps infiniment courts au début d'un changement brusque de la sollicitation : au début d'un chargement, au début d'une relaxation, au début d'un fluage, au début d'un changement de vitesse de sollicitation etc .... La figure 1.10 illustre les manifestations du C.E.I. lors de recharges après relaxations (A_1R_1 et A_4R_4) et après fluages (A_2F_2 et A_3F_3).

Pour révéler l'élasticité instantanée d'un modèle viscoélastique constitué d'un assemblage de ressorts et d'amortisseurs, il faut remplacer chaque amortisseur par une connexion solide indéformable. En effet, si on procède à la connexion de l'amortisseur du modèle de Zener de la figure 1.8, le modèle se transforme en un assemblage en parallèle de deux ressorts (fig. 1.11) et révèle une élasticité instantanée de module $G_1 + G_2$ [30].

Le C.E.R. d'un modèle viscoélastique est révélé aux régimes permanents (fig. 1.9), lors d'un chargement à vitesse de sollicitation (contrainte ou déformation) constante ou en fond de relaxation et en fond de fluage (fig. 1.10). L'élasticité retardée d'un modèle viscoélastique est révélée par un comportement limite correspondant à un chargement quasi-statique où la vitesse de déformation des amortisseurs est infiniment proche de zéro. Il en découle que l'élasticité retardée

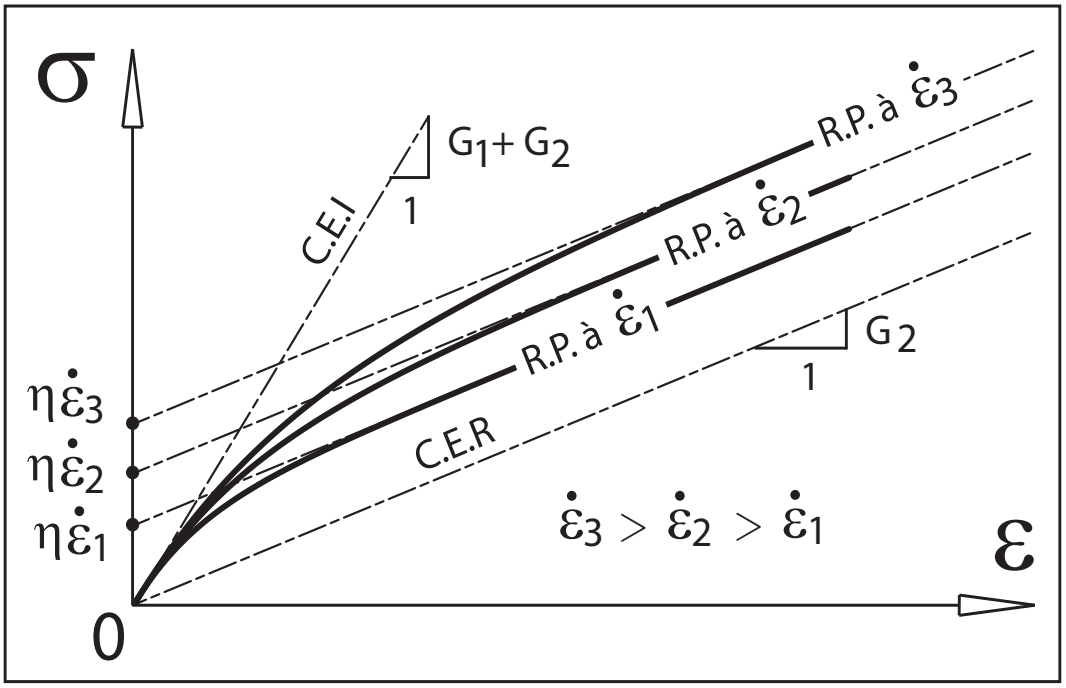


Fig. 1.9 – Réponse du modèle de Zener à un chargement monotone à différentes vitesses de déformation (C.E.I et C.E.R : Comportement d'Elasticité Instantanée et Retardé et R.P. : Régime Permanent à vitesse de déformation constante).

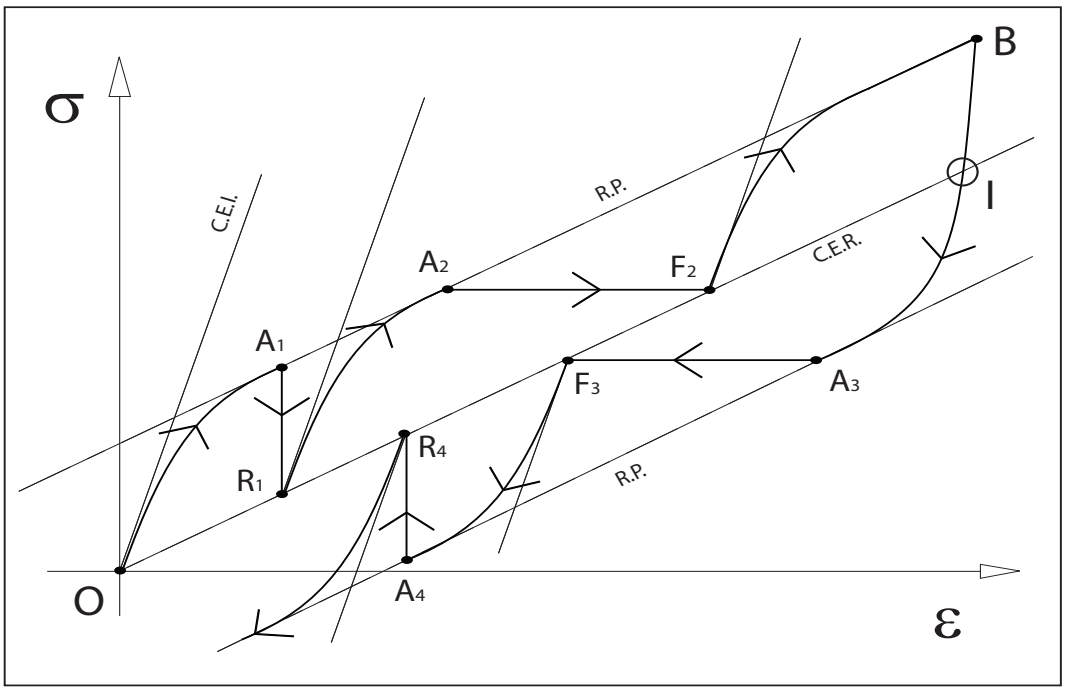


Fig. 1.10 – Chargement à vitesse de déformation constante, avec une inversion en B, interrompu par deux séquences de relaxations (A_1R_1 et A_4R_4) et deux séquences de fluage (A_2F_2 et A_3F_3) [30].

d'un modèle viscoélastique, constitué d'un assemblage de ressorts et d'amortisseurs, est révélée en remplaçant chaque amortisseur par une déconnexion. En effet, si on procède à la déconnexion de l'amortisseur du modèle de Zener de la figure 1.8, le modèle se transforme en un ressort célibataire (fig. 1.12) et révèle une élasticité retardée de module G_2 [30]. L'élasticité retardée représente le squelette solide d'un modèle viscoélastique. Si l'élasticité retardée du modèle est nulle, le comportement du modèle est celui d'un fluide. En effet, si l'élasticité retardée G_2 du

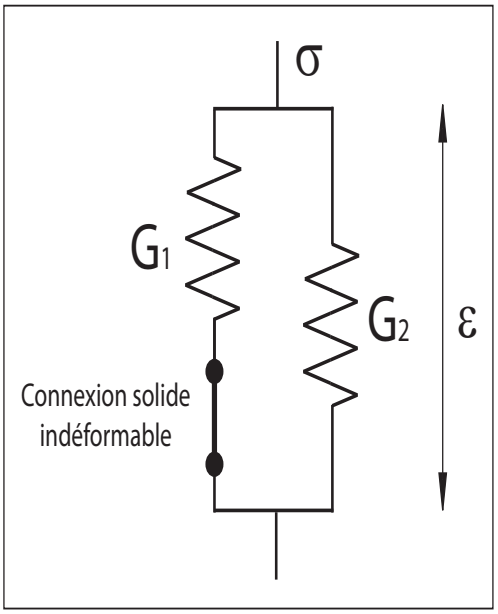


Fig. 1.11 – Transformation du modèle de Zener par une connexion solide indéformable de son amortisseur.

modèle de Zener est nulle (fig. 1.8), le modèle se transforme en un modèle fluide de Maxwell [30]. Après un temps suffisamment long, la relaxation ou le fluage de la partie visqueuse d'un modèle

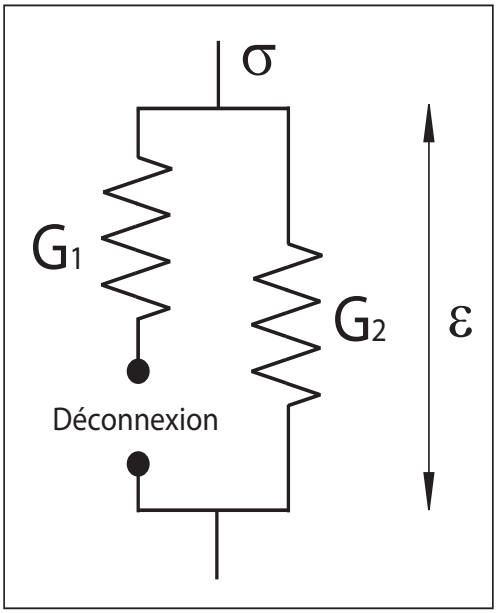


Fig. 1.12 – Transformation du modèle de Zener par une déconnexion de son amortisseur.

viscoélastique dirige l'état du modèle vers son comportement d'élasticité retardée. Cela est vrai quel que soit l'état du modèle à partir duquel la relaxation ou le fluage débute (fig. 1.10). Le sens de l'évolution de la réponse d'un modèle viscoélastique à une relaxation ou un fluage est donc déterminé par son comportement d'élasticité retardée. Ainsi les relaxations A_1R_1 et A_4R_4, de la figure 1.10, ont des sens d'évolutions opposés (respectivement $\dot{\sigma} \leq 0$ et $\dot{\sigma} \geq 0$), selon que le point de départ de la relaxation se situe au-dessus ou au-dessous de la droite du comportement d'élasticité retardée. La même remarque peut être faite pour les fluages A_2F_2 et A_3F_3 qui ont

des sens d'évolutions opposés (respectivement $\dot{\varepsilon} \geq 0$ et $\dot{\varepsilon} \leq 0$), selon que le point de départ du fluage se situe à gauche ou à droite du comportement élastique retardé. Le point particulier I, qui se situe à l'intersection de la courbe cyclique contrainte-déformation et la droite d'élasticité retardée, a une relaxation et un fluage d'amplitudes nulles. Entre le point d'inversion de la sollicitation B et le point I les relaxations et les fluages ont respectivement les mêmes sens que la relaxation A_1R_1 et le fluage A_2F_2. Au-delà du point I les relaxations et les fluages changent de sens [33].

1.4.2 Comportement viscoélastique non linéaire

Un comportement viscoélastique non linéaire peut présenter une élasticité instantanée et/ou retardée non linéaire et un comportement visqueux non Newtonien, de sorte que le comportement n'obéit plus au principe de superposition de Boltzmann.

Pour décrire le comportement visqueux non Newtonien une démarche classique consiste à introduire une variation de la viscosité en fonction de la vitesse de déformation [94]. L'exemple le plus simple est celui de la loi puissance d'Ostwald et de de-Waele [28], qui s'écrit :

$$\eta\left(\dot{\varepsilon}\right) = m\dot{\varepsilon}^{n-1} \tag{1.7}$$

où le paramètre m $(Pa.s^n)$ et le paramètre n (sans dimension), sont des caractéristiques du matériau. Si $n = 1$, le comportement est celui d'un fluide Newtonien et m représente alors sa viscosité. Si $n < 1$, le comportement est celui d'un fluide *rhéofluidifiant*, dont la viscosité diminue avec la vitesse de déformation. Si $n > 1$, le comportement est celui d'un fluide *rhéoépaississant*, dont la viscosité augmente avec la vitesse de déformation. Dans le cas d'un comportement du type rhéofluidifiant, la valeur de la viscosité est indéterminée, quand la vitesse de déformation s'annule. Pour éviter cette indétermination, d'autres modèles sont proposés dans la littérature, comme le modèle Carreau-Yasuda [172], tel que :

$$\frac{\eta\left(\dot{\varepsilon}\right) - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left\{1 + \lambda\left|\dot{\varepsilon}\right|^a\right\}^{\frac{n-1}{a}} \tag{1.8}$$

où les paramètres η_0 et η_∞ (en Pa.s) représentent les viscosités à vitesse de déformation nulle et à vitesse de déformation infinie. Le paramètre n (sans dimension), correspond au paramètre d'Ostwald et de de-Waele. La loi de Carreau-Yasuda est représentée sur la figure 1.13 et comparée à la loi puissance d'Ostwald et de de-Waele. Dans la zone BC le régime est celui de la loi puissance et la pente BC est proportionnelle à la valeur du paramètre n. Le plateau AB, aux faibles vitesses de déformation, est appelé régime Newtonien ; il correspond à la saturation de la viscosité $\eta\left(\dot{\varepsilon}\right)$, qui tend vers η_0. Aux grandes vitesses de déformation, au-delà du point C, la viscosité $\eta\left(\dot{\varepsilon}\right)$ tend vers η_∞, dont la valeur tend vers zéro. Le paramètre a caractérise la zone de transition entre le plateau AB et le régime en loi puissance BC. La figure 1.14 donne le rôle du paramètre λ, exprimé en (s^a). Ce paramètre permet de choisir la position de la zone de transition en B, entre le plateau AB et le régime en loi puissance BC. Dans la loi de Carreau-Yasuda, le terme $|\dot{\varepsilon}|$ désigne la valeur absolue de la vitesse de déformation ou « *module* » de la vitesse de déformation. Dans le cas d'un chargement monotone la valeur absolue n'a pas d'utilité particulière ; son rôle est surtout essentiel dans le cas d'un chargement cyclique. Par ailleurs, notons que l'utilisation de la valeur absolue est surtout nécessaire dans le cas 1D où $|\dot{\varepsilon}|$ est équivalent à un taux de cisaillement. Dans le cas 2D ou le cas 3D, le terme $|\dot{\varepsilon}|$ peut être remplacé, par exemple, par le deuxième invariant du tenseur taux de déformation et sera également équivalent à un taux de cisaillement.

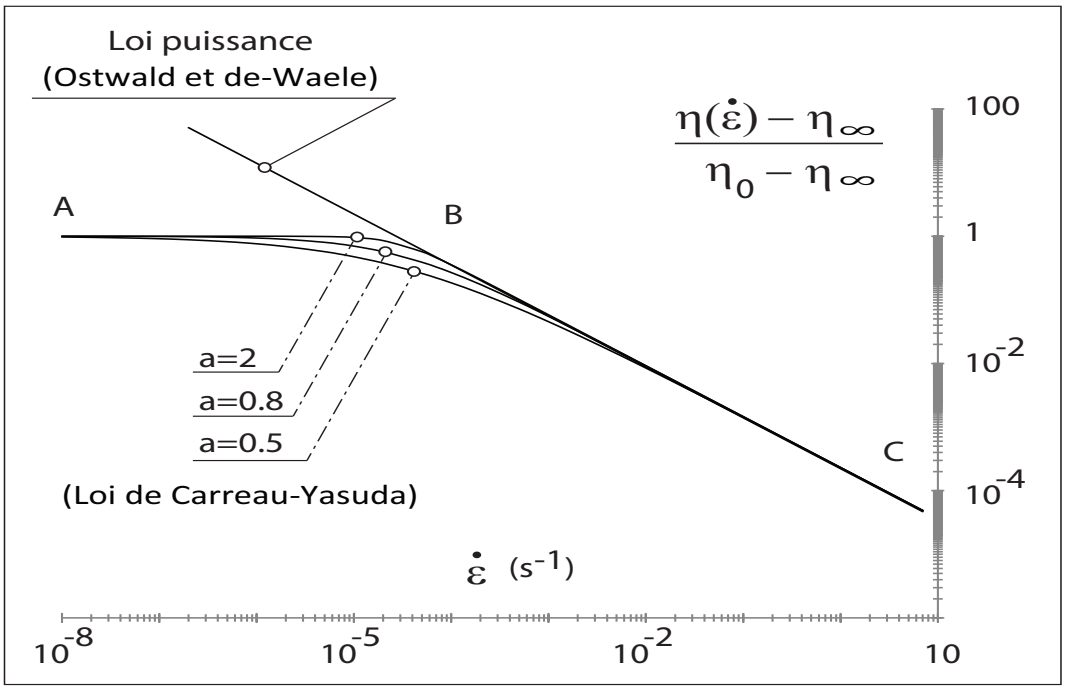


Fig. 1.13 – loi puissance d'Ostwald et de de-Waele et loi de Carreau-Yasuda.

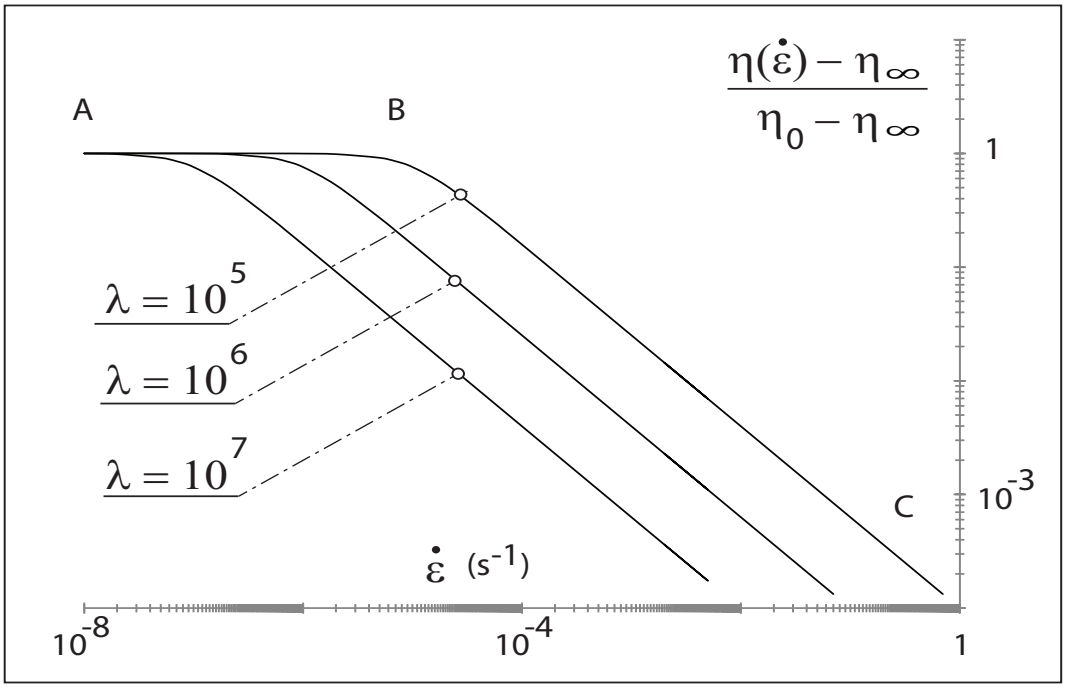


Fig. 1.14 – Rôle du paramètre λ dans la loi de Carreau-Yasuda.

1.5 Caractérisation et modélisation du comportement mécanique des fibres et des matériaux tissés

1.5.1 Comportement mécanique des fibres polymères

Nous nous proposons dans ce paragraphe de mentionner un certain nombre de travaux sur la caractérisation et la modélisation du comportement des fibres polymères.

Fibre polyamide

Rodney D. Averett et al. [8] a étudié expérimentalement le comportement monotone et cyclique de fibres en polyamide PA66, ainsi que les faciès de rupture de ces fibres. Il utilise pour cela un dispositif expérimental particulier permettant des essais de traction sur une ou plusieurs fibres.

Fibre polyester

Les fibres polyester sont envisagées dans de nombreuses applications de câbles pour l'industrie offshore, notamment pour les lignes d'ancrage des plateformes flottantes. S. Banfield et al. [19] a réalisé des essais mécaniques de traction cyclique sur des câbles synthétiques polyester, destinés à l'ancrage de plateforme flottante par grandes profondeurs. Des résultats de rigidité et de propriétés en fatigue sont donnés. P. Davies et al. [61] a réalisé aussi des tests de traction cyclique et de fluage à long terme sur des fibres, des mèches et des câbles en fibre polyester Diolen. Il propose également une modélisation du type Schapery, qui donne de bon résultat en comparaison avec les résultats d'essais. Par ailleurs, R. D. Averett et al. [7] a étudié expérimentalement le comportement monotone et cyclique de fibre polyester (PET) ainsi que les faciès de rupture de ces fibres. Il a étudié également l'effet d'une sollicitation cyclique de type fatigue sur le comportement mécanique en traction de ces fibres.

J.J.M. Baltussen et al. [17] propose une analyse de résultats expérimentaux du comportement en traction de fibre PET Diolen, sous l'effet de la vitesse de sollicitation. Les chargements envisagés comportent aussi des phases de relaxation et de fluage (fig. 1.15). Un modèle de comportement viscoélastique adaptée aux fibres PET sous chargement complexe est proposé.

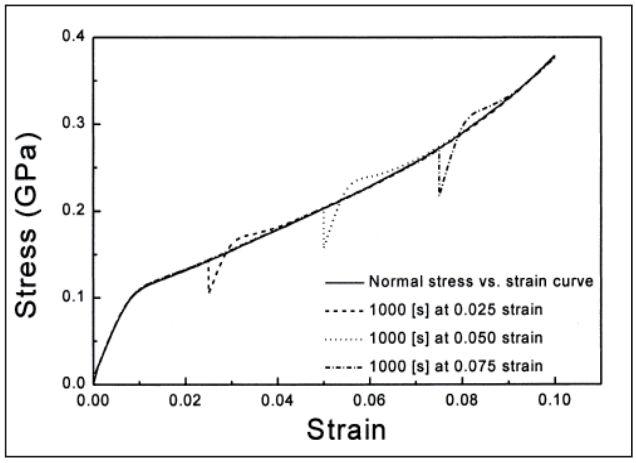


Fig. 1.15 – Résultats de traction monotone avec des séquences de relaxation - Fibre PET Diolen 174S [16].

E. Chailleux et al. [50] propose une méthode optique de mesure de la déformation en traction, de mèches de fibres polyester. Il utilise la démarche de Schapery pour modéliser le comportement viscoélastoplastique de ces fibres ; cette modélisation est ensuite comparée aux résultats d'essais, avec un bon accord.

Fibre aramide

Les fibres aramide ont fait l'objet de nombreuses études sur leur propriétés mécaniques, tant

concernant leur rigidité au cours de cycles ([62], [63]), que leur comportement à la fatigue ([19], [58], [87], [93], [100], [146], [145]), ou les effets de l'environnement sur leurs propriétés mécaniques ([5], [42], [66], [175]), mais aussi leur propriété à l'impact ([35], [98], [109], [153], [154], [161], [177]), ainsi que leur propriété au fluage ([3], [16]) et la modélisation de leur comportement sous chargement complexe ([17], [49], [61]).

Fibre UHMPE

Y. Rao et al. [146] a étudié le comportement en fatigue de différentes fibres UHMPE Spectra et S. Banfield et al. [19] a réalisé des essais mécaniques de traction cyclique sur des câbles synthétique UHMPE destinés à l'ancrage de plateformes flottantes par grandes profondeurs. P. Davies et al. [61] a réalisé des essais accompagnés d'une modélisation du comportement viscoélastique de fibres UHMPE pour les lignes d'ancrage offshore.

Fibre PBO

P. Davies et al. [60] a réalisé des essais de traction sur des fibres PBO Zylon^{tm} afin de caractériser leur comportement sous chargement quasi-statique cyclique. Il montre que les propriétés en fatigue sont moins bonnes, si ces fibres PBO sont sollicitées par des contraintes dont les rapports à la contrainte de rupture sont équivalents à ceux de fibres plus classiques, telles que le polyester ou l'aramide. Mais compte tenu des valeurs de contraintes relativement élevées, les fibres PBO présentent des propriétés en fatigue, à même niveau de contrainte, meilleures que celles des fibres polyester, aramide ou UHMPE.

1.5.2 Comportement mécanique d'une sangle tissée en PA66

Le comportement viscoélastique non linéaire d'une sangle en PA66 a été étudié par G.Bles [30] et [33]. La figure 1.16 donne des résultats typiques de tractions monotones à différentes vitesses de déformation et la figure 1.17 donne un résultat typique de traction ondulée, contrôlée en déformation, avec trois boucles de décharge-charge. En première charge, ces résultats

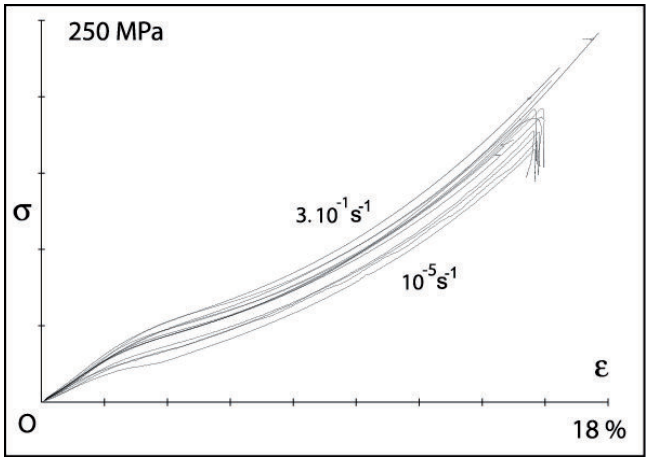


Fig. 1.16 – Résultats de tractions monotones à différentes vitesses de déformations [30].

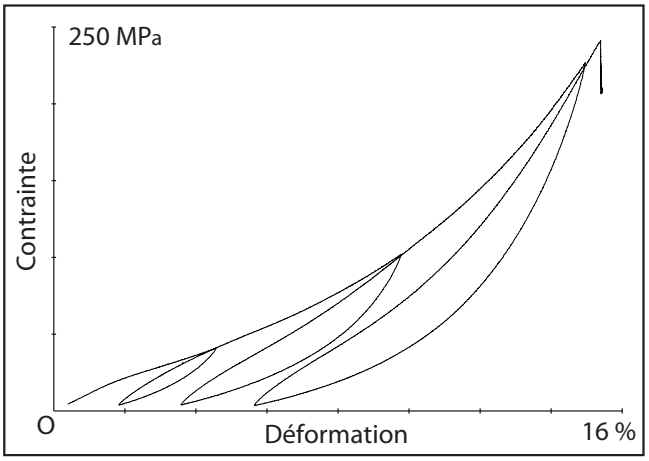


Fig. 1.17 – Résultats de traction ondulée, contrôlé en déformation à $\dot{\varepsilon} = 10^{-5}s^{-1}$ - Essai Gv35 [30].

présentent une forme caractéristique avec trois zones distinctes, de pentes différentes dans le graphe contrainte-déformation ; la première zone se situe à une contrainte inférieure à 50MPa, la deuxième zone se situe entre 50 et 100MPa environ et une troisième zone se situe au-delà de

100MPa. La transition entre la zone un et la zone deux est caractérisée par un coude assez net et progressif. La transition entre la zone deux et la zone trois est très progressive. Les boucles de décharge-charge, sur la figure 1.17, présente une forme typique en « haricot » que l'on observe généralement sur les matériaux tissés.

Le comportement des sangles en PA66 a un caractère visqueux prononcé, qui peut être révélé grâce à des interruptions du chargement par des séquences de relaxation ou des séquences de fluage. Des résultats de ce type sont présentés sur les figures 1.18 et 1.19. Ces résultats montrent

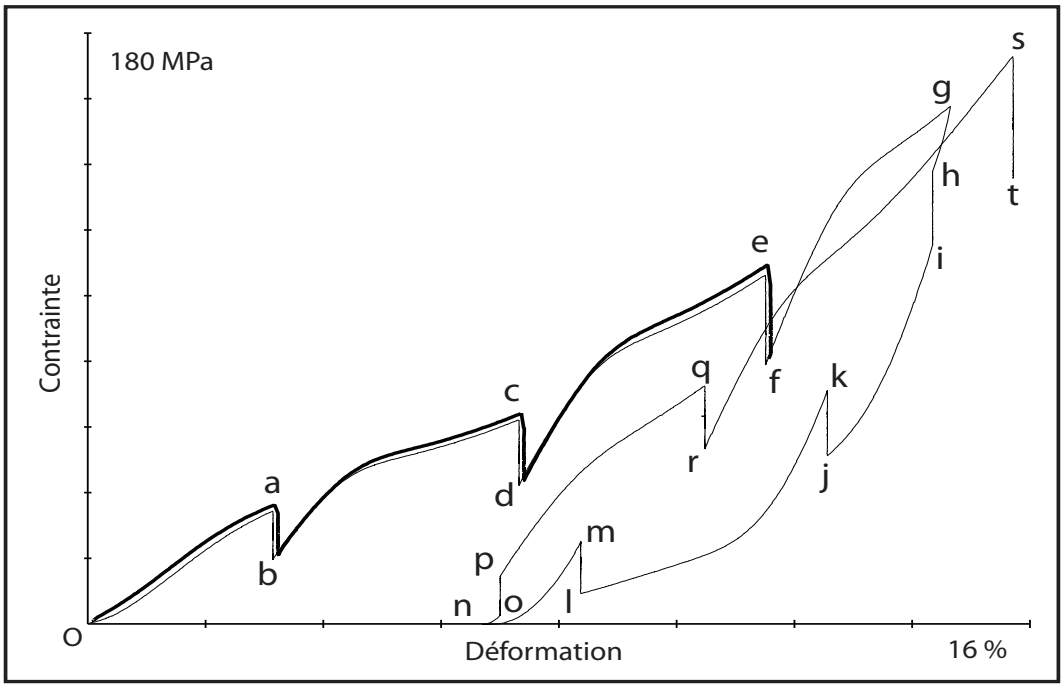


Fig. 1.18 – Deux résultats de traction ondulée, contrôlée en déformation à $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$, avec des séquences de relaxation d'une heure - Essai GK37(en gras) et Gk38(en fin) [30].

que le sens des relaxations et des fluages change sur la boucle de décharge : relaxations hi et jk sur la boucle de décharge go (fig. 1.18), fluages fg et hi sur la boucle el (fig. 1.19). Le même phénomène est observé aussi sur la boucle de recharge : boucle os (fig. 1.18) et boucle lq (fig. 1.19). Cette propriété évoque le comportement présenté au paragraphe 1.4.1 (fig. 1.10), sur le sens des relaxations et des fluages, dans le cas d'un comportement viscoélastique linéaire. Ceci conduit à considérer le comportement de la sangle comme la superposition d'un comportement visqueux non Newtonien et d'un comportement indépendant du temps non linéaire ($\sigma_{ti}(\varepsilon)$ fig. 1.20). Le comportement indépendant du temps joue le rôle de l'élasticité retardée du comportement viscoélastique linéaire (§ 1.4.1 fig. 1.10). Au cours du chargement, le comportement visqueux présente des régimes transitoires (T.S. - fig.1.20) et des régimes permanents (S.S.- fig.1.20).

Le comportement indépendant du temps $\sigma_{ti}(\varepsilon)$ a été caractérisé par plusieurs essais à différentes vitesses de sollicitation, à la fin de séquences de relaxation et de fluage (fig. 1.21). Les résultats de ces essais ont permis de donner une expression analytique à $\sigma_{ti}(\varepsilon)$ et d'identifier ses paramètres, tel que [33] :

$$\sigma_{ti}(\varepsilon) = \sigma_1 \exp\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right) - \sigma_1 \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_b}\right)^3 + 1 \right\} \tag{1.9}$$

où σ_1, ε_1 et ε_b sont des constantes, dont les valeurs sont données sur le tableau 1.1.

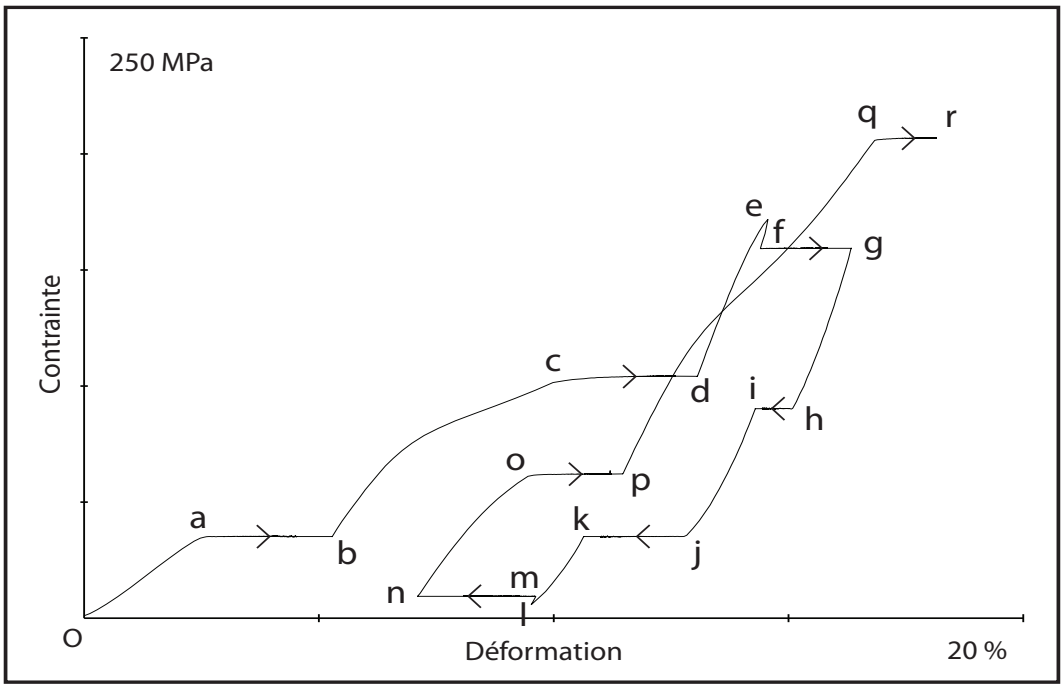


Fig. 1.19 – Résultat de traction ondulée, contrôlée en contrainte à $\dot{\sigma} = 32.9MPa/s$, avec des séquences de fluage d'une heure - Essai Gk36 [30].

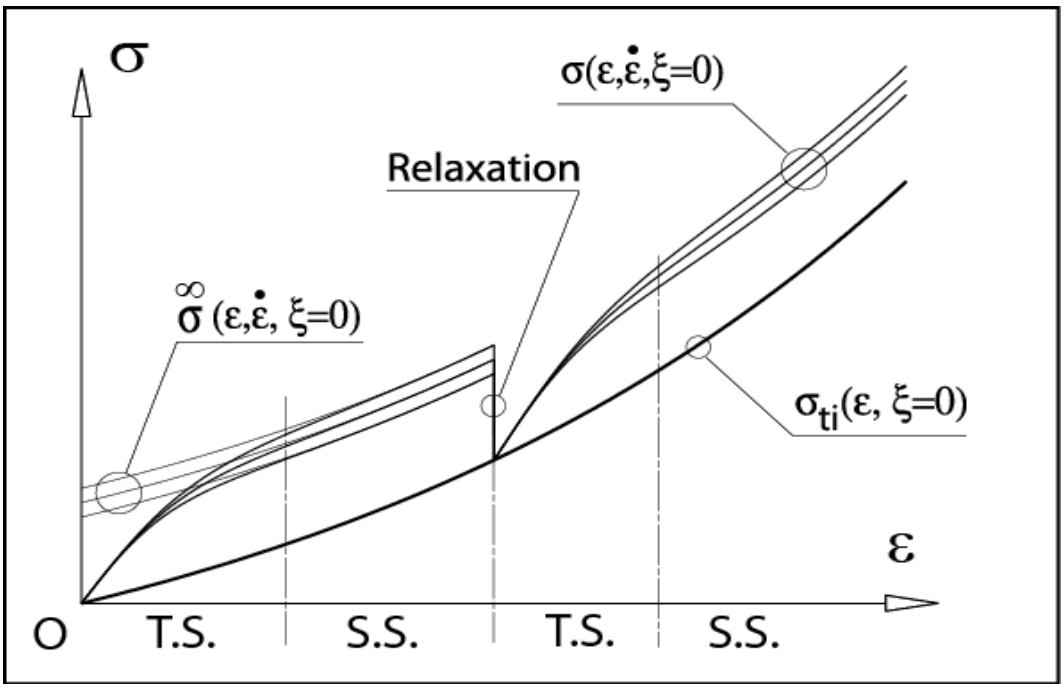


Fig. 1.20 – Comportement indépendant du temps $\sigma_{ti}(\varepsilon)$ et comportement visqueux $\sigma - \sigma_{ti}(\varepsilon)$, de la sangle avec des régimes transitoires (T.S.) et des régimes permanents (S.S.) [33].

Au cours des régimes transitoires (T.S. - fig. 1.20), des mesures du module de l'élasticité instantanée, ont été réalisées, par différents types d'essai : module initial, modules de recharge après une séquence de relaxation ou de fluage, modules en chargement cyclique à haute fréquence et faible amplitude. Ces mesures sont regroupées sur la figure 1.22. Les résultats de ces essais ont permis de donner une expression analytique au module de l'élasticité instantanée en fonction de

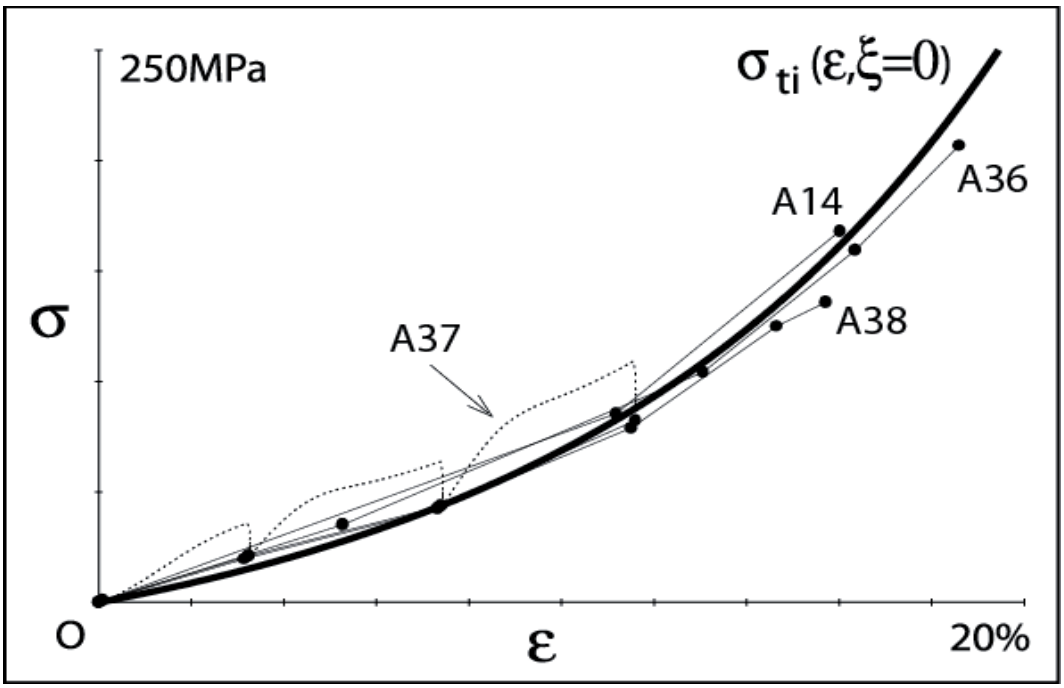


Fig. 1.21 – Comportement indépendant du temps $\sigma_{ti}(\varepsilon)$ (courbe en trait fort), correspondant à la relation 1.9 et caractérisé par plusieurs essais à la fin de séquences de relaxation et de fluage (très fins et points en gras) [33].

la déformation $E_{ins}(\varepsilon)$ et d'identifier ses paramètres, tel que [33] :

$$E_{ins}(\varepsilon) = K_{ins}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\left\{\exp\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right) - 3\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_b}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_b}\right)^2\right\} \tag{1.10}$$

où K_{ins} est un nouveau paramètre et σ_1, ε_1, ε_b des paramètres précédemment introduits dans la relation 1.9. Les valeurs de ces paramètres sont données sur le tableau 1.1.

En régime permanent, en traction monotones à différentes vitesses de déformation (S.S. - fig.

TABLE 1.1: Valeurs des constantes correspondantes aux relations 1.9 et 1.10 - Sangles du groupe A [33].

σ_1	34.21	MPa
ε_1	8.7	%
ε_b	20	%
K_{ins}	3.89	-
b_0	4.6	MPa/décade

1.20), à chaque valeur de déformation et pour une vitesse de déformation donnée, correspond un seuil de contrainte visqueuse $\sigma_v^\infty(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, telle que :

$$\sigma_v^\infty(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \sigma^\infty(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) - \sigma_{ti}(\varepsilon) = \eta(\varepsilon, \dot{\varepsilon}).\dot{\varepsilon} \tag{1.11}$$

où $\sigma^\infty(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ est le seuil en contrainte totale pour une déformation et une vitesse de déformation données (fig. 1.20) et $\sigma_{ti}(\varepsilon)$ est le comportement indépendant du temps défini par la relation 1.9. Les résultats des essais de traction monotones à différentes vitesses de déformation ont permis de donner une expression analytique au seuil de contrainte visqueuse $\sigma_v^\infty(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ et d'identifier ses

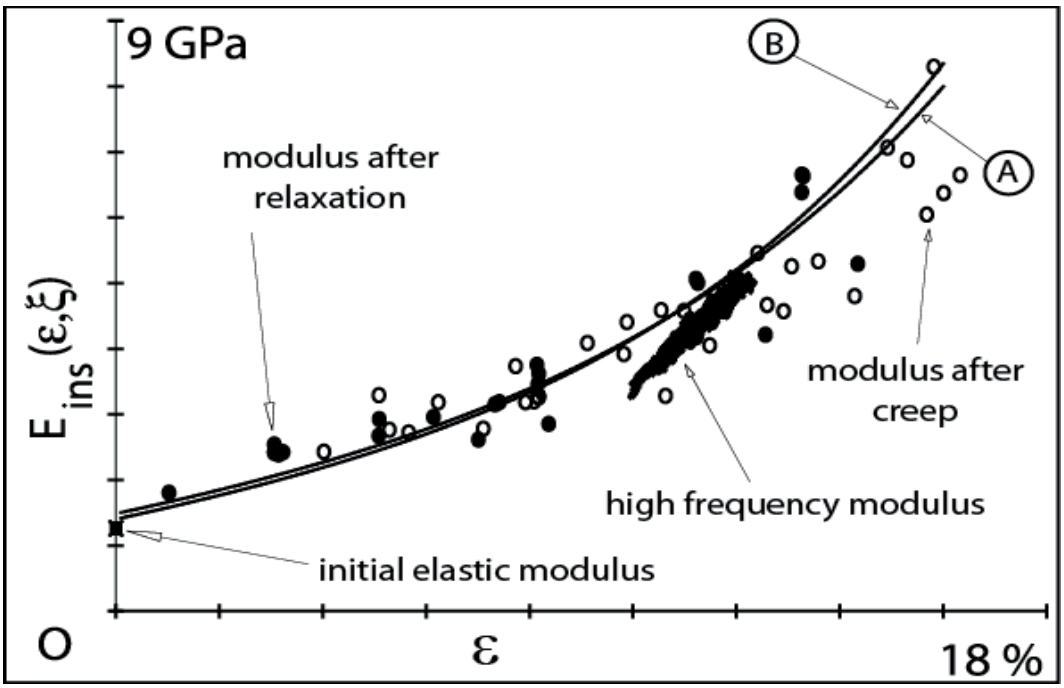


Fig. 1.22 – Comportement d'élasticité instantanée, pour deux groupes de sangle A et B, correspondant à la relation 1.10 et caractérisé par plusieurs types d'essais [33].

paramètres, tel que [33] :

$$\sigma_v^{\infty}(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = b^{\infty}(\varepsilon)\log\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}+1\right) \quad \text{et} \quad b^{\infty}(\varepsilon) = b_0\left[\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_b}\right)^3+1\right] \tag{1.12}$$

où $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-\frac{\sigma_1}{b_0}}$ et où σ_1, ε_b et b_0 sont des constantes, dont les valeurs sont données sur le tableau 1.1. La viscosité de la sangle peut alors être caractérisée par les relations 1.11 et 1.12, telle que [30] :

$$\eta(\varepsilon,\dot{\varepsilon}) = \frac{\sigma_v^{\infty}(\varepsilon,\dot{\varepsilon})}{\dot{\varepsilon}} \tag{1.13}$$

L'évolution de la contrainte en fonction du temps, au cours d'une séquence de relaxation, présente une forme typique que l'on retrouve sur toutes les relaxations de la sangle en PA66, quel que soit leur sens d'évolution. La figure 1.23 donne l'évolution de la contrainte en fonction du temps, au cours d'une séquence de relaxation (essai Gv36), comparée à l'évolution d'une relaxation prévue par le modèle viscoélastique linéaire de Maxwell, de forme typique en exponentielle. Cette figure révèle une différence de forme des fonctions relaxation obtenues expérimentalement et prévues par le modèle viscoélastique linéaire. La relaxation théorique atteint sa limite pour un temps d'environ trois fois son temps caractéristique θ, alors que la relaxation mesurée décroît de plus en plus lentement [30]. La forme typique d'une relaxation de la sangle en PA66, peut être décrite par une relation théorique du type :

$$\sigma(t) = -A.\log(\Delta t) + B \tag{1.14}$$

Les figures 1.23 et 1.24 donnent une comparaison de la mesure expérimentale avec la relaxation prévue par la relation 1.14, où $A = 11.18$ MPa/décade et $B = 191.2$ MPa. L'évolution typique de la contrainte au cours de la relaxation est très bien décrite par la relation 1.14.

Au cours d'une traction ondulée à amplitude de cycle constante, on observe une reptation

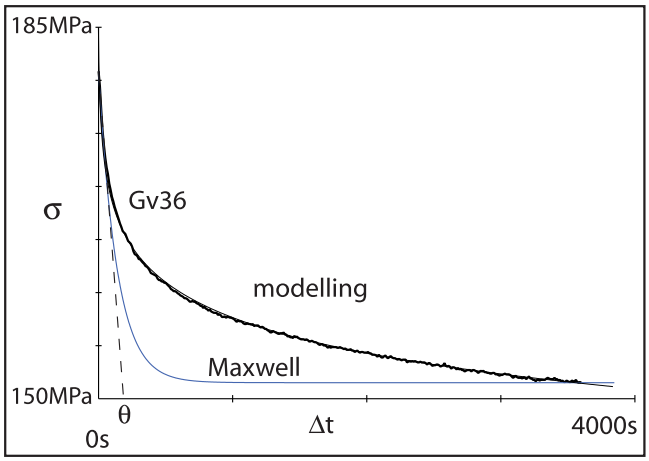


Fig. 1.23 – Evolution de la contrainte en fonction du temps, au cours d'une séquence de relation (Essai Gv36) et la superposition de sa modélisation par la relation 1.14, comparées à l'évolution d'une relaxation avec le modèle viscoélastique linéaire de Maxwell [30].

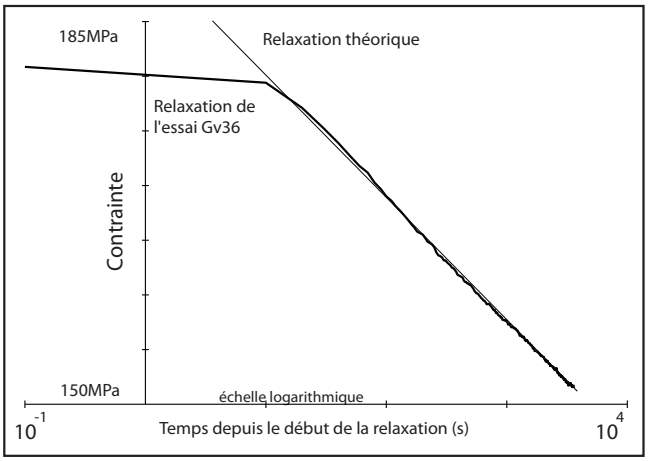


Fig. 1.24 – Evolution de la contrainte en fonction du temps, au cours d'une séquence de relation (Essai Gv36) et la superposition de sa modélisation par la relation 1.14 [30].

des cycles en déformation ou en contrainte, selon que l'essai est contrôlé en contrainte ou en déformation, respectivement. Les figures 1.25 et 1.26 illustrent ce comportement. Ce phénomène de reptation des cycles, qui se manifeste par une augmentation progressive de la déformation à chaque cycle (fig. 1.25) ou par une diminution progressive de la contrainte à chaque cycle (fig. 1.26), se stabilise après un certain nombre de cycle.

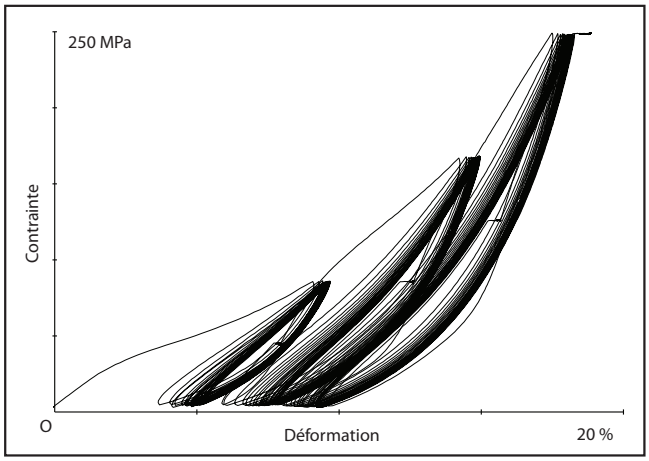


Fig. 1.25 – Résultat de traction ondulée, contrôlée en contrainte à $\dot{\sigma} = 3.3$ MPa/s, avec reptation des cycles en déformation - Essai Gk12 [30].

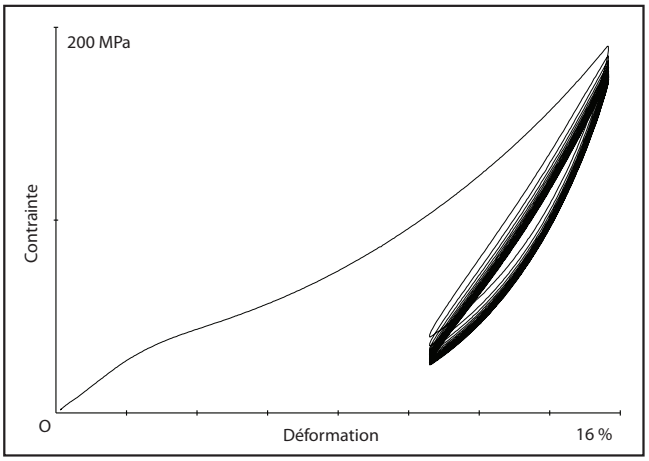


Fig. 1.26 – Résultat de traction ondulée, contrôlée en déformation à $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}\ s^{-1}$, avec reptation des cycles en contrainte - Essai Gk08 [30].

1.5.3 Comportement mécanique des matériaux tissés

Nous nous proposons dans ce paragraphe de mentionner un certain nombre de travaux sur la caractérisation et la modélisation du comportement des matériaux tissés.

Caractérisation expérimentale : La structure spécifique des matériaux tissés et leur forme typique, dont une dimension est petite par rapport aux deux autres, conduisent à des techniques

expérimentales particulières. Par exemple, pour réaliser un essai de traction simple, il est nécessaire de trouver le moyen d'attacher l'éprouvette, pour appliquer l'effort et obtenir des champs de contrainte et de déformation homogènes. Ainsi V.Bohe [36] a proposé des mors de traction à rouleaux dédiés aux matériaux tissés et aux toiles. Une autre application spécifique aux matériaux tissés a été proposée par K. Buet-Gautier et al. [43] ; elle correspond à un dispositif de traction biaxiale, dans les sens chaîne et trame, en chargements proportionnels, qui permet d'imposer un angle de cisaillement (fig. 1.27). Cet équipement a permis à K. Buet-Gautier et al. [43] de montrer l'effet de l'embuvage et du couplage entre le comportement en tension de la chaîne et la tension de la trame (fig. 1.28 page 69 de [40]).

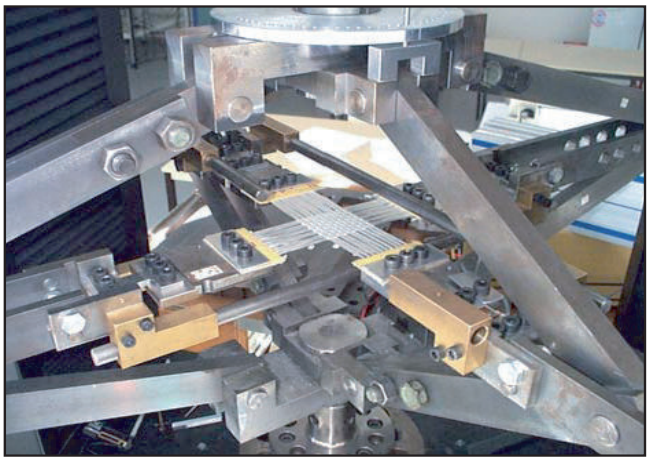


Fig. 1.27 – Dispositif de traction biaxiale sur une éprouvette en croix [40], [43].

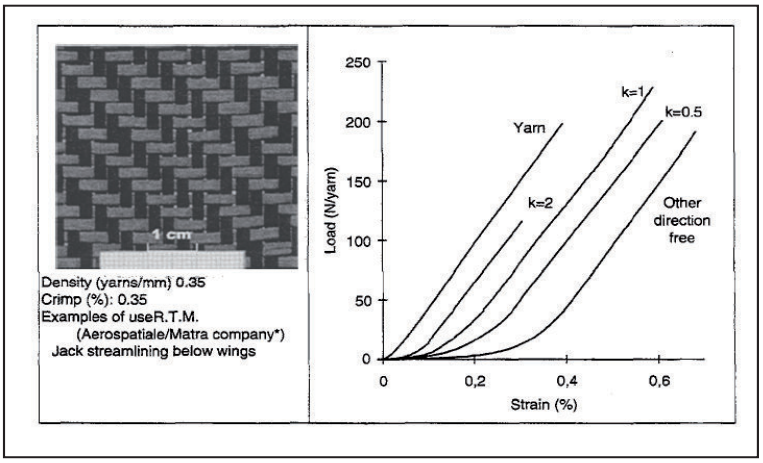


Fig. 1.28 – Caractéristiques et essais biaxiaux sur 2X2 tissu sergé de carbone (RTM = le moulage par transfert de résine) [43].

Les matériaux tissés présentent des propriétés mécaniques anisotropes. Ces propriétés peuvent être révélées par des essais de traction hors axes. Un cas particulièrement intéressant, correspond à l'essai de traction en biais (fig. 1.29, 1.30 et 1.31). En effet, compte tenu de la rigidité relativement faible des matériaux tissés en cisaillement, cet essai sollicite fortement le matériau en cisaillement et révèle un champ de déformation très particulier ([51], [91], [97], [167]).

Un essai de cisaillement en boîte a été proposé dans les années 1997 ([128], [142]). Cet essai mécanique spécifique aux matériaux tissés est largement utilisé ([10], [137], [130], [40]). Il permet

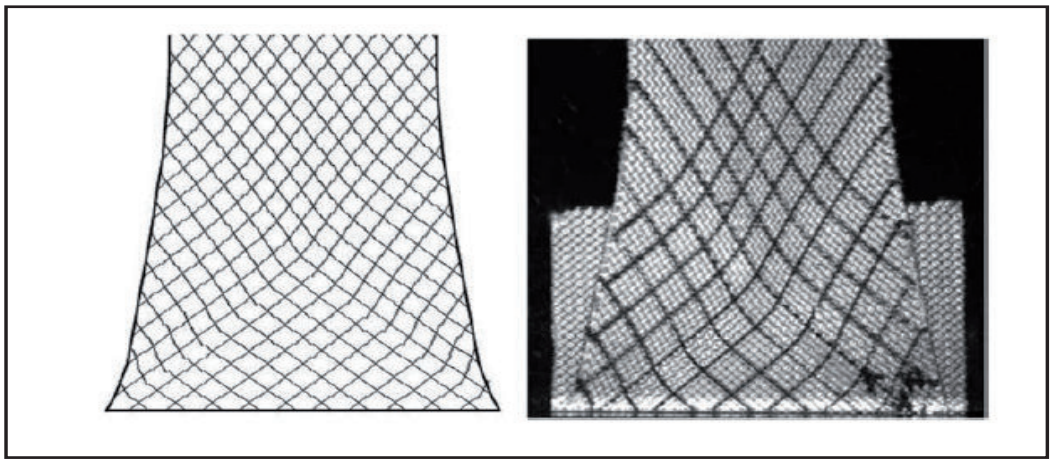


Fig. 1.29 – Champs de déformation observé et simulé, lors d'un essai de traction en biais [97].

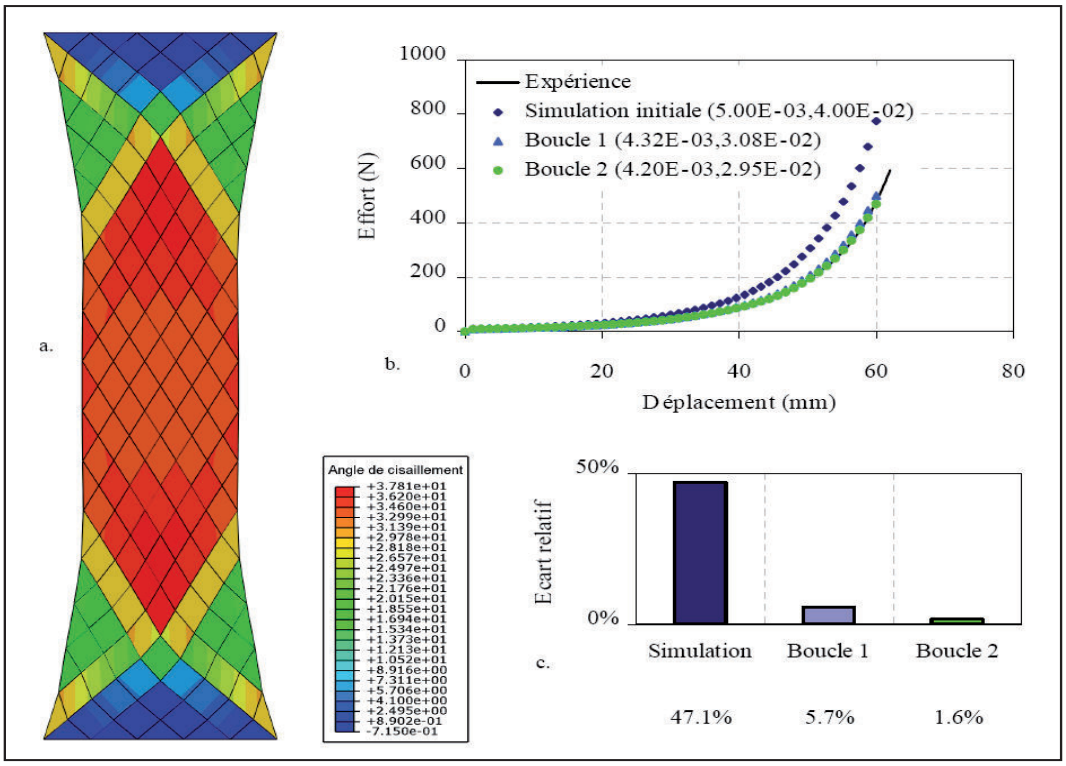


Fig. 1.30 – Résultats d'essai et de modélisation d'une traction en biais [51].

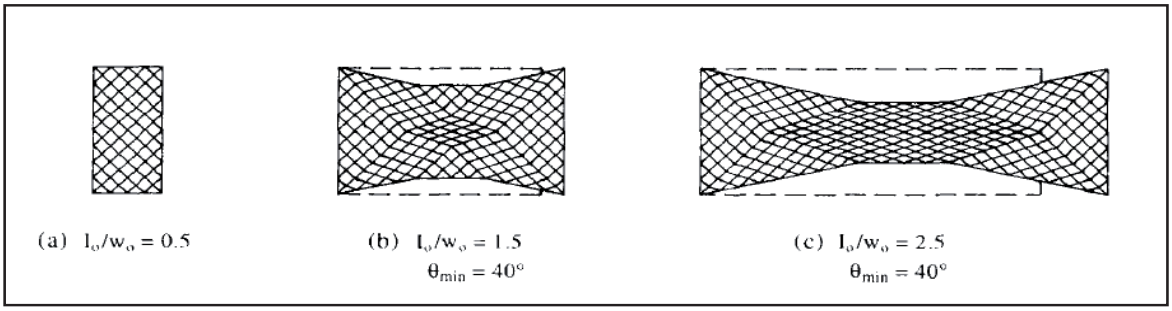


Fig. 1.31 – Modélisation de la déformation en traction en biais, pour des éprouvettes avec différents rapports d'aspect (longueur l_0 et largeur w_0) [167].

de tester le matériau en mode de cisaillement entre les fils chaîne et de trame, tout en assurant

une bonne homogénéité du champ de déformation (fig. 1.32).

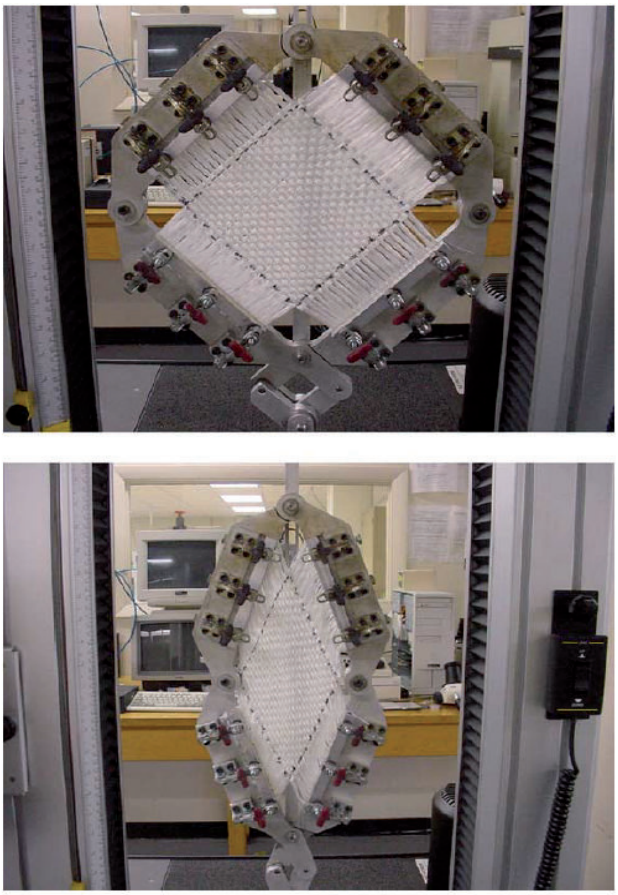


Fig. 1.32 – Traction-cisaillement en boîte [137].

Modélisation du comportement à l'échelle mésoscopique : Afin de prédire le comportement mécanique au niveau macroscopique et tenir compte des phénomènes physiques impliqués à l'échelle mésoscopique, la mécanique des matériaux tissés et des cordages peut être abordée à l'échelle de la structure du tissage et du toronnage. Un exemple de ce type d'approche correspond à la modélisation de la rigidité en flexion du matériau tissé et des mèches de fils, qui le constituent. Ainsi, T. K. Ghosh et al. [82] propose une revue des recherches sur ce thème. D'autre part, R. G. Livesey et al. [116] propose un dispositif expérimental de mesure du couple de flexion et de la courbure d'un échantillon de matériau tissé. Il met en évidence un comportement à hystérésis (fig. 1.33) et propose une analyse à l'échelle de l'hélice des filaments, qui constituent les mèches des fils du matériau tissé, pour estimer la rigidité en flexion. Par une analyse à l'échelle d'une mèche de fils, G. A. V. Leaf [106] propose une prédiction de la largeur de la boucle d'hystérésis du comportement en flexion des mèches. Dans la continuité, des études récentes explorent les liens entre les propriétés de la structure à l'échelle mésoscopique et le comportement macroscopique, en terme de rigidité en flexion des mèches et du matériau tissé ([52], [76], [135]). Une thématique voisine s'intéresse aux cordages synthétiques, qui trouvent un bon nombre d'applications en environnement marin (amarre, ligne d'ancrage, ligne de descente au fond de la mer). Hwai-Chung Wu et al. [169] a étudié des cordes tressées en PET et en nylon, en vue d'établir la relation entre leur comportement et le comportement des mèches de fils, qui les constituent ; cette étude a été réalisée en traction et en traction-flexion combinées. Par ailleurs, C.M. Leech [110] décrit la composition de la structure de câbles en fibres polymère, afin de modéliser la friction entre les fibres dans ces câbles et S. R. Ghoreishi et al. [80], prédisent la rigidité élastique de câbles

synthétiques aramide à partir du comportement de leurs éléments constitutifs.

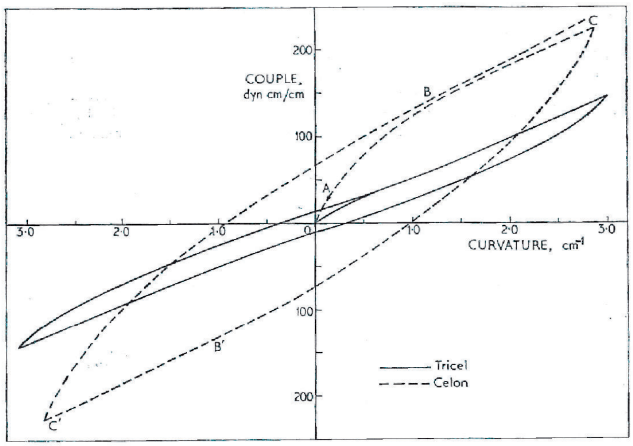


Fig. 1.33 – Résultat typique de courbe d'hystérésis en flexion [116].

Une autre thématique s'attache à décrire le comportement du matériau tissé à l'échelle macroscopique avec des éléments de modélisation à l'échelle du tissage au niveau des points de liage. Plusieurs modèles de ce type existent ([97], [134]), tels que celui de S. Kato et al. [92] qui est un modèle en treillis, qui représente les fils de chaîne, les fils de trame et les points de liage par des éléments de type barre en traction-compression et sans flexion. L'enduction, quant à elle, est représentée par un élément feuille. Les lois constitutives des éléments sont une élasticité non-linéaire avec une irréversibilité en décharge, indépendante du temps, pour les fils et un comportement proche d'une élastoplasticité pour l'enduction. Des essais mécaniques de bi-traction et de cisaillement en boîte ont été réalisés. Le modèle montre un bon accord avec les résultats d'essais mécaniques.

Modélisation du comportement par des approches du type milieux continus : Decaillot-Laulagnet [65] présente un texte inédit en langue française de P.L. Tchebychev, qui a fait l'objet d'une communication au congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, le 28 août 1878 à Paris. Dans cette communication, d'après Markoff et Sonin ([65] page 82) *M. Tchebichef pose les principes généraux pour déterminer les courbes suivant lesquelles on doit couper les différents morceaux d'une étoffe, pour en faire une gaine bien ajustée, servant à envelopper un corps de forme quelconque.* Cette étude mathématique de 1878 trouve aujourd'hui notamment une application dans le drapage de renfort textile de composites sur des formes non-développables utilisé notamment en aéronautique. Cette communication est le point de départ d'études mathématiques théoriques sur les filets en fils inextensibles, dont l'angle entre eux est totalement libre, et désignés par le terme de filet de Tchébychev (Tchebichev net). En effet, Tchebychev précise en1878, ses hypothèses : *...on pourra admettre, au moins comme première approximation, que les étoffes, en se courbant pour envelopper des corps quelconques, ne changent que les angles d'inclinaison des fils de chaîne et de trame, et que la longueur des fils reste la même.* Bien qu'il ne cite pas Tchebychev en 1878, C. Mack et al. [122] propose des solutions analytiques ou du moins la mise en équation du problème du drapage de filet de Tchebychev sur des surfaces de révolution et également sur toute surface gauche. Des études mathématiques sur la déformation de membranes constituées de fils inextensibles organisés en plusieurs familles de fils parallèles sont nombreuses ; citons parmi les auteurs R. S. Rivlin [148], A. C. Pipkin [140] et E. N. Kuznetsov [99]. Cette thématique a été étendue à l'étude des filets constitués de fils déformables, élastiques [157] ou élastoplastiques [12].

Dans la continuité de ces travaux, X. Zhou [176] met en place une modélisation en milieu continu de tissu idéal où la rigidité en cisaillement dans le plan chaîne-trame est négligée. La modélisation numérique est basée sur deux méthodes, soit par différences finies, soit par relaxation dynamique. Une loi élastoplastique simple est utilisée pour les fibres qui sont organisées en famille de fibres parallèles. Deux ou plus de familles de fibres sont envisagées. Un formalisme de type milieu continu en grandes déformation est utilisé.

Les études suivantes sont dans la continuité des précédentes, mais les aspects mécaniques et leurs applications industrielles prènent le dessus sur les aspects mathématiques.

G. A. Holzapfel et al. [88] s'attache à proposer un cadre de modélisation de matériau à matrice souple en polymère renforcée par deux familles de fibres parallèles plus rigides. Une application concerne le comportement de matrice élastomère renforcée de fibres polymères ; cette application concerne les courroies, les durites ou les pneumatiques de l'industrie automobile. La difficulté de l'étude réside dans l'utilisation du formalisme de grandes déformations conjugué aux propriétés anisotropes du matériau. L'auteur envisage des comportements hyperélastiques et des comportements dissipatifs. Il propose un modèle viscoélastique anisotrope adapté aux grandes déformations.

P. Xue et al. [170] et X. Q. Peng et al. [137] proposent un modèle anisotrope, comportant deux familles de fibres parallèles tissées entre elles, qui peut subir des grandes déformations en cisaillement. Leur modèle reste élastique et semble être bien corrélé aux résultats d'essais de traction biaxiale de K. Buet-Gautier et al. [43], mais aussi aux résultats d'essais de traction en biais à 45 degrés sur un tissu équilibré chaîne-trame et aux résultats d'essais de cisaillement en boîte.

Y. Aimene [2] propose un modèle de comportement élastique pour le renfort de composites en fibres tissées avant la mise en place de la matrice. Un modèle hyperélastique anisotrope en grandes déformations rend compte de la rigidité des fibres et de la souplesse du tissage en cisaillement. Ce modèle trouve ses applications industrielles dans la simulation de la mise en forme, de ces renforts tissés, sur des surfaces gauches non développables. Deux modèles hyperélastiques sont proposés ; l'un de ces modèles est basé sur un potentiel énergétique dépendant de trois invariants, qui sont les deux élongations des chaînes et des trames et l'angle entre la direction des chaînes et celle des trames. Ces modèles, adoptent une hypothèse de découplage entre les lois mécaniques de traction dans les chaînes, dans les trames et la loi de cisaillement.

A. Charmetan [51] propose une loi de comportement hyperélastique pour des mèches de fibre, considérées comme un milieu continu. Il propose aussi une loi hyperélastique orthotrope pour des renforts 3D interlock épais. Jean-Guillaume Orliac [133] développe le modèle hyperélastique orthotrope de A. Charmetan [51], afin de mieux rendre compte des rigidités en cisaillement transverse et en cisaillement dans le plan chaîne-trame du renforts 3D interlock épais.

Chapitre 2

Aspects théoriques préliminaires

Ce chapitre présente des éléments théoriques et des hypothèses de base, liés à la nature des matériaux tissés et des toiles. Ces hypothèses concernent essentiellement la prise en compte de la déformation de ces matériaux et la définition de la contrainte. Le formalisme de grande déformation est introduit de façon succincte pour se limiter aux aspects essentiels pour notre étude, pour plus d'informations à ce sujet se reporter aux références [57], [158], [151] et [149].

2.1 Hypothèse de la membrane

Les applications visées dans ce travail concernent les toiles et les matériaux tissés destinés à la confection de voiles. Dans ces applications les matériaux présentent des épaisseurs très faibles par rapport à la taille de la voile et aux rayons de courbures typiques de ces structures. Par ailleurs, la forme de la voile est essentiellement liée à sa rigidité et à sa déformation de surface. En comparaison, sa rigidité en flexion est relativement faible et le cisaillement dans l'épaisseur a des effets négligeables sur la forme globale de la voile. Le matériau tissé ou la toile sera donc décrit comme une membrane et non comme une coque. Cette hypothèse revient à considérer le matériau comme une membrane bidimensionnelle (2D) et à négliger les contraintes et les déformations dans l'épaisseur.

Le matériau ainsi défini ne possède donc aucune rigidité en flexion ni en cisaillement dans l'épaisseur, ce qui se traduit par une hypothèse de contrainte plane, par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de la membrane. Cette hypothèse statique est complétée par une hypothèse cinématique, qui consiste à négliger l'effet de contraction dans l'épaisseur, ce qui revient à considérer un coefficient de Poisson nul dans l'épaisseur de la membrane. Cette hypothèse de la membrane bidimensionnelle implique que l'on se situe toujours le long de la surface de la membrane et non dans l'espace tridimensionnel (3D). Ainsi, les tenseurs de contrainte et de déformation sont des tenseurs dans l'espace vectoriel bidimensionnel (2D), qui correspond au plan tangent à la surface de la membrane.

Par ailleurs, le fils qui constitue le matériau tissé ou la toile est considéré comme un matériau unidimensionnel (1D), qui ne présente aucune rigidité en flexion, ni en torsion ; le fil ne présente pas non plus d'effet de cisaillement longitudinal, ni transversal. Les seules composantes de la contrainte et de la déformation sont celles le long de l'axe du fil.

Si on sollicite un matériau tissé 2D ou un fil 1D en compression, on observe en général un phénomène de flambement et la formation de plis, sans grande résistance mécanique. Cette instabilité est un phénomène de structure, qui empêche la manifestation du comportement constitutif du matériau en compression. Doit-on déduire de cette observation que la loi de comportement

de ces matériaux ne présente aucune contrainte ni déformation négative ? La réponse est non. En effet, si un fil est guidé de telle sorte qu'il reste droit au cours de la sollicitation, alors un comportement de compression peut être révélé de façon analogue à la traction. Par ailleurs, si on utilise une feuille de papier comme un modèle heuristique du comportement d'un matériau tissé 2D : sans disposition particulière, la feuille de papier ne présente pas de rigidité en compression, elle flambe et des plis se forment. Par contre, si on enroule la feuille pour former un cylindre, elle pourra révéler une rigidité en compression. On admet donc qu'une membrane 2D ou un fil 1D en matériau textile, peut avoir un comportement en compression, avec des contraintes et des déformations négatives. Même si la caractérisation de ce comportement reste difficile au niveau expérimental.

2.2 Cinématique de la membrane

L'espace tridimensionnel géométrique dans lequel la membrane existe et évolue est représenté par un espace vectoriel euclidien, des vecteurs positions des points matériels au cours du temps. Une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, de cet espace, est supposée fixe au cours du temps et un point fixe O est paramétré par le vecteur position nulle $\vec{0}$ de l'espace vectoriel (Fig. 2.1). La position initiale (t=0) d'un point matériel M est décrite par le vecteur $\vec{X}$, tel que :

$$\vec{X} = X^1\vec{e_1} + X^2\vec{e_2} + X^3\vec{e_3} \tag{2.1}$$

et sa position actuelle $(t > 0)$ est décrite par le vecteur $\vec{x}$, tel que :

$$\vec{x} = x^1\vec{e_1} + x^2\vec{e_2} + x^3\vec{e_3} \tag{2.2}$$

Une membrane est une surface définie au moyen de deux coordonnées curvilignes φ^1 et φ^2, qui permettent de localiser un point matériel M. Dans la configuration initiale $(t = 0)$, ces coordonnées peuvent être égales aux coordonnées initiales X^1 et X^2 du point M. Par ailleurs, à tout instant $t \geq 0$, il existe une relation injective de classe C^1 des coordonnées matérielles φ^1, φ^2 vers les coordonnées spatiales X^i et x^i $(i = 1, 2, 3)$ ainsi le vecteur position du point M est tel que :

$$\begin{cases} \vec{X} = \vec{X}(\varphi^1, \varphi^2) & ; \quad t = 0 \\ \vec{x} = \vec{x}(\varphi^1, \varphi^2) & ; \quad t > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

pour un point M donné, les coordonnées matérielles $\varphi^i (i = 1, 2)$ ont des valeurs données fixes. Une variation infinitésimale $d\varphi^1$ ou $d\varphi^2$ correspond à une variation du point M et par conséquent à une variation $d\vec{X}$ du vecteur position dans la configuration initiale et à une variation $d\vec{x}$ du vecteur position dans la configuration actuelle. Les vecteurs élémentaires $d\vec{X}$ et $d\vec{x}$ sont alors tangents à la courbe φ^1 (courbe $iso - \varphi^2$) ou à la courbe φ^2 (courbe $iso - \varphi^1$), respectivement. On définit les vecteurs suivants :

$$\begin{cases} \vec{G_1} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi^1} \\ \vec{G_2} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi^2} \end{cases} ; \quad (t = 0) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{g_1} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi^1} \\ \vec{g_2} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi^2} \end{cases} ; \quad (t > 0) \tag{2.4}$$

où les vecteurs $\vec{G_1}$ et $\vec{g_1}$ sont tangents aux courbes $iso - \varphi^2$ passant par M et les vecteurs $\vec{G_2}$ et $\vec{g_2}$ sont tangents aux courbes $iso - \varphi^1$ passant par M. La membrane admet ainsi en tout point M, un plan tangent représenté par un sous-espace vectoriel euclidien, muni d'une base tangente ou

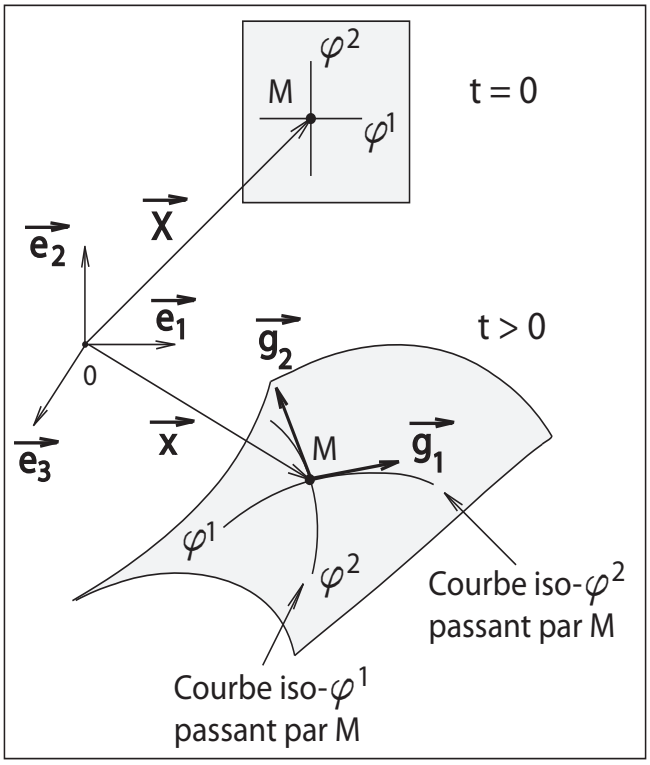


Fig. 2.1 – Coordonnées curvilignes de la membrane.

base naturelle covariante $(\vec{G}_1, \vec{G}_2)$ dans la configuration initiale et $(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$ dans la configuration actuelle. On peut aussi définir un vecteur normal unitaire à la membrane en M :

$$\begin{cases} \vec{N} &= \frac{\vec{G}_1 \wedge \vec{G}_2}{|\vec{G}_1 \wedge \vec{G}_2|} \quad ; t = 0 \\ \vec{n} &= \frac{\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2}{|\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2|} \quad ; t > 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

on introduit la base duale ou base contravariante $(\vec{G}^1, \vec{G}^2)$ dans la configuration initiale et $(\vec{g}^1, \vec{g}^2)$ dans la configuration actuelle, telle que :

$$\begin{cases} \vec{G}^i.\vec{G}_j &= \delta^i_j \quad ; t = 0 \\ \vec{g}^i.\vec{g}_j &= \delta^i_j \quad ; t > 0 \end{cases} \qquad \text{avec (i,j=1,2)} \tag{2.6}$$

où les vecteurs $\vec{G}^1$ et $\vec{g}^1$ sont normaux, en M, aux courbes $iso-\varphi^1$ et où les vecteurs $\vec{G}^2$ et $\vec{g}^2$ sont normaux, en M, aux courbes $iso-\varphi^2$. Par souci de simplification et sans restriction théorique, on suppose que dans la configuration initiale les coordonnées curvilignes φ^1 et φ^2 sont égales aux coordonnées initiales X^1 et X^2 du point M. La relation 2.3 s'écrit alors :

$$\vec{X} = \vec{X}(\varphi^1, \varphi^2) = \varphi^1 \vec{e}_1 + \varphi^2 \vec{e}_2 \tag{2.7}$$

par conséquent, la définition 2.4, conduit à :

$$\begin{cases} \vec{G}_1 &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi^1} = \vec{e}_1 \\ \vec{G}_2 &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial \varphi^2} = \vec{e}_2 \end{cases} \quad ; \qquad (t = 0) \tag{2.8}$$

Dans la configuration initiale, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base fixe orthonormée du sous-espace vectoriel euclidien du plan tangent, en M ; d'où :

$$\begin{cases} \vec{G}_1 &= \vec{G}^1 = \vec{e}_1 \\ \vec{G}_2 &= \vec{G}^2 = \vec{e}_2 \end{cases} \quad ; \qquad (t = 0) \tag{2.9}$$

Ainsi, Dans la configuration initiale, la base naturelle covariante $(\vec{G}_1, \vec{G}_2)$ est confondue avec la base duale $(\vec{G}^1, \vec{G}^2)$ et la base orthonormée fixe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Un vecteur élémentaire dans le plan tangent, autour de M, s'écrit respectivement dans la configuration initiale et la configuration actuelle :

$$\begin{cases} d\vec{X} &= d\varphi^i \vec{G}_i \quad ; \quad (t=0) \\ d\vec{x} &= d\varphi^i \vec{g}_i \quad ; \quad (t>0) \end{cases} \tag{2.10}$$

telles que :

$$d\vec{x} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.d\vec{X} \tag{2.11}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ est le tenseur gradient de la transformation de la membrane ; $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ est un tenseur d'ordre 2, défini par :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \vec{g}_i \otimes \vec{G}^i \tag{2.12}$$

où $(\vec{G}^1, \vec{G}^2)$ est la base naturelle contravariante dans la configuration initiale, qui est confondue avec la base fixe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, d'après l'hypothèse 2.9. Par conséquent, on a :

$$\vec{g}_i = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\vec{e}_i \quad , \quad \text{avec (i=1,2)} \tag{2.13}$$

cette relation traduit le transport convectif, par la transformation, des vecteurs de la base naturelle en partant de la configuration initiale vers la configuration actuelle. En vertu de la décomposition polaire, on peut écrire de façon unique :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{V}}\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \tag{2.14}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ est le tenseur orthogonal de rotation propre et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}$ sont les tenseurs de déformation pure droit et gauche respectivement. On définit le tenseur identité dans le plan tangent ou tenseur métrique dans le plan tangent, noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}$, par :

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} &= \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} &= \vec{g}_i \otimes \vec{g}^i = \vec{g}^i \otimes \vec{g}_i \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} &= g^{ij}\ \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j \quad , \quad \text{avec (i,j=1,2)} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} &= g_{ij}\ \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \end{aligned} \tag{2.15}$$

dont les composantes covariantes et contravariantes sont données par :

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{g}_i.\vec{g}_j \\ g^{ij} &= \vec{g}^i.\vec{g}^j \\ g^{ik}.g_{kj} &= \delta^i_j \end{aligned} \tag{2.16}$$

Les vecteurs de la base naturelle peuvent s'exprimer dans la base duale et réciproquement, par les relations suivantes :

$$\vec{g}_i = g_{ij}.\vec{g}^j \quad , \quad \vec{g}^i = g^{ij}.\vec{g}_j \tag{2.17}$$

les composantes covariantes g_{ij} du tenseur métrique peuvent être calculées de la manière suivante :

$$g_{ij} = \vec{e}_i.\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}\right).\vec{e}_j \quad \text{avec (i,j=1,2)} \tag{2.18}$$

où l'exposant « T » représente la transposition de tenseur. La relation 2.18 indique que les composantes covariantes du tenseur métrique sont égales aux composantes dans la base fixe du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$. Cette relation est directement liée au choix 2.13 et à la définition 2.16. De la même manière et en utilisant la définition 2.6 de la base duale, les composantes contravariantes g^{ij} du tenseur métrique peuvent être calculées de la manière suivante :

$$g^{ij} = \vec{e}_i.\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}\right).\vec{e}_j \qquad \text{avec (i,j=1,2)} \tag{2.19}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}$ représente la transposée de $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}$.

2.3 Déformation et taux de déformation

La description la plus naturelle du taux de déformation est celle obtenue par le point de vue Eulérien, qui consiste à se donner à tout instant et en tout point de la membrane le champ de vitesse. Le taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est défini alors comme la partie symétrique du gradient Eulérien du champ de vitesse $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T\right) \tag{2.20}$$

tel que pour un vecteur élémentaire transporté $\overrightarrow{dx}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\overrightarrow{dX}\right) = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\overrightarrow{dX} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}.\overrightarrow{dx} = \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\overrightarrow{dx} \tag{2.21}$$

et pour deux vecteurs élémentaires transportés $\overrightarrow{dx}$ et $\overrightarrow{dx}'$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx}'\right) = \overrightarrow{dx}.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T.\overrightarrow{dx}' + \overrightarrow{dx}.\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}.\overrightarrow{dx}' = 2\overrightarrow{dx}.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\overrightarrow{dx}' \tag{2.22}$$

La relation 2.22 indique que le tenseur taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ caractérise la vitesse de variation du produit scalaire dans la configuration actuelle. Le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est symétrique et objectif. Ce qui n'est pas le cas du tenseur taux de rotation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}$, qui est un tenseur non objectif et antisymétrique, tel que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{L}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{L}}^T\right) \tag{2.23}$$

D'une façon différente de la rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ (Eq. 2.14), le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}$ décrit la vitesse de rotation de la matière, au cours de la transformation. Dans cette description du point de vue Eulérien, le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ est défini à partir du champ de vitesse et n'est pas la dérivée par rapport au temps d'une quantité qui caractérise une déformation ; même si ses composantes sont homogènes à l'inverse d'un temps (s^{-1}). Du point de vue Lagrangien, plusieurs mesures de déformation sont envisageables. Nous nous limitons ici à la définition du tenseur de Green-Lagrange. Pour cela, nous introduisons, en premier lieu, le tenseur de dilatation de Cauchy-Green droit, noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \tag{2.24}$$

pour exprimer le produit scalaire des vecteurs transportés par la matière de la configuration initiale à la configuration actuelle :

$$\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx}' = \overrightarrow{dX}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\overrightarrow{dX}' \tag{2.25}$$

dont les composantes compte tenu de 2.18, s'écrivent dans la base fixe, par :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = g_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \qquad \text{avec (i,j=1,2)} \tag{2.26}$$

le tenseur de Green-Lagrange, noté $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$, s'exprime alors par :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{I}}\right) \tag{2.27}$$

tel que :

$$\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx}' - \overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX}' = \overrightarrow{dX}.\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}.\overrightarrow{dX}' - \overrightarrow{dX}.\overrightarrow{dX}' = 2\overrightarrow{dX}.\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{dX}' \tag{2.28}$$

Du point de vue Lagrangien, qui se caractérise par la donnée de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ et par le paramétrage des points matériels à l'aide de leurs positions initiales, la vitesse de déformation $\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{E}}}$ est donnée par l'évolution du tenseur de Green-Lagrange, telle que :

$$\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{E}}} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{C}}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{F}}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{F}}}\right) = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^T.\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \tag{2.29}$$

où apparaît le tenseur taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. En partant de la relation 2.28 et en tenant compte de 2.29,la vitesse de variation du produit scalaire dans la configuration actuelle, est telle que :

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx}'\right) = \overrightarrow{dX}.\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{C}}}.\overrightarrow{dX}' = 2\overrightarrow{dX}.\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{E}}}.\overrightarrow{dX}' \tag{2.30}$$

les relations 2.22 et 2.30 montrent que les points de vue Eulérien et Lagrangien sont cohérents, concernant la définition du tenseur taux de déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$. Par ailleurs, notons que la désignation du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ par le tenseur taux de déformation ou le tenseur taux de déformation Eulérien est adaptée à sa définition 2.20, qui se distingue de la définition 2.29 du tenseur vitesse de déformation $\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{E}}}$, qui correspond réellement à une vitesse de déformation, puisqu'il dérive d'une déformation.

2.3.1 Cas du matériau tissé

Dans le cas d'un matériau tissé, constitué de fils de chaîne et de fils de trame, les coordonnées matérielles φ^1 et φ^2 seront notées respectivement « c » et « t ». La première coordonnée « c » désigne les fils de chaîne et la deuxième coordonnée « t » désigne les fils de trame. De la même façon, les vecteurs de la base naturelle seront notés :

$$\begin{array}{lll} \vec{c}_0 = \vec{G}_1 \quad , & \vec{t}_0 = \vec{G}_2 & (t=0) \\ \vec{c} = \vec{g}_1 \quad , & \vec{t} = \vec{g}_2 & (t>0) \end{array} \tag{2.31}$$

tels que :

$$\vec{c} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\vec{c}_0 \qquad \text{et} \qquad \vec{t} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\vec{t}_0 \tag{2.32}$$

pour une transformation donnée, définie par son tenseur gradient $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$.

L'angle entre les fils de chaîne et les fils de trame, en un point M du matériau tissé, est noté α_0 dans la configuration initiale et α dans la configuration actuelle (Fig. 2.2)

A la base naturelle $(\vec{c}, \vec{t}, \vec{n})$, on associe une base duale $(\vec{c}^*, \vec{t}^*, \vec{n}^*)$, définie par les produits de dualité suivants :

$$\begin{array}{lll} \vec{c}^*.\vec{c} = 1 \quad , & \vec{t}^*.\vec{t} = 1 \quad , & \vec{n}^*.\vec{n} = 1 \\ \vec{c}^*.\vec{t} = \vec{c}^*.\vec{n} = 0 \quad , & \vec{t}^*.\vec{c} = \vec{t}^*.\vec{n} = 0 \quad , & \vec{n}^*.\vec{c} = \vec{n}^*.\vec{t} = 0 \end{array} \tag{2.33}$$

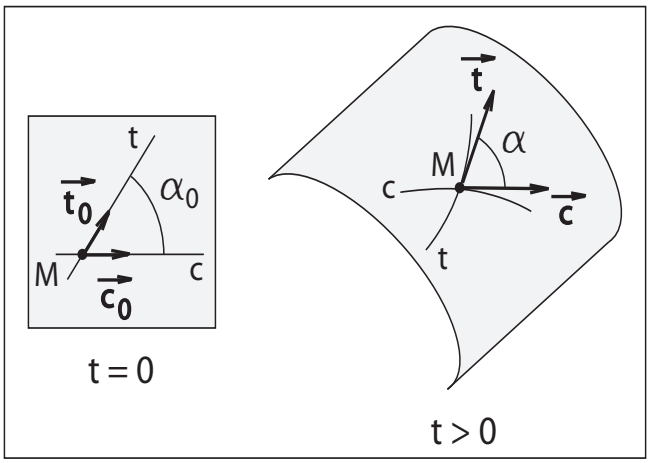


Fig. 2.2 – Coordonnées curvilignes du matériau tissé.

sachant que le vecteur $\vec{n}$ est unitaire et normal au plan tangent, les vecteurs $\vec{c}^*$ et $\vec{t}^*$ sont dans le plan tangent et :

$$\vec{n}^* = \vec{n} \tag{2.34}$$

compte tenu des relations 2.15 et 2.16, le tenseur métrique dans le plan tangent s'écrit, dans les différentes bases, par :

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} &= (\vec{c} \otimes \vec{c}^*) + \left(\vec{t} \otimes \vec{t}^*\right) = (\vec{c}^* \otimes \vec{c}) + \left(\vec{t}^* \otimes \vec{t}\right) \\
\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} &= [c^*]^2 . (\vec{c} \otimes \vec{c}) + [t^*]^2 . \left(\vec{t} \otimes \vec{t}\right) + [g^*_{ct}] . \left(\vec{c} \otimes \vec{t} + \vec{t} \otimes \vec{c}\right) \\
\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} &= [c]^2 . (\vec{c}^* \otimes \vec{c}^*) + [t]^2 . \left(\vec{t}^* \otimes \vec{t}^*\right) + [g_{ct}] . \left(\vec{c}^* \otimes \vec{t}^* + \vec{t}^* \otimes \vec{c}^*\right)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

où c, t, c^* et t^* représentent les modules des vecteurs $\vec{c}, \vec{t}, \vec{c}^*$ et $\vec{t}^*$, respectivement et $g_{ct} = \vec{c}.\vec{t}$, $g^*_{ct} = \vec{c}^*.\vec{t}^*$.
Et la relation 2.17 permet d'exprimer les vecteurs de la base naturelle dans la base duale et réciproquement :

$$\begin{cases}
\vec{c} &= [c]^2 .\vec{c}^* + [g_{ct}] .\vec{t}^* \\
\vec{t} &= [g_{ct}] .\vec{c}^* + [t]^2 .\vec{t}^* \\
\vec{c}^* &= [c^*]^2 .\vec{c} + [g^*_{ct}] .\vec{t} \\
\vec{t}^* &= [g^*_{ct}] .\vec{c} + \left[\vec{t}^*\right]^2 .\vec{t}
\end{cases} \tag{2.36}$$

2.3.2 Paramètres de déformation du matériau tissé

Les valeurs propres du tenseur gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$, d'ordre 2, introduit par la relation 2.11, sont les élongations, notées λ_1 et λ_2. Dans le cas d'une transformation homogène en extension biaxiale, les élongations sont :

$$\lambda_i = \frac{l_i}{L_i} \tag{2.37}$$

où L_i et l_i sont, comme l'indique la figure 2.3, les dimensions géométriques dans la configuration initiale et déformée, du matériau tissé.

La variation locale de surface est alors définie par le Jacobien surfacique de la transformation, tel que :

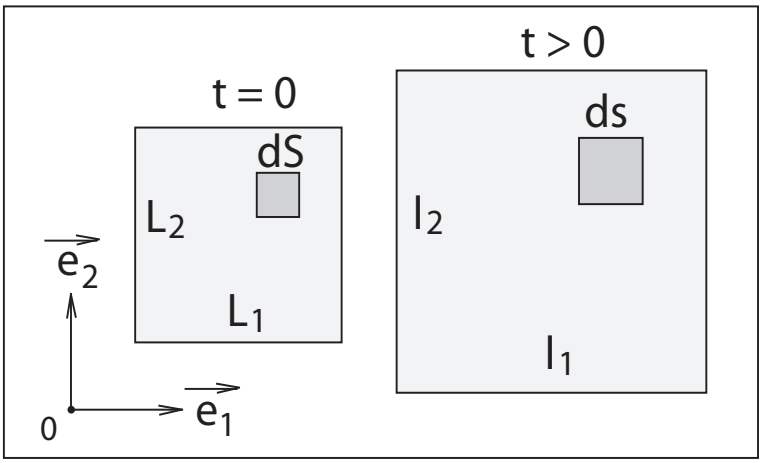


Fig. 2.3 – Transformation homogène en extension biaxiale dans les axes $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

$$J = \frac{ds}{dS} = det\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}\right) = \lambda_1\lambda_2 \tag{2.38}$$

Pour caractériser la déformation du matériau tissé on utilise le tenseur de Hencky gauche $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, appelé aussi tenseur de déformation logarithmique eulérien, tel que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \ln\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{V}}\right) \tag{2.39}$$

Dans le cas de la transformation homogène en extension biaxiale de la figure 2.3, les valeurs propres du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, s'expriment en fonction des élongations par :

$$\varepsilon_i = \ln(\lambda_i) \qquad , \qquad \text{avec (i=1,2)} \tag{2.40}$$

D'autres paramètres de déformation peuvent être définis pour caractériser la déformation locale du matériau tissé dans la direction des fils de chaîne et la direction des fils de trame, tels que, respectivement :

$$\varepsilon_c = \ln\left(\frac{c}{c_0}\right) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_t = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \tag{2.41}$$

où c, c_0, t et t_0 représentent les modules des vecteurs $\vec{c}, \vec{c}_0, \vec{t}$ et $\vec{t}_0$, respectivement.

Nous définissons aussi un angle de distorsion γ, du matériau tissé, tel que :

$$\gamma + \alpha = \frac{\pi}{2} \tag{2.42}$$

où α est l'angle entre les fils de chaine et les fils de trame, en un point M du matériau tissé (cf. fig. 2.2). A cet angle de distorsion, on associe une déformation de distorsion, notée ε_γ, telle que :

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{2}(\gamma - \gamma_0) = \frac{1}{2}\left\{\arcsin\left(\frac{\vec{c}.\vec{t}}{c.t}\right) - \arcsin\left(\frac{\vec{c_0}.\vec{t_0}}{c_0.t_0}\right)\right\} \tag{2.43}$$

où γ_0 est un angle défini dans la configuration non déformée, tel que :

$$\gamma_0 + \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \tag{2.44}$$

si l'angle γ_0 est nul, on a :

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \tag{2.45}$$

ce qui correspond à un tissage classique avec des fils de chaîne et de trame perpendiculaires au repos ; la relation 2.43 s'écrit alors :

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\vec{c}.\vec{t}}{c.t}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2} - \alpha\right\} = \frac{1}{2}\gamma \tag{2.46}$$

ce qui conduit à la définition classique de la déformation de distorsion.

2.4 Définition de la contrainte massique

La définition de la contrainte, généralement utilisée en mécanique des matériaux déformables, est celle de la contrainte de Cauchy. Dans le cas classique de la traction simple, l'état de contrainte de Cauchy se réduit à une seule composante non nulle, selon l'axe de traction, telle que :

$$\sigma = \frac{f}{a} \tag{2.47}$$

où f est le module de la force axiale actuelle appliquée et a la section droite actuelle de l'éprouvette.

Dans le cas des matériaux tissés, la définition et/ou la mesure d'une section a du matériau est une opération difficile. Ce problème, autant expérimental que théorique, se pose que le matériau soit 1D, (corde, sangle) ou 2D (matériau tissé, toile). Cette difficulté provient essentiellement de la nature même du matériau tissé, qui n'est pas un milieu continu, au sens strict généralement admis. En effet la nature du matériau tissé se rapproche plus d'une structure, composée de différentes nappes, de vides, de fils de différentes natures, d'enduction, etc. De sorte que la section apparente du matériau tissé, du point de vue purement géométrique, ne peut pas être un bon paramètre pour la définition de la contrainte. Car, ce qui transmet l'effort et résiste au niveau du matériau, ce n'est pas la surface géométrique mais plutôt la matière. Dans ce cas, la masse peut être une alternative à la section géométrique pour qualifier et quantifier la matière qui subit une action mécanique. Ainsi, la définition de la contrainte qui s'impose de façon naturelle, dans le cas du matériau tissé, est celle de la contrainte massique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}$, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{\rho^t}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\rho}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}} \tag{2.48}$$

où ρ et ρ^t sont respectivement la masse volumique initiale et actuelle du matériau ; $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}}$ les tenseurs de contrainte de Cauchy et de Kirchhoff. Compte tenu de l'hypothèse de la membrane (cf. § 2.1), les masses volumiques initiale et actuelle, peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \rho^t = \frac{\overline{\rho}^{\,t}}{e} \quad ; \quad \rho = \frac{\overline{\rho}}{e} \quad ; \quad \text{(Matériau 2D)} \\ \rho^t = \frac{\overline{\overline{\rho}}^{\,t}}{a} \quad ; \quad \rho = \frac{\overline{\overline{\rho}}}{a} \quad ; \quad \text{(Matériau 1D)} \end{cases} \tag{2.49}$$

où $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}^{\,t}$ et e sont respectivement la masse surfacique initiale, actuelle et l'épaisseur d'un matériau 2D ; $\overline{\overline{\rho}}$, $\overline{\overline{\rho}}^{\,t}$ et a sont respectivement la masse linéique initiale, actuelle et la section droite d'un matériau 1D. Par conséquent, la relation 2.48 s'écrit :

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{e}{\overline{\rho}^{\,t}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{e}{\overline{\rho}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}} \quad ; \quad \text{(Matériau 2D)} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{a}{\overline{\overline{\rho}}^{\,t}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{a}{\overline{\overline{\rho}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}} \quad ; \quad \text{(Matériau 1D)} \end{cases} \tag{2.50}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}}$ sont des tenseurs de contrainte d'ordre 2 ; tels que dans le cas de la traction simple (Fig.2.4) :

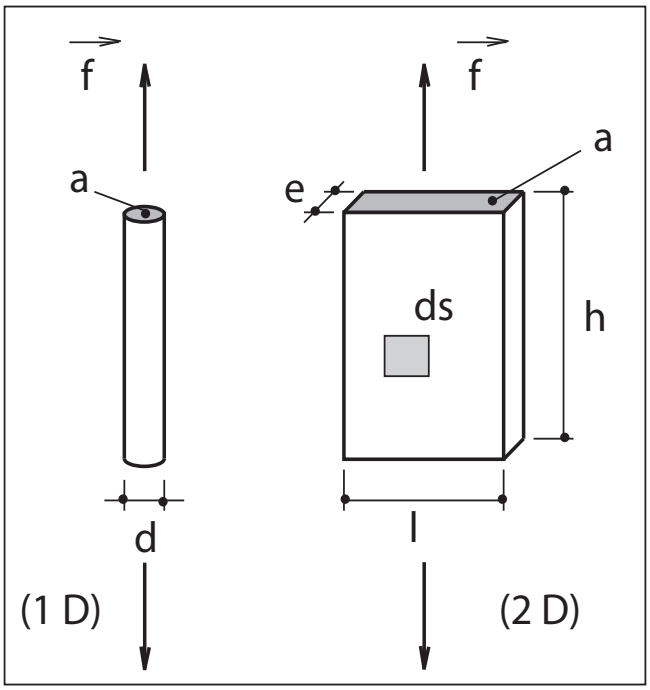


Fig. 2.4 – Traction simple d'un matériau tissé 1D ou 2D.

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\boldsymbol{\tau}} &= J.\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} \\ J &= \frac{\rho}{\rho^t} = det(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} J &= \frac{\rho}{\rho^t} = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}^{\,t}} = \frac{ds}{dS} = \lambda \frac{l}{L} \quad ; \quad \text{(Matériau 2D)} \\ J &= \frac{\rho}{\rho^t} = \frac{\overline{\overline{\rho}}}{\overline{\overline{\rho}}^{\,t}} = \lambda \quad ; \quad \text{(Matériau 1D)} \end{cases} \tag{2.51}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ est le tenseur gradient de la transformation ; dS et ds sont respectivement la surface élémentaire initiale et actuelle dans le plan du matériau 2D ; L et l sont respectivement la largeur initiale et actuelle de l'éprouvette de traction du matériau 2D ; λ est l'élongation de traction.

La définition de la contrainte massique (2.48) offre un avantage réel du point de vue expérimental, puisqu'elle permet une définition rigoureuse de la contrainte sans faire appel à la mesure généralement très délicate de la section du matériau tissé. En effet, dans le cas de la traction simple d'un matériau tissé 1D, une corde par exemple, les relations 2.50 et 2.51 conduisent à :

$$\Sigma = \frac{f}{\overline{\overline{\rho}}^{\,t}} = \frac{\lambda}{\overline{\overline{\rho}}}.f \tag{2.52}$$

les trois paramètres f, $\overline{\overline{\rho}}$ et λ qui interviennent dans la définition de la contrainte massique 2.52 sont accessibles à la mesure. Dans le cas d'une traction sur une bande de toile ou d'un matériau tissé 2D, les relations 2.50 et 2.51 conduisent à :

$$\Sigma = \frac{1}{\overline{\rho}^{\,t}}.\frac{f}{l} = \frac{\lambda}{\overline{\rho}}.\frac{f}{L} \tag{2.53}$$

La contrainte massique de traction s'exprime alors en fonction de la force par unitée de largeur de l'éprouvette $\frac{f}{l}$ ou $\frac{f}{L}$; et de la même façon, les quatre paramètres f, L, $\overline{\rho}$ et λ qui interviennent dans la définition 2.53, sont accessibles à la mesure.

La contrainte massique offre donc une définition rigoureuse, consistante et indépendante de la nature du matériau tissé étudié. Les relations 2.52 et 2.53 montrent que la contrainte massique est exprimée en $\left[\frac{N.m}{kg}\right]$ ou en $\left[\frac{J}{kg}\right]$. Cette unité peut paraître inhabituelle pour exprimer une contrainte et malgré la définition rigoureuse de la contrainte massique et son aspect opérationnel évident au niveau expérimental, nous pouvons être tentés de la convertir en contrainte de Cauchy ou en contrainte de Kirchhoff, exprimées en Pascal ; ceci dans un but de comparaison qualitative des performances avec des matériaux d'une autre nature ou dans un but opératoire tel que le calcul numérique. Dans ce cas, il est toujours possible d'adopter une section initiale équivalente a^* dans le cas d'un matériau tissé 1D ou une épaisseur initiale équivalente e^*, telles que :

$$\tau = \frac{\overline{\overline{\rho}}}{a^*}\,\Sigma \qquad \text{ou} \qquad \sigma = \frac{\overline{\overline{\rho}}^{\,t}}{a^*}\,\Sigma \qquad \text{(Cas du matériau 1D)} \tag{2.54}$$

$$\tau = \frac{\overline{\rho}}{e^*}\,\Sigma \qquad \text{ou} \qquad \sigma = \frac{\overline{\rho}^{\,t}}{e^*}\,\Sigma \qquad \text{(Cas du matériau 2D)} \tag{2.55}$$

dans la mesure où l'usage des relations 2.54 et 2.55 est limité à la définition d'une donnée qualitative des contraintes τ et σ exprimées en Pascal ou à l'usage des variables τ et σ exprimées en Pascal pour effectuer des calculs intermédiaires, une mesure rigoureuse de a^* ou e^* n'est pas nécessaire.

Dans le cas d'une corde 1D, le tenseur de contrainte massique, défini par les relations 2.48 et 2.50, est un tenseur d'ordre 2 dans un sous-espace vectoriel à une dimension, dont les coordonnées sont définies par une matrice à une ligne et une colonne ; tel que :

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}(M) = \Sigma(M)\ \vec{x} \otimes \vec{x} \tag{2.56}$$

où $\Sigma(M)$ est une contrainte massique scalaire et $\vec{x}$ est le vecteur unitaire tangent en M à la corde (Fig. 2.5). Dans la mesure où le produit $\overline{\overline{\rho}}^{\,t}.\Sigma(M)$ est homogène à une force (Eq. 2.52), le postulat de coupure de Cauchy, permet de définir l'effort interne en un point courant M, de la corde, par :

$$\vec{f}(M) = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}(M).\left\{\overline{\overline{\rho}}^{\,t}.\vec{x}\right\} = \overline{\overline{\rho}}^{\,t}.\Sigma(M).\vec{x} \tag{2.57}$$

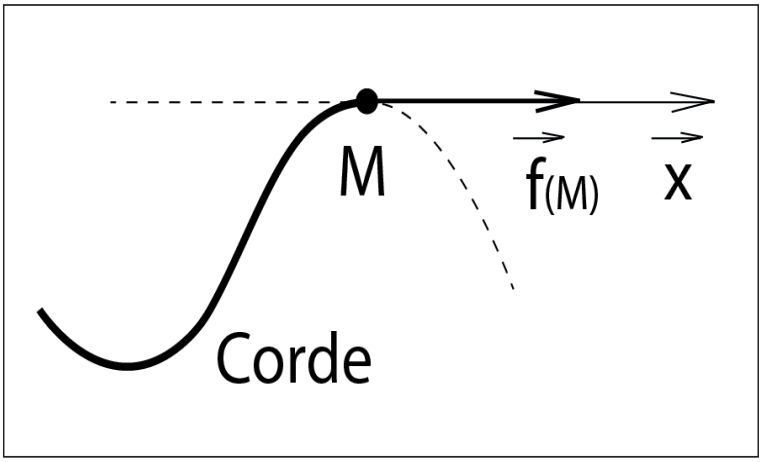


Fig. 2.5 – Effort interne dans une corde 1D en matériau tissé.

Dans le cas d'un matériau tissé 2D, le tenseur de contrainte massique $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}(M)$, en un point M , est un tenseur d'ordre 2, dans le sous-espace à deux dimensions qui correspond au plan

tangent $(M, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$, en M, au matériau tissé (Fig. 2.6). Les composantes du tenseur $\overline{\rho}\ ^t\ \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}(M)$ sont homogènes à une force par unité de longueur (Eq. 2.53). Ainsi, le postulat de coupure de Cauchy, permet de définir l'effort interne élémentaire en M, noté $\overrightarrow{df}(M)$, appliqué à un élément de longueur $\overrightarrow{dl}$ orienté par la normale $\vec{n}$, tel que :

$$\overrightarrow{dl} = dl.\vec{n} \tag{2.58}$$

par :

$$\overrightarrow{df}(M) = \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}(M).\left(\overline{\rho}\ ^t.\overrightarrow{dl}\right) \tag{2.59}$$

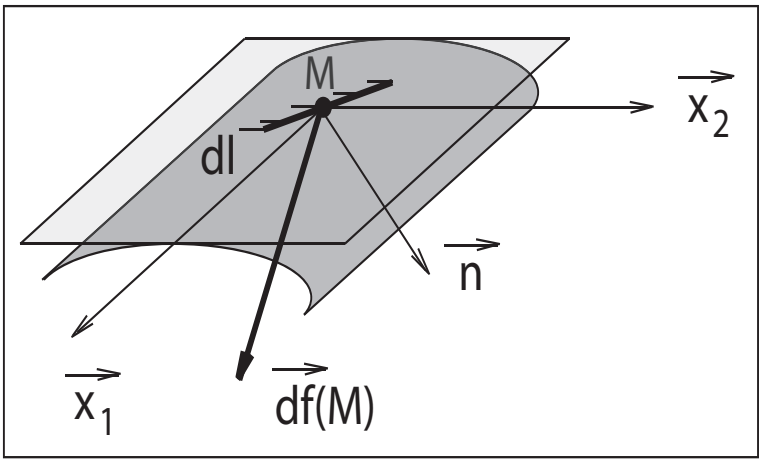


Fig. 2.6 – Effort interne élémentaire dans un matériau tissé 2D.

2.5 Espace de représentation d'un tenseur 2D du second ordre symétrique

Soit un tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ du second ordre symétrique, défini en un point M du matériau tissé, dans la base fixe $(M, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, tel que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)} \tag{2.60}$$

Son premier invariant, noté $I_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$, est tel que :

$$I_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\right) \tag{2.61}$$

Et son déviateur, noté $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}}$ est tel que :

$$\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} - \tfrac{1}{2}\, I_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} \,.\, \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \qquad ; \qquad \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}} = \begin{bmatrix} q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} & A_{12} \\ A_{12} & -q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} \end{bmatrix}_{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)} \tag{2.62}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}$ est le tenseur identité et $q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$ est tel que :

$$q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = \frac{A_{11} - A_{22}}{2} \tag{2.63}$$

Le deuxième invariant du déviateur, noté $II_{\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}}}$, est tel que :

$$\begin{aligned} II_{\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}}} &= \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}}\,.\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}}\right) \\ II_{\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}}} &= 2\,\{q^2_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} + A^2_{12}\} \end{aligned} \tag{2.64}$$

on défini le rayon dans le plan déviatoire, noté $Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$, tel que :

$$Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = \sqrt{II_{\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}}}} = \sqrt{2}\,\{q^2_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} + A^2_{12}\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.65}$$

Le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ peut être représenté par un vecteur $\vec{A}$, dans un espace de représentation, tel que :

$$\vec{A} = A_{11}\vec{a}_1 + A_{22}\vec{a}_2 + \sqrt{2}A_{12}\vec{a}_3 \tag{2.66}$$

où $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ est une base orthonormée dans cet espace (fig. 2.7). Ainsi le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$ est défini par :

$$\vec{A}.\vec{B} = \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{B}}\right) \tag{2.67}$$

Compte tenu des relation 2.62 et 2.65, le déviateur de $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}}$ peut s'écrire :

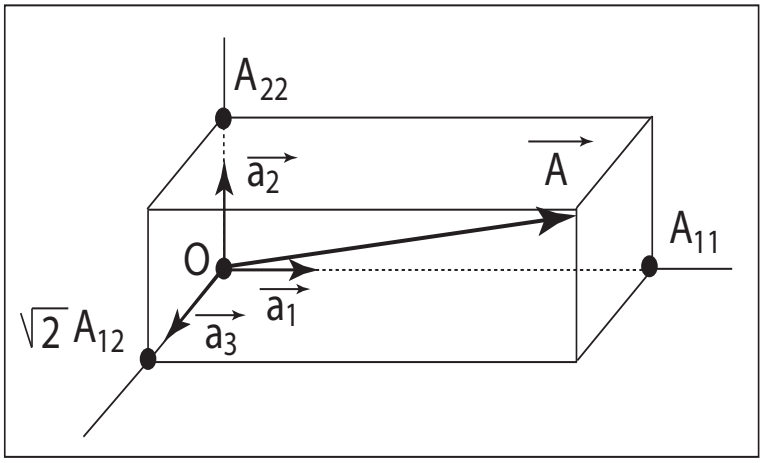


Fig. 2.7 – Représentation du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ par un vecteur $\vec{A}$ de coordonnées $(A_{11}, A_{22}, \sqrt{2}A_{12})$ dans la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ de l'espace de représentation.

$$\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{A}}} = q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} + A_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \tag{2.68}$$

On introduit les tenseurs $\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}$, tels que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \quad ; \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \quad ; \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\vec{e}_i} \tag{2.69}$$

Compte tenu de la définition 2.66, Ces tenseurs sont représentés dans l'espace de représentation par les vecteur respectifs $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$, tels que :

$$\vec{I} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{a}_i} \quad ; \quad \vec{J} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}_{\vec{a}_i} \quad ; \quad \vec{K} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix}_{\vec{a}_i} \tag{2.70}$$

Compte tenu des relations 2.68, 2.69 et 2.70, le déviateur $\overline{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$ est représenté dans l'espace de représentation par le vecteur, noté $\underline{\vec{A}}$, tel que :

$$\underline{\vec{A}} = q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}.\vec{J} + A_{12}.\vec{K} \tag{2.71}$$

Et le vecteur $\vec{A}$ qui représente le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$, peut se mettre sous la forme :

$$\vec{A} = \frac{\mathrm{Tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})}{2}.\vec{I} + q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}.\vec{J} + A_{12}.\vec{K} \tag{2.72}$$

Les modules des vecteurs $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$, notés I, J et K, sont tels que :

$$I = \sqrt{\mathrm{Tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{I}})} = \sqrt{2} \quad ; \quad J = \sqrt{\mathrm{Tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{J}})} = \sqrt{2} \quad ; \quad K = \sqrt{\mathrm{Tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{K}})} = \sqrt{2} \tag{2.73}$$

Par ailleurs :

$$\vec{I}.\vec{J} = 0 \quad ; \quad \vec{I}.\vec{K} = 0 \quad ; \quad \vec{J}.\vec{K} = 0 \tag{2.74}$$

Par conséquent $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ forme une base orthogonale dans l'espace de représentation. La figure 2.8 donne une interprétation géométrique des relations 2.71 à 2.74 ; où le vecteur $\vec{I}$ est porté par l'axe isotrope et les vecteurs $\vec{J}$ et $\vec{K}$ forment le plan déviatoire. Le vecteur $\vec{A}$ de coordonnées

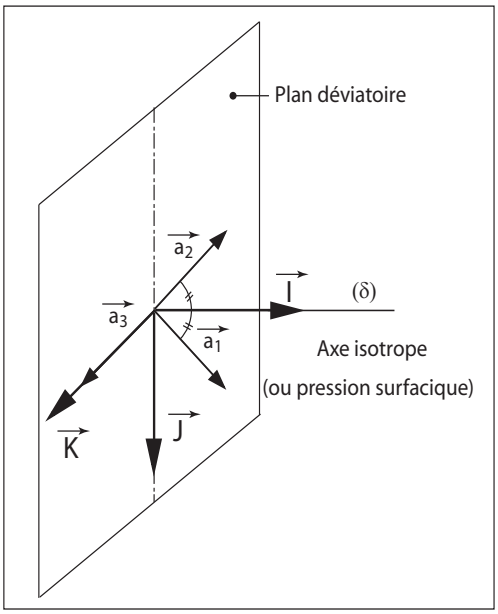


Fig. 2.8 – Base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et interprétation géométrique de la représentation dans l'espace de représentation.

$(A_{11}, A_{22}, \sqrt{2}A_{12})$ dans la base $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ se décompose en un vecteur $\vec{OP}$ et un vecteur $\vec{OH}$ (fig. 2.9). Le module du vecteur $\vec{OH}$, noté OH, est tel que :

$$OH = \vec{A}.\frac{\vec{I}}{I} = \frac{A_{11} + A_{22}}{\sqrt{2}} \tag{2.75}$$

Et le vecteur $\vec{OP}$ est tel que :

$$\vec{OP} = \vec{A} - OH.\frac{\vec{I}}{I} = \underline{\vec{A}} \tag{2.76}$$

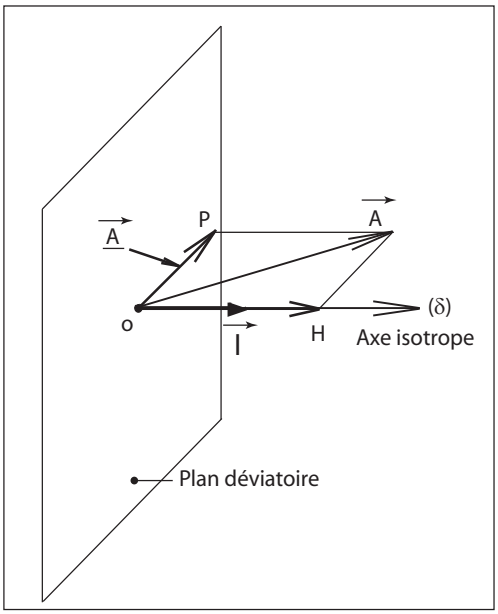


Fig. 2.9 – Décomposition d'un vecteur $\vec{A}$ en un vecteur déviatoire $\vec{OP} = \underline{\vec{A}}$ et un vecteur isotrope $\vec{OH}$.

Ainsi le vecteur $\vec{OH}$ représente la partie isotrope du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ et le vecteur $\underline{\vec{A}}$ représente la partie déviatoire. Le module du vecteur $\underline{\vec{A}}$, noté $\underline{A}$, correspond au rayon dans le plan déviatoire, en effet :

$$\underline{A} = \left\{\underline{\vec{A}}.\underline{\vec{A}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\mathrm{Tr}(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})\right\}^{\frac{1}{2}} = Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} \tag{2.77}$$

L'orientation dans le plan déviatoire du vecteur $\underline{\vec{A}}$ peut être défini par un vecteur unitaire $\vec{u}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$, tel que :

$$\underline{\vec{A}} = Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}.\vec{u}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} \tag{2.78}$$

La relation 2.71 et la définition 2.77 permettent de donner l'expression du vecteur $\vec{u}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$, tel que :

$$\vec{u}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = \frac{q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}}{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}}.\vec{J} + \frac{A_{12}}{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}}.\vec{K} \tag{2.79}$$

Le vecteur $\vec{u}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$ est un vecteur unitaire ; en effet, son module, noté $u_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$, est tel que :

$$u_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = \left\{\vec{u}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}.\vec{u}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2q^2_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} + 2A^2_{12}}{Q^2_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}} = 1 \tag{2.80}$$

Le rayon dans le plan déviatoire $Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$ est un scalaire positif, qui a le sens d'une intensité déviatoire du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$. Ainsi la relation 2.78 montre que le tenseur déviatoire $\overline{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$ peut être représenté dans le plan déviatoire par une intensité $Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$ et une orientation $\vec{u}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}}$ (fig. 2.10).

2.6 Dérivée objective de Green-Naghdi

Le comportement viscoélastique des matériaux introduit la grandeur physique « temps » dans les variables d'état du système. Ainsi les lois de comportement pour cette classe de matériau utilisent la dérivée temporelle de tenseurs comme la contrainte et/ou la déformation, La dérivée

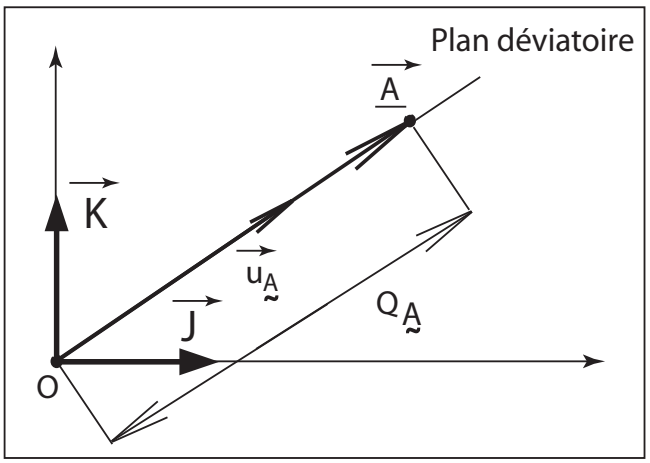


Fig. 2.10 – Orientation dans le plan déviatoire du vecteur $\vec{\underline{A}}$.

temporelle classique des tenseurs lagrangiens est objective, car ces tenseurs sont considérés dans la configuration de référence. Les tenseurs eulériens, dans la configuration courante, tournent avec la matière et nécessitent la définition d'une dérivée objective. Dans le cadre de ce travail, nous avons fait le choix de la dérivée objective de Green-Naghdi. Cette dérivée revient à se placer dans un référentiel qui tourne avec la matière, selon la rotation propre $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ définie par la décomposition polaire du tenseur gradient de la transformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ (cf relation 2.14). La dérivée de Green-Naghdi d'un tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ est telle que :

$$\frac{d^{GN}}{dt}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\right) = \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{A}}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} \tag{2.81}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}}$ est le tenseur antisymétrique de vitesse de rotation propre, tel que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Omega}} = \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{R}}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T \tag{2.82}$$

Dans la suite de ce document et par souci de simplification des écritures, la dérivée de Green-Naghdi d'un tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ sera notée simplement $\underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{A}}}$; si le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ est lagrangien, cette dérivée est confondue avec la dérivée temporelle classique et si le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$ est eulérien, cette notation désigne la dérivée de Green-Naghdi.

Deuxième partie

Approche expérimentale

Chapitre 3

Techniques expérimentales

Ce chapitre a pour objectif des présenter les moyens d'essais, les matériaux testés et la forme des éprouvettes. Nous présentons aussi les méthodes de mesure de la contrainte, des déformations, de l'angle de distorsion et de l'angle entre les fils de chaîne et de trame.

3.1 Machine d'essai

La machine d'essai est une presse biaxiale électro-hydraulique asservie de traction-compression et de torsion alternée, de marque *M.T.S.* (fig. 3.1). Ses capacités maximales sont de ±100 kN en force axiale avec un déplacement axial de ±100 mm et de ±1200 Nm en couple de torsion avec une rotation de ±45 degrés. Pour chacune des 4 voies de contrôle il existe des gammes de capacités réduites, dont la plus petite est égale à 10 % de la grande gamme. Les essais sont effectués en traction contrôlée par la vitesse du vérin axial. La consigne peut être le déplacement du vérin ou la force appliquée sur l'éprouvette. En torsion, durant tous les essais, la machine est contrôlée en angle nul ; la précision est de l'ordre de ±0.1 degrés.

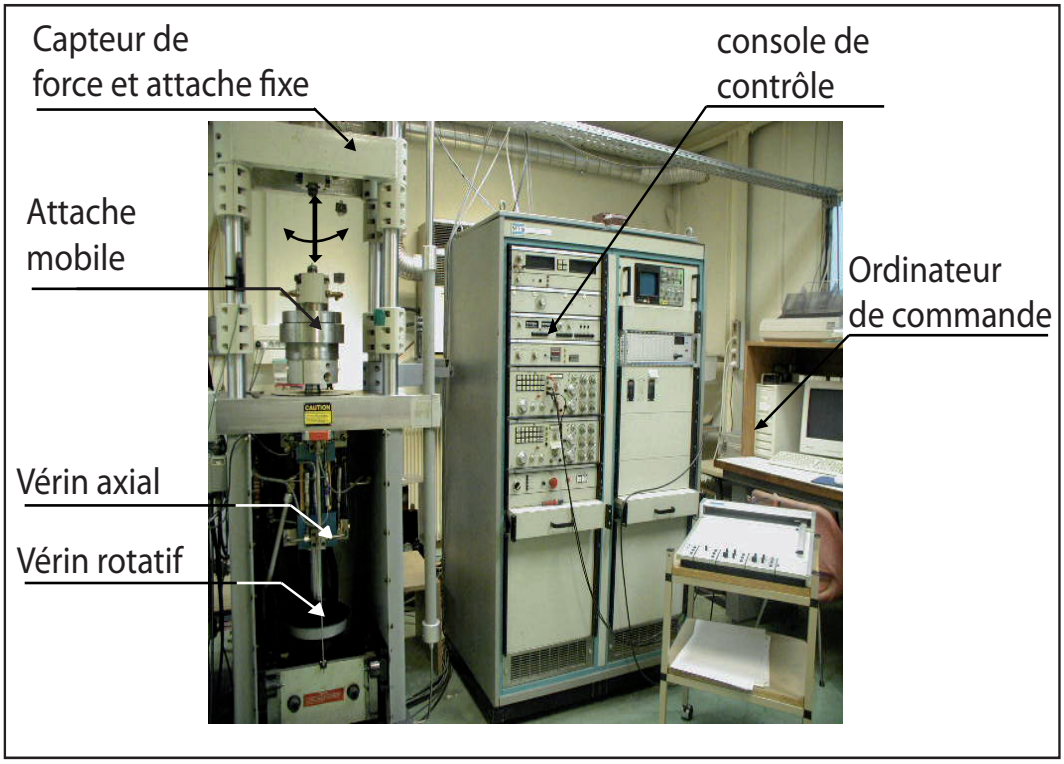


Fig. 3.1 – Machine d'essai hydraulique MTS de traction-torsion.

3.2 Attaches spécifiques articulées et forme de l'éprouvette

L'éprouvette est fixée à la machine par pincement, à l'aide de deux attaches articulées (fig. 3.2). Ce dispositif spécifique aux matériaux tissés permet la réalisation d'essais de traction dans les sens chaîne et trame et des essais de traction hors axes.

L'attache articulée est équipée d'une réglette mobile, plaquée sur l'éprouvette à l'aide de six vis de serrage, qui permettent une fixation de cette dernière par pincement. La figure 3.3 présente ce mode de fixation, par une coupe le long de l'épaisseur de l'éprouvette. Le pincement de l'éprouvette s'effectue grâce à la superposition de deux bandes de caoutchouc et deux bandes de papier verre, qui assurent une adhérence très efficace de l'éprouvette et empêche tout glissement en cours d'essai. L'attache articulée est guidée en rotation par rapport à l'attache fixe grâce à un roulement. L'axe de rotation de l'attache articulée passe par le milieu de la zone de pincement de l'éprouvette.

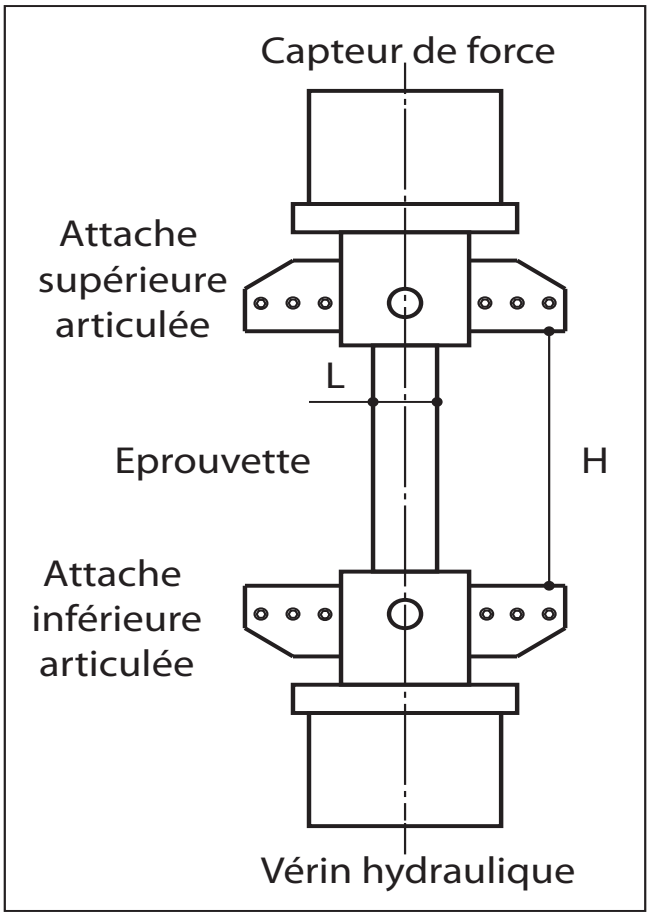


Fig. 3.2 – Schéma de montage de l'éprouvette sur la machine d'essai.

L'éprouvette a une longueur globale de 360mm (fig. 3.4). Elle est constituée d'une zone utile centrale de deux zones de pincement. La zone utile a une longueur H = 300mm et une largeur L=50mm.

3.3 Condition des essais

Les essais sont effectués dans un laboratoire de petites dimensions (40 m^2), situé à l'intérieur des bâtiments, sans fenêtres extérieures. Pendant les essais, la température du laboratoire est

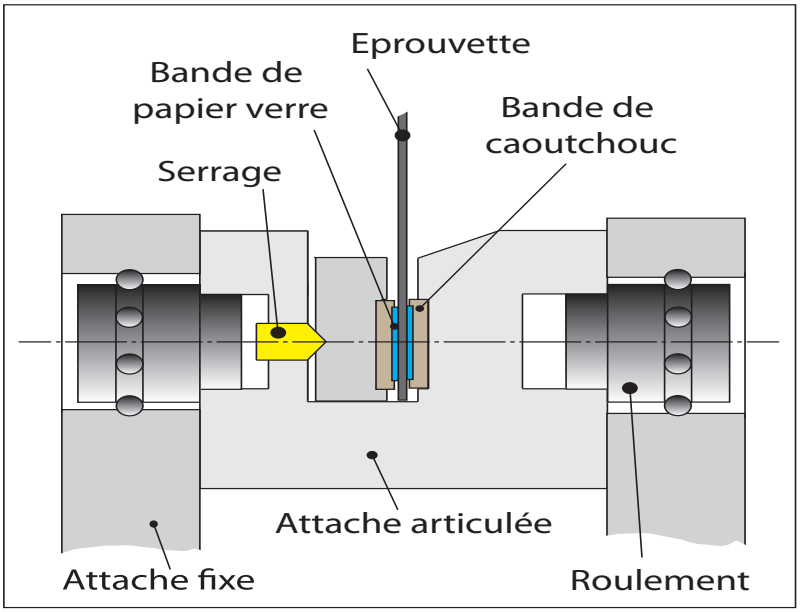


Fig. 3.3 – Mode de fixation de l'éprouvette dans l'attache articulée.

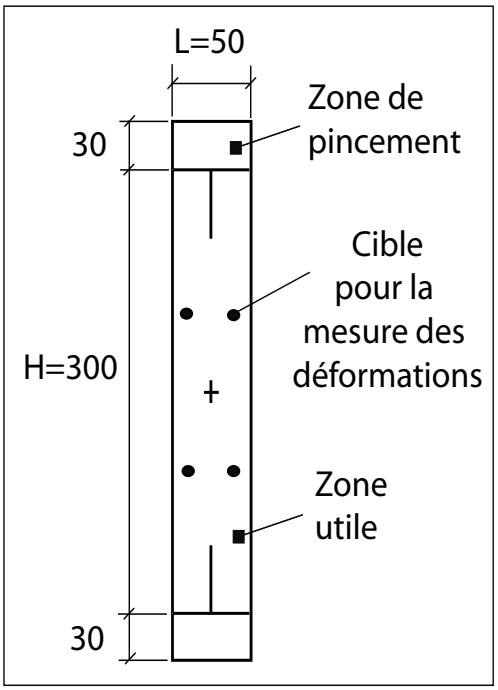


Fig. 3.4 – Forme de l'éprouvette.

maintenue à $20 \pm 1^{\circ}C$. La mesure du déplacement à l'aide du capteur de la machine d'essai est effectuée avec une précision de ± 0.02 mm. Ceci correspond à une erreur absolue de la déformation globale, de type aléatoire, de $\pm 7.10^{-5}$, pour une base théorique de mesure de $300mm$. L'erreur absolue sur la mesure de la force, de type aléatoire, est de $\pm 0.2\%$.

3.4 Pilotage des essais et acquisition des données

Les mesures du temps, de la force, du déplacement et de la déformation locale sont enregistrées sur fichiers informatiques à l'aide d'une carte électronique d'acquisition $DAP1216e/4$ intégrée dans un micro-ordinateur. Cette carte possède aussi un module de pilotage de processus, qui

permet de commander la machine d'essai. La programmation de cette carte d'acquisition et de pilotage a été effectuée à l'aide d'un logiciel de programmation graphique DASYLab version 2.00.15.

3.5 Contrainte et déformation lors d'un essai traction

3.5.1 Système de suivi de cibles par caméra CCD

Au cours d'un essai de traction, une mesure de la déformation locale dans la zone utile de l'éprouvette est réalisée, dans le sens de la traction (déformation axiale) et dans le sens transverse (déformation transversale). Cette mesure est obtenue à l'aide d'un système de suivi de cibles par caméra CCD, sans contact avec l'éprouvette (fig. 3.5). Ce système développé au Laboratoire 3SR permet de suivre le mouvement de plusieurs cibles (dix cibles au maximum) en temps réel et de fournir numériquement la position du barycentre de chacune des cibles dans un tableau XY. La caméra CCD a une fréquence d'acquisition de 25 images par seconde et une résolution de 1280(Horizontal) par 1024(Verticale) pixels. Dans le cas des matériaux tissés, nous réalisons sur l'éprouvette, avant déformation, un marquage de quatre cibles à l'aide d'un gabarit sur un support transparent souple (cibles MN et PQ sur la figure 3.6). Les cibles MP et NQ permettent de mesurer la déformation axiale et les cibles MN et PQ permettent de mesurer la déformation transversale. Au cours de la déformation le système fournit la position de chacune des quatres cibles dans un repère $(0, \vec{X}, \vec{Y})$ lié au plan image, comme cela est indiqué sur la figure 3.6.

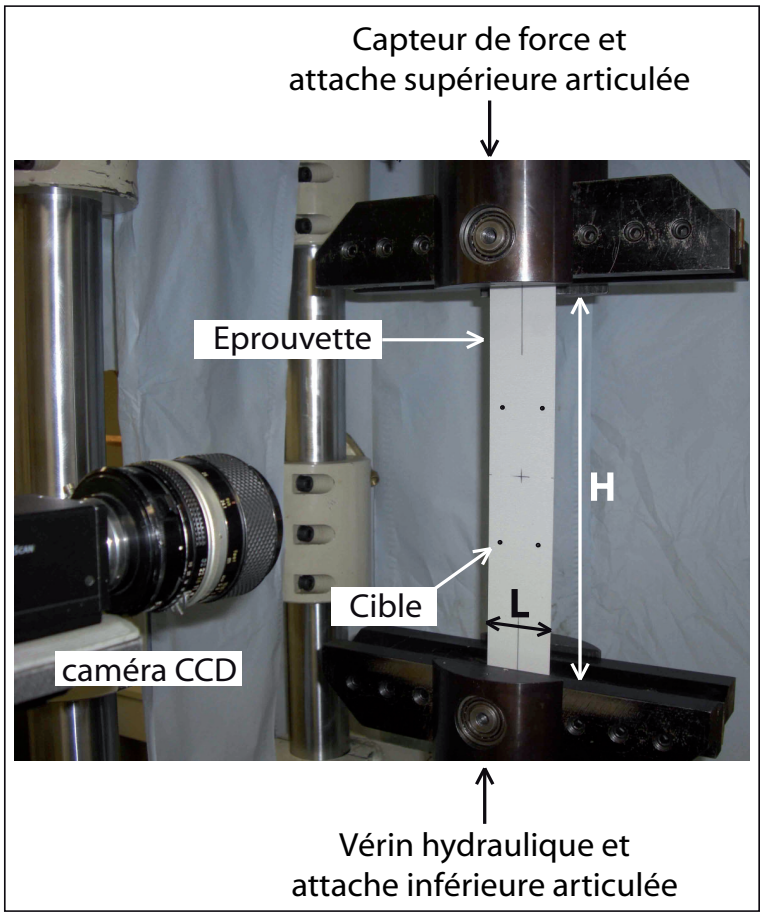


Fig. 3.5 – Mesure des déformations de l'éprouvette à l'aide d'un système de suivi de cibles par caméra CCD.

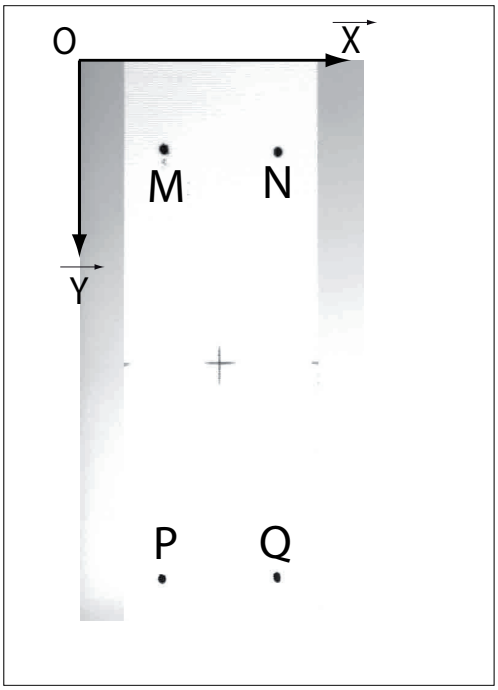


Fig. 3.6 – Marquage de quatre cibles MN et PQ au centre de l'éprouvette.

L'orientation de la caméra par rapport à l'axe de l'éprouvette est réalisée avec le plus grand soin au début de chaque essai. Néanmoins, une erreur inévitable sur l'orientation existe et il est nécessaire d'en tenir compte. La figure 3.7 illustre l'angle de désorientation, noté ξ, du repère de la caméra ($\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$) ou celui du plan image et le repère de sollicitation de l'éprouvette ($\vec{e}_{s1}$,$\vec{e}_{s2}$) ou celui du plan objet. Notons que ces deux plans ne sont pas nécessairement rigoureusement parallèles. Néanmoins, l'angle de défaut de parallélisme entre le plan image et le plan objet, que nous notons β, est faible. Ce défaut introduit un facteur multiplicatif sur les mesures des longueurs en $cos\beta$, qui tend vers l'unité. Nous négligeons ce défaut de parallélisme des plans image et objet. Cette hypothèse est pleinement justifiée, car nous ne réalisons pas de mesure absolue de longueur, mais des mesures relatives.

Le système de suivi de cibles fournit, au cours du temps, des tableaux (x_M, y_M), (x_N, y_N), (x_P, y_P), (x_Q, y_Q) qui correspondent respectivement aux coordonnées des quatres points (M, N) et (P, Q) dans le repère ($\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$). La déformation axiale de l'éprouvette correspond à la variation de longueur du segment $\overline{MP}$, noté h, et calculé par :

$$h = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} \tag{3.1}$$

De la même façon la déformation transversale de l'éprouvette correspond à la variation de longueur du segment $\overline{MN}$, noté l, et calculé par :

$$l = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} \tag{3.2}$$

Notons que la déformation axiale et la déformation transversale peuvent être mesurées aussi par la variation de longueur des segments $\overline{NQ}$ et $\overline{PQ}$, respectivement. Au cours des essais, les mesures de variation de longueur des segments $\overline{MP}$ et $\overline{NQ}$, d'une part, et des segments $\overline{MN}$ et $\overline{PQ}$, d'autre part, ne présentent pas en général de différences significatives. Partant de ce constat, les déformations axiale et transversale sont mesurées à partir de la moyenne des variations de longueur des segments ($\overline{MN}$, $\overline{PQ}$) et ($\overline{MP}$, $\overline{NQ}$), respectivement. La valeur de

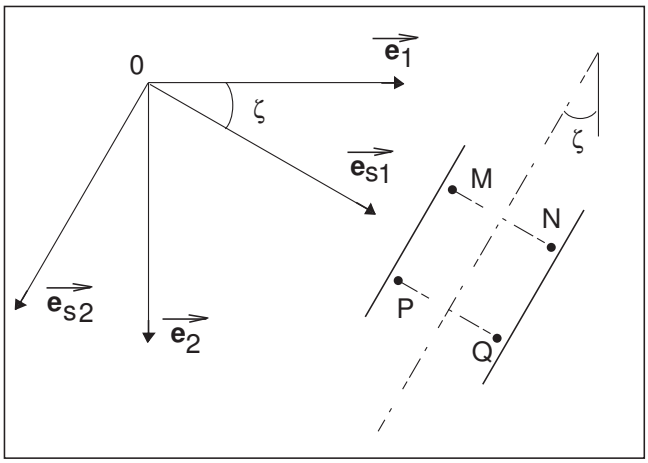


Fig. 3.7 – Illustration de l'angle de désorientation ξ entre le repère de la caméra ($\vec{e}_1$,$\vec{e}_2$) et le repère de sollicitation ($\vec{e}_{s1}$,$\vec{e}_{s2}$).

l'angle de désorientation ξ peut être déterminé, par exemple, par le mouvement des point M et N, telle que :

$$\xi = \arctan \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} \tag{3.3}$$

la valeur typique de l'erreur de positionnement angulaire de la caméra est $\alpha = \pm 2^\circ$.

Une validation de la mesure de la déformation par caméra CCD, est présentée au chapitre 4 (§ 4.1.2), grâce à une comparaison de cette mesure à celle d'une extensomètre mécanique.

3.5.2 Elongations et déformations dans les sens axial et transversal

Conformément à la relation 2.37 du chapitre 2, les élongations axiale λ_a et transversale λ_t sont telles que :

$$\lambda_a = \frac{h}{H} \qquad \text{et} \qquad \lambda_t = \frac{l}{L} \tag{3.4}$$

où h et H sont les longueurs définies par la relation 3.1, respectivement dans la configuration actuelle et initiale et où l et L sont les longueurs définies par la relation 3.2, respectivement dans la configuration actuelle et initiale. Par ailleurs, nous avons adopté la mesure de déformation logarithmique (cf. relation 2.39 du chapitre 2). La déformation logarithmique axiale ε_a et transversale ε_t sont telles que :

$$\varepsilon_a = \ln(\lambda_a) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_t = \ln(\lambda_t) \tag{3.5}$$

La déformation axiale ε_a sera notée ε_C dans le cas d'un chargement dans le sens chaîne et ε_T dans le cas d'un chargement dans le sens trame.

3.5.3 Traction hors axes

Des essais hors axes sont réalisés. L'orientation de l'axe de traction est définie par rapport à la direction des fils de chaîne par un paramètre angulaire, noté θ. La figure 3.8 illustre la définition de l'angle θ.

Au cours de ce type d'essais une déformation de distorsion de l'éprouvette est induite par un effet d'anisotropie du matériau. Pour caractériser cet effet, une mesure de l'angle de rotation

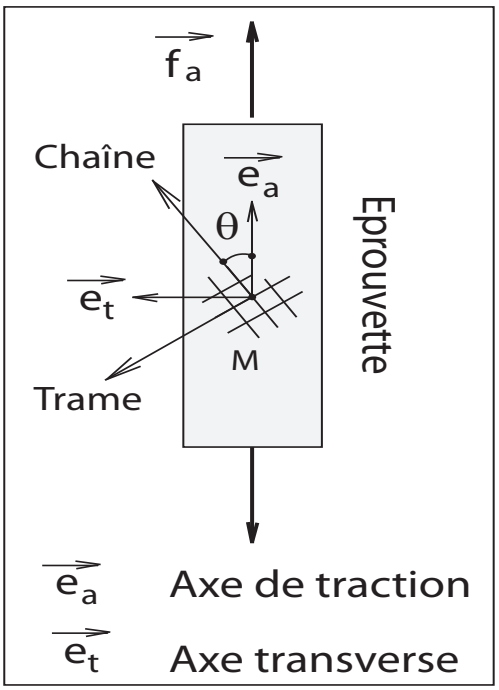


Fig. 3.8 – Définition de l'orientation des essais hors axes.

des attaches articulées peut être réalisée, au cours de l'essai. La figure 3.9 illustre cet effet de rotation des attaches articulées. La mesure de l'angle δ est effectuée grâce au système de suivi de cibles par la caméra CCD. Deux cibles A et B sont imprimées sur l'attache inférieure articulée et suivies dans leur mouvement respectif au cours de l'essai. L'angle de rotation δ est tel que :

$$\delta = \arccos \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{e_1}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} - \arccos \frac{\overrightarrow{A_0B_0}.\vec{e_1}}{\left|\overrightarrow{A_0B_0}\right|} \tag{3.6}$$

où la notation $|\vec{x}|$ correspond au module du vecteur $\vec{x}$; le vecteur $\vec{e_1}$, correspond au vecteur unitaire horizontal du repère de la caméra, défini par la figure 3.7 ; les vecteurs $\overrightarrow{A_0B_0}$ et $\overrightarrow{AB}$ correspondent respectivement aux positions initiale et actuelle des cibles A et B ; les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{A_0B_0}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont mesurées par la caméra CCD au cours de l'essai.

D'autres mesures peuvent également être réalisées au centre de l'éprouvette, grâce au système de suivi de cibles par la caméra CCD, comme l'angle α entre les fils de chaîne et les fils de trame (Fig. 3.9), ainsi que la déformation de distorsion ε_γ (cf. 2.3.2 du chapitre 2). Dans le cas d'un matériau tissé avec des fils de chaîne et des fils de trame qui forment un angle initial $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, la mesure de l'angle α au cours de l'essai est telle que :

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{oc}.\overrightarrow{ot}}{|\overrightarrow{oc}| \,.\, \left|\overrightarrow{ot}\right|} \right) + \Delta\alpha_0 \tag{3.7}$$

où la variation $\Delta\alpha_0$, correspond à une correction de l'erreur angulaire due au pointage des cibles 0, t et c , sur l'éprouvette. La valeur de $\Delta\alpha_0$ est mesurée avant le début du chargement, lorsque l'éprouvette est dans sa configuration initiale ; telle que :

$$\Delta\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\overrightarrow{oc_0}.\overrightarrow{ot_0}}{|\overrightarrow{oc_0}| \,.\, \left|\overrightarrow{ot_0}\right|} \right) = \arcsin \left(\frac{\overrightarrow{oc_0}.\overrightarrow{ot_0}}{|\overrightarrow{oc_0}| \,.\, \left|\overrightarrow{ot_0}\right|} \right) \tag{3.8}$$

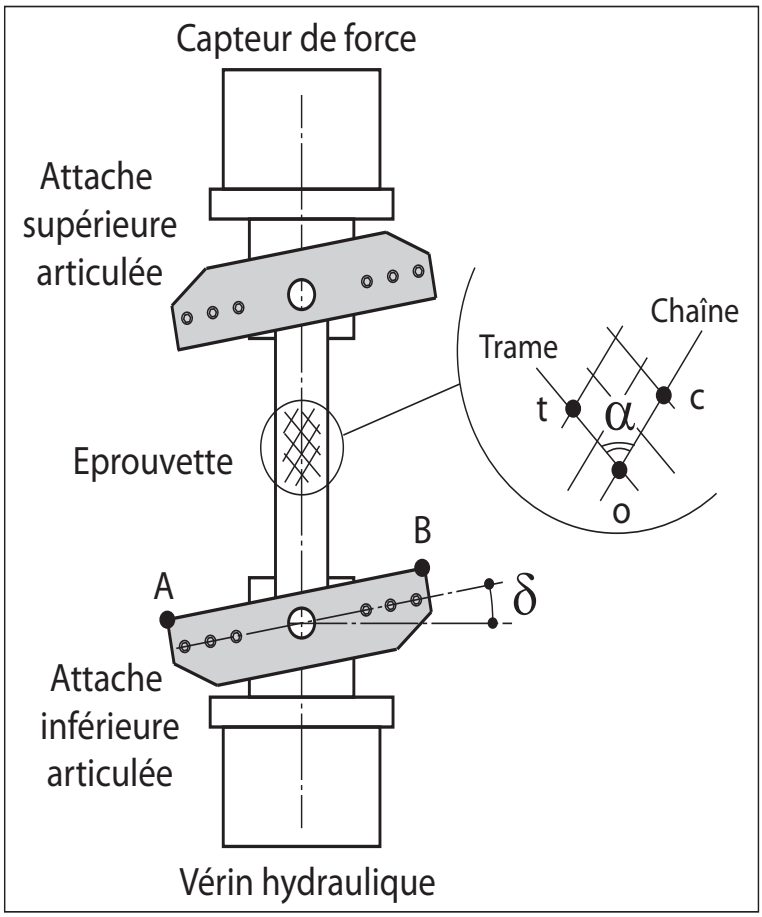


Fig. 3.9 – Traction hors axes et rotation δ des attaches articulées induite par un effet d'anisotropie du matériau.

Les vecteurs $(\overrightarrow{oc_0}, \overrightarrow{ot_0})$ et $(\overrightarrow{oc}, \overrightarrow{ot})$ correspondent aux configurations initiale et actuelle des cibles o, c et t ; les coordonnées de ces vecteurs sont mesurées par la caméra CCD au cours de l'essai. La mesure de la déformation de distorsion ε_γ est obtenue par :

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{2}\left\{\arcsin\left(\frac{\vec{c}.\vec{t}}{|\vec{c}|\,.\,|\vec{t}|}\right) - \arcsin\left(\frac{\vec{c_0}.\vec{t_0}}{|\vec{c_0}|\,.\,|\vec{t_0}|}\right)\right\} \tag{3.9}$$

où $\arcsin\left(\frac{\vec{c_0}.\vec{t_0}}{|\vec{c_0}|.|\vec{t_0}|}\right)$ correspond à la correction $\Delta\alpha_0$ de l'erreur angulaire due au pointage des cibles.

3.5.4 Contrainte axial appliquée à l'éprouvette

Nous adoptons la définition de la contrainte massique (cf. § 2.4 du chapitre 2). La contrainte axiale appliquée à l'éprouvette est calculée à partir du module de la force axiale appliquéf_a, telle que :

$$\Sigma = \frac{\lambda_a}{\overline{\rho}}.\frac{f_a}{L} \tag{3.10}$$

où L est la largeur initiale de l'éprouvette (Fig. 3.2 et 3.4), $\overline{\rho}$ est la masse surfacique initiale du matériau testé et λ_a l'élongation axiale.

3.6 Essai de traction à taux de déformation imposé

3.6.1 Traction à taux de déformation constant

Compte tenu de la définition 2.20 du chapitre 2 et au cours d'un essai de traction dans les axes du matériau, le tenseur taux de déformation est tel que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\lambda}_a}{\lambda_a} & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \end{pmatrix}_{(M,\vec{e}_a,\vec{e}_t)} \tag{3.11}$$

où $(\vec{e_a}, \vec{e_t})$ est la base fixe du laboratoire, comme cela est indiqué sur la figure 3.10.

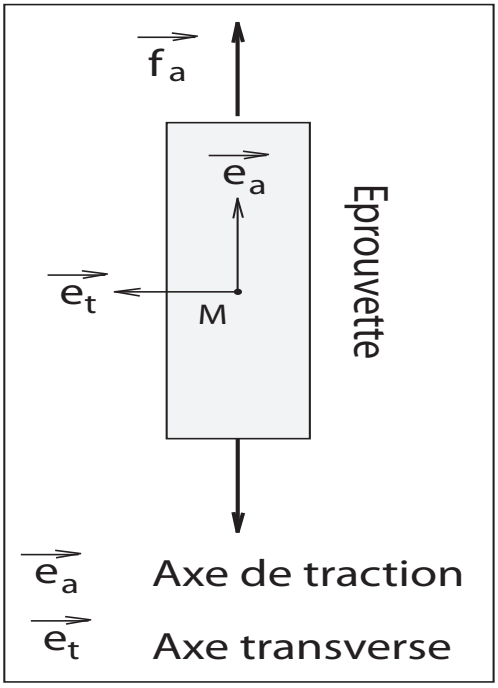


Fig. 3.10 – Définition de la base fixe du laboratoire.

Il est possible de réaliser sur l'éprouvette un essai de traction à taux de déformation $D_a = D_0$ constant imposé. Dans ce cas, nous contrôlons le déplacement du vérin $\Delta h(t)$, qui correspond théoriquement à l'allongement de la partie utile de l'éprouvette de longueur H tel que :

$$\Delta h(t) \;=\; H\;(e^{D_0 t} - 1) \tag{3.12}$$

La figure 3.11 donne l'évolution du déplacement $\Delta h(t)$ en fonction du temps, correspondant à la relation 3.12. Cette figure montre que la vitesse de déplacement $\dot{\Delta h}(t)$ (la pente dans le graphe $\Delta h(t)$ de la figure 3.11) augmente de façon monotone au cours de l'essai avec la longueur h de la partie utile de l'éprouvette, de sorte que :

$$\frac{\dot{h}}{h} \;=\; \frac{\dot{(H + \Delta h)}}{(H + \Delta h)} \;=\; \frac{\dot{\lambda}_a}{\lambda_a} \;=\; D_0 \tag{3.13}$$

ce qui traduit un taux de déformation constant au cours de l'essai.

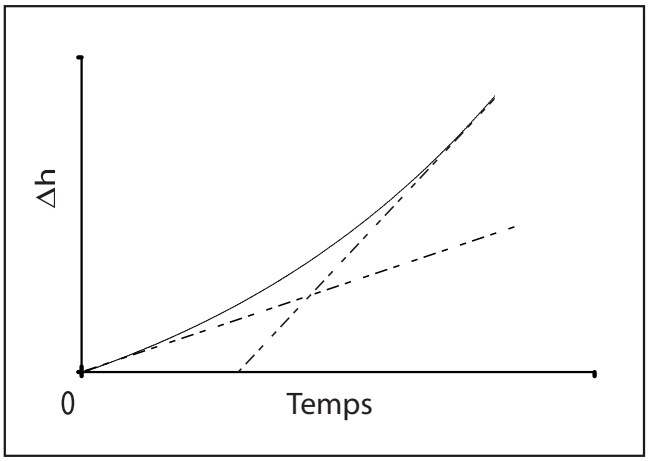


Fig. 3.11 – Evolution du déplacement en fonction du temps correspondant à la relation 3.12.

3.6.2 Traction à vitesse de déplacement constante

Nous considérons dans ce paragraphe un chargement en traction à vitesse de déplacement du vérin $\dot{\Delta h}$ constante et nous nous proposons d'étudier l'influence de ce choix sur la valeur du taux de déformation D_a, imposé selon l'axe de traction. On pose :

$$D_0 = \frac{\dot{\Delta h}}{H} \tag{3.14}$$

où D_0 correspond à la valeur du taux de déformation, au début de l'essai, en petite déformation. Le déplacement du vérin en fonction du temps s'écrit alors :

$$\Delta h = D_0 H.t \tag{3.15}$$

compte tenu des relations 3.14 et 3.15, le taux de déformation D_a , s'écrit :

$$D_a = \frac{\dot{\Delta h}}{H + \Delta h} = \frac{D_0}{1 + D_0.t} \tag{3.16}$$

en utilisant les relations 3.4 et 3.5, on peut écrire :

$$\varepsilon_a = \ln\left(1 + \frac{\Delta h}{H}\right) \tag{3.17}$$

en inversant la relation 3.17 et on utilisant la relation 3.15 , on obtient une relation qui donne la valeur du temps en fonction de la valeur de D_0 et ε :

$$t = \frac{e^{\varepsilon_a} - 1}{D_0} \tag{3.18}$$

en éliminant le temps dans la relation 3.16, par la relation 3.18, on obtient :

$$D_a = D_0.e^{-\varepsilon_a} \tag{3.19}$$

la relation 3.19 exprime la variation de la valeur du taux de déformation en fonction de la valeur de la déformation, au cours de l'essai. La figure 3.12 illustre la variation de D_a en fonction de la déformation. La déformation maximale atteinte lors de nos essais est de l'ordre de 25%. A cette valeur, correspond une variation de la valeur du taux de déformation, qui évolue de D_0 en début d'essai à $0.8D_0$ à la fin de l'essai. Cette variation de la valeur du taux de déformation a peu d'influence sur la réponse en contrainte, compte tenu de la sensibilité à la vitesse de

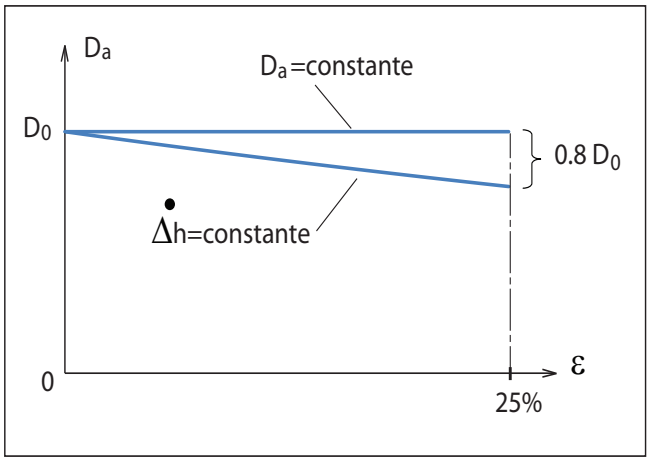


Fig. 3.12 – Evolution du taux de déformation D_a en fonction de la déformation, correspondant à la relation 3.19.

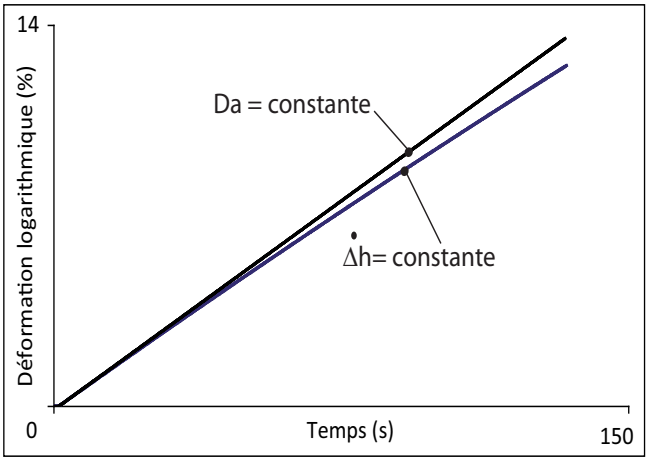


Fig. 3.13 – Comparaison d'un chargement à taux de vitesse constant et d'un chargement à vitesse de déplacement constante.

nos matériaux. Un chargement en traction à taux de déformation constant, corespond à une droite dans le diagrame déformation logarithmique en fonction du temps, de pente égale au taux déformation imposé (Fig. 3.13). Si on impose une vitesse de déplacement constante, la courbe déformation logarithmique en fonction du temps est non linéaire, mais sa forme reste proche d'une droite et l'influence de cette non linéarité sur la réponse en contrainte, reste faible. Cet aspect sera examiné au chapitre 5 (§ 5.2).

3.7 Notion de base équivalente

Au cours de la sollicitation, la partie utile de l'éprouvette se déforme, mais on constate aussi que le dispositif spécifique de traction lui même se déforme. Ceci se vérifie aisément en comparant l'élongation locale λ_{loc}, mesurée par le système de suivi de cibles dans la zone utile, à l'élongation globale λ_{glo} enregistrée par le capteur de déplacement de la machine et calculée par la relation 3.4, où Δh est le déplacement du vérin de la machine et H la longueur théorique de la zone utile ($H = 300mm$). En effet la valeur de λ_{glo} est généralement plus élevée que l'élongation locale λ_{loc}. La courbe λ_{glo} en fonction de λ_{loc} donne la correspondance exacte entre l'élongation globale mesurée par le capteur de déplacement de la machine et l'élongation locale réellement subie par l'éprouvette. Nous définissons alors une base équivalente, notée H_{eq} de la zone utile de l'éprouvette, de valeur supérieure ou égale à H, telle que l'élongation globale soit égale à l'élongation locale :

$$H_{eq} \quad \text{est tel que,} \quad \lambda_{loc} = \lambda_{glo} = 1 + \frac{\Delta h}{H_{eq}}, \quad \text{soit} \quad H_{eq} = \frac{\Delta h}{\lambda_{loc} - 1} \tag{3.20}$$

Ainsi, la mesure locale de l'élongation par le système de suivi de cibles permet d'étalonner le capteur de déplacement de la machine, par la mesure de H_{eq}. L'élongation et la déformation sont ensuite définies par la mesure du déplacement Δh du vérin et par la base équivalente H_{eq}, telles que :

$$\lambda_a = 1 + \frac{\Delta h}{H_{eq}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_a = ln(\, 1 + \frac{\Delta h}{H_{eq}}) \tag{3.21}$$

3.8 Matériaux testés et numérotation des éprouvettes

3.8.1 Matériaux étudiés

Trois matériaux destinés à la fabrication de voiles ont fait l'objet d'une l'étude expérimentale : le Dacron SF HTM Simple, le Dacron SF HTP Plus et le Kevlar X15. Les deux versions du Dacron sont des matériaux tissés munis d'une enduction et le Kevlar X15 est une toile laminée. L'étude expérimentale est composée d'une première partie, dont l'objectif est de réaliser une caractérisation qualitative préliminaire du comportement du Dacron SF HTM Simple et du Kevlar X15. Les résultats de cette étude préliminaire sont présentés au chapitre 4. Dans une deuxième partie de l'étude expérimentale, nous nous sommes intéressés à la réalisation d'une caractérisation plus fine et plus approfondie du comportement du Dacron SF HTP Plus. Les résultats de cette deuxième partie de l'étude expérimentale sont présentés au chapitre 5.

3.8.2 Numérotation des éprouvettes

Les éprouvettes sont identifiées par un code alphanumérique sous la forme : AAAXX000. Le code AAA désigne le matériau. Selon le matériau de l'éprouvette, ce code prend les valeurs suivantes : SFH pour le Dacron SF HTP Plus, 0SF pour le Dacron SF HTM Simple et X15 pour le Kevlar X15. Le code XX désigne l'orientation de l'axe de l'éprouvette par rapport à la direction chaîne du matériau ; ce code correspond à la valeur de l'angle θ défini par la figure 3.8. Pour les valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, le code XX est égale à 0C et 0T, pour indiquer la direction Chaîne et Trame, respectivement. Enfin, le code 000 indique un numéro d'ordre de l'éprouvette.

3.8.3 Propriétés géométriques et massiques de la toile de Kevlar X15

Constitution du matériau

Le matériau est une toile laminée en fibre d'Aramide. La fibre Aramide est souvent commercialisée sous le nom Kevlar, de la marque DuPont de Nemours. La toile est constituée de la superposition de six couches de fils de masse linéique, d'espacement et d'orientation différentes (Fig. 3.14). L'empilement des couches est constitué, dans l'ordre par : une couche C1 dans la sens chaîne, suivie d'une couche C2 toujours dans le sens chaîne, puis une couche T dans le sens trame, une couche C3 dans le sens chaîne et deux couches orientées d'un angle $\pm\delta$ par rapport au sens chaîne. Cet empilement de couches est pris ensuite entre deux films transparents de Mylar, qui sont collés avec l'ensemble des couches. La figure 3.15 donne une vue localisée de la toile, obtenue à l'aide d'un microscope optique, sur laquelle on peut distinguer les fils des couches C1, C2, C3 et T, ainsi que des bulles d'air qui mettent en évidence le mode d'assemblage par collage des deux films de Mylar.

Informations du constructeur et caractérisation de la toile de kevlar

La toile est fabriquée par la *société Dimension-Polyant*. La désignation commerciale du matériau est *X-Tech CLEAR X15* et le numéro du Lot est le 419 76-107. Le terme *CLEAR* est en rapport avec les deux films de Mylar transparents utilisés pour la protection de la toile. Le film de Mylar a une épaisseur de $19\mu m$ et une masse surfacique de $(27 \pm 1)g/m^2$. Les deux films de Mylar protège le matériau tissé et jouent le rôle d'une enduction, la masse surfacique totale, notée $\overline{\rho_e}$, est telle que :

$$\overline{\rho_e} = (54 \pm 2)g/m^2 \tag{3.22}$$

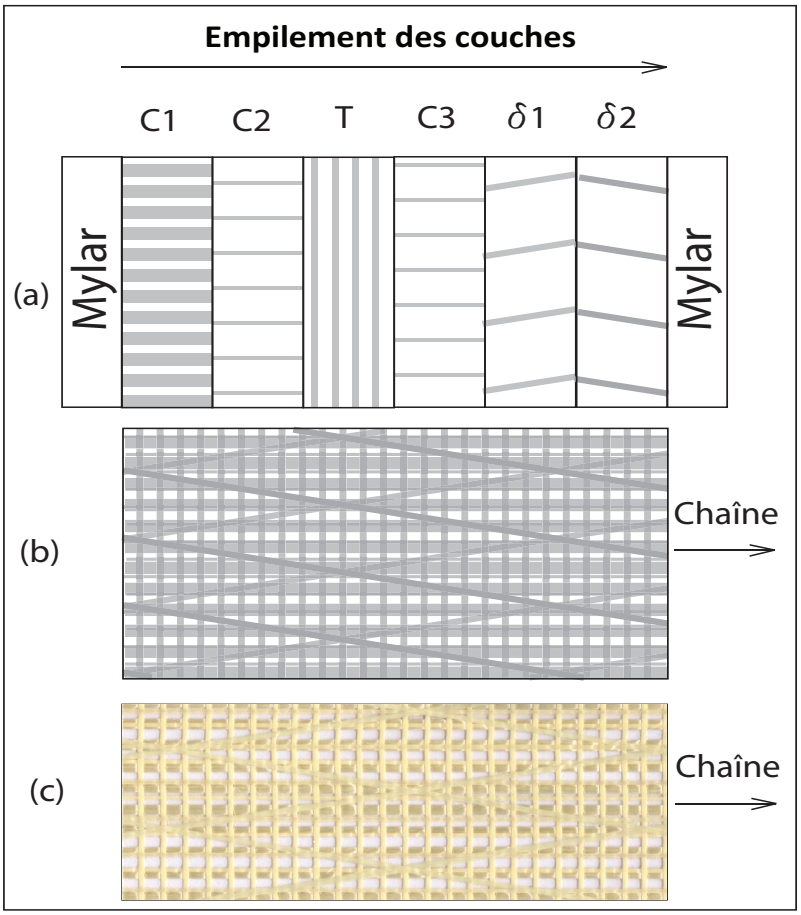


Fig. 3.14 – Constitution de la toile de Kevlar : (a) superposition de six couches de fils et deux films transparents de Mylar, (b) résultat de la superposition, (c) photographie de la toile.

La masse surfacique précise, de la toile de Kevlar, affichée par le constructeur est $\overline{\rho} = 5.5smoz$; ($1smoz = 42.83g/m^2$), d'où :

$$\overline{\rho} = (238 \pm 2)g/m^2 \tag{3.23}$$

La valeur de la variation de la masse surfacique $\overline{\Delta\rho} = \pm 2g/m^2$, que nous avons considérée, correspond à une erreur relative de $\pm 1\%$, obtenue par nos propres mesures, pour vérifier la masse surfacique du matériau.

Le tableau 3.1 donne les masses linéiques des fils et le nombre de fils par unité de longueur, affichés par le constructeur, pour chacune des couches de la toile de Kevlar. Ces valeurs sont fournies par le constructeur en denier ($1\text{denier} = 1g/9km$) et en nombre de fils par pouce, respectivement. Le tableau 3.1 donne la conversion de ces valeurs en gramme par mètre et en nombre de fils par mètre. Ce tableau est complété par nos propres mesures concernant les couches δ_1 et δ_2. Ces données permettent de calculer les masses surfaciques des fils pour chacune des couches.

Notons que, d'après le tableau 3.1, la somme des masses surfaciques relatives à chaque couche est de (109.8 ± 0.5) g/m^2 ; si en tient compte de la masse surfacique du Mylar de la relation 3.22, on obtient une masse surfacique totale de la toile de (164.0 ± 2.5) g/m^2. En comparant cette valeur à la valeur donnée par la relation 3.23, on constate une différence de (74.0 ± 4.5) g/m^2. Cette valeur correspond à la masse surfacique de la colle utilisée pour l'adhérence de la toile.

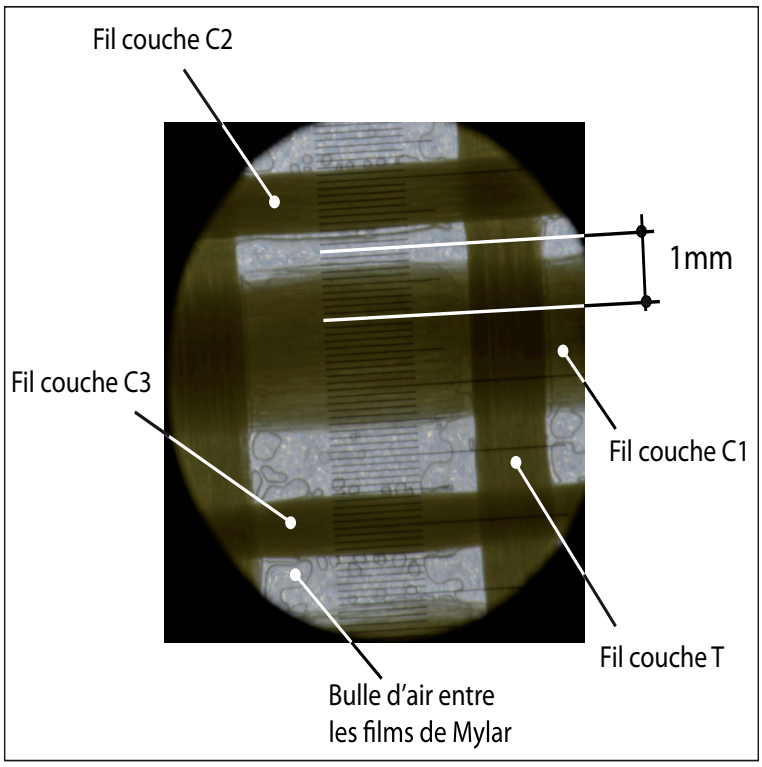


Fig. 3.15 – Aperçu à l'aide d'un microscope optique des fils et des deux films de Mylar collés.

TABLE 3.1: Données du constructeur (caractère en gras) et mesures effectuées sur la toile de Kevlar (caractère normal).

Couches	Angle/Chaîne	n	Masse Linéique	n	Masse Linéique	Masse surfacique
	(%)	nb fils/inch	denier	nb fils/m	g/m	g/m2
C1	0	5	**2280**	**197**	**0.25**	50
C2		3		**118**		13
T	90	5		**197**		22
C3	0	3	**1000**	**118**	**0.11**	13
δ_1	+(10 ± 1)	-		53± 2		5.9± 0.2
δ_2	-(10± 1)					

Notons enfin, que nous avons réalisé une mesure qualitative de l'épaisseur de la toile. Cette mesure n'est pas nécessaire, mais elle permet de converti l'unité de la contrainte en Pascal ; ce qui permet de donne un moyen d'appréciation et de comparaison par rapport à d'autres matériaux (cf. 2 § 2.4). la valeur de l'épaisseur de la toile de Kevlar est telle que :

$$e^* = 0.32mm$$

3.8.4 Propriétés géométriques et massiques du Dacron SF HTP Plus

Informations du constructeur

Le matériau est fabriqué par la société *Dimension-Polyant*. La désignation commerciale du matériau est *Dacron 300SF - HTP Plus*. Le Dacron est un matériau tissé à base de fibres en polyester. L'appellation Dacron correspond à une marque de la société Dupont de Nemours, qui désigne les fils en polyester. Le chiffre 300 désigne la masse surfacique de 300 g/m2 du matériau et le code SF est l'abréviation de *Strong Fill*, qui correspond à une gamme de matériaux proposée

par le constructeur, dont les fils de trame sont tendus, afin d'améliorer les propriétés mécaniques du matériau dans le sens trame. Après le tissage le matériau est chauffé dans le but de resserrer ses mailles ; le code *HTP* Plus désigne cette phase qui correspond à l'abréviation *High Tempered Polyester*. Ce code désigne aussi une finition particulière du matériau, qui correspond à l'application, en dernière phase de fabrication, d'une enduction en résine polyester pour renforcer et protéger le matériau tissé.

La masse surfacique précise affichée par le constructeur est $\overline{\rho} = 7smoz$, avec $1smoz = 42.83g/m2$. D'où :

$$\overline{\rho} = (306.3 \pm 1.5)g/m^2 \tag{3.24}$$

La valeur de la variation de la masse surfacique $\overline{\Delta\rho} = \pm 1.5g/m^2$, que nous avons considérée, correspond à une erreur relative de $\pm 0.5\%$, obtenue par nos propres mesures pour vérifier la masse surfacique du matériau.

La masse linéique des fils affichée par le constructeur est de 200x500 denier^2, respectivement 200 denier dans le sens chaîne et 500 denier dans le sens trame, avec 1denier = $1g/9km$.

Nombre de fils par unité de longueur dans les sens chaîne et trame

L'enduction superposée au tissage est transparente. Ceci permet de distinguer les fils de chaine et les fils de trame à l'aide d'un microscope optique. La figure 3.16 donne un aperçu du fils de trame droit et du fils de chaîne sujet à l'embuvage. L'enduction est visible par sa brisance sur la figure 3.16-a et par la présence de bulles de coulée sur la figure 3.16-b.

Un comptage du nombre de fils, dans les sens chaîne et trame, a été effectué grâce à un microscope optique doté d'une table micrométrique XY (Fig. 3.17). Trois mesures ont été réalisées, pour des déplacements de la table micrométrique de 10mm, 20mm et 50mm, dans les sens chaîne et trame. Pour chaque déplacement un comptage est réalisé, du nombre de fils de chaine nc et du nombre de fils de trame nt. Les résultats de ces mesures sont indiqués dans le tableau 3.2 pour une unité de longueur de 50mm. En prenant une unité de longueur d'un mètre ces résultats

Table 3.2: Résultats de mesure du nombre de fils nc dans le sens chaine et nt dans le sens trame, pour une unité de longueur de 50mm.

Déplacement (mm)	n_c / **50 mm**	n_t / **50 mm**
10	145.0	95.0
20	142.5	95.0
50	140.0	93.0
Moyenne	142.5	94.3
Ecart type	± 2.5	± 1.2
Rapport (%)	± 1.8	± 1.2

s'expriment par :

$$n_c = (2850 \pm 50)\ fils/m \qquad \text{dans le sens chaîne} \tag{3.25}$$

$$n_t = (1887 \pm 23)\ fils/m \qquad \text{dans le sens trame} \tag{3.26}$$

Masse surfacique des fils de chaîne et des fils de trame

L'objectif de ce paragraphe est la définition de la masse surfacique $\overline{\rho}_c$ des fils de chaine seuls et la définition de la masse surfacique $\overline{\rho}_t$ des fils de trame seuls. Pour cela on néglige l'effet de

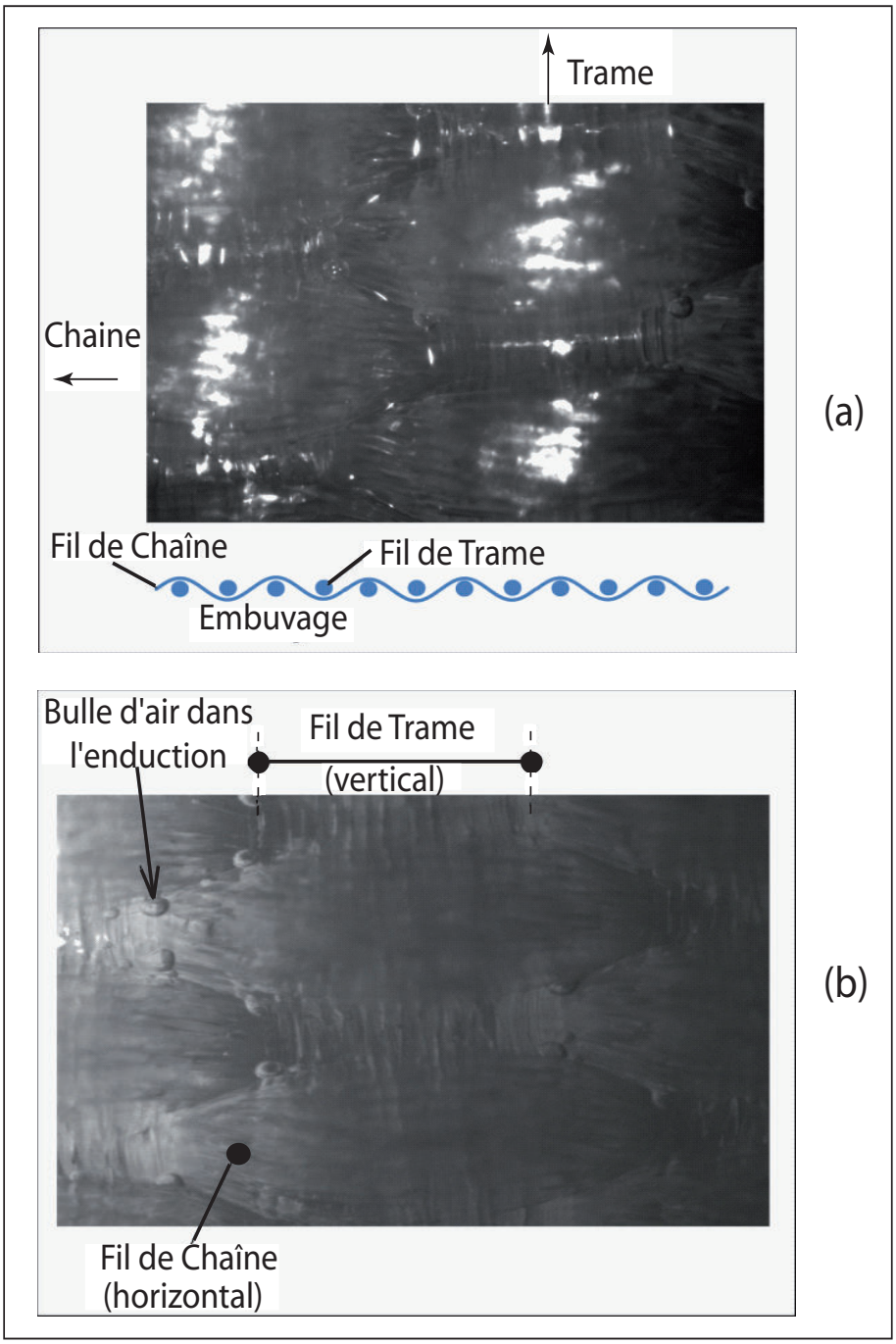


Fig. 3.16 – Aperçu à l'aide d'un microscope optique du fils de chaîne sujet à l'embuvage (a) et du fils de trame droit (b).

l'embuvage sur l'augmentation de la longueur des fils de chaine et on considère que tous les fils sont droits. Compte tenu des données et des mesures des paragraphes précédentes, la masse surfacique $\overline{\rho}_c$ des fils de chaîne est telle que :

$$\overline{\rho}_c = (2850 fils/m).(200g/9000m) \qquad \text{soit} \qquad \overline{\rho}_c = (63.3 \pm 1.1)g/m^2 \tag{3.27}$$

Et la masse surfacique $\overline{\rho}_t$ des fils de trame est telle que :

$$\overline{\rho}_t = (1887 fils/m).(500g/9000m) \qquad \text{soit} \qquad \overline{\rho}_t = (104.8 \pm 1.3)g/m^2 \tag{3.28}$$

Les résultats 3.27 et 3.28 permettent de définir la masse surfacique totale des fils $\overline{\rho}_f$ sans l'enduction, telle que :

$$\overline{\rho}_f = \overline{\rho}_c + \overline{\rho}_t \qquad \text{soit} \qquad \overline{\rho}_f = (168.2 \pm 2.4)g/m^2 \tag{3.29}$$

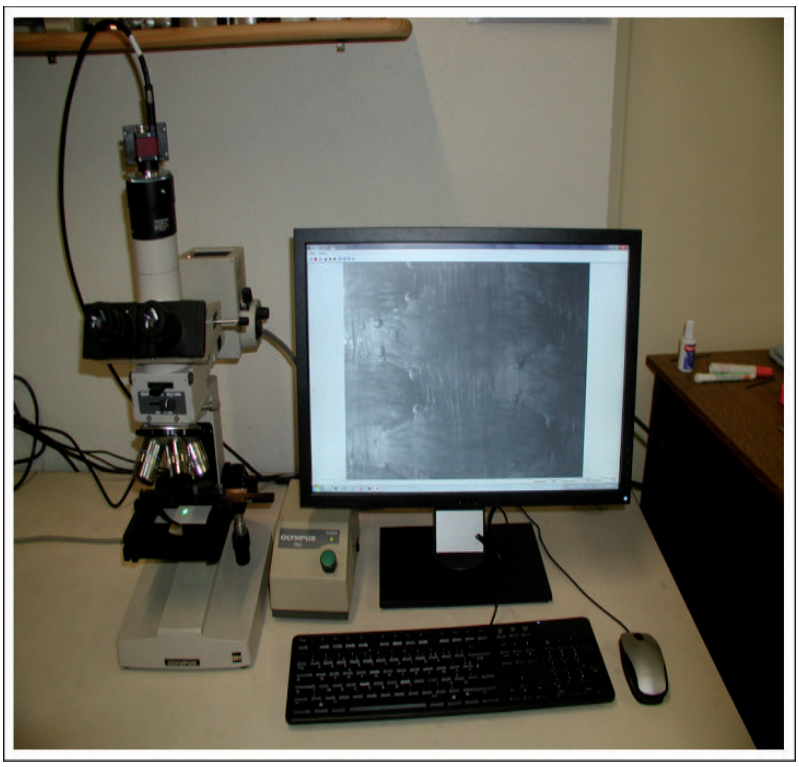


Fig. 3.17 – Mesure du nombre de fils par unité de longueur à l'aide d'un microscope optique doté d'une table micrométrique XY.

Masse surfacique de l'enduction

La masse surfacique de l'enduction $\overline{\rho}_e$ résulte de la différence entre la masse surfacique totale du matériau tissé $\overline{\rho}$ et la masse surfacique totale des fils $\overline{\rho}_f$:

$$\overline{\rho}_e = \overline{\rho} - \overline{\rho}_f \qquad \text{soit} \qquad \overline{\rho}_e = (138.2 \pm 3.9) g/m^2 \tag{3.30}$$

Mesure qualitative de l'épaisseur

De la même façon que la toile de Kevlar, nous avons réalisé une mesure qualitative de l'épaisseur de la matériau tissé. Cette mesure n'est pas nécessaire, mais elle permet de convertir l'unité de la contrainte en Pascal ; ce qui permet de donner un moyen d'appréciation et de comparaison par rapport à d'autres matériaux (cf. 2 § 2.4). La valeur de l'épaisseur de la matériau tissé de Dacron plus est telle que :

$$e^* = 0.25mm$$

Chapitre 4

Résultats d'essais préliminaires

Ce chapitre a pour objectif de présenter des résultats d'essais préliminnaires réalisés sur le matériau tissé « Dacron SF HTM simple » et sur la toile en « Kevlar X15 ».

4.1 Résultats d'essais sur le Dacron SF HTM simple

4.1.1 Essai de traction monotone à vitesse de déplacement constante dans le sens trame

Nous avons réalisé des essais de traction monotone contrôlés à vitesse de déplacement de traverse constante imposée. Pour les cinq éprouvettes dans le sens trame, la vitesse de déformation moyen imposée est $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$. La figure 4.1 donne à titre d'exemple l'évolution de la déformation logarithmique, dans le sens trame ε_T en fonction du temps, pour l'essai OSF0T005. L'objectif essentiel de ces essais est de déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau à la rupture. La figure 4.3 donne les résultats de ces essais dans un diagramme rhéologique contrainte massique en fonction de la déformation Logarithmique. Le tableau 4.1 donne les valeurs des caractéristiques mécaniques à rupture obtenues.

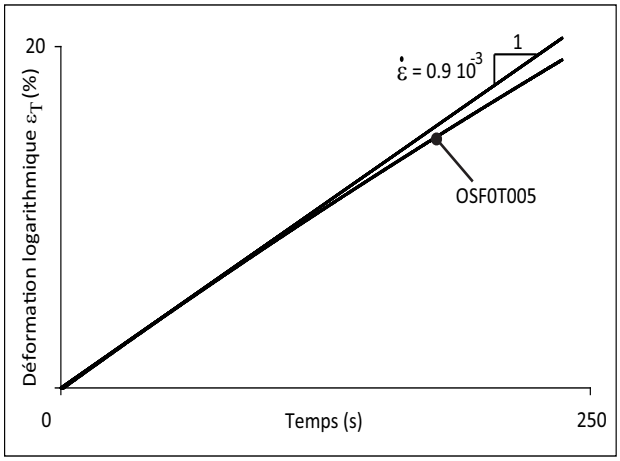


Fig. 4.1 – Déformation logarithmique en fonction du temps - Essai OSF0T005.

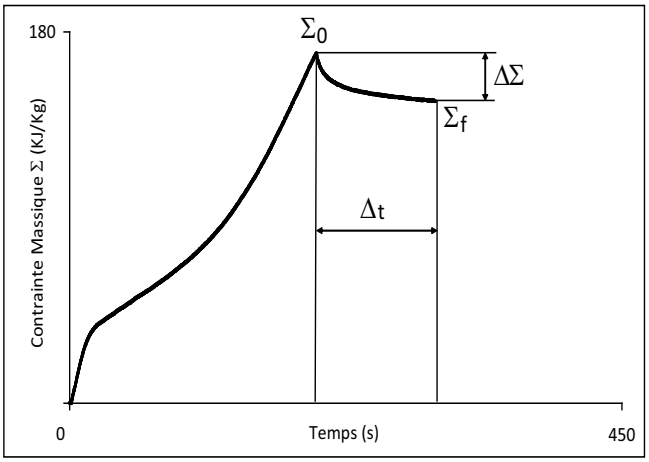


Fig. 4.2 – Résultat de traction avec relaxation de l'essai OSF0T001.

Ainsi les valeurs de la contrainte massique moyenne à la rupture et de la déformation moyenne à la rupture sont :

$$\boxed{\begin{array}{rl} <\Sigma_r>= 176 \pm 10\ KJ/Kg & (n=5; d.c.68\%) \\ <\varepsilon_r>= 17 \pm 1\% & (n=5; d.c.68\%) \end{array}} \tag{4.1}$$

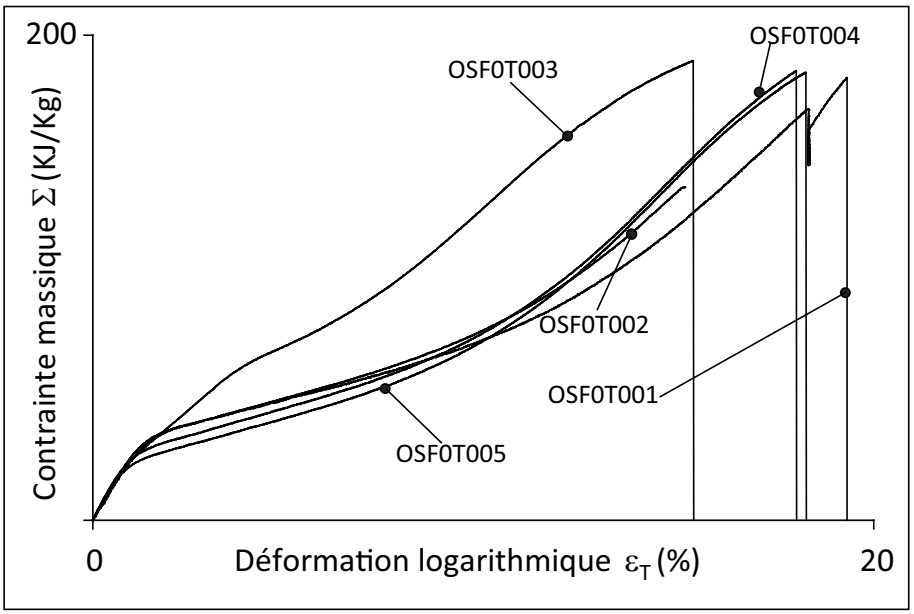


Fig. 4.3 – Résultat de traction monotone - Dacron simple, dans le sens trame ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$).

TABLE 4.1: Caractéristiques mécaniques à la rupture dans le sens trame - Dacron simple ($\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$).

Essai	Base équivalente	Force de rupture	Déplacement à la rupture	Vitesse de déformation	Contrainte de rupture	Déformation de rupture
N°	H_{eq}	F_r	Δh_r	$\dot{\varepsilon}$	Σ_r	ε_r
Sens Trame	(mm)	(N)	(mm)	$10^{-3}s^{-1}$	(KJ/Kg)	(%)
OSF0T001	300	2203	60	1.0	182	20
OSF0T002	330	1840	54	0.9	137	15
OSF0T003	333	2534	51	0.7	189	15
OSF0T004	337	2415	67	0.9	186	18
OSF0T005	337	2398	69	0.9	185	19
<Moyenne>	**327**	**2278**	**60**	**0.9**	**176**	**17**
Ecarte Type σ	16	272	8	0.1	22	2
$\sigma_{<>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	7	122	4	0.05	10	1

Au cours de l'essai OSF0T001, nous avons réalisé une séquence de relaxation avant la rupture de l'éprouvette. La figure 4.2 donne la réponse du matériau au cours de la relaxation, dans un diagramme contrainte massique en fonction du temps. La contrainte au début et à la fin de la relaxation notées respectivement Σ_0 et Σ_f, la durée Δt et la chute de contrainte $\Delta\Sigma$ correspondantes sont précisées dans le tableau 4.2.

TABLE 4.2: Paramètres et caractéristiques de relaxation - OSF0T001

Σ_0	Σ_f	$\Delta\Sigma$	$\Delta\Sigma/\Sigma_f$	t_0	t_f	Δt
(KJ/Kg)	(KJ/Kg)	(KJ/Kg)	%	s	s	s
169	146	23	16	201	299	98

Les résultats de ces essais nous ont permis de réaliser en petite déformation, des mesures du module élastique initial et du coefficient de contraction. Le module élastique initial dans le diagramme contrainte massique en fonction de la déformation est noté E_m^t (Fig.4.4) et le coefficient

de contraction dans un diagramme déformation transversale en fonction de la déformation axiale est noté ν_t (Fig.4.5). Le module élastique est exprimé en $[\frac{KJ}{kg}]$ et on défini un module E^t exprimé en Pascal, tel que :

$$E^t = \frac{\overline{\rho}}{e^*}.E^t_m \tag{4.2}$$

où $\overline{\rho}$ est la masse surfacique initial du matériau et $e^* = 0.25mm$ son épaisseur. Le tableau 4.3 donne l'ensemble des mesures obtenues des modules E^t_m, E^t et du coefficient de contraction ν_t. Ainsi on a :

$$\boxed{\begin{array}{rl} < E^t_m >= 28.2 \pm 0.6\ (10^2.KJ/Kg) & (n = 5; d.c.68\%) \\ < E^t >= 35.2 \pm 0.7\ MPa & (n = 5; d.c.68\%) \\ < \nu_t >= 0.052 \pm 0.003 & (n = 4; d.c.68\%) \end{array}} \tag{4.3}$$

Table 4.3: Résultats de mesure du module élastique et du coefficient de contraction - Dacron simple.

Essai N°	E^t_m	E_t	ν_t
(-)	(10^2.KJ/Kg)	(MPa)	(-)
OSF0T001	26.1	32.6	-
OSF0T002	28.4	35.4	0.046
OSF0T003	28.5	35.6	0.057
OSF0T004	29.5	36.8	0.057
OSF0T005	28.3	35.4	0.049
<Moyenne>	**28.2**	**35.2**	**0.052**
Ecarte Type σ	1.3	1.6	0.006
$\sigma_{<>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	0.6	0.7	0.003

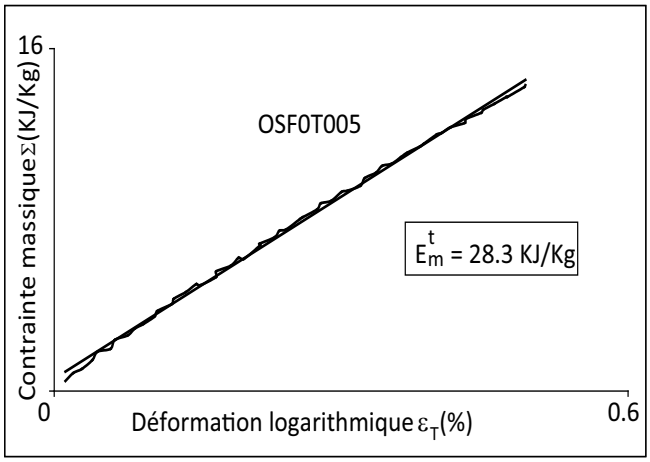


Fig. 4.4 – Résultat typique de mesure du module élastique initial (E^t_m) - OSF0T005.

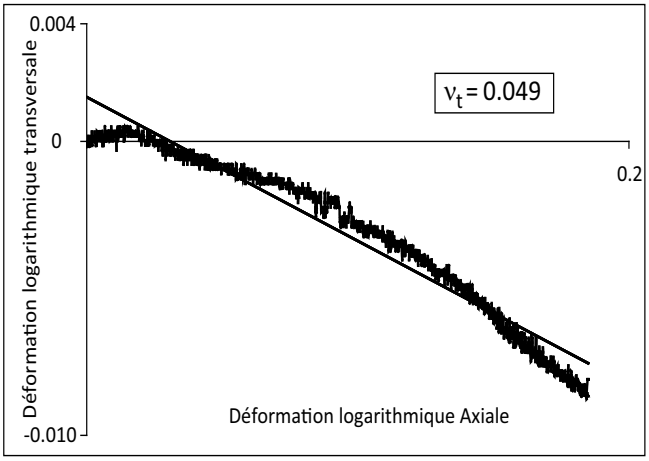


Fig. 4.5 – Résultat typique de mesure du coefficient de contraction ν_t - OSF0T005.

4.1.2 Validation de la mesure de déformation par caméra CCD

Une validation de la mesure de déformation par caméra CCD a été réalisée, grâce à une comparaison de cette mesure à celle d'un extensomètre mécanique, fixé sur l'éprouvette. Cette validation a été réalisée au cours de l'essai OSF0T002. Pour réaliser cet essai un dispositif spécial a été utilisé. Ce dispositif permet d'adapter un extensomètre mécanique standard pour la

mesure de la déformation dans la zone utile de l'éprouvette en matériau tissé. La figure 4.6 présente ce dispositif. Deux barrettes métalliques sont placées de part et d'autre de l'éprouvette et sont serrées sur celle ci au moyen de deux pinces ressorts. Une aiguille traverse de part en part les deux barrettes de serrage et l'éprouvette, afin de bien ancrer cet assemblage au matériau et d'éviter tout glissement. Deux assemblages, ainsi définis, sont prévus sur l'éprouvette et une tige cylindrique est fixée sur chacun de ces deux assemblages. Un extensomètre mécanique uniaxial est alors fixé sur ces deux tiges cylindriques. Le mouvement des couteaux de l'extensomètre suit alors les tiges et donc le mouvement des aiguilles et mesure ainsi la déformation locale dans la zone utile de l'éprouvette.

La figure 4.7 donne le résultat de la comparaison des mesures de déformation par la caméra CCD et par l'extensomètre mécanique. Ce résultat montre une mesure quasi-identique. En effet, la pente du diagramme des déformations est égale à 0.990 avec un coefficient de corrélation qui tend vers 1.

Le tableau 4.1 montre que les valeurs de la contrainte et de la déformation à la rupture de l'éprouvette OSF0T002, sont relativement plus faibles que la moyenne des résultats. Ceci est dû à une amorce de rupture provoquée par les aiguilles du dispositif de fixation de l'extensomètre. En effet, la figure 4.8 donne une image de la rupture de l'éprouvette OSF0T002. On constate que la rupture de l'éprouvette a eu lieu au niveau de l'emplacement de l'aiguille A. Au niveau de l'emplacement de l'aiguille B, on observe une rupture localisée.

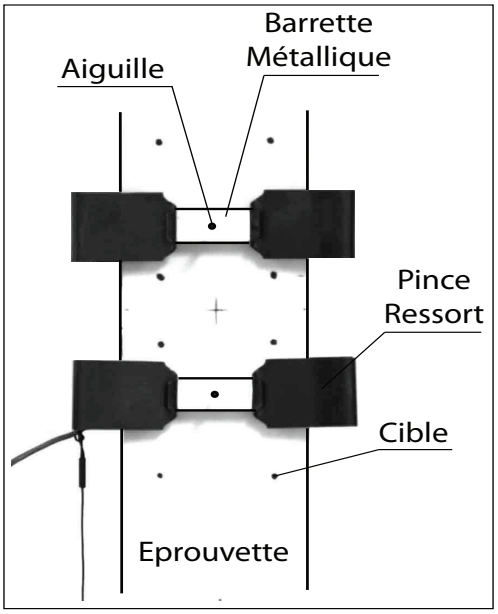


Fig. 4.6 – Dispositif de fixation de l'extensomètre - Essai OSF0T002.

4.1.3 Essais de traction monotone à vitesse de déformation constant dans le sens de chaîne

Nous avons réalisé des essais de traction monotone contrôlés à vitesse de déformation constante imposée. Pour les cinq éprouvettes dans le sens chaîne, la vitesse de déformation imposée correspondante est $D_0 = 10^{-3}s^{-1}$ (Fig. 4.9). L'objectif essentiel de ces essais est de déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau à la rupture. La figure 4.10 donne les résultats de ces

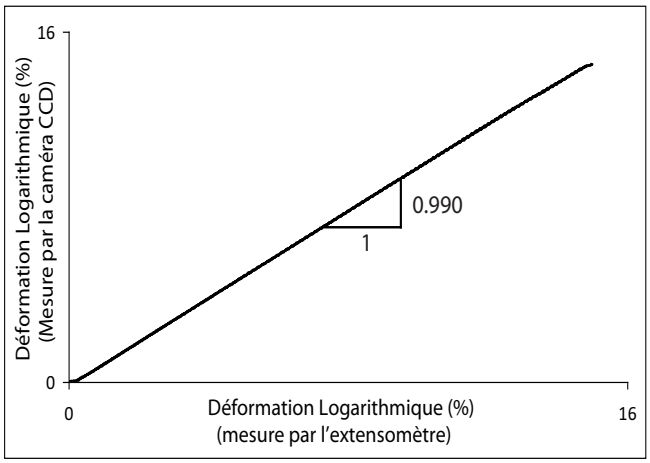


Fig. 4.7 – Comparaison des mesures de déformations de la caméra CCD et de l'extensomètre - Essai OSF0T002.

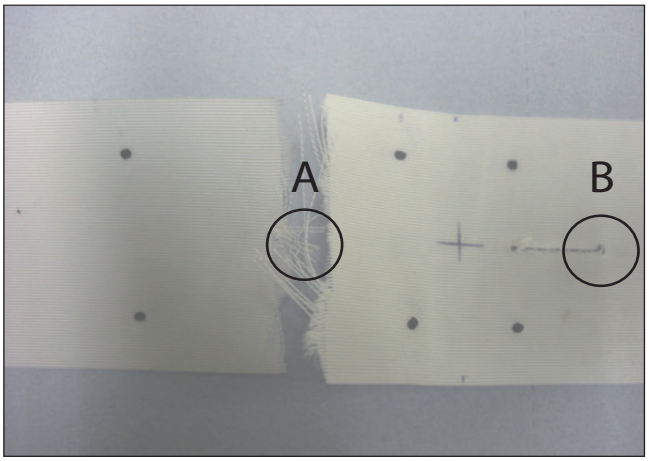


Fig. 4.8 – Rupture de l'éprouvette OSF0T002.

essais dans un diagramme rhéologique contrainte massique en fonction de la déformation Logarithmique. Au cours de l'essai OSF0C005 nous avons effectué une séquence de relaxation d'une durée de 300s (relaxation ab - Fig.4.10).

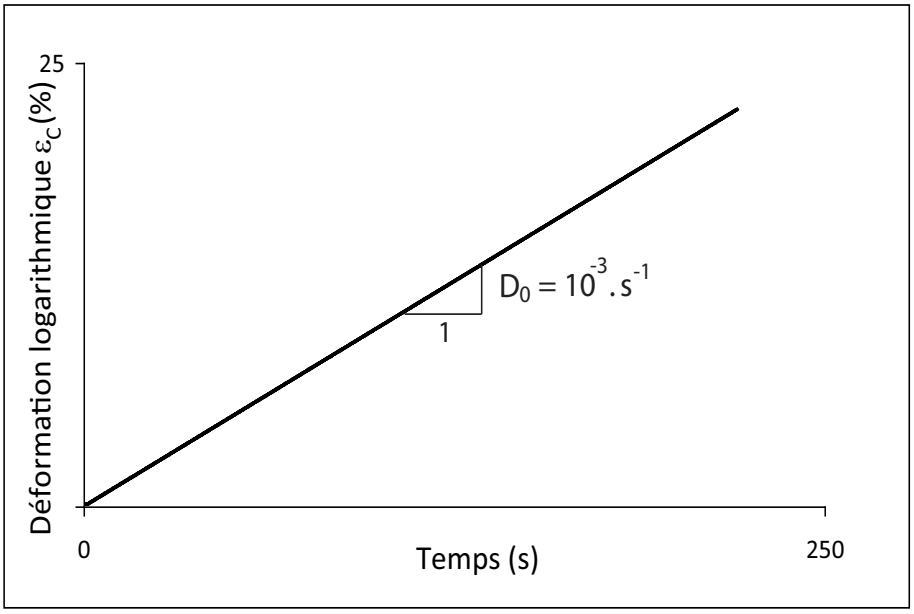


Fig. 4.9 – Déformation logarithmique en fonction de temps.

Le tableau 4.4 donne les valeurs des caractéristiques mécaniques à la rupture obtenue.

Ainsi la contrainte moyenne massique à la rupture et la déformation moyenne à la rupture sont :

$$\boxed{\begin{array}{rl} <\Sigma_r>= 145 \pm 9\ KJ/Kg & (n=5; d.c.68\%) \\ <\varepsilon_r>= 17 \pm 1\ \% & (n=5; d.c.68\%) \end{array}} \tag{4.4}$$

La figure 4.11 donne la réponse du matériau au cours de l'essai OSF0C005, dans un diagramme contrainte massique en fonction du temps et la figure 4.12 donne l'évolution de la contrainte au cours de la relaxation. Les valeurs des contraintes Σ_0, Σ_f, la durée Δt et la chute de contrainte $\Delta\Sigma$ correspondantes sont précisées dans le tableau 4.5.

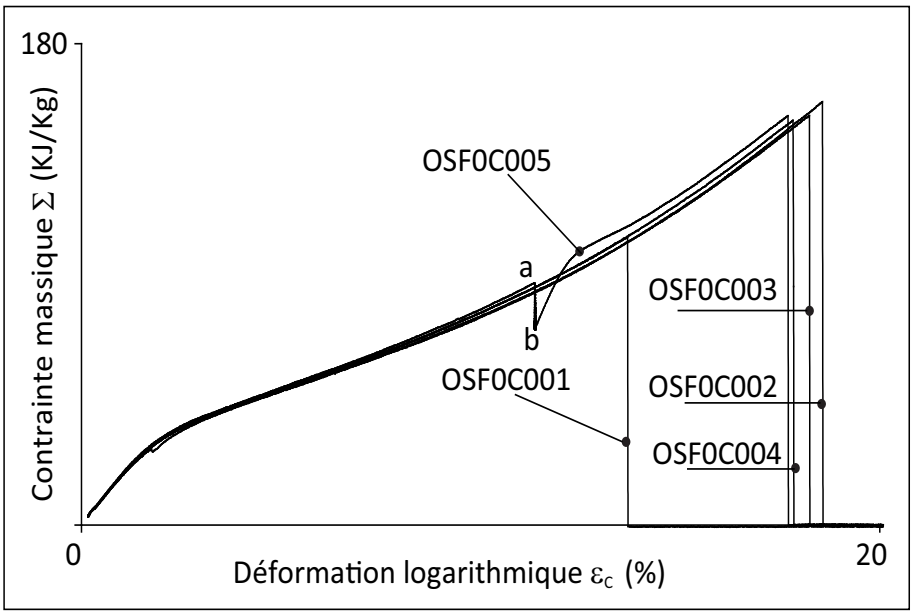


Fig. 4.10 – Résultat de traction monotone - Dacron simple dans le sens chaîne ($D_0 = 10^{-3}s^{-1}$).

TABLE 4.4: Caractéristiques mécaniques à la rupture - Dacron simple ($D = 10^{-3}s^{-1}$).

Essai	**Base équivalente**	**Force de rupture**	**Déplacement à la rupture**	**Contrainte de rupture**	**Déformation de rupture**
N°	H_{eq}	F_r	Δh_r	Σ_r	ε_r
Sens Trame	(mm)	(N)	(mm)	(KJ/Kg)	(%)
OSF0C001	326	1463	48	108	14
OSF0C002	329	2050	83	158	18
OSF0C003	333	1990	83	153	18
OSF0C004	341	1975	87	153	18
OSF0C005	344	2000	79	153	18
<Moyenne>	**335**	**1896**	**76**	**145**	**17**
Ecarte Type σ	8	243	16	21	2
$\sigma_{<>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	3	109	7	9	1

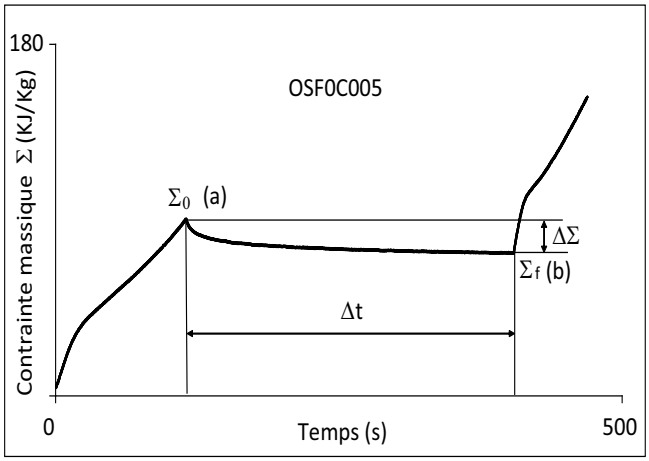


Fig. 4.11 – Résultat de traction avec relaxation de l'essai OSF0C005.

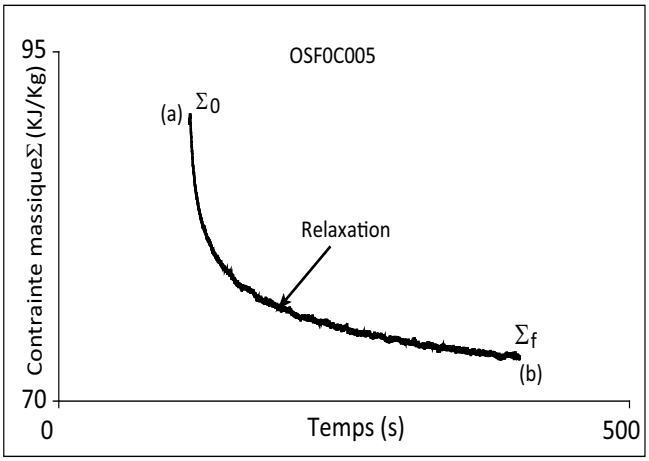


Fig. 4.12 – Détail de Relaxation de l'essai OSF0C005.

Table 4.5: Paramètres et caractéristiques de relaxation

Σ_0	Σ_f	$\Delta\Sigma$	$\Delta\Sigma/\Sigma_f$	t_0	t_f	Δt
(KJ/Kg)	(KJ/Kg)	(KJ/Kg)	%	s	s	s
90	73	17	24	116	405	289

Les résultats de ces essais nous ont permis de réaliser des mesures des modules élastiques E_m^c, E_c et du coefficient de contraction ν_c (cf. Fig.4.13 et 4.14). Le tableau 4.6 donne l'ensemble

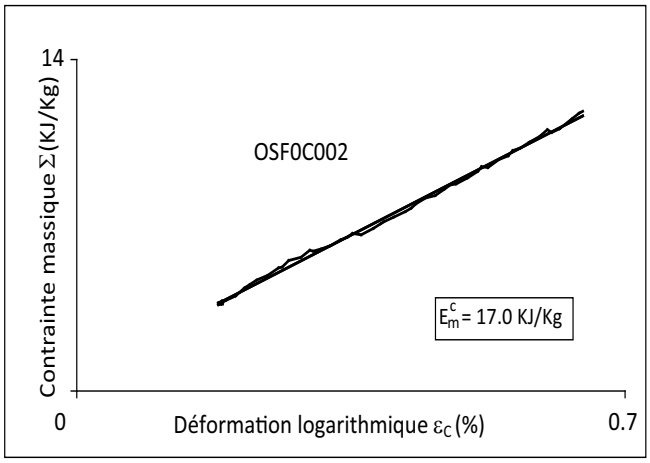


Fig. 4.13 – Résultat typique de mesure du module élastique initial (E_m^c) - OSF0C002.

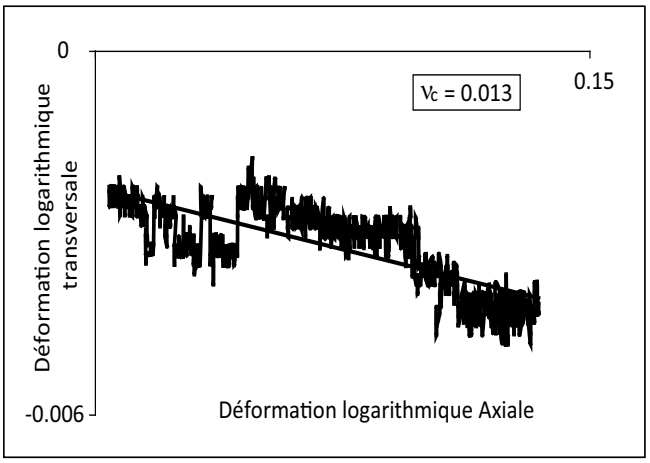


Fig. 4.14 – Résultat typique de mesure du coefficient de contraction ν_c - OSF0C001.

des valeurs obtenues des modules et du coefficient de Poisson. Ainsi :

$$\begin{aligned} < E_m^c >= 17.5 \pm 0.2\ (10^2.KJ/Kg) \qquad & (n = 5; d.c.68\%) \\ < E_c >= 21.8 \pm 0.2\ MPa \qquad & (n = 5; d.c.68\%) \\ < \nu_c >= 0.010 \pm 0.005 \qquad & (n = 4; d.c.68\%) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Table 4.6: Résultats de mesure du module élastique et du coefficient de contraction - Dacron simple.

Essai N°	E_m^c	E_c	ν_c
(-)	(10^2.KJ/Kg)	(MPa)	(-)
OSF0C001	17.6	21.9	0.013
OSF0C002	17.0	21.2	0.042
OSF0C003	17.7	22.1	0.024
OSF0C004	17.0	22.2	0.024
OSF0C005	18.0	22.5	0.025
<Moyenne>	**17.5**	**21.8**	**0.010**
Ecarte Type σ	0.4	0.6	0.005
$\sigma_{<>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	0.2	0.2	0.005

Considérons la séquence de relaxation, noté a et b, sur la figure 4.10, 4.11 et 4.12 et observe son évolution dans un diagramme contrainte massique - $\log(\Delta t)$, où $\Delta t = t - t_0$ et t_0 correspond au temps de début de la séquence de relaxation. ce résultat est donné sur la figure 4.15, qui révèlent une forme caractéristique de la relaxation linéaire en $\log(\Delta t)$, telle que :

$$\Sigma(t) = -A.\log(\Delta t) + B \tag{4.6}$$

avec $A = 6.9$ KJ/KG/décade et $B = 89.9\ KJ/KG$. Notons que ce comportement visqueux au cours de la relaxation est similaire à celui observé sur les sangles en PA66 (cf. Chap 1) [33].

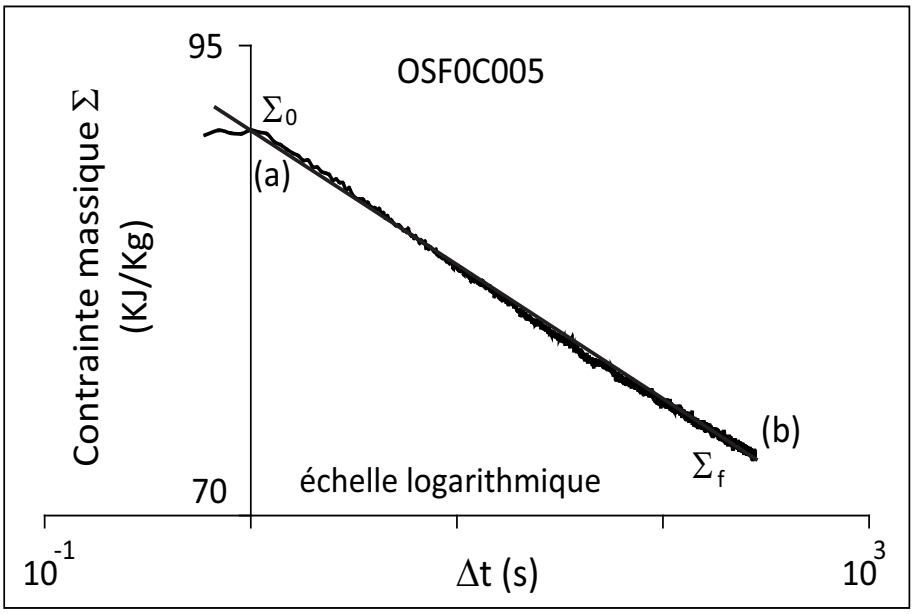


Fig. 4.15 – Comparaison des résultat de mesure de la relaxation *ab* de l'ssai OSF0C005 avec l'évolution théorique 4.6.

4.1.4 Commentaires sur les résultats du Dacron simple :

Les résultats des mesures révèlent des meilleures caractéristiques mécaniques du matériau dans le sens trame que dans le sens chaîne (§ 4.1.1 et § 4.1.3). En effet, à l'exception de la déformation à la rupture, qui a la même valeur, les valeurs des caractéristiques élastiques et de rupture sont systématiquement plus élevées dans le sens trame. La valeur de la contrainte à la rupture est 18% plus élevée dans le sens trame. Le module élastique est 38% plus élevé dans le sens trame. Les valeurs du coefficient de contraction restent relativement faibles dans les sens chaîne et trame ; néanmoins, l'effet de contraction est cinq fois plus élevé, lors d'une traction dans le sens trame ($\nu_t = 0.052$), que lors d'une traction dans le sens chaîne ($\nu_c = 0.010$). Comme le Dacron SF HTP plus, le Dacron SF HTM simple, presente des fils de trame droit et des fils de chaîne sujet à l'embuvage (cf. chap 3). Ceci explique les differences de comportement entre la trame et la chaîne.

Notons enfin que l'évolution de la contrainte au cours d'une séquence de relaxation présente un comportement typique caractérisé par la relation 4.6, qui rappelle les résultats obtenus sur les sangles en PA66 (cf. Chap 1) [33].

4.2 Résultat des essais sur la toile laminée en Kevlar X15

4.2.1 Essais de tractions monotones et ondulées contrôlées en force.

Résultats dans le sens trame

L'essai X150T001 correspond à une traction ondulée contrôlée en force avec $\dot{F} = 10N/s$. Le programme de chargement de l'essai est donné sur la figure 4.16, dans un diagramme force en fonction du temps. Le résultat de cet essai est donné sur la figure 4.17, dans un diagramme

rhéologique contrainte massique en fonction de la déformation. La figure 4.17 montre que la boucle de charge-décharge présente une hystérésis assez réduite.

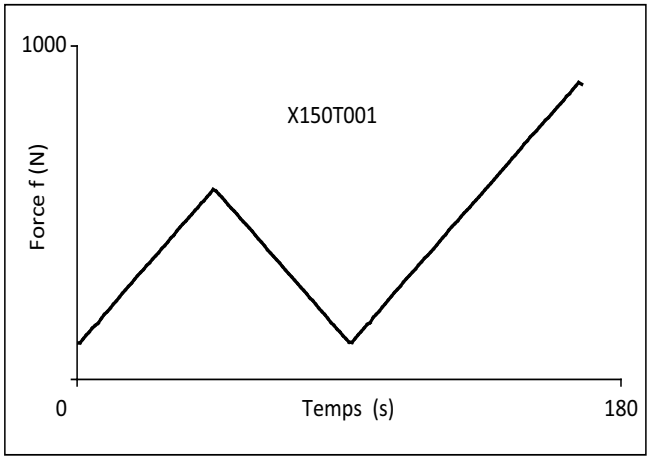


Fig. 4.16 – Programme de chargement de l'essai X150T001 à $\dot{F} = 10N/s$.

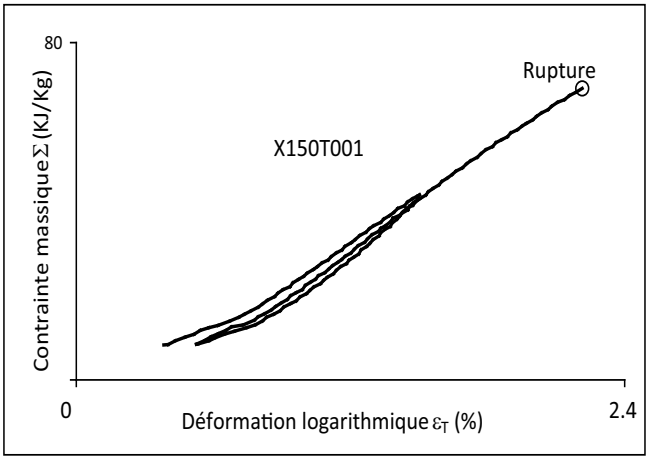


Fig. 4.17 – Résultat de traction ondulée contrôlé en force avec $\dot{F} = 10N/s$ - X150T001.

L'essai X150T002 correspond à une traction ondulée contrôlé en force avec $\dot{F} = 10N/s$ et interrompue par trois séquences de fluage, de durée assez courtes. Le programme de chargement de l'essai est donné sur la figure 4.18, dans un diagramme force en fonction du temps. Le résultat de cet essai est donné sur la figure 4.19, dans un diagramme rhéologique contrainte massique en fonction de la déformation. Ce résultat montre que la boucle de charge-décharge présente une hystérésis assez réduite et révèle un comportement visqueux au très faible déformation, malgré une durée assez réduite des séquences de fluage. En effet, la figure 4.20 montre une évolution de la déformation au cours des séquences de fluage et présente un fluage non nul même aux petites déformations.

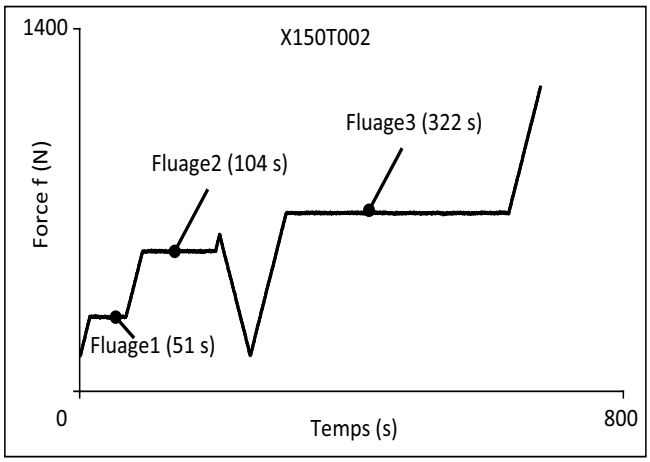


Fig. 4.18 – Programme de chargement de l'essai X150T002 avec $\dot{F} = 10N/s$.

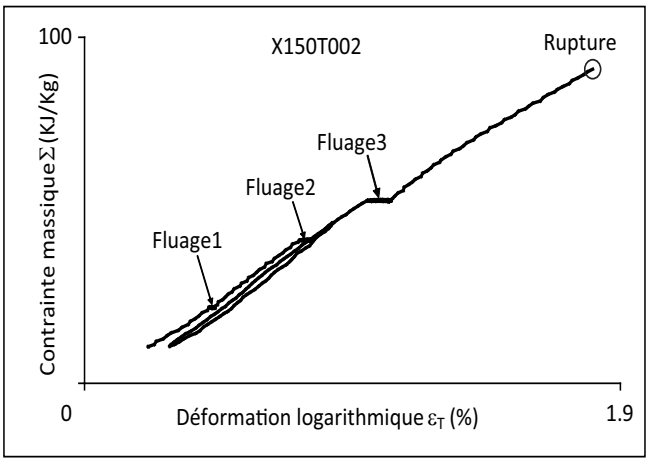


Fig. 4.19 – Résultat de traction ondulée contrôlé en force avec $\dot{F} = 10N/s$ - X150T002.

Résultats dans le sens chaîne

L'essai X150C001 correspond à une traction ondulée contrôlée en force avec $\dot{F} = 10N/s$ et interrompue par cinq séquences de fluage, de durée égale à 600s. Le programme de chargement

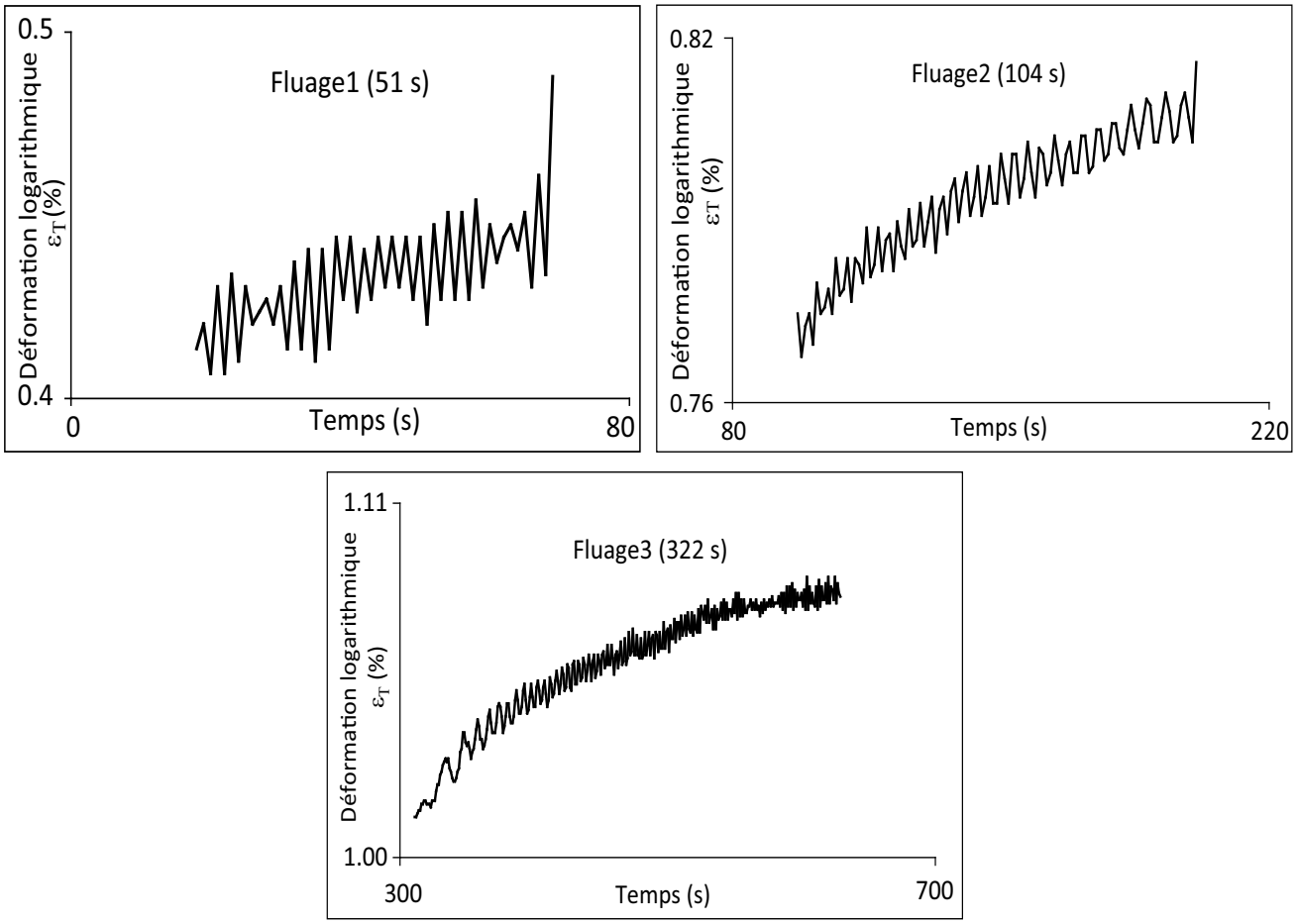


Fig. 4.20 – Evolution de la déformation au cours des séquences de fluage - X150T002.

de cet essai est donné sur la figure 4.21, dans un diagramme force en fonction du temps. Le résultat de cet essai est donné sur la figure 4.22, dans un diagramme rhéologique contrainte massique en fonction de la déformation et la figure 4.23 donne l'évolution de la réponse du matériau en déformation, en fonction du temps. De la même manière on observe sur ces résultat des boucles d'hystérésis relativement réduite et un fluage du matériau présent dès les faibles déformations. Notons que malgré l'épaisseur réduite des boucles hystérésis, la figure 4.22 montre qu'une décharge AB laisse en B une déformation permanente.

4.2.2 Essais de traction monotone et ondulée à vitesse de déformation constant.

Résultats dans le sens trame

L'essai X150T003 correspond à une traction monotone contrôlée à vitesse de déplacement de traverse constante, ce qui correspond à une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$. L'essai comporte deux séquences de relaxation d'une durée égale à 1h et une phase cyclique de petite amplitude $\Delta\varepsilon = 0.3\%$. Le programme de chargement de l'essai est donné sur la figure 4.24, dans un diagramme déformation en fonction du temps. Le résultat de cet essai est donné sur la figure 4.25, dans un diagramme rhéologique contrainte massique en fonction de la déformation. Le matériau manifeste un comportement visqueux dès le début du chargement aux petites déformations, ceci est illustrée par la figure 4.25. Le comportement du matériau au cours des séquences de relaxation est donné par la figure 4.26. Au cours de la phase cyclique AB de l'essai, nous observons un

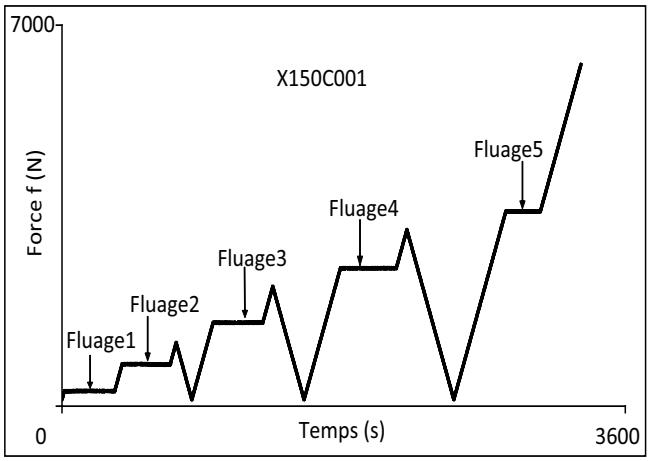


Fig. 4.21 – Programme de chargement de l'essai X150C001 avec $\dot{F} = 10N/s$.

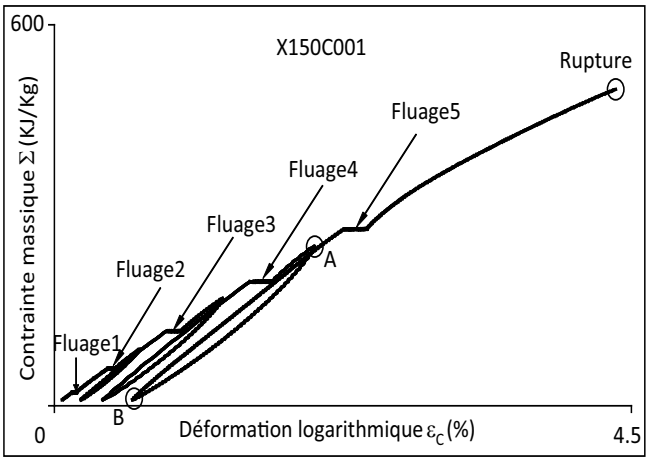


Fig. 4.22 – Résultat de traction cyclique contrôlé en force $\dot{F} = 10N/s$ avec cinq séquences de fluage de 600s - X150C001.

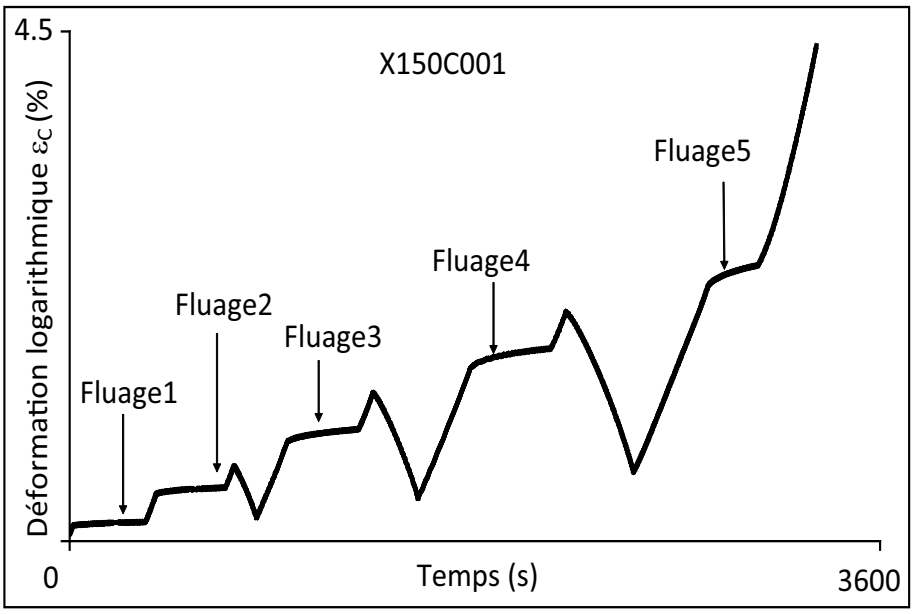


Fig. 4.23 – Déformation logarithmique en fonction du temps - X150C001.

phénomène de reptation des cycles en contrainte. Ce phénomène qui révèle aussi un caractère visqueux du comportement du matériau est illustré par la figure 4.25, l'agrandissement de la figure 4.27 et l'évolution de la contrainte en fonction du temps de la figure 4.28.

Le programme des essais X150T004 et X150T005 correspond à une traction monotone contrôlée à vitesse de déplacement de traverse constante, ce qui correspond respectivement aux vitesses de déformation $\dot{\varepsilon_1} = 5.10^{-2}s^{-1}$ et $\dot{\varepsilon_2} = 10^{-5}s^{-1}$. L'essai X150T005 comporte trois séquences de relaxation de 600s. Le programme de chargement des deux essais est donné sur la figure 4.29, dans un diagramme déformation en fonction du temps. Les résultats de ces deux essais sont regroupés sur la figure 4.30. L'essai X150T004 a une vitesse de déformation plus élevée que celle de l'essai X150T005. La différence de comportement entre les deux courbes de la figure 4.30, confirme le caractère visqueux du matériau, qui est sensible à la vitesse de déformation. La figure 4.31 donne l'évolution de la contrainte massique en fonction du temps durant les séquences de relaxation.

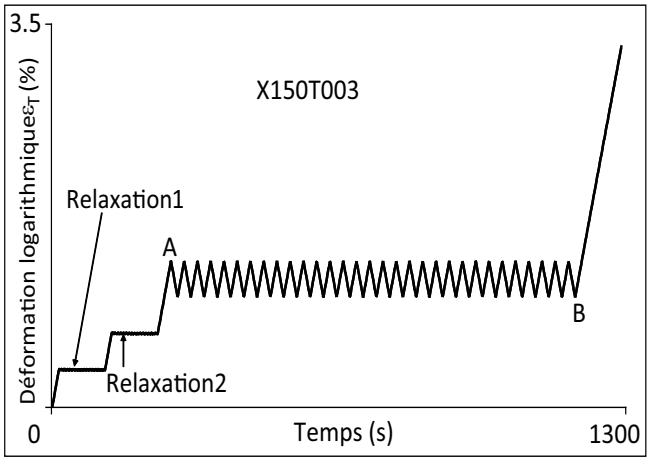


Fig. 4.24 – Programme de chargement de l'essai X150T003 - $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$.

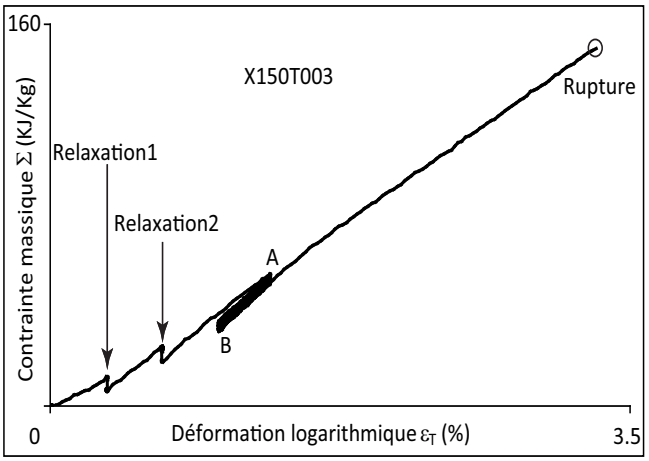
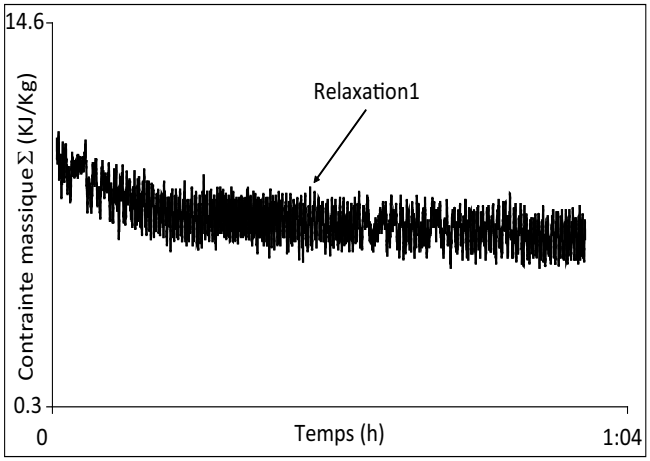


Fig. 4.25 – Résultat de traction ondulée contrôlé en déformation à $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}s^{-1}$ - X150T003.



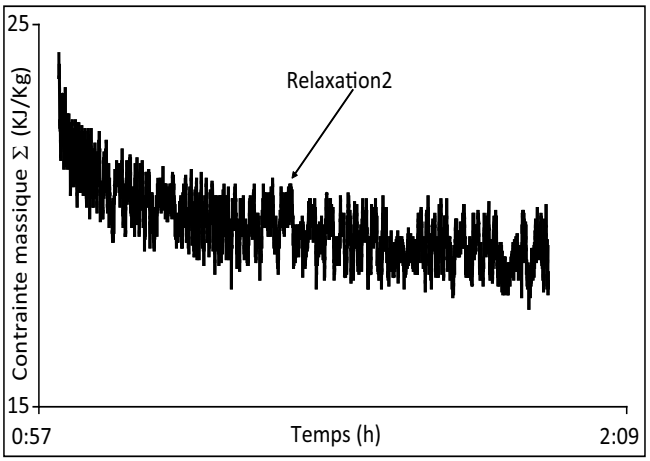


Fig. 4.26 – Evolution de la contrainte au cours des séquences de relaxation - X150T003.

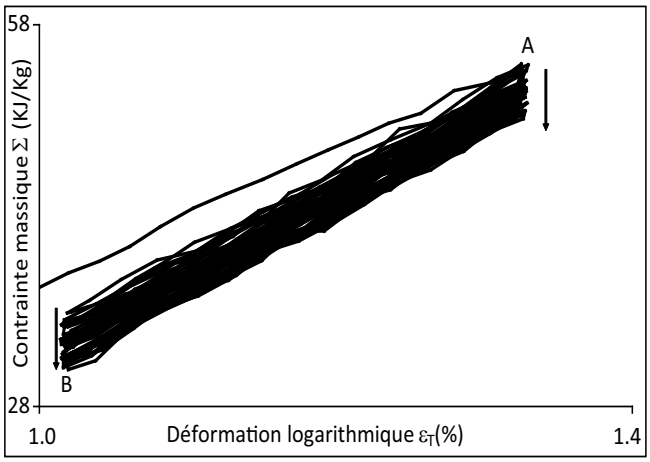


Fig. 4.27 – Détail de la reptation des cycles au cours de la phase cyclique - X150T003.

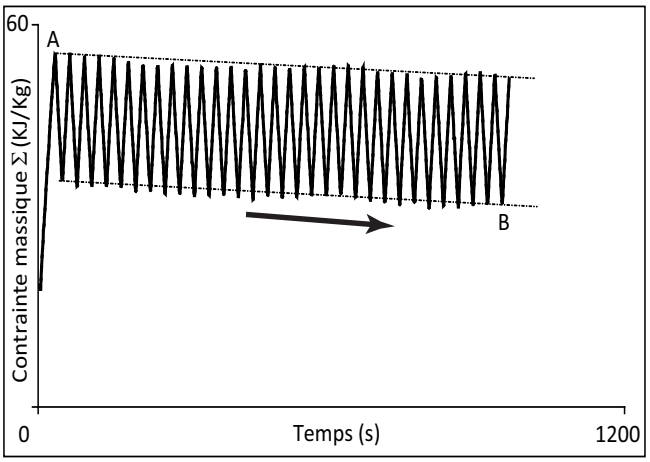


Fig. 4.28 – Evolution de la contrainte au cours de la phase cyclique de l'essai X150T003.

Résultats dans le sens chaîne

Le programme de l'essai X150C002 correspond à une traction monotone contrôlée à vitesse de déplacement de traverse constante, ce qui correspond à une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 5.10^{-5}s^{-1}$.

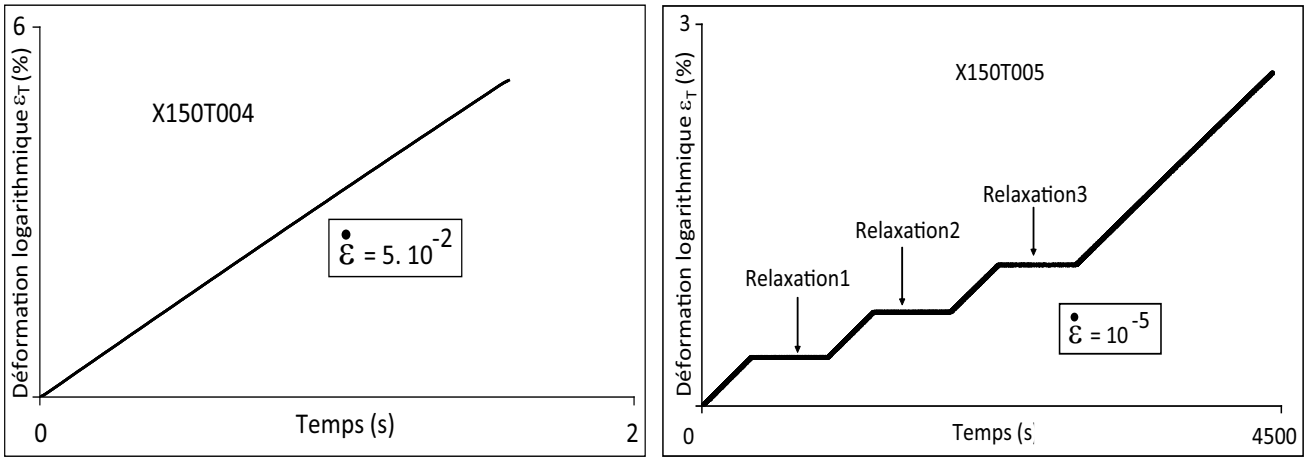


Fig. 4.29 – Programme de chargement des essais X150T004 et X150T005.

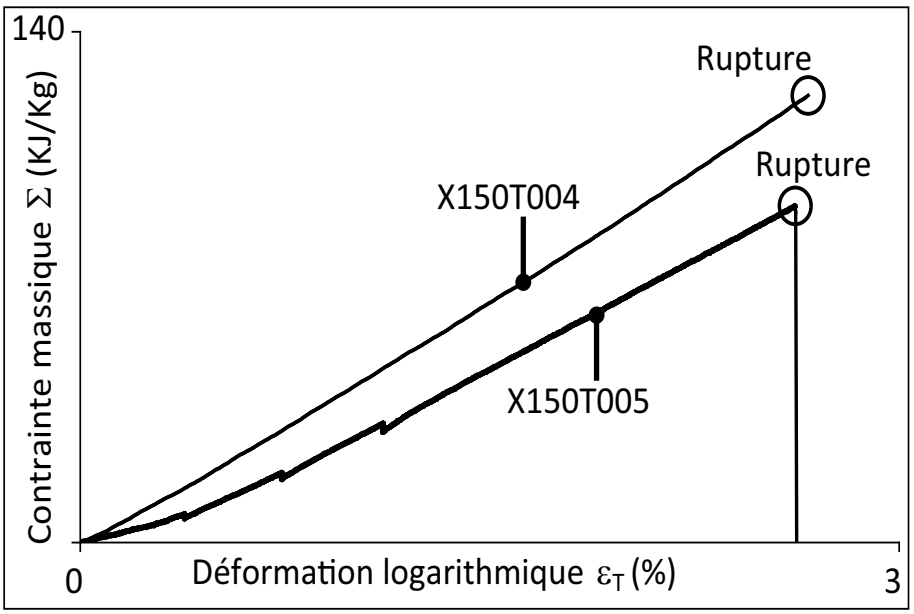


Fig. 4.30 – Résultats des essais X150T004 et X150T005.

Cet essai comporte trois séquences de relaxation, d'une durée égale à 1 heure. Le programme de chargement de l'essai est donné sur la figure 4.32, dans un diagramme déformation en fonction du temps. Les résultats de cet essai sont donnés par les figures 4.33 et 4.34. La figure 4.35 donne, au cours des séquences de relaxation, l'évolution de la contrainte en fonction du temps avec une échelle logarithmique ; où $\Delta t = t - t_0$ et t_0 correspond au temps de début de chaque séquence de relaxation. On observe sur cette figure une évolution linéaire de la contrainte, qui correspond au comportement décrit par la relation 4.6 ; le tableau 4.7 donne les valeurs des paramètres A et B corresponds à chacune des séquences de relaxation de l'essai X150C002.

Table 4.7: Mesure des paramètres A et B à chacune des séquences de relaxation de l'essai X150C002.

Séquences	A (KJ/Kg/décade)	B (KJ/Kg)
Relaxation1	15.1	130.3
Relaxation2	21.1	258.9
Relaxation3	29.8	383.8

Le comportement de la toile laminée en Kevlar X15 au cours de la relaxation est similaire à

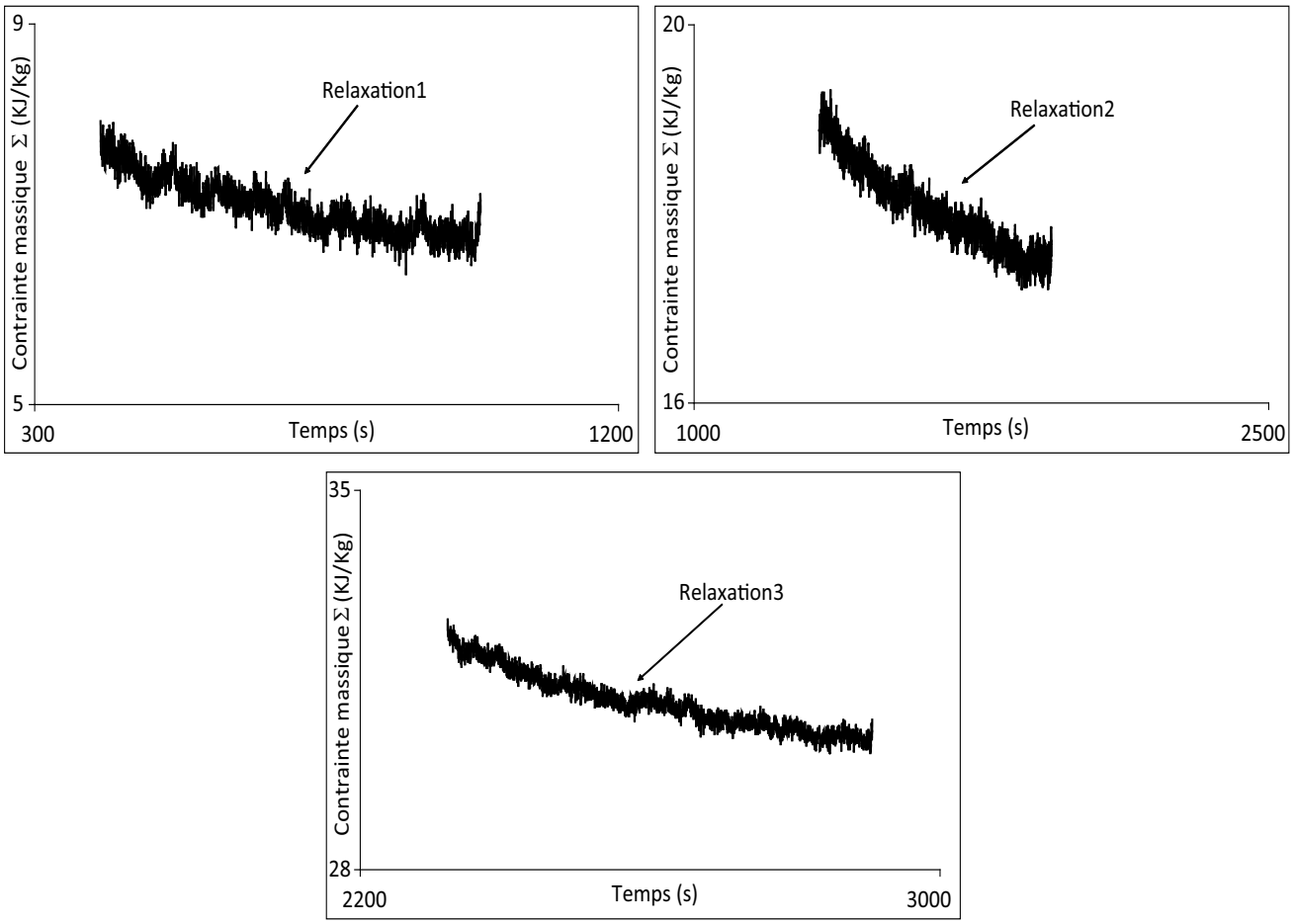


Fig. 4.31 – Evolution de la contrainte au cours des séquences de relaxation - X150T005.

celui du Dacron SF HTM simple (§ 4.1.4) et celui de la sangle en PA66 (cf. Chap 1) [33].

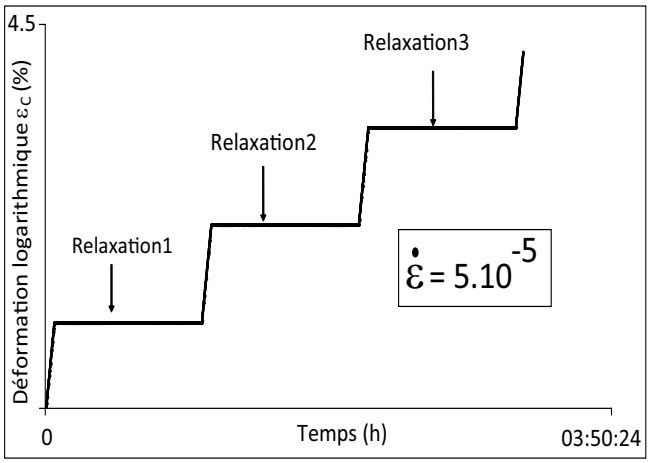


Fig. 4.32 – Programme de chargement de l'essai X150C002 - $\dot{\varepsilon} = 5.10^{-5}s^{-1}$.

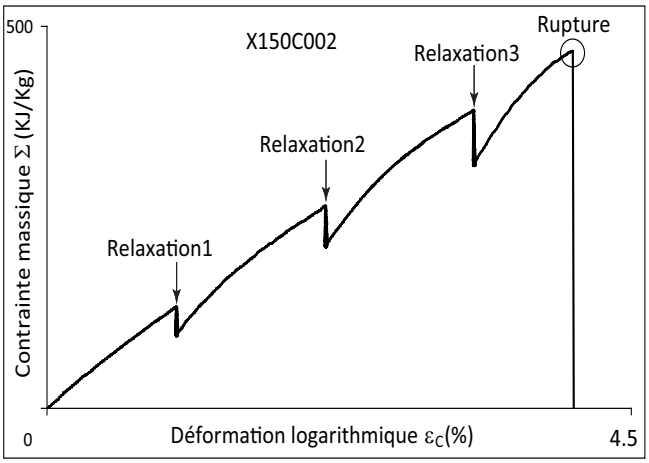


Fig. 4.33 – Résultat de traction monotone à vitesse de déformation constante $\dot{\varepsilon} = 5.10^{-5}s^{-1}$, avec trois séquences de relaxation d'une durée égale à 1h - X150C002.

Deux essais de traction monotone contrôlée à vitesse de déplacement de traverse constante ont été réalisé. C'est les essais X150C003 et X150C004. Les vitesses de déformation correspondant à ces deux essai sont respectivement $\dot{\varepsilon_1} = 10^{-3}s^{-1}$ et $\dot{\varepsilon_2} = 5.10^{-2}s^{-1}$. Les résultats de ces deux

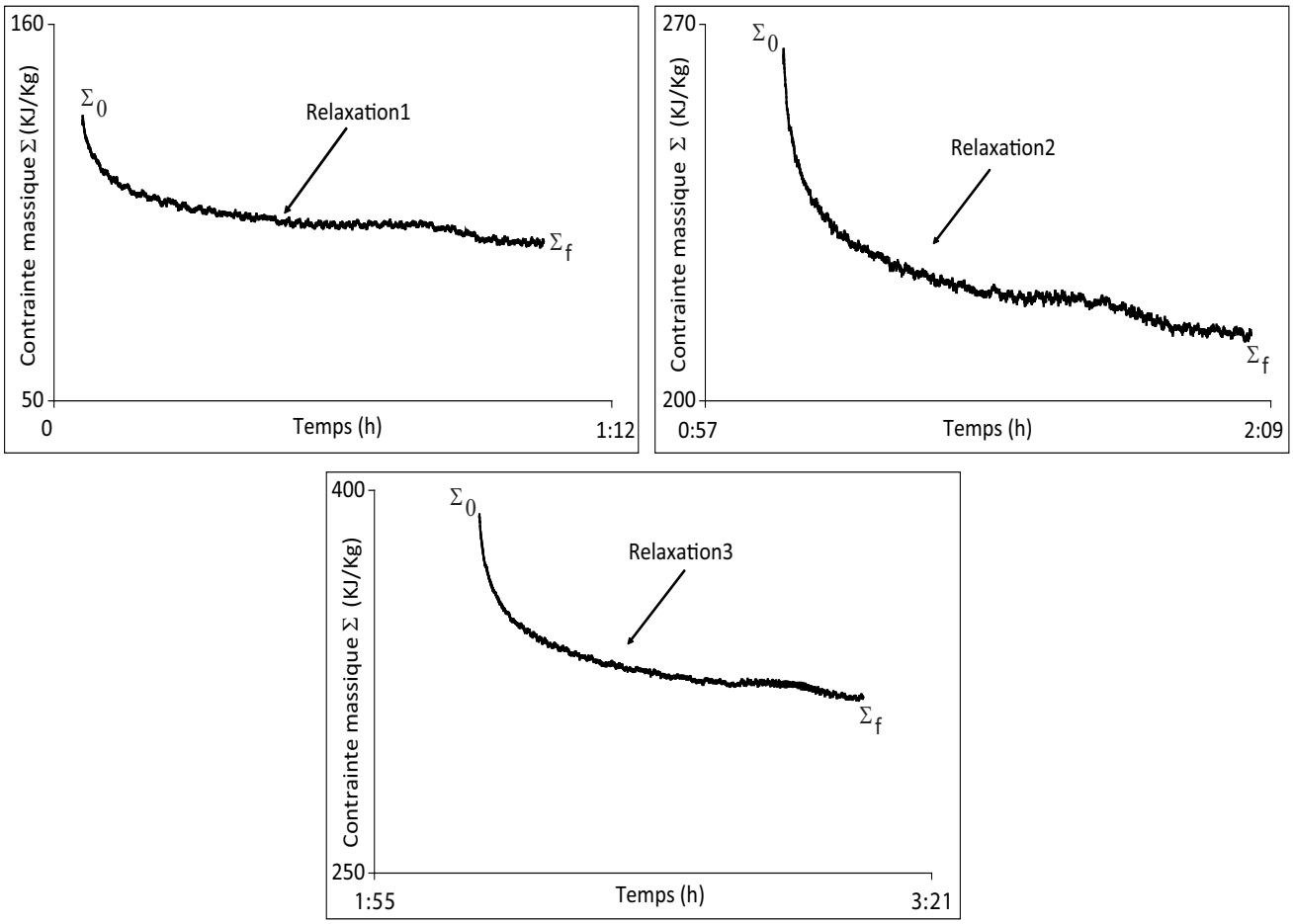


Fig. 4.34 – Evolution de la contrainte au cours des séquences de relaxation - X150C002.

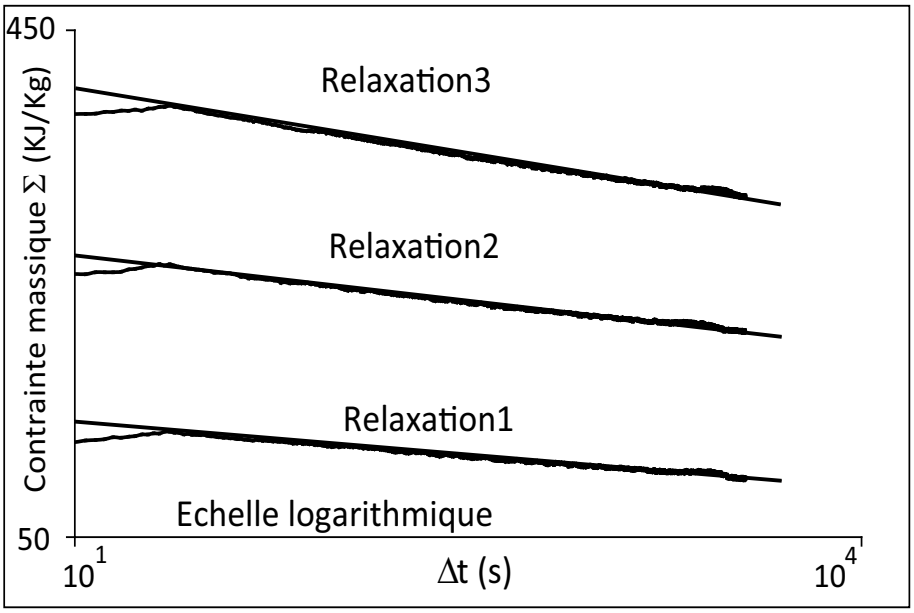


Fig. 4.35 – Comparaison des résultat de mesure avec l'évolution théorique de la relaxation *ab* de l'ssai X150C002.

essais sont donnés par la figure 4.36.

L'essai X150C005 correspond à une traction ondulée contrôlé à vitesse de déplacement de traverse constante, ce qui correspond à une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$. L'essai est

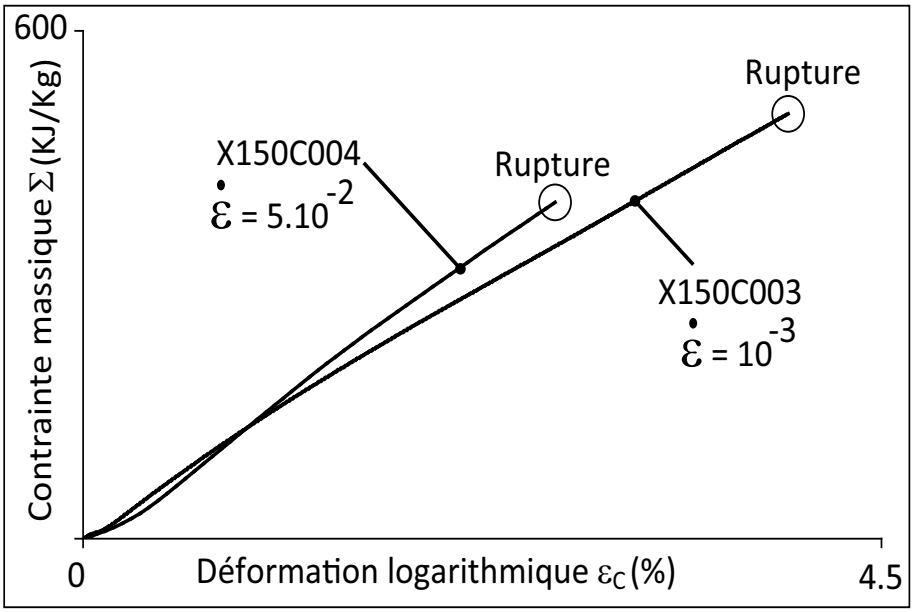


Fig. 4.36 – Résultat de traction monotone à vitesse de déformation constante - X150C003 ($\dot{\varepsilon_1} = 10^{-3}s^{-1}$) et X150C004 ($\dot{\varepsilon_2} = 5.10^{-2}s^{-1}$).

interrompu par des séquences de relaxation de 900s. Le programme de chargement de cet essai est donné sur la figure 4.37. Les résultats de cet essai sont donnés sur les figure 4.38 et 4.39, respectivement dans les diagrammes contrainte massique en fonction de déformation et contrainte massique en fonction du temps. Ces résultats montrent d'une part, le caractère irréversible du comportement du matériau (boucle d'hystérésis *gn* Fig. 4.38) et d'autre part son caractère visqueux, aux faibles déformations (relaxation *ab* Fig. 4.38 et Fig. 4.39) et dans les boucles de charge-décharge (relaxation *hi*, *jk*, *lm*, *op* et *qr* Fig. 4.38 et Fig. 4.39).

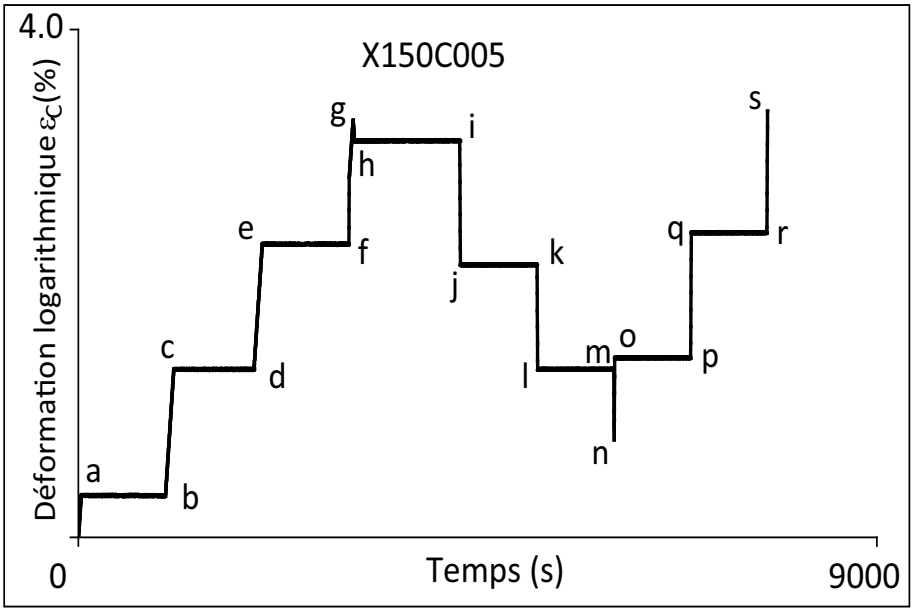


Fig. 4.37 – Programme de chargement de l'essai X150C005 - $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}s^{-1}$.

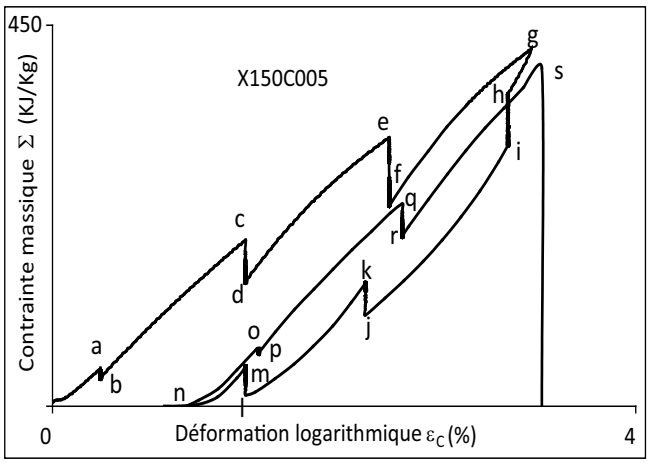


Fig. 4.38 – Résultat de traction ondulée ($\dot{\varepsilon_2} = 10^{-3}s^{-1}$) avec des séquences de relaxation de 900s - X150C005.

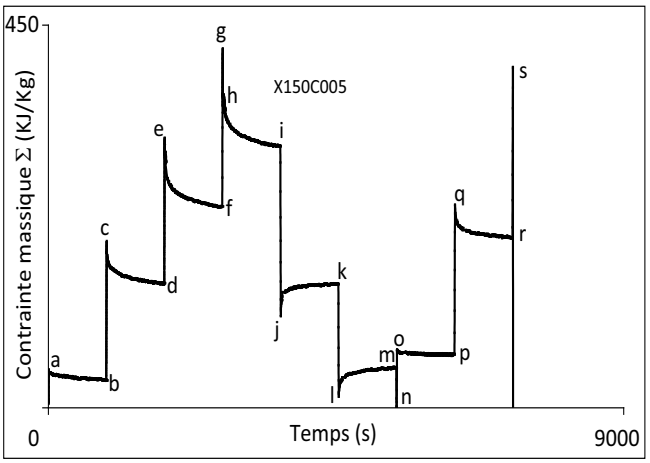


Fig. 4.39 – Contrainte massique en fonction du temps - X150C005.

4.2.3 Caractéristiques à la rupture du Kevlar X15 dans le sens trame

Le tableau 4.8 donne les valeurs des caractéristiques mécaniques à la rupture du matériau dans le trame.

Table 4.8: Caractéristiques mécaniques à la rupture - Kevlar dans le sens trame.

Essai	**Force de rupture**	**Déplacement à la rupture**	**Contrainte de rupture**	**Déformation de rupture**
N°	F_r	Δh_r	Σ_r	ε_r
Sens Trame	(N)	(mm)	(KJ/Kg)	(%)
X150T001	891	6.8	69	2.2
X150T002	1174	5.5	91	1.8
X150T003	1909	10.0	150	3.3
X150T004	1571	16.0	123	2.7
X150T005	1184	8.0	92	2.6
<Moyenne>	**1346**	**9.3**	**105**	**2.5**
Ecarte Type σ	397	4.1	32	0.6
$\sigma_{<>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	178	1.8	14	0.3

Ainsi la contrainte moyenne massique à la rupture et la déformation moyenne à la rupture sont :

$$\boxed{\begin{array}{ll} < \Sigma_r >= 105 \pm 14\ KJ/Kg & (n = 5; d.c.68\%) \\ < \varepsilon_r >= 2.5 \pm 0.3\% & (n = 5; d.c.68\%) \end{array}} \tag{4.7}$$

Le tableau 4.9 donne les résultats de mesure du module élastique initial dans le sens trame.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{ll} < E_m^t >= 34.9 \pm 5\ (10^2.KJ/Kg) & (n = 5; d.c.68\%) \\ < E^t >= 28.8 \pm 4\ MPa & (n = 5; d.c.68\%) \end{array}} \tag{4.8}$$

TABLE 4.9: Résultats de mesure du module élastique initial - Kevlar sens trame.

Essai N°	E_m^t	E^t
(-)	(10^2.KJ/Kg)	(MPa)
X150T001	33.4	27.5
X150T002	51.8	42.7
X150T003	37.1	30.5
X150T004	33.9	27.9
X150T005	18.5	15.2
<Moyenne>	**34.9**	**28.8**
Ecarte Type σ	12.0	10.0
$\sigma_{<>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	5	4

4.2.4 Caractéristiques à la rupture du Kevlar X15 dans le sens chaîne

Le tableau 4.10 donne les valeurs des caractéristiques mécaniques à la rupture du matériau dans le sens chaîne. Ainsi la contrainte moyenne massique à la rupture et la déformation moyenne

TABLE 4.10: Caractéristiques mécaniques à la rupture - Kevlar sens chaîne.

Essai	**Force de rupture**	**Déplacement à la rupture**	**Contrainte de rupture**	**Déformation de rupture**
N°	F_r	Δh_r	Σ_r	ε_r
Sens Chaîne	(N)	(mm)	(KJ/Kg)	(%)
X150C001	6281	13.4	498	4.4
X150C002	5910	12.8	467	4.0
X150C003	6354	12.2	502	4.0
X150C004	5097	20.1	397	2.7
X150C005	5090	10.2	423	3.4
<Moyenne>	**5746**	**13.7**	**457**	**3.7**
Ecarte Type σ	619	3.8	46	0.7
$\sigma_{<>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	277	1.7	21	0.3

à la rupture sont :

$$\boxed{\begin{aligned} < \Sigma_r >= 457 \pm 21\ KJ/Kg \qquad & (n = 5; d.c.68\%) \\ < \varepsilon_r >= 3.7 \pm 0.3\% \qquad & (n = 5; d.c.68\%) \end{aligned}} \tag{4.9}$$

Le tableau 4.11 donne les résultats de mesure du module élastique initial dans le sens chaîne. Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} < E_m^c >= 132.5 \pm 11\ (10^2.KJ/Kg) \qquad & (n = 5; d.c.68\%) \\ < E^c >= 109.1 \pm 9\ MPa \qquad & (n = 5; d.c.68\%) \end{aligned}} \tag{4.10}$$

4.2.5 Commentaires sur les résultats du Kevlar :

La toile laminée en Kevlar présente une rigidité globale plus important que celle obsérvée sur le Dacron SF HTM simple. En effet, les valeurs de la déformation à la rupture sont beaucoup plus faibles que celle du Dacron SF HTM simple. Par ailleurs, le matériau présente de meilleures caractéristiques mécaniques dans le sens chaîne que dans le sens trame ; les valeurs des caractéristiques élastiques et de rupture sont systématiquement plus élevées dans le sens chaîne que dans le sens trame : la valeur de la contrainte à la rupture est 77% plus élevée dans le sens chaîne

Table 4.11: Résultats de mesure du module élastique initial - Kevlar sens chaîne.

Essai N°	E_m^c	E^c
(-)	(10^2.KJ/Kg)	(MPa)
X150C001	145.4	119.7
X150C002	143.1	117.8
X150C003	144.9	119.3
X150C004	86.7	71.4
X150C005	142.5	117.3
<Moyenne>	**132.5**	**109.1**
Ecarte Type σ	26	21
$\sigma_{<>} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	11	9

et le module élastique est 73% plus élevé dans le sens chaîne.Nous notons aussi que la valeur de la déformation à la rupture est 32% plus élvée dans le sens chaîne. L'évolution de la contrainte au cours d'une séquence de relaxation presente un comportement caractérisé par la relation 4.6, qui rappelle les résultats obtenus sur le Dacron SF HTM simple (§ 4.1.4) et les résultats obtenus sur les sangles en PA66 (cf. Chap 1) [33].

4.3 Conclusion

Des mesures des caractéristiques mécaniques élastiques et à la rupture du Dacron SF HTM simple ont été obtenues. Les résultats révèlent des meilleures caractéristiques mécaniques du matériau dans le sens trame que dans le sens chaîne.

L'évolution de la contrainte en fonction du temps, du Dacron SF HTM simple au cours d'une séquence de relaxation, révèle un comportement caractéristique en $\log(t)$.

Une validation de la mesure de déformation par caméra CCD a été réalisée, par une comparaison avec la mesure d'un extensomètre mécanique.

Des mesures des caractéristiques mécaniques élastiques et à la rupture de la toile laminée en Kevlar X15 ont été obtenues. Ces résultats montrent une rigidité du matériau plus important que celle observée sur Dacron SF HTM simple et une déformation à la rupture beaucoup plus faible.

La toile laminée en Kevlar X15 présente de meilleures caractéristiques mécaniques élastiques et de rupture dans le sens chaîne que dans le sens trame.

Comme pour le Dacron SF HTM simple, La toile laminée en Kevlar X15 révèle, au cours d'une séquence de relaxation, une évolution de la contrainte en fonction du temps en $\log(t)$.

Chapitre 5

Résultats expérimentaux sur le Dacron SF HTP Plus

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux obtenu sur le matériau tissé " Dacron SF HTP Plus " présenté au chapitre 3 et qui fait l'objet d'une étude détaillée, dans le cadre de ce travail de thèse. Nous avons réalisé sur ce matériau différents essais de traction monotones et de traction ondulée (cyclique), contrôlés en déformation et en force. Ces essais ont été réalisés dans les axes du matériau, dans le sens chaîne et dans le sens trame, ainsi qu'en hors axes avec des orientations par rapport à la direction chaîne allant de 5° à 45°. Ce chapitre présente l'ensemble des résultats de ces essais, qui seront analysés et exploités dans les chapitres suivants, dans le cadre de la modélisation théorique et numérique du comportement du Dacron SF HTP Plus.

5.1 Résultats de traction monotone et traction ondulée interrompue par des séquences de fluage

Deux essais de ce type ont été réalisés dans le sens chaîne. Ces essais concernent deux éprouvettes réalisées dans un premier lot de fourniture de matériau que nous appelerons lot A, pour les distinguer de l'ensemble des autres éprouvettes, qui proviennent d'un second lot de fourniture de matériau. Le Tableau 5.1 décrit ces deux essais, qui sont contrôlés en force avec une vitesse $\dot{F} = 10N/s$. Le premier essai correspond à une traction monotone et le deuxième correspond à une traction ondulée. Ces deux essais ont été interrompus par des périodes de fluage ; la durée de ces périodes de fluage a été fixée à une heure. La figure 5.1 donne les résultats de ces deux essais dans un diagramme contrainte massique - déformation logarithmique. La figure 5.2 donne l'évolution de la déformation en fonction du temps pendant les périodes de fluage. Ces résultats montrent que durant les séquences de fluage, la déformation peut diminuer ou augmenter en fonction de la position de la séquence de fluage, le long de la première charge ou dans la boucle d'hystérésis contrainte-déformation. Si la séquence de fluage se situe sur la première charge, la déformation augmente toujours indépendamment de l'emplacement de la séquence de fluage a_1b_1, c_1d_1 pour l'essai SFH0C001 et a_2b_2, m_2n_2 pour l'essai SFH0C002. Par ailleurs, nous notons, que le phénomène visqueux est présent même aux très faibles déformation ; il se manifeste par dès fluages non nuls a_1b_1 et c_1d_1 pour l'essai SFH0C001, a_2b_2 et m_2n_2 pour l'essai SFH0C002.

TABLE 5.1: Essais de traction monotone et cyclique interrompues par des séquences de fluage (lot A).

N° de l'éprouvette	Vitesse de force	Commentaire
SFH0C001	10 N/s	contrôle en force, avec 2 séquences de fluage (durée 1h).
SFH0C002	10 N/s	contrôle en force, avec 6 séquences de fluage (durée 1h).

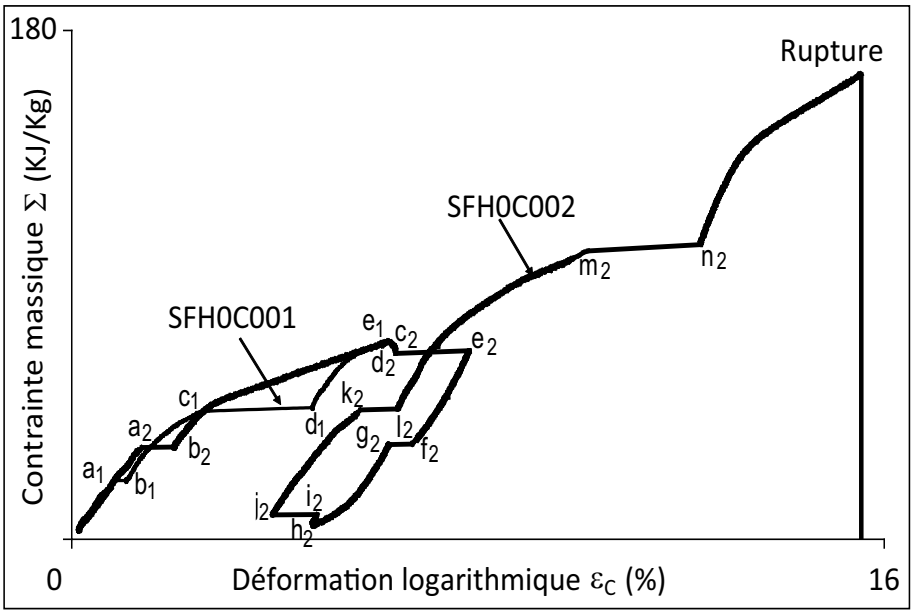


Fig. 5.1 – Résultat de traction monotone et cyclique sur le Dacron plus (lot A) avec des séquences de fluage - SFH0C001 et SFH0C002 [67].

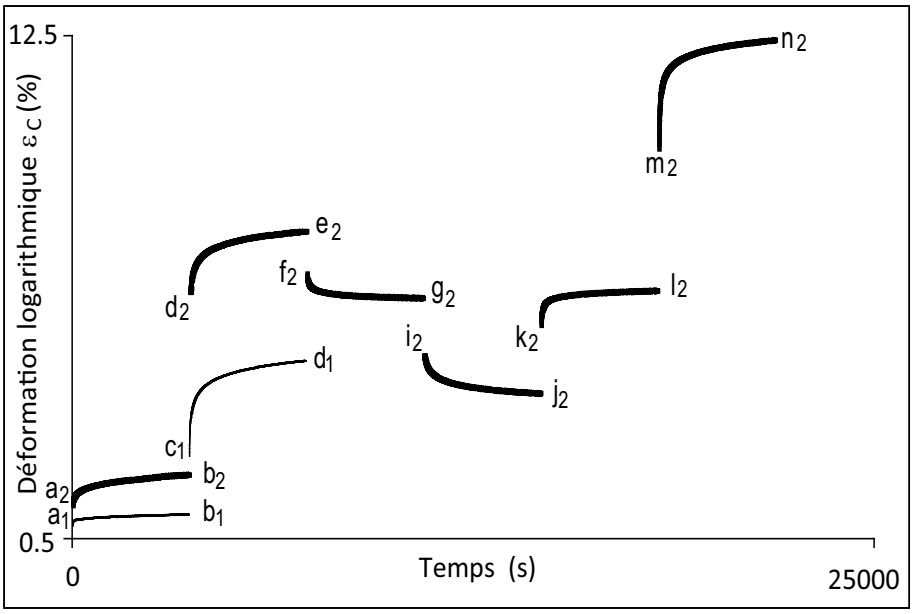


Fig. 5.2 – Evolution de la déformation en fonction du temps pendant les périodes de fluage - SFH0C001 et SFH0C002 [67].

5.2 Résultats de tractions monotones à différentes vitesse de déformation

Des essais de traction monotones à différentes vitesses de déformation ou de force ont été réalisés, dans le sens chaîne et dans le sens trame ; le Tableau 5.2 donne le numéro de l'éprouvette

utilisée, le type d'essai réalisé et la vitesse de sollicitation. Les essais SFH0C009, SFH0C010, SFH0C011, SFH0C012, SFH0C013 et SFH0C015 sont réalisés dans le sens chaîne et sont contrôlés en déformation, avec des vitesses de déformation allant de 5 $10^{-5}s^{-1}$ à 9 $10^{-3}s^{-1}$; l'essai SFH0C014 est contrôlé en force avec une vitesse de force $\dot{F} = 10.4\ N/s$. Les essais SFH0T002, SFH0T005, SFH0T006, SFH0T007, SFH0T008, SFH0T009 et SFH0T011 sont réalisés dans le sens trame et sont contrôlés en déformation, avec des vitesses de déformation allant de 5 $10^{-5}s^{-1}$ à 9 $10^{-3}s^{-1}$; l'essai SFH0T010 est contrôlé en force avec un vitesse de force $\dot{F} = 10.3N/s$.

Les résultats des essais monotones à différentes vitesses sont regroupés sur la figure 5.3 et la

Table 5.2: Essai de traction monotone dans le sens chaîne et dans le sens trame.

	N° de l'éprouvette	Vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ ou de force $\dot{F}$	Types d'essai et commentaire
Sens chaîne	SFH0C009	9.0 $10^{-3}s^{-1}$	Essai de traction monotone contrôle en déformation
	SFH0C010	8.7 $10^{-4}s^{-1}$	
	SFH0C011	0.9 $10^{-5}s^{-1}$	
	SFH0C012	5.0 $10^{-5}s^{-1}$	
	SFH0C013		
	SFH0C014	10.4 N/s	Essai de traction monotone contrôle en Force
	SFH0C015	8.8 $10^{-3}s^{-1}$	Essai de traction monotone contrôle en déformation
Sens trame	SFH0T005	9.0 $10^{-3}s^{-1}$	Essai de traction monotone contrôle en déformation.
	SFH0T006	8.0 $10^{-4}s^{-1}$	
	SFH0T007	8.0 $10^{-5}s^{-1}$	
	SFH0T008	5.0 $10^{-5}s^{-1}$	
	SFH0T009	4.0 $10^{-4}s^{-1}$	
	SFH0T010	10.3 N/s	Essai de traction monotone contrôle en Force
	SFH0T011	8.4 $10^{-3}s^{-1}$	Essai de traction monotone contrôle en déformation

figure 5.4, dans un diagramme rhéologique contrainte massique en fonction de la déformation logarithmique. La figure 5.3 donne les résultats obtenus dans le sens chaîne et la figure 5.4 donne les résultats obtenus dans le sens trame. Ces résultats présentent une forme caractéristique en trois zones, qui se distinguent par leurs pentes, dans le diagramme contrainte-déformation. La première zone se situe entre l'origine de la courbe et une contrainte comprise entre 40 et 60 KJ/Kg. Cette zone se termine par une forte diminution de pente, qui engendre un coude, relativement prononcé dans le sens trame. La deuxième zone s'étend jusqu'à une contrainte située entre 100 et 140 KJ/Kg. Dans la troisième zone la pente, dans le diagramme contrainte-déformation, augmente de nouveau de façon progressive, jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Pour une déformation donnée les réponses du matériau en contrainte dans le sens chaîne et dans le sens trame ont des valeurs du même ordre de grandeur ; le comportement du matériau dans le sens trame se distingue par une séparation plus nette des trois zones de comportement. Le coude observé entre les deux premières zones présentes un effet de rebond assez prononcé.

Pour caractériser la sensibilité de la contrainte à la vitesse de déformation, telle que :

$$\Delta\Sigma = m.\log(\dot{\varepsilon}) \tag{5.1}$$

la figure 5.5 donne la valeur de la contrainte, dans les sens chaîne et trame, pour une déformation de 6 % et 16 %, en fonction de $\log(\dot{\varepsilon})$. Le tableau 5.3 donne les pentes m des droites de sensibilité de la contrainte à la vitesse de déformation, les contraintes moyennes Σ_m correspondantes et le rapport m/Σ_m. Dans le sens chaîne la valeur du paramètre m est très peu modifiée en fonction de la déformation ; contrairement au cas du sens trame où l'influence de la vitesse de déformation, caractérisé par m, est plus importante en grande déformation.

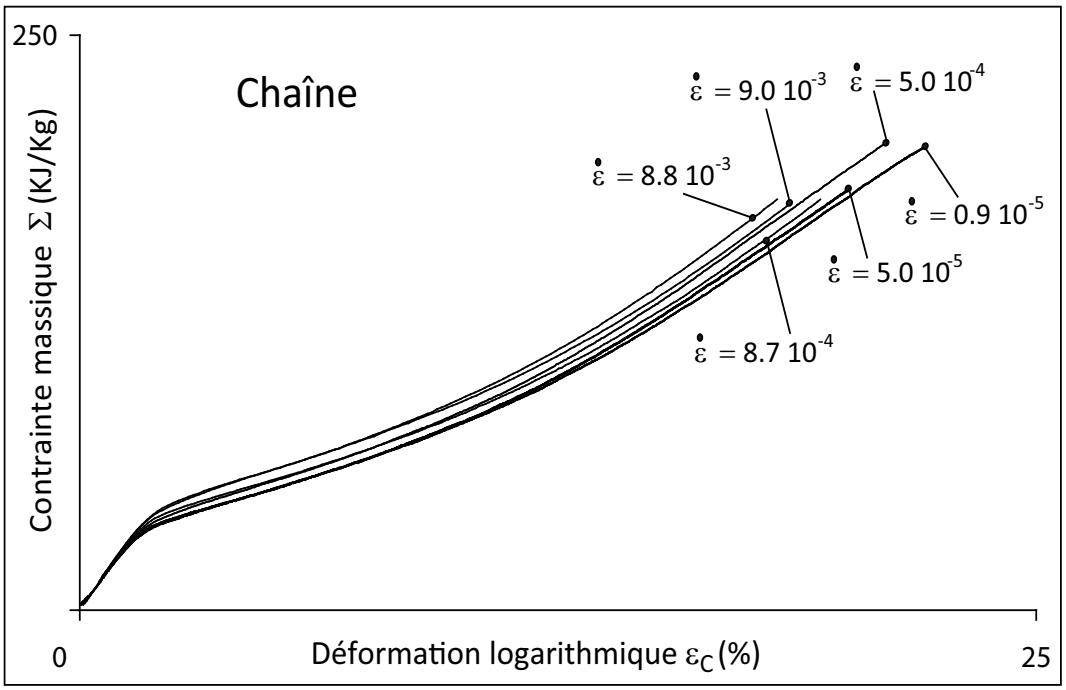


Fig. 5.3 – Résultats d'essais de traction monotone à des vitesses de déformation allant de 5 $10^{-5}s^{-1}$ à 9 $10^{-3}s^{-1}$ dans le sens chaîne.

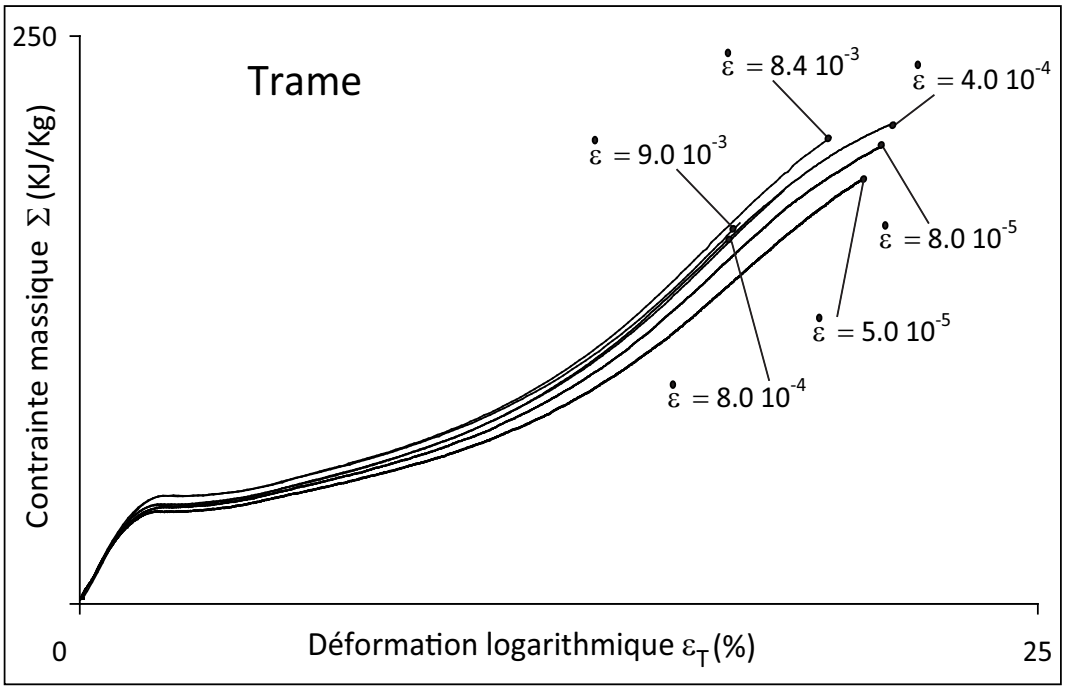


Fig. 5.4 – Résultats d'essais de traction monotone à des vitesses de déformation allant de 5 $10^{-5}s^{-1}$ à 9 $10^{-3}s^{-1}$ dans le sens trame.

TABLE 5.3: Sensibilité de la contrainte m aux vitesses de déformation ; contrainte moyenne Σ_m et rapport m/Σ_m, correspondant à la figure 5.5.

Sens	$\varepsilon = 6\%$			$\varepsilon = 16\%$		
	Σ_m	m	m/Σ_m	Σ_m	m	m/Σ_m
	KJ/KG	KJ/KG/décade	(%)/décade	KJ/KG	KJ/KG/décade	(%)/décade
Chaîne	62	3.3	5	143	3.0	2
Trame	54	2.8	5	142	8.0	6

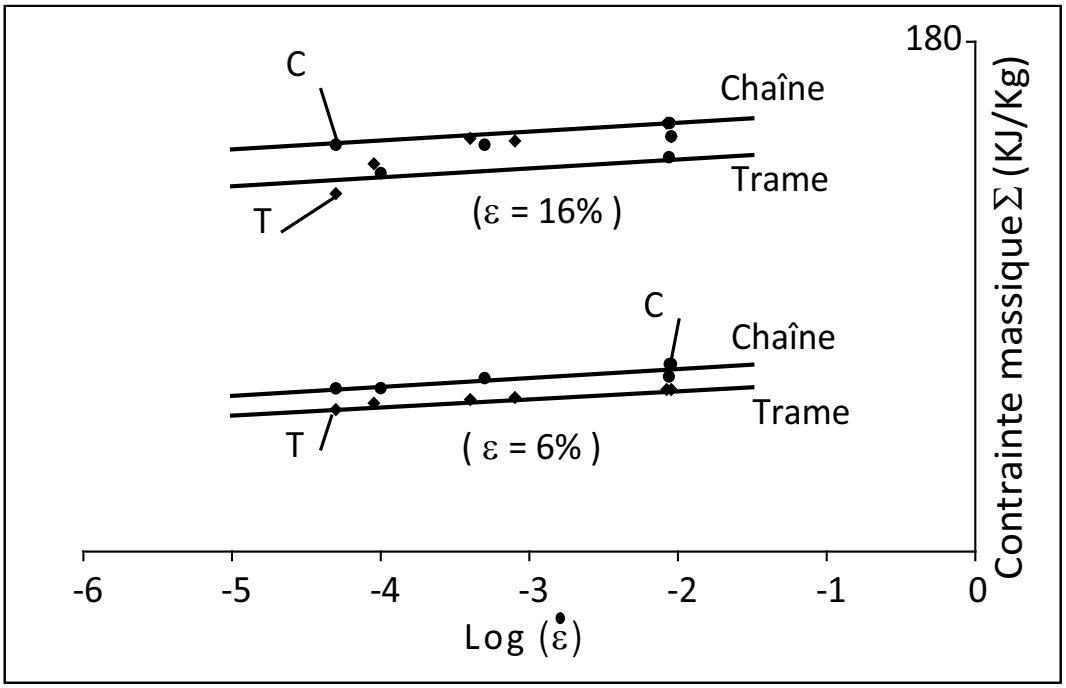


Fig. 5.5 – Contrainte massique en fonction de la vitesse dans le sens chaîne et trame.

Les résultats des deux essais monotones contrôlés en force, sont regroupés sur la figure 5.6. La figure 5.6-a donne le résultat de l'essai SFH0C014 dans le sens chaîne et la figure 5.6-b donne le résultat de l'essai SFH0T010 dans le sens trame.

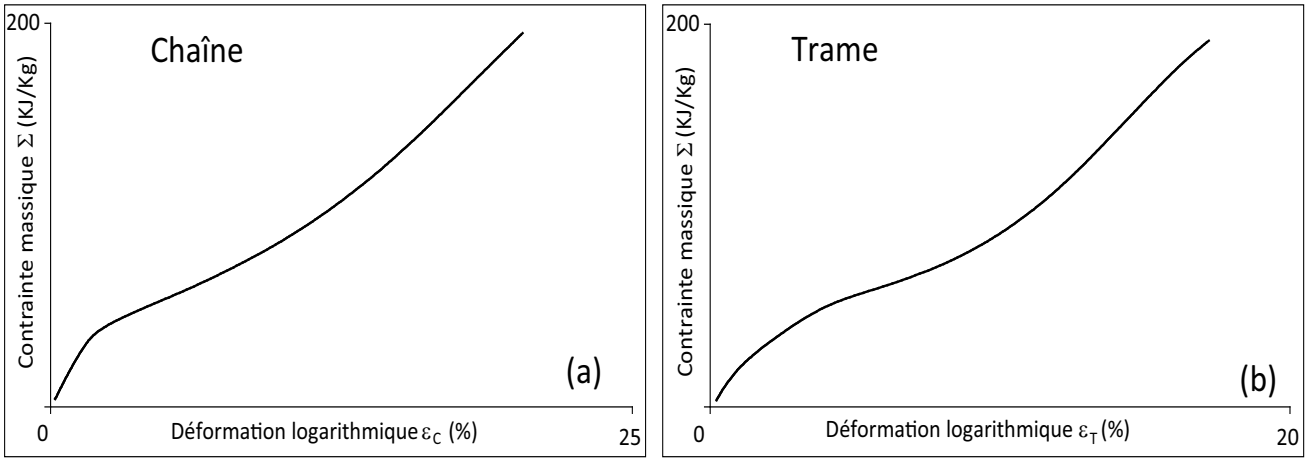


Fig. 5.6 – Résultats d'essais de traction monotone contrôlés en force : (a) dans le sens chaîne (SFH0C014 :$\dot{F} = 10.4\ N/s$), (b) dans le sens trame (SFH0T010 $\dot{F} = 10.3\ N/s$) :

5.3 Résultats de tractions monotones interrompues par des séquences de relaxation

Nous avons réalisé deux essais de traction monotone, contrôlés en vitesse de déformation et interrompue par des séquences de relaxation, d'une durée de 900s chacune. Le premier essai a été réalisé dans le sens chaîne (SFH0C006) à une vitesse de déformation imposé $\dot{\varepsilon} = 4.5\ 10^{-5} s^{-1}$ et présente 9 séquences de relaxation. Le deuxième essai a été réalisé dans le sens trame (SFH0T002) à une vitesse de déformation imposé $\dot{\varepsilon} = 5.0\ 10^{-5} s^{-1}$ et présente 10 séquences de relaxation (tab. 5.4). La déformation logarithmique imposée en fonction du temps, au cours de ces deux essais

est donnée sur la figure 5.7 pour le sens chaîne (SFH0C006) et pour le sens trame (SFH0T002), respectivement. Les résultats de ces deux essais sont donnés sur les figures 5.8 et 5.9, dans un diagramme contrainte massique en fonction de la déformation logarithmique.

TABLE 5.4: Essai de traction monotone dans le sens chaîne et dans le sens trame.

	N° de l'éprouvette	Vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$	Types d'essai et commentaire
Sens chaîne	SFH0C006	4.5 $10^{-5}s^{-1}$	Essai de traction monotone contrôle en déformation avec 9 séquences de relaxation (durée 900 s).
Sens trame	SFH0T002	5.0 $10^{-5}s^{-1}$	Essai de traction monotone contrôle en déformation avec 10 séquences de relaxation (durée 900 s).

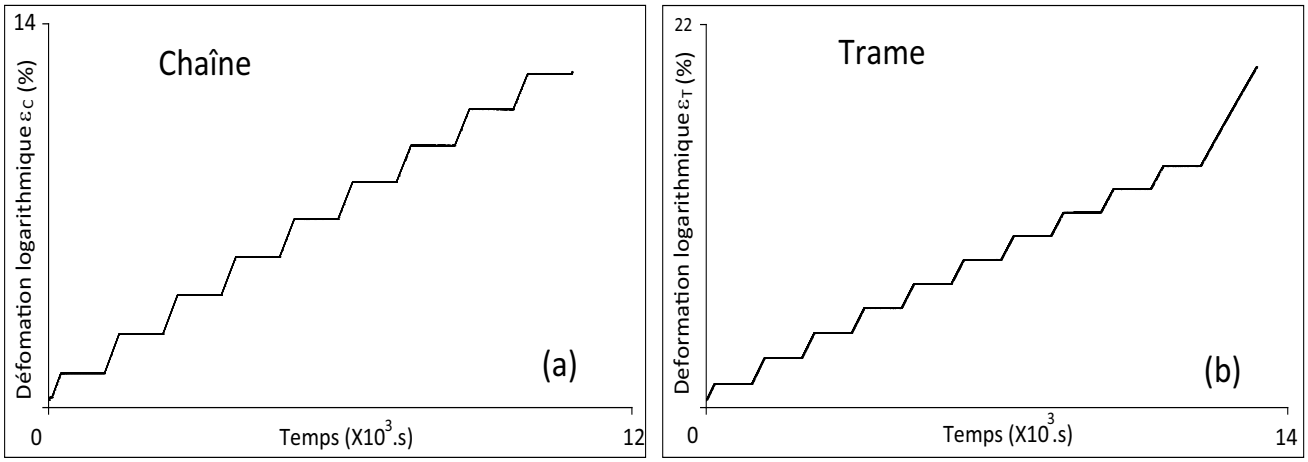


Fig. 5.7 – Courbe de déformation logarithmique en fonction de temps : (a) dans le sens chaîne - SFH0C006, (b) dans le sens trame - SFH0T002.

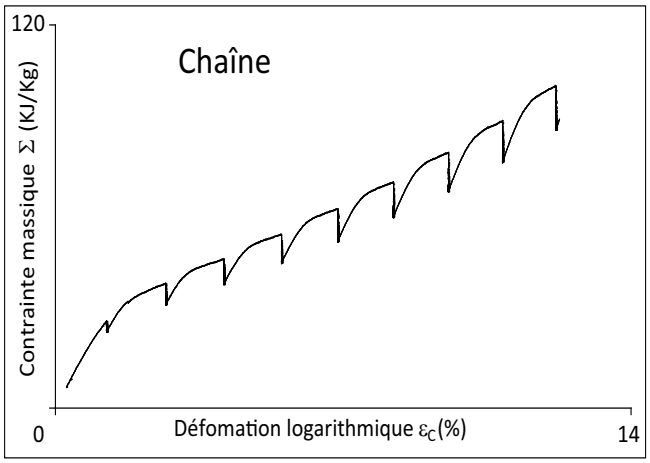


Fig. 5.8 – Résultat de traction monotone contrôle en vitesse de déformation avec des séquences de relaxation dans le sens chaîne - SFH0C006

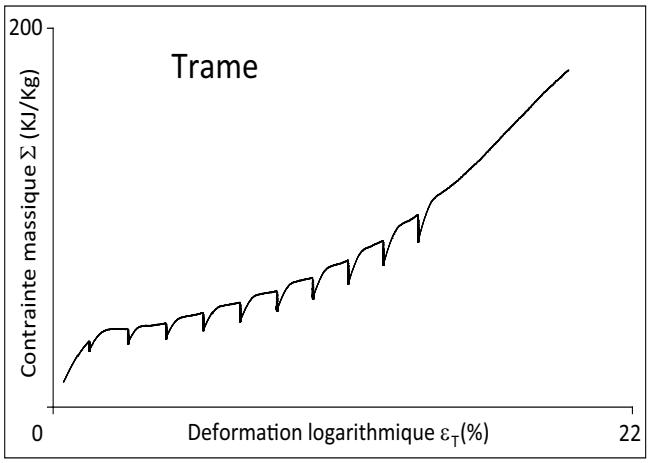


Fig. 5.9 – Résultat de traction monotone contrôle en vitesse de déformation avec des séquences de relaxation dans le sens trame - SFH0T002

Les figures 5.10 et 5.11 donnent l'évolution de la contrainte massique en fonction du temps. Lors des séquences de relaxation, la contrainte ne présente pas de seuil de saturation. on observe un effet transitoire avec une diminution rapide de la contrainte au début de la séquences de relaxation, suivie d'une évolution beaucoup plus lente en fonction du temps. Cette propriété

rappelle les résultats cités dans le chapitre bibliographique (cf. Chapitre 1) et obtenus sur les sangles en PA66 [33].

Considérons les quatrièmes séquences de relaxation, noté a et b, sur les figures 5.10 et 5.11 et observons leurs évolutions dans un diagramme contrainte massique - $\log(\Delta t)$, où $\Delta t = t - t_0$ et t_0 correspond au temps de début de la séquence de relaxation. ces résultats sont donnés sur les figures 5.12 et 5.13, qui révèlent une forme caractéristique de la relaxation en $\log(\Delta t)$, telle que :

$$\Sigma(t) = -A.\log(\Delta t) + B \tag{5.2}$$

similaire à celle observée sur les sangles en PA66 (cf. Chap 1) [33]. les valeurs des paramètres A et B, correspondants aux quatrième séquences de relaxation dans le sens chaîne et trame, sont données pour chacune des essais sur les figures 5.12 et 5.13.

En utilisant la relation 5.2, il est possible d'extrapoler les évolutions de la contrainte lors des

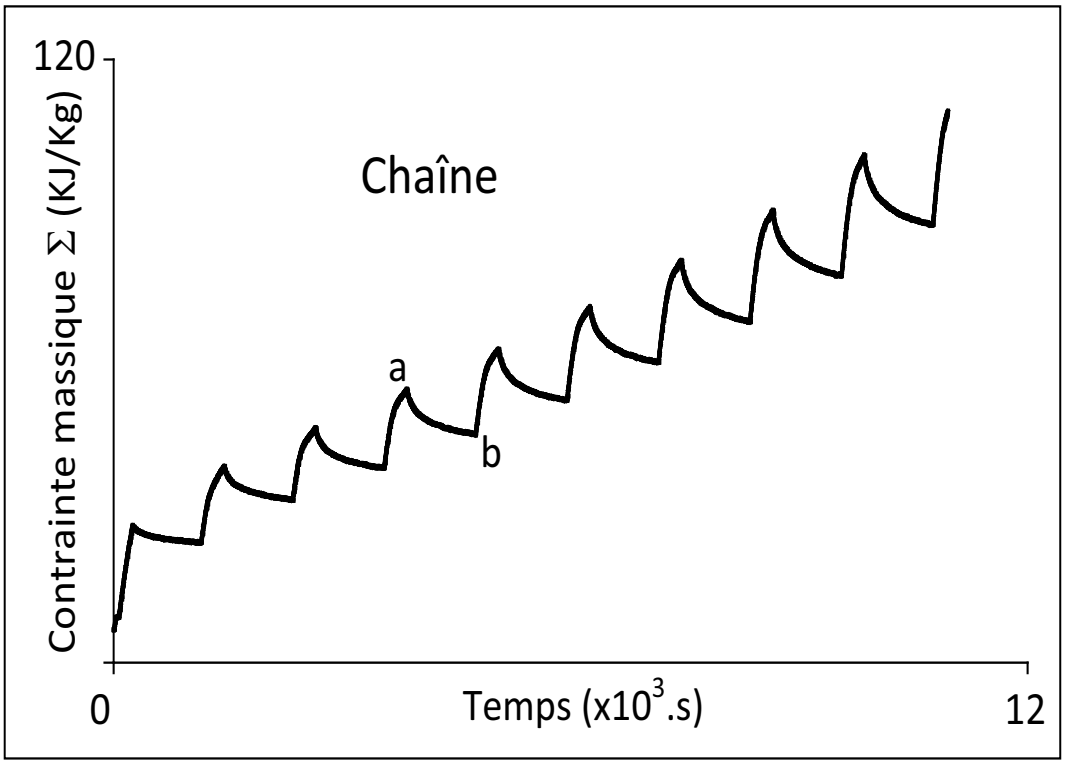


Fig. 5.10 – Extrapolation des courbes de relaxation en fonction du temps dans le sens chaîne à 900s - SFH0C006.

séquences de relaxations. les figures 5.14 et 5.15 donnent une extrapolation des séquences de relaxations pour une durée de 6H.

Les résultats des essais SFH0C006 et SFH0T002 nous ont permis de réaliser des mesures du coefficient de contraction globale, sur l'ensemble de l'essai. Les résultats de ces mesures sont donnés sur les figures 5.16 et 5.17. Le valeurs des coefficients de contraction obtenues dans le sens chaîne et dans le sens trame, sont respectivement :

$$\nu_c = 0.029 \pm 0.001 \tag{5.3}$$

$$\nu_t = 0.113 \pm 0.001 \tag{5.4}$$

dans les figures 5.16 et 5.17 nous constatons que la valeur de coefficient de contraction lors d'une traction dans le sens trame est plus grande que celle observe dans le sens chaîne. Ce résultat est similaire à celui obtenu pour le Dacron SF HTM simple (cf. chapitre 4) et s'explique par l'effet de l'embuvage sur les fils de chaîne, qui favorise l'effet de contraction lors d'une traction dans le sens trame.

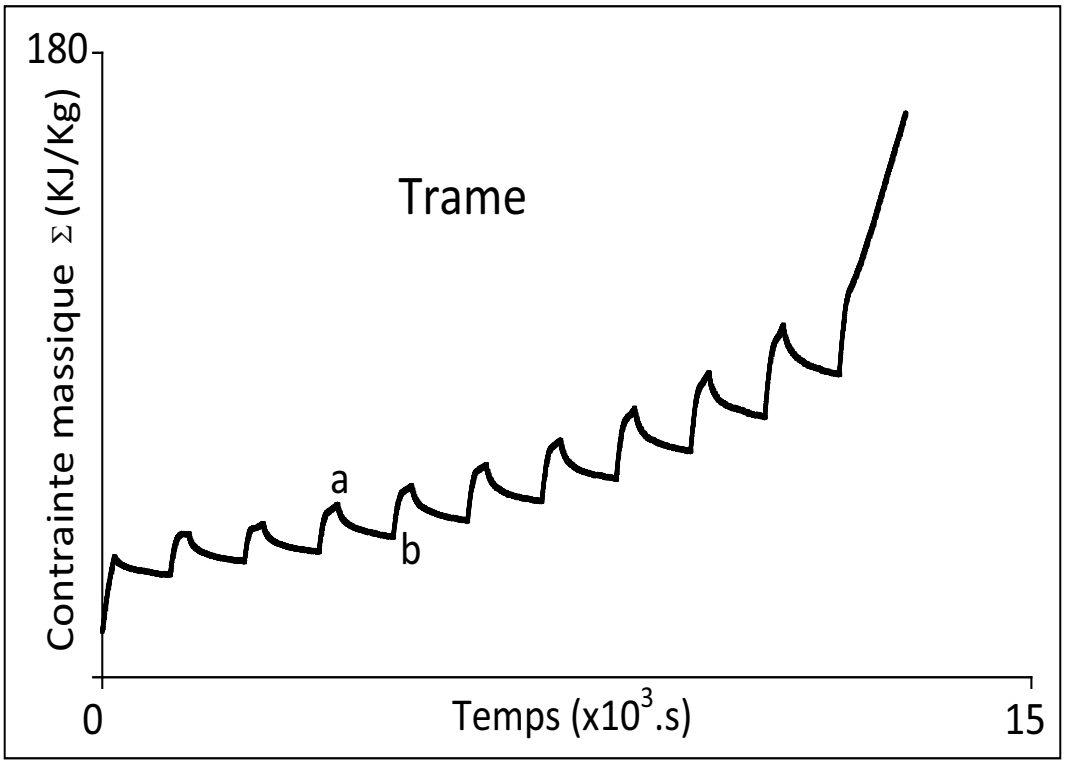


Fig. 5.11 – Extrapolation des courbes de relaxation en fonction du temps dans le sens trame à 900s - SFH0T002.

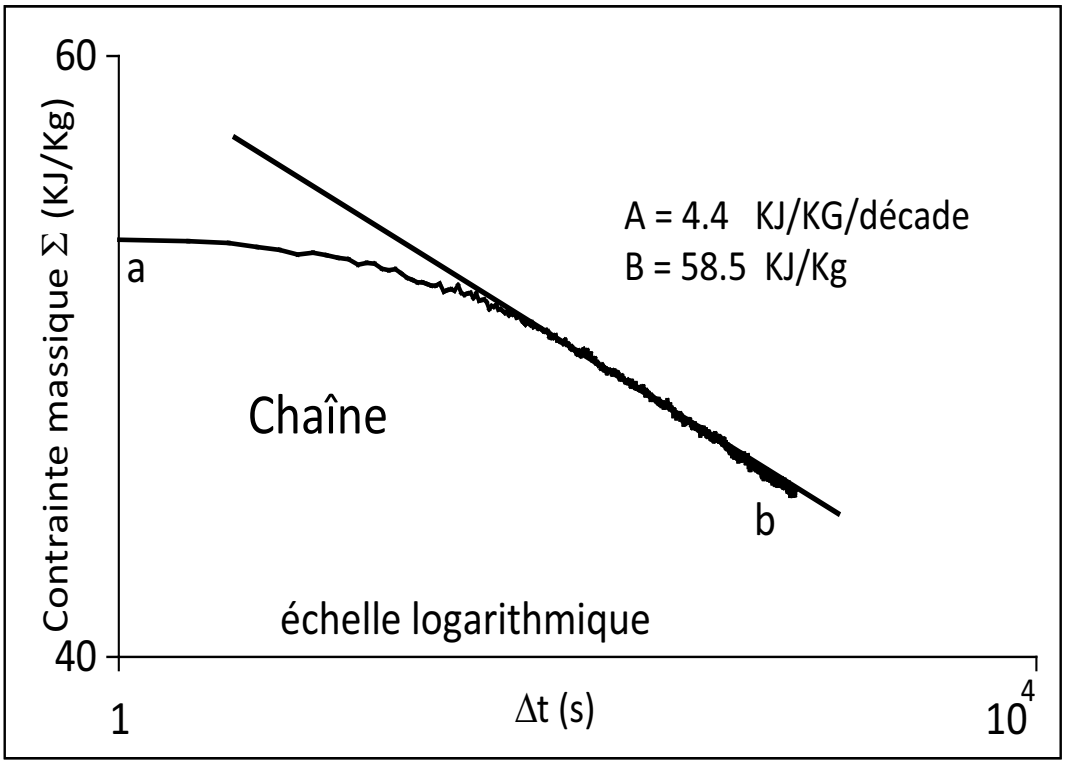


Fig. 5.12 – Comparaison des résultats de mesure avec l'évolution théorique 5.2 de la quatrième séquence de relaxation de l'essai SFH0C006.

5.4 Résultats de tractions ondulées

5.4.1 Traction ondulée avec des cycles décharge-charge

Nous avons réalisé des essais de traction ondulée avec des cycles décharge-charge dans le sens chaîne (SFH0C007 et SFH0C008) et dans le sens trame (SFH0T003 et SFH0T004). Les essais

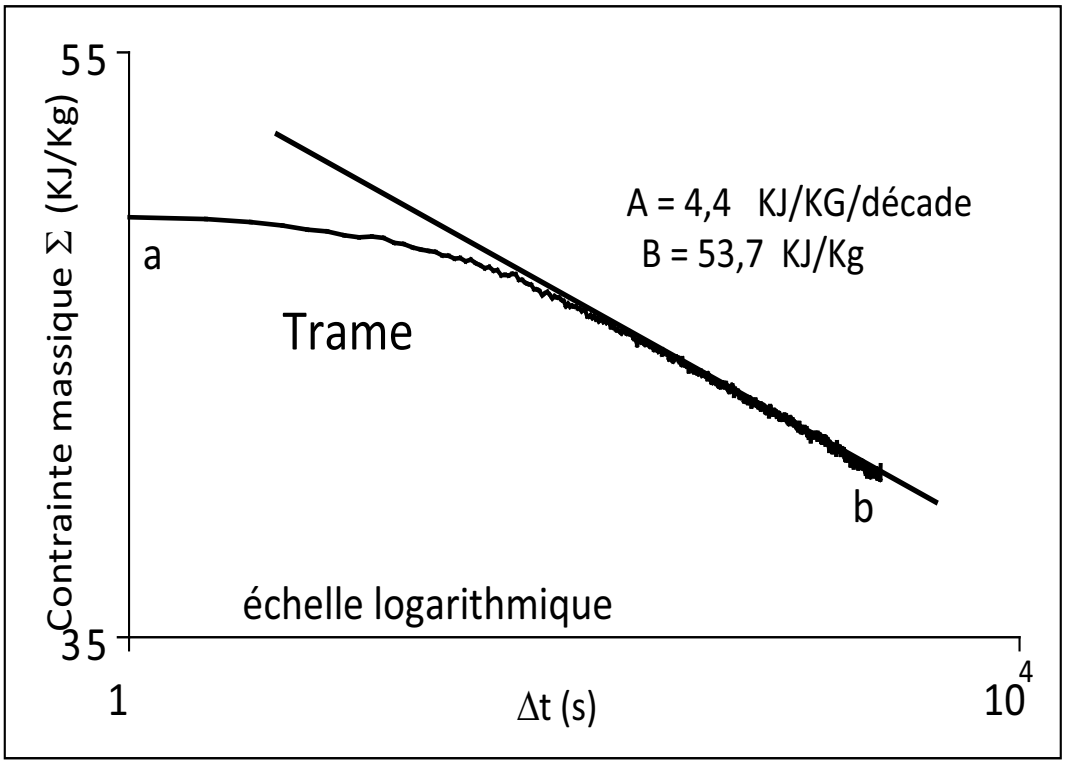


Fig. 5.13 – Comparaison des résultats de mesure avec l'évolution théorique 5.2 de la quatrième séquence de relaxation de l'essai SFH0T002.

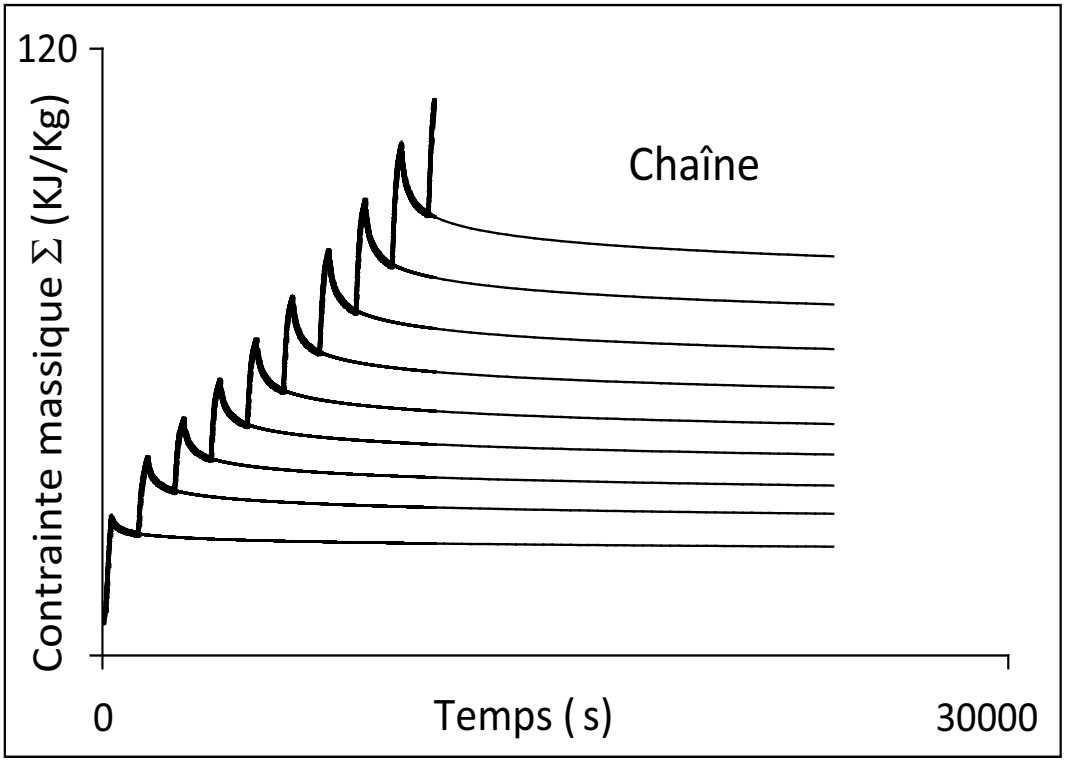


Fig. 5.14 – Extrapolation des courbes de relaxation en fonction du temps dans le sens chaîne à 6H - SFH0C006.

SFH0C007 et SFH0T003 sont contrôlés en déformation, à une vitesse de déformation imposé. Les essais SFH0C008 et SFH0T004 sont contrôlés en force, avec $\dot{F} = 10.2\ N/s$ et $\dot{F} = 10.3\ N/s$ respectivement (tab. 5.5). Les déformations logarithmiques imposées en fonction du temps, au cours des essais SFH0C007 et SFH0T003 sont données sur la figure 5.18 et les forces imposées

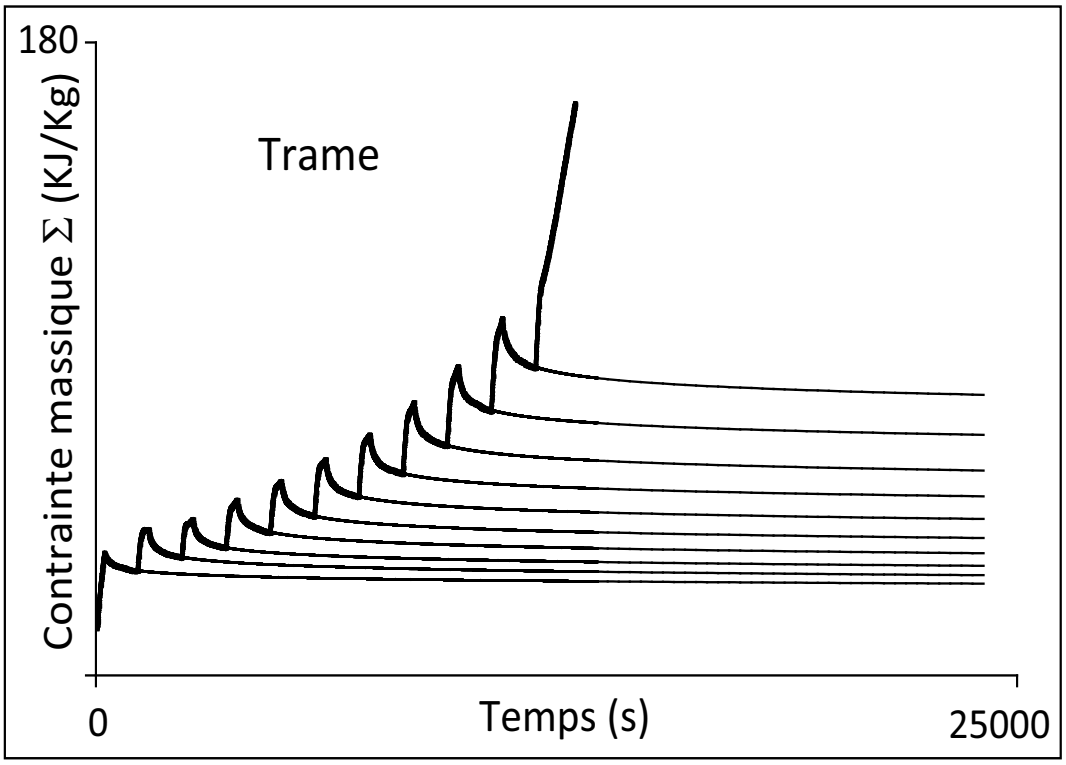


Fig. 5.15 – Extrapolation des courbes de relaxation en fonction du temps dans le sens trame à 6H - SFH0T002.

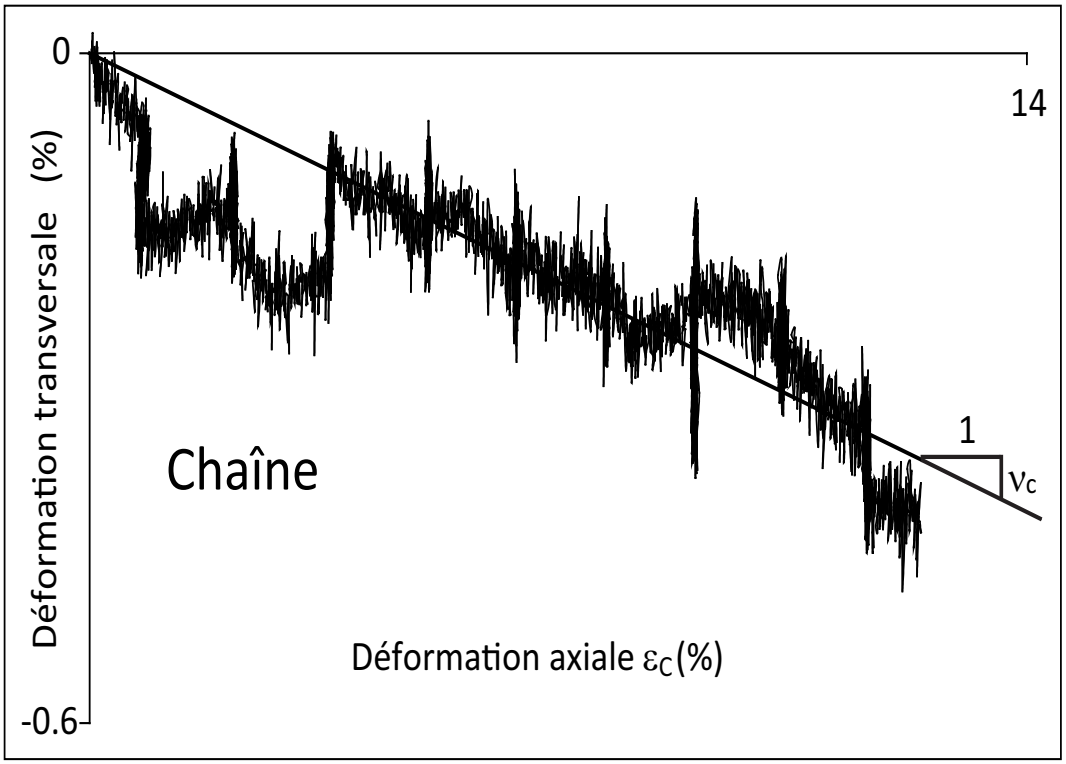


Fig. 5.16 – Coefficient de contraction dans le sens chaîne - SFH0C006.

en fonction du temps, au cours des essais SFH0C008 et SFH0T004 sont données sur la figure 5.19. Les résultats des essais correspondants dans le sens chaîne et dans le sens trame, contrôles en vitesse de déformation, sont donnés par les figures 5.20 et 5.21 et les résultats des essais dans le sens chaîne et dans le sens trame, contrôle en force sont donnés par les figures 5.22 et 5.23. L'ensemble de ces résultats sont donnés dans des diagrammes rhéologiques contrainte mas-

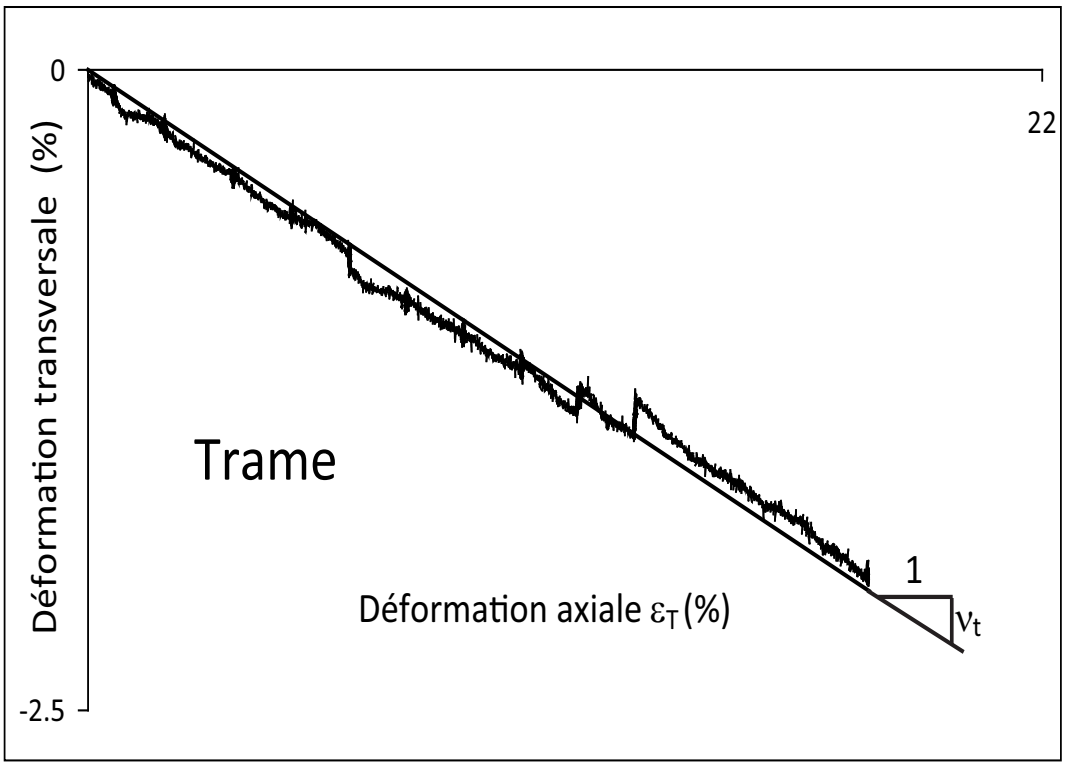


Fig. 5.17 – Coefficient de contraction dans le sens trame - SFH0T002.

Table 5.5: Essai de traction ondulée dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Sens	N° de l'éprouvette	Vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ ou de force $\dot{F}$	Types d'essai et commentaire
chaîne	SFH0C007	5.0 $10^{-4}s^{-1}$	Essai de traction ondulée contrôle en déformation
	SFH0C008	$10.2N/s$	Essai de traction ondulée contrôle en force
trame	SFH0T003	5.0 $10^{-4}s^{-1}$	Essai de traction ondulée contrôle en déformation
	SFH0T004	$10.3N/s$	Essai de traction ondulée contrôle en force

sique en fonction de déformation logarithmique. Les essais SFH0C007, SFH0C008 et SFH0T003 comportes quatre cycles de charge-décharge, et l'essai SFH0T004 comporte trois cycle de charge-décharge. Les résultats des figures 5.20, 5.21, 5.22 et 5.23, révèlent une forme caractéristiques des boucles contrainte-déformation en forme de « haricot », que l'un observe généralement sur les matériaux tissé (cf. chap 1). Ces essais nous ont permis de réaliser des mesures de la déformation transversale au cours de la traction dans le sens chaîne et dans le sens trame. Les résultats de ces mesures sont donnés sur les figures 5.24 et 5.25, pour le contrôle en déformation et sur les figures figure 5.26 et 5.27, pour le contrôle en force.

Pour caractériser l'effet de contraction, lors de la traction ondulée dans le sens trame, nous avons réalisé plusieurs mesures. Les résultats de ces mesures sont donnés sur les tableaux 5.6 et 5.7 et correspondent respectivement aux essais SFHT003 (5.25) et SFH0T004 (5.27). Ces tableaux donnent les résultats de mesure des coefficient de contraction en première charge, dans les cycles et pour l'ensemble de l'essai. Le paramètre d'erreur $\Delta\nu_t$ correspond à l'écart type sur la pente mesurée dans le diagramme déformation axial-déformation transversale. Les résultats de ces deux essais donnent la même valeur du coefficient de contraction en première charge, qui est de 0.106 ± 0.001. La valeur du coefficient de contraction dans les cycles varie entre 0.144 et 0.151. Le coefficient de contraction peut être aussi assimilé à une valeur unique valable pour tout l'essai, sans distinction entre la première charge et les cycles ; sa valeur est alors comprise entre

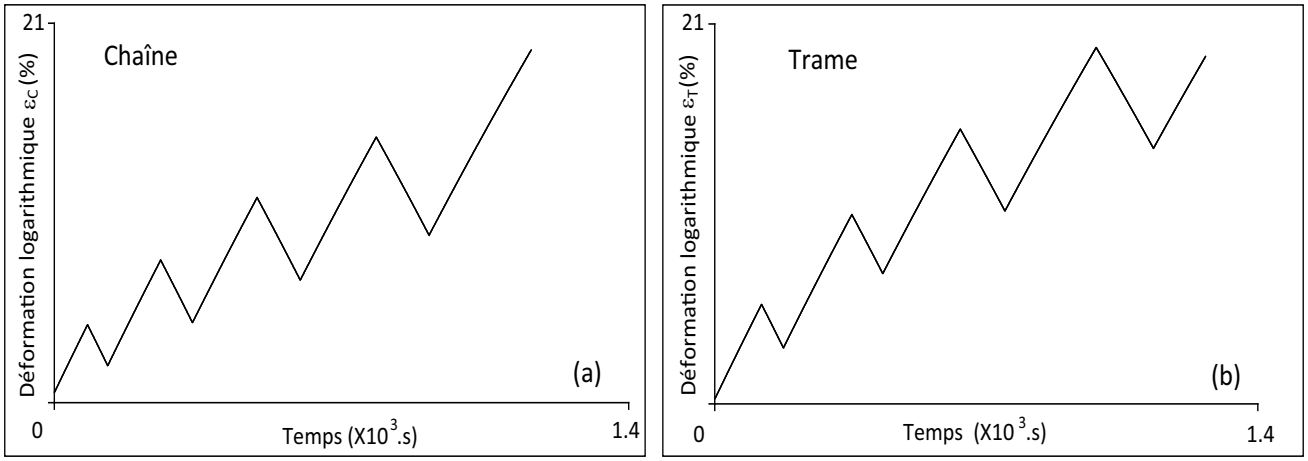


Fig. 5.18 – Courbe de déformation logarithmique en fonction de temps : (a) dans le sens chaîne (SFH0C007), (b) dans le sens trame (SFH0T003).

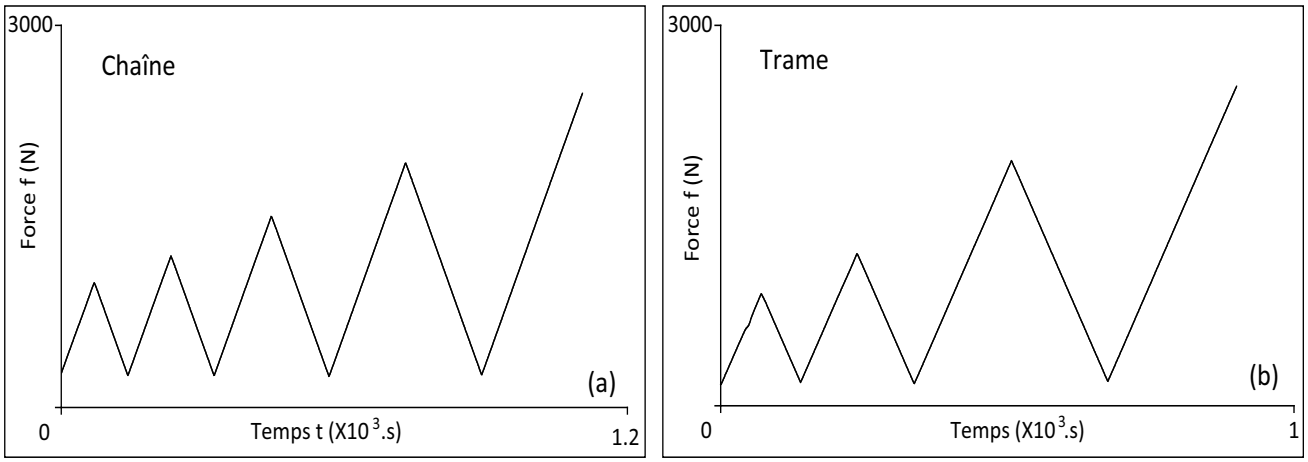


Fig. 5.19 – Courbe de force en fonction de temps : (a) dans le sens chaîne (SFH0C008)$\dot{F} = 10.2\ N/s$,(b) dans le sens trame (SFH0T004) $\dot{F} = 10.3\ N/s$.

0.100 et 0.111 (tab. 5.6 et tab. 5.7).

TABLE 5.6: Mesure du coefficient de contraction - Essai SFH0T003 (fig. 5.25).

	Chargement	ν_t	$\pm\Delta\nu_t$
1e charge	oabdfh	0.106	
Tout l'essai		0.100	0.001
Cycles	bc	0.128	0.001
	de	0.135	
	fg	0.158	
	hi	0.154	
	Moyenne	0.144	

L'effet de contraction, lors d'une traction ondulée dans le sens chaîne présente un comportement assez différent de celui constaté lors d'une traction ondulée dans le sens trame. pour caractériser cet effet en première charge nous avons considère trois mesures : chargement oa, af et fj des figures 5.24 et 5.26 ; les résultats de ses mesures sont reportés sur les tableaux 5.8 et 5.9 respectivement pour les essai SFH0C007 et SFH0C008. Les tableaux 5.8 et 5.9 donnent aussi les coefficients de contraction mesurés dans les cycles (bc, de, fg et hi). les coefficients de contraction mesurés sur les chargement oa et dans les cycles ont une valeur comprise entre 0.038 et 0.076. Dans le deuxième tronçon de la courbe de contraction en première charge, qui

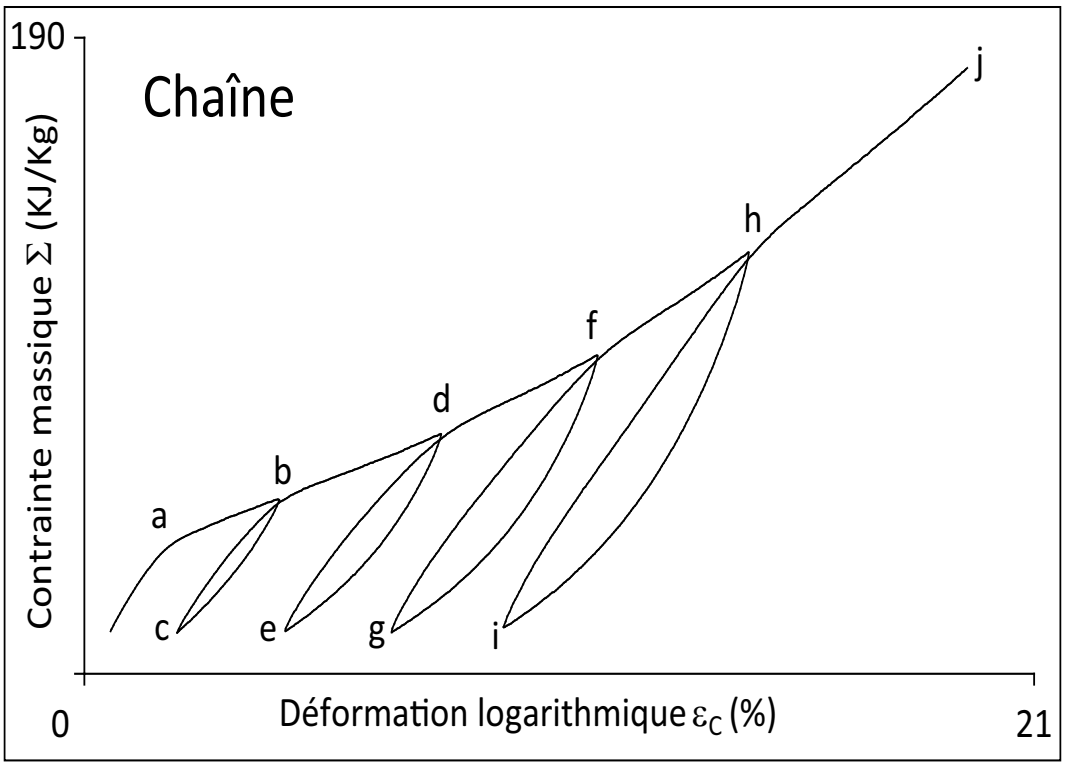


Fig. 5.20 – Résultat de traction ondulée contrôle en déformation dans le sens chaîne (SFH0C007).

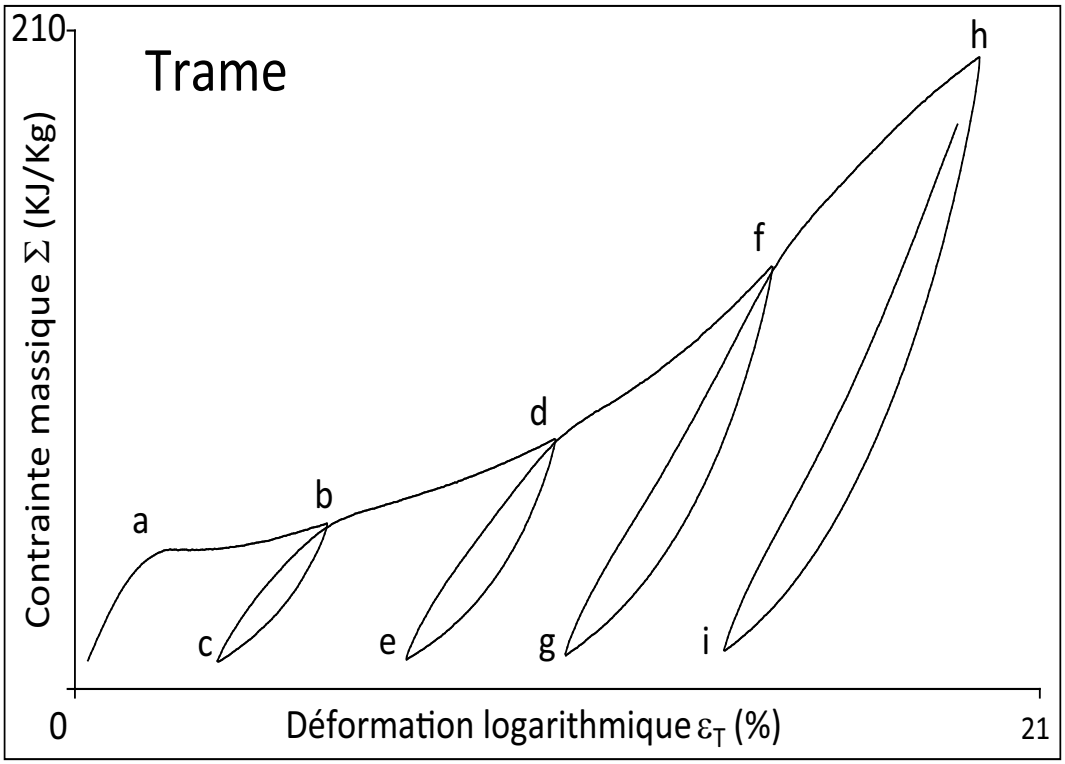


Fig. 5.21 – Résultat de traction ondulée contrôle en déformation dans le sens trame (SFH0T003).

correspond au chargement af, le coefficient de contraction a une valeur assez faible, comprise entre 0.006 et 0.008 (tab. 5.8 et tab. 5.9). le troisième tronçon fj de la courbe de première charge (Fig. 5.24 et Fig. 5.26), a un coefficient de contraction proche de celui obtenu sur le tronçon oa et dans les cycles. L'effet de contraction est beaucoup plus prononcé lors d'une traction ondulée

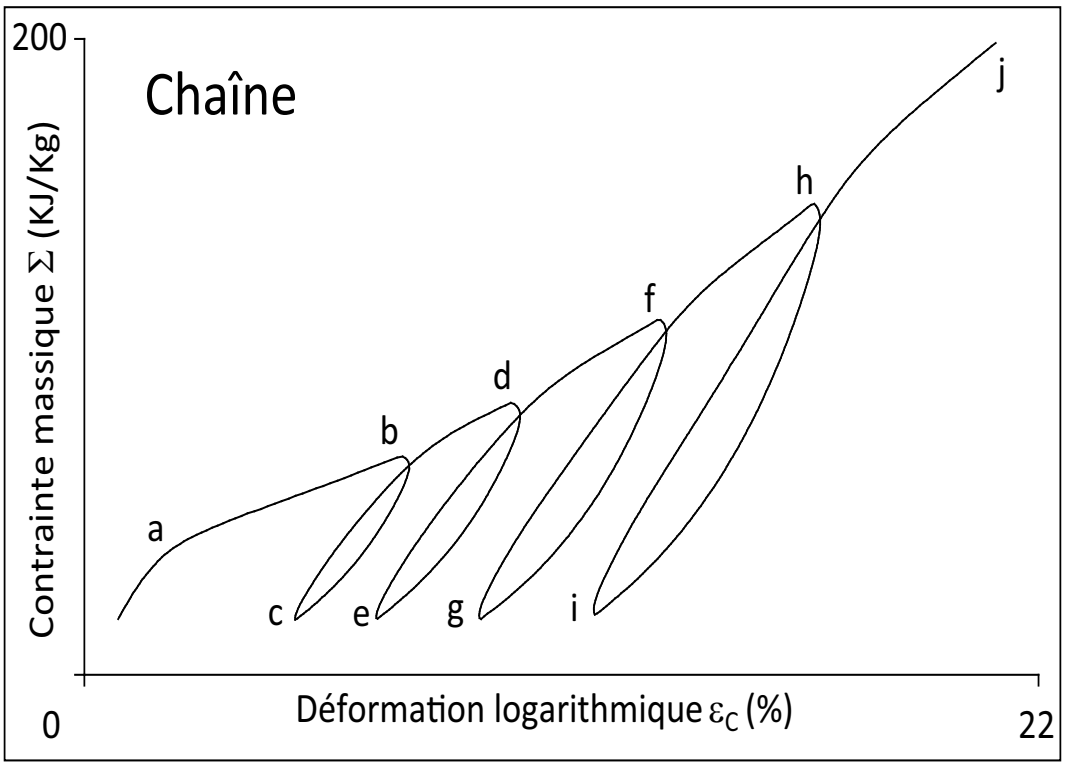


Fig. 5.22 – Résultat de traction ondulée contrôle en force dans le sens chaîne (SFH0C008).

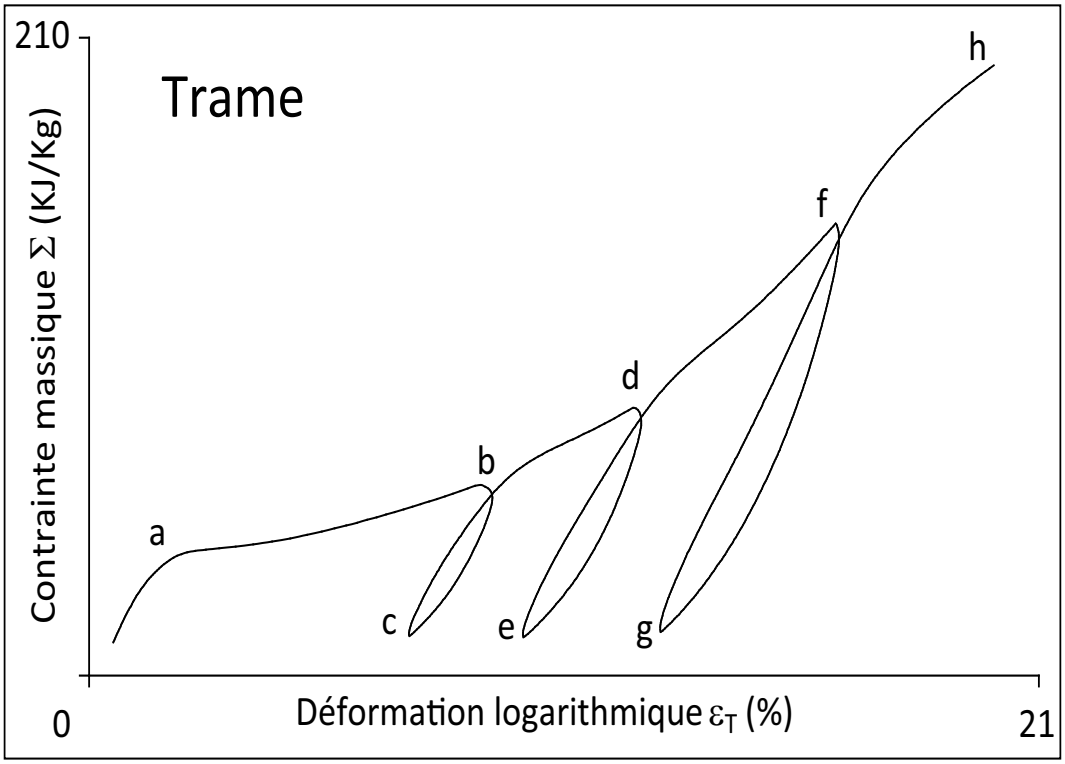


Fig. 5.23 – Résultat de traction ondulée contrôle en force dans le sens trame (SFH0T004).

dans le sens trame. Ce phénomène qui est essentiellement dû à l'embuvage, a déjà été observé sur les résultats du Dacron SF HTM simple (cf. chap 4).

Notons, enfin un phénomène de gonflement, assez inhabituel, qu'on observe sur la figure 5.24,

Table 5.7: Mesure du coefficient de contraction - Essai SFH0T004 (fig. 5.27).

	Chargement	ν_t	$\pm\Delta\nu_t$
1e charge	oabdfh	0.106	
Tout l'essai		0.111	0.001
Cycles	bc	0.144	0.001
	de	0.149	
	fg	0.159	
	Moyenne	0.151	

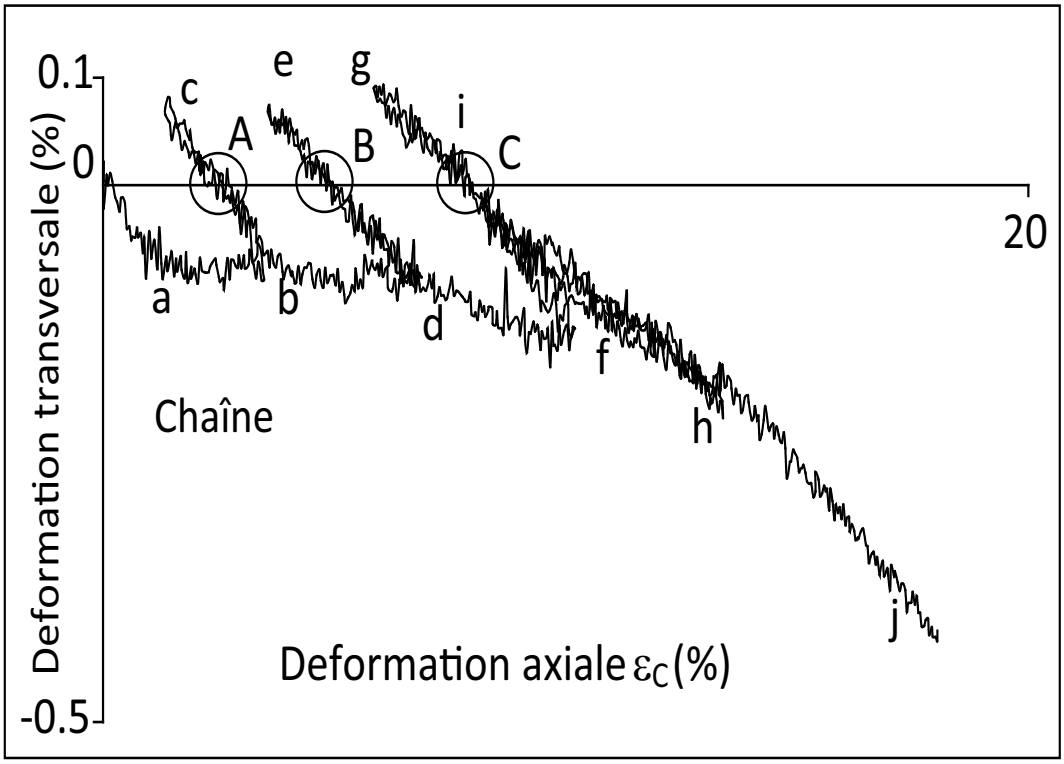


Fig. 5.24 – Déformation transversale au cours de la traction dans le sens chaîne contrôlée en déformation - SFH0C007.

lors des chargements cycliques, sur les tronçons Ac, Be et Cg. Ce phénomène est révélé sur l'essai SFH0C007 contrôlé en déformation, mais il est quasi-inexistant sur l'essai SFH0C008 contrôlé en force. Ce résultat pourrait être expliqué par un mécanisme de réarrangement des fils de trame par rapport aux fils de chaîne, lors de la traction ondulée dans le sens chaîne. Ce phénomène complexe semble intervenir de façon différente lors du contrôle en déformation et lors du contrôle en force. Ceci se manifeste par des valeurs différentes mesures des coefficients de contraction, par exemple, sur les tronçons oa et sur la moyenne des coefficient de contraction dans les cycles (tab. 5.8 et tab. 5.9). Ces différences, observées lors de la traction ondulée dans le sens chaîne, n'ont pas été révélées lors de la traction ondulée dans le sens trame (tab. 5.6 et tab. 5.7).

5.4.2 Traction ondulée en chargement sinusoïdale en petite déformation

Trois essais ont été réalisés en traction ondulée, en chargement sinusoïdale et en petite déformation. La figure 5.28 donne la forme de la fonction sinusoïdale imposée en déformation au cours de ces essais. La paramètre A défini l'amplitude de déformation imposée ; ε_0 et $\varepsilon_1$définissent la déformation initiale et finale et T défini la période de la sinusoïde.

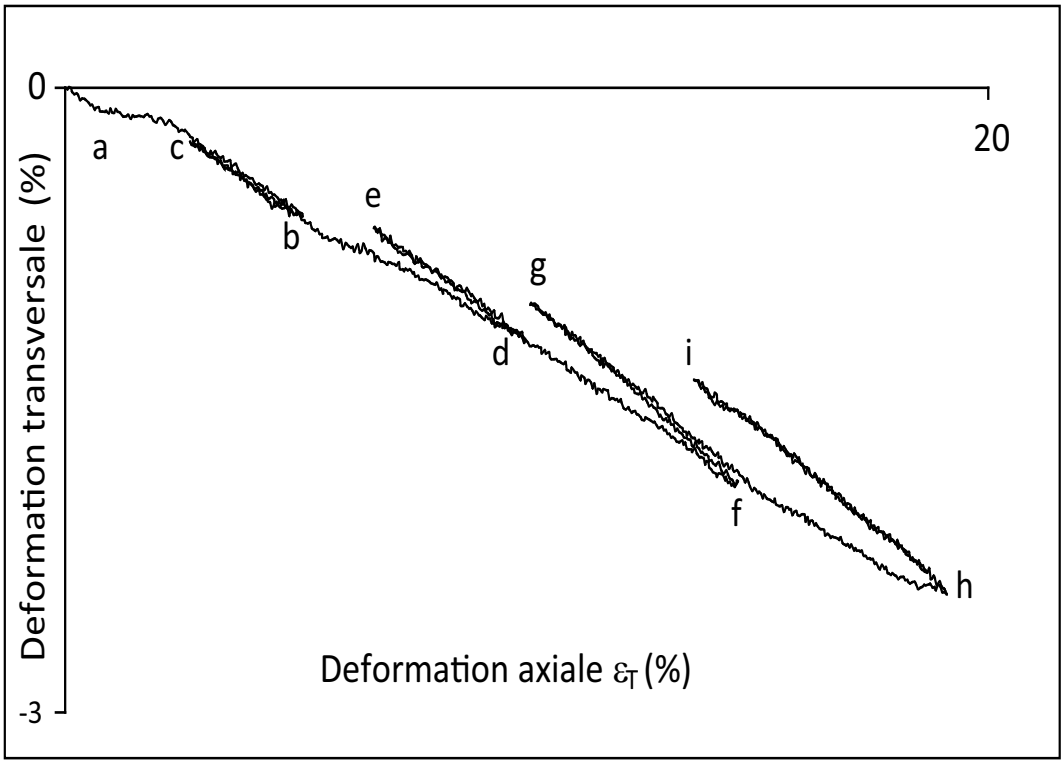


Fig. 5.25 – Déformation transversale au cours de la traction dans le sens trame contrôlée en déformation - SFH0T003.

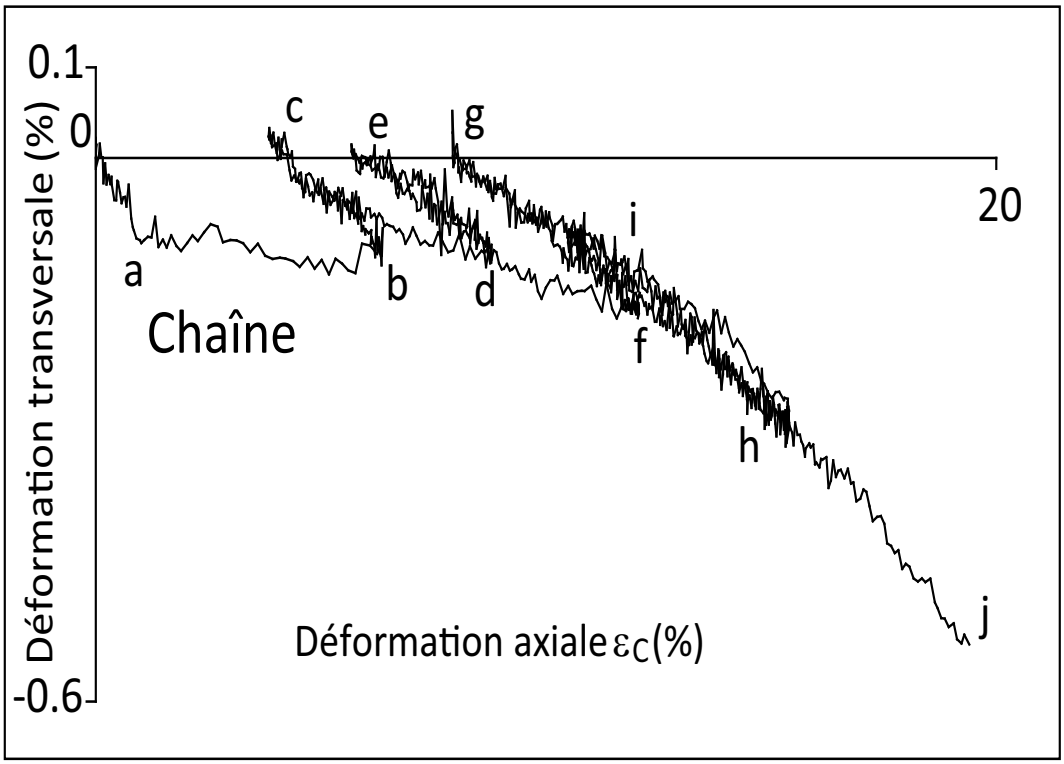


Fig. 5.26 – Déformation transversale au cours de la traction dans le sens chaîne contrôlée en force - SFH0C008.

Le tableau 5.10 donne les numéros des éprouvettes utilisées et définie les paramètres des essais réalisés respectivement dans le sens chaîne, dans le sens trame et dans le sens biais. L'objectif de ces essais est de réaliser des mesures précises des modules élastiques et des coefficients de

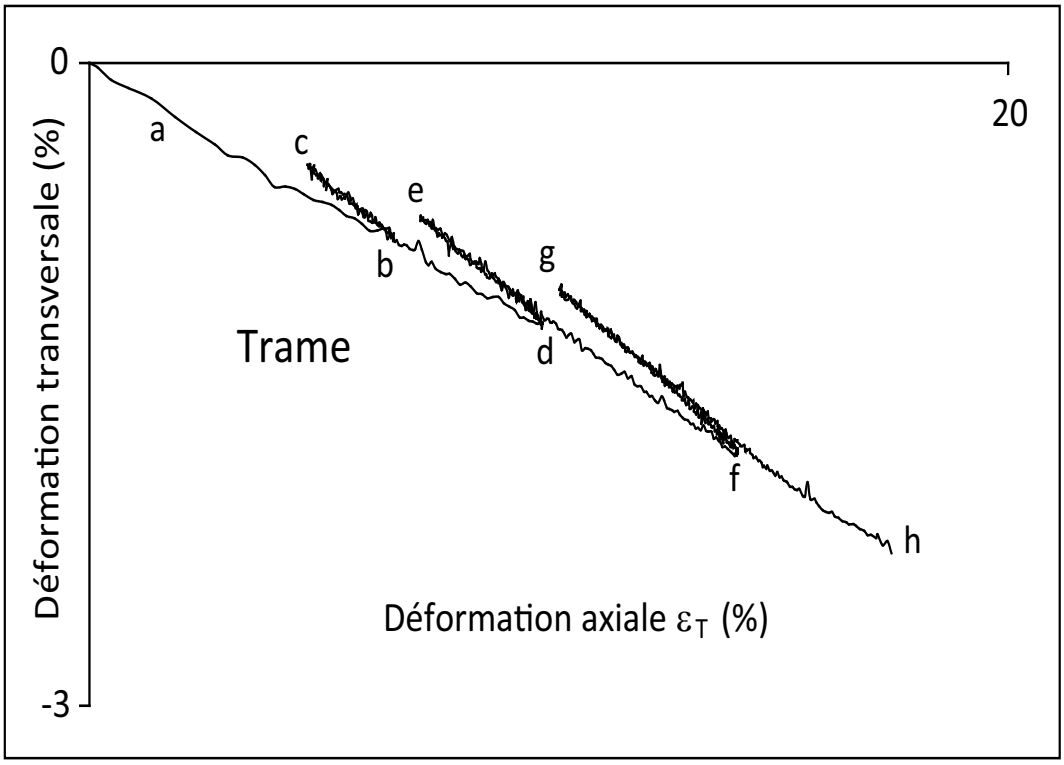


Fig. 5.27 – Déformation transversale au cours de la traction dans le sens trame contrôlée en force - SFH0T004.

Table 5.8: Mesure du coefficient de contraction - Essai SFH0C007 (fig. 5.24).

	Chargement	ν_c	$\pm\Delta\nu_c$
1e charge	oa	0.051	0.001
	af	0.008	
	fj	0.040	
Cycles	bc	0.064	0.001
	de	0.051	
	fg et hi	0.052	
	Moyenne	0.056	

Table 5.9: Mesure du coefficient de contraction - Essai SFH0C008 (fig. 5.26).

	Chargement	ν_c	$\pm\Delta\nu_c$
1e charge	oa	0.076	0.001
	af	0.006	
	fj	0.051	
Cycles	bc	0.042	0.001
	de	0.034	
	fg et hi	0.039	
	Moyenne	0.038	

contraction initiaux en petite déformation.

La figure 5.29 donne la réponse des trois éprouvette à la sollicitation sinusoïdale dans un diagramme contrainte massique-déformation logarithmique. Le tableau 5.11 donne les résultats de mesure des modules élastiques et des coefficients de contraction obtenus.

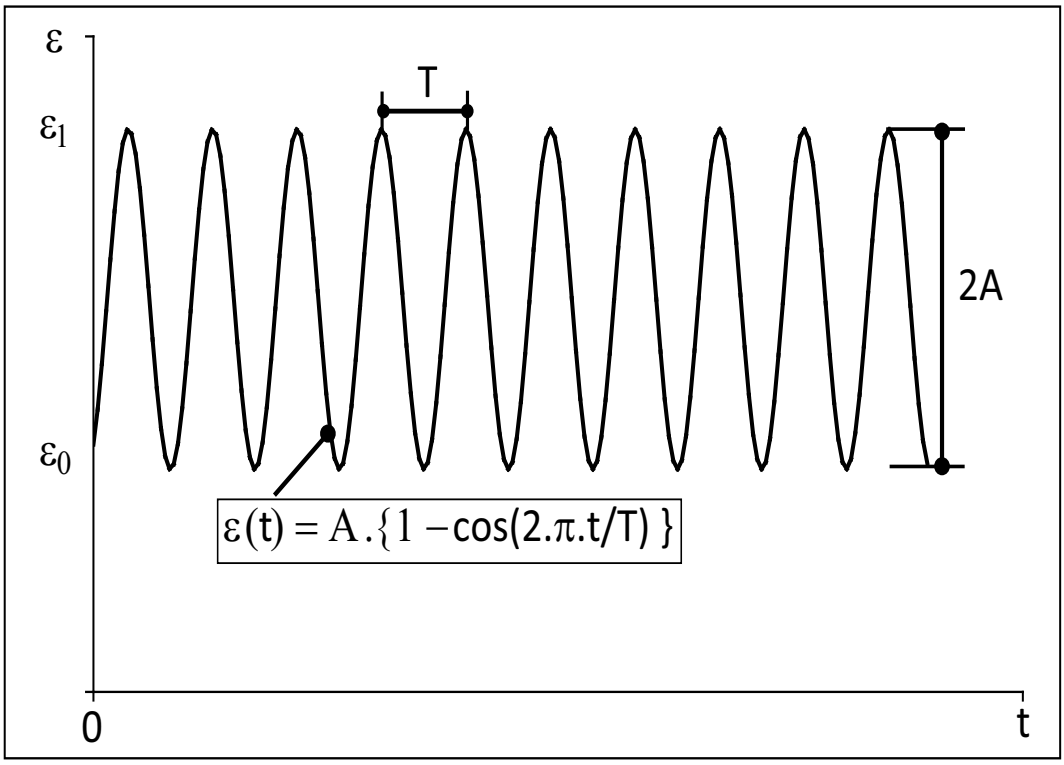


Fig. 5.28 – Sollicitation de traction ondulée en chargement sinusoïdale en petite déformation.

TABLE 5.10: Paramètres de sollicitation correspondant à la figure 5.28.

Sens	N° de l'éprouvette	ε_0 (%)	ε_1 (%)	2A (%)	T (s)	commentaire
chaîne	SFH0C005	0.24	0.60	0.361	20	Longueur de l'éprouvette 360mm
trame	SFH0T001	0.11	0.44	0.334	20	Longueur de l'éprouvette 360mm
$\theta = 45°$	SFH45001a	0.34	0.63	0.285	20	Longueur de l'éprouvette 260mm

TABLE 5.11: Résultats de mesure des modules élastiques et des coefficients de contraction en petite déformation dans le sens chaîne, trame et biais.

	Chaîne SFH0C005	Trame SFH0T001	Biais SFH45001a	Unité
Module élastique	2.610	3.510	1.458	MJ/Kg
Ecart-type sur la pente	0.001			
Coefficient de contraction	0.094	0.206	0.484	-
Ecart-type sur la pente	0.001		0.002	

5.4.3 Résultats de traction ondulée avec reptation des cycles

Trois essais de traction ondulée avec reptation des cycles ont été réalisés dans le sens trame. Le tableau 5.12 décrit les essais réalisés. Les figures 5.30, 5.31 et 5.32 définissent le chargement respectif des essai SFH0T012, SFH0T014 et SFH0T013. Les réponses correspondantes du matériau sont donnés sur les figures 5.33, 5.34 et 5.35. Ces figures montrent une reptation des cycles en déformation pour les essais SFH0T012 (Fig. 5.33) et SFH0T013 (Fig. 5.35), contrôlés en force. pour l'essai SFH0T014 (Fig. 5.34) contrôlé en déformation, on observe une reptation des cycles en contrainte.

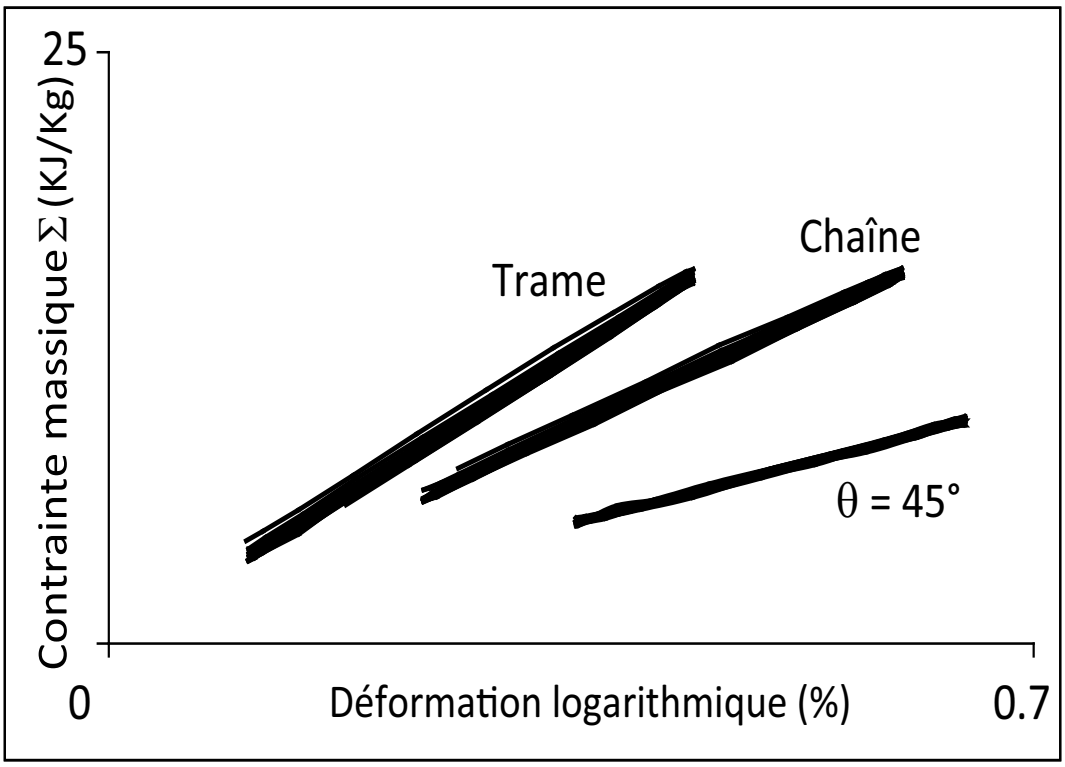


Fig. 5.29 – Resultat de traction ondulée en petite déformation dans le sens chaîne - SFH0C005, dans le sens trame - SFH0T001 et à $\theta = 45^\circ$ - SFH45001a.

Table 5.12: Essai de traction ondulée avec reptation des cycles dans le sens trame.

N° de l'éprouvette	Types d'essai et commentaire
SFH0T012	Essai de traction monotone suivi d'un chargement sinusoïdale d'une fréquence de 0.1 Hz (contrôle en Force)
SFH0T013	Essai de traction d'un chargement sinusoïdale d'une fréquence de 0.3 Hz (contrôle en Force)
SFH0T014	Essai de traction monotone à $\dot{\varepsilon}4.010^{-3}s^{-1}$ suivi d'un chargement sinusoïdale d'une fréquence de 0.1 Hz (contrôle en vitesse de déformation).

5.5 Résultats de traction hors axes

5.5.1 Traction monotones hors axes à différente orientations

Des essais de traction monotones ont été réalisés, dans des directions hors-axes à 5°, 10°, 15°, 30° et 45°. Le Tableau 5.13 donne le numéro de l'éprouvette utilisée et l'orientation de la sollicitation par rapport à la direction chaîne, définie par l'angle θ.

Les résultats des essais monotones de traction hors-axes, contrôlés en vitesse de déformation sont regroupés sur la figure 5.36, dans un diagramme rhéologique contrainte massique-déformation logarithmique. On observe sur ces résultats une augmentation de la rigidité globale du matériau avec la diminution de l'angle θ, qui orientation l'axe de traction par rapport à la direction chaîne. Au cours des quatre premiers essais (SFH05001, SFH10002, SFH15001, SFH30001), une mesure de l'angle δ de rotation des mors a été effectuée. Les figures 5.37 et 5.38 donnent respectivement l'évolution de la force exercée sur l'éprouvette en fonction de l'angle δ

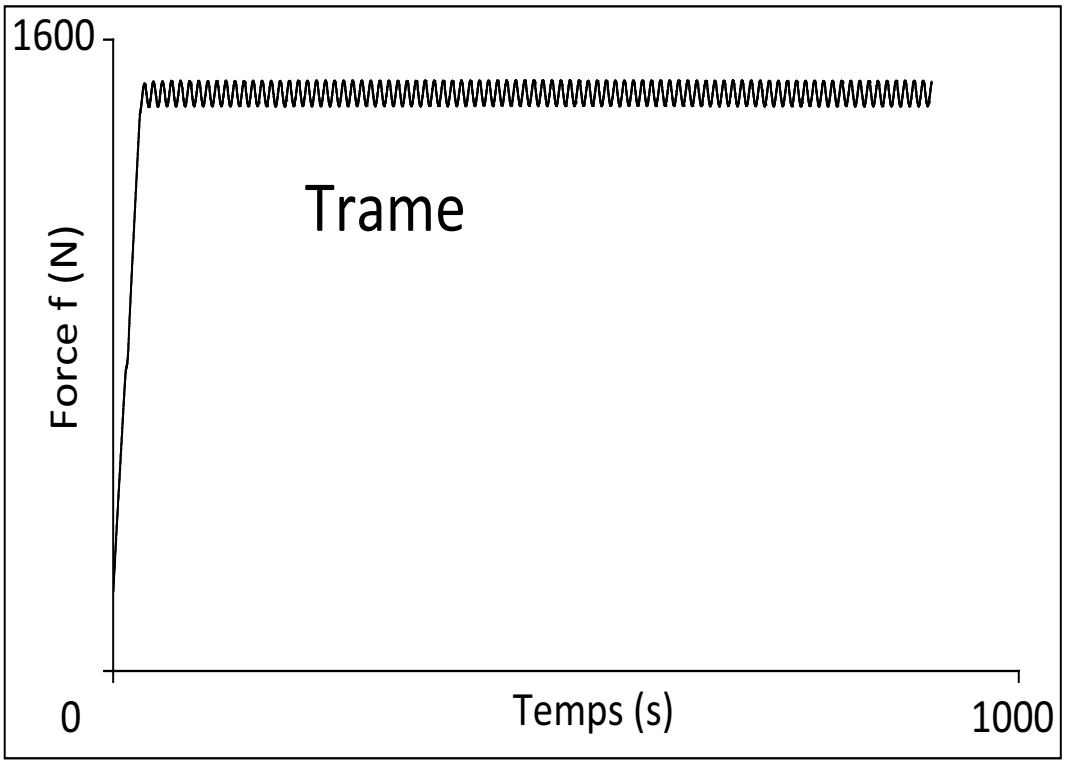


Fig. 5.30 – Programme de chargement dans le sens trame en contrôle en force - SFH0T012.

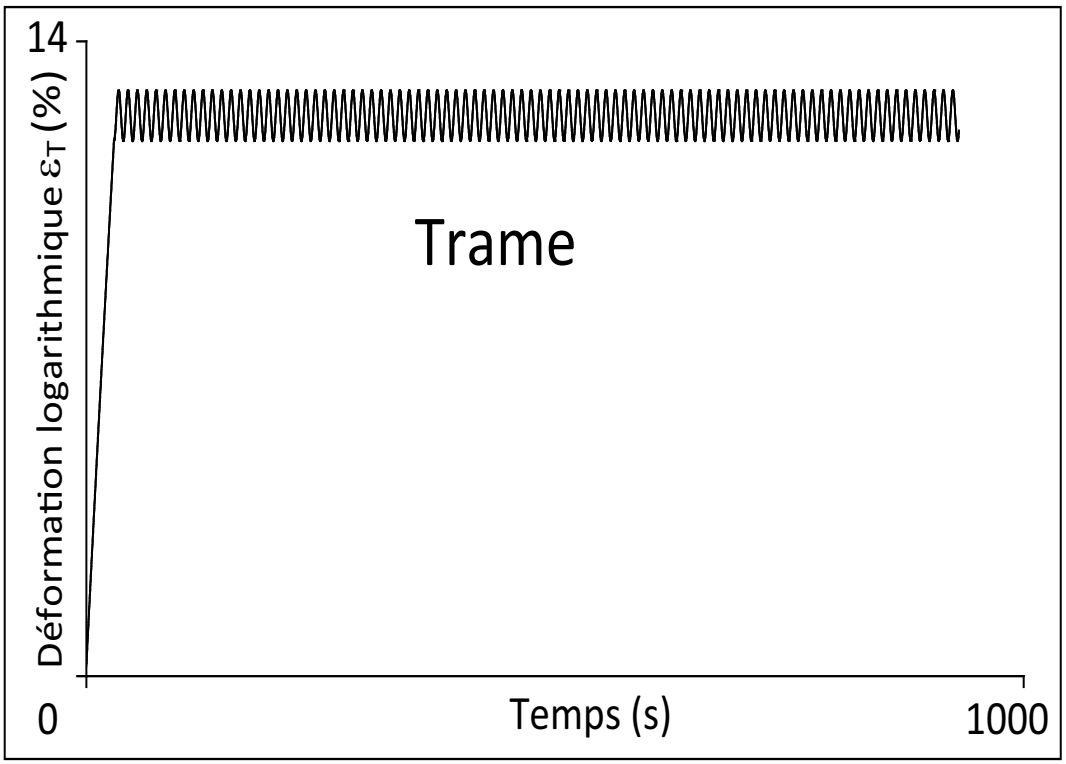


Fig. 5.31 – Programme de chargement dans le sens trame en contrôle en déformation - SFH0T014.

et l'évolution de l'angle en fonction du déplacement. De façon analogue à la figure 5.36, la figure 5.37 montre que pour un effort de traction donnée, l'angle δ de rotation des mors augmente avec l'augmentation de l'angle θ.

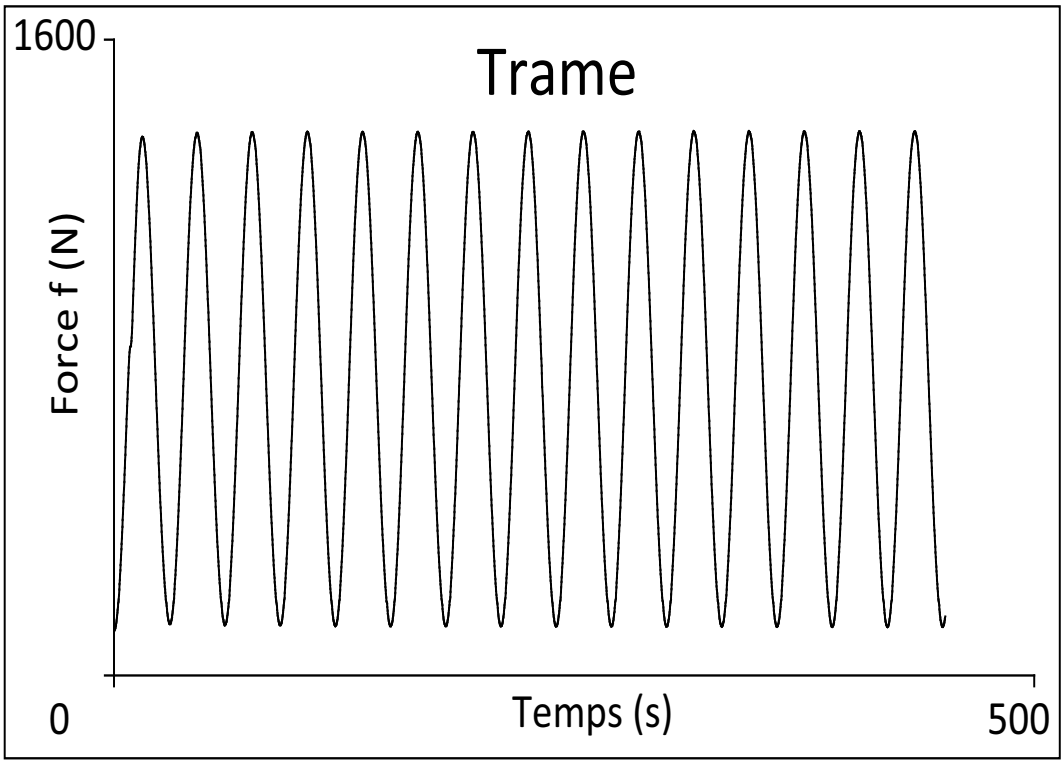


Fig. 5.32 – Programme de chargement dans le sens trame en contrôle en force - SFH0T013.

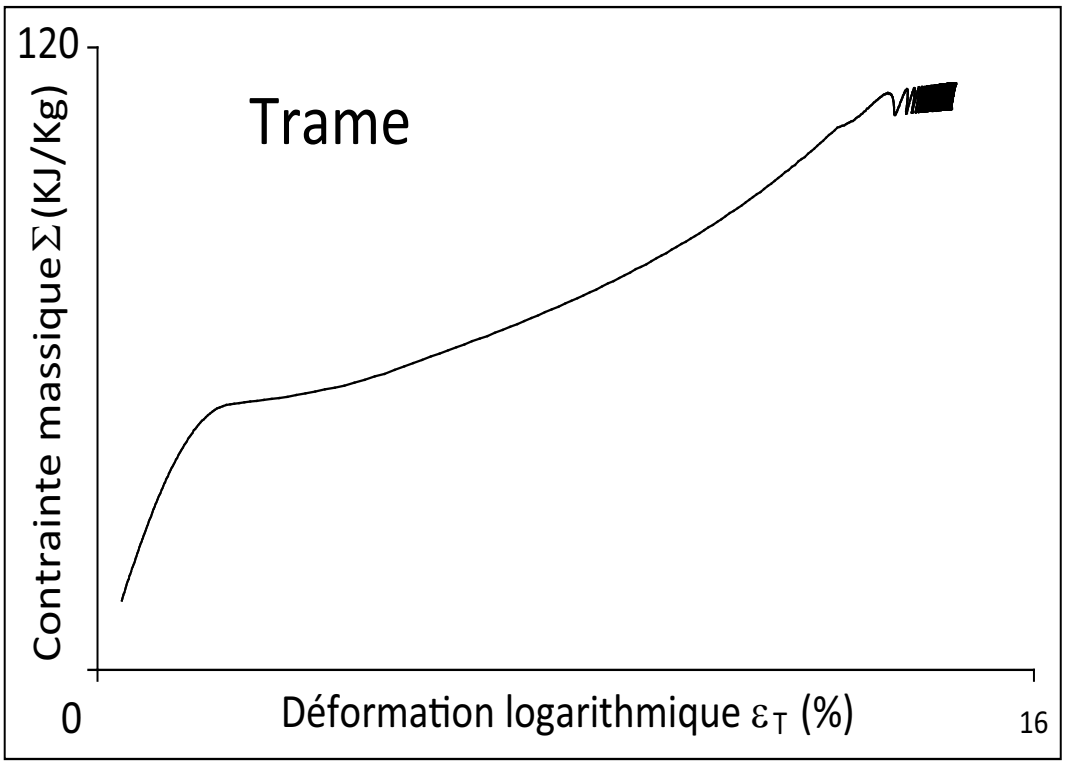


Fig. 5.33 – Résultats de traction ondulée dans le sens trame en contrôle en force - SFH0T012.

Pour l'essai de traction monotone à $\theta = 45^{\circ}$ (SFH45001b), la rotation des mors est nulle et nous n'avons observé aucune rotation au niveau de la partie utile de l'éprouvette. La figure 5.39 donne des image successives de l'éprouvette au cours de l'essai. nous avons tracé sur cette éprouvette deux cercles concentrique. Au cours de l'essai on observe que les cercles se transforment

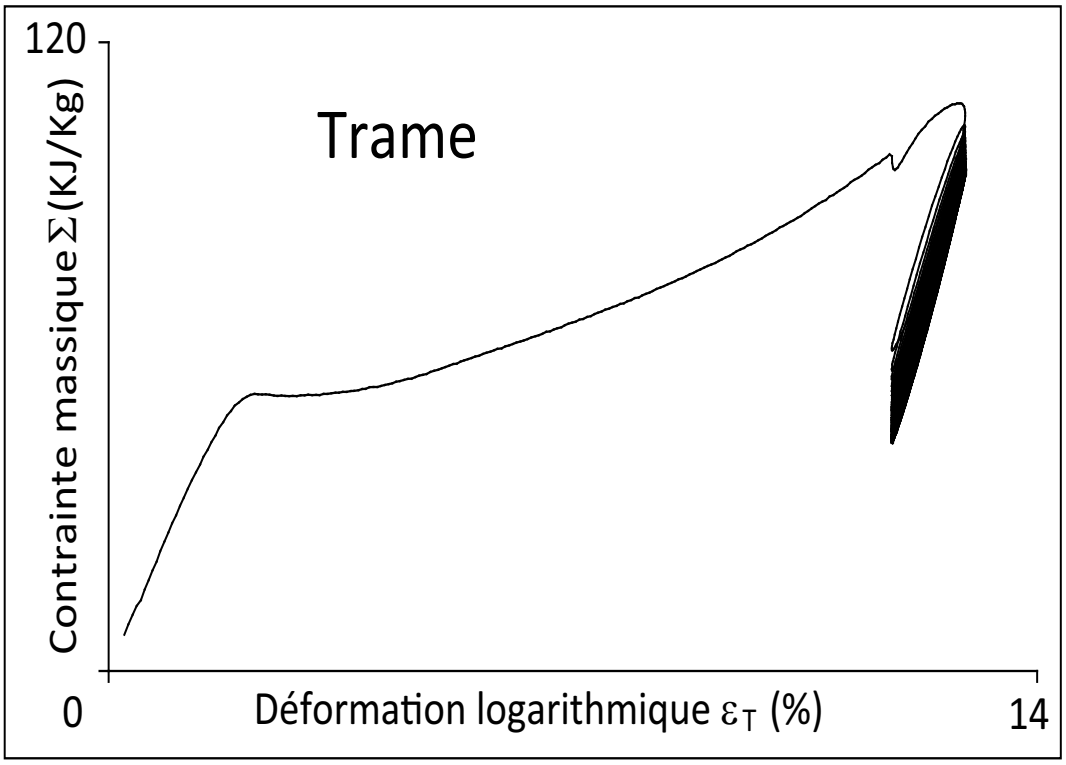


Fig. 5.34 – Résultats de traction ondulée dans le sens trame en contrôle en déformation - SFH0T014.

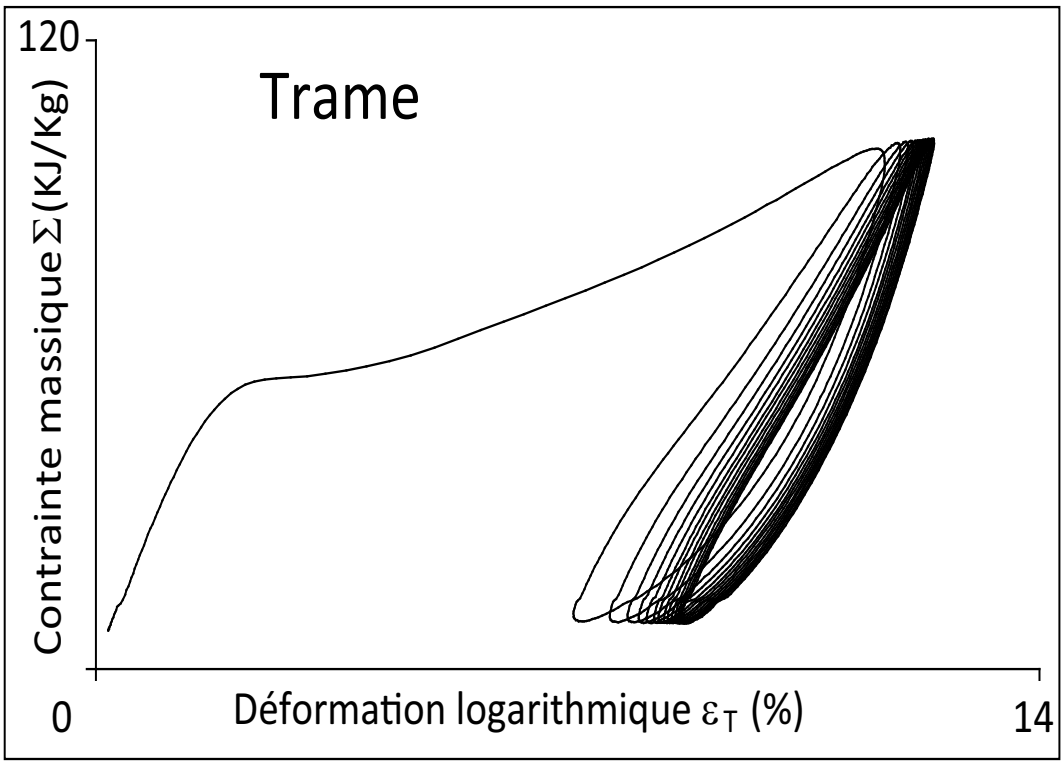


Fig. 5.35 – Résultats de traction ondulée dans le sens trame en contrôle en force - SFH0T013.

peu à peu en élipses, mais on n'enregistre aucune rotation des axes principaux de ces élipses, qui restent confondus avec les axes de la sollicitation. Par ailleurs, nous avons réalisé sur l'éprouvette SFH45001 un marquage de cibles au long des fils de chaîne et des fils de trame (cibles A, B, C et D Fig. 5.40). Ces cibles nous ont permis de mesurer l'évolution de l'angle α entre les fils de

Table 5.13: Essai de traction monotone en hors axes.

N° de l'éprouvette	θ (°)	Vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$	Types d'essai et commentaire
SFH05001	5	$8.10^{-4}\ s^{-1}$	Essai de traction monotone contrôlés en déformation
SFH10002	10		
SFH15001	15		
SFH30001	30		
SFH45001b	45	$10^{-3}\ s^{-1}$	Essai de traction monotone contrôlés en déformation. Cette éprouvette a été réutilisée après l'essai en petite déformation SFH45001a (Fig. 5.29).

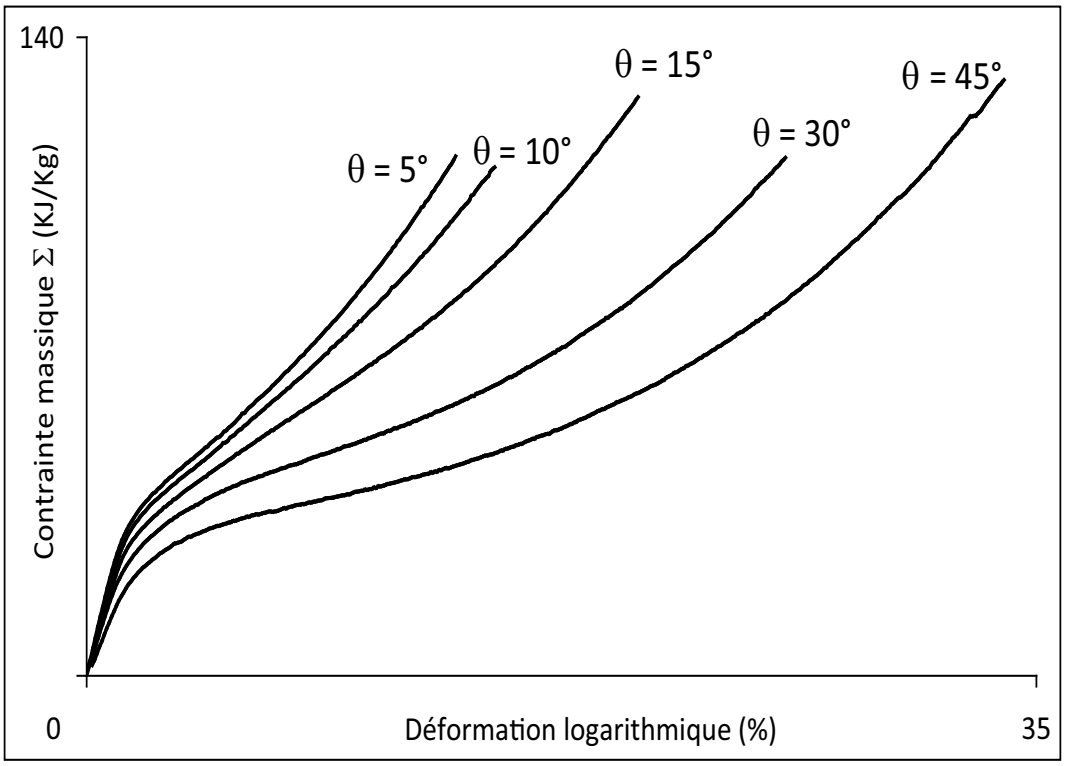


Fig. 5.36 – Résultats de tractions monotones hors-axes à vitesse de déformation imposeé (SFH05001, SFH10002, SFH15001, SFH30001 et SFH45001b).

chaîne et les fils de trame (relation 3.7 Chapitre 3) et la déformation de distorsion ε_γ (relation 3.9 Chapitre 3). Les évolutions de l'angle α et de ε_γ au cours de l'essai, sont données respectivement par les figures 5.41 et 5.42. La figure 5.43 présente l'effet de contraction observé au cours de l'essai SFH45001b, dans un diagramme déformation axiale-déformation transversale.

5.5.2 Traction ondulée avec des séquences de relaxation

Nous avons réalisé un essai de traction ondulé avec une orientation $\theta = 10^\circ$, contrôlé en déformation avec une vitesse de déformation imposée $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}\ s^{-1}$ SFH10001. Le programme de chargement de l'essai est donné sur la figure 5.44 dans un diagramme déformation logarithmique en fonction de temps. L'essai comporte 4 séquences de relaxation : deux relaxations ab et ij dans la première charge et deux relaxations de et gh dans la première boucle. La durée de chaque période de relaxation a été fixée à 900s. Le résultat de cet essai est donné sur la figure 5.45, dans un diagramme rhéologique contrainte massique-déformation logarithmique. La figure 5.46 donne l'évolution de la contrainte en fonction du temps lors des séquences de relaxations. Au cours de cet essai nous n'avons pas la possibilité de réalisé une mesure de la rotation δ des mors.

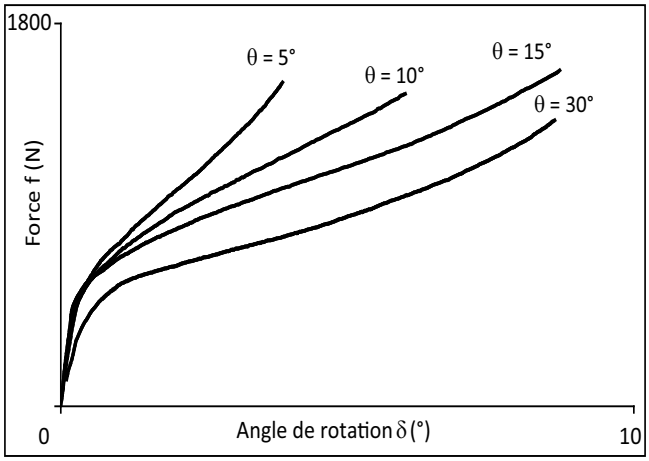


Fig. 5.37 – Résultats de tractions monotones hors-axes (SFH05001, SFH10002, SFH15001, SFH30001), dans le diagramme force en fonction de l'angle δ de rotation des mors.

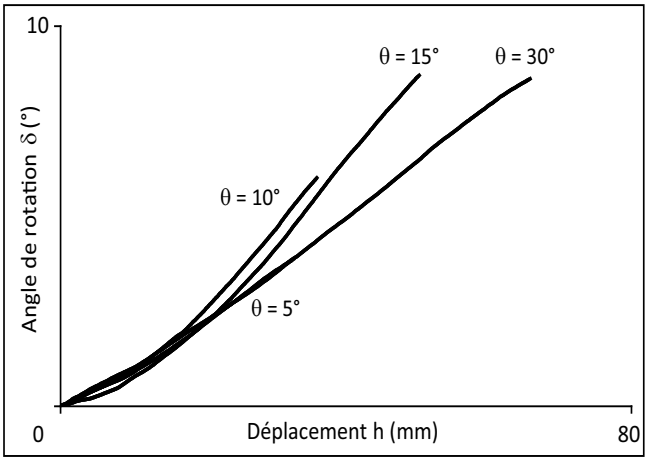


Fig. 5.38 – Résultats de tractions monotones hors-axes (SFH05001, SFH10002, SFH15001, SFH30001), dans le diagramme angle δ de rotation des mors en fonction du déplacement.

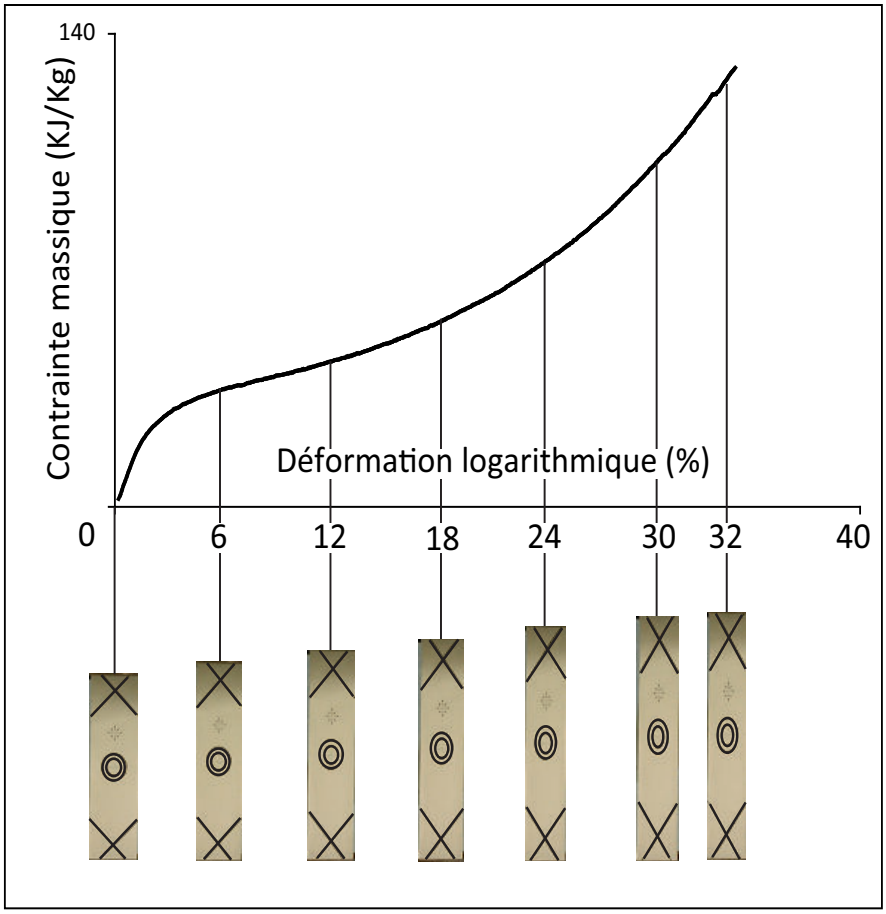


Fig. 5.39 – Résultats de traction monotone (SFH45001b) avec une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}\ s^{-1}$ à $\theta = 45^{\circ}$ avec des image de l'éprouvette tous les 6% de déformation.

Afin de caractériser la rotation de l'éprouvette nous avons utilisé le système de suivi de cibles pour mesurer la rotation d'une ligne ab parallèle au mors et située à $100mm$ (fig. 5.47). L'angle de l'orientation de la ligne ab par rapport à l'horizontale est noté δ' et sont évolution au cours de l'essai est donnée sur la figure 5.48. Au cours des séquences de relaxation, nous notons que l'angle δ' est quasiment constant. La figure 5.49 présente l'effet de contraction observé au cours

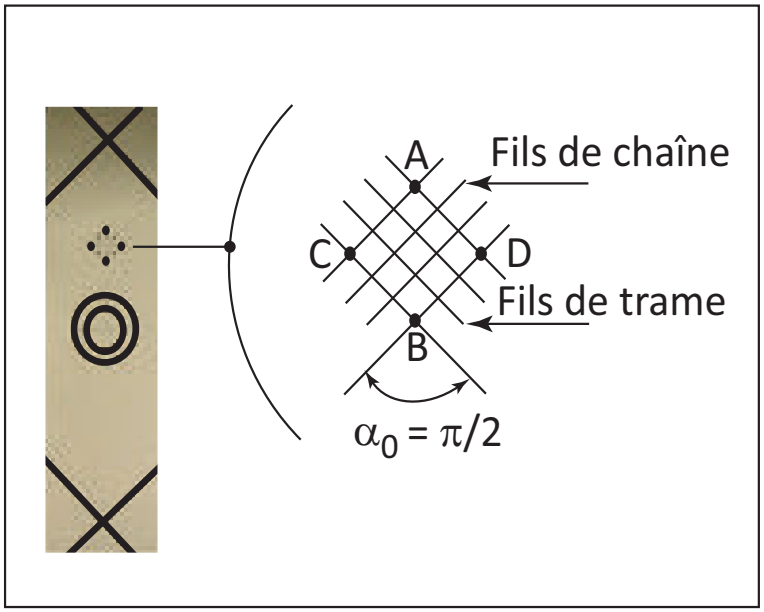


Fig. 5.40 – Marquage de l'éprouvette pour la mesure de l'angle α entre les fils de chaîne et les fils de trame - SFH45001b.

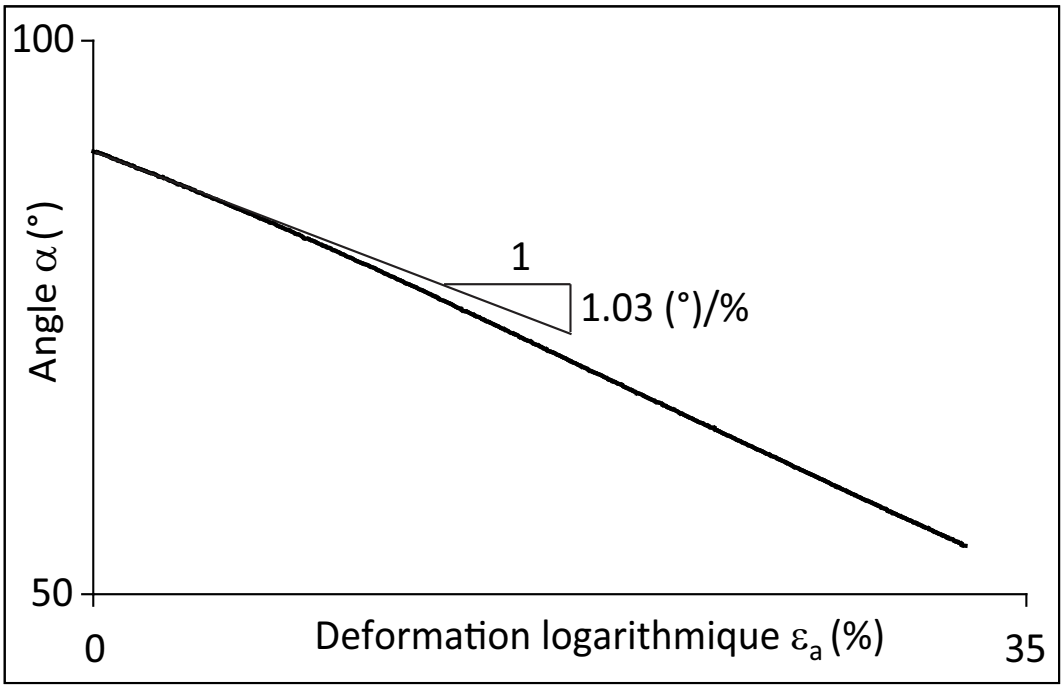


Fig. 5.41 – Evolution de l'angle α entre les fils de chaîne est les fils de trame au cours de la traction monotone dans le sens biais et une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}\ s^{-1}$ - SFH45001b.

de l'essai SFH10001, dans un diagramme déformation axiale-déformation transversale.

5.5.3 Traction ondulée sinusoïdale

Un essai de traction ondulée sinusoïdale à amplitude variable a été réalisé dans le sens biais (essai SFH45002). Le programme de chargement est donnée sur la figure 5.50. Cet essai est contrôle en force à une fréquence de 0.3Hz. L'amplitude du chargement est variable linéairement en fonction du temps. Le résultat de cet essai est donné par la figure 5.51. La figure 5.52 donne

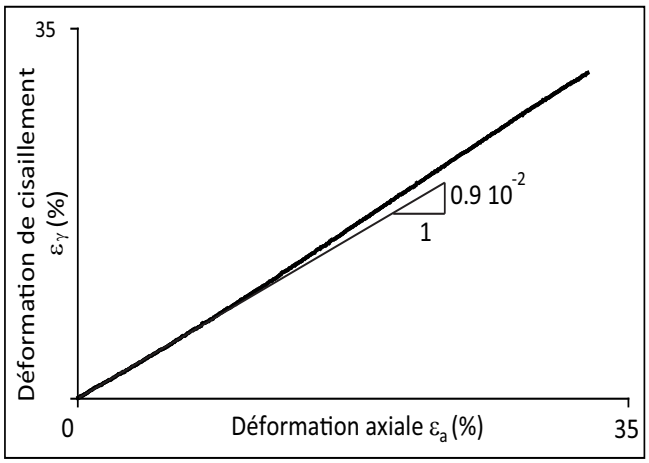


Fig. 5.42 – Evolution de ε_γ au cours de la traction monotone dans le sens biais et une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}\ s^{-1}$ - SFH45001b.

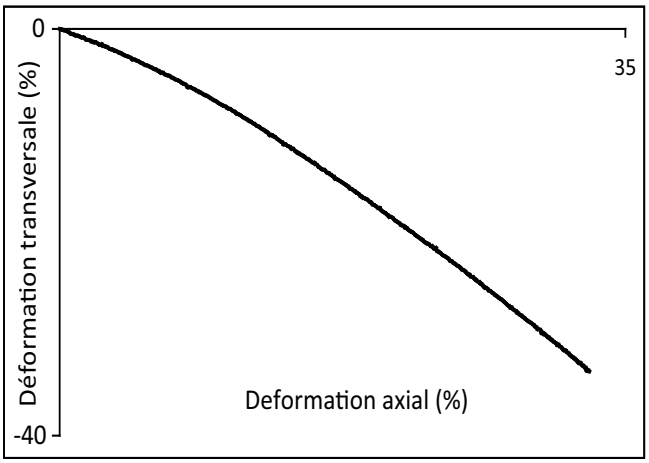


Fig. 5.43 – Effet de contraction lors d'une traction monotone à $\theta = 45^\circ$ et une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}\ s^{-1}$ - SFH45001b.

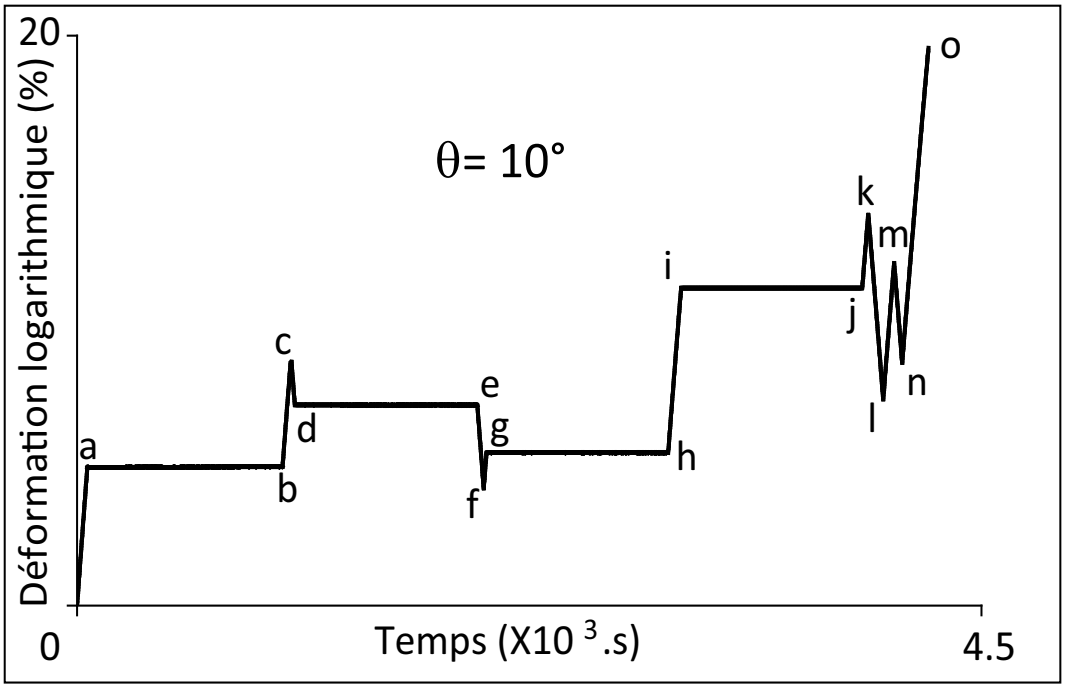


Fig. 5.44 – Déformation logarithmique imposée en fonction de temps - SFH10001.

l'évolution de l'angle δ en fonction du déplacement au cours de l'essai et la figure 5.53 donne l'evolution de force exercée sur l'éprouvette en fonction de l'angle δ. Notons, que la mesure de l'angle δ se limite à cinq cycles uniquement, ceci est dû à la sortie de l'une des deux cibles du champ de mesure de la caméra CCD.

Notons que la valeur atteinte par l'angle δ au cinquième cycle est de l'ordre de 4°. Cette mesure semble être en contradiction avec celle de l'essai de traction monotone dans la direction biais SFH45001b (fig. 5.39), pour lequel aucune variation de l'angle n'a pu être détectée.

5.6 Analyse des Résultats

Dans un diagramme contrainte massique-déformation logarithmique les résultats de mesure, en traction simple, montrent un comportement caractéristique, défini par trois zones, que nous

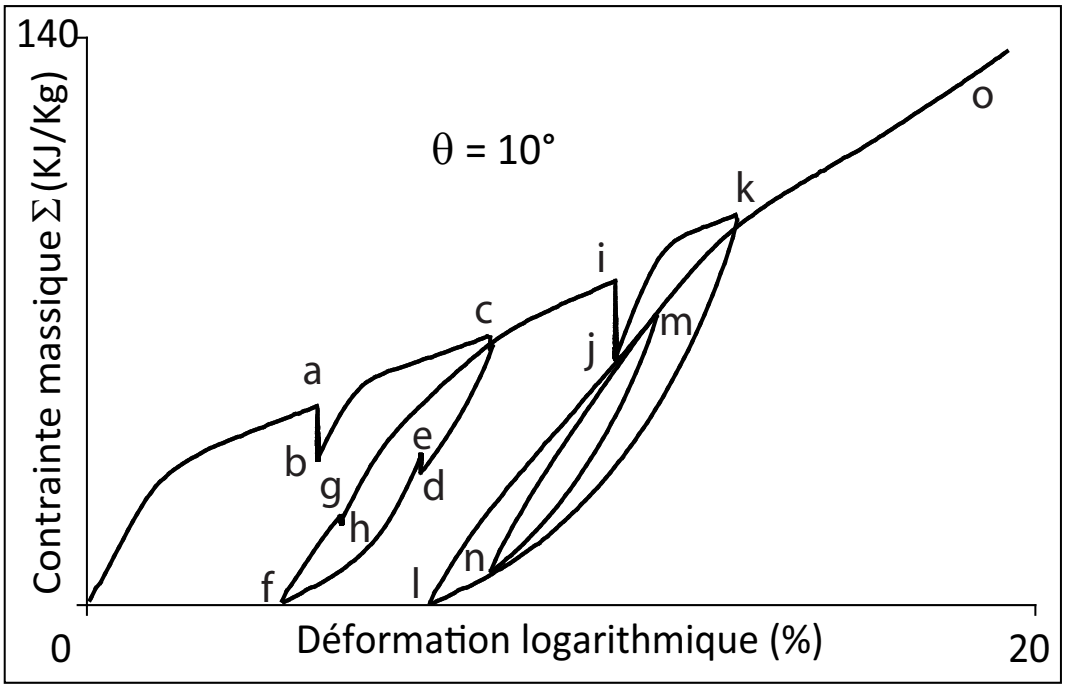


Fig. 5.45 – Résultat de traction ondulée avec des séquences de relaxation - SFH10001.

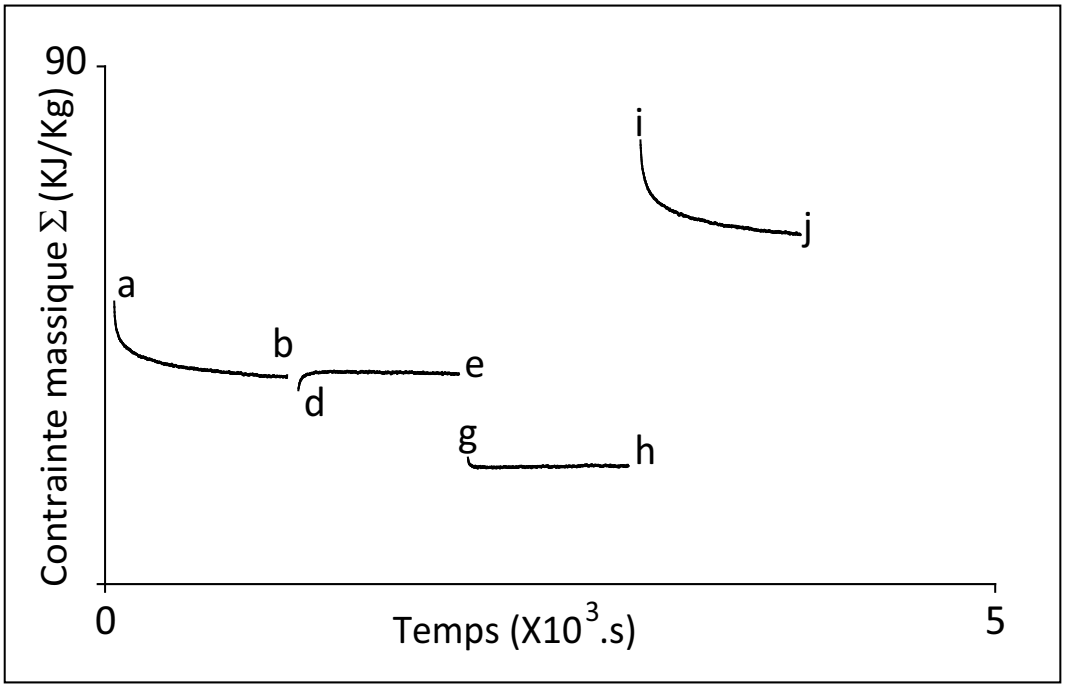


Fig. 5.46 – Evolution de la contrainte massique en fonction du temps au cours des relaxations - SFH10001.

notons respectivement zone α zone β et zone γ. Afin de résumé les résultats de mesures obtenus et de les comparer, nous adoptons un modèle de comportement simplifié caractérisé par trois modules E^{α}, E^{β} et E^{γ}. Cette démarche est illustrée par la figure 5.54, dans le cas des résultats de tractions monotones à différentes vitesse de déformation, dans le sens chaîne, présentés précédemment sur la figure 5.3. Chaque essai est décomposé en trois zone α, β et γ définies par des intervalles de déformation et caractérisées par les déformation ε_C^{α} et ε_C^{β}. Sur chacune des zones et sur chaque essai une régression linéaire et réalisée pour obtenir le module correspondant. Les modules E_C^{β} et E_C^{γ} reporté sur la figure 5.54 correspondant à la moyenne des modules obtenus

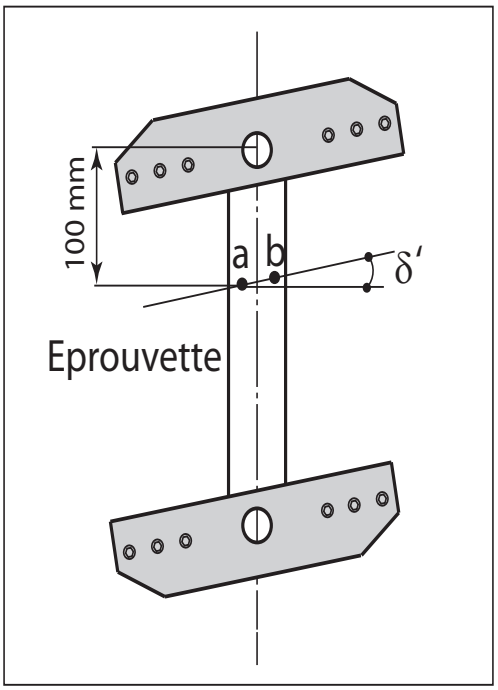


Fig. 5.47 – Marquage de l'éprouvette SFH10001 pour la mesure de la rotation.

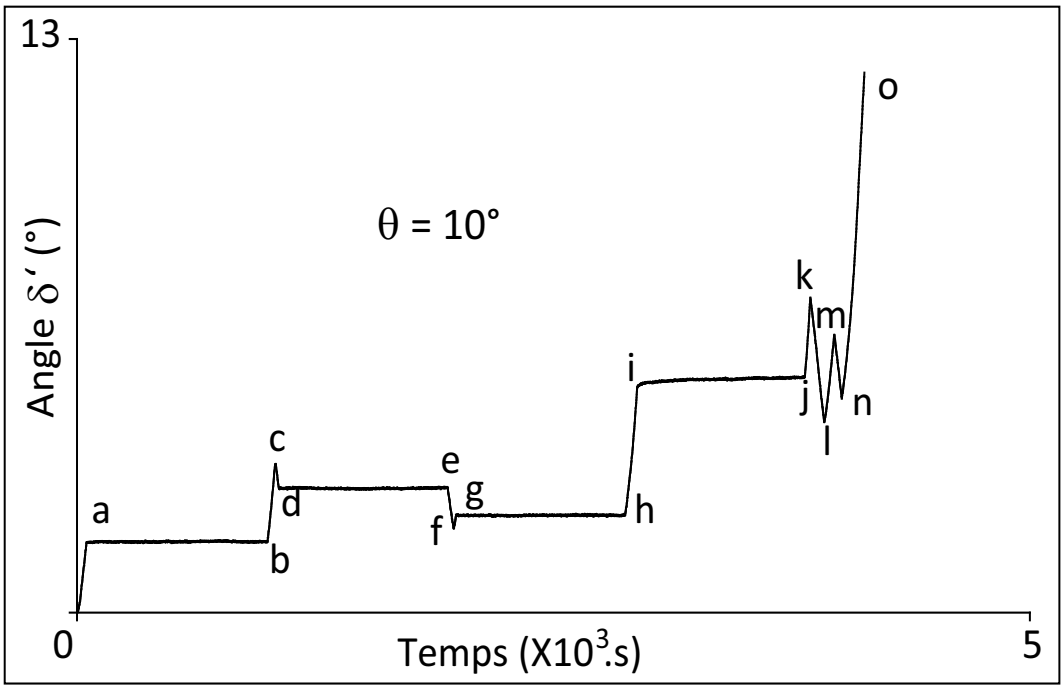


Fig. 5.48 – Evolution de l'angle δ' au cours de l'essai - SFH10001.

pour chaque essai, dans les zones β et γ. Concernant le module E_C^α, reportés sur la figure 5.54, sa valeur est celle mesurée en petite déformation (Essai SFH0C005, fig. 5.29 et tab. 5.11).

De la même façon, la figure 5.55, illustre la démarche proposé, dans le cas des résultats de traction monotones à différentes vitesse de déformation, dans le sens trame, présentés précédemment sur la figure 5.4. Dans le sens biais, en traction monotone, le résultat de l'essai SFH45001b (fig. 5.39) et la mesure du module E_{45}^α en petite déformation (essai SFH45001a, fig 5.29 et tab. 5.11), permettent de caractériser les trois zones de comportement (fig. 5.56). La figure 5.57 donne

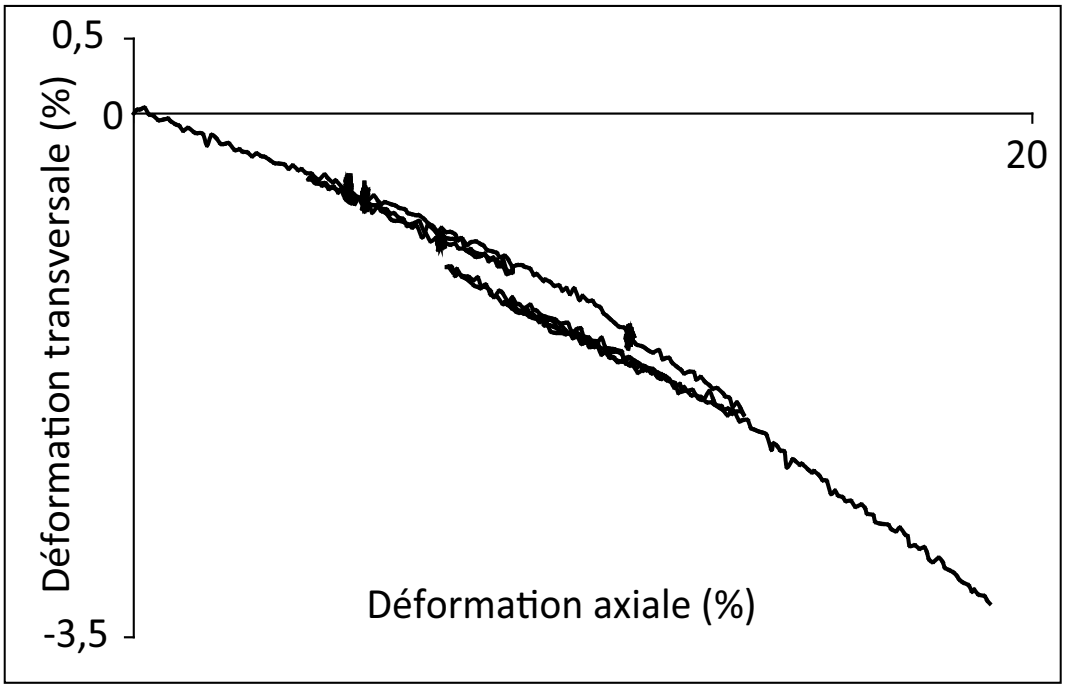


Fig. 5.49 – Effet de contraction lors d'une traction ondulée avec des séquences de relaxation à $\theta = 10^{\circ}$ et une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = 10^{-3}\ s^{-1}$ - SFH10001.

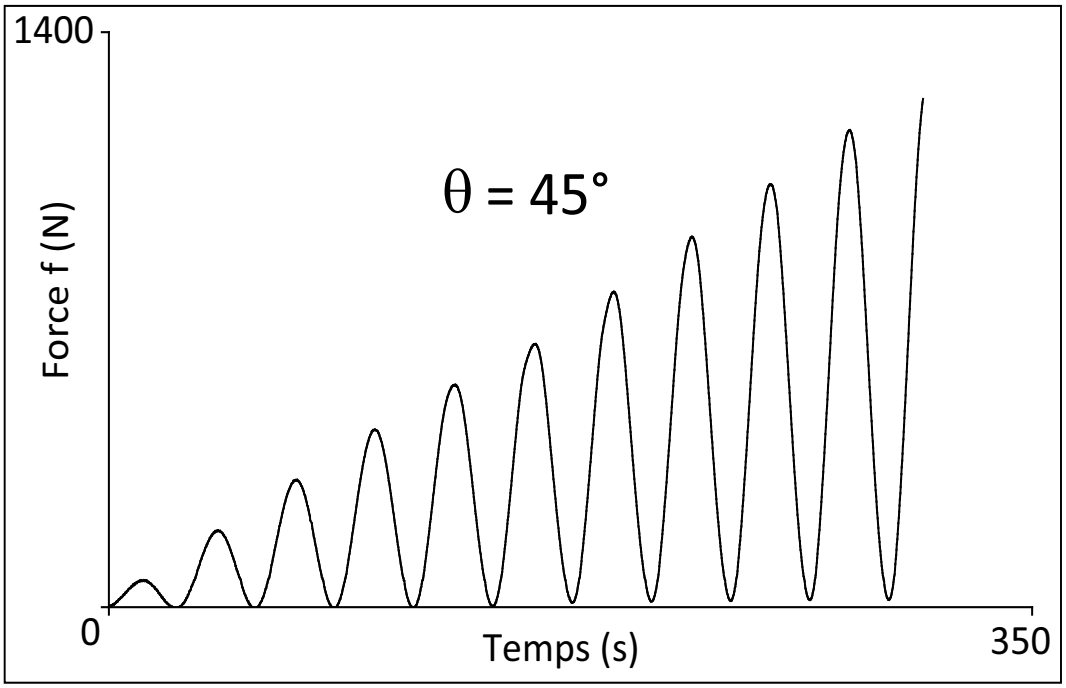


Fig. 5.50 – Programme de chargement dans le sens biaise contrôle en force - SFH45002

la comparaison des modules dans les trois zones α, β et γ dans le sens chaîne, dans le sens trame et dans le sens biais.

Dans un diagramme déformation transversale-déformation axiale les résultats de mesure, en traction ondulée, montrent également un comportement caractéristique, défini par trois zones, α, β et γ. De la même façon que pour les modules, nous adoptons un modèle de comportement simplifié caractérisé par trois coefficients de contraction ν^{α}, ν^{β} et ν^{γ}. Cette démarche est illustrée par la figure 5.58 dans le cas du résultat de l'essai SFH0C008, dans le sens chaîne, présentés

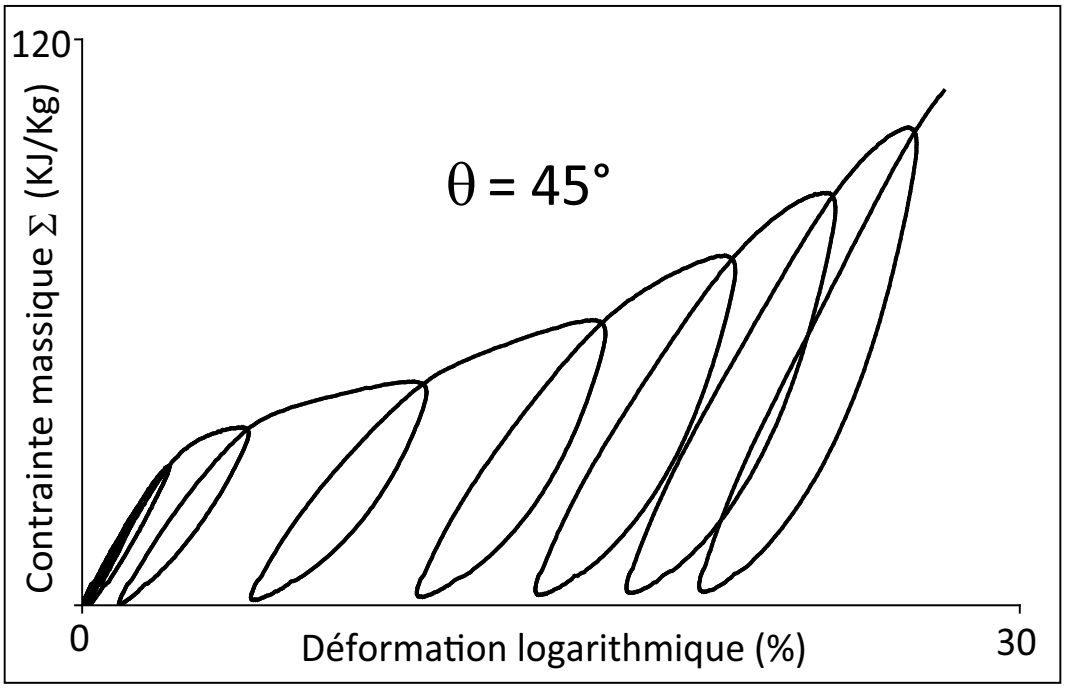


Fig. 5.51 – Résultats de traction ondulée sinusoïdale dans le sens biais - SFH45002

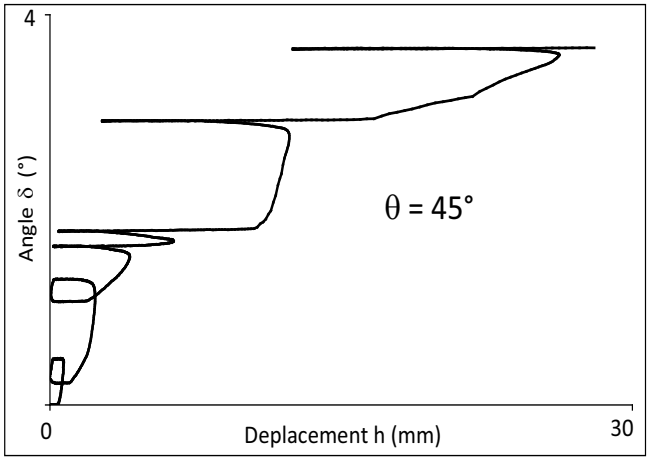


Fig. 5.52 – Evolution de l'angle δ au cours de l'essai - SFH45002.

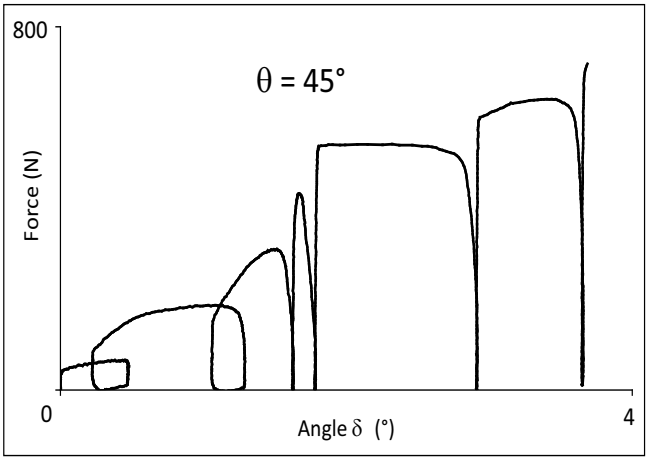


Fig. 5.53 – Résultats de traction monotones à $\theta = 45^{\circ}$, dans le diagramme force en fonction de l'angle δ de rotation des mors - SFH45002.

précédemment sur la figure 5.26. L'essai est décomposé en trois zone α, β et γ définies par des intervalles de déformation, caractérisés par les déformations ε_C^{α} et ε_C^{β}. Sur chacune des zone une régression linéaire et réalisée pour obtenir le coefficient de contraction correspondant. Les coefficients de contraction ν_C^{β} et ν_C^{γ} reporté sur la figure 5.58 correspondent à une moyenne des coefficients de contraction obtenus pour les essai SFH0C007 et SFH0C008, dans les zones β et γ. Concernant le module ν_C^{α}, reportés sur la figure 5.58, sa valeur est celle mesurée en petite déformation (Essai SFH0C005, fig. 5.29 et tab. 5.11). De la même façon, la figure 5.59, illustre la démarche proposé, dans le cas des résultats de traction ondulée, dans le sens trame, présentés précédemment sur la figure 5.27. Notons que, dans le sens trame, l'évolution de la déformation transversale en fonction de la déformation axiale ne présente pas de distinction entre les zones β et γ, qui sont confondus en seule zone β. Dans le sens biais, en traction monotone, le résultat de l'essai SFH45001b (fig. 5.43) et la mesure du coefficient de contraction ν_{45}^{α} en petite déformation (essai SFH45001a, fig 5.29 et tab. 5.11), permettent de caractériser les trois zones de comportement (fig. 5.60). La figure 5.61 donne la comparaison des coefficients de contraction

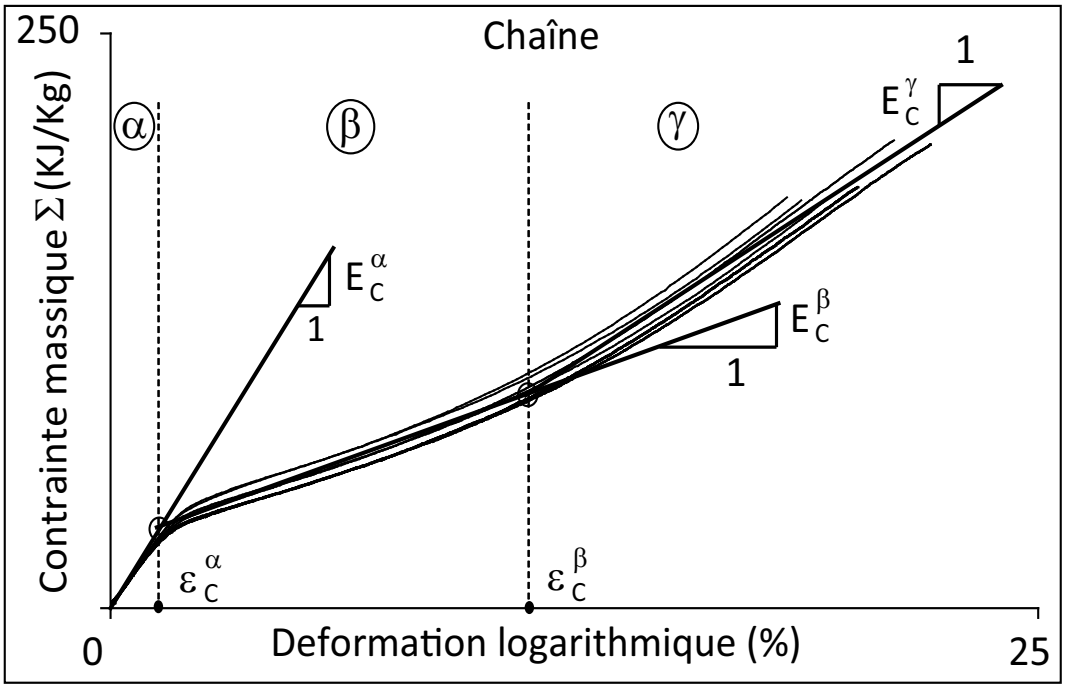


Fig. 5.54 – Traction monotones à différents vitesse de déformation dans le sens chaîne.

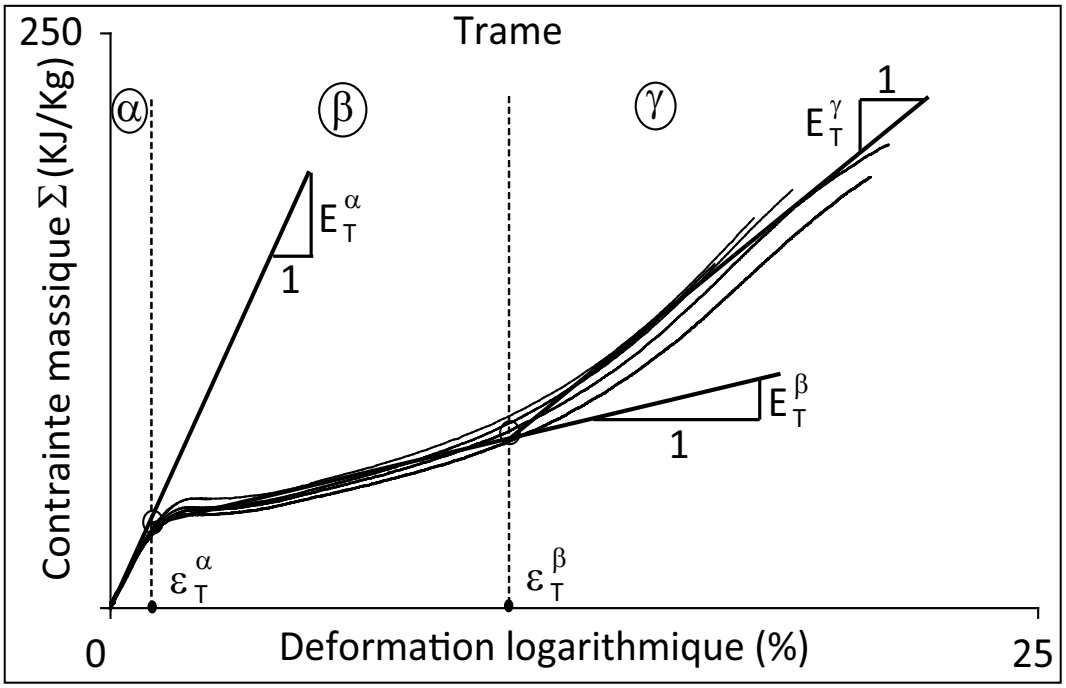


Fig. 5.55 – Traction monotones à différents vitesse de déformation dans le sens trame.

dans les trois zones α, β et γ dans le sens chaîne, dans le sens trame et dans le sens biais. Pour permettre la comparaison des coefficients de contractions dans les sens chaîne et trame, la figure 5.62 donne un agrandissement de la figure 5.61, pour une déformation transversale maximale de -2.5%. Les tableaux 5.14, 5.15 et 5.16 donnent les valeurs des modules, des coefficients de contraction et des déformations dans les trois zones, selon le sens chaîne, le sens trame et le sens biais.

Dans le cas des résultats d'essais réalisés avec des boucles de décharge-charge, nous avons

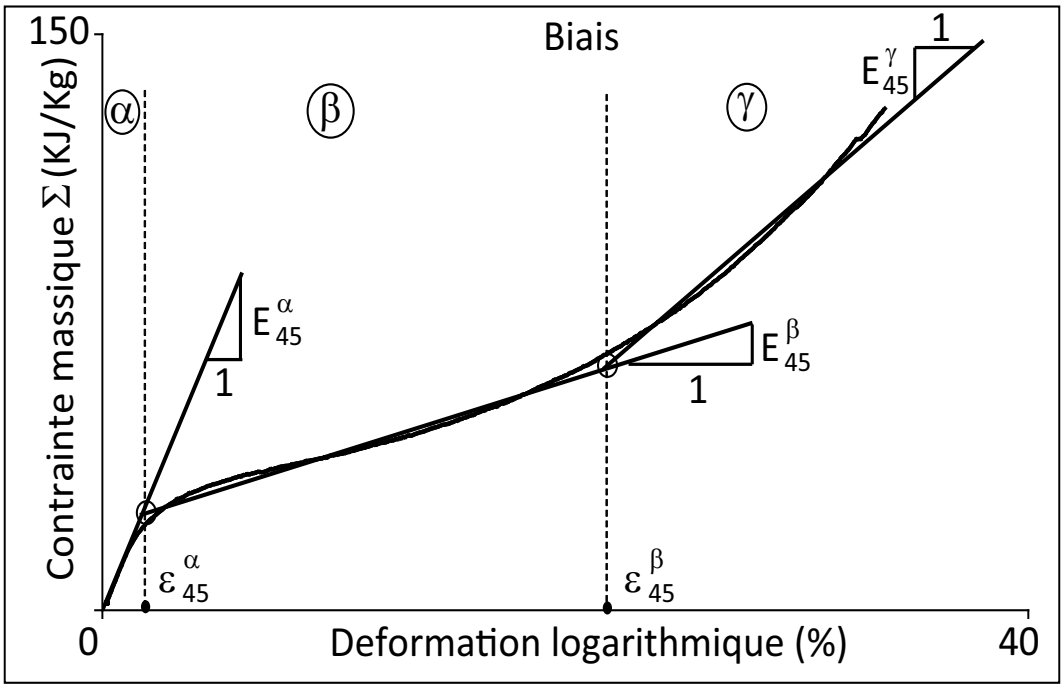


Fig. 5.56 – Traction monotones dans le sens biais - SFH45001b.

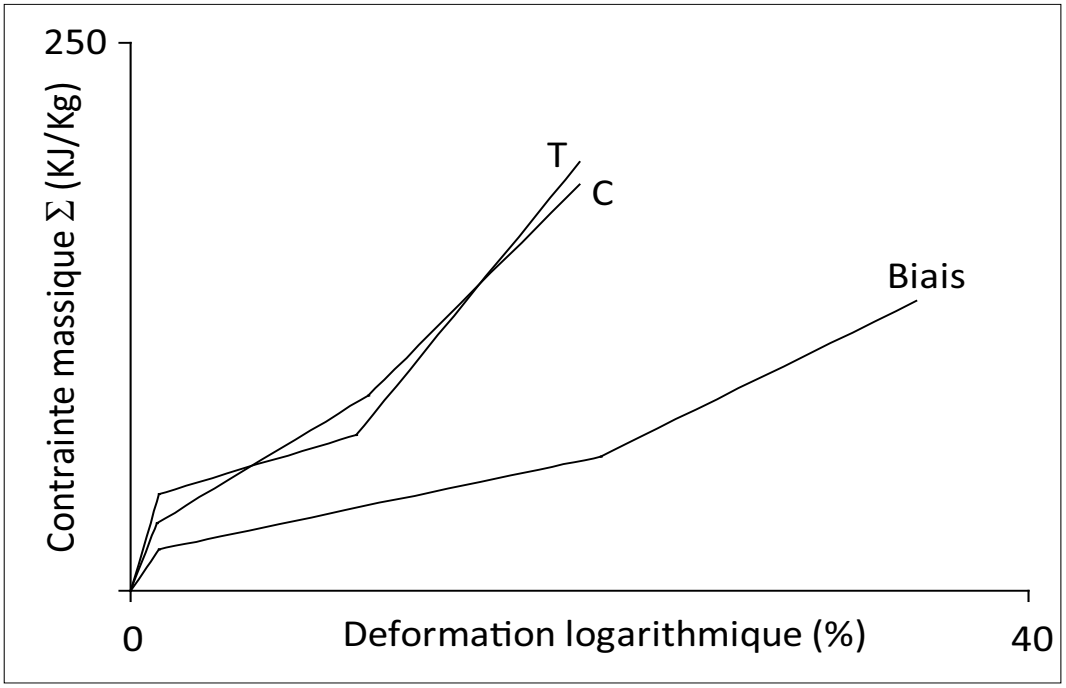


Fig. 5.57 – Comparaison des modules des essais de traction monotones dans les trois zones α, β et γ dans le sens chaîne, dans le sens trame et dans le sens biais.

TABLE 5.14: Résultats de mesure des modules élastiques, des coefficients de contraction et des déformation limites des zones α et β dans le sens chaîne.

Zone α			Zone β			Zone γ	
E_C^{α}	ν_C^{α}	ε_C^{α}	E_C^{β}	ν_C^{β}	ε_C^{β}	E_C^{γ}	ν_C^{γ}
MJ/Kg	-	(%)	MJ/Kg	-	(%)	MJ/Kg	-
2.610	0.094	1.185	0.587	0.007	10.600	1.054	0.045

réalisé des mesures qualitatives des rigidités dans les boucles. Les méthodes de mesure de ces

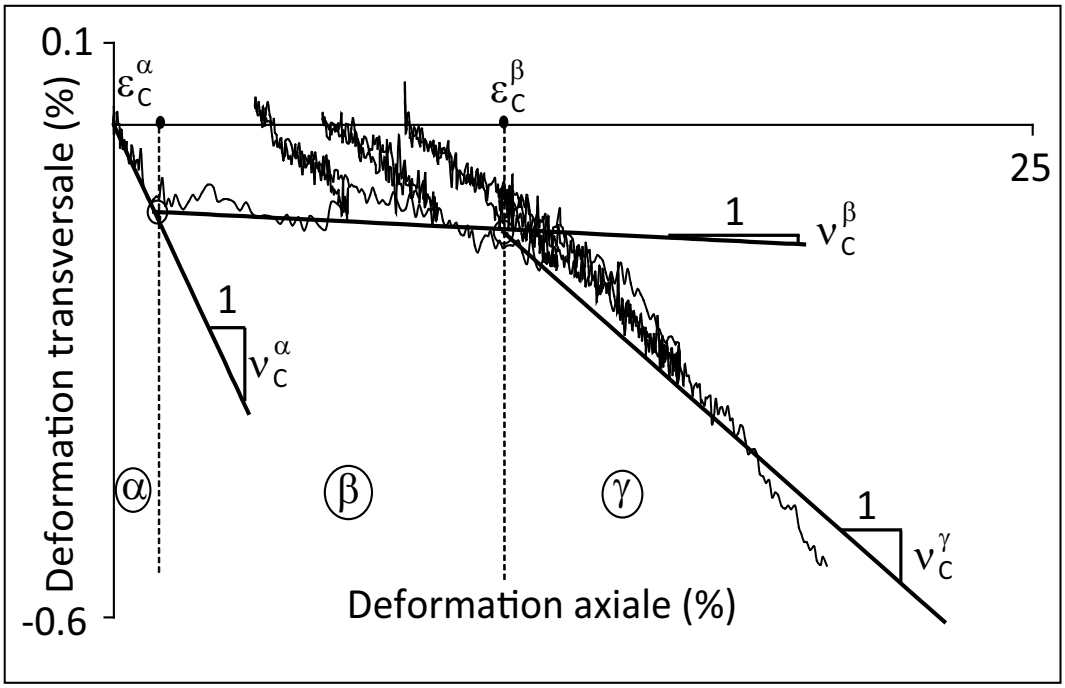


Fig. 5.58 – Traction ondulée dans le sens chaîne - SFH0C008.

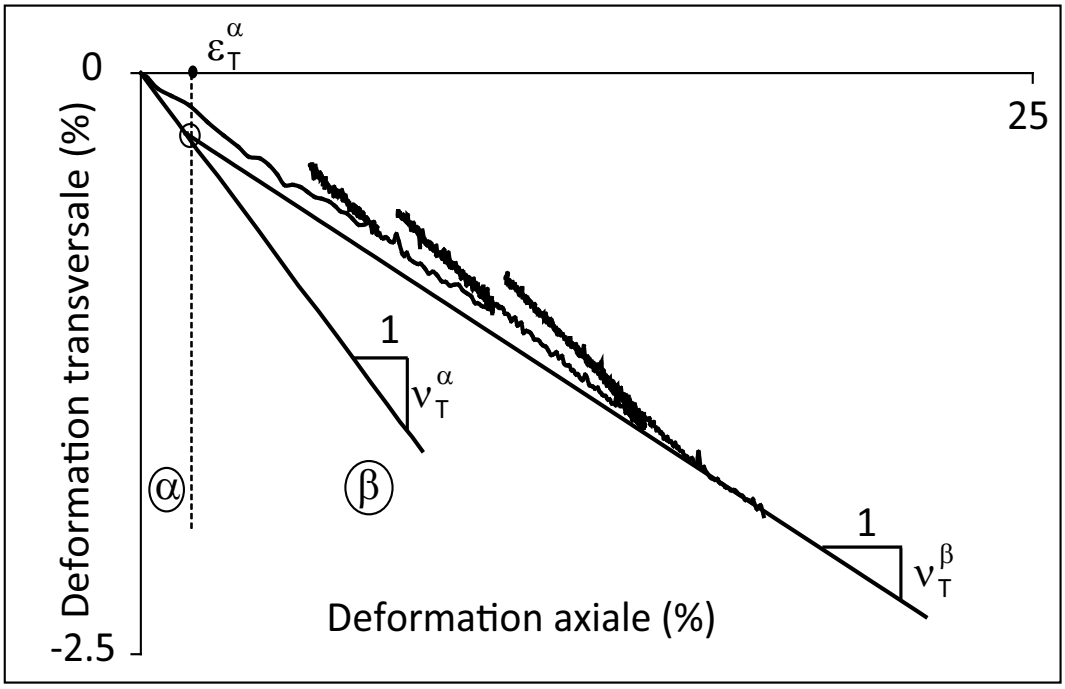


Fig. 5.59 – Traction ondulée dans le sens trame - SFH0T004.

Table 5.15: Résultats de mesure des modules élastiques, des coefficients de contraction et des déformation limites des zones α et β dans le sens trame.

Zone α			Zone β			Zone γ	
E_T^α	ν_T^α	ε_T^α	E_T^β	ν_T^β	ε_T^β	E_T^γ	ν_T^γ
MJ/Kg	-	(%)	MJ/Kg	-	(%)	MJ/Kg	-
3.510	0.206	1.257	0.384	0.106	10.023	1.309	0.106

rigidités sont présentées sur les figures 5.63 et 5.64, respectivement pour les essais contrôlés en déplacement et en force. Les tableaux 5.17 et 5.18 donnent les valeurs moyennes mesures

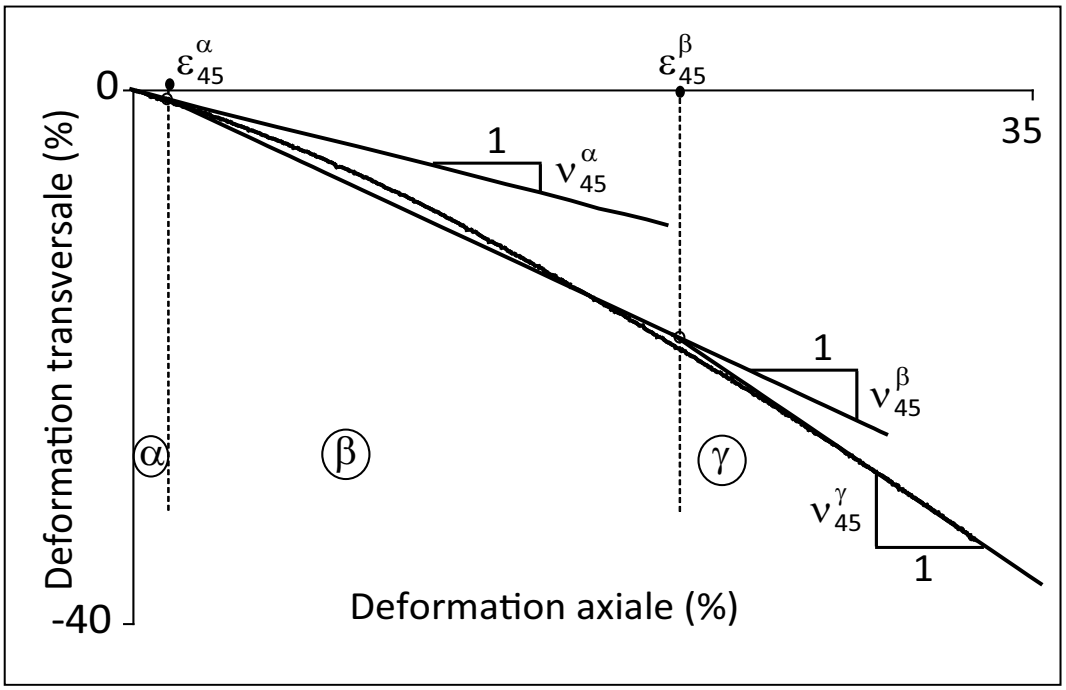


Fig. 5.60 – Traction monotone dans le sens biais - SFH45001b.

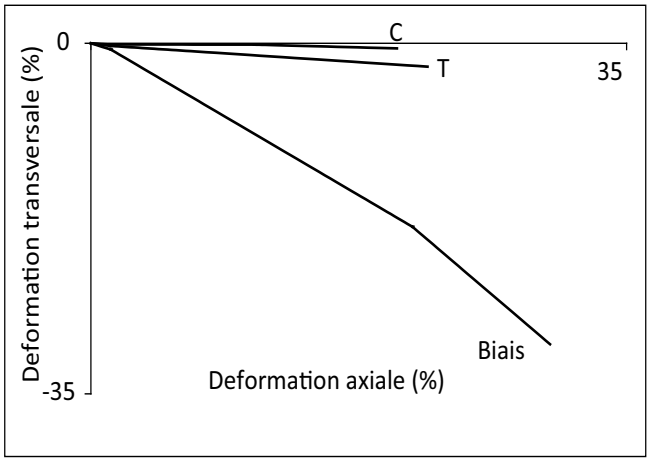


Fig. 5.61 – Comparaison des coefficient de contraction des essais de traction ondulées et monotone dans les trois zones α, β et γ dans le sens chaîne, dans le sens trame et dans le sens biais.

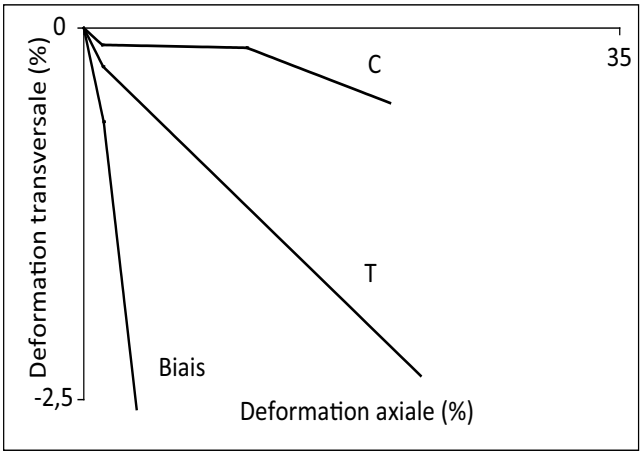


Fig. 5.62 – Agrandissement de la figure 5.61, pour une déformation transversale de -2.5 %.

TABLE 5.16: Résultats de mesure des modules élastiques, des coefficients de contraction et des déformation limites des zones α et β dans le sens biais.

Zone α			Zone β			Zone γ	
E_{45}^{α}	ν_{45}^{α}	$\varepsilon_{45}^{\alpha}$	E_{45}^{β}	ν_{45}^{β}	ε_{45}^{β}	E_{45}^{γ}	ν_{45}^{γ}
MJ/Kg	-	(%)	MJ/Kg	-	(%)	MJ/Kg	-
1.466	0.484	1.303	0.189	0.944	21.007	0.521	1.242

de rigidité dans les boucles, pour les sens chaîne, trame et biais. Les valeurs des coefficients de contractions dans les boucles, données dans les tableaux 5.17 et 5.18, correspondant aux moyennes des valeurs présentés précédemment dans les tableaux 5.6, 5.7, 5.8 et 5.9.

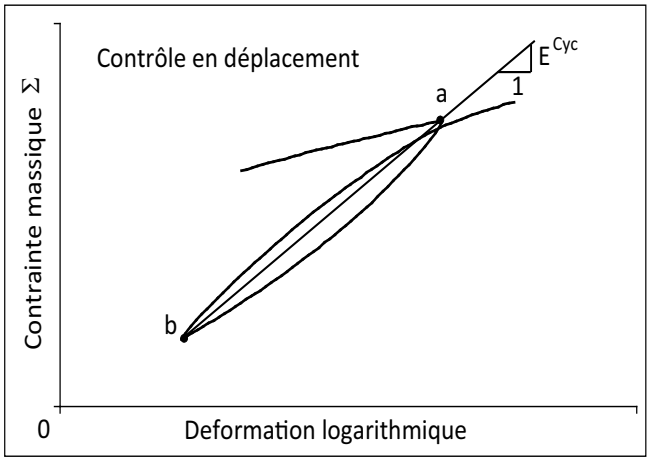


Fig. 5.63 – Méthode de mesure des rigidités dans les boucles - Essai contrôlées en déplacement.

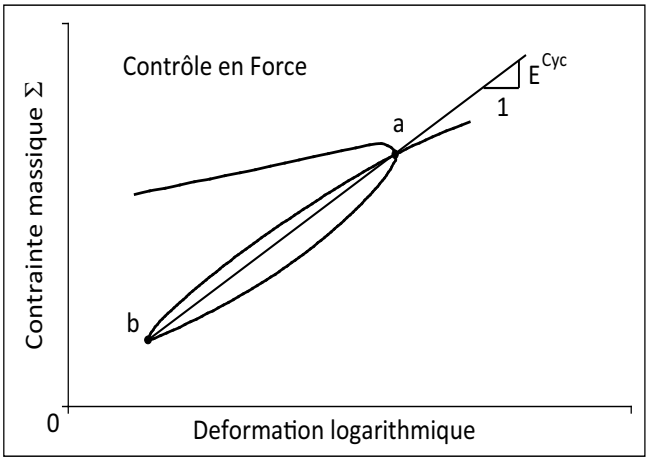


Fig. 5.64 – Méthode de mesure des rigidités dans les boucles - Essai contrôlées en Force.

Table 5.17: Résultats de mesure des rigidités et des coefficients de contraction dans les boucles - Essai contrôlés en déplacement.

Chaîne (SFH0C007)		Trame (SFH0T003)	
$< E_C^{Cyc} >$	ν_C^{Cyc}	$< E_T^{Cyc} >$	ν_T^{Cyc}
MJ/Kg	-	MJ/Kg	-
1.843	0.056	2.540	0.144

Table 5.18: Résultats de mesure des rigidités et des coefficients de contraction dans les boucles - Essai contrôlés en force.

Chaîne (SFH0C008)		Trame (SFH0T004)		Biais
$< E_C^{Cyc} >$	ν_C^{Cyc}	$< E_T^{Cyc} >$	ν_T^{Cyc}	$< E_{45}^{Cyc} >$
MJ/Kg	-	MJ/Kg	-	MJ/Kg
2.053	0.038	2.823	0.151	1.102

5.7 Commentaire sur les résultats du Dacron SF HTP Plus.

L'évolution de la contrainte, au cours du temps, lors des séquences de relaxation, présente un comportement caractéristique en logarithmique, bien décrit par la relation 5.2. Ce comportement semble finalement présenter un caractère assez générale, puisqu'il a été observé sur les sangle en PA66 (cf. chapitre 1), sur le Dacron SF HTM simple (cf. chapitre 4) et sur le Kevlar X15 (cf. chapitre 4).

Lors de la traction simple dans le sens chaîne les résultats montre un effet inhabituel de gonflement résiduel du matériau tissé, dans le sens transversale (fig. 5.24).

Les comportements dans le sens chaîne et trame, sont relativement proches et présentent une rigidité globale plus importante que celle observée dans le sens biais (Fig. 5.57). D'autre part, le sens biais exhibe une plus grande déformation et un effet de contraction, en traction simple, plus important, que ceux observés dans le sens chaîne et dans le sens trame (fig. 5.57 et fig. 5.61).

5.8 Conclusion

Une étude expérimentale détaillée a été réalisé sur le comportement en traction du Dacron SF HTP Plus. Ainsi, nous avons réalisé sur ce matériau différents essais de traction monotone et de traction ondulée, contrôlés en déformation et en force. Certains de ces essais comportaient des séquences de relaxation. Ces essais ont été réalisés dans les axes du matériau, dans le sens chaîne ou dans le sens trame, ainsi qu'en hors axes avec des orientations par rapport à la direction chaîne allant de 5° à 45°.

Le comportement du Dacron SF HTP Plus dans le sens chaîne est relativement proche de celui dans le sens trame. La rigidité globale du matériau dans les sens chaîne et trame est plus importante que celle observée dans le sens biais. Le sens biais exhibe une plus grande déformation et un effet de contraction plus important, que ceux observés dans le sens chaîne et dans le sens trame.

L'évolution de la contrainte en fonction du temps, Dacron SF HTP Plus au cours d'une séquence de relaxation, révèle un comportement caractéristique en $\log(t)$.

Troisième partie

Approche théorique et modélisation

Chapitre 6

Modélisation du comportement des matériaux tissés et des toiles

Nous Introduisons dans ce chapitre les hypothèses de base de l'approche théorique proposée dans ce travail.

6.1 Hypothèse de superposition des contraintes

L'hypothèse de superposition des contraintes résulte d'une analyse mécanique à l'échelle mésoscopique. Elle correspond à une hypothèse de base de la modélisation. Nous présentons dans ce paragraphe cette hypothèse, d'abords dans le cas simple d'un matériau tissé constitué de fils de chaîne et de fils de trame (§ 6.1.1), puis dans le cas d'un matériau tissé muni d'une couche d'enduction (§ 6.1.2), et enfin nous proposerons une généralisation de cette hypothèse au cas d'une toile constitué de l'assemblage de plusieurs couches de natures différentes (§ 6.1.3).

6.1.1 Cas d'un matériau tissé sans enduction

Considérons un matériau tissé constitué de fils de chaîne et de fils de trame. A l'échelle mésoscopique, autour d'un point M, un élément de surface ds est sollicité par un état de contrainte de Cauchy $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ (Fig. 6.1). L'hypothèse de superposition porte sur la contrainte de Cauchy :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2 \tag{6.1}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_1$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2$ correspondent aux contraintes de Cauchy appliquées respectivement aux nappes 1 et 2. Compte tenu de l'hypothèse de la membrane (§ 2.1 du chapitre 2), les états de contrainte et de déformation sont définis dans le plan et le matériau tissé est considérée comme la superposition de deux nappes de même épaisseur fictive e^* : Une première nappe de fils de trame et une deuxième nappe de fils de chaîne. L'épaisseur fictive e^*, qui définit ces deux nappes correspond à l'épaisseur e du matériau tissé final :

$$e = e^* \tag{6.2}$$

les hypothèses 6.1 et 6.2 sont complétées par une hypothèse de déformation identique des deux nappes, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_c \tag{6.3}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_c$ sont les tenseurs gradients de la transformation du matériau tissé, de la nappe de trame et de la nappe de chaîne, respectivement.

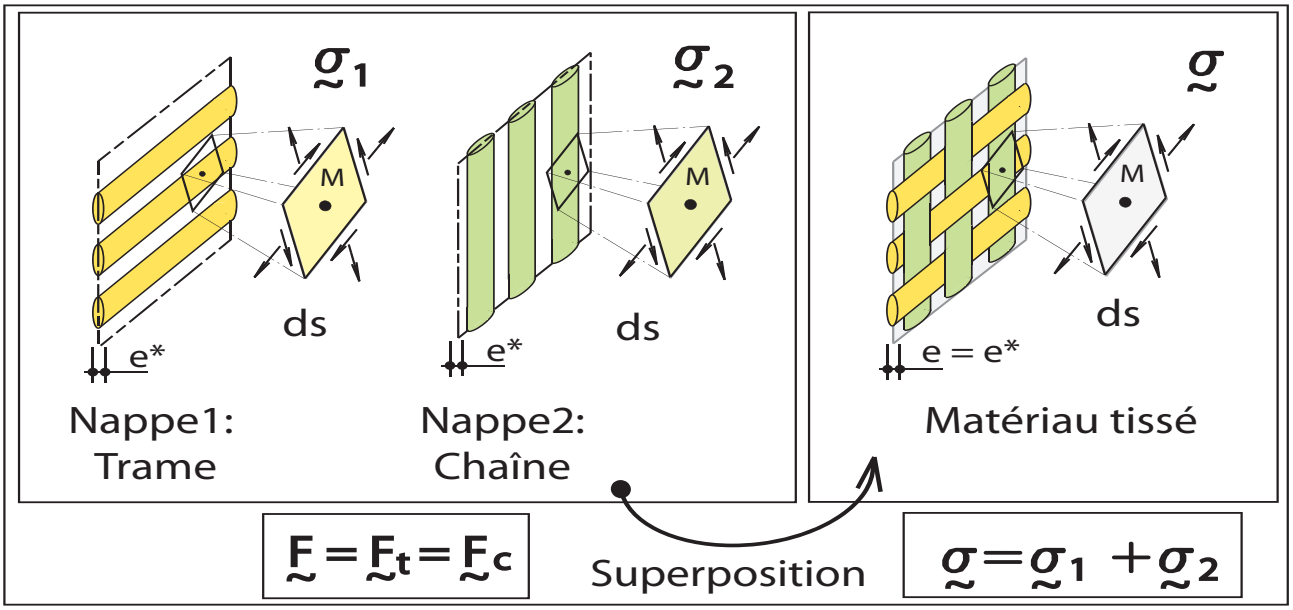


Fig. 6.1 – Illustration de l'hypothèse de superposition dans le cas d'un matériau tissé sans enduction.

La masse surfacique initiale du matériau tissé ainsi défini, est telle que :

$$\overline{\rho} \ = \overline{\rho}_t + \overline{\rho}_c \tag{6.4}$$

où $\overline{\rho}_t$ et $\overline{\rho}_c$ sont les masses surfaciques initiales de la nappe des fils de trame et de la nappe des fils de chaîne, respectivement. En utilisant la relation 2.51 du chapitre 2, on peut écrire aussi :

$$J\ \overline{\rho}^t \ = J_t\ \overline{\rho}_t^t + J_c\ \overline{\rho}_c^t \tag{6.5}$$

où $\overline{\rho}^t$, $\overline{\rho}_t^t$ et $\overline{\rho}_c^t$ sont respectivement les masses surfaciques actuelles du matériau tissé, des fils de trame et des fils de chaîne, et :

$$J \ = det(\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}), \qquad J_t \ = det(\underset{\sim}{\boldsymbol{F_t}}), \qquad J_c \ = det(\underset{\sim}{\boldsymbol{F_c}}), \tag{6.6}$$

l'hypothèse 6.3 conduit alors à :

$$\overline{\rho}^t \ = \overline{\rho}_t^t + \overline{\rho}_c^t \tag{6.7}$$

Si on exprime les contraintes de Cauchy $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_1$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_2$ en fonction des contrainte massique respectives $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_1$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_2$, à l'aide de la relation 2.48, on obtient :

$$\overline{\rho}^t\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} \ = \overline{\rho}_t^t\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_1 + \overline{\rho}_c^t\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_2 \tag{6.8}$$

cette relation peut aussi s'écrire en fonction des masses surfaciques initiales, en utilisant la relation 2.51 :

$$\frac{\overline{\rho}}{J}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} \ = \frac{\overline{\rho}_t}{J_t}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_1 + \frac{\overline{\rho}_c}{J_c}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_2 \tag{6.9}$$

avec l'hypothèse complémentaire 6.3 et 6.5, l'hypothèse de superposition des contraintes conduit à :

$$\overline{\rho}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} \ = \overline{\rho}_t\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_1 + \overline{\rho}_c\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_2 \tag{6.10}$$

par ailleurs, les contraintes $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_1$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_2$ sont telles que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_1 \ = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_t + \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_{ct} \qquad \text{et} \qquad \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_2 \ = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_c + \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_{ct} \tag{6.11}$$

où $\underset{\sim}{\Sigma}_t$ et $\underset{\sim}{\Sigma}_c$ sont les contraintes massiques liées respectivement au comportement des fils de trame et des fils de chaîne ; la contribution de contrainte $\underset{\sim}{\Sigma}_{ct}$ est induite par l'interaction des fils de trame et des fils de chaine au niveau des points de liage. Les relations 6.10 et 6.11 conduisent à :

$$\overline{\rho}\ \underset{\sim}{\Sigma} = \overline{\rho}_t\ \underset{\sim}{\Sigma}_t + \overline{\rho}_c\ \underset{\sim}{\Sigma}_c + \overline{\rho}_f\ \underset{\sim}{\Sigma}_{ct} \tag{6.12}$$

où $\overline{\rho}_f$ est la masse surfacique initiale de l'ensemble des fils de chaîne et des fils de trame, qui dans ce cas particulier d'un matériau tissé sans enduction, est égale à la masse surfacique initiale du matériau tissé, telle que :

$$\overline{\rho}_f = \overline{\rho}_t + \overline{\rho}_c = \overline{\rho} \tag{6.13}$$

l'hypothèse de superposition des contraintes 6.12 peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ \underset{\sim}{\Sigma}_t + \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\ \underset{\sim}{\Sigma}_c + \frac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\ \underset{\sim}{\Sigma}_{ct} \tag{6.14}$$

6.1.2 Cas d'un matériau tissé avec enduction

Dans ce cas, le matériau est considérée comme la superposition de trois nappes de même épaisseur fictive e^* : Une première nappe de fils de trame, une deuxième nappe de fils de chaîne et une troisième nappe d'enduction. L'épaisseur fictive e^*,qui définit ces trois nappes correspond à l'épaisseur e du matériau tissé final (Fig. 6.2). L'hypothèse de superposition porte sur les contraintes de Cauchy de chacune des nappes. Cette hypothèse est complétée par une hypothèse de déformation identique des trois nappes, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_c = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_e \tag{6.15}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_t$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_c$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_e$ sont les tenseurs gradients de la transformation du matériau final et des nappes de trame, de chaîne et d'enduction, respectivement. A l'échelle mésoscopique, autour d'un point M, un élément de surface ds est sollicité par un état de contrainte massique $\underset{\sim}{\Sigma}$ (Fig. 6.2), qui résulte de l'hypothèse de superposition, telle que :

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ \underset{\sim}{\Sigma}_t + \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\ \underset{\sim}{\Sigma}_c + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \underset{\sim}{\Sigma}_e + \frac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\underset{\sim}{\Sigma}_{ct} \tag{6.16}$$

cette relation apparaît comme l'extension de la relation 6.14 par l'addition d'une contribution de contrainte, liée à la nappe d'enduction et caractérisée par sa masse surfacique initiale $\overline{\rho}_e$ et sa contrainte massique $\underset{\sim}{\Sigma}_e$. Notons que dans ce cas, du matériau tissé avec enduction, la masse surfacique initiale du matériau tissé est telle que :

$$\overline{\rho} = \overline{\rho}_t + \overline{\rho}_c + \overline{\rho}_e \tag{6.17}$$

Et, la masse surfacique initiale de l'ensemble des fils de chaîne et des fils de trame $\overline{\rho}_f$ est telle que :

$$\overline{\rho}_f = \overline{\rho}_t + \overline{\rho}_c \tag{6.18}$$

6.1.3 Généralisation de l'hypothèse de superposition

Nous considérons dans ce paragraphe le cas d'une toile constituée par la superposition de n nappes de fils de natures et d'orientations différentes et d'une nappe d'enduction. Toutes les nappes ont la même épaisseur fictive e^*, qui correspond à l'épaisseur e du matériau tissé final (Fig. 6.3). Selon la nature de l'assemblage de la toile, m interactions sont envisagées entre les nappes.

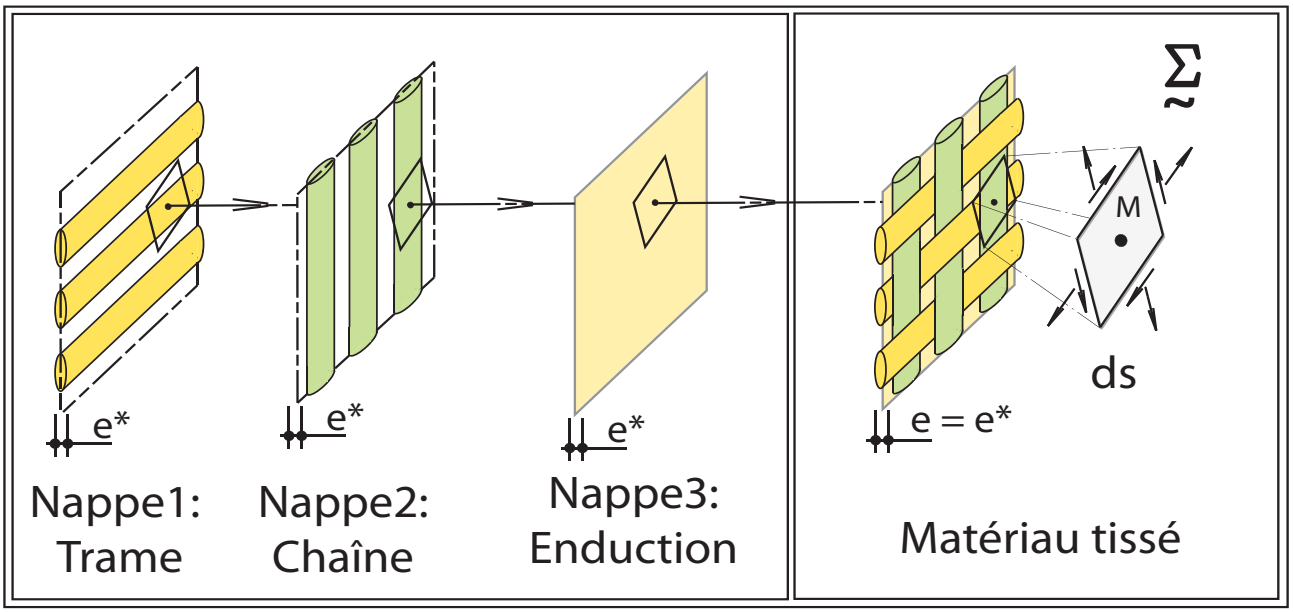


Fig. 6.2 – Illustration de l'hypothèse de superposition dans le cas d'un matériau tissé avec enduction.

Chaque interaction peut impliquer deux ou plusieurs nappes. L'hypothèse de superposition porte sur les contraintes de Cauchy $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i$ de chacune des nappes :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} = \Sigma_{i=1}^{n} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_i \tag{6.19}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est la contrainte de Cauchy totale appliquée. Cette hypothèse est complétée par une hypothèse de déformation identique de toutes les nappes, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_e = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_i \quad , \quad \text{avec (i=1,n)} \tag{6.20}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_e$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_i$ sont les tenseurs gradients de la transformation du matériau final, de l'enduction et de la nappe i. A l'échelle mésoscopique, autour d'un point M, un élément de surface ds est sollicité par un état de contrainte massique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}$ (Fig. 6.3), qui résulte de l'hypothèse de superposition, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{\overline{\rho}_i}{\overline{\rho}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_i + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_e + \Sigma_{j=1}^{m} \frac{\overline{\rho}_{fj}}{\overline{\rho}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_j \tag{6.21}$$

Cette relation est l'extension de la relation 6.16 où la nappe i est caractérisée par sa contrainte massique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_i$ et sa masse surfacique $\overline{\rho}_i$; la nappe d'enduction et caractérisée par sa contrainte massique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_e$ et sa masse surfacique initiale $\overline{\rho}_e$. Chaque interaction est caractérisée par une contrainte $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_j$ et une masse surfacique $\overline{\rho}_{fj}$,qui correspond à la somme des masses surfaciques des fils des nappes qui interviennent dans l'interaction j. La masse surfacique initiale du matériau tissé est telle que :

$$\overline{\rho} = \Sigma_{i=1}^{n} \overline{\rho}_i + \overline{\rho}_e \tag{6.22}$$

Et, la masse surfacique initiale $\overline{\rho}_{fj}$ l'ensemble des fils, qui interviennent dans l'interaction j, est telle que :

$$\overline{\rho}_{fj} = \Sigma_{i=1}^{k} \overline{\rho}_i \tag{6.23}$$

où k représente le nombre de nappe qui interviennent dans l'interaction j.

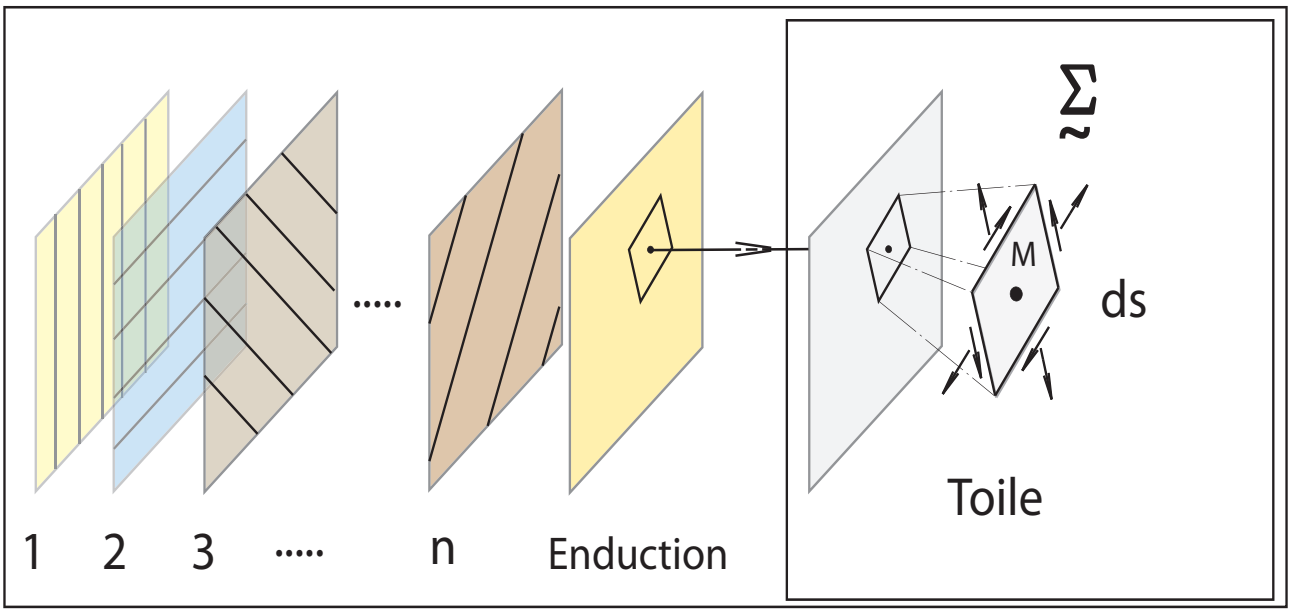


Fig. 6.3 – Illustration de l'hypothèse de superposition dans le cas général d'une toile constituée de n nappes de fils et d'une nappe d'enduction.

6.2 Expression du tenseur contrainte massique du Dacron SF HTP Plus

Le Dacron SF HTP Plus est un matériau tissé muni d'une enduction (Cf. § 3.8.4 du chapitre 3). Sa contrainte massique s'exprime grâce à l'hypothèse de superposition 6.16, par :

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\ \Sigma_c\ \left(\frac{\vec{c}}{c}\otimes\frac{\vec{c}}{c}\right)\\ &+\frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ \Sigma_t\ \left(\frac{\vec{t}}{t}\otimes\frac{\vec{t}}{t}\right)\\ &+\frac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\ \Sigma_{ct}\left(\frac{\vec{c}^*}{c^*}\otimes\frac{\vec{t}}{t}+\frac{\vec{t}^*}{t^*}\otimes\frac{\vec{c}}{c}\right)\\ &+\frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{e}}\end{aligned} \tag{6.24}$$

où les vecteurs $\vec{c}$, $\vec{t}$, $\vec{c}^*$ et $\vec{t}^*$ sont définis dans le chapitre 2 et c, t, c^* et t^* représentent leurs modules, respectifs. Nous notons la base naturelle covariante normée et la base duale normée $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u}^*,\vec{v}^*)$, dans la configuration actuelle et $(\vec{u}_0,\vec{v}_0)$ et $(\vec{u}_0^*,\vec{v}_0^*)$ dans la configuration de référence ; telles que :

$$\begin{cases}\vec{u}=\frac{\vec{c}}{c} & ;\vec{u}^*=\frac{\vec{c}^*}{c^*}\\ \vec{v}=\frac{\vec{t}}{t} & ;\vec{v}^*=\frac{\vec{t}^*}{t^*}\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}\vec{u}_0=\frac{\vec{c}_0}{c_0} & ;\vec{u}_0^*=\frac{\vec{c}_0^*}{{c_0}^*}\\ \vec{v}_0=\frac{\vec{t}_0}{t_0} & ;\vec{v}_0^*=\frac{\vec{t}_0^*}{t_0^*}\end{cases} \tag{6.25}$$

La figure 6.4 donne une illustration des relations 6.25. Dans la configuration initiale la direction chaîne est orientée par le paramètre angulaire θ_0 et dans la configuration actuelle la direction chaîne est orientée par le paramètre angulaire θ (cf. chapitre 3). Compte tenu de la relation 6.25, la contrainte massique s'exprime par :

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\ \Sigma_c\ (\vec{u}\otimes\vec{u})\\ &+\frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ \Sigma_t\ (\vec{v}\otimes\vec{v})\\ &+\frac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\ \Sigma_{ct}\,(\vec{u}^*\otimes\vec{v}+\vec{v}^*\otimes\vec{u})\\ &+\frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{e}}\end{aligned} \tag{6.26}$$

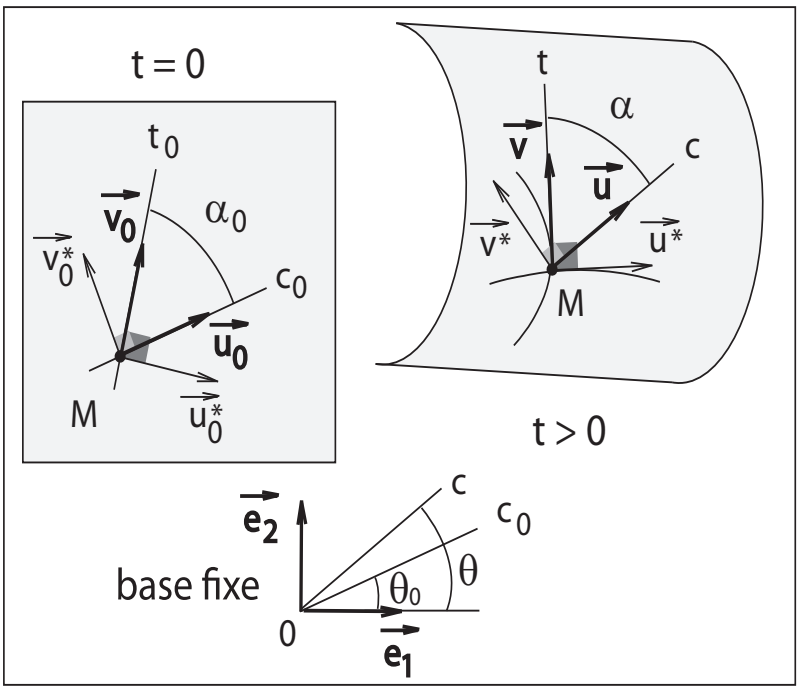


Fig. 6.4 – Illustration des bases normées $(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$, $(\vec{u}_0^*, \vec{v}_0^*)$ dans la configuration initiale et $(\vec{u}, \vec{v})$,$(\vec{u}^*, \vec{v}^*)$ dans la configuration actuelle.

où les tenseur $(\vec{u}^* \otimes \vec{v} + \vec{v}^* \otimes \vec{u})$ est symétrique, ce qui conduit à la symétrie du tenseur de contrainte massique totale $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}$. Les composantes Σ_c et Σ_t correspondent respectivement au comportement des fils de chaîne et des fils de trame. La composante Σ_{ct} caractérise l'interaction des fils de trame et des fils de chaine au niveau des points de liage. Les trois composantes Σ_c, Σ_t et Σ_{ct} sont définies par des lois de comportement unidimensionnelles ; ces lois seront présentées au chapitre 7. La contribution $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}_e$ correspond au comportement de l'enduction ; elle est représentée par un tenseur de contrainte massique d'ordre 2 et elle est définie par une loi de comportement bidimensionnelle isotrope, qui sera présentée au chapitre 8.

Dans la base fixe les vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$,$\vec{u}^*$ et $\vec{v}^*$ s'expriment à l'aide de leurs composantes, telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = u^i \vec{e}_i \\ \vec{v} = v^i \vec{e}_i \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}^* = \vec{u}^{*i} \vec{e}_i \\ \vec{v}^* = \vec{v}^{*i} \vec{e}_i \end{array} \right. \tag{6.27}$$

en utilisant 6.27 la contrainte massique totale 6.26, s'exprime par :

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}} = \{\frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}} \Sigma_c u^i u^j + \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}} \Sigma_t v^i v^j + \frac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}} \Sigma_{ct}(u^{*i} v^j + v^{*i} u^j) + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \Sigma_e^{ij}\}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \tag{6.28}$$

dans le cas où la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormée $(\alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{2})$, les vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$,$\vec{u}^*$ et $\vec{v}^*$s'expriment à l'aide de leurs composantes, dans la base fixe par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{u}^* = \cos\theta \ \vec{e}_1 + \sin\theta \ \vec{e}_2 \\ \vec{v} = \vec{v}^* = -\sin\theta \ \vec{e}_1 + \cos\theta \ \vec{e}_2 \end{array} \right. \tag{6.29}$$

La figure 6.5 illustre les relations 6.29. Avec l'hypothèse 6.29, la contrainte massique 6.28 s'exprime par :

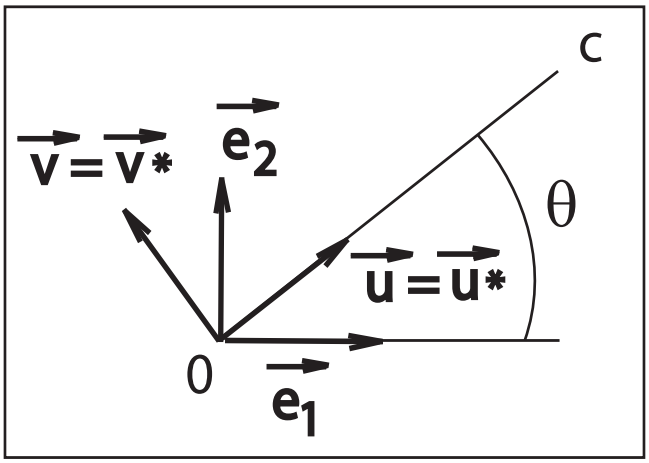


Fig. 6.5 – IIllustration du cas où la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est orthonormée.

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\Sigma} &= \{\tfrac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\Sigma_c\left(\cos^2\theta\right) + \tfrac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\Sigma_t\left(\sin^2\theta\right) + \tfrac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\Sigma_{ct}\left(-\sin 2\theta\right) + \tfrac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\Sigma_e^{11}\}(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) \\ &+\{\tfrac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\Sigma_c\left(\sin^2\theta\right) + \tfrac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\Sigma_t\left(\cos^2\theta\right) + \tfrac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\Sigma_{ct}\left(\sin 2\theta\right) + \tfrac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\Sigma_e^{22}\}(\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) \\ &+\{\tfrac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\Sigma_c\left(\tfrac{\sin 2\theta}{2}\right) + \tfrac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\Sigma_t\left(-\tfrac{\sin 2\theta}{2}\right) + \tfrac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\Sigma_{ct}\left(\cos 2\theta\right) + \tfrac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\Sigma_e^{12}\}(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1)\end{aligned} \tag{6.30}$$

ce qui se traduit en notation matricielle, par :

$$\left|\begin{array}{l}\Sigma_{11}\\ \Sigma_{22} =\\ \Sigma_{12}\end{array}\right. \quad \begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta\\ \frac{\sin 2\theta}{2} & -\frac{\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta\end{bmatrix} \left|\begin{array}{l}\frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\ \Sigma_c\\ \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ \Sigma_t\\ \frac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\ \Sigma_{ct}\end{array}\right. + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \left|\begin{array}{l}\Sigma_e^{11}\\ \Sigma_e^{22}\\ \Sigma_e^{12}\end{array}\right. \tag{6.31}$$

Dans le cas d'un chargement dans les axes du matériau, avec $(\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée ($\alpha = \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$), l'orientation initiale est actuelle des fils de chaîne sont selon la direction du vecteur $\vec{e}_1(\theta = \theta_0 = 0)$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{u} = \vec{u}^* = \vec{e}_1\\ \vec{v} = \vec{v}^* = \vec{e}_2\end{array}\right. \tag{6.32}$$

la relation 6.30 s'écrit :

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\Sigma} &= \{\tfrac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\Sigma_c + \tfrac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\Sigma_e^{11}\}(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) \\ &+\{\tfrac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\Sigma_t + \tfrac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\Sigma_e^{22}\}(\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2) \\ &+\{\tfrac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\Sigma_{ct} + \tfrac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\Sigma_e^{12}\}(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1)\end{aligned} \tag{6.33}$$

6.3 Expression du tenseur contrainte massique de la toile de Kevlar X15

Le kevlar X15 est une toile constituée de nappes de fils dans le sens chaîne, dans le sens trame et selon deux orientations δ_1 et δ_2 ; ces nappes de fils sont maintenues par collage à l'aide de deux couches de Mylar, qui jouent le rôle d'une enduction (Cf. § 3.8.3 du chapitre 3). Dans la mesure où le matériau ne présente pas de tissage, une hypothèse raisonnable, dans ce cas, consiste à négliger les contraintes d'interactions entre les nappes de fils. La contrainte massique

s'exprime, alors, grâce à l'hypothèse de superposition généralisée 6.21, par :

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\ \Sigma_c\ (\vec{u}_c \otimes \vec{u}_c) \\ &+ \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ \Sigma_t\ (\vec{u}_t \otimes \vec{u}_t) \\ &+ \frac{\overline{\rho}_{\delta_1}}{\overline{\rho}}\ \Sigma_{\delta_1}\ (\vec{u}_{\delta_1} \otimes \vec{u}_{\delta_1}) + \frac{\overline{\rho}_{\delta_2}}{\overline{\rho}}\ \Sigma_{\delta_2}\ (\vec{u}_{\delta_2} \otimes \vec{u}_{\delta_2}) \\ &+ \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_e\end{aligned} \tag{6.34}$$

où Σ_c, Σ_t, Σ_{δ_1} et Σ_{δ_2} représentent respectivement les contraintes dans les fils de chaîne, de trame et dans les fils orientés selon les direction δ_1 et δ_2 ; $\overline{\rho}_c$correspond à la masse surfacique initiale de l'ensemble des fils de chaîne (couches C1, C2 et C3 Fig. 3.14 du chapitre 3) ; $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}_t$, $\overline{\rho}_{\delta_1}$ et $\overline{\rho}_{\delta_2}$ sont les masses surfaciques initiales de la toile, des fils de trame et des fils orientés selon les direction δ_1 et δ_1 ; $\overline{\rho}_e$ est la masse surfacique initiale de le film isotrope constituée par les deux couches de Mylar et de la colle ; la contribution $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_e$ correspond au comportement bidimensionnelle isotrope de l'enduction.

6.4 Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre les hypothèses de base de l'approche théorique proposée. Cette approche définit un cadre de modélisation qui permet une prise en compte des comportements spécifiques de chaque composante du matériau (fils, enduction) et de leurs interactions.

Chapitre 7

Modélisation du comportement des fils et de leur interaction

Ce chapitre a pour but de présenter un ensemble de lois de comportement, potentiellement intéressantes, pour la modélisation unidimensionnelle du comportement des fils et de leur interaction. Dans la mesure où la base de données expérimentale sur le comportement des fils et des fibres est très réduite, nous avons évalué la pertinence de cette modélisation sur le comportement unidimensionnel d'une sangle en PA66 (cf. Chapitre 1).

7.1 Hypothèse fondamentale de superposition

Une approche phénoménologique à l'échelle mésoscopique est adoptée, afin de décrire le comportement des fils. Cette approche est basée sur un principe de superposition, qui considère la contrainte massique appliquée au fils $\Sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, comme une somme de deux composantes de contrainte ; une composante viscoélastique non linéaire $\Sigma_v(\dot{\varepsilon})$ et une composante indépendante du temps $\Sigma_h(\varepsilon)$:

$$\Sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \Sigma_v(\dot{\varepsilon}) + \Sigma_h(\varepsilon) \tag{7.1}$$

où ε et $\dot{\varepsilon}$ sont respectivement la déformation logarithmique et la vitesse de déformation du fils. Le modèle symbolique de la figure 7.1 illustre la relation 7.1.

La contrainte viscoélastique $\Sigma_v(\dot{\varepsilon})$ est du type Maxwell, telle que :

$$\dot{\Sigma}_v\ (\dot{\varepsilon}) + \frac{\Sigma_v(\dot{\varepsilon})}{\theta(\dot{\varepsilon})} = G_v(\dot{\varepsilon}) \qquad \text{avec} \qquad \theta(\dot{\varepsilon}) = \frac{\eta(\dot{\varepsilon})}{G_v} \tag{7.2}$$

Elle a le caractère d'un fluide non newtonien avec une élasticité de module G_v constant et une viscosité $\eta(\dot{\varepsilon})$ dépendante de la vitesse de déformation. dont l'évolution est décrite par un modèle de Carreau-Yasuda [28], présenté dans le chapitre 1, tel que :

$$\frac{\eta\,(\dot{\varepsilon}) - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left\{1 + \lambda\,|\dot{\varepsilon}|^a\right\}^{\frac{n-1}{a}} \tag{7.3}$$

où η_∞, η_0, λ, n, et a sont des paramètres (cf. chapitre 1, § 1.4.2).

Le comportement du fil peut être réversible ; dans ce cas la contrainte visqueuse est nulle ($\Sigma_v(\dot{\varepsilon}) = 0$) et la contrainte indépendante du temps $\Sigma_h(\varepsilon)$ correspond à comportement élastique. Quand le comportement du fil est viscoélastique non linéaire, la contrainte visqueuse est non

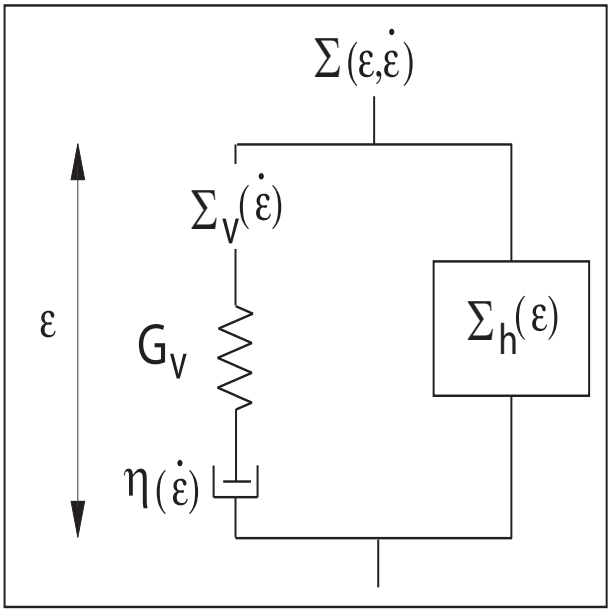


Fig. 7.1 – Illustration de la relation 7.1.

nulle ($\Sigma_v(\dot{\varepsilon}) \neq 0$) et la contrainte indépendante du temps $\Sigma_h(\varepsilon)$ peut être irréversible ; elle peut aussi être réversible, elle correspond alors à une élasticité retardée (chapitre 1 § 1.4).

7.2 Fil de comportement élastique non linéaire

Dans ce cas la relation 7.1 comporte une contrainte visqueuse nulle ($\Sigma_v(\dot{\varepsilon}) = 0$) et une contrainte indépendante du temps $\Sigma_h(\varepsilon)$ élastique non linéaire, notée $\Sigma_r(\varepsilon)$. Pour décrire le comportement élastique non linéaire, on adopte une loi de forme assez générale, telle que :

$$\Sigma_r(\varepsilon) = (G_r - L_r)\varepsilon_r^* \tanh\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_r^*}\right) + L_r\varepsilon + H_r\varepsilon^2 + K_r\varepsilon^3 \tag{7.4}$$

où L_r, G_r, H_r, K_r et ε_r^* sont des paramètres du matériau. Le module élastique correspondant dépend de la déformation et s'écrit :

$$\frac{d\Sigma_r}{d\varepsilon}(\varepsilon) = (G_r - L_r)\left\{1 - \tanh^2\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_r^*}\right)\right\} + L_r + 2H_r\varepsilon + 3K_r\varepsilon^2 \tag{7.5}$$

A l'origine quand la déformation tend vers zéro, le module élastique est tel que :

$$\frac{d\Sigma_r}{d\varepsilon}(0) = G_r \tag{7.6}$$

La figure 7.2 illustre quelques propriétés de la loi élastique non linéaire, exprimée par l'équation 7.4. Si $G_r = L_r$, le terme en tangente hyperbolique de l'équation 7.4 est nul et la loi élastique non linéaire a la forme d'un polynôme de degré 3 (courbe a fig. 7.2) ou de degré 2 siK_r est nul (courbe b fig. 7.2). Dans le cas où $G_r = L_r$ et $H_r = K_r = 0$, le comportement est alors élastique linéaire de module G_r (courbe c fig. 7.2). Si $G_r \neq L_r$, le terme en tangente hyperbolique intervient (courbe d fig. 7.2). Dans ce cas si $L_r = H_r = K_r = 0$, le terme en tangente hyperbolique intervient seul (courbe e fig. 7.2). Le paramètre ε_r^* correspond à la déformation au coude de la tangente hyperbolique (courbe e fig. 7.2), qui coïncide avec l'intersection du module à l'origine et du seuil à l'infini.

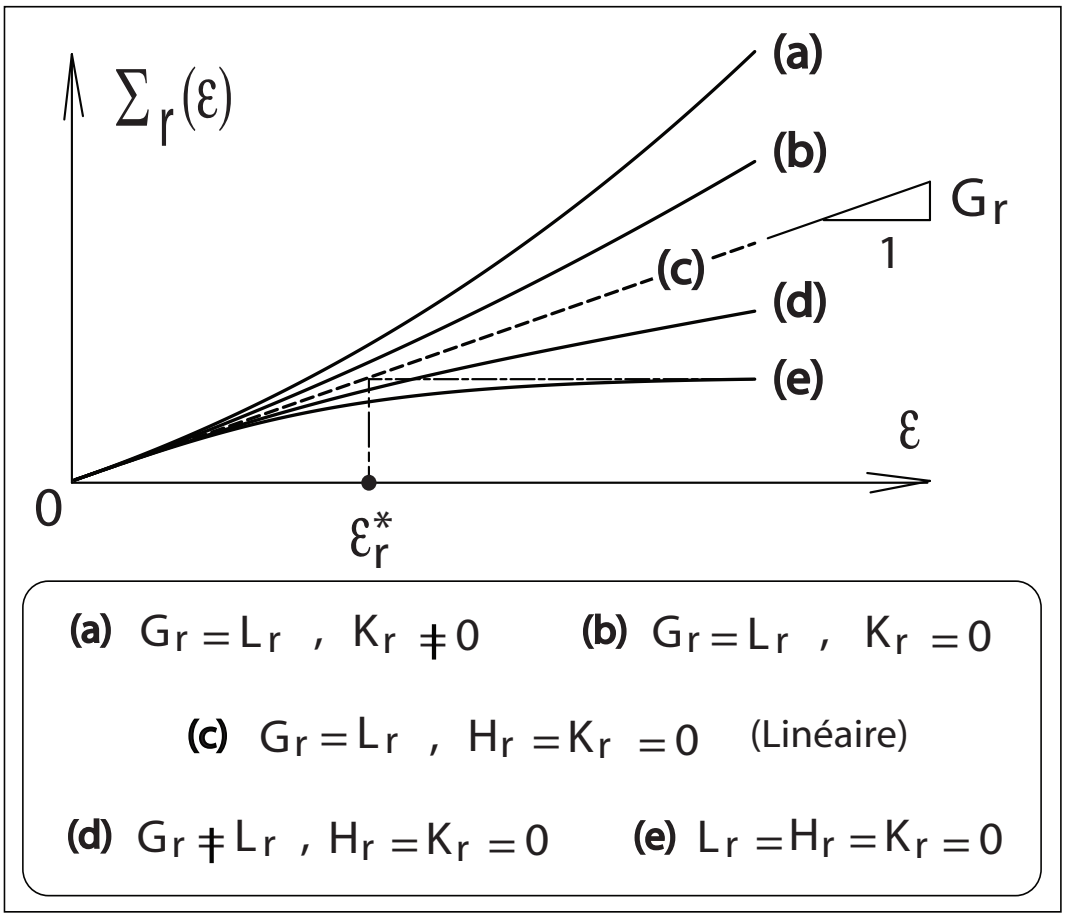


Fig. 7.2 – Illustration de la loi élastique non linéaire (Eq. 7.4).

Dans le cas d'une traction simple, sur un matériau tissé, suivant le sens chaîne ou le sens trame, le matériau subit une contraction dans le sens transversal et les fils correspondants subissent une compression. La loi élastique du fil doit donc présenter un comportement bien défini en compression et une rigidité non nulle. On adopte alors l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire en compression. Dans la situation où le fil est droit et ne présente pas d'embuvage, on fait l'hypothèse que la rigidité en compression et la même que celle en traction, au voisinage de l'origine (Module G_r, fig. 7.3-a), telle que :

$$\Sigma_r(\varepsilon) = G_r.\varepsilon \qquad (\varepsilon \leq 0 \text{ et fil droit}) \tag{7.7}$$

Cette situation correspond aux fils de la toile de kevlar X15 et aux fils de trame du Dacron SF HTP Plus (cf. chapitre 3).

Dans la situation où le fil présente un embuvage, on fait l'hypothèse que la rigidité en compression est inférieure à celle en traction ($g_r < G_r$, fig. 7.3-b), telle que :

$$\Sigma_r(\varepsilon) = g_r.\varepsilon \quad , \quad g_r < G_r \quad , \quad (\varepsilon \leq 0 \text{ et embuvage}) \tag{7.8}$$

Cette situation correspond aux fils de chaîne du Dacron SF HTP Plus (cf. chapitre 3).

7.3 Fil de comportement viscoélastique à élasticité retardée non-linéaire.

Dans ce cas la relation 7.1 comporte une contrainte visqueuse non nulle ($\Sigma_v(\dot{\varepsilon}) \neq 0$) et une contrainte indépendante du temps $\Sigma_h(\varepsilon)$ élastique non linéaire. Par conséquent, la contrainte

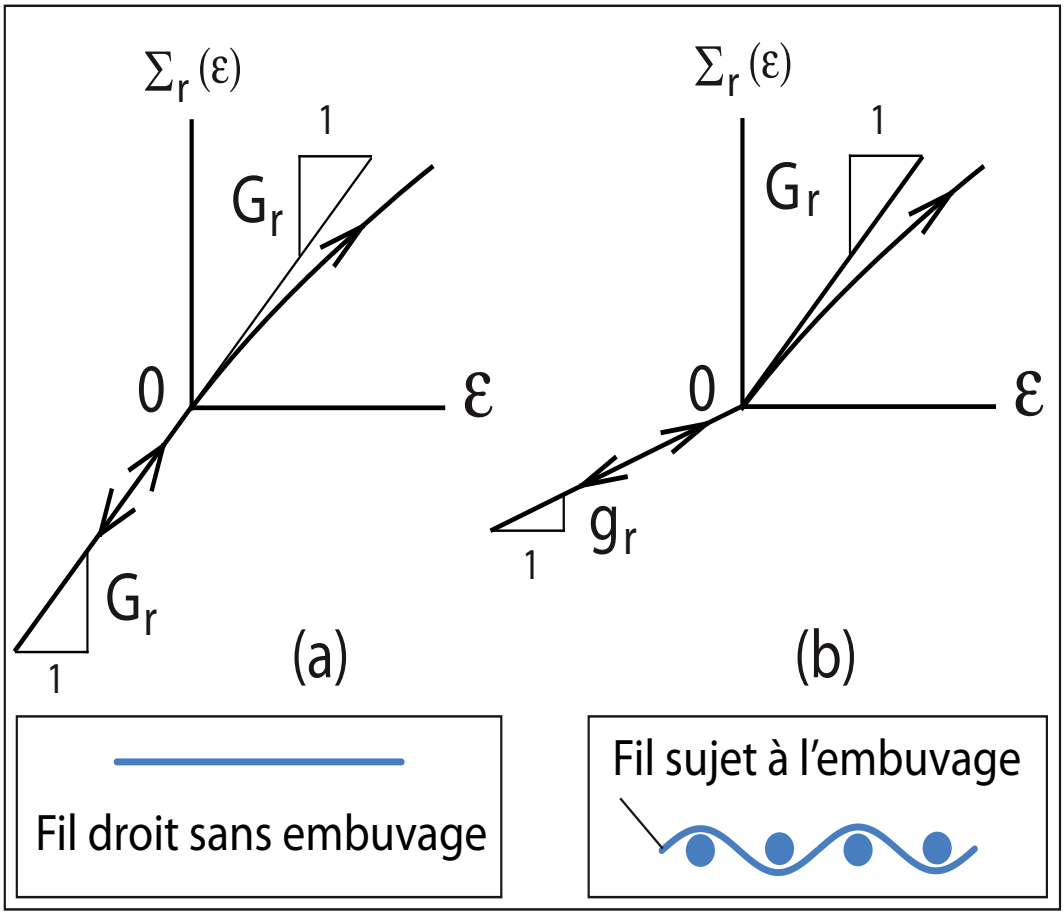


Fig. 7.3 – Comportement du fil en compression.

massique appliquée au fils $\Sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, s'écrit :

$$\Sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \Sigma_v(\dot{\varepsilon}) + \Sigma_r(\varepsilon) \tag{7.9}$$

où la contrainte viscoélastique $\Sigma_v(\dot{\varepsilon})$ est définie par les relations 7.2 et 7.3 et la contrainte réversible $\Sigma_r(\varepsilon)$, qui représente l'élasticité retardée, est définie par les relations 7.4, 7.7 et 7.8. Le modèle symbolique de la figure 7.4 illustre la relation 7.9. Le comportement viscoélastique non-linéaire à élasticité retardée non-linéaire, défini par la relation 7.9 est illustré sur la figure 7.5-a, pour un fil sujet à l'embuvage et pour un chargement cyclique $0abcdef$. L'évolution de l'élasticité retardée caractérisée par la contrainte réversible $\Sigma_r(\varepsilon)$, définie par les relations 7.4 et 7.8, est donnée sur la figure 7.5-b. Tel qu'il est prévu par la relation 7.8, cette figure montre un comportement élastique linéaire en compression avec un module $g_r < G_r$. L'évolution de la contrainte viscoélastique, $\Sigma_v(\dot{\varepsilon})$ caractérisée par un module à l'origine G_v et par les équations 7.2 et 7.3 est donnée sur la figure 7.5-c.

7.4 Fil de comportement viscoélastique à comportement retardé irréversible.

Dans ce cas la relation 7.1 comporte une contrainte visqueuse non nulle ($\Sigma_v(\dot{\varepsilon}) \neq 0$) et une contrainte indépendante du temps $\Sigma_h(\varepsilon)$ irréversible, telle que :

$$\Sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \Sigma_v(\dot{\varepsilon}) + \Sigma_h(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \Sigma_h(\varepsilon) & = \Sigma_{r1}(\varepsilon) \qquad \text{en première charge} \\ \Sigma_h(\varepsilon) & = \Sigma_{r2}(\varepsilon) \qquad \text{en cyclique} \end{cases} \tag{7.10}$$

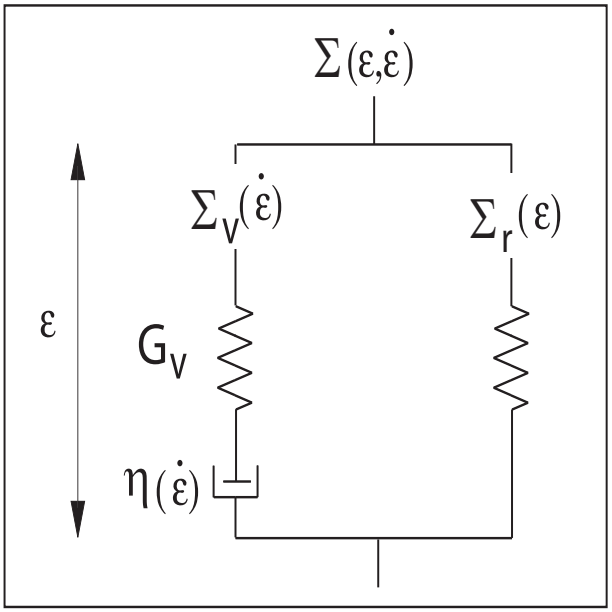


Fig. 7.4 – Modèle viscoélastique non linéaire à élasticité retardée non linéaire (Eq. 7.9).

où la contrainte viscoélastique $\Sigma_v(\dot{\varepsilon})$ est définie par les relations 7.2 et 7.3 et les contraintes $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$ et $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ correspondent à des contraintes élastiques non linéaires de rigidités $\frac{d\Sigma_{r1}}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ et $\frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ respectivement, variables en fonction de la déformation. En première charge on adopte la loi présentée au deuxième paragraphe et définie par les relations 7.4, 7.7 et 7.8, où la contrainte $\Sigma_r(\varepsilon)$ sera notée ici $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$. La contrainte irréversible indépendante du temps $\Sigma_h(\varepsilon)$ confère au modèle son comportement solide. En première charge la contribution $\Sigma_h(\varepsilon)$ est égale à $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$ (connexion 0-1, fig. 7.6) et au cours d'un cycle décharge-charge $\Sigma_h(\varepsilon)$ est égale à $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ (connexion 0-2, fig. 7.6).

Le comportement de la contribution de contrainte $\Sigma_h(\varepsilon)$ est illustré sur la figure 7.7, au cours d'un chargement $0aba$. Les chargements oa et ac correspondent à un comportement en première charge, avec $\Sigma_h(\varepsilon) = \Sigma_{r1}(\varepsilon)$. Les chargements ab et ba correspondent à un comportement cyclique réversible tel que $\Sigma_h(\varepsilon) = \Sigma_{r2}(\varepsilon)$. La transition du comportement de première charge au comportement cyclique réversible et inversement est assuré par un critère d'inversion, qui sera défini dans la suite. Le comportement de la figure 7.7 est équivalent à celui du modèle symbolique de la figure 7.6, pour une vitesse de déformation suffisamment faible, de sorte que l'intensité de la contribution viscoélastique $\Sigma_v(\dot{\varepsilon})$ soit négligeable ou à la limite nulle.

Les contributions de contrainte $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$ et $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ sont de type élastique non linéaire et ont un caractère réversible. Néanmoins, la contribution de contrainte $\Sigma_h(\varepsilon)$ présente un caractère irréversible indépendant du temps, compte tenu de sa définition. En effet, si on considère le chargement de la figure 7.7, une décharge ab, fait apparaître une déformation permanente en b.

7.5 Critère d'inversion

La contribution de contrainte $\Sigma_h(\varepsilon)$ est régie par la relation (7.10), au cours de la première charge et au cours d'un cycle décharge - charge. Nous introduisons une variable ε_R qui correspond à la déformation à l'inversion. Cette variable est constante lors d'un cycle décharge-charge, durant lequel elle est considérée comme un état de déformation de référence, mémorisé à l'inversion, telle

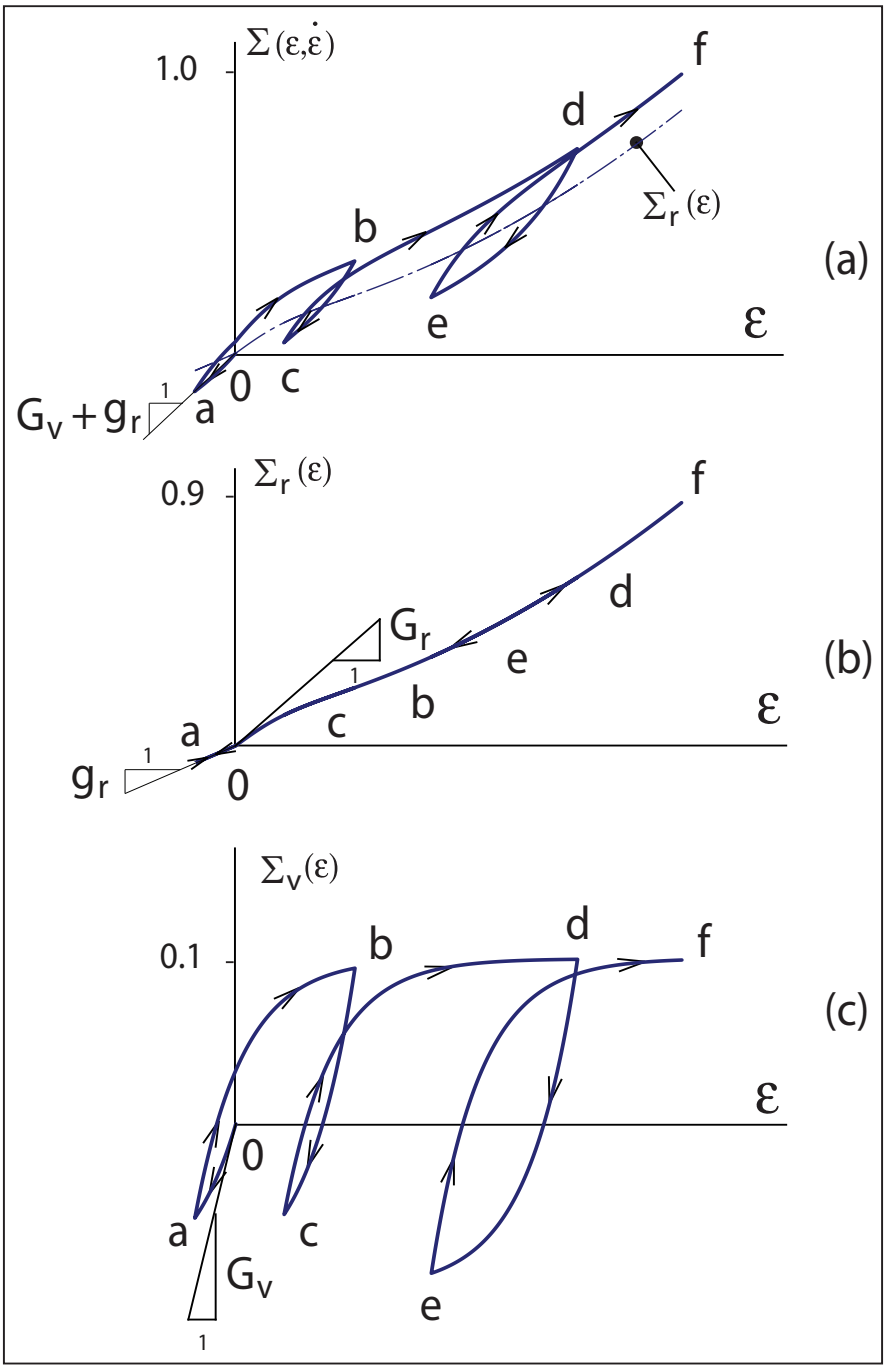


Fig. 7.5 – Illustration du comportement viscoélastique non linéaire à élasticité retardée non linéaire, d'un fil sujet à l'embuvage.

que :

$$\frac{d\varepsilon_R}{dt} = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon < \varepsilon_R \tag{7.11}$$

La figure 7.8 illustre le comportement du modèle de la figure 7.6, pour un fil droit et un chargement *oabcdef* ; le tableau 7.1 défini le critère d'inversion, la déformation de référence ε_R et la contrainte $\Sigma_h(\varepsilon)$. A l'état initial ($t = 0,\ \varepsilon = 0$) la déformation de référence ε_R et la contrainte $\Sigma_h(\varepsilon)$, sont nuls. Au cours d'un chargement en compression ($t > 0, \varepsilon(t) < 0$) la déformation de référence est nulle ($\varepsilon_R = 0$) et la contribution de contrainte $\Sigma_h(\varepsilon)$ est définie par la relation 7.7 ou la relation 7.8 selon que le fil est droit ou sujet à l'embuvage. Au cours de la première charge (0b, bd et df fig. 7.8) le comportement du modèle est défini par la relation (7.10) et à chaque instant t, la déformation de référence ($\varepsilon_R(t) = \varepsilon(t)$) (tab. 7.1 et fig. 7.8-b, 7.8-c). Le critère

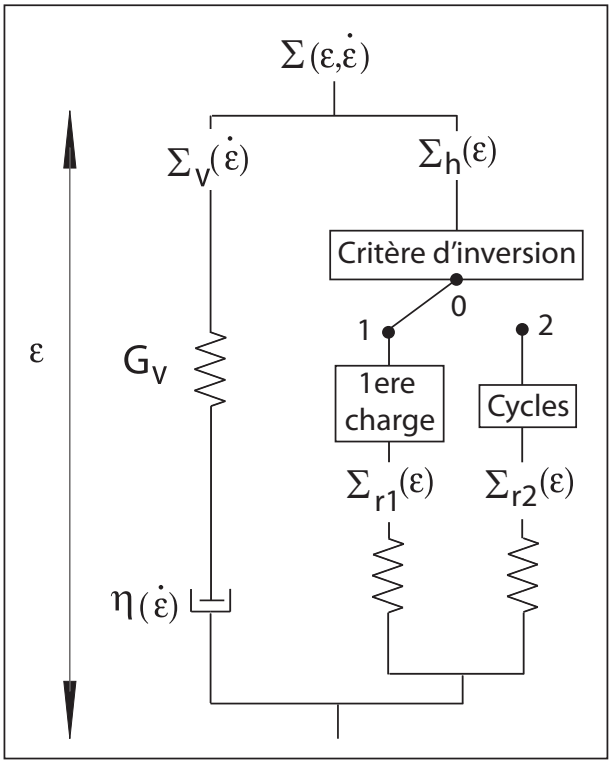


Fig. 7.6 – Hypothèse de superposition (7.10) dans le cas d'un comportement viscoélastique non-linéaire à comportement indépendant du temps irréversible.

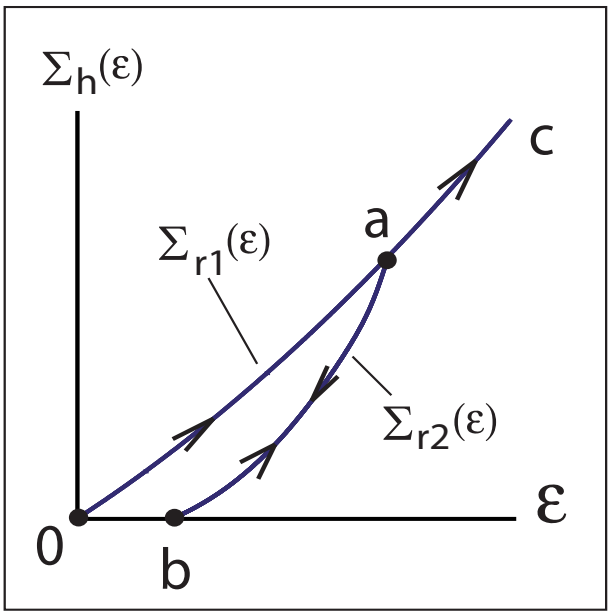


Fig. 7.7 – Comportement irréversible de la contribution de contrainte $\Sigma_h(\varepsilon)$.

d'inversion est tel que (tab. 7.1) :

$$\varepsilon(t) < \varepsilon_R(t - dt) \tag{7.12}$$

Lors d'une inversion ou au cours d'un cycle décharge-charge le comportement du modèle est défini par la relation (7.10) et la valeur de la déformation de référence $\varepsilon_R(t)$ est maintenue constante, jusqu'au retour à la première charge. La figure 7.8-c donne l'évolution de la variable ε_R au cours du chargement $oabcdef$. Cette figure montre que la déformation de référence ε_R et

égale à la déformation courante en première charge ; aux inversions b et d la variable ε_R mémorise les valeurs des déformations ε_b et ε_d, et sa valeur est maintenue constante au cours des cycles décharge-charge bcb et ded, respectivement.

Table 7.1: Critère d'inversion ainsi que la définition de ε_R et de la contrainte $\Sigma_h(\varepsilon)$.

Temps	ε	Modèle	Illustration
t = 0	$\varepsilon(t) = 0$	État initial, $\varepsilon_R = 0$, $\Sigma_h(\varepsilon) = 0$	Point 0 fig. 7.8
t > 0	$\varepsilon(t) < 0$ et $\varepsilon_R = 0$	Comportement en compression, $\varepsilon_R = 0$, $\Sigma_h(\varepsilon) = G_{r1}.\varepsilon$ ou $\Sigma_h(\varepsilon) = g_{r1.\varepsilon}$	Chargements 0a et a0 fig. 7.8-b et c
	$\varepsilon(t) \geq \varepsilon_R(t - dt)$	Comportement en première charge, $\varepsilon_R(t) = \varepsilon(t)$, $\Sigma_h(\varepsilon) = \Sigma_{r1}(\varepsilon)$	Chargements 0b, bd et df fig. 7.8-b et c
	Critère d'inversion $\varepsilon(t) < \varepsilon_R(t - dt)$	Inversion et comportement cyclique, $\varepsilon_R(t) = \varepsilon_R(t - dt)$, $\Sigma_h(\varepsilon) = \Sigma_{r2}(\varepsilon)$	Chargements bc, cb, de et ed fig. 7.8-b et c

7.6 Comportement élastique non linéaire lors d'un cycle décharge-charge.

Au cours d'un cycle décharge-charge la contrainte indépendante du temps $\Sigma_h(\varepsilon)$ est égale à $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$. Il s'agit dans ce paragraphe de définir cette contribution de contrainte, qui est de type élastique non linéaire. En première charge, la contribution $\Sigma_h(\varepsilon)$ est égale à $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$, qui est définie par les relations 7.4, 7.7 et 7.8 ; les paramètres correspondants seront notés respectivement L_{r1}, G_{r1}, H_{r1}, K_{r1}, ε^*_{r1} et g_{r1}. Une inversion de la sollicitation, en première charge, est définie par le couple $(\Sigma_R, \varepsilon_R)$, qui correspond respectivement à la contrainte et à la déformation à l'inversion fig. 7.9. La forme de la loi $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ est d'abord définie dans les axes $(\Delta\Sigma, \Delta\varepsilon)$, tels que :

$$\Delta\Sigma = \Sigma_R - \Sigma \qquad et \qquad \Delta\varepsilon = \varepsilon_R - \varepsilon \tag{7.13}$$

sous la forme d'une expression $\Delta\Sigma_{r2}(\Delta\varepsilon)$; ensuite, on transforme l'expression ainsi obtenue dans les axes (Σ, ε), telle que :

$$\Sigma_{r2}(\varepsilon) = \Sigma_R - \Delta\Sigma_{r2}(\Delta\varepsilon) \tag{7.14}$$

Le module élastique de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ à l'inversion est noté $G_R(\varepsilon_R)$; il est, par définition :

$$G_R(\varepsilon_R) = \frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon_R) \tag{7.15}$$

sa valeur peut être fixée en fonction du module élastique en première charge $\frac{d\Sigma_{r1}}{d\varepsilon}(\varepsilon_R)$ et en fonction de ε_R, qui détermine la position de l'inversion sur la courbe de première charge. On adopte une variation linéaire en fonction de ε_R, du rapport des modules en décharge et en première charge, à l'inversion, tel que :

$$G_R(\varepsilon_R) = \frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon_R) = A^{'}\varepsilon_R \frac{d\Sigma_{r1}}{d\varepsilon}(\varepsilon_R) \tag{7.16}$$

où A' est une constante positive sans unité.

Plusieurs modèles sont proposés pour décrire la contribution de contrainte $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$. Trois modèles, désignés respectivement par les lettres A, B et C, seront présentés dans ce paragraphe. Les autres propositions seront données en annexe A.

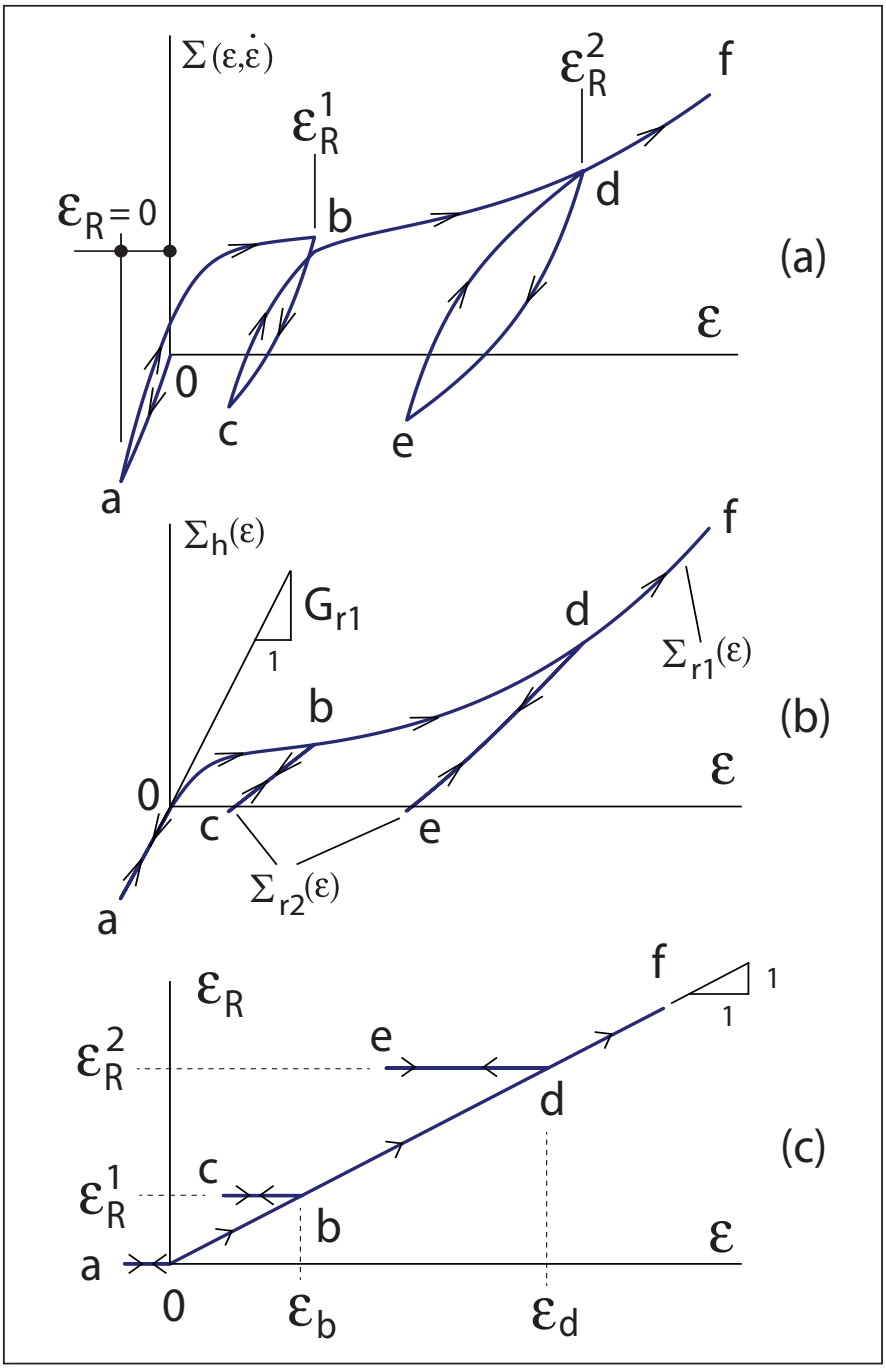


Fig. 7.8 – Illustration du comportement viscoélastique non-linéaire à comportement indépendant du temps irréversible.

- **Modèle A**

Ce modèle est défini dans les axes ($\Delta\Sigma$, $\Delta\varepsilon$), par :

$$\Delta\Sigma_{r2}(\Delta\varepsilon) = \Sigma_R \tanh\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right) + M\Delta\varepsilon \tag{7.17}$$

Où M est un module élastique constant et $\varepsilon^*(\varepsilon_R)$ est tel que :

$$\varepsilon^*(\varepsilon_R) = \frac{\Sigma_R}{G_R(\varepsilon_R)} \tag{7.18}$$

où $G_R(\varepsilon_R)$ est défini par la relation (7.16). En utilisant les relations (7.13) et (7.14), on en déduit

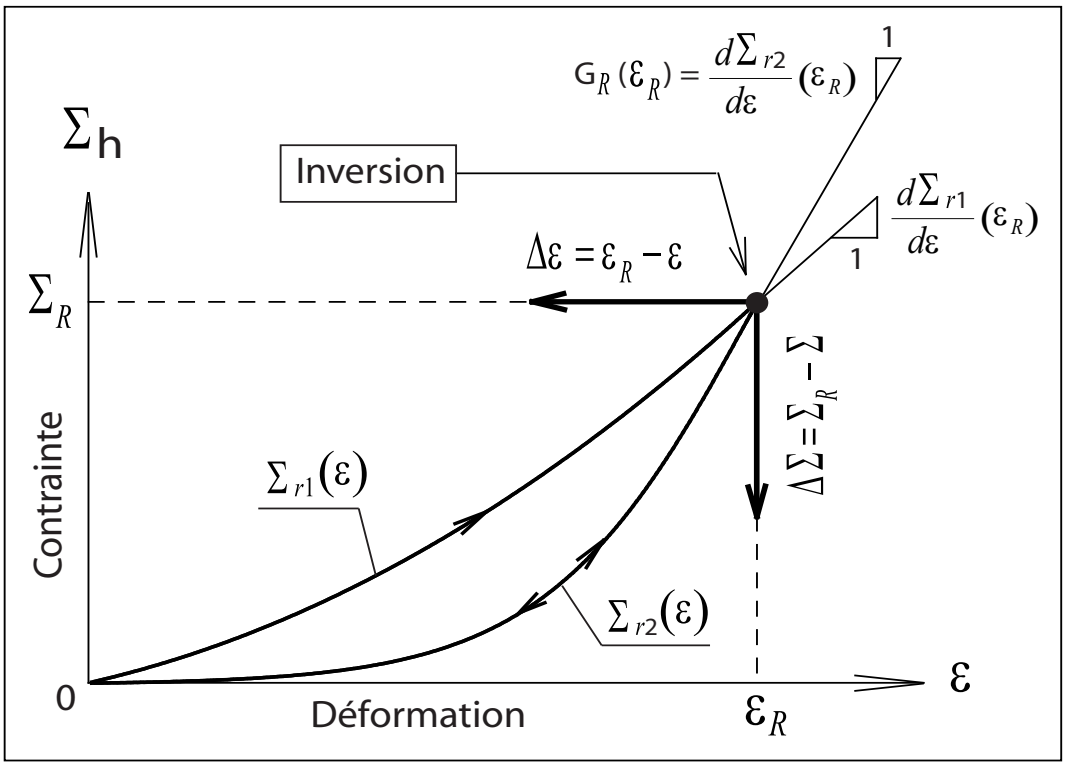


Fig. 7.9 – Illustration de démarche de définition de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$.

la loi dans les axes (Σ, ε), telle que :

$$\Sigma_{r2}(\varepsilon) = \Sigma_R \left\{ 1 - \tanh\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_R}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)} \right) \right\} - M(\varepsilon - \varepsilon_R) \tag{7.19}$$

La figure 7.10 illustre le comportement du modèle pour plusieurs inversions à partir de la courbe de première charge $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$. A partir de la relation 7.19, on calcule le module élastique de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$, tel que :

$$\frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon) = G_R(\varepsilon_R) \left\{ 1 - \tanh^2\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_R}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)} \right) \right\} + M \tag{7.20}$$

Le module à l'inversion pour une déformation donnée, est tel que :

$$\frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon_R) = G_R(\varepsilon_R) + M \tag{7.21}$$

Ainsi le module à l'inversion, du modèle A, est défini par la relation (7.16) et la relation (7.21). Compte tenu de la relation (7.16), le module à l'inversion quand ε_R tend vers zéro est tel que :

$$\frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon_R) = M \qquad , \qquad \forall A' \tag{7.22}$$

Pour avoir un comportement à l'origine physiquement admissible, la valeur du module M doit vérifier l'inégalité suivante :

$$M \geq G_{r1} \tag{7.23}$$

Si $M = G_{r1}$, une inversion proche de l'origine donne un module de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ proche de G_{r1} (fig. 7.10). Si $M < G_{r1}$, la valeur de la contrainte $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ en décharge, peut être supérieure à celle de la contrainte de première charge $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$, ce qui conduit à un comportement qui semble aberrant.

- **Modèle B**

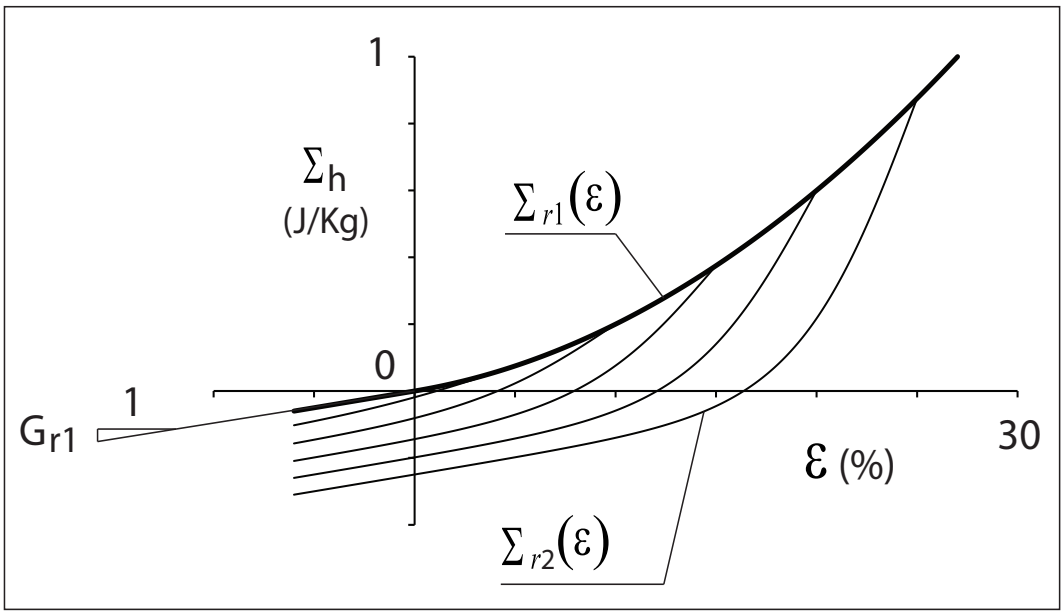


Fig. 7.10 – Illustration du modèle A (Eq. 7.19), avec $G_{r1} = L_{r1} = M = 1J/Kg$, $H_{r1} = 10J/Kg$, $K_{r1} = 0$ et $A^{'} = 10$.

Ce modèle est une variante du modèle A. Il est défini dans les axes ($\Delta\Sigma$, $\Delta\varepsilon$), par :

$$\Delta\Sigma_{r2}(\Delta\varepsilon) = \Sigma_R \ \tanh\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right) / \tanh\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right) + M\Delta\varepsilon \tag{7.24}$$

où M est un module élastique constant, qui joue le même rôle que pour le modèle A et $\varepsilon^*(\varepsilon_R)$ est défini de la même façon par la relation (7.18). En utilisant les relations (7.13) et (7.14), on en déduit la loi dans les axes (Σ, ε), telle que :

$$\Sigma_{r2}(\varepsilon) = \Sigma_R \ \left\{1 - \tanh\left(\frac{\varepsilon_R - \varepsilon}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right) / \tanh\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right)\right\} - M \ (\varepsilon_R - \varepsilon) \tag{7.25}$$

La figure 7.11 illustre le comportement du modèle, avec un module $M = 0$ et plusieurs inversions à partir de la courbe de première charge $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$. Nous notons sur cette illustration que pour $M = 0$ et $\varepsilon > 0$ le modèle B ne présente pas de domaine où la contrainte $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ est en compression ($\Sigma_{r2}(\varepsilon) \geq 0$). Par ailleurs, pour $M = 0$ et $\varepsilon < 0$, le module en compression de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ dépend de ε_R et sa valeur est comprise entre zéro et G_{r1}. Pour avoir des modules en compression de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ supérieurs à G_{r1}, il est nécessaire d'adopter un module $M \neq 0$ comme dans le cas du modèle A.

A partir de la relation (7.25), on calcule le module élastique de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$, tel que :

$$\frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{G_R(\varepsilon_R)}{\tanh\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right)} \left\{1 - \tanh^2\left(\frac{\varepsilon_R - \varepsilon}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right)\right\} + M \tag{7.26}$$

Le module à l'inversion pour une déformation ε_R, est donné par :

$$\frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon_R) = \frac{G_R(\varepsilon_R)}{th\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right)} + M \tag{7.27}$$

Ainsi le module à l'inversion, du modèle B, est défini par la relation (7.16) et la relation (7.27).

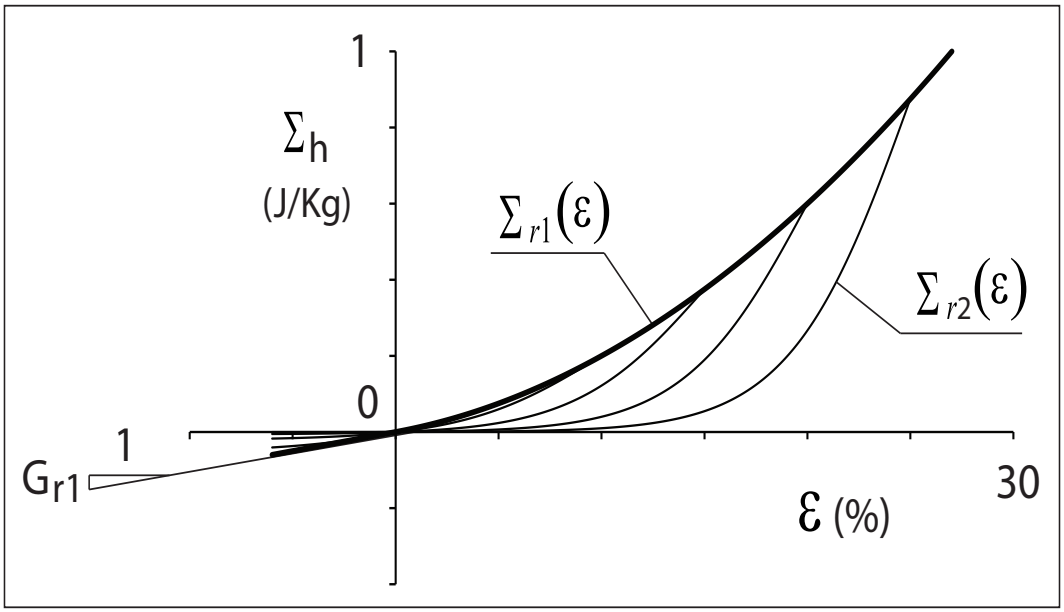


Fig. 7.11 – Illustration du modèle B (Eq. 7.25), avec $G_{r1} = L_{r1} = 1J/Kg$, $H_{r1} = 10J/Kg$, $M = K_{r1} = 0$ et $A^{'} = 10$.

- **Modèle C**

Ce modèle est une extension du modèle B, avec une possibilité de réglage de la courbure de la courbe de décharge $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$. Le modèle C est défini dans les axes ($\Delta\Sigma$, $\Delta\varepsilon$), par :

$$\Delta\Sigma_{r2}(\Delta\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2} \Sigma_{Ri} \tanh\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_i^*(\varepsilon_R)}\right) / \tanh\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_i^*(\varepsilon_R)}\right) + M\Delta\varepsilon \tag{7.28}$$

En utilisant les relations (7.13) et (7.14), on en déduit la loi dans les axes (Σ, ε), telle que :

$$\Sigma_{r2}(\varepsilon) = \Sigma_R - \left\{\sum_{i=1}^{2} \Sigma_{Ri} \tanh\left(\frac{\varepsilon_R - \varepsilon}{\varepsilon_i^*(\varepsilon_R)}\right) / \tanh\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_i^*(\varepsilon_R)}\right)\right\} - M(\varepsilon_R - \varepsilon) \tag{7.29}$$

Où M est un module élastique constant, qui joue le même rôle que pour les modèles A et B. Les autres paramètres sont tels que :

$$\Sigma_{R1} = \gamma.\Sigma_R \quad ; \quad \Sigma_{R2} = (1-\gamma).\Sigma_R \quad \text{avec } \gamma \text{ une constante telle que} \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \tag{7.30}$$

$$\varepsilon_1^*(\varepsilon_R) = \frac{\Sigma_R}{\beta.G_R(\varepsilon_R)} \; ; \; \varepsilon_2^*(\varepsilon_R) = \frac{\Sigma_R}{(1-\beta).G_R(\varepsilon_R)} \quad \text{avec } \beta \text{ une constante telle que} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \tag{7.31}$$

où $G_R(\varepsilon_R)$ est défini par la relation 7.16. A partir de la relation 7.29, on calcule le module élastique de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$, tel que :

$$\frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon) = G_R(\varepsilon_R)\left\{\frac{\gamma\beta}{\tanh\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_1^*(\varepsilon_R)}\right)}\left[1 - \tanh^2\left(\frac{\varepsilon_R - \varepsilon}{\varepsilon_1^*(\varepsilon_R)}\right)\right] + \frac{(1-\gamma)(1-\beta)}{th\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_2^*(\varepsilon_R)}\right)}\left[1 - \tanh^2\left(\frac{\varepsilon_R - \varepsilon}{\varepsilon_2^*(\varepsilon_R)}\right)\right]\right\} + M \tag{7.32}$$

Le module à l'inversion pour une déformation ε_R, est donné par :

$$\frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon_R) = G_R(\varepsilon_R)\left\{\frac{\gamma\beta}{\tanh\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_1^*(\varepsilon_R)}\right)} + \frac{(1-\gamma)(1-\beta)}{\tanh\left(\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_2^*(\varepsilon_R)}\right)}\right\} + M \tag{7.33}$$

Ainsi le module à l'inversion, du modèle C, est défini par la relation (7.16) et la relation (7.33).

La figure 7.12 donne une illustration du comportement du modèle C, défini par les relations 7.29 à 7.31, avec un module $M = 0$ et pour une inversion unique telle que ε_R est une constante. Les paramètres β et γ permettent de modifier la courbure de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$.

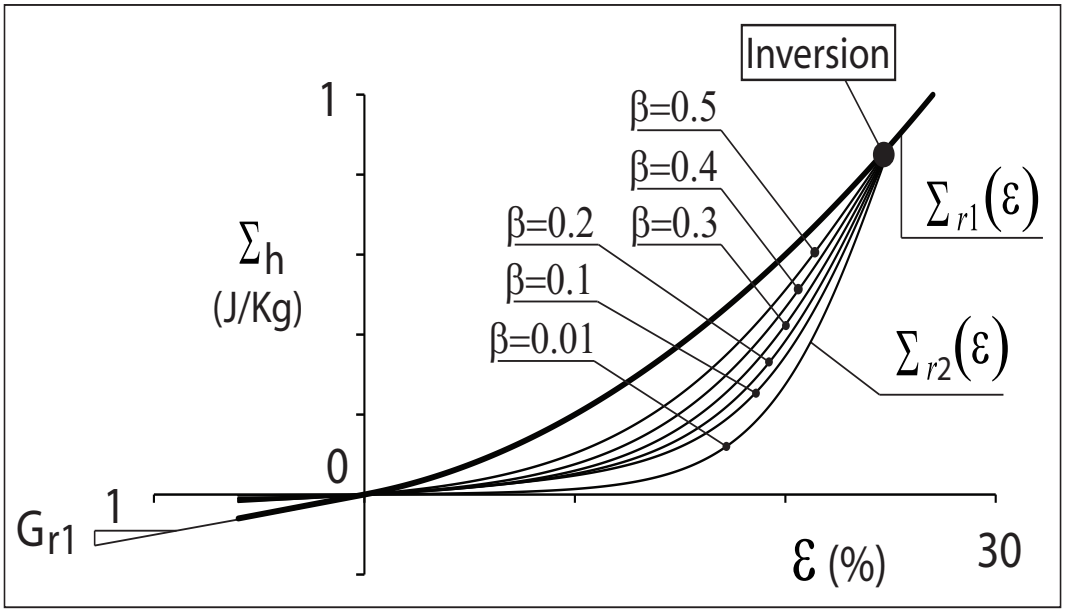


Fig. 7.12 – Illustration du modèle C (Eq. 7.29 à 7.31), avec $G_{r1} = L_{r1} = 1J/Kg$, $H_{r1} = 10J/Kg$, $M = K_{r1} = 0$, $\gamma = 0.1$ et $A^{'} = 10$.

7.7 Modélisation de l'interaction entre deux fils en un point de liage

Pour décrire le comportement d'interaction entre deux fils en un point de liage, on adopte un modèle viscoélastique non-linéaire à élasticité retardée linéaire, tel que :

$$\Sigma_{ct}(\varepsilon_\gamma, \dot{\varepsilon}_\gamma) = \Sigma^v_{ct}(\dot{\varepsilon}_\gamma) + \Sigma^r_{ct}(\varepsilon_\gamma) \tag{7.34}$$

où $\Sigma_{ct}(\varepsilon_\gamma, \dot{\varepsilon}_\gamma)$ est la contrainte d'interaction, qui apparaît comme la somme de deux contributions de contrainte ; une contrainte viscoélastique non linéaire $\Sigma^v_{ct}(\dot{\varepsilon}_\gamma)$ et une contrainte réversible indépendante du temps $\Sigma^r_{ct}(\varepsilon_\gamma)$. La déformation ε_γ et la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_\gamma$ correspondent respectivement à la déformation de distorsion et sa vitesse. Le choix de la déformation ε_γ, pour la définition du modèle d'interaction entre deux fils, est motivé par la définition même de cette déformation, qui est directement liée à la valeur de l'angle entre les fils (cf. chapitre 2 § 2.3.2). Le modèle symbolique de la figure 7.13 illustre la relation (7.34). La contrainte viscoélastique $\Sigma^v_{ct}(\dot{\varepsilon}_\gamma)$ est du type Maxwell, définie par une équation de comportement équivalente à l'équation 7.2, avec les paramètres G^v_{ct} et $\eta_{ct}(\dot{\varepsilon}_\gamma)$. Elle a le caractère d'un fluide non newtonien avec une élasticité de module G^v_{ct} constant et une viscosité $\eta_{ct}(\dot{\varepsilon}_\gamma)$ dépendante de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_\gamma$, dont l'évolution est décrite par un modèle de Carreau-Yasuda (cf. relation 1.8 et chapitre 1, § 1.4.2), avec les paramètres η^∞_{ct}, η^0_{ct}, λ_{ct}, n_{ct}, et a_{ct}. Pour décrire la contrainte réversible

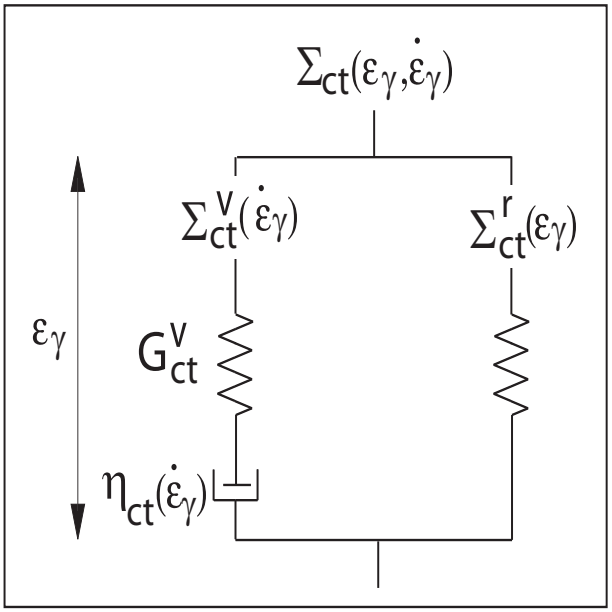


Fig. 7.13 – Modèle viscoélastique de l'interaction entre deux fils (Eq. 7.34).

indépendante du temps $\Sigma^r_{ct}(\varepsilon_\gamma)$, on adopte une loi linéaire, telle que :

$$\Sigma^r_{ct}(\varepsilon_\gamma) = K_\gamma.\varepsilon_\gamma \tag{7.35}$$

où K_γ est un module élastique.

7.8 Application à la modélisation d'une sangle en PA66

Pour éprouver les modèles présentés plus haut et mesurer leur degré de validité, nous nous proposons dans ce paragraphe de modéliser le comportement d'une sangle en PA66, dont les résultats expérimentaux ont été présentés au chapitre 1 (cf. chapitre 1 § 1.5). Le comportement de la sangle est assimilé à un comportement unidimensionnel et on adopte le modèle de comportement viscoélastique non-linéaire à comportement indépendant du temps irréversible, présenté au paragraphe 7.4. Les résultats expérimentaux disponibles sont présentés en fonction de la contrainte de Cauchy. Par conséquent, on utilise la contrainte de Cauchy pour réaliser cette modélisation. Ainsi les contraintes massiques $\Sigma(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$, $\Sigma_h(\varepsilon)$, $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$, $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ et $\Sigma_v(\dot{\varepsilon})$ seront remplacées par les contraintes de Cauchy correspondantes $\sigma(\varepsilon,\dot{\varepsilon})$, $\sigma_h(\varepsilon)$, $\sigma_{r1}(\varepsilon)$, $\sigma_{r2}(\varepsilon)$ et $\sigma_v(\dot{\varepsilon})$. Concernant les modules élastiques et les paramètres des lois, présentés au paragraphe 7.4, on gardera les mêmes notations moyennant un changement d'unité, quand cela est nécessaire.

7.8.1 Identification des paramètres de la contrainte élastique non linéaire en première charge

Les résultats expérimentaux ont permis de caractériser et d'identifier le comportement indépendant du temps, noté $\sigma_{ti}(\varepsilon)$ par l'auteur (cf. relation (1.9) et tab. (1.1) du chapitre 1). Ce comportement correspond à celui de la composante de contrainte élastique non linéaire en première charge $\sigma_{r1}(\varepsilon)$, soit :

$$\sigma_{r1}(\varepsilon) = \sigma_{ti}(\varepsilon) \tag{7.36}$$

Pour décrire le comportement de la contrainte $\sigma_{r1}(\varepsilon)$, nous avons utilisé la loi définie par la relation 7.4, avec $G_r = L_r$ et $K_r = 0$, ce qui conduit à une forme de $\sigma_{r1}(\varepsilon)$ en polynôme de degré

2. La figure 7.14 illustre la relation 7.36, qui a permis d'identifier les paramètres G_r et H_r de la contrainte $\sigma_{r1}(\varepsilon)$. Les valeurs des paramètres G_r et H_r identifiées sont données sur le tableau 7.2.

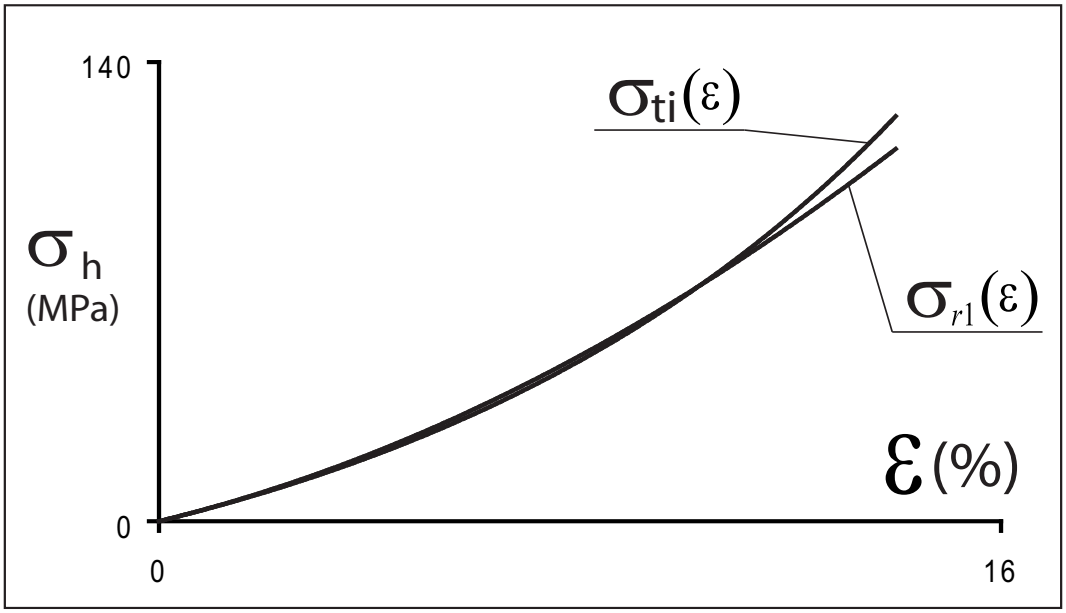


Fig. 7.14 – Identification de la contrainte élastique non linéaire en première charge $\sigma_{r1}(\varepsilon)$.

7.8.2 Identification des paramètres de la composante visqueuse non-Newtonienne :

Le seuil visqueux établi par l'auteur est défini par la relation (1.12) du chapitre 1. Cette relation montre que ce seuil dépend à la fois de la déformation et de la vitesse de déformation. Dans le cadre de modélisation adoptée ici, la viscosité ne dépend que de la vitesse de déformation, conformément au modèle Carreau-Yasuda (cf. relation 7.3). Par conséquent nous adoptons une expression approchée du seuil visqueux indépendante de la déformation. Pour cela la fonction $b^\infty(\varepsilon)$, proposée par l'auteur (1.12) du chapitre 1, est approchée par une valeur moyenne constante, notée b^∞, comprise entre $b^\infty(\varepsilon = 0)$ et $b^\infty(\varepsilon = 14\%)$, telles que :

$$b^\infty = 5.4 \text{ MPa/décade} \tag{7.37}$$

On en déduit l'expression de la viscosité des sangles par (cf. chapitre 1) :

$$\eta(\dot{\varepsilon}) = \frac{\sigma_v^\infty(\dot{\varepsilon})}{\dot{\varepsilon}} = \frac{b^\infty \log\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} + 1\right)}{\dot{\varepsilon}} \qquad \text{avec} \qquad \dot{\varepsilon}_0 = 10^{-\frac{\sigma_1}{b_0}} \tag{7.38}$$

Nous avons réalisé deux modélisations, illustrées par la figure 7.15 ; le tableau 7.2 donne les deux jeux de paramètres, correspondants à ces deux modélisations. Afin de mesurer la pertinence du modèle visqueux, la modélisation 1 est relativement peu précise et la modélisation 2 reproduit convenablement la zone utile de la courbe qui correspond au domaine en loi puissance d'Ostwald et de de-Waele (cf. § 1.4 chapitre 1). L'élasticité instantanée de la sangle est caractérisée par un module $Eins(\varepsilon)$ défini par la relation (1.10) et le tableau (1.1), du chapitre 1. Compte tenu des propriétés du comportement viscoélastique, en première charge le module élastique instantanée est tel que :

$$\text{Eins}(\varepsilon) = G_V(\varepsilon) + \frac{d\sigma_{ti}}{d\varepsilon} \tag{7.39}$$

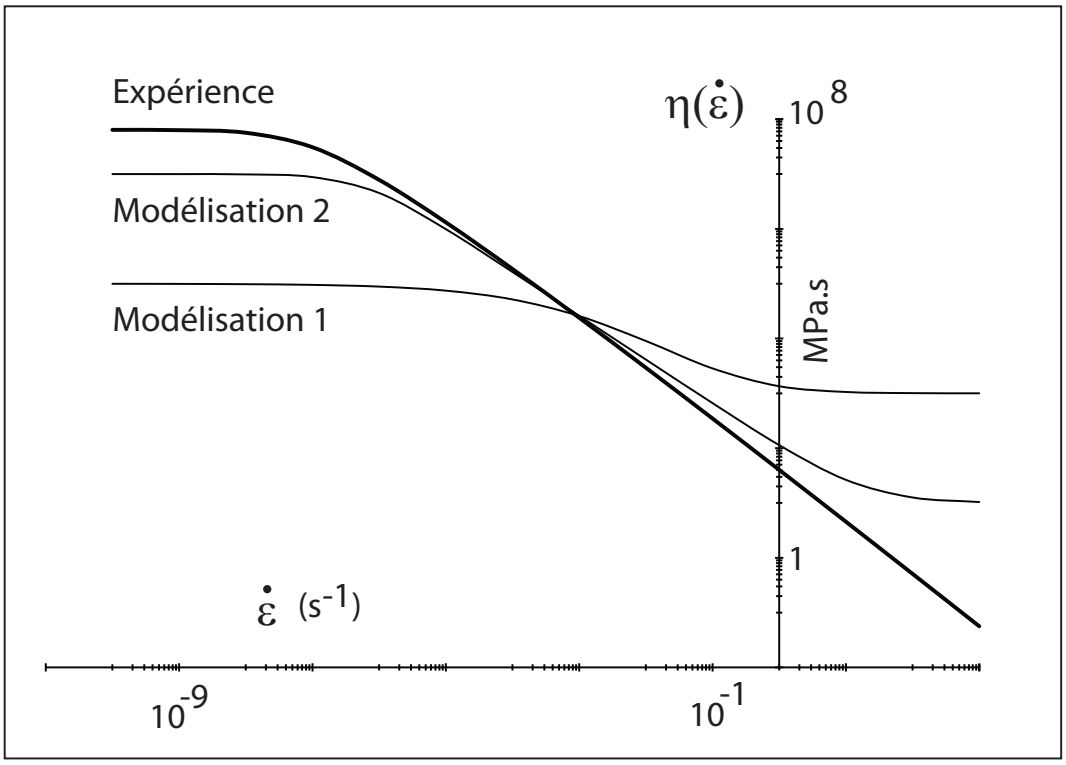


Fig. 7.15 – Résultat de la modélisation de la viscosité $\eta(\dot{\varepsilon})$ de la sangle par un modèle Carreau-Yasuda.

où $G_V(\varepsilon)$ correspond au module élastique de la contribution de contrainte viscoélastique. La relation 7.39 permet de caractériser le module $G_V(\varepsilon)$ en fonction des modules $Eins(\varepsilon)$ et $\frac{d\sigma_{ti}}{d\varepsilon}$. La figure 7.16 donne l'évolution du module. La relation (7.39) et la figure 7.16 montrent que le

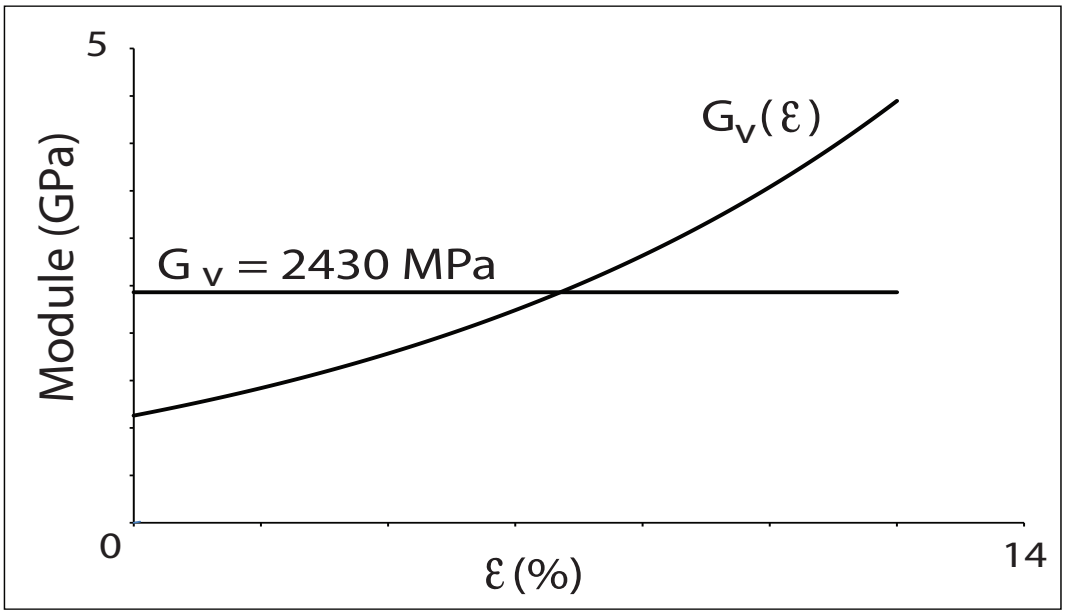


Fig. 7.16 – Evolution du module élastique de la contribution de contrainte viscoélastique - Sangle en PA66.

module élastique de la contribution de contrainte viscoélastique est variable en fonction de la déformation. Mais la modélisation que nous avons adoptée ici préconise un module G_V constant, indépendant de la déformation (relation (7.2) et figure 7.6). Nous avons donc adopté une valeur moyenne $G_V = 2430MPa$. Cette valeur est comparée à l'évolution effective du module $G_V(\varepsilon)$ de

la sangle, sur la figure 7.16.

7.8.3 Identification des paramètres de la composante élastique non linéaire au cours d'un cycle décharge-charge

Pour décrire le comportement indépendant du temps en décharge-charge $\sigma_{r2}(\varepsilon)$, nous adoptons le modèle C (§ 7.6 et relations 7.29 à 7.31). Pour identifier les paramètres de $\sigma_{r2}(\varepsilon)$, nous avons utilisé les données expérimentales des essais GK38 et GK36 de fond de relaxation dans les boucles et de fond de fluage dans les boucles, respectivement (fig. 1.18 et 1.19 chapitre 1). La figure 7.17 illustre l'identification des paramètres A', β et γ de la contrainte $\sigma_{r2}(\varepsilon)$. Les valeurs de ces paramètres sont données par le tableau 7.2.

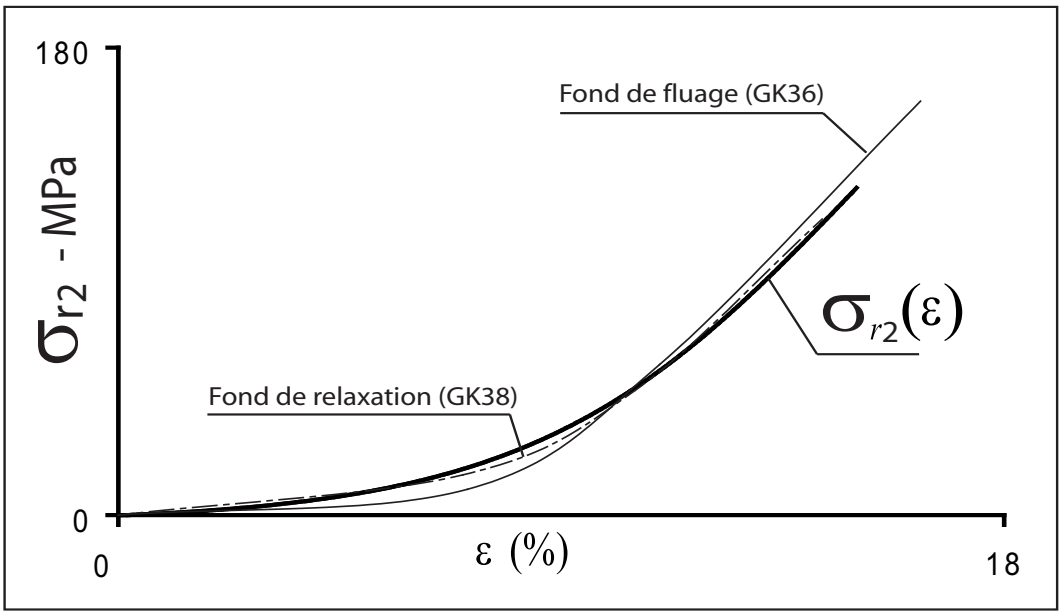


Fig. 7.17 – Identification des paramètres de $\sigma_{r2}(\varepsilon)$.

Table 7.2: L'ensemble des paramètres identifiés pour les sangles en PA66 du groupe A.

Paramètres	**Modélisation 1**	**Modélisation 2**	**Unités**
G_{r1}	391		MPa
H_{r1}	3		GPa
G_v	2430		MPa
A'	10		-
β	0.12		-
γ	0.14		-
η_∞	10^3	10^1	$MPa.s$
η_0	10^5	10^7	$MPa.s$
λ	10^3	17.10^5	s
a	0.4	1.0	-
n	0.2	0.2	-

7.8.4 Résultats de modélisation du comportement des sangles

La figure 7.18 donne la modélisation du comportement des sangles kaki du groupe A pour des tractions monotones à différentes vitesses de déformation. Les résultats correspondant à cette

modélisation sont ceux de la figure 1.16 du chapitre 1. Pour réaliser cette modélisation nous avons utilisé les paramètres de la modélisation 2 du tableau 7.2.

La figure 7.19 donne un résultat de modélisation en traction ondulée à différentes vitesses de

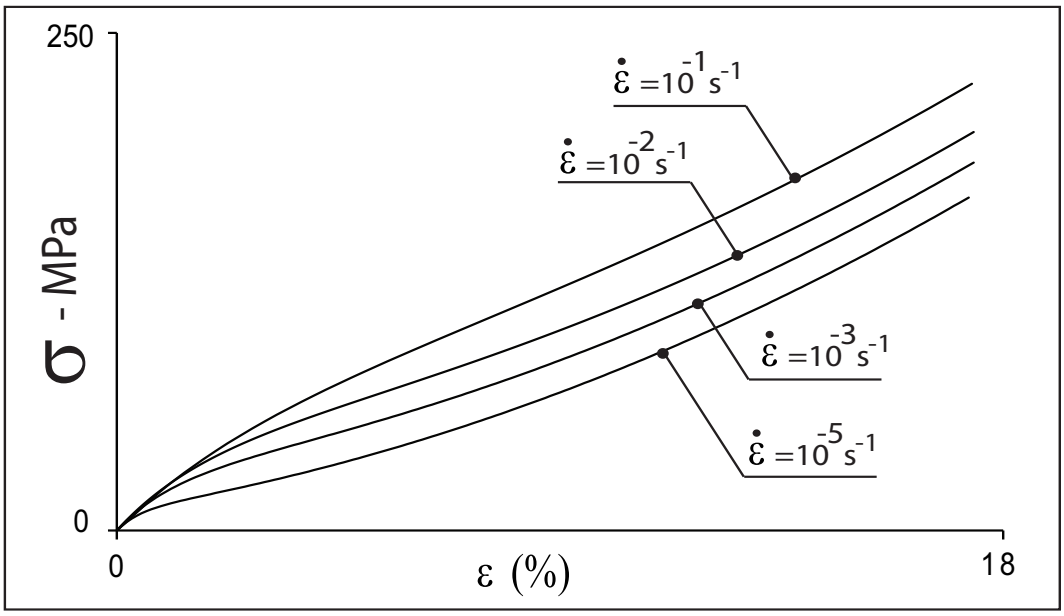


Fig. 7.18 – Modélisation de tractions monotones à différentes vitesses de déformation des résultats de la figure 1.16 du chapitre 1 - Paramètres de la modélisation 2 (tab. 7.2).

déformation. Sur cette figure nous avons superposé la contrainte totale $\sigma(\varepsilon)$ et la contrainte du comportement indépendant du temps $\sigma_h(\varepsilon)$. Pour réaliser cette modélisation nous avons utilisé les paramètres de la modélisation 2 des sangles kaki du groupe A (Tab. 7.2). La sollicitation est équivalente à celle du résultat de l'essai Gv35 donné sur la figure 1.17 du chapitre 1 et obtenu sur un groupe différent de sangles vertes. Même si la modélisation et l'expérience ne correspondent pas au même groupe de sangles, la modélisation de la figure 7.19 montre que le modèle est capable de prédire la forme typique en « haricot » des boucles de décharge-charge. Nous notons par ailleurs, que la forme de la boucle de décharge-charge est très sensible à l'effet visqueux et à la forme de la contrainte $\sigma_{r2}(\varepsilon)$.

Les deux résultats expérimentaux des figures 1.18 et 1.19 du chapitre 1 ont été modélisés. Ces modélisations sont données sur les figures 7.20 et 7.21, respectivement, avec les deux jeux de paramètres correspondants aux deux modélisations 1 et 2 du tableau 7.2. La figure 7.22 donne la comparaison des évolutions de la déformation et de la contrainte en fonction du temps, correspondants à ces deux modélisations. La modélisation 2 semble de meilleure qualité ; elle donne une épaisseur de boucle plus importante, qui se rapproche le plus de celle obtenue expérimentalement (fig. 7.20 et 7.21). Sur la figure 7.21, la contribution de contrainte $\sigma_{r2}(\varepsilon)$ a été ajoutée en trait mixte. Malgré une durée assez longue des séquences de relaxation et de fluage (durée 1 heure), le fond de relaxation et de fluage n'atteint pas le comportement retardé. Ceci peut s'observer sur la figure 7.21 ainsi que sur la figure 7.22, où les séquences de relaxation et de fluage n'atteignent pas le seuil de saturation.

La figure 7.22 montre que la forme des relaxations et des fluages est très sensible aux paramètres de la viscosité. Une étude particulière de cet aspect reste à développer afin de comprendre l'influence de ces paramètres sur la forme des relaxations et des fluages.

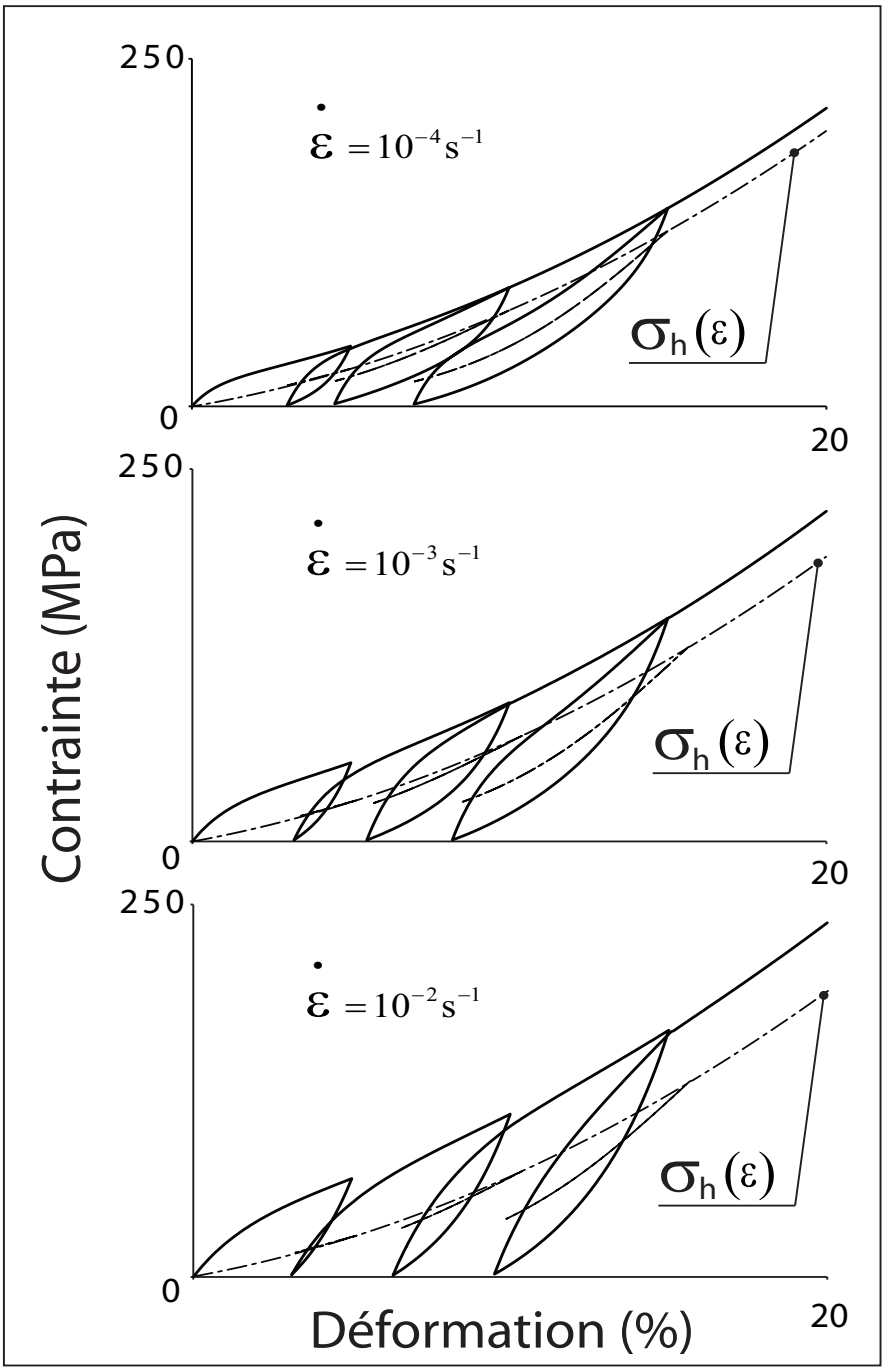


Fig. 7.19 – Modélisation d'une traction ondulée à différentes vitesses de déformation - Paramètres de la modélisation 2 (tab. 7.2).

Des modélisations complémentaires montrent qu'une durée de 4h pour les séquences de fluage et de 3h pour les séquences de relaxation sont nécessaires pour atteindre le comportement retardé. Les figures 7.23 et 7.24 donnent une comparaison expérience modélisation des résultats des essais GK38 et GK36. Ces modélisations correspondent aux paramètres de la modélisation 2 du tableau 7.2, avec $G_V = 3.5\ GPa$ et des durées de relaxation et de fluage suffisantes pour atteindre le comportement retardé. La valeur plus élevé de G_V adoptée, a pour effet d'augmenter la taille des boucles d'hystérésis.

Ces résultats montrent que le modèle prévoit le sens des relaxations et des fluages, quelle que soit la position de la séquence de relaxation ou de fluage en première charge ou dans une boucle de décharge-charge.

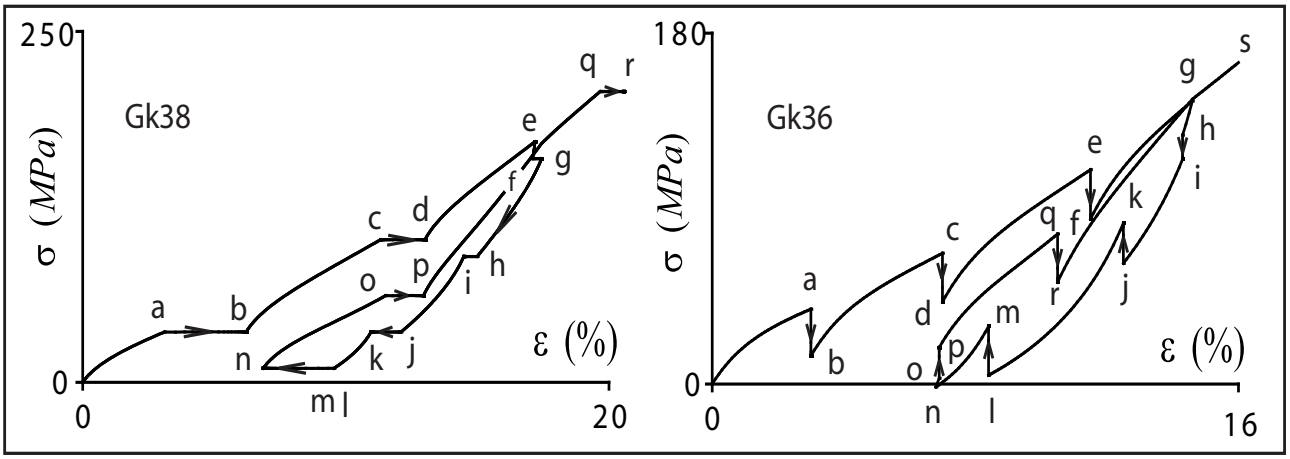


Fig. 7.20 – Modélisation des essais GK38 et GK36 des figures 1.18 et 1.19 du chapitre 1 - Paramètres modélisation 1 (tab. 7.2).

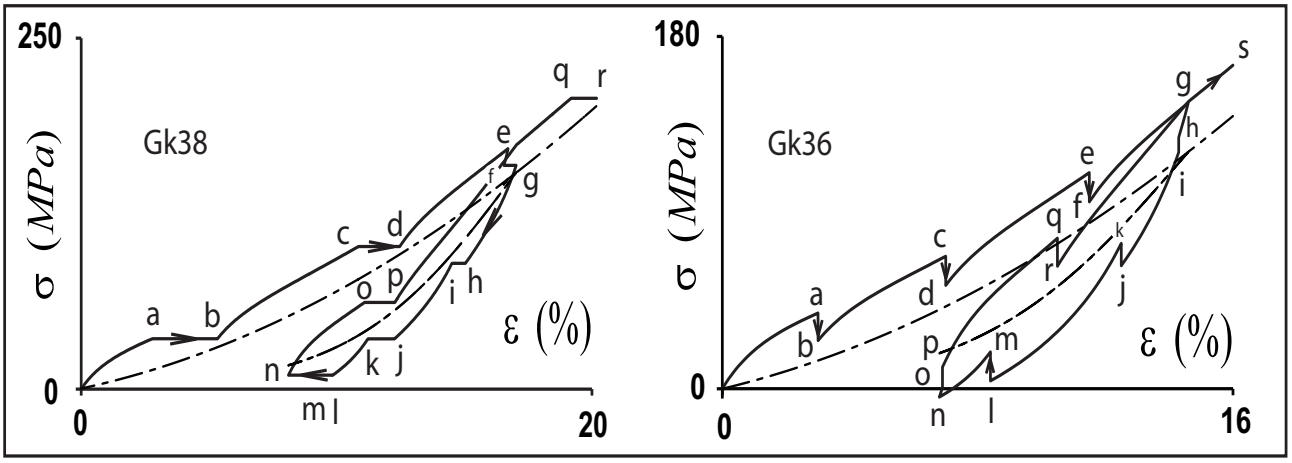


Fig. 7.21 – Modélisation des essais GK38 et GK36 des figures 1.18 et 1.19 du chapitre 1 - Paramètres modélisation 2 (tab. 7.2) - $\sigma(\varepsilon)$ en Trait fort et $\sigma_{r2}(\varepsilon)$ en trait mixte.

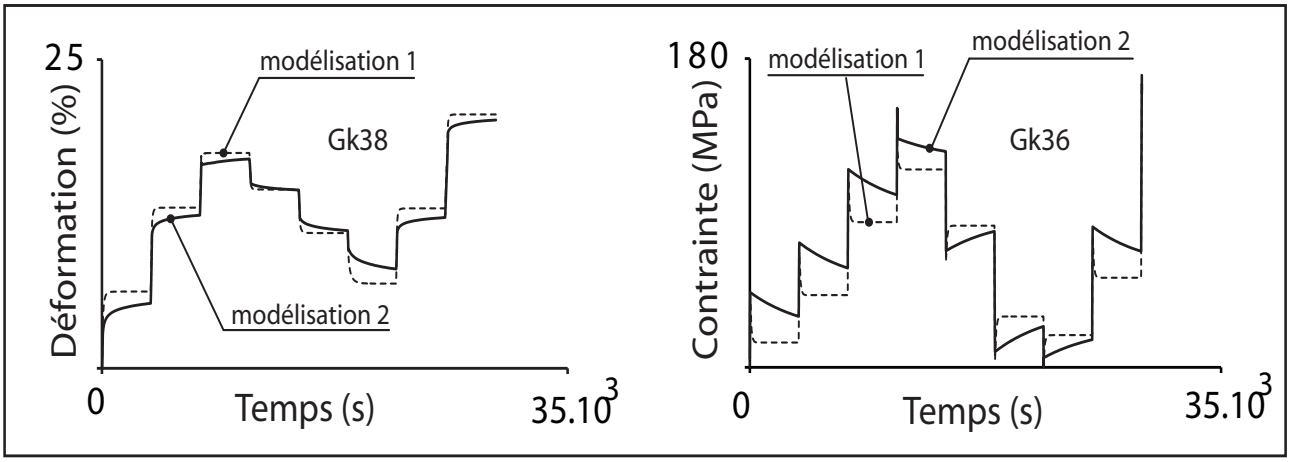


Fig. 7.22 – Modélisation GK38 et GK36 - Comparaison des modélisation 1 et 2 (tab. 7.2).

La figure 7.25 donne la modélisation de l'évolution de la relaxation cd de la figure 7.23 et sa comparaison avec une droite d'équation $\sigma(\varepsilon) = -A.\log(\Delta t) + B$, avec $A = 18.2\ MPa$/décade et $B = 114.2\ MPa$. La relaxation n'a pas une évolution parfaitement linéaire dans un diagramme $\sigma(\varepsilon) - \log(\Delta t)$, comme le montre l'expérience (Fig. 1.23 du chapitre 1), néanmoins son évolution

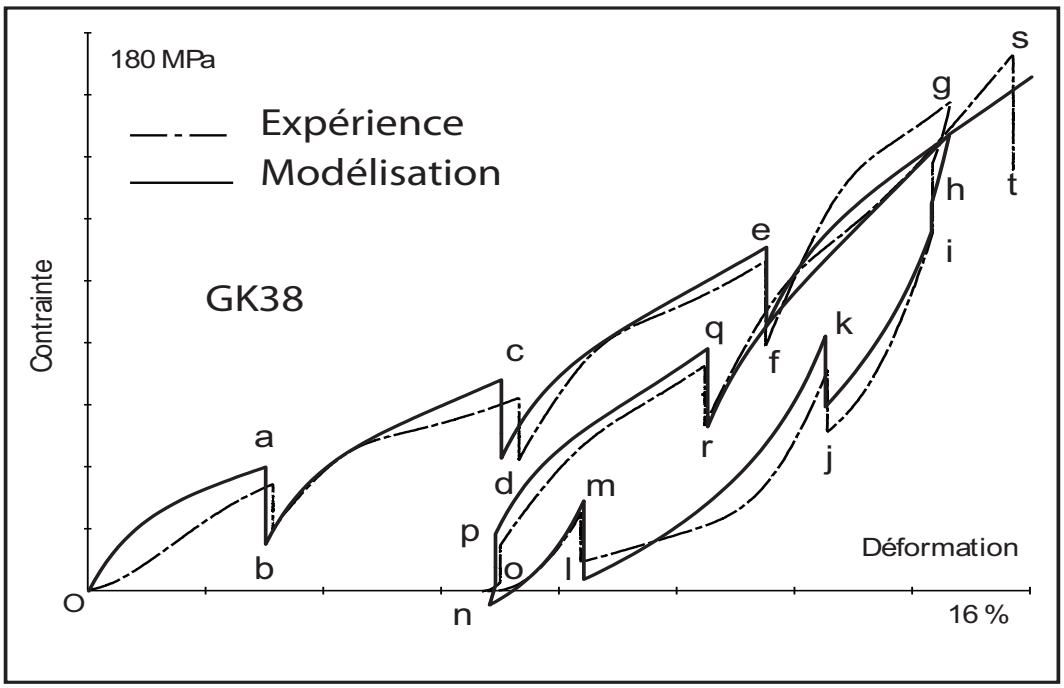


Fig. 7.23 – Comparaison expérience-modélisation de l'essai GK38 - Paramètres de modélisation 2 avec $G_V = 3.5\ GPa$ et une durée des séquences de relaxations de 3h.

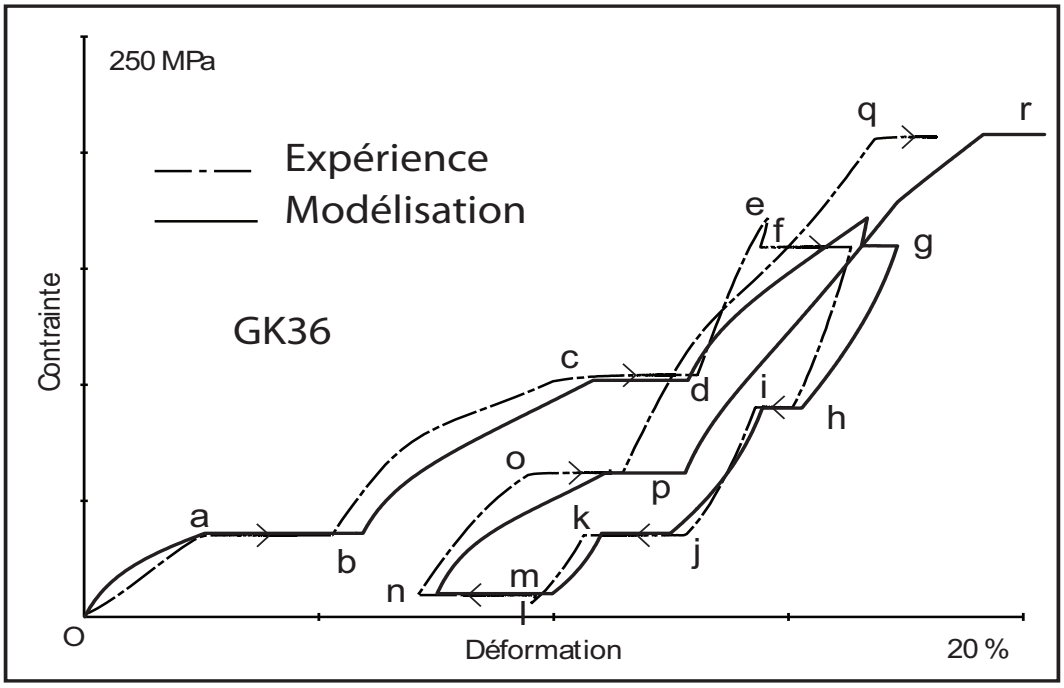


Fig. 7.24 – Comparaison expérience-modélisation de l'essai GK36 - Paramètres de modélisation 2 avec $G_V = 3.5\ GPa$ et une durée des séquences de fluage de 4h.

s'en rapproche de façon satisfaisante.

La figure 7.25 présente un résultat de modélisation d'une traction ondulée avec reptation de cycles. La sollicitation est composée d'une traction monotone suivie d'un chargement sinusoïdal d'une fréquence de 7.6 Hz. Le cycle contrainte-déformation présente une reptation importante et tend vers le comportement élastique instantanée de module $G_2^{ins}(\varepsilon)$, tel que :

$$G_2^{ins}(\varepsilon) = G_v + \frac{d\sigma_{r2}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \tag{7.40}$$

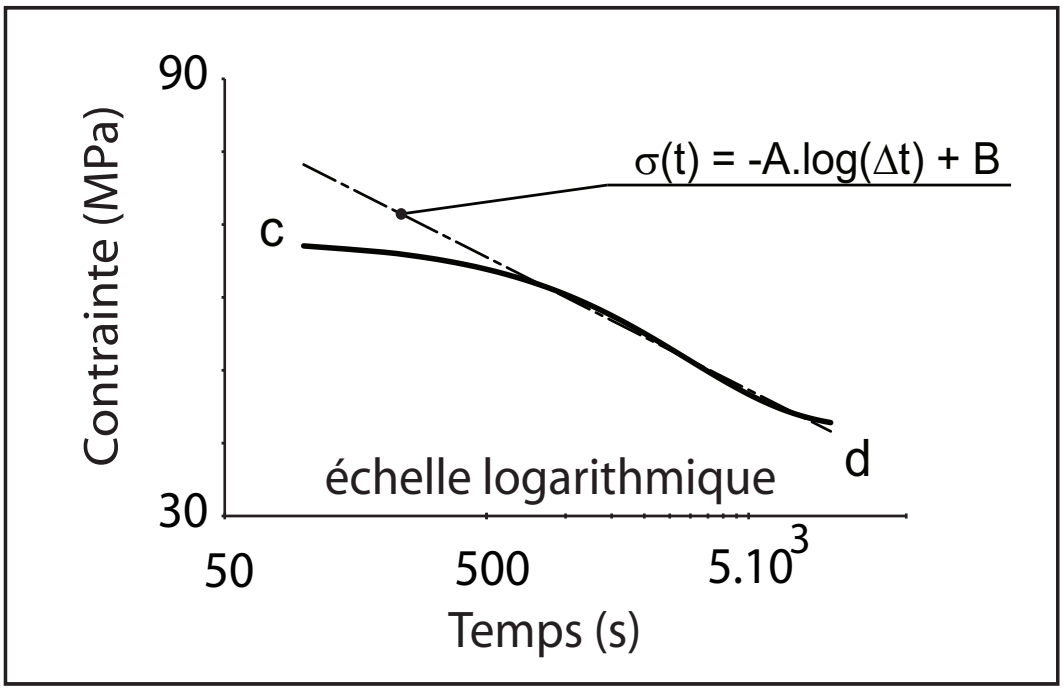


Fig. 7.25 – Modélisation de l'évolution de la relaxation cd de la figure 7.23 - Paramètres de modélisation 2 avec $G_V = 3.5G\ Pa$ et une durée des séquences de relaxation de 3h - ($A = 18.2MPa/$décade, $B = 114.2MPa$).

Trois autres modélisations définies par la même amplitude de sollicitation et des fréquences respectives de 2.5, 0.25 et 0.127Hz ont été réalisées. Ces modélisations donnent des résultats similaires de reptation du cycle. Pour les fréquences de 0.25 et 0.127Hz, le cycle contrainte déformation présente une boucle hystérésis assez ouverte et pour les fréquences de 7.6 et 2.5Hz, la boucle est plutôt fermée 7.26. Pour les fréquences élevées le comportement est caractérisé par son élasticité instantanée et pour les fréquences faibles le comportement est viscoélastique, avec un rôle de plus en plus actif de l'amortisseur (cf. § 1.4 du chapitre 1).

Par ailleurs, nous avons constaté que l'amplitude de la reptation de cycle est inversement proportionnelle à l'amplitude du cycle. Cette constatation peut être illustrée par la figure 7.27. Pour réaliser cette modélisation nous avons utilisé les paramètres de la modélisation 2 des sangles kaki du groupe A (tab. 7.2). La sollicitation est équivalente à celle du résultat de l'essai Gv37 donné sur la figure 1.26 du chapitre 1 et obtenu sur un groupe différent de sangles vertes. Le phénomène de reptation des cycles, observé sur la figure 7.26, , est un phénomène à caractère visqueux. En effet, le cycle tend peu à peu à se centrer autour du comportement d'élasticité retardée, ce qui produit le phénomène de reptation. Quand l'amplitude du cycle est importante, comme dans le cas de la figure 7.27, le cycle est dès le début de la phase cyclique quasi-centré sur le comportement d'élasticité retardée. Dans ce cas la reptation ne peut pas se mettre en place ou son amplitude est très faible, ceci compte tenu de nos hypothèses de modélisation. La reptation des cycles à forte amplitude de déformation pourrait être décrite par une évolution du comportement retardé en fonction du nombre de cycle. Cela revient à introduire un « écrouissage cyclique » ou un « endommagement cyclique » sur le comportement retardé. Nous avons choisi de ne pas aborder un tel phénomène, dans le cadre de cette thèse, dont l'objectif essentiel est de proposer une modélisation simplifiée et réaliste du comportement des fibres en vue de mettre en place une démarche complète allant de la fibre jusqu'au calcul de la structure complète de la voile.

Ces résultats montrent une bonne adéquation entre les expériences et les modélisations, malgré les hypothèses fortes adoptées, dans un but de simplification de la modélisation :

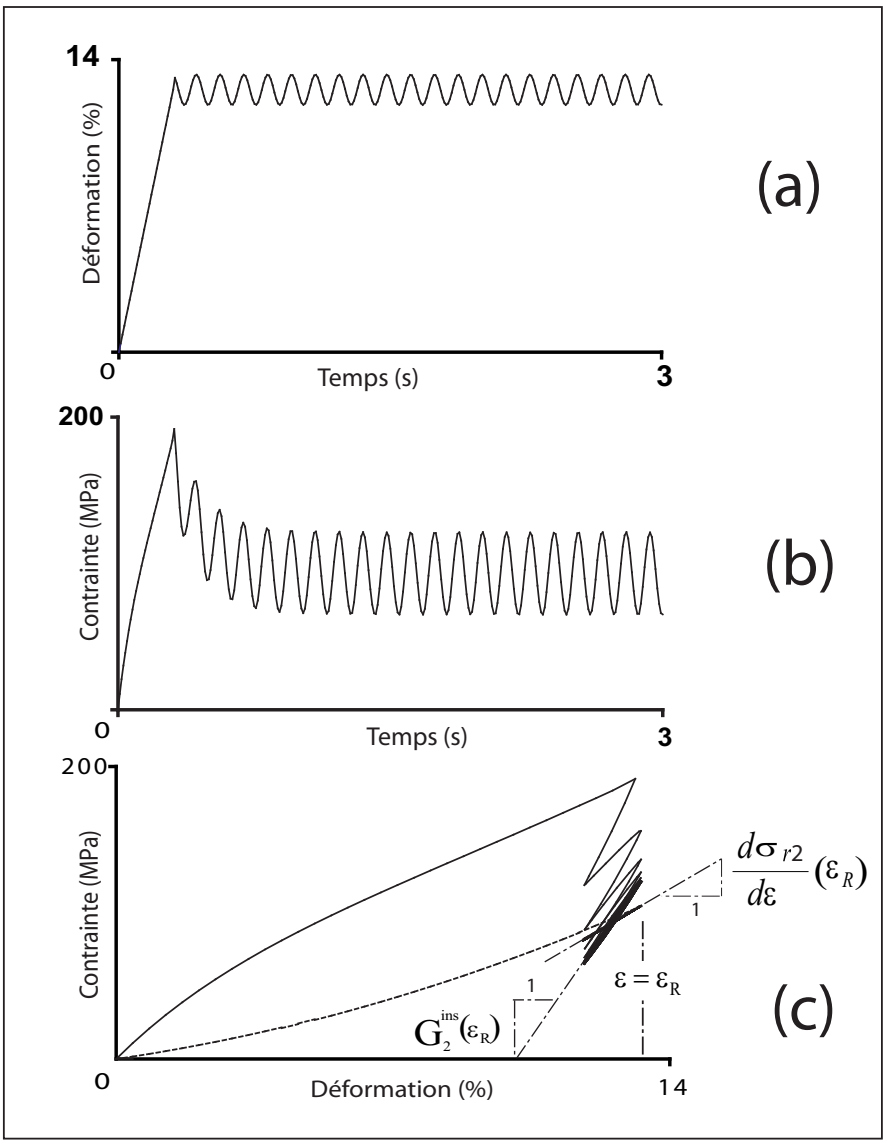


Fig. 7.26 – Traction ondulée avec reptation de cycles - Paramètres de modélisation 2 (tab. 7.2).

- Viscosité indépendante de la déformation (cf. § (7.37) et (7.38)).
- Module G_v constant, indépendant de la déformation (cf. fig. 7.16).

7.9 Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre un ensemble de lois adaptées à décrire le comportement unidimensionnel des fils et leur interaction. Ces lois balayent un champ assez large de comportements partant du comportement élastique non linéaire, au comportement irréversible, en passant par le comportement viscoélastique ou le comportement viscoélastique à comportement retardé irréversible.

Une évaluation de la pertinence de ces lois a été réalisée par une modélisation du comportement unidimensionnel d'une sangle en PA66.

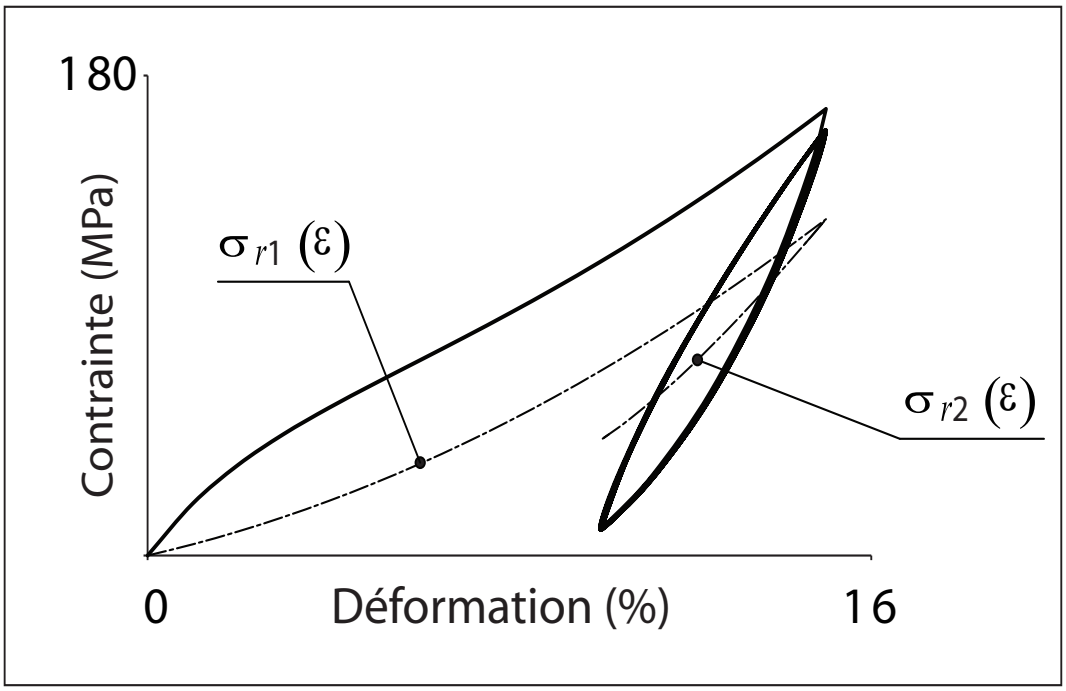


Fig. 7.27 – Modélisation d'une traction ondulée, contrôlée en déformation à $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}\ s^{-1}$ - Paramètres de modélisation 2 (tab. 7.2).

Chapitre 8

Modélisation bidimensionnelle du comportement de l'enduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter un ensemble de lois de comportement, potentiellement intéressantes, pour la modélisation bidimensionnelle du comportement de l'enduction.

8.1 Démarche adoptée pour décrire le comportement de l'enduction

Le comportement bidimensionnel de l'enduction peut être réversible ; dans ce cas, il sera défini par une loi élastique, qui relie la contrainte massique de l'enduction $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}$ à sa déformation logarithmique $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \underset{\sim}{\mathscr{L}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{8.1}$$

cette loi se décompose en une loi isotrope $\mathscr{L}$ et une loi déviatoire $\underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}$, telles que :

$$\begin{cases} \Sigma_m & = \mathscr{L}\left(\varepsilon_m\right) \\ \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} & = \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \end{cases} \tag{8.2}$$

où Σ_m et ε_m représentent la contrainte et la déformation moyennes, telles que :

$$\begin{cases} \Sigma_m & = \frac{\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}\right)}{2} \\ \varepsilon_m & = \frac{\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)}{2} \end{cases} \tag{8.3}$$

et $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}$, $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ représentent les déviateurs de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} & = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} - \Sigma_m.\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \\ \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} & = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \varepsilon_m.\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \end{cases} \tag{8.4}$$

Ainsi la loi (8.1), peut l'écrire :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathscr{L}\left(\varepsilon_m\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \tag{8.5}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}$ représente le tenseur identité. La loi élastique $\underset{\sim}{\mathscr{L}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$ peut présenter un couplage isotrope-déviatoire ; dans ce cas, les lois $\mathscr{L}\left(\varepsilon_m\right)$ et $\underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)$ sont liées. La loi élastique $\underset{\sim}{\mathscr{L}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$ peut aussi présenter un découplage total isotrope-déviatoire ; dans ce cas, les lois $\mathscr{L}\left(\varepsilon_m\right)$ et $\underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)$ sont totalement indépendantes.

Le comportement bidimensionnel de l'enduction peut aussi être irréversible ; dans ce cas, il sera défini par la somme de deux lois élastiques $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R\right)$ et $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$, telles que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R\right) + \underset{\sim}{\mathscr{L}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{\mathscr{L}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = \underset{\sim}{\mathbf{0}} & \text{en première charge} \\ \underset{\sim}{\mathscr{L}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \neq \underset{\sim}{\mathbf{0}} & \text{lors d'un cycle} \end{cases} \tag{8.6}$$

où $\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en première charge. Au cours d'un cycle décharge - charge $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R$ désigne l'état de référence de la déformation à l'inversion, qui correspond à un état de déformation constant tout au long de la décharge-recharge. Au cours de la première charge, la contribution de contrainte $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$ et le comportement est défini par la loi $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$. Lors d'un cycle décharge-charge, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R$ est constant ; par conséquent la contribution de contrainte $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R\right)$ est constante ; elle représente la contrainte de référence à l'inversion ; notée $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_R$, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_R = \underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R\right) \tag{8.7}$$

qui correspond à un état de contrainte constant, au cours du cycle. Ainsi, au cours d'un cycle décharge-charge, la loi (8.6) peut s'écrire :

$$\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \underset{\sim}{\mathscr{L}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{8.8}$$

où $\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_R$.

Pour décrire le comportement de l'enduction en première charge, nous adoptons une loi $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$ du type élastique non linéaire, qui peut présenter ou non un couplage isotrope - déviatoire. La partie déviatoire $\underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_1\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)$ de la loi $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$ est en général élastique non linéaire ; mais sa partie isotrope $\mathscr{L}_1\left(\varepsilon_m\right)$ peut être élastique linéaire ou élastique non linéaire. Concernant le comportement de l'enduction, lors d'un cycle décharge - charge, nous avons limité le choix à un comportement élastique linéaire pour la loi $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$.

La loi irréversible globale (8.6) se décompose donc en une loi isotrope et une loi déviatoire, telle que :

$$\begin{cases} \Sigma_m = \mathscr{L}_1\left(\varepsilon_m^R\right) + \mathscr{L}_2\left(\Delta\varepsilon_m\right) \\ \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_1\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_R\right) + \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \end{cases} \tag{8.9}$$

qui peut être écrite sous une autre forme :

$$\begin{cases} \Delta\Sigma_m = \mathscr{L}_2\left(\Delta\varepsilon_m\right) \quad \text{où} \quad \Delta\Sigma_m = \Sigma_m - \mathscr{L}_1\left(\varepsilon_m^R\right) \\ \Delta\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \quad \text{où} \quad \Delta\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \overline{\Sigma} - \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_1\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_R\right) \end{cases} \tag{8.10}$$

Et, la contrainte totale s'écrit :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \{\mathscr{L}_1\left(\varepsilon_m^R\right) + \mathscr{L}_2\left(\Delta\varepsilon_m\right)\}.\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_1\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_R\right) + \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \tag{8.11}$$

ou écrite sous une autre forme :

$$\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathscr{L}_2\left(\Delta\varepsilon_m\right).\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_2\left(\Delta\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \tag{8.12}$$

où ε_m^R, $\Delta\varepsilon_m$ et $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_R$, $\Delta\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_R$ sont respectivement les déformations moyennes et les déviateurs de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R$ et $\Delta\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R$.

8.2 Loi élastique de Hooke 2D

Pour lever la contradiction engendrée par l'hypothèse de la membrane (cf. chapitre 2), nous nous proposons dans ce paragraphe de présenter une loi de Hooke isotrope modifiée, compatible avec l'hypothèse de la membrane. Cette contradiction est entrainée par les comportements simultanées en contrainte et en déformation planes, introduits par l'hypothèse de la membrane.

La loi de Hooke isotrope s'écrit :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \lambda.\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + 2\mu.\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{8.13}$$

où λ et μ sont les modules de Lamé, $\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}$ le tenseur identité. Avec l'hypothèse de la membrane, les composantes de l'état de contrainte et de l'état de déformation en un point M du matériau, sont telles que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}_{(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2)} \quad ; \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}_{(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2)} \tag{8.14}$$

où $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée du plan tangent à la membrane.

En traction simple selon l'axe $\vec{e}_1$ la loi (8.13) donne :

$$\Sigma_{11} = \left(\lambda + 2\mu\right)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} \tag{8.15}$$

et :

$$\Sigma_{22} = \left(\lambda + 2\mu\right)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{11} = 0 \tag{8.16}$$

L'équation (8.16) permet de préciser l'expression du coefficient de Poisson ν en fonction des modules de Lamé :

$$\varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11} \qquad \text{et} \qquad \nu = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \tag{8.17}$$

En éliminant ε_{22} dans l'équation (8.15) par l'équation (8.17), on aboutit à l'expression du module d'Young E, tel que :

$$\Sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \qquad \text{et} \qquad E = \frac{4\mu\left(\lambda + \mu\right)}{\lambda + 2\mu} \tag{8.18}$$

L'inversion des relations (8.17) et (8.18), permet d'exprimer les modules de Lamé en fonction de E et ν, tels que :

$$\mu = \frac{E}{2\left(1 + \nu\right)} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \tag{8.19}$$

La décomposition de la loi (8.13) en partie isotrope et partie déviatoire, permet d'écrire :

$$\begin{cases} \Sigma_m &= 2\left(\lambda+\mu\right)\varepsilon_m \\ \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} &= 2\mu\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{cases} \tag{8.20}$$

L'équation (8.20) permet de préciser le module de compressibilité surfacique K, tel que :

$$\Sigma_m = 2K\varepsilon_m \qquad \text{et} \qquad K = \lambda+\mu \tag{8.21}$$

Le module de compressibilité surfacique K peut aussi s'exprimer en fonction de E et ν, en utilisant les relations (8.21) et (8.19), tel que :

$$K = \frac{E}{2\left(1-\nu\right)} \tag{8.22}$$

Notons que l'incompressibilité surfacique est obtenue, dans ce cas, par une coefficient de Poisson $\nu = 1$. En utilisant la relation (8.21), la loi (8.13) peut se mettre sous la forme découplée :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = K.\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + 2\mu.\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{8.23}$$

La loi de Hooke en 2D, peut aussi se mettre sous d'autres formes ; en considérant, par exemple les relations (8.13) et (8.19), on obtient :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\nu\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + (1-\nu)\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\} \tag{8.24}$$

ou encore avec (8.21) et (8.22) :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \tag{8.25}$$

Et enfin, avec (8.23) et (8.21) :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \mu\left\{\frac{1+\nu}{1-\nu}\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + 2\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right\} \tag{8.26}$$

8.3 Loi élastique non linéaire à coefficient de Poisson constant

Cette loi est définie à partir de la loi de Hooke en 2D du paragraphe 8.2, avec des modules de Lamé $\overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)$ et $\overline{\lambda}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)$, variables en fonction de $Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, le rayon dans le plan déviatoire de la déformation (cf. chapitre 2 ; § 2.5) tels que :

$$\begin{cases} \overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) &= \mu\ .M\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \\ \\ \overline{\lambda}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) &= \lambda\ .M\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \end{cases} \qquad et \qquad M\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) = \frac{\tanh\left(\frac{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{Q^*_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}\right)}{\left(\frac{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{Q^*_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}\right)} \tag{8.27}$$

où λ et μ sont des modules constants et $Q^*_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ une constante homogène à une déformation. La forme de la fonction $M\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)$, est illustrée par la figure 8.1 où Q_ε est noté x et Q^*_ε est noté x^* ; elle est telle que :

$$\lim_{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\to 0} M\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) = 1 \tag{8.28}$$

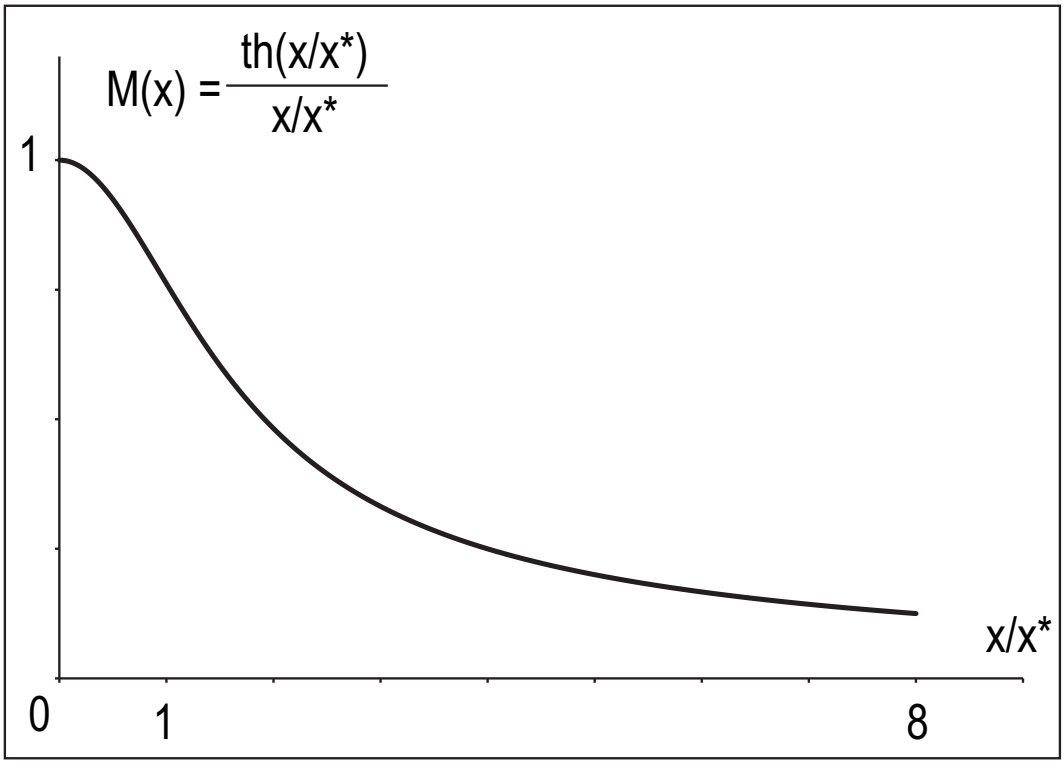


Fig. 8.1 – Fonction $M(x)$ d'évolution des modules, en fonction de $\frac{x}{x^*}$.

La loi élastique non linéaire, s'écrit à partir de la relation (8.23), en remplaçant les modules de Lamé constants par les modules variables, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \overline{K}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + 2\overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{8.29}$$

où $\overline{K}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right)$ représente le module de compressibilité surfacique, tel que :

$$\overline{K}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) = \overline{\lambda}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) + \overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) \tag{8.30}$$

Le coefficient de Poisson n'est pas affecté par la fonction $M\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right)$ et garde une valeur constante. En effet, si on remplace les modules constants de Lamé, par les modules variables de la définition (8.27), dans la relation (8.17), on a :

$$\nu = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \tag{8.31}$$

qui conduit à un coefficient de Poisson constant. De la même façon, si on remplace le module de cisaillement constant, par $\overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right)$ dans la relation (8.19), on constate que le module d'Young, noté $\overline{E}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right)$, est affecté par la fonction $M\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right)$, tel que :

$$\overline{E}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) = 2\overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right)(1+\nu) = E.M\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) \tag{8.32}$$

où $E = 2\mu(1+\nu)$ correspond à un module d'Young constant.
En traction simple, le comportement est défini par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Sigma_{11} & = \overline{E}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right).\varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} = & -\nu\varepsilon_{11} \\ Q_{\varepsilon} = & \frac{1+\nu}{\sqrt{2}}\left|\varepsilon_{11}\right| \end{cases} \tag{8.33}$$

Le comportement en traction simple, défini par les relations (8.33), est illustré par la figure 8.2. La définition (8.29) peut être décomposée en une loi de la partie isotrope et une loi de la partie

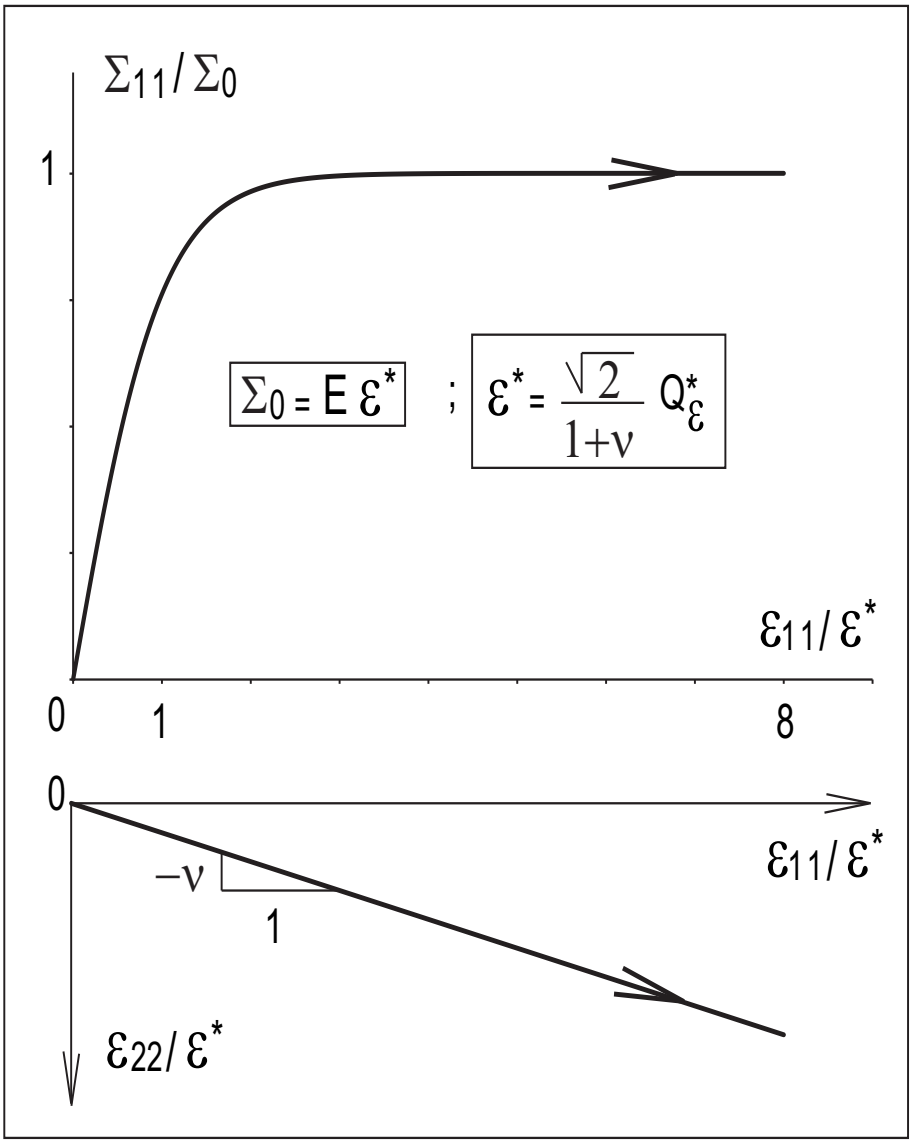


Fig. 8.2 – Illustration en traction simple de la loi élastique non linéaire à coefficient de Poisson constant (Eq. 8.33).

déviatoire, telles que :

$$\Sigma_m = 2\overline{K}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right).\varepsilon_m \tag{8.34}$$

$$\underset{\sim}{\overline{\Sigma}} = 2\overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right).\underset{\sim}{\overline{\varepsilon}} \tag{8.35}$$

Adoptons la notation vectorielle, introduite au chapitre 2. § 2.5, où les vecteurs $\vec{s}$, $\underline{\vec{s}}$ représentent la contrainte $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}$ et son déviateur $\underset{\sim}{\overline{\mathbf{\Sigma}}}$; et les vecteurs $\vec{e}$, $\underline{\vec{e}}$ représentent la déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et son déviateur $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. La loi de la partie déviatoire (8.35) peut s'exprimer par :

$$\underline{\vec{s}} = 2\overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right).\underline{\vec{e}} \tag{8.36}$$

où le déviateur $\underline{\vec{e}}$ est défini par son intensité $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ et son orientation $\vec{u}_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ (cf. relation 2.78 du chapitre 2). Ce qui conduit à :

$$\underline{\vec{s}} = Q_{\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}}.\vec{u}_{\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{e}} = Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}.\vec{u}_{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{8.37}$$

$$\vec{u}_{\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}} = \vec{u}_{\underset{\sim}{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \vec{u}_{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \frac{q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}}{Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}}.\vec{J} + \frac{\varepsilon_{12}}{Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}}.\vec{K} \tag{8.38}$$

$$Q_{\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}} = 2\overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right).Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{8.39}$$

Ces relations représentent une expression radiale de la loi élastique non linéaire à coefficient de Poisson constant, dans le plan déviatoire. La relation (8.39) exprime l'intensité du déviateur $\underline{\vec{s}}$ et la relation (8.38) donne son orientation.

Compte tenu des relation (8.34), (8.37) à (8.39) et de la relation (2.69. Chapitre 2 § 2.5), on peut écrire :

$$\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}} = 2\overline{K}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right).\varepsilon_m \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + 2\overline{\mu}\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right).\left\{q_{\underset{\sim}{\varepsilon}} \underset{\sim}{\boldsymbol{J}} + \varepsilon_{12} \underset{\sim}{\boldsymbol{K}}\right\} \tag{8.40}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}$ et $\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}$ sont les tenseurs introduits au chapitre 2 (§ 2.5) et ε_m la déformation moyenne. L'expression tensorielle 8.40 de la loi élastique non linéaire à coefficient de Poisson constant est équivalente à l'expression (8.29).

La loi élastique non linéaire à coefficient de Poisson constant, définie par la relation (8.29) ou par les relations (8.34) et (8.35), présente un couplage isotrope-déviatoire, à travers la fonction $M\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right)$, qui intervient dans le module de compressibilité de l'expression (8.34) de la partie isotrope et qui fait intervenir $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$, le rayon de la déformation dans le plan déviatoire. La figure 8.3 illustre ce couplage, pour un chargement $OABCO$ dans le plan biaxial de la déformation (fig. 8.3 -a). La réponse dans le plan biaxial de la contrainte est donnée par la figure 8.3 -b. La figure 8.3 -c donne dans un diagramme $Q_{\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}} - Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ le comportement exprimé par la loi radiale (8.39) ou par la loi de la partie déviatoire (8.35). La figure 8.3 -d illustre le comportement de la partie isotrope de la loi exprimé par la relation (8.34), qui donne une relation linéaire dans un diagramme $\Sigma_m - M\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right).\varepsilon_m$, définie par le module de compressibilité K. Enfin, le couplage isotrope-déviatoire est illustré par la figure 8.3 -e dans un diagramme $\Sigma_m - \varepsilon_m$, qui se traduit par une boucle fermée $OABCO$

8.4 Loi irréversible radiale

Cette loi est définie, d'une part, par son expression isotrope, telle que :

$$\Sigma_m = 2\overline{K}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right).\varepsilon_m \quad \text{et} \quad \overline{K}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) = K_1 M\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) \tag{8.41}$$

où K_1 est un module de compressibilité constant et $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ est le rayon dans le plan déviatoire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$. La fonction $M(x)$ est la fonction de variation des modules, précedement introduite au paragraphe 8.3 et illustrée par la figure 8.1. D'autre part, s'inspirant de l'expression radiale (8.37) à (8.39)

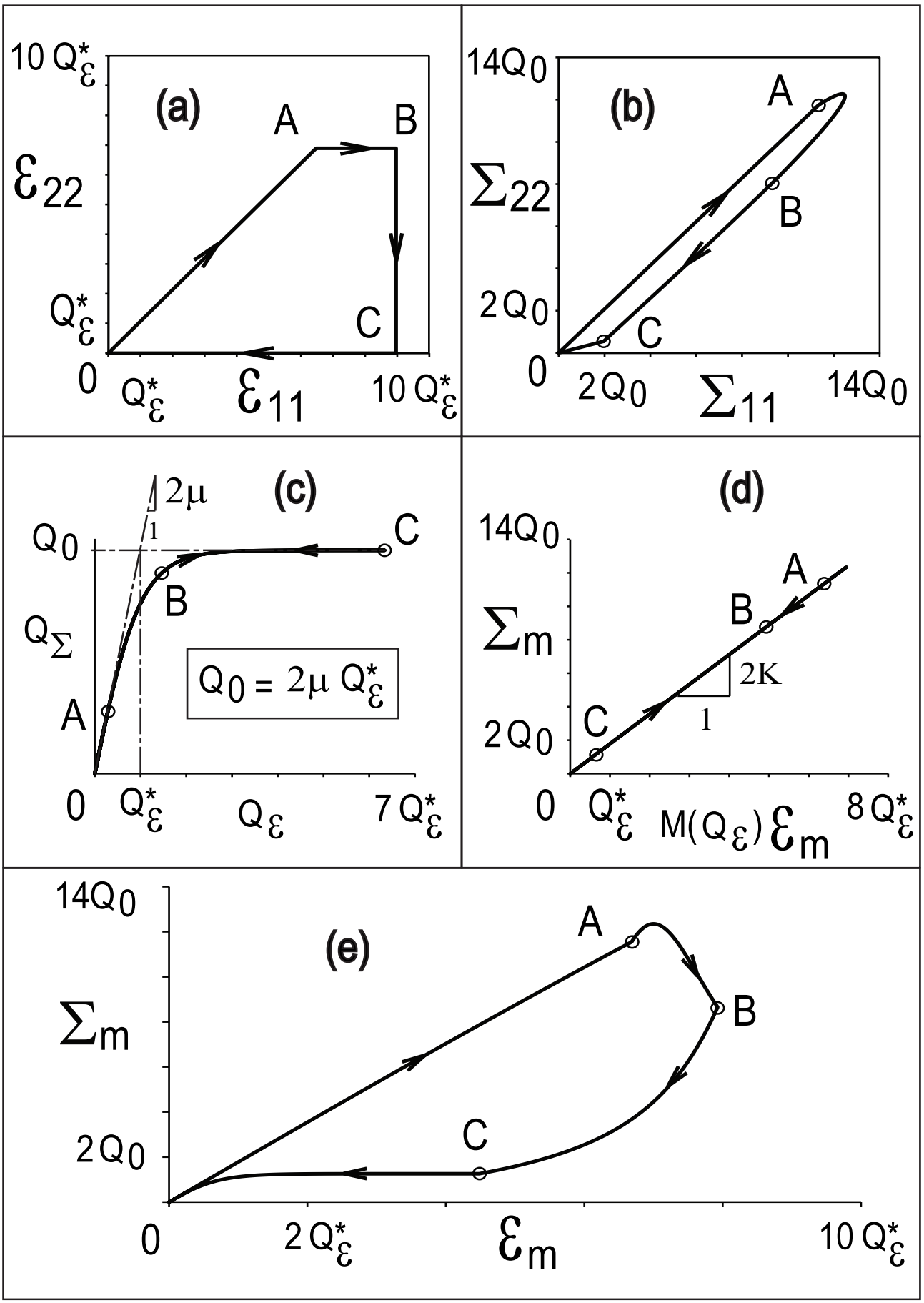


Fig. 8.3 – Illustration en traction biaxiale de la loi élastique non linéaire à coefficient de Poisson constant.

de la loi élastique non linéaire à coefficient de Poisson constant, la loi irreversible radiale peut être définie par l'expression déviatoire suivante :

$$\begin{cases} \underline{\vec{s}} = Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}.\vec{u_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}} \\ \vec{u_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}} = \vec{u_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \quad \text{et} \quad \vec{u_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}} = \frac{q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}.\vec{J} + \frac{\varepsilon_{12}}{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}.\vec{K} \\ Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}} = 2\overline{\mu}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}\right).Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R} + 2\mu_2.\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ \Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} = Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} - Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R} \end{cases} \tag{8.42}$$

où $Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}$ est le rayon dans le plan déviatoire de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R$; avec $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R$ l'état de déformation de référence, qui correspond à $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ en première charge ($\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R = \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$) et à l'état de déformation à l'inversion en décharge-charge.

L'expression radiale de la loi peut se mettre sous la forme :

$$Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}} = Q^1_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}\right) + Q^2_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) \tag{8.43}$$

où $Q^1_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}\right)$ et $Q^2_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)$ correspondent à des lois radiale scalaires, telles que :

$$\begin{cases} Q^1_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}\right) = 2\overline{\mu_1}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}\right)Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R} \quad \text{et} \quad \overline{\mu_1}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}\right) = \mu_1 M\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}\right) \\ Q^2_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) = 2\mu_2\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{cases} \tag{8.44}$$

où μ_1 et μ_2 sont des modules de cisaillement constants.

En utilisant le schéma présenté au paragraphe 8.1 (cf. relations (8.6) et (8.9)), l'expression radiale $Q^1_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}\right)$ (8.44), et l'expression isotrope (8.41) de la loi, conduisent à une loi tensorielle, notée $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$, telle que :

$$\underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = 2\overline{K_1}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right).\varepsilon_m\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + 2\overline{\mu_1}\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}\right)\frac{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}}{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}\left\{q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\underset{\sim}{\boldsymbol{J}} + \varepsilon_{12}\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}\right\} \tag{8.45}$$

Et, l'expression radiale $Q^2_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}}\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right)$ (8.44) conduit à une loi tensorielle, purement déviatoire, notée $\underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_2\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$ telle que :

$$\underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_2\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = 2\mu_2\frac{\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}}\left\{q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\underset{\sim}{\boldsymbol{J}} + \varepsilon_{12}\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}\right\} \tag{8.46}$$

De sorte que, l'état de contrainte s'exprime par :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) + \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_2\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{8.47}$$

Pour completer la définition de la loi irréversible radiale, il est nécessaire d'introduire un critère d'inversion et de retour sur la première charge, qui permet de définir $Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}$; ce critère est donnée par le tableau 8.1 et illustré à la figure 8.4. Au cours de la première charge $Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_R}(t) = Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t)$,

Table 8.1: Critère d'inversion et définition de $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R}(t)$.

Temps	$Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t)$	Modèle	Illustration
t = 0	$Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$	État initial $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R} = Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}} = Q_{\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}} = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$	Point O fig. 8.4
t>0	$Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) \geq Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R}(t-dt)$	Comportement en première charge $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R}(t) = Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t)$ et $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}} = \underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R,\underset{\sim}{\varepsilon}}\right)$	Chargements OA et AC fig. 8.4
	Critère d'inversion $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) < Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R}(t-dt)$	inversion et comportement cyclique $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R}(t) = Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R}(t-dt)$ et $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}} = \underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R},\underset{\sim}{\varepsilon}\right) + \underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_2\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}},\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$	Chargements ABA fig. 8.4

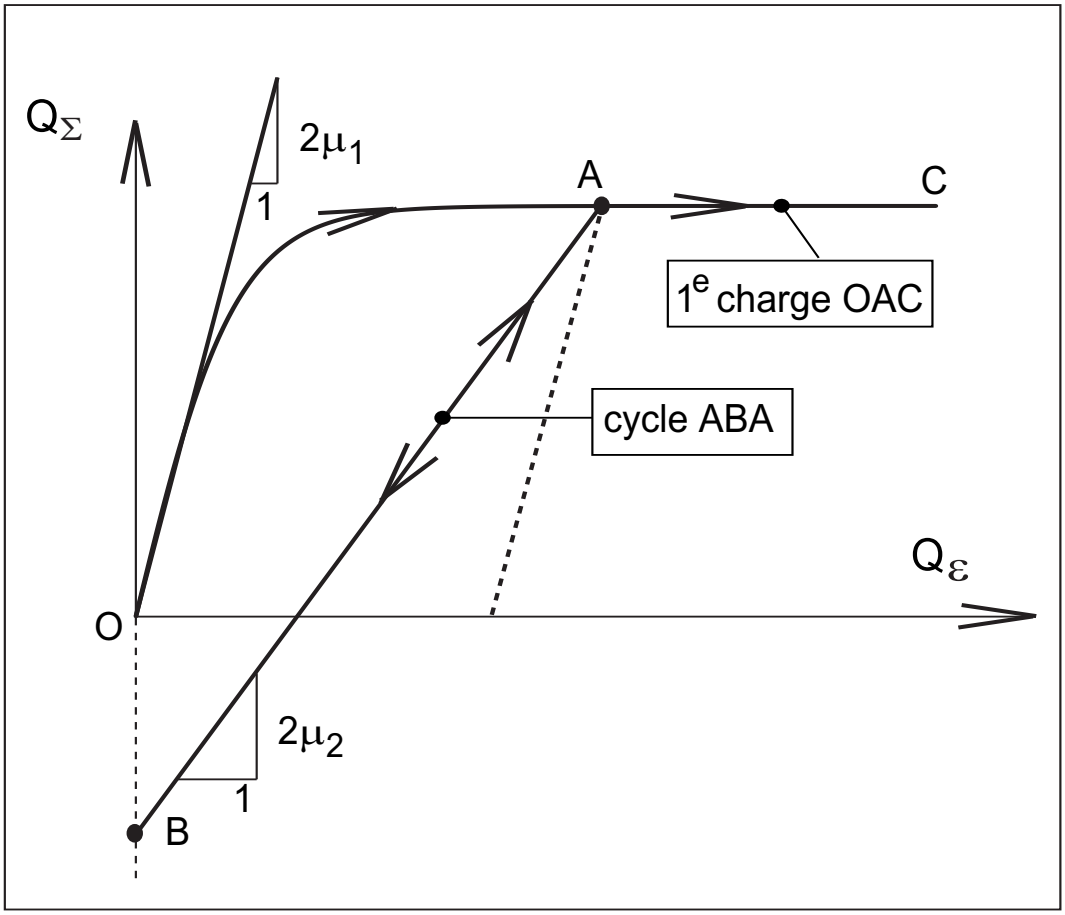


Fig. 8.4 – Illustration du comportement de la partie déviatoire de la loi irréversible radiale.

par conséquent $\Delta Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) = 0$ et $\underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}}_2\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right) = \underset{\sim}{\mathbf{0}}$, le comportement est alors caractérisé par la loi $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R},\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$ (fig. 8.4 chargement OA et AC, tab. 8.1). En décharge-charge (fig. 8.4 chargement ABA), $\Delta Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) \neq 0$ et le comportement est caractérisé par la somme de $\underset{\sim}{\mathscr{L}}_1\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}_R},\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$ et $\underset{\sim}{\overline{\mathscr{L}}_2}\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}},\underset{\sim}{\varepsilon}\right)$ (tab. 8.1 et relation 8.47).

La figure 8.5 illustre le comportement de la loi irréversible radiale en traction ondulée $OABCDE$, contrôlée en déformation. La figure 8.5 -a donne la réponse de la loi dans un diagramme $\Sigma_{11} - \varepsilon_{11}$ et la figure 8.5 -b montre l'effet de contraction dans un diagramme $\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}$. La figure 8.5 -c illustre le comportement de la partie déviatoire de la loi et son expression radiale $(8.42)_3$. La figure 8.5 -d illustre le comportement isotrope exprimé par la relation (8.41). Dans ce cas aussi, la loi présente un effet de couplage isotrope-déviatoire, à travers la fonction $M\left(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\right)$, qui intervient dans l'expression (8.41). Cet effet est révélé par la comparaison des figures 8.5 -d et 8.5 -e.

La loi irréversible radiale présente une singularité qui limite son utilisation. lors de chargements complexes, dans le plan déviatoire de la déformation, qui traversent l'origine. Cette singularité est illustrée par un shéma sur la figure 8.6, au cours d'un chargement imposé dans le plan déviatoire de la déformation ; ce chargement est composé d'un trajet en première charge OA et d'une décharge AB, qui traverse l'origine. Lors de la décharge AB et au voisinage de l'origine, le rayon $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ tend vers zéro et la loi $\overline{\underset{\sim}{\mathscr{L}}_2}\left(\Delta Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$ donnée par la relation (8.46) n'est plus en mesure de définir la direction $\vec{u}_\Sigma$ du déviateur de la contrainte. En effet, le module $Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ du vecteur $q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}\underset{\sim}{\boldsymbol{J}} + \varepsilon_{12}\underset{\sim}{\boldsymbol{K}}$ tend vers 0 (cf. relation 2.65 du chapitre 2) et par conséquent la direction de $\vec{u}_\varepsilon$ est indéterminée au point O. Par ailleurs, la figure 8.6 montre qu'à la traversée du point O, le vecteur $\vec{u}_\varepsilon$ effectue une rotation d'un angle π qui le fait passer de $\vec{u}_\varepsilon{}^-$ à $\vec{u}_\varepsilon{}^+$. Ce chargement brusque de l'orientation de $\vec{u}_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$, à la traversée de l'origine, produit une discontinuité dans la réponse en contrainte, qui se manifeste par un saut de la contrainte du point O^- au point O^+, situés sur le même cercle Q_Σ. Ce saut est directement lié à la définition de la direction de la contrainte, donnée par la relation $(8.42)_2$, telle que : $\vec{u}_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}} = \vec{u}_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$.

8.5 Loi irréversible octo-directionnelle

Cette loi a été imaginée afin de lever la limitation des chargements radiaux de la loi irréversible radiale, du paragraphe précédent. L'origine de cette limitation, provient de l'impossibilité de donner une orientation au déviateur de contrainte, dans le plan déviatoire, lors de chargements complexes qui traversent l'origine du plan déviatoire des déformations.

8.5.1 Principe de projection

Le principe de la loi irréversible octo-directionnelle est d'adopter des directions discrètes privilégiées, qui permettent de définir la direction du déviateur de contrainte, dans le plan déviatoire.

Adoptons la représentation vectorielle dans l'espace des déformation et considérons une seule direction privilégiée, le long d'un vecteur unitaire $\vec{q}$, dans le plan déviatoire (fig. 8.7). Un état de déformation représenté par le vecteur $\underline{\vec{e}}$ dans le plan déviatoire est projeté sur la direction $\vec{q}$, tel que :

$$\underline{\vec{e}}.\vec{q} = r_e \tag{8.48}$$

La projection r_e, permet de calculer une intensité r_s du vecteur $\underline{\vec{s}}$, qui représente l'état de contrainte dans la direction $\vec{q}$. Par ailleurs, la direction $\vec{q}$ précise la direction du vecteur $\underline{\vec{s}}$, tel que :

$$\begin{cases} \underline{\vec{s}} & = r_s.\vec{q} \\ r_s & = \mathscr{L}_1\left(r_e^R\right) + \mathscr{L}_2\left(\Delta r_e\right) \end{cases} \tag{8.49}$$

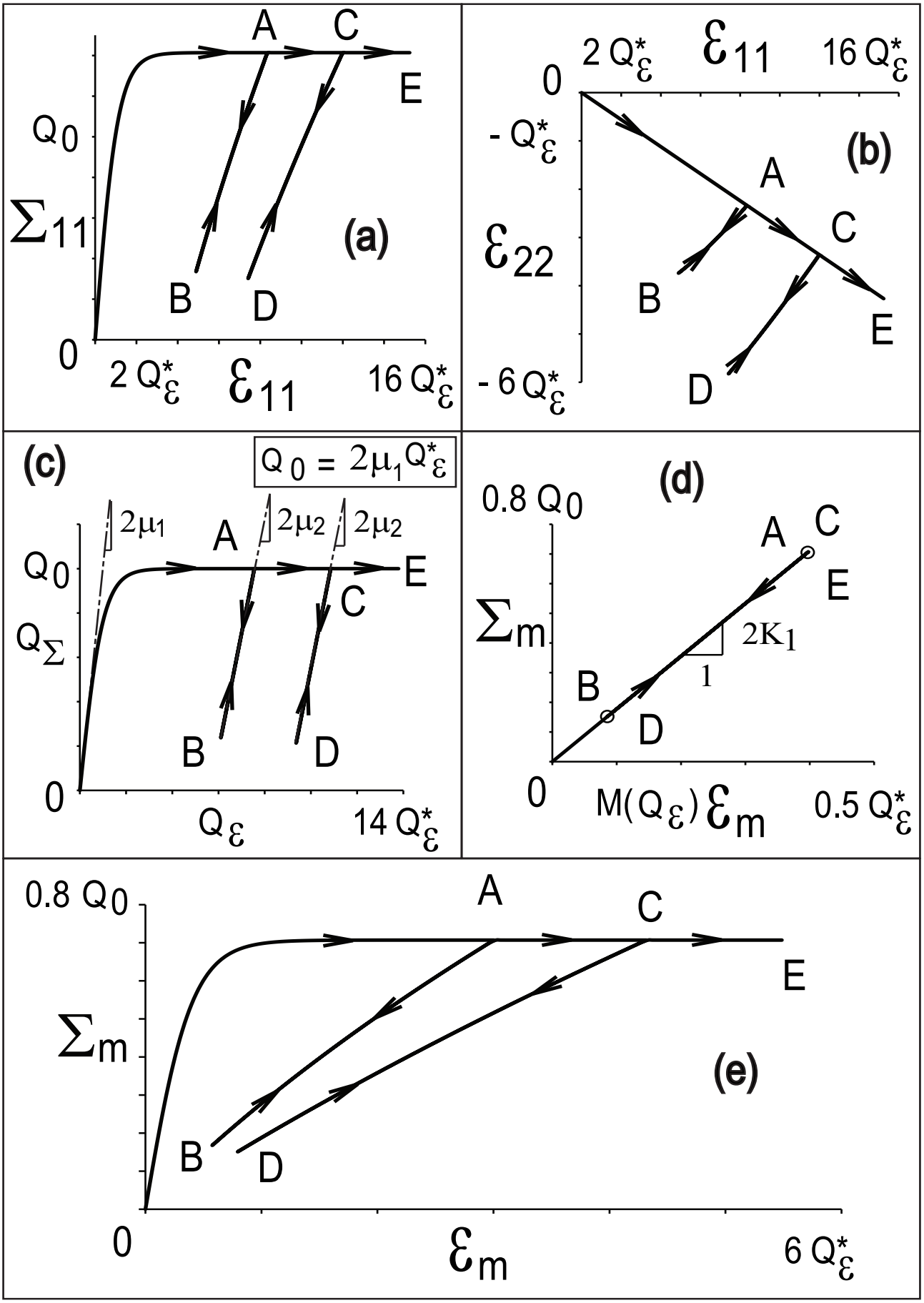


Fig. 8.5 – Illustration en traction ondulée de la loi irréversible radiale.

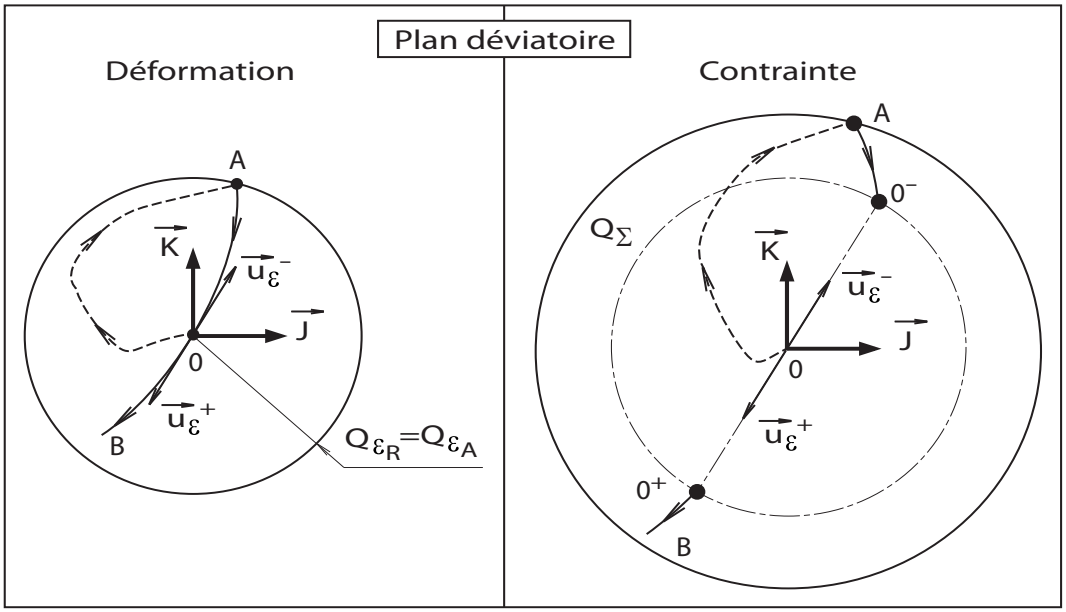


Fig. 8.6 – Singularité de la loi irréversible radiale pour un trajet en décharge qui traverse l'origine du plan déviatoire de la déformation.

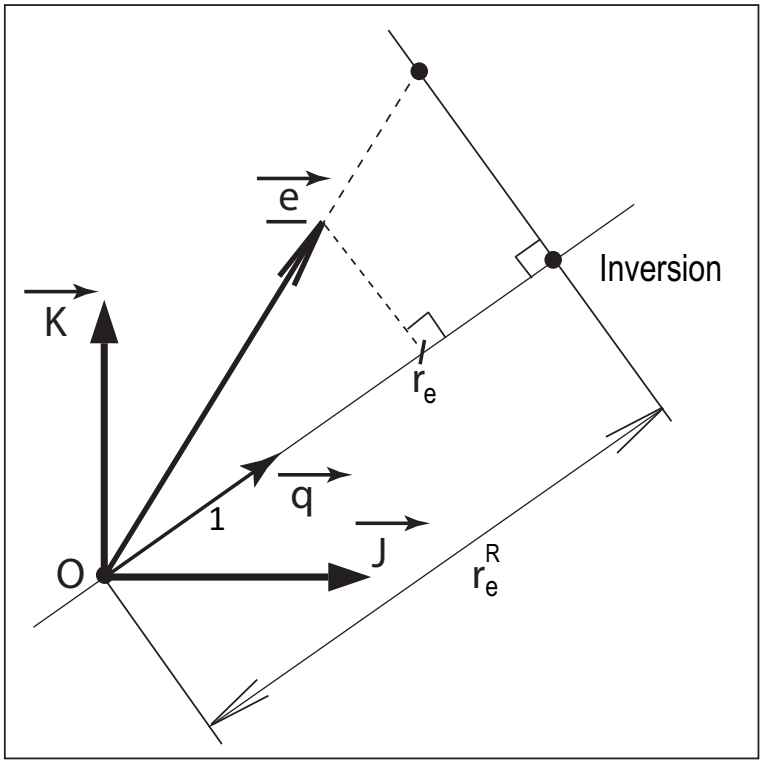


Fig. 8.7 – Illustration du principe de projection.

où $\mathscr{L}_1\left(r_e^R\right)$ et $\mathscr{L}_2\left(\Delta r_e\right)$ sont deux loi radiales scalaires qui définissent l'intensité de la contrainte r_s ; $\Delta r_e = r_e - r_e^R$; $r_e^R = r_e$ en première charge ; au cours d'un cycle décharge-charge r_e^R désigne la projection de référence à l'inversion du vecteur $\vec{\underline{e}}$, qui correspond à une constante. La figure 8.8 illustre le rôle des lois radiales scalaires $\mathscr{L}_1\left(r_e^R\right)$ et $\mathscr{L}_2\left(\Delta r_e\right)$, pour définir l'intensité de la contrainte r_s, le long de la direction privilégiée $\vec{q}$.

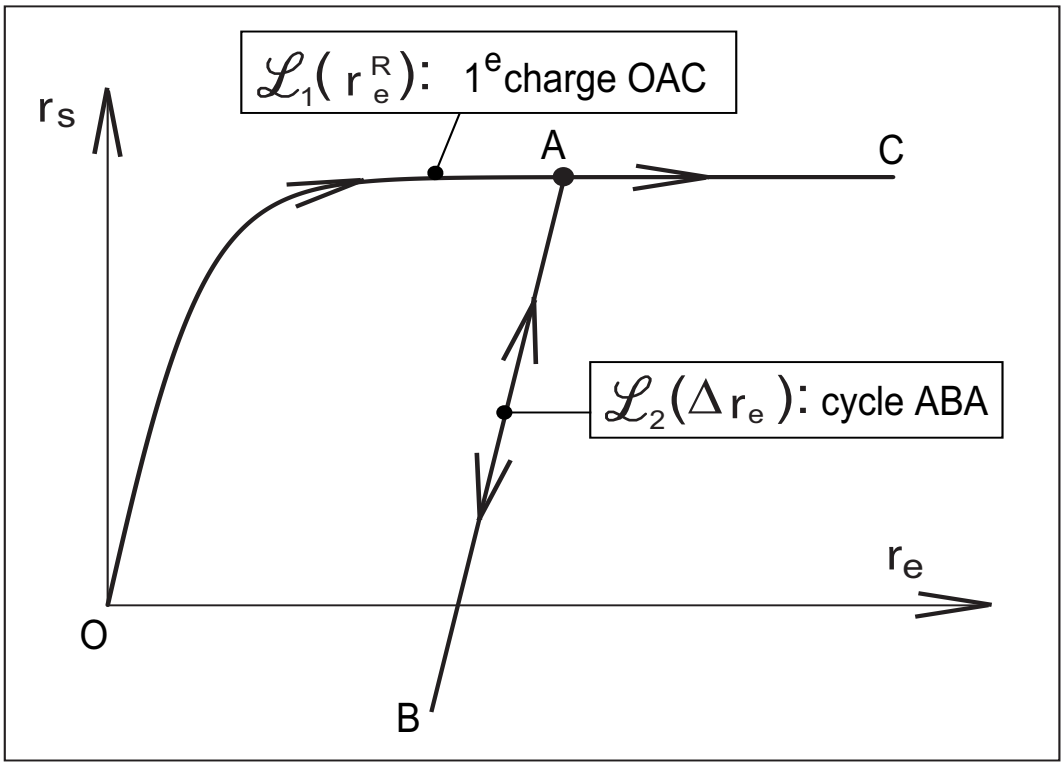


Fig. 8.8 – Illustration du rôle des lois radiales $\mathscr{L}_1\left(r_e^R\right)$ et $\mathscr{L}_2\left(\Delta r_e\right)$ (Eq. 8.49).

8.5.2 Définition des directions privilégiées

Définir le vecteur $\vec{s}$, par une seule direction privilégiée $\vec{q}$, comme cela est indiqué par la relation (8.49), n'est pas très réaliste. Pour cela, nous adoptons huit directions privilégiées, représentées par huit vecteurs unitaires $\vec{q}_1$ à $\vec{q}_8$, indiqués sur la figure 8.9. Ces vecteurs unitaires sont exprimés,

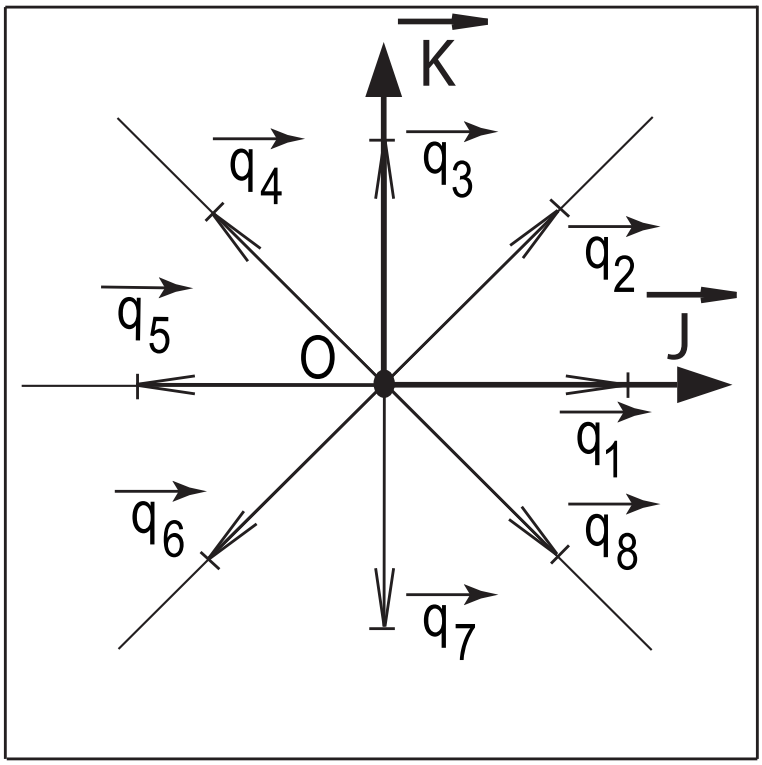


Fig. 8.9 – Les vecteurs unitaires $\vec{q}_1$ à $\vec{q}_8$, dans le plan déviatoire, définissent les huit directions privilégiées.

dans le plan déviatoire, en fonction des vecteurs $\vec{J}$ et $\vec{K}$, ainsi que de leurs modules $J = \sqrt{2}$ et $K = \sqrt{2}$ (cf. § 2.5), tels que

$$\begin{array}{lcl} \vec{q}_1 = \frac{\vec{J}}{J} & ; & \vec{q}_5 = -\vec{q}_1 \\ \vec{q}_2 = \frac{\vec{J}+\vec{K}}{||\vec{J}+\vec{K}||} & ; & \vec{q}_6 = -\vec{q}_2 \\ \vec{q}_3 = \frac{\vec{K}}{K} & ; & \vec{q}_7 = -\vec{q}_3 \\ \vec{q}_4 = \frac{-\vec{J}+\vec{K}}{||\vec{J}+\vec{K}||} & ; & \vec{q}_8 = -\vec{q}_4 \end{array} \tag{8.50}$$

Ces vecteurs représentent des tenseurs déviatoires, exprimés en un point M de l'enduction dans une base orthonormée $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan tangent, tels que :

$$\begin{array}{lcl} \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & ; & \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_5 = -\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_1 \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & ; & \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_6 = -\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_2 \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & ; & \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_7 = -\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_3 \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & ; & \underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_8 = -\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_4 \end{array} \tag{8.51}$$

8.5.3 Définition de la loi octo-directionnelle

La loi octo - directionnelle est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\vec{s}} & = \sum_{i=1}^{8} r_{s_i}.\vec{q}_i \\ r_{s_i} & = \mathscr{L}_1\left(r_{e_i}^R\right) + \mathscr{L}_2\left(\Delta r_{e_i}\right) \end{array} \right. \quad ; \quad \text{(i=1,8)} \tag{8.52}$$

où $\Delta r_{e_i} = r_{e_i} - r_{e_i}^R, (i = 1, 8)$, et :

$$r_{e_i} = \mathrm{Tr}(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_i) \quad ; \quad (i = 1, 8) \tag{8.53}$$

Un critère d'inversion et de retour sur la première charge est mis en œuvre pour définir les $r_{e_i}^R$. Ce critère est précisé sur le tableau 8.2.

Les lois radiales scalaires $\mathscr{L}_1\left(r_{e_i}^R\right)$ et $\mathscr{L}_2\left(\Delta r_{e_i}\right)$ sont telles que :

$$\mathscr{L}_1\left(r_{e_i}^R\right) = 2\ \overline{\mu}_1^{q_i}\ r_{e_i}^R \quad \text{et} \quad \overline{\mu}_1^{q_i} = \mu_1^{q_i}\ M\left(r_{e_i}^R\right) \quad ; \quad (i = 1, 8) \tag{8.54}$$

et :

$$\mathscr{L}_2\left(\Delta r_{e_i}\right) = 2\ \mu_2^{q_i}\ \Delta r_{e_i} \quad ; \quad (i = 1, 8) \tag{8.55}$$

où $\mu_1^{q_i}$ et $\mu_2^{q_i}$ sont les modules élastiques le long de la direction $\vec{q}_i$. Nous adoptons des valeurs constantes pour ces modules notés respectivement μ_1^q et μ_2^q, quelle que soit la direction $\vec{q}_i$, tels que :

$$\mu_1^{q_i} = \mu_1^q \quad \text{et} \quad \mu_2^{q_i} = \mu_2^q \quad \forall i \tag{8.56}$$

La fonction $M(x)$ est la fonction de variation des modules, précédemment introduite au paragraphe 8.3 et illustrée par la figure 8.1. Nous adoptons le même paramètre x^*, noté ici $Q^*_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$

TABLE 8.2: Critère d'inversion et définition de $r_{e_i}^R$ et r_{s_i}.

Temps	Projections $r_{e_i}(t), (i = 1, 8)$	Modèle et $r_{e_i}^R(t), (i = 1, 8)$
t = 0	$r_{e_i}(t) = 0$	État initial $r_{e_i}^R = r_{e_i} = r_{s_i} = 0$
t>0	$r_{e_i}(t) < 0$	Comportement en saturation à $r_{e_i}(t) < 0$ $r_{e_i}^R(t) = r_{e_i}^R(t - dt)$ et $\Delta r_{s_i} = \mathscr{L}_2(-r_{e_i}^R)$ où $\Delta r_{s_i} = r_{s_i} - \mathscr{L}_1(r_{e_i}^R)$
	$r_{e_i}(t) \geq r_{e_i}^R(t - dt)$	Comportement en première charge $r_{e_i}^R(t) = r_{e_i}(t)$ et $r_{s_i} = \mathscr{L}_1(r_{e_i}^R)$
	Critère d'inversion $r_{e_i}(t) < r_{e_i}^R(t - dt)$	Inversion et comportement cyclique $r_{e_i}^R(t) = r_{e_i}^R(t - dt)$ et $\Delta r_{s_i} = \mathscr{L}_2(\Delta r_{e_i})$ où $\Delta r_{s_i} = r_{s_i} - \mathscr{L}_1(r_{e_i}^R)$

pour toutes les directions de projection, de $i = 1$ à $i = 8$. La figure 8.10 illustre le comportement du modèle en projection sur une direction donnée i. Cette figure donne la signification des modules élastiques μ_1^q et μ_2^q. Le tableau 8.2 indique que si $r_{e_i} < 0$, la projection r_{s_i} est celle obtenue pour $r_{e_i} = 0$, par conséquent $\Delta r_{e_i} = 0 - r_{e_i}^R = -r_{e_i}^R$. Ce comportement qui correspond à une de saturation de la contrainte en compression, est illustré par la figure (8.10 chargement BC).

Considérons le chemin de déformation $\underline{\vec{e}}$, de la figure 8.11, composé d'un chargement Oa et d'un chargement ab. Au cours du chargement Oa, le long du vecteur $\vec{J}$, en partant de l'état initial ($r_{e_i} = 0, \forall i$), les seules projections du vecteur $\underline{\vec{e}}$ non nulles et positives sont $r_{e_1}(t)$, $r_{e_2}(t)$ et $r_{e_8}(t)$ avec $0 < t \leq t_a$. Pour $i = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, les projections sont nulles ou négatives, ce qui conduit à $r_{e_i} = 0$ et $r_{s_i} = 0$, compte tenu de la définition de la loi (cf. tab. 8.2). De O à a le modèle a un comportement en première charge, tel que $r_{s_i} = \mathscr{L}_1\left(r_{e_i}^R\right)$ avec $r_{e_i}^R = r_{e_i}$ pour $i = \{1, 2, 8\}$. Au point a la figure 8.11 indique la projection $r_{e_1}(t_a)$, $r_{e_2}(t_a)$ et $r_{e_8}(t_a)$. Le long du trajet ab du chargement de la figure 8.11, une direction supplémentaire est activée, la direction 3. Sur ce même trajet ab ($t_a < t \leq t_b$), la projection $r_{e_1}(t)$ garde une valeur constante égale à $r_{e_1}(t_a)$ et la valeur de la projection $r_{e_2}(t)$ continue à augmenter de façon monotone, jusqu'à atteindre la valeur $r_{e_2}(t_b)$. Par conséquent, pour $i = \{1, 2, 3\}$ le modèle a un comportement en première charge. Au point a, une inversion se produit sur la projection pour $i = 8$. La valeur de cette projection est alors mémorisée par $r_{e_8}^R(t) = r_{e_8}(t_a)$ pour $\forall\ t\ \in]t_a, t_b]$. Sur cette direction le modèle a un comportement cyclique, tel que $\Delta r_{s_8}(t) = \mathscr{L}_2\left\{\Delta r_{e_8}(t)\right\}$ et $\Delta r_{e_8}(t) = r_{e_8}(t) - r_{e_8}^R(t)$, $\forall\ t\ \in]t_a, t_b]$.

Pour des modules de cisaillement globaux μ_1 et μ_2 donnés, il est nécessaire de définir les modules élastiques μ_1^q et μ_2^q le long des directions $\vec{q}_i$. Pour cela considérons ici un paramétrage particulier des vecteurs unitaires $\vec{q}_i$, notés $\vec{q}^{\,k}$, tels que :

$$\vec{q}^{\,k} = \vec{q}\left(k.\frac{\pi}{4}\right) \tag{8.57}$$

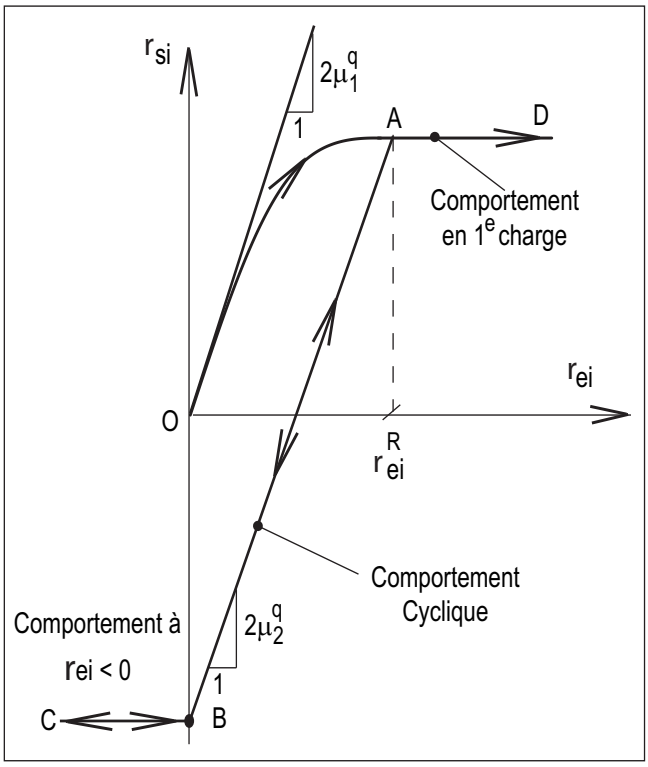


Fig. 8.10 – Illustration du comportement du modèle en projection sur la direction i.

où k est un entier, qui indexe le vecteur $\vec{q}^{\,k}$ par son orientation d'angle $k.\frac{\pi}{4}$ par rapport au vecteur $\vec{J}$, dans le plan déviatoire. Les vecteurs notés $\vec{q}^{\,0}$ à $\vec{q}^{\,K}$, sont tels que :
$\{\vec{q}^{\,0} = \vec{q}_1, \vec{q}^{\,1} = \vec{q}_2, ..\vec{q}^{\,7} = \vec{q}_8, \vec{q}^{\,8} = \vec{q}_1, \vec{q}^{\,9} = \vec{q}_2, ..\}$. Envisageons le vecteur déformation $\underline{\vec{e}}$ dans le plan déviatoire 8.12, tel que :

$$\underline{\vec{e}} = Q_e.\vec{u}_\varepsilon \tag{8.58}$$

et $\vec{u}_\varepsilon$ est le vecteur unitaire orienté d'un angle $\chi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ par rapport à un vecteur quelconque $\vec{q}^{\,k}$. Le vecteur $\vec{u}_\varepsilon$ est tel que :

$$\vec{u}_\varepsilon = \cos(\chi)\ \vec{q}^{\,k} + \sin(\chi)\ \vec{q}^{\,k+2} \tag{8.59}$$

Les seules projections positives et non nulles du vecteur $\underline{\vec{e}}$ sont celles sur les vecteurs $\vec{q}^{\,k}$, $\vec{q}^{\,k+1}$, $\vec{q}^{\,k+2}$ et $\vec{q}^{\,k+7}$, tel que l'indique la figure 8.12. Considérons un comportement élastique linéaire, en petite déformation ; les projections de $\underline{\vec{e}}$ sur les vecteurs de la figure 8.12, conduisent aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\vec{s}}_k = 2\mu_1^q\ Q_e\ \cos(\chi)\ \vec{q}^{\,k} \\ \underline{\vec{s}}_{k+1} = 2\mu_1^q\ \frac{Q_e}{\sqrt{2}}\ \{\cos(\chi) + \sin(\chi)\}\ \vec{q}^{\,k+1} \\ \underline{\vec{s}}_{k+2} = 2\mu_1^q\ Q_e\ \sin(\chi)\ \vec{q}^{\,k+2} \\ \underline{\vec{s}}_{k+7} = 2\mu_1^q\ \frac{Q_e}{\sqrt{2}}\ \{\cos(\chi) - \sin(\chi)\}\ \vec{q}^{\,k+7} \end{cases} \tag{8.60}$$

sachant que :

$$\begin{cases} \vec{q}^{\,k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\vec{q}^{\,k} + \vec{q}^{\,k+2}\right\} \\ \vec{q}^{\,k+7} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\vec{q}^{\,k} - \vec{q}^{\,k+2}\right\} \end{cases} \tag{8.61}$$

on calcule le vecteur contrainte $\underline{\vec{s}}$ résultant de la somme des projections individuelles données par 8.60, tel que :

$$\underline{\vec{s}} = 2\,(2\mu_1^q)\;\; Q_e\;\; \left\{\cos(\chi)\;\vec{q}^{\,k} + \sin(\chi)\;\vec{q}^{\,k+2}\right\} \tag{8.62}$$

compte tenu de 8.58 et 8.59, la relation 8.62 peut s'écrire :

$$\underline{\vec{s}} = 2\,(2\mu_1^q)\;\; \underline{\vec{e}} \tag{8.63}$$

ceci quels que soient les vecteurs $\vec{q}^{\,k}$, $\vec{q}^{\,k+2}$ et l'angle $\chi \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Notons que pour $\chi = 0$, la projection sur $\vec{q}^{\,k+2}$ est nulle et le vecteur $\underline{\vec{s}}$ est porté par $\vec{q}^{\,k}$ (cf. relation 8.62). Dans le cas où $\chi = \frac{\pi}{4}$, la projection sur $\vec{q}^{\,k+7}$ est nulle et le vecteur $\underline{\vec{s}}$ est porté par $\vec{q}^{\,k+1}$ (cf. relations 8.61 et 8.62). En considérant le module global de l'enduction, le vecteur $\underline{\vec{s}}$ s'écrit :

$$\underline{\vec{s}} = 2\;\mu_1\;\underline{\vec{e}} \tag{8.64}$$

les relations 8.63 et 8.64 conduisent à :

$$\mu_1^q = \frac{\mu_1}{2} \tag{8.65}$$

Si on adopte le même raisonnement en décharge le long du vecteur $\vec{u}_\varepsilon$ de la figure 8.12 et si on considère une décharge élastique linéaire, en petite déformation, il s'ensuit que :

$$\mu_2^q = \frac{\mu_2}{2} \tag{8.66}$$

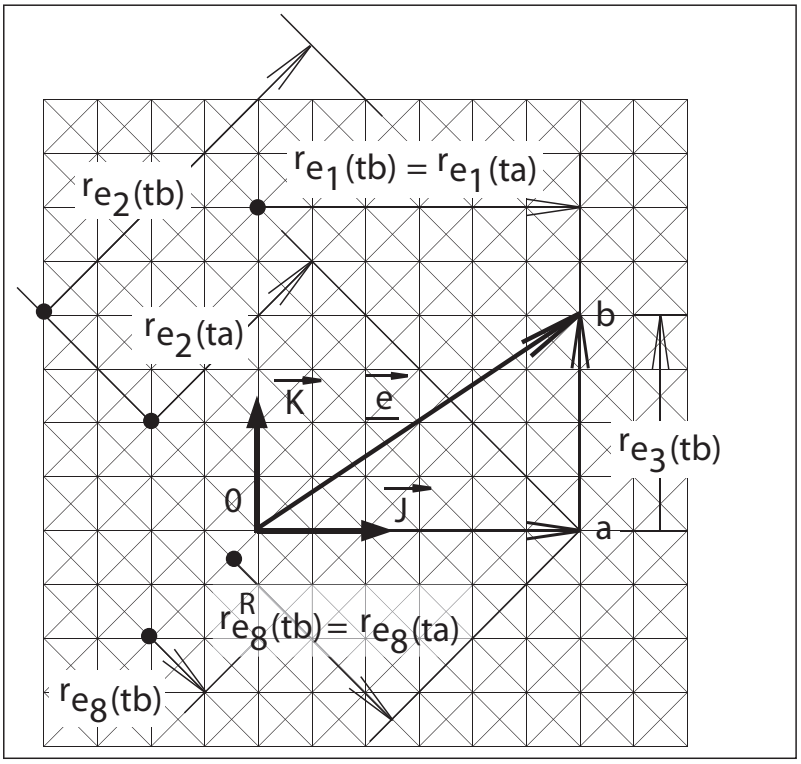


Fig. 8.11 – Illustration du fonctionnement du modèle octo-directionnel, dans le plan déviatoire de la déformation.

En tenant compte des relations, 8.65 et 8.66, la définition de la loi irréversible octo-directionnelle peut s'écrire :

$$\underset{\sim}{\overline{\Sigma}} = \sum_{i=1}^{8} r_{s_i}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_i \tag{8.67}$$

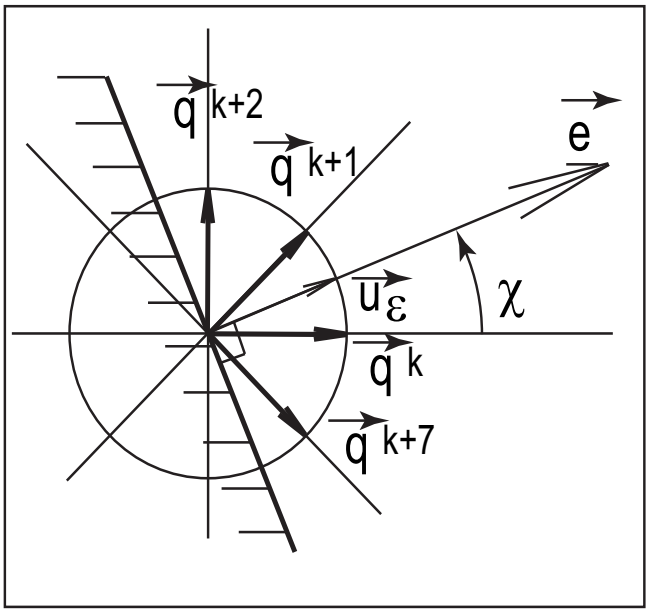


Fig. 8.12 – Projection d'un vecteur déformation $\vec{\underline{e}}$ orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_\varepsilon$.

avec :

$$\begin{cases} r_{s_i} & = \frac{1}{2}\ \left\{2\mu_1 M\left(r_{e_i}^R\right) r_{e_i}^R + 2\mu_2 \Delta r_{e_i}\right\} \\ \Delta r_{e_i} & = r_{e_i} - r_{e_i}^R \\ r_{e_i} & = \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\overline{\varepsilon}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_i\right) \end{cases} \quad ; \quad \text{(i=1,8)} \tag{8.68}$$

où $r_{e_i}^R$ est la projection de référence à l'inversion selon la direction i (cf. tab. 8.2) et $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_i$ $(i = 1, 8)$ les tenseurs d'orientation dans le plan déviatoire définis par la relation 8.51.

La définition de la loi irréversible octo-directionnelle donnée par les relations 8.67 et 8.68 n'est pas complète. En effet, il est nécessaire de définir la partie isotrope de la loi. Ce travail sera réalisé aux paragraphes suivants (8.6 et 8.7), dans lesquels deux choix de modélisation seront présentés.

8.6 Loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope linéaire

Cette loi est définie par une partie isotrope linéaire, telle que :

$$\Sigma_m = 2K_1\varepsilon_m \tag{8.69}$$

où K_1 est un module de compressibilité constant. La partie déviatoire est octo-directionnelle. Elle est définie par les relations (8.67) et (8.68). Le comportement de cette loi est illustré en traction ondulée sur la figure 8.13. En comparant ce résultat à la réponse de la loi irréversible radiale en traction ondulée (fig. 8.5), on constate qu'il n'y a plus d'effet de couplage isotrope-déviatoire (fig. 8.13 -d et fig. 8.5 -e). Ceci se traduit, sur le diagramme $\Sigma_{11} - \varepsilon_{11}$ (fig. 8.13 -a) par les décharges-recharges (ABA et CDC) élastiques linéaires avec un module constant.

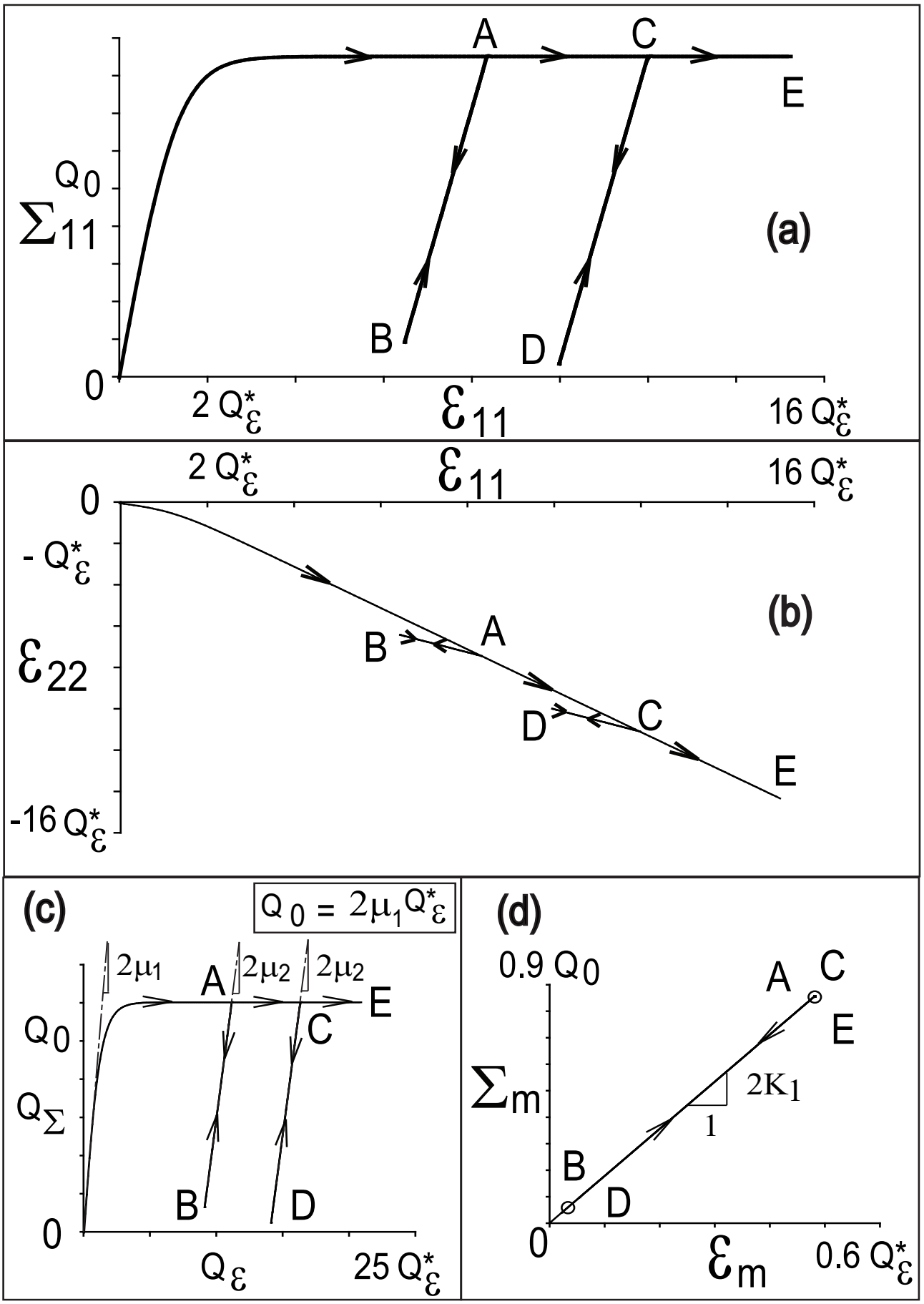


Fig. 8.13 – Illustration ent traction ondulée de la loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope linéaire.

8.7 Loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope non linéaire

La partie isotrope est du type irréversible non linéaire. Elle est définie par la superposition de deux contributions Σ_m^I et Σ_m^{II}, telle que :

$$\Sigma_m = \Sigma_m^I + \Sigma_m^{II} \tag{8.70}$$

cette définition est illustrée par la figure 8.14. La contribution Σ_m^I est irréversible ; elle est carac-

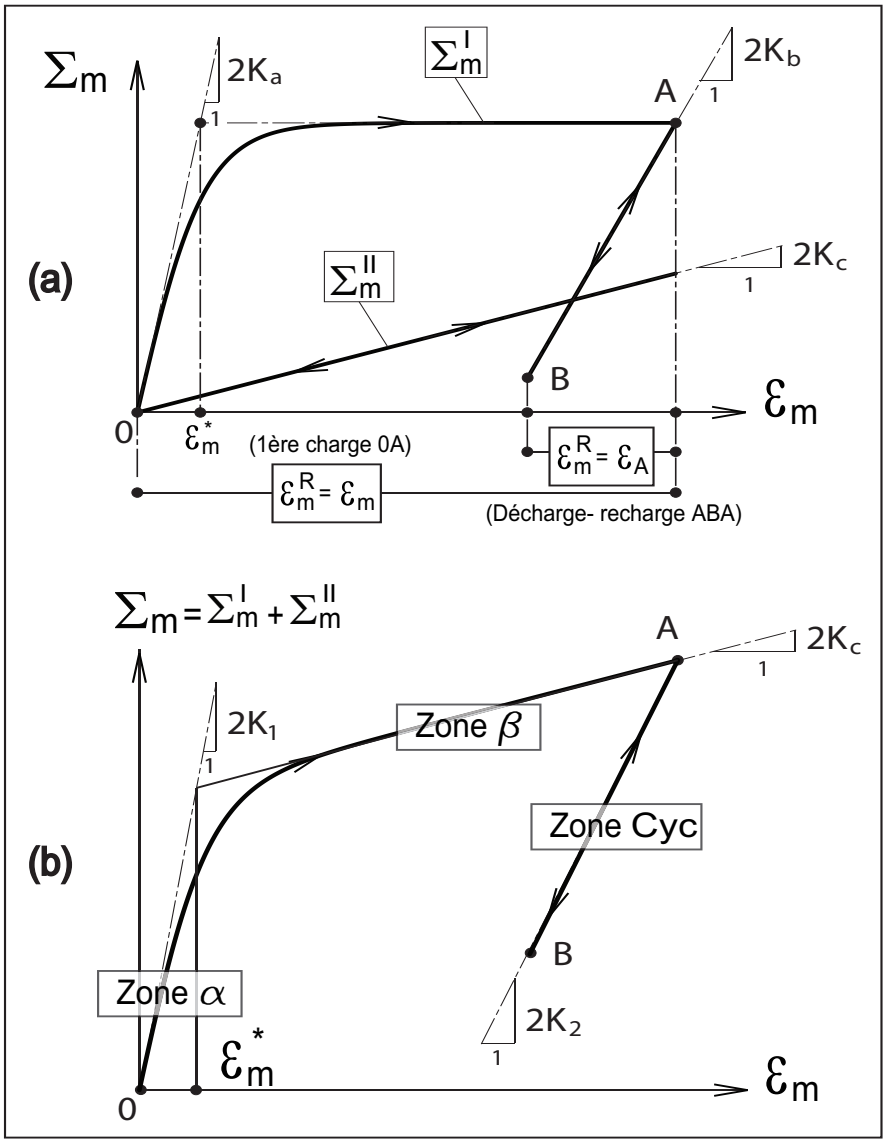


Fig. 8.14 – Illustration de la définition 8.70.

térisée par un module de compressibilité K_a en première charge, un module de compressibilité K_b en décharge-recharge et une déformation au coude de ε_m^* (fig. 8.14 -a). La contribution Σ_m^{II} est réversible linéaire ; elle est caractérisée par un module de compressibilité K_c (fig. 8.14 -a). La contribution Σ_m^{II} apporte un ingrédient supplémentaire à la modélisation, qui correspond à l'évolution de la contrainte moyenne totale Σ_m sur le plateau (Zone β, fig. 8.14 -b). Les modules de compressibilité K_a et K_b sont tels que :

$$\begin{cases} K_a &= K_1 - K_c \\ K_b &= K_2 - K_c \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} K_1 &= \lambda_1 + \mu_1 \\ K_2 &= \lambda_2 + \mu_2 \end{cases} \tag{8.71}$$

où K_1 et K_2 sont respectivement les modules de compressibilité de la zones α et de la zone cyclique de la figure 8.14 -b, notée "zone Cyc". A ces modules de compressibilité K_1 et K_2 correspondent des modules de Lamé (λ_1, μ_1) et (λ_2, μ_2). Les contributions Σ_m^I et Σ_m^{II} sont telles que :

$$\begin{cases} \Sigma_m^I & = 2K_a.M\left(2\varepsilon_m^R\right).\varepsilon_m^R + 2K_b\left(\varepsilon_m - \varepsilon_m^R\right) \\ \Sigma_m^{II} & = 2K_c.\varepsilon_m \end{cases} \tag{8.72}$$

où ε_m^R est la déformation moyenne de référence et $M(x)$ est la fonction de variation des modules, précedement introduite au paragraphe 8.3 et illustrée par la figure 8.1. La définition 8.72 est complétée par le tableau 8.3, qui définit un critère d'inversion et précise la valeur de ε_m^R, au cours du chargement.

TABLE 8.3: Critère d'inversion et définition de $\varepsilon_m^R(t)$.

Temps	ε_m^R	Modèle	Illustration
t = 0	$\varepsilon_m^R = 0$	État initial $\varepsilon_m^R = \varepsilon_m = \Sigma_m = 0$	Point O fig. 8.14
t>0	$\varepsilon_m(t) \geq \varepsilon_m^R(t-dt)$	Comportement en première charge $\varepsilon_m^R = \varepsilon_m$	Chargements OA fig. 8.14
	Critère d'inversion $\varepsilon_m(t) < \varepsilon_m^R(t-dt)$	inversion et comportement cyclique $\varepsilon_m^R(t) = \varepsilon_m^R(t-dt)$	Chargements ABA fig. 8.14

La partie déviatoire de la loi est du type irréversible non linéaire. Elle est définie, de façon analogue, par la superposition d'une contribution irréversible du type octo-directionnelle (cf. § 8.5) et d'une contribution réversible. La contribution octo-directionnel est caractérisée par deux modules de cisaillement (μ_a, μ_b) et une déformation au coude Q_ε^*. La contribution réversible est caractérisée par un module de cisaillement μ_c. Compte tenu de cette hypothèse et de la définition de la loi octo-directionnelle (cf. § 8.67 et 8.68), la loi s'écrit :

$$\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \sum_{i=1}^{8} r_{s_i}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_i + 2\mu_c\, \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tag{8.73}$$

avec :

$$\begin{cases} r_{s_i} & = \frac{1}{2}\ \left\{2\mu_a M\left(r_{e_i}^R\right) r_{e_i}^R + 2\mu_b \Delta r_{e_i}\right\} \\ \Delta r_{e_i} & = r_{e_i} - r_{e_i}^R \\ r_{e_i} & = \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}_i\right) \end{cases} \quad ; \quad (\mathrm{i}=1,8) \tag{8.74}$$

Les modules de cisaillement μ_a et μ_b sont tels que :

$$\begin{cases} \mu_a & = \mu_1 - \mu_c \\ \mu_b & = \mu_2 - \mu_c \end{cases} \tag{8.75}$$

où μ_1 et μ_2 sont respectivement les modules de cisaillement des zones α et Cyc ; le module de cisaillement μ_c correspond au comportement sur le plateau en zone β. Les zones α, β et Cyc sont illustrées sur la figure 8.15 dans un diagramme $Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}} - Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$. La figure 8.16 donne une illustration du comportement de la loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope non linéaire,

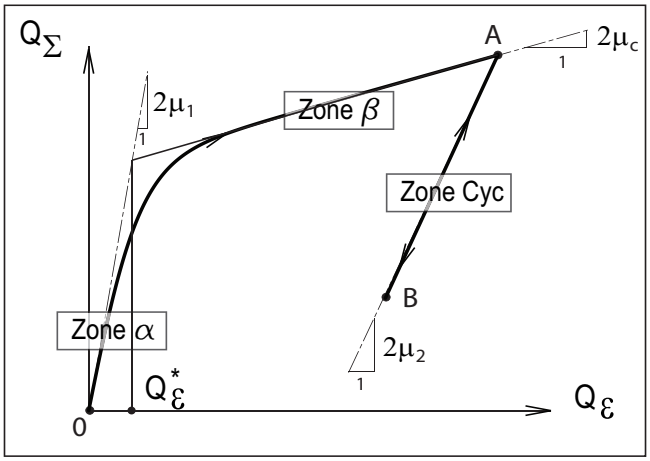


Fig. 8.15 – zones α, β et Cyc dans un diagramme $Q_{\underset{\sim}{\Sigma}} - Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$.

dans le cas d'une traction ondulée $OABCDE$. Les figures 8.16 -a et -b donnent respectivement les réponses de la loi selon l'axe de traction, dans un diagramme $\Sigma_{11} - \varepsilon_{11}$ et en contraction dans un diagramme $\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}$. Les comportements déviatoire et isotrope découplés sont caractérisés respectivement par les figures 8.16 -c et -d. La figure 8.17 illustre le comportement de la loi dans le cas d'une sollicitation biaxiale, contrôlée en déformation. Le chargement, qui correspond au trajet $OABCD$, est donné dans le plan biaxial de la déformation sur la figure 8.17 -a. La réponse biaxiale de la loi est donnée sur la figure 8.17 -b.

En considérant un comportement élastique linéaire, en première charge et en petite déformation, dans la zone α, les relations (8.64), (8.65) et (8.72) conduisent à une écriture simplifiée de la loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope non linéaire, telle que :

$$\begin{cases} \Sigma_m & = 2K_a.M\left(2\varepsilon_m\right).\varepsilon_m \\ \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} & = 2\mu_1.\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{cases} \tag{8.76}$$

cette expression équivalente à la loi de Hooke 2D (cf. relation 8.20), peut encore s'écrire (cf. relation 8.24)

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha^2}}\left\{\nu^\alpha \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + (1-\nu^\alpha)\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\} \tag{8.77}$$

où :

$$E^\alpha = \frac{4\mu_1\left(\lambda_1+\mu_1\right)}{\lambda_1+2\mu_1} \qquad \text{et} \qquad \nu^\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1} \tag{8.78}$$

et

$$K_1 = \lambda_1 + \mu_1 \tag{8.79}$$

Ainsi les paramètres élastiques qui caractérisent la zone α, peuvent être (K_1, μ_1) ou (λ_1, μ_1) ou encore (E^α, ν^α).

De la même façon, si on considère un chargement incrémental dans la zone β, une écriture simplifiée de loi sera défini par :

$$\begin{cases} d\Sigma_m & = 2K_c.d\varepsilon_m \\ d\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} & = 2\mu_c.d\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{cases} \tag{8.80}$$

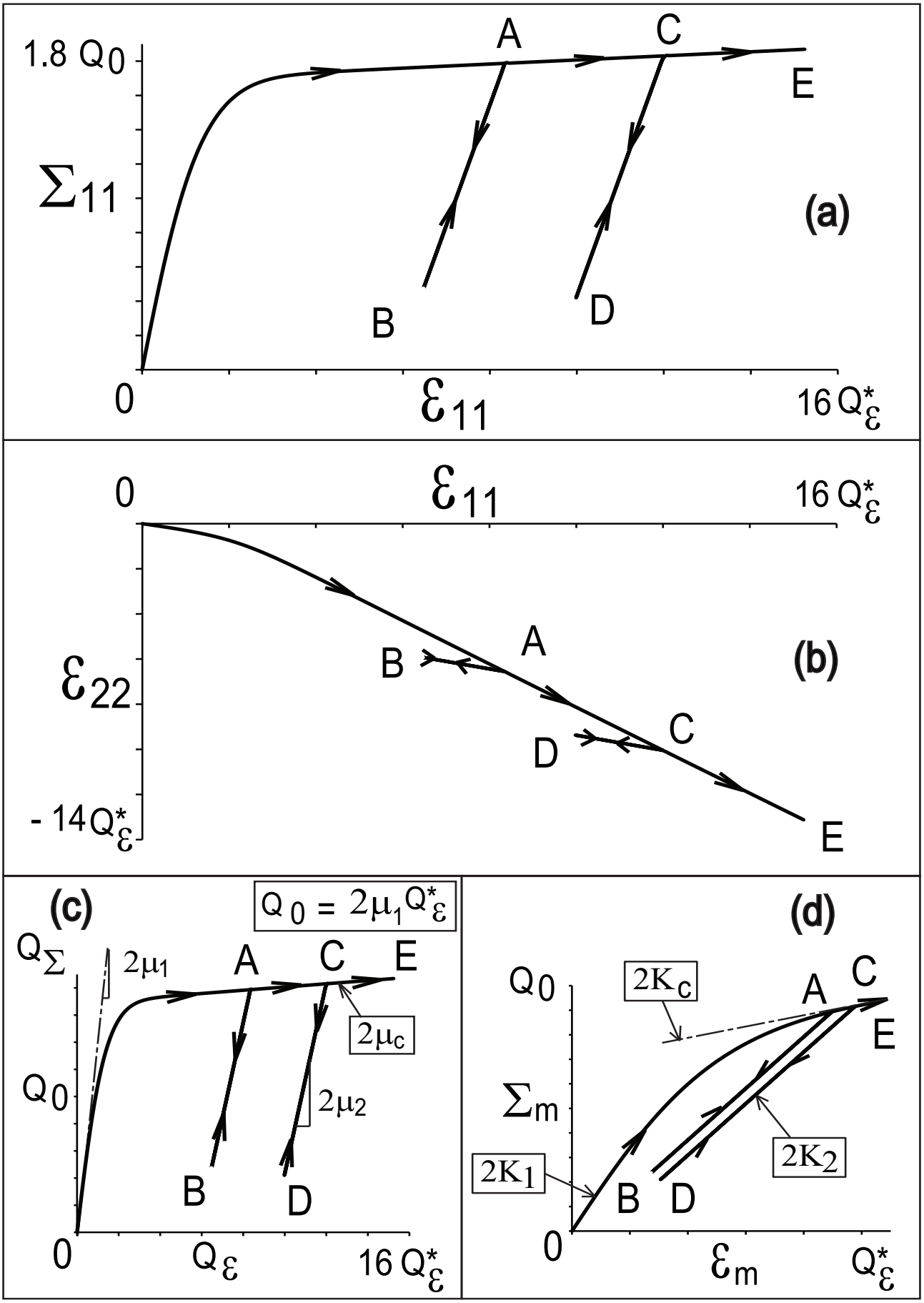


Fig. 8.16 – Comportement en traction ondulée - loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope non linéaire.

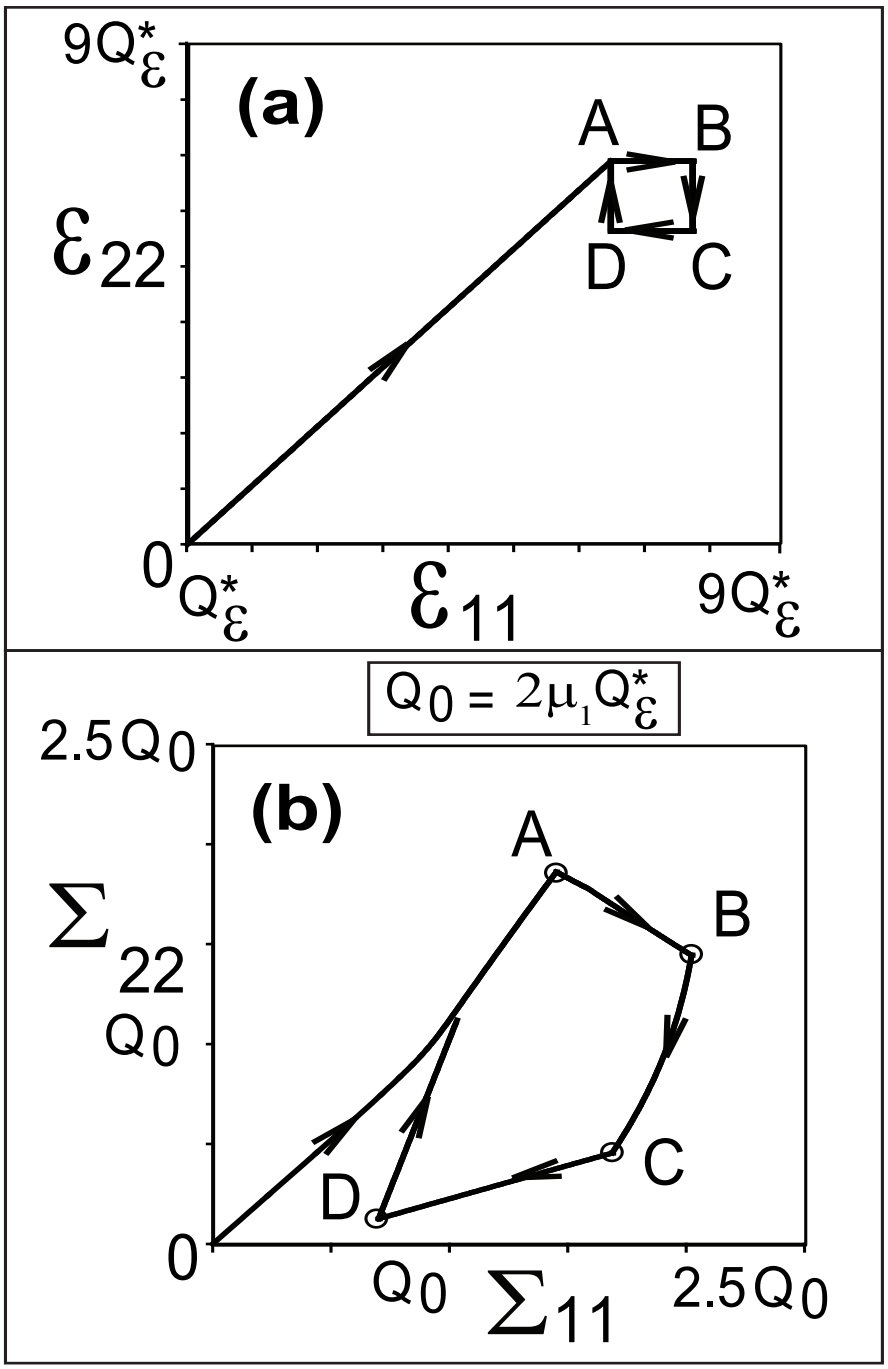


Fig. 8.17 – Comportement en traction biaxiale - loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope non linéaire.

ce qui conduit à :

$$d\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{E^{\beta}}{1-\nu^{\beta^2}}\left\{\nu^{\beta}\mathrm{Tr}\left(d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + (1-\nu^{\beta})d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\} \tag{8.81}$$

où :

$$E^{\beta} = \frac{4\mu_c\left(\lambda_c+\mu_c\right)}{\lambda_c+2\mu_c} \qquad \text{et} \qquad \nu^{\beta} = \frac{\lambda_c}{\lambda_c+2\mu_c} \tag{8.82}$$

et

$$K_c = \lambda_c + \mu_c \tag{8.83}$$

La zone β peut être caractérisée par (K_c, μ_c) ou (λ_c, μ_c) ou encore (E^{β}, ν^{β}).

Dans la zone cyclique, si on considère un chargement incrémental, une écriture simplifiée de la loi est donnée par :

$$\begin{cases} d\Sigma_m &= 2K_2.d\varepsilon_m \\ d\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} &= 2\mu_2.d\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{cases} \tag{8.84}$$

ce qui conduit à :

$$d\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{E^{\mathrm{Cyc}}}{1-\nu^{\mathrm{Cyc}^2}}\left\{\nu^{\mathrm{Cyc}}\mathrm{Tr}\left(d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + (1-\nu^{\mathrm{Cyc}})d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\} \tag{8.85}$$

où :

$$E^{\mathrm{Cyc}} = \frac{4\mu_2\left(\lambda_2+\mu_2\right)}{\lambda_2+2\mu_2} \qquad \text{et} \qquad \nu^{\mathrm{Cyc}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2} \tag{8.86}$$

et

$$K_2 = \lambda_2 + \mu_2 \tag{8.87}$$

Ainsi la zone cyclique, peut être caractérisée par (K_2, μ_2) ou (λ_2, μ_2) ou encore $(E^{\mathrm{Cyc}}, \nu^{\mathrm{Cyc}})$.

8.8 Loi viscoélastique à comportement retardé irréversible.

Le comportement retardé adopté correspond à la loi irréversible octo-directionnelle découplée à partie isotrope non linéaire, présentée au paragraphe 8.7. La loi visqueuse à comportement retardé irréversible est obtenue en superposant une contribution visqueuse $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}_v$ à la partie déviatoire et une contribution visqueuse Σ_m^v à la partie isotrope, du comportement retardé ; telle que :

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} &= \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} + \Sigma_m\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \\ \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}} &= \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}_{\mathrm{oct}} + \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}_v \\ \Sigma_m &= \Sigma_m^{\mathrm{oct}} + \Sigma_m^v \end{cases} \tag{8.88}$$

Le comportement retardé est défini par sa partie déviatoire, notée $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}_{\mathrm{oct}}$ et sa partie isotrope, notée Σ_m^{oct}. La partie isotrope Σ_m^{oct} du comportement retardé est définie par les relations (8.70) à (8.72), par le tableau 8.3 et illustrée par la figure 8.14 ; la partie déviatoire $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}_{\mathrm{oct}}$ du comportement retardé est définie par les relations (8.73) à (8.75) et illustrée par la figure 8.15. Les contributions visqueuses $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}_v$ et Σ_m^v sont définies par deux équations différentielles indépendantes, du type Maxwell ; la première est tensorielle, telle que :

$$\frac{\dot{\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}}_v}{2\mu_v} + \frac{\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}_v}{\eta\left(Q_D\right)} = \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{D}}} \tag{8.89}$$

la deuxième est scalaire, telle que :

$$\frac{\dot{\Sigma_m^v}}{2K_v} + \frac{\Sigma_m^v}{\eta\left(2D_m\right)} = D_m \tag{8.90}$$

où :

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{D}}} & = \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} - D_m \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \\ D_m & = \frac{\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\right)}{2} \\ Q_D & = \sqrt{\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{D}}}.\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{D}}}\right)} \end{cases} \tag{8.91}$$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ représente le tenseur taux de déformation et $\eta(x)$ désigne la viscosité de Carreau -Yasuda (cf. chapitre 1), telle que :

$$\eta(x) = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[1 + (\lambda\,|x|)^a\right]^{\frac{1-m}{a}}} \tag{8.92}$$

Pour définir la viscosité de la partie déviatoire $\eta\,(Q_D)$, les paramètres de Carreau -Yasuda seront notés respectivement $\underline{\eta}^e_\infty$, $\underline{\eta}^e_0$, $\underline{\lambda}^e$, $\underline{a}^e$ et , $\underline{m}^e$; où l'exposant e désigne l'enduction et la barre indique la partie déviatoire. Concernant la viscosité de la partie isotrope, ces paramètres seront notés respectivement η^e_∞, η^e_0, λ^e, a^e et , m^e. Les paramètres μ_v et K_v désignent respectivement le module de cisaillement et le module de compressibilité des contributions visqueuses $\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}_v$ et Σ^v_m. Pour illustrer le comportement de cette loi, considérons le chargement en déformation $OABCD$ de la figure 8.18 -a. Ce chargement est d'abord envisagé sans séquences de relaxation biaxiale ; dans ce cas la réponse correspondante de la loi est donnée en trait mixte, dans le plan $\Sigma_{22}-\Sigma_{11}$ sur la figure 8.18 -b et dans des diagrammes $\Sigma_m-\varepsilon_m$, $q_\Sigma-q_\varepsilon$ sur la figure 8.19 -a et -b respectivement.

Dans un deuxième temps nous avons envisagé un chargement OA, suivi d'une séquence de relaxation biaxiale en A, puis trois autres séquences de relaxations biaxiales situées successivement en B, C et D. Les positions de ces relaxations sont signalées par des cercles sur la figure 8.19 -a. La réponse correspondante est indiquée en trait continu sur les figures 8.18 -b et 8.19. Sur ces figures le début des séquences de relaxation se situe en A, B, C et D ; la fin de ces séquences de relaxation se situe respectivement en $R1$, $R2$, $R3$ et $R4$. Une séquence de relaxation biaxiale consiste à maintenir simultanément constantes les deux composantes de déformation ε_{11} et ε_{22}, au cours de temps et pour une durée donnée. Au cours de ces séquences de relaxation biaxiale, le point représentatif de l'état de contrainte dans le plan $\Sigma_{22} - \Sigma_{11}$ (fig. 8.18 -b), réalise les trajets complexes $AR1$, $BR2$, $CR3$ et $DR4$, respectivement.

Notons que sur les trajets de chargement AB, BC, CD et DA, une des composantes de la déformation est maintenue constante, quand la deuxième évolue, ce qui pourrait correspondre à une sorte de relaxation partielle, qui provoque une réponse complexe ; cela peut s'observer, par exemple, sur la réponse de la loi au cours du trajet de chargement AB sur la figure 8.19 -a.

8.9 Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre un ensemble de lois adaptées à décrire le comportement bidimensionnel de l'enduction. Ainsi, le comportement de l'enduction peut être élastique linéaire ou non linéaire, viscoélastique à comportement retardé réversible ou irréversible.

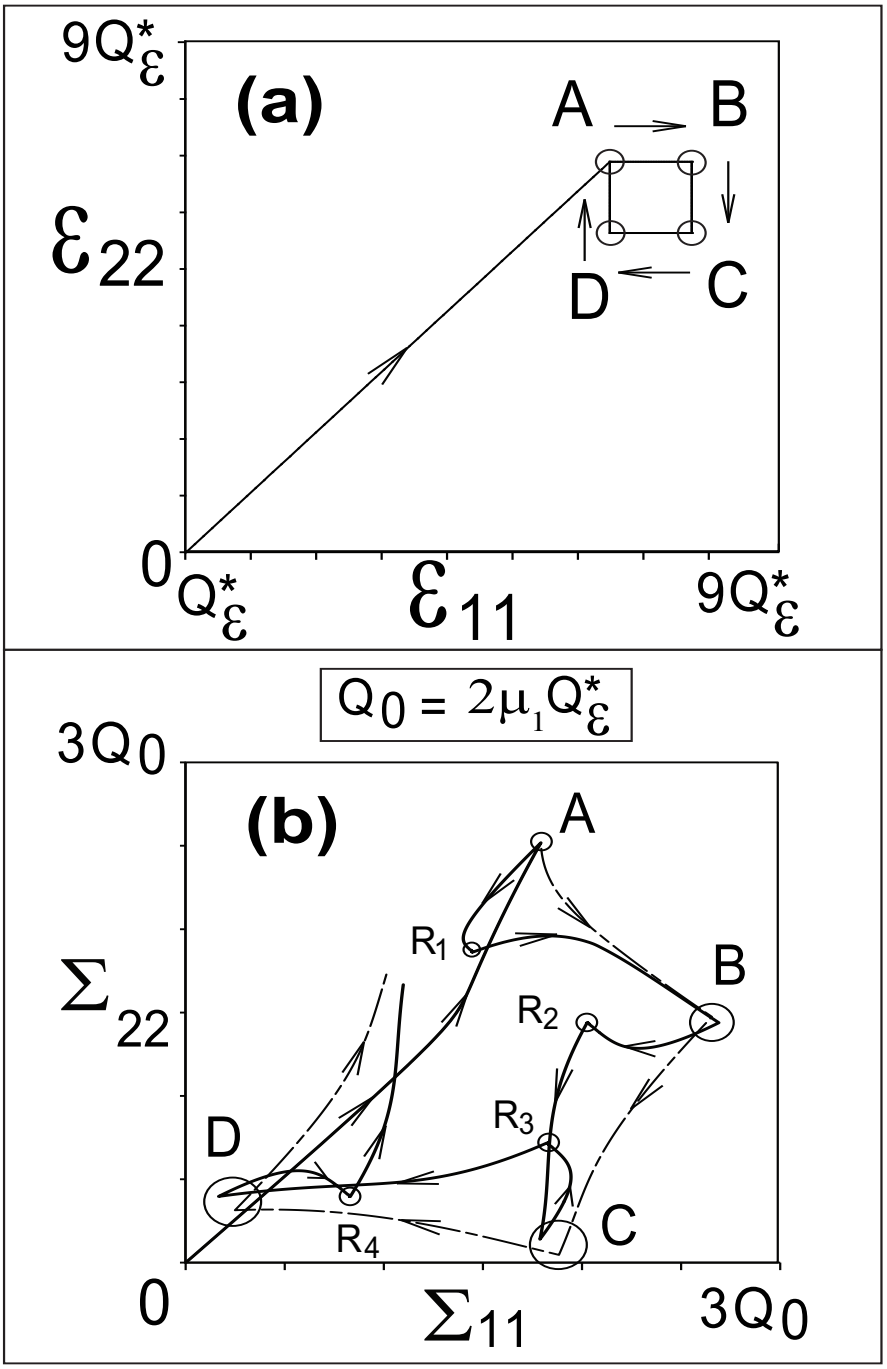


Fig. 8.18 – Loi visqueuse à comportement retardé irréversible : (a) chargement en déformation avec ou sans relaxation ; (b) réponse avec relaxation en trait continu et réponse sans relaxation en trait mixte.

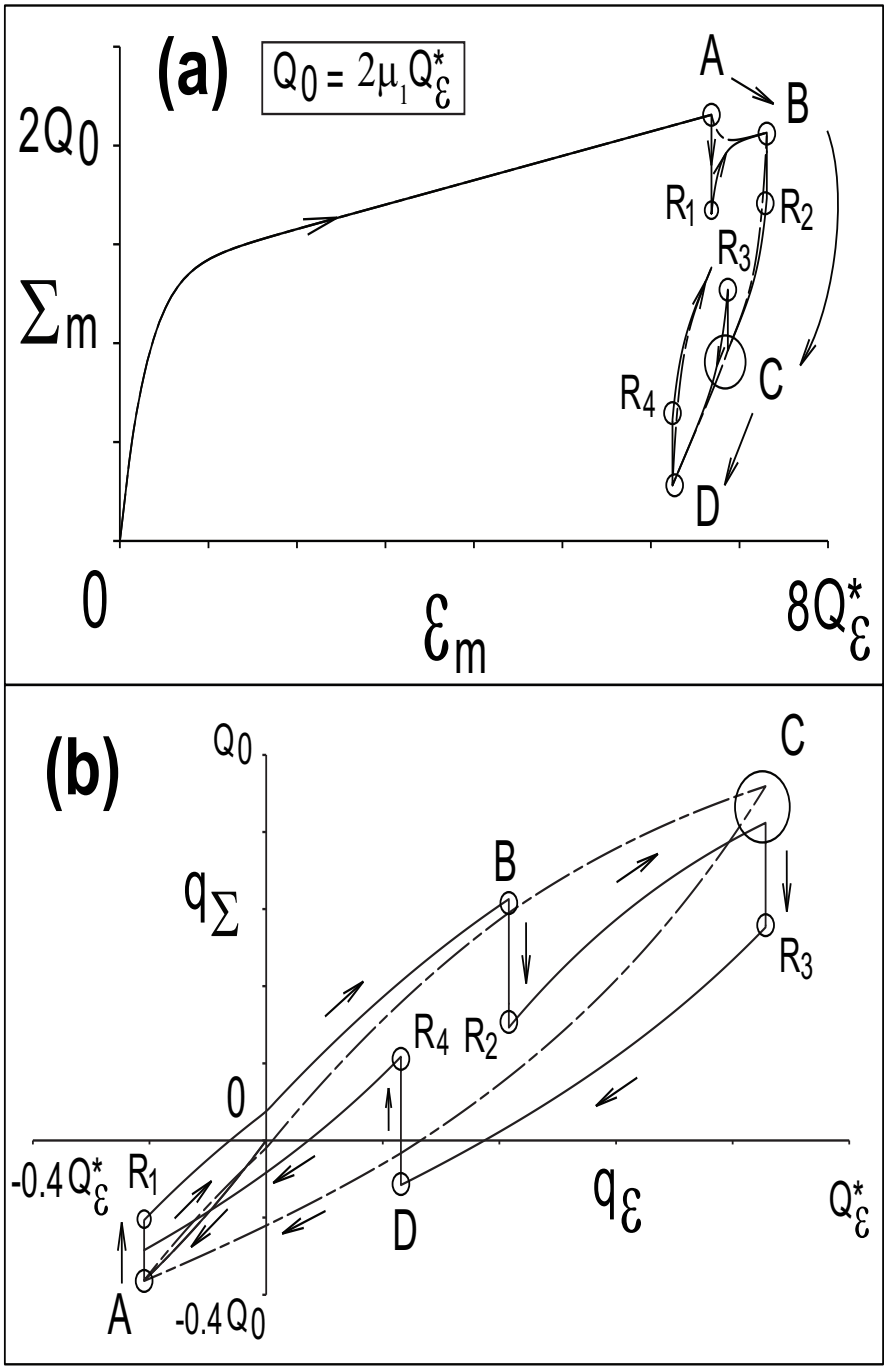


Fig. 8.19 – Réponse de la loi visqueuse à comportement retardé irréversible (avec relaxation en trait continu et sans relaxation en trait mixte) : (a) diagramme $\Sigma_m - \varepsilon_m$; (b) diagramme $q_\Sigma - q_\varepsilon$.

Quatrième partie

Simulation Numérique

Chapitre 9

Simulation par Eléments Finis du comportement du Dacron

Le modèle proposé pour décrire le comportement du Dacron HTP plus a été implémenté sous ABAQUS standard, à l'aide d'une routine utilisateur UMAT, programmée en Fortran. Ce chapitre est destiné à décrire les hypothèses et les choix liés à cette implémentation, ainsi qu'à la procédure de sa validation.

9.1 Modèle éléments finis d'une éprouvette de traction

Afin de valider notre approche de modélisation du comportement du Dacron HTP plus, le modèle proposé a été implémenté en 3D, sous ABAQUS standard, à l'aide d'une UMAT, avec des éléments de type membrane. Abaqus Standard réalise du calcul de structure en analyses quasi-statiques au moyen d'un algorithme de Newton-Raphson. Pour simuler les essais de traction, les éprouvettes sont maintenues dans le plan (O,X,Y) par une condition aux limites en déplacement ($z = 0$). Les éprouvettes rectangulaires sont définies par la figure 3.4 du chapitre 3 ; elles sont de hauteur 300mm, de largeur 50mm et d'épaisseur arbitraire $e^* = 1$ (cf. relation 2.55, du chapitre 2). Le modèle Éléments Finis de l'éprouvette est maillé avec des éléments membrane quadrangle à quatre nœuds (la désignation Abaqus de ces éléments est M3D4). Les conditions aux limites en déplacement d'un essai de traction sont définies sur la figure 9.1. Sur toute l'éprouvette, les nœuds sont bloqués en déplacement selon l'axe Z ($U_z = 0$), la sollicitation en traction est imposée sur la face AB de l'éprouvette et la face CD est encastrée. Selon les conditions aux limites en effort, aucune force extérieure n'est appliquée sur les nœuds du maillage sauf éventuellement sur la face AB dans la direction Y.

Des essais numériques avec un nombre d'éléments variant de 500 à 7000 éléments, ont permis d'optimiser la réponse du modèle et les temps de calcul, avec un choix de l'ordre de 1000 éléments pour une éprouvette en traction dans les axes et de l'ordre de 4000 éléments pour une éprouvette en traction hors axes. Les résultats des simulations, tels que la contrainte ou la déformation sont déterminés par une moyenne dans la zone centrale de l'éprouvette, appelée zone utile sur la figure 1 et caractérisée par un carré de côté « a », avec $a = 20mm$.

9.2 Validation de l'implémentation de la loi de comportement

Pour valider l'implémentation de la loi dans ABAQUS, nous nous proposons de comparer les résultats des simulations à des solutions analytiques, pour deux essais de traction hors axes à 45°

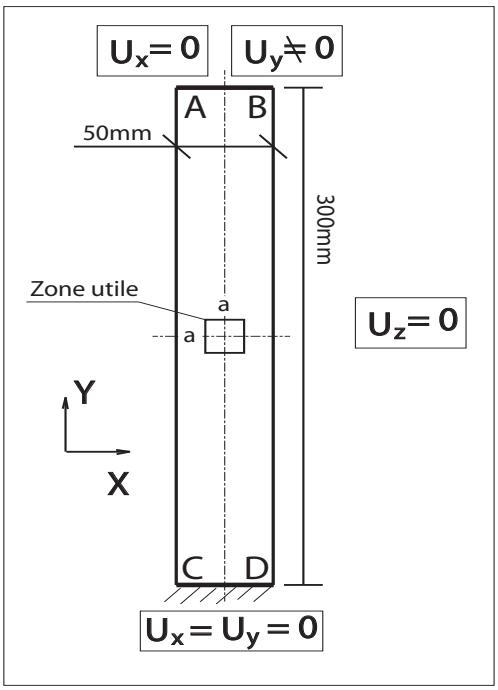


Fig. 9.1 – Conditions aux limites en déplacement d'un essai de traction.

(traction biais) et à 30°, par rapport à la direction chaîne. Ces solutions analytiques concernent l'évolution de l'angle entre les fils de chaîne et les fils de trame, pour un matériau tissé sans enduction, avec des fils élastiques et une contrainte d'interaction élastique entre les fils de chaîne et trame, dont la rigidité très faible. Ce matériau tissé approche le filet de Tchebichev (cf. chapitre 1, section 1.5.3).

9.2.1 Essai de traction biais

Comme nous l'avons évoqué au chapitre 1, plusieurs travaux dans la littérature, traite de l'essai de traction biais ([9], [23], [75], [86], [121], [163], [130], [117], [167], [174]). Au cours de cet essai nous pouvons distinguer trois types de zones de cisaillement, dans l'éprouvette (fig. 9.2). Les zones C, appelées zones d'attaches, se situent à proximité des mors, sur chaque extrémité de l'éprouvette. Dans ces zones l'ensemble des réseaux de fils de chaîne et de trame sont maintenus par les mors. Ces zones restent indéformables en cisaillement au cours de l'essai. Dans les zones B, un seul réseau de fil est maintenu par les mors, le réseau des fils de chaîne ou celui des fils de trame. Ces zones sont appelées zones demi cisaillées. Dans la zone A de l'éprouvette les fils de chaîne et de trame sont libres, c'est la zone cisaillée de l'éprouvette où l'essentiel de la déformation de cisaillement se produit. Ces observations conduisent au paramétrage de la figure 9.3, où δ correspond au déplacement relatif des mors, tel que :

$$L = L_0 + \delta \tag{9.1}$$

Sachant que $l_0 = a.\sqrt{2}$, l'angle entre les fils de chaîne et les fils de la trame, dans la zone A, s'exprime en fonction de δ, par :

$$\alpha_{(\delta)} = 2\arccos(\frac{l_0 + \delta}{\sqrt{2}.l_0}) \tag{9.2}$$

Le déplacement relatif limite des mors, noté δ_{lim}, est obtenu pour un angle $\alpha = 0$, qui correspond à un alignement des fils de chaîne et des fils de trame, dans la zone A de l'éprouvette, tel que :

$$\delta_{\text{lim}} = 2a - l_0 = (L_0 - d_0)(\sqrt{2} - 1) \tag{9.3}$$

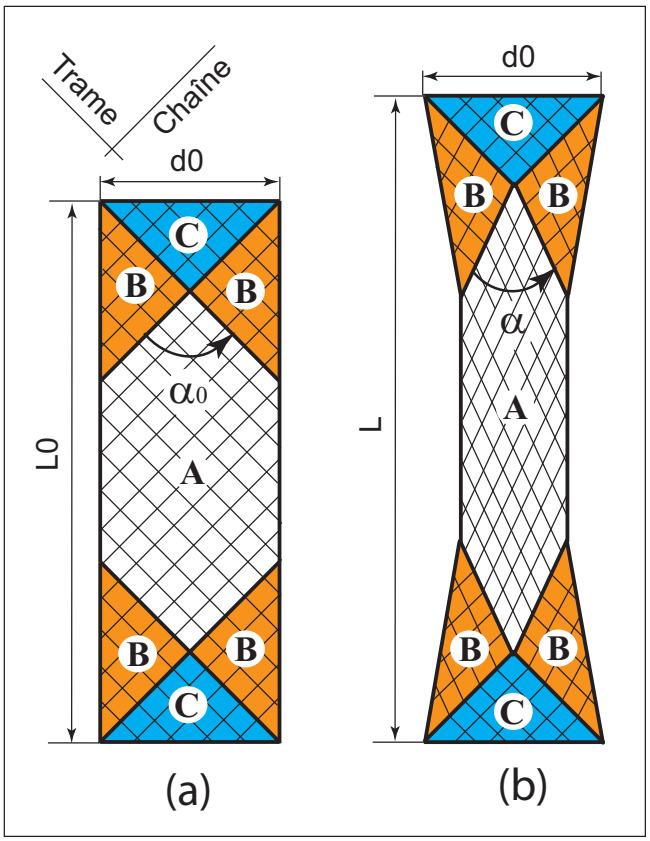


Fig. 9.2 – Essai de traction biais (a) éprouvette initiale avant déformation, (b) éprouvette déformée (α_0 et α sont les angles entre la chaîne et la trame, dans la zone A et dans les configurations initiale et déformée, respectivement).

Pour notre éprouvette (fig. 9.1), $L_0 = 300$mm et $d_0 = 50$mm, ce qui donne, selon 9.3 $\delta_{\text{lim}} = 103.5$mm.

9.2.2 Essai de traction hors axes à 30°

Dans cet essai nous pouvons distinguer quatre types de zones de cisaillement, dans l'éprouvette (fig. 9.4). Les zones C, correspondants aux zones d'attaches, se situent à proximité des mors, sur chaque extrémité de l'éprouvette. Dans ces zones l'ensemble des réseaux de fils de chaîne et de trame sont maintenus par les mors. Ces zones restent indéformables en cisaillement au cours de l'essai. Dans les zones B et D, un seul réseau de fil est maintenu par les mors, le réseau des fils de chaîne ou celui des fils de trame. Ces zones correspondent à des zones demi cisaillées. Dans la zone A de l'éprouvette les fils de chaîne et de trame sont libres, c'est la zone cisaillée de l'éprouvette où l'essentiel de la déformation de cisaillement se produit.

Ces observations conduisent au paramétrage de l'éprouvette sur la figure 9.5, dans la configuration initiale non déformée et dans la configuration déformée.

Paramétrage de l'éprouvette dans la configuration initiale non déformée

Paramétrage de l'éprouvette dans la configuration initiale non déformée « c » entre le bord de l'éprouvette et le point B_0 est telle que :

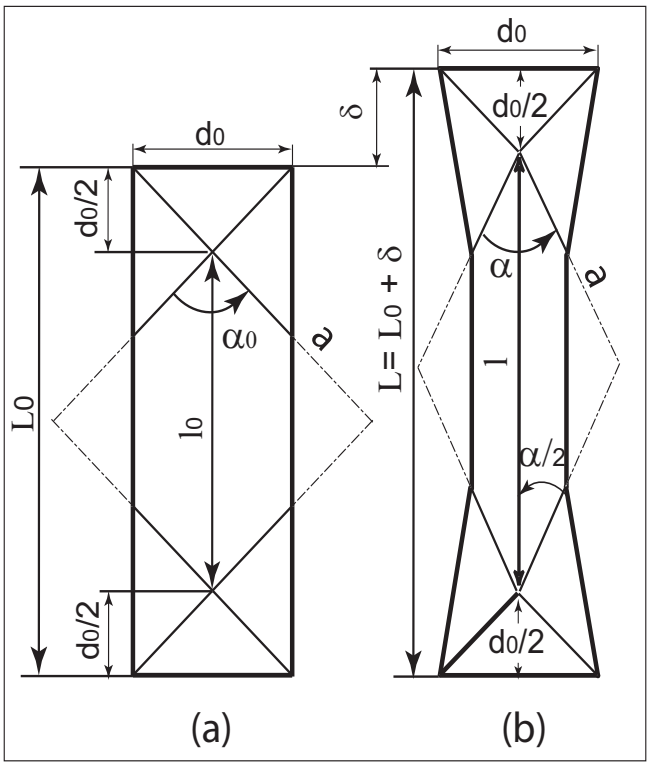


Fig. 9.3 – Paramétrage de l'essai de traction biais (a) éprouvette initiale avant déformation, (b) éprouvette déformée.

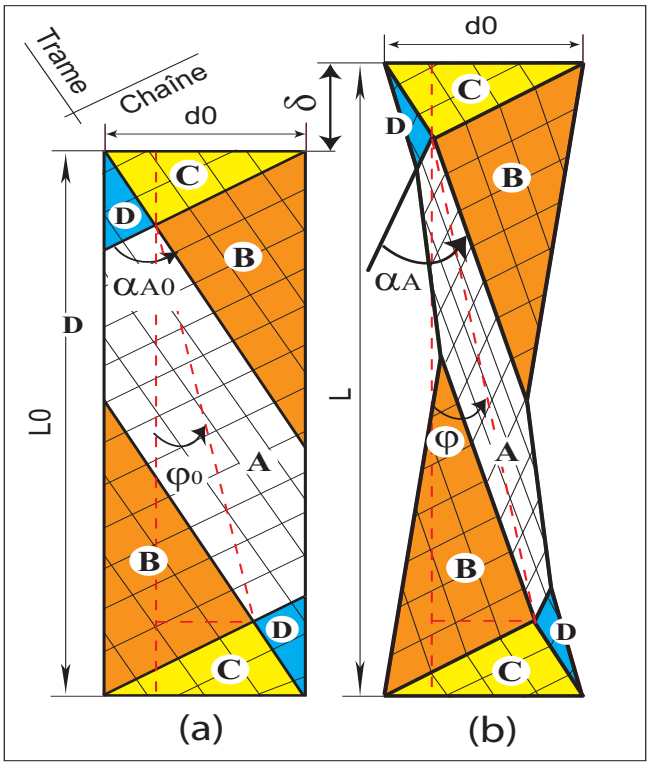


Fig. 9.4 – Essai de traction hors axes à 30°(a) éprouvette initiale avant déformation, (b) éprouvette déformée.

$$c = \frac{\sqrt{3}}{4} d_0 \tag{9.4}$$

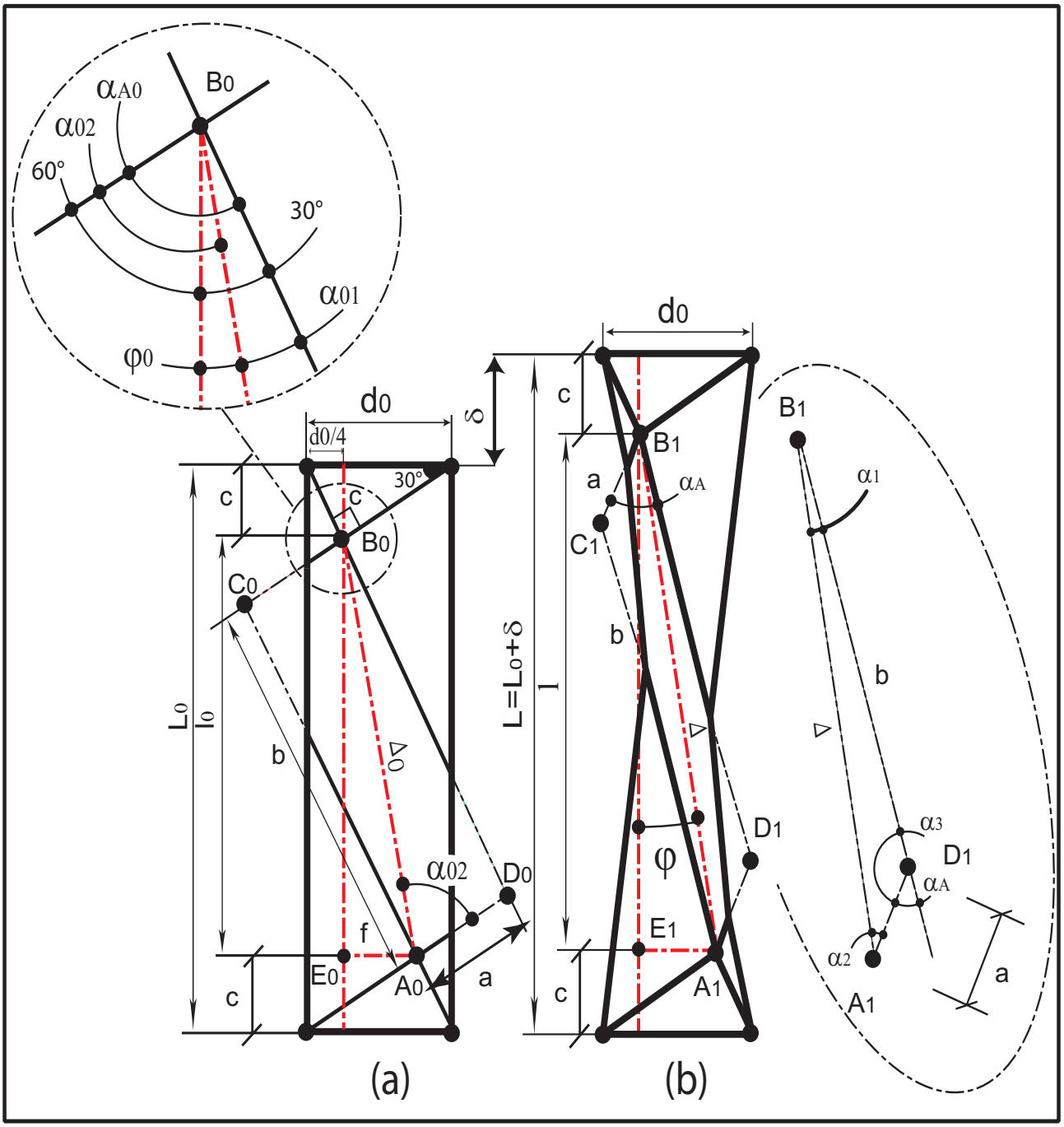


Fig. 9.5 – Paramétrage de l'essai de traction hors axes à 30° (a) éprouvette initiale avant déformation, (b) éprouvette déformée.

Ce qui conduit à :

$$l_0 = L_0 - 2c = L_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} d_0 \tag{9.5}$$

La distance $E_0\ A_0$, notée « f » est telle que :

$$f = d_0 - 2\frac{d_0}{4} = \frac{d_0}{2} \tag{9.6}$$

Compte tenu des dimensions de l'éprouvette, dans le triangle $A_0B_0E_0$, l'angle φ_0 est toujours inférieur à $\frac{\pi}{2}$, de sorte que :

$$\varphi_0 = \arctan(\frac{f}{l_0}) = \arctan(\frac{d_0}{2.l_0}) \tag{9.7}$$

En appliquant le théorème de Pythagore au triangle $A_0B_0E_0$, nous pouvons calculer la distance A_0B_0, noté Δ_0, telle que :

$$\Delta_0 = \sqrt{L_0^2 - \sqrt{3}L_0 d_0 + d_0^2} \tag{9.8}$$

Les distances « a » et « b » peuvent être calculées, respectivement dans les triangles $A_0B_0C_0$ et $A_0D_0B_0$, telles que :

$$a = \cos(\alpha_{02}).\Delta_0 \qquad ; \qquad b = \cos(\alpha_{01}).\Delta_0 \tag{9.9}$$

Avec :

$$\alpha_{01} = \frac{\pi}{6} - \varphi_0 \qquad ; \qquad \alpha_{02} = \frac{\pi}{3} + \varphi_0 \tag{9.10}$$

Et :

$$\alpha_{A0} = \alpha_{01} + \alpha_{02} \tag{9.11}$$

Paramétrage de l'éprouvette dans la configuration déformée

Les points A_0,B_0,C_0,D_0 et E_0, dans la configuration initiale se transforment en A_1,B_1,C_1,D_1 et E_1, dans la configuration déformée. D'autre part, les paramètres définis, sur la figure 9.5, pour l'éprouvette initiale avant déformation l_0, Δ_0, φ_0, α_{01}, α_{02} et L_0 se transforment pour l'éprouvette déformée en l, Δ, φ, α_1, α_2, et L respectivement. La distance Δ peut être calculée à partir de la relation 9.8, en remplaçant L_0 par $L = L_0 + \delta$, telle que :

$$\Delta = \sqrt{(L_0 + \delta)^2 - \sqrt{3}(L_0 + \delta)d_0 + d_0^2} \tag{9.12}$$

où δ correspond au déplacement relatif des mors.

Notons que les distances« a » et « b », définies par la relation 9.9, restent constant au cours de la transformation décrite par les figures 9.5-a et 9.5-b.

Calcul de l'angle entre chaîne et trame dans la zone A

La figure 9.5-b montre qu'on peut écrire une relation équivalente à (9.11), telle que :

$$\alpha_A = \alpha_1 + \alpha_2 \tag{9.13}$$

Les angles α_1 et α_2 peuvent être calculés, en utilisant les relations dans un triangle quelconque, tels que :

$$\frac{a}{\sin(\alpha_1)} = \frac{b}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\Delta}{\sin(\alpha_3)} \tag{9.14}$$

et :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + \Delta^2 - 2.b.\Delta.\cos(\alpha_1) \\ b^2 = a^2 + \Delta^2 - 2.a.\Delta.\cos(\alpha_2) \\ \Delta^2 = b^2 + a^2 - 2.a.b.\cos(\alpha_3) \end{cases} \tag{9.15}$$

Les relations (9.13) et (9.15) permettent de calculer l'angle entre les fils de chaîne et les fils de la trame, dans la zone A, en fonction du déplacement relatif des mors δ, par :

$$\alpha_{A(\delta)} = \alpha_{1(\delta)} + \alpha_{2(\delta)} = \arccos(-\frac{a^2 - b^2 - \Delta^2}{2.b.\Delta}) + \arccos(-\frac{b^2 - a^2 - \Delta^2}{2.a.\Delta}) \tag{9.16}$$

Le déplacement relatif limite des mors $\delta_{\lim}$ correspond à une valeur nulle de l'angle α_A entre les fils de chaîne et de trame ($\alpha_A = 0$), ce qui correspond à un alignement des fils de chaîne et des

fils de trame, dans la zone A de de l'éprouvette. Dans ce cas le parallélogramme $A_1D_1B_1C_1$ sera aplati, de sorte que C_1 et D_1 soient sur la diagonale A_1D_1, on a alors :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \pi \tag{9.17}$$

et :

$$\Delta = a + b \tag{9.18}$$

En compte tenu de la relation (9.12), on a :

$$\Delta^2 = (a+b)^2 = (L_0 + \delta_{\text{lim}})^2 - \sqrt{3}(L_0 + \delta_{\text{lim}})d_0 + d_0^2 \tag{9.19}$$

La relation (9.19) correspond à une équation du second degré en δ_{lim}, sa résolution permet d'obtenir deux solutions, telles que :

$$\delta_{\text{lim}} = \frac{\sqrt{3}d_0 \pm \sqrt{4(a+b)^2 - d_0^2}}{2} - L_0 \tag{9.20}$$

Pour notre éprouvette (fig. 9.1), $L_0 = 300$mm et $d_0 = 50$mm, ce qui donne, selon 9.20 une solution négative et une solution telle que $\delta_{\text{lim}} = 84.5$mm.

9.3 Simulations numériques

Pour valider l'implémentation de la loi dans ABAQUS, nous avons considéré un matériau tissé proche du type Tchebichev, c'est-à-dire sans enduction, avec des fils de comportement élastique linéaire et une contrainte d'interaction entre les fils, de comportement élastique linéaire et de rigidité très faible, tel que :

$$\begin{cases} \overline{\rho}_e = 0 \\ \Sigma_c = L_r^c \varepsilon_c \\ \Sigma_t = L_r^t \varepsilon_t \\ \Sigma_{ct} = K_\gamma \varepsilon_\gamma \end{cases} \tag{9.21}$$

avec :

$$L_r^c = 1730 \text{ J/g} \quad , \quad L_r^t = 2850 \text{ J/g} \quad \text{et} \quad K_\gamma = 1.3 \text{ J/g} \tag{9.22}$$

Pour obtenir la loi du matériau considéré, on remplace les hypothèses (9.21), dans l'expression 6.31 du chapitre 6. Les valeurs des paramètres de masse surfacique $\overline{\rho}_c$, $\overline{\rho}_t$ et $\overline{\rho} = \overline{\rho}_c + \overline{\rho}_t$, que nous avons adoptées sont celles du Dacron HTP plus.

Les figures 9.6-a, 9.6-b, 9.6-c donnent des résultats de simulations de l'essai de traction biais et les figures 9.6-d, 9.6-e, 9.6-f donnent ceux de l'essai de traction hors axes à 30°. Les figures 9.6-a et 9.6-d donnent le champ de contrainte axiale dans l'éprouvette. Les figures 9.6-b et 9.6-e donnent le champ de déformation axiale dans l'éprouvette. Les figures 9.6-c et 9.6-f donnent l'angle entre les fils de chaîne et les fils de trame sur toute l'éprouvette. Pour l'essai de traction biais, les figures 9.6-b et 9.6-c révèlent bien trois types de zone de déformation (zones A, B et C). Pour l'essai de traction hors axes à 30°, les figures 9.6-e et 9.6-f révèlent bien quatre types de zone de déformation (zones A, B, C et D).

La figure 9.7 donne, pour l'essai de traction biais, une comparaison des résultats analytiques prévus par la relation (B) et les résultats de simulation de l'angle entre les fils de chaîne et de trame, au centre de l'éprouvette, dans la zone A. La figure 9.8 donne, pour l'essai de traction hors axes à 30°, une comparaison des résultats analytiques prévus par la relation (9.16) et les résultats de simulation de l'angle entre les fils de chaîne et de trame, au centre de l'éprouvette, dans la zone A. Ces résultats de comparaison valident l'implémentation sous ABAQUS de la loi de comportement.

9.4 Conclusion

Le cadre de modélisation, défini au chapitre 6, et les lois correspondantes, définies aux chapitres 7 et 8, ont été implémentés sous ABAQUS Standard, à l'aide d'une routine utilisateur (UMAT). Cette implémentation a été validée par une comparaison des résultats de simulation à des solutions analytiques, pour deux essais de traction hors axes à 45° et 30°, par rapport à la direction chaîne. Ces solutions analytiques concernent l'évolution de l'angle entre les fils de chaîne et les fils de trame, pour un matériau tissé sans enduction, avec des fils élastiques et une contrainte d'interaction élastique entre les fils de rigidité très faible. Ce matériau est proche du tissu de Tchebichev.

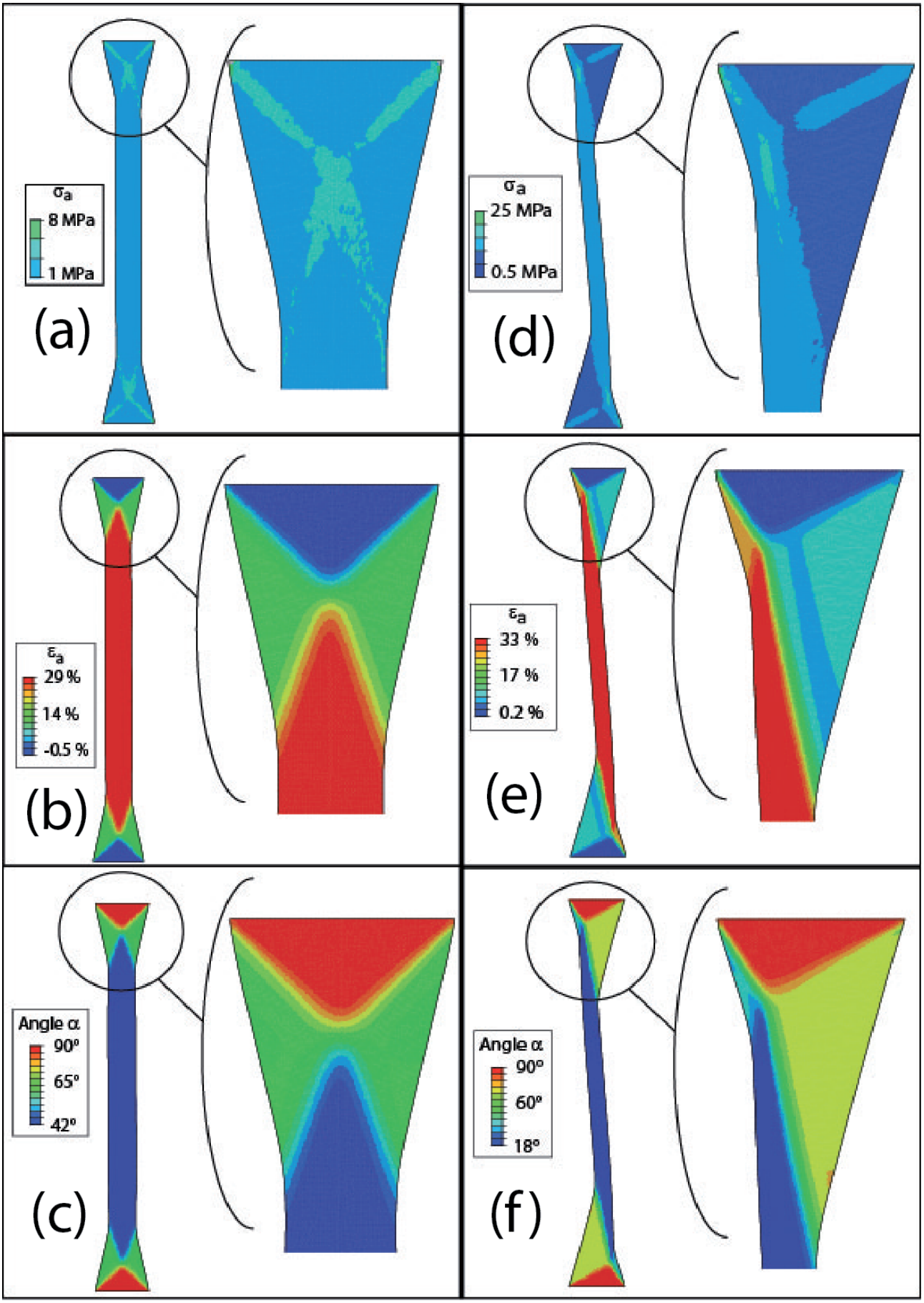


Fig. 9.6 – Résultats des simulations numériques de l'essai de traction biais (a, b, c) et de l'essai hors axes à 30° (d,e,f).

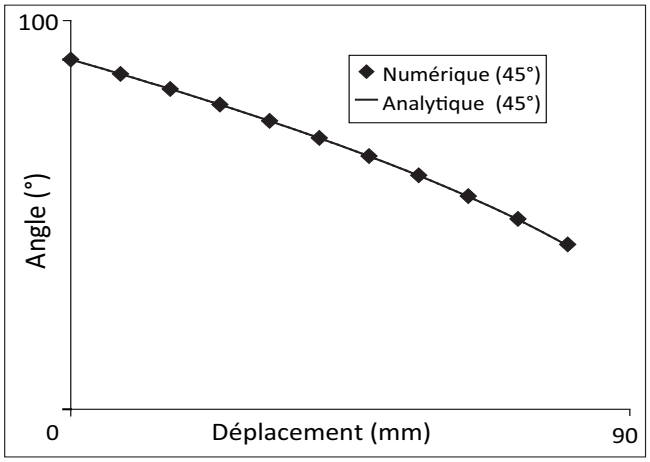


Fig. 9.7 – Comparaison des résultats analytiques (Relation 9.2) et de simulation, de l'angle entre les fils de chaîne et de trame, au centre de l'éprouvette - Essai de traction biais.

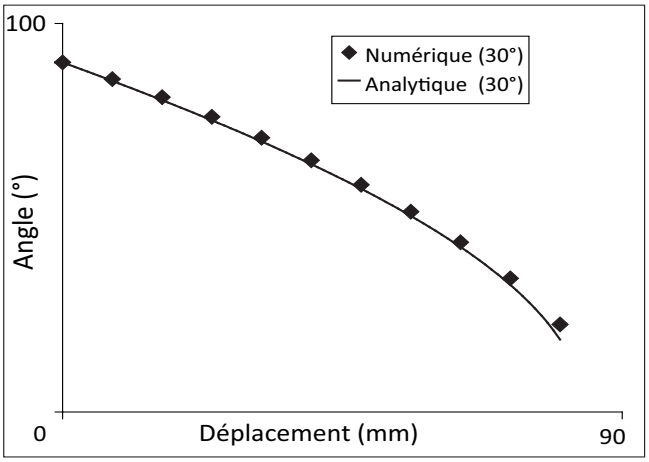


Fig. 9.8 – Comparaison des résultats analytiques (Relation 9.16) et de simulation, de l'angle entre les fils de chaîne et de trame, au centre de l'éprouvette - Essai de traction hors axes à 30°.

Chapitre 10

Modélisation du comportement du Dacron

Notre approche de modélisation du comportement du Dacron est basée sur une hypothèse de superposition de différentes nappes, constituées de fils et d'une enduction (cf. chapitre 6). Les différentes lois unidimensionnelles proposées pour décrire le comportement des fils et de l'interaction des fils, aux points de liage, sont présentées au chapitre 7. Les lois de comportement biaxiales de l'enduction sont présentées au chapitre 8. Il s'agit dans ce chapitre de faire des choix théoriques pertinents concernant les lois de comportement à mettre en œuvre pour décrire le comportement des fils, de l'interaction entre fils et de l'enduction, afin de rendre compte du comportement global du Dacron SF HTP plus. Ces choix sont présentés au paragraphe 10.1. Par la suite, une méthode d'identification des différents paramètres est proposée aux paragraphes 10.2, 10.4 et 10.5.

10.1 Hypothèses de modélisation du Dacron SF HTP plus

Notre approche est basée sur la superposition du comportement des fils de chaîne, du comportement des fils de trame, du comportement au niveau de l'interaction entre fils et du comportement de l'enduction. Cela suppose la caractérisation préalable et spécifique de ces différents comportements. Toutefois, les résultats expérimentaux, dont nous disposons, sont obtenus sur le matériau constitué et ne permettent pas de distinguer, de façon individuelle, chacun de ces comportements. La méthode que nous proposons est alors de formuler plusieurs hypothèses, concernant ces comportements, d'en déduire différentes modélisations et de les évaluer, par une confrontation aux résultats expérimentaux. Dans le cadre de cette méthode, nous nous proposons d'évaluer la pertinence de trois hypothèses différentes. Ces hypothèses sont décrites dans le tableau 10.1.

L'hypothèse H1 considère un comportement irréversible indépendant du temps pour l'enduction et une viscosité prépondérante dans les fils et dans l'interaction entre fils. L'hypothèse H2 néglige la viscosité au niveau des interactions entre fils, en adoptant un comportement simple, du type élastique linéaire et considère que le comportement visqueux dominant se situe au niveau des fils et de l'enduction. Comparée à l'hypothèse H2, l'hypothèse H3 propose un comportement viscoélastique plus sophistiqué dans les fils, avec un comportement retardé irréversible. Chaque hypothèse du tableau 10.1, conduit à un modèle du comportement du Dacron SF HTP plus, dans la suite ces modèles seront appelés modèle H1, H2 ou H3.

10.2 Identification des paramètres du modèle H1

TABLE 10.1: Définition des hypothèses de modélisation de Dacron SF HTP Plus.

	Hypothèse H1	Hypothèse H2	Hypothèse H3
Comportement du fil	Comportement viscoélastique à élasticité retardée non linéaire (cf.§ 7.3)		Comportement viscoélastique à comportement retardé irréversible (cf.§ 7.4)
Comportement aux points de liage	Comportement viscoélastique à élasticité retardée linéaire (cf.§ 7.7)	Comportement élastique linéaire .	
Comportement de l'enduction	Loi irréversible non visqueuse (du type octo-directionnelle découplée à partie isotrope non linéaire) (cf.§ 8.7).	Loi viscoélastique à comportement retardé irréversible (cf.§ 8.8).	

10.2.1 Identification du comportement irréversible de l'enduction

La loi irréversible de l'enduction, correspond à un comportement octo-directionnel découplé à partie isotrope non linéaire ; cette loi est présentée dans le paragraphe 8.7. Elle est caractérisée, d'une part, par trois couples de modules : (K_1, μ_1), (K_c, μ_c) et (K_2, μ_2) ; qui correspondent respectivement aux comportements dans les zones α, β et Cyc. Ces zones sont définies au paragraphe 5.6 et sont illustrées par les figures 8.14-b et 8.15. D'autre part, cette loi est caractérisée par deux déformations au coude ε_m^* et Q_ε^*, correspondant respectivement à ses parties isotrope et déviatoire (8.14 et 8.15). Pour déterminer ces paramètres nous exploiterons les résultats de mesure des rigidités et des coefficients de contraction, en traction simple, présentés dans les tableaux 5.14 à 5.17. Ces résultats, dans les sens chaîne, trame et biais, caractérisent le comportement du matériau tissé constitué et tiennent compte du comportement des fils de chaîne et des fils de trame. Pour cela, nous considérons le point matériel M, de la figure 10.1, positionné sur une éprouvette de traction du matériau tissé et une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orientée selon les directions de la traction.

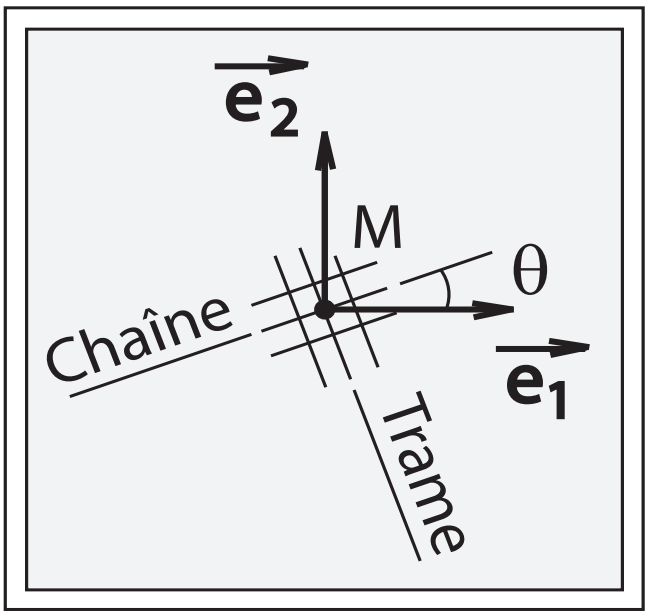


Fig. 10.1 – Point matériel M, sur une éprouvette de traction.

La rigidité initiale des fils est caractérisé par les paramètres G_v, G_r ou g_r, selon que le fil est sujet à l'embuvage ou non (cf. § 7.3, fig. 7.3 et fig. 7.5). Pour le fil de trame, qui n'est pas sujet à l'embuvage, ces modules seront notés G_v^T, G_r^T. Pour le fil de chaîne, qui est sujet à l'embuvage, ces modules seront notés G_v^c, G_r^c ou g_r^c, selon que le fil est en traction ou en compression ; ces paramètres sont illustrés par la figure 10.2. Nous notons G_m ou g_m, les modules initiaux des fils, qui résultent du comportement viscoélastique de type Maxwell et du comportement retardé (fig 7.4, fig 7.5 et fig 10.2), tels que :

$$\begin{cases} G_m = G_r + G_v \\ g_m = g_r + G_v \end{cases} \tag{10.1}$$

Pour identifier les modules (K_1, μ_1), (K_c, μ_c) et (K_2, μ_2) de l'enduction, nous adoptons une

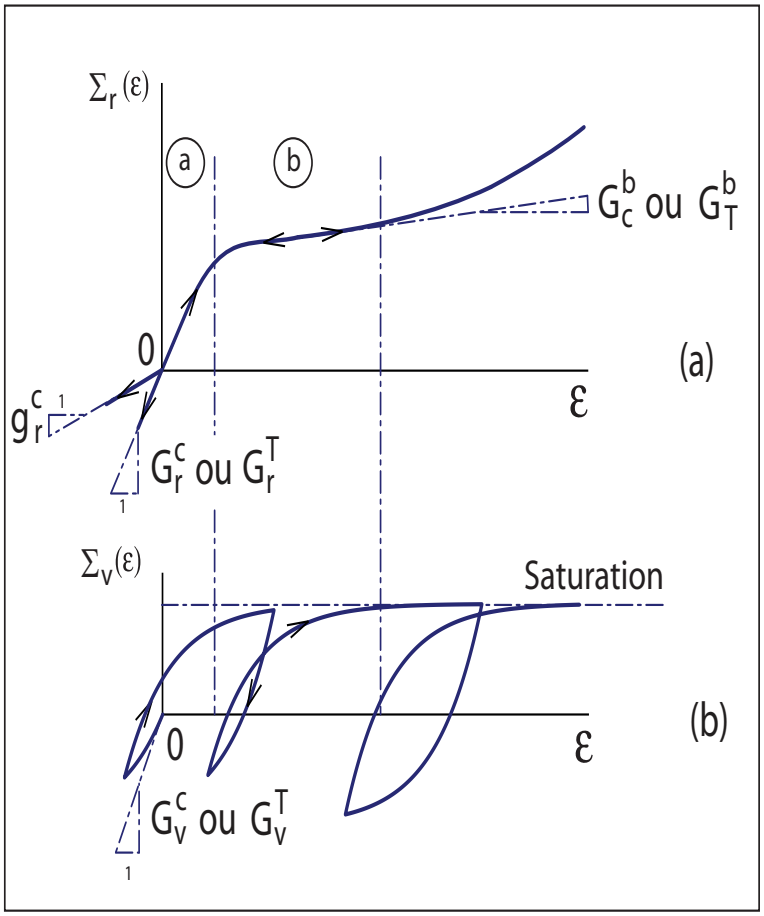


Fig. 10.2 – Comportement du fil : (a) élasticité retardée non linéaire, (b) comportement visqueux.

hypothèse simplificatrice, qui considère que la valeur du module G_m est la même, dans le sens chaîne et dans le sens trame, telle que :

$$\begin{cases} G_m = G_r^T + G_v^T = G_r^c + G_v^c \\ g_m = g_r^c + G_v^c \end{cases} \tag{10.2}$$

Cette hypothèse peut se justifiée par le résultat de la figure 5.57, qui montre que les valeurs des modules de traction du Dacron, sont très peu différentes en chaîne et trame, dans la zone α. En traction, dans la zone β, on considère que le comportement visqueux du fil est en saturation et la rigidité du comportement retardé sera notée G_c^β dans le sens chaîne et G_T^β dans le sens trame

(fig. 10.2).

Dans le cas d'une traction simple du matériau tissé, dans le sens chaîne ou le sens trame, la déformation de distorsion ε_γ est nulle ; il en résulte, compte tenu de la définition (relation 7.35), que la contrainte d'interaction entre les fils, aux points de liages, est nulle. La contrainte totale d'un matériau tissé avec enduction (relation 6.16), s'écrit alors :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_t + \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_c + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_e \tag{10.3}$$

10.2.2 Identification des modules (K_1, μ_1), dans la zone α

Dans la zone α, proche de l'origine, le comportement du matériau tissé est élastique linéaire. Dans ce cas la contrainte de l'enduction s'exprime par la loi 8.77, telle que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_e = \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} \left\{ \nu^\alpha \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + (1-\nu^\alpha) \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} \tag{10.4}$$

Dans le cas d'une traction selon la direction chaîne ($\theta = 0$, fig. 10.1), les relations 10.1 à 10.4 conduisent à deux équations, respectivement selon l'axe de traction $\vec{e}_1$ et selon l'axe de contraction $\vec{e}_2$

$$\Sigma_{11} = \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}} G_m \, \varepsilon_{11} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \left\{ \varepsilon_{11} + \nu^\alpha \varepsilon_{22} \right\} . \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} = E_C^\alpha \, \varepsilon_{11} \tag{10.5}$$

$$\Sigma_{22} = \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}} G_m \, \varepsilon_{22} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \left\{ \varepsilon_{22} + \nu^\alpha \varepsilon_{11} \right\} . \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} = 0 \tag{10.6}$$

Avec :

$$\varepsilon_{22} = -\nu_C^\alpha \, \varepsilon_{11} \tag{10.7}$$

où E_C^α et ν_C^α correspondent au module d'Young et au coefficient de contraction globaux du matériau tissé, dans la direction chaîne (cf. § 5.6 du chapitre 5).

De la même manière, dans le cas d'une traction selon la direction trame ($\theta = 0$, fig. 10.1), les relations 10.1 à 10.4 conduisent à deux équations, respectivement selon l'axe de traction $\vec{e}_2$ et selon l'axe de contraction $\vec{e}_1$

$$\Sigma_{22} = \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}} G_m \, \varepsilon_{22} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \left\{ \varepsilon_{22} + \nu^\alpha \varepsilon_{11} \right\} . \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} = E_T^\alpha \, \varepsilon_{22} \tag{10.8}$$

$$\Sigma_{11} = \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}} g_m \, \varepsilon_{11} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \left\{ \varepsilon_{11} + \nu^\alpha \varepsilon_{22} \right\} . \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} = 0 \tag{10.9}$$

Avec :

$$\varepsilon_{11} = -\nu_T^\alpha \, \varepsilon_{22} \tag{10.10}$$

où E_T^α et ν_T^α correspondent au module d'Young et au coefficient de contraction globaux du matériau tissé, dans la direction trame (cf. § 5.6 du chapitre 5).
Les équations 10.6 et 10.9 permettent d'exprimer les coefficients de contraction globaux du matériau tissé ν_C^α et ν_T^α, respectivement, en fonction de E^α et ν^α, tels que :

$$\nu_C^\alpha = \frac{\nu^\alpha \, E^\alpha \, \overline{\rho}_e}{\overline{\rho}_t \, G_m \, (1-\nu^{\alpha 2}) + \overline{\rho}_e \, E^\alpha} \tag{10.11}$$

$$\nu_T^\alpha = \frac{\nu^\alpha \, E^\alpha \, \overline{\rho}_e}{\overline{\rho}_c \, g_m \, (1-\nu^{\alpha 2}) + \overline{\rho}_e \, E^\alpha} \tag{10.12}$$

En éliminant ε_{22} dans les relations 10.5 et 10.6, par la relation 10.7 et en éliminant ε_{11} dans les relations 10.8 et 10.9, par la relation 10.10, on obtient un système de quatre équations à quatre inconnues g_m, G_m, $\frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}}$ et $\frac{\nu^\alpha E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}}$, tel que :

$$\begin{cases} 0 + \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\ G_m + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} - \nu_C^\alpha \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \frac{\nu^\alpha E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} = E_C^\alpha \\ 0 + \overline{\rho}_t\ G_m\ \nu_C^\alpha + \overline{\rho}_e\ \nu_C^\alpha\ \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} - \overline{\rho}_e\ \frac{\nu^\alpha E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} = 0 \\ 0 + \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ G_m + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} - \nu_T^\alpha\ \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \frac{\nu^\alpha E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} = E_T^\alpha \\ \overline{\rho}_c\ g_m\ \nu_T^\alpha + 0 + \overline{\rho}_e\ \nu_T^\alpha\ \frac{E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} - \overline{\rho}_e\ \frac{\nu^\alpha E^\alpha}{1-\nu^{\alpha 2}} = 0 \end{cases} \tag{10.13}$$

Les masses surfaciques $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}_c$, $\overline{\rho}_t$ et $\overline{\rho}_e$ sont caractérisées au chapitre 3 (cf.§ 3.8). Les valeurs des modules d'Young et des coefficients de contraction globaux mesurés E_C^α, E_T^α, ν_C^α et ν_T^α sont données dans les tableaux 5.14 et 5.15. La résolution de ce système permet d'obtenir les résultats suivants :

$$\begin{cases} g_m = 2040 \text{ J/g} \\ G_m = 6880 \text{ J/g} \\ E^\alpha = 2490 \text{ J/g} \\ \nu^\alpha = 0.277 \end{cases} \tag{10.14}$$

Sachant que le comportement de l'enduction est élastique linéaire dans la zone α (cf. relation 10.4), le résultat 10.14 permet de déterminer le couple de modules (K_1, μ_1), tels que (cf. relations 8.19 et 8.22) :

$$\begin{cases} K_1 = 1720 \text{ J/g} \\ \mu_1 = 977 \text{ J/g} \end{cases} \tag{10.15}$$

Lors d'une traction simple sur le matériau tissé dans le sens biais ($\theta = \frac{\pi}{4}$, fig. 10.1), en petite déformation dans la zone α, la valeur de la déformation de distorsion ε_γ est relativement faible. Ceci nous permet de négliger la contrainte d'interaction entre les fils Σ_{ct}. Il en résulte, compte tenu de la relation (6.31), un comportement approché de traction biais, caractérisé par deux équations, l'une selon l'axe de traction $\vec{e}_2$ et l'autre selon l'axe de contraction $\vec{e}_1$. Un traitement équivalent à celui des deux équations 10.8 et 10.9. qui nous a permis d'obtenir les deux premières équations du système d'équation 10.13, conduit à :

$$E_{45}^\alpha = \frac{G_m}{4}\ \frac{\overline{\rho}_c + \overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ (1 - \nu_{45}^\alpha) + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \left\{1 - \nu_{45}^\alpha\ \nu^\alpha\right\} \frac{E^\alpha}{1 - \nu^{\alpha 2}} \tag{10.16}$$

$$\nu_{45}^\alpha = \frac{(1 - \nu^{\alpha 2})(\overline{\rho}_c + \overline{\rho}_t) G_m + 4\ \overline{\rho}_e\ \nu^\alpha\ E^\alpha}{(1 - \nu^{\alpha 2})(\overline{\rho}_c + \overline{\rho}_t) G_m + 4\ \overline{\rho}_e\ E^\alpha} \tag{10.17}$$

où E_{45}^α et ν_{45}^α correspondent au module d'Young et au coefficient de contraction globaux du matériau tissé, dans la direction biais. En utilisant les valeurs de G_m, E^α et ν^α obtenues en 10.14, dans les relations 10.16 et 10.17, on obtient $E_{45}^\alpha = 1.25\ MJ/Kg$ et $\nu_{45}^\alpha = 0.592$. Ces valeurs sont à comparer aux valeurs mesurées dans le tableau 5.16, soit $E_{45}^\alpha = 1.466\ MJ/Kg$

et $\nu_{45}^{\alpha} = 0.484$. Cette comparaison révèle une différence de l'ordre de 14% pour le module E_{45}^{α} et 18% pour coefficient de contraction ν_{45}^{α}. Sachant que les relations 10.16 et 10.17 donnent un comportement approché de la traction biais, cette comparaison montre une bonne cohérence du résultat 10.14.

10.2.3 Identification des modules (K_c, μ_c), dans la zone β

Dans la zone β, sur le plateau, on considère un chargement incrémental et un comportement du matériau tissé élastique linéaire. Dans ce cas la contrainte de l'enduction s'exprime par la loi (8.81), telle que :

$$d\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_e = \frac{E^{\beta}}{1-\nu^{\beta 2}}\left\{\nu^{\beta}\mathrm{Tr}\left(d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + (1-\nu^{\beta})d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right\} \tag{10.18}$$

Dans le cas d'une traction selon la direction chaîne ($\theta = 0$, fig. 10.1), les relations 10.2 à 10.3 et 10.18 conduisent à deux équations, respectivement selon l'axe de traction $\vec{e}_1$ et selon l'axe de contraction $\vec{e}_2$:

$$d\Sigma_{11} = \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\, G_c^{\beta}\, d\varepsilon_{11} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\left\{d\varepsilon_{11} + \nu^{\beta} d\varepsilon_{22}\right\}.\frac{E^{\beta}}{1-\nu^{\beta 2}} = E_C^{\beta}\, d\varepsilon_{11} \tag{10.19}$$

$$d\Sigma_{22} = \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\, G_m\, d\varepsilon_{22} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\left\{d\varepsilon_{22} + \nu^{\beta} d\varepsilon_{11}\right\}.\frac{E^{\beta}}{1-\nu^{\beta 2}} = 0 \tag{10.20}$$

Avec :

$$d\varepsilon_{22} = -\nu_C^{\beta}\, d\varepsilon_{11} \tag{10.21}$$

où E_C^{β} et ν_C^{β} correspondent au module d'Young et au coefficient de contraction globaux du matériau tissé, dans la direction chaîne (cf. § 5.6 du chapitre 5). La relation 10.19 indique que le chargement incrémental en traction, du fil de chaîne, est caractérisé par le module G_c^{β}. En compression, l'équation 10.20, indique que le fil de trame est caractérisé par le module G_m (cf. relation 10.2).
De façons analogue, dans le cas d'une traction selon la direction trame ($\theta = 0$, fig. 10.1), les relations 10.2 à 10.3 et 10.18 conduisent à deux équations, respectivement selon l'axe de traction $\vec{e}_2$ et selon l'axe de contraction $\vec{e}_1$:

$$d\Sigma_{22} = \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\, G_T^{\beta}\, d\varepsilon_{22} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\left\{d\varepsilon_{22} + \nu^{\beta} d\varepsilon_{11}\right\}.\frac{E^{\beta}}{1-\nu^{\beta 2}} = E_T^{\beta}\, d\varepsilon_{22} \tag{10.22}$$

$$d\Sigma_{11} = \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\, g_m\, d\varepsilon_{11} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\left\{d\varepsilon_{11} + \nu^{\beta} d\varepsilon_{22}\right\}.\frac{E^{\beta}}{1-\nu^{\beta 2}} = 0 \tag{10.23}$$

Avec :

$$d\varepsilon_{11} = -\nu_T^{\beta}\, d\varepsilon_{22} \tag{10.24}$$

où E_T^{β} et ν_T^{β} correspondent au module d'Young et au coefficient de contraction globaux du matériau tissé, dans la direction trame (cf. § 5.6 du chapitre 5). La relation 10.22 indique que le chargement incrémental en traction, du fil de trame, est caractérisé par le module G_T^{β}. En compression, l'équation 10.23, indique que le fil de chaîne est caractérisé par le module g_m (cf. relation 10.2).
Les équations 10.20 et 10.23 permettent d'exprimer les coefficients de contraction globaux du matériau tissé dans la zone β, ν_C^{β} et ν_T^{β} respectivement, en fonction des paramètres élastiques de l'enduction E^{β} et ν^{β}, tels que :

$$\nu_C^{\beta} = \frac{\nu^{\beta}\, E^{\beta}\, \overline{\rho}_e}{\overline{\rho}_t\, G_m\, (1-\nu^{\beta 2}) + \overline{\rho}_e\, E^{\beta}} \tag{10.25}$$

$$\nu_T^\beta = \frac{\nu^\beta \; E^\beta \; \overline{\rho}_e}{\overline{\rho}_c \; g_m \; (1-\nu^{\beta 2}) + \overline{\rho}_e \; E^\beta} \tag{10.26}$$

En éliminant $d\varepsilon_{22}$ dans les relations 10.19 et 10.20, par la relation 10.21 et en éliminant $d\varepsilon_{11}$ dans les relations 10.22 et 10.23, par la relation 10.24, on obtient un système de quatre équations à quatre inconnues G_C^β, G_T^β, $\frac{E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}}$ et $\frac{\nu^\beta E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}}$, tel que :

$$\begin{cases} \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}} \; G_c^\beta + 0 + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \; \frac{E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}} - \nu_C^\beta \; \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \; \frac{\nu^\beta E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}} = E_C^\beta \\ 0 + 0 + \overline{\rho}_e \; \nu_C^\beta \; \frac{E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}} - \overline{\rho}_e \; \frac{\nu^\beta E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}} = -\overline{\rho}_t \; G_m \; \nu_C^\beta \\ 0 + \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}} \; G_T^\beta + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \; \frac{E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}} - \nu_T^\beta \; \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \; \frac{\nu^\beta E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}} = E_T^\beta \\ 0 + 0 + \overline{\rho}_e \; \nu_T^\beta \; \frac{E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}} - \overline{\rho}_e \; \frac{\nu^\beta E^\beta}{1-\nu^{\beta 2}} = -\overline{\rho}_c \; g_m \; \nu_T^\beta \end{cases} \tag{10.27}$$

Les masses surfaciques $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}_c$, $\overline{\rho}_t$ et $\overline{\rho}_e$ sont caractérisées au chapitre 3 (cf.§ 3.8) et les valeurs des modules G_m et g_m correspondent au résultat 10.14. Les valeurs des modules d'Young et des coefficients de contraction globaux mesurés E_C^β, E_T^β, ν_C^β et ν_T^β sont données dans les tableaux 5.14 et 5.15. La résolution de ce système permet d'obtenir les résultats suivants :

$$\begin{cases} G_c^\beta = 2850 \text{ J/g} \\ G_T^\beta = 970 \text{ J/g} \\ E^\beta = 20 \text{ J/g} \\ \nu^\beta = 0.906 \end{cases} \tag{10.28}$$

Sachant que le comportement de l'enduction est élastique linéaire au cours du chargement incrémental dans la zone β (cf. relation 10.18), le résultat 10.28 permet de déterminer le couple de modules (K_c, μ_c), tels que (cf. relations 8.19 et 8.22) :

$$\begin{cases} K_c = 118 \text{ J/g} \\ \mu_c = 5.79 \text{ J/g} \end{cases} \tag{10.29}$$

10.2.4 Identification des modules (K_2, μ_2), dans la zone cyclique

Dans la zone cyclique, en décharge-charge, on considère un chargement incrémental et un comportement du matériau tissé élastique linéaire. Dans ce cas la contrainte de l'enduction s'exprime par la loi (8.85), telle que :

$$d\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}_e = \frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} \left\{ \nu^{\text{Cyc}} \; \text{Tr}\left(d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} + (1-\nu^{\text{Cyc}}) \; d\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} \tag{10.30}$$

Dans le cas d'une traction selon la direction chaîne ($\theta = 0$, fig. 10.1), les relations 10.2 à 10.3 et 10.30 conduisent à deux équations, respectivement selon l'axe de traction $\vec{e}_1$ et selon l'axe de contraction $\vec{e}_2$:

$$d\Sigma_{11} = \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}} \; G_c^\beta \; d\varepsilon_{11} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \left\{ d\varepsilon_{11} + \nu^{\text{Cyc}} \; d\varepsilon_{22} \right\} . \frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} = E_C^{\text{Cyc}} \; d\varepsilon_{11} \tag{10.31}$$

$$d\Sigma_{22} = \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}} \; G_m \; d\varepsilon_{22} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}} \left\{ d\varepsilon_{22} + \nu^{\text{Cyc}} \; d\varepsilon_{11} \right\} . \frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} = 0 \tag{10.32}$$

Avec :

$$d\varepsilon_{22} = -\nu_C^{\text{Cyc}}\ d\varepsilon_{11} \tag{10.33}$$

où E_C^{Cyc} et ν_C^{Cyc} correspondent au module d'Young et au coefficient de contraction globaux du matériau tissé, dans la direction chaîne (cf. § 5.6 du chapitre 5). Dans la mesure où le fil est caractérisé par une élasticité retardée non linéaire, dans la relation 10.31 le comportement du fil de chaîne en traction, est caractérisé par le module G_c^β (fig. 10.2). En compression, l'équation 10.32, indique que le fil de trame est caractérisé par le module G_m (cf. relation 10.2). Dans le cas d'une traction selon la direction trame ($\theta = 0$, fig. 10.1), les relations 10.2 à 10.3 et 10.30 conduisent à deux équations, respectivement selon l'axe de traction $\vec{e}_2$ et selon l'axe de contraction $\vec{e}_1$:

$$d\Sigma_{22} = \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ G_T^\beta\ d\varepsilon_{22} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \left\{d\varepsilon_{22} + \nu^{\text{Cyc}}\ d\varepsilon_{11}\right\}.\frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} = E_T^{\text{Cyc}}\ d\varepsilon_{22} \tag{10.34}$$

$$d\Sigma_{11} = \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\ g_m\ d\varepsilon_{11} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \left\{d\varepsilon_{11} + \nu^{\text{Cyc}}\ d\varepsilon_{22}\right\}.\frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} = 0 \tag{10.35}$$

Avec :

$$d\varepsilon_{11} = -\nu_T^{\text{Cyc}}\ d\varepsilon_{22} \tag{10.36}$$

où E_T^{Cyc} et ν_T^{Cyc} correspondent au module d'Young et au coefficient de contraction globaux du matériau tissé, dans la direction trame (cf. § 5.6 du chapitre 5). La relation 10.34 indique que le chargement incrémental en traction, du fil de trame, est caractérisé par le module G_T^β. En compression, l'équation 10.35, indique que le fil de chaîne est caractérisé par le module g_m (cf. relation 10.2).

En éliminant $d\varepsilon_{22}$ dans les relations 10.31 et 10.32, par la relation 10.33, on obtient un système de deux équations à deux inconnues $\frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}}$ et $\frac{\nu^{\text{Cyc}}E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}}$, tel que :

$$\begin{cases} \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} - \nu_C^\beta\ \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \frac{\nu^{\text{Cyc}}E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} = E_C^{\text{Cyc}} - \frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\ G_c^\beta \\ \overline{\rho}_e\ \nu_C^{\text{Cyc}}\ \frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} - \overline{\rho}_e\ \frac{\nu^{\text{Cyc}}E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} = -\overline{\rho}_t\ G_m\ \nu_C^{\text{Cyc}} \end{cases} \tag{10.37}$$

De la même façon, en éliminant $d\varepsilon_{11}$ dans les relations 10.34 et 10.35, par la relation 10.36, on obtient un système de deux équations à deux inconnues $\frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}}$ et $\frac{\nu^{\text{Cyc}}E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}}$, tel que :

$$\begin{cases} \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} - \nu_T^\beta\ \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \frac{\nu^{\text{Cyc}}E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} = E_T^{\text{Cyc}} - \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\ G_T^\beta \\ \overline{\rho}_e\ \nu_T^{\text{Cyc}}\ \frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} - \overline{\rho}_e\ \frac{\nu^{\text{Cyc}}E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}} = -\overline{\rho}_c\ g_m\ \nu_T^{\text{Cyc}} \end{cases} \tag{10.38}$$

Les deux systèmes d'équations 10.37 et 10.38 ont les mêmes inconnues $\frac{E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}}$ et $\frac{\nu^{\text{Cyc}}E^{\text{Cyc}}}{1-\nu^{\text{Cyc}^2}}$; ils sont aussi définis par les mêmes masses surfaciques $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}_c$, $\overline{\rho}_t$ et $\overline{\rho}_e$ (cf.§ 3.8). Néanmoins, ils diffèrent par leurs variables d'entrées, qui sont les valeurs des modules d'Young et des coefficients de contraction globaux mesurés E_C^{Cyc}, E_T^{Cyc}, ν_C^{Cyc} et ν_T^{Cyc} (cf. tab 5.17 et tab. 5.18) et les valeurs des modules G_m et g_m correspondent au résultat 10.14. Par conséquent, la résolution de ces deux systèmes permet de déterminer une valeur moyenne pour chacun des deux modules (K_2, μ_2), respectivement, ainsi qu'un intervalle d'incertitude, soit :

$$\begin{cases} K_2 = (1.7 \pm 1.1)\ \text{KJ/g} \\ \mu_2 = (1.2 \pm 0.7)\ \text{KJ/g} \end{cases} \tag{10.39}$$

Dans la mesure où, nous considérons la zone β, pour définir la rigidité des fils G_c^β et G_T^β, dans

les équations 10.31 et 10.34, es valeurs des modules d'Young et des coefficients de contraction globaux E_C^{Cyc}, E_T^{Cyc}, ν_C^{Cyc} et ν_T^{Cyc}, qui ont permis d'obtenir le résultat 10.39, ont été mesurés la zone β, telles que :

- pour le sens chaîne, nous avons utilisé les valeurs moyennes des mesures obtenues sur les trois premiers cycles de l'essai SFH0C007 (fig. 5.20), contrôlé en déformation et les deux premiers cycles de l'essai SFH0C008 (fig. 5.22), contrôlé en force.

- pour le sens trame, nous avons utilisé les valeurs moyennes des mesures obtenues sur les deux premiers cycles de l'essai SFH0T003 (fig. 5.21), contrôlé en déformation et le premier cycle de l'essai SFH0T004 (fig. 5.23), contrôlé en force ;

Le résultat 10.39 présente une incertitude relativement élevée ; la confrontation de la simulation aux résultats expérimentaux, qui sera présentée au chapitre 11, nous a permis d'adopter les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} K_2 = 1000 \text{ J/g} \\ \\ \mu_2 = 500 \text{ J/g} \end{cases} \tag{10.40}$$

Ces valeurs appartiennent respectivement aux intervalles d'incertitude définis par 10.39.

10.2.5 Identification des déformations au coude ε_m^* et Q_ε^*

Pour déterminer les déformations au coude ε_m^* et Q_ε^*, nous nous basons sur les mesures de ε_C^α et ε_T^α, réalisées au chapitre 5 (fig. 5.54 et fig. 5.55). Ces mesures des déformations au coude en traction simple, dans la zone α, sont converties, d'une part, en mesures de rayon dans le plan déviatoire des déformations. Les valeurs obtenues, dans le sens chaîne et le sens trame, sont ensuite moyennées pour obtenir une seule valeur de Q_ε^*, telle que (cf. Tab. 10.2) :

$$Q_\varepsilon^* = \frac{1}{2}\left\{\frac{1+\nu_C^\alpha}{\sqrt{2}}\ \varepsilon_C^\alpha + \frac{1+\nu_T^\alpha}{\sqrt{2}}\ \varepsilon_T^\alpha\right\} \tag{10.41}$$

D'autre part, les mesures de ε_C^α et ε_T^α, sont converties en mesures de déformation moyenne. Les valeurs obtenues, dans le sens chaîne et le sens trame, sont ensuite moyennées pour obtenir une seule valeur de ε_m^*, telle que (cf. Tab. 10.3) :

$$\varepsilon_m^* = \frac{1}{2}\left\{\frac{1-\nu_C^\alpha}{2}\ \varepsilon_C^\alpha + \frac{1-\nu_T^\alpha}{2}\ \varepsilon_T^\alpha\right\} \tag{10.42}$$

Par ailleurs, nous avons constaté que la différence des valeurs de ε_m^* et Q_ε^* ne présente pas d'influence majeure sur le comportement global de l'enduction, ce qui nous a conduit en définitive, à adopter un seul paramètre, pour caractériser les déformations au coude des parties isotrope et déviatoire de la loi ; la valeur de ce paramètre est issue de la moyenne des valeurs respectives de ε_m^* et Q_ε^*, obtenues dans les tableaux 10.2 et 10.3, tel que :

$$\varepsilon_m^* = Q_\varepsilon^* = 0.8 \pm 0.2 \ (\%) \tag{10.43}$$

Finalement, nous avons adopté une valeur comprise dans l'intervalle défini par 10.43, telle que :

$$\varepsilon_m^* = Q_\varepsilon^* = 0.9 \ (\%) \tag{10.44}$$

Le tableau de l'annexe B (§. B.1.1) réunit l'ensemble des valeurs des paramètres du comportement de l'enduction identifiés dans le cas du modèle H1.

TABLE 10.2: Calcul de la valeur de la déformation au coude Q^*_ε.

ν^α_C	ν^α_T	ε^α_C	ε^α_T	$(\frac{1+\nu^\alpha_C}{\sqrt{2}}).\varepsilon^\alpha_C$	$(\frac{1+\nu^\alpha_T}{\sqrt{2}}).\varepsilon^\alpha_T$	Q^*_ε
-	-	(%)	(%)	-	-	(%)
0.094	0.206	1.185	1.257	0.917	1.072	0.994

TABLE 10.3: Calcul de la valeur de la déformation au coude ε^*_m.

ν^α_C	ν^α_T	ε^α_C	ε^α_T	$(\frac{1-\nu^\alpha_C}{2}).\varepsilon^\alpha_C$	$(\frac{1-\nu^\alpha_T}{2}).\varepsilon^\alpha_T$	ε^*_m
-	-	(%)	(%)	-	-	(%)
0.094	0.206	1.185	1.257	0.537	0.500	0.518

10.3 Identification du comportement des fils de chaîne et de trame

Le comportement des fils est du type 1D ; il correspond à une loi viscoélastique à élasticité retardée non linéaire. Cette loi est présentée dans le paragraphe 7.3. Elle est caractérisée par une contribution de contrainte réversible $\Sigma_r(\varepsilon)$ et une contribution visqueuse $\Sigma_v(\varepsilon)$. Pour identifier les paramètres de chacune de ces contributions, nous allons exploiter les résultats de tractions monotones à différentes vitesses de déformation (fig. 5.3 et fig. 5.4) et les résultats de tractions monotones avec des séquences de relaxation dans le sens chaîne (Essai SFH0C006 fig. 5.8) ainsi que dans le sens trame (Essai SFH0T002 fig. 5.9).

Dans le cas d'une traction selon l'axe $\vec{e}_1$ de la figure 10.1, dans la direction chaîne ($\theta = 0$, fig. 10.1), ou dans la direction trame ($\theta = 90^\circ$, fig. 10.1), les tenseurs de contrainte et de déformation en M, sont tels que :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2)} \quad ; \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\nu\,\varepsilon \end{pmatrix}_{(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2)} \tag{10.45}$$

Et, le déviateur de $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}$, est tel que :

$$\underset{\sim}{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1+\nu}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}_{(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2)} \tag{10.46}$$

D'où, en tenant compte des relations 8.3 et 2.65 :

$$\varepsilon_m = \frac{1-\nu}{2}\,\varepsilon \quad ; \quad Q_{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1+\nu}{2}\,\varepsilon \tag{10.47}$$

où ν, représente le coefficient de contraction global, mesuré sur l'ensemble des essais SFH0C006 et SFH0T002 ; noté respectivement ν_c dans la direction chaîne (fig. 5.16 et relation 5.3) et ν_t dans la direction trame (fig. 5.17 et relation 5.4). Les relations 10.3 et 10.44, permettent d'écrire la composante de la contrainte totale, du matériau tissé, dans la direction de l'axe de traction, sous la forme :

$$\Sigma = \frac{\overline{\rho}_\theta}{\overline{\rho}}(\Sigma_r + \Sigma_v) + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\Sigma_e \tag{10.48}$$

où $\overline{\rho}_\theta = \overline{\rho}_c$ dans le cas d'une traction dans la direction chaîne ($\theta = 0$, fig. 10.1), et $\overline{\rho}_\theta = \overline{\rho}_t$ dans le cas d'une traction dans la direction trame ($\theta = 90^\circ$, fig. 10.1) ; Σ_r et Σ_v correspondent aux contributions de contrainte à identifier et Σ_e la composante de contrainte de l'enduction selon l'axe de traction. Au cours d'une séquence de relaxation, la contribution de contrainte Σ_v tend

vers zéro et le comportement du fil tend vers son élasticité retardé. La contrainte totale en fond de relaxation, notée Σ_{FR}, s'écrit compte tenu de la relation 10.48 :

$$\Sigma_{FR} = \frac{\overline{\rho}_\theta}{\overline{\rho}}\Sigma_r + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\Sigma_e \tag{10.49}$$

La relation 10.49, permet d'obtenir la contribution de contrainte réversible du fil Σ_r en fonction de Σ_{FR} et Σ_e, telle que :

$$\Sigma_r = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_\theta}\Sigma_{FR} - \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}_\theta}\Sigma_e \tag{10.50}$$

Les résultats des essais SFH0C006 et SFH0T002 permettent de caractériser la contrainte totale en fond de relaxation Σ_{FR} et l'identification du comportement de l'enduction, présenté dans le paragraphe 10.2.1, permet de calculer la composante de contrainte Σ_e. Ainsi, la relation 10.50 permet de caractériser l'évolution de la contribution de contrainte réversible Σ_r en fonction de la déformation. Une fois l'identification des paramètres de Σ_r effectuée, la relation 10.48, permet d'obtenir la contribution de contrainte visqueuse Σ_v, telle que :

$$\Sigma_v = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_\theta}\Sigma - \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}_\theta}\Sigma_e - \Sigma_r \tag{10.51}$$

Les relations 8.70 à 8.75 permettent de calculer la composante de contrainte Σ_e. En traction simple et en première charge, les seules projections du vecteur $\underline{\vec{e}}$ activées, sont r_{e1}, r_{e2} et r_{e8}. Par ailleurs, $\varepsilon_m^R = \varepsilon_m$ et $\Delta r_{e_i} = 0$ pour $i = 1$ à $i = 8$. Compte tenu de 10.45 à 10.47, on a :

$$\Sigma_e = 2\Big\{(K_1 - K_c)\ M(2\varepsilon_m) + K_c\Big\}\varepsilon_m \tag{10.52}$$

$$+2(\mu_1 - \mu_c)\Big\{\frac{M}{2}(\sqrt{2}Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}}) + \frac{M}{2}(Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}})\Big\}Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{10.53}$$

$$+2\mu_c Q_{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{10.54}$$

10.3.1 Identification des paramètres de la contribution réversible

La contribution de contrainte réversible du fil Σ_r est définie par la relation 7.4 et caractérisée par les cinq paramètres G_r, L_r, H_r, K_r et ε_r^*. Pour identifier ces paramètres, on utilise la relation 10.50 pour calculer des points expérimentaux, issus des essais SFH0C006 et SFH0T002, qui permettent d'aboutir à une modélisation de la contribution de contrainte G_r. Ceci est illustré par la figure 10.3. Les valeurs des paramètres identifiés sont données dans le tableau 10.4.

Table 10.4: Paramètres identifiés pour Σ_r dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Paramètres	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_r	4000.0	4400.0	J/g
H_r	8000.0	300.0	
K_r	15000.0	35000.0	
L_r	900.0	300.0	
ε_r^*	1.4	0.7	(%)

Sur la figure 10.3 nous avons reporté les modules G_C^β, dans le sens chaîne et G_T^β, dans le sens trame, obtenus par l'analyse effectuée au paragraphe 10.2.1 (cf. résultat 10.28). Dans le sens trame, le module G_T^β présente une bonne cohérence avec la forme de la contribution réversible Σ_r, identifiée à partir du résultat de l'essai SFH0T002 (fig. 10.3-b). En effet, ce module caractérise bien une tangente à la zone β de la contribution réversible Σ_r ; qui présente bien trois zones de comportement α, β et γ, avec des modules distincts. Dans le sens chaîne, le module tangent dans la zone β garde une valeur relativement élevée, de sorte que la distinction d'une zone γ, semble difficile à faire (fig. 10.3-a). Dans ce cas, le module G_C^β semble caractériser la tangente de la fin de la courbe Σ_r, identifiée dans le sens chaîne.

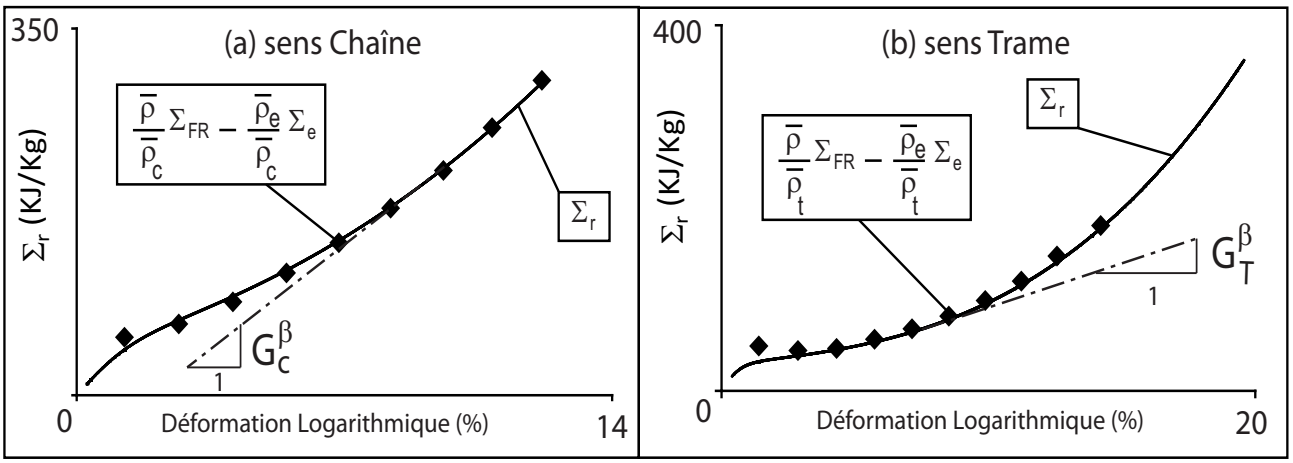


Fig. 10.3 – Identification des paramètres de la contribution réversible du fil Σ_r, (a) dans le sens chaîne et (b) dans le sens trame ; les points expérimentaux, de forme carrèe sont issus des essais SFH0C006 et SFH0T002.

10.3.2 Identification des paramètres de la contribution visqueuse

Considérons la réponse Σ des résultats de tractions monotones à différentes vitesses de déformation (fig. 5.3 et fig. 5.4) et appliquons la relation 10.51 ; où Σ_e est caractérisée par la relation 10.52 et Σ_r la contrainte réversible identifiée dans le paragraphe précédent (§ 10.3.1). L'évolution de la contrainte visqueuse du fil Σ_v, qui en résulte, est donnée par la figure 10.4, dans les sens chaîne et trame, en fonction de la déformation et la vitesse de déformation.

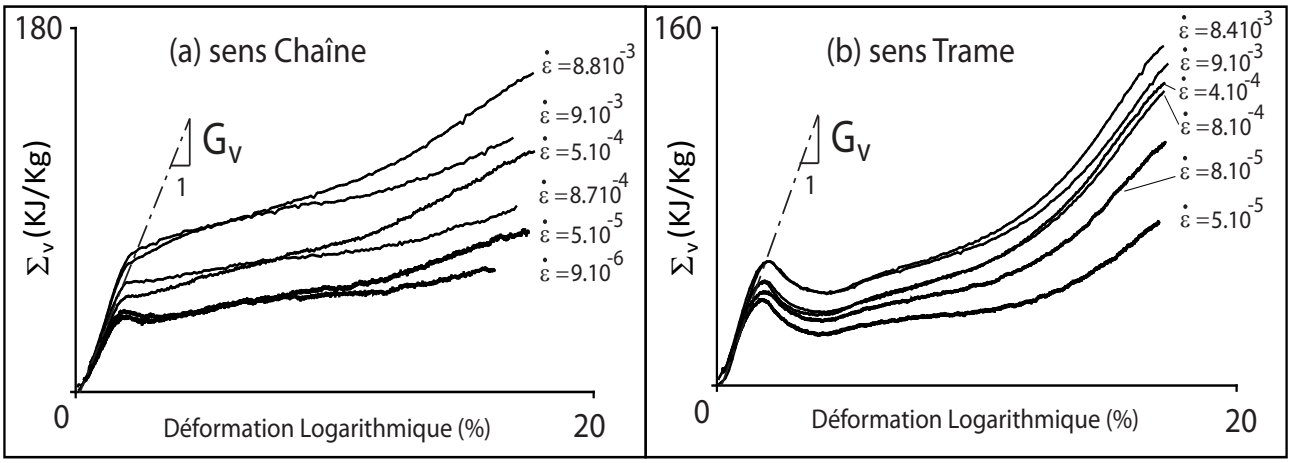


Fig. 10.4 – Identification de la contrainte visqueuse du fil Σ_v, (a) dans le sens chaîne et (b) dans le sens trame ; ces résultats sont issus des essais de tractions monotones à différentes vitesses de déformation (fig. 5.3 et fig. 5.4).

la contrainte visqueuse du fil Σ_v a le caractère d'un fluide non newtonien ; elle est décrite par une loi du type Maxwell (cf. relation § 7.2), avec un module G_v constant et une viscosité η dépendante de la vitesse de déformation, selon le modèle de Carreau-Yasuda (cf. relation 7.3). Pour une vitesse de déformation constante donnée, ce modèle prévoit une élasticité instantanée G_v constante et un seuil $\eta\ \dot{\varepsilon}$ constant, en régime d'écoulement permanent, après la saturation des effets transitoires. Les résultats de la figure 10.4, montrent que la réalité est beaucoup plus complexe ; en effet le seuil d'écoulement en régime permanent dépend à la fois de la déformation et de la vitesse de déformation. Par ailleurs, la contrainte visqueuse dans le sens trame présente un effet transitoire caractérisé par un dépassement ou « overshoot » très prononcé. Ce phénomène s'observe aussi dans le sens chaîne, avec une moindre amplitude, pour les faibles vitesses de dé-

formation. Pour identifier le modèle, nous avons défini une mesure du seuil en régime permanent, caractérisée par la figure 10.5. Cette mesure, notée $< \Sigma_v >$, correspond à la moyenne de deux contraintes $\Sigma_v^{\min}$ et $\Sigma_v^{\max}$; la première coïncide avec le début du seuil et la seconde correspond à la contrainte maximale atteinte. Pour toutes les courbes disponibles sur la figure 10.4, le début du seuil a été fixé à une déformation de 4% dans le sens chaîne et 6% pour le sens trame.

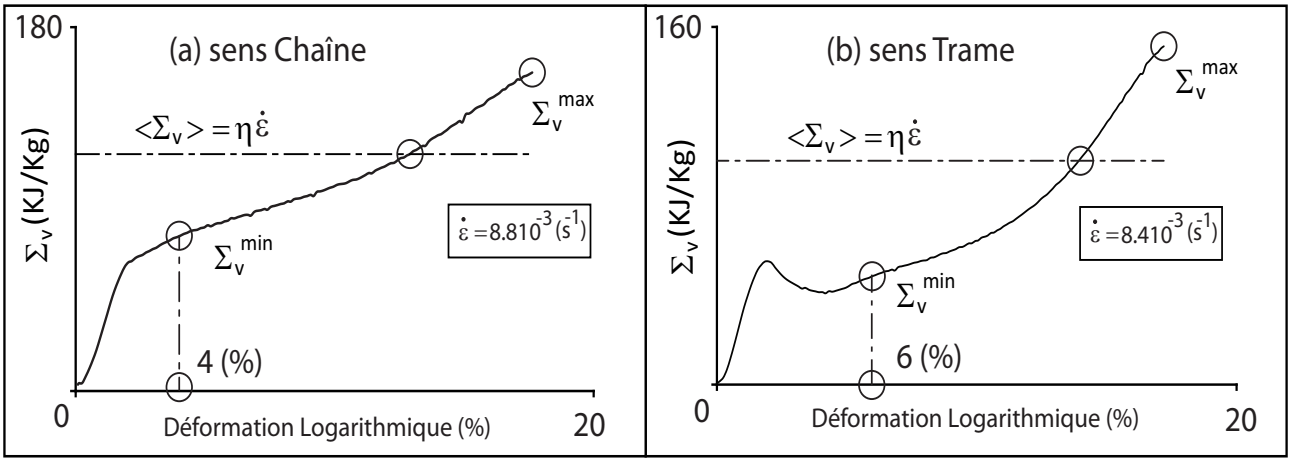


Fig. 10.5 – Illustration de la méthode de mesure du seuil visqueux de Maxwell $\eta\ \dot{\varepsilon}$, qui caractérise le régime permanent à vitesse de déformation constante.

Pour une vitesse de déformation donnée, la mesure du seuil $< \Sigma_v >$, permet de caractériser la viscosité, telle que :

$$\eta(\dot{\varepsilon}) = \frac{< \Sigma_v >}{\dot{\varepsilon}} \tag{10.55}$$

L'évolution de la viscosité en fonction de la vitesse de déformation est donnée sur la figure 10.6, pour les sens chaîne et trame. Dans le modèle de Carreau-Yasuda, défini par la relation

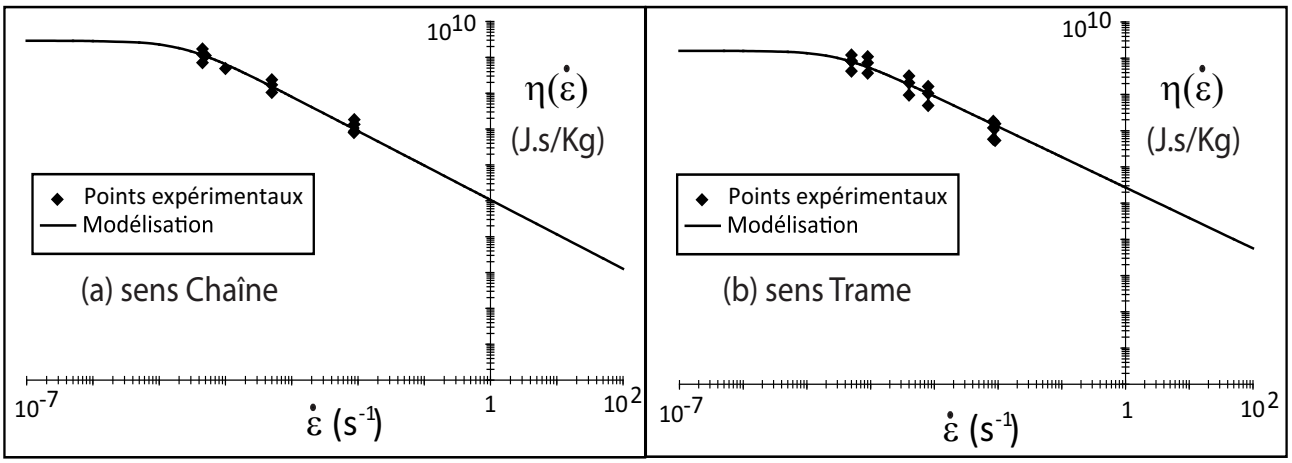


Fig. 10.6 – Identification des paramètres du modèle de Carreau-Yasuda (a) dans le sens chaîne et (b) dans le sens trame.

7.3, nous avons adopté systématiquement une viscosité à vitesse de déformation infinie nulle ($\eta_\infty = 0$). La figure 10.6 permet d'identifier l'ensemble des paramètres de ce modèle ; les valeurs obtenues sont données dans le tableau 10.5. Les résultats de la figure 10.4 permettent de mesurer l'élasticité instantanée G_v de la contribution de contrainte visqueuse du fil. Le résultat obtenu est donné dans le tableau 10.6. La relation$(10.2)_1$, les résultats des tableaux 10.4 et 10.6 permettent de calculer deux valeurs du module G_m, respectivement dans le sens chaîne $G_m = 7140\ J/g$ et

TABLE 10.5: Paramètres identifiés du modèle de Carreau-Yasuda dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Paramètres	Sens chaîne	Sens trame	Unité
η_0	2900.0	1600.0	MJ.s/g
n	0.04	0.16	-
a	1.2		-
λ	42.10^3	31.10^3	s

TABLE 10.6: Paramètre G_v mesuré dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Elasticité instantanée de Maxwell	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_v	3140.0	3260.0	J/g

dans le sens trame $G_m = 7660\ J/g$. En considérant la valeur identifiée dans $(10.14)_2$, la valeur moyenne de ces trois valeurs est telle que :

$$G_m = (7230 \pm 400)\ \text{J/g} \tag{10.56}$$

Ces trois valeurs de G_m se situent dans un intervalle de variation de $\pm 5\%$ de la valeur moyenne. Ce résultat montre que l'hypothèse $(10.2)_1$ est cohérente avec les différentes mesures réalisées.

Les résultats du tableau 10.6, indiquent que la valeur du module G_v dans le sens trame est supérieure à la valeur du module g_m obtenue dans le résultat $(10.14)_1$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse $(10.2)_2$; car dans ce cas, celle-ci conduit à un module g_r, lié au phénomène d'embuvage, négatif. Cette contradiction, pourrait aussi s'expliquer par un module G_v en compression, dans le sens chaîne, de valeur plus faible que celle en traction. Les résultats dont nous disposons actuellement, ne nous permettent pas de lever cette contradiction. Pour résoudre cette question, nous adoptons provisoirement le choix suivant :

$$g_r = 2040\ \text{J/g} \tag{10.57}$$

Cette valeur correspond à la valeur du module g_m obtenue en 10.14. Ce choix permet de préserver la cohérence de l'hypothèse $(10.2)_2$. En effet, le choix 10.57 et les résultats du tableau 10.6, conduisent :

$$g_m = g_r + G_v = 5180\ \text{J/g}\ < G_m \tag{10.58}$$

Nous reviendront sur cette question au chapitre 11.

Les résultats de mesure de l'élasticité instantanée G_v, du tableau 10.6, ont été réalisés en première charge et localement au niveau de l'origine (fig. 10.4). Les résultats expérimentaux présentés sur la figure 1.22, montre que l'élasticité instantanée, peut dépendre de la déformation. Une valeur trop faible du module G_v conduit à comportement cyclique et des recharges après des séquences de relaxation et de fluages non réalistes. Pour cela, nous adoptons des valeurs doubles des valeurs mesurées. Les valeurs adoptées sont données dans le tableau 10.7. Cette méthode est illustrée au paragraphe 7.8.2 du chapitre 7 et par la figure 7.16, lors de la modélisation du comportement d'une sangle en PA66. La figure 10.7 illustre l'intérêt de la méthode adoptée, pour fixer les valeurs du module G_v, sur le comportement cyclique. La figure représente la contrainte du fil caractérisée par la somme d'une contribution de contrainte visqueuse $\Sigma_v(\varepsilon)$ et d'une contribution de contrainte réversible $\Sigma_r(\varepsilon)$. La contribution visqueuse $\Sigma_v(\varepsilon)$ est du type Maxwell, dont le module élastique est défini par G_1. La contribution réversible $\Sigma_r(\varepsilon)$ a un comportement élastique linéaire de module G_2. Ainsi, l'élasticité instantanée du fil est définie par

Table 10.7: Paramètre G_v retenue dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Elasticité instantanée de Maxwell	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_v	6280.0	6520.0	J/g

la somme $G_1 + G_2$ et son élasticité retardée par G_2. Le module à l'inversion est égal à $2G_1 + G_2$ et une décharge-charge conduit à un cycle, noté cycle 1. Si on adopte un module élastique $2G_1$ de la contribution visqueuse $\Sigma_v(\varepsilon)$, d'une part, les valeurs de l'élasticité instantanée du fil et son module à l'inversion augmentent ; d'autre part, une décharge-charge conduit à un cycle d'épaisseur plus importante, noté cycle 2. Les valeurs identifiés de l'ensemble des paramètres du

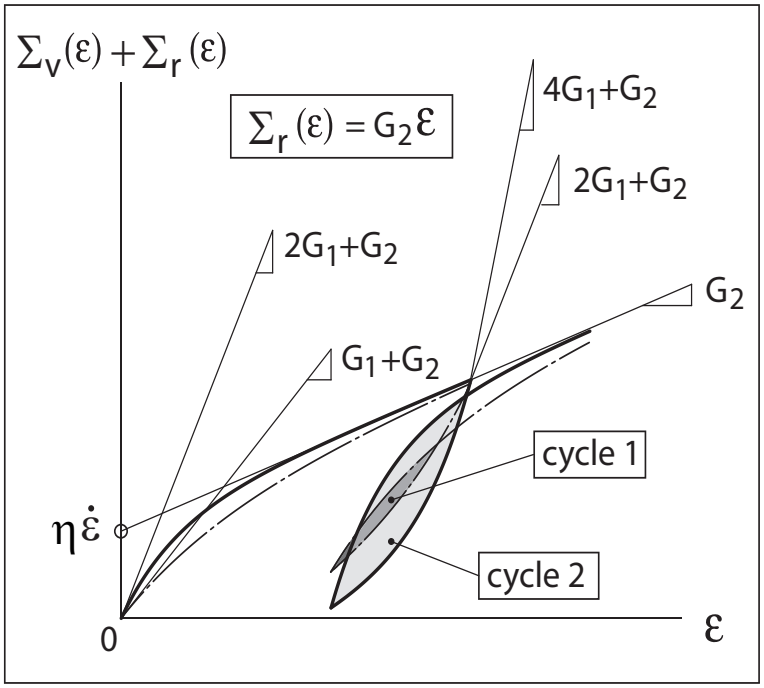


Fig. 10.7 – Influence de l'élasticité instantanée du modèle de Maxwell sur la taille du cycle.

comportement des fils de chaîne et de trame, dans le cas du modèle H1, sont réunis à l'annexe B (§. B.1.2).

10.3.3 Identification du comportement de l'interaction des fils

Le comportement d'l'interaction entre les fils est du type 1D. La loi correspondante est présentée dans le paragraphe 7.7. Elle est caractérisée par une contribution de contrainte réversible $\Sigma^r_{ct}(\varepsilon_\gamma)$ et une contribution visqueuse $\Sigma^v_{ct}(\dot{\varepsilon}_\gamma)$. Nous avons adopté un comportement élastique linéaire pour la contribution réversible, défini par un seul paramètre K_γ tel que :

$$\Sigma^r_{ct}(\varepsilon_\gamma) = K_\gamma \varepsilon_\gamma \tag{10.59}$$

L'identification de l'interaction entre les fils est très difficile. En effet on ne dispose d'aucune mesure directe qui permet de caractériser ce comportement. A cette étape de l'identification et Dans le cadre de l'hypothèse de modélisation H1, nous avons choisi d'affecter au comportement de l'interaction un comportement viscoélastique qui a le caractère d'un quasi-fluide. Pour cela, on adopte une élasticité retardée K_γ de valeur très faible, telle que :

$$K_\gamma = 10^{-3}\,\mathrm{J/g} \tag{10.60}$$

Des essais numériques de traction hors axes ont montré que la viscosité de l'interaction entre les fils est relativement faible comparée à celle des fils. Ceci nous a conduits à adopter une viscosité de l'interaction entre les fils égale à 10% de la viscosité des fils. La figure 10.8 illustre cette démarche. Les points expérimentaux disponibles dans le sens chaîne et le sens trame (cf. fig.10.6), sont regroupés et modélisés par une courbe $\eta(\dot{\varepsilon}_\gamma)$. La viscosité de l'interaction entre les fils, notée $\eta_{ct}(\dot{\varepsilon}_\gamma)$, est telle que :

$$\eta_{ct}(\dot{\varepsilon}_\gamma) = 10\% \ \eta(\dot{\varepsilon}_\gamma) \tag{10.61}$$

Le tableau 10.8 donne les valeurs obtenues des paramètres viscoélastiques de l'interaction entre

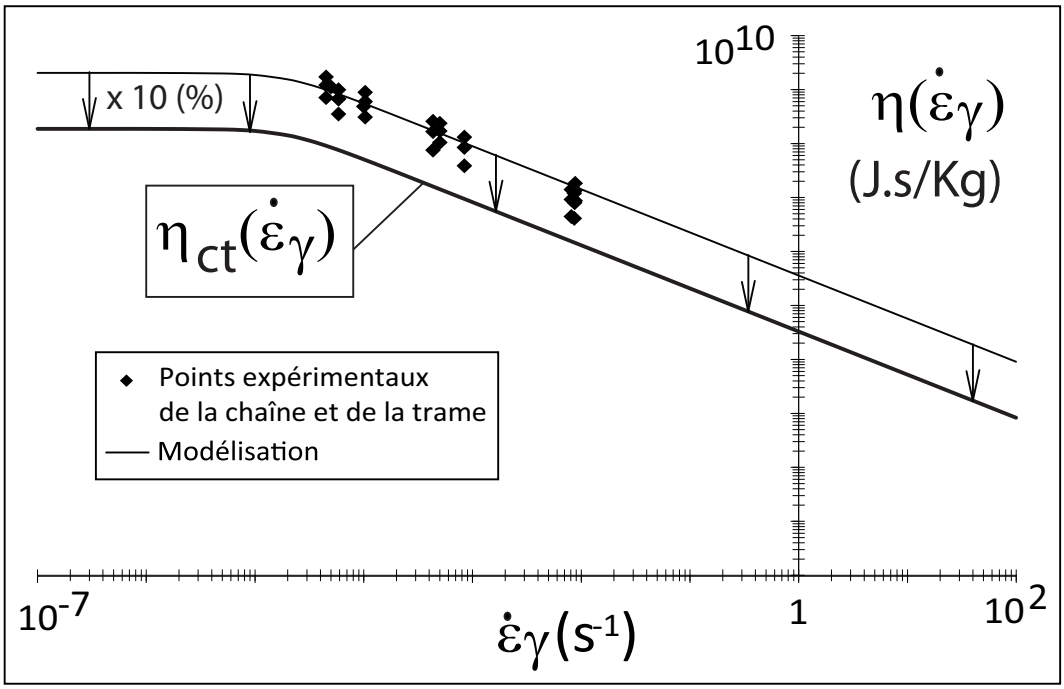


Fig. 10.8 – Viscosité de l'interaction entre les fils.

les fils. La valeur adoptée pour le module G^v_{ct} est de l'ordre de 15% du module G_v, dans le sens chaîne et trame. Les valeurs adoptées de l'ensemble des paramètres du comportement de

TABLE 10.8: Paramètres viscoélastiques de l'interaction entre les fils.

Paramètres	Valeur	Unité
G^v_{ct}	1000	J/g
η^0_{ct}	200	MJ.s/Kg
n_{ct}	0.2	-
a_{ct}	2	-
λ_{ct}	50.10^3	s

l'interaction entre les fils, dans le cas du modèle H1, sont réunis à l'annexe B (§. B.1.3).

10.4 Identification des paramètres du modèle H2

10.4.1 Identification du comportement de l'enduction

Dans le cas du modèle H2, le comportement de l'enduction est défini par une loi viscoélastique à comportement retardé irréversible, identique à celui du modèle H1 ; par conséquent, ses paramètres, identifiés au paragraphe 10.2.1, gardent les mêmes valeurs (cf. Annexe B). Dans le

cas du modèle H1 en traction simple, la contrainte totale du matériau tissé, noté ici Σ_{H1}, est caractérisée par la relation 10.48, telle que :

$$\Sigma_{H1} = \frac{\overline{\rho}_\theta}{\overline{\rho}}(\Sigma_r + \Sigma_v) + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\Sigma_e \tag{10.62}$$

En tenant compte de Σ_e^v la contribution visqueuse de l'enduction, dans le cas du modèle H2, la contrainte totale du matériau tissé, en traction simple, noté Σ_{H2}, est telle que :

$$\Sigma_{H2} = \frac{\overline{\rho}_\theta}{\overline{\rho}}(\Sigma_r + \Sigma_v) + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}(\Sigma_e + \Sigma_e^v) \tag{10.63}$$

Les relations 10.62 et 10.63 permettent de définir Σ_e^v telle que :

$$\Sigma_e^v = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_e}(\Sigma_{H2} - \Sigma_{H1}) \tag{10.64}$$

La contrainte Σ_{H1}, caractérisée par la relation 10.62 et complètement identifiée, dans le sens chaîne et dans le sens trame (cf. §10.2). En adoptant des résultats expérimentaux à différentes vitesses de déformation pour la contrainte Σ_{H2}, la relation 10.64 permet d'identifier la viscosité de l'enduction, par une méthode équivalente à celle présentée dans le paragraphe 10.3.2. En effet, pour une vitesse de déformation donnée, la mesure du seuil $< \Sigma_v >$, de la contrainte Σ_e^v, permet de caractériser la viscosité par la relation 10.55. Cette méthode est illustrée par la figure 10.9. La

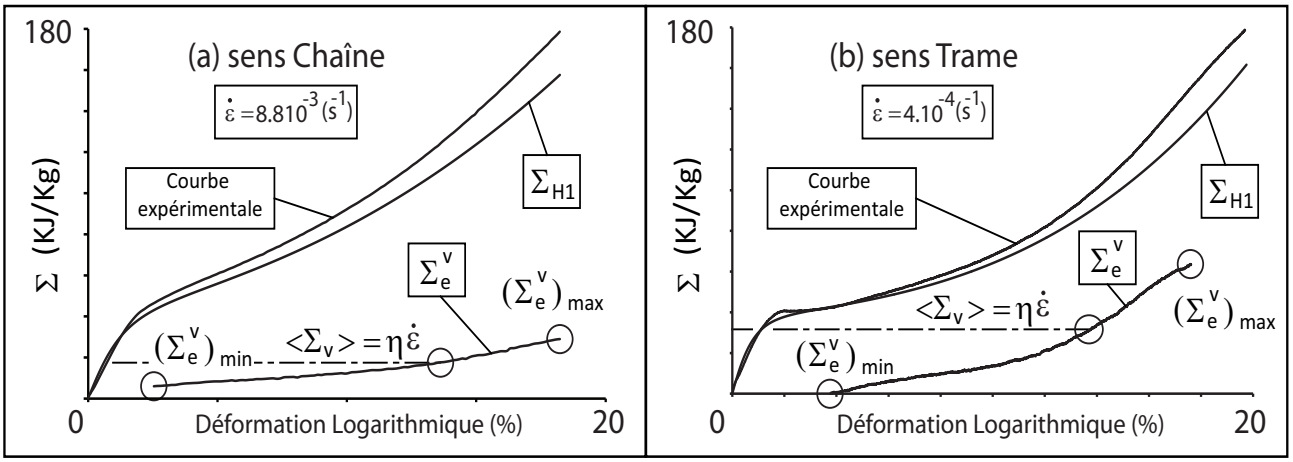


Fig. 10.9 – Illustration de la méthode de mesure du seuil visqueux de Maxwell $\eta\,\dot{\varepsilon}$, qui caractérise le régime permanent à vitesse de déformation constante.

viscosité de l'enduction est définie par une contribution isotrope et une contribution déviatoire, décrites chacune par un modèle de Carreau-Yasuda (cf.§ 8.8 du chapitre 8). Nous considérons ici que ces deux contributions sont identiques, telles que :

$$\underline{\eta}_\infty^e = \eta_\infty^e = 0 \tag{10.65}$$

Et :

$$\underline{\eta}_0^e = \eta_0^e \quad , \qquad \underline{\lambda}^e = \lambda^e \quad , \qquad \underline{a}^e = a^e \quad , \qquad \underline{n}^e = n^e \tag{10.66}$$

Pour identifier les paramètres des relations 10.65 et 10.66, nous avons utilisé deux essais de traction dans le sens chaîne, respectivement à $\dot{\varepsilon}$= 8.8 10^{-3} s^{-1} et $\dot{\varepsilon}$= 9 10^{-3} s^{-1} et deux essais de traction dans le sens trame, respectivement $\dot{\varepsilon}$= 4 10^{-4} s^{-1} et $\dot{\varepsilon}$= 5 10^{-5} s^{-1}. L'évolution de la viscosité en fonction de la vitesse de déformation, noté $\eta(\dot{\varepsilon})$, qui résulte de ces quatre essais est donnée sur la figure 10.10. La viscosité totale $\eta(\dot{\varepsilon})$ de l'enduction est ensuite scindée en deux par-

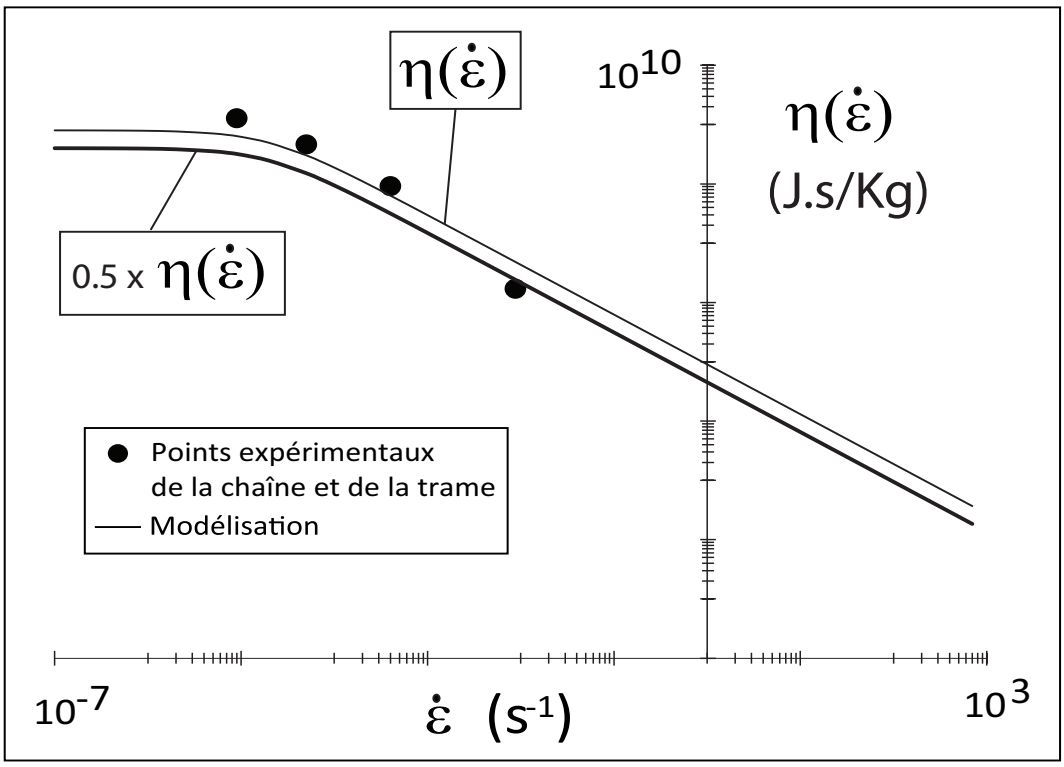


Fig. 10.10 – Identification des paramètres du modèle de Carreau-Yasuda, pour l'enduction.

TABLE 10.9: Paramètres du modèle de Carreau-Yasuda identifiés pour l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
$\underline{\eta}_0^e = \eta_0^e$	400.0	MJ.s/Kg
$\underline{n}^e = n^e$	0.16	-
$\underline{a}^e = a^e$	1.2	-
$\underline{\lambda}^e = \lambda^e$	50.10^3	s

ties égales, qui correspondent respectivement à la viscosité de la partie isotrope et la viscosité de la partie déviatoire (courbe 0.5 $\eta(\dot{\varepsilon})$ de la figure 10.10) ; les valeurs des paramètres obtenues, sont données dans le tableau 10.9. Notons que la viscosité de l'enduction identifiée est relativement faible par rapport à celle des fils. En effet, le niveau de viscosité à vitesse nulle de l'enduction est de 400 $MJ.s/Kg$ (tab. 10.9), contre 2900.0 et 1600.0 $MJ.s/kg$ (tab. 10.5) pour les fils de chaîne et de trame, respectivement. Cet aspect est illustré aussi par la figure 10.9, où les courbes expérimentales sont très proches des courbes théoriques Σ_{H1} du comportement retardé.

Pour compléter l'identification du comportement viscoélastique de l'enduction, il est nécessaire d'établir les valeurs des modules instantanés K_v et μ_v qui interviennent dans les équations différentielles de Maxwell, définis par les relations 8.89 et 8.90 du chapitre 8. L'effet de ces deux modules s'additionne à celui du module instantané G_v des fils. Par ailleurs, la figure 10.9 montre que le modèle H1, qui définit la contrainte Σ_{H1}, décrit de façon correcte les modules initiaux des courbes expérimentales. Par conséquent, un transfert de module des fils à l'enduction est nécessaire, au passage du modèle H1 au modèle H2 (cf. § 10.4.2). Les valeurs adoptées pour ces deux modules sont données sur le tableau 10.10. Les valeurs identifiés de l'ensemble des paramètres du comportement de l'enduction, dans le cas du modèle H2, sont réunis à l'annexe B (§.B.2.1).

Table 10.10: Modules élastiques instantanés de la contribution visqueuse de l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
K_v	4000.0	J/g
μ_v	1000.0	

10.4.2 Identification du comportement des fils de chaîne et de trame

Les fils gardent la même loi de comportement que celle du modèle H1 ; qui correspond à une loi viscoélastique, du type 1D, à élasticité retardée non linéaire. Par conséquent, les paramètres, identifiés au paragraphe 10.2, gardent les mêmes valeurs (cf. Annexe B). La seule modification, au passage du modèle H1 au modèle H2, concerne la valeur du module instantané G_v. En effet, nous adoptons une valeur de G_v plus faible, pour tenir compte de l'introduction des nouveaux modules instantanés K_v et μ_v de l'enduction (cf. § 10.4.1). Nous avons adopté une valeur unique du module instantané G_v, dans les sens chaîne et trame ; cette valeur est donnée dans le tableau 10.11. Les valeurs identifiés de l'ensemble des paramètres du comportement des fils de chaîne et

Table 10.11: Module élastique instantané des fils.

Elasticité instantanée de Maxwell	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_v	2000.0		J/g

de trame, dans le cas du modèle H2, sont réunis à l'annexe B (§.B.2.2).

10.4.3 Identification du comportement de l'interaction des fils

Dans le cas du modèle H2, le comportement de l'interaction entre les fils est élastique linéaire, défini par un seul paramètre K_γ. Pour identifier ce paramètre considérons le cas d'une traction simple sur le matériau tissé dans le sens biais (traction selon $\vec{e}_2$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$, fig. 10.1. Compte tenu de la relation 6.31, la contrainte de traction est caractérisée, par l'équation suivante :

$$\Sigma_{22} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\overline{\rho}_c}{\overline{\rho}}\,\Sigma_c + \frac{\overline{\rho}_t}{\overline{\rho}}\,\Sigma_t\right\} + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\,\Sigma_e^{22} + \frac{\overline{\rho}_f}{\overline{\rho}}\,\Sigma_{ct} \tag{10.67}$$

Il en résulte que :

$$\Sigma_{ct} = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_f}\left\{\Sigma_{22} - \Sigma_{22}^0\right\} \tag{10.68}$$

où Σ_{22}^0 représente la contrainte de traction pour $\Sigma_{ct} = 0$. En multipliant la relation 10.68 par $\overline{\rho}.\frac{L}{\lambda}$ on a, compte tenu de la relation 2.53 du chapitre 2 :

$$f_{ct} = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_f}\left\{f_{22} - f_{22}^0\right\} \tag{10.69}$$

où f_{22}, f_{ct} et f_{22}^0 sont respectivement la force totale exercée sur l'éprouvette, la force due à Σ_{ct} et la force pour $\Sigma_{ct} = 0$. La force f_{22}^0, peut être calculée numériquement avec les paramètres identifiés aux paragraphes 10.4.1 et 10.4.2. Le résultat de l'essai de traction monotone SFH45001b (fig. 5.39), dans le sens biais, permet de caractériser la force f_{22}. Ainsi, la relation 10.69, permet d'identifier le paramètre K_γ. Pour cela considérons la force maximale atteinte lors de l'essai SFH45001b, la relation 10.69 conduit, compte tenu de la loi de l'interaction entre les fils :

$$K_\gamma = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_f}\left\{\left(f_{22}\right)_{Max} - \left(f_{22}^0\right)_{Max}\right\}.\frac{\left(\lambda\right)_{Max}}{\overline{\rho}.L.\left(\varepsilon_\gamma\right)_{Max}} \tag{10.70}$$

La relation 10.70, conduit à une valeur de $K_\gamma = 51.42$ J/g. Nous avons adopté, finalement :

$$K_\gamma = 60 \text{ J/g} \tag{10.71}$$

Cette valeur est rappelée avec l'ensemble des paramètres du modèle H2, dans l'annexe B (§. B.2.3).

10.5 Identification des paramètres du modèle H3

Le comportement de l'interaction entre les fils est élastique linéaire ; il est déterminé par le même paramètre K_γ, identifié dans le cas du modèle H2 (cf. relation 10.71).

Par rapport au modèle H2, le modèle H3 introduit un comportement viscoélastique des fils, caractérisé par un comportement retardé irréversible (cf. § 7.4 du chapitre 7). La contribution visqueuse des fils est caractérisée par la même viscosité que celle du modèle H2 ; elle est définie par les mêmes paramètres. Les valeurs des modules G_v des fils de chaîne et de trame, adoptées, sont celles mesurées initialement et données dans le tableau 10.6. Cette augmentation des valeurs des modules G_v, par rapport au modèle H2 est compensée par une diminution de la valeur du module μ_v de l'enduction, telle que :

$$\mu_v = 500 \text{ J/g} \tag{10.72}$$

Le module K_v garde sa valeur définie par le tableau 10.10 et la contribution visqueuse de l'enduction est caractérisée par la même viscosité que celle du modèle H2 ; elle est définie par les mêmes paramètres.

En première charge, le comportement retardé des fils est le même que celui du modèle H2 ; il est déterminé par les mêmes paramètres. En décharge-charge on adopte le modèle B, présenté au paragraphe 7.6 du chapitre 7 et caractérisé par une contrainte non linéaire $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ (cf. relation 7.25). Cette contrainte engendre, pour le matériau tissé, un module supplémentaire variable en fonction de la déformation $\frac{d\Sigma_{r2}}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ (cf. relation 7.26). Ce module doit être compensé par une diminution des modules K_2 et μ_2 de l'enduction. Pour procéder à cette compensation, considérons le comportement retardé de la relation 10.48, avec une viscosité nulle sur les fils et sur l'enduction ; la réponse en contrainte Σ du matériau tissé en traction est telle que :

$$\Sigma = \frac{\overline{\rho}_\theta}{\overline{\rho}}\ \Sigma_{r2}^\theta + \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ \Sigma_e = E_\theta^{Cyc}\ \varepsilon \tag{10.73}$$

Cette réponse est approchée par un comportent linéaire, défini par $E_\theta^{Cyc} = E_C^{Cyc}$ dans le cas d'une traction dans le sens chaîne et $E_\theta^{Cyc} = E_T^{Cyc}$ dans le cas d'une traction dans le sens trame ; où E_C^{Cyc} et E_T^{Cyc} correspondent aux modules mesurés lors du comportement cyclique du matériau tissé, dans la direction chaîne et la direction trame (cf. § 5.6 du chapitre 5). Le paramètre $\overline{\rho}_\theta = \overline{\rho}_c$ et la contrainte $\Sigma_{r2}^\theta = \Sigma_{r2}^c$ dans le cas d'une traction dans le sens chaîne et $\overline{\rho}_\theta = \overline{\rho}_t$ et la contrainte $\Sigma_{r2}^\theta = \Sigma_{r2}^t$ dans le cas d'une traction dans le sens trame. La contrainteΣ_e représente le comportement retardé de l'enduction ; lors d'une décharge-charge, telle que :

$$\Sigma_e = E^{Cyc}\ \varepsilon \tag{10.74}$$

où ε représente la déformation de traction et E^{Cyc} est le module en traction de l'enduction, lors d'un cycle décharge-charge ; ce module s'exprime en fonction des modules K_2 et μ_2 de l'enduction (cf. relation 8.18). Les relations 10.73 et 10.74 permettent d'exprimer Σ_{r2}^θ en fonction de E_θ^{Cyc} et E^{Cyc} :

$$\Sigma_{r2}^\theta = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_\theta}\Big\{E_\theta^{Cyc} - \frac{\overline{\rho}_e}{\overline{\rho}}\ E^{Cyc}\Big\}\ \varepsilon \tag{10.75}$$

Dans le cas du modèle H3, l'introduction de la contrainte Σ_{r2}^{θ}, doit être compensée par une réduction du moduleE^{Cyc} de l'enduction, ce qui est équivalent à une réduction des modules K_2 et μ_2. Par conséquent, la relation 10.73, ne permet pas de définir de façon unique la contrainte Σ_{r2}^{θ}, car la valeur adaptée du module E_{θ}^{Cyc} est inconnue. Néanmoins, pour un choix donné de la contrainte Σ_{r2}^{θ}, cette relation permet de définir la règle de compensation des modules. La figure 10.11 illustre l'utilisation de la relation 10.75. Les valeurs adoptées pour les modules K_2 et μ_2

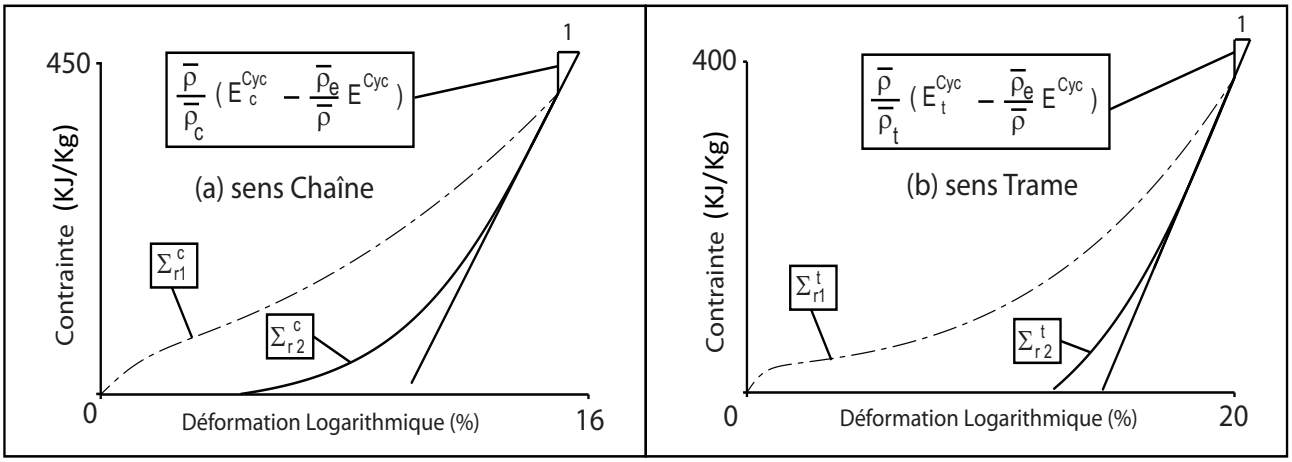


Fig. 10.11 – Illustration du choix de Σ_{r2}^{θ} et de la compensation par une réduction du module E^{Cyc} de l'enduction, lors d'un cycle décharge-charge : (a) sens chaîne, (b) sens trame.

de l'enduction en décharge-charge sont tels que :

$$\begin{cases} K_2 = 500 \text{ J/g} \\ \mu_2 = 100 \text{ J/g} \end{cases} \tag{10.76}$$

Et, les valeurs des paramètres de la contrainte Σ_{r2} des fils de chaîne et de trame sont données dans le tableau 10.12. Les valeurs identifiées de l'ensemble des paramètres du comportement,

Table 10.12: Paramètres de la contrainte Σ_{r2} des fils de chaîne et de trame.

Paramètres	Sens chaîne	Sens trame	Unité
A'	12.5	7	-
M	100	700	J/g

dans le cas du modèle H3, sont réunies à l'annexe B (§.B.3).

10.6 Remarques et conclusions

Compte tenu de l'approche théorique adoptée, la démarche d'identification la plus simple et la plus naturelle serait de caractériser le comportement individuel de chaque constituant du matériau tissé : fil de chaîne, fil de trame et enduction. Mais dans le cas présent, il nous était difficile de disposer de ces constituants et de réaliser des essais adaptés. Nous avons donc adopté une démarche d'identification à partir des essais réalisés sur le matériau tissé constitué. Cette démarche est relativement complexe et ne permet pas une identification rigoureuse de tous les paramètres. Les valeurs des paramètres identifiés pour les trois modèles H1, H2 et H3 et rassemblées dans l'annexe B, sont considérées comme des valeurs provisoires ; ces valeurs seront affinées lors de l'évaluation de ces modèles par une confrontation aux résultats expérimentaux. Cette évaluation sera réalisée au chapitre 11 ; elle permettra de faire le meilleur choix de modélisation

et de fixer les valeurs finales des paramètres.

Notons enfin que le modèle issu de l'hypothèse H3 est caractérisé par 38 paramètres au total (Cf. Annexe B.3). Pour identifier ces paramètres nous avons utilisé les résultats de 21 essais au total : 12 essais de traction monotone à différentes vitesses de déformation dans les sens chaîne et trame ; 3 essais de traction ondulée en petite déformation dans les sens chaîne, trame et biais ; 2 essais de traction monotone avec des séquences de relaxation dans les sens chaîne et trame ; 4 essais de traction ondulée dans les sens chaîne et trame.

Chapitre 11

Résultats de simulation du comportement du Dacron

Nous présentons dans ce chapitre les résultats des simulations numériques du comportement du Dacron SF HTP plus. Ces résultats concernent les trois modèles issus des trois hypothèses H1, H2 et H3 formulées au chapitre 10. Nous nous proposons dans ce chapitre d'évaluer la pertinence de ces trois modèles par une comparaison de leurs prédictions aux résultats expérimentaux, présentés au chapitre 5.

11.1 Résultats de simulation du modèle H1

Les simulations que nous présentons dans ce paragraphe adoptent les hypothèses du modèle H1, présentées au chapitre 10 et les paramètres correspondants sont rassemblés à l'annexe B (§. B.1).

La figure 11.1 montre une comparaison expérience-modélisation, en traction ondulée dans le sens chaîne, contrôlée en déformation (résultats expérimentaux cf. fig. 5.20 et fig. 5.24 du chapitre 5) et contrôlée en force (résultats expérimentaux cf. fig. 5.22 et fig. 5.26 du chapitre 5). Sur les figures 11.1-a et 11.1-c nous présentons les diagrammes respectifs contrainte-déformation ; les figures 11.1-b et 11.1-d donnent les effets de contraction. Le modèle H1 donne de très bons résultats au niveau de la première charge et des boucles de décharge-charge, ainsi que sur les effets de contraction. Nous avons signalé au chapitre 5 (cf.§ 5.4.1 et fig. 5.24 et fig. 5.26) un phénomène de gonflement, qu'on observe sur les branches cycliques, des résultats de l'essai contrôlé en déformation et qui est quasi-inexistant sur les résultats de l'essai contrôlé en force. Ce phénomène est très bien reproduit par les résultats de simulation sur les figures 11.1-b et d.

La figure 11.2 montre une comparaison expérience-modélisation, en traction ondulée dans le sens trame, contrôlée en déformation (résultats expérimentaux cf. fig. 5.21 et fig. 5.25 du chapitre 5) et contrôlée en force (résultats expérimentaux cf. fig. 5.23 et fig. 5.27 du chapitre 5). Sur les figures 11.2-a et 11.2-c nous présentons les diagrammes respectifs contrainte-déformation ; les figures 11.2-b et 11.2-d donnent les effets de contraction. Le modèle H1 donne de très bons résultats au niveau de la première charge et des boucles de décharge-charge, dans le diagramme contrainte-déformation. Néanmoins, l'effet de contraction est sous-évalué, par le modèle. Ceci est lié à l'embuvage des fils de chaîne.

Pour vérifier l'influence du phénomène d'embuvage sur l'effet de contraction, lors d'une traction dans le sens trame, nous avons réalisé une modélisation particulière avec une valeur très

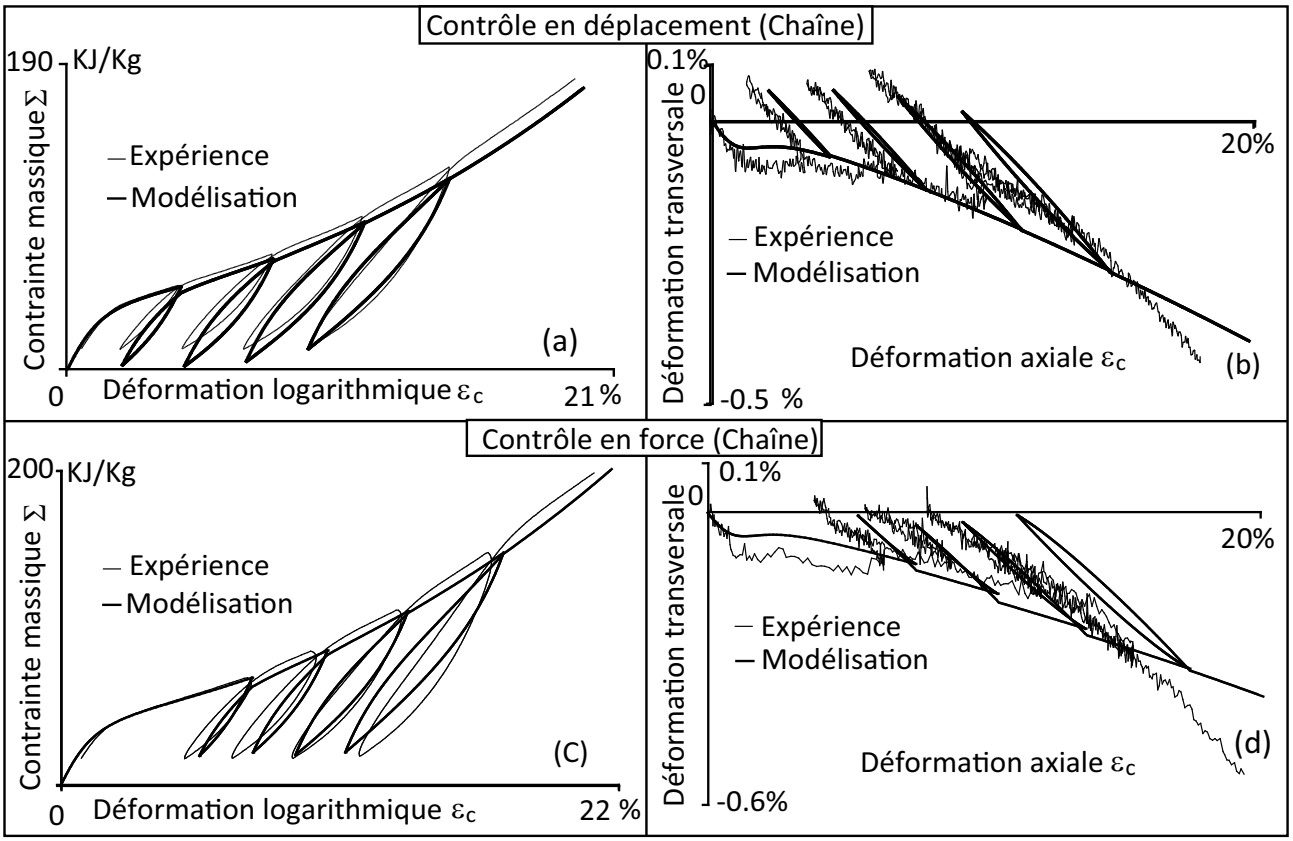


Fig. 11.1 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens chaîne - Modèle H1 : (a et b) contrôle en déformation, (c et d) contrôle en force.

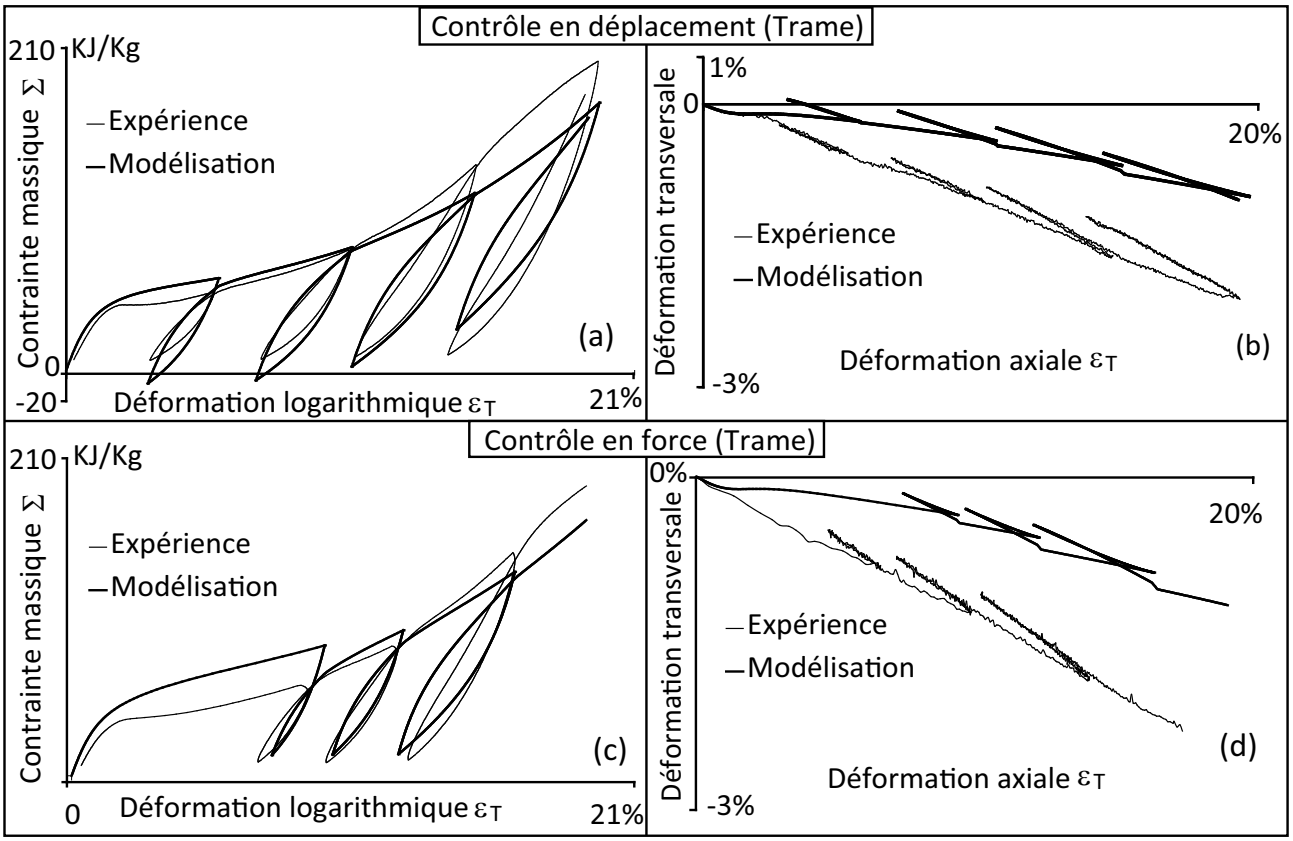


Fig. 11.2 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens trame - Modèle H1 : (a et b) contrôle en déformation, (c et d) contrôle en force.

faible du module g_r, telle que :

$$g_r = 10^{-3} \text{ J/g} \tag{11.1}$$

Le résultat de cette simulation est donné sur la figure 11.3, sous la forme d'une comparaison expérience-modélisation, en traction ondulée dans le sens trame. Ce résultat est à comparer à celui des figures 11.2-a et 11.2-b. On constate que la réduction de la valeur du module, qui passe de 2040 à 10^{-3} J/g, améliore grandement la réponse de la modélisation de l'effet de l'embuvage. Nous reviendrons sur cet aspect au paragraphe 11.4. Dans la suite du paragraphe actuel nous adoptons les paramètres correspondants au modèle H1, rassemblés à l'annexe B (§. B.1), avec $g_r = 2040$ J/g.

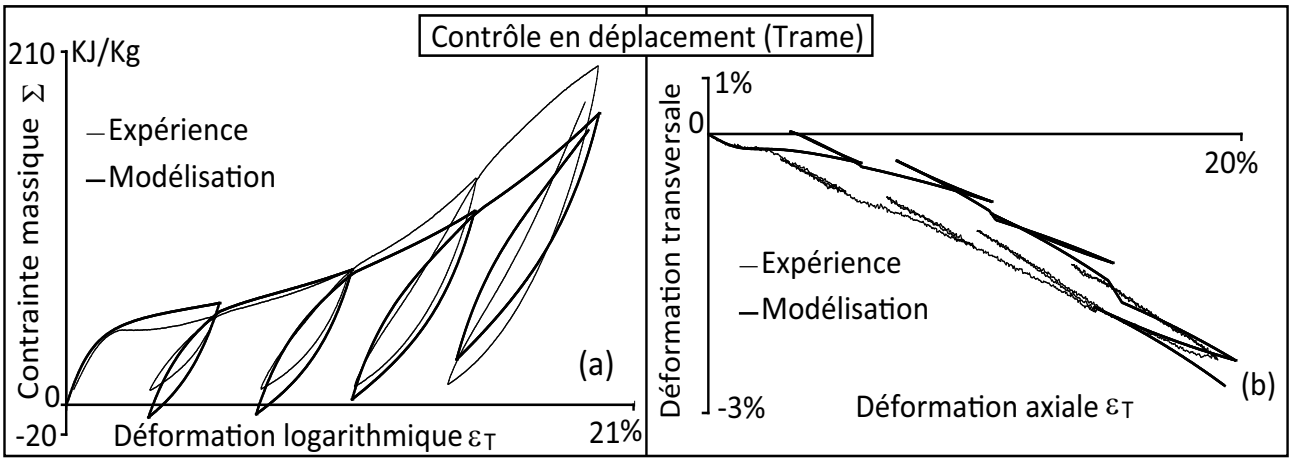


Fig. 11.3 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens trame - Modèle H1 ($g_r = 10^{-3}$ J/g).

Les figures 11.4-a et 11.5-a montrent des résultats de modélisation de traction monotone, dans le sens chaîne et dans le sens trame, à différentes vitesses de déformation : allant de $\dot{\varepsilon} = 10^{-5}$ à $\dot{\varepsilon} = 10^{-2}$ s^{-1}. Ces figures illustrent la sensibilité à la vitesse de déformation de la modélisation, dans les sens chaîne et trame.

Les figures 11.4-b, 11.4-c et 11.5-b, 11.5-c montrent des comparaisons expérience-modélisation, en traction monotone avec des séquences de relaxation, dans les sens chaîne et trame. Les résultats expérimentaux concernés sont ceux des figures 5.8, 5.9 , 5.16 et 5.17 du chapitre 5. Le comportement monotone et les séquences de relaxation sont relativement bien reproduits par le modèle H1. Néanmoins, l'effet de contraction est sous-évalué, lors de la traction dans le sens trame.

La figure 11.6 montre des comparaisons expérience-modélisation de traction monotone hors axes, à vitesse de déformation imposée et à des directions de traction de 5°, 10°, 15°, 30° et 45° (résultats expérimentaux cf. fig. 5.36 et fig. 5.37 du chapitre 5). Ces résultats illustrent le comportement anisotrope du matériau et l'aptitude de la modélisation à le reproduire. La figure 11.6-a, montre que le modèle H1 décrit de façon correcte le comportement monotone, pour la plupart des directions de traction. Dans un diagramme force en fonction de l'angle de rotation δ des mors, la figure 11.6-b montre que le modèle H1 décrit qualitativement le comportement, cependant les valeurs de l'angle δ sont en général relativement surévaluées par le modèle.

La figure 11.7 montre la comparaison expérience-modélisation de l'essai SFH10001 (cf. fig. 5.45, fig. 5.46, fig. 5.48 et fig. 5.49 du chapitre 5). Cet essai correspond à une traction ondulée hors axe ($\theta = 10°$) avec des séquences de relaxation. Malgré la complexité du chargement de cet essai, le modèle H1 donne une réponse relativement proche des résultats expérimentaux.

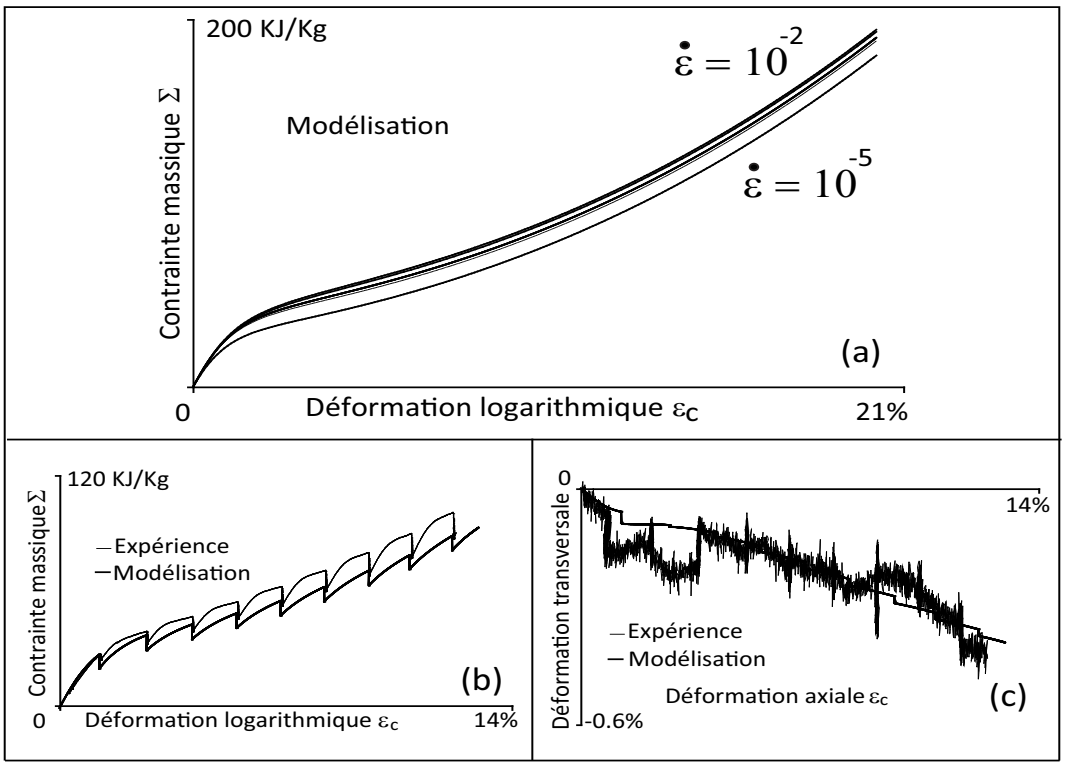


Fig. 11.4 – Résultats de modélisation dans le sens chaîne - Modèle H1 : (a) modélisations de tractions monotones à différentes vitesses de déformation (b et c) comparaison expérience - modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation.

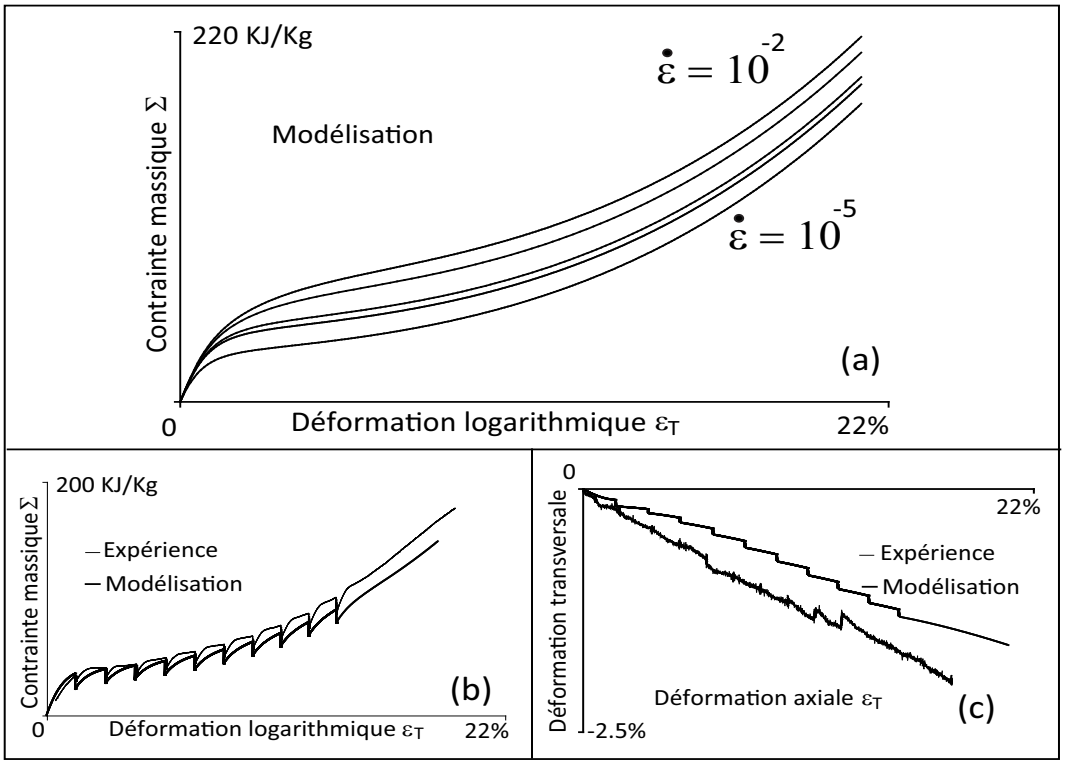


Fig. 11.5 – Résultats de modélisation dans le sens trame - Modèle H1 : (a) modélisations de tractions monotones à différentes vitesses de déformation (b et c) comparaison expérience - modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation.

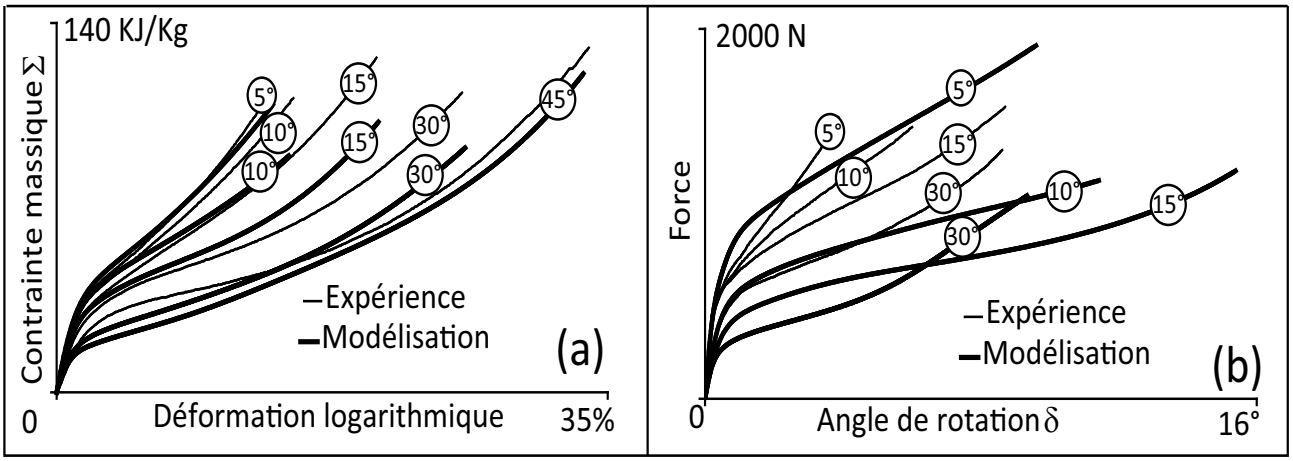


Fig. 11.6 – Comparaison expérience - modélisation en traction hors axes - Modèle H1.

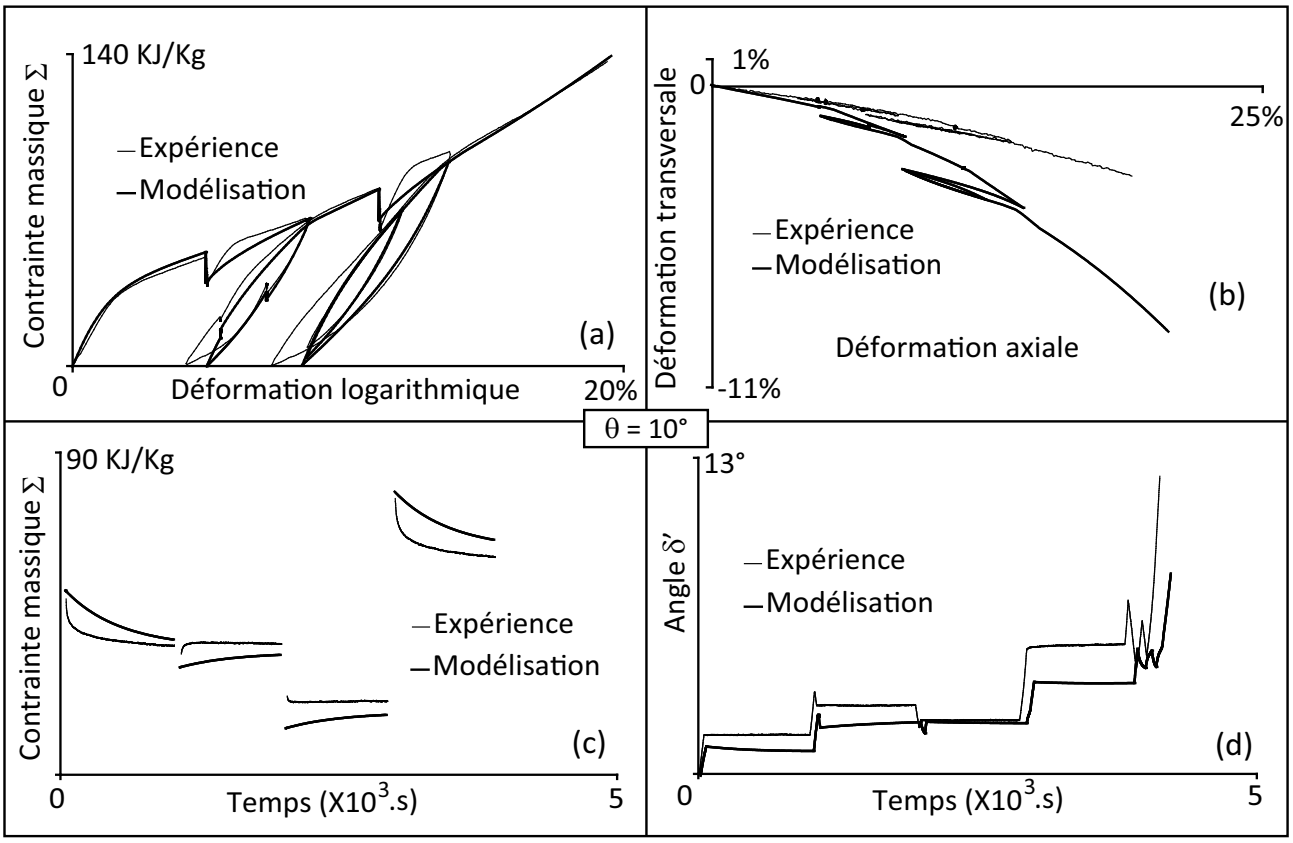


Fig. 11.7 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée hors axes ($\theta = 10°$) avec des séquences de relaxation - Modèle H1.

La figure 11.8 montre la comparaison expérience-modélisation de l'essai SFH45002 (cf. fig. 5.51, fig. 5.52 et fig. 5.53 du chapitre 5). Cet essai correspond à une traction ondulée sinusoïdale, dans le sens biais, contrôlée en force. Sur la figure 11.8-a on remarque que les boucles de décharge-charge de la simulation sont très minces par rapport à ceux du résultat expérimental. Ceci indique que la viscosité des fils et de l'interaction aux points de liage sont insuffisantes pour décrire le comportement en traction biais. Par ailleurs, la figure 11.8-a montre que la valeur simulée du module global des boucles décharge-charge est plus élevée que celle du résultat expérimental. Les figures 11.8-b et c montrent que le modèle H1 prédit de façon relativement bonne la valeur de l'angle de rotation des mors lors de l'essai.

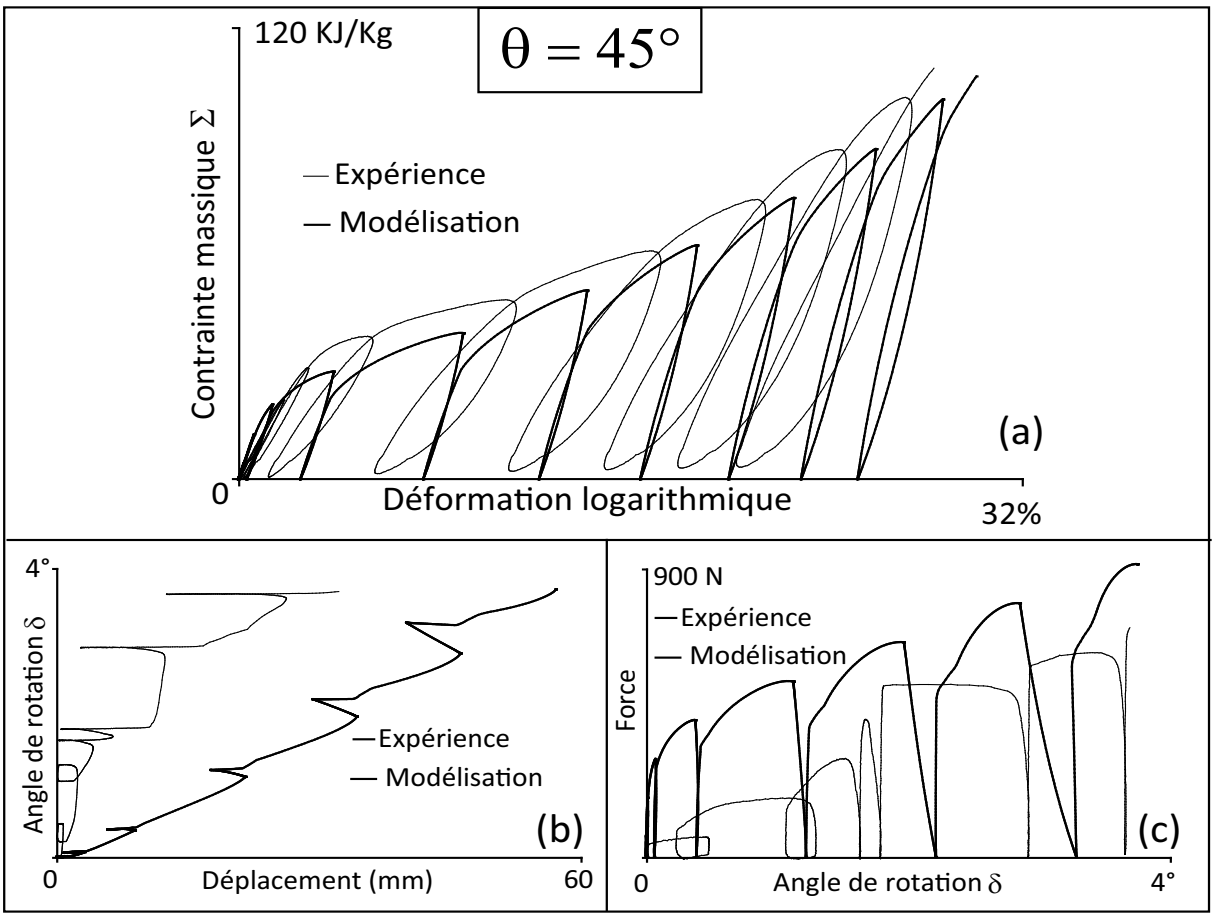


Fig. 11.8 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens biais - Modèle H1.

11.2 Résultats de simulation du modèle H2

Par rapport à l'hypothèse H1, l'hypothèse H2 néglige la viscosité au niveau des interactions entre fils et considère un comportement visqueux au niveau des fils et de l'enduction. Les simulations que nous présentons dans ce paragraphe adoptent les hypothèses du modèle H2, présentées au chapitre 10 et les paramètres correspondants sont rassemblés à l'annexe B (§. B.2).

La modélisation de l'essai SFH45002 de traction ondulée dans le sens biais, avec le modèle H2, présentée par la figure 11.9-a montre que les boucles de décharge-charge de la simulation présentent une ouverture plus importante que celle obtenue avec le modèle H1, sur la figure 11.8-a. Néanmoins, la dissipation visqueuse reste faible comparée au résultat expérimental et les boucles de décharge-charge de la simulation restent relativement minces. Concernant le module global des boucles décharge-charge, on observe de la même façon que sur la figure 11.8-a, que la valeur simulée est plus élevée que celle du résultat expérimental. Sur les figures 11.9-b et c, on ne note pas de changement qualitatif des prévisions du modèle H2 par rapport celles du modèle H1 (Fig. 11.8-b et c). En effet, de même que le modèle H1, le modèle H2 prédit de façon relativement bonne la valeur de l'angle de rotation des mors lors de l'essai.

En traction ondulée dans le sens chaîne, contrôlée en déformation et en force, les simulations avec le modèle H2, présentées sur figures 11.10-a et 11.10-c, ne montrent pas de différences importantes par rapport à celles obtenues avec le modèle H1 (fig. 11.1-a et 11.1-c). En effet, le modèle H2 donne aussi de très bons résultats au niveau de la première charge et des boucles de décharge-charge. Sur les figures 11.10-b et 11.10-d, on constate que l'apport du comportement

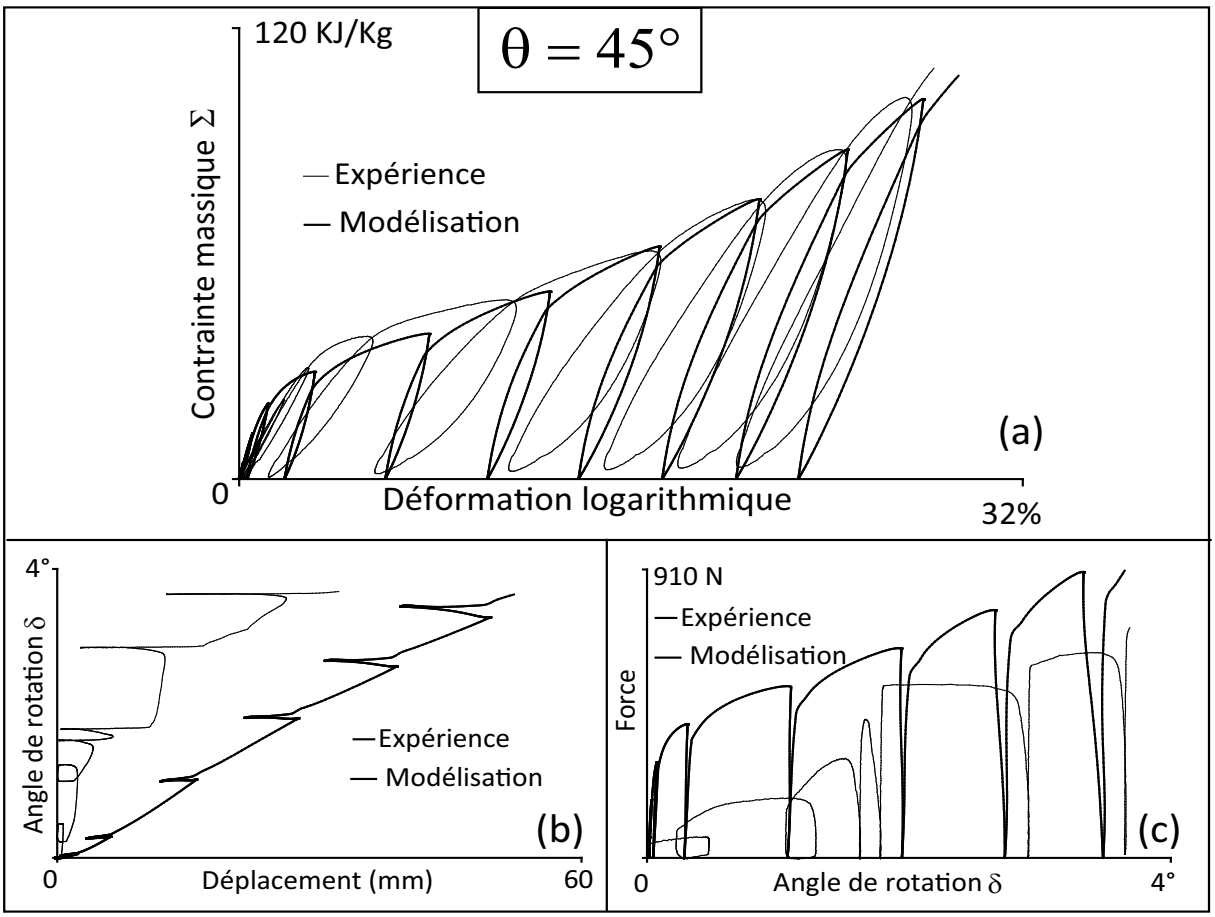


Fig. 11.9 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens biais - Modèle H2.

visqueux de l'enduction correspond à l'apparition de boucles ouvertes sur les effets de contraction, lors des décharges-charges.

Les mêmes remarques peuvent être faites qualitativement dans le sens trame. En effet, les simulations avec le modèle H2, présentées sur figures 11.11-a et 11.11-c, ne montrent pas de différences radicales par rapport à celles obtenues avec le modèle H1 (fig. 11.2-a et 11.2-c). De la même façon, les figures 11.11-b et 11.11-d, montrent que l'apport du comportement visqueux de l'enduction correspond à l'apparition de boucles ouvertes sur les effets de contraction, lors des décharges-charges.

Les figures 11.12, 11.13, 11.14 et 11.15 donnent les résultats de simulation obtenus avec le modèle H2. Comparés aux résultats de simulation obtenus avec le modèle H1 (fig. 11.4, 11.5, 11.6 et 11.7), on ne note pas de différences majeures des prévisions des deux modèles. Notons cependant que la simulation, avec le modèle H2, de l'essai SFH10001 de traction ondulée hors axes ($\theta = 10^{\circ}$) avec des séquences de relaxation, correspondant à la figure 11.15, donne de meilleures prévisions du sens des relaxations et de l'angle de rotation δ', que celles du modèle H1(fig. 11.7), malgré l'effet de compression non réaliste observé en décharge sur le diagramme contrainte-déformation (fig. 11.15-a).

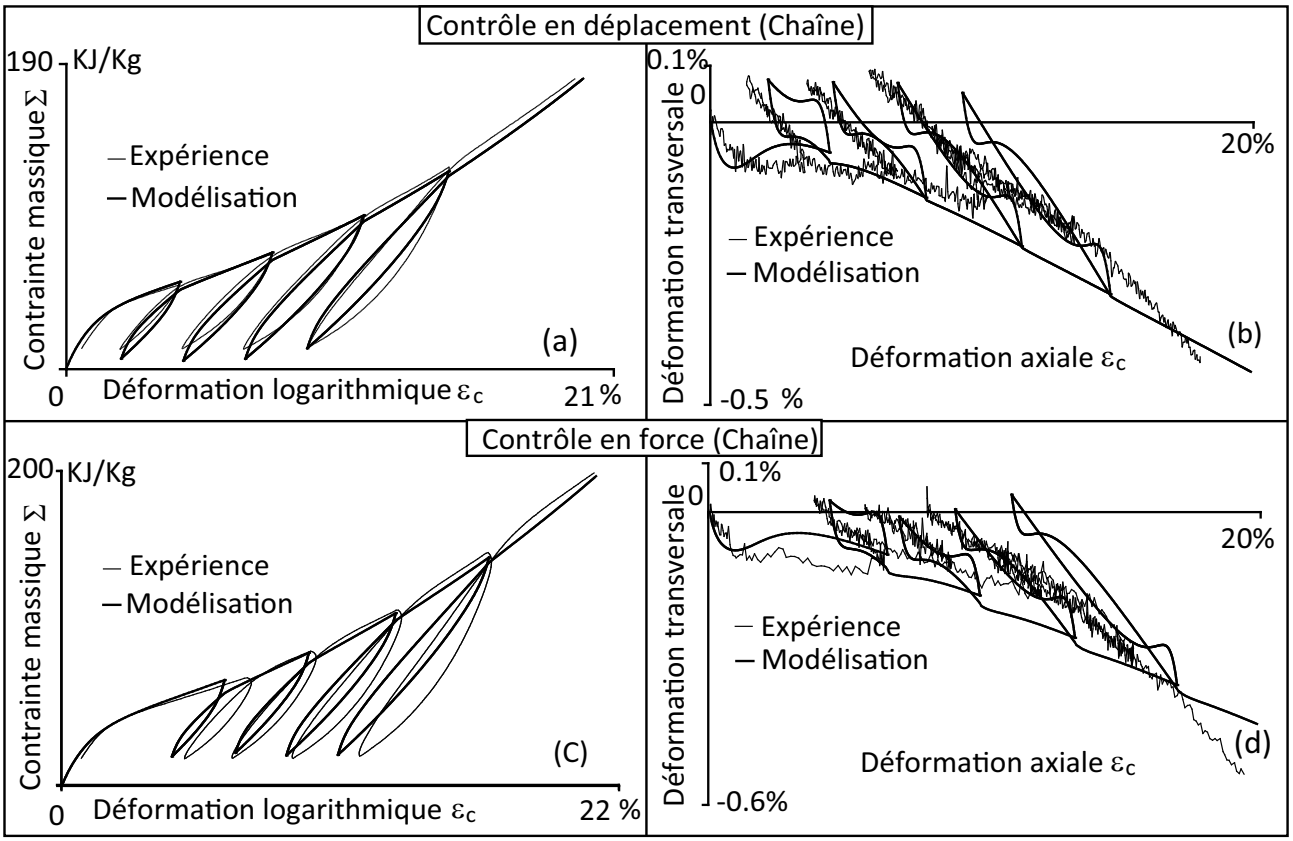


Fig. 11.10 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens chaîne - Modèle H2 : (a et b) contrôle en déformation, (c et d) contrôle en force.

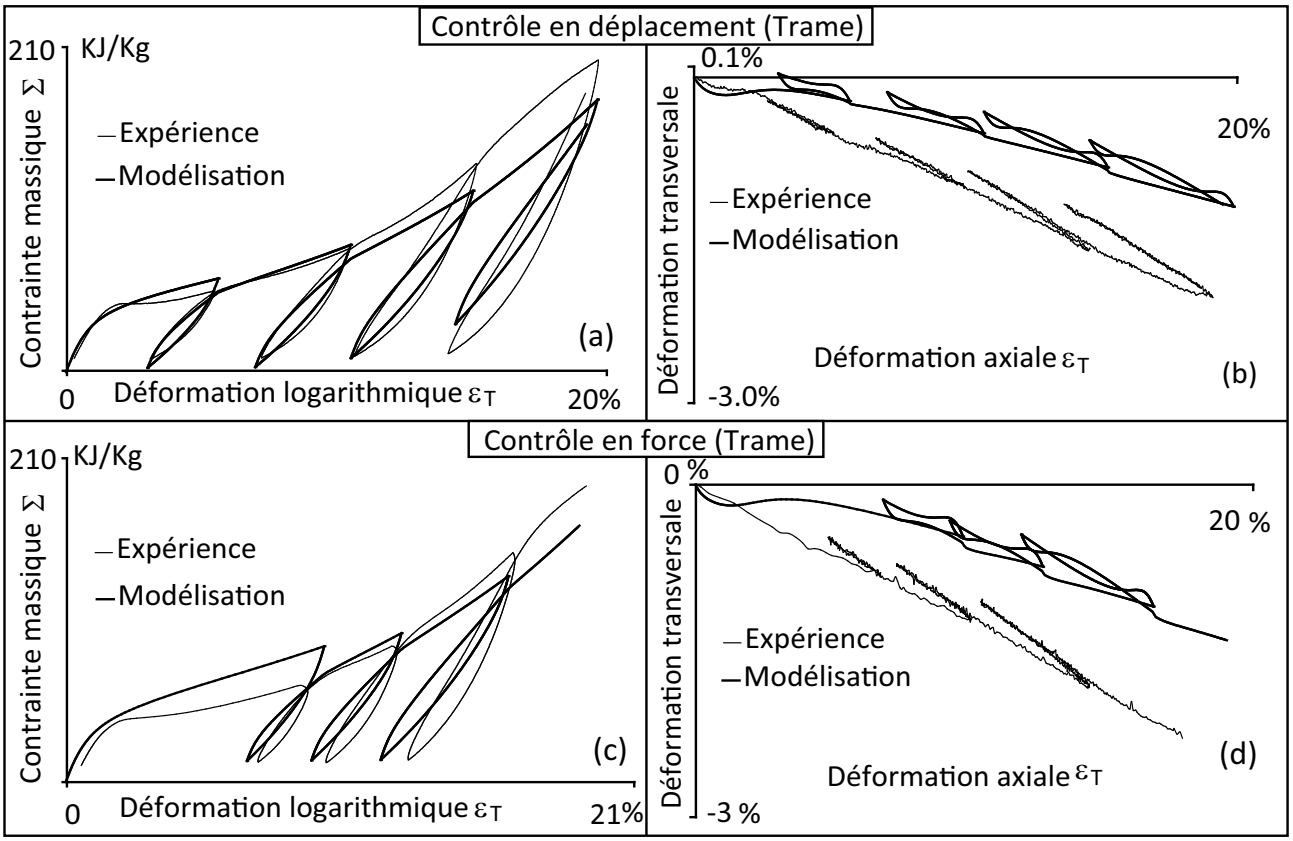


Fig. 11.11 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens trame - Modèle H2 : (a et b) contrôle en déformation, (c et d) contrôle en force.

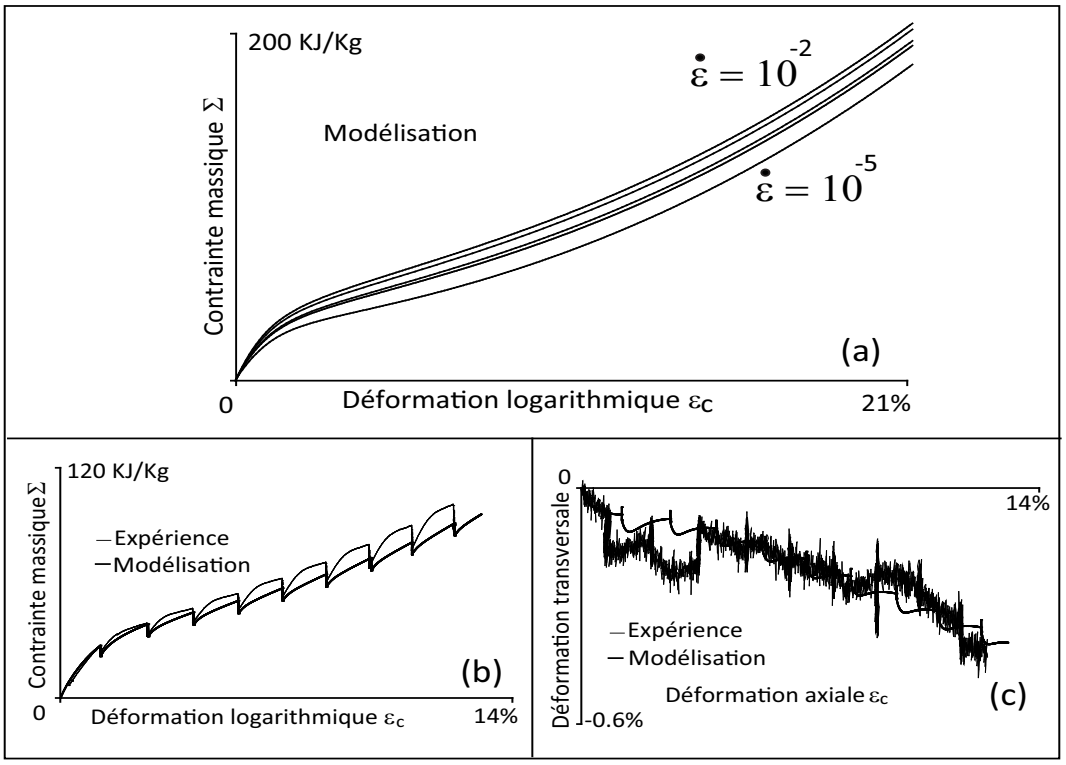


Fig. 11.12 – Résultats de modélisation dans le sens chaîne - Modèle H2 : (a) modélisations de tractions monotones à différentes vitesses de déformation (b et c) comparaison expérience - modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation.

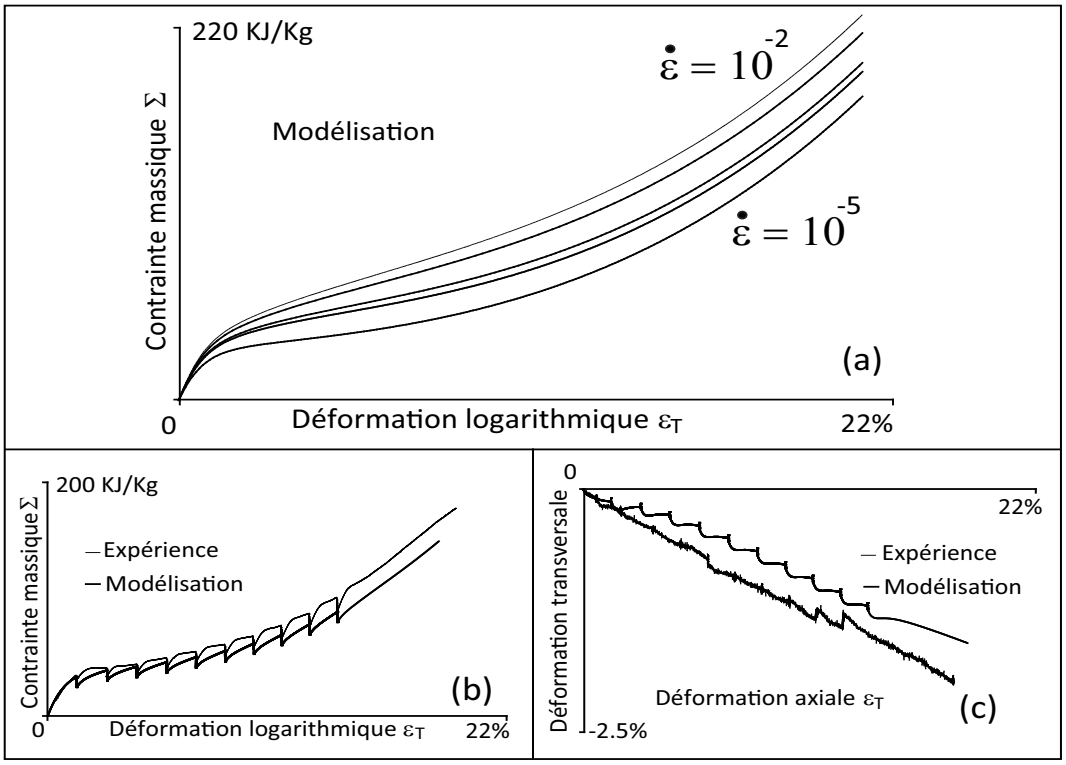


Fig. 11.13 – Résultats de modélisation dans le sens trame - Modèle H2 : (a) modélisations de tractions monotones à différentes vitesses de déformation (b et c) comparaison expérience - modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation.

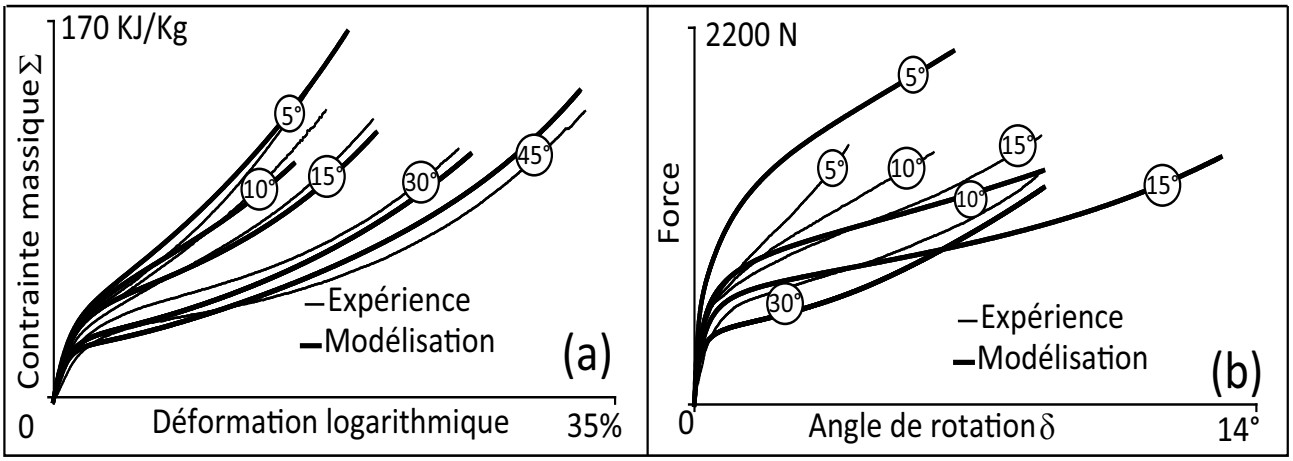


Fig. 11.14 – Comparaison expérience - modélisation en traction hors axes - Modèle H2.

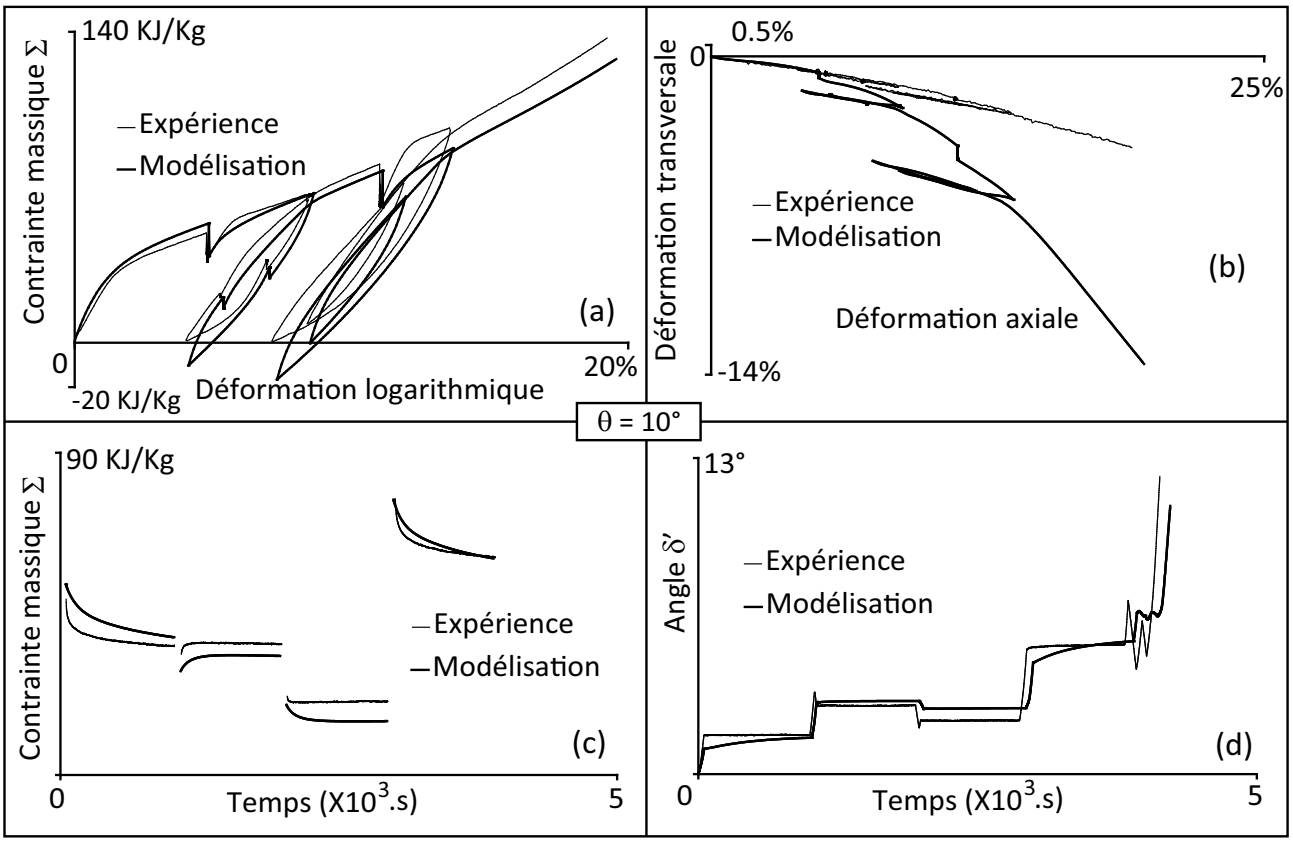


Fig. 11.15 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée hors axes ($\theta = 10°$) avec des séquences de relaxation - Modèle H2.

11.3 Résultats de simulation du modèle H3 avec les paramètres provisoires

Par rapport à l'hypothèse H2, l'hypothèse H3 propose un comportement viscoélastique dans les fils avec un comportement retardé irréversible. Les simulations que nous présentons dans ce paragraphe adoptent les hypothèses du modèle H3, présentées au chapitre 10 et les paramètres provisoires correspondants sont rassemblés à l'annexe B (§. B.3).

La modélisation de l'essai SFH45002 de traction ondulée dans le sens biais, avec le modèle H3, donnée par la figure 11.16-a montre que les boucles de décharge-charge de la simulation

présentent une ouverture très correcte comparée au résultat expérimental. De plus, le module global des boucles décharge-charge, a une valeur proche de celle du résultat expérimental. Sur les figures 11.16-b et c, on ne note pas de changement qualitatif des prévisions du modèle H3 par rapport celles des modèles H1 et H2 (fig. 11.9 et 11.8).

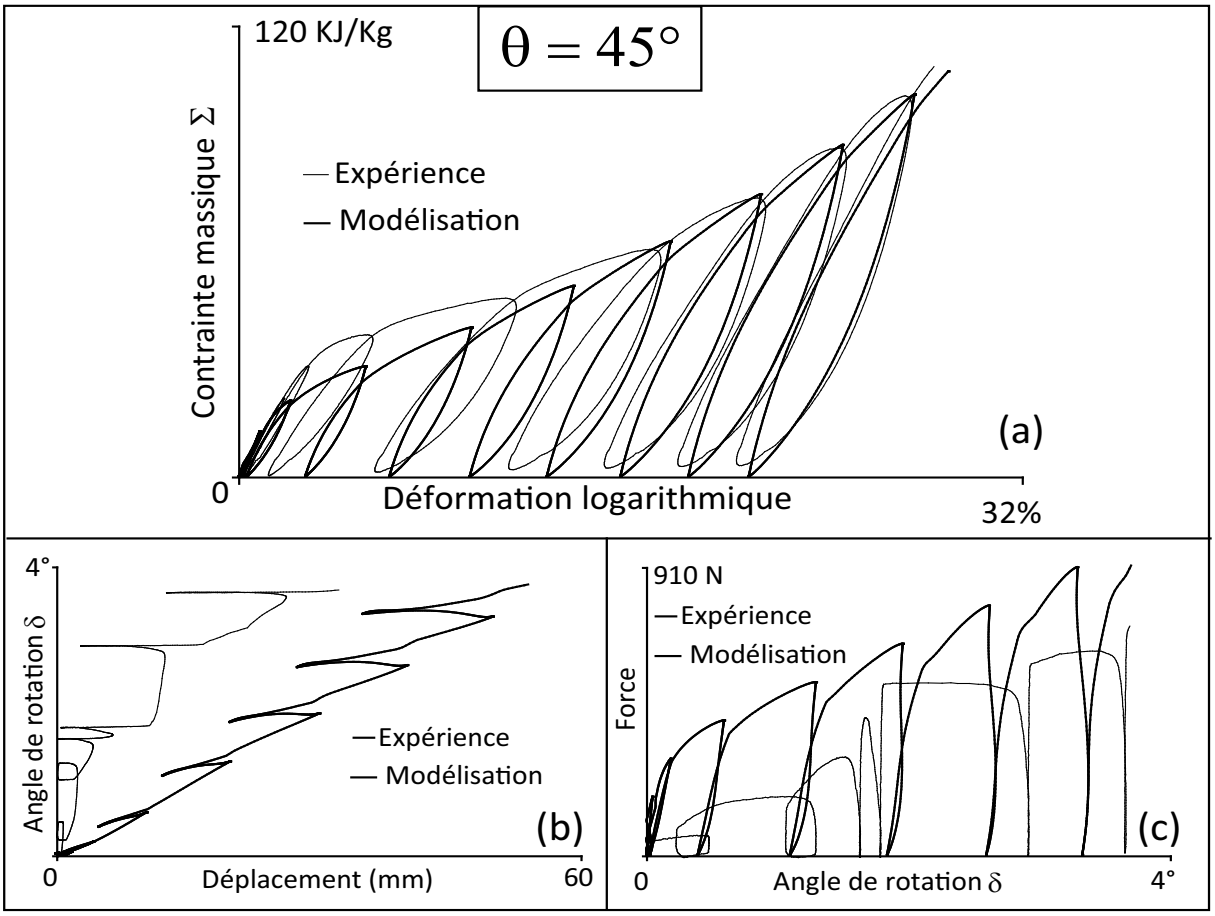


Fig. 11.16 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens biais - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

Rappelons la contradiction expérimentale signalée au paragraphe 5.5.3, concernant la valeur non nulle de l'angle δ mesurée lors de l'essai cyclique SFH45002, contrôlé en force et celle de l'essai de traction monotone dans la direction biais SFH45001b (fig. 5.39), contrôlé en déformation, pour lequel aucune variation de l'angle δ n'a pu être détectée. Les résultats de simulation des figures 11.16-b et montrent, en effet, une variation non nulle de l'angle δ, lors de l'essai cyclique SFH45002. Pour une traction monotone dans le sens biais, contrôlée en déformation, la figure 11.17 donne l'évolution de l'angle δ obtenue avec les modèles H1, H2 et H3. On constate une très faible variation de l'angle , qui ne dépasse pas 0.35° et qui est de l'ordre de 0.25° au maximum dans le cas du modèle H3. Cette faible valeur de l'angle explique la difficulté expérimentale de sa mesure (fig. 5.39).

En traction ondulée dans le sens chaîne et trame, contrôlée en déformation et en force, les simulations avec le modèle H3, sont présentées sur les figures 11.18 et 11.19. Ces simulations ne montrent pas de différences qualitatives majeures par rapport à celles obtenues avec le modèle H2 (fig. 11.10 et 11.11). On constate toujours des boucles ouvertes sur les effets de contraction, lors des décharges-charges.

Pour réduire la taille des boucles sur les effets de contraction, lors des décharges-charges, nous avons réalisé une modélisation particulière en réduisant la valeur du module isotrope K_v

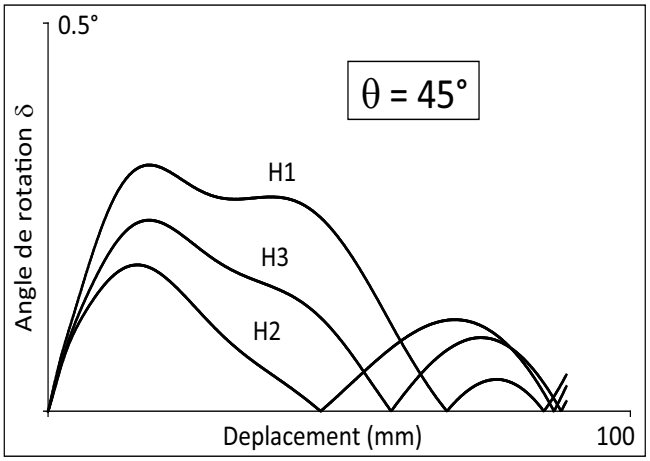


Fig. 11.17 – Simulation de l'évolution de l'angle de rotation δ des mors en traction monotone dans le sens biais - Modèle H1, H2 et H3.

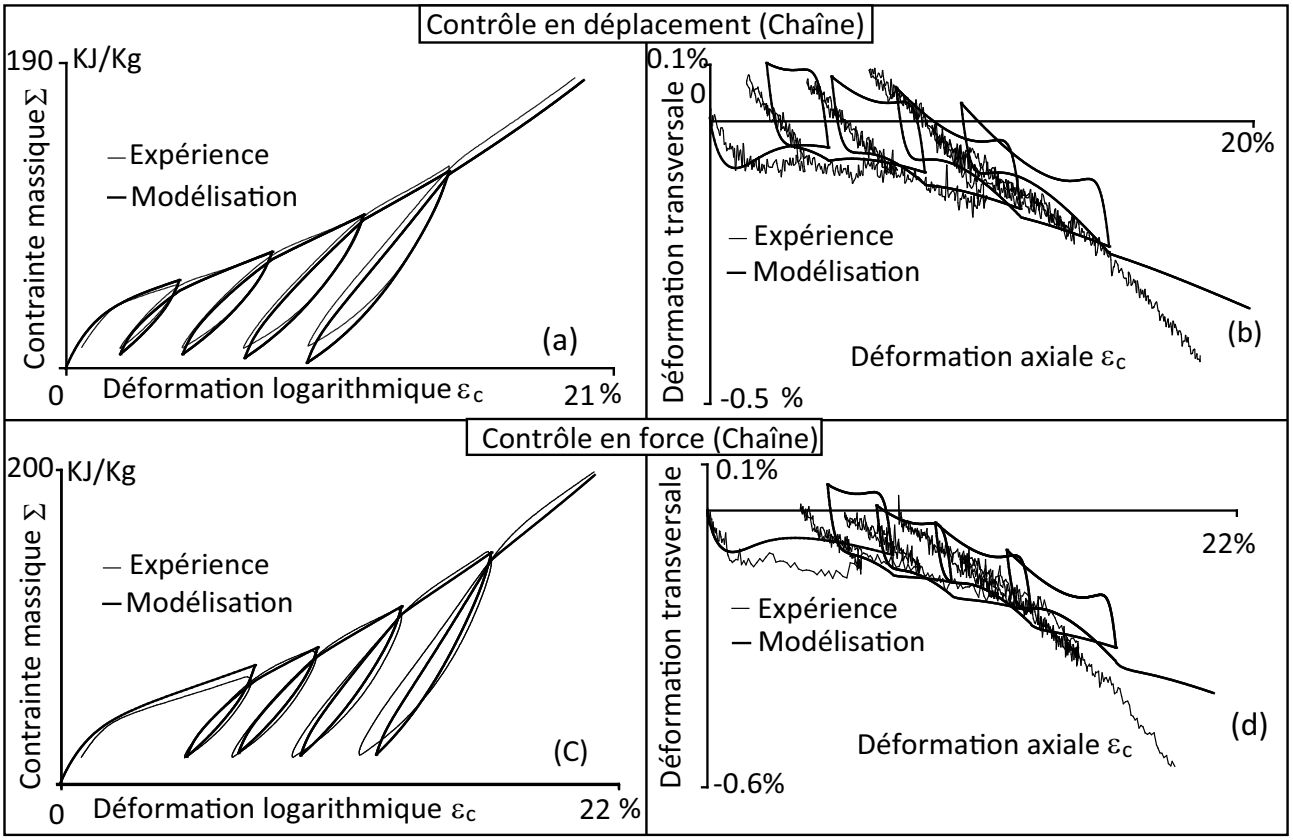


Fig. 11.18 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens chaîne - Modèle H3 avec les paramètres provisoires : (a et b) contrôle en déformation, (c et d) contrôle en force.

de l'enduction de 4000 J/g à :

$$K_v = 500 \text{ J/g} \tag{11.2}$$

Et en augmentant la valeur du module instantané de Maxwell G_v dans les fils de chaîne et de trame, respectivement de 3140 J/g et 3260 J/g à une valeur commune :

$$G_v = 5500 \text{ J/g} \tag{11.3}$$

Nous avons réalisé avec cette modélisation particulière une simulation en traction ondulée dans le sens chaîne, contrôlée en déformation. Le résultat de cette simulation est présenté sur la

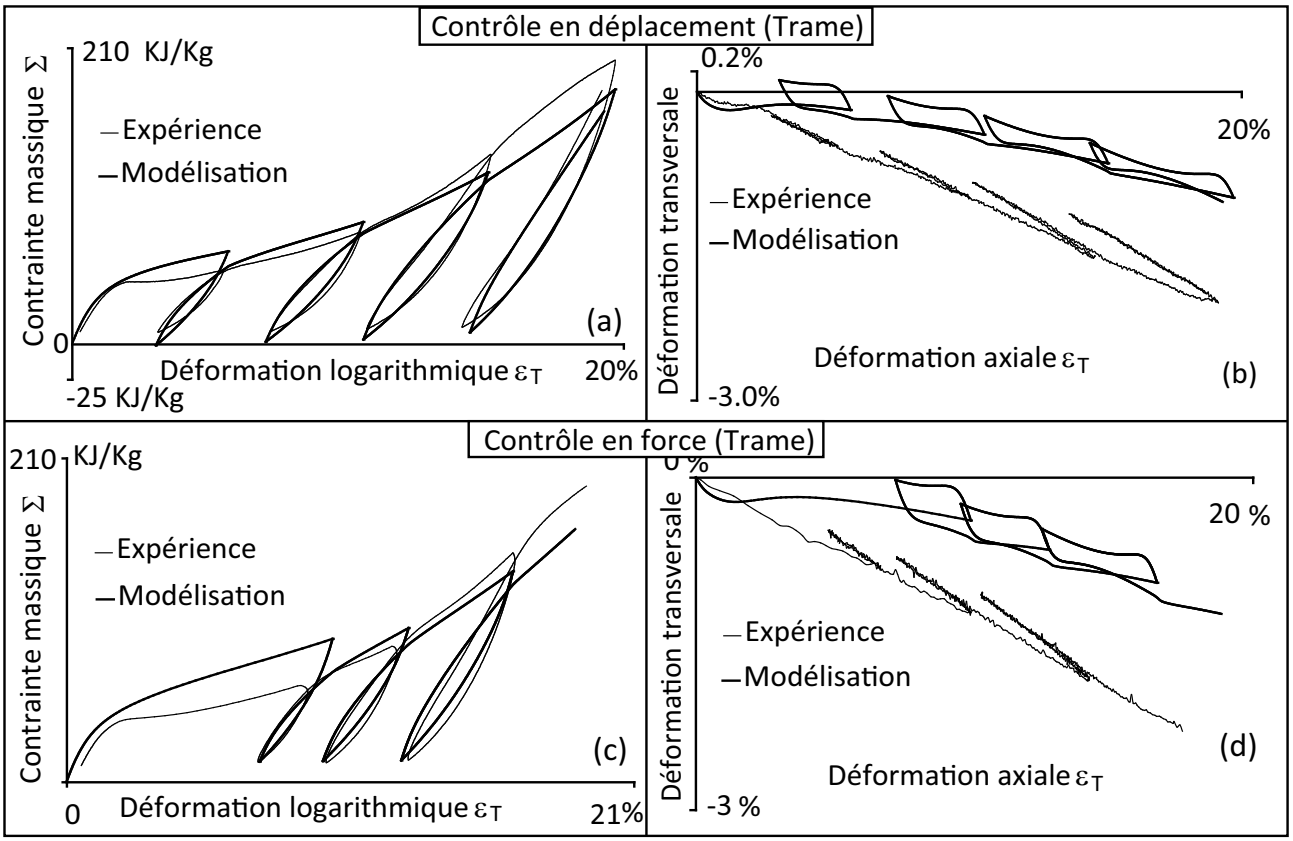


Fig. 11.19 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens trame - Modèle H3 avec les paramètres provisoires : (a et b) contrôle en déformation, (c et d) contrôle en force.

figure 11.20. Ce résultat montre que cette modélisation particulière est pertinente ; elle permet la fermeture des boucles sur les effets de contraction, lors des décharges-charges. Nous reviendrons sur cet aspect au paragraphe 11.4. Dans la suite du paragraphe actuel nous adoptons les paramètres correspondants au modèle H3, rassemblés à l'annexe B (§. B.3), avec $K_v = 4000$ J/g, $G_v = 3140$ J/g pour le fil de chaîne et $G_v = 3260$ J/g pour le fil de trame.

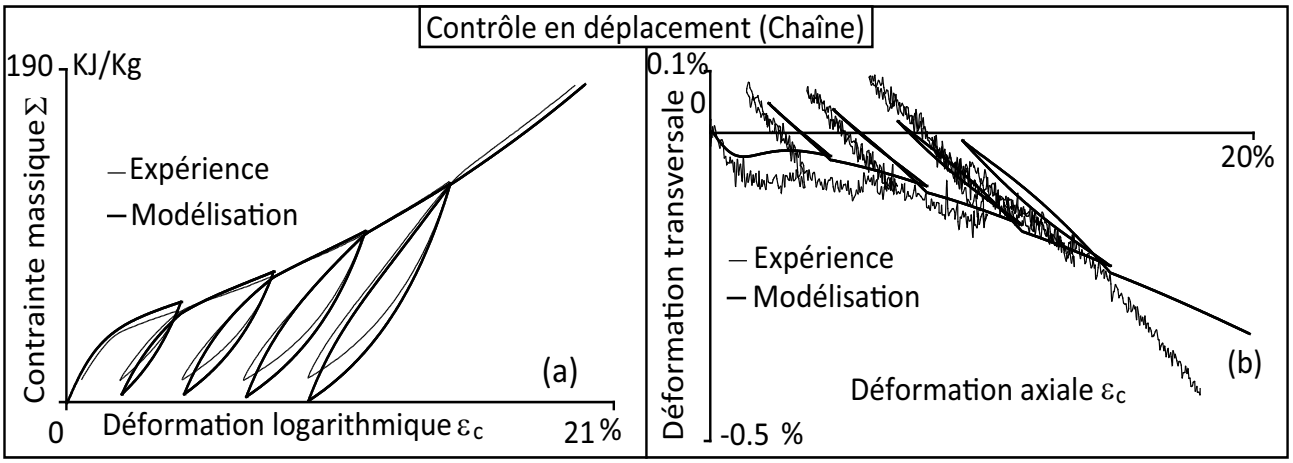


Fig. 11.20 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens chaîne - Modèle H3 avec les paramètres provisoires ($K_v = 500$ J/g et $G_v = 5500$ J/g).

La sensibilité à la vitesse de déformation, dans les sens chaîne et trame est illustrée par les figures 11.21-a et 11.22-a qui montrent des résultats de simulation de traction monotone, dans le sens chaîne et dans le sens trame, à différentes vitesses de déformation : allant de $\dot{\varepsilon} = 10^{-5}$ à

$\dot{\varepsilon} = 10^{-2}\ s^{-1}$.

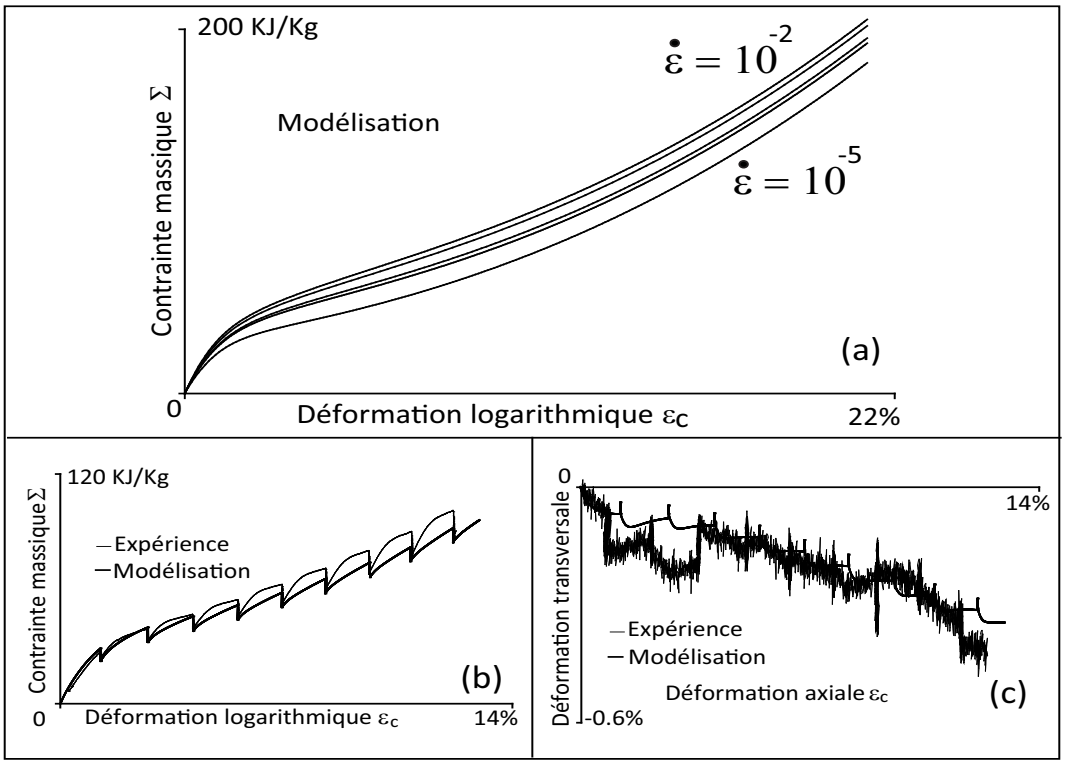


Fig. 11.21 – Résultats de modélisation dans le sens chaîne - Modèle H3 avec les paramètres provisoires : (a) modélisations de tractions monotones à différentes vitesses de déformation (b et c) comparaison expérience - modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation.

Les figures 11.21-b, 11.21-c, 11.22-b et 11.22-c montrent les comparaisons expérience-modélisation, en traction monotone avec des séquences de relaxation, dans les sens chaîne et trame. Le comportement en monotone et les séquences de relaxation sont relativement bien reproduits par le modèle H3.

Les résultats expérimentaux, présentés au chapitre 5, révèlent une évolution de la contrainte en fonction du temps, lors des séquences de relaxation, qui présente un comportement typique en logarithmique, qui est bien décrit par la relation 5.2 (cf. fig. 5.12 et fig. 5.13 du chapitre 5). Afin de vérifier la prédiction de la modélisation, concernant cette évolution, considérons les simulations des quatrièmes séquences de relaxation, des figures 11.21 et 11.22, respectivement dans le sens chaîne et dans le sens trame et observons leurs évolutions. Ces résultats de simulation sont donnés sur les figures 11.23 et 11.24 ; ils montrent, en effet, une forme caractéristique de la relaxation en $\log(\Delta t)$, conformément à la relation 5.2 du chapitre 5. Les valeurs des paramètres A et B correspondants sont données pour les figures 11.23 et 11.24 ; ces valeurs sont à comparer aux valeurs obtenues expérimentalement sur les figures 5.12 et 5.13 du chapitre 5.

Concernant les effets anisotropes du comportement, la figure 11.25 présente les résultats de simulation de traction monotone hors axes, à vitesse de déformation imposée dans différentes directions de traction. Ces résultats montrent que le modèle H3 décrit de façon correcte le comportement monotone, pour la plupart des directions de traction. Les évolutions de l'angle de rotation des mors sont qualitativement bien décrites par le modèle H3, mais leurs valeurs sont surévaluées.

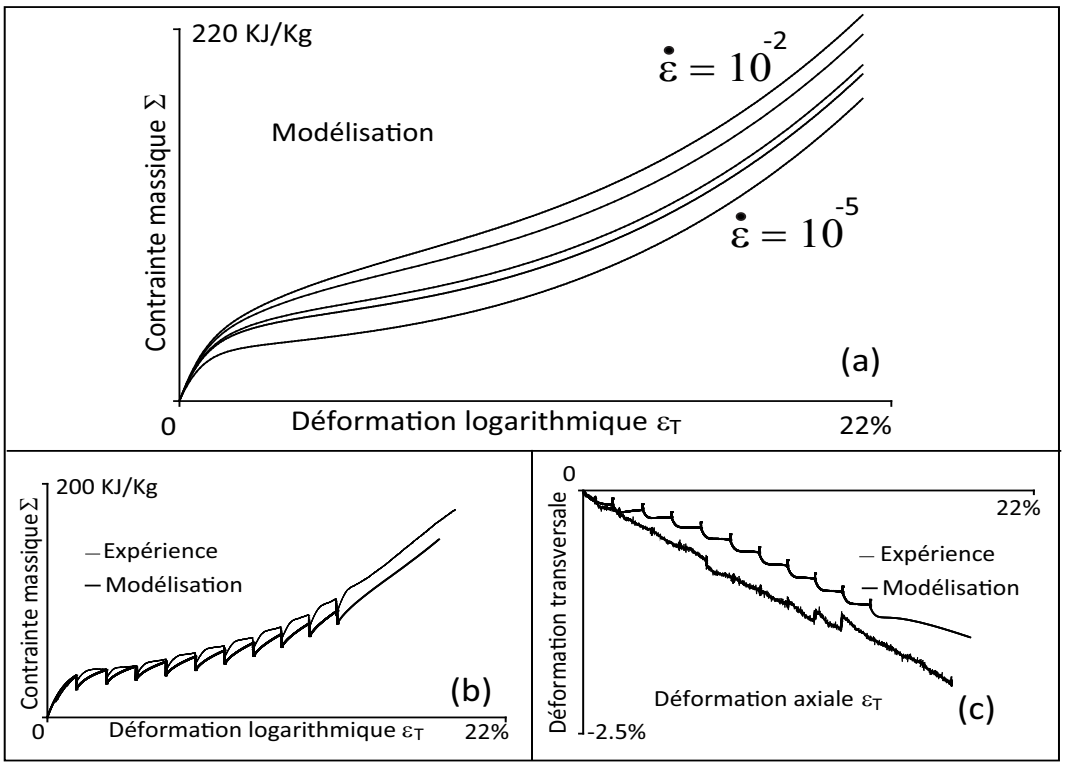


Fig. 11.22 – Résultats de modélisation dans le sens trame - Modèle H3 avec les paramètres provisoires : (a) modélisations de tractions monotones à différentes vitesses de déformation (b et c) comparaison expérience - modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation.

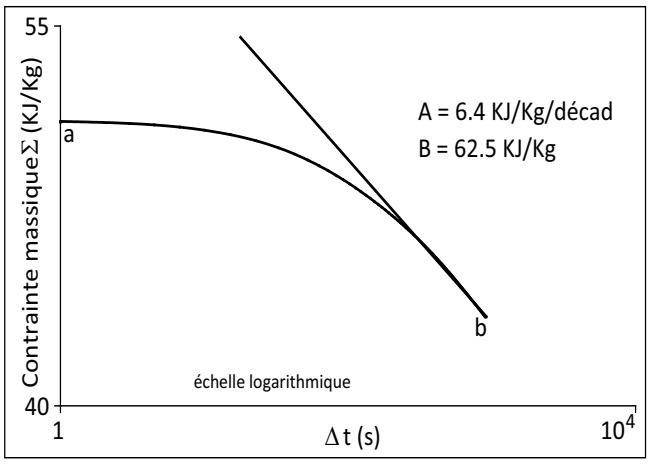


Fig. 11.23 – Comparaison des résultats de modélisation avec l'évolution théorique donnée par la relation 5.2 du chapitre 5 - Quatrième séquence de relaxation dans le sens chaîne de l'essai SFH0C006 - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

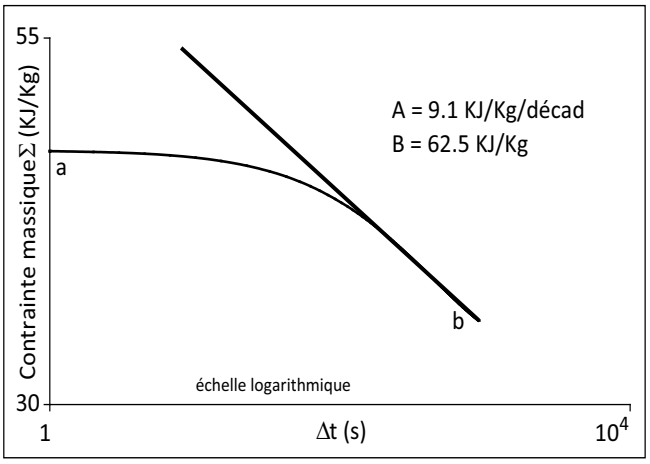


Fig. 11.24 – Comparaison des résultats de modélisation avec l'évolution théorique donnée par la relation 5.2 du chapitre 5 - Quatrième séquence de relaxation dans le sens trame de l'essai SFH0T002 - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

La figure 11.26 montre la comparaison expérience-modélisation de l'essai de traction ondulée SFH10001, hors axes ($\theta = 10^\circ$) avec des séquences de relaxation. Le modèle H3 donne une réponse très proche des résultats expérimentaux (fig. 11.26-a et d) et décrit de façon très correcte le sens d'évolution des relaxations (fig. 11.26-c).

Pour compléter les résultats de simulation, les figures 11.27, 11.28 et 11.29 montrent des

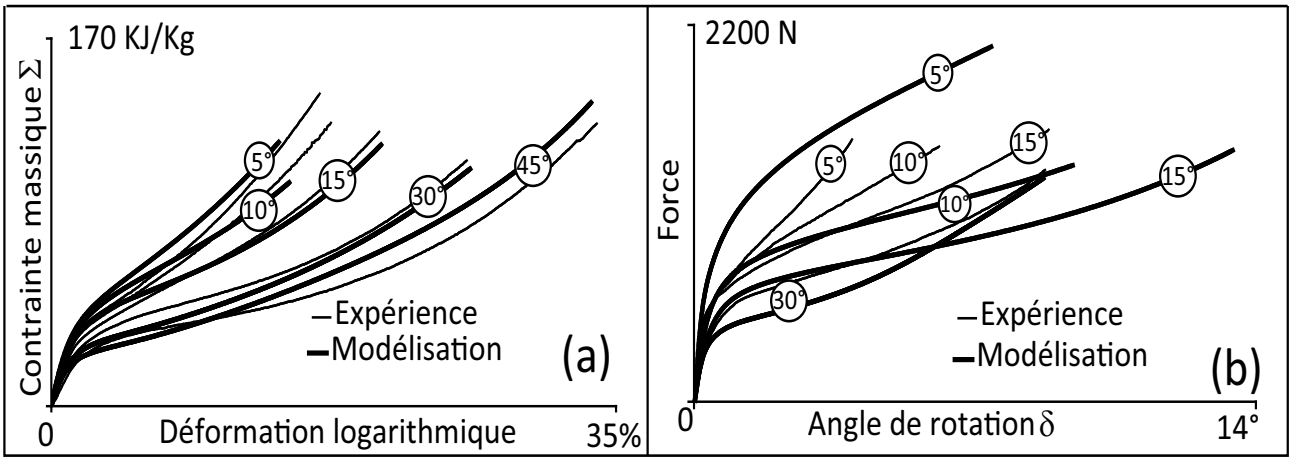


Fig. 11.25 – Comparaison expérience - modélisation en traction hors axes - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

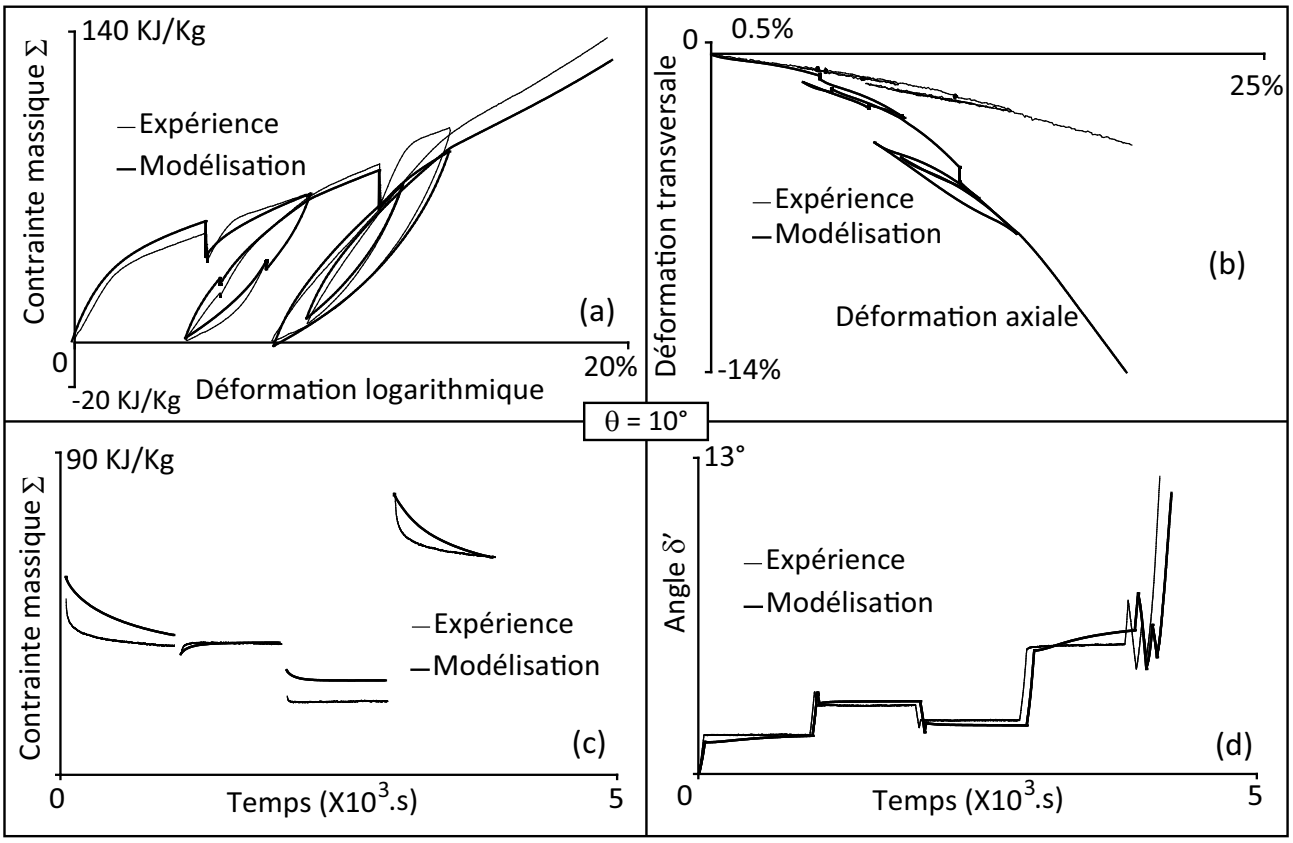


Fig. 11.26 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée hors axes ($\theta = 10^{\circ}$) avec des séquences de relaxation - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

comparaisons expérience-modélisation, en traction ondulée avec reptation des cycles, dans le sens trame, contrôlées en déformation et en force (résultats expérimentaux cf. fig. 5.33, fig. 5.34 et fig. 5.35). Le phénomène de reptation des cycles est très bien modélisé par le modèle H3, qui donne de très bons résultats pour les contrôles en déformation et en force.

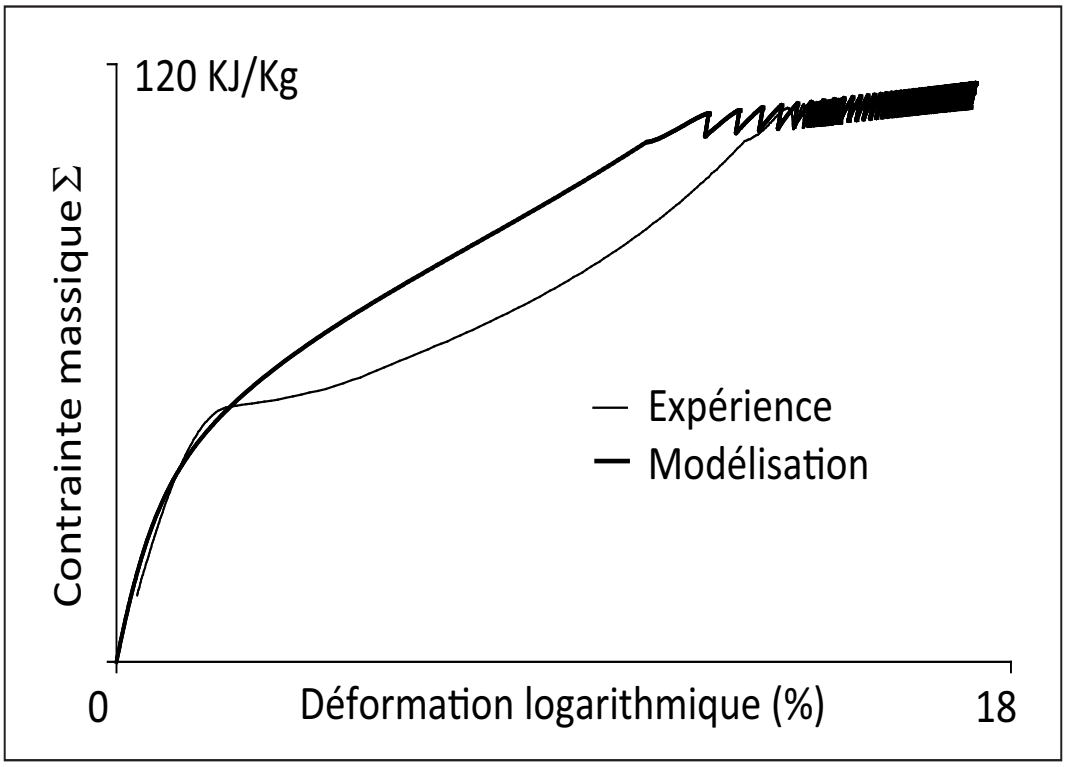


Fig. 11.27 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens trame contrôlée en force (cf. fig. 5.33) - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

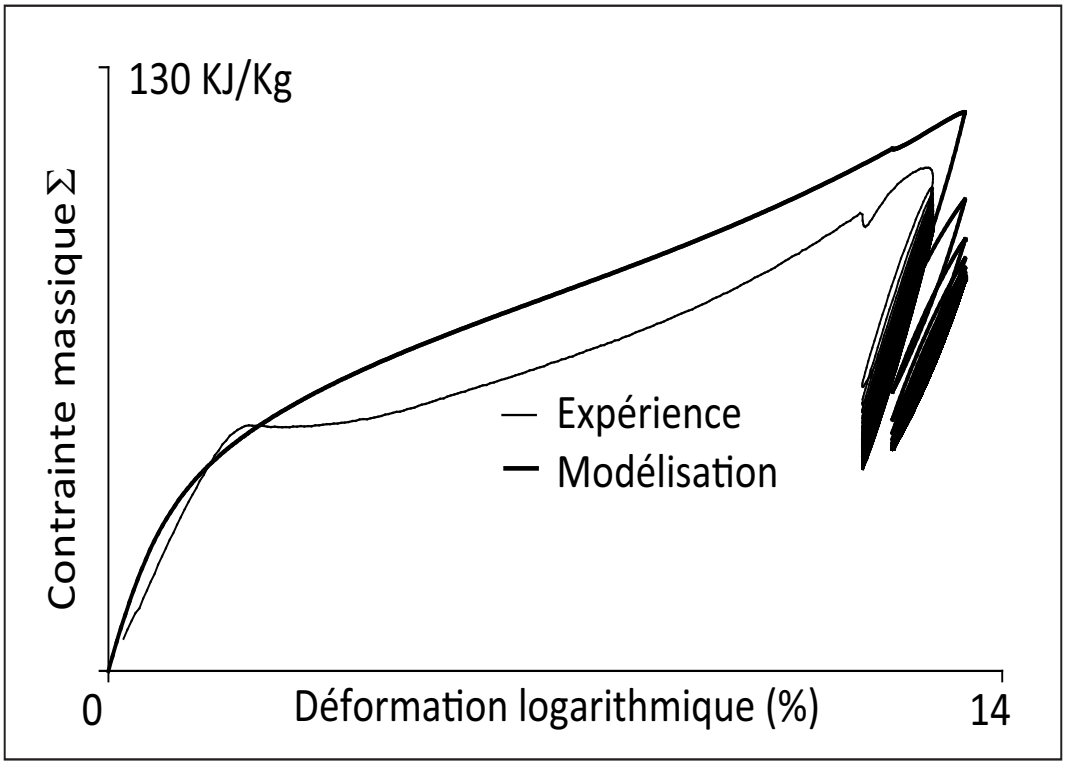


Fig. 11.28 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens trame contrôlée en déformation (cf. fig. 5.34) - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

11.4 Résultats de simulation du modèle H3 avec les paramètres adoptés

Les résultats des paragraphes 11.1, 11.2 et 11.3, montrent que le modèle H3 est le plus adapté pour simuler le comportement du Dacron SF HTP plus. Pour une meilleure prise en compte de

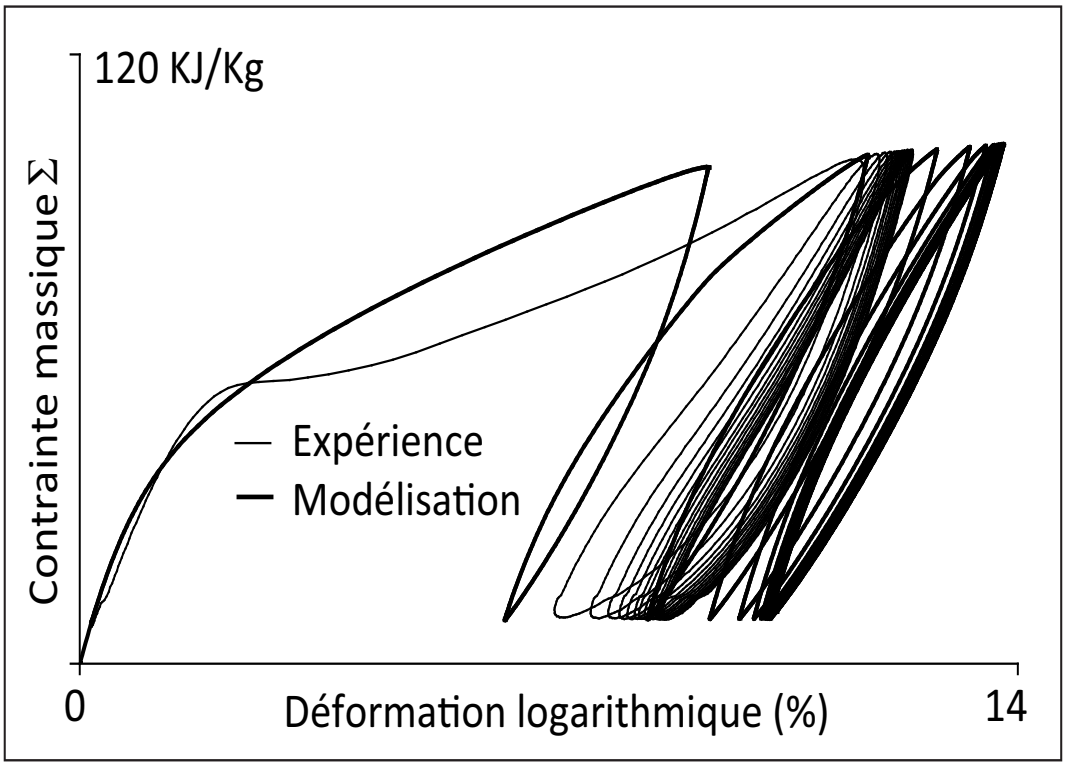


Fig. 11.29 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens trame contrôlé en force (cf. fig. 5.35) - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

l'effet de l'embuvage, nous adoptons la valeur du module g_r du fil de chaîne donnée par la relation 11.1 ; pour une meilleure description des effets de contraction, nous adoptons la valeur du module isotrope K_v de l'enduction donnée par la relation 11.2 et la valeur du module instantané de Maxwell des fils G_v , donnée par la relation 11.3. Les simulations, que nous présentons dans ce paragraphe, adoptent donc les hypothèses du modèle H3, présentées au chapitre 10 et les paramètres finaux correspondants sont rassemblés à l'annexe B (§. B.4).

Les résultats de simulation obtenus avec le modèle H3 et les paramètres finaux sont présentés dans les figures 11.30 à 11.36.

11.5 Remarques et conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre une évaluation des trois modèles H1, H2 et H3, par une comparaison des résultats de simulation avec les résultats expérimentaux. Les modélisations seules sont reportées à l'annexe C.

L'évaluation de ces trois modèles nous a permis de distinguer le modèle H3, comme le modèle le plus adapté pour décrire le comportement du Dacron SF HTP plus. Les paramètres finaux correspondants sont rassemblés à l'annexe B (§. B.4)

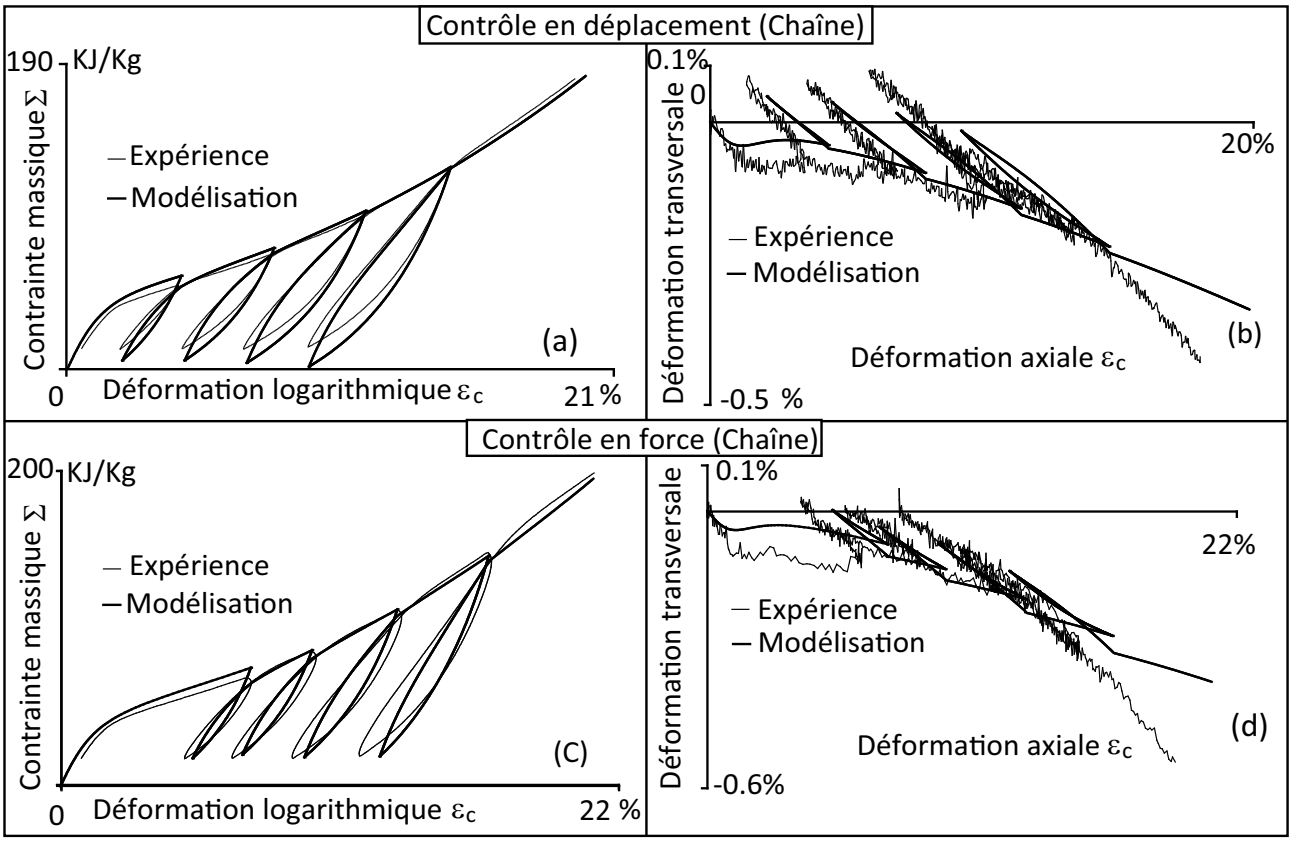


Fig. 11.30 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens chaîne - Modèle H3 avec les paramètres adoptés : (a et b) contrôle en déformation, (c et d) contrôle en force.

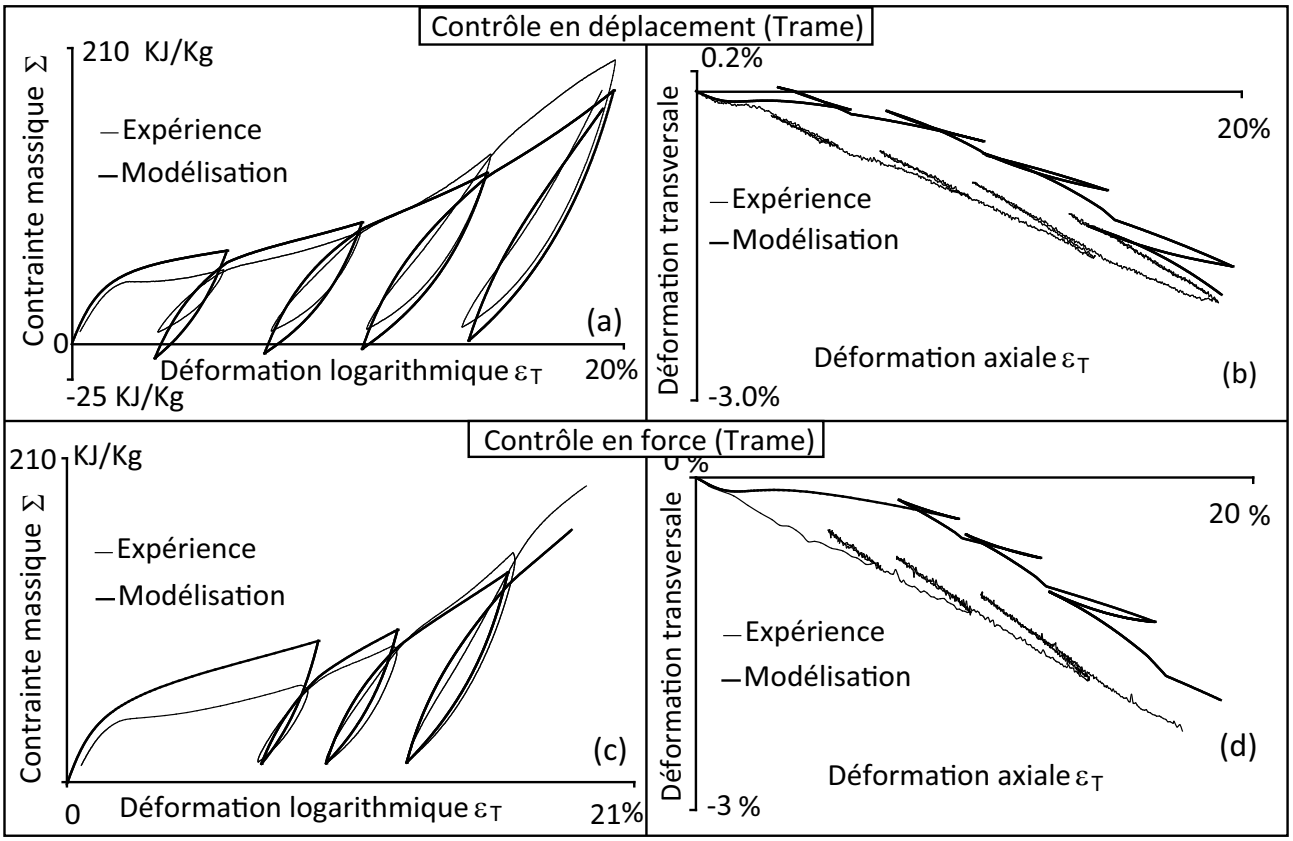


Fig. 11.31 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens trame - Modèle H3 avec les paramètres adoptés : (a et b) contrôle en déformation, (c et d) contrôle en force.

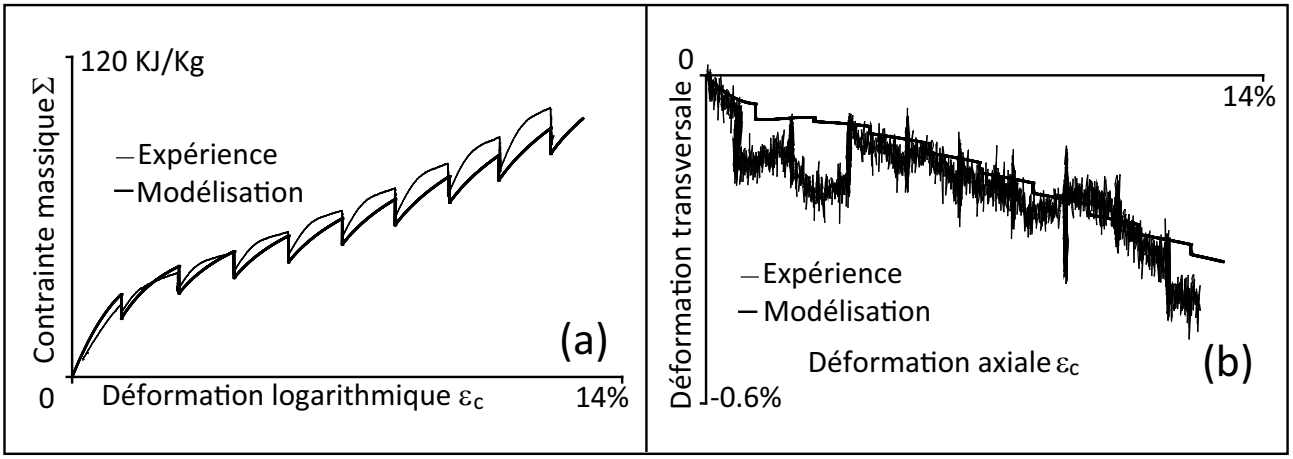


Fig. 11.32 – Comparaison expérience - modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens chaîne - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

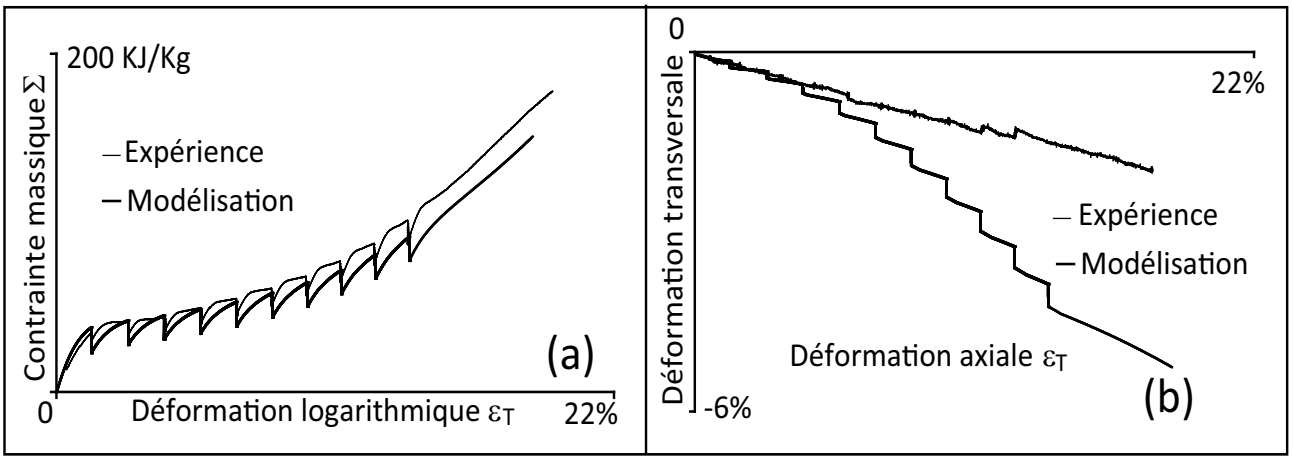


Fig. 11.33 – Comparaison expérience - modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens trame - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

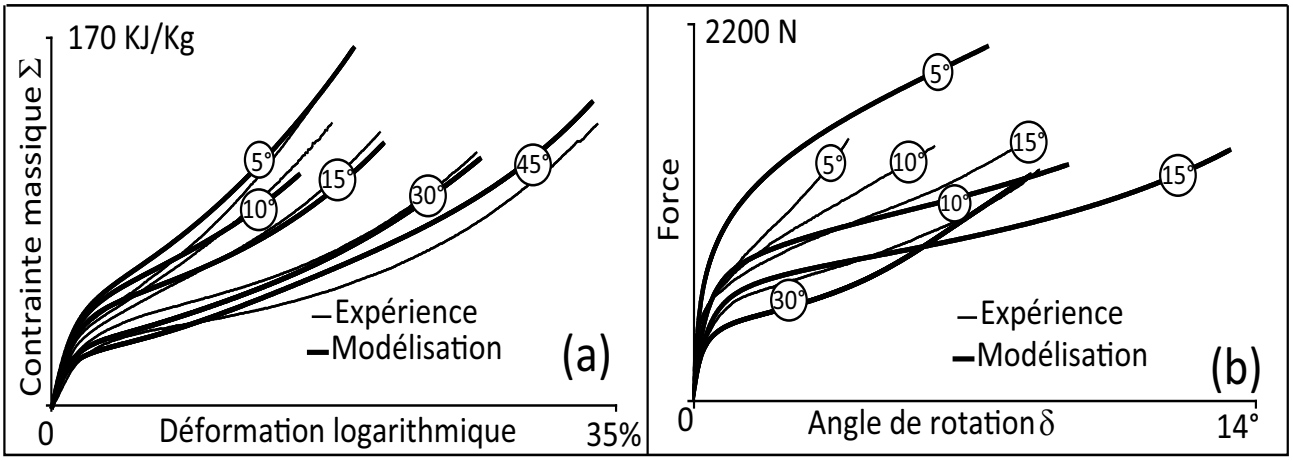


Fig. 11.34 – Comparaison expérience - modélisation en traction hors axes - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

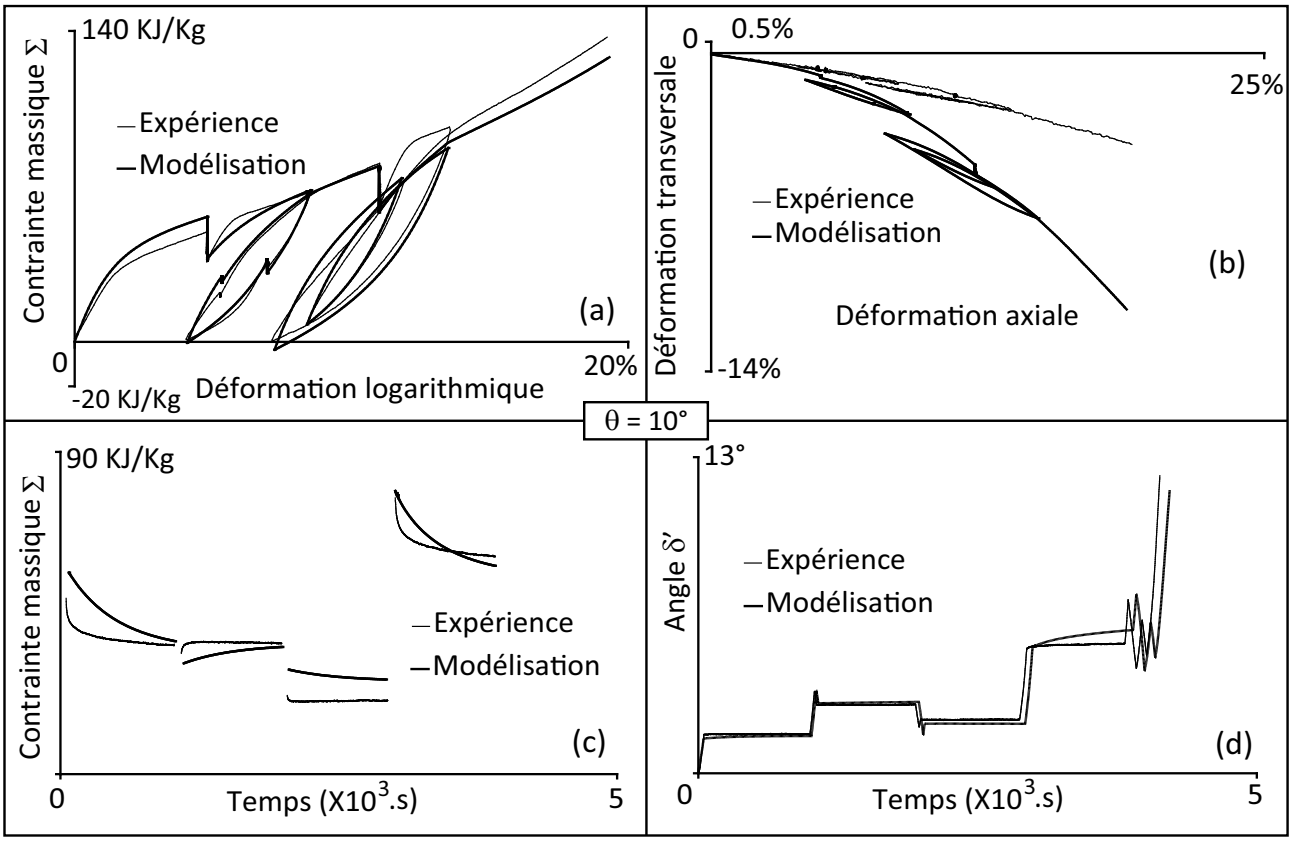


Fig. 11.35 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée hors axes ($\theta = 10^\circ$) avec des séquences de relaxation - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

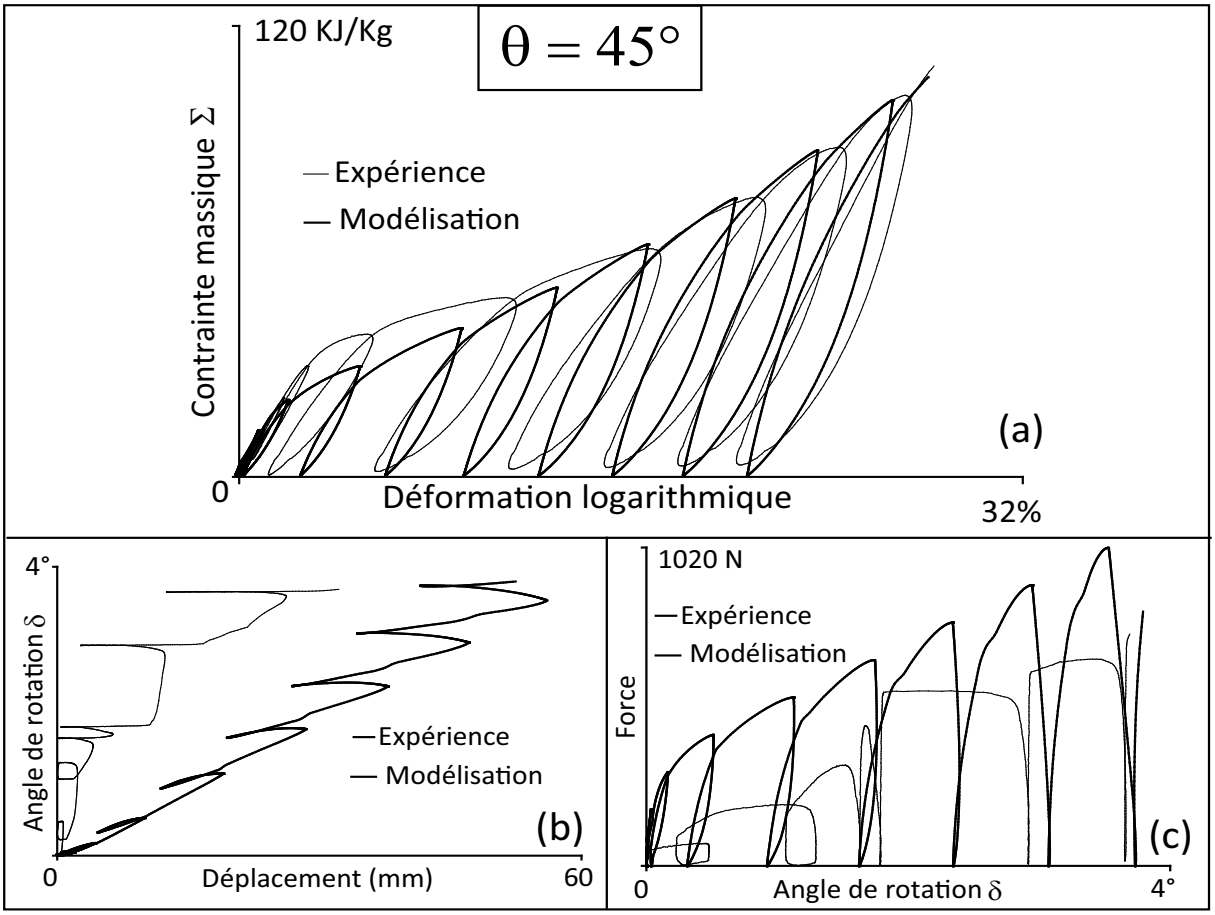


Fig. 11.36 – Comparaison expérience - modélisation en traction ondulée dans le sens biais - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

Chapitre 12

Simulation de l'essai de traction biaxiale

Dans ce chapitre nous nous proposons de simuler l'essai de traction biaxiale, sur le Dacron SFH plus, avec trois formes d'éprouvettes différentes. Notre objectif est d'étudier l'homogénéité des champs de contrainte et de déformation en fonction de la forme de l'éprouvette.

12.1 Formes des éprouvettes adoptées

Nous avons adopté trois formes d'éprouvette différentes, que nous désignons par : éprouvette 1, éprouvette 2 et éprouvette 3. Les formes et les dimensions de ces éprouvettes sont données respectivement par les 12.1, 12.2 et 12.3. L'éprouvette 1 est de forme cruciforme simple, l'éprouvette 2 est en forme de croix de Malte et l'éprouvette 3 est de forme cruciforme munie de raccordements de rayon 50 mm. La direction chaîne des trois éprouvettes est orientée suivant l'axe horizontal. Les bords des éprouvettes, où sont appliqués les sollicitations, sont signalés en gras sur les figures 12.1, 12.2 et 12.3. La zone utile de l'éprouvette correspond à un carré de côté « a » au centre de l'éprouvette. Le paramètre « a » désigne la taille de la zone de mesure des contraintes et des déformations. Dans cette zone les champs de contrainte et de déformation sont supposés homogènes.

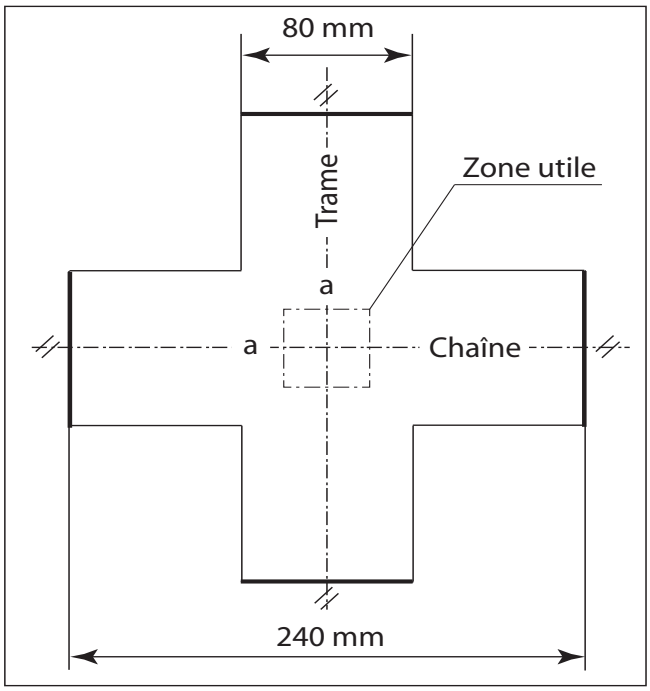


Fig. 12.1 – Eprouvette 1 de forme cruciforme simple.

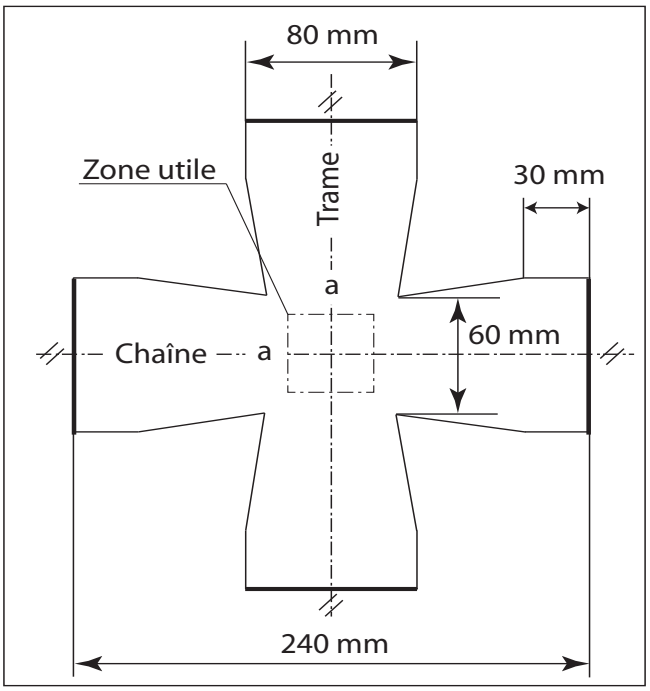


Fig. 12.2 – Eprouvette 2 en forme de croix de Malte.

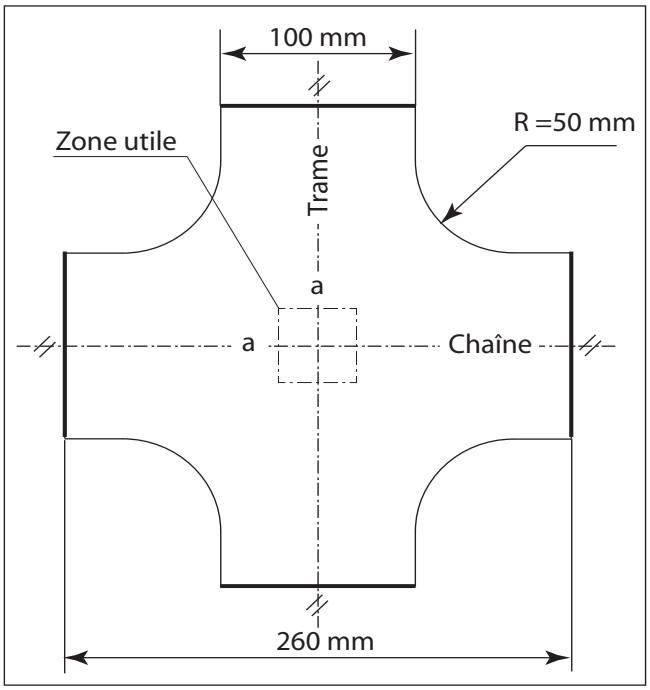


Fig. 12.3 – Eprouvette 3 de forme cruciforme avec des raccordements de 50 mm.

12.2 Paramètres de simulation et chargements

Pour simuler le comportement du Dacron SFH plus, nous adoptons le modèle H3 (cf. chapitre 11) et le premier jeu de paramètres (Annexe B, paragraphe B.3). Pour étudier l'homogénéité des champs de contrainte et de déformation, dans la partie centrale des éprouvettes, nous avons adopté deux chargements définis dans le plan des déplacements (U1,U2) ; où U1 et U2 représentent respectivement le déplacement horizontal et vertical, imposés aux bords des éprouvettes, signalés en gras sur les figures 12.1,12.2 et 12.3. Ces deux chargements sont définis sur les figures 12.4 et 12.5. Le chargement radial OA initial est identique sur les deux chargements. A partir du point A, les chargements se distinguent : le premier chargement comporte six trajets AB, BC,CD, DE, EF ,FA et le deuxième chargement comporte quatre trajets AB, BC, CD et DA.

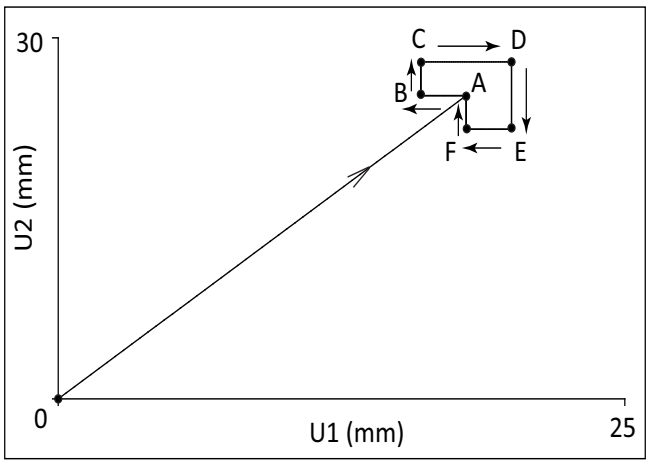


Fig. 12.4 – Chargement 1 en déplacement.

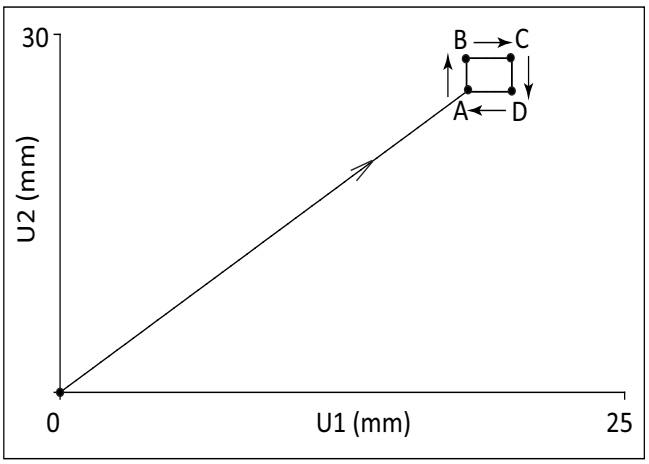


Fig. 12.5 – Chargement 2 en déplacement.

12.3 Erreurs d'homogénéité de la contrainte et de la déformation

Pour apprécier l'homogénéité des champs de contrainte et de déformation nous avons défini deux paramètres d'erreur pour la contrainte, notés respectivement ξ_Σ^1 et ξ_Σ^2 ainsi que deux paramètres d'erreur pour la déformation, notés respectivement ξ_ε^1 et ξ_ε^2.

12.3.1 paramètres d'erreur d'homogénéité de la contrainte

Au cours d'une expérience de traction biaxiale, les efforts f_1 et f_2 appliqués sur l'éprouvette, sont des variables globales. Il est nécessaire de convertir ces variables globales en variables locales, qui correspondent aux composantes de contrainte Σ_{11}^{exp} et Σ_{22}^{exp}, dans les axes de l'éprouvette. Pour réaliser cette conversion nous avons adopté une hypothèse de contrainte homogène dans la zone utile de l'éprouvette (cf. 2.53 du Chap 2), telle que :

$$\Sigma_{11}^{exp} = \frac{\lambda_1}{\overline{\rho}}.\frac{f_1}{L} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{22}^{exp} = \frac{\lambda_2}{\overline{\rho}}.\frac{f_2}{L} \tag{12.1}$$

où λ_1 et λ_2 sont les élongations moyennes de traction dans la zone utile de l'éprouvette, suivant les directions horizontale et verticale respectivement ; L représente la largeur initiale de l'éprouvette et $\overline{\rho}$ la masse surfacique initiale. Les composantes de contraintes homogènes Σ_{11}^{exp} et Σ_{22}^{exp}, sont à comparer aux composantes de contrainte Σ_{11} et Σ_{22} réellement appliquées dans la zone utile de l'éprouvette. Pour apprécier la validité de cette hypothèse d'homogénéité du champ de contrainte, nous avons défini deux paramètres d'erreur d'homogénéité, tels que :

$$\xi_\Sigma^1 = \frac{\Sigma_{11}^{exp} - \Sigma_{11}}{\Sigma_{11}} \qquad , \qquad \xi_\Sigma^2 = \frac{\Sigma_{22}^{exp} - \Sigma_{22}}{\Sigma_{22}} \tag{12.2}$$

où Σ_{11} et Σ_{22} sont des moyennes des contraintes simulées, dans la zone utile de l'éprouvette, définie par le paramètre « a » (fig. 12.1, 12.2 et 12.3).

12.3.2 paramètres d'erreur d'homogénéité de la déformation

En utilisant la notion de base équivalente introduite au chapitre 3 (§ 3.7), il est possible de calculer les composantes de déformation ε_{11}^{exp} et ε_{22}^{exp}, au cours d'une expérience de traction biaxiale à partir des déplacements appliqués U1 et U2, telles que :

$$\varepsilon_{11}^{exp} = \ln\left(1 + \frac{U_1}{H_{eq1}}\right) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{22}^{exp} = \ln\left(1 + \frac{U_2}{H_{eq2}}\right) \tag{12.3}$$

où H_{eq1} et H_{eq2} sont les bases équivalentes de traction dans les directions horizontale et verticale. De la même façon que pour la contrainte, pour apprécier l'homogénéité du champ de déformation, nous avons défini deux paramètres d'erreur d'homogénéité, tels que :

$$\xi_\varepsilon^1 = \frac{\varepsilon_{11}^{exp} - \varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}} \qquad , \qquad \xi_\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon_{22}^{exp} - \varepsilon_{22}}{\varepsilon_{22}} \tag{12.4}$$

où ε_{11} et ε_{22} sont des moyennes des déformations simulées, dans la zone utile de l'éprouvette, définie par le paramètre « a » (fig. 12.1, 12.2 et 12.3). Les bases équivalentes H_{eq1} et H_{eq2} sont déterminées en utilisant la relation 3.20 du chapitre 3 ; elles correspondent respectivement aux pentes dans des diagrammes U1 en fonction de $\lambda_1 - 1$ et U2 en fonction de $\lambda_2 - 1$, où λ_1 et λ_2 sont les élongations moyennes de traction dans la zone utile de l'éprouvette. La figure 12.6 illustre la méthode de détermination de H_{eq1} et H_{eq2}, dans le cas de l'éprouvette 1 sollicitée avec le chargement 1 et une zone utile définie par $a = 40mm$.

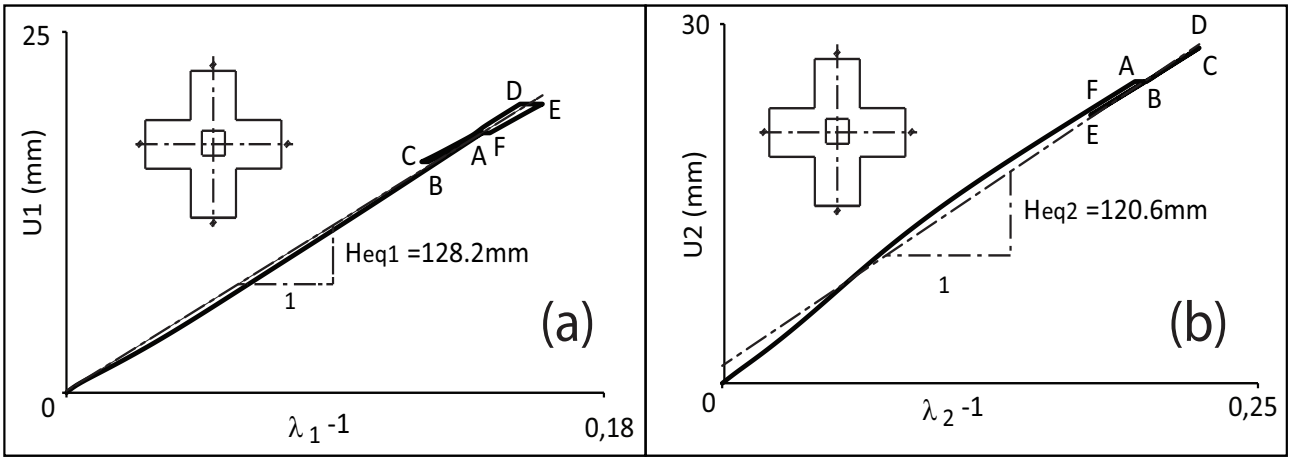


Fig. 12.6 – Détermination des bases équivalentes (Eprouvette 1, chargement 1 et $a = 40mm$) : (a) base équivalente H_{eq1}, (b) base équivalente H_{eq2}.

12.4 Résultats de simulation de l'éprouvette 1

Sur l'éprouvette 1, nous avons réalisé des simulations numériques pour deux zones utiles de dimensions différentes, une Grande Zone Utile (GZU) définie par $a = 40mm$ et une Petite Zone Utile (PZU) définie par $a = 20mm$. Pour ces deux cas, nous avons adopté 100 éléments de type M3D4. Deux simulations sur GZU et PZU ont été réalisées pour le chargement 1 et le chargement 2, dans les axes de l'éprouvette. Les résultats de ces simulations sont donnés respectivement sur les figures 12.7 et 12.8. Sur chacune de ces figures, nous avons superposé les réponses du modèle dans le cas GZU et PZU. Ces résultats montrent que la taille de la zone utile n'a pas beaucoup d'influence sur les résultats des simulations.

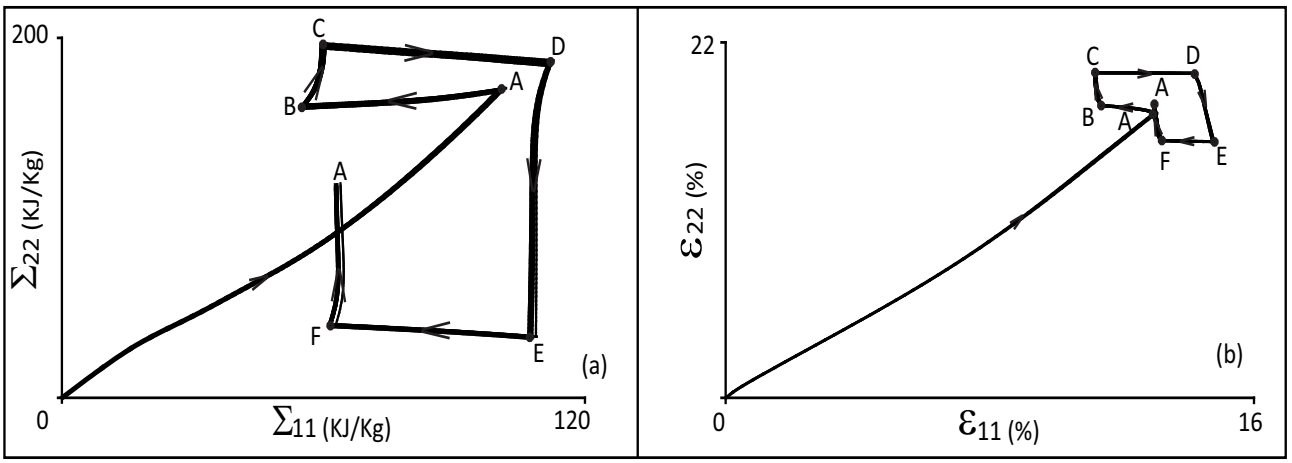


Fig. 12.7 – Réponse du modèle au chargement 1 dans les axes, en contrainte et en déformation, pour les cas GZU et PZU (Eprouvette 1).

Les évolutions des erreurs d'homogénéité des champs de contrainte et de déformation dans le cas PZU sont données par les figures 12.9 et 12.10, pour le chargement 1 et le chargement 2, respectivement. Sur ces figures on indique le chargement et la forme de l'éprouvette. Par ailleurs, sur les courbes des erreurs en fonction du temps, nous indiquons les points particuliers du chargement et nous donnons les moyennes des erreurs notées respectivement $< \xi_\Sigma^1 >$, $< \xi_\Sigma^2 >$ et $< \xi_\varepsilon^1 >$, $< \xi_\varepsilon^2 >$.

Les évolutions des erreurs d'homogénéité des champs de contrainte et de déformation dans le cas PZU sont données par les figures 12.11 et 12.12, pour le chargement 1 et le chargement 2,

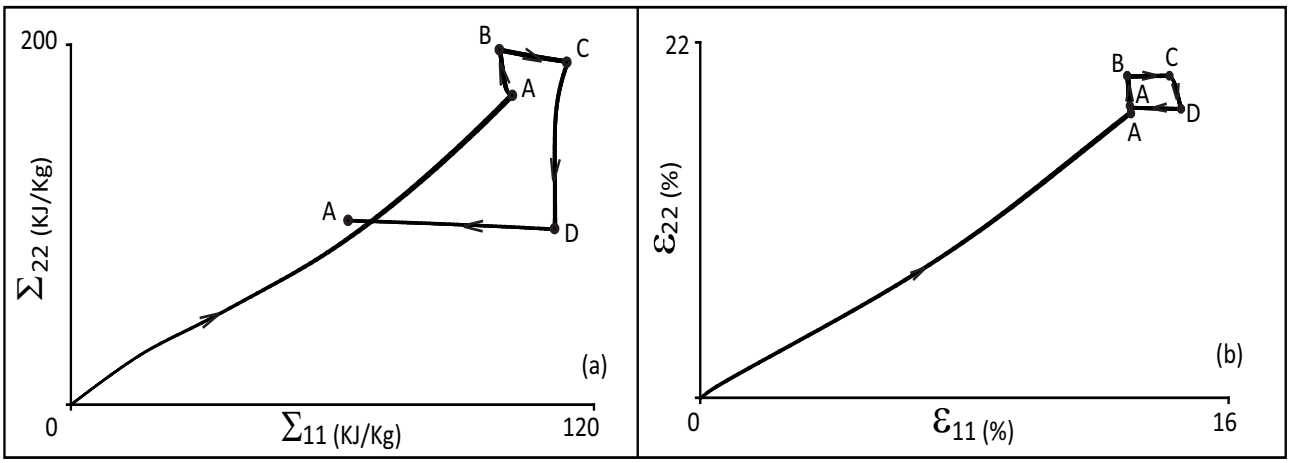


Fig. 12.8 – Réponse du modèle au chargement 2 dans les axes, en contrainte et en déformation, pour les cas GZU et PZU (Eprouvette 1).

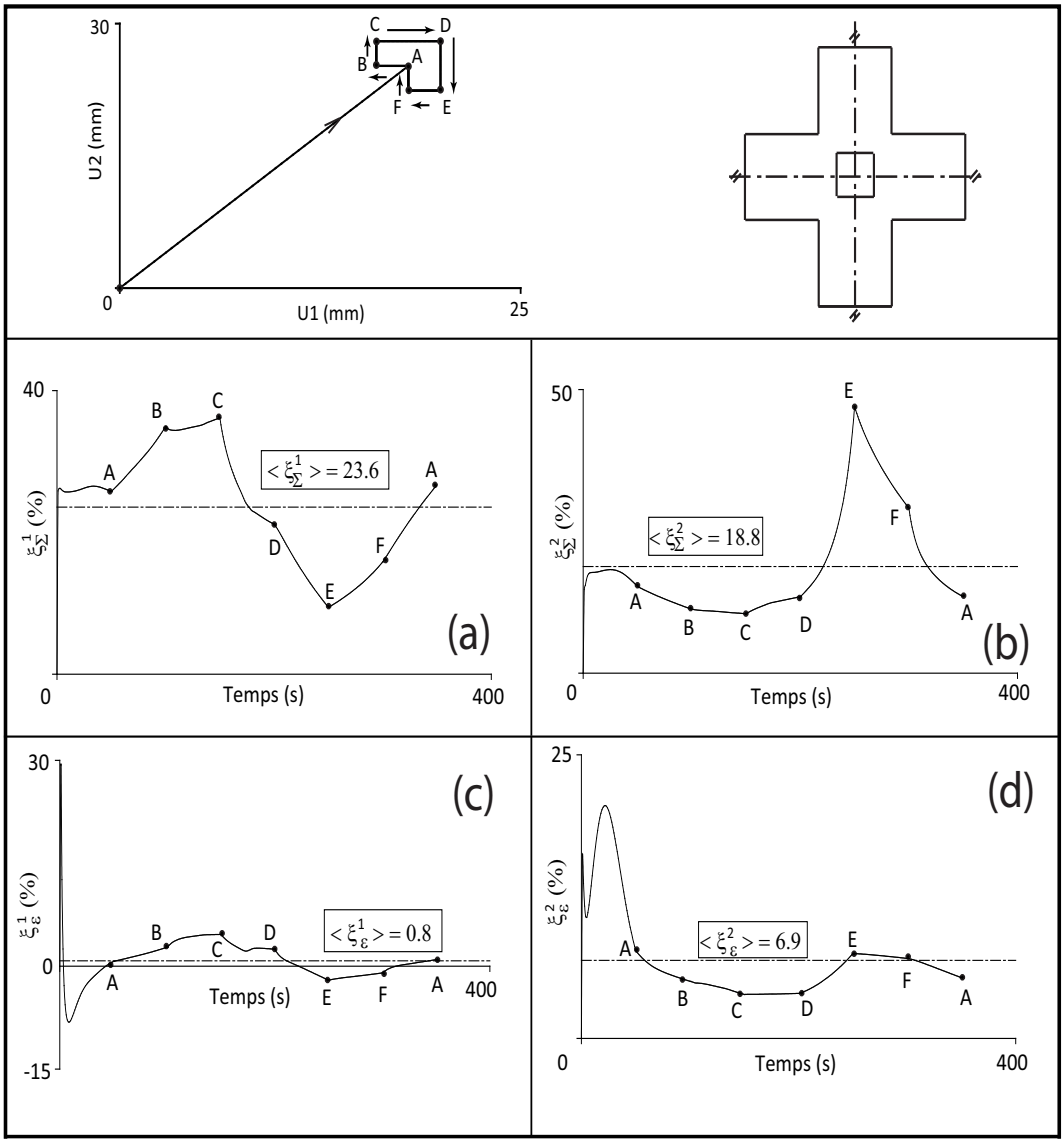


Fig. 12.9 – Erreurs d'homogénéité sur la contrainte, (a) ξ^1_Σ, (b) ξ^2_Σ et erreurs d'homogénéité sur la déformation, (c)ξ^1_ε, (d) ξ^2_ε - (Eprouvette 1, chargement 1 dans les axes et GZU).

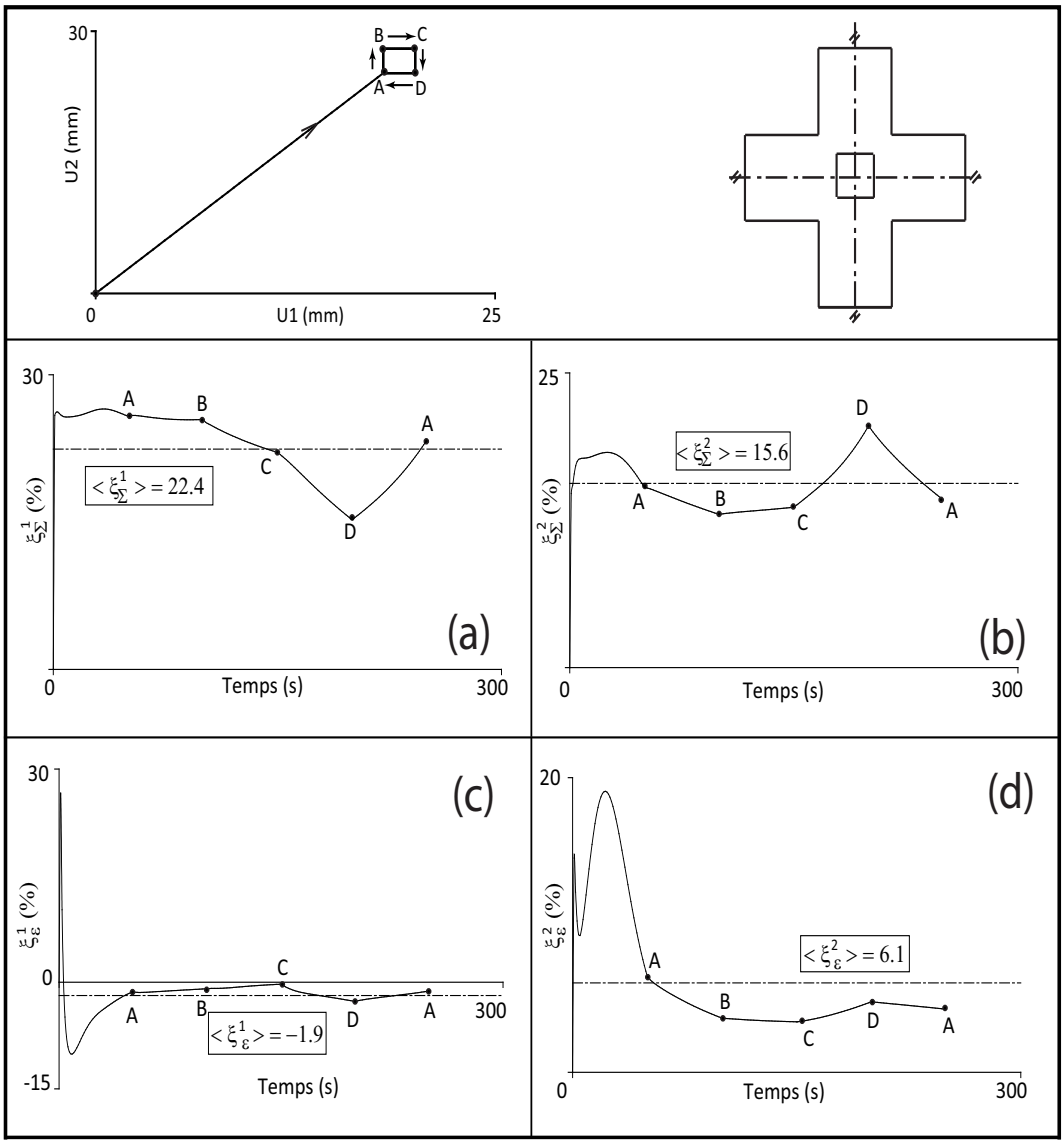


Fig. 12.10 – Erreurs d'homogénéité sur la contrainte, (a) ξ^1_Σ, (b) ξ^2_Σ et erreurs d'homogénéité sur la déformation, (c)ξ^1_ε, (d) ξ^2_ε - (Eprouvette 1, chargement 2 dans les axes et GZU).

respectivement.

Les résultats des figures 12.9, 12.10, 12.11 et 12.12 montrent en général une évolution rapide des erreurs aux changements de trajet. Pour comparer les résultats de ces figures, nous donnons sur le tableau 12.1, les valeurs moyennes des erreurs obtenues dans les cas GZU et PZU pour les chargements 1 et 2 respectivement.

TABLE 12.1: Les valeurs moyennes des erreurs dans le cas du chargement1 dans les axes (Eprouvette 1).

	GZU		PZU		Moyenne	Ecart
Chargement	1	2	1	2		
$< \xi^1_\Sigma >$ (%)	23.6	22.4	24.5	23.0	23.4	± 1.1
$< \xi^2_\Sigma >$ (%)	18.8	15.6	18.9	15.4	17.2	± 1.8
$< \xi^1_\varepsilon >$ (%)	0.8	-1.9	1.0	-1.8	-0.5	± 1.5
$< \xi^2_\varepsilon >$ (%)	6.9	6.1	6.9	6.1	6.5	± 0.4

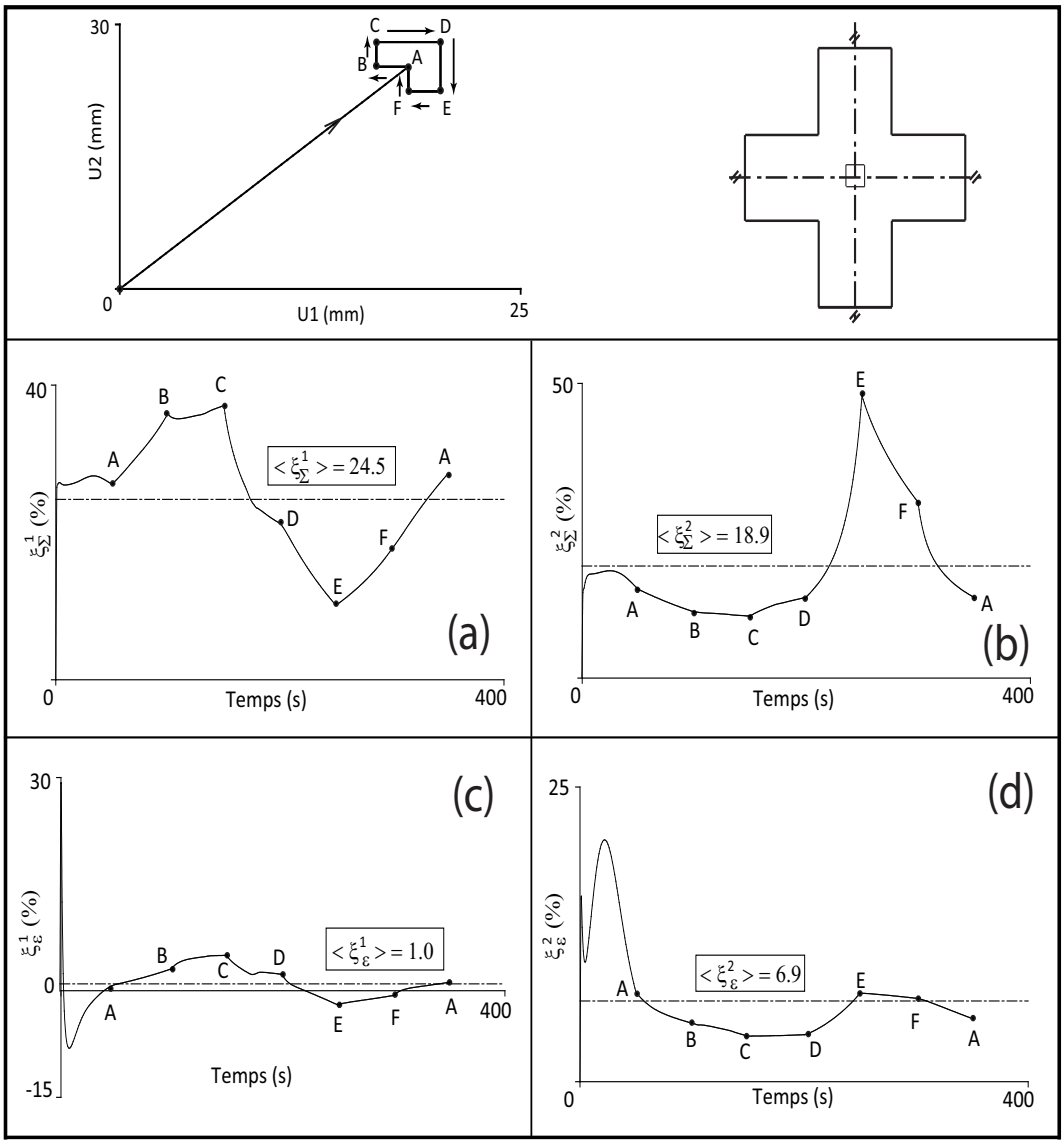


Fig. 12.11 – Erreurs d'homogénéité sur la contrainte, (a) ξ^1_Σ, (b) ξ^2_Σ et erreurs d'homogénéité sur la déformation, (c)ξ^1_ε, (d) ξ^2_ε - (Eprouvette 1, chargement 1 dans les axes et PZU).

Le tableau 12.1 montre que l'erreur d'homogénéité sur les champs de contrainte et de déformation dépend très peu du type de chargement. L'erreur d'homogénéité sur le champ de contrainte est une erreur par excès de l'ordre de 20%, selon les axes 1 et 2 de l'éprouvette. En déformation, l'axe 2 qui correspond à la direction trame du matériau et à l'axe le plus chargé de l'éprouvette, se distingue par une erreur de l'ordre de 6% ; tandis que l'axe 1 présente une erreur très faible. Compte tenu de ces résultats nous adopterons dans la suite le cas PZU et un seul chargement : le chargement 1.

La figure 12.13 donne une illustration des champs de déplacement, de déformation et de contrainte au point A du chargement 1 dans les axes de l'éprouvette 1. La figure 12.13-a donne les vecteurs déplacement ; cette figure montre que le champ de déplacement est quasi-radial en partant du centre de l'éprouvette. La figure 12.13-b donne les isovaleurs du module du déplacement. Les figures 12.13-c et d donnent les isovaleurs du premier invariant de la déformation et de la contrainte, respectivement (cf. relation 2.61 du chapitre 2). Les figures 12.13-e et f donnent le rayon dans le plan déviatoire de la déformation et de la contrainte, respectivement (cf. relation 2.65 du Chap 2).

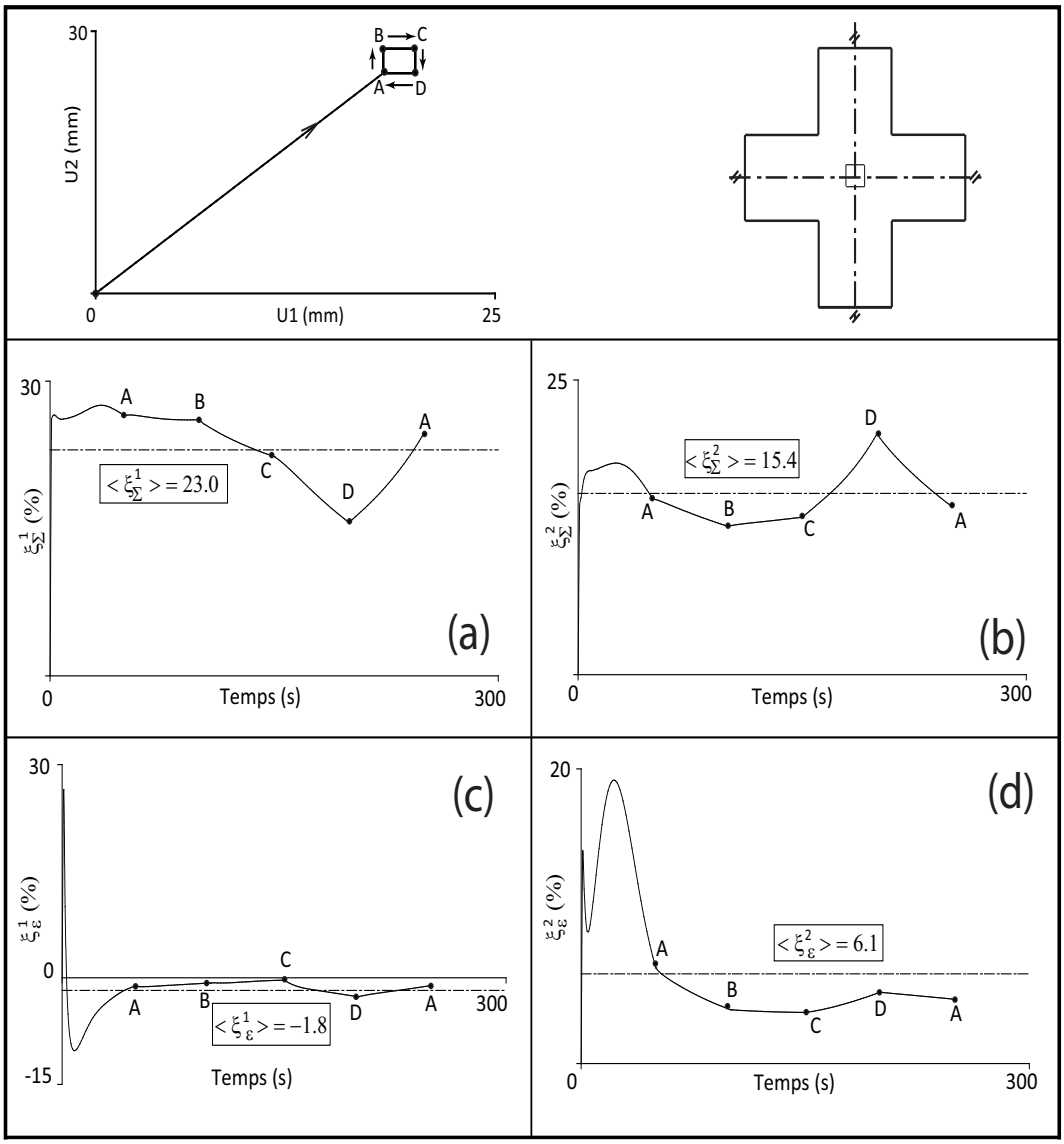


Fig. 12.12 – Erreurs d'homogénéité sur la contrainte, (a) ξ^1_Σ, (b) ξ^2_Σ et erreurs d'homogénéité sur la déformation, (c)ξ^1_ε, (d) ξ^2_ε - (Eprouvette 1, chargement 2 dans les axes et PZU).

La figure 12.14 donne le résultat d'une simulation avec le chargement 1, en hors axes avec une orientation de la direction chaîne à $\pm 10^\circ$ de l'axe horizontal de traction. Ces résultats sont à comparer à ceux de la figure 12.7, obtenus avec le chargement 1 dans les axes de l'éprouvette. Le niveau de contrainte atteint sur la figure 12.14 est sensiblement plus faible et le trajet ABCDEFA en déformation est plus important.

Les évolutions des erreurs d'homogénéité des champs de contrainte et de déformation dans le cas PZU sont données par la figure 12.15, pour le chargement 1 en hors axes, avec une orientation de la direction chaîne à 10° de l'axe horizontal de traction. Cette figure montre une légère augmentation de la valeur de l'erreur moyenne sur le champ de contrainte, qui atteint 29% sur l'axe horizontal de traction (fig. 12.15-a). Cependant, la valeur de l'erreur moyenne sur le champ de déformation atteint 16 à 27% (fig. 12.15-c et d).

La figure 12.16 donne une illustration des champs de déplacement, de déformation et de contrainte au point A du chargement 1 en hors axes de l'éprouvette 1. Les figures 12.16-a et b

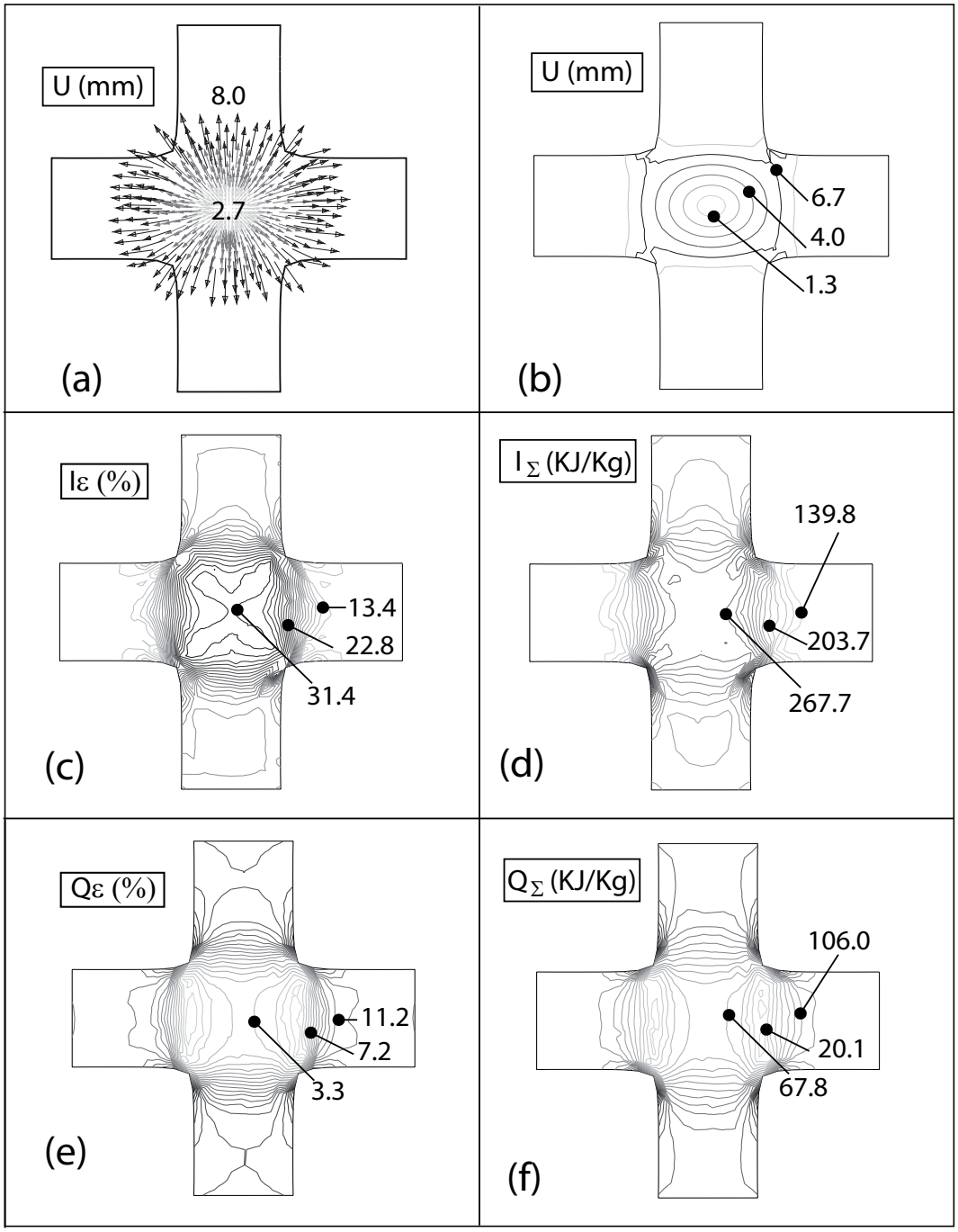


Fig. 12.13 – Résultats de simulation (Eprouvette1, point A du chargement 1 dans les axes) : (a) vecteurs déplacement, (b) isovaleurs du module du déplacement, (c) isovaleurs de I_ε, (d) isovaleurs de I_Σ, (e) isovaleurs de Q_ε, (f) isovaleurs de Q_Σ.

montrent que le champ de déplacement perd sa symétrie radiale.

12.5 Résultats de simulation de l'éprouvette 2

Sur l'éprouvette 2, nous avons réalisé deux simulations numériques avec le chargement 1 en PZU ; la première dans les axes de l'éprouvette et la deuxième en hors axes avec une orientation de la direction chaîne à $\pm 10^\circ$ de l'axe horizontal de traction. Les résultats de ces simulations sont donnés respectivement sur les figures 12.17 et 12.18. Ces résultats donnent les réponses du modèle dans le plan des contraintes et des déformations de traction.

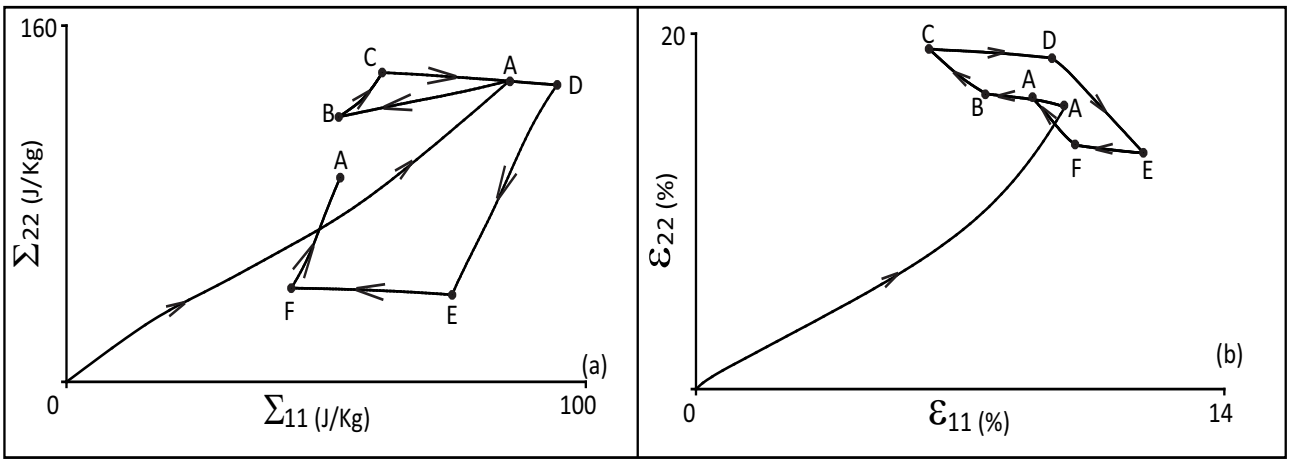


Fig. 12.14 – Réponse du modèle au chargement 1 hors axes à 10°, en contrainte et en déformation (Eprouvette 1, PZU).

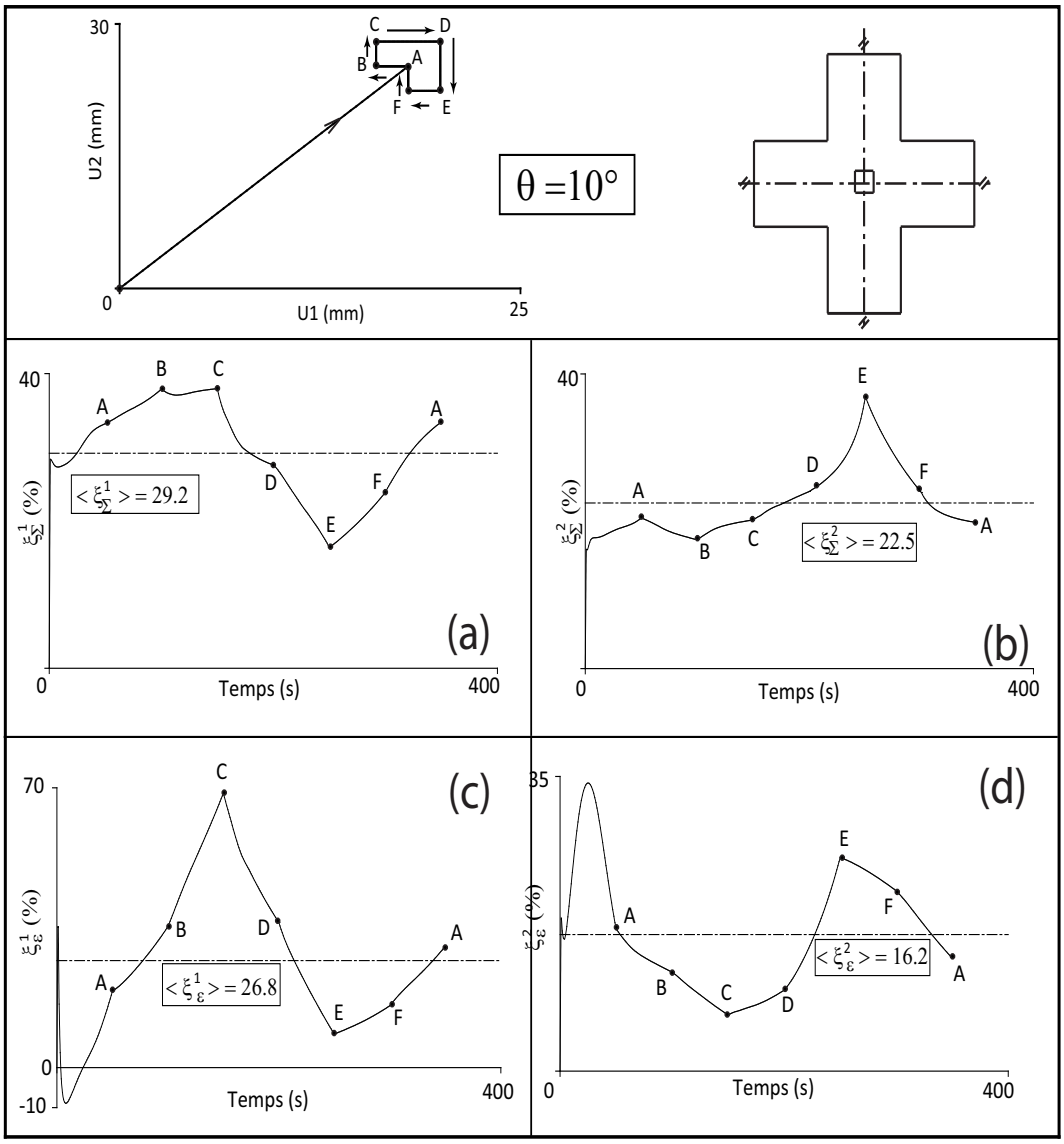


Fig. 12.15 – Erreurs d'homogénéité sur la contrainte, (a) ξ^1_Σ, (b) ξ^2_Σ et erreurs d'homogénéité sur la déformation, (c)ξ^1_ε, (d) ξ^2_ε - (Eprouvette 1, chargement 1 hors axes à 10° et PZU).

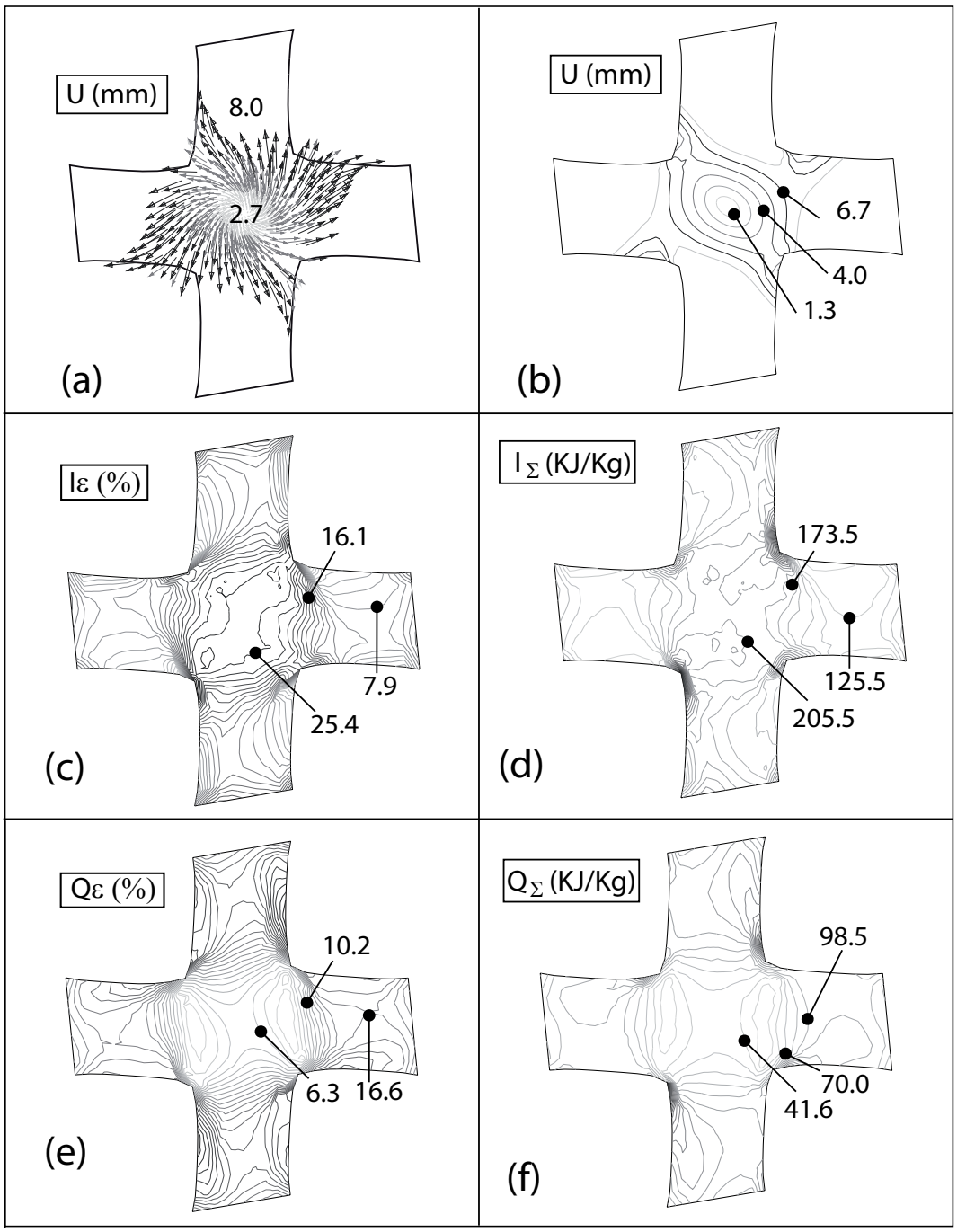


Fig. 12.16 – Résultats de simulation (Eprouvette1, point A du chargement 1 hors axes à 10°) : (a) vecteurs déplacement, (b) isovaleurs du module du déplacement, (c) isovaleurs de I_ε, (d) isovaleurs de I_Σ, (e) isovaleurs de Q_ε, (f) isovaleurs de Q_Σ.

Les évolutions des erreurs d'homogénéité des champs de contrainte et de déformation correspondants à ces deux simulations sont données par les figures 12.19 et 12.20. Dans le cas du chargement dans les axes, les figures 12.19-a et b indiquent que la valeur de l'erreur moyenne sur le champ de contrainte est entre 26% et 29% ; cette valeur atteint 32 à 36% dans le cas du chargement hors axes (fig. 12.20-a et b). Les figures 12.19-c et d et les figures 12.20-c et d indiquent que la valeur de l'erreur moyenne sur le champ de déformation est relativement faible dans le cas du chargement dans les axes et elle atteint une valeur de l'ordre de 10% pour le chargement hors axes.

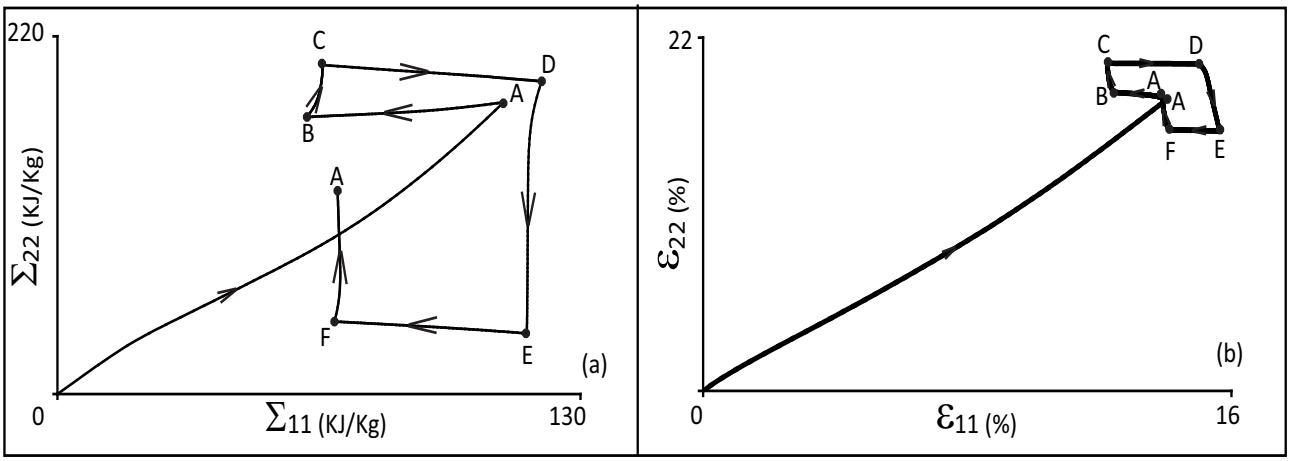


Fig. 12.17 – Réponse du modèle au chargement 1 dans les axes, en contrainte et en déformation (Eprouvette 2, PZU).

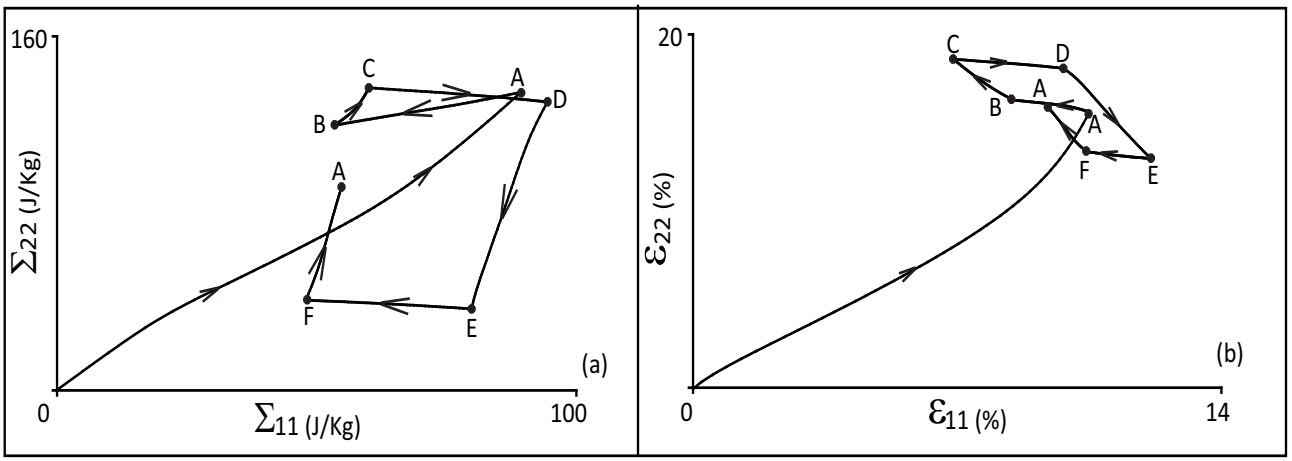


Fig. 12.18 – Réponse du modèle au chargement 1 hors axes à 10°, en contrainte et en déformation (Eprouvette 2, PZU).

Les figures 12.21 et 12.22 donnent des illustrations des champs de déplacement, de déformation et de contrainte au point A du chargement 1, respectivement dans les axes et en hors axes de l'éprouvette 2.

12.6 Résultats de simulation de l'éprouvette 3

Sur l'éprouvette 3, nous avons réalisé une simulation numérique avec le chargement 1 en PZU dans les axes de l'éprouvette. Les réponses du modèle dans le plan des contraintes et des déformations de traction sont données sur la figure 12.23.

Les évolutions des erreurs d'homogénéité des champs de contrainte et de déformation correspondants à cette simulation sont données par la figure 12.24. Dans ce cas, les figures 12.24-a et b indiquent que la valeur de l'erreur moyenne sur le champ de contrainte est entre 29% et 38%. Les figures 12.24-c et d indiquent que la valeur de l'erreur moyenne sur le champ de déformation est entre 5% et 10%.

La figure 12.25 donne une illustration des champs de déplacement, de déformation et de contrainte au point A du chargement 1.

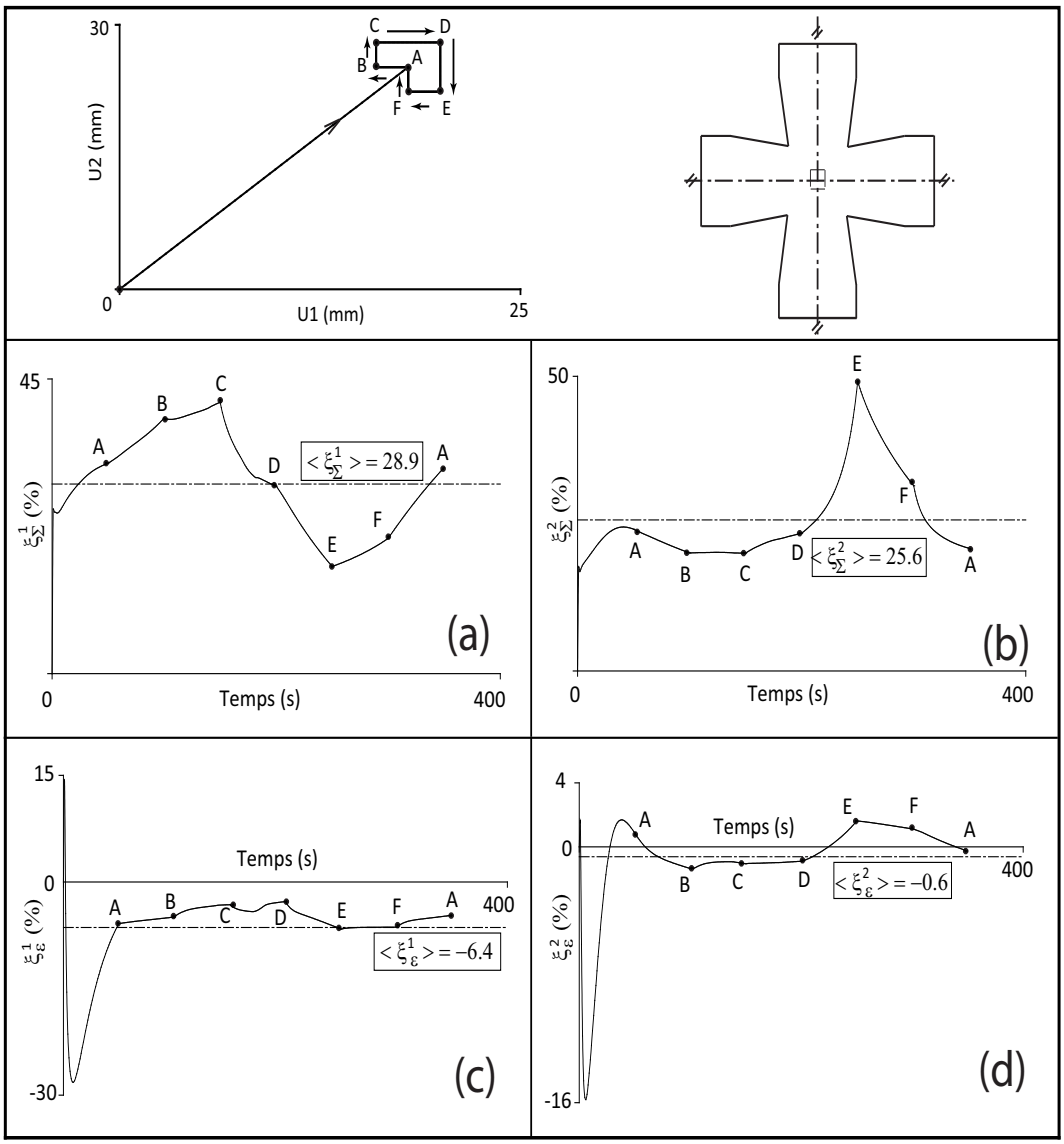


Fig. 12.19 – Erreurs d'homogénéité sur la contrainte, (a) ξ^1_Σ, (b) ξ^2_Σ et erreurs d'homogénéité sur la déformation, (c)ξ^1_ε, (d) ξ^2_ε - (Eprouvette 2, chargement 1 dans les axes).

12.7 Remarques et conclusions

Le tableau 12.2 donne une comparaison des valeurs moyennes des erreurs, pour les trois éprouvettes, dans le cas du chargement 1, en PZU.

Table 12.2: Les valeurs moyennes des erreurs dans le cas du chargement1 en PZU, pour les trois éprouvettes.

	Eprouvette1		Eprouvette2		Eprouvette3
	Dans les Axes	Hors axes	Dans les Axes	Hors axes	Dans les Axes
$< \xi^1_\Sigma >$ (%)	24.5	29.2	28.9	35.9	38.0
$< \xi^2_\Sigma >$ (%)	18.9	22.5	25.6	32.5	29.0
$< \xi^1_\varepsilon >$ (%)	1.0	26.8	-6.4	12.4	5.2
$< \xi^2_\varepsilon >$ (%)	6.9	16.2	-0.6	8.5	9.9

L'éprouvette 1, présente l'erreur d'homogénéité sur le champ de contrainte la plus faible, dans

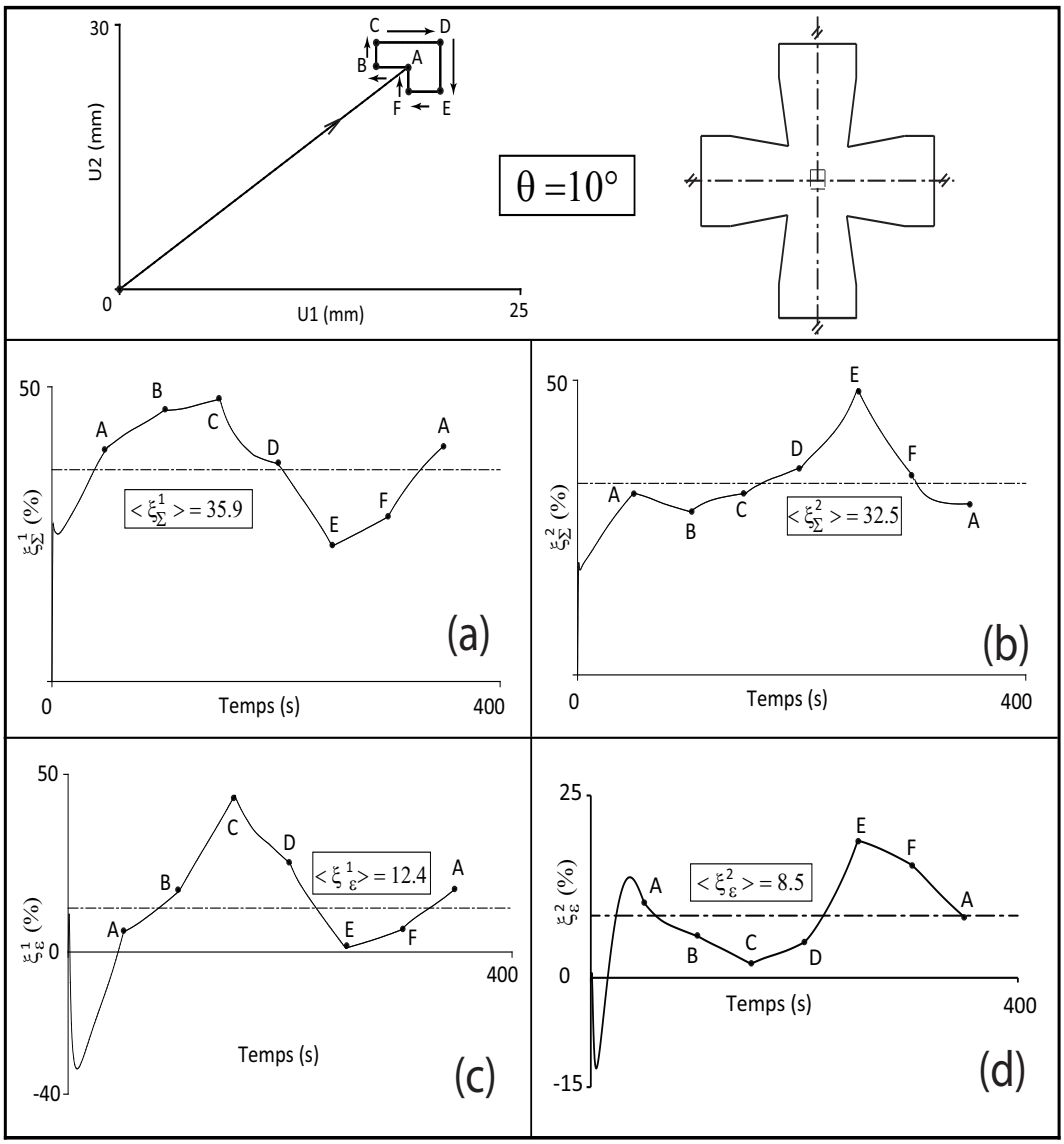


Fig. 12.20 – Erreurs d'homogénéité sur la contrainte, (a) ξ^1_Σ, (b) ξ^2_Σ et erreurs d'homogénéité sur la déformation, (c)ξ^1_ε, (d) ξ^2_ε - (Eprouvette 2, chargement 1 hors axes à 10°).

le cas du chargement dans les axes ; cette erreur, par excès, est de l'ordre de 20%, selon les axes 1 et 2 de l'éprouvette.

Les valeurs moyennes des erreurs d'homogénéité des champs de contrainte et de déformation augmentent systématiquement lors des chargements hors axes.

Une étude plus approfondie est nécessaire pour rechercher et optimiser la forme idéale de l'éprouvette de l'essai de traction biaxiale sur les matériaux tissé et les toiles laminées. Néanmoins, les résultats des simulations, que nous avons effectuées, montrent que la forme de l'éprouvette 1 semble la mieux adaptée à l'essai de traction biaxiale, malgré une erreur importante d'homogénéité sur le champ de contrainte.

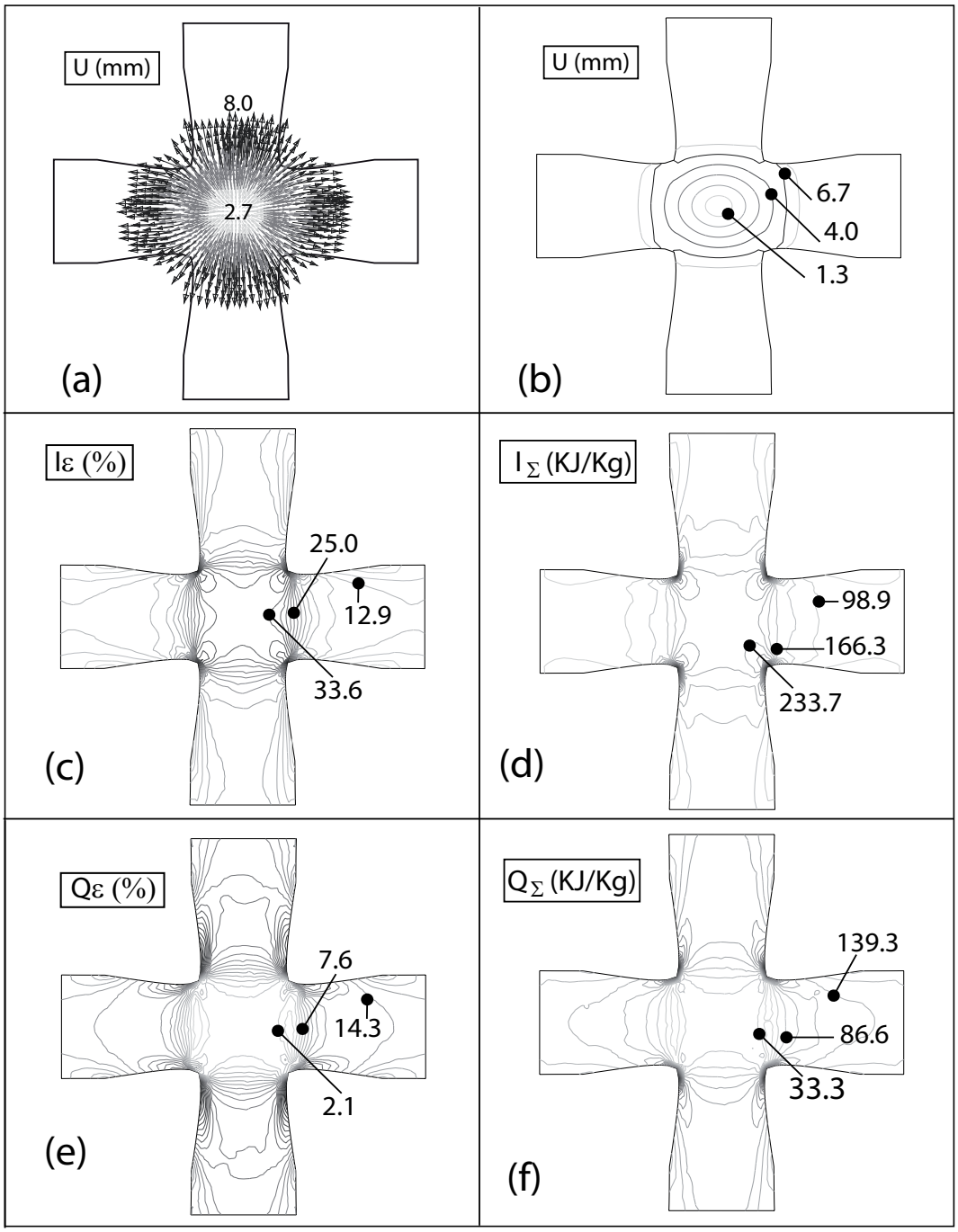


Fig. 12.21 – Résultats de simulation (Eprouvette2, point A du chargement 1 dans les axes) : (a) vecteurs déplacement, (b) isovaleurs du module du déplacement, (c) isovaleurs de I_ε, (d) isovaleurs de I_Σ, (e) isovaleurs de Q_ε, (f) isovaleurs de Q_Σ.

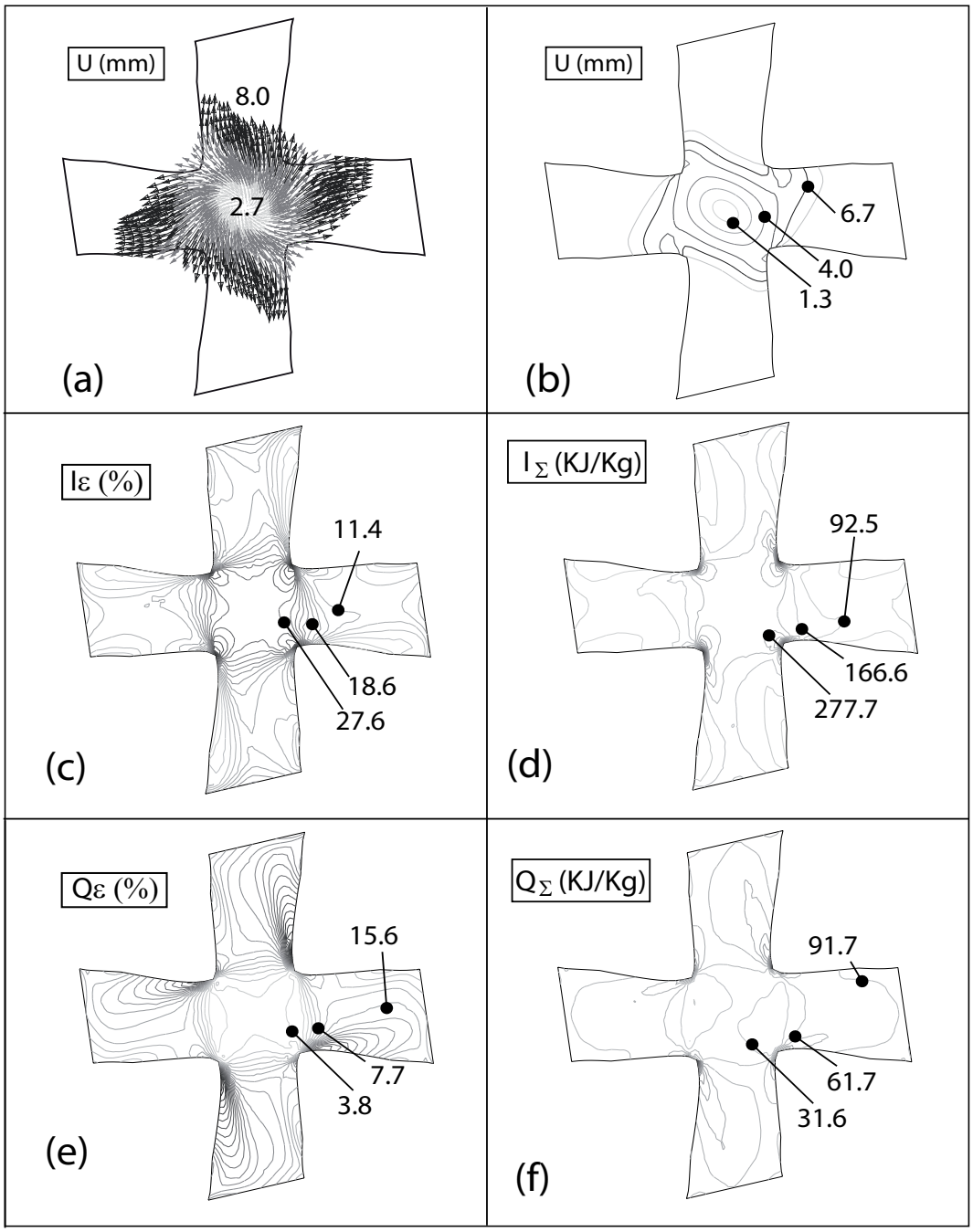


Fig. 12.22 – Résultats de simulation (Eprouvette2, point A du chargement 1 hors axes à 10°) : (a) vecteurs déplacement, (b) isovaleurs du module du déplacement, (c) isovaleurs de I_ε, (d) isovaleurs de I_Σ, (e) isovaleurs de Q_ε, (f) isovaleurs de Q_Σ.

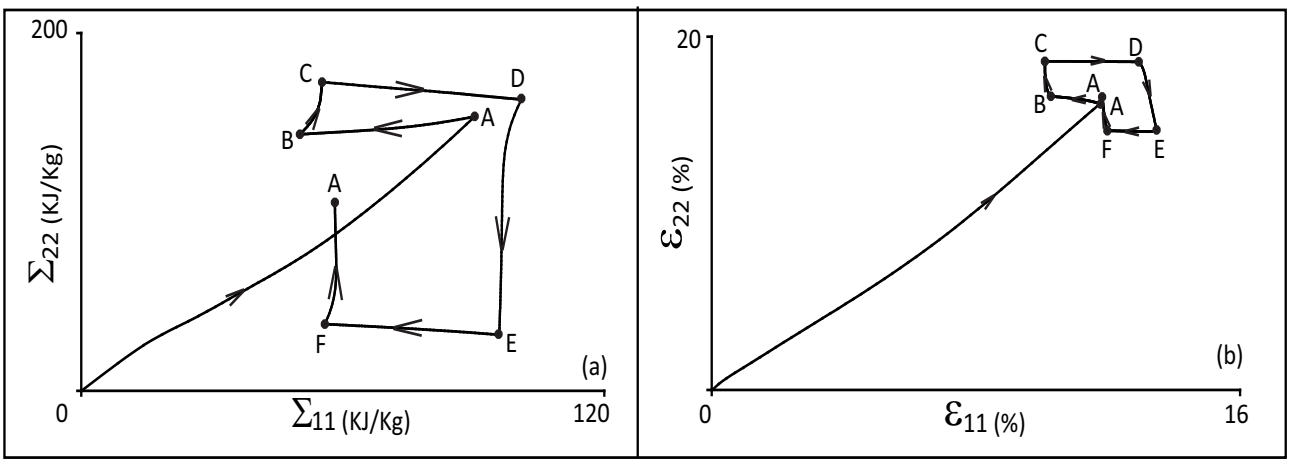


Fig. 12.23 – Réponse du modèle au chargement 1 dans les axes, en contrainte et en déformation (Eprouvette 3, PZU).

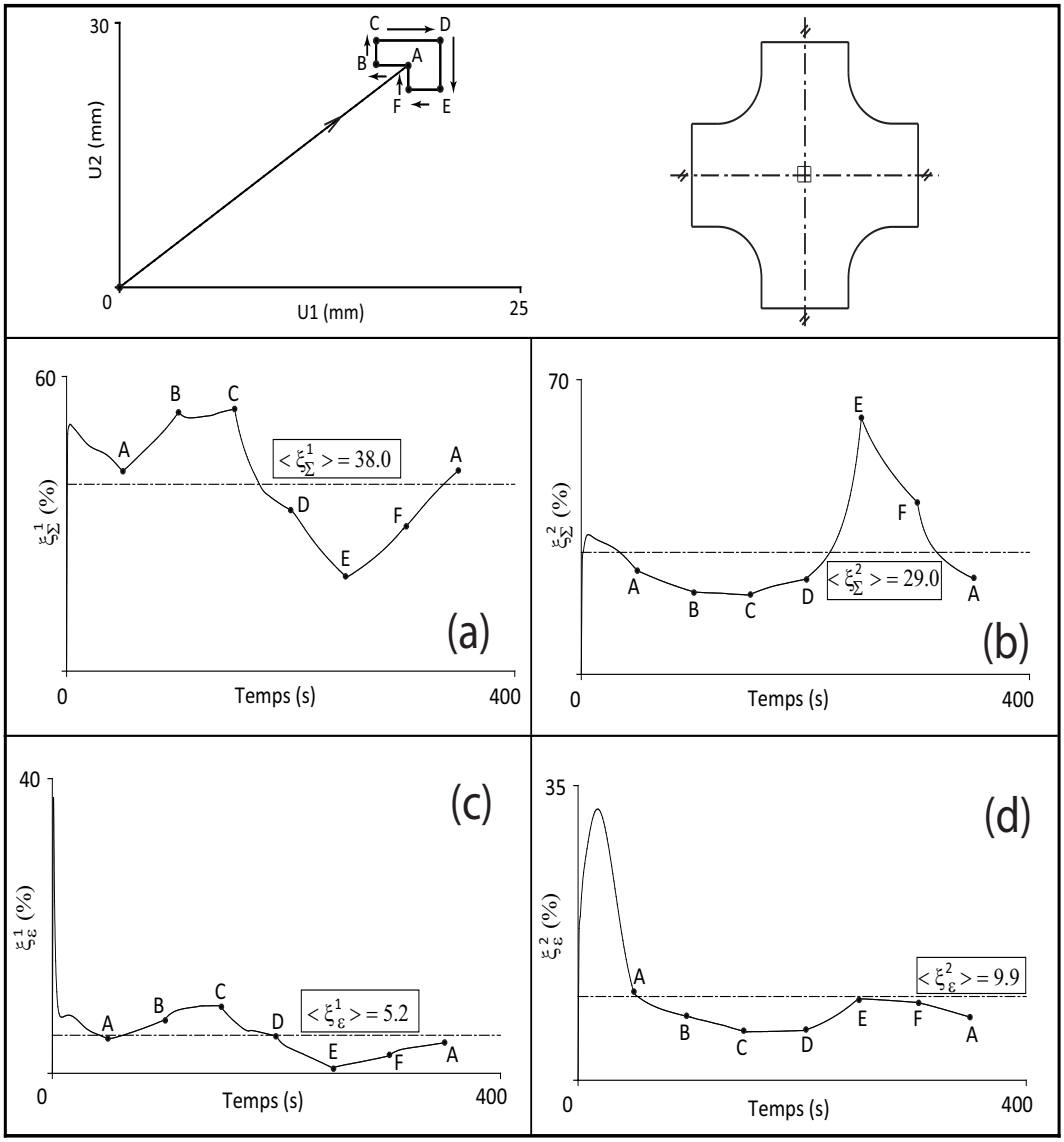


Fig. 12.24 – Erreurs d'homogénéité sur la contrainte, (a) ξ^1_Σ, (b) ξ^2_Σ et erreurs d'homogénéité sur la déformation, (c)ξ^1_ε, (d) ξ^2_ε - (Eprouvette 3, chargement 1 dans les axes).

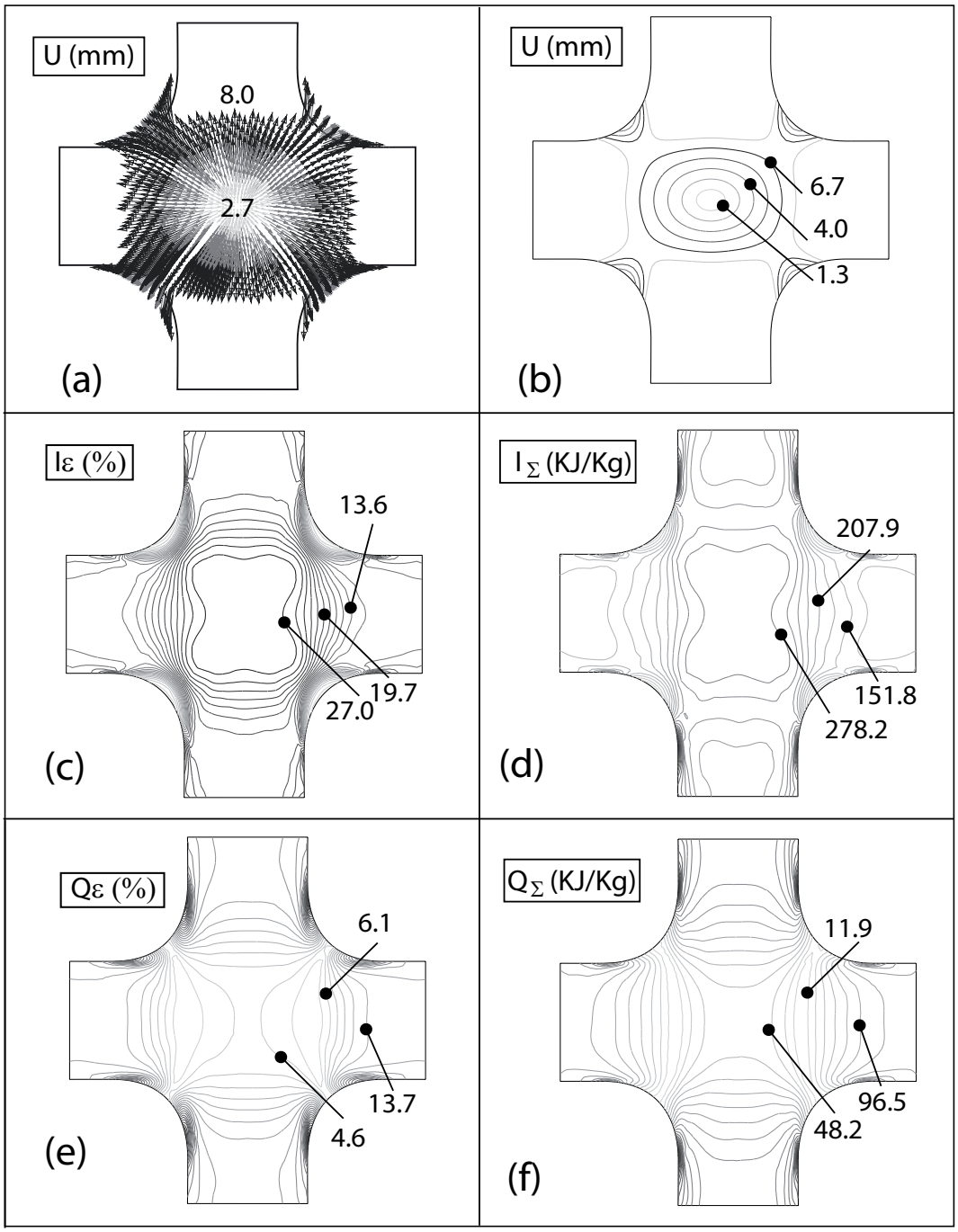


Fig. 12.25 – Résultats de simulation (Eprouvette2, point A du chargement 1 dans les axes) : (a) vecteurs déplacement, (b) isovaleurs du module du déplacement, (c) isovaleurs de I_ε, (d) isovaleurs de I_Σ, (e) isovaleurs de Q_ε, (f) isovaleurs de Q_Σ.

Conclusion générale

Des résultats préliminaires, des caractéristiques mécaniques élastiques et à la rupture en traction, d'une toile laminée en Kevlar X15 et d'un Dacron SF HTM simple, ont été obtenues. Pour le Dacron SF HTM simple, ces résultats révèlent des meilleures caractéristiques mécaniques dans le sens trame que dans le sens chaîne. Au contraire, la toile laminée en Kevlar X15, plus rigide, présente de meilleures caractéristiques mécaniques élastiques et de rupture dans le sens chaîne que dans le sens trame.

Une étude expérimentale détaillée a été réalisé sur le comportement en traction du Dacron SF HTP Plus, le matériau qui a été choisi pour cette étude. Ainsi, nous avons réalisé sur ce matériau différents essais de traction monotone et de traction ondulée, contrôlés en déformation et en force. Certains de ces essais comportaient des séquences de relaxation. Ces essais ont été réalisés dans les axes du matériau, dans le sens chaîne ou dans le sens trame, ainsi qu'en hors axes avec des orientations par rapport à la direction chaîne allant de 5° à 45°.

La toile laminée en Kevlar X15 et les matériaux tissés Dacron SF HTM simple et Dacron SF HTP Plus présentent une évolution de la contrainte, lors des séquences de relaxation, en logarithmique, caractéristique d'un comportement visqueux non- Boltzmannien.

Une approche théorique a été proposée. Cette approche définit un cadre de modélisation qui permet une prise en compte des comportements spécifiques de chaque composante du matériau (fils, enduction) et de leur interaction. Des lois unidimensionnelles du comportement des fils et de leur interaction, sont proposées. Ces lois balayent un champ assez large de comportements partant du comportement élastique non linéaire, au comportement irréversible, en passant par le comportement viscoélastique ou le comportement viscoélastique à comportement retardé irréversible.

Pour le comportement de l'enduction, des lois bidimensionnelles, sont proposées. Ces lois peuvent être de type élastique linéaire ou non linéaire, viscoélastique à comportement retardé réversible ou irréversible.

L'approche théorique proposée a été ensuite implémentée sous ABAQUS Standard, à l'aide d'une routine utilisateur (UMAT). Cette implémentation a été validée par une comparaison des résultats de simulation à des solutions analytiques, pour deux essais de traction hors axes à 45° et 30°, par rapport à la direction chaîne. Ces solutions analytiques concernent l'évolution de l'angle entre les fils de chaîne et les fils de trame, pour un matériau tissé sans enduction, avec des fils élastiques et une contrainte d'interaction élastique entre les fils de rigidité très faible. Ce matériau est proche du tissu de Tchebichev.

Compte tenu de l'approche théorique adoptée, la démarche d'identification la plus simple et la plus naturelle est de caractériser le comportement individuel de chaque constituant du matériau adopté, le Dacron SF HTP Plus, dans notre cas, à savoir le fil de chaîne, le fil de trame

et l'enduction. Dans le cadre de ce travail, il nous était difficile de disposer isolément de ces constituants et de réaliser les essais adaptés. Nous avons donc opté pour une démarche d'identification à partir des essais réalisés sur le matériau tissé constitué. Trois modèles H1, H2 et H3 ont alors été proposés et évalués par confrontation aux résultats expérimentaux. L'évaluation de ces modèles nous a permis de distinguer le modèle H3, comme le modèle le plus adapté pour décrire le comportement du Dacron SF HTP Plus.

La modélisation du comportement dans ABAQUS du Dacron SF HTP Plus, nous a permis de simuler l'essai de traction biaxiale et d'étudier l'homogénéité des champs de contrainte et de déformation de trois formes d'éprouvette différentes. Une étude plus approfondie est nécessaire pour rechercher et optimiser la forme idéale de l'éprouvette de l'essai de traction biaxiale sur les matériaux tissé et les toiles laminées. Néanmoins, les résultats des simulations que nous avons obtenus montrent que l'éprouvette de forme cruciforme simple semble la mieux adaptée à l'essai de traction biaxiale, malgré une erreur importante d'homogénéité sur le champ de contrainte.

Annexes

Annexe A

Comportement élastique non linéaire lors d'un cycle décharge-charge

- **Modèle D**

Ce modèle est une variante du modèle A du chapitre 7, avec une possibilité de réglage de la courbure de la courbe décharge $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$. Le modèle D est défini dans les axes ($\Delta\Sigma$, $\Delta\varepsilon$), par :

$$\Delta\Sigma_{r2}(\Delta\varepsilon) = \Sigma_R \tanh\left\{\left[2 - e^{-\frac{1}{2}\delta.\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right)^2}\right]\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right\} + M\Delta\varepsilon \tag{A.1}$$

où $\varepsilon^*(\varepsilon_R)$ est défini par la relation (7.18) du chapitre 7 et δ correspond au paramètre de courbure tel que :

$$0 \leq \delta \leq 1 \tag{A.2}$$

En utilisant les relations (7.13) et (7.14) du chapitre 7, On en déduit la loi dans les axes (Σ, ε), telle que :

$$\Sigma_{r2}(\varepsilon) = \Sigma_R\left\{1 - \tanh\left(\left[2 - e^{-\frac{1}{2}\delta.\left(\frac{\varepsilon_R-\varepsilon}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right)^2}\right]\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon^*(\varepsilon_R)}\right)\right\} - M(\varepsilon_R - \varepsilon) \tag{A.3}$$

La figure A.1 donne une illustration du comportement du modèle D, défini par la relation (A.3), avec un module $M = 0$ et pour une inversion unique telle que ε_R est une constante. Le paramètre δ permet de modifier la courbure de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$. La courbure de la courbe de décharge $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ peut évoluer en fonction de la position de l'inversion sur la courbe de première charge $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$. Pour cela, il est nécessaire de considérer un paramètre de courbure δ variable en fonction de ε_R. On peut envisager éventuellement une variation linéaire, telle que :

$$\delta = A''\varepsilon_R \tag{A.4}$$

où A'' est une constante positive.

- **Modèle E**

Le modèle E est directement défini dans les axes (Σ, ε), tel que :

$$\Sigma_{r2}(\varepsilon) = \Sigma_R.\frac{\ell\left(\alpha.\pi\frac{\varepsilon+\varepsilon_0}{\varepsilon_R+\varepsilon_0}\right)}{\ell(\alpha.\pi)} - M(\varepsilon_R - \varepsilon) \tag{A.5}$$

où α est une constante telle que $\alpha \in]0, 1[$, ε_0 une constante homogène à une déformation.

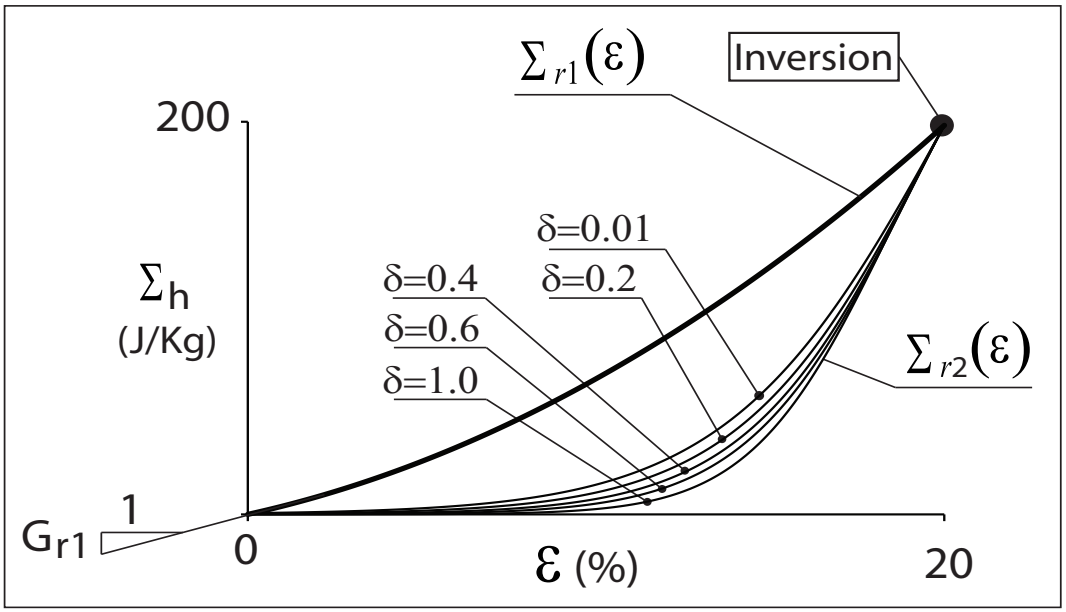


Fig. A.1 – Illustration du modèle D (Eq. A.3), avec $G_{r1} = L_{r1} = 0.4J/g$, $H_{r1} = 3J/g$, $M = K_{r1} = 0$ et $A^{'} = 10$.

La fonction $\ell(x)$ est la fonction de Langevin, telle que [89] :

$$\ell(x) = cotg(x) - \frac{1}{x} \tag{A.6}$$

La figure A.2 donne une illustration du comportement du modèle E, défini par la relation A.5, avec un module $M = 0$ et pour une inversion unique telle que ε_R est une constante. Le paramètre α permet de modifier la courbure de $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$. Ce modèle donne des courbes de décharge $\Sigma_{r2}(\varepsilon)$ caractérisées par un coude très prononcé, qui semble peu adapté pour décrire le comportement des fibres textiles. Un modèle E modifié, est alors proposé, tel que :

$$\Sigma_{r2}(\varepsilon) = \Sigma_R.\frac{\ell\left(\left(\alpha.\pi\frac{\varepsilon+\varepsilon_0}{\varepsilon_R+\varepsilon_0}\right)^n\right)}{\ell(\alpha.\pi)} - M(\varepsilon_R - \varepsilon) \tag{A.7}$$

Où n est une constante. La figure A.3 illustre le comportement du modèle E modifié et le rôle du paramètre n. Le modèle E modifié est défini par trois paramètres (α, ε_0 et n).

- **Modèle F**

Le modèle F est défini pour une composante élastique non linéaire en première charge $\Sigma_{r1}(\varepsilon)$ avec $G_{r1} = L_{r1}$ et $K_{r1} = 0$, telle que :

$$\Sigma_{r1}(\varepsilon) = G_{r1}\varepsilon + H_{r1}\varepsilon^2 \tag{A.8}$$

Cette loi est directement définie dans les axes (Σ, ε), telle que :

$$\Sigma_{r2}(\varepsilon) = \left\{(H_{r1} - A_0)(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R})^n + A_0\right\}\varepsilon^2 + \left\{(G_{r1} - B_0)(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R})^n + B_0\right\}\varepsilon - M(\varepsilon_R - \varepsilon) \tag{A.9}$$

où M est un module élastique et n une constante positive. Les paramètres A_0, B_0 sont deux fonctions de ε_R, déterminées par les deux conditions suivantes, pour $M = 0$:

$$\frac{d\Sigma_{r2}(\varepsilon)}{d\varepsilon}(\varepsilon_R) = A'\varepsilon_R\frac{d\Sigma_{r1}}{d\varepsilon}(\varepsilon_R) \qquad ; \qquad \Sigma_{r2}(\varepsilon_R) = \Sigma r1(\varepsilon_R) \tag{A.10}$$

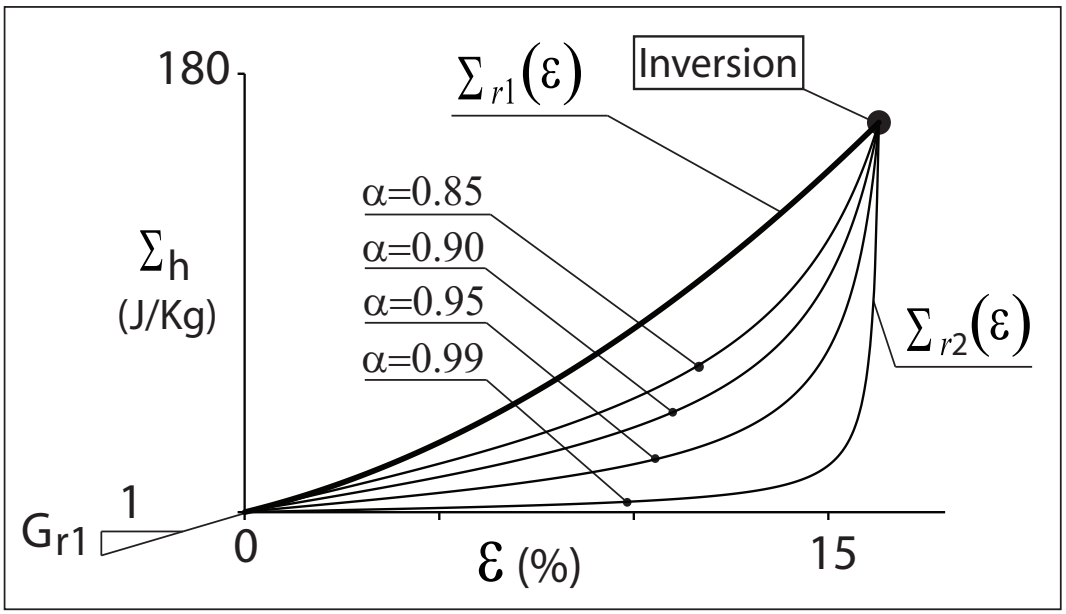


Fig. A.2 – Illustration du modèle E (Eq. A.7), avec $G_{r1} = L_{r1} = 0.4\ J/g$, $H_{r1} = 3.6\ J/g$, $M = K_{r1} = 0$ et $\varepsilon_0 = 0.1\%$.

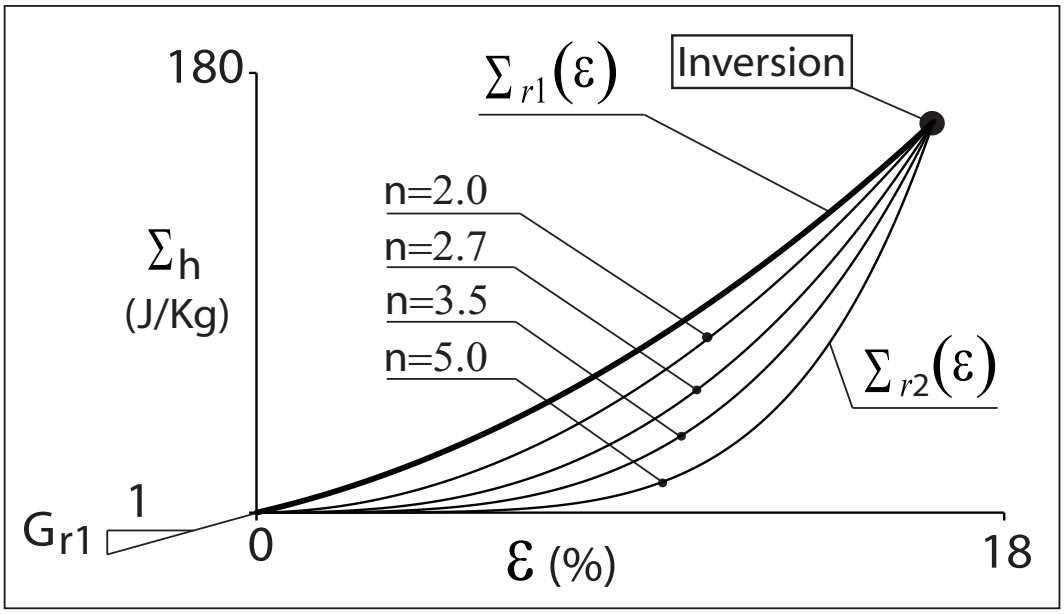


Fig. A.3 – Illustration du modèle E modifié (Eq. A.7), avec $G_{r1} = L_{r1} = 0.4\ J/g$, $H_{r1} = 3.6\ J/g$, $M = K_{r1} = 0$ et $\varepsilon_0 = 0.1\%$ et $\alpha = 0.1$.

telles que :

$$\begin{aligned} A_0 &= H_{r1}\left\{2.A'.\varepsilon_R - 1\right\} + \tfrac{G_{r1}}{\varepsilon_R}\left\{A'.\varepsilon_R - 1\right\} \\ B_0 &= 2.H_{r1}.\varepsilon_R\left\{1 - A'.\varepsilon_R\right\} + G_{r1}\left\{2 - A'.\varepsilon_R\right\} \end{aligned} \tag{A.11}$$

La figure A.4 illustre le comportement du modèle F et le rôle du paramètre n.

- **Modèle G**

Le modèle G est défini dans les axes ($\Delta\Sigma$, $\Delta\varepsilon$), par :

$$\Delta\Sigma_{r2}(\Delta\varepsilon) = G_R(\varepsilon_R)\Delta\varepsilon - \frac{G_R(\varepsilon_R)}{(n+1)\varepsilon_R^n}\Delta\varepsilon^{n+1} + M\Delta\varepsilon \tag{A.12}$$

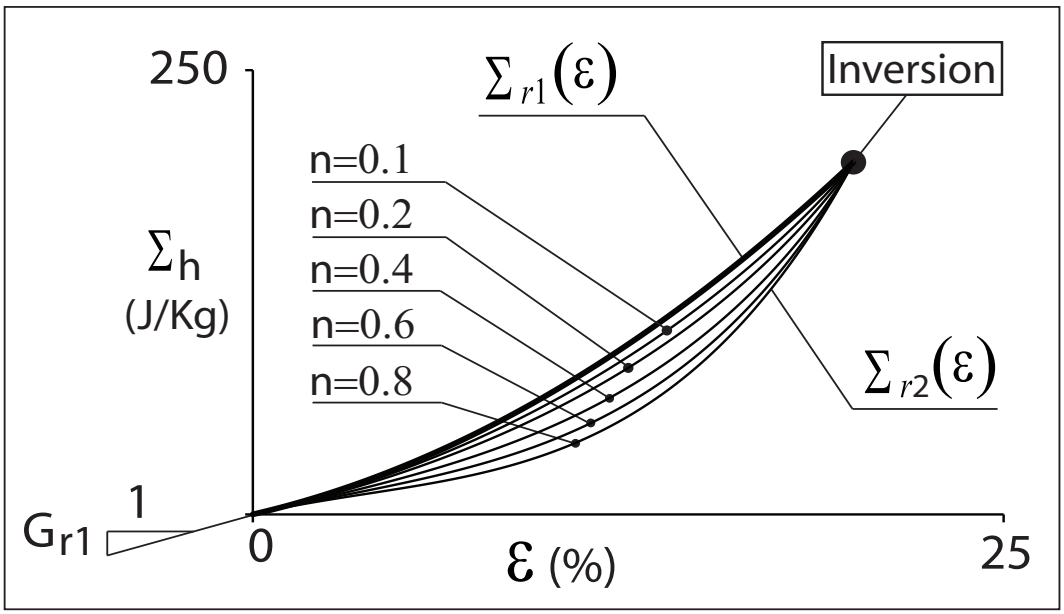


Fig. A.4 – Illustration du modèle F(Eq. A.9), avec $G_{r1} = 0.4\ J/g$, $H_{r1} = 3\ J/g$ et $A^{'} = 10$.

On en déduit la loi dans les axes (Σ, ε), telle que :

$$\Sigma_{r2}(\varepsilon) = \Sigma_R - \left\{ G_R(\varepsilon_R)(\varepsilon_R - \varepsilon) - \frac{G_R(\varepsilon_R)}{(n+1)\varepsilon_R^n} \Delta\varepsilon^{n+1} \right\} - M(\varepsilon_R - \varepsilon) \tag{A.13}$$

Où M est un module élastique, n est une constante positive et $G_R(\varepsilon_R)$ est défini par la relation 7.16 du chapitre 7. La figure A.5 illustre le comportement du modèle G et le rôle du paramètre n.

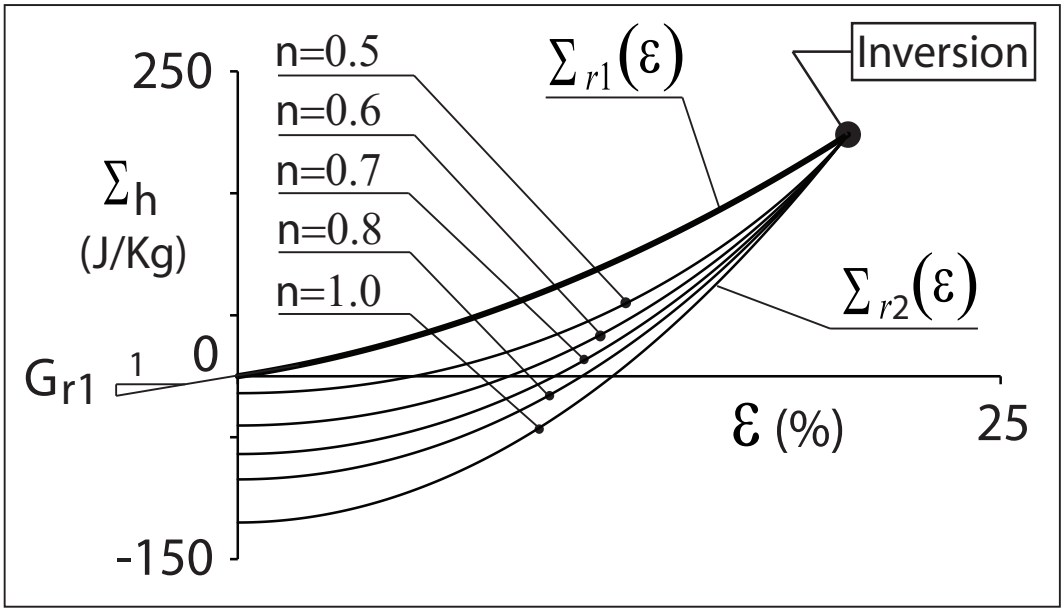


Fig. A.5 – Illustration du modèle G(Eq. A.13), avec $G_{r1} = 0.4\ J/g$, $H_{r1} = 3\ J/g$, $M = 0$ et $A^{'} = 10$.

Annexe B

Paramètres de modélisation du Dacro SF HTP plus

B.1 Paramètres du modèle H1

Le modèle issu de l'hypothèse H1 (cf. § 10.1 du chapitre 10), est caractérisé par 33 paramètres au total.

B.1.1 Paramètres de l'enduction

Le comportement de l'enduction est défini par une loi irréversible non visqueuse, du type octo-directionnelle découplée à partie isotrope non linéaire (cf.§ 8.7). Cette loi est caractérisée par 7 paramètres, tels que :

TABLE B.1: Paramètres identifiés pour Σ_r de l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
K_1	1720.0	J/g
μ_1	977.0	
K_C	118.0	
μ_C	5.8	
K_2	1000.0	
μ_2	500.0	
$\varepsilon_m^* = Q_\varepsilon^*$	0.9	(%)

B.1.2 Paramètres des fils

Le comportement des fils est décrit par une loi viscoélastique à élasticité retardée non linéaire, caractérisée par une contribution de contrainte réversible $\Sigma_r(\varepsilon)$ et une contribution visqueuse $\Sigma_v(\varepsilon)$. La contribution réversible $\Sigma_r(\varepsilon)$ est caractérisée par 6 paramètres dans le sens chaîne et 5 paramètres dans le sens trame. La contribution visqueuse $\Sigma_v(\varepsilon)$ est caractérisée par 9 paramètres. Soit 20 paramètres au total, tels que :

B.1.3 Paramètres de l'interaction entre les fils

Le comportement d'interaction entre les fils est caractérisé par une contribution de contrainte réversible $\Sigma_{ct}^r(\varepsilon_\gamma)$ et une contribution visqueuse $\Sigma_{ct}^v(\dot{\varepsilon}_\gamma)$. Ce comportement est caractérisé par 6 paramètres, tels que :

Table B.2: Paramètres identifiés pour Σ_r.

Paramètres de la contribution réversible	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_r	4000.0	4400.0	KJ/g
g_r	2040.0	-	
H_r	8000.0	300.0	
K_r	15000.0	35000.0	
L_r	900.0	300.0	
ε_r^*	1.4	0.7	(%)

Table B.3: Paramètres identifiés du modèle de Carreau-Yasuda dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Paramètres du modèle de Carreau-Yasuda	Sens chaîne	Sens trame	Unité
η_0	2900.0	1600.0	MJ.s/g
n	0.04	0.16	-
a	1.2		-
λ	42.10^3	31.10^3	s

Table B.4: Paramètre G_v retenue dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Elasticité instantanée de Maxwell	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_v	6280.0	6520.0	J/g

Table B.5: Paramètres viscoélastiques de l'interaction entre les fils.

Paramètres	Valeur	Unité
K_γ	10^{-3}	J/g
G_{ct}^v	1000	
η_{ct}^0	200	MJ.s/Kg
n_{ct}	0.2	-
a_{ct}	2	-
λ_{ct}	50.10^3	s

B.2 Paramètres du modèle H2

Le modèle issu de l'hypothèse H2 (cf. § 10.1 du chapitre 10), est caractérisé par 33 paramètres au total. Comparés aux tableaux des paramètres du modèle H1 du paragraphe B.1, les valeurs des nouveaux paramètres et les valeurs modifiées des paramètres communs seront affichées en gras.

B.2.1 Paramètres de l'enduction

Dans le cas du modèle H2, l'enduction a un comportement viscoélastique à comportement retardé irréversible, identique à celui du modèle H1. Cette loi est caractérisée par 13 paramètres, tels que :

B.2.2 Paramètres des fils

Les fils gardent la même loi de comportement que celle du modèle H1. La seule modification, concerne la valeur du module instantané G_v. Ce comportement est caractérisé par 19 paramètres, tels que :

Table B.6: Paramètres identifiés pour Σ_r de l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
K_1	1720.0	J/g
μ_1	977.0	
K_C	118.0	
μ_C	5.8	
K_2	1000.0	
μ_2	500.0	
$\varepsilon_m^* = Q_\varepsilon^*$	0.9	(%)

Table B.7: Paramètres du modèle de Carreau-Yasuda identifiés pour l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
$\underline{\eta}_0^e = \eta_0^e$	400.0	MJ.s/Kg
$\underline{n}^e = n^e$	0.16	-
$\underline{a}^e = a^e$	1.2	-
$\underline{\lambda}^e = \lambda^e$	$\mathbf{50.10^3}$	s

Table B.8: Modules élastiques instantanés de la contribution visqueuse de l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
K_v	4000.0	J/g
μ_v	1000.0	

Table B.9: Paramètres identifiés pour Σ_r.

Paramètres de la contribution réversible	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_r	4000.0	4400.0	KJ/g
g_r	2040.0	-	
H_r	8000.0	300.0	
K_r	15000.0	35000.0	
L_r	900.0	300.0	
ε_r^*	1.4	0.7	(%)

Table B.10: Paramètres identifiés du modèle de Carreau-Yasuda dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Paramètres du modèle de Carreau-Yasuda	Sens chaîne	Sens trame	Unité
η_0	2900.0	1600.0	MJ.s/g
n	0.04	0.16	-
a	1.2		-
λ	42.10^3	31.10^3	s

Table B.11: Paramètre G_v retenue dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Elasticité instantanée de Maxwell	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_v	**2000.0**		J/g

B.2.3 Paramètres de l'interaction entre les fils

Dans le cas du modèle H2, le comportement de l'interaction entre les fils est élastique linéaire, défini par un seul paramètre, tel que :

Table B.12: Paramètres viscoélastiques de l'interaction entre les fils.

Paramètres	Valeur	Unité
K_γ	**60**	J/g

B.3 Paramètres du modèle H3

Le modèle issu de l'hypothèse H3 (cf. § 10.1 du chapitre 10), est caractérisé par 38 paramètres au total. Comparés aux tableaux des paramètres du modèle H2 du paragraphe B.2, les valeurs des nouveaux paramètres et les valeurs modifiées des paramètres communs seront affichées en gras.

B.3.1 Paramètres de l'enduction

Dans le cas du modèle H3, l'enduction a un comportement viscoélastique à comportement retardé irréversible, identique à celui du modèle H2. Cette loi est caractérisée par 13 paramètres, tels que :

Table B.13: Paramètres identifiés pour Σ_r de l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
K_1	1720.0	J/g
μ_1	977.0	
K_C	118.0	
μ_C	5.8	
K_2	**500.0**	
μ_2	**100.0**	
$\varepsilon_m^* = Q_\varepsilon^*$	0.9	(%)

Table B.14: Paramètres du modèle de Carreau-Yasuda identifiés pour l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
$\underline{\eta}_0^e = \eta_0^e$	400.0	MJ.s/Kg
$\underline{n}^e = n^e$	0.16	-
$\underline{a}^e = a^e$	1.2	-
$\underline{\lambda}^e = \lambda^e$	50.10^3	s

Table B.15: Modules élastiques instantanés de la contribution visqueuse de l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
K_v	4000.0	J/g
μ_v	**500.0**	

B.3.2 Paramètres des fils

Par rapport au modèle H2, le modèle H3 introduit un comportement viscoélastique des fils, caractérisé par un comportement retardé irréversible ; ce comportement est caractérisé par 24 paramètres, tels que :

Table B.16: Paramètres identifiés pour Σ_r.

Paramètres de la contribution réversible	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_r	4000.0	4400.0	KJ/g
g_r	2040.0	-	
H_r	8000.0	300.0	
K_r	15000.0	35000.0	
L_r	900.0	300.0	
ε_r^*	1.4	0.7	(%)

Table B.17: Paramètres identifiés du modèle de Carreau-Yasuda dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Paramètres du modèle de Carreau-Yasuda	Sens chaîne	Sens trame	Unité
η_0	2900.0	1600.0	MJ.s/g
n	0.04	0.16	-
a	1.2		-
λ	42.10^3	31.10^3	s

Table B.18: Paramètre G_v retenue dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Elasticité instantanée de Maxwell	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_v	**3140.0**	**3260.0**	J/g

Table B.19: Paramètres de la contrainte Σ_{r2} des fils de chaîne et de trame.

Paramètres	Sens chaîne	Sens trame	Unité
A'	12.5	7	-
M	100	700	J/g

B.3.3 Paramètres de l'interaction entre les fils

Dans le cas du modèle H3, le comportement de l'interaction entre les fils est élastique linéaire, défini par un seul paramètre, tel que :

Table B.20: Paramètres viscoélastiques de l'interaction entre les fils.

Paramètres	Valeur	Unité
K_γ	60	J/g

B.4 Paramètres finaux du modèle H3

Le modèle issu de l'hypothèse H3 (cf. § 10.1 du chapitre 10), est caractérisé par 38 paramètres au total. Comparés aux tableaux des paramètres initialement adoptés pour le modèle H3 du paragraphe B.3, les valeurs modifiées des paramètres seront affichées en gras.

B.4.1 Paramètres de l'enduction

Dans le cas du modèle H3, l'enduction a un comportement viscoélastique à comportement retardé irréversible, identique à celui du modèle H2. Cette loi est caractérisée par 13 paramètres, tels que :

Table B.21: Paramètres identifiés pour Σ_r de l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
K_1	1720.0	J/g
μ_1	977.0	
K_C	118.0	
μ_C	5.8	
K_2	500.0	
μ_2	100.0	
$\varepsilon_m^* = Q_\varepsilon^*$	0.9	(%)

Table B.22: Paramètres du modèle de Carreau-Yasuda identifiés pour l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
$\underline{\eta}_0^e = \eta_0^e$	400.0	MJ.s/Kg
$\underline{n}^e = n^e$	0.16	-
$\underline{a}^e = a^e$	1.2	-
$\underline{\lambda}^e = \lambda^e$	50.10^3	s

Table B.23: Modules élastiques instantanés de la contribution visqueuse de l'enduction.

Paramètres	Valeur	Unité
K_v	**500.0**	J/g
μ_v	500.0	

B.4.2 Paramètres des fils

Par rapport au modèle H2, le modèle H3 introduit un comportement viscoélastique des fils, caractérisé par un comportement retardé irréversible ; ce comportement est caractérisé par 24 paramètres, tels que :

Table B.24: Paramètres identifiés pour Σ_r.

Paramètres de la contribution réversible	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_r	4000.0	4400.0	J/g
g_r	$\mathbf{10^{-3}}$	-	
H_r	8000.0	300.0	
K_r	15000.0	35000.0	
L_r	900.0	300.0	
ε_r^*	1.4	0.7	(%)

Table B.25: Paramètres identifiés du modèle de Carreau-Yasuda dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Paramètres du modèle de Carreau-Yasuda	Sens chaîne	Sens trame	Unité
η_0	2900.0	1600.0	MJ.s/g
n	0.04	0.16	-
a	1.2		-
λ	42.10^3	31.10^3	s

Table B.26: Paramètre G_v retenue dans le sens chaîne et dans le sens trame.

Elasticité instantanée de Maxwell	Sens chaîne	Sens trame	Unité
G_v	**5500.0**	**5500.0**	J/g

Table B.27: Paramètres de la contrainte Σ_{r2} des fils de chaîne et de trame.

Paramètres	Sens chaîne	Sens trame	Unité
A'	12.5	7	-
M	100	700	J/g

B.4.3 Paramètres de l'interaction entre les fils

Dans le cas du modèle H3, le comportement de l'interaction entre les fils est élastique linéaire, défini par un seul paramètre, tel que :

Table B.28: Paramètres viscoélastiques de l'interaction entre les fils.

Paramètres	Valeur	Unité
K_γ	60	J/g

Annexe C

Résultats de modélisation

C.1 Modélisation de l'hypothèse H1

La figure C.1 donne la modélisation H1, dans le sens chaîne,(a, b (contrôle en déplacement), c et d (contrôle en force)) respectivement.

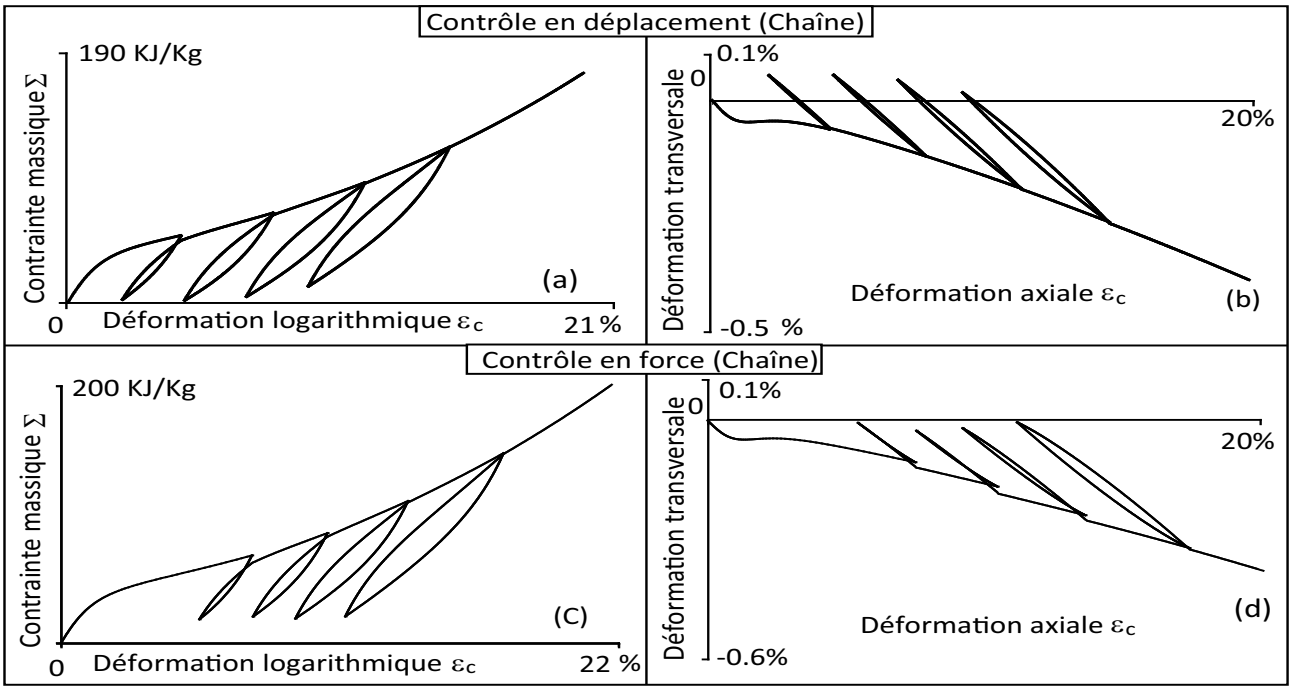


Fig. C.1 – Modélisation en traction ondulée dans le sens chaîne - Modèle H1 : (a et b) contrôle en déplacement, (c et d) contrôle en force.

La figure C.2 donne la modélisation H1, dans le sens trame,(a, b (contrôle en déplacement), c et d (contrôle en force)) respectivement.

La figure C.3 donne la modélisation H1, dans le sens chaîne,de l'essai monotone avec des séquences de relaxation.

La figure C.4 donne la modélisation H1, dans le sens trame,de l'essai monotone avec des séquences de relaxation.

La figure C.5 donne la modélisation H1 des essai en traction monotones hors axes à vitesse

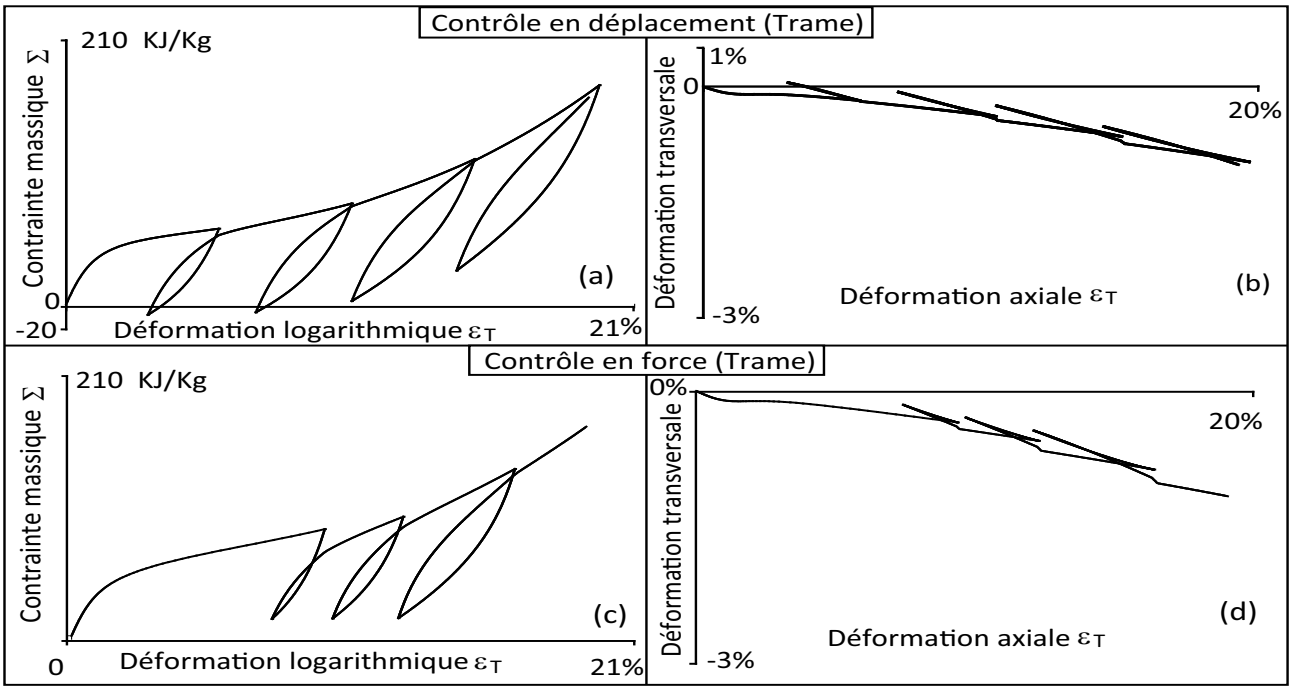


Fig. C.2 – Modélisation en traction ondulée dans le sens trame - Modèle H1 : (a et b) contrôle en déplacement, (c et d) contrôle en force.

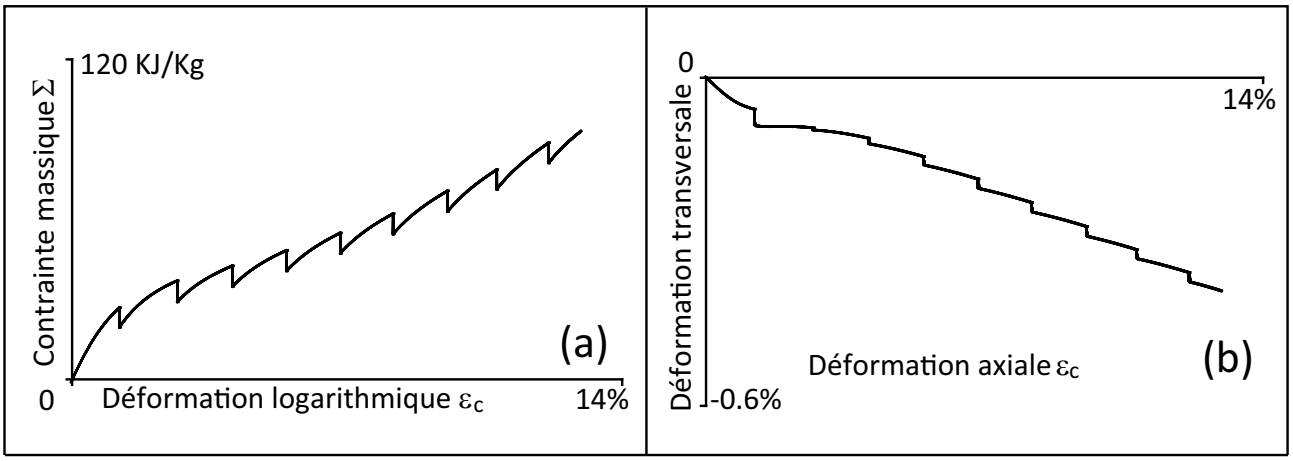


Fig. C.3 – Modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens chaîne - Modèle H1.

de déformation imposée et à des directions hors-axes à 5°, 10°, 15°, 30° et 45°.

La figure C.6 donne la modélisation H1 en traction ondulée ($\theta = 10°$)avec des séquences de relaxation.

La figure C.7 donne la modélisation H1 en traction ondulée sinusoïdale dans le sens biais.

C.2 Modélisation de l'hypothèse H2

La figure C.8 donne la modélisation H2, dans le sens chaîne,(a, b (contrôle en déplacement), c et d (contrôle en force)) respectivement.

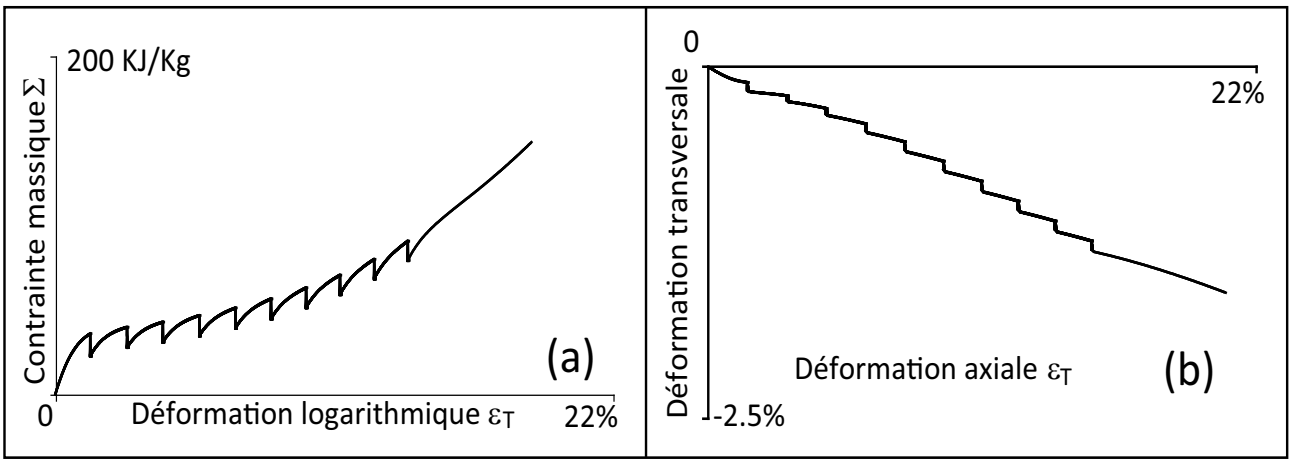


Fig. C.4 – Modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens trame - Modèle H1.

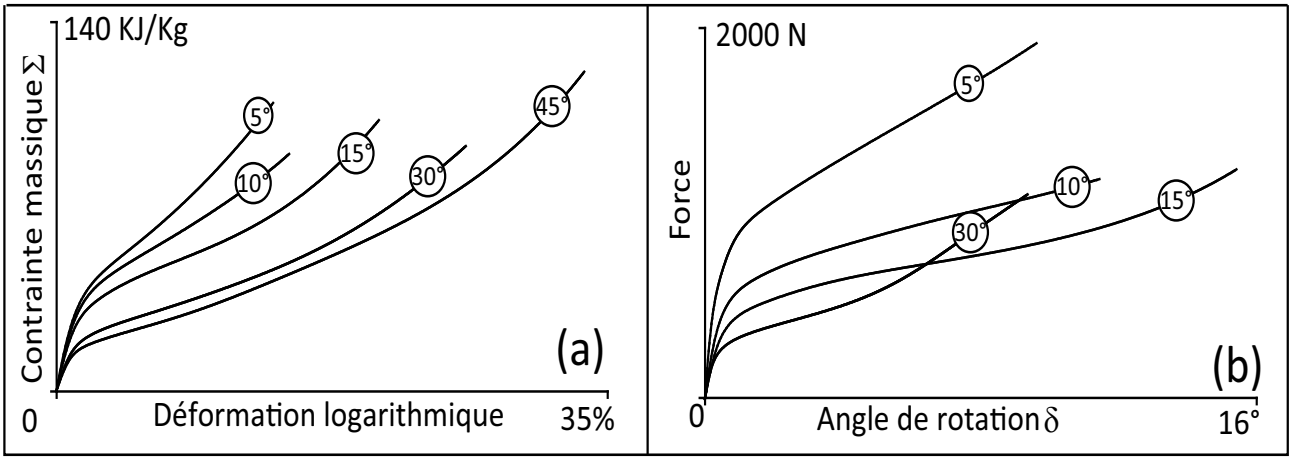


Fig. C.5 – Modélisation en traction hors axes - Modèle H1.

La figure C.9 donne la modélisation H2, dans le sens trame,(a, b (contrôle en déplacement), c et d (contrôle en force)) respectivement.

La figure C.10 donne la modélisation H2, dans le sens chaîne,de l'essai monotone avec des séquences de relaxation.

La figure C.11 donne la modélisation H2, dans le sens trame,de l'essai monotone avec des séquences de relaxation.

La figure C.12 donne la modélisation H2 des essai en traction monotones hors axes à vitesse de déformation imposée et à des directions hors-axes à 5°, 10°, 15°, 30° et 45°.

La figure C.13 donne la modélisation H2 en traction ondulée ($\theta = 10°$)avec des séquences de relaxation.

La figure C.14 donne la modélisation H2 en traction ondulée sinusoïdale dans le sens biais.

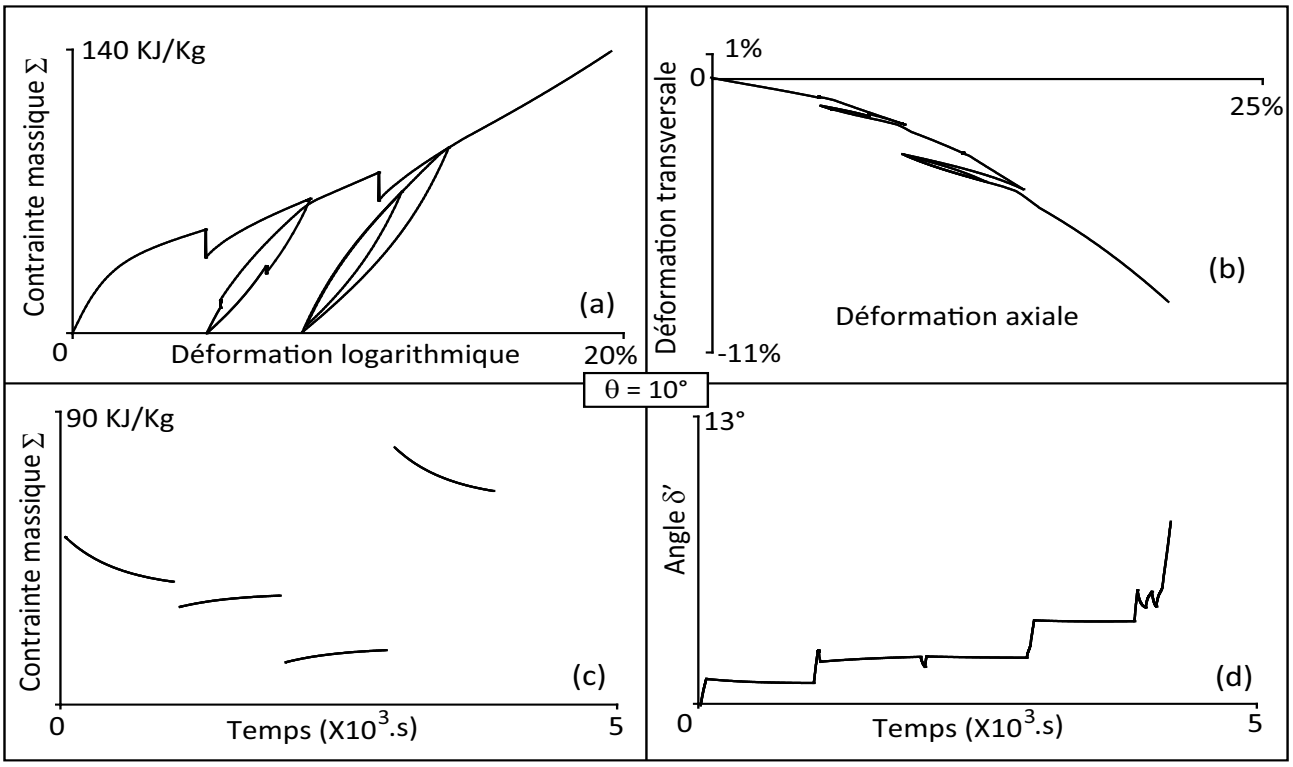


Fig. C.6 – Modélisation en traction ondulée hors axes ($\theta = 10°$) avec des séquences de relaxation - Modèle H1.

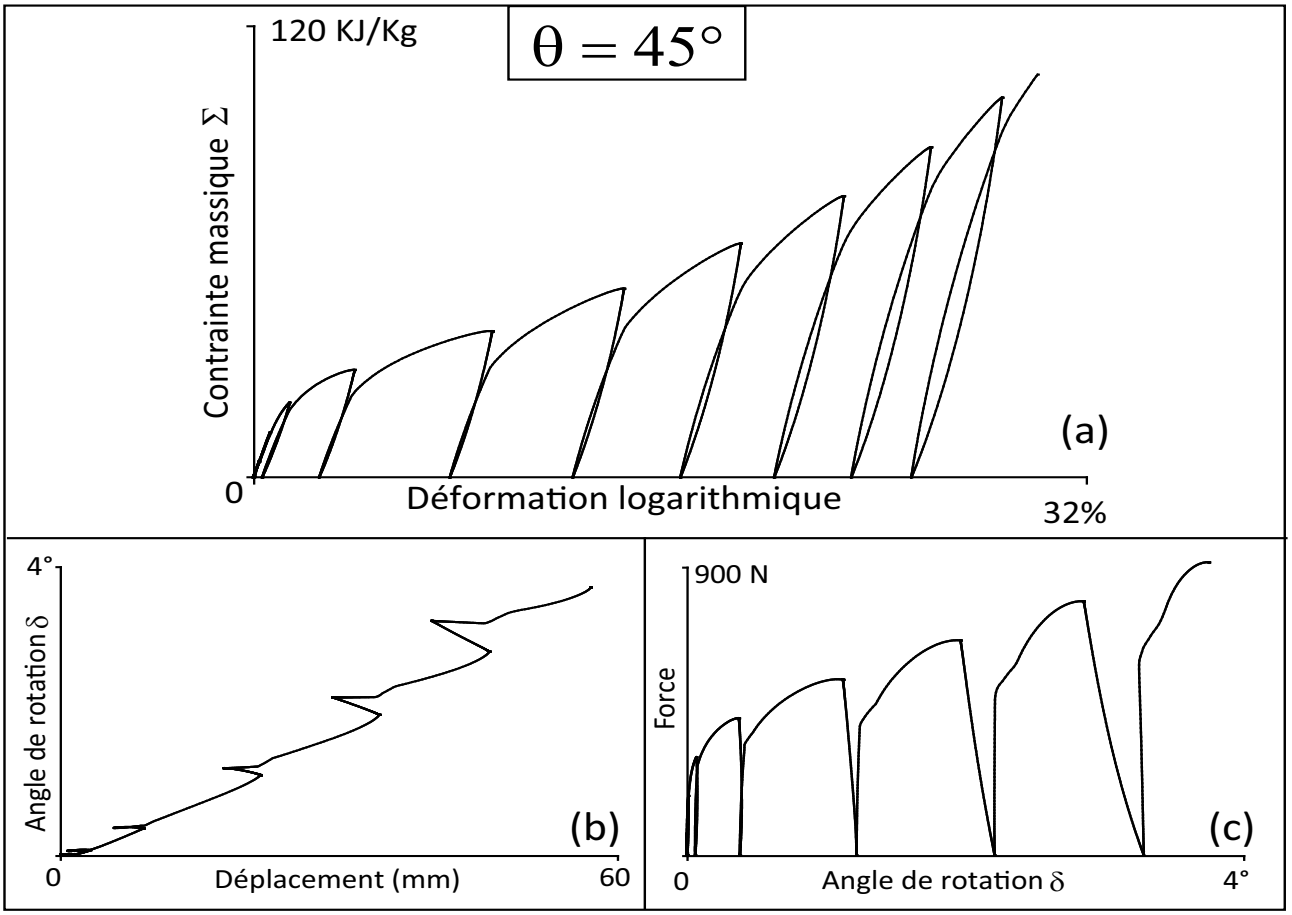


Fig. C.7 – Modélisation en traction ondulée dans le sens biais - Modèle H1.

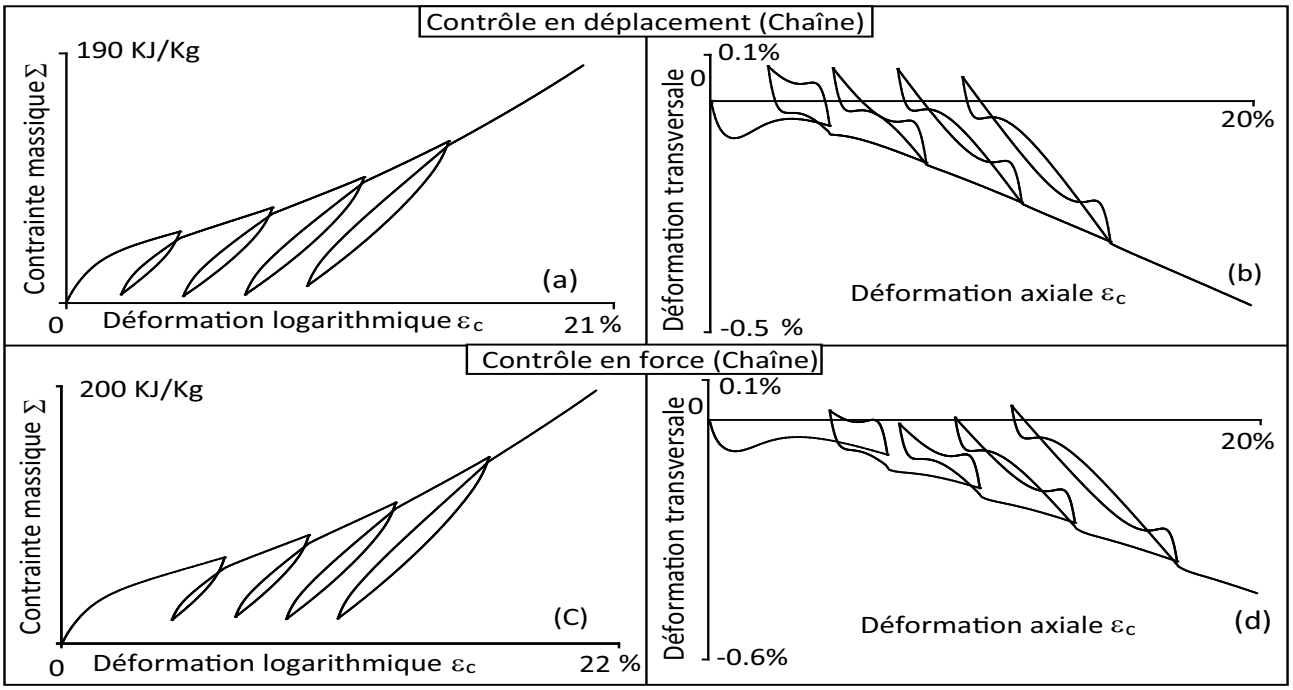


Fig. C.8 – Modélisation en traction ondulée dans le sens chaîne - Modèle H2 : (a et b) contrôle en déplacement, (c et d) contrôle en force.

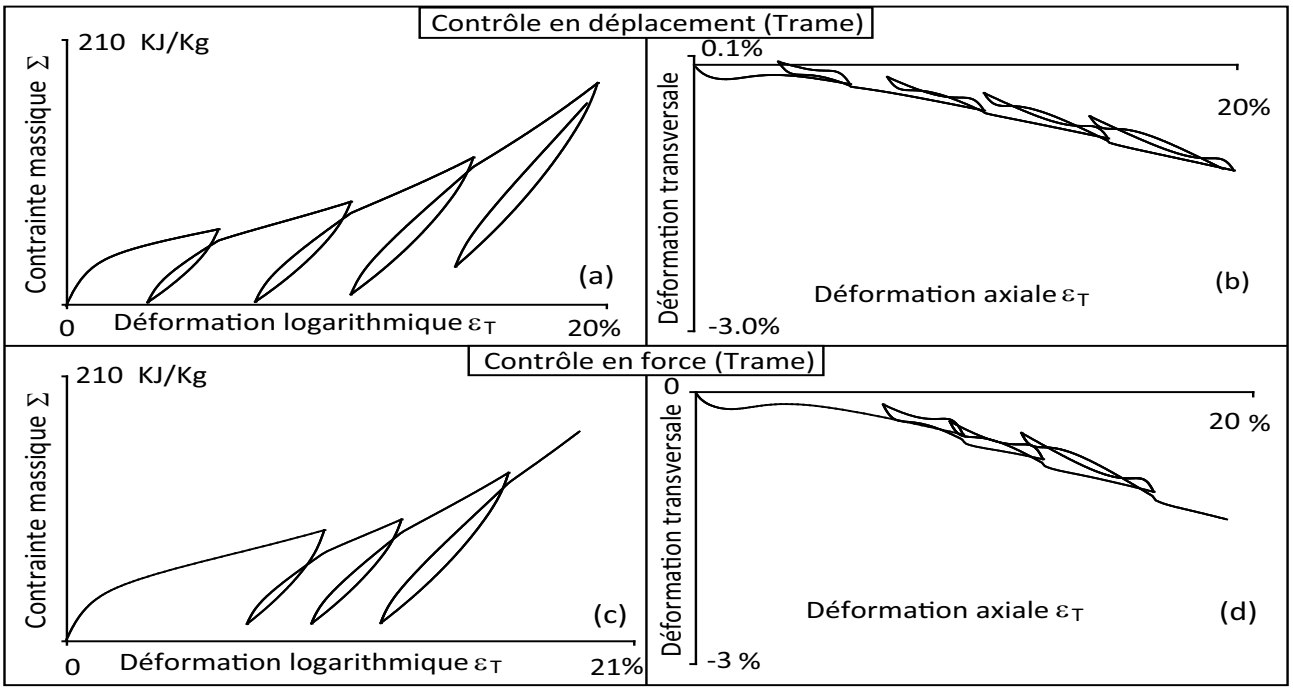


Fig. C.9 – Modélisation en traction ondulée dans le sens trame - Modèle H2 : (a et b) contrôle en déplacement, (c et d) contrôle en force.

C.3 Modélisation de l'hypothèse H3 avec les paramètres provisoires

La figure C.15 donne la modélisation H3 avec les paramètres provisoires, dans le sens chaîne,(a, b (contrôle en déplacement), c et d (contrôle en force)) respectivement.

La figure C.16 donne la modélisation H3 avec les paramètres provisoires, dans le sens trame,(a,

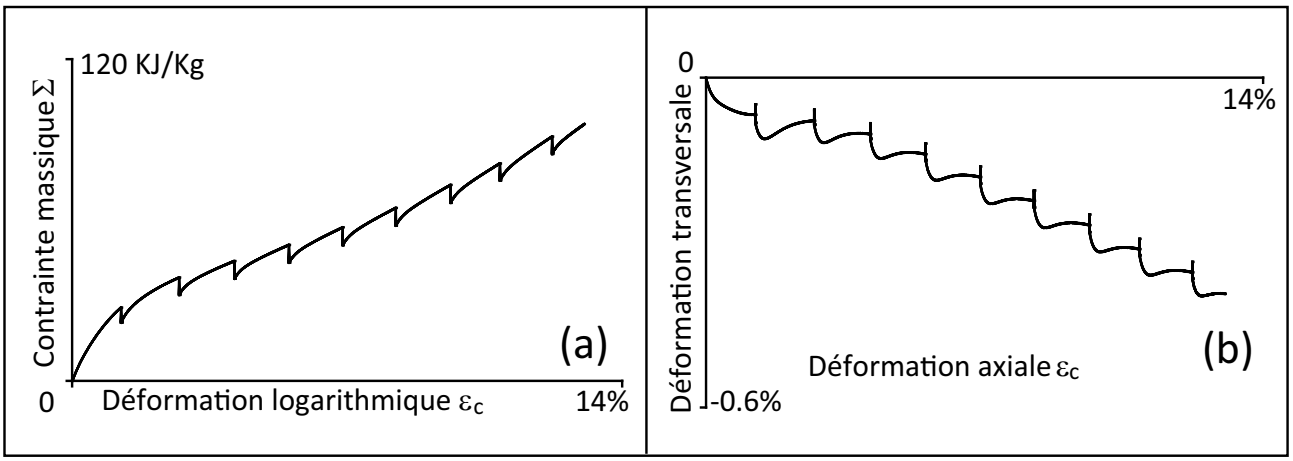


Fig. C.10 – Modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens chaîne - Modèle H2.

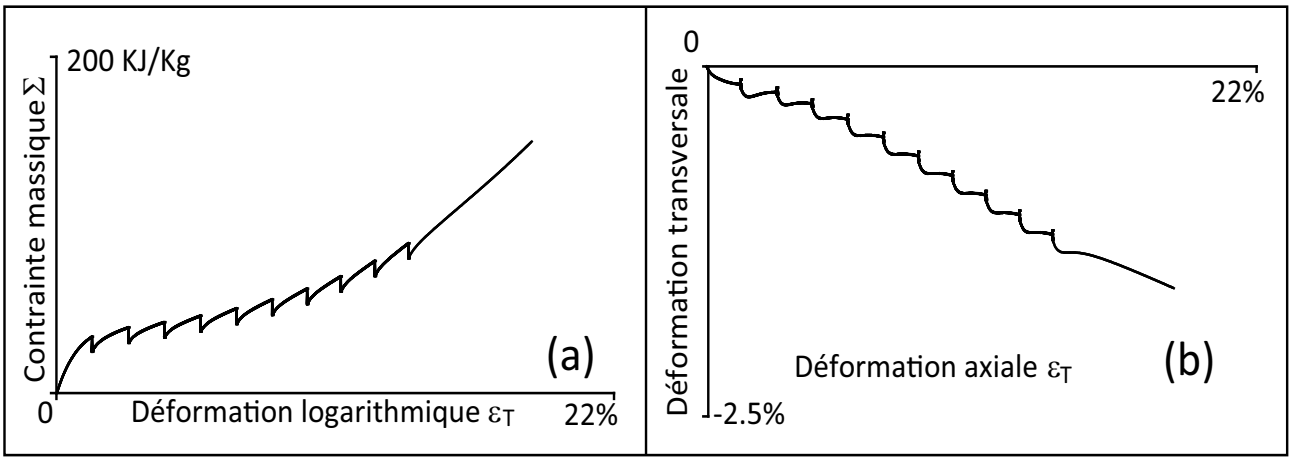


Fig. C.11 – Modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens trame - Modèle H2.

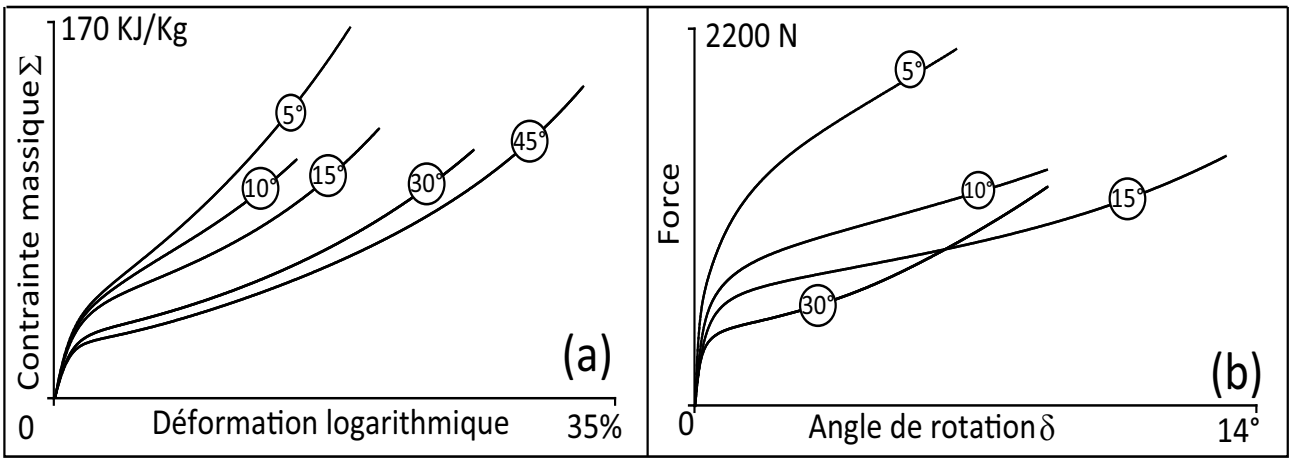


Fig. C.12 – Modélisation en traction hors axes - Modèle H2.

b (contrôle en déplacement), c et d (contrôle en force)) respectivement.

La figure C.17 donne la modélisation H3 avec les paramètres provisoires, dans le sens chaîne,de l'essai monotone avec des séquences de relaxation.

La figure C.18 donne la modélisation H3 avec les paramètres provisoires, dans le sens trame,de

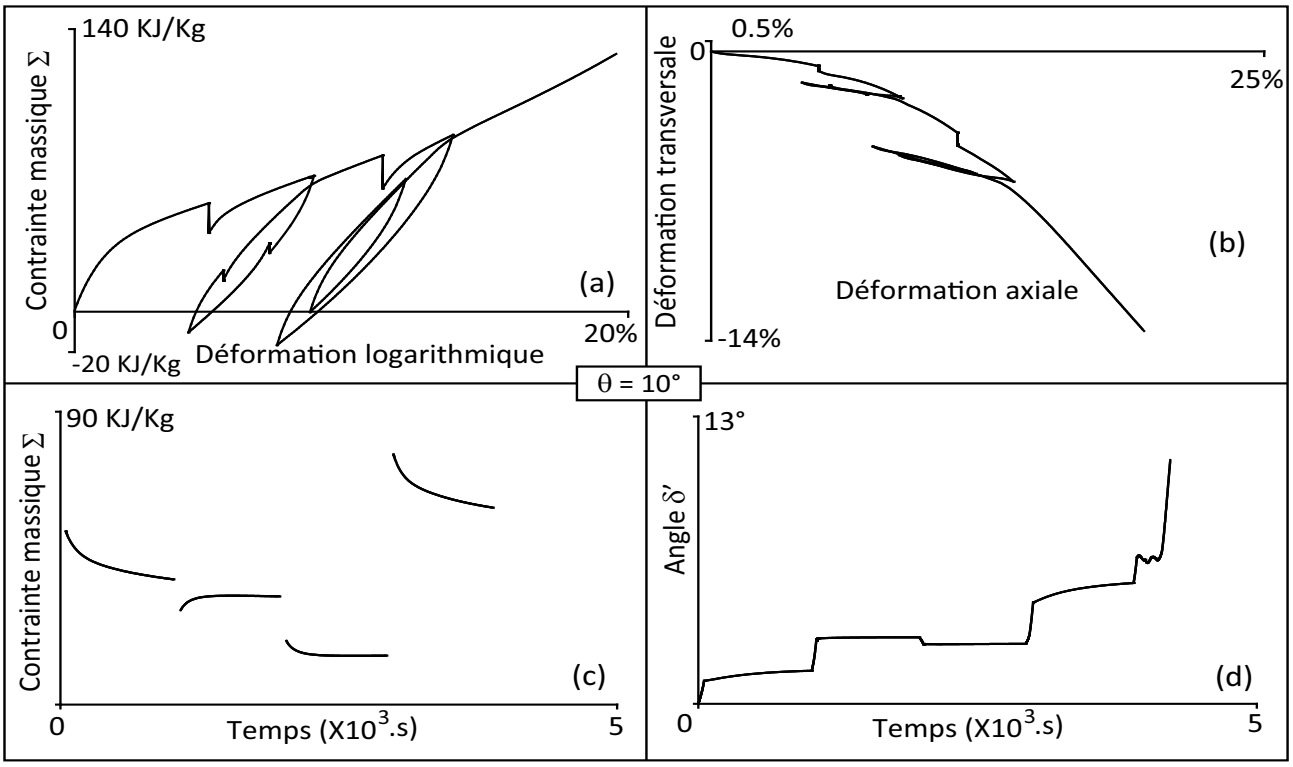


Fig. C.13 – Modélisation en traction ondulée hors axes ($\theta = 10^{\circ}$) avec des séquences de relaxation - Modèle H2.

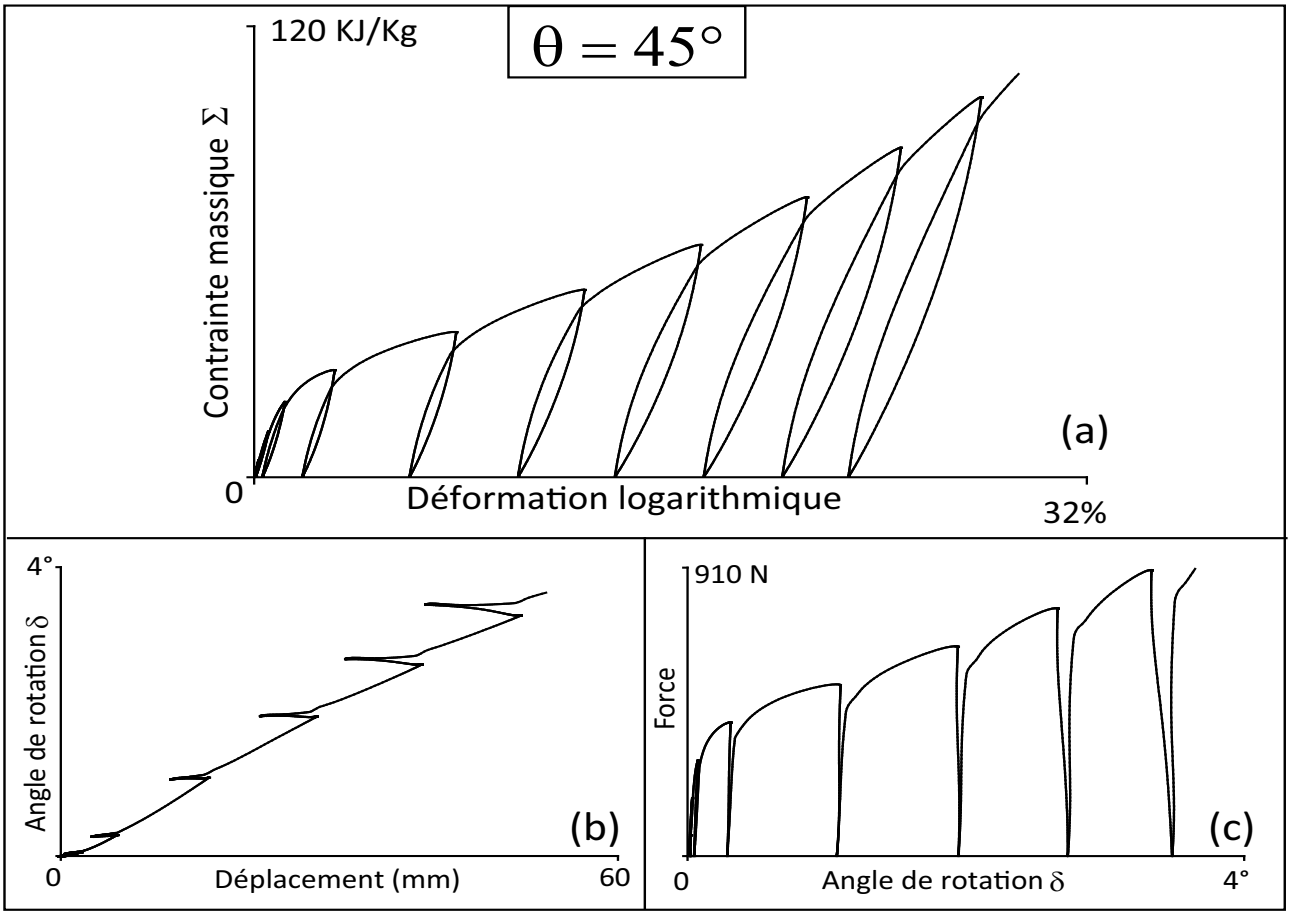


Fig. C.14 – Modélisation en traction ondulée dans le sens biais - Modèle H2.

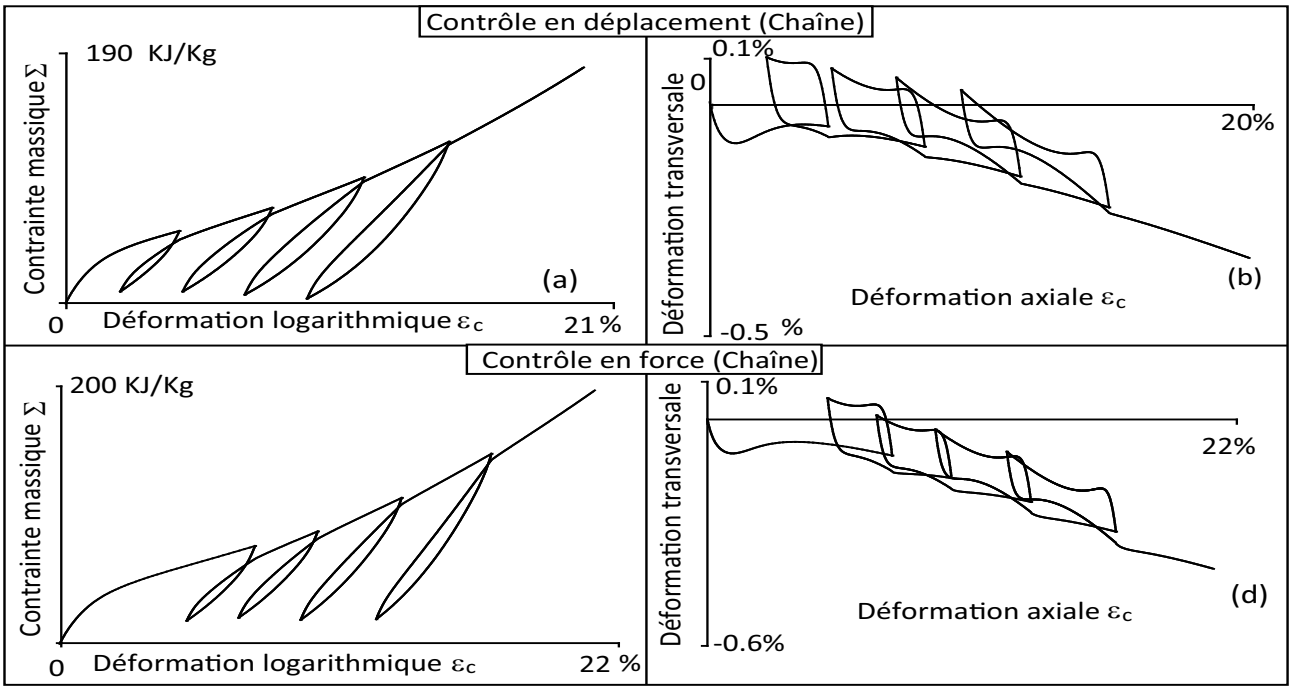


Fig. C.15 – Modélisation en traction ondulée dans le sens chaîne - Modèle H3 avec les paramètres provisoires : (a et b) contrôle en déplacement, (c et d) contrôle en force.

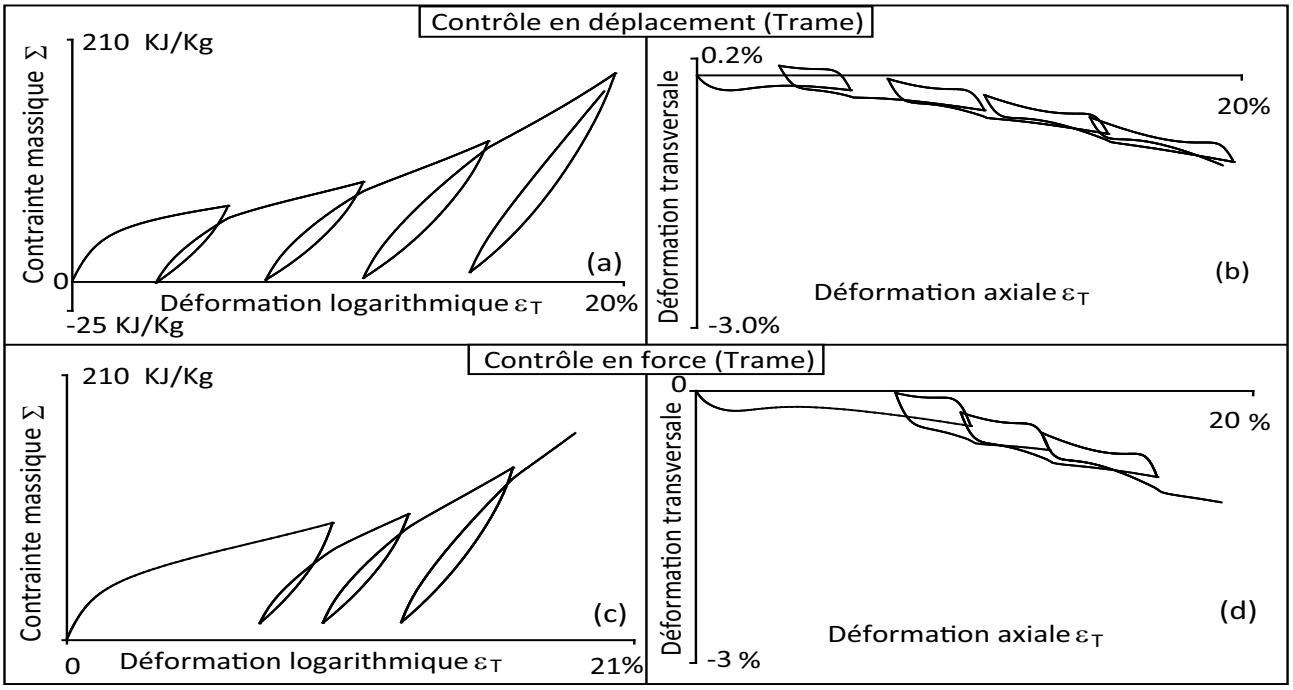


Fig. C.16 – Modélisation en traction ondulée dans le sens trame - Modèle H3 avec les paramètres provisoires : (a et b) contrôle en déplacement, (c et d) contrôle en force.

l'essai monotone avec des séquences de relaxation.

La figure C.19 donne la modélisation,H3 avec les paramètres provisoires, des essai en traction monotones hors axes à vitesse de déformation imposée et à des directions hors-axes à 5°, 10°, 15°, 30° et 45°.

La figure C.20 donne la modélisation H3 avec les paramètres provisoires en traction ondulée ($\theta = 10°$)avec des séquences de relaxation.

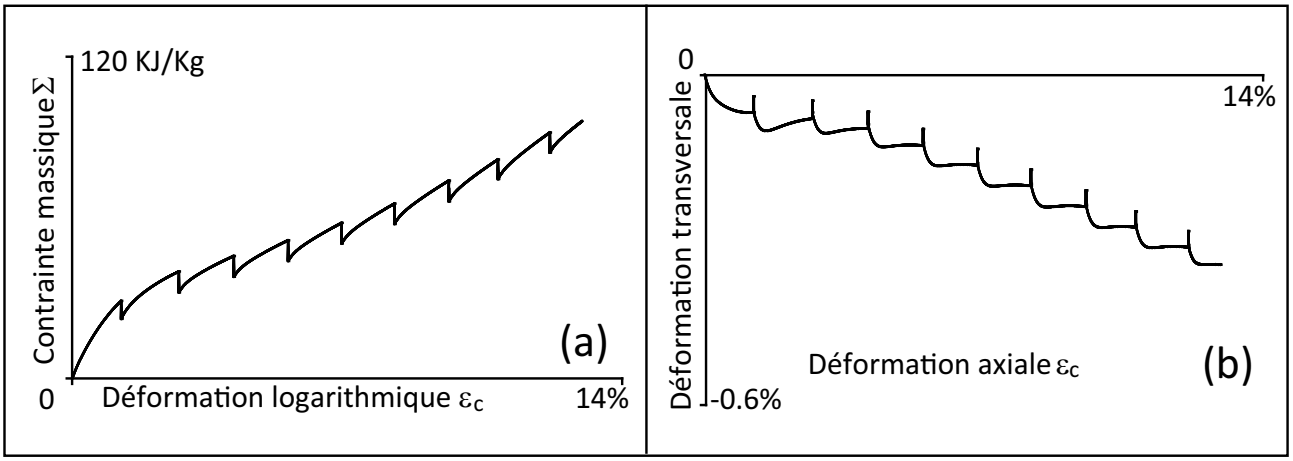


Fig. C.17 – Modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens chaîne - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

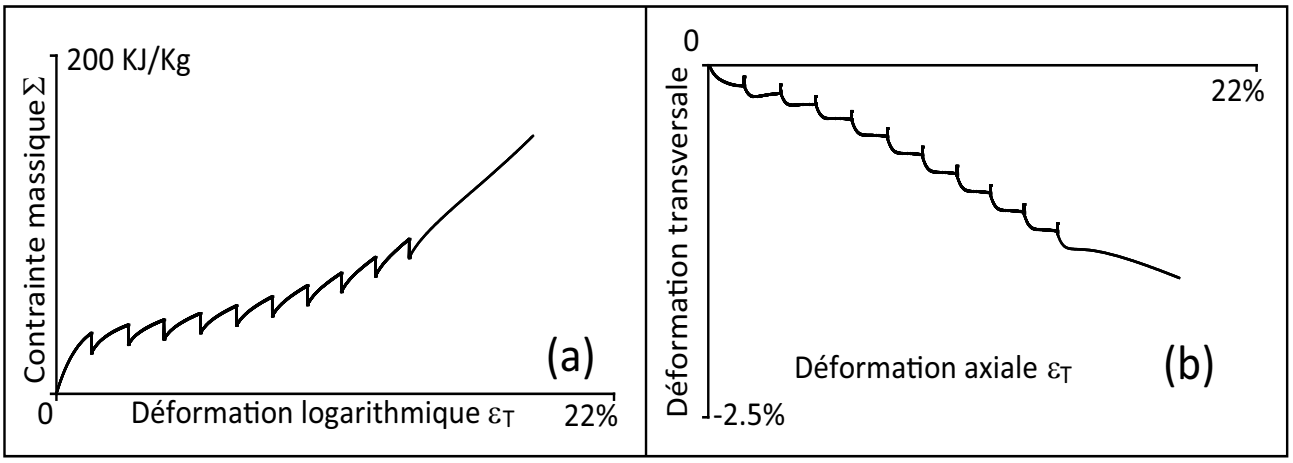


Fig. C.18 – Modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens trame - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

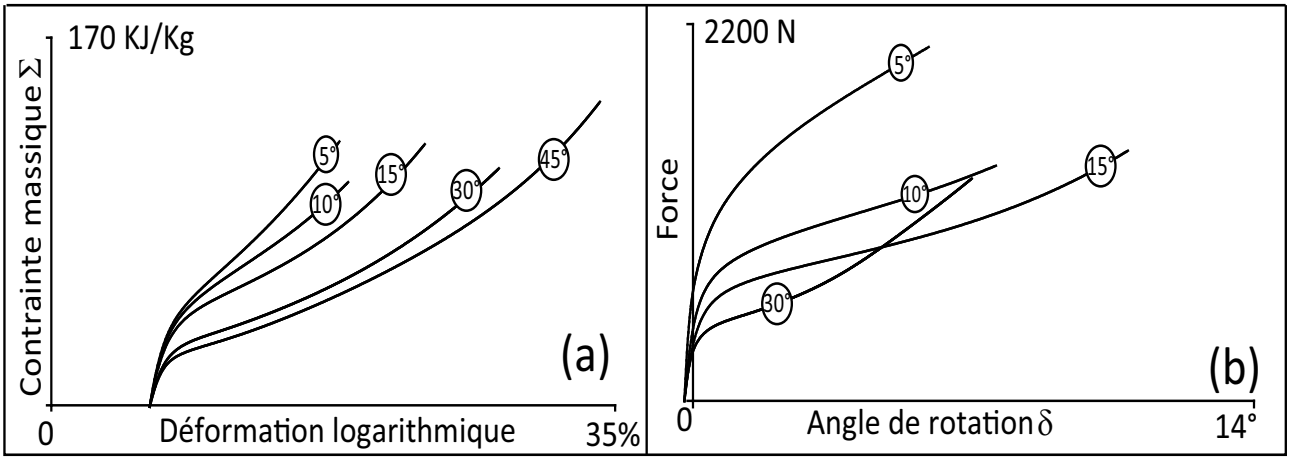


Fig. C.19 – Modélisation en traction hors axes - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

La figure C.21 donne la modélisation H3 avec les paramètres provisoires en traction ondulée sinusoïdale dans le sens biais.

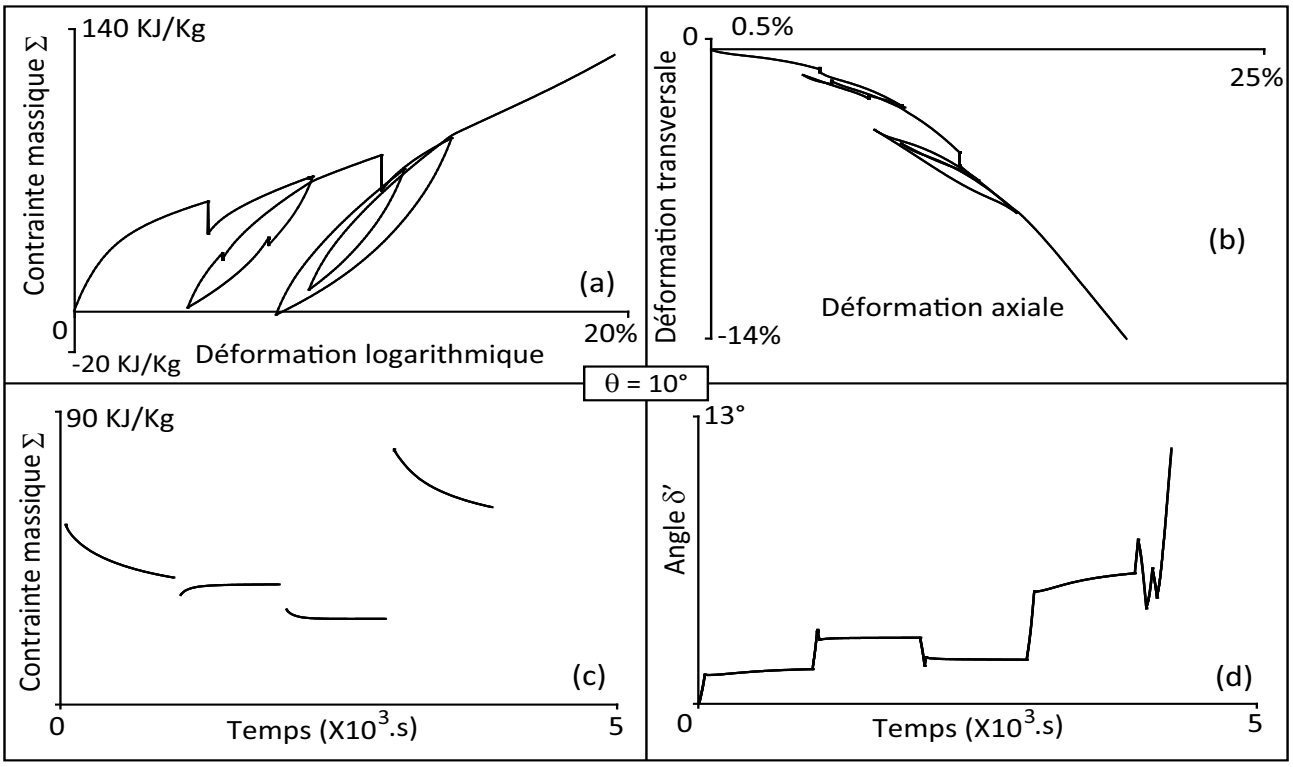


Fig. C.20 – Modélisation en traction ondulée hors axes ($\theta = 10^{\circ}$) avec des séquences de relaxation - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

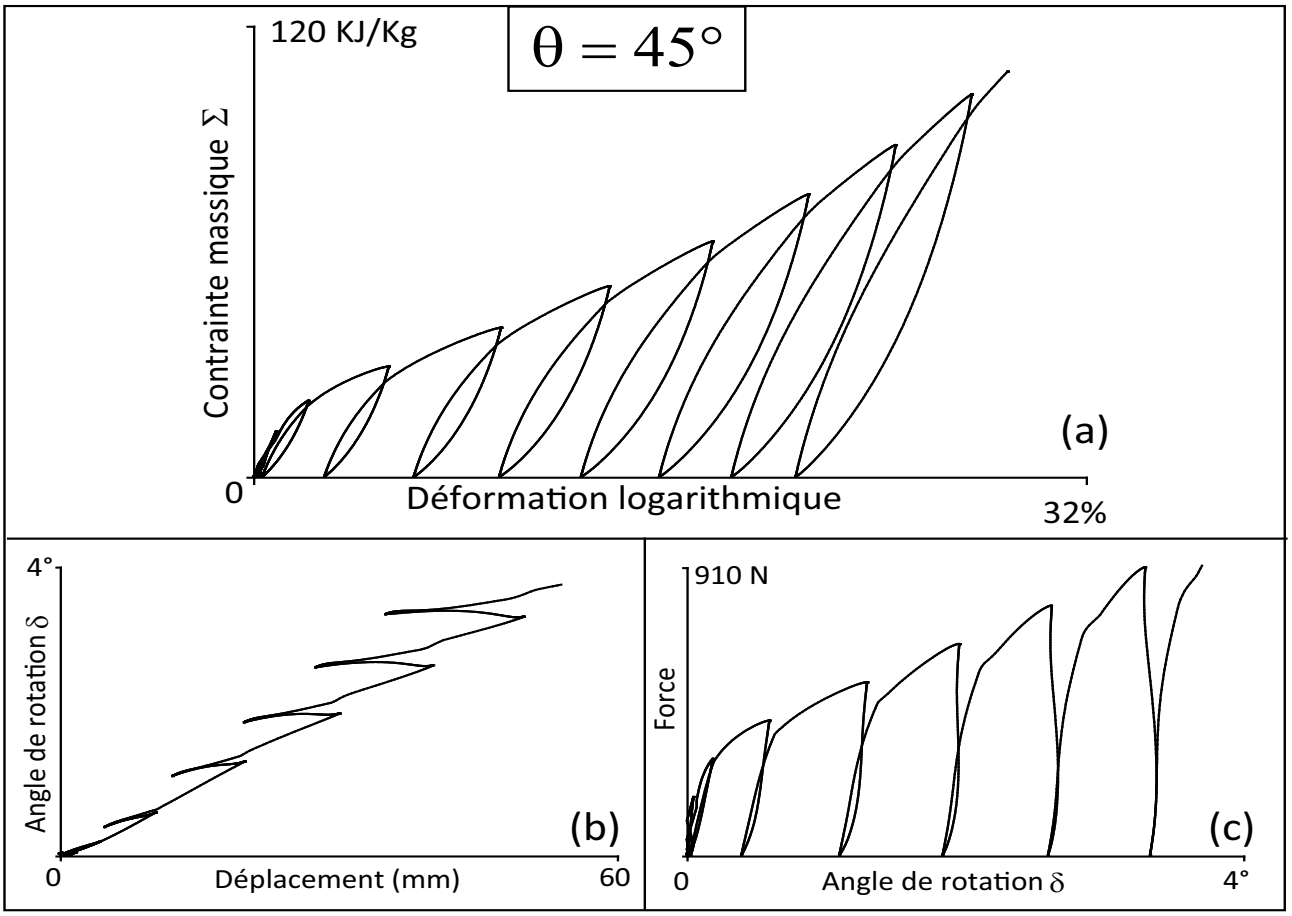


Fig. C.21 – Modélisation en traction ondulée dans le sens biais - Modèle H3 avec les paramètres provisoires.

C.4 Modélisation de l'hypothèse H3 avec les paramètres adoptés

La figure C.22 donne la modélisation H3 avec les paramètres adoptés, dans le sens chaîne,(a, b (contrôle en déplacement), c et d (contrôle en force)) respectivement.

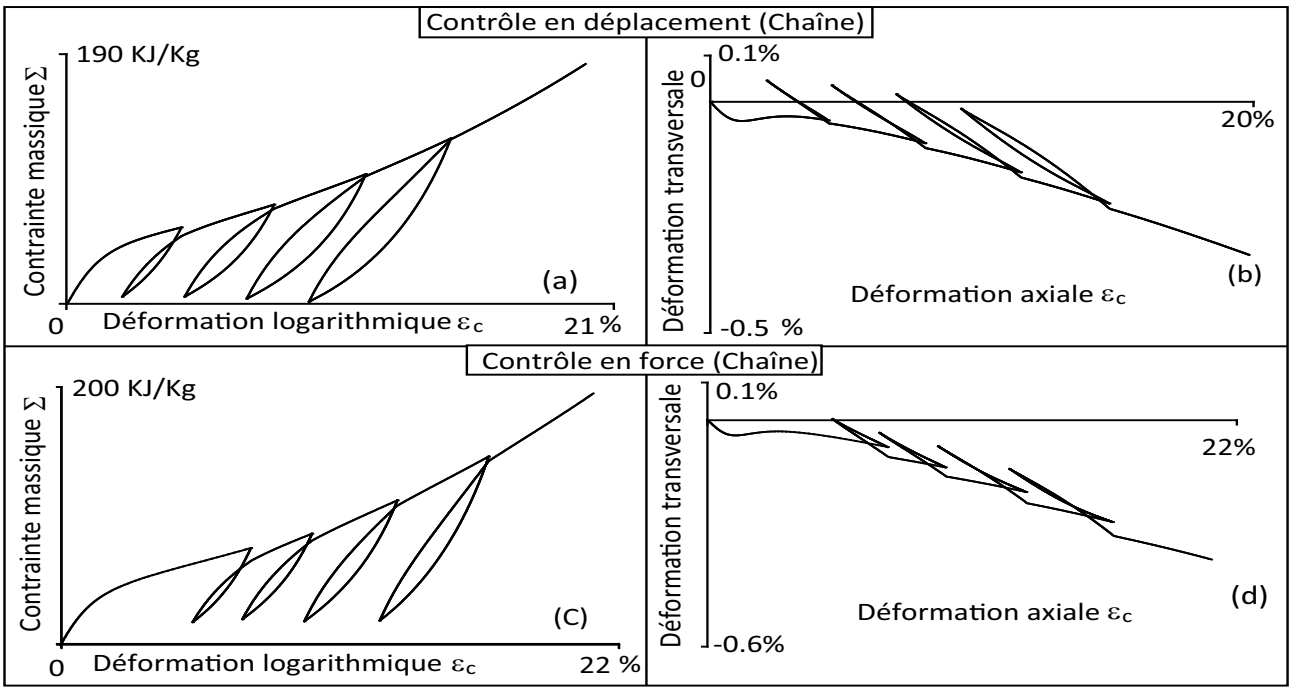


Fig. C.22 – Modélisation en traction ondulée dans le sens chaîne - Modèle H3 avec les paramètres adoptés : (a et b) contrôle en déplacement, (c et d) contrôle en force.

La figure C.23 donne la modélisation H3 avec les paramètres adoptés, dans le sens trame,(a, b (contrôle en déplacement), c et d (contrôle en force)) respectivement.

La figure C.24 donne la modélisation H3 avec les paramètres adoptés, dans le sens chaîne,de l'essai monotone avec des séquences de relaxation.

La figure C.25 donne la modélisation H3 avec les paramètres provisoires, dans le sens trame,de l'essai monotone avec des séquences de relaxation.

La figure C.26 donne la modélisation,H3 avec les paramètres adoptés, des essai en traction monotones hors axes à vitesse de déformation imposée et à des directions hors-axes à 5°, 10°, 15°, 30° et 45°.

La figure C.27 donne la modélisation H3 avec les paramètres adoptés en traction ondulée ($\theta = 10°$)avec des séquences de relaxation.

La figure C.28 donne la modélisation H3 avec les paramètres adoptés en traction ondulée sinusoïdale dans le sens biais.

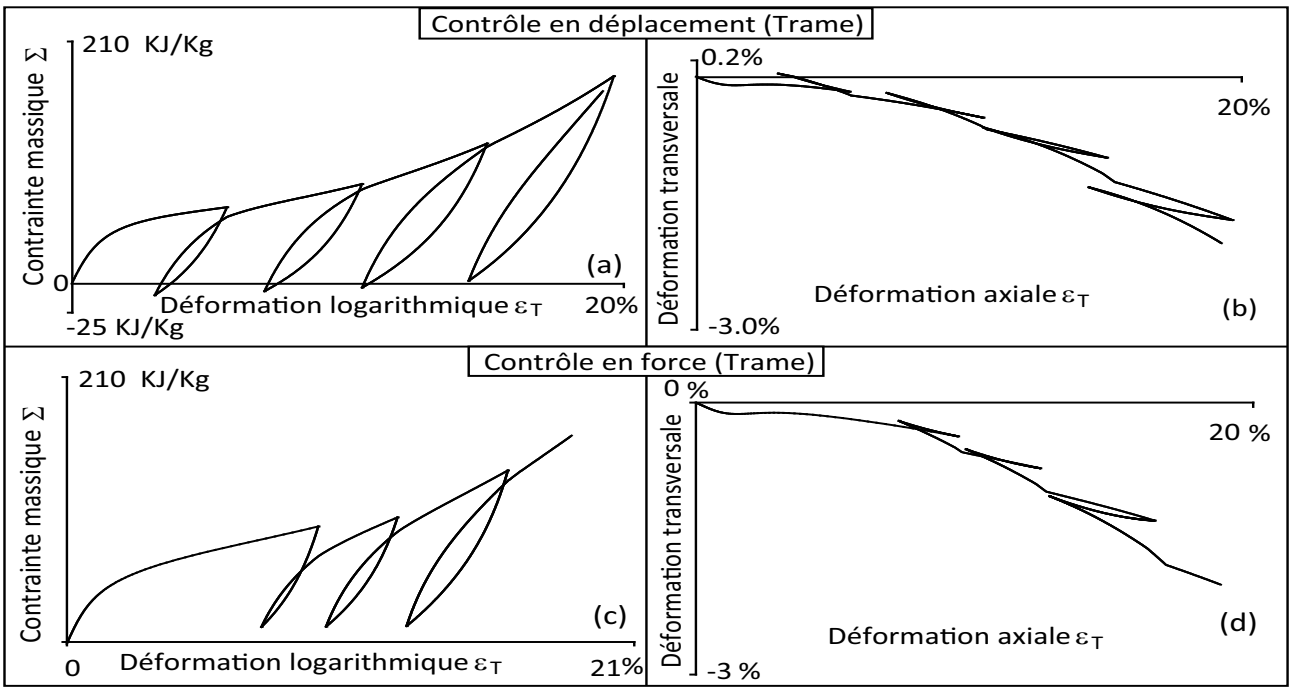


Fig. C.23 – Modélisation en traction ondulée dans le sens trame - Modèle H3 avec les paramètres adoptés : (a et b) contrôle en déplacement, (c et d) contrôle en force.

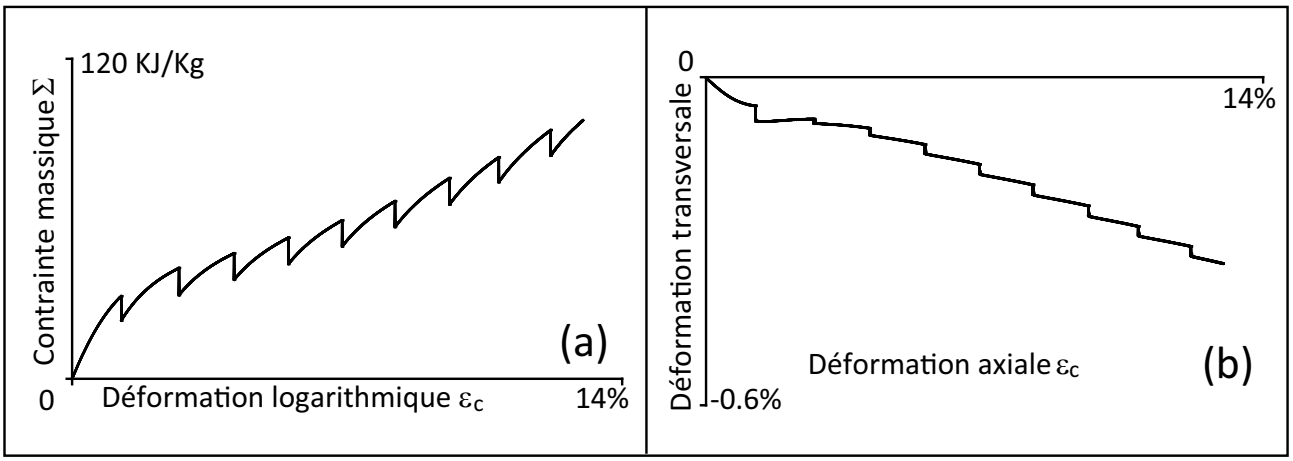


Fig. C.24 – Modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens chaîne - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

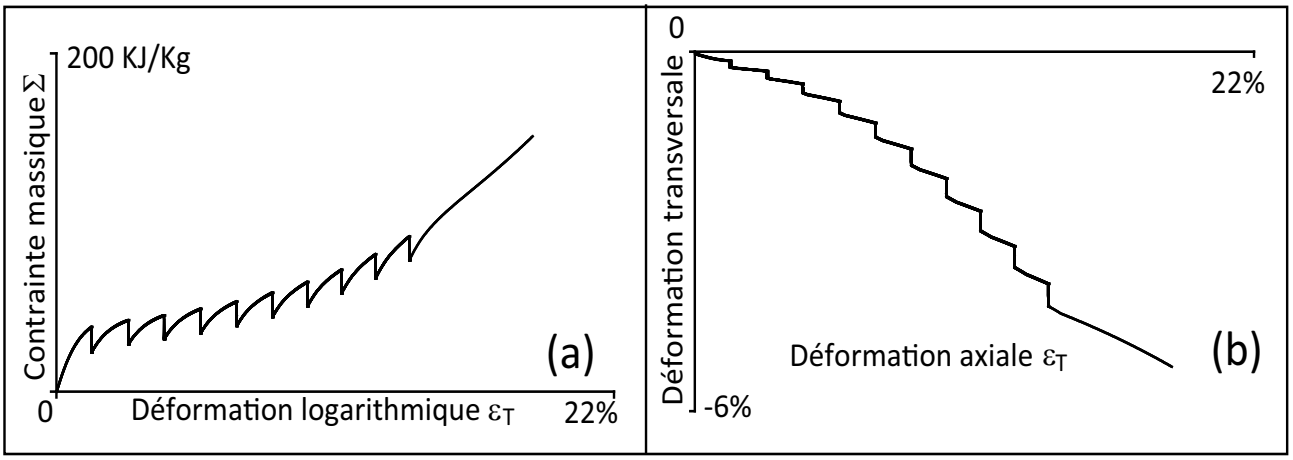


Fig. C.25 – Modélisation en traction monotone avec des séquences de relaxation dans le sens trame - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

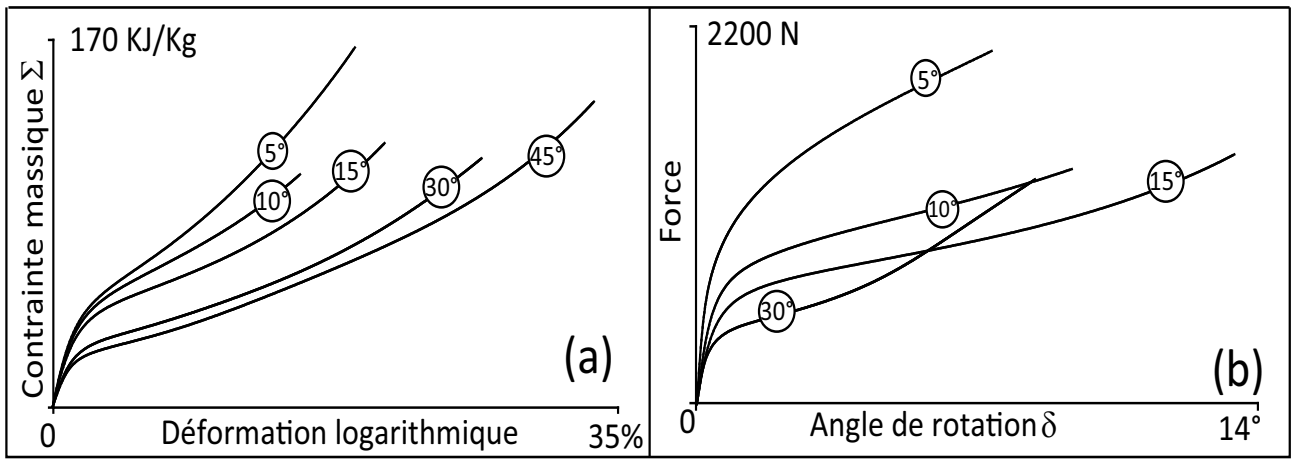


Fig. C.26 – Modélisation en traction hors axes - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

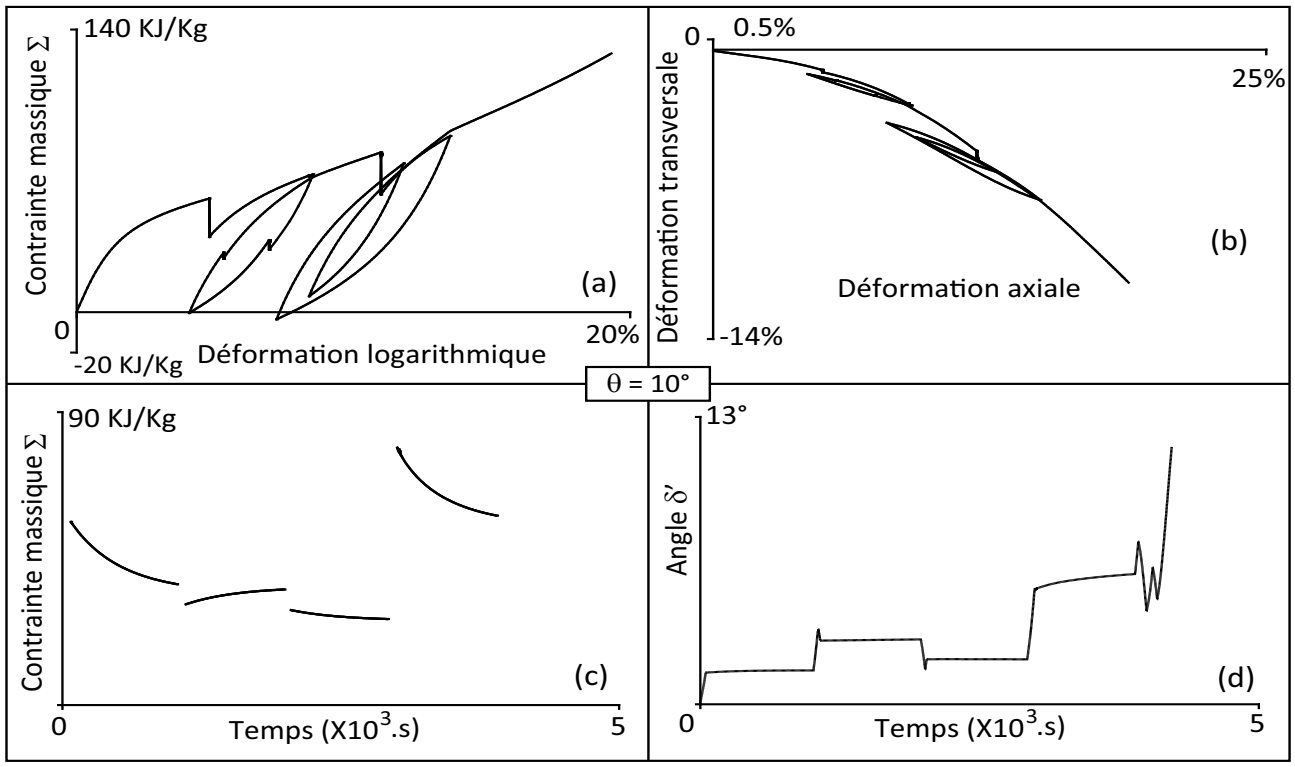


Fig. C.27 – Modélisation en traction ondulée hors axes ($\theta = 10^{\circ}$) avec des séquences de relaxation - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

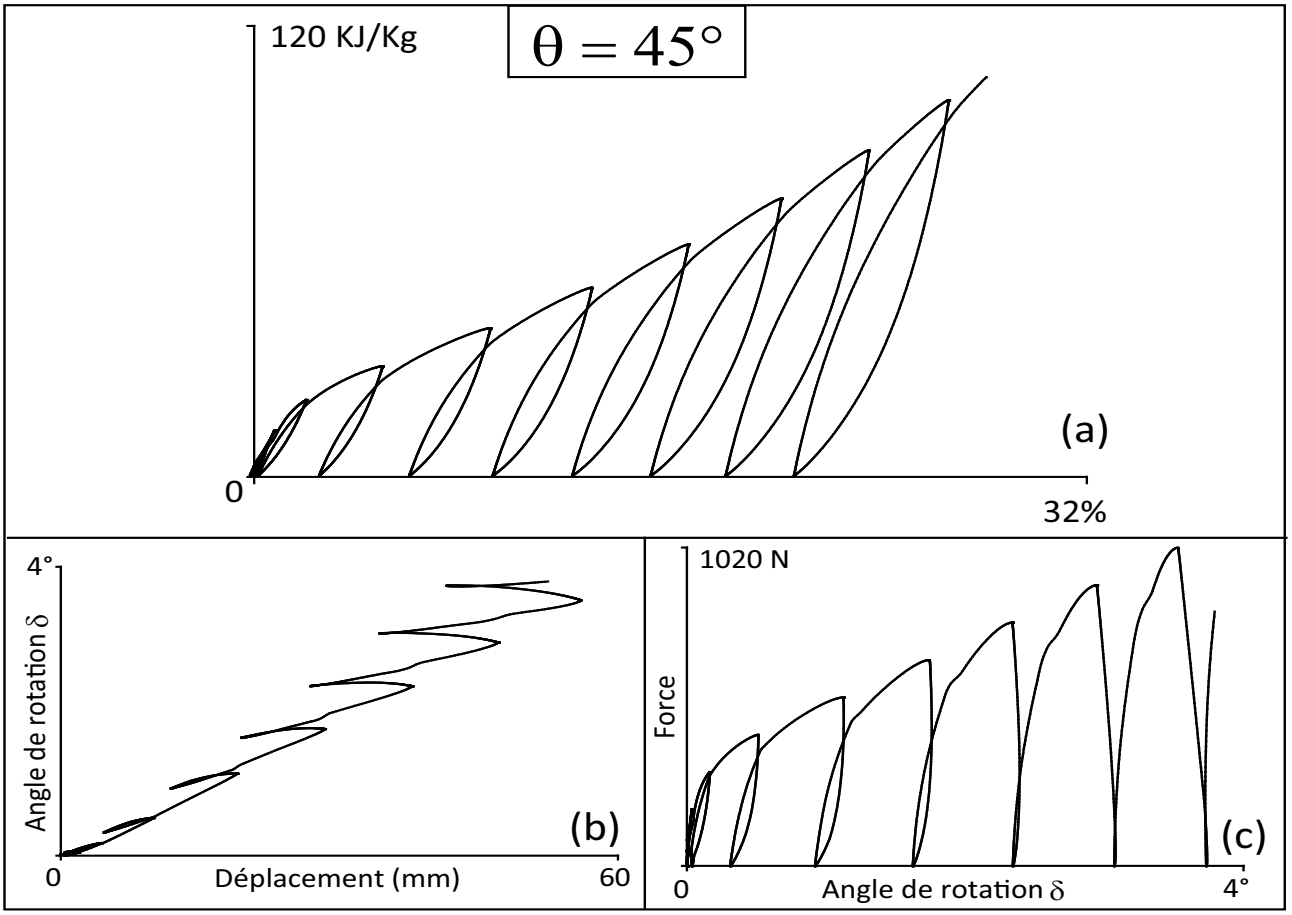


Fig. C.28 – Modélisation en traction ondulée dans le sens biais - Modèle H3 avec les paramètres adoptés.

Bibliographie

[1] L. Aboura, N. Talbi, S. Allaoui, and ML. Benzeggagh. Elastic behavior of corrugated cardboard : experiments and modeling. *Compos Struct*, 63 :53–62, 2003.

[2] Y. Aimene. *Approche hyperélastique pour la simulation des renforts fibreux en grandes transformations*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2007.

[3] K. G. N. C. Alwis and C. J. Burgoyne. Time-temperature superposition to determine the stress-rupture of aramid fibres. *Applied Composite Materials*, 13 :249–264, 2006.

[4] A.F.M.S. Amin, A. Lion, S. Sekita, and Y. Okui. Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear : Experimental identification and numerical verification. *International Journal of Plasticity*, 22 :1610–1657, 2006.

[5] C. Arrieta. *Étude de l'effet du vieillissement sur les propriétés d'un tissu en mélange Kevlar-PBI utilisé dans le revêtement extérieur des habits de protection contre le feu*. PhD thesis, Université du Québec, Montréal, 2011.

[6] E. M. Arruda and M. C. Boyce. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 :389–412, 1993.

[7] R. D. Averett, M. L. Realff, S. Michielsen, and K. I Jacob. The effects of fatigue and residual strain on the mechanical behavior of poly(ethylene terephthalate) unreinforced and nanocomposite fibers. *Composites : Part A*, 40 :709–723, 2009.

[8] R. D. Averett, M. L. Realff, S. Michielsen, and R. W. Neu. Mechanical behavior of nylon 66 fibers under monotonic and cyclic loading. *Composites Science and Technology*, 66 :1671–1681, 2006.

[9] P. Badel. *Analyse mésoscopique du comportement mécanique des renforts tisses de composites utilisant des résultats de tomographie aux rayons X*. PhD thesis, Université de Lyon, 2008.

[10] P. Badel, E. Vidal-Sallé, and P. Boisse. Computational determination of in-plane shear mechanical behaviour of textile composite reinforcements. *Computational Materials Science*, 40 :439–448, 2007.

[11] P. Badel, E. Vidal-Sallé, E. Maire, and P. Boisse. Simulation and tomography analysis of textile composite reinforcement deformation at the mesoscopic scale. *Composites Science and Technology*, 68 :2433–2440, 2009.

[12] E. Baesu. Finite deformations of elastic-plastic filamentary networks. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38 :1473–1479, 2003.

[13] E. Baesu. A class of exact solutions for a 3d filamentary continuous medium. *Computers and Mathematics with Applications*, 53 :317–323, 2007.

[14] J. J. M. Baltussen and M. G. Northolt. A model for the tensile curve with yield of a polymer fibre. *Polymer bulletin*, 36 :125–131, 1996.

[15] J. J. M. Baltussen and M. G. Northolt. The viscoelastic extension of polymer fibres : creep behaviour. *Polymer*, 42 :3835–3846, 2001.

[16] J. J. M. Baltussen and M. G. Northolt. The viscoelastic extension of polymer fibres : complex loadings. *Polymer*, 44 :1957–1966, 2003.

[17] J. J. M. Baltussen and M. G. Northolt. The eyring reduced time model for viscoelastic and yield deformation of polymer fibres. *Polymer*, 45 :1717–1728, 2004.

[18] J. J. M. Baltussen, M. G. Northolt, and R .Van der Hout. The continuous chain model for the elastic extension of polymer fibers in the glassy state. *Journal of rheology*, 41 :549–573, 1997.

[19] S. Banfield and N. Casey. Evaluation of fibre rope properties for offshore mooring. *Ocean Engineering*, 25 :861–879, 1998.

[20] M. Bannister. Challenge for composites into the next millenium, a reinforcement perspective. *Composites Part A*, 32 :901–910, 2001.

[21] S. G. Bardenhagen, M. G. Stout, and G.T. Gray. Three-dimensional, finite deformation, viscoplastic constitutive models for polymeric materials. *Mechanics of Materials*, 25 :235–253, 1997.

[22] M. F. Beatty and S. Krishnaswamy. The mullins effect in equibiaxial deformation. *Z. angew. Math. Phys*, 51 :984–1015, 2000.

[23] P. Bekampiene and J. Domaskiene. Influence of stitching pattern on deformation behaviour of woven fabric during forming. *Materials Science*, 16, 2010.

[24] J. S. Bergstrom and M. C. Boyce. constitutive modeling of the large strain time - depedent behaviour of elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46 :931–954, 1998.

[25] J. S. Bergstrom and M. C. Boyce. Large strain time-dependent behavior of filled elastomers. *Mechanics of Materials*, 2000.

[26] N. Bessert and O. Frederich. Nonlinear airship aeroelasticity. *Journal of Fluids and Structures*, 21 :731–742, 2005.

[27] M.A. Biot. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. *Journal of Applied Physics*, 25 :1385–1391, 1954.

[28] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of Polymeric Liquids.* Wiley, New York, 1977.

[29] D. R. Bland. *The Theory of Linear Viscoelasticity.* Pergamon Press, New York., 1960.

[30] G. Bles. *Bases Thermodynamiques de la Modélisation Du Comportement Des Matériaux Tissés et Des Polymères Solides.* PhD thesis, Université Joseph Fourier, GrenobleI, 2002.

[31] G. Bles, S. P. Gadaj, P. Guelin, W. K. Nowacki, and A. Tourabi. Thermomechanics of viscoplastic large strains of solid polymers. *Archives of Mechanics*, 52 :397–427, 2000.

[32] G. Bles, S. P. Gadaj, W. K. Nowacki, and A. Tourabi. Experimental study of a pa66 solid polymer in the case of shear cyclic loading. *Archives of Mechanics*, 54 :155–174, 2002.

[33] G. Bles, W. K. Nowacki, and A. Tourabi. Experimental study of the cyclic visco-elasto-plastic behaviour of a polyamide fibre strap. *International Journal of Solids and Structures*, 46 :2693–2705, 2009.

[34] G. Bles, Y. Parlier, R. Le Loup, W. Dib, A. Tourabi, J-B. Leroux, and C. Jochum. High tensile stress on fabrics of giant kites :'beyond the sea'project. *Natural Propulsion Seminar (Organized by the dutch institute MARIN), Wageningen : Pays-Bas*, 2012.

[35] A. Bohannan and E. Fahrenthold. Hypervelocity impact simulation using membrane particle-elements. *International Journal of Impact Engineering*, 35 :1497–1502, 2008.

[36] V. Bohe. *Comportement mécanique des tissus à voile.* PhD thesis, Pierre et Marie Curie - Paris, 2005.

[37] P. Boisse. Simulations of woven composite reinforcement forming université de lyon. LaMCoS, INSA, Université de Lyon.

[38] P. Boisse, Y. Aimène, A. Dogui, S. Dridi, S. Gatouillat, N. Hamila, M. Aurangzeb Khan, T. Mabrouki, F. Morestin, and E. Vidal-Sallé. Hypoelastic, hyperelastic, discrete and semi-discrete approaches for textile composite reinforcement forming. *Int J Mater Form*, 3 :S1229–S1240, 2010.

[39] P. Boisse, A. Gasser, and G. Hivet. Analyses of fabric tensiel behaviour : determination of the biaxiale tension-strain surfaces and their use in forming simulations. *Composites : part A*, 32 :1395–1414, 2001.

[40] P. Boisse, B. Zouari, F. Dumont, and A. Gasser. Assemblage de fibres par tissage : analyse et simulation du comportement mécanique. *Mécanique and Industries*, 6 :65–74, 2005.

[41] N. Bouleau. Viscoélasticité et processus de lévy. *Journal of Potential*, 11 :289–302, 1999.

[42] J. R Brown and N. McM. Browne. Envirommental effects on the mecanical properities of high performance fibres. Departement of defence Report MR -R- 674, Australian defence, Scientific service, Materials research laboratories, 1976.

[43] K. Buet-Gautier and P. Boisse. Experimental analysis and modeling of biaxial mechanical behavior of woven composite reinforcements. *Experimental mechanics*, 41 :260–269, 2001.

[44] L. Caramaro. Fibres et fils à usage technique. université Claude-Bernard Lyon-I.

[45] L. Caramaro. Textiles à usage technique. université Claude-Bernard Lyon-I.

[46] J. M. Caruthers, D. B. Adolf, R. S. Chambers, and P. Shrikhande. A thermodynamically consistent, nonlinear viscoelastic approach for modeling glassy polymers. *Polymer*, 45 :4577–4597, 2004.

[47] R. Caruthers and D. Roxburgh. A pseudo-elastic model for the mullins effect in filled rubber. *Proc. R. Soc. London A*, 455 :2861–2877, 1999.

[48] G. Chagnon, E. Verron G. Marckmann, and L. Gornet. Development of new constitutive equations for the mullins effect in rubber using the network alteration theory. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :6817–6831, 2006.

[49] E. Chailleux and P. Davies. Modelling the non-linear viscoelastic and viscoplastic behaviour of aramid fibre yarns. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 7 :291–303, 2003.

[50] E. Chailleux and P. Davies. A non-linear viscoelastic viscoplastic model for the behaviour of polyester fibres. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 9 :147–160, 2005.

[51] A. Charmetant. *Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique de préformes tissées de composites.* PhD thesis, INSA de Lyon, 2011.

[52] K. F. Choi and S. K. Tandon. An energy model of yarn bending. *The Textile Institute JoTi*, 97 :49–56, 2006.

[53] R. M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity : An Introduction.* Academic Press, New York., 1971.

[54] R. M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity : An Introduction.* Academic Press, New York., 1982.

[55] El H. Christiane. *Modélisation du comportement élastique endommageable de matériaux composites à renfort tridimensionnel.* PhD thesis, Université Technologie de Compiegne, 2006.

[56] C. Ciortan and C. G. Soares. Computational study of sail performance in upwind condition. *Ocean Engineering*, 34 :2198–2206, 2007.

[57] J. Coirier and C. Nadot-Martin. *Mécanique des Milieux Continus.* Dunod, Paris, 2007.

[58] H. Crawford, GEng. MIMechE, and L. M. McTernan. Fatigue properties of parafil, dans symposium on engineering applications of parafil ropes. National Engineering Laboratory, London, 1988.

[59] M. DALAL. Chaine de valeur du textile technique en méditerranée porte sur la réalisation d'une étude qui permettra de synthétiser les donnés recueillies lors des précédentes étapes de l'initiative, 2009.

[60] P. Davies, A. R. Bunsell, and E. Chailleux. Tensile fatigue behaviour of pbo fibres. *Journal of Materials Science*, 45 :6395–6400, 2010.

[61] P. Davies, E. Chailleux, A. Bunsell, F. Grosjean, and M. Francois. Prediction of the long term behavior of synthetic mooring lines. *Offshore Technology Conference*, 2003.

[62] P. Davies, M. Francois, F. Grosjean, P. Baron, K. Salomon, and D. Trassoudaine. Synthetic mooring lines for depths to 3000 meters. *Offshore Technology Conference*, 2002.

[63] P. Davies, Y. Reaud, L. Dussud, and P. Woerther. Mechanical behaviour of hmpe and aramid fibre ropes for deep sea handling operations. *Ocean Engineering*, 38 :2208–2214, 2011.

[64] Anne-Marie Decaillot. Géométrie des tissus. mosaïques. echiquiers. mathématiques curieuses et utiles. *Revue d'histoire des mathématiquesg*, 8 :145–206, 2002.

[65] Anne-Marie Decaillot-Laulagnet. *Edouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIXe siécle.* PhD thesis, Université René Descarte-Paris V, 1999.

[66] G. Derombise, E. Chailleux, B. Forest, L. Riou, N. Lacotte, L. Vouyovitch Van Schoors, and P. Davies. Long-term mechanical behavior of aramid fibers in seawater. *Polymer Engineering and Science*, 51 :1366–1375, 2011.

[67] W. Dib, G. Bles, and A. Tourabi. Viscoelatoplastic cyclic behaviour of sail materials : constitutive model and associated testing methods. *The second International Conference on Innovation in High Performance Sailing Yachts, Royal Institution of Naval Architects - RINA, Lorient, Francthe Royal Institution of Naval Architects - RINAe, June - July 2010 - 2010*, 2010.

[68] Dimension-Polyant. Code zero, document technique de dimension-polyant. France.

[69] Dimension-Polyant. D4® custom load path sail laminates, document technique de dimension-polyant. France.

[70] Dimension-Polyant. Flex® aramid race, document technique de dimension-polyant. France.

[71] Dimension-Polyant. Gpl graphx®, document technique de dimension-polyant. France.

[72] Dimension-Polyant. Htp® plus, document technique de dimension-polyant. France.

[73] Dimension-Polyant. Tissé polyester strong fill (sf), document technique de dimension-polyant. France.

[74] F. Dimier. *Injection de systémes réactifs : détermination de lois cinétique et rhéologiques et modélisation.* PhD thesis, L'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003.

[75] S. Dridi. *Essai de caractérisation des structures tissées.* PhD thesis, Université de Lyon, 2010.

[76] Z. Du and W. Yu. Analysis of bending properties of worsted wool yarns and fabrics based on quasi-three-point bending. *The Textile institute JoTi*, 96 :389–399, 2005.

[77] D. Falconnet, PE. Bourban, S. Pandita, J-AE. Manson, and I. Verpoest. Fracture toughness of weft-knitted fabric composites. *Composites Part B : Engineering*, 33, 2002.

[78] W. N. Findley. Product form of kernel functions for nonlinear viscoelasticity of pvc under constant rate stressing. *Trans. Soc. Rheol*, 12 :217–242, 1968.

[79] W. Flagge. *Viscoelasticity.* Blaisdel Publishing Company., 1967.

[80] S. R. Ghoreishi, P. Cartraud, P. Davies, and T. Messager. Analytical modeling of synthetic fiber ropes subjected to axial loads. part I : A new continuum model for multilayered fibrous structures. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :2924–2942, 2007.

[81] S. R. Ghoreishi, P. Davies, P. Cartraud, and T. Messager. Analytical modeling of synthetic fiber ropes. part ii : A linear elastic model for 1 + 6 fibrous structures. *International Journal of Solids and Structures*, 44 :2943–2960, 2007.

[82] T. K. Ghosh, S. K. Batra, and R. L. Barker. The bending behaviour of plain-woven fabrics part i : A critical review. *Journal of The Textile Institute*, 81 :245–254, 1990.

[83] B. Gommers, I. Verpoest, and P. Houtte. Analysis of knitted fabrice reinforced composites : Part i, fibre orientation distribution. *Composite part A*, 29 :1579–1588, 1988.

[84] K. Graf and H. Renzsch. Ranse investigations of downwind sails and integration into sailing yacht design processes, 2nd high performance yacht. *Design Conference, Auckland, 14-16 February*, 2006.

[85] B. Hagege. *Simulation du comportement mécaniques des milieux fibreux en grandes transformations : Application aux renforts tricotes.* PhD thesis, Paris, 2004.

[86] N. Hamila. *Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multi plis.* PhD thesis, Université de Lyon, 2007.

[87] R. E. Hobbs and C. J. Burgoyne. Bending fatigue in high-strength fibre ropes. *int J fatigue*, 13 :174–180, 1991.

[88] G. A. Holzapfel and T. C. Gasser. A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains : Continuum basis, computational aspects and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 190 :4379–4403, 2001.

[89] C. O. Horgan, Ray. W. Ogden, and G. Saccomandi. A theory of stress softening of elastomers based on finite chain extensibility. *The Royal Society.Matimatical, Physical and Engineering sciences*, 460 :1737–1754, 2004.

[90] Incidences. Incidences sails, http ://www.incidences-sails.com, site web de la voilerie incidences. Brest, France.

[91] P. Jearanaisilawong. Investigation of deformation and failure mechanisms in woven and nonwoven fabrics under quasi-static loading conditions. Massachusette Institute of Technology, Master of Science in Mechanical Engineering, 2004.

[92] S. Kato, T. Yoshino, and H. Minami. Formulation of constitutive equations for fabric membranes based on the concept of fabric lattice model. *Engineering Structures*, 21 :691–708, 1999.

[93] M. C. Kenney, J. F. Mandell, and F. J. Mcgarry. Fatigue behaviour of synthetic fibres, yarns, and ropes. *Journal of materials science*, 20 :2045–2059, 1985.

[94] A. Khalifeh and J. R. Clermont. Courbes caractéristiques débit-pression d'une extrudeuse monovis pour des fluides non-newtoniens par des simulations numériques tridimensionnelles. *Rhéologie*, 18 :44–50, 2005.

[95] M. A. Khan. *Analyse numérique et expérimentale de la mise en forme des renforts de composite textiles besee sur un comportement hypoelastique.* PhD thesis, Université de Lyon, 2009.

[96] M. A. Khan, T. Mabrouki, E. Vidal-Sallé, and P. Boisse. Numerical and experimental analyses of woven composite reinforcement forming using a hypoelastic behaviour. application to the double dome benchmark. *Journal of Materials Processing Technology*, 210 :378–388, 2010.

[97] M. J. King, P. Jearanaisilawong, and S. Socrate. A continuum constitutive model for the mechanical behavior of woven fabrics. *International Journal of Solids and Structures*, 42 :3867–3896, 2005.

[98] C. P. Koh, V. P. W. Shim, V. B. C. Tan, and B. L. Tan. Response of a high-strength flexible laminate to dynamic tension. *International Journal of Impact Engineering*, 35 :559–568, 2008.

[99] E. N. Kuznetsov. Kinetoelastostatics of axisymmetric nets. *Journal of Applied Mechanics*, 35 :891–896, 1986.

[100] M. H. Lafitte and A. R. Bunsell. The fatigue behaviour of kevlar-29 fibres. *Journal of matérials science*, 17 :2391–2397, 1982.

[101] W. C. Lasher and J. R. Sonnenmeier. An analysis of practical rans simulations for spinnaker aerodynamics. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 96 :143–165, 2008.

[102] W. C. Lasher, J. R. Sonnenmeier, D. R. Forsman, and J. Tomcho. The aerodynamics of symmetric spinnakers. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 93 :311–337, 2005.

[103] M. S. Lazer, F. Léné, and N. Turbé. Modelling and optimization of sails. *Computers and Structures*, 86 :1486–1493, 2008.

[104] Q. V. LE. *Modélisation multi-échelle des matériaux viscoélastiques hétérogènes. Application à l'identification et à l'estimation du fluage propre de béton d'enceintes de centrale nucléaires.* PhD thesis, Université Paris - Est, 2008.

[105] F. le Peng, Fu lin Li, Y. Tan, and W. Kongkitkul. A rate-dependent constitutive model for polymer geosynthetics. *Mechanics Research Communications*, 37 :384–388, 2010.

[106] G. A. V. Leaf. The friction couple in yarn bending. *Journal of The Textile Institute*, 86 :45–54, 1995.

[107] C. LECHAT. *Comportement mécanique de fibres et d'assemblages de fibres en polyester pour cables d'amarrage de plates-forme offshore.* PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2007.

[108] W. Lee, J. Padvoiskis, J. Cao, E. De Luycker, P. Boisse, F. Morestin, J. Chen, and J. Sherwood. Bias-extension of woven composite fabrics. *International Journal of Mater Form*, 1 :895–898, 2008.

[109] Young S. Lee, E. D. Wetzel, and N. J. Wagner. The ballistic impact characteristics of kevlar woven fabrics impregnated with a colloidal shear thickening fluid. *Journal of materials science*, 38 :2825–2833, 2003.

[110] C.M. Leech. The modelling of friction in polymer fibre ropes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44 :621–643, 2002.

[111] J. Lemaitre and J. Chaboche. *Mécanique des Matériaux Solides.* Ed. Dunod, 1993.

[112] KH. Leong, S. Ramakrishna, and ZM. Huang. The potential of knitting for engineering composites. *Composite part A*, 31 :197–220, 2000.

[113] Fu-Lin Li, Fang-Le Peng, Yong Tan, W. Kongkitkul, and M.S.A. Siddiquee. Fe simulation of viscous behavior of geogrid-reinforced sand under laboratory-scale plane-strain-compression testing. *Geotextiles and Geomembranes*, 31 :72–80, 2012.

[114] A. Lion. A constitutive model for carbon black filled rubber : Experimental investigations and mathematical representation. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 8 :153–169, 1996.

[115] A. Lion and A. Kardelky. The payne effect in finite viscoelasticity : constitutive modeling based on fractional derivatives and intrinsic time scales. *Int. J. Plasticity*, 20 :1313–1345, 2004.

[116] R. G. Livesey and J. D. Owen. Journal of the textile institute transactions. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 55, 1964.

[117] S. V. Lomov, P. Boisse, E. De Luycker, F. Morestin, K. Vanclooster, D. Vandepitte, I. Verpoest, and A. Willems. Full-field strain measurements in textile deformability studies. *Composites : Part A*, 39 :1232–1244, 2008.

[118] A. Lopez, I. Despret, M. Penta, J. Malchaire, and J.L. Thonnard. Caractéristiques à requérir pour les vêtements de protection contre la chaleur et les produits toxiques. *Revenu de medcine du travail*, 24 :35–42, 1997.

[119] G. Losilla. *Etude théorique de l'écrouissage anisotrope des métaux et caractérisation Expérimentale d'une tôle laminée en traction biaxiale directe.* PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble1, 2001.

[120] V. A. Lubarda, D. J. Benson, and M. A. Meyers. Strain-rate effects in rheological models of inelastic response. *Int. J. Plasticity*, 19 :1097–1118, 2003.

[121] E. De Luycker. *Simulation et expérimentation en mise en forme de renforts composites 3D interlocks.* PhD thesis, Université de Lyon, 2009.

[122] C. Mack and H. M. Taylor. The fitting of woven cloth to surfaces. *Journal of the Textile Institute Transactions*, 47 :477–488, 1956.

[123] O. LE Maitre, J. E. Souza DE Cursi, and S. Huberson. Large displacement analysis for ideally flexible sails. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 17 :619–636, 1998.

[124] O. LE Maitre, S. Huberson, and J. E. Souza DE Cursi. Unsteady model of sail and flow interaction. *Journal of Fluids and Structures*, 13 :37–59, 1999.

[125] M. Malinowsky and C. Lyonnet. Structures textiles.

[126] G. Marckmann, E. Verron, L. Gornet, G. Chagnon, P. Charrier, and P. Fort. A theory of network alteration for the mullins effect. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :2011–2028, 2002.

[127] B. Maurin. *Morphogenese des membranes textiles architecturales.* PhD thesis, Université Montpellier II, Montpellier, 1998.

[128] G. B. McGuinness and C. M. O Braidaigh. Development of rheological models for forming flows and picture-frame shear testing of fabric reinforced thermoplastic sheets. *Journal Non-Newtonian Fluid Mech*, 73 :1–28, 1997.

[129] C. McGuirt and G. Lianis. Constitutive equations for viscoelastic solids under finite uniaxial and biaxial deformations. *Trans. Soc. Rheol*, 14 :117–134, 1970.

[130] U. Mohammed, C. Lekakou, L. Dong, and M. G. Bader. Shear deformation and micromechanics of woven fabrics. *Composites : Part A*, 31 :299–308, 2000.

[131] L. Mullins and N. Tobin. Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanizated rubbers. *Rubber Chem. Technol*, 30 :551–571, 1957.

[132] M. G. Northolt and R. Van der Hout. Elastic extension of an oriented crystalline fibre. *Polymer*, 26 :310–316, 1985.

[133] Jean-Guillaume Orliac. *Analyse et simulation du comportement anisotrope lors de la mise en forme de renforts tissés interlock.* PhD thesis, INSA de Lyon, 2012.

[134] J. B. Pargana, D. Lloyd-Smith, and B. A. Izzuddin. Advanced material model for coated fabrics used in tensioned fabric structures. *Engineering Structures*, 29 :1323–1336, 2007.

[135] Jung-Whan Park and Ae-Gyeong Oh. Bending rigidity of yarns. *Textile research Journal*, 76 :478–485, 2006.

[136] J. PAYEN. Matériaux non tissés. Université de Valenciennes.

[137] X. Q. Peng and J. Cao. A continuum mechanics-based non-orthogonal constitutive model for woven composite fabrics. *Composites : Part A*, 36 :859–874, 2005.

[138] B. Persoz. *Introduction à l'étude de la rhéologie.* Dunod, 1960.

[139] H. Pezerat. Les fibres céramiques réfractaires vont entraîner une vague supplémentaire de fibroses et de cancers. février 2005.

[140] A. C. Pipkin. Some developements in the theory of inextensible networks. *Quarterly of Applied Matematics*, 38 :343–355, 1980.

[141] A. C. Pipkin and T. G. Rogers. A nonlinear integral representation for viscoelastic behavior. *J. Mech. Phys. Solids*, 16 :59–72, 1968.

[142] A. G. Prodromou and J. Chen. On the relationship between shear angle and wrinkling of textile composite preforms. *Composites Part A*, 28 :491–503, 1997.

[143] H. J. Qi and M. C. Boyce. Constitutive model for stretch-induced softening of the stress-stretch behavior of elastomeric materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52 :2187–2205, 2004.

[144] S. Ramakrishna. Characterization and modeling of the tensile properties of plain-weft knit fabrice-renforced composites. *Composites sciences and Technology*, 57 :1–22, 1977.

[145] Y. Rao and R. J. Farris. Fatigue and creep of high-performance fibers : Deformation mechanics and failure criteria. *International Journal of Fatigue*, 30 :793–799, 2008.

[146] Y. Rao, R. J. Farris, and M. Sakuda. Fatigue behaviour of high performance fibre yarns. *Korea Polymer Journal*, 6 :91–104, 1998.

[147] A. E. Rivlin and R. S. Kardelky. The mechanics of non-linear materials with memory. *Part I. Arch. Ration. Mech. Analysis*, 1, 1957.

[148] R. S. Rivlin. The deformation of a membrane formed by inextensible cords. *Arch. Ration. Mech. Analysis*, 2 :447–476, 1959.

[149] P. Rougée. *Mécanique des grandes transformations.* Springer, Berlin, 1997.

[150] O. Rozant, PE. Bourban, and J-AE. Manson. Warp-knit laminates for stampable sandwich preforms. *Composites Part B : Engineering*, 61, 2001.

[151] J. Salençon. *Mécanique des Milieux Continus : concepts généraux.* Les Editions de L'Ecole Polytechnique, Paris, 2007.

[152] R. A. Schapery. Nonlinear viscoelastic and viscoplastic constitutive equations based on thermodynamics. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 1 :209–240, 1997.

[153] Song-Xue Sha, Yan. Chen, and Xiao-Yu Liu. Finite-element simulation of kevlar yarns and fabrics in assessing its mechanical protective performance under projectile impact loading. *Journal of Fiber Bioengineering and Informatics*, 3 :112–117, 2010.

[154] V.P.W. Shim, C. T. Lim, and K. J. Foo. Dynamic mechanical properties of fabric armour. *International Journal of Impact Engineering*, 25 :1–15, 2001.

[155] J. Smart and J. G. Williams. A comparison of single-integral non-linear viscoelasticity theories. *J. Mech. Phys. Solids*, 20 :313–324, 1972.

[156] M. Spalatelu, F. Léné, and N. Turbé. Modélisation et optimisation des voiles de bateaux. *17 Congrès Français de Mécanique, Troyes septembre 2005*, 2005.

[157] D. J. Steigmann and A. C. Pipkin. Equilibrium of elastic nets. *Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 335 :419–454, 1991.

[158] C. Stolz. *Milieux Continus en Transformations finis : Hyperélasticité, Rupture, Elastoplasticité.* Les Editions de L'Ecole Polytechnique, Paris, 2003.

[159] El H. TAIBI. *Caractérisation, Modélisation et simulation du comportement d'un tissu textile.* PhD thesis, Universitè Bordeaux I et Université Mohamed V, 2001.

[160] V.B.C. Tan, V.P.W. Shim, and T.E. Tay. Experimental and numerical study of the response of flexible laminates to impact loading. *International Journal of Impact Engineering*, 40 :6245–6266, 2003.

[161] V.B.C. Tan, X.S. Zeng, and V.P.W. Shim. Characterization and constitutive modeling of aramid fibers at high strain rates. *International Journal of Solids and Structures*, 35 :1303–1313, 2008.

[162] D. Terzopoulos and K. Fleischer. Modeling inelastic deformation : Viscoelasticity, plasticity, fracture. *ACM Computer Graphics*, 22 :269–278, 1988.

[163] R. H. W. Ten Thije and R. Akkerman. Solution to intra-ply shear locking in finite element analyses of fibre reinforced materials. *Composites : Part A*, 39 :1167–1176, 2008.

[164] Z. Torre and MK. Kenny. Impact testing and simulation of composite sandwich structures for civil transportation. *Compos Struct*, 50 :257–256, 2000.

[165] A. Tourabi. Cours rhéologie des matériaux - etude des corps viscoélastiques linéaires. Université Joseph Fourier.

[166] C. Poggi V. Carvelli, C. Corazza. Mechanical modelling of monofilament technical textiles. *Composites : Part A*, 42 :679–691, 2008.

[167] J. Wang, J. R. Page, and R. Paton. Experimental investigation of the draping properties of reinforcement fabrics. *Composites Science and Technology*, 58 :229–237, 1998.

[168] D. Weidmann. *Aide-mémoire Textile Technique.* Dunod, Paris, 2010.

[169] Hwai-Chung Wu, Moon How Seo, Stanley Backer, and John. F. Mandell. Structural modeling of double-braided synthetic fiber ropes. *Textile Research Journal*, 65 :619–631, 1995.

[170] P. Xue, X. Peng, and J. Cao. A non-orthogonal constitutive model for characterizing woven composites. *Composites : Part A*, 34 :183–193, 2003.

[171] Y. Yamashita, S. Kawabata, S. Okada, and A. Tanaka. Mechanical characteristics of pbo single fiber. The University of Shiga Prefecture, Japan.

[172] K. Yasuda. *Investigation of the analogies between viscometric and linear viscoelastic properties of Polystyrene fluids.* PhD thesis, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (Massachusetts), 1979.

[173] T. Yokozeki, SI. Takeda, T. Allaoui, T. Ogasawara, and T. Ishikawa. Mechanical properties of corrugated composites for candidate materials of flexible wing structures. *Composites : Part A*, 37 :1578–1586, 2006.

[174] M. Youssef. *Milieux fibreux tisses :Modélisation et Simulation de la mise en forme des CFRTP a geometrie non developpable.* PhD thesis, Université d'Orléans, 2005.

[175] C. Y. Yue, G. X. Sui, and H.C. Looi. Effects of heat treatment on the mechanical properties of kevlar-29 fibre. *Composites Science and Technology*, 60 :421–427, 2000.

[176] X. Zhou. A study of the mechanical behaviour of networks. Faculty of Graduate Studies and Research, University of Alberta, 1998.

[177] D. Zhu, B. Mobasher, and Subramaniam D. Rajan. Dynamic tensile testing of kevlar 49 fabrics. *Journal of Materials in Civil Engineering*, 23 :230–239, 2011.