Simulation des grandes échelles des transferts thermo-convectifs dans les écoulements turbulents d'un fluide non-Newtonien en conduite cylindrique

Sourou Gnambode

▶ **To cite this version:**

Sourou Gnambode. Simulation des grandes échelles des transferts thermo-convectifs dans les écoulements turbulents d'un fluide non-Newtonien en conduite cylindrique. Matériaux. Université Paris-Est, 2015. Français. NNT : 2015PESC1143 . tel-01288456

HAL Id: tel-01288456

https://theses.hal.science/tel-01288456

Submitted on 15 Mar 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST

Université Paris-Est

École doctorale : Sciences, Ingénierie et Environnement

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université PARIS-EST

Spécialité : Energétique, Génie des Procédés

par

Sourou Paulin GNAMBODE

Simulation des grandes échelles des transferts thermo-convectifs dans les écoulements turbulents d'un fluide non-newtonien en conduite cylindrique

Thèse dirigée par Meryem OULD-ROUIS

Soutenue le 10 novembre 2015 devant le jury composé de :

Hassan Peerhossaini	Professeur	Univ. Paris Diderot	Président
Jean-Paul Caltagirone	Professeur émérite	Univ. Bordeaux 1	Rapporteur
Ahmed Ould-El Moctar	HDR	Univ. Nantes	Rapporteur
Guy Lauriat	Professeur émérite	Univ. Paris-Est MLV	Examinateur
Meryem Ould-Rouis	HDR	Univ. Paris-Est MLV	Directrice de thèse
Xavier Nicolas	MCF	Univ. Paris-Est MLV	Co-encadrant

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier ma directrice de thèse, madame Meryem Ould-Rouis, pour son encadrement, ses conseils. Elle a consacré son temps pour la réussite de ce travail. J'aimerais la remercier pour son esprit d'écoute, de compréhension et de soutien. Nos séances de travail se sont passées dans une ambiance décontractée. Une encadrante gentille avec plein d'humour. Je tenais à lui dire qu'elle fait partie de mon histoire.

Ensuite, je remercie mon co-encadrant, monsieur Xavier Nicolas, Maître de Conférences, pour ses disponibilités, son esprit d'analyse, ses qualités scientifiques, son implication. Je tiens à souligner que ses remarques ont été d'une grande importance pour l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à remercier tous les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer mon travail. Je remercie le Professeur Hassan Peerhossaini d'avoir présidé ce jury. Mes remerciements vont au Professeur Emérite Jean-Paul Caltagirone et à monsieur Ahmed Ould-El Moctar d'avoir accepté d'analyser mon travail. Le Professeur Emérite Guy Lauriat, à qui je dois toute ma reconnaissance pour avoir accepté d'examiner mon travail. Ses conseils ainsi que ses qualités scientifiques ont beaucoup participé à la réalisation de cette thèse et à la rédaction de ce manuscrit.

Je remercie également le reste des membres de l'équipe TCM. Au cours de ses trois années de thèse, j'ai partagé d'agréables moments avec les autres doctorants du laboratoire MSME, le laboratoire au sein duquel cette thèse a été réalisée. Je les remercie pour leurs soutiens, leurs conseils, leur amitié. A ceux qui ont déjà soutenu leur thèse, je leur souhaite un avenir radieux. Au reste des doctorants, beaucoup de courage. Je remercie infinement Guillaume Sauvenay, pour toutes les ressources informatiques qu'il a m'accordées.

Je remercie mes parents, mes frères et soeurs, mes amis pour leur soutien durant cette thèse. Enfin, ma gratitude va à ma copine Patricia pour ses encouragements et ses soutiens. A sa mère, je lui dit merci pour toutes ses prières.

Résumé

Cette thèse est une contribution à la simulation numérique des transferts de quantité de mouvement et de chaleur dans les écoulements turbulents de fluides non-newtoniens dans une conduite cylindrique fixe. La viscosité du fluide utilisé est décrite par la loi d'Ostwald de Waele $\eta = K\dot{\gamma}^{n-1}$ où η la viscosité apparente, K est la consistance, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement. Deux modèles sous-mailles dans l'approche des simulations des grandes échelles ont été considérés : le modèle dynamique de Germano et al. (1991) [21] et le modèle de Smagorinsky non-newtonien. Ils sont utilisés pour décrire les mécanismes physiques mis en jeu dans les écoulements isothermes de ces fluides à rhéologie complexe. Les transferts thermiques sont simulés avec le modèle de Smagorinsky non-newtonien. Ces derniers sont traités en deux parties. La première concerne les échanges de chaleur sans influence sur la distribution des vitesses. Il s'agit des écoulements non- thermodépendants ou écoulements isothermes. La deuxième partie concerne la résolution des écoulements thermodépendants qui mettent l'accent sur les modifications induites par le couplage vitesse-température. Les champs turbulents sont analysés statistiquement en moyennant dans le temps et dans l'espace (suivant les directions périodiques) les champs instantanés de vitesse et de température pour établir les profils moyens de vitesse et de température, les rms, la tension de Reynolds, les flux de chaleur, les moments d'ordre plus élevé (coefficients de dissymétrie et d'aplatissement), les pdf (fonction de densité de probabilté), les jpdf (fonction de densité de probabilité jointe), le coefficient de frottement, le nombre de Nusselt... Ces différentes grandeurs sont analysées en fonction des divers paramètres qui gouvernent le problème : les nombres de Reynolds et de Prandtl, l'indice d'écoulement et le nombre de Pearson.

Mots clés : modèle d'Otswald de Waele, modèle LES dynamique, transfert de chaleur, écoulement turbulent, conduite cylindrique.

Abstract

This thesis is a numerical contribution of momentum and heat transfer of turbulent pipe flows of non-Newtonian fluids. The apparent viscosity of the fluid is modelled by a power-law (Ostwald de Waele model) given by $\eta = K\dot{\gamma}^{n-1}$, where η apparent viscosity, K is the consistency, n is the power-law index, and $\dot{\gamma}$ shear rate. Two models subgrid of LES were considered : the dynamic model of Germano et al. (1991) [21] and model Smagorinsky non-Newtonian. They are used to describe the physical mechanisms involved in the isothermal flow of these complex rheology fluids. Heat transfer are simulated with the model of non-Newtonian Smagorinsky. These are processed in two parts. The first concerns the heat exchange without affecting the velocity distribution. This is non-thermodependent flow or isothermal flow. The second part concerns the resolution of thermodependent flows that focus on changes induced by the temperature-velocity coupling. The turbulent fields are analyzed statistically by averaging over time and space (according to the periodic directions) the instantaneous field of velocity and temperature to establish the average profiles of velocity and temperature, the root mean square of turbulent fluctuations (rms), Reynolds stress, the heat flow, the moments of higher order (skewness and flatness), the pdf (probability density function), the jpdf (attached probability density function), the coefficient of friction, the number of Nusselt ... These differents variables are analyzed for various parameters governing the problem : the Reynolds and Prandtl flow index and the number of Pearson.

Keywords : Law of Otswald, dynamic model of LES, heat transfert, turbulent flow, pipe.

Table des matières

Résumé **5**

Abstract **7**

Introduction **1**

1 Généralités sur les fluides non-Newtoniens **9**
1.1 Introduction 9
1.2 Les classes de fluides non-Newtoniens 9
1.2.1 Les fluides indépendants du temps 9
1.2.1.1 Les fluides rhéofluidifiants ou pseudoplastiques 9
1.2.1.2 Les fluides dilatants ou rhéoépaississants 11
1.2.1.3 Les fluides viscoplatiques 12
1.2.2 Les fluides dépendants du temps 13
1.2.2.1 Les fluides viscoélastiques 13
1.2.2.2 Les fluides thixotropes 14
1.3 Nombre de Reynolds de Metzner et Reed 16
1.4 Coefficient de frottement 17
1.5 les régimes d'écoulements 18
1.6 Conclusion 19

2 Etude bibliographique **21**

3 Simulation des grandes échelles **29**
3.1 Introduction 29
3.2 Formulations mathématiques 30
3.2.1 Equations 30
3.3 Modèles de sous-maille 33
3.3.1 Modèle de Smagorinsky 33
3.3.2 Modèle dynamique 34
3.3.3 Conditions aux limites et conditions initiales 35
3.4 Méthode numérique 36
3.4.1 Domaine de calcul et maillage 36
3.4.2 Distribution radiale des points et fonction de raffinement 37
3.4.3 Discrétisation des équations 38
3.4.4 Schéma numérique 39
3.4.4.1 Calcul du champ non-solénoidal 39
3.4.4.2 A1- Premier pas de la factorisation (direction θ) 41
3.4.4.3 A2- Deuxième pas de la factorisation (direction z) 41

3.4.4.4 A3- Troisième pas de la factorisation (direction r) 42
3.4.4.5 B- Correction de la pression et calcul du champ solénoïdal 44
3.4.4.6 C- Calcul du scalaire 44
3.5 Analyse statistique de la turbulence 44
3.5.1 Variance 45
3.5.2 Coefficient de dissymétrie 45
3.5.3 Coefficient d'aplatissement 45
3.5.4 Coefficient de corrélation 45
3.6 Fonctions de densité de probabilité 46
3.6.1 Loi normale 46
3.6.2 Loi normale à deux variables 48
3.7 Corrélations spatio-temporelles 50

4 Ecoulement isotherme **53**
4.1 Configuration, conditions aux limites et résolution numérique 53
4.2 Etude de la convergence en maillage et en temps 54
4.2.1 Etude de la convergence en maillage 54
4.2.2 Etude du pas de temps 57
4.3 Résolution de la simulation LES 57
4.4 Analyse et validation des résultats 60
4.4.1 Profil de vitesse 60
4.4.2 Coefficient de frottement 63
4.4.3 Viscosité moyenne 65
4.4.4 Intensité de la turbulence et tension de Reynolds 67
4.4.5 Energie cinétique turbulente k 71
4.4.6 Facteurs de dissymétrie et d'applatissement 73
4.4.7 Visualisations des fluctuations de vitesse axiale 75
4.4.8 Fonction densité de probabilité et jpdf 78
4.5 Conclusion 79

5 Modèle de Smagorinsky pour les fluides non-newtoniens **81**
5.1 Description du modèle de Ohta et Miyashita (2014) 83
5.2 Résultats du modèle de Smagorinsky Newtonien et non-newtonien 85
5.2.1 Profils de vitesse 85
5.2.2 Intensité de turbulence et tension de Reynolds 85
5.2.3 Coefficient de frottement 86
5.3 Comparaison des modèles dynamique et Smagorinsky non-newtonien . . . 86

6 Simulation des transferts de chaleur **91**
6.1 Thermodépendance 92
6.2 Modélisation de la thermodépendance 93
6.3 Formulations mathématiques 94
6.4 Modélisation des termes sous-mailles 97
6.4.1 Modélisation du tenseur de viscosité sous-maille 97
6.4.2 Modélisation du tenseur de flux de chaleur sous-maille 98
6.5 Résultats de la non-thermodépendance 98
6.5.1 Ecoulements laminaires 98
6.5.1.1 Vitesse, température et viscosité 98
6.5.1.2 Nombre de Nusselt et coefficient de frottement 100

6.5.1.3 Influence des nombres de Reynolds et de Prandtl de simulation . . . 102
6.5.2 Ecoulements turbulents . . . 104
6.5.2.1 Profils de vitesse et de température . . . 104
6.5.2.2 Ecart-type des fluctuations de température . . . 105
6.5.2.3 Flux de chaleur turbulent . . . 106
6.5.2.4 Moments statistiques d'ordre plus élevé . . . 109
6.5.2.5 Coefficients de corrélation . . . 110
6.5.2.6 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt . . . 111
6.5.2.7 Influences des nombres de Prandtl et de Reynolds de simulation . . . 114
6.6 Les écoulements thermodépendants . . . 118
6.6.1 Régime laminaire . . . 119
6.6.1.1 Viscosité, vitesse et température . . . 119
6.6.1.2 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt . . . 119
6.6.2 Régime turbulent . . . 121
6.6.2.1 Viscosité, vitesse et température . . . 121
6.6.2.2 rms des fluctuations de vitesse et de température . . . 122
6.6.2.3 Flux de chaleur turbulent . . . 124
6.6.2.4 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt . . . 125

Publications **138**

Bibliographie **139**

Nomenclature

a	constant du modèle de Carreau, $a = 2$
b	paramètre de la thermodépendance
C_s	constante de Smagorinsky
D	diamètre de la conduite [m]
$\overline{\overline{D}}$	tenseur des vitesse ou taux de déformation
$F(v_i')$	coefficient d'aplatissement, $F(v_i') = \frac{\overline{v_i'^4}}{[\overline{v_i'^2}]^2}$
h	coefficient de transfert thermique $[W/(m^2.K)]$
K	consistance $[Pa.s]$
k	énergie cinétique turbulente [J]
L	longueur de la conduite [m]
n	indice de comportement
P	pression du fluide, $Q_v = v.s$ $[l.s^{-1}]$
Q_v	débit volumique, $Q_m = \rho.Q_v$ [Pa]
Q_m	débit massique[Pa]
r	direction radiale
R	rayon de la conduite [m]
T	température du fluide [K]
T_b	température débitante du fluide [K]
T_p	température à la paroi [K]
T_{ref}	température de référence, $T_{ref} = \phi_p D/2\lambda$ [K]
T_{ij}	tenseur sous-maille pour le deuxième filtre
$S(v_i')$	coefficient de dissymétrie, $S(v_i') = \frac{\overline{v_i'^3}}{[\overline{v_i'^2}]^{\frac{3}{2}}}$
S_{ij}	tenseur de déformation, $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$
U, V, W	vitesses axiale, radiale et azimutale $[m.s^{-1}]$
U_b	vitesse axiale moyenne $[m.s^{-1}]$
U_p	vitesse de Poiseuille $[m.s^{-1}]$
U_{cL}	vitesse axiale au centre de la solution analytique laminaire, $U_{cL} = \frac{(3n+1)U_b}{(n+1)}$ $[m.s^{-1}]$
x, y, z	dimension de l'espace
y^+	distance au voisinage de la paroi

Symboles grecs

α	diffusivité thermique, $\alpha = \lambda/\rho C_p$ $[m^2/s]$
δ_v, δ_t	épaisseur de la sous-couche visqueuse et de la zone interne
Δ	taille du premier filtre, $\Delta = [r\Delta r\Delta\theta\Delta z]^{1/3}$ [m]
$\widehat{\Delta}$	taille du deuxième filtre, $\widehat{\Delta} = [r\Delta r(2\Delta\theta)(2\Delta z)]^{1/3}$ [m]
$\Delta\theta$	taille de la maille dans la direction azimutale [m]

Δr	taille de la maille dans la direction radiale [m]
Δz	taille de la maille dans la direction axiale [m]
$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement, $\dot{\gamma} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ $[1/s]$
$\dot{\gamma}_{d,w}$	taux de cisaillement adimensionnel à la paroi, $\dot{\gamma}_d = \gamma_w U_{cL}/R$ $[1/s]$
λ	conductivité thermique $[W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}]$
η	viscosité apparente du fluide $[Pa.s]$
ϕ_p	densité de flux imposé à la paroi $[W.m^{-2}]$
Φ_{mol}	flux moléculaire, $\frac{1}{Pr}\frac{\overline{\partial\Theta^+}}{\partial Y^+}$ $[W.m^{-2}]$
Φ_z	flux axial $[W.m^{-2}]$
Φ_r	flux radial $[W.m^{-2}]$
Φ_{tot}	flux total $[W.m^{-2}]$
ρ	masse volumique $[kg.m^{-3}]$
τ_{ij}	tenseur sous-maille pour le premier filtre
τ_p	contrainte de cisaillement à la paroi
θ	direction azimutale
Θ	variable adimensionnelle de la température, $\Theta = T_b - T(\theta, r, z, t)/T_{ref}$
Θ_b	température moyenne du fluide
ξ	paramètre dans la corrélation de Gnielinski (1976) [22]

Exposants

$-$	grandeur moyenne
$=$	notation tensorielle
$+$	grandeur universelle

Indices

d	débitante
z	axiale
r	radiale
θ	azimutale
w ou p	paroi

Nombres adimensionnels

f	coefficient de frottement, $f = 2\tau_p/\rho U_b^2$
Nu	nombre de Nusselt, $Nu = hD/\lambda$
Pe	nombre de Péclet, $Pe = DU_b/\alpha = RePr$
Pn	nombre de Pearson, $Pn = b\phi_p D/2\lambda$
Pr	nombre de Prandtl, $Pr = \mu C_p/\lambda = \nu/\alpha$
Pr_s	nombre de Prandtl de simulation, $Pr_s = K_0/\alpha\rho R^{n-1}U_{cL}^{1-n}$
Re	nombre de Reynolds, $Re = \rho D\overline{U}/\eta_p$
Re_g	nombre de Reynolds généralisé, $Re_g = \rho R^n U_b^{2-n}/K$
Re_c	nombre de Reynolds critique (transition laminaire turbulent)
Re_{MR}	nombre de Reynolds de Metzner et Reed, $Re_{MR} = 8\rho D^n\overline{U}^{2-n}/K(6+2/n)^n$
Re_s	nombre de Reynolds de simulation, $Re_s = \rho U_p^{2-n}R^n/K_0$
St	nombre de Stanton, $St = h/\overline{U}\rho C_p$

Abréviations

DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds Average Navier-Stokes

Introduction

Les écoulements turbulents des fluides non-newtoniens sont rencontrés dans de nombreuses applications d'ingénierie, par exemple, l'hydraulique de forage, le transport des eaux usées, le traitement des huiles et des polymères, l'écoulement du sang dans les artères et des applications impliquant des taux de transfert de chaleur relativement élevés dans ces applications, ce sont des écoulements à grand nombre de Reynolds où les effets d'inertie sont dominants.

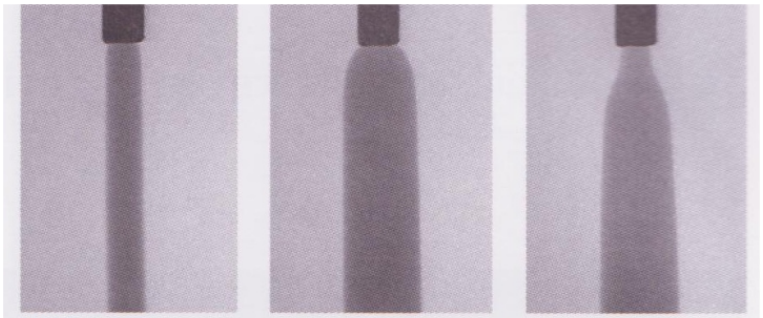
Description physique du comportement non-newtonien

La viscosité des fluides Newtoniens est constante et leur contrainte de cisaillement varie linéairement avec le taux de cisaillement. On peut citer l'eau, l'air et certains gaz. En général, ce sont les molécules qui ont un poids moléculaire inférieur à 5000 (Bird et al. (2006) [4]). Contrairement à ces fluides Newtoniens, les fluides ayant un comportement non-newtonien présentent une non-linéarité dans la relation rhéologique liant le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\tau}}$ et le tenseur de vitesse de déformation $\overline{\overline{D}}$:

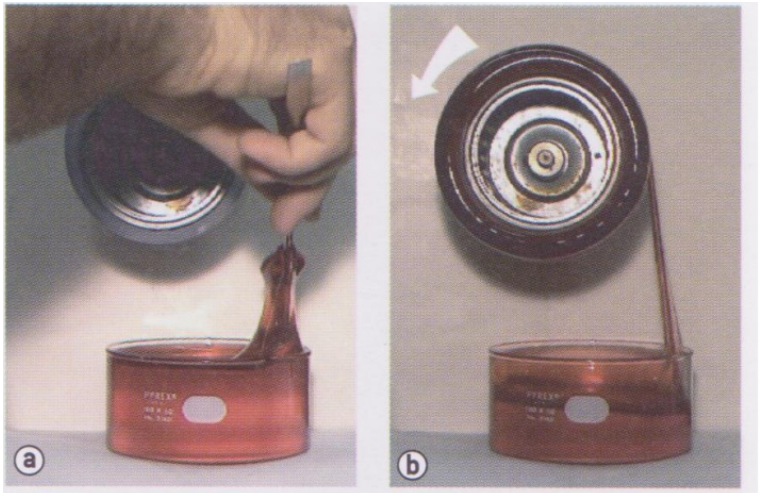
$$\overline{\overline{\tau}} = 2\eta\overline{\overline{D}}, \quad \eta = \eta(\overline{\overline{D}}) \tag{1}$$

où η est la viscosité. Pour les fluides non-newtoniens, η n'est plus une constante à température et pression données, mais une fonction qui dépend du taux de déformation $\overline{\overline{D}}$ ou du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Des conséquences de cette non-linéarité entre les tenseurs des contraintes et de déformation sont illustrées dans la figure 1 qui montre trois expériences réalisées par Guyon et al. (2005) [27] avec des fluides non-newtoniens. Dans la Fig.1.1, un liquide monte le long de l'axe rotatif au lieu de se creuser le long de l'axe sous l'effet de la force centrifuge. Dans la Fig.1.2, un liquide subit une forte expansion en sortie de buse et dans la figure 1.3, un liquide s'enroule autour d'une bobine comme un fil. L'explication des phénomènes montrés dans ces expériences nécessite une description des répartitions des contraintes normales et tangentielles au sein du fluide. Pour le fluide Newtonien soumis à un cisaillement simple, seule la contrainte tangentielle ($\sigma_{r\theta}$) est modifiée par l'écoulement, les contraintes normales restent isotropes et égales à -p. Par contre, l'écoulement des fluides non-newtoniens induit, en plus de la modification de la contrainte tangentielle, une différence entre les contraintes normales (σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}) (Bird et al. (2006) [4]) : c'est l'effet Weissenberg, principale cause de l'anisotropie des tenseurs de contraintes normales qui est à l'origine des phénomènes illustrés dans la figure 1. Pour un fluide Newtonien, il n'y a pas cette anisotropie. Donc il est impossible de réaliser avec un fluide Newtonien, comme l'eau par exemple, les expériences de la figure 1. Il existe plusieurs types de fluides qui obéissent à des comportements non-Newtonniens. Ils sont mentionnés dans la suite de ce document.

1. Vue à deux instants successifs de la montée d'un fluide viscoélastique (solution de polystyrène dans un solvant organique) le long d'un axe tournant.



2. Gonflement d'un jet d'une solution de polymère, à la sortie d'un tube de petit diamètre. Les débits sont croissants de gauche à droite. Notez le retard du gonflement du jet pour le plus fort débit.



3. Enroulement sur une bobine (b) du fluide viscoélastique de la figure 1, tiré à partir d'une surface libre (a).

FIGURE 1 – Mise en évidence des propriétés non-newtoniennes (photos tirées de [27])

Turbulence

La turbulence est un état dynamique chaotique avec un grand nombre de degrés de liberté. C'est un phénomène décrit par des tourbillons de tailles variables dans le temps et dans l'espace et qui sont en interaction permanente. Au voisinage de la paroi, dans les écoulements turbulents, se développe une couche appelée "la couche limite dynamique". Elle se décompose en une zone interne d'épaisseur δ_t et une zone externe (cf. figure 2). Dans la zone interne, le profil de vitesse est appelé profil universel décrit par la loi de paroi de la forme :

$$U^+ = U/U_\tau, \quad U_\tau = \sqrt{\tau_p/\rho} \quad \text{est la vitesse de frottement} \tag{2}$$

et y^+ la distance à la paroi définie par :

$$Y^+ = \rho u_\tau Y/\eta_w, \quad \eta_w \quad \text{est la viscosité dynamique à la paroi} \tag{3}$$

($Y^+ = \rho u_\tau Y/\eta_w$ avec η_w la viscosité dynamique du fluide à la paroi). La zone interne est composée d'une sous-couche visqueuse d'épaisseur δ_v où les contraintes visqueuses sont prépondérantes et les effets convectifs négligeables, d'une zone tampon d'épaisseur $\delta_b - \delta_v$ qui est la zone du maximum de production d'énergie turbulente et la zone logarithmique d'épaisseur $\delta_t - \delta_b$ qui correspond à la sous-couche turbulente. Dans la zone externe, la turbulence est homogène.

A l'équivalence de la couche limite dynamique, une couche appelée couche limite thermique se développe au voisinage de la paroi des écoulements turbulents avec transferts de chaleur. Elle est composée de trois zones en proche paroi :

- une sous-couche conductive où les effets de conduction moléculaire sont prépondérants devant les effets convectifs. Elle s'étend jusqu'à $Y^+ = 5Pr$ et le profil moyen de température s'écrit :

$$\Theta^+ = PrY^+ \tag{4}$$

- une zone tampon
- une zone logarithmique où le profil de température suit la loi :

$$\Theta^+ = \frac{1}{k_\Theta} \ln Y^+ + \beta_\Theta \tag{5}$$

Les limites inférieures de la zone logarithmique dépendent du nombre de Prandtl :

- $Y^+ \simeq 2/Pr$ pour $Pr << 1$
- $Y^+ \simeq 30$ pour $Pr \sim 1$
- $Y^+ \simeq 12/Pr^{1/3}$ pour $Pr >> 1$

On distingue trois familles de méthodes pour simuler les écoulements turbulents : la simulation numérique directe (SND), les méthodes Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) et la simulation des grandes échelles (SGE).

- La simulation numérique directe (DNS) est une approche dont le principe est la résolution des équations d'écoulement sans aucun modèle de turbulence. Cette méthode

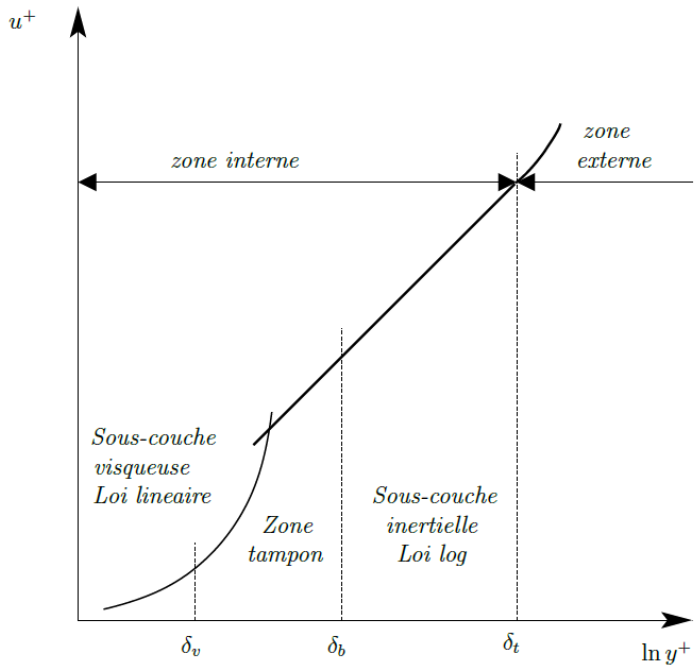


FIGURE 2 – Différentes régions d'une couche limite turbulente

prend en compte toutes les structures de la turbulence (résolution de toutes les échelles). Pour capter les petits tourbillons, il faut un maillage suffisamment fin c'est-à-dire que les pas de discrétisation en espace et en temps de la simulation doivent être respectivement plus petits que la longueur caractéristique et le temps caractéristique associés à la plus petite échelle dynamiquement active de la solution exacte. Pour estimer le nombre de mailles pour une DNS, nous allons utiliser l'échelle de turbulence de Kolmogorov qui donne la taille de la plus petite structure turbulente en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$\lambda = LRe_L^{-3/4} \tag{6}$$

où L est l'échelle intégrale représentative de la taille des plus grandes structures turbulentes. Pour un écoulement $1D$ de longueur Nh avec N le nombre de noeuds et h la longueur d'une maille, on doit respecter les deux conditions suivantes :
- $Nh > L$ c'est-à-dire que le domaine est plus grand que L ;
- $h \leq \lambda$, ce qui signifie que la taille d'une maille soit plus petite que les plus petites structures. Ce qui équivaut à :

$$\lambda N \geq Nh > L \quad \text{soit} \quad N \geq L/\lambda = Re_L^{3/4} \tag{7}$$

Pour un écoulement 3D comme la plupart des écoulements turbulents, il faut

$$N_{3D} = N_{1D}^3 = Re_L^{9/4} \text{ mailles} \tag{8}$$

C'est-à-dire que pour un écoulement turbulent de $Re_L = 10^4$, il faut 10^9 mailles pour une DNS ; ce qui est extrêment coûteux. C'est justement pour cette raison que la DNS reste une méthode pour des recherches académiques avec des nombres de Reynolds modérés et dans des géométries simples. L'avantage de cette méthode est l'exactitude de ses solutions reproduisant avec une bonne précision la physique de l'écoulement.

- L'approche Navier-Stokes moyennée RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) est basée sur le filtrage temporel des équations au moyen de la décomposition de Reynolds qui stipule que toute grandeur locale est égale à la somme de sa moyenne statistique et d'une fluctuation ($u(x,t) = \overline{u(x,t)} + u^{'}(x,t)$). En introduisant cette décomposition dans les équations de Navier-Stokes, on obtient un système ouvert d'équations dont la fermeture nécessite d'autres équations supplémentaires comme les équations de transport de l'énergie turbulente, du taux de dissipation... Pour cette approche RANS, seules les statistiques sont prévisibles ; donc pas besoin d'un maillage suffisamment fin (plus de contrainte en matière du nombre de mailles). Ce qui permet une diminution considérable du nombre d'échelles de la solution et donc du nombre de degrés de liberté du système discret. C'est ceci qui rend les modèles de type RANS très utiles pour les industriels parce qu'ils simulent des problèmes complexes pour des nombres de Reynolds élevés.

- Plus précise que les méthodes RANS et moins coûteuse que la DNS, la LES résout les effets des grandes échelles et les actions des petites échelles sont modélisées. Une séparation des échelles est requise. Celle-ci est faite par un filtre passe-bas en fréquence noté G. Une étude plus détaillée de cette méthode et de ses variantes est présentée dans le chapitre 3 de ce manuscrit.

Objectif et organisation du manuscrit

Cette thèse a pour objectif de réaliser, à l'aide de la simulation numérique des grandes échelles LES (*Large Eddy Simulation*), l'étude des écoulements turbulents pleinement développés et des transferts de chaleur liés de fluides non-newtoniens dans une conduite cylindrique fixe. Le modèle rhéologique choisi pour cette étude est celui d'Ostwald de Waele. Le but est d'analyser l'effet de cette loi rhéologique sur la structure de l'écoulement (le profil de vitesse, les rms des fluctuations de vitesse, la tensions turbulente...) et sur le champ thermique (le profil de température, la rms de température, les flux de chaleur) ainsi que son influence sur le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt. Les influences du nombre de Reynolds, de l'indice d'écoulement et des modèles sous-mailles (modèle de Smagorinsky, modèle dynamique) seront analysées.

L'organisation du mémoire est la suivante :

Le chapitre 1 présente un rappel de quelques généralités sur les fluides non-newtoniens. Ce chapitre discute de certaines lois rhéologiques et présente le développement du nombre de Reynolds de Metzner et Reed ($Re_{MR} = 8\rho\overline{U}^{2-n}D^n/K(6+2/n)^n$) et quelques corrélations pour l'évaluation des pertes de charges.

Le chapitre 2 est consacré à une étude bibliographique non exhaustive qui regroupe les travaux menés sur les fluides non-newtoniens dans les régimes laminaire et turbulent dans différentes géométries (canal, conduite, espace annulaire).

Le chapitre 3 est consacré à la formulation des équations mathématiques résolues en LES pour un écoulement isotherme d'un fluide non-newtonien incompressible. Une description des modèles sous-mailles est présentée. Les schémas de discrétisations et de résolution des équations sont précisés. Enfin un rappel des statistiques de la turbulence (variance, moments d'ordre deux et quatre...) est fourni à la fin du chapitre.
Le chapitre 4 présente les résultats et validations de l'écoulement isotherme d'un fluide d'Ostwald de Waele. L'analyse des comportements rhéologiques tels que la fluidification et la solidification du fluide est détaillée dans cette partie.

Nous avons également testé un autre modèle, le modèle de Smagorinsky adapté aux fluides non-newtoniens dans le chapitre 5. Une étude comparative est réalisée avec les résultats du modèle dynamique pour voir l'effet de la correction faite sur la variation du tenseur sous-maille.

Le chapitre 6 porte sur les simulations des écoulements turbulents dans une conduite chauffée avec une densité de flux de chaleur imposée à la paroi. Ici, on abordera les transferts de chaleur qui seront pris en compte sous deux aspects : la non-thermodépendance et la thermodépendance. Le tenseur sous-maille et le flux de chaleur sont approchés respectivement par les modèles de Smagorinsky non-newtonien et du nombre de Prandtl turbulent constant.

Chapitre 1

Généralités sur les fluides non-Newtoniens

1.1 Introduction

Pour les fluides non-Newtoniens, la viscosité dépend du taux de cisaillement et/ou du temps d'application de la contrainte de ces taux de cisaillement. Cette contrainte n'est plus linéaire en fonction des composantes du tenseur de déformation. Les fluides qui obéissent à ce comportement rhéologique se subdivisent en deux catégories :

- Les fluides indépendants du temps
- Les fluides dépendants du temps

1.2 Les classes de fluides non-Newtoniens

1.2.1 Les fluides indépendants du temps

Généralement le changement de la structure du fluide est induit par l'application d'un taux de cisaillement ou par les réactions chimiques entre les particules fluides. La forme de cette nouvelle structure peut dépendre du temps d'application du taux de cisaillement. Cependant, Tanner (1985) [65] a souligné qu'il existe plusieurs fluides dont les changements structurels liés au temps d'application de la contrainte pourraient être ignorés. Autrement dit, la viscosité de ces fluides évolue uniquement avec le taux de cisaillement, la température et la pression. Elle ne dépend pas du temps d'application de la contrainte. Ce sont en général les fluides rhéofluidifiants (ou pseudoplastiques), les fluides rhéoépaississants (ou dilatants) et les fluides de Bingham. Ces fluides sont présentés aux § 1.2.1.1, 1.2.1.2 et 1.2.1.3 respectivement.

1.2.1.1 Les fluides rhéofluidifiants ou pseudoplastiques

La plupart de ces fluides sont caractérisés par l'indice de comportement n, la consistance K et d'autres paramètres. Pour les fluides rhéofluidifiants, l'indice de comportement n est inférieur à 1. La viscosité décroît lorsque la contrainte de cisaillement augmente. Autrement dit, ces fluides présentent une viscosité η_0 élevée à faible taux de cisaillement et faible à un taux de cisaillement élevé [65]. L'interprétation physique de cette variation de la viscosité est liée au fait que l'augmentation du taux de cisaillement entraîne un

alignement des longues molécules de la structure du fluide qui, au repos, se trouvaient dans un état entremêlé aléatoire. Parmi ces fluides, on peut citer le pétrole, les solutions de polymères cellulosiques, les suspensions de détergents, les diverses peintures, le savon liquide, la mayonnaise, le kechup... Dans certaines suspensions de particules solides, le comportement rhéofluidifiant provient de la disparition des structures qui sont formées par suite de l'attraction entre les particules. Aussi appelé "fluidification par cisaillement", le comportement rhéofluidifiant peut être un avantage dans certaines situations, par exemple avec les peintures auquelles on demande d'être fluides quand on les applique et de ne pas couler ensuite. La figure 1.1 montre bien que lorsque le taux de cisaillement devient important, la viscosité diminue et le fluide s'écoule facilement. Aussi on observe clairement que la viscosité n'est pas nulle même avec un fort taux de déformation appliqué.

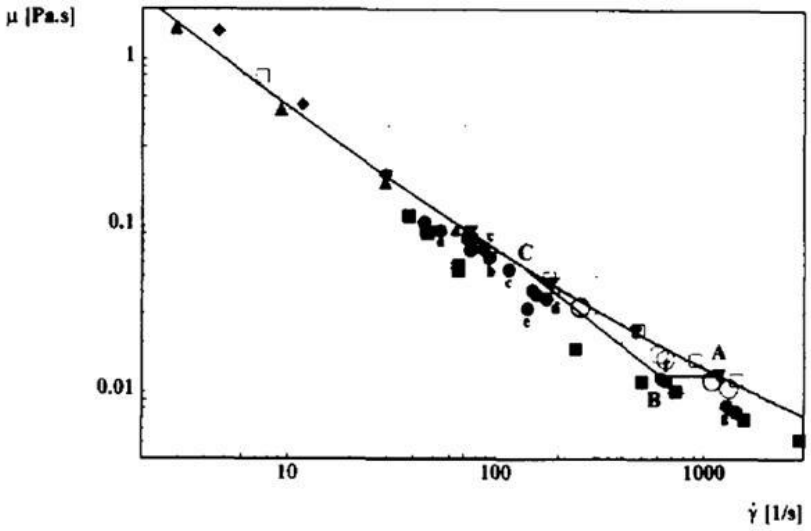


FIGURE 1.1 – Evolution de la viscosité apparente avec le taux de cisaillement (tiré de[18])

La loi rhéologique qui décrit la variation du tenseur des contraintes de ces fluides est celle d'Ostwald de Waele qui est :

$$\tau = K\dot{\gamma}^n \tag{1.1}$$

La viscosité s'écrit donc :

$$\eta = K\dot{\gamma}^{n-1} \tag{1.2}$$

Dans les équations (1.1) et (1.2),

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\overline{\overline{S}} : \overline{\overline{S}}} \quad \text{est le taux de cisaillement} \tag{1.3}$$

$$\overline{\overline{S}} = \frac{1}{2}\left((\bigtriangledown U) + (\bigtriangledown U)^t\right) \quad \text{est le taux de déformation} \tag{1.4}$$

L'explication physique de la loi d'Ostwald de Waele est que l'application d'un taux de cisaillement entraîne une organisation de l'écoulement, mais avec des mécanismes différents selon la nature du fluide considéré. En appliquant la fonction logarithme à l'équation (1.1), on obtient une droite dont la pente est l'indice de structure n et $log(K)$ l'ordonnée à l'origine. L'analyse asymptotique de l'équation (1.2) pour les fluides rhéofluidifiants donne l'existence de deux valeurs limites suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} \to \infty, \quad \eta \to \eta_\infty \\ \dot{\gamma} \to 0, \quad \eta \to \eta_0 \text{ avec } \eta_0 > \eta_\infty \end{cases} \tag{1.5}$$

Le modèle d'Ostwald de Waele ne prévoit pas des valeurs pour ces limites. Or il existe certains fluides dont la viscosité varie selon les deux limites η_0 et η_∞. Il faut alors recourir à d'autres modèles complexes comme celui de Herschel-Bulkley qui est la juxtaposition des trois étapes présentées comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0, \ U = 0 \quad \text{pour } \tau \leq \tau_c' \\ \tau = \tau_c' + K\dot{\gamma}^n \quad \text{pour } \tau_c' < \tau < \tau_c'' \\ \tau = \tau_c + \eta\dot{\gamma} \quad \text{pour} \quad \tau > \tau_c'' \end{cases} \tag{1.6}$$

où U est la vitesse moyenne de l'écoulement du fluide. La première étape est liée à l'existence d'une contrainte seuil en dessous de laquelle aucune déformation n'est observée. La deuxième correspond à une loi en puissance qui varie comme la loi d'Ostwald de Waele. Enfin, la troisième étape correspond au comportement Newtonien. Les paramètres τ_c, τ_c', τ_c'' dépendent du fluide considéré. Plusieurs polymères obéissent au modèle de Herschel Bulkley.

Il existe aussi d'autres modèles rhéologiques [65] comme celui de :

Carreau : $\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty(1 + (t_1\dot{\gamma})^2)^{\frac{n-1}{2}}$

Prandtl : $\tau = Asin^{-1}(\dot{\gamma}/C)$

Eyring : $\tau = \dot{\gamma}/B + Bsin(\tau/A)$

Powell-Eyering : $\tau = A\dot{\gamma} + Bsin^{-1}(C\dot{\gamma})$

Williamson : $\tau = A\dot{\gamma}/(B + |\dot{\gamma}|) + \eta_\infty\dot{\gamma}$

Ellis : $1/\eta = 1/\eta_0 + m^{-1/n}(\tau^2)^{1-n}/2n$

Casson (solide) : $\sqrt{\tau} = \sqrt{A} + \sqrt{\eta_0\dot{\gamma}}$

où η_0 désigne la viscosité à cisaillement nul, η_∞ la viscosité à cisaillement infini (ou viscosité du solvant), t_1 le temps caractéristique, n l'indice de structure, A, B, C η_0, η_∞, m et n sont les paramètres du fluide.

1.2.1.2 Les fluides dilatants ou rhéoépaississants

Ce sont les fluides dont la viscosité apparente augmente avec le taux de déformation. Tanner (1985) [65] a relaté l'expérience de Reynolds (1885) sur le comportement dilatant des suspensions concentrées. Reynolds (1985) a suggéré que, lorsque les suspensions

concentrées sont au repos, la porosité est au minimum et le liquide n'est pas suffisant pour combler les vides. Lorsque le matériau est cisaillé à de faible taux, le liquide lubrifie le mouvement. A des taux de cisaillement plus élevés, le remplissage des particules est brisé et le matériau se dilate légèrement avec une augmentation des vides. La formation de cette structure provoque l'augmentation de la viscosité et du taux de cisaillement. Ce comportement dilatant, plus rare, concerne la maïzena (fécule de maïs dans l'eau), les boues d'argile... Tous les modèles cités au § 1.2.1.1 sont valables dans le cas des fluides rhéoépaississants à condition que l'indice d'écoulement n soit supérieur à 1.

1.2.1.3 Les fluides viscoplatiques

Aussi appelés fluides à contrainte critique, les fluides viscoplastiques sont des milieux qui tiennent à la fois du solide et du fluide. Leur écoulement est déclenché que si la contrainte appliquée est supérieure à un seuil critique. La contrainte seuil est due à l'existence d'une structure tridimensionnelle rigide qui n'est détruite que si la contrainte devient supérieure à la contrainte seuil. Peixinho (2004) [54] a présenté une description exhaustive des fluides à seuil. La structure tridimensionnelle est constituée de liaisons. Dans le cas où le matériau est au repos, il se comporte comme un gel dont on peut citer deux types : les gels chimiques (liaisons fortes par exemple les liaisons covalentes) et les gels physiques (liaisons faibles par exemple les liaisons d'hydrogène). Peixinho (2004) [54] a décrit des essais de fluage permettant de mettre en évidence le comportement du matériau suivant que la contrainte appliquée est inférieure ou supérieure à la contrainte seuil. Pour une contrainte supérieure à la limite d'élasticité ($\tau > \tau_e$), le fluide présente plusieurs réponses mécaniques illustrées sur la figure 1.2. L'étape (OA) correspond à la déformation élastique du matériau, (AB) à la phase de déformation plastique, (BC) à celle du fluage visqueux, (CR) à la période de pré-rupture (CR) et enfin R le point de rupture ([54]).

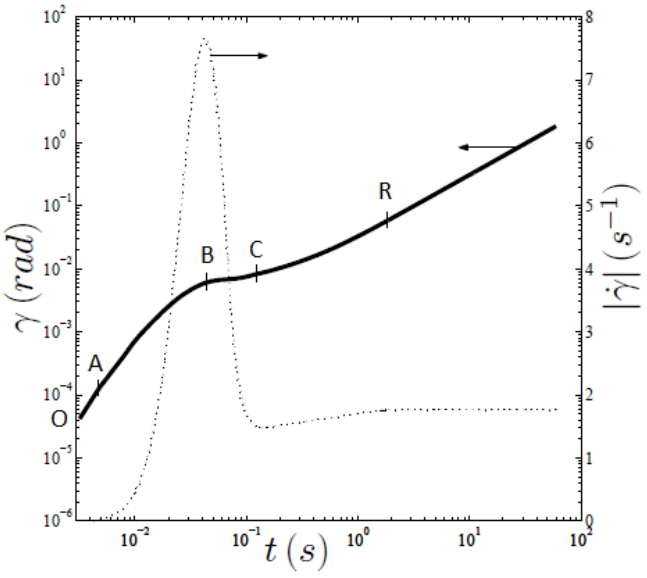


FIGURE 1.2 – Evolution simultanée de $\gamma(t)$ et de $\dot{\gamma}(t)$ pour l'essai de fluage à 8 Pa pour une solution de Carbopol à 0.2%(tirées de [54])

Bird et al. (1983) [3] ont élaboré plusieurs modèles pour caractériser ces matériaux dont les trois les plus utilisés sont rappelés dans la thèse de Peixinho (2004).

Le modèle de Bingham :

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{0}} \quad ; \quad \tau_{II}^{1/2} \leq \tau_0 \tag{1.7}$$

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\left(\frac{\tau_0}{\sqrt{4D_{II}}} + K_B\right)\overline{\overline{D}} \quad ; \quad \tau_{II}^{1/2} > \tau_0 \tag{1.8}$$

où $D_{II} = \frac{1}{2}(tr\ \overline{\overline{D}}^2)$ et $\tau_{II} = \frac{1}{2}(tr\ \overline{\overline{\tau}}^2)$ sont respectivement les seconds invariants des tenseurs $\overline{\overline{D}}$ et $\overline{\overline{\tau}}$.

Le modèle de Herschel-Bulkley :

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{0}} \quad ; \quad \tau_{II}^{1/2} \leq \tau_0 \tag{1.9}$$

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\left(\frac{\tau_0}{\sqrt{4D_{II}}} + K(4D_{II})^{\frac{n-1}{2}}\right)\overline{\overline{D}} \quad ; \quad \tau_{II}^{1/2} > \tau_0 \tag{1.10}$$

Le modèle de Casson :

$$\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{0}} \quad ; \quad \tau_{II}^{1/2} \leq \tau_0 \tag{1.11}$$

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\left(\frac{\tau_0}{\sqrt{4D_{II}}} + K_C + \left(\frac{K_C\tau_0}{\sqrt{4D_{II}}}\right)^{1/2}\right)\overline{\overline{D}} \quad ; \quad \tau_{II}^{1/2} > \tau_0 \tag{1.12}$$

où K_B est la viscosité plastique dans le modèle de Bingham, K et n sont respectivement la consistance et l'indice de structure dans le modèle de Herschel-Bulkley, K_C la consistance du modèle de Casson, $\overline{\overline{D}}$ est le tenseur des taux de déformations. Peixinho (2004) [54] a décrit quelques comportements du matériau selon les modèles ci-dessus. Il se trouve à l'état solide indéformable lorsque $\tau_{II}^{1/2} \leq \tau_0$. La viscosité apparente tend vers l'infini lorsque le cisaillement tend vers zéro.

1.2.2 Les fluides dépendants du temps

La deuxième catégorie de fluides non-Newtoniens concerne les fluides dont le comportement varie en fonction du temps. On distingue deux classes :

- Les fluides viscoélastiques
- Les fluides thixotropes

1.2.2.1 Les fluides viscoélastiques

Ce sont des fluides qui, une fois soumis à des contraintes, présentent des déformations de structure qui se traduisent par une variation d'énergie interne : c'est le phénomème de viscoélasticité. Ceci est rencontré essentiellement dans les fluides composés de macromolécules mais aussi dans la déformation de gouttes d'eau en suspensions. La loi rhéologique est décrite par cette équation :

$$\overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{\tau}}\left(\overline{\overline{D}}, \dot{\overline{\overline{D}}}, .., t\right) \tag{1.13}$$

Pour un écoulement 1D de cisaillement simple, l'équation 1.13 s'écrit comme :

$$\overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{\tau}}\left(U, \frac{\partial U}{\partial y}, t\right) \tag{1.14}$$

Les équations du mouvement et de l'énergie sont résolues sous forme instationnaire. Le phénomème d'élasticité se manifeste sous plusieurs aspects :

- Existence d'un temps de retard entre l'application de la contrainte et la réponse du fluide.

- Forte réduction du coefficient de frottement, même pour de très faibles dilutions lorsqu'il s'agit de solutions de composés macromoléculaires.

- Apparition de contraintes normales importantes perpendiculairement au gradient de vitesse, ce qui conduit à des comportements déroutants, comme avec le blanc d'oeuf qui remonte le long d'un batteur rotatif, alors qu'un tourbillon de liquide Newtonien se creuse au centre.

1.2.2.2 Les fluides thixotropes

Le système fluide devient plus complexe car la contrainte τ dépend à la fois du gradient de vitesse et de la durée du cisaillement. Le phénomène de la thixotropie est mis en évidence dans un écoulement 1D dans la Fig. 1.3 dans laquelle un fluide thixotrope est soumis à un gradient $\partial U/\partial y$ constant appliqué après un temps de repos long t_R. La contrainte de cisaillement diminue au cours du temps pour se stabilser à une valeur asymptotique τ_∞. On observe que τ_∞ est d'autant plus faible que $\partial U/\partial y$ est grand. Ceci correspond à une diminution de la viscosité, qui s'explique par la dislocation de structures présentes dans le fluide, telles que des amas de macromolécules. Quand l'écoulement est arrêté, la viscosité augmente et revient à sa valeur initiale si le repos est assez long ; il y a donc reconstruction des structures détruites.

Le temps de repos joue un rôle important dans ces écoulements. Si l'on recommence l'expérience sans temps de repos ($t_R = 0$), le fluide a un comportement Newtonien avec une viscosité $\mu = \mu_\infty$ (Fig. 1.4). Lorsque le temps de repos n'est pas nul ($t_R \neq 0$), la contrainte de déformation s'éloigne d'abord de la droite Newtonienne et s'en approche ensuite quand le gradient de vitesse devient important. Ceci s'explique par la présence des cycles d'hystérésis lié à la croissance ou la décroissance du gradient de vitesse. La forme de ces cycles change avec le fluide.

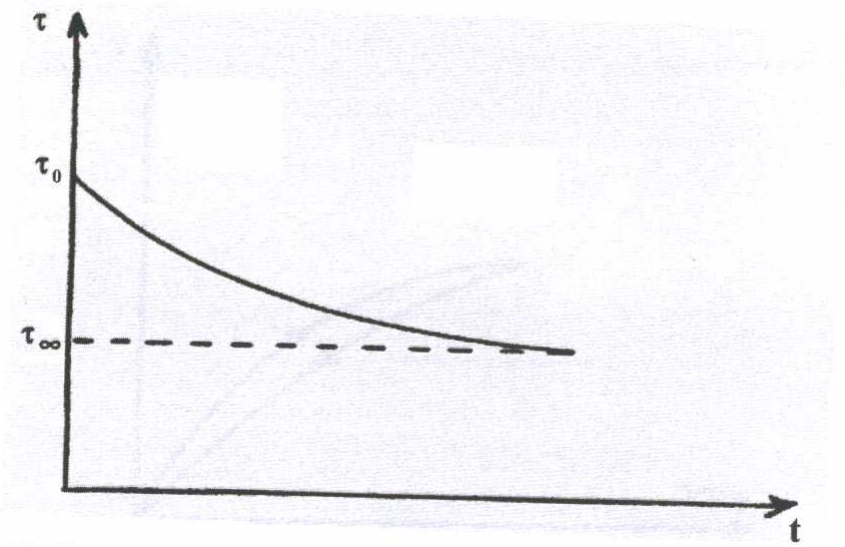


FIGURE 1.3 – Evolution de la contrainte de cisaillement dans un fluide thixotrope, à gradient de vitesse imposé

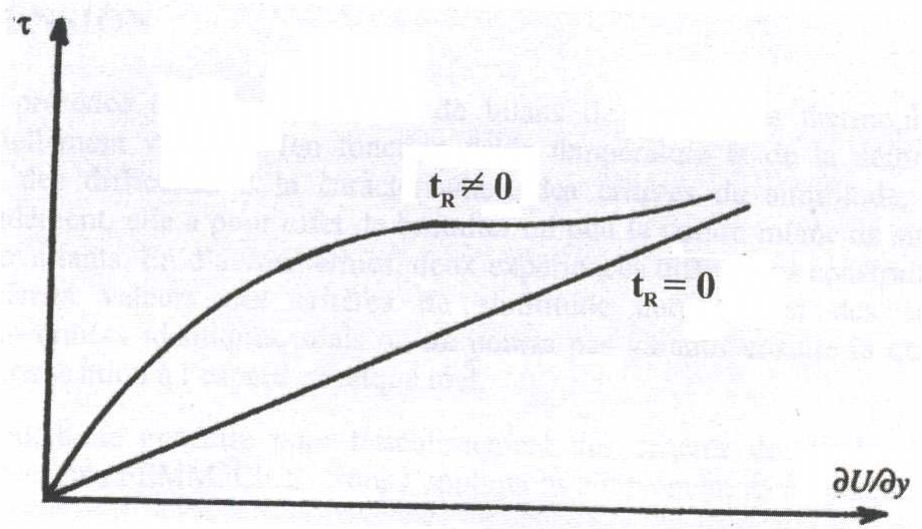


FIGURE 1.4 – Fluide thixotrope : influence du temps de repos sur la loi de comportement

1.3 Nombre de Reynolds de Metzner et Reed

Quelque soit la catégorie du fluide, les écoulements peuvent être étudiés en régime laminaire, transitoire et turbulent. Pour le fluide Newtonien, ces régimes sont caractérisés par les variations du nombre de Reynolds (rapport des forces d'inertie sur les effets de la viscosité). Pour le fluide non-Newtonien, il est difficile de calculer ce nombre de Reynolds parce que la viscosité n'est plus une constante. C'est ainsi que Metzner et Reed (1955) [38] proposent une formule établie à partir de la relation de Rabinowitsch (voir le développement en annexe A) ci-dessous :

$$\frac{Q_v}{\pi R^3} = \frac{8Q_v}{\pi D^3} = \frac{1}{\tau_p^3}\int_0^{\tau_p} \dot{\gamma}\tau^2 d\tau \tag{1.15}$$

Le fluide d'Ostwald de Waele :

$$\tau = K\dot{\gamma}^n \quad \text{c'est-à-dire que} \quad \dot{\gamma} = \left(\frac{\tau}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.16}$$

En introduisant l'expression de $\dot{\gamma}$ de l'équation (1.16) dans l'équation (1.15) et en calculant l'intégrale, celle-ci devient :

$$\frac{8Q_v}{\pi D^3} = \frac{n}{3n+1}\left(\frac{\tau_p}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.17}$$

Or nous savons que :

$$U_b = \frac{4Q_v}{\pi D^2} \tag{1.18}$$

et

$$\tau_p = \frac{\Delta P^* D}{4L} \tag{1.19}$$

En remplaçant les expressions de U_b et τ_p des équations (1.18) et (1.19) dans l'équation (1.17), nous obtenons une nouvelle expression pour la vitesse moyenne qui s'écrit :

$$U_b = \frac{n}{2(3n+1)}\left[\frac{\Delta P^* D}{4L}\frac{1}{K}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{1.20}$$

soit :

$$\Delta P^* = 4KL\left(\frac{6n+2}{n}\right)^n \frac{\overline{u}^n}{D^{n+1}} \tag{1.21}$$

donc :

$$\tau_p = K\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \left(\frac{8\overline{u}}{D}\right)^n \tag{1.22}$$

Par analogie avec les fluides Newtoniens ($Cf = 2\tau_p/\rho U_b^2 = 16/Re$), on obtient le nombre de Reynolds généralisé ou nombre de Reynolds de Metzner et Reed pour le fluide d'Ostwald de Waele qui est :

$$Re_{MR} = \frac{\rho D^n U_b^{2-n}}{8^{n-1}K\left(\frac{3n-1}{4n}\right)^n} \tag{1.23}$$

1.4 Coefficient de frottement

Les écoulements du fluide le long de la paroi de la conduite génèrent des pertes de charges caractérisées par le coefficient de perte de charge noté f. L'évaluation de f dépend du régime d'écoulement et aussi de la nature du fluide. Dans le cas de l'écoulement laminaire, $f = 16/Re$ (fluide Newtonien). Pour un fluide non-Newtonien, f devient $f = 16/Re_{MR}$.
En turbulence, beaucoup de travaux, spécialement basés sur la détermination du coefficient des pertes de charge, ont été menés. En raison de la complexité des écoulements turbulents avec la multiplicité des paramètres, les auteurs ont introduit des hypothèses pour étudier certaines grandeurs comme le coefficient de frottement. Dodge et Metzner (1959) [13] ont établi une formule dans laquelle f est déterminée de manière itérative.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4.0}{n'^{0,75}} log N_{Re'} f^{1-n'/2} - \frac{0.4}{n'^{1,2}} \tag{1.24}$$

avec $N_{Re'} = \frac{\rho D^{n'} \overline{U}^{n'-2}}{K' 8^{n'-1}}$ qui équivaut à Re_{MR} dans le cas d'un fluide d'Ostwald de Waele. La même année, Dodge et Metzner ont développé cette forme explicite :

$$f = a/Re_{MR}^{b} \quad \text{avec} \quad a = 0,0665 + 0,01175n' \quad \text{et} \quad b = 0,365 - 0.177n' + 0,062n'^{2}. \tag{1.25}$$

Il existe d'autres corrélations implicites (c'est-à-dire que f est calculée de manière itérative) pour l'évaluation des pertes de charges.

- Corrélation de Tomita (1959) [85]

$$\frac{1}{\sqrt{f_{T0}}} = 4log(Re_{T0}\sqrt{f_{T0}}) - 0.4 \tag{1.26}$$

avec $f_{T0} = (4/3)[(1+2n)/(1+3n)]f$ et $Re_{T0} = (3/4)[(1+3n)/(1+2n)]Re_{MR}$

- Corrélation de Thomas (1960) [84]

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4/n' log(Re_{MR} f^{1-n'/2}) - 0,4n' \tag{1.27}$$

- Corrélation de Clapp (1961) [8]

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = (4.53/n') log[Re_{MR} f^{1-n'/2}] + 2.69/n' + 0,69(5n' - 8/n') \tag{1.28}$$

- Corrélation de Trinh (1969) [86]

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = (4,06/n') log[Re_{MR} f^{1-n'/2}] + 2.16 - 2,78/n' \tag{1.29}$$

Pour les fluides d'Ostwald, $n' = n$ et $K' = K(\frac{n+1}{4n})^n$. Outre la corrélation explicite de Dodge et Metzner (1959), d'autres permettent également d'évaluer de manière directe la valeur de f. Il s'agit de :

- Corrélation de Hanks et Ricks (1975) [28]

$$f = 0,0682n^{-1/2}/Re_{MR}^{1/(1.87+2,39n)} \tag{1.30}$$

- Corrélation de Dodge, Metzner et Gomes (1987) [23]

$$f = 0,060n^{0.462}Re^{-0,233} \tag{1.31}$$

- Corrélation d'Ostwald de Waele et Gomes (1987) [23]

$$f = 0,069n^{0,666}Re^{-0.233} \tag{1.32}$$

- Corrélation de Frank, Schuk et Gomes (1987) [23]

$$f = 0,110n^{0.616}Re^{-0,287} \tag{1.33}$$

- Corrélation de Shaver et Merill (1959) [78]

$$f = 0,079/n^5 Re_{MR}^{\alpha} \qquad \text{pour} \quad \alpha = 2.63/10.5^n \tag{1.34}$$

- Corrélation de El-Emam et al. (2003) [16]

$$f = [n/(3,072 - 0.1433n)Re_{MR}^{0,282-4,211n} - 0,000654]/4 \tag{1.35}$$

Parmi les corrélations de f ci-dessus, certaines sont comparées aux expériences de Scheid et al. (2011) [10] sur l'étude de l'écoulement du fluide de forage, dans des tubes circulaire et annulaire, avec le modèle d'Ostwald de Waele et de Casson. La figure 1.5 tirée des résultats de [10] montre une superposition entre les valeurs expérimentales et celles données par les corrélations de Ostwald de Waele et Gomes (1987) [23] et Frank, Schuk et Gomes (1987) [23] et un léger décalage avec celle de Dodge, Metzner et Gomes (1987) [23]. Egalement sur la figure 1.5, les données expérimentales appartiennent toutes à la droite du régime laminaire ($16/Re_{MR}$). Dans le chapitre 4, nous utiliserons certaines corrélations parmi celles citées ci-dessus.

1.5 les régimes d'écoulements

Le passage du régime laminaire au turbulent est défini par le nombre de Reynolds critique Re_c . Cette valeur critique dépend de la loi rhéologique. Ainsi pour le modèle d'Ostwald de Waele, Ryan et Johnson (1959) [72] ont établi la formule suivante :

$$Re_c = \frac{6464n(2+n)^{\frac{-(2+n)}{1+n}}}{(1+3n)^2} \tag{1.36}$$

Mais Ryan et Johnson (1959) [72] n'ont pas tenu compte du paramétre de stabilité (rapport entre l'énergie apportée par le fluide et l'énergie dissipée) de l'écoulement. L'importance de ce paramètre a été vérifiée par plusieurs travaux avec les fluides pseudoplastiques. Cependant, en se basant sur l'importance de ce critère de stabilité, Mishra et Tripathi (1971) [39] ont proposé une relation générale :

$$Re_c = 2100\frac{(4n+2)(5n+3)}{3(1+3n)^2} \tag{1.37}$$

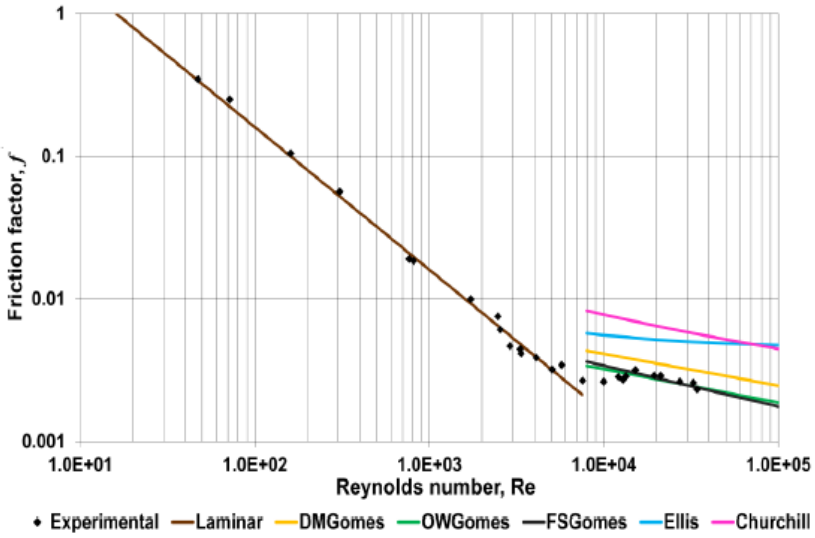


FIGURE 1.5 – Comparaisons entre les corrélations de f et l'expérience de Scheid et al. (2011) pour $n = 0,2291$ (tiré de [10])

Dans cette partie, nous n'avons pas abordé la nature de la stabilité de l'écoulement (étude détaillée de la transition) parce que ce travail concerne les simuations des écoulements turbulents. Nous avons rappelé ici le nombre de Reynolds critique pour le fluide non-newtonien pour avoir une idée étude sur l'évolution du régime de nos écoulements.

Dans ce travail, nous allons montrer quelques résultats pour les écoulements laminaires (pour validations) et la plus grande partie sera consacrée au régime turbulent.

1.6 Conclusion

De part leurs applications, les fluides non-newtoniens sont beaucoup utilisés dans les procédés industriels. Ces fluides représentent plus de 20% des produits de notre quotidien. Les généralités qui viennent d'être présentées dans ce chapitre ne sont pas exhaustives : il existe de nombreux paramètres qui permettent de caractériser les fluides non-Newtoniens. Les procédés de synthèse permettent de donner naissance à d'autres fluides ou produits à rhéologie complexe ; ce qui élargit leurs familles.

Enfin, les corrélations définies pour le calcul du coefficient de frottement, en particulier celles qui sont explicites, sont d'une grande précision pour évaluer les pertes de charges des fluides non-Newtoniens car ces dernières sont validées par les expériences de Scheid [10]. Les formules analytiques (écoulement laminaire) et les corrélations (écoulement turbulent) permettant d'évaluer le nombre de Nusselt sont développés dans le chapitre 6, simulation des transferts thermiques.

Chapitre 2

Etude bibliographique

Les fluides non-Newtoniens se retrouvent dans une grande variété d'applications dans les mondes industriel et académique. Pour cette raison, depuis plusieurs années, leur étude reste une préoccupation majeure de la recherche. Plusieurs auteurs comme Malin (1997) [35] ont développé des modèles pour l'étude numérique de ces fluides. Malin (1997) [35] a réalisé des simulations numériques des fluides d'Ostwald de Waele avec le modèle k-ϵ modifié (modèle k-ϵ de Lam-Bremhort), dans une conduite cylindrique lisse pour analyser les variations de l'énergie cinétique turbulente, les profils de vitesse et le coefficient de frottement. Pour valider son code avant de réaliser l'étude des écoulements turbulents, Malin (1997) [35] a effectué des simulations en régime laminaire et a comparé ses prédictions aavec profil de vitesse laminaire analytique (2.1) donnée ci-dessous et tirée de Skelland (1967) [79] et Govier et al. (1977) [24] :

$$\frac{U_z}{U_b} = \frac{3n+1}{n+1}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right) \tag{2.1}$$

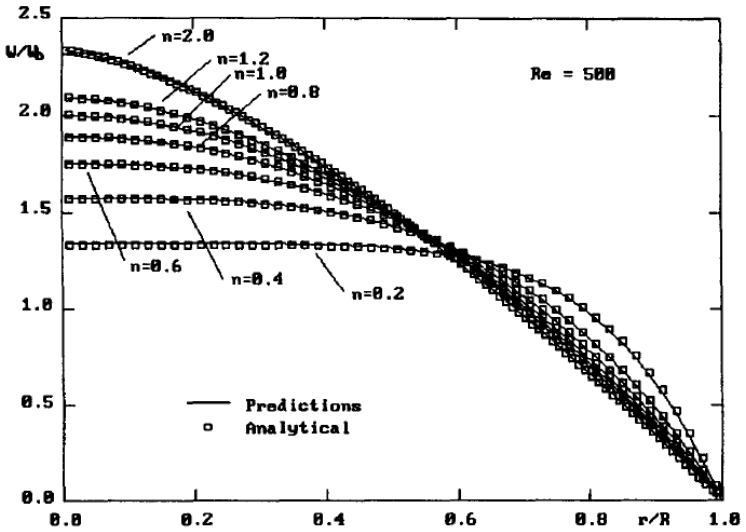


FIGURE 2.1 – Profils de la vitesse axiale [35]

La figure 2.1 montre une superposition entre les solutions analytiques et les prédictions de Malin (1997) [35]. L'auteur a aussi retrouvé qu'en régime laminaire, le coefficient de

frottement f est indépendant de l'indice de comportement n et s'accorde avec la formule analytique $f = 16/Re_{MR}$ (Fig. 2.2).
Pour les écoulements turbulents, Malin (1997) [35] a comparé ses résultats sur le coefficient de frottement aux prédictions de la corrélation de Dodge et Metzner (1959) [13]) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4.0}{n^{0.75}} log_{10} Re_{MR} f^{1-n/2} - \frac{0.4}{n^{1.2}} \tag{2.2}$$

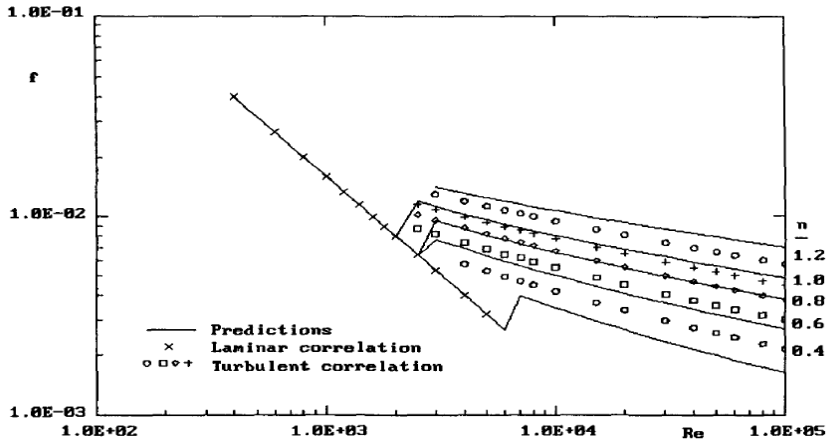


FIGURE 2.2 – Evolutions du coefficient de frottement [35]

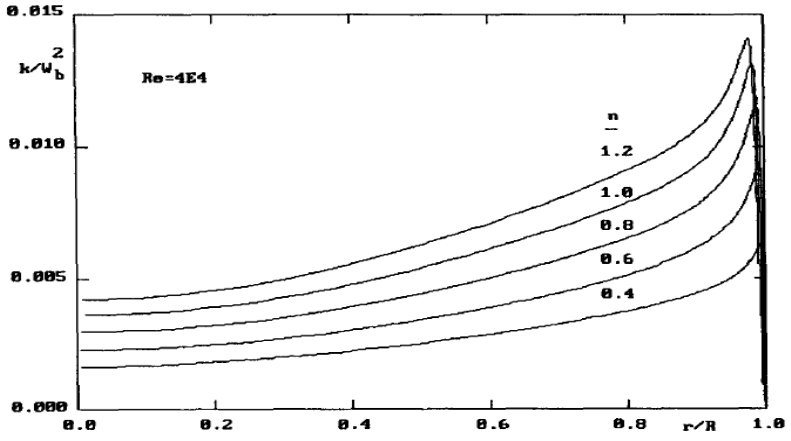


FIGURE 2.3 – Evolutions de l'énergie cinétique turbulente [35]

Il obtient un bon accord (cf. Fig. 2.2). Les résultats de Malin (1997) [35] montrent une forte production de l'énergie cinétique turbulente (Fig. 2.3) lorsque l'indice de comportement n augmente et cette production est maximale au voisinage de la paroi. Pour notre travail, cet article de Malin (1997)[35] a servi pour la validation des écoulements laminaires (profil de vitesse et coefficient de frottement) et à l'analyse de l'énergie cinétique turbulente.

Ro et Ryou (2012) [71] ont développé un autre modèle k-ϵ modifié pour analyser les écoulements des fluides pseudoplastiques (cf. chap. 1) dont l'indice de comportement n

varie entre 0.4 et 1. La différence par rapport au modèle k-ϵ de Malin (1997) [35] est que Ro et Ryou (2012) [71] ont formulé leur modèle sur la base du modèle du k-ϵ standard avec les fonctions de paroi et les fonctions d'amortissement incluant le phénomène de la réduction de traînée. Les prédictions sont comparées aux résultats de Malin (1997) [35] et aux expériences de Dodge et Metzner (1959) [13]. Elles sont en bon accord avec les données expérimentales comme le montrent les figures 2.4 et 2.5.

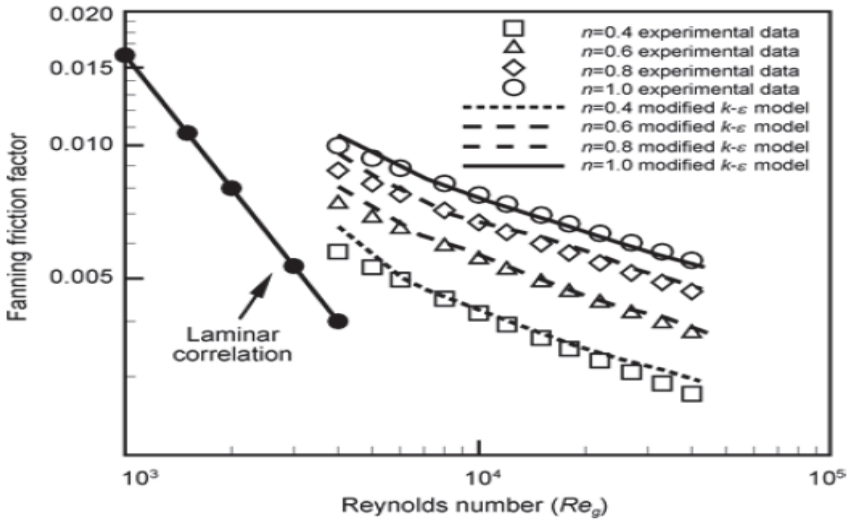


FIGURE 2.4 – Comparaison du coefficient de frottement aux mesures expérimentales de [13] (tirée de [71])

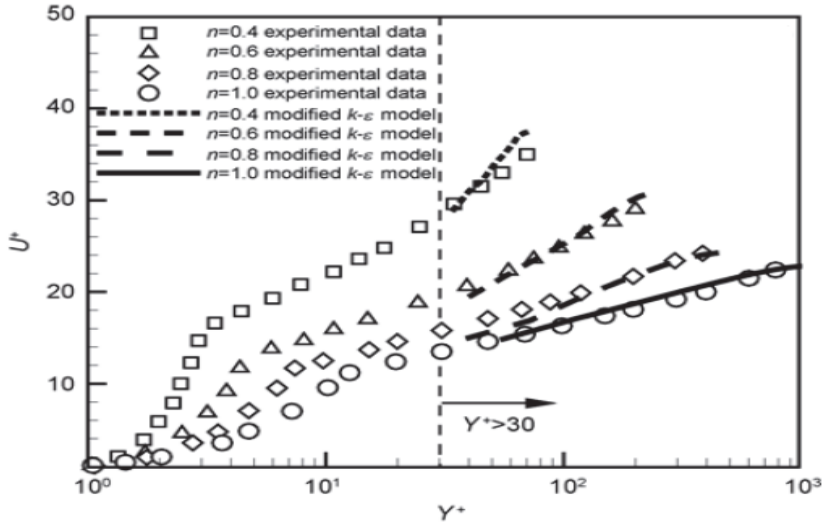


FIGURE 2.5 – Comparaison du coefficient de frottement aux mesures expérimentales de [13] (tirée de [71])

Rudman et al. (2004) [69] ont réalisé la simulation numérique directe (DNS) des écoulements turbulents de fluides rhéofluidifiants ($n < 1$) dans une conduite, en utilisant la méthode spectrale de Fourier, pour des nombres de Reynolds de Metzner et Reed variant

entre 3000 et 4000. Les auteurs ont utilisé deux modèles rhéologiques : le modèle d'Ostwald de Waele et le modèle de Herschel-Bulkley (cf. chap. 1 pour le détail de ces lois). Une DNS similaire à grand nombre de Reynolds de Metzner et Reed ($Re_{MR} = 7500$) a été effectuée par Rudman et Blackburn (2012) [70].

Pour l'approche DNS, on peut citer aussi le travail de Eggels et al. (1994) [15] qui ont fait une étude comparative entre les solutions DNS et les expériences sur l'écoulement de l'air dans un tuyau lisse, pour des nombres de Reynolds de l'ordre de 5300 basés sur la vitesse moyenne. Les auteurs ont mis en oeuvre les mesures PIV (Particule Image Velocimetry), LDA (Laser Doppler Anemometry) et HWA (Hot Wire Anemometry) qui ont permis de déterminer les évolutions de la vitesse axiale, les coefficients d'aplatissement et de dissymétrie, les rms des fluctuations de vitesse et la tension de Reynolds. Parallèlement à ces expériences, Eggels et al. (1994) [15] ont reproduit numériquement le même écoulement par la méthode DNS. Les auteurs montrent que les résultats des différentes méthodes se superposent (cf. Fig. 2.6). Les valeurs des rms des fluctuations de vitesse, des coefficients de dissymétrie et d'aplatissement, à une distance y^+ de la paroi donnée, obtenues par la méthode DNS de Eggels et al. (1994) (Cf. Tab. 2.1) sont proches des simulations de Unger et Friedrich (1993) [88] et de Kim et al. (1987) [34], ce qui permet de conclure que les mesures effectuées pour cet écoulement d'air sont aussi précises que la méthode DNS. Dans ce document, l'article de Eggels et al. (1994) [15] a servi pour une validation expérimentale de nos simulations LES dans le cas où l'indice de comportement n vaut 1 (fluide Newtonien).

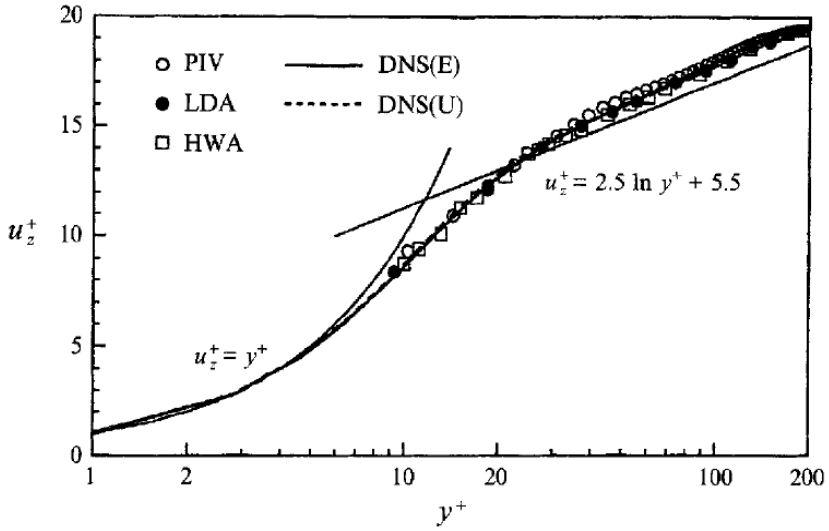


FIGURE 2.6 – Comparaison entre les solutions DNS et les données expérimentales : symboles = les mesures de [15] ; lignes = solutions DNS de [15] ; tirets = solutions DNS de [88]

Redjem (2008) [66] a effectué, à l'aide de l'approche DNS, des simulations numériques des transferts de chaleur turbulents par convection forcée dans des conduites cylindriques et des espaces annulaires. Un bon accord est trouvé entre les résultats de Redjem (2008) [66] et ceux de [15], Kawamura et al. (1998) [31] et Satake et Kunugi (2002) [74], comme on peut le voir sur les figures 2.7 et 2.8, dans le cas de la conduite fixe. Comme Wangskarn et al. (1990) [92], Redjem (2008) [66] a montré que les transferts thermiques augmentent

	DNS(E)		**DNS(U)**		**DNS(KMM)**	
	Valeur	y^+	Valeur	y^+	Valeur	y^+
$u_{r,rms}$	0.862	60.0	0.851	58.1	0.836	55.9
$u_{\theta,rms}$	1.025	44.1	1.031	45.9	1.085	38.1
$u_{z,rms}$	2.731	14.1	2.721	14.1	2.628	14.6
$\overline{u'_r u'_z}$	0.710	32.8	0.729	32.8	0.708	32.8
$S(u_r)$	-0.62	6.6	-0.62	8.4	-0.24	13.3
$S(u_z)$	1.16	0.94	1.07	0.94	0.94	1.02
$F(u_r)$	18.9	1.88	17.3	1.88	O(22)	0
$F(u_\theta)$	8.4	0.94	7.9	0.94	O(7)	0
$F(u_z)$	2.16	14.1	2.17	14.1	2.15	11.0
$F(u_z)$	5.6	0.94	5.1	0.94	4.1	0

TABLE 2.1 – Valeurs des rms des fluctuations de vitesse ($u_{i,rms}$ avec $i = r, \theta, z$), de la tension de Reynolds ($\overline{u'_r u'_z}$), des coefficients de dissymétrie ($S(r_j)$ avec $j = r, z$) et d'aplatissement ($F(r_j)$ avec $j = r, \theta, z$)(données tirées de [15])

avec le nombre de Prandtl. Baptista et al. (2014) [2], Zheng et al. (2008) [97] ont également étudié les transferts thermiques. Les données de Redjem (2008) [66] sont exploitées pour valider les calculs des transferts thermiques de ce document.

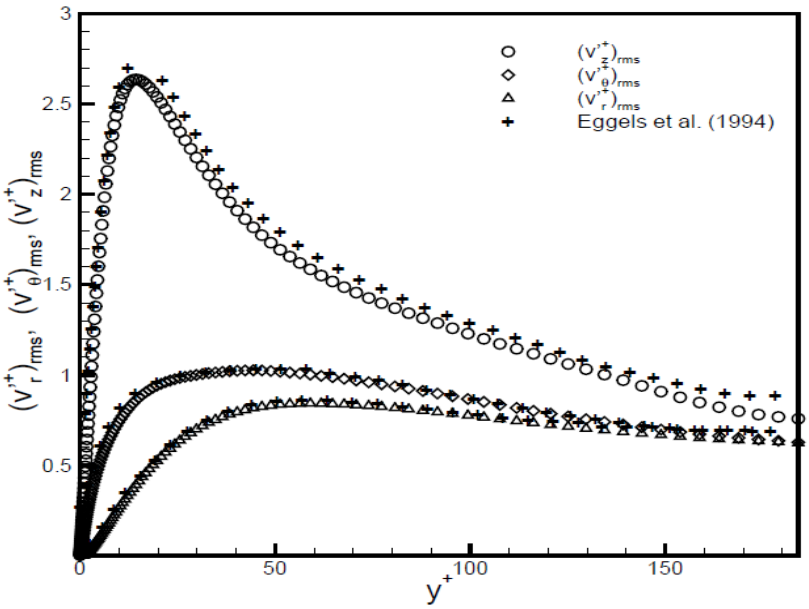


FIGURE 2.7 – Ecarts-types des fluctuations de vitesse pour une conduite fixe (tiré de [66])

Metzner et Reed (1955) [38] ont établi des relations pour estimer le coefficient de perte de charges des fluides non-Newtoniens, en régime turbulent, dont les valeurs concordent bien avec les résultats expérimentaux. Plusieurs auteurs comme Tomita (1959) [85], Thomas (1960) [84], Clapp (1961) [8], Trinh (1969) [86], Hanks et Ricks (1975) [28], Dodge Metzner et Gomes (1987) [23], Ostwald Waele et Gomes (1987) [23]... ont élaboré des corrélations pour calculer le coefficient de frottement. Ces relations sont rappelées dans la section 1.4 de ce mémoire.

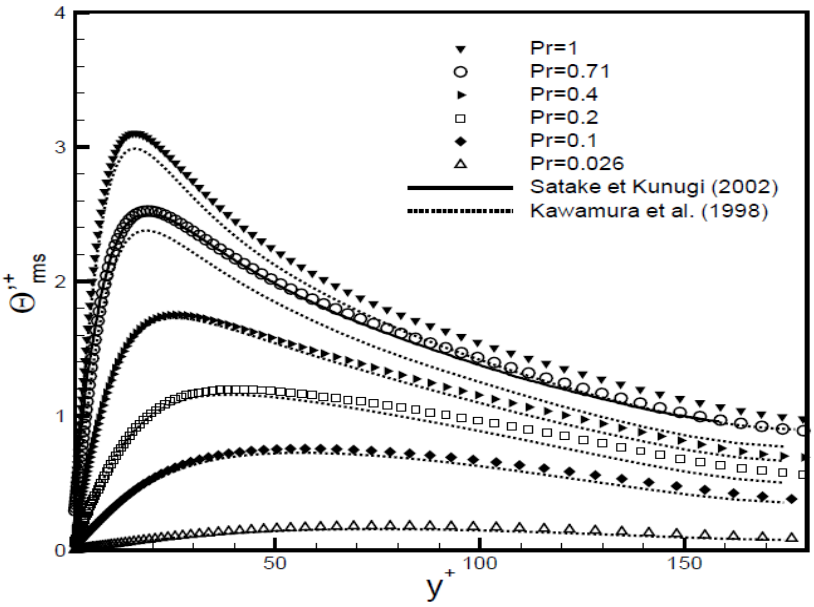
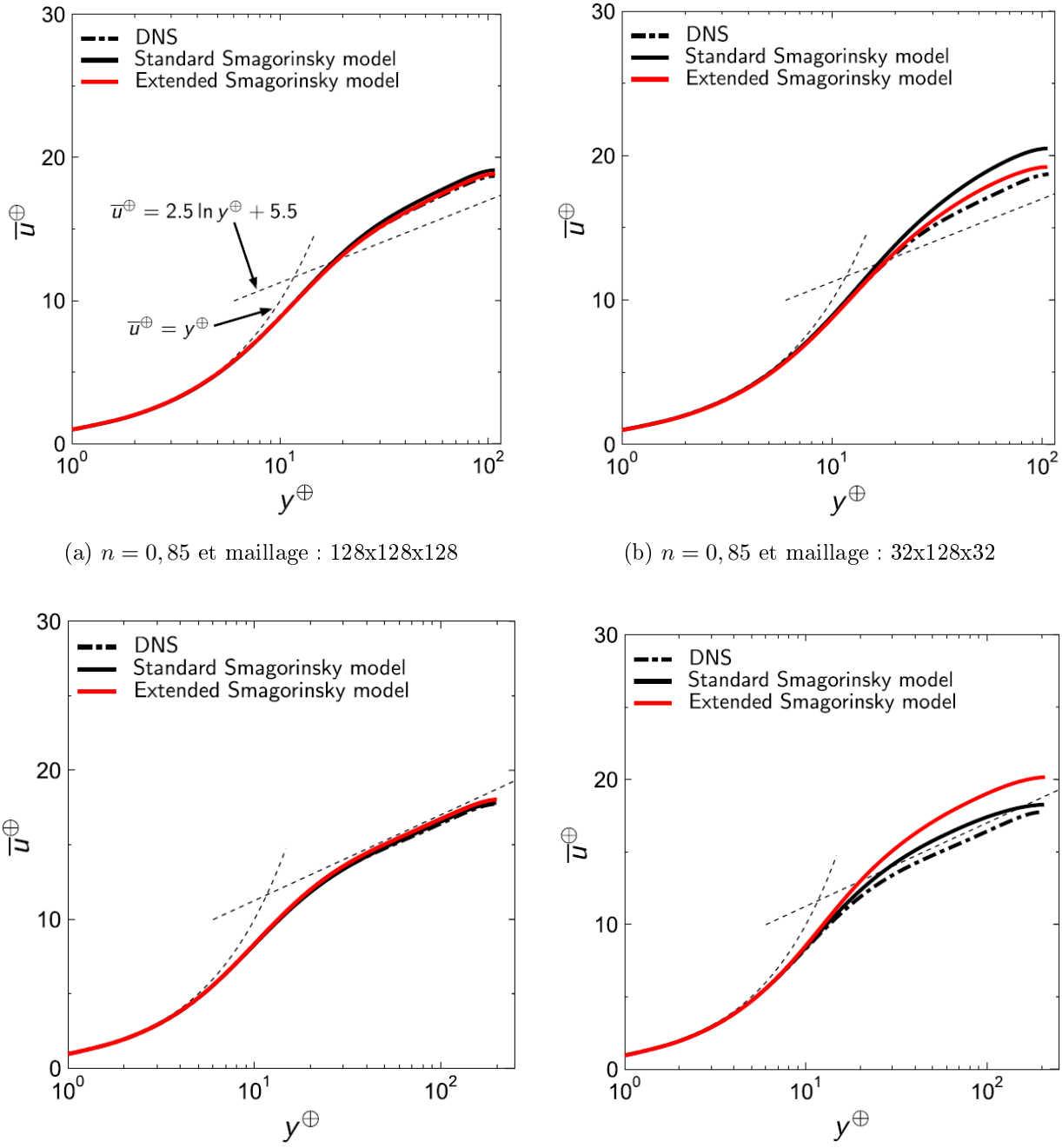


FIGURE 2.8 – Ecarts-types des fluctuations de température pour une conduite fixe (tiré de [66])

Ohta et Miyashita (2014) [52] ont développé un modèle de turbulence qui peut partiellement reproduire les solutions DNS. Il s'agit de l'approche LES basée sur le modèle de Smagorinsky adaptée aux fluides non-Newtoniens. Les auteurs ont, à partir du modèle de Smagorinsky standard, introduit une correction sur le terme de la viscosité sous-maille (cf. chap. 5). Les simulations effectuées avec la loi d'Ostwald de Waele ($n = 0.85$ et $n = 1.15$) et la loi de Casson (cf. chap. 1) dans un canal donnent des résultats concordants avec les prédictions de la DNS (Figs. 5.2). Les figures 5.2 montrent qu'à maillage grossier, c'est le modèle de Smagorinsky non-Newtonien qui s'accorde mieux avec la DNS. Un comportement similaire à celui illustré sur la figure 5.2 est obtenu dans le cas du modèle de Casson. Ohta et Miyashita (2014) [52] ont conclut que le modèle de Smagorinsky non-Newtonien pourrait être utilisé pour prévoir plus précisement le champ de vitesse des écoulements turbulents des fluides dont la rhéologie est décrite à la fois par le modèle d'Ostwald de Waele et le modèle de Casson. Nous avons utilisé ce modèle de Smagorinsky non-Newtonien pour simuler les transferts de chaleur des fluides non-Newtoniens dans une conduite cylindrique (cf. chap. 6).

Molla et al. (2012) [44] ont réalisé une approche LES pour simuler le passage au régime turbulent de l'écoulement du sang. Dans cette étude, les auteurs ont utilisé le modèle de Cross pour approcher la viscosité moléculaire et les modèles de tenseurs sous-maille non-linéaires de Wang et Bergstrom (2005) pour la modélisation des tenseurs sous maille. Les tests sont faits dans un canal avec différents modèles rhéologiques pour décrire la viscosité du sang. Le but de cette recherche est de montrer les effets de ces différents modèles de viscosité sur le taux de cisaillement, les contraintes de cisaillement, la pression moyenne, l'énergie cinétique de turbulence et de la zone de récirculation post-sténosique. Ces simulations ont montré que le modèle non-Newtonien choisi est bien adapté pour l'étude de l'écoulement du sang contrairement au modèle Newtonien. Les résultats ont montré que la chute de tension de cisaillement dans la zone de la sténose est sous-estimée avec le



(a) $n = 0,85$ et maillage : 128x128x128

(b) $n = 0,85$ et maillage : 32x128x32

(c) $n = 1,15$ et maillage : 128x128x128

(d) $n = 1,15$ et maillage : 32x128x32

FIGURE 2.9 – Profils moyens de vitesse obtenus avec le modèle de Smagorinsky non-newtonien et comparés aux solutions DNS dont le maillage est 128x128x128 pour $n = 0.85$ et 1.15 (tirés de [52])

modèle Newtonien. De plus, l'énergie cinétique turbulente prédite par les modèles non-Newtoniens est beaucoup plus élevée qu'avec les modèles Newtoniens. Les auteurs ont conclut que cette élevation d'énergie cinétique peut provoquer des dommages potentiels aux cellules sanguines.

Pinho et al. (1990) [56] ont déterminé, à partir des mesures de vélocimétrie laser, la vitesse et les rms des fluctuations de vitesse pour une solution aqueuse de carboxymethyl cellulose de sodium, pour quatre concentrations différentes (4 indices de comportement n) et pour un nombre de Reynolds défini comme $Re = U_b D/\nu$ qui correspond au nombre de Reynolds généralisé $Re_g = \rho U_b D/\eta_w$ (Rudman et al. (2004)) où η_w est la viscosité dynamique à la paroi. Ces mesures ont été réalisées dans une conduite cylindrique pour des nombres de Reynolds compris entre 240 et 111000 et pour des fluides rhéofluidifiants. Elles mettent l'accent sur la décroissance de la consistance K avec la concentration des solutions polymères, c'est-à-dire que les fluides les plus rhéofluidifiants sont plus concentrés que les fluides dilatants.

Scirocco et al. (1984) [75] ont réalisé des expériences pour étudier l'écoulement laminaire et le transfert de chaleur dans la solution de CMC à $0,3\%$ en poids, dans un tube chauffé à densité de flux de chaleur constant. Les auteurs ont d'abord vérifié la loi rhéologique permettant de reproduire la viscosité de ce fluide. Les mesures ont été effectuées pour un fluide d'Ostwald de Waele et le nombre de Reynolds de l'ordre de 100. Le champs de vitesse mesuré en régime laminaire montre une bonne tendance avec les profils théoriques. Les résultats montrent une incidence considérable du gradient thermique sur la distribution des vitesses. Les auteurs ont conclut que cette incidence provient de la fluidification du fluide au voisinage de la paroi, comme cela était prévisible vu la forte décroissance de la viscosité apparente avec la température. Les mesures ont montré également que le transfert de chaleur peut varier en fonction des conditions expérimentales. En 1985, les auteurs ont réalisé une étude similaire à celle de 1984 mais en régime laminaire et turbulent pour différents nombre de Reynolds. Ils ont clairement obtenu une augmentataion du nombre de Nusselt avec le nombre de Reynolds.

Chapitre 3

Simulation des grandes échelles

3.1 Introduction

Dans la simulation numérique à grandes échelles LES, on applique sur les équations un filtre spatial supprimant la contribution des petites échelles. La technique LES consiste donc à calculer explicitement les mouvements à grande échelle tout en modélisant l'effet des plus petites échelles. La séparation des échelles est faite au moyen d'un filtre passe-bas en fréquence (ou passe-haut en échelle). Le filtre introduit, noté G_Δ, de largeur Δ, intervient implicitement dans le formalisme des équations LES. Chaque variable f est décomposée en une partie filtrée $\overline{f}$, relative aux grandes échelles, et une partie f' fluctuante, relative aux petites échelles de sous-maille :

$$f(\vec{x},t) = \overline{f}(\vec{x},t) + f'(\vec{x},t) \tag{3.1}$$

L'opération de filtrage (opération de prise de moyenne spatiale filtrée) s'écrit dans l'espace physique comme le produit de convolution de la fonction $f(\vec{x},t)$ à filtrer avec la fonction $G_\Delta(\vec{x})$:

$$\overline{f}(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{y},t) G_\Delta(\vec{x},\vec{y})\,\mathrm{d}\vec{y} \tag{3.2}$$

où $G_\Delta(\vec{x},\vec{y})$ est la fonction de filtrage spatial au point $\vec{x}$ dans l'environnement défini par $\vec{y}$, Δ le paramètre de coupure (largeur ou taille) du filtre défini par :

$$\Delta = (r\Delta r\Delta\theta\Delta z)^{1/3} \tag{3.3}$$

Sagaut (1998) [55] présente différents types de filtres et les conditions d'utilisations de ces filtres. Le filtre doit vérifier les propriétés suivantes :

- Conservation des constantes

$$\overline{a} = a \tag{3.4}$$

- Linéarité

$$\overline{\phi + \Phi} = \overline{\phi} + \overline{\Phi} \tag{3.5}$$

- Commutativité avec la dérivation

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x} \tag{3.6}$$

Ces filtres ne sont pas des tenseurs de Reynolds car :

$$\overline{\overline{\phi(\eta)}} \neq \overline{\phi(\eta)} \tag{3.7}$$

$$\overline{\phi'(\eta)} \neq 0 \tag{3.8}$$

Nous utilisons un filtre boîte (moyenne spatiale dans les directions périodiques z et θ). Dans l'espace physique, ce filtre est défini par :

$$G(x) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{si } |x| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.9}$$

3.2 Formulations mathématiques

3.2.1 Equations

L'écoulement du fluide est gouverné par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Pour un fluide non-newtonien incompressible, ces équations sous forme tensorielle, s'écrivent :

Equation de continuité

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \tag{3.10}$$

Equation de quantité de mouvement

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (u_i^* u_j^*)}{\partial x_i^*} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_i^*}\left[\nu\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}\right)\right] \tag{3.11}$$

Avec (.*) les grandeurs dimensionnelles. La viscosité cinématique est déterminée à partir du modèle d'Ostwald de Waele défini par :

$$\eta = K\dot{\gamma}^{n-1}, \qquad \nu = \eta/\rho \tag{3.12}$$

Pour rendre les équations (3.10) et (3.11) adimensionnelles, nous avons utilisé les grandeurs suivantes :

$$x = \frac{x^*}{R}, \qquad y = \frac{y^*}{R} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{z^*}{R} \tag{3.13}$$

$$u = \frac{u^*}{U_{cL}} \tag{3.14}$$

où $U_{cL} = (3n+1)U_b/(n+1)$ représente la vitesse sur l'axe du tube du profil analytique laminaire non-newtonien, avec U_b la vitesse moyenne axiale.

$$p = \frac{p^*}{\rho U_{cL}^2} \tag{3.15}$$

$$t = \frac{t^*}{t_{ch}} \qquad \text{où} \qquad t_{ch} = \frac{R}{U_{cL}} \tag{3.16}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{U_{cL}}{R}\dot{\gamma}^* \tag{3.17}$$

En introduisant les grandeurs adimensionnelles définies ci-dessus dans les équations (3.10) et (3.11), celles-ci deviennent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_s}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\dot{\gamma}^{n-1}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \tag{3.19}$$

où Re_s est le nombre de Reynolds de simulation défini par :

$$Re_s = \frac{\rho U_{cL}^{2-n} R^n}{K} \tag{3.20}$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} \quad \text{est le taux de cisaillement} \tag{3.21}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{est le taux de déformation} \tag{3.22}$$

Les équations (3.18) et (3.19) sont filtrées à l'aide d'un filtre générique de moyenne spatiale sur un volume de controle cylindrique :

$$\overline{q}(r,\theta,z) = \frac{1}{r\Delta r \Delta\theta \Delta z}\iiint q(r',\theta',z')\, r' \Delta\theta' \Delta r' \Delta z' \tag{3.23}$$

Les équations filtrées s'écrivent :

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_s}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial x_i}\right] - \frac{\partial \overline{\tau}_{ij}}{\partial x_i} \tag{3.25}$$

où $\overline{\tau}_{ij} = \overline{q_i q_j} - \overline{q}_i \overline{q}_j$ est le tenseur sous-maille et $\overline{T}_{ij} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial q_j}{\partial x_i}}$ le tenseur sous-maille supplémentaire pour un fluide un non-newtonien. Dans le système de cordonnées cylindriques, les équations (3.24) et (3.25) sont réécrites avec le changement de variables suivant :

$$q_r = r.v_r, \quad q_\theta = v_\theta \quad \text{et} \quad q_z = v_z \tag{3.26}$$

Ce changement de variables (3.26), tiré des travaux de Verzicco et Orlandi (1996) [89] a été choisi afin d'éviter la singularité sur l'axe de la conduite ($r = 0$). En explicitant les équations (3.24) et (3.25) en fonction des variables q_r q_θ et q_z, on obtient :

$$\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial r} + \frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial z} = 0 \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{q}_z}{Dt} =& \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial z}\right)\right.\\ &\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{T}_{rz}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \overline{T}_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \overline{T}_{zz}}{\partial z}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{\tau}_{rz}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \overline{\tau}_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{zz}}{\partial z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{q}_r}{Dt} =& -r\frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_r/r}{\partial r} + \overline{T}_{rr}\right) - \left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\overline{q_r}}{r^2} + \overline{T}_r\right) - \frac{2}{r^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta} + \overline{T}_{\theta\theta}\right)\right.\\ &\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial \theta} + \overline{T}_{\theta r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial r} + \overline{T}_{zr}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{\tau}_{rr}}{r}\right)\\ &- \frac{\partial \overline{\tau}_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{rz}}{\partial z} + \frac{\overline{\tau}_{\theta\theta}}{r^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{q}_\theta}{Dt} =& -\frac{\partial \overline{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_\theta/r}{\partial r} + \overline{T}_{r\theta}\right) - \left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\overline{q_\theta}}{r^2} + \overline{T}_\theta\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta} + \overline{T}_{\theta\theta}\right)\right.\\ &\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial z} + \overline{T}_{z\theta}\right) + \frac{2}{r^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial \theta} + \overline{T}_{\theta r}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{\tau}_{r\theta}}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \overline{\tau}_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{\theta z}}{\partial z} - \frac{\overline{\tau}_{\theta r}}{r}\end{aligned} \tag{3.28}$$

avec :

– les dérivées particulaires :

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{q}_z}{Dt} &= \frac{\partial \overline{q}_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\overline{q}_z\overline{q}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\overline{q}_\theta\overline{q}_z)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\overline{q}_z\overline{q}_z)}{\partial r}\\ \frac{D\overline{q}_r}{Dt} &= \frac{\partial \overline{q}_r}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{q}_r\overline{q}_r/r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\overline{q}_\theta\overline{q}_r)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\overline{q}_r\overline{q}_z)}{\partial z} - \frac{\overline{q}_\theta\overline{q}_\theta}{r^2}\\ \frac{D\overline{q}_\theta}{Dt} &= \frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{q}_r\overline{q}_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(\overline{q}_\theta\overline{q}_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\overline{q}_\theta\overline{q}_z)}{\partial r} + \frac{\overline{q}_\theta\overline{q}_r}{r^2}\end{aligned} \tag{3.29}$$

– les tenseurs sous-mailles issus des termes convectifs (qui existent aussi pour un fluide Newtonien) :

$$\overline{\tau}_{rz} = \overline{q_r q_z} - \overline{q}_r\overline{q}_z, \qquad \overline{\tau}_{\theta z} = \overline{q_\theta q_z} - \overline{q}_\theta\overline{q}_z, \qquad \overline{\tau}_{zz} = \overline{q_z q_z} - \overline{q}_z\overline{q}_z \tag{3.30}$$

$$\overline{\tau}_{r\theta} = \overline{q_r q_\theta} - \overline{q}_r\overline{q}_\theta, \qquad \overline{\tau}_{\theta\theta} = \overline{q_\theta q_\theta} - \overline{q}_\theta\overline{q}_\theta, \qquad \overline{\tau}_{rr} = \overline{q_r q_r} - \overline{q}_r\overline{q}_r \tag{3.31}$$

– les tenseurs sous-mailles supplémentaires pour un fluide non-newtonien (issus des termes visqueux) :

$$\overline{T}_{rz} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial q_z}{\partial r}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial q_z}{\partial r}}, \qquad \overline{T}_{\theta z} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial q_z}{\partial \theta}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial q_z}{\partial \theta}} \tag{3.32}$$

$$\overline{T}_{zz} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial q_z}{\partial z}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial q_z}{\partial z}}, \qquad \overline{T}_{rr} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial (q_r/r)}{\partial r}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial (q_r/r)}{\partial r}} \tag{3.33}$$

$$\overline{T}_{\theta r} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial(q_r/r)}{\partial\theta}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial(q_r/r)}{\partial\theta}}, \qquad \overline{T}_{zr} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial(q_r/r)}{\partial z}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial(q_r/r)}{\partial z}} \tag{3.34}$$

$$\overline{T}_{r\theta} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial q_\theta}{\partial r}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial q_\theta}{\partial r}}, \qquad \overline{T}_{\theta\theta} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial q_\theta}{\partial\theta}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial q_\theta}{\partial\theta}} \tag{3.35}$$

$$\overline{T}_{z\theta} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial q_\theta}{\partial z}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{\partial q_\theta}{\partial z}}, \qquad \overline{T}_{r} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{q_r}{r^2}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{q_r}{r^2}} \tag{3.36}$$

$$\overline{T}_{\theta} = \overline{\dot{\gamma}^{n-1}\frac{q_\theta}{r^2}} - \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\,\overline{\frac{q_\theta}{r^2}} \tag{3.37}$$

Ohta et Miyashita (2014) [52] a montré que les termes $\overline{T}_{ij}$ avec $i,j = r,\theta,z$ et $\overline{T}_r$ et $\overline{T}_\theta$ sont très petits et peuvent être négligés devant les termes $\overline{\tau}_{ij}$ qui sont les tenseurs sous-maille qui modélisent pratiquement tous les effets des petites échelles. Avec cette approximation, les équations 3.27 et 3.28 se présentent sous la forme suivante :

$$\frac{\partial\overline{q}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\overline{q}_\theta}{\partial\theta} + r\frac{\partial\overline{q}_z}{\partial z} = 0 \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D\overline{q}_z}{Dt} =& \frac{\partial\overline{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_z}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_z}{\partial z}\right)\right] \\
& - \frac{1}{r}\frac{\partial\overline{\tau}_{rz}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\overline{\tau}_{\theta z}}{\partial\theta} - \frac{\partial\overline{\tau}_{zz}}{\partial z} \\
\frac{D\overline{q}_r}{Dt} =& -r\frac{\partial\overline{p}}{\partial r} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_r/r}{\partial r}\right) - \left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\overline{q_r}}{r^2}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_r}{\partial\theta}\right)\right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_r}{\partial r}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{\tau}_{rr}}{r}\right) - \frac{\partial\overline{\tau}_{\theta r}}{\partial\theta} - \frac{\partial\overline{\tau}_{rz}}{\partial z} + \frac{\overline{\tau}_{\theta\theta}}{r^2} \\
\frac{D\overline{q}_\theta}{Dt} =& -\frac{\partial\overline{p}}{\partial\theta} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_\theta/r}{\partial r}\right) - \left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\overline{q_\theta}}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_\theta}{\partial z}\right)\right. \\
& \left. + \frac{2}{r^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial\overline{q}_r}{\partial\theta}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{\tau}_{r\theta}}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\overline{\tau}_{\theta\theta}}{\partial\theta} - \frac{\partial\overline{\tau}_{\theta z}}{\partial z} - \frac{\overline{\tau}_{\theta r}}{r}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Les termes $\overline{\tau}_{ij}$ $(i,j = r,\theta,z)$ appaissant dans les équations 3.25 sont les tenseurs sous-maille qui seront modélisés.

3.3 Modèles de sous-maille

3.3.1 Modèle de Smagorinsky

Le premier modèle proposé est celui de Smagorinsky. C'est le modèle de viscosité turbulente, formulé dans l'espace physique, le plus populaire. Pour l'étude des mouvements

atmophériques, Smagorinsky (1963) [80] a exprimé le tenseur sous maille par la relation suivante :

$$\overline{\tau}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\overline{\tau}_{kk} = -2C_s(\Delta)^2(|\overline{S}|\overline{S}_{ij}) \tag{3.40}$$

où S_{ij} désigne le tenseur du taux de déformation des échelles résolues et $|\overline{S}|$ son module. Ils sont calculés par :

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \qquad \text{et} \qquad |\overline{S}| = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}} \tag{3.41}$$

C_s est la constante de Smagorinsky. Sa valeur théorique rapportée par Sagaut (1998) [55] varie entre 0,148 et 0,18. Il faut noter que ce modèle est variable dans l'espace donc il faut ajuster la valeur de cette constante en fonction de l'écoulement pour obtenir un comportement physique acceptable. Par exemple elle a été ajustée pour l'écoulement cisaillé libre, l'écoulement de canal, la marche descendante. Elle vaut dans les simulations de Lilly et al. (1966) [48] $C_s = 0,23$, de Deardorff (1970) [11] $C_s = 0,1$, de Masson et Callen (1986) [36] $C_s = 0,2$. Cependant, ces valeurs n'ont pas été confirmées par Piomelli et al. (1988) [59] qui ont trouvé une valeur optimale autour de 0,1. Outre ce critère d'ajustement, un phénomène important est observé à la paroi solide : les effets des tenseurs sous maille ne s'annulent pas alors qu'ils le devraient. Pour corriger ce comportement non physique, Moin et Kim (1982) [42], Piomelli et al. (1988) [59] ont introduit des fonctions d'amortissement pour prendre en compte les effets de paroi. Ils ont obtenus des résultats différents. Pour les écoulements de couche limite et de conduite plane, Piomelli et Zang (1990, 1991) [60, 61] ont observé avec ce modèle, en début de transition vers la turbulence, un fort taux d'amortissement. Les fluctuations sont donc mal calculées avec le modèle de Smagorinsky standard. Au vu de toutes ces insuffisances, un autre modèle a été élaboré afin d'éviter l'ajustement de C_s et de tenir compte de l'atténuation nécessaire des effets de paroi : il s'agit du modèle Smagorinsky dynamique.

3.3.2 Modèle dynamique

Tenant compte des faiblesses du modèle de Smagorinsky (1963) [80] standard, Germano et al. (1991) [21] ont montré que le paramètre C_s varie localement avec l'écoulement. Ils ont donc proposé un développement appelé procédure dynamique pour évaluer cette constante. Cette procédure consiste à introduire un deuxième filtre, appelé filtre-test (noté par $\widetilde{(.)}$) de largeur caractéristique supérieure au premier filtre $\overline{(.)}$. L'idée de cette méthode est de tirer profit de la connaissance des mouvements à grande échelle pour déterminer la constante appropriée.

On note alors les tensions de Reynolds sous-maille T_{ij} et Q_{ij} pour le champ de vitesse résolue qui sont définies par :

$$T_{ij} = \overline{u}_i\,\overline{u}_j - \overline{u_i u_j} \tag{3.42}$$

$$Q_{ij} = \widetilde{\overline{u}}_i\widetilde{\overline{u}}_j - \widetilde{\overline{u_i}\,\overline{u_j}} \tag{3.43}$$

Ces tensions sont inconnues puisque leur définition fait intervenir des termes $\overline{u_i u_j}$. L'astuce est de filtrer les tensions T_{ij} à l'aide du filtre test, puis de former les différences $Q_{ij} - \widetilde{T}_{ij}$. On obtient donc :

$$L_{ij} = Q_{ij} - \widetilde{T}_{ij} \tag{3.44}$$

$$L_{ij} = \widetilde{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \widetilde{\overline{u}}_i \widetilde{\overline{u}}_j \tag{3.45}$$

En se basant sur la formulation de Smagorinsky (1963) [80] pour le tenseur sous-maille, Germano et al. (1991) [21] ont calculé les deux tenseurs issus de leur procédure dynamique de la manière suivante :

$$T_{ij} - \frac{1}{3} T_{ll} \delta_{ij} = 2 C_d \overline{\Delta}^2 \left| \overline{S} \right| \overline{S}_{ij} \tag{3.46}$$

$$Q_{ij} - \frac{1}{3} Q_{ll} \delta_{ij} = 2 C_d \widetilde{\Delta}^2 \left| \widetilde{\overline{S}} \right| \widetilde{\overline{S}}_{ij} \tag{3.47}$$

En introduisant les équations (3.47) et (3.47) dans la relation (3.45), l'identité de Germano et al. (1991) [21] s'écrit :

$$L_{ij} = 2 C_d \left[\widetilde{\Delta}^2 \left| \widetilde{\overline{S}} \right| \widetilde{\overline{S}}_{ij} - \overline{\Delta}^2 \widetilde{\left| \overline{S} \right| \overline{S}_{ij}} \right] = 2 C_d M_{ij} \tag{3.48}$$

La constante C_d, selon Lilly (1992) [49] est évaluée comme :

$$C_d = \frac{1}{2} \frac{< L_{ij} M_{ij} >}{< M_{ij} M_{ij} >} \tag{3.49}$$

où $< (.) >$ représente la moyenne dans les directions homogènes qui sont dans cette étude les directions périodiques θ et z. Les deux filtres utilisés dans cette étude sont de type boîte (moyenne spatiale dans les directions θ et z) tel que :

$$\overline{\Delta} = [r \Delta r (\Delta\theta)(\Delta z)]^{1/3} \quad \text{et} \quad \widetilde{\Delta} = [r \Delta r (2\Delta\theta)(2\Delta z)]^{1/3} \tag{3.50}$$

Comme l'ont remarqué Germano et al. (1991) [21], C_d peut prendre des valeurs négatives ou peut ne pas être borné, ce qui entraînerait des instabilités numériques. Pour y remédier, on force la constante à être nulle si les valeurs sont négatives et on procède à une moyenne sur les points voisins. Cette alternative est limitée pour des géométries complexes. Alors Meneveau et al. (1996) [37] ont développé une méthode dite lagrangienne pour stabiliser le systhème numérique. Le principe de cette méthode consiste à se servir de l'information au pas de temps antérieur de la particule fluide courante pour calculer la valeur de la constante C_d au temps présent.

3.3.3 Conditions aux limites et conditions initiales

Selon l'hypothèse de non glissement, le fluide est supposé adhérer aux parois. Celles-ci étant imperméables et indéformables, les composantes de la vitesse du fluide s'annulent à la paroi et on a :

$$\begin{cases} r = 0, & \dfrac{\partial \overline{q}_z}{\partial r} = \dfrac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial r} = 0, \qquad \overline{q}_r = 0 \\ & r = 1, \qquad \overline{q}_z = \overline{q}_r = \overline{q}_\theta = 0 \end{cases} \tag{3.51}$$

Les conditions de périodicité sont utilisées dans les directions axiale et azimutale :

$$\begin{cases} \overline{q}_i(\theta, r, z) = \overline{q}_i(\theta, r, z + L_z) \\ \overline{q}_i(\theta, r, z) = \overline{q}_i(\theta + 2\pi, r, z) \end{cases} \tag{3.52}$$

où $L_z = L$ la longueur de la conduite.

Le champ de vitesse a été initialisé selon la formulation de Orlandi et Fatica (1997) [53] qui stipule l'ajout d'une pertubation à divergence nulle au profil de Poiseuille laminaire. Il est noté :

$$\vec{v}(\vec{x}, t = 0) = \vec{U_p} + \Re\left[\epsilon_r \vec{u}_r(r) e^{i\alpha z} + \epsilon_\theta \vec{u}_\theta(r) e^{i(\alpha z + \beta\theta)}\right] \tag{3.53}$$

La perturbation doit vérifier les conditions d'adhérence et de périodicité imposées sur la vitesse. Sa moyenne doit être nulle pour que le débit ne soit pas modifié. Cette condition est réalisée pour la perturbation choisie en prenant des nombres d'onde α et β respectivement égaux à l'inverse de la taille du domaine dans les directions périodiques axiale et azimutale (z et θ).

3.4 Méthode numérique

Le code utilisé dans cette thèse a été développé par le professeur Paolo Orlandi (Université de Rome) pour l'étude de la DNS du fluide Newtonien. Pendant sa thèse, Feiz (2006) [19] a utilisé ce code pour réaliser les simulations des transferts turbulents du fluide Newtonien dans conduite cylindrique en rotation. Redjem (2008) [66] a implanté dans ce code d'Orlandi le modèle dynamique de la simulation des grandes échelles pour simuler les transferts de chaleur turbulents par convection forcée du fluide Newtonien en tube en espace annulaire. Pour réaliser mon travail, j'ai pris ce code que j'ai adapté au fluide d'Ostwald de Waele puis programmé le modèle de Smagorinsky non-newtonien qui est présenté dans le chapitre 5.

3.4.1 Domaine de calcul et maillage

Le maillage est uniforme dans les directions axiale et azimutale. L'uniformité en θ et z est absolument nécessaire pour l'utilisation des développements trigonométriques dans l'équation de la pression, tandis que dans la direction r le maillage peut être resserré près de la paroi et un peu moins dans la région centrale et ce, en utilisant une fonction de raffinement en tangente hyperbolique ($f(r)$) (cf. § 3.4.2). On considère une discrétisation avec $(n1, n2, n3)$ points de collocations dans les directions (θ, r, z). Les variables primitives seront calculées en des points différents, situés sur les faces des cellules pour les composantes de vitesse, ou au centre des cellules pour les grandeurs scalaires (Figure 3.1). Les positions des variables sont définies par les coordonnées spatiales suivantes :

$$\overline{q}_\theta \rightarrow (i, j + 1/2, k + 1/2) \quad \text{ou} \quad (\theta_c(i), r_m(j), z_m(k))$$

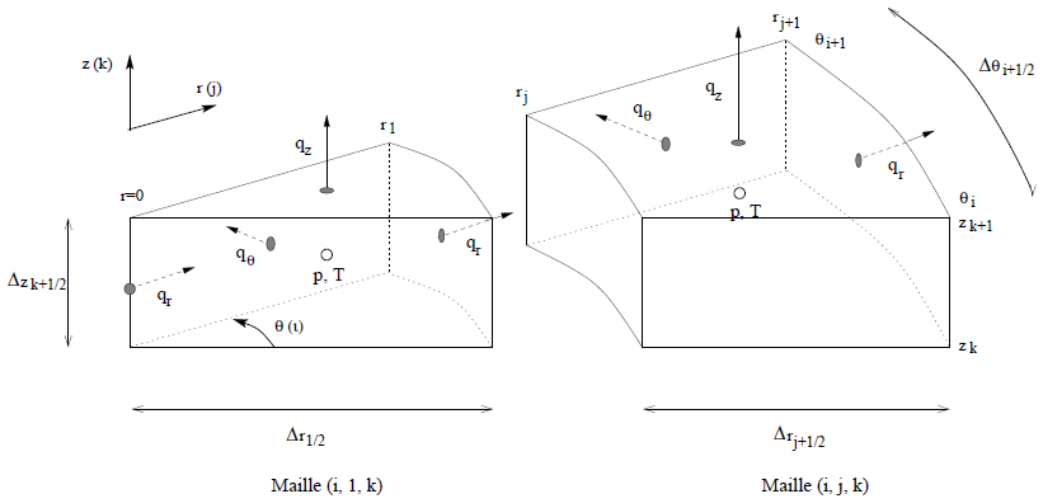


FIGURE 3.1 – Maillage décalé.

$$\overline{q}_r \rightarrow (i+1/2, j, k+1/2) \quad \text{ou} \quad (\theta_m(i), r_c(j), z_m(k))$$

$$\overline{q}_z \rightarrow (i+1/2, j+1/2, k) \quad \text{ou} \quad (\theta_m(i), r_m(j), z_c(k))$$

$$\overline{p}, \overline{\Theta} \rightarrow (i+1/2, j+1/2, k+1/2) \quad \text{ou} \quad (\theta_m(i), r_m(j), z_m(k))$$

avec :

$$\theta_c = (i-1)\triangle\theta \quad i = 1 \cdots n_1, \quad \theta_m = (i-1/2)\triangle\theta \quad i = 1 \ldots (n_1-1), \quad \triangle\theta = \frac{2\pi}{n_1 - 1}$$

$$r_c = (j-1)\triangle r \quad j = 1 \cdots n_2, \quad r_m = (j-1/2)\triangle r \quad j = 1 \ldots (n_2-1), \quad \triangle r = \frac{R.f(r)}{n_2 - 1}$$

$$z_c = (k-1)\triangle z \quad k = 1 \cdots n_3, \quad z_m = (k-1/2)\triangle z \quad k = 1 \ldots (n_3-1), \quad \triangle z = \frac{L}{n_3 - 1}$$

3.4.2 Distribution radiale des points et fonction de raffinement

Les effets étant dominants au voisinage des parois, le raffinement du maillage dans cette zone est nécessaire pour obtenir une meilleure résolution des couches limites. Dans une géométrie cylindrique, la loi de raffinement est donnée par l'équation hyperbolique suivante :

$$r(j) = \frac{tanh(\alpha b(j))}{tanh(\alpha)} \qquad 0 \leq r(j) \leq 1 \tag{3.54}$$

Avec α un paramètre ajustable permettant de déterminer la concentration de la grille dans la région proche paroi.

3.4.3 Discrétisation des équations

Les équations sont discrétisées par la méthode des différences finies sur un maillage décalé en utilisant un schéma centré de second ordre. La méthode des différences finies est généralement moins précise que la méthode spectrale mais elle a l'avantage d'être plus flexible pour les géométries complexes. Les simulations directes dans un canal de Rai et Moin (1991) [64] et Choi et Moin (1994)[7] ont montré que lorsque la conservation globale est maintenue, les statistiques de faible ordre sont convenablement décrites avec un schéma de différences finies de second ordre.

On définit le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans lequel $\theta = x_1$, $r = f(x_2)$, $z = x_3$. Les dérivées première et seconde dans les directions θ et z sont exprimées par les opérateurs usuels indiqués par les opérateurs algébriques $\delta/\delta x_i$ et $\delta^2/\delta x_i^2$ avec $i = 1, 3$. Les dérivées dans la direction radiale sont approximées par une transformation de coordonnées $r = f(x_2)$, qui introduit une fonction métrique $g_2(x_2) = \delta f/\delta x_2$ du fait de l'utilisation du maillage non-uniforme. Ainsi, les fonctions f et g_2 apparaissent dans les deux positions j, $j + 1/2$, d'où la notation :
c : centre pour la position j (noeud)
m : milieu pour la position j+1/2
Avec ces définitions le système d'équations discrétisées s'écrit sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\overline{q}_z}{\delta t} + \frac{g_{2m}}{r_m}\frac{\delta\overline{q}_r\overline{q}_z}{\delta x_2} + \frac{1}{r_m^2}\frac{\delta\overline{q}_\theta\overline{q}_z}{\delta x_1} + \frac{\delta\overline{q}_z\overline{q}_z}{\delta x_3} = &- \frac{\delta\overline{p}}{\delta x_3} - \overline{\frac{\partial p}{\partial z}} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{g_{2m}}{r_m}\frac{\delta}{\delta x_2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}g_{2c}r_c\frac{\delta\overline{q}_z}{\delta x_2}\right)\right.\\
&\left. + \frac{1}{r_m^2}\frac{\delta}{\delta x_1}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\delta\overline{q}_z}{\delta x_1}\right) + \frac{\delta}{\delta x_3}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\delta\overline{q}_z}{\delta x_3}\right)\right]\\
&- \frac{g_{2m}}{r_m}\frac{\delta\overline{\tau}_{rz}}{\delta x_2} - \frac{1}{r_m^2}\frac{\delta\overline{\tau}_{\theta z}}{\delta x_1} - \frac{\delta\overline{\tau}_{zz}}{\delta x_3}\\
\frac{\delta\overline{q}_r}{\delta t} + g_{2m}\frac{\delta}{\delta x_2}\frac{\overline{q}_r\overline{q}_r}{r_c} + \frac{\delta}{\delta x_1}\frac{\overline{q}_\theta\overline{q}_r}{r_m r_c} + \frac{\delta\overline{q}_r\overline{q}_z}{\delta x_3} - \frac{\overline{q}_\theta\overline{q}_\theta}{r_c^2} = &- r_c g_{2c}\frac{\delta\overline{p}}{\delta x_2} + \frac{1}{Re_s}\left[g_{2c}\frac{\delta}{\delta x_2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}g_{2c}r_c\frac{\delta\overline{q}_r/r_c}{\delta x_2}\right)\right.\\
&- \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\overline{q}_r}{r_c^2} + \frac{1}{r_c^2}\frac{\delta}{\delta x_1}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\delta\overline{q}_r}{\delta x_1}\right)\\
&\left. + \frac{\delta}{\delta x_3}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\delta\overline{q}_r}{\delta x_3}\right) - \frac{2}{r_c^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\delta\overline{q}_\theta}{\delta x_1}\right)\right]\\
&- g_{2m}\frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\overline{\tau}_{rr}}{r}\right) - \frac{\delta\overline{\tau}_{\theta r}}{\delta x_1} - \frac{\delta\overline{\tau}_{rz}}{\delta x_3} + \frac{\overline{\tau}_{\theta\theta}}{r^2}\\
\frac{\delta\overline{q}_\theta}{\delta t} + g_{2m}\frac{\delta\overline{q}_\theta\overline{q}_r/r_m}{\delta x_2} + \frac{1}{r_m^2}\frac{\delta\overline{q}_\theta\overline{q}_\theta}{\delta x_1} + \frac{\delta\overline{q}_\theta\overline{q}_z}{\delta x_3} + \frac{\overline{q}_\theta\overline{q}_r}{r_m^2} = &- \frac{\delta\overline{p}}{\delta x_1} + \frac{1}{Re_s}\left[g_{2m}\frac{\delta}{\delta x_2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}g_{2c}r_c\frac{\delta\overline{q}_\theta/r_m}{\delta x_2}\right)\right.\\
&- \overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\overline{q}_\theta}{r_m^2} + \frac{1}{r_m^2}\frac{\delta}{\delta x_1}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\delta\overline{q}_\theta}{\delta x_1}\right)\\
&\left. + \frac{\delta}{\delta x_3}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\delta\overline{q}_\theta}{\delta x_3}\right) + \frac{2}{r_m^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\delta\overline{q}_r}{\delta x_1}\right)\right]\\
&- g_{2m}\frac{\delta}{\delta x_2}\left(\frac{\overline{\tau}_{r\theta}}{r}\right) - \frac{\delta\overline{\tau}_{\theta\theta}}{\delta x_1} - \frac{\delta\overline{\tau}_{\theta z}}{\delta x_3} + \frac{\overline{\tau}_{\theta r}}{r}
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

où $\overline{\dot{\gamma}}$, le taux de cisaillement, défini par

$$\overline{\dot{\gamma}} = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}} \tag{3.56}$$

est calculé explicitement, à l'étape précédente puis moyenné dans les directions périodiques θ et z afin d'obtenir $\dot{\gamma}(j)$. $\overline{S}_{ij}$ est le tenseur du taux de déformation donné par la relation :

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \tag{3.57}$$

Nous utilisons des interpolations linéaires pour nous permettre d'évaluer les variables en des positions où elles ne sont pas définies.

3.4.4 Schéma numérique

Les équations sont résolues par la méthode à pas de temps fractionné ("fractional step method"), proposée par Kim et Moin (1985) [34] et modifiée par Verzicco et Orlandi (1996) [89] qui utilisent un schéma hybride de Runge-Kutta/Crank-Nicolson. L'avantage de cette méthode est le traitement simultané du couplage vitesse-pression et l'évaluation de la solution à un nouvel instant t_{n+1}. Aussi elle assure un traitement meilleur des termes convectifs et à l'avantage de requérir un minimum de mémoire en exécution pour cette classe de schéma. Avec ce schéma, l'intégration en temps se fait en trois pas :

A- on calcule le champ de vitesse non-solénoidal, dans une première étape,

B- on corrige ce champ pour satisfaire l'équation de continuité, dans une seconde étape,

C- on résout enfin directement l'équation d'énergie (calcul de la température).

3.4.4.1 Calcul du champ non-solénoidal

On calcule un champ de vitesse non-solénoidal ($\hat{q}^l$) par la résolution des équations de quantité de mouvement qui sont discrétisées suivant le schéma de Runge-Kutta, en appliquant :

• un traitement explicite aux termes de convection, au gradient de pression et aux termes visqueux de couplage ;

• un traitement semi-implicite (schéma de Crank-Nicolson) aux termes visqueux ;

$$\frac{\hat{q}_c^l - q_c^l}{\triangle t} = \left[\gamma_l \mathcal{H}_c^l + \rho_l \mathcal{H}_c^{l-1} - \alpha_l \mathcal{G}_c p^l + \frac{\alpha_l}{2}\mathcal{A}_c(\hat{q}_c^l + q_c^l)\right], \quad \text{pour} \quad c = \theta, r, z \tag{3.58}$$

avec les termes explicites :

$$-\mathcal{H}_\theta = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{q}_r\overline{q}_\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\overline{q}_\theta\overline{q}_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{q}_\theta\overline{q}_z)\right] - \frac{1}{Re_s}\frac{2}{r^3}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial \theta} \tag{3.59}$$

$$-\mathcal{H}_r = \left[\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\overline{q}_r\overline{q}_r}{r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\overline{q}_r\overline{q}_\theta}{r}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{q}_r\overline{q}_z) - \overline{q}_\theta\overline{q}_\theta\right] + \frac{1}{Re_s^2}\frac{2}{r}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta} \tag{3.60}$$

$$-\mathcal{H}_z = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\overline{q}_r\overline{q}_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\overline{q}_\theta\overline{q}_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{q}_z\overline{q}_z)\right] \tag{3.61}$$

et les opérateurs :

$$\mathcal{A}_\theta = \mathcal{A}_{\theta r} + \mathcal{A}_{\theta\theta} + \mathcal{A}_{\theta z} = \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r} r\overline{\dot\gamma^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cdot}{r}\right) - \frac{\cdot}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\dot\gamma^{n-1}}\frac{\partial\cdot}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\dot\gamma^{n-1}}\frac{\partial\cdot}{\partial z}\right] \quad (3.62)$$

$$\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_{rr} + \mathcal{A}_{r\theta} + \mathcal{A}_{rz} = \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r}\overline{\dot\gamma^{n-1}}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\cdot}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\dot\gamma^{n-1}}\frac{\partial\cdot}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\dot\gamma^{n-1}}\frac{\partial\cdot}{\partial z}\right] \quad (3.63)$$

$$\mathcal{A}_z = \mathcal{A}_{zr} + \mathcal{A}_{z\theta} + \mathcal{A}_{zz} = \frac{1}{Re_s}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\overline{\dot\gamma^{n-1}}\left(r\frac{\partial\cdot}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\dot\gamma^{n-1}}\frac{\partial\cdot}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\dot\gamma^{n-1}}\frac{\partial\cdot}{\partial z}\right] \quad (3.64)$$

$$\mathcal{G} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, r\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (3.65)$$

Les coefficients du schéma Runge–Kutta sont calculés pour une précision à l'ordre deux en temps. Ils prennent les valeurs (cf. Rai et Moin (1991) [64]) :

$$\begin{array}{lll} \gamma_1 = \dfrac{8}{15} & \gamma_2 = \dfrac{5}{12} & \gamma_3 = \dfrac{3}{4} \\ \rho_1 = 0 & \rho_2 = -\dfrac{17}{60} & \rho_3 = -\dfrac{5}{12} \end{array} \quad (3.66)$$

Pour l'homogénéité du schéma, on impose $\alpha_l = \gamma_l + \rho_l$; de plus, $\rho_1 = 0$ permet de démarrer la procédure Runge–Kutta sans stocker l'état précédent.

L'avancement d'un pas de temps Δt (entre t^n et t^{n+1}) s'effectue par intégration sur des intervalles intermédiaires de longueurs $\alpha_l \Delta t$; en conséquence, les instants de temps intermédiaires seront :

$$\tau_0 = t^n, \quad \tau_1 = t^n + \alpha_1\Delta t, \quad \tau_2 = t^n + (\alpha_1+\alpha_2)\Delta t, \quad \tau_3 = t^n + \underbrace{\sum \alpha_l}_{=1}\Delta t = t^{n+1} \quad (3.67)$$

Pour résoudre les équations discrétisées (3.58), écrites sous la forme :

$$\left(1 - \frac{\alpha_l}{2}\Delta t\mathcal{A}_c\right)\Delta\widehat{q}_c^l = \left[\gamma_l\mathcal{H}_c^l + \rho_l\mathcal{H}_c^{l-1} - \alpha_l\mathcal{G}_c p^l + \alpha_l\,\mathcal{A}_c q_c^l\right]\Delta t \quad (3.68)$$

les opérateurs implicites

$$\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_{cz} + \mathcal{A}_{c\theta} + \mathcal{A}_{cr}, \quad c = \theta, r, z$$

seront inversés par une factorisation précise à l'ordre deux en temps :

$$\left\{\begin{array}{lll} \left(1 - \dfrac{\alpha_l}{2}\Delta t\mathcal{A}_{c\theta}\right)\overline{\Delta\widehat{q}_c^l} &=& \left[\gamma_l\mathcal{H}_c^l + \rho_l\mathcal{H}_c^{l-1} - \alpha_l\mathcal{G}_c p^l + \alpha_l\,\mathcal{A}_c q_c^l\right]\Delta t \qquad (A1) \\ \left(1 - \dfrac{\alpha_l}{2}\Delta t\mathcal{A}_{cr}\right)\overline{\overline{\Delta\widehat{q}_c^l}} &=& \overline{\Delta\widehat{q}_c^l} \qquad (A2) \\ \left(1 - \dfrac{\alpha_l}{2}\Delta t\mathcal{A}_{cz}\right)\Delta\widehat{q}_c^l &=& \overline{\overline{\Delta\widehat{q}_c^l}} \qquad (A3) \end{array}\right.$$

Les trois équations (A1, A2, A3) sont facilement inversibles, car les opérateurs y intervenant sont diagonaux. Les champs intermédiaires $\overline{\Delta\widehat{q}_c^l}$, $\overline{\overline{\Delta\widehat{q}_c^l}}$ n'ont aucune signification physique et, en conséquence, les conditions aux limites pour ces champs seront assimilées aux conditions physiques imposées pour l'inconnue

$$\Delta\widehat{q}_c^l = \widehat{q}_c^l - q_c^l$$

3.4.4.2 A1- Premier pas de la factorisation (direction θ)

Nous sommes amenés à résoudre l'équation de la forme :

$$\left(1 - \frac{\alpha_l}{2}\Delta t\mathcal{A}_{c\theta}\right) X(i,j,k) = rhs(i,j,k) \tag{3.69}$$

où

$$\mathcal{A}_{\theta\theta} = \mathcal{A}_{r\theta} = \mathcal{A}_{z\theta} = \frac{1}{Re_s}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\dot{\gamma}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{3.70}$$

La discrétisation de cette équation donne :

$$-a(j)X(i-1,j,k) + (1+2a(j))X(i+1,j,k) = rhs(i,j,k) \tag{3.71}$$

avec

$$a_\theta(j) = a_z(j) = \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\Delta t\frac{1}{\Delta\theta^2}\frac{1}{r_m^2(j)} \quad \text{et} \quad a_r(j) = \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\Delta t\frac{1}{\Delta\theta^2}\frac{1}{r_c^2(j)} \tag{3.72}$$

On résout cette équation (3.71) pour $i = 1, ...(n1-1)$ avec une condition de périodicité : $X(1,j,k) = X(n1,j,k)$

3.4.4.3 A2- Deuxième pas de la factorisation (direction z)

Dans cette étape, on résout l'équation du type :

$$\left(1 - \frac{\alpha_l}{2}\Delta t\mathcal{A}_{cz}\right) X(i,j,k) = rhs(i,j,k) \tag{3.73}$$

où

$$\mathcal{A}_{\theta z} = \mathcal{A}_{rz} = \mathcal{A}_{zz} = \frac{1}{Re_s}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial z}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.74}$$

La discrétisation de cette équation donne :

$$-a(k)X(i,j,k-1) + (1+2a(k))X(i,j,k) - a(k)X(i,j,k+1) = rhs(i,j,k) \tag{3.75}$$

avec

$$a_\theta(k) = a_r(k) = a_z(k) = \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\Delta t\frac{1}{\Delta z^2}, \quad k = 2, ...(n3-1) = n3m \tag{3.76}$$

Cette équation (3.76) doit être résolue pour $k = 1, ...(n3-1)$ avec une condition de périodicité :

$$X(1, j, k) = X(n1, j, k) \tag{3.77}$$

3.4.4.4 A3- Troisième pas de la factorisation (direction r)

Dans cette étape, on résout l'équation du type :

$$\left(1 - \frac{\alpha_l}{2}\Delta t\mathcal{A}_{cr}\right) X(i, j, k) = rhs(i, j, k) \tag{3.78}$$

où

$\mathcal{A}_{\theta r} = \frac{1}{Re_s} r\frac{\partial}{\partial r}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$, $\mathcal{A}_{rr} = \frac{1}{Re_s} r\frac{\partial}{\partial r}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$, $\mathcal{A}_{zr} = \frac{1}{Re_s}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$

La discrétisation de cette équation donne :

$$-a(j)X(i, j-1, k) + b(j)X(i, j, k) - c(j)X(i+1, j, k) = rhs(i, j, k) \tag{3.79}$$

avec $j = 2, ...(n2-2)$.

- La composante q_θ discrétisée en (i,j+1/2,k+1/2) :

$$\begin{cases} a_\theta(j) &= \beta(j)\frac{r_c(j)}{r_m(j-1)} \\ c_\theta(j) &= \beta(j)\frac{r_c(j+1)}{r_m(j+1)} \quad \text{avec } \beta(j) = \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{1}{\Delta r^2}\frac{\Delta t}{r_m^2(j)} \\ b_\theta(j) &= 1 + \frac{\beta(j)}{r_m(j)}[r_c(j+1) + r_c(j)] \end{cases}$$

- La composante q_r discrétisée en (i+1/2,j,k+1/2) :

$$\begin{cases} a_r(j) &= \beta(j)\frac{r_c(j)}{r_m(j-1)} \\ c_r(j) &= \frac{\beta(j)}{r_m(j)} \quad \text{avec } \beta(j) = \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\Delta t}{\Delta r^2}r_c(j) \\ b_r(j) &= 1 + a_r(j) + c_r(j) \end{cases}$$

- La composante q_z discrétisée en (i+1/2,j+1/2,k) :

$$\begin{cases} a_z(j) &= \beta(j)r_c(j) \\ c_z(j) &= \beta(j)r_c(j+1) \quad \text{avec } \beta(j) = \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{1}{\Delta r^2}\frac{\Delta t}{r_m^2(j)} \\ b_z(j) &= 1 + a_z(j) + c_z(j) \end{cases}$$

Ces coefficients sont calculés avant l'intégration en temps et réactualisés pour chaque pas l de Runge-Kutta pour la dépendance de α_l.

Pour les conditions aux limites en r, nous avons opté pour le traitement suivant :

- Sur l'axe $r = 0$ (cellule $j = 1$), nous utilisons le fait que la composante $q_r = rv_r$ s'annule automatiquement :

$$\left(q_r = rv_r = 0, \frac{\partial q_r}{\partial r} = 0, \frac{\partial q_\theta}{\partial r} = 0\right)_{r=r_c(1)=0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (\Delta\widehat{q}_r^l)_1 & = & 0 \\ (\Delta\widehat{q}_\theta^l)_1 & = & (\Delta\widehat{q}_\theta^l)_{-1} \\ (\Delta\widehat{q}_z^l)_1 & = & (\Delta\widehat{q}_z^l)_{-1} \end{array}\right. \tag{3.80}$$

Les coefficients deviennent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_\theta(1) & = & 0, \qquad a_r(1) = 0, \quad a_z(1) = 0 \\ c_\theta(1) & = - & \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\Delta t}{\Delta r^2}\frac{r_c(2)}{r_m(2)}, \qquad c_r(1) = 0, \quad c_z(1) = \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\Delta t}{\Delta r^2}\frac{r_c(2)}{r_m(1)} \\ b_\theta(1) & = & 1 + \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\left(\frac{\Delta t}{\Delta r^2}\frac{r_c(2)}{r_m(1)} - \frac{1}{r_m^2(1)}\right), \qquad b_r(1) = 1, \quad b_z(1) = 1 + c_z(1) \end{array}\right.$$

- Sur la paroi ($r = R$, cellule $j = n2 - 1 = n2m$), la condition d'adhérence s'impose :

$$(q_r = 0, q_z = 0, q_\theta = f(N))_{r=r_c(n2)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (\Delta\widehat{q}_r^l)_{n2} & = & 0 \\ (\Delta\widehat{q}_\theta^l)_{n2} & = & f(N) \\ (\Delta\widehat{q}_z^l)_{n2} & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.81}$$

- Les coefficients pour q_θ deviennent alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_\theta(n2m) & = & \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{1}{\Delta r^2}\frac{\Delta t}{r_m^2(n2m)}\frac{r_c^3(n2m)}{r_m(n2m-1)} \\ c_\theta(n2m) & = & 0 \\ b_\theta(n2m) & = & 1 + \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{1}{\Delta r^2}\frac{\Delta t}{r_m^2(n2m)}\left[\frac{r_c^3(n2m)}{r_m(n2m)} + r_c^3(n2)\left(\frac{1}{r_m(n2m)} - \frac{1}{r_m(n2)}\right)\right] \end{array}\right.$$

- Pour q_r , nous avons imposé explicitement :

$$q_r(n2) = 0 \Rightarrow ar(n2) = c_r(n2) = 0, \quad b_r(n2) = 1$$

- Pour q_z , nous avons obtenu :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_z(n2m) & = & \frac{\alpha_l}{2}\frac{1}{Re_s}\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{1}{\Delta r^2}\frac{\Delta t}{r_m(n2m)}r_c(n2m) \\ c_z(n2m) & = & 0 \\ b_z(n2m) & = & 1 + a_z(n2m) \end{array}\right.$$

3.4.4.5 B- Correction de la pression et calcul du champ solénoïdal

On corrige le champ $(\hat{q}^l)$, dans une deuxième étape, pour satisfaire l'équation de continuité. Le champ de vitesse solénoïdal pour le pas suivant de la procédure de Runge-Kutta est calculé par l'équation de correction suivante :

$$q_c^{l+1} - \hat{q}_c^l = -\alpha_l \triangle t \mathcal{G}_c \Phi^{l+1} \tag{3.82}$$

La variable scalaire Φ est calculée par l'intermédiaire d'une équation de Poisson, obtenue en imposant la divergence nulle du champ $\vec{q}^{l+1} = 0$ dans l'équation (3.82) :

$$\mathcal{L}\Phi^{l+1} = \frac{1}{\alpha_l \triangle t} \mathcal{D}\vec{\hat{q}}^l \tag{3.83}$$

Les opérateurs gradient, divergence et laplacien sont définis de manière classique, comme :

$$\mathcal{G} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, r\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\mathcal{D} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\mathcal{L} = DG = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Pour l'équation de Poisson, une condition de Neumann $\partial\Phi/\partial n = 0$ est imposée sur toutes les frontières. La périodicité en θ et z nous permet de décomposer le champ scalaire Φ en série de Fourier. Pour résoudre l'équation de Poisson, nous utilisons deux transformées de Fourier rapide (FFT) (Cf Annexe B 6.6.2.4). Une fois le champ scalaire Φ calculé, nous calculons à l'aide de l'équation (3.83) le champ solénoidal. Le gradient de pression est réactualisé par l'équation :

$$p^{l+1} = p^l + \Phi^{l+1} - \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \mathcal{A}_c \, \Phi^{l+1} \tag{3.84}$$

3.4.4.6 C- Calcul du scalaire

Le champ solénoidal q^{l+1} sera utilisé pour résoudre l'équation d'énergie. Le calcul de la température s'effectue après la correction de pression afin d'utiliser un champ solénoïdal pour l'évaluation des termes explicites.

3.5 Analyse statistique de la turbulence

Les écoulements turbulents présentent des structures aléatoires avec des comportements variables dans le temps et dans l'espace, ce qui rend difficile l'étude exhaustive de la turbulence. Ces comportements peuvent être décrits à partir de théories basées sur les

statistiques en un point. Les premières statistiques qui renseignent sur l'écoulement turbulent sont les moments liés à la variable aléatoire. Il s'agit de la moyenne ou du moment d'ordre 1 (la moyenne temporelle et la moyenne d'ensemble) et des moments d'ordre élevé qui fournissent plus d'informations sur les structures des tourbouillons.

3.5.1 Variance

On s'intéresse aux systèmes dont les variables statistiques ne dépendent que de l'espace. Ces systèmes sont dits statistiquement stationnaires. Pour toute variable aléatoire $b(x_i, t)$, la décomposition de Reynolds pour cette variable est la somme de sa valeur moyenne et d'une grandeur fluctuante comme le montre l'équation suivante :

$$b(x_i, t) = \overline{b(x_i)} + b'(x_i, t) \tag{3.85}$$

avec $\overline{b(x_i)}$ la valeur moyenne de la variable $b(x_i, t)$ et $b'(x_i, t)$ sa fluctuation. La variance σ^2 ou l'écart type σ pour cette variable est donné par :

$$\sigma^2 = \overline{b'^2(x_i, t)} \tag{3.86}$$

En turbulence, l'écart type répresente les rms (root mean square). Il renseigne sur la dispersion des valeurs de la variable autour de la moyenne. Il décrit l'évolution de l'intensité de la turbulence.

3.5.2 Coefficient de dissymétrie

Le coefficient de dissymétrie (Skewness en anglais) ou moment d'ordre trois est calculé par :

$$S(b') = \frac{\overline{b'^3}}{[\overline{b'^2}(x_i)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{b'^3}{\sigma^3} \tag{3.87}$$

Il renseigne sur l'amplitude relative des fluctuations positives et négatives par rapport à la valeur moyenne. Les fluctuations positives sont prédominantes si $S(b')$ est positif. S'il est négatif, ce sont les fluctuactions négatives qui prédominent.

3.5.3 Coefficient d'aplatissement

Le coefficient d'aplatissement (Flatness en anglais) ou moment d'ordre quatre est calculé par :

$$F(b') = \frac{\overline{b'^4}}{[\overline{b'^2}(x_i)]^2} = \frac{b'^4}{\sigma^4} \tag{3.88}$$

Il renseigne sur l'aplatissement relatif de la distribution des fluctuations par rapport à la distribution normale.

3.5.4 Coefficient de corrélation

Si on considère deux variables $a'(x_i, t)$ et $b'(x_i, t)$, le coefficient de corréraltion est défini par :

$$R_{a'b'} = \frac{\overline{a'b'(x_i)}}{[\overline{a'^2}(x_i)\overline{b'^2}(x_i)]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.89}$$

Ce coefficient varie entre -1 et +1. Il vaut +1 si les deux variables sont parfaitement corrélés, -1 s'ils sont parfaitement anticorrélés et 0 en absence de tout lien statistique entre les 2 variables pour des lois normales.

3.6 Fonctions de densité de probabilité

3.6.1 Loi normale

La fonction de densité de probabilité (pdf) d'une variable aléatoire $a(x_i, t)$ est définie comme une fonction $f(a, x_i)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $f(a)$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$
- $f(a)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{R}} f(a)\mathrm{d}a = 1$

La loi normale est une des principales distributions de probabilité en statistique, et sa pdf est donnée par :

$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp^{-\frac{1}{2}(\frac{a-\mu}{\sigma})} \tag{3.90}$$

où $\sigma^2 = \overline{(a-\mu)}^2$ et $\mu = \overline{a}$ sont appelés respectivement la variance et l'éspérance de la variable $a(x_i, t)$. La probabilité d'avoir les valeurs de la variable $a(x_i, t)$ situées dans l'intervalle $[a_{min}, a_{max}]$ se calcule par la relation suivante :

$$P(a_{min} \leq a \leq a_{max}) = \int_{a_{min}}^{a_{max}} f(a)\,\mathrm{d}a \tag{3.91}$$

La pdf fournit des informations sur les distributions de la variable. Si la pdf est symétrique, les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement valent respectivement 0 et 3.
Dans la figure 3.2 sont illustrées différentes distributions de la loi normale en fonction des paramètres σ et μ. Le paramètre μ, paramètre de translation, vaut -1, 0 et 1 et le paramètre σ ou paramètre d'échelle vaut 0.5, 1, 2. La figure 3.2 montre que la distribution de la variable est concentrée autour de la moyenne lorsque le paramètre de translation est égal à 1 et cette distribution s'aplatit quand le paramètre d'échelle augmente. Lorsque le paramètre de translation vaut -1, les fluctuations négatives de la variable $a(x_i, t)$ sont prédominantes et les fluctuations positives deviennent dominantes quand μ est égal à 1.

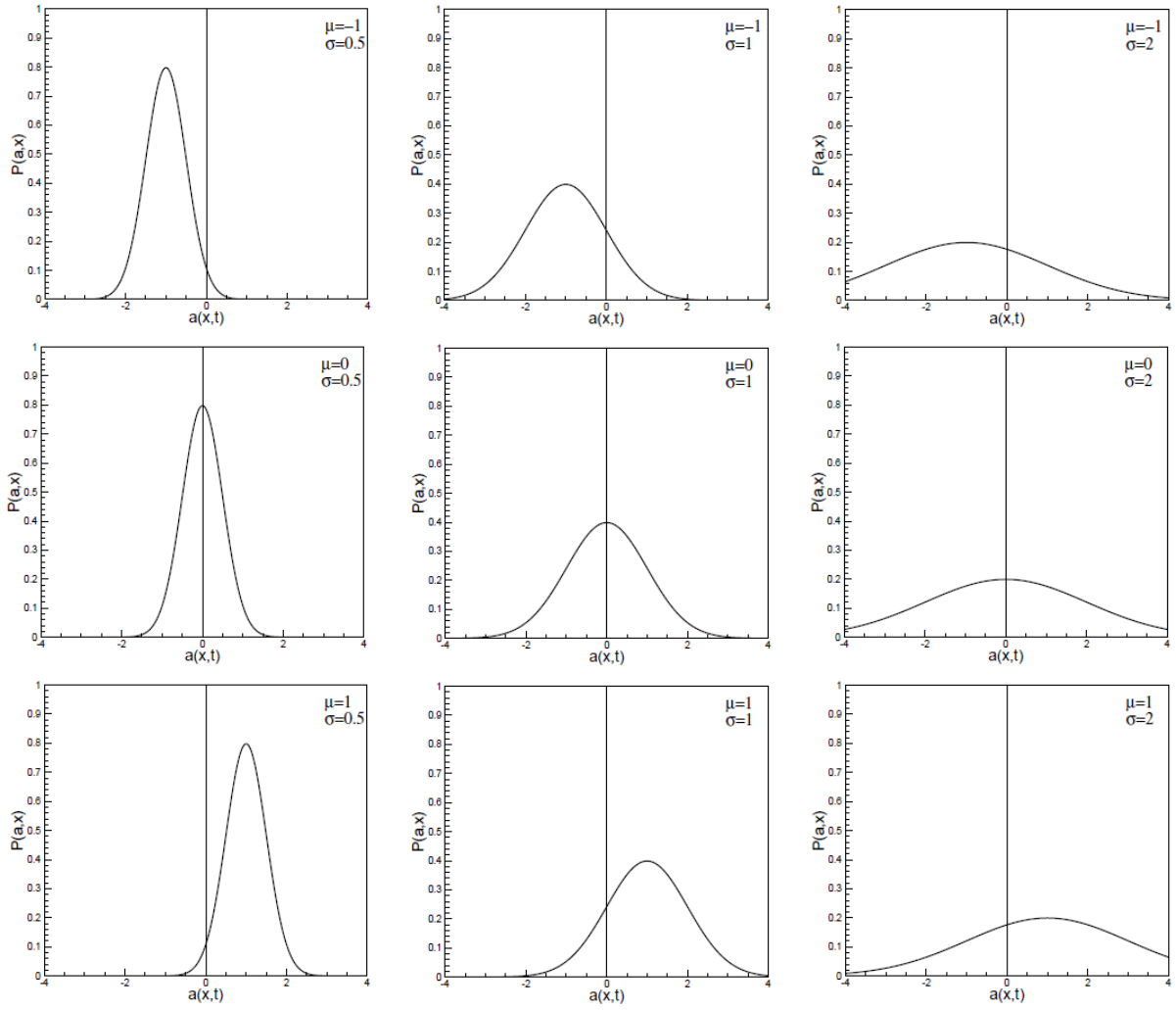


FIGURE 3.2 – Distributions normales pour diverses valeurs de μ et σ (Rejdem (2008) [66])

3.6.2 Loi normale à deux variables

Appelée distribution normale à deux variables, la fonction de densité de probabilité jointe (jpdf) est très utile pour étudier la corrélation pouvant exister entre deux variables aléatoires. Dans le cas de deux distributions indépendantes, la fonction de densité de probabilité de deux variables $a(x_i,t)$ et $b(x_i,t)$ est obtenue en effectuant le produit de leurs fonctions densités de probabilités respectives soit :

$$f(a,b) = f(a) \times f(b) = \frac{1}{\sigma_a\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a})^2} \times \frac{1}{\sigma_b\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b})^2} \tag{3.92}$$

$$f(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b} \exp^{-\frac{1}{2}[(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a})^2+(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b})^2]} \tag{3.93}$$

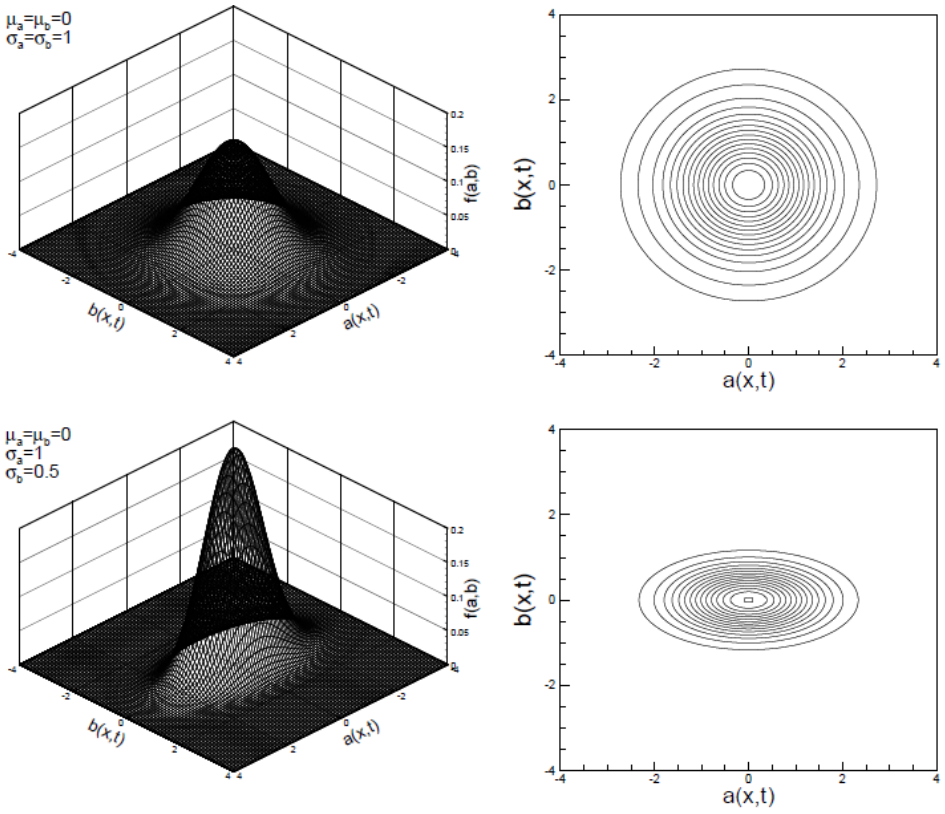


FIGURE 3.3 – Loi normale à deux variables (Redjem (2008) [66])

La probabilité pour que le point $M(a,b)$ soit localisé dans le domaine $S = \{[a_{min}, a_{max}], [b_{min}, b_{max}]\}$ est donnée par la relation suivante :

$$P(M \in S) = \int_{a_{min}}^{a_{max}} \int_{b_{min}}^{b_{max}} f(a,b,x_i) da db \tag{3.94}$$

En traçant les courbes d'isodensité $f(a,b) = Cste$, on définit les ellipses de dispersion telles que :

$$(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a})^2 + (\frac{b-\mu_b}{\sigma_b})^2 = k^2 \tag{3.95}$$

Ces ellipses d'ordre k représentent le rapport des demi-axes aux écarts-types correspondants. La probabilité d'appartenir à l'ellipse de dispersion d'ordre k est définie par la relation :

$$P(M \in (E_k)) = 1 - \exp^{-\frac{k^2}{2}} \tag{3.96}$$

La probabilité d'appartenir à l'ellipse unitaire $k = 1$ (dont les demi-axes sont égaux aux écarts-types) est égale à 39%.

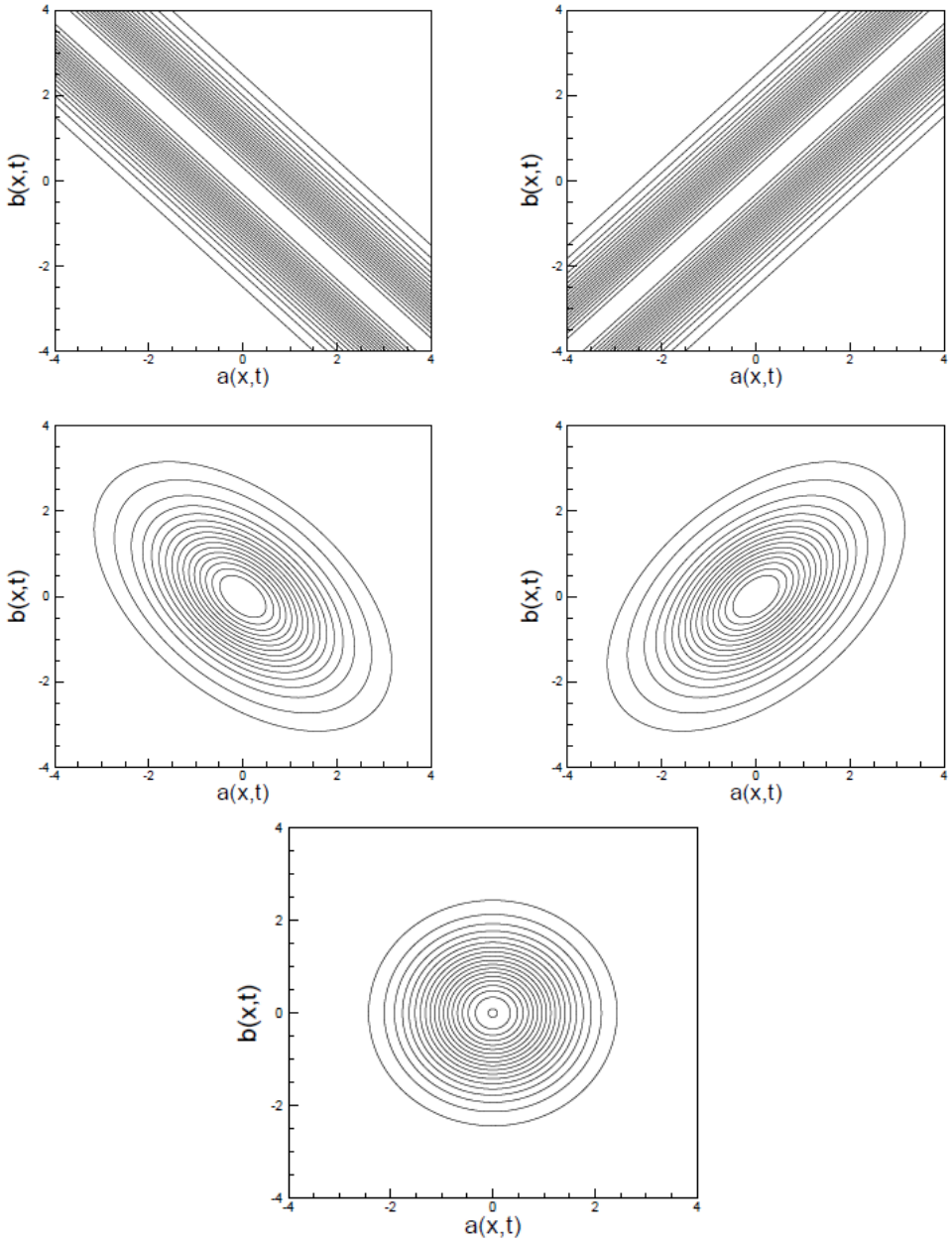


FIGURE 3.4 – Ellipses de dispersion pour plusieurs coefficients de corrélation avec $\sigma_a = \sigma_b = 1$ et $\mu_a = \mu_b = 0$ puis $R_{a'b'} = -1, +1, -0.5, +0.5, 0$ respectivement (Redjem (2008) [66])

Dans le cas où les deux variables sont complètement décorrélées, les ellipses de dispersions sont symétriques par rapport à un des deux axes. Dès qu'il y a corrélation, les

ellipses s'inclinent d'un angle α. La fonction de densité de probabilité jointes de deux variables corrélées s'écrit alors en fonction du coefficient de corrélation R_{ab} défini à la section 3.5.4 :

$$f(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b\sqrt{1-R_{ab}^2}} \exp^{-\frac{1}{2}[(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a})^2+(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b})^2-2R_{ab}\frac{(a-\mu_a)(b-\mu_b)}{\sigma_a\sigma_b}]} \tag{3.97}$$

On rappelle que :

$$R_{ab} = \frac{Cov(a,b)}{\sigma_a\sigma_b} = \frac{\overline{a'b'}(x_i)}{[\overline{a'^2}(x_i)\overline{b'^2}(x_i)]^{1/2}} \tag{3.98}$$

où $Cov(a,b) = \overline{a'b'}$ est la *covariance*
Les ellipses de dispersions sont données par la relation suivante :

$$(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a})^2 + (\frac{b-\mu_b}{\sigma_b})^2 - 2R_{ab}\frac{(a-\mu_a)(b-\mu_b)}{\sigma_a\sigma_b} = k^2 \tag{3.99}$$

La figure 3.4 montre les ellipses de dispersion de 5 loi binormales. Lorsque $R_{ab} = -1, +1$, les ellipses deviennent des droites parallèles à la droite $a = b$. Pour $R_{ab} = 0$, on retrouve bien une répartition de deux variables indépendantes, c'est à dire des cercles concentriques.

3.7 Corrélations spatio-temporelles

Nous nous sommes intéressés jusque là à l'analyse statistique d'une variable aléatoire $a(x_i,t)$. Si on considère que cette variable est une vitesse, une pression ou une température en une position fixe, il est évident que les définitions précédentes ne fournissent aucune information sur les échelles caractéristiques (échelles de temps et de longueur).
La corrélation spatio-temporelle entre deux variables aléatoires (par exemple deux composantes de vitesse) est utilisée pour suivre l'évolution de la turbulence dans l'espace et dans le temps. Elle consiste à comparer statistiquement les grandeurs mesurées en deux points différents, mais aussi en des instants différents. La corrélation spatio-temporelle de deux composantes fluctuantes $a'(x_i,t)$ et $b'(x_i,t)$ mesurées en deux points séparés d'une distance l et décalées par un temps τ est définit par la relation suivante :

$$R_{a'b'}(l,\tau) = \frac{\overline{a'(x_i,t)b'(x_i+l,t+\tau)}}{[\overline{a'^2}(x_i)\overline{b'^2}(x_i)]^{1/2}} \tag{3.100}$$

Si la turbulence est stationnaire, la corrélation spatio-temporelle ne dépend que de τ. Si la turbulence est homogène, cette corrélation ne dépend que de la séparation l.

A partir de la relation 3.100, on définit une auto-corrélation temporelle entre deux variables fluctuantes $a'(x_i,t)$ et $a'(x_i,t+\tau)$ d'un système statistiquement stationnaire par :

$$R_{a'}(x_i,\tau) = \frac{\overline{a'(x_i,t)a'(x_i,t+\tau)}}{\overline{a'^2(x_i)}} \tag{3.101}$$

De la même façon, on définit l'auto-corrélation spatiale de deux variables fluctuantes $a'(x_i,t)$ et $a'(x_i+l,t)$ par :

$$R_{a'}(l,t) = \frac{\overline{a'(x_i,t)a'(x_i+l,t)}}{\overline{a'^2(x_i)}} \tag{3.102}$$

Chapitre 4

Ecoulement isotherme

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les prédictions des simulations à grande échelle pour l'écoulement isotherme du fluide d'Ostwald de Waele dans une conduite cylindrique. Nous avons effectué des calculs en régime laminaire et turbulent. Dans le cas du régime laminaire, les profils de vitesse laminaire sont validés par le profil de vitesse analytique et les mesures de vitesse de Scirocco et al. (1984) [75]. Les écoulements turbulents sont confrontés aux solutions DNS de Rudman et al. (2004) [69]. Enfin, nous avons abordé l'influence du nombre de Reynolds sur les structures et les statistiques de la turbulence. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale.

Nous avons commencé ce chapitre par un rappel sur la configuration (taille de la conduite, conditions aux limites et conditions initiales) et la résolution numérique. Ensuite, nous avons effectué une étude de convergence en maillage et en temps. Celle-ci est menée sur l'évolution des profils de vitesse, des rms des fluctuations et coefficient de frottement avec le maillage et le pas de temps. Dans la deuxième partie, nous présenterons la qualité de résolution de nos simulations LES. Enfin, nous nous sommes intéressés à l'analyse et la validation des résultats.

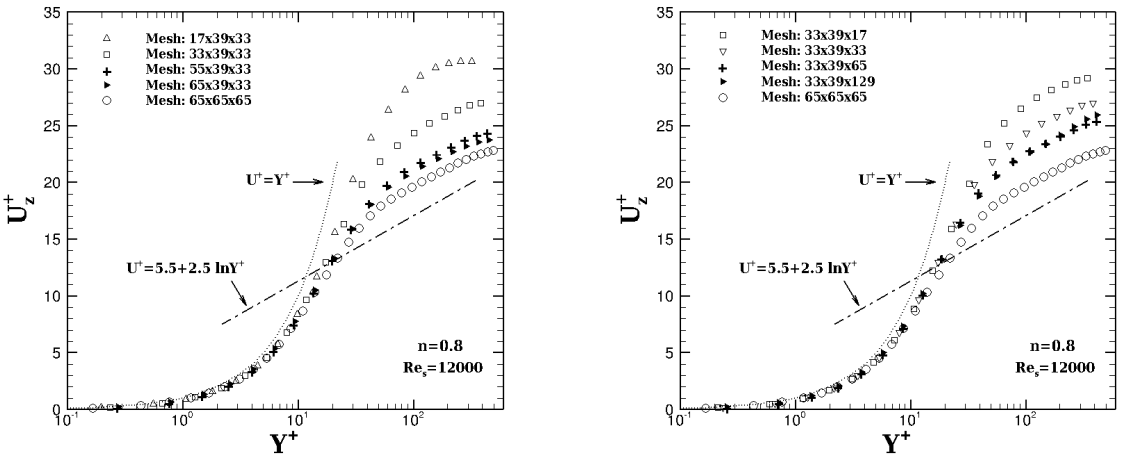
4.1 Configuration, conditions aux limites et résolution numérique

Dans cette étude, nous avons utilisé une conduite cylindrique de longueur $L = 20R$, les conditions périodiques en z et θ et une condition d'adhérence à la paroi. Les simulations sont initialisées par le profil laminaire analytique non-newtonien. Au voisinage de la paroi (région de production maximale d'énergie cinétique turbulence), les mailles sont très fines. Nous avons utilisé la loi de raffinement en tangente hyperbolique (cf. Eq. (3.54)), §3.4.2) pour capter les tourbillons de l'écoulement dans cette zone proche paroi. Pour la procédure numérique, nous avons considéré la méthode à pas de temps fractionné ("fractional step method") basée sur un schéma hybride de Runge-Kutta/Crank-Nicolson qui est présentée à la section 3.4.4. Les tenseurs sous-maille issus des équations (6.7) sont modélisés par le modèle dynamique (cf. §3.3.2).

4.2 Etude de la convergence en maillage et en temps

4.2.1 Etude de la convergence en maillage

Une des conditions nécessaires pour obtenir des prédictions de simulations numériques correctes est la convergence en maillage. Le nombre de mailles et le facteur de raffinement sont des paramètres à contrôler avant toute analyse des résultats. Le nombre de mailles est défini dans cet ordre (N_θ, N_r, N_z) tels que N_θ, N_r et N_z représentent respectivement le nombre de mailles dans les directions azimutale, radiale et axiale. Un maillage avec un nombre de points égal à 65 au moins dans les directions périodiques apparaît nécessaire pour obtenir des résultats en accord avec ceux de la littérature. Nous avons débuté cette étude de maillage sur l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant $n = 0,8$ à $Re_s = 12000$ dont les profils moyens de vitesse axiale sont tracés sur les figures 4.1. La figure 4.1(a) présente la vitesse moyenne issue de la simulation LES ayant le même nombre de points dans les directions radiale et axiale (r, z). Seul le nombre de points dans la direction azimutale (θ) varie pour ces simulations. On observe clairement que le profil de vitesse n'évolue plus à partir de 55 points dans la direction azimutale. Donc la convergence du nombre de maille dans la direction azimutale est satisfaite. Ensuite, nous avons gardé le même nombre de points dans la direction azimutale et radiale et varié celui dans la direction axiale, Fig. 4.1(b). Le profil de vitesse ne varie plus à partir de 65 points dans la direction axiale. La convergence en nombre de mailles dans la direction axiale est obtenue. La figure 4.2 montre bien la convergence dans la direction radiale est atteinte avec au moins 39 points.



(a) Nombre de points variables en θ

(b) Nombre de points variables en z

FIGURE 4.1 – Profils moyens de vitesse axiale pour différents maillages.

A partir de l'évolution des profils moyens de la vitesse présentés sur les figures 4.1 et 4.2, nous pouvons conclure que le maillage 65^3 est suffisant pour les simulations LES à $Re_s = 12000$ pour $n = 0,8$.

Dans la deuxième partie de cette étude de maillage, nous avons diminué le nombre de Reynolds ($Re_s = 4000$) et effectué des calculs pour $n = 0,75$ et $n = 1,2$. L'évolution de la

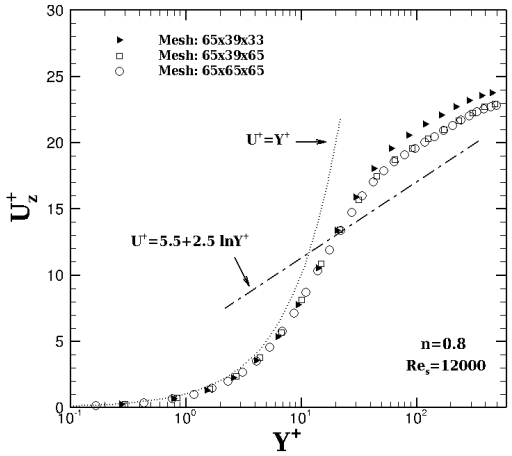
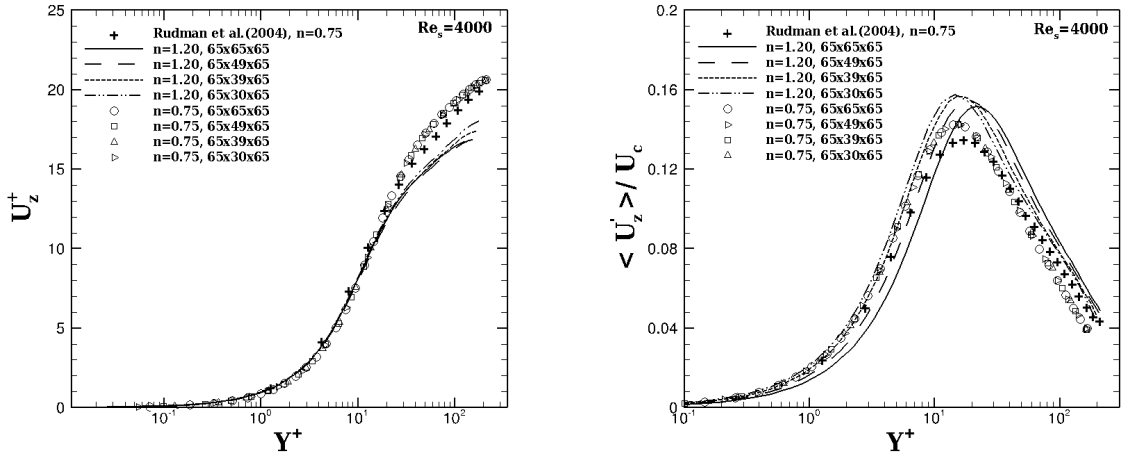


FIGURE 4.2 – Profils moyens de vitesse axiale pour différents maillages avec le nombre de points variables en r.

vitesse axiale et de l'intensité de turbulence axiale est illustrée sur la figure 4.3. Sur cette figure, sont également représentées les solutions DNS de Rudman et al. (2004) [69] pour $n = 0,75$ à $Re_s = 3935$. La figure 4.3(a) montre une superposition des profils de vitesse axiale des quatre maillages (avec un nombre de points variable dans la direction radiale). On peut donc conclure que les solutions pour un fluide rhéofluidifiant ($n = 0,75$) sont indépendantes du maillage. Pour $n = 1,2$, une faible sensibilité au maillage est notée sur les profils de vitesse du fluide. Cette sensibilité se voit bien sur les rms de fluctuations de vitesse axiale pour $n = 1,2$, Fig. 4.3(b). Cette figure montre une concordance de l'intensité de turbulence axiale des quatre maillage ; confirmant effectivement que les prédictions LES pour $n = 0,75$ ne sont pas sensibles au maillage.

Outre les variations de la vitesse axiale et de l'intensité de turbulence axiale, nous avons déterminé le coefficient de frottement reporté dans le tableau 4.1 et comparé à la valeur de Cf de la DNS du Rudman et al. (2004) [69] et à certaines corrélations présentées au §1.4. La valeur de Cf pour le cas $n = 0,75$ du maillage 65x65x65 donne des écarts de $9,9\%$ à celle de la DNS de Rudman et al. (2004) [69], de $7,6\%$ à la corrélation d'Ostwald Waele Gomes (1987) [23] (1.32) et de $8,3\%$ à la corrélation de Hanks et Ricks (1975) [28] (1.30). Pour le cas $n = 1.2$, le coefficient de frottement du maillage 65x65x65 donne des écarts de $11,6\%$ à la corrélation d'Ostwald Waele Gomes (1987) [23] et $15,6\%$ à la corrélation de Hanks et Ricks (1975) [28].

Comme dans le cas de $Re_s = 4000$, nous avons comparé les valeurs du coefficient de frottement pour différents maillages à certaines corrélations du coefficient de frottement de la littérature (cf. §1.4) pour $n = 0,8$ à $Re_s = 12000$, Tab. 4.2. Pour le maillage $65x65x65$, ce tableau donne des écarts de 5% à la corrélation de Hanks et Ricks (1975) [28], de $0,5\%$ à la corrélation de Dodge, Metzner et Gomes (1987) [23] et de $4,8\%$ à la corrélation de El-Emam et al. (2003) [16]. Compte tenu de l'évolution de la vitesse axiale et de l'intensité de turbulence (à $Re_s = 4000$) et de la vitesse axiale (à $Re_s = 12000$) complétée par la variation du coefficient de frottement, nous avons retenu le maillage 65x65x65 pour la



(a) vitesse moyenne

(b) intensité de turbulence axiale

FIGURE 4.3 – Profils de vitesse axiale et intensité de turbulence axiale.

maillages	$n = 0.75$	$n = 1.20$
65x30x65	$8,88.10^{-3}$	$3,27.10^{-2}$
65x39x65	$8,88.10^{-3}$	$2,57.10^{-2}$
65x49x65	$8,85.10^{-3}$	$1,90.10^{-2}$
65x65x65	$8,85.10^{-3}$	$1,25.10^{-2}$
Rudman et al. (2004) [69]	$8,05.10^{-3}$	–
Ostwald Waele et Gomes (1987) [23]	$8,24.10^{-3}$	$1,12.10^{-2}$
Hanks et Ricks (1975) [28]	$8,18.10^{-3}$	$1,08.10^{-2}$

TABLE 4.1 – Etude de maillages : Coefficient de frottement pour $n = 0,75$ et $n = 1,20$ à $Re_s = 4000$.

maillages	Cf	maillages	Cf
33x39x17	$3,86.10^{-3}$	17x39x33	$3,46.10^{-3}$
33x39x33	$3,86.10^{-3}$	33x39x33	$3,86.10^{-3}$
33x39x65	$4,87.10^{-3}$	55x39x33	$4,46.10^{-3}$
33x39x129	$4,93.10^{-3}$	65x39x33	$5,53.10^{-3}$
33x39x33	$3,86.10^{-3}$	33x55x33	$4,39.10^{-3}$
33x65x33	$4,44.10^{-3}$	65x39x33	$6,00.10^{-3}$
65x39x65	$6,00.10^{-3}$	65x65x65	$6,04.10^{-3}$
Hanks et Ricks (1975) [28]	$6,36.10^{-3}$	–	–
Dodge, Metzner et Gomes (1987) [23]	$6,07.10^{-3}$	–	–
El-Emam et al. (2003) [16]	$5,76.10^{-3}$	–	–

TABLE 4.2 – Etude de maillages : Coefficient de frottement pour $n = 0,8$ et $Re_s = 12000$.

suite des simulations des écoulements turbulents dont les résultats seront présentés dans ce document.

4.2.2 Etude du pas de temps

Le pas de temps Δt est rendu adimensionnel à l'aide du rayon de la conduite R et de la vitesse maximale du profil laminaire de modèle d'Ostwald de Waele U_{cL}. Les calculs ont été effectués pour le nombre de CFL (Courant, Friedrichs et Lewy) égal à 1,7 pour stabiliser les solutions. Dans ce cas, le pas de temps est calculé à partir du CFL imposé. Sa valeur maximale est cependant bornée par la valeur $0,08R/U_{cL}$ pour les fluides Newtonien et dilatants ($n \geq 1$) et par la valeur $0.04R/U_{cL}$ ou $0.01R/U_{cL}$ pour les fluides pseudoplastiques ($n < 1$) afin d'éviter les problèmes de divergence. Cela se produit lorsqu'on diminue l'indice de comportement n : il faut alors diminuer également le pas de temps Δt. Nous avons donc choisi $\Delta t = 0,08$ pour les fluides dont $n > 0,75$, $\Delta t = 0,04$ pour $n = 0,75$ et $\Delta t = 0,01$ pour $n < 0,75$.
A nombre de Reynolds faible ou élevé, le pas de temps reste sans influence sur les solutions comme on peut le voir sur l'évolution de la vitesse moyenne axiale d'un fluide rhéofluidifiant à $n = 0,8$ et $Re_s = 12000$ pour le maillage 65x65x65 (Fig. 4.4).

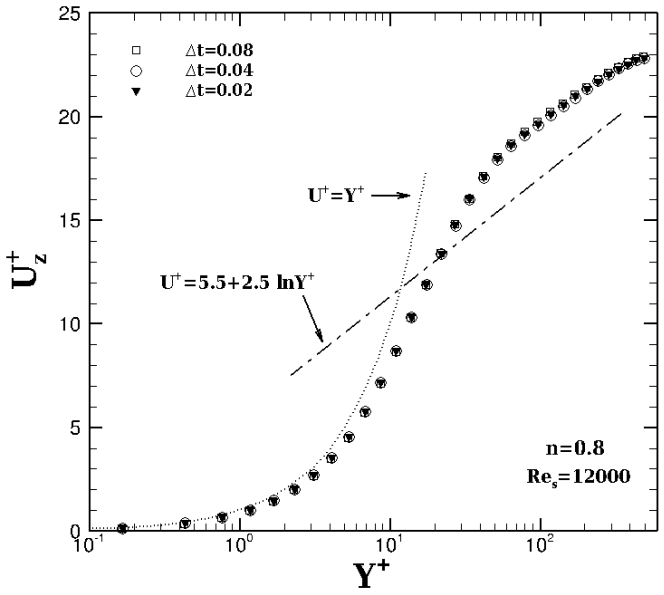


FIGURE 4.4 – Profils moyens de la vitesse axiale pour le maillage : 65x65x65.

4.3 Résolution de la simulation LES

Un aspect très important dans les simulations des grandes échelles est la qualité des solutions obtenues pour les échelles résolues. Cette présente LES a été réalisée sur le fluide d'Ostwald de Waele d'indice d'écoulement n tel que $0.5 \leq n \leq 1.4$. Pour chaque indice d'écoulement n, nous avons déterminé la qualité des résultats. Dans les simulations des

grandes échelles, la qualité de résolution est jugée par rapport aux variations du pas d'espace dans les directions axiale (Δz^+) et azimutale ($(r\Delta\theta)^+$) dont les valeurs pour nos simulations sont regroupées dans les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 complétés par les paramètres et quelques statistiques des simulations. Nous rappelons que cette étude de résolution n'a rien avoir avec l'étude de maillage et que le maillage utilisé est 65x65x65 comme déjà indiqué à la fin de l'étude de la convergence en maillage.

Avant de nous prononcer sur la qualité de résolution, nous avons analysé la position du premier point de calcul. Afin de simuler correctement l'écoulement turbulent au voisinage de la paroi et représenter le mouvement des structures tourbillonnaires dans la sous-couche visqueuse et zone tampon, le raffinement du maillage doit être tel que le premier point du maillage Y_1^+ proche de la paroi doit se situer dans la sous-couche visqueuse, soit $Y_1^+ \simeq 1$. Cela correspond à une LES proche paroi bien résolue. Dans la présente étude, toutes les simulations sont réalisées avec le maillage 65x65x65. Le premier point du maillage adjacent à la paroi est à $Y_1^+ < 1$ (voir tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 relatifs au nombre de Reynolds $Re_s = 4000$, 8000 et 12000).

Paramètres	$n = 0,50$	$n = 0,69$	$n = 0,75$	$n = 0,80$	$n = 1,00$	$n = 1,20$	$n = 1,40$
Δz^+	$33,84$	$38,88$	$41,14$	$43,01$	$50,08$	$59,85$	$75,23$
$(r\Delta\theta)^+$	$10,63$	$12,21$	$12,85$	$13,51$	$15,73$	$18,8$	$23,63$
Δr^+_{min}	$0,084$	$0,059$	$0,054$	$0,051$	$0,040$	$0,034$	$0,030$
Δr^+_{max}	$18,57$	$12,98$	$12,00$	$11,27$	$8,87$	$7,56$	$6,69$
U_b/U_{cL}	$0,542$	$0,545$	$0,533$	$0,524$	$0,494$	$0,502$	$0,544$
U_c/U_{cL}	$0,757$	$0,701$	$0,687$	$0,677$	$0,647$	$0,662$	$0,725$
U_τ/U_{cL}	$0,027$	$0,032$	$0,033$	$0,034$	$0,036$	$0,039$	$0,045$
$< \dot{\gamma}_{d,w} >$	$2,794$	$6,730$	$5,902$	$5,942$	$5,377$	$5,366$	$5,437$
$< \eta_{d,w} > 10^4$	$1,49$	$1,38$	$1,60$	$1,75$	$2,50$	$3,50$	$4,92$
Re_{cr}	2464	$2280,3$	$2236,7$	$2204,2$	2100	$2024,6$	$1967,5$
Re_{MR}	5302	5033	4870	4754	4449	4512	4731
Re_w	10211	8011	7042	6359	4449	3506	2920
$Re_\tau = U_\tau R/\nu_w$	110	$126,4$	$133,72$	$139,81$	$162,77$	$194,52$	$244,51$
Y_1^+	$0,0342$	$0,0251$	$0,0231$	$0,0217$	$0,0171$	$0,0145$	$0,0129$

TABLE 4.3 – Paramètres et quelques grandeurs moyennes de l'écoulement pour $Re_s = 4000$.

Dans le cas de $Re_s = 4000$ (cf. Tab. 4.3), le nombre de points dans la sous-couche visqueuse (sous-couche définie dans le domaine $Y^+ \leq 5$) varie d'un minimum de 21 points pour l'indice de comportement $n = 0,5$ à un maximum de 29 points pour $n = 1,4$. Nous avons donc un nombre suffisant de points dans cette sous-couche : on parle alors de LES hautement résolue. Pour $Re_s = 8000$ et 12000 (cf. Tab. 4.4 et 4.5), la sous-couche visqueuse contient de 18 à 25 points. Les simulations sont alors des LES à résolution moyenne ou modérée. Seule la LES à $Re_s = 12000$ et $n = 1,2$ est une LES à faible résolution.

En effet, selon Montreuil (2000) [43], "une haute résolution" des simulations LES est obtenue pour $\Delta z^+ \approx 35$ et $(r\Delta\theta)^+ < 10$, "une résolution moyenne pour $\Delta z^+ \approx 70 \sim 80$ et $(r\Delta\theta)^+ \approx 15 \sim 20$ et une "basse résolution" pour $\Delta z^+ \approx 155$ et $(r\Delta\theta)^+ \approx 35 \sim 40$. Pour des schémas du second ordre en espace et en temps, de bonnes prédictions LES peuvent

Paramètres	$n = 0,8$	$n = 1,0$	$n = 1,2$
Δz^+	$65,56$	$78,97$	$99,37$
$(r\Delta\theta)^+$	$21,17$	$24,81$	$31,22$
Δr^+_{min}	$0,087$	$0,063$	$0,053$
Δr^+_{max}	$19,13$	$14,01$	$11,65$
U_b/U_{cL}	$0,525$	$0,495$	$0,529$
U_c/U_{cL}	$0,640$	$0,617$	$0,663$
U_τ/U_{cL}	$0,029$	$0,032$	$0,037$
$< \dot{\gamma}_{d,w} >$	$9,797$	$7,759$	$7,931$
$< \eta_{d,w} > 10^4$	$0,797$	$1,250$	$1,891$
Re_{cr}	$2204,2$	2100	$2024,6$
Re_{MR}	8485	7925	8368
Re_w	12291	7928	6109
$Re_\tau = U_\tau R/\nu_w$	$219,1$	$256,7$	$323,0$
Y_1^+	$0,0369$	$0,0270$	$0,0225$

TABLE 4.4 – Paramètres et quelques grandeurs moyennes de l'écoulement pour $Re_s = 8000$.

Paramètres	$n = 0,8$	$n = 1,0$	$n = 1,2$
Δz^+	$92,68$	$109,65$	$139,07$
$(r\Delta\theta)^+$	$29,11$	$34,44$	$43,69$
Δr^+_{min}	$0,127$	$0,063$	$0,071$
Δr^+_{max}	$27,87$	$19,44$	$15,61$
U_b/U_{cL}	$0,526$	$0,496$	$0,530$
U_c/U_{cL}	$0,626$	$0,603$	$0,652$
U_τ/U_{cL}	$0,027$	$0,029$	$0,034$
$< \dot{\gamma}_{d,w} >$	$12,278$	$9,774$	$9,609$
$< \eta_{d,w} > 10^4$	$0,504$	$0,833$	$1,310$
Re_{cr}	$2204,2$	2100	$2024,6$
Re_{MR}	12745	11908	12579
Re_w	19556	11908	8788
$Re_\tau = U_\tau R/\nu_w$	$301,2$	$356,3$	$452,0$
Y_1^+	$0,0538$	$0,0375$	$0,0301$

TABLE 4.5 – Paramètres et quelques grandeurs moyennes de l'écoulement pour $Re_s = 12000$.

être obtenues avec $\Delta z^+ < 100$ et $(r\Delta\theta)^+ < 12$, d'après Zahrai (1995) [95]. En outre, Zang (1991) [96] a montré qu'une LES correcte est obtenue si $\Delta z^+ < 80$ et $(r\Delta\theta)^+ < 40$ avec un minimum de trois points dans la sous-couche visqueuse. Finalement, en nous basant sur les critères de Montreuil (2000) [43], Zang (1991) [96] et Zahrai (1995) [95], nous concluons que nos résultats LES sont précis et corrects avec une résolution moyenne pour $Re_s = 4000$ et $Re_s = 12000$, et une faible résolution pour $Re_s = 12000$, en particulier pour $n \geq 1,2$.

Les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 présentent aussi l'évolution du nombre de Reynolds de Met-

zner et Reed Re_{MR} en fonction de n pour différentes valeurs et du nombre de Reynolds de simulation Re_s. Ces deux nombres de Reynolds sont reliés par la relation :

$$\frac{Re_s}{Re_{MR}} = \frac{1}{8}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{U_{cL}}{U_b}\right)^{2-n} \tag{4.1}$$

En introduisant l'expression de $U_{cL} = (3n+1)U_b/(n+1)$ dans l'équation (4.1), elle devient :

$$\frac{Re_s}{Re_{MR}} = \frac{1}{8}\left(\frac{3n+1}{n+1}\right)^2 \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \tag{4.2}$$

Cette équation (4.2) montre une augmentation monotone du rapport Re_s/Re_{MR} avec n croissant comme le montre les trois valeurs de n ci-dessous :

- Re_s/Re_{MR}=0.601 pour n=0.5
- Re_s/Re_{MR}=1 pour n=1
- Re_s/Re_{MR}=1.248 pour n=1.4

Cette croissance de Re_s/Re_{MR} signifie qu'à Re_s fixé, les valeurs de Re_{MR} diminuent lorsque n augmente. Par contre, les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 montrent qu'à Re_s fixé, Re_{MR} diminue lorsque n varie entre 0.5 et 1 puis augmente quand n croît de 1 à 1.4. Ceci est dû à la variation du rapport des vitesses U_{cL}/U_b en régime turbulent en fonction de n dans l'équation (4.1).

La transition entre les régimes laminaire et turbulent des écoulements des fluides non-newtoniens est obtenue grâce au nombre de Reynolds critique. Mishra et Tripathi (1971) [39] l'ont défini comme :

$$Re_{cr} = 2100\frac{(4n+2)(5n+3)}{3(3n+1)^2} \tag{4.3}$$

Dans les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5, toutes les simulations sont réalisées pour des écoulements turbulents. Ce nombre de Reynolds critique Re_{cr}, tout comme le nombre de Reynolds à la paroi Re_w, diminue quand n augmente.

Enfin, pour éviter la singularité du taux de cisaillement nul (η tend vers l'infini lorsque $\dot{\gamma} = 0$ pour $n < 1$), une valeur $\dot{\gamma}$ de coupure égale à 10^{-6} est ajoutée dans le code. En dessous de cette valeur, le taux de cisaillement est supposé constant et égal à cette valeur de coupure. Toutes nos simulations ont donné des valeurs de $\dot{\gamma}$ au-dessus de cette valeur de coupure.

4.4 Analyse et validation des résultats

4.4.1 Profil de vitesse

Le profil analytique de la vitesse axiale de l'écoulement laminaire d'un fluide non-newtonien est donné par la relation :

$$\frac{U_z}{U_b} = \frac{3n+1}{n+1}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right) \tag{4.4}$$

Il est tracée sur la figure 4.5(a) et comparé à nos prédictions LES pour différents indices n. On constate que les solutions LES dégénèrent bien vers les solutions analytique de l'écoulement laminaire. Sur cette figure, nous observons que la diminution de l'indice de comportement n entraîne l'aplatissement du profil de vitesse. Pour les fluides rhéofluidifiants ($n < 1$), au centre de la conduite, le fluide est plus visqueux. Ceci s'explique par le fait qu'au centre de la conduite et pour ces fluides (rhéofluidifiants), le taux de cisaillement diminue et donc la viscosité η croît et le fluide devient rigide : il tend à se comporter comme un solide. Ce sont généralement des solutions de polymères ou des suspensions peu denses de particules solides qui ont ce genre de comportement. Avec l'augmentation du taux de cisaillement, les macromolécules sont progressivement alignées et ces fluides deviennent moins visqueux. Ou bien la microstructure de ces matériaux est détruite pour un cisaillement élevé. Cela se traduit par des viscosités plus faibles et le fluide s'écoule plus facilement.

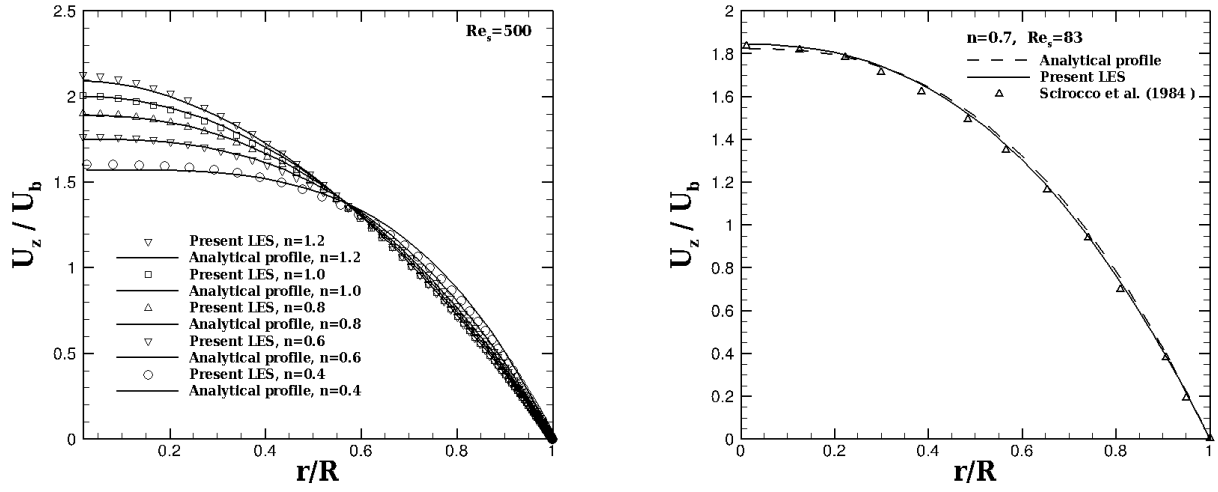
Les fluides dilatants ($n > 1$) présentent un comportement inverse, c'est-à-dire une solidification au voisinage de la paroi (où le taux de cisaillement est élevé) et une meilleure fluidité au coeur de la conduite. Une possible explication du comportement dilatant est la suivante. Ce comportement est rencontré dans les suspensions concentrées de particules solides. Au repos, la porosité est maximale et le liquide présent est seulement suffisant pour remplir l'espace vide. Au faible taux de cisaillement, le liquide lubrifie le mouvement de chaque particule minimisant ainsi le frottement solide-solide. Par conséquent, il en résulte de faibles contraintes. Pour des taux de cisaillement élevés, la solution de particules s'élargit légèrement (se dilate) de sorte qu'il n'y a pas suffisamment de liquide pour remplir l'espace interparticulaire qui croît. La quantité de liquide présente ne permet plus d'éviter les contacts et les frottements entre les particules solides-solides. Cela conduit à l'apparition de contraintes de cisaillement plus importantes que celles observées dans le cas de faible taux de cisaillement. Ce mécanisme provoque l'augmentation rapide de la viscosité apparente avec le taux de cisaillement (Rajendra P. Chhabra (2010)) [6].

La comparaison aux mesures expérimentales de Scirocco et al. (1984) [75] pour une solution de polymère CMC (sodium CarboxyMethyl Cellulose) pour $n = 0,7$ à $Re_s = 83$ montre également un bon accord avec nos prédictions LES (Fig. 4.5(b)).

Afin de valider nos prédictions LES, les calculs de la présente étude sont confrontés aux résultats de la littérature pour des écoulements turbulents pleinement développés en conduite cylindrique :

- les résultats de la DNS de Rudman et al. (2004) [69] pour $n = 0.75$ à $Re_{MR} = 3935$.
- les prédictions DNS de Eggels et al. (1994) [15] pour $n = 1$ à $Re_b = U_b D/\mu = 5300$.
- les prédictions LDA (Laser Doppler Anemometry) et PIV (Particle Image Velocimetry) de Eggels et al. (1994) [15] pour $n = 1$ à $Re_b = 5300$.
- les valeurs expérimentales de Pinho et al. (1990) [56] pour une solution de polymère CMC (sodium CarboxyMethyl Cellulose) pour $n = 0.9$ à $Re_w = 5070$

En turbulence, la vitesse est déterminée en terme de U^+, c'est-à-dire la vitesse axiale normalisée par la vitesse de frottement ($U_\tau = \sqrt{\tau_p/\rho}$). L'évolution de ce profil de vitesse moyen en fonction de la distance à la paroi ($Y^+ = \rho(r - R)U_\tau/\eta_w$) est illustrée sur la figure 4.6. Nos calculs LES sont comparés aux résultats DNS de Rudman et al. (2004)



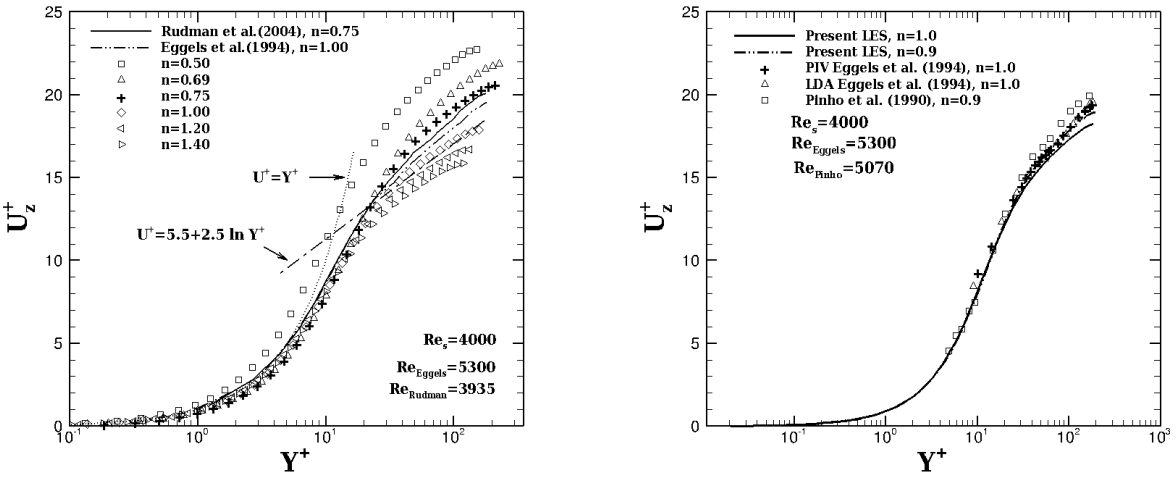
(a) (b)

FIGURE 4.5 – Profils de vitesse axiale.

[69] pour $n = 0,75$ à $Re_{MR} = 3935$ (Fig. 4.6(a)), aux données DNS et expérimentales de Eggels et al. (1994) [15] pour $n = 1$ à $Re_b = 5300$ (Fig. 4.6(a) et 4.6(b)) et aux valeurs expérimentales de Pinho et al. (1990) [56] pour $n = 0,9$ à $Re_w = 5070$ (Fig. 4.6(b)). Les comparaisons par rapport à la vitesse axiale de [69] ($n = 0,75$), [56] ($n = 0,9$) et [15] ($n = 1$) montrent un bon accord de nos résultats. Les légers écarts avec les données de la littérature s'expliquent en partie par les valeurs légèrement différentes des nombres de Reynolds.

La figure 4.6(a) illustre aussi l'influence de l'indice de comportement n sur la vitesse. Dans la sous couche visqueuse ($0 \leq Y^+ \leq 5$), le profil de vitesse suit la loi linéaire ($U^+ = Y^+$) pour tous les indices n à l'exception de $n = 0,5$, où la prédiction est légèrement surestimée. Cela signifie que l'écoulement se trouve dans un régime transitoire, confirmant l'observation de Rudman et al. (2004) [69] pour $n = 0,5$. En effet, pour $n = 0,5$, la viscosité est plus élevée au centre de la conduite induisant une turbulence qui n'est pas complètement développée, même si le nombre de Reynolds ($Re_{MR} = 5302$) est légèrement supérieur aux valeurs de Re_{MR} associés aux autres indices d'écoulement n (voir Tab. 4.3). Cela peut être dû à la différence entre les évolutions de la viscosité et du nombre de Reynolds avec n : la viscosité augmente plus rapidement que le nombre de Reynolds pour les écoulements de fluides rhéofluidifiants, ce qui entraîne l'amortissement de la turbulence et conduit à une turbulence moins développée. Dans la zone logarithmique ($Y^+ > 30$), le profil de vitesse axiale est en bon accord avec la loi universelle $U^+ = 5.5 + 2.5\, lnY^+$ pour le cas $n = 1$ et s'écarte du comportement Newtonien lorsque n est différent de 1. Cet écart est plus accentué pour les fluides rhéofluidifiants (n<1). Des tendances similaires ont été observées par Rudman et al. (2004) [69].

Nous avons fait varier le nombre de Reynolds Re_s afin d'observer son effet sur les structures et la rhéologie du fluide non-newtonien. La figure 4.7 montre qu'en fixant la valeur de n et en augmentant Re_s, les valeurs maximales de vitesse axiale sont plus



(a) Comparaisons aux DNS de [69] ($n = 0,75$) et de [15] ($n = 1$)

(b) Comparaisons aux expériences de [56] ($n = 0,9$) et [15] ($n = 1$)

FIGURE 4.6 – Profils de vitesse axiale.

grandes dans la zone logarithmique et la zone logarithmique est plus étendue. Pour un même nombre de Reynolds, cette zone est plus étendue lorsque l'indice n diminue (cf. Figs. 4.6(a) et 4.7).

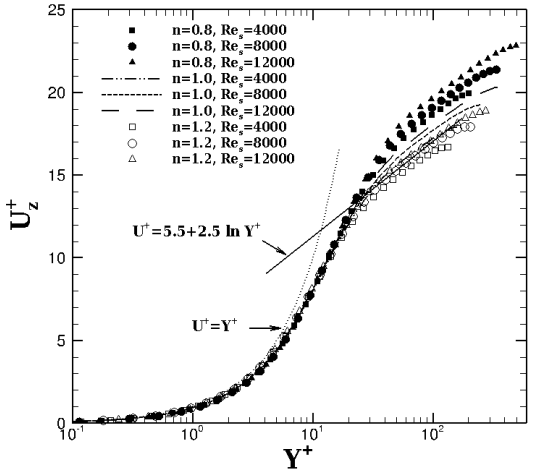


FIGURE 4.7 – Influence du nombre de Reynolds : évolution de la vitesse moyenne axiale.

4.4.2 Coefficient de frottement

Le coefficient de frottement est défini par $f = 2\tau_p/(\rho U_b^2)$ et renseigne sur les pertes de charge. Pour les simulations de l'écoulement laminaire à $Re_s = 500$ (voir la section 4.4.1), les valeurs de f prédites par la LES ($Cf = 0,0341$) donnent un écart de $2,3\%$ par rapport

à la solution analytique $Cf = 16/Re_{MR}$. Pour les écoulements turbulents, le coefficient de frottement augmente avec les valeurs croissantes de l'indice n (cf. Tab. 4.6, 4.7 et 4.8) pour Re_s fixé et avec les valeurs décroissantes de Re_s pour n fixé. Les prédictions de la présente LES sont comparées à la corrélation explicite de Dodge et Metzner (1959) [13] définie par :

$$f_{DM} = \frac{a}{Re_{MR}^b} \tag{4.5}$$

où $a = 0.0665 + 0.01175n$ et $b = 0.365 - 0.177n + 0.062n^2$. Cette relation est comparée à nos prédictions. Pour $n \leq 1$, ces dernières donnent des valeurs plus élevées, avec un écart variant entre 9% et $14,5\%$ pour le cas $Re_s = 4000$ (cf. Tab. 4.6), entre 2,2 % et 20,6 % pour $Re_s = 8000$ (cf. Tab. 4.7) et entre 4,4 % et 15,8 % pour $Re_s = 12000$ (cf. Tab. 4.8). Un résultat similaire a été obtenu par Rudman et al. (2004) [69] : leurs prédictions DNS sont 10 % à 15 % plus grandes que la corrélation de Dodge et Metzner (1959) [13] notée f_{DM}. Pour $n > 1$ les écarts sont plus importants, jusqu'à 35 %. Les valeurs du coefficient de frottement des fluides rhéofluidifiants sont également comparées aux corrélations de Frank Schuk et Gomes (1987) (1.33) [23] notée f_{FSG}, d'Ostwald Waele et Gomes (1987) [23] (1.32) notée f_{OWG} et Hanks et Ricks (1975) [28] (1.30) notée f_{HR} données au §1.4 du chapitre 1.

Paramètres	$n = 0,50$	$n = 0,69$	$n = 0,75$	$n = 0,80$	$n = 1,00$	$n = 1,20$	$n = 1,40$
$f.10^3$	6,35	8,37	8,85	9,24	10,46	12,54	15,69
$f_{DM}.10^3$	5,82	7,32	7,79	8,18	9,58	10,53	11,00
$f_{FSG}.10^3$	6,13	7,58	8,06	8,44	9,87	–	–
$f_{OWG}.10^3$	6,30	7,80	8,25	8,61	9,99	–	–
$f_{HR}.10^3$	6,44	7,78	8,18	8,02	9,73	–	–

TABLE 4.6 – Coefficient de frottement pour $Re_s = 4000$.

Paramètres	$n = 0,8$	$n = 1,0$	$n = 1,2$
$f.10^3$	7,18	8,23	10,94
$f_{DM}.10^3$	7,02	8,29	9,00
$f_{FSG}.10^3$	7,15	8,36	–
$f_{OWG}.10^3$	7,33	8,50	–
$f_{HR}.10^3$	7,08	8,27	–

TABLE 4.7 – Coefficient de frottement pour $Re_s = 8000$.

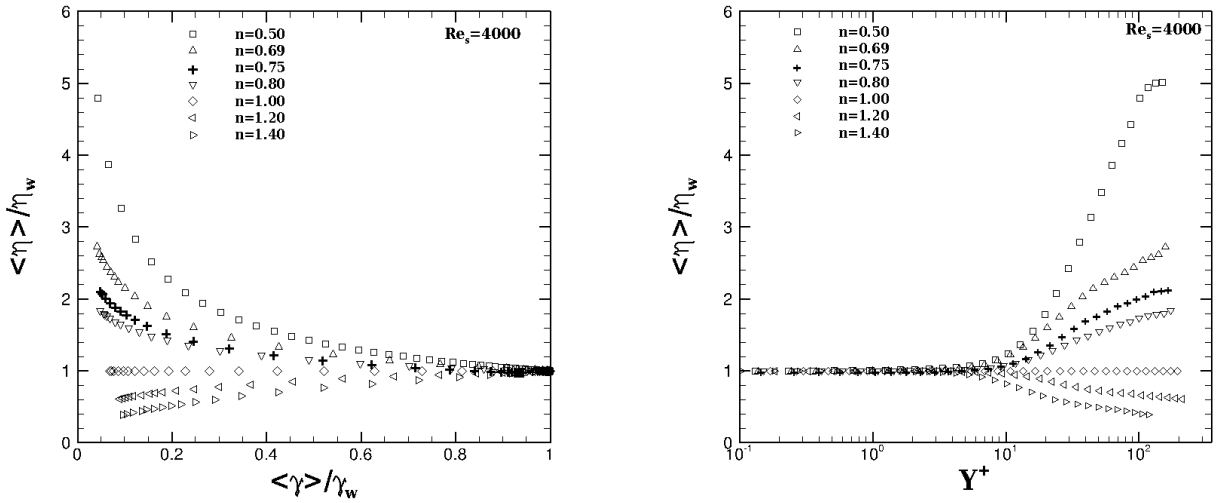
Les valeurs f de notre LES montrent un écart de 3,7 % à 10,4 % à la corrélation f_{FSG} (Eq. 1.33), 0,4 % à 7,4 % à la corrélation f_{OWG} (Eq. 1.32) et 1,4 % à 15,3 % à la corrélation f_{HR} (Eq. 1.30) pour $Re_s = 4000$ (cf. Tab. 4.6). Ces quatre corrélations (Eqs. (1.25-1.30)) ont donné des valeurs très proches aux prédictions LES pour $Re_s = 8000$ et $Re_s = 12000$ (cf. Tab. 4.7 et 4.8). Enfin notons qu'El-Emam et al. (2003) [16] ont comparé différentes corrélations aux données publiées. Ils ont remarqué que beaucoup de ces corrélations étaient en bon accord avec les données expérimentales de leurs auteurs, mais en désaccord avec celles des autres auteurs, ce qui indique un manque de généralisation.

Paramètres	$n = 0,8$	$n = 1,0$	$n = 1,2$
$f.10^3$	6,03	7,05	9,52
$f_{DM}.10^3$	6,31	7,49	8,22
$f_{FSG}.10^3$	6,36	7,44	–
$f_{OWG}.10^3$	6,66	7,73	–
$f_{HR}.10^3$	6,36	7,52	–

TABLE 4.8 – Coefficient de frottement pour $Re_s = 12000$.

4.4.3 Viscosité moyenne

La distribution de la viscosité moyenne du fluide normalisée par la viscosité à la paroi est illustrée en fonction de la valeur moyenne du taux de cisaillement, figure 4.8(a) pour $Re_s = 4000$, et différentes valeurs de n. Notons que les valeurs les plus élevées du taux de cisaillement $< \dot{\gamma} > /\dot{\gamma}_w$ sont localisées proches de la paroi, tandis que les plus faibles de $< \dot{\gamma} > /\dot{\gamma}_w$ sont situées au centre de la conduite.

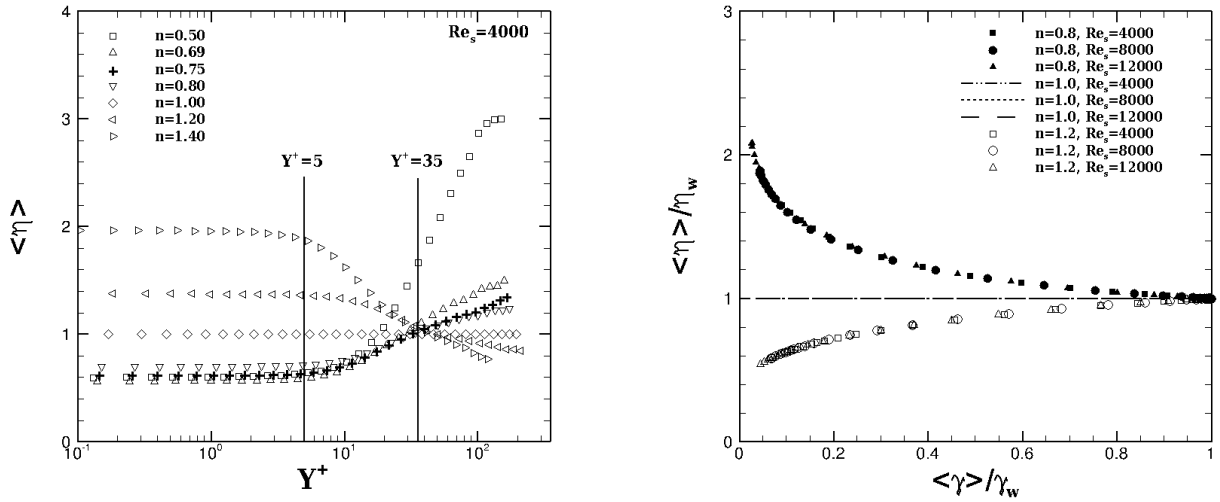


(a) (b)

FIGURE 4.8 – Profils de la viscosité.

Pour $n = 1$, on retrouve le comportement Newtonien (la viscosité constante égale à la viscosité de la paroi). Comme observé sur les profils de vitesse laminaire (cf. Fig. 4.5(a)), la figure 4.8(a) confirme qu'au centre de la conduite, la viscosité est plus grande pour les fluides rhéofluidifiants. En effet, pour n fixé ($n < 1$), la viscosité $< \eta > /\eta_w$ croît de la paroi au centre car le fluide tend à se comporter comme un solide à l'approche du centre de la conduite, dû au faible taux de cisaillement au centre. Pour $n > 1$, on observe un comportement inverse. En effet, les fluides rhéoépaississants deviennent plus visqueux lorsque le taux de cisaillement croît.

Au centre de la conduite, lorsque n diminue, le fluide rhéofluidifiant dévie plus rapidement du comportement Newtonien que le fluide rhéoépaississant quand n augmente. En effet, le rapport entre les valeurs de la viscosité au centre et à la paroi vaut 0,4, 0,6, 1,



(a) (b)

FIGURE 4.9 – Profils de la viscosité.

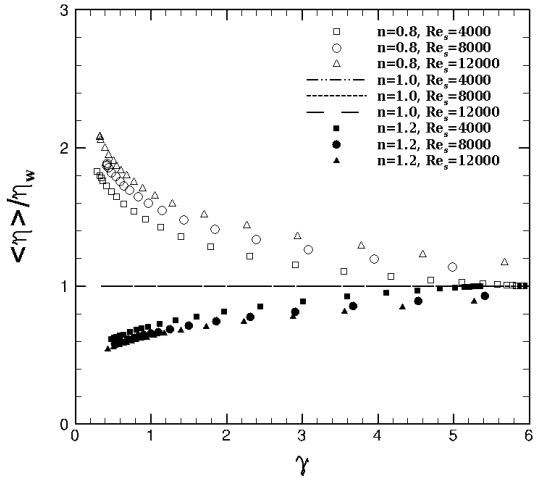


FIGURE 4.10 – Profils de la viscosité.

$1,8$, $2,2$, $2,8$ et $5,1$, pour $n = 1,4$, $1,2$, 1, $0,8$, $0,75$, $0,69$ et $0,5$ respectivement. Notons enfin que, quelque soit la valeur de n, la viscosité demeure constante (égale à η_w) dans la sous-couche visqueuse, jusqu'à $Y^+ \simeq 5$, dénotant une distribution linéaire de la vitesse dans cette zone (Fig. 4.8(b)).

La figure 4.9(a) montre que, dans la sous-couche visqueuse ($Y^+ \leq 5$) et dans la couche tampon ($Y^+ < 30$), la viscosité prend des valeurs plus grandes quand n augmente, tout en restant constante dans la sous-couche visqueuse. Les valeurs de $< \eta >$ diminuent quand n croît après la distance à la paroi $Y^+ = 35$, pour tout $n \geq 0,69$ (le cas de $n = 0,5$ dévie légèrement car cet écoulement est probablement transitionnel). Ces résultats concordent bien avec les prédictions de la DNS de Rudman et al. (2004, 2012) [69] et [70].

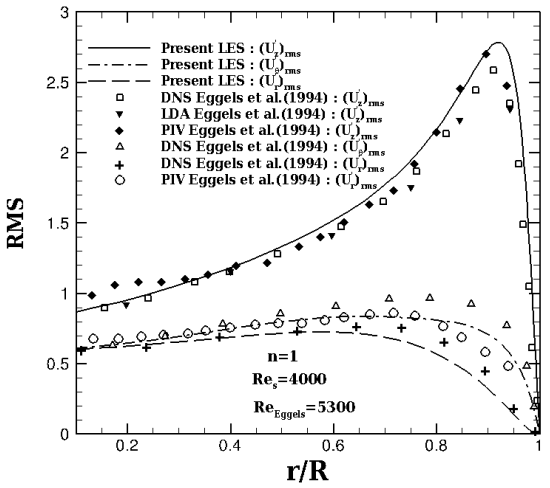
En traçant la viscosité $\frac{<\eta>}{\eta_w}$ en fonction du taux de cisaillement relatif $<\dot{\gamma}>/\dot{\gamma}_w$ pour différentes valeurs de n et Re_s, figure 4.9(b), toutes les distributions se superposent quelque soit la valeur de Re_s. Cela s'explique car la viscosité apparente adimensionnelle, η_d, est reliée au taux de cisaillement adimensionnel, quelque soit le nombre de Reynolds par $<\eta_d>=<\dot{\gamma}_d^{n-1}>/Re_s$ ($<\eta_d>\frac{\dot{\gamma}R}{U_{cL}}$ et $<\eta_d>/<\eta_d, w>=<\eta>/<\eta_w>=<\dot{\gamma}^{n-1}>/<\dot{\gamma}_w^{n-1}>$). Par contre, le tracé de $<\eta>/\eta_w$ en fonction de $\dot{\gamma}$ affiche bien l'effet de Re_s sur la viscosité relative, Fig. 4.10. L'influence de Re_s sur la viscosité pour $n = 0,8$ est plus importante que celle pour $n = 1,2$. Avec l'augmentation de Re_s, la viscosité devient pratiquement indépendante de Re_s (les prédictions LES pour $Re_s = 8000$ et $Re_s = 12000$ sont très proches les unes das autres).

4.4.4 Intensité de la turbulence et tension de Reynolds

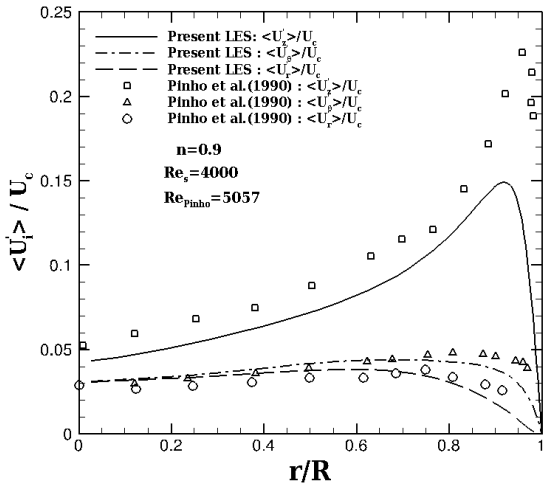
Les fluctuations des échelles résolues dans chaque direction θ, r ou z normalisées par la vitesse moyenne au centre de la conduite sont représentées sur les figures 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15. Elles sont appelées intensités de la turbulence et sont définies par :

$$I_t(U_i') = \frac{rms(U_i')}{U_c} \quad \text{avec} \quad i = \theta, r, \text{ ou } z \tag{4.6}$$

où $rms = \sqrt{\overline{U_i'^2}}$ est la rms des fluctuations de vitesse qui renseigne aussi sur l'intensité de la turbulence et U_c la vitesse au centre de l'élément turbulent. L'intensité de turbulence atteint son maximum au voisinage de la paroi (zone tampon) car c'est dans cette zone que les gradients sont les plus forts et que les structures tourbillonnaires se développent. Le champ turbulent est faible si $I_t \approx 1\%$, moyen si $I_t \approx 10\%$ et fort lorsque $I_t > 20\%$.



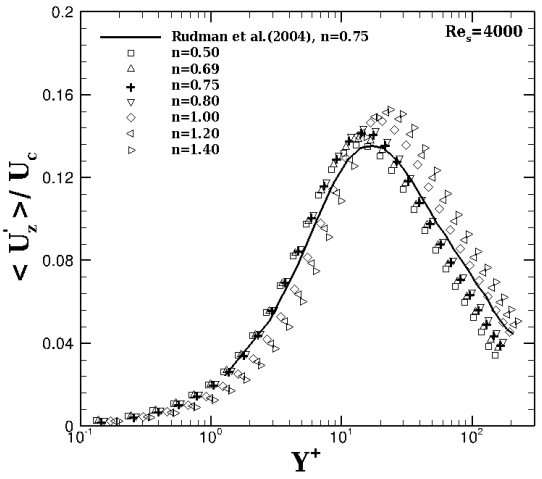
(a) Comparaisons aux expériences [15] ($n = 1$)



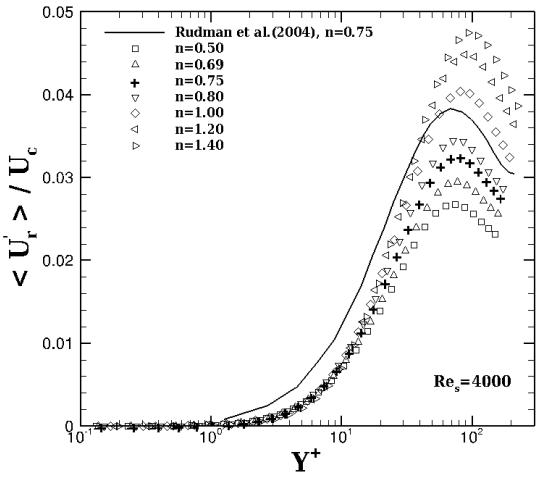
(b) Comparaisons aux expériences [56] ($n = 0.9$)

FIGURE 4.11 – rms des fluctuations et intensités de la turbulence.

Sur la figure 4.11(a), les rms des fluctuations des vitesses axiale, radiale et azimutale sont en accord avec les expériences de Eggels et al. (1994) [15] pour $n = 1$. Par contre, les



(a) Comparaisons à la DNS [69] ($n = 0,75$)



(b) Comparaisons à la DNS [69] ($n = 0,75$)

FIGURE 4.12 – Intensités de la turbulence où U'_z et U'_r sont respectivement les fluctuations de vitesse axiale et radiale.

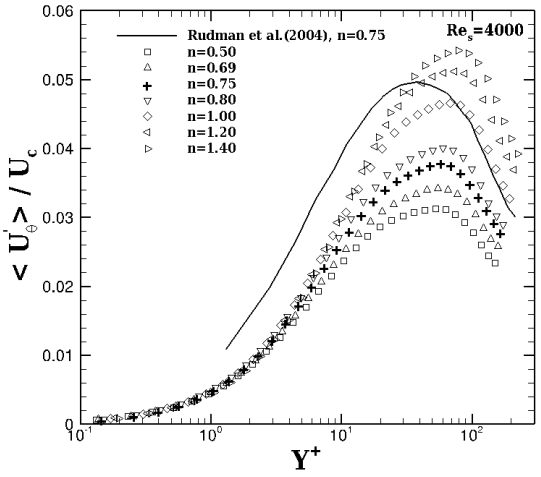
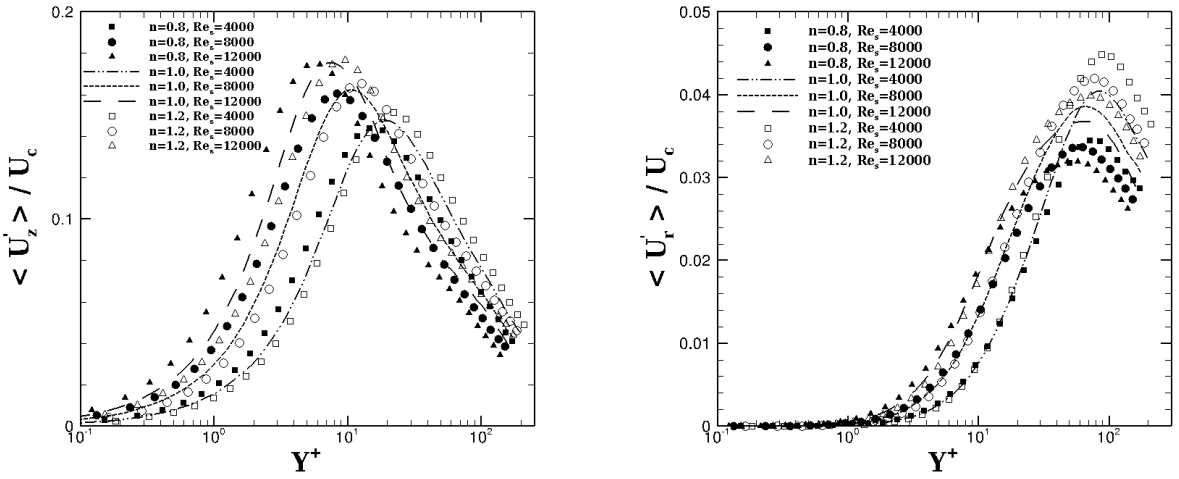


FIGURE 4.13 – Intensités de la turbulence avec la comparaison à la DNS [69] ($n = 0,75$) où U'_θ est la fluctuation de vitesse azimutale.

rms prédites par notre LES pour $n = 0.9$ sont sous-estimées comparées aux mesures de Pinho et al. (1990) [56] (Fig. 4.11(b)), en particulier pour la composante axiale au voisinage de la paroi. Cela est en partie dû à la valeur plus faible du nombre de Reynolds et à la non prise en compte des fluctuations de sous-maille dans notre évaluation de $< U'_z > /U_c$.

Les intensités des fluctuations de vitesse axiale (Fig. 4.12(a)) montre une bonne tendance avec le résultat DNS de Rudman et al. (2004) [69] pour $n = 0.75$. La valeur maximale de cette rms augmente et sa position se déplace de $Y^+ = 13.67$ pour $n = 0.50$



(a) Intensités de la turbulence axiale

(b) Intensités de la turbulence radiale

FIGURE 4.14 – Influence du nombre de Reynolds sur les intensités de la turbulence axiale U'_z/U_c et radiale U'_r/U_c.

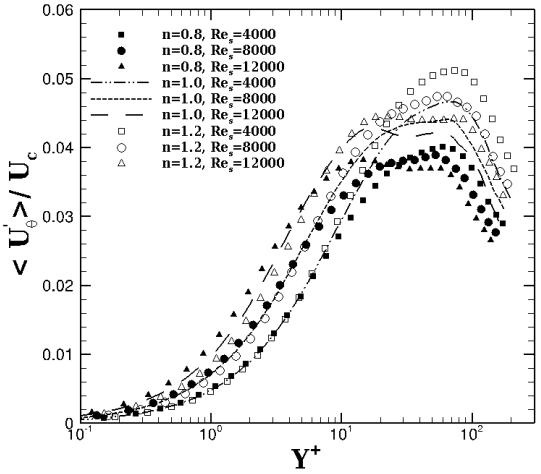
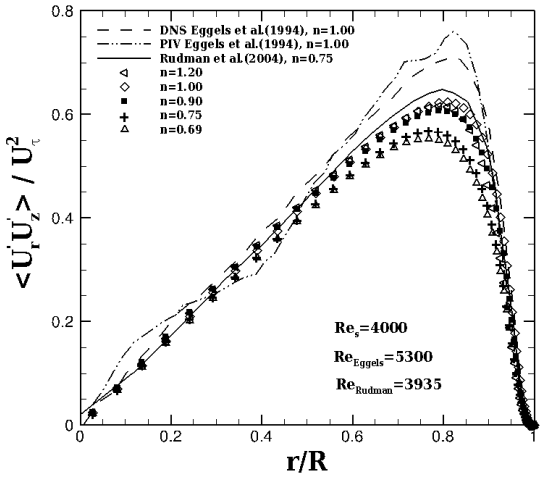


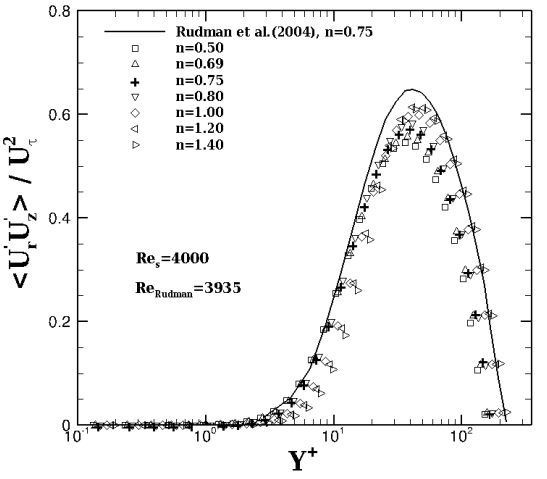
FIGURE 4.15 – Influence du nombre de Reynolds sur les intensités de la turbulence azimutale U'_θ/U_c.

à $Y^+ = 23.79$ pour $n = 1.40$ (s'éloignant de la paroi quand n croît). Au voisinage de la paroi, les fluctuations de la vitesse axiale diminuent lorsque n augmente et augmentent avec n au delà de la position du pic de rms. Cela est dû au fait que la viscosité apparente augmente dans la zone proche paroi et diminue dans la couche turbulente lorsque n augmente. Ainsi les fluctuations turbulentes se développent et sont plus intenses loin de la paroi (après le pic) lorsque $n > 1$, et plus proche de la paroi lorsque $n < 1$.

Les intensités des fluctuations des vitesses radiale et azimutale, Figures 4.12(b) et



(a) Comparaisons à la DNS [69] ($n = 0,75$), la DNS et l'expérience de Eggels et al. (1994) [15] ($n = 1$)



(b) Comparaisons à la DNS [69] ($n = 0,75$)

FIGURE 4.16 – Tension de Reynolds.

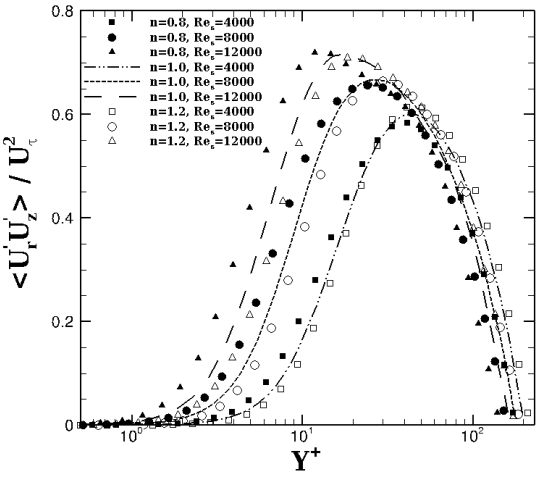


FIGURE 4.17 – Influence du nombre de Reynolds sur la tension de Reynolds.

4.13 respectivement sont plus faibles que celles de la vitesse axiale (Fig. 4.12(a)) et atteignent leur maximum plus loin de la paroi. Dans la couche turbulente ($Y^+ > 20$), ces rms diminuent avec les valeurs décroissantes de n, indiquant une augmentation de la viscosité apparente moyenne. Pour les fluides rhéofluidifiants ($n < 1$), la diminution de la viscosité moyenne du centre vers la paroi de la conduite réduit le frottement pariétal.

La figure 4.14(a) montre que pour un indice de fluidité n donné, lorsque le nombre de Reynolds Re_s augmente, la distribution des fluctuations de vitesse axiale se déplace

vers la paroi avec une hausse de son pic. A $Re_s = 12000$, l'indice de comportement n semble ne pas avoir d'influence sur la valeur maximale de la rms de vitesse axiale, c'est-à-dire que l'influence de n devient faible lorsqu'on augmente Re_s. Par contre, l'influence de Re_s sur la position du pic de rms est notable. Les profils des fluctuations des vitesses radiale et azimutale se rapprochent de la paroi avec Re_s croissant, car l'épaisseur de la sous-couche visqueuse diminue et par la suite, la turbulence transporte une quantité de mouvement plus importante vers la paroi. Le maximum du pic des fluctuations de vitesse radiale diminue avec l'augmentation de Re_s (Fig. 4.14(b)) tandis que le pic des fluctuations de la vitesse azimutale disparaît avec la création de deux nouveaux pics (Fig. 4.15).

L'évolution de la seule tension de Reynolds non nulle $U'_r U'_z$ en fonction de Y^+ et de r/R est représentée sur les figures 4.16 et 4.17. Les profils obtenus sont concordants avec ceux de la littérature (Figs. 4.16(a) et 4.16(b)). Ces figures montrent une évolution de la tension de Reynolds similaire à celle de l'intensité de turbulence axiale (Fig. 4.12(a)) lorsque l'indice n varie. Sa distribution s'éloigne de la paroi avec l'augmentation de n, pour Re_s fixé, et son pic est significativement amplifié. L'augmentation du nombre de Reynolds entraîne le déplacement du maximum de la distribution de la tension vers la paroi pour toutes les valeurs de n (Fig. 4.17). Pour tous les nombres de Reynolds, la tension générée par les fluides rhéofluidifiants sont plus grandes que celle des fluides dilatants.

Le coefficient de corrélation de deux variables fluctuantes $U'r$ et U'_z noté $R_{U'_r U'_z}$ défini par :

$$R_{u'_r u'_z} = \frac{\overline{U'_r U'_z}}{\left[(\overline{U'^2_r})(\overline{U'^2_z})\right]^{1/2}} \tag{4.7}$$

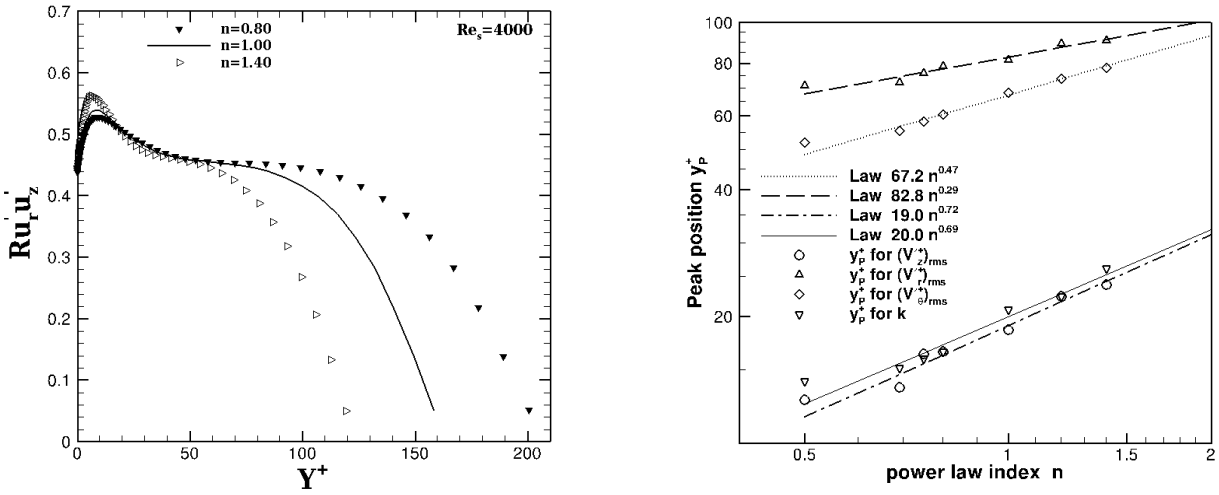
Le coefficient de corrélation $R_{U'_r U'_z}$ vaut +1 lorsque les deux variables $U'r$ et U'_z sont parfaitement corrélées, -1 si elles sont anticorrélées et 0 en absence de toute corrélation. La distribution de ce coefficient montre un plateau ayant pratiquement la même valeur $\forall\ n$, Fig. 4.18(a). Le plateau s'étend de plus en plus lorsque n diminue, ce qui signifie que les fluctuations de vitesse axiale sont corrélées aux fluctuations radiales sur une plus longue zone quand n décroît.

La figure 4.18(b) illustre la position des pics des rms des fluctuations de vitesse, et de l'énergie cinétique de turbulence k en fonction de n, pour $Re_s = 4000$. Tous les pics s'éloignent de la paroi quand n croît. Des corrélations sont proposées pour la position des divers pics (cf. Fig. 4.18(b)). Les positions des pics de $< U'^2_z >^{1/2}$ et k ont pratiquement la même dépendance en n, indiquant une contribution de la composante axiale à l'énergie cinétique de turbulence. Connaissant les épaisseurs de sous-couche visqueuse ($Y^+ \simeq 5$) et la région logarithmique ($Y^+ \geq 30$), ces prédictions montrent que pour $0,5 < n \leq 1,4$ les maximums de $< U'^2_z >^{1/2}$ et de k sont atteints dans la zone tampon, tandis que les maximums de $< U'^2_r >^{1/2}$ et $< U'^2_\theta >^{1/2}$ sont atteints dans la région logarithmique, $\forall\ n$.

4.4.5 Energie cinétique turbulente k

L'énergie cinétique de turbulence :

$$k = \frac{1}{2}\overline{U'}_i\overline{U'}_i \tag{4.8}$$



(a) (b)

FIGURE 4.18 – Evolution du coefficient de corrélation et la position du pic des rms des fluctuations de vitesse et de l'énergie cinétique de turbulence pour $Re_s = 4000$.

normalisée par la vitesse moyenne est illustrée sur la figure 4.19, pour $Re_s = 4000$.

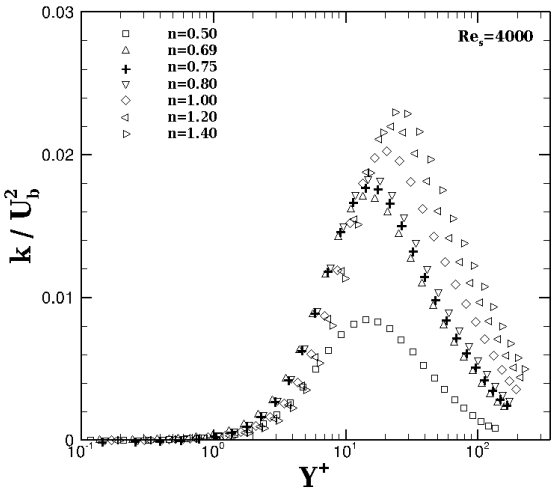
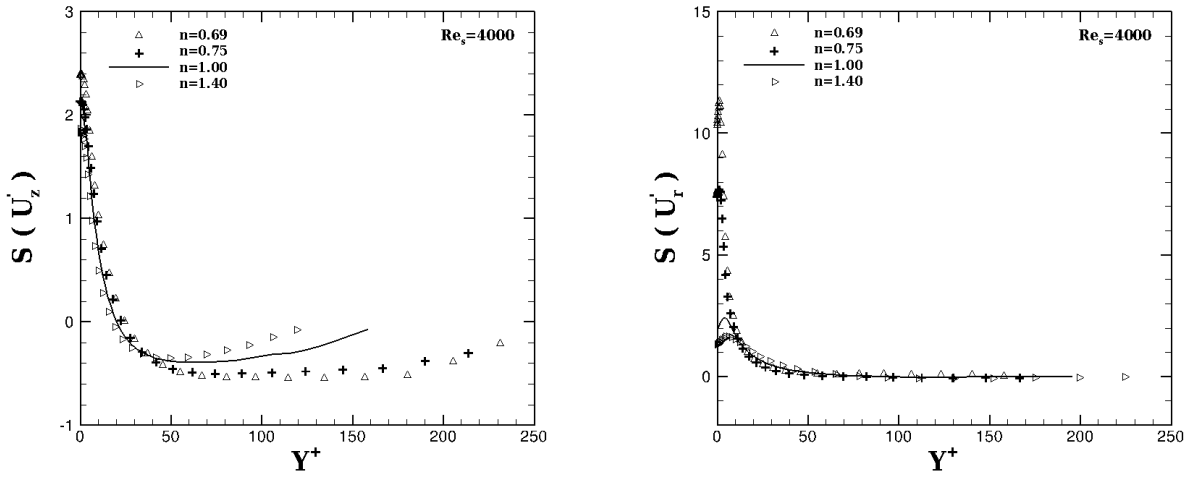


FIGURE 4.19 – Profil de l'énergie cinétique turbulente

La position du maximum d'énergie cinétique de turbulence s'éloigne de la paroi quand n augmente, pour Re_s fixé. Ceci est due à l'augmentation de la viscosité moyenne avec les valeurs croissantes de n lorsqu'on se rapproche du centre de la conduite. Pour des valeurs du nombre de Reynolds croissants, le pic d'énergie cinétique de turbulence augmente.

4.4.6 Facteurs de dissymétrie et d'applatissement

Défini comme $S(U_i') =< U_i'^3 > / < U_i'^2 >^{\frac{3}{2}}$, le facteur de dissymétrie ou skewness renseigne sur l'assymétrie de la fonction de densité de probabilité (pdf). Une pdf symétrique (pdf gaussienne) autour de la valeur moyenne $< U' >$ possède un skewness nul. Un skewness non-nul signifie que la pdf est biaisée ou assymétrique, autrement dit de grandes excursions de la variable aléatoire dans une direction par rapport à la moyenne sont plus probables plutôt que dans l'autre direction. Un skewness positif signifie que la variable $< U' >$ prend des valeurs positives grandes, plus que des valeurs négatives grandes.



(a) $S(U_z')$ (b) $S(U_r')$

FIGURE 4.20 – Coefficients de dissymétrie des fluctuations de vitesses axiale et radiale pour $Re_s = 4000$.

Le coefficient de dissymétrie pour les trois composantes de vitesse à $Re_s = 4000$ (Figs. 4.20 et 4.21) croît rapidement au voisinage de la paroi lorsque n diminue, ce qui indique un comportement intermittent (non gaussien) d'autant plus important quand n décroît, en particulier pour les fluctuations de vitesse radiale, Fig. 4.20(b). Cela indique également que les grandes valeurs positives des composantes de vitesse prédominent au voisinage paroi comparées aux grandes valeurs négatives. Loin de la paroi, $S(U_r')$ tend vers la valeur gaussienne ($S(U_r') = 0$ au voisinage du centre), signifiant que les valeurs positives de U_i' sont aussi probables que les valeurs négatives quel que soit n. Les skewness $S(U_z')$ et $S(U_\theta')$ tendent vers zéro, au centre de la conduite, plus rapidement lorsque n croît.

Les coefficients d'aplatissement $F(U_i') =< U_i'^4 > / < U_i'^2 >^2$ sont tracés sur les figures 4.22 et 4.23 et montrent une dépendance significative avec n au voisinage de la paroi. L'augmentation rapide de $F(U_i')$ reflète une forte intermittence sur les fluctuations de vitesse. Avec les valeurs décroissantes de n, le comportement intermittent est plus important et, en outre, plus accentué pour $F(U_r')$ comparé à $F(U_z')$ et $F(U_\theta')$, Figs. 4.22(a), 4.22(b) et 4.23), ce qui signifie que la probabilité d'observer de grandes valeurs négatives (éloignées des valeurs moyennes) des composantes de vitesse axiale et radiale proche paroi est plus beaucoup grande que celle au centre de la conduite, en particulier lorsque n décrît.

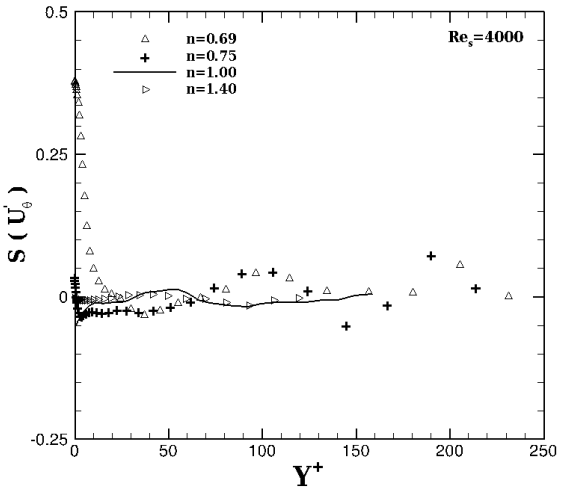
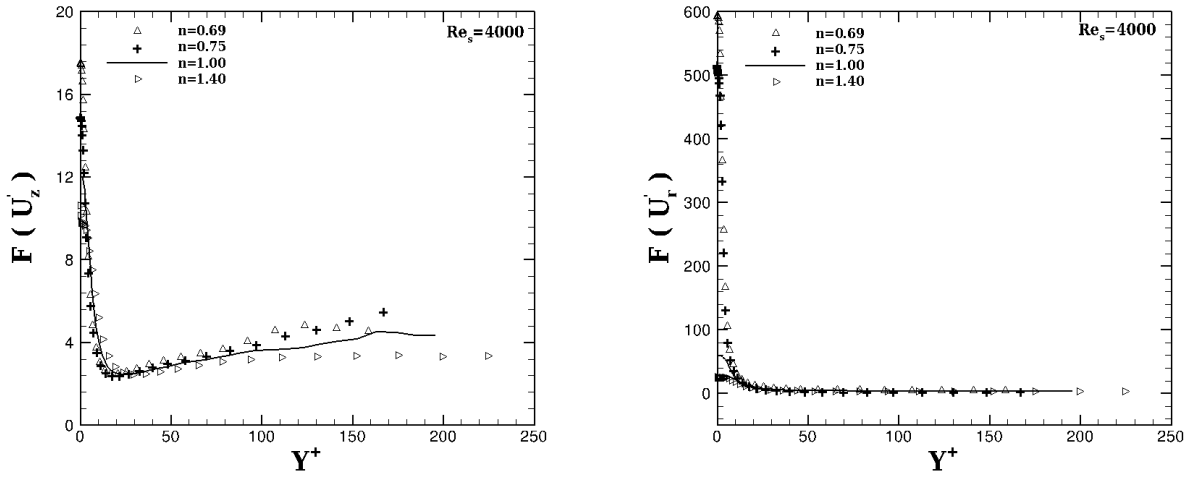


FIGURE 4.21 – Coefficient de dissymétrie des fluctuations de la vitesse azimutale pour $Re_s = 4000$.



(a) $F(U_z)$ (b) $F(U_r)$

FIGURE 4.22 – Coefficient d'aplatissement pour $Re_s = 4000$

Le coefficient d'aplatissement (ou flatness) $F(U_r')$ est égal à la valeur gaussienne ($F = 3$) loin de la paroi, quel que soit n. Les facteurs $F(U_z')$ et $F(U_\theta')$ ne tendent pas vers le comportement gaussien pour $n \geq 1$.

L'influence du Reynolds sur les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement sont tracés sur la figure 4.24. Pour n fixé, lorsque le nombre de Reynolds diminue, les coefficients de dissymétrie tendent vers zéro plus rapidement (ie à une distance plus proche de la paroi), tandis que les distributions des coefficients d'aplatissement, en particulier de $F(U_r')$ sont plus étendues, atteignant des distances à la paroi plus grandes.

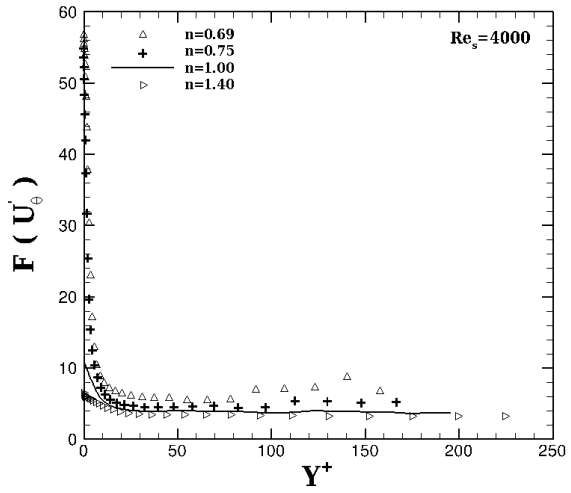


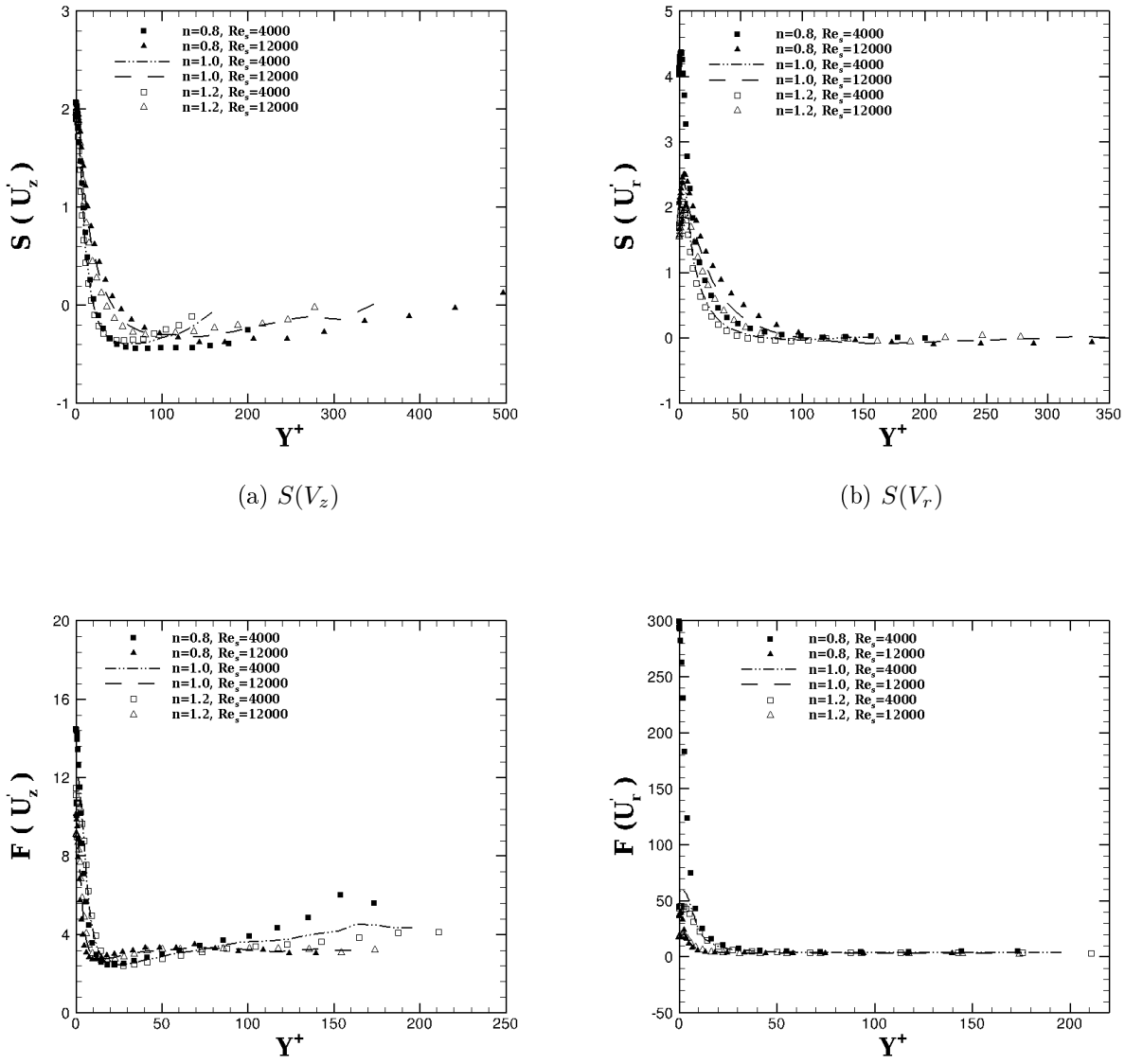
FIGURE 4.23 – Coefficient d'aplatissement des fluctuations de la vitesse azimutale pour $Re_s = 4000$.

4.4.7 Visualisations des fluctuations de vitesse axiale

Pour étudier les effets de l'indice de comportement sur les cellules de turbulence au voisinage de la paroi, en particulier leur taille et leur nombre, nous avons réalisé des visualisations des fluctuations de la vitesse axiale U_z' dans le plan $\theta - z$ à la distance paroi $Y^+ = 15$, Fig. 4.25. Le choix de cette distance à la paroi Y^+ est lié au fait les fluctuations de turbulence sont intenses dans la zone comprise entre $Y^+ = 15$ et $Y^+ = 20$ (cf. Figs. 4.12 et 4.13. Lorsque l'indice de comportement n augmente, les structures de turbulence sont plus courtes et plus nombreuses. Autrement dit, l'augmentation de n conduit à une turbulence plus développée (cf. Fig. 4.25). Ceci est en bon accord avec l'augmentation des intensités de turbulence. La visualisation de l'écoulement $n = 0,5$ montre clairement une turbulence moins développée (ou pauvre). Cet écoulement semble être dans le régime transitoire à cause de la viscosité qui est plus élevée dans le centre de la conduite.

La figure 4.26 montre également les visualisations de U_z' mais dans le plan $r - \theta$ à la distance $Y^+ = 15$. Sur la figure 4.26, nous observons que les cellules de turbulence sont essentiellement localisées au voisinage de la paroi. De plus, à partir de $Y^+ > 15$, la turbulence est atténuée pour les fluides non-newtoniens d'indice $n < 1$. En effet, au centre de la conduite, la viscosité augmente pour $n < 1$ (puisque cette zone est une zone de cisaillement plus faible) induit un amortissement des structures tourbillonnaires et, par conséquent une réduction du transfert de quantité de mouvement radial.

Aux sections 4.4.1 et 4.4.7 nous avons rapporté, comme Rudman et al. (2004) [69], que la turbulence est moins développée pour les fluides rhéofluidifiants. Afin de vérifier cette observation, nous avons représenté sur la figure 4.27 des visualisations $3D$ du champ de vitesse axiale fluctuant pour deux fluides : $n = 0,69$ (fluide rhéofluidifiant) et $n = 1,4$ (fluide rhéoépaississant). Contrairement à la visualisation du fluide rhéofluidifiant (cf. Fig. 4.27(a)) qui présente des structures allongées, celle du fluide rhéoépaississant (cf. Fig. 4.27(b)) montre de nombreuses structures fines, indiquant clairement que la turbulence

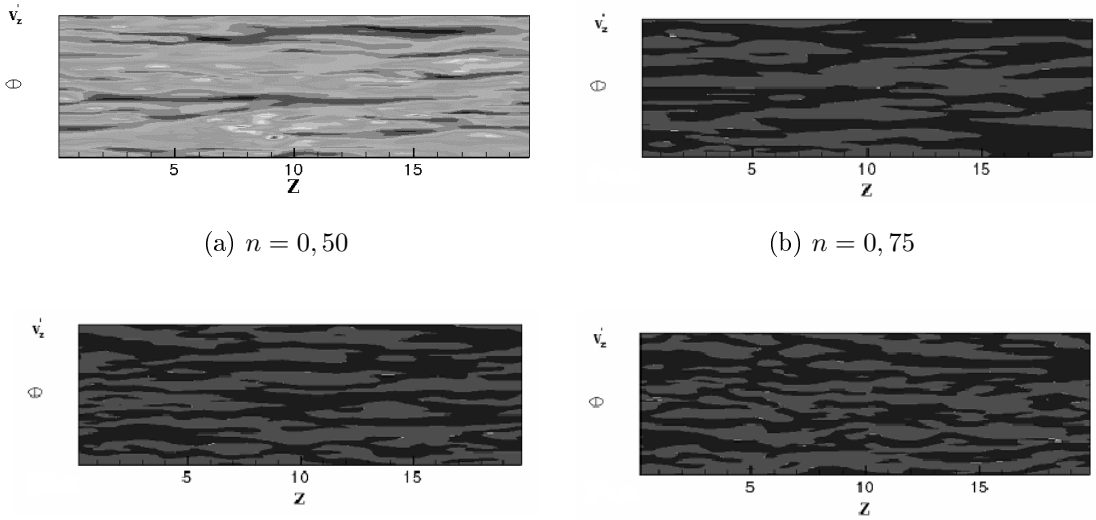


(a) $S(V_z)$ (b) $S(V_r)$

(c) $F(V_z)$ (d) $F(V_r)$

FIGURE 4.24 – Influence du nombre de Reynolds sur les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement.

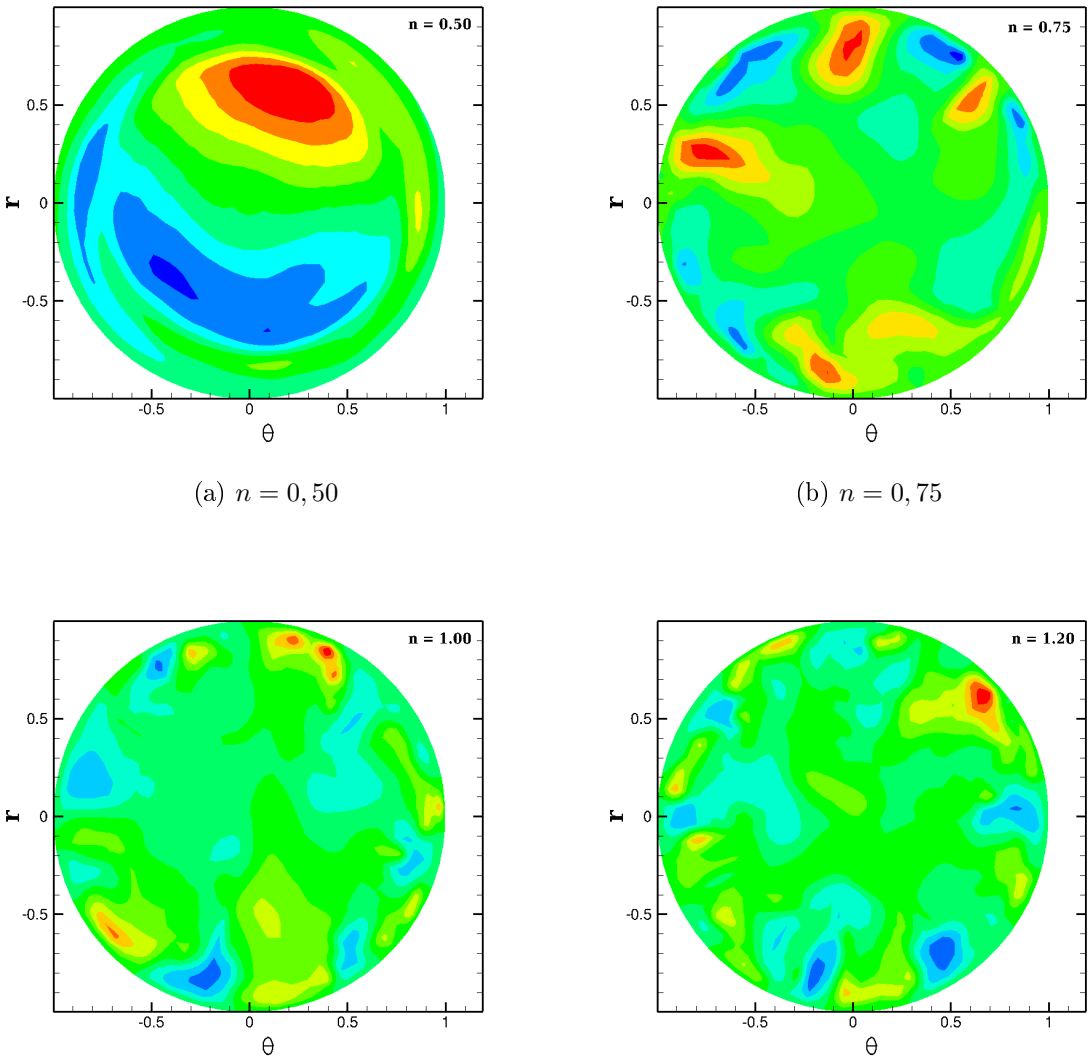
est bien développée. Enfin, grâce à ces deux visualisations $3D$, on observe effectivement qu'à ce nombre de Reynolds $Re_s = 4000$, l'écoulement des fluides rhéofluidifiants est transitionnel.



(a) $n = 0,50$ (b) $n = 0,75$

(c) $n = 1,00$ (d) $n = 1,20$

FIGURE 4.25 – Visualisations de U'_z pour $Re_s = 4000$



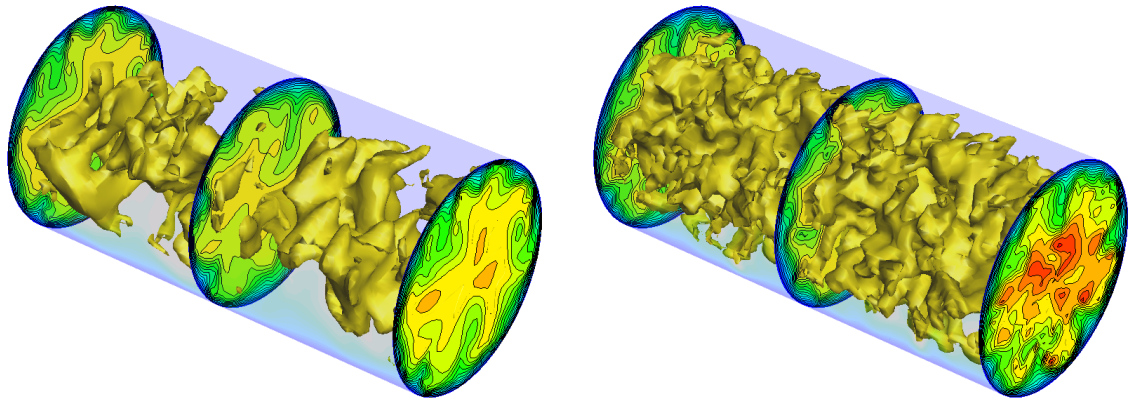
(a) $n = 0,50$ (b) $n = 0,75$

(c) $n = 1,00$ (d) $n = 1,20$

FIGURE 4.26 – Visualisations de U'_z pour $Re_s = 4000$

4.4.8 Fonction densité de probabilité et jpdf

La distribution de la fonction densité de probabilité (pdf) des trois composantes fluctuantes de vitesse et de la fonction densité de probabilité jointe (jpdf) entre les fluctuations de vitesse est illustrée sur les figures 6.24, 6.25 et 6.26 de l'annexe C pour différentes valeurs de n, à $Y^+ = 15$ et $Y^+ = 100$ pour $Re_s = 4000$.



(a) $n = 0,69$ (b) $n = 1,40$

FIGURE 4.27 – Visualisations de U_z' en 3D pour $Re_s = 4000$

4.5 Conclusion

Les caractéristiques des écoulements turbulents pleinement développés des fluides d'Ostwald de Waele ont été traitées avec le modèle dynamique de la simulation des grandes échelles. Ce travail est concentré sur l'étude des effets de l'indice de comportement ($0,5 \leq n \leq 1,4$) et du nombre de Reynolds ($Re_s = 4000$, 8000 et 12000) sur le champ moyen de vitesse et les statistiques de la turbulence. Les principaux nouveaux résultats (en comparaison à ceux de la littérature) obtenus dans cette étude sont les suivants :
- LES à un nombre de Reynolds supérieur ($Re_s = 12000$) pour différents indices d'écoulement n,
- analyse des statistiques d'ordre supérieur,
- analyse du coefficient de corrélation et de l'énergie cinétique,
- établissement des corrélations en fonction de n de la position des pics des rms des fluctuations de vitesse et pour l'énergie cinétique pour $Re_s = 4000$.

Les prédictions de la présente LES et les résultats disponibles dans la littérature sont en bon accord. Dans l'écoulement turbulent pleinement développé, la zone logarithmique du profil de vitesse moyenne est plus étendue avec la diminution de l'indice de comportement n et l'augmentation du nombre de Reynolds Re_s. Le profil de vitesse U^+ est en bon accord avec la loi linéaire universelle, dans la sous-couche visqueuse, pour toutes les valeurs de n sauf pour $n = 0,5$. Dans ce cas, l'écoulement est transitoire ; le retard dans la transition à la turbulence est causée par la rhéologie rhéofluidifiante et une viscosité élevée dans le noyau de l'écoulement. Plus généralement, les résultats permettent de quantifier la suppression des fluctuations de turbulence avec la diminution de n dans la région du centre de la conduite, après la position du pic des rms de fluctuations de vitesse. La position des pics des rms se décale vers le centre de la conduite avec l'augmentation de n. Les corrélations permettant d'obtenir les positions de ces pics sont proposées. À $Re_s = 4000$, le maximum de la rms de vitesse axiale $< U_z'^2 >^{1/2}$, ainsi que le maximum d'énergie cinétique sont atteints dans la couche tampon, tandis que les positions des pics de $< U_r'^2 >^{1/2}$ et $< U_\theta'^2 >^{1/2}$ sont principalement localisés dans la zone logarithmique, pour toutes les

valeurs de n. L'augmentation rapide du coefficient d'aplatissement avec la diminution de n près de la paroi reflète la forte intermittence des fluctuations de vitesse à proximité de la paroi. Avec l'augmentation de l'indice de comportement et du nombre de Reynolds, l'étirement axial des structures turbulentes est réduit, conduisant à une turbulence mieux développée. Le coefficient de frottement diminue avec la diminution de n (à Re_s donné) et l'augmentation du Re_s (à n donné). La viscosité apparente $< \eta >$ est constante pour un indice d'écoulement donné jusqu'à $Y^+ \simeq 5$. Elle augmente avec n pour $Y^+ < 35$, tandis qu'elle diminue avec l'augmentation de n après la distance du mur $Y^+ \simeq 35$, pour $n \geq 0,69$.

Les résultats LES obtenus à partir du modèle classique de Germano et al. (1991) et Lilly (1992) reproduisent la plupart des caractéristiques des écoulements des fluides non-newtoniens et permettent une compréhension globale de la dynamique des ces écoulements, dans le temps et dans l'espace, à un coût de calcul réduit. En outre, les présentes prédictions pourraient être utiles dans le développement d'un certain nombre de modèles de turbulence à faible Reynolds pour prédire des écoulements des fluides non-newtoniens. Des études supplémentaires pourraient être effectuées dans l'avenir pour développer une nouvelle approche de modélisation, dans laquelle les contraintes moléculaires et les contraintes sous-maille seraient représentées comme des fonctions non-linéaires du tenseur du taux de déformation.

Chapitre 5

Modèle de Smagorinsky pour les fluides non-newtoniens

Introduction

Dans le chapitre 3, plus précisement à la section 3.3.1 nous avons mentionné les insuffisances du modèle standard de Smagorinky (1963) [80], en particulier celle qui portait sur l'ajustement de la constante C_s. Le modèle de Smagorinsky (1963) [80] a été développé sur la base de la formulation Newtonienne du tenseur sous-maille qui modélise l'action des petites échelles. Le modèle dynamique de Germano et al. (1991) [21] et Lilly (1992) [49] utilisé dans la présente étude, pour modéliser le tenseur des contraintes sous-maille, τ_{ij}, a été également développé pour un fluide Newtonien. Dans ce cas, le tenseur des contraintes sous-maille s'écrit :

$$\tau_{ij} = -2\nu_t \overline{S}_{ij} \tag{5.1}$$

où $\nu_t = C_s^2 \Delta^2 |\overline{S}|$ la viscosité sous-maille est une fonction linéaire du taux de cisaillement $|\overline{S}|$. C'est le seul tenseur qui apparaît lorsqu'on applique un filtre spatial aux équations de Navier-Stokes dans un écoulement de fluide visqueux Newtonien. Si on applique ce filtre aux équations de Navier-Stokes dans un écoulement de fluide non-newtonien (pour lequel la viscosité varie dans l'espace), des termes supplémentaires sont générés parce que le tenseur des contraintes est une fonction non linéaire du tenseur du taux de déformation (Ohta et Miyashita (2014) [52]). Pour un fluide d'Ostwald de Waele, les termes supplémentaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \overline{\tau_{ij}(S_{ij})} - \tau_{ij}(\overline{S}_{ij}) \\ &= 2K \left(\overline{(2S_{kl}S_{lk})^{\frac{n-1}{2}} S_{ij}} - (2\overline{S}_{kl}\overline{S}_{kl})^{\frac{n-1}{2}} \overline{S}_{ij} \right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dans la présente étude où les prédictions LES sont obtenues à l'aide du modèle dynamique standard et discutées au précédent chapitre (Chap. 4), ces termes supplémentaires ne sont pas considérés. En effet, Ohta et Miyashita (2014) [52] ont tracé les profils des composantes du tenseur sous-maille et des termes supplémentaires estimés en filtrant les résultats DNS d'un fluide Newtonien et d'un fluide en loi de puissance et en moyennant en temps et en espace dans les directions périodiques (axiale et azimutale). En comparant ces profils, ils ont montré que les termes supplémentaires T_{ij} sont très petits devant les composantes du tenseur sous-maille τ_{ij}, Fig. 5.1. Sur cette figure, on voit clairement que

la prédiction du modèle de Smagorinsky est différente de la tension sous-maille $\overline{\sigma}_{12}$ estimée à l'aide de la DNS. Le modèle de Smagorinsky ne prédit donc pas correctement le tenseur sous-maille. De plus, le terme supplémentaire T_{12} est très petit devant la tension sous-maille $\overline{\sigma}_{12}$. Voilà pourquoi Ohta et Miyashita (2014) [52] ont ignoré ces termes supplémentaires et ont développé un modèle de Smagorinsky adapté aux fluides non-newtoniens, en se focalisant sur la modification des caractéristiques de la viscosité turbulente dans le modèle de Smagorinsky standard. Il est plus facile d'adapter ainsi le modèle de Smagorinsky Standard au cas des fluides non-newtoniens que de construire un modèle de turbulence pour fluides visqueux non-newtoniens en tenant compte des corrections à apporter pour les termes supplémentaires (termes convectifs et visqueux). Les auteurs ont effectué des tests sur les écoulements de paroi pour le fluide d'Ostwald de Waele et le fluide de Casson avec le modèle de Smagorinsky (1963) [80] adapté aux fluides non-newtoniens. Les prédictions de leur modèle concordent bien avec celles de la DNS, comme le montre la figure 5.2 dans le cas d'un fluide en loi de puissance.

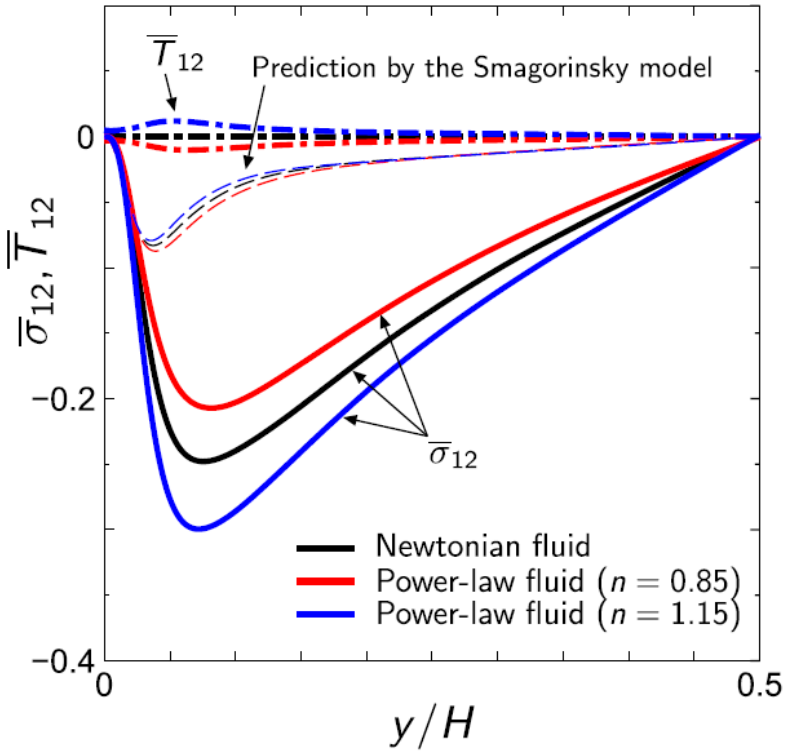
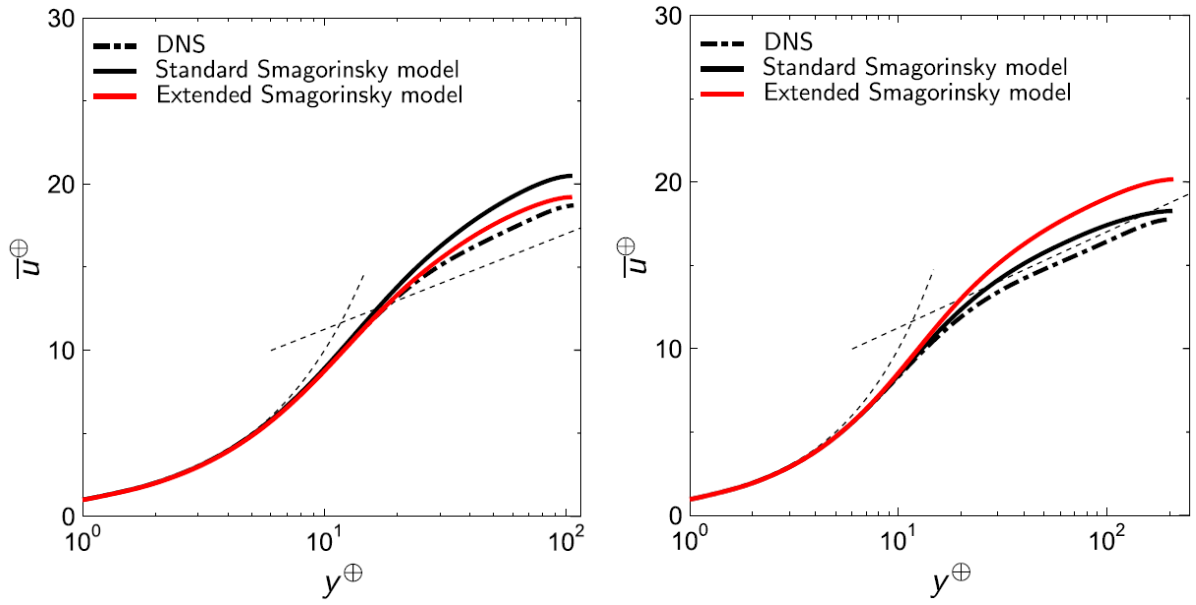


FIGURE 5.1 – Contribution du tenseur sous-maille supplémentaire $\overline{T}_{12}$ (tenseur issus du filtrage des termes visqueux) et du tenseur sous-maille $\overline{\sigma}_{12}$ ($\overline{\sigma}_{12} = \overline{\tau}_{12}$ tenseur issus du filtrage des termes d'inertie) [52] calculés avec la DNS.

Nous avons utilisé cette formulation non-newtonienne du modèle de Smagorinsky pour les écoulements du fluide d'Ostwald de Waele dans une conduite cylindrique. Le but est de voir d'une part la différence entre les prédictions de ce modèle de Smagorinsky non-newtonien et celles du modèle standard de Smagorinsky Newtonien, et d'autre part, l'amélioration apportée par rapport au modèle dynamique standard. Notons également que les prédictions LES du chap. 4 réalisées avec le maillage 65^3, sont en bon accord. On peut alors penser dans ce cas que les mailles sont plus fines que les échelles dominantes



(a) $n = 0.85$ et maillage : 32x128x32

(b) $n = 1.15$ et maillage : 32x128x32

FIGURE 5.2 – Profils moyens de vitesse obtenus avec le modèle de Smagorinsky non-newtonien et comparés aux solutions DNS dont le maillage est 128x128x128 pour $n = 0.85$ et 1.15 (tirés de [52])

de l'écoulement si bien qu'elle suffit à obtenir un comportement correct des échelles dominantes. Autrement dit, la contribution des échelles sous-maille est réduite et les résultats LES tendent vers ceux de la DNS. Cela justifie pourquoi il est raisonnable de négliger ou d'ignorer les termes supplémentaires dans les équations filtrées de Navier-Stokes.

Dans ce chapitre, nous conservons les mêmes conditions de simulation que les précédentes (conditions aux limites, initiales, schéma numérique,...), le même maillage (65^3) et la même longueur de conduite. Nous utilisons le modèle sous-maille de Smagorinsky non-newtonien de Ohta et Miyashita (2014) [52] pour simuler l'écoulement du fluide d'Ostwald de Waele. Nous présenterons d'abord les principes de ce modèle, puis les prédictions obtenues pour le champ de vitesse.

5.1 Description du modèle de Ohta et Miyashita (2014)

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction de ce chapitre, Ohta et Miyashita (2014) [52], ont établi la formulation non-newtonienne du tenseur sous-maille dans les équations filtrées de quantité de mouvement. Considérant un fluide incompressible, les auteurs sont partis des équations de conservation de masse et de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{5.4}$$

La viscosité est une fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, et le tenseur des contraintes de cisaillement s'écrit :

$$\tau_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma})S_{ij} \quad \text{et} \quad \dot{\gamma} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \tag{5.5}$$

En filtrant ces équations (5.3 et 5.4), on obtient :

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\overline{\sigma}_{ij} + \overline{\tau}_{ij}) \tag{5.7}$$

où $\overline{\tau}_{ij}$ est toujours le tenseur des contraintes de cisaillement, $\overline{\sigma}_{ij}$ le tenseur sous-maille du modèle de Smagorinsky standard, défini par :

$$\overline{\sigma}_{ij} = -2\nu_t \overline{S}_{ij} \tag{5.8}$$

avec ν_t la viscosité sous-maille donnée par la relation :

$$\nu_t = (C_s f_s \Delta)^2 |\overline{S}| \tag{5.9}$$

où f_s est la fonction de Van Driet utilisée comme fonction d'atténuation des effets de paroi. Cette viscosité turbulente (Eq. (5.9)) s'écrit en fonction d'un filtre de largeur Δ. Les auteurs précisent que l'échelle spatiale pour le fluide visqueux non-newtonien doit être estimée en tenant compte des variations de la viscosité. Ils montrent que l'échelle de longueur de référence pour un fluide non-newtonien est $\frac{\eta_w}{\overline{\eta}}$ fois celle du fluide Newtonien où $\overline{\eta}$ et η_w sont respectivement la viscosité apparente moyenne du fluide non-newtonien dans l'écoulement et à la paroi. Par conséquent, la largeur du filtre Δ du modèle sous-maille, elle aussi, doit être multipliée par $\frac{\eta_w}{\overline{\eta}}$. Notons que la viscosité à la paroi η_w coïncide avec la viscosité du fluide Newtonien μ. En introduisant la fonction de correction $f_\eta = \frac{\eta_w}{\overline{\eta}}$ dans l'équation (5.9), la viscosité change et prend la forme non-newtonienne ci-dessous :

$$\nu_t = (C_s f_s f_\eta \Delta)^2 |\overline{S}| \tag{5.10}$$

En remplaçant l'expression de ν_t de l'équation (5.10) dans l'équation (5.8), les auteurs établissent le modèle de Smagorinsky non-newtonien. Il suffit donc de remplacer le tenseur non-newtonien dans les équations de (5.6) et (5.7) pour obtenir les équations filtrées du mouvement pour l'écoulement du fluide non-newtonien :

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_s}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] - \frac{\partial \overline{\sigma}_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{T}_{ij}}{\partial x_i} \tag{5.12}$$

Re_s et $\overline{\dot{\gamma}}$ sont définies au §.3.2.1. $\overline{\sigma}_{ij}$ est le tenseur sous-maille du modèle de Ohta et Miyashita (2014) [52] et $\overline{T}_{ij}$ sont les termes supplémentaires (négligés dans notre étude). Dans nos calculs, nous avons considéré :

$$C_s = 0.1 \tag{5.13}$$

$$f_s = 1 - exp\left(\frac{Y^+}{25}\right) \tag{5.14}$$

5.2 Résultats du modèle de Smagorinsky Newtonien et non-newtonien

5.2.1 Profils de vitesse

Les profils moyens de la vitesse axiale normalisée par la vitesse de frottement en fonction de Y^+ sont représentés sur la figure 5.3 pour $Re_s = 4000$, pour différentes valeurs de n. Le modèle de Smagorinsky non-newtonien (modèle de Ohta et Miyashita (2014) [52]) apporte une amélioration aux profils de vitesse. On observe que le profil prédit par la LES pour $n = 0,75$ se superpose avec le profil DNS de Rudman et al. (2004) [69]. Quant au profil simulé à l'aide du modèle de Smagorinsky Newtonien, il est surrestimé et s'écarte de la DNS de [69]. Dans la sous-couche visqueuse ($Y^+ \leq 5$), on retrouve la loi linéaire $U^+ = Y^+$ quel que soit l'indice d'écoulement n et quel que soit le modèle sous-maille. La zone tampon n'est pratiquement pas influencée par le modèle et par l'indice n. A partir de la limite supérieure de la zone tampon, on observe l'influence du modèle et de l'indice n. Cette influence est plus accentuée dans la zone logarithmique en allant vers le centre de la conduite.

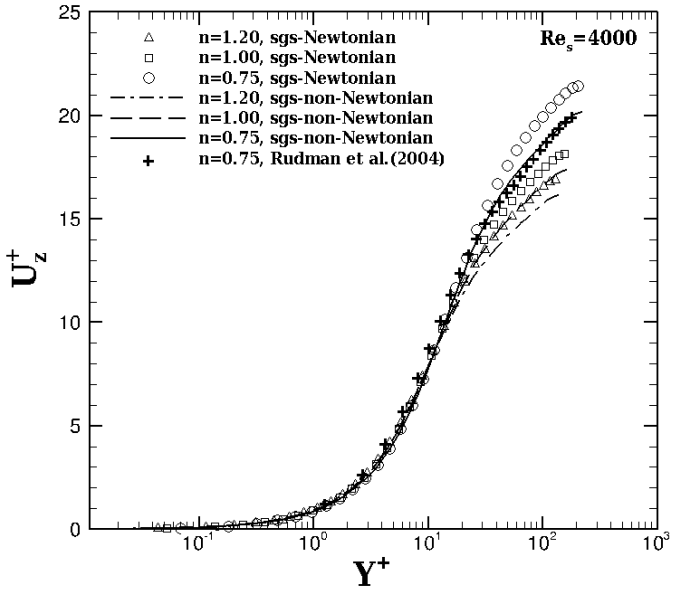


FIGURE 5.3 – Profils moyens de la vitesse axiale

5.2.2 Intensité de turbulence et tension de Reynolds

Les rms des fluctuations de vitesse résolues normalisées par la vitesse moyenne au centre de la conduite ainsi que la tension de Reynolds sont représentées sur les figures

5.4. Comme le modèle dynamique, les deux modèles de Smagorinsky (Newtonien et non-newtonien) montrent la dominance des fluctuations de vitesse axiale dans la zone tampon (cf. Fig. 5.4(a)), tandis que les fluctuations des vitesses radiale et azimutale sont importantes dans la zone logarithmique, Figs.5.4(b) et 5.4(c). La turbulence est là plus intense et plus forte pour les solutions du modèle de Smagorinsky non-newtonien. Notons que les prédictions du modèle de Smagorinsky non-newtonien sont, dans tous les cas, plus proches des DNS de Rudman et al. (2004) [69] que les prédictions du modèle de Smagorinsky standard (Newtonien). La tension de Reynolds présente un comportement similaire aux rms des fluctuations de vitesse axiale (cf. Fig. 5.4(d)).

5.2.3 Coefficient de frottement

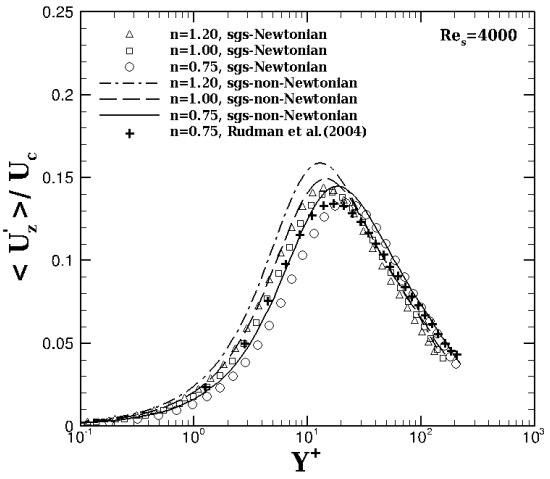
Les valeurs du coefficient de frottement du modèle de Smagorinsky standard et Smagorinsky non-newtonien sont rapportées dans le tableau 5.1. La valeur de Cf donnée par les deux modèles (Smagorinsky standard et Smagorinsky non-newtonien) pour $n = 0,75$ est sur-estimée par rapport à celle de la DNS de Rudman et al. (2004) [69] ($Cf = 8,05.10^{-3}$). Le modèle de Smagorinsky non-newtonien donne un écart de 13 % à la DNS de Rudman et al. (2004) [69] tandis que le modèle de Smagorinsky Standard donne un écart de 6 %.

n	Smagorinsky standard	Smagorinsky non-newtonien
$0,75$	$8,54.10^{-3}$	$9,11.10^{-3}$
$1,00$	$10.46.10^{-3}$	$10,46.10^{-3}$
$1,20$	$11,78.10^{-3}$	$10.95.10^{-3}$

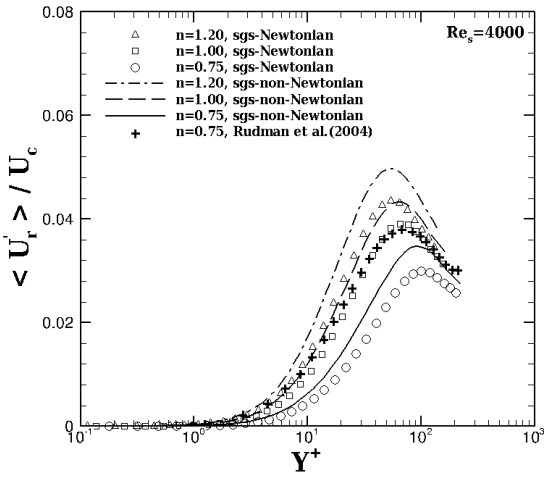
TABLE 5.1 – Coefficient de frottement pour $Re_s = 4000$

5.3 Comparaison des modèles dynamique et Smagorinsky non-newtonien

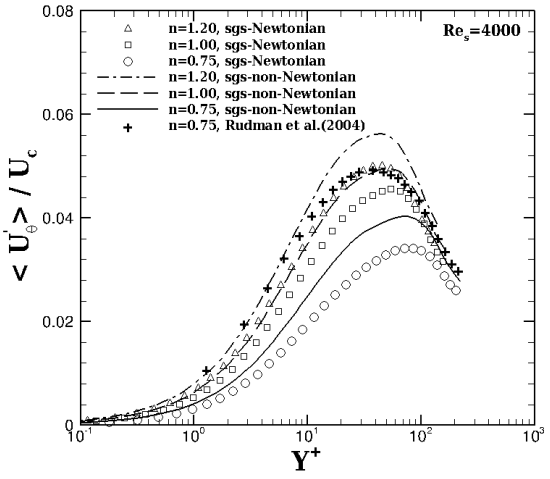
Comparée aux résultats LES avec modèle dynamique standard, la formulation non-newtonienne du modèle de Smagorinsky donne de meilleurs résultats. En effet, le profil de vitesse moyenne se superpose à la DNS de Rudman et al. (2004) [69], Fig 5.5(a). L'influence du modèle sous-maille sur la rms des fluctuations de vitesse axiale est très faible (pratiquement inexistante) (cf. Fig. 5.5(b)). Par contre, les rms des fluctuations des vitesses radiale et azimutale prédites par le modèle de Smagorinsky non-newtonien se rapprochent de celles de la DNS de Rudman et al. (2004) [69] (cf. Figs. 5.5(c) et 5.5(d)). Il faut noter que si le modèle dynamique standard fournit des résultats satisfaisants, c'est parce que le maillage (65^3) utilisé est suffisamment fin si bien que le modèle arrive à simuler toutes les échelles de la turbulence (la contribution du modèle sous-maille devient négligeable).



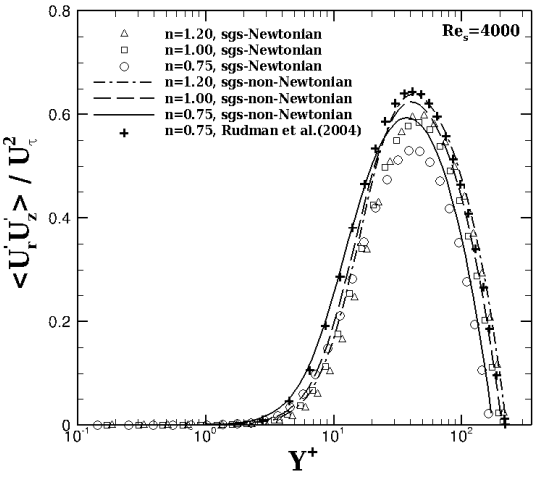
(a) Intensités de turbulence axiale



(b) Intensités de turbulence radiale

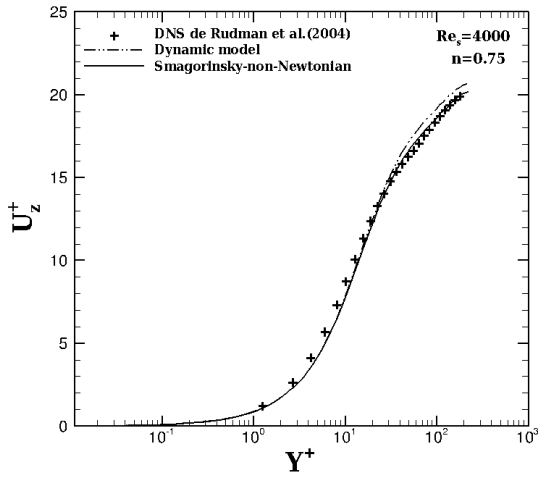


(c) Intensités de turbulence azimutale

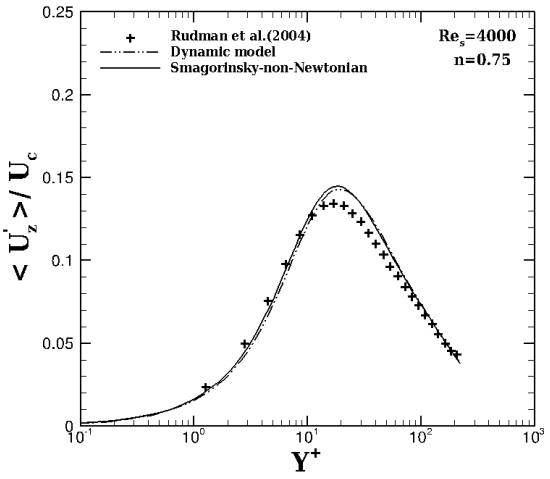


(d) tension de Reynolds

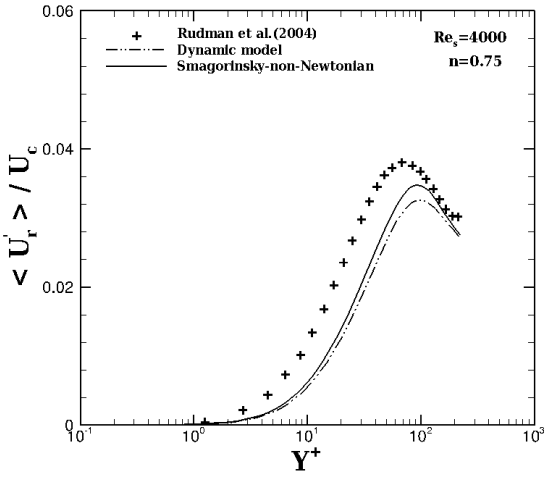
FIGURE 5.4 – Intensités de turbulence et tension de Reynolds obtenues avec les modèles de Smagorinsky newtonien et non-newtonien pour $Re_s = 4000$ avec U'_z/U_c =intensités de turbulence axiale, U'_r/U_c =intensités de turbulence radiale et U'_θ/U_c =intensités de turbulence azimutale.



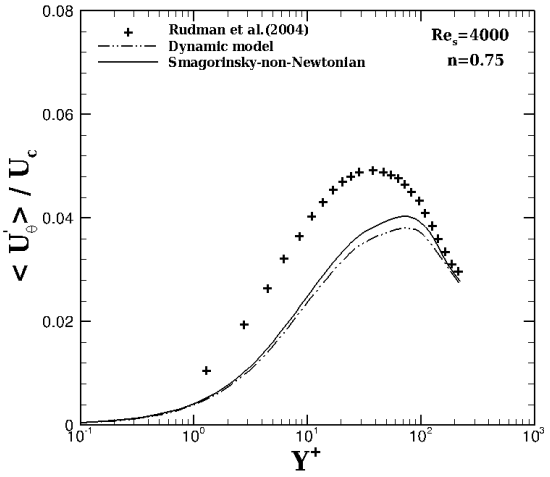
(a) vitesse axiale



(b) Intensités de turbulence axiale



(c) Intensités de turbulence radiale



(d) Intensités de turbulence azimutale

FIGURE 5.5 – Comparaison des modèles dynamique et de Smagorinsky non-newtonien pour $Re_s = 4000$ avec U_z'/U_c =intensités de turbulence axiale, U_r'/U_c =intensités de turbulence radiale et U_θ'/U_c =intensités de turbulence azimutale.

Conclusion

Les écoulements turbulents du fluide en puissance sont simulés par le modèle de Smagorinsky non-newtonien élaboré par Ohta et Miyashita (2014) [52]. Ce modèle a fourni des prédictions plus proches des résultats de la littérature que celles du modèle dynamique standard. A titre illustratif, le profil de vitesse axial se superpose avec la solution DNS de Rudman et al. (2004) [69] et les intensités de turbulence des fluctuations se rapprochent de celles de [69]. Neanmois, ce modèle sous-estime légèrement les valeurs du coefficient de frottement. Compte tenu des améliorations apportées par le modèle de

Smagorinsky non-newtonien, l'écoulement turbulent du fluide non-newtonien dans une conduite cylindrique chauffée avec une densité de flux de chaleur imposé à la paroi sera simulé à l'aide de ce modèle de Smagorinsky non-newtonien. Le champ de vitesse obtenu sera injecté dans l'équation de l'énergie qui sera alors résolue. Les résultats concernant le champ thermique sont présentés dans le chapitre suivant.

Notons que certains travaux ont tenté de développer des modèles dynamiques capables d'étudier les écoulements de fluides non-newtoniens. Citons les travaux de Wang et Bergstrom (2005) [91] qui proposent un modèle "dynamique non-linéaire" noté DNM qui, à l'opposé du modèle de Smagorinsky standard, n'importe pas un alignement entre le tenseur sous-maille (τ_{ij}) et le taux de déformation (S_{ij}). Dans ce modèle dynamique non linéaire, les tensions sous-maille sont exprimées en fonction des parties symétrique et antisymétrique du gradient de vitesse résolu, et une formulation anisotropique non linéaire du tenseur de tension sous-maille. Le modèle DNM a été testé sur un écoulement turbulent de Couette (avec des résultats satisfaisants) et apparaît plus robuste que le modèle dynamique conventionnel (ie standard) dans la simulation numérique. Les auteurs proposent d'élargir le champ des tests numériques pour voir si les propriétés du modèle DNM sont universelles et s'il est apte à simuler correctement d'autres écoulements, sous différentes conditions, en particulier voir si ce modèle DNM est adapté aux écoulements complexes (dont les écoulements de fluides non-newtoniens).

Thais et al. (2010) [83] ont une approche TLES (Temporal Large Eddy Simulation) adaptée aux écoulements turbulents de fluides viscoélastiques, dans un canal plan. Cette approche est basée sur une méthode de déconvolution temporelle développée par Pruett et al. (2006) [62] pour la LES d'écoulement de fluides Newtoniens dans un canal plan. La technique TLES utilise des équations filtrées dans le domaine temporel ; c'est une méthode de déconvolution approximative (ADM) dans le domaine temporel obtenue en adaptant la méthode de déconvolution spatiale. Dans cette étude, Thais et al. (2010) [83] se sont focalisés sur l'analyse du coefficient de frottement.

Il n'existe donc pas de modèle dynamique dédié complètement à l'étude des écoulements de fluides non-newtoniens. En effet, si le modèle DNM n'impose pas d'alignement entre tension sous-maille et taux de déformation. Il ne prend pas en compte l'effet des termes supplémentaires sous-maille apparaissent dans les équations filtrées pour les fluides non-newtoniens. Les quelques rares modèles actuels, tels que le modèle Smagorinsky non-newtonien, se basent sur l'idée que les termes supplémentaires sont négligeables devant le tenseur sous-maille.

Chapitre 6

Simulation des transferts de chaleur

Introduction

L'étude de la convection forcée d'un fluide non-newtonien en régime turbulent, dans les conduites chauffées, est d'un grand intérêt pratique pour diverses applications industrielles de ces fluides, dans le domaine de l'extraction des hydrocarbures et le transport du pétrole, dans l'industrie pharmaceutique et les procédés industriels employant des polymères. Il y a peu de travaux dédiés à l'étude des transferts de chaleur en écoulement turbulent de fluide non-newtoniens dans les conduites cylindriques. Scirocco et al. (1985) [77] ont déterminé expérimentalement le nombre de Nusselt pour l'écoulement d'une solution de CMC (Carboxyméthylcellulose) en régime turbulent dans un tube. Le tube est chauffée par une densité de flux constante et l'évolution de la viscosité est donnée par le modèle d'Ostwald de Waele pour l'indice de comportement $n = 0,7$. Pour l'aspect dynamique, les mesures ont montré un aplatissement du profil de vitesse au coeur de la conduite lors du passage du régime laminaire au régime turbulent. Concernant l'aspect thermique, les mesures ont montré une augmentation du nombre de Nusselt avec le nombre de Reynolds. Kahine et al. (1994) [30], ont étudié par simulation numérique l'influence de l'indice de comportement n sur le nombre de Nusselt et ont proposé des corrélations qui permettent de calculer le nombre de Nusselt en fonction des différents paramètres du problème, en particulier n. L'étude est menée avec un fluide non-newtonien dont la consistance varie fortement avec la température et l'indice de comportement $n = 0,6\,;\, 0,8$ et 1. Ces fluides sont appelés fluides thermodépendants. Une description de ces fluides est présentée à la section 6.1. Les simulations ont montré une augmentation du nombre de Nusselt avec la décroissance de l'indice de comportement n. Aussi, les auteurs ont obtenu des nombres de Nusselt élevés dans la zone chauffée. Ceci est induit par la présence de fort gradient thermique dans cette zone. Enfin, les corrélations du nombre Nusselt proposées par Kahine et al. (1994) [30] ont donné un bon accord avec la corrélation expérimentale de Scirocco et al. (1985) [76]. Quaresma (1998) [63] a effectué une étude numérique de l'écoulement turbulent des fluides rhéofluidifiants non-thermodépendants dans une conduite cylindrique dont la paroi est soumise à un flux de chaleur constante. Le but est d'étudier l'évolution du nombre de Nusselt en fonction de l'indice n, du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl. L'étude a fourni les conclusions suivantes :

- à nombre de Reynolds et indice de comportement fixés, le nombre de Nusselt croît avec le nombre de Prandtl ;
- à nombres de Reynolds et Prandtl fixés, le nombre de Nusselt diminue avec les

valeurs décroissantes de l'indice de comportement, ce qui n'est pas le cas pour les fluides thermodépendants (voir Kahine et al. (1994) [30]) ;
– à nombre de Prandtl et indice de comportement fixés, le nombre de Nusselt augmente avec le nombre de Reynolds croissant.

On s'intéresse ici à l'écoulement turbulent pleinement développé du fluide d'Ostwald de Waele dans une conduite cylindrique chauffée par une densité de flux de chaleur constant. La loi rhéologique est définie par :

$$\eta = K(T)\dot{\gamma}^{n-1} \tag{6.1}$$

En général, la thermodépendance de la viscosité dans la loi en puissance est introduite en suivant Bird et al. (1987) [5] par la relation :

$$K(T) = K_0 e^{-b(T-T_{ref})} \tag{6.2}$$

où b est une constante, K_0 l'indice de consistance à la température de référence $T_{ref} = \phi_p R/\lambda$, ϕ_p est le flux de chaleur imposé à la paroi, λ la conductivité thermique du fluide.

Les transferts thermo-convectifs du fluide non-newtonien peuvent être influencés par la dissipation visqueuse (dégradation de l'énergie mécanique en chaleur) due à des viscosités élevées couplées aux forts taux de cisaillement, par la dépendance en température de la viscosité apparente et de la conductivité thermique, par des réactions chimiques possibles, etc. Dans ces conditions, les équations de quantité de mouvement et d'énergie deviennent plus complexes. Dans la présente étude, nous nous sommes focalisés sur le cas d'écoulements de fluides non-newtoniens dans lesquels la dissipation visqueuse est négligeable, la conductivité thermique indépendante de la température et sans réaction chimique. Seule l'influence de la température sur la viscosité est notable.

Nous allons commencer ce chapitre par la description du phénomène de thermodépendance ainsi que ses conséquences sur la structure des écoulements de fluides non-newtoniens. Ensuite, nous présentons les équations mathématiques gouvernant les écoulements thermodépendants ainsi que les conditions aux limites puis la modélisation des termes sous-maille. Enfin, nous finirons ce chapitre par l'analyse des résultats. Cette partie est divisée en deux. Dans la première partie, les résultats des écoulements non-thermodépendants (isothermes ou non) sont comparés et validés avec des résultats du chapitre 4. La deuxième partie est consacrée à l'interprétation des résultats des écoulements thermodépendants.

6.1 Thermodépendance

On parle d'un fluide thermodépendant lorsque la consistance K varie avec la température. Dans la majorité des écoulements de fluides thermodépendants, la variation de $K(T)$ suit la loi exponentielle (Bird et al. (1987) [5] et Peixinho (2004) [54]). Comme fluide thermodépendant, nous pouvons citer les polymères fondus (Moguen et al. (2011) [41]). La thermodépendance crée un couplage entre la vitesse et la température et induit de fortes influences sur la dynamique de l'écoulement et les transferts de chaleur. Peixinho (2004) [54] a montré les conséquences de la thermodépendance à partir des mesures expérimentales de certaines grandeurs ou statistiques des écoulements de fluides non-newtoniens,

dont le comportement rhéologique est décrit par le modèle de Ostwald, de Cross et de Herschel-Bulkley, dans des conduites cylindrique et annulaire. Avec $K(T) = K_0\exp(-bT)$, Peixinho (2004) [54] a rapporté que la décroissance de $K(T)$ au voisinage des parois chauffées induit un déplacement radial des particules du centre de la conduite vers la paroi c'est-à-dire une forte accélération au niveau de la paroi et une décélération au coeur de la conduite. Peixinho (2004)[54] a validé les conclusions de Mizushina et al. (1967) [40] qui ont montré que la thermodépendance est plus marquée si le fluide est rhéofluidifiant. Nguyen et al. (2005) [50] ont déterminé par voie numérique à l'aide d'un code en différences finies l'influence de différents paramètres (flux de chaleur imposé à la paroi, nombre de Reynolds) sur l'évolution de la couche limite thermique et du nombre de Nusselt, pour des écoulements entre deux plaques parallèles chauffées de fluides non-newtoniens fortement thermodépendants décrits par le modèle d'Ostwald de Waele. Leurs résultats ont montré que l'épaisseur de la couche limite thermique dépend de la densité de flux de chaleur et du nombre de Reynolds et que cette couche thermique diminue quand la densité de flux de chaleur augmente. Nguyen et al. (2005) [50] ont expliqué que cette diminution n'est rien d'autre que le résultat de l'accroissement du gradient pariétal de la vitesse axiale provenant de la diminution de l'indice de comportement. Par rapport à l'évolution du nombre de Nusselt, Nguyen et al. (2005) [50] ont noté une forte augmentation de ce dernier en fonction de la puissance de chauffage. En 2007, Nguyen et al. [51] ont repris l'étude de 2005 mais en élaborant des corrélations pour déterminer les pertes de charge des fluides non Newtoniens thermodépendants. Ils ont observé que plus on se rapproche de la paroi chaude, plus les pertes de charge sont réduites. Selon eux, ce comportement provient de la diminution de la viscosité apparente due au chauffage, c'est-à-dire d'un accroissement de la fluidité. Cela entraîne alors une diminution des pertes de charge. Nguyen et al. (2007) [51] ont aussi montré qu'à débit fixé, lorsqu'on augmente la température, on observe une diminution du coefficient de frottement. Enfin ils ont montré qu'à température pariétale donnée, l'augmentation du nombre de Reynolds induit un accroissement du frottement. Ils ont conclu que les résultats sont similaires dans du cas du flux de chaleur imposé à la paroi.

6.2 Modélisation de la thermodépendance

Dans notre étude, la viscosité apparente du modèle d'Ostwald de Waele est donnée par :

$$\eta = K\dot{\gamma}^{n-1} \tag{6.3}$$

Le fluide étant thermodépendant, la consistance K s'écrit :

$$\begin{aligned} K &= K_0 e^{-b(T-T_b)} \\ &= K_0 e^{Pn(\Theta-\Theta_b)} \end{aligned} \tag{6.4}$$

où $\Theta = \frac{T_p - T(\theta,r,z,t)}{T_{ref}}$ est la température adimensionnelle, avec T_p la température à la paroi (T_p varie en fonction de la coordonnée z), $T_{ref} = \phi_p R/\lambda$ la température de référence, T_b la température moyenne, K_0 est alors la consistance à la température T_b et Pn est le nombre de Pearson défini par :

$$Pn = bT_{ref} \tag{6.5}$$

avec b le paramètre de thermodépendance, ϕ_p la densité du flux imposée à la paroi, λ la conductivité thermique du fluide. En général, le nombre de Pearson varie de 0 à 10. Comme l'ont considéré Moguen et al. (2011) [41], $Pn = 0$ correspond à la viscosité indépendante de la température (la consistance K est constante). Il s'agit des écoulements non-thermodépendants ou isothermes : la température n'a pas d'influence sur la dynamique de l'écoulement ; c'est-à-dire que les profils de vitesse, les rms, la tension de Reynolds dans les écoulements non-thermodépendants seront identiques aux résultats des écoulements incompressibles isothermes présentés dans le chapitre 4. L'écoulement devient thermodépendant lorsque le nombre de Pearson est différent de 0 ($Pn > 0$). Par exemple, pour les écoulements des polymères fondus, $Pn = 5$ valeur rapportée par Moguen et al. (2011) [41].

6.3 Formulations mathématiques

A la section 3.2.1 sont présentés les développements des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de l'écoulement isotherme pour un fluide non-newtonien. Nous rappelons celles-ci sous la forme adimensionnelle :

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial z} = 0 \tag{6.6}$$

- **Equation de quantité de mouvement**

$$\begin{aligned}
\frac{D\overline{q}_z}{Dt} =& \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial z}\right)\right] \\
& - \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{\tau}_{rz}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \overline{\tau}_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{zz}}{\partial z} \\
\frac{D\overline{q}_r}{Dt} =& -r\frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_r/r}{\partial r}\right) - \left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\overline{q_r}}{r^2}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial \theta}\right)\right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial r}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{\tau}_{rr}}{r}\right) - \frac{\partial \overline{\tau}_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{rz}}{\partial z} + \frac{\overline{\tau}_{\theta\theta}}{r^2} \\
\frac{D\overline{q}_\theta}{Dt} =& -\frac{\partial \overline{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_\theta/r}{\partial r}\right) - \left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\overline{q_\theta}}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial z}\right)\right. \\
& \left. + \frac{2}{r^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial \theta}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{\tau}_{r\theta}}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \overline{\tau}_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{\theta z}}{\partial z} - \frac{\overline{\tau}_{\theta r}}{r}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Dans les équations (6.7), nous allons introduire la nouvelle loi de la viscosité qui dépend de la température (cf. eqs. (6.3) et (6.4)). Avant de présenter les équations des écoulements thermodépendants, nous allons d'abord développer l'équation de l'énergie

ainsi que les conditions aux limites thermiques. En coordonnées cylindriques, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \tag{6.8}$$

où α la diffusivité thermique du fluide est considérée constante et indépendante du cisaillement et de la température. En effet, les variations de la diffusivité thermique avec la température ou du taux de cisaillement sont faibles comparées à celles de la viscosité.

Une densité de flux de chaleur est imposée à la paroi. Cette condition impose que la température de paroi moyennée dans la direction azimutale (θ) augmente linéairement dans le sens de l'écoulement (z).

Pour rendre adimensionnelle l'équation 6.8, nous avons utilisé la température adimensionnelle suivante :

$$\Theta = \frac{T_p - T}{T_{ref}} \tag{6.9}$$

En utilisant cette définition de la température (éqt. (6.9)), la forme adimensionnelle de l'équation de l'énergie se présente comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(q_r \Theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(q_\theta \Theta) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z \Theta) - q_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T_p}{T_{ref}}\right) = \\ \frac{1}{Re_s Pr_s}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}\right] \end{aligned} \tag{6.10}$$

En filtrant l'équation (6.10), l'équation de l'énergie filtrée s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\overline{q}_r \overline{\Theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\overline{q}_\theta \overline{\Theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{q}_z \overline{\Theta}) - \overline{q}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T_p}{T_{ref}}\right) = \frac{1}{Re_s Pr_s}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial r}\right)\right)\right. \\ \left. + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 \overline{\Theta}}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\partial^2 \overline{\Theta}}{\partial z^2} + \right] - \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{\tau}_{\Theta r}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{\tau}_{\Theta \theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{\Theta z}}{\partial z} \end{aligned} \tag{6.11}$$

où les termes sous-maille ou flux de chaleur sous-maille sont définis par :

$$\overline{\tau}_{r\Theta} = \overline{q_r \Theta} - \overline{q}_r \overline{\Theta}, \qquad \overline{\tau}_{\theta\Theta} = \overline{q_\theta \Theta} - \overline{q}_\theta \overline{\Theta}, \qquad \overline{\tau}_{z\Theta} = \overline{q_z \Theta} - \overline{q}_z \overline{\Theta}, \tag{6.12}$$

Le nombre de Prandtl de simulation est donné par :

$$Pr_s = \frac{K_0}{\alpha \rho R^{n-1} U_{cL}^{1-n}} \tag{6.13}$$

avec K_0 la consistance à la température $< T_b >$. Dans l'équation (6.11), les tenseurs $\overline{\tau}_{r\Theta}$, $\overline{\tau}_{\theta\Theta}$ et $\overline{\tau}_{z\Theta}$ sont les tenseurs du flux de chaleur sous-maille. Les équations adimensionnelles gouvernant l'écoulement turbulent du fluide d'Ostwald de Waele thermodépendant ($Pn > 0$) s'écrivent comme suit :

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial r} + \frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial z} = 0 \tag{6.14}$$

– **Equation de quantité de mouvement**

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{q}_z}{Dt} =& \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_z}{\partial z}\right)\right.\\ &\left. - \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{\tau}_{rz}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \overline{\tau}_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{zz}}{\partial z}\right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{q}_r}{Dt} =& -r\frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_r/r}{\partial r}\right) - \left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\overline{q_r}}{r^2}\right) - \frac{2}{r^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta}\right)\right.\\ &\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial r}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{\tau}_{rr}}{r}\right) - \frac{\partial \overline{\tau}_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{rz}}{\partial z} + \frac{\overline{\tau}_{\theta\theta}}{r^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{q}_\theta}{Dt} =& -\frac{\partial \overline{p}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re_s}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_\theta/r}{\partial r}\right) - \left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\overline{q_\theta}}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial \theta}\right)\right.\\ &\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_\theta}{\partial z}\right) + \frac{2}{r^2}\left(\overline{\dot{\gamma}^{n-1}e^{Pn(\overline{\Theta}-\overline{\Theta_b})}}\frac{\partial \overline{q}_r}{\partial \theta}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{\tau}_{r\theta}}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial \overline{\tau}_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{\theta z}}{\partial z} - \frac{\overline{\tau}_{\theta r}}{r}\end{aligned} \tag{6.15}$$

– **Equation de l'énergie**

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\overline{q}_r\overline{\Theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\overline{q}_\theta\overline{\Theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{q}_z\overline{\Theta}) - \overline{q}_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T_p}{T_{ref}}\right) =& \frac{1}{Re_sPr_s}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial r})\right)\right.\\ &\left. + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\overline{\Theta}}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\partial^2\overline{\Theta}}{\partial z^2} + \right] - \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{\tau}_{\Theta r}}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{\tau}_{\Theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \overline{\tau}_{\Theta z}}{\partial z}\end{aligned} \tag{6.16}$$

Il faut noter que pour les écoulements non-thermodépendants (isothermes ou non), les équations 6.14, 6.15 et 6.16 sont valables à condition de prendre $Pn = 0$. Le flux de chaleur sous-maille dans l'équation de l'énergie est modélisé par :

$$\overline{\tau}_{\Theta j} = -\alpha_t\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_j} \tag{6.17}$$

soit :

$$\overline{\tau}_{\Theta z} = -\alpha_t\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial z}, \qquad \overline{\tau}_{\Theta r} = -\alpha_t\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial r} \qquad \text{et} \qquad \overline{\tau}_{\Theta\theta} = -\alpha_t\frac{1}{r}\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial \theta} \tag{6.18}$$

avec α_t la diffusivité thermique turbulente donnée par :

$$\alpha_t = \frac{\nu_t}{Pr_t} \tag{6.19}$$

où Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent défini par :

$$Pr_t = \frac{< v_r' v_z' > \frac{\partial T}{\partial r}}{< v_r' T > \frac{\partial v_z}{\partial r}} \tag{6.20}$$

Nous rappelons le nombre de Pearson, le nombre de Reynolds de simulation et le taux de cisaillement définis respectivement par :

$$Pn = \frac{bR\phi_p}{\lambda} = bT_{ref} \tag{6.21}$$

$$Re_s = \frac{\rho U_p^{2-n} R^n}{K_0} \tag{6.22}$$

$$\overline{\dot{\gamma}} = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}} \tag{6.23}$$

où

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{est le taux de déformation} \tag{6.24}$$

Le nombre de Péclet est donné par la relation :

$$Pe = Re_s Pr_s = U_{cL} R/\alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \tag{6.25}$$

λ, ρ et C_p sont respectivement la conductivité thermique, la masse volumique et la capacité calorifique du fluide.

6.4 Modélisation des termes sous-mailles

Dans les équations (6.15) et (6.16) apparaissent les tenseurs de viscosité sous-maille ($\overline{\tau}_{ij}$) et de flux de chaleur sous-maille ($\overline{\tau}_{\Theta j}$) qui sont approchés par les modèles de **Smagorinsky non-newtonien** et du **nombre de Prandtl turbulent constant**. Nous allons voir comment sont modélisés les tenseurs sous-maille et comme est estimé le nombre de Prandtl turbulent.

6.4.1 Modélisation du tenseur de viscosité sous-maille

Comme mentionné dans le chapitre 5, les tenseurs sous-mailles $\overline{\tau}_{ij}$ sont modélisés par le modèle de Smagorinsky non-newtonien élaboré par Ohta et Miyashita (2014) [52]. Ces tenseurs sont définis par :

$$\overline{\tau}_{ij} = -2\nu_t \overline{S}_{ij} \tag{6.26}$$

où la viscosité tourbillonnaire s'écrit :

$$\nu_t = C_s f_s (f_\eta \Delta)^2 \overline{S}_{ij} \tag{6.27}$$

avec $f_\eta = \frac{\eta_w}{\overline{\eta}}$ la fonction corrective du tenseur sous-maille. Dans le code, on a choisi la constante de Smagorinsky $C_s = 0,1$ et la fonction d'amortissement $f_s = 1 - exp\left(\frac{Y^+}{25}\right)$.

6.4.2 Modélisation du tenseur de flux de chaleur sous-maille

Pour modéliser le flux de chaleur sous-maille $\overline{\tau}_{\Theta j}$, nous avons opté pour le modèle du nombre de Prandtl sous-maille constant. Pour ces premiers essais, nous avons opté pour ce modèle simple, mais le nombre de Prandtl turbulent Pr_t pourrait varier en fonction de la viscosité du fluide ou en fonction de la température dans le cas thermodépendant. Des études plus poussées (dans le futur) permettraient de mieux cerner l'évolution de Pr_t dans le cas des écoulements de fluides non-newtoniens thermodépendants. Dans la présente étude, nous avons cependant pris soins d'évaluer Pr_t pour les différents indices de comportement considérés. Ce modèle consiste à fixer une valeur constante pour le nombre de Prandtl turbulent Pr_t et de procéder au calcul de la diffusivité thermique sous-maille $\alpha_t = \frac{\nu_t}{Pr_t}$. Pour le fluide Newtonien ($n = 1$), Redjem (2008) [66] a montré à l'aide de la DNS que le nombre de Prandtl turbulent à la paroi est proche de 1, valeur qui concorde avec les travaux de Piller (2005) [58] et Kawamura et al. (1998) [31]. Donc pour le champ thermique, Redjem (2008) [66] a considéré $Pr_t = 0,9$. Est-ce que cette valeur correspond à l'évolution du nombre de Prandtl turbulent pour les fluides non-newtoniens ? Pour répondre à cette question, nous avons effectué des LES du champ thermique avec le modèle dynamique et avec un maillage relativement fin (65^3) (cela peut être considéré comme une DNS grossière). Le but de ces simulations par l'approche du modèle dynamique de la LES est de calculer la valeur du nombre de Prandtl turbulent pour les différentes valeurs de l'indice de comportement n. Sa valeur à la paroi servira pour déterminer le flux de chaleur sous-maille.

L'évolution du nombre de Prandtl turbulent Pr_t défini par l'équation (6.20) est présentée sur la figure 6.1. Celle-ci montre qu'à la paroi, Pr_t est approximativement égal à $1,5$ pour le fluide pseudoplastique ($n = 0,75$) et $0,7$ pour le fluide Newtonien et le fluide dilatant ($n = 1,2$). Dans ce chapitre, les résultats qui suivent sont obtenus avec le modèle du nombre de Prandtl turbulent constant pour approcher le flux de chaleur sous-maille ; nous avons choisi $Pr_t = 1,5$ pour $n = 0,75$ et $Pr_t = 0,7$ pour $n = 1$ et $n = 1,2$.

6.5 Résultats de la non-thermodépendance

Comme nous disposons de peu de références auxquelles comparer les champs thermiques des fluides d'Ostwald de Waele en conduite cylindrique, nous avons effectué des simulations non-thermodépendantes dont les résultats relatifs à la dynamique seront superposables aux écoulements isothermes présentés dans le chapitre 4. Le deuxième objectif de ces simulations non-thermodépendantes est de valider les résultats des simulations en comparant les prédictions aux les corrélations du nombre de Nusselt en régimes laminaire et turbulent établis (et disponibles) dans la littérature. Pour effectuer les simulations du cas non-thermodépendant, nous avons fixé le nombre de Pearson $Pn = 0$ dans le modèle thermodépendant.

6.5.1 Ecoulements laminaires

6.5.1.1 Vitesse, température et viscosité

La figure 6.2(a) montre une superposition des profils de vitesse axiale moyens des écoulements non-thermodépendants ou isothermes, cela pour chacun des indices de comportement n. On rappelle que la LES non-thermodépendant est un calcul effectué avec

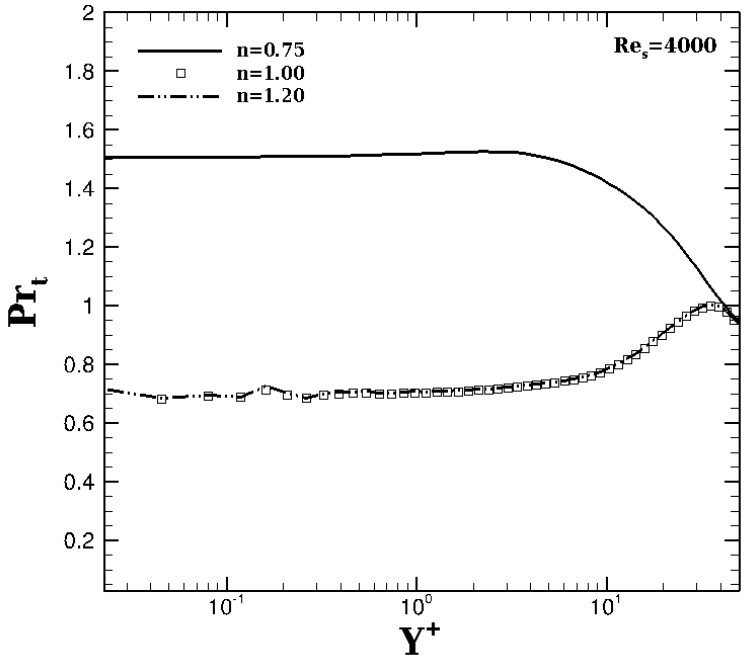
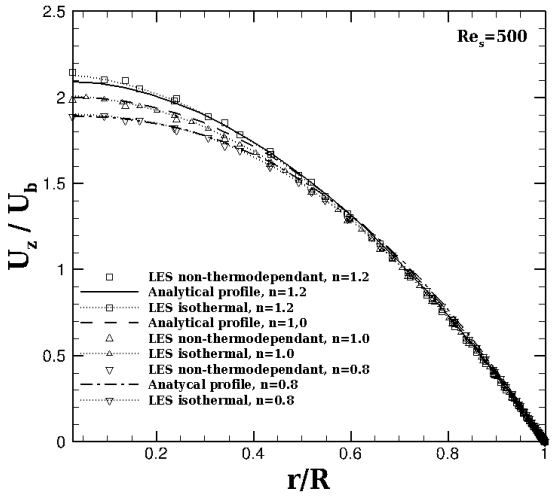


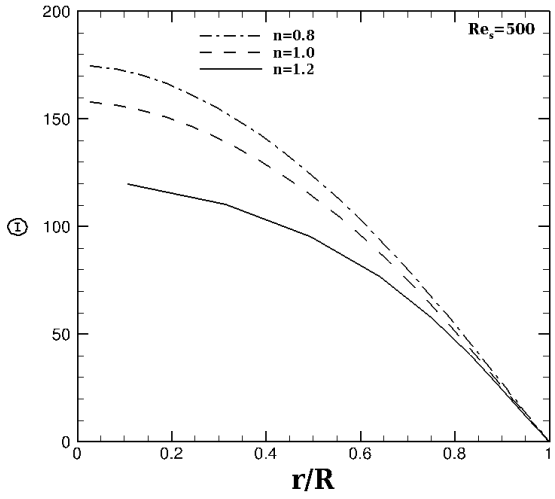
FIGURE 6.1 – Evolution du nombre de Prandtl turbulent pour $Re_s = 4000$ et $Pr_s = 1$.

le code thermodépendant dans le cas $Pn = 0$, et que la LES isotherme est un calcul avec le modèle dynamique résolvant le champ de vitesse isotherme. Les résultats de la figure 6.2(a) confirment que la non-thermodépendance reste sans influence sur la vitesse. Comme évoqué dans le chapitre 4 (écoulements isothermes), on obtient bien le profil de vitesse qui s'aplatit au centre de la conduite avec la diminution de n. Cela est dû au fait que le fluide tend vers un comportement solide au centre de la conduite quand n décroît, comportement induit par l'augmentation de la viscosité apparente dans cette région, Fig. 6.3.

Le profil de température est représenté sur la figure 6.2(b), pour différents indices de comportement n. Contrairement au profil de vitesse axiale, le profil de température, lui, est amplifié lorsque l'indice de comportement n diminue. En effet, le fluide rhéofluidifiant ($n = 0,8$) subit à proximité de la paroi l'influence d'un taux de cisaillement plus élevé et une vitesse plus faible qu'au centre de la conduite, ce qui induit une viscosité plus élevée au centre de la conduite. En régime laminaire, les couches fluides sont parallèles (cf. Fig. 6.2(a)). Les particules fluides séjournent alors plus longtemps sur la section droite de la conduite, loin de la paroi, pour le fluide rhéofluidifiant. Par conséquent, elles acquièrent une température plus élevée dans le cas $n = 0,8$ comparé au cas du fluide rhéoépaississant ($n = 1,2$), Fig. 6.2(b).



(a) profils de vitesse axiale avec en symboles les prédictions LES non-thermodépendantes, en traits les solutions analytiques et, en traits+symboles, les prédictions LES isothermes



(b) profils de température

FIGURE 6.2 – Profils moyens de vitesse et température pour $Pr_s = 1$, en régime laminaire.

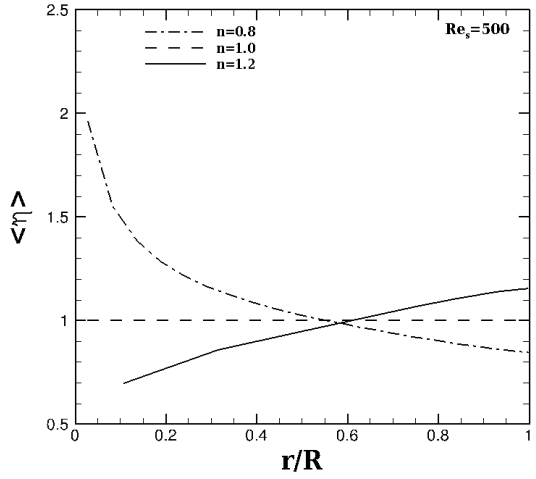


FIGURE 6.3 – Evolution de la viscosité moyenne pour $Pr_s = 1$, en régime laminaire.

6.5.1.2 Nombre de Nusselt et coefficient de frottement

Le nombre de Nusselt renseigne sur les transferts thermiques entre la paroi de la conduite chauffée et le fluide en mouvement. C'est le rapport du flux thermique convectif et du flux thermique conductif. Le transfert par convection dépend des propriétés thermiques du fluide (capacité calorifique, conductivité thermique) et de son niveau de turbulence quantifié par le nombre de Reynolds. Pour les écoulements en conduite cylindrique, le nombre de Nusselt est défini par :

$$Nu = \frac{hD}{k} \tag{6.28}$$

avec h le coefficient de transfert de chaleur, D le diamètre de la conduite et k la conducti vité thermique du fluide. Nous avons déterminé le nombre de Nusselt et l'avons confronté à diverses relations de la littérature (Tab. 6.1). D'abord à la formule théorique de Grigull (1956) [26] qui s'écrit :

$$Nu_{th} = \frac{8(15n^2 + 8n + 1)}{(31n^2 + 12n + 1)} \tag{6.29}$$

Metzner et Gluck (Geankoplis (1993) [20]) ont écrit une équation semi-empirique applicable au transfert de chaleur pour les fluides très visqueux :

$$Nu_{MG} = 1.75 \left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n \frac{mC_p}{\lambda L} \left(\frac{K_b}{K_w}\right)^{0.14} \tag{6.30}$$

où K_b, K_w, L, λ, m et C_p sont respectivement la consistance moyenne, la consistance à la paroi, la longueur de la conduite, la conductivité thermique, la masse et la capacité calorifique du fluide. Ashis (1999) [1] a prédit une relation donnant le nombre de Nusselt :

$$Nu_A = \frac{(n+1)}{(3n+1)} / \left([1/4 - n^2/(3n+1)^2] - ((3n+1)/(5n+1))[1/8 - n^3/(3n+1)^3]\right) \tag{6.31}$$

Les valeurs du nombre de Nusselt prédites par la présente LES sont comparées aux précédentes relations (cf. Tab. 6.1). On observe que l'augmentation de l'indice de comportement entraîne la diminution du nombre de Nusselt. Comme le transfert d'énergie est lié au mouvement du fluide, il est nécessaire de connaître le mécanisme de l'écoulement du fluide avant d'analyser le transport de chaleur. En régime laminaire, le transfert de chaleur entre la paroi et le fluide qui s'écoule le long de la paroi se fait essentiellement par conduction. Les molécules dans le voisinage immédiat de la surface de paroi sont beaucoup plus ralenties dans le fluide rhéoépaississant à cause des forces visqueuses plus importantes que dans le cas du fluide rhéofluidifiant. Par conséquent, le transfert de chaleur entre le fluide chaud et le fluide froid étant faible, la température débitante est élevée entraînant une réduction du nombre de Nusselt pour le fluide rhéoépaississant. Nos prédictions LES pour le nombre de Nusselt en régime laminaire sont en bon accord avec la solution analytique de Grigull (1956) [26] (cf. Eq. (6.29)), avec des écarts allant de 1,7 % pour $n = 0,5$ à 2,8 % pour $n = 1,4$ et elles restent comparables aux corrélations (6.31) et (6.30) de Ashis (1999) [1] et de Geankoplis (1993) [20], avec des écarts allant de 0,3 % pour $n = 0,5$ à 1,9 % pour $n = 1$ (Eq.(6.31)) et de 1,6 % pour $n = 0,2$ à 1,9 % pour $n = 1$ (Eq. (6.30)) respectivement. Dans le graphe 6.4 sont représentées les valeurs du nombre de Nusselt pour cette étude puis celles de la formule analytique de Grigull (1956) [26] et des corrélations expérimentales de Ashis (1999) [1] et Nu_{MG} et de Metzner et Gluck (Geankoplis (1993) [20]) $Re_s = 500$. Un accord satifaisant a été obtenu avec ces références.

Le coefficient de frottement est défini par $f = 2\tau_p/(\rho U_b^2)$. Pour un écoulement laminaire pleinement développé, la valeur prédite par la présente LES ($f \approx 0,0341$) pour différentes valeurs de n à $Re_s = 500$ est en accord avec la formule théorique $f = 16/Re_{MR}$ à $2,3\%$ d'erreur près.

n	Nu	Nu_{th}	Nu_A	Nu_{MG}
$0,5$	$4,827$	$4,745$	$4,75$	$4,752$
$0,6$	$4,722$	$4,628$	$4,63$	$4,630$
$0,8$	$4,576$	$4,467$	$4,47$	$4,407$
$1,0$	$4,447$	$4,363$	$4,36$	$4,360$
$1,2$	$4,410$	$4,290$	–	–
$1,4$	$4,357$	$4,236$	–	–

TABLE 6.1 – Nombre de Nusselt pour $Re_s = 500$ et $Pr = 1$ avec Nu : présent travail, Nu_{th} : formule théorique de Grigull (1956) [26], Nu_A : corrélation de Ashis (1999) [1] et Nu_{MG} : corrélation de Metzner et Gluck (Geankoplis (1993) [20]).

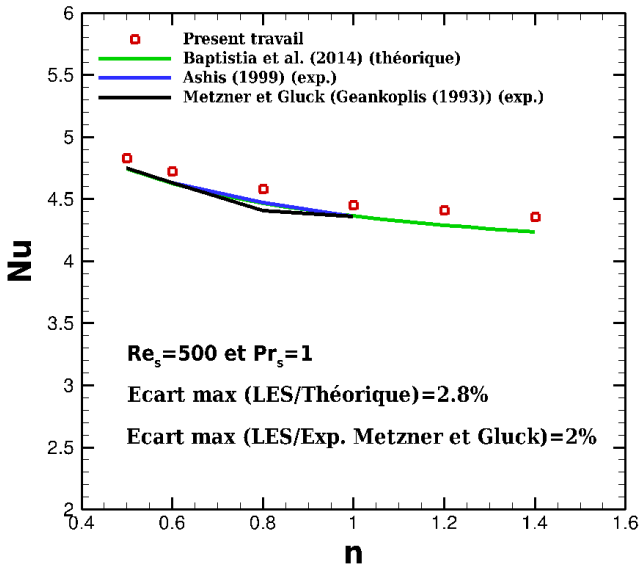


FIGURE 6.4 – Nombre de Nusselt comparé avec la formule théorique de Grigull (1956) [26] et les corrélations expérimentales de Ashis (1999) [1] et Nu_{MG} et de Metzner et Gluck (Geankoplis (1993) [20]) $Re_s = 500$.

6.5.1.3 Influence des nombres de Reynolds et de Prandtl de simulation

Nous nous intéressons maintenant à l'effet des nombres de Reynolds Re_s et Prandtl Pr_s sur les écoulements laminaires de fluides non-newtoniens en régime thermique établi. Dans un premier temps, pour des valeurs de l'indice de comportement n égales à $0,8$, 1 et $1,2$, nous avons effectué des simulations à $Re_s = 500$, 1000 et 2000, avec $Pr_s = 1$. Des différences notables sur la vitesse (Fig. 6.5(a)) et sur le nombre de Nusselt sont observées (Tab. 6.2). Le profil de vitesse adimensionnel U_z/U_b s'aplatit au centre de la conduite lorsque le nombre de Reynolds Re_s augmente, quel que soit n, alors que l'effet inverse est observé au voisinage de la paroi Cela est plus marqué pour le fluide rhéoépaississant ($n = 1,2$), dont la fluidité augmente au centre de la conduite quand Re_s croît, Fig. 6.5(a).

L'évolution de la température moyenne en fonction du nombre de Reynolds et l'indice de comportement est illustrée sur la figure 6.5(b). Celle-ci montre que le fluide devient

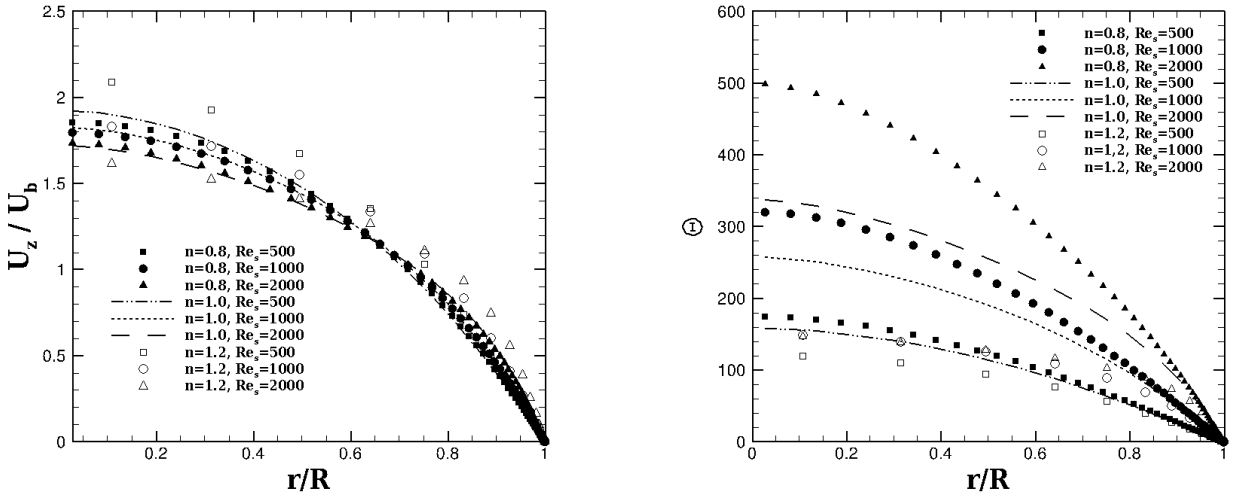
plus chaud pour $Re_s = 2000$, et d'autant plus lorsque n diminue.

Le tableau 6.2 présente les valeurs du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Reynolds, du nombre de Prandtl et de l'indice de comportement. Le tableau montre les résultats suivants :

- une croissance du nombre de Nusselt avec le nombre de Reynolds à n et Pr fixés ;
- une augmentation du nombre de Nusselt avec n à grand nombre Reynolds fixé pour un nombre de Prandtl de simulation fixé et une diminution du nombre de Nusselt à $Re_s = 500$ et $Pr_s = 1$.

Aussi, le tableau 6.2 montre que le modèle LES ne dégénère pas en modèle valable en régime laminaire. En effet, en régime laminaire établi, le nombre de Nusselt vaut 4.36. Les écarts à $Re_s > 500$ sont probablement dûs au fait que le modèle de turbulence ne convient pas à l'étude du régime laminaire. Ces prédictions sur l'influence de Re_s sur le nombre de Nusselt valident les conclusions de Quaresma (1998) [63] sur l'évolution du nombre de Nusselt avec l'indice de comportement et le nombre de Reynolds.

Dans un second temps, nous fixons le nombre de Reynolds de simulation à 500 et le nombre de Prandtl de simulation à 1, 11 et 100. Le choix de ces valeurs provient du fait que nous disposons de référence en régime turbulent avec ces nombres de Prandtl (Quaresma (1998) [63]). L'influence de Pr_s sur l'évolution de la température moyenne est présentée sur la figure Fig. 6.6 et celle sur le nombre de Nusselt dans le tableau 6.2. La température moyenne augmente avec les valeurs croissantes du nombre de Prandtl. Ceci est lié au fait qu'en augmenatnt le nombre de Prandtl de simulation, la convection devient importante, d'où une grande élevation de la température du fluide. À indice de comportement et nombre de Reynolds fixés, le nombre de Nusselt croît avec le nombre de Prandtl.



(a) vitesse axiale

(b) température

FIGURE 6.5 – Profils de vitesse et température pour $Pr_s = 1$.

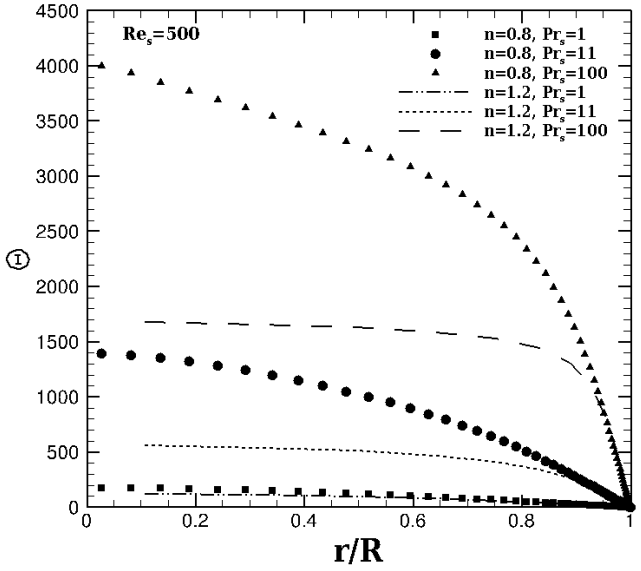


FIGURE 6.6 – Profil de température pour $Re_s = 500$.

Re_s	500			1000	2000
n	$Pr_s = 1$	$Pr_s = 11$	$Pr_s = 100$	$Pr_s = 1$	$Pr_s = 1$
0,8	4,576	6,112	11,896	6,219	9,152
1,0	4,447	–	–	6,428	10,597
1,2	4,410	11,345	25,652	9,753	18,832

TABLE 6.2 – Nombre de Nusselt en régime laminaire.

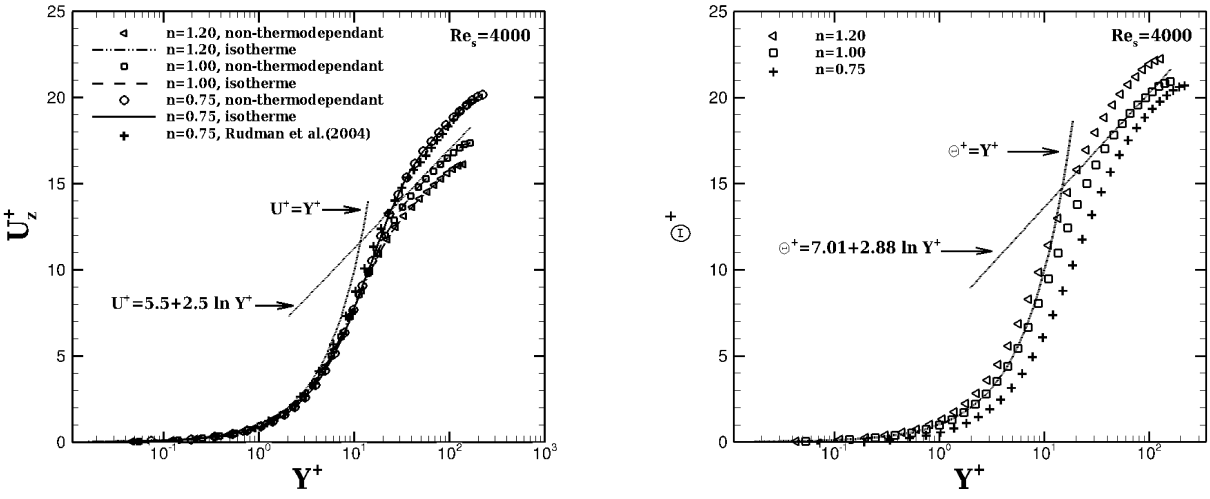
6.5.2 Ecoulements turbulents

Les simulations suivantes sont faites avec le même maillage (65x65x65) afin de retrouver les résultats du chapitre 4. Dans la littérature, il existe peu de travaux sur le champ thermique et les transferts de chaleur dans des fluides non-newtoniens, en régime turbulent, d'où la nécessité de valider cette partie par comparaison aux résultats des écoulements isothermes avant de se pencher sur le cas anisotherme qui est plus complexe. On présentera d'abord les prédictions LES obtenues pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$, pour différents indices d'écoulement n. Ensuite on analysera l'effet des nombres de Prandtl et de Reynolds sur les statistiques pour un fluide rhéofluidifiant et un fluide rhéoépaississant.

6.5.2.1 Profils de vitesse et de température

Le profil de la vitesse axiale représenté sur la figure 6.7(a) montre bien la non-thermodépendance des écoulements car les champs de vitesse se superposent avec les solutions de l'écoulement isotherme. La physique sur la dynamique reste la même puisque celle-ci n'est pas influencée par la température. Donc les évolutions des rms des fluctuations des vitesse, de l'énergie cinétique de turbulence et de la tension de Reynolds sont identiques à celles du cas isotherme. Nous pouvons donc conclure que l'introduction de la thermodépendance dans les équations a été correctement effectué puisqu'il n'y a pas d'influence lorsqu'on impose $Pn = 0$ dans le code.

La distribution radiale du champ de température moyen normalisé par la température de frottement ($T_\tau = q_p/\rho C_p U_\tau$) en fonction de la distance à la paroi Y^+ est tracée sur la figure 6.7(b). La température moyenne du fluide croît avec l'augmentation de l'indice de comportement n. Ceci est lié au fait que, dans le cas du fluide rhéofluidifiant $n = 0,75$, le fluide va plus vite (il traverse plus vite la section droite, en particulier loin de la paroi) (cf. Fig. 6.7(a)) donc il n'a pas eu le temps de s'échauffer. En conséquence, la température du fluide rhéofluidifiant est plus petite que celle du fluide rhéoépaississant. Notons aussi cette évolution de la température pourrait également être à liée au choix de l'adimension. En effet, la température de référence qui pourrait dépendre de l'indice de comportement n. La couche de conduction thermique devient fine (moins de fluctuations de température) lorsque n croît. La loi linéaire $\Theta^+ = PrY^+$ est bien décrite pour le fluide newtonien jusqu'à $Y^+ = 5$, tandis qu'à $n \neq 1$, les profils ne suivent cette loi que pour $Y^+ < 1$.



(a) vitesse axiale

(b) température

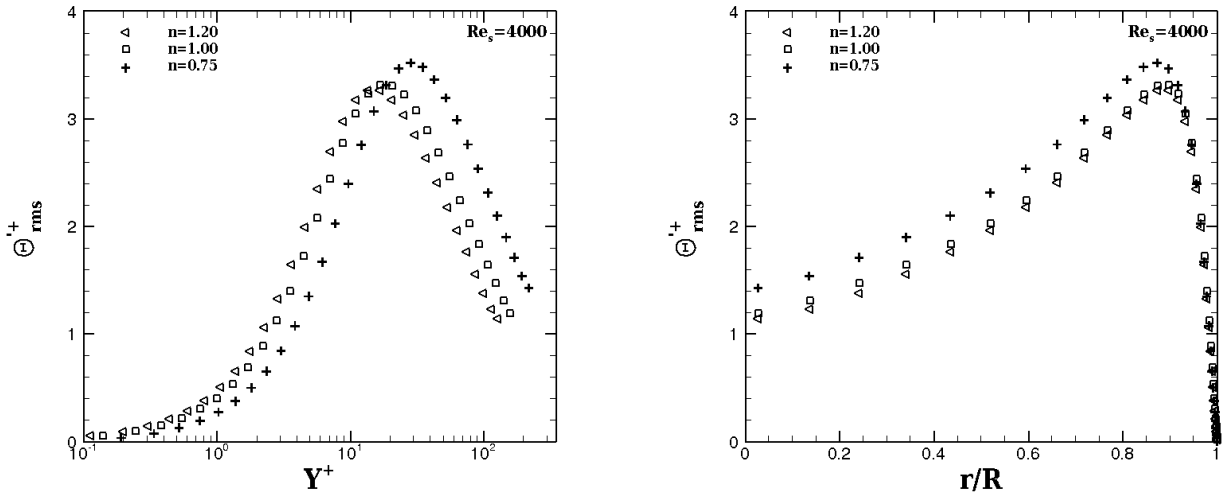
FIGURE 6.7 – Vitesse axiale et température pour $Pr_s = 1$.

6.5.2.2 Ecart-type des fluctuations de température

La figure 6.8 illustre la variation de l'écart-type des fluctuations de température normalisé par la température de frottement T_τ. Il est défini par :

$$rms(\Theta) = \sqrt{\overline{\Theta'^2}} \tag{6.32}$$

Les fluctuations de température sont dominantes dans la zone logarithmique. La position des pics de fluctuations pour les fluides newtonien ($n = 1$) et rhéoépaississant ($n = 1,2$) est identique et égale à 15,13 (soit $r/R = 0,88$) tandis que celle du fluide rhéofluidifiant $n = 0,75$ est égale à 28,58 (soit $r/R = 0,87$) (cf. Figs. 6.8(a) et 6.8(b)). Si les fluctuations de température sont plus élevées pour les fluides rhéofluidifiants ($n < 1$) au voisinage de $Y^+ \sim 30$, c'est parce qu'à cette position, la viscosité du fluide rhéofluidifiant est plus faible que celle du fluide rhéoépaississant (cf. Fig. 6.19(a)).



(a) (b)

FIGURE 6.8 – Ecart-type des fluctuations de température pour $Pr_s = 1$.

6.5.2.3 Flux de chaleur turbulent

Nous avons déterminé la distribution des flux de chaleur turbulents axial et radial adimensionnés par rapport aux vitesse et température de frottement, pour différentes valeurs de n, Fig. 6.9. Le flux turbulent axial (Figs. 6.9(a) et 6.9(b)) varie comme la rms des fluctuations de température (cf. Fig. 6.8) avec un maximum qui croît lorsque la valeur de n diminue pour $Y^+ \leq 30$ (cf. Fig.6.9(a)). Cette figure montre clairement que la turbulence diffuse plus de flux de chaleur axial pour les fluides rhéofluidifiants que pour les fluides dilatants. Et ce flux de chaleur axial est dominant dans la zone tampon, région dans laquelle le pic des fluctuations de température est plus intense. Notons ensuite que les valeurs du flux de chaleur axial restent beaucoup plus élevées que celles du flux radial, quel que soit l'indice de comportement n. Par contre, l'influence de n sur le flux de chaleur radial (Fig. 6.9(c)) est moins prononcée que celle sur le flux axial. Enfin, les flux turbulents axial et radial pour les trois fluides ($n = 0,75$; 1 et $1,2$) sont localisés à des positions r/R égales (cf. Fig. 6.9).

Le flux de chaleur total (flux moléculaire + turbulent) défini par :

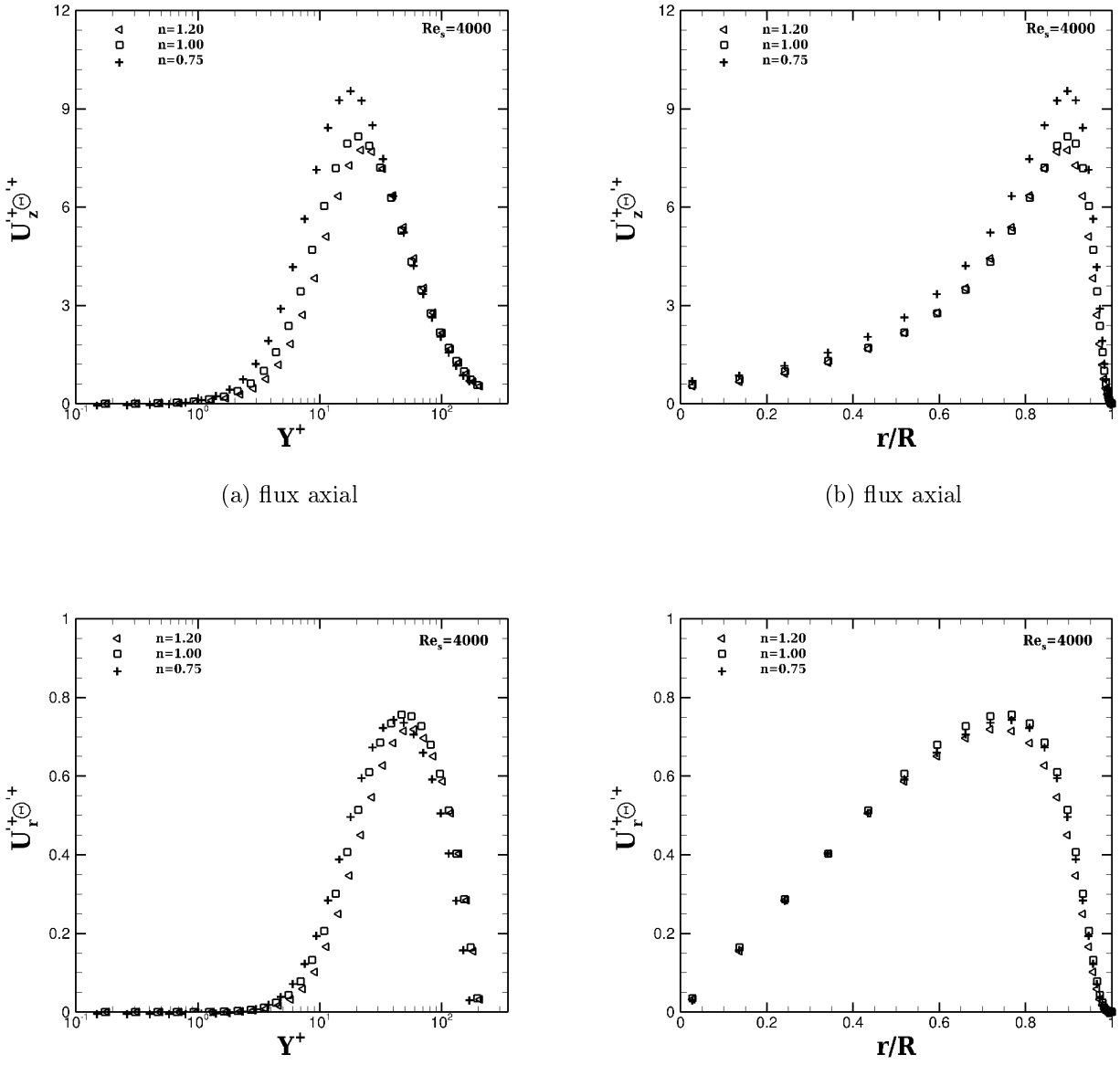
$$\Phi_{r,tot} = \frac{1}{Pe}\overline{\frac{\partial \Theta^+}{\partial Y^+}} - \overline{U_r'^+ \Theta'^+} \tag{6.33}$$

est représenté sur la figure 6.10(a). Pour $Y^+ \leq 5$ (dans la sous-couche visqueuse située dans la zone de conduction), le flux de chaleur total est constant, c'est-à-dire que très proche de la paroi, le flux de chaleur est conductif, donc c'est la diffusion moléculaire qui est prédominante. Au délà de $Y^+ \simeq 5$, c'est la diffusion turbulente qui assure le transfert du flux.

Le flux moléculaire est calculé à partir de la relation suivante :

$$\Phi_{mol} = \frac{1}{Pe}\frac{\overline{\partial \Theta^+}}{\partial Y^+} \tag{6.34}$$

Son évolution pour différentes valeurs de l'indice de comportement n à $Pr_s = 1$ et $Re_s = 4000$ est tracée sur la figure 6.10(b). Pour tout n, le flux moléculaire est constant jusqu'à $Y^+ = 2$ signifiant que le flux est effectivement conductif, comportement observé sur le profil du flux total. Au delà de $Y^+ = 5$, le flux moléculaire devient petit que le flux turbulent, dénotant que l'action de la diffusion moléculaire est négligeable dans cette zone et que c'est la turbulence qui assure le relai.



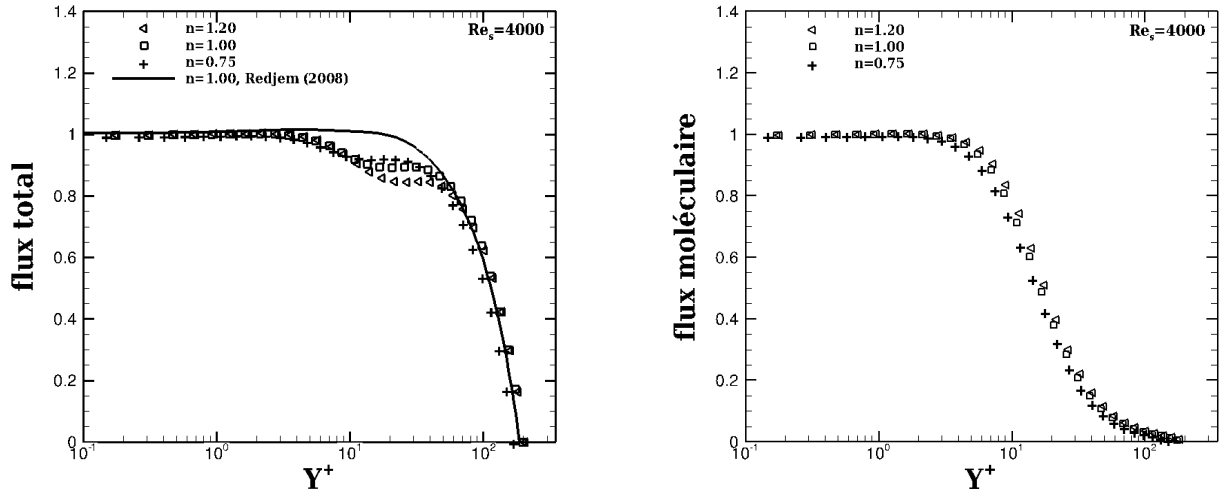
(a) flux axial

(b) flux axial

(c) flux radial

(d) flux radial

FIGURE 6.9 – Flux de chaleur turbulent pour $Pr_s = 1$.



(a) flux total

(b) flux moléculaire

FIGURE 6.10 – Flux de chaleur turbulent radial pour $Pr_s = 1$.

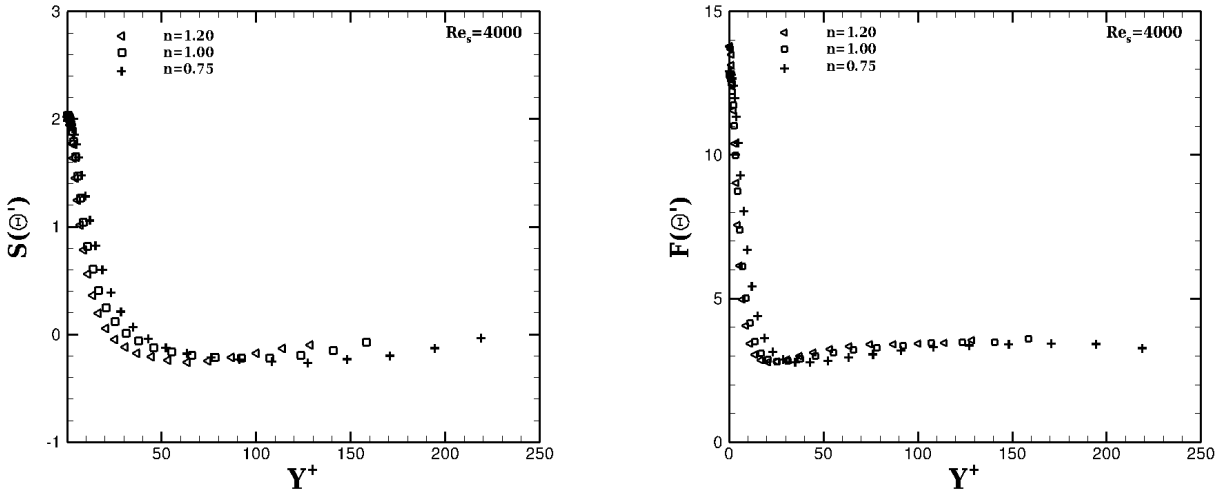
6.5.2.4 Moments statistiques d'ordre plus élevé

Les moments d'ordre trois et quatre sont respectivement les coefficient de dissymétrie et d'aplatissement (appelés aussi skewness et flatness en anglais). Ils fournissent des informations supplémentaires sur la distribution des fluctuations des grandeurs dynamiques et thermiques. Pour le champ fluctuant thermique, ces coefficients sont calculés comme suit :

$$S(\Theta') = \frac{\overline{\Theta'^3}}{(\overline{\Theta'^2})^{3/2}} \tag{6.35}$$

$$F(\Theta') = \frac{\overline{\Theta'^4}}{(\overline{\Theta'^2})^2} \tag{6.36}$$

Nous rappelons que le coefficient de dissymétrie permet de voir la manière dont les fluctuations de température sont distribuées autour de la moyenne et de voir les valeurs les plus probables. Dans le cas où le coefficient de dissymétrie est négatif alors les fluctuations négatives sont prédominantes et inversement. L'évolution de ces deux coefficients est repésentée dans la figure 6.11.



(a) $S(\Theta)$ (b) $F(\Theta)$

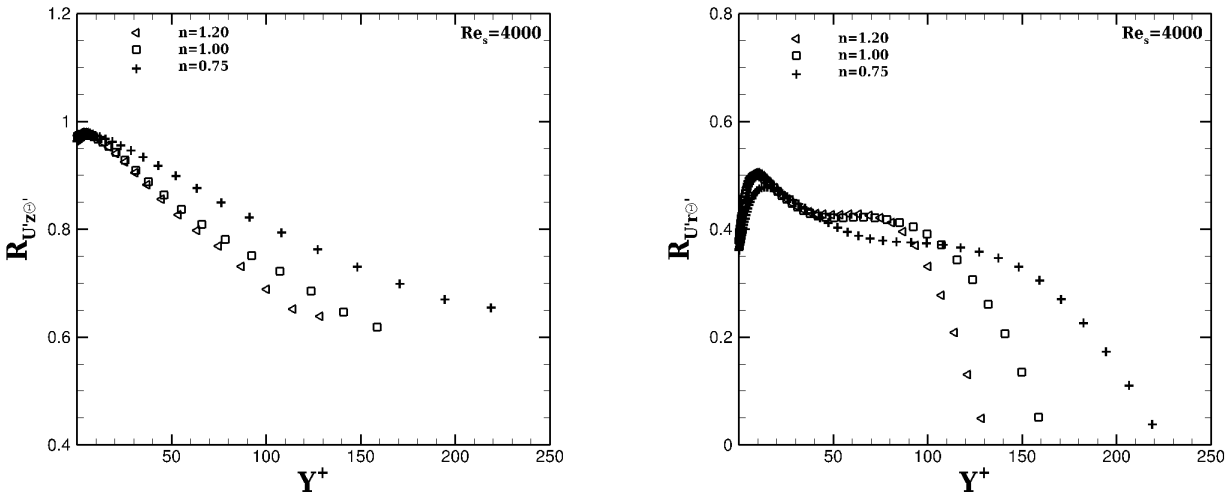
FIGURE 6.11 – Moments d'ordre 3 et 4 pour $Pr_s = 1$.

Les deux facteurs, $S(\Theta')$ et $F(\Theta')$, montrent un comportement similaire, en fonction de la distance à la paroi Y^+ : la distribution de $S(\Theta')$ et $F(\Theta')$ est plus élevée vers les petites valeurs de Y^+ lorsque l'indice de comportement n diminue. Pour des grandes valeurs de Y^+, les deux distributions s'étendent davantage vers le centre de la conduite pour des valeurs décroissantes de n. A la paroi, le coefficient de dissymétrie est égal à 2 pour toutes les valeurs de n. Loin de la paroi, $S(\Theta')$ tend vers la valeur gaussienne $S(\Theta') = 0$, ce qui signifie que les valeurs positives de Θ' sont aussi probables que les valeurs négatives quelque soit n. Au voisinage de la paroi, le coefficient d'aplatissement $F(\Theta')$ augmente lorsque n croît, indiquant alors un comportement intermittent quand n

croît. En se rapprochant du centre de la conduite, on retrouve un comportement gaussien des fluctuations de température puisque $F(\Theta)$ tend vers la valeur gaussienne 3. Avec $S = 0$ et $F \simeq 3$, nous disons que les distributions des pdfs des fluctuations de température ont une forme gaussienne quand on s'approche du coeur de la conduite.

6.5.2.5 Coefficients de corrélation

Ces coefficents permettent de quantifier l'interaction entre les fluctuations de vitesse et de température. Les coefficients de corrélation entre les fluctuations de vitesse axiale et température d'une part et les fluctuations de vitesse radiale et de température d'autre part sont tracées sur la figure 6.12.



(a) $Cor(U'_z\Theta')$ (b) $Cor(U'_r\Theta')$

FIGURE 6.12 – Coefficients de corrélations entre les fluctuations de vitesse axiale et la température ($Cor(U'_z\Theta')$) et les fluctuations de vitesse radiale et la température ($Cor(U'_r\Theta')$) pour $Pr_s = 1$.

Très proche de la paroi, les coefficients de corrélation $R_{U'_r\Theta'}$ et $R_{U'_rU'_z}$ augmentent jusqu'à la valeur 0,5 puis diminuent en passant par un palier et enfin décroissent lorsqu'on se rapproche du centre de la conduite. Quand on s'éloigne de la paroi (autour de $Y^+ \simeq 50$), ces coefficients prennent les valeurs reportées (paliers pour $R_{U'_rU'_z}$ et$R_{U'_r\Theta'}$) dans le tableau 6.3. Pour les trois fluides, le coefficient de corrélation $R_{U'_z\Theta'}$ tend vers 1, indiquant que les fluctuations U'_z et Θ' sont bien corrélées, avec une corrélation plus forte quand n diminue. Par contre, les valeurs de $R_{U'_rU'_z}$ (des trois fluides) sont inférieure à 0.5, montrant qu'il y a moins de corrélation entre les fluctuations U'_r et U'_z. Ce qui est des valeurs de $R_{U'_r\Theta'}$ très de 0,5. Lorsque n diminue, le palier semble plus étendu et se décale vers les grandes distances Y^+, Figs. 6.12(b) et 6.13. Cela signifie que les fluctuations de vitesse axiale et radiale, Fig. 6.13, demeurent bien corrélées jusqu'à des distances $Y^+ \sim 150$ pour $n = 0,75$, tandis que cette corrélation très vite commence à s'atternuer à $Y^+ \sim 80$ et tendre vers zéro à $Y^+ \sim 130$ pour $n = 1,2$. Les mêmes observations sont relevées pour la corrélation entre

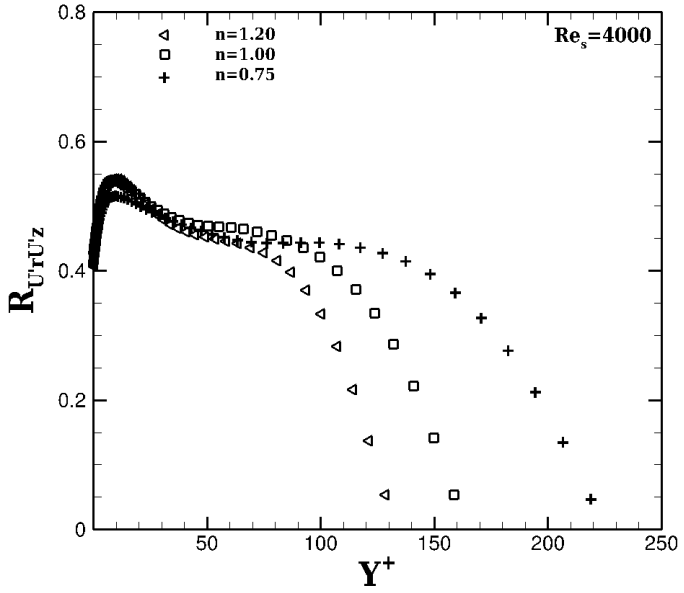


FIGURE 6.13 – Coefficient de corrélation entre les fluctuations de vitesses axiale et radiale pour $Pr_s = 1$

les fluctuations de vitesse radiale et de température, Fig. 6.12(b). Les corrélations entre U'_z et U'_θ ont des comportement similaires, et d'autant plus lorsque n diminue, Fig. 6.12(a). En effet, leur corrélation croît avec les valeurs décroissantes de n.

n	$R_{U'_r\Theta'}$	$R_{U'_rU'_z}$	$R_{U'_z\Theta'}$
$0,75$	$0,407$	$0,461$	$0,902$
$1,00$	$0,421$	$0,469$	$0,851$
$1,20$	$0,429$	$0,450$	$0,828$

TABLE 6.3 – Coefficients de corrélations entre les grandeurs fluctuantes pour $Pr_s = 1$ et $Re_s = 4000$.

6.5.2.6 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt

Les prédictions LES du coefficient de frottement à la paroi, $C_f = 2\tau_p/\rho U_b^2$, sont données dans le tableau 6.4. Nos simulations LES sont menées à $Re_s = 4000$, donc le faible écart entre les deux solutions pour le cas newtonien serait probablement lié au modèle de simulation et aux nombres de Reynolds légèrement différents. Les valeurs de C_f prédites dans la présente LES sont proches des corrélations de Dodge, Metzner et Gomes (1987) [23] avec des écarts allant de 20 % (pour $n = 0,75$) à 15 % (pour $n = 1,2$), d'Ostwald de Waele et Gomes (1987) [23] avec des écarts allant de 10 % (pour $n = 0,75$) à 2,9 % (pour $n = 1,2$) et de Hanks et Ricks (1975) [28] avec des écarts allant de 11,4 % (pour $n = 0,75$) à 1,2 % (pour $n = 1,2$). Enfin, nos résultats montrent bien que le coefficient de frottement augmente quand l'indice de comportement croît.

n	Présente LES	Dodge, Metzner et Gomes (1987) [23]	Ostwald de Waele et Gomes (1987) [23]	Hanks et Ricks (1975) [28]
$0,75$	$9,12.10^{-3}$	$7,60.10^{-3}$	$8,24.10^{-3}$	$8,18.10^{-3}$
$1,00$	$10,47.10^{-3}$	$8,68.10^{-3}$	$9,99.10^{-3}$	$9,73.10^{-3}$
$1,20$	$10,94.10^{-3}$	$9.45.10^{-3}$	$11,27.10^{-3}$	$10,81.10^{-3}$

TABLE 6.4 – Coefficient de frottement pour $Pr_s = 1$ et $Re_s = 4000$.

Pour les écoulements en conduite cylindrique, le nombre de Nusselt est défini par :

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} \tag{6.37}$$

Si en régime laminaire, la chaleur est transmise par conduction entre la paroi et le fluide, en régime turbulent, le mécanisme d'échange est modifié et favorisé par d'innombrables tourbillons. Les petits paquets de fluide se mélangent avec d'autres et jouent le rôle de porteur d'énergie. De cette façon, un accroissement de la turbulence induit une augmentation de la quantité de chaleur qui est transmise par convection. Pour les écoulements turbulents des fluides non-newtoniens, il n'existe pas une formule analytique permettant de déterminer le nombre de Nusselt comme c'est le cas pour les écoulements laminaires où nous avons une relation du nombre de Nusselt en fonction de l'indice de comportement (cf. Grigull (1956) [26]). Cependant, il existe des corrélations empiriques qui permettent d'évaluer le nombre de Nusselt dans l'écoulement de divers fluides. Pour les fluides Newtoniens on peut citer celle de Dittus et Boelter (1930) [12] qui est très utilisée pour le calcul du nombre de Nusselt :

$$Nu_{DB} = 0,0243 Re^{0,8} Pr^{0,4} \tag{6.38}$$

Comme évoqué dans la thèse de Peixinho (2004) [54], cette formule est valable pour $0.7 < Pr < 160$ et $Re > 10^4$. La corrélation de Gnielinski (1976) [22], valable pour $Pr \geq 0,7$, définie par :

$$Nu = \frac{\frac{\xi}{8}(Re - 1000)Pr}{1 + 12,7\sqrt{\frac{\xi}{8}}(Pr^{2/3} - 1)} \tag{6.39}$$

où :

$$\xi = \frac{1}{(1,82 \log Re - 1,64)^2} \tag{6.40}$$

permet aussi d'évaluer le nombre de Nusselt dans le cas d'un fluide newtonien. Concernant les fluides non-newtoniens, la relation de Chilton-Colburn modifiée (éq. (6.41)) donne de meilleurs résultats pour les nombres de Reynolds compris entre 8000 et 15000 (Peixinho (2004) [54]).

$$Nu_{CC} = 0,023(9350)^{0,8(1-1/n^n)} Re_{MR}^{0,8/n} Pr^{0,4} \tag{6.41}$$

Les nombres de Nusselt dans le cas des fluides pseudoplastiques ($n = 0,7$ pour $Pr = 11$ et 100) sont comparés aux valeurs données par les solutions numériques de Quaresma (1998) [63] dont les valeurs sont notées dans le tableau 6.5.

Yoo (1974) [94] a proposé une corrélation qui permet de déterminer le nombre de Nusselt. Elle est définie comme suit :

$$Nu_Y = 0,0152 Re_g^{-0,155} Pr^{-2/3} \tag{6.42}$$

avec Re_g le nombre de Reynolds généralisé qui dépend de la viscosité du fluide à la paroi (Rudman et al.(2004) [69]). Il y a certaines corrélations comme celle de Sandall et al. (1986) [73] qui permettent de déterminer l'évolution du nombre de Stanton en fonction des pertes de charge pour les nombres de Prandtl supérieurs à l'unité. Cette relation s'écrit :

$$St = \frac{\sqrt{f/2}}{12,5Pr^{2/3} - 7.87Pr^{1/3} + 3,61ln(Pr) + 5,8 + \frac{2,78}{n} ln\left(\frac{Re_{MR}\sqrt{f/2}}{90}\right)} \tag{6.43}$$

où St désigne le nombre de Stanton qui est donné par :

$$St = \frac{h}{\overline{U}\rho C_p} = \frac{Nu}{Re_{MR}Pr_{MR}} \tag{6.44}$$

où Pr_{MR} est le nombre de Prandtl de Metzner et Reed donné la relation :

$$Pr_{MR} = K\left(\frac{3n+1}{4n}\frac{8\overline{U}}{D}\right)^{n-1}\frac{C_p}{\lambda} \tag{6.45}$$

Dans l' équation (6.43), f est le coefficient de frottement déterminé à partir de la corrélation de Dodge et Metzner (1959) [13] définie à la section 1.4 et que nous réécrivons ici :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4,0}{n^{0,75}} log(Re_{MR} f^{1-n/2}) - \frac{0,4}{n^{1,2}} \tag{6.46}$$

Nous pouvons citer aussi la corrélation de Pinho et Coelho (2010) [57] définie par :

$$St = 0,0152 Re_{MR}^{-0,155} Pr_{MR}^{-2/3} \tag{6.47}$$

Les équations (6.43) et (6.47) nous donnent les valeurs du nombre de Stanton pour chaque fluide non-newtonien, puis cette valeur introduite dans l'équation (6.44) permet de calculer le nombre de Nusselt correspondant. Les valeurs des nombres de Prandtl de Metzner et Reed (Pr_{MR}) et de Reynolds de Metzner et Reed (Re_{MR}) pour différents indices d'écoulements n et de nombre de Prandtl de simulation Pr_s sont reportées dans le tableau 6.6.

n	Pr_s	Nu	Nu_{DB}	Gnielinski (1976)	Quaresma (1998)	Sandall et al. (1986)	Pinho et coelho (2010)
0,70	100	109,69	-	-	111,94	60,77	96,43
0,70	11	45,41	-	-	45,30	28,18	45,21
1,00	1	18,45	20,14	21,06	-	24,99	18,30
1,20	1	17,55	-	-	-	22,48	14,77

TABLE 6.5 – Nombre de Nusselt pour $Re_s = 4000$.

n	Pr_s	Pr_{MR}	Re_{MR}
$0,70$	11	$10,73$	$5005,6$
$0,70$	100	$97,57$	$5005,3$
$1,00$	1	1	$4448,5$
$1,20$	1	$0,99$	$3446,2$

TABLE 6.6 – Valeurs de Pr_{MR} et Re_{MR} pour $Re_s = 4000$.

Les résultats montrent une faible différence entre Pr_{MR} et Pr_s (au maximum 3% d'écart), Tab.6.6. Les valeurs de Pr_{MR} et Pr_s seront introduites dans les équations (6.44) et (6.47) afin de déterminer le nombre de Nusselt de ces deux corrélations.

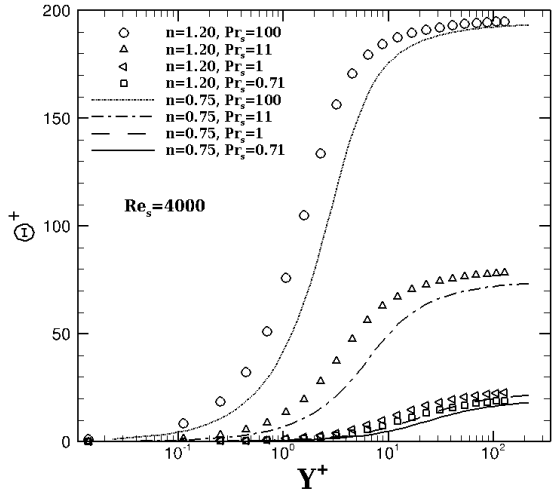
Les valeurs du nombre de Nusselt selon la corrélation de Dittus et Boelter (1930) [12] et la corrélation de Gnielinski (1976) [22] sont aussi indiquées dans le tableau 6.5. Un écart d'environ 8 % est obtenu par rapport à la corrélation de Dittus et Boelter (1930) [12] et 12,4 % à celle de Gnielinski (1976) [22]. Pour le fluide pseudoplastique ($n = 0,7$), nos prédictions LES sont en bon accord avec celles de Quaresma (1998) [63] avec un écart de 0,2 % pour $Pr_s = 11$ et 2 % pour $Pr_s = 100$. Le tableau 6.5 montre également un écart allant de 26,17 % (pour $n = 1$ et $Pr_s = 1$) à 21,9 % (pour $n = 1,2$ pour $Pr_s = 1$) puis 61 % (pour $n = 0,7$ et $Pr_s = 11$) à 80 % (pour $n = 0,7$ et $Pr_s = 100$) pour la corrélation de Sandall et al. (1986) [73]. Nous pouvons conclure que la corrélation de Sandall et al. (1986) [73] semble ne plus marcher lorsque le nombre de Prandtl devient grand. Nos prédictions du nombre de Nusselt présentent des écarts de 0,4 % (pour $n = 0,7$ et $Pr_s = 11$) à 13% (pour $n = 0,7$ et $Pr_s = 100$) et de 36% (pour $n = 0,75$ et $Pr_s = 1$) à 18,7% (pour $n = 1,2$ et $Pr_s = 1$) à la corrélation de Pinho et Coelho (2010) [57]. Concernant la variation du nombre de Nusselt, à n et Re_s fixés (cas à $n = 0,7$, $Re_s = 4000$ et $Pr_s = 11\,;\,100$), elle croît avec le nombre de Prandtl. Ceci est lié à l'augmentation du gradient de température à la paroi (raffinement de la couche limite) avec l'augmentation du nombre de Prandtl.

6.5.2.7 Influences des nombres de Prandtl et de Reynolds de simulation

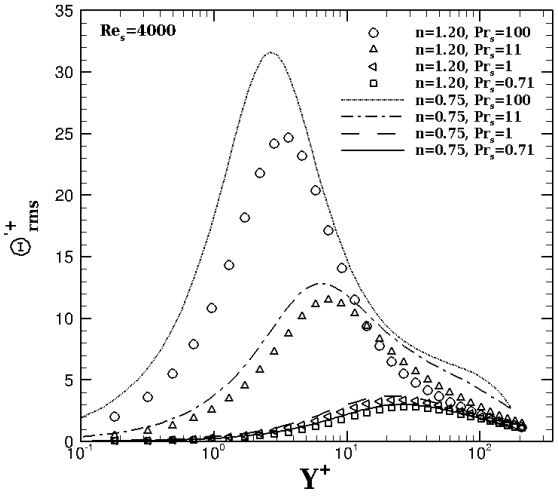
Dans cette partie, nous mettons en évidence l'effet des nombres de Prandtl et de Reynolds de Metzner et Reed sur la non-thermodépendance. Concernant l'influence du nombre de Prandtl, nous avons effectué des simulations à $Re_s = 4000$ pour $Pr_s = 0,71\,;\,1\,;$ 11 et 100 pour les indices d'écoulement $n = 0,75$ et 1,2. L'épaisseur de la couche de conduction dépend du nombre de Prandtl. Plus le nombre de Prandtl est élevé, plus la couche de conduction est fine (Redjem (2008) [66]). Le profil de vitesse, les rms des fluctuations de vitesse (ou les intensités de turbulence) et la tension de Reynolds ne sont pas influencés par le nombre de Prandtl de simulation. A titre indicatif, nous montrons ici quelques profils des champs d'écoulements pour illustrer l'impact du nombre de Prandtl sur la turbulence des fluides non-newtoniens. La figure 6.14 illustre l'évolution de la température, de la rms des fluctuations de température et des flux de chaleur turbulents pour les nombres de Prandtl de simulation $Pr_s = 0,71\,;\,1\,;$ 11 et 100 et les indices d'écoulement $n = 0,75$ et 1,20. Contrairement à la dynamique, la thermique est impactée par la variation du nombre de Prandtl de simulation. On observe une forte augmentation de la température lorsque le nombre de Prandtl de simulation augmente et une réduction de l'épaisseur de la zone de conduction, Fig. 6.14(a). La chaleur est alors transportée vers le centre de la conduite, et les transferts de chaleur sont donc plus importants quand Pr_s augmente,

à n fixé. Au même nombre de Prandtl de simulation, les fluides rhéoépaississants sont plus chauds que les pseudo-plastiques et ceci est lié à la variation de leur viscosité apparente qui est plus élevée à la paroi que celle des fluides rhéofluidifiants (cf. Fig. 6.15(a)).

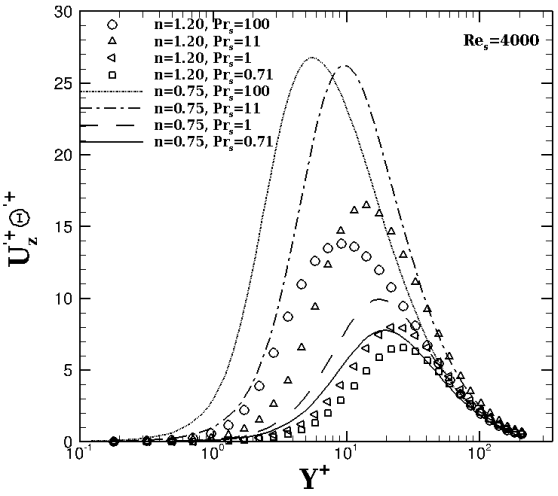
La rms des fluctuations de températures, elle aussi, croît avec les valeurs croissantes de Pr_s. Leurs pics se rapprochent de la paroi lorsque le nombre de Prandtl de simulation augmente. Les pics pour les fluides rhéofluidifiants sont plus hauts que ceux des fluides dilatants pour le même nombre de Prandtl de simulation (Fig. 6.14(b)).



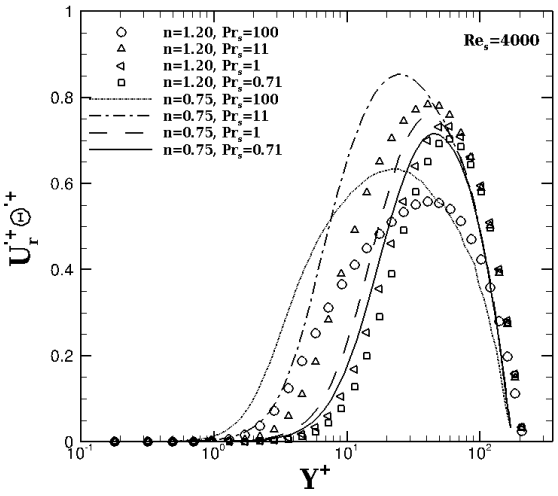
(a) Profil de température moyen



(b) Ecart-type des fluctuations de température

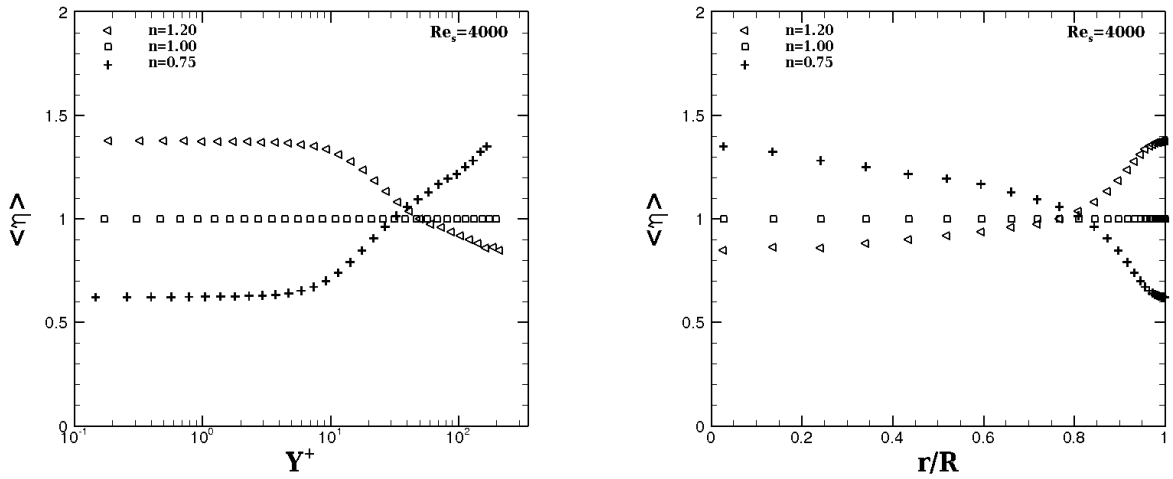


(c) Flux de chaleur turbulent axial



(d) Flux de chaleur turbulent radial

FIGURE 6.14 – Influences du nombre de Prandtl pour $Re_s = 4000$.



(a) $\eta(Y^+)$ (b) $\eta(r)$

FIGURE 6.15 – Profils de la viscosité moyenne pour $Pr_s = 1$.

Les figures 6.14(c) et 6.14(d) montrent l'influence du nombre de Prandtl de simulation sur les flux de chaleur turbulents. On observe une augmentation du flux axial pour les fluides rhéofluidifiants avec les valeurs croissantes du nombre de Prandtl suivant une évolution similaire à celle de la rms des fluctuations de température. Par contre, pour les fluides dilatants ($n = 1,2$), après une augmentation, le pic du flux de chaleur axial diminue quand Pr atteind 100. La même observation est relevée quand $Pr_s = 100$ pour $n = 1,2$ et $n = 0,75$. Il est probable que la résolution des simulations à $Pr_s = 100$ ne soit pas suffisante pour pouvoir conclure. Des calculs avec des maillages fins à Pr_s élevés devront être menés au futur avant toute conclusion.

Le tableau 6.7 présente l'influence du nombre de Prandtl de simulation sur l'évolution du nombre de Nusselt pour les fluides non-newtoniens ($n = 0,7$; 1 et 1,2) à $Re_s = 4000$ et les solutions de Quaresma (1998) [63] pour $n = 0,7$, $Pr = 11$ et 100. On observe une variation du nombre de Nusselt similaire à celle du fluide newtonien dont le nombre de Nusselt augmente avec le nombre de Prandtl. Aussi à Pr donné, les transferts thermiques dans les fluides rhéofluidifiants (n<1) sont légèrement plus élevés que ceux dans les fluides dilatants.

Pour évaluer l"influence du nombre de Reynolds sur les champs turbulents, on fait varier le nombre de Reynolds : des LES à $Re_s = 8000$ et $Re_s = 12000$ sont conduites pour $n = 0,75$ et $n = 1,2$, Fig. 6.16. Pour ces simulations, le nombre de Prandtl de simulation est égal à 1. Les profils de vitesse sont identiques à ceux de l'écoulement isotherme (chapitre 4). La température du fluide rhéofluidifiant ($n = 0,8$) augmente significativement dans les zones tampon et logarithmique lorsque le nombre de Reynolds de simulation décroît, Fig. 6.16(a). Les pics des rms des fluctuations de température sont amplifiés avec le nombre de Reynolds de simulation et sont localisés dans la zone tampon, à une distance de la paroi qui décroît quand Re_s, Fig. 6.16(b). La turbulence devient plus intense et induit la diminution de la température avec de forts gradients thermiques dans la zone

Pr	$n = 0,7$	$n = 1,0$	$n = 1,2$	Quaresma (1998)
$0,71$	–	$16,14$	$15,48$	–
1	–	$18,47$	$17,75$	–
2	–	$24,48$	$23,42$	–
11	$45,41$	$46,76$	$45,09$	$45,30$
100	$109,69$	$103,36$	$101,68$	$111,94$

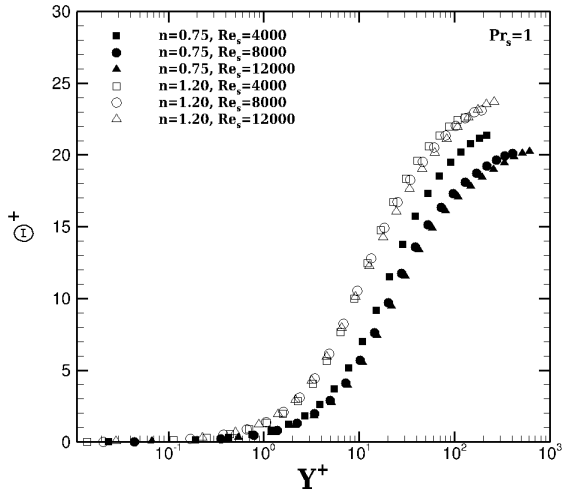
TABLE 6.7 – Influence du nombre de Prandtl de simulation sur le nombre de Nusselt à $Re_s = 4000$

proche de la paroi. Les flux de chaleur turbulents (Figs. 6.16(c) et 6.16(d)) présentent une évolution similaire à celle des rms des fluctuations de température. L'augmentation du nombre de Reynolds génère une forte augmentation du flux de chaleur axial (Fig. 6.16(c)) et une faible augmentation du flux de chaleur radial (Fig. 6.16(d)).

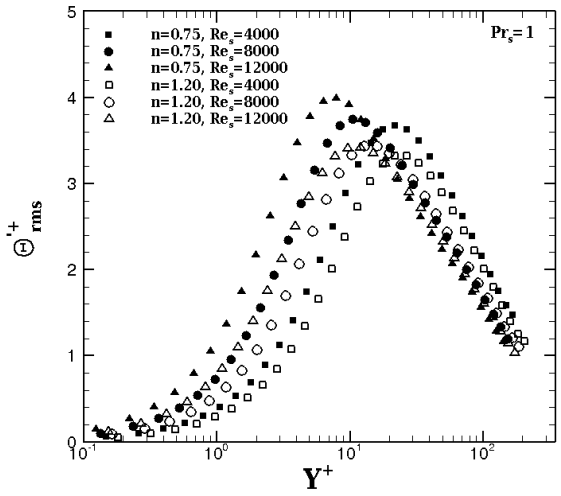
Le nombre de Reynolds produit également des effets significatifs sur le transfert de chaleur. Dans le tableau 6.8 sont listées les valeurs du nombre de Nusselt. Elles croissent avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Ceci s'explique par le fait que l'augmentation du nombre de Reynolds entraîne une amplification de la rms des fluctuations de température et un meilleur brassage qui favorise les transferts thermiques, quel que soit n.

Re_s	$n = 0,75$	$n = 1,20$
4000	$17,16$	$17,55$
8000	$28,36$	$26,43$
12000	$38,36$	$35,83$

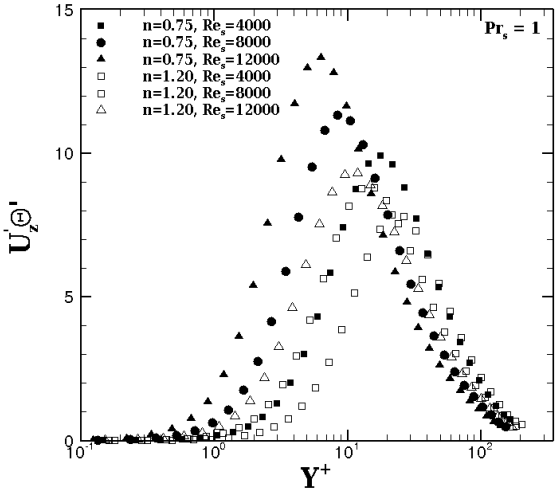
TABLE 6.8 – Influence du nombre de Reynolds sur le nombre de Nusselt pour $Pr_s = 1$.



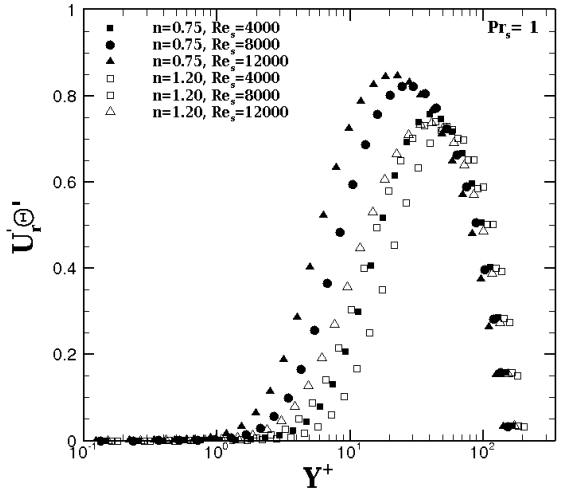
(a) Profil de température moyen



(b) Ecart-type des fluctuations de température



(c) Flux de chaleur turbulent axial



(d) Flux de chaleur turbulent radial

FIGURE 6.16 – Influences du nombre de Reynolds pour $Pr_s = 1$.

6.6 Les écoulements thermodépendants

Il s'agit des écoulements dont la viscosité dépend de la température à travers la consistance. Ces écoulements sont caractérisés par un nombre de Pearson non nul. L'explication de ce phénomène ainsi que ses conséquences sur les structures d'écoulements sont présentées à la section 6.1. Dans cette dernière partie du mémoire, nous allons montrer les influences de la thermodépendance sur les écoulements des fluides d'Ostwald de Waele dans une conduite cylindrique chauffée par une densité de flux constant. Tous les paramètres de simulation, le modèle numérique, les conditions initiales et les conditions aux limites ainsi que le traitement numérique de l'écoulement sont identiques à ceux choisis pour

les écoulements isothermes et non-thermodépendants. Le seul paramètre modifié dans les simulations du cas thermodépendant est le nombre de Pearson. Une remarque très importante pour ces calculs thermodépendants est le coût de calcul qui devient très onéreux car on recalcule à chaque itération tous les coefficients du système linéaire associé à l'équation de quatité de mouvement. De plus, ces coefficients sont des fonctions exponentielles coûteuses à calculer.

6.6.1 Régime laminaire

6.6.1.1 Viscosité, vitesse et température

L'influence de la thermodépendance sur les écoulements laminaires des fluides d'Ostwald de Waele est illustrée par l'évolution des profils de viscosité moyenne, de vitesse axiale, de température en fonction du nombre de Pearson et la variation du nombre de Nusselt et du coefficient de frottement, pour $Re_s = 500$ et $Pr_s = 1$. Nous avons représenté dans les figures 6.17 l'évolution de la viscosité moyenne du fluide d'Ostwald de Waele en écoulement thermodependant et non-thermodépendant, en fonction du rayon de la conduite à $Re_s = 500$, $Pr_s = 1$. La viscosité des trois fluides d'Ostwald de Waele simulés augmente au centre de la conduite avec les valeurs croissantes du nombre de Pearson Pn (cf. Fig. 6.17). Ce qui est évident car la viscosité est calculée à partir de la formule suivante : $\eta = K\dot{\gamma}^{n-1}$ où $K = K_0 e^{Pn(\Theta-\Theta_b)}$. Forcément, quand Pn croît, la viscosité croît aussi. Nos prédictions LES montrent que la viscosité à la paroi de la conduite reste constante pour chaque indice de comportement n, quand Pn varie.

Dans la figure 6.18(a), les distributions radiales de la vitesse axiale montrent la déformation du profil de vitesse par rapport au cas non-thermodépendant ($Pn = 0$). De façon générale, lorsque Pn croît, le profil de vitesse s'aplatit quel que soit n. Autrement dit, on observe une accélération de l'écoulement du fluide à la paroi et une décélération au centre de la conduite dans le cas $Pn = 1$ (cf. Fig. 6.18(a)). Notons que l'accélération de l'écoulement est moins marquée pour les fluides rhéoépaississants. Comme l'ont souligné Peixinho (2004) [54], Mizushina et al. (1967) [40], Nguyen et al. (2005) [50], la thermodépendance est plus marquée pour les fluides rhéofluidifiants ($n = 0,8$).

L'évolution de la température moyenne des fluides non-thermodépendants et thermodépendants est tracée sur la figure 6.18(b). La température des fluides thermodépendants baisse notablement dans le cas rhéofluidifiant comparée à celle des fluides non-thermodépendants. Ceci est lié, au fait que, comme dans le cas des fluides thermodépendants, l'écoulement est accéléré au voisinage de la paroi (cf. Figs. 6.18(a)), la chaleur a moins de temps pour diffuser vers le coeur de la conduite, ce qui indique clairement une température plus faible du fluide thermodépendant.

6.6.1.2 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt

Les valeurs du coefficient de frottement et du nombre de Nusselt pour les écoulements laminaires thermodépendants sont regroupés dans le tableau 6.9 pour le nombre de Reynolds $Re_s = 500$, le nombre de Prandtl $Pr_s = 1$ et le nombre de Pearson $Pn = 1$. Analytiquement pour un écoulement laminaire, non-thermodépendant, pleinement développé, le coefficient de frottement est calculé par la formule $f = 16/Re_{MR}$ qui donne 0,032. Nous rappelons que dans le cas des écoulements laminaires non-thermodépendants, le co-

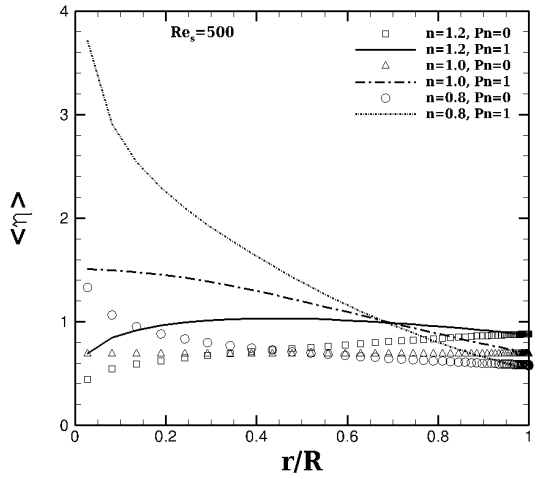
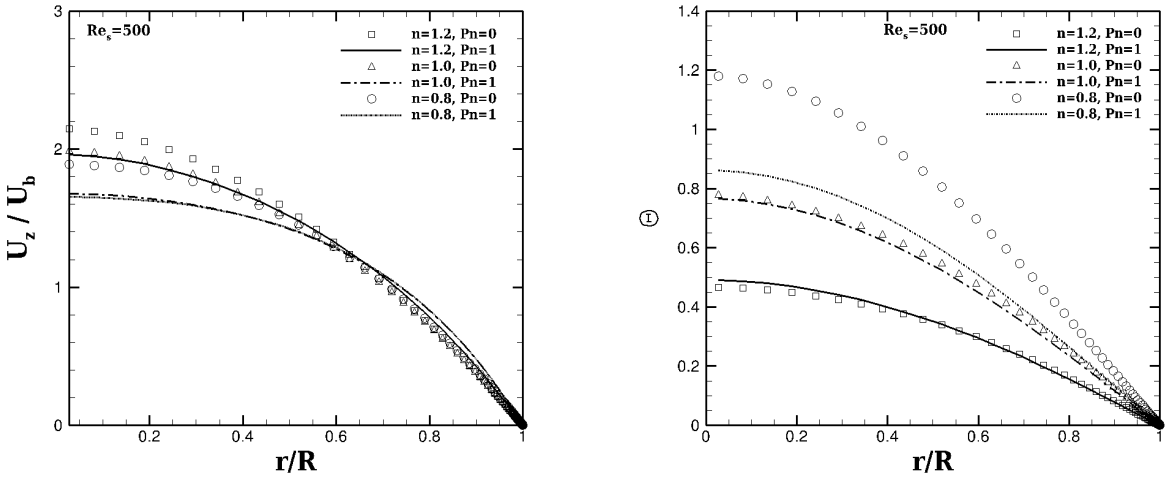


FIGURE 6.17 – Viscosité apparente pour $Re_s = 500$ et $Pr_s = 1$.



(a) vitesse axiale

(b) température

FIGURE 6.18 – Profils de vitesse axiale et de température pour $Re_s = 500$, $Pr_s = 1$.

efficient de frottement prédit par la présente LES était de l'ordre de 0,0341 pour toutes les valeurs de l'indice de comportement n. Pour les écoulements laminaires thermodépendants, comme l'ont noté Nguyen et al. (2007) [51] sur les simulations du fluide thermodépendant entre deux plaques parallèles, le coefficient de frottement croît significativement avec les valeurs croissantes de l'indice de comportement n. Nos prédictions sont en accord avec cette tendance pour Cf (cf. Tab. 6.9). Ceci est lié à l'augmentation de la viscosité du fluide au voisinage de la paroi. En outre, pour une valeur de n fixée, on remarque une baisse du coefficient de frottement quand Pn varie de 0 à 1, baisse d'autant plus accentuée que n est faible, probablement due à l'augmentation de la vitesse du fluide plus

marquée pour les fluides rhéofluidifiants, comme discuté sur la figure 6.18(a). Concernant les transferts thermiques, ils augmentent environ de 10% lorsque l'écoulement passe de non-thermodépendant à thermodépendant. Le nombre de Nusselt des écoulements thermodépendants croît lorsque l'indice de comportement n augmente. Ceci est induit par l'écart de température $T_p - T_b$ qui croît avec n.

n	Cf	Nu	Nu_{NT}	Nu_{NT-th}
$0,8$	$0,0307$	5,073	$4,576$	$4,467$
$1,0$	$0,0309$	$5,075$	$4,447$	$4,363$
$1,2$	$0,0314$	$5,170$	$4,410$	$4,290$

TABLE 6.9 – Coefficient de frottement et nombre de Nusselt pour $Re_s = 500$, $Pn = 1$, $Pr_s = 1$ avec Nu : Nusselt thermodépendant, Nu_{NT} : Nusselt non-thermodépendant et Nu_{NT-th} : Nusselt de la formule théorique non-thermodépendant.

6.6.2 Régime turbulent

($n = 0,75$, $Pn = 1$, $Pr_s = 1$, $Re_s = 4000$) De nombreuses publications analysent les transferts thermiques dans les écoulements turbulents de fluide Newtonien. En revanche, rares sont celles dédiées à l'étude thermique dans les écoulements de fluides non-newtoniens, et très peu considèrent le cas des fluides thermodépendants. D'un point de vue expérimental, cela peut se comprendre pour certains fluides tels que les polymères fondus (pour lesquels $Pn = 5$) ou les assemblages de polymères (de comportement rhéologique non-newtonien) pour lesquels le mélange par un écoulement turbulent peut dégrader le fluide. En effet, dans ces fluides, le cisaillement peut introduire une dégradation des longues chaînes polymériques (Moguen et al. (2011)) [41]. Dans ce cas, le mélange par advection chaotique est préféré, par exemple, en générant un écoulement obtenu par modulation temporelle de la vitesse de rotation des élements mobiles d'un mélangeur. Dans cette partie, nous présentons les résultats pour $n = 0,75$ à $Re_s = 4000$, $Pr_s = 1$ et $Pn = 1$. L'objectif de cette partie est d'analyser les effets combinés de la variation de la viscosité avec la température et du taux de cisaillement dans l'écoulement turbulent sur les champs dynamique et thermique.

6.6.2.1 Viscosité, vitesse et température

L'évolution de la viscosité sur la section droite de la conduite des écoulements thermodépendants ($Pn = 1$) et non-thermodépendants ($Pn = 0$) d'un fluide rhéofluidifiant ($n = 0,75$) est tracée sur la figure 6.19. Sur cette figure, on observe une augmentation de la viscosité dans toute la conduite lorsque l'écoulement devient thermodépendant. Cette augmentation est plus importante au centre de la conduite. Cela s'explique à partir de la définition de η : $\eta = K\dot{\gamma}^{n-1}$ avec $K = K_0 e^{Pn(\Theta-\Theta_b)}$ et des figures 6.20(b) et 6.20(a) qui montrent l'évolution de $\Theta = \frac{T_p - T}{T_{ref}}$ et de $\dot{\gamma}$ en fonction de r/R. La figure 6.20(a) indique que près de la paroi, $\dot{\gamma}(Pn = 1) < \dot{\gamma}(Pn = 0)$. Par conséquent, comme le fluide est rhéofluidifiant, même si $\Theta - \Theta_b = \frac{T_b - T}{T_{ref}}$ est négatif près de la paroi et la consistance K y est plus faible que K_0 (K_0 est la consistance à $Pn = 0$, et K la consistance pour Pn non nul). En revanche, pour $r/R < 0,9$ environ, $\Theta - \Theta_b$ est positif car le fluide est plus froid

au centre de la conduite (cf. Fig. 6.20(b)). Par conséquant, $K > K_0$ dans cette zone, alors que le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est le même à $Pn = 0$ et $Pn = 1$: la viscosité augmente sous l'effet de l'augmentation de la consistance au centre de la conduite.

Sur la figure 6.21 sont représentés les profils de vitesse axiale et de température en unité de paroi pour l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant thermodépendant ou non-thermodépendant. L'écoulement turbulent thermodépendant est accéléré dans la zone logarithmique (cf. Fig. 6.21(a)). Le fluide thermodépendant est moins chaud dans cette zone de la conduite (cf. Fig. 6.21(b)). Ceci est lié au fait que, comme l'écoulement thermodépendant est plus rapide dans cette zone, le flux de chaleur radial diffusé vers le centre de la conduite diminue quand Pn croît : la température baisse alors dans cette région lorsque l'écoulement est thermodépendant (cf. Fig. 6.20(b)).

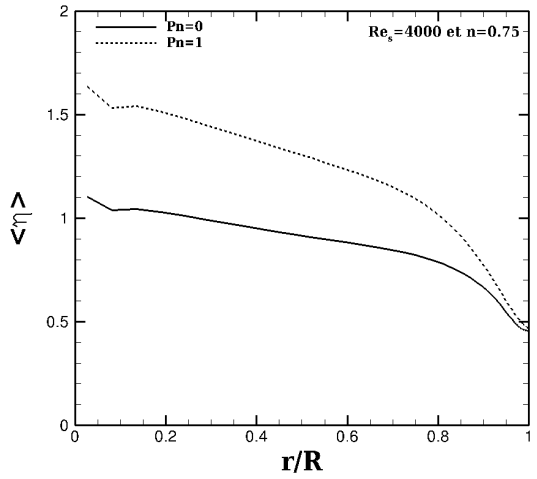
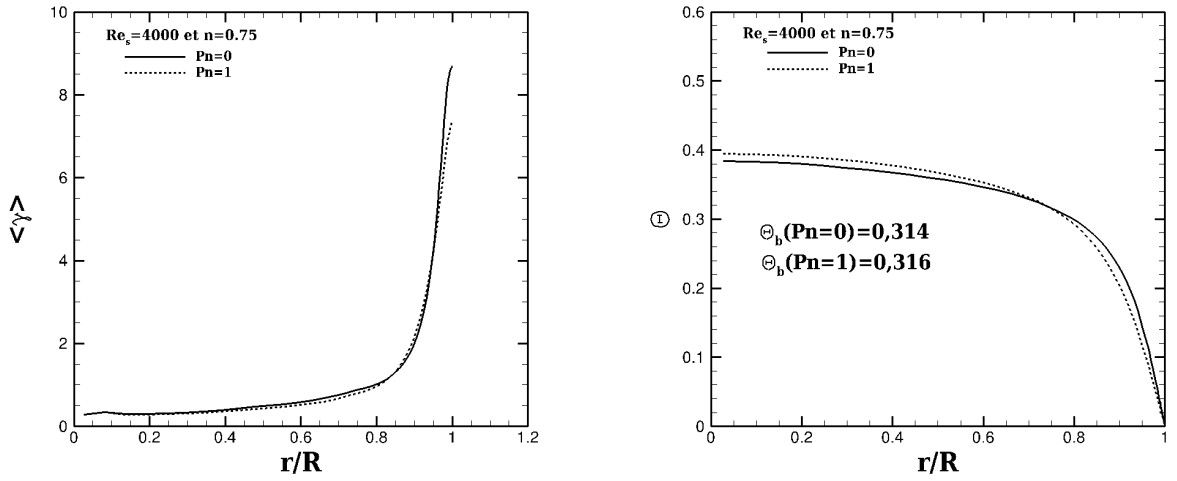


FIGURE 6.19 – Viscosité moyenne pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ (avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants).

6.6.2.2 rms des fluctuations de vitesse et de température

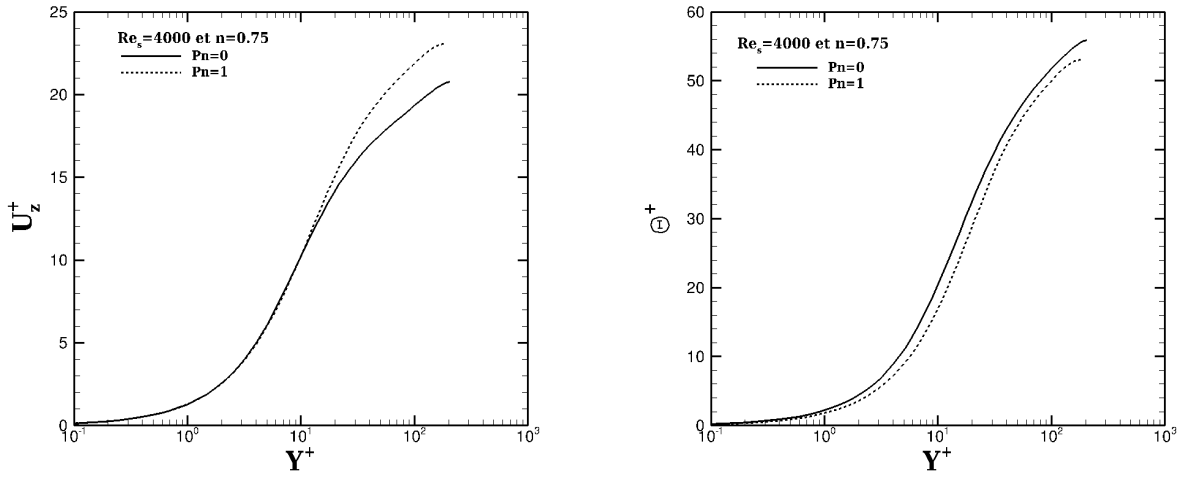
La rms des fluctuations de vitesse axiale du fluide thermodépendant est plus élevée que celle du fluide non-thermodépendant sur une partie de la section de la conduite entre par $r/R = 0,2$ et $r/R = 0,9$ (cf. Fig. 6.22(a)). Au contraire, les rms des fluctuations des vitesses radiale et azimutale sont beaucoup plus faibles pour $Pn = 1$ que pour $Pn = 0$ (cf. Figs. 6.22(b) et 6.22(c)). L'intensité plus importante de $rms(U_z')$ à $Pn = 1$ peut s'expliquer par la valeur plus élevée de U_z^+ (cf. Fig. 6.21(a)). Les valeurs plus faibles des $rms(U_r')$ et $rms(\Theta')$ s'expliquent par la viscosité plus importante à $Pn = 1$ (cf. Fig. 6.19) qui empêche le développement des fluctuations transverses.

Quant à la rms des fluctuations de température des deux écoulements thermodépendant et non-thermodépendant, elle est presque égale dans cette partie de la section (cf. Fig. 6.22(d)). La rms des fluctuations de température est plus faible que les rms des fluctuations des vitesses. Les pics des rms des fluctuations de vitesse du fluide non-thermodépendant



(a) taux de cisaillement (b) température

FIGURE 6.20 – Taux de cisaillement et température pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ (avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants).

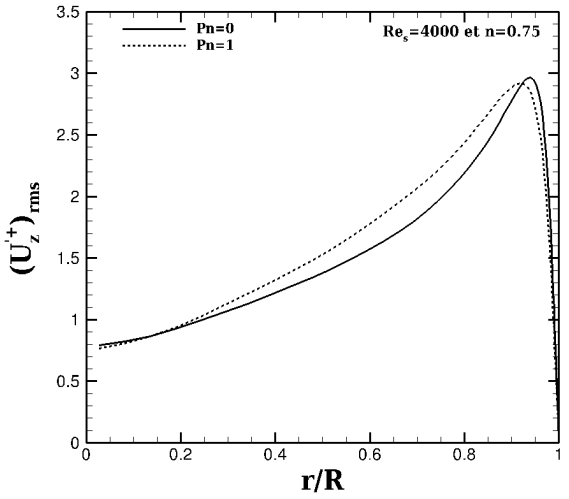


(a) vitesse axiale (b) température

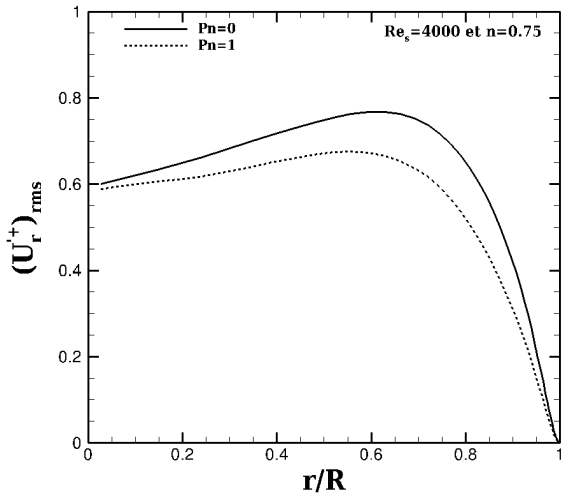
FIGURE 6.21 – Vitesse axiale et température pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ (avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants).

est plus haut que celui du fluide thermodépendant et se situe à une distance proche paroi plus petite que celle du fluide thermodépendant. Les fluctuations turbulentes sont donc moins intenses au voisinage de la paroi lorsque le nombre Pearson augmente pour un fluide

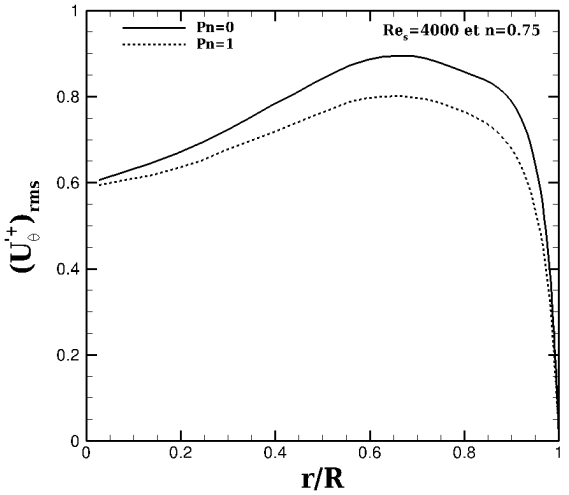
rhéofluidifiant car la viscosité augmente.



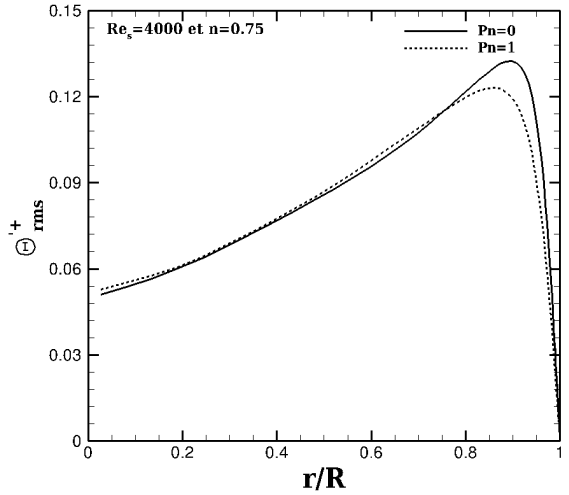
(a) $rms(U_z')$



(b) $rms(U_r'))$



(c) $rms(U_\theta')$



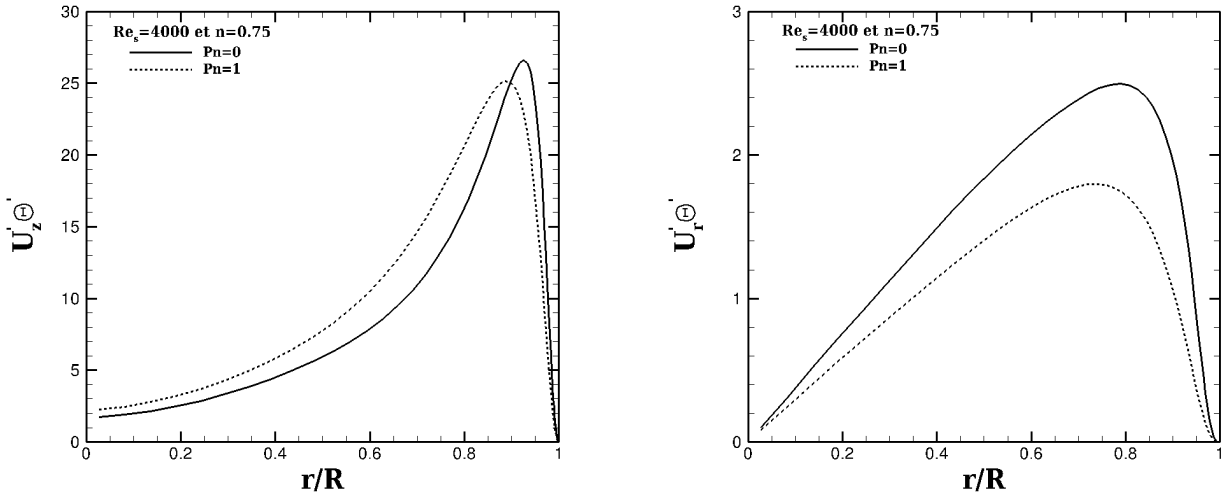
(d) $rms(\Theta')$

FIGURE 6.22 – rms des fluctuations de vitesse et de température pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants.

6.6.2.3 Flux de chaleur turbulent

Les flux de chaleur turbulents axial et radial sont tracés sur les figures 6.23(a) et 6.23(b). Le flux turbulent axial, Fig. 6.23(a), présente une évolution similaire à la rms de fluctuations de vitesse axiale (cf. Fig. 6.22(a)) montrant ainsi la forte corrélation entre les

fluctuations U_z' et Θ'. Le flux de chaleur radial subit une baisse notable avec l'augmentation du nombre de Pearson (cf. Fig. 6.23(b)), car la viscosité du fluide croît quand Pn augmente.



(a) $U_z'\Theta'$ (b) $U_r'\Theta'$

FIGURE 6.23 – Flux de chaleur turbulents pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants.

6.6.2.4 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt

L'influence de la thermodépendance sur le nombre de Nusselt et le coefficient de frottement dans l' écoulement turbulent du fluide non-newtonien d'indice de comportement $n = 0,75$ à $Re_s = 4000$ et $Pr_s = 1$ est illustrée dans le tableau 6.10. Dans le cas thermodépendant, nous avons vu que la viscosité augmente au voisinage de la paroi sous l'effet de la diminution de $\dot{\gamma}$ et du caractère rhéofluidiant du fluide. Au centre de la conduite, une zone de forte viscosité est observée car, en plus de la consistance élevée sous l'effet de la diminution de la température. C'est pour cela qu'on observe à la fois une diminution du coefficient de frottement à la paroi et du nombre de Nusselt avec les valeurs croissantes du nombre de Pearson.

	$Pn = 0$	$Pn = 1$
Cf	$8,207.10^{-3}$	$7,139.10^{-3}$
Nu	$19,73$	$15,43$

TABLE 6.10 – Coefficient de frottement et nombre de Nusselt pour $n = 0,75$ à $Re_s = 4000$ et $Pr_s = 1$.

Conclusion

Les transferts de chaleur en écoulements turbulents d'un fluide d'Ostwald de Waele, dans une conduite cylindrique chauffée sont étudiés par simulation numérique à grande échelle avec le modèle de Smagorinsky non-newtonien (pour les tenseurs de viscosité sous-maille) et le modèle à nombre de Prandtl turbulent constant (pour les flux de chaleur sous-maille). Nous avons analysé l'influence de l'indice de comportement, du nombre de Prandtl et du nombre de Reynolds sur la vitesse axiale, la température, les statistiques turbulentes (rms de température, flux de chaleur turbulent), sur les transferts thermiques et sur les coefficients de frottement. Les simulations ont été effectué dans deux cas : écoulements non-thermodépendants et écoulements thermodépendants, en régimes laminaire et turbulent. Il émane de nos simulations les conclusions suivantes :
- en régimes laminaire et turbulent, le fluide s'échauffe davantage lorsque l'indice de comportement est faible et d'autant plus vite dans le cas non-thermodépendant que dans le cas thermodépendant ;
- à nombres de Reynolds et Prandtl de simulation fixés, le nombre de Nusselt décroît avec l'augmentation de n dans le cas non-thermodépendant. Cela est nettement plus marqué en régime laminaire ;
- à nombre de Prandtl de simulation et indice de comportement fixés, le nombre de Nusselt croît avec le nombre de Reynolds, en régime laminaire dans le cas non-thermodépendant ;
- le pic des rms des fluctuations de température s'intensifie avec la diminution de n, avec l'augmentation de Pr_s et Re_s pour les écoulements non-thermodépendants ;
- en régime turbulent,dans le cas non-thermodépendant, le nombre de Nusselt diminue quand Pr_s décroît à Re_s et n fixés et Nu augmente quand Re_s croît à Pr_s et n fixés.

Le problème thermique dans les écoulements de fluides thermodépendants fait intervenir des mécanismes plus complexes que ceux qui interviennent dans les écoulements non-thermodépendants. Les effets de la variation de viscosité dues à la thermodépendance sont beaucoup plus complexes et rendent plus difficile la prédiction et l'interprétation des tendances et comportements du fluide non-newtonien, d'autant plus en régime turbulent. En régime laminaire, on observe un aplatissement des profils de vitesse et de température avec l'augmentation du nombre de Pearson, à n et Re_s fixés. Cette tendance est fortement accentuée sur le profil de température pour le fluide rhéofluidifiant. Les coefficients de frottement et le nombre de Nusselt diminuent avec les valeurs croissantes de Pn, due à l'augmentation de la vitesse et du gradient de vitesse au voisinage de la paroi. En régime turbulent et $Pn = 1$, l'impact de la variation de la viscosité avec la température et le cisaillement sur les champs dynamique et thermique a montré une augmentation de la vitesse axiale et une baisse de la température et des fluctuations de vitesse et de température au centre de la conduite. Quant au nombre de Nusselt, il diminue avec l'augmentation de Pn à Re_s et n fixés.

Il faut noter que dans cette étude du cas thermodépendant, seul le fluide rhéofluidifiant avec $n = 0,75$ a été étudié pour $Re_s = 4000$, $Pn = 1$ et $Pr_s = 1$. Des simulations futures tenant compte des effets de l'indice de comportement n, de Re_s, de Pn et de Pr_s pourraient être effectuées afin de mieux comprendre les mécanismes mis en jeu dans le cas thermodépendant. En conclusion, on peut bien dire que si le transfert de chaleur dans le cas non-thermodépendant est plus ou moins compris, celui pour le cas thermodépendant nécessite des études plus poussées, en particulier en régime turbulent.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail de thèse porte sur la simulation numérique à grande échelle de l'écoulement turbulent du fluide d'Ostwald de Waele, en conduite cylindrique chauffée par une densité de flux de chaleur uniforme imposée à la paroi. Les simulations ont été réalisées pour des indices d'écoulement n tels que $0,4 \leq n \leq 1,4$, pour une gamme de nombres de Reynolds de simulation $500 \leq Re_s \leq 12000$, nombres de Prandtl de simulation tels que $0,71 \leq Pr_s \leq 100$ et des nombres de Pearson $0 \leq Pn \leq 1$. Un code de base développé au laboratoire MSME (équipe TCM, Université Paris Est Marne-la-Vallée) avec la contribution de P. Orlandi (Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale, Università La Sapienza, Rome, Italy) pour simuler les écoulements d'un fluide Newtonien, a été modifié et adapté afin de tenir compte de l'évolution de la viscosité apparente et d'établir un code pour l'étude des fluides non-Newtoniens. Cette viscosité, grandeur centrale de la présente étude, a été calculée de manière explicite. Les statistiques de la turbulence ont été obtenues par des moyennes en temps et en espace (dans les directions périodiques).

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous avons discuté de quelques généralités sur les fluides non-Newtoniens. Certains modèles rhéologiques ainsi que leur interprétation physique ont été également présentés. Une revue bibliographique sur les écoulements des fluides non-Newtoniens en régime laminaire et turbulent est présentée dans le chapitre 2. Une description de l'approche LES et de deux modèles sous-maille (modèle de Smagorinsky Standard et modèle dynamique) est exposée dans le chapitre 3. Dans ce même chapitre, nous avons détaillé les équations de quantité du mouvement résolues par la méthode LES, les condtions aux limites, les conditions initiales, la méthode de résolution, le schéma numérique et les statistiques de la turbulence.

Dans le chapitre 4, nous nous sommes intéressés à l'analyse des résultats des écoulements isothermes du fluide d'Ostwald de Waele en conduite cylindrique simulés par LES avec modèle dynamique. Le profil de vitesse adimensionnée par la vitesse moyenne, en régime laminaire, est comparé au profil de vitesse laminaire analytique et aux mesures de vitesse de Scirocco et al. (1984) [75]. Dans le régime turbulent, les champs moyens et les statistiques de la turbulence (vitesse axiale, rms ou intensités de turbulence, tension de Reynolds) sont confrontés aux résultats de la DNS de Rudman et al. (2004) [69], Eggels et al. (1994) [15] et aux valeurs expérimentales de Pinho et al. (1990) [56]. Un bon accord a été obtenu avec ces différentes références. Nous avons également étudié l'évolution des coefficients de dissymétrie et d'aplatissement pour caractériser la dispersion des fluctuations des vitesses axiale, radiale et azimutale et leur probabilité d'occurence. De plus, l'influence de l'indice d'écoulement et du nombre de Reynolds a été considérée. Nos prédictions ont montré que les fluctuations sont intenses dans la zone tampon. Le coefficient de frottement pour les différentes valeurs d'indice d'écoulement a été comparé aux corrélations de Dodge et Metzner (1959) [13], Frank Schuk et Gomes (1987) [23], Ostwald Waele et Gomes

[23] et de Hanks et Ricks (1975) [28]. Il augmente avec les valeurs croissantes de l'indice d'écoulement n. Nos visualisations en $2D$ et en $3D$ des fluctuations de vitesse axiale confirment l'écoulement turbulent moins développé obtenu par Rudman et al. (2004) [69] pour le cas $n = 0,5$. Autrement dit, à ce nombre de Reynolds, la turbulence devient moins développée lorsque l'indice d'écoulement n diminue. Afin d'améliorer ces résultats, nous avons développé dans le chapitre 5, le modèle de Smagorinsky non-Newtonien, en nous inspirant du travail de Ohta et Miyashita (2014) [52]. Il en ressort de nos prédictions LES une superposition du profil de vitesse axiale à la solution DNS de Rudman et al. (2004) [69] et un rapprochement des rms des fluctuations de vitesses vers celles de Rudman et al. (2004) [69]. Les écarts entre les modèles dynamique et Smagorinsky non-Newtonien sont aussi analysés. De façon générale, le modèle de Smagorinsky non-Newtonien a fourni de meilleurs résultats, plus proches de la littérature.

Le problème thermique dans les écoulements du fluide d'Ostwald de Waele est traité dans le chapitre 6 par LES. Les tensions sous-maille sont approchées par le modèle de Smagorinsky non-Newtonien et les flux de chaleur sous-maille par le modèle de nombre de Prandtl turbulent constant. Il fallait donc trouver un nombre de Prandtl turbulent qui retrace bien le transfert de chaleur pour cette étude. Pour ce faire, nous avons effectué des simulations LES très fines (équivalentes à des DNS) avec le modèle dynamique. Il ressort de ces simulations que le nombre de Prandtl turbulent vaut $1,5$ pour le cas $n = 0,75$ et $0,7$ pour les cas $n = 1$ et $1,2$. Nous avons donc utilisé ces valeurs du nombre de Prandtl pour nos simulations des transferts thermiques. Contrairement aux simulations dont les résultats sont présentés dans le chapitre 4, ici, la conduite est soumise à une densité de flux de chaleur uniforme. L'effet de la température sur la viscosité et donc sur le champ thermique est défini par le nombre de Pearson $Pn = bR\phi_p/\lambda$. Dans cette thèse, il est compris entre 0 et 2. Nous rappelons que dans le cas où $Pn = 0$, les écoulements sont non-thermodépendants. Les prédictions de ces écoulements non-thermodépendants sont identiques à celles présentées dans le chapitre 4. Pour $Pn \neq 0$, les écoulements deviennent thermodépendants, c'est-à-dire que la consistance dépend fortement de la température. Pour le nombre de Prandtl de simulation $Pr_s = 1$, l'influence du nombre de Pearson sur les écoulements laminaires pour différents indices d'écoulement à $Re_s = 500$ et sur les écoulements turbulents pour $n = 0,75$ à $Re_s = 4000$ est discutée. Dans le cas non-thermodépendant, nos prédictions LES sont validées par les solutions DNS de Redjem (2008) [66] dans le cas Newtonien et les solutions numériques de Quaresma (1998) [63] pour $n = 0,7$. Nous pouvons retenir que nos prédictions LES du nombre de Nusselt dans les écoulements laminaire et turbulent sont en bon accord avec les corrélations de la littérature. Concernant l'évolution du transfert thermique, celui-ci diminue avec la croissance de l'indice d'écoulement n, à Pr_s et Re_s fixés, comme reporté par Tennekes et Lumley (1972) [82] et confirmé par la DNS de Redjem (2008) [66]. Dans la couche limite thermique, la sous-couche de conduction, d'après nos prédictions LES, devient fine avec l'augmentation du nombre de Prandtl de simulation dans le cas non-thermodépendant. À nombre de Reynolds de simulation fixé, le nombre de Nusselt augmente beaucoup avec la croissance du nombre de Prandtl de simulation. Lorsque les écoulements deviennent thermodépendants, on observe un aplatissement du profil de vitesse en régime laminaire. De même pour le fluide rhéofluidifiant, la température subit une nette diminution au centre de la conduite. En régime turbulent, la vitesse augmente dans la zone logarithmique avec l'augmentation du nombre de Pearson, tandis que la température diminue. Quant au coefficient de frottement, il diminue avec les valeurs croissantes de Pn, ainsi que le

nombre de Nusselt qui est réduit notablement. La viscosité apparente qui devient élevée sur la section droite de la conduite quand Pn augmente. En conséquent, on observe une diminution des rms des fluctuations de vitesses transverses et de température et des flux de chaleur.

La suite logique de cette étude consistera à analyser l'effet des nombres de Prandtl et de Reynolds sur les statistiques, sur les champs de vitesse et de température dans le cas des écoulements thermodépendants en régime turbulent, à l'aide de simulation à grande échelle avec le modèle de Smagorinsky non-Newtonien pour le fluide rhéofluidifiant ($n = 0,75$). Il serait également intéressant de mener une étude similaire pour un fluide dilatant ($n = 1,2$ par exemple), en vue de comparer les comportements des deux fluides. Une autre perspective importante concerne la modélisation des divers termes sous-maille qui apparaissent dans les équations filtrées gouvernant l'écoulement du fluide non-Newtonien. Quelques rares études se sont penchées sur ce problème et ont proposé des modèles pour les fluides non-Newtoniens, tel que l'approche "Temporal Large Eddy Simulation" (TLES) de Thais et al. (2010) [83] ou tel que "le modèle dynamique non-linéaire" de Wang et Bergstrom (2005) [91]. Mais ces approches nécessitent encore des tests numériques supplémentaires pour examiner leur validité et l'étendue de leur applicabilité via de possibles confrontations avec les résultats DNS et des mesures expérimentales. Egalement en perspective, divers points intéressants à étudier seraient :

- l'amélioration de la procédure numérique afin de diminuer les temps de calcul (et réduire les coûts) ;
- l'étude de l'écoulement d'un fluide non-Newtonien obéissant à d'autres lois rhéologiques plus complexes (modèle de Bingham, modèle de Herschel Bulkley...) ;
- l'étude de l'influence de la rotation de la paroi sur les champs dynamique et thermique et les transferts thermiques.

Annexe A

Développement de la relation de Rabinowitsch

Pour un écoulement de cisaillement simple en conduite cylindrique, la loi rhéologie est de la forme $\dot{\gamma} = f(\tau)$. C'est-à-dire :

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dr} = f\left(\tau_p \frac{r}{R}\right) \tag{6.48}$$

En intégrant l'équation (6.48) et en tenant compte de la condition d'adhérence ($u(R) = 0$), on obtient :

$$u(r) = \int_r^R f\left(\tau_p \frac{r}{R}\right) dr \tag{6.49}$$

L'équation (6.49) permet de déterminer la vitesse lorsque la loi rhéologique est connue. Le débit massique est :

$$Q_m = \rho \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \rho\pi \int_0^R u(r) d(r^2) = \rho\pi \left[u(r)r^2|_0^R - \int_0^R r^2 \frac{du}{dr} dr\right] = \rho\pi \int_0^R r^2 f\left(\tau_p \frac{r}{R}\right) dr \tag{6.50}$$

En effectuant le changement de varaible $r = \frac{R}{\tau_p}\tau$, on obtient la relation de Rabinowitsch qui s'écrit :

$$Q_m = \frac{\rho\pi R^3}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \tau^2 f(\tau) d\tau \tag{6.51}$$

Annexe B

Résolution de l'équation de Poisson

L'équation de Poisson s'écrit en forme discrète (la position du Φ est à $(i+1/2, j+1/2, k+1/2)$) :

$$\mathcal{L}\Phi(i,j,k) = Q(i,j,k) \tag{B.1}$$

$$i = 1, n1m = n_1 - 1 \qquad j = 1, n2m = n_2 - 1 \qquad k = 1, n3m = n_3 - 1$$

où

$$Q(i,j,k) = \frac{1}{\alpha_l \Delta t}(\mathcal{D}\hat{q})_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} \tag{B.2}$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est transformé dans un opérateur tridiagonal par deux transformées de Fourier :

- décomposition en série de Fourier sur z

$$\Phi(i,j,k) = \sum_{l=0}^{n3m-1} \hat{\Phi}(i,j,l) e^{I\frac{2\pi}{n3m}kl} \qquad l = 0, n3m-1 \tag{B.3}$$

Comme $Q(i,j,k)$ sont réels, on applique une transformée de Fourier rapide (FFT) de type réel-demi-complexe ; par conséquent :

$$\hat{Q}(i,j,l) = conj\left(\hat{Q}(i,j,n3m-1)\right) = A(l) + IB(l)$$

$$A(l) = \frac{1}{n3m}\sum_{k=0}^{n3m-1} Q(i,j,k) cos(\frac{2\pi}{n3m}kl) \tag{B.4}$$

$$B(l) = -\frac{1}{n3m}\sum_{k=0}^{n3m-1} Q(i,j,k) sin(\frac{2\pi}{n3m}kl)$$

et l'équation à résoudre devient :

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right]\hat{\Phi}(i,j,l) - k_l^{'}\hat{\Phi}(i,j,l) = \hat{Q}(i,j,l) \qquad l = 0, n3m/2 \tag{B.5}$$

où on a utilisé la discrètisation :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}(i,j,k) = \frac{\Phi(i,j,k+1) - 2\Phi(i,j,k) + \Phi(i,j,k-1)}{\Delta z^2} \tag{B.6}$$

qui donne comme nombre d'onde :

$$\kappa_l^{'} = \frac{2}{\Delta z^2}\left[1 - cos(\frac{2\pi}{n3m}l)\right] \tag{B.7}$$

– décomposition en série de Fourier sur θ

$$\hat{\Phi}(i,j,l) = \sum_{p=0}^{n1m-1} \hat{\hat{\Phi}}(p,j,l) e^{I\frac{2\pi}{n1m}pi} \qquad p = 0, n1m-1 \qquad (B.8)$$

Cette fois-ci la transformée de Fourier sera de type complex-complex ; avec une discrétisation du type (B.6) l'équation du départ est réduite à :

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}\right] \hat{\hat{\Phi}}(p,j,l) - k_l^{'}\hat{\hat{\Phi}}(p,j,l) - \frac{1}{r^2}k_p^{'}\hat{\hat{\Phi}}(p,j,l) = \hat{Q}(p,j,l) \qquad l = 0, n3m/2 \quad (B.9)$$

avec :

$$\kappa_l^{'} = \frac{2}{\Delta\theta^2}\left[1 - cos(\frac{2\pi}{n1m}p)\right] \qquad (B.10)$$

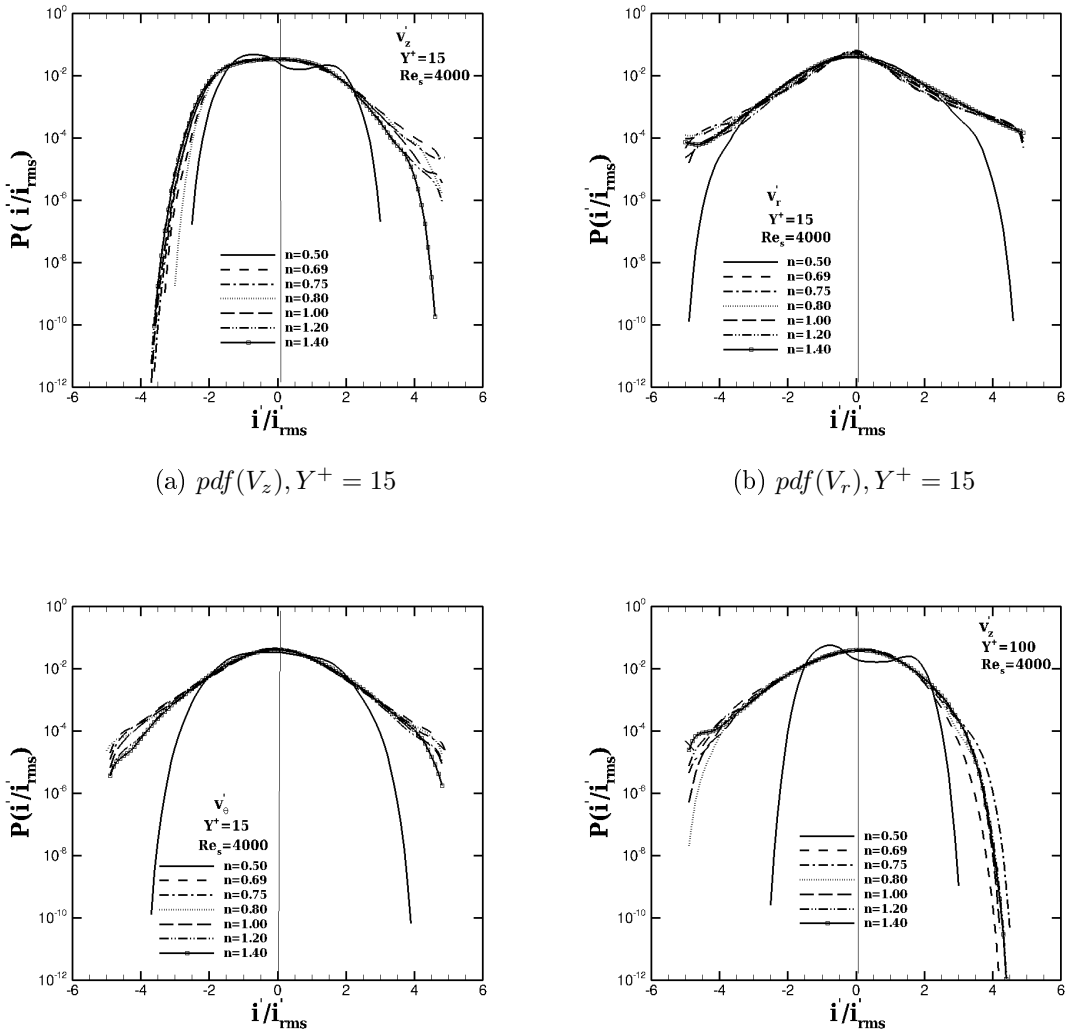
– résolution du système tridiagonal final (B.9) pour la partie réelle et pour la partie imaginaire avec l'algorithme de Thomas ; l'inversion doit être effectué pour chaque $p = 0, n1m$ et $l = 0, n3m/2$. Dans le code, pour chaque l on inverse simultanément $n1m$ systèmes correspondant aux valeurs de p, ce qui permet la vectorisation de l'algorithme.

– une fois trouvé $\hat{\hat{\Phi}}(p,j,l)$, on effectue les transformées de Fourier inverses.

Annexe C

1. Fonction densité de probabilité

La pdf des fluctuations de vitesse est présentée dans la figure 6.24 pour $Y^+ = 15$ à $Re_s = 4000$.



(a) $pdf(V_z), Y^+ = 15$

(b) $pdf(V_r), Y^+ = 15$

(c) $pdf(V_\theta), Y^+ = 15$

(d) $pdf(V_z), Y^+ = 100$

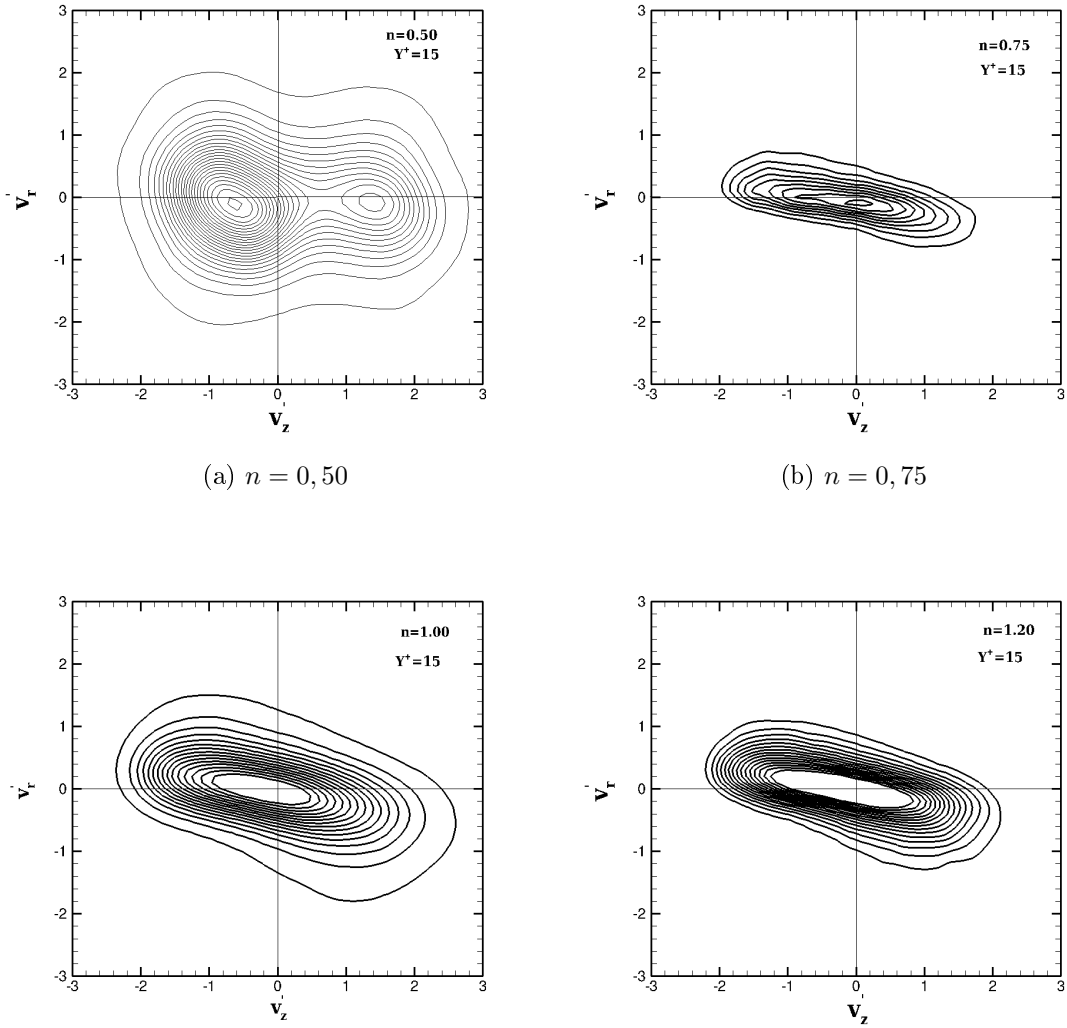
FIGURE 6.24 – Fonction densité de probabilité (pdf) pour $Re_s = 4000$.

La distribution de la pdf de la vitesse axiale (Fig. 6.24(a)) tend vers la gaussienne au

voisinage de la paroi, confirmant la présence d'intermittence dans cette zone proche paroi et en bon accord avec les valeurs de $S(U_z')$ près de la paroi. Pour la vitesse axiale, on observe plus de distributions négatives. La distribution de la vitesse radiale (Fig. 6.24(b)) est legèrement asymétrique pour chaque valeur de n. La pdf de la vitesse azimutale (Fig. 6.24(c)) est prèsque symétrique, ce qui confirme la valeur prèsque nulle de $S(v_\theta')$. Le pdf de $n = 0,50$ donne une allure différente, ce qui concorde bien avec le régime transitionnel trouvé pour les visualisations.

2. Fonction densité de probabilité jointe

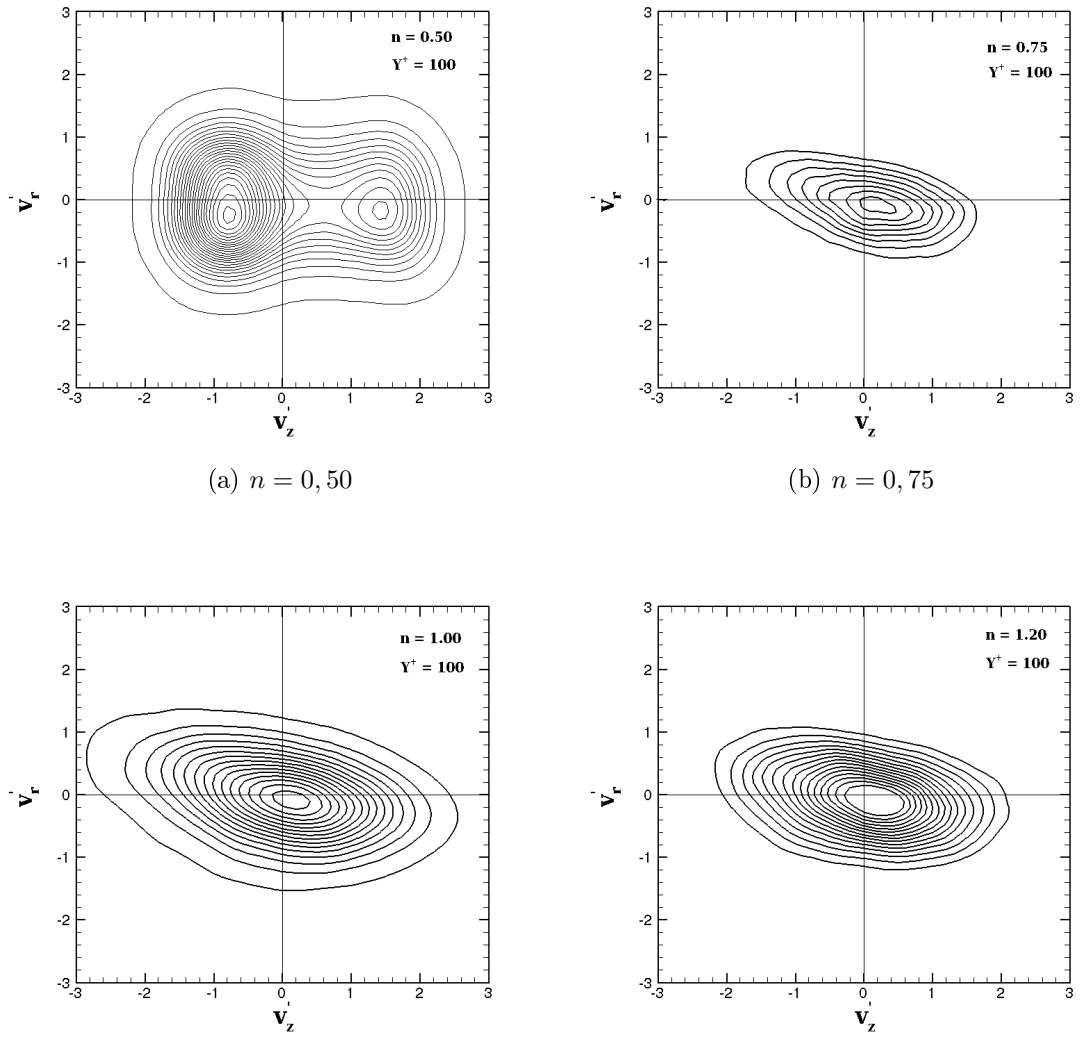
Les jpdf pour différents valeurs de n à $Y^+ = 15$ et $Y^+ = 100$ pour $Re_s = 4000$ sont illustrées sur les figures 6.25 et 6.26.



(a) $n = 0,50$ (b) $n = 0,75$

(c) $n = 1,00$ (d) $n = 1,20$

FIGURE 6.25 – Fonction densité de probabilité jointe (jpdf) pour $Re_s = 4000$ à $Y^+ = 15$.



(a) $n = 0,50$ (b) $n = 0,75$

(c) $n = 1,00$ (d) $n = 1,20$

FIGURE 6.26 – Fonction densité de probabilité jointe (jpdf) pour $Re_s = 4000$ à $Y^+ = 100$.

Ces jpdf renseignent sur les différentes corrélations entre les fluctuations. Les jpdf montrent des combinaisons de signe opposé des fluctuations des vitesses axiale et radiale, ce qui s'explique par une production intense de l'énergie turbulente (forte production de la tension de Reynolds). Proche de la paroi, le fluide est éjecté vers le centre de la conduite et c'est le phénomène contraire au coeur.

PUBLICATIONS

⟦1⟧ P.S. Gnambode, P. Orlandi, M. Ould-Rouiss, and X. Nicolas, 2015. Large-Eddy Simulation of turbulent pipe flow of power-law fluids. Int. Journal of Heat and Fluid Flow, 54, 196-210.

COMMUNICATIONS

⟦2⟧ P.S. Gnambode, P. Orlandi, M. Ould-Rouiss, and X. Nicolas, 2015. LES des transferts thermo-convectifs dans l'écoulement d'un fluide d'Ostwald de Waele dans une conduite cylindrique chauffée. 22 ème Congrès Français de Mécanique, Lyon, 24-28 Août 2015.

Bibliographie

[1] A.D. Ashis, 1999. Heat transfer coefficient in laminar flow of non-Newtonian fluid in tubes. J. of Food Engineering, 39, 285-287.

[2] A. Baptista, M.A. Alves, et P.M. Coelho, 2014. Heat transfer in fully developed laminar flow of power law fluids, ASME J., Vol. 136.

[3] R.B. Bird, G.C. Dai et B.J. Yarusso, 1983. the rheology and flow of viscoplastic materials. Review. Chemical. Engineering, 1, 1-70.

[4] R. Byron Bird, E. Warren Stewart et N. Edwin Lightfoot, 2006. Tansport phenomena. 2nd ed. p.cm.

[5] R.B. Bird, R.C. Armstrong et O. Hassager, 1987. Dynamics of polymeric liquids, Vol 1 : Fluid mechanics. John Wiley and Sons Inc., New York.

[6] P. Chhabra Rajendra, 2010. Non-Newtonian fluids : an introduction. In : Deshpande, Abhijit P., Murali Krishnan, J., Sunil Kumar, P.B. (Eds.), Rheology of Complex Fluids. Springer (Chapter 1).

[7] H. Choi et P. Moin, 1994. Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow. J. of Comp. Phys., 113, 1-4.

[8] R.M. Clapp, 1961. Turbulent heat transfer in pseudoplastic non-Newtonian fluids, Int. Developments in Heat Transfer. ASME, Par III, Sec. A, 652.

[9] D.O.A. Cruz et F.T. Pinho, 2003. Turbulent pipe flow predictions with a low Reynolds number k-ϵ model for drag reducing fluids. J. non-Newtonian Fluid. Mech., 114, 109-148.

[10] C. M. Scheid, L. A. Calaçada, E. R. Braga, E. C. H. Paraiso et A. L. Martins, 2011. Hydraulic study of drilling fluid flow in circular and annular tubes. Brazilian Journal of petrolium and gas, Vol. 5 n.4, 239-253.//

[11] J.W. Deardorff, 1970. Fluids Mech. 41, 453 Lilly, NCAR Manuscript 123.

[12] F.W. Dittus, L.M.K. Boetler, 1930. Heat transfer in automobile radiators of turbular type. Univ. Calif. Pub. Eng., 443.

[13] D.W. Dodge, A.B. Metzner, 1959. Turbulent flow of non-Newtonian systems. AIChE J., 5 (2), 189-204.

[14] E.C. Dufort, S.P. Frankel, 1953. Math. Tables Aids Comput. 7, 135.

[15] J. G. M. Eggels, F. Unger, M. H. Weiss, J. Westerweel, R. J. Adrian, R. Friedrich, F. T. M. Nieuwstadt, 1994. Fully developed turbulent pipe flow : a comparison between Direct numerical simulation and experiment. J. Fluid. Mech., 268, 175-209.

[16] N. El-Emam, A.H. Kamel, M. Shafei et A. El-Batrawy, 2003. New equation calculates friction factor for turbulent flows of non-Newtonian fluids. Oil and gas Journal, 100(36), 74-+.

[17] A. El ouardighi, V. T. Nguyen, R. Devienne et M. Lebouché, 1987. Etude numérique de la convection thermique pour les fluides d'Ostwald. Actes Coll. Rhéologie Matières Agro-alimentairees, 305-315, Nancy.

[18] M.P. Escudier et F. Presti, 1996. Pipe flow of a thixotropic liquid. J. non-Newtonian Fluid. Mech., 62, 291-306.

[19] Amir-Ali Feiz, 2006. Simulations des transferts turbulents dans une conduite cylindrique en rotation. Phd Thesis, Université Paris-Est/Marne-la-Vallée.

[20] C.J. Geankoplis, 1993. Transport process and unit operations (3rd ed.) (p.297) Englewood Cliffs, NJ, USA : Prentice-Hall.

[21] M. Germano, U. Piomelli, et W.H. Cabot, 1991. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. Phys. Fluids, A 3, 1760-1765 .

[22] V.Gnielinski, 1976. Neue gleichungen für den wärme- und den stoffübergang in turbulent durchströmenten rohren und kanalen, Int. Chem. Eng. 16, 359.

[23] F.J.A.D. Gomes, 1987. Hydraulic, Power Law models, calculation method using rational polynomial models. Technical Meeting on software Developing in Drilling Operations, CAPER/87,Salvador,Brazil,(in Portuguese).

[24] G.W. Govier et K. Aziz, 1977. The flow of complex mixtures in pipes. Chap. 5, 182, Krieger.

[25] R. A. Gowen et J. W. Smith, 1967. The effect of the Prandtl number on temperature profiles for heat transfer in turbulent pipe flow. Chemical Engineering Science, 22, 1701-1711.

[26] U. Grigul, 1956. Ce que disent les fluides, ed. Belin, colection. Pour la sciences.

[27] E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit, 2005. Wärmeübergang an nicht-Newtonsche flüssigkeiten bei laminarer rohrströmung. Chem. -Ing. Tech., 28, pp. 553-556.

[28] R.W. Hanks et B.L. Ricks, 1975. Transitional and turbulent pipe flow of pseudoplastic fluids. Journal of Hydronautics, 9, 39-44.

[29] P.R. Johnston, 1990. Axial conduction and the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tuble flow. Int. J. of Heat Mass Transfer, 34, 1209-1217.

[30] K. Kahine, V.T. Nguyen et M. Lebouche, 1994. Etude numérique de l'écoulement et de transfert de chaleur pour les fluides complexes pseudoplastiques thermodépendants. Les cahiers de rhéologies, V12, numéro 3.

[31] H. Kawamura, K. Ohsaka, H. Abe et K. Yamamoto, 1998. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid. Int. J. of Heat and Fluid Flow, 19, 482-491.

[32] J. Kim, P. Moin et R. Moser, 1987. Turbulence statistics in fally developed channed flow at low Reynolds number. J. Fluid Mech, 177, 133-166.

[33] N. Kasagi, Y. Tomita et A. Kuroda, 1992. Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow. Trans. ASME J. of Heat transfer, 114, 598-606.

[34] J. Kim et P. Moin, 1985. Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations. J. of Comp. Phys., 59, 308-323.

[35] M.R. Malin, 1997. Turbulent pipe flow of power-law fluids. Int. Comm. Heat Mass Transfer, 24 n7, 977-988.

[36] P.J. Masson et N.S. Callen, 1986. J. Fluid Mech., 162, 436 .

[37] C. Meneveau, T.S. Lund, et W.H. Cabot, 1996. A lagragian dynamic subgrid-scale model of turbulence. J. of Fluid Mechanics, 319, pp.353-385.

[38] A.B. Metzner, J.C. Reed, 1955. Flow of non-Newtonian fluids-correlation of the laminar, transition, and turbulent-flow regions. AIChE J.

[39] P. Mishra, G. Tripathi, 1971. Transition from laminar to turbulent flow of purely viscous non-Newtonian fluidss in tubes, Chemical Engineering Science, 26, 915-921.

[40] T. Mizushina, R. Kuriwake, K. Yahikawa, 1967. Boundary layer heat transfer in circular tube in Newtonian and non-Newtonian fluids, Kogaka, 31, 250-255.

[41] Y. Moguen, K. EL Omari et Y. LE Guer, 2011. Efficacité du mélange chaotique pour les fluides non-newtoniens thermodépendants chauffés ou refroidis, 20 ème Congrès Français de Mécanique.

[42] P. Moin et J.Kim 1982. J.Fluid Mech. 118, 341 .

[43] E. Montreuil, 2000. Simulation numérique pour l'aérothermique avec les modèles sous-maille. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, France.

[44] M.M. Molla et M.C. Paul 2012. LES of non-Newtinian physiological blood flow in a model of arterial stenosis. Medical Engineering and Physics, 34, 1079-1087.

[45] V.T. Nguyen et L. Michel, 2005. Étude numérique de l'écoulement d'un fluide non newtonien thermodépendant entre deux plaques parallèles. C.R. Mecanique, 333, 365-369.

[46] V.T. Nguyen et L. Michel, 2007. Pertes de charge des fluides non newtoniens thermodépendant entre deux plaques parallèles. C.R. Mecanique, 335, 20-24.

[47] F. Nicoud et F. Ducros, 1999. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. Flow Turbulence and Combustion, 62, pp. 183-200.

[48] D.K. Lilly, 1966. NCAR Manuscript 123.

[49] D.K. Lilly, 1992. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method.

[50] V.T. Nguyen et M. Lebouche, 2005. Etude numérique de l'écoulement d'un fluide non-newtonien thermodépendant entre deux plaques parallèles. C.R. Mecanique 333, 365-369.

[51] V.T. Nguyen et M. Lebouche, 2007. Pertes de charge des fluides non newtoniens thermodependants en écoulement entre deux plaques parallèles. C.R. Mecanique 335, 20-24.

[52] T. Ohta et M. Miyashita, 2014. DNS and LES with an extended Smagorinsky model for wall turbulence in non-Newtonian viscous fluids. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 206, 29-39.

[53] P. Orlandi et M. Fatica, 1997. Direct numerical simulation of turbulent flow in rotating pipe about its axis. J. of Fluids Mechanics, 43, 1749-1758.

[54] Jorge Peixinho, 2004. Contribution expérimentale à l'étude de la convection thermique en régime laminaire, transitoire et turbulent pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite. thèse de doctorat, Université Henri Poincaré Nancy 1.

[55] S. Pierre, 1998. Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible.

[56] F.T. Pinho, et J.H. Whitelaw, 1990. Flow of non-Newtonian fluids in a pipe, 34, 129-144.

[57] F. T. Pinho et P. M. Coelho, 2010. Non-Newtonian heat transfert. CEFT/DEMec, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Portugal.

[58] M. Piller, 205. Direct numerical simulation of turbulent forced convection in a pipe. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 49, 583-602.

[59] U. Piomelli, P. Moin, et J.H. Ferziger, 1988. Phys. Fluids 31, 1884.

[60] U. Piomelli, T.A. Zang, C.G. Speziale et M.Y. Hussaini, 1990. Phys. Fluids, A 2, 257.

[61] U. Piomelli et T.A. Zang, 1991. Comput. Phys. Commun. 65, 224.

[62] C.D. Pruett, B.C. Thomas, C.E. Grosch et T.B. Gatski, 2006. A temporal approximate deconvolution model for large eddy simulation. Phys. Fluids, 18, 028104.

[63] J.N.N. Quaresma, 1998. Thermally developing turbulent flow of pseudoplastic fluids within circular tubes. Int. Comm. Heat Mass Transfer, 25, No.8, 1105-1114.

[64] M.M. Rai et P. Moin, 1991. Direct Simulations of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes. J. of Comp. Phys., 96, 15-53.

[65] I. Roger Tanner, 1985. Engineering rheology, Oxford university press.

[66] L. Redjem-Saad, 2008. Simulation numérique des transferts de chaleur turbulents par convection forcée dans des conduites cylindriques et des espaces annulaires. Phd Thesis, Université Paris-Est/Marne-la-Vallée.

[67] M. Rudman, H.M. Blackburn, L.J.W. Graham et L. Pullum, 2001. Weakly turbulent pipe flow of pawer law fluid. Proceeding of the 4th A/Asian Fluid Mechanics Conference, Adelaide.

[68] M. Rudman, L.J.W. Graham, H.M. Blackburn et L. Pullum, 2002. Non-Newtonian turbulent and transitional pipe flow. Hydrotransport, 15, Banff.

[69] M. Rudman, H.M. Blackburn, L.J.W. Graham et L. Pullum, 2004. Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 118, 33-48.

[70] M. Rudman et H.M. Blackburn, 2012. Turbulent modification in shear-thinning fluids : preliminary results for power law rheology. 18^{th} Australian Fluid Mechanics Conference. Launceston, Australia. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 118, 33-48 .

[71] RO Kyoungchul et RYOU HongSun, 2012.Development of the modified k − turbulence model of power-law fluid for engineering applications. Science China 55, n1, 276-284.

[72] N.W. Ryan et M.M. Johnson, 1959. A.I.Ch.E. J, 8, 433.

[73] O. C. Sandall, O. T. Hanna et K. Amarnath, 1986. Experiments on Turbulent Non-Newtonian Mass Transfer in a Circular Tube. AIChE J., Vol. 32, No. 12, 2095.

[74] S. Satake et T. Kunugi, 2002. Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in an axially rotating pipe : Reynolds stress and scalar-flux budgets. Int. J. of Numerical Method for Heat & Fluid flow, 18(8), 985-1008.

[75] V. Scirocco, R. Devienne et M. Lebouche, 1984. Ecoulement laminaire et transfert de chaleur pour un fluide pseudo-plastique dans la zone d'entrée d'un tube. Int. J. Heat Mass Transfer 28, n1, 91-99.

[76] V. Scirocco, R. Devienne et M. Lebouche, 1985. In. J. Heat Mass Transfert 1, 91.

[77] V. Scirocco, R. Devienne et M. Lebouche, 1985. Ecoulement laminaire et turbulent d'un fluide pseudoplastique en conduite circulaire. Coefficient d'échange thermique. Int. J. Heat Mass Transfer 28, n1, 91-99.

[78] R.G. Shaver et E.W. Merrill, 1959. Turbulent of pseudoplastic polymer solutions in straight cylindrical tubes. AIChE J., 5.

[79] A.H.P. Skelland, 1967. Non-Newtonian Flow and Heat transfer, Chap.6, 180, John Wiley.

[80] J. Smagorinsky, 1963. General circulation experiments with the primitive equations, Monthly Weather Review, 91(3), pp.99-164 .

[81] P.R. Spalart, 2000. Strategies for turbulence modelling and simulations, Int. J. Heat Fluid Flow, 21, 252-263.

[82] H. Tennekes et J. L. Lumley, 1972. A firt course in turbulence. MIT Press Design Departement.

[83] L. Thais, A.E. Tejada-Martinez, T.B. Gatski, G. Mompean, 2010. Temporal large eddy simulations of turbulent viscoelastic drag reduction flows. Physics of Fluids, 22, 013103.

[84] A.D. Thomas, 1960. Heat and momentum transport characteristics of non-Newtonian aqueous Thorium oxide suspensions. AIChE J., 8.

[85] Y. Tomita, 1959. A study of non-Newtonian flow in pipelines, Bulletin J.S.M.E., 2.

[86] K.T. Trinh, 1969. A boundary layer theory for turbulent transport phenomena. M.E. Thesis, New Zealand : University of Canterbury.

[87] K.T. Trinh, 1969. The instantaneous Wall Viscosity in Pipe Flow of Power Law Fluids : Case Study for a theory of turbulence in Time-Independent non-Newtonian Fluids, . New Zealand : Massey University.

[88] F. Unger et R. Friedrich, 1993. Large eddy simulation of fully-developed turbulent pipe flow, In Flow Simulation of High Performance Computers I (ed. E. H. Hirschel), NNFM, Vol. 38, pp. 201-216. Vieweg (also in Proc. 8th Symp. on Turbulent Shear Flows, Sept. 9-11, 1991, Munich, Germany, pp.19/3/1-19/3/6).

[89] R. Verzicco et P. Orlandi, 1996. A finite-difference scheme for three-dimentional incompressible flows in cylindrical coordinates. J. of Comp. Phy, 123, 402-414.

[90] B. Vreman, B. Geurts et H. Kuerten, 1994. Realizability conditions for the turbulent stress tensor in large-eddy simulation, J. Fluid Mech., 278, 351-362.

[91] Bing-Chen et Donald J. Bergstrom, 2005. A dynamic nonlinear subgrid-scale stress model, Physics of Fluids, 17, 035109.

[92] P. Wangskarn, B. Ghorashi et R.S.R. Gorla, 1990. A numerical solution for the turbulent flow of non-Newtonian fluids in the entrance region of a heated circular tube. Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol.11, No.1.

[93] C. Xu, Z. Zhang, J.M.J. den Toonder et F.T.M. Nieuwstadt, 1996. Origin of high kurtosis lebes in the viscous sublayer. Direct numerical and experiement. Phys. Fluiszs, 8, 1923-1944.

[94] S. S. Yoo, 1974. Heat transfer and friction factors for non-newtonian fluids in turbulent pipe flow. Ph.D. Departement of Energy Engineering, University of Illinois.

[95] S. Zahrai, F.H. Bark et R.I. Karlsson, 1995. On anisotropic subgrid modelling. Euopean Journal of Mechanics B/Fluids, 144, 459-486.

[96] T. Zang, 1991. Numerical simulation of the dynamics of turbulent boundary layers : perspectives of a transition simulator. In Philosophocal Transaction of the Royal Society pf London, A 333, 95-102.

[97] L. C. Zheng, X. X. Zhang, L. X. Ma, 2008. Fully developed convective heat transfer of power law fluids in circular tube, Chinese Physical Society and IOP Publishing Ltd, 195, Vol.25, No.1.

Table des figures

1 Mise en évidence des propriétés non-newtoniennes (photos tirées de [27]) . 2
2 Différentes régions d'une couche limite turbulente 4

1.1 Evolution de la viscosité apparente avec le taux de cisaillement (tiré de[18]) 10
1.2 Evolution simultanée de $\gamma(t)$ et de $\dot{\gamma}(t)$ pour l'essai de fluage à 8 Pa pour une solution de Carbopol à 0.2%(tirées de [54]) 12
1.3 Evolution de la contrainte de cisaillement dans un fluide thixotrope, à gradient de vitesse imposé 15
1.4 Fluide thixotrope : influence du temps de repos sur la loi de comportement 15
1.5 Comparaisons entre les corrélations de f et l'expérience de Scheid et al. (2011) pour $n = 0,2291$ (tiré de [10]) 19

2.1 Profils de la vitesse axiale [35] 21
2.2 Evolutions du coefficient de frottement [35] 22
2.3 Evolutions de l'énergie cinétique turbulente [35] 22
2.4 Comparaison du coefficient de frottement aux mesures expérimentales de [13] (tirée de [71]) 23
2.5 Comparaison du coefficient de frottement aux mesures expérimentales de [13] (tirée de [71]) 23
2.6 Comparaison entre les solutions DNS et les données expérimentales : symboles = les mesures de [15] ; lignes = solutions DNS de [15] ; tirets = solutions DNS de [88] 24
2.7 Ecarts-types des fluctuations de vitesse pour une conduite fixe (tiré de [66]) 25
2.8 Ecarts-types des fluctuations de température pour une conduite fixe (tiré de [66]) 26
2.9 Profils moyens de vitesse obtenus avec le modèle de Smagorinsky non-newtonien et comparés aux solutions DNS dont le maillage est 128x128x128 pour $n = 0.85$ et 1.15 (tirés de [52]) 27

3.1 Maillage décalé. 37
3.2 Distributions normales pour diverses valeurs de μ et σ (Rejdem (2008) [66]) 47
3.3 Loi normale à deux variables (Redjem (2008) [66]) 48
3.4 Ellipses de dispersion pour plusieurs coefficients de corrélation avec $\sigma_a = \sigma_b = 1$ et $\mu_a = \mu_b = 0$ puis $R_{a'b'} = -1, +1, -0.5, +0.5, 0$ respectivement (Redjem (2008) [66]) 49

4.1 Profils moyens de vitesse axiale pour différents maillages. 54
4.2 Profils moyens de vitesse axiale pour différents maillages avec le nombre de points variables en r. 55
4.3 Profils de vitesse axiale et intensité de turbulence axiale. 56

4.4 Profils moyens de la vitesse axiale pour le maillage : 65x65x65. 57
4.5 Profils de vitesse axiale. 62
4.6 Profils de vitesse axiale. 63
4.7 Influence du nombre de Reynolds : évolution de la vitesse moyenne axiale. 63
4.8 Profils de la viscosité. 65
4.9 Profils de la viscosité. 66
4.10 Profils de la viscosité. 66
4.11 rms des fluctuations et intensités de la turbulence. 67
4.12 Intensités de la turbulence où U'_z et U'_r sont respectivement les fluctuations de vitesse axiale et radiale. 68
4.13 Intensités de la turbulence avec la comparaison à la DNS [69] ($n = 0,75$) où U'_θ est la fluctuation de vitesse azimutale. 68
4.14 Influence du nombre de Reynolds sur les intensités de la turbulence axiale U'_z/U_c et radiale U'_r/U_c. 69
4.15 Influence du nombre de Reynolds sur les intensités de la turbulence azimutale U'_θ/U_c. 69
4.16 Tension de Reynolds. 70
4.17 Influence du nombre de Reynolds sur la tension de Reynolds. 70
4.18 Evolution du coefficient de corrélation et la position du pic des rms des fluctuations de vitesse et de l'énergie cinétique de turbulence pour $Re_s = 4000$. 72
4.19 Profil de l'énergie cinétique turbulente 72
4.20 Coefficients de dissymétrie des fluctuations de vitesses axiale et radiale pour $Re_s = 4000$. 73
4.21 Coefficient de dissymétrie des fluctuations de la vitesse azimutale pour $Re_s = 4000$. 74
4.22 Coefficient d'aplatissement pour $Re_s = 4000$ 74
4.23 Coefficient d'aplatissement des fluctuations de la vitesse azimutale pour $Re_s = 4000$. 75
4.24 Influence du nombre de Reynolds sur les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement. 76
4.25 Visualisations de U'_z pour $Re_s = 4000$ 77
4.26 Visualisations de U'_z pour $Re_s = 4000$ 78
4.27 Visualisations de U'_z en 3D pour $Re_s = 4000$ 79

5.1 Contribution du tenseur sous-maille supplémentaire $\overline{T}_{12}$ (tenseur issus du filtrage des termes visqueux) et du tenseur sous-maille $\overline{\sigma}_{12}$ ($\overline{\sigma}_{12} = \overline{\tau}_{12}$ tenseur issus du filtrage des termes d'inertie) [52] calculés avec la DNS. . . 82
5.2 Profils moyens de vitesse obtenus avec le modèle de Smagorinsky non-newtonien et comparés aux solutions DNS dont le maillage est 128x128x128 pour $n = 0.85$ et 1.15 (tirés de [52]) 83
5.3 Profils moyens de la vitesse axiale 85
5.4 Intensités de turbulence et tension de Reynolds obtenues avec les modèles de Smagorinsky newtonien et non-newtonien pour $Re_s = 4000$ avec U'_z/U_c =intensités de turbulence axiale, U'_r/U_c =intensités de turbulence radiale et U'_θ/U_c =intensités de turbulence azimutale. 87

5.5 Comparaison des modèles dynamique et de Smagorinsky non-newtonien pour $Re_s = 4000$ avec U'_z/U_c =intensités de turbulence axiale, U'_r/U_c =intensités de turbulence radiale et U'_θ/U_c =intensités de turbulence azimutale. 88

6.1 Evolution du nombre de Prandtl turbulent pour $Re_s = 4000$ et $Pr_s = 1$. . . 99
6.2 Profils moyens de vitesse et température pour $Pr_s = 1$, en régime laminaire. 100
6.3 Evolution de la viscosité moyenne pour $Pr_s = 1$, en régime laminaire. . . . 100
6.4 Nombre de Nusselt comparé avec la formule théorique de Grigull (1956) [26] et les corrélations expérimentales de Ashis (1999) [1] et Nu_{MG} et de Metzner et Gluck (Geankoplis (1993) [20]) $Re_s = 500$. 102
6.5 Profils de vitesse et température pour $Pr_s = 1$. 103
6.6 Profil de température pour $Re_s = 500$. 104
6.7 Vitesse axiale et température pour $Pr_s = 1$. 105
6.8 Ecart-type des fluctuations de température pour $Pr_s = 1$. 106
6.9 Flux de chaleur turbulent pour $Pr_s = 1$. 107
6.10 Flux de chaleur turbulent radial pour $Pr_s = 1$. 108
6.11 Moments d'ordre 3 et 4 pour $Pr_s = 1$. 109
6.12 Coefficients de corrélations entre les fluctuations de vitesse axiale et la température ($Cor(U'_z\Theta')$) et les fluctuations de vitesse radiale et la température ($Cor(U'_r\Theta')$) pour $Pr_s = 1$. 110
6.13 Coefficient de corrélation entre les fluctuations de vitesses axiale et radiale pour $Pr_s = 1$ 111
6.14 Influences du nombre de Prandtl pour $Re_s = 4000$. 115
6.15 Profils de la viscosité moyenne pour $Pr_s = 1$. 116
6.16 Influences du nombre de Reynolds pour $Pr_s = 1$. 118
6.17 Viscosité apparente pour $Re_s = 500$ et $Pr_s = 1$. 120
6.18 Profils de vitesse axiale et de température pour $Re_s = 500$, $Pr_s = 1$. 120
6.19 Viscosité moyenne pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ (avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants). 122
6.20 Taux de cisaillement et température pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ (avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants). 123
6.21 Vitesse axiale et température pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ (avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants). 123
6.22 rms des fluctuations de vitesse et de température pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants. 124
6.23 Flux de chaleur turbulents pour $Pr_s = 1$ à $Re_s = 4000$ avec $Pn = 0$ pour les écoulements non-thermodépendants et $Pn = 1$ pour les écoulements thermodépendants. 125
6.24 Fonction densité de probabilité (pdf) pour $Re_s = 4000$. 135
6.25 Fonction densité de probabilité jointe (jpdf) pour $Re_s = 4000$ à $Y^+ = 15$. . 136
6.26 Fonction densité de probabilité jointe (jpdf) pour $Re_s = 4000$ à $Y^+ = 100$. 137

Liste des tableaux

2.1 Valeurs des rms des fluctuations de vitesse ($u_{i,rms}$ avec $i = r, \theta, z$), de la tension de Reynolds ($\overline{u'_r u'_z}$), des coefficients de dissymétrie ($S(r_j)$ avec $j = r, z$) et d'aplatissement ($F(r_j)$ avec $j = r, \theta, z$)(données tirées de [15]) . 25

4.1 Etude de maillages : Coefficient de frottement pour $n = 0,75$ et $n = 1,20$ à $Re_s = 4000$. 56
4.2 Etude de maillages : Coefficient de frottement pour $n = 0,8$ et $Re_s = 12000$. 56
4.3 Paramètres et quelques grandeurs moyennes de l'écoulement pour $Re_s = 4000$. 58
4.4 Paramètres et quelques grandeurs moyennes de l'écoulement pour $Re_s = 8000$. 59
4.5 Paramètres et quelques grandeurs moyennes de l'écoulement pour $Re_s = 12000$. 59
4.6 Coefficient de frottement pour $Re_s = 4000$. 64
4.7 Coefficient de frottement pour $Re_s = 8000$. 64
4.8 Coefficient de frottement pour $Re_s = 12000$. 65

5.1 Coefficient de frottement pour $Re_s = 4000$ 86

6.1 Nombre de Nusselt pour $Re_s = 500$ et $Pr = 1$ avec Nu : présent travail, Nu_{th} : formule théorique de Grigull (1956) [26], Nu_A : corrélation de Ashis (1999) [1] et Nu_{MG} : corrélation de Metzner et Gluck (Geankoplis (1993) [20]). 102
6.2 Nombre de Nusselt en régime laminaire. 104
6.3 Coefficients de corrélations entre les grandeurs fluctuantes pour $Pr_s = 1$ et $Re_s = 4000$. 111
6.4 Coefficient de frottement pour $Pr_s = 1$ et $Re_s = 4000$. 112
6.5 Nombre de Nusselt pour $Re_s = 4000$. 113
6.6 Valeurs de Pr_{MR} et Re_{MR} pour $Re_s = 4000$. 114
6.7 Influence du nombre de Prandtl de simulation sur le nombre de Nusselt à $Re_s = 4000$ 117
6.8 Influence du nombre de Reynolds sur le nombre de Nusselt pour $Pr_s = 1$. . 117
6.9 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt pour $Re_s = 500$, $Pn = 1$, $Pr_s = 1$ avec Nu : Nusselt thermodépendant, Nu_{NT} : Nusselt non-thermodépendant et Nu_{NT-th} : Nusselt de la formule théorique non-thermodépendant. 121
6.10 Coefficient de frottement et nombre de Nusselt pour $n = 0,75$ à $Re_s = 4000$ et $Pr_s = 1$. 125